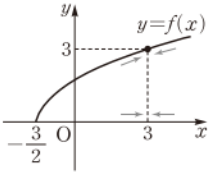
정답 및 풀이

01 함수의 극한

유제

본책 12~32쪽

001-❶ (1) $f(x)=\sqrt{2x+3}$으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 3에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 $\sqrt{9}$, 즉 3에 한없이 가까워지므로

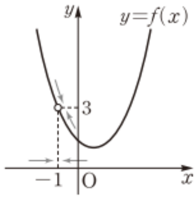


$$\lim_{x\to3}\sqrt{2x+3}=3$$

(2) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$로 놓으면 $x\neq-1$일 때,

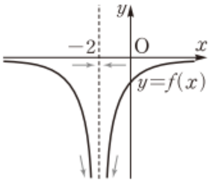
$$f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=x^2-x+1$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로



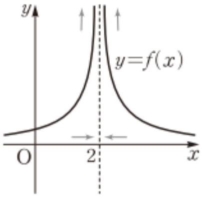
$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=3$$

(3) $f(x)=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 -2에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로



$$\lim_{x\to-2}\left\{-\frac{1}{(x+2)^2}\right\}=-\infty$$

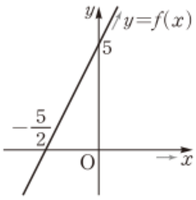
(4) $f(x)=\dfrac{1}{|x-2|}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 2에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 한없이 커지므로



$$\lim_{x\to2}\frac{1}{|x-2|}=\infty$$

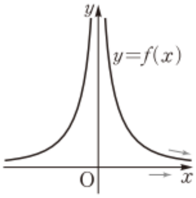
답 (1) 3 (2) 3 (3) $-\infty$ (4) ∞

002-❶ (1) $f(x)=2x+5$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값도 한없이 커지므로

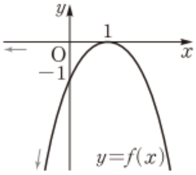


$$\lim_{x\to\infty}(2x+5)=\infty$$

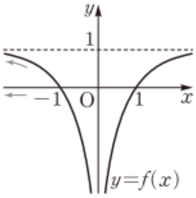
(2) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}=0$



(3) $f(x)=-x^2+2x-1$
$=-(x-1)^2$
으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값도 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(-x^2+2x-1)=-\infty$



(4) $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로



$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

답 (1) ∞ (2) 0 (3) $-\infty$ (4) 1

003-❶ (1) $x\to-2+$에서 $x+2>0$이므로

$$\frac{x^2-4}{|x+2|}=\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=x-2$$

$$\therefore \lim_{x\to-2+}\frac{x^2-4}{|x+2|}=\lim_{x\to-2+}(x-2)=-4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to-2-$에서 $x+2<0$이므로

$$\frac{x^2-4}{|x+2|}=\frac{(x+2)(x-2)}{-(x+2)}=-x+2$$

$$\therefore \lim_{x\to-2-}\frac{x^2-4}{|x+2|}=\lim_{x\to-2-}(-x+2)=4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim\limits_{x\to-2+}\dfrac{x^2-4}{|x+2|}\neq\lim\limits_{x\to-2-}\dfrac{x^2-4}{|x+2|}$이므로 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{|x+2|}$의 값은 존재하지 않는다.

(2) $x\longrightarrow 3+$에서 $x-3>0$이므로

$|x-3|=x-3$

$\therefore \lim\limits_{x\to3+}|x-3|=\lim\limits_{x\to3+}(x-3)=0$ ⋯ ㉠

$x\longrightarrow 3-$에서 $x-3<0$이므로

$|x-3|=-x+3$

$\therefore \lim\limits_{x\to3-}|x-3|=\lim\limits_{x\to3-}(-x+3)$

$=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim\limits_{x\to3+}|x-3|=\lim\limits_{x\to3-}|x-3|$이므로

$\lim\limits_{x\to3}|x-3|=0$

(3) $1<x<2$에서 $[x]=1$, $|x+1|=x+1$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{[x]-1}{|x+1|}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{1-1}{x+1}=0$ ⋯⋯ ㉠

$0<x<1$에서 $[x]=0$, $|x+1|=x+1$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{[x]-1}{|x+1|}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{0-1}{x+1}$

$=-\dfrac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{[x]-1}{|x+1|}\neq\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{[x]-1}{|x+1|}$이므로 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{[x]-1}{|x+1|}$의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 존재하지 않는다. (2) 0 (3) 존재하지 않는다.

004-❶ 주어진 식의 분모, 분자를 x로 나누면

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2+4f(x)}{2x^2-f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x+\dfrac{4f(x)}{x}}{2x-\dfrac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to0}x+4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}}{2\lim\limits_{x\to0}x-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{0+4\cdot2}{0-2}=-4$$

답 -4

005-❶ (1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)}{x(\sqrt{1+2x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+2x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x+4}+2)=4$

답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) 1 (3) 4

005-❷ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ax^2+(a+b)x+b}{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(ax+b)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ax+b}{x-1}$

$=\dfrac{-a+b}{-2}=\dfrac{a-b}{2}$

답 $\dfrac{a-b}{2}$

006-❶ (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}$

$=0$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4x^2}{2x-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-4x}{2-\dfrac{5}{x}}=-\infty$

(3) $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-6t}{\sqrt{t^2+1}+t}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-6}{\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}+1}$

$=-3$

답 (1) 0 (2) $-\infty$ (3) -3

007-❶ (1) $\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^3+4x^2+x-2)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(-3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$

$=-\infty$

(2) $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}+x)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+5t+6}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+5t+6}-t)(\sqrt{t^2+5t+6}+t)}{\sqrt{t^2+5t+6}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{5t+6}{\sqrt{t^2+5t+6}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{5+\frac{6}{t}}{\sqrt{1+\frac{5}{t}+\frac{6}{t^2}}+1}=\frac{5}{2}$$

답 (1) $-\infty$ (2) $\frac{5}{2}$

007-❷ 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}=a$$

$\therefore a=4$

답 4

008-❶ (1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1}{(x-1)^2}\right\}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x}{x(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-2}{(x-1)^2}$$
$$=-2$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}(\sqrt{3-x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3-x})}$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 (1) -2 (2) $\frac{1}{3}$

008-❷ $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\sqrt{4x^2+2}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}t^2\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{\sqrt{4t^2+2}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2(\sqrt{4t^2+2}-2t)}{2\sqrt{4t^2+2}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2(\sqrt{4t^2+2}-2t)(\sqrt{4t^2+2}+2t)}{2\sqrt{4t^2+2}(\sqrt{4t^2+2}+2t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{4t^2+2+\sqrt{16t^4+8t^2}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{4+\frac{2}{t^2}+\sqrt{16+\frac{8}{t^2}}}=\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

009-❶ (1) $x\longrightarrow3$일 때, (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to3}(x^2-ax+b)=0$이므로

$9-3a+b=0$ $\quad\therefore b=3a-9$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-ax+3a-9}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-a+3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x-a+3}=\frac{6}{6-a}$$

따라서 $\frac{6}{6-a}=6$이므로 $\quad a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=6$

(2) $x\longrightarrow-2$일 때, (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(a\sqrt{x+3}+b)=0$이므로

$a+b=0$ $\quad\therefore b=-a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{a\sqrt{x+3}-a}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{a(\sqrt{x+3}-1)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{a(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{a(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{a}{\sqrt{x+3}+1}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=1$이므로 $\quad a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=-2$

답 (1) $a=5$, $b=6$ (2) $a=2$, $b=-2$

010-❶ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+4}=3$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다. …… ㉠

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{f(x)}=\frac{1}{6}$에서 $x\longrightarrow2$일 때, (분자) $\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로

$f(2)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=3(x-2)(x+a)$(a는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{f(x)}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{3(x-2)(x+a)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{3(x+a)}=\frac{4}{3(2+a)}$$

따라서 $\frac{4}{3(2+a)}=\frac{1}{6}$이므로 $a=6$

즉 $f(x)=3(x-2)(x+6)$이므로

$f(3)=3\cdot1\cdot9=27$

답 27

011-❶ $\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}(6x-5)=13$,

$\lim_{x\to3}g(x)=\lim_{x\to3}(x^2+4)=13$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to3}h(x)=13$

답 13

011-❷ $x>0$이므로 $x^2+1\le f(x)\le x^2+3$의 각 변을 x^2으로 나누면

$$\frac{x^2+1}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{x^2+3}{x^2}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2}=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$

답 1

중단원 연습 문제

본책 33~37쪽

01 11	**02** $\frac{5}{2}$	**03** ②	**04** ③	**05** ①
06 9	**07** 0	**08** $\frac{1}{2}$	**09** -2	**10** 16
11 $\frac{1}{2}$	**12** ④	**13** ⑤	**14** 1	**15** -1
16 2	**17** 3	**18** 10	**19** ③	**20** ④
21 ③	**22** ⑤			

01 전략 좌극한과 우극한이 일치함을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(2x^2-x+3)=9$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(-x+k)=k-2$

$\lim_{x\to2}f(x)$가 존재하려면

$9=k-2$ $\therefore k=11$

답 11

02 전략 $x-a$를 치환하여 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구한다.

풀이 $x-a=t$로 놓으면 $x\longrightarrow a$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=1$$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$ …❶

주어진 식의 분모와 분자를 x로 나누면

$$\lim_{x\to0}\frac{x+4f(x)}{3x^2+2f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1+4\cdot\frac{f(x)}{x}}{3x+2\cdot\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{\lim_{x\to0}1+4\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}{3\lim_{x\to0}x+2\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{1+4\cdot1}{3\cdot0+2\cdot1}=\frac{5}{2}$$ …❷

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 극한값을 구할 수 있다.	60 %

03 전략 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\beta$ (α, β는 실수) 일 때, $\lim_{x\to\infty}f(x)g(x)=\alpha\beta$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. [반례] $f(x)=g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\-1 & (x<0)\end{cases}$이면

$\lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=0$

이지만 $\lim_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\ne\lim_{x\to0-}f(x)$

또 $\lim_{x\to0+}g(x)=1$, $\lim_{x\to0-}g(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0+}g(x)\ne\lim_{x\to0-}g(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$, $\lim_{x\to0}g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to\infty} g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty} g(x)\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\alpha\beta$$

이므로 $\lim_{x\to\infty} f(x)$의 값이 존재한다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^2$이면

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

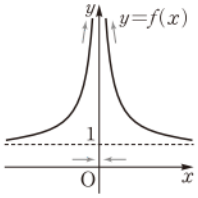
이지만 $\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} x^2=\infty$

이므로 $\lim_{x\to\infty} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

04 전략 함수의 정의역에 주의하여 그래프를 그린 후, x가 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값의 변화를 조사한다.

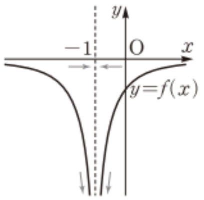
풀이 ㄱ. $f(x)=1+\frac{1}{x^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 0에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 한없이 커지므로 $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\infty$



ㄴ. $\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(2x-1)}{x+2}$
$$=\lim_{x\to -2}(2x-1)=-5$$

ㄷ. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$
$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

ㄹ. $f(x)=-\frac{1}{|x+1|}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로



$$\lim_{x\to -1}\left(-\frac{1}{|x+1|}\right)=-\infty$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

05 전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 나누고, 분모 또는 분자에 $\sqrt{}$가 있는 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한은 $\sqrt{}$가 있는 쪽을 유리화한다.

풀이 $A=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=0$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

$$C=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=2$$

$\therefore A<B<C$

답 ①

06 전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구하는 방법을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+6x-12}{x^2-1}=6$에서 분모, 분자의 차수가 같아야 하므로

$a=0$ ··· ❶

따라서 $\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+6x-12}{x^2-1}=6$에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{b+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=6 \qquad \therefore b=6$$ ··· ❷

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{6x^2+6x-12}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{6(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{6(x+2)}{x+1}=9$$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

07 전략 $\infty-\infty$ 꼴의 극한에서 무리식인 경우 분모를 1로 보고 분자를 유리화하고, $\infty\times 0$ 꼴은 통분하거나 인수분해하여 극한값을 구한다.

풀이 $a=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$$

$$=2$$

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2x+1}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-2x}{2x+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{2x+1}=-2$$

$\therefore a+b=0$

답 0

08

전략 점 P, Q의 좌표를 p로 나타낸다.

풀이 점 P가 $y=x^2$의 그래프 위의 점이므로

$q=p^2$ $\quad\therefore \mathrm{P}(p,\ p^2)$

따라서 $\mathrm{Q}(0,\ p^2)$이므로

$\overline{\mathrm{PO}}=\sqrt{p^2+(p^2)^2}=\sqrt{p^4+p^2}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=p^2$

$$\therefore \lim_{p\to\infty}(\overline{\mathrm{PO}}-\overline{\mathrm{OQ}})$$

$$=\lim_{p\to\infty}(\sqrt{p^4+p^2}-p^2)$$

$$=\lim_{p\to\infty}\frac{(\sqrt{p^4+p^2}-p^2)(\sqrt{p^4+p^2}+p^2)}{\sqrt{p^4+p^2}+p^2}$$

$$=\lim_{p\to\infty}\frac{p^2}{\sqrt{p^4+p^2}+p^2}$$

$$=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

09

전략 주어진 식에서 $x\longrightarrow 1$일 때, (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$임을 이용한다.

풀이 $x\longrightarrow 1$일 때, (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$이므로

$1+a+b=0$ $\quad\therefore b=-a-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+ax-a-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+a+1}$$

$$=\frac{1}{a+2}$$

따라서 $\frac{1}{a+2}=\frac{1}{3}$이므로 $\quad a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=-2$

$\therefore ab=-2$

답 -2

10

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$를 미정계수로 나타낸다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x)-x^3$은 이차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

$f(x)-x^3=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠ $\quad\cdots$ ❶

조건 (나)에서 $x\longrightarrow 0$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0}(x^3+3x^2+ax+b)=0$$

$\therefore b=0$ $\quad\cdots$ ❷

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+ax$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+3x+a)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2+3x+a)=a$$

즉 $a=-2$이므로 $\quad\cdots$ ❸

$f(x)=x^3+3x^2-2x$

$\therefore f(2)=2^3+3\cdot 2^2-2\cdot 2=16$ $\quad\cdots$ ❹

답 16

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 미정계수로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$의 상수항을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$의 일차항의 계수를 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

11

전략 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구한다.

풀이 $x>0$이므로 $x<f(x)<x+2$의 양변을 x로 나누면

$$1<\frac{f(x)}{x}<1+\frac{2}{x}$$

$\lim_{x\to\infty}1=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{2-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

12 전략 $x=a$에서의 우극한과 좌극한을 각각 구하고, 그 값이 서로 같은지 확인한다.

풀이 ㄱ. $x \to 0+$에서 $x>0$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0+}x=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x \to 0-$에서 $x<0$이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to0-}(-x)=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2}{|x|}$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{|x|}$의 값이 존재한다.

ㄴ. $-1<x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$$\frac{[x]}{[x]^2-x}=\frac{-1}{(-1)^2-x}=\frac{1}{x-1}$$

$$\therefore \lim_{x\to-1+}\frac{[x]}{[x]^2-x}=\lim_{x\to-1+}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$-2<x<-1$일 때, $[x]=-2$이므로

$$\frac{[x]}{[x]^2-x}=\frac{-2}{(-2)^2-x}=\frac{2}{x-4}$$

$$\therefore \lim_{x\to-1-}\frac{[x]}{[x]^2-x}=\lim_{x\to-1-}\frac{2}{x-4}=-\frac{2}{5} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to-1+}\frac{[x]}{[x]^2-x}\neq\lim_{x\to-1-}\frac{[x]}{[x]^2-x}$이므로 $\lim_{x\to-1}\frac{[x]}{[x]^2-x}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $x \to 2+$에서 $x-2>0$이므로

$$\frac{(x-2)^3}{|x-2|}=\frac{(x-2)^3}{x-2}=(x-2)^2$$

$$\therefore \lim_{x\to2+}\frac{(x-2)^3}{|x-2|}=\lim_{x\to2+}(x-2)^2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x \to 2-$에서 $x-2<0$이므로

$$\frac{(x-2)^3}{|x-2|}=\frac{(x-2)^3}{-(x-2)}=-(x-2)^2$$

$$\therefore \lim_{x\to2-}\frac{(x-2)^3}{|x-2|}=\lim_{x\to2-}\{-(x-2)^2\}=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)^3}{|x-2|}=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)^3}{|x-2|}$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^3}{|x-2|}$의 값이 존재한다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

13 전략 $\lim_{x\to c+}f(x)=\lim_{x\to c-}f(x)=a$이면 $\lim_{x\to c}f(x)=a$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to-2+}f(|x|)+\lim_{x\to-2-}g(|x|)$

$=\lim_{x\to-2+}f(-x)+\lim_{x\to-2-}g(-x) \quad \cdots\cdots ㉠$

$x=-t$로 놓으면 $x \to -2+$일 때 $t \to 2-$, $x \to -2-$일 때 $t \to 2+$이므로 ㉠에서

$\lim_{x\to-2+}f(-x)+\lim_{x\to-2-}g(-x)$

$=\lim_{t\to2-}f(t)+\lim_{t\to2+}g(t)$

$=2+0=2$

ㄴ. $\lim_{x\to2+}f(x)=0$, $\lim_{x\to2+}g(x)=0$이므로

$\lim_{x\to2+}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to2+}f(x)-\lim_{x\to2+}g(x)$

$=0$

$\lim_{x\to2-}f(x)=2$, $\lim_{x\to2-}g(x)=2$이므로

$\lim_{x\to2-}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to2-}f(x)-\lim_{x\to2-}g(x)$

$=0$

$\therefore \lim_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}=0$

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x \to 2+$일 때 $t \to 0-$이고, $x \to 2-$일 때 $t \to 2-$이므로

$\lim_{x\to2+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to2+}g(f(x))$

$=\lim_{t\to0-}g(t)=2$,

$\lim_{x\to2-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to2-}g(f(x))$

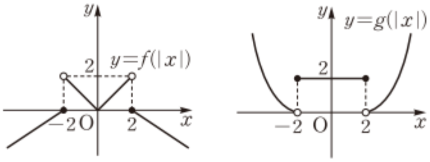
$=\lim_{t\to2-}g(t)=2$

$\therefore \lim_{x\to2}(g\circ f)(x)=2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이 ㄱ. $y=f(|x|)$와 $y=g(|x|)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore \lim_{x\to-2+}f(|x|)+\lim_{x\to-2-}g(|x|)=2+0$

$=2$

14 전략 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$임을 이용한다.

풀이 $3f(x)-2g(x)=h(x)$로 놓으면

$2g(x)=3f(x)-h(x)$이고, $\lim_{x\to\infty}h(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4g(x)}{-2f(x)+6g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2\{3f(x)-h(x)\}}{-2f(x)+3\{3f(x)-h(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7f(x)-2h(x)}{7f(x)-3h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{2h(x)}{f(x)}}{7-\frac{3h(x)}{f(x)}}=1$$

답 1

다른 풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4g(x)}{-2f(x)+6g(x)}$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\{3f(x)-2g(x)\}+7f(x)}{-3\{3f(x)-2g(x)\}+7f(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2\{3f(x)-2g(x)\}}{f(x)}+7}{\frac{-3\{3f(x)-2g(x)\}}{f(x)}+7}$$
$$=1$$

15

전략 합성함수 $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$를 구한 다음 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한을 구하는 방법을 이용한다.

풀이 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=f(x^2-1)=(x^2-1)^2$,
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^4-1$
$=(x^2+1)(x^2-1)$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)}{x^4-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)^2-(x^2+1)(x^2-1)}{x^4-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)\{(x^2-1)-(x^2+1)\}}{(x^2+1)(x^2-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-2}{x^2+1}=-1$$

답 -1

16

전략 점 P, Q의 좌표를 a로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a, \sqrt{a})(a>0)$라 하면
$\overline{OP}=\sqrt{a^2+a}$
이므로 $\quad Q(0, \sqrt{a^2+a})$
따라서 직선 PQ의 방정식은
$$y=\frac{\sqrt{a^2+a}-\sqrt{a}}{-a}x+\sqrt{a^2+a} \quad \cdots ❶$$
직선 PQ의 x절편이 $\frac{a\sqrt{a^2+a}}{\sqrt{a^2+a}-\sqrt{a}}$이므로
$$R\left(\frac{a\sqrt{a^2+a}}{\sqrt{a^2+a}-\sqrt{a}}, 0\right) \quad \cdots ❷$$
점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때, $a\to0+$이므로
$$\alpha=\lim_{a\to0+}\frac{a\sqrt{a^2+a}}{\sqrt{a^2+a}-\sqrt{a}}$$
$$=\lim_{a\to0+}\frac{a\sqrt{a^2+a}(\sqrt{a^2+a}+\sqrt{a})}{(\sqrt{a^2+a}-\sqrt{a})(\sqrt{a^2+a}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{a\to0+}\frac{\sqrt{a^2+a}(\sqrt{a^2+a}+\sqrt{a})}{a}$$
$$=\lim_{a\to0+}\frac{a^2+a+a\sqrt{a+1}}{a}$$
$$=\lim_{a\to0+}(a+1+\sqrt{a+1})=2 \quad \cdots ❸$$

답 2

채점 기준	비율
❶ 직선 PQ의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ α의 값을 구할 수 있다.	50 %

17

전략 분모를 1로 보고 분자를 유리화한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx}-x)$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{ax^2+bx}-x)(\sqrt{ax^2+bx}+x)}{\sqrt{ax^2+bx}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-1)x^2+bx}{\sqrt{ax^2+bx}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-1)x+b}{\sqrt{a+\frac{b}{x}}+1} \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$
이때 ㉠의 극한값이 존재하므로 $\quad a-1=0$
$\therefore a=1 \quad \cdots ❷$
$a=1$을 ㉠에 대입하면
$$\lim_{x\to\infty}\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b}{x}}+1}=\frac{b}{2}$$
따라서 $\frac{b}{2}=1$이므로 $\quad b=2 \quad \cdots ❸$
$\therefore a+b=3 \quad \cdots ❹$

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 분자를 유리화할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

18 **전략** 주어진 조건을 이용하여 $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 찾는다.

풀이 조건 (가)에서 $x \longrightarrow 3$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to3} f(x)=0$이므로

$f(3)=0$ …… ㉠

조건 (나)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭이므로

$$f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$$

$x=\frac{3}{2}$을 대입하면

$f(0)=f(3)=0$ ($\because$ ㉠) …… ㉡

㉡에 의하여 $f(x)=ax(x-3)$으로 놓으면

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{ax(x-3)}{x-3}=3a$$

따라서 $3a=6$이므로

$a=2$

즉 $f(x)=2x(x-3)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(2x+1)}{x}&=\lim_{x\to2}\frac{2(2x+1)(2x+1-3)}{x}\\&=\lim_{x\to2}\frac{4(2x+1)(x-1)}{x}\\&=10\end{aligned}$$

답 10

Remark ▶

함수 $f(x)$에 대하여

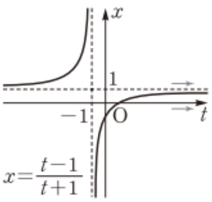
$f(a-x)=f(a+x)$ (a는 상수)

$\Longleftrightarrow$ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

19 **전략** $\frac{t-1}{t+1}$과 $\frac{4t-1}{t+1}$을 각각 치환하여 그 그래프를 조사한다.

풀이 (i) $x=\frac{t-1}{t+1}$로 놓으면

$$\frac{t-1}{t+1}=\frac{t+1-2}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$$



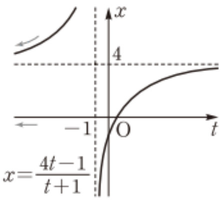
이므로 $x=\frac{t-1}{t+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $t \longrightarrow \infty$일 때 $x \longrightarrow 1-$이므로 $y=f(x)$의 그래프에서

$$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{x\to1-} f(x)=2$$

(ii) $x=\frac{4t-1}{t+1}$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{4t-1}{t+1}&=\frac{4(t+1)-5}{t+1}\\&=4-\frac{5}{t+1}\end{aligned}$$



이므로 $x=\frac{4t-1}{t+1}$의 그래프는 위의 그림과 같다.

$t \longrightarrow -\infty$일 때 $x \longrightarrow 4+$이므로 $y=f(x)$의 그래프에서

$$\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{x\to4+} f(x)=3$$

(i), (ii)에서

$$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$$

답 ③

20 **전략** 주어진 식을 만족시키려면 $f(a)=0$이어야 한다.

풀이 $\lim_{x\to a} f(x)\neq0$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{f(a)}{f(a)}=1$$

이므로 주어진 식을 만족시키지 않는다.

$\therefore \lim_{x\to a} f(x)=f(a)=0$

즉 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β 중 한 근이 a이므로 $a=\alpha$라 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}&=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-\beta)-(x-a)}{(x-a)(x-\beta)+(x-a)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{(x-\beta)-1}{(x-\beta)+1}\\&=\frac{(a-\beta)-1}{(a-\beta)+1}\end{aligned}$$

즉 $\frac{(a-\beta)-1}{(a-\beta)+1}=\frac{3}{5}$이므로

$5(a-\beta)-5=3(a-\beta)+3$

$2(a-\beta)=8$

$\therefore a-\beta=4$, 즉 $\alpha-\beta=4$

$a=\beta$라 하면

$a-\alpha=4$, 즉 $\beta-\alpha=4$

$\therefore |\alpha-\beta|=4$

답 ④

21 전략 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선의 방정식을 구하여 점 Q의 좌표를 찾고, 구하는 극한을 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 $P(t,\ t+1)$을 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선의 방정식은

$$y-(t+1)=-(x-t),\ 즉\ y=-x+2t+1$$

이므로 이 직선이 y축과 만나는 점 Q의 좌표는

$$(0,\ 2t+1)$$

따라서

$$\overline{AP}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2,$$
$$\overline{AQ}^2=1^2+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$$

이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}=2$$

답 ③

22 전략 $f(x)=0$, $g(x)=0$이 되는 x의 값을 이용하여 $f(x)$, $g(x)$를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $g(1)=0$이므로 인수정리에 의하여

$$g(x)=(x-1)(x^2+ax+b)\ (a,\ b는\ 상수)$$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$n=1$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

$x\longrightarrow1$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$n=2$일 때, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

$\lim_{x\to2}g(x)\neq0$이면 $\frac{\lim_{x\to2}f(x)}{\lim_{x\to2}g(x)}=0$이므로

$$\lim_{x\to2}f(x)=0 \qquad \therefore f(2)=0$$

$\lim_{x\to2}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로

$$f(2)=0$$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-c)$ (c는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x-c)}{(x-1)(x^2+ax+b)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-c)}{x^2+ax+b}$$
$$=\frac{-(1-c)}{1+a+b}$$

즉 $\frac{c-1}{1+a+b}=0$이므로 $c=1$

$$\therefore f(x)=(x-1)^2(x-2)$$

조건 (나)에서 $n=3$일 때, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=2$이고

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+ax+b}$$
$$=\frac{2}{9+3a+b}$$

이므로 $\frac{2}{9+3a+b}=2$

$\therefore 3a+b=-8$ …… ㉠

조건 (나)에서 $n=4$일 때, $\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=6$이고

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+ax+b}$$
$$=\frac{6}{16+4a+b}$$

이므로 $\frac{6}{16+4a+b}=6$

$\therefore 4a+b=-15$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-7,\ b=13$$

따라서 $g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$이므로

$$g(5)=4(25-35+13)=12$$

답 ⑤

02 함수의 연속

유제

본책 42~51쪽

012-❶ (1) (i) $f(1)=3$

(ii) $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+2)=3$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(2) $1<x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x-[x])$

$=\lim_{x\to1+}(x-1)=0$

$0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x-[x])$

$=\lim_{x\to1-}x=1$

따라서 $\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$에서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

답 (1) 연속 (2) 불연속

013-❶ 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)=-2^2+4\cdot2+1=5$이고

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}\sqrt{a-x}$

$=\sqrt{a-2}$

이므로 $\sqrt{a-2}=5$, $a-2=25$

$\therefore a=27$

답 27

013-❷ 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이다.

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{2x^2+3ax+b}{x+1}=a-2$ ...... ㉠

㉠에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(2x^2+3ax+b)=0$이므로

$2-3a+b=0$

$\therefore b=3a-2$ ...... ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+3ax+3a-2}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x+3a-2)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(2x+3a-2)$

$=3a-4$

따라서 $3a-4=a-2$이므로

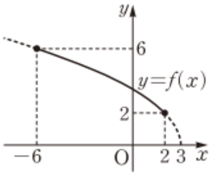
$2a=2$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $b=1$

답 $a=1$, $b=1$

014-❶ 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-6, 2]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

구간 $[-6, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=-6$일 때 최댓값 6, $x=2$일 때 최솟값 2를 갖는다.



답 최댓값: 6, 최솟값: 2

015-❶ (1) $f(x)=x^3+3x^2-2x-4$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고

$f(1)=-2<0$, $f(2)=12>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(x)=0$인 x가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3+3x^2-2x-4=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=x^5-4x+2$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$f(0)=2>0$, $f(1)=-1<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(x)=0$인 x가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^5-4x+2=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

015-❷ $F(x)=f(x)-2x$로 놓으면 $f(x)$가 연속함수이므로 $F(x)$도 연속함수이다.

이때

$F(0)=f(0)-0=-1<0$,

$F(1)=f(1)-2=-5<0$,

$F(2)=f(2)-4=1>0$,

$F(3)=f(3)-6=-10<0$,

$F(4)=f(4)-8=-10<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $F(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)-2x=0$은 열린구간 $(0,\ 4)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

중단원 연습 문제

본책 52~55쪽

01 1	02 연속	03 ④	04 3	05 6
06 -1	07 4	08 1	09 풀이 참조	
10 9	11 37	12 6	13 풀이 참조	
14 ④	15 8	16 ②	17 13	

01 전략 그래프가 끊어진 점에서 좌극한, 우극한을 확인한다.

풀이 극한값이 존재하지 않는 x의 값은

$-1,\ 1$

이므로 $a=2$

불연속인 x의 값은

$-1,\ 0,\ 1$

이므로 $b=3$

$\therefore\ b-a=1$

답 1

02 전략 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 함숫값과 극한값을 구한다.

풀이 (i) $f(0)g(0)=1\cdot(-1)=-1$ ··· ❶

(ii) $\lim\limits_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)\lim\limits_{x\to0+}g(x)$
$=1\cdot(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)\lim\limits_{x\to0-}g(x)$
$=(-1)\cdot1=-1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=-1$ ··· ❷

(i), (ii)에서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. ··· ❸

답 연속

채점 기준	비율
❶ $f(0)g(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속임을 알 수 있다.	20 %

03 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이어야 한다.

풀이 ① $x=0$일 때 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

② $0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}([x]-1)=-1$

$-1<x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}([x]-1)=-2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

③ $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}(x+2)=2$,

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}(-x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

④ $f(0)=1$이고

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^3+x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x^2+1)=1$$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 $x=0$에서 연속이다.

⑤ $f(0)=3$이고

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+3)}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x+3}{x-1}=-3$$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

따라서 $x=0$에서 불연속이다.

답 ④

04 전략 $f(x)$의 값이 정수가 되는 x의 값을 구한다.

풀이 $0<x<2$이면 $0<x^2<4$이므로

(i) $0<x^2<1$, 즉 $0<x<1$일 때,
$f(x)=[x^2]=0$

(ii) $1\le x^2<2$, 즉 $1\le x<\sqrt{2}$일 때,
$f(x)=[x^2]=1$

(iii) $2\le x^2<3$, 즉 $\sqrt{2}\le x<\sqrt{3}$일 때,
$f(x)=[x^2]=2$

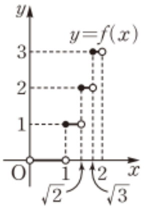
(iv) $3\le x^2<4$, 즉 $\sqrt{3}\le x<2$일 때,
$f(x)=[x^2]=3$

따라서 구간 $(0,\ 2)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=1,\ x=\sqrt{2},\ x=\sqrt{3}$

에서 불연속이다.

따라서 구간 $(0,\ 2)$에서 불연속인 x의 값의 개수는 3이다.



답 3

05

전략 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값을 구하는 방법을 이용한다.

풀이 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)f(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)f(x)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{x-1}$

따라서 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{x-1}=-3$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=6$

이때 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$f(-1)=\lim\limits_{x\to-1}f(x)=6$

답 6

06

전략 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$임을 이용하여 $a,\ b$의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$

$\therefore \lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x+a}{x-2}=b$ ······ ㉠

㉠에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+x+a)=0$이므로

$4+2+a=0 \qquad \therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면

$b=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}(x+3)=5$

$\therefore a+b=-1$

답 -1

07

전략 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=3$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $(x-3)f(x)=x^2+ax-3$에서 $x\neq3$일 때

$f(x)=\frac{x^2+ax-3}{x-3}$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$

$\therefore \lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+ax-3}{x-3}=f(3)$ ······ ㉠ ··· ❶

㉠에서 $x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉 $\lim\limits_{x\to3}(x^2+ax-3)=0$이므로

$9+3a-3=0 \qquad \therefore a=-2$ ··· ❷

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$f(3)=\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}(x+1)=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 연속인 조건을 이용할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

08

전략 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이어야 하므로

$a=\lim\limits_{x\to0}f(x)$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$

답 1

09

전략 사잇값의 정리를 이용한다.

풀이 두 곡선 $y=-x^4-2x^2+8,\ y=3x^2+2x-2$의 교점의 개수는 방정식

$-x^4-2x^2+8=3x^2+2x-2$

즉 $x^4+5x^2+2x-10=0$의 실근의 개수와 같다. ··· ❶

$f(x)=x^4+5x^2+2x-10$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ -1]$에서 연속이고

$f(-2)=16+20-4-10=22,$

$f(-1)=1+5-2-10=-6$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열

린구간 $(-2, -1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 즉 열린구간 $(-2, -1)$에서 적어도 하나의 교점을 갖는다. ⋯ ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 방정식의 근의 조건으로 변형할 수 있다.	30 %
❷ 사잇값의 정리를 이용하여 교점을 가짐을 보일 수 있다.	70 %

10 전략 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이고 $f(0)=f(3)$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서 $f(x)=f(x+3)$이므로

$f(0)=f(3)$

$f(0)=a$, $f(3)=4b+6$이므로

$a=4b+6$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

또 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=1$에서 연속이다. 즉

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$이므로

$\lim_{x\to1+}\{b(x-1)^2+6\}=\lim_{x\to1-}(4x+a)$

$6=4+a$ $\quad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$2=4b+6$ $\quad\therefore b=-1$

$\therefore f(x)=\begin{cases}4x+2 & (0\le x\le1)\\ -(x-1)^2+6 & (1<x\le3)\end{cases}$ ⋯ ❷

조건 (나)에 의하여

$f(-4)=f(-1)=f(2)$

$=-(2-1)^2+6=5$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{1}{2}+2=4$

$\therefore f(-4)+f\left(\frac{1}{2}\right)=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $f(0)=f(3)$임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(-4)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

11 전략 $x=-2$, $x=3$에서 $h(x)$가 연속임을 이용한다.

풀이 함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이고, 함수 $f(x)$는 $x\neq-2$, $x\neq3$인 닫힌구간 $[-4, 4]$에서 연속이므로 함수 $h(x)$가 닫힌구간 $[-4, 4]$에서 연속이려면 $x=-2$, $x=3$에서 연속이어야 한다.

함수 $h(x)$가 $x=-2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-2}f(x)g(x)=f(-2)g(-2)$이어야 한다.

$f(-2)g(-2)=4(4-2a+b)$이고,

$\lim_{x\to-2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-2+}f(x)\lim_{x\to-2+}g(x)$

$=4(4-2a+b)$,

$\lim_{x\to-2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-2-}f(x)\lim_{x\to-2-}g(x)$

$=3(4-2a+b)$

이므로 $\quad 4(4-2a+b)=3(4-2a+b)$

$4-2a+b=0$

$\therefore 2a-b=4$ ⋯⋯ ㉠

또 함수 $h(x)$가 $x=3$에서 연속이려면

$\lim_{x\to3}f(x)g(x)=f(3)g(3)$이어야 한다.

$f(3)g(3)=3(9+3a+b)$이고,

$\lim_{x\to3+}f(x)g(x)=\lim_{x\to3+}f(x)\lim_{x\to3+}g(x)$

$=3(9+3a+b)$,

$\lim_{x\to3-}f(x)g(x)=\lim_{x\to3-}f(x)\lim_{x\to3-}g(x)$

$=4(9+3a+b)$

이므로 $\quad 3(9+3a+b)=4(9+3a+b)$

$9+3a+b=0$

$\therefore 3a+b=-9$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-6$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+(-6)^2=37$

답 37

12 전략 $x=1$에서 $(g\circ f)(x)$가 연속임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$는 $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $x\neq1$인 모든 실수 x에서 합성함수 $(g\circ f)(x)$는 연속이다.

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$f(x)=t$로 놓으면

$x\to1+$일 때 $t\to2+$이므로

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{t\to2+}g(t)=8+4a+2b$

$x\to1-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to1-}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=0$

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{x\to1-}g(f(x))=0$이어야 하므로

$8+4a+2b=0$

$\therefore 2a+b=-4$ ⋯⋯ ㉠

이때 $f(1)=1$이므로

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1)=1+a+b$

$\lim_{x\to1} g(f(x))=(g\circ f)(1)$이어야 하므로

$1+a+b=0 \qquad \therefore a+b=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=2$

따라서 $g(x)=x^3-3x^2+2x$이므로

$g(3)=27-27+6=6$

답 6

13

전략 다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $x \to -3$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-3} f(x)=0$이므로

$f(-3)=0$

또 조건 (나)에서 $x \to 1$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1} f(x)=0$이므로

$f(1)=0$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-1)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항함수)라고 하면

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{x+3}=\lim_{x\to-3}(x-1)Q(x)$$
$$=-4Q(-3)$$

즉 $-4Q(-3)=1$이므로

$Q(-3)=-\frac{1}{4}$

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+3)Q(x)=4Q(1)$이므로

$4Q(1)=3$

$\therefore Q(1)=\frac{3}{4}$

이때 $Q(x)$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이고, $Q(-3)<0$, $Q(1)>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $Q(x)=0$은 열린구간 $(-3,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

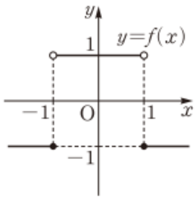
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-3,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

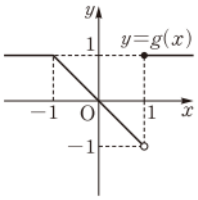
답 풀이 참조

14

전략 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 이용한다.

풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



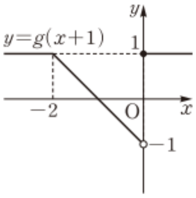


ㄱ. $\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=(-1)\cdot1=-1$,

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)g(x)=-1$

ㄴ. 함수 $y=g(x+1)$의 그래프는 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $g(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)g(x+1)$이 $x=-1$에서 연속이려면

$f(-1)g(0)=\lim_{x\to-1} f(x)g(x+1)$

이어야 한다.

$f(-1)g(0)=0$이고

$\lim_{x\to-1+} f(x)g(x+1)=1\cdot0=0$,

$\lim_{x\to-1-} f(x)g(x+1)=-1\cdot0=0$

$\therefore \lim_{x\to-1} f(x)g(x+1)=0$

따라서 $f(-1)g(0)=\lim_{x\to-1} f(x)g(x+1)$이므로

함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

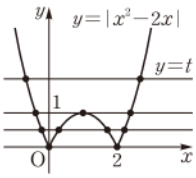
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

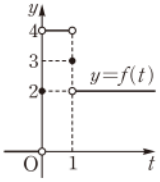
15

전략 t의 값의 범위에 따라 주어진 그래프와의 교점의 개수를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=t$를 그려서 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수 $f(t)$의 값을 구하고 $y=f(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 2 & (t=0)\\ 4 & (0<t<1)\\ 3 & (t=1)\\ 2 & (t>1)\end{cases}$$



위의 그래프에서 함수 $f(t)$는 $t=0$, $t=1$에서 불연속이고, 함수 $g(t)$는 모든 실수 t에서 연속이다.

따라서 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속이려면 $t=0$, $t=1$에서 $f(t)g(t)$가 연속이어야 하므로

$$f(0)g(0)=\lim_{t\to0+}f(t)g(t)=\lim_{t\to0-}f(t)g(t) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f(1)g(1)=\lim_{t\to1+}f(t)g(t)=\lim_{t\to1-}f(t)g(t) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $\lim_{t\to0+}f(t)\neq\lim_{t\to0-}f(t)$이고, $\lim_{t\to0+}g(t)=\lim_{t\to0-}g(t)$이므로

$$\lim_{t\to0+}g(t)=\lim_{t\to0-}g(t)=0$$

$g(t)$는 모든 실수 t에서 연속이므로

$$g(0)=\lim_{t\to0}g(t)=0$$

㉡에서 $\lim_{t\to1+}f(t)\neq\lim_{t\to1-}f(t)$이고, $\lim_{t\to1+}g(t)=\lim_{t\to1-}g(t)$이므로

$$\lim_{t\to1+}g(t)=\lim_{t\to1-}g(t)=0$$

$g(t)$는 모든 실수 t에서 연속이므로

$$g(1)=\lim_{t\to1}g(t)=0$$

따라서 $g(t)=t(t-1)$이므로

$$g(3)=3\cdot2=6$$

$$\therefore f(3)+g(3)=2+6=8$$

답 8

16 전략 함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$임을 이용한다.

풀이 $f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+a$

$$=x^2+x+a,$$

$f(x-1)=(x-1)^2-(x-1)+a$

$$=x^2-3x+a+2$$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}x^2+x+a & (x\le0)\\ x^2-3x+a+2 & (x>0)\end{cases}$$

이때 함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$$

$\{g(0)\}^2=a^2$이고

$$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0+}(x^2-3x+a+2)^2=(a+2)^2,$$

$$\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}(x^2+x+a)^2=a^2$$

이므로 $(a+2)^2=a^2$

$4a+4=0 \qquad \therefore a=-1$

답 ②

17 전략 a의 값의 범위를 $a>0$, $a=0$, $a<0$일 때로 나누어 생각한다.

풀이 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a}f(x)f(x-a)=f(a)f(0)$$

이어야 한다.

(i) $a>0$일 때,

$f(a)f(0)=f(a)=-\frac{1}{2}a+7$이고

$$\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)=\left(-\frac{1}{2}a+7\right)\cdot7=-\frac{7}{2}a+49,$$

$$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)=\left(-\frac{1}{2}a+7\right)\cdot1=-\frac{1}{2}a+7$$

이므로 $-\frac{1}{2}a+7=-\frac{7}{2}a+49$

$\therefore a=14$

(ii) $a=0$일 때,

$f(x)f(x-a)=\{f(x)\}^2$이므로

$$\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^2=7^2=49,\ \lim_{x\to0-}\{f(x)\}^2=1$$

따라서 $\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^2\neq\lim_{x\to0-}\{f(x)\}^2$이므로 $\lim_{x\to0}\{f(x)\}^2$의 값이 존재하지 않는다. 즉 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 연속이 아니다.

(iii) $a<0$일 때,

$f(a)f(0)=f(a)=a+1$이고

$$\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)=(a+1)\cdot7=7a+7,$$

$$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)=(a+1)\cdot1=a+1$$

이므로 $a+1=7a+7$

$\therefore a=-1$

이상에서 모든 실수 a의 값의 합은

$14+(-1)=13$

답 13

02 함수의 연속

Ⅱ. 다항함수의 미분법

03 미분계수와 도함수

유제

본책 62~81쪽

016-1 함수 $f(x)=x^3-x$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{a+\Delta x-a}$$
$$=\frac{\{(a+\Delta x)^3-(a+\Delta x)\}-(a^3-a)}{\Delta x}$$
$$=\frac{3a^2\Delta x+3a(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-\Delta x}{\Delta x}$$
$$=3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2-1$$

답 $3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2-1$

016-2 함수 $f(x)=x^2-x+1$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{7-1}{2}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(a+\Delta x)^2-(a+\Delta x)+1\}-(a^2-a+1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2a\Delta x-\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2a-1)=2a-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $3=2a-1$이므로 $a=2$

답 2

017-1 (1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot 3$$
$$=f'(a)\cdot 3=2\cdot 3=6$$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-2h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\cdot 2$$
$$=f'(a)\cdot 2=2\cdot 2=4$$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h^3)-f(a)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h^3)-f(a)}{-h^3}\cdot(-h^2)$$
$$=f'(a)\cdot 0=0$$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a+h)}{2h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)+f(a)-f(a+h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\cdot(-1)$$
$$-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=-f'(a)-\frac{1}{2}f'(a)=-\frac{3}{2}f'(a)$$
$$=-\frac{3}{2}\cdot 2=-3$$

답 (1) 6 (2) 4 (3) 0 (4) -3

018-1 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)$$
$$=f'(1)\cdot 3=1\cdot 3=3$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+1)f(1)-\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$$
$$=2f(1)-f'(1)\cdot 2$$
$$=2\cdot 3-1\cdot 2=4$$

답 (1) 3 (2) 4

다른 풀이 (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-x^2f(x^2)+x^2f(x^2)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}\cdot(-x^2)$$
$$+\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\cdot f(x^2)$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\cdot(-x^2)$$
$$+\lim_{x\to 1}(x+1)\cdot f(x^2)$$
$$=f'(1)\cdot 2\cdot(-1)+2f(1)$$
$$=1\cdot 2\cdot(-1)+2\cdot 3=4$$

019-1 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy-2$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0-2$$
$$\therefore f(0)=2$$

따라서

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2}{h}=-1$$

이므로

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3)+f(h)+3h-2-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)-2}{h}+3\right\}$$
$$=-1+3=2$$

답 2

019-② $f(x+y)=2f(x)f(y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 $f(0)=2f(0)f(0)$

$f(0)>0$이므로 $f(0)=\frac{1}{2}$

따라서

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h}=4$$

이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2f(x)f(h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2f(x)\left\{f(h)-\frac{1}{2}\right\}}{h}$$
$$=2f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h}$$
$$=2f(x)\cdot 4=8f(x)$$

$f(x)>0$이므로

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{8f(x)}{f(x)}=8$$

답 8

020-① (1) (i) $f(1)=0$,

$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}x|x-1|=0$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)|h|}{h}$

그런데

$$\lim_{h\to 0+}\frac{(1+h)|h|}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(1+h)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}(1+h)=1,$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{(1+h)|h|}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(1+h)\cdot(-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\{-(1+h)\}$$
$$=-1$$

이므로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(2) (i) $f(1)=1$이고

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(2x^2-x)=1$,

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(3x-2)=1$

이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\{2(1+h)^2-(1+h)\}-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{3h+2h^2}{h}=\lim_{h\to 0+}(3+2h)=3,$$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\{3(1+h)-2\}-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{3h}{h}=3$$

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=3$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 미분가능하다.

답 풀이 참조

021-① (1) $y'=(x^2+3)'(x^2-1)+(x^2+3)(x^2-1)'$
$=2x(x^2-1)+(x^2+3)\cdot 2x$
$=2x(x^2-1+x^2+3)$
$=4x^3+4x$

(2) $y'=(x^2-1)'(2x+1)(3x^2-1)$
$+(x^2-1)(2x+1)'(3x^2-1)$
$+(x^2-1)(2x+1)(3x^2-1)'$
$=2x(2x+1)(3x^2-1)+(x^2-1)\cdot 2\cdot(3x^2-1)$
$+(x^2-1)(2x+1)\cdot 6x$
$=(12x^4+6x^3-4x^2-2x)+(6x^4-8x^2+2)$
$+(12x^4+6x^3-12x^2-6x)$
$=30x^4+12x^3-24x^2-8x+2$

(3) $y'=3(x^2-x+1)^2(x^2-x+1)'$
$=3(x^2-x+1)^2(2x-1)$

(4) $y'=\{(x+1)^3\}'(x^2+1)^2+(x+1)^3\{(x^2+1)^2\}'$
$=3(x+1)^2\cdot 1\cdot(x^2+1)^2$
$+(x+1)^3\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x$
$=(x+1)^2(x^2+1)\{3(x^2+1)+4x(x+1)\}$
$=(x+1)^2(x^2+1)(7x^2+4x+3)$

답 풀이 참조

다른 풀이 (1) $y=(x^2+3)(x^2-1)=x^4+2x^2-3$이므로
$y'=4x^3+4x$

022-❶ $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{3f(x)-xf(3)}{x-3}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3f(x)-3f(3)+3f(3)-xf(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{3\{f(x)-f(3)\}-(x-3)f(3)}{x-3}$$
$$=3\cdot\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)f(3)}{x-3}$$
$$=3f'(3)-f(3)$$

$f(x)=(x-1)^3$에서 $f'(x)=3(x-1)^2$이므로
$f(3)=8$, $f'(3)=12$
따라서 구하는 값은
$3\cdot 12-8=28$

답 28

022-❷ $f(x)=x^n+x^2+x$로 놓으면 $f(1)=3$이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$f'(x)=nx^{n-1}+2x+1$이고 $f'(1)=10$이므로
$n+3=10$ $\therefore n=7$

답 7

Remark ▶

$f(x)=x^n+x^2+x-3$으로 놓으면 $f(1)=0$이므로 주어진 식의 좌변은

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

023-❶ $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 2-}(4x+b)=f(2)$

$\therefore 8+b=4a$ ...... ㉠

또 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{ax^2-4a}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{a(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}a(x+2)=4a,$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{4x+b-4a}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{4x+b-(8+b)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{4(x-2)}{x-2}=4$$

에서 $4a=4$ $\therefore a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

답 $a=1$, $b=-4$

다른 풀이 $f_1(x)=ax^2$, $f_2(x)=4x+b$로 놓으면
$f_1'(x)=2ax$, $f_2'(x)=4$
$f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로
$f_1(2)=f_2(2)$ $\therefore 4a=8+b$ ...... ㉠
또 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로
$f_1'(2)=f_2'(2)$
$4a=4$ $\therefore a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

023-❷ $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}(x^3-2x^2+bx)=f(1)$
$1-2+b=a-4+3$
$\therefore a=b$ ...... ㉠

또 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{ax^2-4x+3-(a-4+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{a(x^2-1)-4(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)\{a(x+1)-4\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\{a(x+1)-4\}=2a-4,$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3-2x^2+bx-(a-4+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3-2x^2+bx+1-a}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3-2x^2+ax+1-a}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x^2-x-1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}(x^2-x-1+a)=-1+a$$

에서 $2a-4=-1+a$ $\therefore a=3$
$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

답 $a=3$, $b=3$

다른 풀이 $f_1(x)=ax^2-4x+3$, $f_2(x)=x^3-2x^2+bx$로 놓으면

$f_1'(x)=2ax-4$,

$f_2'(x)=3x^2-4x+b$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f_1(1)=f_2(1)$

$a-4+3=1-2+b$

$\therefore a=b$ …… ㉠

또 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$f_1'(1)=f_2'(1)$

$2a-4=3-4+b$

$\therefore 2a-b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=3$

024-❶ $f(x)=x^2+ax+b$에서

$f'(x)=2x+a$

$f(x)$, $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$(x+1)(2x+a)-2(x^2+ax+b)-4=0$

$(2-a)x+a-2b-4=0$

이 등식이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로

$2-a=0$, $a-2b-4=0$

위의 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$

답 $a=2$, $b=-1$

다른 풀이 $f(x)=x^2+ax+b$에서

$f'(x)=2x+a$

이때 주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 $x=0$을 등식에 대입하면

$f'(0)-2f(0)-4=0$

$f(0)=b$, $f'(0)=a$이므로

$a-2b-4=0$ …… ㉠

또 $x=-1$을 주어진 등식에 대입하면

$-2f(-1)-4=0$

$f(-1)=1-a+b$이므로

$-2(1-a+b)-4=0$

$\therefore a-b-3=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$

025-❶ 다항식 $f(x)=x^4-4x+a$를 $(x-b)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $g(x)$라 하면

$x^4-4x+a=(x-b)^2g(x)$ …… ㉠

양변에 $x=b$를 대입하면

$b^4-4b+a=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x^3-4=2(x-b)g(x)+(x-b)^2g'(x)$

양변에 $x=b$를 대입하면

$4b^3-4=0$, $4(b-1)(b^2+b+1)=0$

그런데 b는 실수이므로 $b=1$

$b=1$을 ㉡에 대입하면

$1-4+a=0$ $\therefore a=3$

답 $a=3$, $b=1$

025-❷ 다항식 x^9-1을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $g(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^9-1=(x-1)^2g(x)+ax+b$ …… ㉠

양변을 x에 대하여 미분하면

$9x^8=2(x-1)g(x)+(x-1)^2g'(x)+a$ …… ㉡

$x=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$0=a+b$, $9=a$ $\therefore a=9$, $b=-9$

따라서 구하는 나머지는 $9x-9$

답 $9x-9$

중단원 연습 문제

본책 82~85쪽

01 3	**02** $\frac{1}{2}$	**03** 10	**04** ⑤	**05** ②
06 2	**07** 6	**08** $2\sqrt{10}$	**09** 240	**10** 33
11 -17	**12** ㄴ, ㄷ	**13** 5	**14** 8	
15 $f(x)=x^2-x+1$			**16** ①	**17** ④
18 ③	**19** 19			

01 **전략** 평균변화율과 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=-2x^2+1$에서 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{-31-(-7)}{2}=-12$$

또 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(c)&=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{-2(c+h)^2+1\}-(-2c^2+1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{-4ch-2h^2}{h}\\&=\lim_{h\to0}(-4c-2h)=-4c\end{aligned}$$

따라서 $-4c=-12$이므로 $c=3$

답 3

다른 풀이 $f(x)=-2x^2+1$에서

$$f'(x)=-4x$$

이므로 $\quad -4c=-12$

$$\therefore c=3$$

02

전략 $f'(a)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a+h)}{2h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}f'(a)=-\frac{1}{2}\cdot(-1)=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

03

전략 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$, $\lim_{h\to0}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}=g'(1)$임을 이용한다.

풀이 $g(1)=-2$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-3h)-g(1+h)-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-3h)-g(1+h)+g(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\cdot3-\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$

$$=f'(1)+3f'(1)-g'(1)$$

$$=4f'(1)-g'(1)$$

$$=4\cdot2-(-2)=10$$

답 10

04

전략 미분계수의 정의와 주어진 등식을 이용하여 $f'(0)$을 극한으로 나타낸 후 $f'(1)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0 \qquad \therefore f(0)=0$$

따라서

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$$

이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+h-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+1\right\}$$

$$=1+1=2$$

답 ⑤

05

전략 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$을 만족시키지만 $f'(0)$의 값이 존재하지 않는 함수를 찾는다.

풀이 ① $f(x)=x^3$에서 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.
따라서 $f(x)=x^3$은 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

② $f(0)=0$, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\sqrt{x^2}=0$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

또 $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$에서

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}=-1$$

이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

따라서 $f(x)=\sqrt{x^2}$은 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

③ $f(x)=|x|^2=x^2$에서 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.
따라서 $f(x)=|x|^2$은 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

④ $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$에서 $f(0)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $\lim_{x\to0+}[x]=0$, $\lim_{x\to0-}[x]=-1$이므로

$$\lim_{x\to0+}[x]\neq\lim_{x\to0-}[x]$$

따라서 $f(x)=[x]$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ②이다.

답 ②

06

전략 $y=f(x)g(x)$의 도함수는 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(1-2x)(x^2-x)^2$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=(1-2x)'(x^2-x)^2+(1-2x)\{(x^2-x)^2\}'\\&=-2(x^2-x)^2+(1-2x)\cdot 2(x^2-x)(2x-1)\\&=-2(x^2-x)\{x^2-x+(2x-1)^2\}\\&=-2(x^2-x)(5x^2-5x+1)\end{aligned}$$

따라서 $f'(x)=0$에서

$x^2-x=0$ 또는 $5x^2-5x+1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 이차방정식의 두 근의 합이 각각 1, 1이고 공통인 근이 없으므로 $f'(x)=0$의 모든 근의 합은 2이다.

답 2

07

전략 $f(x)$를 미분하고 주어진 함숫값을 이용한다.

풀이 $f(1)=-2$이므로

$a+b+c=-2$ …… ㉠

$f(x)=ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=2ax+b$

$f'(1)=1$, $f'(2)=5$이므로

$2a+b=1$ …… ㉡

$4a+b=5$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$, $c=-1$

$\therefore abc=6$

답 6

08

전략 도함수를 구하여 미분계수가 -1인 x의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-4x+2$에서

$f'(x)=3x^2-4$ ⋯ ❶

미분계수가 -1이면

$3x^2-4=-1$, $3x^2=3$

$x^2=1$ $\therefore x=\pm1$

이때 $f(1)=-1$, $f(-1)=5$이므로 두 점의 좌표는

$(1, -1)$, $(-1, 5)$ ⋯ ❷

따라서 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(-1-1)^2+\{5-(-1)\}^2}=2\sqrt{10}$ ⋯ ❸

답 $2\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 점의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

Remark▶ 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

09

전략 주어진 식을 변형하여 미분계수로 나타낸다.

풀이
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(2)\}^2}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)+f(2)\}\{f(x)-f(2)\}}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\{f(x)+f(2)\}\cdot\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\\&=2f(2)f'(2)\end{aligned}$$ ⋯ ❶

이때 $f(x)=x^4-3x^2+2$에서 $f'(x)=4x^3-6x$이므로

$f(2)=2^4-3\cdot2^2+2=6$,

$f'(2)=4\cdot2^3-6\cdot2=20$ ⋯ ❷

따라서 구하는 값은

$2\cdot6\cdot20=240$ ⋯ ❸

답 240

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	50 %
❷ $f(2)$, $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 답을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $g(x)=\{f(x)\}^2$이라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(2)\}^2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$

이때 $g'(x)=2f(x)f'(x)$이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned}g'(2)&=2f(2)f'(2)\\&=2\cdot6\cdot20=240\end{aligned}$$

10

전략 $R(x)$를 이차식으로 놓고 등식을 세운다.

풀이 x^6을 $x(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$x^6=x(x-1)^2Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠ ⋯ ❶

$x=0$을 ㉠의 양변에 대입하면

$0=c$ …… ㉡

$x=1$을 ㉠의 양변에 대입하면

$1=a+b+c$ …… ㉢

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}6x^5&=(x-1)^2Q(x)+2x(x-1)Q(x)\\&\quad+x(x-1)^2Q'(x)+2ax+b\end{aligned}$$

$x=1$을 위의 식의 양변에 대입하면

$6=2a+b$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=-4$, $c=0$ ⋯ ❷

따라서 $R(x)=5x^2-4x$이므로

$$R(3)=5\cdot3^2-4\cdot3=33 \quad \cdots ❸$$

답 33

채점 기준	비율
❶ 등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $R(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Remark ▶

x^6을 삼차식으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하면
$R(x)$는 이차 이하의 다항식이므로
$R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓는다.

11 전략 미분계수의 기하적 의미를 이용한다.

풀이 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ b)$를 지나므로

$$f(1)=b$$

또 점 $(1,\ b)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=\tan\theta=7$$

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)+3}{h}=a$에서 $h\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$
이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.
즉 $\displaystyle\lim_{h\to0}\{f(1-2h)+3\}=0$에서 $f(1)+3=0$이므로

$$f(1)=-3$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)+3}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)\\&=-2f'(1)\\&=-2\cdot7=-14\end{aligned}$$

따라서 $a=-14$, $b=-3$이므로

$$a+b=-17$$

답 -17

12 전략 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

풀이 ㄱ. $f(2)=3-2=1$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}&=\lim_{x\to2+}\frac{3-x-1}{x-2}\\&=\lim_{x\to2+}\frac{-(x-2)}{x-2}\\&=-1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}&=\lim_{x\to2-}\frac{(x-1)^2-1}{x-2}\\&=\lim_{x\to2-}\frac{x^2-2x}{x-2}\\&=\lim_{x\to2-}\frac{x(x-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2-}x=2\end{aligned}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $h(x)=xf(x)$라 하면 $h(0)=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{x}\\&=\lim_{x\to0}f(x) \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x-1)^2=1,$$
$$\lim_{x\to0-}f(x)=1$$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=1$

따라서 ㉠에서 함수 $h(x)$, 즉 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $k(x)=(x-2)f(x)$라 하면 $k(2)=0$이고

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{k(x)-k(2)}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)f(x)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}f(x) \quad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

이때

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(3-x)=1,$$
$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x-1)^2=1$$

이므로

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=1$$

따라서 ㉡에서 함수 $k(x)$, 즉 $(x-2)f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

13 전략 주어진 극한값을 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}=1$에서 $x\longrightarrow3$일 때,
(분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.
즉 $\displaystyle\lim_{x\to3}\{f(x)-2\}=0$에서 $f(3)=2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}&=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\\&=f'(3)\end{aligned}$$

$$\therefore f'(3)=1$$

같은 방법으로 $\lim_{x \to 3} \frac{g(x)-1}{x-3}=2$에서 $g(3)=1$이므로

$$\lim_{x \to 3} \frac{g(x)-1}{x-3}=\lim_{x \to 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)$$

$\therefore g'(3)=2$

이때 $y=f(x)g(x)$를 x에 대하여 미분하면

$$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이므로 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=3$에서의 미분계수는

$$f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=1\cdot1+2\cdot2=5$$

답 5

14 전략 주어진 식을 미분계수로 나타낸다.

풀이 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2=2f'(1)$$

즉 $2f'(1)=-2$이므로

$f'(1)=-1$ ···➊

$g(x)=(3x+1)^2f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=2(3x+1)\cdot3f(x)+(3x+1)^2f'(x)=(3x+1)\{6f(x)+(3x+1)f'(x)\}$$ ···➋

$\therefore g'(1)=4\{6f(1)+4f'(1)\}=4\{6\cdot1+4\cdot(-1)\}=8$ ···➌

답 8

채점 기준	비율
➊ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ $g'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
➌ $g'(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

15 전략 $f(x)$가 n차 다항식이면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 다항식임을 이용한다.

풀이 $f'(x)f(x)=f'(x)+f(x)+2x^3-4x^2+2x-1$ 에서

$$f'(x)f(x)-f'(x)-f(x)=2x^3-4x^2+2x-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)$의 차수를 n(n은 자연수)이라 하면 $f'(x)$의 차수는 $n-1$이므로 ㉠의 좌변의 차수는

$(n-1)+n=2n-1$

㉠의 우변의 차수는 3이므로

$2n-1=3 \qquad \therefore n=2$

따라서 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$, $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$$(2ax+b)(ax^2+bx+c)=(2ax+b)+(ax^2+bx+c)+2x^3-4x^2+2x-1$$

$$\therefore 2a^2x^3+3abx^2+(2ac+b^2)x+bc=2x^3+(a-4)x^2+(2a+b+2)x+b+c-1$$

이 등식이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a^2=2$, $3ab=a-4$,

$2ac+b^2=2a+b+2$, $bc=b+c-1$

위의 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-1$, $c=1$

$\therefore f(x)=x^2-x+1$

답 $f(x)=x^2-x+1$

16 전략 주어진 식을 이용하여 $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구한다.

풀이 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1}=3$에서 $x \longrightarrow 1$일 때

(분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x \to 1}\{f(x)-2\}=0$에서 $f(1)=2$이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}f'(1)$$

따라서 $\frac{1}{2}f'(1)=3$이므로 $\qquad f'(1)=6$

$$\therefore \frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{6}{2}=3$$

답 ①

17 전략 $f(x)$가 미분가능하므로 $f'(1)$, $f'(2)$가 존재함을 이용한다.

풀이 $f(x)\geq2x$에서

$f(x)-f(1)\geq2x-2$

(i) $x>1$일 때,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\geq\frac{2x-2}{x-1}$$

$$\therefore \lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\geq\lim_{x \to 1+} \frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

(ii) $x<1$일 때,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\leq\frac{2x-2}{x-1}$$

$$\therefore \lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\leq\lim_{x \to 1-} \frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$$

$\therefore f'(1)=2$

또 $f(x)\le3x$에서

$f(x)-f(2)\le3x-6$

(iii) $x>2$일 때,

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\le\frac{3x-6}{x-2}$$

$$\therefore \lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\le\lim_{x\to2+}\frac{3(x-2)}{x-2}=3$$

(iv) $x<2$일 때,

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\ge\frac{3x-6}{x-2}$$

$$\therefore \lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\ge\lim_{x\to2-}\frac{3(x-2)}{x-2}=3$$

$f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=3$$

$\therefore f'(2)=3$

$\therefore f'(1)+f'(2)=5$

답 ④

18 전략 함수 $g(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 미분가능할 조건을 이용한다.

풀이 ㄱ. (i) $0<h<1$일 때,

$g(-1+h)-g(-1)$
$=f(-1+h)-f(-1)$

이고, $-1<h<0$일 때,

$g(-1+h)-g(-1)=g(1+h)-f(-1)$
$=f(1+h)-f(1)$

이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=f'(-1),$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=f'(1)$$

이때 $f'(-1)=f'(1)$이므로 $g(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

(ii) $0<h<1$일 때,

$g(1+h)-g(1)=g(-1+h)-g(-1)$
$=f(-1+h)-f(-1)$

이고, $-1<h<0$일 때,

$g(1+h)-g(1)=f(1+h)-g(-1)$
$=f(1+h)-f(-1)$
$=f(1+h)-f(1)$

이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=f'(-1),$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=f'(1)$$

이때 $f'(-1)=f'(1)$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

ㄴ. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$g(1)=\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$$

이때 $g(1)=g(-1)=f(-1)$이므로

$f(1)=f(-1)$

따라서 $1+a+b+c+d=1-a+b-c+d$이므로

$a+c=0 \qquad \therefore c=-a$

또 $f(1)=f(-1)$이면 ㄱ에서 $f'(1)=f'(-1)$이므로

$4+3a+2b+c=-4+3a-2b+c$

$8+4b=0 \qquad \therefore b=-2$

따라서 $f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$이므로

$f'(0)=-a$, $f'(1)=4+3a-4-a=2a$

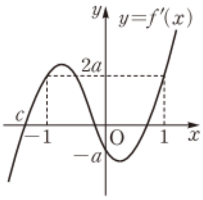
$\therefore f'(0)f'(1)=-2a^2\le0$

ㄷ. ㄴ에서 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면

$f'(-1)=f'(1)=2a$

$f'(1)>0$이므로 $\qquad a>0$

$f'(0)=-a<0$이므로 삼차함수 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구간 $(-\infty, -1)$에서 $f'(c)=0$인 c가 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

19 (전략) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 식이 0이 아닌 극한값을 가지면 분모와 분자의 차수가 같음을 이용하여 $f(x)$의 차수를 구한다.

(풀이) 조건 (가)에서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 분수식이 0이 아닌 극한값을 가지므로 분모와 분자의 차수가 같다.
$f(x)$를 n차함수라 하면 분모의 차수는 $n+3$, 분자의 차수는 $2n$이므로

$n+3=2n \qquad \therefore n=3$

따라서 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)로 놓으면 $x^3f(x)$의 최고차항은 ax^6이고, $\{f(x)\}^2-f(x^2)$의 최고차항은 $(a^2-a)x^6$이므로

$\frac{a^2-a}{a}=4, \qquad a^2-5a=0$

$a(a-5)=0 \qquad \therefore a=5\ (\because a\neq0)$

즉 $f(x)=5x^3+bx^2+cx+d$이므로

$f'(x)=15x^2+2bx+c$

조건 (나)에서 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(15x^2+2bx+c)=0$이므로

$c=0$

$f'(x)=15x^2+2bx$를 조건 (나)의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{15x^2+2bx}{x}=\lim_{x\to0}(15x+2b)=2b$

따라서 $2b=4$이므로 $\qquad b=2$

즉 $f'(x)=15x^2+4x$이므로

$f'(1)=19$

답 19

Ⅱ. 다항함수의 미분법

04 도함수의 활용 (1)

유제

본책 89~102쪽

026-❶ $f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$을 지나므로

$f(1)=1$

$1+a+b=1 \qquad \therefore a+b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(1)=-1$

$3+a=-1 \qquad \therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $\qquad b=4$

답 $a=-4$, $b=4$

026-❷ $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(1, 2)$, $(2, 0)$을 지나므로

$f(1)=2$, $f(2)=0$

$\therefore a+b+c=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$4a+2b+c=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

또 점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(2)=1$

$4a+b=1 \qquad \therefore b=1-4a \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 대입한 후 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-11$, $c=10$

답 $a=3$, $b=-11$, $c=10$

027-❶ $f(x)=x^3-x^2+2x-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x+2$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $f(x)=0$에서

$x^3-x^2+2x-2=0$

$x^2(x-1)+2(x-1)=0$

$(x-1)(x^2+2)=0$

$\therefore x=1\ (\because x^2+2>0)$

따라서 교점의 좌표가 $(1, 0)$이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-2+2=3$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=3(x-1) \qquad \therefore y=3x-3$

답 $y=3x-3$

027-② $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-4x+3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-4+3=2$

이므로 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-1)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

답 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

028-① $f(x)=-x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $\tan 45°=1$이므로

$f'(a)=-2a=1 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-\frac{3}{4}=x+\frac{1}{2}$

$\therefore y=x+\frac{5}{4}$

답 $y=x+\frac{5}{4}$

다른 풀이 기울기가 $\tan 45°=1$인 직선의 방정식을

$y=x+b$

라 하면 이 직선이 곡선 $y=-x^2+1$에 접하므로

$-x^2+1=x+b$에서 $\qquad x^2+x+b-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4(b-1)=0 \qquad \therefore b=\frac{5}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=x+\frac{5}{4}$

028-② $f(x)=x^3-2x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=3a^2-2=1, \qquad 3a^2=3$

$a^2=1 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 접점의 좌표가 $(-1,\ 1)$, $(1,\ -1)$이므로 두 접선의 방정식은

$y-1=x+1,\ y+1=x-1$

$\therefore y=x+2,\ y=x-2$

이때 두 접선 사이의 거리는 점 $(-1,\ 1)$과 직선 $y=x-2$, 즉 $x-y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

029-① $f(x)=3x^2-5x+6$으로 놓으면

$f'(x)=6x-5$

접점의 좌표를 $(a,\ 3a^2-5a+6)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=6a-5$

이므로 접선의 방정식은

$y-(3a^2-5a+6)=(6a-5)(x-a)$

$\therefore y=(6a-5)x-3a^2+6$

이 직선이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$2=(6a-5)\cdot(-1)-3a^2+6$

$a^2+2a-3=0, \qquad (a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-3)\cdot f'(1)=-23\cdot 1=-23$

답 -23

다른 풀이 점 $(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식을

$y-2=m(x+1)$, 즉 $y=mx+m+2$

라 하면 이 직선이 곡선 $y=3x^2-5x+6$에 접하므로

$3x^2-5x+6=mx+m+2$에서

$3x^2-(5+m)x-m+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(5+m)^2-4\cdot 3\cdot(-m+4)=0$

$\therefore m^2+22m-23=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

방정식 ㉠의 두 실근이 접선의 기울기이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 접선의 기울기의 곱은 -23이다.

030-① $f(x)=ax^2+b$, $g(x)=x^3+bx$로 놓으면

$f'(x)=2ax$, $g'(x)=3x^2+b$

두 곡선이 $x=-2$인 점에서 접하므로

$f(-2)=g(-2)$에서 $\qquad 4a+b=-8-2b$

$\therefore 4a+3b=-8 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $x=-2$인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(-2)=g'(-2)$에서 $\qquad -4a=12+b$

$\therefore 4a+b=-12 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=-\frac{7}{2}$, $b=2$

답 $a=-\frac{7}{2}$, $b=2$

030-② $f(x)=-x^3+kx$, $g(x)=x^2-1$에서

$f'(x)=-3x^2+k$, $g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접하므로 $f(t)=g(t)$에서

$-t^3+kt=t^2-1$ …… ㉠

또 $x=t$인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$-3t^2+k=2t$ $\quad\therefore k=3t^2+2t$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-t^3+(3t^2+2t)t=t^2-1$

$2t^3+t^2+1=0$, $\quad(t+1)(2t^2-t+1)=0$

$\therefore t=-1$ ($\because 2t^2-t+1>0$)

$t=-1$을 ㉡에 대입하면

$k=1$

답 1

다른 풀이 두 곡선 $f(x)=-x^3+kx$, $g(x)=x^2-1$이 $x=t$인 점에서 접하므로 방정식 $f(x)=g(x)$는 $x=t$를 중근으로 갖는다.

따라서 방정식 $-x^3+kx=x^2-1$, 즉

$x^3+x^2-kx-1=0$의 중근이 $x=t$이므로

$x^3+x^2-kx-1=(x-t)^2\left(x-\frac{1}{t^2}\right)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 우변을 전개하면

$$(x-t)^2\left(x-\frac{1}{t^2}\right)$$
$$=(x^2-2tx+t^2)\left(x-\frac{1}{t^2}\right)$$
$$=x^3-\left(\frac{1}{t^2}+2t\right)x^2+\left(t^2+\frac{2}{t}\right)x-1$$

이므로 ㉠의 좌변과 계수를 비교하면

$-\left(\frac{1}{t^2}+2t\right)=1$, $\quad t^2+\frac{2}{t}=-k$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad t=-1$, $k=1$

031-① 함수 $f(x)=x^3-7x^2+7x+13$은 닫힌구간 $[-1, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 5)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(5)=-2$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 c가 구간 $(-1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=x^3-7x^2+7x+13$에서

$f'(x)=3x^2-14x+7$

$f'(c)=3c^2-14c+7=0$이므로

$c=\frac{7\pm2\sqrt{7}}{3}$

답 $\frac{7\pm2\sqrt{7}}{3}$

Remark ▶

$2<\sqrt{7}<3$이므로

$11<7+2\sqrt{7}<13$, $1<7-2\sqrt{7}<3$

$\therefore \frac{11}{3}<\frac{7+2\sqrt{7}}{3}<\frac{13}{3}$, $\frac{1}{3}<\frac{7-2\sqrt{7}}{3}<1$

$\therefore -1<\frac{7-2\sqrt{7}}{3}<\frac{7+2\sqrt{7}}{3}<5$

032-① 함수 $f(x)=-x^3+2x$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c)$$

인 실수 c가 구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=-x^3+2x$에서 $f'(x)=-3x^2+2$이므로

$f(2)=-4$, $f(-2)=4$, $f'(c)=-3c^2+2$

따라서 $\frac{-4-4}{2-(-2)}=-3c^2+2$이므로

$-2=-3c^2+2$, $\quad 3c^2=4$

$c^2=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore c=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

033-① $f(x)=x^2+ax+b$에서

$f'(x)=2x+a$

$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$에서

$$(x+h)^2+a(x+h)+b$$
$$=x^2+ax+b+h\{2(x+\theta h)+a\}$$
$$x^2+2hx+h^2+ax+ah+b$$
$$=x^2+ax+b+2hx+2\theta h^2+ah$$

$h^2=2\theta h^2$ $\quad\therefore \theta=\frac{1}{2}$ ($\because h\neq0$)

답 $\frac{1}{2}$

중단원 연습 문제

본책 103~106쪽

01 ② **02** $\frac{4}{3}$ **03** -3 **04** 22 **05** -4

06 ④ **07** -4 **08** 0 **09** 풀이 참조

10 $-\frac{1}{4}$ **11** $3\sqrt{26}$ **12** $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **13** ⑤

14 $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ **15** $\frac{1}{15}$ **16** 97 **17** ④

18 ②

01 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로 $f'(x)$의 최댓값을 구한다.

풀이 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+1$로 놓으면

$$f'(x)=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$$

따라서 $x=-1$일 때 접선의 기울기 $f'(x)$의 최댓값은 1이다.

답 ②

02 전략 두 점 P, Q에서의 접선의 기울기를 이용한다.

풀이 직선 $y=-2x+1$과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

$f(x)=x^3-2x^2-5x-1$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-4x-5$$

두 점 P, Q에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$$3x^2-4x-5=\frac{1}{2} \qquad \therefore 6x^2-8x-11=0$$

두 점 P, Q의 x좌표는 이 이차방정식의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 x좌표의 합은

$$-\frac{-8}{6}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

03 전략 곡선 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 방정식을 먼저 구한다.

풀이 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$으로 놓으면 $\quad f'(x)=-x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=-2$$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y+2=-2(x-2)$

$$\therefore y=-2x+2$$

따라서 곡선 $y=x^2-k$와 직선 $y=-2x+2$가 접하므로 방정식

$$x^2-k=-2x+2,\ \text{즉}\ x^2+2x-k-2=0$$

이 중근을 갖는다. 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-(-k-2)=0 \qquad \therefore k=-3$$

답 -3

04 전략 기울기가 주어진 접선의 접점의 좌표를 구한다.

풀이 직선 $7x+y+10=0$의 기울기가 -7이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 -7이다. ··· ❶

$f(x)=-x^3+3x^2+2x$로 놓으면

$$f'(x)=-3x^2+6x+2$$

이때 곡선 $y=f(x)$와 기울기가 -7인 접선의 접점의 좌표를 $(a,\ -a^3+3a^2+2a)$라 하면

$$f'(a)=-3a^2+6a+2=-7$$

$$a^2-2a-3=0, \qquad (a+1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=-1\ \text{또는}\ a=3$$ ··· ❷

즉 접점의 좌표가 $(-1,\ 2)$, $(3,\ 6)$이므로 두 접선의 방정식은

$$y-2=-7(x+1),\ y-6=-7(x-3)$$

$$\therefore y=-7x-5,\ y=-7x+27$$

따라서 구하는 y절편의 합은

$$-5+27=22$$ ··· ❸

답 22

채점 기준	비율
❶ 접선의 기울기를 알 수 있다.	20 %
❷ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ 두 접선의 y절편의 합을 구할 수 있다.	30 %

05 전략 접점의 좌표를 $(a,\ a^3)$으로 놓고 접선이 점 $(0,\ 2)$를 지남을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3$으로 놓으면

$$f'(x)=3x^2$$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(a)=3a^2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-a^3=3a^2(x-a)$$

$$\therefore y=3a^2x-2a^3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$$2=-2a^3, \qquad a^3=-1$$

$$\therefore a=-1$$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$$y=3x+2$$

이 직선이 점 $(-2,\ k)$를 지나므로

$$k=-6+2=-4$$

답 -4

06 전략 접점의 좌표를 $(a,\ a^4-a^2+2)$로 놓고 접선이 원점을 지남을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4-x^2+2$로 놓으면

$$f'(x)=4x^3-2x$$

접점의 좌표를 $(a,\ a^4-a^2+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(a)=4a^3-2a$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^4-a^2+2)=(4a^3-2a)(x-a)$$

$$\therefore y=(4a^3-2a)x-3a^4+a^2+2$$

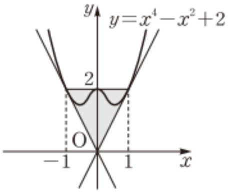
이 직선이 원점을 지나므로

$3a^4-a^2-2=0$, $\quad (a^2-1)(3a^2+2)=0$

$(a+1)(a-1)(3a^2+2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ ($\because 3a^2+2>0$)

따라서 접점의 좌표가 $(-1, 2)$, $(1, 2)$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$

답 ④

07

전략 접점에서의 접선의 기울기가 서로 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+2ax+8$, $g(x)=-x^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2-6x+2a$, $\quad g'(x)=-2x+a$ ··· ❶

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 접한다고 하면 $f(t)=g(t)$에서

$t^3-3t^2+2at+8=-t^2+at$

$\therefore t^3-2t^2+at+8=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2-6t+2a=-2t+a$

$\therefore a=4t-3t^2 \quad \cdots\cdots$ ㉡ ··· ❷

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3-2t^2+(4t-3t^2)t+8=0$

$t^3-t^2-4=0$, $\quad (t-2)(t^2+t+2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t^2+t+2>0$) ··· ❸

$t=2$를 ㉡에 대입하면

$a=8-12=-4$ ··· ❹

답 -4

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $g'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ a와 t에 대한 등식을 세울 수 있다.	50 %
❸ t의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	10 %

08

전략 구간 $[-1, 1]$에서 $f'(c)=0$을 만족시키는 c의 값을 찾는다.

풀이 함수 $f(x)=x^4-2x^2+1$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 c가 구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=x^4-2x^2+1$에서 $\quad f'(x)=4x^3-4x$

$f'(c)=4c^3-4c=4c(c+1)(c-1)=0$이므로

$c=0$ ($\because -1<c<1$)

답 0

09

전략 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 $h(x)$에서 평균값 정리를 적용한다.

풀이 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면 $a<x<b$인 x에 대하여

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ ··· ❶

이때 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, x]$에서 연속이고 열린구간 (a, x)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(c)$

인 c가 구간 (a, x)에 적어도 하나 존재한다. ··· ❷

그런데 $h'(c)=0$이므로

$h(x)-h(a)=0$

$\therefore h(x)=h(a)$

따라서 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수이므로

$f(x)-g(x)=k$ (k는 상수)

$\therefore f(x)=g(x)+k$ ··· ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $h'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $h(x)$에서 평균값 정리를 적용할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)=g(x)+k$임을 보일 수 있다.	40 %

10

전략 곡선이 지나는 점과 접선의 기울기를 이용하여 a, b, c에 대한 식의 값을 구한다.

풀이 $\frac{1}{a-2}+\frac{1}{b-2}+\frac{1}{c-2}$

$=\frac{(b-2)(c-2)+(a-2)(c-2)+(a-2)(b-2)}{(a-2)(b-2)(c-2)} \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$로 놓으면

$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, -4)$를 지나므로

$f(2)=-4$

$(2-a)(2-b)(2-c)=-4$

$\therefore (a-2)(b-2)(c-2)=4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

또 $f'(2)=-1$이므로

$(2-b)(2-c)+(2-a)(2-c)+(2-a)(2-b)=-1$

$\therefore (b-2)(c-2)+(a-2)(c-2)+(a-2)(b-2)=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 주어진 식의 값은 $-\frac{1}{4}$이다.

답 $-\frac{1}{4}$

11 전략 점 $(1,\ -8)$에서의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=-2x^3+x-7$로 놓으면

$$f'(x)=-6x^2+1$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(1,\ -8)$에서의 접선의 기울기는 $\quad f'(1)=-5$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(-8)=-5(x-1)$$

$$\therefore y=-5x-3 \qquad \cdots ❶$$

직선 $y=-5x-3$과 곡선 $y=-2x^3+x-7$의 교점의 x좌표는

$$-2x^3+x-7=-5x-3,\ \text{즉 } x^3-3x+2=0$$

의 실근이므로

$$(x-1)^2(x+2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=-2$$

$$\therefore Q(-2,\ 7) \qquad \cdots ❷$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\sqrt{(-2-1)^2+(7+8)^2}=3\sqrt{26} \qquad \cdots ❸$$

답 $3\sqrt{26}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 점 P, Q 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

12 전략 점 $\left(a_n,\ \frac{1}{2}a_n^2\right)$에서의 접선의 x절편을 이용하여 a_{n+1}을 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$으로 놓으면

$$f'(x)=x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-2=2(x-2) \qquad \therefore y=2x-2$$

이 직선의 x절편이 1이므로

$$a_1=1$$

또 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(a_n,\ \frac{1}{2}a_n^2\right)$에서의 접선의 기울기는 $\quad f'(a_n)=a_n$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}a_n^2=a_n(x-a_n)$$

$$\therefore y=a_nx-\frac{1}{2}a_n^2$$

이 직선의 x절편이 $\frac{1}{2}a_n$이므로

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

답 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Remark▶ 등비수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$에 대하여

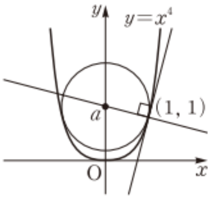
$a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n$

인 관계가 성립하면 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이다.

➡ $a_n=ar^{n-1}$

13 전략 곡선 $y=x^4$ 위의 점 $(1,\ 1)$을 지나고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선이 원의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 중심이 y축 위에 있는 원의 방정식을 $x^2+(y-a)^2=r^2$이라 하면 오른쪽 그림과 같이 점 $(1,\ 1)$에서 곡선 $y=x^4$과 원이 접하므로 곡선 $y=x^4$ 위의 점 $(1,\ 1)$을 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선이 원의 중심 $(0,\ a)$를 지난다.



$f(x)=x^4$으로 놓으면

$$f'(x)=4x^3$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=4$$

이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 직선의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{4}(x-1)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$$a=\frac{5}{4}$$

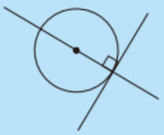
따라서 원의 반지름의 길이 r는 두 점 $(1,\ 1)$, $\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$ 사이의 거리와 같으므로

$$r=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$$

답 ⑤

Remark▶ 원의 접선

① (원의 반지름의 길이)
=(원의 중심과 접점 사이의 거리)
② 원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선과 수직이다.



14 전략 두 접선의 기울기의 곱이 -1임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+1$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$
접점의 좌표를 $(a,\ a^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(a)=2a$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^2+1)=2a(x-a)$$

$$\therefore\ y=2ax-a^2+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 $y=x$ 위의 점 P의 좌표를 $(t,\ t)$라 하면 직선 ㉠이 점 P를 지나므로

$$t=2at-a^2+1$$

$$\therefore\ a^2-2at+t-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이차방정식 ㉡의 두 실근을 α, β라 하면 α, β는 접점의 x좌표이므로 접선의 기울기는 각각

$$2\alpha,\ 2\beta$$

그런데 두 접선이 직교하므로

$$2\alpha\cdot 2\beta=-1 \qquad \therefore\ 4\alpha\beta=-1$$

이때 ㉡에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=t-1$$

이므로

$$4(t-1)=-1 \qquad \therefore\ t=\frac{3}{4}$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$$

답 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$

15 전략 두 직선이 서로 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^2+3$, $g(x)=ax^2-1$로 놓으면

$$f'(x)=-2x,\ g'(x)=2ax$$

두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$이므로

$$-t^2+3=at^2-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $x=t$인 점에서 두 곡선의 접선이 서로 수직이므로
$f'(t)g'(t)=-1$에서

$$-2t\cdot 2at=-1$$

$$\therefore\ at^2=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad -t^2+3=\frac{1}{4}-1$

$$\therefore\ t^2=\frac{15}{4}$$

$t^2=\frac{15}{4}$를 ㉡에 대입하면 $\quad a\cdot\frac{15}{4}=\frac{1}{4}$

$$\therefore\ a=\frac{1}{15}$$

답 $\frac{1}{15}$

다른 풀이 두 곡선의 교점의 x좌표는
$-x^2+3=ax^2-1$에서

$$(a+1)x^2=4, \qquad x^2=\frac{4}{a+1}$$

$$\therefore\ x=\pm\frac{2}{\sqrt{a+1}}$$

이때 x좌표가 $\frac{2}{\sqrt{a+1}}$인 점에서 두 곡선에 그은 접선의 기울기의 곱이 -1이므로

$$f'\left(\frac{2}{\sqrt{a+1}}\right)g'\left(\frac{2}{\sqrt{a+1}}\right)$$

$$=\left(-2\cdot\frac{2}{\sqrt{a+1}}\right)\left(2a\cdot\frac{2}{\sqrt{a+1}}\right)$$

$$=-1$$

$$\frac{16a}{a+1}=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{15}$$

Remark▶
x좌표가 $-\frac{2}{\sqrt{a+1}}$인 점에서의 접선의 기울기를 이용해도 $a=\frac{1}{15}$

16 전략 주어진 조건을 이용하여 $g(2)$, $g'(2)$의 값을 구한다.

풀이 조건 ㈏의 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.
즉 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$$f(2)=g(2)$$

조건 ㈎의 $g(x)=x^3f(x)-7$에 $x=2$를 대입하면

$$g(2)=8f(2)-7, \qquad g(2)=8g(2)-7$$

$$7g(2)=7 \qquad \therefore\ g(2)=1$$

$$\therefore\ f(2)=g(2)=1$$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)+g(2)-g(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=f'(2)-g'(2)$$

즉 $f'(2)-g'(2)=2$이므로

$$f'(2)=2+g'(2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$g(x)=x^3f(x)-7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$$

양변에 $x=2$를 대입하면

$$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$$
$$=12+8\{2+g'(2)\}\ (\because ㉠)$$
$$=28+8g'(2)$$
$$7g'(2)=-28 \qquad \therefore g'(2)=-4$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 방정식은

$$y-g(2)=g'(2)(x-2)$$
$$y-1=-4(x-2) \qquad \therefore y=-4x+9$$

즉 $a=-4$, $b=9$이므로

$$a^2+b^2=(-4)^2+9^2=97$$

답 97

17 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식을 구하여 접선이 y축과 만나는 점, 즉 점 P의 좌표를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $\quad 1+a+b=2$

$$\therefore a+b=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=x^3+ax^2+bx$에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

따라서 점 $(t, f(t))$, 즉 (t, t^3+at^2+bt)에서의 접선의 방정식은

$$y-(t^3+at^2+bt)=(3t^2+2at+b)(x-t)$$
$$\therefore y=(3t^3+2at+b)x-2t^3-at^2$$

$x=0$을 대입하면 $\quad y=-2t^3-at^2$

$$\therefore \mathrm{P}(0, -2t^3-at^2)$$
$$\therefore g(t)=|-2t^3-at^2|=t^2|2t+a|$$

조건 (나)에서 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $t=-\frac{a}{2}$에서 미분가능해야 한다.

이때

$$g\left(-\frac{a}{2}+h\right)=\left(-\frac{a}{2}+h\right)^2|2h|$$
$$=\left(h^2-ah+\frac{a^2}{4}\right)|2h|,$$
$$g\left(-\frac{a}{2}\right)=0$$

이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{g\left(-\frac{a}{2}+h\right)-g\left(-\frac{a}{2}\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{\left(h^2-ah+\frac{a^2}{4}\right)\cdot2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\left(2h^2-2ah+\frac{a^2}{2}\right)$$
$$=\frac{a^2}{2},$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{g\left(-\frac{a}{2}+h\right)-g\left(-\frac{a}{2}\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{\left(h^2-ah+\frac{a^2}{4}\right)\cdot(-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\left(-2h^2+2ah-\frac{a^2}{2}\right)$$
$$=-\frac{a^2}{2}$$

즉 $\frac{a^2}{2}=-\frac{a^2}{2}$이므로

$$a=0$$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $\qquad b=1$

따라서 $f(x)=x^3+x$이므로

$$f(3)=3^3+3=30$$

답 ④

18 전략 삼각형 OAP의 넓이가 최대인 점 P에서의 접선의 기울기가 1임을 이용한다.

풀이 점 P에서의 접선이 직선 $y=x$와 평행할 때, 즉 접선의 기울기가 1일 때 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 된다.

즉 곡선 $y=f(x)$의 $x=\frac{1}{2}$인 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

$f(x)=ax(x-2)^2$에서

$$f'(x)=a(x-2)^2+2ax(x-2)$$
$$=3ax^2-8ax+4a$$

따라서 $\frac{3}{4}a-4a+4a=1$이므로

$$a=\frac{4}{3}$$

답 ②

Ⅱ. 다항함수의 미분법

05 도함수의 활용 (2)

유제

본책 113~132쪽

034-❶ $f(x)=2x^3+6x^2-18x-5$에서

$f'(x)=6x^2+12x-18=6(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	49	↘	-15	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -3]$, $[1,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-3,\ 1]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

035-❶ (1) $f(x)=-x^3+x^2+ax$에서

$f'(x)=-3x^2+2x+a$

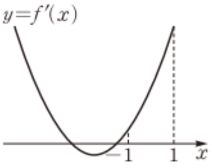
함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1+3a\le 0$ $\therefore\ a\le -\frac{1}{3}$

(2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+ax-1$에서

$f'(x)=x^2+4x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ 1)$에서 증가하려면 오른쪽 그림과 같이 $-1<x<1$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로



$f'(-1)=-3+a\ge 0$ $\therefore\ a\ge 3$

답 (1) $a\le -\frac{1}{3}$ (2) $a\ge 3$

036-❶ $f(x)=2x^3+ax^2+bx-4$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 16을 가지므로

$f(-2)=16$, $f'(-2)=0$

$\therefore\ -16+4a-2b-4=16$, $24-4a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-12$

즉 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-4$이므로

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=-11$을 가지므로 $\alpha=1$, $\beta=-11$

답 $a=3$, $b=-12$, $\alpha=1$, $\beta=-11$

036-❷ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 18을 가지므로

$f(-2)=18$, $f'(-2)=0$

$-8a+4b-2c+d=18$ …… ㉠

$12a-4b+c=0$ …… ㉡

또 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f(0)=2$, $f'(0)=4$

$d=2$, $c=4$ …… ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 대입한 후 연립하여 풀면

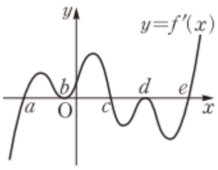
$a=5$, $b=16$

따라서 $f(x)=5x^3+16x^2+4x+2$이므로

$f(1)=5+16+4+2=27$

답 27

037-❶ 오른쪽 그림과 같이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 순서대로 a, b, c, d, e라 하면 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘		↘	극소	↗

따라서 $y=f(x)$는 $x=a$, $x=e$에서 극소, $x=c$에서 극대이므로 $y=f(x)$가 극값을 갖는 x의 개수는 3이다.

답 3

037-❷ $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$

$\therefore\ b=0$, $-12+4a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=0$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+c$이고, 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

05 도함수의 활용 (2)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이므로

$f(0)=5 \qquad \therefore c=5$

즉 $f(x)=-x^3+3x^2+5$이고 $x=2$에서 극대이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f(2)=-8+12+5=9$

답 9

038-❶ (1) $f(x)=-x^3+3x^2-2$에서

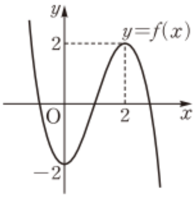
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 -2, $x=2$에서 극댓값 2를 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=-x^4+4x^3-3$에서

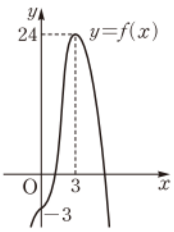
$f'(x)=-4x^3+12x^2=-4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-3	↗	24	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 24를 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

039-❶ $f(x)=x^3-ax^2+ax-1$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0, \qquad a(a-3)\le 0$

$\therefore 0\le a\le 3$

답 $0\le a\le 3$

039-❷ $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^3+ax^2$에서

$f'(x)=-x^3+6x^2+2ax=-x(x^2-6x-2a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $x^2-6x-2a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 $x^2-6x-2a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9+2a>0 \qquad \therefore a>-\frac{9}{2}$

이때 $x=0$이 방정식 $x^2-6x-2a=0$의 근이 아니어야 하므로

$-2a\ne 0 \qquad \therefore a\ne 0$

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는

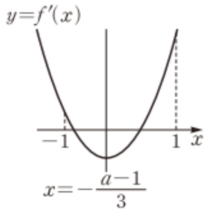
$-\frac{9}{2}<a<0$ 또는 $a>0$

답 $-\frac{9}{2}<a<0$ 또는 $a>0$

040-❶ $f(x)=x^3+(a-1)x^2-ax$에서

$f'(x)=3x^2+2(a-1)x-a$

방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+3a$

$=a^2+a+1$

$=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

따라서 모든 실수 a에 대하여 항상 성립한다.

(ii) $f'(-1)=3-2(a-1)-a>0$에서

$-3a>-5 \qquad \therefore a<\frac{5}{3}$

(iii) $f'(1)=3+2(a-1)-a>0$에서

$a>-1$

(iv) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=-\frac{a-1}{3}$이므로

$-1<-\frac{a-1}{3}<1$

$\therefore -2<a<4$

이상에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$-1<a<\frac{5}{3}$

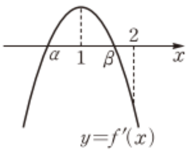
답 $-1<a<\frac{5}{3}$

040-❷ $f(x)=-x^3+ax^2-ax$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-a$

방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha<1$, $1<\beta<2$이어야 하므로



(i) $f'(1)=-3+2a-a>0$에서

$a>3$

(ii) $f'(2)=-12+4a-a<0$에서

$3a<12 \quad \therefore a<4$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$3<a<4$

답 $3<a<4$

041-❶ (1) $f(x)=-2x^3+5x^2-4x+2$에서

$f'(x)=-6x^2+10x-4$

$=-2(3x-2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

구간 $[0, 3]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	$\frac{26}{27}$	↗	1	↘	-19

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 2, $x=3$일 때 최솟값 -19를 갖는다.

(2) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+10$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ $(\because -1\le x\le 1)$

구간 $[-1, 1]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	↗	10	↘	-3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 10, $x=1$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

답 풀이 참조

042-❶ $f(x)=ax^4-4ax^3+b$에서

$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$ $(a>0)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3$ $(\because 1\le x\le 4)$

구간 $[1, 4]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b-3a$	↘	$b-27a$	↗	b

이때 $a>0$이므로 $\quad b-27a<b-3a<b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 b, $x=3$일 때 최솟값 $b-27a$를 갖는다.

즉 $b=6$, $b-27a=-3$이므로 $\quad a=\frac{1}{3}$, $b=6$

$\therefore ab=2$

답 2

042-❷ $f(x)=-x^3+12x+a$에서

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=2$

구간 $[-2, 3]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a-16$	↗	$a+16$	↘	$a+9$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $a+16$, $x=-2$일 때 최솟값 $a-16$을 갖는다.

즉 $a+16=20$이므로 $\quad a=4$

따라서 구하는 최솟값은

$a-16=4-16=-12$

답 -12

043-❶ 점 P의 좌표를 (t, t^2+2)라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=t^2+(t^2+1)^2+(t-10)^2+(t^2+1)^2$

$=t^2+t^4+2t^2+1+t^2-20t+100+t^4+2t^2+1$

$=2t^4+6t^2-20t+102$

$f(t)=2t^4+6t^2-20t+102$로 놓으면

$f'(t)=8t^3+12t-20=4(t-1)(2t^2+2t+5)$

이때 $2t^2+2t+5=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0$이므로

$f'(t)=0$에서 $\quad t=1$

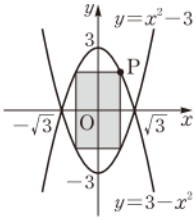
함수 $f(t)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	90	↗

따라서 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은 $f(1)=90$이다.

답 90

044-❶ 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 a $(0<a<\sqrt{3})$라 하면



$P(a, 3-a^2)$

직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a\cdot 2(3-a^2)=-4a^3+12a$

$\therefore S'(a)=-12a^2+12=-12(a+1)(a-1)$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=1$ ($\because 0<a<\sqrt{3}$)

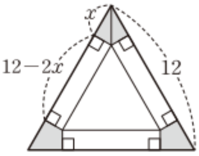
$0<a<\sqrt{3}$에서 $S(a)$의 증감표는 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=1$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$S(1)=-4+12=8$ 　　답 8

045-❶ 오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 꼭짓점으로부터 거리가 x인 점까지 자른다고 하면 삼각기둥의 밑면은 한 변의 길이가 $12-2x$인 정삼각형이므로 x의 값의 범위는 $\quad 0<x<6$



이때 상자의 밑면의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2=\sqrt{3}(x-6)^2$$

상자의 높이는 $\quad x\cdot\tan 30°=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=\sqrt{3}(x-6)^2\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}=x(x-6)^2$$

$$\therefore V'(x)=(x-6)^2+2x(x-6)=3(x-2)(x-6)$$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=2$ ($\because 0<x<6$)

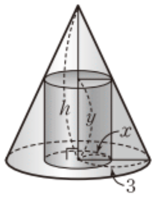
$0<x<6$에서 $V(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$V(2)=2\cdot(-4)^2=32$ 　　답 32

045-❷ 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 각각 x $(0<x<3)$, y라 하고 원뿔의 높이를 h라 하면



$h:3=(h-y):x$

$3(h-y)=hx, \quad h-y=\dfrac{hx}{3}$

$\therefore y=h\left(1-\dfrac{x}{3}\right)$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2h\left(1-\frac{x}{3}\right)=\pi h\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)$$

$$\therefore V'(x)=\pi h(2x-x^2)=-\pi hx(x-2)$$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=2$ ($\because 0<x<3$)

$0<x<3$에서 $V(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 2이다.

답 2

중단원 연습 문제

본책 133~137쪽

01 27	**02** $k\le-\frac{4}{3}$		**03** 3	**04** ②
05 $\frac{1}{3}$	**06** ④	**07** 7	**08** 15	**09** ④
10 ④	**11** $\frac{11}{4}$	**12** ③	**13** $a\le-2$	
14 ①	**15** 21	**16** 3		
17 $-\frac{1}{4}<a<2$ 또는 $a>2$			**18** $\frac{25}{16}$	**19** $\frac{16}{27}$
20 ②	**21** ③	**22** ⑤	**23** 12	

01 전략 증가하는 범위에서 $f'(x)\ge0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $-2\le x\le4$이므로 부등식

$f'(x)\ge0$, 즉 $-3x^2+2ax+b\ge0$

의 해가 $-2\le x\le4$이다.

따라서 방정식 $-3x^2+2ax+b=0$의 두 근이 -2, 4이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{2a}{3}=-2+4$, $\dfrac{b}{-3}=-2\cdot4$

$\therefore a=3,\ b=24$

$\therefore a+b=27$ 　　답 27

02 전략 함수 $f(x)$에서 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면 $f(x)$는 감소함수이다.

풀이 $f(x)=-x^3+2x^2+kx+3$에서

$$f'(x)=-3x^2+4x+k$$

$f(x)$는 감소함수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2+3k\le 0$$

$$\therefore k\le -\frac{4}{3}$$

답 $k\le -\frac{4}{3}$

03 전략 극값을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+9x+b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+9$ ··· ❶

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 c를 가지므로

$f(1)=c$, $f'(1)=0$

$1+a+9+b=c$ ······ ㉠

$3+2a+9=0$ $\therefore a=-6$ ··· ❷

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x+b$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$d=3$

이때의 극솟값이 1이므로

$f(3)=27-54+27+b=1$ $\therefore b=1$

$a=-6$, $b=1$을 ㉠에 대입하면

$1-6+9+1=c$ $\therefore c=5$ ··· ❸

$\therefore a+b+c+d=3$ ··· ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	10 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ b, c, d의 값을 구할 수 있다.	60 %
❹ $a+b+c+d$의 값을 구할 수 있다.	10 %

04 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f(x)$의 극값과 증가, 감소를 알아본다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$이 되는 x의 값이 -2, 1이므로 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

앞의 증감표에서 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$에서 감소, 구간 $[-2, \infty)$에서 증가하고 $x=-2$에서 극소이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은 ②이다.

답 ②

05 전략 삼차함수는 항상 극댓값이 극솟값보다 크므로 (극댓값)$-$(극솟값)$=\frac{1}{2}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2-6a^2x$에서

$$f'(x)=3x^2-3ax-6a^2$$
$$=3(x^2-ax-2a^2)$$
$$=3(x+a)(x-2a)$$

$f'(x)=0$에서

$x=-a$ 또는 $x=2a$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{7}{2}a^3$	↘	$-10a^3$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극댓값 $\frac{7}{2}a^3$, $x=2a$에서 극솟값 $-10a^3$을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 차가 $\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{7}{2}a^3-(-10a^3)=\frac{1}{2},\quad \frac{27}{2}a^3=\frac{1}{2}$$

$$a^3=\frac{1}{27}\quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

06 전략 증감표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)=-x^4+6x^2+8x-6$에서

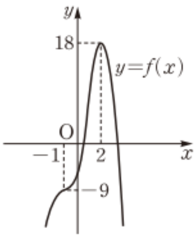
$$f'(x)=-4x^3+12x+8=-4(x+1)^2(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-9	↗	18	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(x)$는 극값을 1개 갖는다.

ㄴ. $f(x)$는 구간 $(0, 1)$에서 증가한다.

ㄷ. $f(x)$의 최댓값이 18이므로 $y=f(x)$의 치역은

$\{y \mid y \le 18\}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

07 전략 극값을 갖지 않기 위한 $f'(x)$의 조건을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+kx^2+3x+2$에서

$f'(x)=3x^2+2kx+3$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다. ⋯ ❶

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-9\le 0,\quad (k+3)(k-3)\le 0$

$\therefore -3\le k\le 3$ ⋯ ❷

따라서 정수 k는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 7개이다. ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$의 근의 조건을 알 수 있다.	50 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	10 %

08 전략 주어진 구간에서 $f(x)$의 극값과 구간의 양 끝 점의 함숫값을 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=-x^3+3x^2+9x-1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1\ (\because -2\le x\le 2)$

구간 $[-2,\ 2]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	-6	↗	21

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 21, $x=-1$일 때 최솟값 -6을 가지므로

$M=21,\ m=-6$

$\therefore M+m=15$ 답 15

09 전략 $g(x)=t$로 놓고 $f(t)$의 최댓값을 구한다.

풀이 $g(x)=-x^2+3\le 3$이므로 $g(x)=t$로 놓으면

$t\le 3$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=2t^3-6t-4$에서

$f'(t)=6t^2-6=6(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

$t\le 3$에서 $f(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	↗	0	↘	-8	↗	32

따라서 주어진 함수는 $t=3$일 때 최댓값 32를 갖는다.

답 ④

다른 풀이 $h(x)=(f\circ g)(x)$로 놓으면

$h(x)=2(-x^2+3)^3-6(-x^2+3)-4$이므로

$h'(x)=6(-x^2+3)^2\cdot(-2x)-6(-2x)$

$=-12x\{(-x^2+3)^2-1\}$

$=-12x(x^2-2)(x^2-4)$

$=-12x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+2)(x-2)$

$h'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$

또는 $x=\sqrt{2}$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	0	↘	-8	↗	32	↘	-8	↗	0	↘

따라서 $h(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 32를 갖는다.

10 전략 주어진 구간에서 $f(x)$의 극값과 구간의 양 끝 점의 함숫값을 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)\ (a>0)$

$f'(x)=0$에서 $x=2\ (\because 1\le x\le 3)$

$1\le x\le 3$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b-2a$	↘	$b-4a$	↗	b

이때 $a>0$이므로

$b-4a<b-2a<b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 b, $x=2$일 때 최솟값 $b-4a$를 갖는다.

즉 $b=4,\ b-4a=-16$이므로

$a=5,\ b=4$

$\therefore a+b=9$ 답 ④

11 전략 점 P의 x좌표를 t로 놓고 $\overline{AP}^2$을 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2-1)$이라 하면

$\overline{AP}^2=(t-0)^2+(t^2-3)^2$

$=t^4-5t^2+9$ ⋯ ❶

$f(t)=t^4-5t^2+9$로 놓으면

$$f'(t)=4t^3-10t=2t(2t^2-5)$$

$f'(t)=0$에서

$$t=0 \text{ 또는 } t=-\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ 또는 } t=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

함수 $f(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$\frac{11}{4}$	↗	9	↘	$\frac{11}{4}$	↗

⋯ ❷

따라서 $f(t)$는 $t=-\frac{\sqrt{10}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{10}}{2}$일 때 최솟값 $\frac{11}{4}$을 가지므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2$의 최솟값은 $\frac{11}{4}$이다. ⋯ ❸

답 $\frac{11}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AP}}^2$을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f(t)$에 대한 증감표를 작성할 수 있다.	50 %
❸ $\overline{\mathrm{AP}}^2$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

12 전략 함수 $f(x)$가 증가함수임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+3x-1$에서

$$f'(x)=3x^2+3>0$$

이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

$\{f(x)\}^3+3f(x)-1=f(f(x))$이므로 주어진 부등식은

$$f(2x^2+5x+2)\le f(f(x))$$

따라서 주어진 부등식의 해는 부등식

$$2x^2+5x+2\le f(x)$$

의 해와 같으므로 $2x^2+5x+2\le x^3+3x-1$에서

$$x^3-2x^2-2x-3\ge0$$

$$\therefore (x-3)(x^2+x+1)\ge0$$

이때 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$$x\ge3$$

따라서 $a=3$이므로

$$f(a)=f(3)=27+9-1=35$$

답 ③

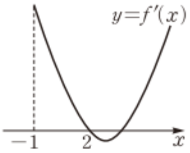
13 전략 조건을 만족시키는 $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 생각한다.

풀이 $f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-12ax+1$에서

$$f'(x)=6x^2+6(a-2)x-12a$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 2)$에서 증가하려면 $-1<x<2$에서 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

이때 $f'(2)=0$이므로 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{a-2}{2}$이므로

$$-\frac{a-2}{2}\ge2, \qquad a-2\le-4$$

$$\therefore a\le-2$$

답 $a\le-2$

14 전략 $f(x)$의 그래프를 이용하여 p를 A, B의 x좌표로 나타낸다.

풀이 두 점 A, B의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(\beta, 0)$으로 놓으면

$$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)\ (k>0)$$

$$\therefore f'(x)=2k(x-\alpha)(x-\beta)+k(x-\alpha)^2$$
$$=k(x-\alpha)(3x-\alpha-2\beta)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\alpha$ 또는 $x=\frac{\alpha+2\beta}{3}$

따라서 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\frac{\alpha+2\beta}{3}$에서 극소이므로

$$p=\frac{\alpha+2\beta}{3} \qquad \therefore \mathrm{H}\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}, 0\right)$$

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\alpha+2\beta}{3}-\alpha=\frac{2(\beta-\alpha)}{3}$이므로

$$\beta-\alpha=1$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\beta-\alpha=1$$

답 ①

15 전략 $f(x)$의 그래프의 대칭성을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$$a=c=0$$

즉 $f(x)=x^3+bx$에서

$$f'(x)=3x^2+b$$

함수 $f(x)$는 $x=p$에서 극댓값 $f(p)$, $x=q$에서 극솟값 $f(q)$를 가지므로 방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 p, q이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$p+q=0,\ pq=\frac{b}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 점 A, B의 좌표가 각각 $(p, f(p))$, $(q, f(q))$이므로 직선 AB의 기울기는

$$\frac{f(p)-f(q)}{p-q}$$
$$=\frac{p^3+bp-(q^3+bq)}{p-q}$$
$$=\frac{(p^3-q^3)+b(p-q)}{p-q}$$
$$=\frac{(p-q)(p^2+pq+q^2)+b(p-q)}{p-q}$$
$$=p^2+pq+q^2+b$$
$$=(p+q)^2-pq+b$$
$$=\frac{2}{3}b\ (\because ㉠)$$

즉 $\frac{2}{3}b=-\frac{4}{3}$이므로

$$b=-2$$

따라서 $f(x)=x^3-2x$이므로

$$f(3)=27-6=21$$

답 21

16

전략 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

풀이 $f(x)=2x^3-9x^2+12x$로 놓으면

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

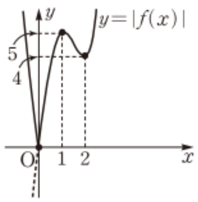
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	4	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=1$에서 극댓값 5,

$x=2$에서 극솟값 4

를 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 $y=|f(x)|$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|2x^3-9x^2+12x|$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 0, 1, 2의 3개이다.

답 3

Remark▶

함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$일 때, $f'(a)$의 값이 존재하지 않더라도 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.
따라서 위의 그림에서 $y=|f(x)|$의 $x=0$에서의 미분계수는 존재하지 않지만 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

17

전략 사차함수가 극댓값을 갖기 위한 도함수의 조건을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4-2(a+1)x^2-4ax$에서

$$f'(x)=4x^3-4(a+1)x-4a$$
$$=4\{x^3-(a+1)x-a\}$$
$$=4(x+1)(x^2-x-a) \quad \cdots ❶$$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=-1$이므로 이차방정식 $x^2-x-a=0$이 -1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. $\cdots$ ❷

이차방정식 $x^2-x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=1+4a>0$$
$$\therefore a>-\frac{1}{4}$$

이때 $x=-1$이 방정식 $x^2-x-a=0$의 근이 아니어야 하므로

$$1+1-a\neq 0 \qquad \therefore a\neq 2$$

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$$-\frac{1}{4}<a<2 \text{ 또는 } a>2 \quad \cdots ❸$$

답 $-\frac{1}{4}<a<2$ 또는 $a>2$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)=0$의 근의 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

18

전략 a의 값의 범위를 나누어 $f(x)$의 최댓값을 구한다.

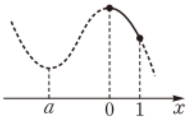
풀이 $f(x)=-x^3+\frac{3}{2}ax^2-a$에서

$$f'(x)=-3x^2+3ax$$
$$=-3x(x-a)$$

$f'(x)=0$에서

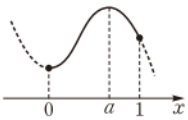
$$x=0 \text{ 또는 } x=a$$

(i) $a\leq 0$이면 오른쪽 그림과 같이 $f(x)$는 $x=0$에서 최대이므로



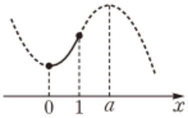
$$g(a)=f(0)=-a$$

(ii) $0<a\leq 1$이면 오른쪽 그림과 같이 $f(x)$는 $x=a$에서 최대이므로



$$g(a)=f(a)=\frac{1}{2}a^3-a$$

(iii) $a>1$이면 오른쪽 그림과 같이 $f(x)$는 $x=1$에서 최대이므로



$$g(a)=f(1)=\frac{1}{2}a-1$$

이상에서 구하는 함수 $g(a)$는

$$g(a)=\begin{cases} -a & (a\le 0) \\ \frac{1}{2}a^3-a & (0<a\le 1) \\ \frac{1}{2}a-1 & (a>1) \end{cases}$$

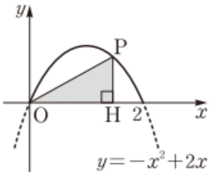
$$\therefore\ g(-2)+g\left(\frac{1}{2}\right)+g(2)=2-\frac{7}{16}=\frac{25}{16}$$

답 $\frac{25}{16}$

19 전략 삼각형의 넓이를 점 P의 좌표를 이용하여 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a,\ -a^2+2a)\ (0<a<2)$라 하면

$\mathrm{H}(a,\ 0)$



삼각형 OPH의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}a(-a^2+2a)=-\frac{1}{2}a^3+a^2$$

$$\therefore\ S'(a)=-\frac{3}{2}a^2+2a=-\frac{3}{2}a\left(a-\frac{4}{3}\right)$$

$S'(a)=0$에서 $a=\frac{4}{3}\ (\because\ 0<a<2)$

$0<a<2$에서 $S(a)$의 증감표는 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=\frac{4}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 삼각형 OPH의 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{27}$$

답 $\frac{16}{27}$

20 전략 주어진 그래프를 이용하여 $f(x)$, $g(x)$를 a, c, e로 나타낸다.

풀이 주어진 그래프에서 $f(x)=0$의 세 근이 $x=a$, $x=c$, $x=e$이므로 삼차함수 $f(x)$는

$$f(x)=m(x-a)(x-c)(x-e)\ (m>0)$$

로 놓을 수 있다.

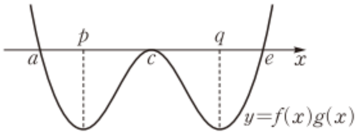
또 $g(x)=0$의 근이 $x=c$이므로 일차함수 $g(x)$는

$$g(x)=n(x-c)\ (n>0)$$

로 놓을 수 있다.

$$\therefore\ f(x)g(x)=mn(x-a)(x-c)^2(x-e)$$

따라서 방정식 $f(x)g(x)=0$의 실근은 $x=a$, $x=c$ (중근), $x=e$이므로 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$f'(b)=f'(d)=0$이므로

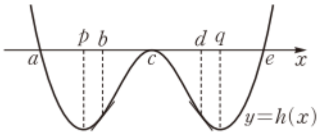
$$h'(b)=f'(b)g(b)+f(b)g'(b)=f(b)g'(b),$$

$$h'(d)=f'(d)g(d)+f(d)g'(d)=f(d)g'(d)$$

이때 $f(b)>0$, $f(d)<0$이고 $g'(x)=n>0$이므로

$$h'(b)>0,\ h'(d)<0$$

따라서 $a<x<c$인 $x=b$에서의 접선의 기울기는 양수이고 $c<x<e$인 $x=d$에서의 접선의 기울기는 음수이므로 b, d의 위치는 다음과 같다.



$$\therefore\ a<p<b,\ d<q<e$$

답 ②

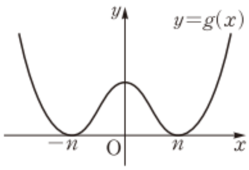
21 전략 함수 $g(x)=(x+n)f(x)$로 놓으면 $g(n)=0$, $g(-n)=0$임을 이용한다.

풀이 삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x)=(x+n)f(x)$$

로 놓으면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.

이때 $g(n)=g(-n)=0$이고 조건 (나)에서 $g(x)\ge 0$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $g(x)=(x+n)^2(x-n)^2$이므로

$$f(x)=(x+n)(x-n)^2=x^3-nx^2-n^2x+n^3$$

$$f'(x)=3x^2-2nx-n^2=(3x+n)(x-n)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\dfrac{n}{3}$ 또는 $x=n$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{n}{3}$	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{32}{27}n^3$	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{n}{3}$에서 극댓값 $\dfrac{32}{27}n^3$을 가지므로

$$a_n=\frac{32}{27}n^3$$

따라서 a_n이 자연수가 되려면 n^3은 27의 배수가 되어야 하므로 자연수 n의 최솟값은 3이다.

답 ③

22

전략 $g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면 $x>-1$에서 $g(x)\geq 0$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

조건 (나)에서 $f(0)=f'(0)$이므로

$$c=b$$

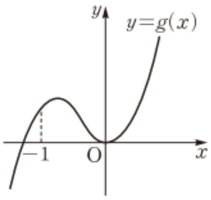
$$\therefore f(x)=x^3+ax^2+bx+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면

$$g(x)=(x^3+ax^2+bx+b)-(3x^2+2ax+b)$$
$$=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$$

이므로 $\quad g(0)=0$

또 조건 (다)에서 $x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이므로 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



즉 $y=g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$$g'(0)=0$$

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$이므로

$$g'(0)=b-2a=0 \qquad \therefore b=2a$$

$$\therefore g(x)=x^3+(a-3)x^2=x^2(x+a-3)$$

$g(x)=0$에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=3-a$$

$3-a\leq -1$이므로 $\quad a\geq 4$

$b=2a$를 ㉠에 대입하면

$$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$$

$$\therefore f(2)=8+4a+4a+2a$$
$$=10a+8\geq 48$$

따라서 $f(2)$의 최솟값은 48이다.

답 ⑤

23

전략 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 a로 나타낸다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$에서

$$f'(x)=3x^2+2ax-a^2$$
$$=(x+a)(3x-a) \ (a>0)$$

$f'(x)$에서 $\quad x=-a$ 또는 $x=\dfrac{a}{3}$

닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$-a$	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	a^3+2	↘	$-\dfrac{5}{27}a^3+2$	↗	a^3+2

즉 함수 $f(x)$는 $x=-a$ 또는 $x=a$일 때 최댓값 a^3+2를 갖고, $x=\dfrac{a}{3}$일 때 최솟값 $-\dfrac{5}{27}a^3+2$를 갖는다.

따라서 $-\dfrac{5}{27}a^3+2=\dfrac{14}{27}$이므로

$$-\frac{5}{27}a^3=-\frac{40}{27}, \qquad a^3=8$$

$$\therefore a=2$$

따라서 최댓값은

$$M=a^3+2=8+2=10$$

$$\therefore a+M=2+10=12$$

답 12

Ⅱ. 다항함수의 미분법

06 도함수의 활용 (3)

유제

본책 141~156쪽

046-① (1) $f(x)=x^4-2x^2-1$로 놓으면

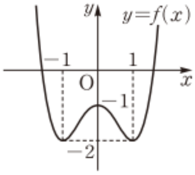
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



(2) $x^3-4x^2+3=2x^2-9x$에서

$x^3-6x^2+9x+3=0$

$f(x)=x^3-6x^2+9x+3$으로 놓으면

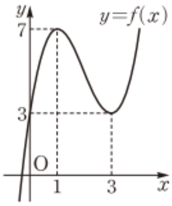
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.



답 (1) 2 (2) 1

047-① $f(x)=x^3-6x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

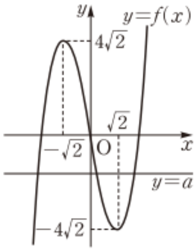
$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$4\sqrt{2}$	↘	$-4\sqrt{2}$	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=a$와의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고 두 개는 양수이어야 하므로

$-4\sqrt{2}<a<0$



답 $-4\sqrt{2}<a<0$

047-② $x^3-2x^2-4x-a=0$에서

$x^3-2x^2-4x=a$

$f(x)=x^3-2x^2-4x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

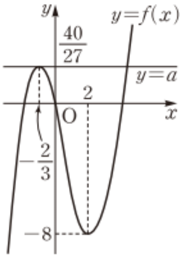
$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{40}{27}$	↘	-8	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=a$와 x좌표가 양수인 한 점에서 만나고, 음수인 점에서 접해야 하므로

$a=\dfrac{40}{27}$



답 $\dfrac{40}{27}$

048-① $x^3-4x=8x+k$에서 $x^3-12x-k=0$

$f(x)=x^3-12x-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$\therefore$ (극댓값)$=f(-2)=16-k$,

(극솟값)$=f(2)=-16-k$

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로

$(16-k)(-16-k)=0$

$(k+16)(k-16)=0$

$\therefore k=-16$ 또는 $k=16$

답 -16, 16

049-❶ (1) $f(x)=x^4+5x-(x-3)$으로 놓으면

$f(x)=x^4+4x+3$

$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because x^2-x+1>0$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 0이므로

$f(x)\ge 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4+5x\ge x-3$이 성립한다.

(2) $f(x)=x^3-x^2-x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\ge 0$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

즉 $x\ge 0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 0이므로

$f(x)\ge 0$

따라서 $x\ge 0$일 때, 부등식 $x^3-x^2-x+1\ge 0$이 성립한다.

답 풀이 참조

050-❶ $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=4x^3-6x-(3x^2-a)$

$=4x^3-3x^2-6x+a$

$h'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

구간 $[-1, 2]$에서 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$a-1$	$\nearrow$	$a+\frac{7}{4}$	$\searrow$	$a-5$	$\nearrow$	$a+8$

따라서 $h(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $a-5$이므로 구간 $[-1, 2]$에서 주어진 부등식이 성립하려면

$a-5\ge 0$

$\therefore a\ge 5$

답 $a\ge 5$

051-❶ 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-10t+6$, $a=\frac{dv}{dt}=6t-10$

점 P가 원점을 통과하는 것은 $x=0$일 때이므로

$t^3-5t^2+6t=0$, $t(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=3$

따라서 점 P가 마지막으로 원점을 통과하는 것은 $t=3$일 때이므로 구하는 가속도는

$a=6\cdot 3-10=8$

답 8

051-❷ 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=4t^3-4$

운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$4t^3-4=0$, $t^3-1=0$

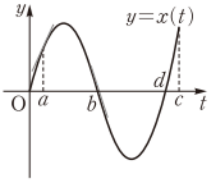
$(t-1)(t^2+t+1)=0$ $\therefore t=1$

따라서 구하는 점 P의 위치는

$x=1^4-4\cdot 1+5=2$

답 2

052-❶ 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하자.



ㄱ. $t=a$에서의 속도는 $x'(a)$이고 오른쪽 그림에서 $x'(a)>0$이므로 $t=a$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

ㄴ. $x'(b)\ne 0$이므로 $x=b$에서 운동 방향을 바꾸지 않는다.

ㄷ. $t=b$, $t=d$일 때 $x(t)=0$이므로 점 P는 출발 후 원점을 두 번 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

053-❶ 자동차가 브레이크를 밟은 지 t초 후의 속도를 v라 하면 $x=7.2t-0.45t^2$에서

$v=\frac{dx}{dt}=7.2-0.9t$ (m/s)

자동차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$7.2-0.9t=0$ $\therefore t=8$

따라서 자동차가 정지할 때까지 걸린 시간은 8초이다.

답 8초

053-❷ 기차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v라 하면 $x=30t-0.5t^2$에서

$v=\frac{dx}{dt}=30-t$ (m/s)

기차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$30-t=0 \qquad \therefore t=30$

따라서 30초 동안 기차가 움직인 거리는

$x=30\times30-0.5\times30^2=450$

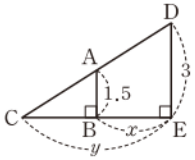
답 450 m

055-❶ 은 아래에 있음

054-❶ t분 후 가로등 바로 밑에서부터 민재는 x m, 그림자의 앞 끝은 y m 떨어져 있다고 하면

$x=90t \qquad \cdots\cdots ㉠$

오른쪽 그림에서



$\triangle ACB \backsim \triangle DCE$

(AA 닮음)

이므로

$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EC}$

$1.5:3=(y-x):y$

㉠을 위의 식에 대입하면

$1.5:3=(y-90t):y, \qquad 1.5y=3y-270t$

$1.5y=270t \qquad \therefore y=180t$

양변을 t에 대하여 미분하면 $\dfrac{dy}{dt}=180$

따라서 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도는

180 m/min이다. 답 180

055-❶ t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(5+2t)$ cm이므로 그 길이가 15 cm가 될 때의 시각은

$5+2t=15 \qquad \therefore t=5$

정사각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=(5+2t)^2$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=2(5+2t)\cdot2=4(5+2t)$

따라서 5초 후의 정사각형의 넓이의 변화율은

$4(5+2\cdot5)=60$ (cm^2/s) 답 60

055-❷ t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면

$r=5+0.5t,\ h=10-t$

원기둥의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=\pi r^2h=\pi(5+0.5t)^2(10-t)$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\pi\times2(5+0.5t)\times0.5(10-t)$$
$$+\pi(5+0.5t)^2\times(-1)$$
$$=\pi(5+0.5t)(5-1.5t)$$

따라서 3초 후의 원기둥의 부피의 변화율은

$\pi(5+0.5\times3)(5-1.5\times3)=3.25\pi$ (cm^3/s)

답 3.25π

중단원 연습 문제

본책 157~160쪽

01 32	**02** $k>-7$		**03** ③	
04 $a>24$		**05** 4	**06** ⑤	**07** ①
08 ④	**09** 2π	**10** 3	**11** $0<a<\dfrac{9}{16}$	
12 27	**13** 3	**14** 48	**15** ④	**16** ③
17 ⑤				

01 전략 $x^3-6x^2+a=0$에서 $x^3-6x^2=-a$이므로 주어진 방정식의 실근은 곡선 $y=x^3-6x^2$과 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표와 같다.

풀이 $x^3-6x^2+a=0$에서

$x^3-6x^2=-a$

$f(x)=x^3-6x^2$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

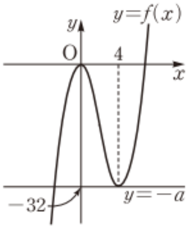
$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-32	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=-a$와 x좌표가 음수인 한 점에서 만나고, 양수인 점에서 접해야 하므로



$-a=-32 \qquad \therefore a=32$

답 32

02 전략 방정식 $f(x)=k$의 실근은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같음을 이용한다.

풀이 $2x^3+3x^2-12x-k=0$에서

$2x^3+3x^2-12x=k$

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

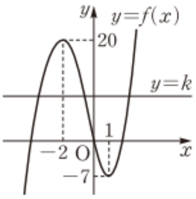
$x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 $x>1$인 범위에서 만나는 k의 값의 범위는

$k>-7$



답 $k>-7$

03

전략 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

풀이 $x^3-9x^2+20x=-4x+a$에서

$x^3-9x^2+24x-a=0$

$f(x)=x^3-9x^2+24x-a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$\therefore$ (극댓값)$=f(2)=20-a$,

(극솟값)$=f(4)=16-a$

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

따라서 (극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로

$(20-a)(16-a)<0, \quad (a-16)(a-20)<0$

$\therefore 16<a<20$

답 ③

04

전략 모든 실수 x에서 $f(x)>g(x)$임을 이용한다.

풀이 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^4+2x^3-x^2-9x-(2x^3+5x^2-x-a)$

$=x^4-6x^2-8x+a$

$h'(x)=4x^3-12x-8$

$=4(x+1)^2(x-2)$ ⋯ ❶

$h'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	−	0	−	0	+
$h(x)$	↘	$a+3$	↘	$a-24$	↗

⋯ ❷

따라서 $h(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이고 최솟값은 $a-24$이므로 모든 실수 x에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면

$a-24>0 \quad \therefore a>24$ ⋯ ❸

답 $a>24$

채점 기준	비율
❶ $h'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $h(x)$의 증감표를 작성할 수 있다.	30 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

05

전략 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t+9$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$3t^2-12t+9=0, \quad t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 $t=1$, $t=3$일 때 점 P가 운동 방향을 바꾸므로

$t_1+t_2=1+3=4$

답 4

06

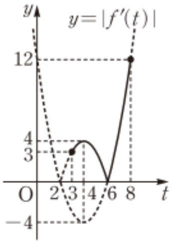
전략 속력은 운동 방향과 관계없이 크기만을 나타낸다. 즉 물체의 속도를 v라 할 때 (속력)$=|v|$이다.

풀이 $f(t)=\dfrac{1}{3}t^3-4t^2+12t$로 놓으면 점 P의 속도는

$f'(t)=t^2-8t+12$

$=(t-2)(t-6)$

이때 속력은 $|f'(t)|$이고 $3\le t\le 8$에서 $y=|f'(t)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=8$일 때 $|f'(t)|$의 최댓값은 12이다.

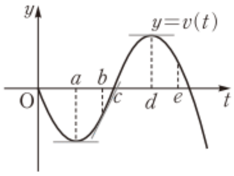
따라서 점 P의 최대 속력은 12이다.

답 ⑤

07

전략 점 P의 시각 $t=x_1$에서의 가속도는 주어진 그래프의 $t=x_1$에서의 접선의 기울기와 같음을 이용한다.

풀이 ㄱ. $t=b$에서의 가속도는 $v'(b)$이고 오른쪽 그림에서 $v'(b)>0$이므로 $t=b$에서의 가속도는 양이다.



ㄴ. 위의 그림에서 $v'(a)=0$, $v'(d)=0$이므로 $0<t<e$에서 가속도가 0이 될 때는 두 번 있다.

ㄷ. 위의 그림에서 $v(c)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 달라지므로 $0<t<e$에서 운동 방향을 한 번 바꾼다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

08 (전략) 물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0임을 이용한다.

(풀이) 물체의 t초 후의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=40-2kt$$

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/s이므로

$$40-2k\cdot4=0 \qquad \therefore k=5$$

따라서 $v=40-10t$이므로 물체를 던진 후 1초 후의 속도는 $40-10\cdot1=30\ (\text{m/s})$

(답) ④

09 (전략) 가장 바깥쪽 동심원의 넓이를 시각 t에 대한 함수로 나타낸다.

(풀이) t초 후의 가장 바깥쪽 동심원의 반지름의 길이를 r cm, 넓이를 S cm^{2}라 하면 $r=\frac{1}{2}t$이므로

$$S=\pi r^2=\pi\left(\frac{1}{2}t\right)^2=\frac{1}{4}\pi t^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\pi t$$

따라서 4초 후의 동심원의 넓이의 변화율은

$$\frac{1}{2}\pi\cdot4=2\pi\ (\text{cm}^2/\text{s})$$

(답) 2π

10 (전략) 방정식을 만족시키는 $f(x)$의 값을 구한다.

(풀이) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=0$에서

$$\{f(x)\}^2-2f(x)-3=0$$

$$\{f(x)+1\}\{f(x)-3\}=0$$

$$\therefore f(x)=-1 \text{ 또는 } f(x)=3$$

따라서 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 근은 방정식 $f(x)=-1$ 또는 $f(x)=3$의 근과 같다. ··· ①

$f(x)=-2x^3+3x^2+2$이므로

$$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$$

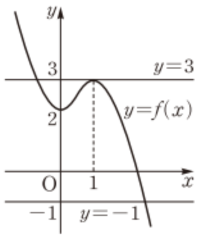
$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘

··· ②

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 직선 $y=-1$, $y=3$과의 교점의 개수가 각각 1, 2이다. 즉 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. ··· ③



(답) 3

채점 기준	비율
① 방정식을 만족시키는 $f(x)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $f(x)$의 증감표를 작성할 수 있다.	30 %
③ 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 실근의 개수를 구할 수 있다.	40 %

11 (전략) $f(x)$가 극값을 갖기 위한 a의 값의 범위를 구한다.

(풀이) $f(x)=2x^3-6ax-3a$에서

$$f'(x)=6x^2-6a=6(x^2-a)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x^2=a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$a>0$ ······ ㉠ ··· ①

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$\therefore$ (극댓값)$=f(-\sqrt{a})=a(4\sqrt{a}-3)$,

(극솟값)$=f(\sqrt{a})=-a(4\sqrt{a}+3)$ ··· ②

방정식 $f(x)=0$이 단 하나의 실근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)>0이어야 하므로

$$-a^2(4\sqrt{a}-3)(4\sqrt{a}+3)>0$$

$$a^2(16a-9)<0$$

$\therefore a<\frac{9}{16}$, $a\neq0$ ······ ㉡ ··· ③

㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는

$0<a<\frac{9}{16}$ ··· ④

(답) $0<a<\frac{9}{16}$

채점 기준	비율
① 극값을 갖는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
② $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ 하나의 실근을 갖기 위한 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
④ 답을 구할 수 있다.	10 %

12 (전략) $x>0$에서 $f(x)\geq0$이 성립하면 $x>0$에서 ($f(x)$의 최솟값)≥0임을 이용한다.

(풀이) $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3\ (\because x>0)$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-27+a$	$\nearrow$

$x>0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $-27+a$이다.

$x>0$일 때 $f(x)\geq 0$이려면

$-27+a\geq 0 \qquad \therefore a\geq 27$

따라서 실수 a의 최솟값은 27이다. 답 27

13

전략 선분 PQ의 중점의 좌표를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 두 점 P, Q의 t초 후의 좌표 x_1, x_2가 각각

$x_1=2t^3-11t^2$, $x_2=3t^2+8t$

이므로 선분 PQ의 중점 M의 t초 후의 좌표를 x_3이라 하면

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2t^3-11t^2+3t^2+8t}{2}$$
$$=t^3-4t^2+4t$$

x_1, x_2, x_3을 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx_1}{dt}=6t^2-22t=2t(3t-11)$$
$$\frac{dx_2}{dt}=6t+8=2(3t+4)$$
$$\frac{dx_3}{dt}=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$$

움직이는 방향을 바꿀 때의 속도는 0이고 $0<t\leq 4$이므로

$\frac{dx_1}{dt}=0$에서 $\qquad t=\frac{11}{3}$

$\frac{dx_2}{dt}=0$을 만족시키는 t는 존재하지 않는다.

$\frac{dx_3}{dt}=0$에서 $\qquad t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2$

따라서 $a=1$, $b=0$, $c=2$이므로

$a+b+c=3$ 답 3

14

전략 점 P, Q의 좌표를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P가 원점을 출발한 지 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는

P$(3t,\ 0)$, Q$(0,\ 4(t-2))(t\geq 2)$ ··· ❶

삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3t\cdot 4(t-2)=6t^2-12t$$
$$\therefore \frac{dS}{dt}=12t-12 \quad \cdots ❷$$

따라서 5초 후의 삼각형 OPQ의 넓이의 변화율은

$12\cdot 5-12=48$ ··· ❸

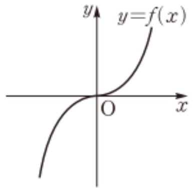
답 48

채점 기준	비율
❶ 점 P, Q의 좌표를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\frac{dS}{dt}$를 구할 수 있다.	50 %
❸ 5초 후의 넓이의 변화율을 구할 수 있다.	20 %

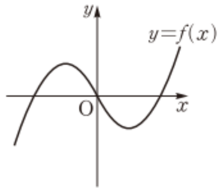
15

전략 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.

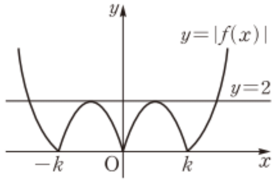


[그림 1]



[그림 2]

이때 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4이기 위해서는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$가 다음 그림과 같이 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같아야 한다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 각각 $-k$, k $(k>0)$라 하면

$f(x)=x(x+k)(x-k)=x^3-k^2x$

이므로

$$f'(x)=3x^2-k^2=3\left(x+\frac{k}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{k}{\sqrt{3}}\right)$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-\frac{k}{\sqrt{3}}$ 또는 $x=\frac{k}{\sqrt{3}}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{k}{\sqrt{3}}$에서 극댓값 2를 갖고, $x=\frac{k}{\sqrt{3}}$에서 극솟값 -2를 갖는다.

즉 $f\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)=-2$이므로 $\qquad \left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)^3-k^2\cdot\frac{k}{\sqrt{3}}=-2$

$k^3=3\sqrt{3} \qquad \therefore k=\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=x^3-3x$이므로

$f(3)=3^3-3\cdot3=18$

답 ④

16 전략 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $h'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

풀이 $h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

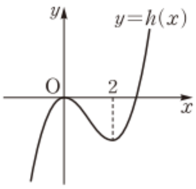
$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ, ㄴ. 위의 증감표에 의하여 $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소하고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $h(0)=f(0)-g(0)=0$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



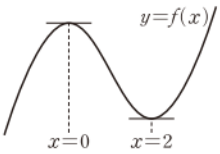
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

17 전략 $f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프에서 삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이고 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소임을 알 수 있다.

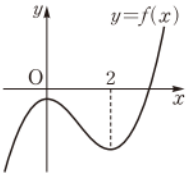
즉 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



ㄱ. $f(0)<0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로

$f(2)<f(0)<0$

$\therefore |f(0)|<|f(2)|$



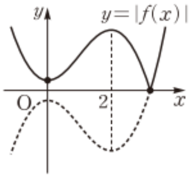
ㄴ. $f(0)f(2)\ge0$을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

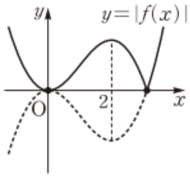
(i) $f(0)<0$, $f(2)<0$ (ii) $f(0)=0$

(iii) $f(2)=0$ (iv) $f(0)>0$, $f(2)>0$

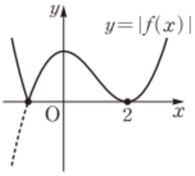
각 경우에 대하여 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

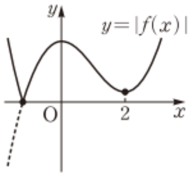
(i) $f(0)<0$, $f(2)<0$ (ii) $f(0)=0$





(iii) $f(2)=0$ (iv) $f(0)>0$, $f(2)>0$



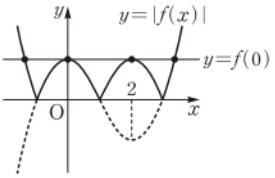


위의 네 경우 모두 극소인 점이 2개이므로 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$, 즉 $f(0)=-f(2)$이면

$|f(0)|=|f(2)|$

이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$이 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

Ⅲ. 다항함수의 적분법

07 부정적분

유제

본책 166~173쪽

056-① $(x^4-2x^3-2x^2+C)'=(x-2)f(x)$이므로

$4x^3-6x^2-4x=(x-2)f(x)$

$2x(2x+1)(x-2)=(x-2)f(x)$

따라서 $f(x)=2x(2x+1)$이므로

$f(1)=2\cdot3=6$

답 6

057-① $\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^2+4x+5)\,dx\right\}=ax^2+4x+5$

이므로

$ax^2+4x+5=6x^2+bx+c$

따라서 $a=6$, $b=4$, $c=5$이므로

$a+b+c=15$ 답 15

057-② $\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx=x^2-4x+C$이므로

$f(x)=x^2-4x+C$

$=(x-2)^2-4+C$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 3이므로

$-4+C=3$

$\therefore C=7$

따라서 $f(x)=x^2-4x+7$이므로

$f(1)=1-4+7=4$

답 4

058-① (1) $\int(x^2+x+1)(x^2-x+1)\,dx$

$=\int(x^4+x^2+1)\,dx$

$=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+x+C$

(2) $\int\frac{2x^2-3x-2}{x-2}dx=\int\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}dx$

$=\int(2x+1)\,dx$

$=x^2+x+C$

(3) $\int(x-t)^2dx=\int(x^2-2tx+t^2)\,dx$

$=\int x^2dx-2t\int x\,dx+t^2\int dx$

$=\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x+C$

(4) $\int(\sqrt{x}+1)^2dx+\int(\sqrt{x}-1)^2dx$

$=\int\{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2\}\,dx$

$=\int\{(x+2\sqrt{x}+1)+(x-2\sqrt{x}+1)\}\,dx$

$=\int(2x+2)\,dx$

$=x^2+2x+C$

답 풀이 참조

059-① $f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(6x^2+2x-3)\,dx$

$=2x^3+x^2-3x+C$

$f(-1)=0$에서

$-2+1+3+C=0\qquad\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2-3x-2$이므로

$f(2)=16+4-6-2=12$ 답 12

059-② 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로

$f'(x)=-2x+3$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-2x+3)\,dx$

$=-x^2+3x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$f(0)=-1\qquad\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+3x-1$이므로

$f(1)=-1+3-1=1$ 답 1

060-① $F(x)=xf(x)-4x^3+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)-12x^2+2x$

$F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^2+2x$

$xf'(x)=12x^2-2x$

$\therefore f'(x)=12x-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(12x-2)\,dx$

$=6x^2-2x+C$

$f(1)=6$이므로 $\qquad 6-2+C=6$

$\therefore C=2$

$\therefore f(x)=6x^2-2x+2$

답 $f(x)=6x^2-2x+2$

중단원 연습 문제

본책 174~177쪽

01 3	02 1	03 ②	04 ①	05 3
06 ③	07 ④	08 -1	09 26	10 22
11 ④	12 10	13 ②	14 21	
15 -22	16 ②	17 ②	18 ④	

01 전략 $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$임을 이용한다.

풀이 $\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^3-3x^2+1)\,dx\right\}=ax^3-3x^2+1$

이므로

$$ax^3-3x^2+1=5x^3+bx^2+c$$

따라서 $a=5$, $b=-3$, $c=1$이므로

$$a+b+c=3$$

답 3

02 전략 주어진 식의 양변을 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $\int(2x-3)f'(x)\,dx=\frac{4}{3}x^3+2x^2-15x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$(2x-3)f'(x)=4x^2+4x-15$$

$$(2x-3)f'(x)=(2x-3)(2x+5)$$

$$\therefore\ f'(x)=2x+5 \qquad \cdots❶$$

$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x+5)\,dx$$

$$=x^2+5x+C$$

$f(-1)=-3$이므로

$$1-5+C=-3 \qquad \therefore\ C=1 \qquad \cdots❷$$

따라서 $f(x)=x^2+5x+1$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $x^2+5x+1=0$의 모든 근의 곱은 1이다. ⋯❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)=0$의 모든 근의 곱을 구할 수 있다.	20 %

03 전략 $F(x)$, $f'(x)$를 각각 구한 후 인수정리를 이용한다.

풀이 $F(x)=\int(x^2-4x+1)\,dx$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x+C \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 함수 $f(x)=x^2-4x+1$의 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x)=2x-4$$

그런데 $F(x)$가 $f'(x)$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여 $F(2)=0$

㉠에서

$$\frac{8}{3}-8+2+C=0 \qquad \therefore\ C=\frac{10}{3}$$

따라서 $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x+\frac{10}{3}$이므로

$$F(1)=\frac{1}{3}-2+1+\frac{10}{3}=\frac{8}{3}$$

답 ②

Remark▶ 인수정리

다항식 $f(x)$에 대하여

① $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

② $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

04 전략 $f(x)=\int f'(x)\,dx$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서

$$x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f(-3)=4$

이때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x^2+2x-3)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+C$$

이므로 $f(-3)=-9+9+9+C=4$

$$\therefore\ C=-5$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-5$이므로 극솟값은

$$f(1)=\frac{1}{3}+1-3-5=-\frac{20}{3}$$

답 ①

05 전략 구간에서 정의된 함수를 각각 적분한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & (x<1)\\ k & (x>1)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x+C_1 & (x<1)\\ kx+C_2 & (x>1)\end{cases} \qquad \cdots❶$$

$f(0)=1$이므로 $\quad C_1=1$

$f(2)=6$이므로 $\quad 2k+C_2=6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$$

$$\lim_{x\to1+}(kx+C_2)=\lim_{x\to1-}(x^2+x+C_1)$$

$$k+C_2=2+C_1$$

$$\therefore k+C_2=3 \quad \cdots\cdots ㉡$$ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$C_2=0,\ k=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	30 %
❷ 적분상수와 k에 대한 식을 세울 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

Remark▶ 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.
(i) $x=a$에서 정의되어 있다.
(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.
(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

06

전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^2-x에 정비례하므로

$f'(x)=k(x^2-x)\ (k\neq0)$

로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int(kx^2-kx)\,dx$$
$$=\frac{k}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2+C$$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(0,\ -2)$, $(3,\ 7)$을 지나므로

$f(0)=-2,\ f(3)=7$

$\therefore C=-2,\ 9k-\frac{9}{2}k+C=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$C=-2,\ k=2$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-2$이므로

$f(-3)=-18-9-2=-29$

답 ③

07

전략 주어진 그래프에서 $f'(0)=0,\ f'(2)=0$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프에서

$f'(0)=0,\ f'(2)=0$

이므로 $f'(x)=ax(x-2)\ (a<0)$로 놓을 수 있다.

또 $f(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=2$에서 극대이므로

$f(0)=0,\ f(2)=4$

이때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int(ax^2-2ax)\,dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$$

이므로 $f(0)=0$에서 $\quad C=0$

$f(2)=4$에서 $\quad \frac{8}{3}a-4a=4$

$-\frac{4}{3}a=4 \quad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2$이므로

$f(1)=-1+3=2$

답 ④

08

전략 $f'(x)$를 이용하여 $f(x)$를 구한 후 $f(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)=0$임을 이용한다.

풀이
$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int(3x^2-6x+a)\,dx$$
$$=x^3-3x^2+ax+C$$

이때 $f(x)$가 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(1)=0$에서 $\quad 1-3+a+C=0$

$\therefore a+C=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=0$에서 $\quad 27-27+3a+C=0$

$\therefore 3a+C=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ C=3$ 답 -1

다른 풀이 $f'(x)=3x^2-6x+a$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-6x+a)\,dx$$
$$=x^3-3x^2+ax+C$$

그런데 $f(x)$가 x^2-4x+3으로 나누어떨어지므로

$$x^3-3x^2+ax+C=(x^2-4x+3)\left(x+\frac{C}{3}\right)$$

위의 식의 우변을 전개하면

$$(x^2-4x+3)\left(x+\frac{C}{3}\right)$$
$$=x^3+\left(\frac{1}{3}C-4\right)x^2+\left(3-\frac{4}{3}C\right)x+C$$

이므로

$$x^3-3x^2+ax+C$$
$$=x^3+\left(\frac{1}{3}C-4\right)x^2+\left(3-\frac{4}{3}C\right)x+C$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$-3=\frac{1}{3}C-4,\ a=3-\frac{4}{3}C$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-1,\ C=3$$

09 전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 함숫값과 미분계수를 구한다.

풀이 $g(x)=f(x)+1$로 놓으면 $g'(x)=f'(x)$이고 곡선 $y=g(x)$가 x좌표가 1인 점에서 x축에 접하므로

$$g(1)=0,\ g'(1)=0$$
$$\therefore f(1)=-1,\ f'(1)=0$$

또 $h(x)=f(x)-1$로 놓으면 $h'(x)=f'(x)$이고 곡선 $y=h(x)$가 x좌표가 -1인 점에서 x축에 접하므로

$$h(-1)=0,\ h'(-1)=0$$
$$\therefore f(-1)=1,\ f'(-1)=0 \quad \cdots ❶$$

$f'(1)=0,\ f'(-1)=0$이므로

$$f'(x)=a(x+1)(x-1)=a(x^2-1)\ (a\neq0)$$

로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int a(x^2-1)\,dx$$
$$=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$$

또 $f(1)=-1,\ f(-1)=1$이므로

$$-\frac{2}{3}a+C=-1,\ \frac{2}{3}a+C=1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{3}{2},\ C=0 \quad \cdots ❷$$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$이므로

$$f(4)=32-6=26 \quad \cdots ❸$$

답 26

채점 기준	비율
❶ $f(1),\ f'(1),\ f(-1),\ f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$의 상수항과 삼차항의 계수를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Remark▶
다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$인 점에서 x축에 접하면
$f(a)=0,\ f'(a)=0$

10 전략 주어진 등식의 양변을 미분한다.

풀이 $F(x)=xf(x)-3x^2(x^2-1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+6x$$

$F'(x)=f(x)$이므로

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+6x$$
$$xf'(x)=12x^3-6x$$
$$\therefore f'(x)=12x^2-6$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(12x^2-6)\,dx$$
$$=4x^3-6x+C$$

$f(1)=0$이므로

$$4-6+C=0 \qquad \therefore C=2$$

따라서 $f(x)=4x^3-6x+2$이므로

$$f(2)=32-12+2=22$$

답 22

11 전략 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$는 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int(4x^3-6x+2)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=4x^3-6x+2$$
$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)$$
$$=-4+6+2=4$$

답 ④

12 전략 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)$$
$$\therefore f(0)=0 \quad \cdots ❶$$

$f'(1)=5$이고

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-1$$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=6$ ⋯ ❷

이것을 이용하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-x=6-x$$ ⋯ ❸

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6-x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+6x+C$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6x$이므로

$f(2)=-2+12=10$ ⋯ ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	10 %
❷ $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

13 전략 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고 $x=k$에서 극값을 가지면 $f(0)=0$이고, $x=-k$에서도 극값을 갖는다.

풀이 $f(x)$가 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때 $f(x)$가 $x=-2$에서 극값을 가지므로 $x=2$에서도 극값을 갖는다.

즉 $f'(-2)=f'(2)=0$이므로

$$f'(x)=a(x+2)(x-2)$$
$$=a(x^2-4)\,(a\neq0)$$

로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int a(x^2-4)\,dx$$
$$=a\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)+C$$

또 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$f(0)=0$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)$이므로 $a\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=0$

에서 $\frac{1}{3}x^3-4x=0$, $x(x^2-12)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm2\sqrt{3}$

그런데 $x>0$이므로 $x=2\sqrt{3}$

답 ②

다른 풀이 $f(-x)=-f(x)$에서 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-f(0)$ $\therefore f(0)=0$

$x=1$을 대입하면 $f(-1)=-f(1)$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$-a+b-c=-(a+b+c)$

$\therefore b=0$

따라서 $f(x)=ax^3+cx$이므로

$f'(x)=3ax^2+c$

$f'(-2)=0$이므로 $12a+c=0$

$\therefore c=-12a$

즉 $f(x)=ax^3-12ax$이므로 $f(x)=0$에서

$ax(x^2-12)=0$

$\therefore x=2\sqrt{3}$ ($\because x>0$)

14 전략 적분은 미분의 역연산임을 이용하여 $f(x)$와 $g(x)$를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $f'(x)+g'(x)=4$이므로

$$f(x)+g(x)=\int\{f'(x)+g'(x)\}\,dx$$
$$=\int4\,dx=4x+C_1$$

조건 (다)에 의하여 $f(0)+g(0)=-1$이므로

$C_1=-1$

$\therefore f(x)+g(x)=4x-1$ ⋯⋯ ㉠

조건 (나)에서 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=6x-7$이므로

$\{f(x)g(x)\}'=6x-7$

$$\therefore f(x)g(x)=\int\{f(x)g(x)\}'\,dx$$
$$=\int(6x-7)\,dx$$
$$=3x^2-7x+C_2$$

조건 (다)에 의하여 $f(0)g(0)=-6$이므로

$C_2=-6$

$\therefore f(x)g(x)=3x^2-7x-6$

$=(x-3)(3x+2)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=x-3$, $g(x)=3x+2$

또는 $f(x)=3x+2$, $g(x)=x-3$

그런데 $f(0)=-3$, $g(0)=2$이므로

$f(x)=x-3$, $g(x)=3x+2$

$\therefore f(4)+g(6)=1+20=21$

답 21

15 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분한 후 $F'(x)=f(x)$임을 이용한다.

풀이 $xf(x)-F(x)=2x^3+6x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)-F'(x)=6x^2+12x$$

$F'(x)=f(x)$이므로 $\quad xf'(x)=6x^2+12x$

$$\therefore f'(x)=6x+12$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x+12)\,dx=3x^2+12x+C$$

$f(1)=5$이므로

$3+12+C=5 \qquad \therefore C=-10$

따라서 $f(x)=3x^2+12x-10=3(x+2)^2-22$이므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 -22를 갖는다.

답 -22

16 전략 $g'(x)$를 구하고 $x=-1$, $x=1$에서 $g(x)$가 미분가능함을 이용한다.

풀이 ㄱ. $g(x)=\begin{cases} 3 & (x<-1) \\ f(x) & (-1\le x\le 1) \\ -1 & (x>1) \end{cases}$에서

$$g'(x)=\begin{cases} 0 & (x<-1) \\ f'(x) & (-1<x<1) \\ 0 & (x>1) \end{cases}$$

$g(x)$는 모든 실수에서 미분가능하므로

$$g'(-1)=\lim_{x\to -1-}g'(x)=0,$$

$$g'(1)=\lim_{x\to 1+}g'(x)=0$$

$$\therefore g'(-1)=g'(1)$$

ㄴ. $g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로

$f(-1)=3,\ f(1)=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

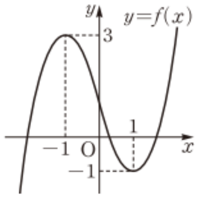
또 $x=-1$, $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to -1+}f'(x)=g'(-1)=0,$$

$$\lim_{x\to 1-}f'(x)=g'(1)=0$$

$\therefore f'(-1)=0,\ f'(1)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 3, $x=1$에서 극솟값 -1을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $-1<x<1$에서 $f'(x)<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le 0$이다.

ㄷ. $g'(x)$의 최솟값은 $-1<x<1$에서 $f'(x)$의 최솟값과 같다.

㉡에 의하여

$$f'(x)=k(x-1)(x+1)=k(x^2-1)\ (k>0)$$

로 놓으면

$$f(x)=k\int(x^2-1)\,dx=\frac{k}{3}x^3-kx+C$$

㉠에서 $f(-1)=3$, $f(1)=-1$이므로

$$-\frac{k}{3}+k+C=3,\ \frac{k}{3}-k+C=-1$$

$$2k+3C=9,\ -2k+3C=-3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=3$, $C=1$

$\therefore f'(x)=3x^2-3$

따라서 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값 -3을 가지므로 $g'(x)$의 최솟값은 -3이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

17 전략 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=px^2+qx+r\ (p\ne 0)$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 $g(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=px^2+qx+r\ (p\ne 0)$로 놓으면

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}\,dx=\int\{(1+p)x^2+qx+r\}\,dx=\frac{1}{3}(1+p)x^3+\frac{q}{2}x^2+rx+C$$

한편 $f(x)g(x)$가 사차함수이므로 $g(x)$는 이차함수이다.

따라서 $p=-1$이므로

$$f(x)=-x^2+qx+r,\ g(x)=\frac{q}{2}x^2+rx+C$$

$$\therefore f(x)g(x)=(-x^2+qx+r)\left(\frac{q}{2}x^2+rx+C\right)$$

$$=-\frac{q}{2}x^4+\left(\frac{q^2}{2}-r\right)x^3+\left(-C+\frac{3qr}{2}\right)x^2+(qC+r^2)x+rC$$

$f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$이므로

$$-\frac{q}{2}=-2,\ \frac{q^2}{2}-r=8,\ -C+\frac{3qr}{2}=0,$$

$$qC+r^2=0,\ rC=0$$

$$\therefore q=4,\ r=0,\ C=0$$

따라서 $g(x)=2x^2$이므로 $\quad g(1)=2$ 답 ②

18 (전략) $f'(x)$를 구간에서 각각 적분한 후 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

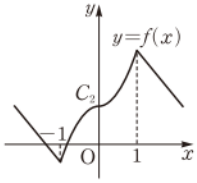
풀이 ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1-} f'(x)=-1<0$, $\lim\limits_{x\to-1+} f'(x)=1>0$
이므로 $f(x)$는 $x=-1$의 좌우에서 감소하다가 증가한다. 따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $f'(x)=\begin{cases} x^2 & (|x|<1) \\ -1 & (|x|>1) \end{cases}$이므로 $|x|\neq1$일 때

$$f(x)=\begin{cases} -x+C_1 & (x>1) \\ \frac{1}{3}x^3+C_2 & (-1<x<1) \\ -x+C_3 & (x<-1) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로

$$f(x)\neq f(-x)$$



ㄷ. $f(0)=0$이면 ㄴ에서

$$C_2=0$$

그런데 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$$\therefore f(1)=\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}>0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

다른 풀이 ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소, $x=1$에서 극대이므로

$$f(-1)\neq f(1)$$
$$\therefore f(x)\neq f(-x)$$

ㄷ. 구간 $(-1, 1)$에서 $f'(x)=x^2\geq0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

$$\therefore f(1)>f(0)=0$$

Ⅲ. 다항함수의 적분법

08 정적분

유제

본책 182~198쪽

061-❶ (1) $\displaystyle\int_1^2 (4x^3-2x-3)\,dx$

$$=\Big[x^4-x^2-3x\Big]_1^2$$
$$=(16-4-6)-(1-1-3)$$
$$=9$$

(2) $\displaystyle\int_1^{-3} (t-2)(3t+2)\,dt$

$$=\int_1^{-3}(3t^2-4t-4)\,dt$$
$$=\Big[t^3-2t^2-4t\Big]_1^{-3}$$
$$=(-27-18+12)-(1-2-4)$$
$$=-28$$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x-1)^3\,dx=\int_{-1}^0(x^3-3x^2+3x-1)\,dx$

$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x\Big]_{-1}^0$$
$$=-\Big(\frac{1}{4}+1+\frac{3}{2}+1\Big)$$
$$=-\frac{15}{4}$$

(4) $\displaystyle\int_1^{-1}\frac{x^3+8}{x+2}\,dx=\int_1^{-1}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}\,dx$

$$=\int_1^{-1}(x^2-2x+4)\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\Big]_1^{-1}$$
$$=\Big(-\frac{1}{3}-1-4\Big)-\Big(\frac{1}{3}-1+4\Big)$$
$$=-\frac{26}{3}$$

답 (1) 9 (2) -28 (3) $-\frac{15}{4}$ (4) $-\frac{26}{3}$

062-❶ (1) (주어진 식)

$$=\int_0^3(2x+1)^2\,dx-\int_0^3(2x-1)^2\,dx$$
$$=\int_0^3\{(2x+1)^2-(2x-1)^2\}\,dx$$
$$=\int_0^3\{(4x^2+4x+1)-(4x^2-4x+1)\}\,dx$$
$$=\int_0^3 8x\,dx=\Big[4x^2\Big]_0^3=36$$

(2) (주어진 식)

$$=\int_0^2(\sqrt{x}+1)^3dx-\int_0^2(\sqrt{x}-1)^3dx$$
$$=\int_0^2\{(\sqrt{x}+1)^3-(\sqrt{x}-1)^3\}dx$$
$$=\int_0^2\{(x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1)-(x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1)\}dx$$
$$=\int_0^2(6x+2)\,dx=\Big[3x^2+2x\Big]_0^2$$
$$=12+4=16$$

답 (1) 36 (2) 16

062-❷ (주어진 식)

$$=\int_2^4 f(x)\,dx+\int_4^3 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$$
$$=\int_2^3 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3(x^2-4x+3)\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\Big]_1^3$$
$$=(9-18+9)-\left(\frac{1}{3}-2+3\right)=-\frac{4}{3}$$

답 $-\frac{4}{3}$

063-❶ $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge 0)\\ 2x+1 & (x\le 0)\end{cases}$ 이므로

$$\int_{-2}^2 f(x)\,dx=\int_{-2}^0 f(x)\,dx+\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-2}^0(2x+1)\,dx+\int_0^2 1\,dx$$
$$=\Big[x^2+x\Big]_{-2}^0+\Big[x\Big]_0^2$$
$$=-(4-2)+2=0$$

답 0

064-❶ (1) $2-x=0$에서 $x=2$이므로

$$|2-x|=\begin{cases}2-x & (x\le 2)\\ -2+x & (x\ge 2)\end{cases}$$
$$\therefore \int_0^3|2-x|\,dx$$
$$=\int_0^2(2-x)\,dx+\int_2^3(-2+x)\,dx$$
$$=\Big[2x-\frac{1}{2}x^2\Big]_0^2+\Big[-2x+\frac{1}{2}x^2\Big]_2^3$$
$$=(4-2)+\left\{\left(-6+\frac{9}{2}\right)-(-4+2)\right\}=\frac{5}{2}$$

(2) $x^2-x-2=0$, 즉 $(x+1)(x-2)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=2$이므로

$$|x^2-x-2|=\begin{cases}x^2-x-2 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 2)\\ -x^2+x+2 & (-1\le x\le 2)\end{cases}$$
$$\therefore \int_1^3|x^2-x-2|\,dx$$
$$=\int_1^2(-x^2+x+2)\,dx+\int_2^3(x^2-x-2)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_1^2+\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_2^3$$
$$=\left\{\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2\right)\right\}+\left\{\left(9-\frac{9}{2}-6\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)\right\}$$
$$=3$$

(3) $|x|=0$에서 $x=0$이므로

$$(|x|+x+1)^2=\begin{cases}(2x+1)^2 & (x\ge 0)\\ 1 & (x\le 0)\end{cases}$$
$$\therefore \int_{-1}^1(|x|+x+1)^2dx$$
$$=\int_{-1}^0 1\,dx+\int_0^1(4x^2+4x+1)\,dx$$
$$=\Big[x\Big]_{-1}^0+\Big[\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\Big]_0^1$$
$$=-(-1)+\left(\frac{4}{3}+2+1\right)$$
$$=\frac{16}{3}$$

(4) $x^3+x=0$, 즉 $x(x^2+1)=0$에서
$x=0$ ($\because x^2+1>0$)이므로

$$|x^3+x|=\begin{cases}x^3+x & (x\ge 0)\\ -x^3-x & (x\le 0)\end{cases}$$
$$\therefore \int_{-1}^2|x^3+x|\,dx$$
$$=\int_{-1}^0(-x^3-x)\,dx+\int_0^2(x^3+x)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^0+\Big[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\Big]_0^2$$
$$=-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+(4+2)=\frac{27}{4}$$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) 3 (3) $\frac{16}{3}$ (4) $\frac{27}{4}$

065-❶ $\int_{-3}^3(2x^2-3x+1)f(x)\,dx$

$$=2\int_{-3}^3 x^2f(x)\,dx-3\int_{-3}^3 xf(x)\,dx+\int_{-3}^3 f(x)\,dx$$

이때 $f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=0$$

한편 $g(x)=x^2f(x)$, $h(x)=xf(x)$로 놓으면

$$g(-x)=(-x)^2f(-x)$$
$$=-x^2f(x)=-g(x),$$
$$h(-x)=-xf(-x)$$
$$=xf(x)=h(x)$$

에서 $g(x)$는 기함수, $h(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-3}^{3} g(x)\,dx=0,\ \int_{-3}^{3} h(x)\,dx=2\int_{0}^{3} h(x)\,dx$$

즉 $\int_{-3}^{3} x^2f(x)\,dx=0$,

$\int_{-3}^{3} xf(x)\,dx=2\int_{0}^{3} xf(x)\,dx=2\cdot5=10$이므로

$$(\text{주어진 식})=-3\int_{-3}^{3} xf(x)\,dx$$
$$=-3\cdot10=-30$$

답 -30

066-❶ (1) $\int_{0}^{1} tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

로 놓으면 $f(x)=-3x^2+2x+k$

$f(t)=-3t^2+2t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_{0}^{1} t(-3t^2+2t+k)\,dt$$
$$=\int_{0}^{1} (-3t^3+2t^2+kt)\,dt$$
$$=\left[-\frac{3}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{12}+\frac{k}{2}$$

즉 $-\frac{1}{12}+\frac{k}{2}=k$이므로 $k=-\frac{1}{6}$

따라서 $f(x)=-3x^2+2x-\frac{1}{6}$이므로

$$f(0)=-\frac{1}{6}$$

(2) $f(x)=-3x^2+\int_{0}^{1} (x-1)f(t)\,dt$

$$=-3x^2+x\int_{0}^{1} f(t)\,dt-\int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

$\int_{0}^{1} f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

로 놓으면 $f(x)=-3x^2+kx-k$

$f(t)=-3t^2+kt-k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_{0}^{1} (-3t^2+kt-k)\,dt=\left[-t^3+\frac{k}{2}t^2-kt\right]_0^1$$
$$=-1-\frac{k}{2}$$

즉 $-1-\frac{k}{2}=k$이므로 $\frac{3}{2}k=-1$

$$\therefore k=-\frac{2}{3}$$

따라서 $f(x)=-3x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$이므로

$$f(0)=\frac{2}{3}$$

답 (1) $-\frac{1}{6}$ (2) $\frac{2}{3}$

067-❶ 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=2x-2$$

주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2-2a-3$, $(a+1)(a-3)=0$

$a<0$이므로 $a=-1$

$\therefore f(a)=f(-1)=-2-2=-4$

답 -4

067-❷ 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=6x^2+2x+f(x)$$

$xf'(x)=6x^2+2x$ $\therefore f'(x)=6x+2$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (6x+2)\,dx$$
$$=3x^2+2x+C \quad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(2)=16+4$ $\therefore f(2)=10$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$$f(2)=12+4+C$$

즉 $C+16=10$이므로 $C=-6$

따라서 $f(x)=3x^2+2x-6$이므로

$$f(1)=3+2-6=-1$$

답 -1

068-❶ $\int_{1}^{x} (x-t)f(t)\,dt$

$$=x\int_{1}^{x} f(t)\,dt-\int_{1}^{x} tf(t)\,dt$$

이므로 주어진 등식은

$$x\int_{1}^{x} f(t)\,dt-\int_{1}^{x} tf(t)\,dt=2x^3+3x^2-12x+7$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{1}^{x} f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=6x^2+6x-12$$
$$\therefore \int_{1}^{x} f(t)\,dt=6x^2+6x-12$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=12x+6$$
$$\therefore f(-1)=-12+6=-6$$

답 -6

068-❷ $\int_{-1}^{x}(x-t)f(t)\,dt$

$=x\int_{-1}^{x}f(t)\,dt-\int_{-1}^{x}tf(t)\,dt$

이므로 주어진 등식은

$x\int_{-1}^{x}f(t)\,dt-\int_{-1}^{x}tf(t)\,dt=x^3+ax^2-bx+3$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^{x}f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2ax-b$

$\therefore \int_{-1}^{x}f(t)\,dt=3x^2+2ax-b$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=3-2a-b$

$\therefore 2a+b=3$ …… ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-1+a+b+3$

$\therefore a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-7$

$\therefore a-b=12$

답 12

069-❶ $f(x)=\int_{0}^{x}(3t^2+6t-9)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)$

$=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	…	-3	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$일 때 극대, $x=1$일 때 극소이고

$f(-3)=\int_{0}^{-3}(3t^2+6t-9)\,dt$

$=\Big[t^3+3t^2-9t\Big]_{0}^{-3}$

$=-27+27+27=27$,

$f(1)=\int_{0}^{1}(3t^2+6t-9)\,dt$

$=\Big[t^3+3t^2-9t\Big]_{0}^{1}$

$=1+3-9=-5$

이므로 극댓값은 27, 극솟값은 -5이다.

답 극댓값: 27, 극솟값: -5

069-❷ $f(x)=\int_{1}^{x}(4t^3-3t^2+kt)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x^3-3x^2+kx$

$=x(4x^2-3x+k)$

이때 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $4x^2-3x+k=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 $4x^2-3x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-16k>0$ $\therefore k<\frac{9}{16}$

이때 $x=0$이 방정식 $4x^2-3x+k=0$의 근이 아니어야 하므로 $k\neq 0$

$\therefore k<0$ 또는 $0<k<\frac{9}{16}$

답 $k<0$ 또는 $0<k<\frac{9}{16}$

Remark▶ 사차함수가 극값을 가질 조건

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가
① 극댓값을 갖는다.
⟺ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.
② 극댓값을 갖지 않는다.
⟺ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

070-❶ $f(x)=\int_{1}^{x}t(t^2-1)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-1	…	0	…	1
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극대이면서 최대이고

$f(0)=\int_{1}^{0}t(t^2-1)\,dt=\int_{1}^{0}(t^3-t)\,dt$

$=\Big[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\Big]_{1}^{0}$

$=-\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{4}$

이므로 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{4}$이다.

답 $\frac{1}{4}$

08 정적분

070-❷ $g(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f(x+1)-f(x)$$
$$=\{(x+1)^2-5(x+1)+1\}-(x^2-5x+1)$$
$$=2x-4$$

$g'(x)=0$에서 $x=2$

함수 $g(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 $g(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이고

$$g(2)=\int_2^3 (t^2-5t+1)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+t\right]_2^3$$
$$=\left(9-\frac{45}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}-10+2\right)$$
$$=-\frac{31}{6}$$

이므로 $g(x)$의 최솟값은 $-\frac{31}{6}$이다. 답 $-\frac{31}{6}$

071-❶ (1) $f(t)=(t+1)^3$으로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 주어진 식은

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x^3} f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\Big[F(t)\Big]_{-1}^{x^3}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x^3)-F(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x^3)-F(-1)}{x^3-(-1)}\cdot(x^2-x+1)$$
$$=3F'(-1)=3f(-1)$$
$$=3\cdot(-1+1)^3=0$$

(2) $f(t)=(2t-1)^3(t+1)^2$으로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 주어진 식은

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h} f(t)\,dt$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(t)\Big]_2^{2+h}=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=(2\cdot2-1)^3(2+1)^2=243$$

답 (1) 0 (2) 243

071-❷ $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_2^x$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=-16+8+1=-7$$

답 -7

중단원 연습 문제

본책 199~203쪽

01 2	**02** 1	**03** 4	**04** $-\frac{5}{4}$	**05** $\frac{3}{2}$
06 10	**07** ①	**08** 2	**09** 8	
10 $f(x)=6x^2+5$		**11** -5	**12** ④	**13** -2
14 $\frac{17}{6}$	**15** 3	**16** 7	**17** ②	**18** ①
19 19	**20** -30	**21** ①	**22** 43	**23** 17
24 ①	**25** ②			

01 전략 이차함수 $y=a(x-m)^2+n\,(a>0)$은 $x=m$일 때 최솟값 n을 갖는다.

풀이 $\int_{-2}^{k}(2x-4)\,dx=\Big[x^2-4x\Big]_{-2}^{k}$
$$=(k^2-4k)-(4+8)$$
$$=k^2-4k-12$$
$$=(k-2)^2-16$$

이므로 $k=2$일 때 최솟값 -16을 갖는다. 답 2

02 전략 주어진 조건을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

풀이 $\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1(ax^3-bx^2+2x)\,dx$
$$=\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{b}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{a}{4}-\frac{b}{3}+1$$

즉 $\frac{a}{4}-\frac{b}{3}+1=\frac{1}{12}$이므로

$3a-4b=-11$ …… ㉠ ⋯➊

$$\int_0^1 x^2f(x)\,dx=\int_0^1(ax^4-bx^3+2x^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{a}{5}x^5-\frac{b}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{a}{5}-\frac{b}{4}+\frac{2}{3}$$

즉 $\frac{a}{5}-\frac{b}{4}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{30}$이므로

$4a-5b=-14$ …… ㉡ ⋯→ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$

$\therefore a+b=1$ ⋯→ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{1}{12}$임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ $\int_0^1 x^2f(x)\,dx=-\frac{1}{30}$임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

03 전략 접선의 기울기가 $f'(x)$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=3x^2-2x+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-2x+1)\,dx=x^3-x^2+x+C$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^1 f(x)\,dx &=\int_{-1}^1 (x^3-x^2+x+C)\,dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+Cx\right]_{-1}^1\\&=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+C\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-C\right)\\&=2C-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

이때 $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=0$이므로 $C=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+x+\frac{1}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,dx&=\int_0^2\left(x^3-x^2+x+\frac{1}{3}\right)dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x\right]_0^2\\&=4-\frac{8}{3}+2+\frac{2}{3}=4\end{aligned}$$

답 4

04 전략 함수 $f(x)$에 x 대신 $x-1$을 대입하여 함수 $f(x-1)$을 구하고, 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$에 x 대신 $x-1$을 대입하면

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)^2-1 & (x-1\ge0)\\-(x-1)-1 & (x-1\le0)\end{cases}=\begin{cases}x^2-2x & (x\ge1)\\-x & (x\le1)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^2 xf(x-1)\,dx&=\int_0^1 xf(x-1)\,dx+\int_1^2 xf(x-1)\,dx\\&=\int_0^1 x(-x)\,dx+\int_1^2 x(x^2-2x)\,dx\\&=\int_0^1(-x^2)\,dx+\int_1^2(x^3-2x^2)\,dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_1^2\\&=-\frac{1}{3}+\left\{\left(4-\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)\right\}\\&=-\frac{5}{4}\end{aligned}$$

답 $-\frac{5}{4}$

05 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 절댓값 기호를 없앤 후 각 정적분의 값의 합을 구한다.

풀이 $x(x-1)^2=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이고 $(x-1)^2\ge0$이므로

$$|x(x-1)^2|=\begin{cases}x(x-1)^2 & (x\ge0)\\-x(x-1)^2 & (x\le0)\end{cases}=\begin{cases}x^3-2x^2+x & (x\ge0)\\-x^3+2x^2-x & (x\le0)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^1|x(x-1)^2|\,dx&=\int_{-1}^0(-x^3+2x^2-x)\,dx+\int_0^1(x^3-2x^2+x)\,dx\\&=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0\\&\quad+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\\&=-\left(-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2}$

06 전략 우함수와 기함수의 정적분을 이용한다.

풀이 $f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-3}^3 f(x)\,dx=2\int_0^3 f(x)\,dx=2\cdot5=10$$

$g(x)=-g(-x)$에서 $g(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-3}^3 g(x)\,dx=0$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^3\{f(x)+g(x)\}\,dx&=\int_{-3}^3 f(x)\,dx+\int_{-3}^3 g(x)\,dx\\&=10\end{aligned}$$

답 10

07 전략 $\int_0^1 f(t)\,dt$가 상수임을 이용한다.

풀이 $f(x)=6x^2+\int_0^1 (4x-3)f(t)\,dt$

$$=6x^2+4x\int_0^1 f(t)\,dt-3\int_0^1 f(t)\,dt$$

이므로 $\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=6x^2+4kx-3k$

$f(t)=6t^2+4kt-3k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^1 (6t^2+4kt-3k)\,dt=\Big[2t^3+2kt^2-3kt\Big]_0^1$$
$$=2-k$$

즉 $2-k=k$이므로 $k=1$

$$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx=1$$

답 ①

08 전략 $\int_0^a \left\{2+\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=k$ (k는 상수)로 놓고, 주어진 식에 대입한다.

풀이 $\int_0^a \left\{2+\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=k$($k$는 상수) … ㉠

로 놓으면 $f(x)-x^2+2ax=3k$

$\therefore f(x)=x^2-2ax+3k$

$f(0)=0$이므로 $k=0$

즉 $f(t)=t^2-2at$이므로

$\frac{d}{dt}f(t)=2t-2a$ …… ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^a (2+2t-2a)\,dt=\Big[t^2+(2-2a)t\Big]_0^a$$
$$=a^2+(2-2a)a$$
$$=-a^2+2a$$

즉 $-a^2+2a=0$이므로 $a(a-2)=0$

그런데 $a>0$이므로 $a=2$

답 2

다른 풀이 $\int_0^a \left\{2+\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=\Big[2t+f(t)\Big]_0^a$

$$=2a+f(a)-f(0)$$
$$=2a+f(a)$$

이므로

$f(x)-x^2+2ax=3\{2a+f(a)\}$ …… ㉠

$x=0$을 ㉠에 대입하면

$0=3\{2a+f(a)\}$

$\therefore f(a)=-2a$ …… ㉡

$x=a$를 ㉠에 대입하면

$f(a)-a^2+2a^2=3\{2a+f(a)\}$

$\therefore a^2-6a-2f(a)=0$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면

$a^2-2a=0,\quad a(a-2)=0$

그런데 $a>0$이므로 $a=2$

09 전략 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2+2x$

$xf'(x)=3x^2-2x \quad \therefore f'(x)=3x-2$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int(3x-2)\,dx$$
$$=\frac{3}{2}x^2-2x+C \quad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-1+1 \quad \therefore f(1)=0$

$x=1$을 ㉠에 대입하면

$f(1)=\frac{3}{2}-2+C$

즉 $C-\frac{1}{2}=0$이므로 $C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}$이므로

$f(3)=\frac{27}{2}-6+\frac{1}{2}=8$

답 8

10 전략 적분변수 이외의 문자는 상수처럼 생각하여 식을 정리한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt=2x^3$에서

$$x\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x tf'(t)\,dt=2x^3$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t)\,dt+xf'(x)-xf'(x)=6x^2$$

$\int_0^x f'(t)\,dt=6x^2,\quad \Big[f(t)\Big]_0^x=6x^2$

$\therefore f(x)-f(0)=6x^2$

$f(0)=5$이므로 $f(x)=6x^2+5$

답 $f(x)=6x^2+5$

11 전략 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)=12x^3-12x^2-24x$$
$$=12x(x^2-x-2)$$
$$=12x(x+1)(x-2)$$

$F'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $F(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$F'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘	극소	↗	

··· ❶

한편

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$
$$=\int_0^x (12t^3-12t^2-24t)\,dt$$
$$=\Big[3t^4-4t^3-12t^2\Big]_0^x$$
$$=3x^4-4x^3-12x^2$$

이므로

$F(0)=0,$

$F(2)=48-32-48=-32,$

$F(3)=243-108-108=27$ ··· ❷

따라서 구간 $[0,\ 3]$에서 $F(x)$의 최댓값은 27, 최솟값은 -32이므로

$M+m=27+(-32)=-5$ ··· ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ $F(x)$의 증감표를 작성할 수 있다.	40 %
❷ $F(0)$, $F(2)$, $F(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

12

전략 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)\,dt=f(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+x+1$로 놓고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 주어진 식은

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h} f(x)\,dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{1-h}^{1+h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)+F(1)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}$$
$$=F'(1)+F'(1)$$
$$=2F'(1)=2f(1)$$
$$=2\cdot(1+1+1)=6$$

답 ④

13

전략 $f(t)=|t-a|$로 놓고 정적분으로 정의된 함수의 극한을 이용한다.

풀이 $f(t)=|t-a|$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 주어진 식의 좌변은

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_0^x$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)$$
$$=|-a|=-a\ (\because a<0)$$

따라서 $-a=a^2-2$이므로

$a^2+a-2=0,\quad (a+2)(a-1)=0$

그런데 $a<0$이므로 $\quad a=-2$

답 -2

14

전략 먼저 연산 기호 $*$의 정의에 따라 구간을 나누어 $x*x^2$을 구한다.

풀이 $x\ge x^2$에서 $\quad x(x-1)\le0$

$\therefore\ 0\le x\le1$

따라서 $0\le x\le1$일 때 $x\ge x^2$, $x\le0$ 또는 $x\ge1$일 때 $x\le x^2$이므로

$$x*x^2=\begin{cases}x^2 & (x\le0 \text{ 또는 } x\ge1)\\ x & (0\le x\le1)\end{cases}$$

$$\therefore\ \int_0^2 (x*x^2)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 x^2\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}+\Big(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\Big)=\frac{17}{6}$$

답 $\dfrac{17}{6}$

15

전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 $f(x)$를 구한다.

풀이 $x\ge1$일 때,

$f(x)=x+(x-1)=2x-1$

$0\le x\le1$일 때,

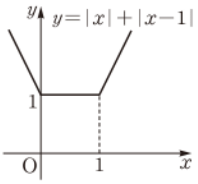
$f(x)=x-(x-1)=1$

$x\le0$일 때,

$f(x)=-x-(x-1)=-2x+1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$a=1$



$\therefore \int_{-1}^{a} f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{0} (-2x+1)\,dx+\int_{0}^{1} 1\,dx$

$=\Big[-x^2+x\Big]_{-1}^{0}+\Big[x\Big]_{0}^{1}$

$=-(-1-1)+1=3$

답 3

Remark ▶

$y=|x-a|+|x-b|\,(a<b)$ 꼴의 함수는 $a\le x\le b$에서 최솟값 $b-a$를 갖는다.

16

전략 함수 $f(x)$가 우함수임을 이용한다.

풀이 $f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$b=0$

$f(1)=2$에서 $a+b+c=2$이므로

$a+c=2 \qquad \therefore c=2-a$ ⋯ ❶

따라서 $f(x)=ax^2+2-a=a(x^2-1)+2$이므로

$\int_{0}^{1} \{f(x)\}^2\,dx$

$=\int_{0}^{1} \{a(x^2-1)+2\}^2\,dx$

$=\int_{0}^{1} \{a^2(x^4-2x^2+1)+4a(x^2-1)+4\}\,dx$

$=a^2\int_{0}^{1} (x^4-2x^2+1)\,dx$

$+4a\int_{0}^{1} (x^2-1)\,dx+\int_{0}^{1} 4\,dx$

$=a^2\Big[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\Big]_{0}^{1}+4a\Big[\frac{1}{3}x^3-x\Big]_{0}^{1}+\Big[4x\Big]_{0}^{1}$

$=a^2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)+4a\left(\frac{1}{3}-1\right)+4$

$=\frac{8}{15}a^2-\frac{8}{3}a+4$

$=\frac{8}{15}\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{2}{3}$ ⋯ ❷

따라서 $\int_{0}^{1} \{f(x)\}^2\,dx$의 값은 $a=\frac{5}{2}$일 때 최소이므로

$a=\frac{5}{2},\ c=2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$

$\therefore 3a+2b+c=3\cdot\frac{5}{2}+2\cdot 0-\frac{1}{2}=7$ ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구하고, c를 a로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 정적분의 값을 a로 나타낼 수 있다.	60 %
❸ $3a+2b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

17

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 이차식 $f(x)$를 구한 후 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ 0)$, $(4,\ 0)$을 지나고 아래로 볼록하므로

$f(x)=a(x-1)(x-4)\ (a>0)$

로 놓을 수 있다.

$g(x)=\int_{x}^{x+1} f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x+1)-f(x)$

$=ax(x-3)-a(x-1)(x-4)$

$=ax^2-3ax-a(x^2-5x+4)$

$=2ax-4a=2a(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=2$

함수 $g(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 $g(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이다.

답 ②

18

전략 주어진 등식을 이용하여 먼저 $f(x)$의 차수를 알아본다.

풀이 $f(x)$의 차수를 n ($n\ge 2$인 자연수)이라 하면 주어진 등식의 좌변의 차수는 n^2, 우변의 차수는 $n+1$이므로

$n^2=n+1 \qquad \therefore n^2-n-1=0$

이를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않으므로 $f(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

따라서 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(f(x))=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

이므로 주어진 식은

$a^2x+ab+b=\int_{0}^{x} f(t)\,dt-x^2+3x+3$

양변을 x에 대하여 미분하면

$a^2=f(x)-2x+3$

$\therefore f(x)=2x+a^2-3$

따라서 $a=2$, $b=a^2-3=1$이므로

$f(x)=2x+1$

$\therefore f(1)=3$

답 ①

다른 풀이 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면 주어진 식의 좌변은

$f(f(x))=a(ax+b)+b$

$=a^2x+ab+b$

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x (at+b)\,dt=\left[\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^x$$
$$=\frac{1}{2}ax^2+bx$$

이므로 주어진 식의 우변은

$$\frac{1}{2}ax^2+bx-x^2+3x+3$$
$$=\left(\frac{1}{2}a-1\right)x^2+(b+3)x+3$$

즉 $a^2x+ab+b=\left(\frac{1}{2}a-1\right)x^2+(b+3)x+3$이므로

$$0=\frac{1}{2}a-1,\ a^2=b+3,\ ab+b=3$$
$$\therefore\ a=2,\ b=1$$

따라서 $f(x)=2x+1$이므로

$$f(1)=3$$

19 (전략) 주어진 식을 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

(풀이) $\int_2^x (x-t)f(t)\,dt=-x^3+4ax+b$에서

$$x\int_2^x f(t)\,dt-\int_2^x tf(t)dt=-x^3+4ax+b$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=-3x^2+4a$$
$$\therefore\ \int_2^x f(t)\,dt=-3x^2+4a \quad \cdots\cdots\ ㉠ \quad \cdots ❶$$

$x=2$를 주어진 식에 대입하면

$$0=-8+8a+b \quad \cdots\cdots\ ㉡$$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $0=-12+4a$

$$\therefore\ a=3$$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=-16$ ⋯ ❷

$$\therefore\ a-b=19 \quad \cdots ❸$$

답 19

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

(다른 풀이) $\int_2^x f(t)\,dt=-3x^2+4a$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=-6x$

즉 $f(t)=-6t$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\int_2^x (x-t)\cdot(-6t)\,dt=\int_2^x (6t^2-6xt)\,dt$$
$$=\left[2t^3-3xt^2\right]_2^x$$
$$=-x^3+12x-16$$

따라서 $-x^3+12x-16=-x^3+4ax+b$이므로

$a=3,\ b=-16$ $\quad\therefore\ a-b=19$

20 (전략) 도함수의 정의를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

(풀이) $h\neq0$일 때, 주어진 등식의 양변을 h로 나누면

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$
$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(t)\Big]_x^{x+h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
$$=F'(x)=f(x)$$

즉 $g'(x)=f(x)$이므로 ⋯ ❶

$$g(x)=\int f(x)\,dx=\int (x^2-4x)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C$$

이때 $g(3)=1$이므로

$9-18+C=1$ $\quad\therefore\ C=10$

$$\therefore\ g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+10 \quad \cdots ❷$$

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $\frac{1}{3}x^3-2x^2+10=0$의 모든 근의 곱은

$$-\frac{10}{\frac{1}{3}}=-30 \quad \cdots ❸$$

답 -30

채점 기준	비율
❶ $g'(x)=f(x)$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 방정식 $g(x)=0$의 모든 근의 곱을 구할 수 있다.	20 %

Remark▶ 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때,

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

21 (전략) 정적분의 성질을 이용하여 주어진 등식을 변형한다.

(풀이) 정적분의 성질에 의하여

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$$

이때 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$이므로

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{0}^{1} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_{0}^{1} f(x)\,dx=0$$

따라서

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=0$$

이다.

한편 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$로 놓으면

$f(0)=-1$이므로 $\quad c=-1$

따라서 $f(x)=ax^2+bx-1$이므로

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{0}^{1}(ax^2+bx-1)\,dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(ax^2+bx-1)\,dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{-1}^{0}$$
$$=-\left(-\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1\right)$$
$$=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=0$

따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로

$$f(2)=3\cdot 2^2-1=11$$

답 ①

22

전략 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

풀이 $\int_{a}^{a+4} f(x)\,dx$

$$=\int_{a}^{4} f(x)\,dx+\int_{4}^{a+4} f(x)\,dx$$
$$=\int_{a}^{4}\{-x(x-4)\}\,dx+\int_{4}^{a+4}(x-4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{a}^{4}+\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_{4}^{a+4}$$
$$=\left(\frac{32}{3}+\frac{1}{3}a^3-2a^2\right)$$
$$+\left\{\frac{1}{2}(a+4)^2-4(a+4)+8\right\}$$
$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$$

이때 $g(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$로 놓으면

$$g'(a)=a^2-3a=a(a-3)$$

$g'(a)=0$에서

$$a=0 \text{ 또는 } a=3$$

$0\le a\le 4$일 때 삼차함수 $g(a)$의 증감표는 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(a)$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$	$\frac{32}{3}$	↘	극소	↗	8

따라서 $g(a)$는 $a=3$일 때 극소이면서 최소이므로 $g(a)$의 최솟값은

$$g(3)=9-\frac{27}{2}+\frac{32}{3}=\frac{37}{6}$$

즉 $p=6,\ q=37$이므로

$$p+q=43$$

답 43

23

전략 먼저 $y=|f(x)|$의 그래프를 그린 후 $g(t)$를 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x-1$에서

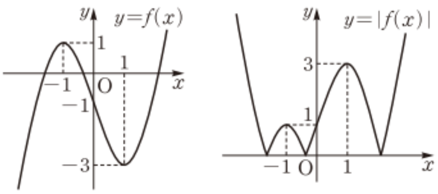
$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



따라서 $g(t)=\begin{cases} 1 & (-1\le t\le 0) \\ -t^3+3t+1 & (0\le t\le 1)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt=\int_{-1}^{0} 1\,dt+\int_{0}^{1}(-t^3+3t+1)\,dt$$
$$=\Big[t\Big]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+t\right]_{0}^{1}$$
$$=-(-1)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1\right)$$
$$=\frac{13}{4}$$

따라서 $p=4,\ q=13$이므로

$$p+q=17$$

답 17

24 전략 $h(x)$가 우함수인지 기함수인지 확인한다.

풀이 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$$
$$=-h(x)$$

즉 함수 $y=h(x)$는 기함수이고 $h(0)=-h(0)$이므로

$$h(0)=0$$

따라서 $h(x)=ax+bx^3+cx^5+\cdots$ (a, b, c, $\cdots$는 상수)로 놓으면

$$h'(x)=a+3bx^2+5cx^4+\cdots,$$
$$xh'(x)=ax+3bx^3+5cx^5+\cdots$$

즉 $h'(x)$는 모든 항의 차수가 짝수 또는 상수항이므로 우함수이고 $xh'(x)$는 모든 항의 차수가 홀수이므로 기함수이다.

$$\therefore \int_{-3}^{3} h'(x)\,dx=2\int_{0}^{3} h'(x)\,dx,$$
$$\int_{-3}^{3} xh'(x)\,dx=0$$
$$\therefore \int_{-3}^{3} (x+5)h'(x)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{3} xh'(x)\,dx+5\int_{-3}^{3} h'(x)\,dx$$
$$=10\int_{0}^{3} h'(x)\,dx=10\Big[h(x)\Big]_{0}^{3}=10h(3)$$

따라서 $10h(3)=10$이므로 $h(3)=1$ 답 ①

Remark▶

미분가능한 함수 $f(x)$가 우함수이면 $f'(x)$는 기함수이고 $f(x)$가 기함수이면 $f'(x)$는 우함수이다.

25 전략 $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $F'(x)=f(x)=x^3-3x+a$

사차함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 갖기 위해서는 삼차방정식 $f(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x+a$에서

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

즉 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f(x)=0$이 중근 또는 허근을 가지려면

$$f(-1)f(1)\ge 0,\quad (2+a)(-2+a)\ge 0$$
$$\therefore a\le -2 \text{ 또는 } a\ge 2$$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다. 답 ②

Ⅲ. 다항함수의 적분법

09 정적분의 활용

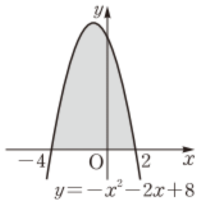
유제

본책 208~225쪽

072-① (1) 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2-2x+8=0$에서

$$x^2+2x-8=0$$
$$(x+4)(x-2)=0$$
$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=2$$



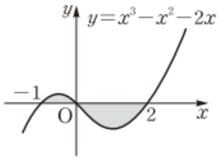
$-4\le x\le 2$일 때 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-4}^{2} (-x^2-2x+8)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+8x\right]_{-4}^{2}$$
$$=36$$

(2) 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-x^2-2x=0$에서

$$x(x+1)(x-2)=0$$



$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$-1\le x\le 0$일 때 $y\ge 0$, $0\le x\le 2$일 때 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

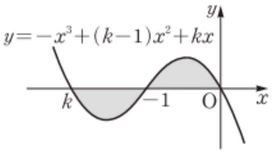
$$S=\int_{-1}^{0} (x^3-x^2-2x)\,dx$$
$$-\int_{0}^{2} (x^3-x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

답 (1) 36 (2) $\frac{37}{12}$

073-① 곡선 $y=-x^3+(k-1)x^2+kx$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^3+(k-1)x^2+kx=0$에서

$$x(x+1)(x-k)=0$$
$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=k$$

이때 $k<-1$이므로 곡선 $y=-x^3+(k-1)x^2+kx$는 다음 그림과 같다.



이 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_k^0 \{-x^3+(k-1)x^2+kx\}\,dx=0$$

$$\int_0^k \{x^3+(1-k)x^2-kx\}\,dx=0$$

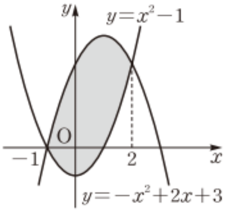
$$\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1-k}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2\right]_0^k=0$$

$$-\frac{1}{12}k^4-\frac{1}{6}k^3=0, \qquad k^3(k+2)=0$$

$\therefore\ k=-2\ (\because\ k<-1)$

답 -2

074-❶ (1) 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^2-1=-x^2+2x+3$

에서

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

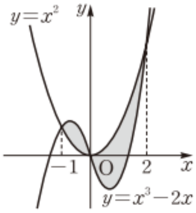
따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=9$$

(2) 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^3-2x=x^2$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3-2x)-x^2\}dx$$

$$+\int_0^2\{x^2-(x^3-2x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx$$

$$+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

답 (1) 9 (2) $\frac{37}{12}$

075-❶ $f(x)=x^3+2x^2-x-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+4x-1$

곡선 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=12-8-1=3$

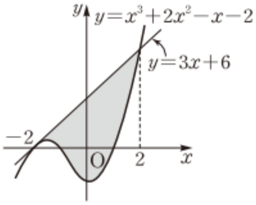
따라서 곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$ 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=3(x+2)\qquad \therefore\ y=3x+6$

곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$와 직선 $y=3x+6$의 교점의 x좌표는 $x^3+2x^2-x-2=3x+6$에서

$x^3+2x^2-4x-8=0, \qquad (x+2)^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{2}\{(3x+6)-(x^3+2x^2-x-2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(-x^3-2x^2+4x+8)\,dx$$

$$=2\int_0^2(-2x^2+8)\,dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2$$

$$=2\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$$

답 $\frac{64}{3}$

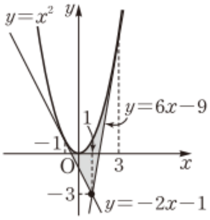
075-❷ $f(x)=x^2$으로 놓으면

$f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)\qquad \therefore\ y=2tx-t^2$

이 직선이 점 $(1,\ -3)$을 지나므로



$-3=2t-t^2$

$t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=3$

따라서 두 접선의 방정식은

$y=-2x-1,\ y=6x-9$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

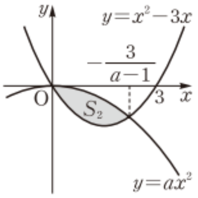
$$S=\int_{-1}^{1}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{1}^{3}\{x^2-(6x-9)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(x^2+1)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^3$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

답 $\frac{16}{3}$

076-❶ 곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=0$에서

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$



두 곡선 $y=x^2-3x$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=ax^2$에서

$(a-1)x^2+3x=0$, $\quad x\{(a-1)x+3\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-\dfrac{3}{a-1}$

곡선 $y=x^2-3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 두 곡선 $y=x^2-3x$, $y=ax^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_1=-\int_0^3(x^2-3x)\,dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

$$S_2=\int_0^{-\frac{3}{a-1}}\{ax^2-(x^2-3x)\}dx=\int_0^{-\frac{3}{a-1}}\{(a-1)x^2+3x\}dx$$
$$=\left[\frac{a-1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^{-\frac{3}{a-1}}=\frac{9}{2(a-1)^2}$$

이때 $S_1=2S_2$이므로

$$\frac{9}{2}=2\cdot\frac{9}{2(a-1)^2}$$

$(a-1)^2=2$, $\quad a-1=\pm\sqrt{2}$

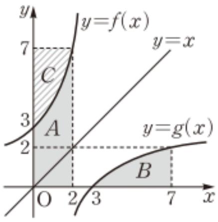
$\therefore a=1-\sqrt{2}\ (\because a<0)$

답 $1-\sqrt{2}$

077-❶ 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=3$, $f(2)=7$이므로

$g(3)=0$, $g(7)=2$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$\int_0^2 f(x)\,dx=A$, $\int_3^7 g(x)\,dx=B$라 하고, 빗금 친 부분의 넓이를 C라 하면 $B=C$이므로

$$\int_0^2 f(x)\,dx+\int_3^7 g(x)\,dx=A+B=A+C=2\cdot7=14$$

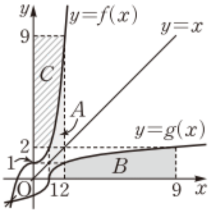
답 14

077-❷ $f(x)=x^3+1$에서

$f'(x)=3x^2\ge0$

이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

한편 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\int_1^2 f(x)\,dx=A$, $\int_2^9 g(x)\,dx=B$라 하고, 빗금 친 부분의 넓이를 C라 하면 $B=C$이므로

$A+B=A+C=2\cdot9-1\cdot2=16$

이때 $A=\int_1^2(x^3+1)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_1^2=\frac{19}{4}$이므로

$$\int_2^9 g(x)\,dx=16-A=16-\frac{19}{4}=\frac{45}{4}$$

답 $\frac{45}{4}$

078-❶ (1) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $2t-t^2=0$에서

$t(2-t)=0 \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$

즉 출발한 지 2초 후 처음으로 운동 방향이 바뀌므로 2초 후의 점 P의 위치는

$$1+\int_0^2(2t-t^2)\,dt=1+\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^2=\frac{7}{3}$$

(2) 점 P가 좌표가 1인 점을 출발하여 다시 출발점으로 돌아오는 데 걸리는 시간을 a초라 하면 출발한 지 a초 후의 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$$\int_0^a(2t-t^2)\,dt=0, \qquad \left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^a=0$$

$a^2\left(1-\frac{1}{3}a\right)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 구하는 시간은 3초이다.

(3) $\int_0^3 |2t-t^2|dt=\int_0^2 (2t-t^2)dt+\int_2^3 (-2t+t^2)dt$

$=\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^2+\left[-t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_2^3$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

답 (1) $\frac{7}{3}$ (2) 3초 (3) $\frac{8}{3}$

079-❶ 물체를 쏘아 올린 후 t초가 지났을 때의 물체의 높이를 $x(t)$라 하자.

(1) 물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0 m/s이므로 $-10t+40=0$에서

$t=4$

따라서 $t=4$일 때 물체가 최고 지점에 도달하게 되므로 구하는 높이는

$x(4)=\int_0^4 (-10t+40)dt$

$=\left[-5t^2+40t\right]_0^4$

$=80\,(\mathrm{m})$

(2) $x(t)=\int_0^t (-10t+40)dt$

$=\left[-5t^2+40t\right]_0^t$

$=-5t^2+40t$

물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0 m이므로

$-5t^2+40t=0,\quad -5t(t-8)=0$

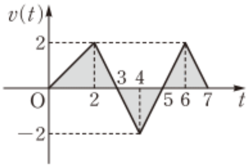
$\therefore t=8\ (\because t>0)$

따라서 8초 후에 지면에 떨어지므로 이때의 속도는

$v(8)=-80+40=-40\,(\mathrm{m/s})$

답 (1) 80 m (2) -40 m/s

080-❶ 출발한 후 7초 동안 점 P가 움직인 거리는



$\int_0^7 |v(t)|dt$

$=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^5 \{-v(t)\}dt+\int_5^7 v(t)dt$

$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=7$

답 7

중단원 연습 문제

본책 226~229쪽

01 2 **02** $\frac{8}{3}$ **03** 8 **04** ③

05 $2(\sqrt[3]{2}-1)$ **06** $\frac{1}{6}$ **07** 11 **08** ⑤

09 270 m **10** ④ **11** 9

12 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ **13** $4\sqrt{3}$ **14** 10 **15** $\frac{9}{2}$ **16** ④

17 40 **18** ①

01 전략 x의 값의 범위를 나누어 그래프를 그린다.

풀이 (i) $x\geq0$일 때

$y=3x^2-2x-1$

$3x^2-2x-1=0$에서 $(3x+1)(x-1)=0$

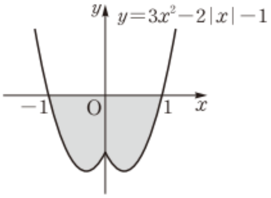
$\therefore x=1\ (\because x\geq0)$

(ii) $x\leq0$일 때

$y=3x^2+2x-1$

$3x^2+2x-1=0$에서 $(x+1)(3x-1)=0$

$\therefore x=-1\ (\because x\leq0)$



$-1\leq x\leq1$일 때 $y\leq0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=-\int_{-1}^1 (3x^2-2|x|-1)dx$

$=-2\int_0^1 (3x^2-2x-1)dx$

$=-2\left[x^3-x^2-x\right]_0^1$

$=-2\cdot(-1)=2$

답 2

02 전략 주어진 포물선의 축을 이용한다.

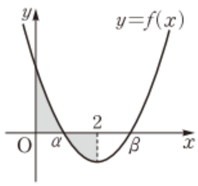
풀이 $f(x)=x^2-4x+k$로 놓으면

$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

⋯⋯ ❶

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면



$\int_\alpha^2 f(x)dx=\int_2^\beta f(x)dx$

이고 $S_2=2S_1$이므로

$$\int_0^a f(x)\,dx=-\int_a^2 f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)\,dx=0 \quad \cdots\text{➋}$$

이때

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (x^2-4x+k)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_0^2$$

$$=-\frac{16}{3}+2k$$

이므로 $\quad -\frac{16}{3}+2k=0$

$$\therefore k=\frac{8}{3} \quad \cdots\text{➌}$$

답 $\frac{8}{3}$

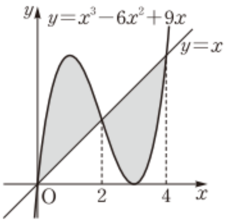
채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.	20 %
❷ $\int_0^2 f(x)\,dx=0$임을 알 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

03 전략 곡선과 직선의 교점을 구하여 그래프를 그려 본다.

풀이 곡선 $y=x^3-6x^2+9x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3-6x^2+9x=x$에서

$x^3-6x^2+8x=0, \qquad x(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2 \{(x^3-6x^2+9x)-x\}dx$$

$$+\int_2^4 \{x-(x^3-6x^2+9x)\}dx$$

$$=\int_0^2 (x^3-6x^2+8x)\,dx$$

$$+\int_2^4 (-x^3+6x^2-8x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-4x^2\right]_2^4$$

$$=4+4=8$$

답 8

04 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이고, 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(a)}$임을 이용하여 조건을 만족시키는 직선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+2x$로 놓으면

$f'(x)=2x+2$

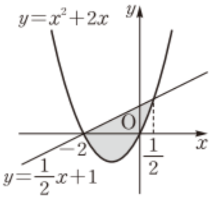
이므로 곡선 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=-4+2=-2$

따라서 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이고, 이 직선이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x+2) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+1$

곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$의 교점의 x좌표는



$x^2+2x=\frac{1}{2}x+1$에서

$2x^2+3x-2=0$

$(x+2)(2x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{\frac{1}{2}} \left\{\left(\frac{1}{2}x+1\right)-(x^2+2x)\right\}dx$$

$$=\int_{-2}^{\frac{1}{2}} \left(-x^2-\frac{3}{2}x+1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+x\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{125}{48}$$

답 ③

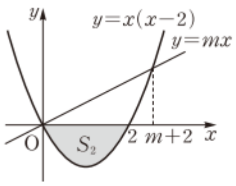
05 전략 곡선과 직선의 교점을 구하여 조건에 맞게 그래프를 그려 본다.

풀이 곡선 $y=x(x-2)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x(x-2)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

곡선 $y=x(x-2)$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=mx$에서

$x^2-(m+2)x=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=m+2$



곡선 $y=x(x-2)$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하고, 곡선 $y=x(x-2)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_1=\int_0^{m+2}\{mx-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_0^{m+2}\{-x^2+(m+2)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{m+2}{2}x^2\right]_0^{m+2}$$
$$=\frac{1}{6}(m+2)^3,$$
$$S_2=-\int_0^2(x^2-2x)\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

이때 $S_1=2S_2$이므로

$$\frac{1}{6}(m+2)^3=2\cdot\frac{4}{3}$$
$$(m+2)^3=16, \qquad m+2=2\sqrt[3]{2}$$
$$\therefore m=2(\sqrt[3]{2}-1)$$

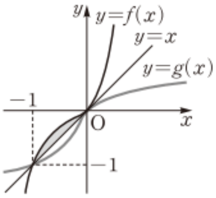
답 $2(\sqrt[3]{2}-1)$

06

전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=x^3+x^2+x$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3+x^2+x=x$에서

$$x^3+x^2=0, \qquad x^2(x+1)=0$$
$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0$$



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_{-1}^0\{(x^3+x^2+x)-x\}dx$$
$$=2\int_{-1}^0(x^3+x^2)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^0$$
$$=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

07

전략 원점으로 돌아오면 위치의 변화량이 0임을 이용한다.

풀이 시각 $t=a$에서 점 P가 원점으로 다시 돌아오므로 $t=a$에서의 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

즉 $\int_0^a(3t^2-12t+9)\,dt=0$이므로

$$\left[t^3-6t^2+9t\right]_0^a=0, \qquad a^3-6a^2+9a=0$$
$$a(a-3)^2=0$$
$$\therefore a=3\ (\because a>0) \qquad \cdots ❶$$

한편 곡선 $y=v(t)$와 t축의 교점의 t좌표는 $3t^2-12t+9=0$에서 $\quad (t-1)(t-3)=0$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

즉 $0\le t\le 1$ 또는 $t\ge 3$에서 $v(t)\ge 0$이고 $1\le t\le 3$에서 $v(t)\le 0$이므로

$$s=\int_0^3|3t^2-12t+9|\,dt$$
$$=\int_0^1(3t^2-12t+9)\,dt$$
$$+\int_1^3(-3t^2+12t-9)\,dt$$
$$=\left[t^3-6t^2+9t\right]_0^1+\left[-t^3+6t^2-9t\right]_1^3$$
$$=4+4=8 \qquad \cdots ❷$$
$$\therefore a+s=11 \qquad \cdots ❸$$

답 11

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ s의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+s$의 값을 구할 수 있다.	10 %

08

전략 물체가 정지하는 순간의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 열차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로 $30-t=0$에서

$$t=30$$

따라서 열차는 브레이크를 건 후 30초 후에 정지하므로 30초 동안 움직인 거리는

$$\int_0^{30}|v(t)|\,dt=\int_0^{30}|30-t|\,dt$$
$$=\int_0^{30}(30-t)\,dt$$
$$=\left[30t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^{30}=450(\text{m})$$

답 ⑤

09

전략 자동차의 속도가 최대가 되는 시각을 구한다.

풀이 $v(t)=-15t^2+90t$

$$=-15(t-3)^2+135$$

이므로 $t=3$일 때 $v(t)$는 최대이다.

따라서 $t=3$일 때 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (-15t^2+90t)\,dt=\Big[-5t^3+45t^2\Big]_0^3$$
$$=270(\mathrm{m})$$

이므로 자동차는 A지점으로부터 270 m 떨어져 있다.

답 270 m

10

전략 속도를 적분하여 위치를 구한다.

풀이 돌을 던진 지 3초 후의 높이는

$$\int_0^3 (v_0-10t)\,dt=\Big[v_0t-5t^2\Big]_0^3$$
$$=3v_0-45\,(\mathrm{m})$$

3초 후의 지면으로부터의 높이가 30 m이므로

$3v_0-45=30,\qquad 3v_0=75$

$\therefore\ v_0=25$

답 ④

11

전략 대칭이동하고 평행이동한 그래프의 식을 구한다.

풀이 곡선 $y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면

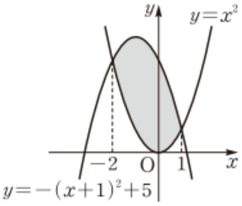
$-y=x^2$, 즉 $y=-x^2$

이것을 다시 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면

$y=-(x+1)^2+5$

$\therefore\ g(x)=-(x+1)^2+5$ ⋯ ❶

두 곡선 $y=x^2$, $y=-(x+1)^2+5$의 교점의 x좌표는



$x^2=-(x+1)^2+5$에서

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$ ⋯ ❷

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^1 \{-(x+1)^2+5-x^2\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^1 (-2x^2-2x+4)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\Big]_{-2}^1$$
$$=9$$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

12

전략 원점에서 그은 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=-x^2-2$로 놓으면

$f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^2-2)$라 하면 접선의 방정식은

$y-(-a^2-2)=-2a(x-a)$

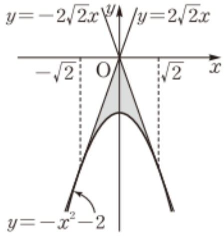
$\therefore\ y=-2ax+a^2-2$

이 접선이 원점을 지나므로

$a^2-2=0\qquad \therefore\ a=\pm\sqrt{2}$

따라서 접선의 방정식은

$y=\pm2\sqrt{2}x$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^0 \{2\sqrt{2}x-(-x^2-2)\}\,dx$$
$$+\int_0^{\sqrt{2}} \{-2\sqrt{2}x-(-x^2-2)\}\,dx$$
$$=2\int_0^{\sqrt{2}} (x^2-2\sqrt{2}x+2)\,dx$$
$$=2\Big[\frac{1}{3}x^3-\sqrt{2}x^2+2x\Big]_0^{\sqrt{2}}$$
$$=2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

답 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

13

전략 곡선과 직선의 교점의 좌표를 a로 나타낸다.

풀이 곡선 $y=x^2-2x-3$과 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식

$x^2-2x-3=ax$, 즉 $x^2-(a+2)x-3=0$

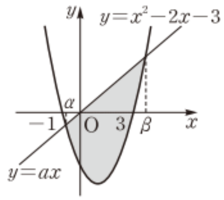
의 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+2,\ \alpha\beta=-3$이므로

$$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$$
$$=(a+2)^2-4\cdot(-3)$$
$$=(a+2)^2+12$$

$\therefore\ \beta-\alpha=\sqrt{(a+2)^2+12}\ \ (\because\ \alpha<\beta)$



곡선 $y=x^2-2x-3$과 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{ax-(x^2-2x-3)\}dx$$
$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{6}\{\sqrt{(a+2)^2+12}\}^3$$

따라서 $a=-2$일 때 S는 최솟값 $\frac{1}{6}(\sqrt{12})^3=4\sqrt{3}$을 갖는다.

답 $4\sqrt{3}$

Remark▶

$x>0$일 때 함수 $y=x^3$은 증가함수이므로 $y=\{f(x)\}^3$에서 $f(x)$의 값이 최소일 때 y의 값이 최소이다. (단, $f(x)\geq 0$)

14

전략 3초 후의 점 P, Q의 위치를 구한다.

풀이 3초 후의 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(x_P, 0)$, $(0, y_Q)$라 하면

$$x_P=-3+\int_0^3 2t\,dt=-3+\Big[t^2\Big]_0^3=6 \quad \cdots ❶$$

$$y_Q=-4+\int_0^3 \frac{8}{3}t\,dt=-4+\Big[\frac{4}{3}t^2\Big]_0^3=8 \quad \cdots ❷$$

따라서 3초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(6, 0)$, $(0, 8)$이므로 두 점 사이의 거리는

$$\overline{PQ}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10 \quad \cdots ❸$$

답 10

채점 기준	비율
❶ 3초 후의 점 P의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 3초 후의 점 Q의 y좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 점 P, Q 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

15

전략 $f'(t)$가 점 P의 속도임을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=f'(t)$의 그래프와 t축의 교점의 t좌표가 1, 4이므로

$$f'(t)=a(t-1)(t-4)\ (a>0)$$

로 놓을 수 있다.

이때 $f'(0)=4$이므로

$$4a=4 \qquad \therefore a=1$$
$$\therefore f'(t)=(t-1)(t-4)$$
$$=t^2-5t+4$$

점 P가 출발할 때의 운동 방향과 반대 방향으로 움직인 시간은 $t=1$에서 $t=4$까지이다.

이때 $f'(t)\leq 0$이므로 구하는 거리는

$$\int_1^4(-t^2+5t-4)dt=\Big[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-4t\Big]_1^4$$
$$=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

16

전략 $f'(x)$를 적분하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f'(x)=x^2-1$이므로

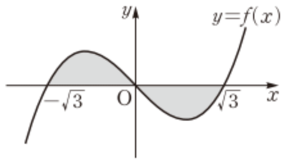
$$f(x)=\int(x^2-1)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x+C$$

이때 $f(0)=0$이므로 $\qquad C=0$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$$

$f(x)=0$에서 $\qquad x^3-3x=0$

$$x(x^2-3)=0, \qquad x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$$
$$\therefore x=-\sqrt{3} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{3}$$



$-\sqrt{3}\leq x\leq 0$일 때 $f(x)\geq 0$이고, $0\leq x\leq\sqrt{3}$일 때 $f(x)\leq 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}|f(x)|dx$$
$$=\int_{-\sqrt{3}}^{0}\Big(\frac{1}{3}x^3-x\Big)dx+\int_0^{\sqrt{3}}\Big(x-\frac{1}{3}x^3\Big)dx$$
$$=2\int_{-\sqrt{3}}^{0}\Big(\frac{1}{3}x^3-x\Big)dx$$
$$=2\Big[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2\Big]_{-\sqrt{3}}^{0}$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 ④

17

전략 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $\int_0^{2013}f(x)dx=\int_3^{2013}f(x)dx$이므로

$$\int_0^{2013}f(x)dx-\int_3^{2013}f(x)dx=0$$
$$\int_0^{2013}f(x)dx+\int_{2013}^{3}f(x)dx=0$$
$$\therefore \int_0^3 f(x)dx=0$$

$f(3)=0$이므로

$$f(x)=(x-3)(x-a)=x^2-(a+3)x+3a$$

라 하면

$$\int_0^3 \{x^2-(a+3)x+3a\}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a+3}{2}x^2+3ax\right]_0^3$$
$$=\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}$$

즉 $\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}=0$이므로

$a=1$

$\therefore f(x)=x^2-4x+3$

함수 $f(x)=x^2-4x+3$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1, 3이고 $1\le x\le 3$일 때 $f(x)\le 0$이므로

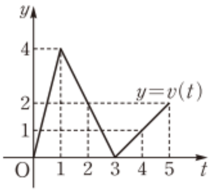
$$S=\int_1^3(-x^2+4x-3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3$$
$$=\frac{4}{3}$$

$\therefore 30S=40$

답 40

18 전략 $y=v(t)$의 그래프를 그린 후 넓이를 이용하여 움직인 거리를 구한다.

풀이 함수 $y=v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리를 $s_1(x)$, 시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리를 $s_2(x)$, 시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리를 $s_3(x)$라 하자.



ㄱ. $s_1(1)=\int_0^1 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4=2,$

$s_2(1)=\int_1^3 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4,$

$s_3(1)=\int_3^5 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$

이므로 $f(1)=2$

ㄴ. $s_1(2)=\int_0^2 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4+\frac{1}{2}(4+2)\cdot 1=5,$

$s_2(2)=\int_2^4 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{2},$

$s_3(2)=\int_4^5 v(t)dt=\frac{1}{2}(1+2)\cdot 1=\frac{3}{2}$

이므로 $f(2)=\frac{3}{2}$

$\therefore f(2)-f(1)=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$

한편 $\int_1^2 v(t)\,dt=\frac{1}{2}(4+2)\cdot 1=3$이므로

$f(2)-f(1)\ne\int_1^2 v(t)\,dt$

ㄷ. (i) $0<x<1$일 때,

$v(x)=4x$이므로

$s_1(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 4x=2x^2<2,$

$s_2(x)>\int_1^2 v(t)dt=3,$

$s_3(x)>\int_3^5 v(t)dt=2$

$\therefore f(x)=s_1(x)=2x^2$

따라서 $f'(x)=4x$이므로

$\lim_{x\to 1-} f'(x)=4$

(ii) $1<x<\frac{3}{2}$일 때,

$s_1(x)>\int_0^1 v(t)dt=2,$

$s_2(x)>\int_{\frac{3}{2}}^3 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{4},$

$s_3(x)<\int_3^5 v(t)dt=2$

$\therefore f(x)=s_3(x)$

$=\frac{1}{2}\{(x+2-3)+2\}\cdot\{5-(x+2)\}$

$=\frac{1}{2}(x+1)(-x+3)$

$=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$

따라서 $f'(x)=-x+1$이므로

$\lim_{x\to 1+} f'(x)=0$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to 1-} f'(x)\ne\lim_{x\to 1+} f'(x)$이므로

$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

MEMO

MEMO

MEMO