Solution

Lecture Book

I 다항식

II 방정식

III 부등식

IV 도형의 방정식

Work Book

I 다항식

II 방정식

III 부등식

IV 도형의 방정식

빠른 정답 찾기 **Lecture Book**

01 다항식의 연산

7쪽 **Lecture 01** 01 $x^2-(4y-5)x+2y^2-y+3$
02 $2y^2-(4x+1)y+x^2+5x+3$ 03 $3x^3+x^2+2x-1$
04 $-x^2+8xy+y^2$ 05 x^3+x^2+7x-4 06 $-x^3+8x^2-x+1$
07 $4x^2$ 08 $11x^2+4x-7$ 09 $A=x^2-x+2$, $B=-4x+4$
10 $A=3x^2+2x-2$, $B=-2x^2-5$ 11 $3a^3b+a^2b-2ab^2$
12 $2a^3-5a^2-10a-8$ 13 1 14 21
15 $x^2+y^2+2xy-4x-4y+4$ 16 $a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3$
17 x^3-64 18 $27a^3-b^3+c^3+9abc$ 19 29 20 19 21 6
22 10 23 2 24 2

8쪽 **유형** Q+Q 01 ④ 02 $4x^2-17xy-y^2$ 03 ①
04 ③ 05 30 06 ⑤ 07 16 08 36
09 $9a^2-25b^2-c^2+10bc$ 10 ⑤ 11 ⑤ 12 32
13 36 14 150 15 ③ 16 ② 17 ③ 18 2

11쪽 **Lecture 02** 01 몫: x^2+2x+7, 나머지: 13
02 몫: $4x$, 나머지: $7x+1$ 03 몫: x^2+5x+9, 나머지: $2x-9$
04 몫: $6x^2+5x+1$, 나머지: $-4x+2$
05 $Q=2x^2-x-4$, $R=5$, $2x^3+x^2-5x+1=(x+1)(2x^2-x-4)+5$
06 $Q=3x-6$, $R=6x+10$, $3x^3-2=(x^2+2x+2)(3x-6)+6x+10$
07 $Q=-4x^2-2x-1$, $R=-2x-7$,
$-8x^4+4x^2+x-6=(2x^2-x-1)(-4x^2-2x-1)-2x-7$
08 $2x^3-x^2+3x-5$ 09 $x^3+2x^2-4x-13$ 10 $2x^3+4x^2-7$

12쪽 **유형** Q+Q 01 3 02 ①
03 몫: $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지: R 04 ③ 05 $a+3$ 06 ⑤

13쪽 **중단원** 마무리 01 $3x^2-20xy+14y^2$ 02 ⑤ 03 ②
04 ① 05 ② 06 -4 07 ⑤ 08 16 09 30
10 $\frac{3}{2}$ 11 ① 12 ① 13 10 14 ⑤ 15 25π
16 135 17 ②

02 나머지정리와 인수분해

16쪽 **Lecture 03** 01 ㄴ, ㄷ 02 $a=1$, $b=0$, $c=0$
03 $a=4$, $b=6$, $c=-3$ 04 $a=1$, $b=\frac{9}{2}$, $c=-\frac{5}{2}$
05 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{3}{2}$ 06 $a=3$, $b=-9$, $c=8$
07 $a=1$, $b=5$, $c=2$

17쪽 **유형** Q+Q 01 ③ 02 $\frac{5}{2}$ 03 ④ 04 -1
05 ② 06 ① 07 0 08 33 09 ⑤
10 $a=1$, $b=-3$ 11 ③

19쪽 **Lecture 04** 01 -3 02 17 03 8 04 4
05 $a=-\frac{15}{2}$, $b=\frac{3}{2}$ 06 $a=-7$, $b=-7$
07 몫: x^2-4x-2, 나머지: 4 08 몫: $3x^2+3x$, 나머지: 1

20쪽 **유형** Q+Q 01 -1 02 ⑤ 03 ④ 04 ③
05 $-x^2+5x+1$ 06 7 07 8 08 ④ 09 1
10 6 11 1 12 ③ 13 ③ 14 ① 15 -6
16 2 17 (1) 15 (2) 몫: x^2+3x+1, 나머지: 4 18 ④
19 (1) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=6$ (2) 6.321 20 ③

23쪽 **Lecture 05** 01 $(x-2y+z)^2$ 02 $(x-3)^3$
03 $(3a+2b)^3$ 04 $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$
05 $(a+2b-3c)(a^2+4b^2+9c^2-2ab+6bc+3ca)$
06 $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$ 07 $(x-7)(x-8)$
08 $(x+2)^2(x^2+4x+2)$ 09 $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$
10 $(x^2+x+4)(x^2-x+4)$ 11 $(x-3y+1)(x+y-2)$
12 $(x-1)(x+2)(x-3)$

24쪽 **유형** Q+Q 01 ③ 02 ④ 03 36 04 4
05 ③ 06 $2x^2-8y^2$ 07 ④ 08 $(a+b)(b+c)(c+a)$
09 ② 10 1 11 ② 12 ② 13 11 14 ②
15 빗변의 길이가 b인 직각삼각형 16 $20\sqrt{2}$ 17 24
18 ① 19 ④

27쪽 중단원 마무리 01 ① 02 ② 03 $-\frac{5}{3}$ 04 1
05 -10 06 ⑤ 07 ③ 08 ⑤ 09 ㄱ, ㄴ 10 ②
11 19 12 ① 13 8 14 ② 15 ① 16 ①
17 ⑤ 18 -11 19 ① 20 11 21 ① 22 33
23 ③ 24 24

41쪽 중단원 마무리 01 ③ 02 ⑤ 03 $x=3$, $z=-i$
04 ④ 05 ② 06 $7+2i$ 07 ④ 08 ⑤ 09 ②
10 $\sqrt{73}$ 11 ④ 12 4 13 ② 14 -1 15 ②
16 ④ 17 24 18 18

03 복소수

35쪽 Lecture 06 01 실수부분: -1, 허수부분: 6
02 실수부분: 0, 허수부분: -5 03 실수부분: $\frac{7}{2}$, 허수부분: $-\frac{1}{2}$
04 실수부분: $4+\sqrt{3}$, 허수부분: 0 05 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ 06 ㄴ, ㅂ
07 $a=1$, $b=-3$ 08 $a=2$, $b=3$ 09 $a=-9$, $b=3$
10 $a=\sqrt{10}$, $b=0$ 11 $9-4i$ 12 $-16+12i$ 13 $10+10i$
14 $3-4i$ 15 $-\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i$ 16 $-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ 17 $4-2i$
18 8 19 20 20 $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ 21 0 22 -1
23 16 24 $-i$

36쪽 유형 Q+Q 01 ⑤ 02 3 03 ④ 04 $5+2i$
05 ① 06 $-3-5i$ 07 -2 08 36 09 -1
10 -1 11 ⑤ 12 20 13 ③ 14 2 15 i
16 $\frac{2}{53}$ 17 ② 18 -4 19 1 20 12 21 $-i$
22 ⑤

39쪽 Lecture 07 01 $2i$ 02 $2\sqrt{5}i$ 03 $-\frac{1}{9}i$ 04 $3\sqrt{2}i$
05 $\frac{5}{2}i$ 06 $4\sqrt{3}i$ 07 $2\sqrt{6}i$ 08 -6 09 $-\sqrt{5}i$ 10 $2\sqrt{2}$
11 (1) $a<0$, $b<0$ (2) $-a-2b$

40쪽 유형 Q+Q 01 ② 02 -2 03 ① 04 ④
05 ②

04 이차방정식

44쪽 Lecture 08 01 $x=3$ 또는 $x=6$, 실근
02 $x=\pm 4i$, 허근 03 $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$, 실근 04 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}i}{3}$, 허근
05 서로 다른 두 실근 06 중근 07 서로 다른 두 실근
08 서로 다른 두 허근 09 $k<\frac{9}{8}$ 10 $\frac{9}{8}$ 11 $k>\frac{9}{8}$

45쪽 유형 Q+Q 01 ② 02 $x=-\sqrt{5}-2$ 또는 $x=-\sqrt{5}$
03 ③ 04 ② 05 $-2+\sqrt{10}$ 06 2
07 $-2\le x<-1$ 08 ③ 09 400 m^2 10 ④ 11 ②
12 -5 13 ① 14 서로 다른 두 실근 15 ⑤
16 둔각삼각형 17 $\frac{7}{8}$ 18 8

48쪽 Lecture 09 01 $\frac{3}{2}$ 02 $-\frac{3}{2}$ 03 5 04 -10
05 $x^2+2x-3=0$ 06 $x^2-2x-2=0$ 07 $x^2-4x+5=0$
08 $(x+5i)(x-5i)$ 09 $(x+1+\sqrt{2}i)(x+1-\sqrt{2}i)$
10 $3\left(x+\frac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{37}}{6}\right)$ 11 $a=2$, $b=-4$
12 $a=-4$, $b=13$

49쪽 유형 Q+Q 01 $6\sqrt{7}$ 02 ③ 03 9 04 $-\frac{11}{5}$
05 3 06 4 07 ④ 08 2 09 ⑤ 10 ⑤
11 ⑤ 12 ④ 13 -2 14 $2x^2-3x-5=0$ 15 3
16 1 17 ⑤ 18 -4 19 ④ 20 -3 21 102
22 8

52쪽 중단원 마무리 01 $x=-7\pm\sqrt{55}$ 02 ② 03 50
04 ③ 05 144 06 ① 07 ㄱ, ㄴ, ㄷ 08 30
09 ⑤ 10 ④ 11 -38 12 3 13 1 14 ⑤
15 ② 16 ① 17 503 18 1 19 4 20 $\frac{1}{10}$
21 ① 22 ⑤ 23 ⑤

05 이차방정식과 이차함수

56쪽 Lecture 10 01 2 02 1 03 $k>-\frac{9}{4}$
04 서로 다른 두 점에서 만난다. 05 한 점에서 만난다.(접한다.)
06 $k<\frac{11}{4}$

57쪽 유형 01 10 02 4 03 0 04 -6
05 ④ 06 ④ 07 ④ 08 $\frac{9}{16}$ 09 8 10 ③
11 ④

59쪽 Lecture 11 01 최솟값: -1, $x=-3$
02 최댓값: 6, $x=5$ 03 최솟값: -7 04 최댓값: $\frac{17}{4}$
05 최솟값: 1 06 최댓값: 6
07 최댓값: 2, 최솟값: -2 08 최댓값: 3, 최솟값: -3
09 5

60쪽 유형 01 1 02 6 03 ② 04 ⑤
05 -2 06 -4 07 14 08 7 09 ③ 10 ③
11 -1 12 27 13 ① 14 500원

62쪽 중단원 마무리 01 9 02 2 03 ② 04 4
05 ③ 06 -2 07 ② 08 $-\frac{25}{4}$ 09 ① 10 22
11 $\frac{3}{2}$ 12 ④ 13 -9 14 ③ 15 169 cm^2
16 ⑤ 17 ④

06 여러 가지 방정식

66쪽 Lecture 12 01 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=5$
02 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$
03 $x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}$ 04 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$
05 $x=-1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$ 06 $x=-3\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

67쪽 유형 01 4 02 -1 03 ④ 04 ②
05 3 06 0 07 ③ 08 1 09 ④ 10 $-\frac{1}{3}$
11 ④ 12 1 13 $\frac{7}{12}$ 14 ① 15 5 cm

69쪽 Lecture 13 01 (1) 3 (2) 2 (3) 4
02 $x^3+x^2-2x-2=0$ 03 $x^3-6x^2+18x-40=0$
04 (1) $-2-i$, 3 (2) $a=-7$, $b=-15$
05 (1) -1 (2) -1 (3) 0

70쪽 유형 01 ④ 02 ④ 03 $x^3-x^2-4x+1=0$
04 $x^3-2x^2-7x-9=0$ 05 -8 06 -9 07 ㄱ, ㄴ
08 $\frac{1}{7}$

71쪽 Lecture 14 01 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{11}{5} \\ y=-\frac{2}{5} \end{cases}$

02 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

03 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 04 (1, 5), (3, 2)

05 (3, 4), (7, 0), (1, -6), (-3, -2) 06 $x=1$, $y=-2$

72쪽 유형 01 ① 02 2 03 -4, 2 04 ①
05 (0, -1), (-1, 0), (2, 3), (3, 2) 06 ④ 07 -25
08 $\frac{1}{8}$ 09 ⑤ 10 6 cm, 8 cm 11 ③ 12 ④

74쪽 중단원 마무리 01 ① 02 17 03 ⑤ 04 $-\frac{5}{2}$
05 ⑤ 06 ④ 07 2 08 ⑤ 09 66 10 ④
11 $x=0$, $y=-2$ 12 $-\frac{1}{4}$ 13 ③ 14 3 15 12
16 46 17 ③

07 일차부등식

78쪽 Lecture 15 01 $\begin{cases} a>-1\text{일 때, } x<1-a \\ a=-1\text{일 때, 해가 없다.} \\ a<-1\text{일 때, } x>1-a \end{cases}$

02 $\begin{cases} a>2\text{일 때, } x\geq a+1 \\ a=2\text{일 때, 해는 모든 실수} \\ a<2\text{일 때, } x\leq a+1 \end{cases}$ 03 $x<-2$ 04 $1\leq x\leq 5$

05 $x>-1$ 06 $x\geq 7$ 07 $-3<x<\frac{3}{5}$ 08 $x<-\frac{1}{3}$
09 $x\geq 0$

79쪽 유형 Q+Q 01 ④ 02 ㄱ, ㄴ, ㄷ 03 $x\geq -4$
04 -2 05 1 06 ①

80쪽 Lecture 16 01 $x=6$ 02 해는 없다.
03 $-5<x<2$ 04 $x\geq -1$ 05 $4\leq x\leq 8$
06 $-\frac{11}{3}<x<-\frac{8}{3}$ 또는 $-2<x<-1$ 07 $-2<x<1$

81쪽 유형 Q+Q 01 ② 02 ㄱ, ㄴ 03 9 04 -15
05 13 06 ④ 07 $k\geq 3$ 08 2 09 ②
10 $\frac{2}{3}\leq a<1$ 11 ③ 12 6 13 ⑤ 14 ②
15 2 16 $-2\leq x\leq \frac{4}{3}$ 또는 $x=8$ 17 ② 18 -2

84쪽 중단원 마무리 01 ⑤ 02 ③ 03 ① 04 7
05 ⑤ 06 ⑤ 07 ② 08 $a>-14$ 09 ④
10 13 11 120 g 이상 200 g 이하 12 ③ 13 ①
14 ③ 15 9 16 $6\leq k<8$ 17 120 18 9

08 이차부등식

89쪽 Lecture 17 01 $x<-1$ 또는 $x>2$ 02 $-1\leq x\leq 2$
03 $x\leq \alpha$ 또는 $x\geq \gamma$ 04 $\beta<x<\delta$ 05 $-5\leq x\leq 1$
06 $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$ 07 $x=-3$ 08 $x<-1$ 또는 $x>3$
09 $x^2+x-2<0$ 10 $x^2-3x-28\geq 0$ 11 $x^2-6x+9>0$
12 $x^2-10x+25\leq 0$ 13 $3x^2-4x+1<0$ 14 $-8\leq k\leq 4$
15 $0<k<1$ 16 $k\geq 9$

90쪽 유형 Q+Q 01 ⑤ 02 1 03 5 04 ③
05 7 06 ③ 07 $1<x<\frac{7}{2}$ 08 ③ 09 ④
10 $x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$ 11 ② 12 0 13 20
14 ① 15 -1 16 $-2<k<0$ 또는 $k>0$
17 $-\frac{5}{9}\leq a\leq 0$ 18 ⑤ 19 28 20 $1\leq k<3$
21 ④ 22 6 23 최댓값: 9, 최솟값: -1 24 ②
25 15 m 26 8000원

94쪽 Lecture 18 01 $1<x\leq 3$
02 $-3\leq x<-\frac{3}{2}$ 또는 $4<x\leq 5$ 03 $0\leq x\leq 2$
04 $\frac{3}{4}\leq k<1$ 05 $-2<k<2$ 06 $1<k\leq 5$
07 $-1<k<\frac{3}{2}$

95쪽 유형 Q+Q 01 6 02 -1 03 ③ 04 3
05 $5\leq a<6$ 06 7 07 9 08 14 09 ②
10 $-3\leq a\leq 5$ 11 $\frac{1}{2}<m\leq 1$ 또는 $m\geq 5$ 12 4
13 1 14 7 15 $-\frac{5}{2}<m<-2$ 16 ④

97쪽 중단원 마무리 01 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 5$ 02 ①
03 3 04 ② 05 6 06 ⑤ 07 ③
08 $a<-\frac{5}{2}$ 또는 $a>\frac{3}{2}$ 09 -6 10 ⑤ 11 ②
12 ④ 13 4000원 14 18 15 ⑤ 16 ③ 17 27
18 6

09 평면좌표

102쪽 Lecture 19 01 8 02 $\sqrt{29}$ 03 -2, 14 04 -10, 4
05 -1, 7 06 -6, 0 07 13 08 $(-7, 0)$ 09 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$
10 $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$ 11 $(0, -1)$

103쪽 유형 Q+Q 01 ⑤ 02 5 03 $\frac{10}{3}$ 04 $(3, 4)$
05 ③ 06 ② 07 $3\sqrt{2}$ 08 ④ 09 39 10 $(-2, 1)$
11 (가) M (나) $(-c, 0)$ (다) $2(a^2+b^2+c^2)$ (라) $a^2+b^2+c^2$ 12 ③

105쪽 Lecture 20 01 6 02 -28 03 $(3, 0)$ 04 $(10, 7)$
05 $a=4$, $b=3$ 06 $(-2, -2)$

106쪽 유형 Q+Q 01 23 02 ④ 03 $(4, -1)$
04 $\frac{1}{7}<a<\frac{2}{3}$ 05 $(2, -1)$, $(6, -5)$ 06 ③ 07 $(4, 3)$
08 $(5, 1)$ 09 ④ 10 ④ 11 7 12 $3x-6y-1=0$
13 $x-3y-12=0$

108쪽 중단원 마무리 01 $10\sqrt{2}$ 02 $\sqrt{89}$ 03 ⑤ 04 $2\sqrt{5}$ km
05 ③ 06 2 07 ① 08 ④ 09 3 10 ④
11 71 12 172 13 13 14 ③ 15 $16x+10y-67=0$
16 16 17 ③

10 직선의 방정식

112쪽 Lecture 21 01 $y=4x+17$ 02 $y=-x-3$
03 $\frac{x}{4}-\frac{y}{8}=1$ 04 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면
05 $(-1, 1)$ 06 $(3, 1)$ 07 $3x-7y=0$

113쪽 유형 Q+Q 01 $y=6x+1$ 02 ① 03 ④
04 $y=2x+11$ 05 ③ 06 $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1$
07 $y=\frac{3}{2}x+1$ 08 ② 09 $y=-3x+10$ 10 ②
11 ④ 12 제1사분면 13 ① 14 ⑤
15 $\frac{1}{2}\le m\le\frac{3}{2}$ 16 1 17 3 18 ③

116쪽 Lecture 22 01 -2 02 $-\frac{1}{3}$ 03 -1 04 $-\frac{20}{3}$
05 $y=-x+7$ 06 $y=6x+8$ 07 $y=\frac{1}{3}x$
08 $y=\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}$ 09 $y=-2x-2$ 10 $y=4x-5$

117쪽 유형 Q+Q 01 -16 02 ② 03 -6
04 -4, $\frac{2}{3}$ 05 15 06 $(-1, -3)$ 07 20
08 $y=-2x+9$

118쪽 Lecture 23 01 2 02 $\frac{6}{13}$ 03 $\frac{\sqrt{13}}{13}$ 04 -5, -1
05 -14, 6 06 -4, $\frac{8}{3}$ 07 $\left(0, -\frac{14}{3}\right)$, $(0, 4)$
08 2 09 $3\sqrt{5}$ 10 $2\sqrt{10}$ 11 -6, 14

119쪽 유형 Q+Q 01 ④ 02 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right)$ 03 ④
04 $\sqrt{5}$ 05 28 06 ① 07 ② 08 5 09 ②
10 $3x+7y+8=0$, $7x-3y=0$

121쪽 중단원 마무리 01 $y=-2x+16$ 02 ④ 03 44
04 ④ 05 $(-13, 1)$ 06 ② 07 $y=-\frac{3}{4}x+8$
08 $y=\sqrt{15}x+2$, $y=-\sqrt{15}x+2$ 09 ③ 10 9
11 $2x-3y-7=0$, $2x-3y+19=0$ 12 15 13 149 14 ②
15 ⑤ 16 ⑤

11 원의 방정식

124쪽 Lecture 24 01 $(x+3)^2+(y-4)^2=16$
02 $(x-2)^2+(y+6)^2=4$ 03 $(x+5)^2+(y+5)^2=25$

04 중심의 좌표: $(2,\ -5)$, 반지름의 길이: 6 **05** $5x+7y-4=0$

06 $x^2+y^2-3x-y=0$

125쪽 **유형** Q+Q **01** $(x-4)^2+(y+3)^2=40$ **02** ④

03 $(x-3)^2+y^2=8$ **04** ② **05** ④

06 $(x+2)^2+(y-10)^2=80$ **07** 6 **08** ② **09** 8

10 $12\sqrt{2}$ **11** $a<-2$ 또는 $a>2$ **12** ③ **13** 13 **14** ⑤

15 ⑤ **16** $4\sqrt{2}$ **17** ③ **18** -1 **19** $2\sqrt{2}$ **20** ②

21 ② **22** 4

128쪽 **Lecture 25** **01** 만나지 않는다.

02 서로 다른 두 점에서 만난다. **03** $\pm 2\sqrt{13}$

04 $y=3x\pm 10$ **05** $2x-3y=13$

06 $x+7y=-10$ 또는 $x+y=2$

129쪽 **유형** Q+Q **01** 19 **02** 2 **03** 4 **04** ②

05 4 **06** $12\sqrt{2}$ **07** 9 **08** 1 : 9 **09** $y=4x\pm 17$

10 ③ **11** -12 **12** 2 **13** $\frac{1}{7}$ **14** ③ **15** $\sqrt{31}$

16 3

131쪽 **중단원** 마무리 **01** $(x-2)^2+y^2=40$ **02** ③

03 $x^2+(y-1)^2=10$ **04** ④ **05** $2\sqrt{10}$ **06** 20 **07** ③

08 4 **09** ② **10** 200 **11** 18 **12** ④ **13** 22

14 ⑤ **15** ⑤ **16** $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ **17** 32 **18** 24 **19** ②

12 도형의 이동

134쪽 **Lecture 26** **01** $(9,\ 2)$ **02** $(5,\ 3)$ **03** $a=1,\ b=14$

04 $(2,\ 4)$ **05** $3x-4y+10=0$ **06** $y=-x^2+11x-17$

07 $2x-5y+5=0$ **08** $(x-5)^2+(y-2)^2=9$

135쪽 **유형** Q+Q **01** -6 **02** -13 **03** 2 **04** ⑤

05 -2 **06** ④ **07** $(1,\ -2)$ **08** -9

137쪽 **Lecture 27** **01** $(4,\ 6)$ **02** $(-4,\ -6)$ **03** $(-4,\ 6)$

04 $(-6,\ 4)$ **05** $(-7,\ -3)$ **06** $(x+2)^2+(y+5)^2=8$

07 $(x-2)^2+(y-5)^2=8$ **08** $(x-2)^2+(y+5)^2=8$

09 $(x-5)^2+(y+2)^2=8$ **10** $3x-2y-1=0$ **11** $(1,\ -6)$

12 $(1,\ 0)$ **13** $(-1,\ 7)$ **14** $(-11,\ 17)$

15 $a=-1,\ b=-2$ **16** (1) $a=-2-p,\ b=12-q$ (2) $3x-2y+26=0$

17 (1) $\left(\frac{-2+p}{2},\ \frac{5+q}{2}\right)$ (2) 2 (3) $(-6,\ -3)$

138쪽 **유형** Q+Q **01** $\left(-\frac{8}{3},\ -2\right)$ **02** 제2사분면

03 ③ **04** $x+3y-10=0,\ x+3y+10=0$ **05** ⑤ **06** ②

07 1 **08** 11 **09** -2 **10** -5 **11** ④ **12** ③

13 ④ **14** ④ **15** -4 **16** 34 **17** $10\sqrt{2}$ **18** ①

141쪽 **중단원** 마무리 **01** 6 **02** $\frac{3}{4}$ **03** ① **04** ③

05 1 **06** 8 **07** ② **08** 4 **09** 29 **10** ③

11 ② **12** $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **13** ④ **14** $\frac{16}{5}$ **15** ④ **16** 11

17 23

빠른 정답 찾기 Work Book

01 다항식의 연산

W 2쪽 01 $5x^2+9xy-4y^2$ 02 ① 03 -4 04 3
05 -4 06 ④ 07 74 08 ⑤
09 $x^4-8x^3+12x^2+16x-12$ 10 ② 11 -4 12 ③
13 ⑤ 14 $21\sqrt{5}$ 15 6 16 ④ 17 ③ 18 49
19 ③ 20 7 21 12 22 ① 23 $2x^2-4x+1$
24 5 25 ③ 26 몫: $3Q(x)$, 나머지: R 27 ②
28 166 29 $140-60\sqrt{5}$

W 6쪽 **도전!** 수능 기출
01 ④ 02 ① 03 16 04 30

02 나머지정리와 인수분해

W 7쪽 01 -8 02 ① 03 3 04 ⑤ 05 -1
06 ③ 07 -5 08 81 09 ② 10 ④ 11 18
12 ⑤ 13 30 14 2 15 ③ 16 $-3x+4$
17 ④ 18 -17 19 ④ 20 ① 21 $-x^2+3x+6$
22 ④ 23 -5 24 ③ 25 ① 26 6 27 ⑤
28 29 29 ④ 30 -3 31 ② 32 1 33 ③
34 (1) $a=\frac{1}{4}$, $b=1$, $c=1$, $d=8$ (2) x^2+x+2 35 ① 36 -2.792
37 ⑤ 38 ④ 39 ③ 40 -2 41 -10 42 ⑤
43 ③ 44 ⑤ 45 ② 46 $(x-3)(x+1)(x+5)$
47 ③ 48 36 49 7 50 $(x^2+2x-1)(x^2-4x-1)$
51 ⑤ 52 $\frac{1}{2}ab$ 53 $28\sqrt{3}$ 54 -70 55 $\frac{1}{2}$ 56 ②
57 19, 43, 57

W 16쪽 **도전!** 수능 기출
01 ② 02 ③ 03 ⑤

03 복소수

W 17쪽 01 ④ 02 -3 03 ② 04 7 05 ②
06 ① 07 ① 08 $-11+4i$ 09 $x=1$, $z=6i$
10 ⑤ 11 4 12 ④ 13 ② 14 0 15 ②
16 ⑤ 17 3 18 ⑤ 19 ④ 20 ③ 21 $4i$
22 ② 23 ② 24 $-4\pm2i$ 25 -36 26 ③
27 ⑤ 28 ⑤ 29 5 30 ③ 31 24 32 ②
33 $-5i$ 34 ⑤ 35 ⑤ 36 $-2a+2b$

W 23쪽 **도전!** 수능 기출
01 6 02 ⑤ 03 25 04 ①

04 이차방정식

W 24쪽 01 ⑤ 02 ③ 03 6 04 110 05 ③
06 $2-\sqrt{3}$, 1 07 ② 08 ① 09 $\frac{5}{3}$
10 12 cm 11 ② 12 $12-6\sqrt{3}$ 13 ① 14 ⑤
15 서로 다른 두 실근 16 ① 17 서로 다른 두 허근 18 ㄴ
19 ④ 20 ④ 21 5 22 ⑤ 23 3 24 ③
25 56 26 ⑤ 27 ④ 28 -4 29 ① 30 36
31 ④ 32 4 33 2 34 9 35 ③ 36 ②
37 ④ 38 4 39 ① 40 $x^2+x-2=0$
41 $5x^2-5x-1=0$ 42 ① 43 ① 44 1 45 ②

46 ③ 47 -9 48 ③ 49 ① 50 ④

51 $x^2+x-\frac{8}{3}$ 52 ② 53 ⑤ 54 $6x^2+7x+1=0$

W 33쪽 **도전! 수능 기출**

01 ③ 02 ② 03 10 04 ②

05 이차방정식과 이차함수

W 34쪽 01 ③ 02 -46 03 ④ 04 ① 05 ③

06 $-\frac{5}{16}$ 07 2 08 ③ 09 ⑤ 10 ④ 11 ④

12 8 13 ③ 14 ① 15 7 16 $y=4x-4$

17 ⑤ 18 ④ 19 ② 20 -5 21 ② 22 ②

23 $-\frac{1}{4}$ 24 ① 25 5 26 ① 27 ⑤ 28 -46

29 ⑤ 30 -5 31 7 32 ④ 33 ③ 34 1200원

35 ② 36 50

W 40쪽 **도전! 수능 기출**

01 ④ 02 50 03 9 04 12

06 여러 가지 방정식

W 41쪽 01 ① 02 1 03 ② 04 12 05 ③

06 ③ 07 2 08 -10 09 ④ 10 ① 11 ①

12 ① 13 -1 14 -3 15 ⑤ 16 ④ 17 4

18 5 19 ③ 20 ① 21 ⑤ 22 -12 23 ②

24 $x^3+7x^2+16x+9=0$ 25 ① 26 ⑤ 27 -51

28 ① 29 ② 30 ① 31 ③ 32 ② 33 -15

34 ③ 35 ④ 36 $a=-3,\ b=-2$ 37 ③ 38 3

39 ③ 40 ① 41 ② 42 ⑤ 43 2 44 46

45 ⑤ 46 ② 47 ② 48 ⑤ 49 4

W 49쪽 **도전! 수능 기출**

01 ⑤ 02 25 03 394 04 20

07 일차부등식

W 50쪽 01 ④ 02 ⑤ 03 $-4<f(0)<4$ 04 ④

05 ③ 06 $x<-3$ 07 4 08 ② 09 ⑤

10 9 11 ③ 12 ⑤ 13 30 14 -15 15 $a\geq-7$

16 11 17 ② 18 -3 19 ③ 20 ④ 21 4

22 ⑤ 23 ④ 24 ③ 25 $15\leq x\leq\frac{35}{2}$ 26 4

27 ⑤ 28 ③ 29 -1 30 7 31 ⑤ 32 ②

33 $4\leq k<6$

W 55쪽 **도전! 수능 기출**

01 ④ 02 ① 03 7 04 ⑤

08 이차부등식

W 56쪽 01 ⑤ 02 $x<-5$ 또는 $x>3$ 03 ③ 04 ⑤

05 ④ 06 5 07 3 08 ① 09 4 10 ⑤

11 ④ 12 0 13 8 14 1 15 ③ 16 ②

17 16 18 $-1<x<2$ 19 2 20 $a\leq-2$ 또는 $a\geq4$

21 ④ 22 ③ 23 ② 24 2 25 ⑤ 26 ②

27 12 **28** ① **29** $-2\le a\le\frac{1}{2}$ **30** $x<-5$ 또는 $x>1$

31 15 **32** ④ **33** 20 **34** ③ **35** ① **36** ②

37 -9 **38** $a\ge 3$ **39** 1 **40** $\frac{1}{3}\le a<2$ **41** ③

42 -4 **43** 2 **44** ④ **45** ① **46** ② **47** 3

48 ④ **49** $2<k<4$ **50** $2\le k<\frac{7}{3}$ **51** 5

52 $0\le k<\frac{1}{3}$ **53** ② **54** ④

W 64쪽 **도전! 수능 기출**

01 ④ **02** 15 **03** ③ **04** ③

09 평면좌표

W 65쪽 **01** ② **02** ③ **03** $3\sqrt{13}$ **04** $\sqrt{5}$ **05** ④

06 ③ **07** ① **08** $(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ **09** ⑤ **10** 10

11 ④ **12** ② **13** $(-2, -1)$ **14** $\sqrt{10}$

15 (가) D (나) $(2c, 0)$ (다) $3a^2+3b^2+6c^2$ (라) $a^2+b^2+2c^2$ **16** $\sqrt{34}$

17 30 **18** ③ **19** $(-10, 19)$ **20** ③ **21** 1

22 ① **23** ⑤ **24** 5 **25** 3 **26** $(5, 1)$ **27** ②

28 ⑤ **29** $C(11, -7)$, $D(13, -1)$ **30** $(-1, 6)$

31 ② **32** ③ **33** 16 **34** $y=-x+\frac{1}{2}$

35 $3x+y-9=0$ **36** $7x-13y-16=0$

W 71쪽 **도전! 수능 기출**

01 116 **02** ② **03** ⑤ **04** 18

10 직선의 방정식

W 72쪽 **01** $x=3$ **02** ① **03** $y=x+2$ **04** ③

05 8 **06** ⑤ **07** ④ **08** 10 **09** $\sqrt{10}$ **10** ④

11 $\frac{4}{3}$ **12** $y=\frac{5}{8}x+2$ **13** $y=3x+7$ **14** ①

15 ③ **16** ⑤ **17** $y=-x+1$ **18** 16 **19** ④

20 $-3<m<\frac{1}{5}$ **21** $m<\frac{1}{4}$ 또는 $m>2$ **22** ② **23** ③

24 10 **25** ④ **26** ② **27** 2 **28** ③ **29** ②

30 5 **31** ⑤ **32** ① **33** $\sqrt{13}$ **34** ⑤ **35** ③

36 1 **37** ② **38** $y=\frac{4}{3}x-10$, $y=\frac{4}{3}x+10$ **39** ①

40 -2 **41** ④ **42** $2\sqrt{5}$ **43** ① **44** ⑤ **45** -3

46 $y=x+8$ **47** ③ **48** $9x-5y=0$ **49** ②

50 $4x+7y-6=0\left(x\neq\frac{30}{13}\right)$, $8x+y-18=0\left(x\neq\frac{30}{13}\right)$

51 $4x+3y-53=0$, $4x+3y+37=0$

W 80쪽 **도전! 수능 기출**

01 ③ **02** ⑤ **03** ⑤ **04** ①

11 원의 방정식

W 81쪽 **01** $(x-1)^2+(y-2)^2=10$ **02** ③ **03** ②

04 ④ **05** 8 **06** ④ **07** $(x-2)^2+(y+2)^2=8$

08 ① **09** $(x-4)^2+(y+2)^2=50$ **10** ③

11 $(x+4)^2+(y-4)^2=16$ **12** $x^2+(y-\sqrt{3})^2=3$ **13** ②

14 ③ **15** -3 **16** $\sqrt{5}$ **17** ⑤ **18** ① **19** $(-6, 2)$

20 $2\sqrt{10}-3$ **21** ② **22** ⑤ **23** 3 **24** $\frac{15}{2}$

25 ① **26** 2π **27** 4 **28** ③ **29** ⑤ **30** ②

31 $(x+1)^2+(y+3)^2=8$ **32** 4 **33** ④ **34** ⑤

35 ④ **36** 10π **37** -9 **38** $\sqrt{5}$ **39** ③ **40** 16

41 ③ **42** ② **43** $30+30\sqrt{10}$ **44** ① **45** 8

46 ② 47 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 48 $60°$

49 ② 50 ④ 51 4

W 89쪽 **도전!** 수능 기출

01 180 02 ① 03 ① 04 ③

12 도형의 이동

W 90쪽 01 ② 02 $(-2, 10)$ 03 -3 04 $\sqrt{3}$

05 -4 06 ④ 07 7 08 ⑤ 09 2 10 -4

11 ③ 12 9 13 -2 14 40 15 ③ 16 $(6, 2)$

17 5 18 ① 19 ④ 20 ③ 21 $x+y=0$

22 4 23 ① 24 ③ 25 20 26 4 27 1

28 3 29 ② 30 ㄱ, ㄷ 31 $6\sqrt{5}$ 32 ⑤

33 $\left(\frac{26}{5}, \frac{2}{5}\right)$ 34 ① 35 $-2+\sqrt{6}$ 36 $\sqrt{61}$

37 -3 38 ④ 39 ③

W 96쪽 **도전!** 수능 기출

01 64 02 ① 03 ①

Lecture Book

01 다항식의 연산

Lecture 01 다항식의 연산 (1)

7쪽

01 답 $x^2-(4y-5)x+2y^2-y+3$

x에 대하여 정리할 때, x가 아닌 문자로 이루어진 항은 상수항으로 생각한다.

02 답 $2y^2-(4x+1)y+x^2+5x+3$

03 답 $3x^3+x^2+2x-1$

04 답 $-x^2+8xy+y^2$

05 $A+B$

$=(x^3-2x^2+5x-3)+(3x^2+2x-1)$

$=x^3+x^2+7x-4$ 답 x^3+x^2+7x-4

06 $2B-A$

$=2(3x^2+2x-1)-(x^3-2x^2+5x-3)$

$=6x^2+4x-2-x^3+2x^2-5x+3$

$=-x^3+8x^2-x+1$ 답 $-x^3+8x^2-x+1$

07 $A-B+C$

$=(x^2+3x-4)-(2x^2+x-3)+(5x^2-2x+1)$

$=x^2+3x-4-2x^2-x+3+5x^2-2x+1$

$=4x^2$ 답 $4x^2$

08 $3A-(B-2C)$

$=3A-B+2C$

$=3(x^2+3x-4)-(2x^2+x-3)+2(5x^2-2x+1)$

$=3x^2+9x-12-2x^2-x+3+10x^2-4x+2$

$=11x^2+4x-7$ 답 $11x^2+4x-7$

09 $A+B=x^2-5x+6$ ······ ㉠

$A-B=x^2+3x-2$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2A=2x^2-2x+4$

$\therefore A=x^2-x+2$

이것을 ㉠에 대입하면

$(x^2-x+2)+B=x^2-5x+6$

$\therefore B=x^2-5x+6-(x^2-x+2)$

$=x^2-5x+6-x^2+x-2$

$=-4x+4$

답 $A=x^2-x+2$, $B=-4x+4$

10 $A+B=x^2+2x-7$ ······ ㉠

$2A-B=8x^2+4x+1$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$3A=9x^2+6x-6$

$\therefore A=3x^2+2x-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$(3x^2+2x-2)+B=x^2+2x-7$

$\therefore B=x^2+2x-7-(3x^2+2x-2)$

$=x^2+2x-7-3x^2-2x+2$

$=-2x^2-5$

답 $A=3x^2+2x-2$, $B=-2x^2-5$

11 답 $3a^3b+a^2b-2ab^2$

12 답 $2a^3-5a^2-10a-8$

13 $(x-y-1)(2x+3y+1)$의 전개식에서 xy항은

모든 항을 전개하지 않고 xy항이 나오는 경우만 계산한다.

$x\cdot 3y-y\cdot 2x=xy$

따라서 xy의 계수는 1이다. 답 1

14 $(3x^2+x+5)(x^2-2x+6)$의 전개식에서 x^2항은

$3x^2\cdot 6+x\cdot(-2x)+5\cdot x^2=21x^2$

따라서 x^2의 계수는 21이다. 답 21

15 답 $x^2+y^2+2xy-4x-4y+4$

16 답 $a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3$

17 답 x^3-64

18 답 $27a^3-b^3+c^3+9abc$

19 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

$=(-3)^2+4\cdot 5=29$ 답 29

20 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(-3)^2+2\cdot 5=19$ 답 19

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=29-2\cdot 5$
$=19$

21 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=4^2-2\cdot 5=6$ 답 6

22 $a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=4\cdot(6-5)+3\cdot 2=10$ 답 10

23 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=2^2-2=2$ 답 2

쌤한마디

곱셈 공식을 변형한 다음 식

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$,
$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$,
$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

에 a 대신 x를, b 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$,
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$,
$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$

24 $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=2^3-3\cdot2=2$ 답 2

표준+발전 유형 Q+Q

8쪽

01 $(2A-B)-(3A-2B)$
$=2A-B-3A+2B$
$=-A+B$
$=-(x^3-3x^2+2x-5)+(x^3-x+4)$
$=-x^3+3x^2-2x+5+x^3-x+4$
$=3x^2-3x+9$ 답 ④

구하는 식을 간단히 한 후 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 정리한다.

02 $3X+2B=3A-7B$에서 $3X=3A-9B$
$\therefore X=A-3B$
$=(3x^2+xy+2y^2)-3\left(-\frac{1}{3}x^2+6xy+y^2\right)$
$=3x^2+xy+2y^2+x^2-18xy-3y^2$
$=4x^2-17xy-y^2$ 답 $4x^2-17xy-y^2$

03 $A-B=-4x^2+3xy-2y^2$ …… ㉠
$3A+B=5xy-2y^2$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면 $4A=-4x^2+8xy-4y^2$
$\therefore A=-x^2+2xy-y^2$
이것을 ㉠에 대입하면
$(-x^2+2xy-y^2)-B=-4x^2+3xy-2y^2$
$\therefore B=(-x^2+2xy-y^2)-(-4x^2+3xy-2y^2)$
$=-x^2+2xy-y^2+4x^2-3xy+2y^2$
$=3x^2-xy+y^2$
$\therefore A-2B=(-x^2+2xy-y^2)-2(3x^2-xy+y^2)$
$=-x^2+2xy-y^2-6x^2+2xy-2y^2$
$=-7x^2+4xy-3y^2$
따라서 $a=-7$, $b=4$, $c=-3$이므로
$a+b+c=-6$ 답 ①

$A-2B$
$=(A-B)-B$
$=(-4x^2+3xy-2y^2)$
$\quad-(3x^2-xy+y^2)$
$=-7x^2+4xy-3y^2$
과 같이 구할 수도 있다.

04 $(x-5y)(x^2+axy+ay^2)$의 전개식에서 x^2y항은
$x\cdot axy-5y\cdot x^2=(a-5)x^2y$
이때 x^2y의 계수가 -3이므로
$a-5=-3$ $\therefore a=2$
따라서 $(x-5y)(x^2+2xy+2y^2)$의 전개식에서 xy^2항은
$x\cdot2y^2-5y\cdot2xy=-8xy^2$
이므로 xy^2의 계수는 -8이다. 답 ③

05 $(1+x+2x^2+\cdots+50x^{50})^2$
$=(1+x+2x^2+\cdots+50x^{50})(1+x+2x^2+\cdots+50x^{50})$
의 전개식에서 x^5항은
$1\cdot5x^5+x\cdot4x^4+2x^2\cdot3x^3+3x^3\cdot2x^2$
$+4x^4\cdot x+5x^5\cdot1$
$=30x^5$
따라서 x^5의 계수는 30이다. 답 30

06 ⑤ $(x-y+4z)^2=x^2+y^2+16z^2-2xy-8yz+8zx$
답 ⑤

07 $a+b+c=5$에서
$a+b=5-c$, $b+c=5-a$, $c+a=5-b$
$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)$
$=(5-c)(5-a)(5-b)$
$=125-25(a+b+c)+5(ab+bc+ca)-abc$
$=125-25\cdot5+5\cdot\frac{1}{5}-(-15)=16$ 답 16

08 $(2x-y+az)^2$
$=4x^2+y^2+a^2z^2-4xy-2ayz+4azx$
이때 yz의 계수가 6이므로
$-2a=6$ $\therefore a=-3$
따라서 zx의 계수는
$b=4a=4\cdot(-3)=-12$
$\therefore ab=36$ 답 36

다른 풀이 $(2x-y+az)^2=(2x-y+az)(2x-y+az)$
의 전개식에서 yz항은
$-y\cdot az+az\cdot(-y)=-2ayz$
즉 $-2a=6$이므로 $a=-3$
따라서 $(2x-y-3z)(2x-y-3z)$의 전개식에서 zx항은 $2x\cdot(-3z)-3z\cdot2x=-12zx$
즉 $b=-12$이므로 $ab=36$

09 $(3a-5b+c)(3a+5b-c)$
$=\{3a-(5b-c)\}\{3a+(5b-c)\}$
$5b-c=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(3a-t)(3a+t)$
$=9a^2-t^2$
$=9a^2-(5b-c)^2$
$=9a^2-(25b^2-10bc+c^2)$
$=9a^2-25b^2-c^2+10bc$
답 $9a^2-25b^2-c^2+10bc$

10 $(x+2)(x+1)(x-2)(x-3)$

$=\{(x+2)(x-3)\}\{(x+1)(x-2)\}$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$

$x^2-x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(t-6)(t-2)\\&=t^2-8t+12\\&=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\&=x^4-2x^3+x^2-8x^2+8x+12\\&=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

따라서 $a=-7$, $b=8$이므로

$b-a=15$ 답 ⑤

11 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$에서

$-26=(-2)^3+3ab\cdot(-2)$

$6ab=18$ $\therefore ab=3$ 답 ⑤

12 $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ …… ㉠

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이므로

$2=1^3-3xy\cdot1$, $3xy=-1$

$\therefore xy=-\frac{1}{3}$

또 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$이므로

㉠에서

$x^4+y^4=\left(\frac{5}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{23}{9}$

따라서 $p=9$, $q=23$이므로

$p+q=32$ 답 32

13 $x\neq0$이므로 $x^2-3x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3-\frac{1}{x}=0$ $\therefore x-\frac{1}{x}=3$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=3^3+3\cdot3=36$ 답 36

쌤 한마디

$x^2-px\pm1=0$ (p는 상수) 꼴의 등식이 주어지면 주어진 등식의 양변을 x로 나누어 $x\pm\frac{1}{x}=p$ 꼴로 변형한다.

14 $x\neq0$이므로 $x^2-5x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-5+\frac{1}{x}=0$ $\therefore x+\frac{1}{x}=5$

이때

$x^3+2x^2-6+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

$=x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6$ …… ㉠

이고

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=5^2-2=23$,

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=5^3-3\cdot5=110$

QBOX

상수항끼리 더한 값이 같아지도록 다항식을 2개씩 짝 지어 전개한다.

$x=0$을 $x^2-3x-1=0$에 대입하면 $-1\neq0$이므로 $x\neq0$

일의 자리의 숫자를 구할 때에는 일의 자리의 숫자만 계산하여 구할 수 있다.

(삼차식)÷(일차식)
➡ 몫: 이차식,
나머지: 상수

이므로 ㉠에서

$x^3+2x^2-6+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}=110+2\cdot23-6$

$=150$ 답 150

15 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$ …… ㉠

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$(-2)^2=10+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-3$

따라서 ㉠에서

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$ 답 ③

16 $a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$ …… ㉠

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$5^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot(-7)$ $\therefore a^2+b^2+c^2=39$

따라서 ㉠에서

$a^3+b^3+c^3=5\cdot\{39-(-7)\}+3\cdot2=236$ 답 ②

17 $97^2+198\times202$

$=(100-3)^2+(200-2)\cdot(200+2)$

$=100^2-2\cdot100\cdot3+3^2+200^2-2^2$

$=49405$ 답 ③

18 $a=\sqrt{7777}$, $b=5555$라 하면 주어진 수는

$\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{b}$

$=\frac{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)}{b}$

$=\frac{6a^2b+2b^3}{b}=6a^2+2b^2$

$=6\cdot7777+2\cdot5555^2$

$6\cdot7777$의 일의 자리의 숫자는 2, $2\cdot5555^2$의 일의 자리의 숫자는 0이므로 구하는 일의 자리의 숫자는

$2+0=2$ 답 2

Lecture 02 다항식의 연산 (2)

11쪽

01

$$\begin{array}{r} x^2+2x+7 \\ x-2\overline{\big)\, x^3 \qquad\quad +3x-1} \\ \underline{x^3-2x^2 \qquad\qquad\quad} \\ 2x^2+3x \qquad \\ \underline{2x^2-4x \qquad} \\ 7x-1 \\ \underline{7x-14} \\ 13 \end{array}$$

답 몫: x^2+2x+7, 나머지: 13

02

$$\begin{array}{r} 4x \\ x^2+x-3\overline{)\,4x^3+4x^2-5x+1} \\ \underline{4x^3+4x^2-12x} \\ 7x+1 \end{array}$$

답 몫: $4x$, 나머지: $7x+1$

03

$$\begin{array}{r} x^2+5x+9 \\ x^2-4x+5\overline{)\,x^4+x^3-6x^2-9x+36} \\ \underline{x^4-4x^3+5x^2} \\ 5x^3-11x^2-9x \\ \underline{5x^3-20x^2+25x} \\ 9x^2-34x+36 \\ \underline{9x^2-36x+45} \\ 2x-9 \end{array}$$

답 몫: x^2+5x+9, 나머지: $2x-9$

04

$$\begin{array}{r} 6x^2+5x+1 \\ x^2-x+1\overline{)\,6x^4-x^3+2x^2+3} \\ \underline{6x^4-6x^3+6x^2} \\ 5x^3-4x^2 \\ \underline{5x^3-5x^2+5x} \\ x^2-5x+3 \\ \underline{x^2-x+1} \\ -4x+2 \end{array}$$

답 몫: $6x^2+5x+1$, 나머지: $-4x+2$

05

$$\begin{array}{r} 2x^2-x-4 \\ x+1\overline{)\,2x^3+x^2-5x+1} \\ \underline{2x^3+2x^2} \\ -x^2-5x \\ \underline{-x^2-x} \\ -4x+1 \\ \underline{-4x-4} \\ 5 \end{array}$$

따라서 $Q=2x^2-x-4$, $R=5$이므로

$2x^3+x^2-5x+1=(x+1)(2x^2-x-4)+5$

답 $Q=2x^2-x-4$, $R=5$,
$2x^3+x^2-5x+1=(x+1)(2x^2-x-4)+5$

06

$$\begin{array}{r} 3x-6 \\ x^2+2x+2\overline{)\,3x^3-2} \\ \underline{3x^3+6x^2+6x} \\ -6x^2-6x-2 \\ \underline{-6x^2-12x-12} \\ 6x+10 \end{array}$$

따라서 $Q=3x-6$, $R=6x+10$이므로

$3x^3-2=(x^2+2x+2)(3x-6)+6x+10$

답 $Q=3x-6$, $R=6x+10$,
$3x^3-2=(x^2+2x+2)(3x-6)+6x+10$

07

$$\begin{array}{r} -4x^2-2x-1 \\ 2x^2-x-1\overline{)\,-8x^4+4x^2+x-6} \\ \underline{-8x^4+4x^3+4x^2} \\ -4x^3+x \\ \underline{-4x^3+2x^2+2x} \\ -2x^2-x-6 \\ \underline{-2x^2+x+1} \\ -2x-7 \end{array}$$

내림차순으로 정리한다.

따라서 $Q=-4x^2-2x-1$, $R=-2x-7$이므로

$-8x^4+4x^2+x-6$
$=(2x^2-x-1)(-4x^2-2x-1)-2x-7$

답 $Q=-4x^2-2x-1$, $R=-2x-7$,
$-8x^4+4x^2+x-6$
$=(2x^2-x-1)(-4x^2-2x-1)-2x-7$

08 $P(x)=(x+1)(2x^2-3x+6)-11$
$=2x^3-x^2+3x+6-11$
$=2x^3-x^2+3x-5$ 답 $2x^3-x^2+3x-5$

09 $P(x)=(x^2-4)(x+2)-5$
$=x^3+2x^2-4x-8-5$
$=x^3+2x^2-4x-13$ 답 $x^3+2x^2-4x-13$

10 $P(x)=(x^2-1)(2x+4)+2x-3$
$=2x^3+4x^2-2x-4+2x-3$
$=2x^3+4x^2-7$ 답 $2x^3+4x^2-7$

표준+발전 유형 Q+Q

12쪽

01

$$\begin{array}{r} 2x-5 \\ x^2-x-3\overline{)\,2x^3-7x^2+x+9} \\ \underline{2x^3-2x^2-6x} \\ -5x^2+7x+9 \\ \underline{-5x^2+5x+15} \\ 2x-6 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=2x-5$, $R(x)=2x-6$이므로

$Q(3)+R(4)=1+2=3$ 답 3

$Q(3)=2\cdot3-5=1$,
$R(4)=2\cdot4-6=2$

02 $x^4-9x^2+13=A(x^2+x-6)-4x+1$이므로

$A(x^2+x-6)=x^4-9x^2+13-(-4x+1)$
$=x^4-9x^2+4x+12$

$\therefore A=(x^4-9x^2+4x+12)\div(x^2+x-6)$

$$\begin{array}{r} x^2-x-2 \\ x^2+x-6\overline{)\,x^4-9x^2+4x+12} \\ \underline{x^4+x^3-6x^2} \\ -x^3-3x^2+4x \\ \underline{-x^3-x^2+6x} \\ -2x^2-2x+12 \\ \underline{-2x^2-2x+12} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore A=x^2-x-2$ 답 ①

03 $P(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$
$=\frac{1}{2}(2x-1)Q(x)+R$
$=(2x-1)\cdot\frac{1}{2}Q(x)+R$

따라서 $P(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R이다.

답 몫: $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지: R

04 $P(x)$를 $5x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$P(x)=(5x+1)Q(x)+R$$

$$\therefore xP(x)=x(5x+1)Q(x)+Rx$$

$$=5x\left(x+\frac{1}{5}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}R$$

$$=\left(x+\frac{1}{5}\right)\{5xQ(x)+R\}-\frac{1}{5}R$$

따라서 $xP(x)$를 $x+\frac{1}{5}$로 나누었을 때의 몫은 $5xQ(x)+R$, 나머지는 $-\frac{1}{5}R$이다. 답 ③

05 직육면체의 밑면의 세로의 길이를 A라 하면

$$(a-1)(a+5)A=a^3+7a^2+7a-15$$

$$(a^2+4a-5)A=a^3+7a^2+7a-15$$

$$\therefore A=(a^3+7a^2+7a-15)\div(a^2+4a-5)$$

$$\begin{array}{r|l} & a+3 \\ \hline a^2+4a-5 & a^3+7a^2+7a-15 \\ & a^3+4a^2-5a \\ \hline & 3a^2+12a-15 \\ & 3a^2+12a-15 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\therefore A=a+3$$

따라서 직육면체의 밑면의 세로의 길이는 $a+3$이다.

답 $a+3$

다른 풀이 $a^3+7a^2+7a-15$에서 a^3의 계수가 1이므로 구하는 밑면의 세로의 길이를 $a+k$ (k는 상수)라 하면

$$(a-1)(a+5)(a+k)=a^3+7a^2+7a-15$$

좌변의 전개식의 상수항이 -15이어야 하므로

$(-1)\cdot5\cdot k=-5k$

$$-5k=-15 \qquad \therefore k=3$$

따라서 직육면체의 밑면의 세로의 길이는 $a+3$이다.

06 $(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$에서

$$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}$$

$$=\{c+(a+b)\}\{c-(a+b)\}$$

$$(a-b)^2-c^2=c^2-(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2-c^2=c^2-a^2-2ab-b^2$$

$$2(a^2+b^2)=2c^2 \qquad \therefore a^2+b^2=c^2$$

따라서 △ABC는 ∠C=90°인 직각삼각형이다.

답 ⑤

중단원 마무리

13쪽

01 전략 X를 A, B, C에 대한 식으로 정리한 후 세 다항식 A, B, C를 대입한다.

Q BOX

주어진 식에 바로 대입하는 것보다 주어진 식을 간단히 정리한 후 대입하는 것이 계산이 더 편리하다.

풀이 $-A+2(B-C)-X=-(3C-A)$에서

$$X=-A+2(B-C)+(3C-A)$$

$$=-A+2B-2C+3C-A$$

$$=-2A+2B+C$$

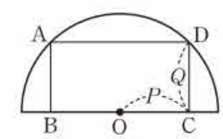
$$=-2(x^2+4xy-3y^2)+2(3x^2-3xy+y^2)+(-x^2-6xy+6y^2)$$

$$=-2x^2-8xy+6y^2+6x^2-6xy+2y^2-x^2-6xy+6y^2$$

$$=3x^2-20xy+14y^2$$

답 $3x^2-20xy+14y^2$

02 전략 $\overline{OC}=P$, $\overline{CD}=Q$라 하고 주어진 조건을 이용하여 P, Q를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.



풀이 $\overline{OC}=P$, $\overline{CD}=Q$라 하면

조건 (가)에서

$$P+Q=x+y+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{DA}=2P$, $\overline{AB}=Q$, $\overline{BO}=P$이므로 조건 (나)에서

$$2P+Q+P=3x+y+5$$

$$\therefore 3P+Q=3x+y+5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡－㉠을 하면

$$2P=2x+2 \qquad \therefore P=x+1$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$x+1+Q=x+y+3 \qquad \therefore Q=y+2$$

따라서 □ABCD의 넓이는

$$2P\cdot Q=2(x+1)(y+2)$$

답 ⑤

03 전략 분배법칙을 이용하여 x^7항이 나오도록 각 다항식에서 하나씩 선택하여 곱한다.

풀이 $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+8)$에서 임의의 7개의 일차식에서는 x항을, 나머지 1개의 일차식에서는 상수항을 선택하여 곱하면 x^7항이 되므로 이 식의 전개식에서 x^7항은

$$x^7\cdot8+x^7\cdot7+x^7\cdot6+\cdots+x^7\cdot2+x^7\cdot1$$

$$=(1+2+\cdots+6+7+8)x^7$$

$$=36x^7$$

따라서 x^7의 계수는 36이다. 답 ②

04 전략 연산의 뜻에 따라 주어진 식을 사칙연산으로 나타낸다.

풀이 $<x^2+x+1, x^2+x>$

$$=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)(x^2+x)+(x^2+x)^2$$

$$=(x^2+x+1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)(x^2+x)+(x^2+x)(x^2+x)$$

$(x^2+x+1)(x^2+x+1)$의 전개식에서 x항은 $(x+1)(x+1)$의 전개식에서 x항과 같다.

따라서 x항은

$$x\cdot1+1\cdot x+1\cdot x=3x$$

이므로 x의 계수는 3이다. 답 ①

05 전략 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 전개한 후 동류항끼리 계산한다.

풀이 $(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(a+b+c)^2$

$=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$
$+a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$
$+a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$
$+a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
$=4a^2+4b^2+4c^2$ 답 ②

06 전략 반복되는 식을 치환한 후 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $(1+x)^3=A$, $(1-x)^3=B$로 놓으면 주어진 식은

$(A+B)^2-(A-B)^2$
$=A^2+2AB+B^2-A^2+2AB-B^2$
$=4AB$
$=4(1+x)^3(1-x)^3$
$=4\{(1+x)(1-x)\}^3$
$=4(1-x^2)^3$
$=4(1-2)^3=-4$ 답 -4

자연수 m에 대하여 $a^m b^m=(ab)^m$

$x=\sqrt{2}$이므로 $x^2=2$

07 전략 먼저 ab의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

풀이 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에서

$3^2=7+2ab,\quad 2ab=2\quad \therefore ab=1$
$\therefore a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$
$=7^2-2\cdot1^2=47$ 답 ⑤

08 전략 분배법칙을 이용하여 주어진 식을 전개한 후 곱셈 공식의 변형을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

풀이 $(ax+by)(bx+ay)$
$=abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2$
$=ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$ ...... ㉠

이때

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(-2)^2-2\cdot(-2)=8,$
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=4^2-2\cdot4=8$

이므로 ㉠에서

(주어진 식)$=4\cdot8+(-2)\cdot8=16$ 답 16

09 전략 주어진 식을 변형한 후 $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x+\frac{1}{x}$의 값을 대입하여 식의 값을 구한다.

풀이 $\frac{x^6+4x^4+4x^2+1}{x^3}$
$=x^3+4x+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}$
$=x^3+\frac{1}{x^3}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)$ ...... ㉠

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+4=(3\sqrt{5})^2+4=49$이고

$x^2>0$이므로 $\quad x^2+\frac{1}{x^2}=7$

$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=7+2=9$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x+\frac{1}{x}=3$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=3^3+3=30$ 답 30

10 전략 주어진 식을 변형한 후 $a+b+c$, abc의 값을 대입하여 식의 값을 구한다.

풀이 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$
$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$
$=\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{(abc)^2}$
$=\frac{(ab+bc+ca)^2-2ab^2c-2bc^2a-2ca^2b}{(abc)^2}$
$=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{(abc)^2}$ ...... ㉠ ··· ❶

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$(a+b+c)^2=9+2\cdot8=25$
$\therefore a+b+c=5\ (\because a+b+c>0)$

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $a+b+c>0$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$에서 $\quad \frac{ab+bc+ca}{abc}=2$

$\frac{8}{abc}=2\quad \therefore abc=4$ ··· ❷

따라서 ㉠에서

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{8^2-2\cdot4\cdot5}{4^2}=\frac{3}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{3}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷	$a+b+c$, abc의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

11 전략 먼저 곱셈 공식을 이용하여 a를 간단하게 나타낸다.

풀이 $a=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\left(1+\frac{1}{4^4}\right)\left(1+\frac{1}{4^8}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\left(1+\frac{1}{4^4}\right)\left(1+\frac{1}{4^8}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\left(1+\frac{1}{4^4}\right)\left(1+\frac{1}{4^8}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{4^4}\right)\left(1+\frac{1}{4^4}\right)\left(1+\frac{1}{4^8}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{4^8}\right)\left(1+\frac{1}{4^8}\right)$
$=1-\frac{1}{4^{16}}$

즉 $1-\frac{1}{4^{16}}=a$이므로 $\quad 4^{16}=\frac{1}{1-a}$

$1-\frac{1}{4^{16}}=a$에서 $\frac{1}{4^{16}}=1-a$ $\therefore 4^{16}=\frac{1}{1-a}$

$\therefore 2^{32}=4^{16}=\frac{1}{1-a}$ 답 ①

12 전략 다항식 A가 다항식 B $(B\neq0)$로 나누어떨어지면 나머지가 0임을 이용한다.

풀이

$$\begin{array}{r|l} & x+4 \\ \hline x^2-2x+b\,) & x^3+2x^2+\qquad ax+12 \\ & x^3-2x^2+\qquad bx \\ \hline & 4x^2+(a-b)x+12 \\ & 4x^2-\qquad 8x+4b \\ \hline & (a-b+8)x+12-4b \end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$a-b+8=0,\ 12-4b=0$

따라서 $a=-5,\ b=3$이므로 $\quad ab=-15$ 답 ①

13 전략 $x^3-x^2-5x=x(x^2-x-5)$임을 이용한다.

풀이 다항식 $f(x)$를 x^3-x^2-5x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^3-x^2-5x)Q(x)+x^2+ax+2 \\ &=x(x^2-x-5)Q(x)+x^2+ax+2 \\ &=x(x^2-x-5)Q(x)+x^2-x-5 \\ &\quad +(a+1)x+7 \\ &=(x^2-x-5)\{xQ(x)+1\}+(a+1)x+7 \end{aligned}$$

이때 $f(x)$를 x^2-x-5로 나누었을 때의 나머지가 $4x+b$이므로

$a+1=4,\ 7=b \quad \therefore a=3,\ b=7$

$\therefore a+b=10$ 답 10

14 전략 주어진 조건을 등식으로 나타낸다.

풀이 $ab=4$이고 $a^2+(2b)^2=5ab$이므로

한 변의 길이가 각각 a, $2b$인 두 정사각형의 넓이의 합

$a^2+4b^2=5\cdot4=20$

$\therefore (a+2b)^2=a^2+4b^2+4ab$

$=20+4\cdot4=36$ 답 ⑤

15 전략 $a+b+c$, $ab+bc+ca$의 값을 이용하여 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구한다.

풀이 각 반원의 호의 길이는 각각 $\frac{a}{2}\pi,\ \frac{b}{2}\pi,\ \frac{c}{2}\pi$이므로 $\quad \frac{1}{2}\pi(a+b+c)=12\pi$

$\therefore a+b+c=24$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=24^2-2\cdot188=200$ ⋯ ❶

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$=\frac{1}{8}\pi(a^2+b^2+c^2)$

$=\frac{1}{8}\pi\cdot200=25\pi$ ⋯ ❷

답 25π

단계	채점 기준	비율
❶	$a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	색칠한 부분의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

Q BOX

16 전략 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$이면 $ABC=0$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $x-3=0$ 또는 $y-3=0$ 또는 $2z-3=0$이므로

$x=3$ 또는 $y=3$ 또는 $2z=3$이므로
$x-3=0$
또는 $y-3=0$
또는 $2z-3=0$

$(x-3)(y-3)(2z-3)=0$

이 식의 좌변을 전개하면

$(xy-3x-3y+9)(2z-3)=0$

$2xyz-3xy-6zx+9x-6yz+9y+18z-27=0$

$2xyz-3(xy+2yz+2zx)+9(x+y+2z)-27=0$

이때 조건 (나)에서 $xy+2yz+2zx=3(x+y+2z)$이므로

$2xyz-3\cdot3(x+y+2z)+9(x+y+2z)-27=0$

$2xyz-27=0 \qquad \therefore xyz=\frac{27}{2}$

$\therefore 10xyz=135$ 답 135

17 전략 [그림 1]의 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하고 [그림 2]의 입체도형의 겉넓이와 모든 모서리의 길이의 합을 a, b, c를 사용하여 나타낸다.

풀이 [그림 1]의 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 [그림 1]의 직육면체와 [그림 2]의 입체도형의 겉넓이는 같으므로

$2(ab+bc+ca)=236$

$\therefore ab+bc+ca=118$

[그림 2]의 입체도형의 모든 모서리의 길이의 합이 82이므로

$4(a+b+c)+6=82$

$\therefore a+b+c=19$

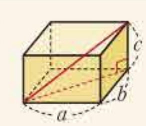
따라서 구하는 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

$=\sqrt{19^2-2\cdot118}=5\sqrt{5}$ 답 ②

쌤 한마디

오른쪽 직육면체에서 겉넓이와 대각선의 길이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.



① (겉넓이)
$=$(밑넓이)$\cdot2+$(옆넓이)
$=2ab+c(2a+2b)$
$=2(ab+bc+ca)$

② (대각선의 길이)
$=\sqrt{(\text{밑면의 대각선의 길이})^2+(\text{높이})^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

02 나머지정리와 인수분해

Lecture 03 항등식과 미정계수법

16쪽

01 ㄱ. $2x+1=3x-2$에서 $\quad -x+3=0$

ㄷ. 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면

$$(x-1)^2+2(x+1)=x^2-2x+1+2x+2$$
$$=x^2+3$$

따라서 주어진 등식은 x에 대한 항등식이다.

이상에서 x에 대한 항등식인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

02 답 $a=1,\ b=0,\ c=0$

03 답 $a=4,\ b=6,\ c=-3$

04 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면

$ax^2+(-2a+b+c)x-2c=x^2+5$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1,\ -2a+b+c=0,\ -2c=5$

$\therefore\ a=1,\ b=\dfrac{9}{2},\ c=-\dfrac{5}{2}$

등식의 양변의 동류항의 계수를 비교하여 계수를 정한다.

답 $a=1,\ b=\dfrac{9}{2},\ c=-\dfrac{5}{2}$

다른 풀이 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-2c=5 \qquad \therefore\ c=-\dfrac{5}{2}$

등식의 문자에 적당한 수를 대입하여 계수를 정한다.

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2b=9 \qquad \therefore\ b=\dfrac{9}{2}$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-a+b-c=6, \qquad -a+\dfrac{9}{2}+\dfrac{5}{2}=6$

$\therefore\ a=1$

05 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-3b=-1 \qquad \therefore\ b=\dfrac{1}{3}$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$4c=6 \qquad \therefore\ c=\dfrac{3}{2}$

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$12a=2 \qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{6}$

답 $a=\dfrac{1}{6},\ b=\dfrac{1}{3},\ c=\dfrac{3}{2}$

06 답 $a=3,\ b=-9,\ c=8$

07 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면

$a(x+y)+b(x-y)+2=(a+b)x+(a-b)y+2$

주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+b=6,\ a-b=-4,\ c=2$

$\therefore\ a=1,\ b=5,\ c=2$

$\begin{cases} a+b=6 & \cdots ㉠ \\ a-b=-4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$2a=2 \quad \therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$1+b=6 \quad \therefore\ b=5$

답 $a=1,\ b=5,\ c=2$

표준+발전 유형 Q+Q

17쪽

01 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면

$x^3+ax^2+3x-22$

$=x^3+(b+c)x^2+(bc-11)x-11b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=b+c,\ 3=bc-11,\ -22=-11b$

$\therefore\ a=9,\ b=2,\ c=7$

$\therefore\ a-b+c=14$

답 ③

02 $kx^2+x+ky^2-y-9k+2=0$에서

$(x^2+y^2-9)k+x-y+2=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2+y^2=9,\ x-y=-2$

이때 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$이므로

$9=(-2)^2+2xy, \qquad 2xy=5$

$\therefore\ xy=\dfrac{5}{2}$

답 $\dfrac{5}{2}$

03 $f(x)=x^3+x^2+5x-6$에서

$$f(x+a)=(x+a)^3+(x+a)^2+5(x+a)-6$$
$$=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3+x^2+2ax+a^2+5x+5a-6$$
$$=x^3+(3a+1)x^2+(3a^2+2a+5)x+a^3+a^2+5a-6$$

이므로

$x^3+(3a+1)x^2+(3a^2+2a+5)x+a^3+a^2+5a-6$

$=x^3+4x^2+bx+1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3a+1=4,\ 3a^2+2a+5=b,\ a^3+a^2+5a-6=1$

$\therefore\ a=1,\ b=10$

$\therefore\ a+b=11$

답 ④

04 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$12=-3c \qquad \therefore\ c=-4$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-a+12=0 \qquad \therefore\ a=11$

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$-9+3a+12=12b$

$12b=36 \qquad \therefore\ b=3$

$a=11$이므로

$-9+3\cdot 11+12=36$

$\therefore\ a+bc=11-12=-1$

답 -1

05 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-1+a-b+10-5+1$

$\therefore a-b=-5$ ······ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$32=1+a+b+10+5+1$

$\therefore a+b=15$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=10$

$\therefore \dfrac{b}{a}=2$ 답 ②

Q BOX
㉠+㉡을 하면
$2a=10 \quad \therefore a=5$
$a=5$를 ㉡에 대입하면
$5+b=15 \quad \therefore b=10$

06 주어진 이차방정식이 -1을 근으로 가지므로

$1-(k+1)+(k-4)m+n+1=0$

$\therefore (m-1)k-4m+n+1=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$m-1=0,\ -4m+n+1=0$

$\therefore m=1,\ n=3$

$\therefore mn=3$ 답 ①

07 $x-y=2$에서 $y=x-2$

$x=y+2$를 주어진 등식에 대입하여 y에 대한 항등식임을 이용할 수도 있다.

이것을 주어진 등식에 대입하면

$px^2+qx-(x-2)^2+3x(x-2)+r(x-2)+2=0$

$\therefore (p+2)x^2+(q+r-2)x-2r-2=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$p+2=0,\ q+r-2=0,\ -2r-2=0$

$\therefore p=-2,\ q=3,\ r=-1$

$\therefore p+q+r=0$ 답 0

08 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a_0=(-2)^5=-32$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=1$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=1-a_0=33$ 답 33

09 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=5^4$ ······ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8=(-1)^4$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)=626$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=313$ 답 ⑤

10 x^3-2x^2+5

$=(x^2+ax+b)(x-3)+6x-4$

이 등식의 우변을 정리하면

x^3-2x^2+5

$=x^3+(a-3)x^2-(3a-b-6)x-(3b+4)$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-3=-2,\ 3a-b-6=0,\ 3b+4=-5$

$\therefore a=1,\ b=-3$ 답 $a=1,\ b=-3$

11 $2x^3+ax+1$을 x^2-x+b로 나누었을 때의 몫을 $2x+c$ (c는 상수)라 하면

$2x^3+ax+1=(x^2-x+b)(2x+c)$

이 등식의 우변을 정리하면

$2x^3+ax+1=2x^3+(c-2)x^2+(2b-c)x+bc$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$c-2=0,\ 2b-c=a,\ bc=1$

$\therefore a=-1,\ b=\dfrac{1}{2},\ c=2$

$\therefore a^2-b^2=\dfrac{3}{4}$ 답 ③

Lecture 04 나머지정리와 인수정리

19쪽

01 $P(-1)=-8+6-1=-3$ 답 -3

02 $P\left(\dfrac{3}{2}\right)=8\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^3-6\cdot\dfrac{3}{2}-1=17$ 답 17

03 $P(2)=2$이므로 $8-20+2a-2=2$

$2a=16 \quad \therefore a=8$ 답 8

04 $P(1)=0$이므로 $2+a+1-7=0$

$\therefore a=4$ 답 4

05 $P(1)=0$이므로 $3+a+b+3=0$

$\therefore a+b=-6$ ······ ㉠

$P(2)=0$이므로 $24+4a+2b+3=0$

$\therefore 4a+2b=-27$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{15}{2},\ b=\dfrac{3}{2}$ 답 $a=-\dfrac{15}{2},\ b=\dfrac{3}{2}$

06 $P(-1)=0$이므로 $-3+a-b+3=0$

$\therefore a-b=0$ ······ ㉠

$P(3)=0$이므로 $81+9a+3b+3=0$

$\therefore 3a+b=-28$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-7,\ b=-7$ 답 $a=-7,\ b=-7$

07
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & -6 & 2 \\ & & -1 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -4 & -2 & \boxed{4} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-4x-2, 나머지: 4

답 몫: x^2-4x-2, 나머지: 4

08
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 9 & 6 & -3 & 1 \\ & & 3 & 3 & 0 \\ \hline & 9 & 9 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

$\therefore 9x^3+6x^2-3x+1=\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(9x^2+9x)+1$

$=(3x-1)(3x^2+3x)+1$

$\therefore$ 몫: $3x^2+3x$, 나머지: 1

답 몫: $3x^2+3x$, 나머지: 1

표준+발전 유형 Q+Q

20쪽

01 $P(x)=x^3+ax^2+bx-8$이라 하면

$P(-1)=-11$이므로 $\quad -1+a-b-8=-11$

$\therefore a-b=-2 \quad \cdots\cdots ㉠$

$P(2)=16$이므로 $\quad 8+4a+2b-8=16$

$\therefore 2a+b=8 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=4$

따라서 $P(x)=x^3+2x^2+4x-8$이므로

$P(1)=1+2+4-8=-1$ 　답 -1

02 $P(-2)=5$, $Q(-2)=-3$이므로 구하는 나머지는

$$2P(-2)-5Q(-2)=2\cdot5-5\cdot(-3)=25$$

답 ⑤

03 $P(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$$

이때 $P(1)=2$, $P(-3)=-8$이므로

$a+b=2,\ -3a+b=-8$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2}$

따라서 $R(x)=\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$이므로

$R(3)=7$ 　답 ④

04 $P(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2-4)Q_1(x)+x+1=(x+2)(x-2)Q_1(x)+x+1$$

이므로 $\quad P(-2)=-1,\ P(2)=3$

$P(x)$를 x^2-3x-4로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2-3x-4)Q_2(x)-2x+13=(x+1)(x-4)Q_2(x)-2x+13$$

이므로 $\quad P(-1)=15,\ P(4)=5$

$P(x)$를 x^2-6x+8로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^2-6x+8)Q(x)+ax+b=(x-2)(x-4)Q(x)+ax+b$$

이때 $P(2)=3$, $P(4)=5$이므로

$2a+b=3,\ 4a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1$

따라서 구하는 나머지는 $x+1$이다. 　답 ③

Q BOX

나누는 식이 삼차식이므로 나머지는 이차 이하의 다항식이다.

나누는 식이 이차식이므로 나머지는 일차 이하의 다항식이다.

$2(x+3)+1=2x+6+1=2x+7$

05 $P(x)$를 $x(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$$P(x)=x(x-2)Q_1(x)+3x+1$$

이므로 $\quad P(0)=1,\ P(2)=7$

$P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$P(x)=(x+1)(x-2)Q_2(x)+4x-1$$

이므로 $\quad P(-1)=-5,\ P(2)=7$

$P(x)$를 $x(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=x(x+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

이때 $P(0)=1$, $P(2)=7$, $P(-1)=-5$이므로

$c=1,\ 4a+2b+c=7,\ a-b+c=-5$

$\therefore a=-1,\ b=5,\ c=1$

따라서 구하는 나머지는 $-x^2+5x+1$이다.

답 $-x^2+5x+1$

06 $P(x)$를 $(x+1)(x^2-x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ㉠$$

$P(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x+3$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x+3$이다.

$\therefore R(x)=a(x^2-x+1)+2x+3$

이것을 ㉠에 대입하면

$$P(x)=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)+a(x^2-x+1)+2x+3$$

한편 $P(-1)=7$이므로

$3a+1=7 \quad \therefore a=2$

따라서 $R(x)=2(x^2-x+1)+2x+3=2x^2+5$이므로

$R(-1)=7$ 　답 7

07 $P(x+3)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(1+3)=P(4) \quad \cdots\cdots ㉠$

한편 $P(x)$를 $2x^2-7x-4$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(2x^2-7x-4)Q(x)+x+4=(2x+1)(x-4)Q(x)+x+4$$

이므로 $\quad P(4)=8$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는 8이다.

답 8

다른 풀이 $P(x)$를 $2x^2-7x-4$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(2x^2-7x-4)Q(x)+x+4=(2x+1)(x-4)Q(x)+x+4$$

이 등식의 x 대신 $x+3$을 대입하면

$$P(x+3)=(2x+7)(x-1)Q(x+3)+x+7$$

이때 $(2x+7)(x-1)Q(x+3)$은 $x-1$로 나누어떨어지므로 $P(x+3)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $x+7$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지와 같다.
따라서 구하는 나머지는

$$1+7=8$$

$x+7$에 $x=1$을 대입하면 $1+7=8$

08 $(x-1)P(-x+1)+1$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$$(3-1)P(-3+1)+1=2P(-2)+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $P(-2)=R$이므로 ㉠에서 구하는 나머지는 $2R+1$이다.

답 ④

09 $x^{20}+x^{19}+x^{18}+x^{17}-x$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$$x^{20}+x^{19}+x^{18}+x^{17}-x=(x+1)Q(x)+R$$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$R=1$$

$$\therefore x^{20}+x^{19}+x^{18}+x^{17}-x=(x+1)Q(x)+1$$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$3=2Q(1)+1 \qquad \therefore Q(1)=1$$

따라서 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 1

10 $P(x)$를 x^2+2x+4로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $x-8$이므로

$$P(x)=(x^2+2x+4)Q(x)+x-8 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 1이므로

$$Q(x)=(x-2)Q'(x)+1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$P(x)=(x^2+2x+4)\{(x-2)Q'(x)+1\}+x-8$$
$$=(x^3-8)Q'(x)+x^2+3x-4$$

다항식 $P(x)$를 x^3-8로 나누었을 때의 몫은 $Q'(x)$, 나머지는 x^2+3x-4이다.

따라서 $R(x)=x^2+3x-4$이므로

$$R(2)=6$$

답 6

11 $499^{200}=(498+1)^{200}$
$(x+1)^{200}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$(x+1)^{200}=xQ(x)+R$$

이 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$R=1$$

$$\therefore (x+1)^{200}=xQ(x)+1$$

이 등식의 양변에 $x=498$을 대입하면

$$499^{200}=498Q(498)+1$$

따라서 499^{200}을 498로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 1

12 $x^{19}-x^{18}+x^{17}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$x^{19}-x^{18}+x^{17}=(x+1)Q(x)+R$$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$R=-3$$

$$\therefore x^{19}-x^{18}+x^{17}=(x+1)Q(x)-3$$

이 등식의 양변에 $x=11$을 대입하면

$$11^{19}-11^{18}+11^{17}=12Q(11)-3$$
$$=12\{Q(11)-1\}+12-3$$
$$=12\{Q(11)-1\}+9$$

(나머지)≥ 0이어야 한다.

따라서 구하는 나머지는 9이다.

답 ③

쌤한마디

다항식의 나눗셈에서는 나머지가 음수일 수 있지만 자연수의 나눗셈에서는 나머지가 0 또는 자연수이어야 한다.

13 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2-8$이라 하면 $P(x)$는 $x+1$, $x-2$로 각각 나누어떨어지므로

$$P(-1)=0,\ P(2)=0$$
$$1-a+b-8=0,\ 16+8a+4b-8=0$$
$$\therefore a-b=-7,\ 2a+b=-2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-3,\ b=4$$
$$\therefore ab=-12$$

답 ③

14 $P(-1)=-1$, $P(1)=1$, $P(2)=2$에서

$$P(-1)-(-1)=0,\ P(1)-1=0,\ P(2)-2=0$$

이므로 $P(x)-x$는 $x+1$, $x-1$, $x-2$로 각각 나누어떨어진다.
이때 $P(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$$P(x)-x=(x+1)(x-1)(x-2)$$
$$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+x$$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-2)=(-1)\cdot(-3)\cdot(-4)-2$$
$$=-14$$

답 ①

15 $P(x)=x^3+3x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 x^2+5x+6, 즉 $(x+3)(x+2)$로 나누어떨어지므로

$$P(-3)=0,\ P(-2)=0$$
$$-27+27-3a+b=0,\ -8+12-2a+b=0$$
$$\therefore 3a-b=0,\ 2a-b=4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-4,\ b=-12$$
$$\therefore P(x)=x^3+3x^2-4x-12$$

따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-1)=-1+3+4-12=-6$$

답 -6

16 $P(x)-2$가 x^2+x-6, 즉 $(x+3)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$$P(-3)-2=0,\ P(2)-2=0$$
$$\therefore P(-3)=2,\ P(2)=2$$

$P(5x+7)$을 x^2+3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$P(5x+7)=(x^2+3x+2)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+2)(x+1)Q(x)+ax+b$$

이 등식의 양변에 $x=-2$, $x=-1$을 각각 대입하면

$$P(-3)=-2a+b,\ P(2)=-a+b$$
$$\therefore\ -2a+b=2,\ -a+b=2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=0,\ b=2$$

따라서 구하는 나머지는 2이다. 답 2

QBOX

$a=0$, $b=2$를 $ax+b$에 대입하면 $0\cdot x+2=2$

17 (1) 주어진 조립제법에서 $2a=1$이므로

$$a=\frac{1}{2}$$

따라서 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & 5 & -1 & 3 \\ & & 1 & 3 & 1 \\ \hline & 2 & 6 & 2 & \boxed{4} \end{array}$$

$b=6$, $c=3$, $d=4$

$\therefore\ ab+cd=15$

(2) $2x^3+5x^2-x+3$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2+6x+2$, 나머지는 4이므로

$$2x^3+5x^2-x+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+6x+2)+4$$
$$=(2x-1)(x^2+3x+1)+4$$

따라서 주어진 다항식을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2+3x+1, 나머지는 4이다.

답 (1) 15 (2) 몫: x^2+3x+1, 나머지: 4

$2x-1=0$에서 $2x=1$ $\therefore\ x=\frac{1}{2}$

18 오른쪽 조립제법에서 $3x^3+4x^2-11x+7$을 $x+3$으로 나누었을 때의 몫은

$$\begin{array}{c|cccc} -3 & 3 & 4 & -11 & 7 \\ & & -9 & 15 & -12 \\ \hline 1 & 3 & -5 & 4 & \boxed{-5} \\ & & 3 & -2 & \\ \hline & 3 & -2 & \boxed{2} & \end{array}$$

$$Q(x)=3x^2-5x+4$$

따라서 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $3x-2$이다. 답 ④

$x+3=0$에서 $x=-3$

$x-1=0$에서 $x=1$

19 (1)

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ & & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2 & \boxed{6} \\ & & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & \boxed{3} & \\ & & 1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{2} & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$$x^3-x^2+2x+4$$
$$=(x-1)(x^2+2)+6$$
$$=(x-1)\{(x-1)(x+1)+3\}+6$$
$$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+2\}+3]+6$$
$$=(x-1)\{(x-1)^2+2(x-1)+3\}+6$$
$$=(x-1)^3+2(x-1)^2+3(x-1)+6$$
$$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=6$$

(2) (1)에서

$$P(x)=(x-1)^3+2(x-1)^2+3(x-1)+6$$

이므로 이 등식의 양변에 $x=1.1$을 대입하면

$$P(1.1)=0.1^3+2\times0.1^2+3\times0.1+6$$
$$=6.321$$

답 (1) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=6$ (2) 6.321

쌤 한마디

x^3-x^2+2x+4
$=1\cdot(x-1)^3+2\cdot(x-1)^2+3\cdot(x-1)+6$
과 같이 다항식을 $x-1$에 대하여 내림차순으로 정리한 식에서 계수 1, 2, 3, 6은 조립제법을 연속으로 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

20

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 8 & -6 & -11 & 7 \\ & & 4 & -1 & -6 \\ \hline \frac{1}{2} & 8 & -2 & -12 & \boxed{1} \\ & & 4 & 1 & \\ \hline \frac{1}{2} & 8 & 2 & \boxed{-11} & \\ & & 4 & & \\ \hline & 8 & \boxed{6} & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$$8x^3-6x^2-11x+7$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(8x^2-2x-12)+1$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)(8x+2)-11\right\}+1$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{8\left(x-\frac{1}{2}\right)+6\right\}-11\right]+1$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+6\left(x-\frac{1}{2}\right)-11\right\}+1$$
$$=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-11\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$$
$$=(2x-1)^3+\frac{3}{2}(2x-1)^2-\frac{11}{2}(2x-1)+1$$

따라서 $a=1$, $b=\frac{3}{2}$, $c=-\frac{11}{2}$, $d=1$이므로

$$a-b-c+d=6$$

답 ③

Lecture 05 인수분해

23쪽

01 $x^2+4y^2+z^2-4xy-4yz+2zx$
$=x^2+(-2y)^2+z^2+2\cdot x\cdot(-2y)+2\cdot(-2y)\cdot z+2\cdot z\cdot x$
$=(x-2y+z)^2$

답 $(x-2y+z)^2$

02 $x^3-9x^2+27x-27=x^3-3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2-3^3$
$=(x-3)^3$ 답 $(x-3)^3$

03 $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$
$=(3a)^3+3\cdot(3a)^2\cdot 2b+3\cdot 3a\cdot(2b)^2+(2b)^3$
$=(3a+2b)^3$ 답 $(3a+2b)^3$

04 $8a^3-b^3=(2a)^3-b^3$
$=(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$
답 $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

05 $a^3+8b^3-27c^3+18abc$
$=a^3+(2b)^3+(-3c)^3-3\cdot a\cdot 2b\cdot(-3c)$
$=(a+2b-3c)(a^2+4b^2+9c^2-2ab+6bc+3ca)$
답 $(a+2b-3c)(a^2+4b^2+9c^2-2ab+6bc+3ca)$

06 $x^4+4x^2y^2+16y^4$
$=x^4+x^2\cdot(2y)^2+(2y)^4$
$=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$
답 $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

07 $x-3=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X^2-9X+20$
$=(X-4)(X-5)$
$=(x-7)(x-8)$
답 $(x-7)(x-8)$

$(X-4)(X-5)$
$=(x-3-4)(x-3-5)$
$=(x-7)(x-8)$

08 $x^2+4x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X(X+6)+8$
$=X^2+6X+8$
$=(X+4)(X+2)$
$=(x^2+4x+4)(x^2+4x+2)$
$=(x+2)^2(x^2+4x+2)$
답 $(x+2)^2(x^2+4x+2)$

09 $x^2=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X^2-10X+9$
$=(X-1)(X-9)$
$=(x^2-1)(x^2-9)$
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$
답 $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

다른 풀이 $x^4-10x^2+9=(x^4-6x^2+9)-4x^2$
$=(x^2-3)^2-4x^2$
$=(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)$
$=(x+3)(x-1)(x+1)(x-3)$

10 $x^4+7x^2+16=(x^4+8x^2+16)-x^2$
$=(x^2+4)^2-x^2$
$=(x^2+x+4)(x^2-x+4)$
답 $(x^2+x+4)(x^2-x+4)$

11 $x^2-2xy-3y^2-x+7y-2$
$=x^2-(2y+1)x-(3y^2-7y+2)$
$=x^2-(2y+1)x-(3y-1)(y-2)$
$=\{x-(3y-1)\}\{x+(y-2)\}$
$=(x-3y+1)(x+y-2)$
답 $(x-3y+1)(x+y-2)$

12 $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면
$P(1)=1-2-5+6=0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$
$=(x-1)(x+2)(x-3)$
답 $(x-1)(x+2)(x-3)$

표준+발전 유형 Q+Q

24쪽

01 ③ $x^3-8y^3=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$
답 ③

02 $a^5+a^4-a^3-3a^2-2a$
$=a(a^4+a^3-a^2-3a-2)$
$=a\{a^3(a+1)-(a^2+3a+2)\}$
$=a\{a^3(a+1)-(a+2)(a+1)\}$
$=a(a+1)(a^3-a-2)$
따라서 인수인 것은 ④이다. 답 ④

03 $x^2-2x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X+5)(X-2)-8$
$=X^2+3X-18$
$=(X+6)(X-3)$
$=(x^2-2x+6)(x^2-2x-3)$
$=(x+1)(x-3)(x^2-2x+6)$
따라서 $a=-3$, $b=-2$, $c=6$이므로
$abc=36$ 답 36

04 $(x+3)(x+2)(x-1)(x-2)+k$
$=\{(x+3)(x-2)\}\{(x+2)(x-1)\}+k$
$=(x^2+x-6)(x^2+x-2)+k$
$x^2+x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-6)(X-2)+k$
$=X^2-8X+12+k$ ...... ㉠

상수항의 합이 같아지도록 짝을 짓는다.

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 X에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로

$$12+k=\left(-\frac{8}{2}\right)^2 \qquad \therefore k=4$$ 답 4

Q BOX
$k=4$일 때,
(주어진 식)
$=X^2-8X+16$
$=(X-4)^2$
$=(x^2+x-4)^2$

05 $x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned} x^4-29x^2+100&=X^2-29X+100\\ &=(X-4)(X-25)\\ &=(x^2-4)(x^2-25)\\ &=(x+2)(x-2)(x+5)(x-5) \end{aligned}$$

$\therefore a+b+c+d=2-2+5-5=0$ 답 ③

06
$$\begin{aligned} x^4-9x^2y^2+16y^4&=(x^4-8x^2y^2+16y^4)-x^2y^2\\ &=(x^2-4y^2)^2-(xy)^2\\ &=(x^2+xy-4y^2)(x^2-xy-4y^2) \end{aligned}$$

따라서 두 이차식의 합은

$(x^2+xy-4y^2)+(x^2-xy-4y^2)$
$=2x^2-8y^2$ 답 $2x^2-8y^2$

07 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+axy+2y^2+x-2y-12$
$=x^2+(ay+1)x+2y^2-2y-12$
$=x^2+(ay+1)x+2(y+2)(y-3)$

주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$2(y+2)+(y-3)=ay+1$
$\therefore a=3$ 답 ④

y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 결과는 같다.

08 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$
$=a^2b+abc+ca^2+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+c^2a-abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$
$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)$
$=(a+b)(b+c)(c+a)$ 답 $(a+b)(b+c)(c+a)$

09 $x-3y-z=0$에서 $z=x-3y$

$$\begin{aligned} \therefore x^2-3xy+z^2&=x^2-3xy+(x-3y)^2\\ &=x(x-3y)+(x-3y)^2\\ &=(x-3y)(2x-3y)\\ &=z(2x-3y) \end{aligned}$$ 답 ②

10 $P(x)=x^3+8x^2+11x-20$이라 하면

$P(1)=1+8+11-20=0$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	8	11	-20
		1	9	20
	1	9	20	0

$$\begin{aligned} x^3+8x^2+11x-20&=(x-1)(x^2+9x+20)\\ &=(x-1)(x+4)(x+5) \end{aligned}$$

이때 $a<b<c$이므로

$a=-1,\ b=4,\ c=5$
$\therefore ab+c=1$ 답 1

11 ax^4+3x^2+bx+6이 $(x+1)^2$을 인수로 가지므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	a	0	3	b	6
		$-a$	a	$-a-3$	$a-b+3$
-1	a	$-a$	$a+3$	$-a+b-3$	$a-b+9$
		$-a$	$2a$	$-3a-3$	
	a	$-2a$	$3a+3$	$-4a+b-6$	

$\therefore a-b+9=0,\ -4a+b-6=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=10$
$\therefore x^4+3x^2+10x+6=(x+1)^2(x^2-2x+6)$

따라서 $Q(x)=x^2-2x+6$이므로

$Q(3)=9$ 답 ②

$a=1$을 $ax^2-2ax+3a+3$에 대입하면
x^2-2x+6

12 $x^4-5x^3+8x^2-5x+1$
$=x^2\left(x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$
$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+8\right\}$
$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6\right\}$
$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)$
$=(x^2-2x+1)(x^2-3x+1)$

따라서 인수인 것은 ②이다. 답 ②

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

13 $x^4+2x^3-5x^2-2x+1$
$=x^2\left(x^2+2x-5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$
$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-5\right\}$
$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right\}$
$=x^2\left(x-\frac{1}{x}+3\right)\left(x-\frac{1}{x}-1\right)$
$=(x^2+3x-1)(x^2-x-1)$

따라서 $a=3$, $b=-1$, $c=-1$이므로

$a^2+b^2+c^2=11$ 답 11

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

14 주어진 식의 좌변을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^3-a^2c+ab^2+ac^2-c^3-b^2c$
$=(a-c)b^2+a^3-a^2c+ac^2-c^3$
$=(a-c)b^2+a^2(a-c)+c^2(a-c)$
$=(a-c)(a^2+b^2+c^2)$

즉 $(a-c)(a^2+b^2+c^2)=0$이고 $a^2+b^2+c^2>0$이므로

$a-c=0 \quad \therefore a=c$

따라서 주어진 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다.

답 ②

15 주어진 식의 좌변에서

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-ab(a+b)-bc(b+c)+ca(c+a)\\&=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-b^2c-bc^2+c^2a+ca^2\\&=a^2(a-b+c)-b^2(a-b+c)+c^2(a-b+c)\\&=(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)\end{aligned}$$

즉 $(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)=0$이고 $a-b+c>0$이므로

$a+c>b$이므로 $a-b+c>0$

$a^2-b^2+c^2=0 \quad \therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

답 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

16 $x^4-y^4+x^3y-xy^3$

$$\begin{aligned}&=x^3(x+y)-y^3(x+y)\\&=(x+y)(x^3-y^3)\\&=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)\\&=(x+y)(x-y)\{(x+y)^2-xy\} \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때

$x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$,

$x-y=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$,

$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\{2^2-(-1)\}=20\sqrt{2}$

답 $20\sqrt{2}$

17 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^2b-ab^2-ca^2+c^2a+b^2c-bc^2\\&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2\\&=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=(b-c)(a-b)(a-c)\\&=-(a-b)(b-c)(c-a) \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $b-c=3+\sqrt{5}$, $c-a=3-\sqrt{5}$를 변끼리 더하면

$b-a=6 \quad \therefore a-b=-6$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$-(-6)\cdot(3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})=24$

답 24

18 $9999=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\frac{x^3-1}{x(x+1)+1}\\&=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}\\&=x-1\\&=9999-1\\&=9998\end{aligned}$$

답 ①

19 $P(-1)=1+5+6-4-8=0$,

$P(2)=16-40+24+8-8=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}-1 & 1 & -5 & 6 & 4 & -8\\ & & -1 & 6 & -12 & 8\\ \hline 2 & 1 & -6 & 12 & -8 & \boxed{0}\\ & & 2 & -8 & 8 & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-4x+4)$

$=(x+1)(x-2)^3$

$\therefore P(12)=(12+1)(12-2)^3=13000$

답 ④

중단원 마무리

27쪽

01 전략 $f(x)$의 x 대신 $x+a$를 대입하여 $f(x+a)$를 구한 후 계수 비교법을 이용한다.

풀이 $f(x+a)$

$$\begin{aligned}&=(x+a)^3+9(x+a)^2+4(x+a)-45\\&=(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)+9(x^2+2ax+a^2)\\&\quad+4(x+a)-45\\&=x^3+(3a+9)x^2+(3a^2+18a+4)x\\&\quad+a^3+9a^2+4a-45\end{aligned}$$

이때 $f(x+a)=x^3+bx-3$이므로

$$\begin{aligned}&x^3+(3a+9)x^2+(3a^2+18a+4)x\\&\quad+a^3+9a^2+4a-45\\&=x^3+bx-3\end{aligned}$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3a+9=0$, $3a^2+18a+4=b$,

$a^3+9a^2+4a-45=-3$

$3a+9=0$에서 $\quad 3a=-9 \quad \therefore a=-3$

$a=-3$이면 $a^3+9a^2+4a-45=-3$이고,

$3a^2+18a+4=b$에서

$b=27-54+4=-23$

$\therefore a+b=-26$

답 ①

02 전략 주어진 등식에 적당한 수를 대입하여 수치 대입법을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$x^2-4=0$을 만족시키는 x의 값을 대입한다.

$2a+b=9 \quad \cdots\cdots ㉠$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-2a+b=-31 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=10$, $b=-11$

$\therefore a-b=21$

답 ②

03 전략 $x+3y=1$을 이용하여 주어진 등식을 y에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $x+3y=1$에서 $\quad x=1-3y$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$a\{(1-3y)y+1\}+b(1-3y+2)+c(y^2+2)=8$

$$\therefore (c-3a)y^2+(a-3b)y+a+3b+2c=8$$

이 등식이 y에 대한 항등식이므로

$$c-3a=0,\ a-3b=0,\ a+3b+2c=8$$

즉 $3b=a$, $c=3a$이므로 이것을 $a+3b+2c=8$에 대입하면

$$a+a+6a=8, \qquad 8a=8 \qquad \therefore a=1$$

따라서 $b=\frac{1}{3}$, $c=3$이므로

$$a+b-c=-\frac{5}{3}$$

답 $-\frac{5}{3}$

04 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입하여 a_0, a_1, $\cdots$, a_{10}에 대한 식을 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$a_0=(-1)^5=-1$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=(-2)^5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}=2^5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})=0$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=0$$

이때 $a_0=-1$이므로

$$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=1$$

답 1

05 전략 $P(x)\pm Q(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)\pm Q(a)$ (복호동순)임을 이용한다.

풀이 $P(x)+Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로

$$P(3)+Q(3)=-3 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

$P(x)-Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 7이므로

$$P(3)-Q(3)=7 \quad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots ❷$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$P(3)=2,\ Q(3)=-5$$

따라서 구하는 나머지는

$$P(3)Q(3)=-10 \quad \cdots ❸$$

답 -10

단계	채점 기준	비율
❶	$P(3)+Q(3)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	$P(3)-Q(3)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	$P(x)Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

06 전략 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식을 $(x+p)^2$으로 나누었을 때의 몫은 $x+q$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에 의하여

$$f(x)=(x-2)^2(x+a)+2(x-2)\ (a\text{는 상수})$$

라 하면 조건 (가)에 의하여

$$f(0)=4a-4=0 \qquad \therefore a=1$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=(x-2)^2(x+1)+2(x-2)\\&=(x-2)\{(x-2)(x+1)+2\}\\&=(x-2)(x^2-x)\\&=(x-1)\cdot x(x-2)\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)=x(x-2)$이므로

$$Q(5)=5\cdot 3=15$$

답 ⑤

다른 풀이 조건 (가)에 의하여

$$f(x)=x^3+ax^2+bx\ (a,\ b\text{는 상수})$$

Q BOX: $f(0)=0$이므로 $f(x)$는 x를 인수로 갖는다.

라 하고, $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 조건 (나)에 의하여

$$x^3+ax^2+bx=(x-2)^2Q_1(x)+2(x-2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$8+4a+2b=0 \qquad \therefore b=-2a-4$$

이 식을 ㉠에 대입하면

$$x^3+ax^2+(-2a-4)x=(x-2)^2Q_1(x)+2(x-2)$$

$$x(x^2+ax-2a-4)=(x-2)\{(x-2)Q_1(x)+2\}$$

$$x(x-2)(x+a+2)=(x-2)\{(x-2)Q_1(x)+2\}$$

$$\therefore x(x+a+2)=(x-2)Q_1(x)+2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$2(2+a+2)=2 \qquad \therefore a=-3$$

$$\therefore b=-2\cdot(-3)-4=2$$

따라서

$$f(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$$

이고 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$이므로

$$Q(x)=x(x-2)$$

$$\therefore Q(5)=5\cdot 3=15$$

07 전략 주어진 등식을 이용하여 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구한다.

풀이 ㄱ. $f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지는 $f(0)$이므로 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$\{f(0)\}^3=1 \qquad \therefore f(0)=1$$

ㄴ. $f(x)$를 n차식이라 하면 $\{f(x)\}^3$은 $3n$차식, $4x^2f(x)+8x^2+6x+1$은 $(n+2)$차식이므로

$$3n=n+2 \qquad \therefore n=1$$

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a>0$)라 하면 $\{f(x)\}^3$의 최고차항의 계수는 a^3, $4x^2f(x)+8x^2+6x+1$의 최고차항의 계수는 $4a$이므로

Q BOX: $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.

$$a^3=4a, \qquad a(a+2)(a-2)=0$$

$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

즉 $f(x)$의 최고차항의 계수는 2이다.

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $\quad f(x)=2x+1$

$\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $cx+d$ (c, d는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}(2x+1)^3&=(x^2-1)Q(x)+cx+d\\&=(x+1)(x-1)Q(x)+cx+d\end{aligned}$$

이 등식의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$$27=c+d,\ -1=-c+d$$

앞의 두 식을 연립하여 풀면 $c=14,\ d=13$

따라서 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $14x+13$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

08 전략 다항식 $A(x)$를 다항식 $B(x)\ (B(x)\neq 0)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $R(x)$일 때, $A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$임을 이용한다.

풀이 $P(x)$를 $(x-2)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x-2)^3Q(x)+x^2+3x+6$$
$$=(x-2)(x-2)^2Q(x)+x^2+3x+6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $P(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $ax+b$이므로 ㉠에서

$$P(x)=(x-2)(x-2)^2Q(x)+\underline{(x-2)^2+ax+b}$$

즉 $(x-2)^2+ax+b=x^2+3x+6$이므로

$$x^2+(a-4)x+b+4=x^2+3x+6$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-4=3,\ b+4=6 \qquad \therefore a=7,\ b=2$

$\therefore ab=14$ 답 ⑤

x^2+3x+6을 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $ax+b$이다.

09 전략 다항식 $P(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a\alpha+b)$임을 이용한다.

풀이 $P(x)$를 $(x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x+1)(x+2)Q(x)+3x-1$$

ㄱ. $P(x)+4$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-1)+4=-4+4=0$$

이므로 $P(x)+4$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

ㄴ. $P(x-3)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(1-3)=P(-2)=-7$$

ㄷ. $(x+1)P\left(\frac{1}{2}x\right)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는

$$(-4+1)P\left(\frac{1}{2}\cdot(-4)\right)=-3P(-2)$$
$$=-3\cdot(-7)=21$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

10 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입하여 $a,\ b,\ c$의 값을 구한다.

풀이 다항식 $(4x+2)^{10}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$(4x+2)^{10}=xQ(x)+R \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $R=2^{10}=\boxed{1024}$

등식 $(4x+2)^{10}=xQ(x)+1024$에 $x=505$를 대입하면

$$2022^{10}=505\times Q(505)+1024$$
$$=505\times Q(505)+505\times 2+14$$
$$=505\times\{Q(505)+\boxed{2}\}+\boxed{14}$$

2022^{10}을 505로 나누었을 때의 나머지는 14이다.

$\therefore$ (가): 1024, (나): 2, (다): 14

따라서 $a=1024,\ b=2,\ c=14$이므로

$a+b+c=1040$ 답 ②

11 전략 자연수 A를 자연수 B로 나누었을 때의 나머지를 구할 때에는 A를 x에 대한 다항식으로, B를 x에 대한 일차식으로 나타낸 후 나머지정리를 이용한다.

풀이 $5^{11111}=(5^2)^{5555}\cdot 5=5\cdot 25^{5555}$,

$5^{111}=(5^2)^{55}\cdot 5=5\cdot 25^{55}$이므로

$$5^{11111}-5^{111}-5=5\cdot 25^{5555}-5\cdot 25^{55}-5$$

$25=x$로 놓고 $5x^{5555}-5x^{55}-5$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$5x^{5555}-5x^{55}-5=(x-1)Q(x)+R$$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$R=-5$

$\therefore 5x^{5555}-5x^{55}-5=(x-1)Q(x)-5$

이 등식의 양변에 $x=25$를 대입하면

$$5\cdot 25^{5555}-5\cdot 25^{55}-5=24Q(25)-5$$
$$=24\{Q(25)-1\}+\underline{24-5}$$
$$=24\{Q(25)-1\}+19$$

따라서 구하는 나머지는 19이다. 답 19

(나머지)≥ 0이어야 한다.

12 전략 다항식 $P(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$를 인수로 가지면 $P(\alpha)=P(\beta)=0$임을 이용한다.

풀이 $P(x)=x^{37}+ax^{10}+bx-8$이라 하면 $P(x)$는 $(x+1)(x-1)$을 인수로 갖는다.

따라서 $P(x)$는 $x+1,\ x-1$로 각각 나누어떨어지므로

$P(-1)=0,\ P(1)=0$

$-1+a-b-8=0,\ 1+a+b-8=0$

$\therefore a-b=9,\ a+b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=8,\ b=-1$

$\therefore ab=-8$ 답 ①

13 전략 x에 대한 항등식을 세운 후 항등식의 성질을 이용하여 $\alpha,\ \beta$에 대한 조건을 찾는다.

풀이 $f(x)=x^2+3x-n$이 $(x+\alpha)(x-\beta)$로 인수분해되므로

$$x^2+3x-n=(x+\alpha)(x-\beta)$$
$$\therefore x^2+3x-n=x^2+(\alpha-\beta)x-\alpha\beta$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$\alpha-\beta=3,\ \alpha\beta=n$

$\alpha-\beta=3$에서 $\alpha=\beta+3$이므로

$n=\alpha\beta=(\beta+3)\beta$

n은 100 이하의 자연수이므로

$\beta=1$이면 $\quad n=4\cdot 1=4<100$

$\vdots$

$\beta=8$이면 $\quad n=11\cdot 8=88<100$

$\beta=9$이면 $\quad n=12\cdot 9=108>100$

따라서 자연수 β는 1, 2, …, 8이므로 조건을 만족시키는 다항식 $f(x)$의 개수는 8이다. 답 8

> Q BOX: 자연수 α는 4, 5, 6, …, 11이다.

14 전략 네 일차식의 곱에서 공통부분이 생기도록 두 개씩 짝을 지어 전개한 후 주어진 식을 변형한다.

풀이 $(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)-12$

$=\{(x-2)(x+3)\}\{(x-1)(x+2)\}-12$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-2)-12$

> Q BOX: 상수항의 합이 같아지도록 짝을 짓는다.

$x^2+x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X-6)(X-2)-12$

$=X^2-8X$

$=X(X-8)$

$=(x^2+x)(x^2+x-8)$

$=x(x+1)(x^2+x-8)$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=-8$이므로

$abc=-8$ 답 ②

15 전략 먼저 다항식 x^4+2x^2+9를 인수분해하여 다항식의 곱의 꼴로 나타낸 후 $Q(x)$를 구한다.

풀이 $x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2$

$=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

따라서 $Q(x)=x^2+2x+3$이므로

$Q(1)=6$ 답 ①

16 전략 먼저 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $x^2+3xy+2y^2+ax+by-3$

$=x^2+(3y+a)x+2y^2+by-3$

에서 $2y^2+by-3$은

$(y+1)(2y-3)$ 또는 $(y-1)(2y+3)$

또는 $(2y+1)(y-3)$ 또는 $(2y-1)(y+3)$

으로 인수분해된다.

(i) $2y^2+by-3=(y+1)(2y-3)$일 때,

$b=-1$

또 $3y+a=(y+1)+(2y-3)$이므로

$a=-2$

(ii) $2y^2+by-3=(y-1)(2y+3)$일 때,

$b=1$

또 $3y+a=(y-1)+(2y+3)$이므로

$a=2$

(iii) $2y^2+by-3=(2y+1)(y-3)$일 때,

$b=-5$

또 $3y+a=(2y+1)+(y-3)$이므로

$a=-2$

(iv) $2y^2+by-3=(2y-1)(y+3)$일 때,

$b=5$

또 $3y+a=(2y-1)+(y+3)$이므로

$a=2$

이상에서 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-2, -1)$, $(2, 1)$, $(-2, -5)$, $(2, 5)$

이므로

$a^2+b^2=5$ 또는 $a^2+b^2=29$ 답 ①

17 전략 주어진 식을 b에 대한 식으로 나타낸 후 인수분해한다.

풀이 $a+3b+2=0$에서 $a=-3b-2$

$\therefore 4-a^2+6ab-9b^2$

$=4-(-3b-2)^2+6b(-3b-2)-9b^2$

$=4-9b^2-12b-4-18b^2-12b-9b^2$

$=-36b^2-24b$

$=-12b(3b+2)$

$=12ab$ 답 ⑤

> Q BOX: $a+3b+2=0$에서 $3b+2=-a$

다른 풀이 $4-a^2+6ab-9b^2$

$=4-(a^2-6ab+9b^2)$

$=2^2-(a-3b)^2$

$=\{2+(a-3b)\}\{2-(a-3b)\}$

$=(2+a-3b)(2-a+3b)$

이때 $a+3b+2=0$이므로

$2+a=-3b$, $2+3b=-a$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-3b-3b)\cdot(-a-a)$

$=(-6b)\cdot(-2a)$

$=12ab$

18 전략 다항식 $P(x)$가 $x+\alpha$를 인수로 가지면 $P(-\alpha)=0$임을 이용한다.

풀이 $P(x)=x^3+x^2+ax-12$라 하면 $P(x)$가 $x+2$를 인수로 가지므로 $P(-2)=0$

$-8+4-2a-12=0$

$2a=-16$ $\therefore a=-8$ ··· ❶

따라서

$P(x)$

$=x^3+x^2-8x-12$

이므로 오른쪽과 같이

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -8 & -12 \\ & & -2 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x+2)(x^2-x-6)$

$=(x+2)^2(x-3)$

$\therefore b=-3$ ··· ❷

$\therefore a+b=-11$ ··· ❸

답 -11

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

19 전략 주어진 식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

풀이 주어진 식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^2b+a^2c-b^2c-ab^2+ac^2-bc^2\\&=(b+c)a^2-(b^2-c^2)a-b^2c-bc^2\\&=(b+c)a^2-(b+c)(b-c)a-bc(b+c)\\&=(b+c)\{a^2-(b-c)a-bc\}\\&=(b+c)(a-b)(a+c)\end{aligned}$$

즉 $(b+c)(a-b)(a+c)=0$이고 $b+c>0$, $a+c>0$ 이므로

삼각형의 세 변의 길이는 양수이므로 $a>0$, $b>0$, $c>0$ $\therefore b+c>0$, $a+c>0$

$$a-b=0 \qquad \therefore a=b$$

따라서 주어진 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ①

20 **전략** 먼저 주어진 등식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$$\begin{aligned}&=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-abc\\&=(b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc\\&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=(b+c)(a+b)(a+c)\end{aligned}$$

$a>b>c\geq 2$에서

$$a+b>a+c>b+c\geq 5$$

$b>c$에서 $a+b>a+c$
$a>b$에서 $a+c>b+c$
$\therefore a+b>a+c>b+c$

이고 $360=5\cdot 6\cdot 12=5\cdot 8\cdot 9$이므로

$(b+c)(a+c)(a+b)=5\cdot 6\cdot 12$

또는 $(b+c)(a+c)(a+b)=5\cdot 8\cdot 9$

(i) $(b+c)(a+c)(a+b)=5\cdot 6\cdot 12$일 때,

$b+c=5$, $a+c=6$, $a+b=12$

위의 세 식의 양변을 각각 더하면

$2(a+b+c)=23$

$\therefore a+b+c=\dfrac{23}{2}$

(ii) $(b+c)(a+c)(a+b)=5\cdot 8\cdot 9$일 때,

$b+c=5$, $a+c=8$, $a+b=9$

위의 세 식의 양변을 각각 더하면

$2(a+b+c)=22$

$\therefore a+b+c=11$

(i), (ii)에서 a, b, c는 자연수이므로

$a+b+c=11$

답 11

21 **전략** $2018=a$, $3=b$로 놓고 주어진 식을 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $2018=a$, $3=b$로 놓으면

$2018^3-27=a^3-b^3$,

$2018\times 2021+9=a(a+b)+b^2=a^2+ab+b^2$

이고

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

이므로

$2018^3-27=2015\times(2018\times 2021+9)$

따라서 구하는 몫은 2015이다.

답 ①

22 **전략** $P(\alpha)=0$이면 다항식 $P(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가짐을 이용한다.

풀이 $P(1)=1+3-3-7+6=0$,

$P(-2)=16-24-12+14+6=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}1 & 1 & 3 & -3 & -7 & 6\\ & & 1 & 4 & 1 & -6\\ \hline -2 & 1 & 4 & 1 & -6 & 0\\ & & -2 & -4 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(x)&=(x-1)(x+2)(x^2+2x-3)\\&=(x-1)^2(x+2)(x+3)\end{aligned}$$ ··· ❶

따라서

$$\begin{aligned}P(9)&=8^2\cdot 11\cdot 12\\&=(2^3)^2\cdot 11\cdot 2^2\cdot 3\\&=33\cdot 2^8\end{aligned}$$

이므로 $n=33$ ··· ❷

답 33

단계	채점 기준	비율
❶	$P(x)$를 인수분해할 수 있다.	60 %
❷	n의 값을 구할 수 있다.	40 %

23 **전략** 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이면 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R_1이라 하면

$f(x)=(x-1)Q_1(x)+R_1$

이므로 $f(1)=R_1$

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 R_2라 하면

$f(x)=(x-2)Q_2(x)+R_2$

이므로 $f(2)=R_2$

조건 (가)에서 $Q_2(1)=f(2)$이므로

$R_2=Q_2(1)$

$\therefore f(x)=(x-2)Q_2(x)+Q_2(1)$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-Q_2(1)+Q_2(1)=0$

$\therefore R_1=0$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로

$Q_1(x)=x+a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x+a)$

$Q_1(1)=1+a$, $Q_2(1)=f(2)=2+a$이고 조건 (나)에서

조건 (가)

$Q_1(1)+Q_2(1)=6$이므로

$(1+a)+(2+a)=6$

$2a=3 \qquad \therefore a=\dfrac{3}{2}$

따라서 $f(x)=(x-1)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$이므로

$f(3)=2\cdot\dfrac{9}{2}=9$

답 ③

24 전략 주어진 색종이의 넓이의 합은 만들어진 직사각형의 넓이와 같음을 이용한다.

풀이 $\sqrt{3}=x$로 놓으면

색종이 A 한 장의 넓이는 x^2

색종이 B 한 장의 넓이는 $2x$

색종이 C 한 장의 넓이는 1

주어진 색종이를 모두 사용하여 겹치지 않게 빈틈없이 이어 붙여서 만든 직사각형의 넓이는

$$5x^2+22x+8=(x+4)(5x+2)$$

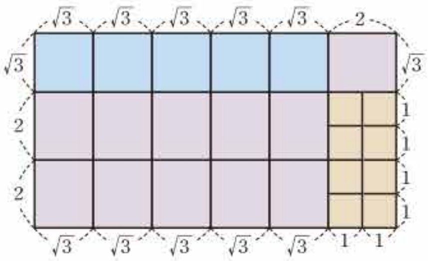
따라서 만들어진 직사각형은 두 변의 길이가 각각 $x+4$, $5x+2$이므로 둘레의 길이는

$$2\{(x+4)+(5x+2)\}=12x+12$$
$$=12+12\sqrt{3}$$

즉 $a=12$, $b=12$이므로

$a+b=24$ 답 24

참고 만들어진 직사각형은 다음과 같다.



03 복소수

Lecture 06 복소수 L 35쪽

01 답 실수부분: -1, 허수부분: 6

02 답 실수부분: 0, 허수부분: -5

03 답 실수부분: $\frac{7}{2}$, 허수부분: $-\frac{1}{2}$

04 답 실수부분: $4+\sqrt{3}$, 허수부분: 0

05 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

ㄷ. $\sqrt{(-3)^2}=3$

ㄹ. $-\frac{i^2}{9}=\frac{1}{9}$

06 답 ㄴ, ㅂ

07 $3a+5=8$, $2b-1=-7$이므로

$a=1$, $b=-3$ 답 $a=1$, $b=-3$

08 $a+b=5$, $4a-b=5$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$ 답 $a=2$, $b=3$

$a+b=5$, $4a-b=5$를 변끼리 더하면

$5a=10$ $\therefore a=2$

$a=2$를 $a+b=5$에 대입하면

$2+b=5$ $\therefore b=3$

09 답 $a=-9$, $b=3$

10 답 $a=\sqrt{10}$, $b=0$

11 $(3-5i)+(6+i)=(3+6)+(-5+1)i$

$=9-4i$ 답 $9-4i$

12 $(-7+4i)-(9-8i)=(-7-9)+(4+8)i$

$=-16+12i$

답 $-16+12i$

13 $(3-i)(2+4i)=6+12i-2i+4$

$=10+10i$ 답 $10+10i$

14 $(2-i)^2=4-4i-1=3-4i$ 답 $3-4i$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

15 $\frac{2-i}{1+3i}=\frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{2-6i-i-3}{1+9}$

$=\frac{-1-7i}{10}=-\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i$

답 $-\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i$

16 $\dfrac{5-i}{2i}=\dfrac{(5-i)i}{2i\cdot i}=\dfrac{5i+1}{-2}$

$=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$ 답 $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

17 $\overline{(\overline{z})}=z=4-2i$ 답 $4-2i$

18 $z+\overline{z}=(4-2i)+(4+2i)=8$ 답 8

19 $z\overline{z}=(4-2i)(4+2i)=16+4=20$ 답 20

20 $\dfrac{\overline{z}}{z}=\dfrac{4+2i}{4-2i}=\dfrac{(4+2i)^2}{(4-2i)(4+2i)}$

$=\dfrac{16+16i-4}{16+4}=\dfrac{12+16i}{20}$

$=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$ 답 $\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$

21 $i-i^2+i^3-i^4=i-(-1)-i-1=0$ 답 0

22 $i^{22}=(i^4)^5\cdot i^2=-1$이므로

$\dfrac{1}{i^{22}}=-1$ 답 -1

23 $(1+i)^2=1+2i-1=2i$이므로

$(1+i)^8=\{(1+i)^2\}^4=(2i)^4=16i^4=16$ 답 16

24 $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1+2i-1}{2}=i$이므로

$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6=\left\{\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^3$

$=i^3=-i$ 답 $-i$

표준+발전 유형 Q+Q

36쪽

01 ⑤ $a=3i$, $b=0$이면 $a+bi=3i$는 허수이다.

답 ⑤

Q BOX: a가 실수라는 조건이 없으므로 허수일 수도 있다.

02 순허수는 $-3i$, $\sqrt{5}i$, $-\sqrt{-1}=-i$의 3개이다.

답 3

03 ① $(5+3i)+(8-6i)=13-3i$

② $(i-4)-(2i-7)=3-i$

③ $(2-i)(2+i)=4+1=5$

④ $(3-2i)^2=9-12i-4=5-12i$

⑤ $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i-2i}{2}=0$

답 ④

04 $(1-i)(2+3i)+\dfrac{1+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}$

$=2+3i-2i+3+\dfrac{(1+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+i)}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}$

$=5+i+\dfrac{\sqrt{2}+i+2i-\sqrt{2}}{2+1}=5+2i$ 답 $5+2i$

05 $x=\dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}$에서 $3x-1=-\sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2-6x+1=-2$

$9x^2-6x=-3$ $\therefore 3x^2-2x=-1$

$\therefore 6x^2-4x-1=2(3x^2-2x)-1$

$=2\cdot(-1)-1=-3$ 답 ①

다른 풀이 $6x^2-4x-1=6\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}\right)^2-4\cdot\dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}-1$

$=6\cdot\dfrac{-1-2\sqrt{2}i}{9}-\dfrac{7-4\sqrt{2}i}{3}$

$=-3$

06 $z=\dfrac{4+i}{1-i}=\dfrac{(4+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$=\dfrac{4+4i+i-1}{1+1}=\dfrac{3+5i}{2}$

에서 $2z-3=5i$

양변을 제곱하면 $4z^2-12z+9=-25$

$4z^2-12z+34=0$ $\therefore 2z^2-6z+17=0$

$\therefore 2z^3-6z^2+15z=z(2z^2-6z+17)-2z$

$=-2z=-2\cdot\dfrac{3+5i}{2}$

$=-3-5i$ 답 $-3-5i$

07 $z=a^2(1-2i)+a(1+i)-2+i$

$=(a^2+a-2)-(2a^2-a-1)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$a^2+a-2=0$, $2a^2-a-1\neq0$

$a^2+a-2=0$에서 $(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$ …… ㉠

$2a^2-a-1\neq0$에서 $(2a+1)(a-1)\neq0$

$\therefore a\neq-\dfrac{1}{2}$, $a\neq1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-2$ 답 -2

쌤한마디

복소수 $z=x+yi$ (x, y는 실수)라 하면

$z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$

z^2이 음의 실수이면 $x^2-y^2<0$, $2xy=0$

$2xy=0$에서 $x=0$ 또는 $y=0$

(i) $x=0$일 때

$z^2=-y^2$이고 $-y^2<0$이어야 하므로 $y\neq0$

Q BOX: $x=0$을 $x^2-y^2<0$에 대입하면 $-y^2<0$

(ii) $y=0$일 때

$z^2=x^2$이고 $x^2\geq0$이므로 z^2이 음의 실수임에 모순이다.

(i), (ii)에서 $x=0$, $y\neq0$이므로 z는 순허수이다.

08 $z=i(a+4i)^2=i(a^2+8ai-16)$

$\quad=-8a+(a^2-16)i$

z가 실수가 되려면

$a^2-16=0, \quad a^2=16$

$\therefore a=4\ (\because a>0) \quad \therefore \alpha=4$

$a=4$를 $z=-8a+(a^2-16)i$에 대입하면

$z=-32 \quad \therefore \beta=-32$

$\therefore \alpha-\beta=36$ 　　답 36

09 $2x(1-i)-y(5+3i)=\overline{7-i}$에서

$(2x-5y)+(-2x-3y)i=7+i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x-5y=7, \ -2x-3y=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=1, \ y=-1$

$\therefore xy=-1$ 　　답 -1

10 $\dfrac{x}{3+i}+\dfrac{y}{3-i}=\dfrac{1}{1+2i}$에서

$\dfrac{x(3-i)+y(3+i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}$

$\dfrac{3(x+y)-(x-y)i}{10}=\dfrac{1-2i}{5}$

$3(x+y)-(x-y)i=2-4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x+3y=2, \ x-y=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{7}{3}, \ y=-\dfrac{5}{3}$

$\therefore x+2y=-1$ 　　답 -1

11 ① $x+y=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

② $xy=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+3}{4}=1$

③ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{1}=1$

④ $x^2y+xy^2=xy(x+y)=1\cdot1=1$

⑤ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1^2-2\cdot1=-1$

답 ⑤

12 $z=2-i$에서 $\overline{z}=2+i$이므로

$z+\overline{z}=(2-i)+(2+i)=4,$

$z\overline{z}=(2-i)(2+i)=4+1=5$

$\therefore z^2\overline{z}+z\overline{z}^2=z\overline{z}(z+\overline{z})=5\cdot4=20$ 　　답 20

13 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.

① $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$이므로 실수이다.

② $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{1}{a+bi}+\dfrac{1}{a-bi}$

$\quad=\dfrac{(a-bi)+(a+bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{2a}{a^2+b^2}$

이므로 실수이다.

③ $z=-\overline{z}$에서 $\quad a+bi=-a+bi$

$2a=0 \quad \therefore a=0$

따라서 z는 0 또는 순허수이다.

④ $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$에서

$a=0, \ b=0 \quad \therefore z=0$

⑤ $\overline{z}=a-bi$가 순허수이면 $\quad a=0, \ b\neq0$

따라서 $z=bi$이므로 z도 순허수이다.

답 ③

14 $z=\overline{z}$이고 $z\neq0$이므로 z는 0이 아닌 실수이다.

$z=(3x^2+7x+2)+(x^2-4)i$에서

$3x^2+7x+2\neq0, \ x^2-4=0$

$3x^2+7x+2\neq0$에서 $\quad (x+2)(3x+1)\neq0$

$\therefore x\neq-2, \ x\neq-\dfrac{1}{3}$ 　…… ㉠

$x^2-4=0$에서 $\quad x^2=4$

$\therefore x=\pm2$ 　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad x=2$ 　　답 2

15 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\overline{\beta}}=\dfrac{\alpha+\overline{\beta}}{\alpha\overline{\beta}}$ 　…… ㉠

$\overline{\alpha}+\beta=i$이므로 $\quad \alpha+\overline{\beta}=\overline{(\overline{\alpha}+\beta)}=\overline{i}=-i$

$\overline{\alpha}\beta=-1$이므로 $\quad \alpha\overline{\beta}=\overline{(\overline{\alpha}\beta)}=\overline{-1}=-1$

따라서 ㉠에서

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\overline{\beta}}=\dfrac{-i}{-1}=i$ 　　답 i

16 $z=\dfrac{w-2}{2w+1}=\dfrac{3-i-2}{2(3-i)+1}=\dfrac{1-i}{7-2i}$

$\therefore z\overline{z}=\dfrac{1-i}{7-2i}\cdot\overline{\left(\dfrac{1-i}{7-2i}\right)}=\dfrac{1-i}{7-2i}\cdot\dfrac{\overline{1-i}}{\overline{7-2i}}$

$\quad=\dfrac{1-i}{7-2i}\cdot\dfrac{1+i}{7+2i}$

$\quad=\dfrac{1+1}{49+4}=\dfrac{2}{53}$ 　　답 $\dfrac{2}{53}$

17 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\quad \overline{z}=a-bi$

$(2-i)z+3i\overline{z}=8-2i$에서

$(2-i)(a+bi)+3i(a-bi)=8-2i$

$2a+2bi-ai+b+3ai+3b=8-2i$

$(2a+4b)+(2a+2b)i=8-2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+4b=8, \ 2a+2b=-2$

$\therefore a+2b=4, \ a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-6, \ b=5$

$\therefore z=-6+5i$ 　　답 ②

18 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 조건 (가)에서

$(1+i)+z=(1+i)+(a+bi)=(a+1)+(b+1)i$

이 복소수가 음의 실수이므로

$a+1<0, \ b+1=0 \quad \therefore a<-1, \ b=-1$

Q BOX

$\overline{z}=a-bi$이므로

$-\overline{z}=-a+bi$

$b=0$이면 z는 0이고 $b\neq0$이면 z는 순허수이다.

$\begin{cases} 3x+3y=2 & \cdots ㉠ \\ x-y=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡×3을 하면

$6x=14 \quad \therefore x=\dfrac{7}{3}$

$x=\dfrac{7}{3}$을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{7}{3}-y=4$

$\therefore y=-\dfrac{5}{3}$

복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라 할 때

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(단, $z_2\neq0$)

$a+2b=4, \ a+b=-1$을 변끼리 빼면

$b=5$

$b=5$를 $a+b=-1$에 대입하면

$a+5=-1$

$\therefore a=-6$

조건 (나)에서

$z\bar{z}=(a-i)(a+i)=5$, $\quad a^2+1=5$

$a^2=4 \quad \therefore a=-2\ (\because a<-1)$

따라서 $z=-2-i$이므로

$z+\bar{z}=(-2-i)+(-2+i)=-4$ 답 -4

19 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{49}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{50}=-1$, $i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{47}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{48}=1$ 이므로

$$\begin{aligned} & i-2i^2+3i^3-4i^4+\cdots+49i^{49}-50i^{50} \\ &=(i+2-3i-4)+(5i+6-7i-8)+\cdots+(49i+50) \\ &=(-2-2i)+(-2-2i)+\cdots+(-2-2i) \\ &\quad +(49i+50) \\ &=12(-2-2i)+(49i+50) \\ &=26+25i \end{aligned}$$

따라서 $26+25i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $\quad a=26$, $b=25$

$\therefore a-b=1$ 답 1

20 $i=i^5=i^9=\cdots$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=-1$, $i^3=i^7=i^{11}=\cdots=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=1$이므로

$$\begin{aligned} & 1+i+i^2+i^3+\cdots \\ &=(1+i-1-i)+(1+i-1-i)+\cdots \end{aligned}$$

따라서 $f(k)=0$이 되려면 k는 4로 나누었을 때의 나머지가 3이어야 한다.

$f(3)=0$, $f(7)=0$, $f(11)=0$, $\cdots$

이때 k는 50 이하의 자연수이므로 3, 7, 11, $\cdots$, 47의 12개이다. 답 12

21 $z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$$\begin{aligned} & z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1 \\ & \therefore z^2-z^3+z^4-\cdots+z^{10} \\ &=(z^2-z^3+z^4-z^5)+z^4(z^2-z^3+z^4-z^5)+z^{10} \\ &=(z^2-z^3+z^4-z^5)-(z^2-z^3+z^4-z^5)+z^{10} \\ &=z^{10}=(z^2)^5=(-i)^5=-i \end{aligned}$$

답 $-i$

다른 풀이 $z^2=-i$이므로

$$\begin{aligned} & z^2+z^4+z^6+z^8=-i-1+i+1=0 \\ & \therefore z^2-z^3+z^4-\cdots+z^{10} \\ &=(z^2+z^4+z^6+z^8)-z(z^2+z^4+z^6+z^8)+z^{10} \\ &=z^{10}=-i \end{aligned}$$

22 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$,

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{40}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{40} &=(-i)^{40}+i^{40} \\ &=2i^{40}=2\cdot(i^4)^{10} \\ &=2 \end{aligned}$$

답 ⑤

Lecture 07 음수의 제곱근

39쪽

01 $\sqrt{-4}=\sqrt{4}i=2i$ 답 $2i$

02 $\sqrt{-20}=\sqrt{20}i=2\sqrt{5}i$ 답 $2\sqrt{5}i$

03 $-\sqrt{-\frac{1}{81}}=-\sqrt{\frac{1}{81}}i=-\frac{1}{9}i$ 답 $-\frac{1}{9}i$

04 $\sqrt{-2}+\sqrt{-8}=\sqrt{2}i+\sqrt{8}i$
$=\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i=3\sqrt{2}i$ 답 $3\sqrt{2}i$

05 $\sqrt{-16}-\sqrt{-\frac{9}{4}}=\sqrt{16}i-\sqrt{\frac{9}{4}}i$
$=4i-\frac{3}{2}i=\frac{5}{2}i$ 답 $\frac{5}{2}i$

06 $\sqrt{-12}+\sqrt{-27}-\sqrt{-\frac{18}{6}}$

$$\begin{aligned} &=\sqrt{12}i+\sqrt{27}i-\sqrt{\frac{18}{6}}i \\ &=2\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i \\ &=4\sqrt{3}i \end{aligned}$$

답 $4\sqrt{3}i$

07 $\sqrt{-4}\sqrt{6}=\sqrt{4}i\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}i$ 답 $2\sqrt{6}i$

08 $\sqrt{-3}\sqrt{-12}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{12}i=\sqrt{36}i^2=-6$ 답 -6

09 $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{-6}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}i}=\frac{\sqrt{30}i}{\sqrt{6}i^2}=-\sqrt{5}i$ 답 $-\sqrt{5}i$

10 $\frac{\sqrt{-24}}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{24}i}{\sqrt{3}i}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

11 (1) $a\neq0$, $b\neq0$이므로 $\quad a<0$, $b<0$

(2) $|b|+\sqrt{(a+b)^2}=-b-(a+b)$
$=-a-2b$

$|x|=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

답 (1) $a<0$, $b<0$ (2) $-a-2b$

표준+발전 유형 Q+Q

40쪽

01 ① $\sqrt{-2}\sqrt{5}=\sqrt{-10}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{-\frac{2}{5}}$

④ $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{5}}=\sqrt{-\frac{2}{5}}$ 답 ②

① $a<0$, $b<0$ 이외의 경우에는
$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
② $a>0$, $b<0$ 이외의 경우에는
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$
(단, $b\neq0$)

02 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\sqrt{-5}\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-5}}+\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{-3}}$

$=-\sqrt{16}+\sqrt{-25}+\sqrt{4}-\sqrt{-16}$

$=-4+5i+2-4i$

$=-2+i$

따라서 $-2+i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-2,\ b=1$

$\therefore ab=-2$ 답 -2

03 $a>1$일 때,

$1-a<0,\ a>0,\ a-1>0,\ -a<0$

이므로

$\sqrt{1-a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{a-1}\times\sqrt{-a}$

$=\sqrt{a-1}i\times\sqrt{a}\times\sqrt{a-1}\times\sqrt{a}i$

$=(\sqrt{a-1})^2\times(\sqrt{a})^2\times i^2$

$=(a-1)\cdot a\cdot(-1)=-a^2+a$ 답 ①

$a>1$일 때, $-a<-1$ 이므로 $-a<0$

04 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$에서 $a>0,\ b<0$

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

③ $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

④ $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=-b\sqrt{a}$

⑤ $\sqrt{-a}\sqrt{b}=-\sqrt{-ab}$ 답 ④

$\sqrt{a^2}=|a|=a$

$\sqrt{b^2}=|b|=-b$

05 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0,\ b<0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$에서 $b<0,\ c>0$

$\therefore \sqrt{b^2}+\sqrt{c^2}-|a-c|=-b+c+(a-c)$

$=a-b$ 답 ②

$a<0,\ c>0$이므로 $a-c<0$

쌤 한마디

$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x\ (x\ge 0) & \sqrt{(\text{양수})^2}=(\text{양수}),\ \sqrt{0^2}=0 \\ -x\ (x<0) & \sqrt{(\text{음수})^2}=-(\text{음수}) \end{cases}$

중단원 마무리

41쪽

01 전략 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 주어진 식을 계산한다.

풀이 $2+5i-4(1+i)-\dfrac{1+3i}{3-i}$

$=2+5i-4-4i-\dfrac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$=-2+i-\dfrac{3+i+9i-3}{9+1}$

$=-2$ 답 ③

02 전략 주어진 등식을 우변에 순허수만 남도록 변형한 후 양변을 제곱하여 x에 대한 이차방정식을 만든다.

풀이 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}i}{2}$에서 $2x+1=\sqrt{5}i$

양변을 제곱하면 $4x^2+4x+1=-5$

$4x^2+4x+6=0$ $\therefore 2x^2+2x+3=0$

$\therefore 2x^3-4x^2+x-4$

$=x(2x^2+2x+3)-6x^2-2x-4$

$=-6x^2-2x-4$

$=-3(2x^2+2x+3)+4x+5$

$=4x+5$

$=4\cdot\dfrac{-1+\sqrt{5}i}{2}+5$

$=3+2\sqrt{5}i$ 답 ⑤

03 전략 복소수 z가 순허수이려면 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 함을 이용한다.

풀이 $z=(1+i)x^2-(7+6i)x+12+8i$

$=(x^2-7x+12)+(x^2-6x+8)i$

z가 순허수가 되려면

$x^2-7x+12=0,\ x^2-6x+8\neq 0$

$x^2-7x+12=0$에서 $(x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=4$ …… ㉠

$x^2-6x+8\neq 0$에서 $(x-2)(x-4)\neq 0$

$\therefore x\neq 2,\ x\neq 4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=3$

$x=3$을 $z=(x^2-7x+12)+(x^2-6x+8)i$에 대입하면

$z=-i$ 답 $x=3,\ z=-i$

04 전략 $a+bi=c+di$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 실수)이면 $a=c$, $b=d$임을 이용한다.

풀이 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$|x-y|=3,\ x-1=-2$

$x-1=-2$에서 $x=-1$

이때 $xy<0$에서 $y>0$

따라서 $|x-y|=|-1-y|=1+y$이므로

$1+y=3$ $\therefore y=2$

$\therefore x+y=1$ 답 ④

$y>0$이므로 $-1-y<0$

$\therefore |-1-y|$

$=-(-1-y)$

$=1+y$

05 전략 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{20}$ 중에서 $-1,\ i,\ 1-i$의 개수를 각각 $x,\ y,\ z$라 하고 식을 세운다.

풀이 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{20}$ 중에서 $-1,\ i,\ 1-i$의 개수를 각각 $x,\ y,\ z$라 하면

$x+y+z=20$ …… ㉠

$(-1)^2=1,\ i^2=-1,\ (1-i)^2=-2i$이므로

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{20}^2$

$=1\cdot x+(-1)\cdot y+(-2i)\cdot z$

$=x-y-2zi$

$x-y-2zi=3-6i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-y=3$ ...... ㉡

$-2z=-6$, 즉 $z=3$

$z=3$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x+y=17$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=10$, $y=7$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$

$=(-1)\cdot 10+i\cdot 7+(1-i)\cdot 3$

$=-7+4i$

따라서 실수부분은 -7, 허수부분은 4이므로 구하는 합은

$-7+4=-3$

답 ②

06 전략 먼저 복소수 z를 $a+bi$ (a, b는 실수) 꼴로 정리한다.

풀이 $z=\dfrac{5}{1+2i}=\dfrac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=1-2i$ ···➊

$\therefore 1+\bar{z}+z\bar{z}=1+(1+2i)+(1-2i)(1+2i)$

$=1+1+2i+1+4$

$=7+2i$ ···➋

답 $7+2i$

단계	채점 기준	비율
➊	z를 간단히 할 수 있다.	40 %
➋	$1+\bar{z}+z\bar{z}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

Q BOX

$z=1-2i$이므로
$\bar{z}=1+2i$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 할 때, $z=\bar{z}$이면
$a+bi=a-bi$
$\therefore b=0$ $\therefore z=a$
이것은 z가 허수라는 조건을 만족시키지 않으므로
$z\neq\bar{z}$

07 전략 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하고 복소수의 연산과 켤레복소수의 성질을 이용한다.

풀이 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하면

$\overline{z_1}=a-bi$, $\overline{z_2}=c-di$

① $z_1\overline{z_1}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$에서

$a=0$, $b=0$ $\therefore z_1=0$

② $z_1=\overline{z_2}$이면 $a+bi=c-di$에서 $a=c$, $b=-d$이므로

$z_2=c+di=a-bi=\overline{z_1}$

③ $z_1=\overline{z_2}$이면 $a+bi=c-di$에서 $a=c$, $b=-d$이므로

$z_1z_2=(c-di)(c+di)=c^2+d^2$

따라서 z_1z_2는 실수이다.

④ $z_1+z_2=0$이면

$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}=\bar{0}=0$

⑤ $z_1\overline{z_2}=1$이면 $\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_1}$

$\overline{z_1}z_2=\overline{(z_1\overline{z_2})}=\bar{1}=1$에서 $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_2}$

$\therefore \overline{z_1}+\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{z_2}+\overline{z_2}=\overline{z_2}+\dfrac{1}{z_2}$

답 ④

$z_1=\overline{z_2}$에서
$\overline{z_1}=\overline{(\overline{z_2})}=z_2$
임을 이용할 수도 있다.

$z_1=\overline{z_2}$이므로
$z_1z_2=\overline{z_2}z_2$
$=$(실수)
임을 이용할 수도 있다.

08 전략 z^2-z가 실수임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 ㄱ. z^2-z가 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다.

ㄴ. $z^2-z=(a+bi)^2-(a+bi)$

$=a^2+2abi-b^2-a-bi$

$=(a^2-a-b^2)+(2a-1)bi$

이때 z^2-z가 실수이고 $b\neq 0$이므로

$2a-1=0$ $\therefore a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore z+\bar{z}=2a=1$

ㄷ. $z\bar{z}=\left(\dfrac{1}{2}+bi\right)\left(\dfrac{1}{2}-bi\right)=\dfrac{1}{4}+b^2$

이때 b는 0이 아닌 실수이므로

$\dfrac{1}{4}+b^2>\dfrac{1}{4}$ $\therefore z\bar{z}>\dfrac{1}{4}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

09 전략 복소수 w가 실수이면 $w=\bar{w}$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{1}{1+z^2}$이 실수이므로 $\dfrac{1}{1+z^2}=\overline{\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)}$

$\dfrac{1}{1+z^2}=\dfrac{1}{1+\overline{z^2}}$, $1+z^2=\overline{1+z^2}$

$1+z^2=1+\bar{z}^2$, $z^2-\bar{z}^2=0$

$(z+\bar{z})(z-\bar{z})=0$

이때 z는 허수이므로 $z\neq\bar{z}$

$\therefore z+\bar{z}=0$

답 ②

10 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 주어진 등식에서 a, b 사이의 관계식을 구한 후 $z\bar{z}$의 값을 구한다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $z^2=3+8i$에서

$(a+bi)^2=3+8i$

$a^2-b^2+2abi=3+8i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=3$, $ab=4$

$\therefore z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

$=\sqrt{(a^2+b^2)^2}=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}$

$=\sqrt{3^2+4\cdot 4^2}=\sqrt{73}$

답 $\sqrt{73}$

11 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 주어진 등식에서 a, b 사이의 관계식을 구한 후 이를 이용하여 z를 찾는다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$\dfrac{\bar{z}}{1-i}+\dfrac{z}{1+i}$

$=\dfrac{a-bi}{1-i}+\dfrac{a+bi}{1+i}$

$=\dfrac{(a-bi)(1+i)+(a+bi)(1-i)}{(1-i)(1+i)}$

$=\dfrac{a+ai-bi+b+a-ai+bi+b}{1+1}$

$=a+b$

즉 $a+b=-1$이므로 이를 만족시키는 복소수는 ④이다.

답 ④

① $-2+3=1$
② $-1+2=1$
③ $1+1=2$
④ $2-3=-1$
⑤ $3+2=5$

12 전략 복소수의 덧셈에서 교환법칙, 결합법칙이 성립함을 이용하여 식을 정리한다.

풀이 $i=i^5=\cdots=i^{21}$, $i^2=i^6=\cdots=i^{22}=-1$,

$i^3=i^7=\cdots=i^{23}=-i$, $i^4=i^8=\cdots=i^{20}=1$이므로

$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{22}+i^{23})$
$=(i+i^2+i^3+\cdots+i^{22})+(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{23})$
$=(i^{21}+i^{22})+(i^{22}+i^{23})$
$=(i-1)+(-1-i)$
$=-2$

따라서 $-2=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-2,\ b=0$

$\therefore\ a^2+b^2=4$ 답 4

다른 풀이 $i+i^{23}=i+(-i)=0$이므로

$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{22}+i^{23})$
$=i+\{(i^2+i^2)+(i^3+i^3)+(i^4+i^4)+\cdots+(i^{22}+i^{22})\}$
$\quad+i^{23}$
$=2(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{22})$
$=2i^{22}=2i^2$
$=-2$

따라서 $a=-2,\ b=0$이므로

$a^2+b^2=4$

QBOX

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{22}$
$=(i+i^2+i^3+i^4)$
$\quad+\cdots$
$\quad+(i^{17}+i^{18}+i^{19}+i^{20})$
$\quad+i^{21}+i^{22}$
$=i^{21}+i^{22}$
이므로
$i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{23}$
$=i(i+i^2+\cdots+i^{22})$
$=i(i^{21}+i^{22})$
$=i^{22}+i^{23}$

13 전략 $\dfrac{1-i}{1+i}$를 간단히 한 후 i^n(n은 자연수)의 값은 i, -1, $-i$, 1이 이 순서대로 반복되어 나타남을 이용한다.

풀이 $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로

$i-\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2013}=i-(-i)^{2013}$
$\qquad\qquad\quad=i+i=2i$

$(-i)^{2013}=-i^{2013}$
$\qquad=-(i^4)^{503}\cdot i$
$\qquad=-i$

따라서 $2i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=0,\ b=2\qquad\therefore\ a+b=2$ 답 ②

14 전략 $a<0,\ b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이고, $a>0$, $b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$임을 이용하여 계산한다.

풀이 $\sqrt{3}\sqrt{-27}+\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{-7}}-\sqrt{-4}\sqrt{-9}$
$=\sqrt{-81}-\sqrt{\dfrac{28}{-7}}+\sqrt{36}$
$=9i-2i+6$
$=6+7i$ ··· ❶

따라서 $6+7i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=6,\ b=7$ ··· ❷

$\therefore\ a-b=-1$ ··· ❸

답 -1

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	$a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

15 전략 $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 정리한 후 식의 값을 구한다.

풀이 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}$은 모두 양수이므로

$\sqrt{-a_1}\sqrt{-a_2}\sqrt{-a_3}\cdots\sqrt{-a_{10}}$
$=\sqrt{a_1}i\cdot\sqrt{a_2}i\cdot\sqrt{a_3}i\cdot\cdots\cdot\sqrt{a_{10}}i$
$=\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}\cdots\sqrt{a_{10}}i^{10}$
$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}(i^4)^2\cdot i^2$
$=\sqrt{25}\cdot(-1)$
$=-5$ 답 ②

16 전략 X, Y가 실수일 때, $|X|+|Y|=0$이면 $X=0$, $Y=0$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서

$a>0,\ b<0$

조건 (나)에서

$b+c=0,\ a-c-1=0$

$\therefore\ c=-b,\ a=c+1\qquad\therefore\ 0<c<a$

$\therefore\ b<c<a$ 답 ④

$b<0$이고 $c=-b$이므로
$c>0$
$a=c+1$이므로 $a>c$

17 전략 $\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$와 $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$의 거듭제곱을 차례대로 구한다.

풀이 $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$라 하면

$z_1^{\,2}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\dfrac{2}{2i}=-i$
$z_1^{\,4}=(z_1^{\,2})^2=(-i)^2=-1$
$z_1^{\,8}=(z_1^{\,4})^2=(-1)^2=1$

$z_2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$라 하면

$z_2^{\,2}=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$
$z_2^{\,3}=z_2^{\,2}z_2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{4i}{4}=i$
$z_2^{\,6}=(z_2^{\,3})^2=i^2=-1$
$z_2^{\,12}=(z_2^{\,6})^2=(-1)^2=1$

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n+\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=2$를 만족시키려면

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=1$을 동시에 만족시키는 자연수 n을 찾아야 한다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 8, 12의 최소공배수인 24이다. 답 24

18 전략 주어진 수들의 곱이 -32인 경우를 나누어 n의 값을 구한다.

풀이 주사위를 던져서 0, 3, 5가 적어도 한 번 나오면 나온 수들의 곱이 -32가 될 수 없다.

$(1+i)^2=2i$이고 $(2i)^2=-4$이므로 주사위에 적힌 수들의 곱이 -32가 되는 경우는 다음과 같다.

$-32=8\cdot(-4)$

(i) $-32=2^3\cdot(2i)^2$인 경우

2가 3번, $2i$가 2번 나오면 되므로

$n=5$

(ii) $-32=2^3\cdot(1+i)^2\cdot 2i$인 경우

2가 3번, $1+i$가 2번, $2i$가 1번 나오면 되므로

$n=6$

(iii) $-32=2^3\cdot(1+i)^4$인 경우

2가 3번, $1+i$가 4번 나오면 되므로

$n=7$

이상에서 가능한 n의 값은 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$5+6+7=18$ 답 18

04 이차방정식

Lecture 08 이차방정식의 근과 판별식 44쪽

01 $x^2-9x+18=0$에서 $(x-3)(x-6)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=6$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

답 $x=3$ 또는 $x=6$, 실근

02 $x^2+16=0$에서 $x^2=-16$

$\therefore x=\pm 4i$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 $x=\pm 4i$, 허근

03 $x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

답 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$, 실근

04 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-3\cdot 2}}{3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}i}{3}$

x의 계수가 짝수인 이차방정식

$ax^2+2b'x+c=0$

의 근은

$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}i}{3}$, 허근

05 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\cdot 1\cdot 3=13>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 서로 다른 두 실근

06 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-4\cdot 1=0$

따라서 중근을 갖는다. 답 중근

$4x^2-4x+1=0$에서

$(2x-1)^2=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$

쌤한마디

$D=(-4)^2-4\cdot 4\cdot 1=0$임을 이용해도 되지만 $\dfrac{D}{4}$를 이용하면 계산이 더 간단하다.

07 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

x^2의 계수와 상수항의 부호가 다르므로 서로 다른 두 실근을 가짐을 알 수 있다.

$\dfrac{D}{4}=1^2-2\cdot(-1)=3>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 서로 다른 두 실근

08 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot5=-2<0$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 서로 다른 두 허근

09 이차방정식 $2x^2-3x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot k=9-8k$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$D=9-8k>0 \quad \therefore k<\frac{9}{8}$ 답 $k<\frac{9}{8}$

10 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$D=9-8k=0 \quad \therefore k=\frac{9}{8}$ 답 $\frac{9}{8}$

11 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=9-8k<0 \quad \therefore k>\frac{9}{8}$ 답 $k>\frac{9}{8}$

표준+발전 유형 Q+Q

45쪽

01 $x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot5}=-2\pm i$

따라서 $a=-2$, $b=1$이므로

$ab=-2$ 답 ②

02 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{5}+2$를 곱하면

$(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)x^2+2(\sqrt{5}+2)(3-\sqrt{5})x$

$+\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)=0$

$x^2+(2+2\sqrt{5})x+\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)=0$

$(x+\sqrt{5}+2)(x+\sqrt{5})=0$

$\therefore x=-\sqrt{5}-2$ 또는 $x=-\sqrt{5}$

답 $x=-\sqrt{5}-2$ 또는 $x=-\sqrt{5}$

03 이차방정식 $x^2+kx-k-1=0$의 한 근이 -4이므로 $\quad (-4)^2+k\cdot(-4)-k-1=0$

$-5k+15=0 \quad \therefore k=3$

$k=3$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+3x-4=0, \quad (x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 1이다. 답 ③

04 방정식 $(k-2)x^2-ax+(k+5)b=0$의 한 근이 1이므로

$(k-2)\cdot1^2-a\cdot1+(k+5)b=0$

$(1+b)k-2-a+5b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1+b=0, \ -2-a+5b=0$

따라서 $a=-7$, $b=-1$이므로

$b-a=6$ 답 ②

Q BOX

절댓값 기호를 포함한 방정식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 푼다.

$3<\sqrt{10}<4$이므로 $1<-2+\sqrt{10}<2$

x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 x^2의 계수를 유리화한 후 푼다.

$[x]=n$ (n은 정수)일 때, $n\le x<n+1$

쌤 한마디

다음은 모두 k에 대한 항등식을 나타낸다.
① k의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
② 모든 k에 대하여 성립하는 등식
③ 임의의 k에 대하여 성립하는 등식

05 $x^2+|4x-3|=3$에서

(i) $x<\frac{3}{4}$일 때, $\quad x^2-(4x-3)=3$

$x^2-4x=0, \quad x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

그런데 $x<\frac{3}{4}$이므로 $\quad x=0$

(ii) $x\ge\frac{3}{4}$일 때, $\quad x^2+(4x-3)=3$

$x^2+4x-6=0 \quad \therefore x=-2\pm\sqrt{10}$

그런데 $x\ge\frac{3}{4}$이므로

$x=-2+\sqrt{10}$

(i), (ii)에서 구하는 합은 $-2+\sqrt{10}$이다.

답 $-2+\sqrt{10}$

06 $|3x^2-(2a+3)x+2a-1|=1$의 한 근이 a이므로

$|3a^2-(2a+3)a+2a-1|=1$

$|a^2-a-1|=1$

$\therefore a^2-a-1=\pm1$

(i) $a^2-a-1=1$일 때, $\quad a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(ii) $a^2-a-1=-1$일 때, $\quad a^2-a=0$

$a(a-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 구하는 합은

$-1+2+0+1=2$ 답 2

07 $3[x]^2+5[x]-2=0$에서

$([x]+2)(3[x]-1)=0$

$\therefore [x]=-2$ 또는 $[x]=\frac{1}{3}$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $\quad [x]=-2$

$\therefore -2\le x<-1$ 답 $-2\le x<-1$

08 $[x]^2+2[x]-8=0$에서

$([x]+4)([x]-2)=0$

$\therefore [x]=-4$ 또는 $[x]=2$

$[x]=-4$에서 $\quad -4\le x<-3$

$[x]=2$에서 $\quad 2\le x<3$

$\therefore -4\le x<-3$ 또는 $2\le x<3$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

09 처음 토지의 한 변의 길이를 x m라 하면 길을 제외한 토지의 넓이는 가로의 길이가 $(x-5)$m, 세로의 길이가 $(x-4)$m인 직사각형의 넓이와 같으므로

$$(x-4)(x-5)=\frac{3}{5}x^2$$

$$2x^2-45x+100=0$$

$$(2x-5)(x-20)=0$$

$$\therefore x=\frac{5}{2} \text{ 또는 } x=20$$

그런데 $x>5$이므로 $\quad x=20$

따라서 처음 토지의 한 변의 길이는 20 m이므로 그 넓이는 400 m^2이다. 답 400 m^2

> Q BOX: 길을 제외한 토지의 넓이는 처음 토지의 넓이인 $x^2\text{m}^2$의 $\frac{3}{5}$이다.

10 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 x cm라 하면

$\overline{A'B}=x+3\text{(cm)}$, $\overline{A'C}=x+6\text{(cm)}$

$\triangle A'BC$는 직각삼각형이므로

$$(x+6)^2=x^2+(x+3)^2$$

$$x^2-6x-27=0$$

$$(x+3)(x-9)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=9$$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=9$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 9 cm이다.

답 ④

> 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고 빗변의 길이를 c라 하면 $a^2+b^2=c^2$

11 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-7=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-7)>0$$

$$2k+8>0 \qquad \therefore k>-4$$

따라서 가장 작은 정수 k의 값은 -3이다. 답 ②

12 이차방정식 $3x^2-4x-(k-2)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-2)^2+3(k-2)<0$$

$$3k-2<0 \qquad \therefore k<\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2-(k+1)x+k+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=\{-(k+1)\}^2-4(k+9)=0$$

$$k^2-2k-35=0, \qquad (k+5)(k-7)=0$$

$$\therefore k=-5 \text{ 또는 } k=7 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad k=-5$ 답 -5

13 이차방정식 $ax^2-bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=b^2-4ac$$

$c=b-a$를 위의 식에 대입하면

$$D=b^2-4a(b-a)=(b-2a)^2\geq0$$

따라서 이차방정식 $ax^2-bx+c=0$은 실근을 갖는다.

답 ①

14 이차방정식 $x^2-2ax+b^2+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-(b^2+3)=0$$

$$\therefore a^2=b^2+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2+4ax+4b+7=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(2a)^2-(4b+7)$$

$$=4(b^2+3)-(4b+7) \ (\because ㉠)$$

$$=4b^2-4b+5$$

$$=4\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+4>0$$

> $4b^2-4b+5$
> $=4(b^2-b)+5$
> $=4\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+4$

따라서 이차방정식 $x^2+4ax+4b+7=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

15 이차방정식 $x^2+2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

양변에 2를 곱하면

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

a, b, c가 실수이므로

$$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$$

$$\therefore a=b=c$$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다. 답 ⑤

16 이차방정식 $(a+b)x^2+2cx+a-b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)<0$$

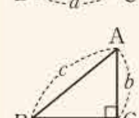
$$c^2-(a^2-b^2)<0 \qquad \therefore a^2>b^2+c^2$$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 둔각삼각형이다. 답 둔각삼각형

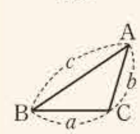
쌤 한마디

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$이고 c가 가장 긴 변의 길이일 때,

$a^2+b^2>c^2$ ➡ $\triangle ABC$는 예각삼각형



$a^2+b^2=c^2$ ➡ $\triangle ABC$는 직각삼각형



$a^2+b^2<c^2$ ➡ $\triangle ABC$는 둔각삼각형

17 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-6k+8=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-6k+8)=0$$

$8k-7=0 \qquad \therefore k=\frac{7}{8}$ 　　답 $\frac{7}{8}$

18 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2-(ak-c)x+k^2+b+2=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(ak-c)\}^2-4(k^2+b+2)=0$

$a^2k^2-2ack+c^2-4k^2-4b-8=0$

$(a^2-4)k^2-2ack+c^2-4b-8=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a^2-4=0,\ 2ac=0,\ c^2-4b-8=0$

$\therefore a^2=4,\ b=-2,\ c=0$

$\therefore a^2+b^2+c^2=8$ 　　답 8

$Ak^2+Bk+C=0$이 k에 대한 항등식

➡ $A=0,\ B=0,\ C=0$

Lecture 09 이차방정식의 근과 계수의 관계 　48쪽

01 이차방정식 $2x^2-4x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-4}{2}=2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha+\beta+\alpha\beta=2+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ 　　답 $\frac{3}{2}$

02 $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=-\frac{1}{2}-2+1=-\frac{3}{2}$ 　　답 $-\frac{3}{2}$

03 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=5$ 　　답 5

04 $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=5\div\left(-\frac{1}{2}\right)=-10$

답 -10

05 $x^2-(-3+1)x+(-3)\cdot 1=0$

$\therefore x^2+2x-3=0$ 　　답 $x^2+2x-3=0$

06 $x^2-\{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\}x+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^2-2x-2=0$ 　　답 $x^2-2x-2=0$

07 $x^2-\{(2+i)+(2-i)\}x+(2+i)(2-i)=0$

$\therefore x^2-4x+5=0$ 　　답 $x^2-4x+5=0$

$(2+i)(2-i)$
$=4-i^2$
$=4-(-1)$
$=5$

08 $x^2+25=0$에서 $\quad x^2=-25 \quad \therefore x=\pm 5i$

$\therefore x^2+25=(x+5i)(x-5i)$

답 $(x+5i)(x-5i)$

09 $x^2+2x+3=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot 3}=-1\pm\sqrt{2}i$

$\therefore x^2+2x+3=(x+1+\sqrt{2}i)(x+1-\sqrt{2}i)$

답 $(x+1+\sqrt{2}i)(x+1-\sqrt{2}i)$

10 $3x^2+5x-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 3\cdot(-1)}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{37}}{6}$$

$$\therefore 3x^2+5x-1=3\left(x+\frac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{37}}{6}\right)$$

답 $3\left(x+\frac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{37}}{6}\right)$

11 $a,\ b$가 유리수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $-1+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{5}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+\sqrt{5})+(-1-\sqrt{5})=-a,$

$(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})=b$

$\therefore a=2,\ b=-4$ 　　답 $a=2,\ b=-4$

12 $a,\ b$가 실수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $2-3i$이므로 다른 한 근은 $2+3i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-3i)+(2+3i)=-a,$

$(2-3i)(2+3i)=b$

$\therefore a=-4,\ b=13$ 　　답 $a=-4,\ b=13$

표준+발전 유형 Q+Q 　49쪽

01 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}$$

$=3(\alpha-\beta)\div\frac{1}{2}$

$=6(\alpha-\beta)$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\cdot\frac{1}{2}=7$이므로

$\alpha-\beta=\sqrt{7}\ (\because \alpha>\beta)$

따라서 구하는 식의 값은

$6(\alpha-\beta)=6\sqrt{7}$ 　　답 $6\sqrt{7}$

02 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=4$

① $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{4}$

② $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=4+3+1=8$

③ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\cdot 4=-7$

④ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\cdot 4\cdot 3=-9$

⑤ $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta=3^2-3\cdot 4=-3$

답 ③

03 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2-(4a-3)\alpha+1=0,\ \beta^2-(4a-3)\beta+1=0$$

$$\therefore \alpha^2-4a\alpha+1=-3\alpha,\ \beta^2-4a\beta+1=-3\beta$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=1$이므로

$$\begin{aligned}(\alpha^2-4a\alpha+1)(\beta^2-4a\beta+1)&=(-3\alpha)\cdot(-3\beta)\\&=9\alpha\beta\\&=9\cdot1=9\end{aligned}$$

답 9

04 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2+\alpha-5=0,\ \beta^2+\beta-5=0$$

$$\therefore \alpha^2+2\alpha-5=\alpha,\ \beta^2+2\beta-5=\beta$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-5$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{\beta}{\alpha^2+2\alpha-5}+\frac{\alpha}{\beta^2+2\beta-5}\\&=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\\&=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\\&=\frac{(-1)^2-2\cdot(-5)}{-5}\\&=-\frac{11}{5}\end{aligned}$$

답 $-\frac{11}{5}$

05 주어진 이차방정식의 두 근을 α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 비가 $m:n$이면 두 근을 $m\alpha$, $n\alpha$ $(\alpha\neq0)$로 놓는다.

$$\alpha+3\alpha=-2(m+1)$$

$$\therefore \alpha=\frac{-m-1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha\cdot3\alpha=4m \quad \therefore 3\alpha^2=4m \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$3\left(\frac{-m-1}{2}\right)^2=4m,\quad 3m^2-10m+3=0$$

$$(3m-1)(m-3)=0 \quad \therefore m=\frac{1}{3}\ 또는\ m=3$$

따라서 정수 m의 값은 3이다.

답 3

06 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

두 근을 $\alpha-4$, α로 놓을 수도 있다.

$$\alpha+(\alpha+4)=k \quad \therefore \alpha=\frac{k-4}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha(\alpha+4)=k+4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{k-4}{2}\cdot\frac{k+4}{2}=k+4,\quad k^2-4k-32=0$$

$$(k+4)(k-8)=0$$

$$\therefore k=-4\ 또는\ k=8$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다.

답 4

다른 풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β $(\alpha>\beta)$라 하면 $\quad \alpha-\beta=4$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=k,\ \alpha\beta=k+4$$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$$4^2=k^2-4(k+4),\quad k^2-4k-32=0$$

$$(k+4)(k-8)=0 \quad \therefore k=-4\ 또는\ k=8$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다.

07 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-k+2,\ \alpha\beta=-k+1$$

그런데 $\alpha+\beta<0$이므로

$$-k+2<0 \quad \therefore k>2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(-k+2)^2-2(-k+1)\\&=k^2-2k+2\end{aligned}$$

이므로 $\alpha^2+\beta^2=10$에서

$$k^2-2k+2=10,\quad k^2-2k-8=0$$

$$(k+2)(k-4)=0$$

$$\therefore k=-2\ 또는\ k=4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad k=4$

답 ④

08 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$$

$(\alpha-1)(\beta-1)=9$에서

$$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=9,\quad b+a+1=9$$

$$\therefore a+b=8 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$(2\alpha+1)(2\beta+1)=15$에서

$$4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1=15,\quad 4b-2a+1=15$$

$$\therefore a-2b=-7 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=5$

㉠－㉡을 하면
$3b=15 \quad \therefore b=5$
$b=5$를 ㉠에 대입하면
$a+5=8 \quad \therefore a=3$

$$\therefore b-a=2$$

답 2

09 이차방정식 $x^2-3ax-6=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3a,\ \alpha\beta=-6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2+bx-9=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b,\ (\alpha+\beta)\alpha\beta=-9 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$3a-6=-b,\ -18a=-9$$

$$\therefore a=\frac{1}{2},\ b=\frac{9}{2}$$

$$\therefore a+b=5$$

답 ⑤

10 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2-(b+5)x+2a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=b+5,\ (\alpha+1)(\beta+1)=2a$$

$$\therefore \alpha+\beta=b+3,\ \alpha\beta+\alpha+\beta+1=2a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a=b+3,\ b-a+1=2a$

$\therefore\ a+b=-3,\ 3a-b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2}$

$\therefore\ a-b=2$ 답 ⑤

11 이차방정식 $x^2+7x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-7,\ \alpha\beta=-4$

$\therefore\ (\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=-7-2=-9,$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=-4+7+1=4$

따라서 $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+9x+4=0$ 답 ⑤

다른 풀이 $P(x)=x^2+7x-4$라 하면 방정식 $P(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$P(\alpha)=0,\ P(\beta)=0$

$\alpha-1=\alpha'$, $\beta-1=\beta'$이라 하면 $\alpha=\alpha'+1$, $\beta=\beta'+1$이므로

$P(\alpha'+1)=0,\ P(\beta'+1)=0$

즉 α', β'은 이차방정식 $P(x+1)=0$의 두 근이고

$P(x+1)=(x+1)^2+7(x+1)-4$

$=x^2+9x+4$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2+9x+4=0$

12 이차방정식 $ax^2-bx-c=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{b}{a},\ \alpha\beta=-\frac{c}{a}$

$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{c},\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=-\frac{a}{c}$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 c인 이차방정식은

$c\left(x^2+\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}\right)=0$

$\therefore\ cx^2+bx-a=0$ 답 ④

13 지호는 a, c를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{c}{a}=-4\cdot 2=-8 \quad \therefore\ c=-8a$ ······ ㉠

서연이는 a, b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{b}{a}=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$

$\therefore\ b=-2a$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-2ax-8a=0$

$a\neq 0$이므로 양변을 a로 나누면

$x^2-2x-8=0,\quad (x+2)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 음수인 근은 -2이다. 답 -2

14 태리와 소진이가 푼 이차방정식을 $2x^2+ax+b=0$ (a, b는 상수)이라 하자.

태리는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{b}{2}=-\frac{5}{2} \quad \therefore\ b=-5$

소진이는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{a}{2}=\frac{3}{2} \quad \therefore\ a=-3$

따라서 원래의 이차방정식은

$2x^2-3x-5=0$ 답 $2x^2-3x-5=0$

15 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x-2)=0$이려면

$3x-2=\alpha$ 또는 $3x-2=\beta$

$\therefore\ x=\frac{\alpha+2}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+2}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x-2)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha+2}{3}+\frac{\beta+2}{3}=\frac{\alpha+\beta+4}{3}=\frac{5+4}{3}=3$ 답 3

다른 풀이 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a\neq 0)$

라 하면 $f(3x-2)=0$에서

$f(3x-2)=a(3x-2-\alpha)(3x-2-\beta)=0$

$\therefore\ x=\frac{\alpha+2}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+2}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x-2)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha+2}{3}+\frac{\beta+2}{3}=\frac{\alpha+\beta+4}{3}=\frac{5+4}{3}=3$

16 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(4x-1)=0$이려면

$4x-1=\alpha$ 또는 $4x-1=\beta$

$\therefore\ x=\frac{\alpha+1}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x-1)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha+1}{4}\cdot\frac{\beta+1}{4}=\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{16}$

$=\frac{8+7+1}{16}$

$=1$ 답 1

17 $x^2+2x+5=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot 5}=-1\pm 2i$

$\therefore\ x^2+2x+5=\{x-(-1+2i)\}\{x-(-1-2i)\}$

$=(x+1-2i)(x+1+2i)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

18 $\frac{1}{4}x^2-x+2=0$, 즉 $x^2-4x+8=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 8}=2\pm 2i$

Q BOX

$ax^2+bx+c=0$이 이차방정식이므로 $a\neq 0$

$a+b=-3$, $3a-b=1$을 변끼리 더하면

$4a=-2$

$\therefore\ a=-\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$을 $a+b=-3$에 대입하면

$-\frac{1}{2}+b=-3$

$\therefore\ b=-\frac{5}{2}$

양변에 4를 곱하여 x^2의 계수를 정수로 고친다.

$\therefore \frac{1}{4}x^2-x+2=\frac{1}{4}\{x-(2+2i)\}\{x-(2-2i)\}$
$=\frac{1}{4}(x-2-2i)(x-2+2i)$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로
$ab=-4$ 답 -4

19 $f(\alpha)=f(\beta)=-1$이므로
$f(\alpha)+1=0$, $f(\beta)+1=0$
즉 이차방정식 $f(x)+1=0$의 두 근이 α, β이고, $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로
$f(x)+1=x^2-5x-8$
따라서 $f(x)=x^2-5x-9$이므로
$f(-2)=5$ 답 ④

α, β는 이차방정식 $x^2-5x-8=0$의 두 근이다.

20 이차방정식 $x^2+3x-5=0$의 두 근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha\beta=-5$
$f(\alpha)=f(\beta)=-5$이므로
$f(\alpha)+5=0$, $f(\beta)+5=0$
이차방정식 $f(x)+5=0$의 두 근이 α, β이므로
$f(x)+5=a(x^2+3x-5)\ (a\neq 0)$
라 하면 $f(0)=5$에서
$10=-5a \qquad \therefore a=-2$
따라서 $f(x)=-2(x^2+3x-5)-5$이므로
$f(1)=-3$ 답 -3

다른 풀이 이차방정식 $x^2+3x-5=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-5$ …… ㉠
이차식 $f(x)$에 대하여 $f(0)=5$이므로
$f(x)=ax^2+bx+5$ ($a\neq 0$, a, b는 상수)
라 하자.
이때 $f(\alpha)=f(\beta)=-5$이므로
$f(\alpha)+5=0$, $f(\beta)+5=0$
따라서 이차방정식 $f(x)+5=0$, 즉 $ax^2+bx+10=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{10}{a}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\quad -\frac{b}{a}=-3$, $\frac{10}{a}=-5$
$\therefore a=-2$, $b=-6$
즉 $f(x)=-2x^2-6x+5$이므로 $\quad f(1)=-3$

21 a, b가 실수이므로 $a-b$, ab도 실수이다.
따라서 이차방정식 $x^2+(a-b)x+ab=0$의 한 근이 $4+\sqrt{3}i$이면 다른 한 근은 $4-\sqrt{3}i$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(4+\sqrt{3}i)+(4-\sqrt{3}i)=-(a-b)$,
$(4+\sqrt{3}i)(4-\sqrt{3}i)=ab$
이므로 $\quad a-b=-8$, $ab=19$
$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$=(-8)^2+2\cdot 19$
$=102$ 답 102

22 $\frac{b+i}{1-i}=\frac{(b+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}$
a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 한 근이 $\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}$이면 다른 한 근은 $\frac{(b-1)-(b+1)i}{2}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}+\frac{(b-1)-(b+1)i}{2}=2$
$b-1=2 \qquad \therefore b=3$
즉 두 근은 $1+2i$, $1-2i$이므로
$a=(1+2i)(1-2i)=5$
$\therefore a+b=8$ 답 8

중단원 마무리
52쪽

01 전략 주어진 식을 간단히 한 후 근의 공식을 이용한다.
풀이 $\frac{2}{3}x(x-1)-x+7=\frac{(x-4)^2}{2}$에서
양변에 6을 곱한다.
$4x^2-4x-6x+42=3x^2-24x+48$
$x^2+14x-6=0$
$\therefore x=-7\pm\sqrt{7^2-1\cdot(-6)}=-7\pm\sqrt{55}$
답 $x=-7\pm\sqrt{55}$

02 전략 주어진 이차방정식에 $x=-2$를 대입하여 얻은 식이 k에 대한 항등식임을 이용한다.
풀이 이차방정식 $kx^2+ax-(k+1)a^2+8=0$의 한 근이 -2이므로
$4k-2a-(k+1)a^2+8=0$
$(4-a^2)k+(-a^2-2a+8)=0$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
k에 대한 항등식
$4-a^2=0$, $-a^2-2a+8=0$
$4-a^2=0$에서 $\quad a^2=4 \quad \therefore a=\pm 2$ …… ㉠
$-a^2-2a+8=0$에서 $\quad a^2+2a-8=0$
$(a+4)(a-2)=0$
$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\quad a=2$ 답 ②

03 전략 $z^2+z+1=0$임을 이용하여 주어진 z에 대한 다항식을 간단히 한다.
풀이 z가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로
$z^2+z+1=0 \qquad \therefore z+1=-z^2$
$\therefore (1+z)^{2n}=(-z^2)^{2n}=z^{4n}$ …… ㉠
한편 $z^2+z+1=0$에서 $\quad (z-1)(z^2+z+1)=0$
$z^3-1=0 \qquad \therefore z^3=1$

㉠에서 z^{4n}의 값이 양의 실수이려면 $n=3k$ (k는 자연수) 꼴이어야 한다.
따라서 $3k\le150$에서 $k\le50$
즉 자연수 n의 개수는 50이다. 답 50

04 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 푼다.

풀이 $x^2+2|x|+3x-6=0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2-2x+3x-6=0$

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(ii) $x\ge0$일 때, $x^2+2x+3x-6=0$

$x^2+5x-6=0$, $(x+6)(x-1)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=1$

그런데 $x\ge0$이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 모든 근의 곱은 -3이다. 답 ③

05 전략 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x로 놓고 x에 대한 이차방정식을 세운다.

풀이 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x라 하면

$$\square AECF=\square ABCD-\triangle ABE-\triangle AFD$$
$$=x^2-\frac{1}{2}\cdot4\cdot x-\frac{1}{2}\cdot x\cdot(x-5)$$
$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$$

즉 $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x=78$이므로

$x^2+x-156=0$, $(x+13)(x-12)=0$

$\therefore x=-13$ 또는 $x=12$

그런데 $x>5$이므로 $x=12$

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는

$12\cdot12=144$ 답 144

06 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 실근을 가질 조건은 $D\ge0$임을 이용한다.

풀이 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$m+3\ne0$ $\therefore m\ne-3$ …… ㉠

이차방정식 $(m+3)x^2+2mx+m-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=m^2-(m+3)(m-4)\ge0$

$m^2-(m^2-m-12)\ge0$

$m+12\ge0$ $\therefore m\ge-12$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-12\le m<-3$ 또는 $m>-3$

따라서 m의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

Q BOX

$|x|=-x$

$|x|=x$

$a<0$, $b<0$에서
$a^2>0$, $4b<0$
$\therefore a^2-4b>0$

07 전략 주어진 이차방정식의 판별식의 부호를 조사한다.

풀이 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$

ㄱ. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4b>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=b^2-4a>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=b^2-4a>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄹ. 이차방정식 $x^2-2ax-b=0$의 판별식을 D_4라 하면

$\frac{D_4}{4}=a^2+b$

a^2+b의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

이상에서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

08 전략 이차식 $p(x)$가 완전제곱식이면 이차방정식 $p(x)=0$이 중근을 가짐을 이용한다.

풀이 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2-(2k-a)x+(k+3)^2+a^2-b=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k-a)\}^2-4\{(k+3)^2+a^2-b\}=0$ ··· ❶

$4k^2-4ak+a^2-4k^2-24k-36-4a^2+4b=0$

$(-4a-24)k-3a^2+4b-36=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-4a-24=0$, $-3a^2+4b-36=0$

$\therefore a=-6$, $b=36$ ··· ❷

$\therefore a+b=30$ ··· ❸

답 30

단계	채점 기준	비율
❶	이차식이 완전제곱식이 되는 조건을 이용하여 k에 대한 식을 세울 수 있다.	50 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$임을 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$=5^2-3=22$ 답 ⑤

10 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하고 이를 이용하여 α, β의 부호를 정한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=2$

이때 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$이므로 $\alpha<0$, $\beta<0$

$$\therefore \frac{1}{|\alpha|}+\frac{1}{|\beta|}=-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{-(-4)}{2}=2$$

답 ④

11 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이면 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, $a\beta^2+b\beta+c=0$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-\alpha-4=0$, $\beta^2-\beta-4=0$

$\therefore \alpha^2-\alpha=4$, $\beta^2-\beta=4$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-4$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1)(\beta^3-\beta^2-\beta-1)\\ &=\{\alpha(\alpha^2-\alpha)-\alpha-1\}\{\beta(\beta^2-\beta)-\beta-1\}\\ &=(3\alpha-1)(3\beta-1)\\ &=9\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+1\\ &=9\cdot(-4)-3\cdot1+1=-38\end{aligned}$$

답 -38

12 전략 주어진 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로 두 근을 α, $-\alpha$로 놓는다.

풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $-\alpha$ $(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=k^2+k-12$ ...... ㉠

$\alpha\cdot(-\alpha)=1-3k$ ...... ㉡

㉠에서 $k^2+k-12=0$, $(k+4)(k-3)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=3$ ...... ㉢

㉡에서 두 근의 부호가 서로 다르므로

$1-3k<0$ $\therefore k>\frac{1}{3}$ ...... ㉣

㉢, ㉣에서 $k=3$

답 3

$k=3$을 주어진 이차방정식에 대입하면
$x^2-8=0$
$\therefore x=\pm2\sqrt{2}$

쌤한마디

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르면 두 근을 α, $-\alpha\,(\alpha\neq0)$로 놓는다.

$\alpha+(-\alpha)=0$이므로 $-\frac{b}{a}=0$

$\alpha\cdot(-\alpha)=-\alpha^2<0$이므로 $\frac{c}{a}<0$

13 전략 $\alpha^3+\beta^3$을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{k}{3}$ ···· ❶

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ &=2^3-3\cdot\frac{k}{3}\cdot2\\ &=8-2k\end{aligned}$$ ···· ❷

이때 $\alpha^3+\beta^3=6$이므로 $8-2k=6$

$2k=2$ $\therefore k=1$ ···· ❸

답 1

단계	채점 기준	비율
❶	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	$\alpha^3+\beta^3$을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸	k의 값을 구할 수 있다.	20 %

14 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 p, q, r를 α, β에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2+rx+p=0$의 두 근이 2α, 2β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=-r$, $2\alpha\cdot2\beta=4\alpha\beta=p$

$\therefore \alpha+\beta=-\frac{r}{2}$, $\alpha\beta=\frac{p}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-p=-\frac{r}{2}$, $q=\frac{p}{4}$

$\therefore r=2p$, $q=\frac{p}{4}$

$\therefore \frac{r}{q}=2p\div\frac{p}{4}=8$

답 ⑤

15 전략 먼저 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, β의 값을 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2+(a-1)x+b=0$의 두 근이 -3, α이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+\alpha=-(a-1)$, $-3\cdot\alpha=b$

$\therefore a=-\alpha+4$, $b=-3\alpha$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2+(b-4)x+3a+1=0$의 두 근이 2, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\beta=-(b-4)$, $2\beta=3a+1$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2+\beta=-(-3\alpha-4)$, $2\beta=3(-\alpha+4)+1$

$\therefore 3\alpha-\beta=-2$, $3\alpha+2\beta=13$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=1$, $\beta=5$

$\begin{cases}3\alpha-\beta=-2 & \cdots ㉢\\ 3\alpha+2\beta=13 & \cdots ㉣\end{cases}$
㉣−㉢을 하면
$3\beta=15$ $\therefore \beta=5$
$\beta=5$를 ㉢에 대입하면
$3\alpha-5=-2$
$3\alpha=3$ $\therefore \alpha=1$

따라서 1, 5를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x+5=0$

이므로 $p=-6$, $q=5$

$\therefore p+q=-1$

답 ②

16 전략 동우는 b를 바르게 보고 풀었고, 수진이는 a를 바르게 보고 풀었음을 이용한다.

풀이 동우는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$b=-2\cdot3=-6$

수진이는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-a=(-1+\sqrt{5}i)+(-1-\sqrt{5}i)=-2$

$\therefore a=2$

$\therefore ab=-12$ 　　답 ①

17 전략 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 m, n이면 이차방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근은 $\frac{m-b}{a}$, $\frac{n-b}{a}$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=16$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2020-8x)=0$이려면

$2020-8x=\alpha$ 또는 $2020-8x=\beta$

$\therefore x=\frac{2020-\alpha}{8}$ 또는 $x=\frac{2020-\beta}{8}$

따라서 이차방정식 $f(2020-8x)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{2020-\alpha}{8}+\frac{2020-\beta}{8}=\frac{4040-(\alpha+\beta)}{8}=\frac{4040-16}{8}=503$$

답 503

18 전략 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 이차방정식의 근의 공식을 이용한다.

풀이 주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+3x-(y^2-ky-2)$

x에 대한 이차방정식 $x^2+3x-(y^2-ky-2)=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2+4(y^2-ky-2)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{4y^2-4ky+1}}{2}$$

즉 $4y^2-4ky+1$은 완전제곱식이어야 한다. y에 대한 이차방정식 $4y^2-4ky+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-4\cdot1=0$

$4k^2-4=0$, 　$k^2-1=0$

$(k+1)(k-1)=0$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$) 　　답 1

19 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식을 $f(x)$로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$ 　$\therefore \alpha=1-\beta$, $\beta=1-\alpha$

$f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$에서 $f(\alpha)=1-\alpha$, $f(\beta)=1-\beta$이므로

$f(\alpha)+\alpha-1=0$, $f(\beta)+\beta-1=0$

즉 이차방정식 $f(x)+x-1=0$의 두 근이 α, β이고, $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)+x-1=x^2-x+3$

α, β는 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 두 근이다.

따라서 $f(x)=x^2-2x+4$이므로

$f(2)=4$ 　　답 4

20 전략 이차방정식의 켤레근의 성질과 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 먼저 구한다.

풀이 a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-i$이면 다른 한 근은 $2+i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-i)+(2+i)=-a$, $(2-i)(2+i)=b$

$\therefore a=-4$, $b=5$ 　　… ❶

이때 $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$\frac{1}{a}=-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{b}=\frac{1}{5}$

$x^2-\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)x+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{5}=0$

$\therefore x^2+\frac{1}{20}x-\frac{1}{20}=0$

따라서 $m=\frac{1}{20}$, $n=\frac{1}{20}$이므로

$m+n=\frac{1}{10}$ 　　… ❷

답 $\frac{1}{10}$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	$m+n$의 값을 구할 수 있다.	50 %

21 전략 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=P(\alpha)$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로

$1+p+q=1$ 　$\therefore p+q=0$ 　…… ㉠

한편 $x^2+px+q=0$에서 p, q가 실수이고 조건 (나)에서 한 근이 $a+i$이므로 다른 한 근은 $a-i$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+i)+(a-i)=-p$, $(a+i)(a-i)=q$

$\therefore p=-2a$, $q=a^2+1$ 　…… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2-2a+1=0$, 　$(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면

$p=-2$, $q=2$

$\therefore p+2q=2$ 　　답 ①

22 전략 계수가 실수인 이차방정식이 허근을 가지면 (판별식)<0임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$의 두 근을 α', β'이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=\frac{c}{a}$, $\alpha'\beta'=\frac{c}{a}$

$\therefore\ \alpha\beta=\alpha'\beta'$

ㄴ. 실수인 공통근 α가 존재한다고 하면

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ …… ㉠

$a\alpha^2+2b\alpha+c=0$ …… ㉡

㉡－㉠을 하면 $b\alpha=0$

$ac>0$에서 $\alpha\neq0$이므로

$b=0$

QBOX: $ac>0$에서 $a\neq0$, $c\neq0$ 즉 주어진 두 이차방정식에서 두 근의 곱이 모두 $\frac{c}{a}$이고 이 값은 0이 아니므로 $\alpha\neq0$

즉 $\alpha^2=-\frac{c}{a}$이고 $ac>0$이므로

$\alpha^2<0$

따라서 α가 실수라는 가정에 모순이다.

ㄷ. $ax^2+2bx+c=0$이 허근을 가지면

$(2b)^2-4ac=4b^2-4ac<0$

$ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac\leq4b^2-4ac<0$

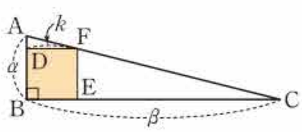
따라서 $ax^2+bx+c=0$은 허근을 가진다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

23 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하고 닮음인 두 삼각형을 찾는다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$



오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형 DBEF의 한 변의 길이를 k라 하면

△ADF∽△ABC (AA 닮음)

이므로

$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DF}:\overline{BC}$

$(\alpha-k):\alpha=k:\beta$

$\alpha k=\beta(\alpha-k)$, $(\alpha+\beta)k=\alpha\beta$

$\therefore\ k=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

따라서 정사각형 DBEF의 넓이는 $\frac{1}{4}$, 둘레의 길이는 2이므로 $\frac{1}{4}$, 2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 4인 이차방정식은

QBOX: 두 근의 합: $\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$, 두 근의 곱: $\frac{1}{4}\cdot2=\frac{1}{2}$

$4\left(x^2-\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}\right)=0$ $\therefore\ 4x^2-9x+2=0$

즉 $m=-9$, $n=2$이므로

$m+n=-7$ 답 ⑤

05 이차방정식과 이차함수

Lecture 10 이차방정식과 이차함수의 관계

L 56쪽

01 이차방정식 $2x^2+5x-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\cdot2\cdot(-4)=57>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다. 답 2

02 이차방정식 $-9x^2+12x-4=0$, 즉 $9x^2-12x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-9\cdot4=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 1개이다. 답 1

03 이차방정식 $x^2+3x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\cdot1\cdot(-k)=9+4k>0$

$\therefore\ k>-\frac{9}{4}$ 답 $k>-\frac{9}{4}$

04 이차방정식 $x^2+7x+13=-3x-8$, 즉 $x^2+10x+21=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=5^2-1\cdot21=4>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

05 이차방정식 $-4x^2+5x-4=-7x+5$, 즉 $4x^2-12x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-4\cdot9=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.) 답 한 점에서 만난다.(접한다.)

06 이차방정식 $x^2+2x+3=x+k$, 즉 $x^2+x+3-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot(3-k)=-11+4k<0$

$\therefore\ k<\frac{11}{4}$ 답 $k<\frac{11}{4}$

표준+발전 유형 Q+Q

L 57쪽

01 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, 1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

QBOX: 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 (두 근의 합)$=-\frac{b}{a}$, (두 근의 곱)$=\frac{c}{a}$

$-3+1=-\frac{a}{2}$, $-3\cdot1=\frac{b}{2}$

$\therefore\ a=4$, $b=-6$

$\therefore\ a-b=10$ 답 10

02 이차함수 $y=x^2+kx+3$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표를 α, β라 하면 이차방정식 $x^2+kx+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=3$ …… ㉠

이때 두 교점 사이의 거리가 2이므로

$|\alpha-\beta|=2$

위의 식의 양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=4$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $k^2-12=4$, $k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$) 답 4

다른 풀이 이차함수 $y=x^2+kx+3$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 α, $\alpha+2$라 하면 이차방정식 $x^2+kx+3=0$의 두 근이 α, $\alpha+2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

두 교점의 x좌표를 $\alpha-2$, α로 놓을 수도 있다.

$\alpha+(\alpha+2)=-k$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+2)=3$ …… ㉡

㉡에서 $\alpha^2+2\alpha-3=0$, $(\alpha+3)(\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=1$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 풀면 $k=-4$ 또는 $k=4$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

03 이차방정식 $\frac{1}{4}x^2+(1-m)x+m^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(1-m)^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot m^2>0$

$-2m+1>0$, $2m<1$

$\therefore m<\frac{1}{2}$

따라서 가장 큰 정수 m의 값은 0이다. 답 0

04 이차방정식 $x^2+2kx-6k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=k^2-1\cdot(-6k)=0$

$k^2+6k=0$, $k(k+6)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=-6$ …… ㉠

이차방정식 $-3x^2+x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot(-3)\cdot k<0$, $12k<-1$

$\therefore k<-\frac{1}{12}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-6$ 답 -6

05 이차방정식 $2x^2-5x+1=ax+b$, 즉 $2x^2-(a+5)x+1-b=0$의 두 근이 -2, 4이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$-2+4=\frac{a+5}{2}$, $-2\cdot4=\frac{1-b}{2}$

이므로

$a+5=4$, $1-b=-16$

$\therefore a=-1$, $b=17$

$\therefore a+b=16$ 답 ④

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 한 점 또는 두 점에서 만난다.

서로 평행한 두 직선의 기울기는 같다.

06 이차방정식 $x^2-7x-9=ax+b$, 즉 $x^2-(a+7)x-9-b=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $2+3\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $2-3\sqrt{2}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(2+3\sqrt{2})+(2-3\sqrt{2})=a+7$,

$(2+3\sqrt{2})(2-3\sqrt{2})=-9-b$

이므로

$4=a+7$, $-14=-9-b$

$\therefore a=-3$, $b=5$

$\therefore b-a=8$ 답 ④

07 이차방정식 $x^2+kx+5=x+4$, 즉 $x^2+(k-1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2-4=0$, $k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0$ $\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+3=2$ 답 ④

08 이차방정식 $kx^2+2kx+1=3x-k$, 즉 $kx^2+(2k-3)x+1+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-3)^2-4k(1+k)<0$

$-16k+9<0$ $\therefore k>\frac{9}{16}$

$\therefore a=\frac{9}{16}$ 답 $\frac{9}{16}$

09 이차방정식 $x^2-4x+k=2x-1$, 즉 $x^2-6x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(k+1)\ge0$

$8-k\ge0$ $\therefore k\le8$

따라서 자연수 k는 1, 2, …, 8의 8개이다. 답 8

10 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-x+5$에 평행하므로

$a=-1$

직선 $y=-x+b$가 이차함수 $y=x^2+3x-2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2+3x-2=-x+b$, 즉 $x^2+4x-2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-2-b)=0$

$6+b=0$ $\therefore b=-6$

$\therefore a+b=-7$ 답 ③

11 점 (2, 3)을 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-2)+3$이라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=-x^2+5x-4$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2+5x-4=a(x-2)+3$, 즉 $x^2+(a-5)x-2a+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-5)^2-4\cdot1\cdot(-2a+7)=0$

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 두 직선의 기울기는 -1, 3이므로 그 곱은 -3이다. 답 ④

Lecture 11 이차함수의 최대, 최소

59쪽

01 답 최솟값: -1, $x=-3$

02 답 최댓값: 6, $x=5$

03 $y=x^2-8x+9=(x-4)^2-7$

따라서 $x=4$일 때 최솟값은 -7이다.

답 최솟값: -7

04 $y=-x^2-3x+2=-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{17}{4}$

따라서 $x=-\dfrac{3}{2}$일 때 최댓값은 $\dfrac{17}{4}$이다.

답 최댓값: $\dfrac{17}{4}$

05 $y=4x^2-8x+5=4(x-1)^2+1$

따라서 $x=1$일 때 최솟값은 1이다.

답 최솟값: 1

06 $y=-5x^2+20x-14=-5(x-2)^2+6$

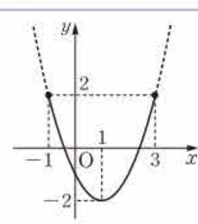
따라서 $x=2$일 때 최댓값은 6이다.

답 최댓값: 6

07 $f(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$

$-1\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$f(-1)=2$, $f(1)=-2$, $f(3)=2$



따라서 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

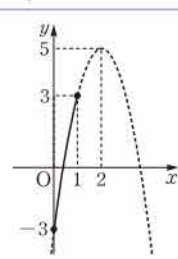
답 최댓값: 2, 최솟값: -2

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값은 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 구한다.

08 $f(x)=-2x^2+8x-3=-2(x-2)^2+5$

$0\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$f(0)=-3$, $f(1)=3$



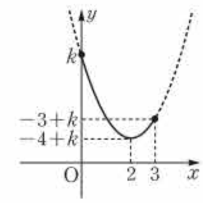
따라서 $f(x)$의 최댓값은 3, 최솟값은 -3이다.

답 최댓값: 3, 최솟값: -3

꼭짓점의 x좌표가 2이므로 이 범위에 속하지 않는다.

09 $f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2-4+k$

$0\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=0$에서 최댓값 k를 가지므로

$k=5$ 답 5

표준+발전 유형 Q+Q

60쪽

01 $y=\dfrac{1}{3}x^2-2x+k=\dfrac{1}{3}(x-3)^2-3+k$

이므로 $x=3$에서 최솟값 $-3+k$를 갖는다.

$y=-x^2-2x-3k=-(x+1)^2+1-3k$

이므로 $x=-1$에서 최댓값 $1-3k$를 갖는다.

따라서 $-3+k=1-3k$이므로

$4k=4 \quad \therefore k=1$ 답 1

02 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 최댓값 2를 가지므로

$f(x)=a(x-1)^2+2$

$f(-1)=-6$에서 $\quad -6=a(-1-1)^2+2$

$4a=-8 \quad \therefore a=-2$

$\therefore f(x)=-2(x-1)^2+2=-2x^2+4x$

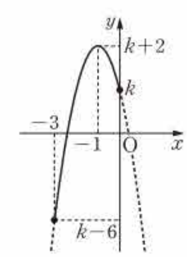
따라서 $a=-2$, $b=4$, $c=0$이므로

$a+2b+c=6$ 답 6

03 $f(x)=-2x^2-4x+k$

$=-2(x+1)^2+2+k$

$-3\le x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=-1$에서 최댓값 $k+2$를 가지므로

$k+2=4 \quad \therefore k=2$

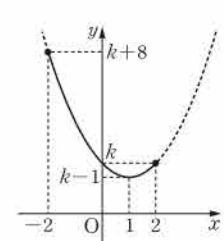
따라서 $f(x)$의 최솟값은

$f(-3)=k-6=-4$ 답 ②

04 $y=x^2-2x+k$

$=(x-1)^2+k-1$

$-2\le x\le 2$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-2$에서 최댓값 $k+8$, $x=1$에서 최솟값 $k-1$을 가지므로

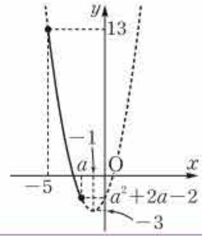
$M=k+8$, $m=k-1$

$\therefore M-m=(k+8)-(k-1)=9$ 답 ⑤

05 $f(x)=x^2+2x-2$

$\quad=(x+1)^2-3$

$-5\le x\le a$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



$f(-1)=-3$이므로

$\quad a<-1$

따라서 $x=a$에서 최솟값 a^2+2a-2를 가지므로

$\quad a^2+2a-2=-2$

$\quad a^2+2a=0,\qquad a(a+2)=0$

$\quad\therefore a=-2\ (\because a<-1)$ 답 -2

Q BOX: $a\ge-1$이면 $f(x)$의 최솟값은 -3이다.

06 $f(x)=x^2+4x+a=(x+2)^2+a-4$

$b<-2$이므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 $a-4$를 갖는다.

즉 $a-4=-3$이므로 $\qquad a=1$

또 $f(x)=x^2+4x+1$의 최댓값은 $f(0)$, $f(b)$ 중 큰 값이고 $f(0)=1$이므로

$\quad f(b)=6$

즉 $b^2+4b+1=6$에서

$\quad b^2+4b-5=0,\qquad (b+5)(b-1)=0$

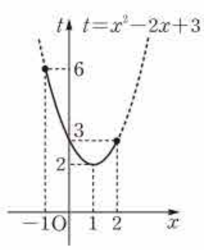
$\quad\therefore b=-5\ (\because b<-2)$

$\quad\therefore a+b=-4$ 답 -4

07 $x^2-2x+3=t$로 놓으면

$\quad t=(x-1)^2+2$

$-1\le x\le 2$이므로 오른쪽 그림에서 $\qquad 2\le t\le 6$



이때 주어진 함수는

$\quad y=t^2-2t-5$

$\quad=(t-1)^2-6\ (2\le t\le 6)$

따라서 $t=2$에서 최솟값 -5, $t=6$에서 최댓값 19를 가지므로 구하는 합은

$\quad -5+19=14$ 답 14

08 $x^2+6x+4=t$로 놓으면

$\quad t=(x+3)^2-5\ge-5$

이때 주어진 함수는

$\quad y=-2t^2+4(t-4)+k$

$\quad=-2t^2+4t-16+k$

$\quad=-2(t-1)^2-14+k\ (t\ge-5)$

따라서 $t=1$에서 최댓값 $-14+k$를 가지므로

$\quad -14+k=-7\qquad\therefore k=7$ 답 7

Q BOX: $x^2+6x+4=t$이므로 $x^2+6x=t-4$

09 $3x^2-6x+y^2+4y+14=3(x-1)^2+(y+2)^2+7$

이때 x, y가 실수이므로

$\quad (x-1)^2\ge0,\ (y+2)^2\ge0$

$\quad\therefore 3x^2-6x+y^2+4y+14\ge7$

따라서 주어진 식의 최솟값은 7이다. 답 ③

10 $-x^2-y^2+8x-9=-(x-4)^2-y^2+7$

이때 x, y가 실수이므로

$\quad (x-4)^2\ge0,\ y^2\ge0$

$\quad\therefore -x^2-y^2+8x-9\le7$

Q BOX: $-(x-4)^2\le0,\ -y^2\le0$

따라서 주어진 식은 $x=4$, $y=0$에서 최댓값 7을 가지므로

$\quad \alpha=4,\ \beta=0,\ \gamma=7$

$\quad\therefore \alpha+\beta+\gamma=11$ 답 ③

11 $x-y+1=0$에서 $\qquad x=y-1$

$\quad\therefore x^2+y^2-2y=(y-1)^2+y^2-2y$

$\qquad=2y^2-4y+1$

$\qquad=2(y-1)^2-1$

따라서 $y=1$일 때 최솟값은 -1이다. 답 -1

12 $3x-y=12$에서 $\qquad y=3x-12$

$\quad\therefore xy=x(3x-12)=3x^2-12x$

$\qquad=3(x-2)^2-12$

이때 $-1\le x\le4$이므로 xy는 $x=-1$일 때 최댓값 15, $x=2$일 때 최솟값 -12를 갖는다.

따라서 $M=15$, $m=-12$이므로

$\quad M-m=27$ 답 27

13 점 A의 좌표를 $(a,\ 0)\ (0<a<2)$이라 하면

$\quad D(a,\ -a^2+4a)$

$\quad\therefore \overline{AB}=4-2a,\ \overline{AD}=-a^2+4a$

Q BOX: $y=-x^2+4x$
$=-(x-2)^2+4$
에서 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 2이므로
$a<2$

Q BOX: 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이므로
$\overline{AB}=2(2-a)$
$=4-2a$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$\quad 2(4-2a-a^2+4a)=-2a^2+4a+8$

$\qquad=-2(a-1)^2+10$

이때 $0<a<2$이므로 $a=1$일 때 최댓값은 10이다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 10이다. 답 ①

다른 풀이 점 B의 좌표를 $(b,\ 0)\ (2<b<4)$이라 하면

$\quad C(b,\ -b^2+4b)$

$\quad\therefore \overline{AB}=2b-4,\ \overline{BC}=-b^2+4b$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$\quad 2(2b-4-b^2+4b)=-2b^2+12b-8$

$\qquad=-2(b-3)^2+10$

이때 $2<b<4$이므로 $b=3$일 때 최댓값은 10이다.

14 쿠키 한 개의 가격이 $(800-x)$원일 때 하루 판매량은 $(200+x)$개이므로 하루 판매액은

$\quad (800-x)(200+x)=-x^2+600x+160000$

$\qquad=-(x-300)^2+250000$(원)

따라서 $x=300$일 때 하루 판매액이 최대이므로 이때의 쿠키 한 개의 가격은

$\quad 800-300=500$(원) 답 500원

중단원 마무리

62쪽

01 전략 두 점 P, Q의 x좌표를 구한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 구한다.

풀이 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -3)$이므로 주어진 이차함수를 $y=a(x+1)^2-3$이라 하면

$$y=a(x+1)^2-3$$
$$=ax^2+2ax+a-3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=-1$이고 $\overline{PQ}=2$이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 $-2,\ 0$이다.

즉 $-2,\ 0$은 이차방정식 $ax^2+2ax+a-3=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2\cdot 0=\frac{a-3}{a}, \qquad a-3=0 \qquad \therefore\ a=3$$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=3x^2+6x$

따라서 $b=6,\ c=0$이므로

$$a+b+c=9$$ 답 9

다른 풀이 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -3)$이므로 주어진 이차함수를 $y=a(x+1)^2-3$이라 하면 이차방정식 $a(x+1)^2-3=0$에서

$$(x+1)^2=\frac{3}{a}, \qquad x+1=\pm\sqrt{\frac{3}{a}}$$
$$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{\frac{3}{a}}$$

따라서 두 점 P, Q의 x좌표는 $-1-\sqrt{\frac{3}{a}},\ -1+\sqrt{\frac{3}{a}}$이고 $\overline{PQ}=2$이므로

$$\left(-1+\sqrt{\frac{3}{a}}\right)-\left(-1-\sqrt{\frac{3}{a}}\right)=2, \qquad \sqrt{\frac{3}{a}}=1$$
$$\frac{3}{a}=1 \qquad \therefore\ a=3$$

따라서 주어진 이차함수는

$$y=3(x+1)^2-3=3x^2+6x$$

이므로 $\quad b=6,\ c=0$

02 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2(a-4)x+a^2+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-4)^2-(a^2+a-1)<0$$
$$a^2-8a+16-a^2-a+1<0$$
$$-9a+17<0 \qquad \therefore\ a>\frac{17}{9}$$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다. 답 2

03 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 $m,\ n$이면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 두 실근이 $m,\ n$임을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=f(x)$의 이차항의 계수는 1이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $\alpha,\ \beta$이므로 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

$$\therefore\ f(x)=(x-\alpha)(x-\beta) \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 두 교점의 x좌표가 $\alpha,\ \gamma$이므로 $\alpha,\ \gamma$는 이차방정식

$$f(x)=g(x),\ 즉\ f(x)-g(x)=0$$

의 두 근이다.

Q BOX

$y=g(x)$는 일차함수이므로 $f(x)-g(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$$\therefore\ f(x)-g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$$
$$\therefore\ g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)(x-\gamma)\ (\because ㉠)$$
$$=(x-\alpha)(x-\beta-x+\gamma)$$
$$=2(x-\alpha)$$

$x-\beta-x+\gamma=\gamma-\beta=2$

이때 $g(0)=-2$이므로

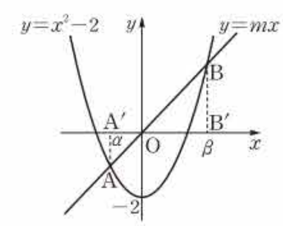
$$-2=-2\alpha \qquad \therefore\ \alpha=1$$
$$\therefore\ \beta=\alpha+4=5,\ \gamma=\beta+2=7$$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-5)$이므로

$$f(\alpha+\beta-\gamma)=f(-1)=12$$ 답 ②

04 전략 두 점 A′, B′의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$로 놓고 두 점 A, B의 좌표를 $\alpha,\ \beta$를 사용하여 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 A′, B′의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<0<\beta)$라 하면



$$\mathrm{A}(\alpha,\ m\alpha),$$
$$\mathrm{B}(\beta,\ m\beta)$$

이므로

$$\overline{AA'}=-m\alpha\ (\because\ m\alpha<0),\ \overline{BB'}=m\beta$$

선분 AA′과 선분 BB′의 길이의 차가 16이므로

$$|m\beta-(-m\alpha)|=16$$
$$\therefore\ |m(\alpha+\beta)|=16 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 이차방정식 $x^2-2=mx$, 즉 $x^2-mx-2=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=m$$

㉠에서 $|m\cdot m|=16$이므로 $\quad m^2=16$

$$\therefore\ m=\pm 4$$

그런데 $m>0$이므로 $\quad m=4$ 답 4

05 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 이차방정식 $x^2+kx-k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=k^2-4\cdot(-k)=0, \qquad k^2+4k=0$$
$$k(k+4)=0$$
$$\therefore\ k=0\ 또는\ k=-4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 조건 (나)에서 이차방정식 $x^2+kx-k=(k+3)x$, 즉 $x^2-3x-k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(-3)^2-4\cdot(-k)>0, \qquad 9+4k>0$$
$$\therefore\ k>-\frac{9}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad k=0$ 답 ③

06 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 함을 이용한다.

풀이 기울기가 4인 직선의 방정식을 $y=4x+a$라 하면 이 직선이 이차함수 $y=x^2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2=4x+a$, 즉 $x^2-4x-a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-(-a)=0, \qquad 4+a=0$$

$$\therefore a=-4 \quad \cdots ❶$$

따라서 직선 $y=4x-4$가 이차함수 $y=-x^2-kx-k-7$의 그래프에 접하므로 이차방정식

$-x^2-kx-k-7=4x-4$, 즉

$x^2+(k+4)x+k+3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(k+4)^2-4(k+3)=0$$

$$k^2+4k+4=0, \qquad (k+2)^2=0$$

$$\therefore k=-2 \quad \cdots ❷$$

답 -2

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	k의 값을 구할 수 있다.	50 %

07 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-4kx+4k^2+k=2ax+b$, 즉 $x^2-2(2k+a)x+4k^2+k-b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(2k+a)\}^2-(4k^2+k-b)=0$$

$$4k^2+4ak+a^2-4k^2-k+b=0$$

$$\therefore (4a-1)k+a^2+b=0$$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4a-1=0,\ a^2+b=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{16}$$

$$\therefore a+b=\frac{3}{16}$$

답 ②

08 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구한 후 이차함수의 식을 $y=(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -2, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+3=-a,\ -2\cdot 3=b$$

$$\therefore a=-1,\ b=-6$$

$$\therefore y=x^2-x-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

따라서 이 이차함수의 최솟값은 $-\frac{25}{4}$이다. 답 $-\frac{25}{4}$

다른 풀이 x^2의 계수가 1이고 x축과 두 점 $(-2, 0)$, $(3, 0)$에서 만나는 이차함수의 그래프의 식은

$$y=(x+2)(x-3)=x^2-x-6$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

따라서 이 이차함수의 최솟값은 $-\frac{25}{4}$이다.

09 전략 먼저 조건 (나)를 이용하여 이차함수 $f(x)$를 $f(x)=k(x-p)^2+q$ 꼴로 나타낸다.

풀이 조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값이 6이므로 $f(x)=a(x-m)^2+6$ $(a<0)$이라 하자.

x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수는 x^2의 계수의 부호가 음수이면 최댓값만 갖는다.

조건 (가)에서 $f(1)=3$이므로

$$a(1-m)^2+6=3,\ 즉\ a(1-m)^2=-3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 조건 (다)의 방정식 $f(x)+9=0$에서

$$a(x-m)^2+6+9=0$$

즉 $ax^2-2amx+am^2+15=0$의 두 실근의 합이 8이므로 $\frac{2am}{a}=8 \qquad \therefore m=4$

$m=4$를 ㉠에 대입하면

$$9a=-3 \qquad \therefore a=-\frac{1}{3}$$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}(x-4)^2+6$이므로 이차방정식

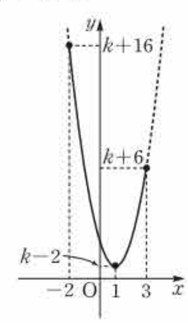
$-\frac{1}{3}(x-4)^2+6=0$, 즉 $x^2-8x-2=0$의 두 실근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 -2이다. 답 ①

양변에 -3를 곱하면
$(x-4)^2-18=0$
$\therefore x^2-8x-2=0$

10 전략 $f(x)$를 $f(x)=2(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한 후 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다.

풀이 $f(x)=2x^2-4x+k=2(x-1)^2+k-2$

$-2\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=1$에서 최솟값 $k-2$를 가지므로

$$k-2=1 \qquad \therefore k=3$$

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $k+16$을 가지므로

$$M=3+16=19$$

$$\therefore k+M=22$$

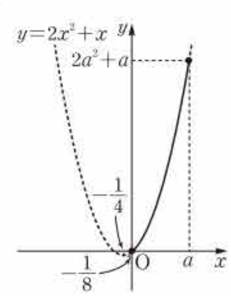
답 22

11 전략 이차함수의 그래프를 이용하여 주어진 범위에서 최댓값을 가지는 x의 값을 찾는다.

풀이 $y=2x^2+x$

$$=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

$0\le x\le a$에서 $y=2x^2+x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=a$에서 최댓값 $2a^2+a$를 가지므로

$$2a^2+a=6$$

$$2a^2+a-6=0, \qquad (a+2)(2a-3)=0$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}\ (\because a>0)$$

답 $\frac{3}{2}$

05 이차방정식과 이차함수

12 전략 먼저 이차함수의 그래프를 이용하여 $f(x)$의 값의 범위를 구한다.

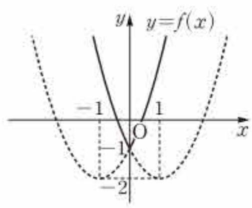
풀이 (i) $x<0$일 때,

$$f(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$$

(ii) $x\ge0$일 때,

$$f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$$

(i), (ii)에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$f(x)\ge-1$$

$y=\{f(x)\}^2+6f(x)+7$

에서 $f(x)=t$로 놓으면

$$y=t^2+6t+7=(t+3)^2-2\ (t\ge-1)$$

꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ -2)$이다.

따라서 $t=-1$, 즉 $f(x)=-1$일 때 y의 최솟값은 2이다.

답 ④

13 전략 주어진 식을 완전제곱식의 합의 꼴로 변형한 후 $(\text{실수})^2\ge0$임을 이용한다.

풀이 $x^2+2y^2+3z^2+2x-8y+6z+3$

$$=(x+1)^2+2(y-2)^2+3(z+1)^2-9$$

이때 x, y, z가 실수이므로

$$(x+1)^2\ge0,\ (y-2)^2\ge0,\ (z+1)^2\ge0$$

$$\therefore x^2+2y^2+3z^2+2x-8y+6z+3\ge-9$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -9이다.

답 -9

14 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $(\alpha+1)(\beta+1)$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $x^2-2(a+1)x+a^2-3a-4=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-(a^2-3a-4)>0$$

$$a^2+2a+1-a^2+3a+4>0$$

$$5a+5>0 \qquad \therefore a>-1$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2(a+1),\ \alpha\beta=a^2-3a-4$$

$$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$$

$$=a^2-3a-4+2(a+1)+1$$

$$=a^2-a-1$$

$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

따라서 $a>-1$에서 $(\alpha+1)(\beta+1)$은 $a=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{5}{4}$를 갖는다.

답 ③

15 전략 새로운 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 구한 후 직사각형의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 새로운 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각

$$(16-x)\text{ cm},\ (10+x)\text{ cm} \quad \cdots ❶$$

이때 변의 길이는 양수이므로

$$0<x<16 \quad \cdots ❷$$

$16-x>0$에서 $x<16$

새로운 직사각형의 넓이는

$$(16-x)(10+x) \quad \cdots ❸$$

$$=-x^2+6x+160$$

$$=-(x-3)^2+169\ (\text{cm}^2)$$

이때 $0<x<16$이므로 $x=3$일 때 최댓값은 169 cm^2이다.

따라서 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값은 169 cm^2이다. $\cdots$ ❹

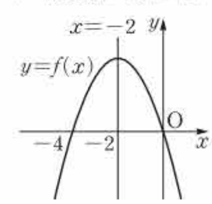
답 169 cm^2

단계	채점 기준	비율
❶	새로운 직사각형의 가로, 세로의 길이를 x에 대한 식으로 각각 나타낼 수 있다.	20 %
❷	x의 값의 범위를 구할 수 있다.	10 %
❸	새로운 직사각형의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹	넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

16 전략 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f(k)$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고, $x=k$일 때 최댓값을 가짐을 이용한다.

풀이 ㄱ. 조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f(-2)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고, $x=-2$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=-2$를 축으로 하고 조건 (가)에서 $f(-4)=0$이므로



$$f(0)=0$$

ㄴ. $-1\le x\le1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이다.

ㄷ. $f(x)=ax(x+4)\ (a<0)$라 하면

(i) $p=-3$일 때,

$f(p)=f(p+2)$이므로

$$g(p)=f(p)$$

직선 $x=-2$가 축이므로 $f(p)=f(p+2)$를 만족시키는 p의 값은 -3이다.

(ii) $p<-3$일 때,

$f(p)<f(p+2)$이므로

$$g(p)=f(p)$$

(iii) $p>-3$일 때,

$f(p)>f(p+2)$이므로

$$g(p)=f(p+2)$$

이상에서

$$g(p)=\begin{cases} f(p) & (p\le-3) \\ f(p+2) & (p>-3) \end{cases}$$

$p\le-3$인 모든 p에 대하여 $g(p)\le f(-3)$이고 $p>-3$인 모든 p에 대하여 $g(p)<f(-3)$이므로 $g(p)$의 최댓값은 $f(-3)$이다.

즉 $f(-3)=1$이므로

$$-3a=1 \qquad \therefore a=-\frac{1}{3}$$

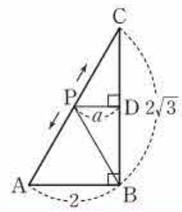
따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x(x+4)$이므로

$$f(-2)=\frac{4}{3}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

17 전략 점 P에서 변 BC에 수선을 그은 후 삼각형의 닮음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고 $\overline{PD}=a$ $(0\le a\le 2)$라 하면 $\triangle CPD \backsim \triangle CAB$ (AA 닮음)이므로



$$\overline{PD}:\overline{AB}=\overline{CD}:\overline{CB}$$

$$a:2=\overline{CD}:2\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{CD}=\sqrt{3}a$$

따라서 $\overline{BD}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}a$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=\{a^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3}a)^2\}+\{a^2+(\sqrt{3}a)^2\}\\&=a^2+12-12a+3a^2+a^2+3a^2\\&=8a^2-12a+12\\&=8\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{2}\end{aligned}$$

이때 $0\le a\le 2$이므로 구하는 최솟값은 $\frac{15}{2}$이다.

답 ④

QBOX

$\angle C$는 공통, $\angle PDC=\angle ABC=90°$

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ (a, b, c, d, e는 정수)일 때, $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은 $\pm\frac{(e의\ 약수)}{(a의\ 약수)}$ 중에서 찾을 수 있다.

06 여러 가지 방정식

Lecture 12 삼차방정식과 사차방정식

66쪽

01 $x^3-4x^2-5x=0$의 좌변을 인수분해하면

$$x(x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=5$$

답 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=5$

02 $P(x)=x^4-3x^3-x^2+5x+2$라 하면

$P(-1)=1+3-1-5+2=0$,

$P(2)=16-24-4+10+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-3	-1	5	2
		-1	4	-3	-2
2	1	-4	3	2	0
		2	-4	-2	
	1	-2	-1	0	

$$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{2}$$

답 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

03 $x^2+2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-X-2=0$, $(X+1)(X-2)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=2$

(ⅰ) $X=-1$일 때, $x^2+2x+1=0$에서

$(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$

(ⅱ) $X=2$일 때, $x^2+2x-2=0$에서

$x=-1\pm\sqrt{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}$

답 $x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}$

04 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2X-3=0$, $(X+1)(X-3)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=3$

따라서 $x^2=-1$ 또는 $x^2=3$이므로

$x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

답 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

05 $x^4-6x^2+1=0$에서

$$(x^4-2x^2+1)-4x^2=0$$

$$(x^2-1)^2-(2x)^2=0$$

$$(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)=0$$

$$\therefore x^2+2x-1=0 \text{ 또는 } x^2-2x-1=0$$

$$\therefore x=-1\pm\sqrt{2} \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{2}$$

답 $x=-1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

쌤한마디

$x^4+\square+1$이 완전제곱식으로 인수분해되려면
$\square=\pm 2x^2$이어야 한다.

06 방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x=0$을 주어진 방정식에 대입하면
(좌변)$=1$,
(우변)$=0$
이므로 $x\neq 0$

$$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면 $\quad X^2+5X-6=0$

$(X+6)(X-1)=0 \quad \therefore X=-6$ 또는 $X=1$

(i) $X=-6$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-6$에서

$x^2+6x+1=0 \quad \therefore x=-3\pm 2\sqrt{2}$

(ii) $X=1$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=1$에서

$x^2-x+1=0 \quad \therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서

$x=-3\pm 2\sqrt{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=-3\pm 2\sqrt{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

표준+발전 유형 Q+Q

67쪽

01 $x^3-3x^2-x+3=0$에서

$x^2(x-3)-(x-3)=0, \quad (x-3)(x^2-1)=0$

$(x+1)(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=-1$이므로

$\alpha-\beta=4$ 답 4

02 $P(x)=x^4+3x^3+4x^2-8$이라 하면

$P(1)=1+3+4-8=0$,

$P(-2)=16-24+16-8=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	3	4	0	−8
		1	4	8	8
−2	1	4	8	8	0
		−2	−4	−8	
	1	2	4	0	

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(x^2+2x+4)$

즉 주어진 방정식은

$(x-1)(x+2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$1+(-2)=-1$ 답 -1

03 $x^2-6x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2X-35=0, \quad (X+5)(X-7)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=7$

(i) $X=-5$일 때, $x^2-6x+5=0$에서

$(x-1)(x-5)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=5$

(ii) $X=7$일 때, $x^2-6x-7=0$에서

$(x+1)(x-7)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=7$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 양의 근의 곱은

$1\cdot 5\cdot 7=35$ 답 ④

04 $x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+1)^2-3X-13=0, \quad X^2-X-12=0$

$(X+3)(X-4)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=4$

(i) $X=-3$일 때, $\quad x^2+x+3=0$

이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1^2-4\cdot 1\cdot 3=-11<0$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=4$일 때, $\quad x^2+x-4=0$

이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot 1\cdot(-4)=17>0$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2+x-4=0$의 근이고 두 허근은 방정식 $x^2+x+3=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 실근의 곱)$=-4$

(두 허근의 합)$=-1$

$a=-4$, $b=-1 \quad \therefore ab=4$ 답 ②

05 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-5X+4=0, \quad (X-1)(X-4)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=4$

즉 $x^2=1$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm 1$ 또는 $x=\pm 2$

따라서 주어진 방정식의 자연수인 해는 1, 2이므로 구하는 합은 $\quad 1+2=3$ 답 3

06 $x^4+6x^2+25=0$에서

$(x^4+10x^2+25)-4x^2=0$

$(x^2+5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)=0$

$\therefore x^2+2x+5=0$ 또는 $x^2-2x+5=0$

방정식 $x^2+2x+5=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=5$, $\gamma+\delta=2$, $\gamma\delta=5$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$

$$=\frac{-2}{5}+\frac{2}{5}$$

$$=0$$

답 0

07 방정식 $x^4+7x^3+8x^2+7x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+7x+8+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+7X+6=0,\quad (X+6)(X+1)=0$

$\therefore X=-6$ 또는 $X=-1$

(i) $X=-6$일 때, $x+\frac{1}{x}=-6$에서

$x^2+6x+1=0 \quad \therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ii) $X=-1$일 때, $x+\frac{1}{x}=-1$에서

$x^2+x+1=0 \quad \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서

$x=-3\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 답 ③

08 방정식 $x^4-4x^3+2x^2-4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2-4x+2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-4X=0,\quad X(X-4)=0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=4$

(i) $X=0$일 때, $x+\frac{1}{x}=0$에서

$x^2+1=0,\quad x^2=-1 \quad \therefore x=\pm i$

(ii) $X=4$일 때, $x+\frac{1}{x}=4$에서

$x^2-4x+1=0 \quad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$ 답 1

$x^2-4x+1=0$은 실근을 갖고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 1임을 이용할 수도 있다.

09 방정식 $x^3-kx^2+(k+3)x-8=0$의 한 근이 2이므로

주어진 방정식에 $x=2$를 대입한다.

$8-4k+2(k+3)-8=0$

$6-2k=0 \quad \therefore k=3$

즉 주어진 방정식은 $x^3-3x^2+6x-8=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

2	1	−3	6	−8
		2	−2	8
	1	−1	4	0

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-x+4)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-x+4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$

$\therefore k+\alpha+\beta=4$ 답 ④

10 방정식 $3x^4+ax^3+bx^2-x+a-1=0$의 두 근이 1, -2이므로 $3+a+b-1+a-1=0$에서

주어진 방정식에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입한다.

$2a+b=-1$ …… ㉠

$48-8a+4b+2+a-1=0$에서

$7a-4b=49$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-7$

㉠×4+㉡을 하면
$15a=45$
$\therefore a=3$
$a=3$을 ㉠에 대입하면
$6+b=-1$
$\therefore b=-7$

즉 주어진 방정식은 $3x^4+3x^3-7x^2-x+2=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

1	3	3	−7	−1	2
		3	6	−1	−2
−2	3	6	−1	−2	0
		−6	0	2	
	3	0	−1	0	

즉 주어진 방정식은

$(x-1)(x+2)(3x^2-1)=0$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 방정식 $3x^2-1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은 $-\frac{1}{3}$이다. 답 $-\frac{1}{3}$

11 $P(x)=x^3-6x^2+(k+8)x-2k$라 하면

$P(2)=8-24+2(k+8)-2k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

2	1	−6	$k+8$	$-2k$
		2	−8	$2k$
	1	−4	k	0

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-4x+k)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-4x+k)=0$

이 방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-4x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-k\ge0 \quad \therefore k\le4$ 답 ④

12 $x^3-4x^2+2kx-8k=0$에서

$x^2(x-4)+2k(x-4)=0$

$\therefore (x-4)(x^2+2k)=0$

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2k=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\cdot1\cdot2k<0 \quad \therefore k>0$

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. 답 1

13 $P(x)=x^3-(1+3k)x+3k$라 하면

$P(1)=1-(1+3k)+3k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -(1+3k) & 3k \\ & & 1 & 1 & -3k \\ \hline & 1 & 1 & -3k & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+x-3k)$

따라서 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+x-3k)=0$

이 방정식이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+x-3k=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때,

$1+1-3k=0 \quad \therefore k=\frac{2}{3}$

(ii) 방정식 $x^2+x-3k=0$이 중근을 가질 때,

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-3k)=0$

$1+12k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{12}$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{12}$ 답 $\frac{7}{12}$

14 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 $x$cm라 하면

$(x-1)(x+3)(x+2)=\frac{5}{2}x^3$

$3x^3-8x^2-2x+12=0$

$P(x)=3x^3-8x^2-2x+12$라 하면

$P(2)=24-32-4+12=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -8 & -2 & 12 \\ & & 6 & -4 & -12 \\ \hline & 3 & -2 & -6 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(3x^2-2x-6)$

즉 주어진 방정식은 $(x-2)(3x^2-2x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{19}}{3}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=2$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2cm이다. 답 ①

15 그릇의 높이를 x cm라 하면

$\pi x^2(x-2)=75\pi, \quad x^3-2x^2-75=0$

$P(x)=x^3-2x^2-75$라 하면

$P(5)=125-50-75=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -2 & 0 & -75 \\ & & 5 & 15 & 75 \\ \hline & 1 & 3 & 15 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-5)(x^2+3x+15)$

즉 주어진 방정식은 $(x-5)(x^2+3x+15)=0$

$\therefore x=5\ (\because x^2+3x+15>0)$

따라서 그릇의 높이는 5 cm이다. 답 5 cm

Q BOX

$x^2+3x+15$
$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{51}{4}$
>0

Lecture 13 삼차방정식의 근의 성질

69쪽

01 (1) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-6}{2}=3$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{4}{2}=2$

(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=2\div\frac{1}{2}=4$

답 (1) 3 (2) 2 (3) 4

02 x^3의 계수가 1이고 세 근이 -1, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$인 삼차방정식은

$x^3-(-1+\sqrt{2}-\sqrt{2})x^2$
$+\{(-1)\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})+(-1)\cdot(-\sqrt{2})\}x$
$-(-1)\cdot\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})=0$

$\therefore x^3+x^2-2x-2=0$

답 $x^3+x^2-2x-2=0$

03 x^3의 계수가 1이고 세 근이 4, $1+3i$, $1-3i$인 삼차방정식은

$x^3-\{4+(1+3i)+(1-3i)\}x^2$
$+\{4(1+3i)+(1+3i)(1-3i)+4(1-3i)\}x$
$-4(1+3i)(1-3i)=0$

$\therefore x^3-6x^2+18x-40=0$

답 $x^3-6x^2+18x-40=0$

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

04 (1) 계수가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $-2+i$이므로 $-2-i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-2+i)+(-2-i)+\alpha=-1$

$\therefore \alpha=3$

(2) 주어진 방정식의 세 근이 $-2+i$, $-2-i$, 3이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-2+i)(-2-i)+3(-2-i)$
$+3(-2+i)=a$,
$3(-2+i)(-2-i)=-b$

$\therefore a=-7,\ b=-15$

답 (1) $-2-i$, 3 (2) $a=-7$, $b=-15$

05 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^3=1$이므로

$\omega^{17}+\omega^{13}=(\omega^3)^5\omega^2+(\omega^3)^4\omega$
$=\omega^2+\omega=-1$

$\omega^2+\omega+1=0$에서
$\omega^2+\omega=-1$

$\omega^2+\omega+1=0$에서
$\omega^2+1=-\omega$

(2) $\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$

(3) $\omega^8+\omega^7+\omega^6=\omega^6(\omega^2+\omega+1)=0$

답 (1) -1 (2) -1 (3) 0

표준+발전 **유형 Q+Q** 70쪽

01 삼차방정식 $x^3+x^2+2x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-3$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-1-\gamma)(-1-\alpha)(-1-\beta)$

$=-1-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=-1-(-1)-2-(-3)$

$=1$ 답 ④

BOX: x^3+x^2+2x+3 $=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 이므로 $x=-1$을 x^3+x^2+2x+3에 대입하여 식의 값을 구할 수도 있다.

02 주어진 삼차방정식의 세 근을 2α, α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+\alpha+3\alpha=6$, $6\alpha=6$ $\therefore \alpha=1$

따라서 세 근이 2, 1, 3이므로

$2\cdot1+1\cdot3+3\cdot2=a$, $2\cdot1\cdot3=-b$

$\therefore a=11$, $b=-6$

$\therefore a+b=5$ 답 ④

03 삼차방정식 $x^3-4x^2-x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-1}{-1}=1$,

$\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\gamma}\cdot\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}$

$=\dfrac{4}{-1}=-4$,

$\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$

따라서 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-x^2-4x+1=0$ 답 $x^3-x^2-4x+1=0$

04 삼차방정식 $3x^3-7x^2+6x+9=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{7}{3}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-3$

$\therefore \alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta$

$=\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=-3\cdot\dfrac{7}{3}=-7$,

$\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=(-3)^2=9$

따라서 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-2x^2-7x-9=0$ 답 $x^3-2x^2-7x-9=0$

05 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a$에서

$a=-\alpha-2$ …… ㉠

$\alpha(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+\alpha(1-\sqrt{2})=b$에서

$b=2\alpha-1$ …… ㉡

$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=5$에서

$-\alpha=5$ $\therefore \alpha=-5$

$\alpha=-5$를 ㉠, ㉡에 대입하면

$a=3$, $b=-11$

$\therefore a+b=-8$ 답 -8

06 주어진 사차방정식의 계수가 실수이므로 $-i$, $1+i$가 근이면 i, $1-i$도 근이다.

이때 i, $-i$, $1-i$, $1+i$를 네 근으로 하고 x^4의 계수가 1인 사차방정식은

$(x-i)(x+i)\{x-(1-i)\}\{x-(1+i)\}=0$

$(x^2+1)(x^2-2x+2)=0$

$\therefore x^4-2x^3+3x^2-2x+2=0$

따라서 $a=-2$, $b=3$, $c=-2$, $d=2$이므로

$a-b+c-d=-9$ 답 -9

07 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$,

$\omega^3=1$, $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{10}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\omega^6(1+\omega+\omega^2)$
$+(\omega^3)^3+(\omega^3)^3\cdot\omega$

$=\omega+1$

ㄴ. $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$

$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)(1+\omega)(1+\omega^2)$

$=2(1+\omega)^2(1+\omega^2)^2$

$=2(-\omega^2)^2(-\omega)^2$

$=2\omega^6=2$

BOX: $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega+1=-\omega^2$, $\omega^2+1=-\omega$

ㄷ. $\dfrac{\omega+1}{\omega^2}+\dfrac{\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}+1}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}+\dfrac{\overline{\omega}^2}{-\overline{\omega}^2}=-2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

08 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 허근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \dfrac{(\omega-1)\overline{(\omega-1)}}{(2\omega+1)\overline{(2\omega+1)}}=\dfrac{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}{(2\omega+1)(2\overline{\omega}+1)}$

$=\dfrac{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}{4\omega\overline{\omega}+2(\omega+\overline{\omega})+1}$

$=\dfrac{1-1+1}{4\cdot1+2\cdot1+1}$

$=\dfrac{1}{7}$ 답 $\dfrac{1}{7}$

쌤한마디

두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라 할 때

① $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ ② $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ ④ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

Lecture 14 연립이차방정식

71쪽

01 $2x+y=4$에서 $y=4-2x$ ...... ㉠

㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(4-2x)^2=5$, $5x^2-16x+11=0$

$(x-1)(5x-11)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{11}{5}$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $y=2$

$x=\dfrac{11}{5}$을 ㉠에 대입하면 $y=-\dfrac{2}{5}$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\dfrac{11}{5}\\y=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$

답 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\dfrac{11}{5}\\y=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$

02 $x^2-y^2=0$에서 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

일반적으로 상수항이 0인 이차식을 인수분해한다.

(i) $x=-y$를 $x^2+xy+3y^2=15$에 대입하면

$y^2-y^2+3y^2=15$, $y^2=5$

$\therefore y=\pm\sqrt{5}$, $x=\mp\sqrt{5}$ (복호동순)

$x=-y$에서
$y=\sqrt{5}$일 때 $x=-\sqrt{5}$
$y=-\sqrt{5}$일 때 $x=\sqrt{5}$

(ii) $x=y$를 $x^2+xy+3y^2=15$에 대입하면

$y^2+y^2+3y^2=15$, $y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3}$, $x=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=\sqrt{5}\\y=-\sqrt{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{5}\\y=\sqrt{5}\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$ 답 풀이 참조

03 $x+y=5$에서 $y=5-x$ ...... ㉠

㉠을 $x-xy+y=-1$에 대입하면

$x-x(5-x)+5-x=-1$

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $y=3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면 $y=2$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ 답 풀이 참조

다른 풀이 $x-xy+y=-1$에서 $x+y=5$이므로

$xy=6$

즉 x, y는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-3)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=3$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

04 $3x+2y=13$에서 $y=\dfrac{13-3x}{2}$

y가 자연수이므로 $\dfrac{13-3x}{2}\geq1$

$13-3x\geq2$ $\therefore x\leq\dfrac{11}{3}$

x가 자연수이므로 $x=1$, 2, 3

x	1	2	3
y	5	$\dfrac{7}{2}$	2

위의 표에서 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 5)$, $(3, 2)$ 답 $(1, 5)$, $(3, 2)$

05 x, y가 정수이므로

(i) $x-2=1$, $y+1=5$일 때

$x=3$, $y=4$

(ii) $x-2=5$, $y+1=1$일 때

$x=7$, $y=0$

(iii) $x-2=-1$, $y+1=-5$일 때

$x=1$, $y=-6$

(iv) $x-2=-5$, $y+1=-1$일 때

$x=-3$, $y=-2$

이상에서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(3, 4)$, $(7, 0)$, $(1, -6)$, $(-3, -2)$

답 $(3, 4)$, $(7, 0)$, $(1, -6)$, $(-3, -2)$

06 $x^2+y^2-2x+4y+5=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=0$

x, y는 실수이므로

$x-1=0$, $y+2=0$

실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=B=0$

$\therefore x=1$, $y=-2$ 답 $x=1$, $y=-2$

표준+발전 유형 Q+Q

72쪽

01 $\begin{cases}x-3y=-6 & \text{...... ㉠}\\x^2+xy+y^2=7 & \text{...... ㉡}\end{cases}$

㉠에서 $x=3y-6$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(3y-6)^2+(3y-6)y+y^2=7$

$13y^2-42y+29=0$, $(y-1)(13y-29)=0$

$\therefore y=1$ 또는 $y=\dfrac{29}{13}$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-3,\ y=1$ 또는 $x=\frac{9}{13},\ y=\frac{29}{13}$

$\therefore\ \alpha+\beta=-2$ 또는 $\alpha+\beta=\frac{38}{13}$

따라서 $\alpha+\beta$의 값이 될 수 있는 것은 ①이다. 답 ①

02 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3y^2=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $x=1-2y$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(1-2y)^2-3y^2=-2,\quad y^2-4y+3=0$

$(y-1)(y-3)=0$

$\therefore\ y=1$ 또는 $y=3$

이것을 ㉢에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-5,\ y=3$

(i) $x=-1,\ y=1$을 $x^2+ay^2=7,\ bx-4y=-8$에 대입하여 풀면

$a=6,\ b=4$

(ii) $x=-5,\ y=3$을 $x^2+ay^2=7,\ bx-4y=-8$에 대입하여 풀면

$a=-2,\ b=-\frac{4}{5}$

(i), (ii)에서 $a,\ b$는 자연수이므로

$a=6,\ b=4$

$\therefore\ a-b=2$ 답 2

03 $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(2x+y)(x-y)=0$

$\therefore\ y=-2x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2x^2+4x^2=6,\quad x^2=2$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{2},\ y=\mp2\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+x^2=6,\quad x^2=2$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{2},\ y=\pm\sqrt{2}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha\beta$의 값은 $-4,\ 2$이다. 답 $-4,\ 2$

04 $\begin{cases} x^2-y^2-x-y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-xy+y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)-(x+y)=0$

$(x+y)(x-y-1)=0$

$\therefore\ y=-x$ 또는 $y=x-1$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2+x^2+x^2=1,\quad x^2=\frac{1}{4}$

$\therefore\ x=\pm\frac{1}{2},\ y=\mp\frac{1}{2}$ (복호동순)

QBOX

$\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{2})=-4,$
$(-\sqrt{2})\cdot2\sqrt{2}=-4,$
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2,$
$(-\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{2})=2$

$x=-y,\ x=y+1$로 변형한 후 ㉡에 각각 대입하여 풀 수도 있다.

$x^2-2xy+y^2$
$=(x+y)^2-4xy$

x^2+y^2+x+y
$=(x+y)^2-2xy+x+y$

x^2+xy+y^2
$=(x+y)^2-xy$

(ii) $y=x-1$을 ㉡에 대입하면

$2x^2-x(x-1)+(x-1)^2=1$

$2x^2-x=0,\quad x(2x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

(i), (ii)에서 $x,\ y$는 정수이므로 $x=0,\ y=-1$

$\therefore\ x^2+y^2=1$ 답 ①

05 $x+y=u,\ xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-4v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=u+1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-4(u+1)=1,\quad u^2-4u-5=0$

$(u+1)(u-5)=0$

$\therefore\ u=-1$ 또는 $u=5$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-1,\ v=0$ 또는 $u=5,\ v=6$

(i) $u=-1,\ v=0$, 즉 $x+y=-1,\ xy=0$일 때,

$x,\ y$는 이차방정식 $t^2+t=0$의 두 근이므로

$t(t+1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$

$\therefore\ \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

(ii) $u=5,\ v=6$, 즉 $x+y=5,\ xy=6$일 때,

$x,\ y$는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-3)=0$

$\therefore\ t=2$ 또는 $t=3$

$\therefore\ \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

답 $(0,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$

06 $x+y=u,\ xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v+u=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $v=u^2-1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$u^2-u=0,\quad u(u-1)=0$

$\therefore\ u=0$ 또는 $u=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=0,\ v=-1$ 또는 $u=1,\ v=0$

(i) $u=0,\ v=-1$, 즉 $x+y=0,\ xy=-1$일 때,

$x,\ y$는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

(ⅱ) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로

$t(t-1)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $3x-y$의 값은 $x=1$, $y=-1$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$3\cdot1-(-1)=4$ 답 ④

$x=-1$, $y=1$일 때, $3\cdot(-1)-1=-4$
$x=1$, $y=-1$일 때, $3\cdot1-(-1)=4$
$x=0$, $y=1$일 때, $3\cdot0-1=-1$
$x=1$, $y=0$일 때, $3\cdot1-0=3$

07 $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $x^2+(-2x+k)^2=5$

$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)=0$

$4k^2-5k^2+25=0, \qquad k^2=25$

$\therefore k=\pm5$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$5\cdot(-5)=-25$ 답 -25

08 $\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-1$

이것을 ㉡에 대입하면 $x^2+x(x-1)+k=0$

$\therefore 2x^2-x+k=0$

이를 만족시키는 실수 x의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

서로 다른 두 실근을 갖거나 중근을 갖는다.

$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot k\ge0$

$1-8k\ge0 \qquad \therefore k\le\frac{1}{8}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{1}{8}$이다. 답 $\frac{1}{8}$

09 처음 땅의 가로의 길이를 x km, 세로의 길이를 y km라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+1)(y+1)=xy+7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $xy+x+y+1=xy+7$

$\therefore y=6-x \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(6-x)^2=20, \qquad x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=2$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=2$

$\therefore |x-y|=2$

따라서 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는 2 km이다. 답 ⑤

다른 풀이 ㉡에서 $x+y=6$

이때 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로

$36=20+2xy \qquad \therefore xy=8$

또

$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=20-2\cdot8=4$

이므로

$|x-y|=2$

따라서 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는 2 km이다.

10 $\overline{PA}=x$ cm, $\overline{PB}=y$ cm라 하면 $\angle APB=90°$이므로

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

$\begin{cases} x^2+y^2=100 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y+10=24 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=14-x \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(14-x)^2=100, \qquad x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=8$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=6$, $y=8$ 또는 $x=8$, $y=6$

따라서 삼각형 PAB의 빗변이 아닌 두 변의 길이는 6 cm, 8 cm이다. 답 6 cm, 8 cm

11 $xy+x+y-8=0$에서

$x(y+1)+(y+1)-9=0$

$\therefore (x+1)(y+1)=9$

이때 x, y가 정수이므로

(ⅰ) $x+1=-9$, $y+1=-1$일 때,
$x=-10$, $y=-2 \qquad \therefore xy=20$

(ⅱ) $x+1=-3$, $y+1=-3$일 때,
$x=-4$, $y=-4 \qquad \therefore xy=16$

(ⅲ) $x+1=-1$, $y+1=-9$일 때,
$x=-2$, $y=-10 \qquad \therefore xy=20$

(ⅳ) $x+1=1$, $y+1=9$일 때,
$x=0$, $y=8 \qquad \therefore xy=0$

(ⅴ) $x+1=3$, $y+1=3$일 때,
$x=2$, $y=2 \qquad \therefore xy=4$

(ⅵ) $x+1=9$, $y+1=1$일 때,
$x=8$, $y=0 \qquad \therefore xy=0$

이상에서 xy의 최댓값은 20이다. 답 ③

12 $2x^2-4xy+4y^2-6x+9=0$에서

$(x^2-4xy+4y^2)+(x^2-6x+9)=0$

$\therefore (x-2y)^2+(x-3)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x-2y=0$, $x-3=0 \qquad \therefore x=3$, $y=\frac{3}{2}$

$\therefore x+y=\frac{9}{2}$ 답 ④

중단원 마무리

74쪽

01 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^3+x^2+x-3$이라 하면

$P(1)=1+1+1-3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+2x+3)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

> 판별식을 D라 하면
> $\frac{D}{4}=1^2-3=-2<0$
> 이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=3-(-2)+1=6$ 답 ①

02 전략 공통부분이 생기도록 묶어서 전개한 후 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $x(x+2)(x+3)(x+5)+8=0$에서

> 상수항의 합이 같아지도록 두 개씩 짝을 짓는다.

$\{x(x+5)\}\{(x+2)(x+3)\}+8=0$

$(x^2+5x)(x^2+5x+6)+8=0$

$x^2+5x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X(X+6)+8=0$ ⋯ ❶

$X^2+6X+8=0$, $(X+4)(X+2)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=-2$

(i) $X=-4$일 때, $x^2+5x+4=0$에서

$(x+4)(x+1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=-2$일 때, $x^2+5x+2=0$에서

$x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 α, β의 값은 -4, -1이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-4)^2+(-1)^2=17$ ⋯ ❸

답 17

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 방정식을 한 문자에 대한 이차방정식으로 변형할 수 있다.	40 %
❷	방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸	$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

03 전략 다항식 $P(x)$를 인수분해하여 방정식 $P(x)=0$의 근을 구한다.

풀이 ㄱ. $P(\sqrt{n})=(\sqrt{n})^4+(\sqrt{n})^2-n^2-n$

$=n^2+n-n^2-n=0$

ㄴ. $P(x)=x^4+x^2-n(n+1)=(x^2-n)(x^2+n+1)$

이므로 $P(x)=0$에서

$x^2=n$ 또는 $x^2=-n-1$

$\therefore x=\pm\sqrt{n}$ 또는 $x=\pm\sqrt{n+1}i$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 모든 정수 k에 대하여

$P(k)=(k^2-n)(k^2+n+1)$

이고 $k^2+n+1>0$이므로 $P(k)\neq0$을 만족시키려면 $k^2-n\neq0$, 즉 $n\neq k^2$이어야 한다.

따라서 n의 값은 2, 3, 5, 6, 7, 8이므로 그 합은

> $1=1^2$, $4=2^2$, $9=3^2$이므로
> $n\neq1$, $n\neq4$, $n\neq9$

$2+3+5+6+7+8=31$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

04 전략 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나눈 후 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환하여 인수분해한다.

풀이 방정식 $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$2x^2+x-6+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$

$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$2X^2+X-10=0$, $(X-2)(2X+5)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=-\frac{5}{2}$

(i) $X=2$일 때, $x+\frac{1}{x}=2$에서

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

(ii) $X=-\frac{5}{2}$일 때, $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$에서

$2x^2+5x+2=0$, $(2x+1)(x+2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=-2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 음수인 근은 $-\frac{1}{2}$, -2이므로 그 합은

$\left(-\frac{1}{2}\right)+(-2)=-\frac{5}{2}$ 답 $-\frac{5}{2}$

05 전략 방정식 $P(x)=0$의 한 근이 α이면 $P(\alpha)=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 삼차방정식의 한 근이 α이므로

$a\alpha^3-b\alpha^2+c\alpha-d=0$ …… ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 -1을 곱하면

$-a\alpha^3+b\alpha^2-c\alpha+d=0$

$\therefore a(-\alpha)^3+b(-\alpha)^2+c(-\alpha)+d=0$

따라서 $-\alpha$는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근이다.

ㄴ. ㉠의 양변을 $-\alpha^3$으로 나누면

$-a+\frac{b}{\alpha}-\frac{c}{\alpha^2}+\frac{d}{\alpha^3}=0$

$\therefore d\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3-c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+b\cdot\frac{1}{\alpha}-a=0$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$은 $dx^3-cx^2+bx-a=0$의 근이다.

ㄷ. ㉠의 양변을 a^3으로 나누면

$$a-\frac{b}{a}+\frac{c}{a^2}-\frac{d}{a^3}=0$$

$$\therefore d\left(-\frac{1}{a}\right)^3+c\left(-\frac{1}{a}\right)^2+b\left(-\frac{1}{a}\right)+a=0$$

따라서 $-\frac{1}{a}$은 $dx^3+cx^2+bx+a=0$의 근이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

06 전략 먼저 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하여 근의 조건을 확인한다.

풀이 $P(x)=x^3-5x^2+(k-9)x+k-3$이라 하면

$P(-1)=-1-5-(k-9)+k-3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & k-9 & k-3 \\ & & -1 & 6 & -k+3 \\ \hline & 1 & -6 & k-3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-6x+k-3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-6x+k-3)=0$

이때 $x=-1$은 주어진 삼차방정식의 해이므로 방정식 $x^2-6x+k-3=0$은 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

1보다 작은 한 근이다.

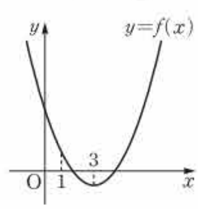
$f(x)=x^2-6x+k-3$이라 하면 방정식 $f(x)=0$은 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(k-3)>0$

$\therefore k<12$ ⋯⋯ ㉠

또 오른쪽 그림에서 $f(1)>0$이므로 $1-6+k-3>0$

$\therefore k>8$ ⋯⋯ ㉡



따라서 ㉠, ㉡에서

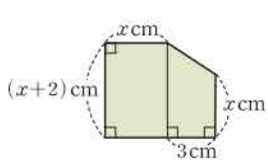
$8<k<12$

이므로 정수 k의 값의 합은

$9+10+11=30$ 답 ④

07 전략 오각기둥의 부피를 이용하여 x에 대한 삼차방정식을 세운다.

풀이 밑면인 오각형은 오른쪽 그림과 같이 직사각형과 사다리꼴로 나눌 수 있으므로



(밑넓이)

$=x(x+2)+\frac{1}{2}\cdot\{x+(x+2)\}\cdot3$

$=x^2+5x+3\ (\mathrm{cm}^2)$

이때 오각기둥의 높이는 $(x+1)$ cm이고 부피가 51 cm^3이므로

$(x^2+5x+3)(x+1)=51$

$x^3+6x^2+8x-48=0$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)=x^3+6x^2+8x-48$이라 하면

$f(2)=8+24+16-48=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 6 & 8 & -48 \\ & & 2 & 16 & 48 \\ \hline & 1 & 8 & 24 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2+8x+24)$

따라서 방정식 ㉠은

$(x-2)(x^2+8x+24)=0$

$\therefore x=2\ (\because x^2+8x+24>0)$ 답 2

$x^2+8x+24$
$=(x+4)^2+8>0$

08 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=6$

$3\alpha=6 \qquad \therefore \alpha=2$

따라서 세 근이 1, 2, 3이므로

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1=a,\ 1\cdot2\cdot3=-b$

$\therefore a=11,\ b=-6$

$\therefore a-b=17$ 답 ⑤

09 전략 $P(x)$의 계수가 실수이므로 $4-3i$도 방정식 $P(x)=0$의 한 근임을 이용한다.

풀이 방정식 $P(x)=0$의 계수가 실수이므로 $4+3i$가 근이면 $4-3i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 방정식 $P(3x+1)=0$에서

$3x+1=\alpha$ 또는 $3x+1=4+3i$ 또는 $3x+1=4-3i$

$\therefore x=\frac{\alpha-1}{3}$ 또는 $x=1+i$ 또는 $x=1-i$ ⋯ ❶

이때 방정식 $P(3x+1)=0$의 세 근의 곱이 4이므로

$\frac{\alpha-1}{3}\cdot(1+i)\cdot(1-i)=4$

$(1+i)(1-i)=1-i^2$
$=2$

$\frac{\alpha-1}{3}=2 \qquad \therefore \alpha=7$ ⋯ ❷

7, $4+3i$, $4-3i$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-\{7+(4+3i)+(4-3i)\}x^2$
$+\{7\cdot(4+3i)+(4+3i)(4-3i)+(4-3i)\cdot7\}x$
$-7\cdot(4+3i)(4-3i)=0$

$\therefore x^3-15x^2+81x-175=0$

$\therefore P(x)=x^3-15x^2+81x-175$ ⋯ ❸

따라서 $P(x)$의 이차항의 계수와 일차항의 계수의 합은

$-15+81=66$ ⋯ ❹

답 66

단계	채점 기준	비율
❶	방정식 $P(3x+1)=0$의 세 근을 구할 수 있다.	30 %
❷	방정식 $P(x)=0$의 나머지 한 근을 구할 수 있다.	30 %
❸	$P(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹	$P(x)$의 이차항의 계수와 일차항의 계수의 합을 구할 수 있다.	10 %

10 전략 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이면 $\overline{\omega}$도 이 방정식의 허근임을 이용한다.

풀이 $x^3+1=0$에서 $\quad (x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 허근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$$\therefore\ \omega+\frac{1}{\omega}+\overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=(\omega+\overline{\omega})+\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}\right)$$

$$=(\omega+\overline{\omega})+\frac{\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}}$$

$$=1+\frac{1}{1}=2$$

답 ④

11 전략 먼저 주어진 근을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $x=1$, $y=-1$을 $x-y=a$, $2x^2-xy+y^2=b$에 각각 대입하면

$a=2,\ b=4$

$$\therefore\ \begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-xy+y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad y=x-2 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$2x^2-x(x-2)+(x-2)^2=4$

$x^2-x=0, \quad x(x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

$x=0$을 ㉢에 대입하면 $\quad y=-2$

따라서 나머지 한 근은

$x=0,\ y=-2$

답 $x=0,\ y=-2$

12 전략 한 이차방정식의 이차식을 인수분해하여 일차방정식을 얻은 후 다른 이차방정식에 대입한다.

풀이 $\begin{cases} x^2-y^2+x+y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad (x+y)(x-y)+(x+y)=0$

$(x+y)(x-y+1)=0$

$\therefore\ y=-x$ 또는 $y=x+1$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=1, \quad x^2=\frac{1}{4}$

$\therefore\ x=\pm\frac{1}{2},\ y=\mp\frac{1}{2}$ (복호동순)

(ii) $y=x+1$을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(x+1)+2(x+1)^2=1$

$2x^2+3x+1=0, \quad (x+1)(2x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

(i), (ii)에서 $\alpha\beta$의 값은 $-\frac{1}{4}$, 0이므로 $\alpha\beta$의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.

답 $-\frac{1}{4}$

Q BOX

ω, $\overline{\omega}$는 $x^2-x+1=0$, 즉 $x+\frac{1}{x}=1$의 두 근이므로

$\omega+\frac{1}{\omega}=1$,

$\overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=1$

임을 이용할 수도 있다.

$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$,

$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$,

$(-1)\cdot 0=0$

13 전략 $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 x, y가 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용한다.

풀이 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u+v=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ uv=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad v=9-u \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면 $\quad u(9-u)=20$

$u^2-9u+20=0, \quad (u-4)(u-5)=0$

$\therefore\ u=4$ 또는 $u=5$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=4,\ v=5$ 또는 $u=5,\ v=4$

(i) $u=4$, $v=5$, 즉 $x+y=4$, $xy=5$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-4t+5=0$의 두 근이므로

$t=2\pm i$

$$\therefore\ \begin{cases} x=2+i \\ y=2-i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2-i \\ y=2+i \end{cases}$$

(ii) $u=5$, $v=4$, 즉 $x+y=5$, $xy=4$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-5t+4=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-4)=0 \quad \therefore\ t=1$ 또는 $t=4$

$$\therefore\ \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

(i), (ii)에서 $x>y$이므로 $\quad x=4,\ y=1$

$\therefore\ x-y=3$

답 ③

14 전략 x, y를 근으로 하는 이차방정식을 나타낸 후 이 이차방정식이 실근을 가질 조건을 이용한다.

풀이 $\begin{cases} x+y=2a & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y+xy=a^2-a+9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a+xy=a^2-a+9$

$\therefore\ xy=a^2-3a+9 \quad \cdots\cdots ㉢ \quad$ ··· ❶

㉠, ㉢을 만족시키는 실수 x, y는 이차방정식 $t^2-2at+a^2-3a+9=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a^2-3a+9)\geq 0$$

$3a-9\geq 0 \quad \therefore\ a\geq 3$ ··· ❷

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다. ··· ❸

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	xy를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷	x, y를 근으로 하는 이차방정식의 판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸	a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

15 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근에 대한 식을 일차식의 곱으로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $x^2-(a-4)x+a-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a-4 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha\beta=a-2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡$-$㉠을 하면 $\quad \alpha\beta-\alpha-\beta=2$

$\alpha(\beta-1)-(\beta-1)=3$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=3$

이때 α, β가 정수이므로

(i) $\alpha-1=-3$, $\beta-1=-1$일 때,

$\alpha=-2$, $\beta=0$

(ii) $\alpha-1=-1$, $\beta-1=-3$일 때,

$\alpha=0$, $\beta=-2$

(iii) $\alpha-1=1$, $\beta-1=3$일 때,

$\alpha=2$, $\beta=4$

(iv) $\alpha-1=3$, $\beta-1=1$일 때,

$\alpha=4$, $\beta=2$

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta=-2$이므로 ㉠에 대입하면

$-2=a-4 \qquad \therefore a=2$

(iii), (iv)에서 $\alpha+\beta=6$이므로 ㉠에 대입하면

$6=a-4 \qquad \therefore a=10$

따라서 a의 값의 합은 12이다.

답 12

16 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=ax^3+2bx^2+4bx+8a$라 하면

$P(-2)=-8a+8b-8b+8a=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & a & 2b & 4b & 8a \\ & & -2a & 4(a-b) & -8a \\ \hline & a & -2(a-b) & 4a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)\{ax^2-2(a-b)x+4a\}$

삼차방정식 $P(x)=0$이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지려면 이차방정식 $ax^2-2(a-b)x+4a=0$은 $x\neq-2$인 서로 다른 두 정수를 근으로 가져야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이

$\frac{4a}{a}=4$이므로 두 근은

$1, 4$ 또는 $-1, -4$

따라서 두 근의 합은 5 또는 -5이어야 하므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{2(a-b)}{a}=5$ 또는 $\frac{2(a-b)}{a}=-5$

$\frac{2(a-b)}{a}=5$에서

$2a-2b=5a$

$\therefore b=-\frac{3}{2}a$

$\frac{2(a-b)}{a}=-5$에서

$2a-2b=-5a$

$\therefore b=\frac{7}{2}a$

$\therefore b=-\frac{3}{2}a$ 또는 $b=\frac{7}{2}a$

(i) $b=-\frac{3}{2}a$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(2, -3), (4, -6), \cdots, (32, -48)$,

$(-2, 3), (-4, 6), \cdots, (-32, 48)$

의 32개이다.

(ii) $b=\frac{7}{2}a$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(2, 7), (4, 14), \cdots, (14, 49)$,

$(-2, -7), (-4, -14), \cdots, (-14, -49)$

의 14개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$32+14=46$

답 46

17 전략 두 정사각형 A, B의 한 변의 길이를 각각 x cm, 정사각형 C의 한 변의 길이를 y cm라 하고, 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.

풀이 두 정사각형 A, B의 한 변의 길이를 각각 x cm, 정사각형 C의 한 변의 길이를 y cm $(x>y)$라 하자.

A, B는 모두 정사각형이고 두 정사각형 A, B의 넓이가 같으므로 두 정사각형 A, B의 한 변의 길이가 같다.

철사의 길이가 32 cm이므로

$2\cdot 4x+4y=32$

$\therefore 2x+y=8 \quad \cdots\cdots$ ㉠

세 정사각형의 넓이의 합이 22 cm^{2}이므로

$2x^2+y^2=22 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $\quad y=-2x+8 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $\quad 2x^2+(-2x+8)^2=22$

$3x^2-16x+21=0, \qquad (3x-7)(x-3)=0$

$\therefore x=\frac{7}{3}$ 또는 $x=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=\frac{7}{3}$, $y=\frac{10}{3}$ 또는 $x=3$, $y=2$

그런데 $x>y$이므로 $\quad x=3$, $y=2$

정사각형 C의 한 변의 길이는 2 cm이다.

따라서 정사각형 A의 한 변의 길이는 3 cm이다.

답 ③

07 일차부등식

Lecture 15 연립일차부등식

78쪽

01 $(a+1)x<1-a^2$에서

$(a+1)x<(1+a)(1-a)$

(i) $a>-1$일 때, $x<1-a$

(ii) $a=-1$일 때, $0\cdot x<0$이므로 해가 없다.

(iii) $a<-1$일 때, $x>1-a$

답 풀이 참조

02 $ax-a^2\geq 2(x-1)-a$에서

$ax-a^2\geq 2x-2-a$, $(a-2)x\geq a^2-a-2$

$\therefore (a-2)x\geq (a+1)(a-2)$

(i) $a>2$일 때, $x\geq a+1$

(ii) $a=2$일 때, $0\cdot x\geq 0$이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $a<2$일 때, $x\leq a+1$

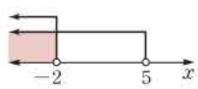
답 풀이 참조

03 $x+2<7$에서 $x<5$

$4x-3<x-9$에서 $3x<-6$ $\therefore x<-2$

따라서 연립부등식의 해는

$x<-2$



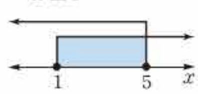
답 $x<-2$

04 $x+1\geq -3x+5$에서 $4x\geq 4$ $\therefore x\geq 1$

$3x-2\leq x+8$에서 $2x\leq 10$ $\therefore x\leq 5$

따라서 연립부등식의 해는

$1\leq x\leq 5$



답 $1\leq x\leq 5$

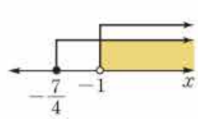
05 $-x+4<5$에서 $-x<1$ $\therefore x>-1$

$6x+1\geq 2(x-3)$에서 $6x+1\geq 2x-6$

$4x\geq -7$ $\therefore x\geq -\frac{7}{4}$

따라서 연립부등식의 해는

$x>-1$



답 $x>-1$

06 $3(x-2)>x+1$에서 $3x-6>x+1$

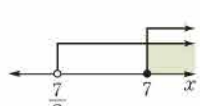
$2x>7$ $\therefore x>\frac{7}{2}$

$x+9\leq 2(x+1)$에서 $x+9\leq 2x+2$

$-x\leq -7$ $\therefore x\geq 7$

따라서 연립부등식의 해는

$x\geq 7$



답 $x\geq 7$

QBOX

07 $\frac{1}{12}x-\frac{5}{4}<-2x$에서 $x-15<-24x$

양변에 12를 곱한다.

$25x<15$ $\therefore x<\frac{3}{5}$

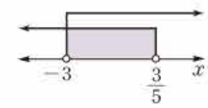
$0.2x-0.3>-0.9$에서 $2x-3>-9$

양변에 10을 곱한다.

$2x>-6$ $\therefore x>-3$

따라서 연립부등식의 해는

$-3<x<\frac{3}{5}$



답 $-3<x<\frac{3}{5}$

08 $\frac{1}{2}x+1<\frac{5}{6}$에서 $3x+6<5$

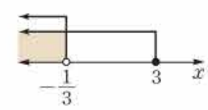
$3x<-1$ $\therefore x<-\frac{1}{3}$

$1.4x-2.7\leq 0.5x$에서 $14x-27\leq 5x$

$9x\leq 27$ $\therefore x\leq 3$

따라서 연립부등식의 해는

$x<-\frac{1}{3}$



답 $x<-\frac{1}{3}$

09 $0.6(x+1)\geq 0.3(x+2)$에서

$6(x+1)\geq 3(x+2)$, $6x+6\geq 3x+6$

$3x\geq 0$ $\therefore x\geq 0$

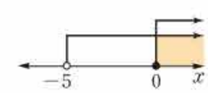
$\frac{x}{5}-\frac{x-3}{4}<1$에서 $4x-5(x-3)<20$

$-x+15<20$, $-x<5$

$\therefore x>-5$

따라서 연립부등식의 해는

$x\geq 0$



답 $x\geq 0$

표준+발전 유형 Q+Q

79쪽

01 ① $a=-2$, $b=-1$이면 $a<b<0$이지만 $ab>b$이다.

$ab=(-2)\cdot(-1)=2$

② $a=1$, $b=-1$, $c=-2$이면 $a>b>c$이지만 $a^2<bc$이다.

$a^2=1^2=1$, $bc=(-1)\cdot(-2)=2$

③ $ac<bc$에서 $c<0$이면 $a>b$이다.

④ $c^2>0$이므로 $\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$의 양변에 c^2을 곱하면

$a<b$

⑤ $a=-1$, $b=1$, $c=1$이면 $\frac{c^2}{a}<\frac{c^2}{b}$이지만 $a<b$이다.

$\frac{c^2}{a}=\frac{1^2}{-1}=-1$, $\frac{c^2}{b}=\frac{1^2}{1}=1$

답 ④

02 ㄱ. $a<b<0$에서 $a^3<b^3$

$ab>0$이므로 $a^3<b^3$의 양변을 ab로 나누면

$a<0$, $b<0$이므로 $ab>0$

$\frac{a^2}{b}<\frac{b^2}{a}$

ㄴ. $c>b>0$이므로 $c>b$에서 $\quad \frac{1}{c}<\frac{1}{b}$

$a>0$이므로 $\frac{1}{c}<\frac{1}{b}$의 양변에 a를 곱하면

$\frac{a}{c}<\frac{a}{b}$

ㄷ. $a<b$에서 $\quad a-c<b-c \quad \cdots\cdots$ ㉠

$c>d$에서 $\quad -c<-d$

$\therefore \underline{b-c<b-d} \quad \cdots\cdots$ ㉡

$-c<-d$의 양변에 b를 더하면 $b-c<b-d$

㉠, ㉡에서 $\quad a-c<b-d$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 $(a+1)x>a+b$의 해가 $x<-1$이므로

$\underline{a+1<0}$, $x<\frac{a+b}{a+1}$

부등식 $(a+1)x>a+b$의 부등호의 방향과 해 $x<-1$의 부등호의 방향이 반대이므로 부등식의 x의 계수는 음수이다.

$\frac{a+b}{a+1}=-1$에서 $\quad a+b=-a-1$

$\therefore 2a+b=-1$

따라서 $(2a+b)x\le4$에서 $\quad -x\le4$

$\therefore x\ge-4$ 답 $x\ge-4$

쌤한마디

부등식 $mx>n$의 해가 주어졌을 때, 상수 m, n의 조건은 다음과 같다.

부등식 $mx>n$의 해가
- $x>a$ ⇨ $m>0$, $\frac{n}{m}=a$
- $x<a$ ⇨ $m<0$, $\frac{n}{m}=a$
- 없다. ⇨ $m=0$, $n\ge0$
- 모든 실수이다. ⇨ $m=0$, $n<0$

04 $a^2x-3>b+4x$에서 $\quad (a^2-4)x>b+3$

이 부등식의 해가 모든 실수이려면

$a^2-4=0$, $b+3<0$

$\therefore a=2$, $b<-3$ 또는 $a=-2$, $b<-3$

따라서 정수 b의 최댓값은 -4이므로 $a+b$의 최댓값은

$2+(-4)=-2$ 답 -2

05 $\frac{1}{3}x+0.8\ge x-0.4$에서 $\quad \frac{1}{3}x+\frac{4}{5}\ge x-\frac{2}{5}$

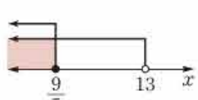
$5x+12\ge15x-6$, $\quad -10x\ge-18$

$\therefore x\le\frac{9}{5}$

$4x>5(x-2)-3$에서 $\quad 4x>5x-13$

$-x>-13 \quad \therefore x<13$

따라서 연립부등식의 해는



$x\le\frac{9}{5}$

이므로 자연수 x는 1의 1개이다. 답 1

06 $3(1-x)+5>4x+1$에서 $\quad -3x+8>4x+1$

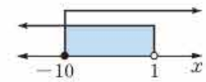
$-7x>-7 \quad \therefore x<1$

$\frac{2x-1}{3}\le\frac{3x+2}{4}$에서 $\quad 4(2x-1)\le3(3x+2)$

$8x-4\le9x+6$, $\quad -x\le10$

$\therefore x\ge-10$

따라서 연립부등식의 해는



$-10\le x<1$

$\therefore a=-10$, $b=1$

$ax+b<0$, 즉 $-10x+1<0$에서

$-10x<-1 \quad \therefore x>\frac{1}{10}$ 답 ①

Lecture 16 여러 가지 부등식

80쪽

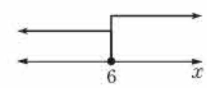
01 $\frac{1}{2}(x+2)\ge3x-14$에서 $\quad x+2\ge6x-28$

$-5x\ge-30 \quad \therefore x\le6$

$-x+7\le x-5$에서 $\quad -2x\le-12$

$\therefore x\ge6$

따라서 연립부등식의 해는



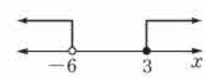
$x=6$ 답 $x=6$

02 $2x-1\ge5$에서 $\quad 2x\ge6 \quad \therefore x\ge3$

$3(x+1)>4x+9$에서 $\quad 3x+3>4x+9$

$-x>6 \quad \therefore x<-6$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

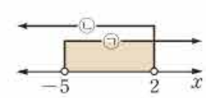
03 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} 2x-7<3x-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-2<x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad -x<5 \quad \therefore x>-5$

㉡에서 $\quad 2x<4 \quad \therefore x<2$

따라서 주어진 부등식의 해는



$-5<x<2$

답 $-5<x<2$

04 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} x-6\le4x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+3\le6x+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad -3x\le9 \quad \therefore x\ge-3$

㉡에서 $\quad -2x\le2 \quad \therefore x\ge-1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x\ge-1$

답 $x\ge-1$

05 $|6-x|\le2$에서 $\quad -2\le6-x\le2$

$-8\le-x\le-4 \quad \therefore 4\le x\le8$ 답 $4\le x\le8$

06 $1<|3x+7|<4$에서

(i) $3x+7\ge0$, 즉 $x\ge-\frac{7}{3}$일 때,

$1<3x+7<4$, $\quad -6<3x<-3$

$\therefore -2<x<-1$

그런데 $x\geq -\frac{7}{3}$이므로 $\quad -2<x<-1$

(ii) $3x+7<0$, 즉 $x<-\frac{7}{3}$일 때,

$1<-(3x+7)<4$, $\quad 1<-3x-7<4$

$8<-3x<11$ $\quad \therefore -\frac{11}{3}<x<-\frac{8}{3}$

그런데 $x<-\frac{7}{3}$이므로 $\quad -\frac{11}{3}<x<-\frac{8}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{11}{3}<x<-\frac{8}{3}$ 또는 $-2<x<-1$

답 $-\frac{11}{3}<x<-\frac{8}{3}$ 또는 $-2<x<-1$

07 $|x|+|x+1|<3$에서

(i) $x<-1$일 때,

$|x|=-x$, $|x+1|=-(x+1)$

$-x-(x+1)<3$, $\quad -2x-1<3$

$-2x<4$ $\quad \therefore x>-2$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad -2<x<-1$

(ii) $-1\leq x<0$일 때,

$|x|=-x$, $|x+1|=x+1$

$-x+x+1<3$에서 $1<3$이므로 $-1\leq x<0$에서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(iii) $x\geq 0$일 때,

$|x|=x$, $|x+1|=x+1$

$x+x+1<3$, $\quad 2x+1<3$

$2x<2$ $\quad \therefore x<1$

그런데 $x\geq 0$이므로 $\quad 0\leq x<1$

이상에서 주어진 부등식의 해는

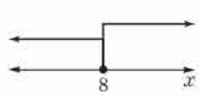
$-2<x<1$ 답 $-2<x<1$

표준+발전 유형 Q+Q

81쪽

01 ① 연립부등식의 해는

$x=8$

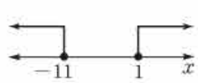


② $x+2\geq 3$에서 $\quad x\geq 1$

$2x-2\geq 3x+9$에서 $\quad -x\geq 11$

$\therefore x\leq -11$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



③ $x+4\geq 1$에서 $\quad x\geq -3$

$2x\geq 3(x+1)$에서 $\quad 2x\geq 3x+3$

$-x\geq 3$ $\quad \therefore x\leq -3$

따라서 연립부등식의 해는

$x=-3$

④ $-x\geq -12+3x$에서 $\quad -4x\geq -12$

$\therefore x\leq 3$

$2(x-1)\leq x$에서 $\quad 2x-2\leq x$

$\therefore x\leq 2$

따라서 연립부등식의 해는

$x\leq 2$

⑤ $2(3x-1)\leq 4(x+1)$에서

$6x-2\leq 4x+4$, $\quad 2x\leq 6$

$\therefore x\leq 3$

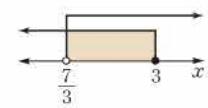
$1-\frac{x-4}{2}<\frac{2x-1}{2}$에서 $\quad 2-(x-4)<2x-1$

$-x+6<2x-1$, $\quad -3x<-7$

$\therefore x>\frac{7}{3}$

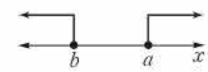
따라서 연립부등식의 해는

$\frac{7}{3}<x\leq 3$

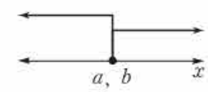


답 ②

02 ㄱ. $a>b$이면 연립부등식의 해는 없다.

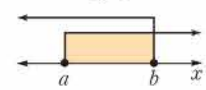


ㄴ. $a=b$이면 연립부등식의 해는 한 개이다.



ㄷ. $a<b$이면 연립부등식의 해는

$a\leq x\leq b$



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

03 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} 1+5(x-3)<x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+4\leq 2(x+1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad 5x-14<x+4$

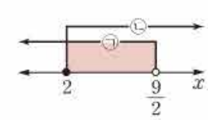
$4x<18$ $\quad \therefore x<\frac{9}{2}$

㉡에서 $\quad x+4\leq 2x+2$

$-x\leq -2$ $\quad \therefore x\geq 2$

따라서 주어진 부등식의 해는

$2\leq x<\frac{9}{2}$



이므로 $\quad a=2$, $b=\frac{9}{2}$

$\therefore ab=9$ 답 9

04 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} 4x-3<\frac{x}{2}+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{x}{2}+2<\frac{x-1}{3} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad 8x-6<x+4$

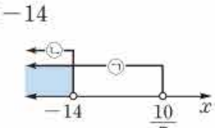
$7x<10$ $\quad \therefore x<\frac{10}{7}$

㉡에서 $\quad 3x+12<2(x-1)$

$3x+12<2x-2$ $\quad \therefore x<-14$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x<-14$



이므로 정수 x의 최댓값은 -15이다.

정수 x는 $-15, -16, -17, \cdots$

답 -15

05 $4x+3\leq x+a$에서 $\quad 3x\leq a-3$

$\therefore x\leq \frac{a-3}{3}$

07 일차부등식

$x-2<2x+5$에서 $\quad -x<7$

$\therefore x>-7$

이때 연립부등식의 해가 $b<x\leq 1$이므로

$\dfrac{a-3}{3}=1,\ b=-7$

$\therefore a=6,\ b=-7$

$\therefore a-b=13$ 답 13

$x\leq\dfrac{a-3}{3}$은 $x\leq 1$과 같고, $x>-7$은 $x>b$와 같다.

06 $-x+6\geq 3x+a$에서 $\quad -4x\geq a-6$

$\therefore x\leq\dfrac{6-a}{4}$

$7(x-1)\geq 5x+b$에서 $\quad 7x-7\geq 5x+b$

$2x\geq b+7 \quad \therefore x\geq\dfrac{b+7}{2}$

이때 연립부등식의 해가 $x=-1$이므로

$\dfrac{6-a}{4}=-1,\ \dfrac{b+7}{2}=-1$

$6-a=-4,\ b+7=-2$

$\therefore a=10,\ b=-9$

$\therefore a+b=1$ 답 ④

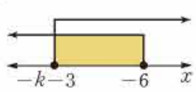
07 $0.4x+1.4\leq -1$에서 $\quad 4x+14\leq -10$

$4x\leq -24 \quad \therefore x\leq -6$

$3(x-1)\leq 4x+k$에서 $\quad 3x-3\leq 4x+k$

$-x\leq k+3 \quad \therefore x\geq -k-3$

이때 연립부등식이 해를 갖도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-k-3\leq -6$

$-k\leq -3 \quad \therefore k\geq 3$ 답 $k\geq 3$

$-k-3=-6$이면 주어진 연립부등식은
$\begin{cases} x\leq -6 \\ x\geq -6 \end{cases}$
이므로 연립부등식의 해는
$x=-6$

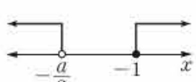
08 $5x+a<3x$에서 $\quad 2x<-a$

$\therefore x<-\dfrac{a}{2}$

$-(x+2)\leq x$에서 $\quad -x-2\leq x$

$-2x\leq 2 \quad \therefore x\geq -1$

이때 연립부등식이 해를 갖지 않도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-\dfrac{a}{2}\leq -1 \quad \therefore a\geq 2$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다. 답 2

$-\dfrac{a}{2}=-1$이면 주어진 연립부등식은
$\begin{cases} x<-1 \\ x\geq -1 \end{cases}$
이므로 연립부등식의 해는 없다.

09 $0.3(x+1)>x-1.1$에서 $\quad 3(x+1)>10x-11$

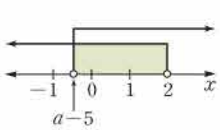
$3x+3>10x-11, \quad -7x>-14$

$\therefore x<2$

$x+a<2x+5$에서 $\quad -x<5-a$

$\therefore x>a-5$

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이므로 오른쪽 그림에서



$-1\leq a-5<0$

$\therefore 4\leq a<5$ 답 ②

쌤한마디

$a-5=-1$, 즉 $a=4$이면 연립부등식의 해가 $-1<x<2$이므로 정수인 해가 0, 1의 2개이고, $a-5=0$, 즉 $a=5$이면 연립부등식의 해가 $0<x<2$이므로 정수인 해가 1의 1개이다.
따라서 $a=4$는 주어진 조건을 만족시키고, $a=5$는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
이와 같이 정수인 해의 개수가 주어진 연립부등식에서 미지수의 값의 범위를 구할 때에는 양 끝값의 포함 여부를 반드시 확인하도록 한다.

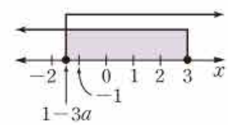
10 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{a}{2}\leq\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{6}$에서 $\quad 2x-3a\leq 3x-1$

$-x\leq 3a-1 \quad \therefore x\geq 1-3a$

$2x-1\geq 4x-7$에서 $\quad -2x\geq -6$

$\therefore x\leq 3$

이때 연립부등식을 만족시키는 음의 정수 x가 1개뿐이므로 오른쪽 그림에서



$-2<1-3a\leq -1$

$-3<-3a\leq -2 \quad \therefore \dfrac{2}{3}\leq a<1$

답 $\dfrac{2}{3}\leq a<1$

$1-3a=-2$이면 주어진 연립부등식의 해는
$-2\leq x\leq 3$
이므로 음의 정수 x는 $-2,\ -1$의 2개이다.

11 의자의 개수를 x라 하면 학생 수는 $5x+7$이므로

$6(x-5)+1\leq 5x+7\leq 6(x-5)+6$,

즉 $\begin{cases} 6(x-5)+1\leq 5x+7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+7\leq 6(x-5)+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 6x-29\leq 5x+7$

$\therefore x\leq 36$

㉡에서 $\quad 5x+7\leq 6x-24$

$-x\leq -31 \quad \therefore x\geq 31$

따라서 연립부등식의 해는

$31\leq x\leq 36$

이므로 의자의 개수가 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

12 합금 A의 개수를 x라 하면 합금 B의 개수는 $10-x$이므로

$\begin{cases} 15x+20(10-x)\leq 180 & \cdots\cdots ㉠ \\ 8x+6(10-x)\leq 72 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad -5x+200\leq 180$

$-5x\leq -20 \quad \therefore x\geq 4$

㉡에서 $\quad 2x+60\leq 72$

$2x\leq 12 \quad \therefore x\leq 6$

따라서 연립부등식의 해는

$4\leq x\leq 6$

이므로 만들 수 있는 합금 A의 최대 개수는 6이다.

답 6

13 $|2x-5| \le a$에서 $\quad -a \le 2x-5 \le a$

$5-a \le 2x \le 5+a$

$\therefore \frac{5-a}{2} \le x \le \frac{5+a}{2}$

이때 부등식의 해가 $-2 \le x \le b$이므로

$\frac{5-a}{2}=-2,\ \frac{5+a}{2}=b$

$5-a=-4,\ 5+a=2b$

$\therefore a=9,\ b=7$

$\therefore a+b=16$ 답 ⑤

14 $|9-4x|>13$에서

$9-4x<-13$ 또는 $9-4x>13$

$-4x<-22$ 또는 $-4x>4$

$\therefore x>\frac{11}{2}$ 또는 $x<-1$

따라서 자연수 x의 최솟값은 6이다. 답 ②

15 $|4x-1|-7 \le x$에서

(i) $4x-1 \ge 0$, 즉 $x \ge \frac{1}{4}$일 때,

$4x-1-7 \le x, \quad 4x-8 \le x$

$3x \le 8 \quad \therefore x \le \frac{8}{3}$

그런데 $x \ge \frac{1}{4}$이므로 $\quad \frac{1}{4} \le x \le \frac{8}{3}$

(ii) $4x-1<0$, 즉 $x<\frac{1}{4}$일 때,

$-(4x-1)-7 \le x, \quad -4x-6 \le x$

$-5x \le 6 \quad \therefore x \ge -\frac{6}{5}$

그런데 $x<\frac{1}{4}$이므로 $\quad -\frac{6}{5} \le x < \frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{6}{5} \le x \le \frac{8}{3}$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$-1+0+1+2=2$ 답 2

16 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} x+2 \le |2x-6| & \cdots\cdots ㉠ \\ |2x-6| \le 10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서

(i) $2x-6 \ge 0$, 즉 $x \ge 3$일 때,

$x+2 \le 2x-6, \quad -x \le -8$

$\therefore x \ge 8$

그런데 $x \ge 3$이므로 $\quad x \ge 8$

(ii) $2x-6<0$, 즉 $x<3$일 때,

$x+2 \le -(2x-6), \quad x+2 \le -2x+6$

$3x \le 4 \quad \therefore x \le \frac{4}{3}$

그런데 $x<3$이므로 $\quad x \le \frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 부등식 ㉠의 해는

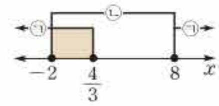
$x \le \frac{4}{3}$ 또는 $x \ge 8$

㉡에서 $\quad -10 \le 2x-6 \le 10$

$-4 \le 2x \le 16 \quad \therefore -2 \le x \le 8$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2 \le x \le \frac{4}{3}$ 또는 $x=8$



답 $-2 \le x \le \frac{4}{3}$ 또는 $x=8$

17 $|2x+4|-|x-1|<3$에서

$|2x+4|=-(2x+4)$, $|x-1|=-(x-1)$

(i) $x<-2$일 때,

$-(2x+4)+(x-1)<3$

$-x-5<3, \quad -x<8$

$\therefore x>-8$

그런데 $x<-2$이므로 $\quad -8<x<-2$

$|2x+4|=2x+4$, $|x-1|=-(x-1)$

(ii) $-2 \le x<1$일 때,

$2x+4+(x-1)<3$

$3x+3<3, \quad 3x<0$

$\therefore x<0$

그런데 $-2 \le x<1$이므로 $\quad -2 \le x<0$

$|2x+4|=2x+4$, $|x-1|=x-1$

(iii) $x \ge 1$일 때,

$2x+4-(x-1)<3$

$x+5<3 \quad \therefore x<-2$

그런데 $x \ge 1$이므로 해는 없다.

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-8<x<0$

따라서 정수 x는 $-7, -6, \cdots, -1$의 7개이다.

답 ②

18 $||x+1|-3| \le 4$에서 $\quad -4 \le |x+1|-3 \le 4$

$-1 \le |x+1| \le 7$

그런데 $|x+1| \ge 0$이므로 $\quad 0 \le |x+1| \le 7$

$-7 \le x+1 \le 7 \quad \therefore -8 \le x \le 6$

따라서 $M=6,\ m=-8$이므로

$M+m=-2$ 답 -2

다른 풀이 $||x+1|-3| \le 4$에서

(i) $x+1 \ge 0$, 즉 $x \ge -1$일 때,

$|(x+1)-3| \le 4, \quad |x-2| \le 4$

$-4 \le x-2 \le 4 \quad \therefore -2 \le x \le 6$

그런데 $x \ge -1$이므로 $\quad -1 \le x \le 6$

(ii) $x+1<0$, 즉 $x<-1$일 때,

$|-(x+1)-3| \le 4, \quad |-x-4| \le 4$

$-4 \le -x-4 \le 4, \quad 0 \le -x \le 8$

$\therefore -8 \le x \le 0$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad -8 \le x<-1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-8 \le x \le 6$

따라서 $M=6,\ m=-8$이므로 $\quad M+m=-2$

중단원 마무리

84쪽

01 전략 부등식의 기본 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $a=-1$, $b=-2$이면 $0<\frac{a}{b}<1$이지만 $a>b$이다.

ㄴ. $b^2>0$이므로 $\frac{a}{b}<1$에서 $ab<b^2$

$\frac{a}{b}<1$의 양변에 b^2을 곱한다.

ㄷ. $a^2>0$, $b^2>0$이므로 $0<\frac{a}{b}<1$에서

$0<\frac{a^3}{b}<a^2$, $0<ab<b^2$

$0<\frac{a}{b}<1$의 각 변에 a^2, b^2을 각각 곱한다.

$\therefore -b^2<\frac{a^3}{b}-ab<a^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

02 전략 부등식 $Ax<B$의 해가 모든 실수일 조건은 $A=0$, $B>0$임을 이용한다.

풀이 $a(a+2)x+b<3x-a$에서

$(a^2+2a-3)x<-a-b$

$\therefore (a+3)(a-1)x<-a-b$ …… ㉠

$|b|\leq 2$에서 $-2\leq b\leq 2$ …… ㉡

(i) $a=-3$일 때, 부등식 ㉠의 해가 모든 실수이려면

$0<3-b$ $\therefore b<3$

그런데 ㉡이므로 $-2\leq b\leq 2$

정수 b는 $-2, -1, 0, 1, 2$

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-3, -2)$, $(-3, -1)$, $(-3, 0)$, $(-3, 1)$, $(-3, 2)$의 5개

(ii) $a=1$일 때, 부등식 ㉠의 해가 모든 실수이려면

$0<-1-b$ $\therefore b<-1$

그런데 ㉡이므로 $-2\leq b<-1$

정수 b는 -2

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, -2)$의 1개

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+1=6$ 답 ③

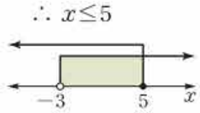
03 전략 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

풀이 $4x>x-9$에서 $3x>-9$ $\therefore x>-3$

$x+2\geq 2x-3$에서 $-x\geq -5$ $\therefore x\leq 5$

따라서 연립부등식의 해는

$-3<x\leq 5$



이므로 정수 x는 $-2, -1, \cdots, 5$의 8개이다. 답 ①

04 전략 두 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 각각 구한 후 공통부분을 찾는다.

풀이 조건 (가)에서

$x-2<0$, $-6-x<0$

또는 $x-2=0$ 또는 $-6-x=0$

$\therefore -6\leq x\leq 2$ …… ㉠ ⋯➊

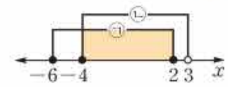
조건 (나)에서

$x+4>0$, $x-3<0$ 또는 $x+4=0$, $x-3\neq 0$

$\therefore -4\leq x<3$ …… ㉡ ⋯➋

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4\leq x\leq 2$



따라서 정수 x는 $-4, -3, \cdots, 2$의 7개이다. ⋯➌

답 7

단계	채점 기준	비율
➊	조건 (가)를 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
➋	조건 (나)를 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
➌	정수 x의 개수를 구할 수 있다.	40 %

쌤한마디

실수 a, b에 대하여

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면

$a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

② $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면

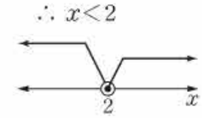
$a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\neq 0$

05 전략 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

풀이 $3x+5\geq x+9$에서 $2x\geq 4$ $\therefore x\geq 2$

$8-2x>6-x$에서 $-x>-2$ $\therefore x<2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 ⑤

06 전략 주어진 부등식을 $\begin{cases} A\leq B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 나타낸 후 연립부등식을 푼다.

풀이 주어진 부등식에서

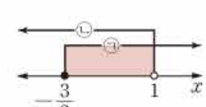
$\begin{cases} -4x+1\leq 7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 7<-3x+10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-4x\leq 6$ $\therefore x\geq -\frac{3}{2}$

㉡에서 $3x<3$ $\therefore x<1$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{3}{2}\leq x<1$



ㄱ. 정수인 해는 -1, 0의 2개이다.

ㄴ. 자연수인 해는 없다.

ㄷ. $x=-\frac{3}{2}$은 부등식의 해이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

07 전략 각 부등식의 해를 구한 후 해가 실수 1개인 경우를 생각한다.

풀이 $x+3\leq 3x-1$에서 $-2x\leq -4$ $\therefore x\geq 2$

$2(x+1) \le a+5$에서 $\quad 2x+2 \le a+5$

$2x \le a+3 \quad \therefore x \le \dfrac{a+3}{2}$

주어진 연립부등식을 만족시키는 실수 x가 1개뿐이므로

$\dfrac{a+3}{2}=2, \quad a+3=4$

$\therefore a=1$ 　　답 ②

08 전략 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 있도록 한다.

풀이 $3(5-x)+a \ge 2x+6$에서

$-3x+15+a \ge 2x+6, \quad -5x \ge -a-9$

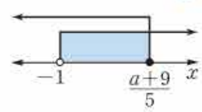
$\therefore x \le \dfrac{a+9}{5}$ 　　⋯ ❶

$\dfrac{2x-1}{3} > -\dfrac{x+5}{4}$에서 $\quad 4(2x-1) > -3(x+5)$

$8x-4 > -3x-15, \quad 11x > -11$

$\therefore x > -1$ 　　⋯ ❷

이때 연립부등식이 해를 갖도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-1 < \dfrac{a+9}{5}, \quad a+9 > -5$

$\therefore a > -14$ 　　⋯ ❸

답 $a > -14$

단계	채점 기준	비율
❶	$3(5-x)+a \ge 2x+6$의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷	$\dfrac{2x-1}{3} > -\dfrac{x+5}{4}$의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸	실수 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

09 전략 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 정수 x가 3개가 되도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} \dfrac{x+a}{2} \le \dfrac{4-x}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{4-x}{5} < 2x-8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad 5(x+a) \le 2(4-x)$

$5x+5a \le 8-2x, \quad 7x \le 8-5a$

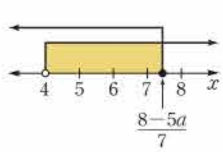
$\therefore x \le \dfrac{8-5a}{7}$

㉡에서 $\quad 4-x < 5(2x-8)$

$4-x < 10x-40, \quad -11x < -44$

$\therefore x > 4$

이때 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$7 \le \dfrac{8-5a}{7} < 8$

$49 \le 8-5a < 56, \quad 41 \le -5a < 48$

$\therefore -\dfrac{48}{5} < a \le -\dfrac{41}{5}$

따라서 a의 최댓값은 $-\dfrac{41}{5}$이다. 　　답 ④

Q BOX

$\dfrac{a+9}{5}=-1$이면 주어진 연립부등식은 $\begin{cases} x \le -1 \\ x > -1 \end{cases}$ 이므로 연립부등식의 해는 없다.

$m<n$인 정수 m, n에 대하여 부등식 $m \le x \le n$을 만족시키는 정수 x의 개수 ➡ $n-m+1$

$\dfrac{8-5a}{7}=8$이면 주어진 부등식의 해는 $4 < x \le 8$ 이므로 정수 x는 5, 6, 7, 8의 4개이다.

한 판이 8조각이므로 8의 배수이다.

$x-3$이 2의 배수이어야 하므로 x는 홀수이다.

10 전략 학생 수를 x라 하고 피자 조각의 개수를 x로 나타낸 후 부등식을 세운다.

풀이 학생 수를 x라 하면 피자 조각의 개수는 $4(x-3)$이므로

$3x+1 \le 4(x-3) \le 3x+8$,

즉 $\begin{cases} 3x+1 \le 4(x-3) & \cdots\cdots ㉠ \\ 4(x-3) \le 3x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 3x+1 \le 4x-12$

$-x \le -13 \quad \therefore x \ge 13$

㉡에서 $\quad 4x-12 \le 3x+8 \quad \therefore x \le 20$

따라서 연립부등식의 해는

$13 \le x \le 20$

이때 x는 자연수이고, $4(x-3)$이 8의 배수이어야 하므로 $\quad x=13, 15, 17, 19$

즉 최소 학생 수는 13이다. 　　답 13

11 전략 농도가 a %인 소금물 x g에 들어 있는 소금의 양은 $\dfrac{a}{100}x$ g임을 이용하여 부등식을 세운다.

풀이 농도가 20 %인 소금물 200 g에 들어 있는 소금의 양은 $\quad \dfrac{20}{100} \cdot 200 = 40(\text{g})$

농도가 4 %인 소금물을 x g 섞는다고 하면

$\dfrac{12}{100}(200+x) \le 40 + \dfrac{4}{100}x \le \dfrac{14}{100}(200+x)$,

즉 $\begin{cases} \dfrac{12}{100}(200+x) \le 40 + \dfrac{4}{100}x & \cdots\cdots ㉠ \\ 40 + \dfrac{4}{100}x \le \dfrac{14}{100}(200+x) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 12(200+x) \le 4000+4x$

$2400+12x \le 4000+4x, \quad 8x \le 1600$

$\therefore x \le 200$

㉡에서 $\quad 4000+4x \le 14(200+x)$

$4000+4x \le 2800+14x, \quad -10x \le -1200$

$\therefore x \ge 120$

따라서 연립부등식의 해는

$120 \le x \le 200$

이므로 농도가 4 %인 소금물을 120 g 이상 200 g 이하로 섞어야 한다. 　　답 120 g 이상 200 g 이하

12 전략 부등식 $|x-k| \le l \ (l>0)$의 해는 $k-l \le x \le k+l$임을 이용한다.

풀이 $|x-3| \le a$에서 $\quad -a \le x-3 \le a$

$\therefore 3-a \le x \le 3+a$

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는

$(3+a)-(3-a)+1=2a+1$

따라서 $2a+1=15$이므로 $\quad 2a=14$

$\therefore a=7$ 　　답 ③

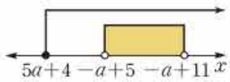
13 전략 연립부등식의 해는 각 부등식의 해의 공통부분임을 이용한다.

풀이 $x-5a \ge 4$에서 $\quad x \ge 5a+4$

$|x+a-8|<3$에서　　$-3<x+a-8<3$

　$\therefore -a+5<x<-a+11$

이때 연립부등식의 해가 부등식 $|x+a-8|<3$의 해와 같으려면 오른쪽 그림에서



　$5a+4\le -a+5$,　　$6a\le 1$

$5a+4>-a+5$이면 주어진 연립부등식의 해는 $5a+4\le x<-a+11$이 되어 조건에 맞지 않는다.

　$\therefore a\le \frac{1}{6}$

따라서 정수 a의 최댓값은 0이다.　　　답 ①

14 전략 x의 값의 범위를 $x\ge 1$, $x<1$로 나누어 푼다.

풀이 $2|x-1|+x\le 4$에서

(i) $x\ge 1$일 때,

　$2(x-1)+x\le 4$,　　$3x-2\le 4$

　$3x\le 6$　　$\therefore x\le 2$

　그런데 $x\ge 1$이므로　　$1\le x\le 2$

(ii) $x<1$일 때,

　$-2(x-1)+x\le 4$,　　$-x+2\le 4$

　$-x\le 2$　　$\therefore x\ge -2$

　그런데 $x<1$이므로　　$-2\le x<1$

(i), (ii)에서 부등식의 해는

　$-2\le x\le 2$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

　$(-2)+(-1)+0+1+2=0$　　　답 ③

15 전략 $|px+q|<rx+s$ 꼴의 부등식은 $px+q\ge 0$일 때와 $px+q<0$일 때로 나누어 푼다.

풀이 $|7-2x|<x+4$에서

(i) $7-2x\ge 0$, 즉 $x\le \frac{7}{2}$일 때,

　$7-2x<x+4$,　　$-3x<-3$

　$\therefore x>1$

　그런데 $x\le \frac{7}{2}$이므로　　$1<x\le \frac{7}{2}$

(ii) $7-2x<0$, 즉 $x>\frac{7}{2}$일 때,

　$-(7-2x)<x+4$,　　$-7+2x<x+4$

　$\therefore x<11$

　그런데 $x>\frac{7}{2}$이므로　　$\frac{7}{2}<x<11$

(i), (ii)에서 부등식 $|7-2x|<x+4$의 해는

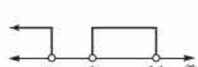
　$1<x<11$

$a(x-2)>a^2-2x$에서　　$ax-2a>a^2-2x$

　$\therefore (a+2)x>a(a+2)$

(iii) $a<-2$일 때,　　$x<a$

　주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서　　$a\le 1$



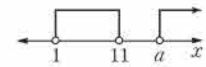
　그런데 $a<-2$이므로　　$a<-2$

(iv) $a=-2$일 때, $0\cdot x>0$이므로 해는 없다.

　즉 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않는다.

(v) $a>-2$일 때,　　$x>a$

　주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서　　$a\ge 11$



　그런데 $a>-2$이므로　　$a\ge 11$

(iii)~(v)에서　　$a\le -2$ 또는 $a\ge 11$

따라서 $m=-2$, $M=11$이므로

　$m+M=9$　　　답 9

16 전략 $|x-a|+|x-b|<c\ (a<b)$ 꼴의 부등식은 x의 값의 범위를 $x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$로 나누어 푼다.

풀이 $|x+3|+|x-1|\le k$에서

(i) $x<-3$일 때,

　$-(x+3)-(x-1)\le k$,　　$-2x-2\le k$

　$-2x\le k+2$　　$\therefore x\ge -\frac{k+2}{2}$

　그런데 $x<-3$이므로　　$-\frac{k+2}{2}\le x<-3$

$k>4$에서　$k+2>6$

$\therefore -\frac{k+2}{2}<-3$

(ii) $-3\le x<1$일 때,

　$x+3-(x-1)\le k$에서 $4\le k$이므로 $-3\le x<1$에서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(iii) $x\ge 1$일 때,

　$x+3+x-1\le k$,　　$2x+2\le k$

　$2x\le k-2$　　$\therefore x\le \frac{k-2}{2}$

　그런데 $x\ge 1$이므로　　$1\le x\le \frac{k-2}{2}$

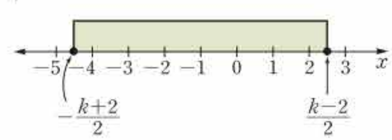
$k>4$에서　$k-2>2$

$\therefore \frac{k-2}{2}>1$

이상에서 주어진 부등식의 해는

　$-\frac{k+2}{2}\le x\le \frac{k-2}{2}$

이때 부등식을 만족시키는 정수 x가 7개이므로 다음 그림에서



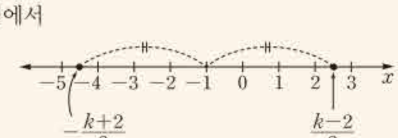
　$2\le \frac{k-2}{2}<3$,　　$4\le k-2<6$

　$\therefore 6\le k<8$　　　답 $6\le k<8$

$-5<-\frac{k+2}{2}\le -4$에서 k의 값의 범위를 구하여도 $6\le k<8$로 같다.

쌤한마디

$-\frac{k+2}{2}=-1-\frac{k}{2}$는 -1보다 $\frac{k}{2}$만큼 작은 수이고, $\frac{k-2}{2}=-1+\frac{k}{2}$는 -1보다 $\frac{k}{2}$만큼 큰 수이므로 $-\frac{k+2}{2}$와 $\frac{k-2}{2}$는 수직선에서 -1을 기준으로 같은 거리만큼 떨어져 있는 수이다. 따라서 $-\frac{k+2}{2}\le x\le \frac{k-2}{2}$를 만족시키는 정수 x가 7개이려면 정수 x는 -4, -3, $\cdots$, 2이어야 한다. 즉 다음 그림에서



$-5<-\frac{k+2}{2}\le -4$, $2\le \frac{k-2}{2}<3$이어야 한다.

17 전략 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하였을 때 5가 되는 수는 4.5 이상 5.5 미만인 수임을 이용한다.

풀이 $\frac{a}{b}$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하면 5이므로 $\quad 4.5 \le \frac{a}{b} < 5.5$

b는 자연수이므로 각 변에 $2b$를 곱하면

$$9b \le 2a < 11b$$

$2a-5b=23$, 즉 $2a=5b+23$을 위의 식에 대입하면

$$9b \le 5b+23 < 11b,$$

$$\text{즉 } \begin{cases} 9b \le 5b+23 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5b+23 < 11b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad 4b \le 23 \quad \therefore b \le \frac{23}{4}$

㉡에서 $\quad -6b < -23 \quad \therefore b > \frac{23}{6}$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$\frac{23}{6} < b \le \frac{23}{4}$$

$\frac{23}{6}=3.8\cdots$, $\frac{23}{4}=5.75$

이때 b는 자연수이므로

$$b=4 \text{ 또는 } b=5$$

그런데 $b=4$이면 $a=\frac{43}{2}$이므로 a는 자연수가 아니다.

$2a-5b=23$에 $b=4$를 대입하면
$2a-20=23$
$2a=43 \quad \therefore a=\frac{43}{2}$

따라서 $b=5$, $a=24$이므로

$ab=120$ 답 120

18 전략 주어진 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 정수 8개가 포함되도록 하는 a의 값을 구한다.

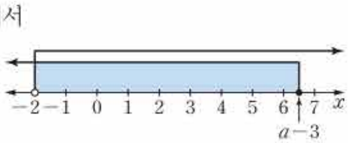
풀이 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} 3x-1 < 5x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+3 \le 4x+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad -2x < 4 \quad \therefore x > -2$

㉡에서 $\quad x \le a-3$

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 8개이므로 다음 그림에서



$6 \le a-3 < 7 \quad \therefore 9 \le a < 10$

따라서 구하는 자연수 a의 값은 9이다. 답 9

08 이차부등식

Lecture 17 이차부등식 Ⓛ 89쪽

01 답 $x<-1$ 또는 $x>2$

02 답 $-1 \le x \le 2$

03 답 $x \le \alpha$ 또는 $x \ge \gamma$

04 답 $\beta < x < \delta$

05 $x^2+4x-5 \le 0$에서 $\quad (x+5)(x-1) \le 0$
$\therefore -5 \le x \le 1$ 답 $-5 \le x \le 1$

06 $-2x^2+3x+2<0$에서 $\quad 2x^2-3x-2>0$
$(2x+1)(x-2)>0 \quad \therefore x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$
답 $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$

07 $x^2+5x+9 \le -x$에서 $\quad x^2+6x+9 \le 0$
그런데 $x^2+6x+9=(x+3)^2 \ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=-3$이다. 답 $x=-3$

$x^2+5x+9 \le -x$에서 $x=-3$이면
(좌변)$=9-15+9$
$=3$,
(우변)$=3$
이므로 부등식이 성립한다.

08 $x^2+2x<2x^2-3$에서 $\quad x^2-2x-3>0$
$(x+1)(x-3)>0 \quad \therefore x<-1$ 또는 $x>3$
답 $x<-1$ 또는 $x>3$

09 $(x+2)(x-1)<0$에서 $\quad x^2+x-2<0$
답 $x^2+x-2<0$

10 $(x+4)(x-7) \ge 0$에서 $\quad x^2-3x-28 \ge 0$
답 $x^2-3x-28 \ge 0$

11 $(x-3)^2>0$에서 $\quad x^2-6x+9>0$
답 $x^2-6x+9>0$

12 $(x-5)^2 \le 0$에서 $\quad x^2-10x+25 \le 0$
답 $x^2-10x+25 \le 0$

13 $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)<0$에서
$(3x-1)(x-1)<0 \quad \therefore 3x^2-4x+1<0$
답 $3x^2-4x+1<0$

14 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+kx+k-8$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+kx+k-8=0$의 판별식을 D라 하면

그래프가 위로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

$$D=k^2-4\cdot(-1)\cdot(k-8) \le 0$$

$k^2+4k-32\le 0, \quad (k+8)(k-4)\le 0$

$\therefore -8\le k\le 4$ 답 $-8\le k\le 4$

15 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$k>0$ ······ ㉠

이차함수 $y=kx^2+6kx+9$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $kx^2+6kx+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3k)^2-k\cdot 9<0$

$9k^2-9k<0, \quad 9k(k-1)<0$

$\therefore 0<k<1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<k<1$ 답 $0<k<1$

16 주어진 이차부등식의 해가 존재하지 않으려면 이차부등식 $x^2+4x+k-5\ge 0$이 항상 성립해야 한다.

따라서 이차함수 $y=x^2+4x+k-5$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2+4x+k-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot(k-5)\le 0$

$-k+9\le 0 \quad \therefore k\ge 9$ 답 $k\ge 9$

표준+발전 **유형 Q+Q** 90쪽

01 $f(x)g(x)>0$에서

$f(x)>0, g(x)>0$ 또는 $f(x)<0, g(x)<0$

(i) $f(x)>0, g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$a<x<c$

(ii) $f(x)<0, g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x>d$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는

$a<x<c$ 또는 $x>d$ 답 ⑤

02 부등식 $0<f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있고 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$0<x<1$

따라서 $\alpha=0, \beta=1$이므로

$\alpha+\beta=1$ 답 1

03 $(4x-1)(x+3)<2-8x$에서

$4x^2+11x-3<2-8x, \quad 4x^2+19x-5<0$

$(x+5)(4x-1)<0 \quad \therefore -5<x<\frac{1}{4}$

따라서 정수 x는 $-4, -3, -2, -1, 0$의 5개이다.

답 5

Q BOX

그래프가 아래로 볼록하고, x축과 만나지 않는다.

(두 근의 합)$=\frac{1}{2}+\frac{5}{3}$
$=\frac{13}{6}$,
(두 근의 곱)$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}$
$=\frac{5}{6}$

$x<-7$ 또는 $x>0$

$-4<x<1$

04 ① $x^2+8x+16=(x+4)^2\ge 0$

따라서 $x^2+8x+16\le 0$의 해는 $x=-4$이다.

② $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\ge 1$

따라서 $x^2-4x+5>0$의 해는 모든 실수이다.

③ $-9x^2+6x-5\ge 0$에서 $9x^2-6x+5\le 0$

그런데 $9x^2-6x+5=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+4\ge 4$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

④ $12x<4x^2+9$에서 $4x^2-12x+9>0$

그런데 $4x^2-12x+9=(2x-3)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x\ne\frac{3}{2}$인 모든 실수이다.

⑤ $3(x^2+2)\le 2x^2+2x+5$에서

$3x^2+6\le 2x^2+2x+5 \quad \therefore x^2-2x+1\le 0$

그런데 $x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=1$이다.

답 ③

05 이차부등식 $ax^2+bx-5>0$의 해가 $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}$이므로 $a<0$

해가 $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)<0 \quad \therefore x^2-\frac{13}{6}x+\frac{5}{6}<0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-\frac{13}{6}ax+\frac{5}{6}a>0$ ($\because a<0$)

이 부등식이 $ax^2+bx-5>0$과 같으므로

$b=-\frac{13}{6}a, \; -5=\frac{5}{6}a$

따라서 $a=-6, b=13$이므로

$a+b=7$ 답 7

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx-5=0$의 두 근이 $\frac{1}{2}, \frac{5}{3}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{a}=\frac{13}{6}, \; -\frac{5}{a}=\frac{5}{6}$

$\therefore a=-6, b=13$

$\therefore a+b=7$

06 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{4}$이므로 $a<0$

해가 $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{4}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)<0 \quad \therefore x^2+\frac{1}{12}x-\frac{1}{12}<0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2+\frac{1}{12}ax-\frac{1}{12}a>0$ ($\because a<0$)

이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로

$b=\frac{1}{12}a, \; c=-\frac{1}{12}a$

이것을 $cx^2+bx+a<0$에 대입하면

$-\frac{1}{12}ax^2+\frac{1}{12}ax+a<0$

$x^2-x-12<0$ ($\because a<0$)

$(x+3)(x-4)<0$ $\quad\therefore -3<x<4$ 답 ③

Q BOX: $a<0$에서 $-\frac{12}{a}>0$이므로 부등식의 양변에 $-\frac{12}{a}$를 곱하면 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

07 $f(x)<0$의 해가 $1<x<6$이므로

$f(x)=a(x-1)(x-6)$ $(a>0)$

이라 하면

$f(2x-1)=a(2x-1-1)(2x-1-6)$

$=2a(x-1)(2x-7)$

$f(2x-1)<0$, 즉 $2a(x-1)(2x-7)<0$에서

$(x-1)(2x-7)<0$ ($\because a>0$)

$\therefore 1<x<\frac{7}{2}$ 답 $1<x<\frac{7}{2}$

08 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+4)(x-2)$ $(a>0)$

라 하면

$f\left(\frac{3x-8}{5}\right)=a\left(\frac{3x-8}{5}+4\right)\left(\frac{3x-8}{5}-2\right)$

$=\frac{9a}{25}(x+4)(x-6)$

$f\left(\frac{3x-8}{5}\right)\le0$, 즉 $\frac{9a}{25}(x+4)(x-6)\le0$에서

$(x+4)(x-6)\le0$ ($\because a>0$)

$\therefore -4\le x\le6$ 답 ③

다른 풀이 $f\left(\frac{3x-8}{5}\right)\le0$에서 $\frac{3x-8}{5}=t$로 놓으면 주어진 그래프에서 $f(t)\le0$을 만족시키는 t의 값의 범위는 $-4\le t\le2$이므로

$-4\le\frac{3x-8}{5}\le2$, $\quad -20\le3x-8\le10$

$-12\le3x\le18$ $\quad\therefore -4\le x\le6$

09 $x^2-3x-4<2|x+1|$에서

(i) $x\ge-1$일 때,

Q BOX: $|x+1|=x+1$

$x^2-3x-4<2(x+1)$, $\quad x^2-5x-6<0$

$(x+1)(x-6)<0$ $\quad\therefore -1<x<6$

그런데 $x\ge-1$이므로 $\quad -1<x<6$

(ii) $x<-1$일 때,

Q BOX: $|x+1|=-(x+1)$

$x^2-3x-4<-2(x+1)$, $\quad x^2-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0$ $\quad\therefore -1<x<2$

그런데 $x<-1$이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1<x<6$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=6$이므로

$\beta-\alpha=7$ 답 ④

10 $|x^2-1|>5$에서

$x^2-1<-5$ 또는 $x^2-1>5$

(i) $x^2-1<-5$일 때, $\quad x^2+4<0$

그런데 $x^2+4\ge4$이므로 $x^2+4<0$의 해는 없다.

(ii) $x^2-1>5$일 때, $\quad x^2-6>0$

$(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})>0$

$\therefore x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

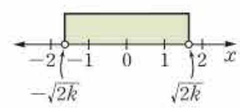
$x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$

답 $x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$

11 $x^2-2k<0$에서 $\quad (x+\sqrt{2k})(x-\sqrt{2k})<0$

$\therefore -\sqrt{2k}<x<\sqrt{2k}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$1<\sqrt{2k}\le2$, $\quad 1<2k\le4$

Q BOX: $\sqrt{2k}=1$이면 이차부등식의 해는 $-1<x<1$ 이므로 정수 x는 0의 1개이다.

$\therefore \frac{1}{2}<k\le2$

따라서 자연수 k는 1, 2이므로 구하는 합은

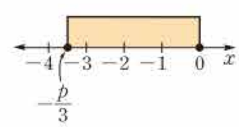
$1+2=3$ 답 ②

12 $3x^2+px\le0$에서 $\quad x(3x+p)\le0$

(i) $p>0$일 때,

$-\frac{p}{3}\le x\le0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 4개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-4<-\frac{p}{3}\le-3$ $\quad\therefore 9\le p<12$

Q BOX: $-\frac{p}{3}=-4$이면 이차부등식의 해는 $-4\le x\le0$ 이므로 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0의 5개이다.

따라서 정수 p는 9, 10, 11이다.

(ii) $p=0$일 때,

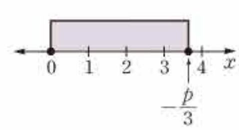
$x^2\le0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x는 0뿐이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $p<0$일 때,

$0\le x\le-\frac{p}{3}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 4개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$3\le-\frac{p}{3}<4$ $\quad\therefore -12<p\le-9$

Q BOX: $-\frac{p}{3}=4$이면 이차부등식의 해는 $0\le x\le4$ 이므로 정수 x는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

따라서 정수 p는 -11, -10, -9이다.

이상에서 정수 p의 최댓값은 11, 최솟값은 -11이므로

$M=11$, $m=-11$

$\therefore M+m=0$ 답 0

13 이차부등식 $x^2+(k-6)x+2k\le0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $x^2+(k-6)x+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-6)^2-4\cdot1\cdot2k=0$

$k^2-20k+36=0$, $\quad (k-2)(k-18)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=18$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$2+18=20$ 답 20

14 이차부등식 $(1-a)x^2+2(1-a)x-1\geq0$의 해가 오직 한 개 존재하므로

$1-a<0 \quad \therefore a>1$ …… ㉠

이차방정식 $(1-a)x^2+2(1-a)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1-a)^2-(1-a)\cdot(-1)=0$

$a^2-3a+2=0, \quad (a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$ 답 ①

15 이차부등식 $3x^2+2(a-2)x+3\leq0$이 해를 가지려면 이차방정식 $3x^2+2(a-2)x+3=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-3\cdot3\geq0$

$a^2-4a-5\geq0, \quad (a+1)(a-5)\geq0$

$\therefore a\leq-1$ 또는 $a\geq5$

따라서 음의 정수 a의 최댓값은 -1이다. 답 -1

16 $kx^2+4x+k>0$에서

$k=0$이면 주어진 부등식은 이차부등식이 아니므로 $k\neq0$이다.

(i) $k>0$일 때,

이차함수 $y=kx^2+4x+k$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $k<0$일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $kx^2+4x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-k\cdot k>0$

$k^2-4<0, \quad (k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$

그런데 $k<0$이므로 $\quad -2<k<0$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는

$-2<k<0$ 또는 $k>0$

답 $-2<k<0$ 또는 $k>0$

17 이차부등식 $x^2+4ax-5a(a+1)\geq0$의 해가 모든 실수이어야 하므로 이차방정식 $x^2+4ax-5a(a+1)=0$의 판별식을 D라 하면

$y=x^2+4ax-5a(a+1)$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

$\frac{D}{4}=(2a)^2-\{-5a(a+1)\}\leq0$

$9a^2+5a\leq0, \quad a(9a+5)\leq0$

$\therefore -\frac{5}{9}\leq a\leq0$ 답 $-\frac{5}{9}\leq a\leq0$

18 이차부등식 $5ax^2+8ax+3a-2<0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$y=5ax^2+8ax+3a-2$의 그래프가 위로 볼록하고, x축과 만나지 않는다.

$a<0$ …… ㉠

이차방정식 $5ax^2+8ax+3a-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(4a)^2-5a(3a-2)<0$

$a^2+10a<0, \quad a(a+10)<0$

$\therefore -10<a<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 a의 값의 범위는

$-10<a<0$

따라서 정수 a는 $-9, -8, \cdots, -1$의 9개이다.

답 ⑤

19 주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 이차부등식 $x^2-2(a+4)x-3(a+4)\geq0$이 항상 성립해야 한다.

$y=x^2-2(a+4)x-3(a+4)$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

이차방정식 $x^2-2(a+4)x-3(a+4)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+4)\}^2-\{-3(a+4)\}\leq0$

$a^2+11a+28\leq0, \quad (a+7)(a+4)\leq0$

$\therefore -7\leq a\leq-4$

따라서 $M=-4$, $m=-7$이므로

$Mm=28$ 답 28

20 주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 이차부등식 $(k-3)x^2-2(k-3)x-2\leq0$이 항상 성립해야 하므로

$y=(k-3)x^2-2(k-3)x-2$의 그래프가 위로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

$k-3<0 \quad \therefore k<3$ …… ㉠

이차방정식 $(k-3)x^2-2(k-3)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-3)\}^2-(k-3)\cdot(-2)\leq0$

$k^2-4k+3\leq0, \quad (k-1)(k-3)\leq0$

$\therefore 1\leq k\leq3$ …… ㉡

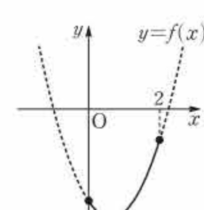
㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는

$1\leq k<3$ 답 $1\leq k<3$

21 $x^2+ax\leq-a^2+4$에서

$x^2+ax+a^2-4\leq0$

$f(x)=x^2+ax+a^2-4$라 하면 $0\leq x\leq2$에서 $f(x)\leq0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(0)\leq0$에서 $\quad a^2-4\leq0$

$(a+2)(a-2)\leq0$

$\therefore -2\leq a\leq2$ …… ㉠

$f(2)\leq0$에서 $\quad 4+2a+a^2-4\leq0$

$a^2+2a\leq0, \quad a(a+2)\leq0$

$\therefore -2\leq a\leq0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 a의 값의 범위는

$-2\leq a\leq0$ 답 ④

22 $3x^2-x-2\le0$에서 $\quad(3x+2)(x-1)\le0$

$\therefore -\frac{2}{3}\le x\le1$

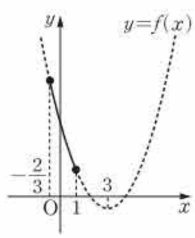
$-x^2+3x-4\le x^2-9x+k$에서

$2x^2-12x+k+4\ge0$

$f(x)=2x^2-12x+k+4$라 하면

$f(x)=2(x-3)^2+k-14$

$-\frac{2}{3}\le x\le1$에서 $f(x)\ge0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-\frac{2}{3}\le x\le1$에서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최소이므로 $f(1)\ge0$에서

$2-12+k+4\ge0 \quad \therefore k\ge6$

따라서 k의 최솟값은 6이다. 답 6

23 $y=x^2+4x+1$의 그래프가 직선 $y=kx-8$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2+4x+1>kx-8$,

즉 $x^2-(k-4)x+9>0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(k-4)x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k-4)\}^2-4\cdot1\cdot9<0$

$k^2-8k-20<0, \quad (k+2)(k-10)<0$

$\therefore -2<k<10$

따라서 정수 k의 최댓값은 9, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 9, 최솟값: -1

쌤한마디

23번의 '항상 위쪽에 있도록'이라는 말에서 '부등식이 항상 성립하도록'이라는 말을 떠올릴 수 있어야 한다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있다는 것은 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립함을 뜻한다.
따라서 부등식 $f(x)-g(x)>0$이 항상 성립할 조건을 이용한다.

24 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=x+3$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$x^2+ax+b<x+3$,

즉 $x^2+(a-1)x+b-3<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

의 해와 같으므로 ㉠의 해가 $-2<x<1$이다.

이때 해가 $-2<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-1)<0 \quad \therefore x^2+x-2<0$

이 부등식이 ㉠과 같으므로

$a-1=1,\ b-3=-2 \quad \therefore a=2,\ b=1$

$\therefore a+b=3$ 답 ②

25 도로의 폭을 x m라 하면 도로를 제외한 땅을 직사각형 모양으로 이어 붙였을 때, 가로, 세로의 길이는 각각

$(60-x)$ m, $(45-x)$ m

이므로 도로를 제외한 땅의 넓이가 1350 m^2 이상이 되려면

$(60-x)(45-x)\ge1350$

$x^2-105x+1350\ge0, \quad (x-15)(x-90)\ge0$

$\therefore x\le15$ 또는 $x\ge90$

그런데 $\underline{0<x<45}$이어야 하므로

$x>0,\ 60-x>0,\ 45-x>0$이어야 하므로 $0<x<45$

$0<x\le15$

따라서 도로의 최대 폭은 15 m이다. 답 15 m

26 가격을 $2000x$원 할인한다고 하면 하루 판매량이 $5x$장 늘어나므로 하루 판매액은

$\underbrace{(40000-2000x)}_{\text{할인된 가격}}\underbrace{(20+5x)}_{\text{늘어난 하루 판매량}}$(원)

하루 판매액이 128만 원 이상이 되려면

$(40000-2000x)(20+5x)\ge1280000$

$(20-x)(4+x)\ge128, \quad x^2-16x+48\le0$

$(x-4)(x-12)\le0 \quad \therefore 4\le x\le12$

따라서 $8000\le2000x\le24000$이므로 할인할 수 있는 금액의 최솟값은 8000원이다.

답 8000원

Lecture 18 연립이차부등식

Ⓛ 94쪽

01 $-2(x-2)<-x+3$에서 $\quad -2x+4<-x+3$

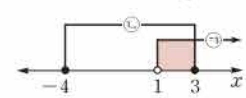
$\therefore x>1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+x-12\le0$에서 $\quad (x+4)(x-3)\le0$

$\therefore -4\le x\le3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<x\le3$



답 $1<x\le3$

02 $x^2-2x-15\le0$에서 $\quad (x+3)(x-5)\le0$

$\therefore -3\le x\le5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

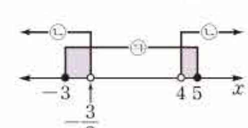
$2x^2-5x-12>0$에서 $\quad (2x+3)(x-4)>0$

$\therefore x<-\frac{3}{2}$ 또는 $x>4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x<-\frac{3}{2}$

또는 $4<x\le5$



답 $-3\le x<-\frac{3}{2}$ 또는 $4<x\le5$

03 주어진 부등식에서

$\begin{cases}2x^2-4x-10\le x^2-7x & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-7x\le-3x & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x^2+3x-10\le0$

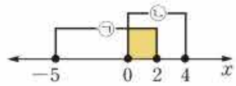
$(x+5)(x-2)\le0$ $\therefore -5\le x\le2$

㉡에서 $x^2-4x\le0$

$x(x-4)\le0$ $\therefore 0\le x\le4$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$0\le x\le2$



답 $0\le x\le2$

04 이차방정식 $x^2-x+1-k=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

이차방정식의 근의 부호는 실근인 경우에만 생각할 수 있다.

(i) $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(1-k)\ge0$

$4k-3\ge0$, $4k\ge3$ $\therefore k\ge\frac{3}{4}$

(ii) $\alpha+\beta=1>0$

(iii) $\alpha\beta=1-k>0$ $\therefore k<1$

이상에서 공통부분을 구하면

$\frac{3}{4}\le k<1$

답 $\frac{3}{4}\le k<1$

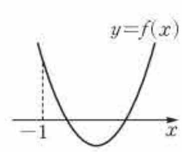
05 이차방정식 $x^2-(k+1)x+k^2-4=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=k^2-4<0$, $(k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$

답 $-2<k<2$

06 $f(x)=x^2-2x+k-4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(k-4)\ge0$

$-k+5\ge0$ $\therefore k\le5$

(ii) $f(-1)=1+2+k-4>0$ $\therefore k>1$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이고 $1>-1$이다.

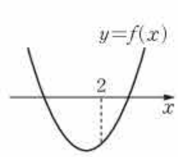
이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$이다.

이상에서 공통부분을 구하면

$1<k\le5$

답 $1<k\le5$

07 $f(x)=x^2+(k^2+2)x-k-11$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(2)<0$이어야 하므로

$4+(k^2+2)\cdot2-k-11<0$

$2k^2-k-3<0$, $(k+1)(2k-3)<0$

$\therefore -1<k<\frac{3}{2}$

답 $-1<k<\frac{3}{2}$

표준+발전 유형 Q+Q

95쪽

01 $x^2-4x+3>0$에서 $(x-1)(x-3)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>3$ ······ ㉠

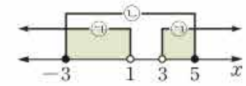
$x^2-2x-15\le0$에서 $(x+3)(x-5)\le0$

$\therefore -3\le x\le5$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x<1$

또는 $3<x\le5$



따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 4, 5의 6개이다.

답 6

02 $|3x-1|<5$에서

$-5<3x-1<5$, $-4<3x<6$

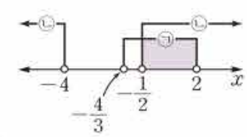
$\therefore -\frac{4}{3}<x<2$ ······ ㉠

$2x^2+9x+4>0$에서 $(x+4)(2x+1)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>-\frac{1}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{1}{2}<x<2$



따라서 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=2$이므로

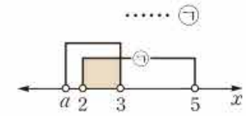
$\alpha\beta=-1$

답 -1

03 $x^2-7x+10<0$에서 $(x-2)(x-5)<0$

$\therefore 2<x<5$ ······ ㉠

㉠과 $(x-3)(x-a)<0$의 해의 공통부분이 $2<x<3$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a\le2$

즉 a의 최댓값은 2이다.

답 ③

쌤한마디

$a=2$이면 $(x-3)(x-a)<0$의 해는 $2<x<3$이므로

㉠과의 공통부분은

$2<x<3$

따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

04 $x^2+2x-8>0$에서 $(x+4)(x-2)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>2$ ······ ㉠

$|x+a|\le2$에서 $-2\le x+a\le2$

$\therefore -2-a\le x\le2-a$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하려면

$-2-a<-4$ 또는 $2-a>2$

$\therefore a>2$ 또는 $a<0$

따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다.

답 3

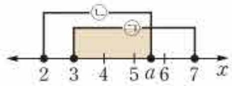
05 $x^2-10x+21\le0$에서 $(x-3)(x-7)\le0$

$\therefore 3\le x\le7$ ······ ㉠

$x^2-(a+2)x+2a\le0$에서

$(x-2)(x-a)\le0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$5\le a<6$ 답 $5\le a<6$

Q BOX: $a=6$이면 연립부등식의 해는 $3\le x\le6$ 이므로 정수 x는 3, 4, 5, 6의 4개이다.

쌤한마디

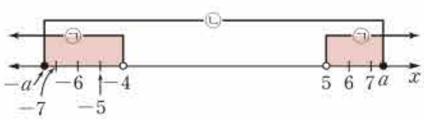
$a\le2$이면 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않으므로 $a>2$이다.
따라서 부등식 $(x-2)(x-a)\le0$의 해는 $2\le x\le a$이다.

06 $x^2-x-20>0$에서 $(x+4)(x-5)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>5$ ...... ㉠

$x^2-a^2\le0$에서 $(x+a)(x-a)\le0$

$\therefore -a\le x\le a$ ...... ㉡



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 5개 이상이려면 위의 그림과 같아야 하므로

$a\ge7$

따라서 자연수 a의 최솟값은 7이다. 답 7

Q BOX: $a=7$이면 연립부등식의 해는 $-7\le x<-4$ 또는 $5<x\le7$ 이므로 정수 x는 -7, -6, -5, 6, 7의 5개이다.

07 $3x-1$, x, $3x+1$은 변의 길이이므로

$3x-1>0$ $\therefore x>\frac{1}{3}$ ...... ㉠

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $3x+1$이므로 삼각형이 만들어지려면

$3x+1<(3x-1)+x$

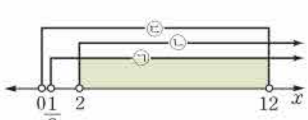
$\therefore x>2$ ...... ㉡

둔각삼각형이려면

$(3x+1)^2>(3x-1)^2+x^2$

$x^2-12x<0$, $x(x-12)<0$

$\therefore 0<x<12$ ...... ㉢



㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$2<x<12$

따라서 자연수 x는 3, 4, …, 11의 9개이다. 답 9

쌤한마디

삼각형의 변의 길이와 모양

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\le b\le c)$일 때
① $c^2<a^2+b^2$ ⇨ 예각삼각형
② $c^2=a^2+b^2$ ⇨ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형
③ $c^2>a^2+b^2$ ⇨ 둔각삼각형

08 직사각형의 가로의 길이를 x라 하면 세로의 길이는 $10-x$

이때 x, $10-x$는 변의 길이이고, 가로의 길이가 세로의 길이보다 길어야 하므로

$x>0$, $10-x>0$, $x>10-x$

$\therefore 5<x<10$ ...... ㉠

또 직사각형의 넓이는 $x(10-x)$이므로

$16\le x(10-x)\le24$,

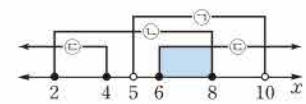
즉 $\begin{cases}16\le x(10-x) & \cdots\cdots ㉡\\ x(10-x)\le24 & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$

㉡에서 $x^2-10x+16\le0$

$(x-2)(x-8)\le0$ $\therefore 2\le x\le8$

㉢에서 $x^2-10x+24\ge0$

$(x-4)(x-6)\ge0$ $\therefore x\le4$ 또는 $x\ge6$



㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$6\le x\le8$

따라서 x의 최댓값은 8, 최솟값은 6이므로 구하는 합은

$8+6=14$ 답 14

09 이차방정식 $2x^2-4(a+1)x+a^2-1=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(a+1)\}^2-2(a^2-1)<0$

$2a^2+8a+6<0$, $2(a+3)(a+1)<0$

$\therefore -3<a<-1$

따라서 정수 a의 값은 -2이다. 답 ②

10 x에 대한 이차방정식

$x^2+2(2k-1)x+3k^2-(a+3)k-3=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

Q BOX: 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖거나 중근을 갖는다.

$\frac{D_1}{4}=(2k-1)^2-\{3k^2-(a+3)k-3\}\ge0$

$\therefore k^2+(a-1)k+4\ge0$

이 이차부등식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 k에 대한 이차방정식 $k^2+(a-1)k+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(a-1)^2-4\cdot1\cdot4\le0$

$a^2-2a-15\le0$, $(a+3)(a-5)\le0$

$\therefore -3\le a\le5$ 답 $-3\le a\le5$

11 이차방정식 $x^2+(m+1)x+2m-1=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

(i) $D=(m+1)^2-4(2m-1)\ge0$

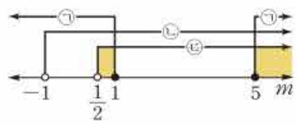
$m^2-6m+5\ge0$, $(m-1)(m-5)\ge0$

$\therefore m\le1$ 또는 $m\ge5$ ...... ㉠

(ii) $\alpha+\beta=-(m+1)<0$

$m+1>0$ $\therefore m>-1$ ...... ㉡

(iii) $\alpha\beta=2m-1>0 \qquad \therefore m>\frac{1}{2}$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$\frac{1}{2}<m\le 1$ 또는 $m\ge 5$

답 $\frac{1}{2}<m\le 1$ 또는 $m\ge 5$

12 이차방정식 $3x^2+(m^2+4m-12)x+m^2-4=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=\frac{m^2-4}{3}<0$

$m^2-4<0, \qquad (m+2)(m-2)<0$

$\therefore -2<m<2$ …… ㉠

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 작으므로

$\alpha+\beta=-\frac{m^2+4m-12}{3}>0$

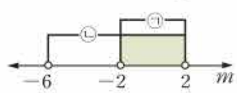
$\alpha<0<\beta$라 할 때, $|\alpha|<|\beta|$이므로 $-\alpha<\beta$, 즉 $\alpha+\beta>0$

$m^2+4m-12<0, \qquad (m+6)(m-2)<0$

$\therefore -6<m<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2<m<2$



따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$b-a=4$

답 4

쌤한마디

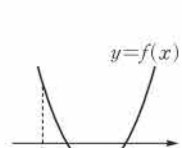
이차방정식의 두 근이 서로 다른 부호이고, 두 실근의 절댓값에 대한 조건이 주어지면 다음을 이용하여 식을 세운다.

① |양수인 근|=|음수인 근|
→ (두 근의 합)=0, (두 근의 곱)<0

② |양수인 근|>|음수인 근|
→ (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)<0

③ |양수인 근|<|음수인 근|
→ (두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0

13 $f(x)=x^2+2px+2p-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=p^2-(2p-1)\ge 0$

$p^2-2p+1\ge 0 \qquad \therefore (p-1)^2\ge 0$

따라서 p는 모든 실수이다.

(ii) $f(-2)=4-4p+2p-1>0$

$-2p>-3 \qquad \therefore p<\frac{3}{2}$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-p$이므로

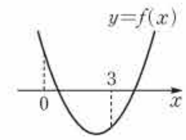
$-p>-2 \qquad \therefore p<2$

이상에서 공통부분을 구하면

$p<\frac{3}{2}$

따라서 정수 p의 최댓값은 1이다. 답 1

14 $f(x)=x^2-3mx+m^2-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근 α, β에 대하여 $0<\alpha\le 3\le\beta$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(0)=m^2-1>0, \qquad (m+1)(m-1)>0$

$\therefore m<-1$ 또는 $m>1$

(ii) $f(3)=9-9m+m^2-1\le 0$

$m^2-9m+8\le 0, \qquad (m-1)(m-8)\le 0$

$\therefore 1\le m\le 8$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$1<m\le 8$

따라서 정수 m은 2, 3, …, 8의 7개이다. 답 7

15 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+mX+2m+5=0$ …… ㉠

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 ㉠의 두 근이 서로 다른 양수이어야 하므로

(i) ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=m^2-4(2m+5)>0$

$m^2-8m-20>0, \qquad (m+2)(m-10)>0$

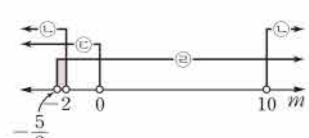
$\therefore m<-2$ 또는 $m>10$ …… ㉡

(ii) (두 근의 합)$=-m>0$

$\therefore m<0$ …… ㉢

(iii) (두 근의 곱)$=2m+5>0$

$2m>-5 \qquad \therefore m>-\frac{5}{2}$ …… ㉣



이상에서 공통부분을 구하면

$-\frac{5}{2}<m<-2$

답 $-\frac{5}{2}<m<-2$

16 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+2kX+k^2+3k-10=0$ …… ㉠

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 ㉠의 두 근이 서로 다른 부호이어야 하므로

(두 근의 곱)$=k^2+3k-10<0$

$(k+5)(k-2)<0 \qquad \therefore -5<k<2$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1=-9$

답 ④

중단원 마무리

L 97쪽

01 전략 $f(x)\ge 0$, $f(x)<0$일 때로 나누어 $g(x)$를 구한다.

풀이 (i) $f(x)\ge 0$, 즉 $-2\le x\le 5$일 때,

$|f(x)|=f(x)$

$$g(x)=\frac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$$

(ii) $f(x)<0$, 즉 $x<-2$ 또는 $x>5$일 때,

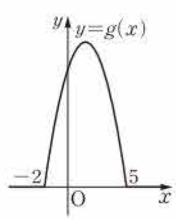
$|f(x)|=-f(x)$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x)}{2}=0$$

(i), (ii)에서

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-2\le x\le 5) \\ 0 & (x<-2 \text{ 또는 } x>5)\end{cases}$$

따라서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $g(x)\le 0$의 해는



$x\le -2$ 또는 $x\ge 5$

답 $x\le -2$ 또는 $x\ge 5$

02 전략 해가 $\alpha\le x\le\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)\le 0$임을 이용한다.

풀이 $x^2-8x+a\le 0$의 해가 $b\le x\le 6$이므로

$x^2-8x+a=(x-b)(x-6)$

$=x^2-(b+6)x+6b$

따라서 $8=b+6$, $a=6b$이므로

$a=12$, $b=2$

$\therefore a+b=14$

답 ①

다른 풀이 $x=6$일 때, $x^2-8x+a=0$이므로

$36-48+a=0$ $\quad\therefore a=12$

따라서 $x^2-8x+12\le 0$에서

$(x-2)(x-6)\le 0$ $\quad\therefore 2\le x\le 6$

즉 $b=2$이므로 $\quad a+b=14$

03 전략 이차함수 $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)$에 대하여 $f(-2x)=p(-2x-\alpha)(-2x-\beta)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(x)<0$의 해가 $x<-6$ 또는 $x>2$이므로

$f(x)=a(x+6)(x-2)\ (a<0)$ ···➊

한편 부등식 $a\cdot(-2x)^2+b\cdot(-2x)+c>0$에서

$f(x)$의 x 대신 $-2x$를 대입한 것과 같다.

$f(-2x)>0$

즉 $4a(x+1)(x-3)>0$에서

$(x+1)(x-3)<0\ (\because a<0)$

$a<0$에서 $4a<0$이므로 부등식의 양변을 $4a$로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

$\therefore -1<x<3$ ···➋

따라서 정수 x는 0, 1, 2의 3개이다. ···➌

답 3

단계	채점 기준	비율
➊	$f(x)$를 이차식으로 나타낼 수 있다.	40 %
➋	부등식 $f(-2x)>0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
➌	정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

04 전략 먼저 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 이용하여 부등식 $f(x)-g(x)<0$의 해를 구한다.

풀이 $f(x)=3x^2-2kx+k$

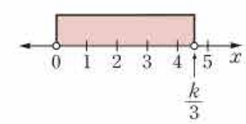
$$=3\left(x-\frac{k}{3}\right)^2+k-\frac{k^2}{3}$$

이므로 점 A의 x좌표는 $\frac{k}{3}$이다.

또 점 B의 x좌표는 0이므로 부등식 $f(x)-g(x)<0$, 즉 $f(x)<g(x)$의 해는

$0<x<\frac{k}{3}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 4개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$4<\frac{k}{3}\le 5$ $\quad\therefore 12<k\le 15$

답 ②

$\frac{k}{3}=4$이면 주어진 부등식의 해는 $0<x<4$이므로 정수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

05 전략 이차방정식 $px^2+qx+r=0$의 판별식을 D라 할 때, $px^2+qx+r\le 0$의 해가 1개이면 $p>0$, $D=0$임을 이용한다.

풀이 이차부등식 $ax^2-10x+a>0$을 만족시키지 않는 x의 값이 오직 하나뿐이면 부등식 $ax^2-10x+a\le 0$은 단 한 개의 실근을 갖는다. ···➊

$x=k$

$\therefore a>0$ ······ ㉠

이차방정식 $ax^2-10x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-5)^2-a^2=0$$

$a^2-25=0$, $\quad(a+5)(a-5)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=5$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=5$ ···➋

따라서 $5x^2-10x+5>0$, 즉 $5(x-1)^2>0$을 만족시키지 않는 x의 값은 오직 1뿐이므로

$k=1$ ···➌

$\therefore a+k=6$ ···➍

답 6

단계	채점 기준	비율
➊	부등식 $ax^2-10x+a\le 0$이 단 한 개의 실근을 가짐을 알 수 있다.	30 %
➋	a의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌	k의 값을 구할 수 있다.	20 %
➍	$a+k$의 값을 구할 수 있다.	10 %

06 전략 이차방정식 $px^2+qx+r=0\ (p>0)$의 판별식을 D라 할 때, 이차부등식 $px^2+qx+r<0$이 해를 가지면 $D>0$임을 이용한다.

L 08 이차부등식

풀이 이차부등식 $5x^2+6x+a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $5x^2+6x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=3^2-5a>0$$

$$-5a>-9 \qquad \therefore a<\frac{9}{5}$$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. 답 ⑤

07 **전략** $\sqrt{A}$가 실수이면 $A\geq0$임을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2+4kx-k+3}$이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4kx-k+3\geq0$이 성립해야 한다.

$y=x^2+4kx-k+3$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

이차방정식 $x^2+4kx-k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-(-k+3)\leq0$$

$$4k^2+k-3\leq0, \qquad (k+1)(4k-3)\leq0$$

$$\therefore -1\leq k\leq\frac{3}{4}$$

답 ③

08 **전략** $\alpha\leq x\leq\beta$에서 이차부등식 $h(x)>0$이 항상 성립하면 ($h(x)$의 최솟값)>0임을 이용한다.

풀이 $f(x)>g(x)$에서

$$x^2+2ax+2a^2-3>-x^2-2ax+a$$

$$\therefore 2x^2+4ax+2a^2-a-3>0$$

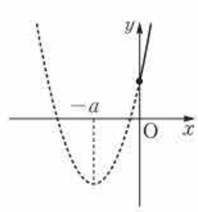
$h(x)=2x^2+4ax+2a^2-a-3$이라 하면

$$h(x)=2(x+a)^2-a-3$$

이차함수 $y=h(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-a$

(i) $-a<0$, 즉 $a>0$일 때,

$0\leq x\leq2$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h(0)=2a^2-a-3$이므로



$$2a^2-a-3>0$$

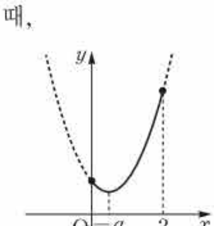
$$(a+1)(2a-3)>0$$

$$\therefore a<-1 \text{ 또는 } a>\frac{3}{2}$$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a>\frac{3}{2}$

(ii) $0\leq-a\leq2$, 즉 $-2\leq a\leq0$일 때,

$0\leq x\leq2$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h(-a)=-a-3$이므로



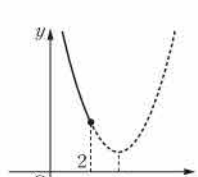
$$-a-3>0$$

$$\therefore a<-3$$

그런데 $-2\leq a\leq0$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-a>2$, 즉 $a<-2$일 때,

$0\leq x\leq2$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h(2)=2a^2+7a+5$이므로



$$2a^2+7a+5>0$$

$$(2a+5)(a+1)>0$$

$$\therefore a<-\frac{5}{2} \text{ 또는 } a>-1$$

그런데 $a<-2$이므로 $\quad a<-\frac{5}{2}$

이상에서 실수 a의 값의 범위는

$$a<-\frac{5}{2} \text{ 또는 } a>\frac{3}{2}$$

답 $a<-\frac{5}{2}$ 또는 $a>\frac{3}{2}$

09 **전략** 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$임을 이용한다.

풀이 $y=mx^2+nx+2mn+7n+15$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$$mx^2+nx+2mn+7n+15>0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

의 해와 같다.

즉 ㉠의 해가 $-2<x<3$이므로 $\quad m<0$

해가 $-2<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+2)(x-3)<0 \qquad \therefore x^2-x-6<0$$

양변에 m을 곱하면

$$mx^2-mx-6m>0 \ (\because m<0)$$

이 부등식이 ㉠과 같으므로

$$n=-m,\ 2mn+7n+15=-6m$$

$n=-m$을 $2mn+7n+15=-6m$에 대입하면

$$2m\cdot(-m)+7\cdot(-m)+15=-6m$$

$$2m^2+m-15=0, \qquad (m+3)(2m-5)=0$$

$$\therefore m=-3 \text{ 또는 } m=\frac{5}{2}$$

그런데 $m<0$이므로 $\quad m=-3$

따라서 $n=3$이므로

$$m-n=-6$$

답 -6

10 **전략** 먼저 주어진 연립부등식의 해를 구한 후 이 해가 주어진 해와 같도록 하는 미정계수의 값을 구한다.

풀이 $(x-a)^2<a^2$에서

$$x^2-2ax+a^2<a^2, \qquad x(x-2a)<0$$

$$\therefore 2a<x<0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

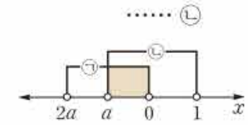
$a<0$이므로 $\quad 2a<0$

$x^2+a<(a+1)x$에서

$$x^2-(a+1)x+a<0, \qquad (x-a)(x-1)<0$$

$$\therefore a<x<1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$$a<x<0$$

이때 주어진 연립부등식의 해가 $b<x<b+1$이므로

$$a=b,\ b+1=0 \qquad \therefore a=-1,\ b=-1$$

$$\therefore a+b=-2$$

답 ⑤

11 **전략** 먼저 부등식 $A<B\leq C$를 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B\leq C\end{cases}$로 변형한 후 해를 구한다.

풀이 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} x-2a<x^2-4a^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-4a^2\le x+2a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad x^2-x-4a^2+2a>0$

$x^2-x-2a(2a-1)>0$

$(x-2a)\{x+(2a-1)\}>0$

$\therefore\ x<-2a+1$ 또는 $x>2a$

QBOX: a가 자연수이므로 $-2a+1<0,\ 2a>0$

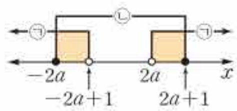
㉡에서 $\quad x^2-x-4a^2-2a\le 0$

$x^2-x-2a(2a+1)\le 0$

$(x+2a)\{x-(2a+1)\}\le 0$

$\therefore\ -2a\le x\le 2a+1$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-2a\le x<-2a+1$

또는 $2a<x\le 2a+1$

이때 주어진 부등식의 해가

$-6\le x<-5$ 또는 $b<x\le b+1$

이므로

$-2a=-6,\ 2a=b$

$\therefore\ a=3,\ b=6$

$\therefore\ ab=18$ 답 ②

12 전략 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 5가 되도록 수직선 위에 나타내어 본다.

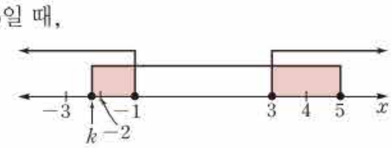
풀이 $x^2-2x-3\ge 0$에서 $\quad (x+1)(x-3)\ge 0$

$\therefore\ x\le -1$ 또는 $x\ge 3$

$x^2-(5+k)x+5k\le 0$에서

$(x-5)(x-k)\le 0$

(i) $k<5$일 때,

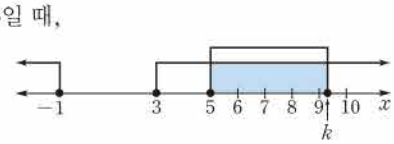


정수 x의 개수가 5가 되려면 위의 그림과 같아야 하므로

$-3<k\le -2$

따라서 정수 k의 값은 -2이다.

(ii) $k\ge 5$일 때,



정수 x의 개수가 5가 되려면 위의 그림과 같아야 하므로

$9\le k<10$

따라서 정수 k의 값은 9이다.

(i), (ii)에서 모든 정수 k의 값의 곱은

$-2\cdot 9=-18$ 답 ④

13 전략 먼저 가격을 $200x$원 인상할 때의 하루 판매액을 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 가격을 $200x$원 인상한다고 하면 하루 판매량이 $2x$잔 줄어들므로 하루 판매액은

$(4000+200x)(100-2x)$(원)

QBOX: 인상된 가격 / 줄어든 하루 판매량

하루 판매액이 48만 원 이상이려면

$(4000+200x)(100-2x)\ge 480000$ ⋯ ❶

$(20+x)(50-x)\ge 1200,\quad x^2-30x+200\le 0$

$(x-10)(x-20)\le 0 \quad \therefore\ 10\le x\le 20$ ⋯ ❷

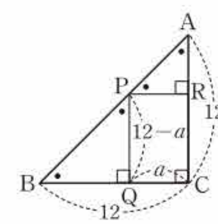
따라서 $2000\le 200x\le 4000$이므로 인상할 수 있는 금액의 최댓값은 4000원이다. ⋯ ❸

답 4000원

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 조건을 만족시키는 이차부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷	이차부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸	인상할 수 있는 금액의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

14 전략 직각이등변삼각형을 이용하여 각 선분의 길이를 a에 대한 식으로 나타낸 후 □PQCR, △APR, △PBQ의 넓이를 각각 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림에서



△ABC, △APR, △PBQ는 모두 직각이등변삼각형이다.

$\overline{QC}=a$이므로

$0<a<12$

$\overline{PR}=a,\ \overline{BQ}=12-a$이므로

$\overline{AR}=\overline{PR}=a,\ \overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$

$\therefore$ □PQCR$=a(12-a)$,

△APR$=\frac{1}{2}a^2$, △PBQ$=\frac{1}{2}(12-a)^2$

이때 □PQCR>△APR, □PQCR>△PBQ이므로

$$\begin{cases} a(12-a)>\frac{1}{2}a^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ a(12-a)>\frac{1}{2}(12-a)^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

QBOX: $a(12-a)>\frac{1}{2}a^2$에서 $12a-a^2>\frac{1}{2}a^2$, $\frac{3}{2}a^2-12a<0$, $\therefore\ a^2-8a<0$

㉠에서 $\quad a^2-8a<0,\quad a(a-8)<0$

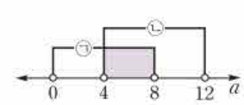
$\therefore\ 0<a<8$

QBOX: $a(12-a)>\frac{1}{2}(12-a)^2$에서 $12a-a^2>72-12a+\frac{1}{2}a^2$, $\frac{3}{2}a^2-24a+72<0$, $\therefore\ a^2-16a+48<0$

㉡에서 $\quad a^2-16a+48<0$

$(a-4)(a-12)<0 \quad \therefore\ 4<a<12$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$4<a<8$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$5+6+7=18$ 답 18

15 전략 이차방정식의 두 근의 부호가 서로 같으면 (두 근의 곱)>0, 다르면 (두 근의 곱)<0임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\alpha=-\beta$에서 $\alpha+\beta=0$이므로

$-\frac{a-1}{2}=0 \quad \therefore\ a=1$

ㄴ. $\alpha\beta>0$이므로 $\quad \frac{a-5}{2}>0 \quad \therefore\ a>5$

ㄷ. $\alpha\beta<0$이므로 $\quad \frac{a-5}{2}<0 \quad \therefore\ a<5$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

참고 이차방정식 $2x^2+(a-1)x+a-5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-4\cdot2\cdot(a-5)=(a-5)^2+16>0$

이므로 주어진 이차방정식은 a의 값에 관계없이 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

16 전략 $x^2=X$로 치환한 후 X에 대한 이차방정식의 두 근이 모두 음이 아닌 실수이어야 함을 이용한다.

풀이 $x^4-2kx^2+k^2+4k=21-x^2$에서

$x^4-(2k-1)x^2+k^2+4k-21=0$

$x^2=X$로 놓으면 이 방정식은

$X^2-(2k-1)X+k^2+4k-21=0$ ...... ㉠

이때 주어진 사차방정식이 실근만을 가지려면 ㉠의 두 근이 모두 음이 아닌 실수이어야 하므로

Q BOX: ㉠의 두 근은 0 또는 양수이다.

(i) ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k-1)\}^2-4(k^2+4k-21)\geq0$

$-20k+85\geq0, \qquad -20k\geq-85$

$\therefore k\leq\dfrac{17}{4}$ ...... ㉡

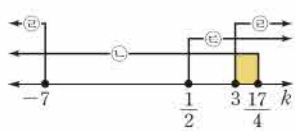
(ii) (두 근의 합)$=2k-1\geq0$

$\therefore k\geq\dfrac{1}{2}$ ...... ㉢

(iii) (두 근의 곱)$=k^2+4k-21\geq0$

$(k+7)(k-3)\geq0$

$\therefore k\leq-7$ 또는 $k\geq3$ ...... ㉣



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad 3\leq k\leq\dfrac{17}{4}$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$3+4=7$ 답 ③

17 전략 직선 $x=p$를 축으로 하는 이차함수의 식은 $y=m(x-p)^2+n$ (m, n은 상수)임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서

$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-p)^2+a$,

$g(x)=2(x-p)^2+b$ (a, b는 상수)

라 하면 조건 (나)의 $f(x)\geq g(x)$에서

$\dfrac{1}{2}(x-p)^2+a\geq2(x-p)^2+b$

$\therefore 3x^2-6px+3p^2+2b-2a\leq0$ ...... ㉠

해가 $-1\leq x\leq5$이고 x^2의 계수가 3인 이차부등식은

$3(x+1)(x-5)\leq0 \qquad \therefore 3x^2-12x-15\leq0$

이 부등식이 ㉠과 같으므로

$-6p=-12,\ 3p^2+2b-2a=-15$

$\therefore p=2,\ a-b=\dfrac{27}{2}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)^2+a$, $g(x)=2(x-2)^2+b$이므로

$p\times\{f(2)-g(2)\}=2(a-b)=27$ 답 27

Q BOX: $f(2)=a$, $g(2)=b$

18 전략 $\beta-\alpha$가 자연수가 되기 위한 α, β의 조건을 생각하고, 각 경우에 대하여 정수 x의 개수가 3이 되도록 하는 a의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $\beta-\alpha$가 자연수이려면 α, β가 모두 정수이거나 α, β가 모두 정수가 아닌 실수이어야 한다.

$(2x-a^2+2a)(2x-3a)\leq0$에서

$4\left\{x-\left(\dfrac{1}{2}a^2-a\right)\right\}\left(x-\dfrac{3}{2}a\right)\leq0$ ...... ㉠

(i) $\dfrac{1}{2}a^2-a>\dfrac{3}{2}a$, 즉 $a<0$ 또는 $a>5$일 때,

Q BOX: $\dfrac{1}{2}a^2-a>\dfrac{3}{2}a$에서
$a^2-5a>0$
$a(a-5)>0$
$\therefore a<0$ 또는 $a>5$

부등식 ㉠의 해는

$\dfrac{3}{2}a\leq x\leq\dfrac{1}{2}a^2-a$

ⓘ α, β가 모두 정수이면 조건 (나)에서

$\beta-\alpha+1=3$, 즉 $\beta-\alpha=2$이므로

$\left(\dfrac{1}{2}a^2-a\right)-\dfrac{3}{2}a=2, \qquad a^2-5a-4=0$

$\therefore a=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{2}$

그런데 α, β가 모두 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ⓘⓘ α, β가 모두 정수가 아닌 실수이면 조건 (나)에서

$\beta-\alpha=3$이므로

$\left(\dfrac{1}{2}a^2-a\right)-\dfrac{3}{2}a=3$

$a^2-5a-6=0, \qquad (a+1)(a-6)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=6$

그런데 α, β가 모두 정수가 아닌 실수이므로

$a=-1$

Q BOX: $a=6$이면 $\dfrac{1}{2}a^2-a=12$, $\dfrac{3}{2}a=9$ 이므로 α, β가 모두 정수이다.

(ii) $\dfrac{1}{2}a^2-a<\dfrac{3}{2}a$, 즉 $0<a<5$일 때,

Q BOX: $\dfrac{1}{2}a^2-a<\dfrac{3}{2}a$에서
$a^2-5a<0$
$a(a-5)<0$
$\therefore 0<a<5$

부등식 ㉠의 해는

$\dfrac{1}{2}a^2-a\leq x\leq\dfrac{3}{2}a$

ⓘ α, β가 모두 정수이면 조건 (나)에서

$\beta-\alpha+1=3$, 즉 $\beta-\alpha=2$이므로

$\dfrac{3}{2}a-\left(\dfrac{1}{2}a^2-a\right)=2$

$a^2-5a+4=0, \qquad (a-1)(a-4)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=4$

그런데 α, β가 모두 정수이므로

$a=4$

Q BOX: $a=1$이면 $\dfrac{1}{2}a^2-a=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{2}a=\dfrac{3}{2}$ 이므로 α, β가 모두 정수가 아닌 실수이다.

ⓘⓘ α, β가 모두 정수가 아닌 실수이면 조건 (나)에서

$\beta-\alpha=3$이므로

$\dfrac{3}{2}a-\left(\dfrac{1}{2}a^2-a\right)=3$

$a^2-5a+6=0, \qquad (a-2)(a-3)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=3$

그런데 α, β가 모두 정수가 아닌 실수이므로

$a=3$

Q BOX: $a=2$이면 $\dfrac{1}{2}a^2-a=0$, $\dfrac{3}{2}a=3$ 이므로 α, β가 모두 정수이다.

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+4+3=6$ 답 6

09 평면좌표

Lecture 19 두 점 사이의 거리

102쪽

01 $\overline{AB}=|4-(-4)|=8$ 답 8

02 $\overline{AB}=\sqrt{(2+3)^2+(5-7)^2}=\sqrt{29}$ 답 $\sqrt{29}$

03 $\overline{AB}=|6-a|$이므로 $|6-a|=8$

$6-a=-8$ 또는 $6-a=8$

$\therefore a=14$ 또는 $a=-2$ 답 -2, 14

04 $\overline{AB}=|a+3|$이므로 $|a+3|=7$

$a+3=-7$ 또는 $a+3=7$

$\therefore a=-10$ 또는 $a=4$ 답 -10, 4

05 $\overline{AB}=\sqrt{(3-a)^2+(-2-1)^2}$이므로

$\sqrt{(3-a)^2+9}=5$

양변을 제곱하면 $(3-a)^2+9=25$

$a^2-6a-7=0$, $(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$ 답 -1, 7

06 $\overline{AB}=\sqrt{(7-4)^2+(a+3)^2}$이므로

$\sqrt{9+(a+3)^2}=3\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $9+(a+3)^2=18$

$a^2+6a=0$, $a(a+6)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=0$ 답 -6, 0

07 $\overline{AB}=|5-x|$이므로 $|5-x|=8$

$5-x=-8$ 또는 $5-x=8$

$\therefore x=13$ ($\because x>0$)

$\therefore \overline{OA}=13$ 답 13

08 구하는 점을 $P(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(a+1)^2+(-8)^2}$, $\overline{BP}=\sqrt{(a-3)^2}$

이때 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+1)^2+64=(a-3)^2$, $8a=-56$

$\therefore a=-7$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-7, 0)$ 답 $(-7, 0)$

09 구하는 점을 $P(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(a-4)^2+(-2)^2}$, $\overline{BP}=\sqrt{(a+2)^2+1^2}$

이때 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-4)^2+4=(a+2)^2+1$, $12a=15$

$\therefore a=\frac{5}{4}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ 답 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$

Q BOX

$(3-a)^2+9=25$는 다음과 같이 풀 수도 있다.
$(3-a)^2=16$이므로
$3-a=\pm4$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$

$5-x=8$에서
$x=-3$

$a=5$일 때 $\overline{AB}$의 길이는 $2\sqrt{2}$로 최소이다.

삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같다.

99~103쪽

10 구하는 점을 $P(0, a)$라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(-1)^2+(a-2)^2}$,

$\overline{BP}=\sqrt{5^2+(a+6)^2}$

이때 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$1+(a-2)^2=25+(a+6)^2$, $16a=-56$

$\therefore a=-\frac{7}{2}$

따라서 구하는 점의 좌표는

$\left(0, -\frac{7}{2}\right)$ 답 $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$

11 구하는 점을 $P(0, a)$라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{2^2+(a-3)^2}$, $\overline{BP}=\sqrt{4^2+(a-1)^2}$

이때 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$4+(a-3)^2=16+(a-1)^2$, $4a=-4$

$\therefore a=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(0, -1)$ 답 $(0, -1)$

표준+발전 유형 Q+Q

103쪽

01 $\overline{AB}=2\overline{CD}$에서 $\overline{AB}^2=4\overline{CD}^2$이므로

$(5-1)^2+(a+6)^2=4\{(-a)^2+(-3+1)^2\}$

$a^2+12a+52=4a^2+16$

$a^2-4a-12=0$, $(a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$) 답 ⑤

02 $\overline{AB}=\sqrt{(a-7)^2+(3-a)^2}$

$=\sqrt{2a^2-20a+58}$

$=\sqrt{2(a-5)^2+8}$

따라서 $a=5$일 때 $\overline{AB}$의 길이가 최소이다. 답 5

03 점 $P(a, b)$가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$b=a+1$ …… ㉠

또 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-3)^2+(b-5)^2$

$a^2+4a+b^2-2b+5=a^2-6a+b^2-10b+34$

$\therefore 10a+8b=29$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{7}{6}$, $b=\frac{13}{6}$

$\therefore a+b=\frac{10}{3}$ 답 $\frac{10}{3}$

04 $\triangle ABC$의 외심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$(a+2)^2+(b+1)^2=(a-2)^2+(b+3)^2$

$a^2+4a+b^2+2b+5=a^2-4a+b^2+6b+13$

$\therefore 2a-b=2$ ······ ㉠

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서

$(a+2)^2+(b+1)^2=(a+4)^2+(b-3)^2$

$a^2+4a+b^2+2b+5=a^2+8a+b^2-6b+25$

$\therefore a-2b=-5$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=4$

따라서 구하는 외심의 좌표는 $(3,\ 4)$이다. 답 $(3,\ 4)$

Q BOX

㉠−㉡×2를 하면

$3b=12 \quad \therefore b=4$

$b=4$를 ㉡에 대입하면

$a-8=-5$

$\therefore a=3$

05 $\overline{AB}=\sqrt{(1+3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(2-1)^2+(-4-3)^2}=5\sqrt{2}$,

$\overline{CA}=\sqrt{(-3-2)^2+(1+4)^2}=5\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AC}=\overline{BC}$

따라서 △ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

답 ③

06 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$이므로

$(4+2)^2+(-1-1)^2$

$=(a+2)^2+(3-1)^2+(4-a)^2+(-1-3)^2$

$40=2a^2-4a+40, \qquad a(a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=2$

따라서 모든 a의 값의 합은 2이다. 답 ②

07 $\overline{AP}+\overline{PB}\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{(2-a-4)^2+(1-a+3)^2}$

$=\sqrt{2a^2-4a+20}$

$=\sqrt{2(a-1)^2+18}$

따라서 $a=1$일 때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$이다. 답 $3\sqrt{2}$

08 $P(1,\ -3)$, $Q(x,\ y)$, $R(5,\ -1)$이라 하면

$\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=\overline{PQ}$,

$\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}=\overline{QR}$

$\therefore \sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}$

$=\overline{PQ}+\overline{QR}$

$\ge\overline{PR}=\sqrt{(5-1)^2+(-1+3)^2}$

$=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다. 답 ④

09 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=b^2+(-2)^2+(b-4)^2+5^2$

$=2b^2-8b+45$

$=2(b-2)^2+37$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $b=2$일 때 최솟값 37을 가지므로

$a=37$

$\therefore a+b=39$ 답 39

10 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(a+2)^2+(b-3)^2+(a-1)^2+(b-4)^2$

$+(a+5)^2+(b+4)^2$

$=3a^2+12a+3b^2-6b+71$

$=3(a+2)^2+3(b-1)^2+56$

이때 a, b가 실수이므로 $(a+2)^2\ge0,\ (b-1)^2\ge0$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\ge56$

따라서 $a=-2,\ b=1$일 때 주어진 식의 최솟값이 56이므로

$P(-2,\ 1)$ 답 $(-2,\ 1)$

11 직선 BC를 x축, 선분 BC의 수직이등분선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{M}$이 원점이다.

이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 $(a,\ b)$, $(c,\ 0)$이라 하면 꼭짓점 B의 좌표는 $\boxed{(-c,\ 0)}$이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$=\{(-c-a)^2+(-b)^2\}+\{(c-a)^2+(-b)^2\}$

$=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$

$=\boxed{2(a^2+b^2+c^2)}$,

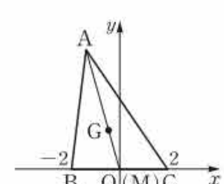
$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2=\boxed{a^2+b^2+c^2}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

답 (가) M (나) $(-c,\ 0)$ (다) $2(a^2+b^2+c^2)$ (라) $a^2+b^2+c^2$

참고 위와 같은 삼각형의 성질을 파푸스(Pappus) 정리 또는 중선 정리라 한다.

12 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이고 $B(-2,\ 0)$, $C(2,\ 0)$이다.



점 G는 △ABC의 무게중심이므로

$\overline{AM}=3\overline{MG}=3\sqrt{3}$

삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 나눈다.

즉 $\overline{AM}^2=27$이므로 $A(a,\ b)$라 하면

$a^2+b^2=27$ ······ ㉠

$\overline{AB}=5$에서 $\overline{AB}^2=25$이므로 $(a+2)^2+b^2=25$

$\therefore a^2+4a+b^2=21$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{3}{2},\ b=\pm\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$

따라서 $A\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3\sqrt{11}}{2}\right)$ 또는 $A\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3\sqrt{11}}{2}\right)$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{\left(2+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\pm\dfrac{3\sqrt{11}}{2}\right)^2}=\sqrt{37}$ 답 ③

다른 풀이 $\overline{AM}=3\overline{MG}=3\sqrt{3}$, $\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=2$이고

파푸스 정리에 의하여 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로

$5^2+\overline{AC}^2=2\{(3\sqrt{3})^2+2^2\}$

$25+\overline{AC}^2=62, \quad \overline{AC}^2=37$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{37}$ ($\because \overline{AC}>0$)

Lecture 20 선분의 내분점과 외분점

Ⓛ 105쪽

01 $\dfrac{5\cdot8+1\cdot(-4)}{5+1}=6$ 　　답 6

02 $\dfrac{2\cdot8-3\cdot(-4)}{2-3}=-28$ 　　답 -28

03 $\dfrac{3\cdot(-2)+5\cdot6}{3+5}=3$, $\dfrac{3\cdot(-5)+5\cdot3}{3+5}=0$이므로

$(3, 0)$ 　　답 $(3, 0)$

04 $\dfrac{1\cdot(-2)-3\cdot6}{1-3}=10$, $\dfrac{1\cdot(-5)-3\cdot3}{1-3}=7$이므로

$(10, 7)$ 　　답 $(10, 7)$

05 $\overline{AB}$를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot(-1)-1\cdot a}{2-1}, \dfrac{2\cdot b-1\cdot(-6)}{2-1}\right)$

$\therefore (-a-2, 2b+6)$

따라서 $-a-2=-6$, $2b+6=12$이므로

$a=4$, $b=3$ 　　답 $a=4$, $b=3$

06 $\dfrac{1-4-3}{3}=-2$, $\dfrac{-5+1-2}{3}=-2$이므로

$(-2, -2)$ 　　답 $(-2, -2)$

표준+발전 유형 Q+Q

Ⓛ 106쪽

01 $\dfrac{3\cdot(-9)+4\cdot5}{3+4}=-1$이므로 　$P(-1)$

$\dfrac{3\cdot(-9)-4\cdot5}{3-4}=47$이므로 　$Q(47)$

$\overline{PQ}$의 중점이 $M(a)$이므로

$a=\dfrac{-1+47}{2}=23$ 　　답 23

02 $\dfrac{5\cdot a+1\cdot(-4)}{5+1}=\dfrac{5a-4}{6}$이므로 　$P\left(\dfrac{5a-4}{6}\right)$

$\dfrac{5\cdot a-1\cdot(-4)}{5-1}=\dfrac{5a+4}{4}$이므로 　$Q\left(\dfrac{5a+4}{4}\right)$

두 점 P, Q 사이의 거리가 5이므로

$\left|\dfrac{5a+4}{4}-\dfrac{5a-4}{6}\right|=5$, 　$\left|\dfrac{5a+20}{12}\right|=5$

$\dfrac{5a+20}{12}=-5$ 또는 $\dfrac{5a+20}{12}=5$

$\therefore a=8$ ($\because a>0$) 　　답 ④

Q BOX

$ad=bc$이면
$a:b=c:d$

$\dfrac{5a+20}{12}=-5$에서
$5a+20=-60$
$5a=-80$
$\therefore a=-16$

03 $\overline{AB}$를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표가 $(3, -2)$이므로

$\dfrac{1\cdot7-4\cdot(a+1)}{1-4}=3$, $\dfrac{1\cdot(-b)-4\cdot(-1)}{1-4}=-2$

$3-4a=-9$, $-b+4=6$

$\therefore a=3$, $b=-2$

따라서 $B(7, 2)$, $C(3, -2)$이므로 $\overline{BC}$를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3\cdot3+1\cdot7}{3+1}, \dfrac{3\cdot(-2)+1\cdot2}{3+1}\right)$

$\therefore (4, -1)$ 　　답 $(4, -1)$

04 $\overline{AB}$를 $(1-a):a$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{(1-a)\cdot8+a\cdot(-4)}{(1-a)+a}, \dfrac{(1-a)\cdot(-1)+a\cdot6}{(1-a)+a}\right)$

$\therefore (8-12a, 7a-1)$

이 점이 제1사분면 위에 있으므로

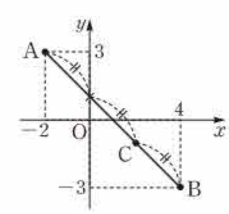
$8-12a>0$, $7a-1>0$

$\therefore \dfrac{1}{7}<a<\dfrac{2}{3}$ 　　답 $\dfrac{1}{7}<a<\dfrac{2}{3}$

05 $\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 　$\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

(i) 점 C가 $\overline{AB}$ 위의 점일 때,

점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로



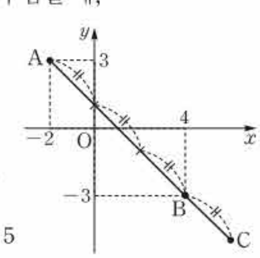
$\dfrac{2\cdot4+1\cdot(-2)}{2+1}=2$,

$\dfrac{2\cdot(-3)+1\cdot3}{2+1}=-1$

$\therefore C(2, -1)$

(ii) 점 C가 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점일 때,

점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $4:1$로 외분하는 점이므로



$\dfrac{4\cdot4-1\cdot(-2)}{4-1}=6$,

$\dfrac{4\cdot(-3)-1\cdot3}{4-1}=-5$

$\therefore C(6, -5)$

(i), (ii)에서 점 C의 좌표는 $(2, -1)$, $(6, -5)$이다.

답 $(2, -1)$, $(6, -5)$

다른 풀이 (ii) 점 C가 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점일 때,

$C(a, b)$라 하면 점 B는 $\overline{AC}$를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$\dfrac{3a-2}{3+1}=4$, $\dfrac{3b+3}{3+1}=-3$

$3a-2=16$, $3b+3=-12$

$\therefore a=6$, $b=-5$

$\therefore C(6, -5)$

쌤한마디

두 점 A, B를 지나는 직선 AB 위의 점 C가

$\overline{AB} : \overline{BC} = m : n\ (m>0,\ n>0)$

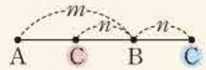
을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

① $m>n$일 때

점 C는 $\overline{AB}$를

$(m-n) : n$으로 내분하는 점 또는

$(m+n) : n$으로 외분하는 점이다.

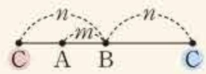


② $m<n$일 때

점 C는 $\overline{AB}$를

$(n-m) : n$으로 외분하는 점 또는

$(m+n) : n$으로 외분하는 점이다.



06 △ABC의 무게중심의 좌표가 $(-1, 3)$이므로

$$\frac{9+2b-1+2a+1}{3}=-1,\ \frac{a+2-5b+1}{3}=3$$

$\therefore a+b=-6,\ a-5b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=-2$

$\therefore ab=8$ 답 ③

07 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot 8+1\cdot(-1)}{2+1},\ \frac{2\cdot(-4)+1\cdot 2}{2+1}\right)$$

$\therefore (5, -2)$

$\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot 5+1\cdot 8}{2+1},\ \frac{2\cdot 11+1\cdot(-4)}{2+1}\right)$$

$\therefore (6, 6)$

$\overline{CA}$를 $2:1$로 내분하는 점 F의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot(-1)+1\cdot 5}{2+1},\ \frac{2\cdot 2+1\cdot 11}{2+1}\right)$$

$\therefore (1, 5)$

따라서 △DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{5+6+1}{3},\ \frac{-2+6+5}{3}\right)$$

$\therefore (4, 3)$ 답 $(4, 3)$

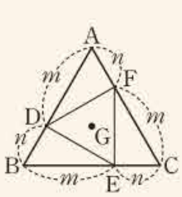
다른 풀이 △DEF의 무게중심은 △ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+8+5}{3},\ \frac{2-4+11}{3}\right)\qquad \therefore (4, 3)$$

쌤한마디

삼각형의 무게중심의 성질

△ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $m : n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 할 때, △ABC와 △DEF의 무게중심은 일치한다.



QBOX

평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.

08 D(a, b)라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-1+1}{2}=\frac{-5+a}{2},\ \frac{3-1}{2}=\frac{1+b}{2}$$

$\therefore a=5,\ b=1$

따라서 점 D의 좌표는 $(5, 1)$이다. 답 $(5, 1)$

마름모
① 네 변의 길이가 모두 같다.
② 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

09 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표에서

$$\frac{a+1}{2}=\frac{-2+b}{2}\qquad \therefore b=a+3\quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{BC}=\overline{CD}$임을 이용하여 b의 값을 먼저 구할 수도 있다.

또 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(-2-a)^2+(-1-2)^2=(1+2)^2+(-4+1)^2$

$a^2+4a-5=0,\qquad (a+5)(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=4$

$\therefore ab=4$ 답 ④

다른 풀이 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 $\quad \dfrac{a+1}{2}=\dfrac{-2+b}{2},\ a=1$

$\therefore a=1,\ b=4$

직선 AC와 직선 BD가 수직이고 직선 BD의 방정식이 $y=-1$이므로 직선 AC의 방정식은 $x=k$ (k는 상수) 꼴이다. 그런데 점 C의 x좌표가 1이므로 직선 AC의 방정식은 $x=1$

10 $\overline{AD}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+(-6-6)^2}=13,$

$\overline{AC}=\sqrt{(7-3)^2+(3-6)^2}=5$

이므로

$\overline{BD} : \overline{CD}=13 : 5$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{13\cdot 7+5\cdot(-2)}{13+5},\ \frac{13\cdot 3+5\cdot(-6)}{13+5}\right)$$

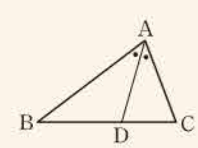
$\therefore \left(\frac{9}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 답 ④

쌤한마디

삼각형의 내각의 이등분선

삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라 하면

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$



높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

11 $\triangle ABD : \triangle ACD = p : q$에서

$\overline{BD} : \overline{CD} = p : q$

$\overline{AD}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD} = p : q$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(-10+2)^2+(9+6)^2}=17,$

$\overline{AC}=\sqrt{(4+2)^2+(2+6)^2}=10$

이므로

$\overline{AB} : \overline{AC} = 17 : 10$

따라서 $p=17$, $q=10$이므로

$p-q=7$ 답 7

12 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 점 P는 직선 $x-2y+3=0$ 위의 점이므로

$a-2b+3=0$ ······ ㉠

$\mathrm{Q}(x,\ y)$라 하면 점 Q는 $\overline{\mathrm{AP}}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{1\cdot a+2\cdot 4}{1+2}=\frac{a+8}{3},\ y=\frac{1\cdot b+2\cdot 1}{1+2}=\frac{b+2}{3}$$

$\therefore a=3x-8,\ b=3y-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$(3x-8)-2(3y-2)+3=0$

$\therefore 3x-6y-1=0$ 답 $3x-6y-1=0$

13 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(x-6)^2+(y+7)^2=(x-3)^2+(y-2)^2$

$x^2-12x+y^2+14y+85=x^2-6x+y^2-4y+13$

$-6x+18y+72=0$

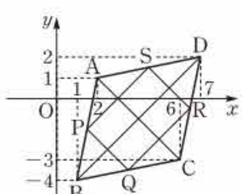
$\therefore x-3y-12=0$ 답 $x-3y-12=0$

중단원 마무리

108쪽

01 전략 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 이용하여 사각형 PQRS의 각 변의 길이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림의 두 삼각형 ABD, BCD에서



$\overline{\mathrm{PS}}=\overline{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}}$

또 두 삼각형 ABC, ACD에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{SR}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}$

이때

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{(7-1)^2+(2+4)^2}=6\sqrt{2}$,

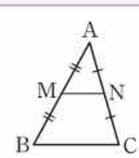
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(6-2)^2+(-3-1)^2}=4\sqrt{2}$

이므로 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{SR}}+\overline{\mathrm{PS}}=(\overline{\mathrm{PS}}+\overline{\mathrm{QR}})+(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{SR}})$

$=\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{AC}}$

$=10\sqrt{2}$ 답 $10\sqrt{2}$



△ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{MN}}$,

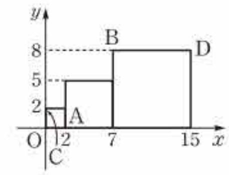
$\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$

02 전략 가장 작은 정사각형과 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이를 이용하여 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

풀이 가장 작은 정사각형의 한 꼭짓점 C의 y좌표가 2이므로 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이는 2이다.

$\therefore \mathrm{A}(2,\ 0)$ ···➊

오른쪽 그림에서 가장 큰 정사각형의 한 꼭짓점 D의 y좌표가 8이므로 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이는 8이다.



$\therefore \mathrm{B}(7,\ 8)$ ···➋

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{(7-2)^2+8^2}=\sqrt{89}$ ···➌

답 $\sqrt{89}$

단계	채점 기준	비율
➊	점 A의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➋	점 B의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
➌	두 점 A, B 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

03 전략 x축 위의 점을 $\mathrm{A}(a,\ 0)$으로 놓고 두 점 사이의 거리를 이용한다.

풀이 x축 위의 점을 $\mathrm{A}(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=2\sqrt{10}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=40$이므로

$(5-a)^2+(-2)^2=40,\quad a^2-10a-11=0$

$(a+1)(a-11)=0$

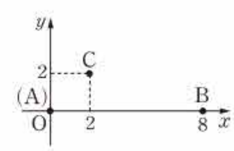
$\therefore a=-1$ 또는 $a=11$

따라서 두 점의 좌표는 $(-1,\ 0)$, $(11,\ 0)$이므로 두 점 사이의 거리는

$|11-(-1)|=12$ 답 ⑤

04 전략 먼저 세 지점 A, B, C의 위치를 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 A 지점이 원점, B 지점이 x축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면



$\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(8,\ 0)$, $\mathrm{C}(2,\ 2)$ ···➊

화단을 만들려는 지점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$에서 $a^2+b^2=(a-8)^2+b^2$

$16a=64\quad \therefore a=4$

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$에서 $4^2+b^2=(4-2)^2+(b-2)^2$

$4b=-8\quad \therefore b=-2$

$\therefore \mathrm{P}(4,\ -2)$ ···➋

따라서 구하는 거리는

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{4^2+(-2)^2}$

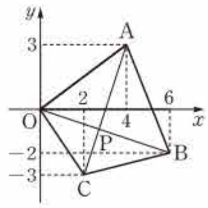
$=2\sqrt{5}\,(\mathrm{km})$ ···➌

답 $2\sqrt{5}$ km

단계	채점 기준	비율
➊	세 지점 A, B, C의 위치를 좌표로 나타낼 수 있다.	30 %
➋	화단을 만들려는 지점의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
➌	화단과 각 지점 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

05 전략 $\overline{OP}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 값이 최소일 때의 점 P의 위치를 찾는다.

풀이 $\overline{OP}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 값은 오른쪽 그림과 같이 점 P가 사각형 OCBA의 두 대각선 OB, AC의 교점일 때 최소이다.



따라서 구하는 최솟값은

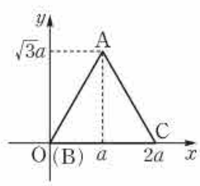
$$\overline{OB}+\overline{AC}$$
$$=\sqrt{6^2+(-2)^2}+\sqrt{(2-4)^2+(-3-3)^2}$$
$$=2\sqrt{10}+2\sqrt{10}$$
$$=4\sqrt{10}$$

답 ③

> Q BOX
> $\overline{OP}+\overline{PB}\ge\overline{OB}$, $\overline{PA}+\overline{PC}\ge\overline{AC}$이므로 점 P가 두 대각선 OB, AC의 교점일 때 $\overline{OP}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 값은 최소이다.

06 전략 정삼각형 ABC를 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $2a$라 하면

$A(a, \sqrt{3}a)$, $C(2a, 0)$

> 한 변의 길이가 x인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}x$이다.

$\overline{BC}$ 위의 점 P의 좌표를 $(k, 0)$ $(0\le k\le 2a)$이라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(k-a)^2+(-\sqrt{3}a)^2+k^2$$
$$=2k^2-2ak+4a^2$$
$$=2\left(k-\frac{1}{2}a\right)^2+\frac{7}{2}a^2$$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값은 $k=\frac{1}{2}a$일 때 최소이므로

$$\overline{BP}:\overline{CP}=\frac{1}{2}a:\left(2a-\frac{1}{2}a\right)$$
$$=\frac{1}{2}a:\frac{3}{2}a=1:3$$

즉 $m=1$, $n=3$이므로

$n-m=2$

답 2

07 전략 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같음을 이용한다.

풀이 $\triangle BOC:\triangle OAC=2:1$이므로

$\overline{BO}:\overline{OA}=2:1$

즉 원점 O는 $\overline{BA}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$\frac{2\cdot3+1\cdot a}{2+1}=0,\quad \frac{2\cdot1+1\cdot b}{2+1}=0$$

$\therefore a=-6$, $b=-2$

$\therefore a+b=-8$

답 ①

08 전략 $\triangle OAQ=\triangle OAB+\triangle OBQ$임을 이용한다.

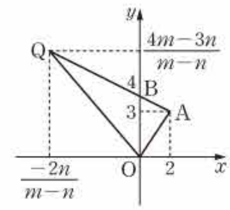
풀이 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{m\cdot0-n\cdot2}{m-n}, \frac{m\cdot4-n\cdot3}{m-n}\right)$$
$$\therefore \left(\frac{-2n}{m-n}, \frac{4m-3n}{m-n}\right)$$

오른쪽 그림에서

$\triangle OAQ=\triangle OAB+\triangle OBQ$

이므로



$$16=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2+\frac{1}{2}\cdot4\cdot\left|\frac{-2n}{m-n}\right|$$

$$\therefore \left|\frac{-2n}{m-n}\right|=6$$

이때 $m>n>0$이므로

$$\frac{2n}{m-n}=6,\qquad 2n=6m-6n$$

> $m-n>0$, $-2n<0$이므로
> $$\frac{-2n}{m-n}<0$$
> $$\therefore \left|\frac{-2n}{m-n}\right|=-\frac{-2n}{m-n}=\frac{2n}{m-n}$$

$$8n=6m\qquad \therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$$

답 ④

다른 풀이 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2=4$이므로

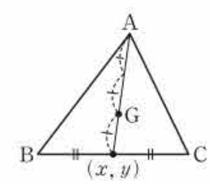
$\triangle OAB:\triangle OAQ=4:16=1:4$

즉 $\overline{AB}:\overline{AQ}=1:4$이므로 점 Q는 $\overline{AB}$를 $4:3$으로 외분하는 점이다.

$$\therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$$

09 전략 $\overline{AG}$를 $3:1$로 외분하는 점은 $\overline{BC}$의 중점임을 이용한다.

풀이 삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 $2:1$로 내분하므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AG}$를 $3:1$로 외분하는 점은 $\overline{BC}$의 중점이다.



따라서

$$x=\frac{(a-2)+(-a-1)}{2}=-\frac{3}{2},$$
$$y=\frac{(b+5)+(-b+4)}{2}=\frac{9}{2}$$

이므로

$x+y=3$

답 3

다른 풀이 $G(p, q)$라 하면

$$p=\frac{-6+(a-2)+(-a-1)}{3}=-3,$$
$$q=\frac{9+(b+5)+(-b+4)}{3}=6$$

즉 $G(-3, 6)$이므로 $\overline{AG}$를 $3:1$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot(-3)-1\cdot(-6)}{3-1}, \frac{3\cdot6-1\cdot9}{3-1}\right)$$
$$\therefore \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

따라서 $x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{9}{2}$이므로 $\quad x+y=3$

10 전략 $\overline{AD}$와 $\overline{BC}$는 $\triangle OCD$의 중선임을 이용한다.

풀이 $A(a, b)$, $B(c, d)$라 하면 $\triangle OAB$의 무게중심의 좌표가 $(5, 4)$이므로

$$\frac{0+a+c}{3}=5,\ \frac{0+b+d}{3}=4$$

$\therefore\ a+c=15,\ b+d=12$ ...... ㉠

$\overline{OA}$를 2 : 1로 외분하는 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot a-1\cdot 0}{2-1},\ \frac{2\cdot b-1\cdot 0}{2-1}\right)\qquad \therefore\ (2a,\ 2b)$$

$\overline{OB}$를 2 : 1로 외분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot c-1\cdot 0}{2-1},\ \frac{2\cdot d-1\cdot 0}{2-1}\right)\qquad \therefore\ (2c,\ 2d)$$

$\overline{AD}$, $\overline{BC}$는 모두 △OCD의 중선이므로 점 E는 △OCD의 무게중심이다.

삼각형의 무게중심
➡ 삼각형의 세 중선의 교점

따라서 E$(p,\ q)$에서

$$p=\frac{0+2a+2c}{3}=\frac{2(a+c)}{3}=10,$$

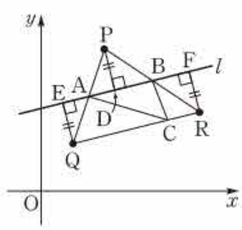
$$q=\frac{0+2b+2d}{3}=\frac{2(b+d)}{3}=8\ (\because\ ㉠)$$

$\therefore\ p+q=18$

답 ④

11 전략 세 점 P, Q, R에서 직선 l에 이르는 거리가 같음을 이용하여 합동인 삼각형을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 세 점 P, Q, R에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자.



△ADP≡△AEQ (ASA 합동)이므로

$\overline{DP}=\overline{EQ}$,
$\angle ADP=\angle AEQ=90°$,
$\angle APD=\angle AQE$
(엇각)

$$\overline{AP}=\overline{AQ}$$

즉 점 A는 $\overline{PQ}$의 중점이므로 점 A의 좌표는

$$\left(\frac{4+2}{2},\ \frac{9+3}{2}\right)\qquad \therefore\ (3,\ 6)$$

또 △BDP≡△BFR (ASA 합동)이므로

$$\overline{BP}=\overline{BR}$$

즉 점 B는 $\overline{PR}$의 중점이므로 점 B의 좌표는

$$\left(\frac{4+10}{2},\ \frac{9+5}{2}\right)\qquad \therefore\ (7,\ 7)$$

한편 점 C는 $\overline{QR}$를 3 : 1로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot 10+1\cdot 2}{3+1},\ \frac{3\cdot 5+1\cdot 3}{3+1}\right)\qquad \therefore\ \left(8,\ \frac{9}{2}\right)$$

△ABC의 무게중심의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

$$a=\frac{1}{3}(3+7+8)=6,\ b=\frac{1}{3}\left(6+7+\frac{9}{2}\right)=\frac{35}{6}$$

$\therefore\ 6(a+b)=71$

답 71

12 전략 평행사변형의 두 대각선의 중점은 일치함을 이용한다.

풀이 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치한다. ⋯ ❶

이때 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2a+b}{2},\ \frac{3+4}{2}\right)$$

$$\therefore\ \left(\frac{2a+b}{2},\ \frac{7}{2}\right)\qquad ......\ ㉠$$

선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+1}{2},\ \frac{a+8}{2}\right)$$

$$\therefore\ \left(\frac{5}{2},\ \frac{a+8}{2}\right)\qquad ......\ ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{2a+b}{2}=\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}=\frac{a+8}{2}$$

$\therefore\ a=-1,\ b=7$ ⋯ ❷

따라서 A$(-2,\ 3)$, B$(4,\ -1)$, C$(7,\ 4)$, D$(1,\ 8)$이므로

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$$
$$=\{(7+2)^2+(4-3)^2\}+\{(1-4)^2+(8+1)^2\}$$
$$=172$$ ⋯ ❸

답 172

단계	채점 기준	비율
❶	두 대각선 AC, BD의 중점이 일치함을 알 수 있다.	20 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %

13 전략 각의 이등분선의 성질과 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 ∠POQ의 이등분선과 $\overline{PQ}$의 교점을 R라 하면

$$\overline{OP}:\overline{OQ}=\overline{PR}:\overline{QR}$$

이때 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{OQ}=\sqrt{12^2+5^2}=13$이므로

$$\overline{PR}:\overline{QR}=5:13$$

따라서 점 R는 $\overline{PQ}$를 5 : 13으로 내분하는 점이므로 점 R의 x좌표는

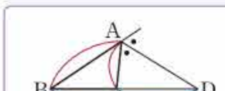
$$\frac{5\cdot 12+13\cdot 3}{5+13}=\frac{11}{2}$$

즉 $a=2$, $b=11$이므로

$a+b=13$

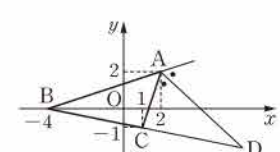
답 13

14 전략 삼각형의 외각의 이등분선의 성질을 이용한다.



삼각형 ABC에서 $\overline{AD}$가 ∠A의 외각의 이등분선일 때,
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

풀이 $\overline{AD}$가 ∠A의 외각의 이등분선이므로



$$\overline{AB}:\overline{AC}$$
$$=\overline{BD}:\overline{CD}$$

이때

$$\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{10},$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(1-2)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$$

이므로

$$\overline{BD}:\overline{CD}=2\sqrt{10}:\sqrt{10}=2:1$$

따라서 점 D는 선분 BC를 2 : 1로 외분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot 1-1\cdot(-4)}{2-1},\ \frac{2\cdot(-1)-1\cdot 0}{2-1}\right)$$

$\therefore\ (6,\ -2)$

답 ③

15 전략 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 $x,\ y$ 사이의 관계식을 세운다.

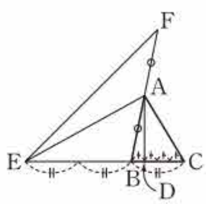
풀이 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2\overline{\mathrm{CP}}^2$에서

$$\{(x-3)^2+(y-1)^2\}+\{(x+1)^2+(y-2)^2\}$$
$$=2\{(x-5)^2+(y-4)^2\}$$
$$2x^2-4x+2y^2-6y+15=2x^2-20x+2y^2-16y+82$$
$$\therefore\ 16x+10y-67=0$$

답 $16x+10y-67=0$

16 전략 △ABC에서 조건을 만족시키는 세 점 D, E, F를 그려 본다.

풀이 △ABC에서 주어진 조건을 만족시키는 세 점 D, E, F를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $\overline{\mathrm{BC}}=4\overline{\mathrm{BD}}$이므로

$$\triangle\mathrm{ABC}=4\triangle\mathrm{ABD}$$

$\overline{\mathrm{EB}}=2\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$$\triangle\mathrm{AEB}=2\triangle\mathrm{ABC}=2\cdot4\triangle\mathrm{ABD}=8\triangle\mathrm{ABD}$$

$\overline{\mathrm{FB}}=2\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$$\triangle\mathrm{FEB}=2\triangle\mathrm{AEB}=2\cdot8\triangle\mathrm{ABD}=16\triangle\mathrm{ABD}$$
$$\therefore\ k=16$$

답 16

17 전략 점 P의 좌표를 $a,\ b,\ c,\ m,\ n$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P는 $\overline{\mathrm{AC}}$를 $m:n$으로 내분하는 점이므로

$$p=\frac{mc+na}{m+n} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 P는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 $m:n$으로 외분하는 점이므로

$$p=\frac{mc-nb}{m-n} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{mc+na}{m+n}=\frac{mc-nb}{m-n} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

ㄱ. $a=1,\ b=5,\ m=1,\ n=2$를 ㉢에 대입하면

$$\frac{c+2}{1+2}=\frac{c-10}{1-2}, \qquad c+2=-3c+30$$
$$4c=28 \qquad \therefore\ c=7$$

ㄴ. $a=0,\ c=6,\ m=2,\ n=1$을 ㉢에 대입하면

$$\frac{12+0}{2+1}=\frac{12-b}{2-1}, \qquad 4=12-b$$
$$\therefore\ b=8$$

또한 $p=4$이므로 $\quad a<p<c<b$

ㄷ. ㉠에서 $\quad (m+n)p=mc+na$

㉡에서 $\quad (m-n)p=mc-nb$

위의 두 식을 변끼리 빼면

$$2np=n(a+b) \qquad \therefore\ p=\frac{a+b}{2}\ (\because\ n>0)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

10 직선의 방정식

Lecture 21 직선의 방정식

112쪽

01 $y-5=4(x+3) \qquad \therefore\ y=4x+17$

답 $y=4x+17$

02 $y-1=\dfrac{-5-1}{2+4}(x+4) \qquad \therefore\ y=-x-3$

답 $y=-x-3$

03 답 $\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{8}=1$

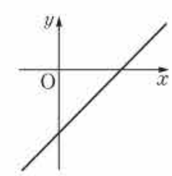
04 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

이때 $-\dfrac{a}{b}>0,\ -\dfrac{c}{b}<0$이므로 주어진 직선의 기울기는 양수이고 y절편은 음수이다.

$a<0,\ b>0$에서
$\dfrac{a}{b}<0 \quad \therefore\ -\dfrac{a}{b}>0$
$b>0,\ c>0$에서
$\dfrac{c}{b}>0 \quad \therefore\ -\dfrac{c}{b}<0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.



답 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면

05 주어진 직선이 항상 지나는 점은 두 직선

$$x-2y+3=0,\ 3x+y+2=0$$

의 교점이다.

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=-1,\ y=1$$

$\begin{cases} x-2y+3=0 & \cdots ㉠ \\ 3x+y+2=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉠+㉡×2를 하면
$7x+7=0$
$\therefore\ x=-1$
$x=-1$을 ㉡에 대입하면
$-3+y+2=0$
$\therefore\ y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(-1,\ 1)$

답 $(-1,\ 1)$

06 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$$(x-4y+1)k+(x-3)=0$$

주어진 직선이 항상 지나는 점은 두 직선

$$x-4y+1=0,\ x-3=0$$

의 교점이다.

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=3,\ y=1$$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(3,\ 1)$

답 $(3,\ 1)$

07 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$2x-5y+1+k(x-2y-1)=0\ (k\text{는 실수}) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

으로 놓으면 직선 ㉠이 원점을 지나므로

㉠에 $x=0,\ y=0$을 대입한다.

$$1-k=0 \qquad \therefore\ k=1$$

$k=1$을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$2x-5y+1+(x-2y-1)=0$

$\therefore 3x-7y=0$ 　　답 $3x-7y=0$

다른 풀이 $2x-5y+1=0$, $x-2y-1=0$을 연립하여 풀면 　$x=7$, $y=3$

즉 두 직선 $2x-5y+1=0$, $x-2y-1=0$의 교점의 좌표는

$(7, 3)$

따라서 두 점 $(0, 0)$, $(7, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{7}x$ 　　$\therefore 3x-7y=0$

QBOX

$\begin{cases} 2x-5y+1=0 & \cdots ㉡ \\ x-2y-1=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉡$-$㉢$\times 2$를 하면

$-y+3=0$ 　$\therefore y=3$

$y=3$을 ㉢에 대입하면

$x-6-1=0$

$\therefore x=7$

표준+발전 유형 Q+Q

113쪽

01 두 점 $(-4, -7)$, $(2, -3)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{-7-3}{2}\right)$ 　　$\therefore (-1, -5)$

따라서 점 $(-1, -5)$를 지나고 기울기가 6인 직선의 방정식은

$y+5=6(x+1)$ 　　$\therefore y=6x+1$

답 $y=6x+1$

02 점 $(-1, 4)$를 지나고 기울기가 $\tan 60°=\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y-4=\sqrt{3}(x+1)$

$\therefore \sqrt{3}x-y+4+\sqrt{3}=0$

따라서 $a=-1$, $b=4+\sqrt{3}$이므로

$a-b=-5-\sqrt{3}$ 　　답 ①

03 두 점 $(-2, 7)$, $(1, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-7=\frac{-2-7}{1+2}(x+2)$ 　　$\therefore y=-3x+1$

두 점 $(a, -5)$, $(-1, b)$가 직선 $y=-3x+1$ 위에 있으므로

$-5=-3a+1$, $b=(-3)\cdot(-1)+1$

$\therefore a=2$, $b=4$ 　　$\therefore ab=8$ 　　답 ④

04 $\overline{AB}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot 3+3\cdot(-5)}{1+3}, \frac{1\cdot(-4)+3\cdot 8}{1+3}\right)$

$\therefore (-3, 5)$

따라서 두 점 $(-3, 5)$, $(-1, 9)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{9-5}{-1+3}(x+3)$

$\therefore y=2x+11$ 　　답 $y=2x+11$

05 x절편이 -2, y절편이 -4인 직선의 방정식은

$-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$

이 직선이 점 $(k, -3k)$를 지나므로

$-\frac{k}{2}+\frac{3k}{4}=1$, 　$\frac{k}{4}=1$

$\therefore k=4$ 　　답 ③

06 x절편을 a $(a\neq 0)$라 하면 y절편은 $2a$이므로 직선 l의 방정식은 　$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1$

이 직선이 점 $(1, 6)$을 지나므로

$\frac{1}{a}+\frac{6}{2a}=1$, 　$\frac{4}{a}=1$ 　　$\therefore a=4$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1$ 　　답 $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1$

07 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{a+2}{2+2}=\frac{-5+2}{-a+2}$, 즉 $\frac{a+2}{4}=\frac{3}{a-2}$

$(a+2)(a-2)=12$, 　$a^2=16$

$\therefore a=4$ $(\because a>0)$

따라서 직선 l의 기울기는 $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$이고 점 $A(-2, -2)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y+2=\frac{3}{2}(x+2)$ 　　$\therefore y=\frac{3}{2}x+1$

답 $y=\frac{3}{2}x+1$

08 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

따라서 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{5+1}{a+1}=\frac{(3a+1)+1}{3+1}$, 즉 $\frac{6}{a+1}=\frac{3a+2}{4}$

$(a+1)(3a+2)=24$, 　$3a^2+5a-22=0$

$(3a+11)(a-2)=0$ 　　$\therefore a=2$ $(\because a>0)$

답 ②

09 직선 l이 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하려면 $\overline{BC}$의 중점을 지나야 한다.

△ABC의 꼭짓점 A를 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{BC}$의 중점을 지난다.

이때 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{6+2}{2}, \frac{-4+0}{2}\right)$ 　　$\therefore (4, -2)$

따라서 직선 l은 두 점 $(3, 1)$, $(4, -2)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-1=\frac{-2-1}{4-3}(x-3)$ 　　$\therefore y=-3x+10$

답 $y=-3x+10$

10 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는 각각

$\left(\frac{-3-2}{2}, \frac{-1-3}{2}\right)$, $\left(\frac{1+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$

$\therefore \left(-\frac{5}{2}, -2\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

따라서 두 점 $\left(-\frac{5}{2},\ -2\right)$, $\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2+2}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=1$$

답 ②

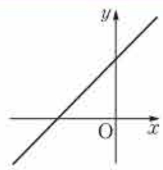
11 직선 $ax+by-c=0$에서 $b\neq0$이므로

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

이때 $\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}<0$이므로

$$-\frac{a}{b}>0,\ \frac{c}{b}>0$$

즉 직선의 기울기와 y절편 모두 양수이므로 직선 $ax+by-c=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 제4사분면을 지나지 않는다.

답 ④

$\frac{b}{a}<0$이므로 $b\neq0$

a와 b의 부호가 다르고, a와 c의 부호가 다르므로 b와 c의 부호가 같다.

12 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로

$$-\frac{a}{b}<0,\ -\frac{c}{b}>0$$

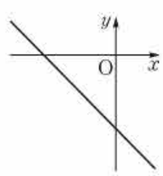
즉 $ab>0$, $bc<0$이므로 $ac<0$

직선 $bx-cy+a=0$에서 $c\neq0$이므로

$$y=\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}$$

이때 $\frac{b}{c}<0$, $\frac{a}{c}<0$이므로 직선 $bx-cy+a=0$의 기울기와 y절편은 모두 음수이다.

따라서 직선 $bx-cy+a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



답 제1사분면

a와 b의 부호가 같고, b와 c의 부호가 다르므로 a와 c의 부호가 다르다.

$bc<0$이므로 $\frac{b}{c}<0$

$ac<0$이므로 $\frac{a}{c}<0$

13 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$$(x-2y-5)k+(x+y-a)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x-2y-5=0,\ x+y-a=0$$

이때 점 $(1,\ b)$는 위의 두 직선의 교점이므로

$$1-2b-5=0,\ 1+b-a=0$$

따라서 $a=-1$, $b=-2$이므로

$$a+2b=-5$$

답 ①

14 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$$(3x-y-2)k+(-x+3y-10)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$3x-y-2=0,\ -x+3y-10=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=2,\ y=4$$

$\begin{cases}3x-y-2=0 & \cdots㉠\\ -x+3y-10=0 & \cdots㉡\end{cases}$

㉠+㉡×3을 하면

$8y-32=0$

$\therefore y=4$

$y=4$를 ㉡에 대입하면

$-x+12-10=0$

$\therefore x=2$

따라서 $\mathrm{P}(2,\ 4)$이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$$

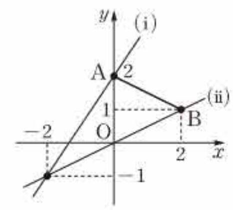
답 ⑤

15 $y=m(x+2)-1$에서

$$m(x+2)-(y+1)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ -1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$를 지날 때,

$$2m-3=0$$

$$\therefore m=\frac{3}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(2,\ 1)$을 지날 때,

$$4m-2=0 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$$\frac{1}{2}\leq m\leq\frac{3}{2}$$

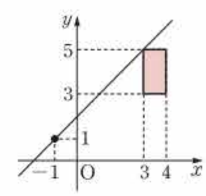
답 $\frac{1}{2}\leq m\leq\frac{3}{2}$

16 $mx-y+m+1=0$에서

$$m(x+1)-(y-1)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

m은 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 점 $(3,\ 5)$를 지날 때 최대이다.



따라서 $4m-4=0$에서 $m=1$이므로 m의 최댓값은 1이다.

답 1

참고 (i) 직선 ㉠이 점 $(3,\ 5)$를 지날 때, $m=1$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(4,\ 3)$을 지날 때,

$$5m-2=0 \qquad \therefore m=\frac{2}{5}$$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는 $\frac{2}{5}\leq m\leq1$

17 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$2x+3y-1+k(2x-y+3)=0\ (k\text{는 실수}) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(-3,\ 5)$를 지나므로

$$-6+15-1+k(-6-5+3)=0$$

$$8-8k=0 \qquad \therefore k=1$$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$$2x+3y-1+(2x-y+3)=0$$

$$4x+2y+2=0 \qquad \therefore 2x+y+1=0$$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로

$$a+b=3$$

답 3

다른 풀이 두 직선 $2x+3y-1=0$, $2x-y+3=0$의 교점의 좌표는 $(-1,\ 1)$

두 점 $(-1,\ 1)$, $(-3,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{5-1}{-3+1}(x+1)$$

$$\therefore 2x+y+1=0$$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $a+b=3$

18 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(a+3)x+(2a+1)y-4+k(x+ay-1)=0$

(k는 실수)

…… ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 원점을 지나므로

$-4-k=0 \qquad \therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$(a+3)x+(2a+1)y-4-4(x+ay-1)=0$

$\therefore (a-1)x+(-2a+1)y=0$

이 직선의 기울기가 $\frac{2}{3}$이므로

$-\frac{a-1}{-2a+1}=\frac{2}{3}, \qquad 3a-3=4a-2$

$\therefore a=-1$ 답 ③

㉠에 $x=0$, $y=0$을 대입한다.

Lecture 22 두 직선의 평행과 수직

116쪽

01 $-3=2m+1$이므로 $\quad m=-2$ 답 -2

02 $-3(2m+1)=-1$이므로 $\quad 2m+1=\frac{1}{3}$

$\therefore m=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

03 $\frac{a}{1}=\frac{4}{-(a+5)}\neq\frac{4}{-1}$에서

$a^2+5a+4=0$, $a\neq-4$

$(a+4)(a+1)=0$, $a\neq-4$

$\therefore a=-1$ 답 -1

$\frac{a}{1}\neq\frac{4}{-1}$에서 $\quad a\neq-4$

04 $a\cdot1+4\cdot\{-(a+5)\}=0$에서

$-3a-20=0 \qquad \therefore a=-\frac{20}{3}$ 답 $-\frac{20}{3}$

05 직선 $y=-x-2$에 평행한 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 점 $(4, 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-3=-(x-4) \qquad \therefore y=-x+7$

답 $y=-x+7$

06 직선 $6x-y=0$, 즉 $y=6x$에 평행한 직선의 기울기는 6이다.

따라서 점 $(-1, 2)$를 지나고 기울기가 6인 직선의 방정식은

$y-2=6(x+1) \qquad \therefore y=6x+8$

답 $y=6x+8$

07 직선 $x-3y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+1$에 평행한 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(0, 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x$ 답 $y=\frac{1}{3}x$

08 직선 $y=-5x+2$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{5}$이다.

따라서 점 $(3, 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{5}$인 직선의 방정식은

$y-0=\frac{1}{5}(x-3) \qquad \therefore y=\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}$

답 $y=\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}$

09 직선 $x-2y=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x$에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.

따라서 점 $(-4, 6)$을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-6=-2(x+4) \qquad \therefore y=-2x-2$

답 $y=-2x-2$

10 직선 $x+4y-8=0$, 즉 $y=-\frac{1}{4}x+2$에 수직인 직선의 기울기는 4이다.

따라서 점 $(0, -5)$를 지나고 기울기가 4인 직선의 방정식은

$y+5=4(x-0) \qquad \therefore y=4x-5$

답 $y=4x-5$

표준+발전 유형 Q+Q

117쪽

01 직선 $3x+ay-b=0$이 점 $(-3, 1)$을 지나므로

$-9+a-b=0 \qquad \therefore a-b=9 \qquad$ …… ㉠

직선 $x-cy+2=0$도 점 $(-3, 1)$을 지나므로

$-3-c+2=0 \qquad \therefore c=-1$

두 직선 $3x+ay-b=0$, $x+y+2=0$이 수직이므로

$3\cdot1+a\cdot1=0 \qquad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $\qquad b=-12$

$\therefore a+b+c=-16$ 답 -16

02 직선 $2x+ay-3=0$이 직선 $x-by-5=0$과 수직이므로

$2\cdot1+a\cdot(-b)=0 \qquad \therefore ab=2$

또 직선 $2x+ay-3=0$이 직선 $2x-(b+3)y-4=0$과 평행하므로

$\frac{2}{2}=\frac{a}{-(b+3)}\neq\frac{-3}{-4}$

$a=-b-3 \qquad \therefore a+b=-3$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-3)^2-2\cdot2=5$ 답 ②

03 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=ax+1$이 두 직선 $y=-3x$, $y=x-4$의 교점을 지날 때,

$y=-3x$, $y=x-4$를 연립하여 풀면

$x=1$, $y=-3$

직선 $y=ax+1$이 점 $(1, -3)$을 지나려면

$-3=a+1 \quad \therefore a=-4$

(ii) 직선 $y=ax+1$이 직선 $y=-3x$ 또는 $y=x-4$와 평행할 때,

$a=-3$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은

$-4+(-3)+1=-6$ 답 -6

> 두 직선 $y=-3x$, $y=x-4$는 평행하지 않으므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 생각하지 않는다.

쌤한마디

서로 다른 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

① 세 직선이 한 점에서 만날 때

⇨ 한 직선이 나머지 두 직선의 교점을 지난다.

② 세 직선 중 두 직선이 평행할 때

⇨ 두 직선의 기울기는 같고, 나머지 한 직선의 기울기는 다르다.

③ 세 직선이 모두 평행할 때

⇨ 세 직선의 기울기가 모두 같다.

04 두 직선 $2x+3y-1=0$, $4x-y+3=0$이 한 점에서 만나므로 직선 $ax+y-6=0$이 위의 두 직선 중 하나와 평행해야 한다.

> 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개인 경우는 세 직선 중 두 직선이 평행한 경우이다.

두 직선 $2x+3y-1=0$, $ax+y-6=0$이 평행하려면

$\frac{2}{a}=\frac{3}{1}\neq\frac{-1}{-6} \quad \therefore a=\frac{2}{3}$

두 직선 $4x-y+3=0$, $ax+y-6=0$이 평행하려면

$\frac{4}{a}=\frac{-1}{1}\neq\frac{3}{-6} \quad \therefore a=-4$ 답 -4, $\frac{2}{3}$

05 두 점 $(6, -1)$, $(2, 5)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{5+1}{2-6}=-\frac{3}{2}$

이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이다.

x절편이 4이고 기울기가 $-\frac{3}{2}$인 직선의 방정식은

> 점 $(4, 0)$을 지난다.

$y-0=-\frac{3}{2}(x-4) \quad \therefore 3x+2y-12=0$

따라서 $a=3$, $b=-12$이므로 $a-b=15$ 답 15

06 직선 AH는 점 $A(1, -1)$을 지나고 직선 $y=-x-4$와 수직이므로 직선 AH의 방정식은

> 직선 AH의 기울기는 1이다.

$y+1=x-1 \quad \therefore y=x-2$

따라서 점 H는 두 직선 $y=-x-4$, $y=x-2$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=-1$, $y=-3$

$\therefore H(-1, -3)$ 답 $(-1, -3)$

07 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{-1-2}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{a+b}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

직선 $x+y-3=0$이 이 점을 지나므로

$\frac{a+b}{2}-\frac{3}{2}-3=0 \quad \therefore a+b=9$ ······ ㉠

직선 AB가 직선 $x+y-3=0$, 즉 $y=-x+3$과 수직이므로

$\frac{-2+1}{b-a}\cdot(-1)=-1$

$\therefore a-b=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=4$

$\therefore ab=20$ 답 20

> 선분 AB의 수직이등분선을 l이라 하면
> ① 직선 l은 선분 AB의 중점을 지난다.
> ② 직선 l과 직선 AB의 기울기의 곱은 -1이다.

08 직선 $x-2y-12=0$의 x절편은 12, y절편은 -6이므로

$A(12, 0)$, $B(0, -6)$

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{12+0}{2}, \frac{0-6}{2}\right) \quad \therefore (6, -3)$

또 직선 $x-2y-12=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-6$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 -2이다.

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 방정식은

$y+3=-2(x-6) \quad \therefore y=-2x+9$

답 $y=-2x+9$

Lecture 23 점과 직선 사이의 거리

118쪽

01 $\frac{|4\cdot(-2)-3\cdot1+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{10}{5}=2$ 답 2

02 $\frac{|-6|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{6}{13}$ 답 $\frac{6}{13}$

03 점 $P(3, -1)$과 직선 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$, 즉 $2x+3y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot3+3\cdot(-1)-4|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$ 답 $\frac{\sqrt{13}}{13}$

04 $\frac{|1\cdot3+1\cdot0+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$이므로 $|3+k|=2$

$3+k=-2$ 또는 $3+k=2$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=-1$ 답 -5, -1

05 $\frac{|2\cdot0-1\cdot(-4)+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$이므로

$|4+k|=10$

$4+k=-10$ 또는 $4+k=10$

$\therefore k=-14$ 또는 $k=6$ 답 -14, 6

06 $\dfrac{|3\cdot k-4\cdot 0+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$이므로 $\quad |3k+2|=10$

$3k+2=-10$ 또는 $3k+2=10$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=\dfrac{8}{3}$ 답 $-4,\ \dfrac{8}{3}$

07 점 P의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면

$\dfrac{|2\cdot 0-3\cdot a-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}$

$|-3a-1|=13, \qquad |3a+1|=13$

$3a+1=-13$ 또는 $3a+1=13$

$\therefore a=-\dfrac{14}{3}$ 또는 $a=4$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(0,\ -\dfrac{14}{3}\right)$, $(0,\ 4)$이다.

답 $\left(0,\ -\dfrac{14}{3}\right)$, $(0,\ 4)$

08 직선 $4x-3y=0$ 위의 한 점 $(0,\ 0)$과 직선 $4x-3y-10=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-10|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{10}{5}=2$ 답 2

09 직선 $y=\dfrac{1}{2}x-5$ 위의 한 점 $(0,\ -5)$와 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$, 즉 $x-2y+5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1\cdot 0-2\cdot(-5)+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$ 답 $3\sqrt{5}$

직선 $y=\dfrac{1}{2}x-5$와 y축의 교점

10 직선 $y=-\dfrac{1}{3}x+7$ 위의 한 점 $(0,\ 7)$과 직선 $x+3y-1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1\cdot 0+3\cdot 7-1|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$ 답 $2\sqrt{10}$

$x+3y-1=0$에서
$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$
이므로 주어진 두 직선은 평행하다.

11 직선 $7x-y+4=0$ 위의 한 점 $(0,\ 4)$와 직선 $7x-y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{|7\cdot 0-1\cdot 4+a|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}, \qquad |-4+a|=10$

$-4+a=-10$ 또는 $-4+a=10$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=14$ 답 $-6,\ 14$

표준+발전 유형 Q+Q

119쪽

01 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x-2) \qquad \therefore mx-y-2m=0$

점 $(0,\ 1)$과 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|-1-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|2m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면 $\quad m^2-4m+4=0$

$(m-2)^2=0 \qquad \therefore m=2$

따라서 직선 l의 기울기는 2이다. 답 ④

$4m^2+4m+1=5m^2+5$
에서
$m^2-4m+4=0$

02 점 P가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ a)$라 하자.

점 P에서 두 직선 $4x-y-3=0$, $x+4y-4=0$에 이르는 거리가 같으므로

$y=4x-3$에서
$4x-y-3=0$
$y=-\dfrac{1}{4}x+1$에서
$\dfrac{1}{4}x+y-1=0$
$\therefore x+4y-4=0$

$\dfrac{|4a-a-3|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\dfrac{|a+4a-4|}{\sqrt{1^2+4^2}}$

$|3a-3|=|5a-4|, \qquad 3a-3=\pm(5a-4)$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=\dfrac{7}{8}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{7}{8},\ \dfrac{7}{8}\right)$이다.

답 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{7}{8},\ \dfrac{7}{8}\right)$

03 $-4x+2y-6+k(x-y)=0$에서

$(k-4)x+(2-k)y-6=0$

이므로

$f(k)=\dfrac{|-6|}{\sqrt{(k-4)^2+(2-k)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{2k^2-12k+20}}$

$f(k)$는 $\sqrt{2k^2-12k+20}$의 값이 최소일 때 최대이고

$f(k)$는 분자의 값이 일정하므로 분모의 값이 작을수록 그 값이 크다.

$\sqrt{2k^2-12k+20}=\sqrt{2(k-3)^2+2}$

이므로 $f(k)$의 최댓값은

$f(3)=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ 답 ④

다른 풀이 $-4x+2y-6=0$, $x-y=0$을 연립하여 풀면

$x=-3,\ y=-3$

이므로 직선 $-4x+2y-6+k(x-y)=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ -3)$을 지난다.

따라서 주어진 직선과 원점 사이의 거리의 최댓값은 점 $(-3,\ -3)$과 원점 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

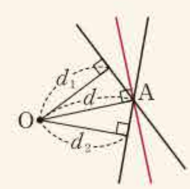
쌤한마디

점과 직선 사이의 거리의 최댓값

오른쪽 그림에서

$d_1<d,\ d_2<d$

이므로 점 O와 점 A를 지나는 임의의 직선 사이의 거리의 최댓값은 점 O로부터 $\overline{\text{OA}}$와 수직인 직선에 이르는 거리 d, 즉 두 점 O, A 사이의 거리와 같다.



04 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+3y-4+k(2x-y+6)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(1+2k)x+(3-k)y-4+6k=0$

점 $(-1,\ 4)$와 이 직선 사이의 거리를 $f(k)$라 하면

$f(k)=\dfrac{|-1-2k+12-4k-4+6k|}{\sqrt{(1+2k)^2+(3-k)^2}}$

$=\dfrac{7}{\sqrt{5k^2-2k+10}}$

$f(k)$는 $\sqrt{5k^2-2k+10}$의 값이 최소일 때 최대이고

$$\sqrt{5k^2-2k+10}=\sqrt{5\left(k-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}$$

이므로 $f(k)$의 최댓값은

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{7}{\sqrt{\frac{49}{5}}}=\sqrt{5}$$ 답 $\sqrt{5}$

05 $\overline{AB}=\sqrt{(-3-1)^2+(-2-6)^2}=4\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

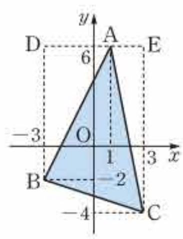
$$y-6=\frac{-2-6}{-3-1}(x-1) \qquad \therefore 2x-y+4=0$$

점 C$(3, -4)$와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|6+4+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{14}{\sqrt{5}}=\frac{14\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot\frac{14\sqrt{5}}{5}=28$$ 답 28

다른 풀이 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC$

$=\square DBCE$

$\quad-(\triangle ACE+\triangle ADB)$

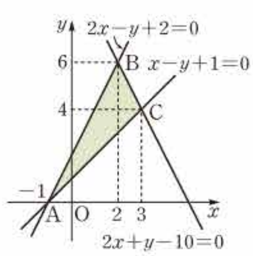
$=\frac{1}{2}\cdot(8+10)\cdot6$

$\quad-\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot10+\frac{1}{2}\cdot4\cdot8\right)$

$=54-26$

$=28$

06 $\begin{cases} x-y+1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y+2=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ 2x+y-10=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$



두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 A라 하면

A$(-1, 0)$

두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B라 하면

B$(2, 6)$

두 직선 ㉠, ㉢의 교점을 C라 하면

C$(3, 4)$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{(3+1)^2+(4-0)^2}=4\sqrt{2}$

점 B$(2, 6)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|2-6+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=6$$ 답 ①

07 두 직선이 평행하므로

$$\frac{m}{1}=\frac{-3}{2-m}\neq\frac{m+2}{6-m}$$

$\frac{m}{1}=\frac{-3}{2-m}$에서 $\qquad m(m-2)=3$

$m^2-2m-3=0, \qquad (m+1)(m-3)=0$

$\therefore m=3\ (\because m>0)$

QBOX

$m=3$일 때,

$\frac{3}{1}=\frac{-3}{-1}\neq\frac{5}{3}$

이므로 두 직선은 평행하다.

따라서 두 직선의 방정식은 $3x-3y+5=0$, $x-y+3=0$이므로 직선 $x-y+3=0$ 위의 한 점 $(-3, 0)$과 직선 $3x-3y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-9+5|}{\sqrt{3^2+(-3)^2}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ 답 ②

08 $\overline{AB}$의 길이는 평행한 두 직선 $2x+y=2$, $2x+y=7$ 사이의 거리와 같다.

이때 직선 $2x+y=2$ 위의 한 점 $(1, 0)$과 직선 $2x+y=7$, 즉 $2x+y-7=0$ 사이의 거리는

직선 $2x+y=2$와 x축의 교점

$$\frac{|2-7|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는

$(\sqrt{5})^2=5$ 답 5

09 P(x, y)라 하면 점 P에서 주어진 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|4x-3y-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$|3x-4y+1|=|4x-3y-1|$

$3x-4y+1=\pm(4x-3y-1)$

$\therefore x+y-2=0$ 또는 $x-y=0$

$0+0-2\neq0$이므로 직선 $x+y-2=0$은 원점을 지나지 않는다.

따라서 원점을 지나는 점 P의 자취의 방정식은

$x-y=0$ 답 ②

10 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 한 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선 $2x-5y-4=0$, $5x+2y+4=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x-5y-4|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\frac{|5x+2y+4|}{\sqrt{5^2+2^2}}$$

$|2x-5y-4|=|5x+2y+4|$

$2x-5y-4=\pm(5x+2y+4)$

$\therefore 3x+7y+8=0$ 또는 $7x-3y=0$

답 $3x+7y+8=0$, $7x-3y=0$

중단원 마무리

121쪽

01 **전략** 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)에 대하여 $\overline{AB}$를 $m:n\ (m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$임을 이용한다.

풀이 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot1-2\cdot(-3)}{3-2}, \frac{3\cdot(-4)-2\cdot(-5)}{3-2}\right)$$

$\therefore (9, -2)$

따라서 점 $(9, -2)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y+2=-2(x-9)$

$\therefore y=-2x+16$ 답 $y=-2x+16$

02 전략 두 삼각형 ADE와 ABC가 닮음임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$이므로

$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)

조건 (나)에서 $\triangle ADE$와 $\triangle ABC$의 넓이의 비가 $1:9$이므로 두 삼각형의 닮음비는 $1:3$이다.

따라서 점 E는 $\overline{AC}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로 점 E의 좌표는

$\overline{AE}:\overline{AC}=1:3$이므로 $\overline{AE}:\overline{EC}=1:2$

$$\left(\frac{1\cdot6+2\cdot3}{1+2}, \frac{1\cdot(-1)+2\cdot5}{1+2}\right)$$

$\therefore (4, 3)$

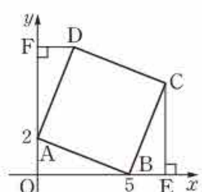
직선 BE의 방정식은

$$y-1=\frac{3-1}{4-0}(x-0) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+1$$

$\therefore k=\frac{1}{2}$ 답 ④

03 전략 두 점 C, D에서 x축, y축에 각각 수선의 발을 내린 후 삼각형의 합동을 이용한다.

풀이 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 F라 하면



$\triangle AOB \equiv \triangle BEC$

$\equiv \triangle DFA$

(RHA 합동)

즉 $\overline{BE}=\overline{DF}=2$, $\overline{CE}=\overline{AF}=5$이므로

$C(5+2, 5)$, $D(2, 2+5)$

$\therefore C(7, 5)$, $D(2, 7)$

따라서 직선 CD의 방정식은

$$y-5=\frac{7-5}{2-7}(x-7) \qquad \therefore 2x+5y-39=0$$

따라서 $a=5$, $b=-39$이므로

$a-b=44$ 답 44

04 전략 두 직선 l, m이 항상 지나는 점의 좌표를 구한다.

풀이 직선 $x+y-5+k(x-y+3)=0$ (k는 실수)은 k의 값에 관계없이 두 직선

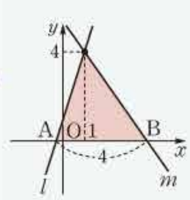
$x+y-5=0$, $x-y+3=0$

의 교점 $(1, 4)$를 지난다.

따라서 점 $(1, 4)$는 두 직선 l, m의 교점이고, $\overline{AB}=4$이므로 두 직선 l, m 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

두 직선 l, m이 모두 점 $(1, 4)$를 지난다.

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$ 답 ④



05 전략 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 직선 $y=mx+5m+4$가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 대각선 AC의 중점을 지나야 한다.

$C(a, b)$라 하면 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{7+b}{2}\right)$이므로

$$\frac{7+b}{2}=m\cdot\frac{3+a}{2}+5m+4$$

$7+b=3m+am+10m+8$

$\therefore (13+a)m+1-b=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$13+a=0$, $1-b=0$ $\quad\therefore a=-13$, $b=1$

$\therefore C(-13, 1)$ 답 $(-13, 1)$

다른 풀이 직선 $y=mx+5m+4$, 즉

$m(x+5)-(y-4)=0$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-5, 4)$를 지나므로 이 점이 대각선 AC의 중점이어야 한다.

$C(a, b)$라 하면 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{7+b}{2}\right)$이므로

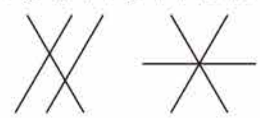
$$\frac{3+a}{2}=-5, \quad \frac{7+b}{2}=4$$

$\therefore a=-13$, $b=1$

$\therefore C(-13, 1)$

06 전략 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나눌 때의 세 직선의 위치 관계를 생각한다.

풀이 주어진 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누려면 다음 그림과 같이 세 직선 중 두 직선이 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.



(i) 두 직선 $2x-y-3=0$, $ax-y+2=0$이 평행하려면

$$\frac{2}{a}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{-3}{2} \qquad \therefore a=2$$

두 직선 $3x+y-7=0$, $ax-y+2=0$이 평행하려면

$$\frac{3}{a}=\frac{1}{-1}\neq\frac{-7}{2} \qquad \therefore a=-3$$

(ii) 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $ax-y+2=0$이 두 직선 $2x-y-3=0$, $3x+y-7=0$의 교점을 지나야 한다.

$2x-y-3=0$, $3x+y-7=0$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=1$

직선 $ax-y+2=0$이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$$2a-1+2=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$$2+(-3)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$ 답 ②

07 전략 먼저 $\angle OAB=\angle OCA$, $\angle AOC=90°$임을 이용하여 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기를 구한다.

풀이 $\angle OAB=\angle OCA$에서

$\angle BAC=\angle OAB+\angle OAC$

$=\angle OCA+\angle OAC$

$=90°$

$\triangle AOC$에서 $\angle AOC=90°$이므로 $\angle OCA+\angle OAC=180°-90°=90°$

이므로 두 직선 l, m은 서로 수직이다.

이때 직선 l의 기울기는

$$\frac{0-8}{-6-0}=\frac{4}{3}$$

이므로 직선 m의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

따라서 직선 m은 기울기가 $-\frac{3}{4}$이고 점 A$(0,\ 8)$을 지나므로 그 방정식은

$$y-8=-\frac{3}{4}(x-0) \qquad \therefore\ y=-\frac{3}{4}x+8$$

답 $y=-\frac{3}{4}x+8$

08 전략 먼저 주어진 두 직선의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 $x-4y+8=0$, $x+2y-4=0$을 연립하여 풀면

$x=0$, $y=2$

이므로 두 직선 $x-4y+8=0$, $x+2y-4=0$의 교점의 좌표는 $(0,\ 2)$

구하는 직선의 기울기를 m이라 하면 그 직선의 방정식은 $y=mx+2$

원점과 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$ 사이의 거리가 $\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{|2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}, \qquad 4=\sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$16=m^2+1$, $\quad m^2=15$

$\therefore\ m=\sqrt{15}$ 또는 $m=-\sqrt{15}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{15}x+2$, $y=-\sqrt{15}x+2$

답 $y=\sqrt{15}x+2$, $y=-\sqrt{15}x+2$

09 전략 먼저 직선 OA의 방정식을 구한 후 점과 직선 사이의 거리를 이용한다.

풀이 직선 OA의 방정식은

$y=\frac{3}{4}x$, 즉 $3x-4y=0$

점 B의 좌표를 $(a,\ 0)$ $(0<a<8)$이라 하면

점 B는 원점 O와 점 H$(8,\ 0)$ 사이에 있으므로 $0<a<8$

$$\overline{\mathrm{BI}}=\frac{|3a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3}{5}a$$

이때 H$(8,\ 0)$이므로 $\quad \overline{\mathrm{BH}}=8-a$

즉 $\frac{3}{5}a=8-a$에서 $\quad \frac{8}{5}a=8 \quad \therefore\ a=5$

두 점 A$(8,\ 6)$, B$(5,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-6=\frac{0-6}{5-8}(x-8) \qquad \therefore\ y=2x-10$$

따라서 $m=2$, $n=-10$이므로

$m+n=-8$

답 ③

다른 풀이 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BI}}=x$라 하면 $\quad \overline{\mathrm{OB}}=8-x$

이때 $\triangle\mathrm{OBI}\backsim\triangle\mathrm{OAH}$ (AA 닮음)이므로

$\angle\mathrm{OIB}=\angle\mathrm{OHA}=90^\circ$, $\angle\mathrm{IOB}$는 공통

$\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{AH}}$, $\quad (8-x):x=10:6$

$10x=48-6x \qquad \therefore\ x=3$

$\therefore\ \mathrm{B}(5,\ 0)$

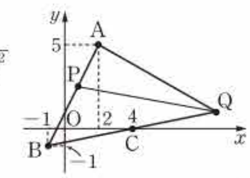
따라서 두 점 A$(8,\ 6)$, B$(5,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=2x-10$이므로 $\quad m+n=-8$

10 전략 $\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}}$임을 이용하여 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이를 구하고, $\overline{\mathrm{BC}}$를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표를 구한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}$

$=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-5)^2}$

$=3\sqrt{5}$



이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}$ ⋯ ❶

점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot4-1\cdot(-1)}{2-1},\ \frac{2\cdot0-1\cdot(-1)}{2-1}\right)$$

$\therefore\ (9,\ 1)$ ⋯ ❷

직선 AB의 방정식은

$$y-5=\frac{-1-5}{-1-2}(x-2)$$

$\therefore\ 2x-y+1=0$ ⋯ ❸

따라서 점 Q$(9,\ 1)$과 직선 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|18-1+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{18\sqrt{5}}{5}$$ ⋯ ❹

$$\therefore\ \triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{18\sqrt{5}}{5}=9$$ ⋯ ❺

답 9

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{\mathrm{AP}}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❷	점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸	직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❹	점 Q와 직선 AB 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %
❺	△APQ의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

11 전략 구하는 직선의 방정식을 $2x-3y+k=0$으로 놓고 점과 직선 사이의 거리를 이용한다.

풀이 직선 $2x-3y+6=0$에 평행한 직선의 방정식을

$2x-3y+k=0$ $(k\neq6)$ ⋯⋯ ㉠

이라 하면 직선 $2x-3y+6=0$ 위의 한 점 $(0,\ 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{13}$이므로

$$\frac{|-6+k|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}, \qquad |-6+k|=13$$

$-6+k=-13$ 또는 $-6+k=13$

$\therefore\ k=-7$ 또는 $k=19$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$2x-3y-7=0$ 또는 $2x-3y+19=0$

답 $2x-3y-7=0$, $2x-3y+19=0$

12 전략 곡선 $y=-x^2+4$에 접하고 직선 $y=2x+k$와 평행한 직선의 방정식을 구한다.

풀이 곡선 $y=-x^2+4$에 접하고 직선 $y=2x+k$와 평행한 직선의 방정식을 $y=2x+a$ (a는 상수)라 하자.

이차방정식 $-x^2+4=2x+a$, 즉 $x^2+2x+a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(a-4)=0$ $\qquad \therefore a=5$

따라서 주어진 거리의 최솟값은 두 직선 $y=2x+5$, $y=2x+k$ 사이의 거리와 같다.

이때 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=2x+5$ 위의 한 점 $(0, 5)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-5+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}, \qquad |k-5|=10$$

$k-5=-10$ 또는 $k-5=10$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=15$

그런데 $k=-5$이면 곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 거리의 최솟값이 0이 된다.

$\therefore k=15$ 답 15

Q BOX

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접한다.
➡ 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식 D에 대하여 $D=0$

이차방정식 $-x^2+4=2x-5$, 즉 $x^2+2x-9=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-9)=10>0$

13 전략 점 P의 좌표를 (x, y)라 하고 주어진 등식을 x, y에 대한 등식으로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$3\overline{AP}^2+2\overline{BP}^2=5\overline{CP}^2$에서

$3\{(x+2)^2+(y-3)^2\}+2\{(x-1)^2+(y+1)^2\}$
$=5\{(x-4)^2+(y-2)^2\}$ ⋯ ❶

$5x^2+5y^2+8x-14y+43$
$=5x^2+5y^2-40x-20y+100$

$48x+6y-57=0$

$\therefore 16x+2y-19=0$ ⋯ ❷

따라서 원점과 직선 $16x+2y-19=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-19|}{\sqrt{16^2+2^2}}=\frac{19\sqrt{65}}{130}$$

이므로 $p=130$, $q=19$

$\therefore p+q=149$ ⋯ ❸

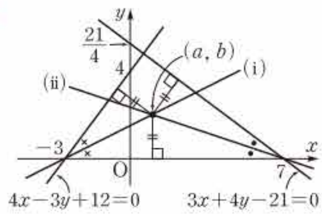
답 149

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 등식을 x, y에 대한 등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷	점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸	$p+q$의 값을 구할 수 있다.	40 %

14 전략 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점(내심)에서 만나므로 두 내각의 이등분선의 교점을 구한다.

삼각형의 내심
① 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이다.
② 삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리는 같다.

풀이



(i) 두 직선 $y=0$, $4x-3y+12=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $P(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$|y|=\frac{|4x-3y+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$|4x-3y+12|=5|y|$

$4x-3y+12=\pm 5y$

$\therefore 2x+y+6=0$ 또는 $x-2y+3=0$

이 중 내심 (a, b)를 지나는 직선의 기울기는 양수이므로

$x-2y+3=0$

(ii) 두 직선 $y=0$, $3x+4y-21=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $Q(x, y)$라 하면 점 Q에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$|y|=\frac{|3x+4y-21|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$|3x+4y-21|=5|y|$

$3x+4y-21=\pm 5y$

$\therefore x+3y-7=0$ 또는 $3x-y-21=0$

이 중 내심 (a, b)를 지나는 직선의 기울기는 음수이므로

$x+3y-7=0$

(i), (ii)에서 주어진 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 두 내각의 이등분선의 방정식은 $x-2y+3=0$, $x+3y-7=0$이므로 두 방정식을 연립하여 풀면

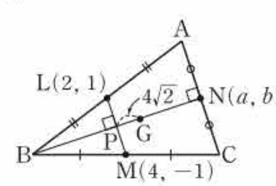
$x=1$, $y=2$

따라서 내심의 좌표가 $(1, 2)$이므로 $\qquad a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=3$ 답 ②

15 전략 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 $\overline{BN}$, $\overline{LM}$의 교점과 점 N 사이의 거리를 구하고, $\overline{BN}\perp\overline{LM}$임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 직선 BN, LM의 교점을 P라 하면



$\overline{BN}\perp\overline{LM}$이므로

$\overline{AC}\perp\overline{BN}$

$\overline{AL}=\overline{BL}$, $\overline{CM}=\overline{BM}$이므로
$\overline{AC}/\!/\overline{LM}$
$\therefore \angle ANB=\angle LPB=90°$

이때 $\overline{AN}=\overline{CN}$이므로

$\overline{LP}=\overline{MP}$

즉 점 P가 $\overline{LM}$의 중점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1-1}{2}\right) \qquad \therefore (3, 0)$

또 $\overline{BG}:\overline{GN}=2:1$, $\overline{BP}=\overline{NP}$이므로

$(\overline{NP}+4\sqrt{2}):(\overline{NP}-4\sqrt{2})=2:1$

$\overline{NP}+4\sqrt{2}=2\overline{NP}-8\sqrt{2} \qquad \therefore \overline{NP}=12\sqrt{2}$

즉 $\sqrt{(a-3)^2+b^2}=12\sqrt{2}$이므로

$(a-3)^2+b^2=288$ ⋯⋯ ㉠

한편 $\overline{LM}\perp\overline{NP}$이므로

$\frac{-1-1}{4-2}\cdot\frac{b-0}{a-3}=-1$

$\therefore a-3=b$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2b^2=288$, $\qquad b^2=144 \qquad \therefore b=\pm 12$

그런데 무게중심 G가 제1사분면에 있으므로

$b=12$

따라서 $a=12+3=15$이므로

$ab=180$ 답 ⑤

16 전략 직선 AP의 기울기를 이용하여 직선 l의 기울기를 구한 후 직선의 방정식을 구한다.

풀이 직선 AP의 기울기는

$$\frac{0-1}{t-0}=-\frac{1}{t}$$

따라서 직선 l의 기울기는 t이므로 직선 l의 방정식은

$y=t(x-t)$ …… ㉠

ㄱ. $t=1$일 때, 직선 l의 기울기는 1이다.

ㄴ. $x=3$, $y=2$를 ㉠에 대입하면

$2=t(3-t)$, $t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 점 $(3, 2)$를 지나는 직선 l은 $y=x-1$, $y=2x-4$의 2개이다.

ㄷ. ㉠을 $y\le ax^2$에 대입하면 $t(x-t)\le ax^2$

$\therefore ax^2-tx+t^2\ge 0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$a>0$ …… ㉡

또 이차방정식 $ax^2-tx+t^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-t)^2-4at^2\le 0$, $t^2(1-4a)\le 0$

$1-4a\le 0$ ($\because t^2>0$)

$\therefore a\ge\frac{1}{4}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $a\ge\frac{1}{4}$이므로 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

Q BOX

y축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|2|=2$이다.

x축, y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|-5|=5$이다.

두 원의 공통인 현의 방정식

t는 0이 아닌 실수이므로 $t^2>0$

11 원의 방정식

Lecture 24 원의 방정식 124쪽

01 답 $(x+3)^2+(y-4)^2=16$

02 답 $(x-2)^2+(y+6)^2=4$

03 답 $(x+5)^2+(y+5)^2=25$

04 $x^2+y^2-4x+10y-7=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2+10y+25)=36$

$\therefore (x-2)^2+(y+5)^2=6^2$

따라서 중심의 좌표는 $(2, -5)$, 반지름의 길이는 6이다. 답 중심의 좌표: $(2, -5)$, 반지름의 길이: 6

05 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+8x-5-(x^2+y^2+3x-7y-1)=0$

$\therefore 5x+7y-4=0$ 답 $5x+7y-4=0$

06 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-2x-4+k(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$ $(k\ne -1)$

이라 하면 이 원이 점 $(3, 0)$을 지나므로

$-1+k=0$ $\therefore k=1$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-2x-4+(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$

$\therefore x^2+y^2-3x-y=0$ 답 $x^2+y^2-3x-y=0$

표준+발전 유형 Q+Q 125쪽

01 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot 5+1\cdot 2}{2+1}, \frac{2\cdot(-6)+1\cdot 3}{2+1}\right) \quad \therefore (4, -3)$$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+3)^2=r^2$

이 원이 점 A$(2, 3)$을 지나므로

$r^2=4+36=40$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+3)^2=40$

답 $(x-4)^2+(y+3)^2=40$

02 원 $(x-3)^2+(y+6)^2=2$의 중심의 좌표는

$(3, -6)$

이 원과 중심이 같은 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+6)^2=r^2$

이 원이 점 $(4, -3)$을 지나므로

$r^2=1+9=10$

$\therefore (x-3)^2+(y+6)^2=10$

이 원이 점 $(a, -7)$을 지나므로

$(a-3)^2=9, \quad a-3=\pm3$

$\therefore a=0$ 또는 $a=6$

따라서 모든 a의 값의 합은

$0+6=6$ 답 ④

03 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$(1-a)^2+4=r^2$

$\therefore a^2-2a+5=r^2 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 점 $(5, -2)$를 지나므로

$(5-a)^2+4=r^2$

$\therefore a^2-10a+29=r^2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3, r^2=8$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+y^2=8$ 답 $(x-3)^2+y^2=8$

다른 풀이 원의 중심을 $\mathrm{A}(a, 0)$이라 하고 $\mathrm{B}(1, 2)$, $\mathrm{C}(5, -2)$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로

$\sqrt{(1-a)^2+2^2}=\sqrt{(5-a)^2+(-2)^2}$

양변을 제곱하면

$a^2-2a+5=a^2-10a+29$

$8a=24 \quad \therefore a=3$

따라서 원의 중심은 $\mathrm{A}(3, 0)$이고 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(1-3)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+y^2=8$

04 원의 중심의 좌표를 $(a, a-4)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a+4)^2=r^2$

이 원이 점 $(0, -3)$을 지나므로

$(-a)^2+(-a+1)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-2a+1=r^2 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 점 $(3, 0)$을 지나므로

$(3-a)^2+(-a+4)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-14a+25=r^2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2, r^2=5$

$\therefore r=\sqrt{5} \ (\because r>0)$ 답 ②

05 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2-6}{2}\right) \quad \therefore (4, -2)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\sqrt{(5-3)^2+(-6-2)^2}=\sqrt{17}$

따라서 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+2)^2=17$

즉 $a=4, b=-2, r^2=17$이므로

$a+b+r^2=19$ 답 ④

06 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot4+2\cdot(-1)}{3+2}, \frac{3\cdot(-2)+2\cdot8}{3+2}\right)$

$\therefore (2, 2)$

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot4-2\cdot(-1)}{1-2}, \frac{1\cdot(-2)-2\cdot8}{1-2}\right)$

$\therefore (-6, 18)$

따라서 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{2-6}{2}, \frac{2+18}{2}\right) \quad \therefore (-2, 10)$

또 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\sqrt{(-6-2)^2+(18-2)^2}=4\sqrt{5}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-10)^2=80$

답 $(x+2)^2+(y-10)^2=80$

07 원의 중심을 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$(a+1)^2+(b+6)^2=(a-8)^2+(b+3)^2$

$\therefore 3a+b=6 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$에서 $\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로

$(a-8)^2+(b+3)^2=(a-4)^2+(b+1)^2$

$\therefore 2a-b=14 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4, b=-6$

즉 $\mathrm{P}(4, -6)$이므로 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{PC}}=|-1-(-6)|=5$

따라서 주어진 세 점을 지나는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+6)^2=25$

이 식에 $x=0$을 대입하면

$(y+6)^2=9, \quad y+6=\pm3$

$\therefore y=-9$ 또는 $y=-3$

즉 원이 y축과 만나는 두 점의 좌표는 $(0, -9)$, $(0, -3)$이므로 구하는 거리는

$|-3-(-9)|=6$ 답 6

08 원의 중심을 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$(a+4)^2+(b-10)^2=a^2+(b+2)^2$

$\therefore a-3b=-14 \quad \cdots\cdots ㉠$

Q BOX

$\overline{\mathrm{AB}}$가 원의 지름이다.

두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n \ (m>0, n>0)$으로
① 내분하는 점의 좌표
$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$
② 외분하는 점의 좌표
$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$
(단, $m\neq n$)

원의 중심이 x축 위에 있으므로 (y좌표)$=0$

$\overline{\mathrm{AC}}$의 길이를 이용하여 반지름의 길이를 구할 수도 있다.

$\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{PB}}$의 길이를 이용하여 반지름의 길이를 구할 수도 있다.

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이 원의 중심이다.

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$$a^2+(b+2)^2=(a-8)^2+(b-4)^2$$

$$\therefore 4a+3b=19 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=5$$

즉 $P(1,\ 5)$이므로 원의 반지름의 길이는

$$\overline{PB}=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$$

따라서 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-5)^2=50$$

이때 점 $D(2,\ k)$가 이 원 위의 점이므로

$$(2-1)^2+(k-5)^2=50$$

$$(k-5)^2=49, \qquad k-5=\pm 7$$

그런데 $k<0$이므로 $\quad k=-2$ 　　 답 ②

09 $x^2+y^2-6x+ky+16=0$에서

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}-7$$

원의 중심 $\left(3,\ -\frac{k}{2}\right)$가 제4사분면 위에 있으므로

$$-\frac{k}{2}<0 \qquad \therefore k>0$$

또 원이 y축에 접하므로

(반지름의 길이)
$=|$(중심의 x좌표)$|$

$$\sqrt{\frac{k^2}{4}-7}=|3|$$

양변을 제곱하면

$$\frac{k^2}{4}-7=9, \qquad k^2=64$$

$$\therefore k=8\ (\because k>0)$$ 　　 답 8

10 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

점 $(-3,\ 6)$이 제2사분면 위의 점이므로 원의 중심도 제2사분면 위에 있다.

$$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$$

이 원이 점 $(-3,\ 6)$을 지나므로

$$(-3+r)^2+(6-r)^2=r^2$$

$$r^2-18r+45=0, \qquad (r-3)(r-15)=0$$

$$\therefore r=3 \text{ 또는 } r=15$$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-3,\ 3)$, $(-15,\ 15)$이므로 구하는 거리는

$$\sqrt{(-15+3)^2+(15-3)^2}=12\sqrt{2}$$ 　　 답 $12\sqrt{2}$

11 $x^2+y^2-4ax+2ay+20=0$에서

$$(x-2a)^2+(y+a)^2=5(a^2-4)$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$a^2-4>0, \qquad (a+2)(a-2)>0$$

$$\therefore a<-2 \text{ 또는 } a>2$$ 　　 답 $a<-2$ 또는 $a>2$

12 $x^2+y^2-8y+k^2-4k+4=0$에서

$$x^2+(y-4)^2=-k^2+4k+12$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-k^2+4k+12>0, \qquad k^2-4k-12<0$$

$$(k+2)(k-6)<0 \qquad \therefore -2<k<6$$

원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하고

$$\sqrt{-k^2+4k+12}=\sqrt{-(k-2)^2+16}$$

이므로 $-2<k<6$에서 $k=2$일 때 반지름의 길이가 최대이다.

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 4이다. 　　 답 ③

13 $x^2+y^2+6x-10y+30=0$에서

$$(x+3)^2+(y-5)^2=4$$

이므로 원의 중심의 좌표는 $(-3,\ 5)$이다.

점 $A(-2,\ 1)$과 원의 중심 $(-3,\ 5)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-3+2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{17}$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로

$$M=\sqrt{17}+2,\ m=\sqrt{17}-2$$

$$\therefore Mm=(\sqrt{17}+2)(\sqrt{17}-2)=13$$ 　　 답 13

14 $x^2+y^2-4x-12y+31=0$에서

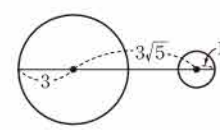
$$(x-2)^2+(y-6)^2=9$$

$x^2+y^2-10x+24=0$에서

$$(x-5)^2+y^2=1$$

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(2,\ 6)$, $(5,\ 0)$이므로 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-2)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$$



이때 두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 1이므로 주어진 두 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값은

$$3\sqrt{5}+3+1=3\sqrt{5}+4$$ 　　 답 ⑤

15 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고, $\overline{AP}$의 중점을 $Q(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{2+a}{2},\ y=\frac{-2+b}{2}$$

$$\therefore a=2x-2,\ b=2y+2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 $P(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2+4a-6b-12=0$$

$$\therefore (a+2)^2+(b-3)^2=25 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(2x)^2+(2y-1)^2=25$$

$$\therefore x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

따라서 점 Q의 자취는 중심이 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$인 원이므로 구하는 자취의 길이는

반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이는
$2\pi r$

$$2\pi\cdot\frac{5}{2}=5\pi$$ 　　 답 ⑤

16 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

$$\overline{AP}=2\overline{BP}, \qquad \overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$$

$(x-2)^2+(y+3)^2=4\{(x+4)^2+(y-3)^2\}$

$x^2+y^2+12x-10y+29=0$

$\therefore\ (x+6)^2+(y-5)^2=32$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $4\sqrt{2}$이다.

답 $4\sqrt{2}$

쌤한마디

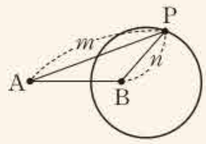
평면 위의 두 점 A, B에 대하여

$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$

$(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

인 점 P의 자취는 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점과 $m:n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

이 원을 아폴로니오스(Apollonios)의 원이라 한다.



17 $x^2+(y+a)^2=16$에서

$x^2+y^2+2ay+a^2-16=0$

$(x+2)^2+y^2=9$에서

$x^2+y^2+4x-5=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2ay+a^2-16-(x^2+y^2+4x-5)=0$

$\therefore\ 4x-2ay-a^2+11=0$

이 직선이 직선 $3x+y=2$와 수직이므로

$4\cdot 3+(-2a)\cdot 1=0 \quad \therefore\ a=6$

답 ③

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이면

$aa'+bb'=0$

18 원 $x^2+y^2+9ax+4y+a=0$이 원 $x^2+y^2-4x+6y-5=0$의 둘레를 이등분하려면 두 원의 공통인 현이 원 $x^2+y^2-4x+6y-5=0$의 지름이어야 한다.

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2+9ax+4y+a-(x^2+y^2-4x+6y-5)=0$

$\therefore\ (9a+4)x-2y+a+5=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$x^2+y^2-4x+6y-5=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=18 \quad \cdots\cdots ㉡$

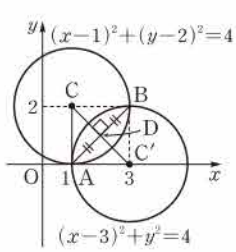
직선 ㉠이 원 ㉡의 중심 $(2,\ -3)$을 지나야 하므로

$2(9a+4)+6+a+5=0$

$19a+19=0 \quad \therefore\ a=-1$

답 -1

19 오른쪽 그림과 같이 두 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, $(x-3)^2+y^2=4$의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$(x-1)^2+(y-2)^2=4$에서

$x^2+y^2-2x-4y+1=0$

$(x-3)^2+y^2=4$에서

$x^2+y^2-6x+5=0$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-2x-4y+1-(x^2+y^2-6x+5)=0$

$\therefore\ x-y-1=0$

이 직선과 점 C(1, 2) 사이의 거리는

$\overline{CD}=\dfrac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

$\overline{AB}\perp\overline{CD}$이므로 점 C와 직선 AB 사이의 거리는 $\overline{CD}$의 길이와 같다.

직각삼각형 ACD에서

$\overline{AD}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

$\overline{AC}$의 길이는 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$의 반지름의 길이와 같으므로

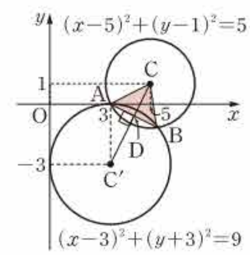
$\overline{AC}=2$

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AD}=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

20 오른쪽 그림과 같이 원 C'의 중심을 C′이라 하고, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$(x-5)^2+(y-1)^2=5$에서

$x^2+y^2-10x-2y+21=0$

$(x-3)^2+(y+3)^2=9$에서

$x^2+y^2-6x+6y+9=0$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-10x-2y+21-(x^2+y^2-6x+6y+9)=0$

$\therefore\ x+2y-3=0$

이 직선과 점 C(5, 1) 사이의 거리는

$\overline{CD}=\dfrac{|5+2-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 ADC에서

$\overline{AD}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AD}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{5}=\dfrac{12}{5}$

답 ②

21 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+6x+5y+1+k(x^2+y^2-6)=0$

$(k\neq -1) \quad \cdots\cdots ㉠$

이라 하면 원 ㉠이 점 $(1,\ -3)$을 지나므로

$2+4k=0 \quad \therefore\ k=-\dfrac{1}{2}$

$k=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2+12x+10y+8=0$

$\therefore\ (x+6)^2+(y+5)^2=53$

따라서 $a=6$, $b=5$, $c=53$이므로

$a+b+c=64$

답 ②

22 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-2x-3+k(x^2+y^2-10x+ay+3)=0$

$(k\neq -1) \quad \cdots\cdots ㉠$

이라 하면 원 ㉠이 점 $(6,\ 0)$을 지나므로

$21-21k=0 \quad \therefore\ k=1$

11 원의 방정식

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2-6x+\frac{a}{2}y=0$$

$$\therefore (x-3)^2+\left(y+\frac{a}{4}\right)^2=\frac{a^2}{16}+9$$

원의 넓이가 10π이므로

$$\frac{a^2}{16}+9=10, \qquad a^2=16$$

$$\therefore a=4 \ (\because a>0)$$

답 4

Lecture 25 원과 직선의 위치 관계

128쪽

01 원의 중심 $(2, -5)$와 직선 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4+5+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

02 $x+2y-1=0$, 즉 $x=-2y+1$을 $x^2+y^2-3x+4y-10=0$에 대입하면

$$(-2y+1)^2+y^2-3(-2y+1)+4y-10=0$$

$$\therefore 5y^2+6y-12=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=3^2-5\cdot(-12)=69>0$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

03 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{13}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{13}}=2, \qquad |k|=2\sqrt{13}$$

$$\therefore k=\pm 2\sqrt{13}$$

답 $\pm 2\sqrt{13}$

04 답 $y=3x\pm 10$

05 답 $2x-3y=13$

06 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=2$$

이 직선이 점 $(4, -2)$를 지나므로

$$4x_1-2y_1=2 \qquad \therefore y_1=2x_1-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad x_1^2+(2x_1-1)^2=2$

$$5x_1^2-4x_1-1=0, \qquad (5x_1+1)(x_1-1)=0$$

$$\therefore x_1=-\frac{1}{5} \text{ 또는 } x_1=1$$

$x_1=-\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면 $\quad y_1=-\frac{7}{5}$

$x_1=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y_1=1$

따라서 접선의 방정식은

$$x+7y=-10 \text{ 또는 } x+y=2$$

답 $x+7y=-10$ 또는 $x+y=2$

QBOX

$x_1=-\frac{1}{5}$, $y_1=-\frac{7}{5}$을 $x_1x+y_1y=2$에 대입하면

$-\frac{1}{5}x-\frac{7}{5}y=2$

$\therefore x+7y=-10$

$2\sqrt{5}>\sqrt{5}$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 (원의 중심과 직선 사이의 거리) < (원의 반지름의 길이)이어야 한다.

원과 직선의 교점의 개수

① $D>0$ ➡ 2개

② $D=0$ ➡ 1개

③ $D<0$ ➡ 0개

이차방정식의 판별식을 이용하여 실수 k의 값을 구할 수도 있다.

원과 직선이 만나지 않으려면 (원의 중심과 직선 사이의 거리) > (원의 반지름의 길이)이어야 한다.

표준+발전 유형 Q+Q

129쪽

01 원의 중심 $(2, 0)$과 직선 $y=-3x+k$, 즉 $3x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|6-k|}{\sqrt{10}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|6-k|}{\sqrt{10}}<\sqrt{10}, \qquad |6-k|<10$$

$$-10<6-k<10, \qquad -16<-k<4$$

$$\therefore -4<k<16$$

따라서 정수 k는 $-3, -2, -1, \cdots, 15$의 19개이다.

답 19

다른 풀이 $y=-3x+k$를 $(x-2)^2+y^2=10$에 대입하면

$$(x-2)^2+(-3x+k)^2=10$$

$$\therefore 10x^2-2(3k+2)x+k^2-6=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=\{-(3k+2)\}^2-10(k^2-6)>0$$

$$k^2-12k-64<0, \qquad (k+4)(k-16)<0$$

$$\therefore -4<k<16$$

따라서 정수 k는 $-3, -2, -1, \cdots, 15$의 19개이다.

02 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{6}{2}, \frac{-5+1}{2}\right) \qquad \therefore (3, -2)$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(1+5)^2}=3\sqrt{2}$$

원의 중심 $(3, -2)$와 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|5+k|}{\sqrt{2}}$$

원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|5+k|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2}, \qquad |5+k|>6$$

$$5+k<-6 \text{ 또는 } 5+k>6$$

$$\therefore k<-11 \text{ 또는 } k>1$$

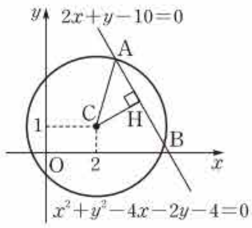
따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

답 2

03 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=9$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(2, 1)이라 하고, 점 C에서 직선 $2x+y-10=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\dfrac{|4+1-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$=\sqrt{5}$

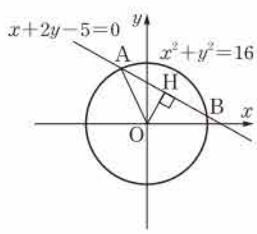
직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}=3$이므로

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$의 반지름의 길이

$\overline{AH}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=4$ 답 4

04 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이다.



원의 중심 O에서 직선 $x+2y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}=4$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{4^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{11}$

따라서 구하는 원의 넓이는

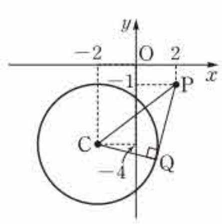
중심이 점 H이고, 반지름의 길이가 $\overline{AH}$인 원

$\pi\cdot(\sqrt{11})^2=11\pi$ 답 ②

05 $x^2+y^2+4x+8y+11=0$에서

$(x+2)^2+(y+4)^2=9$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(-2, -4)$라 하면



$\overline{CP}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

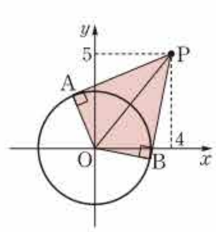
직각삼각형 CQP에서 $\overline{CQ}=3$이므로

원 $(x+2)^2+(y+4)^2=9$의 반지름의 길이

$\overline{PQ}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

답 4

06 오른쪽 그림과 같이 원의 중심이 O(0, 0)이므로



$\overline{OP}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$

직각삼각형 OPA에서

$\overline{AP}=\sqrt{(\sqrt{41})^2-3^2}$

$=4\sqrt{2}$

이때 $\triangle$OPA$\equiv\triangle$OPB (RHS 합동)이므로

$\square$AOBP$=2\triangle$OPA

$=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\sqrt{2}=12\sqrt{2}$ 답 $12\sqrt{2}$

Q BOX

07 $x^2+y^2-6x+4y-3=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2=16$

원의 중심 $(3, -2)$와 직선 $12x-5y+19=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|36+10+19|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=5$

이때 원의 반지름의 길이가 4이므로

$M=5+4=9$, $m=5-4=1$

$\therefore Mm=9$ 답 9

08 원의 중심 O(0, 0)과 직선 $y=-2x-10$, 즉 $2x+y+10=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 정삼각형 ABC의 넓이가

최소일 때의 높이는 $2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

최대일 때의 높이는 $2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

닮은 두 도형의 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

$(\sqrt{5})^2:(3\sqrt{5})^2=1:9$ 답 1 : 9

다른 풀이 높이가 $\sqrt{5}$인 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{5}$ $\quad\therefore a=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

이 정삼각형의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{2\sqrt{15}}{3}\right)^2=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

같은 방법으로 하면 높이가 $3\sqrt{5}$인 정삼각형의 넓이는

$15\sqrt{3}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$\dfrac{5\sqrt{3}}{3}:15\sqrt{3}=1:9$

09 직선 $x+4y-2=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 4이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=4x\pm\sqrt{17}\cdot\sqrt{4^2+1}$

$\therefore y=4x\pm17$ 답 $y=4x\pm17$

10 직선 $y=2x-3$에 평행한 직선의 기울기는 2이므로 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{15}\cdot\sqrt{2^2+1}$

$\therefore y=2x\pm5\sqrt{3}$

따라서 두 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0, 5\sqrt{3})$, $(0, -5\sqrt{3})$이므로

$\overline{PQ}=10\sqrt{3}$ 답 ③

쌤한마디

중심이 원점인 원에 접하고 기울기가 같은 직선은 항상 2개이고, y절편의 부호는 서로 반대이다.

11 원 $x^2+y^2=40$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=40 \qquad \therefore\ y=-\frac{a}{b}x+\frac{40}{b}$$

이 접선의 기울기가 3이므로

$$-\frac{a}{b}=3 \qquad \therefore\ a=-3b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=40$ 위에 있으므로

$$a^2+b^2=40 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6,\ b=-2$ 또는 $a=-6,\ b=2$

$\therefore\ ab=-12$ 답 -12

12 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$$2x-y=5 \qquad \therefore\ 2x-y-5=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2+y^2-2x-4y-2+k=0$에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2=7-k \qquad \cdots\cdots ㉡$$

원 ㉡의 중심 $(1,\ 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|2-2-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

이때 직선 ㉠과 원 ㉡이 접하므로

$\sqrt{7-k}=\sqrt{5} \qquad \therefore\ k=2$ 답 2

직선과 원이 접하므로 (원의 중심과 직선 사이의 거리) = (원의 반지름의 길이)이다.

13 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(-2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=m(x+2)$$

$$\therefore\ mx-y+2m-1=0$$

원의 중심의 좌표가 $(2,\ 1)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|2m-1+2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}, \qquad |4m-2|=\sqrt{2m^2+2}$$

양변을 제곱하면 $\quad 16m^2-16m+4=2m^2+2$

$$7m^2-8m+1=0, \qquad (7m-1)(m-1)=0$$

$$\therefore\ m=\frac{1}{7} \text{ 또는 } m=1$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$\frac{1}{7}\cdot 1=\frac{1}{7}$ 답 $\frac{1}{7}$

14 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=5$$

이 직선이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$$3x_1-y_1=5 \qquad \therefore\ y_1=3x_1-5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad x_1^2+(3x_1-5)^2=5$

$$x_1^2-3x_1+2=0, \qquad (x_1-1)(x_1-2)=0$$

$$\therefore\ x_1=1 \text{ 또는 } x_1=2$$

$x_1=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y_1=-2$

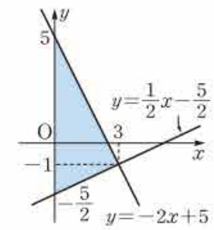
$x_1=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y_1=1$

따라서 두 접선의 방정식은

$$x-2y=5,\ 2x+y=5$$

$$\therefore\ y=-2x+5,$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$$



두 직선의 y절편은 각각 5, $-\frac{5}{2}$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left\{5-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\cdot 3=\frac{45}{4}$ 답 ③

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(3,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=m(x-3)$$

$$\therefore\ mx-y-3m-1=0$$

원의 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$|3m+1|=\sqrt{5m^2+5}$$

양변을 제곱하면 $\quad 9m^2+6m+1=5m^2+5$

$$2m^2+3m-2=0, \qquad (m+2)(2m-1)=0$$

$$\therefore\ m=-2 \text{ 또는 } m=\frac{1}{2}$$

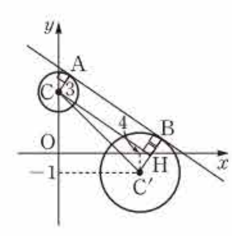
따라서 두 접선의 방정식은

$$-2x-y+5=0,\ \frac{1}{2}x-y-\frac{5}{2}=0$$

두 직선의 y절편은 각각 5, $-\frac{5}{2}$이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{5-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\cdot 3=\frac{45}{4}$$

15 두 원 $x^2+(y-3)^2=1$, $(x-4)^2+(y+1)^2=4$의 중심을 각각 C, C′이라 하면



$$\text{C}(0,\ 3),\ \text{C}'(4,\ -1)$$

$$\therefore\ \overline{\text{CC}'}=\sqrt{4^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$$

점 C에서 $\overline{\text{C}'\text{B}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

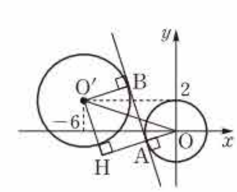
$$\overline{\text{C}'\text{H}}=2-1=1$$

$\overline{\text{CA}}=\overline{\text{HB}}=1,\ \overline{\text{C}'\text{B}}=2$

따라서 직각삼각형 CC′H에서

$\overline{\text{AB}}=\overline{\text{CH}}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{31}$ 답 $\sqrt{31}$

16 두 원 O, O'의 중심 O, O′의 좌표는



$$\text{O}(0,\ 0),\ \text{O}'(-6,\ 2)$$

$$\therefore\ \overline{\text{OO}'}=\sqrt{(-6)^2+2^2}=2\sqrt{10}$$

점 O′에서 $\overline{OA}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=r+2$ ($\because r>0$)

Q BOX: $\overline{OA}=2$, $\overline{O'B}=r$

$\overline{O'H}=\overline{BA}=\sqrt{15}$이므로 직각삼각형 OO′H에서

$\overline{OH}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-(\sqrt{15})^2}=5$

따라서 $r+2=5$이므로

$r=3$ 답 3

중단원 마무리

131쪽

01 전략 원의 반지름의 길이를 r라 하고 원의 중심을 이용하여 원의 방정식을 세운다.

풀이 직선 $y=-3x+6$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$(2,\ 0)$, $(0,\ 6)$

점 $(2,\ 0)$을 중심으로 하고 점 $(0,\ 6)$을 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$(x-2)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(0,\ 6)$을 지나므로

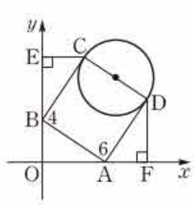
$r^2=4+36=40$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=40$ 답 $(x-2)^2+y^2=40$

02 전략 삼각형 OAB와 합동인 삼각형을 찾아 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

풀이 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 F라 하면



$\triangle OAB\equiv\triangle EBC$

$\equiv\triangle FDA$

(RHA 합동)

이므로

$\overline{EB}=\overline{FD}=\overline{OA}=6$, $\overline{EC}=\overline{FA}=\overline{OB}=4$

$\therefore$ C$(4,\ 10)$, D$(10,\ 6)$

원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{4+10}{2},\ \dfrac{10+6}{2}\right)$ $\quad\therefore (7,\ 8)$

원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\sqrt{(10-4)^2+(6-10)^2}=\sqrt{13}$

따라서 원의 방정식은

$(x-7)^2+(y-8)^2=13$

$\therefore x^2+y^2-14x-16y+100=0$

즉 $a=-14$, $b=-16$, $c=100$이므로

$a-b+c=102$ 답 ③

03 전략 외접원의 중심과 세 점 A, B, C 사이의 거리가 각각 같음을 이용한다.

풀이 점 A는 두 직선 $2x-y+6=0$, $x+y-3=0$의 교점이므로

$$\begin{cases}2x-y+6=0 & \cdots\text{㉡}\\ x+y-3=0 & \cdots\text{㉢}\end{cases}$$

㉡+㉢을 하면

$3x+3=0$

$\therefore x=-1$

$x=-1$을 ㉢에 대입하면

$y-4=0 \quad \therefore y=4$

A$(-1,\ 4)$

두 점 B, C는 두 직선 $2x-y+6=0$, $x+y-3=0$이 각각 x축과 만나는 점이므로

B$(-3,\ 0)$, C$(3,\ 0)$ ··· ❶

외접원의 중심을 P$(a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+1)^2+(b-4)^2=(a+3)^2+b^2$

$\therefore a+2b-2=0$ ······ ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+3)^2+b^2=(a-3)^2+b^2$

$\therefore a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면

$2b-2=0 \quad \therefore b=1$ ··· ❷

즉 P$(0,\ 1)$이므로 원의 반지름의 길이는

Q BOX: $\overline{PB}$, $\overline{PC}$의 길이를 이용하여 반지름의 길이를 구할 수도 있다.

$\overline{PA}=\sqrt{1^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=10$ ··· ❸

답 $x^2+(y-1)^2=10$

단계	채점 기준	비율
❶	세 점 A, B, C의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	외접원의 방정식을 구할 수 있다.	30 %

04 전략 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식은 $(x\pm r)^2+(y\pm r)^2=r^2$ 꼴임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+2ax-8y+7+b=0$에서

$(x+a)^2+(y-4)^2=a^2-b+9$

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|-a|=4=\sqrt{a^2-b+9}$

Q BOX: |(중심의 x좌표)| = |(중심의 y좌표)| = (반지름의 길이)

$|-a|=4$에서 $\quad a=4$ ($\because a>0$)

$\sqrt{a^2-b+9}=4$에서

$16-b+9=16 \quad \therefore b=9$

$\therefore a+b=13$ 답 ④

05 전략 주어진 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r$ 꼴로 변형한 후 $r>0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-4ax+8ay-10+21a^2=0$에서

$(x-2a)^2+(y+4a)^2=10-a^2$

이 방정식이 원을 나타내려면

$10-a^2>0, \quad a^2<10$

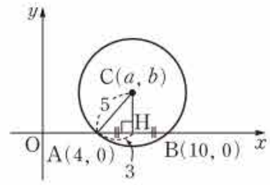
$\therefore -\sqrt{10}<a<\sqrt{10}$

따라서 $m=-\sqrt{10}$, $M=\sqrt{10}$이므로

$M-m=2\sqrt{10}$ 답 $2\sqrt{10}$

06 전략 원점과 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(a,\ b)$라 하고 점 C에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $\overline{AB}$의 중점이므로 점 H의 좌표는



$$\left(\frac{4+10}{2},\ 0\right) \qquad \therefore (7,\ 0)$$

$\therefore a=7$

한편 $\overline{AB}=6$이므로

$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{CH}=\sqrt{5^2-3^2}=4 \qquad \therefore b=4$$

즉 $C(7,\ 4)$이므로

$$\overline{OC}=\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65}$$

따라서 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값은 $\sqrt{65}+5$, 최솟값은 $\sqrt{65}-5$이므로

$$\sqrt{65}-5\le\overline{OP}\le\sqrt{65}+5$$

이때 $8<\sqrt{65}<9$이므로 $\overline{OP}$의 길이가 될 수 있는 정수는 4, 5, …, 13이고 각각의 길이에 해당하는 점 P는 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 20이다. 답 20

07 전략 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하여 이 직선이 지나는 점을 대입한다.

풀이 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+ax-2y+1-(x^2+y^2+3x+ay-4)=0$$

$$\therefore (a-3)x-(2+a)y+5=0$$

이 직선이 점 $(-3,\ 1)$을 지나므로

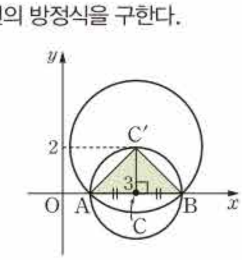
$$-3(a-3)-(2+a)+5=0$$

$$-4a+12=0 \qquad \therefore a=3$$

답 ③

08 전략 먼저 두 원의 공통인 현의 방정식을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원 C의 중심을 C라 하자.



$(x-3)^2+y^2=4$에서

$$x^2+y^2-6x+5=0$$

$(x-3)^2+(y-2)^2=8$에서

$$x^2+y^2-6x-4y+5=0$$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2+y^2-6x+5-(x^2+y^2-6x-4y+5)=0$$

$$4y=0 \qquad \therefore y=0$$ ···· ❶

세 점 A, B, C는 x축 위의 점이다.

원 C의 반지름의 길이가 2이므로

$$\overline{AC}=\overline{CC'}=2$$

$$\therefore \overline{AB}=2\overline{AC}=4$$ ···· ❷

QBOX

$$\therefore \triangle C'AB=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CC'}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2=4$$ ···· ❸

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	두 원 C, C'의 공통인 현의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷	$\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸	$\triangle C'AB$의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

09 전략 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식에서 원의 중심의 y좌표가 0임을 이용한다.

풀이 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-6y+k(x^2+y^2+8x+2y-3)=0 \quad (k\neq-1)$$

이라 하면

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2+8kx+(2k-6)y-3k=0$$

이때 $k\neq-1$이므로

$$x^2+y^2+\frac{8k}{k+1}x+\frac{2k-6}{k+1}y-\frac{3k}{k+1}=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

원 ㉠의 중심이 x축 위에 있으므로 원의 중심의 y좌표는 0이다.

즉 ㉠의 y의 계수가 0이어야 하므로

$$\frac{2k-6}{k+1}=0, \qquad 2k-6=0$$

$\therefore k=3$

$k=3$을 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2+6x-\frac{9}{4}=0$$

$$\therefore (x+3)^2+y^2=\frac{45}{4}$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\frac{45}{4}\pi$이다. 답 ②

10 전략 원의 중심의 좌표를 $(n,\ n^2)$으로 놓고 원과 직선이 접함을 이용한다.

풀이 원의 중심의 좌표를 $(n,\ n^2)$이라 하면 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|n|$이다.

원의 중심이 $y=x^2$의 그래프 위에 있다.

원의 중심 $(n,\ n^2)$과 직선 $y=\sqrt{3}x-2$, 즉 $\sqrt{3}x-y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{2}$$

원과 직선이 접하려면

$$\frac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{2}=|n|$$

$$|\sqrt{3}n-n^2-2|=2|n|$$

$$\sqrt{3}n-n^2-2=\pm2n$$

$$\therefore n^2\pm2n-\sqrt{3}n+2=0$$

(i) $n^2+2n-\sqrt{3}n+2=0$, 즉 $n^2+(2-\sqrt{3})n+2=0$일 때, 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=(2-\sqrt{3})^2-4\cdot 2=-1-4\sqrt{3}<0$$

이므로 실근을 갖지 않는다.

(ii) $n^2-2n-\sqrt{3}n+2=0$, 즉 $n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$일 때, 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=\{-(2+\sqrt{3})\}^2-4\cdot 2=-1+4\sqrt{3}>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 실근을 갖는 이차방정식은

$$n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$$

이 이차방정식의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$ab=2$$

$$\therefore 100ab=200$$

답 200

직선 $y=\sqrt{3}x-2$와 접하는 원이 존재하지 않는다.

이차방정식의 두 근은 모두 양수이다.

11 전략 두 점 P, Q는 직선 $y=x-2$와 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 교점임을 이용한다.

풀이 $\angle APB=\angle AQB=90°$이므로 두 점 P, Q는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 위에 있다.

원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) \quad \therefore (0, 1)$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{5})^2+(3+1)^2}=3$$

따라서 원의 방정식은

$$x^2+(y-1)^2=9$$

$y=x-2$를 $x^2+(y-1)^2=9$에 대입하면

$$x^2+(x-3)^2=9$$

$$x^2-3x=0, \qquad x(x-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$x=0$을 $y=x-2$에 대입하면 $\quad y=-2$

$x=3$을 $y=x-2$에 대입하면 $\quad y=1$

즉 두 점 P, Q의 좌표는 $(0, -2)$, $(3, 1)$이므로

$$l=\sqrt{3^2+(1+2)^2}=3\sqrt{2}$$

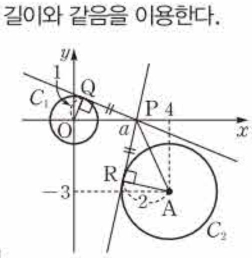
$$\therefore l^2=18$$

답 18

원에서 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

12 전략 점 P의 좌표를 $(a, 0)$으로 놓고, 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 $\overline{OQ}\perp\overline{PQ}$이므로 직각삼각형 OPQ에서



$$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2$$

$$=a^2-1$$

$x^2+y^2-8x+6y+21=0$에서

$$(x-4)^2+(y+3)^2=4$$

따라서 원 C_2의 중심을 $A(4, -3)$이라 하면 $\overline{AR}\perp\overline{PR}$이므로 직각삼각형 APR에서

$$\overline{PR}^2=\overline{AP}^2-\overline{AR}^2$$

$$=\{(a-4)^2+3^2\}-2^2$$

$$=a^2-8a+21$$

이때 $\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$이므로

$$a^2-1=a^2-8a+21, \qquad 8a=22$$

$$\therefore a=\frac{11}{4}$$

답 ④

13 전략 직선 l은 원점과 점 (3, 4)를 지나는 직선과 수직임을 이용한다.

풀이 원점과의 거리가 최대인 직선 l은 원점과 점 (3, 4)를 지나는 직선과 수직이다.

원점과 점 (3, 4)를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

직선의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x$

따라서 직선 l의 방정식은

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$$

$$\therefore 3x+4y-25=0$$

원의 중심 (7, 5)와 직선 $3x+4y-25=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$$m=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$$

$$\therefore 10m=22$$

답 22

14 전략 원에 접하는 직선과 원의 중심 사이의 거리가 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-4x-10y+12=0$에서

$$(x-2)^2+(y-5)^2=17$$

접선의 방정식을 $y=4x+k$라 하면 원의 중심 (2, 5)와 직선 $y=4x+k$, 즉 $4x-y+k=0$ 사이의 거리는

기울기가 4이고 y절편이 k인 직선의 방정식

$$\frac{|8-5+k|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{|k+3|}{\sqrt{17}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k+3|}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}, \qquad |k+3|=17$$

$$k+3=\pm 17 \qquad \therefore k=-20 \text{ 또는 } k=14$$

따라서 두 접선의 y절편은 각각 -20, 14이므로 구하는 y절편의 합은

$$-20+14=-6$$

답 ⑤

15 전략 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$임을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 (a, b) $(a>0, b>0)$라 하면 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=1$$

이 직선이 점 (0, 3)을 지나므로

$$3b=1 \qquad \therefore b=\frac{1}{3}$$

또 점 $\left(a,\ \frac{1}{3}\right)$이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$a^2+\frac{1}{9}=1, \qquad a^2=\frac{8}{9}$

$\therefore\ a=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ (\because\ a>0)$ 　　답 ⑤

다른 풀이1 점 P에서의 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=mx+3 \qquad \therefore\ mx-y+3=0$

원의 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

$\sqrt{m^2+1}=3, \qquad m^2=8$

$\therefore\ m=-2\sqrt{2}\ (\because\ m<0)$

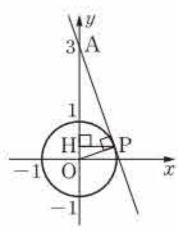
원과 직선이 제1사분면에서 접한다.

$y=-2\sqrt{2}x+3,\ x^2+y^2=1$을 연립하여 풀면

$x^2+(-2\sqrt{2}x+3)^2=1, \qquad 9x^2-12\sqrt{2}x+8=0$

$(3x-2\sqrt{2})^2=0 \qquad \therefore\ x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

다른 풀이2 오른쪽 그림과 같이 점 $(0,\ 3)$을 A라 하고, 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 OPA에서

$\overline{AP}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

이때 △OPA에서

$\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{PH}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OP}\cdot\overline{AP}$

$3\overline{PH}=2\sqrt{2} \qquad \therefore\ \overline{PH}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

점 P의 x좌표는 $\overline{PH}$의 길이와 같다.

16 **전략** 먼저 원의 중심에서 접선에 이르는 거리는 원의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 직선 l의 방정식을 구한다.

풀이 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=mx+4 \qquad \therefore\ mx-y+4=0$

원의 중심의 좌표가 $(2,\ 0)$, 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2, \qquad |2m+4|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 　$4m^2+16m+16=4m^2+4$

$16m=-12 \qquad \therefore\ m=-\frac{3}{4}$

따라서 직선 l의 방정식은

$-\frac{3}{4}x-y+4=0 \qquad \therefore\ 3x+4y-16=0$

x축, y축에 동시에 접하면서 중심이 제1사분면 위에 있는 원의 중심의 좌표를 $(r,\ r)\ (r>0)$라 하면 이 원과 직선 l이 접하므로

$\frac{|3r+4r-16|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r, \qquad |7r-16|=5r$

$7r-16=\pm5r \qquad \therefore\ r=8$ 또는 $r=\frac{4}{3}$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(8,\ 8)$, $\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$이므로 구하는 거리는

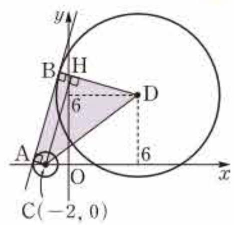
$\sqrt{\left(\frac{4}{3}-8\right)^2+\left(\frac{4}{3}-8\right)^2}=\frac{20\sqrt{2}}{3}$ 　　답 $\frac{20\sqrt{2}}{3}$

17 **전략** 원의 중심 C에서 $\overline{BD}$에 수선의 발을 내려 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

풀이 두 원의 중심은 각각 $C(-2,\ 0)$, $D(6,\ 6)$이므로

$\overline{CD}=\sqrt{(6+2)^2+6^2}=10$ 　　…… ❶

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{DH}=7-1=6$

직각삼각형 CDH에서

$\overline{AB}=\overline{CH}$

$=\sqrt{10^2-6^2}=8$ 　　…… ❷

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

사각형 ACDB는 사다리꼴이다.

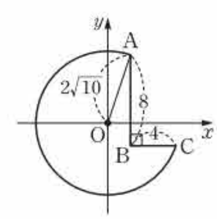
$\frac{1}{2}\cdot(7+1)\cdot8=32$ 　　…… ❸

답 32

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{CD}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷	$\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❸	사각형 ACDB의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

18 **전략** 원 O의 중심이 원점에 오도록 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심이 원점, 직선 AB가 y축과 평행하면서 점 A가 제1사분면 위에 오도록 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓으면 원의 방정식은



$x^2+y^2=(2\sqrt{10})^2 \qquad \therefore\ x^2+y^2=40$

점 A의 좌표를 $(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$라 하면 점 A는 원 O 위에 있으므로

점 A는 제1사분면 위의 점이다.

$a^2+b^2=40$ 　　…… ㉠

한편 $\overline{AB}=8$이므로 $B(a,\ b-8)$이고, $\overline{BC}=4$이므로 $C(a+4,\ b-8)$이다.

이때 점 C가 원 O 위에 있으므로

$(a+4)^2+(b-8)^2=40$

$a^2+b^2+8a-16b+80=40$

$8a-16b+80=0\ (\because$ ㉠$)$

$\therefore\ a=2b-10$ 　　…… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2b-10)^2+b^2=40, \qquad b^2-8b+12=0$

$(b-2)(b-6)=0 \qquad \therefore\ b=2$ 또는 $b=6$

이것을 ㉡에 대입하면

$a=-6,\ b=2$ 또는 $a=2,\ b=6$

그런데 $a>0,\ b>0$이므로 　$a=2,\ b=6$

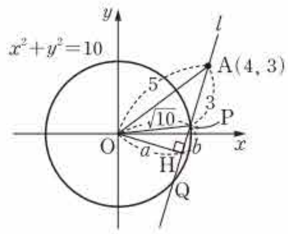
따라서 B(2, -2)이므로

$l^2=\overline{OB}^2=2^2+(-2)^2=8$

$\therefore 3l^2=24$ 답 24

19 전략 원의 중심 O에서 직선 l에 수선의 발을 내려 생기는 직각삼각형을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OH}=a$, $\overline{HP}=b$라 하면 직각삼각형 OHP에서

$a^2+b^2=10$ …… ㉠

직각삼각형 OHA에서

$a^2+(b+3)^2=25$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=1$

직선 l의 기울기를 $m\ (m>0)$이라 하면 직선 l의 방정식은 $y=m(x-4)+3$이고 원의 중심 O와 직선 $y=m(x-4)+3$, 즉 $mx-y-4m+3=0$ 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$$

$|-4m+3|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $16m^2-24m+9=9m^2+9$

$7m^2-24m=0,\quad m(7m-24)=0$

$\therefore m=\frac{24}{7}\ (\because m>0)$ 답 ②

12 도형의 이동

Lecture 26 평행이동 134쪽

01 $(7+2,\ 6-4)$ $\therefore (9,\ 2)$

답 $(9,\ 2)$

02 $(-1+6,\ 4-1)$ $\therefore (5,\ 3)$

답 $(5,\ 3)$

> $(x, y) \longrightarrow (x+6, y-1)$은 도형을 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 것을 나타낸다.

03 $3+a=4,\ -5+b=9$이므로

$a=1,\ b=14$ 답 $a=1,\ b=14$

04 $x-4=-2,\ y+4=8$이므로

$x=2,\ y=4$ $\therefore (2,\ 4)$ 답 $(2,\ 4)$

05 $3(x+1)-4(y-2)-1=0$

$\therefore 3x-4y+10=0$ 답 $3x-4y+10=0$

06 $y+1=-(x-3)^2+5(x-3)+8$

$\therefore y=-x^2+11x-17$

답 $y=-x^2+11x-17$

07 구하는 직선은 주어진 직선을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$2(x-4)-5(y-2)+3=0$

$\therefore 2x-5y+5=0$ 답 $2x-5y+5=0$

> $(x, y) \longrightarrow (x-4, y-2)$는 도형을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 것을 나타낸다.

08 구하는 원은 주어진 원을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로

$\{(x-2)-3\}^2+\{(y+5)-7\}^2=9$

$\therefore (x-5)^2+(y-2)^2=9$

답 $(x-5)^2+(y-2)^2=9$

> 도형 $f(x,\ y)=0$을 도형 $f(x+2,\ y-5)=0$으로 옮기는 평행이동
> ➡ x 대신 $x+2$, y 대신 $y-5$를 대입
> ➡ x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동

표준+발전 유형 Q+Q 135쪽

01 점 $(-4,\ 3)$을 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-4+6,\ 3-7)$ $\therefore (2,\ -4)$

이 점이 직선 $y=ax+8$ 위의 점이므로

$-4=2a+8$ $\therefore a=-6$ 답 -6

02 △ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+7+b}{3},\ \frac{-1+a+3}{3}\right)$ $\therefore \left(\frac{b+8}{3},\ \frac{a+2}{3}\right)$

이 점을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$\left(\frac{b+8}{3}-2,\ \frac{a+2}{3}+3\right)$

이 점이 점 (0, 0)과 일치하므로

$\frac{b+8}{3}-2=0$, $\frac{a+2}{3}+3=0$

$\therefore a=-11, b=-2$

$\therefore a+b=-13$ 　　답 -13

03 직선 $kx-2y+k+3=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$k(x-m)-2(y+1)+k+3=0$

$\therefore kx-2y-km+k+1=0$

이 직선이 직선 $3x-2y+7=0$과 일치하므로

$k=3$, $-km+k+1=7$

따라서 $k=3$, $m=-1$이므로

$k+m=2$ 　　답 2

04 점 $(-2, 3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-5, 8)$이라 하면

$-2+a=-5$, $3+b=8$

$\therefore a=-3, b=5$

직선 $6x+4y-3=0$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$6(x+3)+4(y-5)-3=0$

$\therefore 6x+4y-5=0$

따라서 $p=4$, $q=-5$이므로

$p-q=9$ 　　답 ⑤

05 $x^2+y^2+8x-by+11=0$에서

$(x+4)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}+5$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a+4)^2+\left(y+3-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}+5$

이 원의 중심이 점 (0, 0)과 일치하므로

$-a+4=0$, $3-\frac{b}{2}=0$ 　$\therefore a=4, b=6$

$\therefore a-b=-2$ 　　답 -2

다른 풀이 $x^2+y^2+8x-by+11=0$에서

$(x+4)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}+5$

이므로 중심의 좌표는 $\left(-4, \frac{b}{2}\right)$

원의 중심 $\left(-4, \frac{b}{2}\right)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$\left(-4+a, \frac{b}{2}-3\right)$

이 점이 점 (0, 0)과 일치하므로

$-4+a=0$, $\frac{b}{2}-3=0$ 　$\therefore a=4, b=6$

$\therefore a-b=-2$

QBOX

포물선의 평행이동은 포물선의 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

도형 $f(x, y)=0$을 도형 $f(x-2, y+1)=0$으로 옮기는 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 것이다.

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

점 (a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a, -b)$
이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-b, a)$

06 원 $x^2+(y-6)^2=25$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-6)^2=25$

이 원이 직선 $3x-4y+1=0$과 접하므로 원의 중심 $(a, 6)$과 직선 $3x-4y+1=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 5와 같다. 즉

$\frac{|3a-24+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$, 　$|3a-23|=25$

$3a-23=-25$ 또는 $3a-23=25$

$\therefore a=16$ ($\because a>0$) 　　답 ④

07 포물선 $y=x^2-4x+7$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+5=(x+1)^2-4(x+1)+7$

$\therefore y=x^2-2x-1$

$=(x-1)^2-2$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$(1, -2)$ 　　답 $(1, -2)$

다른 풀이 포물선 $y=x^2-4x+7$, 즉 $y=(x-2)^2+3$의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 3)$이므로 구하는 꼭짓점의 좌표는

$(2-1, 3-5)$ 　$\therefore (1, -2)$

08 포물선 $y=x^2-6x+1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+1=(x-2)^2-6(x-2)+1$

$\therefore y=x^2-10x+16$

이 포물선이 점 $(5, k)$를 지나므로

$k=25-50+16=-9$ 　　답 -9

Lecture 27 대칭이동

137쪽

01 답 $(4, 6)$

02 답 $(-4, -6)$

03 답 $(-4, 6)$

04 답 $(-6, 4)$

05 점 $(-3, 7)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3, -7)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-7, -3)$ 　　답 $(-7, -3)$

06 $(x+2)^2+(-y-5)^2=8$

$\therefore (x+2)^2+(y+5)^2=8$

답 $(x+2)^2+(y+5)^2=8$

07 $(-x+2)^2+(y-5)^2=8$

$\therefore (x-2)^2+(y-5)^2=8$

답 $(x-2)^2+(y-5)^2=8$

08 $(-x+2)^2+(-y-5)^2=8$

$\therefore (x-2)^2+(y+5)^2=8$

답 $(x-2)^2+(y+5)^2=8$

09 $(y+2)^2+(x-5)^2=8$

$\therefore (x-5)^2+(y+2)^2=8$

답 $(x-5)^2+(y+2)^2=8$

10 직선 $3x+2y-1=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3\cdot(-x)+2y-1=0$

$\therefore 3x-2y+1=0$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3\cdot(-x)-2\cdot(-y)+1=0$

$\therefore 3x-2y-1=0$ 답 $3x-2y-1=0$

11 $\left(\frac{6-4}{2}, \frac{-7-5}{2}\right)$ $\therefore (1, -6)$ 답 $(1, -6)$

Q BOX

두 점 A, B가 점 P에 대하여 대칭

➡ 점 P는 $\overline{AB}$의 중점이다.

12 $\left(\frac{-8+10}{2}, \frac{3-3}{2}\right)$ $\therefore (1, 0)$ 답 $(1, 0)$

13 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{5+a}{2}=2, \frac{-9+b}{2}=-1$

$\therefore a=-1, b=7$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(-1, 7)$ 답 $(-1, 7)$

14 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{5+a}{2}=-3, \frac{-9+b}{2}=4$

$\therefore a=-11, b=17$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(-11, 17)$ 답 $(-11, 17)$

15 두 점 $(a, -4)$, $(5, b)$를 잇는 선분의 중점의 좌표가 $(2, -3)$이므로

$\frac{a+5}{2}=2, \frac{-4+b}{2}=-3$

$\therefore a=-1, b=-2$ 답 $a=-1, b=-2$

16 (1) 두 점 (a, b), (p, q)를 잇는 선분의 중점의 좌표가 $(-1, 6)$이므로

$\frac{a+p}{2}=-1, \frac{b+q}{2}=6$

$\therefore a=-2-p, b=12-q$ …… ㉠

(2) 점 (a, b)가 직선 $3x-2y+4=0$ 위의 점이므로

$3a-2b+4=0$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$3(-2-p)-2(12-q)+4=0$

$\therefore 3p-2q+26=0$

따라서 점 (p, q)는 직선 $3x-2y+26=0$ 위의 점이므로 구하는 도형의 방정식은

$3x-2y+26=0$

답 (1) $a=-2-p, b=12-q$

(2) $3x-2y+26=0$

17 (1) $\left(\frac{-2+p}{2}, \frac{5+q}{2}\right)$

(2) 직선 AB는 직선 $x+2y+2=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-1$과 수직이므로 직선 AB의 기울기는 2이다.

Q BOX

두 직선이 수직

➡ 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

(3) $\overline{AB}$의 중점 $\left(\frac{-2+p}{2}, \frac{5+q}{2}\right)$가 직선 $x+2y+2=0$ 위의 점이므로

$\frac{-2+p}{2}+2\cdot\frac{5+q}{2}+2=0$

$\therefore p+2q=-12$ …… ㉠

또 직선 AB의 기울기가 2이므로

$\frac{q-5}{p+2}=2$ $\therefore 2p-q=-9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-6, q=-3$

$\therefore B(-6, -3)$

답 (1) $\left(\frac{-2+p}{2}, \frac{5+q}{2}\right)$

(2) 2 (3) $(-6, -3)$

표준+발전 유형 Q+Q

138쪽

01 $Q(-6, -4)$, $R(4, -6)$이므로 $\triangle PQR$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-6-6+4}{3}, \frac{4-4-6}{3}\right)$

$\therefore \left(-\frac{8}{3}, -2\right)$ 답 $\left(-\frac{8}{3}, -2\right)$

02 점 (a, b)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a, b)$

이 점이 제1사분면 위에 있으므로

$-a>0, b>0$ $\therefore a<0, b>0$

점 $\left(b-a, \frac{a}{b}\right)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$\left(a-b, -\frac{a}{b}\right)$

이때 $a-b<0$, $-\frac{a}{b}>0$이므로 이 점은 제2사분면 위에 있다. 답 제2사분면

03 직선 $x+ay-3=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-x+ay-3=0$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-(-x)+a\cdot(-y)-3=0 \quad \therefore x-ay-3=0$

이 직선이 점 $(-5,\ 2)$를 지나므로

$-5-2a-3=0 \quad \therefore a=-4$ 답 ③

04 직선 $y=-3x+1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=3x+1$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 구하는 직선의 방정식을

$y=-\frac{1}{3}x+a$, 즉 $x+3y-3a=0$ (a는 상수)

이라 하자.

이 직선과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|-3a|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}, \quad |-3a|=10$

$-3a=-10$ 또는 $-3a=10$

$\therefore a=\frac{10}{3}$ 또는 $a=-\frac{10}{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x+3y-10=0$ 또는 $x+3y+10=0$

답 $x+3y-10=0,\ x+3y+10=0$

원점과 직선 $mx+ny+l=0$ 사이의 거리는 $\frac{|l|}{\sqrt{m^2+n^2}}$

05 중심의 좌표가 $(-1,\ 5)$이고 반지름의 길이가 k인 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-5)^2=k^2$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(-y-5)^2=k^2$

$\therefore (x+1)^2+(y+5)^2=k^2$

이 원이 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$(3+1)^2+(-2+5)^2=k^2$

$k^2=25 \quad \therefore k=5\ (\because k>0)$ 답 ⑤

반지름의 길이는 양수이다.

다른 풀이 x축에 대하여 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(-1,\ -5)$이고 반지름의 길이가 k인 원이므로 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y+5)^2=k^2$

이 원이 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$k^2=25 \quad \therefore k=5\ (\because k>0)$

06 원 $x^2+y^2+8x-4y+12=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+y^2-4x+8y+12=0$

이 원이 y축과 만나는 점의 y좌표는

$y^2+8y+12=0, \quad (y+2)(y+6)=0$

$\therefore y=-2$ 또는 $y=-6$

x좌표가 0이다.

따라서 두 점 사이의 거리는

$-2-(-6)=4$ 답 ②

07 포물선 $y=x^2+4ax-2$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x)^2+4a\cdot(-x)-2$

$=x^2-4ax-2$

$=(x-2a)^2-2-4a^2$

이 포물선의 꼭짓점 $(2a,\ -2-4a^2)$이 직선 $y=x-8$ 위에 있으므로

$-2-4a^2=2a-8, \quad 4a^2+2a-6=0$

$2a^2+a-3=0, \quad (2a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$ 답 1

다른 풀이 $y=x^2+4ax-2$

$=(x+2a)^2-2-4a^2$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$(-2a,\ -2-4a^2)$

이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(2a,\ -2-4a^2)$

이 점이 직선 $y=x-8$ 위에 있으므로

$-2-4a^2=2a-8, \quad 2a^2+a-3=0$

$(2a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

08 포물선 $y=-2x^2+12x-7$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=-2x^2+12x-7$

$\therefore y=2x^2-12x+7$

이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=2\cdot(-x)^2-12\cdot(-x)+7$

$\therefore y=-2x^2-12x-7$

이 포물선이 점 $(-3,\ a)$를 지나므로

$a=-18+36-7=11$ 답 11

다른 풀이 포물선 $y=-2x^2+12x-7$을 x축에 대하여 대칭이동한 후 원점에 대하여 대칭이동한 것은 포물선 $y=-2x^2+12x-7$을 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-2\cdot(-x)^2+12\cdot(-x)-7=-2x^2-12x-7$

이 포물선이 점 $(-3,\ a)$를 지나므로

$a=-18+36-7=11$

09 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y-2=m(x+5) \quad \therefore y=mx+5m+2$

점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-mx+5m+2 \quad \therefore y=mx-5m-2$

이 직선을 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=mx-5m-2 \quad \therefore y=mx-5m-5$

이 직선이 점 $(8,\ -11)$을 지나므로

$-11=8m-5m-5 \quad \therefore m=-2$ 답 -2

10 포물선 $y=x^2+a$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+1=(x-4)^2+a$

$\therefore y=(x-4)^2+a-1$

이 포물선을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(x-4)^2+a-1$

$\therefore y=-(x-4)^2-a+1$

$=-x^2+8x-a-15$

이 포물선이 포물선 $y=-x^2+8x-10$과 일치하므로

$-a-15=-10 \qquad \therefore a=-5$ 답 -5

11 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

$f(x, -y)=0$

방정식 $f(x, -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$f(x+1, -y)=0$

따라서 방정식 $f(x+1, -y)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 ④이다. 답 ④

12 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $g(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

방정식 $g(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것과도 같다.

방정식 $g(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

$g(x, -y)=0$

방정식 $g(x, -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$g(x-3, -(y+1))=0$

$\therefore g(x-3, -y-1)=0$ 답 ③

13 $x^2+y^2-4x-5=0$에서

$(x-2)^2+y^2=9$

이 원의 중심 $(2, 0)$을 점 $(-1, 3)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{2+a}{2}=-1, \ \frac{b}{2}=3$

$\therefore a=-4, b=6$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-4, 6)$이고 반지름의 길이는 3이므로 원의 방정식은

원을 대칭이동해도 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.

$(x+4)^2+(y-6)^2=9$ 답 ④

14 두 포물선이 점 (α, β)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 (α, β)에 대하여 대칭이다.

$y=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\quad (3, 2)$

$y=-x^2+2x-5=-(x-1)^2-4$이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\quad (1, -4)$

따라서 두 꼭짓점을 잇는 선분의 중점의 좌표가 (α, β)이므로

$\alpha=\frac{3+1}{2}=2, \ \beta=\frac{2-4}{2}=-1$

$\therefore \alpha+\beta=1$ 답 ④

15 두 점 $(3, -1)$, $(-5, 7)$을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3-5}{2}, \frac{-1+7}{2}\right) \qquad \therefore (-1, 3)$

이 점이 직선 $y=ax-b$ 위의 점이므로

$3=-a-b$ ...... ㉠

또 두 점 $(3, -1)$, $(-5, 7)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax-b$와 수직이므로

$\frac{7-(-1)}{-5-3}\cdot a=-1 \qquad \therefore a=1$

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$3=-1-b \qquad \therefore b=-4$

$\therefore ab=-4$ 답 -4

16 $x^2+y^2+4x+6y+9=0$에서

$(x+2)^2+(y+3)^2=4$

$x^2+y^2-12x-2y+c=0$에서

$(x-6)^2+(y-1)^2=37-c$

두 원의 반지름의 길이가 같아야 하므로

$2=\sqrt{37-c} \qquad \therefore c=33$

두 원의 중심 $(-2, -3)$, $(6, 1)$을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) \qquad \therefore (2, -1)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$-1=2a+b$ ...... ㉠

또 두 원의 중심 $(-2, -3)$, $(6, 1)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

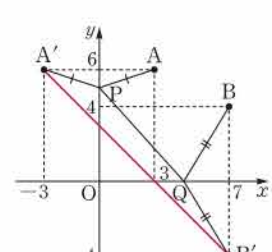
$\frac{1-(-3)}{6-(-2)}\cdot a=-1 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-1=-4+b \qquad \therefore b=3$

$\therefore a+b+c=34$ 답 34

17 오른쪽 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



A′$(-3, 6)$,

B′$(7, -4)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$이므로

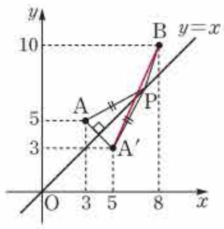
$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$

$\geq \overline{A'B'}$

$=\sqrt{(7+3)^2+(-4-6)^2}$

$=10\sqrt{2}$ 답 $10\sqrt{2}$

18 오른쪽 그림과 같이 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면



$A'(5,\ 3)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$$
$$\geq \overline{A'B}$$
$$=\sqrt{(8-5)^2+(10-3)^2}$$
$$=\sqrt{58}$$

답 ①

중단원 마무리

141쪽

01 전략 □O′A′B′C′이 직사각형이면 □OABC도 직사각형임을 이용한다.

풀이 $B(a,\ b)$라 하면 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a+5,\ b+6)$$

이 점이 점 $B'(3,\ 9)$와 일치하므로

$$a+5=3,\ b+6=9 \qquad \therefore a=-2,\ b=3$$

따라서 점 B의 좌표는 $(-2,\ 3)$이고 □OABC가 직사각형이므로 구하는 넓이는 $\quad 2\cdot3=6$

답 6

02 전략 도형 $f(x,\ y)=0$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a,\ y)=0$임을 이용한다.

풀이 직선 $4x-y=0$을 평행이동한 직선의 방정식은

$$4(x-k)-y=0$$
$$\therefore 4x-y-4k=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

세 직선의 기울기가 모두 다르므로 삼각형을 이루지 않으려면 직선 ㉠이 두 직선 $2x+y-3=0$, $x+4y-5=0$의 교점을 지나야 한다.

$2x+y-3=0$, $x+4y-5=0$을 연립하여 풀면

$$x=1,\ y=1$$

따라서 직선 ㉠이 점 $(1,\ 1)$을 지나야 하므로

$$4-1-4k=0 \qquad \therefore k=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

03 전략 원 $x^2+y^2=16$의 평행이동을 생각한다.

풀이 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2=16$과 일치하였으므로 원 $x^2+y^2=16$을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$과 일치한다.

원 $x^2+y^2=16$을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+5)^2+(y-3)^2=16$$
$$\therefore x^2+y^2+10x-6y+18=0$$

따라서 $A=10,\ B=-6,\ C=18$이므로

$$A-B-C=-2$$

답 ①

Q BOX

다른 풀이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에서

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$$

이 원을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$\left(x-5+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+3+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$$

이 원이 원 $x^2+y^2=16$과 일치하므로

$$-5+\frac{A}{2}=0,\ 3+\frac{B}{2}=0,\ \frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C=16$$
$$\therefore A=10,\ B=-6,\ C=18$$
$$\therefore A-B-C=-2$$

04 전략 직선이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 함을 이용한다.

풀이 ㄱ. 원을 평행이동해도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원 C의 반지름의 길이는 3이다.

ㄴ. 원 C의 방정식은

$$(x-m)^2+(y-n-1)^2=9$$

(원의 반지름의 길이) $=|$(중심의 y좌표)$|$

원 C가 x축에 접하려면 $\quad |n+1|=3$

$$n+1=-3 \text{ 또는 } n+1=3$$
$$\therefore n=-4 \text{ 또는 } n=2$$

따라서 원 C가 x축에 접하도록 하는 실수 n의 값은 2개이다.

ㄷ. 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$가 원 C의 넓이를 이등분하려면 원 C의 중심 $(m,\ n+1)$을 지나야 한다.

$x=m,\ y=n+1$을 직선의 방정식에 대입하면

$$n+1=\frac{n+1}{m}\cdot m$$

따라서 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$는 원 C의 넓이를 이등분한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

05 전략 평행이동한 포물선의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 두 실근이 두 점 P, Q의 x좌표임을 이용한다.

풀이 포물선 $y=x^2-3x$를 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-1=(x+2)^2-3(x+2) \qquad \therefore y=x^2+x-1$$

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $p,\ q$라 하면 $p,\ q$는 이차방정식

$$x^2+x-1=ax, \text{ 즉 } x^2+(1-a)x-1=0$$

판별식을 D라 하면 $D=(1-a)^2-4\cdot1\cdot(-1)=a^2-2a+5=(a-1)^2+4>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$p+q=a-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\overline{PQ}$의 중점이 원점이므로

$$\frac{p+q}{2}=0 \qquad \therefore p+q=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad a-1=0 \qquad \therefore a=1$

답 1

06 전략 점 $(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(y,\ x)$임을 이용한다.

풀이 포물선 $y=x^2-5x$ 위의 한 점의 좌표를 $(a,\ a^2-5a)$라 하면 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a^2-5a,\ a)$

이 점이 포물선 $y=x^2-5x$ 위의 점이므로

$a=(a^2-5a)^2-5(a^2-5a)$

$a^4-10a^3+20a^2+24a=0$

$a(a-6)(a^2-4a-4)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=6$ 또는 $a=2\pm2\sqrt{2}$

$a=0$ 또는 $a=6$이면 두 점 $(a,\ a^2-5a)$, $(a^2-5a,\ a)$는 서로 같은 점이므로

$a=2\pm2\sqrt{2}$ ···· ❶

따라서 두 점의 좌표는 $(2+2\sqrt{2},\ 2-2\sqrt{2})$, $(2-2\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2})$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{\{(2-2\sqrt{2})-(2+2\sqrt{2})\}^2+\{(2+2\sqrt{2})-(2-2\sqrt{2})\}^2}$

$=\sqrt{32+32}=8$ ···· ❷

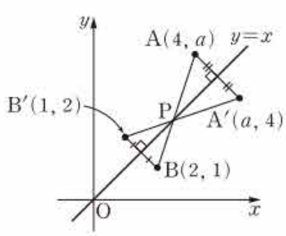
답 8

$a=0$이면 $(0,\ 0)$
$a=6$이면 $(6,\ 6)$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷	두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

07 전략 두 점 A′, B′의 좌표를 구한 후 삼각형 APA′, BPB′의 닮음비를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 A(4, a), B(2, 1)을 각각 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A′, B′의 좌표는



$(a,\ 4)$, $(1,\ 2)$

두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 수직이므로 두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하다.

따라서 두 삼각형 APA′, BPB′은 서로 닮음이고, 두 삼각형 APA′, BPB′의 넓이의 비가 9 : 4이므로 닮음비는 3 : 2이다.

닮은 두 평면도형의 넓이의 비가 $m^2 : n^2$이면 닮음비는 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$

즉 $\overline{AA'} : \overline{BB'}=3 : 2$이므로 $\quad 2\overline{AA'}=3\overline{BB'}$

이때

$\overline{AA'}=\sqrt{(a-4)^2+(4-a)^2}$

$=\sqrt{2}(a-4)\ (\because\ a>4)$,

$\overline{BB'}=\sqrt{(1-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

이므로

$2\sqrt{2}(a-4)=3\sqrt{2},\qquad 2(a-4)=3$

$2a=11\qquad \therefore\ a=\frac{11}{2}$

답 ②

08 전략 세 직선 m, n, k의 방정식을 구한 후 좌표평면 위에 나타내어 본다.

풀이 직선 l: $y=\frac{1}{2}x+1$을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 직선 m, n, k의 방정식은

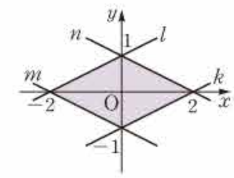
m: $-y=\frac{1}{2}x+1$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-1$,

n: $y=-\frac{1}{2}x+1$,

k: $-y=-\frac{1}{2}x+1$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-1$

따라서 오른쪽 그림에서 네 직선 l, m, n, k로 둘러싸인 도형의 넓이는

직선 l의 x절편은 -2, y절편은 1이다.



$\frac{1}{2}\times4\times2=4$ 답 4

09 전략 직선 l이 원 C와 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 l과 원 C의 중심 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작아야 함을 이용한다.

풀이 원 C의 방정식은 $\quad (-x+1)^2+(-y+5)^2=9$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-5)^2=9$

직선 l의 방정식은 $\quad -4x-3y-m=0$

$\therefore\ 4x+3y+m=0$ ···· ❶

직선 l이 원 C와 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 (1, 5)와 직선 l 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3보다 작아야 하므로

$\frac{|4+15+m|}{\sqrt{4^2+3^2}}<3,\qquad |m+19|<15$

$-15<m+19<15$

$\therefore\ -34<m<-4$ ···· ❷

따라서 정수 m은 -33, -32, -31, $\cdots$, -5의 29개이다. ···· ❸

답 29

단계	채점 기준	비율
❶	원 C의 방정식과 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷	m의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸	정수 m의 개수를 구할 수 있다.	20 %

10 전략 도형 $f(x,\ y)=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x,\ -y)=0$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 직선 $y=3$을 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=3\qquad \therefore\ y=-3$

ㄴ. $|x|+|y|=1$을 x축에 대하여 대칭이동하면

$|x|+|-y|=1$

$\therefore\ |x|+|y|=1$

따라서 처음 도형과 일치한다.

ㄷ. $y=x^2+4x-2$를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=x^2+4x-2$

$\therefore\ y=-x^2-4x+2$

ㄹ. $x^2+y^2-6x+5=0$을 x축에 대하여 대칭이동하면

$x^2+(-y)^2-6x+5=0$

$\therefore\ x^2+y^2-6x+5=0$

따라서 처음 도형과 일치한다.

이상에서 처음 도형과 일치하는 도형은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

12 도형의 이동

11 전략 원의 평행이동과 대칭이동을 이용하여 원 O_2의 방정식을 구한다.

풀이 원 O_1의 방정식은

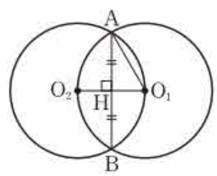
$(x-4)^2+(y-2)^2=4$

원 O_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4)^2=4$

이 원을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원 O_2의 방정식은

$(x-2)^2+(y-a-4)^2=4$ ...... ㉠



오른쪽 그림과 같이 선분 AB는 두 원 O_1, O_2의 중심 O_1, O_2를 잇는 선분 O_1O_2에 의하여 수직이등분된다.

선분 AB와 선분 O_1O_2가 만나는 점을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}$

$\overline{AO_1}=2$이므로 직각삼각형 AHO_1에서

$\overline{O_1H}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

$\therefore \overline{O_2H}=\overline{O_1H}=1$

즉 $\overline{O_1O_2}=2$이므로 원 O_2가 원 O_1의 중심을 지난다.

따라서 원 O_2가 점 $(4, 2)$를 지나므로 ㉠에서

$(4-2)^2+(2-a-4)^2=4$

$(a+2)^2=0$ $\quad\therefore a=-2$ 답 ②

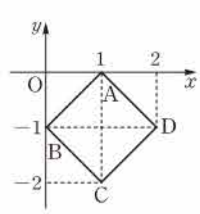
12 전략 방정식 $f(-x-1, -y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 평행이동 또는 대칭이동한 도형임을 이용한다.

풀이 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$f(x-1, y)=0$

방정식 $f(x-1, y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동하면

$f(-x-1, -y)=0$



따라서 방정식 $f(-x-1, -y)=0$이 나타내는 도형은 주어진 그림의 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

이 도형 위의 점과 원점 사이의 거리의 최댓값은 원점과 점 C 또는 점 D 사이의 거리이므로

$\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\therefore M=\sqrt{5}$

또 최솟값은 원점과 직선 AB 사이의 거리이고 직선 AB의 방정식은 $x-y-1=0$이므로

$m=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore Mm=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

QBOX

두 점 $(1, 0)$, $(0, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{-1-0}{0-1}(x-1)$

$\therefore y=x-1$, 즉

$x-y-1=0$

13 전략 포물선 위의 임의의 점 P를 점 $(3, 2)$에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 할 때, $\overline{PP'}$의 중점이 점 $(3, 2)$임을 이용한다.

풀이 포물선 $y=x^2-ax$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$를 점 $(3, 2)$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면 점 $(3, 2)$는 $\overline{PP'}$의 중점이므로

$\frac{x+x'}{2}=3$, $\frac{y+y'}{2}=2$

$\therefore x=6-x'$, $y=4-y'$

이것을 $y=x^2-ax$에 대입하면

$4-y'=(6-x')^2-a(6-x')$

$\therefore y'=-x'^2-(a-12)x'+6a-32$

따라서 점 (x', y')은 포물선

$y=-x^2-(a-12)x+6a-32$ 위의 점이므로 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-x^2-(a-12)x+6a-32$

이 포물선과 직선 $y=4x$가 만나는 두 점이 원점에 대하여 대칭이므로 이차방정식

두 점의 x좌표를 α, β라 하면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=0$이므로 $\alpha+\beta=0$

$-x^2-(a-12)x+6a-32=4x$, 즉

$x^2+(a-8)x-6a+32=0$의 두 실근의 합이 0이다.

즉 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-(a-8)=0$ $\quad\therefore a=8$ 답 ④

14 전략 점 A를 접은 선에 대하여 대칭이동한 점이 점 B임을 이용하여 접은 선의 방정식을 구한다.

풀이 점 A를 접은 선에 대하여 대칭이동한 점이 점 B이므로 접은 선은 $\overline{AB}$의 중점을 지나고 직선 AB와 수직이다.

이때 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $(2, 1)$이고, 직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 접은 선의 방정식은

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이므로 접은 선의 기울기는 2이다.

$y-1=2(x-2)$ $\quad\therefore y=2x-3$ ···· ❶

따라서 점 C를 직선 $y=2x-3$에 대하여 대칭이동한 점이 점 D이므로 $\overline{CD}$의 중점 $\left(\frac{m+3}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$이 직선 $y=2x-3$ 위의 점이다. 즉

$\frac{n+1}{2}=2\cdot\frac{m+3}{2}-3$

$\therefore 2m-n=1$ ...... ㉠

또 직선 CD가 직선 $y=2x-3$과 수직이므로

$\frac{n-1}{m-3}\cdot 2=-1$ $\quad\therefore m+2n=5$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=\frac{7}{5}$, $n=\frac{9}{5}$ ···· ❷

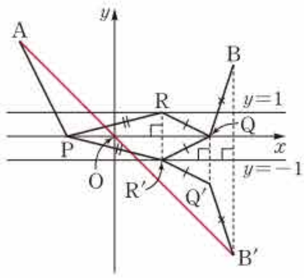
$\therefore m+n=\frac{16}{5}$ ···· ❸

답 $\frac{16}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	접은 선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷	m, n의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	$m+n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

15 전략 점을 적당히 대칭이동하여 $\overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RQ}+\overline{QB}$의 최솟값과 길이가 같은 선분을 찾는다.

풀이 다음 그림과 같이 점 R는 직선 $y=1$ 위에 있으므로 점 R를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 R$'$이라 하면 점 R$'$은 직선 $y=-1$ 위에 있다.



두 점 B, Q를 직선 $y=-1$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 B$'$, Q$'$이라 하면 $\overline{PR}=\overline{PR'}$, $\overline{RQ}=\overline{R'Q}=\overline{R'Q'}$, $\overline{QB}=\overline{Q'B'}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RQ}+\overline{QB}=\overline{AP}+\overline{PR'}+\overline{R'Q'}+\overline{Q'B'}$$
$$\geq \overline{AB'}$$

이때 B$'(5,\ a)$라 하면 $\overline{BB'}$의 중점이 직선 $y=-1$ 위에 있으므로

$$\frac{3+a}{2}=-1 \qquad \therefore a=-5$$

따라서 B$'(5,\ -5)$이므로 구하는 최솟값은

$$\overline{AB'}=\sqrt{(5+4)^2+(-5-4)^2}=9\sqrt{2}$$ 답 ④

16 전략 원의 중심의 좌표와 직선 l 사이의 거리를 이용한다.

풀이 원 C: $(x-2)^2+(y-3)^2=9$의 중심의 좌표는 $(2,\ 3)$이므로 원 C_1의 중심의 좌표는

$(2+m,\ 3)$

점 (2, 3)을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 것이다.

조건 ㈎에 의하여 원 C_1의 중심과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원 C_1의 반지름의 길이 3보다 작으므로

$$\frac{|4(2+m)-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3, \qquad |4m-1|<15$$

$$-15<4m-1<15 \qquad \therefore -\frac{7}{2}<m<4$$

따라서 조건 ㈎를 만족시키는 자연수 m의 값은 1, 2, 3이다.

(i) $m=1$일 때, 원 C_2의 중심의 좌표는 $(3,\ 3+n)$이므로 조건 ㈏에 의하여 점 $(3,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원 C_2의 반지름의 길이 3보다 작다. 즉

점 (3, 3)을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

$$\frac{|12-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3, \qquad |-3n+3|<15$$

$$-15<-3n+3<15 \qquad \therefore -4<n<6$$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 $m+n$의 최댓값은 6이다.

(ii) $m=2$일 때, 원 C_2의 중심의 좌표는 $(4,\ 3+n)$이므로 조건 ㈏에 의하여 점 $(4,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원 C_2의 반지름의 길이 3보다 작다. 즉

점 (4, 3)을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

$$\frac{|16-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3, \qquad |-3n+7|<15$$

$$-15<-3n+7<15 \qquad \therefore -\frac{8}{3}<n<\frac{22}{3}$$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이므로 $m+n$의 최댓값은 9이다.

(iii) $m=3$일 때, 원 C_2의 중심의 좌표는 $(5,\ 3+n)$이므로 조건 ㈏에 의하여 점 $(5,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원 C_2의 반지름의 길이 3보다 작다. 즉

점 (5, 3)을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

$$\frac{|20-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3, \qquad |-3n+11|<15$$

$$-15<-3n+11<15 \qquad \therefore -\frac{4}{3}<n<\frac{26}{3}$$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 $m+n$의 최댓값은 11이다.

이상에서 $m+n$의 최댓값은 11이다. 답 11

17 전략 주어진 규칙에 따라 점 P_1, P_2, P_3, P_4, $\cdots$의 좌표를 차례대로 구하여 반복되는 규칙을 찾는다.

풀이 점 $P_1(3,\ 2)$에서 $3\cdot2=6>0$, $3>2$이므로 규칙 ㈎에 의하여 점 P_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_2의 좌표는

$(2,\ 3)$

점 $P_2(2,\ 3)$에서 $2\cdot3=6>0$, $2<3$이므로 규칙 ㈏에 의하여 점 P_2를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_3의 좌표는

$(2,\ -3)$

점 $P_3(2,\ -3)$에서 $2\cdot(-3)=-6<0$이므로 규칙 ㈐에 의하여 점 P_3을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_4의 좌표는

$(-2,\ -3)$

점 $P_4(-2,\ -3)$에서 $(-2)\cdot(-3)=6>0$, $-2>-3$이므로 규칙 ㈎에 의하여 점 P_4를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_5의 좌표는

$(-3,\ -2)$

점 $P_5(-3,\ -2)$에서 $(-3)\cdot(-2)=6>0$, $-3<-2$이므로 규칙 ㈏에 의하여 점 P_5를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_6의 좌표는

$(-3,\ 2)$

점 $P_6(-3,\ 2)$에서 $(-3)\cdot2=-6<0$이므로 규칙 ㈐에 의하여 점 P_6을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_7의 좌표는

$(3,\ 2)$

즉 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, $\cdots$은 6개의 점 $(3,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(2,\ -3)$, $(-2,\ -3)$, $(-3,\ -2)$, $(-3,\ 2)$의 순서로 반복된다.

이때 $50=6\cdot8+2$이므로 점 P_{50}의 좌표는 점 P_2의 좌표인 $(2,\ 3)$과 같다.

따라서 $x_{50}=2$, $y_{50}=3$이므로

$$10x_{50}+y_{50}=23$$ 답 23

L 12 도형의 이동

Work Book

01 다항식의 연산 ⓦ 2쪽

01 $3X+A=7A-B$에서 $\quad 3X=6A-B$

$\therefore\ X=2A-\dfrac{1}{3}B$

$=2(2x^2+3xy-y^2)-\dfrac{1}{3}(-3x^2-9xy+6y^2)$

$=4x^2+6xy-2y^2+x^2+3xy-2y^2$

$=5x^2+9xy-4y^2$ 답 $5x^2+9xy-4y^2$

02 $(-5x^3+x^2-7x+2)◎(2x^3-x^2+3x-1)$

$=2(-5x^3+x^2-7x+2)+5(2x^3-x^2+3x-1)$

$=-10x^3+2x^2-14x+4+10x^3-5x^2+15x-5$

$=-3x^2+x-1$ 답 ①

03 $A-3B=4x^2+6xy-7y^2$ ······ ㉠

$B-3C=-7x^2+2xy+11y^2$ ······ ㉡

$C-3A=-x^2-10xy$ ······ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$-2(A+B+C)=-4x^2-2xy+4y^2$

$\therefore\ A+B+C=2x^2+xy-2y^2$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-2$이므로

$abc=-4$ 답 -4

04 $(2x^2-x-5)(x^3-4x^2+2x+3)$의 전개식에서 x^3항은

$2x^2\cdot 2x+(-x)\cdot(-4x^2)+(-5)\cdot x^3$

$=4x^3+4x^3-5x^3=3x^3$

따라서 x^3의 계수는 3이다. 답 3

모든 항을 전개하지 않고 x^3항이 나오는 경우만 계산한다.

05 $(2x+a)(x^2+bx+3)$의 전개식에서 x^2항은

$2x\cdot bx+a\cdot x^2=(a+2b)x^2$

$\therefore\ a+2b=-9$ ······ ㉠

$(2x+a)(x^2+bx+3)$의 전개식에서 x항은

$2x\cdot 3+a\cdot bx=(6+ab)x$

$\therefore\ 6+ab=1$ ······ ㉡

㉠에서 $a=-2b-9$이므로 ㉡에 대입하면

$6+(-2b-9)b=1, \quad 2b^2+9b-5=0$

$(b+5)(2b-1)=0$

$\therefore\ b=-5$ ($\because$ b는 정수)

따라서 $a=1$이므로 $\quad a+b=-4$ 답 -4

$b=-5$를 $a=-2b-9$에 대입하면

$a=-2\cdot(-5)-9$
$=1$

06 $(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

$=\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\}\{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}$

$=(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

$=a^6-b^6$ 답 ④

07 $(1+2a)^3+(1-2a)^3$

$=1+6a+12a^2+8a^3+1-6a+12a^2-8a^3$

$=2+24a^2$

$=2+24\cdot 3=74$ 답 74

08 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$에서 $\quad \dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=0$

$\therefore\ xy+yz+zx=0$

이때

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$=5+2\cdot 0=5$

이므로

$(x+y+z)^6=\{(x+y+z)^2\}^3=5^3=125$ 답 ⑤

09 $x^2-4x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-6)(t+2)$

$=t^2-4t-12$

$=(x^2-4x)^2-4(x^2-4x)-12$

$=x^4-8x^3+16x^2-4x^2+16x-12$

$=x^4-8x^3+12x^2+16x-12$

답 $x^4-8x^3+12x^2+16x-12$

10 $(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z)(x+y+z)$

$=\{(x-y)-z\}\times\{(x-y)+z\}$

$\times\{(x+y)-z\}\times\{(x+y)+z\}$

$=\{(x-y)^2-z^2\}\{(x+y)^2-z^2\}$

$=(x-y)^2(x+y)^2-(x-y)^2z^2-(x+y)^2z^2+z^4$

$=\{(x-y)(x+y)\}^2-\{(x-y)^2+(x+y)^2\}z^2+z^4$

$=(x^2-y^2)^2-(x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2)z^2+z^4$

$=(x^4-2x^2y^2+y^4)-(2x^2+2y^2)z^2+z^4$

$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$

따라서 $a=-2$, $b=-2$, $c=-2$이므로

$a+b-c=-2$ 답 ②

11 $\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3-y^3}{xy}$

$=\dfrac{(x-y)^3+3xy(x-y)}{xy}$ ······ ㉠

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서

$8=4^2+2xy, \quad 2xy=-8 \quad \therefore\ xy=-4$

㉠에서

$\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{4^3+3\cdot(-4)\cdot 4}{-4}=-4$ 답 -4

12 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5$에서 $\quad \dfrac{x+y}{xy}=5$

$\dfrac{x+y}{-2}=5 \quad \therefore\ x+y=-10$

따라서

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$=(-10)^2-4\cdot(-2)=108$

이므로 $\quad x-y=-6\sqrt{3}$ ($\because$ $x<y$) 답 ③

13 $x^6+y^6=(x^3)^2+(y^3)^2$
$=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$ …… ㉠
$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5$
$=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$
에서
$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$ …… ㉡
이때
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\cdot(-1)=6$,
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=2^3-3\cdot(-1)\cdot2=14$
이므로 ㉠에서
$x^6+y^6=14^2-2\cdot(-1)^3=198$
㉡에서
$x^5+y^5=6\cdot14-(-1)^2\cdot2=82$
$\therefore x^6+y^6-2x^5-2y^5=(x^6+y^6)-2(x^5+y^5)$
$=198-2\cdot82=34$ 답 ⑤

14 $x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$ …… ㉠
이때
$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=7^2-4=45$
이므로 $x-\frac{1}{x}=3\sqrt{5}$ ($\because$ $x>1$)
따라서 ㉠에서
$x^2-\frac{1}{x^2}=7\cdot3\sqrt{5}=21\sqrt{5}$ 답 $21\sqrt{5}$

$x>1$이면 $0<\frac{1}{x}<1$이므로
$x-\frac{1}{x}>0$

15 $x\neq0$이므로 $x^2+4x-1=0$의 양변을 x로 나누면
$x+4-\frac{1}{x}=0$ $\therefore x-\frac{1}{x}=-4$

$x=0$을 $x^2+4x-1=0$에 대입하면 $-1\neq0$이므로 $x\neq0$

이때
$x^3+5x^2+2x-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}$
$=x^3-\frac{1}{x^3}+5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x-\frac{1}{x}\right)$ …… ㉠
이고
$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=(-4)^3+3\cdot(-4)=-76$,
$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=(-4)^2+2=18$
이므로 ㉠에서
(주어진 식)$=-76+5\cdot18+2\cdot(-4)=6$ 답 6

16 $a^2+9b^2+c^2=a^2+(3b)^2+c^2$
$=(a+3b+c)^2-2(3ab+3bc+ca)$
$=5^2-2\cdot(-9)=43$ 답 ④

17 $a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$ …… ㉠
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서
$2^2=14+2(ab+bc+ca)$
$2(ab+bc+ca)=-10$
$\therefore ab+bc+ca=-5$
따라서 ㉠에서
$a^3+b^3+c^3=2\cdot\{14-(-5)\}+3\cdot(-6)=20$
답 ③

18 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$
$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$
$=\frac{1}{2}\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)$
$+(x^2-2zx+z^2)\}$
$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\}$ …… ㉠
$x-y=-3$, $y-z=8$을 변끼리 더하면
$x-z=5$
따라서 ㉠에서
(주어진 식)$=\frac{1}{2}\cdot\{(-3)^2+8^2+5^2\}$
$=49$ 답 49

19 $4\times6\times26\times626$
$=(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)$
$=(5^2-1)(5^2+1)(5^4+1)$
$=(5^4-1)(5^4+1)$
$=5^8-1$ 답 ③

20 $697\times703+803^2$
$=(700-3)(700+3)+(800+3)^2$
$=700^2-3^2+800^2+2\cdot800\cdot3+3^2$
$=1134800$
$\therefore n=7$ 답 7

21 $a=4$, $b=4$, $c=-6$, $d=6$이므로
$a-b-c+d=12$ 답 12

22
$$\begin{array}{r}
3x\ -2 \\
x^2+x-1\overline{)\,3x^3+\ x^2-6x-2} \\
\underline{3x^3+3x^2-3x} \\
-2x^2-3x-2 \\
\underline{-2x^2-2x+2} \\
-x-4
\end{array}$$

내림차순으로 정리한다.

따라서 몫은 $3x-2$, 나머지는 $-x-4$이므로
$a=3$, $b=-2$, $c=-1$, $d=-4$
$\therefore ac-bd=3\cdot(-1)-(-2)\cdot(-4)$
$=-11$ 답 ①

23 $4x^3-2x^2-10x+3=A(2x+3)$이므로
$A=(4x^3-2x^2-10x+3)\div(2x+3)$

$$
\begin{array}{r}
2x^2-4x+1 \\
2x+3\overline{)\,4x^3-2x^2-10x+3} \\
\underline{4x^3+6x^2\qquad\qquad} \\
-8x^2-10x\qquad \\
\underline{-8x^2-12x\qquad} \\
2x+3 \\
\underline{2x+3} \\
0
\end{array}
$$

$\therefore\ A=2x^2-4x+1$ 답 $2x^2-4x+1$

24

$$
\begin{array}{r}
x^2+\ x+3\qquad\quad \\
x^2-4x+1\overline{)\,x^4-3x^3\qquad-11x+8} \\
\underline{x^4-4x^3+\ x^2\qquad\qquad\quad} \\
x^3-\ x^2-11x\qquad \\
\underline{x^3-4x^2+\quad x\qquad} \\
3x^2-12x+8 \\
\underline{3x^2-12x+3} \\
5
\end{array}
$$

$\therefore\ x^4-3x^3-11x+8$

$=(x^2-4x+1)(x^2+x+3)+5$

다항식 A를 다항식 B $(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$

이때 $x^2-4x+1=0$이므로 구하는 식의 값은 5이다.

답 5

25 $P(x)$를 $x+\frac{1}{4}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$P(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)Q(x)+R$$
$$=\frac{1}{4}(4x+1)Q(x)+R$$
$$=(4x+1)\cdot\frac{1}{4}Q(x)+R$$

따라서 $P(x)$를 $4x+1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{4}Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 ③

26 $P(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$P(x)=(3x-2)Q(x)+R$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$
$$=\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot 3Q(x)+R$$

따라서 $P(x)$를 $x-\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $3Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 몫: $3Q(x)$, 나머지: R

27 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 넓이는 ab이고

$a^2+b^2=13^2$, $a+b=17$

$2(a+b)=34$이므로 $a+b=17$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$13^2=17^2-2ab,\quad 2ab=120\quad\therefore\ ab=60$

따라서 구하는 넓이는 60이다. 답 ②

28 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 64이므로

$4(a+b+c)=64\quad\therefore\ a+b+c=16$

또 대각선의 길이가 $3\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3\sqrt{10}\quad\therefore\ a^2+b^2+c^2=90$

직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이고

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$16^2=90+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ 2(ab+bc+ca)=166$

따라서 구하는 겉넓이는 166이다. 답 166

29 $\overline{AQ}=a$, $\overline{PQ}=b$라 하면 △APQ의 넓이가 20이므로 $\frac{1}{2}ab=20\quad\therefore\ ab=40$

$\overline{AP}=\overline{AB}=10$이므로 △APQ에서

$a^2+b^2=100$

$\overline{PS}=10-a$, $\overline{PR}=10-b$이므로

$\square PRCS=(10-a)(10-b)$

$=100-10(a+b)+ab$

이때

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=100+2\cdot 40=180$

이므로

$a+b=6\sqrt{5}$ $(\because a>0,\ b>0)$

$\therefore\ \square PRCS=100-10\cdot 6\sqrt{5}+40=140-60\sqrt{5}$

답 $140-60\sqrt{5}$

도전! 수능 기출

W 6쪽

01 (1st) 직육면체의 겉넓이를 이용하여 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BF}$의 길이에 대한 식을 세운다.

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BF}$의 길이를 각각 a, b, c라 하자.

직육면체의 겉넓이가 148이므로

$2(ab+bc+ca)=148$

$\therefore\ ab+bc+ca=74$

(2nd) 모든 모서리의 길이의 합을 이용하여 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BF}$의 길이에 대한 식을 세운다.

모든 모서리의 길이의 합이 60이므로

$4(a+b+c)=60$

$\therefore\ a+b+c=15$

(3rd) $\overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2$의 값을 구한다.

$\overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2=(b^2+c^2)+(a^2+c^2)+(a^2+b^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$ …… ㉠

이때

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=15^2-2\cdot 74=77$

이므로 ㉠에서

$\overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2=2\cdot 77=154$ 답 ④

02 (1st) **정오각형의 한 내각의 크기를 이용하여 $\angle \mathrm{APE}$, $\angle \mathrm{EAP}$의 크기를 구한다.**

정오각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{180^\circ \times 3}{5}=108^\circ$

$\triangle \mathrm{ABE}$에서 $\angle \mathrm{BAE}=108^\circ$이므로

$$\angle \mathrm{ABE}=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$$

> $\triangle \mathrm{ABE}$는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}$인 이등변삼각형이다.

마찬가지 방법으로 $\triangle \mathrm{BAC}$에서 $\angle \mathrm{BAC}=36^\circ$

$$\therefore \angle \mathrm{APE}=\angle \mathrm{ABP}+\angle \mathrm{BAP}=72^\circ,$$
$$\angle \mathrm{EAP}=108^\circ-\angle \mathrm{BAP}=108^\circ-36^\circ=72^\circ$$

(2nd) **주어진 비례식을 이용하여 x에 대한 식을 세운 후 x의 값을 구한다.**

$\triangle \mathrm{APE}$는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{PE}}=1$

> $\overline{\mathrm{PE}}=\overline{\mathrm{AE}}=1$

$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{PE}}=\overline{\mathrm{PE}}:\overline{\mathrm{BP}}$에서 $x:1=1:(x-1)$

$$x(x-1)=1, \quad x^2-x-1=0$$
$$\therefore x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\because x>0)$$

(3rd) **주어진 x에 대한 등식의 좌변을 간단히 한 후 식의 값을 구한다.**

$x^2-x-1=0$에서

$$x^2=x+1,$$
$$x^3=x^2+x=x+1+x=2x+1,$$
$$x^4=2x^2+x=2(x+1)+x=3x+2,$$
$$x^5=3x^2+2x=3(x+1)+2x=5x+3,$$
$$x^6=5x^2+3x=5(x+1)+3x=8x+5$$
$$\therefore 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8$$
$$=1+(-x+x^2)+x^2(-x+x^2)+x^4(-x+x^2)+x^6(-x+x^2)$$

> $x^2-x-1=0$에서 $x^2-x=1$

$$=1+1+x^2+x^4+x^6$$
$$=2+(x+1)+(3x+2)+(8x+5)$$
$$=12x+10=12\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+10$$
$$=16+6\sqrt{5}$$

(4th) **$p+q$의 값을 구한다.**

따라서 $p=16$, $q=6$이므로 $p+q=22$ 답 ①

쌤 한마디

정 n각형과 각의 크기에 대한 조건이 주어지면

(n각형의 내각의 크기의 합)$=180^\circ\times(n-2)$,

(정 n각형의 한 내각의 크기)$=\dfrac{180^\circ\times(n-2)}{n}$

임을 이용한다.

03 (1st) **12개의 작은 직육면체 중에서 부피가 같은 5개의 직육면체를 찾는다.**

나누기 전의 직육면체의 부피는

$$(a+b)^2(a+2b)=a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$$

위의 식의 우변은 12개로 나뉜 작은 직육면체의 부피의 합과 같고, 각 부피에 따른 직육면체의 개수는 다음과 같다.

부피가 a^3인 직육면체의 개수: 1

부피가 a^2b인 직육면체의 개수: 4

부피가 ab^2인 직육면체의 개수: 5

부피가 b^3인 직육면체의 개수: 2

(2nd) **$a+2b$의 값을 구한다.**

부피가 150인 직육면체가 5개이므로

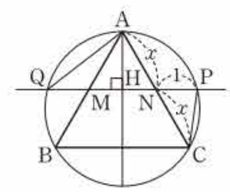
$$ab^2=150=6\cdot5^2$$

이때 a와 b는 서로소이므로 $a=6$, $b=5$

$$\therefore a+2b=16$$

답 16

04 (1st) **닮음인 두 삼각형을 찾는다.**



오른쪽 그림과 같이 반직선 NM이 $\triangle \mathrm{ABC}$의 외접원과 만나는 점을 Q라 하자.

$\overline{\mathrm{AN}}=\overline{\mathrm{NC}}$이고 $\triangle \mathrm{AMN}$은 정삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{AN}}=\overline{\mathrm{NC}}=\overline{\mathrm{MN}}=x$$

점 A에서 $\overline{\mathrm{MN}}$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 직선 AH는 원의 중심을 지나므로

$$\overline{\mathrm{MH}}=\overline{\mathrm{NH}},\ \overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{PH}}$$
$$\therefore \overline{\mathrm{QM}}=\overline{\mathrm{QH}}-\overline{\mathrm{MH}}=\overline{\mathrm{PH}}-\overline{\mathrm{NH}}=\overline{\mathrm{NP}}=1$$

$\triangle \mathrm{AQN}$과 $\triangle \mathrm{PCN}$에서

$\angle \mathrm{ANQ}=\angle \mathrm{PNC}$ (맞꼭지각),

$\angle \mathrm{AQN}=\angle \mathrm{PCN}$ ($\widehat{\mathrm{AP}}$에 대한 원주각)

이므로 $\triangle \mathrm{AQN}\backsim\triangle \mathrm{PCN}$ (AA 닮음)

(2nd) **닮음비를 이용하여 x에 대한 식을 세운다.**

즉 $\overline{\mathrm{QN}}:\overline{\mathrm{CN}}=\overline{\mathrm{AN}}:\overline{\mathrm{PN}}$이므로 $(1+x):x=x:1$

$$1+x=x^2 \quad \therefore x^2-x-1=0$$

(3rd) **$10\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$의 값을 구한다.**

$x\neq0$이므로 $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면

> $x=0$을 $x^2-x-1=0$에 대입하면 $-1\neq0$이므로 $x\neq0$

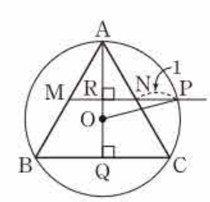
$$x-1-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=1$$

따라서 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=1^2+2=3$이므로

$$10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=30$$

답 30

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 외접원의 중심을 O라 하고 직선 AO와 $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{MN}}$의 교점을 각각 Q, R라 하면 $\triangle \mathrm{ABC}$는 정삼각형이므로



$$\overline{\mathrm{AR}}\perp\overline{\mathrm{MN}},\ \overline{\mathrm{AQ}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$$

이때 $\triangle \mathrm{ABC}$의 한 변의 길이가 $2x$이므로

$$\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2x=\sqrt{3}x$$

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{AO}}=\dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{AQ}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$,

> 점 O는 $\triangle \mathrm{ABC}$의 외심인 동시에 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{OQ}}=2:1$

$\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{QR}}-\overline{\mathrm{QO}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AQ}}-\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{6}\overline{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$이고

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PN}}+\overline{\mathrm{NR}}=1+\dfrac{x}{2}$이므로 직각삼각형 OPR에서

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2+\left(1+\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)^2$$
$$\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{4}x^2+x+1=\frac{4}{3}x^2 \quad \therefore x^2-x-1=0$$

02 나머지정리와 인수분해

Ⓦ 7쪽

01 $\frac{ax+by-8}{2x-y+4}=k$ (k는 상수)로 놓으면

$ax+by-8=k(2x-y+4)$

$\therefore (a-2k)x+(b+k)y-8-4k=0$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-2k=0$, $b+k=0$, $-8-4k=0$

$\therefore k=-2$, $a=-4$, $b=2$

$\therefore ab=-8$ 답 -8

02 $(x+a)(x+b)(x-c)$

$=x^3+(a+b-c)x^2+(ab-bc-ca)x-abc$,

$(x-a)(x-b)(x+c)$

$=x^3+(-a-b+c)x^2+(ab-bc-ca)x+abc$

이므로

$a+b-c=-a-b+c$, $-abc=abc$

$\therefore a+b=c$, $abc=0$

ㄱ. $c=0$이면 $a+b=0$, 즉 $a=-b$이다.

ㄴ. a, b, c가 이 순서대로 연속하는 세 정수이면 $a=b-1$, $c=b+1$이므로 이것을 $a+b=c$에 대입하면

$b-1+b=b+1$ $\quad\therefore b=2$

그런데 $abc=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

ㄷ. $abc=0$이므로 a, b, c 중 적어도 하나는 0이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ①

03 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-8=2c$ $\quad\therefore c=-4$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-7=-b$ $\quad\therefore b=7$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2=2a$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore ab+c=3$ 답 3

04 주어진 등식에서 좌변의 x^3의 계수는 1이고, 우변의 x^3의 계수는 c이므로

$c=1$

$\therefore x^3+ax^2+bx+12=(x+2)(x-3)(x-2)$

이 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-8+4a-2b+12=0$

$\therefore 2a-b=-2$ ⋯⋯ ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$8+4a+2b+12=0$

$\therefore 2a+b=-10$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-3$, $b=-4$

$\therefore a-b+c=2$ 답 ⑤

Q BOX

㉠－㉡을 하면

$6a=-72$

$\therefore a=-12$

$a=-12$를 ㉡에 대입하면

$-36+b=-9$

$\therefore b=27$

$b=2$이면

$a=1$, $c=3$

㉠＋㉡을 하면

$4a=-12$

$\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$-6-b=-2$

$\therefore b=-4$

05 주어진 등식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$0=81+9a+b$

$\therefore 9a+b=-81$ ⋯⋯ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=\sqrt{3}$을 대입하면

$0=9+3a+b$

$\therefore 3a+b=-9$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-12$, $b=27$

$\therefore (x+3)(x^2-3)P(x)=x^4-12x^2+27$

이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$5P(2)=16-48+27=-5$

$\therefore P(2)=-1$ 답 -1

06 주어진 이차방정식이 3을 근으로 가지므로

$9+3(k-1)+(k+5)m+n-1=0$

$\therefore (m+3)k+5m+n+5=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$m+3=0$, $5m+n+5=0$

$\therefore m=-3$, $n=10$

$\therefore m+n=7$ 답 ③

07 $2x-y=1$에서 $\quad y=2x-1$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$ax^2+(2x-1)^2+b\{x(2x-1)-1\}+c(2x-1+4)$

$=10$

$\therefore (a+2b+4)x^2-(b-2c+4)x-b+3c-9=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+2b+4=0$ ⋯⋯ ㉠

$b-2c+4=0$ ⋯⋯ ㉡

$-b+3c-9=0$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad b=6$, $c=5$

$b=6$을 ㉠에 대입하여 풀면 $\quad a=-16$

$\therefore a+b+c=-5$ 답 -5

08 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8=3^4=81$ 답 81

09 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=1$ ⋯⋯ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$a_0-a_1+\cdots-a_9+a_{10}=1025$ ⋯⋯ ㉡

㉠－㉡을 하면

$2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)=-1024$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-512$ 답 ②

10 x^3+ax^2+b를 x^2+3x-6으로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+b=(x^2+3x-6)(x+c)$

이 등식의 우변을 정리하면

$x^3+ax^2+b=x^3+(c+3)x^2+(3c-6)x-6c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c+3,\ 0=3c-6,\ b=-6c$

$\therefore a=5,\ b=-12,\ c=2$

$\therefore a-b=17$ 답 ④

11 x^3+ax^2+x-2를 x^2-5x+1로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)=px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+x-2=(x^2-5x+1)(x+5)+px+q$

이 등식의 우변을 정리하면

$x^3+ax^2+x-2=x^3+(p-24)x+q+5$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=0,\ 1=p-24,\ -2=q+5$

$\therefore a=0,\ p=25,\ q=-7$

따라서 $R(x)=25x-7$이므로

$a+R(1)=18$ 답 18

12 $x^4+ax^3+bx^2-10x-8$을 x^2+x+2로 나누었을 때의 몫을 x^2+cx+d (c, d는 상수)라 하면

$x^4+ax^3+bx^2-10x-8$

$=(x^2+x+2)(x^2+cx+d)+x-2$

이 등식의 우변을 정리하면

$x^4+ax^3+bx^2-10x-8$

$=x^4+(c+1)x^3+(c+d+2)x^2+(2c+d+1)x$

$+2d-2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c+1,\ b=c+d+2,\ -10=2c+d+1,$

$-8=2d-2$

$\therefore a=-3,\ b=-5,\ c=-4,\ d=-3$

$\therefore ab=15$ 답 ⑤

13 $P(4)=5$이므로 구하는 나머지는

$6P(4)=6\cdot5=30$ 답 30

14 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2-9$라 하면 $P(2)=7$, $P(-1)=-2$이므로

$16+8a+4b-9=7,\ 1-a+b-9=-2$

$\therefore 2a+b=0,\ -a+b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=4$

$\therefore a+b=2$ 답 2

15 x^3의 계수가 1인 삼차식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$을 만족시키는 실수 α의 값이 -3과 1뿐이므로

$P(x)=(x+3)^2(x-1)$

또는 $P(x)=(x+3)(x-1)^2$

이때 상수항이 양수이므로

$P(x)=(x+3)(x-1)^2$

따라서 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P(3)=6\cdot2^2=24$ 답 ③

Q BOX

나누는 식이 이차식이므로 나머지는 일차 이하의 다항식이다.

사차식을 이차식으로 나누었을 때의 몫은 이차식이다.

조건 (나)의 양변에 $x=2$를 대입한다.

$(x+2)P(x)$의 x 대신 4를 대입한다.

조건 (나)의 양변에 $x=1$을 대입한다.

나누는 식이 삼차식이므로 나머지는 이차 이하의 다항식이다.

16 $P(x)$를 x^2-x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-x-6)Q(x)+ax+b$

$=(x+2)(x-3)Q(x)+ax+b$

이때 $P(-2)=10,\ P(3)=-5$이므로

$-2a+b=10,\ 3a+b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=4$

따라서 구하는 나머지는 $-3x+4$이다. 답 $-3x+4$

17 $(x+1)P(x)$를 x^2+3x-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x+1)P(x)=(x^2+3x-4)Q(x)+ax+b$

$=(x+4)(x-1)Q(x)+ax+b$

이때 $P(-4)=8,\ P(1)=-2$이므로

$-3P(-4)=-4a+b,\ 2P(1)=a+b$

$\therefore -4a+b=-24,\ a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-8$

따라서 $R(x)=4x-8$이므로

$R(5)=12$ 답 ④

18 $P(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b$

$=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

이므로 $P(2)=2a+b,\ P(3)=3a+b$

조건 (나)에서

$P(2)+P(2)=8$

$\therefore P(2)=4$, 즉 $2a+b=4$ …… ㉠

조건 (나)에서

$P(1)+P(3)=8$, $-3+P(3)=8$ ($\because$ 조건 (가))

$\therefore P(3)=11$, 즉 $3a+b=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=7,\ b=-10$

따라서 $R(x)=7x-10$이므로

$R(-1)=-17$ 답 -17

19 $x^{10}+x^7-4x+1$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$x^{10}+x^7-4x+1$

$=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $c=1$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$5=a-b+c$ $\therefore a-b=4$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-1=a+b+c$ $\therefore a+b=-2$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-3$

따라서 구하는 나머지는 x^2-3x+1이다. 답 ④

20 $P(x)$를 $x(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=x(x+1)Q_1(x)+x-5$

이므로 $P(0)=-5,\ P(-1)=-6$

$P(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x+1)(x-3)Q_2(x)+4x-2$

이므로 $P(-1)=-6,\ P(3)=10$

$P(x)$를 $x(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=x(x+1)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $P(0)=-5,\ P(-1)=-6,\ P(3)=10$이므로

$c=-5,\ a-b+c=-6,\ 9a+3b+c=10$

$a-b-5=-6$에서
$a-b=-1$ … ㉠
$9a+3b-5=10$에서
$3a+b=5$ … ㉡
㉠+㉡을 하면
$4a=4 \quad \therefore a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면
$1-b=-1 \quad \therefore b=2$

$\therefore a=1,\ b=2,\ c=-5$

따라서 $R(x)=x^2+2x-5$이므로

$R(-4)=3$ 답 ①

21 $P(x)$를 $(x-1)^2(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

$P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+7$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+7$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x-1)^2+x+7$

이것을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+a(x-1)^2+x+7$

한편 $P(-2)=-4$이므로

$9a+5=-4 \qquad \therefore a=-1$

따라서 구하는 나머지는

$-(x-1)^2+x+7=-x^2+3x+6$

답 $-x^2+3x+6$

22 $xP(x+5)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$-3P(-3+5)=-3P(2)$ …… ㉠

한편 $P(2)=-3$이므로 ㉠에서 구하는 나머지는

$P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로
$P(2)=-3$

$-3\cdot(-3)=9$ 답 ④

23 $P(2x-3)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(2\cdot1-3)=P(-1)$ …… ㉠

한편 $P(x)$를 $3x^2+2x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(3x^2+2x-1)Q(x)+x-4$
$=(x+1)(3x-1)Q(x)+x-4$

이므로 $P(-1)=-5$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는 -5이다. 답 -5

24 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 5이므로

$P(x)=(x+1)Q(x)+5$

이때 $Q(4)=2$이므로 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$P(4)=5Q(4)+5=5\cdot2+5=15$ 답 ③

25 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 4이므로

$P(x)=(x-1)Q(x)+4$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 x^2+3x-1, 나머지가 1이므로

$Q(x)=(x-3)(x^2+3x-1)+1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-1)\{(x-3)(x^2+3x-1)+1\}+4$

따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=-2\cdot\{-4\cdot(-3)+1\}+4$
$=-22$ 답 ①

26 $P(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $-4x+1$이므로

$P(x)=(x+1)(x-1)Q(x)-4x+1$

이때 $P(2)=11$이므로

$3Q(2)-7=11, \qquad 3Q(2)=18$

$\therefore Q(2)=6$

따라서 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 6이다. 답 6

27 x^8+x^5+3을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^8+x^5+3=(x-1)Q(x)+R$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$R=5$

$\therefore x^8+x^5+3=(x-1)Q(x)+5$

이 등식의 양변에 $x=79$를 대입하면

$79^8+79^5+3=78Q(79)+5$

따라서 79^8+79^5+3을 78로 나누었을 때의 나머지는 5이다. 답 ⑤

28 $2^{1257}=(2^5)^{251}\cdot2^2=4\cdot32^{251}$

$4x^{251}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$4x^{251}=(x+1)Q(x)+R$

위 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$R=-4$

$\therefore 4x^{251}=(x+1)Q(x)-4$

이 등식의 양변에 $x=32$를 대입하면

$$\begin{aligned}4\cdot 32^{251}&=33Q(32)-4\\&=33\{Q(32)-1\}+33-4\\&=33\{Q(32)-1\}+29\end{aligned}$$

(나머지) ≥ 0이어야 한다.

따라서 2^{1257}을 33으로 나누었을 때의 나머지는 29이다.

답 29

29 $P(x)=x^4-x^3+ax^2+bx+6$이라 하면 $P(x)$가 $x+1$, $x-1$로 각각 나누어떨어지므로

$P(-1)=0$, $P(1)=0$

$1+1+a-b+6=0$, $1-1+a+b+6=0$

$\therefore a-b=-8$, $a+b=-6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-7$, $b=1$

따라서 $P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$을 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned}P(-3)&=81-(-27)-63-3+6\\&=48\end{aligned}$$

답 ④

30 $P(x-1)$이 $x-4$로 나누어떨어지므로

$P(3)=0$

$P(x-1)$의 x 대신 4를 대입한다.

$54+9k-24-3=0$, $\quad 9k=-27$

$\therefore k=-3$

답 -3

31 $P(x)=x^3+5x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 x^2+6x+8, 즉 $(x+2)(x+4)$로 나누어떨어지므로

$P(-2)=0$, $P(-4)=0$

$-8+20-2a+b=0$, $-64+80-4a+b=0$

$\therefore 2a-b=12$, $4a-b=16$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-8$

$\therefore b-a=-10$

답 ②

32 $P(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$, a, b, c는 상수)라 하면 $P(2-x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 9이므로

$P(2-2)=P(0)=9 \qquad \therefore c=9$

$xP(x)+2x^2$이 x^2-9, 즉 $(x+3)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$-3P(-3)+18=0$, $3P(3)+18=0$

$xP(x)+2x^2$의 x 대신 -3을 대입한다.

$xP(x)+2x^2$의 x 대신 3을 대입한다.

$P(-3)=6$, $P(3)=-6$

$9a-3b+9=6$, $9a+3b+9=-6$

$\therefore 3a-b=-1$, $3a+b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-2$

따라서 $P(x)=-x^2-2x+9$이므로

$P(2)=1$

답 1

33 x^3+ax^2-8x+b를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}-2 & 1 & a & -8 & b\\ & & -2 & -2a+4 & 4a+8\\ \hline & 1 & a-2 & -2a-4 & \boxed{4a+b+8}\end{array}$$

따라서 $k=-2$, $c=-2$, $a-2=-5$, $-2a+4=d$, $4a+b+8=6$이므로

$k=-2$, $a=-3$, $b=10$, $c=-2$, $d=10$

답 ③

34 (1) 주어진 조립제법을 완성하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}\frac{1}{4} & 4 & 3 & 7 & -3\\ & & 1 & 1 & 2\\ \hline & 4 & 4 & 8 & \boxed{-1}\end{array}$$

$\therefore a=\frac{1}{4}$, $b=1$, $c=1$, $d=8$

$f(x)$
$=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R(x)$
$=\frac{1}{a}(ax+b)Q(x)$
$+R(x)$
이므로 $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$이다.

(2) $$\begin{aligned}P(x)&=\left(x-\frac{1}{4}\right)(4x^2+4x+8)-1\\&=(4x-1)(x^2+x+2)-1\end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $4x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2+x+2이다.

답 (1) $a=\frac{1}{4}$, $b=1$, $c=1$, $d=8$
(2) x^2+x+2

35

$$\begin{array}{r|rrrr}2 & 1 & 4 & -9 & 3\\ & & 2 & 12 & 6\\ \hline 2 & 1 & 6 & 3 & \boxed{9}\\ & & 2 & 16 & \\ \hline 2 & 1 & 8 & \boxed{19} & \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{10} & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$$\begin{aligned}&x^3+4x^2-9x+3\\&=(x-2)(x^2+6x+3)+9\\&=(x-2)\{(x-2)(x+8)+19\}+9\\&=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+10\}+19]+9\\&=(x-2)\{(x-2)^2+10(x-2)+19\}+9\\&=(x-2)^3+10(x-2)^2+19(x-2)+9\end{aligned}$$

따라서 $a=10$, $b=19$, $c=9$이므로

$a-b-c=-18$

답 ①

36

$$\begin{array}{r|rrrr}-3 & 2 & 9 & 7 & -8\\ & & -6 & -9 & 6\\ \hline -3 & 2 & 3 & -2 & \boxed{-2}\\ & & -6 & 9 & \\ \hline -3 & 2 & -3 & \boxed{7} & \\ & & -6 & & \\ \hline & 2 & \boxed{-9} & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$2x^3+9x^2+7x-8$
$=(x+3)(2x^2+3x-2)-2$
$=(x+3)\{(x+3)(2x-3)+7\}-2$
$=(x+3)[(x+3)\{2(x+3)-9\}+7]-2$
$=(x+3)\{2(x+3)^2-9(x+3)+7\}-2$
$=2(x+3)^3-9(x+3)^2+7(x+3)-2$

따라서 $P(x)=2(x+3)^3-9(x+3)^2+7(x+3)-2$ 이므로

$P(-3.1)=2\times(-0.1)^3-9\times(-0.1)^2+7\times(-0.1)-2$
$=-2.792$

답 -2.792

37 x^6-y^6
$=(x^3)^2-(y^3)^2$
$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

따라서 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

38 ④ $a^2+4b^2+9c^2-4ab+12bc-6ca$
$=a^2+(-2b)^2+(-3c)^2+2\cdot a\cdot(-2b)$
$+2\cdot(-2b)\cdot(-3c)+2\cdot(-3c)\cdot a$
$=(a-2b-3c)^2$

⑤ $a^3+b^3+6ab-8$
$=a^3+b^3-8+6ab$
$=a^3+b^3+(-2)^3-3\cdot a\cdot b\cdot(-2)$
$=(a+b-2)(a^2+b^2-ab+2a+2b+4)$

답 ④

39 $(x-1)^2(x+4)(x-6)+144$
$=(x^2-2x+1)(x^2-2x-24)+144$

$x^2-2x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+1)(X-24)+144$
$=X^2-23X+120$
$=(X-8)(X-15)$
$=(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)$
$=(x+2)(x-4)(x+3)(x-5)$

따라서 인수가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

40 $(x^2+3x)^2-6x^2-18x-16$
$=(x^2+3x)^2-6(x^2+3x)-16$

$x^2+3x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X^2-6X-16$
$=(X+2)(X-8)$
$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-8)$
$=(x+1)(x+2)(x^2+3x-8)$

$\therefore a+b+c+d=1+2+3+(-8)$
$=-2$

답 -2

41 $x^2=X$로 놓으면

(주어진 식)$=4X^2-13X+9$
$=(X-1)(4X-9)$
$=(x^2-1)(4x^2-9)$
$=(x+1)(x-1)(2x+3)(2x-3)$

$\therefore ab+cd=-1+(-9)=-10$

답 -10

42 x^4-11x^2+1
$=(x^4-2x^2+1)-9x^2$
$=(x^2-1)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x-1)(x^2-3x-1)$
$=(x^2+3x-1)\{(x-3)^2+3(x-3)-1\}$

따라서 $f(x)=x^2+3x-1$ 또는 $f(x)=-(x^2+3x-1)$ 이므로

$|f(2)|=|4+6-1|=9$

답 ⑤

43 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2y+x^2z-yz^2-z^3=(x^2-z^2)y+x^2z-z^3$
$=(x^2-z^2)y+z(x^2-z^2)$
$=(x^2-z^2)(y+z)$
$=(x+z)(x-z)(y+z)$

따라서 인수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

44 $5a+b+2=0$에서 $b=-5a-2$

$\therefore 4-25a^2+10ab-b^2$
$=4-25a^2+10a(-5a-2)-(-5a-2)^2$
$=4-25a^2-50a^2-20a-25a^2-20a-4$
$=-100a^2-40a$
$=-20a(5a+2)$
$=-20a\cdot(-b)=20ab$

답 ⑤

다른 풀이 $4-25a^2+10ab-b^2$
$=4-(25a^2-10ab+b^2)$
$=2^2-(5a-b)^2$
$=(2+5a-b)(2-5a+b)$

이때 $5a+b+2=0$에서

$2+5a=-b,\ 2+b=-5a$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-b-b)(-5a-5a)$
$=(-2b)\cdot(-10a)=20ab$

45 주어진 식의 분자를 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)$
$=ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+a^2c-ac^2$
$=(c-b)a^2+(b^2-c^2)a+bc^2-b^2c$
$=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)$
$=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=-(b-c)(a-b)(a-c)$
$=-(a-b)(b-c)(a-c)$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{-(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$
$=-1$

답 ②

Q BOX

$ab=1\cdot(-1)=-1,$
$cd=3\cdot(-3)=-9$

x의 차수는 2, y의 차수는 1, z의 차수는 3이므로 y에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

$(x-1)^2(x+4)(x-6)$
$=(x-1)\times(x-1)$
$\times(x+4)\times(x-6)$
에서 상수항의 합이 같아지도록 짝을 짓는다.

주어진 식의 분자에서 a, b, c의 차수가 모두 2이므로 a 또는 b 또는 c에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

46 $P(x)$가 $x-3$을 인수로 가지므로 $\quad P(3)=0$

$27+9a-39-15=0$

$9a=27 \qquad \therefore a=3$

따라서

$P(x)$

$=x^3+3x^2-13x-15$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 3 & -13 & -15 \\ & & 3 & 18 & 15 \\ \hline & 1 & 6 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$x^3+3x^2-13x-15=(x-3)(x^2+6x+5)$

$=(x-3)(x+1)(x+5)$

답 $(x-3)(x+1)(x+5)$

47 $R(x)=x^4-9x^2-4x+12$라 하면

$R(1)=1-9-4+12=0$,

$R(3)=81-81-12+12=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $R(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -9 & -4 & 12 \\ & & 1 & 1 & -8 & -12 \\ \hline 3 & 1 & 1 & -8 & -12 & \boxed{0} \\ & & 3 & 12 & 12 & \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore x^4-9x^2-4x+12$

$=(x-1)(x-3)(x^2+4x+4)$

$=(x-1)(x-3)(x+2)^2$

$P(x)$, $Q(x)$는 각각 이차항의 계수가 1인 이차식이고 $P(3)\neq 0$, $Q(1)\neq 0$이므로

$P(x)=(x-1)(x+2)$, $Q(x)=(x-3)(x+2)$

$\therefore P(-1)+Q(5)=-2+14=12$ 답 ③

48 x^9+1을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^9+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-a+b \qquad \therefore b=a$

$\therefore x^9+1=(x+1)^2Q(x)+ax+a$

$=(x+1)^2Q(x)+a(x+1)$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$ ⋯⋯ ㉠

한편 $P(x)=x^9+1$이라 하면

$P(-1)=-1+1=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{8\text{개}}} & \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^9+1=(x+1)(x^8-x^7+x^6-\cdots+1)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$(x+1)Q(x)+a=x^8-x^7+x^6-\cdots+1$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면 $\quad a=1+1+\cdots+1=9$

따라서 $R(x)=9x+9$이므로

$R(3)=36$ 답 36

Q BOX: $a=b=9$를 $ax+b$에 대입하면 $9x+9$

49 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1$

$=x^2\left(x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}+6\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)$

$=(x^2+6x+1)(x^2-x+1)$

$\therefore a+b+c+d=6+1+(-1)+1=7$ 답 7

Q BOX: $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

50 $x^4-2x^3-10x^2+2x+1$

$=x^2\left(x^2-2x-10+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-10\right\}$

$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-8\right\}$

$=x^2\left(x-\frac{1}{x}+2\right)\left(x-\frac{1}{x}-4\right)$

$=(x^2+2x-1)(x^2-4x-1)$

답 $(x^2+2x-1)(x^2-4x-1)$

Q BOX: $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

51 주어진 식의 좌변을 인수분해하면

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

즉 $(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$이고 $a+b+c\neq 0$이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다. 답 ⑤

52 주어진 식을 $P(x)$라 하면 $P(c)=0$이므로

$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+a^3+a^2b+ab^2+b^3=0$

이 식의 좌변을 인수분해하면

$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+a^3+a^2b+ab^2+b^3$

$=c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a^2+b^2)(a+b)$

$=c^2(c-a-b)-(a^2+b^2)(c-a-b)$

$=(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)$

즉 $(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$이고 $c-a-b\neq0$이므로

$$c^2-a^2-b^2=0 \qquad \therefore\ c^2=a^2+b^2$$

Q BOX
$a+b>c$이므로
$c-a-b<0$
$\therefore\ c-a-b\neq0$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2}ab$$

답 $\frac{1}{2}ab$

53 $x^3-x^2y+xy^2-y^3$

$=x^2(x-y)+y^2(x-y)$

$=(x-y)(x^2+y^2)$

$=(x-y)\{(x+y)^2-2xy\}$ …… ㉠

이때

$x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4,$

$x-y=(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3},$

$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$2\sqrt{3}\cdot(4^2-2\cdot1)=28\sqrt{3}$

답 $28\sqrt{3}$

54 주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$a^2(b+c)+b^2(a-c)-c^2(a+b)$

$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c-bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a-c)$

$=(a+b)(b+c)(a-c)$

다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이다.

이때 $a-c=(a+b)-(b+c)=-5$이므로 구하는 식의 값은

$a+b=2$, $b+c=7$이므로
$(a+b)-(b+c)$
$=2-7=-5$

$2\cdot7\cdot(-5)=-70$

답 -70

55 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

이때 $a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore\ \dfrac{a^3+b^3+c^3}{6abc}=\dfrac{3abc}{6abc}=\dfrac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

56 $20=x$로 놓으면

$19\cdot20\cdot23\cdot24+4$

$=(x-1)x(x+3)(x+4)+4$

$=\{x(x+3)\}\{(x-1)(x+4)\}+4$

$=(x^2+3x)(x^2+3x-4)+4$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$(x^2+3x)(x^2+3x-4)+4=X(X-4)+4$

$=X^2-4X+4$

$=(X-2)^2$

$=(x^2+3x-2)^2$

$=(20^2+3\cdot20-2)^2$

$=(400+60-2)^2$

$=458^2$

$\therefore\ \sqrt{19\cdot20\cdot23\cdot24+4}=\sqrt{458^2}=458$

답 ②

57 7^6-1이 k로 나누어떨어지므로 k는 7^6-1의 약수이다.

이때

$7^6-1=(7^3)^2-1=(7^3+1)(7^3-1)$

$=(7+1)(7^2-7+1)(7-1)(7^2+7+1)$

$=8\cdot43\cdot6\cdot57=2^4\cdot3^2\cdot19\cdot43$

따라서 홀수인 두 자리 자연수 k의 값은

$19,\ 43,\ 3\cdot19$, 즉 $19,\ 43,\ 57$

답 $19,\ 43,\ 57$

도전! 수능 기출

W 16쪽

01 1st $f(1)$, $g(1)$의 값을 구한다.

조건 ㈎에서 $f(x)-g(x)$를 $x-2$로 나눈 몫과 나머지를 a (a는 상수)라 하면

$f(x)-g(x)=(x-2)a+a=a(x-1)$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)-g(1)=0 \qquad \therefore\ f(1)=g(1)$ …… ㉠

조건 ㈏에서 $f(x)g(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)g(x)=(x^2-1)Q(x)$

$=(x+1)(x-1)Q(x)$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)g(1)=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\{f(1)\}^2=0$

$\therefore\ f(1)=0 \qquad \therefore\ g(1)=0$

2nd $f(2)+g(2)$의 값을 구한다.

$f(x)$와 $g(x)$는 각각 $x-1$을 인수로 가지므로

$f(x)=(x-1)(x+p)$, $g(x)=(x-1)(x+q)$ (p, q는 상수)

라 하면 $g(4)=3$에서

$3(4+q)=3, \qquad 4+q=1 \qquad \therefore\ q=-3$

즉 $g(x)=(x-1)(x-3)$에서

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-3)(x+p)$

이므로

$(x-1)^2(x-3)(x+p)=(x+1)(x-1)Q(x)$

위의 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-2)^2\cdot(-4)\cdot(-1+p)=0$

$\therefore\ p=1$

따라서 $f(x)=(x-1)(x+1)$이므로

$f(2)+g(2)=3+(-1)=2$

답 ②

02 1st 반복되는 수를 x로 치환한 후 인수분해한다.

$14=x$로 놓으면

$(14^2+2\times14)^2-18\times(14^2+2\times14)+45$

$=(x^2+2x)^2-18(x^2+2x)+45$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)$

$=(x+3)(x-1)(x+5)(x-3)$ …… ㉠

2nd $a+b+c+d$의 값을 구한다.

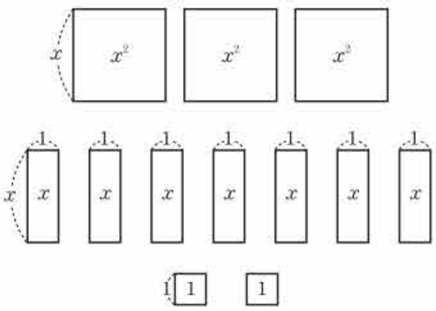
$x=14$를 ㉠에 대입하면

$(14+3)\times(14-1)\times(14+5)\times(14-3)$

$=17\times13\times19\times11$

$\therefore\ a+b+c+d=60$ 답 ③

03 1st 처음 주어진 모든 사각형의 넓이의 합을 구한다.



모든 사각형의 넓이의 합은

$3x^2+7x+2$

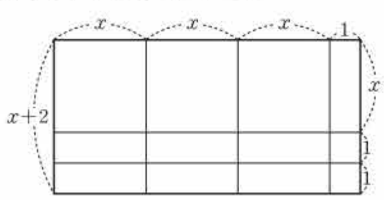
2nd 만들어진 직사각형의 둘레의 길이를 구한다.

$3x^2+7x+2=(3x+1)(x+2)$이고, 만들어진 직사각형의 세로의 길이는 $x+2$이므로 가로의 길이는 $3x+1$이다.

따라서 둘레의 길이는

$2\{(x+2)+(3x+1)\}=8x+6$ 답 ⑤

참고 만들어진 직사각형은 다음과 같다.



Q BOX

03 복소수 W 17쪽

01 허수는 $-\dfrac{i}{10}$, $5i-6$, $\sqrt{3}-i$, $\sqrt{7}i$, $-9+4i$의 5개이다. 답 ④

02 $-\sqrt{6}+2i$의 실수부분은 $-\sqrt{6}$이므로

허수부분은 2이다.

$a=-\sqrt{6}$

$\dfrac{1-9i}{3}=\dfrac{1}{3}-3i$의 허수부분은 -3이므로

실수부분은 $\dfrac{1}{3}$이다.

$b=-3$

$\therefore\ a^2-b^2=(-\sqrt{6})^2-(-3)^2=-3$ 답 -3

03 $z_1=(1+2i)^2=1+4i-4=-3+4i$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$z_2=(3+i)(2-i)=6-3i+2i+1=7-i$

$$\therefore\ \frac{z_2}{z_1}=\frac{7-i}{-3+4i}=\frac{(7-i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$
$$=\frac{-21-28i+3i-4}{9+16}=\frac{-25-25i}{25}$$
$$=-1-i$$

따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로

$a+b=-2$ 답 ②

04 $(4-i)\star(-2+3i)$

$=(4-i)-2(-2+3i)+(4-i)(-2+3i)$

$=4-i+4-6i-8+12i+2i+3$

$=3+7i$

따라서 구하는 허수부분은 7이다. 답 7

05 $f(1,\ 3)+f(2,\ 6)+f(3,\ 9)+\cdots+f(10,\ 30)$

$$=\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{2+6i}{2-6i}+\frac{3+9i}{3-9i}+\cdots+\frac{10+30i}{10-30i}$$
$$=\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1+3i}{1-3i}+\cdots+\frac{1+3i}{1-3i}$$
$$=10\cdot\frac{1+3i}{1-3i}=10\cdot\frac{(1+3i)^2}{(1-3i)(1+3i)}$$
$$=10\cdot\frac{-8+6i}{10}=-8+6i$$ 답 ②

06 $x=-3+\sqrt{5}i$에서 $x+3=\sqrt{5}i$

양변을 제곱하면 $x^2+6x+9=-5$

$\therefore\ x^2+6x=-14$

$\therefore\ x^2+6x+10=-14+10=-4$ 답 ①

07 $$x=\frac{-2+i}{1+i}=\frac{(-2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{-2+2i+i+1}{1+1}=\frac{-1+3i}{2}$$

에서 $2x+1=3i$

양변을 제곱하면 $4x^2+4x+1=-9$

$4x^2+4x+10=0$ $\therefore\ 2x^2+2x+5=0$

$\therefore 2x^3+2x^2+3x-4=x(2x^2+2x+5)-2x-4$

$=-2x-4$

$=-2\cdot\dfrac{-1+3i}{2}-4$

$=-3-3i$ 답 ①

08 $x^2=1+4i$에서 $x^2-1=4i$

양변을 제곱하면 $x^4-2x^2+1=-16$

$\therefore x^4-2x^2+17=0$

양변을 x로 나누면 $x^3-2x+\dfrac{17}{x}=0$

$\therefore x^4+x^3-x^2-2x+\dfrac{17}{x}+5$

$=x^4-x^2+5+x^3-2x+\dfrac{17}{x}$

$=x^4-x^2+5$

$=x^4-2x^2+17+x^2-12$

$=x^2-12$

$=(1+4i)-12$

$=-11+4i$ 답 $-11+4i$

09 $z=(1-i)x^2+(-4+i)x+3+6i$

$=(x^2-4x+3)-(x^2-x-6)i$

z가 순허수가 되려면

$x^2-4x+3=0,\ x^2-x-6\neq0$

$x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ …… ㉠

$x^2-x-6\neq0$에서 $(x+2)(x-3)\neq0$

$\therefore x\neq-2,\ x\neq3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=1$

$x=1$을 $z=(x^2-4x+3)-(x^2-x-6)i$에 대입하면

$z=6i$ 답 $x=1,\ z=6i$

10 $a(3-i)+3(5+2i)=(3a+15)-(a-6)i$

이 복소수를 제곱하여 양의 실수가 되려면 이 복소수는 0이 아닌 실수이어야 하므로

$3a+15\neq0,\ a-6=0$

$\therefore a=6$ 답 ⑤

쌤한마디

복소수 $z=x+yi$ (x, y는 실수)라 하면

$z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$

z^2이 양의 실수이면 $x^2-y^2>0,\ 2xy=0$

$2xy=0$에서 $x=0$ 또는 $y=0$

(i) $x=0$일 때

$z^2=-y^2$이고 $-y^2\leq0$이므로 z^2이 양의 실수임에 모순이다.

(ii) $y=0$일 때

$z^2=x^2$이고 $x^2>0$이어야 하므로 $x\neq0$

(i), (ii)에서 $x\neq0$, $y=0$이므로 z는 0이 아닌 실수이다.

QBOX

$x^2=1+4i$이므로 $x\neq0$

$x-3y=1$, $-x+4y=-3$을 변끼리 더하면 $y=-2$

$y=-2$를 $x-3y=1$에 대입하면 $x+6=1$ $\therefore x=-5$

$a\neq-5$

복소수와 그 켤레복소수의 합과 곱은 항상 실수이다.

11 z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로 $a^2-3a-10=0$ 또는 $a^2+a-2=0$

$a^2-3a-10=0$에서 $(a+2)(a-5)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=5$

$a^2+a-2=0$에서 $(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

따라서 $a=-2$ 또는 $a=1$ 또는 $a=5$이므로 구하는 합은 $-2+1+5=4$ 답 4

12 $x(1-i)-y(3-4i)=\dfrac{10}{1+3i}$에서

$x-xi-3y+4yi=\dfrac{10(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$

$(x-3y)+(-x+4y)i=1-3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-3y=1,\ -x+4y=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-5,\ y=-2$

$\therefore y-x=3$ 답 ④

13 $x^2+y^2i+2x-4yi-8-5i=0$에서

$(x^2+2x-8)+(y^2-4y-5)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+2x-8=0,\ y^2-4y-5=0$

$x^2+2x-8=0$에서 $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

$y^2-4y-5=0$에서 $(y+1)(y-5)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=5$

$\therefore xy=-20$ 또는 $xy=-2$

또는 $xy=4$ 또는 $xy=10$

따라서 xy의 값이 될 수 없는 것은 ②이다. 답 ②

14 $\{a(1-i)+b(1+i)\}^2=-4$에서

$a(1-i)+b(1+i)=\pm2i$

$(a+b)+(-a+b)i=\pm2i$

(i) $(a+b)+(-a+b)i=2i$일 때,

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=0,\ -a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=1$ $\therefore a^3+b^3=0$

(ii) $(a+b)+(-a+b)i=-2i$일 때,

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=0,\ -a+b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1$ $\therefore a^3+b^3=0$

(i), (ii)에서 $a^3+b^3=0$ 답 0

15 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$ …… ㉠

이때

$x+y=(1+\sqrt{5}i)+(1-\sqrt{5}i)=2,$

$xy=(1+\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i)=6$

이므로 ㉠에서

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{2^2-2\cdot6}{6}=-\frac{4}{3}$$ 답 ②

16 $x^3+x^2y-xy^2-y^3=x^2(x+y)-y^2(x+y)$
$=(x^2-y^2)(x+y)$
$=(x-y)(x+y)^2$ …… ㉠

이때

$$x=\frac{10}{3-i}=\frac{10(3+i)}{(3-i)(3+i)}=3+i,$$

$$y=\frac{10}{3+i}=\frac{10(3-i)}{(3+i)(3-i)}=3-i$$

이므로

$x-y=(3+i)-(3-i)=2i,$

$x+y=(3+i)+(3-i)=6$

따라서 ㉠에서

$x^3+x^2y-xy^2-y^3=2i\cdot6^2=72i$ 답 ⑤

17 $\bar{z}=-z$, 즉 $z+\bar{z}=0$이므로 z는 0 또는 순허수이다. 따라서 z가 될 수 있는 것은 0, $-i$, $(7-\sqrt{6})i$의 3개이다. 답 3

18 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $(z-\bar{z})(z+\bar{z})$
$=\{(a+bi)-(a-bi)\}\{(a+bi)+(a-bi)\}$
$=2bi\cdot2a=4abi$
이므로 0 또는 순허수이다.

ㄴ. $z^2+\bar{z}^2=(a+bi)^2+(a-bi)^2$
$=(a^2+2abi-b^2)+(a^2-2abi-b^2)$
$=2a^2-2b^2$
이므로 항상 실수이다.

ㄷ. $(z-1)(\bar{z}-1)$
$=z\bar{z}-(z+\bar{z})+1$
$=(a+bi)(a-bi)-\{(a+bi)+(a-bi)\}+1$
$=a^2+b^2-2a+1$
이므로 항상 실수이다.

ㄹ. $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a+bi}+\frac{1}{a-bi}$
$=\frac{(a-bi)+(a+bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{2a}{a^2+b^2}$
이므로 항상 실수이다.

이상에서 항상 실수인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

19 z^2이 실수이므로 $z^2=\bar{z}^2$

$z^2-\bar{z}^2=0,$ $(z+\bar{z})(z-\bar{z})=0$

이때 z는 허수이므로 $z\neq\bar{z}$

$\therefore z+\bar{z}=0$ 답 ④

20 $\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=\bar{\alpha}(\alpha+\beta)+\bar{\beta}(\alpha+\beta)$
$=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$
$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$ …… ㉠

Q BOX

$\alpha\bar{\beta}=1$에서 $\bar{\beta}=\frac{1}{\alpha}$이므로

$\beta=\overline{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}=\frac{1}{\bar{\alpha}}$

과 같이 구할 수도 있다.

① $-3+1=-2$
② $-1+4=3$
③ $1+3=4$
④ $2-1=1$
⑤ $5-3=2$

$a=0$, $b\neq0$ 또는 $a\neq0$, $b=0$이면 0이고 $a\neq0$, $b\neq0$이면 순허수이다.

z가 허수이므로 허수부분이 0이 아니다.

z가 허수이고 z^2이 실수이므로 z는 순허수임을 이용하여 풀 수도 있다.

이때 $\alpha=-2+5i$, $\beta=7-2i$이므로

$\alpha+\beta=5+3i$, $\overline{\alpha+\beta}=5-3i$

따라서 ㉠에서

$\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=(5+3i)(5-3i)=34$ 답 ③

21 $\alpha\bar{\beta}=1$에서 $\alpha=\frac{1}{\bar{\beta}}$

$\overline{(\alpha\bar{\beta})}=1$에서 $\bar{\alpha}\beta=1$이므로 $\beta=\frac{1}{\bar{\alpha}}$

$\therefore \alpha+\frac{1}{\bar{\alpha}}=\frac{1}{\bar{\beta}}+\beta=4i$ 답 $4i$

22 $\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=5$에서 $\bar{\alpha}=\frac{5}{\alpha}$, $\bar{\beta}=\frac{5}{\beta}$

$\alpha+\beta=i$에서 $\bar{\alpha}+\bar{\beta}=-i,$ $\frac{5}{\alpha}+\frac{5}{\beta}=-i$

$\frac{5(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=-i,$ $\frac{5i}{\alpha\beta}=-i$

$\therefore \alpha\beta=-5$ 답 ②

23 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$(1-i)z+(1+i)\bar{z}=6$에서

$(1-i)(a+bi)+(1+i)(a-bi)=6$

$a+bi-ai+b+a-bi+ai+b=6$

$2(a+b)=6$ $\therefore a+b=3$

따라서 $a+b=3$을 만족시키는 복소수는 ②이다. 답 ②

24 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$z+\bar{z}=-8$에서 $(a+bi)+(a-bi)=-8$

$2a=-8$ $\therefore a=-4$

$z\bar{z}=20$에서 $(-4+bi)(-4-bi)=20$

$16+b^2=20,$ $b^2=4$ $\therefore b=\pm2$

$\therefore z=-4\pm2i$ 답 $-4\pm2i$

25 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$\bar{z}=a-bi$

$\frac{\bar{z}}{z}-z\bar{z}=-10$에서

$$\frac{a-bi}{a+bi}-(a+bi)(a-bi)=-10$$

$$\frac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}-(a^2+b^2)=-10$$

$$\frac{a^2-b^2-2abi}{a^2+b^2}-a^2-b^2=-10$$

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-a^2-b^2-\frac{2ab}{a^2+b^2}i=-10$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-a^2-b^2=-10,\ -\frac{2ab}{a^2+b^2}=0$$

이때 $b\neq0$이고 $-\frac{2ab}{a^2+b^2}=0$이므로

$a=0$

$a=0$을 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-a^2-b^2=-10$에 대입하면

$-1-b^2=-10 \qquad \therefore b^2=9$

$\therefore (z-\overline{z})^2=(2bi)^2=-4b^2=-36$ 답 -36

Q BOX

$n=4k-2$ (k는 자연수) 꼴이다.

$z-\overline{z}=bi-(-bi)$
$=2bi$

26 $i=i^5=i^9=\cdots$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=1$이므로

$\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\cdots+\dfrac{1}{i^{50}}$

$=\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)+\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)+\dfrac{1}{i}-1$

$=\dfrac{1}{i}-1=-1-i$

따라서 $-1-i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=-1,\ b=-1$

$\therefore ab=1$ 답 ③

27 $i=i^5=i^9=\cdots$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=1$이므로

$i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6+7i^7-8i^8+\cdots$

$=i+2-3i-4+5i+6-7i-8+\cdots$

$=(2-4+6-8+\cdots)+(1-3+5-7+\cdots)i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 실수부분이 10, 허수부분이 9이어야 하므로

$(2-4)+(6-8)+(10-12)+(14-16)+18=10$,

$(1-3)+(5-7)+(9-11)+(13-15)+17=9$

$\therefore n=18$ 답 ⑤

28 자연수 k에 대하여

(i) $n=4k-3$일 때, ($n=1,\ 5,\ 9,\ \cdots$)

$i^{4k-3}=i,\ (-i)^{4k-3}=-i$이므로

$z_n=\dfrac{i}{2}+\dfrac{-i}{2}=0$

(ii) $n=4k-2$일 때, ($n=2,\ 6,\ 10,\ \cdots$)

$i^{4k-2}=-1,\ (-i)^{4k-2}=-1$이므로

$z_n=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{-1}{2}=-1$

(iii) $n=4k-1$일 때, ($n=3,\ 7,\ 11,\ \cdots$)

$i^{4k-1}=-i,\ (-i)^{4k-1}=i$이므로

$z_n=\dfrac{-i}{2}+\dfrac{i}{2}=0$

(iv) $n=4k$일 때, ($n=4,\ 8,\ 12,\ \cdots$)

$i^{4k}=1,\ (-i)^{4k}=1$이므로

$z_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

ㄱ. 임의의 자연수 n에 대하여 z_n은 실수이므로

$z_n=\overline{z_n}$

ㄴ. $n=4k-2$ (k는 자연수)이면 $z_n=-1$

ㄷ. $197=4\cdot50-3,\ 199=4\cdot50-1$이므로

$z_{197}=z_{199}=0$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

29 $(1+i)^2=1+2i-1=2i$이므로

$(1+i)^{2n}=(2i)^n=2^n\cdot i^n$

$(1+i)^{2n}=-2^n$에서 $i^n=-1$

이때 n은 20 이하의 자연수이므로 2, 6, 10, 14, 18의 5개이다. 답 5

30 $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$,

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$f(n)=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n-\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=(-i)^n-i^n$

$\therefore f(3)+f(5)=\{(-i)^3-i^3\}+\{(-i)^5-i^5\}$
$=(i+i)+(-i-i)$
$=0$ 답 ③

31 $z=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서

$z^2=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^2\cdot z=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=-1$

$z^4=z^3\cdot z=-z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^5=z^3\cdot z^2=-z^2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^6=(z^3)^2=(-1)^2=1$

$\vdots$

$w=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$에서

$w^2=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{2i}{2}=i$

$w^3=w^2\cdot w=i\cdot\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$w^4=(w^2)^2=i^2=-1$

$w^5=w^4\cdot w=-w=\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$

$w^6=w^4\cdot w^2=-i$

$w^7=w^4\cdot w^3=-w^3=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

$w^8=(w^4)^2=(-1)^2=1$

$\vdots$

n이 6의 배수일 때 $z^n=1$이고, n이 8의 배수일 때 $w^n=1$이므로 $z^n=w^n$을 만족시키는 가장 작은 자연수 n은 6과 8의 최소공배수인 24이다. 답 24

쌤한마디

$n=6k-3$ (k는 자연수)일 때, $z^n=-1$
$n=8l-4$ (l은 자연수)일 때, $w^n=-1$
이므로 $z^n=w^n=-1$을 만족시키는 자연수 n은 $n=6k-3=8l-4$일 때이다.
즉 $8l-6k=1$을 만족시키는 자연수 $l,\ k$가 존재해야 한다. 그런데 $8l-6k=2(4l-3k)\neq1$이므로 $z^n=w^n=-1$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

32 ㄱ. $\sqrt{-2}+\sqrt{-18}=\sqrt{2}i+3\sqrt{2}i=4\sqrt{2}i$

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{-6}=-\sqrt{6}i$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

33 $0<a<3$일 때, $a-3<0,\ 3-a>0$

$$\therefore \frac{\sqrt{3-a}}{\sqrt{a-3}}-\sqrt{\frac{a-3}{3-a}}-\sqrt{3-a}\sqrt{a-3}-\sqrt{a}\sqrt{-a}$$
$$=-\sqrt{-1}-\sqrt{-1}-\sqrt{3-a}\sqrt{3-a}i-\sqrt{a}\sqrt{a}i$$
$$=-i-i-(3-a)i-ai$$
$$=-5i$$

답 $-5i$

34 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0,\ b<0$

따라서 $-b>0$이므로

$$\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

답 ⑤

35 $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}=-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}}$에서

$x+1>0,\ x-4<0$

$\therefore |x-4|+|x+1|=-(x-4)+(x+1)$
$=5$

답 ⑤

$|x|=\begin{cases} x\ (x\ge 0) \\ -x\ (x<0)\end{cases}$

36 $\sqrt{a-b}\sqrt{b-c}=-\sqrt{(a-b)(b-c)}$에서

$a-b<0,\ b-c<0$

$\therefore a<b<c$

따라서 $b-a>0,\ c-b>0,\ a-c<0$이므로

$$|b-a|-|c-b|+|a-c|$$
$$=b-a-(c-b)-(a-c)$$
$$=-2a+2b$$

답 $-2a+2b$

도전! 수능 기출

W 23쪽

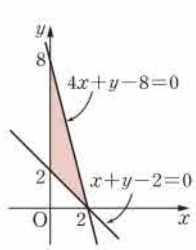
01 1st z^2이 실수가 되려면 z는 실수이거나 순허수임을 이용한다.

z^2이 실수가 되려면 z는 실수이거나 순허수이어야 하므로 $x+y-2=0$ 또는 $4x+y-8=0$

2nd 점 P가 나타내는 도형과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

따라서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 나타내는 도형은 직선 $x+y-2=0$과 직선 $4x+y-8=0$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(8-2)\cdot 2=6$$



답 6

02 1st $iz=\bar{z}$임을 이용하여 $a,\ b$ 사이의 관계식을 구한다.

$iz=i(a+bi)=-b+ai,\ \bar{z}=a-bi$이므로 $iz=\bar{z}$에서

$-b+ai=a-bi \qquad \therefore a=-b$

2nd ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=-2b$

ㄴ. $iz=\bar{z}$의 양변에 i를 곱하면 $-z=i\bar{z}$

ㄷ. $iz=\bar{z}$에서 $\dfrac{\bar{z}}{z}=i$이고 $i\bar{z}=-z$에서 $\dfrac{z}{\bar{z}}=-i$이므로

$$\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}=i+(-i)=0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이1 $a=-b$이므로 $z=a-ai$

ㄴ. $i\bar{z}=i(a+ai)=ai-a=-(a-ai)=-z$

ㄷ. $\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{a+ai}{a-ai}+\dfrac{a-ai}{a+ai}=\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$

$$=\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i-2i}{2}=0$$

다른 풀이2 ㄷ. $iz=\bar{z}$의 양변을 제곱하면

$-z^2=\bar{z}^2 \qquad \therefore z^2+\bar{z}^2=0$

$$\therefore \frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2+\bar{z}^2}{z\bar{z}}=0$$

03 1st i의 거듭제곱이 갖는 규칙을 이용하여 주어진 식의 좌변을 계산한다.

$i=i^5=i^9=\cdots,\ i^2=i^6=i^{10}=\cdots=-1,$

$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=-i,\ i^4=i^8=i^{12}=\cdots=1$이므로

$$\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots$$
$$=\frac{1}{i}+1-\frac{1}{i}-1+\frac{1}{i}+1-\frac{1}{i}-1+\cdots$$
$$=(-i+1+i-1)+(-i+1+i-1)+\cdots$$

2nd 자연수 n의 개수를 구한다.

주어진 식의 좌변이 $1-i$가 되려면 n은 4로 나누었을 때의 나머지가 2이어야 한다.

이때 n은 100 이하의 자연수이므로 2, 6, 10, $\cdots$, 98의 25개이다. 답 25

$4\cdot1-2=2$
$4\cdot2-2=6$
$4\cdot3-2=10$
$\vdots$
$4\cdot25-2=98$

04 1st 주어진 식이 x에 대한 항등식임을 이용하여 먼저 $a+b,\ ab$의 값을 구한다.

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}$ …… ㉠

등식 $(a+b+3)x+ab-1=0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

x에 대한 항등식

$a+b+3=0,\ ab-1=0$

$\therefore a+b=-3,\ ab=1$

2nd $a,\ b$의 부호를 판별한 후 주어진 식의 값을 구한다.

이때 $a+b<0,\ ab>0$이므로 $a<0,\ b<0$

$\therefore \sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

$ab>0$에서
$a>0,\ b>0$
또는 $a<0,\ b<0$
그런데 $a+b<0$이므로
$a<0,\ b<0$

따라서 ㉠에서

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{ab}$$
$$=-3-2\cdot1$$
$$=-5$$

답 ①

04 이차방정식

W 24쪽

01 $\frac{x(x+1)}{2}=\frac{4}{3}-\frac{x}{6}$에서

$3x(x+1)=8-x,\quad 3x^2+4x-8=0$

$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot(-8)}}{3}=\frac{-2\pm2\sqrt{7}}{3}$

따라서 $\alpha=\frac{-2+2\sqrt{7}}{3}$이므로

$3\alpha+2=2\sqrt{7}$ 답 ⑤

02 $(x◇2x)-(x◇5)=0$에서

$(x^2+4x^2-2x)-(x^2+10x-5)=0$

$4x^2-12x+5=0,\quad (2x-1)(2x-5)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$ 답 ③

03 이차방정식 $x^2+2ax-1+3a=0$의 한 근이 -2이므로

$(-2)^2+2a\cdot(-2)-1+3a=0$

$-a+3=0\quad \therefore a=3$

이차방정식 $(b+1)x^2-7x-4b+2=0$의 한 근이 3이므로

$(b+1)\cdot3^2-7\cdot3-4b+2=0$

$5b-10=0\quad \therefore b=2$

$\therefore ab=6$ 답 6

04 주어진 이차방정식의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-5\alpha+1=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha-5+\frac{1}{\alpha}=0\quad \therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=5$

$\therefore \alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=5^3-3\cdot5=110$ 답 110

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

05 $x^2+|3x-2|=2$에서

범위를 나누어서 방정식의 해를 구할 때에는 구한 해가 해당 범위에 속하는지 반드시 확인한다.

(i) $x<\frac{2}{3}$일 때, $x^2-(3x-2)=2$

$x^2-3x=0,\quad x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로 $x=0$

(ii) $x\geq\frac{2}{3}$일 때, $x^2+(3x-2)=2$

$x^2+3x-4=0,\quad (x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

그런데 $x\geq\frac{2}{3}$이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=0$ 또는 $x=1$

따라서 $\alpha=0,\ \beta=1$ 또는 $\alpha=1,\ \beta=0$이므로

$\alpha+\beta=1$ 답 ③

06 $x◎x=|x◎(-1)|$에서

$x+x-x^2=|x-1+x|,\quad 2x-x^2=|2x-1|$

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $2x-x^2=-(2x-1)$

$x^2-4x+1=0\quad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

그런데 $x<\frac{1}{2}$이므로 $x=2-\sqrt{3}$

$\frac{3}{2}<\sqrt{3}<2$이므로
$-2<-\sqrt{3}<-\frac{3}{2}$
$\therefore 0<2-\sqrt{3}<\frac{1}{2}$

(ii) $x\geq\frac{1}{2}$일 때, $2x-x^2=2x-1$

$x^2=1\quad \therefore x=\pm1$

그런데 $x\geq\frac{1}{2}$이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 구하는 x의 값은

$x=2-\sqrt{3}$ 또는 $x=1$ 답 $x=2-\sqrt{3}$ 또는 $x=1$

07 $x^2+\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{x^2}+7$에서

$x^2+|x+2|=|x|+7$

(i) $x<-2$일 때, $x^2-(x+2)=-x+7$

$x^2=9\quad \therefore x=\pm3$

그런데 $x<-2$이므로 $x=-3$

(ii) $-2\leq x<0$일 때, $x^2+(x+2)=-x+7$

$x^2+2x-5=0\quad \therefore x=-1\pm\sqrt{6}$

그런데 $-2\leq x<0$이므로 $x=-1\pm\sqrt{6}$은 근이 아니다.

(iii) $x\geq0$일 때, $x^2+(x+2)=x+7$

$x^2=5\quad \therefore x=\pm\sqrt{5}$

그런데 $x\geq0$이므로 $x=\sqrt{5}$

이상에서 주어진 방정식의 근은

$x=-3$ 또는 $x=\sqrt{5}$ 답 ②

08 $[x]^2+[x]-6=0$에서 $([x]+3)([x]-2)=0$

$\therefore [x]=-3$ 또는 $[x]=2$

$[x]=-3$에서 $-3\leq x<-2$

$[x]=2$에서 $2\leq x<3$

$\therefore -3\leq x<-2$ 또는 $2\leq x<3$ 답 ①

09 $3x^2-x-4[x]=0$에서

(i) $0\leq x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$3x^2-x=0,\quad x(3x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

(ii) $1\leq x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$3x^2-x-4=0,\quad (x+1)(3x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

그런데 $1\leq x<2$이므로 $x=\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 합은

$0+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$ 답 $\frac{5}{3}$

10 사다리꼴의 윗변의 길이를 x cm라 하면 아랫변의 길이는 $2x$ cm, 높이는 $(x+1)$ cm이므로

$\frac{1}{2}(x+2x)(x+1)=63, \quad x^2+x-42=0$

$(x+7)(x-6)=0 \quad \therefore x=-7$ 또는 $x=6$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=6$

따라서 아랫변의 길이는

$2\cdot 6=12\,(\text{cm})$ 답 12 cm

11 처음 물건의 가격을 a원이라 하면 $x\,\%$ 인상한 물건의 가격은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

다시 $x\,\%$ 인하한 물건의 가격은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)$원 ······ ㉠

이때 ㉠은 처음 가격보다 4 % 낮아진 가격이므로

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)=a\left(1-\frac{4}{100}\right)$

$1-\frac{x^2}{10000}=1-\frac{4}{100}, \quad \frac{x^2}{10000}=\frac{4}{100}$

$x^2=400 \quad \therefore x=\pm 20$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=20$ 답 ②

쌤 한마디

가격의 인상, 인하에 대한 조건이 주어진 경우 다음을 이용하여 식을 세운다.

① a원인 물건의 가격을 $x\,\%$ 인상한 가격

➡ $\left(a+a\cdot\frac{x}{100}\right)$원, 즉 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

② a원인 물건의 가격을 $x\,\%$ 인하한 가격

➡ $\left(a-a\cdot\frac{x}{100}\right)$원, 즉 $a\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

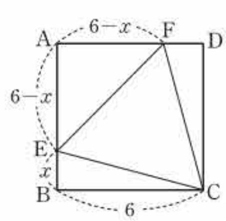
12 △BCE와 △DCF에서

$\angle B=\angle D=90^\circ$,

$\overline{BC}=\overline{DC}$, $\overline{CE}=\overline{CF}$

$\therefore$ △BCE≡△DCF

(RHS 합동)



$\overline{BE}=x$라 하면 $\overline{DF}=x$이므로

$\overline{AE}=\overline{AF}=6-x$

△AEF는 직각삼각형이므로

$\overline{EF}^2=(6-x)^2+(6-x)^2$

> 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고 빗변의 길이를 c라 하면
> $a^2+b^2=c^2$

△BCE는 직각삼각형이므로

$\overline{EC}^2=x^2+6^2$

△ECF가 정삼각형이므로

$(6-x)^2+(6-x)^2=x^2+6^2$

> $\overline{EF}=\overline{EC}$이므로
> $\overline{EF}^2=\overline{EC}^2$

$x^2-24x+36=0 \quad \therefore x=12\pm 6\sqrt{3}$

그런데 $0<x<6$이므로 $\quad x=12-6\sqrt{3}$

따라서 $\overline{BE}$의 길이는 $12-6\sqrt{3}$이다. 답 $12-6\sqrt{3}$

13 이차방정식 $x^2+3x-k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4(-k+5)\ge 0$

$4k-11\ge 0 \quad \therefore k\ge\frac{11}{4}$

따라서 가장 작은 자연수 k의 값은 3이다. 답 ①

14 이차방정식 $x^2-2(a+k)x+k^2-6k+3b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+k)\}^2-(k^2-6k+3b)=0$

$a^2+2ak+k^2-k^2+6k-3b=0$

$(2a+6)k+a^2-3b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a+6=0, \ a^2-3b=0$

> $Ak+B=0$이 k에 대한 항등식
> ➡ $A=0$, $B=0$

$\therefore a=-3, \ b=3$

$\therefore b-a=6$ 답 ⑤

15 이차방정식 $x^2+4kx+4k^2-k+7=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(2k)^2-(4k^2-k+7)<0$

$k-7<0 \quad \therefore k<7$

이때 가장 큰 정수 k의 값은 6이므로 $\quad p=6$

$p=6$을 $(p-3)x^2-7x+2p-9=0$에 대입하면

$3x^2-7x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-7)^2-4\cdot 3\cdot 3=13>0$

따라서 이차방정식 $(p-3)x^2-7x+2p-9=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

16 이차방정식 $x^2-6ax+9a^2+2a-6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3a)^2-(9a^2+2a-6)=-2a+6$

$a\le 3$일 때 $-2a+6\ge 0$이므로 이차방정식 $x^2-6ax+9a^2+2a-6=0$은 실근을 갖는다. 답 ①

> $a\le 3$에서 $\quad -2a\ge -6$
> $\therefore -2a+6\ge 0$

17 이차방정식 $x^2+ax-b+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4(-b+2)=0$

$\therefore a^2=-4b+8$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2+2ax+b^2-4b+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2-(b^2-4b+9)$

$=(-4b+8)-(b^2-4b+9)$ ($\because$ ㉠)

$=-b^2-1<0$

> $b^2\ge 0$이므로 $\quad -b^2\le 0$
> $\therefore -b^2-1<0$

따라서 이차방정식 $x^2+2ax+b^2-4b+9=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

18 두 이차방정식 $A(x)=0$, $B(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4}=\{-(k+2)\}^2-k^2=4k+4$,

$\frac{D_2}{4}=k^2-(k-2)^2=4k-4$

ㄱ. $A(x)=0$이 실근을 가지면 $\frac{D_1}{4}=4k+4\geq 0$

따라서 $\frac{D_2}{4}=4k-4\geq -8$이므로 $B(x)=0$이 항상 실근을 갖는다고 할 수 없다.

ㄴ. $A(x)=0$이 중근을 가지면 $\frac{D_1}{4}=4k+4=0$

따라서 $\frac{D_2}{4}=4k-4=-8<0$이므로 $B(x)=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄷ. $A(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 가지면

$\frac{D_1}{4}=4k+4<0$

따라서 $\frac{D_2}{4}=4k-4<-8$이므로 $B(x)=0$도 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

19 이차방정식 $x^2-2cx+a^2-b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-c)^2-(a^2-b^2)>0 \quad \therefore b^2+c^2>a^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 예각삼각형이다. 답 ④

20 이차방정식 $3x^2+(a+3b)x+ab=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+3b)^2-4\cdot 3\cdot ab=0$

$a^2-6ab+9b^2=0, \quad (a-3b)^2=0$

$\therefore a=3b$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(3b)^2+b^2}$

$=\sqrt{10b^2}=\sqrt{10}b$ ($\because b>0$) 답 ④

21 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+2k^2-6k+5=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(2k^2-6k+5)=0$

$k^2-6k+5=0, \quad (k-1)(k-5)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=5$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 5이다. 답 5

22 주어진 이차식이 $3(x+b)^2$으로 인수분해되면 완전제곱식이 된다. 즉 x에 대한 이차방정식 $3x^2-(a+1)x+a^2-4a-2=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+1)\}^2-4\cdot 3\cdot(a^2-4a-2)=0$

$11a^2-50a-25=0, \quad (11a+5)(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

따라서 주어진 이차식은 $3x^2-6x+3$이고, 이것은 $3(x-1)^2$으로 인수분해되므로 $b=-1$

$\therefore a-b=6$ 답 ⑤

Q BOX

$4k+4\geq 0$의 양변에서 8을 빼면

$4k-4\geq -8$

$3x^2-6x+3$
$=3(x^2-2x+1)$
$=3(x-1)^2$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-5)^2-1\cdot 4$
$=21>0$

이고

$\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

이므로 $\alpha>0$, $\beta>0$

23 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+2)x+a^2-b+19=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-(a^2-b+19)=0$

$\therefore b=-4a+15$

이때 a, b는 자연수이므로 위의 식을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 11)$, $(2, 7)$, $(3, 3)$

의 3개이다. 답 3

24 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-\frac{1}{4}$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-2)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=5$

$\therefore \alpha-\beta=\sqrt{5}$ ($\because \alpha>\beta$) 답 ③

25 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=\frac{2}{3}$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=4^3-3\cdot\frac{2}{3}\cdot 4=56$ 답 56

26 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=10$, $\alpha\beta=4$

이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\beta$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=10+2\cdot 2=14$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{14}$ 답 ⑤

27 $|x^2+3x|=1$에서 $x^2+3x=\pm 1$

(i) $x^2+3x=1$, 즉 $x^2+3x-1=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-1$

(ii) $x^2+3x=-1$, 즉 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=-3$, $\gamma\delta=1$

(i), (ii)에서

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$

$=0$

답 ④

28 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2+2\alpha-4=0$, $\beta^2+2\beta-4=0$

$\therefore$ $\alpha^2+3\alpha-2=\alpha+2$, $\beta^2+3\beta-2=\beta+2$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-4$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha^2+3\alpha-2)(\beta^2+3\beta-2)&=(\alpha+2)(\beta+2)\\&=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4\\&=-4+2\cdot(-2)+4\\&=-4\end{aligned}$$

답 -4

29 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$, $\beta^2-\beta+1=0$

$\therefore$ $\alpha^2-\alpha=-1$, $\beta^2-\beta=-1$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=1$

$$\begin{aligned}&\therefore \alpha^5+\beta^5-\alpha^4-\beta^4+2\alpha^3+2\beta^3\\&=\alpha^3(\alpha^2-\alpha+2)+\beta^3(\beta^2-\beta+2)\\&=\alpha^3(-1+2)+\beta^3(-1+2)\\&=\alpha^3+\beta^3\\&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=1^3-3\cdot1\cdot1=-2\end{aligned}$$

답 ①

30 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2+6\alpha-1=0$, $\beta^2+6\beta-1=0$

$\therefore$ $\alpha^2+6\alpha=1$, $\beta^2+6\beta=1$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=-1$

$$\begin{aligned}&\therefore (\sqrt{\alpha^4+12\alpha^3+36\alpha^2-6\alpha}\\&\qquad-\sqrt{\beta^4+12\beta^3+36\beta^2-6\beta}\,)^2\\&=\{\sqrt{(\alpha^2+6\alpha)^2-6\alpha}-\sqrt{(\beta^2+6\beta)^2-6\beta}\,\}^2\\&=(\sqrt{1-6\alpha}-\sqrt{1-6\beta}\,)^2\\&=1-6\alpha-2\sqrt{(1-6\alpha)(1-6\beta)}+1-6\beta\\&=-6(\alpha+\beta)+2-2\sqrt{1-6(\alpha+\beta)+36\alpha\beta}\\&=(-6)\cdot(-6)+2-2\sqrt{1-6\cdot(-6)+36\cdot(-1)}\\&=36\end{aligned}$$

답 36

쌤 한마디

$\alpha^2+6\alpha-1=0$, $\beta^2+6\beta-1=0$에서

$1-6\alpha=\alpha^2$, $1-6\beta=\beta^2$

α, β는 실근이므로 $1-6\alpha\geq0$, $1-6\beta\geq0$

$\therefore$ $\sqrt{1-6\alpha}\cdot\sqrt{1-6\beta}=\sqrt{(1-6\alpha)(1-6\beta)}$

31 주어진 이차방정식의 두 근을 α, 4α $(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+4\alpha=-5m$ $\quad\therefore$ $\alpha=-m$ …… ㉠

$\alpha\cdot4\alpha=3m^2+4$ $\quad\therefore$ $4\alpha^2=3m^2+4$ …… ㉡

Q BOX

$\alpha^2+2\alpha-4=0$이므로
$\alpha^2+3\alpha-2$
$=(\alpha^2+2\alpha-4)+\alpha+2$
$=\alpha+2$

두 근을 $\alpha-1$, α로 놓을 수도 있다.

두 근을 $-\alpha$, 3α로 놓을 수도 있다.

$1-6\alpha=\alpha^2$, $1-6\beta=\beta^2$이고, $\alpha\beta<0$에서 $\alpha>0$, $\beta<0$이라 하면
$(\sqrt{1-6\alpha}-\sqrt{1-6\beta}\,)^2$
$=(\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}\,)^2$
$=(|\alpha|-|\beta|)^2$
$=(\alpha+\beta)^2$
임을 이용할 수도 있다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$4\cdot(-m)^2=3m^2+4$, $\quad m^2=4$

$\therefore$ $m=-2$ ($\because$ $m<0$)

답 ④

32 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=2k-1$

$\therefore$ $\alpha=k-1$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+1)=3k$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(k-1)k=3k$, $\quad k^2-4k=0$

$k(k-4)=0$ $\quad\therefore$ $k=4$ ($\because$ $k\neq0$)

답 4

33 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $-12<0$이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

주어진 이차방정식의 두 근을 α, -3α $(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-3\alpha)=-(k-1)$

$\therefore$ $2\alpha=k-1$ …… ㉠

$\alpha\cdot(-3\alpha)=-12$, $\quad\alpha^2=4$

$\therefore$ $\alpha=-2$ 또는 $\alpha=2$

$\alpha=-2$를 ㉠에 대입하면

$-4=k-1$ $\quad\therefore$ $k=-3$

$\alpha=2$를 ㉠에 대입하면

$4=k-1$ $\quad\therefore$ $k=5$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$(-3)+5=2$

답 2

34 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=2k+1$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=(-k)^2-4(2k+1)\\&=k^2-8k-4\end{aligned}$$

$(\alpha-\beta)^2=5$에서 $\quad k^2-8k-4=5$

$k^2-8k-9=0$, $\quad(k+1)(k-9)=0$

$\therefore$ $k=9$ ($\because$ $k>0$)

답 9

35 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=\dfrac{m}{2}$

$|\alpha|+|\beta|=7$의 양변을 제곱하면

$|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=49$

$\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=49$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=49$

$3^2-2\cdot\dfrac{m}{2}+2\cdot\left|\dfrac{m}{2}\right|=49$

$\therefore$ $|m|-m=40$

이때 $m\geq0$이면 $|m|-m=0$이므로 $\quad m<0$

즉 $-m-m=40$이므로 $\quad -2m=40$

$\therefore$ $m=-20$

답 ③

36 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2|a|,\ \alpha\beta=a-1$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2+\beta^2=4$에서

$\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4$

$2|a|(a-1)+(2|a|)^2-2(a-1)=4$

$4a^2+2a|a|-2|a|-2a-2=0$

$2a^2+a|a|-|a|-a-1=0$

(i) $a\geq0$일 때, $2a^2+a^2-a-a-1=0$이므로

$3a^2-2a-1=0,\quad (3a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{3}$ 또는 $a=1$

그런데 $a\geq0$이므로 $\quad a=1$

(ii) $a<0$일 때, $2a^2-a^2+a-a-1=0$이므로

$a^2=1\quad \therefore a=\pm1$

그런데 $a<0$이므로 $\quad a=-1$

(i), (ii)에서 $a=1$ 또는 $a=-1$이므로 구하는 곱은 -1이다.

답 ②

$|a|=a$

$|a|=-a$

37 이차방정식 $5x^2-ax+10=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{a}{5},\ \alpha\beta=2 \quad \cdots\cdots ㉠$

이차방정식 $2x^2+x-b=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{2},\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{2}$

$\therefore \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{1}{2},\ \frac{1}{\alpha\beta}=-\frac{b}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{a}{10}=-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}=-\frac{b}{2}$

$\therefore a=-5,\ b=-1$

$\therefore b-a=4$

답 ④

38 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b \quad \cdots\cdots ㉠$

이차방정식 $x^2-(6a-11)x+3-2b=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=6a-11,\ \alpha^2\beta^2=3-2b$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6a-11,\ (\alpha\beta)^2=3-2b \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2-2b=6a-11,\ b^2=3-2b$

$b^2=3-2b$에서 $\quad b^2+2b-3=0$

$(b+3)(b-1)=0\quad \therefore b=1\ (\because b>0)$

$a^2-2b=6a-11$에서 $\quad a^2-6a+9=0$

$(a-3)^2=0\quad \therefore a=3$

$\therefore a+b=4$

답 4

QBOX

㉠×2−㉡을 하면

$23a=-23$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉡에 대입하면

$-1+2b=3$

$\therefore b=2$

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

39 이차방정식 $x^2-6x-5=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=-5$

따라서 $6,\ -5$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-\{6+(-5)\}x+6\cdot(-5)=0$

$\therefore x^2-x-30=0$

답 ①

40 이차방정식 $x^2-3ax+b-6=0$의 한 근이 -4이므로 $\quad 16+12a+b-6=0$

$\therefore 12a+b=-10 \quad \cdots\cdots ㉠$

이차방정식 $x^2-(a+b)x-3b=0$의 한 근이 3이므로

$9-3(a+b)-3b=0$

$\therefore a+2b=3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=2$

$x^2-3ax+b-6=0$, 즉 $x^2+3x-4=0$에서

$(x+4)(x-1)=0\quad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$

$\therefore \alpha=1$

$x^2-(a+b)x-3b=0$, 즉 $x^2-x-6=0$에서

$(x+2)(x-3)=0\quad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

$\therefore \beta=-2$

따라서 $1,\ -2$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-\{1+(-2)\}x+1\cdot(-2)=0$

$\therefore x^2+x-2=0$

답 $x^2+x-2=0$

41 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

$$\therefore \frac{\beta-1}{\alpha+1}+\frac{\alpha-1}{\beta+1}$$

$$=\frac{(\beta-1)(\beta+1)+(\alpha-1)(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

$$=\frac{\beta^2-1+\alpha^2-1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$

$$=\frac{3^2-2\cdot1-2}{1+3+1}=1,$$

$$\frac{\beta-1}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha-1}{\beta+1}=\frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$

$$=\frac{1-3+1}{1+3+1}=-\frac{1}{5}$$

따라서 $\frac{\beta-1}{\alpha+1},\ \frac{\alpha-1}{\beta+1}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 5인 이차방정식은

$5\left(x^2-x-\frac{1}{5}\right)=0\quad \therefore 5x^2-5x-1=0$

답 $5x^2-5x-1=0$

42 $\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}$에서 $\quad \alpha+\beta=10$

$\triangle ABC$는 $\angle ACB=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{CH}^2=\overline{AH}\cdot\overline{BH}$에서 $\quad \alpha\beta=16$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{10^2-2\cdot16}{16}=\frac{17}{4},$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=1$$

따라서 $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 4인 이차방정식은

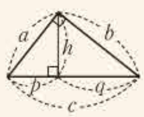
$$4\left(x^2-\frac{17}{4}x+1\right)=0 \qquad \therefore 4x^2-17x+4=0$$

즉 $a=-17$, $b=4$이므로

$a+b=-13$ 답 ①

쌤한마디

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서



$ab=ch$,

$a^2=pc$, $b^2=qc$,

$h^2=pq$

가 성립한다.

43 재민이와 지성이가 푼 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ (a, b는 상수)이라 하자.

재민이는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$b=-4\cdot3=-12$

지성이는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-a=(2+\sqrt{5}i)+(2-\sqrt{5}i)=4$

$\therefore a=-4$

따라서 원래의 이차방정식은

$x^2-4x-12=0$ 답 ①

44 민구는 a, c를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{c}{a}=-1\cdot3=-3 \qquad \therefore c=-3a$ …… ㉠

가은이는 a, b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{b}{a}=(-1+\sqrt{6})+(-1-\sqrt{6})=-2$

$\therefore b=2a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2+2ax-3a=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$ax^2+bx+c=0$이 이차방정식이므로 $a\neq0$

$x^2+2x-3=0, \quad (x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 양수인 근은 1이다. 답 1

45 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식을 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 1, 2이므로

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=1+2\text{에서}$$

$\frac{-2b}{2a}=3 \qquad \therefore b=-3a$ …… ㉠

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=1\cdot2\text{에서}$$

$$\frac{b^2-(b^2-ac)}{4a^2}=\frac{c}{4a}=2\ (\because a\neq0)$$

$\therefore c=8a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-3ax+8a=0 \qquad \therefore x^2-3x+8=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$p=3$, $q=8 \qquad \therefore q-p=5$ 답 ②

46 방정식 $f(x)=0$이 -3을 근으로 가지므로

$f(-3)=0$

각 방정식의 좌변에 $x=1$을 대입하면

① $f(1-3)=f(-2)$

② $f(-1+4)=f(3)$

③ $f(2\cdot1-5)=f(-3)=0$

④ $f(-3\cdot1+1)=f(-2)$

⑤ $f(1^2-1)=f(0)$ 답 ③

47 $f(5\alpha-2)=0$, $f(5\beta-2)=0$이므로 $f(3x)=0$이려면

$3x=5\alpha-2$ 또는 $3x=5\beta-2$

$\therefore x=\frac{5\alpha-2}{3}$ 또는 $x=\frac{5\beta-2}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{5\alpha-2}{3}\cdot\frac{5\beta-2}{3}=\frac{25\alpha\beta-10(\alpha+\beta)+4}{9}$$

$$=\frac{25\cdot(-1)-10\cdot6+4}{9}$$

$$=-9$$ 답 -9

48 $x^2+4x+7=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot7}=-2\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x^2+4x+7=\{x-(-2+\sqrt{3}i)\}\{x-(-2-\sqrt{3}i)\}$

$=(x+2-\sqrt{3}i)(x+2+\sqrt{3}i)$

답 ③

49 $x^2-6x+10=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot10}=3\pm i$

$\therefore x^2-6x+10=\{x-(3+i)\}\{x-(3-i)\}$

$=(x-3-i)(x-3+i)$

따라서 인수인 것은 ①이다. 답 ①

50 이차방정식 $x^2-x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad \alpha+\beta=1$

$f(\alpha)=f(\beta)=1$이므로

$f(\alpha)-1=0$, $f(\beta)-1=0$

즉 이차방정식 $f(x)-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)-1=a(x^2-x-3)\ (a\neq0)$

이라 하면 $f(0)=7$에서

$6=-3a \qquad \therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2(x^2-x-3)+1$이므로

$f(2)=3$ 답 ④

다른 풀이 이차방정식 $x^2-x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-3$ …… ㉠

이차식 $f(x)$에 대하여 $f(0)=7$이므로

$f(x)=ax^2+bx+7$ ($a\neq0$, a, b는 상수)

이라 하자.

이때 $f(\alpha)=f(\beta)=1$이므로

$f(\alpha)-1=0,\ f(\beta)-1=0$

따라서 이차방정식 $f(x)-1=0$, 즉 $ax^2+bx+6=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{6}{a}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\dfrac{b}{a}=1,\ \dfrac{6}{a}=-3$

$\therefore a=-2,\ b=2$

즉 $f(x)=-2x^2+2x+7$이므로 $f(2)=3$

51 이차방정식 $3x^2+6x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2$

$\therefore \alpha=-2-\beta,\ \beta=-2-\alpha$

$P(\alpha)=\beta$, $P(\beta)=\alpha$에서

$P(\alpha)=-2-\alpha,\ P(\beta)=-2-\beta$

$\therefore P(\alpha)+\alpha+2=0,\ P(\beta)+\beta+2=0$

따라서 이차방정식 $P(x)+x+2=0$의 두 근이 α, β이고, $P(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$P(x)+x+2=x^2+2x-\dfrac{2}{3}$

이차방정식 $3x^2+6x-2=0$의 두 근이 α, β이므로
$3x^2+6x-2$
$=3(x-\alpha)(x-\beta)$
$\therefore (x-\alpha)(x-\beta)$
$=x^2+2x-\dfrac{2}{3}$

$\therefore P(x)=x^2+x-\dfrac{8}{3}$ 답 $x^2+x-\dfrac{8}{3}$

다른 풀이 이차방정식 $3x^2+6x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\dfrac{2}{3}$

$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(\alpha)=\alpha^2+a\alpha+b=\beta$ …… ㉠

$P(\beta)=\beta^2+a\beta+b=\alpha$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$\alpha^2-\beta^2+a(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+a(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=0$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+a+1)=0$

$\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha+\beta+a+1=0$

이차방정식 $3x^2+6x-2=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=3^2-3\cdot(-2)>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
$\therefore \alpha\neq\beta$

$-2+a+1=0 \qquad \therefore a=1$

㉠$+$㉡을 하면

$\alpha^2+\beta^2+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$

$(-2)^2-2\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+1\cdot(-2)+2b=-2$

$\therefore b=-\dfrac{8}{3}$

$\therefore P(x)=x^2+x-\dfrac{8}{3}$

52 $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$

a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-2a$,

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b$

이므로 $a=-2,\ b=1$

$\therefore ab=-2$ 답 ②

53 a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2-8x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{7}i$이면 다른 한 근은 $b-\sqrt{7}i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(b+\sqrt{7}i)+(b-\sqrt{7}i)=8$,

$(b+\sqrt{7}i)(b-\sqrt{7}i)=a$

이므로 $a=23,\ b=4$

$\therefore a-b=19$ 답 ⑤

54 m, n이 실수이므로 이차방정식 $x^2-(m+2)x-5n=0$의 한 근이 $-2-i$이면 다른 한 근은 $-2+i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-2-i)+(-2+i)=m+2$,

$(-2-i)(-2+i)=-5n$

이므로 $m=-6,\ n=-1$

$\therefore \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=-\dfrac{1}{6}-1=-\dfrac{7}{6}$,

$\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{n}=\left(-\dfrac{1}{6}\right)\cdot(-1)=\dfrac{1}{6}$

따라서 $\dfrac{1}{m}$, $\dfrac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 6인 이차방정식은

$6\left(x^2+\dfrac{7}{6}x+\dfrac{1}{6}\right)=0 \qquad \therefore 6x^2+7x+1=0$

답 $6x^2+7x+1=0$

도전! 수능 기출

W 33쪽

01 (1st) $\overline{AP}=x$라 하고 닮음인 두 삼각형을 찾아 $\overline{SD}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{AP}=x$라 하면 $\triangle ABD \backsim \triangle SOD$ (AA 닮음)이므로

$\angle DAB=\angle DSO$
$=90°$,
$\angle SDO$는 공통

$\overline{AB}:\overline{SO}=\overline{AD}:\overline{SD}$

$2:x=4:\overline{SD} \qquad \therefore \overline{SD}=2x$

(2nd) □APOS와 □OQCR의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

□APOS의 넓이는

$\overline{AP}\cdot\overline{AS}=\overline{AP}\cdot(\overline{AD}-\overline{SD})$

$=x(4-2x)$

$=4x-2x^2$

□OQCR의 넓이는

$\overline{OQ}\cdot\overline{OR}=(\overline{SQ}-\overline{SO})\cdot\overline{OR}$

$=(\overline{AB}-\overline{AP})\cdot\overline{SD}$

$=(2-x)\cdot 2x$

$=4x-2x^2$

3rd □APOS와 □OQCR의 넓이의 합이 3임을 이용하여 $\overline{AP}$의 길이를 구한다.

□APOS와 □OQCR의 넓이의 합이 3이므로

$4x-2x^2+4x-2x^2=3, \quad 4x^2-8x+3=0$

$(2x-1)(2x-3)=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

이때 $\overline{AP}<\overline{PB}$에서 $x<2-x$, 즉 $x<1$이므로

$x=\frac{1}{2}$

따라서 $\overline{AP}$의 길이는 $\frac{1}{2}$이다. 답 ③

02 1st $(p+2qi)^2=-16i$임을 이용하여 p, q에 대한 식을 구한다.

$(p+2qi)^2=-16i$에서

$p^2-4q^2+4pqi=-16i$

$\therefore p^2-4q^2=0,\ 4pq=-16$

QBOX: 네 실수 a, b, c, d에 대하여
$a+bi=c+di$
➡ $a=c$, $b=d$

$p^2-4q^2=0$에서 $\quad (p+2q)(p-2q)=0$

$\therefore p=-2q$ 또는 $p=2q$

2nd p, q의 값을 구한다.

(i) $p=-2q$일 때,

$4pq=-16$에서 $\quad -8q^2=-16$

$q^2=2 \quad \therefore q=\sqrt{2}$ 또는 $q=-\sqrt{2}$

$p>0$에서 $q<0$이므로

$p=2\sqrt{2},\ q=-\sqrt{2}$

(ii) $p=2q$일 때,

$4pq=-16$에서 $\quad 8q^2=-16 \quad \therefore q^2=-2$

따라서 실수 p, q는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad p=2\sqrt{2},\ q=-\sqrt{2}$

3rd a^2+b^2의 값을 구한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=-a,\ pq=b$

이므로 $\quad a=-\sqrt{2},\ b=-4$

$\therefore a^2+b^2=18$ 답 ②

03 1st 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$의 값을 구하고 $\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$임을 이용한다.

α, β가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0,\ \beta^2+\beta+1=0$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$이므로

$\alpha+1=-\beta,\ \beta+1=-\alpha$

위의 두 식을 ㉠에 대입하면

$\alpha^2-\beta=0,\ \beta^2-\alpha=0 \quad \therefore \beta=\alpha^2,\ \alpha=\beta^2$

2nd $f(\alpha^2)=-4\alpha$, $f(\beta^2)=-4\beta$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

$f(\alpha)=f(\beta^2)=-4\beta$, $f(\beta)=f(\alpha^2)=-4\alpha$이므로

$f(\alpha)+4\beta=0,\ f(\beta)+4\alpha=0$

이 식에 각각 $\alpha=-\beta-1$, $\beta=-\alpha-1$을 대입하면

$f(\alpha)+4(-\alpha-1)=0,\ f(\beta)+4(-\beta-1)=0$

$\therefore f(\alpha)-4\alpha-4=0,\ f(\beta)-4\beta-4=0$

즉 이차방정식 $f(x)-4x-4=0$의 두 근이 α, β이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-4x-4=x^2+x+1$

$\therefore f(x)=x^2+5x+5$

3rd $p+q$의 값을 구한다.

따라서 $p=5$, $q=5$이므로

$p+q=10$ 답 10

다른 풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1$

$f(\alpha^2)=-4\alpha$, $f(\beta^2)=-4\beta$이므로

$\alpha^4+p\alpha^2+q=-4\alpha$ …… ㉠

$\beta^4+p\beta^2+q=-4\beta$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$\alpha^4+\beta^4+p(\alpha^2+\beta^2)+2q=-4(\alpha+\beta)$

이때

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-1,$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=-1$

이므로

$-1-p+2q=4 \quad \therefore p-2q=-5$ …… ㉢

㉠−㉡을 하면

$\alpha^4-\beta^4+p(\alpha^2-\beta^2)=-4(\alpha-\beta)$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)+p(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
$+4(\alpha-\beta)=0$

$5(\alpha-\beta)-p(\alpha-\beta)=0, \quad (\alpha-\beta)(5-p)=0$

$\therefore p=5\ (\because \alpha\neq\beta)$

QBOX: 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1-4\cdot 1=-3<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
$\therefore \alpha\neq\beta$

$p=5$를 ㉢에 대입하여 정리하면 $\quad q=5$

$\therefore p+q=10$

04 1st $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 하고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b, p 사이의 관계식을 구한다.

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 하면 p가 실수이므로 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 다른 한 근은 $\overline{\alpha}=a-bi$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=2a=p \quad \therefore a=\frac{p}{2}$ …… ㉠

$\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2=p+3$ …… ㉡

2nd α^3이 실수임을 이용하여 b^2을 p에 대한 식으로 나타낸다.

W 04 이차방정식

$a^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$
$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$
이고 a^3이 실수이려면 $3a^2b-b^3=0$이어야 한다.
이때 $b\neq0$이므로 $b(3a^2-b^2)=0$에서

$$3a^2-b^2=0 \qquad \therefore b^2=3a^2=\frac{3p^2}{4}\ (\because ㉠)$$

(3rd) 모든 실수 p의 값의 곱을 구한다.

$a^2=\frac{p^2}{4}$, $b^2=\frac{3p^2}{4}$을 ㉡에 대입하면

$$\frac{p^2}{4}+\frac{3p^2}{4}=p+3 \qquad \therefore p^2-p-3=0$$

따라서 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다. 답 ②

다른 풀이 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-p\alpha+p+3=0$, 즉 $\alpha^2=p\alpha-p-3$
$\therefore \alpha^3=p\alpha^2-p\alpha-3\alpha$
$=p(p\alpha-p-3)-p\alpha-3\alpha$
$=p^2\alpha-p^2-3p-p\alpha-3\alpha$
$=(p^2-p-3)\alpha-p^2-3p$

이때 p는 실수, α는 허수이므로 α^3이 실수이려면
$p^2-p-3=0$
따라서 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다.

p에 대한 이차방정식 $p^2-p-3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-3)$
$=13>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 모든 실수 p의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 구할 수 있다.

05 이차방정식과 이차함수

W 34쪽

01 이차방정식 $-x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$1+5=a$, $1\cdot5=-b$
$\therefore a=6$, $b=-5$
$\therefore a+b=1$ 답 ③

02 이차방정식 $2x^2+8x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=\frac{3}{2}$
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-4)^3-3\cdot\frac{3}{2}\cdot(-4)$
$=-46$ 답 -46

03 이차방정식 $x^2-ax+2b=0$의 두 근이 -2, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$-2+4=a$, $-2\cdot4=2b$
$\therefore a=2$, $b=-4$
이차함수 $y=x^2-4x-12$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-4x-12=0$의 근이므로
$(x+2)(x-6)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$
따라서 두 점 사이의 거리는
$6-(-2)=8$ 답 ④

04 점 B의 x좌표를 a라 하면 점 A의 x좌표는 $-2a$이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근은 a, $-2a$이다.
이때 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 -2이므로
$a+(-2a)=-2 \qquad \therefore a=2$
$\therefore$ A$(-4, 0)$, B$(2, 0)$
한편 이차방정식 $f(2x+k)=0$의 두 근은
$2x+k=-4$, $2x+k=2$에서
$x=\frac{-k-4}{2}$ 또는 $x=\frac{-k+2}{2}$
이차방정식 $f(2x+k)=0$의 두 근의 합이 3이므로
$\frac{-k-4}{2}+\frac{-k+2}{2}=3$
$-k-1=3 \qquad \therefore k=-4$ 답 ①

05 이차방정식 $x^2+2ax-b^2+10=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-(-b^2+10)<0$
$\therefore a^2+b^2<10$
따라서 이를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$의 4개이다.
답 ③

Q BOX

06 이차방정식 $x^2-(2m+3)x+m^2-m+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(2m+3)\}^2-4(m^2-m+1)\geq 0$$

$$16m+5\geq 0 \qquad \therefore\ m\geq -\frac{5}{16}$$

따라서 가장 작은 실수 m의 값은 $-\frac{5}{16}$이다.

답 $-\frac{5}{16}$

> 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만난다.
> ➡ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D\geq 0$

07 이차방정식 $x^2+2(a-k)x+k^2-4k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-k)^2-(k^2-4k+b)=0$$

$$a^2-2ak+k^2-k^2+4k-b=0$$

$$\therefore\ (-2a+4)k+a^2-b=0$$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$-2a+4=0,\ a^2-b=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=4$$

$$\therefore\ b-a=2$$

답 2

> $a=2$를 $a^2-b=0$에 대입하면
> $4-b=0 \quad \therefore\ b=4$

쌤 한마디

항등식의 성질

① $ax+b=0$이 x에 대한 항등식 ⇨ $a=0,\ b=0$

② $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식 ⇨ $a=0,\ b=0,\ c=0$

③ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식 ⇨ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

08 이차방정식 $x^2-2x+5=3x+k$, 즉 $x^2-5x+5-k=0$의 두 근이 $x_1,\ x_2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1x_2=5-k$$

즉 $5-k=6$이므로 $\qquad k=-1$

답 ③

09 이차방정식 $-x^2+4x+2=kx+6$, 즉 $x^2+(k-4)x+4=0$의 한 근이 -4이므로

$$16-4(k-4)+4=0, \qquad -4k+36=0$$

$$\therefore\ k=9$$

따라서 이차방정식 $x^2+5x+4=0$에서

$$(x+4)(x+1)=0$$

$$\therefore\ x=-4\ \text{또는}\ x=-1$$

즉 점 B의 x좌표가 -1이므로

$$p=-1,\ q=-3$$

$$\therefore\ pq=3$$

답 ⑤

> $y=9x+6$에 $x=-1$을 대입하면
> $y=9\cdot(-1)+6=-3$
> $\therefore\ q=-3$

10 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+3$의 그래프와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta$라 하면 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2+3=mx$, 즉 $x^2-2mx+6=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2m,\ \alpha\beta=6$$

이때 $|\alpha-\beta|=2$이므로 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$$(2m)^2-4\cdot 6=2^2, \qquad 4m^2=28$$

$$m^2=7 \qquad \therefore\ m=\sqrt{7}\ (\because\ m>0)$$

답 ④

다른 풀이 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2+3=mx$, 즉 $x^2-2mx+6=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(\alpha+2)=2m \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

$$\alpha(\alpha+2)=6 \qquad \cdots\cdots\ ㉡$$

㉡에서 $\qquad \alpha^2+2\alpha-6=0$

$$\therefore\ \alpha=-1\pm\sqrt{7} \qquad \cdots\cdots\ ㉢$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$m=\sqrt{7}\ \text{또는}\ m=-\sqrt{7}$$

이때 m은 양수이므로 $\qquad m=\sqrt{7}$

> ㉠에서 $2\alpha+2=2m$
> $\therefore\ m=\alpha+1$

11 이차방정식 $x^2+1=2mx+n$, 즉 $x^2-2mx-n+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-m)^2-(-n+1)\geq 0$$

$$\therefore\ m^2+n\geq 1$$

답 ④

12 x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+2a^2+5=4x+k$, 즉 $x^2+2(a-2)x+2a^2-k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(2a^2-k+5)<0$$

$$a^2-4a+4-2a^2+k-5<0$$

$$\therefore\ k<a^2+4a+1$$

(i) $a=-2$일 때, $k<-3$이므로

$$f(-2)=-4$$

> $(-2)^2+4\cdot(-2)+1=-3$

(ii) $a=0$일 때, $k<1$이므로

$$f(0)=0$$

(iii) $a=2$일 때, $k<13$이므로

$$f(2)=12$$

> $2^2+4\cdot 2+1=13$

이상에서

$$f(-2)+f(0)+f(2)=8$$

답 8

13 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 아래쪽에 있으면 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

이차방정식 $-x^2+2kx+7=-2x+k^2$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k^2-7=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-7)<0$$

$$k^2+2k+1-k^2+7<0, \qquad 2k+8<0$$

$$\therefore\ k<-4$$

따라서 가장 큰 정수 k의 값은 -5이다.

답 ③

14 직선 $x+2y-2=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+1$과 수직인 직선의 방정식을

$$y=2x+a$$

라 하면 이 직선이 이차함수 $y=x^2+x+3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2+x+3=2x+a$, 즉 $x^2-x+3-a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4(3-a)=0$$

$$4a-11=0 \qquad \therefore a=\frac{11}{4}$$

따라서 직선 $y=2x+\frac{11}{4}$이 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$$k=2\cdot1+\frac{11}{4}=\frac{19}{4}$$

답 ①

15 점 $(-1,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식을 $y+1=m(x+1)$, 즉 $y=mx+m-1$이라 하자.
이 직선이 이차함수 $y=-3x^2+2x+4$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-3x^2+2x+4=mx+m-1$, 즉 $3x^2+(m-2)x+m-5=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(m-2)^2-12(m-5)=0$$

$$m^2-16m+64=0, \qquad (m-8)^2=0$$

$$\therefore m=8$$

따라서 직선의 방정식은 $y=8x+7$이므로 구하는 y절편은 7이다.

답 7

16 구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하자.
이 직선이 이차함수 $y=x^2+2ax+a^2-4a$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-4a=mx+n$, 즉 $x^2+(2a-m)x+a^2-4a-n=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(2a-m)^2-4(a^2-4a-n)=0$$

$$m^2-4am+4n+16a=0$$

$$\therefore a(16-4m)+m^2+4n=0$$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$16-4m=0,\ m^2+4n=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $m=4,\ n=-4$
따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=4x-4$$

답 $y=4x-4$

17 $y=3x^2-6x+2a-1=3(x-1)^2+2a-4$
이므로 $x=1$에서 최솟값 $2a-4$를 갖는다.
즉 $2a-4=-8$이므로 $a=-2$
따라서 $y=3x^2-6x-5$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 -5이므로 $b=-5$

$$\therefore ab=10$$

답 ⑤

$y=3x^2-6x-5$에 $x=0$을 대입하면
$y=-5$

18 $f(x)=-2x^2+4x-a+6=-2(x-1)^2-a+8$
이므로 $x=1$에서 최댓값 $-a+8$을 갖는다.
즉 $-a+8\le4$이므로 $a\ge4$
$g(x)=x^2+8x+3b-2=(x+4)^2+3b-18$
이므로 $x=-4$에서 최솟값 $3b-18$을 갖는다.
즉 $3b-18\ge-3$이므로 $b\ge5$
따라서 $a+b$의 최솟값은 9이다.

답 ④

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le4$이므로
$(f(x)$의 최댓값$)\le4$

모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge-3$이므로
$(g(x)$의 최솟값$)\ge-3$

19 $y=-x^2+2ax+6a+8=-(x-a)^2+a^2+6a+8$
이므로 $x=a$에서 최댓값 a^2+6a+8을 갖는다.

$$\therefore m=a^2+6a+8=(a+3)^2-1$$

따라서 m은 $a=-3$에서 최솟값 -1을 갖는다.

답 ②

20 점 $(p,\ q)$가 $y=x^2+2x+4$의 그래프 위의 점이므로 $q=p^2+2p+4$

$$\therefore 2p^2-q=2p^2-(p^2+2p+4)=p^2-2p-4$$
$$=(p-1)^2-5$$

따라서 $2p^2-q$는 $p=1$에서 최솟값 -5를 갖는다.

답 -5

21 이차함수 $y=-2x^2+ax+b$가 $x=3$에서 최댓값 3을 가지므로

$$y=-2(x-3)^2+3=-2x^2+12x-15$$

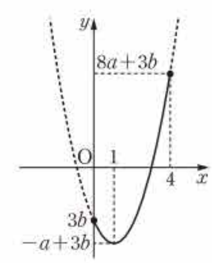
이 식이 $y=-2x^2+ax+b$와 일치하므로

$$a=12,\ b=-15$$

$$\therefore a+b=-3$$

답 ②

22 $y=ax^2-2ax+3b$
$=a(x-1)^2-a+3b$



$a>0$이므로 $0\le x\le4$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=4$에서 최댓값 $8a+3b$를 갖고, $x=1$에서 최솟값 $-a+3b$를 가지므로

$$8a+3b=5,\ -a+3b=-4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1$

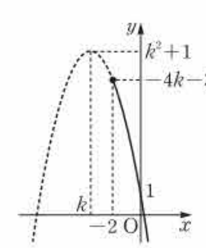
$$\therefore ab=-1$$

답 ②

23 $y=-x^2+2kx+1=-(x-k)^2+k^2+1$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(k,\ k^2+1)$

꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하지 않는다.

(i) $k<-2$일 때,
$x\ge-2$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



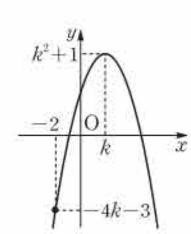
따라서 $x=-2$에서 최댓값 $-4k-3$을 가지므로

$$-4k-3=10$$

$$\therefore k=-\frac{13}{4}$$

꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속한다.

(ii) $k\ge-2$일 때,
$x\ge-2$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=k$에서 최댓값 k^2+1을 가지므로

$$k^2+1=10,$$

$$k^2=9$$

$$\therefore k=3\ (\because k\ge-2)$$

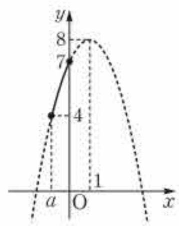
(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$$-\frac{13}{4}+3=-\frac{1}{4}$$ 답 $-\frac{1}{4}$

24 $f(x)=-x^2+2x+7$

$=-(x-1)^2+8$

$a\le x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=a$에서 최솟값 4를 가지므로 $f(a)=4$

$-a^2+2a+7=4$

$a^2-2a-3=0,\quad (a+1)(a-3)=0$

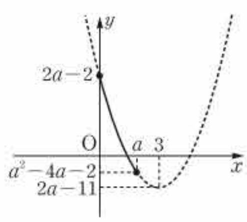
$\therefore a=-1\ (\because a<0)$ 답 ①

25 $f(x)=x^2-6x+2a-2=(x-3)^2+2a-11$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 2a-11)$

(i) $0<a<3$일 때,

$0\le x\le a$에서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=a$에서 최솟값 a^2-4a-2를 가지므로

$a^2-4a-2=-1$

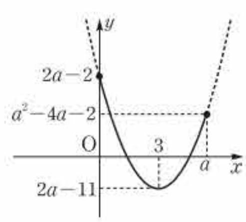
$a^2-4a-1=0\qquad \therefore a=2\pm\sqrt{5}$

그런데 $0<a<3$이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

$2<\sqrt{5}<3$이므로
$4<2+\sqrt{5}<5$
또 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로
$-1<2-\sqrt{5}<0$

(ii) $a\ge 3$일 때,

$0\le x\le a$에서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=3$에서 최솟값 $2a-11$을 가지므로

$2a-11=-1$

$\therefore a=5$

(i), (ii)에서 $a=5$ 답 5

26 $x^2-2x=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2-1\ge -1$

이때 주어진 함수는

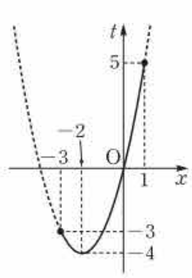
$y=t^2-4t-2=(t-2)^2-6\ (t\ge -1)$

따라서 $t=2$에서 최솟값 -6을 갖는다. 답 ①

27 $x^2+4x=t$로 놓으면

$t=(x+2)^2-4$

$-3\le x\le 1$이므로 오른쪽 그림에서



$-4\le t\le 5$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+2(t+1)$

$=-t^2+2t+2$

$=-(t-1)^2+3\ (-4\le t\le 5)$

따라서 $t=1$에서 최댓값 3, $t=-4$에서 최솟값 -22를 가지므로

$M=3,\ m=-22$

$\therefore M-m=25$ 답 ⑤

28 $2x^2+y^2+z^2-4x+6y+12z+1$

$=2(x-1)^2+(y+3)^2+(z+6)^2-46$

이때 $x,\ y,\ z$가 실수이므로

$(x-1)^2\ge 0,\ (y+3)^2\ge 0,\ (z+6)^2\ge 0$

$\therefore 2x^2+y^2+z^2-4x+6y+12z+1\ge -46$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -46이다. 답 -46

29 $x^2+2x=X$라 하면 주어진 식은

$X^2+2Xy+y^2+y^2+6y+k$

$=(X+y)^2+(y+3)^2+k-9$

따라서 주어진 식은 $X=-y,\ y=-3$에서 최솟값 $k-9$를 가지므로

$\beta=-3,\ k-9=-10$

$\therefore \beta=-3,\ k=-1$

$X=-y=-(-3)=3$

또 $X=3$, 즉 $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0\qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$

이때 $\alpha>0$이므로 $\alpha=1$

$\therefore \alpha-\beta+k=3$ 답 ⑤

30 $x-2y^2=2$에서 $\quad 2y^2=x-2$ ⋯⋯ ㉠

이때 y가 실수이므로

$2y^2=x-2\ge 0\qquad \therefore x\ge 2$

㉠을 x^2+2y^2-7x+6에 대입하면

$x^2+2y^2-7x+6=x^2+x-2-7x+6$

$=(x-3)^2-5$

따라서 $x=3$일 때 최솟값은 -5이다. 답 -5

31 $a+2b=6$에서 $\quad b=-\frac{1}{2}a+3$

$\therefore ab=a\left(-\frac{1}{2}a+3\right)=-\frac{1}{2}a^2+3a$

$=-\frac{1}{2}(a-3)^2+\frac{9}{2}$

이때 $1\le a\le 4$이므로 ab는 $a=3$일 때 최댓값 $\frac{9}{2}$, $a=1$일 때 최솟값 $\frac{5}{2}$를 갖는다.

따라서 구하는 합은 $\quad \frac{9}{2}+\frac{5}{2}=7$ 답 7

32 두 점 A(2, −2), B(5, −11)을 이은 선분 AB를 나타내는 방정식은

$y+2=\frac{-11+2}{5-2}(x-2)$

$\therefore y=-3x+4\ (2\le x\le 5)$

$\therefore 6x^2-y^2=6x^2-(-3x+4)^2$
$=-3x^2+24x-16$
$=-3(x-4)^2+32$

따라서 $x=4$일 때 최댓값은 32이다. 답 ④

33 $h=-5t^2+20t+10=-5(t-2)^2+30$

따라서 h는 $t=2$일 때 최댓값 30을 가지므로 폭죽이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이는 30 m이다. 답 ③

34 커피 한 잔의 가격이 $(2000-2x)$원일 때 하루 판매량은 $(200+x)$잔이므로 하루 판매액은

$(2000-2x)(200+x)$
$=-2x^2+1600x+400000$
$=-2(x-400)^2+720000$(원)

따라서 $x=400$일 때 하루 판매액이 최대이므로 이때의 커피 한 잔의 가격은

$2000-2\cdot400=1200$(원) 답 1200원

35 꽃밭의 세로의 길이를 x m라 하면 가로의 길이는 $(100-2x)$ m이다.

이때 변의 길이는 양수이므로 $0<x<50$

꽃밭의 넓이는

$x(100-2x)=-2x^2+100x$
$=-2(x-25)^2+1250\ (\mathrm{m}^2)$

이때 $0<x<50$이므로 $x=25$일 때 최댓값은 $1250\ \mathrm{m}^2$이다.

따라서 꽃밭의 넓이의 최댓값은 $1250\ \mathrm{m}^2$이다.

답 ②

36 $\overline{AP}=x$라 하면 $\overline{DS}=x$이므로

$\overline{AS}=10-x$

이때 변의 길이는 양수이므로 $0<x<10$

직각삼각형 APS에서

$\overline{PS}^2=x^2+(10-x)^2=2x^2-20x+100$

이때 $\triangle APS\equiv\triangle BQP\equiv\triangle CRQ\equiv\triangle DSR$이므로 사각형 PQRS는 정사각형이다.

따라서 정사각형 PQRS의 넓이는

$\overline{PS}^2=2x^2-20x+100$
$=2(x-5)^2+50$

이때 $0<x<10$이므로 $x=5$일 때 최솟값은 50이다.

따라서 사각형 PQRS의 넓이의 최솟값은 50이다.

답 50

쌤한마디

$\triangle APS\equiv\triangle BQP\equiv\triangle CRQ\equiv\triangle DSR$ (SAS 합동)

이므로 $\overline{SP}=\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}$

또 $\angle APS+\angle BPQ=90°$이므로

$\angle SPQ=90°$

따라서 사각형 PQRS는 정사각형이다.

Q BOX

□ABCD의 넓이에서 △APS, △BQP, △CRQ, △DSR의 넓이를 뺀 것과 같다.

$100-2x>0$에서
$2x<100$
$\therefore x<50$

β

다른 풀이 $\overline{AP}=x$라 하면 $\overline{DS}=x$이므로

$\overline{AS}=10-x$

이때 변의 길이는 양수이므로 $0<x<10$

$\triangle APS\equiv\triangle BQP\equiv\triangle CRQ\equiv\triangle DSR$이고

$\triangle APS=\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AS}=\frac{1}{2}x(10-x)$

이므로 정사각형 PQRS의 넓이는

$10^2-4\cdot\frac{1}{2}x(10-x)=2x^2-20x+100$
$=2(x-5)^2+50$

따라서 $0<x<10$이므로 $x=5$일 때 최솟값은 50이다.

도전! 수능 기출

40쪽

01 **1st** 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표를 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 구한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표가 α이므로 이차방정식 $f(x)-h(x)=0$은 $x=\alpha$인 중근을 갖는다.

이때 이차함수 $y=f(x)$의 x^2의 계수는 1이므로

$f(x)-h(x)=(x-\alpha)^2$, 즉

$f(x)=(x-\alpha)^2+h(x)$

2nd 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표를 이용하여 함수 $g(x)$의 식을 구한다.

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표가 β이므로 이차방정식 $g(x)-h(x)=0$은 $x=\beta$인 중근을 갖는다.

이때 이차함수 $y=g(x)$의 x^2의 계수는 4이므로

$g(x)-h(x)=4(x-\beta)^2$, 즉

$g(x)=4(x-\beta)^2+h(x)$

3rd $\frac{t}{\alpha}$의 값을 구한다.

$\alpha:\beta=1:2$에서 $\beta=2\alpha$이고 t는 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표이므로

$f(t)=g(t)$에서

$(t-\alpha)^2+h(t)=4(t-2\alpha)^2+h(t)$

$3t^2-14\alpha t+15\alpha^2=0,\qquad (3t-5\alpha)(t-3\alpha)=0$

이때 $\alpha<t<2\alpha$이므로 $t=\frac{5}{3}\alpha$

$\therefore \frac{t}{\alpha}=\frac{5}{3}$ 답 ④

02 **1st** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4ax-10$의 교점의 x좌표를 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 구한다.

조건 (가)에 의하여 이차방정식 $f(x)=4ax-10$, 즉 $f(x)-4ax+10=0$의 두 근이 1, 5이다.

이때 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 a이므로

$f(x)-4ax+10=a(x-1)(x-5)$
$=a(x^2-6x+5)$

$\therefore f(x)=ax^2-6ax+5a+4ax-10$
$=ax^2-2ax+5a-10$
$=a(x-1)^2+4a-10$

2nd 100a의 값을 구한다.

$a>0$이므로 $1\le x\le 5$에서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $4a-10$을 갖는다.

조간 ㈏에 의하여 최솟값이 -8이므로

$4a-10=-8 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore 100a=50$ 답 50

03 1st 점 A, B, C의 좌표를 구한다.

점 A는 주어진 이차함수의 그래프와 y축의 교점이므로

A$(0, 2)$

두 점 B, C는 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점이므로 $x^2-3x+2=0, \quad (x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore$ B$(1, 0)$, C$(2, 0)$

2nd 점 P(a, b)는 함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점임을 이용하여 $a+b+3$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

점 P(a, b)가 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-3a+2$ …… ㉠

이때 점 P가 점 A$(0, 2)$에서 점 C$(2, 0)$까지 움직이므로 $0\le a\le 2$

㉠을 $a+b+3$에 대입하면

$$\begin{aligned} a+b+3&=a+(a^2-3a+2)+3\\ &=a^2-2a+5\\ &=(a-1)^2+4\ (0\le a\le 2)\end{aligned}$$

3rd $a+b+3$의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

$a=0$ 또는 $a=2$일 때 최댓값은 5이고, $a=1$일 때 최솟값은 4이므로 구하는 합은

$5+4=9$ 답 9

04 1st $\overline{BQ}=x$로 놓고, $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QC}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{BQ}=x$라 하면

$\overline{QC}=\overline{BC}-\overline{BQ}=6\sqrt{2}-x$

$\overline{BC}=\sqrt{2}\,\overline{AB}=6\sqrt{2}$

△PBQ는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{PQ}=x$, $\overline{BP}=\sqrt{2}x$

또 $\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{BP}=6-\sqrt{2}x$이고 △APR도 직각이등변삼각형이므로

$\overline{PR}=\sqrt{2}(6-\sqrt{2}x)=6\sqrt{2}-2x$

2nd □PQCR의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

□PQCR의 넓이는

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\times(\overline{PR}+\overline{QC})\times\overline{PQ}\\ &=\frac{1}{2}x(6\sqrt{2}-2x+6\sqrt{2}-x)\\ &=6\sqrt{2}x-\frac{3}{2}x^2\\ &=-\frac{3}{2}(x-2\sqrt{2})^2+12\end{aligned}$$

$0<x<3\sqrt{2}$이므로 $x=2\sqrt{2}$일 때 최댓값은 12이다.

$6-\sqrt{2}x>0$에서
$\sqrt{2}x<6$
$\therefore x<3\sqrt{2}$

따라서 □PQCR의 넓이의 최댓값은 12이다. 답 12

Q BOX

06 여러 가지 방정식 Ⓦ 41쪽

01 $P(x)=x^3-x^2-4x-6$이라 하면

$P(3)=27-9-12-6=0$

±6의 약수 중에서 $P(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 찾는다.

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -1 & -4 & -6\\ & & 3 & 6 & 6\\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0\end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-3)(x^2+2x+2)$

즉 주어진 방정식은

$(x-3)(x^2+2x+2)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=-1\pm i$

따라서 주어진 방정식의 허근은 $-1\pm i$이다. 답 ①

02 $P(x)=x^4+2x^3-x^2-10x-8$이라 하면

$P(-1)=1-2-1+10-8=0$,

$P(2)=16+16-4-20-8=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 2 & -1 & -10 & -8\\ & & -1 & -1 & 2 & 8\\ \hline 2 & 1 & 1 & -2 & -8 & 0\\ & & 2 & 6 & 8 & \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(x^2+3x+4)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x^2+3x+4)=0$

이때 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+3x+4=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

판별식을 D라 하면
$D=3^2-4\cdot1\cdot4$
$=-7<0$
이므로 이차방정식 $x^2+3x+4=0$은 두 허근을 갖는다.

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=4$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &=(-3)^2-2\cdot4=1\end{aligned}$$ 답 1

03 $P(x)=x^4+4x^3-x-4$라 하면

$P(-4)=256-256+4-4=0$,

$P(1)=1+4-1-4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 1 & 4 & 0 & -1 & -4\\ & & -4 & 0 & 0 & 4\\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ & & 1 & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+4)(x-1)(x^2+x+1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+4)(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

$\alpha=-4$, $\beta=1$이라 하면 γ, δ는 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=-1$, $\gamma\delta=1$

$\therefore (\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)(\delta+2)$

$=-2\cdot3\cdot\{\gamma\delta+2(\gamma+\delta)+4\}$

$=-6\cdot(1-2+4)=-18$ 답 ②

04 $x^2-4x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-11)(X+2)=14$, $\quad X^2-9X-36=0$

$(X+3)(X-12)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=12$

(i) $X=-3$일 때, $x^2-4x+3=0$에서

$(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

(ii) $X=12$일 때, $x^2-4x-12=0$에서

$(x+2)(x-6)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=6$

(i), (ii)에서

$x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=6$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|$

$=|-2|+|1|+|3|+|6|=12$ 답 12

05 $x^2+2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-2)(X+3)=6$, $\quad X^2+X-12=0$

$(X+4)(X-3)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=3$

(i) $X=-4$일 때, $x^2+2x+4=0$에서

$x=-1\pm\sqrt{3}i$

(ii) $X=3$일 때, $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 허근은 $-1\pm\sqrt{3}i$이므로

$\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)$

$+(-1-\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i)$

$=4+4=8$ 답 ③

06 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$에서

$\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-3=0$

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-3=0$

$x^2+5x=X$로 놓으면

$(X+4)(X+6)-3=0$

$X^2+10X+21=0$, $\quad (X+7)(X+3)=0$

$\therefore X=-7$ 또는 $X=-3$

(i) $X=-7$일 때, $\quad x^2+5x+7=0$

이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=5^2-4\cdot1\cdot7=-3<0$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=-3$일 때, $\quad x^2+5x+3=0$

이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=5^2-4\cdot1\cdot3=13>0$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 -5이다. 답 ③

주어진 방정식의 모든 실근은 방정식 $x^2+5x+3=0$의 근이다.

Q BOX

쌤한마디

방정식이

(일차식)×(일차식)×(일차식)×(일차식)$+k=0$

(단, k는 상수)

꼴이면 공통부분이 생기도록 일차식을 두 개씩 짝 지어 전개한다. 이때 각 일차식의 상수항끼리의 합 또는 곱이 같아지도록 두 개씩 묶으면 공통부분이 생긴다.

07 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-3X-10=0$, $\quad (X+2)(X-5)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=5$

즉 $x^2=-2$ 또는 $x^2=5$이므로

$x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}$

따라서 주어진 방정식의 두 허근의 곱은

$\sqrt{2}i\cdot(-\sqrt{2}i)=2$ 답 2

$x^2+2=0$은 허근을 갖고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 2임을 이용할 수도 있다.

08 $x^4+5x^2+9=0$에서

$(x^4+6x^2+9)-x^2=0$, $\quad (x^2+3)^2-x^2=0$

$\therefore (x^2+x+3)(x^2-x+3)=0$

방정식 $x^2+x+3=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-x+3=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=3$, $\gamma+\delta=1$, $\gamma\delta=3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta$

$=(-1)^2-2\cdot3+1^2-2\cdot3=-10$ 답 -10

09 방정식 $x^4-x^3-18x^2-x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-x-18-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-18=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-20=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

이때 $x+\dfrac{1}{x}=k$이므로 $\qquad k^2-k-20=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 1이다. 답 ④

$k^2-k-20=0$에서

$(k+4)(k-5)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=5$

10 $x^4+6x^3+7x^2+6x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+6x+7+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}+6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+7=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+6X+5=0$, $\quad (X+5)(X+1)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=-1$

(i) $X=-5$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-5$에서

$x^2+5x+1=0$

이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=5^2-4\cdot1\cdot1=21>0$$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=-1$일 때, $x+\frac{1}{x}=-1$에서

$$x^2+x+1=0$$

이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 a는 방정식 $x^2+5x+1=0$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-5$의 한 실근이므로

$$a+\frac{1}{a}=-5$$

답 ①

11 방정식 $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

Q BOX: 주어진 방정식에 $x=0$을 주어진 방정식에 대입하면 (좌변)$=1$, (우변)$=0$ 이므로 $x\neq0$

$$x^2+3x-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$$X^2+3X-4=0, \qquad (X+4)(X-1)=0$$

$$\therefore X=-4 \text{ 또는 } X=1$$

(i) $X=-4$일 때, $x+\frac{1}{x}=-4$에서

$$x^2+4x+1=0 \qquad \therefore x=-2\pm\sqrt{3}$$

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서

$$x^2-x+1=0 \qquad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에서

$$x=-2\pm\sqrt{3} \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 주어진 방정식의 실근은 $-2\pm\sqrt{3}$이다.

답 ①

12 방정식 $x^3+ax^2+bx-6=0$의 한 근이 $\sqrt{3}$이므로

Q BOX: 주어진 방정식에 $x=\sqrt{3}$을 대입한다.

$$3\sqrt{3}+3a+\sqrt{3}b-6=0$$

$$\therefore (3a-6)+(3+b)\sqrt{3}=0$$

이때 a, b가 유리수이므로

$$3a-6=0,\ 3+b=0$$

$$\therefore a=2,\ b=-3$$

$$\therefore ab=-6$$

답 ①

13 방정식 $x^3+(a-4)x^2+2bx-a-5=0$의 두 근이 -2, 4이므로

Q BOX: 주어진 방정식에 $x=-2$, $x=4$를 각각 대입한다.

$-8+4(a-4)-4b-a-5=0$에서

$$3a-4b=29 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$64+16(a-4)+8b-a-5=0$에서

$$15a+8b=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

Q BOX: ㉠$\times2+$㉡을 하면 $21a=63$ $\therefore a=3$ / $a=3$을 ㉠에 대입하면 $9-4b=29$ $\therefore b=-5$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-5$

즉 주어진 방정식은 $x^3-x^2-10x-8=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

-2	1	-1	-10	-8
		-2	6	8
4	1	-3	-4	0
		4	4	
	1	1	0	

따라서 주어진 방정식은

$$(x+2)(x-4)(x+1)=0$$

Q BOX: $x=-2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-1$

이므로 나머지 한 근은 $x=-1$이다.

답 -1

14 방정식 $x^4+ax^3+4x^2+bx+b+4=0$의 두 근이 -3, 1이므로

Q BOX: 주어진 방정식에 $x=-3$, $x=1$을 각각 대입한다.

$81-27a+36-3b+b+4=0$에서

$$27a+2b=121 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$1+a+4+b+b+4=0$에서

$$a+2b=-9 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-7$

즉 주어진 방정식은 $x^4+5x^3+4x^2-7x-3=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

-3	1	5	4	-7	-3
		-3	-6	6	3
1	1	2	-2	-1	0
		1	3	1	
	1	3	1	0	

따라서 주어진 방정식은

$$(x+3)(x-1)(x^2+3x+1)=0$$

즉 주어진 방정식의 나머지 두 근은 방정식 $x^2+3x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 합은 -3이다.

답 -3

15 방정식 $(x+1)(x^2-2kx+k+2)=0$이 서로 다른 두 실근만을 가지므로

(i) 방정식 $x^2-2kx+k+2=0$이 $x=-1$을 근으로 가질 때,

$$1+2k+k+2=0 \qquad \therefore k=-1$$

그런데 $k=-1$이면 주어진 방정식은

$$(x+1)(x^2+2x+1)=0 \qquad \therefore (x+1)^3=0$$

따라서 이 방정식은 서로 같은 세 실근을 가지므로

$$k\neq-1$$

(ii) 방정식 $x^2-2kx+k+2=0$이 중근을 가질 때,

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+2)=0$$

$$k^2-k-2=0, \qquad (k+1)(k-2)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=2$$

(i), (ii)에서 $k=2$

답 ⑤

쌤한마디

삼차방정식 $(x+1)(x^2-2kx+k+2)=0$이 서로 다른 두 실근만을 갖는 경우는 이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$이 -1과 -1이 아닌 실근을 갖는 경우와 -1이 아닌 중근을 갖는 경우이다. (i)에서 방정식 $x^2-2kx+k+2=0$이 -1을 근으로 가지면 다른 한 근도 -1이므로 주어진 삼차방정식은 서로 같은 세 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $x^2-2kx+k+2=0$은 -1이 아닌 중근을 가져야 한다.

16 $P(x)=x^3-3x^2+(k+2)x-k$라 하면

$P(1)=1-3+(k+2)-k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & k+2 & -k \\ & & 1 & -2 & k \\ \hline & 1 & -2 & k & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2-2x+k)$

이때 방정식 $P(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-1)^2-k>0$ $\quad\therefore k<1$

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 두 실근을 α, β $(0<\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$ ...... ㉠

$\alpha\beta=k$

1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이가 되려면

(i) 빗변의 길이가 1일 때,

$\alpha^2+\beta^2=1$이므로 $\quad(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1$

$2^2-2k=1 \quad \therefore k=\frac{3}{2}$

그런데 $k<1$이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 빗변의 길이가 β일 때,

$1+\alpha^2=\beta^2$이므로 $\quad\beta^2-\alpha^2=1$

$(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=1, \quad 2(\beta-\alpha)=1$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{1}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad\alpha=\frac{3}{4}$, $\beta=\frac{5}{4}$

$\therefore k=\alpha\beta=\frac{15}{16}$

(i), (ii)에서 $\quad k=\frac{15}{16}$ 답 ④

쌤한마디

$0<\alpha<\beta$, $\alpha+\beta=2$를 만족시키는 β의 값의 범위는
$0<2-\beta<\beta$에서 $\quad 1<\beta<2$
따라서 β의 값은 항상 1보다 크므로 1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이일 때, 빗변의 길이는 β임을 알 수 있다.

Q BOX

$r^2+3r+12$
$=\left(r+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{39}{4}>0$

㉠+㉡을 하면
$2\beta=\frac{5}{2} \quad \therefore \beta=\frac{5}{4}$
$\beta=\frac{5}{4}$를 ㉠에 대입하면
$\alpha+\frac{5}{4}=2$
$\therefore \alpha=\frac{3}{4}$

$0<2-\beta$에서 $\quad\beta<2$
$2-\beta<\beta$에서 $\quad 1<\beta$
$\therefore 1<\beta<2$

17 $\pi\cdot2^2\cdot4=\frac{1}{3}\pi r^2(r-1)$이므로

$r^3-r^2-48=0$

$P(r)=r^3-r^2-48$이라 하면

$P(4)=64-16-48=0$

조립제법을 이용하여 $P(r)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -1 & 0 & -48 \\ & & 4 & 12 & 48 \\ \hline & 1 & 3 & 12 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(r)=(r-4)(r^2+3r+12)$

따라서 방정식은

$(r-4)(r^2+3r+12)=0$

$\therefore r=4$ $(\because r^2+3r+12>0)$ 답 4

18 $S=20x^2$, $V=5x^3$이므로 $S=V-125$에서

$20x^2=5x^3-125, \quad x^3-4x^2-25=0$

$P(x)=x^3-4x^2-25$라 하면

$P(5)=125-100-25=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -4 & 0 & -25 \\ & & 5 & 5 & 25 \\ \hline & 1 & 1 & 5 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-5)(x^2+x+5)$

따라서 방정식은

$(x-5)(x^2+x+5)=0$

$\therefore x=5$ $(\because x^2+x+5>0)$ 답 5

19 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm라 하면 원기둥의 높이는 $(r+2)$ cm이므로 용기의 전체 부피는

$\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2(r+2)=81\pi$

$7r^3+6r^2-243=0$

$P(r)=7r^3+6r^2-243$이라 하면

$P(3)=189+54-243=0$

조립제법을 이용하여 $P(r)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 7 & 6 & 0 & -243 \\ & & 21 & 81 & 243 \\ \hline & 7 & 27 & 81 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(r)=(r-3)(7r^2+27r+81)$

즉 방정식은

$(r-3)(7r^2+27r+81)=0$

$\therefore r=3$ $(\because 7r^2+27r+81>0)$

따라서 밑면의 반지름의 길이는 3 cm이다. 답 ③

20 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=6$, $\alpha\beta\gamma=-a$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=2$에서 $\quad\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=2$

$\frac{6}{-a}=2 \quad \therefore a=-3$ 답 ①

21 $\alpha+1=\alpha'$, $\beta-1=\beta'$, $\gamma-3=\gamma'$이라 하면 주어진 방정식의 세 근이 α', β', γ'이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha'+\beta'+\gamma'=2$, $\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\alpha'=4$,

$\alpha'\beta'\gamma'=-7$

$\therefore (\alpha+3)(\beta+1)(\gamma-1)$

$=(\alpha'+2)(\beta'+2)(\gamma'+2)$

$=\alpha'\beta'\gamma'+2(\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\alpha')$

$+4(\alpha'+\beta'+\gamma')+8$

$=-7+2\cdot4+4\cdot2+8=17$ 답 ⑤

Q BOX

$\alpha+1=\alpha'$에서 $\alpha=\alpha'-1$
$\beta-1=\beta'$에서 $\beta=\beta'+1$
$\gamma-3=\gamma'$에서 $\gamma=\gamma'+3$

22 삼차방정식의 세 근을 α, 3α, β (α, β는 정수)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4\alpha+\beta=8$ ······ ㉠

$3\alpha^2+4\alpha\beta=19$ ······ ㉡

$3\alpha^2\beta=-k$

㉠에서 $\beta=8-4\alpha$

㉡에서 $3\alpha^2+4\alpha(8-4\alpha)=19$

$13\alpha^2-32\alpha+19=0$, $(\alpha-1)(13\alpha-19)=0$

$\therefore \alpha=1$ ($\because$ α는 정수)

따라서 $\beta=8-4\cdot1=4$이므로

$k=-3\alpha^2\beta=-3\cdot1^2\cdot4=-12$ 답 -12

계수가 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

23 삼차방정식의 세 근을 α, $-\alpha$, β라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\beta=-k$

$-\alpha^2=-9$ ······ ㉠

$-\alpha^2\beta=-36$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-9\beta=-36$ $\therefore \beta=4$

$\therefore k=-\beta=-4$ 답 ②

$-\alpha^2-\alpha\beta+\beta\alpha=-9$ 에서 $-\alpha^2=-9$

24 삼차방정식 $x^3+x^2-3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=3$

$\therefore (\alpha-2)+(\beta-2)+(\gamma-2)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)-6=-7$,

$(\alpha-2)(\beta-2)+(\beta-2)(\gamma-2)+(\gamma-2)(\alpha-2)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-4(\alpha+\beta+\gamma)+12$

$=0-4\cdot(-1)+12=16$,

$(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)$

$=\alpha\beta\gamma-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)-8$

$=3-2\cdot0+4\cdot(-1)-8=-9$

따라서 $\alpha-2$, $\beta-2$, $\gamma-2$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3+7x^2+16x+9=0$

답 $x^3+7x^2+16x+9=0$

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

25 $P(0)=P(1)=P(2)=3$이므로

$P(0)-3=0$, $P(1)-3=0$, $P(2)-3=0$

즉 삼차방정식 $P(x)-3=0$의 세 실근이 0, 1, 2이다.

0, 1, 2를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(0+1+2)x^2+(0\cdot1+1\cdot2+2\cdot0)x+0\cdot1\cdot2=0$

$\therefore x^3-3x^2+2x=0$

따라서 $P(x)-3=x^3-3x^2+2x$이므로

$P(x)=x^3-3x^2+2x+3$

즉 $a=-3$, $b=2$, $c=3$이므로

$abc=-18$ 답 ①

26 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $\sqrt{2}-1$이 근이면 $-\sqrt{2}-1$도 근이다.

따라서 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 -2, $\sqrt{2}-1$, $-\sqrt{2}-1$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-\{-2+(\sqrt{2}-1)+(-\sqrt{2}-1)\}=4$,

$b=(-2)\cdot(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)\cdot(-\sqrt{2}-1)$

$+(-\sqrt{2}-1)\cdot(-2)$

$=3$,

$c=-(-2)\cdot(\sqrt{2}-1)\cdot(-\sqrt{2}-1)=-2$

$\therefore a+b+c=5$ 답 ⑤

27 주어진 방정식 $P(x)=0$의 계수가 실수이므로 $3-i$가 근이면 $3+i$도 근이다.

따라서 삼차방정식 $P(x)=0$의 세 근이 2, $3-i$, $3+i$이므로 $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-\{2+(3-i)+(3+i)\}=-8$,

$b=2(3-i)+(3-i)(3+i)+2(3+i)=22$,

$c=-2(3-i)(3+i)=-20$

즉 $P(x)=x^3-8x^2+22x-20$이므로

$P(-1)=-1-8-22-20=-51$ 답 -51

다른 풀이 주어진 방정식 $P(x)=0$의 계수가 실수이므로 $3-i$가 근이면 $3+i$도 근이다.

따라서 삼차방정식 $P(x)=0$의 세 근이 2, $3-i$, $3+i$이므로

$P(x)=(x-2)(x-3+i)(x-3-i)$

$\therefore P(-1)=-3(-4+i)(-4-i)=-51$

28 주어진 사차방정식의 계수가 실수이므로 $-1-2i$가 근이면 $-1+2i$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 좌변은

$x^4+2x^3+ax^2-2x+b$

$=(x+1+2i)(x+1-2i)(x^2+px+q)$ (p, q는 상수)

로 인수분해된다.

위의 식의 우변을 전개하면

$x^4+(p+2)x^3+(2p+q+5)x^2+(5p+2q)x+5q$

이므로

$p+2=2$, $5p+2q=-2$ $\therefore p=0$, $q=-1$

따라서 $a=2p+q+5=4$, $b=5q=-5$이므로

$ab=-20$ 답 ①

29 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1+\sqrt{3}i$가 근이면 $1-\sqrt{3}i$도 근이다.
따라서 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$, m이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}b&=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+m(1-\sqrt{3}i)\\&\quad+m(1+\sqrt{3}i)\\&=2m+4 \qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

한편 $(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=2\neq-3$이므로 $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$는 이차방정식 $x^2+3x+b=0$의 두 근이 아니다.
이차방정식 $x^2+3x+b=0$의 나머지 한 근을 n이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m+n=-3,\ mn=b$$

$$\therefore b=m(\underline{-3-m})=-m^2-3m \qquad\cdots\cdots ㉡$$

$m+n=-3$에서
$n=-3-m$

㉠, ㉡에서 $\quad -m^2-3m=2m+4$

$$m^2+5m+4=0, \qquad (m+4)(m+1)=0$$

$$\therefore m=-4 \text{ 또는 } m=-1$$

따라서 m의 값의 합은 -5이다. 답 ②

30 $x^3=1$에서 $\quad x^3-1=0$

$$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$$

ω는 $x^2+x+1=0$의 허근이므로

$$\omega^2+\omega+1=0$$

$$\therefore \frac{\omega^2+1}{\omega}+\frac{\omega}{\omega^2+1}=\frac{-\omega}{\omega}+\frac{\omega}{-\omega}=-2$$ 답 ①

31 $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $\quad 2\omega-1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$$4\omega^2-4\omega+1=-3, \qquad 4\omega^2-4\omega+4=0$$

$$\therefore \omega^2-\omega+1=0$$

양변에 $\omega+1$을 곱하면

$$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$$

$$\omega^3+1=0 \qquad \therefore \omega^3=-1$$

$$\begin{aligned}\therefore \omega^{2025}-\frac{1}{\omega^{2025}}&=(\omega^3)^{675}-\frac{1}{(\omega^3)^{675}}\\&=-1-(-1)=0\end{aligned}$$ 답 ③

32 $x^3=-1$에서 $\quad x^3+1=0$

$$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=0$$

ω는 $x^2-x+1=0$의 허근이므로 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이다.

$$\therefore \omega^2-\omega+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$$

$(\omega-1)^n=\left(-\dfrac{\omega\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$에서

$$(\omega-1)^n=(\omega^2)^n=\omega^{2n},\ \left(-\frac{\omega\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n=(-1)^n$$

이므로 $\quad \omega^{2n}=(-1)^n$
이때 $\omega^3=-1$이므로 $\quad \omega^{2n}=\omega^{3n}$
따라서 n은 6의 배수이어야 하므로 100 이하의 자연수 n은 6, 12, $\cdots$, 96의 16개이다. 답 ②

33 $x^3-1=0$에서

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

ω는 $x^2+x+1=0$의 허근이므로

$$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$$

이때

$$f(1)=\frac{\omega^2}{\omega+1}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1,$$
$$f(2)=\frac{\omega^4}{\omega^2+1}=\frac{\omega}{-\omega}=-1,$$
$$f(3)=\frac{\omega^6}{\omega^3+1}=\frac{1}{2},$$
$$f(4)=\frac{\omega^8}{\omega^4+1}=\frac{\omega^2}{\omega+1}=f(1),$$
$$f(5)=\frac{\omega^{10}}{\omega^5+1}=\frac{\omega^4}{\omega^2+1}=f(2),$$
$$f(6)=\frac{\omega^{12}}{\omega^6+1}=\frac{\omega^6}{\omega^3+1}=f(3),$$
$$\vdots$$

이므로

$$f(1)=f(4)=f(7)=\cdots=f(28)=-1,$$
$$f(2)=f(5)=f(8)=\cdots=f(29)=-1,$$
$$f(3)=f(6)=f(9)=\cdots=f(30)=\frac{1}{2}$$
$$\begin{aligned}&\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)\\&=\left(-1-1+\frac{1}{2}\right)\cdot 10=-15\end{aligned}$$ 답 -15

34 $\begin{cases}x+y=6 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x^2-y^2=-8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $\quad \underline{y=6-x} \qquad\cdots\cdots ㉢$

$x=6-y$로 변형한 후 ㉡에 대입하여 풀 수도 있다.

㉢을 ㉡에 대입하면

$$2x^2-(6-x)^2=-8, \qquad x^2+12x-28=0$$
$$(x+14)(x-2)=0$$
$$\therefore x=-14 \text{ 또는 } x=2$$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x=-14,\ y=20 \text{ 또는 } x=2,\ y=4$$

이때 α, β는 양수이므로

$$\alpha=2,\ \beta=4$$
$$\therefore \alpha\beta=8$$ 답 ③

35 $\begin{cases}x+2y=5 & \cdots\cdots ㉠\\ y^2-3xy=18 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $\quad x=5-2y \qquad\cdots\cdots ㉢$
㉢을 ㉡에 대입하면

$$y^2-3y(5-2y)=18, \qquad 7y^2-15y-18=0$$
$$(7y+6)(y-3)=0$$
$$\therefore y=-\frac{6}{7} \text{ 또는 } y=3$$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x=\frac{47}{7},\ y=-\frac{6}{7} \text{ 또는 } x=-1,\ y=3$$
$$\therefore x-y=\frac{53}{7} \text{ 또는 } x-y=-4$$

따라서 $x-y$의 최솟값은 -4이다. 답 ④

36 $\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2+xy=y^2-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$3x^2+x(x-1)=(x-1)^2-1$

$3x^2+x=0,\quad x(3x+1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=0$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-\frac{1}{3},\ y=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=0,\ y=-1$

(i) $x=-\frac{1}{3},\ y=-\frac{4}{3}$를 $\begin{cases} 2x-3y+a=0 \\ ax+by=2 \end{cases}$에 대입하면

$-\frac{2}{3}+4+a=0,\ -\frac{a}{3}-\frac{4}{3}b=2$

$\therefore a=-\frac{10}{3},\ b=-\frac{2}{3}$

(ii) $x=0,\ y=-1$을 $\begin{cases} 2x-3y+a=0 \\ ax+by=2 \end{cases}$에 대입하면

$3+a=0,\ -b=2$

$\therefore a=-3,\ b=-2$

(i), (ii)에서 정수 a, b의 값은

$a=-3,\ b=-2$

답 $a=-3,\ b=-2$

37 $\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $(x+2y)(x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$를 ㉠에 대입하면

$4y^2+y^2=10,\quad y^2=2$

$\therefore y=\pm\sqrt{2},\ x=\mp2\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 ㉠에 대입하면

$y^2+y^2=10,\quad y^2=5$

$\therefore y=\pm\sqrt{5},\ x=\pm\sqrt{5}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 해가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

38 $\begin{cases} 4x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3xy+y^2=11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(2x+y)(2x-y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-6x^2+4x^2=11,\quad x^2=-11$

$\therefore x=\pm\sqrt{11}i,\ y=\mp2\sqrt{11}i$ (복호동순)

(ii) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+6x^2+4x^2=11,\quad x^2=1$

$\therefore x=\pm1,\ y=\pm2$ (복호동순)

(i), (ii)에서 x, y는 자연수이므로

$x=1,\ y=2$

$\therefore x+y=3$

답 3

Q BOX

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2,$
$(-\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{2})=2,$
$\sqrt{6}i\cdot(-\sqrt{6}i)=6,$
$(-\sqrt{6}i)\cdot\sqrt{6}i=6$

x^2-xy+y^2
$=(x+y)^2-3xy$

$x^2y+xy^2=xy(x+y)$

39 $\begin{cases} x^2=y^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+4xy+y^2=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=\pm x$

(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+4x^2+x^2=12,\quad x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2},\ y=\pm\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-4x^2+x^2=12,\quad x^2=-6$

$\therefore x=\pm\sqrt{6}i,\ y=\mp\sqrt{6}i$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha\beta$의 값은 2, 6이므로 $\alpha\beta$의 최댓값은 6이다.

답 ③

40 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u+v=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-3v=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=2-u$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $u^2-3(2-u)=12$

$u^2+3u-18=0,\quad (u+6)(u-3)=0$

$\therefore u=-6$ 또는 $u=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-6,\ v=8$ 또는 $u=3,\ v=-1$

(i) $u=-6,\ v=8$, 즉 $x+y=-6,\ xy=8$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2+6t+8=0$의 두 근이므로

$(t+4)(t+2)=0\quad \therefore t=-4$ 또는 $t=-2$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$

(ii) $u=3,\ v=-1$, 즉 $x+y=3,\ xy=-1$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-3t-1=0$의 두 근이므로

$t=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

$\therefore \begin{cases} x=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ y=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ y=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

(i), (ii)에서 $\alpha-\beta$의 값은 $-2,\ 2,\ \sqrt{13},\ -\sqrt{13}$이다.

답 ①

41 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ uv=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $u=v+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $v(v+1)=12$

$v^2+v-12=0,\quad (v+4)(v-3)=0$

$\therefore v=-4$ 또는 $v=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-3,\ v=-4$ 또는 $u=4,\ v=3$

(i) $u=-3,\ v=-4$, 즉 $x+y=-3,\ xy=-4$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2+3t-4=0$의 두 근이므로

$(t+4)(t-1)=0\quad \therefore t=-4$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$

(ii) $u=4$, $v=3$, 즉 $x+y=4$, $xy=3$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $\frac{x}{y}$의 값은 $x=-4$, $y=1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은 -4이다. 답 ②

$x=-4$, $y=1$일 때, $\frac{-4}{1}=-4$

$x=1$, $y=-4$일 때, $\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$

$x=1$, $y=3$일 때, $\frac{1}{3}$

$x=3$, $y=1$일 때, $\frac{3}{1}=3$

42 $\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad y=6-x$

이것을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(6-x)+k=0 \qquad \therefore 2x^2-6x+k=0$

이를 만족시키는 실수 x의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-2\cdot k\ge 0 \qquad \therefore k\le\frac{9}{2}$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4이므로 그 합은

$1+2+3+4=10$ 답 ⑤

43 주어진 연립방정식을 만족시키는 x, y는 이차방정식 $t^2-(3-2a)t+a^2-a=0$의 두 근이다.

따라서 이 이차방정식이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(3-2a)^2-4(a^2-a)<0$

$-8a+9<0 \qquad \therefore a>\frac{9}{8}$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다. 답 2

44 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=52 \\ (10y+x)-(10x+y)=18 \end{cases}$

일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 바꾼 수

$\therefore \begin{cases} x^2+y^2=52 & \cdots\cdots ㉠ \\ y-x=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad y=x+2 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면 $\quad x^2+(x+2)^2=52$

$x^2+2x-24=0, \qquad (x+6)(x-4)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=4$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=-6$, $y=-4$ 또는 $x=4$, $y=6$

그런데 x, y는 한 자리 자연수이므로

$x=4$, $y=6$

따라서 처음 수는 46이다. 답 46

45 마름모의 넓이가 96 cm^2이므로

$\frac{1}{2}ab=96 \qquad \therefore ab=192 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 마름모의 한 변의 길이가 10 cm이고 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^2=10^2$

$\therefore a^2+b^2=400 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡에서 $\quad (a+b)^2-2ab=400$

㉠을 이 식에 대입하면

$(a+b)^2-2\cdot 192=400, \qquad (a+b)^2=784$

$\therefore a+b=28$ ($\because a>0$, $b>0$) $\quad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉢에서 a, b는 이차방정식 $t^2-28t+192=0$의 두 근임을 이용할 수도 있다.

㉢에서 $b=28-a$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$a(28-a)=192, \qquad a^2-28a+192=0$

$(a-12)(a-16)=0$

$\therefore a=12$ 또는 $a=16$

이것을 ㉢에 대입하면

$a=12$, $b=16$ 또는 $a=16$, $b=12$

그런데 $a>b$이므로 $\quad a=16$, $b=12$

$\therefore 2a-b=20$ 답 ⑤

46 시계의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=325 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=150 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡에서

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=325+2\cdot 150=625$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 $\quad x+y=25$

$\therefore y=25-x \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면 $\quad x(25-x)=150$

$x^2-25x+150=0, \qquad (x-10)(x-15)=0$

$\therefore x=10$ 또는 $x=15$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=10$, $y=15$ 또는 $x=15$, $y=10$

그런데 $x>y$이므로 $\quad x=15$, $y=10$

따라서 가로의 길이와 세로의 길이의 비는

$15:10=3:2$ 답 ②

47 $x-y+xy=4$에서 $\quad x(y+1)-(y+1)=3$

$\therefore (x-1)(y+1)=3$

이때 x, y가 정수이므로

(i) $x-1=-3$, $y+1=-1$일 때,

$x=-2$, $y=-2$

(ii) $x-1=-1$, $y+1=-3$일 때, $\quad x=0$, $y=-4$

(iii) $x-1=1$, $y+1=3$일 때, $\quad x=2$, $y=2$

(iv) $x-1=3$, $y+1=1$일 때, $\quad x=4$, $y=0$

이상에서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(-2, -2)$, $(0, -4)$, $(2, 2)$, $(4, 0)$

의 4개이다. 답 ②

48 $2x^2+8xy+17y^2-8x+2y+17=0$에서

$(x^2+8xy+16y^2)+(x^2-8x+16)+(y^2+2y+1)=0$

$\therefore (x+4y)^2+(x-4)^2+(y+1)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x+4y=0$, $x-4=0$, $y+1=0$

$\therefore x=4$, $y=-1$

$\therefore x-y=5$ 답 ⑤

49 $x^2+2x(y-2)+y^2-8=0$을 만족시키는 x, y가 자연수이므로 주어진 이차방정식이 실근을 가져야 한다.

x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(y-2)^2-(y^2-8)\geq 0$$

$-4y+12\geq 0$ $\quad\therefore y\leq 3$

이때 y는 자연수이므로

$y=1$ 또는 $y=2$ 또는 $y=3$

(i) $y=1$일 때, $x^2-2x-7=0$이므로

$x=1\pm 2\sqrt{2}$

그런데 x는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $y=2$일 때, $x^2-4=0$이므로

$x=\pm 2$

그런데 x는 자연수이므로 $\quad x=2$

(iii) $y=3$일 때, $x^2+2x+1=0$이므로

$(x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$

그런데 x는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $x=2$, $y=2$이므로

$xy=4$ 답 4

도전! 수능 기출

W 49쪽

01 1st 주어진 사차방정식에 $a=1$을 대입하여 근을 구한다.

ㄱ. $x^4+(3-2a)x^2+a^2-3a-10=0$에서 $a=1$이면

$x^4+x^2-12=0$, $\quad(x^2-3)(x^2+4)=0$

$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\pm 2i$

따라서 모든 실근의 곱은

$(-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}=-3$

2nd 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한 후 실근과 허근을 모두 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

ㄴ. $x^4+(3-2a)x^2+a^2-3a-10=0$에서

$x^4+(3-2a)x^2+(a-5)(a+2)=0$

$(x^2-a+5)(x^2-a-2)=0$

$\therefore x^2=a-5$ 또는 $x^2=a+2$

$a-5\geq 0$이면 실근을 갖고 $a-5<0$이면 허근을 갖는다.

$a+2\geq 0$이면 실근을 갖고 $a+2<0$이면 허근을 갖는다.

방정식 $x^4+(3-2a)x^2+a^2-3a-10=0$이 실근과 허근을 모두 가지므로

$a-5<0$, $a+2\geq 0$

$\therefore -2\leq a<5$

$-2<a<5$일 때,

$x=-\sqrt{5-a}\,i$ 또는 $x=\sqrt{5-a}\,i$

또는 $x=-\sqrt{a+2}$ 또는 $x=\sqrt{a+2}$

$a=-2$일 때,

$x=-\sqrt{7}i$ 또는 $x=\sqrt{7}i$ 또는 $x=0$

이때 모든 실근의 곱이 -4이려면

$(-\sqrt{a+2})\cdot\sqrt{a+2}=-4$에서

$a+2=4$ $\quad\therefore a=2$

따라서 방정식의 허근은 $\pm\sqrt{3}i$이므로 모든 허근의 곱은

$(-\sqrt{3}i)\cdot\sqrt{3}i=3$

3rd $\sqrt{a+2}$ 의 값의 범위를 이용하여 a의 값을 구한다.

ㄷ. ㄴ에서 $-2\leq a<5$이므로

$0\leq a+2<7$ $\quad\therefore 0\leq\sqrt{a+2}<\sqrt{7}$

방정식이 가질 수 있는 정수인 근은 $\sqrt{a+2}$의 값이 0, 1, 2일 때이다.

방정식의 실근은 $x=\pm\sqrt{a+2}$

$\sqrt{a+2}=0$일 때, $\quad a=-2$

$\sqrt{a+2}=1$일 때, $\quad a=-1$

$\sqrt{a+2}=2$일 때, $\quad a=2$

따라서 정수인 근을 갖도록 하는 실수 a의 값이 -2, -1, 2이므로 구하는 합은

$(-2)+(-1)+2=-1$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

02 1st $x+y$의 값을 구한다.

$$\begin{cases} x^2-y^2=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+y)^2-2(x+y)=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $x+y=t$라 하면

$t^2-2t-3=0$, $\quad(t-3)(t+1)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=-1$

즉 $x+y=3$ 또는 $x+y=-1$이고 x, y는 양수이므로

$x+y=3$ $\cdots\cdots$ ㉢

2nd $x-y$의 값을 구한다.

㉠에서 $\quad(x+y)(x-y)=6$

㉢을 이 식에 대입하면

$3(x-y)=6$ $\quad\therefore x-y=2$ $\cdots\cdots$ ㉣

3rd $20xy$의 값을 구한다.

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{1}{2}$

$\therefore 20xy=25$ 답 25

03 1st $\overline{AD}=2n$ (n은 자연수)으로 놓고 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$의 길이를 n에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$가 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수이므로 $\overline{AD}=2n$ (n은 자연수)이라 하면

$\overline{AC}=2n+2$, $\overline{BC}=2n+4$, $\overline{AB}=2n+6$

2nd $\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$로 놓고 피타고라스 정리를 이용하여 x, y를 n에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면

$x+y=2n+4$ ······ ㉠

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$는 빗변이 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$

$(2n+6)^2-x^2=(2n+2)^2-y^2$

$(x+y)(x-y)=8(2n+4)$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(2n+4)(x-y)=8(2n+4)$

$\therefore x-y=8$ ······ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$x=n+6$, $y=n-2$

3rd n의 값을 구한다.

$\triangle ACD$에서 $(2n+2)^2=(2n)^2+(n-2)^2$

$n^2-12n=0$, $n(n-12)=0$

$\therefore n=12$ ($\because$ n은 자연수)

4th $\dfrac{S}{\pi}$의 값을 구한다.

$\overline{AB}=30$, $\overline{AC}=26$이므로

$S=\pi\cdot15^2+\pi\cdot13^2=394\pi$

$\therefore \dfrac{S}{\pi}=394$

답 394

04 **1st** $x^2-8x+1=$(자연수)^{2}으로 놓고 부정방정식을 만든다.

자연수 n에 대하여 $x^2-8x+1=n^2$이라 하면

$x^2-8x+16-15=n^2$

$(x-4)^2-n^2=15$

$\therefore (x-4+n)(x-4-n)=15$

2nd x, n이 자연수임을 이용하여 $x-4+n$과 $x-4-n$이 될 수 있는 값을 찾는다.

x, n이 자연수이므로 $x+n\geq2$에서

$x-4+n\geq-2$

또 $x-4+n>x-4-n$이므로 $x-4+n$, $x-4-n$이 될 수 있는 값은 다음과 같다.

$x-4+n$	-1	5	15
$x-4-n$	-15	3	1

3rd 자연수 x의 값의 합을 구한다.

(i) $\begin{cases} x-4+n=-1 \\ x-4-n=-15 \end{cases}$일 때,

$2x-8=-16$ $\therefore x=-4$

(ii) $\begin{cases} x-4+n=5 \\ x-4-n=3 \end{cases}$일 때,

$2x-8=8$ $\therefore x=8$

(iii) $\begin{cases} x-4+n=15 \\ x-4-n=1 \end{cases}$일 때,

$2x-8=16$ $\therefore x=12$

이상에서 x는 자연수이므로

$x=8$ 또는 $x=12$

따라서 x의 값의 합은

$8+12=20$

답 20

Q BOX

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{-1}=-1$,
$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}$

$a^2=(-3)^2=9$,
$b^2=2^2=4$

$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$,
$\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2$
이므로
$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2$
$=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$

$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$

$a+d=1+(-1)=0$,
$b+c=(-1)+2=1$

07 일차부등식

W 50쪽

01 ① $a=-1$, $b=2$이면 $a<b$이지만 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$이다.

② $a<b$이고 $c<0$이면 $ac>bc$이다.

③ $a=-3$, $b=2$이면 $a<b$이지만 $a^2>b^2$이다.

④ $a<b$이면 $a-b<0$

이때 $a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2>0$이므로

$(a-b)(a^2+ab+b^2)<0$

$a^3-b^3<0$ $\therefore a^3<b^3$

⑤ $a=-3$, $b=2$이면 $a<b$이지만 $|a|>|b|$이다.

답 ④

02 ㄱ. $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $d=-1$이면 $a>b$, $c>d$이지만 $a+d<b+c$이다.

ㄴ. $a<b$, $c>0$이므로 $ac<bc$

$c<d$, $b>0$이므로 $bc<bd$

$\therefore ac<bd$

ㄷ. $a<b<0$이면 $|a|>|b|$이므로

$a^2>b^2$

$ab>0$이므로 $a^2>b^2$의 양변을 ab로 나누면

$\dfrac{a}{b}>\dfrac{b}{a}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

03 $-1<f(1)<2$에서

$-1<a+b<2$ ······ ㉠

$-2<f(3)<5$에서

$-2<3a+b<5$ ······ ㉡

㉠의 각 변에 3을 곱하면

$-3<3a+3b<6$ ······ ㉢

이때 $f(0)=b$이므로 ㉢$-$㉡을 하면

$-3-5<2b<6-(-2)$

$\therefore -4<b<4$

$\therefore -4<f(0)<4$

답 $-4<f(0)<4$

쌤 한마디

실수 x, y에 대하여 $a<x<b$, $c<y<d$일 때

① $\begin{array}{r} a<x<b \\ +)\ c<y<d \\ \hline a+c<x+y<b+d \end{array}$

② $\begin{array}{r} a<x<b \\ -)\ c<y<d \\ \hline a-d<x-y<b-c \end{array}$

04 $5a-ax>5b-bx$에서 $bx-ax>5b-5a$

$(b-a)x>5(b-a)$

이때 $a>b$에서 $b-a<0$이므로

$x<5$

답 ④

05 $(2a-b)x-a-2b>0$에서

$(2a-b)x>a+2b$

이 부등식의 해가 $x<1$이므로

$2a-b<0$, $\frac{a+2b}{2a-b}=1$

$\frac{a+2b}{2a-b}=1$에서 $a+2b=2a-b$

$\therefore a=3b$

$2a-b<0$에서 $6b-b<0$

$5b<0$ $\therefore b<0$

$a=3b$를 $bx\le a+4b$에 대입하면

$bx\le 3b+4b$, $bx\le 7b$

$\therefore x\ge 7$ ($\because b<0$)

따라서 구하는 x의 최솟값은 7이다. 답 ③

06 $ax+bx+3a-b\le 0$에서

$(a+b)x\le -3a+b$

이 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않으려면

$a+b=0$, $-3a+b<0$

$a+b=0$에서 $b=-a$

$-3a+b<0$에서 $-3a-a<0$

$-4a<0$ $\therefore a>0$

$b=-a$를 $(4a+b)x+2a-7b<0$에 대입하면

$(4a-a)x+2a+7a<0$, $3ax<-9a$

$\therefore x<-3$ ($\because 3a>0$) 답 $x<-3$

$a>0$이므로 $3a>0$

07 $0.3x+1\ge 0.2(x+3)$에서 $3x+10\ge 2(x+3)$

양변에 10을 곱한다.

$3x+10\ge 2x+6$ $\therefore x\ge -4$

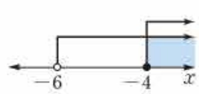
$\frac{x}{3}+4>\frac{1}{2}-\frac{x}{4}$에서 $4x+48>6-3x$

양변에 3, 2, 4의 최소공배수 12를 곱한다.

$7x>-42$ $\therefore x>-6$

따라서 연립부등식의 해는

$x\ge -4$



이므로 음의 정수 x는 -4, -3, -2, -1의 4개이다. 답 4

08 $4x-1\ge 7(x-1)$에서 $4x-1\ge 7x-7$

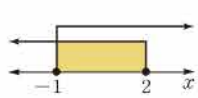
$-3x\ge -6$ $\therefore x\le 2$

$\frac{x}{2}+0.6\ge -\frac{x}{10}$에서 $5x+6\ge -x$

$6x\ge -6$ $\therefore x\ge -1$

따라서 연립부등식의 해는

$-1\le x\le 2$



이때 $-4\le -2x\le 2$이므로

$-3\le -2x+1\le 3$ $\therefore -3\le A\le 3$

즉 A의 최댓값은 3, 최솟값은 -3이므로 구하는 합은

$3+(-3)=0$ 답 ②

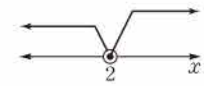
09 $1-5x>3(x-5)$에서 $1-5x>3x-15$

$-8x>-16$ $\therefore x<2$

$0.7x+1.4\le 0.9x+1$에서 $7x+14\le 9x+10$

$-2x\le -4$ $\therefore x\ge 2$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



답 ⑤

10 $x+10\le -4x-5$에서 $5x\le -15$

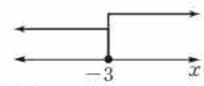
$\therefore x\le -3$

$2x-1\le 6x+11$에서 $-4x\le 12$

$\therefore x\ge -3$

따라서 연립부등식의 해는

$x=-3$



$x=-3$을 $4x^2+ax-9=0$에 대입하면

$36-3a-9=0$, $-3a=-27$

$\therefore a=9$ 답 9

11 $-6<-\frac{1}{2}x+4<10$에서 $-10<-\frac{1}{2}x<6$

$\therefore -12<x<20$

따라서 $a=-12$, $b=20$이므로

$a+b=8$ 답 ③

12 주어진 부등식에서

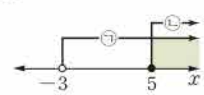
$\begin{cases} 2x-1<4x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+5\le 7x-10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-2x<6$ $\therefore x>-3$

㉡에서 $-3x\le -15$ $\therefore x\ge 5$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x\ge 5$



답 ⑤

13 주어진 부등식에서

$\begin{cases} \frac{x-7}{4}<\frac{x}{2}-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{x}{2}-3<\frac{x-4}{3} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x-7<2x-12$

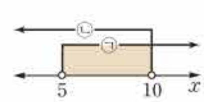
$-x<-5$ $\therefore x>5$

㉡에서 $3x-18<2x-8$

$\therefore x<10$

따라서 주어진 부등식의 해는

$5<x<10$



이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$6+7+8+9=30$ 답 30

14 $3-x<5x+a$에서 $-6x<a-3$

$\therefore x>\frac{-a+3}{6}$

$6x+b\ge 2x-11$에서 $4x\ge -b-11$

$\therefore x\ge \frac{-b-11}{4}$

주어진 그림에서 각 부등식의 해가 $x>1$, $x\ge -4$이므로 $\frac{-a+3}{6}=1$, $\frac{-b-11}{4}=-4$

$-a+3=6$, $-b-11=-16$

$\therefore a=-3,\ b=5$

$\therefore ab=-15$ 답 -15

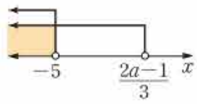
15 $x+1<2(a-x)$에서 $x+1<2a-2x$

$3x<2a-1$ $\therefore x<\dfrac{2a-1}{3}$

$3x-2>5x+8$에서 $-2x>10$

$\therefore x<-5$

이때 연립부등식의 해가 $x<-5$가 되도록 두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-5\le\dfrac{2a-1}{3}$, $2a-1\ge-15$

$2a\ge-14$ $\therefore a\ge-7$ 답 $a\ge-7$

Q BOX: $\dfrac{2a-1}{3}<-5$인 경우 주어진 연립부등식의 해는 $x<\dfrac{2a-1}{3}$이 된다.

16 $6x+a\le3x+5$에서 $3x\le5-a$

$\therefore x\le\dfrac{5-a}{3}$ …… ㉠

$3x+5\le(b+4)x+3b$에서

$(-b-1)x\le3b-5$ …… ㉡

이때 부등식의 해가 $-2\le x\le3$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x\le3$, 부등식 ㉡의 해는 $x\ge-2$이어야 한다.

즉 $-b-1<0$이므로 $x\ge\dfrac{3b-5}{-b-1}$

따라서 $\dfrac{5-a}{3}=3$, $\dfrac{3b-5}{-b-1}=-2$이므로

$5-a=9$, $3b-5=2b+2$

$\therefore a=-4,\ b=7$

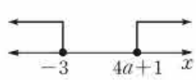
$\therefore b-a=11$ 답 11

17 $x-1\ge4a$에서 $x\ge4a+1$

$6x+3\le2x-9$에서 $4x\le-12$

$\therefore x\le-3$

이때 연립부등식이 해를 갖지 않도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$4a+1>-3$, $4a>-4$

$\therefore a>-1$ 답 ②

Q BOX: $4a+1=-3$이면 주어진 연립부등식은 $\begin{cases}x\ge-3\\x\le-3\end{cases}$ 이므로 연립부등식의 해는 $x=-3$

18 주어진 부등식에서

$\begin{cases}4(1+2x)\le9x+2 & \cdots\cdots ㉠\\ 9x+2\le7x-2a & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

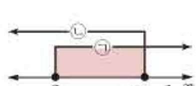
㉠에서 $4+8x\le9x+2$

$-x\le-2$ $\therefore x\ge2$

㉡에서 $2x\le-2a-2$

$\therefore x\le-a-1$

이때 주어진 부등식이 해를 갖도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-a-1\ge2$, $-a\ge3$ $\therefore a\le-3$

따라서 실수 a의 최댓값은 -3이다. 답 -3

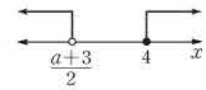
19 $3(x-1)<x+a$에서 $3x-3<x+a$

$2x<a+3$ $\therefore x<\dfrac{a+3}{2}$

$\dfrac{1}{2}x-1\ge-\dfrac{x}{8}+\dfrac{3}{2}$에서 $4x-8\ge-x+12$

$5x\ge20$ $\therefore x\ge4$

이때 연립부등식이 해를 갖지 않도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\dfrac{a+3}{2}\le4$, $a+3\le8$

$\therefore a\le5$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2+3+4+5=15$ 답 ③

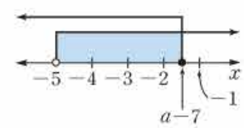
20 $x-6<3x+4$에서 $-2x<10$

$\therefore x>-5$

$5x+a\ge6x+7$에서 $-x\ge-a+7$

$\therefore x\le a-7$

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$-2\le a-7<-1$

$\therefore 5\le a<6$ 답 ④

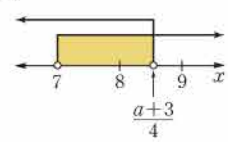
21 $4x-3<a$에서 $4x<a+3$

$\therefore x<\dfrac{a+3}{4}$

$0.3(x+1)>1+0.2x$에서 $3(x+1)>10+2x$

$3x+3>10+2x$ $\therefore x>7$

이때 연립부등식을 만족시키는 자연수 x가 1개뿐이므로 오른쪽 그림에서

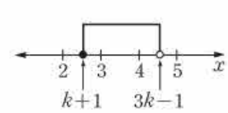


$8<\dfrac{a+3}{4}\le9$

$32<a+3\le36$ $\therefore 29<a\le33$

따라서 정수 a는 30, 31, 32, 33의 4개이다. 답 4

22 부등식 $k+1\le x<3k-1$을 만족시키는 정수 x가 3과 4뿐이려면 오른쪽 그림에서

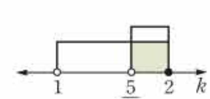


$2<k+1\le3$, $4<3k-1\le5$

를 동시에 만족시켜야 한다.

즉 $1<k\le2$, $\dfrac{5}{3}<k\le2$이므로

오른쪽 그림에서



$\dfrac{5}{3}<k\le2$ 답 ⑤

Q BOX: $4<3k-1\le5$에서 $5<3k\le6$ $\therefore \dfrac{5}{3}<k\le2$

23 장미를 x송이 산다고 하면 튤립은 $(15-x)$송이 살 수 있으므로

$37000 \le 2000(15-x)+3000x \le 40000$

$37 \le 2(15-x)+3x \le 40$

$37 \le x+30 \le 40 \quad \therefore 7 \le x \le 10$

따라서 장미는 7송이 이상 10송이 이하 살 수 있다.

답 ④

24 학생 수를 x라 하면 귤의 개수는 $4x+21$이므로

$6(x-1)+1 \le 4x+21 < 6(x-1)+5$,

즉 $\begin{cases} 6(x-1)+1 \le 4x+21 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+21 < 6(x-1)+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6x-5 \le 4x+21$

$2x \le 26 \quad \therefore x \le 13$

㉡에서 $4x+21 < 6x-1$

$-2x < -22 \quad \therefore x > 11$

따라서 연립부등식의 해는

$11 < x \le 13$

이므로 학생 수가 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

25 6월 한 달 동안 교육비에서 x %, 나머지 항목에서 5 %를 줄인 금액은

$60 \cdot \frac{x}{100} + 240 \cdot \frac{5}{100}$ (만 원)

이고, 이것은 5월의 월 소비 총액의 7 % 이상을 줄인 금액이므로

$60 \cdot \frac{x}{100} + 240 \cdot \frac{5}{100} \ge 300 \cdot \frac{7}{100}$

$60x+1200 \ge 2100, \quad 60x \ge 900$

$\therefore x \ge 15 \quad \cdots\cdots ㉠$

6월 한 달 동안 교육비에서 5 %, 나머지 항목에서 x %를 줄인 금액은

$60 \cdot \frac{5}{100} + 240 \cdot \frac{x}{100}$ (만 원)

이고, 이것은 5월의 월 소비 총액의 15 % 이하를 줄인 금액이므로

$60 \cdot \frac{5}{100} + 240 \cdot \frac{x}{100} \le 300 \cdot \frac{15}{100}$

$300+240x \le 4500, \quad 240x \le 4200$

$\therefore x \le \frac{35}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $15 \le x \le \frac{35}{2}$ 답 $15 \le x \le \frac{35}{2}$

26 $|x-a|<6$에서 $-6<x-a<6$

$\therefore a-6<x<a+6$

$a+6$이 정수이고 정수 x의 최댓값이 9이므로

$a+5=9 \quad \therefore a=4$ 답 4

27 $|ax-5| \ge b$에서

$ax-5 \le -b$ 또는 $ax-5 \ge b$

$ax \le 5-b$ 또는 $ax \ge 5+b$

(i) $a>0$일 때,

$x \le \frac{5-b}{a}$ 또는 $x \ge \frac{5+b}{a}$

이때 주어진 부등식의 해가 $x \le -2$ 또는 $x \ge 6$이므로 $\frac{5-b}{a}=-2, \frac{5+b}{a}=6$

$\therefore 2a-b=-5, 6a-b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{5}{2}, b=10$

(ii) $a<0$일 때,

$x \ge \frac{5-b}{a}$ 또는 $x \le \frac{5+b}{a}$

이때 주어진 부등식의 해가 $x \le -2$ 또는 $x \ge 6$이므로 $\frac{5-b}{a}=6, \frac{5+b}{a}=-2$

$\therefore 6a+b=5, 2a+b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{5}{2}, b=-10$

그런데 $a<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{5}{2}, b=10$

$\therefore ab=25$ 답 ⑤

28 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$\frac{2}{7}a+2<0, \quad \frac{2}{7}a<-2$

$\therefore a<-7$

따라서 정수 a의 최댓값은 -8이다. 답 ③

29 (i) $x+2 \ge 0$, 즉 $x \ge -2$일 때,

$3x+4>x+2, \quad 2x>-2$

$\therefore x>-1$

그런데 $x \ge -2$이므로 $x>-1$

(ii) $x+2<0$, 즉 $x<-2$일 때,

$3x+4>-x-2, \quad 4x>-6$

$\therefore x>-\frac{3}{2}$

그런데 $x<-2$이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x>-1$

$\therefore a=-1$ 답 -1

30 (i) $x-4 \ge 0$, 즉 $x \ge 4$일 때,

$2(x-4) \ge 13-x, \quad 2x-8 \ge 13-x$

$3x \ge 21 \quad \therefore x \ge 7$

그런데 $x \ge 4$이므로 $x \ge 7$

(ii) $x-4<0$, 즉 $x<4$일 때,

$-2(x-4) \ge 13-x, \quad -2x+8 \ge 13-x$

$-x \ge 5 \quad \therefore x \le -5$

그런데 $x<4$이므로 $x \le -5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x \le -5$ 또는 $x \ge 7$

따라서 자연수 x의 최솟값은 7이다. 답 7

Q BOX

상수 m, n, k에 대하여 부등식 $|mx+n| \le k$의 해가 존재하지 않는다.
➡ $|mx+n| \ge 0$이므로 $k<0$이다.

정수 x는
$a-5, a-4, \cdots, a+5$

31 (i) $x<0$일 때,

$-x-(x-2)>4, \qquad -2x+2>4$

$-2x>2 \qquad \therefore\ x<-1$

그런데 $x<0$이므로 $\qquad x<-1$

> $|x|=-x$,
> $|x-2|=-(x-2)$

(ii) $0\le x<2$일 때,

$x-(x-2)>4$에서 $2>4$이므로 $0\le x<2$에서 주어진 부등식의 해는 없다.

> $|x|=x$,
> $|x-2|=-(x-2)$

(iii) $x\ge2$일 때,

$x+(x-2)>4, \qquad 2x-2>4$

$2x>6 \qquad \therefore\ x>3$

그런데 $x\ge2$이므로 $\qquad x>3$

> $|x|=x$,
> $|x-2|=x-2$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x<-1$ 또는 $x>3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$a+b=2$ 답 ⑤

32 $||x+3|-1|\le2$에서 $\qquad -2\le|x+3|-1\le2$

$-1\le|x+3|\le3$

그런데 $|x+3|\ge0$이므로 $\qquad 0\le|x+3|\le3$

$-3\le x+3\le3 \qquad \therefore\ -6\le x\le0$ 답 ②

다른 풀이 $||x+3|-1|\le2$에서

(i) $x+3\ge0$, 즉 $x\ge-3$일 때,

$|(x+3)-1|\le2, \qquad |x+2|\le2$

$-2\le x+2\le2 \qquad \therefore\ -4\le x\le0$

그런데 $x\ge-3$이므로 $\qquad -3\le x\le0$

(ii) $x+3<0$, 즉 $x<-3$일 때,

$|-(x+3)-1|\le2, \qquad |-x-4|\le2$

$-2\le-x-4\le2, \qquad 2\le-x\le6$

$\therefore\ -6\le x\le-2$

그런데 $x<-3$이므로 $\qquad -6\le x<-3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-6\le x\le0$

33 (i) $x<2$일 때,

$-(x-2)-(x-4)\le k, \qquad -2x+6\le k$

$-2x\le k-6 \qquad \therefore\ x\ge-\dfrac{k-6}{2}$

그런데 $x<2$이므로 $\qquad -\dfrac{k-6}{2}\le x<2$

> $k>2$에서 $k-6>-4$
> $\therefore\ -\dfrac{k-6}{2}<2$

(ii) $2\le x<4$일 때,

$(x-2)-(x-4)\le k$에서 $2\le k$이므로 $2\le x<4$에서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(iii) $x\ge4$일 때,

$(x-2)+(x-4)\le k, \qquad 2x-6\le k$

$2x\le k+6 \qquad \therefore\ x\le\dfrac{k+6}{2}$

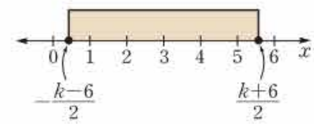
그런데 $x\ge4$이므로 $\qquad 4\le x\le\dfrac{k+6}{2}$

> $k>2$에서 $k+6>8$
> $\therefore\ \dfrac{k+6}{2}>4$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-\dfrac{k-6}{2}\le x\le\dfrac{k+6}{2}$

이때 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 5이므로 다음 그림에서



$5\le\dfrac{k+6}{2}<6, \qquad 10\le k+6<12$

$\therefore\ 4\le k<6$ 답 $4\le k<6$

> $0<-\dfrac{k-6}{2}\le1$에서 k의 값의 범위를 구하여도 $4\le k<6$으로 같다.

쌤한마디

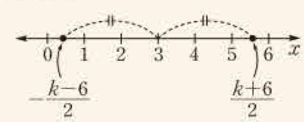
$-\dfrac{k-6}{2}=3-\dfrac{k}{2}$는 3보다 $\dfrac{k}{2}$만큼 작은 수이고,

$\dfrac{k+6}{2}=3+\dfrac{k}{2}$는 3보다 $\dfrac{k}{2}$만큼 큰 수이므로

$-\dfrac{k-6}{2}$과 $\dfrac{k+6}{2}$은 수직선에서 3을 기준으로 같은 거리만큼 떨어져 있는 수이다.

따라서 $-\dfrac{k-6}{2}\le x\le\dfrac{k+6}{2}$을 만족시키는 정수 x의 개수가 5이려면 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5이어야 한다.

즉 다음 그림에서



$0<-\dfrac{k-6}{2}\le1$, $5\le\dfrac{k+6}{2}<6$

이어야 한다.

도전! 수능 기출

55쪽

01 (1st) 각 부등식의 해를 구한다.

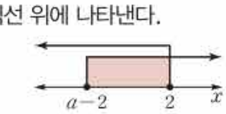
$x-2\le2x-a$에서 $\qquad -x\le-a+2$

$\therefore\ x\ge a-2$

$3x-4\le12-5x$에서 $\qquad 8x\le16 \qquad \therefore\ x\le2$

(2nd) 공통부분이 있도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

연립부등식이 해를 갖도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(3rd) a의 최댓값을 구한다.

따라서 $a-2\le2$이므로 $\qquad a\le4$

즉 a의 최댓값은 4이다. 답 ④

02 (1st) 부등식의 해를 구한다.

$|x-a|<2$에서 $\qquad -2<x-a<2$

$\therefore\ a-2<x<a+2$

(2nd) 자연수 a의 값을 구한다.

a가 자연수이므로 위의 부등식을 만족시키는 정수 x는

$a-1$, a, $a+1$

따라서 $(a-1)+a+(a+1)=33$이므로

$3a=33 \qquad \therefore\ a=11$ 답 ①

03 (1st) 각 부등식의 해를 구한다.

$2x+5\le 9$에서 $\quad 2x\le 4 \quad \therefore x\le 2$

$|x-3|\le 7$에서 $\quad -7\le x-3\le 7$

$\therefore -4\le x\le 10$

(2nd) 정수 x의 개수를 구한다.

주어진 연립부등식의 해는

$-4\le x\le 2$

이므로 정수 x는 $-4, -3, \cdots, 2$의 7개이다. 답 7

04 (1st) $3x-1\ge 0$일 때, 부등식의 해를 구한다.

$3x-1\ge 0$, 즉 $x\ge\frac{1}{3}$일 때,

$3x-1<x+a, \quad 2x<a+1 \quad \therefore x<\frac{a+1}{2}$

그런데 $x\ge\frac{1}{3}$이므로 $\quad \frac{1}{3}\le x<\frac{a+1}{2}$

(2nd) $3x-1<0$일 때, 부등식의 해를 구한다.

$3x-1<0$, 즉 $x<\frac{1}{3}$일 때,

$-(3x-1)<x+a, \quad -3x+1<x+a$

$-4x<a-1 \quad \therefore x>-\frac{a-1}{4}$

그런데 $x<\frac{1}{3}$이므로 $\quad -\frac{a-1}{4}<x<\frac{1}{3}$

(3rd) 부등식의 해를 구한다.

주어진 부등식의 해는 $\quad -\frac{a-1}{4}<x<\frac{a+1}{2}$

(4th) 양수 a의 값을 구한다.

부등식의 해가 $-1<x<3$이므로

$\frac{a+1}{2}=3, \ -\frac{a-1}{4}=-1$

$\therefore a=5$ 답 ⑤

Q BOX

$a>0$이므로
$\frac{a+1}{2}>\frac{1}{3}$

이차방정식
$ax^2+2b'x+c=0$의 해는
$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

$\frac{1}{3}-\left(-\frac{a-1}{4}\right)$
$=\frac{1}{3}+\frac{a-1}{4}$
$=\frac{3a+1}{12}>0$
이므로 $\frac{1}{3}>-\frac{a-1}{4}$

$x<\frac{a+1}{2}$은 $x<3$과 같고, $x>-\frac{a-1}{4}$은 $x>-1$과 같다.

08 이차부등식 Ⓦ 56쪽

01 $f(x)g(x)<0$에서

$f(x)>0,\ g(x)<0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)>0$

(i) $f(x)>0,\ g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<a$ 또는 $x>e$

(ii) $f(x)<0,\ g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x<c$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)<0$의 해는

$x<a$ 또는 $0<x<c$ 또는 $x>e$ 답 ⑤

02 $ax^2+(b-m)x+c-n>0$에서

$ax^2+bx+c>mx+n$

부등식 $ax^2+bx+c>mx+n$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<-5$ 또는 $x>3$

답 $x<-5$ 또는 $x>3$

03 이차방정식 $x^2-8x+4=0$의 해는

$x=4\pm 2\sqrt{3}$

이므로 이차부등식 $x^2-8x+4>0$의 해는

$x<4-2\sqrt{3}$ 또는 $x>4+2\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=4-2\sqrt{3}$, $\beta=4+2\sqrt{3}$이므로

$\beta-\alpha=4\sqrt{3}$ 답 ③

04 ① $x^2-x-2<0$에서 $\quad (x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

② $x^2+6x+9=(x+3)^2\ge 0$

즉 $x^2+6x+9\le 0$의 해는 $x=-3$이다.

③ $x^2+4x+5=(x+2)^2+1\ge 1$

즉 $x^2+4x+5>0$의 해는 모든 실수이다.

④ $-x^2+x-1\le 0$에서 $\quad x^2-x+1\ge 0$

그런데 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

⑤ $-4x^2+4x-1>0$에서 $\quad 4x^2-4x+1<0$

그런데 $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

답 ⑤

05 $x^2+2x-15\le 0$에서 $\quad (x+5)(x-3)\le 0$

$\therefore -5\le x\le 3$

① $|x-1|\le 3$에서 $\quad -3\le x-1\le 3$

$\therefore -2\le x\le 4$

② $|x-1|\le 4$에서 $\quad -4\le x-1\le 4$

$\therefore -3\le x\le 5$

③ $|x+1|\le 3$에서 $\quad -3\le x+1\le 3$

$\therefore -4\le x\le 2$

④ $|x+1|\le4$에서 $-4\le x+1\le4$
$\therefore -5\le x\le3$
⑤ $|x+2|\le5$에서 $-5\le x+2\le5$
$\therefore -7\le x\le3$
따라서 주어진 이차부등식과 해가 같은 것은 ④이다.
답 ④

06 해가 $x\le-3$ 또는 $x\ge7$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+3)(x-7)\ge0$ $\therefore x^2-4x-21\ge0$
이 부등식이 $-x^2+2ax+3b\le0$, 즉 $x^2-2ax-3b\ge0$과 같으므로
$2a=4$, $3b=21$ $\therefore a=2$, $b=7$
$\therefore b-a=5$
답 5

07 해가 $x=1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-1)^2\le0$ $\therefore x^2-2x+1\le0$
이 부등식이 $x^2+ax+b\le0$과 같으므로
$a=-2$, $b=1$
이것을 $ax^2+bx+6>0$에 대입하면
$-2x^2+x+6>0$, $2x^2-x-6<0$
$(2x+3)(x-2)<0$ $\therefore -\frac{3}{2}<x<2$
따라서 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.
답 3

08 $f(x)>0$의 해가 $-6<x<1$이므로
$f(x)=a(x+6)(x-1)$ $(a<0)$
이라 하면 $f(-1)=20$이므로
$a\cdot5\cdot(-2)=20$ $\therefore a=-2$
따라서 $f(x)=-2(x+6)(x-1)$이므로
$f(3)=-2\cdot9\cdot2=-36$
답 ①

09 $f(x)<0$의 해가 $-4<x<8$이므로
$f(x)=a(x+4)(x-8)$ $(a>0)$
이라 하면
$f(3x-1)=a(3x-1+4)(3x-1-8)$
$=9a(x+1)(x-3)$
$f(3x-1)>0$, 즉 $9a(x+1)(x-3)>0$에서
$(x+1)(x-3)>0$ ($\because a>0$)
$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$
따라서 자연수 x의 최솟값은 4이다.
답 4

10 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-3, 0)$, $(1, 0)$에서 만나므로
$f(x)=a(x+3)(x-1)$ $(a<0)$
이라 하면
$f\left(\frac{x-k}{2}\right)=a\left(\frac{x-k}{2}+3\right)\left(\frac{x-k}{2}-1\right)$
$=\frac{a}{4}(x-k+6)(x-k-2)$

QBOX

$f\left(\frac{x-k}{2}\right)<0$, 즉 $\frac{a}{4}(x-k+6)(x-k-2)<0$에서
$(x-k+6)(x-k-2)>0$ ($\because a<0$)
$\therefore x<k-6$ 또는 $x>k+2$
이것이 $x<-1$ 또는 $x>7$과 같으므로
$k-6=-1$, $k+2=7$
$\therefore k=5$
답 ⑤

다른 풀이 $f\left(\frac{x-k}{2}\right)<0$에서 $\frac{x-k}{2}=t$로 놓으면 주어진 그래프에서 $f(t)<0$을 만족시키는 t의 값의 범위는
$t<-3$ 또는 $t>1$이므로
$\frac{x-k}{2}<-3$ 또는 $\frac{x-k}{2}>1$
$\therefore x<k-6$ 또는 $x>k+2$
이것이 $x<-1$ 또는 $x>7$과 같으므로
$k-6=-1$, $k+2=7$
$\therefore k=5$

11 $x^2-3|x-1|<2x+3$에서
(i) $x\ge1$일 때,
$|x-1|=x-1$
$x^2-3(x-1)<2x+3$, $x^2-5x<0$
$x(x-5)<0$ $\therefore 0<x<5$
그런데 $x\ge1$이므로 $1\le x<5$
(ii) $x<1$일 때,
$|x-1|=-(x-1)$
$x^2+3(x-1)<2x+3$, $x^2+x-6<0$
$(x+3)(x-2)<0$ $\therefore -3<x<2$
그런데 $x<1$이므로 $-3<x<1$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$-3<x<5$
따라서 $\alpha=-3$, $\beta=5$이므로
$\alpha^2+\beta^2=34$
답 ④

12 $x^2+5|x|-14\le0$에서
(i) $x\ge0$일 때,
$x^2+5x-14\le0$, $(x+7)(x-2)\le0$
$\therefore -7\le x\le2$
그런데 $x\ge0$이므로 $0\le x\le2$
(ii) $x<0$일 때,
$x^2-5x-14\le0$, $(x+2)(x-7)\le0$
$\therefore -2\le x\le7$
그런데 $x<0$이므로 $-2\le x<0$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$-2\le x\le2$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은
$(-2)+(-1)+0+1+2=0$
답 0

13 $|x^2-4x+3|+1\ge|x-4|+\frac{1}{2}x^2$에서
$(x-1)(x-3)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=3$
$|(x-1)(x-3)|+1\ge|x-4|+\frac{1}{2}x^2$

(i) $x<1$일 때,

$$x^2-4x+3+1 \ge -(x-4)+\frac{1}{2}x^2$$

$$x^2-6x \ge 0, \qquad x(x-6) \ge 0$$

$\therefore$ $x \le 0$ 또는 $x \ge 6$

그런데 $x<1$이므로 $\quad x \le 0$

Q BOX: $|x^2-4x+3|=x^2-4x+3$, $|x-4|=-(x-4)$

(ii) $1 \le x<3$일 때,

$$-(x^2-4x+3)+1 \ge -(x-4)+\frac{1}{2}x^2$$

$\therefore$ $3x^2-10x+12 \le 0$

그런데 $3x^2-10x+12=3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{11}{3} \ge \frac{11}{3}$이므로 해는 없다.

$|x^2-4x+3|=-(x^2-4x+3)$, $|x-4|=-(x-4)$

(iii) $3 \le x<4$일 때,

$$x^2-4x+3+1 \ge -(x-4)+\frac{1}{2}x^2$$

$$x^2-6x \ge 0, \qquad x(x-6) \ge 0$$

$\therefore$ $x \le 0$ 또는 $x \ge 6$

그런데 $3 \le x<4$이므로 해는 없다.

$|x^2-4x+3|=x^2-4x+3$, $|x-4|=-(x-4)$

(iv) $x \ge 4$일 때,

$$x^2-4x+3+1 \ge x-4+\frac{1}{2}x^2$$

$$x^2-10x+16 \ge 0, \qquad (x-2)(x-8) \ge 0$$

$\therefore$ $x \le 2$ 또는 $x \ge 8$

그런데 $x \ge 4$이므로 $\quad x \ge 8$

$|x^2-4x+3|=x^2-4x+3$, $|x-4|=x-4$

이상에서 주어진 부등식의 해는

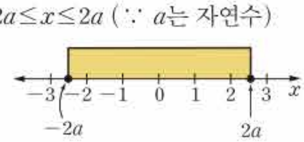
$x \le 0$ 또는 $x \ge 8$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=8$이므로

$\beta-\alpha=8$ 답 8

14 $x^2-4a^2 \le 0$에서 $\quad (x+2a)(x-2a) \le 0$

$\therefore$ $-2a \le x \le 2a$ ($\because$ a는 자연수)



이때 $-2a \le x \le 2a$를 만족시키는 정수 x가 5개이려면 위의 그림과 같아야 하므로

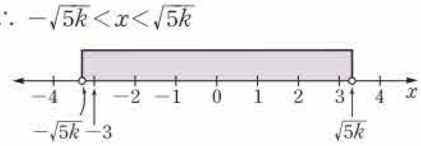
$2 \le 2a<3 \qquad \therefore$ $1 \le a<\frac{3}{2}$

따라서 자연수 a의 값은 1이다. 답 1

15 $5k-x^2>0$에서 $\quad x^2-5k<0$

$(x+\sqrt{5k})(x-\sqrt{5k})<0$

$\therefore$ $-\sqrt{5k}<x<\sqrt{5k}$



이때 $-\sqrt{5k}<x<\sqrt{5k}$를 만족시키는 정수 x가 7개이려면 위의 그림과 같아야 하므로

$3<\sqrt{5k} \le 4, \qquad 9<5k \le 16$

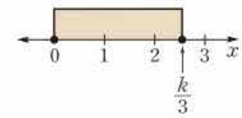
$\therefore$ $\frac{9}{5}<k \le \frac{16}{5}$ 답 ③

16 $3x^2-kx \le 0$에서 $\quad x(3x-k) \le 0$

(i) $k>0$일 때,

$0 \le x \le \frac{k}{3}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$2 \le \frac{k}{3}<3 \qquad \therefore$ $6 \le k<9$

따라서 정수 k는 6, 7, 8이다.

(ii) $k=0$일 때,

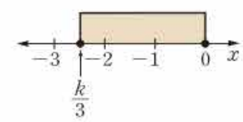
$x^2 \le 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x는 0뿐이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k<0$일 때,

$\frac{k}{3} \le x \le 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-3<\frac{k}{3} \le -2 \qquad \therefore$ $-9<k \le -6$

따라서 정수 k는 -6, -7, -8이다.

이상에서 정수 k의 최댓값은 8, 최솟값은 -8이므로 구하는 차는

$8-(-8)=16$ 답 ②

17 이차부등식 $x^2+8x+a \le 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $x^2+8x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-a=0 \qquad \therefore$ $a=16$ 답 16

18 이차부등식 $ax^2+bx+c \ge 0$의 해가 2뿐이므로 $a<0$이고

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2$

즉 $ax^2+bx+c=ax^2-4ax+4a$이므로

$b=-4a$, $c=4a$

이것을 $bx^2+cx+8a<0$에 대입하면

$-4ax^2+4ax+8a<0$

$x^2-x-2<0$ ($\because$ $a<0$)

$a<0$에서 $-4a>0$이므로 부등식의 양변을 $-4a$로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$(x+1)(x-2)<0$

$\therefore$ $-1<x<2$ 답 $-1<x<2$

19 이차부등식 $kx^2+2(k^2+2k)x-k-2 \ge 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로

$k<0$ $\quad$ ...... ㉠

이차방정식 $kx^2+2(k^2+2k)x-k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k^2+2k)^2-k(-k-2)=0$

$(k^2+2k)^2+k^2+2k=0$

$(k^2+2k)(k^2+2k+1)=0$

$k(k+2)(k+1)^2=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=-2$ 또는 $k=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-2$ 또는 $k=-1$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$(-2)\cdot(-1)=2$ 답 2

20 이차부등식 $9x^2-2(a-1)x+1\le0$이 해를 가지려면 이차방정식 $9x^2-2(a-1)x+1=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-9\ge0$

$a^2-2a-8\ge0,\quad (a+2)(a-4)\ge0$

$\therefore a\le-2$ 또는 $a\ge4$

답 $a\le-2$ 또는 $a\ge4$

21 $(k-4)x^2+2(k-4)x-7>0$에서

(i) $k>4$일 때,

이차함수 $y=(k-4)x^2+2(k-4)x-7$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $k=4$일 때,

$0\cdot x^2+0\cdot x-7=-7<0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

(iii) $k<4$일 때,

주어진 부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $(k-4)x^2+2(k-4)x-7=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-4)^2-(k-4)\cdot(-7)>0$

$k^2-k-12>0,\quad (k+3)(k-4)>0$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>4$

그런데 $k<4$이므로 $k<-3$

이상에서 k의 값의 범위는

$k<-3$ 또는 $k>4$

따라서 k의 값이 아닌 것은 ④이다. 답 ④

22 이차부등식 $x^2-3ax+2a(a-1)\ge0$의 해가 모든 실수이어야 하므로 이차방정식 $x^2-3ax+2a(a-1)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3a)^2-4\cdot2a(a-1)\le0$

$a^2+8a\le0,\quad a(a+8)\le0$

$\therefore -8\le a\le0$ 답 ③

23 $(k+1)x^2+2(k+1)x+5>0$에서

(i) $k=-1$일 때,

$0\cdot x^2+0\cdot x+5=5>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $k\ne-1$일 때,

모든 실수 x에 대하여 부등식 $(k+1)x^2+2(k+1)x+5>0$이 성립하려면

$k+1>0\quad \therefore k>-1$ …… ㉠

이차방정식 $(k+1)x^2+2(k+1)x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k+1)\cdot5<0$

$k^2-3k-4<0,\quad (k+1)(k-4)<0$

$\therefore -1<k<4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-1<k<4$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는

$-1\le k<4$

따라서 정수 k는 $-1, 0, 1, 2, 3$의 5개이다.

답 ②

24 $x^2-(m+3)x+3m<4(x-k)$에서

$x^2-(m+7)x+3m+4k<0$

이 이차부등식이 항상 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-(m+7)x+3m+4k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=\{-(m+7)\}^2-4(3m+4k)>0$

$\therefore m^2+2m+49-16k>0$ …… ㉠

이차부등식 ㉠이 m의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 m에 대한 이차방정식 $m^2+2m+49-16k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=1^2-(49-16k)<0$

$16k<48\quad \therefore k<3$

따라서 정수 k의 최댓값은 2이다. 답 2

25 주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 이차부등식 $x^2+4ax+12>0$이 항상 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+4ax+12=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-12<0,\quad 4a^2-12<0$

$a^2-3<0,\quad (a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})<0$

$\therefore -\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ 답 ⑤

26 주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 이차부등식 $x^2-(k-2)x+k+6\ge0$이 항상 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(k-2)x+k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k-2)\}^2-4(k+6)\le0$

$k^2-8k-20\le0,\quad (k+2)(k-10)\le0$

$\therefore -2\le k\le10$

따라서 $M=10$, $m=-2$이므로

$M+m=8$ 답 ②

Q BOX

$y=(k+1)x^2+2(k+1)x+5$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축과 만나지 않는다.

$y=x^2+4ax+12$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축과 만나지 않는다.

$y=x^2-3ax+2a(a-1)$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

$y=x^2-(k-2)x+k+6$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

27 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 부등식

$(m-5)x^2+2(m-5)x-2\le 0$ …… ㉠

이 항상 성립해야 한다.

(i) $m=5$일 때,

$0\cdot x^2+0\cdot x-2=-2<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $m\ne 5$일 때,

모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉠이 성립하려면

$m-5<0 \quad \therefore m<5$ …… ㉡

$y=(m-5)x^2+2(m-5)x-2$의 그래프가 위로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

이차방정식 $(m-5)x^2+2(m-5)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-5)^2-(m-5)\cdot(-2)\le 0$

$m^2-8m+15\le 0, \quad (m-3)(m-5)\le 0$

$\therefore 3\le m\le 5$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $3\le m<5$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$3\le m\le 5$

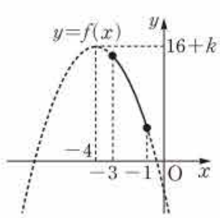
따라서 모든 정수 m의 값의 합은

$3+4+5=12$ 답 12

28 $f(x)=-x^2-8x+k$라 하면

$f(x)=-(x+4)^2+16+k$

$-3\le x\le -1$에서 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(-1)\ge 0$에서

$-1+8+k\ge 0$

$\therefore k\ge -7$

따라서 정수 k의 최솟값은 -7이다. 답 ①

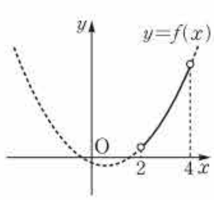
29 $x^2-3ax>4a^2$에서

$x^2-3ax-4a^2>0$

$f(x)=x^2-3ax-4a^2$이라 하면

$f(0)=-4a^2\le 0$

이고, $2<x<4$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(2)\ge 0$이어야 하므로

$4-6a-4a^2\ge 0, \quad 2a^2+3a-2\le 0$

$(a+2)(2a-1)\le 0$

$\therefore -2\le a\le \frac{1}{2}$ 답 $-2\le a\le \frac{1}{2}$

30 $y=2x^2-3x+1$의 그래프가 $y=3x^2+x-4$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$2x^2-3x+1<3x^2+x-4$

의 해와 같으므로

$x^2+4x-5>0, \quad (x+5)(x-1)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>1$

답 $x<-5$ 또는 $x>1$

31 $y=-x^2+7x+a$의 그래프가 직선 $y=x-3$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$-x^2+7x+a>x-3,$

즉 $x^2-6x-a-3<0$ …… ㉠

의 해와 같으므로 ㉠의 해가 $2<x<b$이다.

이때 해가 $2<x<b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)(x-b)<0$

$\therefore x^2-(b+2)x+2b<0$

이 부등식이 ㉠과 같으므로

$6=b+2, \ -a-3=2b$

$\therefore a=-11, \ b=4$

$\therefore b-a=15$ 답 15

32 $y=kx^2-4x$의 그래프가 직선 $y=-2kx+9$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$kx^2-4x<-2kx+9,$

즉 $kx^2+2(k-2)x-9<0$

이 성립해야 하므로 $k<0$ …… ㉠

이차방정식 $kx^2+2(k-2)x-9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-k\cdot(-9)<0$

$k^2+5k+4<0, \quad (k+4)(k+1)<0$

$\therefore -4<k<-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-4<k<-1$

따라서 모든 정수 k의 값의 곱은

$(-3)\cdot(-2)=6$ 답 ④

33 새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각

$(16+x)$ cm, $(24-x)$ cm

이므로 넓이가 144 cm^2 이상이 되려면

$(16+x)(24-x)\ge 144, \quad x^2-8x-240\le 0$

$(x+12)(x-20)\le 0 \quad \therefore -12\le x\le 20$

그런데 $0\le x<24$이어야 하므로

$x\ge 0$이고 $16+x>0$, $24-x>0$이므로 $0\le x<24$

$0\le x\le 20$

따라서 x의 최댓값은 20이다. 답 20

34 농구공의 지면으로부터의 높이가 8 m 이상이려면

$-5t^2+13t+2\ge 8, \quad 5t^2-13t+6\le 0$

$(5t-3)(t-2)\le 0 \quad \therefore \frac{3}{5}\le t\le 2$

따라서 농구공의 지면으로부터의 높이가 8 m 이상인 시간은 $2-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$(초) 동안이다. 답 ③

35 $x^2-3x-4\le0$에서 $\quad (x+1)(x-4)\le0$

$\therefore -1\le x\le4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

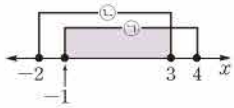
$x^2+6\ge2x^2-x$에서 $\quad x^2-x-6\le0$

$(x+2)(x-3)\le0$

$\therefore -2\le x\le3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\le x\le3$



해가 $-1\le x\le3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-3)\le0 \quad \therefore x^2-2x-3\le0$

양변에 -2를 곱하면

$-2x^2+4x+6\ge0$

이 부등식이 $ax^2+bx+6\ge0$과 같으므로

$a=-2,\ b=4$

$\therefore a+b=2$

답 ①

36 주어진 부등식에서

$\begin{cases} 5x^2+3x-1\le3x^2-x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2-x+5\le2x^2+x+13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 2x^2+4x-6\le0$

$x^2+2x-3\le0, \quad (x+3)(x-1)\le0$

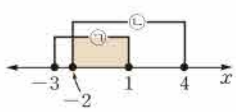
$\therefore -3\le x\le1$

㉡에서 $\quad x^2-2x-8\le0$

$(x+2)(x-4)\le0 \quad \therefore -2\le x\le4$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2\le x\le1$



따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개이다.

답 ②

37 $x^2-2x-15>0$에서 $\quad (x+3)(x-5)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2-7|x|+10\le0$에서

(i) $x\ge0$일 때,

$x^2-7x+10\le0, \quad (x-2)(x-5)\le0$

$\therefore 2\le x\le5$

그런데 $x\ge0$이므로 $\quad 2\le x\le5$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+7x+10\le0, \quad (x+5)(x+2)\le0$

$\therefore -5\le x\le-2$

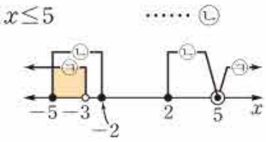
그런데 $x<0$이므로 $\quad -5\le x\le-2$

(i), (ii)에서 $x^2-7|x|+10\le0$의 해는

$-5\le x\le-2$ 또는 $2\le x\le5 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5\le x<-3$



따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$-5+(-4)=-9$

답 -9

Q BOX

$\frac{a}{3}=1$이면 ㉡에서

$x\le1$

따라서 ㉠, ㉡의 공통부분이 $-6<x<1$이다.

$a=-3$이면 두 부등식을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위가

$-3<x<-1$

이므로 정수 x의 값은 -2뿐이다.

38 $3x^2+5x<2(x^2+3)$에서 $\quad x^2+5x-6<0$

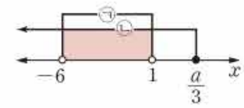
$(x+6)(x-1)<0$

$\therefore -6<x<1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x+a\ge4x$에서 $\quad -3x\ge-a$

$\therefore x\le\frac{a}{3} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $-6<x<1$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{a}{3}\ge1 \quad \therefore a\ge3$

답 $a\ge3$

39 $(x-a)(x-b)>0$에서

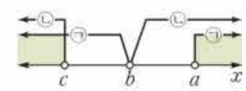
$x<b$ 또는 $x>a \quad \cdots\cdots$ ㉠

$(x-b)(x-c)>0$에서

$x<c$ 또는 $x>b \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<c$ 또는 $x>a$



이므로

$a=2,\ c=-5$

이것을 $ax^2+9x+c\ge0$에 대입하면

$2x^2+9x-5\ge0, \quad (x+5)(2x-1)\ge0$

$\therefore x\le-5$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$

따라서 자연수 x의 최솟값은 1이다.

답 1

40 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2x\le2x^2+3a$, 즉 $x^2+2x+3a\ge0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2x+3a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=1^2-3a\le0$

$\therefore a\ge\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots$ ㉠

모든 실수 x에 대하여 부등식 $2x^2+3a<3x^2-4x+10$, 즉 $x^2-4x+10-3a>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-4x+10-3a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-2)^2-(10-3a)<0$

$-6+3a<0 \quad \therefore a<2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad \frac{1}{3}\le a<2$

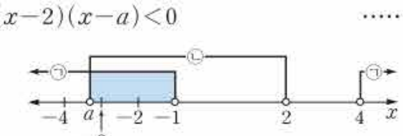
답 $\frac{1}{3}\le a<2$

41 $x^2-3x-4>0$에서 $\quad (x+1)(x-4)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2-(a+2)x+2a<0$에서

$(x-2)(x-a)<0 \quad \cdots\cdots$ ㉡



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 -2와 -3뿐이려면 위의 그림과 같아야 하므로

$-4\le a<-3$

답 ③

Q BOX

42 $x^2-5|x|<0$에서

(i) $x\ge0$일 때,

$x^2-5x<0,\quad x(x-5)<0$

$\therefore\ 0<x<5$

그런데 $x\ge0$이므로 $\quad 0<x<5$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+5x<0,\quad x(x+5)<0$

$\therefore\ -5<x<0$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -5<x<0$

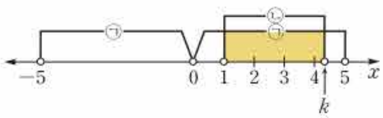
(i), (ii)에서 $x^2-5|x|<0$의 해는

$-5<x<0$ 또는 $0<x<5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-(k+1)x+k<0$에서 $\quad (x-1)(x-k)<0$

(iii) $k>1$일 때,

$1<x<k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

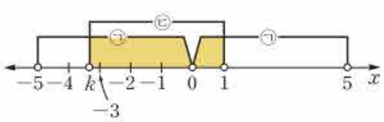


㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 3개이려면 위의 그림과 같아야 하므로

$k>4$

(iv) $k<1$일 때,

$k<x<1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢



㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 x가 3개이려면 위의 그림과 같아야 하므로

$-4\le k<-3$

(iii), (iv)에서

$-4\le k<-3$ 또는 $k>4$

따라서 k의 최솟값은 -4이다. $\quad$ 답 -4

43 한 모서리의 길이가 x $(x>3)$인 정육면체의 부피는 $\quad x^3$

모서리의 길이는 양수이므로
$x>0,\ x-3>0,$
$x+6>0,\ x-1>0,$
$x+3>0$
$\therefore\ x>3$

직육면체 A의 부피는

$x(x-3)(x+6)=x^3+3x^2-18x$

직육면체 B의 부피는

$x(x-1)(x+3)=x^3+2x^2-3x$

이때 정육면체의 부피는 직육면체 A의 부피보다 크고 직육면체 B의 부피보다 작으므로

$x^3+3x^2-18x<x^3<x^3+2x^2-3x$

$\therefore\ \begin{cases} x^3+3x^2-18x<x^3 & \cdots\cdots ㉠\\ x^3<x^3+2x^2-3x & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $\quad 3x^2-18x<0$

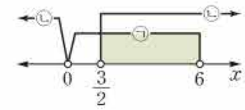
$3x(x-6)<0 \qquad \therefore\ 0<x<6$

㉡에서 $\quad 2x^2-3x>0$

$x(2x-3)>0 \qquad \therefore\ x<0$ 또는 $x>\dfrac{3}{2}$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\dfrac{3}{2}<x<6$



그런데 $x>3$이므로

$3<x<6$

따라서 자연수 x는 4, 5의 2개이다. $\quad$ 답 2

44 주어진 그림에서 길의 넓이는

$(2x+10)(2x+6)-10\cdot6=4x^2+32x\,(\mathrm{m}^2)$

화단의 넓이와 길의 넓이의 합

길의 넓이가 $80\ \mathrm{m}^2$ 이상 $132\ \mathrm{m}^2$ 이하이어야 하므로

$80\le4x^2+32x\le132$

$\therefore\ 20\le x^2+8x\le33,$

즉 $\begin{cases} 20\le x^2+8x & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+8x\le33 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $\quad x^2+8x-20\ge0$

$(x+10)(x-2)\ge0$

$\therefore\ x\le-10$ 또는 $x\ge2$

㉡에서 $\quad x^2+8x-33\le0$

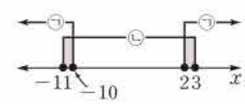
$(x+11)(x-3)\le0$

$\therefore\ -11\le x\le3$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-11\le x\le-10$

또는 $2\le x\le3$



그런데 $x>0$이므로 $\quad 2\le x\le3$ $\quad$ 답 ④

길의 폭은 양수이므로
$x>0$

45 $ax^2-3ax+a-5=0$이 이차방정식이므로

$a\ne0$

이차방정식 $ax^2-3ax+a-5=0$이 실근을 가지므로

주어진 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖거나 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3a)^2-4a(a-5)\ge0$

$5a^2+20a\ge0,\quad 5a(a+4)\ge0$

$\therefore\ a\le-4$ 또는 $a\ge0$

그런데 $a\ne0$이므로

$a\le-4$ 또는 $a>0$ $\quad$ 답 ①

46 이차방정식 $x^2+2kx-k+12=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=k^2-(-k+12)<0$

$k^2+k-12<0,\quad (k+4)(k-3)<0$

$\therefore\ -4<k<3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $2x^2-(k+1)x-k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

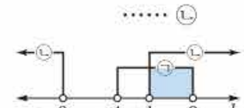
$D_2=\{-(k+1)\}^2-4\cdot2\cdot(-k-1)>0$

$k^2+10k+9>0,\quad (k+9)(k+1)>0$

$\therefore\ k<-9$ 또는 $k>-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<k<3$



따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$0+1+2=3$ $\quad$ 답 ②

W 08 이차부등식

47 x에 대한 이차방정식
$x^2+2(3k-1)x+k^2-2ak+1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(3k-1)^2-(k^2-2ak+1)\geq 0$$

$$\therefore\ 4k^2+(a-3)k\geq 0$$

이 이차부등식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 k에 대한 이차방정식 $4k^2+(a-3)k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(a-3)^2-4\cdot 4\cdot 0\leq 0$$

$(a-3)^2\leq 0 \qquad \therefore\ a=3$ 　　답 3

48 이차방정식 $x^2-(k+2)x+k+5=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

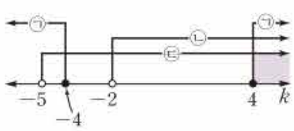
(i) $D=\{-(k+2)\}^2-4(k+5)\geq 0$

$k^2-16\geq 0, \qquad (k+4)(k-4)\geq 0$

$\therefore\ k\leq -4$ 또는 $k\geq 4$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $\alpha+\beta=k+2>0 \qquad \therefore\ k>-2$ ⋯⋯ ㉡

(iii) $\alpha\beta=k+5>0 \qquad \therefore\ k>-5$ ⋯⋯ ㉢



이상에서 　$k\geq 4$

따라서 실수 k의 최솟값은 4이다. 　　답 ④

49 이차방정식 $x^2+(5k-k^2-4)x+6-3k=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=6-3k<0$

$-3k<-6 \qquad \therefore\ k>2$ ⋯⋯ ㉠

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

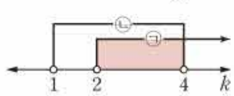
(두 근의 합)<0

$\alpha+\beta=-(5k-k^2-4)<0$

$k^2-5k+4<0, \qquad (k-1)(k-4)<0$

$\therefore\ 1<k<4$ ⋯⋯ ㉡

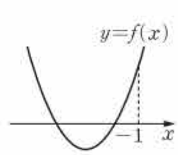
㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면



$2<k<4$

답 $2<k<4$

50 $f(x)=x^2+2kx-k+6$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(-k+6)\geq 0$$

$k^2+k-6\geq 0, \qquad (k+3)(k-2)\geq 0$

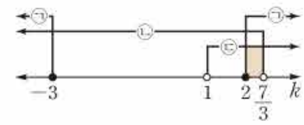
$\therefore\ k\leq -3$ 또는 $k\geq 2$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $f(-1)=1-2k-k+6>0$

$-3k+7>0 \qquad \therefore\ k<\frac{7}{3}$ ⋯⋯ ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-k$이므로

$-k<-1 \qquad \therefore\ k>1$ ⋯⋯ ㉢

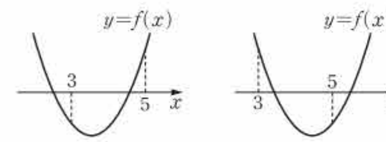


이상에서 　$2\leq k<\frac{7}{3}$ 　　답 $2\leq k<\frac{7}{3}$

51 $x^2-8x+15=0$에서 　$(x-3)(x-5)=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=5$

즉 이차방정식 $x^2-ax+a-1=0$의 두 근 중에서 한 근만이 3과 5 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2-ax+a-1$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(3)f(5)<0$이므로

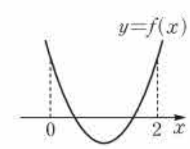
$f(3)<0$, $f(5)>0$
또는 $f(3)>0$, $f(5)<0$

$(9-3a+a-1)(25-5a+a-1)<0$

$(a-4)(a-6)<0 \qquad \therefore\ 4<a<6$

따라서 자연수 a의 값은 5이다. 　　답 5

52 $f(x)=x^2-(k+2)x-k+1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 0과 2 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+2)\}^2-4(-k+1)\geq 0$

$k^2+8k\geq 0, \qquad k(k+8)\geq 0$

$\therefore\ k\leq -8$ 또는 $k\geq 0$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $f(0)=-k+1>0 \qquad \therefore\ k<1$ ⋯⋯ ㉡

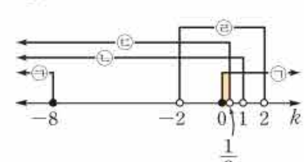
(iii) $f(2)=4-2(k+2)-k+1>0$

$-3k+1>0 \qquad \therefore\ k<\frac{1}{3}$ ⋯⋯ ㉢

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=\frac{k+2}{2}$이므로

$0<\frac{k+2}{2}<2 \qquad \therefore\ -2<k<2$ ⋯⋯ ㉣



이상에서 　$0\leq k<\frac{1}{3}$ 　　답 $0\leq k<\frac{1}{3}$

53 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+2mX-2m+15=0$ ⋯⋯ ㉠

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 ㉠의 두 근이 서로 다른 양수이어야 하므로

(i) ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=m^2-(-2m+15)>0$$

$$m^2+2m-15>0, \qquad (m+5)(m-3)>0$$

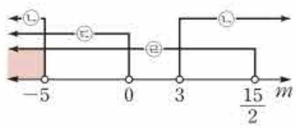
$$\therefore\ m<-5 \text{ 또는 } m>3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

(ii) (두 근의 합)$=-2m>0$

$$\therefore\ m<0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

(iii) (두 근의 곱)$=-2m+15>0$

$$-2m>-15 \qquad \therefore\ m<\frac{15}{2} \qquad \cdots\cdots ㉣$$



이상에서 $\quad m<-5$ 답 ②

54 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2-mX+m^2-5m-14=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 ㉠의 두 근이 서로 다른 부호이어야 하므로

(두 근의 곱)$=m^2-5m-14<0$

$(m+2)(m-7)<0 \qquad \therefore\ -2<m<7$

따라서 자연수 m은 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

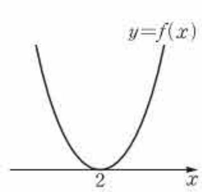
답 ④

도전! 수능 기출

64쪽

01 1st 조건 (나)를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타낸다.

조건 (나)에서 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\neq2$인 모든 실수이므로 이차함수 $f(x)$에서 x^2의 계수는 양수이고 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 점 $(2, 0)$에서 접한다.



2nd $f(x)=a(x-2)^2\ (a>0)$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(x)=a(x-2)^2\ (a>0)$이라 하면 조건 (가)에서 $f(0)=8$이므로

$4a=8 \qquad \therefore\ a=2$

3rd $f(5)$의 값을 구한다.

따라서 $f(x)=2(x-2)^2$이므로

$f(5)=2\cdot(5-2)^2=18$ 답 ④

02 1st 함수 $f(x)$의 그래프의 y절편을 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.

Q BOX

점 A는 y축 위의 점이다.

점 B는 점 A와 y좌표가 같다.

점 C는 점 B와 x좌표가 같다.

$f(0)=k^2+4$이므로 $\quad \mathrm{A}(0,\ k^2+4)$

$-x^2+2kx+k^2+4=k^2+4$에서

$x^2-2kx=0, \qquad x(x-2k)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2k$

$\therefore\ \mathrm{B}(2k,\ k^2+4),\ \mathrm{C}(2k,\ 0)$

2nd $g(k)$를 구한다.

$k>0$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=k^2+4,\ \overline{\mathrm{OC}}=2k$

$\therefore\ g(k)=2\{2k+(k^2+4)\}=2k^2+4k+8$

3rd 부등식 $14\le g(k)\le78$의 해를 구한다.

$14\le g(k)\le78$에서 $\qquad 14\le2k^2+4k+8\le78$

$\therefore\ 7\le k^2+2k+4\le39,$

$$\text{즉 }\begin{cases}7\le k^2+2k+4 & \cdots\cdots ㉠\\ k^2+2k+4\le39 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $\qquad k^2+2k-3\ge0$

$(k+3)(k-1)\ge0$

$\therefore\ k\le-3$ 또는 $k\ge1$

㉡에서 $\qquad k^2+2k-35\le0$

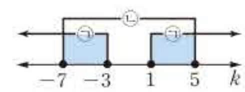
$(k+7)(k-5)\le0$

$\therefore\ -7\le k\le5$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-7\le k\le-3$

또는 $1\le k\le5$



그런데 $k>0$이므로 $\qquad 1\le k\le5$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$1+2+3+4+5=15$ 답 15

03 1st 각 부등식의 해를 구한다.

$x^2+4x-21\le0$에서 $\qquad (x+7)(x-3)\le0$

$\therefore\ -7\le x\le3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$x^2-5kx-6k^2>0$에서 $\qquad (x+k)(x-6k)>0$

$\therefore\ x<-k$ 또는 $x>6k\ (\because\ k>0) \qquad \cdots\cdots ㉡$

2nd 공통부분이 존재하도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하려면

$-k>-7$ 또는 $6k<3$

$k<7$ 또는 $k<\dfrac{1}{2} \qquad \therefore\ k<7$

3rd 양의 정수 k의 개수를 구한다.

따라서 양의 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

답 ③

04 1st 부등식 $mx\ge n$이 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건은 $m=0,\ n\le0$임을 이용하여 a의 값과 b의 값의 범위를 구한다.

부등식 $x-2\le g(x)\le f(x)$에서

$x-2\le(a-1)x+b\le2x^2+5x+2$

(i) $x-2\le(a-1)x+b$에서 $\qquad (a-2)x\ge-b-2$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$a-2=0,\ -b-2\le0$

$\therefore\ a=2,\ b\ge-2$

2nd a의 값을 주어진 부등식에 대입하여 b의 값의 범위를 구한다.

(ii) $(a-1)x+b\le 2x^2+5x+2$에서 $a=2$이므로

$x+b\le 2x^2+5x+2$

$\therefore\ 2x^2+4x+2-b\ge 0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2+4x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-2(2-b)\le 0$

$2b\le 0\qquad \therefore\ b\le 0$

(i), (ii)에서 $\quad -2\le b\le 0$

3rd $\beta-\alpha$의 최댓값을 구한다.

따라서 $\beta-\alpha$의 최댓값은

$0-(-2)=2$ 답 ③

$\beta-\alpha$가 최대이려면 β가 최대이고 α가 최소이어야 한다.

09 평면좌표

W 65쪽

01 $\overline{AB}=4\sqrt{5}$에서 $\overline{AB}^2=80$이므로

$(2b-2a)^2+(a-b)^2=80$

$4(b-a)^2+(a-b)^2=80$

$(a-b)^2=16$

$\therefore\ a-b=-4\ (\because\ a<b)$ 답 ②

02 $\overline{OB}=\sqrt{(-2)^2+(-8)^2}=2\sqrt{17}$

정사각형 OABC의 한 변의 길이를 x라 하면

$x^2+x^2=(2\sqrt{17})^2,\qquad 2x^2=68$

$\therefore\ x^2=34$

따라서 구하는 넓이는 $\quad x^2=34$ 답 ③

다른 풀이 정사각형의 두 대각선은 서로를 수직이등분하고 그 길이가 같으므로

$\overline{AC}=\overline{OB}=\sqrt{(-2)^2+(-8)^2}=2\sqrt{17}$

$\therefore\ \square OABC=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{17}=34$

두 대각선의 길이가 a, b인 마름모의 넓이
➡ $\dfrac{1}{2}ab$

03 두 점 A, B가 동시에 출발한 지 t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(0,\ -13+2t)$, $(-3t,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-3t)^2+(13-2t)^2}$

$=\sqrt{13t^2-52t+169}$

$=\sqrt{13(t-2)^2+117}$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 $t=2$일 때 최솟값 $\sqrt{117}=3\sqrt{13}$을 갖는다. 답 $3\sqrt{13}$

04 $P(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로 $\quad (a+3)^2+(-3)^2=(a-1)^2+(-5)^2$

$a^2+6a+18=a^2-2a+26$

$8a=8\qquad \therefore\ a=1$

$\therefore\ P(1,\ 0)$

또 $Q(0,\ b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$3^2+(b-3)^2=(-1)^2+(b-5)^2$

$b^2-6b+18=b^2-10b+26$

$4b=8\qquad \therefore\ b=2$

$\therefore\ Q(0,\ 2)$

$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

05 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+10)^2+b^2=(a-2)^2+b^2$

$a^2+20a+b^2+100=a^2-4a+b^2+4$

$24a=-96\qquad \therefore\ a=-4$

한편 $\overline{OP}=7$에서 $\overline{OP}^2=49$이므로

$(-4)^2+b^2=49\qquad \therefore\ b^2=33$

$\therefore\ b^2-a^2=33-16=17$ 답 ④

Q BOX

06 $\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(-2-4)^2}=3\sqrt{5}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(5-2)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{2}$,

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-5)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{AC}$

따라서 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다.

답 ③

쌤 한마디

세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle ABC$의 가장 긴 변의 길이가 c일 때

① $a^2+b^2>c^2$ ➡ $\triangle ABC$는 예각삼각형

② $a^2+b^2=c^2$ ➡ $\triangle ABC$는 직각삼각형

③ $a^2+b^2<c^2$ ➡ $\triangle ABC$는 둔각삼각형

즉 **06**번에서 가장 긴 변의 길이가 $3\sqrt{5}$이고

$(3\sqrt{5})^2+(3\sqrt{2})^2>(3\sqrt{5})^2$

이므로 $\triangle ABC$는 예각삼각형이다.

07 $\overline{AB}=\sqrt{(-3+1)^2+6^2}=2\sqrt{10}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(3+3)^2+(8-6)^2}=2\sqrt{10}$,

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-3)^2+(-8)^2}=4\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{10}\cdot2\sqrt{10}=20$ 답 ①

08 $C(a,\ b)\ (a>0,\ b<0)$라 하면 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$에서

제4사분면 위의 점은 x좌표가 양수, y좌표가 음수이다.

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$(2+2)^2+(1+1)^2=(a-2)^2+(b-1)^2$

$\therefore\ a^2-4a+b^2-2b-15=0$ ...... ㉠

$\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$에서

$(2+2)^2+(1+1)^2=(-2-a)^2+(-1-b)^2$

$\therefore\ a^2+4a+b^2+2b-15=0$ ...... ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$8a+4b=0\qquad\therefore\ b=-2a$

$b=-2a$를 ㉠에 대입하면

$a^2-4a+(-2a)^2-2\cdot(-2a)-15=0$

$5a^2=15,\qquad a^2=3$

$\therefore\ a=\sqrt{3}\ (\because\ a>0)$

$a=\sqrt{3}$을 $b=-2a$에 대입하면

$b=-2\sqrt{3}$

$\therefore\ C(\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$ 답 $(\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$

09 $\overline{AP}+\overline{PB}\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{\{3a-(a+1)\}^2+\{-6-(2-a)\}^2}$

$=\sqrt{5a^2-20a+65}$

$=\sqrt{5(a-2)^2+45}$

$(a-2)^2\ge0$이므로

$5(a-2)^2+45\ge45$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\sqrt{45}$, 즉 $3\sqrt{5}$이다.

따라서 구하는 a의 값은 2이다. 답 ⑤

10 $\sqrt{(a+5)^2+(b-2)^2}=\overline{AB}$,

$\sqrt{(a-1)^2+(b+6)^2}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(a+5)^2+(b-2)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+6)^2}$

$=\overline{AB}+\overline{BC}$

$\ge\overline{AC}$

$=\sqrt{(1+5)^2+(-6-2)^2}=10$

따라서 주어진 식의 최솟값은 10이다. 답 10

쌤 한마디

실수 a, b, x, y에 대하여 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$의 값은 두 점 $(a,\ b)$, $(x,\ y)$ 사이의 거리와 같다.

11 $O(0,\ 0)$, $P(a,\ b)$, $Q(4,\ 3)$, $R(7,\ -1)$, $S(3,\ -4)$라 하면

$\sqrt{a^2+b^2}=\overline{OP}$,

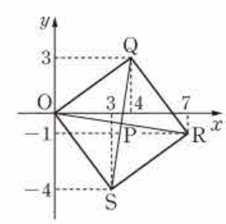
$\sqrt{(a-4)^2+(b-3)^2}=\overline{PQ}$,

$\sqrt{(a-7)^2+(b+1)^2}=\overline{PR}$,

$\sqrt{(a-3)^2+(b+4)^2}=\overline{PS}$

즉 주어진 식은

$\overline{OP}+\overline{PQ}+\overline{PR}+\overline{PS}$이므로 식의 값은 점 P가 오른쪽 그림과 같이 사각형 OSRQ의 두 대각선 OR, QS의 교점일 때 최소이다.



따라서 구하는 최솟값은

$\overline{OR}+\overline{QS}=\sqrt{7^2+(-1)^2}+\sqrt{(3-4)^2+(-4-3)^2}$

$=5\sqrt{2}+5\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

답 ④

12 $P(0,\ a)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2^2+(a-6)^2+(-3)^2+(a-2)^2$

$=2a^2-16a+53$

$=2(a-4)^2+21$

따라서 $a=4$일 때 주어진 식의 최솟값은 21이다.

답 ②

13 $P(a,\ a+1)$이라 하면

점 P의 x좌표를 a라 하면 점 P가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 y좌표는 $a+1$이다.

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(a-1)^2+(a+1+3)^2+(a+7)^2+(a+1-3)^2$

$=4a^2+16a+70$

$=4(a+2)^2+54$

따라서 $a=-2$일 때 주어진 식의 최솟값은 54이므로

$P(-2,\ -1)$ 답 $(-2,\ -1)$

14 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=(a-4)^2+b^2+(a+1)^2+(b-5)^2$

$+(a-6)^2+(b+8)^2$

$=3a^2-18a+3b^2+6b+142$

$=3(a-3)^2+3(b+1)^2+112$

W 09 평면좌표

이때 a, b가 실수이므로

$(a-3)^2\ge0$, $(b+1)^2\ge0$

$\therefore \overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2\ge112$

따라서 $a=3$, $b=-1$일 때 주어진 식의 최솟값은 112이므로 점 P의 좌표는 $(3, -1)$이다.

즉 점 $P(3, -1)$과 원점 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$ 　　답 $\sqrt{10}$

15 직선 BC를 x축으로 하고, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{\text{D}}$는 원점이다.

이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, B의 좌표를 각각 (a, b), $(-c, 0)$이라 하면 꼭짓점 C의 좌표는 $\boxed{(2c, 0)}$이므로

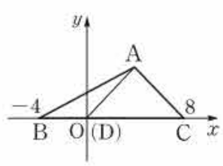
$2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-2c)^2+b^2\}$
$=\boxed{3a^2+3b^2+6c^2}$,

$\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2=\boxed{a^2+b^2+2c^2}$

$\therefore 2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2)$

답 (가) D (나) $(2c, 0)$ (다) $3a^2+3b^2+6c^2$
(라) $a^2+b^2+2c^2$

16 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이고 $B(-4, 0)$, $C(8, 0)$이다.



$\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BC}=4$, $\overline{CD}=\frac{2}{3}\overline{BC}=8$이므로 $B(-4, 0)$, $C(8, 0)$

$A(a, b)$라 하면 $\overline{AB}=9$에서 $\overline{AB}^2=81$이므로

$(a+4)^2+b^2=81$

$\therefore a^2+8a+b^2=65$ 　　...... ㉠

$\overline{AC}=6$에서 $\overline{AC}^2=36$이므로

$(a-8)^2+b^2=36$

$\therefore a^2-16a+b^2=-28$ 　　...... ㉡

$2\times$㉠+㉡을 하면 　$3a^2+3b^2=102$

$\therefore a^2+b^2=34$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{34}$ 　　답 $\sqrt{34}$

다른 풀이 $\overline{CD}=2\overline{BD}$이므로 　$\overline{BD} : \overline{CD}=1 : 2$

$\therefore \overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BC}=\frac{1}{3}\cdot12=4$

$2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2)$이므로

15번에서 $\overline{CD}=2\overline{BD}$이면 $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2)$

$2\cdot9^2+6^2=3(\overline{AD}^2+2\cdot4^2)$

$198=3\overline{AD}^2+96$, 　$\overline{AD}^2=34$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{34}$ ($\because \overline{AD}>0$)

17 $\frac{3\cdot12+5\cdot(-4)}{3+5}=2$이므로 　$P(2)$

$\frac{3\cdot12-5\cdot(-4)}{3-5}=-28$이므로 　$Q(-28)$

$\therefore \overline{PQ}=|2-(-28)|=30$ 　　답 30

18 두 점 A, B를 $A(a)$, $B(b)$라 하면 내분점 P의 좌표가 -1이므로

$\frac{2b+a}{2+1}=-1$ 　$\therefore a+2b=-3$ 　...... ㉠

외분점 Q의 좌표가 7이므로

$\frac{2b-a}{2-1}=7$ 　$\therefore -a+2b=7$ 　...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 　$a=-5$, $b=1$

$\therefore A(-5)$, $B(1)$

따라서 $\overline{AB}$의 중점이 $M(m)$이므로

$m=\frac{-5+1}{2}=-2$ 　　답 ③

19 $\overline{AB}$를 $4 : 3$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{4\cdot(-1)+3\cdot6}{4+3}, \frac{4\cdot10+3\cdot3}{4+3}\right)$

$\therefore (2, 7)$

$\overline{AB}$를 $4 : 3$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{4\cdot(-1)-3\cdot6}{4-3}, \frac{4\cdot10-3\cdot3}{4-3}\right)$

$\therefore (-22, 31)$

따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+(-22)}{2}, \frac{7+31}{2}\right)$ 　$\therefore (-10, 19)$

답 $(-10, 19)$

20 점 $P(a, b)$는 $\overline{AB}$를 $1 : 2$로 내분하는 점이므로

$a=\frac{1\cdot5+2\cdot(-4)}{1+2}=-1$, $b=\frac{1\cdot8+2\cdot2}{1+2}=4$

점 $Q(c, d)$는 $\overline{AB}$를 $2 : 1$로 내분하는 점이므로

$c=\frac{2\cdot5+1\cdot(-4)}{2+1}=2$, $d=\frac{2\cdot8+1\cdot2}{2+1}=6$

$\therefore ad+bc=2$ 　　답 ③

21 $\overline{PQ}$를 $k : 4$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{k\cdot2-4\cdot(-4)}{k-4}, \frac{k\cdot5-4\cdot(-1)}{k-4}\right)$

$\therefore \left(\frac{2k+16}{k-4}, \frac{5k+4}{k-4}\right)$

이 점이 직선 $x+y=-9$ 위에 있으므로

$\frac{2k+16}{k-4}+\frac{5k+4}{k-4}=-9$

$7k+20=-9k+36$

$16k=16$ 　$\therefore k=1$ 　　답 1

22 $\overline{AB}$를 $m : n$으로 내분하는 점이 x축 위에 있으므로 y좌표가 0이다.

$\overline{AB}$가 x축에 의하여 $m : n$으로 내분된다.
➡ $\overline{AB}$를 $m : n$으로 내분하는 점이 x축 위에 있다.

$\overline{AB}$를 $m : n$으로 내분하는 점의 y좌표는

$\frac{7m-3n}{m+n}=0$, 　$7m-3n=0$

$7m=3n$ 　$\therefore m : n=3 : 7$

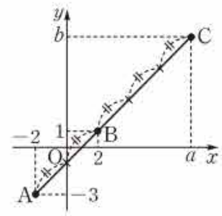
이때 m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=3$, $n=7$

$\therefore m-n=-4$ 　　답 ①

23 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\quad \overline{AB}:\overline{BC}=2:3$

$a>0$에서 점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $5:3$으로 외분하는 점이므로



$$a=\frac{5\cdot 2-3\cdot(-2)}{5-3}=8,$$

$$b=\frac{5\cdot 1-3\cdot(-3)}{5-3}=7$$

$\therefore ab=56$ 답 ⑤

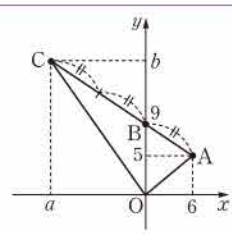
24 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6=27$이므로

$\triangle OAB:\triangle OAC=27:81=1:3$

$\therefore \overline{AB}:\overline{AC}=1:3$

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$a<0$에서 점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점이므로



$$a=\frac{3\cdot 0-2\cdot 6}{3-2}=-12,$$

$$b=\frac{3\cdot 9-2\cdot 5}{3-2}=17$$

$\therefore a+b=5$ 답 5

25 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표가 $(1, -3)$이므로

$$\frac{-6+a+10}{3}=1,\ \frac{0-5+b}{3}=-3$$

$\therefore a=-1,\ b=-4$

$\therefore a-b=3$ 답 3

26 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 $\triangle ABC$의 무게중심은 $\overline{AM}$을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$\left(\frac{2\cdot 4+1\cdot 7}{2+1},\ \frac{2\cdot(-1)+1\cdot 5}{2+1}\right)$$

$\therefore (5, 1)$ 답 $(5, 1)$

다른 풀이 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$라 하면 $\overline{BC}$의 중점의 좌표가 $(4, -1)$이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=4,\ \frac{y_1+y_2}{2}=-1$$

$\therefore x_1+x_2=8,\ y_1+y_2=-2$

따라서 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{7+x_1+x_2}{3},\ \frac{5+y_1+y_2}{3}\right) \quad \therefore (5, 1)$$

27 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 하면 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(-2, 1)$이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-2,\ \frac{y_1+y_2}{2}=1$$

$\therefore x_1+x_2=-4,\ y_1+y_2=2$ …… ㉠

$\overline{BC}$의 중점의 좌표가 $(3, -1)$이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2}=3,\ \frac{y_2+y_3}{2}=-1$$

$\therefore x_2+x_3=6,\ y_2+y_3=-2$ …… ㉡

$\overline{CA}$의 중점의 좌표가 $(5, 9)$이므로

$$\frac{x_3+x_1}{2}=5,\ \frac{y_3+y_1}{2}=9$$

$\therefore x_3+x_1=10,\ y_3+y_1=18$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$2(x_1+x_2+x_3)=12,\ 2(y_1+y_2+y_3)=18$

$\therefore x_1+x_2+x_3=6,\ y_1+y_2+y_3=9$

$\triangle ABC$의 무게중심의 좌표가 (a, b)이므로

$$a=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{6}{3}=2,$$

$$b=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$\therefore ab=6$ 답 ②

다른 풀이 $D(-2, 1)$, $E(3, -1)$, $F(5, 9)$라 하면 $\triangle ABC$의 무게중심은 $\triangle DEF$의 무게중심과 일치하므로 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+3+5}{3},\ \frac{1-1+9}{3}\right) \quad \therefore (2, 3)$$

따라서 $a=2,\ b=3$이므로 $\quad ab=6$

28 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.

$$\frac{a+b}{2}=\frac{0+8}{2},\ \frac{-1+5}{2}=\frac{3+ab}{2}$$

$\therefore a+b=8,\ ab=1$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=8^2-2\cdot 1=62$ 답 ⑤

29 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$라 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 각각의 중점이다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+x_1}{2},\ \frac{3+y_1}{2}\right)$이므로

$$\frac{1+x_1}{2}=6,\ \frac{3+y_1}{2}=-2$$

$\therefore x_1=11,\ y_1=-7$

$\therefore C(11, -7)$

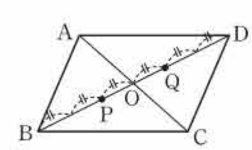
또 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+x_2}{2},\ \frac{-3+y_2}{2}\right)$이므로

$$\frac{-1+x_2}{2}=6,\ \frac{-3+y_2}{2}=-2$$

$\therefore x_2=13,\ y_2=-1$

$\therefore D(13, -1)$ 답 $C(11, -7)$, $D(13, -1)$

30 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O, 두 삼각형 ABC, ACD의 무게중심을 각각 P, Q라 하면



$\overline{BP}:\overline{PO}=\overline{DQ}:\overline{QO}=2:1$

$\therefore \overline{PO}=\frac{1}{3}\overline{BO},\ \overline{QO}=\frac{1}{3}\overline{DO}$

이때 $\overline{BO}=\overline{DO}$이므로 $\quad \overline{PO}=\overline{QO}$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표와 같으므로

$$\left(\frac{-4+2}{2},\ \frac{7+5}{2}\right) \quad \therefore (-1, 6)$$ 답 $(-1, 6)$

W 09 평면좌표

31 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 y좌표에서

$$\frac{a+2}{2}=\frac{b+4}{2} \qquad \therefore b=a-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\overline{AD}=\overline{CD}$에서 $\overline{AD}^2=\overline{CD}^2$이므로

$$(5-7)^2+(4-a)^2=(5+3)^2+(4-2)^2$$

$$a^2-8a-48=0, \qquad (a+4)(a-12)=0$$

$$\therefore a=12\ (\because a>0)$$

$a=12$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=10$

$$\therefore a+b=22$$

답 ②

32 $\overline{OP}$는 $\angle AOB$의 이등분선이므로

$$\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{AP}:\overline{BP}$$

이때

$$\overline{OA}=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5},\ \overline{OB}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$$

이므로

$$\overline{AP}:\overline{BP}=2\sqrt{5}:3\sqrt{5}=2:3$$

따라서 점 P는 $\overline{AB}$를 $2:3$으로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot3+3\cdot(-4)}{2+3},\ \frac{2\cdot6+3\cdot2}{2+3}\right)$$

$$\therefore \left(-\frac{6}{5},\ \frac{18}{5}\right)$$

$$\therefore \overline{OP}=\sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{18}{5}\right)^2}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$$

답 ③

33 $\overline{AC}$가 $\angle A$의 외각의 이등분선이므로

$$\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{OC}:\overline{BC}$$

이때

$$\overline{AO}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10},$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(7-6)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$$

이므로

$$\overline{OC}:\overline{BC}=2\sqrt{10}:\sqrt{10}=2:1$$

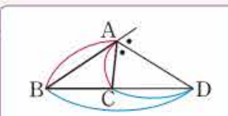
따라서 점 C는 $\overline{OB}$를 $2:1$로 외분하는 점이므로

$$a=\frac{2\cdot7-1\cdot0}{2-1}=14,$$

$$b=\frac{2\cdot(-1)-1\cdot0}{2-1}=-2$$

$$\therefore a-b=16$$

답 16



삼각형 ABC에서 $\overline{AD}$가 $\angle A$의 외각의 이등분선일 때,
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

34 $P(a,\ b)$라 하면 점 P가 직선 $y=-x+3$ 위의 점이므로

$$b=-a+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$Q(x,\ y)$라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$의 중점이므로

$$x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b-2}{2} \qquad \therefore a=2x,\ b=2y+2$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$2y+2=-2x+3 \qquad \therefore y=-x+\frac{1}{2}$$

답 $y=-x+\frac{1}{2}$

35 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=8$이므로

$$(x+1)^2+(y-3)^2-\{(x-2)^2+(y-4)^2\}=8$$

$$x^2+2x+y^2-6y+10$$

$$-(x^2-4x+y^2-8y+20)=8$$

$$6x+2y-18=0$$

$$\therefore 3x+y-9=0$$

답 $3x+y-9=0$

36 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점을 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$(x+4)^2+(y-5)^2=(x-3)^2+(y+8)^2$$

$$x^2+8x+y^2-10y+41=x^2-6x+y^2+16y+73$$

$$14x-26y-32=0$$

$$\therefore 7x-13y-16=0$$

답 $7x-13y-16=0$

도전! 수능 기출

W 71쪽

01 (1st) 점 A_3의 좌표를 구한다.

정사각형 $A_3A_4B_4C_4$는 한 변의 길이가 18이므로 점 A_3의 좌표는 $\quad(12,\ 0)$

(점 B_4의 x좌표)
$-$(정사각형 $A_3A_4B_4C_4$의 한 변의 길이)
$=30-18=12$

(2nd) 두 점 B_1, B_3의 좌표를 구한다.

정사각형 $OA_1B_1C_1$, $A_1A_2B_2C_2$, $A_2A_3B_3C_3$의 넓이의 비가 $1:4:9$이므로 각 정사각형의 한 변의 길이의 비는

$$\overline{OA_1}:\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}=1:2:3$$

이때 $\overline{OA_3}=12$이므로

$k+2k+3k=12$ (k는 상수)에서
$6k=12 \quad \therefore k=2$
$\therefore \overline{OA_1}=2,$
$\overline{A_1A_2}=4,$
$\overline{A_2A_3}=6$

$$\overline{OA_1}=2,\ \overline{A_1A_2}=4,\ \overline{A_2A_3}=6$$

$$\therefore B_1(2,\ 2),\ B_3(12,\ 6)$$

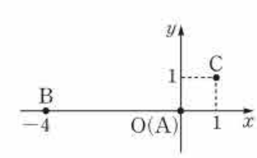
(3rd) $\overline{B_1B_3}^2$의 값을 구한다.

$$\therefore \overline{B_1B_3}^2=(12-2)^2+(6-2)^2=116$$

답 116

02 (1st) 세 지점 A, B, C의 위치를 좌표평면 위에 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 A 지점이 원점, B 지점이 x축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면



$$A(0,\ 0),\ B(-4,\ 0),\ C(1,\ 1)$$

(2nd) 물류창고를 지으려는 지점의 좌표를 구한다.

물류창고를 지으려는 지점을 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로 $\quad \overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서 $\quad a^2+b^2=(a+4)^2+b^2$

$$8a+16=0 \qquad \therefore a=-2$$

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서

$$(-2)^2+b^2=(-2-1)^2+(b-1)^2$$

$$2b=6 \qquad \therefore b=3$$

$$\therefore P(-2,\ 3)$$

3rd 물류창고를 지으려는 지점에서 A 지점에 이르는 거리를 구한다.

구하는 거리는

$\overline{PA}=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$ (km) 답 ②

03 1st 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용하여 $\overline{PB}$와 $\overline{PC}$의 길이의 비를 구한다.

$\triangle ABP$에서 $\overline{AP} /\!/ \overline{DC}$이므로

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{PB}:\overline{PC}$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-9-3)^2}=13$,

$\overline{AD}=\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

이므로

$\overline{PB}:\overline{PC}=13:5$

2nd 점 P의 좌표를 구한다.

점 P는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{13\cdot4-5\cdot(-5)}{13-5}, \frac{13\cdot0-5\cdot(-9)}{13-5}\right)$$

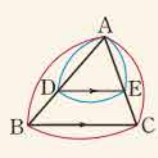
$\therefore \left(\frac{77}{8}, \frac{45}{8}\right)$ 답 ⑤

쌤한마디

평행선 사이의 선분의 길이의 비

$\triangle ABC$에서 두 점 D, E가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위의 점일 때, $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이면

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$
$=\overline{BC}:\overline{DE}$



04 1st 두 직사각형 ABCD, EFGH의 대각선의 교점의 좌표를 각각 구한다.

직사각형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선은 그 직사각형의 넓이를 이등분한다.

직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 $\overline{AC}$의 중점의 좌표와 같으므로

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{7+(-1)}{2}\right)$ $\therefore (1, 3)$

직사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표는 $\overline{EG}$의 중점의 좌표와 같으므로

$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right)$ $\therefore (-1, 0)$

2nd $12m$의 값을 구한다.

두 직사각형 ABCD, EFGH의 대각선의 교점을 지나는 직선의 기울기가 m이므로

두 점 $(1, 3)$, $(-1, 0)$을 지나는 직선

$m=\frac{3-0}{1-(-1)}=\frac{3}{2}$

$\therefore 12m=18$ 답 18

QBOX

10 직선의 방정식 W 72쪽

01 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

$$\left(\frac{2\cdot6+1\cdot(-3)}{2+1}, \frac{2\cdot(-2)+1\cdot7}{2+1}\right)$$

$\therefore (3, 1)$

따라서 점 $(3, 1)$을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식은

$x=3$ 답 $x=3$

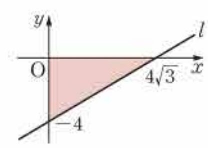
02 직선 l의 기울기는

$\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이고 점 $(\sqrt{3}, -3)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y+3=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})$ $\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-4$

따라서 직선 l의 x절편은 $4\sqrt{3}$, y절편은 -4이므로 구하는 넓이는

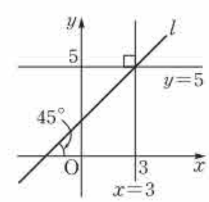


$\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}\cdot4=8\sqrt{3}$

x절편이 a, y절편이 b인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}|a||b|$

답 ①

03 두 직선 $x=3$, $y=5$는 서로 수직이고 점 $(3, 5)$에서 만난다.



오른쪽 그림과 같이 두 직선 $x=3$, $y=5$가 이루는 각을 이등분하고 기울기가 양수인 직선을 l이라 하면 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $45°$이므로 직선 l의 기울기는

$\tan 45°=1$

따라서 기울기가 1이고 점 $(3, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=1\cdot(x-3)$ $\therefore y=x+2$

답 $y=x+2$

04 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-5-1+3}{3}, \frac{-2+6+8}{3}\right)$ $\therefore (-1, 4)$

두 점 $(-1, 4)$, $(2, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{2+1}(x+1)$ $\therefore y=-2x+2$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$a+b=0$ 답 ③

05 두 점 $(-2, -6)$, $(4, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+6=\frac{-3+6}{4+2}(x+2)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x-5$

W 10 직선의 방정식

직선 $y=\frac{1}{2}x-5$가 점 $(a,\ -1)$을 지나므로

$-1=\frac{1}{2}a-5,\qquad -\frac{1}{2}a=-4$

$\therefore a=8$ 답 8

06 직선 AO의 방정식은

$y=-\frac{3}{2}x$ …… ㉠

직선 BC의 방정식은

$y=\frac{4-0}{-1+5}(x+5)$

$\therefore y=x+5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-2,\ y=3$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-2,\ 3)$이다.

답 ⑤

07 $x+ay=2a$에서 $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2}=1$

이 직선과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

$A(2a,\ 0),\ B(0,\ 2)$

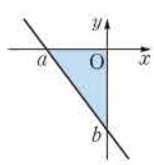
이때 $\overline{AB}=8$이므로

$\sqrt{(-2a)^2+2^2}=8,\qquad 2\sqrt{a^2+1}=8$

$a^2+1=16,\qquad a^2=15$

$\therefore a=\sqrt{15}\ (\because a>0)$ 답 ④

08 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$의 x절편은 a, y절편은 b이고 제1사분면을 지나지 않으므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



이때 색칠한 부분의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\cdot(-a)\cdot(-b)=5\qquad \therefore ab=10$ 답 10

09 점 A가 직선 BC 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{8-2}{1+1}=\frac{(k+1)-8}{k-1}$, 즉 $3=\frac{k-7}{k-1}$

$3k-3=k-7,\qquad 2k=-4\qquad \therefore k=-2$

$\therefore C(-2,\ -1)$

따라서 두 점 A, C 사이의 거리는

$\overline{AC}=\sqrt{(-2+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$

답 $\sqrt{10}$

10 세 점 A, B, C가 모두 직선 l 위의 점이려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{a+5}{-2-3}=\frac{-1+5}{(a-4)-3}$, 즉 $\frac{a+5}{-5}=\frac{4}{a-7}$

$(a+5)(a-7)=-20,\qquad a^2-2a-15=0$

$(a+3)(a-5)=0\qquad \therefore a=5\ (\because a>0)$

따라서 직선 l의 기울기는 $\frac{10}{-5}=-2$이고 점 $A(3,\ -5)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

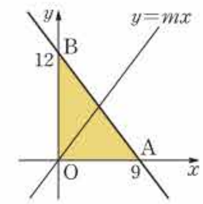
$y+5=-2(x-3)\qquad \therefore y=-2x+1$

따라서 직선 l의 y절편은 1이다. 답 ④

11 직선 $\frac{x}{9}+\frac{y}{12}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

$A(9,\ 0),\ B(0,\ 12)$

직선 $\frac{x}{9}+\frac{y}{12}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx$가 $\overline{AB}$의 중점을 지나야 한다.



직선 $y=mx$가 △OAB의 한 꼭짓점 O를 지나므로 직선 $y=mx$는 $\overline{AB}$의 중점을 지나야 한다.

이때 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{9+0}{2},\ \frac{0+12}{2}\right)\qquad \therefore \left(\frac{9}{2},\ 6\right)$

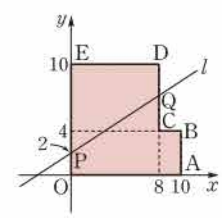
$x=\frac{9}{2},\ y=6$을 $y=mx$에 대입하면

$6=\frac{9}{2}m\qquad \therefore m=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

12 색칠한 부분의 넓이는

$8\cdot 10+2\cdot 4=88$

이므로 직선 l과 $\overline{OE}$, $\overline{CD}$의 교점을 각각 P, Q라 하면 사다리꼴 PQDE의 넓이가 44이어야 한다. 즉



$\frac{1}{2}\cdot(8+\overline{QD})\cdot 8=44\qquad \therefore \overline{QD}=3$

따라서 점 Q의 좌표는 $(8,\ 7)$이므로 두 점 $(0,\ 2)$, $(8,\ 7)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y-2=\frac{7-2}{8-0}(x-0)\qquad \therefore y=\frac{5}{8}x+2$

답 $y=\frac{5}{8}x+2$

13 $\overline{BD}:\overline{CD}=\triangle ABD:\triangle ADC=1:3$

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

즉 점 D는 $\overline{BC}$를 $1:3$으로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot 3+3\cdot(-5)}{1+3},\ \frac{1\cdot 1+3\cdot(-3)}{1+3}\right)$

$\therefore (-3,\ -2)$

따라서 두 점 $A(-1,\ 4)$, $D(-3,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{-3+1}(x+1)\qquad \therefore y=3x+7$

답 $y=3x+7$

14 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

$A(2,\ 0),\ B(0,\ 4)$

직선 l이 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 이등분하므로 $\overline{AB}$의 중점을 지난다.

이때 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, 2)$

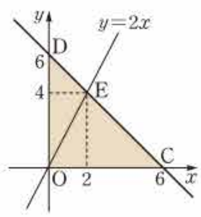
직선 l이 원점을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y=2x$

한편 직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 C, D라 하면

C$(6, 0)$, D$(0, 6)$

두 직선 $y=2x$, $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}=1$의 교점을 E라 하면 E$(2, 4)$이므로



$\triangle OCE=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=12$,

$\triangle OED=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2=6$

$\therefore S:T=12:6=2:1$ 답 ①

15 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq 0$이므로

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ac<0$, $bc>0$에서 a, b의 부호가 서로 다르므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

따라서 주어진 직선의 기울기는 양수이고 y절편은 음수이므로 직선의 개형은 ③이다. 답 ③

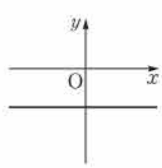
a와 c의 부호가 다르고, b와 c의 부호는 같으므로 a와 b의 부호는 다르다.

16 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq 0$이면

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

ㄱ. $a=0$, $bc>0$이면

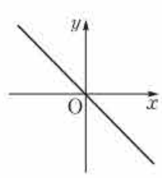
$-\frac{a}{b}=0$, $-\frac{c}{b}<0$



따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제3사분면과 제4사분면을 지난다.

ㄴ. $ab>0$, $c=0$이면

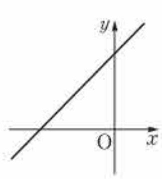
$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}=0$



따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

ㄷ. $ab<0$, $bc<0$이면

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}>0$



따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지나지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

17 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x-y-7)k+(2x+3y-1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x-y-7=0$, $2x+3y-1=0$

앞의 두 식을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=-1$

따라서 P$(2, -1)$이므로 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y+1=-(x-2)$ $\quad\therefore y=-x+1$

답 $y=-x+1$

18 점 (a, b)가 직선 $4x+y-1=0$ 위에 있으므로

$4a+b-1=0$ $\quad\therefore b=-4a+1$

이것을 $ax+by=-2$에 대입하면

$ax+(-4a+1)y=-2$

이 식을 a에 대하여 정리하면

$(x-4y)a+(y+2)=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-4y=0$, $y+2=0$

$\therefore x=-8$, $y=-2$

따라서 직선 $ax+by=-2$는 항상 점 $(-8, -2)$를 지나므로

$m=-8$, $n=-2$

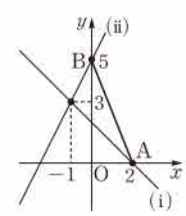
$\therefore mn=16$ 답 16

19 $y=mx+m+3$에서

$m(x+1)-(y-3)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 3)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 A$(2, 0)$을 지날 때,

$3m+3=0$

$\therefore m=-1$

(ii) 직선 ㉠이 점 B$(0, 5)$를 지날 때,

$m-2=0$ $\quad\therefore m=2$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$-1\le m\le 2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로 $\quad a+b=1$ 답 ④

20 $mx-y-m+1=0$에서

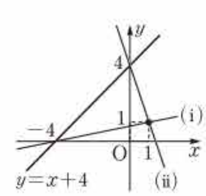
$m(x-1)-(y-1)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$을 지난다.

한편 $x-y+4=0$에서

$y=x+4$이므로 오른쪽 그림에서

x절편이 -4, y절편이 4인 직선



(i) 직선 ㉠이 점 $(-4, 0)$을 지날 때,

$-5m+1=0$ $\quad\therefore m=\frac{1}{5}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 4)$를 지날 때,

$-m-3=0$ $\quad\therefore m=-3$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

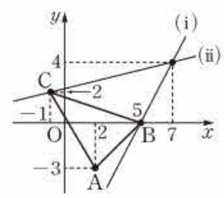
$-3<m<\frac{1}{5}$ 　　　　답 $-3<m<\frac{1}{5}$

21 $y=mx-7m+4$에서

$m(x-7)-(y-4)=0$ 　　　…… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(7, 4)$를 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $B(5, 0)$을 지날 때,

$-2m+4=0$

$\therefore m=2$

(ii) 직선 ㉠이 점 $C(-1, 2)$를 지날 때,

$-8m+2=0$ 　　$\therefore m=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$m<\frac{1}{4}$ 또는 $m>2$ 　　　답 $m<\frac{1}{4}$ 또는 $m>2$

22 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+3y-5+k(3x-y+9)=0$ (k는 실수) 　…… ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$4+3-5+k(6-1+9)=0$

$2+14k=0$ 　　$\therefore k=-\frac{1}{7}$

$k=-\frac{1}{7}$을 ㉠에 대입하면

$2x+3y-5-\frac{1}{7}(3x-y+9)=0$

$\frac{11}{7}x+\frac{22}{7}y-\frac{44}{7}=0$ 　　$\therefore x+2y-4=0$

따라서 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$ 　　　답 ②

$x+2y-4=0$에 $y=0$을 대입하면

$x-4=0$ 　$\therefore x=4$

$\therefore A(4, 0)$

또 $x=0$을 대입하면

$2y-4=0$ 　$\therefore y=2$

$\therefore B(0, 2)$

23 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$4x+5y-3+k(x-2y+9)=0$ (k는 실수) 　…… ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(-9, 1)$을 지나므로

$-36+5-3+k(-9-2+9)=0$

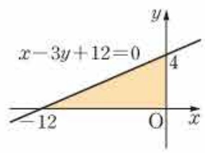
$-34-2k=0$ 　　$\therefore k=-17$

$k=-17$을 ㉠에 대입하면

$4x+5y-3-17(x-2y+9)=0$

$-13x+39y-156=0$ 　　$\therefore x-3y+12=0$

따라서 직선 $x-3y+12=0$의 x절편은 -12, y절편은 4이므로 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 4=24$

답 ③

24 $x-y+5=0$에 $y=0$을 대입하면

$x+5=0$ 　　$\therefore x=-5$ 　　$\therefore A(-5, 0)$

$3x+y-9=0$에 $y=0$을 대입하면

$3x-9=0$ 　　$\therefore x=3$ 　　$\therefore B(3, 0)$

이때 점 C를 지나는 직선의 방정식을

$x-y+5+k(3x+y-9)=0$ (k는 실수) 　…… ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하므로 $\overline{AB}$의 중점을 지난다.

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-5+3}{2}, 0\right)$ 　　$\therefore (-1, 0)$

직선 ㉠이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$-1+5+k(-3-9)=0$

$4-12k=0$ 　　$\therefore k=\frac{1}{3}$

$k=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$x-y+5+\frac{1}{3}(3x+y-9)=0$

$2x-\frac{2}{3}y+2=0$ 　　$\therefore 3x-y+3=0$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=3^2+(-1)^2=10$ 　　　답 10

25 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$7x+y-1+k(3x-y+a)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(7+3k)x+(1-k)y-1+ak=0$ 　…… ㉠

이 직선의 기울기는 $\frac{3k+7}{k-1}$이므로

㉠에서

$y=\frac{7+3k}{k-1}x+\frac{-1+ak}{k-1}$

이므로 기울기는 $\frac{3k+7}{k-1}$

이다.

$\frac{3k+7}{k-1}=-2$, 　　$3k+7=-2k+2$

$5k=-5$ 　　$\therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면

$4x+2y-1-a=0$

이 직선이 점 $(1, b)$를 지나므로

$4+2b-1-a=0$

$\therefore a-2b=3$ 　　　답 ④

26 직선 $x+ay-12=0$이 점 $(6, -2)$를 지나므로

$6-2a-12=0$ 　　$\therefore a=-3$

직선 $bx+cy-16=0$도 점 $(6, -2)$를 지나므로

$6b-2c-16=0$

$\therefore 3b-c-8=0$ 　　…… ㉠

두 직선 $x-3y-12=0$, $bx+cy-16=0$이 서로 수직이므로

$b-3c=0$ 　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b=3$, $c=1$

$\therefore a-b+c=-5$ 　　　답 ②

Q BOX

27 두 직선 $(k-3)x+4y-1=0$, $kx-y+4=0$이
(i) 평행하려면

$$\frac{k-3}{k}=\frac{4}{-1}\neq\frac{-1}{4},\qquad -k+3=4k$$

$$-5k=-3\qquad \therefore k=\frac{3}{5}$$

(ii) 수직이려면

$$(k-3)k+4\cdot(-1)=0,\qquad k^2-3k-4=0$$

$$(k+1)(k-4)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=4$$

(i), (ii)에서 $\quad a=\frac{3}{5},\ b=-1\ (\because b<0)$

$$\therefore 5a+b=5\cdot\frac{3}{5}-1=2$$

답 2

28 세 직선 $x-y+5=0$, $3x+y-9=0$, $ax-y+2=0$, 즉 $y=x+5$, $y=-3x+9$, $y=ax+2$가 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

> 두 직선 $x-y+5=0$, $3x+y-9=0$이 평행하지 않으므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

(i) 직선 $y=ax+2$가 두 직선 $y=x+5$, $y=-3x+9$의 교점을 지날 때,
$y=x+5$, $y=-3x+9$를 연립하여 풀면

$$x=1,\ y=6$$

직선 $y=ax+2$가 점 $(1, 6)$을 지나려면

$$6=a+2\qquad \therefore a=4$$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 직선 $y=x+5$ 또는 $y=-3x+9$와 평행할 때,

$$a=1 \text{ 또는 } a=-3$$

(i), (ii)에서 주어진 세 직선이 삼각형을 이루려면

$$a\neq4,\ a\neq1,\ a\neq-3$$

답 ③

29 주어진 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.

두 직선 $4x-y+7=0$, $ax-y-1=0$이 평행하려면

$$\frac{4}{a}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{7}{-1}\qquad \therefore a=4$$

두 직선 $4x-y+7=0$, $x+by-2=0$이 평행하려면

$$\frac{4}{1}=\frac{-1}{b}\neq\frac{7}{-2}\qquad \therefore b=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore a+b=\frac{15}{4}$$

답 ②

30 주어진 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 두 직선이 수직이어야 한다.

> 두 직선 $2x+y-9=0$, $x-5y+3=0$은 수직이 아니다.

두 직선 $2x+y-9=0$, $ax+y-2=0$이 수직이려면

$$2a+1=0\qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

두 직선 $x-5y+3=0$, $ax+y-2=0$이 수직이려면

$$a-5=0\qquad \therefore a=5$$

따라서 정수 a의 값은 5이다.

답 5

31 주어진 두 직선이 x축에서 만나므로 두 직선의 x절편은 같다.
$3x+(k-1)y-9=0$에 $y=0$을 대입하면

$$3x-9=0\qquad \therefore x=3$$

따라서 두 점 $(3, 0)$, $(0, -4)$를 지나는 직선의 방정식은

> x절편이 3, y절편이 -4인 직선

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$$

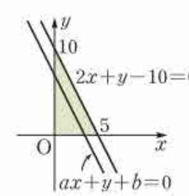
두 직선 $3x+(k-1)y-9=0$, $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$이 수직으로 만나므로

$$3\cdot\frac{1}{3}+(k-1)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$1-\frac{1}{4}k+\frac{1}{4}=0\qquad \therefore k=5$$

답 ⑤

32 직선 $2x+y-10=0$의 x절편은 5, y절편은 10이므로 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot5\cdot10=25$$

두 직선 $2x+y-10=0$, $ax+y+b=0$이 평행하므로

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{1}\neq\frac{-10}{b}\qquad \therefore a=2,\ b\neq-10$$

따라서 직선 $2x+y+b=0$의 x절편은 $-\frac{b}{2}$, y절편은 $-b$이고 이 직선이 색칠한 부분의 넓이를 이등분하므로

$$\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{b}{2}\right|\cdot|-b|=\frac{1}{2}\cdot25$$

$$\frac{b^2}{4}=\frac{25}{2}\qquad \therefore b^2=50$$

$$\therefore b^2-a^2=50-2^2=46$$

답 ①

33 직선 AH는 점 $A(-1, 4)$를 지나고 직선 $2x-3y-12=0$, 즉 $y=\frac{2}{3}x-4$와 수직이므로 직선 AH의 방정식은

> 직선 AH의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이다.

$$y-4=-\frac{3}{2}(x+1)\qquad \therefore 3x+2y-5=0$$

따라서 점 H는 두 직선 $2x-3y-12=0$, $3x+2y-5=0$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=3,\ y=-2$$

> $\begin{cases}2x-3y-12=0 & \cdots ㉠\\ 3x+2y-5=0 & \cdots ㉡\end{cases}$
> ㉠×2+㉡×3을 하면
> $13x-39=0$
> $\therefore x=3$
> $x=3$을 ㉡에 대입하면
> $9+2y-5=0$
> $\therefore y=-2$

즉 $H(3, -2)$이므로 점 H와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$$

답 $\sqrt{13}$

34 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{5-7}{2}\right)\qquad \therefore (1, -1)$$

직선 AB의 기울기는 $\quad\frac{-7-5}{4+2}=-2$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(1, -1)$을 지나므로 그 방정식은

$y+1=\frac{1}{2}(x-1)$　　$\therefore x-2y-3=0$

이 직선이 점 $(a,\ 3)$을 지나므로

$a-6-3=0$　　$\therefore a=9$　　답 ⑤

35 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{5+3}{2}\right)$　　$\therefore (1,\ 4)$

직선 AB의 기울기는　$\frac{3-5}{3+1}=-\frac{1}{2}$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 2이고 점 $(1,\ 4)$를 지나므로 그 방정식은

$y-4=2(x-1)$

$\therefore 2x-y+2=0$　　…… ㉠

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{5-3}{2}\right)$　　$\therefore (2,\ 1)$

직선 AC의 기울기는　$\frac{-3-5}{5+1}=-\frac{4}{3}$

따라서 $\overline{AC}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{3}{4}$이고 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 그 방정식은

$y-1=\frac{3}{4}(x-2)$

$\therefore 3x-4y-2=0$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　$x=-2,\ y=-2$

따라서 $D(-2,\ -2)$이므로　$a=-2,\ b=-2$

$\therefore a-b=0$　　답 ③

삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.

36 $\overline{AC}=10$이므로

$\sqrt{(k-2)^2+(-6)^2}=10$

양변을 제곱하여 정리하면

$k^2-4k-60=0,$　　$(k+6)(k-10)=0$

$\therefore k=10\ (\because k>0)$

$\therefore C(10,\ 0)$

□ABCD가 마름모이므로 직선 l은 대각선 AC의 수직이등분선이다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+10}{2},\ \frac{6+0}{2}\right)$　　$\therefore (6,\ 3)$

직선 AC의 기울기는　$\frac{0-6}{10-2}=-\frac{3}{4}$

따라서 직선 l은 기울기가 $\frac{4}{3}$이고 점 $(6,\ 3)$을 지나므로 그 방정식은

$y-3=\frac{4}{3}(x-6)$　　$\therefore 4x-3y-15=0$

즉 $a=4,\ b=-3$이므로　$a+b=1$　　답 1

마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

37 △ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{-4+2+11}{3},\ \frac{0+6-3}{3}\right)$　　$\therefore (3,\ 1)$

직선 AB의 방정식은

$y=\frac{6-0}{2+4}(x+4)$　　$\therefore x-y+4=0$

따라서 점 $G(3,\ 1)$과 직선 $x-y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3-1+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$　　답 ②

38 직선 $3x+4y-1=0$, 즉 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이다.

즉 구하는 직선의 방정식을 $y=\frac{4}{3}x+k$라 하면 원점과 직선 $y=\frac{4}{3}x+k$, 즉 $4x-3y+3k=0$ 사이의 거리가 6이므로

$\frac{|3k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=6,$　　$|k|=10$

$\therefore k=-10$ 또는 $k=10$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\frac{4}{3}x-10$ 또는 $y=\frac{4}{3}x+10$

답 $y=\frac{4}{3}x-10,\ y=\frac{4}{3}x+10$

39 두 점 $(5,\ -5)$, $(-1,\ 13)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+5=\frac{13+5}{-1-5}(x-5)$　　$\therefore 3x+y-10=0$

직선 $3x+y-10=0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{OP}$의 길이의 최솟값은 점 $O(0,\ 0)$과 직선 $3x+y-10=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$　　답 ①

40 $(k+1)x+(2k-1)y+k-8=0$에서

$(x+2y+1)k+(x-y-8)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2y+1=0,\ x-y-8=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면　$x=5,\ y=-3$

$\therefore A(5,\ -3)$

직선 $ax+y+b=0$이 점 A를 지나므로

$5a-3+b=0$　　$\therefore b=-5a+3$

즉 직선 $ax+y-5a+3=0$과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\frac{|-5a+3|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{2},$　　$|-5a+3|=\sqrt{2a^2+2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$23a^2-30a+7=0,$　　$(a-1)(23a-7)=0$

$\therefore a=1\ (\because a$는 정수$)$

따라서 $b=-5\cdot1+3=-2$이므로

$ab=-2$　　답 -2

41 점 $(3,\ 1)$과 직선 $kx+3y-3k+9=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라 하면

$f(k)=\frac{|3k+3-3k+9|}{\sqrt{k^2+3^2}}=\frac{12}{\sqrt{k^2+9}}$

$f(k)$는 $\sqrt{k^2+9}$의 값이 최소일 때, 즉 $k=0$일 때 최대이므로 최댓값은

$$f(0)=\frac{12}{\sqrt{9}}=\frac{12}{3}=4$$

따라서 $a=0$, $b=4$이므로

$$a+b=4$$

답 ④

42 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x+3y-10+k(2x+y)=0\ (k\text{는 실수})$$

으로 놓으면

$$(1+2k)x+(3+k)y-10=0$$

원점과 이 직선 사이의 거리를 $f(k)$라 하면

$$f(k)=\frac{|-10|}{\sqrt{(1+2k)^2+(3+k)^2}}$$
$$=\frac{10}{\sqrt{5k^2+10k+10}}$$

$f(k)$는 $\sqrt{5k^2+10k+10}$의 값이 최소일 때 최대이고

$$\sqrt{5k^2+10k+10}=\sqrt{5(k+1)^2+5}$$

이므로 $f(k)$의 최댓값은

$$f(-1)=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

답 $2\sqrt{5}$

43 $\overline{AB}=\sqrt{(-3-1)^2+(-1-7)^2}=4\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$$y-7=\frac{-1-7}{-3-1}(x-1) \qquad \therefore 2x-y+5=0$$

점 C$(a, -3)$과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2a+3+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+8|}{\sqrt{5}}$$

△ABC의 넓이가 28이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot\frac{|2a+8|}{\sqrt{5}}=28, \qquad |2a+8|=14$$

$2a+8=-14$ 또는 $2a+8=14$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

답 ①

44 직선 AC의 방정식은

$$y-2=\frac{6-2}{-4-2}(x-2) \qquad \therefore 2x+3y-10=0$$

따라서 원점과 직선 AC 사이의 거리는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{13}}=\frac{10\sqrt{13}}{13}$$

$\overline{AC}=\sqrt{(-4-2)^2+(6-2)^2}=2\sqrt{13}$이므로

$$\triangle OAC=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{13}\cdot\frac{10\sqrt{13}}{13}=10$$

$\therefore$ □OABC$=2\triangle$OAC$=20$

답 ⑤

45 두 직선이 평행하므로 직선 $4x+3y=12$ 위의 한 점 $(0, 4)$와 직선 $4x+3y=k$, 즉 $4x+3y-k=0$ 사이의 거리가 3이다.

Q BOX

$f(k)$는 분자의 값이 일정하므로 분모의 값이 작을수록 그 값이 크다.

$k=27$이므로 $k<0$을 만족시키지 않는다.

$k=-8$이면 두 점 A, B는 제4사분면 위의 점이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l이 만나지 않을 때, $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서 직선 l에 이르는 거리의 최솟값은 직선 l에 평행한 $y=f(x)$의 그래프의 접선의 접점과 직선 l 사이의 거리와 같다.

평행사변형의 넓이는 한 대각선에 의하여 이등분된다.

이차방정식 $x^2+3x+7=x+12$, 즉 $x^2+2x-5=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-5)$$
$$=6>0$$

즉 $\frac{|12-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$이므로 $\qquad |12-k|=15$

$12-k=-15$ 또는 $12-k=15$

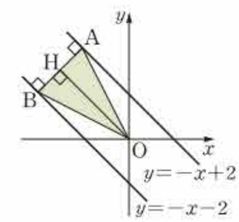
$\therefore k=-3\ (\because k<0)$

답 -3

46 직선 $y=-x+2$ 위의 한 점 $(0, 2)$와 직선 $y=-x-2$, 즉 $x+y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \qquad \therefore \overline{AB}=2\sqrt{2}$$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △OAB의 넓이가 8이므로



$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\overline{OH}=8$$

$\therefore \overline{OH}=4\sqrt{2}$

이때 직선 AB는 직선 $y=-x+2$와 수직이므로 그 방정식을 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ (k는 상수)으로 놓을 수 있다.

이 직선과 원점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}, \qquad |k|=8$$

$\therefore k=\pm 8$

그런데 두 점 A, B가 제2사분면 위의 점이므로 직선 AB의 y절편은 양수이다.

$\therefore k=8$

따라서 직선 AB의 방정식은 $\qquad y=x+8$

답 $y=x+8$

47 이차함수 $y=x^2+3x+7$의 그래프에 접하고 직선 $y=x+a$와 평행한 직선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 상수)라 하자.

이차방정식 $x^2+3x+7=x+k$, 즉 $x^2+2x+7-k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-(7-k)=0 \qquad \therefore k=6$$

따라서 접선의 방정식은 $\qquad y=x+6$

이 직선 위의 한 점 $(0, 6)$과 직선 $y=x+a$, 즉 $x-y+a=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|-6+a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}, \qquad |-6+a|=6$$

$-6+a=-6$ 또는 $-6+a=6$

$\therefore a=0$ 또는 $a=12$

그런데 $a=12$이면 이차함수 $y=x^2+3x+7$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 거리의 최솟값이 0이 된다.

$\therefore a=0$

답 ③

48 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 한 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선 $2x-7y+10=0$, $7x+2y-10=0$에 이르는 거리가 같으므로

W 10 직선의 방정식

$$\frac{|2x-7y+10|}{\sqrt{2^2+(-7)^2}}=\frac{|7x+2y-10|}{\sqrt{7^2+2^2}}$$

$|2x-7y+10|=|7x+2y-10|$

$2x-7y+10=\pm(7x+2y-10)$

$\therefore\ 5x+9y-20=0$ 또는 $9x-5y=0$

따라서 원점을 지나는 직선의 방정식은

$9x-5y=0$ 답 $9x-5y=0$

49 점 P에서 두 직선 $3x+y=6$, $2x-6y=1$, 즉 $3x+y-6=0$, $2x-6y-1=0$에 이르는 거리가 같으므로

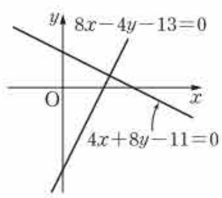
$$\frac{|3x+y-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|2x-6y-1|}{\sqrt{2^2+(-6)^2}}$$

$2|3x+y-6|=|2x-6y-1|$

$2(3x+y-6)=\pm(2x-6y-1)$

$\therefore\ 4x+8y-11=0$ 또는 $8x-4y-13=0$

이때 두 직선 $4x+8y-11=0$, $8x-4y-13=0$이 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나는 직선의 방정식은

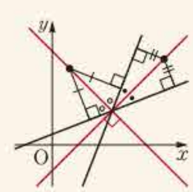


$4x+8y-11=0$

따라서 $a=4$, $b=-11$이므로 $a-b=15$ 답 ②

쌤한마디

오른쪽 그림과 같이 한 점에서 만나는 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 도형은 두 직선이 이루는 각의 이등분선이다. 이때 두 직선이 한 점에서 만나면 두 쌍의 맞꼭지각이 생기므로 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 도형은 서로 수직인 두 개의 직선이다.



50 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 $\overline{\mathrm{PR}}=2\overline{\mathrm{PS}}$이므로

$$\frac{|2x-3y-6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=2\cdot\frac{|3x+2y-6|}{\sqrt{3^2+2^2}}$$

$|2x-3y-6|=2|3x+2y-6|$

$2x-3y-6=\pm2(3x+2y-6)$

$\therefore\ 4x+7y-6=0\left(x\neq\frac{30}{13}\right)$

또는 $8x+y-18=0\left(x\neq\frac{30}{13}\right)$

$x=\frac{30}{13}$이면 점 P는 두 직선 l, l' 위에 있다.

답 $4x+7y-6=0\left(x\neq\frac{30}{13}\right)$, $8x+y-18=0\left(x\neq\frac{30}{13}\right)$

51 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(5+1)^2+(-4-4)^2}=10$

△ABP에서 $\overline{\mathrm{AB}}$를 밑변으로 하고 높이를 h라 하면 △ABP의 넓이가 45이므로

$\frac{1}{2}\cdot10\cdot h=45\quad\therefore\ h=9$

즉 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 9이므로 점 P의 자취는 직선 AB와 평행하고 직선 AB와의 거리가 9인 직선이다.

이때 직선 AB의 기울기는 $\frac{-4-4}{5+1}=-\frac{4}{3}$

이므로 점 P의 자취의 방정식을 $4x+3y+k=0$ $(k\neq-8)$이라 하면 이 직선과 점 A 사이의 거리가 9이다.

$k=-8$이면 $4x+3y-8=0$이므로 직선 AB의 방정식이다.

즉 $\frac{|-4+12+k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=9$이므로 $|k+8|=45$

$k+8=-45$ 또는 $k+8=45$

$\therefore\ k=-53$ 또는 $k=37$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$4x+3y-53=0$ 또는 $4x+3y+37=0$

답 $4x+3y-53=0$, $4x+3y+37=0$

도전! 수능 기출

80쪽

01 1st $a=0$일 때 두 직선의 위치 관계를 파악한다.

ㄱ. $a=0$일 때,

l: $-y+2=0$, 즉 $y=2$

m: $4x+8=0$, 즉 $x=-2$

따라서 두 직선 l과 m은 각각 x축, y축에 평행하므로 두 직선 l과 m은 서로 수직이다.

2nd 직선 l이 a의 값에 관계없이 지나는 점을 구한다.

ㄴ. $ax-y+a+2=0$에서 $(x+1)a+(2-y)=0$

이므로 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$를 지난다.

3rd 두 직선 l, m이 평행할 조건을 생각한다.

ㄷ. (i) $a=0$일 때, 두 직선 l, m은 서로 수직이다.

(ii) $a\neq0$일 때, 두 직선이 서로 평행하려면

$$\frac{a}{4}=\frac{-1}{a}\neq\frac{a+2}{3a+8}\qquad\therefore\ a^2=-4$$

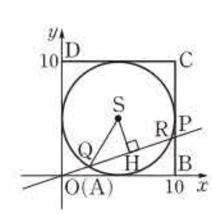
이를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

A가 실수이면 $A^2\geq0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

02 1st 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓고 직선 AP의 방정식을 구한다.

주어진 정사각형 ABCD를 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내면



$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{BP}}$

$=3:1$

따라서 직선 AP의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x$

2nd 원의 중심과 직선 AP 사이의 거리를 구한다.

원의 중심을 S라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 10이므로 S(5, 5)

점 S에서 직선 $y=\frac{1}{3}x$, 즉 $x-3y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{SH}=\frac{|5-15|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

3rd $\overline{QR}$의 길이를 구한다.

$\overline{SQ}=5$이므로 직각삼각형 SQH에서

$$\overline{QH}=\sqrt{\overline{SQ}^2-\overline{SH}^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{15}$$

$\therefore \overline{QR}=2\sqrt{15}$ 답 ⑤

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

03 1st 점 D의 좌표를 구한다.

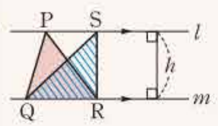
두 삼각형 ABC, ADC의 밑변을 모두 $\overline{AC}$라 하면 두 삼각형의 넓이가 같으므로 두 삼각형의 높이도 같아야 한다.

즉 두 점 B, D에서 직선 AC에 이르는 거리가 같으므로 직선 BD의 기울기는 직선 AC의 기울기와 같다.

따라서 D$(a, 0)$이라 하면

$$\frac{1-0}{2-a}=\frac{3-0}{5-3} \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$$

$$\therefore D\left(\frac{4}{3}, 0\right)$$



두 직선 l과 m이 평행할 때, △PQR와 △SQR의 밑변의 길이와 높이가 각각 같으므로 두 삼각형의 넓이가 같다.

2nd 직선 AD의 기울기를 구한다.

직선 AD의 기울기는

$$\frac{3-0}{5-\frac{4}{3}}=\frac{9}{11}$$

답 ⑤

04 1st 주어진 삼각형이 직각이등변삼각형임을 안다.

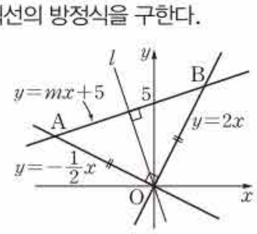
두 직선 $y=mx+5$, $y=-\frac{1}{2}x$의 교점을 A, 두 직선 $y=mx+5$, $y=2x$의 교점을 B라 하면 두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$가 서로 수직이므로 세 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$, $y=mx+5$로 둘러싸인 삼각형 AOB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 직각이등변삼각형이다.

두 직선의 기울기의 곱이 -1이다.

두 직선이 수직
➡ 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

2nd ∠AOB를 이등분하는 직선의 방정식을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 ∠AOB를 이등분하는 직선을 l이라 하면 직선 l과 직선 $y=mx+5$는 수직이다.



직선 l 위의 한 점을 P(x, y)라 하면

$$\frac{|2x-y|}{\sqrt{5}}=\frac{|x+2y|}{\sqrt{5}}$$

$$2x-y=\pm(x+2y)$$

$$\therefore y=\frac{1}{3}x \text{ 또는 } y=-3x$$

직선 l 위의 점 P에서 두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$에 이르는 거리가 같다.

이때 $m>0$이려면 직선 l의 기울기는 음수이어야 하므로 직선 l의 방정식은 $y=-3x$

3rd m의 값을 구한다.

따라서 $-3m=-1$이므로 $m=\frac{1}{3}$ 답 ①

11 원의 방정식 W 81쪽

01 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{-2+6-1}{3}, \frac{3-1+4}{3}\right) \qquad \therefore (1, 2)$$

$$\therefore \overline{AG}=\sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$$

따라서 중심의 좌표가 $(1, 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-2)^2=10$$

답 $(x-1)^2+(y-2)^2=10$

02 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-1)^2=r^2$$

$$\therefore x^2+y^2+6x-2y+10-r^2=0$$

이 식이 $x^2+y^2+2ax-2y-5a=0$과 일치하므로

$$2a=6,\ -5a=10-r^2$$

$$\therefore a=3,\ r^2=25$$

따라서 주어진 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-1)^2=25$$

③ $x=-1$, $y=-3$을 $(x+3)^2+(y-1)^2=25$에 대입하면

$$(-1+3)^2+(-3-1)^2\neq 25$$

이므로 점 $(-1, -3)$은 이 원 위의 점이 아니다.

답 ③

03 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{-5-1}{2}\right) \qquad \therefore (2, -3)$$

직선 AB의 기울기는 $\frac{-1+5}{7+3}=\frac{2}{5}$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{5}{2}$이고 점 $(2, -3)$을 지나므로

$$y+3=-\frac{5}{2}(x-2) \qquad \therefore y=-\frac{5}{2}x+2$$

이 식에 $x=0$을 대입하면 $y=2$

즉 $\overline{AB}$의 수직이등분선과 y축의 교점의 좌표가 $(0, 2)$이므로 이 점을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$x^2+(y-2)^2=r^2$$

이 원이 원점을 지나므로

$$r^2=4 \qquad \therefore r=2\ (\because r>0)$$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$$2\pi\cdot 2=4\pi$$

답 ②

원의 중심이 y축 위에 있으므로 (x좌표)$=0$

04 원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$x^2+(y-a)^2=r^2$$

이 원이 점 $(3, 0)$을 지나므로

$$9+a^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 (5, 2)를 지나므로

$$25+(2-a)^2=r^2$$

$$\therefore a^2-4a+29=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=5,\ r^2=34$$

따라서 주어진 원의 방정식은

$$x^2+(y-5)^2=34$$

ㄱ. 중심의 좌표는 (0, 5)이다.

ㄴ. $x=5$, $y=8$을 $x^2+(y-5)^2=34$에 대입하면

$$5^2+(8-5)^2=34$$

즉 주어진 원은 점 (5, 8)을 지난다.

ㄷ. 원의 넓이는 $\pi r^2=34\pi$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

05 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a+3)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a-3)^2=r^2$$

이 원이 점 (−5, 0)을 지나므로

$$(-5-a)^2+(-a-3)^2=r^2$$

$$\therefore 2a^2+16a+34=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 (1, −2)를 지나므로

$$(1-a)^2+(-5-a)^2=r^2$$

$$\therefore 2a^2+8a+26=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-1,\ r^2=20$$

따라서 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-2)^2=20$$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$$(x+1)^2=16, \qquad x+1=\pm4$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=3$$

즉 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표는 (−5, 0), (3, 0)이므로 구하는 거리는

$$|3-(-5)|=8$$

답 8

06 $x^2+y^2+6x-10y-3=0$에서

$$(x+3)^2+(y-5)^2=37$$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 (−3, 5)이므로

$$\frac{-9+a}{2}=-3,\ \frac{4+b}{2}=5 \qquad \therefore a=3,\ b=6$$

$$\therefore a+b=9$$

답 ④

07 P(4, 0), Q(0, −4)이므로 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{4}{2},\ -\frac{4}{2}\right) \qquad \therefore (2,\ -2)$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+2)^2=8$$

답 $(x-2)^2+(y+2)^2=8$

Q BOX

$x-y-4=0$에 $y=0$을 대입하면
$x-4=0 \quad \therefore x=4$
$x=0$을 대입하면
$-y-4=0$
$\therefore y=-4$

$\overline{PQ}$가 원의 지름이다.

08 원의 중심을 P$(a,\ b)$라 하면

$$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$$a^2+(b+1)^2=(a+5)^2+(b-4)^2$$

$$\therefore a-b=-4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$$a^2+(b+1)^2=(a+2)^2+(b-3)^2$$

$$\therefore a-2b=-3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-5,\ b=-1$$

즉 P(−5, −1)이므로 원의 반지름의 길이는

$$\overline{PA}=|0-(-5)|=5$$

두 점 A, P의 y좌표가 같다.

따라서 주어진 세 점을 지나는 원의 방정식은

$$(x+5)^2+(y+1)^2=25$$

이 원이 점 $(k,\ 2)$를 지나므로

$$(k+5)^2=16, \qquad k+5=\pm4$$

$$\therefore k=-9 \text{ 또는 } k=-1$$

따라서 구하는 모든 k의 값의 합은

$$-9+(-1)=-10$$

답 ①

09 $x+2y-15=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$x-y-6=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$2x-y-5=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$

두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 A, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B, 두 직선 ㉠, ㉢의 교점을 C라 하면

$$A(9,\ 3),\ B(-1,\ -7),\ C(5,\ 5)$$

외접원의 중심을 P$(a,\ b)$라 하면

$$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$$(a-9)^2+(b-3)^2=(a+1)^2+(b+7)^2$$

$$\therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$$(a-9)^2+(b-3)^2=(a-5)^2+(b-5)^2$$

$$\therefore 2a-b=10 \qquad \cdots\cdots ㉤$$

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$$a=4,\ b=-2$$

즉 P(4, −2)이므로 원의 반지름의 길이는

$$\overline{PA}=\sqrt{(9-4)^2+(3+2)^2}=5\sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2+(y+2)^2=50$$

답 $(x-4)^2+(y+2)^2=50$

10 원 $x^2+y^2-6x+2ay+b=0$이 점 (1, 2)를 지나므로

$$1+4-6+4a+b=0$$

$$\therefore 4a+b=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2+y^2-6x+2ay+b=0$에서

$$(x-3)^2+(y+a)^2=a^2-b+9$$

이 원이 x축에 접하므로

$\sqrt{a^2-b+9}=|-a|$

(반지름의 길이) $=|$(중심의 y좌표)$|$

양변을 제곱하면

$a^2-b+9=a^2 \qquad \therefore b=9$

$b=9$를 ㉠에 대입하면

$4a+9=1 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore b-a=11$

답 ③

11 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이다.

이때 원의 중심 $(-r,\ r)$가 직선 $5x+3y=-8$ 위에 있으므로

$-5r+3r=-8, \qquad -2r=-8$

$\therefore r=4$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y-4)^2=16$

답 $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

12 △ABC에서

$\overline{AB}=|3-(-3)|=6,$

$\overline{BC}=\sqrt{(-3)^2+(3\sqrt{3})^2}=6,$

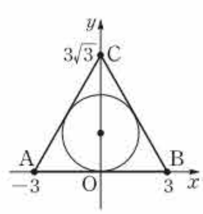
$\overline{CA}=\sqrt{(-3)^2+(-3\sqrt{3})^2}=6$

이므로 △ABC는 정삼각형이다.

정삼각형의 내심은 무게중심과 일치하므로 △ABC의 내심의 좌표는

$\left(\dfrac{-3+3+0}{3},\ \dfrac{0+0+3\sqrt{3}}{3}\right) \qquad \therefore (0,\ \sqrt{3})$

따라서 오른쪽 그림과 같이 내접원이 x축에 접하므로 구하는 내접원의 방정식은



$x^2+(y-\sqrt{3})^2=(\sqrt{3})^2$

$\therefore x^2+(y-\sqrt{3})^2=3$

답 $x^2+(y-\sqrt{3})^2=3$

13 $x^2+y^2+4ax+2ay+7a^2-10=0$에서

$(x+2a)^2+(y+a)^2=10-2a^2$

이 방정식이 원을 나타내려면

$10-2a^2>0, \qquad a^2<5$

$\therefore -\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$

$2<\sqrt{5}<3$

따라서 정수 a는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다.

답 ②

14 $x^2+y^2-2kx+6y+3k+9=0$에서

$(x-k)^2+(y+3)^2=k^2-3k$

이 방정식이 반지름의 길이가 2 이하인 원을 나타내려면

$0<\sqrt{k^2-3k}\le 2 \qquad \therefore 0<k^2-3k\le 4$

$k^2-3k>0$에서 $\qquad k(k-3)>0$

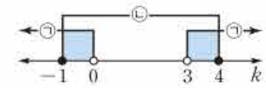
$\therefore k<0$ 또는 $k>3$ ...... ㉠

$k^2-3k\le 4$에서 $\qquad k^2-3k-4\le 0$

$(k+1)(k-4)\le 0$

$\therefore -1\le k\le 4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-1\le k<0$

또는 $3<k\le 4$

따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

15 $x^2+y^2-12x-8y+4k+40=0$에서

$(x-6)^2+(y-4)^2=12-4k$

이 방정식이 원을 나타내려면

$12-4k>0 \qquad \therefore k<3$ ...... ㉠

원의 중심의 좌표는 $(6,\ 4)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{12-4k}$이므로 이 원이 제1사분면 위에 있으려면

$\sqrt{12-4k}<4, \qquad 12-4k<16$

$\sqrt{12-4k}=4$이면 이 원은 x축에 접한다.

$\therefore k>-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<k<3$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=3$이므로

$\alpha\beta=-3$

답 -3

16 A$(6,\ 8)$과 원 $x^2+y^2=r^2$의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{6^2+8^2}=10$

이때 원의 반지름의 길이는 r이고 $\overline{AP}$의 길이의 최댓값이 $10+\sqrt{5}$이므로

$r>0$이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{r^2}=r$

$10+r=10+\sqrt{5} \qquad \therefore r=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

17 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$에서

$(x-3)^2+(y-1)^2=4$

$x^2+y^2+4x+8y+11=0$에서

$(x+2)^2+(y+4)^2=9$

두 원의 중심을 각각 C, C′이라 하면

C$(3,\ 1)$, C′$(-2,\ -4)$

이므로

$\overline{CC'}=\sqrt{(-2-3)^2+(-4-1)^2}=5\sqrt{2}$

이때 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 3이므로

$M=5\sqrt{2}+5,\ m=5\sqrt{2}-5$

$\therefore Mm=(5\sqrt{2}+5)(5\sqrt{2}-5)=25$

답 ⑤

18 $\sqrt{(a-4)^2+(b+7)^2}$의 값은 두 점 P$(a,\ b)$, $(4,\ -7)$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 최솟값은 원 $(x+1)^2+(y-5)^2=16$ 위의 점 P$(a,\ b)$와 점 $(4,\ -7)$ 사이의 거리의 최솟값과 같다.

점 $(4,\ -7)$과 원의 중심 $(-1,\ 5)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-1-4)^2+(5+7)^2}=13$

이때 원의 반지름의 길이가 4이므로 구하는 최솟값은

$13-4=9$

답 ①

11 원의 방정식

19 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$이므로

$$2\overline{AP} = \overline{BP}, \quad 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$
$$4\{(x+4)^2+y^2\} = (x-2)^2+(y+6)^2$$
$$x^2+y^2+12x-4y+8=0$$
$$\therefore (x+6)^2+(y-2)^2=32$$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-6, 2)$이다.

답 $(-6, 2)$

20 도형 C 위의 점을 $Q(x, y)$라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$를 $3 : 2$로 외분하는 점이므로

$$x = \frac{3\cdot a - 2\cdot 3}{3-2} = 3a-6,$$
$$y = \frac{3\cdot b - 2\cdot(-1)}{3-2} = 3b+2$$
$$\therefore a = \frac{x+6}{3}, \ b = \frac{y-2}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 $P(a, b)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\left(\frac{x+6}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1$$
$$\therefore (x+6)^2+(y-2)^2=9$$

이 원의 중심 $(-6, 2)$와 원점 사이의 거리는

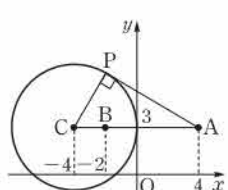
$$\sqrt{(-6)^2+2^2} = 2\sqrt{10}$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 구하는 최솟값은

$2\sqrt{10}-3$ 답 $2\sqrt{10}-3$

21 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$이므로

$$\overline{AP} = 2\overline{BP}, \quad \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$
$$(x-4)^2+(y-3)^2 = 4\{(x+2)^2+(y-3)^2\}$$
$$x^2+y^2+8x-6y+9=0$$
$$\therefore (x+4)^2+(y-3)^2=16$$



따라서 점 P는 중심이 $(-4, 3)$이고 반지름의 길이가 4인 원 위의 점이다.
이때 $\angle PAB$의 크기가 최대가 되는 것은 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때이므로 원의 중심을 C라 하면 직각삼각형 PCA에서

$\overline{AP} = \sqrt{8^2-4^2} = 4\sqrt{3}$ 답 ②

$\overline{PC}$의 길이는 원 $(x+4)^2+(y-3)^2=16$의 반지름의 길이와 같으므로 $\overline{PC}=4$

22 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-x+y-1-(x^2+y^2+x+2y-3)=0$$
$$-2x-y+2=0 \quad \therefore y=-2x+2$$

이 직선에 평행하고 점 $(-1, 9)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-9=-2(x+1) \quad \therefore y=-2x+7$$

따라서 $a=-2$, $b=7$이므로

$a+b=5$ 답 ⑤

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 평행하면 $m=m'$, $n \neq n'$

Q BOX

두 원의 중심을 지나는 직선은 공통인 현을 수직이등분한다.

23 선분 AB의 중점의 좌표는 두 원의 교점을 지나는 직선과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점의 좌표이다.
두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-4x+2y-19$$
$$-(x^2+y^2-8x-10y+25)=0$$
$$\therefore x+3y-11=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2+y^2-4x+2y-19=0$에서

$$(x-2)^2+(y+1)^2=24$$

$x^2+y^2-8x-10y+25=0$에서

$$(x-4)^2+(y-5)^2=16$$

두 원의 중심 $(2, -1)$, $(4, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

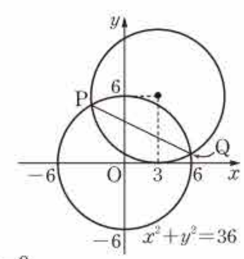
$$y+1 = \frac{5+1}{4-2}(x-2)$$
$$\therefore y=3x-7 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{16}{5}$, $y=\frac{13}{5}$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{16}{5}, \frac{13}{5}\right)$이므로

$5(a-b) = 5\left(\frac{16}{5}-\frac{13}{5}\right) = 3$ 답 3

24 $\overset{\frown}{PQ}$는 오른쪽 그림과 같이 점 $(3, 0)$에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 6인 원의 일부이므로 그 원의 방정식은



$$(x-3)^2+(y-6)^2=36$$
$$\therefore x^2+y^2-6x-12y+9=0$$

이때 $\overline{PQ}$는 두 원 $x^2+y^2=36$, $x^2+y^2-6x-12y+9=0$의 공통인 현이므로 직선 PQ의 방정식은

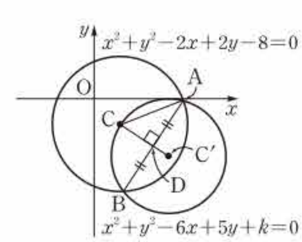
$$x^2+y^2-6x-12y+9-(x^2+y^2-36)=0$$
$$\therefore 2x+4y-15=0$$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$$2x-15=0 \quad \therefore x=\frac{15}{2}$$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{15}{2}$이다. 답 $\frac{15}{2}$

25 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2-2x+2y-8=0$, $x^2+y^2-6x+5y+k=0$의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$x^2+y^2-2x+2y-8=0$에서

$$(x-1)^2+(y+1)^2=10$$
$$\therefore C(1, -1), \ \overline{CA}=\sqrt{10}$$

$\overline{AB}=2\sqrt{6}$이므로 $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{6}$

직각삼각형 CAD에서

$\overline{CD}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{6})^2}=2$ …… ㉠

한편 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-2x+2y-8-(x^2+y^2-6x+5y+k)=0$

$\therefore 4x-3y-8-k=0$

이 직선과 점 C$(1, -1)$ 사이의 거리는

$\overline{CD}=\frac{|4+3-8-k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$

$=\frac{|-1-k|}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{|-1-k|}{5}=2$

$|-1-k|=10$, $-1-k=\pm 10$

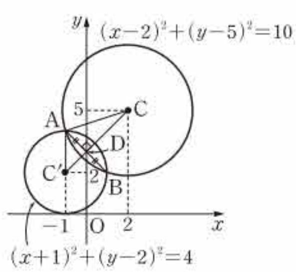
$\therefore k=-11$ 또는 $k=9$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$-11+9=-2$ 답 ①

26 두 원의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소이려면 공통인 현이 그 원의 지름이어야 한다.

오른쪽 그림과 같이 두 원 $(x-2)^2+(y-5)^2=10$, $(x+1)^2+(y-2)^2=4$의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$(x-2)^2+(y-5)^2=10$에서

$x^2+y^2-4x-10y+19=0$

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$에서

$x^2+y^2+2x-4y+1=0$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-4x-10y+19-(x^2+y^2+2x-4y+1)=0$

$\therefore x+y-3=0$

이 직선과 점 C$(2, 5)$ 사이의 거리는

$\overline{CD}=\frac{|2+5-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

직각삼각형 ADC에서

$\overline{AD}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

즉 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot(\sqrt{2})^2=2\pi$ 답 2π

27 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-8x+12y+3+k(x^2+y^2-9)=0$

$(k\neq -1)$ …… ㉠

이라 하면 원 ㉠이 점 $(6, -3)$을 지나므로

$-36+36k=0$ $\therefore k=1$

Q BOX

$\overline{AB}\perp\overline{CD}$이므로 점 C와 직선 AB 사이의 거리는 $\overline{CD}$의 길이와 같다.

원과 직선이 한 점 또는 두 점에서 만난다.

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-4x+6y-3=0$

$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=16$

따라서 구하는 반지름의 길이는 4이다. 답 4

28 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+2x-5+k(x^2+y^2-2x-5)=0$ $(k\neq -1)$

이라 하면

$(1+k)x^2+(1+k)y^2+(2-2k)x-5-5k=0$

이때 $k\neq -1$이므로

$x^2+y^2+\frac{2-2k}{1+k}x-\frac{5+5k}{1+k}=0$ …… ㉠

원 ㉠의 중심이 $(2, 0)$이므로

$\frac{2-2k}{1+k}=-4$, $2-2k=-4-4k$

$2k=-6$ $\therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-4x-5=0$

$\therefore (x-2)^2+y^2=9$

따라서 구하는 원의 넓이는 9π이다. 답 ③

29 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-6x-ay+3a+k(x^2+y^2-6y)=0$

$(k\neq -1)$ …… ㉠

이라 하면 원 ㉠이 점 $(-1, -1)$을 지나므로

$8+4a+8k=0$ $\therefore a+2k=-2$ …… ㉡

또 점 $(3, 7)$을 지나므로

$40-4a+16k=0$ $\therefore a-4k=10$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $k=-2$

$a=2$, $k=-2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2+6x-10y-6=0$

따라서 $A=6$, $B=-10$, $C=-6$이므로

$A-B+C=10$ 답 ⑤

30 원의 중심 $(k, 0)$과 직선 $2x+y-3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2k-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|2k-3|}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 만나려면

$\frac{|2k-3|}{\sqrt{5}}\leq\sqrt{5}$, $|2k-3|\leq 5$

$-5\leq 2k-3\leq 5$, $-2\leq 2k\leq 8$

$\therefore -1\leq k\leq 4$

따라서 정수 k는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$의 6개이다.

답 ②

31 원의 중심의 좌표를 $(a, 3a)$라 하면 원의 중심과 두 직선 $x-y+2=0$, $x-y-6=0$ 사이의 거리는 모두 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|a-3a+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a-3a-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$|-2a+2|=|-2a-6|$$

$-2a+2=-2a-6$을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않으므로

$$-2a+2=-(-2a-6), \qquad -4a=4$$

$$\therefore a=-1$$

원의 중심의 좌표가 $(-1,\ -3)$이므로 원의 반지름의 길이는

$a=-1$을 $(a,\ 3a)$에 대입하면 $(-1,\ -3)$

$$\frac{|-1+3+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y+3)^2=8$$

답 $(x+1)^2+(y+3)^2=8$

32 원 $x^2+(y-a)^2=10$의 중심의 좌표는 $(0,\ a)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

(i) 점 $(0,\ a)$와 직선 $x+3y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3a-5|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|3a-5|}{\sqrt{10}}$$

원과 직선 $x+3y-5=0$이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|3a-5|}{\sqrt{10}}<\sqrt{10}, \qquad |3a-5|<10$$

$$-10<3a-5<10, \qquad -5<3a<15$$

$$\therefore -\frac{5}{3}<a<5$$

(ii) 점 $(0,\ a)$와 직선 $3x+y+7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a+7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|a+7|}{\sqrt{10}}$$

원과 직선 $3x+y+7=0$이 만나지 않으려면

$$\frac{|a+7|}{\sqrt{10}}>\sqrt{10}, \qquad |a+7|>10$$

$a+7<-10$ 또는 $a+7>10$

$\therefore a<-17$ 또는 $a>3$

(i), (ii)에서 $3<a<5$

따라서 구하는 정수 a의 값은 4이다.

답 4

33 a, b는 0 또는 1 또는 2이므로 $a+b=3$이려면 $a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$이어야 한다.

(i) $a=1$, $b=2$일 때,

직선 $4x+3y-k=0$이 원 $(x-1)^2+y^2=1$에 접해야 하므로

$$\frac{|4-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1, \qquad |4-k|=5$$

원 $(x-1)^2+y^2=1$의 반지름의 길이

$4-k=-5$ 또는 $4-k=5$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=9$ ...... ㉠

또 직선 $4x+3y-k=0$이 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{|-4+3-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}<1, \qquad |-1-k|<5$$

원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$의 반지름의 길이

$$-5<-1-k<5, \qquad -4<-k<6$$

$\therefore -6<k<4$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-1$

(ii) $a=2$, $b=1$일 때,

직선 $4x+3y-k=0$이 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{|4-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}<1, \qquad |4-k|<5$$

$$-5<4-k<5, \qquad -9<-k<1$$

$\therefore -1<k<9$ ...... ㉢

또 직선 $4x+3y-k=0$이 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$에 접해야 하므로

$$\frac{|-4+3-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1, \qquad |-1-k|=5$$

$-1-k=-5$ 또는 $-1-k=5$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=4$ ...... ㉣

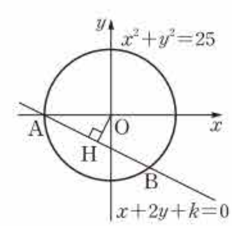
㉢, ㉣에서 $k=4$

(i), (ii)에서 $k=-1$ 또는 $k=4$이므로 구하는 합은

$$-1+4=3$$

답 ④

34 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 O에서 직선 $x+2y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분한다.

직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}=5$이므로

$$\overline{OH}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$$ ...... ㉠

또 점 $O(0,\ 0)$과 직선 $x+2y+k=0$ 사이의 거리는

$$\overline{OH}=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

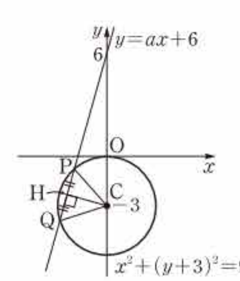
$|k|=5 \qquad \therefore k=5\ (\because k>0)$

답 ⑤

35 $x^2+y^2+6y=0$에서

$$x^2+(y+3)^2=9$$

이므로 이 원과 직선 $y=ax+6$을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $\overline{CP}$, $\overline{CQ}$는 원의 반지름이므로

$$\overline{CP}=\overline{CQ}=3$$

따라서 $\triangle CPQ$가 정삼각형이려면 $\overline{PQ}=3$이어야 한다.

원의 중심 C에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{3}{2}$$

직각삼각형 CPH에서

$$\overline{CH}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 점 C(0, −3)과 직선 $y=ax+6$, 즉 $ax-y+6=0$ 사이의 거리는

$$\overline{CH}=\frac{|3+6|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{9}{\sqrt{a^2+1}} \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{9}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}, \qquad \sqrt{3a^2+3}=6$$

양변을 제곱하면

$$3a^2+3=36, \qquad a^2=11$$

$$\therefore a=\sqrt{11}\ (\because a>0)$$

답 ④

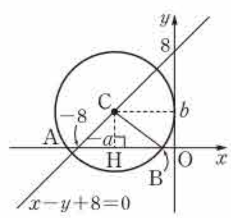
36 원 C가 y축에 접하므로 원의 방정식을

$$(x+a)^2+(y-b)^2=a^2\ (a>0,\ b>0)$$

이라 하자.

(반지름의 길이) $=|$(중심의 x좌표)$|$

오른쪽 그림과 같이 원 C와 x축의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 8=4$$

직각삼각형 CHB에서 $\overline{CB}=a$이므로

$$a^2=b^2+4^2 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 점 C$(-a,\ b)$가 직선 $x-y+8=0$ 위에 있으므로

$$-a-b+8=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=3$

㉡에서 $b=-a+8$
위의 식을 ㉠에 대입하면
$a^2=(-a+8)^2+4^2$
$16a=80 \quad \therefore a=5$
$a=5$를 $b=-a+8$에 대입하면 $b=3$

따라서 원 C의 반지름의 길이는 5이므로 구하는 둘레의 길이는

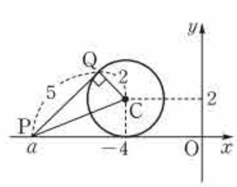
$$2\pi\cdot 5=10\pi$$

답 10π

37 $x^2+y^2+8x-4y+16=0$에서

$$(x+4)^2+(y-2)^2=4$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면 C$(-4,\ 2)$이므로



$$\overline{CP}=\sqrt{(a+4)^2+(-2)^2}=\sqrt{a^2+8a+20}$$

접점을 Q라 하면 직각삼각형 PCQ에서 $\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2$이므로

$$a^2+8a+20=2^2+5^2, \qquad a^2+8a-9=0$$

$$(a+9)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-9\ (\because a<0)$$

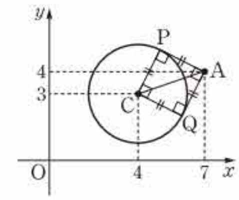
답 −9

다른 풀이 R$(-4,\ 0)$이라 하면 $\overline{PR}=5$이므로

$$|-4-a|=5, \qquad -4-a=\pm 5$$

$$\therefore a=-9\ (\because a<0)$$

38 오른쪽 그림과 같이 두 접점을 P, Q라 하고 원의 중심을 C(4, 3)이라 하면 두 접선이 서로 수직이므로 사각형 APCQ는 정사각형이다.



점 A와 원의 중심 C 사이의 거리는

$$\overline{AC}=\sqrt{(4-7)^2+(3-4)^2}=\sqrt{10} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 점 A와 접점 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AP}=\overline{AQ}=r$$

직각삼각형 APC에서 $\overline{AC}^2=\overline{AP}^2+\overline{PC}^2$이므로

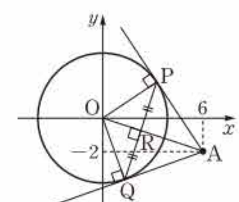
$$\overline{AC}=\sqrt{r^2+r^2}=\sqrt{2}r\ (\because r>0) \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $\sqrt{2}r=\sqrt{10}$

$$\therefore r=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

39 원의 중심이 O(0, 0)이고 반지름의 길이가 4이므로



$$\overline{OP}=4,$$

$$\overline{OA}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$$

직각삼각형 OAP에서 $\overline{OA}^2=\overline{AP}^2+\overline{OP}^2$이므로

$$(2\sqrt{10})^2=\overline{AP}^2+4^2, \qquad \overline{AP}^2=24$$

$$\therefore \overline{AP}=2\sqrt{6}$$

$\overline{OA}$와 $\overline{PQ}$의 교점을 R라 하면 $\overline{OA}\perp\overline{PQ}$이므로 △OAP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{OP}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{PR}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\overline{PR}$$

$$\therefore \overline{PR}=\frac{4\sqrt{15}}{5}$$

$$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PR}=\frac{8\sqrt{15}}{5}$$

답 ③

40 $x^2+y^2-6x+6y+1=0$에서

$$(x-3)^2+(y+3)^2=17$$

원의 중심 (3, −3)과 직선 $x-4y+19=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+12+19|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=2\sqrt{17}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $x-4y+19=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$2\sqrt{17}-\sqrt{17}\le d\le 2\sqrt{17}+\sqrt{17}$$

$$\therefore \sqrt{17}\le d\le 3\sqrt{17}$$

$4<\sqrt{17}<5$,
$12<3\sqrt{17}<13$

따라서 정수 d는 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12이고 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는

$$2\cdot 8=16$$

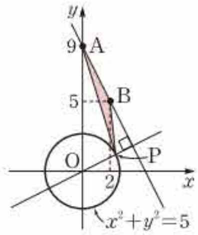
답 16

W 11 원의 방정식

41 $\triangle$PAB의 밑변을 $\overline{AB}$라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{2^2+(5-9)^2}=2\sqrt{5}$

이고, 높이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리와 같으므로 $\triangle$PAB의 넓이가 최소이려면 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소이어야 한다.



직선 AB의 방정식은

두 점 A(0, 9), B(2, 5)를 지나는 직선의 방정식

$y-9=\dfrac{5-9}{2-0}x \qquad \therefore 2x+y-9=0$

원의 중심 O(0, 0)과 직선 $2x+y-9=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-9|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은

$\dfrac{9\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\triangle$PAB의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{5}=4$ 답 ③

42 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

접선의 방정식을 $y=-2x+k$라 하면 원의 중심 $(-1, 2)$와 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-2+2-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|-k|}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 접하려면

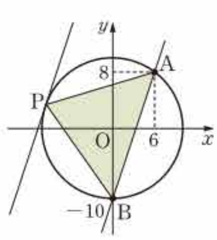
$\dfrac{|-k|}{\sqrt{5}}=2, \qquad |-k|=2\sqrt{5}$

$\therefore k=\pm 2\sqrt{5}$

따라서 두 접선의 y절편은 각각 $-2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$이므로 구하는 곱은

$-2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}=-20$ 답 ②

43 $\triangle$ABP의 넓이가 최대일 때는 오른쪽 그림과 같이 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때이다.



직선 AB의 기울기는

$\dfrac{-10-8}{0-6}=3$

이므로 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x\pm 10\sqrt{3^2+1} \qquad \therefore y=3x\pm 10\sqrt{10}$

위의 그림에서 점 P를 지나는 접선의 방정식은 $y=3x+10\sqrt{10}$이고 점 B$(0, -10)$과 직선 $y=3x+10\sqrt{10}$, 즉 $3x-y+10\sqrt{10}=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|10+10\sqrt{10}|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=10+\sqrt{10}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-6)^2+(-10-8)^2}=6\sqrt{10}$이므로 $\triangle$ABP의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{10}\cdot(10+\sqrt{10})=30+30\sqrt{10}$

답 $30+30\sqrt{10}$

44 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 P$(-3, 2)$에서의 접선의 방정식은

$-3x+2y=13$ ...... ㉠

원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 Q$(2, 3)$에서의 접선의 방정식은

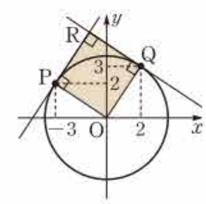
$2x+3y=13$ ...... ㉡

이때 $-3\cdot 2+2\cdot 3=0$이므로 두 직선 ㉠, ㉡은 서로 수직이다.

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이면
$aa'+bb'=0$

따라서 오른쪽 그림과 같이 □OQRP는 $\sqrt{13}$을 한 변의 길이로 하는 정사각형이므로 구하는 넓이는

원 $x^2+y^2=13$의 반지름의 길이

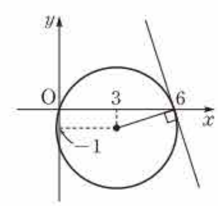


$\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}=13$ 답 ①

45 $x^2+y^2-6x+2y=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=10$

원의 중심 $(3, -1)$과 점 $(6, 0)$을 지나는 직선의 기울기는



$\dfrac{0+1}{6-3}=\dfrac{1}{3}$

따라서 점 $(6, 0)$에서의 접선의 기울기는 -3이므로 접선의 방정식은

$y=-3(x-6) \qquad \therefore y=-3x+18$

이 직선이 점 $(k, -6)$을 지나므로

$-6=-3k+18 \qquad \therefore k=8$ 답 8

46 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 P(a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax+by=9$

$\therefore$ Q$\left(\dfrac{9}{a}, 0\right)$, R$\left(0, \dfrac{9}{b}\right)$

$\overline{QR}=6$, 즉 $\overline{QR}^2=36$이므로

$\left(-\dfrac{9}{a}\right)^2+\left(\dfrac{9}{b}\right)^2=36, \qquad \dfrac{81}{a^2}+\dfrac{81}{b^2}=36$

$\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=4 \qquad \therefore a^2+b^2=\dfrac{4}{9}a^2b^2$ ...... ㉠

점 P(a, b)는 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=9$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$a^2b^2=\dfrac{81}{4}$

$\therefore ab=-\dfrac{9}{2}$ ($\because a<0, b>0$) 답 ②

47 직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 O'의 중심 $(-4,\ 0)$을 지난다.
직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x+4) \qquad \therefore\ mx-y+4m=0$

원 O의 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이가 2이므로 원 O와 직선 l이 접하려면

$\dfrac{|4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2, \qquad |2m|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $\quad 4m^2=m^2+1$

$m^2=\dfrac{1}{3} \qquad \therefore\ m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 또는 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

답 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

48 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(3\sqrt{3},\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-6=m(x-3\sqrt{3})$

$\therefore\ mx-y-3\sqrt{3}m+6=0$

원의 중심의 좌표가 $(0,\ 3)$, 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|-3-3\sqrt{3}m+6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$

$|1-\sqrt{3}m|=\sqrt{m^2+1}$

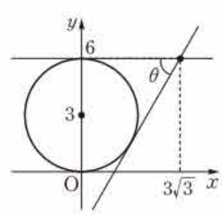
양변을 제곱하면 $\quad 1-2\sqrt{3}m+3m^2=m^2+1$

$m^2-\sqrt{3}m=0, \qquad m(m-\sqrt{3})=0$

$\therefore\ m=0$ 또는 $m=\sqrt{3}$

따라서 접선의 방정식은

$y=6$ 또는 $y=\sqrt{3}x-3$



이때 $\tan 60°=\sqrt{3}$이므로 오른쪽 그림에서 두 접선이 이루는 각의 크기는 $60°$이다.

$\therefore\ \theta=60°$ 답 $60°$

49 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ a)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=mx+a \qquad \therefore\ mx-y+a=0$

원의 중심의 좌표가 $(0,\ 1)$, 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|-1+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \qquad |-1+a|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $\quad 1-2a+a^2=m^2+1$

$\therefore\ m^2-(a^2-2a)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근을 m_1, m_2라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$m_1m_2=-1$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-(a^2-2a)=-1, \qquad a^2-2a-1=0$

$\therefore\ a=1\pm\sqrt{2}$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

따라서 모든 a의 값의 곱은

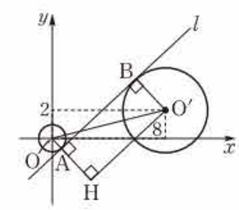
$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$ 답 ②

50 두 원 O, O'의 중심 O, O′의 좌표는

$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{O'}(8,\ 2)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OO'}}=\sqrt{8^2+2^2}=2\sqrt{17}$

오른쪽 그림과 같이 점 O′에서 선분 OA의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{OH}}=1+3=4$

따라서 직각삼각형 OHO′에서

$\overline{\mathrm{HO'}}=\sqrt{(2\sqrt{17})^2-4^2}=2\sqrt{13}$

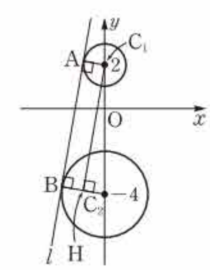
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{HO'}}=2\sqrt{13}$ 답 ④

51 두 원 C_1, C_2의 중심 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$의 좌표는

$\mathrm{C_1}(0,\ 2)$, $\mathrm{C_2}(0,\ -4)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{C_1C_2}}=|2-(-4)|=6$

오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{C_1}$에서 $\overline{\mathrm{BC_2}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{HC_2}}=r-1$,

$\overline{\mathrm{C_1H}}=\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{3}$

따라서 직각삼각형 $\mathrm{C_1HC_2}$에서

$(r-1)^2+(3\sqrt{3})^2=6^2$

$r^2-2r-8=0, \qquad (r+2)(r-4)=0$

$\therefore\ r=4\ (\because\ r>0)$ 답 4

도전! 수능 기출 Ⓦ 89쪽

01 1st 점 C가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

$\overline{\mathrm{AO}}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BO}}=\sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{BO}}=2:3, \qquad 3\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{BC}}$

$3\sqrt{(a+2)^2+(b-4)^2}=2\sqrt{(a-3)^2+(b+6)^2}$

$\therefore\ (a+6)^2+(b-12)^2=180$

즉 점 C는 원 $(x+6)^2+(y-12)^2=180$ 위의 점 중 직선 AB 위에 있지 않은 점이다.

점 C가 직선 AB 위에 있는 경우 삼각형 ABC가 만들어지지 않는다.

2nd m^2의 값을 구한다.

직선 AB의 방정식은

$y-4=\dfrac{-6-4}{3+2}(x+2)$, 즉 $y=-2x$

이므로 원의 중심 $(-6,\ 12)$가 직선 AB 위에 있다.

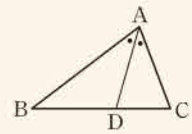
따라서 점 C와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은 원 $(x+6)^2+(y-12)^2=180$의 반지름의 길이와 같으므로 $\quad m^2=180$ 답 180

쌤한마디

삼각형의 내각의 이등분선

삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라 하면

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$



02 (1st) **원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.**

원 C_1의 반지름의 길이가 1이고 원 C_1과 직선 l이 접하므로

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=1, \quad \sqrt{a^2+b^2}=1$$

$$\therefore a^2+b^2=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

> 원 C_1의 중심과 직선 l 사이의 거리는 원 C_1의 반지름의 길이와 같다.

(2nd) **두 직선 l_1, l_2의 방정식을 구한다.**

두 직선 l_1, l_2가 모두 직선 l에 평행하므로

$$l_1: ax+by+m_1=0,\ l_2: ax+by+m_2=0$$
$$(m_1\neq 1,\ m_2\neq 1,\ m_2>m_1)$$

이라 하면 원 C_2의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|m_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|m_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}$$

$$|m_1|=|m_2|=2\sqrt{2}\ (\because ㉠)$$

$$\therefore m_1=-2\sqrt{2},\ m_2=2\sqrt{2}\ (\because m_2>m_1)$$

$$\therefore l_1: ax+by-2\sqrt{2}=0,\ l_2: ax+by+2\sqrt{2}=0$$

> 원 $(x-5)^2+y^2=25$의 반지름의 길이

> 원 C_2의 중심과 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 모두 원 C_2의 반지름의 길이와 같다.

(3rd) **$(ax_1+by_1+1)(ax_2+by_2+1)$의 값을 구한다.**

두 점 $P_1(x_1,\ y_1)$, $P_2(x_2,\ y_2)$는 각각 두 직선 l_1, l_2 위의 점이므로

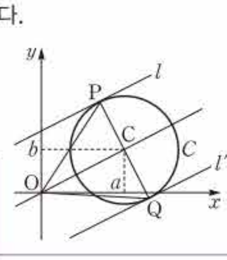
$$ax_1+by_1-2\sqrt{2}=0,\ ax_2+by_2+2\sqrt{2}=0$$

$$\therefore (ax_1+by_1+1)(ax_2+by_2+1)$$
$$=(2\sqrt{2}+1)(-2\sqrt{2}+1)=-7$$

답 ①

03 (1st) **원의 중심과 원점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.**

오른쪽 그림과 같이 원 C의 중심을 점 C$(a,\ b)$라 하면 직선 OC는 직선 l과 평행하다.



> $x-2y+5=0$에서
> $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

직선 OC의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x$$

$$\therefore x-2y=0$$

점 C는 이 직선 위의 점이므로

$$a-2b=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(2nd) **$\triangle$POQ가 정삼각형임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.**

원 C의 반지름의 길이는 점 C와 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CP}=\frac{|a-2b+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$\angle$OPC$=60°$이므로 직각삼각형 POC에서

$$\overline{OC}=\sqrt{5}\tan 60°=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{15}$$

> $\overline{CP}\perp l$, $l\,/\!/\,\overline{OC}$이므로
> $\overline{OC}\perp\overline{CP}$
> 즉 삼각형 POC는 직각삼각형이다.

한편 $\overline{OC}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{15}$$

$$\therefore a^2+b^2=15 \quad \cdots\cdots ㉡$$

(3rd) **$a+b$의 값을 구한다.**

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2\sqrt{3},\ b=\sqrt{3}\ (\because a>0,\ b>0)$$

$$\therefore a+b=3\sqrt{3}$$

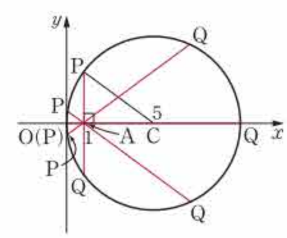
답 ①

04 (1st) **현의 길이의 최솟값을 구한다.**

$x^2+y^2-10x=0$에서

$$(x-5)^2+y^2=25$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하고 점 A$(1,\ 0)$을 지나는 직선이 원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.



현 PQ의 길이가 최소일 때는 $\overline{CA}\perp\overline{PQ}$일 때이고 이때 $\overline{AP}=\overline{AQ}$이다.

직각삼각형 ACP에서 $\overline{CA}=4$, $\overline{CP}=5$이므로

$$\overline{AP}=\sqrt{5^2-4^2}=3$$

$$\therefore \overline{PQ}=2\overline{AP}=6$$

즉 현 PQ의 길이의 최솟값은 6이다.

(2nd) **현의 길이의 최댓값을 구한다.**

현 PQ의 길이가 최대일 때는 현 PQ가 지름일 때이므로 현 PQ의 길이의 최댓값은 10이다.

(3rd) **길이가 자연수인 현의 개수를 구한다.**

$6\leq\overline{PQ}\leq 10$이므로 길이가 7, 8, 9인 현은 각각 2개씩 존재하고, 길이가 6, 10인 현은 각각 1개씩 존재한다.

따라서 구하는 현의 개수는

$$3\cdot 2+2\cdot 1=8$$

답 ③

12 도형의 이동

Ⓦ 90쪽

01 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $\quad \mathrm{P}'(a+2,\ b-6)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PP}'}=\sqrt{(a+2-a)^2+(b-6-b)^2}$

$=\sqrt{2^2+(-6)^2}$

$=2\sqrt{10}$ 답 ②

02 두 점 A, B를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점을 각각 A′, B′이라 하면

$-1+m=-6,\ a+n=6,\ b+m=2,\ 4+n=7$

$\therefore\ a=3,\ b=7,\ m=-5,\ n=3$

따라서 점 $(3,\ 7)$을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(3-5,\ 7+3) \quad \therefore\ (-2,\ 10)$ 답 $(-2,\ 10)$

03 점 $(0,\ 0)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-4,\ -1)$이므로

$0+m=-4,\ 0+n=-1$

$\therefore\ m=-4,\ n=-1$

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-4,\ b-1)$

이 점이 점 $(0,\ 0)$과 일치하므로

$a-4=0,\ b-1=0 \qquad \therefore\ a=4,\ b=1$

$\therefore\ b-a=-3$ 답 -3

04 $\triangle$OAB는 정삼각형이고 $ab>0$이므로 점 B는 제1사분면 위에 있다.

$\therefore\ a>0,\ b>0$

정삼각형 OAB의 한 변의 길이는 $\overline{\mathrm{OA}}=4$이므로

$a=\frac{1}{2}\cdot 4=2,\ b=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4=2\sqrt{3}$

따라서 $\mathrm{B}(2,\ 2\sqrt{3})$이므로 점 B를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(2+m,\ 2\sqrt{3}+n)$

이 점이 점 $\mathrm{B}'(5,\ 3\sqrt{3})$과 일치하므로

$2+m=5,\ 2\sqrt{3}+n=3\sqrt{3}$

$\therefore\ m=3,\ n=\sqrt{3}$

$\therefore\ \frac{m}{n}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

05 직선 $y=-4x+7$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-b=-4(x-a)+7$

$\therefore\ y=-4x+4a+b+7$

이 직선이 처음 직선과 일치하므로

$4a+b+7=7, \qquad b=-4a$

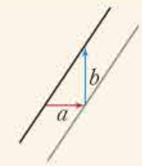
$\therefore\ \frac{b}{a}=-4$ 답 -4

쌤한마디

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 직선이 다시 원래의 직선으로 옮겨지려면 오른쪽 그림과 같이

$\frac{b}{a}=$(직선의 기울기)

이어야 한다.



06 직선 $2x-5y+9=0$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-5)-5(y-k)+9=0$

$\therefore\ 2x-5y+5k-1=0$

이 직선이 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심 $(3,\ -1)$을 지나야 하므로

$6+5+5k-1=0 \qquad \therefore\ k=-2$ 답 ④

07 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

$y+3=a(x-1)+b$

$\therefore\ y=ax-a+b-3$

이 직선이 직선 $y=\frac{1}{2}x-2$와 수직이므로

$a=-2$

또 직선 $y=\frac{1}{2}x-2$와 점 $(4,\ 0)$에서 만나므로

$3a+b-3=0, \qquad -6+b-3=0$

$\therefore\ b=9$

$\therefore\ a+b=7$ 답 7

$(x,\ y) \longrightarrow (x+1,\ y-3)$은 도형을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하는 것을 나타낸다.

$y=0$을 $y=\frac{1}{2}x-2$에 대입하면

$\frac{1}{2}x-2=0 \quad \therefore\ x=4$

08 $x^2+y^2-4x-10y+a=0$에서

$(x-2)^2+(y-5)^2=29-a$

이 원을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-5-2)^2+(y+2-5)^2=29-a$

$\therefore\ (x-7)^2+(y-3)^2=29-a$

이 원의 중심의 좌표가 $(7,\ 3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{29-a}$이므로

$b=3,\ \sqrt{29-a}=5$

$\therefore\ a=4,\ b=3$

$\therefore\ ab=12$ 답 ⑤

도형 $f(x,\ y)=0$을 도형 $f(x-5,\ y+2)=0$으로 옮기는 평행이동

➡ x 대신 $x-5$, y 대신 $y+2$를 대입

➡ x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동

09 $x^2+y^2-8x+4y+11=0$에서

$(x-4)^2+(y+2)^2=9$

이 원을 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원 C_2의 방정식은

$(x-k-4)^2+(y-3+2)^2=9$

$\therefore\ (x-k-4)^2+(y-1)^2=9$

두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표가 각각 $(4,\ -2)$, $(k+4,\ 1)$이므로

$\sqrt{(k+4-4)^2+(1+2)^2}=\sqrt{13}$

양변을 제곱하면

$k^2+9=13, \quad k^2=4$

$\therefore k=2 \ (\because k>0)$ 답 2

10 $x^2+y^2-10x+2y+22=0$에서

$(x-5)^2+(y+1)^2=4$

이 원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-m-5)^2+(y-n+1)^2=4$

이 원의 중심 $(m+5, n-1)$이 제4사분면 위에 있으면서 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

x축과 y축에 동시에 접하는 원에서
$|(\text{중심의 } x\text{좌표})|$
$=|(\text{중심의 } y\text{좌표})|$
$=(\text{반지름의 길이})$

$m+5=2, \ n-1=-2$

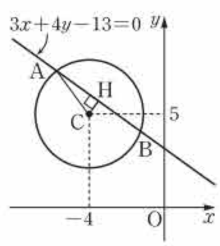
$\therefore m=-3, \ n=-1$

$\therefore m+n=-4$ 답 -4

11 원 $x^2+y^2=9$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y-5)^2=9$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(-4, 5)$라 하고, 점 C에서 직선 $3x+4y-13=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|-12+20-13|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

직각삼각형 ACH에서 $\overline{AC}=3$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=4\sqrt{2}$ 답 ③

12 점 $(5, -1)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(7, -3)$이라 하면

$5+m=7, \ -1+n=-3$

$\therefore m=2, \ n=-2$

포물선 $y=-x^2-6x+1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+2=-(x-2)^2-6(x-2)+1$

$\therefore y=-x^2-2x+7$

$=-(x+1)^2+8$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 8)$이므로

$a=-1, b=8 \quad \therefore b-a=9$ 답 9

다른 풀이 점 $(5, -1)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(7, -3)$이라 하면

$5+m=7, \ -1+n=-3$

$\therefore m=2, \ n=-2$

$y=-x^2-6x+1$에서

$y=-(x+3)^2+10$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, 10)$이다.

점 $(-3, 10)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-3+2, 10-2) \quad \therefore (-1, 8)$

따라서 $a=-1, b=8$이므로 $\quad b-a=9$

13 포물선 $y=3x^2-12x$, 즉 $y=3(x-2)^2-12$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a+7$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-a-7=3(x-a-2)^2-12$

$\therefore y=3(x-a-2)^2+a-5$

꼭짓점의 x좌표가 0이다.

이 포물선의 꼭짓점 $(a+2, a-5)$가 y축 위에 있으므로

$a+2=0 \quad \therefore a=-2$ 답 -2

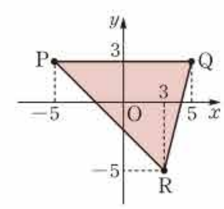
14 점 $P(-5, 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$(5, 3)$

또 점 $P(-5, 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는

$(3, -5)$

따라서 $\triangle PQR$는 오른쪽 그림과 같으므로



$\triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 8=40$ 답 40

15 $P_1(3, -8)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_2의 좌표는 $\quad (-3, 8)$

$P_2(-3, 8)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_3의 좌표는 $\quad (8, -3)$

$P_3(8, -3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_4의 좌표는 $\quad (-8, 3)$

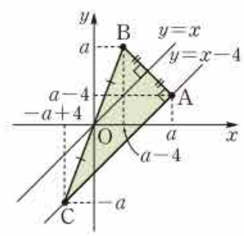
$P_4(-8, 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_5의 좌표는 $\quad (3, -8)$

즉 점 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \cdots$는 4개의 점 $(3, -8)$, $(-3, 8)$, $(8, -3)$, $(-8, 3)$의 순서로 반복된다.

이때 $2025=4\cdot 506+1$이므로 점 P_{2025}의 좌표는 점 P_1의 좌표와 같다.

따라서 점 P_{2025}의 좌표는 $(3, -8)$이다. 답 ③

16 $A(a, a-4)(a>4)$라 하면



$B(a-4, a)$,

$C(-a+4, -a)$

$-a=(-a+4)-4$이므로 점 C는 직선 $y=x-4$ 위의 점이다.

점 C는 직선 $y=x-4$ 위의 점이고 $\triangle ABC$는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=32$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(a-4-a)^2+(a-a+4)^2}=4\sqrt{2}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(-a+4-a)^2+(-a-a+4)^2}$

$=2\sqrt{2}(a-2)$ ($\because a>4$)

이므로

$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}(a-2)=32$

$a-2=4$ $\quad\therefore a=6$

따라서 점 A의 좌표는 $(6, 2)$이다. 답 $(6, 2)$

점 $(3, -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

$\overline{AC}=\sqrt{2(4-2a)^2}$

$=\sqrt{8(2-a)^2}$

$=2\sqrt{2}|2-a|$

이때 $a>4$이므로

$\overline{AC}=2\sqrt{2}(a-2)$

17 직선 $y=2x-5$를 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은

$-y=2x-5$ $\quad\therefore y=-2x+5$

직선 l_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은

$x=-2y+5$ $\quad\therefore x+2y-5=0$

따라서 구하는 x절편은 5이다. 답 5

18 직선 $ax+(b-2)y+5=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$(b-2)x+ay+5=0$

이 직선이 직선 $(a-1)x+(2b+3)y+5=0$과 일치하므로

$b-2=a-1$, $a=2b+3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=-4$

$\therefore ab=20$ 답 ①

$a=2b+3$을 $b-2=a-1$에 대입하면

$b-2=2b+3-1$

$\therefore b=-4$

$b=-4$를 $a=2b+3$에 대입하면

$a=-5$

19 직선 $x-y-k=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-x+y-k=0$ $\quad\therefore x-y+k=0$

이 직선이 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=8$과 만나야 하므로

$\frac{|-1-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\le 2\sqrt{2}$, $\quad|k-3|\le 4$

$-4\le k-3\le 4$ $\quad\therefore -1\le k\le 7$

따라서 정수 k는 $-1, 0, 1, \cdots, 7$의 9개이다. 답 ④

원의 중심 $(-1, 2)$와 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$보다 작거나 같다.

20 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-3)^2+(-y+2)^2=1$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=1$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-3)^2+(y-2)^2=1$

$\therefore (x+3)^2+(y-2)^2=1$

이 원의 중심 $(-3, 2)$가 직선 $y=4x+k$ 위에 있으므로

$2=-12+k$ $\quad\therefore k=14$ 답 ③

다른 풀이 원의 중심 $(3, -2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(3, 2)$

점 $(3, 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-3, 2)$

이 점이 직선 $y=4x+k$ 위에 있으므로

$2=-12+k$ $\quad\therefore k=14$

21 원 $x^2+y^2+6x+8y=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+(-y)^2+6\cdot(-x)+8\cdot(-y)=0$

$\therefore x^2+y^2-6x-8y=0$

원 $x^2+y^2+6x+8y=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+y^2+8x+6y=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-6x-8y-(x^2+y^2+8x+6y)=0$

$-14x-14y=0$ $\quad\therefore x+y=0$ 답 $x+y=0$

22 $x^2+y^2-2x-10y+17=0$에서

$(x-1)^2+(y-5)^2=9$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원 O'의 방정식은

$(x-1)^2+(-y-5)^2=9$

$\therefore (x-1)^2+(y+5)^2=9$

$\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 두 원 O, O'의 중심 $(1, 5)$, $(1, -5)$를 잇는 선분의 길이에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 것과 같으므로

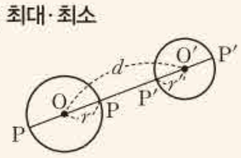
$|-5-5|-(3+3)=4$ 답 4

두 점 (a, b), (a, c) 사이의 거리는 $|c-b|$

쌤한마디

두 원 위의 점 사이의 거리의 최대·최소

반지름의 길이가 r인 원 O 위의 점 P와 반지름의 길이가 r'인 원 O' 위의 점 P′에 대하여 두 원 O, O'의 중심 사이의 거리를 d $(d>r+r')$라 할 때



① ($\overline{PP'}$의 최댓값)$=d+(r+r')$

② ($\overline{PP'}$의 최솟값)$=d-(r+r')$

23 $x^2+y^2-4x-12=0$에서

$(x-2)^2+y^2=16$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-2)^2+y^2=16$

$\therefore (x+2)^2+y^2=16$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+(y+2)^2=16$

이때 두 점 P, Q는 x축 위의 점이므로 위의 식에 $y=0$을 대입하면

$x^2+4=16$, $\quad x^2=12$

$\therefore x=\pm 2\sqrt{3}$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(-2\sqrt{3}, 0)$, $(2\sqrt{3}, 0)$이므로

$\overline{PQ}=|2\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})|=4\sqrt{3}$ 답 ①

24 포물선 $y=-2x^2+4x+7$을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=-2\cdot(-x)^2+4\cdot(-x)+7$

$\therefore y=2x^2+4x-7$

이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=2\cdot(-x)^2+4\cdot(-x)-7$

$\therefore y=2x^2-4x-7$

이 포물선이 점 $(a,\ -1)$을 지나므로

$-1=2a^2-4a-7,\quad a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 ③

도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것은 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

25 함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 방정식은

$-y=x^2-ax+b$

$\therefore y=-x^2+ax-b$

$=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}-b$

포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}-b\right)$

이때 함수 $y=f(x)$가 $x=2$에서 최댓값 -1을 가지므로

$\dfrac{a}{2}=2,\ \dfrac{a^2}{4}-b=-1$

$\therefore a=4,\ b=5$

$\therefore ab=20$ 답 20

26 점 $(a,\ 7)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-7,\ -a)$

이 점을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-2,\ -a-3)$

이 점이 점 $(b,\ 3)$과 일치하므로

$-2=b,\ -a-3=3$

$\therefore a=-6,\ b=-2$

$\therefore b-a=4$ 답 4

27 직선 l을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-7=a(x-3)-2\quad \therefore y=ax-3a+5$

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l'의 방정식은

$-y=ax-3a+5\quad \therefore y=-ax+3a-5$

두 직선 $l,\ l'$이 y축 위의 점 $(0,\ -2)$에서 만나므로

$3a-5=-2\quad \therefore a=1$ 답 1

직선 l의 y절편은 -2이다.

28 원 $(x+4)^2+(y-a)^2=9$를 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+4)^2+(y-a)^2=9$

$\therefore (x-4)^2+(y-a)^2=9$

이 원을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+1-4)^2+(y-a)^2=9$

$\therefore (x-3)^2+(y-a)^2=9$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하려면

$|a|=3\quad \therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 3

29 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$f(y,\ x)=0$

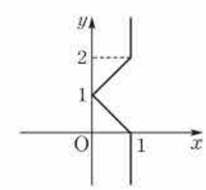
방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면

$f(y,\ -x)=0$

따라서 방정식 $f(y,\ -x)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ②이다. 답 ②

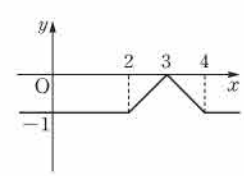
30 ㄱ. 방정식 $f(-x,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.

ㄴ. 방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



ㄷ. 방정식 $f(x+2,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.

ㄹ. 방정식 $f(x-2,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이상에서 구하는 방정식은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

31 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는

$(-a,\ -b)$

이때 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(-a,\ -b)$는 모두 포물선 $y=x^2-2x-9$ 위의 점이므로

$b=a^2-2a-9,\ -b=a^2+2a-9$

즉 $a^2-2a-9=-a^2-2a+9$이므로

$a^2=9\quad \therefore a=\pm3$

따라서

$a=-3,\ b=6$ 또는 $a=3,\ b=-6$

이므로

$a=-3,\ a=3$을 $b=a^2-2a-9$에 각각 대입하여 b의 값을 구한다.

P$(-3, 6)$, Q$(3, -6)$

또는 P$(3, -6)$, Q$(-3, 6)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-3-3)^2+(6+6)^2}$

$=6\sqrt{5}$ 답 $6\sqrt{5}$

32 점 A$(0, 4)$를 원 위의 점 P(a, b)에 대하여 대칭이동한 점을 A$'(x, y)$라 하면

$a=\frac{x}{2}$, $b=\frac{4+y}{2}$ …… ㉠

이때 점 P(a, b)가 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y+4}{2}\right)^2=4$

$\therefore x^2+(y+4)^2=16$ 답 ⑤

33 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 $(-2, 4)$, (a, b)를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a-2}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로

$\frac{b+4}{2}=2\cdot\frac{a-2}{2}-1$

$\therefore 2a-b=10$ …… ㉠

두 점 $(-2, 4)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=2x-1$과 수직이므로

$\frac{b-4}{a+2}\cdot 2=-1$

$\therefore a+2b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{26}{5}$, $b=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 점의 좌표는

$\left(\frac{26}{5}, \frac{2}{5}\right)$ 답 $\left(\frac{26}{5}, \frac{2}{5}\right)$

34 점 C의 좌표를 (a, b)라 하면 선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a-3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 위의 점이므로

$\frac{b+1}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a-3}{2}+2$

$\therefore a+2b=9$ …… ㉠

직선 BC와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$가 수직이므로

$\frac{b-1}{a+3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$\therefore 2a-b=-7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=5$

$\therefore$ C$(-1, 5)$

Q BOX

직선 AC의 방정식은 $y=5$

㉠$-$㉡$\times$2를 하면
$-5b=-2$
$\therefore b=\frac{2}{5}$
$b=\frac{2}{5}$를 ㉡에 대입하면
$a+\frac{4}{5}=6$
$\therefore a=\frac{26}{5}$

㉠$+$㉡$\times$2를 하면
$5a=-5$
$\therefore a=-1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하면
$-1+2b=9$
$\therefore b=5$

$\overline{AC}=0-(-1)=1$이고 점 B와 직선 AC 사이의 거리가 $5-1=4$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4=2$ 답 ①

35 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=2$의 중심 $(-2, 1)$을 직선 $y=-x+2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하자.

두 점 $(-2, 1)$, (a, b)를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a-2}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$\frac{b+1}{2}=-\frac{a-2}{2}+2$

$\therefore a+b=5$ …… ㉠

두 점 $(-2, 1)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=-x+2$와 수직이므로

$\frac{b-1}{a+2}\cdot(-1)=-1$

$\therefore a-b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=4$

따라서 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(1, 4)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로

$(x-1)^2+(y-4)^2=2$

이 원과 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$이 접하므로

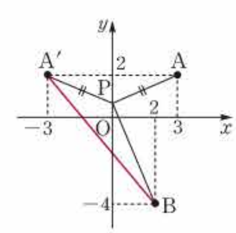
$\frac{|m-4+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$, $|m-2|=\sqrt{2m^2+2}$

양변을 제곱하면 $m^2-4m+4=2m^2+2$

$m^2+4m-2=0$

$\therefore m=-2+\sqrt{6}$ ($\because m>0$) 답 $-2+\sqrt{6}$

36 오른쪽 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$이라 하면



A$'(-3, 2)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

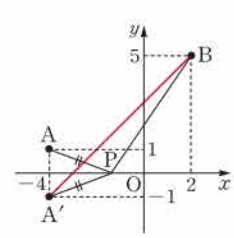
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(2+3)^2+(-4-2)^2}$

$=\sqrt{61}$ 답 $\sqrt{61}$

37 오른쪽 그림과 같이 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$이라 하면



A$'(-4, -1)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq\overline{A'B}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 A$'$B와 x축의 교점이다.

W 12 도형의 이동

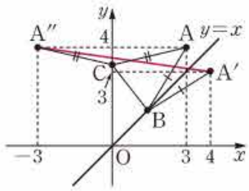
직선 A′B의 방정식은

$$y+1=\frac{5+1}{2+4}(x+4) \qquad \therefore\ y=x+3$$

$y=0$을 대입하면 $\quad x=-3$

따라서 점 P의 x좌표는 -3이다. 답 -3

38 오른쪽 그림과 같이 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, y축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면



$A'(4,\ 3)$,

$A''(-3,\ 4)$

이때 $\overline{AB}=\overline{A'B}$, $\overline{AC}=\overline{A''C}$이므로

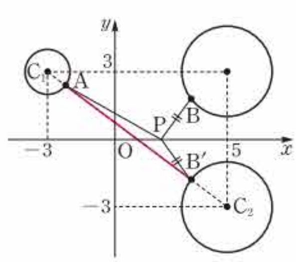
$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}&=\overline{A'B}+\overline{BC}+\overline{CA''}\\&\ge\overline{A'A''}\\&=\sqrt{(-3-4)^2+(4-3)^2}\\&=5\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다. 답 ④

39 원 $(x-5)^2+(y-3)^2=4$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-5)^2+(y+3)^2=4$$

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′은 원 $(x-5)^2+(y+3)^2=4$ 위의 점이고, $\overline{BP}=\overline{B'P}$이다.



두 원 $(x+3)^2+(y-3)^2=1$, $(x-5)^2+(y+3)^2=4$의 원의 중심을 각각 $C_1(-3,\ 3)$, $C_2(5,\ -3)$이라 하면 네 점 C_1, A, B′, C_2가 한 직선 위에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소이다.

이때 $\overline{C_1C_2}=\sqrt{(5+3)^2+(-3-3)^2}=10$이므로 구하는 최솟값은 $\quad 10-(1+2)=7$ 답 ③

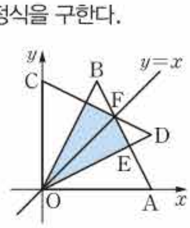
$\overline{C_1C_2}$의 길이에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 값

도전! 수능 기출

96쪽

01 (1st) 직선 AB와 직선 OD의 방정식을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$와 $\overline{OD}$의 교점을 E, $\overline{AB}$와 직선 $y=x$의 교점을 F라 하면 S는 △OEF의 넓이의 2배와 같다.



직선 AB의 방정식은

$$y=\frac{2-0}{1-2}(x-2) \qquad \therefore\ y=-2x+4$$

점 B(1, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표는 (2, 1)이므로 직선 OD의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x$$

(2nd) $\overline{OF}$의 길이를 구한다.

점 F의 x좌표는 $-2x+4=x$에서 $\quad x=\frac{4}{3}$

따라서 $F\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$이므로

$$\overline{OF}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

(3rd) 점 E와 직선 $y=x$ 사이의 거리를 구한다.

점 E의 x좌표는 $-2x+4=\frac{1}{2}x$에서 $\quad x=\frac{8}{5}$

$$\therefore\ E\left(\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

즉 점 $E\left(\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{8}{5}-\frac{4}{5}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$$

(4th) $60S$의 값을 구한다.

$S=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{5}=\frac{16}{15}$이므로

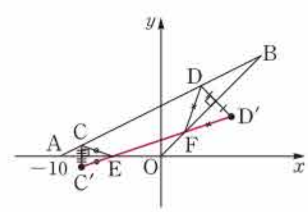
$\overline{OE}$의 길이, 점 F와 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 사이의 거리를 이용할 수도 있다.

$$60S=64$$

답 64

02 (1st) 점 C는 x축에 대하여, 점 D는 직선 OB에 대하여 대칭이동한 점을 구한다.

다음 그림과 같이 점 C(−8, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 C′이라 하면



$$\therefore\ C'(-8,\ -1)$$

한편 두 점 O(0, 0), B(10, 10)을 지나는 직선의 방정식은 $y=x$이므로 점 D(4, 7)을 직선 OB에 대하여 대칭이동한 점을 D′이라 하면 $\quad D'(7,\ 4)$

(2nd) $\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FD}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 E, F의 위치를 찾는다.

$\overline{CE}=\overline{C'E}$, $\overline{FD}=\overline{FD'}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FD}&=\overline{C'E}+\overline{EF}+\overline{FD'}\\&\ge\overline{C'D'}\end{aligned}$$

즉 $\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FD}$의 값이 최소가 되려면 두 점 E, F가 직선 C′D′ 위에 있어야 한다.

(3rd) 두 점 C′, D′을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 점 E의 x좌표를 구한다.

두 점 C′(−8, −1), D′(7, 4)를 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=\frac{4+1}{7+8}(x+8) \qquad \therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

따라서 점 E의 x좌표는

$$\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}=0 \qquad \therefore x=-5$$

답 ①

점 E는 x축 위의 점이므로 y좌표가 0이다.

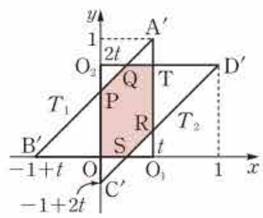
03 **1st** 평행이동한 점의 좌표와 두 삼각형 T_1, T_2가 만나서 생기는 점의 좌표를 t에 대한 식으로 나타낸다.

세 점 O, A, B를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 점을 각각 O_1, A', B'이라 하면

$O_1(t,\ 0)$, $A'(t,\ 1)$, $B'(-1+t,\ 0)$

세 점 O, C, D를 y축의 방향으로 $2t$만큼 평행이동한 점을 각각 O_2, C', D'이라 하면

$O_2(0,\ 2t)$, $C'(0,\ -1+2t)$, $D'(1,\ 2t)$



오른쪽 그림과 같이 두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되려면 $\overline{A'B'}$이 $\overline{O_2C'}$, $\overline{O_2D'}$과 각각 점 A', B'이 아닌 점에서 만나야 하고,

$\overline{C'D'}$이 $\overline{O_1B'}$, $\overline{O_1A'}$과 각각 점 C', D'이 아닌 점에서 만나야 한다.

즉 $0<t<1$, $0<2t<1$이어야 하므로

$$0<t<\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{A'B'}$이 $\overline{O_2C'}$, $\overline{O_2D'}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, $\overline{C'D'}$이 $\overline{O_1A'}$, $\overline{O_1B'}$과 만나는 점을 각각 R, S라 하면

$\overline{OP}=\overline{OB'}=1-t$, $\overline{OS}=\overline{OC'}=1-2t$,

$\overline{O_2Q}=\overline{O_2P}=2t-(1-t)=3t-1$,

$\overline{O_1R}=\overline{O_1S}=t-(1-2t)=3t-1$

$\overline{O_2P}=\overline{OO_2}-\overline{OP}$

$\overline{O_1S}=\overline{OO_1}-\overline{OS}$

이므로

$P(0,\ 1-t)$, $Q(3t-1,\ 2t)$,

$R(t,\ 3t-1)$, $S(1-2t,\ 0)$

2nd 조건을 만족시키는 t의 값의 범위를 구하여 a의 값을 찾는다.

조건을 만족시키는 육각형이 만들어지려면

(점 P의 y좌표)$<$(점 O_2의 y좌표)$<$(점 A'의 y좌표)

이어야 하므로

$$1-t<2t<1 \qquad \therefore \frac{1}{3}<t<\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 (점 C'의 y좌표)$<$(점 O_1의 y좌표)$<$(점 R의 y좌표)

이어야 하므로

$$-1+2t<0<3t-1$$

$$\therefore \frac{1}{3}<t<\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서 두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되도록 하는 t의 값의 범위는

$$\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}$$

3rd $a+M$의 값을 구한다.

$\overline{A'O_1}$, $\overline{O_2D'}$의 교점을 T라 하면 육각형의 넓이는

$$\square OO_1TO_2-\triangle O_1RS-\triangle O_2PQ$$

$$=t\cdot 2t-\frac{1}{2}(3t-1)^2-\frac{1}{2}(3t-1)^2$$

$$=-7t^2+6t-1$$

$$=-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{2}{7}$$

이므로 $t=\frac{3}{7}$일 때 최댓값 $\frac{2}{7}$를 갖는다.

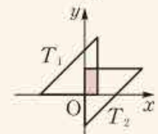
따라서 $M=\frac{2}{7}$이므로 $\quad a+M=\frac{11}{14}$

답 ①

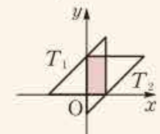
쌤한마디

양의 실수 t의 값의 범위에 따른 두 삼각형 T_1, T_2의 위치는 다음과 같다.

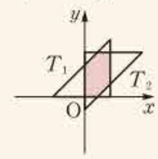
① $0<t<\frac{1}{3}$일 때



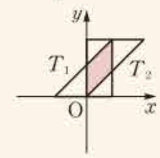
② $t=\frac{1}{3}$일 때



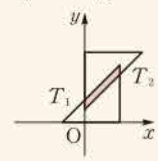
③ $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$일 때



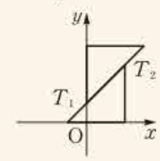
④ $t=\frac{1}{2}$일 때



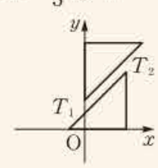
⑤ $\frac{1}{2}<t<\frac{2}{3}$일 때



⑥ $t=\frac{2}{3}$일 때



⑦ $t>\frac{2}{3}$일 때



MEMO

ME
MO

MEMO