Solution

Lecture Book

Ⅰ 지수함수와 로그함수

Ⅱ 삼각함수

Ⅲ 수열

Work Book

Ⅰ 지수함수와 로그함수

Ⅱ 삼각함수

Ⅲ 수열

01 지수

8쪽 Lecture 01
01 $1, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 02 $-2i, 2i$
03 $-3, 3$ 04 -5 05 6 06 -2 07 $\frac{3}{4}$ 08 -0.3
09 $\frac{1}{3}$ 10 2 11 2 12 5

9쪽 유형 Q+Q
01 ⑤ 02 1 03 4 04 24
05 ⑤ 06 ② 07 1 08 ① 09 ② 10 6

11쪽 Lecture 02
01 1 02 $-\frac{1}{8}$ 03 $a^{\frac{2}{5}}$ 04 $a^{\frac{1}{2}}$
05 $\sqrt[7]{a}$ 06 $\sqrt[10]{a^{-3}}$ 07 125 08 8 09 81 10 a^8b^{-12}
11 $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{11}{6}}$ 12 a^7

12쪽 유형 Q+Q
01 -6 02 2 03 $\frac{3}{8}$ 04 ⑤
05 $\frac{5}{2}$ 06 $\frac{1}{27}$ 07 ② 08 $\frac{11}{12}$ 09 7 10 ③
11 $2\sqrt{ab}$ 12 $\frac{80}{9}$ 13 ④ 14 8 15 $\frac{7}{3}$ 16 ③
17 ① 18 2 19 0 20 ④ 21 2 22 ⑤

15쪽 중단원 마무리
01 3 02 ④ 03 ②
04 $A<B<C$ 05 ⑤ 06 8 07 ③ 08 ⑤
09 16 10 6 11 $\frac{24}{5}$ 12 ② 13 $\frac{3}{5}$ 14 ②
15 ④ 16 ③ 17 ①

02 로그

18쪽 Lecture 03
01 $4=\log_2 16$ 02 $-2=\log_{\frac{1}{3}} 9$
03 $3^{-3}=\frac{1}{27}$ 04 $(\sqrt{5})^4=25$ 05 $5<x<6$ 또는 $x>6$
06 $x<-3$ 또는 $x>0$ 07 $-1<x<0$ 또는 $0<x<\frac{2}{3}$ 08 1
09 2 10 3 11 5 12 2 13 4

19쪽 유형 Q+Q
01 2 02 ③ 03 15 04 ②
05 ⑤ 06 -4 07 11 08 ⑤ 09 25 10 ④
11 ② 12 1 13 $\frac{3a+2c}{b+c}$ 14 ⑤ 15 $-\frac{1}{3}$ 16 ③
17 $\frac{5}{4}$ 18 ③ 19 ② 20 ③ 21 130 22 ②

23쪽 Lecture 04
01 $\frac{3}{4}$ 02 -3 03 0 04 3
05 $\frac{7}{6}$ 06 0.5092 07 3.4969 08 -0.2433 09 768

24쪽 유형 Q+Q
01 2.0791 02 0.79 03 ④ 04 200
05 $10\ \%$ 06 ③

25쪽 중단원 마무리
01 ③ 02 4
03 (가) $12^{\frac{m}{n}}$ (나) 4^m (다) 짝수 04 ① 05 9 06 ⑤
07 ④ 08 ① 09 $\frac{17}{3}$ 10 33 11 ① 12 13
13 ⑤ 14 1.1348 15 ④ 16 $20\ \%$ 17 75 18 30

03 지수함수

28쪽 Lecture 05
01 25 02 $\frac{1}{5}$ 03 ㄴ, ㄷ
04 풀이 21쪽 05 풀이 21쪽 06 풀이 21쪽
07 최댓값: 49, 최솟값: $\frac{1}{7}$ 08 최댓값: 9, 최솟값: $\frac{1}{3}$

29쪽 유형 Q+Q
01 $\frac{1}{3}$ 02 ⑤ 03 ④ 04 $1<a<2$
05 10 06 ㄱ, ㄴ, ㄹ 07 27 08 ④ 09 $\frac{1}{2}$
10 2 11 ② 12 5^a, 5^{a^b} 13 ⑤ 14 81 15 127
16 ① 17 66 18 ① 19 $\frac{1}{3}$ 20 6

32쪽 Lecture 06
01 $x=3$ 02 $x=\frac{1}{2}$ 03 $x=1$ 04 $x=0$
05 $x=\frac{1}{3}$ 06 $x=2$ 또는 $x=6$ 07 $x<6$ 08 $x\le 2$
09 $-3\le x<2$ 10 $x<-1$ 11 $1\le x\le 2$

33쪽 유형 Q+Q
01 ⑤ 02 -2 03 ⑤ 04 $\frac{1}{2}$
05 -1 06 2 07 ④ 08 ② 09 10
10 $-4<k<0$ 11 11 12 12 13 $\frac{17}{8}$ 14 -1
15 ⑤ 16 $1\le x\le 6$ 17 ③ 18 ④ 19 $k>-7$
20 100년 21 ③

36쪽 중단원 마무리
01 ② 02 ④ 03 ④ 04 16
05 ④ 06 $A<B<C$ 07 ② 08 $\frac{7}{4}$ 09 14
10 ④ 11 $k\ge 6$ 12 0 13 $x>1$ 14 ④ 15 4개월
16 ④ 17 ④

04 로그함수

40쪽 **Lecture 07** **01** $\frac{1}{2}$ **02** 1 **03** ㄱ, ㄴ

04 풀이 31쪽 **05** 풀이 31쪽 **06** 풀이 31쪽

07 최댓값: 1, 최솟값: -2 **08** 최댓값: 0, 최솟값: -2

41쪽 **유형** **01** ④ **02** 15 **03** ④ **04** 14

05 3 **06** ⑤ **07** ⑤ **08** ④ **09** 3 **10** $\frac{5}{3}$

11 -20 **12** ③ **13** ③ **14** $\log_4 \frac{1}{a}$ **15** 8 **16** ④

17 ③ **18** $\frac{1}{2}$ **19** ⑤ **20** -75 **21** $\frac{1}{81}$ **22** ④

23 ③ **24** ③

45쪽 **Lecture 08** **01** $x=\frac{1}{3}$ **02** $x=2$ **03** $x=10$ 또는 $x=100$

04 $x=1$ **05** $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$ **06** $x\geq5$ **07** $\frac{5}{3}<x<3$

08 $1\leq x\leq6$ **09** $0<x<\frac{1}{10}$ 또는 $x>10$

46쪽 **유형** **01** ④ **02** 16 **03** 130 **04** ③

05 ② **06** ① **07** 10 **08** 110 **09** ① **10** ④

11 5 **12** ③ **13** 20 **14** 59 **15** ⑤ **16** $\frac{1}{9}$

17 ④ **18** $\frac{3}{4}$ **19** 1000 **20** $\frac{1}{3}$ **21** ③ **22** ②

23 12

50쪽 **중단원 마무리** **01** $4\sqrt{5}$ **02** ③ **03** ④ **04** ⑤

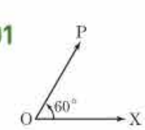
05 ① **06** -2 **07** ④ **08** -2 **09** 17 **10** ②

11 12 **12** ② **13** $a<\frac{3}{4}$ **14** ① **15** ② **16** 29년

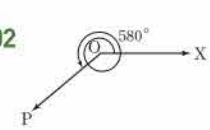
17 75 **18** ①

05 삼각함수

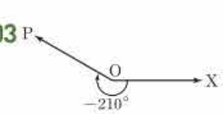
57쪽 **Lecture 09** **01**



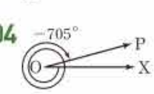
02



03



04



05 $360°\times n+140°$ **06** $360°\times n+285°$ **07** $360°\times n+340°$

08 $360°\times n+180°$ **09** 제4사분면 **10** 제3사분면

11 제1사분면 **12** 제2사분면 **13** $-530°$, $925°$

14 $\frac{3}{4}\pi$ **15** $-\frac{5}{3}\pi$ **16** $120°$ **17** $-252°$ **18** $2n\pi+\frac{1}{2}$

19 $2n\pi+\frac{7}{6}\pi$ **20** $l=\pi$, $S=\frac{3}{2}\pi$ **21** $r=3$, $\theta=2$

58쪽 **유형** **01** ⑤ **02** 제2사분면

03 제2사분면 **04** ④ **05** $\frac{4}{5}\pi$ **06** $\frac{30}{7}\pi$ **07** 6

08 12 **09** ⑤ **10** 30 **11** $8+7\pi$ **12** ⑤ **13** $\frac{25}{2}\pi$

14 ③ **15** 1600 m^2 **16** 20

60쪽 **Lecture 10** **01** $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

02 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$ **03** $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

04 제2사분면 **05** 제2사분면 또는 제4사분면

06 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$ **07** 1 **08** $\frac{2}{\cos\theta}$ **09** $\frac{5}{4}$

61쪽 **유형** **01** 11 **02** 17 **03** 제2사분면

04 $-\tan\theta$ **05** 0 **06** 3 **07** $\frac{1}{2}$ **08** $\sqrt{5}$ **09** $\frac{137}{64}$

10 -2 **11** $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ **12** -7 **13** ④ **14** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

63쪽 **중단원 마무리** **01** 제1사분면 또는 제3사분면 **02** ③

03 ④ **04** ㄴ, ㄷ **05** 4π **06** 4π **07** ② **08** ①

09 2 **10** ④ **11** ② **12** ④ **13** $\frac{7}{32}$ **14** 164

15 ① **16** 18

06 삼각함수의 그래프

67쪽 **Lecture 11** **01** -2 **02** 15 **03** 풀이 52쪽

04 풀이 52쪽 **05** 풀이 52쪽 **06** 풀이 52쪽

07 풀이 52쪽 **08** 풀이 52쪽 **09** 풀이 53쪽

10 풀이 53쪽 **11** 최댓값: 4, 최솟값: -4, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

12 최댓값: $\frac{1}{5}$, 최솟값: $-\frac{1}{5}$, 주기: $\frac{\pi}{2}$

13 최댓값, 최솟값은 없다., 주기: 6π

14 최댓값: $\frac{2}{3}$, 최솟값: $-\frac{2}{3}$, 주기: π

15 최댓값: 7, 최솟값: 3, 주기: 4π **16** 최댓값, 최솟값은 없다., 주기: $\frac{1}{4}$

17 $a=2$, $b=1$

68쪽 **유형**
01 ④ 02 0 03 ③ 04 ㄱ, ㄷ
05 $-\pi$ 06 16 07 5 08 3 09 ① 10 -24
11 4 12 ④ 13 4π 14 ③ 15 ③ 16 3
17 ②

72쪽 **Lecture 12**
01 $\frac{1}{2}$ 02 $\frac{1}{2}$ 03 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 04 1
05 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 06 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 07 $-\frac{1}{2}$ 08 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 09 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 10 $\sqrt{3}$
11 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 12 -1 13 0 14 1 15 0.3584 16 0.3746
17 -0.3839 18 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$
19 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$
20 $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{12}\pi$
21 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$
22 $0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi\le x<2\pi$
23 $\frac{7}{12}\pi<x<\frac{11}{12}\pi$

73쪽 **유형**
01 ⑤ 02 ㄱ, ㄴ 03 1 04 1
05 0 06 ④ 07 ① 08 ㄷ 09 6 10 ②
11 $\frac{14}{3}$ 12 ① 13 4 14 ③ 15 ④ 16 ②
17 5 18 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ 19 4π 20 3
21 $-4\le a\le 5$ 22 ② 23 ⑤ 24 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi$
25 ④ 26 $0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$ 27 $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{3}\pi$
28 ③

78쪽 **중단원** 마무리
01 ① 02 ② 03 -2 04 $\frac{1}{2}$
05 ② 06 ③ 07 -3 08 $\frac{1}{2}$ 09 10 10 ④
11 48 12 ③ 13 ② 14 $2\sqrt{2}$ 15 $\frac{11}{2}$ 16 ⑤
17 $x=\frac{\pi}{4}$ 18 3 19 30 20 $\frac{\pi}{3}$ 21 ④ 22 ④
23 ⑤ 24 6

07 삼각함수의 활용

82쪽 **Lecture 13**
01 $3\sqrt{6}$ 02 $5\sqrt{3}$ 03 15° 또는 105°
04 $4\sqrt{3}$ 05 $\frac{9}{2}\pi$ 06 $\sqrt{7}$ 07 90° 08 120°

83쪽 **유형**
01 ② 02 4 03 ⑤
04 $5\sqrt{2}+5\sqrt{6}$ 05 3 : 4 : 5 06 -1 07 $2\sqrt{37}$
08 ④ 09 $\sqrt{15}$ 10 ③ 11 ① 12 $\frac{\sqrt{3}}{14}$ 13 ②
14 $a=b$인 이등변삼각형 15 $90\sqrt{2}$ m 16 ③ 17 $3\sqrt{19}$ 18 $-\frac{1}{10}$

86쪽 **Lecture 14**
01 21 02 $5\sqrt{3}$ 03 3
04 (1) $\frac{19}{20}$ (2) $\frac{\sqrt{39}}{20}$ (3) $\frac{3\sqrt{39}}{4}$ 05 3 06 $45\sqrt{3}$ 07 $12\sqrt{2}$
08 39

87쪽 **유형**
01 ⑤ 02 $6\sqrt{3}$ 03 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ 04 ④
05 ③ 06 $\frac{33}{2}$ 07 $15\sqrt{3}$ 08 $30+4\sqrt{35}$ 09 ④
10 9 11 30 12 ②

89쪽 **중단원** 마무리
01 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 02 ⑤ 03 192
04 ① 05 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 06 $\sqrt{21}$ 07 ② 08 $A=90°$인 직각삼각형
09 $20\sqrt{21}$ m 10 $\sqrt{13}$ 11 $\sqrt{3}$ 12 ③ 13 40
14 ③ 15 ② 16 ③ 17 63

08 등차수열과 등비수열

94쪽 **Lecture 15**
01 3, 11, 19, 27, 35 02 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$
03 $a_n=4n-5$ 04 $a_n=-5n+23$ 05 (1) 0 (2) 제10항
06 -2 07 -1

95쪽 **유형**
01 ① 02 89 03 ① 04 제26항
05 ③ 06 19 07 ③ 08 17 09 ⑤ 10 ②
11 162 12 8

97쪽 **Lecture 16**
01 192 02 -180 03 539 04 391
05 37 06 17 07 $a_n=4n-3$
08 $a_1=-1$, $a_n=2n-4$ $(n\ge 2)$

98쪽 **유형**
01 ④ 02 15 03 9 04 ③
05 9 06 8 07 ③ 08 1715 09 154 10 ③
11 ④ 12 755 13 528 14 ③ 15 ① 16 10

101쪽 Lecture 17
01 $a_n=6^{n-1}$
02 $a_n=4\cdot(-4)^{n-1}$
03 $a_n=27\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$
04 (1) $\frac{3}{4}$ (2) 제 8 항
05 $\frac{1}{3}$
06 -2 또는 2
07 -10 또는 10
08 $-2\sqrt{2}$ 또는 $2\sqrt{2}$
09 $x=2$, $y=6\sqrt{3}$

102쪽 유형 Q+Q
01 $\frac{3}{2}$ 02 제6항 03 ② 04 10 05 ④ 06 4 07 1 08 36 09 9 10 ② 11 ③ 12 600 MB

104쪽 Lecture 18
01 1023 02 $\frac{21}{32}$ 03 127 04 -182
05 $a_n=4\cdot5^{n-1}$
06 $a_1=5$, $a_n=2^{n-1}$ $(n\geq2)$
07 $10.2a$원
08 $10a$원

105쪽 유형 Q+Q
01 ③ 02 510 03 ① 04 ③ 05 $\frac{105}{2}$ 06 $\frac{1}{5}$ 07 $\frac{1}{9}$배 08 $3\pi\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$ 09 ② 10 ㄱ, ㄷ 11 550만 원 12 150만 원

107쪽 중단원 마무리
01 21 02 ③ 03 ② 04 제28항 05 ② 06 120 07 80 08 ③ 09 16 10 125 11 ① 12 13 13 ① 14 6 15 5 16 28 17 ② 18 36 19 ③ 20 63 21 ④ 22 $\frac{3^{11}-3}{4}$ 23 ② 24 117 25 477

09 수열의 합

112쪽 Lecture 19
01 $\sum_{k=1}^{n}(4k+1)$
02 $\sum_{k=1}^{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$
03 $1+8+27+\cdots+1000$
04 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$
05 -17
06 21 07 32 08 24

113쪽 유형 Q+Q
01 ④ 02 30 03 1011 04 39 05 395 06 ② 07 -150 08 6

114쪽 Lecture 20
01 45 02 374 03 $\frac{5}{12}$ 04 $\frac{29}{45}$ 05 $\frac{3}{13}$ 06 2 07 2 08 5

115쪽 유형 Q+Q
01 ⑤ 02 390 03 ① 04 245 05 3410 06 ④ 07 465 08 ① 09 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
10 ② 11 31 12 $\frac{975}{8}$ 13 $4\sqrt{2}$ 14 ② 15 ③ 16 $\log\frac{40}{21}$ 17 750 18 $\frac{5}{17}$

118쪽 중단원 마무리
01 ⑤ 02 ③ 03 96 04 7 05 25 06 ④ 07 ③ 08 ② 09 102 10 58 11 ② 12 $\frac{29}{15}$ 13 7 14 ⑤ 15 ① 16 162 17 ①

10 수학적 귀납법

122쪽 Lecture 21
01 43 02 10
03 $a_n=-2n+8$
04 $a_n=13n-18$
05 $a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
06 $a_n=15\cdot(-4)^{n-1}$
07 136
08 $\frac{5^{10}+15}{4}$

123쪽 유형 Q+Q
01 ② 02 29 03 28 04 ③ 05 63 06 $\frac{77}{20}$ 07 46 08 32 09 ⑤ 10 14 11 20 12 ④ 13 121 14 -5 15 26 16 ② 17 ③ 18 -45
19 $a_1=52$, $a_{n+1}=2a_n-8$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$
20 ⑤ 21 ① 22 $\frac{34}{3}$

127쪽 Lecture 22
01 $n=1$, $k+1$
02 $n=4$, $k+1$
03 1, $2k^2+7k+6$, $(k+1)(k+2)(2k+3)$

128쪽 유형 Q+Q
01 ② 02 ㄱ, ㄴ
03 (가) $(k+1)^3$ (나) $\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$
04 풀이 101쪽
05 33 06 ⑤
07 (가) $2-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ (나) $2\sqrt{k}-\sqrt{k+1}$
08 ④

131쪽 중단원 마무리
01 ③ 02 ① 03 525 04 100 05 ② 06 465 07 32 08 ④ 09 123 10 63 11 ③ 12 $\frac{13}{6}$ 13 14 14 720 15 ⑤ 16 ②

빠른 정답 찾기 **Work Book**

01 지수

W 2쪽 **01** ④ **02** 84 **03** ④ **04** ③ **05** $\frac{1}{5}$

06 5 **07** $\sqrt[5]{a^2b^3}$ **08** ⑤ **09** ③ **10** 6 **11** 99

12 ⑤ **13** 25 **14** $9+4\sqrt{5}$ **15** ② **16** ③ **17** 20

18 ④ **19** $\frac{8}{243}$ **20** 6 **21** $\frac{3}{2}$ **22** ③ **23** ④

24 30 **25** ④ **26** ① **27** ⑤ **28** $3\sqrt{5}$ **29** $3+2\sqrt{2}$

30 ② **31** $\frac{2}{3}$ **32** ② **33** ③ **34** ④ **35** $\frac{27}{10}$

36 $3^{\frac{5}{4}}$ **37** 13 **38** 640 hPa

W 8쪽 **도전! 수능 기출**

01 ⑤ **02** ① **03** ③ **04** ③

02 로그

W 9쪽 **01** ⑤ **02** ① **03** $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ **04** 7 **05** ①

06 3 **07** 2 **08** ① **09** 84 **10** ⑤ **11** ④

12 $\frac{4}{3}$ **13** ① **14** -22 **15** ⑤ **16** $\frac{5}{3}$ **17** ④

18 $\frac{2a+b-1}{a+b-1}$ **19** $\frac{1+ab+c}{a+c}$ **20** ④ **21** -27

22 ② **23** ④ **24** 2 **25** ⑤ **26** ② **27** ①

28 4 **29** 3 **30** 32 **31** ③ **32** ① **33** 3.2902

34 27.6 **35** ③ **36** 4 **37** 7% **38** 194일

W 15쪽 **도전! 수능 기출**

01 ① **02** ① **03** 25 **04** ⑤

03 지수함수

W 16쪽 **01** ④ **02** 46 **03** ⑤ **04** ⑤ **05** 2

06 2 **07** ① **08** ② **09** ① **10** 4 **11** ③

12 $\frac{3}{4}$ **13** $\sqrt[4]{8}$ **14** $B<C<A$ **15** 99 **16** ②

17 ③ **18** 3 **19** ⑤ **20** 128 **21** ③ **22** 26

23 ④ **24** 133 **25** $\frac{1}{2}$ **26** ② **27** ④ **28** 1

29 27 **30** ② **31** ③ **32** ⑤ **33** 4

34 $x=2$ 또는 $x=6$ **35** $\frac{3}{2}$ **36** ④ **37** ③ **38** $\frac{3}{2}$

39 ③ **40** $c\le x\le d$ **41** 2 **42** ①

43 $-2\le x<-1$ **44** $1<x\le 3$ **45** ② **46** ③

47 $k\le 4$ **48** 20장 **49** ④ **50** 6시간

W 24쪽 **도전! 수능 기출**

01 ② **02** ① **03** 36 **04** 25

04 로그함수

W 25쪽 **01** $\frac{1}{4}$ **02** ② **03** $3+\log_5 2$ **04** ⑤

05 ① **06** ① **07** ② **08** 15 **09** ④ **10** 12

11 9 **12** 8 **13** ⑤ **14** ② **15** 0 **16** 2

17 $-2<\log_{\frac{1}{9}}70<3\log_{\frac{1}{3}}2$ **18** ⑤ **19** 4 **20** ⑤

21 13 **22** ② **23** $\frac{15}{4}$ **24** ① **25** ③ **26** ②

27 27 **28** ④ **29** -10 **30** ③ **31** 7 **32** ③

33 $-\frac{17}{4}$ **34** $x=10$ **35** ④ **36** -10 **37** $\frac{1}{32}$ **38** ②

39 ④ **40** $\frac{9}{4}$ **41** ① **42** $\frac{5}{2}<x<3$ 또는 $3<x\le 4$

43 ③ **44** 130 **45** ④ **46** $\sqrt{2}<x<256$ **47** ④

48 100 **49** 65 **50** 1 **51** ⑤ **52** 500만 원

53 25 **54** ④ **55** ③

W 34쪽 **도전! 수능 기출**

01 192 **02** ③ **03** 12 **04** ②

05 삼각함수

W 35쪽 **01** ㄱ, ㄷ **02** 제3사분면 **03** ⑤ **04** ④

05 ② **06** 3π **07** $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$ **08** ④ **09** $\frac{7}{4}\pi$ **10** $\frac{6}{7}\pi$

11 ③ **12** 12 **13** 126π cm^2 **14** 12 **15** $2\pi-4$

16 ③ **17** 136π **18** $4\sqrt{5}\pi$ **19** ② **20** 12 m **21** ⑤

22 $-2\sqrt{2}$ **23** $\frac{7}{25}$ **24** $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ **25** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **26** ③ **27** ②

28 제2사분면 또는 제4사분면 **29** ④ **30** ④ **31** $-6\sin\theta$

32 2 **33** ③ **34** $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **35** ⑤ **36** $\frac{9\sqrt{3}}{16}$ **37** $\frac{\sqrt{17}}{9}$

38 $\sqrt{2}$ **39** 16 **40** $9x^2-3x-4=0$ **41** $12x^2+25x+12=0$

42 ② **43** 204 **44** ④ **45** $\frac{3}{2}$

W 42쪽 **도전! 수능 기출**

01 27 **02** 13 **03** ① **04** ④

06 삼각함수의 그래프

W 43쪽 **01** $-\frac{1}{2}$ **02** ⑤ **03** $C<B<A$ **04** ④

05 1 **06** ③ **07** 3 **08** $-\frac{1}{2}$ **09** ⑤ **10** ②

11 8 **12** ④ **13** ④ **14** 1 **15** -8π **16** 5

17 ⑤ **18** 3 **19** ④ **20** ② **21** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **22** ④

23 1 **24** ④ **25** $\frac{5}{2}$ **26** $\frac{7}{2}$ **27** ① **28** -2

29 5 **30** ④ **31** ④ **32** $\frac{1}{2}$ **33** ②

34 $a=\frac{7}{6}\pi,\ k=-\frac{1}{2}$ **35** $x=\frac{\pi}{6}$ **36** $x=\frac{7}{6}\pi$ **37** $x=\frac{\pi}{3}$ **38** ⑤

39 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ **40** ④ **41** ③ **42** 14π **43** ② **44** -1

45 $\frac{\pi}{3}$ **46** ④ **47** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **48** $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$ **49** 4

50 ⑤ **51** $\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$ **52** ②

W 51쪽 **도전! 수능 기출**

01 ② **02** 40 **03** ④ **04** 24

07 삼각함수의 활용

W 52쪽 **01** ㄱ, ㄴ **02** $8+4\sqrt{3}$ **03** ① **04** $\frac{2}{5}$ **05** ③

06 $3\sqrt{2}$ **07** ⑤ **08** $60°$ **09** $3+\sqrt{3}$ **10** ② **11** 6

12 ④ **13** $4\sqrt{6}$ **14** ① **15** $105°$ **16** ③ **17** $\frac{\sqrt{30}}{12}$

18 ① **19** $C=90°$인 직각삼각형 **20** ㄴ, ㄷ **21** $80\pi\ \text{cm}^3$ **22** $\frac{\pi}{3}$

23 ④ **24** ② **25** $4\sqrt{19}$ **26** 15 **27** ⑤ **28** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$

29 ④ **30** $\sqrt{15}$ **31** $\frac{31\sqrt{5}}{10}$ **32** ⑤ **33** $6\sqrt{6}$ **34** ③

35 $\frac{15}{2}\pi$ **36** $5+4\sqrt{3}$ **37** ⑤ **38** $2\sqrt{30}$ **39** ③ **40** $\sqrt{41}$

41 $42\sqrt{2}$ **42** 91 **43** ②

W 59쪽 **도전! 수능 기출**

01 ① **02** ① **03** ⑤ **04** ③

08 등차수열과 등비수열

W 60쪽 **01** $10\log_3 2$ **02** 9 **03** ④ **04** ① **05** 41

06 ③ **07** 9 **08** 18 **09** ① **10** 19 **11** ③

12 ① **13** $-\frac{9}{4}$ **14** ① **15** 12 **16** ③ **17** 105

18 ④ **19** ⑤ **20** -5 **21** ⑤ **22** ③ **23** 112

24 324 **25** 14 **26** 294 **27** ③ **28** 11 **29** ③

30 -147 **31** 45 **32** -13 **33** ④ **34** 1423 **35** 19

36 4 **37** 9일 **38** ② **39** 16 **40** 0 **41** ③

42 160 **43** ① **44** 8 **45** 제11항 **46** ① **47** ③

48 27 **49** ③ **50** ③ **51** $\frac{2}{3}$ **52** 8 **53** 104

54 ③ **55** 2 **56** 160 **57** ⑤ **58** ②

59 $126(\sqrt{2}+1)$ **60** 13 **61** ⑤ **62** ② **63** ⑤

64 5 **65** 3848 **66** $\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}$ **67** ② **68** -20

69 ④ **70** ② **71** 1억 8천 9백만 원

W 71쪽 **도전! 수능 기출**

01 ③ **02** 273 **03** 16 **04** ②

09 수열의 합

W 72쪽 **01** ④ **02** 55 **03** 276 **04** 16 **05** ③

06 ② **07** 28 **08** 12 **09** ③ **10** 2036 **11** ①

12 ③ **13** 56 **14** ③ **15** 276 **16** 5 **17** ③

18 ② **19** -1944 **20** ⑤ **21** ② **22** ③ **23** ②

24 30 **25** ④ **26** $\frac{60}{31}$ **27** ⑤ **28** 15 **29** ③

30 2 **31** ④ **32** 3 **33** ① **34** 320 **35** 505

36 ④

W 78쪽 **도전! 수능 기출**

01 26 **02** ① **03** 103 **04** ④

10 수학적 귀납법

W 79쪽 **01** ③ **02** -91 **03** 17 **04** ⑤ **05** 7

06 ① **07** 274 **08** ④ **09** 202 **10** ⑤ **11** 3

12 $\frac{1}{3}$ **13** ③ **14** $\frac{20}{21}$ **15** 2 **16** ④ **17** -2

18 ② **19** 81 **20** ⑤ **21** 1 **22** 72 **23** ④

24 $a_{n+1}=2a_n+1\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ **25** 39

26 $a_{n+1}=a_n+4n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ **27** $\frac{7}{10}$ **28** 5 **29** $\frac{10}{11}$

30 ④ **31** ⑤ **32** 25 **33** ③ **34** ④

35 ㈎ 3 ㈏ 16 ㈐ 4^{2k-1} **36** ⑤ **37** 풀이 182쪽

38 ㈎ k^k ㈏ $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ ㈐ 2

W 87쪽 **도전! 수능 기출**

01 ① **02** 11 **03** ④

Lecture Book

01 지수

Lecture 01 거듭제곱근의 뜻과 성질

L 8쪽

01 1의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=1$이므로

$x^3-1=0$, $\quad (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 1의 세제곱근은 1, $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$이다.

답 1, $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

02 -4의 제곱근을 x라 하면 $x^2=-4$이므로

$x^2+4=0$, $\quad (x+2i)(x-2i)=0$

$\therefore x=\pm 2i$

따라서 -4의 제곱근은 $-2i$, $2i$이다. 답 $-2i$, $2i$

03 81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$이므로

$x^4-81=0$, $\quad (x^2+9)(x^2-9)=0$

$(x+3i)(x-3i)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=\pm 3i$ 또는 $x=\pm 3$

따라서 81의 네제곱근 중 실수인 것은 -3, 3이다.

답 -3, 3

04 -125의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-125$이므로

$x^3+125=0$, $\quad (x+5)(x^2-5x+25)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=\dfrac{5\pm5\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -125의 세제곱근 중 실수인 것은 -5이다.

답 -5

05 $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=6$ 답 6

06 $-\sqrt[4]{16}=-\sqrt[4]{2^4}=-2$ 답 -2

07 $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{4}\right)^3}=\dfrac{3}{4}$ 답 $\dfrac{3}{4}$

08 $\sqrt[3]{-0.027}=\sqrt[3]{(-0.3)^3}=-0.3$ 답 -0.3

09 $\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{27}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^4}=\dfrac{1}{3}$

답 $\dfrac{1}{3}$

Q BOX

$a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때,
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

$a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때,
$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

n이 홀수일 때, $\sqrt[n]{a}$의 부호는 a의 부호와 일치한다.

10 $\sqrt[3]{\sqrt{128}}\div\sqrt[12]{4}=\sqrt[6]{128}\div\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

답 2

11 $\dfrac{\sqrt[5]{192}}{\sqrt[5]{12}}\times(\sqrt[10]{2})^2=\sqrt[5]{\dfrac{192}{12}}\times\sqrt[10]{2^2}=\sqrt[5]{16}\times\sqrt[5]{2}$

$=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$ 답 2

12 $(\sqrt[4]{8})^2\div\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{8^2}\div\sqrt{2}+\sqrt[4]{\dfrac{243}{3}}$

$=\sqrt{2^3}\div\sqrt{2}+\sqrt[4]{81}$

$=\sqrt{2^2}+\sqrt[4]{3^4}$

$=2+3=5$ 답 5

표준+발전 유형 Q+Q

L 9쪽

01 ① 8의 세제곱근은 방정식 $x^3=8$의 근이므로 3개이다.

② -27의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$이다.

③ 5의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[4]{5}$이다.

④ $(-3)^4=3^4=81$이므로 -3은 81의 네제곱근이다.

답 ⑤

02 a가 -64의 세제곱근 중 실수인 것이므로

$a=\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{(-4)^3}=-4$

b가 625의 네제곱근 중 음수인 것이므로

$b=-\sqrt[4]{625}=-\sqrt[4]{5^4}=-5$

$\therefore a-b=1$ 답 1

03 5의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{5}$의 1개이므로

$f_3(5)=1$

$\sqrt{5}$의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{\sqrt{5}}$의 2개이므로

$f_4(\sqrt{5})=2$

-5의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-5}$의 1개이므로

$f_5(-5)=1$

$-\sqrt{5}$의 여섯제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$f_6(-\sqrt{5})=0$

$\therefore f_3(5)+f_4(\sqrt{5})+f_5(-5)+f_6(-\sqrt{5})$

$=1+2+1+0=4$ 답 4

쌤 한마디

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	2	1	0
n이 홀수	1	1	1

04 (i) n이 홀수일 때,

$n-1$은 짝수이므로 $\quad (-2)^{n-1}>0$

따라서 $(-2)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[n]{(-2)^{n-1}}$의 1개이므로

$$a_3=a_5=a_7=\cdots=a_{49}=1$$

(ii) n이 짝수일 때,

$n-1$은 홀수이므로 $\quad (-2)^{n-1}<0$

따라서 $(-2)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것은 없으므로

$$a_4=a_6=a_8=\cdots=a_{50}=0$$

(i), (ii)에서

$$a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{50}=24$$

답 24

05 ① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{2}=\sqrt[15]{2^5}\times\sqrt[15]{2^3}=\sqrt[15]{2^5\times2^3}=\sqrt[15]{2^8}$

② $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{27}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3}}=\sqrt[4]{3}$

③ $\sqrt[3]{-\sqrt{64}}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

④ $\dfrac{\sqrt[3]{-125}}{\sqrt[3]{-8}}=\dfrac{\sqrt[3]{(-5)^3}}{\sqrt[3]{(-2)^3}}=\dfrac{-5}{-2}=\dfrac{5}{2}$,

$\sqrt[3]{\dfrac{125}{8}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{2}\right)^3}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore \dfrac{\sqrt[3]{-125}}{\sqrt[3]{-8}}=\sqrt[3]{\dfrac{125}{8}}$

⑤ $\left(\sqrt[3]{6}\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^6=\left(\sqrt[6]{6^2}\times\dfrac{1}{\sqrt[6]{6^3}}\right)^6=\left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{6}}\right)^6=\dfrac{1}{6}$

답 ⑤

06 $\dfrac{\sqrt[3]{24}+\sqrt[6]{36}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}+\sqrt{\sqrt[3]{4}}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^3\times3}+\sqrt[6]{6^2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[6]{2^2}}$

$=\dfrac{2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[3]{2}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{3}(2+\sqrt[3]{2})}{2+\sqrt[3]{2}}$

$=\sqrt[3]{3}$

답 ②

07 $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}$

$=\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{\sqrt[4]{x}}}\times\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}\times\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}$

$=\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[8]{x}}\times\dfrac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{x}}\times\dfrac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[12]{x}}=1$

답 1

08 $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[15]{a}\times\sqrt[30]{a}}{\sqrt[5]{a}\times\sqrt[15]{a^2}}$

$=\dfrac{\sqrt[30]{a^{10}}\times\sqrt[30]{a^2}\times\sqrt[30]{a}}{\sqrt[30]{a^6}\times\sqrt[30]{a^4}}$

$=\sqrt[30]{\dfrac{a^{10}\times a^2\times a}{a^6\times a^4}}$

$=\sqrt[30]{a^3}=\sqrt[10]{a}$

따라서 $m=1$, $n=10$이므로

$$mn=10$$

답 ①

Q BOX

$A>0$, $B>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때,
$A<B \Rightarrow \sqrt[n]{A}<\sqrt[n]{B}$

$3\le n\le50$에서 n이 홀수인 것은 24개이므로
$1\times24=24$

$a\ne0$일 때, $\quad a^0=1$

$a\ne0$이고 n이 양의 정수일 때,
$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

09 3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$, $\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$,

$\sqrt[6]{10}=\sqrt[12]{10^2}=\sqrt[12]{100}$

$\sqrt[12]{81}<\sqrt[12]{100}<\sqrt[12]{125}$이므로

$\sqrt[3]{3}<\sqrt[6]{10}<\sqrt[4]{5}$

답 ②

다른 풀이 세 수 $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{10}$을 각각 열두제곱하면

$(\sqrt[3]{3})^{12}=\sqrt[3]{3^{12}}=3^4=81$

$(\sqrt[4]{5})^{12}=\sqrt[4]{5^{12}}=5^3=125$

$(\sqrt[6]{10})^{12}=\sqrt[6]{10^{12}}=10^2=100$

$81<100<125$이므로 $\quad \sqrt[3]{3}<\sqrt[6]{10}<\sqrt[4]{5}$

10 $\sqrt[3]{2\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^2\times5}}=\sqrt[6]{20}$,

$\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^2\times2}}=\sqrt[6]{18}$,

$\sqrt{2\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3\times3}}=\sqrt[6]{24}$에서

$\sqrt[6]{18}<\sqrt[6]{20}<\sqrt[6]{24}$

따라서 $a=\sqrt[6]{18}$, $b=\sqrt[6]{24}$이므로

$b^6-a^6=24-18=6$

답 6

Lecture 02 지수의 확장

01 답 1

02 $(-2)^{-3}=\dfrac{1}{(-2)^3}=-\dfrac{1}{8}$

답 $-\dfrac{1}{8}$

03 답 $a^{\frac{2}{5}}$

04 $\dfrac{1}{\sqrt[6]{a^{-3}}}=\dfrac{1}{a^{-\frac{3}{6}}}=\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}$

답 $a^{\frac{1}{2}}$

05 답 $\sqrt[7]{a}$

06 $a^{-0.3}=a^{-\frac{3}{10}}=\sqrt[10]{a^{-3}}$

답 $\sqrt[10]{a^{-3}}$

07 $5^{-2}\times5^4\div5^{-1}=5^{-2+4-(-1)}=5^3=125$

답 125

08 $64^{0.25}\times2^{\frac{3}{2}}=(2^6)^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{3}{2}}$

$=2^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}=2^3=8$

답 8

09 $(3^{\sqrt{5}+1})^{\sqrt{5}-1}=3^{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=3^4=81$

답 81

10 답 a^8b^{-12}

11 $(a^2b^2)^{\frac{1}{3}}\times\sqrt{ab^5}\div(ab^4)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{2}}\div a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}$

$=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}+\frac{5}{2}-\frac{4}{3}}$

$=a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{11}{6}}$

답 $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{11}{6}}$

12 $(a^{\sqrt{20}})^{\sqrt{5}} \div (a^{\sqrt{27}})^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = (a^{2\sqrt{5}})^{\sqrt{5}} \div (a^{3\sqrt{3}})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= a^{10} \div a^{3} = a^{7}$ 답 a^{7}

표준+발전 유형 Q+Q

12쪽

01 $\frac{9}{2^6+8^3} \times \frac{3^{-4}+9^{-3}}{10} = \frac{9}{2^6+(2^3)^3} \times \frac{3^{-4}+(3^2)^{-3}}{10}$

$= \frac{9}{2^6+2^9} \times \frac{3^{-4}+3^{-6}}{10}$

$= \frac{9}{2^6(1+2^3)} \times \frac{3^{-6}(3^2+1)}{10}$

$= 2^{-6} \times 3^{-6} = (2\times 3)^{-6}$

$= 6^{-6}$

$\therefore k=-6$ 답 -6

쌤 한마디

밑이 같은 두 수의 합 또는 차는

$a^{-n}+a^{-n+1}=a^{-n}(1+a)$ ($a\neq 0$, n은 양의 정수)

임을 이용하여

$3^{-4}+3^{-6}=3^{-6}(3^2+1)=10\times 3^{-6}$

과 같이 지수가 작은 수로 묶어서 계산하면 편리하다.

02 $\frac{1}{2^{-5}+1}+\frac{1}{2^{-3}+1}+\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{2^5+1}$

$= \frac{2^5}{1+2^5}+\frac{2^3}{1+2^3}+\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{2^5+1}$

$= \frac{2^5+1}{2^5+1}+\frac{2^3+1}{2^3+1}$

$=1+1=2$ 답 2

03 $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\times\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\times\sqrt[5]{\frac{1}{4}}\times\sqrt[6]{\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{1}{3}}\times 3^{-\frac{1}{4}}\times 4^{-\frac{1}{5}}\times 6^{-\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{1}{3}}\times 3^{-\frac{1}{4}}\times 2^{-\frac{2}{5}}\times 2^{-\frac{1}{6}}\times 3^{-\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}-\frac{1}{6}}\times 3^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{9}{10}}\times 3^{-\frac{5}{12}}$

따라서 $p=-\frac{9}{10}$, $q=-\frac{5}{12}$이므로

$pq=\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

04 $\sqrt[3]{a\sqrt{a^k}} \div \sqrt{a^5\sqrt{a}} \times \sqrt[4]{a^5}$

$=a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{k}{6}} \div (a^{\frac{5}{2}}\times a^{\frac{1}{4}})\times a^{\frac{5}{4}}$

$=a^{\frac{1}{3}+\frac{k}{6}-\frac{5}{2}-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}$

$=a^{\frac{k-7}{6}}$

따라서 $a^{\frac{k-7}{6}}=1=a^0$이므로

$\frac{k-7}{6}=0$ $\therefore k=7$ 답 ⑤

Q BOX

05 $(a^{\sqrt{5}})^{\sqrt{2}} \div a^{2\sqrt{10}} \times (\sqrt[4]{a})^{2\sqrt{10}} = a^{\sqrt{10}} \div a^{2\sqrt{10}} \times a^{\frac{\sqrt{10}}{2}}$

$= a^{\sqrt{10}-2\sqrt{10}+\frac{\sqrt{10}}{2}}$

$= a^{-\frac{\sqrt{10}}{2}}$

따라서 $k=-\frac{\sqrt{10}}{2}$이므로 $k^2=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

06 $(\sqrt{3})^{\frac{5}{3}}\times(3^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}\div(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$

$=(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{5}{3}}\times(3^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}\div(3^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}}$

$=3^{\frac{5}{6}}\times 3^{\frac{1}{6}}\div 3^4=3^{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}-4}$

$=3^{-3}=\frac{1}{27}$ 답 $\frac{1}{27}$

> $a>0$, $k>0$이고 x는 0이 아닌 정수일 때,
> $a^x=k \Longleftrightarrow a=k^{\frac{1}{x}}$

07 $3^4=a$에서 $3=a^{\frac{1}{4}}$

$8^2=b$에서 $(2^3)^2=b$, $2^6=b$ $\therefore 2=b^{\frac{1}{6}}$

$\therefore 12^{10}=(2^2\times 3)^{10}=2^{20}\times 3^{10}$

$=(b^{\frac{1}{6}})^{20}\times(a^{\frac{1}{4}})^{10}=a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{10}{3}}$ 답 ②

08 $a=\sqrt[3]{2}$에서 $a^3=2$

$b=\sqrt[4]{5}$에서 $b^4=5$

$\therefore \sqrt[12]{50}=(2\times 5^2)^{\frac{1}{12}}=2^{\frac{1}{12}}\times 5^{\frac{1}{6}}$

$=(a^3)^{\frac{1}{12}}\times(b^4)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{2}{3}}$

따라서 $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{2}{3}$이므로

$p+q=\frac{11}{12}$ 답 $\frac{11}{12}$

> 자연수 a가 소수일 때, a^r이 자연수가 될 조건
> ➡ r는 음이 아닌 정수

09 $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{n}}=81^{\frac{1}{n}}=(3^4)^{\frac{1}{n}}=3^{\frac{4}{n}}$이 자연수가 되려면

$\frac{4}{n}$가 음이 아닌 정수이어야 한다.

즉 정수 n은 4의 양의 약수이므로

1, 2, 4

따라서 모든 정수 n의 값의 합은

$1+2+4=7$ 답 7

10 $a^6=2$에서 $a=2^{\frac{1}{6}}$

$b^4=8$에서 $b=8^{\frac{1}{4}}=(2^3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$

$\therefore (\sqrt[4]{a^3b^6})^n=(a^3b^6)^{\frac{n}{4}}=\{(2^{\frac{1}{6}})^3\times(2^{\frac{3}{4}})^6\}^{\frac{n}{4}}$

$=(2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{9}{2}})^{\frac{n}{4}}=(2^5)^{\frac{n}{4}}=2^{\frac{5n}{4}}$

따라서 $(\sqrt[4]{a^3b^6})^n$, 즉 $2^{\frac{5n}{4}}$이 자연수가 되려면 $\frac{5n}{4}$이 음이 아닌 정수이어야 한다.

즉 자연수 n은 4의 배수이므로 n의 최솟값은 4이다.

답 ③

> $(x+y)(x^2-xy+y^2)$
> $=x^3+y^3$

11 $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2-(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$

$=(a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)-(a+b)$

$=a+2\sqrt{ab}+b-a-b$

$=2\sqrt{ab}$ 답 $2\sqrt{ab}$

12 (주어진 식)

$=(x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$

$=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$

$=(x-x^{-1})(x+x^{-1})$

$=x^2-x^{-2}=x^2-\frac{1}{x^2}$

$=3^2-\frac{1}{3^2}=\frac{80}{9}$ 답 $\frac{80}{9}$

13 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=2^2$

$x+x^{-1}-2=4$ $\quad\therefore x+x^{-1}=6$

위의 식의 양변을 세제곱하면

$(x+x^{-1})^3=6^3$

$x^3+x^{-3}+3(x+x^{-1})=216$

$\therefore x^3+x^{-3}=216-3\times6=198$ 답 ④

14 $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=1+\sqrt{2}$, 즉 $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=1+\sqrt{2}$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3=(1+\sqrt{2})^3$

$x+\frac{1}{x}+3(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})=7+5\sqrt{2}$

$\therefore x+\frac{1}{x}=7+5\sqrt{2}-3(1+\sqrt{2})$

$=4+2\sqrt{2}$

따라서 $p=4$, $q=2$이므로

$pq=8$ 답 8

15 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 분자, 분모에 a^x을 곱하면

$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}$

$=\frac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}+1}=\frac{3^2+3^{-1}}{3+1}$

$=\frac{7}{3}$ 답 $\frac{7}{3}$

다른 풀이 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}+a^{-2x}-1)}{a^x+a^{-x}}$

$=a^{2x}+a^{-2x}-1$

$=3+\frac{1}{3}-1=\frac{7}{3}$

16 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{5}{7}$의 좌변의 분자, 분모에 a^x을 곱하면

$\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{5}{7}$, $\quad \frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\frac{5}{7}$

$7a^{2x}-7=5a^{2x}+5$

$2a^{2x}=12$ $\quad\therefore a^{2x}=6$

$\therefore a^{4x}=(a^{2x})^2=6^2=36$ 답 ③

17 $7^x=9$에서

$7=9^{\frac{1}{x}}=(3^2)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{x}}$ …… ㉠

Q BOX

$(1+\sqrt{2})^3$
$=1^3+3\times1^2\times\sqrt{2}$
$+3\times1\times(\sqrt{2})^2$
$+(\sqrt{2})^3$
$=1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}$
$=7+5\sqrt{2}$

$x\neq0$이고 $y\neq0$이고 $z\neq0$

$189^y=27$에서

$189=27^{\frac{1}{y}}=(3^3)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{3}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\quad \frac{1}{27}=3^{\frac{2}{x}}\div3^{\frac{3}{y}}$

$3^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}=3^{-3}$ $\quad\therefore \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-3$ 답 ①

18 $80^x=2$에서 $\quad 80=2^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$5^y=8$에서 $\quad 5=8^{\frac{1}{y}}=(2^3)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{3}{y}}$ …… ㉡

$a^z=\frac{1}{2}$에서

$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{z}}=(2^{-1})^{\frac{1}{z}}=2^{-\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠÷㉡÷㉢을 하면

$80\div5\div a=2^{\frac{1}{x}}\div2^{\frac{3}{y}}\div2^{-\frac{1}{z}}$

$\frac{16}{a}=2^{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}+\frac{1}{z}}=2^3$

$\therefore a=2$ 답 2

19 $2^x=6^y=12^z=k\ (k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$2^x=k$에서 $\quad 2=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$6^y=k$에서 $\quad 6=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$12^z=k$에서 $\quad 12=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면 $\quad 1=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}$

$\therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$

그런데 $k\neq1$이므로 $\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$ 답 0

20 $9^x=16^y=a^z=k\ (k>0)$로 놓으면 x, y, z가 0이 아니므로 $\quad k\neq1$

$9^x=k$에서 $\quad 9=k^{\frac{1}{x}}$

$16^y=k$에서 $\quad 16=k^{\frac{1}{y}}$

$a^z=k$에서 $\quad a=k^{\frac{1}{z}}$

이때 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{4}{z}$이므로

$a^4=k^{\frac{4}{z}}=k^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}=(k^{\frac{1}{x}})^2\times(k^{\frac{1}{y}})^3$

$=9^2\times16^3=3^4\times2^{12}$

$=(3\times2^3)^4=24^4$

$\therefore a=24$ ($\because a$는 자연수) 답 ④

21 $P=A\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$에서

$A=60$, $t=9$일 때, $\quad P_1=60\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{9}{4}}$

$A=45$, $t=5$일 때, $\quad P_2=45\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$

$\therefore \frac{P_1}{P_2}=\frac{60\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{9}{4}}}{45\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{4}}}=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=2$ 답 2

22 버튼을 한 번 눌렀을 때 커지는 비율을 $a\ (a>1)$라 하면 3을 입력하고 버튼을 4번 눌렀을 때 9가 출력되므로

$3a^4=9 \qquad \therefore\ a=3^{\frac{1}{4}}$

따라서 9에서 버튼을 6번 더 눌렀을 때 출력되는 수는

$9a^6=9\times(3^{\frac{1}{4}})^6=3^2\times3^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{7}{2}}$ 답 ⑤

중단원 마무리

15쪽

01 전략 n이 홀수일 때, 양수 A의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{A}$이고, n이 짝수일 때, 양수 B의 n제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[n]{B}$이다.

풀이 a가 $\sqrt{3}$의 세제곱근 중 실수인 것이므로

$a=\sqrt[3]{\sqrt{3}}=\sqrt[6]{3}$

b가 $\sqrt[3]{9}$의 네제곱근 중 양수인 것이므로

$b=\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[12]{3^2}=\sqrt[6]{3}$

따라서 $ab=\sqrt[6]{3}\times\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[3]{3}$이므로

$k=3$ 답 3

02 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계와 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 x에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81},\ \sqrt[3]{3}b=a$

$\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81}$에서

$b=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^3\times3}-\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

$b=2\sqrt[3]{3}$을 $\sqrt[3]{3}b=a$에 대입하면

$a=\sqrt[3]{3}\times2\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{9}$

$\therefore\ ab=2\sqrt[3]{9}\times2\sqrt[3]{3}=4\sqrt[3]{27}=4\sqrt[3]{3^3}=12$ 답 ④

쌤 한마디

이차방정식 $f(x)=0$의 근이 α이면 $f(\alpha)=0$임을 이용하여 다음과 같이 a의 값을 구할 수도 있다.

$\sqrt[3]{3}$이 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 근이므로

$(\sqrt[3]{3})^2-\sqrt[3]{3^4}\times\sqrt[3]{3}+a=0$

$\sqrt[3]{3^2}-3\sqrt[3]{3^2}+a=0$

$\therefore\ a=2\sqrt[3]{3^2}=2\sqrt[3]{9}$

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
> $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

03 전략 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$임을 이용하여 $\sqrt[12]{\blacksquare}$ 꼴로 변형한 후 $\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{bc}$임을 이용한다.

풀이 $\sqrt{ab^3}\div\sqrt[4]{a^3b^5}\times\sqrt[12]{a^7b^2}$

$=\sqrt[12]{a^6b^{18}}\div\sqrt[12]{a^9b^{15}}\times\sqrt[12]{a^7b^2}$

$=\sqrt[12]{a^4b^5}$

따라서 $n=12$, $p=4$, $q=5$이므로

$n-p-q=3$ 답 ②

04 전략 2, 3, 4의 최소공배수가 12이므로 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$임을 이용하여 A, B, C를 $\sqrt[12]{\blacksquare}$ 꼴로 변형한다.

Q BOX

풀이 2, 3, 4의 최소공배수가 12이므로

$A=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt[12]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^6}$

$B=\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}=\sqrt[12]{\left(\dfrac{9}{4}\right)^4}=\sqrt[12]{\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}^4}=\sqrt[12]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^8}$

$C=\sqrt[4]{\dfrac{27}{8}}=\sqrt[12]{\left(\dfrac{27}{8}\right)^3}=\sqrt[12]{\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right\}^3}=\sqrt[12]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^9}$

이때 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^6<\left(\dfrac{3}{2}\right)^8<\left(\dfrac{3}{2}\right)^9$이므로

> $1<\dfrac{3}{2}$이므로
> $\left(\dfrac{3}{2}\right)^6<\left(\dfrac{3}{2}\right)^8<\left(\dfrac{3}{2}\right)^9$

$\sqrt[12]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^6}<\sqrt[12]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^8}<\sqrt[12]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^9}$

$\therefore\ A<B<C$ 답 $A<B<C$

05 전략 거듭제곱근의 성질과 지수법칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

풀이 $\sqrt[4]{\dfrac{2+2^2+2^3}{5^{-1}+5^{-2}+5^{-3}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{5+5^2+5^3}{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}}}$

$=\sqrt[4]{\dfrac{2+2^2+2^3}{5^{-1}+5^{-2}+5^{-3}}\times\dfrac{5+5^2+5^3}{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}}}$

$=\sqrt[4]{\dfrac{2^4(2^{-3}+2^{-2}+2^{-1})}{5^{-1}+5^{-2}+5^{-3}}\times\dfrac{5^4(5^{-3}+5^{-2}+5^{-1})}{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}}}$

$=\sqrt[4]{2^4\times5^4}=\sqrt[4]{10^4}=10$ 답 ⑤

06 전략 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[k]{a}}}=\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[4]{a}}\times\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3k]{a}}$

$=a^{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3k}}=a^{-\frac{1}{3k}}$ ⋯ ❶

$\sqrt[24]{\dfrac{1}{a}}=a^{-\frac{1}{24}}$ ⋯ ❷

따라서 $-\dfrac{1}{3k}=-\dfrac{1}{24}$이므로 $\quad k=8$ ⋯ ❸

답 8

단계	채점 기준	비율
❶	좌변을 지수가 유리수인 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷	우변을 지수가 유리수인 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸	k의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 전략 지수가 실수일 때의 지수법칙을 이용한다.

풀이 ㄱ. $5^{\frac{2}{3}}\times5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}=5^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{5^5}$

ㄴ. $4^{\sqrt{2}}\div2^{\sqrt{8}}=2^{2\sqrt{2}}\div2^{2\sqrt{2}}=1$

ㄷ. $\{(-2)^4\}^{\frac{3}{2}}=16^{\frac{3}{2}}=(2^4)^{\frac{3}{2}}=2^6=64$

> 지수가 정수가 아닌 유리수일 때, 밑이 음수이면 지수법칙을 이용할 수 없다.

ㄹ. $(\sqrt{3})^{3\sqrt{3}}=(3^{\frac{1}{2}})^{3\sqrt{3}}=3^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$, $(3\sqrt{3})^{\sqrt{3}}=(3^{\frac{3}{2}})^{\sqrt{3}}=3^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

이므로

$(\sqrt{3})^{3\sqrt{3}}=(3\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

08 전략 $18=2\times3^2$이므로 먼저 2, 3을 a, b를 이용하여 나타낸다.

풀이 $a=\sqrt[3]{2}$에서 $\quad a^3=2$

$b=\sqrt{3}$에서 $\quad b^2=3$

$\therefore\ 18^{\frac{1}{6}}=(2\times3^2)^{\frac{1}{6}}=(a^3\times b^4)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$ 답 ⑤

09 전략 주어진 수를 지수가 유리수인 수로 나타낸 후 거듭제곱근의 정의를 이용한다.

풀이 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}$

$3^{\frac{5}{6}}$이 자연수 a의 n제곱근이라 하면

$$a=(3^{\frac{5}{6}})^n=3^{\frac{5n}{6}}$$

이때 a는 자연수이므로 $\frac{5n}{6}$이 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 자연수 n은 6의 배수이어야 하므로 $2\le n\le 100$인 6의 배수 n은

6, 12, 18, ⋯, 96의 16개 답 16

10 전략 인수분해 공식을 이용하여 $x+y$, $x-y$를 간단히 한다.

풀이 $x+y=(a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})+(b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})$

$=(a^{\frac{1}{3}})^3+3(a^{\frac{1}{3}})^2b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}})^2+(b^{\frac{1}{3}})^3$

$=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^3$ ⋯ ❶

$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
$=(x+y)^3$

$x-y=(a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})-(b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})$

$=(a^{\frac{1}{3}})^3-3(a^{\frac{1}{3}})^2b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}})^2-(b^{\frac{1}{3}})^3$

$=(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^3$ ⋯ ❷

$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
$=(x-y)^3$

$\therefore (x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}$

$=\{(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^3\}^{\frac{2}{3}}+\{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^3\}^{\frac{2}{3}}$

$=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^2$

$=a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$

$=2(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=2\times3=6$ ⋯ ❸

답 6

단계	채점 기준	비율
❶	$x+y$를 간단히 할 수 있다.	30 %
❷	$x-y$를 간단히 할 수 있다.	30 %
❸	주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

11 전략 곱셈 공식을 이용하여 주어진 등식을 구하는 식의 꼴로 변형한다.

풀이 $a=\sqrt[3]{5}-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$$a^3=(5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}})^3=5-\frac{1}{5}-3(5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}})$$

이때 $a=5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}}$이므로

$a^3=\frac{24}{5}-3a$ $\quad\therefore a^3+3a=\frac{24}{5}$ 답 $\frac{24}{5}$

12 전략 $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}$의 분자, 분모에 2^a을 곱하여 4^a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$의 좌변의 분자, 분모에 2^a을 곱하면

$\frac{2^a(2^a+2^{-a})}{2^a(2^a-2^{-a})}=-2$, $\quad \frac{4^a+1}{4^a-1}=-2$

$4^a+1=-2\times4^a+2$, $\quad 3\times4^a=1$

$\therefore 4^a=\frac{1}{3}$

$\therefore 4^a+4^{-a}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$ 답 ②

쌤 한마디

12번과 같이 $a^x\pm a^{-x}$ 꼴이 포함된 식의 값이 주어지고 $a^{2x}\pm a^{-2x}$ 꼴이 포함된 식의 값을 구하는 문제는 $a^x\times a^{-x}=1$임을 이용한다.
일반적으로 $\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=k$ 꼴이 조건으로 주어지면 좌변의 분자, 분모에 a^x을 곱하여 a^{2x}의 값을 구하고, $a^x+a^{-x}=k$ 꼴이 조건으로 주어지면 양변을 제곱하여 $a^{2x}+a^{-2x}$의 값을 구한 후 문제를 해결한다.

13 전략 $5^x=9^y=k\ (k>0)$로 놓고 문자 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $5^x=9^y=k\ (k>0)$로 놓으면 $xy\neq0$에서

$k\neq1$

$5^x=k$에서 $\quad 5=k^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$9^y=3^{2y}=k$에서 $\quad 3=k^{\frac{1}{2y}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면

$$\frac{5}{3}=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{2y}}$$

이때 $\frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=-1$이므로

$k^{-1}=\frac{5}{3}$ $\quad\therefore k=\frac{3}{5}$

$\therefore 5^x=k=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

14 전략 조건 (나)를 이용하여 a, $2b$를 6^n 꼴로 나타낸다.

풀이 조건 (나)의 $a^{2x}=6$에서 $\quad a=6^{\frac{1}{2x}}$

$\therefore a^3=6^{\frac{3}{2x}}$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{1}{(2b)^{3y}}=6$에서 $\quad 2b=6^{-\frac{1}{3y}}$

$\therefore (2b)^2=6^{-\frac{2}{3y}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠×㉡을 하면

$a^3\times(2b)^2=6^{\frac{3}{2x}}\times6^{-\frac{2}{3y}}$

$6^{\frac{3}{2x}-\frac{2}{3y}}=4a^3b^2$

이때 조건 (가)에서 $a^3b^2=9$이므로

$6^{\frac{3}{2x}-\frac{2}{3y}}=4\times9=6^2$

$\therefore \frac{3}{2x}-\frac{2}{3y}=2$ 답 ②

15 전략 D, W의 값을 각각 대입하여 R_1, R_2의 값을 구한 후 지수법칙을 이용한다.

풀이 $R=k\left(\frac{W}{D+10}\right)^{\frac{1}{3}}$에서

$D=d$, $W=160$일 때, $\quad R_1=k\left(\frac{160}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$

$D=d$, $W=p$일 때, $\quad R_2=k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$

이때 $\dfrac{R_1}{R_2}=2$이므로

$$\frac{k\left(\dfrac{160}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}{k\left(\dfrac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}=2, \qquad \left(\frac{\dfrac{160}{d+10}}{\dfrac{p}{d+10}}\right)^{\frac{1}{3}}=2$$

$$\left(\frac{160}{p}\right)^{\frac{1}{3}}=2, \qquad \frac{160}{p}=2^3=8$$

$\therefore\ p=20$ 답 ④

16 전략 m이 짝수일 때, 실수 A의 m제곱근 중 실수인 것은 $A>0$이면 2개, $A=0$이면 1개, $A<0$이면 0개이다.

풀이 n의 값에 관계없이 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로

$f(n)=1$

$n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는

(i) $n(n-4)>0$, 즉 $n>4$일 때, 2이므로

$g(n)=2$

(ii) $n(n-4)=0$, 즉 $n=4$일 때, 1이므로

$g(n)=1$

(iii) $n(n-4)<0$, 즉 $0<n<4$일 때, 0이므로

$g(n)=0$

이상에서

$$g(n)=\begin{cases}2 & (n>4)\\ 1 & (n=4)\\ 0 & (0<n<4)\end{cases}$$

$f(n)>g(n)$, 즉 $g(n)<1$을 만족시키는 경우는 $g(n)=0$인 경우이므로

$0<n<4$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$ 답 ③

Q BOX

$n(n-4)>0$에서
$n<0$ 또는 $n>4$
그런데 n이 자연수이므로
$n>4$

17 전략 거듭제곱근의 정의를 이용하여 조건 (가), (나), (다)를 각각 등식으로 나타낸다.

풀이 조건 (가)에서 $(\sqrt[3]{a})^m=b$이므로

$(a^{\frac{1}{3}})^m=b \qquad \therefore\ a^{\frac{m}{3}}=b$ ...... ㉠

조건 (나)에서 $(\sqrt{b})^n=c$이므로

$(b^{\frac{1}{2}})^n=c \qquad \therefore\ b^{\frac{n}{2}}=c$ ...... ㉡

조건 (다)에서 $c^4=a^{12}$이므로

$c=a^3\ (\because\ a>0,\ c>0)$ ...... ㉢

㉠을 ㉡에 대입하면

$c=(a^{\frac{m}{3}})^{\frac{n}{2}}=a^{\frac{mn}{6}}$

이때 ㉢에서 $a^{\frac{mn}{6}}=a^3$이므로

$\dfrac{mn}{6}=3 \qquad \therefore\ mn=18$

따라서 $mn=18$을 만족시키는 1이 아닌 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은

$(2, 9), (3, 6), (6, 3), (9, 2)$

의 4개이다. 답 ①

Q BOX

x가 a의 n제곱근
➡ x를 n제곱하면 a
➡ $x^n=a$

02 로그

Lecture 03 로그 18쪽

Q BOX

$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

01 답 $4=\log_2 16$

02 답 $-2=\log_{\frac{1}{3}} 9$

03 답 $3^{-3}=\dfrac{1}{27}$

04 답 $(\sqrt{5})^4=25$

Q BOX

$\log_a N$이 정의되기 위한 조건은
$a>0,\ a\neq 1,\ N>0$

05 밑의 조건에서 $x-5>0,\ x-5\neq 1$

$x>5,\ x\neq 6 \qquad \therefore\ 5<x<6$ 또는 $x>6$

답 $5<x<6$ 또는 $x>6$

06 진수의 조건에서 $x^2+3x>0$

$x(x+3)>0 \qquad \therefore\ x<-3$ 또는 $x>0$

답 $x<-3$ 또는 $x>0$

07 밑의 조건에서 $x+1>0,\ x+1\neq 1$

$x>-1,\ x\neq 0$

$\therefore\ -1<x<0$ 또는 $x>0$ ...... ㉠

진수의 조건에서 $2-3x>0$

$\therefore\ x<\dfrac{2}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<x<0$ 또는 $0<x<\dfrac{2}{3}$

답 $-1<x<0$ 또는 $0<x<\dfrac{2}{3}$

08 $\log_9 1+\log_5 5=0+1=1$ 답 1

09 $\log_6 4\sqrt{3}+\log_6 3\sqrt{3}=\log_6(4\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3})$

$=\log_6 36=\log_6 6^2$

$=2$ 답 2

10 $\dfrac{1}{\log_{16} 2}-2\log_9 3=\log_2 16-2\log_9 3$

$=\log_2 2^4-2\log_{3^2} 3$

$=4-1=3$ 답 3

Q BOX

$2\log_{3^2} 3=2\cdot\dfrac{1}{2}\log_3 3$
$=1$

11 $\dfrac{\log_7 8}{\log_7 2}-\log_{\frac{1}{7}} 49=\log_2 8-\log_{\frac{1}{7}} 49$

$=\log_2 2^3-\log_{7^{-1}} 7^2$

$=3-(-2)=5$ 답 5

12 $\log_2 9\cdot\log_3 7\cdot\log_7 2=\log_2 3^2\cdot\log_3 7\cdot\log_7 2$

$=2\log_2 3\cdot\log_3 7\cdot\log_7 2$

$=2$ 답 2

13 $5^{\log_5 8-\log_5 2}=5^{\log_5 \frac{8}{2}}=5^{\log_5 4}=4$ 답 4

표준+발전 유형 Q+Q

19쪽

01 $\log_a 7=2$에서 $a^2=7$ ...... ㉠

$\log_7 4=b$에서 $7^b=4$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(a^2)^b=4$

$(a^b)^2=4$ $\therefore a^b=2$ ($\because a>0$) 답 2

다른 풀이 $\log_a 7=2$에서 $a^2=7$

따라서 $a=7^{\frac{1}{2}}$이므로

$a^b=(7^{\frac{1}{2}})^{\log_7 4}=7^{\log_7 4^{\frac{1}{2}}}=4^{\frac{1}{2}}=2$

02 $x=\log_5(\sqrt{2}+1)$에서 $5^x=\sqrt{2}+1$

$\therefore 5^x-5^{-x}=5^x-\dfrac{1}{5^x}$

$=\sqrt{2}+1-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

$=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2$ 답 ③

03 밑의 조건에서 $x-2>0$, $x-2\neq1$

$x>2$, $x\neq3$

$\therefore 2<x<3$ 또는 $x>3$ ...... ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+8x-7>0$

$x^2-8x+7<0$, $(x-1)(x-7)<0$

$\therefore 1<x<7$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2<x<3$ 또는 $3<x<7$

따라서 정수 x는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$4+5+6=15$ 답 15

04 밑의 조건에서 $a>0$, $a\neq1$

$\therefore 0<a<1$ 또는 $a>1$ ...... ㉠

진수의 조건에서 $x^2-2ax+9a>0$

모든 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로

이차방정식 $x^2-2ax+9a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-9a<0$, $a(a-9)<0$

$\therefore 0<a<9$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<a<1$ 또는 $1<a<9$

따라서 정수 a는 2, 3, 4, $\cdots$, 8의 7개이다. 답 ②

쌤 한마디

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

① $ax^2+bx+c>0$이 성립한다. ⇨ $a>0$, $D<0$

② $ax^2+bx+c\geq0$이 성립한다. ⇨ $a>0$, $D\leq0$

③ $ax^2+bx+c<0$이 성립한다. ⇨ $a<0$, $D<0$

④ $ax^2+bx+c\leq0$이 성립한다. ⇨ $a<0$, $D\leq0$

Q BOX

$\log_a 7=2$가 정의되려면 밑의 조건 $a>0$, $a\neq1$을 만족시켜야 한다.

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$a>0$, $b>0$이고 a, b는 유리수, c는 실수일 때,

$\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$ (단, $a\neq b$)

$3^{\frac{5}{2}}=3^{2+\frac{1}{2}}=3^2\cdot3^{\frac{1}{2}}$

$=9\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{\cancel{80}}{81}$

$=\dfrac{1}{81}$

05 ① $\log_3\dfrac{9}{2}+2\log_3\sqrt{6}=\log_3\dfrac{9}{2}+\log_3(\sqrt{6})^2$

$=\log_3\dfrac{9}{2}+\log_3 6$

$=\log_3\left(\dfrac{9}{2}\cdot6\right)=\log_3 27$

$=\log_3 3^3=3$

② $\log_2\dfrac{1}{8}\cdot\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{16}=\log_2 2^{-3}\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

$=-3\cdot4=-12$

③ $\log_5 10\sqrt{3}-\log_5 2\sqrt{15}=\log_5\dfrac{10\sqrt{3}}{2\sqrt{15}}$

$=\log_5\sqrt{5}$

$=\log_5 5^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

④ $\log_3(\sqrt{13}-2)+\log_3(\sqrt{13}+2)$

$=\log_3(\sqrt{13}-2)(\sqrt{13}+2)=\log_3 9$

$=\log_3 3^2=2$

⑤ $\log_2 9+\log_2\sqrt{3}-\dfrac{5}{2}\log_2 3$

$=\log_2 9+\log_2\sqrt{3}-\log_2 3^{\frac{5}{2}}$

$=\log_2 9+\log_2\sqrt{3}-\log_2 9\sqrt{3}$

$=\log_2\dfrac{9\cdot\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}=\log_2 1=0$

답 ⑤

06 $\log_3\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\log_3\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\log_3\left(1-\dfrac{1}{4}\right)$

$+\cdots+\log_3\left(1-\dfrac{1}{81}\right)$

$=\log_3\dfrac{1}{2}+\log_3\dfrac{2}{3}+\log_3\dfrac{3}{4}+\cdots+\log_3\dfrac{80}{81}$

$=\log_3\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{80}{81}\right)$

$=\log_3\dfrac{1}{81}=\log_3 3^{-4}=-4$ 답 -4

07 $\log_a c=\dfrac{1}{5}$에서 $\dfrac{1}{\log_c a}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore \log_c a=5$

$\log_b c=\dfrac{1}{6}$에서 $\dfrac{1}{\log_c b}=\dfrac{1}{6}$

$\therefore \log_c b=6$

$\therefore \dfrac{1}{\log_{ab} c}=\log_c ab=\log_c a+\log_c b$

$=5+6=11$ 답 11

08 $\log_6(\log_2 3)+\log_6(\log_3 4)+\log_6(\log_4 5)$

$+\cdots+\log_6(\log_{63} 64)$

$=\log_6(\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\cdots\cdot\log_{63} 64)$

$=\log_6\left(\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 5}{\log_2 4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{\log_2 64}{\log_2 63}\right)$

$=\log_6(\log_2 64)=\log_6(\log_2 2^6)$

$=\log_6 6=1$ 답 ⑤

09 $5\log_2 3-\log_{\frac{1}{2}} 15-3\log_2 9$

$=\log_2 3^5+\log_2 15-\log_2 9^3$

$=\log_2 \dfrac{3^5\cdot 15}{9^3}=\log_2 5$

$\therefore\ 4^{5\log_2 3-\log_{\frac{1}{2}} 15-3\log_2 9}=4^{\log_2 5}=5^{\log_2 4}=5^{2\log_2 2}$

$=5^2=25$ 답 25

Q BOX

$\dfrac{3^5\cdot 15}{9^3}=\dfrac{3^5\cdot 3\cdot 5}{(3^2)^3}$

$=\dfrac{3^6\cdot 5}{3^6}=5$

10 $A=7^{\log_7 \frac{5}{2}}=\dfrac{5}{2}$

$B=\log_4 8\sqrt{2}=\log_{2^2} 2^{\frac{7}{2}}=\dfrac{7}{4}$

$C=\log_{\sqrt{3}}(\log_5 125)=\log_{\sqrt{3}}(\log_5 5^3)=\log_{\sqrt{3}} 3$

$=\log_{3^{\frac{1}{2}}} 3=2$

이때 $\dfrac{7}{4}<2<\dfrac{5}{2}$이므로

$B<C<A$ 답 ④

$8\sqrt{2}=2^3\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{3+\frac{1}{2}}$

$=2^{\frac{7}{2}}$

11 $\log_{12} 10=\dfrac{\log_5 10}{\log_5 12}=\dfrac{\log_5 (2\cdot 5)}{\log_5 (2^2\cdot 3)}$

$=\dfrac{\log_5 2+\log_5 5}{\log_5 2^2+\log_5 3}=\dfrac{\log_5 2+1}{2\log_5 2+\log_5 3}$

$=\dfrac{a+1}{2a+b}$ 답 ②

12 $\log_3 10=a$에서

$\log_3 2+\log_3 5=a$ …… ㉠

$\log_3 \dfrac{4}{5}=b$에서

$\log_3 4-\log_3 5=b$, $\log_3 2^2-\log_3 5=b$

$\therefore\ 2\log_3 2-\log_3 5=b$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $3\log_3 2=a+b$

$\therefore\ \log_3 2=\dfrac{a+b}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{a+b}{3}+\log_3 5=a$ $\therefore\ \log_3 5=\dfrac{2a-b}{3}$

$\therefore\ \log_3 20=\log_3 (2^2\cdot 5)$

$=\log_3 2^2+\log_3 5$

$=2\log_3 2+\log_3 5$

$=2\cdot\dfrac{a+b}{3}+\dfrac{2a-b}{3}$

$=\dfrac{4}{3}a+\dfrac{1}{3}b$

따라서 $p=\dfrac{4}{3}$, $q=\dfrac{1}{3}$이므로

$p-q=1$ 답 1

13 $2^a=x$, $2^b=y$, $2^c=z$에서

$\log_2 x=a$, $\log_2 y=b$, $\log_2 z=c$

$\therefore\ \log_{yz} x^3z^2=\dfrac{\log_2 x^3z^2}{\log_2 yz}$

$=\dfrac{3\log_2 x+2\log_2 z}{\log_2 y+\log_2 z}$

$=\dfrac{3a+2c}{b+c}$ 답 $\dfrac{3a+2c}{b+c}$

다른 풀이 $yz=2^b\cdot 2^c=2^{b+c}$, $x^3z^2=2^{3a}\cdot 2^{2c}=2^{3a+2c}$이므로

$\log_{yz} x^3z^2=\log_{2^{b+c}} 2^{3a+2c}=\dfrac{3a+2c}{b+c}$

14 $a^m=b^n=7$에서 $\log_a 7=m$, $\log_b 7=n$

따라서 $\log_7 a=\dfrac{1}{m}$, $\log_7 b=\dfrac{1}{n}$이므로

$\log_{ab} a^4=\dfrac{\log_7 a^4}{\log_7 ab}=\dfrac{4\log_7 a}{\log_7 a+\log_7 b}$

$=\dfrac{\frac{4}{m}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=\dfrac{4n}{m+n}$ 답 ⑤

분자, 분모에 각각 mn을 곱한다.

15 $a^2b^3=1$의 양변에 a를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_a a^2b^3=\log_a 1$, $\log_a a^2+\log_a b^3=0$

$2+3\log_a b=0$ $\therefore\ \log_a b=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \log_a a^3b^5=\log_a a^3+\log_a b^5$

$=3+5\log_a b$

$=3+5\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$ 답 $-\dfrac{1}{3}$

16 $\log_3 x+\log_9 y^2=2$에서

$\log_3 x+\log_{3^2} y^2=2$ $\therefore\ \log_3 x+\log_3 y=2$

$\therefore\ 3^{\log_9 x}\cdot 9^{\log_3 \sqrt{y}}=3^{\log_{3^2} x}\cdot (3^2)^{\log_{3^2} y^{\frac{1}{2}}}$

$=3^{\frac{1}{2}\log_3 x}\cdot (3^2)^{\frac{1}{4}\log_3 y}$

$=3^{\frac{1}{2}\log_3 x}\cdot 3^{\frac{1}{2}\log_3 y}$

$=3^{\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 y}$

$=3^{\frac{1}{2}(\log_3 x+\log_3 y)}$

$=3^{\frac{1}{2}\cdot 2}=3$ 답 ③

17 $\log_2 16<\log_2 20<\log_2 32$에서

$4<\log_2 20<5$

이므로

$\alpha=\log_2 20-4=\log_2 20-\log_2 16=\log_2 \dfrac{5}{4}$

$\therefore\ 2^\alpha=2^{\log_2 \frac{5}{4}}=\dfrac{5}{4}$ 답 $\dfrac{5}{4}$

$4<\log_2 20<5$에서 $\log_2 20$의 정수 부분이 4이므로 소수 부분은 $\log_2 20-4$

18 $\log_7 7<\log_7 14<\log_7 49$에서

$1<\log_7 14<2$

이므로

$x=1$, $y=\log_7 14-1=\log_7 14-\log_7 7=\log_7 2$

$\therefore\ \dfrac{7^y+7^{-y}}{7^x+7^{-x}}=\dfrac{7^{\log_7 2}+7^{-\log_7 2}}{7+7^{-1}}$

$=\dfrac{2+\frac{1}{2}}{7+\frac{1}{7}}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{50}{7}}=\dfrac{7}{20}$ 답 ③

19 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_5 a+\log_5 b=8$, $\log_5 a\cdot\log_5 b=1$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\dfrac{\log_5 b}{\log_5 a}+\dfrac{\log_5 a}{\log_5 b}$

$=\dfrac{(\log_5 a)^2+(\log_5 b)^2}{\log_5 a\cdot\log_5 b}$

$=\dfrac{(\log_5 a+\log_5 b)^2-2\log_5 a\cdot\log_5 b}{\log_5 a\cdot\log_5 b}$

$=\dfrac{8^2-2\cdot1}{1}=62$ 답 ②

20 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=\dfrac{9}{2}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=5^2-2\cdot\dfrac{9}{2}=16$

따라서

$\log_{\alpha^2+\beta^2}3\alpha+\log_{\alpha^2+\beta^2}2\beta=\log_{\alpha^2+\beta^2}6\alpha\beta$

$=\log_{16}\left(6\cdot\dfrac{9}{2}\right)$

$=\log_{2^4}3^3$

$=\dfrac{3}{4}\log_2 3$

이므로 $k=\dfrac{3}{4}$ 답 ③

21 $3\log_n 5=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$\log_n 5=\dfrac{k}{3},\quad n^{\frac{k}{3}}=5\quad \therefore n=5^{\frac{3}{k}}$

이때 n이 5 이상의 자연수이므로 $\dfrac{3}{k}$도 자연수이어야 한다.

즉 주어진 조건을 만족시키는 k의 값은

1, 3

(i) $k=1$일 때, $n=5^3=125$

(ii) $k=3$일 때, $n=5^1=5$

(i), (ii)에서 모든 n의 값의 합은

$125+5=130$ 답 130

다른 풀이 $3\log_n 5=\dfrac{3}{\log_5 n}$ …… ㉠

n이 5 이상의 자연수이므로

$\log_5 n=1,\ \log_5 6,\ \log_5 7,\ \log_5 8,\ \cdots$

이때 ㉠의 값이 자연수이려면

$\log_5 n=1,\ 3\quad \therefore n=5,\ 125$

따라서 모든 n의 값의 합은

$5+125=130$

22 $\log_3 x^2-\log_3\sqrt{x}=2\log_3 x-\dfrac{1}{2}\log_3 x=\dfrac{3}{2}\log_3 x$

$9<x<81$에서 $2<\log_3 x<4$

$\therefore 3<\dfrac{3}{2}\log_3 x<6$

이때 $\dfrac{3}{2}\log_3 x$가 정수이므로 $\dfrac{3}{2}\log_3 x=4,\ 5$

$\log_3 x=\dfrac{8}{3},\ \dfrac{10}{3}\quad \therefore x=3^{\frac{8}{3}},\ 3^{\frac{10}{3}}$

QBOX

x^2+y^2
$=(x+y)^2-2xy$

n이 실수일 때,
$\log 10^n=n$

$10\sqrt{10}=10\cdot10^{\frac{1}{2}}$
$=10^{\frac{3}{2}}$

따라서 구하는 곱은

$3^{\frac{8}{3}}\cdot3^{\frac{10}{3}}=3^6$ 답 ②

Lecture 04 상용로그 (23쪽)

01 $\log\sqrt[4]{10^3}=\log 10^{\frac{3}{4}}=\dfrac{3}{4}$ 답 $\dfrac{3}{4}$

02 $\log\dfrac{1}{1000}=\log 10^{-3}=-3$ 답 -3

03 $\log 100+\log 0.01=\log 10^2+\log 10^{-2}$

$=2-2=0$ 답 0

다른 풀이 $\log 100+\log 0.01=\log(100\times0.01)$

$=\log 1=0$

04 $\log 7000-\log 7=\log\dfrac{7000}{7}=\log 1000$

$=\log 10^3=3$ 답 3

05 $\log 10\sqrt{10}+\log\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}=\log 10^{\frac{3}{2}}+\log 10^{-\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{6}$ 답 $\dfrac{7}{6}$

06 답 0.5092

07 $\log 3140=\log(3.14\times10^3)=\log 3.14+\log 10^3$

$=0.4969+3=3.4969$ 답 3.4969

08 $\log 0.312=\log(3.12\times10^{-1})=\log 3.12+\log 10^{-1}$

$=0.4942-1=-0.5058$

$\log\sqrt{3.35}=\log(3.35)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log 3.35$

$=\dfrac{1}{2}\times0.5250=0.2625$

$\therefore \log 0.312+\log\sqrt{3.35}=-0.5058+0.2625$

$=-0.2433$

답 -0.2433

09 $\log x=2.8854=2+0.8854$

$=\log 10^2+\log 7.68$

$=\log(10^2\times7.68)=\log 768$

$\therefore x=768$ 답 768

표준+발전 유형 Q+Q (24쪽)

01 $\log 5+\log 24=\log(2^3\cdot3\cdot5)=\log(2^2\cdot3\cdot10)$

$=\log 2^2+\log 3+\log 10$

$=2\log 2+\log 3+1$

$=2\times0.3010+0.4771+1$

$=2.0791$ 답 2.0791

02 $\log 790-\log x=2.8976-(-0.1024)$

$\qquad =3=\log 1000$

> $3=3\log 10=\log 10^3$
> $\quad=\log 1000$

즉 $\log \frac{790}{x}=\log 1000$이므로 $\quad \frac{790}{x}=1000$

$\therefore x=\frac{790}{1000}=0.79$ 답 0.79

03 4등급인 별의 밝기를 I_1이라 하면

$4=-\frac{5}{2}\log I_1+C$ …… ㉠

7등급인 별의 밝기를 I_2라 하면

$7=-\frac{5}{2}\log I_2+C$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$-3=-\frac{5}{2}(\log I_1-\log I_2)$

$-3=-\frac{5}{2}\log\frac{I_1}{I_2} \qquad \therefore \log\frac{I_1}{I_2}=\frac{6}{5}$

따라서 $\frac{I_1}{I_2}=10^{\frac{6}{5}}$이므로

> $\frac{I_1}{I_2}=10^{\frac{6}{5}}$에서
> $I_1=10^{\frac{6}{5}}I_2$
> 이므로 4등급인 별의 밝기는 7등급인 별의 밝기의 $10^{\frac{6}{5}}$배이다.

$k=\frac{6}{5}$ 답 ④

04 A 나무일 때 $D=30$, $R=R_A$, $L=L_A=300$이므로

$300^2=100\cdot 30^2\cdot \log_3 R_A$

> $100\cdot 30^2=10^2\cdot 30^2$
> $\quad=(10\cdot 30)^2$
> $\quad=300^2$

$\log_3 R_A=1 \qquad \therefore R_A=3$

B 나무일 때 $D=10$, $R=R_B$, $L=L_B$이고 $\frac{R_B}{R_A}=27$에서 $R_B=81$이므로

$L_B{}^2=100\cdot 10^2\cdot \log_3 81$

$\quad =100\cdot 100\cdot 4=200^2$

$\therefore L_B=200\ (\because L_B>0)$ 답 200

05 올해의 매출액을 A, 매출액의 매년 증가율을 a %라 하면

$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{12}=3A$

$\therefore \left(1+\frac{a}{100}\right)^{12}=3$

양변에 상용로그를 취하면

> $\left(1+\frac{a}{100}\right)^{12}$을 직접 계산하기 어려우므로 양변에 상용로그를 취하여 지수 12를 없앤다.

$12\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 3$

$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{12}\log 3=\frac{1}{12}\times 0.48=0.04$

이때 $\log 1.1=0.04$이므로

$1+\frac{a}{100}=1.1, \qquad \frac{a}{100}=0.1 \qquad \therefore a=10$

따라서 매출액을 매년 10 %씩 증가시켜야 한다.

답 10 %

06 어떤 도서의 현재 가격을 A라 하면 5년 후 가격은

$A\left(1-\frac{20}{100}\right)^5=A\times 0.8^5$

0.8^5에 상용로그를 취하면

$\log 0.8^5=5\log 0.8=5\log(8\times 10^{-1})$

$\quad =5(\log 2^3+\log 10^{-1})$

$\quad =5(3\log 2-1)=15\log 2-5$

$\quad =15\times 0.301-5=-0.485$

이때 $\log 3.27-\log 0.8^5=0.515-(-0.485)=1$이므로

$\log\frac{3.27}{0.8^5}=\log 10$

즉 $\frac{3.27}{0.8^5}=10$이므로 $\qquad 0.8^5=0.327$

따라서 이 도서의 5년 후 가격은 $0.327A$이므로 현재 가격의 32.7 %이다. 답 ③

중단원 마무리

25쪽

01 전략 로그의 정의를 이용하여 10^x의 값을 구한 후 $10^{-x}=\frac{1}{10^x}$임을 이용한다.

풀이 $x=\log(2+\sqrt{3})$에서

$10^x=2+\sqrt{3},\ 10^{-x}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

> $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$
> $=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$
> $=2-\sqrt{3}$

$\therefore \frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}=\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}$

$\qquad =\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 답 ③

02 전략 (밑)>0, (밑)≠1, (진수)>0임을 이용한다.

풀이 밑의 조건에서 $\qquad 9-x>0,\ 9-x\neq 1$

$x<9,\ x\neq 8$

$\therefore x<8$ 또는 $8<x<9$ …… ㉠ ··· ❶

진수의 조건에서 $\qquad x^2-6x+8>0$

$(x-2)(x-4)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>4$ …… ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x<2$ 또는 $4<x<8$ 또는 $8<x<9$

따라서 자연수 x는 1, 5, 6, 7의 4개이다. ··· ❸

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	밑의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷	진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸	자연수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

> **귀류법**
> 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 명제 또는 명제의 결론을 부정한 다음 모순이 생기는 것을 보이는 방법

03 전략 로그의 정의와 지수법칙을 이용한다.

풀이 $\log_{12}3$이 유리수라 가정하면 서로소인 두 자연수 m, $n\ (m<n)$에 대하여 $\log_{12}3=\frac{m}{n}$으로 놓을 수 있다.

로그의 정의에 의하여

$\boxed{12^{\frac{m}{n}}}=3,\quad 12^m=3^n$

$4^m\cdot 3^m=3^n\quad \therefore \boxed{4^m}=3^{n-m}$

이때 4^m은 $\boxed{\text{짝수}}$이고 3^{n-m}은 홀수이므로 4^m과 3^{n-m}은 항상 같지 않다.

따라서 $\log_{12}3$은 무리수이다.

$\therefore$ (가) $12^{\frac{m}{n}}$ (나) 4^m (다) 짝수

답 (가) $12^{\frac{m}{n}}$ (나) 4^m (다) 짝수

04 전략 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) $(x_1\neq x_2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$임을 이용한다.

풀이 두 점 $(1, \log_2 5)$, $(2, \log_2 10)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\log_2 10-\log_2 5}{2-1}=\log_2\frac{10}{5}=\log_2 2=1$$

답 ①

05 전략 로그의 성질 $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$을 이용한다.

풀이 $225=15^2$이므로 225의 양의 약수를 작은 수부터 차례대로 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_9$라 하면

$a_5=15,\ a_1a_9=a_2a_8=a_3a_7=a_4a_6=225=15^2$

$\therefore \log_{15}a_1+\log_{15}a_2+\log_{15}a_3+\cdots+\log_{15}a_9$

$=\log_{15}a_1a_2a_3\cdots a_9$

$=\log_{15}\{a_5(a_1a_9)(a_2a_8)(a_3a_7)(a_4a_6)\}$

$=\log_{15}\{15\cdot(15^2)^4\}$

$=\log_{15}15^9=9$

답 9

쌤 한마디

05번에서

$225=1\cdot 225=3\cdot 75=5\cdot 45=9\cdot 25=15^2$

이므로 $a_5=15,\ a_1a_9=a_2a_8=a_3a_7=a_4a_6=225$임을 알 수 있다.

06 전략 로그의 밑 변환을 이용하여 로그의 밑을 x로 통일한다.

풀이 $\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_4 x}=\log_x 3+\log_x 4=\log_x 12$이므로

$\log_x 12=7$

$$\therefore \frac{1}{\log_{12}\sqrt{x}}+\frac{1}{\log_{12}x}=\log_{\sqrt{x}}12+\log_x 12$$

$=2\log_x 12+\log_x 12$

$=3\log_x 12$

$=3\cdot 7=21$

답 ⑤

07 전략 로그의 여러 가지 성질을 이용한다.

풀이 $\log_5 2+\log_5 3=\log_5(2\cdot 3)=\log_5 6$

$\log_3 8+\log_3 2=\log_3(8\cdot 2)=\log_3 16$

Q BOX

$\log_3 16=\log_3 4^2$
$=2\log_3 4$

상용로그를 변형하는 문제에서는

$\log 5=\log\frac{10}{2}$
$=1-\log 2$

또는

$\log 2=\log\frac{10}{5}$
$=1-\log 5$

임이 자주 이용된다.

$225=3^2\cdot 5^2$이므로 225의 양의 약수의 개수는 $(2+1)(2+1)=9$

$3<\log_3 36<4$에서 $\log_3 36$의 정수 부분은 3이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=(5^{\log_5 6})^2+(4^{\log_3 16})^{\log_4 3}$

$=6^2+4^{2\log_3 4\cdot\log_4 3}$

$=6^2+4^2=52$

답 ④

08 전략 로그의 성질을 이용하여 주어진 수를 진수가 2와 3인 로그로 나타낸다.

풀이 $\log\frac{4}{15}=\log 4-\log 15$

$=\log 2^2-\log(3\cdot 5)$

$=2\log 2-(\log 3+\log 5)$

$=2\log 2-(\log 3+1-\log 2)$

$=3\log 2-\log 3-1$

$=3a-b-1$

답 ①

09 전략 $\frac{\log_a b}{24}=\frac{\log_b c}{9}=\log_c a=k$로 놓고 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 $\frac{\log_a b}{24}=\frac{\log_b c}{9}=\log_c a=k$ (k는 실수)로 놓으면

$\log_a b=24k,\ \log_b c=9k,\ \log_c a=k$

이때 $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$이므로

$24k\cdot 9k\cdot k=1$

$k^3=\frac{1}{216}\quad \therefore k=\frac{1}{6}$ ($\because$ k는 실수)

$\therefore \log_a b+\log_b c+\log_c a=24k+9k+k=34k$

$=34\cdot\frac{1}{6}=\frac{17}{3}$

답 $\frac{17}{3}$

10 전략 정수 n에 대하여 $n\le\log_a b<n+1$이면 $\log_a b$의 정수 부분은 n임을 이용한다.

풀이 $\log_3 27<\log_3 36<\log_3 81$에서

$3<\log_3 36<4$

이므로

$y=3$ ··· ①

$\therefore (\sqrt{3})^x+3^y=3^{\frac{1}{2}\log_3 36}+3^3=3^{\log_3 6}+3^3$

$=6+27=33$ ··· ②

답 33

단계	채점 기준	비율
①	y의 값을 구할 수 있다.	40 %
②	$(\sqrt{3})^x+3^y$의 값을 구할 수 있다.	60 %

11 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계와 로그의 성질을 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\log_3 4=-a,\ 2\cdot\log_3 4=b$

이므로

$a=-(\log_3 9+\log_3 4)=-\log_3 36,$

$b=\log_3 4^2=\log_3 16$

$\therefore \dfrac{a}{b}=-\dfrac{\log_3 36}{\log_3 16}=-\log_{16}36$

$=-\log_{2^4}6^2=-\dfrac{1}{2}\log_2 6$ 답 ①

12 전략 $\log_4 2n^2-\dfrac{1}{2}\log_2\sqrt{n}=k$로 놓고 n을 k에 대한 식으로 나타낸 후 n이 자연수가 될 조건을 생각한다.

풀이 $\log_4 2n^2-\dfrac{1}{2}\log_2\sqrt{n}=\dfrac{1}{2}\log_2 2n^2-\dfrac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$

$=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2n^2}{\sqrt{n}}$

$=\dfrac{1}{2}\log_2 2n^{\frac{3}{2}}$

$\dfrac{1}{2}\log_2 2n^{\frac{3}{2}}=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$\log_2 2n^{\frac{3}{2}}=2k,\quad 2n^{\frac{3}{2}}=2^{2k}$

$n^{\frac{3}{2}}=2^{2k-1}\quad \therefore n=2^{\frac{2(2k-1)}{3}}$

이때 n이 자연수이므로 $\dfrac{2(2k-1)}{3}$은 음이 아닌 정수이어야 한다.

그런데 k가 자연수이므로 $2k-1$은 3의 배수이어야 한다.

또 $2k-1$은 홀수이므로

$2k-1=3(2t-1)$ (t는 자연수)

로 놓으면

$2k=6t-2\quad \therefore k=3t-1$

이때 k는 40 이하의 자연수이므로

$0<3t-1\le 40,\quad 1<3t\le 41$

$\therefore \dfrac{1}{3}<t\le\dfrac{41}{3}$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 t는

1, 2, 3, ⋯, 13의 13개

이므로 주어진 식의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n도 13개이다. 답 13

자연수 a가 소수일 때, a^r이 자연수가 될 조건 ➡ r는 음이 아닌 정수

$\dfrac{41}{3}=13.6\cdots$

13 전략 $\log A=k$일 때, $\log A^n=nk$, $\log(A\times10^n)=n+k$임을 이용한다.

풀이 ① $\log 8=\log 2^3=3\log 2$

$=3\times0.3010=0.9030$

② $\log\dfrac{1}{2}=\log 2^{-1}=-\log 2=-0.3010$

③ $\log 16=\log 2^4=4\log 2$

$=4\times0.3010=1.2040$

④ $\log 200=\log(2\times10^2)=\log 2+2\log 10$

$=0.3010+2=2.3010$

⑤ $\log 0.4=\log\dfrac{4}{10}=\log 2^2-\log 10=2\log 2-1$

$=2\times0.3010-1=-0.3980$

답 ⑤

14 전략 한 모서리의 길이가 a인 정육면체의 부피는 a^3임을 이용한다.

풀이 직육면체의 부피는 $12.7\times13.5\times14.8$이므로

$a^3=12.7\times13.5\times14.8$

$\therefore a=\sqrt[3]{12.7\times13.5\times14.8}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log a=\dfrac{1}{3}\log(12.7\times13.5\times14.8)$

$=\dfrac{1}{3}(\log 12.7+\log 13.5+\log 14.8)$

$=\dfrac{1}{3}\{\log(1.27\times10)+\log(1.35\times10)$
$+\log(1.48\times10)\}$

$=\dfrac{1}{3}(\log 1.27+1+\log 1.35+1$
$+\log 1.48+1)$

$=\dfrac{1}{3}(3+0.1038+0.1303+0.1703)$

$=\dfrac{1}{3}\times3.4044$

$=1.1348$ 답 1.1348

15 전략 주어진 조건을 관계식에 대입한다.

풀이 $V=2C$일 때 $t=\dfrac{7}{2}t_0$이므로

$\log\left(\dfrac{\frac{7}{2}t_0}{t_0}-1\right)=k+4\log\dfrac{2C}{C}$

$\log\dfrac{5}{2}=k+4\log 2$

이때 $\log\dfrac{5}{2}=\log\dfrac{10}{4}=\log 10-\log 2^2=1-2\log 2$이므로

$1-2\log 2=k+4\log 2$

$\therefore k=1-6\log 2$ 답 ④

16 전략 처음 보험료가 A원, 보험료 인상률이 a %일 때, 사고를 n번 내면 보험료는 $A\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^n$이 됨을 이용한다.

풀이 처음 보험료를 A원, 사고를 1번 낼 때마다의 보험료 인상률을 a %라 하면

$A\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^5=\dfrac{250}{100}A$

$\therefore \left(1+\dfrac{a}{100}\right)^5=\dfrac{5}{2}$

양변에 상용로그를 취하면

$5\log\left(1+\dfrac{a}{100}\right)=\log\dfrac{5}{2}$

$\therefore \log\left(1+\dfrac{a}{100}\right)=\dfrac{1}{5}\log\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{5}\log\dfrac{10}{4}$

$=\dfrac{1}{5}(\log 10-\log 2^2)$

$=\dfrac{1}{5}(1-2\log 2)$

$=\dfrac{1}{5}\times(1-2\times0.3)$

$=0.08$

이때 $\log 1.2=0.08$이므로

$1+\dfrac{a}{100}=1.2,\quad \dfrac{a}{100}=0.2$

$\therefore a=20$

따라서 사고를 1번 낼 때마다 보험료가 20 %씩 인상된다. 답 20 %

17 전략 $3^a=5^b=k^c=t$로 놓고 로그의 정의와 성질을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $3^a=5^b=k^c=t$ $(t>1)$로 놓으면

$a=\log_3 t,\ b=\log_5 t,\ c=\log_k t$ …… ㉠

Q BOX: a, b가 양수이므로 $t>1$

조건 (나)에서 $\log c=\log\dfrac{2ab}{2a+b}$

$$c=\frac{2ab}{2a+b},\qquad \frac{1}{c}=\frac{2a+b}{2ab}$$

$$\therefore \frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{2a}$$

㉠을 위의 식에 대입하면

$$\frac{1}{\log_k t}=\frac{1}{\log_5 t}+\frac{1}{2\log_3 t}$$

$$\therefore \log_t k=\log_t 5+\frac{1}{2}\log_t 3=\log_t 5+\log_t 3^{\frac{1}{2}}=\log_t 5\sqrt{3}$$

따라서 $k=5\sqrt{3}$이므로 $k^2=75$ 답 75

다른 풀이 조건 (가)에서 $3^a=5^b=k^c=t$ $(t>1)$로 놓으면

$3=t^{\frac{1}{a}},\ 5=t^{\frac{1}{b}},\ k=t^{\frac{1}{c}}$ …… ㉡

조건 (나)에서 $\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{2a}$이므로 $t^{\frac{1}{c}}=t^{\frac{1}{b}+\frac{1}{2a}}$

$$\therefore t^{\frac{1}{c}}=t^{\frac{1}{b}}\cdot(t^{\frac{1}{a}})^{\frac{1}{2}}$$

㉡을 위의 식에 대입하면

$$k=5\cdot 3^{\frac{1}{2}}\qquad \therefore k^2=5^2\cdot 3=75$$

18 전략 로그의 진수를 $f(x)$로 놓고 주어진 조건을 만족시키는 $f(x)$의 조건을 파악하여 a의 값을 구한다.

풀이 $\log_2(-x^2+ax+4)=k$ (k는 자연수)로 놓으면

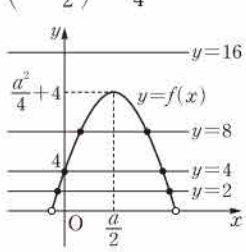
$-x^2+ax+4=2^k$

Q BOX: 이 방정식의 실근은 $y=-x^2+ax+4$의 그래프와 직선 $y=2^k$의 교점의 x좌표이다.

$f(x)=-x^2+ax+4$라 하면 진수의 조건에서 $f(x)>0$이고

$$f(x)=-x^2+ax+4=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+4$$

따라서 $\log_2 f(x)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수가 6이려면 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$, $y=4$, $y=8$과 각각 두 점에서 만나고, 직선 $y=16$과는 만나지 않아야 한다.



즉 $8<\dfrac{a^2}{4}+4<16$이어야 하므로

$$4<\frac{a^2}{4}<12,\qquad 16<a^2<48$$

$$\therefore 4<a<4\sqrt{3}\ (\because a>0)$$

따라서 자연수 a는 5, 6이므로 구하는 곱은

$5\cdot 6=30$ 답 30

03 지수함수

Lecture 05 지수함수

28쪽

01 $f(2)=5^2=25$ 답 25

02 $f(-2)f(1)=5^{-2}\cdot 5^1=5^{-1}=\dfrac{1}{5}$ 답 $\dfrac{1}{5}$

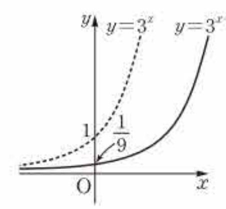
03 ㄱ. 정의역은 $\{x\,|\,x$는 모든 실수$\}$이다.

ㄹ. 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나고 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

04 $y=3^{x-2}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

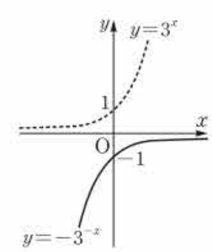
Q BOX: 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-m, y-n)=0$



따라서 치역은 $\{y\,|\,y>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다. 답 풀이 참조

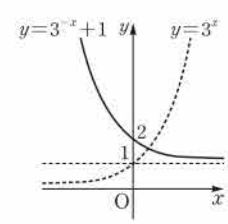
05 $y=-3^{-x}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

Q BOX: 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
① x축: $f(x, -y)=0$
② y축: $f(-x, y)=0$
③ 원점: $f(-x, -y)=0$



따라서 치역은 $\{y\,|\,y<0\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다. 답 풀이 참조

06 $y=3^{-x}+1$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\,|\,y>1\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=1$이다. 답 풀이 참조

07 함수 $y=7^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-1\le x\le 2$에서

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$7^2=49$

$x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$7^{-1}=\dfrac{1}{7}$ 답 최댓값: 49, 최솟값: $\dfrac{1}{7}$

08 함수 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2}$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-4\le x\le -1$에서

$x=-4$일 때 최대이고, 최댓값은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-4+2}=3^2=9$$

$x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1+2}=\frac{1}{3}$$

답 최댓값: 9, 최솟값: $\frac{1}{3}$

표준+발전 유형 Q+Q

Ⓛ 29쪽

01 $f(0)=2^n=3$이므로 $f(3)=2^{3m+n}=81$에서

$2^{3m}\cdot 2^n=81,\quad 2^{3m}\cdot 3=81$

$2^{3m}=27\quad \therefore 2^m=3$

$\therefore f(-2)=2^{-2m+n}=\frac{2^n}{2^{2m}}=\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$일 때, $a^{\log_a b}=b$

02 ㄱ. $f(2p)=a^{2p}$, $2f(p)=2a^p$이므로

$f(2p)\neq 2f(p)$

$f(2p)=2f(p)$는 $a^{2p}=2a^p$, 즉 $a^p=2$일 때만 성립한다.

ㄴ. $f(-p)=a^{-p}=\frac{1}{a^p}=\frac{1}{f(p)}$

ㄷ. $f(p+q)=a^{p+q}=a^p\cdot a^q=f(p)f(q)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

쌤한마디

지수함수 $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$에는 다음과 같은 성질이 있다.

① $f(x+y)=f(x)f(y)$

② $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$

③ $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

④ $f(nx)=\{f(x)\}^n$ (단, n은 자연수)

03 $f(2)=9$에서 $\quad a^2=9\quad \therefore a=3\ (\because a>0)$

$\therefore f(x)=3^x$

④ $f(3)=3^3=27$이므로 그래프는 점 $(3,\ 1)$을 지나지 않는다.

⑤ x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이다.

답 ④

04 $y=(a^2-3a+3)^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하려면

$0<a^2-3a+3<1$

$0<(\text{밑})<1$

(i) $0<a^2-3a+3$에서

$$a^2-3a+3=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

이므로 모든 실수 a에 대하여 성립한다.

(ii) $a^2-3a+3<1$에서 $\quad a^2-3a+2<0$

$(a-1)(a-2)<0\quad \therefore 1<a<2$

(i), (ii)에서 $\quad 1<a<2$

답 $1<a<2$

05 $y=5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=5^{x+1}+2$

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=5^{x+1}+2$

$\therefore y=-5\cdot 5^x-2$

따라서 $a=-5$, $b=-2$이므로

$ab=10$

답 10

06 ㄱ. $y=\frac{3^x}{9}=3^x\cdot 3^{-2}=3^{x-2}$이므로 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $y=\frac{3^x}{9}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄴ. $y=2\cdot 3^x=3^{\log_3 2}\cdot 3^x=3^{x+\log_3 2}$이므로 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\log_3 2$만큼 평행이동하면 $y=2\cdot 3^x$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y=\sqrt{3^x}=3^{\frac{x}{2}}$이므로 $y=3^x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 $y=\sqrt{3^x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=-\sqrt{3}\cdot 3^x=-3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^x=-3^{x+\frac{1}{2}}$이므로 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동하면 $y=-\sqrt{3}\cdot 3^x$의 그래프와 겹쳐진다.

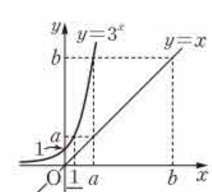
이상에서 $y=3^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

쌤한마디

주어진 지수함수의 식을 $y=a^{x-m}+n$ 꼴로 변형하면 이 함수의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것임을 알 수 있다.

07 $y=3^x$의 그래프가 점 $\left(\frac{1}{2},\ a\right)$를 지나므로



$a=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표가 같음을 이용한다.

또 $y=3^x$의 그래프가 점 $(\sqrt{3},\ b)$를 지나므로

$b=3^{\sqrt{3}}$

$\therefore b^a=(3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=3^3=27$

답 27

08 $y=a^x$의 그래프가 두 점 $(b,\ 6)$, $(c,\ 3)$을 지나므로

$6=a^b$, $3=a^c$

$$\therefore f\left(\frac{b-c}{2}\right)=a^{\frac{b-c}{2}}=(a^{b-c})^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a^b}{a^c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{6}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

답 ④

09 점 A의 좌표가 $(k,\ 2^k)$이고 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로 점 C의 x좌표는 $4^x=2^k$에서

$2^{2x}=2^k \qquad \therefore x=\dfrac{k}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=k-\dfrac{k}{2}=\dfrac{k}{2}$

한편 점 B의 좌표가 $(k,\ 4^k)$이고 두 점 B, D의 y좌표가 같으므로 점 D의 x좌표는 $2^x=4^k$에서

$2^x=2^{2k} \qquad \therefore x=2k$

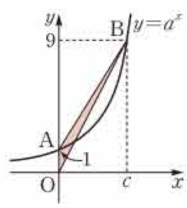
$\therefore \overline{\mathrm{BD}}=2k-k=k$

$\therefore \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BD}}}=\dfrac{\frac{k}{2}}{k}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

10 점 $\mathrm{A}(0,\ b)$가 $y=a^x$의 그래프 위의 점이므로

$b=1$

오른쪽 그림에서



$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot c=1$

$\therefore c=2$

따라서 $\mathrm{B}(2,\ 9)$이고 점 B는 $y=a^x$의 그래프 위의 점이므로

$a^2=9 \qquad \therefore a=3\ (\because a>1)$

$\therefore a+b-c=2$ 답 2

11 $A=\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}},\ B=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}},\ C=\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$

이때 $\dfrac{2}{3}<\dfrac{3}{4}<\dfrac{3}{2}$이고 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{4}}<2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore A<C<B$ 답 ②

지수함수를 이용한 수의 대소 비교
① $a>1$일 때, $x_1<x_2$이면 $a^{x_1}<a^{x_2}$
② $0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면 $a^{x_1}>a^{x_2}$

$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$,
$2\sqrt{2}=2^1\cdot2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$,
$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{4}}=(2^{-3})^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$

12 $0<a<1$일 때, 함수 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $1<2<3$에서

$a^3<a^2<a^1$

이때 함수 $y=5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$5^{a^3}<5^{a^2}<5^a$

따라서 가장 큰 수는 5^a, 가장 작은 수는 5^{a^3}이다.

답 5^a, 5^{a^3}

13 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}-3$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-3\le x\le1$에서

$x=-3$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3-1}-3=16-3=13$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-1}-3=1-3=-2$

따라서 $M=13,\ m=-2$이므로

$M-m=15$ 답 ⑤

14 함수 $y=3^{x+k}$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-5\le x\le2$에서 $x=2$일 때 최댓값, $x=-5$일 때 최솟값을 갖는다.

즉 $3^{-5+k}=\dfrac{1}{27}$이므로 $\qquad 3^{-5+k}=3^{-3}$

$-5+k=-3 \qquad \therefore k=2$

따라서 $y=3^{x+2}$이므로 구하는 최댓값은

$3^{2+2}=81$ 답 81

15 $f(x)=x^2-4x+1$로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2-3$

함수 $y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-4x+1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최댓값을 갖는다.

$f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

따라서 함수 $y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{f(x)}$은 $f(x)=-3$, 즉 $x=2$일 때 최댓값 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}=125$를 가지므로

$a=2,\ b=125 \qquad \therefore a+b=127$ 답 127

16 $f(x)=x^2+2x-5$로 놓으면

$f(x)=(x+1)^2-6$

$f(-4)=3,\ f(-1)=-6,\ f(1)=-2$이므로

$-4\le x\le1$에서

$-6\le f(x)\le3$

함수 $y=2^{x^2+2x-5}=2^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$f(x)=3$일 때 최대이고, 최댓값은 $\quad 2^3$

$f(x)=-6$일 때 최소이고, 최솟값은 $\quad 2^{-6}$

따라서 구하는 곱은

$2^3\cdot2^{-6}=2^{-3}=\dfrac{1}{8}$ 답 ①

쌤 한마디

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은

① $\alpha\le p\le\beta$일 때
→ $f(p),\ f(\alpha),\ f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때
→ $f(\alpha),\ f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

17 $y=9^x-2\cdot3^x-7=(3^x)^2-2\cdot3^x-7$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $-1\le x\le2$에서

$3^{-1}\le3^x\le3^2 \qquad \therefore \dfrac{1}{3}\le t\le9$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t-7=(t-1)^2-8$

따라서 $\dfrac{1}{3}\le t\le9$에서 y는 $t=9$, 즉 $x=2$일 때 최댓값 56을 갖고 $t=1$, 즉 $x=0$일 때 최솟값 -8을 가지므로

$(9-1)^2-8=56$

$a=2,\ b=56,\ c=0,\ d=-8$

$\therefore a+b-c-d=66$ 답 66

18 $y=3+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{x}=3+2^{-a}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\right\}^{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=-t^2+2^{-a}\cdot t+3=-(t-2^{-a-1})^2+2^{-2a-2}+3$

따라서 y는 $t=2^{-a-1}$일 때 최댓값 $2^{-2a-2}+3$을 가지므로

$2^{-2a-2}+3=\frac{25}{8},\quad 2^{-2a-2}=\frac{1}{8}=2^{-3}$

$-2a-2=-3\quad \therefore a=\frac{1}{2}$ 답 ①

19 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}>0,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}\geq 2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}}$

$=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

> $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}$에서
> $x=-x+2\quad \therefore x=1$

따라서 y는 $x=1$일 때 최솟값 $\frac{2}{3}$를 가지므로

$a=1,\ b=\frac{2}{3}\quad \therefore a-b=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

20 $2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0,\ 2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2\cdot 1=2$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

> $2^x=2^{-x}$에서
> $x=-x\quad \therefore x=0$

이때 $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=4t-(t^2-2)=-t^2+4t+2$

$=-(t-2)^2+6\ (t\geq 2)$

따라서 주어진 함수는 $t=2$일 때 최댓값 6을 갖는다.

답 6

Lecture 06 지수방정식과 지수부등식

32쪽

01 $3^x=27$에서 $3^x=3^3$이므로

$x=3$ 답 $x=3$

02 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}=\sqrt{\frac{1}{2}}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$이므로

$1-x=\frac{1}{2}\quad \therefore x=\frac{1}{2}$ 답 $x=\frac{1}{2}$

03 $5^{2x}-3\cdot 5^x-10=0$에서

$(5^x)^2-3\cdot 5^x-10=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-3t-10=0$

$(t+2)(t-5)=0\quad \therefore t=5\ (\because t>0)$

즉 $5^x=5$이므로 $x=1$ 답 $x=1$

04 $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}+\left(\frac{1}{6}\right)^{x}-2=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\right\}^2+\left(\frac{1}{6}\right)^{x}-2=0$

$\left(\frac{1}{6}\right)^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2+t-2=0$

$(t+2)(t-1)=0\quad \therefore t=1\ (\because t>0)$

즉 $\left(\frac{1}{6}\right)^{x}=1$이므로 $\left(\frac{1}{6}\right)^{x}=\left(\frac{1}{6}\right)^{0}$

$\therefore x=0$ 답 $x=0$

05 $2^{3x-1}=5^{3x-1}$에서 밑은 다르고 지수는 같으므로

$3x-1=0\quad \therefore x=\frac{1}{3}$ 답 $x=\frac{1}{3}$

> 밑이 같거나 지수가 0임을 이용한다.

06 (i) $x=6$일 때, $6^4=6^4$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\neq 6$일 때, $x-2=0$에서

$x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=2$ 또는 $x=6$ 답 $x=2$ 또는 $x=6$

07 $2^{x-1}<32$에서 $2^{x-1}<2^5$

밑이 1보다 크므로 $x-1<5$

$\therefore x<6$ 답 $x<6$

08 $2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{x-3}\geq 14$에서 $\left(\frac{1}{7}\right)^{x-3}\geq 7$

$\therefore \left(\frac{1}{7}\right)^{x-3}\geq\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로 $x-3\leq -1$

$\therefore x\leq 2$ 답 $x\leq 2$

09 $\frac{1}{27}\leq 3^x<9$에서 $3^{-3}\leq 3^x<3^2$

밑이 1보다 크므로 $-3\leq x<2$ 답 $-3\leq x<2$

10 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-3>0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\right\}^2-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-3>0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-2t-3>0$

$(t+1)(t-3)>0\quad \therefore t<-1$ 또는 $t>3$

그런데 $t>0$이므로 $t>3$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}>3$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}>\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로 $x<-1$ 답 $x<-1$

11 $4^x-6\cdot 2^x+8\leq 0$에서

$(2^x)^2-6\cdot 2^x+8\leq 0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-6t+8\leq 0$

$(t-2)(t-4)\leq 0\quad \therefore 2\leq t\leq 4$

즉 $2\leq 2^x\leq 4$이므로 $2^1\leq 2^x\leq 2^2$

밑이 1보다 크므로 $1\leq x\leq 2$ 답 $1\leq x\leq 2$

표준+발전 유형 Q+Q

33쪽

01 $25^x-5^{x^2-24}=0$에서 $\quad 5^{2x}=5^{x^2-24}$

즉 $2x=x^2-24$이므로 $\quad x^2-2x-24=0$

$(x+4)(x-6)=0 \quad \therefore x=-4$ 또는 $x=6$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=6$이므로

$\beta-\alpha=10$

답 ⑤

02 $(3\sqrt{3})^{x^2}=9^{1-x}$에서 $\quad 3^{\frac{3}{2}x^2}=3^{2-2x}$

즉 $\frac{3}{2}x^2=2-2x$이므로 $\quad 3x^2+4x-4=0$

$(x+2)(3x-2)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

그런데 x는 정수이므로

$x=-2$

답 -2

03 $5\cdot 2^{x+2}+4^x=8^x$에서

$(2^x)^3-(2^x)^2-20\cdot 2^x=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^3-t^2-20t=0$

$t(t+4)(t-5)=0 \quad \therefore t=5\ (\because t>0)$

즉 $2^x=5$의 근이 α이므로 $\quad 2^\alpha=5$

$\therefore 4^\alpha=(2^\alpha)^2=5^2=25$

답 ⑤

04 $9^x+3\cdot 9^{1-x}=12$에서

$9^x+\frac{27}{9^x}-12=0$

$9^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t+\frac{27}{t}-12=0$

양변에 t를 곱하면 $\quad t^2-12t+27=0$

$(t-3)(t-9)=0 \quad \therefore t=3$ 또는 $t=9$

즉 $9^x=3$ 또는 $9^x=9$이므로

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 곱은

$\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

05 $\left(\frac{1}{49}\right)^x-10\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x+7=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^x\right\}^2-10\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x+7=0$

$\left(\frac{1}{7}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-10t+7=0$

이 이차방정식의 두 근이 $\left(\frac{1}{7}\right)^\alpha$, $\left(\frac{1}{7}\right)^\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{7}\right)^\alpha\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^\beta=7, \quad \left(\frac{1}{7}\right)^{\alpha+\beta}=\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$

$\therefore \alpha+\beta=-1$

답 -1

쌤한마디

x에 대한 방정식 $(a^x)^2-pa^x+q=0$ (p, q는 상수)의 두 근이 α, β일 때, $a^x=t\ (t>0)$로 놓으면 t에 대한 방정식 $t^2-pt+q=0$의 두 근은 a^α, a^β이다.

Q BOX

$\begin{cases} X+2Y=19 & \cdots ㉠ \\ 4X-Y=31 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡×2를 하면

$9X=81 \quad \therefore X=9$

$X=9$를 ㉡에 대입하면

$36-Y=31$

$\therefore Y=5$

$(3\sqrt{3})^{x^2}=9^{1-x}$에서

$(3^1\cdot 3^{\frac{1}{2}})^{x^2}=(3^2)^{1-x}$

$\therefore 3^{\frac{3}{2}x^2}=3^{2-2x}$

X, Y는 이차방정식 $t^2-10t+16=0$의 두 근이므로 $(t-2)(t-8)=0$에서

$t=2$ 또는 $t=8$

$\therefore X=2, Y=8$ 또는 $X=8, Y=2$

$9^x=3$에서 $\quad 3^{2x}=3$

즉 $2x=1$이므로

$x=\frac{1}{2}$

06 $3^x=X$, $5^y=Y$ $(X>0, Y>0)$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} X+2Y=19 \\ 4X-Y=31 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $\quad X=9, Y=5$

즉 $3^x=9$, $5^y=5$이므로 $\quad x=2, y=1$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=1$이므로

$\alpha\beta=2$

답 2

07 $2^x=X$, $2^y=Y$ $(X>0, Y>0)$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} \frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y=5 \\ 2XY=32 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} X+Y=10 \\ XY=16 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면

$X=2, Y=8$ 또는 $X=8, Y=2$

즉 $2^x=2$, $2^y=8$ 또는 $2^x=8$, $2^y=2$이므로

$x=1, y=3$ 또는 $x=3, y=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$

답 ④

08 $x^x\cdot x^6=(x^x)^3$에서 $\quad x^{x+6}=x^{3x}$

(i) $x=1$일 때, $1^7=1^3$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\neq 1$일 때, $x+6=3x$에서

$2x=6 \quad \therefore x=3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 합은

$1+3=4$

답 ②

09 (i) $x-5=0$, 즉 $x=5$일 때, $9^0=6^0$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x-5\neq 0$일 때, $x+4=6$에서

$x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=2$ 또는 $x=5$

따라서 구하는 곱은

$2\cdot 5=10$

답 10

10 $16^x-4^{x+1}=k$에서

$(4^x)^2-4\cdot 4^x-k=0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-4t-k=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-2)^2-(-k)>0 \quad \therefore k>-4$

(ii) $\alpha+\beta=4>0$

(iii) $\alpha\beta=-k>0 \quad \therefore k<0$

이상에서 $\quad -4<k<0$

답 $-4<k<0$

쌤한마디

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D, 두 실근을 α, β라 하면

① 두 근이 모두 양수 $\Longleftrightarrow D\geq0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음수 $\Longleftrightarrow D\geq0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\Longleftrightarrow \alpha\beta<0$

11 $3^{2x}-5\cdot3^x+k=0$에서

$(3^x)^2-5\cdot3^x+k=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-5t+k=0$ ...... ㉠

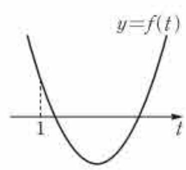
주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 $t>1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

주어진 방정식이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠은

$3^x>3^0$, 즉 $t>1$

에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-5t+k$라 하면 이차함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4k>0 \qquad \therefore k<\dfrac{25}{4}$

(ii) $f(1)=1-5+k>0$에서

$k>4$

(iii) 이차함수 $y=f(t)$의 그래프의 축의 방정식은 $t=\dfrac{5}{2}$이고 $\dfrac{5}{2}>1$이다.

이상에서 $\quad 4<k<\dfrac{25}{4}$

따라서 정수 k는 5, 6이므로 구하는 합은

$5+6=11$ 답 11

쌤한마디

이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

① 두 근이 모두 p보다 크다.

$\Longleftrightarrow D\geq0,\ f(p)>0,\ -\dfrac{b}{2a}>p$

② 두 근이 모두 p보다 작다.

$\Longleftrightarrow D\geq0,\ f(p)>0,\ -\dfrac{b}{2a}<p$

③ 두 근 사이에 p가 있다.

$\Longleftrightarrow f(p)<0$

④ 두 근이 모두 p, $q\ (p<q)$ 사이에 있다.

$\Longleftrightarrow D\geq0,\ f(p)>0,\ f(q)>0,\ p<-\dfrac{b}{2a}<q$

12 $\left(\dfrac{1}{36}\right)^{x^2+x-5}\geq\left(\dfrac{1}{6}\right)^{x^2-7x}$에서

$\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2x^2+2x-10}\geq\left(\dfrac{1}{6}\right)^{x^2-7x}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad 2x^2+2x-10\leq x^2-7x$

$x^2+9x-10\leq0,\quad (x+10)(x-1)\leq0$

$\therefore -10\leq x\leq1$

따라서 정수 x는 $-10, -9, -8, \cdots, 1$의 12개이다.

답 12

13 $5^{4x}<\dfrac{\sqrt{5}}{25}<5\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-x}$에서

Q BOX $\dfrac{\sqrt{5}}{25}=5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{-2}=5^{-\frac{3}{2}}$

$5^{4x}<5^{-\frac{3}{2}}<5^{x+1}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 4x<-\dfrac{3}{2}<x+1$

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$ 꼴로 바꾸어 푼다.

(i) $4x<-\dfrac{3}{2}$에서 $\quad x<-\dfrac{3}{8}$

(ii) $-\dfrac{3}{2}<x+1$에서 $\quad x>-\dfrac{5}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\dfrac{5}{2}<x<-\dfrac{3}{8}$

따라서 $\alpha=-\dfrac{5}{2}$, $\beta=-\dfrac{3}{8}$이므로

$\beta-\alpha=\dfrac{17}{8}$ 답 $\dfrac{17}{8}$

14 $4^{x+1}-9\cdot2^x+2<0$에서

$4\cdot(2^x)^2-9\cdot2^x+2<0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad 4t^2-9t+2<0$

$(4t-1)(t-2)<0 \qquad \therefore \dfrac{1}{4}<t<2$

즉 $\dfrac{1}{4}<2^x<2$이므로 $\quad 2^{-2}<2^x<2^1$

밑이 1보다 크므로 $\quad -2<x<1$

따라서 정수 x는 -1, 0이므로 구하는 합은

$-1+0=-1$ 답 -1

15 $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x-30\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+81\leq0$에서

$\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2-30\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+81\leq0$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-30t+81\leq0$

$(t-3)(t-27)\leq0 \qquad \therefore 3\leq t\leq27$

즉 $3\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\leq27$이므로

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad -3\leq x\leq-1$

따라서 $M=-1$, $m=-3$이므로

$Mm=3$ 답 ⑤

16 (i) $x=1$일 때, $1^3\leq1^{13}$이므로 부등식이 성립한다.

(ii) $0<x<1$일 때, 밑이 1보다 작으므로

$5x-2\geq3x+10,\quad 2x\geq12$

$\therefore x\geq6$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로

$5x-2\leq3x+10,\quad 2x\leq12$

$\therefore x\leq6$

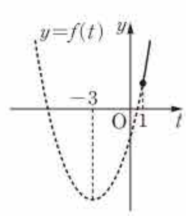
그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x\le 6$
이상에서 주어진 부등식의 해는
$1\le x\le 6$ 답 $1\le x\le 6$

17 (i) $x=1$일 때, $1^4>1^{-20}$이므로 부등식이 성립하지 않는다.
(ii) $0<x<1$일 때, 밑이 1보다 작으므로
$4x<x^2-21, \quad x^2-4x-21>0$
$(x+3)(x-7)>0 \quad \therefore x<-3$ 또는 $x>7$
그런데 $0<x<1$이므로 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.
(iii) $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로
$4x>x^2-21, \quad x^2-4x-21<0$
$(x+3)(x-7)<0 \quad \therefore -3<x<7$
그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x<7$
이상에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<7$이므로
$\alpha=1,\ \beta=7$
$\therefore \alpha+\beta=8$ 답 ③

18 $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k\ge 0$에서
$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+k\ge 0$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-2t+k\ge 0$
$\therefore (t-1)^2+k-1\ge 0$
위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면
$k-1\ge 0 \quad \therefore k\ge 1$
따라서 실수 k의 최솟값은 1이다. 답 ④

$t>0$에서 $(t-1)^2+k-1$은 $t=1$일 때 최솟값 $k-1$을 갖는다.

19 $9^x+2\cdot 3^{x+1}+k>0$에서
$(3^x)^2+6\cdot 3^x+k>0$
$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $x\ge 0$에서 $t\ge 1$이고
$t^2+6t+k>0$
$f(t)=t^2+6t+k$라 하면
$f(t)=(t+3)^2+k-9$
$t\ge 1$에서 $f(t)>0$이어야 하므로 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(1)>0$이어야 하므로
$7+k>0 \quad \therefore k>-7$ 답 $k>-7$

$t\ge 1$에서 $f(t)$는 $t=1$일 때 최소이다.

20 $20x$년 후의 방사성 물질의 양은 처음의 양의 $\left(\frac{1}{3}\right)^x$이 되므로 방사성 물질의 양이 처음의 양의 $\frac{1}{243}$ 이하가 되려면
$\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\frac{1}{243}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^5$
밑이 1보다 작으므로 $\quad x\ge 5$
따라서 방사성 물질의 양이 처음의 양의 $\frac{1}{243}$ 이하로 줄어드는 데 최소 $20\cdot 5=100$(년)이 걸린다. 답 100년

21 10마리였던 미생물이 3시간 후에 270마리가 되므로
$10a^3=270, \quad a^3=27 \quad \therefore a=3$
따라서 10마리였던 미생물이 x시간 후에 $10\cdot 3^x$마리가 되므로
$10\cdot 3^x=7290, \quad 3^x=729=3^6$
$\therefore x=6$
즉 10마리였던 미생물이 7290마리가 되는 것은 처음으로부터 6시간 후이다. 답 ③

중단원 마무리

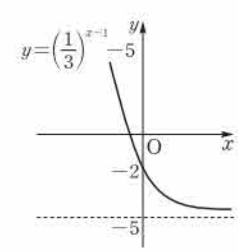
36쪽

01 전략 함수 $y=a^{x-m}+n\ (a>0,\ a\ne 1)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=n$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=2^{x+3}-1$의 그래프의 점근선의 방정식은
$y=-1 \quad \therefore k=-1$
$\therefore f(k)=f(-1)=2^{-1+3}-1=3$ 답 ②

02 전략 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$임을 이용한다.

풀이 ②, ③, ④ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-5$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-5$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=-5$이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.

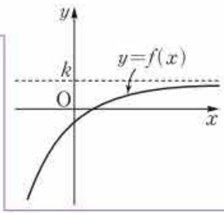


⑤ $y=-3^{x+1}+5$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=-3^{-x+1}+5 \quad \therefore y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-5$
답 ④

03 전략 함수식을 변형하여 평행이동과 대칭이동을 파악한다.

풀이 $f(x)=-2^{4-3x}+k=-2^{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+k$
$=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}+k$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 제 2 사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $f(0)\le 0$이어야 한다.



즉 $-2^4+k\le 0$이어야 하므로

$k\le 16$

점근선은 직선 $y=k$이다.

따라서 자연수 k의 최댓값은 16이다. 답 ④

04 전략 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 이은 선분을 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$임을 이용한다.

풀이 점 A의 y좌표가 $\frac{1}{4}$이므로 $y=4^x$에 $y=\frac{1}{4}$을 대입하면

$\frac{1}{4}=4^x \quad \therefore x=-1$

$\therefore \mathrm{A}\left(-1, \frac{1}{4}\right)$

점 B의 좌표를 $(a, 4^a)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 내분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot a+2\cdot(-1)}{1+2}, \frac{1\cdot 4^a+2\cdot\frac{1}{4}}{1+2}\right)$

$\therefore \left(\frac{a-2}{3}, \frac{2\cdot 4^a+1}{6}\right)$

이때 점 C는 y축 위에 있으므로

$\frac{a-2}{3}=0 \quad \therefore a=2$

따라서 점 B의 y좌표는 $\quad 4^2=16$ 답 16

05 전략 $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$, □ACDB$=30$임을 이용하여 두 점 A, B의 x좌표에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 두 점 A, B가 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$\mathrm{A}(p, p)$, $\mathrm{B}(q, q)\ (p<q)$

라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$에서

$\sqrt{(q-p)^2+(q-p)^2}=6\sqrt{2}$

$\sqrt{2}(q-p)=6\sqrt{2}\ (\because q-p>0)$

$\therefore q-p=6$ …… ㉠

□ACDB의 넓이가 30이고 $\overline{\mathrm{AC}}=p$, $\overline{\mathrm{BD}}=q$, $\overline{\mathrm{CD}}=q-p$이므로

$\frac{1}{2}(p+q)(q-p)=30$

□ACDB는 사다리꼴이므로 그 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}})\cdot\overline{\mathrm{CD}}$

$\frac{1}{2}\cdot(p+q)\cdot 6=30\ (\because ㉠)$

$\therefore p+q=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad p=2, q=8$

$\therefore \mathrm{A}(2, 2)$, $\mathrm{B}(8, 8)$

점 A(2, 2)가 곡선 $y=2^{ax+b}$ 위에 있으므로

$2=2^{2a+b} \quad \therefore 1=2a+b$ …… ㉢

점 B(8, 8)도 곡선 $y=2^{ax+b}$ 위에 있으므로

$8=2^{8a+b}, \quad 2^3=2^{8a+b}$

$\therefore 3=8a+b$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=\frac{2}{3}$ 답 ④

06 전략 세 수 A, B, C를 a^r 꼴로 나타낸 후 지수함수의 성질을 이용한다.

풀이 $A=a^{\frac{n+1}{n}}$, $B=a^{\frac{n+2}{n+1}}$, $C=a^{\frac{n+3}{n+2}}$

$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$, $\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$, $\frac{n+3}{n+2}=1+\frac{1}{n+2}$

이고 n이 자연수이므로

$\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$

$1+\frac{1}{n+2}<1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n}$

$\therefore \frac{n+3}{n+2}<\frac{n+2}{n+1}<\frac{n+1}{n}$

$0<a<1$일 때, 함수 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$a^{\frac{n+1}{n}}<a^{\frac{n+2}{n+1}}<a^{\frac{n+3}{n+2}}$

$\therefore A<B<C$ 답 $A<B<C$

07 전략 정의역이 $\{x\,|\,m\le x\le n\}$인 지수함수 $y=a^x$은 $0<a<1$이면 $x=m$일 때 최대, $x=n$일 때 최소이다.

풀이 함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$은 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로 $1\le x\le 3$에서 $x=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$1+\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1}=2$ 답 ②

08 전략 밑 a가 $0<a<1$이므로 x^2-2x+b가 최소일 때 y는 최대이고, x^2-2x+b가 최대일 때 y는 최소임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-2x+b$로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2+b-1$

$f(1)=b-1$, $f(2)=b$이므로 $1\le x\le 2$에서

$b-1\le f(x)\le b$

$0<a<1$일 때, 함수 $y=a^{x^2-2x+b}=a^{f(x)}$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$f(x)=b-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$a^{b-1}=32$ …… ㉠

$f(x)=b$일 때 최소이고, 최솟값은

$a^b=8$ …… ㉡ ⋯ ❶

㉡÷㉠을 하면 $\quad a=\frac{1}{4}$

$a=\frac{1}{4}$을 ㉡에 대입하면 $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^b=8$

$2^{-2b}=2^3, \quad -2b=3 \quad \therefore b=-\frac{3}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=\frac{7}{4}$ ⋯ ❸

답 $\frac{7}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	50 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 전략 주어진 등식을 변형하여 7^x+7^y을 한 문자에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x+y-2=0$에서 $y=-x+2$이므로

$$7^x+7^y=7^x+7^{-x+2}$$

이때 $7^x>0$, $7^{-x+2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$7^x+7^{-x+2}\ge 2\sqrt{7^x\cdot 7^{-x+2}}=2\cdot 7=14$$

(단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

$7^x=7^{-x+2}$에서 $x=-x+2$ $\therefore x=1$

따라서 7^x+7^y의 최솟값은 14이다. 답 14

10 전략 $5^x=t\ (t>0)$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낸 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $25^x-6\cdot 5^x+4=0$에서

$$(5^x)^2-6\cdot 5^x+4=0$$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$t^2-6t+4=0$$

이 이차방정식의 두 근이 5^α, 5^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$5^\alpha+5^\beta=6,\ 5^\alpha\cdot 5^\beta=4$$

$$\begin{aligned}\therefore 25^\alpha+25^\beta&=(5^\alpha)^2+(5^\beta)^2\\&=(5^\alpha+5^\beta)^2-2\cdot 5^\alpha\cdot 5^\beta\\&=6^2-2\cdot 4=28\end{aligned}$$

답 ④

11 전략 $2^x+2^{-x}=t\ (t\ge 2)$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차방정식이 $t\ge 2$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 이용한다.

풀이 $4^x+4^{-x}+2^{1+x}+2^{1-x}-k=0$에서

$$4^x+4^{-x}+2(2^x+2^{-x})-k=0$$

$2^x+2^{-x}=t\ (t\ge 2)$로 놓으면

$2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

$$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$$

이므로

$$(t^2-2)+2t-k=0$$

$$\therefore t^2+2t-2=k \quad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 방정식이 적어도 하나의 실근을 가지려면 $t\ge 2$에서 이차방정식 ㉠이 적어도 하나의 실근을 가져야 한다.

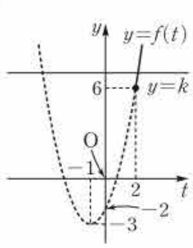
$f(t)=t^2+2t-2$라 하면

$$f(t)=t^2+2t-2=(t+1)^2-3$$

$t\ge 2$에서 $y=f(t)$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나야 하므로 오른쪽 그림에서

$$k\ge 6$$

답 $k\ge 6$



12 전략 밑을 같게 한 후 지수에 대한 부등식을 세우고 각 부등식의 해의 공통 범위를 구한다.

풀이 $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x+2}<3^{x^2-3}<\left(\dfrac{1}{9}\right)^x$에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+6}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2+3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$

밑이 1보다 작으므로

$$3x+6>-x^2+3>2x \quad \cdots ❶$$

(i) $3x+6>-x^2+3$에서 $x^2+3x+3>0$

이때 $x^2+3x+3=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로 이 부등식의 해는 모든 실수이다.

(ii) $-x^2+3>2x$에서 $x^2+2x-3<0$

$(x+3)(x-1)<0$ $\therefore -3<x<1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-3<x<1 \quad \cdots ❷$$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=1$이므로

$$\alpha+3\beta=0 \quad \cdots ❸$$

답 0

단계	채점 기준	비율
❶	지수에 대한 부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷	주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸	$\alpha+3\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

13 전략 $6^x=t\ (t>0)$로 놓고 주어진 부등식을 t에 대한 이차부등식으로 나타낸다.

풀이 $6^x-6^{1-x}>5$에서

$$6^x-\frac{6}{6^x}-5>0$$

$6^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t-\dfrac{6}{t}-5>0$

양변에 t를 곱하면 $t^2-5t-6>0$

$t>0$이므로 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$(t+1)(t-6)>0$ $\therefore t<-1$ 또는 $t>6$

그런데 $t>0$이므로 $t>6$

즉 $6^x>6$에서 밑이 1보다 크므로

$$x>1$$

답 $x>1$

14 전략 (밑)$=1$, $0<$(밑)<1, (밑)>1인 경우로 나누어 푼다.

풀이 (i) $x^2-4x+4=1$일 때, $1<1$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.

(ii) $0<x^2-4x+4<1$일 때,

$0<(x-2)^2<1$에서

$-1<x-2<0$ 또는 $0<x-2<1$

$\therefore 1<x<2$ 또는 $2<x<3$ $\cdots\cdots ㉠$

주어진 부등식 $(x^2-4x+4)^{x-2}<(x^2-4x+4)^0$에서 밑이 1보다 작으므로

$x-2>0$ $\therefore x>2$

그런데 ㉠이므로 $2<x<3$

(iii) $x^2-4x+4>1$일 때,

$x^2-4x+3>0$에서 $(x-1)(x-3)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>3$ $\cdots\cdots ㉡$

주어진 부등식 $(x^2-4x+4)^{x-2}<(x^2-4x+4)^0$에서 밑이 1보다 크므로

$x-2<0 \quad \therefore x<2$

그런데 ㉡이므로 $\quad x<1$

이상에서 $S=\{x|x<1$ 또는 $2<x<3\}$이므로 집합 S의 원소가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

참고 $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$이고 $x\neq 2$이므로

$x^2-4x+4>0$

따라서 $x^2-4x+4\leq 0$인 경우는 생각하지 않아도 된다.

15 전략 초기 불량률이 a %이고 매달 불량률이 80 %씩 감소할 때, x개월 후의 불량률은 $a\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x$ %이다.

풀이 x개월 후의 불량률은 $\frac{625}{10000}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x$이므로 x개월 후의 불량률이 0.01 %가 된다고 하면

$\frac{625}{10000}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x=\frac{1}{10000}, \quad \left(\frac{1}{5}\right)^x=\frac{1}{625}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^4 \quad \therefore x=4$

따라서 불량률이 0.01 %가 되는 것은 4개월 후이다.

답 4개월

$6.25\ \%=\frac{6.25}{100}=\frac{625}{10000}$

$0.01\ \%=\frac{0.01}{100}=\frac{1}{10000}$

16 전략 두 점 P, Q가 직선 $y=2x+k$와 두 함수의 그래프 위의 점임을 이용하여 두 점 P, Q의 x좌표에 대한 방정식을 세운다.

풀이 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q $(p<q)$라 하면 두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}(p,\ 2p+k),\ \mathrm{Q}(q,\ 2q+k)$

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=5$이므로

$(q-p)^2+(2q-2p)^2=5$

$5(q-p)^2=5, \quad (q-p)^2=1$

$q-p>0$이므로 $\quad q-p=1$

$\therefore q=p+1$

한편 점 P는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프 위의 점이므로

$2p+k=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 점 Q는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$2q+k=\left(\frac{2}{3}\right)^{q+1}+\frac{8}{3}$

$\therefore 2p+k+2=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}\ (\because q=p+1)$

$\cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1+2=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}$

$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=\frac{1}{3} \quad \therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

즉 $p+2=0$이므로 $\quad p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$-4+k=\frac{2}{3}+1 \quad \therefore k=\frac{17}{3}$ 답 ④

17 전략 주어진 부등식의 밑을 $\frac{1}{2}$로 통일하여 지수에 대한 부등식을 세운 후 x의 값의 범위를 구한다.

풀이 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\geq\left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$

밑이 1보다 작으므로

$f(x)g(x)\leq 3g(x), \quad g(x)\{f(x)-3\}\leq 0$

$\therefore g(x)=0$ 또는 $f(x)=3$

또는 $(g(x)>0,\ f(x)<3)$

또는 $(g(x)<0,\ f(x)>3)$

(i) $g(x)=0$일 때, $\quad x=3$

(ii) $f(x)=3$일 때, $\quad x=1$ 또는 $x=5$

(iii) $f(x)<3,\ g(x)>0$일 때,

부등식 $f(x)<3$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=3$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$1<x<5$

부등식 $g(x)>0$의 해는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=0$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

x축

$x>3$

따라서 $f(x)<3,\ g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$3<x<5$

(iv) $f(x)>3,\ g(x)<0$일 때,

부등식 $f(x)>3$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=3$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<1$ 또는 $x>5$

부등식 $g(x)<0$의 해는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=0$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<3$

따라서 $f(x)>3,\ g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<1$

이상에서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x\leq 1$ 또는 $3\leq x\leq 5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+3+4+5=13$ 답 ④

04 로그함수

Lecture 07 로그함수

40쪽

01 $f(\sqrt{3})=\log_3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$　　답 $\frac{1}{2}$

02 $f(9)+f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3 9+\log_3\frac{1}{3}=\log_3\left(9\cdot\frac{1}{3}\right)$

$=\log_3 3=1$　　답 1

다른 풀이 $f(9)+f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3 9+\log_3\frac{1}{3}$

$=\log_3 3^2+\log_3 3^{-1}$

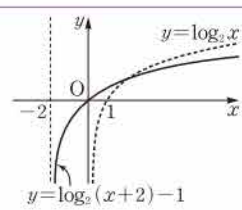
$=2-1=1$

03 ㄷ. 그래프는 제1사분면과 제4사분면을 지난다.

ㄹ. 그래프는 지수함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.　　답 ㄱ, ㄴ

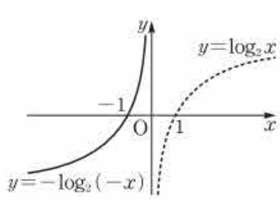
04 $y=\log_2(x+2)-1$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x>-2\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=-2$이다.　　답 풀이 참조

함수
$y=\log_a(x-m)+n$
$(a>0,\ a\neq1)$에서
① 정의역: $\{x|x>m\}$
② 점근선의 방정식
: $x=m$

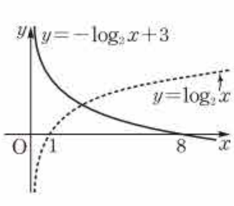
05 $y=-\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x<0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

답 풀이 참조

06 $y=-\log_2 x+3$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.　　답 풀이 참조

07 함수 $y=\log_4 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $\frac{1}{16}\leq x\leq4$에서

$x=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_4 4=1$

$x=\frac{1}{16}$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_4\frac{1}{16}=\log_4 4^{-2}=-2$

답 최댓값: 1, 최솟값: -2

08 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $2\leq x\leq10$에서

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{3}}(2-1)=\log_{\frac{1}{3}}1=0$

$x=10$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{3}}(10-1)=\log_{\frac{1}{3}}9=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=-2$

답 최댓값: 0, 최솟값: -2

표준+발전 유형 Q+Q

41쪽

01 $f(4)=\log_a 9-1=3$이므로　$\log_a 9=4$

$a^4=9$　　$\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

따라서 $f(x)=\log_{\sqrt{3}}(x+5)-1$이므로

$f(-2)=\log_{\sqrt{3}}3-1=2-1=1$　　답 ④

$a^4=9$에서
$a^2=3$ ($\because a^2>0$)
$\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

02 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{x+1}$에서

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}+\cdots+\log_{\frac{1}{2}}\frac{n}{n+1}$

$=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\right)$

$=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{n+1}$

즉 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{n+1}=4$이므로　$\frac{1}{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{16}$　　$\therefore n=15$　　답 15

03 ③ $x=a$일 때 $y=\log_{\frac{1}{a}}a=-\log_a a=-1$이므로 그래프는 점 $(a,\ -1)$을 지난다.

④ $a>1$에서 $0<\frac{1}{a}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

⑤ $y=\log_a x=-\log_{\frac{1}{a}}x$이므로 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

답 ④

$a>0,\ a\neq1$일 때,
$\log_a f(x)$가 정의되려면
➡ $f(x)>0$

04 $y=\log_5(36-x^2)$에서 $36-x^2>0$이므로

$x^2-36<0$,　$(x+6)(x-6)<0$

$\therefore -6<x<6$

$\therefore A=\{x|-6<x<6\}$

$y=\log_5(\log_5 x)$에서 $x>0$이고 $\log_5 x>0$이므로

$x>1$ $\quad \therefore B=\{x|x>1\}$

$\therefore A\cap B=\{x|1<x<6\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 정수인 원소는 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$2+3+4+5=14$ 답 14

05 $y=\log_{\frac{1}{3}}(3x-12)=\log_{\frac{1}{3}}3(x-4)$

$=-1+\log_{\frac{1}{3}}(x-4)=-\log_3(x-4)-1$

$=-\{\log_3(x-4)+1\}$

즉 $y=\log_{\frac{1}{3}}(3x-12)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로

$m=4,\ n=1$ $\quad \therefore m-n=3$ 답 3

Q BOX: 평행이동과 대칭이동을 연이어 할 때 도형의 이동 순서에 주의한다.

06 ㄱ. $y=\log 10x=\log x+1$이므로 $y=\log x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=\log 10x$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄴ. $y=\log x^2=2\log|x|$이므로 $y=\log x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 $y=\log x^2$의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $y=\log\frac{100}{x}=2-\log x$이므로 $y=\log x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $y=\log\frac{100}{x}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄹ. $y=\log_{\frac{1}{10}}(1-x)=\log_{10^{-1}}(1-x)$

$=-\log\{-(x-1)\}$

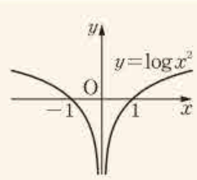
이므로 $y=\log x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=\log_{\frac{1}{10}}(1-x)$의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 $y=\log x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

쌤한마디

ㄴ에서 $y=\log x^2$의 정의역은 $\{x|x\neq0$인 실수$\}$이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

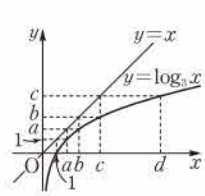


06번과 같이 서로 겹쳐질 수 있는 함수의 그래프를 찾을 때에는 함수의 정의역이 같은지 반드시 확인한다.

07 $\log_3 b=a,\ \log_3 d=c$이므로

$a-c=\log_3 b-\log_3 d$

$=\log_3\frac{b}{d}$



따라서 $3^{a-c}=\frac{b}{d}$이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^{a-c}=\frac{d}{b}$ 답 ⑤

08 함수 $y=5^x$의 그래프에서

$5^b=f$ $\quad \therefore \log_5 f=b$

함수 $y=\log_5 x$의 그래프에서

$\log_5 c=e,\ \log_5 d=f$

$\therefore \log_5\frac{cd}{f}=\log_5 c+\log_5 d-\log_5 f$

$=e+f-b$ 답 ④

09 A(1, 0)이고 두 점 B, C의 x좌표가 9이므로

$y=\log_a x$에 $x=9$를 대입하면

$y=\log_a 9$ $\quad \therefore$ B$(9,\ \log_a 9)$

$y=\log_{\frac{1}{9}}x$에 $x=9$를 대입하면

$y=\log_{\frac{1}{9}}9=-1$ $\quad \therefore$ C$(9,\ -1)$

이때 △ACB의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\cdot\{\log_a 9-(-1)\}\cdot(9-1)=12$

Q BOX: $\overline{\text{BC}}=$(점 B의 y좌표) $-$(점 C의 y좌표)

$4(\log_a 9+1)=12,$ $\quad \log_a 9=2$

$a^2=9$ $\quad \therefore a=3\ (\because a>1)$ 답 3

10 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$(5,\ \log_a 5),\ (5,\ \log_b 5),\ (5,\ -\log_b 5)$

$\overline{\text{AB}}:\overline{\text{BC}}=1:3$에서 $3\overline{\text{AB}}=\overline{\text{BC}}$이므로

$3(\log_a 5-\log_b 5)=\log_b 5-(-\log_b 5)$

$3\log_a 5-3\log_b 5=2\log_b 5$

$3\log_a 5=5\log_b 5,$ $\quad \frac{3}{\log_5 a}=\frac{5}{\log_5 b}$

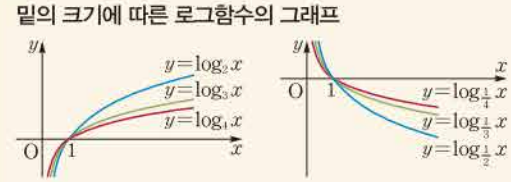
$\frac{\log_5 b}{\log_5 a}=\frac{5}{3},$ $\quad \log_a b=\frac{5}{3}$

Q BOX: $a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ c>0,\ c\neq1$일 때, $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\therefore f(b)=\log_a b=\frac{5}{3}$ 답 $\frac{5}{3}$

쌤한마디

밑의 크기에 따른 로그함수의 그래프



로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프는

① $a>1$일 때

$x>1$에서는 a의 값이 클수록 x축에 가깝다.

$0<x<1$에서는 a의 값이 클수록 y축에 가깝다.

② $0<a<1$일 때

$x>1$에서는 a의 값이 작을수록 x축에 가깝다.

$0<x<1$에서는 a의 값이 작을수록 y축에 가깝다.

11 $y=\log_4(x+5)-1$에서

Q BOX: 함수 $y=\log_4(x+5)-1$은 집합 $\{x|x>-5\}$에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$\log_4(x+5)=y+1,$ $\quad x+5=4^{y+1}$

$\therefore x=4^{y+1}-5$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=4^{x+1}-5=2^{2x+2}-5$

따라서 $y=\log_4(x+5)-1$의 역함수는 $y=2^{2x+2}-5$이고, 이것이 $y=a^{2x+b}+c$와 일치하므로

$a=2,\ b=2,\ c=-5$

$\therefore abc=-20$ 답 -20

쌤한마디

일대일대응인 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식으로 나타낸다. 즉 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.
(ii) $x=f^{-1}(y)$의 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$ 꼴로 나타낸다.

12 함수 $y=\log_a(x-b)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\log_a(x-b)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
이때 두 교점의 x좌표가 0, 1이므로 $y=\log_a(x-b)$의 그래프는 두 점 $(0, 0)$, $(1, 1)$을 지난다.
$0=\log_a(-b)$에서 $b=-1$
$1=\log_a(1+1)$에서 $\log_a 2=1 \quad \therefore a=2$
$\therefore a-b=3$ 답 ③

13 $A=3=\log_3 3^3=\log_3 27$,
$B=4\log_3 2=\log_3 2^4=\log_3 16$,
$C=\dfrac{2}{\log_5 3}=2\log_3 5=\log_3 5^2=\log_3 25$
이때 $16<25<27$이고 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$\log_3 16<\log_3 25<\log_3 27$
$\therefore B<C<A$ 답 ③

14 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $1<a<2$에서
$\log_2 1<\log_2 a<\log_2 2$
$\therefore 0<\log_2 a<1$ …… ㉠
$\log_4 \dfrac{1}{a}=\log_{2^2} a^{-1}=-\dfrac{1}{2}\log_2 a$이므로
$-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{1}{2}\log_2 a<0$ …… ㉡
$\log_a 2=\dfrac{1}{\log_2 a}$이므로
$\dfrac{1}{\log_2 a}>1$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $\log_4 \dfrac{1}{a}<\log_2 a<\log_a 2$
따라서 가장 작은 수는 $\log_4 \dfrac{1}{a}$이다. 답 $\log_4 \dfrac{1}{a}$

15 함수 $y=\log_3(4x-1)-5$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $1\le x\le 7$에서
$x=7$일 때 최대이고, 최댓값은
$\log_3(28-1)-5=\log_3 27-5=3-5=-2$
$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은
$\log_3(4-1)-5=\log_3 3-5=1-5=-4$
따라서 구하는 곱은
$(-2)\cdot(-4)=8$ 답 8

Q BOX

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은
① $\alpha\le p\le\beta$일 때
➡ $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.
② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때
➡ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

$f(x)$가 최대일 때, $\log_a f(x)$가 최솟값을 가지려면
$0<a<1$

16 함수 $y=5\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-3\le x\le 9$에서 $x=-3$일 때 최댓값, $x=9$일 때 최솟값을 갖는다.
즉 $5\log_{\frac{1}{2}}(-3+k)=-10$이므로
$\log_{\frac{1}{2}}(-3+k)=-2, \quad -3+k=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=4$
$\therefore k=7$
따라서 $y=5\log_{\frac{1}{2}}(x+7)$이므로
$m=5\log_{\frac{1}{2}}(9+7)=5\log_{2^{-1}}2^4=5\cdot(-4)=-20$
$\therefore k+m=-13$ 답 ④

17 $f(x)=x^2-4x+13$으로 놓으면
$f(x)=(x-2)^2+9$
$f(-2)=25$, $f(2)=9$, $f(5)=18$이므로 $-2\le x\le 5$에서
$9\le f(x)\le 25$
함수 $y=\log_5(x^2-4x+13)=\log_5 f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$f(x)=25$일 때 최대이고, 최댓값은
$\log_5 25=2$
$f(x)=9$일 때 최소이고, 최솟값은
$\log_5 9=2\log_5 3$
따라서 $M=2$, $m=2\log_5 3$이므로
$\dfrac{M}{m}=\dfrac{2}{2\log_5 3}=\log_3 5$ 답 ③

18 $f(x)=-x^2-6x+7$로 놓으면
$f(x)=-(x+3)^2+16$
$f(-4)=15$, $f(-3)=16$, $f(-1)=12$이므로
$-4<x<-1$에서 $12<f(x)\le 16$
이때 $y=\log_a(-x^2-6x+7)=\log_a f(x)$가 최솟값을 가지려면
$0<a<1$
따라서 $y=\log_a f(x)$는 $f(x)=16$일 때 최솟값 -4를 가지므로
$\log_a 16=-4, \quad a^{-4}=16, \quad a^4=\dfrac{1}{16}$
$\therefore a=\dfrac{1}{2}\ (\because 0<a<1)$ 답 $\dfrac{1}{2}$

19 $y=2(\log_{\frac{1}{3}}x)^2+\log_{\frac{1}{3}}x^4=2(\log_{\frac{1}{3}}x)^2+4\log_{\frac{1}{3}}x$
$\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{3}\le x\le 9$에서
$\log_{\frac{1}{3}}9\le\log_{\frac{1}{3}}x\le\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{3} \quad \therefore -2\le t\le 1$
이때 주어진 함수는
$y=2t^2+4t=2(t+1)^2-2$
따라서 $-2\le t\le 1$에서 함수 $y=2(t+1)^2-2$는
$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은
$2\cdot(1+1)^2-2=6$
$t=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$2\cdot(-1+1)^2-2=-2$

따라서 구하는 합은

$6+(-2)=4$ 답 ⑤

20 $y=\log_2 8x\cdot\log_2\frac{x}{4}$

$=(\log_2 8+\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 4)$

$=(3+\log_2 x)(\log_2 x-2)$

$=(\log_2 x)^2+\log_2 x-6$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{2}\le x\le 8$에서

$\log_2\frac{1}{2}\le\log_2 x\le\log_2 8 \quad \therefore -1\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+t-6=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

따라서 $-1\le t\le 3$에서 함수 $y=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$는

$t=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(3+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=6$

$t=-\frac{1}{2}$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=-\frac{25}{4}$

따라서 $M=6$, $m=-\frac{25}{4}$이므로

$2Mm=-75$ 답 -75

21 $y=x^{4+\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3 x^{4+\log_3 x}=(4+\log_3 x)\log_3 x$

$=(\log_3 x)^2+4\log_3 x$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$\log_3 y=t^2+4t=(t+2)^2-4$

이므로 $\log_3 y$는 $t=-2$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

$\log_3 y=-4$에서 $\quad y=3^{-4}=\frac{1}{81}$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{1}{81}$이다. 답 $\frac{1}{81}$

22 $y=100x^{2-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y=\log 100x^{2-\log x}$

$=\log 10^2+(2-\log x)\log x$

$=-(\log x)^2+2\log x+2$

$\log x=t$로 놓으면

$\log y=-t^2+2t+2=-(t-1)^2+3$

이므로 $\log y$는 $t=1$일 때 최댓값 3을 갖는다.

$\log x=1$에서 $\quad x=10 \quad \therefore a=10$

$\log y=3$에서 $\quad y=10^3=1000 \quad \therefore b=1000$

$\therefore b-a=990$ 답 ④

23 $y=\log_5 x+\log_x 625=\log_5 x+4\log_x 5$

$=\log_5 x+\frac{4}{\log_5 x}$

이때 $x>1$에서 $\log_5 x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_5 x+\frac{4}{\log_5 x}\ge 2\sqrt{\log_5 x\cdot\frac{4}{\log_5 x}}=2\cdot 2=4$

(단, 등호는 $\log_5 x=2$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다. 답 ③

24 $\frac{1}{4}<x<9$에서 $\log_6 4x>0$, $\log_6\frac{9}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_6 4x+\log_6\frac{9}{x}\ge 2\sqrt{\log_6 4x\cdot\log_6\frac{9}{x}}$

이때

$\log_6 4x+\log_6\frac{9}{x}=\log_6\left(4x\cdot\frac{9}{x}\right)=\log_6 36=2$

이므로

$2\ge 2\sqrt{\log_6 4x\cdot\log_6\frac{9}{x}}$

$\sqrt{\log_6 4x\cdot\log_6\frac{9}{x}}\le 1$

$\therefore 0<\log_6 4x\cdot\log_6\frac{9}{x}\le 1$

즉 $y=\log_6 4x\cdot\log_6\frac{9}{x}$의 최댓값은 1이므로

$b=1$

한편 등호는 $\log_6 4x=\log_6\frac{9}{x}$, 즉 $4x=\frac{9}{x}$일 때 성립하므로

$x^2=\frac{9}{4} \quad \therefore x=\frac{3}{2}\ \left(\because \frac{1}{4}<x<9\right)$

따라서 $a=\frac{3}{2}$이므로

$2a+b=4$ 답 ③

Q BOX

$a>0$, $b>0$일 때,
$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\log_5 x=\frac{4}{\log_5 x}$에서
$(\log_5 x)^2=4$
$\therefore \log_5 x=2$
$(\because \log_5 x>0)$

$\log_6 4x>0$, $\log_6\frac{9}{x}>0$
이므로
$\log_6 4x\cdot\log_6\frac{9}{x}>0$

$\log_3 y=(t+2)^2-4$에서
$y=3^{(t+2)^2-4}$
이므로 y는 $(t+2)^2-4$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

$\log y=-(t-1)^2+3$에서
$y=10^{-(t-1)^2+3}$
이므로 y는 $-(t-1)^2+3$이 최대일 때 최댓값을 갖는다.

Lecture 08 로그방정식과 로그부등식

45쪽

01 밑의 조건에서 $\quad x>0$, $x\ne 1$ ······ ㉠

$\log_x 9=-2$에서 $\quad x^{-2}=9$

$x^2=\frac{1}{9} \quad \therefore x=\pm\frac{1}{3}$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{1}{3}$이다.

답 $x=\frac{1}{3}$

02 진수의 조건에서 $2x+1>0$, $7-x>0$이므로

$x>-\frac{1}{2}$, $x<7$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<7$ ······ ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(2x+1)=\log_{\frac{1}{5}}(7-x)$에서

$2x+1=7-x$, $\quad 3x=6$

$\therefore x=2$

$x=2$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

답 $x=2$

03 $\log x=t$로 놓으면 $\quad t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

즉 $\log x=1$ 또는 $\log x=2$이므로

$x=10$ 또는 $x=10^2=100$

답 $x=10$ 또는 $x=100$

04 밑의 조건에서 $x+2>0$, $x+2\neq1$, $3x>0$, $3x\neq1$ 이므로

$0<x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>\frac{1}{3}$ ...... ㉠

$\log_{x+2}7=\log_{3x}7$에서 진수가 같으므로

$x+2=3x, \quad 2x=2$

$\therefore x=1$

$x=1$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

답 $x=1$

05 $x^{\log_3 x}=3$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 3, \quad \log_3 x\cdot\log_3 x=1$

$\therefore (\log_3 x)^2=1$

즉 $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=1$이므로

$x=3^{-1}=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$ 답 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$

06 진수의 조건에서 $x-2>0$이므로

$x>2$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\leq-1$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\leq\log_{\frac{1}{3}}3$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x-2\geq3$

$\therefore x\geq5$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x\geq5$ 답 $x\geq5$

07 진수의 조건에서 $x+1>0$, $3x-5>0$이므로

$x>-1$, $x>\frac{5}{3} \quad \therefore x>\frac{5}{3}$ ...... ㉠

$\log_2(x+1)>\log_2(3x-5)$에서 밑이 1보다 크므로

$x+1>3x-5, \quad 2x<6$

$\therefore x<3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{5}{3}<x<3$ 답 $\frac{5}{3}<x<3$

08 진수의 조건에서 $\quad x>0$ ...... ㉠

$\log_6 x=t$로 놓으면 $\quad t^2-t\leq0$

$t(t-1)\leq0 \quad \therefore 0\leq t\leq1$

즉 $0\leq\log_6 x\leq1$이므로

$\log_6 1\leq\log_6 x\leq\log_6 6$

밑이 1보다 크므로 $\quad 1\leq x\leq6$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1\leq x\leq6$ 답 $1\leq x\leq6$

Q BOX

$\log x=t$로 놓고 구한 t의 값에 관계없이 진수의 조건을 항상 만족시킨다.

$x>-2$, $x\neq-1$, $x>0$, $x\neq\frac{1}{3}$이므로

$0<x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>\frac{1}{3}$

$\log_{\sqrt{3}}(x+1)$
$=2\log_3(x+1)$
$=\log_3(x+1)^2$

$-1=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$
$=\log_{\frac{1}{3}}3$

09 진수의 조건에서 $\quad x>0$ ...... ㉠

$x^{\log x}>10$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}>\log 10, \quad \log x\cdot\log x>1$

$\therefore (\log x)^2>1$

즉 $\log x<-1$ 또는 $\log x>1$이므로

$\log x<\log\frac{1}{10}$ 또는 $\log x>\log 10$

밑이 1보다 크므로

$x<\frac{1}{10}$ 또는 $x>10$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{10}$ 또는 $x>10$

답 $0<x<\frac{1}{10}$ 또는 $x>10$

표준+발전 유형 Q+Q

46쪽

01 진수의 조건에서 $x+1>0$, $x+7>0$이므로

$x>-1$, $x>-7 \quad \therefore x>-1$ ...... ㉠

$\log_{\sqrt{3}}(x+1)=\log_3(x+7)$에서

$\log_3(x+1)^2=\log_3(x+7)$

$(x+1)^2=x+7, \quad x^2+2x+1=x+7$

$x^2+x-6=0, \quad (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because$ ㉠) 답 ④

02 진수의 조건에서 $x-3>0$, $x^2>0$이므로

$x>3$, $x\neq0 \quad \therefore x>3$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+\log_{\frac{1}{4}}x^2=-2$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+\log_{\frac{1}{2}}x=-2$

$\log_{\frac{1}{2}}x(x-3)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x)=\log_{\frac{1}{2}}4$

$x^2-3x=4, \quad x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0 \quad \therefore x=4$ ($\because$ ㉠)

따라서 $\alpha=4$이므로

$2^\alpha=16$ 답 16

03 $(\log_5 5x)^2-2\log_5 25x^2=0$에서

$(1+\log_5 x)^2-2(2+2\log_5 x)=0$

$1+2\log_5 x+(\log_5 x)^2-4-4\log_5 x=0$

$\therefore (\log_5 x)^2-2\log_5 x-3=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\quad t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_5 x=-1$ 또는 $\log_5 x=3$이므로

$x=5^{-1}=\frac{1}{5}$ 또는 $x=5^3=125$

따라서 $\alpha=\frac{1}{5}$, $\beta=125$이므로

$25\alpha+\beta=25\cdot\frac{1}{5}+125=130$ 답 130

04 $\log_3 x+\log_x 9=3$에서

$\log_3 x+\dfrac{2}{\log_3 x}-3=0$

$\log_3 x=t\ (t\neq0)$로 놓으면 $\quad t+\dfrac{2}{t}-3=0$

$t^2-3t+2=0, \qquad (t-1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$

즉 $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=2$이므로

$x=3$ 또는 $x=3^2=9$

따라서 모든 근의 합은

$3+9=12$ 답 ③

밑과 진수의 조건에서 $x\neq1,\ x>0$이므로 $\log_3 x\neq0$

양변에 t를 곱한다.

05 $\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+kt-10=0$ ······ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha\beta=8$이고 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_{\frac{1}{2}}\alpha,\ \log_{\frac{1}{2}}\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{\frac{1}{2}}\alpha+\log_{\frac{1}{2}}\beta=-k$

$\log_{\frac{1}{2}}\alpha\beta=-k, \qquad \log_{\frac{1}{2}}8=-k$

$\therefore\ k=3$ 답 ②

$\log_{\frac{1}{2}}8=\log_{2^{-1}}2^3=-3$

쌤한마디

x에 대한 방정식

$(\log_a x)^2+p\log_a x+q=0$ ($p,\ q$는 상수)

의 두 근이 $\alpha,\ \beta$일 때, $\log_a x=t$로 놓으면 t에 대한 방정식 $t^2+pt+q=0$의 두 근은 $\log_a\alpha,\ \log_a\beta$이다.

06 밑과 진수의 조건에서 $x-3>0,\ x-3\neq1,\ 3x+9>0,\ 3x+9\neq1,\ x-4>0$이므로

$x>4$ ······ ㉠

(i) $x-3=3x+9$일 때,

$2x=-12 \qquad \therefore\ x=-6$

$x=-6$은 ㉠을 만족시키지 않으므로 주어진 방정식의 해가 아니다.

(ii) $x-4=1$일 때, $\qquad x=5$

$x=5$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=5$

따라서 $\alpha=5$이므로

$\alpha^2=25$ 답 ①

밑이 같은 경우

진수가 1인 경우

07 밑과 진수의 조건에서 $x^2-4x+4>0,\ x^2-4x+4\neq1,\ 7-x>0$이므로

$x<1$ 또는 $1<x<2$ 또는 $2<x<3$ 또는 $3<x<7$ ······ ㉠

(i) $x^2-4x+4=9$일 때,

$x^2-4x-5=0, \qquad (x+1)(x-5)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=5$

$x=-1,\ x=5$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

$(x-2)^2>0$이므로 $x\neq2$

$x^2-4x+3\neq0$이므로 $(x-1)(x-3)\neq0$ $\quad\therefore\ x\neq1,\ x\neq3$

(ii) $7-x=1$일 때, $\qquad x=6$

$x=6$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-1$ 또는 $x=5$ 또는 $x=6$

따라서 모든 x의 값의 합은

$-1+5+6=10$ 답 10

08 $100x^{\log x}=x^3$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 100x^{\log x}=\log x^3$

$\log 100+\log x\cdot\log x=3\log x$

$\therefore\ (\log x)^2-3\log x+2=0$

$\log x=t$로 놓으면 $\qquad t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0 \qquad \therefore\ t=1$ 또는 $t=2$

즉 $\log x=1$ 또는 $\log x=2$이므로

$x=10$ 또는 $x=10^2=100$

따라서 모든 근의 합은

$10+100=110$ 답 110

09 $x^{\log_5 x}-125x^2=0$, 즉 $x^{\log_5 x}=125x^2$의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$\log_5 x^{\log_5 x}=\log_5 125x^2$

$\log_5 x\cdot\log_5 x=\log_5 125+\log_5 x^2$

$\therefore\ (\log_5 x)^2-2\log_5 x-3=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\qquad t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0 \qquad \therefore\ t=-1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_5 x=-1$ 또는 $\log_5 x=3$이므로

$x=5^{-1}$ 또는 $x=5^3$

$\therefore\ \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\log_{5^{-1}}5^3+\log_{5^3}5^{-1}$

$=-3-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{10}{3}$ 답 ①

$\alpha=5^{-1},\ \beta=5^3$ 또는 $\alpha=5^3,\ \beta=5^{-1}$

10 $\log x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-(k+1)t+k+4=0$ ······ ㉠

주어진 방정식의 두 근이 모두 1보다 크려면 이차방정식 ㉠의 두 근이 모두 0보다 커야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D, 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

(i) $D=\{-(k+1)\}^2-4(k+4)\geq0$

$k^2-2k-15\geq0, \qquad (k+3)(k-5)\geq0$

$\therefore\ k\leq-3$ 또는 $k\geq5$

(ii) $\alpha+\beta=k+1>0 \qquad \therefore\ k>-1$

(iii) $\alpha\beta=k+4>0 \qquad \therefore\ k>-4$

이상에서 $k\geq5$이므로 실수 k의 최솟값은 5이다.

답 ④

$x>1$에서 $\log x>\log 1$ $\quad\therefore\ t>0$

11 진수의 조건에서 $x+7>0,\ 5-x>0$이므로

$-7<x<5$

$\log_2(x+7)+\log_2(5-x)=n$에서

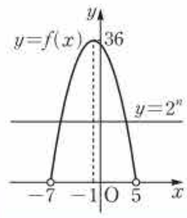
$\log_2(x+7)(5-x)=\log_2 2^n$

$(x+7)(5-x)=2^n$ ······ ㉠

$-7<x<5$에서 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=(x+7)(5-x)$의 그래프와 직선 $y=2^n$이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
이때 $f(x)=(x+7)(5-x)$ $(-7<x<5)$로 놓으면

$$f(x)=-x^2-2x+35=-(x+1)^2+36$$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2^n$이 서로 다른 두 점에서 만나려면



$$0<2^n<36$$

따라서 구하는 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

Q BOX: $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$

답 5

12 진수의 조건에서 $x+1>0$, $x-4>0$이므로

$x>-1$, $x>4$ $\quad\therefore x>4$ ...... ㉠

$\log_6(x+1)+\log_6(x-4)<2$에서

$\log_6(x+1)(x-4)<\log_6 6^2$

밑이 1보다 크므로 $\quad x^2-3x-4<36$

$x^2-3x-40<0$, $\quad (x+5)(x-8)<0$

$\therefore -5<x<8$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$4<x<8$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=8$이므로

$$\log_\alpha\beta=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$$

답 ③

13 진수의 조건에서 $x-3>0$, $x-1>0$이므로

$x>3$, $x>1$ $\quad\therefore x>3$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x-3)\geq\log_{\frac{1}{9}}(x-1)$에서

$\log_{\frac{1}{9}}(x-3)^2\geq\log_{\frac{1}{9}}(x-1)$

밑이 1보다 작으므로 $\quad (x-3)^2\leq x-1$

$x^2-7x+10\leq 0$, $\quad (x-2)(x-5)\leq 0$

Q BOX: $(x-3)^2\leq x-1$에서
$x^2-6x+9\leq x-1$
$\therefore x^2-7x+10\leq 0$

$\therefore 2\leq x\leq 5$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x\leq 5$

따라서 자연수 x는 4, 5이므로 구하는 곱은

$4\cdot 5=20$

답 20

14 진수의 조건에서

$x>0$, $\log_4 x>0$, $\log_3(\log_4 x)>0$

$\log_3(\log_4 x)>0$에서

$\log_3(\log_4 x)>\log_3 1$, $\quad \log_4 x>1$

$\therefore x>4$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}\{\log_3(\log_4 x)\}>0$에서

$\log_{\frac{1}{5}}\{\log_3(\log_4 x)\}>\log_{\frac{1}{5}}1$

밑이 1보다 작으므로 $\quad \log_3(\log_4 x)<1$

밑이 1보다 크므로 $\quad \log_4 x<3$

$\therefore x<64$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$4<x<64$

따라서 정수 x는 5, 6, 7, $\cdots$, 63의 59개이다.

Q BOX: $63-5+1=59$(개)

답 59

15 부등식 $\log_2(\log_5 x)<1$의 진수의 조건에서

$x>0$, $\log_5 x>0$ $\quad\therefore x>1$ ...... ㉠

$\log_2(\log_5 x)<1$에서 $\quad \log_2(\log_5 x)<\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $\quad \log_5 x<2$

$\therefore x<25$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<25$

$\therefore A=\{x|1<x<25\}$

부등식 $\log_7(\log x)<0$의 진수의 조건에서

$x>0$, $\log x>0$ $\quad\therefore x>1$ ...... ㉢

$\log_7(\log x)<0$에서 $\quad \log_7(\log x)<\log_7 1$

밑이 1보다 크므로 $\quad \log x<1$

$\therefore x<10$ ...... ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$1<x<10$

$\therefore B=\{x|1<x<10\}$

따라서 $A\cap B=\{x|1<x<10\}$이므로 집합 $A\cap B$의 원소가 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

16 진수의 조건에서 $81x>0$, $\frac{x}{9}>0$이므로

$x>0$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}81x\cdot\log_3\frac{x}{9}\geq 0$에서

$(\log_{\frac{1}{3}}81+\log_{\frac{1}{3}}x)(\log_3 x-\log_3 9)\geq 0$

$-(\log_3 x+\log_3 81)(\log_3 x-\log_3 9)\geq 0$

$\therefore (\log_3 x+4)(\log_3 x-2)\leq 0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad (t+4)(t-2)\leq 0$

$\therefore -4\leq t\leq 2$

즉 $-4\leq\log_3 x\leq 2$이므로

$\log_3 3^{-4}\leq\log_3 x\leq\log_3 3^2$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{1}{81}\leq x\leq 9$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{81}\leq x\leq 9$

따라서 $\alpha=\frac{1}{81}$, $\beta=9$이므로

$\alpha\beta=\frac{1}{9}$

답 $\frac{1}{9}$

17 진수의 조건에서 $\quad x>0$ ...... ㉠

$-\log_5 x\cdot(\log_{\frac{1}{5}}x-1)<2$에서

Q BOX: $-\log_5 x\cdot(\log_{\frac{1}{5}}x-1)$
$=\log_5 x\cdot(-\log_{\frac{1}{5}}x+1)$
$=\log_5 x\cdot(\log_5 x+1)$

$\log_5 x\cdot(\log_5 x+1)<2$

$\therefore (\log_5 x)^2+\log_5 x-2<0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\quad t^2+t-2<0$

$(t+2)(t-1)<0$ $\quad\therefore -2<t<1$

즉 $-2<\log_5 x<1$이므로

$\log_5 5^{-2}<\log_5 x<\log_5 5$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{25}<x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{25}<x<5$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$1+2+3+4=10$ 답 ④

18 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}} x}>x^2$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x}<\log_{\frac{1}{2}} x^2$

$\log_{\frac{1}{2}} x\cdot\log_{\frac{1}{2}} x<2\log_{\frac{1}{2}} x$

$\therefore (\log_{\frac{1}{2}} x)^2-2\log_{\frac{1}{2}} x<0$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면 $t^2-2t<0$

$t(t-2)<0$ $\therefore 0<t<2$

즉 $0<\log_{\frac{1}{2}} x<2$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} 1<\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로 $\frac{1}{4}<x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{4}<x<1$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=1$이므로

$\beta-\alpha=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

19 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log x-2}\le 1000$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x-2}\le\log 1000$

$(\log x-2)\log x\le\log 10^3$

$\therefore (\log x)^2-2\log x-3\le 0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3\le 0$

$(t+1)(t-3)\le 0$ $\therefore -1\le t\le 3$

즉 $-1\le\log x\le 3$이므로

$\log 10^{-1}\le\log x\le\log 10^3$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{10}\le x\le 1000$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{10}\le x\le 1000$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, …, 1000의 1000개이다.

답 1000

20 $2(\log_9 x)^2-\log_9 ax^2\ge 0$에서

$2(\log_9 x)^2-(\log_9 a+\log_9 x^2)\ge 0$

$\therefore 2(\log_9 x)^2-2\log_9 x-\log_9 a\ge 0$

$\log_9 x=t$로 놓으면

$2t^2-2t-\log_9 a\ge 0$ …… ㉠

Q BOX

$9^{-\frac{1}{2}}=(3^2)^{-\frac{1}{2}}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

$0<\frac{1}{2}<1$이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

$a>0$이므로 $a\times 1.1^n\ge 3a$의 양변을 a로 나누어도 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

모든 양수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 성립해야 하므로 이차방정식 $2t^2-2t-\log_9 a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2(-\log_9 a)\le 0$

$\log_9 a\le-\frac{1}{2}$, $\log_9 a\le\log_9 9^{-\frac{1}{2}}$

밑이 1보다 크므로 $a\le\frac{1}{3}$

이때 $a>0$이므로 $0<a\le\frac{1}{3}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{3}$이다. 답 $\frac{1}{3}$

21 $(\log x-\log 5)(\log x-\log 125)=-(\log a)^2$에서

$(\log x-\log 5)(\log x-3\log 5)=-(\log a)^2$

$\therefore (\log x)^2-4\log 5\cdot\log x+3(\log 5)^2+(\log a)^2=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-4t\log 5+3(\log 5)^2+(\log a)^2=0$ … ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2\log 5)^2-\{3(\log 5)^2+(\log a)^2\}>0$

$(\log a)^2-(\log 5)^2<0$

$(\log a+\log 5)(\log a-\log 5)<0$

$-\log 5<\log a<\log 5$

$\log 5^{-1}<\log a<\log 5$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{5}<a<5$

따라서 $\alpha=\frac{1}{5}$, $\beta=5$이므로

$\frac{\beta}{\alpha}=25$ 답 ③

쌤 한마디

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이

① 서로 다른 두 실근을 가지면 ⇨ $b^2-4ac>0$

② 실근을 가지면 ⇨ $b^2-4ac\ge 0$

③ 실근을 갖지 않으면 ⇨ $b^2-4ac<0$

22 현재의 미세 먼지 농도를 a라 할 때, n년 후의 미세 먼지 농도는

$a\times(1+0.1)^n=a\times 1.1^n$

n년 후에 미세 먼지 농도가 현재의 3배 이상이 된다고 하면

$a\times 1.1^n\ge 3a$ $\therefore 1.1^n\ge 3$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 1.1\ge\log 3$

$\therefore n\ge\frac{\log 3}{\log 1.1}=\frac{0.48}{0.04}=12$

따라서 미세 먼지 농도가 현재의 3배 이상이 되는 것은 최소 12년 후이다. 답 ②

23 $a=20$, $c=27$, $b=18$을 주어진 식에 대입하면

$$\log\frac{18}{20}=-1+k\log 27$$

$$2\log 3-1=-1+3k\log 3$$

Q BOX: $\log\frac{18}{20}=\log\frac{9}{10}=2\log 3-1$

$$2\log 3=3k\log 3 \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$$

따라서 $a=30$, $c=8$, $b=x$를 $\log\frac{b}{a}=-1+\frac{2}{3}\log c$에 대입하면

$$\log\frac{x}{30}=-1+\frac{2}{3}\log 8$$

$$\log x-(\log 3+1)=-1+2\log 2$$

$$\log x=2\log 2+\log 3, \qquad \log x=\log(2^2\cdot 3)$$

$$\therefore x=12$$

답 12

중단원 마무리

50쪽

01 전략 함수 $f(x)=\log_6 x$에 대하여 $f(p)=q$이면 $\log_6 p=q$임을 이용한다.

풀이 $f(8)=a$에서 $\quad a=\log_6 8$

$f(10)=b$에서 $\quad b=\log_6 10$

$$\therefore f(k)=\frac{a+b}{2}=\frac{\log_6 8+\log_6 10}{2}=\frac{1}{2}\log_6 80$$

즉 $\log_6 k=\frac{1}{2}\log_6 80$이므로

$$k=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

답 $4\sqrt{5}$

02 전략 로그의 성질을 이용하여 보기의 함수식을 변형한다.

풀이 ㄱ. $y=-\log_5\frac{1}{x}=-\log_5 x^{-1}=\log_5 x$

ㄴ. $y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)=-\log_5(-x)$

ㄷ. $y=\log_{25}x^2=\log_{5^2}x^2=\log_5|x|$

Q BOX: $y=\log_{25}x^2$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$이고 $y=\log_5 x$의 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$이므로 두 함수는 같지 않다.

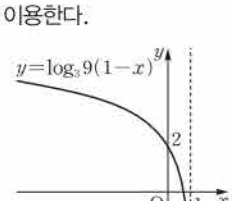
ㄹ. $y=\frac{1}{3}\log_5 x^3=\frac{1}{3}\cdot 3\log_5 x=\log_5 x$

이상에서 함수 $y=\log_5 x$와 같은 함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

03 전략 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\log_a(x-m)+n$임을 이용한다.

풀이 $y=\log_3 9(1-x)$
$=\log_3 9+\log_3(1-x)$
$=\log_3\{-(x-1)\}+2$



의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $y=\log_3 9(1-x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

④ x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

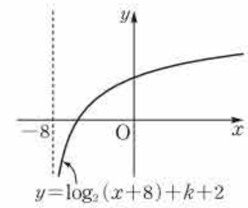
답 ④

04 전략 평행이동한 그래프의 식을 구한 후 주어진 조건을 만족시키도록 그래프의 개형을 그려 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $y=2+\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -8만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\log_2(x+8)+k+2$$

$y=\log_2(x+8)+k+2$의 그래프가 제 4 사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$\log_2 8+k+2\geq 0$$

Q BOX: $x=0$에서의 함숫값

$$3+k+2\geq 0$$

$$\therefore k\geq -5$$

따라서 실수 k의 최솟값은 -5이다.

답 ⑤

05 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(p,\ q)$를 지나면 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(q,\ p)$를 지남을 이용한다.

풀이 함수 $y=3^x-a$의 역함수의 그래프가 두 점 $(3,\ \log_3 b)$, $(2b,\ \log_3 12)$를 지나므로 함수 $y=3^x-a$의 그래프는 두 점 $(\log_3 b,\ 3)$, $(\log_3 12,\ 2b)$를 지난다.

함수 $y=3^x-a$의 그래프가 점 $(\log_3 b,\ 3)$을 지나므로

$$3=3^{\log_3 b}-a, \qquad 3=b-a$$

$$\therefore a-b=-3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $(\log_3 12,\ 2b)$를 지나므로

$$2b=3^{\log_3 12}-a, \qquad 2b=12-a$$

$$\therefore a+2b=12 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=5$$

$$\therefore a+b=7$$

답 ①

다른 풀이 $y=3^x-a$에서 $\qquad y+a=3^x$

$$\therefore x=\log_3(y+a)$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\log_3(x+a)$

함수 $y=\log_3(x+a)$의 그래프가 점 $(3,\ \log_3 b)$를 지나므로

$$\log_3 b=\log_3(3+a), \qquad b=3+a$$

$$\therefore a-b=-3$$

또 점 $(2b,\ \log_3 12)$를 지나므로

$$\log_3 12=\log_3(2b+a) \qquad \therefore a+2b=12$$

따라서 $a=2$, $b=5$이므로 $\qquad a+b=7$

06 전략 함수 $y=\log_a x$는 $0<a<1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소함을 이용한다.

Q BOX: 로그함수를 이용한 수의 대소 비교
① $a>1$일 때, $x_1<x_2$이면 $\log_a x_1<\log_a x_2$
② $0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면 $\log_a x_1>\log_a x_2$

풀이 $\log\frac{1}{20}=\log_{\frac{1}{10}}20$,

$2\log_{0.1}5\sqrt{2}=\log_{\frac{1}{10}}50$,

$\log_{0.1}3-1=\log_{\frac{1}{10}}3-\log_{\frac{1}{10}}\frac{1}{10}=\log_{\frac{1}{10}}30$ ⋯ ❶

이때 $20<30<50$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{10}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$$\log_{\frac{1}{10}}50<\log_{\frac{1}{10}}30<\log_{\frac{1}{10}}20$$ ⋯ ❷

따라서 가장 큰 수는 $\log_{\frac{1}{10}} 20$, 가장 작은 수는 $\log_{\frac{1}{10}} 50$이므로 구하는 합은

$$\log_{\frac{1}{10}} 20+\log_{\frac{1}{10}} 50=\log_{\frac{1}{10}} 100=-2$$ ⋯ ❸

답 -2

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 세 수의 밑을 같게 할 수 있다.	50 %
❷	주어진 세 수의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❸	가장 큰 수와 가장 작은 수의 합을 구할 수 있다.	20 %

07 **전략** 정의역이 $\{x \mid m\le x\le n\}$인 함수 $y=\log_a(x+p)+q$는 $a>1$이면 $x=n$일 때 최댓값, $x=m$일 때 최솟값을 가짐을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=\log_5(x-a)-4$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $10\le x\le 34$에서 $x=34$일 때 최댓값, $x=10$일 때 최솟값을 갖는다.

즉 $\log_5(34-a)-4=-2$이므로

$$\log_5(34-a)=2,\qquad 34-a=25$$

$$\therefore a=9$$

따라서 $f(x)=\log_5(x-9)-4$이므로 구하는 최솟값은

$$\log_5(10-9)-4=\log_5 1-4=-4$$

답 ④

08 **전략** 함수 $y=\log_a f(x)$에서 $0<a<1$이면 $f(x)$가 최대일 때 y는 최소임을 이용한다.

풀이 진수의 조건에서

$$4-x>0,\ x+8>0$$

$$\therefore -8<x<4$$

이때

$$y=\log_{\frac{1}{6}}(4-x)+\log_{\frac{1}{6}}(x+8)$$
$$=\log_{\frac{1}{6}}(4-x)(x+8)$$
$$=\log_{\frac{1}{6}}(-x^2-4x+32)$$

이므로 $f(x)=-x^2-4x+32$로 놓으면

$$f(x)=-(x+2)^2+36$$

함수 $y=\log_{\frac{1}{6}}(4-x)+\log_{\frac{1}{6}}(x+8)=\log_{\frac{1}{6}}f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $f(x)$가 최대일 때 y는 최솟값을 갖는다.

$-8<x<4$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 36을 갖는다.

따라서 $y=\log_{\frac{1}{6}}f(x)$는 $f(x)=36$일 때 최소이고, 최솟값은

$$\log_{\frac{1}{6}}36=-2$$

답 -2

09 **전략** 먼저 양변에 밑이 2인 로그를 취하여 $\log_2 y$의 최댓값, 최솟값을 구한다.

풀이 $y=x^{4-\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 y=\log_2 x^{4-\log_2 x}=(4-\log_2 x)\log_2 x$$
$$=-(\log_2 x)^2+4\log_2 x \quad \cdots\cdots ㉠$$ ⋯ ❶

$\log_2 x=t$로 놓으면 $2\le x\le 16$에서

$$\log_2 2\le \log_2 x\le \log_2 16 \qquad \therefore 1\le t\le 4$$

이때 ㉠은

$$\log_2 y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$$

따라서 $1\le t\le 4$에서 $\log_2 y$는 $t=2$일 때 최대이므로

$$\log_2 M=-(2-2)^2+4=4 \qquad \therefore M=16$$

$t=4$일 때 최소이므로

$$\log_2 m=-(4-2)^2+4=0 \qquad \therefore m=1$$ ⋯ ❷

$$\therefore M+m=17$$ ⋯ ❸

답 17

단계	채점 기준	비율
❶	$y=x^{4-\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하여 정리할 수 있다.	30 %
❷	M, m의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸	$M+m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

10 **전략** 주어진 식을 하나의 로그에 대한 식으로 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $\log_5\left(a+\frac{3}{b}\right)+\log_5\left(b+\frac{4}{3a}\right)$

$$=\log_5\left\{\left(a+\frac{3}{b}\right)\left(b+\frac{4}{3a}\right)\right\}$$
$$=\log_5\left(ab+\frac{4}{3}+3+\frac{4}{ab}\right)$$
$$=\log_5\left(ab+\frac{4}{ab}+\frac{13}{3}\right)$$

$\log_5\left(ab+\frac{4}{ab}+\frac{13}{3}\right)$은 밑이 1보다 크므로 $ab+\frac{4}{ab}+\frac{13}{3}$이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

$a>0$, $b>0$에서 $ab>0$, $\frac{4}{ab}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$ab+\frac{4}{ab}+\frac{13}{3}\ge 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+\frac{13}{3}$$
$$=2\cdot 2+\frac{13}{3}=\frac{25}{3}$$

(단, 등호는 $ab=2$일 때 성립)

$ab=\frac{4}{ab}$에서

$(ab)^2=4$

$\therefore ab=2\ (\because ab>0)$

따라서 구하는 최솟값은

$$\log_5\frac{25}{3}=\log_5 25-\log_5 3=2-\log_5 3$$

답 ②

11 **전략** 밑을 같게 통일한 후 진수에 대한 방정식을 세워 해를 구한다.

풀이 진수의 조건에서 $x>0$, $2x-3>0$이므로

$$x>\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\log_2 x=1+\log_4(2x-3)$에서

$$\log_2 x=\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2(2x-3)$$
$$\log_2 x=\log_2 2\sqrt{2x-3},\qquad x=2\sqrt{2x-3}$$

양변을 제곱하면 $x^2=4(2x-3)$

$$x^2-8x+12=0,\qquad (x-2)(x-6)=0$$
$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=6\ (\because ㉠)$$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$$2\cdot 6=12$$

답 12

12 **전략** 치환을 이용하여 주어진 연립방정식을 간단한 연립방정식으로 바꾸어 푼다.

풀이 진수의 조건에서 $x>0$, $y>0$

$\log_5 x\cdot\log_3 y=6$에서

$\frac{\log x}{\log 5} \cdot \frac{\log y}{\log 3} = 6,\quad \frac{\log x}{\log 3} \cdot \frac{\log y}{\log 5} = 6$

$\therefore \log_3 x \cdot \log_5 y = 6$

$\log_3 x = X$, $\log_5 y = Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} X+Y=5 \\ XY=6 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면

$X=2, Y=3$ 또는 $X=3, Y=2$

즉 $\log_3 x = 2$, $\log_5 y = 3$ 또는 $\log_3 x = 3$, $\log_5 y = 2$이므로

$x=9, y=125$ 또는 $x=27, y=25$

이때 $\alpha > \beta$이므로 $\alpha=27, \beta=25$

$\therefore \alpha - \beta = 2$

답 ②

QBOX

X, Y는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로 $(t-2)(t-3)=0$에서

$t=2$ 또는 $t=3$

$\therefore X=2, Y=3$ 또는 $X=3, Y=2$

13 전략 $\log x = t$로 치환하여 나타낸 t에 대한 삼차방정식이 오직 하나의 실근을 가질 조건을 구한다.

풀이 $\log x = t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^3 - at - a + 1 = 0$

$\therefore (t+1)(t^2-t-a+1)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -a & -a+1 \\ & & -1 & 1 & a-1 \\ \hline & 1 & -1 & -a+1 & 0 \end{array}$$

주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 방정식 $t^2-t-a+1=0$이 두 허근을 갖거나 -1을 중근으로 가져야 한다.

이차방정식 $t^2-t-a+1=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $t^2-t-a+1=0$이 두 허근을 갖는 경우

$D=(-1)^2-4(-a+1)<0$

$4a-3<0 \quad \therefore a<\frac{3}{4}$

(ii) $t^2-t-a+1=0$이 -1을 중근으로 갖는 경우

$D=(-1)^2-4(-a+1)=0$

$4a-3=0 \quad \therefore a=\frac{3}{4}$

그런데 $a=\frac{3}{4}$이면 방정식 $t^2-t-a+1=0$은 -1을 중근으로 갖지 않는다.

$t^2-t-\frac{3}{4}+1=0$에서

$t^2-t+\frac{1}{4}=0$

$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a<\frac{3}{4}$

답 $a<\frac{3}{4}$

14 전략 집합 B는 $\log_2 x = t$로 치환하여 t에 대한 부등식을 풀어 구한다.

풀이 $x^2-5x+4\le 0$에서 $(x-1)(x-4)\le 0$

$\therefore 1\le x\le 4$

$\therefore A=\{x \mid 1\le x\le 4\}$

$(\log_2 x)^2 - 2k\log_2 x + k^2 - 1 \le 0$에서 $\log_2 x = t$로 놓으면

$t^2-2kt+k^2-1\le 0$

$(t-k+1)(t-k-1)\le 0$

$\therefore k-1\le t\le k+1$

즉 $k-1\le \log_2 x\le k+1$이므로

$\log_2 2^{k-1} \le \log_2 x \le \log_2 2^{k+1}$

밑이 1보다 크므로 $2^{k-1}\le x\le 2^{k+1}$

$\therefore B=\{x \mid 2^{k-1}\le x\le 2^{k+1}\}$

이때 $A\cap B\neq\varnothing$이려면 $2^{k+1}\ge 1$, $2^{k-1}\le 4$이어야 한다.

$2^{k+1}\ge 1$, 즉 $2^{k+1}\ge 2^0$에서 밑이 1보다 크므로

$k+1\ge 0 \quad \therefore k\ge -1$ …… ㉠

$2^{k-1}\le 4$, 즉 $2^{k-1}\le 2^2$에서 밑이 1보다 크므로

$k-1\le 2 \quad \therefore k\le 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1\le k\le 3$

따라서 정수 k는 $-1, 0, 1, 2, 3$의 5개이다.

답 ①

15 전략 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 로그부등식을 푼다.

풀이 $x^{\log_3 x} > (27x)^{2k}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x} > \log_3 (27x)^{2k}$

$\log_3 x \cdot \log_3 x > 2k\log_3 27x$

$(\log_3 x)^2 > 2k(3+\log_3 x)$

$\therefore (\log_3 x)^2 - 2k\log_3 x - 6k > 0$

$\log_3 x = t$로 놓으면 $t^2-2kt-6k>0$

임의의 양수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-2kt-6k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-6k)<0,\quad k^2+6k<0$

$k(k+6)<0 \quad \therefore -6<k<0$

따라서 $\alpha=-6$, $\beta=0$이므로

$\alpha+\beta=-6$

답 ②

16 전략 주어진 조건에 맞게 부등식을 세운 후 양변에 상용로그를 취하여 푼다.

풀이 n년 후에 제품 B에 투자한 금액이 제품 A에 투자한 금액의 10배 이상이 된다고 하면

$1000\left(1+\frac{30}{100}\right)^n \ge 10\times 1000\left(1+\frac{20}{100}\right)^n$

$1.3^n \ge 10\times 1.2^n$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 1.3^n \ge \log(10\times 1.2^n)$

$n\log 1.3 \ge 1 + n\log 1.2$

$n(\log 1.3 - \log 1.2)\ge 1$

$\therefore n\ge \frac{1}{\log 1.3-\log 1.2}=\frac{1}{0.114-0.079}$

$=\frac{1}{0.035}=28.5\cdots$

따라서 현재로부터 29년 후 제품 B에 투자한 금액이 처음으로 제품 A에 투자한 금액의 10배 이상이 된다.

답 29년

17 전략 먼저 두 점 A, B가 곡선 $y=|\log_a x|$ 위의 점임을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 $\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$이고 $\overline{OC}=k$이므로

$A(k, k)$, $B(2k, k)$

$\overline{CB}=\overline{CA}+\overline{AB}$
$=k+k=2k$

점 A는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$k=-\log_a k$ …… ㉠

점 B는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$k=\log_a 2k$ ······ ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $\quad 0=\log_a 2k+\log_a k$

$\log_a 2k^2=0, \quad 2k^2=1, \quad k^2=\frac{1}{2}$

$\therefore k=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because k>0)$ ······ ㉢

곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면

$-\log_a \alpha=2\sqrt{2}$에서 $\quad \alpha=a^{-2\sqrt{2}}$

$\log_a \beta=2\sqrt{2}$에서 $\quad \beta=a^{2\sqrt{2}}$

$\therefore d=\beta-\alpha=a^{2\sqrt{2}}-a^{-2\sqrt{2}}$ ······ ㉣

㉢을 ㉡에 대입하면

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\log_a\sqrt{2}, \quad a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$

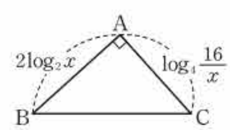
$\therefore a^{2\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^4=4$

㉣에서 $\quad d=4-4^{-1}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

$\therefore 20d=20\cdot\frac{15}{4}=75$ 　답 75

18 전략 $S(x)$를 x에 대한 식으로 나타낸 후 최대인 경우를 찾는다.

풀이 △ABC는 오른쪽 그림과 같으므로



$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\log_2 x\cdot\log_4\frac{16}{x}$

$=\log_2 x\cdot\log_{2^2}\frac{2^4}{x}$

$=\log_2 x\cdot(\log_{2^2}2^4-\log_{2^2}x)$

$=\log_2 x\cdot\left(2-\frac{1}{2}\log_2 x\right)$

$=-\frac{1}{2}(\log_2 x)^2+2\log_2 x$ ······ ㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면 $1<x<16$에서

$\log_2 1<\log_2 x<\log_2 16 \quad \therefore 0<t<4$

이때 ㉠은

$-\frac{1}{2}t^2+2t=-\frac{1}{2}(t-2)^2+2$

이므로 $0<t<4$에서 $t=2$일 때 최댓값 2를 갖는다.

$\therefore M=2$

$t=2$에서 $\quad \log_2 x=2 \quad \therefore x=2^2=4$

따라서 $a=4$이므로

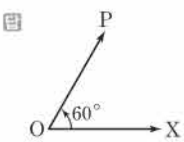
$a+M=6$ 　답 ①

05 삼각함수

Lecture 09 일반각과 호도법

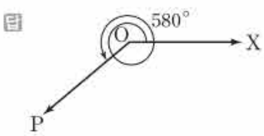
57쪽

01 답

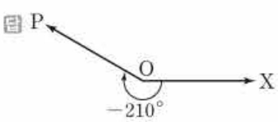


QBOX: $580°=360°+220°$

02 답

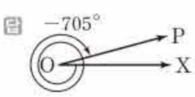


03 답



QBOX: $-705°=-360°-345°$

04 답



05 $500°=360°\times1+140°$이므로

$360°\times n+140°$

답 $360°\times n+140°$

06 $1365°=360°\times3+285°$이므로

$360°\times n+285°$

답 $360°\times n+285°$

07 $-380°=360°\times(-2)+340°$이므로

$360°\times n+340°$

답 $360°\times n+340°$

08 $-1620°=360°\times(-5)+180°$이므로

$360°\times n+180°$

답 $360°\times n+180°$

QBOX: $270°<340°<360°$

09 $1060°=360°\times2+340°$

따라서 $1060°$는 제4사분면의 각이다.

답 제4사분면

쌤 한마디

각 θ가 제몇 사분면의 각인지 구할 때에는 먼저

$\theta=360°\times n+\alpha°$ (n은 정수, $0°\le\alpha°<360°$)

와 같이 일반각으로 나타낸 후 다음을 이용한다.

① $0°<\alpha°<90°$ ➡ 제1사분면의 각
② $90°<\alpha°<180°$ ➡ 제2사분면의 각
③ $180°<\alpha°<270°$ ➡ 제3사분면의 각
④ $270°<\alpha°<360°$ ➡ 제4사분면의 각

10 $2055° = 360° \times 5 + 255°$

따라서 2055°는 제3사분면의 각이다.

답 제3사분면

11 $-1005° = 360° \times (-3) + 75°$

따라서 −1005°는 제1사분면의 각이다.

답 제1사분면

12 $-1280° = 360° \times (-4) + 160°$

따라서 −1280°는 제2사분면의 각이다.

답 제2사분면

13 $-1000° = 360° \times (-3) + 80°$

$-530° = 360° \times (-2) + 190°$

$670° = 360° \times 1 + 310°$

$925° = 360° \times 2 + 205°$

따라서 제3사분면에 있는 각은 −530°, 925°이다.

답 −530°, 925°

−1000°는 제1사분면의 각이다.

670°는 제4사분면의 각이다.

14 $135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$ 답 $\frac{3}{4}\pi$

(호도법의 각) = (육십분법의 각) × $\frac{\pi}{180}$

15 $-300° = (-300) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{3}\pi$

답 $-\frac{5}{3}\pi$

16 $\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 120°$ 답 120°

(육십분법의 각) = (호도법의 각) × $\frac{180°}{\pi}$

17 $-\frac{7}{5}\pi = \left(-\frac{7}{5}\pi\right) \cdot \frac{180°}{\pi} = -252°$ 답 −252°

18 답 $2n\pi + \frac{1}{2}$

19 $-\frac{17}{6}\pi = 2\pi \cdot (-2) + \frac{7}{6}\pi$이므로

$2n\pi + \frac{7}{6}\pi$ 답 $2n\pi + \frac{7}{6}\pi$

20 $l = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$, $S = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi$

답 $l = \pi$, $S = \frac{3}{2}\pi$

다른 풀이 $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \pi = \frac{3}{2}\pi$

21 $\frac{1}{2}r \cdot 6 = 9$이므로 $r = 3$

$3\theta = 6$이므로 $\theta = 2$

답 $r = 3$, $\theta = 2$

표준+발전 유형 Q+Q

58쪽

01 ① $-1500° = 360° \times (-5) + 300°$ ➡ 제4사분면

② $-1120° = 360° \times (-4) + 320°$ ➡ 제4사분면

③ $690° = 360° \times 1 + 330°$ ➡ 제4사분면

④ $-\frac{25}{4}\pi = 2\pi \times (-4) + \frac{7}{4}\pi$ ➡ 제4사분면

⑤ $\frac{19}{3}\pi = 2\pi \times 3 + \frac{\pi}{3}$ ➡ 제1사분면

따라서 각을 나타내는 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 것은 ⑤이다.

답 ⑤

02 120°를 나타내는 동경 OP가 주어진 조건을 만족시키며 회전한 후 나타내는 각의 크기는

$120° - 550° + 210° = -220°$

이때

$-220° = 360° \times (-1) + 140°$

이므로 동경 OP는 제2사분면에 있다.

답 제2사분면

양의 방향으로 회전하면 +, 음의 방향으로 회전하면 −를 붙인다.

03 θ가 제3사분면의 각이므로

$2n\pi + \pi < \theta < 2n\pi + \frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)

$\therefore \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{2}$

(i) $n = 3k$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n = 3k+1$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2(3k+1)}{3}\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < \frac{2(3k+1)}{3}\pi + \frac{\pi}{2}$

$\therefore 2k\pi + \pi < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{7}{6}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n = 3k+2$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2(3k+2)}{3}\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < \frac{2(3k+2)}{3}\pi + \frac{\pi}{2}$

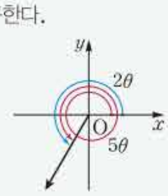
$\therefore 2k\pi + \frac{5}{3}\pi < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{11}{6}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

이상에서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면 또는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이므로 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다.

답 제2사분면

두 동경의 위치 관계를 다음과 같이 그림으로 나타내어 두 동경이 나타내는 각 사이의 관계식을 구한다.



04 각 2θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$5\theta - 2\theta = 2n\pi$ (n은 정수)

05 삼각함수

$3\theta=2n\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi \qquad \cdots\cdots ㉠$

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{3}\pi<\pi$이므로

$0<n<\frac{3}{2} \qquad \therefore n=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{2}{3}\pi$ 답 ④

05 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이면 두 동경은 원점에 대하여 대칭이므로

$6\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$5\theta=(2n+1)\pi$

$\therefore \theta=\frac{2n+1}{5}\pi \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{5}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\frac{5}{2}<2n+1<\frac{15}{2}, \qquad \frac{3}{4}<n<\frac{13}{4}$

$\therefore n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{3}{5}\pi$ 또는 $\theta=\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{5}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{7}{5}\pi$, $\beta=\frac{3}{5}\pi$이므로

$\alpha-\beta=\frac{4}{5}\pi$ 답 $\frac{4}{5}\pi$

06 각 3θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$3\theta+4\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$7\theta=2n\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2n}{7}\pi \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{2n}{7}\pi<2\pi$이므로

$\frac{7}{2}<n<7$

$\therefore n=4$ 또는 $n=5$ 또는 $n=6$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{8}{7}\pi$ 또는 $\theta=\frac{10}{7}\pi$ 또는 $\theta=\frac{12}{7}\pi$

따라서 모든 각 θ의 크기의 합은

$\frac{8}{7}\pi+\frac{10}{7}\pi+\frac{12}{7}\pi=\frac{30}{7}\pi$ 답 $\frac{30}{7}\pi$

07 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$6\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \theta=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}$

$0<\theta<2\pi$에서 $0<\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}<2\pi$이므로

$-\frac{1}{12}<\frac{n}{3}<\frac{23}{12}, \qquad -\frac{1}{4}<n<\frac{23}{4}$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

또는 $n=3$ 또는 $n=4$ 또는 $n=5$

따라서 각 θ의 개수는 6이다. 답 6

참고 조건을 만족시키는 각 θ의 크기는 $\theta=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}$에서

$\theta=\frac{\pi}{12}$ 또는 $\theta=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

또는 $\theta=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $\theta=\frac{17}{12}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{4}\pi$

08 동경 OP_n이 나타내는 각의 크기를 θ_n이라 하면

$\theta_1=3\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi=2\pi+\frac{\pi}{2}$

$\theta_2=5\pi+\pi=2\pi\cdot3$

$\theta_3=7\pi-\frac{3}{2}\pi=\frac{11}{2}\pi=2\pi\cdot2+\frac{3}{2}\pi$

$\theta_4=9\pi+2\pi=11\pi=2\pi\cdot5+\pi$

$\theta_5=11\pi-\frac{5}{2}\pi=\frac{17}{2}\pi=2\pi\cdot4+\frac{\pi}{2}$

$\theta_6=13\pi+3\pi=2\pi\cdot8$

$\vdots$

따라서 동경 OP_n의 위치는 동경 OP_1, OP_2, OP_3, OP_4의 위치가 이 순서대로 반복된다.

즉 동경 OP_n이 동경 OP_1과 같은 위치에 있으려면

$n=4m+1$ (m은 자연수)

꼴이어야 하므로

$n=5, 9, 13, \cdots, 49$ ← $4\cdot12+1=49$

따라서 구하는 동경의 개수는 12이다. 답 12

09 $30°$를 나타내는 동경과 $190°\times n+30°$를 나타내는 동경이 일치한다고 하면

$190°\times n+30°=360°\times m+30°$ (m은 정수)

$\therefore n=\frac{36}{19}m$

즉 서로 다른 동경의 개수는 위의 식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값과 같으므로 36이다. 답 ⑤

쌤한마디

$\theta_n=190°\times n+30°$라 하면

$\theta_0=190°\times0+30°=30°$

$\theta_1=190°\times1+30°=220°$

$\theta_2=190°\times2+30°=410°=360°+50°$

$\theta_3=190°\times3+30°=600°=360°+240°$

$\vdots$

$\theta_{36}=190°\times36+30°=6870°=360°\times19+30°$

$\theta_{37}=190°\times37+30°=7060°=360°\times19+220°$

따라서 두 각 θ_0, θ_{36}을 나타내는 동경이 일치하고, 두 각 θ_1, θ_{37}을 나타내는 동경이 일치하므로 서로 다른 동경은

$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{35}$

의 36개이다.

(부채꼴의 호의 길이) $=a\times$(중심각의 크기)임을 이용하여 먼저 a의 값을 구한다.

10 부채꼴의 호의 길이가 8π이므로

$a\cdot\frac{4}{3}\pi=8\pi \qquad \therefore a=6$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot6\cdot8\pi=24\pi \qquad \therefore b=24$

$\therefore a+b=30$ 답 30

11 부채꼴의 중심각의 크기는 $315°=\frac{7}{4}\pi$이므로 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면

$\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{7}{4}\pi=14\pi, \qquad r^2=16$

$\therefore r=4\ (\because r>0)$

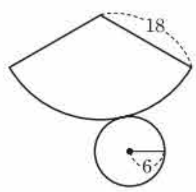
따라서 부채꼴의 호의 길이는

$4\cdot\frac{7}{4}\pi=7\pi$

이므로 부채꼴의 둘레의 길이는

$2\cdot4+7\pi=8+7\pi$ 답 $8+7\pi$

12 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로



$2\pi\cdot6=12\pi$

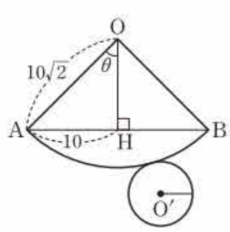
따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot18\cdot12\pi=108\pi$

이므로 원뿔의 겉넓이는

$108\pi+\pi\cdot6^2=144\pi$ 답 ⑤

13 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=10$

$\angle AOH=\theta$라 하면

$\sin\theta=\frac{10}{10\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이므로

$\theta=\frac{\pi}{4}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \angle AOB=2\theta=\frac{\pi}{2}$

원뿔의 밑면인 원 O'의 반지름의 길이를 r라 하면

$2\pi r=10\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \therefore r=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 원 O'의 넓이는

$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi=\frac{25}{2}\pi$ 답 $\frac{25}{2}\pi$

14 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 8이므로

$2r+l=8 \qquad \therefore l=8-2r$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}r(8-2r)=-r^2+4r$

$=-(r-2)^2+4\ (0<r<4)$

따라서 $r=2$일 때 S는 최대이므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 2이다. 답 ③

15 부채꼴의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면 둘레의 길이가 160 m이므로

$2r+l=160 \qquad \therefore l=160-2r$

부채꼴의 넓이를 $S\ \mathrm{m}^2$라 하면

$S=\frac{1}{2}r(160-2r)=-r^2+80r$

$=-(r-40)^2+1600\ (0<r<80)$

따라서 $r=40$일 때 S는 최댓값 1600을 가지므로 운동장의 넓이의 최댓값은 $1600\ \mathrm{m}^2$이다. 답 $1600\ \mathrm{m}^2$

16 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 넓이가 25이므로

$\frac{1}{2}rl=25 \qquad \therefore l=\frac{50}{r}$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r+l=2r+\frac{50}{r}$

이때 $2r>0$, $\frac{50}{r}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2r+\frac{50}{r}\geq2\sqrt{2r\cdot\frac{50}{r}}=2\cdot10=20$

(단, 등호는 $r=5$일 때 성립)

즉 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 20이다. 답 20

Q BOX

$8-2r>0$, $r>0$이므로
$0<r<4$

부채꼴의 중심각의 크기가 육십분법으로 주어지면 호도법으로 고쳐서 계산한다.

$160-2r>0$, $r>0$이므로
$0<r<80$

반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 둘레의 길이는
$2\times$(반지름의 길이)
$+$(호의 길이)
$=2r+r\theta$

$a>0$, $b>0$일 때,
$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

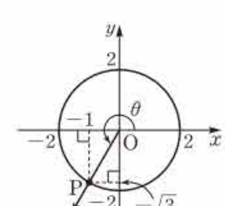
$2r=\frac{50}{r}$에서 $r^2=25$
$\therefore r=5\ (\because r>0)$

원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이는 원뿔의 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 같다.

Lecture 10 삼각함수

60쪽

01 오른쪽 그림에서



$\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}$
$=2$

이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

답 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

02 $\theta=\frac{13}{4}\pi=2\pi\cdot1+\frac{5}{4}\pi$에서 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

답 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

03 $\theta=-760°=360°\times(-3)+320°$에서 θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta<0$

답 $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta<0$

04 $\cos\theta<0$이므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이고, $\tan\theta<0$이므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
따라서 θ는 제2사분면의 각이다. 답 제2사분면

05 $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

제2사분면
제4사분면

따라서 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 제2사분면 또는 제4사분면

06 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2\theta=1$

$\therefore \cos^2\theta=\frac{16}{25}$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{4}{5}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

답 $\cos\theta=-\frac{4}{5},\ \tan\theta=\frac{3}{4}$

07 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$이므로

$$(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)=\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$$
$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta$$
$$=1$$

답 1

08 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta-\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{2}{\cos\theta}$$

답 $\frac{2}{\cos\theta}$

09 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{8}$

$$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1-2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{4}$$

답 $\frac{5}{4}$

표준+발전 유형 Q+Q

61쪽

01 $\overline{OP}=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$이므로

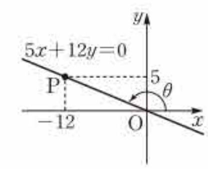
$\sin\theta=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5},\ \cos\theta=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},$

$\tan\theta=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$

$\therefore 5\sin\theta+10\cos\theta-8\tan\theta=-3+8-(-6)$
$=11$

답 11

02 $0<\theta<\pi$이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $5x+12y=0$ 위의 점 $P(-12,\ 5)$에 대하여



$\overline{OP}=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$

따라서

$\sin\theta=\frac{5}{13},\ \cos\theta=-\frac{12}{13}$

이므로

$13(\sin\theta-\cos\theta)=13\left\{\frac{5}{13}-\left(-\frac{12}{13}\right)\right\}=17$

답 17

03 (i) $\sin\theta\tan\theta<0$일 때,

$\sin\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

$\sin\theta>0,\ \tan\theta<0$
$\sin\theta<0,\ \tan\theta>0$

(ii) $\cos\theta\tan\theta>0$일 때,

$\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

$\cos\theta>0,\ \tan\theta>0$
$\cos\theta<0,\ \tan\theta<0$

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면의 각이다.

답 제2사분면

04 $\sin\theta\cos\theta>0$에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 같다.
이때 $\sin\theta+\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$

즉 θ는 제3사분면의 각이므로

$\tan\theta>0$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta-\tan\theta<0$이므로

$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\geq0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$

$$|\cos\theta|+\sqrt{\sin^2\theta}-\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta-\tan\theta)^2}$$
$$=-\cos\theta-\sin\theta-\{-(\sin\theta+\cos\theta-\tan\theta)\}$$
$$=-\cos\theta-\sin\theta+\sin\theta+\cos\theta-\tan\theta$$
$$=-\tan\theta$$

답 $-\tan\theta$

05 $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}+\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}$

$=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=0$ 답 0

06 $\left(1+\tan\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)\left(1+\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}\right)$

$=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$

이므로 $A=2$

$\dfrac{1-\cos^2\theta}{\tan^2\theta}+\sin^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}+\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

이므로 $B=1$

$\therefore A+B=3$ 답 3

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서
$1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$

07 $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\dfrac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$

따라서 $\dfrac{2}{\cos^2\theta}=\dfrac{5}{2}$이므로 $\cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$

$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$

이때 $\tan^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$이므로

$\tan^2\theta=\dfrac{\dfrac{1}{5}}{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{1}{2}$ $\left(\because \pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$ 답 $\dfrac{1}{2}$

θ는 제3사분면의 각이므로
$\tan\theta>0$

08 $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=3$에서

$1-\tan\theta=3+3\tan\theta$

$4\tan\theta=-2$ $\therefore \tan\theta=-\dfrac{1}{2}$

즉 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{1}{2}$이므로

$\cos\theta=-2\sin\theta$ ...... ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+(-2\sin\theta)^2=1$

$5\sin^2\theta=1$, $\sin^2\theta=\dfrac{1}{5}$

θ는 제4사분면의 각이므로
$\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $\left(\because \dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi\right)$

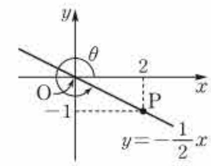
㉠에서 $\cos\theta=-2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore 5(\sin\theta+\cos\theta)=5\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

다른 풀이 $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=3$에서 $\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x$ 위의 점 P$(2, -1)$에 대하여



$\overline{OP}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

09 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

$\therefore (1+\sin^2\theta)(1+\cos^2\theta)$

$=1+\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1+1+\left(\dfrac{3}{8}\right)^2=\dfrac{137}{64}$ 답 $\dfrac{137}{64}$

계수가 실수이고 일차항의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근은
$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

10 $\sin\theta+\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\sin^2\theta\cos^2\theta$

$\therefore (\sin\theta\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta-1=0$

$\sin\theta\cos\theta=t$ $(t<0)$로 놓으면

$t^2-2t-1=0$ $\therefore t=1-\sqrt{2}$ $(\because t<0)$

$\therefore \tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$

$=-1-\sqrt{2}$

$\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$
$=\dfrac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$
$=-(1+\sqrt{2})$
$=-1-\sqrt{2}$

따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로

$a+b=-2$ 답 -2

11 $2x^2+\sqrt{2}x+k=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$,
$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이 식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$

$$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

이때 $\sin\theta<\cos\theta$에서 $\sin\theta-\cos\theta<0$이므로

$$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$ 답 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

참고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{2}$$

따라서 $\frac{k}{2}=-\frac{1}{4}$이므로 $\quad k=-\frac{1}{2}$

12 $8x^2-4x+a=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\cos\theta+\sin\theta)+(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{1}{2} \quad \cdots ㉠$$

$$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{a}{8} \quad \cdots ㉡$$

㉠에서 $\quad 2\cos\theta=\frac{1}{2} \quad \therefore \cos\theta=\frac{1}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 $\sin\theta$의 값을 구한 후 a의 값을 구할 수도 있다.

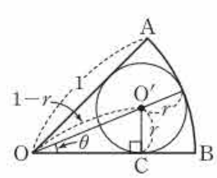
㉡의 좌변을 간단히 하면

$$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)$$
$$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$$
$$=2\cos^2\theta-1$$

즉 $2\cos^2\theta-1=\frac{a}{8}$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{4}$을 대입하면

$$\frac{a}{8}=\frac{1}{8}-1=-\frac{7}{8} \quad \therefore a=-7$$ 답 -7

13 오른쪽 그림과 같이 부채꼴 AOB의 중심각의 이등분선은 내접원의 중심 O′을 지나므로



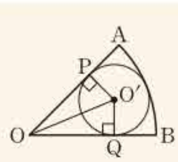
$$\overline{OO'}=1-r$$

점 O′에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 C라 하면 직각삼각형 O′OC에서

$$\sin\theta=\frac{r}{1-r}, \quad (1-r)\sin\theta=r$$
$$(1+\sin\theta)r=\sin\theta$$
$$\therefore r=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$$ 답 ④

쌤 한마디

오른쪽 그림과 같이 부채꼴 AOB와 내접원 O'에 대하여 내접원의 중심 O′에서 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면



△OO′P≡△OO′Q (RHS 합동)

따라서 ∠O′OP=∠O′OQ=$\frac{1}{2}$∠AOB이므로 부채꼴 AOB의 중심각의 이등분선은 내접원의 중심 O′을 지난다.

14 $\overline{OA}=\overline{OB}=3$이므로

원 O의 반지름의 길이

$$\overline{OQ}=\overline{OB}\cos\theta=3\cos\theta$$
$$\overline{BQ}=\overline{OB}\sin\theta=3\sin\theta$$
$$\overline{AP}=\overline{OA}\tan\theta=3\tan\theta$$

$2\overline{OQ}=\overline{AP}\cdot\overline{BQ}$에서

$$2\cdot3\cos\theta=3\tan\theta\cdot3\sin\theta$$

$$\tan\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}, \quad \tan^2\theta=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$ 답 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

중단원 마무리

63쪽

01 전략 α가 제1사분면의 각이면 $2n\pi<\alpha<2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)임을 이용한다.

풀이 2θ가 제1사분면의 각이므로

$$2n\pi<2\theta<2n\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\therefore n\pi<\theta<n\pi+\frac{\pi}{4}$$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$$2k\pi<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

따라서 θ는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$$(2k+1)\pi<\theta<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$$
$$\therefore 2k\pi+\pi<\theta<2k\pi+\frac{5}{4}\pi$$

따라서 θ는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

답 제1사분면 또는 제3사분면

02 전략 각 θ를 나타내는 동경이 존재하는 사분면을 구할 때에는 $\theta=360°\times n+\alpha°$ (n은 정수, $0°\le\alpha°<360°$) 꼴로 나타낸다.

풀이 ① $810°=360°\times2+90°$이므로 $810°$의 동경이 나타내는 일반각은

$$360°\times n+90° \ (n\text{은 정수})$$

② $-\frac{7}{4}\pi=2\pi\cdot(-1)+\frac{\pi}{4}$이므로 $-\frac{7}{4}\pi$의 동경이 나타내는 일반각은

$$2n\pi+\frac{\pi}{4} \ (n\text{은 정수})$$

③ $-550°=360°\times(-2)+170°$이므로 $-550°$는 제2사분면의 각이다.

④ $210°=210\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{7}{6}\pi$

⑤ $-\frac{31}{9}\pi=2\pi\cdot(-2)+\frac{5}{9}\pi$, $\frac{23}{9}\pi=2\pi\cdot1+\frac{5}{9}\pi$이므로 $-\frac{31}{9}\pi$, $\frac{5}{9}\pi$, $\frac{23}{9}\pi$를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

답 ③

03 전략 두 각 α, β를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이면 $\alpha+\beta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)임을 이용한다.

풀이 각 θ를 나타내는 동경과 각 9θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+9\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$10\theta=(2n+1)\pi$

$\therefore \theta=\frac{2n+1}{10}\pi$ ...... ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{2n+1}{10}\pi<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<2n+1<5$, $\quad -\frac{1}{2}<n<2$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{10}$ 또는 $\theta=\frac{3}{10}\pi$

따라서 모든 각 θ의 크기의 합은

$\frac{\pi}{10}+\frac{3}{10}\pi=\frac{2}{5}\pi$

답 ④

04 전략 $\alpha+\beta$ 또는 $\alpha-\beta$를 구하여 두 동경의 위치 관계를 확인한다.

풀이 ㄱ. $\alpha+\beta=\frac{11}{5}\pi+\left(-\frac{26}{5}\pi\right)=-3\pi$

$=2\pi\cdot(-2)+\pi$

따라서 두 동경 OP, OQ는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $\alpha+\beta=\frac{7}{6}\pi+\frac{10}{3}\pi=\frac{9}{2}\pi=2\pi\cdot2+\frac{\pi}{2}$

따라서 두 동경 OP, OQ는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $\alpha-\beta=\frac{15}{4}\pi-\left(-\frac{13}{4}\pi\right)=7\pi=2\pi\cdot3+\pi$

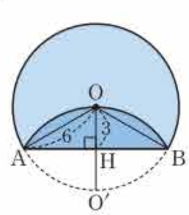
따라서 두 동경 OP, OQ는 원점에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

05 전략 접힌 부분에서 직각삼각형을 찾고 삼각비를 이용하여 호에 대한 중심각의 크기를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 접힌 선분의 양 끝 점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{OH}}$의 연장선과 접기 전의 원주와의 교점을 O′이라 하면



$\overline{\mathrm{OA}}=6$, $\overline{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OO'}}=\frac{1}{2}\cdot6=3$

Q BOX

원주 위의 한 점이 원의 중심 O와 겹쳐지도록 접었으므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{HO'}}$

두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

직각삼각형 OAH에서

$\cos(\angle\mathrm{AOH})=\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

이므로

$\angle\mathrm{AOH}=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<\angle\mathrm{AOH}<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \angle\mathrm{AOB}=2\angle\mathrm{AOH}=\frac{2}{3}\pi$

따라서 접힌 활꼴의 호의 길이는 $\widehat{\mathrm{AB}}$의 길이와 같으므로

$6\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi$

답 4π

06 전략 먼저 △AOC의 넓이가 16임을 이용하여 부채꼴 AOB의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 부채꼴 AOB의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 AOC에서

$\overline{\mathrm{OC}}=r\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}r$

이때 △AOC의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}r\cdot\sin\frac{\pi}{4}=16$

$\frac{1}{4}r^2=16$, $\quad r^2=64$

$\therefore r=8\ (\because r>0)$ ··· ❶

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=8$, $\overline{\mathrm{OC}}=4\sqrt{2}$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot8^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot(4\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4}=8\pi-4\pi$

$=4\pi$ ··· ❷

답 4π

단계	채점 기준	비율
❶	부채꼴 AOB의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	60 %
❷	색칠한 부분의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

07 전략 부채꼴 APB의 둘레의 길이와 원 O의 둘레의 길이가 같음을 이용한다.

풀이 부채꼴 APB가 원 O에 접하며 한 바퀴 돌아서 중심 P가 제자리에 왔으므로 부채꼴 APB의 둘레의 길이와 원 O의 둘레의 길이는 같다.

부채꼴 APB의 둘레의 길이는

$2\cdot2+2\theta=4+2\theta$

반지름의 길이가 1인 원 O의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot1=2\pi$

따라서 $4+2\theta=2\pi$이므로

$2\theta=2\pi-4 \qquad \therefore \theta=\pi-2$

답 ②

08 전략 원뿔의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 밑면인 원의 둘레의 길이가 같음을 이용한다.

풀이 부채꼴 모양의 종이의 호의 길이는 고깔모자의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같다.

이때 밑면인 원의 반지름의 길이가 8 cm이므로 밑면인 원의 둘레의 길이는

$$2\pi\cdot 8=16\pi\ (\text{cm})$$

따라서 부채꼴 모양의 종이의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 16\pi=160\pi\ (\text{cm}^2)$$ 답 ①

09 전략 점 P의 좌표를 구한 후 삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin\theta$, $\tan\theta$의 값을 구한다.

풀이 $y=-\frac{4}{3}x$를 $x^2+y^2=100$에 대입하면

$$x^2+\left(-\frac{4}{3}x\right)^2=100,\qquad x^2=36$$

$$\therefore x=-6\ (\because x<0)$$

따라서 점 P의 좌표는 $(-6,\ 8)$이고 $\overline{\text{OP}}=10$이므로

$$\sin\theta=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},\ \tan\theta=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}=\frac{5}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)=2$$ 답 2

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이면
$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$
$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이면
$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

점 P는 제2사분면 위에 있으므로 x좌표가 음수이다.

$-\frac{4}{3}\cdot(-6)=8$

10 전략 조건을 만족시키는 각 θ가 제몇 사분면의 각인지 구한다.

풀이 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

이때 $0<\theta<2\pi$이므로 $\quad \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

① $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로 $\quad \sin\theta\cos\theta>0$

② $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 $\quad \sin\theta\tan\theta<0$

③ $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\quad \frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3}{4}\pi$

즉 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이므로

$$\tan\frac{\theta}{2}<0$$

④ $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\quad 2\pi<2\theta<3\pi$

즉 2θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이므로

$$\sin 2\theta>0$$

⑤ $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\quad \frac{3}{2}\pi<\theta+\frac{\pi}{2}<2\pi$

즉 $\theta+\frac{\pi}{2}$는 제4사분면의 각이므로

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)>0$$

답 ④

$2\pi=2\pi\cdot 1+0$, $3\pi=2\pi\cdot 1+\pi$이므로 2θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

11 전략 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

풀이 $\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}=1$에서

$$\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{(1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta}=1$$

$$\frac{\sin^2\theta\cos\theta+(1-\cos\theta)^2\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$$

$$\frac{(\sin^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$$

$$\frac{2(1-\cos\theta)\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$$

$$\therefore 2\cos\theta=\sin\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$(2\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1,\qquad 5\cos^2\theta=1$$

$$\therefore \cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

이때 $\pi<\theta<2\pi$이고 ㉠에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 부호가 같으므로

$$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$$

따라서 $\cos\theta<0$이므로 $\quad \cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 답 ②

12 전략 $ab\neq0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$임을 이용한다.

풀이 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서 $\sin\theta=\cos\theta\tan\theta$이므로

$$\sqrt{\cos\theta}\sqrt{\tan\theta}=-\sqrt{\sin\theta}=-\sqrt{\cos\theta\tan\theta}$$

$$\therefore \cos\theta<0,\ \tan\theta<0$$

$|\tan\theta|=2$에서 $\quad \tan\theta=-2$

즉 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-2$이므로

$$\sin\theta=-2\cos\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$(-2\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$$

$$5\cos^2\theta=1,\qquad \cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

$$\therefore \cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}\ (\because \cos\theta<0)$$

㉠에서 $\sin\theta=-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$$ 답 ④

13 전략 $\text{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$라 하고 직선 l의 방정식을 세운다.

풀이 점 P의 좌표를 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$라 하면 직선 l의 방정식은

$$y-\sin\theta=x-\cos\theta$$

$$\therefore y=x+\sin\theta-\cos\theta \qquad \cdots ❶$$

포물선 $y=x^2+1$과 직선 l이 접하므로 이차방정식

$x^2+1=x+\sin\theta-\cos\theta$, 즉

$x^2-x+1-\sin\theta+\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4(1-\sin\theta+\cos\theta)=0$$

$$-3+4(\sin\theta-\cos\theta)=0$$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{3}{4} \qquad \cdots ❷$$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접한다.
➡ 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 하면 $D=0$

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{3}{4}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{9}{16}$$

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{16}$$

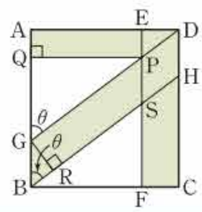
$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{7}{32}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{7}{32}$

단계	채점 기준	비율
❶	직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❷	$\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	$\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

14 전략 삼각비를 이용하여 $\overline{GB}$, $\overline{PQ}$, $\overline{AQ}$의 길이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 G에서 $\overline{BH}$에 내린 수선의 발을 R, $\overline{BH}$와 $\overline{EF}$의 교점을 S라 하자.



△GBR에서 $\overline{GR}=4$이므로

$$\tan\theta=\frac{4}{\overline{BR}}$$

$$\therefore \overline{BR}=\frac{4}{\tan\theta}=4\cdot\frac{3}{4}=3$$

$$\therefore \overline{GB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

△AGD에서 $\tan\theta=\dfrac{\overline{AD}}{12}$이므로

$$\overline{AD}=12\tan\theta=12\cdot\frac{4}{3}=16$$

$$\therefore \overline{PQ}=16-4=12$$

또 △QGP에서 $\tan\theta=\dfrac{12}{\overline{GQ}}$이므로

$$\overline{GQ}=\frac{12}{\tan\theta}=12\cdot\frac{3}{4}=9$$

$$\therefore \overline{AQ}=12-9=3$$

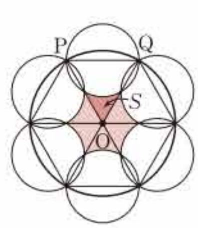
따라서 구하는 넓이는 세 사각형 AQPE, GBSP, EFCD의 넓이의 합과 같으므로

$$3\cdot12+5\cdot12+17\cdot4=36+60+68=164$$

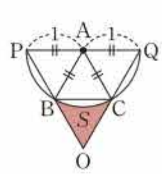
답 164

15 전략 보조선을 그어 색칠한 부분을 여러 개의 도형으로 나눈다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 정육각형을 6개의 정삼각형으로 나눈 후 이 중 1개의 정삼각형을 POQ라 하고, 정삼각형 POQ에 속하는 색칠한 부분의 넓이를 S라 하자.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{PQ}$를 지름으로 하는 원의 중심을 A라 하고 정삼각형 POQ와 $\overline{PQ}$를 지름으로 하는 원의 두 교점을 B, C라 하면



$$S=\triangle POQ-\{\triangle PBA+\triangle ACQ+(\text{부채꼴 BAC의 넓이})\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot2^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot1^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot1^2+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$$

Q BOX

$\overline{BH}\,/\!/\,\overline{GD}$이므로 $\angle GBR=\angle QGP=\theta$ (동위각)

$\overline{GB}=\sqrt{\overline{BR}^2+\overline{GR}^2}$

$\overline{PQ}=\overline{BF}=\overline{BC}-\overline{FC}$

$\overline{AQ}=\overline{AG}-\overline{GQ}$

$\overline{GB}\cdot\overline{PQ}$

$\overline{EF}=\overline{AB}=\overline{AG}+\overline{GB}=12+5=17$

$\angle APB=60°$이고 $\overline{AP}=\overline{AB}=1$이므로 $\angle ABP=60°$
즉 △APB는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

따라서 S는 전체 색칠한 부분의 넓이의 $\dfrac{1}{6}$이므로 구하는 넓이는

$$6S=6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-\pi$$

답 ①

16 전략 로그의 성질을 이용하여 x를 삼각함수에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{1}{2}(\log_2 x-4)$에서

$$2\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\log_2 x-\log_2 2^4$$

$$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)^2=\log_2\frac{x}{16}$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{x}{16}$$

$$\therefore x=16(\sin\theta+\cos\theta)^2$$
$$=16(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$=16(1+2\sin\theta\cos\theta) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\log_2\sin\theta+\log_2\cos\theta=-4$에서

$$\log_2\sin\theta\cos\theta=-4$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta=2^{-4}=\frac{1}{16} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$x=16\left(1+2\cdot\frac{1}{16}\right)=18$$

답 18

06 삼각함수의 그래프

Lecture 11 삼각함수의 그래프

67쪽

01 함수 $f(x)$의 주기가 3이므로

$f(x+3)=f(x)$

따라서

$f(13)=f(10)=f(7)=f(4)=f(1)=1,$

$f(14)=f(11)=f(8)=f(5)=f(2)=-3$

이므로

$f(13)+f(14)=-2$ 답 -2

02 함수 $f(x)$의 주기가 5이므로

$f(x+5)=f(x)$

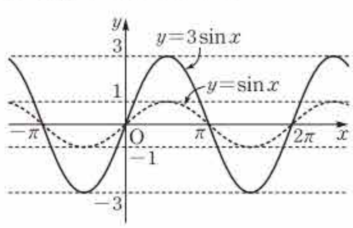
$\therefore f(24)=f(19)=f(14)=f(9)=f(4)$

$0\le x<5$에서 $f(x)=x^2-1$이므로

$f(24)=f(4)=4^2-1=15$ 답 15

03 $y=3\sin x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배 한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y\mid -3\le y\le 3\}$, 주기는 2π이다.



답 풀이 참조

> $y=a\sin x\ (a>0)$의 그래프
> ➡ $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 a배 하여 그린다.

쌤한마디

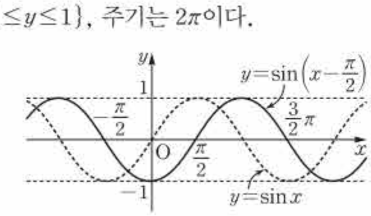
삼각함수의 치역과 주기

① 삼각함수의 그래프를 y축의 방향으로 확대하거나 축소하면 주기가 변하지 않고, x축의 방향으로 확대하거나 축소하면 치역이 변하지 않는다.

② 삼각함수의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 치역과 주기가 모두 변하지 않고, y축의 방향으로 평행이동하면 주기가 변하지 않는다.

04 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$, 주기는 2π이다.

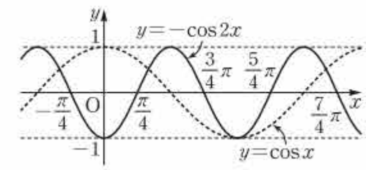


답 풀이 참조

> $y=\cos ax\ (a>0)$의 그래프
> ➡ $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{a}$배 하여 그린다.

05 $y=-\cos 2x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

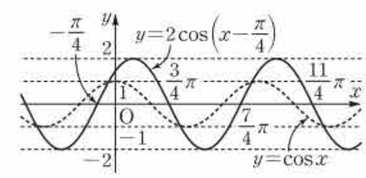
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$, 주기는 π이다.



답 풀이 참조

06 $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

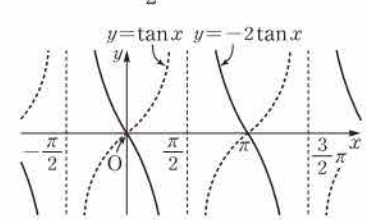
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y\mid -2\le y\le 2\}$, 주기는 2π이다.



답 풀이 참조

07 $y=-2\tan x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 π, 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

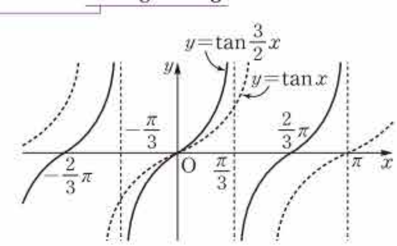


답 풀이 참조

08 $y=\tan\frac{3}{2}x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{3}$배 한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 $\frac{2}{3}\pi$, 점근선의 방정식은 $x=\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{3}$ (n은 정수)이다.

> $\frac{3}{2}x=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
> $x=\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{3}$

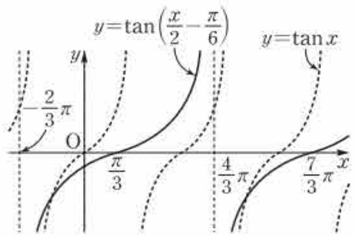


답 풀이 참조

09 $y=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 2π, 점근선의 방정식은 $x=2n\pi+\frac{4}{3}\pi$ (n은 정수)이다.

Q BOX: $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$\frac{x}{2}=n\pi+\frac{2}{3}\pi$
$\therefore x=2n\pi+\frac{4}{3}\pi$

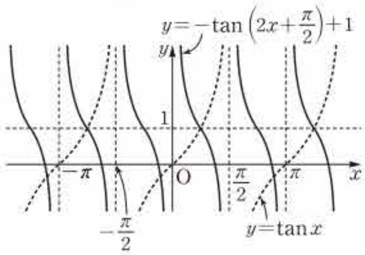


답 풀이 참조

10 $y=-\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+1=-\tan2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 x축에 대하여 대칭이동하고, x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식은 $x=\frac{n}{2}\pi$ (n은 정수)이다.

Q BOX: $2x+\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$2x=n\pi$
$\therefore x=\frac{n}{2}\pi$



답 풀이 참조

11 $y=-4\sin3x$의 최댓값은 4, 최솟값은 -4이고 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이다.

답 최댓값: 4, 최솟값: -4, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

12 $y=\frac{1}{5}\cos(-4x)$의 최댓값은 $\frac{1}{5}$, 최솟값은 $-\frac{1}{5}$이고 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이다.

답 최댓값: $\frac{1}{5}$, 최솟값: $-\frac{1}{5}$, 주기: $\frac{\pi}{2}$

13 $y=-\tan\frac{x}{6}$의 최댓값, 최솟값은 없고 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{6}}=6\pi$이다.

답 최댓값, 최솟값은 없다., 주기: 6π

14 $y=\frac{2}{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$의 최댓값은 $\frac{2}{3}$, 최솟값은 $-\frac{2}{3}$이고 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

답 최댓값: $\frac{2}{3}$, 최솟값: $-\frac{2}{3}$, 주기: π

15 $y=-2\cos\left(\frac{x}{2}-\pi\right)+5$의 최댓값은 $2+5=7$, 최솟값은 $-2+5=3$이고 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

답 최댓값: 7, 최솟값: 3, 주기: 4π

16 $y=\tan4\pi x-3$의 최댓값, 최솟값은 없고 주기는 $\frac{\pi}{4\pi}=\frac{1}{4}$이다.

답 최댓값, 최솟값은 없다., 주기: $\frac{1}{4}$

17 $f(x)=a\sin\pi x+b$의 최댓값이 3이고 $a>0$이므로

$a+b=3$ …… ㉠

$f\left(\frac{1}{6}\right)=2$이므로 $\frac{1}{2}a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

답 $a=2$, $b=1$

표준+발전 유형 Q+Q

01 함수 $f(x)$의 주기가 p이므로

$f(x+p)=f(x)$

$\therefore f(p)=f(0)=\sin0+\cos0-1$
$=0+1-1=0$

답 ④

02 조건 (가)에서 $f(x+1)=f(x-1)$의 양변에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x+2)=f(x)$

$\therefore f(21)=f(19)=f(17)=\cdots=f(-1)$

조건 (나)에 의하여

$f(-1)=\sin(-\pi)=0$

$\therefore f(21)=f(-1)=0$

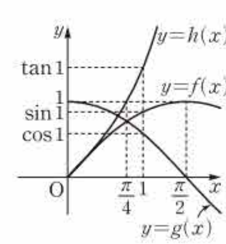
답 0

03 $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$이므로 오른쪽 그림에서

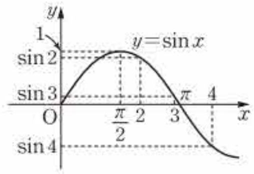
$\cos1<\sin1<\tan1$

$\therefore g(1)<f(1)<h(1)$

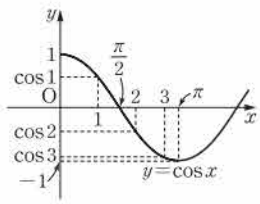
답 ③



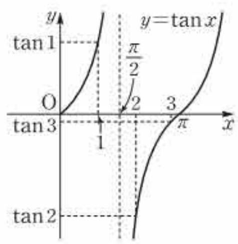
04 ㄱ. $\frac{\pi}{2}<2<3<\pi<4$ 이므로 오른쪽 그림에서 $\sin 4<\sin 3<\sin 2$ 이다.



ㄴ. $0<1<\frac{\pi}{2}<2<3<\pi$ 이므로 오른쪽 그림에서 $\cos 3<\cos 2<\cos 1$ 이다.



ㄷ. $0<1<\frac{\pi}{2}<2<3<\pi$ 이므로 오른쪽 그림에서 $\tan 2<\tan 3<\tan 1$ 이다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

05 $y=\sin x$의 그래프에서

$\frac{a+c}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore a+c=\pi$

$y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$의 그래프가 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 이 그래프와 직선 $y=k$의 두 교점도 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다.

$y=\cos x$의 그래프에서

$\frac{b+d}{2}=\pi$ $\quad\therefore b+d=2\pi$

$\therefore a-b+c-d=(a+c)-(b+d)$

$=\pi-2\pi=-\pi$ 답 $-\pi$

쌤한마디

삼각함수의 그래프의 대칭성

① $f(x)=\sin x\ (0\le x\le\pi)$에서

$f(a)=f(b)=k$ ⇨ $\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}$

⇨ $a+b=\pi$ (단, $a\neq b$)

② $f(x)=\cos x\ (0\le x\le 2\pi)$에서

$f(a)=f(b)=k$ ⇨ $\frac{a+b}{2}=\pi$

⇨ $a+b=2\pi$ (단, $a\neq b$)

06 $y=8\sin\frac{\pi}{6}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$이므로 두 점 B, C는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

이때 $\overline{BC}=4$이므로 $\quad$ B$(1, 0)$, C$(5, 0)$

$x=1$일 때, $\quad y=8\sin\frac{\pi}{6}=8\cdot\frac{1}{2}=4$

$\therefore$ A$(1, 4)$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$4\cdot 4=16$ 답 16

07 $y=5\sin(\pi x-\pi)-4=5\sin\pi(x-1)-4$의 그래프는 $y=5\sin\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=1$, $n=-4$이므로

$m-n=5$ 답 5

08 $y=-\cos 7x+2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

y 대신 $-y$를 대입한다.

$-y=-\cos 7x+2$ $\quad\therefore y=\cos 7x-2$

이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

y 대신 $y-4$를 대입한다.

$y-4=\cos 7x-2$ $\quad\therefore y=\cos 7x+2$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$a+b=3$ 답 3

09 ① $y=3\cos(2x-4)=3\cos 2(x-2)$의 그래프는 $y=3\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

③ $x=2$일 때,

$y=3\cos(2\cdot 2-4)=3\cos 0=3$

따라서 그래프는 점 $(2, 3)$을 지난다.

④ 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

답 ①

10 $y=2\sin\frac{\pi}{3}x-1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+5=2\sin\frac{\pi}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$

$\therefore y=2\sin\frac{\pi}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-6$

이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이고 최댓값은 $2-6=-4$이므로

$a=6$, $b=-4$

$\therefore ab=-24$ 답 -24

11 조건 (가)에서 $f(x)$의 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$-a+c=-2$ $\quad$ …… ㉠

조건 (나)에서 $f(x)$의 주기가 4π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=a\cos\frac{x}{2}+c$이고 조건 (다)에서

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=4$이므로

$a\cos\frac{\pi}{3}+c=4$

$\therefore \frac{1}{2}a+c=4$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=4$, $c=2$

$\therefore abc=4$ 답 4

12 $y=6\tan(ax+b)+1$의 주기가 4π이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=4\pi \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 $y=6\tan\left(\frac{x}{4}+b\right)+1$이고, 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{x}{4}+b=m\pi+\frac{\pi}{2}$ (m은 정수)

$\frac{x}{4}=m\pi+\frac{\pi}{2}-b$

$\therefore x=4m\pi+2\pi-4b$

그런데 주어진 점근선의 방정식이 $x=4n\pi$ (n은 정수)이므로

$2\pi-4b=4k\pi$ (k는 정수)

이어야 한다.

이때 $0<b<\pi$이므로 $b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\pi}{2}\cdot 4=2\pi$ 답 ④

$2\pi-4b=4k\pi$에서

$b=\frac{1-2k}{2}\pi$

$0<b<\pi$이므로

$0<\frac{1-2k}{2}<1$

$\therefore -\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

따라서 $k=0$이므로

$b=\frac{\pi}{2}$

13 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로

$a=3$

또 주기가 $\frac{5}{6}\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

따라서 주어진 함수는 $y=3\sin(2x-c)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$을 지나므로

$0=3\sin\left(\frac{2}{3}\pi-c\right), \qquad \sin\left(\frac{2}{3}\pi-c\right)=0$

이때 $-\frac{\pi}{3}<\frac{2}{3}\pi-c<\frac{2}{3}\pi$이므로

$\frac{2}{3}\pi-c=0 \qquad \therefore c=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore abc=4\pi$ 답 4π

$0<c<\pi$에서

$-\pi<-c<0$

이므로

$-\frac{\pi}{3}<\frac{2}{3}\pi-c<\frac{2}{3}\pi$

14 주어진 함수의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore a=2$

따라서 주어진 함수는 $y=\tan(2x+b)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$을 지나므로

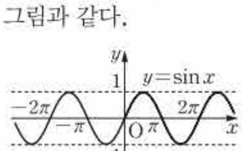
$0=\tan\left(\frac{\pi}{2}+b\right)$

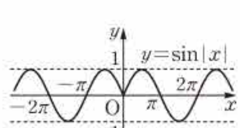
이때 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+b<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{2}+b=0 \qquad \therefore b=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=-\pi$ 답 ③

15 ㄱ. $y=\sin x$, $y=\sin|x|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.

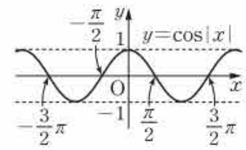


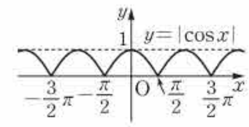


$y=\sin x$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 그린 후 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.

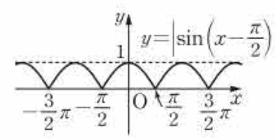
$y=\cos x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

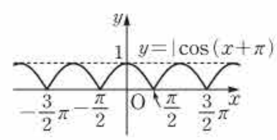
ㄴ. $y=\cos|x|$, $y=|\cos x|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.





ㄷ. $y=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|$의 그래프는 $y=|\sin x|$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이고, $y=|\cos(x+\pi)|$의 그래프는 $y=|\cos x|$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 것이므로 두 함수의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.





이상에서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

16 $y=|\tan ax|$의 주기는 $\frac{\pi}{a}$ ($\because a>0$)

$y=-2\cos 6x$의 주기는 $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

따라서 $\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{3}$이므로

$a=3$ 답 3

쌤 한마디

절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 주기

① $y=|\sin x|$의 주기: π

➡ $y=|\sin bx|$의 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

② $y=|\cos x|$의 주기: π

➡ $y=|\cos bx|$의 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

③ $y=|\tan x|$의 주기: π

➡ $y=|\tan bx|$의 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

$y=f(x)$의 주기는 $y=|\sin bx|$의 주기와 같다.

17 $f(x)=a|\sin bx|+c$의 주기가 $\frac{\pi}{4}$이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{4} \qquad \therefore b=4$

$\therefore f(x)=a|\sin 4x|+c$

$f(x)$의 최댓값이 1이고 $a>0$이므로

$a+c=1$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{24}\right)=-2$이므로

$a\left|\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{24}\right)\right|+c=-2$

$\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{24}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{2}a+c=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6,\ c=-5$

따라서 $f(x)=6|\sin 4x|-5$이므로

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=6\left|\sin\left(4\cdot\frac{3}{2}\pi\right)\right|-5=6\cdot 0-5=-5$$

답 ②

Lecture 12 삼각함수의 성질

72쪽

01 $\sin\frac{13}{6}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

02 $\cos\frac{19}{3}\pi=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

03 $\cos 750^\circ=\cos(360^\circ\times 2+30^\circ)$

$=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

04 $\tan 405^\circ=\tan(360^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ=1$ 답 1

05 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

06 $\tan\left(-\frac{25}{6}\pi\right)=-\tan\frac{25}{6}\pi=-\tan\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan\left(-\frac{25}{6}\pi\right)$
$=\tan\left(-4\pi-\frac{\pi}{6}\right)$
$=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
$=-\tan\frac{\pi}{6}$
와 같이 구할 수도 있다.

07 $\sin 690^\circ=\sin(360^\circ\times 2-30^\circ)=\sin(-30^\circ)$

$=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

08 $\cos 315^\circ=\cos(360^\circ-45^\circ)=\cos(-45^\circ)$

$=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

09 $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

다른 풀이 $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

10 $\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

11 $\sin 225^\circ=\sin(180^\circ+45^\circ)$

$=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

12 $\tan 135^\circ=\tan(90^\circ+45^\circ)=-\frac{1}{\tan 45^\circ}=-1$

답 -1

다른 풀이 $\tan 135^\circ=\tan(180^\circ-45^\circ)$

$=-\tan 45^\circ=-1$

13 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)+\cos(2\pi+\theta)=-\cos\theta+\cos\theta$

$=0$ 답 0

쌤한마디

삼각함수의 변형 방법

$\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ 또는 $90^\circ\times n\pm\theta$ (n은 정수) 꼴의 삼각함수의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) n이 짝수일 때,

sin → sin, cos → cos, tan → tan

n이 홀수일 때,

sin → cos, cos → sin, tan → $\frac{1}{\tan}$

로 삼각함수를 정한다.

(ii) θ를 예각으로 생각하여 $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ 또는 $90^\circ\times n\pm\theta$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면에서 처음 주어진 삼각함수의 부호가 양이면 $+$, 음이면 $-$를 붙인다.

14 $\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=(-\sin\theta)^2+\cos^2\theta$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 답 1

15 $\sin 741^\circ=\sin(360^\circ\times 2+21^\circ)=\sin 21^\circ$

삼각함수표에서 $\sin 21^\circ=0.3584$이므로

$\sin 741^\circ=0.3584$ 답 0.3584

16 $\cos 68^\circ=\cos(90^\circ-22^\circ)=\sin 22^\circ$

삼각함수표에서 $\sin 22^\circ=0.3746$이므로

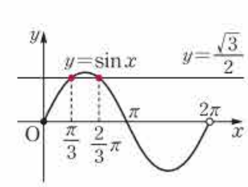
$\cos 68^\circ=0.3746$ 답 0.3746

17 $\tan 159^\circ=\tan(180^\circ-21^\circ)=-\tan 21^\circ$

삼각함수표에서 $\tan 21^\circ=0.3839$이므로

$\tan 159^\circ=-0.3839$ 답 -0.3839

18 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표가

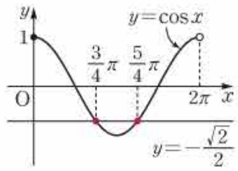


$\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

19 $2\cos x+\sqrt{2}=0$에서 $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

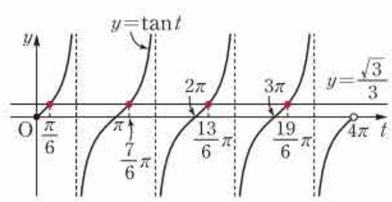
오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$이므로



$x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ 답 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

20 $2x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le t<4\pi$이고 주어진 방정식은

$\tan t=\frac{\sqrt{3}}{3}$



위의 그림과 같이 $0\le t<4\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$, $\frac{19}{6}\pi$이므로

$2x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $2x=\frac{7}{6}\pi$

또는 $2x=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $2x=\frac{19}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{7}{12}\pi$

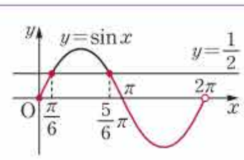
또는 $x=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{12}\pi$

답 $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{12}\pi$

QBOX

$y=\tan 2x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표를 구하여 방정식의 해를 구할 수도 있다.

21 부등식 $\sin x\le\frac{1}{2}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서

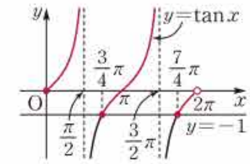


$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

답 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

삼각부등식을 풀 때에는 부등호를 등호로 바꾸어 삼각방정식을 푼 후 그래프를 이용하여 부등식을 만족시키는 미지수의 값의 범위를 구한다.

22 부등식 $\tan x\ge-1$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=-1$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서



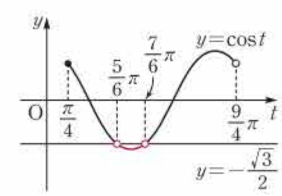
$0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi\le x<2\pi$

답 $0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi\le x<2\pi$

23 $x+\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{4}\le t<\frac{9}{4}\pi$이고 주어진 부등식은

$\cos t<-\frac{\sqrt{3}}{2}$

부등식 $\cos t<-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{4}\le t<\frac{9}{4}\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분의 t의 값의 범위이므로 위의 그림에서



$\frac{5}{6}\pi<t<\frac{7}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{7}{6}\pi$

$\therefore \frac{7}{12}\pi<x<\frac{11}{12}\pi$ 답 $\frac{7}{12}\pi<x<\frac{11}{12}\pi$

표준+발전 **유형 Q+Q** 73쪽

01 $\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{7}{6}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)=\cos\frac{10}{3}\pi=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{7}{4}\pi=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

$\therefore$ (주어진 식) $=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ 답 ⑤

02 ㄱ. $\sin 300°=\sin(90°\times3+30°)$

$=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 480°=\cos(90°\times5+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$

$\tan 585°=\tan(90°\times6+45°)=\tan 45°=1$

$\therefore \sqrt{3}\sin 300° - \cos 480° + \tan 585°$

$= \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$

$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 0$

ㄴ. $\sin\frac{7}{3}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{19}{6}\pi = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{3}{4}\pi = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

$\therefore \sin\frac{7}{3}\pi + \cos\frac{19}{6}\pi + \tan\frac{3}{4}\pi$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1) = -1$

ㄷ. $\tan 20° = \tan(90° - 70°) = \frac{1}{\tan 70°}$

$\tan 160° = \tan(90° + 70°) = -\frac{1}{\tan 70°}$

$\therefore (\tan 70° + \tan 20°)^2 - (\tan 70° + \tan 160°)^2$

$= \left(\tan 70° + \frac{1}{\tan 70°}\right)^2$

$\quad - \left(\tan 70° - \frac{1}{\tan 70°}\right)^2$

$= \tan^2 70° + 2 + \frac{1}{\tan^2 70°}$

$\quad - \left(\tan^2 70° - 2 + \frac{1}{\tan^2 70°}\right)$

$= 4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

03 $\theta - \frac{\pi}{6} = A$라 하면 $\theta = A + \frac{\pi}{6}$이므로

$\theta + \frac{\pi}{3} = A + \frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos^2\left(A + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2 A$

$= (-\sin A)^2 + \cos^2 A$

$= \sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 답 1

04 $\tan 89° = \tan(90° - 1°) = \frac{1}{\tan 1°}$

$\tan 88° = \tan(90° - 2°) = \frac{1}{\tan 2°}$

$\vdots$

$\tan 46° = \tan(90° - 44°) = \frac{1}{\tan 44°}$

$\therefore \tan 1° \times \tan 2° \times \cdots \times \tan 88° \times \tan 89°$

$= \tan 1° \times \tan 2° \times \cdots \times \tan 44° \times \tan 45°$

$\times \frac{1}{\tan 44°} \times \cdots \times \frac{1}{\tan 2°} \times \frac{1}{\tan 1°}$

$= \tan 45° = 1$ 답 1

05 $10\theta = 2\pi$, 즉 $5\theta = \pi$이므로 임의의 각 x에 대하여

$\sin(5\theta + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$

$\therefore a = \sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin 10\theta$

$= (\sin\theta + \sin 6\theta) + (\sin 2\theta + \sin 7\theta)$

$\quad + \cdots + (\sin 5\theta + \sin 10\theta)$

$= (\sin\theta - \sin\theta) + (\sin 2\theta - \sin 2\theta)$

$\quad + \cdots + (\sin 5\theta - \sin 5\theta)$

$= 0$

> $\sin 6\theta = \sin(5\theta + \theta)$
> $= -\sin\theta$

한편 임의의 각 x에 대하여

$\cos(5\theta + x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$

$\therefore b = \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos 10\theta$

$= (\cos\theta + \cos 6\theta) + (\cos 2\theta + \cos 7\theta)$

$\quad + \cdots + (\cos 5\theta + \cos 10\theta)$

$= (\cos\theta - \cos\theta) + (\cos 2\theta - \cos 2\theta)$

$\quad + \cdots + (\cos 5\theta - \cos 5\theta)$

$= 0$

> $\cos 6\theta = \cos(5\theta + \theta)$
> $= -\cos\theta$

$\therefore a + b = 0$ 답 0

06 $\angle AOP_1 = \theta$라 하면

$\overline{P_1Q_1} = \overline{OP_1}\sin\theta = \sin\theta$,

$\overline{P_2Q_2} = \overline{OP_2}\sin 2\theta = \sin 2\theta$,

$\vdots$

$\overline{P_8Q_8} = \overline{OP_8}\sin 8\theta = \sin 8\theta$

이므로

$\overline{P_1Q_1}^2 + \overline{P_2Q_2}^2 + \overline{P_3Q_3}^2 + \cdots + \overline{P_8Q_8}^2$

$= \sin^2\theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \cdots + \sin^2 8\theta$

이때 $9\theta = \frac{\pi}{2}$이므로 임의의 각 x에 대하여

$\sin(9\theta - x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\therefore \overline{P_1Q_1}^2 + \overline{P_2Q_2}^2 + \overline{P_3Q_3}^2 + \cdots + \overline{P_8Q_8}^2$

$= (\sin^2\theta + \sin^2 8\theta) + (\sin^2 2\theta + \sin^2 7\theta)$

$\quad + (\sin^2 3\theta + \sin^2 6\theta) + (\sin^2 4\theta + \sin^2 5\theta)$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$

$\quad + (\sin^2 3\theta + \cos^2 3\theta) + (\sin^2 4\theta + \cos^2 4\theta)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ 답 ④

> $\sin 8\theta = \sin(9\theta - \theta)$
> $= \cos\theta$
> $\therefore \sin^2 8\theta = \cos^2\theta$

07 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB} = \sqrt{5^2 + (\sqrt{11})^2} = 6$

$\therefore \sin(4\alpha + 3\beta) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$

$= -\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = -\frac{5}{6}$ 답 ①

> $4\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta) + \alpha$
> $= \frac{3}{2}\pi + \alpha$

08 □ABCD가 원에 내접하므로

$A + C = \pi$, $B + D = \pi$

> 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 π이다.

ㄱ. $\sin A + \sin B + \sin C + \sin D$

$= \sin A + \sin B + \sin(\pi - A) + \sin(\pi - B)$

$= \sin A + \sin B + \sin A + \sin B$

$= 2(\sin A + \sin B) > 0$ ($\because 0 < A < \pi$, $0 < B < \pi$)

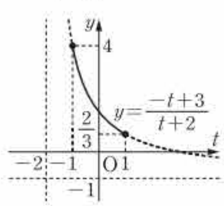
ㄴ. $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$
$=\cos A+\cos B+\cos(\pi-A)+\cos(\pi-B)$
$=\cos A+\cos B-\cos A-\cos B=0$
ㄷ. $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D$
$=\tan A+\tan B+\tan(\pi-A)+\tan(\pi-B)$
$=\tan A+\tan B-\tan A-\tan B=0$
이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

09 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos x-5$
$=-2\cos x-\cos x-5$
$=-3\cos x-5$
따라서 함수 $y=-3\cos x-5$의 최댓값은 $3-5=-2$, 최솟값은 $-3-5=-8$이므로
$M=-2,\ m=-8$
$\therefore M-m=6$ 답 6

Q BOX
$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
$=-\cos x$

10 $-1\le\sin 4x\le 1$이므로
$-6\le\sin 4x-5\le -4$
$4\le|\sin 4x-5|\le 6$
$\therefore 4a+b\le a|\sin 4x-5|+b\le 6a+b\ (\because a>0)$
따라서 주어진 함수의 최댓값이 $6a+b$, 최솟값이 $4a+b$이므로
$6a+b=7,\ 4a+b=3$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-5$
$\therefore ab=-10$ 답 ②

11 $y=\dfrac{-\cos x+3}{\cos x+2}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고
$y=\dfrac{-t+3}{t+2}=\dfrac{-(t+2)+5}{t+2}=\dfrac{5}{t+2}-1$
오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 4, $t=1$일 때 최솟값은 $\frac{2}{3}$이므로

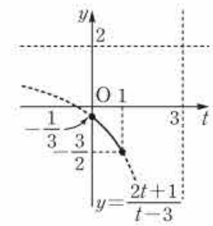


$M=4,\ m=\frac{2}{3}$
$\therefore M+m=\frac{14}{3}$ 답 $\frac{14}{3}$

쌤한마디

삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 삼각함수의 각이 $\frac{\pi}{2}-x$, $\pi+x$ 등과 같이 여러 가지로 표현되어 있으면 각을 x로 통일한다.
(ii) 삼각함수가 두 종류 이상이면 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 한 종류의 삼각함수로 통일한다.
(iii) (ii)의 삼각함수를 t로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수로 변형한다. 이때 t의 값의 범위에 주의한다.
(iv) (iii)의 t에 대한 함수의 그래프를 그려서 최댓값과 최솟값을 구한다.

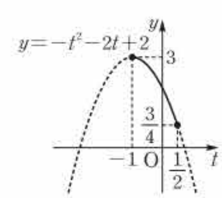
12 $y=\dfrac{2\tan x+1}{\tan x-3}$에서 $\tan x=t$로 놓으면
$\pi\le x\le\frac{5}{4}\pi$에서 $0\le t\le 1$이고
$y=\dfrac{2t+1}{t-3}=\dfrac{2(t-3)+7}{t-3}=\dfrac{7}{t-3}+2$
오른쪽 그림에서 $t=0$일 때 최댓값은 $-\frac{1}{3}$이므로



$b=-\frac{1}{3}$
이때 $t=0$, 즉 $\tan x=0$에서
$x=\pi\ \left(\because \pi\le x\le\frac{5}{4}\pi\right)$
즉 $a=\pi$이므로
$\frac{a}{b}=\pi\cdot(-3)=-3\pi$ 답 ①

$t=0$일 때 최댓값이 $-\frac{1}{3}$이므로 $a=0$, $b=-\frac{1}{3}$로 착각하지 않도록 주의한다. $t=0$일 때 x의 값을 구하면 $x=\pi$이므로 $a=\pi$이다.

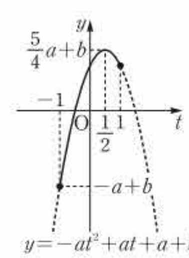
13 $y=\cos^2 x-2\sin x+1$
$=(1-\sin^2 x)-2\sin x+1$
$=-\sin^2 x-2\sin x+2$
$\sin x=t$로 놓으면 $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{6}$에서 $-1\le t\le\frac{1}{2}$이고
$y=-t^2-2t+2=-(t+1)^2+3$
오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 3, $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{3}{4}$이므로 주어진 함수의 치역은



$\left\{y\,\middle|\,\frac{3}{4}\le y\le 3\right\}$
따라서 $a=\frac{3}{4}$, $b=3$이므로
$\frac{b}{a}=3\cdot\frac{4}{3}=4$ 답 4

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 먼저 한 종류의 삼각함수로 통일한다.

14 $y=a\sin^2 x+a\cos x+b$
$=a(1-\cos^2 x)+a\cos x+b$
$=-a\cos^2 x+a\cos x+a+b$
$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고
$y=-at^2+at+a+b$
$=-a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a+b$
오른쪽 그림에서 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{5}{4}a+b$, $t=-1$일 때 최솟값은 $-a+b$이므로



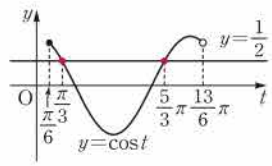
$\frac{5}{4}a+b=4$,
$-a+b=-5$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=4,\ b=-1$
$\therefore a+b=3$
답 ③

$-a<0$이므로 함수의 그래프는 위로 볼록한 포물선이다.

15 $2x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $\frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$이고 주어진 방정식은

$$\cos t=\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이므로



$$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{12} \text{ 또는 } x=\frac{3}{4}\pi$$

따라서 모든 실근의 합은

$$\frac{\pi}{12}+\frac{3}{4}\pi=\frac{5}{6}\pi$$

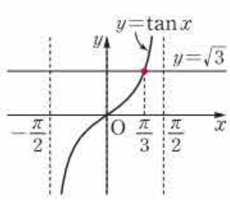
답 ④

16 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x\ne 0$이므로

$\sin x=\sqrt{3}\cos x$의 양변을 $\cos x$로 나누면

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{3} \qquad \therefore \tan x=\sqrt{3}$$

오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{3}$이므로



$$x=\frac{\pi}{3}$$

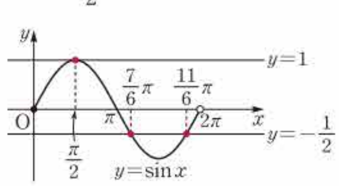
따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

답 ②

17 $2\cos^2 x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-1=0$에서

$$2\cos^2 x+\sin x-1=0$$
$$2(1-\sin^2 x)+\sin x-1=0$$
$$2\sin^2 x-\sin x-1=0$$
$$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$$
$$\therefore \sin x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x=1$$



(ⅰ) $\sin x=-\frac{1}{2}$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로 $\quad x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(ⅱ) $\sin x=1$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로 $\quad x=\frac{\pi}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실근의 곱은

$$\frac{7}{6}\pi\cdot\frac{11}{6}\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{77}{72}\pi^3$$

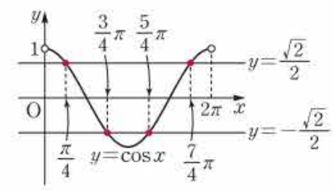
따라서 $p=72$, $q=77$이므로

$$q-p=5$$

답 5

18 $2\cos^2 x-1=0$에서 $\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}$

$$\therefore \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$



(ⅰ) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로 $\quad x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(ⅱ) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로 $\quad x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식을 만족시키는 x의 값은

$$\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $\sin x\cos x<0$에서 $\sin x$와 $\cos x$의 부호가 다르므로 x는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

> $\sin x>0$, $\cos x<0$
> $\sin x<0$, $\cos x>0$

$$\therefore \frac{\pi}{2}<x<\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi<x<2\pi \qquad \cdots\cdots ㉡$$

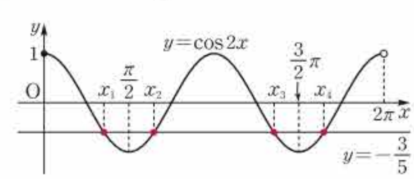
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값은

$$\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

답 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$

19 방정식 $\cos 2x=-\frac{3}{5}$의 실근은 함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{3}{5}$의 교점의 x좌표와 같다.

> $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이다.



위의 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{3}{5}$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면

> $y=\cos 2x\ (0\le x\le\pi)$의 그래프가 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 이 그래프와 직선 $y=-\frac{3}{5}$의 두 교점도 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다.

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2},\ \frac{x_3+x_4}{2}=\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore x_1+x_2=\pi,\ x_3+x_4=3\pi$$

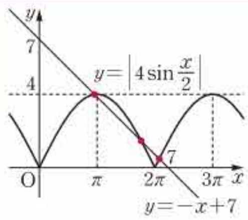
따라서 모든 실근의 합은

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\pi+3\pi=4\pi$$

답 4π

20 방정식 $\left|4\sin\frac{x}{2}\right|=-x+7$의 서로 다른 실근의 개수는 $y=\left|4\sin\frac{x}{2}\right|$의 그래프와 직선 $y=-x+7$의 교점의 개수와 같다.

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\left|4\sin\frac{x}{2}\right|$의 그래프와 직선 $y=-x+7$의 교점의 개수가 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 답 3



> $y=4\sin\frac{x}{2}$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

21 $4\cos^2x-4\sin x-a=0$에서

$4(1-\sin^2x)-4\sin x=a$

$\therefore\ -4\sin^2x-4\sin x+4=a$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\leq t\leq1$이고

$-4t^2-4t+4=a$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 이 방정식이 $-1\leq t\leq1$에서 실근을 가져야 하므로 함수 $y=-4t^2-4t+4$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나야 한다.

이때

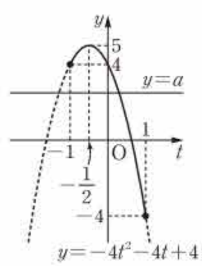
$y=-4t^2-4t+4$

$=-4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+5$

이므로 오른쪽 그림에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$-4\leq a\leq5$

답 $-4\leq a\leq5$



22 $\sin x=\sin(x-\pi)+a$에서

$\sin x=-\sin x+a\qquad\therefore\ 2\sin x=a$

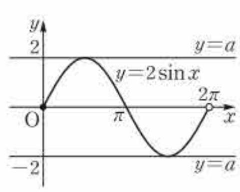
이 방정식이 $0\leq x<2\pi$에서 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=2\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나야 한다.

따라서 오른쪽 그림에서

$a=-2$ 또는 $a=2$

이므로 구하는 곱은

$-2\cdot2=-4$ 답 ②



23 $x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\leq x<2\pi$에서

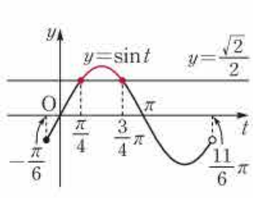
$-\frac{\pi}{6}\leq t<\frac{11}{6}\pi$이고 주어진 부등식은

$\sin t\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin t\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{4}\leq t\leq\frac{3}{4}\pi$이므로

$\frac{\pi}{4}\leq x-\frac{\pi}{6}\leq\frac{3}{4}\pi$



$\therefore\ \frac{5}{12}\pi\leq x\leq\frac{11}{12}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{5}{12}\pi$, $\beta=\frac{11}{12}\pi$이므로

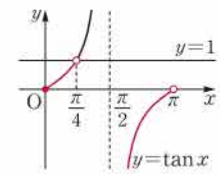
$\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 답 ⑤

24 오른쪽 그림에서 부등식 $\tan x<1$의 해는

$0\leq x<\frac{\pi}{4}$

또는 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ ······ ㉠

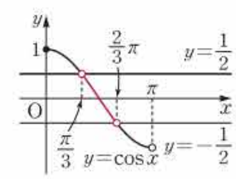


한편 $|\cos x|<\frac{1}{2}$에서

$-\frac{1}{2}<\cos x<\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $-\frac{1}{2}<\cos x<\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{3}\pi$ ······ ㉡



㉠, ㉡에서 주어진 연립부등식의 해는

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi$ 답 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi$

25 $2\sin^2x-\cos x-1\geq0$에서

$2(1-\cos^2x)-\cos x-1\geq0$

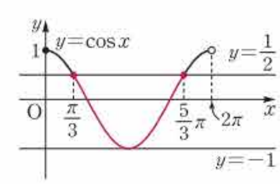
$2\cos^2x+\cos x-1\leq0$

$(\cos x+1)(2\cos x-1)\leq0$

$\therefore\ -1\leq\cos x\leq\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $-1\leq\cos x\leq\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{5}{3}\pi$



이므로

$\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore\ \beta-\alpha=\frac{4}{3}\pi$ 답 ④

26 $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1<0$에서

$2\left\{1-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1<0$

> $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$
> $=\cos\left\{\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$
> $=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\leq x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\leq t<\frac{5}{3}\pi$이고

주어진 부등식은

$2(1-\sin^2t)+\sin t-1<0$

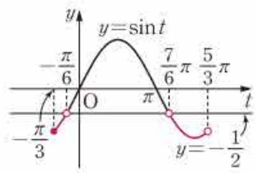
$2\sin^2t-\sin t-1>0$

$(2\sin t+1)(\sin t-1)>0$

이때 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$에서 $\sin t-1\le 0$이므로

$2\sin t+1<0 \qquad \therefore \sin t<-\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin t<-\frac{1}{2}$의 해는



$-\frac{\pi}{3}\le t<-\frac{\pi}{6}$

또는 $\frac{7}{6}\pi<t<\frac{5}{3}\pi$

이므로

$-\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$

$\therefore 0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

답 $0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

27 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차방정식 $x^2-2(2\cos\theta+1)x+4=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(2\cos\theta+1)\}^2-4<0$

$4\cos^2\theta+4\cos\theta-3<0$

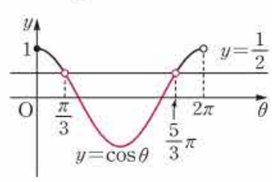
$(2\cos\theta+3)(2\cos\theta-1)<0$

이때 $0\le\theta<2\pi$에서 $2\cos\theta+3>0$이므로

$2\cos\theta-1<0 \qquad \therefore \cos\theta<\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{3}\pi$



답 $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{3}\pi$

28 주어진 이차함수의 그래프가 x축에 접하려면 이차방정식 $x^2-x\sin\theta+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin\theta=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-\sin\theta)^2-4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin\theta\right)=0$

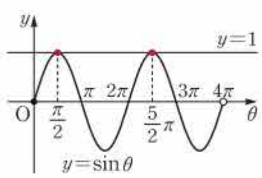
$\sin^2\theta+\sin\theta-2=0$

$(\sin\theta+2)(\sin\theta-1)=0$

$\therefore \sin\theta=1\ (\because -1\le\sin\theta\le 1)$

오른쪽 그림에서

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{5}{2}\pi$



따라서 구하는 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{5}{2}\pi=3\pi$

답 ③

QBOX

중단원 마무리

78쪽

01 전략 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x-p)=f(x+p)$이면 $f(x)=f(x+2p)$임을 이용한다.

풀이 $f(x-\pi)=f(x+\pi)$의 양변에 x 대신 $x+\pi$를 대입하면

$f(x)=f(x+2\pi)$

$-\pi\le x\le\pi$일 때, $f(x)=\cos x$이므로

$f(2023\pi)=f(2021\pi)=f(2019\pi)=\cdots=f(\pi)$

$=\cos\pi=-1$

$f(2024\pi)=f(2022\pi)=f(2020\pi)=\cdots=f(0)$

$=\cos 0=1$

$\therefore f(2023\pi)-f(2024\pi)=-1-1=-2$

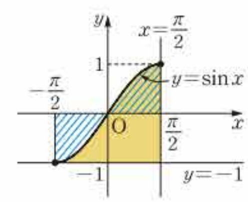
답 ①

02 전략 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는

$\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\cdot 1=\pi$

가로의 길이가 $\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, 세로의 길이가 1인 직사각형의 넓이



답 ②

03 전략 대칭이동과 평행이동을 차례대로 하여 $y=f(x)$를 구한다.

풀이 $y=3\tan 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

y 대신 $-y$를 대입한다.

$-y=3\tan 2x \qquad \therefore y=-3\tan 2x$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

x 대신 $x+\frac{\pi}{4}$, y 대신 $y-1$을 대입한다.

$y-1=-3\tan 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore y=-3\tan 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$

따라서 $f(x)=-3\tan 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$이므로 ··· ❶

$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=-3\tan 2\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+1$

$=-3\tan\frac{\pi}{4}+1$

$=-3\cdot 1+1=-2$ ··· ❷

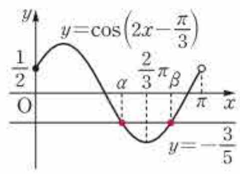
답 -2

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷	$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

04 전략 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 α, β 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x<\pi$에서 함수 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{3}{5}$은 오른쪽 그림과 같으므로

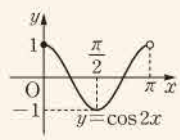


$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2}{3}\pi \qquad \therefore \frac{\alpha+\beta}{4}=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

쌤한마디

$0\le x<\pi$에서 함수 $y=\cos 2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$을 지난다. 이때 함수 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프는 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로 점



$\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}, -1\right)$, 즉 $\left(\frac{2}{3}\pi, -1\right)$

을 지난다.

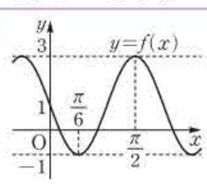
05 **전략** $y=a\sin bx+c$에서 a, c는 최댓값과 최솟값을 결정하고, b는 주기를 결정함을 이용한다.

풀이 ① $f(x)=-2\sin 3x+1$의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이고,

$g(x)=\tan 3x$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

② 최댓값은 $2+1=3$, 최솟값은 $-2+1=-1$이다.

③ $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



④ $f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+3=4$

⑤ $f(-x)=-2\sin(-3x)+1=2\sin 3x+1$,

$-f(x)=2\sin 3x-1$이므로

$f(-x)\ne -f(x)$

답 ②

QBOX

$y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배, y축의 방향으로 2배 한 후 x축에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\frac{3}{2}\pi+1$
$=-2\cdot(-1)+1$
$=3$

06 **전략** 각 함수의 주기를 구하여 조건을 만족시키는지 확인한다.

풀이 ㄱ. $f(x)=2\tan\pi x$의 주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$

$\therefore f(x+2)=f(x+1)=f(x)$

ㄴ. $f(x)=\cos\left(\pi x+\frac{1}{2}\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

$\therefore f(x+2)=f(x)$

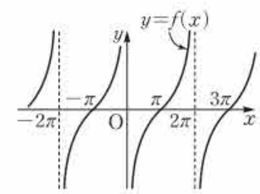
ㄷ. $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}(x-1)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

$\therefore f(x+2)\ne f(x)$

이상에서 $f(x)=f(x+2)$를 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

07 **전략** 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 $f(x)$의 주기를 구한다.

풀이 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $f(x)$의 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=2\pi \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=a\tan\left(\frac{x}{2}+c\right)$이고 $f(\pi)=0$이므로

$a\tan\left(\frac{\pi}{2}+c\right)=0$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+c\right)=0\ (\because a>0)$

이때 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+c<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{2}+c=0 \qquad \therefore c=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore f(x)=a\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$

조건 (다)에서 $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\sqrt{3}$이므로

$a\tan\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$

$a\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3}$

$\therefore a=3$

$\therefore \frac{ac}{b\pi}=3\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{2}{\pi}=-3$ 답 -3

08 **전략** 먼저 최댓값과 최솟값을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 주어진 함수의 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로

$a+b=1, \ -a+b=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$ ··· ❶

따라서 주어진 함수는

$y=2\sin\frac{\pi}{4}(2x+1)-1=2\sin\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)-1$

이고, 이 함수의 그래프의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로

$c-\frac{1}{2}=2 \qquad \therefore c=\frac{5}{2}$ ··· ❷

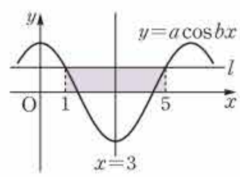
$\therefore ab+c=2\cdot(-1)+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{2}$

단계	채점 기준	비율
1	a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
2	c의 값을 구할 수 있다.	30 %
3	$ab+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 전략 먼저 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 주어진 함수의 주기를 구한다.

풀이 함수 $y=a\cos bx$의 그래프의 일부분과 직선 l이 만나는 점의 x좌표가 1, 5이므로 $y=a\cos bx$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.



$\frac{1+5}{2}=3$

따라서 함수 $y=a\cos bx$의 주기는 $3\cdot 2=6$이므로

$$\frac{2\pi}{|b|}=6 \qquad \therefore |b|=\frac{\pi}{3}$$

$b=\frac{\pi}{3}$라 하면 $f(x)=a\cos\frac{\pi}{3}x$이므로

$$f(1)=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}$$

직선 l, $x=1$, $x=5$와 x축으로 둘러싸인 도형인 직사각형의 넓이가 20이므로

$$(5-1)\cdot\frac{a}{2}=20, \qquad 2a=20$$

$$\therefore a=10$$

답 10

쌤한마디

함수 $y=a\cos bx$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $y=a\cos bx$의 그래프와 $y=a\cos(-bx)$의 그래프는 같다. 즉 $b=-\frac{\pi}{3}$라 하면

$$f(1)=a\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}$$

이므로 이때의 a의 값도 10이다.

10 전략 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\sin 207°=\sin(180°+27°)=-\sin 27°$이므로

$$\sin 27°+\sin 207°=\sin 27°-\sin 27°=0$$

ㄴ. $\cos 387°=\cos(360°+27°)=\cos 27°$이므로

$$\cos 27°+\cos 387°=\cos 27°+\cos 27°=2\cos 27°\neq 0$$

$0°<27°<90°$이므로 $0<\cos 27°<1$

ㄷ. $\tan 333°=\tan(360°-27°)=-\tan 27°$이므로

$$\tan 27°+\tan 333°=\tan 27°-\tan 27°=0$$

이상에서 계산한 값이 0인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

11 전략 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 등식의 좌변을 간단히 한다.

풀이 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\tan(\pi-\theta)=\frac{3}{5}$에서

$$\cos\theta\cdot(-\tan\theta)=\frac{3}{5}, \qquad \cos\theta\cdot\left(-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)=\frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{5}$$

$$\therefore 30(1-\sin\theta)=30\cdot\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)\right\}=48$$

답 48

12 전략 두 각 α, β를 나타내는 동경이 일치하면 $\alpha-\beta=2n\pi$ (n은 정수)임을 이용한다.

풀이 각 θ를 나타내는 동경과 각 9θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$$9\theta-\theta=2n\pi \ (n\text{은 정수})$$

$$8\theta=2n\pi \qquad \therefore \theta=\frac{n}{4}\pi \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{3}{8}\pi$에서 $\frac{\pi}{8}<\frac{n}{4}\pi<\frac{3}{8}\pi$이므로

$$\frac{1}{2}<n<\frac{3}{2} \qquad \therefore n=1$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

즉 $4\theta=\pi$이므로 임의의 각 x에 대하여

$$\cos(4\theta+x)=\cos(\pi+x)=-\cos x$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 9\theta\\ &=(\cos\theta+\cos 5\theta)+(\cos 2\theta+\cos 6\theta)\\ &\quad+(\cos 3\theta+\cos 7\theta)+(\cos 4\theta+\cos 8\theta)\\ &\quad+\cos 9\theta\\ &=(\cos\theta-\cos\theta)+(\cos 2\theta-\cos 2\theta)\\ &\quad+(\cos 3\theta-\cos 3\theta)+(\cos 4\theta-\cos 4\theta)\\ &\quad+\cos\theta\\ &=\cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 9\theta&=\cos(8\theta+\theta)\\ &=\cos(2\pi+\theta)\\ &=\cos\theta\end{aligned}$$

답 ③

13 전략 원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합은 π임을 이용한다.

풀이 $\cos\alpha=\frac{3}{4}>0$에서 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

한편 □ABCD가 원에 내접하므로

$$\alpha+\beta=\pi$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan^2\alpha+\sin^2\beta&=\tan^2\alpha+\sin^2(\pi-\alpha)\\ &=\tan^2\alpha+\sin^2\alpha\\ &=\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2\\ &=\frac{175}{144}\end{aligned}$$

따라서 $p=144$, $q=175$이므로

$$p+q=319$$

답 ②

14 전략 주어진 함수를 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 나타낸 후 삼각함수를 t로 치환한다.

풀이 $y=\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos^2 x+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\cos^2 x+1}{\cos x}$

$=2\cos x+\dfrac{1}{\cos x}$ ⋯ ❶

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $0<t<1$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y=2t+\frac{1}{t}\ge 2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{t}}=2\sqrt{2}$$

$\left(\text{단, 등호는 } t=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 주어진 함수의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다. ⋯ ❷

답 $2\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 함수를 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷	주어진 함수의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

Q BOX

$2t=\frac{1}{t}$에서 $t^2=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\because 0<t<1)$

15 전략 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 주어진 함수를 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-2\cos^2\theta+3\sin(\theta-\pi)$

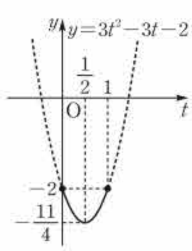
$=\sin^2\theta-2\cos^2\theta-3\sin\theta$

$=\sin^2\theta-2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta$

$=3\sin^2\theta-3\sin\theta-2$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $0\le\theta<\pi$에서 $0\le t\le 1$이고

$$y=3t^2-3t-2=3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{11}{4}$$



오른쪽 그림에서 $t=0$ 또는 $t=1$일 때 최댓값은 -2, $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $-\frac{11}{4}$이므로

$M=-2,\ m=-\frac{11}{4}$

$\therefore Mm=\frac{11}{2}$

답 $\frac{11}{2}$

$\sin(\theta-\pi)$
$=-\sin(\pi-\theta)$
$=-\sin\theta$

16 전략 주어진 방정식의 양변을 제곱한 후 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수에 대한 방정식으로 나타낸다.

풀이 $\sin x=\sqrt{3}(1+\cos x)$의 양변을 제곱하면

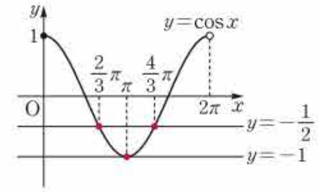
$\sin^2 x=3(1+\cos x)^2$

$1-\cos^2 x=3(1+2\cos x+\cos^2 x)$

$2\cos^2 x+3\cos x+1=0$

$(\cos x+1)(2\cos x+1)=0$

$\therefore \cos x=-1$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$



(i) $\cos x=-1$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로 $x=\pi$

(ii) $\cos x=-\frac{1}{2}$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

그런데 $x=\frac{4}{3}\pi$는 주어진 방정식을 만족시키지 않으므로

$x=\frac{2}{3}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$이므로 구하는 합은

$\pi+\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi$

답 ⑤

쌤 한마디

$x=\frac{2}{3}\pi$이면

$\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\frac{4}{3}\pi$이면

$\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉 $x=\frac{2}{3}\pi$일 때와 $x=\frac{4}{3}\pi$일 때의 사인함수의 값의 부호가 다르므로 두 값 중 하나만 주어진 방정식을 만족시킨다. 이와 같이 주어진 방정식의 양변을 제곱하여 방정식을 푼 경우에는 구한 x의 값이 처음의 방정식을 만족시키는지 확인해야 한다.

17 전략 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 주어진 방정식을 정리한 후 인수분해한다.

풀이 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로 주어진 방정식은

$3\cos^2 x-\sin x\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x$

$2\cos^2 x-\sin x\cos x-\sin^2 x=0$

$(2\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=0$

이때 $0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $2\cos x+\sin x>0$이므로

$\cos x=\sin x,\quad \frac{\sin x}{\cos x}=1$

$\therefore \tan x=1$

$0\le x<\frac{\pi}{2}$이므로 $x=\frac{\pi}{4}$

답 $x=\frac{\pi}{4}$

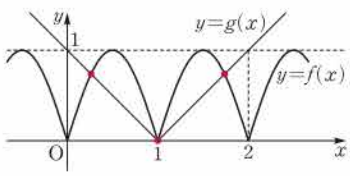
$0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x\ne 0$이므로 양변을 $\cos x$로 나눈다.

18 전략 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sqrt{1-\cos^2\pi x}=\sqrt{\sin^2\pi x}$

$=|\sin\pi x|$

방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.



위의 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 답 3

19 전략 $y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프를 그린 후 직선 $y=k$와 세 점에서 만나도록 직선을 그려 본다.

풀이 주어진 방정식이 서로 다른 3개의 실근을 가지려면 함수 $y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

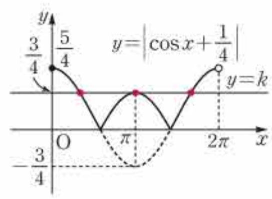
$y=\cos x+\frac{1}{4}$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

따라서 오른쪽 그림에서

$k=\frac{3}{4}$

즉 $\alpha=\frac{3}{4}$이므로

$40\alpha=30$ 답 30



20 전략 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 부등식을 β에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $3\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\leq1$에서

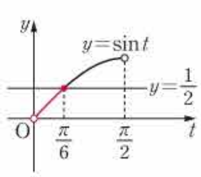
$\alpha+\beta=\pi$에서 $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}$

$3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)-\sin\frac{\beta}{2}\leq1$

$3\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\leq1$ $\quad\therefore \sin\frac{\beta}{2}\leq\frac{1}{2}$

$\frac{\beta}{2}=t$로 놓으면 $0<\beta<\pi$에서 $0<t<\frac{\pi}{2}$이고 주어진 부등식은 $\sin t\leq\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin t\leq\frac{1}{2}$의 해는 $0<t\leq\frac{\pi}{6}$이므로



$0<\frac{\beta}{2}\leq\frac{\pi}{6}$

$\therefore 0<\beta\leq\frac{\pi}{3}$

따라서 β의 최댓값은 $\frac{\pi}{3}$이다. 답 $\frac{\pi}{3}$

21 전략 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 부등식의 해를 구한다.

풀이 $2\cos^4x+\cos^3x>0$에서

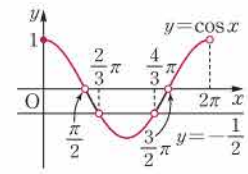
$\cos^3x(2\cos x+1)>0$

이때 $\cos^2x\geq0$이므로

$\cos x(2\cos x+1)>0$

$\therefore \cos x<-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x>0$

오른쪽 그림에서 주어진 부등식의 해는



$0\leq x<\frac{\pi}{2}$

또는 $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$

또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

따라서 부등식의 해가 될 수 없는 것은 ④이다.

$\frac{4}{3}\pi<\frac{17}{12}\pi<\frac{3}{2}\pi$

답 ④

22 전략 이차방정식의 판별식을 이용하여 θ에 대한 부등식을 세운다.

풀이 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\cos\theta)^2-6\sin\theta<0$

$4\cos^2\theta-6\sin\theta<0$

$4(1-\sin^2\theta)-6\sin\theta<0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$

$(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)>0$

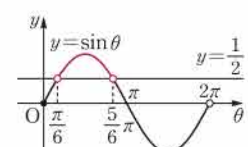
이때 $0\leq\theta<2\pi$에서 $\sin\theta+2>0$이므로

$2\sin\theta-1>0$ $\quad\therefore \sin\theta>\frac{1}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$

이므로



$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

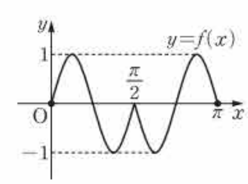
$\therefore 3\alpha+\beta=3\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$ 답 ④

23 전략 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 두 함수 $y=\sin 4x$, $y=-\sin 4x$에서

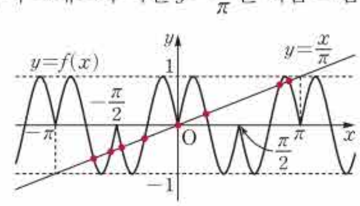
최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

두 조건 (나), (다)에 의하여 $0\leq x\leq\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



한편 조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 π 간격으로 반복되므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$는 다음 그림과 같다.

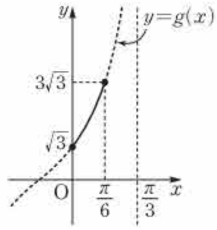
주기가 π이다.



따라서 구하는 점의 개수는 8이다. 답 ⑤

24 전략 $g(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한 후 $g(x)=t$로 치환하여 $y=f(t)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$에서 함수 $g(x)=3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=\frac{\pi}{6}$일 때 최대이고, 최댓값은

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\tan\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$$

$x=0$일 때 최소이고, 최솟값은

$$g(0)=3\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

따라서 $g(x)=t$로 놓으면 $\sqrt{3}\le t\le 3\sqrt{3}$이고

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=\log_3 t+2$$

$\sqrt{3}\le t\le 3\sqrt{3}$에서 함수 $f(t)=\log_3 t+2$는 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가하므로

$t=3\sqrt{3}$일 때 최대이고, 최댓값은

$$f(3\sqrt{3})=\log_3 3\sqrt{3}+2=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$$

$t=\sqrt{3}$일 때 최소이고, 최솟값은

$$f(\sqrt{3})=\log_3\sqrt{3}+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

따라서 $M=\frac{7}{2}$, $m=\frac{5}{2}$이므로

$M+m=6$ 답 6

Q BOX

로그함수 $y=\log_a x$에서
① $a>1$일 때
➡ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
② $0<a<1$일 때
➡ x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°이고 $B=30^\circ$이므로
$0^\circ<C<150^\circ$

07 삼각함수의 활용

Lecture 13 사인법칙과 코사인법칙

82쪽

01 사인법칙에 의하여 $\frac{9}{\sin 60^\circ}=\frac{c}{\sin 45^\circ}$이므로

$9\sin 45^\circ=c\sin 60^\circ$

$\therefore c=9\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=3\sqrt{6}$ 답 $3\sqrt{6}$

02 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{15}{\sin 120^\circ}=\frac{a}{\sin 30^\circ}$이므로

$15\sin 30^\circ=a\sin 120^\circ$

$\therefore a=15\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}$ 답 $5\sqrt{3}$

03 사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 30^\circ}=\frac{6\sqrt{2}}{\sin C}$이므로

$6\sin C=6\sqrt{2}\sin 30^\circ$

$\therefore \sin C=6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<C<150^\circ$이므로

$C=45^\circ$ 또는 $C=135^\circ$

따라서 $A=180^\circ-(B+C)$이므로

$A=105^\circ$ 또는 $A=15^\circ$ 답 15° 또는 105°

04 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{12}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

05 $A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(35^\circ+100^\circ)=45^\circ$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{3}{\sin 45^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 △ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{9}{2}\pi$ 답 $\frac{9}{2}\pi$

06 코사인법칙에 의하여

$b^2=(\sqrt{3})^2+4^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 4\cdot\cos 30^\circ$

$=3+16-2\cdot\sqrt{3}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7$

$\therefore b=\sqrt{7}$ ($\because b>0$) 답 $\sqrt{7}$

07 삼각함수의 활용

07 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{(2\sqrt{6})^2+5^2-7^2}{2\cdot 2\sqrt{6}\cdot 5}=0$$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로

$C=90^\circ$ 답 90°

08 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{7^2+8^2-13^2}{2\cdot 7\cdot 8}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$A=120^\circ$ 답 120°

표준+발전 유형 Q+Q

83쪽

01 사인법칙에 의하여 $\dfrac{6}{\sin A}=\dfrac{7}{\sin 60^\circ}$이므로

$6\sin 60^\circ=7\sin A$

$\therefore \sin A=6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{3\sqrt{3}}{7}$

$\therefore \cos^2 A=1-\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{7}\right)^2=\dfrac{22}{49}$ 답 ②

Q BOX: $\sin^2 A+\cos^2 A=1$이므로 $\cos^2 A=1-\sin^2 A$

02 $\angle BDC=45^\circ$이고, $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle BAC=\angle BDC=45^\circ$

Q BOX: $\triangle BCD$는 직각이등변삼각형이므로 $\angle BDC=\angle DBC=\frac{1}{2}(180^\circ-90^\circ)=45^\circ$

$\angle ACB=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로 $\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}$$

$4\sqrt{2}\sin 30^\circ=\overline{AB}\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{AB}=4\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=4$ 답 4

03 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 8이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 120^\circ}=2\cdot 8$$

$\therefore a=2\cdot 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$

한편 $A+B+C=180^\circ$이고 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로

$B=\dfrac{1}{2}(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여

$$\frac{b}{\sin 30^\circ}=2\cdot 8$$

$\therefore b=2\cdot 8\cdot\dfrac{1}{2}=8$

따라서 $c=b=8$이므로 $\triangle ABC$의 둘레의 길이는

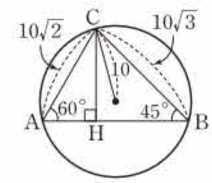
$8\sqrt{3}+8+8=8(2+\sqrt{3})$ 답 ⑤

04 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 10이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}=2\cdot 10$$

$\therefore \overline{BC}=20\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3},\ \overline{AC}=20\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 CAH에서

$\overline{AH}=10\sqrt{2}\cos 60^\circ$

$=10\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}=5\sqrt{2}$

직각삼각형 CBH에서

$\overline{BH}=10\sqrt{3}\cos 45^\circ=10\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{6}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}=5\sqrt{2}+5\sqrt{6}$

답 $5\sqrt{2}+5\sqrt{6}$

05 $\dfrac{a+b}{7}=\dfrac{b+c}{9}=\dfrac{c+a}{8}=k\ (k>0)$로 놓으면

$a+b=7k,\ b+c=9k,\ c+a=8k$ …… ㉠

위의 세 식을 변끼리 더하여 정리하면

$2(a+b+c)=24k$

$\therefore a+b+c=12k$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3k,\ b=4k,\ c=5k$이므로

Q BOX: $a+b+c=12k$에 $b+c=9k$를 대입하면 $a+9k=12k$ $\therefore a=3k$

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=3k:4k:5k$

$=3:4:5$

답 $3:4:5$

06 $A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B):\sin(B+C):\sin(C+A)$

$=\sin(\pi-C):\sin(\pi-A):\sin(\pi-B)$

$=\sin C:\sin A:\sin B$

$=c:a:b=3:2:4$

따라서 $a:b:c=2:4:3$이므로 $a=2k,\ b=4k,\ c=3k\ (k>0)$로 놓으면

$$\frac{a^2-b^2}{bc}=\frac{(2k)^2-(4k)^2}{4k\cdot 3k}=\frac{-12k^2}{12k^2}=-1$$

답 -1

07 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=\dfrac{4}{\frac{1}{2}}=8$

직각삼각형 CDE에서

$\overline{CE}=\dfrac{3}{\sin 30^\circ}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=6$

$\angle ACE=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$이므로 $\triangle ACE$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AE}^2=8^2+6^2-2\cdot 8\cdot 6\cdot\cos 120^\circ$

Q BOX: $\cos 120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\dfrac{1}{2}$

$=64+36-2\cdot 8\cdot 6\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=148$

$\therefore \overline{AE}=2\sqrt{37}\ (\because \overline{AE}>0)$ 답 $2\sqrt{37}$

08 □ABCD가 원에 내접하므로 $B+D=180°$
즉 $D=180°-B$이므로

$$\cos D=\cos(180°-B)=-\cos B=-\frac{1}{8}$$

따라서 △DAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos D$$
$$=25+64-2\cdot5\cdot8\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=99$$
$$\therefore \overline{AC}=3\sqrt{11}\ (\because \overline{AC}>0)$$

답 ④

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

09 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{7^2+9^2-5^2}{2\cdot7\cdot9}=\frac{5}{6}$$

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}$
$=6+3=9$

따라서 △ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=7^2+6^2-2\cdot7\cdot6\cdot\cos B$$
$$=49+36-2\cdot7\cdot6\cdot\frac{5}{6}=15$$
$$\therefore \overline{AD}=\sqrt{15}\ (\because \overline{AD}>0)$$

답 $\sqrt{15}$

10 $4a^2+4b^2+7ab=4c^2$에서

$$4a^2+4b^2-4c^2=-7ab$$
$$\therefore a^2+b^2-c^2=-\frac{7}{4}ab$$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-\frac{7}{4}ab}{2ab}=-\frac{7}{8}$$

이때 $0°<C<180°$이므로

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$
$$\therefore \tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=-\frac{\sqrt{15}}{7}$$

답 ③

11 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\cdot4\cdot3\sqrt{2}\cdot\cos45°$$
$$=16+18-2\cdot4\cdot3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=10$$
$$\therefore \overline{AC}=\sqrt{10}\ (\because \overline{AC}>0)$$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{10}}{\sin45°}=2R$$
$$\therefore R=\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{5}$$

답 ①

12 코사인법칙에 의하여

$$b^2=6^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot6\cdot\sqrt{3}\cdot\cos30°$$
$$=36+3-2\cdot6\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=21$$
$$\therefore b=\sqrt{21}\ (\because b>0)$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{6}{\sin C}=\frac{\sqrt{21}}{\sin30°}$$
$$\therefore \sin A=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{7}}{14},$$
$$\sin C=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$
$$\therefore \sin A\sin C=\frac{\sqrt{3}}{14}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{14}$

13 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$$\frac{a}{2R}=2\cdot\frac{c}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$a^2=c^2+a^2-b^2\qquad \therefore b^2=c^2$$

b, c는 양수이므로 $b=c$
따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 ②

쌤 한마디

삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여
① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$
⇨ △ABC는 이등변삼각형이다.
② $a=b=c$ ⇨ △ABC는 정삼각형이다.
③ 가장 긴 변의 길이가 c일 때
(i) $a^2+b^2<c^2$
⇨ △ABC는 $C>90°$인 둔각삼각형이다.
(ii) $a^2+b^2=c^2$
⇨ △ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.
(iii) $a^2+b^2>c^2$
⇨ △ABC는 예각삼각형이다.

14 $\sin A\tan A=\sin B\tan B$에서

$$\sin A\cdot\frac{\sin A}{\cos A}=\sin B\cdot\frac{\sin B}{\cos B}$$
$$\therefore \cos B\sin^2 A=\cos A\sin^2 B\qquad\cdots\cdots ㉠$$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},$$
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\left(\frac{b}{2R}\right)^2$$
$$a(c^2+a^2-b^2)=b(b^2+c^2-a^2)$$
$$ac^2+a^3-ab^2=b^3+bc^2-a^2b$$
$$a^3-b^3+(a-b)c^2+(a-b)ab=0$$
$$(a-b)(a^2+2ab+b^2+c^2)=0$$
$$\therefore a=b\ (\because a^2+2ab+b^2+c^2>0)$$

a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 $a=b$인 이등변삼각형

15 △ABQ에서

$$\angle AQB=180°-(45°+75°)=60°$$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin 45^\circ}=\frac{90}{\sin 60^\circ}$$

$$\overline{BQ}\sin 60^\circ=90\sin 45^\circ$$

$$\therefore \overline{BQ}=90\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=30\sqrt{6}\ (\text{m})$$

따라서 직각삼각형 PBQ에서

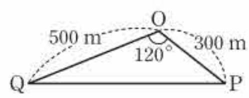
$$\overline{PQ}=30\sqrt{6}\tan 60^\circ$$

$$=30\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=90\sqrt{2}\ (\text{m})$$

즉 건물의 높이 PQ의 길이는 $90\sqrt{2}$ m이다.

답 $90\sqrt{2}$ m

16 10분 후의 두 사람 A, B의 위치를 각각 P, Q라 하면



$$\overline{OP}=30\cdot 10=300\,(\text{m}),$$

$$\overline{OQ}=50\cdot 10=500\,(\text{m})$$

(거리)=(속력)×(시간)

△POQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2=300^2+500^2-2\cdot 300\cdot 500\cdot\cos 120^\circ$$

$$=90000+250000-2\cdot 300\cdot 500\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

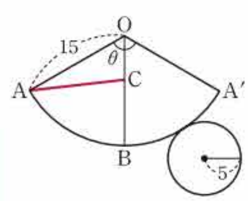
$$=490000$$

$$\therefore \overline{PQ}=700\,(\text{m})\ (\because \overline{PQ}>0)$$

따라서 10분 후의 두 사람 사이의 거리는 700 m이다.

답 ③

17 주어진 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는



$$2\pi\cdot 5=10\pi$$

원뿔의 전개도에서 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같다.

$\overline{OA}=15$이므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$$15\theta=10\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$$

△OAC에서 $\angle AOC=\frac{1}{2}\theta=\frac{\pi}{3}$이고 점 C는 $\overline{OB}$를 2 : 3으로 내분하므로

$$\overline{OC}=15\cdot\frac{2}{5}=6$$

점 P가 움직인 최단 거리는 $\overline{AC}$의 길이와 같으므로 △OAC에서 코사인법칙에 의하여

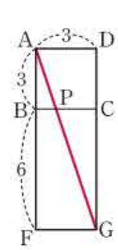
$$\overline{AC}^2=15^2+6^2-2\cdot 15\cdot 6\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=225+36-2\cdot 15\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=171$$

$$\therefore \overline{AC}=3\sqrt{19}\ (\because \overline{AC}>0)$$

답 $3\sqrt{19}$

18 오른쪽 그림과 같은 주어진 직육면체의 전개도의 일부에서



$$\overline{BP}:\overline{FG}=\overline{AB}:\overline{AF}$$

$$\overline{BP}:3=3:9$$

$$9\overline{BP}=9 \qquad \therefore \overline{BP}=1$$

$$\therefore \overline{PC}=3-1=2$$

두 직각삼각형 ABP, GCP에서

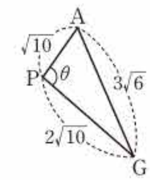
$$\overline{AP}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10},\ \overline{PG}=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$$

한편 주어진 직육면체에서

$$\overline{AG}=\sqrt{3^2+3^2+6^2}=3\sqrt{6}$$

가로, 세로의 길이와 높이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

이므로 △APG에서 코사인법칙에 의하여



$$\cos\theta$$

$$=\frac{(\sqrt{10})^2+(2\sqrt{10})^2-(3\sqrt{6})^2}{2\cdot\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10}}$$

$$=-\frac{1}{10}$$

답 $-\frac{1}{10}$

Lecture 14 삼각형과 사각형의 넓이

86쪽

01 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 12\cdot\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 12\cdot\frac{1}{2}=21$$

답 21

02 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\sin 120^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$$

답 $5\sqrt{3}$

03 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3$$

답 3

04 (1) 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{5^2+6^2-2^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\frac{19}{20}$$

(2) $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{19}{20}\right)^2}=\frac{\sqrt{39}}{20}$$

(3) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\sin A$

$$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{39}}{20}=\frac{3\sqrt{39}}{4}$$

답 (1) $\frac{19}{20}$ (2) $\frac{\sqrt{39}}{20}$ (3) $\frac{3\sqrt{39}}{4}$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이가 R일 때, $\triangle ABC=\frac{abc}{4R}$

05 $\triangle ABC=\frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\cdot 2}{4\cdot\sqrt{5}}=3$

답 3

06 $\square ABCD=10\cdot 9\cdot\sin 60^\circ$

$$=10\cdot 9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=45\sqrt{3}$$

답 $45\sqrt{3}$

07 $A=C=135^\circ$이므로

$$\square ABCD=3\cdot 8\cdot\sin 135^\circ$$

$$=3\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=12\sqrt{2}$$

답 $12\sqrt{2}$

08 $\square ABCD=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 13\cdot \sin 150^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 13\cdot \frac{1}{2}=39$ 답 39

표준+발전 유형 Q+Q

87쪽

01 $\triangle ABC$의 넓이가 $3\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \sin C=3\sqrt{3}$ $\therefore \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<C<90^\circ$이므로

$C=60^\circ$

따라서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=4^2+3^2-2\cdot 4\cdot 3\cdot \cos 60^\circ$

$=16+9-2\cdot 4\cdot 3\cdot \frac{1}{2}=13$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{13}$ ($\because \overline{AB}>0$) 답 ⑤

02 $\overline{BD}=x$라 하면 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle BCD$이므로

$\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 10\cdot \sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot x\cdot \sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot x\cdot \sin 30^\circ$

$\frac{75\sqrt{3}}{2}=\frac{15}{4}x+\frac{5}{2}x,$ $\frac{25}{4}x=\frac{75\sqrt{3}}{2}$

$\therefore x=6\sqrt{3}$

따라서 $\overline{BD}$의 길이는 $6\sqrt{3}$이다. 답 $6\sqrt{3}$

03 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot(5+7+8)=\frac{5\cdot 7\cdot 8}{4R}$

$10\sqrt{3}=\frac{70}{R}$ $\therefore R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

> $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이가 r일 때,
> $\triangle ABC$
> $=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

04 $B=C=30^\circ$이므로

$A=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 8이므로

$\triangle ABC=2\cdot 8^2\cdot \sin 120^\circ\cdot \sin 30^\circ\cdot \sin 30^\circ$

$=2\cdot 64\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$=16\sqrt{3}$ 답 ④

> $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 R일 때,
> $\triangle ABC$
> $=2R^2\sin A\sin B\sin C$

05 헤론의 공식에서 $s=\frac{4+6+6}{2}=8$

$\therefore \triangle ABC=\sqrt{8(8-4)(8-6)(8-6)}$

$=8\sqrt{2}$ 답 ③

06 헤론의 공식에서 $s=\frac{9+10+11}{2}=15$

$\therefore \triangle ABC=\sqrt{15(15-9)(15-10)(15-11)}$

$=30\sqrt{2}$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 R이므로

$\frac{9\cdot 10\cdot 11}{4R}=30\sqrt{2}$

$\frac{495}{2R}=30\sqrt{2}$ $\therefore R=\frac{33\sqrt{2}}{8}$

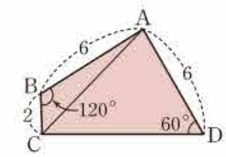
$\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이가 r이므로

$\frac{1}{2}r(9+10+11)=30\sqrt{2}$

$15r=30\sqrt{2}$ $\therefore r=2\sqrt{2}$

$\therefore Rr=\frac{33}{2}$ 답 $\frac{33}{2}$

07 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{AC}^2$

$=2^2+6^2-2\cdot 2\cdot 6\cdot \cos 120^\circ$

$=4+36-2\cdot 2\cdot 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=52$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{13}$ ($\because \overline{AC}>0$)

$\overline{CD}=x$라 하면 $\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{13})^2=6^2+x^2-2\cdot 6\cdot x\cdot \cos 60^\circ$

$52=36+x^2-2\cdot 6\cdot x\cdot \frac{1}{2}$

$x^2-6x-16=0,$ $(x+2)(x-8)=0$

$\therefore x=8$ ($\because x>0$)

$\therefore \square ABCD$

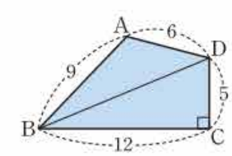
$=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6\cdot \sin 120^\circ+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot \sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=3\sqrt{3}+12\sqrt{3}=15\sqrt{3}$ 답 $15\sqrt{3}$

08 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 직각삼각형 BCD에서



$\overline{BD}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

$\triangle ABD$의 세 변의 길이가 9, 13, 6이므로 헤론의 공식에서

$s=\frac{9+13+6}{2}=14$

$\therefore \triangle ABD=\sqrt{14(14-9)(14-13)(14-6)}$

$=4\sqrt{35}$

한편 $\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5=30$이므로

$\square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=30+4\sqrt{35}$ 답 $30+4\sqrt{35}$

09 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{3^2+5^2-(\sqrt{19})^2}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로

$B=60^\circ$

$\therefore \square ABCD=3\cdot5\cdot\sin60°$

$=3\cdot5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$ 　답 ④

10 $\overline{CD}=x$라 하면 $\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여

$3^2=(3\sqrt{2})^2+x^2-2\cdot3\sqrt{2}\cdot x\cdot\cos45°$

$9=18+x^2-2\cdot3\sqrt{2}\cdot x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2-6x+9=0,\quad (x-3)^2=0$

$\therefore x=3$

$\therefore \square ABCD=3\sqrt{2}\cdot3\cdot\sin45°$

$=3\sqrt{2}\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=9$ 　답 9

다른 풀이 $\triangle ACD$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{3}{\sin45°}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin(\angle ACD)}$

$3\sin(\angle ACD)=3\sqrt{2}\sin45°$

$\therefore \sin(\angle ACD)=3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=1$

이때 $0°<\angle ACD<180°$이므로

$\angle ACD=90°$

따라서 직각삼각형 ACD에서

$\overline{CD}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-3^2}=3$

$\therefore \square ABCD=3\sqrt{2}\cdot3\cdot\sin45°=9$

11 직각삼각형 BCD에서 　$\overline{BD}=\dfrac{5}{\tan30°}=5\sqrt{3}$

$\therefore \square ABCD=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot5\sqrt{3}\cdot\sin60°$

$=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot5\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=30$ 　답 30

12 $\square ABCD$의 두 대각선의 길이를 각각 p, q라 하면 $p+q=8$에서 $q=8-p$이므로

$\square ABCD=\dfrac{1}{2}pq\sin45°=\dfrac{1}{2}p(8-p)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(p^2-8p)$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(p-4)^2+4\sqrt{2}\ (0<p<8)$

따라서 $\square ABCD$의 넓이는 $p=4$일 때 최댓값 $4\sqrt{2}$를 갖는다. 　답 ②

$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(p^2-8p)$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(p^2-8p+16-16)$

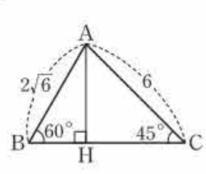
$=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(p-4)^2+4\sqrt{2}$

중단원 마무리

89쪽

01 전략 삼각비를 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한 후 사인법칙을 이용하여 $\sin75°$의 값을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=2\sqrt{6}\cos60°=2\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{2}=\sqrt{6}$

직각삼각형 AHC에서

$\overline{CH}=6\cos45°=6\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

$\angle BAC=180°-(60°+45°)=75°$이므로 $\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{\sin75°}=\dfrac{6}{\sin60°}$

$\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{\sin75°}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin45°}$임을 이용하여 $\sin75°$의 값을 구할 수도 있다.

$(\sqrt{6}+3\sqrt{2})\sin60°=6\sin75°$

$\therefore \sin75°=(\sqrt{6}+3\sqrt{2})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 　답 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

02 전략 $\angle EAC=\theta$라 하고 $\overline{BD}$의 길이를 θ에 대한 식으로 나타낸 후 사인법칙을 이용한다.

풀이 $\angle EAC=\theta$라 하면 직각삼각형 AEC에서

$\overline{CE}=4\sin\theta$이므로

$\overline{BD}=\overline{CE}=4\sin\theta$

$\angle DEB=90°-\angle AEC=\angle EAC=\theta$이므로 $\triangle DBE$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BE}}{\sin120°}=\dfrac{4\sin\theta}{\sin\theta}$

삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로 $\triangle ADE$에서

$\angle BDE=90°+30°=120°$

$\therefore \overline{BE}=4\sin120°=4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ 　답 ⑤

03 전략 사인법칙을 이용하여 R_1, R_2의 값을 각각 구한다.

풀이 원 C_1에 내접하는 삼각형에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin60°}=2R_1$

$\therefore R_1=\dfrac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=4\sqrt{3}$

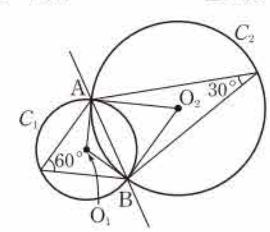
원 C_2에 내접하는 삼각형에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin30°}=2R_2$

$\therefore R_2=\dfrac{12}{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=12$

$\therefore R_1^{\,2}+R_2^{\,2}=48+144=192$ 　답 192

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하면



$\angle AO_1B=2\cdot60°$

$=120°$,

$\angle AO_2B=2\cdot30°$

$=60°$

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 각각 R_1, R_2이므로

$\overline{O_1A}=\overline{O_1B}=R_1$, $\overline{O_2A}=\overline{O_2B}=R_2$

$\triangle AO_1B$에서 코사인법칙에 의하여

$12^2=R_1^{\,2}+R_1^{\,2}-2\cdot R_1\cdot R_1\cdot\cos120°$

$144=3R_1^{\,2}$ 　$\therefore R_1^{\,2}=48$

$\triangle ABO_2$에서 코사인법칙에 의하여

$$12^2=R_2^{\ 2}+R_2^{\ 2}-2\cdot R_2\cdot R_2\cdot\cos 60^\circ$$

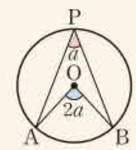
$$\therefore R_2^{\ 2}=144$$

$$\therefore R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}=192$$

쌤한마디

다음과 같은 원주각의 성질은 도형 문제에서 자주 이용된다.

① 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.

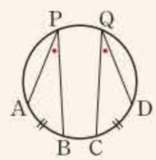


➡ $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$

② 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

➡ $\angle AP_1B=\angle AP_2B$
$=\angle AP_3B$

③ 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.



➡ $\widehat{AB}=\widehat{CD}$이면
$\angle APB=\angle CQD$

04 전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구한 후 코사인법칙을 이용한다.

풀이 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$라 하면 $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$에서

$\cos\theta>0$

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=\frac{5}{6}$$

$\triangle DCG$에서 $\overline{CD}=3$, $\overline{CG}=4$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DG}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\theta$$
$$=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\frac{5}{6}=5$$
$$\therefore \overline{DG}=\sqrt{5}\ (\because \overline{DG}>0)$$

한편 $\triangle BEC$에서 $\overline{BC}=3$, $\overline{CE}=4$이고

$$\angle BCE=2\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\pi-\theta$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BE}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos(\pi-\theta)$$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$$=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=45$$
$$\therefore \overline{BE}=3\sqrt{5}\ (\because \overline{BE}>0)$$
$$\therefore \overline{DG}\times\overline{BE}=15$$

답 ①

쌤한마디

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때, $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{5}{6}$이므로 θ가 예각일 때의 $\cos\theta$의 값과 부호만 다르고 절댓값이 같다. 즉 **04**번에서 구한 $\overline{DG}$의 길이가 $\overline{BE}$의 길이가 되고, $\overline{BE}$의 길이가 $\overline{DG}$의 길이가 되므로 $\overline{DG}\times\overline{BE}$의 값은 θ가 예각인지 둔각인지에 관계없이 같다.

Q BOX

05 전략 정육각형의 한 내각의 크기를 구한 후 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AM}$의 길이를 구한다.

풀이 정육각형의 한 내각의 크기는

$$\frac{180^\circ\times(6-2)}{6}=120^\circ \quad \cdots ❶$$

정n각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ\times(n-2)}{n}$

$\overline{MF}=\frac{1}{2}\cdot8=4$이므로 $\triangle AMF$에서 코사인법칙에 의하여

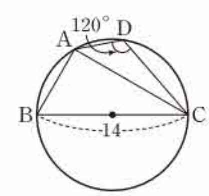
$$\overline{AM}^2=8^2+4^2-2\cdot8\cdot4\cdot\cos120^\circ$$
$$=64+16-2\cdot8\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=112$$
$$\therefore \overline{AM}=4\sqrt{7}\ (\because \overline{AM}>0) \quad \cdots ❷$$
$$\therefore \cos\theta=\frac{4^2+(4\sqrt{7})^2-8^2}{2\cdot4\cdot4\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

단계	채점 기준	비율
❶	정육각형의 한 내각의 크기를 구할 수 있다.	20 %
❷	$\overline{AM}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❸	$\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

06 전략 사인법칙을 이용하여 $\overline{AC}$의 길이를 구한 후 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AD}$의 길이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면 $\triangle ACD$에서 사인법칙에 의하여



$$\frac{\overline{AC}}{\sin120^\circ}=14$$
$$\therefore \overline{AC}=14\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$$

$\overline{AD}=x$라 하면 $\overline{CD}=2x$이므로 $\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여

$$(7\sqrt{3})^2=x^2+(2x)^2-2\cdot x\cdot 2x\cdot\cos120^\circ$$
$$147=x^2+4x^2-2\cdot x\cdot2x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$7x^2=147,\qquad x^2=21$$
$$\therefore x=\sqrt{21}\ (\because x>0)$$

따라서 $\overline{AD}$의 길이는 $\sqrt{21}$이다.

답 $\sqrt{21}$

07 전략 사인법칙을 이용하여 $\overline{BD}$, $\overline{BC}$의 길이를 구한 후 코사인법칙을 이용하여 $\overline{CD}$의 길이를 구한다.

풀이 $\triangle BDC$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=2\cdot2\sqrt{7}$$
$$\therefore \overline{BD}=4\sqrt{7}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}=8$$

$\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\cdot2\sqrt{7}$$
$$\therefore \overline{BC}=4\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{21}$$

□ABDC가 원에 내접하므로 $\angle BDC=\pi-\angle BAC$

한편 $\angle BDC=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이므로 $\overline{CD}=x$라 하면

△BDC에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\cdot x\cdot 8\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$84=x^2+64-2\cdot x\cdot 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2+8x-20=0,\qquad (x+10)(x-2)=0$$

$$\therefore\ x=2\ (\because\ x>0)$$

$$\therefore\ \overline{BD}+\overline{CD}=10$$

답 ②

08 전략 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 주어진 등식을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$$\frac{\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}}{\frac{a}{2R}}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$b+c=\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$$

양변에 $2bc$를 곱한다.

$$2bc(b+c)=b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)$$

$$b^3+b^2c+c^3+bc^2-a^2b-a^2c=0$$

$$b^2(b+c)+c^2(b+c)-a^2(b+c)=0$$

$$(b^2+c^2-a^2)(b+c)=0$$

$$\therefore\ b^2+c^2=a^2\ (\because\ b+c\neq 0)$$

따라서 △ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이다.

답 $A=90°$인 직각삼각형

09 전략 삼각비를 이용하여 $\overline{AC}$, $\overline{AD}$의 길이를 구한 후 코사인법칙을 이용하여 $\overline{CD}$의 길이를 구한다.

풀이 $\angle ACB=180°-(60°+30°)=90°$이므로 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC}=\overline{AB}\sin 30°=120\cdot\frac{1}{2}=60\,(\text{m})$$

직각삼각형 ABD에서

$$\overline{AD}=\frac{\overline{AB}}{\cos 30°}=\frac{120}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=80\sqrt{3}\,(\text{m})$$

△CAD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2=60^2+(80\sqrt{3})^2-2\cdot 60\cdot 80\sqrt{3}\cdot\cos 30°$$

$\angle CAD$
$=\angle CAB-\angle DAB$
$=60°-30°=30°$

$$=3600+19200-2\cdot 60\cdot 80\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

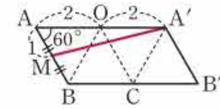
$$=8400$$

$$\therefore\ \overline{CD}=20\sqrt{21}\,(\text{m})\ (\because\ \overline{CD}>0)$$

따라서 두 지점 C, D 사이의 거리는 $20\sqrt{21}$ m이다.

답 $20\sqrt{21}$ m

10 전략 정사면체의 전개도를 그린 후 최단 거리에 해당하는 선분을 그린다.



풀이 정사면체의 전개도는 오른쪽 그림과 같으므로 점 P가 움직인 최단 거리는 $\overline{MA'}$의 길이와 같다.

따라서 △AMA′에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{MA'}^2=1^2+4^2-2\cdot 1\cdot 4\cdot\cos 60°$$

$$=1+16-2\cdot 1\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=13$$

$$\therefore\ \overline{MA'}=\sqrt{13}\ (\because\ \overline{MA'}>0)$$

답 $\sqrt{13}$

11 전략 먼저 코사인법칙을 이용하여 a를 구한다.

풀이 코사인법칙에 의하여

$$a^2=7^2+8^2-2\cdot 7\cdot 8\cdot\cos 120°$$

$$=49+64-2\cdot 7\cdot 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=169$$

$\therefore\ a=13\ (\because\ a>0)$ ⋯ ❶

△ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot\sin 120°=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$=14\sqrt{3}$ ⋯ ❷

△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\frac{1}{2}r(13+7+8)=14\sqrt{3}$$

$14r=14\sqrt{3}\qquad\therefore\ r=\sqrt{3}$ ⋯ ❸

답 $\sqrt{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	a를 구할 수 있다.	30 %
❷	△ABC의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❸	△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %

12 전략 △OAB, △OCA의 넓이를 이용하여 $\cos(\angle AOB)$의 값을 구한 후 △OAB에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

풀이 △OBC에서

$$\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{10},\ \overline{BC}=2\sqrt{5}$$

이므로

$$\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=\overline{BC}^2$$

따라서 △OBC는 $\angle BOC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

$\angle AOB=\theta$라 하면

$$\angle AOC=2\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}\pi-\theta$$

이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sin\theta=5\sin\theta$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-5\cos\theta$$

$3S_1=4S_2$에서

$$3\cdot 5\sin\theta=4\cdot(-5\cos\theta)$$

$$\therefore\ \sin\theta=-\frac{4}{3}\cos\theta$$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\left(-\frac{4}{3}\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta=1$

$\frac{25}{9}\cos^2\theta=1, \qquad \cos^2\theta=\frac{9}{25}$

$\therefore \cos\theta=-\frac{3}{5}\ \left(\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

따라서 $\triangle$OAB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\theta$

$=10+10-2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=32$

$\therefore \overline{AB}=4\sqrt{2}\ (\because \overline{AB}>0)$ 답 ③

△OAB에서
$0<\theta<\pi$
△OCA에서
$0<\frac{3}{2}\pi-\theta<\pi$
$\therefore \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

13 전략 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$임을 이용한다.

풀이 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=8:5:7$이므로

$a=8k,\ b=5k,\ c=7k\ (k>0)$

로 놓으면 헤론의 공식에서

$s=\frac{8k+5k+7k}{2}=10k$

$\therefore \triangle ABC$

$=\sqrt{10k(10k-8k)(10k-5k)(10k-7k)}$

$=10\sqrt{3}k^2$

즉 $10\sqrt{3}k^2=40\sqrt{3}$이므로 $\qquad k^2=4$

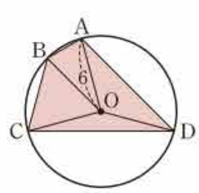
$\therefore k=2\ (\because k>0)$

따라서 $\triangle$ABC의 둘레의 길이는

$8k+5k+7k=20k=20\cdot2=40$ 답 40

14 전략 한 원에서 호의 길이는 그 호에 대한 중심각의 크기에 정비례함을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$를 그으면



$\angle AOB+\angle BOC$
$+\angle COD+\angle DOA$
$=360^\circ$

이고 $\overparen{AB}:\overparen{BC}:\overparen{CD}:\overparen{DA}=1:2:5:4$이므로

$\angle AOB=360^\circ\cdot\frac{1}{12}=30^\circ$

$\angle BOC=360^\circ\cdot\frac{2}{12}=60^\circ$

$\angle COD=360^\circ\cdot\frac{5}{12}=150^\circ$

$\angle DOA=360^\circ\cdot\frac{4}{12}=120^\circ$

$\therefore \square ABCD$

$=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCD+\triangle ODA$

$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin30^\circ+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin60^\circ$

$+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin150^\circ+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=9+9\sqrt{3}+9+9\sqrt{3}$

$=18(1+\sqrt{3})$ 답 ③

15 전략 등변사다리꼴은 두 대각선의 길이가 같음을 이용한다.

풀이 등변사다리꼴의 한 대각선의 길이를 x라 하면 넓이가 $9\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot\sin135^\circ=9\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}, \qquad x^2=36$

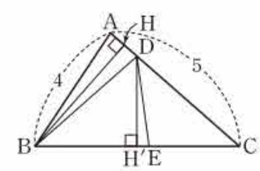
$\therefore x=6\ (\because x>0)$ 답 ②

16 전략 두 삼각형 ABD, DBC가 이등변삼각형임을 이용한다.

풀이 $\triangle$ABD에서 $\angle$BAD$=\angle$BDA이므로

$\overline{BD}=\overline{AB}=4$

$\angle$BAC$=\theta$라 하고 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서



$\overline{AH}=\overline{AB}\cos\theta=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

이므로

$\overline{AD}=2\overline{AH}=2\cdot\frac{1}{2}=1$

이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점에서 밑변에 그은 수선은 밑변을 이등분하므로
$\overline{AH}=\overline{HD}=\frac{1}{2}\overline{AD}$

$\triangle$DBC는 $\overline{BD}=\overline{DC}=4$인 이등변삼각형이므로 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{DC}=\overline{AC}-\overline{AD}$
$=5-1=4$

$\overline{BH'}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ …… ㉠

한편 $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cdot\cos\theta$

$=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{8}=36$

$\therefore \overline{BC}=6\ (\because \overline{BC}>0)$

따라서 ㉠에서 $\overline{BH'}=\frac{1}{2}\cdot6=3$이므로 직각삼각형 DBH′에서

$\overline{DH'}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

이때 $0^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

따라서 직각삼각형 DH′E에서

$\overline{DE}=\frac{\overline{DH'}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{8}{3}$ 답 ③

17 전략 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같음을 이용한다.

풀이 $\angle$BAD$=\angle$BCD$=\theta$라 하면

$\overparen{BD}$에 대한 원주각

$S_1=\frac{1}{2}\cdot6\cdot\overline{AD}\cdot\sin\theta=3\overline{AD}\sin\theta$

$S_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot4\cdot\sin\theta=2\overline{BC}\sin\theta$

$S_1:S_2=9:5$에서

$3\overline{AD}\sin\theta:2\overline{BC}\sin\theta=9:5$

$15\overline{AD}\sin\theta=18\overline{BC}\sin\theta,\quad 5\overline{AD}=6\overline{BC}$

$\therefore \overline{AD}:\overline{BC}=6:5$

즉 $\overline{AD}=6k$, $\overline{BC}=5k\ (k>0)$로 놓으면 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=6^2+(5k)^2-2\cdot6\cdot5k\cdot\cos\alpha\\&=36+25k^2-2\cdot6\cdot5k\cdot\frac{3}{4}\\&=25k^2-45k+36\end{aligned}$$

또 $\angle ADC=\angle ABC=\alpha$이므로 $\triangle ADC$에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=(6k)^2+4^2-2\cdot6k\cdot4\cdot\cos\alpha\\&=36k^2+16-2\cdot6k\cdot4\cdot\frac{3}{4}\\&=36k^2-36k+16\end{aligned}$$

따라서 $25k^2-45k+36=36k^2-36k+16$이므로

$11k^2+9k-20=0,\quad (11k+20)(k-1)=0$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

$\therefore \overline{AD}=6\cdot1=6$

이때 $0<\alpha<\pi$이고 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$이므로

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\begin{aligned}\therefore S&=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\sin\alpha\\&=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}\end{aligned}$$

$\therefore S^2=63$ 답 63

Q BOX

수열의 일반항 a_n의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입한다.

$\overset{\frown}{AC}$에 대한 원주각

$13-18=8-13=3-8$
$=\cdots=-5$

수열의 일반항 a_n의 n에 6을 대입한다.

08 등차수열과 등비수열

Lecture 15 등차수열

94쪽

01 $a_1=8\cdot1-5=3$, $a_2=8\cdot2-5=11$,
$a_3=8\cdot3-5=19$, $a_4=8\cdot4-5=27$, $a_5=8\cdot5-5=35$

답 3, 11, 19, 27, 35

02 $a_1=\frac{1+1}{1}=2$, $a_2=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$, $a_3=\frac{3+1}{3}=\frac{4}{3}$,
$a_4=\frac{4+1}{4}=\frac{5}{4}$, $a_5=\frac{5+1}{5}=\frac{6}{5}$

답 $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5}$

03 $a_n=-1+(n-1)\cdot4=4n-5$ 답 $a_n=4n-5$

04 주어진 등차수열의 첫째항이 18이고 공차가 -5이므로

$a_n=18+(n-1)\cdot(-5)=-5n+23$

답 $a_n=-5n+23$

05 (1) $a_n=15+(n-1)\cdot(-3)=-3n+18$이므로
$a_6=(-3)\cdot6+18=0$

(2) -12를 제k항이라 하면

$-3k+18=-12\quad \therefore k=10$

따라서 -12는 제10항이다.

답 (1) 0 (2) 제10항

06 x는 5와 -9의 등차중항이므로

$x=\frac{5+(-9)}{2}=-2$ 답 -2

07 $2x$는 -3과 x의 등차중항이므로

$2x=\frac{-3+x}{2},\quad 4x=-3+x$

$\therefore x=-1$ 답 -1

표준+발전 유형 Q+Q

95쪽

01 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_4=a+3\cdot(-2)=7\quad \therefore a=13$

따라서 $a_n=13+(n-1)\cdot(-2)=-2n+15$이므로 $a_k=-25$에서

$-2k+15=-25\quad \therefore k=20$ 답 ①

02 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_2+a_8=16$에서

$(a+d)+(a+7d)=16$

$\therefore a+4d=8$ …… ㉠

$a_5+a_{10}=31$에서

$(a+4d)+(a+9d)=31$

$\therefore 2a+13d=31$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $d=3$

따라서 $a_n=-4+(n-1)\cdot 3=3n-7$이므로

$a_{32}=3\cdot 32-7=89$ 답 89

03 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$라 하면 조건 (가)에서

$(a+6d)+(a+8d)=0$

$\therefore a=-7d$ …… ㉠

조건 (나)에서

$|a+6d|=|a+7d|+2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $|-d|=2$

$|d|=2$ $\therefore d=2$ ($\because d>0$)

$d=2$를 ㉠에 대입하면 $a=-14$

따라서 $a_n=-14+(n-1)\cdot 2=2n-16$이므로

$a_3=2\cdot 3-16=-10$ 답 ①

04 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=-a_9$, 즉 $a_4+a_9=0$이므로

$(a+3d)+(a+8d)=0$

$\therefore 2a+11d=0$ …… ㉠

또 $a_3=-14$이므로

$a+2d=-14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-22$, $d=4$

$\therefore a_n=-22+(n-1)\cdot 4=4n-26$

78을 제k항이라 하면

$4k-26=78$ $\therefore k=26$

따라서 78은 제26항이다. 답 제26항

05 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=a+4d=28$ …… ㉠

$a_8=a+7d=19$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=40$, $d=-3$

$\therefore a_n=40+(n-1)\cdot(-3)=-3n+43$

$-3n+43<0$에서 $n>\frac{43}{3}=14.\cdots$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제15항이다.

답 ③

06 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_{24}=a+23\cdot 5=24$ $\therefore a=-91$

$\therefore a_n=-91+(n-1)\cdot 5=5n-96$

$5n-96>0$에서 $n>\frac{96}{5}=19.2$

이때 $a_{19}=5\cdot 19-96=-1$, $a_{20}=5\cdot 20-96=4$이므로

$|a_{19}|=1$, $|a_{20}|=4$

따라서 $|a_n|$의 값이 최소가 되는 자연수 n의 값은 19이다. 답 19

Q BOX

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등차수열

➡ 첫째항: a,
제$(n+2)$항: b

➡ $b=a+(n+1)d$
(단, d는 공차)

$a_{32}=-4+31\cdot 3=89$
와 같이 구할 수도 있다.

(i) $a=-1$일 때,
세 수는 6, -2, -10으로 공차가 -8인 등차수열을 이룬다.

(ii) $a=3$일 때,
세 수는 6, 18, 30으로 공차가 12인 등차수열을 이룬다.

등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로

① 양수가 되는 항
➡ $a_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

② 음수가 되는 항
➡ $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

처음으로 양수가 되는 항이 a_k일 때, $|a_{k-1}|$과 $|a_k|$의 값 중 작은 값이 최솟값이다.

07 공차를 d라 하면 첫째항이 1, 제23항이 100이므로

$1+22d=100$ $\therefore d=\frac{9}{2}$

이때 a_{10}은 주어진 수열의 제11항이므로

$a_{10}=1+10\cdot\frac{9}{2}=46$ 답 ③

08 첫째항이 -5, 공차가 $\frac{4}{3}$인 등차수열의 제$(n+2)$항이 19이므로

$-5+(n+1)\cdot\frac{4}{3}=19$, $n+1=18$

$\therefore n=17$ 답 17

쌤 한마디

주어진 수열은 항수가 $n+2$인 등차수열이고 첫째항이 -5, 끝항이 19이므로 공차는 $\frac{19-(-5)}{n+1}=\frac{4}{3}$, 즉 $4(n+1)=72$임을 이용하여 n의 값을 구할 수도 있다.

09 세 수 6, a^2+3a, $10a$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a^2+3a)=6+10a$, $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-1+3=2$ 답 ⑤

10 세 수 7, b, 23이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\frac{7+23}{2}=15$

세 수 a, 15, c도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a+c=2\cdot 15=30$

$\therefore a+b+c=45$ 답 ②

11 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 세 수의 합이 18이므로

$(a-d)+a+(a+d)=18$

$3a=18$ $\therefore a=6$

세 수의 제곱의 합이 126이므로

$(6-d)^2+6^2+(6+d)^2=126$

$108+2d^2=126$, $d^2=9$

$\therefore d=\pm 3$

따라서 세 수는 3, 6, 9이므로 세 수의 곱은

$3\cdot 6\cdot 9=162$ 답 162

12 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 놓으면 네 수의 합이 2이므로

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=2$

$4a=2$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱이 -56이므로

$$\left(\frac{1}{2}-3d\right)\left(\frac{1}{2}+3d\right)=-56$$

$$\frac{1}{4}-9d^2=-56, \qquad d^2=\frac{25}{4}$$

$$\therefore\ d=\pm\frac{5}{2}$$

따라서 네 수는 -7, -2, 3, 8이므로 가장 큰 수는 8이다. 답 8

Lecture 16 등차수열의 합

97쪽

01 $\dfrac{12(-5+37)}{2}=192$ 답 192

02 $\dfrac{20\{2\cdot10+(20-1)\cdot(-2)\}}{2}=-180$

답 -180

03 4, 13, 22, $\cdots$, 94는 첫째항이 4, 공차가 $13-4=9$인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$$a_n=4+(n-1)\cdot9=9n-5$$

94를 제k항이라 하면

$$9k-5=94 \qquad \therefore\ k=11$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 4, 제11항이 94인 등차수열의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$$\frac{11(4+94)}{2}=539$$

답 539

첫째항이 4, 공차가 9이므로 $\dfrac{11(2\cdot4+10\cdot9)}{2}=539$ 와 같이 구할 수도 있다.

04 63, 58, 53, $\cdots$, -17은 첫째항이 63, 공차가 $58-63=-5$인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$$a_n=63+(n-1)\cdot(-5)=-5n+68$$

-17을 제k항이라 하면

$$-5k+68=-17 \qquad \therefore\ k=17$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 63, 제17항이 -17인 등차수열의 첫째항부터 제17항까지의 합이므로

$$\frac{17\{63+(-17)\}}{2}=391$$

답 391

05 $a_5=S_5-S_4=4\cdot5^2+5-(4\cdot4^2+4)=37$ 답 37

06 $a_8=S_8-S_7=8^2+2\cdot8-3-(7^2+2\cdot7-3)=17$

답 17

07 (i) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=2\cdot1^2-1=1$$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=2n^2-n-\{2(n-1)^2-(n-1)\}\\&=4n-3 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=4n-3$$

답 $a_n=4n-3$

쌤한마디

$a_n=S_n-S_{n-1}$을 이용하여 얻은 식은 $n\ge2$일 때만 적용된다.
따라서 이 식에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 $a_1=S_1$을 이용하여 얻은 값을 서로 비교하여
① 같으면 ➡ 일반항은 a_n만 쓴다.
② 다르면 ➡ a_1과 일반항 a_n $(n\ge2)$으로 나누어 쓴다.

08 (i) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=1^2-3\cdot1+1=-1$$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^2-3n+1-\{(n-1)^2-3(n-1)+1\}\\&=2n-4 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

㉠에 $n=1$을 대입하면

$$a_1=2\cdot1-4=-2$$

$a_1=S_1$을 이용하여 얻은 값과 다르므로 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

(i), (ii)에서 $a_1=-1$, $a_n=2n-4$ $(n\ge2)$

답 $a_1=-1$, $a_n=2n-4$ $(n\ge2)$

표준+발전 유형 Q+Q

98쪽

01 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$a_3=a+2d=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_6=a+5d=11 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $d=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20\{2\cdot(-4)+(20-1)\cdot3\}}{2}=490$$

답 ④

02 $S_n=\dfrac{n\{2\cdot(-27)+(n-1)\cdot4\}}{2}=2n^2-29n$

$S_n>0$에서 $2n^2-29n>0$

$$n(2n-29)>0 \qquad \therefore\ n>\frac{29}{2}=14.5$$

$n(2n-29)>0$에서 $n>0$이므로 $2n-29>0$ $\therefore\ n>\dfrac{29}{2}$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 15이다. 답 15

03 $S_{100}+T_{100}=500$에서

$$\frac{100(a_1+a_{100})}{2}+\frac{100(b_1+b_{100})}{2}=500$$

$$a_1+b_1+a_{100}+b_{100}=10$$

이때 $a_1+b_1=1$이므로

$$1+a_{100}+b_{100}=10 \qquad \therefore\ a_{100}+b_{100}=9$$

답 9

04 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면

$$a_1+b_1=7,\ d+d'=5$$

$\therefore (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15})$
$+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{15})$
$=\dfrac{15(2a_1+14d)}{2}+\dfrac{15(2b_1+14d')}{2}$
$=15\{(a_1+b_1)+7(d+d')\}$
$=15(7+7\cdot5)=630$ 답 ③

다른 풀이 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 7, 공차가 5인 등차수열이므로
(주어진 식)$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{15}+b_{15})$
$=\dfrac{15\{2\cdot7+(15-1)\cdot5\}}{2}=630$

05 첫째항이 5, 끝항이 49, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 297이므로
$\dfrac{(n+2)(5+49)}{2}=297$
$n+2=11 \qquad \therefore n=9$ 답 9

06 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=-88$이므로
$8+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+(-30)=-110$
즉 첫째항이 8, 끝항이 -30, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 -110이므로
$\dfrac{(n+2)\{8+(-30)\}}{2}=-110$
$n+2=10 \qquad \therefore n=8$ 답 8

07 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
$S_{10}=\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=145$에서
$2a+9d=29$ …… ㉠
$S_{20}=\dfrac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=590$에서
$2a+19d=59$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=3$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제30항까지의 합은
$\dfrac{30\{2\cdot1+(30-1)\cdot3\}}{2}=1335$ 답 ③

08 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$S_5=\dfrac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=45$에서
$a+2d=9$ …… ㉠
$S_{15}=\dfrac{15\{2a+(15-1)d\}}{2}=285$에서
$a+7d=19$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=2$
$\therefore a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{40}$
$=S_{40}-S_5$
$=\dfrac{40\{2\cdot5+(40-1)\cdot2\}}{2}-45$
$=1760-45=1715$ 답 1715

Q BOX

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때
① $a_k>0$, $a_{k+1}<0$이면 S_n의 최댓값은 S_k이다.
② $a_k<0$, $a_{k+1}>0$이면 S_n의 최솟값은 S_k이다.

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 각각 d, d'이면 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 a_1+b_1, 공차가 $d+d'$인 등차수열이다.

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 첫째항이 a, 제$(n+2)$항이 b인 등차수열을 만들 때, 이 등차수열의 합을 S라 하면
$S=\dfrac{(n+2)(a+b)}{2}$

첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열의 제25항

09 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_6=a+5d=10$ …… ㉠
$a_{11}=a+10d=-20$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=40$, $d=-6$
$\therefore a_n=40+(n-1)\cdot(-6)=-6n+46$
$-6n+46<0$에서 $n>\dfrac{23}{3}=7.\cdots$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.
이때 $a_7=-6\cdot7+46=4$이므로 구하는 최댓값은
$S_7=\dfrac{7(40+4)}{2}=154$ 답 154

10 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$S_3=\dfrac{3\{2\cdot(-6)+(3-1)d\}}{2}=3d-18$
$S_7=\dfrac{7\{2\cdot(-6)+(7-1)d\}}{2}=21d-42$
$S_3=S_7$에서 $3d-18=21d-42$
$18d=24 \qquad \therefore d=\dfrac{4}{3}$
$\therefore a_n=-6+(n-1)\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}n-\dfrac{22}{3}$
$\dfrac{4}{3}n-\dfrac{22}{3}>0$에서 $n>\dfrac{11}{2}=5.5$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 제6항부터 양수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최소이다.
이때 $a_5=\dfrac{4}{3}\cdot5-\dfrac{22}{3}=-\dfrac{2}{3}$이므로 구하는 최솟값은
$S_5=\dfrac{5\left\{-6+\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right\}}{2}=-\dfrac{50}{3}$ 답 ③

11 100 이하의 자연수 중에서 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 수는
3, 7, 11, …, 99
이때 $99=3+4\cdot24$에서 구하는 값은 첫째항이 3, 끝항이 99, 항수가 25인 등차수열의 합이므로
$\dfrac{25(3+99)}{2}=1275$ 답 ④

쌤 한마디
① 자연수 d의 양의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면
$d,\ 2d,\ 3d,\ \cdots$
➡ 첫째항과 공차가 모두 d인 등차수열
② 자연수 d로 나누었을 때의 나머지가 a $(0<a<d)$인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면
$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots$
➡ 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열

12 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 자연수는
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, … …… ㉠

5로 나누었을 때의 나머지가 3인 자연수는

$3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28,\ 33,\ 38,\ \cdots$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 공통인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$8,\ 23,\ 38,\ \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 8, 공차가 15인 등차수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{10\{2\cdot 8+(10-1)\cdot 15\}}{2}=755$$

답 755

13 $a_1=1+2+2+3=8$

$a_2=3+4+4+5=16$

$a_3=5+6+6+7=24$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 8, 공차가 8인 등차수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{11}=\frac{11\{2\cdot 8+(11-1)\cdot 8\}}{2}=528$$

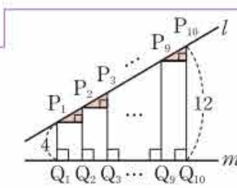
답 528

Q BOX

$$\frac{-16}{4}=\frac{64}{-16}=\frac{-256}{64}=\cdots=-4$$

오른쪽으로 1칸, 아래쪽으로 1칸 이동하였을 때, 각 칸에 적힌 수가 2씩 커지므로 4개의 칸에 적힌 수의 합은 8만큼 커진다.

14 오른쪽 그림에서 색칠한 직각삼각형은 모두 합동이므로



$\overline{P_2Q_2}-\overline{P_1Q_1}$

$=\overline{P_3Q_3}-\overline{P_2Q_2}$

$\vdots$

$=\overline{P_{10}Q_{10}}-\overline{P_9Q_9}$

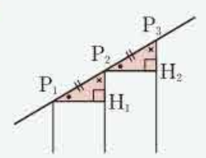
즉 $\overline{P_1Q_1},\ \overline{P_2Q_2},\ \cdots,\ \overline{P_{10}Q_{10}}$의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 d라 하면

$\overline{P_2Q_2}=4+d,\ \overline{P_9Q_9}=12-d$

$\therefore\ \overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\overline{P_4Q_4}+\cdots+\overline{P_9Q_9}$

$=\frac{8\{(4+d)+(12-d)\}}{2}=64$

답 ③



위의 그림에서

$\triangle P_1H_1P_2\equiv\triangle P_2H_2P_3$ (RHA 합동)

마찬가지로 색칠한 직각삼각형은 모두 합동이다.

15 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2+3\cdot 1=4$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=2n+2$ ...... ㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+2$

따라서 구하는 값은 첫째항이 $a_1=4$, 끝항이 $a_{99}=200$, 항수가 50인 등차수열의 합과 같으므로

$$\frac{50(4+200)}{2}=5100$$

답 ①

수열 $\{a_n\}$이 공차가 d인 등차수열이면 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a_1, 공차가 $2d$인 등차수열이다.

16 $S_n=n^2+kn+3,\ T_n=2n^2-5n$이라 하면

$a_8=S_8-S_7=8^2+8k+3-(7^2+7k+3)$

$=k+15$

$b_8=T_8-T_7=2\cdot 8^2-5\cdot 8-(2\cdot 7^2-5\cdot 7)$

$=25$

이때 $a_8=b_8$이므로 $k+15=25$

$\therefore\ k=10$

답 10

Lecture 17 등비수열

101쪽

01 답 $a_n=6^{n-1}$

02 주어진 등비수열의 첫째항이 4이고 공비가 -4이므로

$a_n=4\cdot(-4)^{n-1}$

답 $a_n=4\cdot(-4)^{n-1}$

03 주어진 등비수열의 첫째항이 27이고 공비가 $\frac{1}{9}$이므로

$a_n=27\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$

답 $a_n=27\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$

04 (1) $a_n=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_4=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{4}$

(2) $\frac{3}{64}$을 제k항이라 하면

$6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{3}{64},\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{128}=\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$k-1=7 \quad \therefore\ k=8$

따라서 $\frac{3}{64}$은 제8항이다.

답 (1) $\frac{3}{4}$ (2) 제8항

05 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_4=27r^3=1,\quad r^3=\frac{1}{27} \quad \therefore\ r=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

06 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_5=3r^4=48,\quad r^4=16 \quad \therefore\ r=\pm 2$

답 -2 또는 2

07 x는 4와 25의 등비중항이므로

$x^2=4\cdot 25=100$

$\therefore\ x=\pm 10$

답 -10 또는 10

08 4는 $2x$와 x의 등비중항이므로

$4^2=2x\cdot x,\quad x^2=8$

$\therefore\ x=\pm 2\sqrt{2}$

답 $-2\sqrt{2}$ 또는 $2\sqrt{2}$

09 $2\sqrt{3}$은 x와 6의 등비중항이므로

$(2\sqrt{3})^2=x\cdot 6 \quad \therefore\ x=2$

6은 $2\sqrt{3}$과 y의 등비중항이므로

$6^2=2\sqrt{3}y \quad \therefore\ y=6\sqrt{3}$

답 $x=2,\ y=6\sqrt{3}$

표준+발전 유형 Q+Q 102쪽

01 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=24$에서 $ar=24$ …… ㉠

$a_{10}=\frac{1}{8}a_7$에서 $ar^9=\frac{1}{8}ar^6$

$r^3=\frac{1}{8}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}a=24$ $\therefore a=48$

따라서 $a_n=48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_6=48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

02 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_3}{2a_2}-\frac{a_5}{a_3}=\frac{1}{16}$에서

$\frac{r}{2}-r^2=\frac{1}{16}$, $16r^2-8r+1=0$

$(4r-1)^2=0$ $\therefore r=\frac{1}{4}$

$\therefore a_n=1024\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

1을 제k항이라 하면

$1024\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=1$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{1}{1024}=\left(\frac{1}{4}\right)^5$

$k-1=5$ $\therefore k=6$

따라서 1은 제6항이다. 답 제6항

03 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2+a_4=30$에서 $ar+ar^3=30$

$\therefore ar(1+r^2)=30$ …… ㉠

$a_3+a_5=90$에서 $ar^2+ar^4=90$

$\therefore ar^2(1+r^2)=90$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$30a=30$ $\therefore a=1$

$\therefore a_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$

$3^{n-1}>1000$에서 $3^6=729$, $3^7=2187$이므로

$n-1\geq 7$ $\therefore n\geq 8$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제8항이다.

답 ②

04 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_5=ar^4=2$ …… ㉠

$a_7=ar^6=1$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=\frac{1}{2}$

$\therefore r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(\because r>0)$

Q BOX

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등비수열
➡ 첫째항: a, 제$(n+2)$항: b
➡ $b=ar^{n+1}$
(단, r는 공비)

수열의 모든 항이 양수이므로 공비도 양수이다.

$-\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{18}=-\frac{1}{243}$
$=\left(-\frac{1}{3}\right)^5$

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 처음으로
① k보다 커지는 항
➡ $ar^{n-1}>k$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.
② k보다 작아지는 항
➡ $ar^{n-1}<k$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

$r=\frac{1}{\sqrt{2}}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{a}{4}=2$ $\therefore a=8$

$\therefore a_n=8\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

${a_n}^2<\frac{1}{5}$에서 $64\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{5}$

$2^{n-1}>320$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$이므로

$n-1\geq 9$ $\therefore n\geq 10$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이다. 답 10

05 공비를 r라 하면 첫째항이 4, 제5항이 324이므로

$4r^4=324$, $r^4=81$ $\therefore r=3$ $(\because r>0)$

따라서 $a=12$, $b=36$, $c=108$이므로

$a+b+c=156$ 답 ④

06 첫째항이 18, 공비가 $-\frac{1}{3}$인 등비수열의 제$(n+2)$항이 $-\frac{2}{27}$이므로

$18\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}=-\frac{2}{27}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^5$

$n+1=5$ $\therefore n=4$ 답 4

07 세 양수 x, $2x+1$, $5x+4$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(2x+1)^2=x(5x+4)$

$x^2=1$ $\therefore x=1$ $(\because x>0)$ 답 1

08 세 수 6, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=6b$ …… ㉠

세 수 a, b, 36이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+36$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2=3a+108$

$a^2-3a-108=0$, $(a+9)(a-12)=0$

$\therefore a=12$ $(\because a>0)$

$a=12$를 ㉡에 대입하면

$2b=48$ $\therefore b=24$

$\therefore a+b=36$ 답 36

09 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=13$에서

$a(1+r+r^2)=13$ …… ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=27$에서 $(ar)^3=27$

$ar=3$ $\therefore a=\frac{3}{r}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{3}{r}(1+r+r^2)=13$

$3r^2-10r+3=0$, $(3r-1)(r-3)=0$

$\therefore r=\frac{1}{3}$ 또는 $r=3$

㉡에서 $r=\frac{1}{3}$일 때 $a=9$, $r=3$일 때 $a=1$이므로 세 실수는 1, 3, 9이다.
따라서 가장 큰 수는 9이다. 답 9

10 삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=p$ ...... ㉠

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a=-24$에서

$ar(a+ar+ar^2)=-24$

$\therefore arp=-24$ ($\because$ ㉠) ...... ㉡

$a\cdot ar\cdot ar^2=-64$에서

$(ar)^3=-64 \quad \therefore ar=-4$

$ar=-4$를 ㉡에 대입하면

$-4p=-24 \quad \therefore p=6$ 답 ②

> 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면
> $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$,
> $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$,
> $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

11 한 변의 길이가 6인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2=9\sqrt{3}$

> 처음 몇 개의 항을 나열하여 규칙성을 파악한다.

> 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는
> $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$9\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$9\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=9\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$

3회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$9\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=9\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$9\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 10회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$9\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ 답 ③

12 1월의 데이터 사용량을 a MB, 매월 데이터 사용량의 증가율을 r라 하자.
1월부터 n개월 후의 데이터 사용량은

$a(1+r)^n$ MB

5개월 후인 6월의 데이터 사용량이 1월의 2배이므로

$a(1+r)^5=2a \quad \therefore (1+r)^5=2$

10개월 후인 11월의 데이터 사용량이 $a(1+r)^{10}$ MB이므로 5개월 동안 증가한 데이터 사용량은

$$\begin{aligned}a(1+r)^{10}-a(1+r)^5&=a(1+r)^5\{(1+r)^5-1\}\\&=2a(2-1)\\&=2a\,(\text{MB})\end{aligned}$$

즉 $2a=1200$이므로

$a=600$

따라서 1월의 데이터 사용량은 600 MB이다. 답 600 MB

Lecture 18 등비수열의 합

104쪽

01 $\frac{3(4^5-1)}{4-1}=1023$ 답 1023

02 $\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{64}\right)=\frac{21}{32}$ 답 $\frac{21}{32}$

03 64, 32, 16, …, 1은 첫째항이 64, 공비가 $\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=64\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

1을 제k항이라 하면

$64\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$k-1=6 \quad \therefore k=7$

따라서 구하는 합은 첫째항이 64, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$\frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}=128\left(1-\frac{1}{128}\right)=127$ 답 127

04 1, -3, 9, …, -243은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{-3}{1}=-3$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=1\cdot(-3)^{n-1}=(-3)^{n-1}$

-243을 제k항이라 하면

$(-3)^{k-1}=-243=(-3)^5$

$k-1=5 \quad \therefore k=6$

따라서 구하는 합은 첫째항이 1, 공비가 -3인 등비수열의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$\frac{1\cdot\{1-(-3)^6\}}{1-(-3)}=-182$ 답 -182

05 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=5-1=4$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=5^n-1-(5^{n-1}-1)\\&=4\cdot 5^{n-1}\end{aligned}$$ ...... ㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\cdot 5^{n-1}$ 답 $a_n=4\cdot 5^{n-1}$

06 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2+3=5$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=2^n+3-(2^{n-1}+3)\\&=2^{n-1}\end{aligned}$$ ...... ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1=1$

(i), (ii)에서 $a_1=5,\ a_n=2^{n-1}\ (n\geq 2)$

답 $a_1=5,\ a_n=2^{n-1}\ (n\geq 2)$

$a_1=S_1$을 이용하여 얻은 값과 다르므로 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등비수열을 이룬다.

07 $a\times 1.02+a\times 1.02^2+\cdots+a\times 1.02^{10}$

$=\dfrac{a\times 1.02\times(1.02^{10}-1)}{1.02-1}$

$=\dfrac{a\times 1.02\times(1.2-1)}{0.02}$

$=10.2a$(원)

답 $10.2a$원

첫째항이 $a\times 1.02$, 공비가 1.02인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

08 $a+a\times 1.02+\cdots+a\times 1.02^9=\dfrac{a(1.02^{10}-1)}{1.02-1}$

$=\dfrac{a(1.2-1)}{0.02}$

$=10a$(원)

답 $10a$원

첫째항이 a, 공비가 1.02인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

표준+발전 유형 Q+Q

105쪽

01 $a_n=3^{2n-1}$에서

$a_1=3,\ a_2=3^3,\ a_3=3^5,\ \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 9인 등비수열이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=\dfrac{3(9^{12}-1)}{9-1}=\dfrac{3^{25}-3}{8}$

$\therefore p=25$

답 ③

$a_n=3^{2n-1}=3^{2n-2+1}$
$=3\cdot(3^2)^{n-1}$
$=3\cdot 9^{n-1}$
에서 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 3, 공비가 9인 등비수열임을 알 수도 있다.

02 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (r>0)$라 하면

$a_2+a_4=20$에서 $ar+ar^3=20$

$\therefore ar(1+r^2)=20$ …… ㉠

$a_4+a_6=80$에서 $ar^3+ar^5=80$

$\therefore ar^3(1+r^2)=80$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$ $\therefore r=2\ (\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $10a=20$ $\therefore a=2$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\dfrac{2(2^8-1)}{2-1}=510$

답 510

03 주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$9+99+999+\cdots+\underbrace{99\cdots9}_{10\text{개}}$

$=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{10}-1)$

$=(10+10^2+10^3+\cdots+10^{10})-10$

$=10^2+10^3+\cdots+10^{10}$

$=\dfrac{10^2(10^9-1)}{10-1}$

$=\dfrac{100}{9}(10^9-1)$

답 ①

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$
$=a_1+a_1r^2+a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8$
이므로 첫째항이 a_1, 공비가 r^2인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합이다.

전입자 수가 매년 일정한 비율로 감소하므로
$0<r<1$

첫째항이 10^2, 공비가 10인 등비수열의 첫째항부터 제9항까지의 합

04 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공비가 -3이므로 수열 $a_1+a_2,\ a_2+a_3,\ a_3+a_4,\ \cdots$는 첫째항이

$a_1+a_2=1+1\cdot(-3)=-2$

이고, 공비가

$\dfrac{a_2+a_3}{a_1+a_2}=\dfrac{1\cdot(-3)+1\cdot(-3)^2}{-2}=-3$

인 등비수열이다.

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\dfrac{-2\{1-(-3)^{10}\}}{1-(-3)}=\dfrac{3^{10}-1}{2}$

답 ③

05 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=40$ …… ㉠

$S_{2n}=\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n+1)(r^n-1)}{r-1}$

$=50$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^n+1=\dfrac{5}{4}$ $\therefore r^n=\dfrac{1}{4}$

$\therefore S_{3n}=\dfrac{a(r^{3n}-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$

$=40\left\{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{4}+1\right\}$

$=\dfrac{105}{2}$

답 $\dfrac{105}{2}$

06 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=18$에서

$\dfrac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}=18$ …… ㉠

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=15$에서

$\dfrac{a_1\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}=\dfrac{a_1(r^{10}-1)}{(r+1)(r-1)}$

$=15$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $r+1=\dfrac{6}{5}$

$\therefore r=\dfrac{1}{5}$

답 $\dfrac{1}{5}$

07 2010년의 전입자 수를 a라 하고, 매년 전입자 수가 전년도 전입자 수의 r배라 하면 2010년부터 2021년까지의 전입자 수가 40만 명이므로

$\dfrac{a(1-r^{12})}{1-r}=400000$ …… ㉠

2016년부터 2021년까지의 전입자 수가 10만 명이므로

$\dfrac{ar^6(1-r^6)}{1-r}=100000$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{1-r^{12}}{r^6(1-r^6)}=4$

$\dfrac{(1+r^6)(1-r^6)}{r^6(1-r^6)}=4,\quad \dfrac{1+r^6}{r^6}=4$

$1+r^6=4r^6$ $\therefore r^6=\dfrac{1}{3}$

따라서 2022년의 전입자 수는

$ar^{12}=a(r^6)^2=\frac{1}{9}a$

이므로 2010년의 전입자 수의 $\frac{1}{9}$배이다. 답 $\frac{1}{9}$배

$r^6=\frac{1}{3}$에서 r의 값을 구하지 않아도 답을 구할 수 있다.

08 $\overline{A_1B}=1$이므로 $l_1=\pi$

점 A_2가 $\overline{A_1B}$를 $1:2$로 내분하므로

$\overline{A_2B}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ $\therefore l_2=\frac{2}{3}\pi$

점 A_3이 $\overline{A_2B}$를 $1:2$로 내분하므로

$\overline{A_3B}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ $\therefore l_3=\frac{4}{9}\pi$

⋮

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 π, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_{10}=\frac{\pi\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=3\pi\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$$

답 $3\pi\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

09 $S_n+25=5^{n+2}$에서

$S_n=5^{n+2}-25$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=5^3-25=100$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=5^{n+2}-25-(5^{n+1}-25)$
$=4\cdot5^{n+1}$ …… ㉠

이때 $a_1=100$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\cdot5^{n+1}$

따라서 $p=4$, $q=5$이므로

$p-q=-1$ 답 ②

$a_n=4\cdot5^{n+1}=100\cdot5^{n-1}$이므로 첫째항이 100, 공비가 5인 등비수열이다.

10 ㄱ. $a_1=S_1=4-3=1$

$a_4=S_4-S_3=4^4-3-(4^3-3)=192$

$\therefore a_1+a_4=193$

ㄴ. $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(4^n-3)-(4^{n-1}-3)$
$=3\cdot4^{n-1}$ …… ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=3$

$\therefore a_1=1$, $a_n=3\cdot4^{n-1}$ $(n\ge2)$

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 공비가 4인 등비수열을 이루므로 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=12$, 공비가 $4^2=16$인 등비수열이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

$1, 3\cdot4, 3\cdot4^2, 3\cdot4^3, \cdots$

11 매년 말에 100만 원씩 적립하면 5년째 말의 적립금의 원리합계는

$100+100(1+0.04)+100(1+0.04)^2$
$+100(1+0.04)^3+100(1+0.04)^4$
$=\frac{100(1.04^5-1)}{1.04-1}=\frac{100\times0.22}{0.04}$
$=550$(만 원) 답 550만 원

12 매년 초에 적립하는 금액을 a만 원이라 하면 3년째 말의 적립금의 원리합계는

$a(1+0.06)+a(1+0.06)^2+a(1+0.06)^3$
$=\frac{a\times1.06\times(1.06^3-1)}{1.06-1}=\frac{a\times1.06\times0.2}{0.06}$
$=\frac{53}{15}a$(만 원)

$\frac{53}{15}a=530$이므로 $a=150$

따라서 매년 초에 150만 원씩 적립해야 한다.

답 150만 원

중단원 마무리

107쪽

01 전략 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$임을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_2+a_3=-33$에서

$a+(a+d)+(a+2d)=-33$

$\therefore a+d=-11$ …… ㉠

$a_4+a_5+a_6=3$에서

$(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)=3$

$\therefore a+4d=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-15$, $d=4$

따라서 $a_n=-15+(n-1)\cdot4=4n-19$이므로

$a_{10}=4\cdot10-19=21$ 답 21

02 전략 첫째항을 a라 하고 $a_3a_7=64$를 a에 대한 식으로 나타내어 a의 값을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 $a_3a_7=64$에서

$\{a+2\cdot(-3)\}\{a+6\cdot(-3)\}=64$

$(a-6)(a-18)=64$, $a^2-24a+44=0$

$(a-2)(a-22)=0$ $\therefore a=2$ 또는 $a=22$

(i) $a=2$일 때,

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공차가 -3이므로

$a_8=2+7\cdot(-3)=-19$

이때 $a_8<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=22$일 때,

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 22, 공차가 -3이므로

$a_8=22+7\cdot(-3)=1$

$a_8>0$을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=22$

따라서 $a_n=22+(n-1)\cdot(-3)=-3n+25$이므로

$a_2=-3\cdot2+25=19$ 답 ③

03 전략 $|A|=|B|$이면 $A=B$ 또는 $A=-B$임을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$|a_2-3|=|a_3-3|$에서

$|(a+6)-3|=|(a+2\cdot6)-3|$

$|a+3|=|a+9|$ $\quad\therefore a+3=\pm(a+9)$

이때 $a+3=a+9$를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않으므로

$a+3=-(a+9)$

$2a=-12$ $\quad\therefore a=-6$

따라서 $a_n=-6+(n-1)\cdot6=6n-12$이므로

$a_5=6\cdot5-12=18$ 답 ②

04 전략 일반항 a_n, b_n을 구하여 $b_n-a_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 6이고 공차가 $-\frac{1}{3}$이므로

$$a_n=6+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}n+\frac{19}{3}$$

등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 -16이고 공차가 $\frac{1}{2}$이므로

$$b_n=-16+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n-\frac{33}{2}$$

수열 $\{b_n-a_n\}$의 일반항은

$$\frac{1}{2}n-\frac{33}{2}-\left(-\frac{1}{3}n+\frac{19}{3}\right)=\frac{5}{6}n-\frac{137}{6}$$

수열 $\{b_n-a_n\}$은 첫째항이 -22, 공차가 $\frac{5}{6}$인 등차수열이다.

$\frac{5}{6}n-\frac{137}{6}>0$에서 $\quad n>\frac{137}{5}=27.4$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제28항이다.

답 제28항

05 전략 두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 등차수열을 만들면 a는 첫째항이고, b는 제$(n+2)$항임을 이용한다.

풀이 공차를 d라 하면 첫째항이 17, 제$(n+2)$항이 107이므로

$17+(n+1)d=107,\quad (n+1)d=90$

$$\therefore n+1=\frac{90}{d}$$

이때 n은 자연수이므로 $\frac{90}{d}$은 1보다 큰 자연수이어야 한다.

따라서 공차가 될 수 없는 것은 ②이다. 답 ②

$d=4$이면 $n+1=\frac{90}{4}$

$\therefore n=\frac{43}{2}$

그런데 n은 자연수이므로 $d\neq4$

06 전략 세 수 x, y, z가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $y=\frac{x+z}{2}$, 즉 $2y=x+z$임을 이용한다.

풀이 세 수 $\log_2 5$, $\log_2 a$, $\log_2 45$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log_2 a=\log_2 5+\log_2 45$

$\log_2 a^2=\log_2 225,\quad a^2=225$

$\therefore a=15$ ($\because a>0$)

세 수 $\log_2 a$, $\log_2 45$, $\log_2 b$, 즉 $\log_2 15$, $\log_2 45$, $\log_2 b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log_2 45=\log_2 15+\log_2 b$

$\log_2 45^2=\log_2 15b,\quad 15b=2025$

$\therefore b=135$

$\therefore b-a=120$ 답 120

07 전략 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $2b=a+c$임을 이용하여 조건 (가)에서 b의 값을 구한다.

풀이 세 실수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+c$ ······ ㉠

조건 (가)에서 $\frac{2^a\times2^c}{2^b}=32$이므로

$2^{a+c-b}=32,\quad 2^{2b-b}=32$ ($\because$ ㉠)

$2^b=2^5$ $\quad\therefore b=5$

$b=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad a+c=2\cdot5=10$

이것을 조건 (나)의 식에 대입하면

$10+ca=26$ $\quad\therefore ca=16$

$\therefore abc=16\cdot5=80$ 답 80

08 전략 조건 (가)에서 등차중항을 찾아 그 값을 구하고, 이를 이용하여 S_k를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 a_{k-3}, a_{k-2}, a_{k-1}이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a_{k-2}=a_{k-3}+a_{k-1}$

조건 (가)에서 $a_{k-3}+a_{k-1}=-24$이므로

$2a_{k-2}=-24$ $\quad\therefore a_{k-2}=-12$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{k\{(a_3-2d)+(a_{k-2}+2d)\}}{2}$$
$$=\frac{k(a_3+a_{k-2})}{2}=\frac{k\{42+(-12)\}}{2}$$
$$=15k$$

조건 (나)에서 $S_k=k^2$이므로

$15k=k^2,\quad k(k-15)=0$

$\therefore k=15$ ($\because k$는 자연수) 답 ③

쌤 한마디

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 공차를 d라 하면

$a_1+a_n=a_1+\{a_1+(n-1)d\}=2a_1+(n-1)d$,

$a_2+a_{n-1}=(a_1+d)+\{a_1+(n-2)d\}$
$=2a_1+(n-1)d$,

$a_3+a_{n-2}=(a_1+2d)+\{a_1+(n-3)d\}$
$=2a_1+(n-1)d$,

$\vdots$

이므로 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\frac{n(a_3+a_{n-2})}{2}$$
$$=\cdots$$

09 전략 첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{n(a+l)}{2}$임을 이용한다.

풀이 주어진 등식에서

$\frac{9(a_1+a_9)}{2}+\frac{9(b_1+b_9)}{2}=108$

$\therefore a_1+b_1+a_9+b_9=24$

이때 $a_1+b_1=8$이므로

$8+a_9+b_9=24 \quad \therefore a_9+b_9=16$ 답 16

10 전략 공차를 d라 하고 a_4의 값을 이용하여 d의 값을 구한다.

풀이 공차를 d라 하면 a_4는 주어진 수열의 제5항이므로

$-1+4d=11 \quad \therefore d=3$ ···❶

또 제$(n+2)$항이 26이므로

$-1+(n+1)\cdot 3=26, \quad n+1=9$

$\therefore n=8$ ···❷

따라서 주어진 수열은 첫째항이 -1, 끝항이 26, 항수가 10인 등차수열이므로 그 합은

$\frac{10(-1+26)}{2}=125$ ···❸

답 125

단계	채점 기준	비율
❶	공차를 구할 수 있다.	40 %
❷	n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	주어진 수열의 모든 항의 합을 구할 수 있다.	20 %

11 전략 첫째항을 a, 공차를 d라 하고 주어진 조건을 a, d에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$라 하면

$S_9=27$에서 $\frac{9(2a+8d)}{2}=27$

$\therefore a+4d=3$ ······ ㉠

$|S_3|=27$에서 $\left|\frac{3(2a+2d)}{2}\right|=27$

$\therefore a+d=9$ 또는 $a+d=-9$

(i) $a+d=9$일 때,

㉠과 연립하여 풀면 $a=11,\ d=-2$

이때 $d<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+d=-9$일 때,

㉠과 연립하여 풀면 $a=-13,\ d=4$

(i), (ii)에서

$a=-13,\ d=4$

따라서 $a_n=-13+(n-1)\cdot 4=4n-17$이므로

$a_{10}=4\cdot 10-17=23$ 답 ①

12 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $a_k>0$, $a_{k+1}<0$이면 S_n의 최댓값은 S_k임을 이용한다.

QBOX

$f(x)=3x^2-6x$라 하면 다항식 $f(x)$를 일차식 $x+n$으로 나누었을 때의 나머지는 $f(-n)$이다.

첫째항이 -1, 공차가 3이므로

$\frac{10\{2\cdot(-1)+9\cdot 3\}}{2}$

$=125$

와 같이 구할 수도 있다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=31$ ······ ㉠

$a_9=a+8d=13$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=37,\ d=-3$

$\therefore a_n=37+(n-1)\cdot(-3)=-3n+40$

$-3n+40<0$에서 $n>\frac{40}{3}=13.\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제14항부터 음수이므로 첫째항부터 제13항까지의 합이 최대이다.

즉 구하는 자연수 n의 값은 13이다. 답 13

13 전략 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_4, a_8의 값을 구한다.

풀이 $S_n=3\cdot(-n)^2-6\cdot(-n)=3n^2+6n$이므로

$a_4=S_4-S_3$

$=3\cdot 4^2+6\cdot 4-(3\cdot 3^2+6\cdot 3)=27$

$a_8=S_8-S_7$

$=3\cdot 8^2+6\cdot 8-(3\cdot 7^2+6\cdot 7)=51$

$\therefore a_4+a_8=78$ 답 ①

다른 풀이 $S_n=3n^2+6n$이므로

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3\cdot 1^2+6\cdot 1=9$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3n^2+6n-\{3(n-1)^2+6(n-1)\}$

$=6n+3$ ······ ㉠

이때 $a_1=9$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=6n+3$

$\therefore a_4+a_8=(6\cdot 4+3)+(6\cdot 8+3)=78$

14 전략 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_3=a\cdot(-3)^2=-27$

$9a=-27 \quad \therefore a=-3$

$\therefore a_n=-3\cdot(-3)^{n-1}=(-3)^n$ ···❶

$a_k=729$에서 $(-3)^k=(-3)^6$

$\therefore k=6$ ···❷

답 6

단계	채점 기준	비율
❶	a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷	k의 값을 구할 수 있다.	50 %

15 전략 첫째항을 a, 공비를 r라 하고 로그의 정의를 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\log a_2=\frac{1}{3}$에서 $a_2=ar=10^{\frac{1}{3}}$ ······ ㉠

$\log a_7=2$에서 $a_7=ar^6=10^2$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^5=10^{\frac{5}{3}} \quad \therefore r=10^{\frac{1}{3}}$

$r=10^{\frac{1}{3}}$을 ㉠에 대입하면 $a=1$

따라서 $a_n=10^{\frac{n-1}{3}}$이므로 $100<a_n<10000$에서

$10^2<10^{\frac{n-1}{3}}<10^4,\quad 2<\frac{n-1}{3}<4$

$6<n-1<12\quad \therefore 7<n<13$

즉 자연수 n은 8, 9, 10, 11, 12의 5개이다. 답 5

$a_n=1\cdot(10^{\frac{1}{3}})^{n-1}$
$=10^{\frac{n-1}{3}}$

16 전략 두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 등비수열을 만들면 a는 첫째항이고, b는 제$(n+2)$항임을 이용한다.

풀이 주어진 등비수열의 공비를 r $(r>0)$라 하면 첫째항이 4, 제9항이 64이므로

모든 항이 양수이므로 공비도 양수이다.

$4r^8=64,\quad r^8=16=2^4=(\sqrt{2})^8$

$\therefore r=\sqrt{2}$ ($\because r>0$)

따라서 $x_n=4\cdot(\sqrt{2})^n=2^{2+\frac{n}{2}}$이므로

$\log_2 x_n=2+\frac{n}{2}$

$\therefore \log_2 x_1+\log_2 x_2+\log_2 x_3+\cdots+\log_2 x_7$

$=\left(2+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{2}{2}\right)+\left(2+\frac{3}{2}\right)+\cdots+\left(2+\frac{7}{2}\right)$

$=14+\frac{1+2+3+\cdots+7}{2}$

$=28$ 답 28

17 전략 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2b=a+c$, 등비수열을 이루면 $b^2=ac$임을 이용한다.

풀이 세 항 a_2, a_k, a_8이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $2a_k=a_2+a_8$에서

$2\{a_1+(k-1)\cdot 6\}=(a_1+6)+(a_1+7\cdot 6)$

$12k=60\quad \therefore k=5$

세 항 a_1, a_2, a_k, 즉 a_1, a_2, a_5가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a_2^{\,2}=a_1a_5$에서

$(a_1+6)^2=a_1(a_1+4\cdot 6)$

$12a_1=36\quad \therefore a_1=3$

$\therefore k+a_1=8$ 답 ②

18 전략 등비수열을 이루는 네 수는 a, ar, ar^2, ar^3으로 놓는다.

풀이 네 자연수를

a, ar, ar^2, ar^3 (a, r는 자연수, $r>1$)

으로 놓으면

네 수 a, ar, ar^2, ar^3이 서로 다르므로 $r\neq 1$

$ar^3\le 200$, 즉 $a\le\frac{200}{r^3}$

(i) $r=2$일 때, $a\le\frac{200}{8}=25$에서

$a=1, 2, 3, \cdots, 25$

(ii) $r=3$일 때, $a\le\frac{200}{27}=7.\cdots$에서

$a=1, 2, 3, \cdots, 7$

(iii) $r=4$일 때, $a\le\frac{200}{64}=3.125$에서

$a=1, 2, 3$

(iv) $r=5$일 때, $a\le\frac{200}{125}=1.6$에서

$a=1$

(v) $r\ge 6$일 때, $a\le\frac{200}{r^3}$을 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 경우의 수는

$25+7+3+1=36$ 답 36

19 전략 세 점 A, B, C의 좌표를 구하여 $\overline{BC}$, $\overline{OC}$, $\overline{AC}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $A(k, 3\sqrt{k})$, $B(k, \sqrt{k})$, $C(k, 0)$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{k}$, $\overline{OC}=k$, $\overline{AC}=3\sqrt{k}$

따라서 세 수 $\sqrt{k}$, k, $3\sqrt{k}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$k^2=\sqrt{k}\cdot 3\sqrt{k},\quad k^2-3k=0$

$k(k-3)=0\quad \therefore k=3$ ($\because k>0$) 답 ③

20 전략 공비를 r라 하고 S_9-S_5, S_6-S_2를 r에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$S_9-S_5=a_6+a_7+a_8+a_9$

$=7r^5+7r^6+7r^7+7r^8$

$=7r^5(1+r+r^2+r^3)$

$S_6-S_2=a_3+a_4+a_5+a_6$

$=7r^2+7r^3+7r^4+7r^5$

$=7r^2(1+r+r^2+r^3)$

$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=3$에서 $\quad \frac{7r^5(1+r+r^2+r^3)}{7r^2(1+r+r^2+r^3)}=3$

$\therefore r^3=3$

$\therefore a_7=7r^6=7\cdot 3^2=63$ 답 63

21 전략 처음의 양을 a, 매일 일정하게 증가하는 비율을 r라 하면 n일 후의 양은 $a(1+r)^n$임을 이용한다.

풀이 전날 이동한 거리의 10 %씩 늘려서 이동하므로 10일 동안 이동하는 거리는

$4+4(1+0.1)+4(1+0.1)^2+\cdots+4(1+0.1)^9$

$=\frac{4(1.1^{10}-1)}{1.1-1}=\frac{4\times 1.6}{0.1}$

$=64$ (km) 답 ④

22 전략 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 먼저 일반항 a_n을 구한다.

풀이 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3^2-3=6$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3^{n+1}-3-(3^n-3)$

$=2\cdot 3^n$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\cdot 3^n$ ⋯ ❶

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$

$=2\cdot3+2\cdot3^3+2\cdot3^5+2\cdot3^7+2\cdot3^9$

$=\dfrac{2\cdot3\{(3^2)^5-1\}}{3^2-1}$

$=\dfrac{3^{11}-3}{4}$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{3^{11}-3}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	a_n을 구할 수 있다.	60 %
❷	$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구할 수 있다.	40 %

QBOX

첫째항이 $2\cdot3$, 공비가 3^2인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합

$k=3$일 때,
k^2-5k+3
$=3^2-5\cdot3+3$
$=-3<0$

$k=4$일 때,
k^2-5k+3
$=4^2-5\cdot4+3$
$=-1<0$

23 전략 첫째항과 공비를 찾아 등비수열의 합을 이용하여 백호와 태웅이가 받는 금액을 구한다.

풀이 백호와 태웅이가 각각 24개월, 12개월째 말에 받는 금액을 A만 원, B만 원이라 하면

$$A=20(1+0.001)+20(1+0.001)^2+\cdots+20(1+0.001)^{24}$$
$$=\frac{20\times1.001\times(1.001^{24}-1)}{1.001-1}$$
$$=20020(1.001^{24}-1)$$
$$B=30(1+0.001)+30(1+0.001)^2+\cdots+30(1+0.001)^{12}$$
$$=\frac{30\times1.001\times(1.001^{12}-1)}{1.001-1}$$
$$=30030(1.001^{12}-1)$$
$$\therefore \frac{A}{B}=\frac{20020(1.001^{24}-1)}{30030(1.001^{12}-1)}$$
$$=\frac{2(1.001^{12}+1)(1.001^{12}-1)}{3(1.001^{12}-1)}$$
$$=\frac{2(1.001^{12}+1)}{3}=\frac{2(1.01+1)}{3}$$
$$=1.34$$

따라서 백호가 받는 금액은 태웅이가 받는 금액의 1.34배이다.

답 ②

24 전략 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면 $b^2=ac$임을 이용한다.

풀이 $a_1=a$라 하면 조건 (나)에 의하여 $a_k{}^2=a_2a_{3k-1}$이므로

$$\{a+(k-1)d\}^2=(a+d)\{a+(3k-2)d\}$$
$$a^2+2(k-1)ad+(k-1)^2d^2$$
$$=a^2+(3k-1)ad+(3k-2)d^2$$
$$\therefore d^2(k^2-5k+3)=ad(k+1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 조건 (가)에서

$$0<a\le d \qquad \therefore ad(k+1)\le d^2(k+1)$$

$d>0$, $k+1>0$에서 $d(k+1)>0$이므로 양변에 $d(k+1)$을 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

㉠에서 $\quad k^2-5k+3\le k+1$

$$k^2-6k+2\le0 \qquad \therefore 3-\sqrt7\le k\le3+\sqrt7$$

이때 $k\ge3$이므로 $\quad 3\le k\le3+\sqrt7$

k는 자연수이므로

$$k=3,\ 4,\ 5$$

그런데 ㉠에서 $k^2-5k+3>0$이므로

$$k=5$$

$k=5$를 ㉠에 대입하면

$$3d^2=6ad \qquad \therefore d=2a\ (\because d\ne0)$$

$a_{16}=a+15d=31a$이므로 $90\le a_{16}\le100$에서

$$90\le31a\le100 \qquad \therefore \frac{90}{31}\le a\le\frac{100}{31}$$

a는 자연수이므로 $\quad a=3$

따라서 $d=2\cdot3=6$이므로

$$a_{20}=3+19\cdot6=117$$

답 117

25 전략 $m=200$일 때 공비에 대한 조건을 구하여 k의 값을 모두 구한다.

풀이 $A(200)$은 첫째항이 3이고 공비가 2 이상의 자연수인 등비수열의 제k항이 3×2^{200}이 되는 모든 k의 값의 합이다.

이때

$$2^{200}=(2^1)^{200}=(2^2)^{100}=(2^4)^{50}=\cdots=(2^{200})^1$$

이므로 공비가 될 수 있는 수는

$$2^1,\ 2^2,\ 2^4,\ \cdots,\ 2^{200}$$

즉 공비를 2^p (p는 자연수)이라 하면 p는 200의 양의 약수이다.

(i) 공비가 2^1일 때, 제k항은 $3\cdot2^{k-1}$이므로

$$k-1=200 \qquad \therefore k=201$$

(ii) 공비가 2^2일 때, 제k항은 $3\cdot(2^2)^{k-1}=3\cdot2^{2(k-1)}$이므로

$$2(k-1)=200 \qquad \therefore k=101$$

(iii) 공비가 2^4일 때, 제k항은 $3\cdot(2^4)^{k-1}=3\cdot2^{4(k-1)}$이므로

$$4(k-1)=200 \qquad \therefore k=51$$

⋮

이상에서 k의 값은 201, 101, 51, ⋯, 2, 즉 $200+1$, $100+1$, $50+1$, ⋯, $1+1$이다.

$$\therefore A(200)=(200+1)+(100+1)+(50+1)+\cdots+(1+1)$$
$$=(200\text{의 양의 약수의 합})+1\cdot12$$
$$=(1+2+2^2+2^3)\cdot(1+5+5^2)+12$$
$$=15\cdot31+12=477$$

$200=2^3\cdot5^2$에서 200의 양의 약수의 개수는 $(3+1)\cdot(2+1)=12$

답 477

쌤 한마디

$200=2^3\cdot5^2$에서 200의 양의 약수는 오른쪽과 같으므로

	1	5	5^2
1	$1\cdot1$	$1\cdot5$	$1\cdot5^2$
2	$2\cdot1$	$2\cdot5$	$2\cdot5^2$
2^2	$2^2\cdot1$	$2^2\cdot5$	$2^2\cdot5^2$
2^3	$2^3\cdot1$	$2^3\cdot5$	$2^3\cdot5^2$

$$(200\text{의 양의 약수의 합})$$
$$=(1+2+2^2+2^3)\cdot1+(1+2+2^2+2^3)\cdot5+(1+2+2^2+2^3)\cdot5^2$$
$$=(1+2+2^2+2^3)\cdot(1+5+5^2)$$

즉 $N=a^m\cdot b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)의 양의 약수의 합은

$$(1+a+a^2+\cdots+a^m)\cdot(1+b+b^2+\cdots+b^n)$$

09 수열의 합

Lecture 19 기호 $\sum$의 뜻과 성질

112쪽

01 답 $\sum_{k=1}^{n}(4k+1)$

02 답 $\sum_{k=1}^{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

03 $\sum_{k=1}^{10}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$

$=1+8+27+\cdots+1000$

답 $1+8+27+\cdots+1000$

04 답 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

05 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-5b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-5\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=2\cdot4-5\cdot5$

$=-17$

답 -17

06 $\sum_{k=1}^{10}(-a_k+3b_k+1)=-\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=-4+3\cdot5+1\cdot10$

$=21$

답 21

07 $\sum_{k=1}^{10}(a_k-2)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-4a_k+4)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k^2-4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4$

$=8-4\cdot4+4\cdot10$

$=32$

답 32

08 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)(3a_k-1)=\sum_{k=1}^{10}(3a_k^2+5a_k-2)$

$=3\sum_{k=1}^{10}a_k^2+5\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}2$

$=3\cdot8+5\cdot4-2\cdot10$

$=24$

답 24

표준+발전 유형 Q+Q

113쪽

01 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

이므로 $\sum_{k=1}^{2n}a_k=3n^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{30}a_k=3\cdot15^2=675$

답 ④

Q BOX: $\sum_{k=1}^{2n}a_k=3n^2$의 양변에 $n=15$를 대입한다.

02 $\sum_{k=1}^{23}f(k+2)-\sum_{k=3}^{25}f(k-1)$

$=\{f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(25)\}$

$-\{f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(24)\}$

$=f(25)-f(2)$

$=28-(-2)=30$

답 30

03 자연수 k에 대하여

(ⅰ) $n=2k-1$일 때,

$n^2=(2k-1)^2=4(k^2-k)+1$이므로

$a_{2k-1}=1$

(ⅱ) $n=2k$일 때,

$n^2=(2k)^2=4k^2$이므로

$a_{2k}=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\sum_{n=1}^{2022}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2021}+a_{2022}$

$=1+0+1+\cdots+1+0$

$=1\cdot1011=1011$

답 1011

Q BOX: 1이 1011개, 0이 1011개

04 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 중 1이 a개, 2가 b개라 하면

$\sum_{i=1}^{n}x_i=1\cdot a+2\cdot b=a+2b$에서

$a+2b=15$ …… ㉠

$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1^2\cdot a+2^2\cdot b=a+4b$에서

$a+4b=23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=7,\ b=4$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}x_i^3=1^3\cdot7+2^3\cdot4=39$

답 39

05 $\sum_{k=1}^{15}(2a_k+1)=45$에서 $2\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}1=45$

$2\sum_{k=1}^{15}a_k+1\cdot15=45$ $\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k=15$

$\sum_{k=1}^{15}(a_k+1)(a_k-1)=65$에서 $\sum_{k=1}^{15}(a_k^2-1)=65$

$\sum_{k=1}^{15}a_k^2-1\cdot15=65$ $\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k^2=80$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}(2a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{15}(4a_k^2+4a_k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{15}a_k^2+4\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}1$

$=4\cdot80+4\cdot15+1\cdot15$

$=395$

답 395

06 $\sum_{k=1}^{n}a_k=-6n$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=2n^2$의 양변에 $n=9$를 각각 대입하면

$\sum_{k=1}^{9}a_k=-6\cdot9=-54$, $\sum_{k=1}^{9}b_k=2\cdot9^2=162$

$\therefore \sum_{k=1}^{9}(a_k+3b_k-5)=\sum_{k=1}^{9}a_k+3\sum_{k=1}^{9}b_k-\sum_{k=1}^{9}5$

$=-54+3\cdot162-5\cdot9$

$=387$

답 ②

07 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\sum_{k=1}^{50} a_{2k} - \sum_{k=1}^{50} a_{2k-1}$$
$$=(a_2+a_4+\cdots+a_{100})-(a_1+a_3+\cdots+a_{99})$$
$$=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{100}-a_{99})$$
$$=\underbrace{d+d+\cdots+d}$$
$$=50d \qquad \cdots\cdots ㉠$$

d가 50개

이때 $a_5=2$, $a_8=-7$이므로

$a_1+4d=2$, $a_1+7d=-7$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a_1=14$, $d=-3$

㉠에서 구하는 값은 $50d=-150$ 답 -150

08 $\displaystyle\sum_{k=1}^{50} \frac{2^k-3^k}{6^{k-1}} = \sum_{k=1}^{50}\left\{6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k - 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$

$$=6\underbrace{\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{3}\right)^k} - 6\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

첫째항과 공비가 모두 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제50 항까지의 합

$$=6\cdot\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{50}\right\}}{1-\frac{1}{3}} - 6\cdot\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{50}\right\}-6\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\right\}$$
$$=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{49}-\left(\frac{1}{3}\right)^{49}-3$$

따라서 $a=3$, $b=3$이므로

$a+b=6$ 답 6

Lecture 20 여러 가지 수열의 합 114쪽

01 $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}(2k-5)=2\sum_{k=1}^{9}k-\sum_{k=1}^{9}5$

$$=2\cdot\frac{9\cdot 10}{2}-5\cdot 9=45$$ 답 45

02 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(k^3-k^2+4)=\sum_{k=1}^{6}k^3-\sum_{k=1}^{6}k^2+\sum_{k=1}^{6}4$

$$=\left(\frac{6\cdot 7}{2}\right)^2-\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}+4\cdot 6$$
$$=374$$ 답 374

03 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$ 답 $\frac{5}{12}$

항이 연달아 소거될 때, 앞에서 첫 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째가 남는다.

04 $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(k+2)}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{29}{45}$$ 답 $\frac{29}{45}$

항이 건너뛰며 소거될 때, 앞에서 첫 번째, 세 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째, 세 번째가 남는다.

05 (주어진 식)

$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{26}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{26}\right)=\frac{3}{13}$$ 답 $\frac{3}{13}$

06 $\displaystyle\sum_{k=3}^{14}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$$=\sum_{k=3}^{14}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$$
$$=\sum_{k=3}^{14}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})$$
$$+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$$
$$=\sqrt{16}-\sqrt{4}=2$$ 답 2

07 $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$$
$$+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{23})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{25}-1)=2$$ 답 2

08 (주어진 식)

$$=\sum_{k=1}^{35}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{35}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$=\sum_{k=1}^{35}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$$
$$+\cdots+(\sqrt{36}-\sqrt{35})$$
$$=\sqrt{36}-1=5$$ 답 5

표준+발전 **유형 Q+Q** 115쪽

01 $\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k}=\sum_{k=1}^{40}\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{40}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{40}(k+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{40\cdot41}{2}+40\right)$

$=430$ 답 ⑤

02 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_k+\beta_k=k,\ \alpha_k\beta_k=-k$

이므로

$\alpha_k^3+\beta_k^3=(\alpha_k+\beta_k)^3-3\alpha_k\beta_k(\alpha_k+\beta_k)$

$=k^3-3\cdot(-k)\cdot k$

$=k^3+3k^2$

$\displaystyle\therefore\ \sum_{k=1}^{5}(\alpha_k^3+\beta_k^3)=\sum_{k=1}^{5}(k^3+3k^2)$

$\displaystyle=\left(\frac{5\cdot6}{2}\right)^2+3\cdot\frac{5\cdot6\cdot11}{6}$

$=390$ 답 390

03 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}2\right)\right\}=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}2l\right)=\sum_{m=1}^{n}\left(2\sum_{l=1}^{m}l\right)$

$\displaystyle=\sum_{m=1}^{n}\left\{2\cdot\frac{m(m+1)}{2}\right\}$

$\displaystyle=\sum_{m=1}^{n}(m^2+m)$

$\displaystyle=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$\displaystyle=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 답 ①

쌤한마디

Σ를 여러 개 포함한 식의 계산에서는 다음과 같이 문자가 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별해야 한다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+n)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}n=\frac{n(n+1)}{2}+n\cdot n$

상수가 아닌 것 상수인 것

04 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right\}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}i+\sum_{j=1}^{n}j\right)$

i를 상수로 생각한다.

$\displaystyle=\sum_{i=1}^{m}\left\{in+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$\displaystyle=n\sum_{i=1}^{m}i+\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}$

$\displaystyle=n\cdot\frac{m(m+1)}{2}+m\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$\displaystyle=\frac{mn(m+n+2)}{2}$

$\displaystyle=\frac{35(12+2)}{2}=245$ 답 245

05 수열 $2\cdot1^2,\ 3\cdot2^2,\ 4\cdot3^2,\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=(n+1)n^2=n^3+n^2$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(k^3+k^2)$

$\displaystyle=\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2+\frac{10\cdot11\cdot21}{6}$

$=3410$ 답 3410

06 수열 $1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$\displaystyle a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{11}a_k=\sum_{k=1}^{11}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{11}(k^2+k)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{11\cdot12\cdot23}{6}+\frac{11\cdot12}{2}\right)$

$=286$ 답 ④

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$를 S_n이라 하면
(i) $\displaystyle a_1=S_1=\sum_{k=1}^{1}a_k$
(ii) $\displaystyle a_n=S_n-S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k\ (n\ge2)$
임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

07 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+2n$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2+2\cdot1=3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+1$

따라서 $a_{2k-1}=2(2k-1)+1=4k-1$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{15}(4k-1)$

$\displaystyle=4\cdot\frac{15\cdot16}{2}-1\cdot15$

$=465$ 답 465

08 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2n}{n+1}$

(i) $n=1$일 때,

$\displaystyle a_1=S_1=\frac{2\cdot1}{1+1}=1$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\displaystyle=\frac{2n}{n+1}-\frac{2(n-1)}{n}$

$\displaystyle\frac{2n}{n+1}-\frac{2(n-1)}{n}=\frac{2n^2-2(n-1)(n+1)}{n(n+1)}=\frac{2n^2-2(n^2-1)}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}$

$\displaystyle=\frac{2}{n(n+1)}$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$\displaystyle a_n=\frac{2}{n(n+1)}$

$\therefore \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{12} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}(k^2+k)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{12\cdot 13\cdot 25}{6} + \frac{12\cdot 13}{2}\right)$

$= 364$ 답 ①

09 수열 $1\cdot n$, $2\cdot(n-1)$, $3\cdot(n-2)$, $\cdots$의 일반항을 a_k라 하면

$a_k = k\{n-(k-1)\} = -k^2+(n+1)k$

이므로 주어진 식은

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}$

$= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{-n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)^2}{6}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 답 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

10 수열 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$, $\left(\frac{n+2}{n}\right)^2$, $\left(\frac{n+3}{n}\right)^2$, $\cdots$의 일반항을 a_k라 하면

$a_k = \left(\frac{n+k}{n}\right)^2 = \left(1+\frac{k}{n}\right)^2 = 1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$

이므로 주어진 식은

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)$

n을 상수로 생각한다.

$= n + \frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$+ \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= 2n+1+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

$= \frac{6n(2n+1)+(n+1)(2n+1)}{6n}$

$= \frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}$ 답 ②

11 수열 $\frac{1}{3^2-1}$, $\frac{1}{5^2-1}$, $\frac{1}{7^2-1}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{1}{4n(n+1)}$

$(2n+1)^2-1$
$=4n^2+4n+1-1$
$=4n(n+1)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

따라서 주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 24 항까지의 합이므로

$2n+1=49$에서
$2n=48$ $\therefore n=24$

$\sum_{k=1}^{24} a_k = \sum_{k=1}^{24}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$= \frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{24}-\frac{1}{25}\right)\right\}$

$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{25}\right) = \frac{6}{25}$

즉 $p=25$, $q=6$이므로

$p+q=31$ 답 31

12 $a_n = \frac{n^3+n^2+2}{n^2+n} = \frac{n^2(n+1)+2}{n(n+1)}$

$= n+\frac{2}{n(n+1)} = n+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{15}\left\{k+2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}$

$= \sum_{k=1}^{15} k + 2\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$= \frac{15\cdot 16}{2}$

$+2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)\right\}$

$= 120+2\left(1-\frac{1}{16}\right)$

$= \frac{975}{8}$ 답 $\frac{975}{8}$

13 수열 $\frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{2}}$, $\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{4}}$, $\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = \frac{2}{\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n}}$

$= \frac{2(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})}{(\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n})(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})}$

$= \sqrt{2n+2}-\sqrt{2n}$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 24 항까지의 합이므로

$2n=48$에서 $n=24$

$\sum_{k=1}^{24} a_k = \sum_{k=1}^{24}(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})$

$= (\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{8}-\sqrt{6}) + \cdots + (\sqrt{50}-\sqrt{48})$

$= \sqrt{50}-\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ 답 $4\sqrt{2}$

14 $a_n = 1+(n-1)\cdot 4 = 4n-3$이므로

$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$

$= \sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}$

$= \sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k} = \sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{4}$

$= \frac{1}{4}\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+(\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}) + \cdots + (\sqrt{a_{21}}-\sqrt{a_{20}})\}$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{a_{21}}-\sqrt{a_1})$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{4\cdot 21-3}-1)$

$= \frac{1}{4}(9-1) = 2$ 답 ②

15 $a_n = 4\cdot 16^{n-1} = 2^{4n-2}$이므로

$4\cdot 16^{n-1} = 2^2\cdot(2^4)^{n-1}$
$= 2^{2+4(n-1)}$
$= 2^{4n-2}$

$\sum_{k=1}^{10}\log_2 a_k = \sum_{k=1}^{10}\log_2 2^{4k-2} = \sum_{k=1}^{10}(4k-2)$

$= 4\cdot\frac{10\cdot 11}{2} - 2\cdot 10 = 200$ 답 ③

16 $\sum_{k=2}^{20}\log\left(1+\frac{1}{k^2-1}\right)$

$=\sum_{k=2}^{20}\log\frac{k^2}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{20}\log\left(\frac{k}{k-1}\cdot\frac{k}{k+1}\right)$

$=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)+\log\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)$

$+\cdots+\log\left(\frac{20}{19}\cdot\frac{20}{21}\right)$

$=\log\left\{\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{20}{19}\cdot\frac{20}{21}\right)\right\}$

$=\log\left(2\cdot\frac{20}{21}\right)$

$=\log\frac{40}{21}$ 답 $\log\frac{40}{21}$

17 위에서 n 번째 줄에 나열된 수의 합은 첫째항이 n, 공차가 n인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같으므로

$\frac{n\{2n+(n-1)n\}}{2}=\frac{n^3+n^2}{2}$

따라서 첫 번째 줄부터 8 번째 줄까지 나열된 모든 수의 합은

$\sum_{k=1}^{8}\frac{k^3+k^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}(k^3+k^2)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8\cdot 9}{2}\right)^2+\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}\right\}$

$=750$ 답 750

18 주어진 수열을

$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right),$

$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \cdots$

와 같이 분모가 같은 항끼리 묶으면 n 번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$n=15$일 때 $\frac{15\cdot 16}{2}=120$, $n=16$일 때 $\frac{16\cdot 17}{2}=136$

이므로 제125항은 16 번째 묶음의 5 번째 항이다.

이때 16 번째 묶음은 분모가 17이고 분자가 1부터 1씩 커지므로 제125항은 $\frac{5}{17}$이다. 답 $\frac{5}{17}$

중단원 마무리

118쪽

01 전략 $\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\sum_{k=1}^{16}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{15}+a_{16}$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{15})$

$+(a_2+a_4+\cdots+a_{16})$

$=\sum_{k=1}^{8}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{8}a_{2k}$

Q BOX

주어진 로그의 진수 부분을 곱의 꼴로 만든 후 $a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때 $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$ 임을 이용한다.

$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$

$\left(\frac{1}{17}, \frac{2}{17}, \frac{3}{17}, \cdots, \frac{16}{17}\right)$

첫째항과 공비가 모두 2인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\sum_{k=0}^{9}(k+1)^3$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

02 전략 $n-5$가 음수, 0, 양수인 각 경우에서 n이 짝수, 음수일 때 실수인 n제곱근의 개수를 구한다.

풀이 (i) $2\leq n\leq 4$일 때, $n-5<0$

n이 짝수이면 실수인 n제곱근은 없고, n이 홀수이면 실수인 n제곱근은 1개이므로

$f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=0$

(ii) $n=5$일 때, $n-5=0$

0의 n제곱근은 0의 1개이므로

$f(5)=1$

(iii) $6\leq n\leq 10$일 때, $n-5>0$

n이 짝수이면 실수인 n제곱근은 2개이고, n이 홀수이면 실수인 n제곱근은 1개이므로

$f(6)=2$, $f(7)=1$, $f(8)=2$, $f(9)=1$,

$f(10)=2$

이상에서

$\sum_{n=2}^{10}f(n)=f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)$

$=0+1+0+1+2+1+2+1+2$

$=10$ 답 ③

03 전략 $\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k$ $(m\leq n)$이고 $\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k$ (p, q는 상수)임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=16}^{30}(3b_k-a_k)=3\sum_{k=16}^{30}b_k-\sum_{k=16}^{30}a_k$

$=3\left(\sum_{k=1}^{30}b_k-\sum_{k=1}^{15}b_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{30}a_k-\sum_{k=1}^{15}a_k\right)$

$=3(63-21)-(45-15)$

$=96$ 답 96

04 전략 주어진 등비수열의 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 합을 구하는 공식을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4a_5=a_9$에서 $ar^3\cdot ar^4=ar^8$

$\therefore a=r$ …… ㉠

$a_3=8$에서 $ar^2=8$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=2$

$\therefore a_n=2\cdot 2^{n-1}$ ··· ❶

$\sum_{k=1}^{n}a_k=254$에서 $\frac{2(2^n-1)}{2-1}=254$

$2^n-1=127$, $2^n=128=2^7$

$\therefore n=7$ ··· ❷

답 7

단계	채점 기준	비율
❶	a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷	자연수 n의 값을 구할 수 있다.	50 %

05 전략 공차가 양수, 0, 음수일 때로 경우를 나누어 생각한다.

풀이 a_4는 a_3과 a_5의 등차중항이므로

$$a_4=\frac{a_3+a_5}{2}=0$$

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라 한다.
$\Rightarrow b=\frac{a+c}{2}$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$a_1=a_4-3d=-3d,\ a_2=a_4-2d=-2d,$$
$$a_3=a_4-d=-d,\ a_4=0,$$
$$a_5=a_4+d=d,\ a_6=a_4+2d=2d$$

$|a_k|+a_k=\begin{cases}2a_k & (a_k>0)\\ 0 & (a_k\le 0)\end{cases}$이므로

(i) $d>0$일 때,

$a_1<a_2<a_3<a_4=0<a_5<a_6<\cdots$이므로

$$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=2a_5+2a_6$$
$$=2\cdot d+2\cdot 2d=6d$$

즉 $6d=30$이므로 $\quad d=5$

(ii) $d=0$일 때,

$a_1=a_2=a_3=a_4=0=a_5=a_6=\cdots$이므로

$$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=0$$

즉 $\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)\neq 30$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $d<0$일 때,

$a_1>a_2>a_3>a_4=0>a_5>a_6>\cdots$이므로

$$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=2a_1+2a_2+2a_3$$
$$=2\cdot(-3d)+2\cdot(-2d)+2\cdot(-d)$$
$$=-12d$$

즉 $-12d=30$이므로 $\quad d=-\frac{5}{2}$

이는 공차가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $\quad d=5$

$\therefore\ a_9=a_4+5d=5\cdot 5=25$ 답 25

06 전략 $f(2k)$를 구한 후 $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$임을 이용한다.

풀이 $f(2k)=\frac{1}{2}\cdot 2k+3=k+3$이므로

$$\sum_{k=1}^{15}f(2k)=\sum_{k=1}^{15}(k+3)$$
$$=\frac{15\cdot 16}{2}+3\cdot 15$$
$$=165$$

답 ④

07 전략 주어진 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하여 x절편을 구한다.

풀이 $y=0$을 $y=-2x+n^2+1$에 대입하면

$0=-2x+n^2+1\qquad \therefore\ x=\frac{n^2+1}{2}$

따라서 $x_n=\frac{n^2+1}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{8}x_n=\sum_{n=1}^{8}\frac{n^2+1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}(n^2+1)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}+1\cdot 8\right)=106$$

답 ③

08 전략 문자가 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별하여 계산한다.

풀이
$$\sum_{n=1}^{10}\left[\sum_{k=1}^{n}\{(-1)^{n-1}\cdot(2k-1)\}\right]$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\left\{(-1)^{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\left[(-1)^{n-1}\cdot\left\{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}\right]$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\{(-1)^{n-1}\cdot n^2\}$$
$$=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+9^2-10^2$$
$$=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)$$
$$+\cdots+(9-10)(9+10)$$
$$=-(1+2+3+4+\cdots+9+10)$$
$$=-\sum_{k=1}^{10}k=-\frac{10\cdot 11}{2}=-55$$

답 ②

09 전략 주어진 수열의 일반항을 구한 후 Σ의 성질을 이용하여 S_n을 구한다.

풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=3n(n+1)^2=3n^3+6n^2+3n$ ··· ❶

$$\therefore\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(3k^3+6k^2+3k)$$
$$=3\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{4}\{3n(n+1)+4(2n+1)+6\}$$
$$=\frac{n(n+1)}{4}(3n^2+11n+10)$$ ··· ❷

따라서 $f(n)=3n^2+11n+10$이므로

$f(4)=3\cdot 4^2+11\cdot 4+10=102$ ··· ❸

답 102

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 수열의 일반항을 구할 수 있다.	30 %
❷	S_n을 구할 수 있다.	50 %
❸	$f(4)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

10 전략 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_n을 구한다.

풀이 $n\ge 2$일 때,

$$\frac{4n-3}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4k-3}{a_k}$$
$$=(2n^2+7n)-\{2(n-1)^2+7(n-1)\}$$
$$=4n+5$$

$b_n=\frac{4n-3}{a_n}$이라 하고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}$이므로 $n\ge 2$일 때,
$b_n=S_n-S_{n-1}$
$=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4k-3}{a_k}$

$4n+5\neq 0$이므로

$$a_n=\frac{4n-3}{4n+5}\ (n\ge 2)$$

$\therefore a_5\times a_7\times a_9=\frac{17}{25}\cdot\frac{25}{33}\cdot\frac{33}{41}=\frac{17}{41}$

따라서 $p=41$, $q=17$이므로

$p+q=58$ 답 58

11 전략 일반항 a_k가 k와 n에 대한 식으로 나타나므로 n을 상수로 생각하여 계산한다.

풀이 수열 $\frac{1^2}{n(n+1)}$, $\frac{2^2}{n(n+1)}$, $\frac{3^2}{n(n+1)}$, $\cdots$의 일반항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{k^2}{n(n+1)}$$

이므로 주어진 등식의 좌변은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{2n+1}{6}$$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로

$a+2b=4$ 답 ②

12 전략 $(g\circ f)(n)$을 구한 후 $\frac{12}{(g\circ f)(n)}$를 부분분수로 변형한다.

풀이 $(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(2n+1)$
$=2n(2n+4)=4n(n+2)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{8}\frac{12}{(g\circ f)(n)}$$
$$=\sum_{n=1}^{8}\frac{12}{4n(n+2)}=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{29}{15}$$ 답 $\frac{29}{15}$

$$\frac{12}{4n(n+2)}=\frac{6}{4}\cdot\frac{2}{n(n+2)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

13 전략 두 점 P_k, Q_k의 좌표를 구하여 $\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타낸 후 $\frac{1}{\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}}$의 분모를 유리화한다.

풀이 $\mathrm{P}_k(k,\ \sqrt{k+1})$, $\mathrm{Q}_k(k,\ -\sqrt{k})$이므로

$\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}=\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{63}\frac{1}{\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}}=\sum_{k=1}^{63}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{63}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$
$$=\sum_{k=1}^{63}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{64}-\sqrt{63})$$
$$=\sqrt{64}-1=7$$ 답 7

QBOX

1, 2, 5, 10, 17, $\cdots$의 규칙보다 1, 4, 9, 16, 25, $\cdots$의 규칙이 파악하기 쉬우므로 위에서 첫 번째 줄에 배열한 수를 이용한다.

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식
$\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$
꼴로 바꾸어 푼다.

14 전략 주어진 수열을 규칙성을 갖도록 묶은 후 각 묶음의 항의 개수와 규칙성을 조사한다.

풀이 주어진 수열을

$\{(1,\ 1)\}$, $\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$,
$\{(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)\}$,
$\{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$, $\cdots$

과 같이 두 수의 합이 같은 순서쌍끼리 묶으면 n 번째 묶음의 순서쌍의 두 수의 합은 $n+1$이므로 $(8,\ 9)$는 16 번째 묶음의 8 번째 항이다.

이때 n 번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 15 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{15}k=\frac{15\cdot16}{2}=120$$

따라서 $120+8=128$이므로 $(8,\ 9)$는 제128항이다.

답 ⑤

15 전략 위에서 첫 번째 줄에 배열한 수의 규칙을 파악한다.

풀이 위에서 첫 번째 줄의 수는 왼쪽에서부터 차례대로

1^2, 2^2, 3^2, 4^2, $\cdots$

이므로 첫 번째 줄의 왼쪽에서 10 번째에 있는 수는

$10^2=100$

이때 위에서 첫 번째 줄의 왼쪽에서 10 번째에 있는 수부터 위에서 10 번째 줄의 왼쪽에서 10 번째에 있는 수까지 1씩 작아지므로 위에서 9 번째 줄의 왼쪽에서 10 번째에 있는 수는

$100-8=92$ 답 ①

16 전략 먼저 조건 (가)를 이용하여 정수인 공비를 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 조건 (가)에서

$4<2r+2r^2\le12$

$\therefore 2<r+r^2\le6$

$2<r+r^2$에서 $r^2+r-2>0$

$(r+2)(r-1)>0$

$\therefore r<-2$ 또는 $r>1$ ⋯⋯ ㉠

$r+r^2\le6$에서 $r^2+r-6\le0$

$(r+3)(r-2)\le0$

$\therefore -3\le r\le2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $-3\le r<-2$ 또는 $1<r\le2$

이때 r는 정수이므로

$r=-3$ 또는 $r=2$

(i) $r=-3$일 때,

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{2\{1-(-3)^m\}}{1-(-3)}=\frac{1-(-3)^m}{2}$이므로

$\frac{1-(-3)^m}{2}=122$, $1-(-3)^m=244$

$(-3)^m=-243=(-3)^5$

$\therefore m=5$

(ii) $r=2$일 때,

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{2(2^m-1)}{2-1}=2(2^m-1)$이므로

$$2(2^m-1)=122, \quad 2^m-1=61$$
$$\therefore 2^m=62$$
이때 $2^m=62$를 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $r=-3,\ m=5$

따라서 $a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$이므로

$a_m=a_5=2\cdot(-3)^4=162$ 답 162

17 전략 36의 모든 양의 약수를 구한 후 $f(n)$의 정의를 이용하여 $f(a_k)$의 값을 구한다.

> 자연수 $N=a^m\cdot b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)의 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)$

풀이 $36=2^2\cdot3^2$이므로 36의 양의 약수는

$1,\ 2,\ 3,\ 2^2,\ 2\cdot3,\ 3^2,\ 2^2\cdot3,\ 2\cdot3^2,\ 2^2\cdot3^2$

이때

$f(1)=1,\ f(2)=f(3)=2,\ f(2^2)=f(3^2)=3,$

$f(2\cdot3)=4,\ f(2^2\cdot3)=f(2\cdot3^2)=6,\ f(2^2\cdot3^2)=9$

이므로 $f(1),\ f(2^2),\ f(3^2),\ f(2^2\cdot3^2)$은 홀수이고, $f(2),\ f(3),\ f(2\cdot3),\ f(2^2\cdot3),\ f(2\cdot3^2)$은 짝수이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$$
$$=-\log1+\log2+\log3-\log2^2+\log(2\cdot3)$$
$$-\log3^2+\log(2^2\cdot3)+\log(2\cdot3^2)-\log(2^2\cdot3^2)$$
$$=\log\frac{2\cdot3\cdot(2\cdot3)\cdot(2^2\cdot3)\cdot(2\cdot3^2)}{1\cdot2^2\cdot3^2\cdot(2^2\cdot3^2)}$$
$$=\log(2\cdot3)$$
$$=\log2+\log3$$
답 ①

10 수학적 귀납법

Lecture 21 수열의 귀납적 정의

122쪽

01 $a_{n+1}=2a_n+(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1+(-1)=2\cdot3-1=5$

$a_3=2a_2+(-1)^2=2\cdot5+1=11$

$a_4=2a_3+(-1)^3=2\cdot11-1=21$

$a_5=2a_4+(-1)^4=2\cdot21+1=43$ 답 43

02 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_3=a_1+a_2=-1+4=3$

$a_4=a_2+a_3=4+3=7$

$a_5=a_3+a_4=3+7=10$ 답 10

03 주어진 수열은 첫째항이 6, 공차가 -2인 등차수열이므로

> 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은 $a_n=a+(n-1)d$

$a_n=6+(n-1)\cdot(-2)=-2n+8$

답 $a_n=-2n+8$

04 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이고

$a_1=-5,\ a_2-a_1=8-(-5)=13$

이므로 첫째항이 -5, 공차가 13이다.

$\therefore a_n=-5+(n-1)\cdot13=13n-18$

답 $a_n=13n-18$

05 주어진 수열은 첫째항이 -1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

> 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq0)$인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=ar^{n-1}$

$$a_n=-1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

답 $a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

06 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$에서 주어진 수열은 등비수열이고

$a_1=15,\ \dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{-60}{15}=-4$

이므로 첫째항이 15, 공비가 -4이다.

$\therefore a_n=15\cdot(-4)^{n-1}$ 답 $a_n=15\cdot(-4)^{n-1}$

07 $a_{n+1}=a_n+3n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+3\cdot1$

$a_3=a_2+3\cdot2=a_1+3\cdot1+3\cdot2$

$a_4=a_3+3\cdot3=a_1+3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3$

$\vdots$

$a_{10}=a_9+3\cdot 9=a_1+3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3+\cdots+3\cdot 9$
$=a_1+3(1+2+3+\cdots+9)$
$=1+3\cdot\dfrac{9\cdot 10}{2}=136$ 답 136

08 $a_{n+1}-a_n=5^n$, 즉 $a_{n+1}=a_n+5^n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+5$
$a_3=a_2+5^2=a_1+5+5^2$
$a_4=a_3+5^3=a_1+5+5^2+5^3$
⋮
$a_{10}=a_9+5^9=a_1+5+5^2+5^3+\cdots+5^9$
$=5+\dfrac{5(5^9-1)}{5-1}=\dfrac{5^{10}+15}{4}$ 답 $\dfrac{5^{10}+15}{4}$

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은
$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ (단, $r\neq 1$)

표준+발전 유형 Q+Q

123쪽

01 $a_{n+1}+6=a_n$에서 $a_{n+1}=a_n-6$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -6인 등차수열이다.
이때 $a_1=80$이므로
$a_n=80+(n-1)\cdot(-6)=-6n+86$
$a_k=-4$에서 $-6k+86=-4$
$-6k=-90$ $\therefore k=15$ 답 ②

02 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=a+2d=-1$ …… ㉠
$a_8=a+7d=19$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9$, $d=4$
$\therefore a_n=-9+(n-1)\cdot 4=4n-13$
$a_k>100$에서 $4k-13>100$
$4k>113$ $\therefore k>\dfrac{113}{4}=28.25$
따라서 자연수 k의 최솟값은 29이다. 답 29

03 $a_n=3a_{n+1}$에서 $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이다.
이때 $a_1=3$이므로
$a_n=3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{3}{3^{n-1}}=\dfrac{1}{3^{n-2}}$
따라서 $a_{30}=\dfrac{1}{3^{28}}$이므로 $k=28$ 답 28

04 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_3=ar^2=12$ …… ㉠
$a_5=ar^4=48$ …… ㉡
㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$
$\therefore r=2$ ($\because r>0$)

모든 항이 양수이므로 공비도 양수이다.

$r=2$를 ㉠에 대입하면
$4a=12$ $\therefore a=3$
따라서 $a_n=3\cdot 2^{n-1}$이므로
$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{6}3\cdot 2^{k-1}=\frac{3(2^6-1)}{2-1}=189$ 답 ③

05 $a_{n+1}=a_n+2n-1$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면
$a_2=a_1+2\cdot 1-1=a_1+1$
$a_3=a_2+2\cdot 2-1=a_1+1+3$
$a_4=a_3+2\cdot 3-1=a_1+1+3+5$
⋮
$\therefore a_n=a_1+1+3+5+\cdots+(2n-3)$
$\displaystyle=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$
$=a_1+2\cdot\dfrac{(n-1)n}{2}-(n-1)$
$=a_1+n^2-2n+1$
이때 $a_5=15$이므로
$a_1+5^2-2\cdot 5+1=15$ $\therefore a_1=-1$
$\therefore a_9=-1+9^2-2\cdot 9+1=63$ 답 63

06 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$에서
$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면
$a_2=a_1+1-\dfrac{1}{2}$
$a_3=a_2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=a_1+1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$
$=a_1+1-\dfrac{1}{3}$
$a_4=a_3+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=a_1+1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$
$=a_1+1-\dfrac{1}{4}$
⋮
$\therefore a_n=a_1+1-\dfrac{1}{n}=2-\dfrac{1}{n}$
$\therefore a_{10}+a_{20}=\left(2-\dfrac{1}{10}\right)+\left(2-\dfrac{1}{20}\right)=\dfrac{77}{20}$
답 $\dfrac{77}{20}$

07 $a_{n+1}=5^na_n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례대로 대입하면
$a_2=5a_1$
$a_3=5^2a_2=5^2\cdot 5a_1$
$a_4=5^3a_3=5^3\cdot 5^2\cdot 5a_1$
⋮
$a_{10}=5^9a_9=5^9\cdot 5^8\cdot\cdots\cdot 5^2\cdot 5a_1$
$=5^{1+2+3+\cdots+9}\cdot 5=5^{\frac{9\cdot 10}{2}+1}=5^{46}$
$\therefore \log_5 a_{10}=\log_5 5^{46}=46$ 답 46

08 $a_n=\frac{n^2-1}{n^2}a_{n-1}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}a_{n-1}$

위의 식의 n에 2, 3, 4, …를 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a_1$$
$$a_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}a_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}a_1$$
$$a_4=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}a_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}a_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}a_1$$
$$\vdots$$
$$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}a_1=\frac{n+1}{n}$$

$a_k=\frac{33}{32}$에서 $\frac{k+1}{k}=\frac{33}{32}$

$\therefore k=32$ 답 32

09 $a_{n+1}=-2a_n+7$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$a_2=-2a_1+7=-2\cdot(-3)+7=13$$
$$a_3=-2a_2+7=-2\cdot13+7=-19$$
$$a_4=-2a_3+7=-2\cdot(-19)+7=45$$
$$a_5=-2a_4+7=-2\cdot45+7=-83$$
$$a_6=-2a_5+7=-2\cdot(-83)+7=173$$
답 ⑤

10 $a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{a_1}{3a_1+1}=\frac{1}{3\cdot1+1}=\frac{1}{4}$$
$$a_3=\frac{a_2}{3a_2+1}=\frac{\frac{1}{4}}{3\cdot\frac{1}{4}+1}=\frac{1}{3+4}=\frac{1}{7}$$
$$a_4=\frac{a_3}{3a_3+1}=\frac{\frac{1}{7}}{3\cdot\frac{1}{7}+1}=\frac{1}{3+7}=\frac{1}{10}$$
$$a_5=\frac{a_4}{3a_4+1}=\frac{\frac{1}{10}}{3\cdot\frac{1}{10}+1}=\frac{1}{3+10}=\frac{1}{13}$$

따라서 $p=13$, $q=1$이므로

$p+q=14$ 답 14

11 $a_{n+1}=a_n-(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1-(-1)=6+1=7$$
$$a_3=a_2-(-1)^2=7-1=6$$
$$a_4=a_3-(-1)^3=6+1=7$$
$$\vdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 6, 7이 이 순서대로 반복된다.

$a_1=a_3=a_5=\cdots=6$, $a_2=a_4=a_6=\cdots=7$

이때

$100=2\cdot50$, $101=2\cdot50+1$, $102=2\cdot51$

이므로

$$a_{100}+a_{101}+a_{102}=a_2+a_1+a_2$$
$$=7+6+7=20$$
답 20

12 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$$a_3=a_2-a_1=8-2=6$$
$$a_4=a_3-a_2=6-8=-2$$
$$a_5=a_4-a_3=-2-6=-8$$
$$a_6=a_5-a_4=-8-(-2)=-6$$
$$a_7=a_6-a_5=-6-(-8)=2$$
$$a_8=a_7-a_6=2-(-6)=8$$
$$\vdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 2, 8, 6, −2, −8, −6이 이 순서대로 반복된다.

이때 반복되는 6개의 수 중에서 $|a_k|=6$을 만족시키는 수는 6, −6의 2개이고, $50=6\cdot8+2$이므로 구하는 자연수 k의 개수는

a_1, a_2, …, a_{48}은 2, 8, 6, −2, −8, −6이 이 순서대로 8번 반복되고, $a_{49}=2$, $a_{50}=8$이다.

$2\cdot8=16$ 답 ④

13 $\begin{cases}a_{n+1}=2a_n+b_n & \cdots\cdots ㉠\\ b_{n+1}=a_n+2b_n & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$$

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=1+2=3$, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_n+b_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$$a_{n+1}=2a_n+b_n=a_n+(a_n+b_n)=a_n+3^n$$

$a_{n+1}=a_n+3^n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+3$$
$$a_3=a_2+3^2=a_1+3+3^2$$
$$a_4=a_3+3^3=a_1+3+3^2+3^3$$
$$a_5=a_4+3^4=a_1+3+3^2+3^3+3^4$$

첫째항과 공비가 모두 3인 등비수열의 첫째항부터 제4항까지의 합

$$=1+\frac{3(3^4-1)}{3-1}=121$$
답 121

14 $a_{n+1}-a_n=b_{n+1}+b_n$의 n에 1, 2, 3, …, 19를 차례대로 대입하면

$$a_2-a_1=b_2+b_1$$
$$a_3-a_2=b_3+b_2$$
$$a_4-a_3=b_4+b_3$$
$$\vdots$$
$$a_{20}-a_{19}=b_{20}+b_{19}$$

위의 식을 변끼리 더하면

$$a_{20}-a_1=b_1+2(b_2+b_3+\cdots+b_{19})+b_{20}$$
$$=2(b_1+b_2+\cdots+b_{20})-b_1-b_{20}$$

이때 $a_1=b_1$이므로

$$2(b_1+b_2+\cdots+b_{20})=a_{20}+b_{20}=-10$$
$$\therefore b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{20}=-5$$
답 −5

15 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$n=1$은 홀수이므로

$$a_2=\frac{a_1}{2-3a_1}=\frac{2}{2-3\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

$n=2$는 짝수이므로

$$a_3=a_2+1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

$n=3$은 홀수이므로

$$a_4=\frac{a_3}{2-3a_3}=\frac{\frac{1}{2}}{2-3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

$n=4$는 짝수이므로

$$a_5=a_4+1=1+1=2$$

$n=5$는 홀수이므로

$$a_6=\frac{a_5}{2-3a_5}=\frac{2}{2-3\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $35=4\cdot 8+3$이므로

$$\sum_{n=1}^{35} a_n=8\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+1\right\}+2+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$
$$=26$$

답 26

a_1, a_2, $\cdots$, a_{32}는 2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1이 이 순서대로 8번 반복되고, $a_{33}=2$, $a_{34}=-\frac{1}{2}$, $a_{35}=\frac{1}{2}$이다.

16 주어진 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 8을 차례대로 대입하면

$a_1=11$은 소수이므로

$$a_2=\frac{a_1+1}{2}=\frac{11+1}{2}=6$$

$a_2=6$은 합성수이므로

$$a_3=a_2+2=6+2=8$$

$a_3=8$은 합성수이므로

$$a_4=a_3+3=8+3=11$$

$a_4=11$은 소수이므로

$$a_5=\frac{a_4+1}{2}=\frac{11+1}{2}=6$$

$a_5=6$은 합성수이므로

$$a_6=a_5+5=6+5=11$$

$a_6=11$은 소수이므로

$$a_7=\frac{a_6+1}{2}=\frac{11+1}{2}=6$$

$a_7=6$은 합성수이므로

$$a_8=a_7+7=6+7=13$$

$a_8=13$은 소수이므로

$$a_9=\frac{a_8+1}{2}=\frac{13+1}{2}=7$$

답 ②

쌤 한마디

$a_1=11$, $a_2=6$, $a_3=8$, $a_4=11$, $a_5=6$에서 수열 $\{a_n\}$을 11, 6, 8이 이 순서대로 반복되는 수열로 착각하기 쉽다. 하지만 $\frac{a_n+1}{2}$과 다르게 a_n+n은 a_n의 값이 같더라도 n의 값이 다르면 a_{n+1}의 값이 달라지므로 같은 수가 규칙적으로 반복되어 나올 수 없다. 이처럼 귀납적으로 정의된 수열 문제에서 처음 몇 개의 항만 구해 보고 수열 전체를 판단하지 않도록 주의한다.

BOX

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
$a_1=S_1$,
$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge 2)$

17 $S_n=5a_n-8$에서

$$S_{n+1}=5a_{n+1}-8$$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$a_{n+1}=5a_{n+1}-8-(5a_n-8)$$
$$4a_{n+1}=5a_n \qquad \therefore a_{n+1}=\frac{5}{4}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=2$, 공비가 $\frac{5}{4}$인 등비수열이므로

$$a_n=2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$$
$$\therefore a_{100}=2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{99}=2\cdot\frac{5^{99}}{(2^2)^{99}}=\frac{5^{99}}{2^{197}}$$

답 ③

18 $S_n=2a_n+3n$에서

$$S_{n+1}=2a_{n+1}+3(n+1)=2a_{n+1}+3n+3$$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$a_{n+1}=2a_{n+1}+3n+3-(2a_n+3n)$$
$$\therefore a_{n+1}=2a_n-3$$

이때 $S_1=2a_1+3$에서

$$a_1=2a_1+3 \qquad \therefore a_1=-3$$

따라서 $a_{n+1}=2a_n-3$의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$$a_2=2a_1-3=2\cdot(-3)-3=-9$$
$$a_3=2a_2-3=2\cdot(-9)-3=-21$$
$$a_4=2a_3-3=2\cdot(-21)-3=-45$$

답 -45

19 현재 세균이 30마리 있으므로

$$a_1=(30-4)\cdot 2=52$$

$(n+1)$시간 후 살아 있는 세균의 수 a_{n+1}은 n시간 후 살아 있는 세균의 수 a_n에서 4를 뺀 후 2배 한 것이므로

$$a_{n+1}=(a_n-4)\cdot 2=2a_n-8 \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

답 $a_1=52$, $a_{n+1}=2a_n-8$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

20 n개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 n개의 새로운 교점이 생긴다. 즉 $(n+1)$개의 직선들의 교점은 n개의 직선들의 교점보다 n개가 많으므로

$$a_{n+1}=a_n+n$$

이때 1개의 직선을 그을 때 생기는 교점은 없으므로

$$a_1=0$$

$a_{n+1}=a_n+n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+1=1$$
$$a_3=a_2+2=1+2$$
$$a_4=a_3+3=1+2+3$$
$$\vdots$$
$$a_{10}=a_9+9=1+2+3+\cdots+9$$
$$=\sum_{k=1}^{9}k=\frac{9\cdot 10}{2}=45$$

답 ⑤

21 두 규칙 (나), (다)에 의하여 점 P_{n+2}는 점 P_n을 x축의 방향으로 $1-2=-1$만큼, y축의 방향으로 $-3+5=2$만큼 평행이동한 것이다.

이때 $P_2(1+1,\ 1-3)$, 즉 $P_2(2,\ -2)$이므로 자연수 m에 대하여

$\underline{P_{2m-1}(1+(m-1)\cdot(-1),\ 1+(m-1)\cdot 2),}$
$\underline{P_{2m}(2+(m-1)\cdot(-1),\ -2+(m-1)\cdot 2)}$

$\therefore P_{2m-1}(-m+2,\ 2m-1)$,
$P_{2m}(-m+3,\ 2m-4)$

(i) 점 $P_k(-4,\ 11)$이 점 $P_{2m-1}(-m+2,\ 2m-1)$과 일치할 때,

$-m+2=-4,\ 2m-1=11 \qquad \therefore m=6$

$\therefore k=2m-1=2\cdot 6-1=11$

(ii) 점 $P_k(-4,\ 11)$이 점 $P_{2m}(-m+3,\ 2m-4)$와 일치할 때,

$-m+3=-4,\ 2m-4=11$

위의 두 식을 동시에 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad k=11$ 답 ①

22 $\overline{P_{n-1}P_n}=a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하면 두 규칙 (가), (다)에 의하여

$a_1=2,\ a_2=3,\ a_na_{n+2}=2a_{n+1}$

즉 $a_{n+2}=\dfrac{2a_{n+1}}{a_n}$이므로 이 식의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_3=\dfrac{2a_2}{a_1}=\dfrac{2\cdot 3}{2}=3$

$a_4=\dfrac{2a_3}{a_2}=\dfrac{2\cdot 3}{3}=2$

$a_5=\dfrac{2a_4}{a_3}=\dfrac{2\cdot 2}{3}=\dfrac{4}{3}$

규칙 (나)에 의하여

$x_5=a_1+a_3+a_5=2+3+\dfrac{4}{3}=\dfrac{19}{3}$,

$y_5=a_2+a_4=3+2=5$

이므로

$x_5+y_5=\dfrac{34}{3}$ 답 $\dfrac{34}{3}$

Lecture 22 수학적 귀납법 127쪽

01 답 $n=1,\ k+1$

02 답 $n=4,\ k+1$

03 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=\boxed{1}$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=\dfrac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(\boxed{2k^2+7k+6})}{6}$

$=\dfrac{\boxed{(k+1)(k+2)(2k+3)}}{6}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

답 1, $2k^2+7k+6$, $(k+1)(k+2)(2k+3)$

Q BOX

두 점 P_{2m-1}, P_{2m}의 x좌표는 각각 첫째항이 1, 2이고 공차가 -1인 등차수열을 이루고, y좌표는 각각 첫째항이 1, -2이고 공차가 2인 등차수열을 이룬다.

$k(2k+1)+6(k+1)$
$=2k^2+k+6k+6$
$=2k^2+7k+6$

$p(1)$이 참이므로 $p(2\cdot 1)$, 즉 $p(2)$가 참이다.
$p(2)$가 참이므로 $p(2\cdot 2)$, 즉 $p(2^2)$이 참이다.
⋮
따라서 $p(2^a)$(a는 음이 아닌 정수)이 참이다.

표준+발전 유형 Q+Q 128쪽

01 두 조건 (가), (나)에 의하여

$\underline{p(1),\ p(2),\ p(2^2),\ p(2^3),\ \cdots,\ p(2^a)}$

(a는 음이 아닌 정수)

이 참이다.

또 두 조건 (가), (다)에 의하여

$p(1),\ p(7),\ p(7^2),\ p(7^3),\ \cdots,\ p(7^b)$

(b는 음이 아닌 정수)

이 참이다.

따라서 $p(2^a\cdot 7^b)$이 참이다.

① $p(21)=p(3\cdot 7)$
② $p(28)=p(2^2\cdot 7)$
③ $p(63)=p(3^2\cdot 7)$
④ $p(70)=p(2\cdot 5\cdot 7)$
⑤ $p(84)=p(2^2\cdot 3\cdot 7)$

따라서 반드시 참인 명제는 ②이다. 답 ②

02 ㄱ. $p(1)$이 참이면

$p(3),\ p(5),\ p(7),\ \cdots,\ p(2l+1)$

(l은 자연수)

이 참이다.

이때 $27=2\cdot 13+1$이므로 $p(27)$이 참이다.

ㄴ. $p(1)$이 참이면

$p(3),\ p(3^2),\ p(3^3)=p(27),\ \cdots$

이 참이다.

ㄷ. 대우 '$p(n)$이 참이면 $p(2n+1)$이 참이다.'에 의하여 $p(1)$이 참이면

$p(2\cdot 1+1)=p(3)$,

$p(2\cdot 3+1)=p(7)$,

$p(2\cdot7+1)=p(15)$,
$p(2\cdot15+1)=p(31)$, $\cdots$
이 참이다.
그러나 $p(27)$이 참인지는 알 수 없다.
이상에서 조건 (나)가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

03 (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

위의 식의 양변에 $\boxed{(k+1)^3}$을 더하면

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3\\&=(k+1)^2\left\{\left(\frac{k}{2}\right)^2+(k+1)\right\}\\&=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\\&=\boxed{\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $(k+1)^3$ (나) $\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

답 (가) $(k+1)^3$ (나) $\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{k}{2}\right)^2+(k+1)\\&=\frac{k^2}{4}+k+1\\&=\frac{k^2+4k+4}{4}\\&=\frac{(k+2)^2}{4}\end{aligned}$$

04 (i) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=\frac{1}{1\cdot3}=\frac{1}{3},\ (\text{우변})=\frac{1}{2\cdot1+1}=\frac{1}{3}$$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\&+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k+1}{2k+3}\\&=\frac{k+1}{2(k+1)+1}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

답 풀이 참조

05 (ii) $n=k$일 때 n^3+3n^2+2n이 3의 배수라 가정하면

$$k^3+3k^2+2k=3N\ (N\text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있다.
이때 $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}&(k+1)^3+3(k+1)^2+2(k+1)\\&=k^3+6k^2+\boxed{11k+6}\\&=\boxed{k^3+3k^2+2k}+3k^2+9k+6\\&=3N+\boxed{3}(k^2+3k+2)\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 n^3+3n^2+2n은 3의 배수이다.

즉 $f(k)=11k+6$, $g(k)=k^3+3k^2+2k$, $a=3$이므로

$$\frac{g(a)}{f(a)}=\frac{g(3)}{f(3)}=\frac{60}{39}=\frac{20}{13}$$

따라서 $p=13$, $q=20$이므로

$p+q=33$

답 33

06 (ii) $n=k\ (k\ge2)$일 때 8^n-7n-1이 49로 나누어떨어진다고 가정하면

$$8^k-7k-1=49N\ (N\text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있다.
이때 $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}8^{k+1}-7(k+1)-1&=\boxed{8\cdot8^k}-7k-8\\&=8(8^k-7k-1)+\boxed{49k}\\&=8\cdot49N+49k\\&=49(\boxed{8N+k})\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 8^n-7n-1은 49로 나누어떨어진다.

$\therefore$ (가) $8\cdot8^k$ (나) $49k$ (다) $8N+k$

답 ⑤

07 (ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}\ge2-\frac{1}{\sqrt{k}}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$을 더하면

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
$$\ge2-\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

이때

$$\begin{aligned}&\left(2-\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)-\left(\boxed{2-\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\right)\\&=-\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{2}{\sqrt{k+1}}\\&=\frac{\boxed{2\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}}{\sqrt{k(k+1)}}\end{aligned}$$

이고 모든 자연수 k에 대하여 $2\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\ge0$이므로

$$2-\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\ge2-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

$n=k+1$일 때 주어진 부등식의 우변은 $2-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$이므로 $2-\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$과 $2-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$의 차를 이용하여 대소를 비교한다.

모든 자연수 k에 대하여 $4k\ge k+1$이고 $4k>0$, $k+1>0$이므로
$\sqrt{4k}\ge\sqrt{k+1}$
$\therefore 2\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\ge0$

㉠, ㉡에서

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
$$\geq 2-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $2-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ (나) $2\sqrt{k}-\sqrt{k+1}$

답 (가) $2-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ (나) $2\sqrt{k}-\sqrt{k+1}$

08 (ii) $n=k\ (k\geq 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^{k+1}>\boxed{k(k+1)}+1$$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+2}>2(k^2+k+1)$$

그런데 $k\geq 2$이면

$$k^2-k-1>0$$

이므로

$$k^2+k+1>\boxed{2k+2}$$

$$\begin{aligned}\therefore 2^{k+2}&>2(k^2+k+1)\\&>k^2+k+1+2k+2\\&=k^2+3k+3\\&=(k+1)(k+2)+1\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $k(k+1)$ (나) $2k+2$ 답 ④

QBOX

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5는 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열을 이룬다.

k^2-k-1
$=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$
는 $k\geq 2$에서 $k=2$일 때 최솟값 1을 가지므로
$k^2-k-1\geq 1>0$

중단원 마무리

131쪽

01 전략 수열 $\{a_n\}$이 등차수열임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 p인 등차수열이므로

$$a_n=3+(n-1)p$$

$a_8+a_9+a_{10}=45$에서

$$(3+7p)+(3+8p)+(3+9p)=45$$

$$24p=36 \quad \therefore p=\frac{3}{2}$$

답 ③

02 전략 로그의 성질을 이용하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\log_2 a_{n+1}=1+\log_2 a_n$에서

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2+\log_2 a_n$$
$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2a_n$$
$$\therefore a_{n+1}=2a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

$$\begin{aligned}\therefore a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_8&=2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\cdots\cdot 2^8\\&=2^{1+2+3+\cdots+8}\\&=2^{\frac{8\cdot 9}{2}}=2^{36}\end{aligned}$$

$\therefore k=36$

답 ①

03 전략 조건 (다)를 이용하여 $\sum_{k=1}^{20}a_k$를 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 두 조건 (가), (나)에 의하여

$$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=7,\ a_4=10,\ a_5=13$$

이때 조건 (다)에 의하여

$$a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$$

$$\begin{aligned}&a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}\\&=2(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})\\&=2^2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}\\&=2(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15})\\&=2^3(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k&=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)(1+2+2^2+2^3)\\&=(1+4+7+10+13)\cdot(1+2+4+8)\\&=35\cdot 15=525\end{aligned}$$

답 525

04 전략 분모의 유리화를 이용하여 주어진 등식을 간단히 한 후 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

풀이
$$\begin{aligned}a_{n+1}&=a_n+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=a_n+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\\&=a_n+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\end{aligned}$$ ⋯ ❶

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+\sqrt{2}-1$$
$$a_3=a_2+\sqrt{3}-\sqrt{2}=a_1+\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$=a_1+\sqrt{3}-1$$
$$a_4=a_3+\sqrt{4}-\sqrt{3}=a_1+\sqrt{3}-1+\sqrt{4}-\sqrt{3}$$
$$=a_1+\sqrt{4}-1$$
$$\vdots$$
$$\therefore a_n=a_1+\sqrt{n}-1=-5+\sqrt{n}$$ ⋯ ❷

$a_k=5$에서 $-5+\sqrt{k}=5$

$\sqrt{k}=10 \quad \therefore k=100$ ⋯ ❸

답 100

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 등식의 우변을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷	a_n을 구할 수 있다.	50 %
❸	k의 값을 구할 수 있다.	20 %

05 전략 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 (i) $n=1$일 때,

$$a_1-a_2=-1^2+1=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$$a_n-a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})-\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})$$
$$=-n^2+n-\{-(n-1)^2+(n-1)\}$$
$$=-2n+2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n-a_{n+1}=-2n+2$

$\therefore a_{n+1}=a_n+2n-2$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …, 10을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+2\cdot1-2$

$a_3=a_2+2\cdot2-2=a_1+2\cdot1+2\cdot2-4$

$a_4=a_3+2\cdot3-2=a_1+2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3-6$

$\vdots$

$$a_{11}=a_{10}+2\cdot10-2$$
$$=a_1+2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+\cdots+2\cdot10-20$$
$$=2(1+2+3+\cdots+10)-19$$
$$=2\cdot\frac{10\cdot11}{2}-19=91$$

답 ②

06 전략 주어진 등식의 n에 1, 2, 3, …, 29를 차례대로 대입하여 a_{30}의 값을 구한다.

풀이 $a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 29를 차례대로 대입하면

$a_2=\dfrac{3}{1}a_1$

$a_3=\dfrac{4}{2}a_2=\dfrac{4}{2}\cdot\dfrac{3}{1}a_1$

$a_4=\dfrac{5}{3}a_3=\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{4}{2}\cdot\dfrac{3}{1}a_1$

$\vdots$

$$a_{30}=\frac{31}{29}a_{29}$$
$$=\frac{31}{29}\cdot\frac{30}{28}\cdot\frac{29}{27}\cdot\frac{28}{26}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}a_1$$
$$=\frac{31\cdot30}{2\cdot1}\cdot1=465$$

답 465

07 전략 주어진 등식의 n에 1, 2, 3, …, 99를 차례대로 대입하여 120으로 나누어떨어지는 항을 찾는다.

풀이 $a_{n+1}=(n+2)a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 99를 차례대로 대입하면

$a_2=3a_1=3\cdot2$

$a_3=4a_2=4\cdot3\cdot2$

$a_4=5a_3=5\cdot4\cdot3\cdot2$

$\vdots$

$a_{100}=101a_{99}=101\cdot100\cdot\cdots\cdot3\cdot2$

이때 $2\cdot3\cdot4\cdot5=120$이므로 a_4, a_5, a_6, …, a_{100}은 모두 120으로 나누어떨어진다.

즉 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$을 120으로 나누었을 때의 나머지는 $a_1+a_2+a_3$을 120으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 $a_1+a_2+a_3=2+6+24=32$이므로 구하는 나머지는 32이다.

답 32

쌤한마디

자연수 A는 자연수 n으로 나누어떨어지고, 자연수 B를 n으로 나누었을 때의 나머지가 r $(0<r<n)$이면 $A=na$, $B=nb+r$ (a는 자연수, b는 음이 아닌 정수)로 놓을 수 있으므로

$A+B=na+nb+r=n(a+b)+r$

따라서 $A+B$를 n으로 나누었을 때의 나머지는 r이므로 B를 n으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

즉 **07**번에서 a_4, a_5, a_6, …, a_{100}이 모두 120으로 나누어떨어지므로 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$을 120으로 나누었을 때의 나머지가 $a_1+a_2+a_3$을 120으로 나누었을 때의 나머지와 같음을 알 수 있다.

08 전략 주어진 등식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 $a_k>a_1$을 만족시키는 k의 최솟값을 구한다.

풀이 $a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$에서

$a_{n+1}=-a_n+(-1)^{n+1}\cdot n$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_2=-a_1+(-1)^2\cdot1=-12+1=-11$

$a_3=-a_2+(-1)^3\cdot2=-(-11)-2=9$

$a_4=-a_3+(-1)^4\cdot3=-9+3=-6$

$a_5=-a_4+(-1)^5\cdot4=-(-6)-4=2$

$a_6=-a_5+(-1)^6\cdot5=-2+5=3$

$a_7=-a_6+(-1)^7\cdot6=-3-6=-9$

$a_8=-a_7+(-1)^8\cdot7=-(-9)+7=16$

따라서 $a_k>a_1$을 만족시키는 k의 최솟값은 8이다.

답 ④

09 전략 a_3, a_4, a_5, …의 값을 차례대로 구하여 같은 수가 반복되는 규칙을 구한다.

풀이 $a_1+a_2=1+2=3$이므로 $\quad a_3=3$

$a_2+a_3=2+3=5$이므로 $\quad a_4=1$

$a_3+a_4=3+1=4$이므로 $\quad a_5=0$

$a_4+a_5=1+0=1$이므로 $\quad a_6=1$

$a_5+a_6=0+1=1$이므로 $\quad a_7=1$ — a_1의 값과 같다.

$a_6+a_7=1+1=2$이므로 $\quad a_8=2$ — a_2의 값과 같다.

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 3, 1, 0, 1이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore \sum_{k=1}^{6}a_k=1+2+3+1+0+1=8$

이때 $166=8\cdot20+6$이고

$$a_{121}+a_{122}+a_{123}=a_1+a_2+a_3$$
$$=1+2+3=6$$

이므로

$6\cdot20=120$

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{120}a_k+a_{121}+a_{122}+a_{123}=\sum_{k=1}^{123}a_k$$

$\therefore m=123$

답 123

10 전략 조건 (다)에서 주어진 등식의 좌변을 인수분해하여 a_n과 b_n 사이의 관계식을 구한다.

풀이 조건 (다)에서 $2n^2a_n+(5a_n-b_n)n+3a_n-b_n=0$이므로

$(2n^2+5n+3)a_n-(n+1)b_n=0$
$(2n+3)(n+1)a_n-(n+1)b_n=0$
$(n+1)\{(2n+3)a_n-b_n\}=0$

이때 n은 자연수이므로 $n+1>0$

$\therefore b_n=(2n+3)a_n$

조건 (나)에서 $b_n=(2n-1)a_{n+1}$이므로

$(2n-1)a_{n+1}=(2n+3)a_n$

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{2n+3}{2n-1}a_n$

위의 식의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=\dfrac{2\cdot1+3}{2\cdot1-1}a_1=5\cdot3=15$

$a_3=\dfrac{2\cdot2+3}{2\cdot2-1}a_2=\dfrac{7}{3}\cdot15=35$

$a_4=\dfrac{2\cdot3+3}{2\cdot3-1}a_3=\dfrac{9}{5}\cdot35=63$ 답 63

11 전략 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$임을 이용하여 주어진 등식을 변형한다.

풀이 ㄱ. $S_n=\dfrac{a_na_{n+1}}{2}$에 $n=1$을 대입하면

$S_1=\dfrac{a_1a_2}{2}$

$S_1=a_1$이므로 $a_1=\dfrac{a_1a_2}{2}$ $\therefore a_2=2$

ㄴ. $S_n=\dfrac{a_na_{n+1}}{2}$에서

$2S_n=a_na_{n+1}$ …… ㉠

$\therefore 2S_{n+1}=a_{n+1}a_{n+2}$ …… ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$2(S_{n+1}-S_n)=a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$
$2a_{n+1}=a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$
$\therefore a_{n+2}-a_n=2$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

ㄷ. $a_{n+2}-a_n=2$, 즉 $a_{n+2}=a_n+2$의 n에 1, 2, 3, … 을 차례대로 대입하면

$a_3=a_1+2=-1+2=1$
$a_4=a_2+2=2+2=4$
$a_5=a_3+2=1+2=3$
$a_6=a_4+2=4+2=6$
⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

QBOX

$a_2-a_1=2-(-1)=3$
$a_3-a_2=1-2=-1$
$a_4-a_3=4-1=3$
⋮

12 전략 (소금의 양)$=\dfrac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times$(소금물의 양)임을 이용하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 a_n %의 소금물 250 g에 들어 있는 소금의 양은

$\dfrac{a_n}{100}\cdot250=\dfrac{5}{2}a_n$ (g)

8 %의 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양은

$\dfrac{8}{100}\cdot50=4$ (g)

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{\frac{5}{2}a_n+4}{300}\cdot100$

$=\dfrac{5}{6}a_n+\dfrac{4}{3}$ …… ❶

QBOX

(소금물의 농도)
$=\dfrac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times100$ (%)

따라서 $p=\dfrac{5}{6}$, $q=\dfrac{4}{3}$이므로

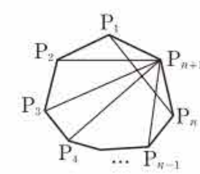
$p+q=\dfrac{13}{6}$ …… ❷

답 $\dfrac{13}{6}$

단계	채점 기준	비율
❶	a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	70 %
❷	$p+q$의 값을 구할 수 있다.	30 %

13 전략 한 개의 꼭짓점을 추가했을 때 추가되는 대각선의 개수를 파악하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 n각형의 꼭짓점을 각각 P_1, P_2, …, P_n이라 하고 두 꼭짓점 P_1과 P_n 사이에 꼭짓점 P_{n+1}을 추가하여 $(n+1)$각형을 만들면 추가되는 대각선은



$\overline{P_1P_n}$, $\overline{P_2P_{n+1}}$, $\overline{P_3P_{n+1}}$, …, $\overline{P_{n-1}P_{n+1}}$

의 $(n-1)$개이므로

$a_{n+1}=a_n+n-1$ $(n=4, 5, 6, \cdots)$

따라서 $f(n)=n-1$이므로

$f(15)=14$ 답 14

14 전략 $n=1$일 때 주어진 부등식이 성립함을 보인 다음 $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 성립함을 보인다.

풀이 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=27$, (우변)$=3\cdot2\cdot1=\boxed{6}$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$\{k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot1\}^3\cdot27^k$
$>3k(3k-1)(3k-2)\cdot\cdots\cdot1$

위의 식의 양변에 $\boxed{27(k+1)^3}$을 곱하면

$\{(k+1)k(k-1)\cdot\cdots\cdot1\}^3\cdot27^{k+1}$
$>27(k+1)^3\cdot3k(3k-1)(3k-2)\cdot\cdots\cdot1$
$=3^3\cdot(k+1)^3\cdot3k(3k-1)(3k-2)\cdot\cdots\cdot1$
$=(3k+3)^3\cdot3k(3k-1)(3k-2)\cdot\cdots\cdot1$
$>(3k+3)\cdot\boxed{(3k+2)(3k+1)}\cdot3k\cdot\cdots\cdot1$

QBOX

$3k+3>3k+2>3k+1$이므로
$(3k+3)^3$
$>(3k+3)(3k+2)(3k+1)$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

즉 $a=6$, $f(k)=27(k+1)^3$, $g(k)=(3k+2)(3k+1)$이므로

$\dfrac{f(1)g(1)}{a}=\dfrac{216\cdot20}{6}=720$ 답 720

15 전략 $n=3k+1$, $3k+2$, $3k+3$ (k는 음이 아닌 정수) 일 때로 나누어 생각한다.

풀이 음이 아닌 정수 k에 대하여

$n=3k+1$일 때,

$a_{3k+2}=a_{3k+1}+(-1)^{3k+1}\cdot 2$

$n=3k+2$일 때,

$$\begin{aligned}a_{3k+3}&=a_{3k+2}+(-1)^{3k+2}\cdot 2\\&=a_{3k+1}+\underline{(-1)^{3k+1}\cdot 2+(-1)^{3k+2}\cdot 2}\\&=a_{3k+1} \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$n=3k+3$일 때,

$a_{3k+4}=a_{3k+3}+1=a_{3k+1}+1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}a_{15}=a_{13}&=a_{10}+1\\&=(a_7+1)+1\\&=a_7+2\\&=(a_4+1)+2\\&=a_4+3\\&=(a_1+1)+3\\&=a+4\end{aligned}$$

따라서 $a+4=43$이므로

$a=39$ 답 ⑤

3k+1이 홀수이면 3k+2는 짝수이므로
$(-1)^{3k+1}\cdot 2$
$+(-1)^{3k+2}\cdot 2$
$=-2+2=0$,
3k+1이 짝수이면 3k+2는 홀수이므로
$(-1)^{3k+1}\cdot 2$
$+(-1)^{3k+2}\cdot 2$
$=2-2=0$

16 전략 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)임을 이용하여 주어진 등식을 변형한다.

풀이 자연수 n에 대하여 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$이므로

$nS_{n+1}=(n+2)S_n+(n+1)^3$에서

$n(S_n+a_{n+1})=(n+2)S_n+(n+1)^3$

$\therefore na_{n+1}=2S_n+(n+1)^3 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 n에 $n-1$을 대입하면 2 이상의 자연수 n에 대하여

$(n-1)a_n=2S_{n-1}+n^3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠－㉡을 하면

$$\begin{aligned}na_{n+1}-(n-1)a_n&=2(S_n-S_{n-1})+(n+1)^3-n^3\\&=2a_n+3n^2+3n+1\end{aligned}$$

$\therefore na_{n+1}=(n+1)a_n+\boxed{3n^2+3n+1}$

위의 식의 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{3n^2+3n+1}{n(n+1)}$$

$b_n=\frac{a_n}{n}$이라 하면

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=b_n+\frac{3n^2+3n+1}{n(n+1)}\\&=b_n+\frac{3n(n+1)+1}{n(n+1)}\\&=b_n+3+\boxed{\frac{1}{n(n+1)}}\ (n\ge 2)\end{aligned}$$

이때 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로

$b_{n+1}=b_n+3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

위의 식의 n에 $2, 3, 4, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하면

$b_3=b_2+3+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}b_4&=b_3+3+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\&=b_2+3+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+3+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\&=b_2+3\cdot 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_5&=b_4+3+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\\&=b_2+3\cdot 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+3+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\\&=b_2+3\cdot 3+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\end{aligned}$$

⋮

$b_n=b_2+\boxed{3(n-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\ (n\ge 3)$

따라서 $f(n)=3n^2+3n+1$, $g(n)=\frac{1}{n(n+1)}$,

$h(n)=3(n-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$이므로

$f(3)=3\cdot 3^2+3\cdot 3+1=37$, $g(3)=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}$,

$h(6)=3(6-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{37}{3}$

$\therefore \frac{f(3)}{g(3)h(6)}=37\cdot 12\cdot\frac{3}{37}=36$ 답 ②

참고 ㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_2=2S_1+2^3=2a_1+8=2\cdot 1+8=10$

따라서 $b_n=b_2+3(n-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$에서

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n}&=\frac{a_2}{2}+3(n-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\\&=\frac{10}{2}+3n-6+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\\&=3n-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\end{aligned}$$

$\therefore a_n=3n^2-\frac{1}{2}n-1\ (n\ge 3) \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢에 $n=1$을 대입하면

$a_1=3\cdot 1^2-\frac{1}{2}\cdot 1-1=\frac{3}{2}$

한편 $a_2=10$은 ㉢에 $n=2$를 대입한 것과 같으므로

$a_1=1$, $a_n=3n^2-\frac{1}{2}n-1\ (n\ge 2)$

Work Book

01 지수

Ⓦ 2쪽

01 ① 세제곱근 -0.001은

$\sqrt[3]{-0.001}=\sqrt[3]{(-0.1)^3}=-0.1$이다.

② 네제곱근 625는 $\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5$이다.

③ 제곱근 16은 $\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$이고, 4의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=4$이므로

$x^4-4=0,\quad (x^2+2)(x^2-2)=0$

$(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 제곱근 16의 네제곱근은 $-\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$이다.

④ -1의 세제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{(-1)^3}=-1$뿐이다.

⑤ -1의 네제곱근을 x라 하면 $\quad x^4=-1$

그런데 이것을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 -1의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

답 ④

02 a가 3^{10}의 다섯제곱근 중 실수인 것이므로

$a=\sqrt[5]{3^{10}}=3^2=9$

b가 9의 네제곱근 중 양수인 것이므로

$b=\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}$

$\therefore a^2+b^2=9^2+(\sqrt{3})^2=84$ 답 84

03 $A=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$,

$B=\{2, 3, 6, 11, 18\}$

(i) y가 짝수일 때,

$\sqrt[y]{x}$가 실수이려면 $x\geq0$이어야 하므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 $\quad 5\times3=15$

(ii) y가 홀수일 때,

x의 값에 관계없이 $\sqrt[y]{x}$가 실수이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 $\quad 9\times2=18$

(i), (ii)에서 순서쌍 (x, y)의 개수는

$15+18=33$ 답 ④

쌤한마디

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

따라서 **03**번에서 x, y의 값의 특징을 이용하면 거듭제곱근을 모두 구해 보지 않아도 문제를 해결할 수 있다.

Q BOX

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여
① n제곱근 a ➡ $\sqrt[n]{a}$
② a의 n제곱근
➡ 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x

-1의 세제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^3=-1$의 실근을 구하여 찾을 수도 있다.

한 변의 길이가 x인 정삼각형의 넓이는
$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

x는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이고 y는 2, 6, 18의 3개이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는
$5\times3=15$

04 ㄱ. 7의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{7}$의 2개이므로 $\quad f_4(7)=2$

7의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{7}$의 1개이므로

$f_3(7)=1$

$\therefore f_4(7)-f_3(7)=2-1=1$

ㄴ. $a>0$이고 $2n+1$은 홀수, $2n$은 짝수이므로

$f_{2n+1}(a)-f_{2n}(a)=1-2=-1$

ㄷ. $a<0$이고 n이 짝수일 때, $n+1$은 홀수이므로

$g(n)=f_n(a)-f_{n+1}(-a)=0-1=-1$

$a<0$이고 n이 홀수일 때, $n+1$은 짝수이므로

$g(n)=f_n(a)-f_{n+1}(-a)=1-2=-1$

따라서 $g(n)=-1$이 성립한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

05 $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{125}}{\sqrt{125}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt{125}}{125}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{125}}}{\sqrt[3]{\sqrt{125}}}\times\frac{\sqrt{\sqrt{125}}}{\sqrt{125}}$

$=\frac{\sqrt[12]{5^3}}{\sqrt[6]{5^3}}\times\frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt{5^3}}$

$=\frac{\sqrt[12]{5^3}}{\sqrt[12]{5^6}}\times\frac{\sqrt[12]{5^9}}{\sqrt[12]{5^{18}}}$

$=\sqrt[12]{\frac{5^3\times5^9}{5^6\times5^{18}}}$

$=\sqrt[12]{\left(\frac{1}{5}\right)^{12}}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

06 정육면체의 한 모서리의 길이를 a $(a>0)$라 하면

$6a^2=6\sqrt{3},\quad a^2=\sqrt{3}$

$\therefore a=\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}$ $(\because a>0)$

즉 △AFC는 한 변의 길이가 $\sqrt[4]{3}\times\sqrt{2}$인 정삼각형이므로

$\triangle AFC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt[4]{3}\times\sqrt{2})^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}\times2=\frac{3}{2}$

따라서 $p=2$, $q=3$이므로

$p+q=5$ 답 5

07 $\sqrt[3]{2a^4b^2}\div\sqrt[5]{8a^3b^3}\times\sqrt[15]{16ab^8}$

$=\sqrt[15]{2^5a^{20}b^{10}}\div\sqrt[15]{2^9a^{15}b^9}\times\sqrt[15]{2^4ab^8}$

$=\sqrt[15]{\frac{2^5a^{20}b^{10}\times2^4ab^8}{2^9a^{15}b^9}}$

$=\sqrt[15]{a^6b^9}=\sqrt[5]{a^2b^3}$ 답 $\sqrt[5]{a^2b^3}$

08 ㄱ. $A(a, b)=\sqrt[a]{b}=\sqrt[ac]{b^c}=A(ac, b^c)$

ㄴ. $A(a, b)\times A(a, c)=\sqrt[a]{b}\times\sqrt[a]{c}=\sqrt[a]{bc}=A(a, bc)$

ㄷ. $A(a, A(b, c))=\sqrt[a]{\sqrt[b]{c}}=\sqrt[ab]{c}=A(ab, c)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

09 3, 5, 6의 최소공배수가 30이므로

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[30]{2^{10}}=\sqrt[30]{1024}$, $\sqrt[5]{3}=\sqrt[30]{3^6}=\sqrt[30]{729}$,

$\sqrt[6]{5}=\sqrt[30]{5^5}=\sqrt[30]{3125}$

$\sqrt[30]{729}<\sqrt[30]{1024}<\sqrt[30]{3125}$이므로

$\sqrt[5]{3}<\sqrt[3]{2}<\sqrt[6]{5}$ 답 ③

10 $\sqrt[3]{4\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{4^2\times2}}=\sqrt[6]{32}$,

$\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^2\times3}}=\sqrt[6]{27}$,

$\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^3\times5}}=\sqrt[12]{5^4}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}$에서

$\sqrt[6]{25}<\sqrt[6]{27}<\sqrt[6]{32}$

따라서 $a=\sqrt[6]{25}$, $b=\sqrt[6]{32}$이므로 부등식

$\sqrt[6]{25}<\sqrt[6]{n}<\sqrt[6]{32}$를 만족시키는 자연수 n은

26, 27, 28, 29, 30, 31의 6개 답 6

11 $\sqrt{2}=\sqrt[10]{2^5}=\sqrt[10]{32}$, $\sqrt[5]{10}=\sqrt[10]{10^2}=\sqrt[10]{100}$,

$\sqrt[5]{4\sqrt{5}}=\sqrt[5]{\sqrt{4^2\times5}}=\sqrt[10]{80}$, $\sqrt{2\sqrt[5]{5}}=\sqrt{\sqrt[5]{2^5\times5}}=\sqrt[10]{160}$

에서

$\sqrt[10]{32}<\sqrt[10]{80}<\sqrt[10]{100}<\sqrt[10]{160}$

$\therefore A\cap B=\{x\,|\,\sqrt[10]{80}<x<\sqrt[10]{100}\}$

따라서 $\sqrt[10]{n}\in(A\cap B)$를 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 99이다. 답 99

12 $2^{-8}\div(8^{-2}\div2^{-5})^{-1}=2^{-8}\div\{(2^3)^{-2}\div2^{-5}\}^{-1}$

$=2^{-8}\div(2^{-6}\div2^{-5})^{-1}$

$=2^{-8}\div(2^{-1})^{-1}$

$=2^{-8}\div2=2^{-9}$ 답 ⑤

13 $\dfrac{3^{10}+3^{30}}{3^5+3^{-15}}=\dfrac{3^{10}(1+3^{20})}{3^{-15}(3^{20}+1)}$

$=\dfrac{3^{10}}{3^{-15}}=3^{25}$

$\therefore k=25$ 답 25

14 $\dfrac{a^{-1}+a^{-3}+a^{-5}+a^{-7}+a^{-9}}{a+a^3+a^5+a^7+a^9}$

$=\dfrac{a^{-9}(a^8+a^6+a^4+a^2+1)}{a(1+a^2+a^4+a^6+a^8)}$

$=\dfrac{a^{-9}}{a}=\dfrac{1}{a^{10}}=\dfrac{1}{(\sqrt[5]{\sqrt{5}-2})^{10}}$

$=\dfrac{1}{(\sqrt{5}-2)^2}=\dfrac{1}{9-4\sqrt{5}}$

$=\dfrac{9+4\sqrt{5}}{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}=9+4\sqrt{5}$ 답 $9+4\sqrt{5}$

15 $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5^3}}\times\sqrt{5\sqrt{5\sqrt[3]{5}}}=\sqrt[12]{5^3}\times\sqrt{5}\times\sqrt[4]{5}\times\sqrt[12]{5}$

$=5^{\frac{1}{4}}\times5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{4}}\times5^{\frac{1}{12}}$

$=5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}=5^{\frac{13}{12}}$ 답 ②

16 $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a^3}}}=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[4]{a^3}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{3}{4}}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}}$

$=a^{\frac{17}{12}}$ …… ㉠

$a\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[m]{a^3}}=a\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[3m]{a^3}$

$=a\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{m}}$

$=a^{1+\frac{1}{6}+\frac{1}{m}}$

$=a^{\frac{7}{6}+\frac{1}{m}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{17}{12}=\dfrac{7}{6}+\dfrac{1}{m}$이므로

$\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore m=4$ 답 ③

17 $f(x)$가 $x-\sqrt[3]{a}$로 나누어떨어지므로

$f(\sqrt[3]{a})=0$, $\quad(\sqrt[3]{a})^6-5=0$

$a^2=5$ $\quad\therefore a=\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

따라서

$\sqrt{a\sqrt[3]{a}}=\sqrt{\sqrt[3]{a^3\times a}}=\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{5}$

이므로 $f(x)$를 $x-\sqrt[3]{5}$로 나누었을 때의 나머지는

$f(\sqrt[3]{5})=(\sqrt[3]{5})^6-5=5^2-5=20$ 답 20

18 ① $2^{\frac{2}{5}}\times2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{9}{10}}=\sqrt[10]{2^9}$

② $(2^{-3})^{\frac{1}{6}}=2^{-3\times\frac{1}{6}}=2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

③ $3^{3\sqrt{2}-5}\div3^{\sqrt{2}-5}=3^{3\sqrt{2}-5-(\sqrt{2}-5)}=3^{2\sqrt{2}}=(3^2)^{\sqrt{2}}=9^{\sqrt{2}}$

④ $\{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=27$

⑤ $(\sqrt{3})^{\sqrt{18}}=(\sqrt{3})^{3\sqrt{2}}=\{(\sqrt{3})^3\}^{\sqrt{2}}=(3\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

답 ④

19 $\left\{\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{2}}\div\left\{\left(\dfrac{9}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{8}{27}\right)^3\div\left(\dfrac{9}{8}\right)^{-2}$

$=\left(\dfrac{2^3}{3^3}\right)^3\times\left(\dfrac{3^2}{2^3}\right)^2$

$=\dfrac{2^9}{3^9}\times\dfrac{3^4}{2^6}$

$=\dfrac{2^3}{3^5}=\dfrac{8}{243}$ 답 $\dfrac{8}{243}$

20 $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

이므로

$a_n=3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$\therefore a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{48}$

$=3^{\sqrt{2}-1}\times3^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times3^{\sqrt{4}-\sqrt{3}}\times\cdots\times3^{\sqrt{49}-\sqrt{48}}$

$=3^{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})}$

$=3^{\sqrt{49}-1}=3^{7-1}=3^6$

$\therefore k=6$ 답 6

21 $a=16^2=(2^4)^2=2^8$에서 $\quad 2=a^{\frac{1}{8}}$

$\therefore 8^4=(2^3)^4=2^{12}=(a^{\frac{1}{8}})^{12}=a^{\frac{3}{2}}$

$\therefore k=\dfrac{3}{2}$ 답 $\dfrac{3}{2}$

Q BOX

인수정리
다항식 $P(x)$에 대하여
① $P(a)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.
② $P(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지면 $P(a)=0$이다.

나머지정리
다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$이다.

지수가 정수가 아닌 유리수일 때, 밑이 음수이면 지수법칙을 이용할 수 없다.

밑이 같은 두 수의 합 또는 차는 지수가 작은 수로 묶어서 계산하면 편리하다.

$a\div b^{-k}=a\div\dfrac{1}{b^k}$
$=a\times b^k$

22 $a=\sqrt[3]{5}$에서 $\quad a^3=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$b=\sqrt{45}$에서 $\quad b^2=45$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$a^{-3}b^2=9=3^2 \qquad \therefore a^{-\frac{3}{2}}b=3$

$\therefore 15^4=(3\times5)^4=3^4\times5^4$

$=(a^{-\frac{3}{2}}b)^4\times(a^3)^4$

$=a^{-6}b^4\times a^{12}=a^6b^4$ 답 ③

23 $\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{7}{n}}=(5^{-3})^{\frac{7}{n}}=5^{-\frac{21}{n}}$이 자연수가 되려면

$-\frac{21}{n}$이 음이 아닌 정수이어야 한다.

즉 정수 $-n$은 21의 양의 약수이므로

1, 3, 7, 21

따라서 정수 n은 -1, -3, -7, -21의 4개이다.

답 ④

24 $a^2=2$, $b^3=9$, $c^5=7$에서

$a=2^{\frac{1}{2}}$, $b=(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$, $c=7^{\frac{1}{5}}$

$\therefore (abc)^n=(2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{2}{3}}\times7^{\frac{1}{5}})^n$

$=2^{\frac{n}{2}}\times3^{\frac{2n}{3}}\times7^{\frac{n}{5}}$

따라서 $(abc)^n$, 즉 $2^{\frac{n}{2}}\times3^{\frac{2n}{3}}\times7^{\frac{n}{5}}$이 자연수가 되려면

$2^{\frac{n}{2}}$, $3^{\frac{2n}{3}}$, $7^{\frac{n}{5}}$이 모두 자연수이어야 하므로 $\frac{n}{2}$, $\frac{2n}{3}$,

$\frac{n}{5}$이 모두 음이 아닌 정수이어야 한다.

즉 자연수 n은 2, 3, 5의 공배수이므로 n의 최솟값은

30이다. 답 30

25 $(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3-(a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})^3$

$=(a^{\frac{2}{3}})^3+3(a^{\frac{2}{3}})^2a^{-\frac{1}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}(a^{-\frac{1}{3}})^2+(a^{-\frac{1}{3}})^3$

$-\{(a^{\frac{2}{3}})^3-3(a^{\frac{2}{3}})^2a^{-\frac{1}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}(a^{-\frac{1}{3}})^2-(a^{-\frac{1}{3}})^3\}$

$=a^2+3a+3+a^{-1}-(a^2-3a+3-a^{-1})$

$=6a+2a^{-1}=6a+\frac{2}{a}$ 답 ④

$(x\pm y)^3$
$=x^3\pm3x^2y+3xy^2\pm y^3$
(복호동순)

26 $\frac{1}{1-3^{\frac{1}{8}}}+\frac{1}{1+3^{\frac{1}{8}}}+\frac{2}{1+3^{\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{1+3^{\frac{1}{8}}+1-3^{\frac{1}{8}}}{(1-3^{\frac{1}{8}})(1+3^{\frac{1}{8}})}+\frac{2}{1+3^{\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{2}{1-3^{\frac{1}{4}}}+\frac{2}{1+3^{\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{2(1+3^{\frac{1}{4}})+2(1-3^{\frac{1}{4}})}{(1-3^{\frac{1}{4}})(1+3^{\frac{1}{4}})}+\frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{4}{1-3^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{4(1+3^{\frac{1}{2}})+4(1-3^{\frac{1}{2}})}{(1-3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{2}})}$

$=\frac{8}{1-3}=-4$ 답 ①

Q BOX

27 $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3=3^3$

$x+x^{-1}+3(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})=27$

$\therefore x+x^{-1}=27-3\times3=18$

$\therefore (4+x)(4+x^{-1})=16+4x+4x^{-1}+1$

$=17+4(x+x^{-1})$

$=17+4\times18$

$=89$ 답 ⑤

쌤한마디

$a^x\pm a^{-x}\,(a>0)$ 꼴이 포함된 식의 값을 구하는 문제는 곱셈 공식과 $a^x\times a^{-x}=1$임을 이용하여 해결한다.

① $(a^{\frac{1}{2}}\pm a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}\pm2$ (복호동순)

② $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2+4$

③ $(a^{\frac{1}{3}}\pm a^{-\frac{1}{3}})^3=a\pm a^{-1}\pm3(a^{\frac{1}{3}}\pm a^{-\frac{1}{3}})$ (복호동순)

28 $\frac{x^3+x^2}{x+1}-\frac{x^{-3}+x^{-2}}{x^{-1}+1}$

$=\frac{x^2(x+1)}{x+1}-\frac{x^{-2}(x^{-1}+1)}{x^{-1}+1}$

$=x^2-x^{-2}$

$=(x+x^{-1})(x-x^{-1})$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=(\sqrt{5})^2, \qquad x+x^{-1}+2=5$

$\therefore x+x^{-1}=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 $(x-x^{-1})^2=(x+x^{-1})^2-4=3^2-4=5$이므로

$x-x^{-1}=\sqrt{5}$ ($\because x-x^{-1}>0$) $\quad\cdots\cdots$ ㉢

$x>1$일 때, $0<x^{-1}<1$이므로
$x-x^{-1}>0$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 구하는 식의 값은

$3\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ 답 $3\sqrt{5}$

29 $\frac{2^{3x}+2^{-x}}{2^x+2^{-3x}}$의 분자, 분모에 2^x을 곱하면

$\frac{2^{3x}+2^{-x}}{2^x+2^{-3x}}=\frac{2^x(2^{3x}+2^{-x})}{2^x(2^x+2^{-3x})}=\frac{2^{4x}+1}{2^{2x}+2^{-2x}}$

$=\frac{(2^{2x})^2+1}{2^{2x}+(2^{2x})^{-1}}$

$=\frac{(3+2\sqrt{2})^2+1}{3+2\sqrt{2}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}}$

$\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$
$=\frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$
$=\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=3-2\sqrt{2}$

$=\frac{17+12\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}+(3-2\sqrt{2})}=\frac{18+12\sqrt{2}}{6}$

$=3+2\sqrt{2}$ 답 $3+2\sqrt{2}$

30 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{1}{2}$의 좌변의 분자, 분모에 a^x을 곱하면

$\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\frac{1}{2}$

$2a^{2x}-2=a^{2x}+1, \qquad a^{2x}=3$

$\therefore a^x=\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

$\frac{a^{\frac{3}{2}x}-a^{-\frac{x}{2}}}{a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{3}{2}x}}$의 분자, 분모에 $a^{\frac{x}{2}}$을 곱하면

$$\frac{a^{\frac{3}{2}x}-a^{-\frac{x}{2}}}{a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{3}{2}x}}=\frac{a^{\frac{x}{2}}(a^{\frac{3}{2}x}-a^{-\frac{x}{2}})}{a^{\frac{x}{2}}(a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{3}{2}x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^x+a^{-x}}$$
$$=\frac{3-1}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{3}}{3+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ 답 ②

31 $12^x=8$에서

$12=8^{\frac{1}{x}}=(2^3)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$3^{-y}=8$에서

$3=8^{-\frac{1}{y}}=(2^3)^{-\frac{1}{y}}=2^{-\frac{3}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $4=2^{\frac{3}{x}}\div 2^{-\frac{3}{y}}$

$2^2=2^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}}$, $2=\frac{3}{x}+\frac{3}{y}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

32 $a^x=7^3$에서 $a=7^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$(ab)^y=7^2$에서 $ab=7^{\frac{2}{y}}$ …… ㉡

$(abc)^z=7$에서 $abc=7^{\frac{1}{z}}$

$\therefore (abc)^2=(7^{\frac{1}{z}})^2=7^{\frac{2}{z}}$ …… ㉢

㉠÷㉡×㉢을 하면

$a\div ab\times(abc)^2=7^{\frac{3}{x}}\div 7^{\frac{2}{y}}\times 7^{\frac{2}{z}}$

$\frac{a\times a^2b^2c^2}{ab}=7^{\frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}$

$\therefore 7^{\frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}=a^2bc^2$ 답 ②

33 $a^{-2}=5$에서 $a=5^{-\frac{1}{2}}$

$b^{-4}=25$에서 $b=25^{-\frac{1}{4}}=(5^2)^{-\frac{1}{4}}=5^{-\frac{1}{2}}$

$c^{-3}=125$에서 $c=125^{-\frac{1}{3}}=(5^3)^{-\frac{1}{3}}=5^{-1}$

$\therefore f(n)=\left(\frac{a^2}{bc}\right)^n=\left(\frac{1}{b}\right)^n=b^{-n}=(5^{-\frac{1}{2}})^{-n}=5^{\frac{n}{2}}$

$\therefore f(1)\times f(2)\times f(3)=5^{\frac{1}{2}}\times 5\times 5^{\frac{3}{2}}$
$=5^3=125$ 답 ③

34 $x^y=y^x$에서

$x=y^{\frac{x}{y}}$ $\therefore x=y^{\frac{4}{5}}$

이것을 $\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$에 대입하면

$\frac{y^{\frac{4}{5}}}{y}=\frac{4}{5}$, $y^{-\frac{1}{5}}=\frac{4}{5}$

$(y^{-\frac{1}{5}})^{-2}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$ $\therefore y^{\frac{2}{5}}=\frac{25}{16}$ 답 ④

35 $9^x=10^y=k\ (k>0)$로 놓으면 $xy\neq 0$이므로 $k\neq 1$

$9^x=k$에서 $9=k^{\frac{1}{x}}$

$(3^2)^{\frac{3}{2}}=(k^{\frac{1}{x}})^{\frac{3}{2}}$ $\therefore 27=k^{\frac{3}{2x}}$ …… ㉠

$10^y=k$에서 $10=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{27}{10}=k^{\frac{3}{2x}-\frac{1}{y}}$

Q BOX

첫 번째 복사본의 글자 크기는

$a\times\frac{r}{100}$

2 번째 복사본의 글자 크기는

$a\left(\frac{r}{100}\right)^2$

⋮

n 번째 복사본의 글자 크기는

$a\left(\frac{r}{100}\right)^n$

$a^2=(5^{-\frac{1}{2}})^2=5^{-1}=c$ 이므로 $\frac{a^2}{bc}=\frac{1}{b}$

$\frac{3}{2x}-\frac{1}{y}=2$이므로 $x\neq 0$, $y\neq 0$

$\pm\sqrt[4]{9}=\pm\sqrt[4]{3^2}=\pm\sqrt{3}$

이때 $\frac{3}{2x}-\frac{1}{y}=2$이므로 $k^2=\frac{27}{10}$

$\therefore 100^y=(10^2)^y=(10^y)^2=k^2=\frac{27}{10}$ 답 $\frac{27}{10}$

36 $S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$에서

$Q=30$, $H=3$일 때, $S_1=N\times 30^{\frac{1}{2}}\times 3^{-\frac{3}{4}}$

$Q=10$, $H=9$일 때, $S_2=N\times 10^{\frac{1}{2}}\times 9^{-\frac{3}{4}}$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{N\times 30^{\frac{1}{2}}\times 3^{-\frac{3}{4}}}{N\times 10^{\frac{1}{2}}\times 9^{-\frac{3}{4}}}$$
$$=\left(\frac{30}{10}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{3}{9}\right)^{-\frac{3}{4}}$$
$$=3^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}$$
$$=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{5}{4}}$$ 답 $3^{\frac{5}{4}}$

37 원본의 글자 크기를 a라 하면 5 번째 복사본의 글자 크기가 원본의 4배이므로

$a\left(\frac{r}{100}\right)^5=4a$ $\therefore \left(\frac{r}{100}\right)^5=4$

9 번째 복사본의 글자 크기는 $a\left(\frac{r}{100}\right)^9$이므로

$$a\left(\frac{r}{100}\right)^9\div a\left(\frac{r}{100}\right)^5=\left(\frac{r}{100}\right)^4$$
$$=\left\{\left(\frac{r}{100}\right)^5\right\}^{\frac{4}{5}}$$
$$=4^{\frac{4}{5}}=(2^2)^{\frac{4}{5}}=2^{\frac{8}{5}}$$

따라서 9 번째 복사본의 글자 크기는 5 번째 복사본의 $2^{\frac{8}{5}}$배이므로 $p=5$, $q=8$

$\therefore p+q=13$ 답 13

38 해수면에서의 기압이 1000 hPa이므로

$1000=k\times a^0$ $\therefore k=1000$

$\therefore P=1000a^x$

해발 1600 m 지점에서의 기압이 800 hPa이므로

$800=1000\times a^{1600}$ $\therefore a^{1600}=\frac{4}{5}$

따라서 해발 3200 m 지점에서의 기압은

$1000a^{3200}=1000\times(a^{1600})^2=1000\times\left(\frac{4}{5}\right)^2$
$=640\,(\text{hPa})$ 답 640 hPa

도전! 수능 기출

W 8쪽

01 1st 집합 X의 원소를 모두 구한다.

a, b의 값에 따라 집합 X의 원소를 구하면 다음과 같다.

a \ b	-9	-3	3	9
3	$\sqrt[3]{-9}$	$\sqrt[3]{-3}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{9}$
4	없다.	없다.	$\pm\sqrt[4]{3}$	$\pm\sqrt[4]{9}$

$X=\{\sqrt[3]{-9},\ \sqrt[3]{-3},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{9},\ -\sqrt[4]{3},\ \sqrt[4]{3},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}\}$

(2nd) ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\sqrt[3]{-9} \in X$

(3rd) ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 집합 X의 원소의 개수는 8이다.

(4th) ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 집합 X의 원소 중 양수인 것은

$\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{3}$

따라서 양수인 모든 원소의 곱은

$$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt{3}=3^{\frac{1}{3}}\times9^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{2}}$$
$$=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}$$
$$=3^{\frac{7}{4}}=\sqrt[4]{3^7}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

쌤한마디

집합 X의 원소는 집합 A의 원소 a와 집합 B의 원소 b에 대하여 $x^a=b$를 만족시키는 실수 x의 값이다.
따라서 집합 A의 원소 3, 4와 집합 B의 원소 -9, -3, 3, 9를 각각 $x^a=b$에 대입하여 x의 값을 구하면 집합 X의 원소를 모두 구할 수 있다.
이와 같이 문제에서 집합이 조건제시법으로 주어지면 그 의미를 파악하여 집합을 원소나열법으로 나타낸다.

02 (1st) 거듭제곱근을 지수를 사용하여 나타낸 후 a, b의 조건을 찾는다.

$\sqrt{\dfrac{2^a\times5^b}{2}}=\sqrt{2^{a-1}\times5^b}=2^{\frac{a-1}{2}}\times5^{\frac{b}{2}}$이 자연수이려면 $2^{\frac{a-1}{2}}$, $5^{\frac{b}{2}}$이 모두 자연수이어야 하므로 $a-1$, b가 모두 0 또는 2의 양의 배수이어야 한다.

또 $\sqrt[3]{\dfrac{3^b}{2^{a+1}}}=\dfrac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}}$이 유리수이려면 $2^{\frac{a+1}{3}}$, $3^{\frac{b}{3}}$이 모두 자연수이어야 하므로 $a+1$, b가 모두 0 또는 3의 양의 배수이어야 한다.

(2nd) $a+b$의 최솟값을 구한다.

$a-1=2m$ (m은 음이 아닌 정수)이라 하면

$a+1=2m+2=2(m+1)$

$a+1$이 3의 양의 배수이려면 $m+1$이 3의 양의 배수이어야 하므로

$m=2, 5, 8, \cdots$

$a=2m+1$은 m이 최소일 때 최솟값을 가지므로 a의 최솟값은

$2\times2+1=5$

b는 6의 양의 배수이어야 하므로 b의 최솟값은 6

따라서 $a+b$의 최솟값은

$5+6=11$ 답 ①

03 (1st) $4^a\times3^{-b}$을 간단히 한다.

$$4^a\times3^{-b}=(2^2)^a\times3^{-b}=(2^a)^2\times3^{-b}$$
$$=(3^b)^2\times3^{-b}\ (\because 2^a=3^b)$$
$$=3^{2b-b}=3^b \quad \cdots\cdots ㉠$$

Q BOX

$a>0$, $b>0$이므로
$2^a=3^b=k>0$

$\sqrt[3]{-9}=-\sqrt[3]{9}$,
$\sqrt[3]{-3}=-\sqrt[3]{3}$은 음수이다.

$9^{\frac{1}{3}}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$

a는 자연수이므로
$a+1\neq0$

b는 자연수이므로
$b\neq0$
따라서 b는 2와 3의 양의 공배수이다.

(2nd) $2^a=3^b=k$ $(k>0)$로 놓고 밑을 통일하여 나타낸다.

$2^a=3^b=k$ $(k>0)$로 놓으면

$2=k^{\frac{1}{a}}$, $3=k^{\frac{1}{b}}$ $\cdots\cdots$ ㉡

(3rd) $(a-2)(b-2)=4$를 전개하여 $\dfrac{a+b}{ab}$의 값을 구한다.

$(a-2)(b-2)=4$에서

$ab-2a-2b+4=4$

$ab-2(a+b)=0$, $\quad ab=2(a+b)$

$\therefore \dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉢

(4th) $4^a\times3^{-b}$의 값을 구한다.

㉡의 두 식을 변끼리 곱하면

$2\times3=k^{\frac{1}{a}}\times k^{\frac{1}{b}}=k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=k^{\frac{a+b}{ab}}=k^{\frac{1}{2}}$ ($\because$ ㉢)

$\therefore k=6^2=36$

따라서 ㉠에서

$4^a\times3^{-b}=3^b=k=36$ 답 ③

04 (1st) 주어진 관계식에 각 값을 대입하여 식을 정리한다.

$I=I_0$, $r=r_1$, $x=x_1$일 때,

$$B_1=\frac{kI_0r_1^2}{2(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$I=I_0$, $r=3r_1$, $x=3x_1$일 때,

$$B_2=\frac{kI_0(3r_1)^2}{2\{(3x_1)^2+(3r_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{kI_0\times9r_1^2}{2\{3^2(x_1^2+r_1^2)\}^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{9kI_0r_1^2}{2\times27(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{kI_0r_1^2}{6(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2nd) $\dfrac{B_2}{B_1}$의 값을 구한다.

$$\frac{B_2}{B_1}=\frac{\dfrac{kI_0r_1^2}{6(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{kI_0r_1^2}{2(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

답 ③

02 로그

W 9쪽

01 $\log_a 8=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $\quad a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8$

$\therefore a=(2^3)^{\frac{2}{\sqrt{3}}}=2^{2\sqrt{3}}$

$(2^3)^{\frac{2}{\sqrt{3}}}=2^{\frac{6}{\sqrt{3}}}=2^{\frac{6\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}}$
$=2^{\frac{6\sqrt{3}}{3}}=2^{2\sqrt{3}}$

$\log_4(b-2)=\sqrt{3}$에서 $\quad 4^{\sqrt{3}}=b-2$

$\therefore b=(2^2)^{\sqrt{3}}+2=2^{2\sqrt{3}}+2=a+2$

$\therefore b-a=2$ 답 ⑤

02 $\log_{\sqrt{2}}\{\log_2(\log_{2\sqrt{2}}x)\}=0$에서

$\log_2(\log_{2\sqrt{2}}x)=(\sqrt{2})^0=1$

$\log_{2\sqrt{2}}x=2^1=2$

$\therefore x=(2\sqrt{2})^2=8$ 답 ①

03 $x=\log_3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$에서

$3^x=\sqrt{3}-\sqrt{2},\ 3^{-x}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$
$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\therefore \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=\frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 답 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

04 밑의 조건에서 $\quad x^2-3>0,\ x^2-3\neq1$

$\log_a N$이 정의되기 위한 조건은
$a>0,\ a\neq1,\ N>0$

$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0,\ x^2\neq4$

$\therefore x<-2$ 또는 $-2<x<-\sqrt{3}$

또는 $\sqrt{3}<x<2$ 또는 $x>2$ …… ㉠

진수의 조건에서 $\quad -x^2+5x>0$

$x^2-5x<0,\quad x(x-5)<0$

$\therefore 0<x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\sqrt{3}<x<2$ 또는 $2<x<5$

따라서 정수 x는 3, 4이므로 구하는 합은

$3+4=7$ 답 7

05 밑의 조건에서 $\quad x-1>0,\ x-1\neq1$

$x>1,\ x\neq2$

$\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ …… ㉠

진수의 조건에서

$2x^2-x-3>0,\quad (x+1)(2x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{3}{2}<x<2$ 또는 $x>2$

따라서 정수 x의 최솟값은 3이다. 답 ①

06 $\log_{|n-2|}10$이 정의되려면 밑의 조건에서

$|n-2|>0,\ |n-2|\neq1$

$|n-2|>0$에서
$n-2\neq0 \quad \therefore n\neq2$
$|n-2|\neq1$에서
$n-2\neq\pm1$
$\therefore n\neq1,\ n\neq3$

$\therefore n\neq1,\ n\neq2,\ n\neq3$ …… ㉠

$\log_8(4-n)^n$이 정의되려면 진수의 조건에서

$(4-n)^n>0$

(i) n이 짝수일 때,

$4-n\neq0$, 즉 $n\neq4$이어야 하므로 10 이하의 자연수 n은

2, 6, 8, 10

(ii) n이 홀수일 때,

$4-n>0$, 즉 $n<4$이어야 하므로 10 이하의 자연수 n은 1, 3

(i), (ii)에서 자연수 n은

1, 2, 3, 6, 8, 10 …… ㉡

㉠, ㉡에서 자연수 n은 6, 8, 10의 3개이다. 답 3

07 $2\log_4\frac{8}{5}-\log_2\sqrt{20}+3\log_4 5$

$=2\log_{2^2}\frac{8}{5}-\log_2\sqrt{2^2\cdot5}+3\log_{2^2}5$

$=\log_2\frac{8}{5}-\log_2 2\sqrt{5}+\frac{3}{2}\log_2 5$

$=\log_2\frac{8}{5}-\log_2 2\sqrt{5}+\log_2 5^{\frac{3}{2}}$

$=\log_2\frac{8}{5}-\log_2 2\sqrt{5}+\log_2 5\sqrt{5}$

$=\log_2\left(\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot5\sqrt{5}\right)$

$=\log_2 4$

$=\log_2 2^2=2$ 답 2

08 $\log_2(a^2+2b^2)-\log_2(a-b)=\log_2(a+b)+1$에서

$\log_2\frac{a^2+2b^2}{a-b}=\log_2 2(a+b)$

$\frac{a^2+2b^2}{a-b}=2(a+b)$

$a^2+2b^2=2a^2-2b^2,\qquad a^2=4b^2$

$\therefore a=2b\ (\because a>0,\ b>0)$

$\therefore \frac{a}{b}=2$ 답 ①

09 $\frac{1}{2}\log_3 a-3\log_3 b=\log_3\sqrt{a}-\log_3 b^3=\log_3\frac{\sqrt{a}}{b^3}$

즉 $\log_3\frac{\sqrt{a}}{b^3}=-1$이므로

$\frac{\sqrt{a}}{b^3}=3^{-1}=\frac{1}{3},\qquad \sqrt{a}=\frac{b^3}{3}$

$\therefore a=\frac{b^6}{9}$ …… ㉠

이때 $10\le a<100$이므로

$10\le\frac{b^6}{9}<100,\qquad 90\le b^6<900$

$2^6=64,\ 3^6=729,$
$4^6=4096$

$\therefore b=3\ (\because b$는 자연수$)$

$b=3$을 ㉠에 대입하면

$a=\frac{3^6}{9}=81$

$\therefore a+b=84$ 답 84

10 $\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_5 x}+\dfrac{1}{\log_7 x}$

$=\log_x 3+\log_x 5+\log_x 7$

$=\log_x (3\cdot5\cdot7)$

$=\log_x 105$

$=\dfrac{1}{\log_{105} x}$

따라서 $\dfrac{1}{\log_{105} x}=\dfrac{1}{\log_a x}$이므로

$a=105$ 답 ⑤

11 $\dfrac{\log_{12} 48}{1+\log_3 4}+(\log_{12} 3)^2$

$=\dfrac{\log_{12} 48}{\log_3 3+\log_3 4}+(\log_{12} 3)^2$

$=\dfrac{\log_{12} 48}{\log_3 12}+(\log_{12} 3)^2$

$=\log_{12} 48\cdot\log_{12} 3+(\log_{12} 3)^2$

$=(2-\log_{12} 3)\log_{12} 3+(\log_{12} 3)^2$

$=2\log_{12} 3-(\log_{12} 3)^2+(\log_{12} 3)^2$

$=\log_{12} 3^2=\log_{12} 9$ 답 ④

$\log_{12} 48$
$=\log_{12} \dfrac{12^2}{3}$
$=2\log_{12} 12-\log_{12} 3$
$=2-\log_{12} 3$

12 $(\log_a \sqrt[3]{b})^2+(\log_{\sqrt{b}} a)^2=\left(\dfrac{1}{3}\log_a b\right)^2+\left(\dfrac{2}{\log_a b}\right)^2$

$=\dfrac{(\log_a b)^2}{9}+\dfrac{4}{(\log_a b)^2}$

$\dfrac{(\log_a b)^2}{9}>0$, $\dfrac{4}{(\log_a b)^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{(\log_a b)^2}{9}+\dfrac{4}{(\log_a b)^2}$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{(\log_a b)^2}{9}\cdot\dfrac{4}{(\log_a b)^2}}=2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

(단, 등호는 $(\log_a b)^2=6$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\dfrac{4}{3}$이다. 답 $\dfrac{4}{3}$

$a>0$, $b>0$일 때,
$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\dfrac{(\log_a b)^2}{9}=\dfrac{4}{(\log_a b)^2}$에서
$(\log_a b)^4=36$
$\therefore (\log_a b)^2=6$
$(\because (\log_a b)^2>0)$

13 $a=\dfrac{\log_8 3}{\log_4 25}=\dfrac{\log_{2^3} 3}{\log_{2^2} 5^2}=\dfrac{\log_2 3}{3\log_2 5}$

$=\dfrac{1}{3}\log_5 3=\log_5 3^{\frac{1}{3}}=\log_5 \sqrt[3]{3}$

$\therefore 5^a=\sqrt[3]{3}$

$\therefore 125^a=(5^3)^a=(5^a)^3=(\sqrt[3]{3})^3=3$ 답 ①

14 $(\log_3 5+\log_3 2)\log_5 3=\log_3 10\cdot\log_5 3=\log_5 10$

$\log_9 2+\log_3 4=\log_{3^2} 2+\log_3 2^2=\dfrac{1}{2}\log_3 2+2\log_3 2$

$=\dfrac{5}{2}\log_3 2$

$\therefore$ (주어진 식) $=5^{\log_5 10}-(3^2)^{\frac{5}{2}\log_3 2}$

$=10-3^{5\log_3 2}$

$=10-3^{\log_3 2^5}$

$=10-32=-22$ 답 -22

1이 아닌 양수 a에 대하여
$\log_3 10\cdot\log_5 3$
$=\dfrac{\log_a 10}{\log_a 3}\cdot\dfrac{\log_a 3}{\log_a 5}$
$=\dfrac{\log_a 10}{\log_a 5}=\log_5 10$

$x=0$, $y=0$을 대입한다.

분자, 분모에 각각 b를 곱한다.

15 $\left(\dfrac{2}{3}\log_{\sqrt{7}} 27-\log_7 \sqrt{3}\right)\log_{3\sqrt{3}} 343$

$=\left(\dfrac{2}{3}\log_{7^{\frac{1}{2}}} 3^3-\log_7 3^{\frac{1}{2}}\right)\log_{3^{\frac{3}{2}}} 7^3$

$=\left(4\log_7 3-\dfrac{1}{2}\log_7 3\right)\cdot 2\log_3 7$

$=\dfrac{7}{2}\log_7 3\cdot 2\log_3 7$

$=\dfrac{7}{2}\cdot 2=7$ 답 ⑤

16 O(0, 0), A(2, $\log_8 a$), B(5, $\log_4 b$)라 하면 세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기가 같다.

즉 $\dfrac{\log_8 a}{2}=\dfrac{\log_4 b}{5}$이므로

$5\log_{2^3} a=2\log_{2^2} b$, $\quad \dfrac{5}{3}\log_2 a=\log_2 b$

$\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}=\dfrac{5}{3}$ $\quad\therefore \log_a b=\dfrac{5}{3}$ 답 $\dfrac{5}{3}$

다른 풀이 두 점 (2, $\log_8 a$), (5, $\log_4 b$)를 지나는 직선의 방정식은

$y-\log_4 b=\dfrac{\log_4 b-\log_8 a}{3}(x-5)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\log_4 b=\dfrac{\log_4 b-\log_8 a}{3}\cdot(-5)$

$3\log_4 b=5\log_4 b-5\log_8 a$

$5\log_8 a=2\log_4 b$, $\quad \dfrac{5}{3}\log_2 a=\log_2 b$

$\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}=\dfrac{5}{3}$ $\quad\therefore \log_a b=\dfrac{5}{3}$

쌤한마디

세 점이 한 직선 위에 있을 조건

세 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)이 한 직선 위에 있다.

⇔ (직선 AB의 기울기) = (직선 BC의 기울기) = (직선 CA의 기울기)

⇔ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$

(단, $x_1\neq x_2$, $x_2\neq x_3$, $x_3\neq x_1$)

17 $\log_6 2=a$, $\log_6 11=\dfrac{1}{b}$이므로

$\log_{24} 132=\dfrac{\log_6 132}{\log_6 24}=\dfrac{\log_6 (2\cdot6\cdot11)}{\log_6 (2^2\cdot6)}$

$=\dfrac{\log_6 2+\log_6 6+\log_6 11}{2\log_6 2+\log_6 6}$

$=\dfrac{a+1+\frac{1}{b}}{2a+1}=\dfrac{ab+b+1}{2ab+b}$ 답 ④

18 $\log_2 3=a$, $\log_2 10=b$에서

$\log_5 3=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 \frac{10}{2}}=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 10-1}$

$=\dfrac{a}{b-1}$

$$\therefore f(\log_5 3)=f\left(\frac{a}{b-1}\right)=\frac{2\cdot\frac{a}{b-1}+1}{\frac{a}{b-1}+1}$$
$$=\frac{2a+b-1}{a+b-1}$$
답 $\frac{2a+b-1}{a+b-1}$

다른 풀이 $\log_2 5=\log_2\frac{10}{2}=\log_2 10-1=b-1$이므로

$$f(\log_5 3)=\frac{2\log_5 3+1}{\log_5 3+1}$$
$$=\frac{\log_5(3^2\cdot5)}{\log_5(3\cdot5)}=\frac{\log_2(3^2\cdot5)}{\log_2(3\cdot5)}$$
$$=\frac{2\log_2 3+\log_2 5}{\log_2 3+\log_2 5}=\frac{2a+b-1}{a+b-1}$$

$$\frac{\log_5(3^2\cdot5)}{\log_5(3\cdot5)}=\frac{\log_5 45}{\log_5 15}=\log_{15}45=\frac{\log_2 45}{\log_2 15}=\frac{\log_2(3^2\cdot5)}{\log_2(3\cdot5)}$$

19 $b=\log_3 5=\frac{\log_2 5}{\log_2 3}$에서

$\log_2 5=b\log_2 3=ab$

$c=\log_4 7=\log_{2^2}7=\frac{1}{2}\log_2 7$에서

$\log_2 7=2c$

$$\therefore \log_{63}700=\frac{\log_2 700}{\log_2 63}=\frac{\log_2(2^2\cdot5^2\cdot7)}{\log_2(3^2\cdot7)}$$
$$=\frac{2\log_2 2+2\log_2 5+\log_2 7}{2\log_2 3+\log_2 7}$$
$$=\frac{2+2ab+2c}{2a+2c}$$
$$=\frac{1+ab+c}{a+c}$$
답 $\frac{1+ab+c}{a+c}$

20 $13^a=4$에서 $a=\log_{13}4$

$13^b=6$에서 $b=\log_{13}6$

$$\therefore \log_{144}216=\frac{\log_{13}216}{\log_{13}144}$$
$$=\frac{\log_{13}6^3}{\log_{13}(4\cdot6^2)}$$
$$=\frac{3\log_{13}6}{\log_{13}4+2\log_{13}6}$$
$$=\frac{3b}{a+2b}$$
답 ④

21 $8^x=a$에서 $x=\log_8 a$

$x=\log_{2^3}a,\quad x=\frac{1}{3}\log_2 a$

$\therefore \log_2 a=3x$

$8^y=b$에서 $y=\log_8 b,\quad y=\log_{2^3}b$

$y=\frac{1}{3}\log_2 b\quad \therefore \log_2 b=3y$

$$\therefore \log_2\frac{a\sqrt{a}}{b^2}=\log_2 a\sqrt{a}-\log_2 b^2$$
$$=\frac{3}{2}\log_2 a-2\log_2 b$$
$$=\frac{3}{2}\cdot3x-2\cdot3y$$
$$=\frac{9}{2}x-6y$$

$$\log_2 a\sqrt{a}=\log_2(a\cdot a^{\frac{1}{2}})=\log_2 a^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\log_2 a$$

따라서 $p=\frac{9}{2}$, $q=-6$이므로

$pq=-27$

답 -27

다른 풀이 $8^x=a$에서

$a\sqrt{a}=a^{\frac{3}{2}}=(8^x)^{\frac{3}{2}}=(2^{3x})^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{9}{2}x}$

$8^y=b$에서

$b^2=(8^y)^2=(2^{3y})^2=2^{6y}$

$\therefore \log_2\frac{a\sqrt{a}}{b^2}=\log_2 2^{\frac{9}{2}x-6y}=\frac{9}{2}x-6y$

따라서 $p=\frac{9}{2}$, $q=-6$이므로 $pq=-27$

22 $15^x=25$에서 $x=\log_{15}25$

$3^y=625$에서 $y=\log_3 625$

$$\therefore \frac{2}{x}-\frac{4}{y}=\frac{2}{\log_{15}25}-\frac{4}{\log_3 625}$$
$$=2\log_{25}15-4\log_{625}3$$
$$=2\log_{5^2}15-4\log_{5^4}3$$
$$=\log_5 15-\log_5 3$$
$$=\log_5 5=1$$
답 ②

다른 풀이 $15^x=25$에서 $15=25^{\frac{1}{x}}$

$15=(5^2)^{\frac{1}{x}}\quad \therefore 15=5^{\frac{2}{x}}$ …… ㉠

$3^y=625$에서 $3=625^{\frac{1}{y}}$

$3=(5^4)^{\frac{1}{y}}\quad \therefore 3=5^{\frac{4}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $5=5^{\frac{2}{x}-\frac{4}{y}}$

$\therefore \frac{2}{x}-\frac{4}{y}=1$

23 $a^5=b^3$에서 $b=a^{\frac{5}{3}}\quad \therefore A=\log_a a^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$

$b^3=c^4$에서 $c=b^{\frac{3}{4}}\quad \therefore B=\log_b b^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$

$a^5=c^4$에서 $a=c^{\frac{4}{5}}\quad \therefore C=\log_c c^{\frac{4}{5}}=\frac{4}{5}$

이때 $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\frac{5}{3}$이므로

$B<C<A$

답 ④

다른 풀이 $a^5=b^3=c^4=k\ (k>0)$로 놓으면 $a=k^{\frac{1}{5}}$, $b=k^{\frac{1}{3}}$, $c=k^{\frac{1}{4}}$이므로

$A=\log_a b=\log_{k^{\frac{1}{5}}}k^{\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}$

$B=\log_b c=\log_{k^{\frac{1}{3}}}k^{\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}$

$C=\log_c a=\log_{k^{\frac{1}{4}}}k^{\frac{1}{5}}=\frac{4}{5}$

$\therefore B<C<A$

24 $\log_{\sqrt{a}}b+\log_b a^3=7$에서

$2\log_a b+3\log_b a=7$

$2\log_a b+\frac{3}{\log_a b}=7$

양변에 $\log_a b$를 곱하여 정리하면

$2(\log_a b)^2-7\log_a b+3=0$

$(2\log_a b-1)(\log_a b-3)=0$

$\therefore \log_a b=\frac{1}{2}$ 또는 $\log_a b=3$

$\therefore b=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$ 또는 $b=a^3$

$a>1$이므로 $\sqrt{a}>1$
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}>\sqrt{a}$
$\therefore a>\sqrt{a}$
즉 $b=\sqrt{a}$이면 $a>b$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이때 $1<a<b$이므로 $b=a^3$

$$\therefore \frac{a^3b^2+a^6b}{2a^9-b^3}=\frac{a^3\cdot(a^3)^2+a^6\cdot a^3}{2a^9-(a^3)^3}$$
$$=\frac{a^9+a^9}{2a^9-a^9}=2$$
답 2

25 $\log_3 27<\log_3 50<\log_3 81$에서

$3<\log_3 50<4$

이므로

$a=3$,

$b=\log_3 50-3=\log_3 50-\log_3 27=\log_3\frac{50}{27}$

$$\therefore 27(a-3^b)=27(3-3^{\log_3\frac{50}{27}})$$
$$=27\left(3-\frac{50}{27}\right)$$
$$=81-50=31$$
답 ⑤

26 (i) $1<N<5$일 때,

$\log_5 1<\log_5 N<\log_5 5$에서

$0<\log_5 N<1$

즉 $\log_5 N$의 정수 부분이 0이므로 $f(N)=0$

$\therefore f(2)=f(3)=f(4)=0$

(ii) $5\le N<25$일 때,

$\log_5 5\le\log_5 N<\log_5 25$에서

$1\le\log_5 N<2$

즉 $\log_5 N$의 정수 부분이 1이므로 $f(N)=1$

$\therefore f(5)=f(6)=f(7)=\cdots=f(24)=1$

(iii) $25\le N<125$일 때,

$\log_5 25\le\log_5 N<\log_5 125$에서

$2\le\log_5 N<3$

즉 $\log_5 N$의 정수 부분이 2이므로 $f(N)=2$

$\therefore f(25)=f(26)=f(27)=\cdots=f(124)=2$

(iv) $N=125$일 때,

$\log_5 125=3$이므로 $f(125)=3$

이상에서

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(125)$

$=0\cdot3+1\cdot20+2\cdot100+3\cdot1$

$=223$

답 ②

27 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=1$

이때 $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$이므로

$(\beta-\alpha)^2=6^2-4\cdot1=32$

$\therefore \beta-\alpha=4\sqrt{2}$ ($\because \beta>\alpha$)

$$\therefore \log_{\beta-\alpha}\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\log_{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}+\beta\right)$$
$$=\log_{\beta-\alpha}\left\{\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\beta\right)\right\}$$
$$=\log_{\beta-\alpha}\left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2\right)$$
$$=\log_{4\sqrt{2}}4=\log_{2^{\frac{5}{2}}}2^2$$
$$=2\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$
답 ①

Q BOX

$\log_a M$의 정수 부분이 n
$\iff n\le\log_a M<n+1$
$\iff a^n\le M<a^{n+1}$
(단, $a>1$이고 $M>0$, n은 정수)

$3<\log_3 50<4$에서 $\log_3 50$의 정수 부분이 3이므로 소수 부분은 $\log_3 50-3$

$n=2\cdot3^3=54$이면 $3^m=1$ $\therefore m=0$
즉 m은 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

값이 1인 것은 $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$, $\cdots$, $f(24)$의
$24-5+1=20$(개)

값이 2인 것은 $f(25)$, $f(26)$, $f(27)$, $\cdots$, $f(124)$의
$124-25+1=100$(개)

28 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=3n$, $\log_2\alpha\cdot\log_2\beta=3$

$\therefore \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$
$$=\frac{\log_2\beta}{\log_2\alpha}+\frac{\log_2\alpha}{\log_2\beta}$$
$$=\frac{(\log_2\alpha)^2+(\log_2\beta)^2}{\log_2\alpha\cdot\log_2\beta}$$
$$=\frac{(\log_2\alpha+\log_2\beta)^2-2\log_2\alpha\cdot\log_2\beta}{\log_2\alpha\cdot\log_2\beta}$$
$$=\frac{(3n)^2-2\cdot3}{3}=3n^2-2$$

즉 $3n^2-2=7n+4$이므로

$3n^2-7n-6=0$, $(n-3)(3n+2)=0$

$\therefore n=3$ ($\because n$은 자연수)

$\therefore \log_n 81=\log_3 3^4=4$

답 4

29 $\log_3\frac{54}{n}=m$ (m은 자연수)으로 놓으면

$3^m=\frac{54}{n}$

m이 자연수이므로 $\frac{54}{n}$는 3의 거듭제곱이어야 한다.

이때 $54=2\cdot3^3$이므로 자연수 n은

$2\cdot3^0=2$, $2\cdot3^1=6$, $2\cdot3^2=18$

의 3개이다.

답 3

30 $\log_2 x^3+\log_2\frac{1}{x}=3\log_2 x-\log_2 x=2\log_2 x$

$1<x<64$에서 $0<\log_2 x<6$

$\therefore 0<2\log_2 x<12$

이때 $2\log_2 x$가 정수이므로

$2\log_2 x=1, 2, 3, \cdots, 11$

$\log_2 x=\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{11}{2}$

$\therefore x=2^{\frac{1}{2}}, 2, 2^{\frac{3}{2}}, \cdots, 2^{\frac{11}{2}}$

따라서 $M=2^{\frac{11}{2}}$, $m=2^{\frac{1}{2}}$이므로

$\frac{M}{m}=2^{\frac{11}{2}-\frac{1}{2}}=2^5=32$

답 32

31 $\frac{1}{5}<\log_{10}\sqrt{a}<7$에서 $\frac{1}{5}<\frac{1}{2}\log_{10}a<7$

$\frac{1}{5}<\log_{100}a<7$, $\frac{1}{5}<\frac{1}{\log_a 100}<7$

$\therefore \frac{1}{7}<\log_a 100<5$

이때 $\log_a 100$이 자연수이므로

$\log_a 100=1, 2, 3, 4$

(i) $\log_a 100=1$일 때, $a=100$

(ii) $\log_a 100=2$일 때,

$a^2=100$ $\therefore a=10$ ($\because a>0$)

(iii) $\log_a 100=3$일 때, $a^3=100$ $\therefore a=10^{\frac{2}{3}}$

(iv) $\log_a 100=4$일 때, $a^4=100$

$\therefore a=10^{\frac{1}{2}}$ ($\because a>0$)

이상에서 모든 a의 값의 곱은

$100\cdot10\cdot10^{\frac{2}{3}}\cdot10^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{25}{6}}$

따라서 $p=6$, $q=25$이므로

$p+q=31$ 답 ③

32 $\log x^3=2.4$에서

$3\log x=2.4 \qquad \therefore \log x=0.8$

$\therefore \log\sqrt[4]{x^3}-\log\frac{x}{1000}$

$=\log x^{\frac{3}{4}}-(\log x-\log10^3)$

$=\frac{3}{4}\log x-\log x+3$

$=-\frac{1}{4}\log x+3$

$=-\frac{1}{4}\times0.8+3$

$=-0.2+3=2.8$ 답 ①

33 $\log1410=\log(1.41\times10^3)=\log1.41+\log10^3$

$=0.1492+3=3.1492$

이므로 $a=3.1492$

$\log b=-0.8508=-1+0.1492$

$=\log10^{-1}+\log1.41$

$=\log(10^{-1}\times1.41)=\log0.141$

이므로 $b=0.141$

$\therefore a+b=3.2902$ 답 3.2902

34 $2.76^x=25200$에서

$x=\log_{2.76}25200$

$=\frac{\log25200}{\log2.76}$

$=\frac{\log(2.52\times10^4)}{\log2.76}$

$=\frac{\log2.52+\log10^4}{\log2.76}$

$=\frac{0.4+4}{0.44}=10$

따라서 바르게 계산하면

$2.76x=2.76\times10=27.6$ 답 27.6

35 지하철 소음의 크기를 I_A W/m²라 하면

$75=10\log\frac{I_A}{I_0}$

$=10(\log I_A-\log I_0)$ …… ㉠

일상적인 대화 소리의 크기를 I_B W/m²라 하면

$45=10\log\frac{I_B}{I_0}$

$=10(\log I_B-\log I_0)$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$30=10(\log I_A-\log I_B)$

$3=\log I_A-\log I_B, \qquad \log\frac{I_A}{I_B}=3$

$\therefore \frac{I_A}{I_B}=10^3$

따라서 지하철 소음의 크기는 일상적인 대화 소리의 크기의 10^3배이다. 답 ③

36 $t=2$일 때 $x=2$, $y=a$이므로

$\log a=A-\frac{1}{2}\log2-\frac{2^2K}{2}$

$=A-\log\sqrt{2}-2K$ …… ㉠

$t=8$일 때 $x=d$, $y=\frac{a}{2}$이므로

$\log\frac{a}{2}=A-\frac{1}{2}\log8-\frac{Kd^2}{8}$

$\log a-\log2=A-\log2\sqrt{2}-\frac{Kd^2}{8}$

$\log a=A-(\log2\sqrt{2}-\log2)-\frac{Kd^2}{8}$

$\therefore \log a=A-\log\sqrt{2}-\frac{Kd^2}{8}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$A-\log\sqrt{2}-2K=A-\log\sqrt{2}-\frac{Kd^2}{8}$

$2K=\frac{Kd^2}{8}, \qquad d^2=16$

$\therefore d=4\ (\because d\ge0)$ 답 4

37 처음 인구수를 A, 인구수의 매년 증가율을 a %라 하면

$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}=2A$

$\therefore \left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}=2$

양변에 상용로그를 취하면

$10\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log2$

$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{10}\log2=\frac{1}{10}\times0.3=0.03$

이때 $\log1.07=0.03$이므로

$1+\frac{a}{100}=1.07, \qquad \frac{a}{100}=0.07$

$\therefore a=7$

따라서 인구수는 매년 7 %씩 증가하였다. 답 7 %

38 운동 시작일로부터 n일 후에 갑과 을의 체중이 같아진다고 하면

$72(1-0.001)^n=90(1-0.002)^n$

$\therefore 4\times0.999^n=5\times0.998^n$

양변에 상용로그를 취하면

$\log4+n\log0.999=\log5+n\log0.998$

$n(\log0.999-\log0.998)=\log\frac{10}{2}-\log2^2$

$n(\log9.99-\log9.98)=1-\log2-2\log2$

$n(0.9996-0.9991)=1-3\log2$

Q BOX

$100\cdot10\cdot10^{\frac{2}{3}}\cdot10^{\frac{1}{2}}$
$=10^{2+1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$
$=10^{\frac{25}{6}}$

$\log2\sqrt{2}-\log2$
$=\log\frac{2\sqrt{2}}{2}$
$=\log\sqrt{2}$

$0.1\ \%=\frac{0.1}{100}=0.001$

$0.2\ \%=\frac{0.2}{100}=0.002$

$\log0.999-\log0.998$
$=\log\frac{9.99}{10}-\log\frac{9.98}{10}$
$=(\log9.99-1)$
$\quad-(\log9.98-1)$
$=\log9.99-\log9.98$

$0.0005n=1-3\times0.3010=0.097$

$\therefore n=194$

따라서 운동 시작일로부터 194일 후에 갑과 을의 체중이 같아진다. 답 194일

도전! 수능 기출

15쪽

01 1st m, n이 모두 홀수이거나 짝수인 경우의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

(i) m, n이 모두 홀수일 때, mn은 홀수이므로

$f(mn)=\log_3 mn=\log_3 m+\log_3 n$,

$f(m)+f(n)=\log_3 m+\log_3 n$

$\therefore f(mn)=f(m)+f(n)$

따라서 m, n이 모두 홀수일 때 주어진 등식을 만족시키므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\cdot10=100$

20 이하의 홀수의 개수는 10이다.

(ii) m, n이 모두 짝수일 때, mn은 짝수이므로

$f(mn)=\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$,

$f(m)+f(n)=\log_2 m+\log_2 n$

$\therefore f(mn)=f(m)+f(n)$

따라서 m, n이 모두 짝수일 때 주어진 등식을 만족시키므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\cdot10=100$

20 이하의 짝수의 개수는 10이다.

2nd m, n이 각각 홀수, 짝수이거나 짝수, 홀수인 경우의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

(iii) m이 홀수, n이 짝수일 때, mn은 짝수이므로

$f(mn)=\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$,

$f(m)+f(n)=\log_3 m+\log_2 n$

$f(mn)=f(m)+f(n)$이려면

$\log_2 m=\log_3 m$

이어야 하므로

$m=1$

m은 홀수이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $m=1$이고 n이 짝수일 때 주어진 등식을 만족시키므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$1\cdot10=10$

(iv) m이 짝수, n이 홀수일 때, mn은 짝수이므로

$f(mn)=\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$,

$f(m)+f(n)=\log_2 m+\log_3 n$

$f(mn)=f(m)+f(n)$이려면

$\log_2 n=\log_3 n$

이어야 하므로

$n=1$

n은 홀수이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 m이 짝수이고 $n=1$일 때 주어진 등식을 만족시키므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\cdot1=10$

3rd 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$100+100+10+10=220$ 답 ①

쌤한마디

01번에서 두 자연수 m, n에 대하여

$$f(mn)=\begin{cases}\log_3 mn & (mn\text{이 홀수})\\ \log_2 mn & (mn\text{이 짝수})\end{cases},$$

$$\text{즉 } f(mn)=\begin{cases}\log_3 m+\log_3 n & (mn\text{이 홀수})\\ \log_2 m+\log_2 n & (mn\text{이 짝수})\end{cases}$$

이므로 $f(mn)=f(m)+f(n)$을 만족시키는 경우가 두 자연수 m, n이 모두 홀수이거나 짝수인 경우만 있다고 생각하기 쉽다.

그러나 $m=1$일 때 $f(m)=0$이므로 $f(mn)=f(m)+f(n)$이 성립하고, $n=1$일 때 $f(n)=0$이므로 $f(mn)=f(m)+f(n)$이 성립한다.

따라서 $m=1$일 때 n이 짝수인 경우와 $n=1$일 때 m이 짝수인 경우까지 고려해야 한다.

02 1st 조건 (가)를 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

조건 (가)에서

$(\sqrt[3]{a})^4=ab,\quad a^{\frac{4}{3}}=ab$

$\therefore b=a^{\frac{4}{3}-1}=a^{\frac{1}{3}}$ …… ㉠

2nd 조건 (나)를 이용하여 c를 a에 대한 식으로 나타낸다.

조건 (나)의 좌변에 ㉠을 대입하면

$$\begin{aligned}\log_a bc+\log_b ac&=\log_a a^{\frac{1}{3}}c+\log_{a^{\frac{1}{3}}} ac\\&=\log_a a^{\frac{1}{3}}+\log_a c+3\log_a ac\\&=\frac{1}{3}+\log_a c+3(1+\log_a c)\\&=\frac{10}{3}+4\log_a c\end{aligned}$$

즉 $\frac{10}{3}+4\log_a c=4$이므로

$4\log_a c=\frac{2}{3},\quad \log_a c=\frac{1}{6}$

$\therefore c=a^{\frac{1}{6}}$ …… ㉡

3rd $\frac{b}{c}$를 a에 대한 식으로 나타내어 k의 값을 구한다.

㉠, ㉡에서 $\frac{b}{c}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{6}}$

따라서 $a=\left(\frac{b}{c}\right)^k=(a^{\frac{1}{6}})^k=a^{\frac{k}{6}}$이므로

$1=\frac{k}{6}\quad\therefore k=6$ 답 ①

03 1st 주어진 집합을 A라 하고 $k\in A$이기 위한 조건을 찾는다.

$\log_2 n-\log_2 k=\log_2\frac{n}{k}$이므로 주어진 집합을 A라 할 때, $k\in A$이려면 $\log_2\frac{n}{k}=m$ (m은 정수), 즉 $\frac{n}{k}=2^m$ 꼴이어야 한다.

2nd $1\le n\le50$일 때, $f(n)=1$인 자연수 n의 값을 구한다.

(ⅰ) $1 \le n \le 50$일 때,

$k=n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{n}=1=2^0$이므로 $\quad n \in A$

$k=2n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=2^{-1}$이므로 $\quad 2n \in A$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 2 이상, 즉 $f(n) \ge 2$이므로 $f(n)=1$인 자연수 n은 없다.

3rd $50 < n \le 100$일 때, $f(n)=1$인 자연수 n의 값을 구한다.

(ⅱ) $50 < n \le 100$이고 n이 짝수일 때,

$k=n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{n}=1=2^0$이므로 $\quad n \in A$

$k=\frac{n}{2}$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{\frac{n}{2}}=2$이므로 $\quad \frac{n}{2} \in A$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 2 이상, 즉 $f(n) \ge 2$이므로 $f(n)=1$인 자연수 n은 없다.

(ⅲ) $50 < n \le 100$이고 n이 홀수일 때,

$\frac{n}{k}=2^m$에서 $k=\frac{n}{2^m} \in S$를 만족시키는 정수 m은 0뿐이므로 집합 A의 원소의 개수는 1, 즉 $f(n)=1$이다.

따라서 자연수 n은 51, 53, 55, $\cdots$, 99의 25개이다.

4th 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 자연수 n의 개수는 25이다. 답 25

참고 (ⅲ)에서 정수 m이 $m \le -1$일 때, $2^m \le 2^{-1}$, 즉 $2^m \le \frac{1}{2}$이므로 $\quad \frac{1}{2^m} \ge 2$

따라서 $k=\frac{n}{2^m} \ge 2n > 100$이므로 $k \notin S$이다.

04 **1st** 주어진 조건을 관계식에 각각 대입하여 식을 정리한다.

$x=R^{\frac{27}{23}}$일 때, $v=\frac{1}{2}v_c$이므로

$$\frac{v_c}{\frac{1}{2}v_c}=1-k\log\frac{R^{\frac{27}{23}}}{R}, \qquad 2=1-k\log R^{\frac{4}{23}}$$

$$\therefore 1=-k\log R^{\frac{4}{23}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=R^a$일 때, $v=\frac{1}{3}v_c$이므로

$$\frac{v_c}{\frac{1}{3}v_c}=1-k\log\frac{R^a}{R}, \qquad 3=1-k\log R^{a-1}$$

$$\therefore 2=-k\log R^{a-1} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

2nd a의 값을 구한다.

㉠÷㉡을 하면 $\quad \frac{1}{2}=\frac{\log R^{\frac{4}{23}}}{\log R^{a-1}}$

$\log R^{a-1}=2\log R^{\frac{4}{23}}$

$a-1=\frac{8}{23}$ ($\because \log R \ne 0$)

$\therefore a=\frac{31}{23}$ 답 ⑤

n이 짝수이므로 $k=\frac{n}{2}$은 자연수이다.
$\therefore \frac{n}{2} \in S$

주어진 함수를 $f(x)=a^x$ 꼴로 변형한 후 $a>1$인 함수를 찾는다.

평행이동과 대칭이동을 연이어 할 때 도형의 이동 순서에 주의한다.

함수 $y=a^{x-m}+n$ $(a>0,\ a \ne 1)$의 그래프의 점근선의 방정식
➡ $y=n$

$R<1$이므로 $\quad \log R \ne 0$

03 지수함수

W 16쪽

01 $f(2)=p$에서 $\quad 3^2=p \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f(-1)=q$에서 $\quad 3^{-1}=q \qquad \cdots\cdots ㉡$

$f(t)=p^3q^2$에서 $\quad 3^t=p^3q^2$

㉠, ㉡을 위의 식에 대입하면

$3^t=(3^2)^3\cdot(3^{-1})^2, \quad 3^t=3^6\cdot 3^{-2}$

$3^t=3^4 \quad \therefore t=4$ 답 ④

02 $f(p)=10$에서 $\quad 2(a^p+a^{-p})=10$

$\therefore a^p+a^{-p}=5$

$\therefore f(2p)=2(a^{2p}+a^{-2p})$
$=2\{(a^p+a^{-p})^2-2\}$
$=2(5^2-2)$
$=46$ 답 46

03 주어진 조건을 만족시키는 함수는 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하는 함수이다. 이때

$$f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x,\ f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=3^x$$

이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ⑤이다.

답 ⑤

04 ㄱ. 정의역은 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. 일대일함수이므로 $x_1 \ne x_2$이면 $f(x_1) \ne f(x_2)$이다.

ㄷ. $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x=5^{-x}$의 그래프는 $y=5^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

05 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=a^{x-3}-5$

이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=a^{-x-3}-5 \qquad \therefore y=-a^{-x-3}+5$

이 함수의 그래프가 점 $(-5,\ 1)$을 지나므로

$1=-a^{5-3}+5, \qquad a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>1$) 답 2

06 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$이므로

$b=-3$

따라서 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+a}-3$의 그래프가 원점을 지나므로

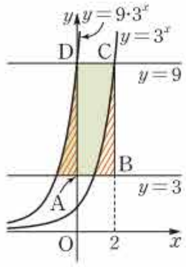
$0=\left(\frac{1}{3}\right)^a-3, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\therefore a=-1$

$\therefore a-b=2$ 답 2

07 $y=9\cdot3^x=3^{x+2}$이므로 $y=9\cdot3^x$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 두 함수 $y=3^x$, $y=9\cdot3^x$의 그래프와 두 직선 $y=3$, $y=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



즉 구하는 넓이는

$\overline{AB}\cdot\overline{AD}=2\cdot(9-3)=12$ 답 ①

08 $y=4^x$의 그래프가 두 점 $(a,\ p)$, $(b,\ q)$를 지나므로

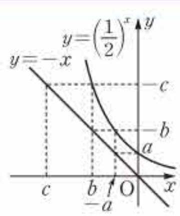
$p=4^a$, $q=4^b$

이때 $pq=64$이므로

$4^a\cdot4^b=64$, $\quad 4^{a+b}=4^3$

$\therefore a+b=3$ 답 ②

09 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프가



점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$a=1$

점 $(-a,\ -b)$를 지나므로

$-b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-a}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

$\therefore b=-2$

점 $(b,\ -c)$를 지나므로

$-c=\left(\frac{1}{2}\right)^b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

$\therefore c=-4$

$\therefore a+b+c=-5$ 답 ①

직선 $y=-x$ 위의 점의 x좌표가 k이면 y좌표는 $-k$임을 이용한다.

10 두 점 A, B의 좌표가 각각 $(a,\ 2^a)$, $(b,\ 2^b)$이고, 직선 AB의 기울기가 4이므로

$\frac{2^b-2^a}{b-a}=4$

$\therefore b-a=\frac{1}{4}(2^b-2^a)$ ...... ㉠

또 $\overline{AB}=\sqrt{17}$, 즉 $\overline{AB}^2=17$이므로

$(b-a)^2+(2^b-2^a)^2=17$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$\frac{1}{16}(2^b-2^a)^2+(2^b-2^a)^2=17$

$\frac{17}{16}(2^b-2^a)^2=17$, $\quad (2^b-2^a)^2=16$

$\therefore 2^b-2^a=4$ ($\because 2^b-2^a>0$) 답 4

$a<b$이므로 $2^a<2^b$
$\therefore 2^b-2^a>0$

11 점 P의 좌표를 $(a,\ 3^a)$이라 하면 $\overline{OP}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot a+2\cdot0}{1+2},\ \frac{1\cdot3^a+2\cdot0}{1+2}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{3},\ 3^{a-1}\right)$

이 점이 $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x$의 그래프 위에 있으므로

$3^{a-1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\frac{a}{3}}$, $\quad 3^{a-1}=(3^{-\frac{1}{2}})^{\frac{a}{3}}$

$3^{a-1}=3^{-\frac{a}{6}}$

즉 $a-1=-\frac{a}{6}$이므로 $\quad \frac{7}{6}a=1$

$\therefore a=\frac{6}{7}$ 답 ③

12 $y=\frac{3^x}{4}$에 $x=0$을 대입하면

$y=\frac{1}{4}$ $\quad \therefore A\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$

또 $y=3^x-\frac{9}{4}$에 $x=0$을 대입하면

$y=1-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4}$ $\quad \therefore B\left(0,\ -\frac{5}{4}\right)$

△ABC에서 $\overline{AB}$를 밑변으로 할 때, 높이는 점 C의 x좌표와 같음을 이용하여 넓이를 구한다.

점 C의 x좌표는 $\frac{3^x}{4}=3^x-\frac{9}{4}$에서

$\frac{3}{4}\cdot3^x=\frac{9}{4}$, $\quad 3^x=3$ $\quad \therefore x=1$

따라서 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)\right\}\cdot1=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

$\overline{AB}$의 길이

13 두 삼각형 ABC, ACD의 높이가 $\overline{AB}$로 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$\therefore \overline{BC}:\overline{CD}=\triangle ABC:\triangle ACD=2:1$

두 점 C, D의 x좌표를 각각 $2b$, $3b$ $(b>0)$라 하면

(점 D의 x좌표)
$=\overline{BC}+\overline{CD}$
$=2b+b$
$=3b$

$k=a^{2b}$, $k=(\sqrt{2})^{3b}$

즉 $a^{2b}=2^{\frac{3}{2}b}$이므로

$(a^2)^b=(2^{\frac{3}{2}})^b$, $\quad a^2=2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore a=2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{8}$ ($\because a>\sqrt{2}$) 답 $\sqrt[4]{8}$

14 $A=\sqrt[3]{4\sqrt{8}}=(2^2\cdot2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}=(2^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{7}{6}}$

$B=\sqrt{\sqrt{\sqrt{32}}}=\sqrt[8]{2^5}=2^{\frac{5}{8}}$

$a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때,
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

$C=\frac{1}{\sqrt[3]{0.25}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}=(2^{-2})^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$

이때 $\frac{5}{8}<\frac{2}{3}<\frac{7}{6}$이고 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$2^{\frac{5}{8}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{7}{6}}$

$\therefore B<C<A$ 답 $B<C<A$

15 $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{1}{3}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{243}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}$,

$\sqrt[5]{\frac{1}{9}}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$, $\sqrt[6]{\frac{1}{81}}=\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

이때 $\frac{2}{5}<\frac{2}{3}<1<\frac{5}{4}$이고 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$

따라서 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}$, $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$이므로

$ab=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{33}{20}}$

즉 $k=\frac{33}{20}$이므로

$60k=99$ 답 99

16 $b^2<b$에서 $b^2-b<0$, $b(b-1)<0$

$\therefore 0<b<1$

이때 $b^2>0$이므로 $0<b^2<a<b<1$

$0<b<1$일 때, 함수 $y=b^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$에서

$b^1<b^a<b^0$, 즉 $b<b^a<1$

$0<a<1$일 때, 함수 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $b<b^a<1$에서

$a^1<a^{b^a}<a^b$, 즉 $a<a^{b^a}<a^b$ 답 ②

17 $0<a<1$일 때, 함수 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-2\le x\le 1$에서 $x=-2$일 때 최댓값, $x=1$일 때 최솟값을 갖는다.

$\therefore a=\frac{2}{3}$

따라서 $M=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{4}$이므로

$aM=\frac{3}{2}$ 답 ③

18 $f(x)=|x-1|+2$로 놓으면 $0\le x\le 3$에서

$-1\le x-1\le 2$, $0\le|x-1|\le 2$

$2\le|x-1|+2\le 4$ $\therefore 2\le f(x)\le 4$

(i) $a>1$일 때,

함수 $y=a^{f(x)}$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $f(x)=4$일 때 최댓값 9를 갖는다.

즉 $a^4=9$이므로 $a^2=3$ ($\because a^2>1$)

$\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>1$)

(ii) $0<a<1$일 때,

함수 $y=a^{f(x)}$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $f(x)=2$일 때 최댓값 9를 갖는다.

즉 $a^2=9$이므로

$a=-3$ 또는 $a=3$

그런데 이것은 $0<a<1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\sqrt{3}$

따라서 $y=a^{f(x)}=(\sqrt{3})^{f(x)}$은 $f(x)=2$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$(\sqrt{3})^2=3$ 답 3

19 $f(x)=-x^2+2x+2$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+3$

Q BOX

$f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 3을 갖는다.

$(f\circ g)(2)=f(g(2))$
$=f(-3)$
$=4^{-3}=\frac{1}{64}$

$t=5$일 때, $5^x=5$
$\therefore x=1$

함수 $y=a^{f(x)}$에서 $a=1$이면 $y=1$인 상수함수이므로 최댓값이 9가 될 수 없다. 따라서 $a=1$인 경우는 생각하지 않는다.

$a>0$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $a^x>0$

$0<a<1$일 때, 함수 $y=a^{-x^2+2x+2}=a^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $f(x)$가 최대일 때 y는 최솟값을 갖는다.

따라서 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=3$일 때 최솟값 $\frac{1}{8}$을 가지므로

$a^3=\frac{1}{8}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

20 $g(x)=2x^2-8x+5=2(x-2)^2-3$

함수 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=4^{g(x)}$은 $g(x)$의 값이 증가하면 $(f\circ g)(x)$의 값도 증가하므로 $g(x)$가 최소일 때 $(f\circ g)(x)$는 최솟값을 갖는다.

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $g(x)=-3$, 즉 $x=2$일 때 최솟값 $\frac{1}{64}$을 가지므로

$a=2$, $b=\frac{1}{64}$

$\therefore \frac{a}{b}=2\cdot 64=128$ 답 128

21 $y=-25^x+2\cdot5^{x+1}-3=-(5^x)^2+10\cdot5^x-3$

$5^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=-t^2+10t-3=-(t-5)^2+22$

따라서 y는 $t=5$, 즉 $x=1$일 때 최댓값 22를 가지므로

$a=1$, $b=22$ $\therefore ab=22$ 답 ③

22 $y=4^x-2^{x+3}+21=(2^x)^2-8\cdot2^x+21$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $-1\le x\le 3$에서

$2^{-1}\le 2^x\le 2^3$ $\therefore \frac{1}{2}\le t\le 8$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-8t+21=(t-4)^2+5$

따라서 $\frac{1}{2}\le t\le 8$에서 함수 $y=(t-4)^2+5$는

$t=8$일 때 최대이고, 최댓값은

$(8-4)^2+5=21$

$t=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$(4-4)^2+5=5$

즉 $M=21$, $m=5$이므로

$M+m=26$ 답 26

23 $3^{x-1}>0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}=3^{-x+3}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=3^{x-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}=3^{x-1}+3^{-x+3}$

$\ge 2\sqrt{3^{x-1}\cdot3^{-x+3}}=2\cdot3=6$

이때 등호는 $3^{x-1}=3^{-x+3}$일 때 성립하므로

$x-1=-x+3$, $2x=4$

$\therefore x=2$

따라서 주어진 함수는 $x=2$일 때 최솟값 6을 가지므로

$a=2$, $b=6$

$\therefore a+b=8$ 답 ④

24 $2x+3y-12=0$에서 $3y=12-2x$이므로

$4^x+8^y=2^{2x}+2^{3y}=2^{2x}+2^{12-2x}$

$2^{2x}>0$, $2^{12-2x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^{2x}+2^{12-2x}\ge 2\sqrt{2^{2x}\cdot 2^{12-2x}}=2\cdot 2^6=128$

이때 등호는 $2^{2x}=2^{12-2x}$일 때 성립하므로

$2x=12-2x$, $\quad 4x=12$

$\therefore x=3$

$x=3$을 $3y=12-2x$에 대입하면

$3y=6 \quad \therefore y=2$

따라서 4^x+8^y은 $x=3$, $y=2$일 때 최솟값 128을 가지므로

$\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=128$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=133$ 답 133

25 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}\cdot(\sqrt{2})^x=\frac{1}{8}$에서

$2^{-x^2}\cdot 2^{\frac{1}{2}x}=2^{-3}$, $\quad 2^{-x^2+\frac{1}{2}x}=2^{-3}$

즉 $-x^2+\frac{1}{2}x=-3$이므로

$2x^2-x-6=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 $\frac{1}{2}$이다. 답 $\frac{1}{2}$

26 $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-6x}-\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2-2x+k}=0$에서

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-6x}=\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right\}^{x^2-2x+k}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-6x}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-x^2+2x-k}$

즉 $x^2-6x=-x^2+2x-k$이므로

$2x^2-8x+k=0$ …… ㉠

이때 방정식 ㉠의 한 근이 3이므로 $x=3$을 ㉠에 대입하면

$18-24+k=0 \quad \therefore k=6$

$k=6$을 ㉠에 대입하면

$2x^2-8x+6=0$, $\quad x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=1$이므로

$k+\alpha=7$ 답 ②

27 $\frac{3^{-x^2+x}}{9^{2x+3}}=\frac{1}{243}$에서 $\quad \frac{3^{-x^2+x}}{3^{4x+6}}=3^{-5}$

$3^{-x^2+x-(4x+6)}=3^{-5}$, $\quad 3^{-x^2-3x-6}=3^{-5}$

즉 $-x^2-3x-6=-5$이므로

$x^2+3x+1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2\cdot 1=7$ 답 ④

Q BOX

$4^x=\frac{1}{2}$에서

$2^{2x}=2^{-1}$, $\quad 2x=-1$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$

$4^x=2$에서

$2^{2x}=2$, $\quad 2x=1$

$\therefore x=\frac{1}{2}$

이차방정식 $2x^2-x-6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-6)=49>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$5^x>0$, $5^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5^x+5^{-x}\ge 2\sqrt{5^x\cdot 5^{-x}}=2$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

28 $4^{2x+1}-10\cdot 4^x+4=0$에서

$4\cdot(4^x)^2-10\cdot 4^x+4=0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad 4t^2-10t+4=0$

$2t^2-5t+2=0$, $\quad (2t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

즉 $4^x=\frac{1}{2}$ 또는 $4^x=2$이므로

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로

$\beta-\alpha=1$ 답 1

29 $a^{2x}-a^x-6=0$에서

$(a^x)^2-a^x-6=0$

$a^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-t-6=0$

$(t+2)(t-3)=0 \quad \therefore t=3\ (\because t>0)$

즉 방정식 $a^x=3$의 해가 $x=\frac{1}{3}$이므로

$a^{\frac{1}{3}}=3$, $\quad (a^{\frac{1}{3}})^3=3^3$

$\therefore a=27$ 답 27

30 $3\cdot 9^x-7a\cdot 3^x+2a+1=0$에서

$3\cdot(3^x)^2-7a\cdot 3^x+2a+1=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$3t^2-7at+2a+1=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=1$

이고 방정식 ㉠의 두 근은 3^α, 3^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha\cdot 3^\beta=\frac{2a+1}{3}$, $\quad 3^{\alpha+\beta+1}=2a+1$

$3^2=2a+1$, $\quad 2a=8$

$\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$3t^2-28t+9=0$, $\quad (3t-1)(t-9)=0$

$\therefore t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=9$

즉 $3^x=\frac{1}{3}$ 또는 $3^x=9$이므로

$x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 곱은

$-1\cdot 2=-2$ 답 ②

31 $5^x+5^{-x}=t\ (t\ge 2)$로 놓으면

$25^x+25^{-x}=(5^x+5^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 방정식은

$5(t^2-2)-t-120=0$

$5t^2-t-130=0$, $\quad (t+5)(5t-26)=0$

$\therefore t=\frac{26}{5}\ (\because t\ge 2)$

즉 $5^x+5^{-x}=\frac{26}{5}$이므로 $5^x=s\ (s>0)$로 놓으면

$s+\frac{1}{s}=\frac{26}{5}$, $\quad 5s^2+5=26s$

$5s^2-26s+5=0$, $\quad (5s-1)(s-5)=0$

$\therefore s=\frac{1}{5}$ 또는 $s=5$

즉 $5^x=\frac{1}{5}$ 또는 $5^x=5$이므로

$x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 합은

$-1+1=0$ 답 ③

32 $\begin{cases} 2^{x+2}-3^y=-1 \\ 2^x+3^{y-1}=5 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 4\cdot 2^x-3^y=-1 \\ 2^x+\frac{1}{3}\cdot 3^y=5 \end{cases}$

$2^x=X$, $3^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases} 4X-Y=-1 \\ X+\frac{1}{3}Y=5 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $\quad X=2,\ Y=9$

즉 $2^x=2$, $3^y=9$이므로

$x=1,\ y=2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=2$ 답 ⑤

33 $\begin{cases} 2^x+2^y=10 \\ 4^x+4^y=58 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 2^x+2^y=10 \\ (2^x)^2+(2^y)^2=58 \end{cases}$

$2^x=X$, $2^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases} X+Y=10 \\ X^2+Y^2=58 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면

$X=3,\ Y=7$ 또는 $X=7,\ Y=3$

$\therefore 2^x=3,\ 2^y=7$ 또는 $2^x=7,\ 2^y=3$

그런데 $\alpha>\beta$이므로 $\quad 2^\alpha=7,\ 2^\beta=3$

$\therefore 2^\alpha-2^\beta=4$ 답 4

34 (i) $x-1=1$, 즉 $x=2$일 때, $1^3=1^7$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x-1\neq1$일 때, $2x-1=x+5$에서

$x=6$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=2$ 또는 $x=6$ 답 $x=2$ 또는 $x=6$

35 $x^{x^2-3}=x^{3x+7}$에서

(i) $x=1$일 때, $1^{-2}=1^{10}$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\neq1$일 때, $x^2-3=3x+7$에서

$x^2-3x-10=0$, $\quad (x+2)(x-5)=0$

$\therefore x=5\ \left(\because x>\frac{1}{2}\right)$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=5$이므로

$a=1+5=6$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{4-2x}=2^{4-2x}$에서

(iii) $4-2x=0$, 즉 $x=2$일 때, $\left(\frac{3}{2}\right)^0=2^0$이므로 등식이 성립한다.

(iv) $4-2x\neq0$일 때, $x-\frac{1}{2}=2$에서

$x=\frac{5}{2}$

(iii), (iv)에서 $x=2$ 또는 $x=\frac{5}{2}$이므로

$b=2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore a-b=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

36 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}-a\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x+5=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2-a\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x+5=0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-at+5=0$ …… ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $D=(-a)^2-4\cdot5>0$, $\quad a^2-20>0$

$(a+2\sqrt{5})(a-2\sqrt{5})>0$

$\therefore a<-2\sqrt{5}$ 또는 $a>2\sqrt{5}$

(ii) $\alpha+\beta=a>0$

(iii) $\alpha\beta=5>0$

이상에서 $\quad a>2\sqrt{5}$

따라서 정수 a의 최솟값은 5이다. 답 ④

37 $2^{2x}+a\cdot2^{x+1}+15-2a=0$에서

$(2^x)^2+2a\cdot2^x+15-2a=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+2at+15-2a=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근을 m, $2m\ (m\neq0)$이라 하면 방정식 ㉠의 두 근은 2^m, 2^{2m}이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^m+2^{2m}=-2a$, $2^m\cdot2^{2m}=15-2a$

$2^m=k\ (k>0)$로 놓으면

$k+k^2=-2a$, $k^3=15-2a$

즉 $k^3=15+k+k^2$이므로

$k^3-k^2-k-15=0$, $\quad (k-3)(k^2+2k+5)=0$

$\therefore k=3\ (\because k^2+2k+5>0)$

따라서 $k=3$을 $k+k^2=-2a$에 대입하면

$3+3^2=-2a$, $\quad 2a=-12$

$\therefore a=-6$ 답 ③

38 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-p}+36=0$에서

$3\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-4\cdot3^p\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+36=0$

Q BOX

양변에 $5s$를 곱한다.

$\begin{cases} 4X-Y=-1 & \cdots ㉠ \\ X+\frac{1}{3}Y=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡×3을 하면

$7X=14 \quad \therefore X=2$

$X=2$를 ㉠에 대입하면

$8-Y=-1$

$\therefore Y=9$

$\begin{cases} X+Y=10 & \cdots ㉠ \\ X^2+Y^2=58 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\ Y=10-X$

이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$X^2-10X+21=0$

$(X-3)(X-7)=0$

$\therefore X=3$ 또는 $X=7$

$X=3$일 때, $\quad Y=7$

$X=7$일 때, $\quad Y=3$

3	1	−1	−1	−15
		3	6	15
	1	2	5	0

k^2+2k+5

$=(k+1)^2+4>0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$3t^2-4\cdot 3^p\cdot t+36=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 $t>0$에서 오직 하나의 실근을 가져야 한다.
그런데 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 ㉠의 두 근의 곱이 $\frac{36}{3}=12>0$이므로 ㉠은 양수인 중근을 가져야 한다.
이차방정식 ㉠의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-2\cdot 3^p)^2-3\cdot 36=0$

$4\cdot 3^{2p}=108,\quad 3^{2p}=27=3^3$

$2p=3 \quad \therefore p=\frac{3}{2}$

(ii) $\alpha+\beta=\frac{4\cdot 3^p}{3}>0$

이때 모든 실수 p에 대하여 $3^p>0$이므로 위의 부등식은 모든 실수 p에 대하여 성립한다.

(i), (ii)에서 $\quad p=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

쌤 한마디

38번에서 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 갖는 경우를 t에 대한 이차방정식 ㉠이 양수인 중근만 갖는 경우뿐이라고 생각하기 쉬운데, $t=\alpha$, $t=\beta$ $(\alpha\le 0,\ \beta>0)$가 ㉠을 만족시키는 경우도 $t=\beta$만 ㉠의 근이 되므로 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 갖는다.
따라서 지수방정식에서 치환하여 얻은 이차방정식의 판별식을 이용할 때에는 이차방정식을 만족시키는 양수가 아닌 값이 존재하는지도 고려해야 한다.

39 $8^{x-2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$에서

$2^{3x-6}\le 2^{-x^2+2x}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 3x-6\le -x^2+2x$

$x^2+x-6\le 0,\quad (x+3)(x-2)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 2$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+1+2=-3$ 답 ③

40 $\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)}\le\left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)}$에서 밑이 1보다 작으므로

$f(x)\ge g(x)$

따라서 주어진 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있거나 만날 때의 x의 값의 범위이므로

$c\le x\le d$ 답 $c\le x\le d$

41 $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2x}>3^{x^2+a}$에서

$3^{4x}>3^{x^2+a}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 4x>x^2+a$

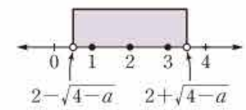
$x^2-4x+a<0$

$\{x-(2-\sqrt{4-a})\}\{x-(2+\sqrt{4-a})\}<0$

$\therefore 2-\sqrt{4-a}<x<2+\sqrt{4-a}$

이때 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이려면 오른쪽 그림과 같이

정수 x는 1, 2, 3이어야 한다.



$0\le 2-\sqrt{4-a}<1$, $3<2+\sqrt{4-a}\le 4$이어야 한다.

즉 $1<\sqrt{4-a}\le 2$이므로

$1<4-a\le 4,\quad -3<-a\le 0$

$\therefore 0\le a<3$

따라서 자연수 a는 1, 2의 2개이다. 답 2

42 $25^x-2\cdot 5^{x+1}+9<0$에서

$(5^x)^2-10\cdot 5^x+9<0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-10t+9<0$

$(t-1)(t-9)<0 \quad \therefore 1<t<9$

즉 $1<5^x<9$이므로 $\quad 5^\alpha=1,\ 5^\beta=9$

$\alpha<x<\beta$에서
$5^\alpha<5^x<5^\beta$
$\therefore 5^\alpha=1,\ 5^\beta=9$

$\therefore 5^\alpha+5^\beta=10$ 답 ①

43 $\left(\frac{1}{3}\right)^x\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+2}$에서 밑이 1보다 작으므로

$x\le 2x+2 \quad \therefore x\ge -2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x-7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+10<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+10<0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-7t+10<0$

$(t-2)(t-5)<0 \quad \therefore 2<t<5$

즉 $2<\left(\frac{1}{2}\right)^x<5$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}5}$

$a>0$, $a\ne 1$, $b>0$일 때,
$a^{\log_a b}=b$

밑이 1보다 작으므로

$\log_{\frac{1}{2}}5<x<-1$

$\therefore -\log_2 5<x<-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$-\log_2 5<-\log_2 4$이므로
$-\log_2 5<-2$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-2\le x<-1$ 답 $-2\le x<-1$

44 $x^{3x-2}\ge x^{x^2+x-5}$에서 밑이 1보다 크므로

$3x-2\ge x^2+x-5,\quad x^2-2x-3\le 0$

$(x+1)(x-3)\le 0 \quad \therefore -1\le x\le 3$

그런데 $x>1$이므로

$1<x\le 3$ 답 $1<x\le 3$

밑과 지수에 모두 미지수가 있는 부등식은 (밑)=1, 0<(밑)<1, (밑)>1인 경우로 나누어 푼다.

45 (i) $x=1$일 때, $1^3<1^6$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(ii) $0<x<1$일 때, 밑이 1보다 작으므로

$2x^2+1>9x-3,\quad 2x^2-9x+4>0$

$(2x-1)(x-4)>0 \quad \therefore x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>4$

그런데 $0<x<1$이므로 $\quad 0<x<\frac{1}{2}$

(iii) $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로

$2x^2+1<9x-3, \quad 2x^2-9x+4<0$

$(2x-1)(x-4)<0 \quad \therefore \frac{1}{2}<x<4$

그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x<4$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $1<x<4$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값이 아닌 것은 ②이다. 답 ②

46 $\left(\frac{1}{25}\right)^x-4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\ge k$에서

$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x-k\ge 0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $x\le 0$에서 $t\ge 1$이고

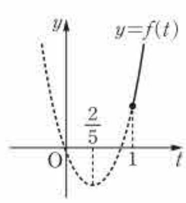
Q BOX: $x\le 0$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^x\ge\left(\frac{1}{5}\right)^0$ $\quad \therefore t\ge 1$

$t^2-\frac{4}{5}t-k\ge 0$

$f(t)=t^2-\frac{4}{5}t-k$라 하면

$f(t)=\left(t-\frac{2}{5}\right)^2-k-\frac{4}{25}$

$t\ge 1$에서 $f(t)\ge 0$이어야 하므로 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(1)\ge 0$이어야 하므로

$1-\frac{4}{5}-k\ge 0$

$\therefore k\le\frac{1}{5}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{1}{5}$이다. 답 ③

47 $4^x-k\cdot 2^{x+1}+16\ge 0$에서

$(2^x)^2-2k\cdot 2^x+16\ge 0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-2kt+16\ge 0$

$\therefore (t-k)^2-k^2+16\ge 0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(i) $k>0$일 때,

부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$-k^2+16\ge 0, \quad k^2\le 16$

Q BOX: $(t-k)^2-k^2+16$은 $t=k$일 때 최솟값 $-k^2+16$을 갖는다.

$\therefore -4\le k\le 4$

그런데 $k>0$이므로 $\quad 0<k\le 4$

(ii) $k\le 0$일 때,

$16\ge 0$이므로 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

Q BOX: $(t-k)^2-k^2+16$은 $t=0$일 때 최솟값 16을 갖는다.

(i), (ii)에서 $\quad k\le 4$ 답 $k\le 4$

48 공기 청정기로 유입된 오염 물질의 양을 $a\ (a>0)$라 하면 필터 A를 10장 사용한 후 남아 있는 오염 물질의 양은

$\left(\frac{1}{4}\right)^{10}a$

Q BOX: $1-\frac{75}{100}=\frac{1}{4}$

필터 B를 x장 사용한 후 남아 있는 오염 물질의 양은 $\left(\frac{1}{2}\right)^x a$이므로

$\left(\frac{1}{4}\right)^{10}a=\left(\frac{1}{2}\right)^x a, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\therefore x=20$

따라서 필터 B를 20장 사용해야 한다. 답 20장

49 수면에서의 빛의 밝기가 I_0 cd일 때, 수심이 x m인 곳에서의 빛의 밝기는 $I_0\cdot 4^{-0.2x}$ cd이므로

$I_0\cdot 4^{-0.2x}\le\frac{1}{128}I_0, \quad 4^{-0.2x}\le\frac{1}{128}$

$2^{-0.4x}\le 2^{-7}$

밑이 1보다 크므로 $\quad -0.4x\le -7$

$\therefore x\ge\frac{35}{2}=17.5$

따라서 수심은 최소 17.5 m이어야 한다. 답 ④

50 배양액 A에 있는 세균 수는 1시간마다 그 수가 2배가 되므로 3시간마다 2^3배, 즉 8배가 된다.

$3x$시간 후 배양액 A, B에 있는 세균 수는 각각

$10\cdot 8^x,\ 50\cdot 2^x$

이때 세균 수의 합이 840 이상이 되려면

$10\cdot 8^x+50\cdot 2^x\ge 840$

$(2^x)^3+5\cdot 2^x-84\ge 0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^3+5t-84\ge 0$

Q BOX:

4	1	0	5	−84
		4	16	84
	1	4	21	0

$(t-4)(t^2+4t+21)\ge 0$

Q BOX: $t^2+4t+21=(t+2)^2+17>0$

$t-4\ge 0 \quad \therefore t\ge 4$

즉 $2^x\ge 4$이고 밑이 1보다 크므로 $\quad x\ge 2$

따라서 최소 $3\cdot 2=6$(시간)이 지나야 한다. 답 6시간

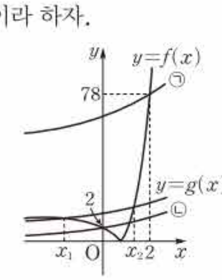
도전! 수능 기출

W 24쪽

01 (1st) 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=2^{x+k}$의 그래프의 위치를 파악한다.

$f(x)=|9^x-3|,\ g(x)=2^{x+k}$이라 하자.

$f(2)=|9^2-3|=78$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2, 78)$을 지날 때보다 위쪽에 위치하면 $x_2>2$가 되고, 점 $(0, 2)$를 지날 때보다 아래쪽에 위치하면 $x_1>0$이 된다.



따라서 $x_1<0,\ 0<x_2<2$를 만족시키려면 위의 그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프가 ㉠, ㉡ 사이에 있어야 한다.

2nd 주어진 조건을 만족시키는 k에 대한 부등식을 구한다.

$g(2)<f(2)$, $g(0)>f(0)$을 만족시켜야 하므로

(i) $g(2)<f(2)$에서 $\quad 2^{2+k}<78$

$$4\cdot 2^k<78 \quad \therefore 2^k<19.5$$

(ii) $g(0)>f(0)$에서 $\quad 2^k>2$

(i), (ii)에서 $\quad 2<2^k<19.5$

3rd 모든 자연수 k의 값의 합을 구한다.

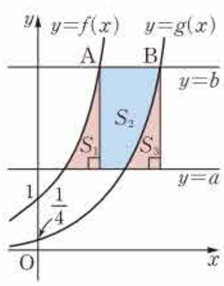
주어진 조건을 만족시키는 자연수 k는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$2+3+4=9$$

답 ②

$2^4<19.5<2^5$이므로 $2<2^k<19.5$를 만족시키는 자연수 k는 2, 3, 4이다.

02 1st 조건 (가)를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.



오른쪽 그림에서 조건 (가)에 의하여

$$S_1+S_2=6$$

이때 함수 $y=2^{x-2}$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 $\quad S_1=S_3$

$$\therefore S_2+S_3=6$$

직선 $y=b$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하면 $\overline{AB}=2$이므로

$$2(b-a)=6$$

$$\therefore b-a=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

2nd 조건 (나)를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

$f^{-1}(a)=p$라 하면

$$a=f(p)=2^p$$

$g^{-1}(b)=q$라 하면

$$b=g(q)=2^{q-2} \quad \therefore 2^q=4b$$

조건 (나)에서 $q-p=\log_2 6$이므로

$$2^{q-p}=6, \quad 2^q=6\cdot 2^p$$

$$4b=6a \quad \therefore 3a-2b=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

3rd $a+b$의 값을 구한다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=6$, $b=9$

$$\therefore a+b=15$$

답 ①

03 1st $2^x-2^{-x}=t$로 놓고 t에 대한 이차방정식의 근의 조건을 구한다.

$2^x-2^{-x}=t$로 놓으면

$$4^x+4^{-x}=(2^x-2^{-x})^2+2$$

이므로 주어진 방정식은

$$(t^2+2)+at+7=0$$

$$\therefore t^2+at+9=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠도 실근을 가져야 한다.

2nd 근의 조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위를 구한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=a^2-36\geq 0, \quad (a+6)(a-6)\geq 0$$

$$\therefore a\leq -6 \text{ 또는 } a\geq 6$$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a\geq 6$

3rd m^2의 값을 구한다.

양수 a의 최솟값은 6이므로 $\quad m=6$

$$\therefore m^2=36$$

답 36

쌤한마디

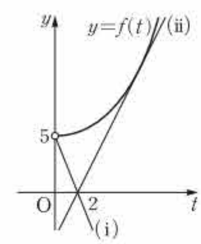
방정식 $4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$에서 $2^x=t$로 놓으면 $t^2+\dfrac{1}{t^2}+a\left(t-\dfrac{1}{t}\right)+7=0$이 되므로 식이 복잡해진다. 치환은 복잡한 식을 간단하게 변형하기 위한 것이므로 주어진 식이 간단해지도록 공통부분을 찾아야 한다.

04 1st $5^x=t\ (t>0)$로 놓고 주어진 부등식을 변형한다.

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2\geq kt-2k-5$

$$\therefore t^2+5\geq k(t-2)$$

2nd k의 값의 범위를 구한다.



$f(t)=t^2+5$, $g(t)=k(t-2)$라 하면 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 $f(t)\geq g(t)$이어야 한다.

$y=g(t)$의 그래프는 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 (2, 0)을 지난다.

(i) $y=g(t)$의 그래프가 점 (0, 5)를 지날 때,

$$-2k=5$$

$$\therefore k=-\frac{5}{2}$$

(ii) 두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프가 접할 때,

이차방정식 $t^2+5=k(t-2)$, 즉 $t^2-kt+2k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-k)^2-4(2k+5)=0$$

$$k^2-8k-20=0, \quad (k+2)(k-10)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=10$$

그런데 $k>0$이므로 $\quad k=10$

두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프가 $t>0$에서 접하려면 직선 $y=g(t)$의 기울기가 양수이어야 한다.

(i), (ii)에서 $\quad -\dfrac{5}{2}\leq k\leq 10$

3rd $|\alpha\beta|$의 값을 구한다.

$\alpha=-\dfrac{5}{2}$, $\beta=10$이므로 $\quad |\alpha\beta|=25$

답 25

04 로그함수

25쪽

01 $f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{8}=\frac{1}{3}\cdot(-3)=-1$

$\therefore (f\circ f)\left(\frac{1}{8}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{8}\right)\right)=f(-1)$

$=4^{-1}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

02 $(a,\ b)\in A$이므로 $b=\log_3 a$

$(c,\ d)\in A$이므로 $d=\log_3 c$

ㄱ. $y=\log_3 x$의 x에 $\frac{1}{a}$을 대입하면

$y=\log_3\frac{1}{a}=-\log_3 a=-b$

$\therefore \left(\frac{1}{a},\ -b\right)\in A$

ㄴ. $y=\log_3 x$의 x에 $9c$를 대입하면

$y=\log_3 9c=\log_3 9+\log_3 c=d+2$

$\therefore (9c,\ d+3)\notin A$

ㄷ. $y=\log_3 x$의 x에 ac를 대입하면

$y=\log_3 ac=\log_3 a+\log_3 c=b+d$

$\therefore (ac,\ b+d)\in A$

ㄹ. $y=\log_3 x$의 x에 $\frac{a}{c^2}$를 대입하면

$y=\log_3\frac{a}{c^2}=\log_3 a-\log_3 c^2$

$=\log_3 a-2\log_3 c=b-2d$

$\therefore \left(\frac{a}{c^2},\ b-d^2\right)\notin A$

이상에서 집합 A의 원소인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

쌤한마디

함수 $f:X\longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 $(x,\ f(x))$ 전체의 집합 $\{(x,\ f(x))\mid x\in X\}$를 함수 f의 그래프라 한다. 이때 정의역 X와 공역 Y의 원소가 모두 실수이면 함수의 그래프는 순서쌍 $(x,\ f(x))$를 좌표로 하는 점을 좌표평면에 나타낼 수 있다.
즉 **02**번에서 주어진 집합 A는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프이고 정의역과 공역의 원소가 모두 실수이므로 집합 A의 원소를 좌표로 하는 점을 좌표평면에 나타내면 그 점은 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점이다.

03 $f_2(x)=f_1(x^2)+f_1(x^3)=\log_5 x^2+\log_5 x^3$

$=2\log_5 x+3\log_5 x=5\log_5 x$

$f_3(x)=f_2(x^2)+f_2(x^3)=5\log_5 x^2+5\log_5 x^3$

$=5(2\log_5 x+3\log_5 x)=5\cdot 5\log_5 x$

$=5^2\log_5 x$

$f_4(x)=f_3(x^2)+f_3(x^3)=5^2\log_5 x^2+5^2\log_5 x^3$

$=5^2(2\log_5 x+3\log_5 x)=5^2\cdot 5\log_5 x$

$=5^3\log_5 x$

$\therefore \log_5\{f_4(25)\}=\log_5(5^3\log_5 25)$

$=\log_5(5^3\cdot 2)$

$=\log_5 5^3+\log_5 2$

$=3+\log_5 2$ 답 $3+\log_5 2$

04 ㄱ. 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. 밑이 1보다 크므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

> $\log x$의 밑은 10이므로 함수 $y=\log x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

ㄷ. $y=-\frac{1}{3}\log\frac{1}{x^3}=-\frac{1}{3}\log x^{-3}=\log x$이고,

두 함수 $y=\log x$와 $y=-\frac{1}{3}\log\frac{1}{x^3}$의 정의역은 모두 $\{x\mid x>0\}$이므로 두 함수의 그래프는 일치한다.

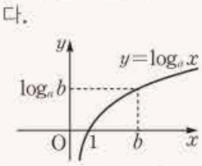
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

05 $y=\log_a bx$의 그래프에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$a>1$

또 $x=1$일 때 $y>0$이므로

$\log_a b>0$ $\therefore b>1$

> $a>1$일 때, $y=\log_a x$의 그래프는 다음 그림과 같다.
>
> 
>
>
> 따라서 $\log_a b>0$을 만족시키는 b의 값의 범위는
> $b>1$

$\therefore ab>1$

따라서 함수 $y=\log_{ab}ax$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $x=1$일 때

$y=\log_{ab}a=\frac{1}{\log_a ab}=\frac{1}{1+\log_a b}>0$

이므로 그래프의 개형은 ①과 같다. 답 ①

06 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\log_2(-x)$

이 그래프를 x축의 방향으로 -9만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_2\{-(x+9)\}+2$

$\therefore y=\log_2(-x-9)+2$

이 함수의 그래프가 점 $(a,\ 4)$를 지나므로

$\log_2(-a-9)+2=4$

$\log_2(-a-9)=2,$ $-a-9=2^2=4$

$\therefore a=-13$ 답 ①

07 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-a)+b$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a$ $\therefore a=-1$

> 함수
> $y=\log_a(x-m)+n$
> $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프의 점근선의 방정식
> ➡ $x=m$

즉 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+b$이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(2,\ -\frac{1}{3}\right)$을 지나므로

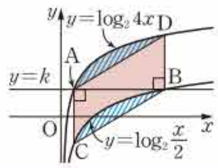
$-\frac{1}{3}=\log_{\frac{1}{3}}3+b$

$-\frac{1}{3}=-1+b$ $\therefore b=\frac{2}{3}$

$\therefore a+b=-\frac{1}{3}$ 답 ②

08 $y=\log_2 4x=\log_2\left(\frac{x}{2}\cdot 8\right)=\log_2 \frac{x}{2}+3$의 그래프는 $y=\log_2 \frac{x}{2}$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 ACBD의 넓이와 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\overline{AC}\cdot\overline{AB}=3\cdot 5=15$ 답 15

> 평행사변형 ACBD에서 밑변을 $\overline{AC}$라 하면 높이는 $\overline{AB}$이므로 넓이는
> $\overline{AC}\cdot\overline{AB}$

09 두 점 A, B의 좌표는 각각

$(a, \log_{\frac{1}{5}} a)$, $(b, \log_{\frac{1}{5}} b)$

이므로 $\overline{AB}=\log_{\frac{1}{5}} a-\log_{\frac{1}{5}} b=\log_{\frac{1}{5}} \frac{a}{b}$

즉 $\log_{\frac{1}{5}} \frac{a}{b}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{a}{b}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \frac{b}{a}=\sqrt{5}$ 답 ④

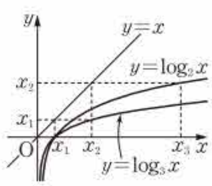
10 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프가 모두 점 $(1, 0)$을 지나므로 $x_1=1$

> 직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표가 같음을 이용한다.

$y=\log_3 x$의 그래프가 점 (x_2, x_1)을 지나므로

$\log_3 x_2=x_1=1$

$\therefore x_2=3$



$y=\log_2 x$의 그래프가 점 (x_3, x_2)를 지나므로

$\log_2 x_3=x_2=3$ $\therefore x_3=2^3=8$

$\therefore x_1+x_2+x_3=12$ 답 12

11 두 점 A, B의 y좌표가 1이므로

$\log_a x=1$에서 $x=a$ $\therefore A(a, 1)$

$\log_b x=1$에서 $x=b$ $\therefore B(b, 1)$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{3}$이므로

$b-a=\sqrt{3}$ …… ㉠

$\overline{AB}$를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표가 $\left(\frac{b-2a}{1-2}, 1\right)$, 즉 $(2a-b, 1)$이므로

$2a-b=0$ $\therefore b=2a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$

두 점 C, D의 y좌표가 2이므로

$\log_{\sqrt{3}} x=2$에서 $x=(\sqrt{3})^2=3$

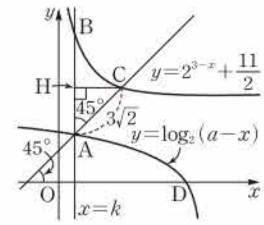
$\therefore C(3, 2)$

$\log_{2\sqrt{3}} x=2$에서 $x=(2\sqrt{3})^2=12$

$\therefore D(12, 2)$

$\therefore \overline{CD}=12-3=9$ 답 9

12 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle CAH=45°$이므로



$\overline{AH}=\overline{CH}=3$,

> 직각삼각형 ACH에서
> $\overline{CH}=\overline{AC}\sin 45°$
> $=3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3$

$\overline{BH}=\overline{AB}-\overline{AH}$

$=\frac{13}{2}-3=\frac{7}{2}$

점 B의 좌표를 $\left(k, 2^{3-k}+\frac{11}{2}\right)$이라 하면

$C\left(k+3, 2^{3-k}+\frac{11}{2}-\frac{7}{2}\right)$, 즉 $C(k+3, 2^{3-k}+2)$

이고 점 C는 곡선 $y=2^{3-x}+\frac{11}{2}$ 위의 점이므로

$2^{3-k}+2=2^{3-(k+3)}+\frac{11}{2}$, $2^{3-k}-2^{-k}=\frac{7}{2}$

$8\cdot 2^{-k}-2^{-k}=\frac{7}{2}$, $7\cdot 2^{-k}=\frac{7}{2}$

$2^{-k}=\frac{1}{2}=2^{-1}$ $\therefore k=1$

$\therefore A(1, 3)$, $B\left(1, \frac{19}{2}\right)$, $C(4, 6)$

> 점 C의 좌표가 $(4, 6)$이고 $\overline{AH}=\overline{CH}=3$이므로
> $A(4-3, 6-3)$
> $\therefore A(1, 3)$

한편 점 $A(1, 3)$은 곡선 $y=\log_2(a-x)$ 위의 점이므로

$3=\log_2(a-1)$, $a-1=2^3=8$

$\therefore a=9$

따라서 점 D의 x좌표는 $0=\log_2(9-x)$에서

$9-x=1$ $\therefore x=8$ 답 8

13 $f(a)=m$에서

$\log_7 a=m$ $\therefore a=7^m$

$g(7m)=n$이라 하면 $f(n)=7m$이므로

> 함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
> $f(a)=b$
> $\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$\log_7 n=7m$

$\therefore n=7^{7m}=(7^m)^7=a^7$ 답 ⑤

14 $y=6^{x+b}-2$는 $y=\log_6(x+a)+5$의 역함수이다.

> 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
> $\Longleftrightarrow$ 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$y=\log_6(x+a)+5$에서

$\log_6(x+a)=y-5$, $x+a=6^{y-5}$

$\therefore x=6^{y-5}-a$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=6^{x-5}-a$

따라서 $y=\log_6(x+a)+5$의 역함수는 $y=6^{x-5}-a$이고, 이것이 $y=6^{x+b}-2$와 일치하므로

$a=2$, $b=-5$

$\therefore a+b=-3$ 답 ②

15 $g(a)=k$라 하면 $(g\circ g)(a)=10$에서

$g(g(a))=g(k)=10$

이므로 $f(10)=k$

$\therefore k=\log_2 8=3$

따라서 $g(a)=3$이므로

$f(3)=a$

$\therefore a=3-3=0$ 답 0

16 $(g \circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.
즉 $g(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$\log_4(k^3+8)=2, \qquad k^3+8=4^2=16$

$k^3=8 \qquad \therefore k=2$

따라서 $g(2)=2$이므로

$$\begin{aligned}(g \circ g \circ g \circ g)(2)&=g(g(g(g(2))))\\&=g(g(g(2)))\\&=g(g(2))\\&=g(2)=2\end{aligned}$$

답 2

다른 풀이 $(g \circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.
$y=\log_4(x^3+8)$에서

$x^3+8=4^y, \qquad x^3=4^y-8$

$\therefore x=\sqrt[3]{4^y-8}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\sqrt[3]{4^x-8}$

$\therefore g(x)=\sqrt[3]{4^x-8}$

따라서 $g(2)=\sqrt[3]{4^2-8}=\sqrt[3]{2^3}=2$이므로

$(g \circ g \circ g \circ g)(2)=2$

함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$의 식을 직접 구하여 $g(2)$의 값을 구할 수도 있다.

17 $3\log_{\frac{1}{3}}2=\log_{\frac{1}{3}}2^3=\log_{\frac{1}{3}}8$,

$-2=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{3}}9$,

$\log_{\frac{1}{9}}70=\log_{\left(\frac{1}{3}\right)^2}70=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}70=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{70}$

이때 $8<\sqrt{70}<9$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{3}}9<\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{70}<\log_{\frac{1}{3}}8$

$\therefore -2<\log_{\frac{1}{9}}70<3\log_{\frac{1}{3}}2$

답 $-2<\log_{\frac{1}{9}}70<3\log_{\frac{1}{3}}2$

로그함수를 이용한 수의 대소 비교
① $a>1$일 때,
$x_1<x_2$이면
$\log_a x_1<\log_a x_2$
② $0<a<1$일 때,
$x_1<x_2$이면
$\log_a x_1>\log_a x_2$

18 $0<a<1$일 때, 함수 $y=\log_a x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $b<a<1$에서

$\log_a 1<\log_a a<\log_a b$

$\therefore 0<1<\log_a b \qquad \cdots\cdots ㉠$

$0<b<1$일 때, 함수 $y=\log_b x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $b<a<1$에서

$\log_b 1<\log_b a<\log_b b$

$\therefore 0<\log_b a<1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\qquad 0<\log_b a<1<\log_a b$

$\therefore B<A$

$C=\log_b \frac{a}{b}=\log_b a-1=B-1$이므로

$C<B$

$\therefore C<B<A$

답 ⑤

19 함수 $y=\log_2(3x-2)+k$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $\frac{3}{4}\le x\le 2$에서
$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_2(6-2)+k=\log_2 4+k=k+2$

$x=\frac{3}{4}$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_2\left(\frac{9}{4}-2\right)+k=\log_2\frac{1}{4}+k=k-2$

따라서 구하는 차는

$k+2-(k-2)=4$

답 4

20 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-k)+5$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $1\le x\le\frac{35}{9}$에서 $x=1$일 때 최댓값, $x=\frac{35}{9}$일 때 최솟값을 갖는다.
즉 $\log_{\frac{1}{3}}(1-k)+5=7$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}(1-k)=2, \qquad 1-k=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

$\therefore k=\frac{8}{9}$

따라서 $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(x-\frac{8}{9}\right)+5$이므로 구하는 최솟값은

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{35}{9}-\frac{8}{9}\right)+5&=\log_{\frac{1}{3}}3+5\\&=-1+5=4\end{aligned}$$

답 ⑤

21 $f(x)=x^2-6x+k$로 놓으면

$f(x)=(x-3)^2+k-9$

함수 $y=\log_4(x^2-6x+k)=\log_4 f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최솟값을 갖는다.

$f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 $k-9$를 갖는다.

따라서 $y=\log_4 f(x)$는 $f(x)=k-9$일 때 최솟값 1을 가지므로

$\log_4(k-9)=1, \qquad k-9=4$

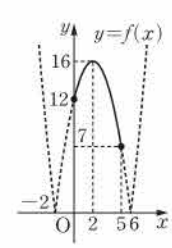
$\therefore k=13$

답 13

22 $f(x)=|x^2-4x-12|$로 놓으면

$f(x)=|(x-2)^2-16|$

$0\le x\le 5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$7\le f(x)\le 16$

함수

$y=\log_{\frac{1}{2}}|x^2-4x-12|=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$

는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최댓값을 갖는다.
따라서 $y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$는 $f(x)=7$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{2}}7=-\log_2 7$

답 ②

23 $y=\log_3 x\cdot\log_3\frac{27}{x}+k$

$$\begin{aligned}&=\log_3 x\cdot(\log_3 27-\log_3 x)+k\\&=\log_3 x\cdot(3-\log_3 x)+k\\&=-(\log_3 x)^2+3\log_3 x+k\end{aligned}$$

W 04 로그함수

$\log_3 x=t$로 놓으면

$$y=-t^2+3t+k=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+k+\frac{9}{4}$$

따라서 y는 $t=\frac{3}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{9}{4}$를 가지므로

$$k+\frac{9}{4}=6 \qquad \therefore k=\frac{15}{4}$$

답 $\frac{15}{4}$

24 $y=(\log_2 x)^2+a\log_{\frac{1}{2}} x+b$

$\quad=(\log_2 x)^2-a\log_2 x+b$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$y=t^2-at+b$ ...... ㉠

이때 t에 대한 함수 ㉠은 최고차항의 계수가 1이고 $x=\frac{1}{4}$, 즉 $t=\log_2 \frac{1}{4}=-2$에서 최솟값 -3을 가지므로

$y=(t+2)^2-3=t^2+4t+1$

따라서 $a=-4$, $b=1$이므로

$a+b=-3$

답 ①

25 $x^{\log 5}=5^{\log x}$이므로

> Q BOX: $a>0$, $b>0$, $c>0$, $c\neq 1$일 때, $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

$y=5^{\log x}\cdot x^{\log 5}-5(5^{\log x}+x^{\log 5})$

$\quad=5^{\log x}\cdot 5^{\log x}-5(5^{\log x}+5^{\log x})$

$\quad=(5^{\log x})^2-10\cdot 5^{\log x}$

$5^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-10t=(t-5)^2-25$

따라서 $t>0$에서 함수 $y=(t-5)^2-25$는 $t=5$일 때 최솟값 -25를 가지므로

$b=-25$

$5^{\log x}=5$에서 $\quad \log x=1$

$\therefore x=10$

따라서 $a=10$이므로

$a-b=35$

답 ③

26 $y=8\cdot x^{\log_2 4x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 y=\log_2(8\cdot x^{\log_2 4x})$

$\quad=\log_2 8+\log_2 x^{\log_2 4x}$

$\quad=3+\log_2 4x\cdot\log_2 x$

$\quad=3+(\log_2 4+\log_2 x)\log_2 x$

$\quad=(\log_2 x)^2+2\log_2 x+3$ ...... ㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{4}\le x\le 2$에서

$\log_2 \frac{1}{4}\le\log_2 x\le\log_2 2$

$\therefore -2\le t\le 1$

이때 ㉠은

$\log_2 y=t^2+2t+3=(t+1)^2+2$

> Q BOX: $\log_2 y=(t+1)^2+2$에서 $y=2^{(t+1)^2+2}$이므로 y는 $(t+1)^2+2$가 최대일 때 최댓값, $(t+1)^2+2$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $-2\le t\le 1$에서 $\log_2 y$는 $t=1$일 때 최대이므로

$\log_2 M=(1+1)^2+2=6 \qquad \therefore M=2^6$

$t=-1$일 때 최소이므로

$\log_2 m=(-1+1)^2+2=2 \qquad \therefore m=2^2$

$\therefore \frac{M}{m}=2^4$

답 ②

27 $y=a\cdot(3x)^{1-\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3\{a\cdot(3x)^{1-\log_3 x}\}$

$\quad=\log_3 a+\log_3(3x)^{1-\log_3 x}$

$\quad=\log_3 a+(1-\log_3 x)\log_3 3x$

$\quad=\log_3 a+(1-\log_3 x)(1+\log_3 x)$

$\quad=-(\log_3 x)^2+\log_3 a+1$ ...... ㉠

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{9}\le x\le 9$에서

$\log_3 \frac{1}{9}\le\log_3 x\le\log_3 9$

$\therefore -2\le t\le 2$

이때 ㉠은

$\log_3 y=-t^2+\log_3 a+1$

따라서 $-2\le t\le 2$에서 $\log_3 y$는 $t=0$일 때 최대이므로

$\log_3 81=\log_3 a+1$에서

$4=\log_3 a+1, \qquad \log_3 a=3$

$\therefore a=3^3=27$

답 27

28 $\log_x y+\log_{\sqrt{y}} x^2=\log_x y+4\log_y x$

이때 $x>1$, $y>1$에서 $\log_x y>0$, $4\log_y x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_x y+4\log_y x\ge 2\sqrt{\log_x y\cdot 4\log_y x}$

$\quad=2\cdot 2=4$

(단, 등호는 $x^2=y$일 때 성립)

> Q BOX: $\log_x y=4\log_y x$에서
> $\frac{\log y}{\log x}=\frac{4\log x}{\log y}$
> $(2\log x)^2=(\log y)^2$
> $\log x>0$, $\log y>0$이므로
> $2\log x=\log y$
> $\log x^2=\log y$
> $\therefore x^2=y$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

답 ④

29 $y=\log_{\frac{1}{9}} x-\log_x 243$

$\quad=\log_{(\frac{1}{3})^2} x-\log_x 3^5$

$\quad=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x+\frac{5}{\log_{\frac{1}{3}} x}$

> Q BOX: $\log_x 3^5=5\log_x 3$
> $=\frac{5}{\log_3 x}$
> $=-\frac{5}{\log_{\frac{1}{3}} x}$

$0<x<1$에서 $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x>0$, $\frac{5}{\log_{\frac{1}{3}} x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x+\frac{5}{\log_{\frac{1}{3}} x}\ge 2\sqrt{\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x\cdot\frac{5}{\log_{\frac{1}{3}} x}}$

$\quad=2\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{10}$

이때 등호는 $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x=\frac{5}{\log_{\frac{1}{3}} x}$일 때 성립하므로

$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2=10$

$\therefore \log_{\frac{1}{3}} x=\sqrt{10}$ ($\because \log_{\frac{1}{3}} x>0$)

> Q BOX: $x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{10}}$이고 $0<\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{10}}<1$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 주어진 함수는 $\log_{\frac{1}{3}} x=\sqrt{10}$일 때 최솟값 $\sqrt{10}$을 가지므로

$\log_{\frac{1}{3}} a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{10}$

$\therefore \log_3 a^b=b\log_3 a=-b\log_{\frac{1}{3}} a$

$\quad=-\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=-10$

답 -10

Q BOX

30 진수의 조건에서 $6+x>0$, $6-x>0$이므로

$x>-6$, $x<6$ $\quad\therefore -6<x<6$ ...... ㉠

$\log(6+x)+\log(6-x)=1$에서

$\log(6+x)(6-x)=\log 10$

$(6+x)(6-x)=10$, $\quad 36-x^2=10$

$x^2=26$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{26}$ (∵ ㉠)

진수의 조건을 만족시킨다.

따라서 모든 근의 곱은

$-\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}=-26$ 답 ③

31 진수의 조건에서 $\sqrt{4x+1}>0$, $2x-3>0$이므로

$x>-\frac{1}{4}$, $x>\frac{3}{2}$

$\therefore x>\frac{3}{2}$ ...... ㉠

$\log_2\sqrt{4x+1}=1-\frac{1}{2}\log_2(2x-3)$에서

$\frac{1}{2}\log_2(4x+1)+\frac{1}{2}\log_2(2x-3)=1$

$\log_2(4x+1)(2x-3)=2$

$\log_2(4x+1)(2x-3)=\log_2 4$

$(4x+1)(2x-3)=4$

$8x^2-10x-7=0$, $\quad(2x+1)(4x-7)=0$

$\therefore x=\frac{7}{4}$ (∵ ㉠)

따라서 $\alpha=\frac{7}{4}$이므로

$4\alpha=7$ 답 7

32 $\log_3 27x\cdot\log_3\frac{x}{9}=-4$에서

$(\log_3 27+\log_3 x)(\log_3 x-\log_3 9)=-4$

$(\log_3 x+3)(\log_3 x-2)=-4$

$\therefore (\log_3 x)^2+\log_3 x-2=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad t^2+t-2=0$

$\log_3 x=t$로 놓고 구한 t의 값에 관계없이 진수의 조건을 항상 만족시킨다.

$(t+2)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

즉 $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=1$이므로

$x=3^{-2}=\frac{1}{9}$ 또는 $x=3$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{1}{9}+3=\frac{28}{9}$이므로

$p=9$, $q=28$

$\therefore p+q=37$ 답 ③

33 $\log_{\sqrt{5}}x^3-(\log_5 x)^2+16=0$에서

$6\log_5 x-(\log_5 x)^2+16=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\quad 6t-t^2+16=0$

$t^2-6t-16=0$, $\quad(t+2)(t-8)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=8$

즉 $\log_5 x=-2$ 또는 $\log_5 x=8$이므로

$x=5^{-2}$ 또는 $x=5^8$

$\therefore \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\log_{5^{-2}}5^8+\log_{5^8}5^{-2}$

$=-4-\frac{1}{4}=-\frac{17}{4}$

답 $-\frac{17}{4}$

34 $6^{\log x}\cdot x^{\log 6}-2(6^{\log x}+x^{\log 6})-12=0$에서

$x^{\log 6}=6^{\log x}$이므로

$6^{\log x}\cdot 6^{\log x}-2(6^{\log x}+6^{\log x})-12=0$

$\therefore (6^{\log x})^2-4\cdot 6^{\log x}-12=0$

$6^{\log x}=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-4t-12=0$, $\quad(t+2)(t-6)=0$

$\therefore t=6$ (∵ $t>0$)

즉 $6^{\log x}=6$이므로

$\log x=1$ $\quad\therefore x=10$ 답 $x=10$

35 밑의 조건에서 $x^2+3>0$, $x^2+3\neq1$, $3x+7>0$, $3x+7\neq1$이므로

$x^2\geq0$이므로 $x^2+3>0$, $x^2+3\neq1$은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$-\frac{7}{3}<x<-2$ 또는 $x>-2$ ...... ㉠

$\log_{x^2+3}11=\log_{3x+7}11$에서 진수가 같으므로

$x^2+3=3x+7$, $\quad x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$ (∵ ㉠)

따라서 모든 근의 합은

$-1+4=3$ 답 ④

36 밑과 진수의 조건에서 $x+2>0$, $x+2\neq1$, $x^2>0$, $x^2\neq1$, $5x+2>0$이므로

$x^2>0$에서 $\quad x\neq0$
$x^2\neq1$에서
$x\neq-1$, $x\neq1$

$-\frac{2}{5}<x<0$ 또는 $0<x<1$ 또는 $x>1$

...... ㉠

밑이 같은 경우

(i) $x+2=x^2$일 때,

$x^2-x-2=0$, $\quad(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$x=-1$은 ㉠을 만족시키지 않으므로 주어진 방정식의 해가 아니고, $x=2$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

진수가 1인 경우

(ii) $5x+2=1$일 때,

$5x=-1$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{5}$

$x=-\frac{1}{5}$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{5}$, $\beta=2$이므로

$\frac{\beta}{\alpha}=2\cdot(-5)=-10$ 답 -10

37 $x^{\log_2 x}=\frac{64}{x^5}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2\frac{64}{x^5}$

$\log_2 x\cdot\log_2 x=\log_2 64-\log_2 x^5$

$\therefore (\log_2 x)^2+5\log_2 x-6=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad t^2+5t-6=0$

$(t+6)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-6$ 또는 $t=1$

즉 $\log_2 x=-6$ 또는 $\log_2 x=1$이므로

$x=2^{-6}$ 또는 $x=2$

따라서 모든 근의 곱은

$2^{-6}\cdot 2=2^{-5}=\frac{1}{32}$ 　　　답 $\frac{1}{32}$

38 $(2x)^{\log 2}-(3x)^{\log 3}=0$, 즉 $(2x)^{\log 2}=(3x)^{\log 3}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2\cdot\log 2x=\log 3\cdot\log 3x$

$\log 2(\log 2+\log x)=\log 3(\log 3+\log x)$

$\log x\cdot\log 2+(\log 2)^2=\log x\cdot\log 3+(\log 3)^2$

$(\log 3-\log 2)\log x=(\log 2)^2-(\log 3)^2$

$\therefore \log x=\frac{(\log 2+\log 3)(\log 2-\log 3)}{\log 3-\log 2}$

$=-(\log 3+\log 2)$

$=-\log 6=\log\frac{1}{6}$

$\therefore x=\frac{1}{6}$ 　　　답 ②

39 $\log_2 x\cdot(7-\log_4 x)=a$에서

$\log_2 x\cdot\left(7-\frac{1}{2}\log_2 x\right)=a$

$7\log_2 x-\frac{1}{2}(\log_2 x)^2=a$

$\therefore (\log_2 x)^2-14\log_2 x+2a=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-14t+2a=0$ 　　　…… ㉠

주어진 방정식의 두 근이 모두 1보다 크려면 이차방정식 ㉠의 두 근이 모두 0보다 커야 한다.

$x>1$에서
$\log_2 x>\log_2 1$
$\therefore t>0$

이차방정식 ㉠의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-7)^2-2a\ge 0, \quad 2a\le 49$

$\therefore a\le\frac{49}{2}$

(ii) $\alpha+\beta=14>0$

(iii) $\alpha\beta=2a>0 \qquad \therefore a>0$

이상에서 $0<a\le\frac{49}{2}$이므로 정수 a는 1, 2, 3, …, 24의 24개이다. 　　　답 ④

40 $|\log_3 x|\cdot\log_3\frac{27}{x}-a=0$에서

$|\log_3 x|\cdot(\log_3 27-\log_3 x)=a$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$y=\log_3 x$는 일대일함수이고 치역이 실수 전체의 집합이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$|t|(3-t)=a$ 　　　…… ㉠

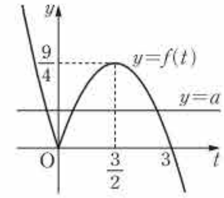
방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=|t|(3-t)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

이때 $f(t)=|t|(3-t)$로 놓으면

$$f(t)=\begin{cases}-t^2+3t & (t\ge 0)\\ t^2-3t & (t<0)\end{cases}$$

$-t^2+3t$
$=-\left(t^2-3t+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)$
$=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나려면



$0<a<\frac{9}{4}$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=\frac{9}{4}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{9}{4}$ 　　　답 $\frac{9}{4}$

41 진수의 조건에서 $x+3>0$, $3-x>0$이므로

$-3<x<3$ 　　　…… ㉠

$\log_2(x+3)-\log_2(3-x)>1$에서

$\log_2(x+3)>\log_2(3-x)+1$

$\log_2(x+3)>\log_2 2(3-x)$

밑이 1보다 크므로 　$x+3>2(3-x)$

$x+3>6-2x, \qquad 3x>3$

$\therefore x>1$ 　　　…… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<3$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$이므로

$\beta-\alpha=2$ 　　　답 ①

42 진수의 조건에서 $-2+x>0$, $2x-5>0$, $x^2-3x+5>0$이므로

x^2-3x+5
$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$
이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$x>\frac{5}{2}$ 　　　…… ㉠

$\log_{\sqrt{5}}(-2+x)>\log_5(2x-5)$에서

$\log_5(-2+x)^2>\log_5(2x-5)$

$\log_5(x^2-4x+4)>\log_5(2x-5)$

밑이 1보다 크므로 　$x^2-4x+4>2x-5$

$x^2-6x+9>0, \qquad (x-3)^2>0$

$\therefore x\ne 3$ 　　　…… ㉡

$\log_3(x^2-3x+5)\le 2$에서

$\log_3(x^2-3x+5)\le\log_3 9$

밑이 1보다 크므로 　$x^2-3x+5\le 9$

$x^2-3x-4\le 0, \qquad (x+1)(x-4)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 4$ 　　　…… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$\frac{5}{2}<x<3$ 또는 $3<x\le 4$

답 $\frac{5}{2}<x<3$ 또는 $3<x\le 4$

43 진수의 조건에서 $5x+7>0$, $x^2+k>0$이므로

k는 자연수이므로
$k>0$
즉 $x^2+k>0$은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$x>-\frac{7}{5}$ 　　　…… ㉠

$\log_{\frac{1}{4}}(5x+7)<\log_{\frac{1}{4}}(x^2+k)$에서 밑이 1보다 작으므로

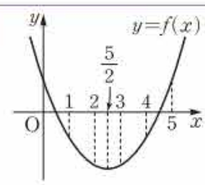
$5x+7>x^2+k$

$\therefore x^2-5x+k-7<0$ 　　　…… ㉡

$f(x)=x^2-5x+k-7$로 놓으면

$$f(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+k-\frac{53}{4}$$

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x의 개수가 4이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



> 정수 x는 1, 2, 3, 4이어야 한다.

$f(0)\ge 0,\ f(1)<0$

$f(4)<0,\ f(5)\ge 0$

$f(0)=f(5)=k-7\ge 0$에서 $\quad k\ge 7$

$f(1)=f(4)=k-11<0$에서 $\quad k<11$

$\therefore 7\le k<11$

따라서 자연수 k는 7, 8, 9, 10이므로 구하는 합은

$7+8+9+10=34$ 답 ③

44 진수의 조건에서

$x>0,\ \log_5 x>0,\ \log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)>0$

> $\log_5 x>\log_5 1$에서 $x>1$

이때 $\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)>0$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)>\log_{\frac{1}{3}}1$

$\log_5 x<1 \quad \therefore x<5$

$\therefore 1<x<5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_2\{\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)\}<0$에서

$\log_2\{\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)\}<\log_2 1$

밑이 1보다 크므로 $\quad \log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)<1$

$\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad \log_5 x>\frac{1}{3}$

$\log_5 x>\log_5 5^{\frac{1}{3}}$

밑이 1보다 크므로 $\quad x>\sqrt[3]{5} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\sqrt[3]{5}<x<5$

따라서 $\alpha=\sqrt[3]{5},\ \beta=5$이므로

$\alpha^3+\beta^3=5+125=130$ 답 130

45 진수의 조건에서 $\quad x>0,\ \log_{\frac{1}{5}}x>0$

> $\log_{\frac{1}{5}}x>\log_{\frac{1}{5}}1$에서 $x<1$

$\therefore 0<x<1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_4(\log_{\frac{1}{5}}x)\le a$에서

$\log_4(\log_{\frac{1}{5}}x)\le \log_4 4^a$

밑이 1보다 크므로

$\log_{\frac{1}{5}}x\le 4^a,\quad \log_{\frac{1}{5}}x\le \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{4^a}$

밑이 1보다 작으므로

$x\ge\left(\frac{1}{5}\right)^{4^a} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\left(\frac{1}{5}\right)^{4^a}\le x<1$

> $4^a>0$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^{4^a}<\left(\frac{1}{5}\right)^0=1$

이때 주어진 부등식의 해가 $\frac{1}{25}\le x<1$이므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^{4^a}=\frac{1}{25}=\left(\frac{1}{5}\right)^2$에서

$4^a=2,\quad 2^{2a}=2$

$2a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$ 답 ④

46 $2(\log_2 x)^2-17\log_2 2x+25<0$에서

$2(\log_2 x)^2-17(\log_2 x+1)+25<0$

$\therefore 2(\log_2 x)^2-17\log_2 x+8<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad 2t^2-17t+8<0$

$(2t-1)(t-8)<0 \quad \therefore \frac{1}{2}<t<8$

즉 $\frac{1}{2}<\log_2 x<8$이므로

$\log_2 2^{\frac{1}{2}}<\log_2 x<\log_2 2^8$

밑이 1보다 크므로

$\sqrt{2}<x<256$ 답 $\sqrt{2}<x<256$

47 $\log_{\frac{1}{6}}x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2+at+b\le 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{36}\le x\le 6$에서 $\quad \log_{\frac{1}{6}}6\le\log_{\frac{1}{6}}x\le\log_{\frac{1}{6}}\frac{1}{36}$

$-1\le\log_{\frac{1}{6}}x\le 2 \quad \therefore -1\le t\le 2$

해가 $-1\le t\le 2$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

> 해가 $\alpha\le x\le\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)\le 0$

$(t+1)(t-2)\le 0 \quad \therefore t^2-t-2\le 0$

이 부등식이 ㉠과 일치해야 하므로

$a=-1,\ b=-2$

$\therefore a-b=1$ 답 ④

48 진수의 조건에서 $\quad x>0$

$10000\ge x^{\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 10000\ge\log x^{\log x},\quad 4\ge(\log x)^2$

$\therefore (\log x)^2-4\le 0$

$\log x=t$로 놓으면 $\quad t^2-4\le 0$

$(t+2)(t-2)\le 0 \quad \therefore -2\le t\le 2$

즉 $-2\le\log x\le 2$이므로

$\log 10^{-2}\le\log x\le\log 10^2$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{1}{100}\le x\le 100$

> 진수의 조건을 만족시킨다.

따라서 정수 x는 1, 2, 3, …, 100의 100개이다.

답 100

49 진수의 조건에서 $\quad x>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{4}}x}<\frac{1}{64x^2}$의 양변에 밑이 $\frac{1}{4}$인 로그를 취하면

> 밑이 1보다 작으므로 부등호의 방향이 바뀐다.

$\log_{\frac{1}{4}}x^{\log_{\frac{1}{4}}x}>\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{64x^2}$

$(\log_{\frac{1}{4}}x)^2>\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{64}-\log_{\frac{1}{4}}x^2$

$(\log_{\frac{1}{4}}x)^2>3-2\log_{\frac{1}{4}}x$

$\therefore (\log_{\frac{1}{4}}x)^2+2\log_{\frac{1}{4}}x-3>0$

$\log_{\frac{1}{4}}x=t$로 놓으면 $\quad t^2+2t-3>0$

$(t+3)(t-1)>0 \quad \therefore t<-3$ 또는 $t>1$

즉 $\log_{\frac{1}{4}}x<-3$ 또는 $\log_{\frac{1}{4}}x>1$이므로

$\log_{\frac{1}{4}}x<\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ 또는 $\log_{\frac{1}{4}}x>\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}$

밑이 1보다 작으므로

$x>64$ 또는 $x<\frac{1}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{4}$ 또는 $x>64$

따라서 자연수 x의 최솟값은 65이다. 답 65

50 $(\log x+\log 3)(\log x+\log 9)+(\log k)^2=0$에서

$(\log x+\log 3)(\log x+2\log 3)+(\log k)^2=0$

$\therefore (\log x)^2+3\log 3\cdot\log x+2(\log 3)^2+(\log k)^2=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2+3t\log 3+2(\log 3)^2+(\log k)^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(3\log 3)^2-4\{2(\log 3)^2+(\log k)^2\}>0$

$4(\log k)^2-(\log 3)^2<0$

$(2\log k+\log 3)(2\log k-\log 3)<0$

$-\log 3<2\log k<\log 3$

$-\frac{1}{2}\log 3<\log k<\frac{1}{2}\log 3$

$\log\frac{\sqrt{3}}{3}<\log k<\log\sqrt{3}$

밑이 1보다 크므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}<k<\sqrt{3}$

따라서 자연수 k의 값은 1이다. 답 1

$-\frac{1}{2}\log 3=\log 3^{-\frac{1}{2}}$
$=\log\frac{1}{\sqrt{3}}$
$=\log\frac{\sqrt{3}}{3}$

51 (i) $\log_2 a-1=0$, 즉 $a=2$일 때,

$-3\le 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $\log_2 a-1\neq 0$, 즉 $a\neq 2$일 때,

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$\log_2 a-1<0$에서

$\log_2 a<1$ ...... ㉠

이차방정식

$(\log_2 a-1)x^2+2(\log_2 a-1)x-3\log_2 a=0$

의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\log_2 a-1)^2+3\log_2 a(\log_2 a-1)\le 0$

$(\log_2 a-1)(\log_2 a-1+3\log_2 a)\le 0$

$(4\log_2 a-1)(\log_2 a-1)\le 0$

$\therefore \frac{1}{4}\le\log_2 a\le 1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{4}\le\log_2 a<1$

$\log_2 2^{\frac{1}{4}}\le\log_2 a<\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $2^{\frac{1}{4}}\le a<2$

(i), (ii)에서 $2^{\frac{1}{4}}\le a\le 2$

x^2의 계수가 0일 때와 0이 아닐 때로 나누어 생각한다.

따라서 $\alpha=2^{\frac{1}{4}}$, $\beta=2$이므로

$\log_2\alpha\beta=\log_2 2^{\frac{5}{4}}=\frac{5}{4}$ 답 ⑤

52 제품 판매량이 5000개일 때의 광고 비용을 a만 원이라 하면

$5000=3500+500\log 2a$, $\log 2a=3$

$2a=10^3$ $\therefore a=500$

따라서 제품을 5000개 판매하려면 광고 비용은 500만 원을 사용해야 한다. 답 500만 원

53 여과기를 1개 설치하면 불순물의 $\frac{3}{4}$이 여과기를 통과하므로 n개를 설치하면 불순물의 $\left(\frac{3}{4}\right)^n$이 여과기를 통과한다.

여과기를 n개 설치한 후 전체 불순물의 $\frac{1}{1000}$만 여과기를 통과한다고 하면

$\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{1}{1000}$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log\frac{3}{4}=\log\frac{1}{1000}$, $n(\log 3-2\log 2)=-3$

$\therefore n=\frac{3}{2\log 2-\log 3}$

$=\frac{3}{2\times 0.30-0.48}=25$

따라서 필요한 여과기는 25개이다. 답 25

54 물고기의 길이가 18 cm 이상 되려면

$20(1-a^{-0.7(t+0.4)})\ge 18$

$1-a^{-0.7(t+0.4)}\ge\frac{9}{10}$, $a^{-0.7(t+0.4)}\le\frac{1}{10}$

양변에 밑이 a인 로그를 취하면

$a>1$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$\log_a a^{-0.7(t+0.4)}\le\log_a\frac{1}{10}$

$-0.7(t+0.4)\le-\log_a 10$

$0.7(t+0.4)\ge\log_a 10$

이때 $\log_a 10=2.1$이므로

$0.7(t+0.4)\ge 2.1$, $t+0.4\ge 3$

$\therefore t\ge 2.6$

따라서 물고기의 길이가 18 cm 이상 되기 위한 최소 연령은 2.6이다. 답 ④

55 n년 후에 B의 연봉이 A의 연봉을 초과한다고 하면

$6\times 1.2^n<4\times 1.25^n$, $3\times 1.2^n<2\times 1.25^n$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 3+n\log 1.2<\log 2+n\log 1.25$

$n(\log 1.25-\log 1.2)>\log 3-\log 2$

$n\log\frac{25}{24}>\log 3-\log 2$

$n\{2\log 5-(3\log 2+\log 3)\}>\log 3-\log 2$

$$\therefore n > \frac{\log 3 - \log 2}{2\log 5 - 3\log 2 - \log 3}$$
$$= \frac{\log 3 - \log 2}{2 - 5\log 2 - \log 3}$$
$$= \frac{0.4771 - 0.3010}{2 - 5 \times 0.3010 - 0.4771}$$
$$= \frac{0.1761}{0.0179} = 9.8\cdots$$

따라서 10년 후인 2032년에 B의 연봉이 처음으로 A의 연봉을 초과한다. 답 ③

Q BOX: $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2$

$2022 + 10 = 2032$ (년)

도전! 수능 기출

Ⓦ 34쪽

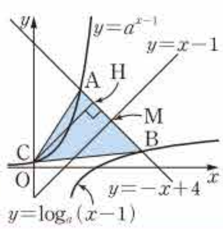
01 **1st** 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$의 관계를 이용하여 점 A의 좌표를 구한다.

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

직선 $y=x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선

이때 두 점 A, B는 각각 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$ 위의 점이므로 두 점 A, B도 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

즉 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=x-1$, $y=-x+4$의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$이고, 점 M은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이다.



$x-1=-x+4$에서 $2x=5$ $\therefore x=\frac{5}{2}$

$x=\frac{5}{2}$를 $y=x-1$에 대입하면 $y=\frac{3}{2}$

점 A의 좌표를 $(k, -k+4)$라 하면 $\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$에서

$$\sqrt{\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-k+4-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$$
$$\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\frac{5}{2}\right)^2=2$$
$$2\left(k-\frac{5}{2}\right)^2=2, \qquad \left(k-\frac{5}{2}\right)^2=1$$

서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

이때 $k<\frac{5}{2}$이므로 $\quad k=-1+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$

$$\therefore \mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$k<\frac{5}{2}$에서 $k-\frac{5}{2}<0$ $\quad\therefore k-\frac{5}{2}=-1$

2nd 두 점 A, C가 곡선 $y=a^{x-1}$ 위의 점임을 이용하여 점 C의 좌표를 구한다.

점 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$는 곡선 $y=a^{x-1}$ 위의 점이므로

$$\frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1}, \qquad a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2} \qquad \therefore a=\frac{25}{4}$$

점 C는 곡선 $y=\left(\frac{25}{4}\right)^{x-1}$ 위의 점이고 x좌표가 0이므로 $y=\left(\frac{25}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{25}$에서

$$\mathrm{C}\left(0, \frac{4}{25}\right)$$

3rd △ABC의 넓이를 구한다.

점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{CH}}$의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$, 즉 $x+y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 △ABC의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{48\sqrt{2}}{25}=\frac{96}{25}$$

4th $50S$의 값을 구한다.

$$50S=50\cdot\frac{96}{25}=192$$

답 192

쌤 한마디

01번에서 점 A를 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하자.

① 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$이 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=a^{x-1}$ 위의 점 A를 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 점 A′은 곡선 $y=\log_a(x-1)$ 위의 점이다.

② 직선 AA′의 기울기는 -1이고, 기울기가 -1이면서 점 A를 지나는 직선은 오직 하나 존재하므로 직선 AA′은 직선 $y=-x+4$와 일치한다. 즉 점 A′은 직선 $y=-x+4$ 위의 점이다.

①, ②에서 점 A′은 곡선 $y=\log_a(x-1)$과 직선 $y=-x+4$의 교점이므로 점 B와 일치한다.

따라서 두 점 A, B는 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

02 **1st** 함수 $f(x)$의 식을 구한다.

함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=a^{x-k}$$

즉 $f(x)=a^{x-k}$이고 $f(2+x)f(2-x)=1$이므로

$$a^{2+x-k}a^{2-x-k}=1, \qquad a^{4-2k}=a^0$$
$$4-2k=0 \qquad \therefore k=2$$
$$\therefore f(x)=a^{x-2}$$

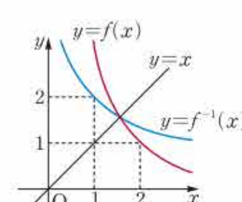
2nd $x=2$일 때의 함숫값을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $f(2)=a^{2-2}=1$

3rd 지수함수의 그래프를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. [반례] $a=\frac{1}{3}$일 때,

$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 위의 그림과 같다.



$f^{-1}(x)=\log_{\frac{1}{3}} x+2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

4th $\{f(t+1)-f(t)\}-\{f(t+2)-f(t+1)\}$의 부호를 조사하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $\{f(t+1)-f(t)\}-\{f(t+2)-f(t+1)\}$

$=-f(t+2)+2f(t+1)-f(t)$

$=-a^{t}+2a^{t-1}-a^{t-2}$

$=-a^{t-2}(a^2-2a+1)$

$=-a^{t-2}(a-1)^2<0$ ($\because a>0,\ a\neq1$)

$\therefore f(t+1)-f(t)<f(t+2)-f(t+1)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

$a\neq1$이므로 $(a-1)^2>0$
$a>0$이므로 모든 실수 t에 대하여 $a^{t-2}>0$
$\therefore -a^{t-2}(a-1)^2<0$

03 1st 조건을 만족시키는 a를 b, k에 대한 식으로 나타낸 후 b에 대한 방정식을 세운다.

조건 (가)에서 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이므로

$b=\log_2(a+2)+k,\quad b-k=\log_2(a+2)$

$a+2=2^{b-k}\quad \therefore a=2^{b-k}-2$ …… ㉠

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 점 $(b,\ a)$이고, 조건 (나)에 의하여 이 점이 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위의 점이므로

$a=4^{b+k}+2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 2^{b-k}-2=4^{b+k}+2$

$\therefore 4^k\cdot(2^b)^2-2^{-k}\cdot2^b+4=0$

2nd $2^b=t\ (t>0)$로 놓고 t에 대한 이차방정식의 근의 조건을 구한다.

$2^b=t\ (t>0)$로 놓으면

$4^kt^2-2^{-k}t+4=0$ …… ㉢

조건을 만족시키는 점 A가 오직 하나 존재하므로 이차방정식 ㉢은 $t>0$에서 오직 하나의 실근을 갖는다.

그런데 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 ㉢의 두 근의 곱이 $\frac{4}{4^k}=4^{1-k}>0$이므로 ㉢은 양수인 중근을 갖는다.

이차방정식 ㉢의 두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha\le\beta)$라 할 때, $t>0$에서 오직 하나의 실근을 가지려면
① $\alpha\le0,\ \beta>0$
② $\alpha=\beta>0$
그런데 두 근의 곱이 양수이므로 ②인 경우만 고려하면 된다.

3rd t에 대한 이차방정식의 근의 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

(i) 이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 하면

$D=(-2^{-k})^2-4\cdot4^k\cdot4=0$

$4^{-k}=4^{k+2},\quad -k=k+2$

$2k=-2\quad \therefore k=-1$

(ii) 이차방정식 ㉢의 두 근의 합은

$\frac{2^{-k}}{4^k}>0$

위의 부등식은 모든 실수 k에 대하여 성립한다.

모든 실수 k에 대하여 $2^{-k}>0,\ 4^k>0$

(i), (ii)에서 $\quad k=-1$

4th t에 대한 이차방정식을 풀어 a, b의 값을 구한다.

$k=-1$을 ㉢에 대입하면

$\frac{1}{4}t^2-2t+4=0,\quad t^2-8t+16=0$

$(t-4)^2=0\quad \therefore t=4$

즉 $2^b=4=2^2$이므로 $\quad b=2$

$k=-1,\ b=2$를 ㉠에 대입하면

$a=2^3-2=6$

5th ab의 값을 구한다.

$ab=6\cdot2=12$ 답 12

04 1st n번 시행 후 빵의 개당 무게와 단위 무게당 가격을 구한다.

처음 빵의 개당 무게를 A g이라 하면 n번 시행 후 빵의 개당 무게는

0.9^nA g

처음 빵의 개당 가격을 B원이라 하면 처음 빵의 단위 무게당 가격은 $\frac{B}{A}$원이고 n번 시행 후 빵의 단위 무게당 가격은 $\frac{B}{0.9^nA}$원이다.

2nd 주어진 조건을 이용하여 부등식을 세운다.

n번 시행 후 빵의 단위 무게당 가격이 처음의 1.5배 이상이 되므로

$\frac{B}{0.9^nA}\ge1.5\times\frac{B}{A}$

$\therefore 0.9^{-n}\ge1.5$

3rd 양변에 상용로그를 취하여 n의 최솟값을 구한다.

양변에 상용로그를 취하면

$\log0.9^{-n}\ge\log1.5,\quad \log\left(\frac{10}{9}\right)^n\ge\log\frac{3}{2}$

$n(1-2\log3)\ge\log3-\log2$

$\therefore n\ge\frac{\log3-\log2}{1-2\log3}=\frac{0.4771-0.3010}{1-2\times0.4771}$

$=\frac{0.1761}{0.0458}=3.8\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 4이다. 답 ②

05 삼각함수 W 35쪽

01 ㄱ. $-995°=360°\times(-3)+85°$ ➡ 제1사분면
ㄴ. $-520°=360°\times(-2)+200°$ ➡ 제3사분면
ㄷ. $430°=360°\times1+70°$ ➡ 제1사분면
ㄹ. $1370°=360°\times3+290°$ ➡ 제4사분면
이상에서 제1사분면의 각인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

02 3θ가 제2사분면의 각이므로

$$2n\pi+\frac{\pi}{2}<3\theta<2n\pi+\pi \ (n\text{은 정수})$$

$$\therefore \frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{3}$$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$$2k\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{3}$$

따라서 θ는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$$\frac{2(3k+1)}{3}\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{2(3k+1)}{3}\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore 2k\pi+\frac{5}{6}\pi<\theta<2k\pi+\pi$$

따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

$$\frac{2(3k+2)}{3}\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{2(3k+2)}{3}\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore 2k\pi+\frac{3}{2}\pi<\theta<2k\pi+\frac{5}{3}\pi$$

따라서 θ는 제4사분면의 각이다.

이상에서 각 θ를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제3사분면이다.

답 제3사분면

$2\pi=\frac{2}{3}\pi\cdot3$이므로 θ의 범위를 일반각으로 나타내려면 $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$ (k는 정수)로 나누어 생각한다.

03 θ가 제4사분면의 각이므로

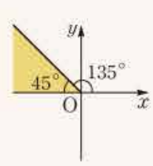
$$360°\times n+270°<\theta<360°\times n+360° \ (n\text{은 정수})$$

$$\therefore 180°\times n+135°<\frac{\theta}{2}<180°\times n+180°$$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$$180°\times2k+135°<\frac{\theta}{2}<180°\times2k+180°$$

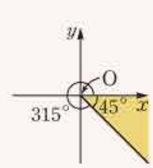
$$\therefore 360°\times k+135°<\frac{\theta}{2}<360°\times k+180°$$



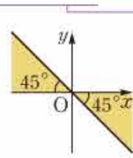
(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$$180°\times(2k+1)+135°<\frac{\theta}{2}<180°\times(2k+1)+180°$$

$$\therefore 360°\times k+315°<\frac{\theta}{2}<360°\times k+360°$$



(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 속하는 모든 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 제외)과 같다.



답 ⑤

04 $72°\times n$이 제3사분면의 각이 되려면

$$360°\times k+180°<72°\times n<360°\times k+270°$$
(k는 정수)

$$\therefore 5k+\frac{5}{2}<n<5k+\frac{15}{4}$$

이때 n은 자연수이고 k는 정수이므로

$$n=5k+3$$

따라서 한 자리 자연수 n은 3, 8이므로 최댓값은 8이다.

답 ④

05 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$$6\theta-\theta=2n\pi \ (n\text{은 정수})$$

$$5\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n}{5}\pi<\pi$이므로

$$\frac{5}{4}<n<\frac{5}{2} \quad \therefore n=2$$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{4}{5}\pi$

$$\therefore \cos\left(\theta-\frac{7}{15}\pi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

답 ②

06 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$$4\theta-\theta=(2n+1)\pi \ (n\text{은 정수})$$

$$3\theta=(2n+1)\pi$$

$$\therefore \theta=\frac{2n+1}{3}\pi \quad \cdots\cdots ㉠$$

$0<\theta<2\pi$에서 $0<\frac{2n+1}{3}\pi<2\pi$이므로

$$0<2n+1<6, \quad -\frac{1}{2}<n<\frac{5}{2}$$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\pi$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 각 θ의 크기의 합은

$$\frac{\pi}{3}+\pi+\frac{5}{3}\pi=3\pi$$

답 3π

07 두 동경이 일직선 위에 있으려면 두 동경이 일치하거나 두 동경이 원점에 대하여 대칭이어야 한다.

(i) 두 동경이 일치할 때,

$5\theta-2\theta=2n\pi$ (n은 정수)이므로

$$3\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi \quad \cdots\cdots ㉠$$

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{3}\pi<\pi$이므로

$$0<n<\frac{3}{2} \quad \therefore n=1$$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

(ii) 두 동경이 원점에 대하여 대칭일 때,

$5\theta-2\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)이므로

$3\theta=(2n+1)\pi$

$\therefore\ \theta=\dfrac{2n+1}{3}\pi$ …… ㉡

$0<\theta<\pi$에서 $0<\dfrac{2n+1}{3}\pi<\pi$이므로

$0<2n+1<3,\quad -\dfrac{1}{2}<n<1$

$\therefore\ n=0$

이것을 ㉡에 대입하면 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

(i), (ii)에서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ 답 $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2}{3}\pi$

08 34°를 나타내는 동경과 각 α를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로 $34^\circ+\alpha$는 $360^\circ\times n$ (n은 정수) 꼴이어야 한다.

① $34^\circ+(-754^\circ)=-720^\circ=360^\circ\times(-2)$

② $34^\circ+(-394^\circ)=-360^\circ=360^\circ\times(-1)$

③ $34^\circ+326^\circ=360^\circ=360^\circ\times1$

④ $34^\circ+506^\circ=540^\circ=\underline{360^\circ\times1+180^\circ}$

⑤ $34^\circ+1046^\circ=1080^\circ=360^\circ\times3$

답 ④

34°를 나타내는 동경과 506°를 나타내는 동경은 y축에 대하여 대칭이다.

09 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+3\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$4\theta=(2n+1)\pi\quad\therefore\ \theta=\dfrac{2n+1}{4}\pi$ …… ㉠

$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\dfrac{3}{2}\pi<\dfrac{2n+1}{4}\pi<2\pi$이므로

$6<2n+1<8,\quad \dfrac{5}{2}<n<\dfrac{7}{2}$

$\therefore\ n=3$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\dfrac{7}{4}\pi$ 답 $\dfrac{7}{4}\pi$

10 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+6\theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$7\theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{2n}{7}\pi+\dfrac{\pi}{14}$ …… ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\dfrac{2n}{7}\pi+\dfrac{\pi}{14}<\pi$이므로

$-\dfrac{1}{14}<\dfrac{2n}{7}<\dfrac{13}{14},\quad -\dfrac{1}{4}<n<\dfrac{13}{4}$

$\therefore\ n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\dfrac{\pi}{14}$ 또는 $\theta=\dfrac{5}{14}\pi$ 또는 $\theta=\dfrac{9}{14}\pi$

또는 $\theta=\dfrac{13}{14}\pi$

따라서 각 θ의 최댓값은 $\dfrac{13}{14}\pi$, 최솟값은 $\dfrac{\pi}{14}$이므로 구하는 차는

$\dfrac{13}{14}\pi-\dfrac{\pi}{14}=\dfrac{6}{7}\pi$ 답 $\dfrac{6}{7}\pi$

11 동경 OP_n이 나타내는 각의 크기를 θ_n이라 하면

$\theta_1=360^\circ-60^\circ$

$\theta_2=360^\circ\times2+120^\circ$

$\theta_3=360^\circ\times3-180^\circ$

$\theta_4=360^\circ\times4+240^\circ$

$\theta_5=360^\circ\times5-300^\circ$

$\theta_6=360^\circ\times6+360^\circ=360^\circ\times7$

$\theta_7=360^\circ\times7-420^\circ=360^\circ\times6-60^\circ$

$\theta_8=360^\circ\times8+480^\circ=360^\circ\times9+120^\circ$

$\vdots$

따라서 동경 OP_n의 위치는 동경 OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, OP_5, OP_6의 위치가 이 순서대로 반복된다.

즉 동경 OP_n이 동경 OP_1과 같은 위치에 있으려면

$n=6m+1$ (m은 자연수)

꼴이어야 하므로

$n=7,\ 13,\ 19,\ \cdots,\ 97$

따라서 구하는 동경의 개수는 16이다. 답 ③

$6\cdot16+1=97$

12 $\dfrac{2}{9}\pi$를 나타내는 동경과 $\dfrac{5}{6}n\pi+\dfrac{2}{9}\pi$를 나타내는 동경이 일치한다고 하면

$\dfrac{5}{6}n\pi+\dfrac{2}{9}\pi=2m\pi+\dfrac{2}{9}\pi$ (m은 정수)

$\therefore\ n=\dfrac{12}{5}m$

즉 서로 다른 동경의 개수는 위의 식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값과 같으므로 12이다. 답 12

$n=0$일 때,

$\dfrac{5}{6}\pi\cdot0+\dfrac{2}{9}\pi=\dfrac{2}{9}\pi$

$n=12$일 때,

$\dfrac{5}{6}\pi\cdot12+\dfrac{2}{9}\pi$

$=10\pi+\dfrac{2}{9}\pi$

$=2\pi\cdot5+\dfrac{2}{9}\pi$

이므로 $n=0$일 때와 $n=12$일 때 주어진 각을 나타내는 동경이 일치한다.

13 $\angle COD=\theta$라 하면 $\overset{\frown}{CD}=15\pi$ cm이므로

$20\theta=15\pi\quad\therefore\ \theta=\dfrac{3}{4}\pi$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

(부채꼴 COD의 넓이)−(부채꼴 AOB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\cdot20\cdot15\pi-\dfrac{1}{2}\cdot8^2\cdot\dfrac{3}{4}\pi$

$=150\pi-24\pi$

$=126\pi\,(\text{cm}^2)$ 답 126π cm^2

14 두 부채꼴 A, B의 호의 길이가 각각 $\dfrac{5}{2}a$, $\dfrac{5}{2}b$이므로

$\dfrac{5}{2}a+\dfrac{5}{2}b=20\quad\therefore\ a+b=8$

두 부채꼴 A, B의 넓이는 각각

$\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{5}{2}a=\dfrac{5}{4}a^2$, $\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot\dfrac{5}{2}b=\dfrac{5}{4}b^2$

이므로

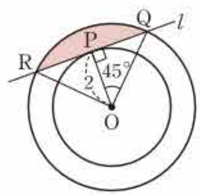
$\frac{5}{4}a^2+\frac{5}{4}b^2=50 \qquad \therefore a^2+b^2=40$

따라서 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$에서

$8^2=40+2ab \qquad \therefore ab=12$

답 12

15 오른쪽 그림의 직각삼각형 OPQ에서 $\overline{OP}=2$이므로



$\overline{OQ}=\frac{2}{\cos 45^\circ}=2\sqrt{2}$

접선 l이 큰 원과 만나는 다른 한 점을 R라 하면 부채꼴 ROQ의 중심각의 크기는 $90^\circ=\frac{\pi}{2}$이므로 부채꼴 ROQ의 넓이는

$\triangle OPQ \equiv \triangle OPR$이므로 $\angle QOR=2\angle POQ=90^\circ$

$\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi$

한편 직각이등변삼각형 ROQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=4$

따라서 색칠한 부분의 넓이는 $\quad 2\pi-4$

답 $2\pi-4$

16 원을 부채꼴과 접하면서 네 바퀴 굴렸을 때 점 P에서 다시 접하므로 부채꼴의 둘레의 길이는 원의 둘레의 길이의 4배와 같다.

부채꼴의 둘레의 길이는

$2\cdot 8+8\theta=16+8\theta$

반지름의 길이가 1인 원의 둘레의 길이는

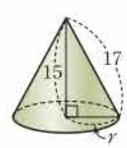
$2\pi\cdot 1=2\pi$

따라서 $16+8\theta=2\pi\cdot 4$이므로

$8\theta=8\pi-16 \qquad \therefore \theta=\pi-2$

답 ③

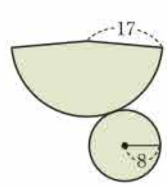
17 [그림1]과 같이 모선의 길이가 17이고 높이가 15인 원뿔의 밑면인 원의 반지름의 길이를 r라 하면



[그림1]

$r=\sqrt{17^2-15^2}=8$

[그림1]의 원뿔의 전개도는 [그림2]와 같고, 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로



[그림2]

$2\pi\cdot 8=16\pi$

따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

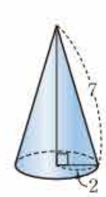
$\frac{1}{2}\cdot 17\cdot 16\pi=136\pi$

답 136π

18 밑면인 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$2\pi r=7\cdot\frac{4}{7}\pi \qquad \therefore r=2$

오른쪽 그림에서 원뿔의 높이는



$\sqrt{7^2-2^2}=3\sqrt{5}$

따라서 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\cdot(\pi\cdot 2^2)\cdot 3\sqrt{5}=4\sqrt{5}\pi$

답 $4\sqrt{5}\pi$

19 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 16이므로

$2r+l=16 \qquad \therefore l=16-2r$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}r(16-2r)=-r^2+8r$

$=-(r-4)^2+16 \ (0<r<8)$

$16-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<8$

따라서 $r=4$일 때 S는 최댓값 16을 갖는다.

이때의 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$16=\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\theta \qquad \therefore \theta=2$

답 ②

쌤한마디

둘레의 길이가 일정한 부채꼴의 넓이는 중심각의 크기가 2(라디안)일 때 항상 최댓값을 갖는다.

20 부채꼴의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면 넓이가 9 m²이므로

$\frac{1}{2}rl=9 \qquad \therefore l=\frac{18}{r}$

따라서 화단의 둘레의 길이는

$2r+l=2r+\frac{18}{r}$ (m)

이때 $2r>0$, $\frac{18}{r}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2r+\frac{18}{r}\ge 2\sqrt{2r\cdot\frac{18}{r}}=2\cdot 6=12$

(단, 등호는 $r=3$일 때 성립)

$2r=\frac{18}{r}$에서 $r^2=9$
$\therefore r=3 \ (\because r>0)$

즉 화단의 둘레의 길이의 최솟값은 12 m이다.

답 12 m

21 $\overline{OP}=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4$이므로

$\sin\theta=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\theta=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore \frac{6\cos\theta+21\tan\theta}{4\sin\theta+3}=\frac{6\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+21\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3}$$

$$=\frac{-3\sqrt{3}+7\sqrt{3}}{-2+3}=4\sqrt{3}$$

답 ⑤

22 $\overline{OP}=\sqrt{k^2+25}$이므로

$\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{k^2+25}}$

즉 $\frac{5}{\sqrt{k^2+25}}=\frac{1}{3}$이므로 $\quad \sqrt{k^2+25}=15$

$k^2+25=225, \qquad k^2=200$

$\therefore k=-10\sqrt{2} \ (\because k<0)$

점 P는 제4사분면 위에 있으므로 y좌표는 음수이다.

$\therefore \tan\theta=-\frac{10\sqrt{2}}{5}=-2\sqrt{2}$

답 $-2\sqrt{2}$

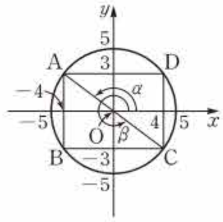
05 삼각함수

23 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=8$이므로

$A(-4,\ 3)$

$\overline{OA}=5$이므로

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$



두 점 A, C가 원점에 대하여 대칭이므로

$C(4,\ -3)$

$\overline{OC}=5$이므로

$\sin\beta=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$

$\therefore \sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta$

$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{4}{5}$

$=-\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=\frac{7}{25}$ 답 $\frac{7}{25}$

24 점 P는 직선 $y=1$과 원 $x^2+y^2=2$의 교점이므로

$x^2+y^2=2$에 $y=1$을 대입하면

$x^2+1^2=2,\qquad x^2=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

이때 점 P는 제2사분면 위의 점이므로 $P(-1,\ 1)$이고

$\overline{OP}=\sqrt{2}$이므로

$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

점 Q는 직선 $y=1$과 원 $x^2+y^2=5$의 교점이므로

$x^2+y^2=5$에 $y=1$을 대입하면

$x^2+1^2=5,\qquad x^2=4$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

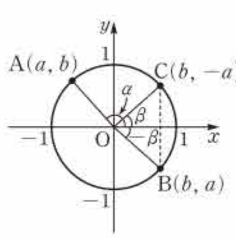
이때 점 Q는 제2사분면 위의 점이므로 $Q(-2,\ 1)$이고

$\overline{OQ}=\sqrt{5}$이므로

$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \cos\alpha\sin\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$ 답 $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

25 $a<0$, $b>0$이므로 점 A는 오른쪽 그림과 같이 제2사분면 위에 있다.



이때 $\cos\alpha=\frac{a}{1}$이므로

$a=-\frac{2}{3}$

한편 점 $A\left(-\frac{2}{3},\ b\right)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$\left(-\frac{2}{3}\right)^2+b^2=1,\qquad b^2=\frac{5}{9}$

$\therefore b=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ($\because b>0$)

각 $-\beta$를 나타내는 동경과 원의 교점이 $B(b,\ a)$이므로 각 β를 나타내는 동경과 원의 교점을 C라 하면 점 C는 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점이다.

점 $(\alpha,\ \beta)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 ➡ $(\alpha,\ -\beta)$

따라서 $C(b,\ -a)$, 즉 $C\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{2}{3}\right)$이므로

$\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

26 θ가 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

$\therefore |\cos\theta|+|\tan\theta|-\sqrt{(\tan\theta-\sin\theta)^2}$

$+\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$

$\tan\theta-\sin\theta>0$

$\sin\theta+\cos\theta<0$

$=-\cos\theta+\tan\theta-(\tan\theta-\sin\theta)$

$-(\sin\theta+\cos\theta)$

$=-\cos\theta+\tan\theta-\tan\theta+\sin\theta-\sin\theta-\cos\theta$

$=-2\cos\theta$ 답 ③

27 $\frac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\tan\theta}}=-\sqrt{\frac{\sin\theta}{\tan\theta}}$, $\sin\theta\tan\theta\neq0$이므로

$\tan\theta<0$, $\sin\theta>0$

즉 θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

ㄴ. $\tan\theta-\sin\theta<0$

ㄹ. $\frac{\cos\theta}{\tan\theta}>0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

쌤한마디

음수의 제곱근의 성질

실수 a, b에 대하여

① $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

그 외에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$이면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

그 외에는 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

28 (i) $\sin\theta\cos\theta>0$일 때,

$\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

(ii) $\sin\theta\tan\theta<0$일 때,

$\sin\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$

$\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

(i), (ii)에서 θ는 제3사분면의 각이므로

$2n\pi+\pi<\theta<2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)

$\therefore n\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{3}{4}\pi$

(iii) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{3}{4}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이다.

(iv) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<(2k+1)\pi+\frac{3}{4}\pi$

$\therefore 2k\pi+\frac{3}{2}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{7}{4}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제4사분면의 각이다.

(iii), (iv)에서 각 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

답 제2사분면 또는 제4사분면

29 $\cos^2\theta(1-\tan\theta)^2+\cos^2\theta(1+\tan\theta)^2$

$=\cos^2\theta\{(1-\tan\theta)^2+(1+\tan\theta)^2\}$

$=\cos^2\theta(1-2\tan\theta+\tan^2\theta+1+2\tan\theta+\tan^2\theta)$

$=\cos^2\theta(2+2\tan^2\theta)=2\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2$

답 ④

30 ① $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\tan\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta-\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta-\cos\theta+\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{1-\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$

② $\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\tan\theta}{1-\cos\theta}$

$=\frac{\tan\theta(1-\cos\theta)+\tan\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\frac{2\tan\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\sin^2\theta}$

$=2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}$

③ $\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=1-\cos^2\theta-\cos^2\theta$

$=1-2\cos^2\theta$

④ $\frac{\tan\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\tan^2\theta}=\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\sin\theta\cos\theta$

⑤ $\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

$=\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

$=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)$

$=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1$

답 ④

Q BOX

$\sin\theta-\cos\theta<0$, $\sin\theta+\cos\theta>0$

$\cos x=0$이면 $\sin x\neq0$이고, 주어진 등식은 $\frac{-\sin x}{2\sin x}=-\frac{1}{2}\neq3$ 따라서 $\cos x\neq0$이므로 양변을 $\cos x$로 나눌 수 있다.

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

θ는 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

31 $\sqrt{9-18\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{9+18\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{9(1-2\sin\theta\cos\theta)}-\sqrt{9(1+2\sin\theta\cos\theta)}$

$=\sqrt{9(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}$

$-\sqrt{9(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}$

$=\sqrt{9(\sin\theta-\cos\theta)^2}-\sqrt{9(\sin\theta+\cos\theta)^2}$

$=|3(\sin\theta-\cos\theta)|-|3(\sin\theta+\cos\theta)|$

$=-3(\sin\theta-\cos\theta)-3(\sin\theta+\cos\theta)$

$(\because 0<\sin\theta<\cos\theta)$

$=-6\sin\theta$

답 $-6\sin\theta$

32 $\frac{4\cos x-\sin x}{\cos x+2\sin x}=3$에서

$4\cos x-\sin x=3\cos x+6\sin x$

$\therefore \cos x=7\sin x$

위의 식의 양변을 $\cos x$로 나누면

$1=\frac{7\sin x}{\cos x}$ $\quad\therefore \tan x=\frac{1}{7}$

$\therefore 14\tan x=2$

답 2

33 $|\sin\theta|=|\cos\theta|$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$2\sin^2\theta=1,\quad \sin^2\theta=\frac{1}{2}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$이므로

$\sin\theta\cos\theta-\tan\theta=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-(-1)$

$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

답 ③

34 $\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta}+(1-\sin\theta)\tan\theta$

$=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{(1-\sin\theta)\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\sin\theta\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{(\cos^2\theta+1-2\sin\theta+\sin^2\theta)\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{2(1-\sin\theta)\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}$

따라서 $\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}=1$이므로

$2\sin\theta=\cos\theta$ ······ ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\quad\sin^2\theta+(2\sin\theta)^2=1$

$5\sin^2\theta=1,\quad \sin^2\theta=\frac{1}{5}$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}\ \left(\because \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$

Ⓦ 05 삼각함수

㉠에서 $\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ 답 $-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

35 $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}$

$=\dfrac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}+\dfrac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{2}{1-\sin^2\theta}+\dfrac{2}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\cos^2\theta}+\dfrac{2}{\sin^2\theta}$ …… ㉠

$\tan\theta=\sqrt{2}+1$의 양변을 제곱하면

$\tan^2\theta=3+2\sqrt{2}$, $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=3+2\sqrt{2}$

$1-\cos^2\theta=(3+2\sqrt{2})\cos^2\theta$

$(4+2\sqrt{2})\cos^2\theta=1$

$\therefore \dfrac{1}{\cos^2\theta}=4+2\sqrt{2}$

이때 $\cos^2\theta=\dfrac{1}{4+2\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \dfrac{1}{\sin^2\theta}=\dfrac{4}{2+\sqrt{2}}=4-2\sqrt{2}$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=\dfrac{2}{\cos^2\theta}+\dfrac{2}{\sin^2\theta}$

$=2(4+2\sqrt{2})+2(4-2\sqrt{2})$

$=16$ 답 ⑤

36 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{8}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left\{1-\left(-\dfrac{1}{8}\right)\right\}=\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$ 답 $\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$

a^3+b^3
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

37 $\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$

이때

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{17}{9}$

이고 θ가 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로
$\sin\theta+\cos\theta<0$

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\left(-\dfrac{\sqrt{17}}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{17}}{9}$

답 $\dfrac{\sqrt{17}}{9}$

38 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

따라서 $\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2$이므로

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore (\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\cdot\dfrac{1}{2}=2$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ $\left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 답 $\sqrt{2}$

θ는 제1사분면의 각이므로
$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$
$\therefore \sin\theta+\cos\theta>0$

39 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

$1-2\sin\theta\cos\theta=2$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

이때

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$

이므로

$\sin\theta+\cos\theta=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \dfrac{1}{\sin^6\theta}+\dfrac{1}{\cos^6\theta}=(\sqrt{2})^6+(-\sqrt{2})^6$

$=8+8=16$ 답 16

40 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$

따라서 x^2의 계수가 9이고 $\sin\theta$, $\cos\theta$를 두 근으로 하는 이차방정식은

x^2의 계수가 a이고 α, β를 두 근으로 갖는 이차방정식은
$a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

$9\left(x^2-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{9}\right)=0$, 즉 $9x^2-3x-4=0$

답 $9x^2-3x-4=0$

41 $5x^2+x+k=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{5}$

이 식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{25}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{25}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{12}{25}$

이때

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{25}{12},$$

$\tan\theta\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}=1$

이므로 x^2의 계수가 12이고 $\tan\theta$, $\dfrac{1}{\tan\theta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$12\left(x^2+\dfrac{25}{12}x+1\right)=0$, 즉 $12x^2+25x+12=0$

답 $12x^2+25x+12=0$

42 $x^2+2ax+a=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=-2a$ …… ㉠

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=a$ …… ㉡

㉠에서 $2\sin\theta=-2a$ $\therefore \sin\theta=-a$

㉡의 좌변을 간단히 하면

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$
$=\sin^2\theta-\cos^2\theta$
$=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)$
$=2\sin^2\theta-1$

즉 $2\sin^2\theta-1=a$이므로 $\sin\theta=-a$를 대입하면

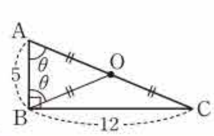
$2(-a)^2-1=a$, $2a^2-a-1=0$

$(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$ ($\because a<0$)

답 ②

43 점 O가 △ABC의 외심이므로



$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같다.

$\therefore \angle BAO=\angle ABO=\theta$

$\overline{AC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$이므로 △ABC에서

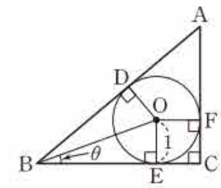
$\sin\theta=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{12}{13}$, $\cos\theta=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{5}{13}$,

$\tan\theta=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{12}{5}$

$\therefore 65(\sin\theta+\cos\theta)\tan\theta=65\cdot\left(\dfrac{12}{13}+\dfrac{5}{13}\right)\cdot\dfrac{12}{5}$
$=204$

답 204

44 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 세 변과 내접원의 교점을 각각 D, E, F라 하면



$\overline{AD}=\overline{AF}$, $\overline{BD}=\overline{BE}$, $\overline{CE}=\overline{CF}$

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

이때 △OBE에서

$\overline{BD}=\overline{BE}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

한편 □OECF는 정사각형이므로

$\overline{CE}=\overline{CF}=\overline{OE}=1$

따라서 $\overline{AD}=\overline{AF}=x$라 하면

$\left(\dfrac{1}{\tan\theta}+x\right)^2=\left(\dfrac{1}{\tan\theta}+1\right)^2+(x+1)^2$

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

$\dfrac{1}{\tan^2\theta}+\dfrac{2x}{\tan\theta}+x^2$
$=\dfrac{1}{\tan^2\theta}+\dfrac{2}{\tan\theta}+1+x^2+2x+1$

$2x\left(\dfrac{1}{\tan\theta}-1\right)=\dfrac{2}{\tan\theta}+2$

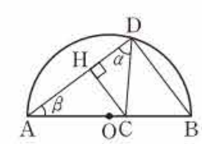
$2x\cdot\dfrac{1-\tan\theta}{\tan\theta}=2\cdot\dfrac{1+\tan\theta}{\tan\theta}$

$\therefore x=\dfrac{1+\tan\theta}{\tan\theta}\cdot\dfrac{\tan\theta}{1-\tan\theta}=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$\therefore \overline{AC}=x+1=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}+1=\dfrac{2}{1-\tan\theta}$

답 ④

45 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △DHC, △HAC에서



$\tan\alpha=\dfrac{\overline{CH}}{\overline{DH}}$, $\tan\beta=\dfrac{\overline{CH}}{\overline{AH}}$

$$\therefore \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\dfrac{\overline{CH}}{\overline{DH}}}{\dfrac{\overline{CH}}{\overline{AH}}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{DH}}$$

한편 △ACH∽△ABD (AA 닮음)이므로

∠A는 공통, ∠AHC=∠ADB=90°

$\overline{AH}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AB}=3:5$

따라서 $\overline{AH}:\overline{DH}=3:2$이므로

$\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{DH}}=\dfrac{3}{2}$

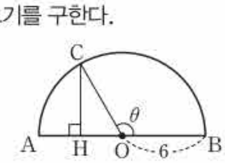
답 $\dfrac{3}{2}$

도전! 수능 기출

W 42쪽

01 1st $\overset{\frown}{BC}$에 대한 중심각의 크기를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 반원의 중심을 O라 하면



$\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=6$

$\overline{CO}$를 긋고 $\angle COB=\theta$라 하면 $\widehat{BC}=4\pi$이므로

$$6\theta=4\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$$

2nd 한 변이 $\overline{CH}$인 직각삼각형을 찾아 $\overline{CH}$의 길이를 구한 후 $\overline{CH}^2$의 값을 구한다.

직각삼각형 CHO에서 $\overline{OC}=6$이고,

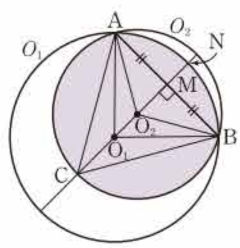
$\angle COH=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\overline{CH}=\overline{OC}\sin\frac{\pi}{3}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{CH}^2=(3\sqrt{3})^2=27$$

답 27

02 **1st** 원 O_1과 원 O_2의 공통부분의 넓이는 어떤 도형의 넓이를 이용하여 구할 수 있는지 파악한다.



오른쪽 그림과 같이 원 O_1의 중심을 O_1, 원 O_2의 중심을 O_2라 하면 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 두 점 O_1, O_2를 지난다.

$\overline{AB}$의 수직이등분선이 $\overline{AB}$와 만나는 점을 M, 원 O_1과 만나는 두 점 중에서 점 M에 가까운 점을 N이라 하면 원 O_1과 원 O_2의 공통부분의 넓이는

$$2\{(\text{부채꼴 } AO_1N\text{의 넓이})+(\text{부채꼴 } AO_2C\text{의 넓이})-\triangle AO_1O_2\}$$

2nd 부채꼴 AO_1N의 넓이를 구한다.

직각삼각형 AO_1M에서 $\overline{AO_1}=6$이고,

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로 $\angle AO_1M=\theta$라 하면

$$\sin\theta=\frac{\overline{AM}}{\overline{AO_1}}=\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\qquad \theta=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore (\text{부채꼴 } AO_1N\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi$$

3rd 부채꼴 AO_2C의 넓이를 구한다.

$\triangle ACB$가 정삼각형이므로 $\qquad \angle AO_2C=\frac{2}{3}\pi$

$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$이므로 $\angle AO_2C=2\angle ABC=\frac{2}{3}\pi$

점 O_2는 정삼각형 ACB의 무게중심이므로

$$\overline{CO_2}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6\sqrt{2}\right)=2\sqrt{6}$$

$$\therefore (\text{부채꼴 } AO_2C\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{6})^2\cdot\frac{2}{3}\pi=8\pi$$

4th $\triangle AO_1O_2$의 넓이를 구한다.

직각삼각형 AO_2M에서

$$\overline{O_2M}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$$

$\overline{O_2M}=\sqrt{\overline{AO_2}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{\overline{CO_2}^2-\overline{AM}^2}$

직각삼각형 AO_1M에서

$$\overline{O_1M}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$$

$\overline{O_1M}=\sqrt{\overline{AO_1}^2-\overline{AM}^2}$

즉 $\overline{O_1O_2}=\overline{O_1M}-\overline{O_2M}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$이므로

$$\triangle AO_1O_2=\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2}-\sqrt{6})\cdot 3\sqrt{2}=9-3\sqrt{3}$$

$\frac{1}{2}\cdot\overline{O_1O_2}\cdot\overline{AM}$

5th 원 O_1과 원 O_2의 공통부분의 넓이를 구하여 $p+q+r$의 값을 구한다.

원 O_1과 원 O_2의 공통부분의 넓이는

$$2\left\{\frac{9}{2}\pi+8\pi-(9-3\sqrt{3})\right\}=-18+6\sqrt{3}+25\pi$$

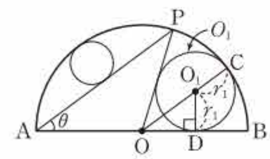
이므로

$$p=-18,\ q=6,\ r=25$$

$$\therefore p+q+r=13$$

답 13

03 **1st** r_1의 값을 구한다.



오른쪽 그림과 같이 부채꼴 POB에 내접하는 원을 O_1이라 하고, 원 O_1의 중심을 O_1, 원 O_1이 호 BP와 만나는 점을 C, $\overline{OB}$와 만나는 점을 D라 하면

$$\overline{O_1C}=\overline{O_1D}=r_1$$

$\angle BAP=\theta$라 하면

$\widehat{BP}$에 대한 중심각

$$\angle POB=2\angle BAP=2\theta$$

$\widehat{BP}$에 대한 원주각

$$\therefore \angle COB=\frac{1}{2}\angle POB=\frac{1}{2}\cdot 2\theta=\theta$$

직각삼각형 O_1OD에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{O_1D}}{\overline{OO_1}}=\frac{r_1}{1-r_1}$$

$\overline{OO_1}=\overline{OC}-\overline{O_1C}=1-r_1$

이때 $\cos\theta=\frac{4}{5}$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

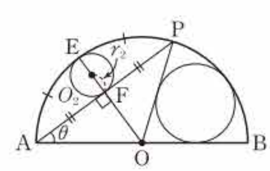
$$\sin^2\theta+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1, \qquad \sin^2\theta=\frac{9}{25}$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

즉 $\frac{r_1}{1-r_1}=\frac{3}{5}$이므로 $\qquad 5r_1=3-3r_1$

$$8r_1=3 \qquad \therefore r_1=\frac{3}{8}$$

2nd r_2의 값을 구한다.



오른쪽 그림과 같이 $\widehat{AP}$를 이등분하는 점을 E, $\overline{AP}$의 중점을 F라 하고, 두 점 E, F를 지름의 양 끝 점으로 하는 원을 O_2라 하면

$$\overline{EF}=2r_2$$

$\triangle AOP$는 $\overline{OA}=\overline{OP}=1$인 이등변삼각형이고 점 F는 $\overline{AP}$의 중점이므로

$$\angle OFA=\frac{\pi}{2}$$

따라서 직각삼각형 OFA에서

$$\overline{OF}=\overline{OA}\sin\theta=\frac{3}{5}\ (\because ㉠)$$

이때 $\overline{OE}=1$이므로

$$\overline{EF}=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

$$\therefore r_2=\frac{1}{2}\overline{EF}=\frac{1}{5}$$

(3rd) r_1r_2의 값을 구한다.

$r_1r_2=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{40}$ 답 ①

04 (1st) 점 P의 x좌표, y좌표를 삼각함수를 이용하여 나타낸다.

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 단위원 위의 점이므로

$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$

(2nd) $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-\frac{5}{2}$임을 이용하여 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구한다.

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{5}{2}$

이므로

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{5}$

(3rd) $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구한다.

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{9}{5}$

이때 $x<0,\ y>0$에서 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 답 ④

06 삼각함수의 그래프

W 43쪽

01 함수 $f(x)$의 주기가 p이므로

$f(x+p)=f(x)$

$\therefore\ f(2p)=f(p)=f(0)$

$=\frac{\sin^2 0+\tan 0-2}{\cos 0+3}$

$=\frac{0+0-2}{1+3}=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

02 $f(x+2)=f(x-2)$의 양변에 x 대신 $x+2$를 대입하면

$f(x+4)=f(x)$

이므로

$f(1000)=f(996)=f(992)=\cdots=f(0)=1,$

$f(1001)=f(997)=f(993)=\cdots=f(1)=-2,$

$f(1002)=f(998)=f(994)=\cdots=f(2)=-3$

$\therefore\ f(1000)+f(1001)-f(1002)$

$=1+(-2)-(-3)=2$ 답 ⑤

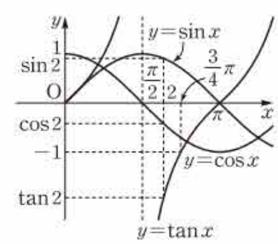
03 $\frac{\pi}{2}<2<\frac{3}{4}\pi$이므로

오른쪽 그림에서

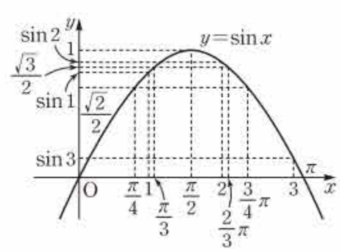
$\tan 2<\cos 2<\sin 2$

$\therefore\ C<B<A$

답 $C<B<A$



04



$y=\sin x\,(0\le x\le\pi)$에서

① $0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때

➡ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

② $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$일 때

➡ x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 1<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{2}<2<\frac{2}{3}\pi$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin 2<1$

$\frac{3}{4}\pi<3<\pi$이므로 $0<\sin 3<\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $0<\sin 3<\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 1<\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin 2$이므로

$f(3)<f(1)<f(2)$ 답 ④

05 $y=\sin x$의 그래프에서

$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore\ a+b=\pi$

$\frac{c+d}{2}=\frac{5}{2}\pi$ $\therefore\ c+d=5\pi$

$\therefore\ \cos(a+b+c+d)=\cos 6\pi=1$ 답 1

$y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$의 그래프가 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 이 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{4}$의 두 교점도 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다.

06 $y=\cos\frac{x}{3}$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$

$y=\cos\frac{x}{3}$ $(0\le x\le 6\pi)$의 그래프는 직선 $x=3\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\delta}{2}=3\pi \quad \therefore \alpha+\delta=6\pi$

$\frac{\beta+\gamma}{2}=3\pi \quad \therefore \beta+\gamma=6\pi$

$\therefore \alpha+3\beta+3\gamma+\delta=(\alpha+\delta)+3(\beta+\gamma)$

$=6\pi+3\cdot 6\pi=24\pi$ 답 ③

다른 풀이 $y=\cos\frac{x}{3}$ $(0\le x\le 3\pi)$의 그래프는 점 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi \quad \therefore \alpha+\beta=3\pi$

$y=\cos\frac{x}{3}$ $(3\pi\le x\le 6\pi)$의 그래프는 점 $\left(\frac{9}{2}\pi,\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{9}{2}\pi \quad \therefore \gamma+\delta=9\pi$

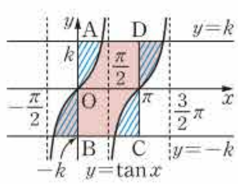
$y=\cos\frac{x}{3}$ $(0\le x\le 6\pi)$의 그래프는 직선 $x=3\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=3\pi \quad \therefore \beta+\gamma=6\pi$

$\therefore \alpha+3\beta+3\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+2(\beta+\gamma)+(\gamma+\delta)$

$=3\pi+2\cdot 6\pi+9\pi=24\pi$

07 오른쪽 그림에서 빗금 친 네 부분의 넓이가 모두 같으므로 $y=\tan x$의 그래프와 두 직선 $y=k$, $y=-k$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



이때 $\overline{AB}=k-(-k)=2k$, $\overline{AD}=\pi$이므로

$2k\pi=6\pi \quad \therefore k=3$ 답 3

08 $y=\tan\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

x 대신 $x+\frac{1}{3}$, y 대신 $y-\frac{1}{2}$을 대입한다.

$y=\tan\pi\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}$

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{12},\ a\right)$를 지나므로

$a=\tan\pi\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}=\tan\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2}$

$=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

09 ㄱ. $y=2\cos 3x-1$의 그래프는 $y=\cos 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\cos(3x+\pi)+2=\cos 3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2$의 그래프는 $y=\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=-\cos 3x+4$의 그래프는 $y=\cos 3x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\cos(6-3x)=\cos 3(x-2)$의 그래프는 $y=\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$y=\cos(6-3x)$
$=\cos(3x-6)$
$=\cos 3(x-2)$

이상에서 $y=\cos 3x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

쌤한마디

ㄹ에서 $y=\cos(6-3x)=\cos\{-3(x-2)\}$의 그래프는 $y=\cos 3x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 그런데 $y=\cos 3x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 y축에 대하여 대칭이동해도 그래프는 변하지 않는다.
따라서 $y=\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동만 해도 $y=\cos(6-3x)$의 그래프와 겹쳐진다.

10 $y=\sin\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sin\frac{1}{2}(x+\pi)$

이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

y 대신 $-y$를 대입한다.

$-y=\sin\frac{1}{2}(x+\pi)$

$y=-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore y=-\cos\frac{x}{2}$ 답 ②

11 $y=\cos\frac{x}{6}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=\cos\frac{1}{6}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+3$

$\therefore y=\cos\frac{1}{6}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4$

이 함수의 최댓값은 $1+4=5$, 최솟값은 $-1+4=3$이므로

$M=5,\ m=3$

$\therefore M+m=8$ 답 8

12 ① 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 주기는 $\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{4}}=4$이다.

③ $x=-3$일 때,

$$y=-5\tan\left(-\frac{3}{4}\pi+\pi\right)+2$$
$$=-5\tan\frac{\pi}{4}+2=-3$$

이므로 점 $(-3, 3)$을 지나지 않는다.

④ 그래프의 점근선의 방정식은

$$\frac{\pi}{4}x+\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\pi}{4}x=n\pi-\frac{\pi}{2}$$
$$\therefore x=4n-2\ (n\text{은 정수})$$

⑤ $y=-5\tan\left(\frac{\pi}{4}x+\pi\right)+2=-5\tan\frac{\pi}{4}(x+4)+2$

의 그래프는 $y=5\tan\frac{\pi}{4}x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

답 ④

13 ① $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

$f(x+4)=f(x)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{4}{n}$ (n은 자연수) 꼴이어야 한다.

$$\therefore f(x+4)=f(x)$$

② $f(x)=\cos\frac{5}{2}\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{5}{2}\pi}=\frac{4}{5}$

$$\therefore f(x+4)=f\left(x+\frac{16}{5}\right)=f\left(x+\frac{12}{5}\right)$$
$$=\cdots=f(x)$$

③ $f(x)=\sin 2\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2\pi}=1$

$$\therefore f(x+4)=f(x+3)=f(x+2)=f(x+1)$$
$$=f(x)$$

④ $f(x)=\sin\frac{12}{5}\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{12}{5}\pi}=\frac{5}{6}$

이때

$$f(x+4)=f\left(x+\frac{19}{6}\right)=f\left(x+\frac{7}{3}\right)$$
$$=f\left(x+\frac{3}{2}\right)=f\left(x+\frac{2}{3}\right)$$
$$=f\left(x-\frac{1}{6}\right)$$

이므로 $f(x+4)\neq f(x)$

⑤ $f(x)=\tan\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

$$\therefore f(x+4)=f(x+2)=f(x)$$

답 ④

14 $f(x)=a\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+k$의 최댓값이 5이고 $a<0$이므로

$-a+k=5$ ...... ㉠

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=4$이므로 $a\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+k=4$

$\therefore -\frac{1}{2}a+k=4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ k=3$

따라서 $f(x)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+3$이므로 $f(x)$의 최솟값은

$-2+3=1$

답 1

쌤한마디

삼각함수의 미정계수는 다음과 같이 최대·최소, 주기, 함숫값을 이용하여 구한다.

① $y=a\sin bx+c$, $y=a\cos bx+c$에서
- a, c → 삼각함수의 최대·최소 또는 함숫값을 이용
- b → 삼각함수의 주기를 이용

② $y=a\tan bx+c$에서
- a, c → 함숫값을 이용
- b → 삼각함수의 주기 또는 점근선의 방정식을 이용

15 조건 ㈎에서 $f(x)$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore b=2$

$$\therefore f(x)=a\tan(2x+c)+d$$
$$=a\tan 2\left(x+\frac{c}{2}\right)+d$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 $y=a\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{2}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이므로 조건 ㈏에서

$-\frac{c}{2}=-\frac{\pi}{6},\ d=2$

$\therefore c=\frac{\pi}{3},\ d=2$

즉 $f(x)=a\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2$이고 조건 ㈐에서

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=6\sqrt{3}+2$이므로

$a\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2=6\sqrt{3}+2$

$-a\sqrt{3}+2=6\sqrt{3}+2$ $\therefore a=-6$

$\therefore abcd=-8\pi$

답 -8π

16 주어진 함수의 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로

$a+b=1,\ -a+b=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-1$

따라서 주어진 함수는 $y=2\cos\pi\left(x+\frac{1}{3}\right)-1$이고, 이 함수의 그래프의 주기가 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로

$c-\frac{2}{3}=1$ $\therefore c=\frac{5}{3}$

$\therefore\ a+2b+3c=2+2\cdot(-1)+3\cdot\frac{5}{3}$

$=5$　　답 5

17 $f(x)=a\sin bx+c$ 또는 $f(x)=a\cos bx+c$ $(a>0,\ b>0)$로 놓으면 함수 $f(x)$의 최댓값이 2, 최솟값이 -4이고 $a>0$이므로

$a+c=2,\ -a+c=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ c=-1$

또 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$　　$\therefore\ b=4$

$\therefore\ f(x)=3\sin 4x-1$ 또는 $f(x)=3\cos 4x-1$

그런데 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$f(x)=3\cos 4x-1$　　답 ⑤

$f(0)=2$이어야 한다.

18 주어진 그래프에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 4, -4이고, 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 2, -2이다.

이때 두 함수의 주기가 모두 8이므로 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 x축의 방향으로 $8n+\frac{5}{2}$ (n은 정수)만큼 평행이동한 것이다.

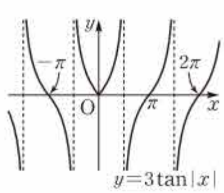
$g(x)=af(x-b)$에서 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 a배 한 후 x축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것임을 알 수 있다.

$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=8n+\frac{5}{2}$ (n은 정수)

그런데 $-4<b<4$이므로　　$b=\frac{5}{2}$

$\therefore\ a+b=3$　　답 3

19 $y=3\tan|x|$의 그래프는 $y=3\tan x$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 그린 후 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



① 정의역은 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이다.

② 주기함수가 아니다.

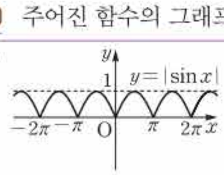
③ 최댓값, 최솟값은 없다.

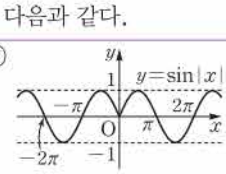
⑤ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

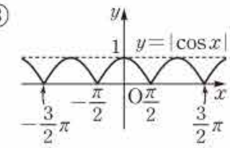
답 ④

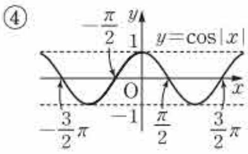
20 주어진 함수의 그래프는 다음과 같다.

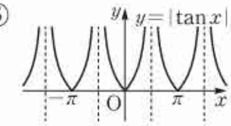
①, ③, ⑤는 주기가 π인 주기함수이고, ④는 주기가 2π인 주기함수이다.

①


②


③


④


⑤


따라서 주기함수가 아닌 것은 ②이다.　　답 ②

21 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\cos\left(5\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

22 $\sin(\pi+\theta)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{5}{6}$에서

$-\sin\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}=\frac{5}{6}$,　　$-\sin\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{5}{6}$

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{5}{6}$

$\therefore\ 18(1-\cos\theta)=18\cdot\left(1+\frac{5}{6}\right)=33$　　답 ④

23 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right\}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

$\therefore\ \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

$=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=1$　　답 1

24 $\cos 10^\circ=\cos(90^\circ-80^\circ)=\sin 80^\circ$

$\cos 20^\circ=\cos(90^\circ-70^\circ)=\sin 70^\circ$

$\cos 30^\circ=\cos(90^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ$

$\cos 40^\circ=\cos(90^\circ-50^\circ)=\sin 50^\circ$

$\therefore\ \cos^2 10^\circ+\cos^2 20^\circ+\cdots+\cos^2 80^\circ+\cos^2 90^\circ$

$=(\cos^2 10^\circ+\cos^2 80^\circ)+(\cos^2 20^\circ+\cos^2 70^\circ)$

$+(\cos^2 30^\circ+\cos^2 60^\circ)$

$+(\cos^2 40^\circ+\cos^2 50^\circ)+\cos^2 90^\circ$

$=(\sin^2 80^\circ+\cos^2 80^\circ)+(\sin^2 70^\circ+\cos^2 70^\circ)$

$+(\sin^2 60^\circ+\cos^2 60^\circ)$

$+(\sin^2 50^\circ+\cos^2 50^\circ)+\cos^2 90^\circ$

$=1+1+1+1+0=4$　　답 ④

25 $6\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin 5\theta=\sin(6\theta-\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$,

$\sin 4\theta=\sin(6\theta-2\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\cos 2\theta$

$\therefore \sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\sin^2 4\theta+\sin^2 5\theta$
$=(\sin^2\theta+\sin^2 5\theta)+(\sin^2 2\theta+\sin^2 4\theta)+\sin^2 3\theta$
$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)$
$\quad+\sin^2 3\theta$
$=1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

Q BOX: $6\theta=\frac{\pi}{2}$에서 $3\theta=\frac{\pi}{4}$이므로
$\sin^2 3\theta=\sin^2\frac{\pi}{4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

26 $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi}{16}$이므로 점 A_k의 x좌표는 차례대로

$\frac{\pi}{16}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3}{16}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{16}\pi$, $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{7}{16}\pi$

$\therefore \overline{A_1B_1}^2+\overline{A_2B_2}^2+\overline{A_3B_3}^2+\cdots+\overline{A_7B_7}^2$
$=\cos^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3}{16}\pi+\cos^2\frac{\pi}{4}$
$\quad+\cos^2\frac{5}{16}\pi+\cos^2\frac{3}{8}\pi+\cos^2\frac{7}{16}\pi$

Q BOX: $A_1\left(\frac{\pi}{16}, 0\right)$, $B_1\left(\frac{\pi}{16}, \cos\frac{\pi}{16}\right)$이므로
$\overline{A_1B_1}=\cos\frac{\pi}{16}$

이때

$\cos\frac{\pi}{16}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7}{16}\pi\right)=\sin\frac{7}{16}\pi$,

$\cos\frac{\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{8}\pi\right)=\sin\frac{3}{8}\pi$,

$\cos\frac{3}{16}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{16}\pi\right)=\sin\frac{5}{16}\pi$

이므로

$\overline{A_1B_1}^2+\overline{A_2B_2}^2+\overline{A_3B_3}^2+\cdots+\overline{A_7B_7}^2$
$=\left(\sin^2\frac{7}{16}\pi+\cos^2\frac{7}{16}\pi\right)+\left(\sin^2\frac{3}{8}\pi+\cos^2\frac{3}{8}\pi\right)$
$\quad+\left(\sin^2\frac{5}{16}\pi+\cos^2\frac{5}{16}\pi\right)+\cos^2\frac{\pi}{4}$
$=1+1+1+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ 답 $\frac{7}{2}$

27 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이므로

$A+B+C=\pi$, $A=C$

ㄱ. $2A+B=\pi$이므로
$\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{B}{2}$

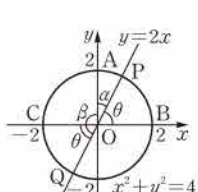
Q BOX: $2A+B=A+A+B$
$=C+A+B$
$=\pi$

ㄴ. $2A+B=\pi$이므로
$\cos B=\cos(\pi-2A)=-\cos 2A$

ㄷ. $2C+B=\pi$이므로
$\tan 2B=\tan(2\pi-4C)=-\tan 4C$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ①

28 오른쪽 그림과 같이 $B(2, 0)$, $C(-2, 0)$이라 하고 $\angle POB=\theta$라 하면 $\angle QOC=\theta$이므로



$\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$, $\beta=\frac{\pi}{2}+\theta$

$\therefore \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$
$=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$

Q BOX: 직선 $y=2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이므로
$\tan\theta=2$

이때 $\tan\theta=2$이므로

$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=-2$ 답 -2

다른 풀이 $\alpha+\beta=\pi$이므로

$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=\frac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{1}{\tan\alpha}$

이때 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2$이므로

$\frac{1}{\tan\alpha}=2$

$\therefore \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=-\frac{1}{\tan\alpha}=-2$

29 $-1\le\cos x\le 1$이므로

$-4\le\cos x-3\le -2$

$2\le|\cos x-3|\le 4$

$\therefore -4+k\le -|\cos x-3|+k\le -2+k$

따라서 주어진 함수의 최댓값이 $-2+k$, 최솟값이 $-4+k$이므로

$(-2+k)+(-4+k)=4$

$-6+2k=4 \quad \therefore k=5$ 답 5

30 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5}{6}\pi-x\right)+4$

$=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}+4$

$=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4$

$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4$

$0\le x\le 2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{5}{3}\pi$이므로 주어진 함수는 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{5}{6}\pi$일 때 최댓값 6을 갖는다.

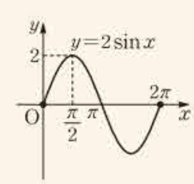
Q BOX: $2\sin\frac{\pi}{2}+4=2+4=6$

따라서 $a=\frac{5}{6}\pi$, $b=6$이므로

$ab=5\pi$ 답 ④

쌤 한마디

$0\le x\le 2\pi$에서 $y=2\sin x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최댓값 2를 갖는다.

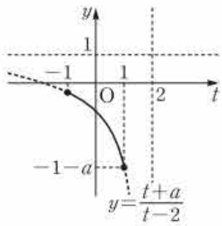


이때 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4$는 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 최댓값을 갖는다.

31 $y=\dfrac{\sin x+a}{\sin x-2}$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=\frac{t+a}{t-2}=\frac{(t-2)+a+2}{t-2}=\frac{a+2}{t-2}+1$$

이때 $a>-2$에서 $a+2>0$이므로 $y=\dfrac{t+a}{t-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=1$일 때 최솟값은 $-1-a$이므로

$-1-a=-3$

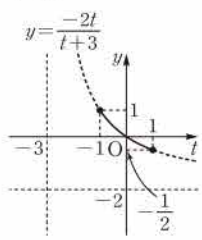
$\therefore a=2$

답 ④

32 $y=\dfrac{2\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)}{\cos x+3}=\dfrac{-2\cos x}{\cos x+3}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=\frac{-2t}{t+3}=\frac{-2(t+3)+6}{t+3}=\frac{6}{t+3}-2$$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 1, $t=1$일 때 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$이므로 구하는 합은



$1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ 　답 $\dfrac{1}{2}$

33 $y=-2\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+2\cos(x+\pi)+k$

$=-2\sin^2 x-2\cos x+k$

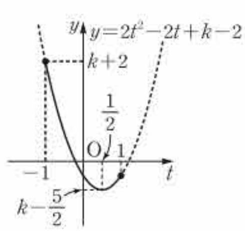
$=-2(1-\cos^2 x)-2\cos x+k$

$=2\cos^2 x-2\cos x+k-2$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=2t^2-2t+k-2=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{5}{2}$$

오른쪽 그림에서 $t=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값은 $k-\dfrac{5}{2}$이므로



$k-\dfrac{5}{2}=-1$

$\therefore k=\dfrac{3}{2}$

따라서 주어진 함수는 $t=-1$일 때 최댓값 $k+2$를 가지므로 구하는 최댓값은

$\dfrac{3}{2}+2=\dfrac{7}{2}$ 　답 ②

34 $y=\cos^2 x+2k\sin x-1+k$

$=(1-\sin^2 x)+2k\sin x-1+k$

$=-\sin^2 x+2k\sin x+k$

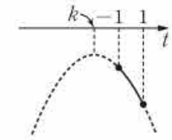
$\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2+2kt+k=-(t-k)^2+k^2+k$

$f(t)=-(t-k)^2+k^2+k$로 놓으면

꼭짓점의 x좌표의 위치에 따라 경우를 나누어 생각한다.

(i) $k<-1$일 때,



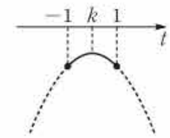
$f(t)$의 최댓값은 $f(-1)$이므로

$-1-k=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore k=-\dfrac{3}{4}$

그런데 $k=-\dfrac{3}{4}$은 $k<-1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $-1\le k\le 1$일 때,



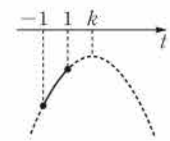
$f(t)$의 최댓값은 $f(k)$이므로

$k^2+k=-\dfrac{1}{4}$

$\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2=0$

$\therefore k=-\dfrac{1}{2}$

(iii) $k>1$일 때,



$f(t)$의 최댓값은 $f(1)$이므로

$-1+3k=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore k=\dfrac{1}{4}$

그런데 $k=\dfrac{1}{4}$은 $k>1$을 만족시키지 않는다.

이상에서 $k=-\dfrac{1}{2}$이고, $f(t)$는 $t=-\dfrac{1}{2}$, 즉 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값을 가지므로

$x=\dfrac{7}{6}\pi$ $\left(\because \dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}\pi\right)$

$\therefore a=\dfrac{7}{6}\pi$ 　답 $a=\dfrac{7}{6}\pi$, $k=-\dfrac{1}{2}$

35 진수의 조건에서 $\sin x>0$, $\cos x>0$이므로

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ $(\because 0<x<2\pi)$

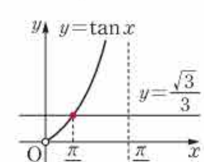
$\log\sin x-\log\cos x=-\dfrac{1}{2}\log 3$에서

$a>0$, $a\ne 1$, $M>0$, $N>0$일 때
① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
② $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
③ $\log_a N^k=k\log_a N$
(단, k는 실수)

$\log\dfrac{\sin x}{\cos x}=\log\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

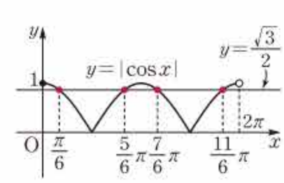
따라서 $\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 　$\tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표가 $\dfrac{\pi}{6}$이므로



$x=\dfrac{\pi}{6}$ 　답 $x=\dfrac{\pi}{6}$

36 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=|\cos x|$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5}{6}\pi$, $\dfrac{7}{6}\pi$, $\dfrac{11}{6}\pi$이므로



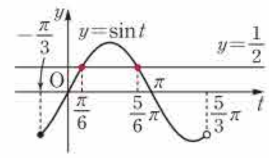
$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$ ...... ㉠

한편 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$에서 $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$이고 주어진 방정식은 $\sin t=\frac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로



$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 연립방정식의 해는

$x=\frac{7}{6}\pi$ 답 $x=\frac{7}{6}\pi$

37 $\pi\cos x=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서

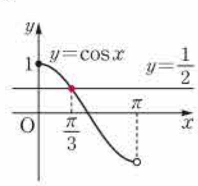
$-1<\cos x\le 1$ $\therefore -\pi<t\le\pi$

이때 주어진 방정식은 $\sin t=1$이므로

$t=\frac{\pi}{2}$

즉 $\pi\cos x=\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos x=\frac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{3}$이므로



$x=\frac{\pi}{3}$ 답 $x=\frac{\pi}{3}$

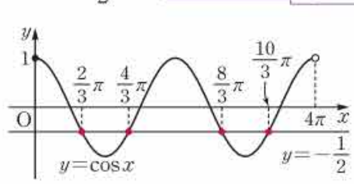
38 $4\sin^2 x-8\cos x-7=0$에서

$4(1-\cos^2 x)-8\cos x-7=0$

$4\cos^2 x+8\cos x+3=0$

$(2\cos x+3)(2\cos x+1)=0$

$\therefore \cos x=-\frac{1}{2}$ ($\because -1\le\cos x\le 1$)



위의 그림과 같이 $0\le x<4\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{8}{3}\pi$, $\frac{10}{3}\pi$이므로

Q BOX

$\sqrt{5\sin\theta-2}$에서
$\sin\theta\ge\frac{2}{5}$
이고 $-1\le\sin\theta\le 1$이므로
$\frac{2}{5}\le\sin\theta\le 1$

$0\le x<4\pi$이므로
$-1\le\cos x\le 1$

$y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{\pi}$배 한 것이다.

$x_1=\frac{2}{3}\pi$, $x_2=\frac{4}{3}\pi$, $x_3=\frac{8}{3}\pi$, $x_4=\frac{10}{3}\pi$

$\therefore x_1-x_2+x_3-x_4=\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi+\frac{8}{3}\pi-\frac{10}{3}\pi$

$=-\frac{4}{3}\pi$ 답 ⑤

39 $\sqrt{5\sin\theta-2}=2\cos\theta$의 양변을 제곱하면

$5\sin\theta-2=4\cos^2\theta$

$5\sin\theta-2=4(1-\sin^2\theta)$

$4\sin^2\theta+5\sin\theta-6=0$

$(\sin\theta+2)(4\sin\theta-3)=0$

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{4}$ $\left(\because \frac{2}{5}\le\sin\theta\le 1\right)$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}\sqrt{5\sin\theta-2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot\frac{3}{4}-2}$

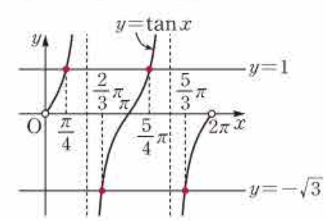
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{7}}{4}$

40 $\tan x-\frac{\sqrt{3}}{\tan x}=1-\sqrt{3}$의 양변에 $\tan x$를 곱하여 정리하면

$\tan^2 x+(\sqrt{3}-1)\tan x-\sqrt{3}=0$

$(\tan x+\sqrt{3})(\tan x-1)=0$

$\therefore \tan x=-\sqrt{3}$ 또는 $\tan x=1$



(ⅰ) $\tan x=-\sqrt{3}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(ⅱ) $\tan x=1$일 때,

$0<x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

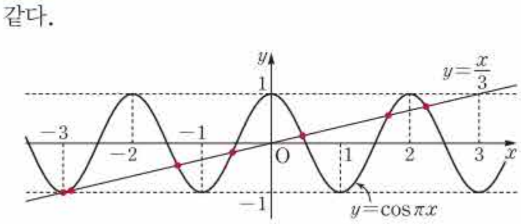
(ⅰ), (ⅱ)에서

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

따라서 $M=\frac{5}{3}\pi$, $m=\frac{\pi}{4}$이므로

$M+m=\frac{23}{12}\pi$ 답 ④

41 방정식 $\cos\pi x=\frac{x}{3}$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\cos\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{3}$의 교점의 개수와 같다.



06 삼각함수의 그래프

앞의 그림과 같이 함수 $y=\cos\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{3}$의 교점의 개수가 7이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 7이다. 답 ③

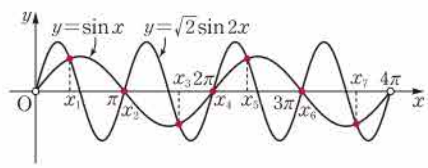
참고 $y=\frac{x}{3}$에서 $x>3$이면 $y>1$, $x<-3$이면 $y<-1$이므로 $x>3$ 또는 $x<-3$에서 직선 $y=\frac{x}{3}$는 함수 $y=\cos\pi x$의 그래프와 만나지 않는다.

42 $\sqrt{2}\sin 2x-\sin x=0$에서

$\sqrt{2}\sin 2x=\sin x$

방정식 $\sqrt{2}\sin 2x=\sin x$의 실근은 두 함수 $y=\sqrt{2}\sin 2x$, $y=\sin x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

$y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배, y축의 방향으로 $\sqrt{2}$배 한 것이다.



위의 그림과 같이 $0<x<4\pi$에서 두 함수 $y=\sqrt{2}\sin 2x$, $y=\sin x$의 그래프의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_7이라 하면

$\frac{x_1+x_3}{2}=\pi$, $\frac{x_5+x_7}{2}=3\pi$

$0<x<2\pi$에서 $y=\sqrt{2}\sin 2x$, $y=\sin x$의 그래프가 모두 점 $(\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이므로 두 점 $(x_1,\ \sin x_1)$, $(x_3,\ \sin x_3)$도 점 $(\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ x_1+x_3=2\pi$, $x_5+x_7=6\pi$

또 $x_2=\pi$, $x_4=2\pi$, $x_6=3\pi$이므로 구하는 합은

$x_1+x_2+\cdots+x_7=2\pi+6\pi+\pi+2\pi+3\pi$

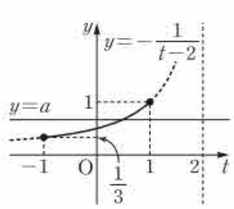
$=14\pi$ 답 14π

43 $a\tan x=2a-1$에서

$a(\tan x-2)=-1$ $\quad\therefore\ a=-\frac{1}{\tan x-2}$

$\tan x=t$로 놓으면 $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $-1\le t\le 1$이고 주어진 방정식이 실근을 가지려면 방정식 $a=-\frac{1}{t-2}$이 $-1\le t\le 1$에서 실근을 가져야 하므로 함수 $y=-\frac{1}{t-2}$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나야 한다.

따라서 오른쪽 그림에서 실수 a의 값의 범위는



$\frac{1}{3}\le a\le 1$

이므로 $\quad a=\frac{1}{3}$, $\beta=1$

$\therefore\ \beta-\alpha=\frac{2}{3}$ 답 ②

44 $3\sin^2 x+(3k+1)\cos x-k-3=0$에서

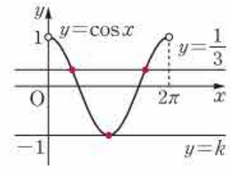
$3(1-\cos^2 x)+(3k+1)\cos x-k-3=0$

$3\cos^2 x-(3k+1)\cos x+k=0$

$(3\cos x-1)(\cos x-k)=0$

$\therefore\ \cos x=\frac{1}{3}$ 또는 $\cos x=k$

오른쪽 그림에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}$의 교점의 개수가 2이므로 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수는 1이어야 한다.

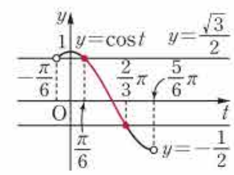


$\therefore\ k=-1$ 답 -1

45 $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $-\pi<x<\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}<t<\frac{5}{6}\pi$이고 주어진 부등식은

$-\frac{1}{2}\le\cos t\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $-\frac{1}{2}\le\cos t\le\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{2}{3}\pi$이므로



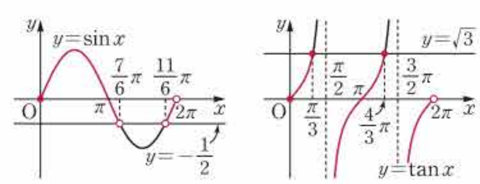
$\frac{\pi}{6}\le\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\le\frac{2}{3}\pi$

$-\frac{\pi}{6}\le\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore\ -\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$

따라서 $\alpha=-\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$ 답 $\frac{\pi}{3}$

46



위의 그림에서

$A=\left\{x\,\middle|\,0\le x<\frac{7}{6}\pi\text{ 또는 }\frac{11}{6}\pi<x<2\pi\right\}$

$B=\left\{x\,\middle|\,0\le x\le\frac{\pi}{3}\text{ 또는 }\frac{\pi}{2}<x\le\frac{4}{3}\pi\right.$

$\left.\text{또는 }\frac{3}{2}\pi<x<2\pi\right\}$

$\therefore\ A\cap B=\left\{x\,\middle|\,0\le x\le\frac{\pi}{3}\text{ 또는 }\frac{\pi}{2}<x<\frac{7}{6}\pi\right.$

$\left.\text{또는 }\frac{11}{6}\pi<x<2\pi\right\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소가 아닌 것은 ④이다.

$\frac{7}{6}\pi<\frac{4}{3}\pi<\frac{11}{6}\pi$

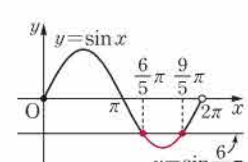
답 ④

47 오른쪽 그림에서 부등식 $\sin x\le\sin\frac{6}{5}\pi$의 해는

$\sin\frac{6}{5}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)$

$=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right)$

$=\sin\frac{9}{5}\pi$



$\frac{6}{5}\pi\le x\le\frac{9}{5}\pi$

따라서 $\frac{\pi}{2}\le\frac{5}{12}x\le\frac{3}{4}\pi$이므로

$y=\cos\theta\left(\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\right)$는 θ의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

$\cos\frac{3}{4}\pi\le\cos\frac{5}{12}x\le\cos\frac{\pi}{2}$

$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos\frac{5}{12}x \le 0$

따라서 $\cos\frac{5}{12}x$의 최솟값은 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

48 $2\cos^2\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) > 3\cos x$에서

$2\sin^2 x > 3\cos x$, $\quad 2(1-\cos^2 x) > 3\cos x$

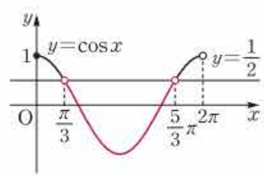
$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$

$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) < 0$

이때 $0 \le x < 2\pi$에서 $\cos x + 2 > 0$이므로

$2\cos x - 1 < 0 \qquad \therefore \cos x < \frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\cos x < \frac{1}{2}$의 해는



$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$

답 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$

49 $\cos^2\theta + 4\sin\theta \le a$에서

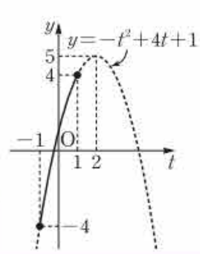
$(1-\sin^2\theta) + 4\sin\theta \le a$

$\therefore -\sin^2\theta + 4\sin\theta + 1 \le a$ ······ ㉠

$y = -\sin^2\theta + 4\sin\theta + 1$이라 하고 $\sin\theta = t$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고

$y = -t^2 + 4t + 1 = -(t-2)^2 + 5$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 y의 최댓값은 4이므로 부등식 ㉠이 모든 실수 θ에 대하여 성립하려면



$a \ge 4$

따라서 실수 a의 최솟값은 4이다. 답 4

Q BOX

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \le a$가 성립하려면

$(f(x)$의 최댓값$) \le a$

이어야 한다.

50 $y = x^2 - 6x\cos\theta + \sin^2\theta$

$= (x - 3\cos\theta)^2 - 9\cos^2\theta + \sin^2\theta$

이므로 이 함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(3\cos\theta,\ -9\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

이 점이 직선 $y = 5x - 9$ 위에 있으려면

$-9\cos^2\theta + \sin^2\theta = 5\cdot 3\cos\theta - 9$

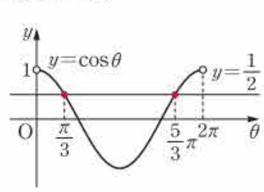
$-9\cos^2\theta + (1-\cos^2\theta) = 15\cos\theta - 9$

$2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

$(\cos\theta + 2)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}\ (\because -1 \le \cos\theta < 1)$

따라서 오른쪽 그림에서



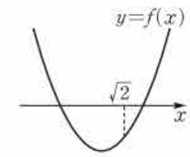
$\theta = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta = \frac{5}{3}\pi$

이므로 구하는 합은

$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi$

답 ⑤

51 $f(x) = x^2 + x\sin\theta - 1$이라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 $\sqrt{2}$가 있어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



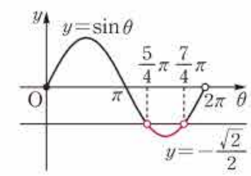
즉 $f(\sqrt{2}) < 0$이어야 하므로

$2 + \sqrt{2}\sin\theta - 1 < 0$

$\sqrt{2}\sin\theta < -1$

$\therefore \sin\theta < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는



$\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$

답 $\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$

52 $y = -x^2 - 5$를 $x\sin\theta + y\cos\theta = 1$에 대입하면

$x\sin\theta + (-x^2 - 5)\cos\theta = 1$

$\therefore x^2\cos\theta - x\sin\theta + 5\cos\theta + 1 = 0$ ······ ㉠

주어진 직선과 곡선이 만나려면 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D = (-\sin\theta)^2 - 4\cos\theta(5\cos\theta + 1) \ge 0$

$\sin^2\theta - 20\cos^2\theta - 4\cos\theta \ge 0$

$(1-\cos^2\theta) - 20\cos^2\theta - 4\cos\theta \ge 0$

$21\cos^2\theta + 4\cos\theta - 1 \le 0$

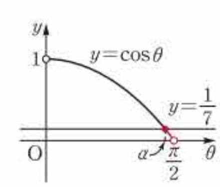
$(3\cos\theta + 1)(7\cos\theta - 1) \le 0$

$\therefore -\frac{1}{3} \le \cos\theta \le \frac{1}{7}$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $0 < \cos\theta < 1$이므로

$0 < \cos\theta \le \frac{1}{7}$

오른쪽 그림에서 θ는 $\cos\theta = \frac{1}{7}$일 때 최솟값을 가지므로



$\cos\alpha = \frac{1}{7}$ 답 ②

도전! 수능 기출

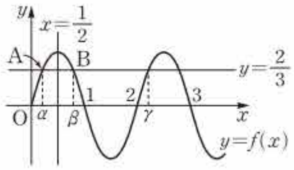
51쪽

01 1st 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 $\alpha+\beta$의 값을 구한다.

함수 $f(x) = \sin\pi x$의 주기는

$\frac{2\pi}{\pi} = 2$

오른쪽 그림에서 두 점 A, B는 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로



$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=1$$

2nd $f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)$의 값을 구한다.

$\gamma=2+\alpha$이므로

$$\alpha+\beta+\gamma+1=1+(2+\alpha)+1=4+\alpha,$$

$$\alpha+\beta+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

따라서

$$f(\alpha+\beta+\gamma+1)=f(4+\alpha)=f(\alpha)=\frac{2}{3},$$

함수 $f(x)$의 주기가 2이므로
$f(4+\alpha)=f(2+\alpha)$
$=f(\alpha)$

$$f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$$

이므로

$$f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}+(-1)=-\frac{1}{3}$$

답 ②

02 1st 두 점 A, B의 좌표를 이용하여 a의 값을 구한다.

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$에서 $\quad 2\sin\left(-\frac{a\pi}{2}\right)+b=0$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 지나므로 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$

$$-2\sin\frac{a\pi}{2}+b=0$$

$$\therefore\ b=2\sin\frac{a\pi}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=0$에서 $\quad 2\sin\frac{7a\pi}{2}+b=0$

$$\therefore\ b=-2\sin\frac{7a\pi}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

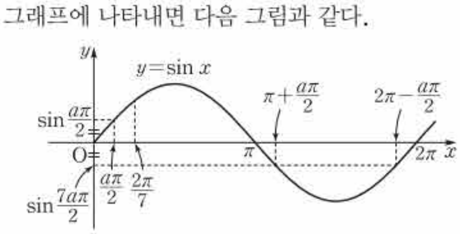
㉠, ㉡에서

$$\sin\frac{a\pi}{2}=-\sin\frac{7a\pi}{2} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

이때 $0<a<\frac{4}{7}$에서

$$0<\frac{a\pi}{2}<\frac{2\pi}{7},\ 0<\frac{7a\pi}{2}<2\pi$$

또 ㉢에서 $\sin\frac{7a\pi}{2}=-\sin\frac{a\pi}{2}$이므로 함수 $y=\sin x$의 그래프에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $\frac{7a\pi}{2}=\pi+\frac{a\pi}{2}$ 또는 $\frac{7a\pi}{2}=2\pi-\frac{a\pi}{2}$이므로

$$3a\pi=\pi \text{ 또는 } 4a\pi=2\pi$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{3} \text{ 또는 } a=\frac{1}{2}$$

2nd a의 값에 따른 b의 값을 구한다.

㉠에서

(i) $a=\frac{1}{3}$일 때,

$$b=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때,

$$b=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

이때 b가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad a=\frac{1}{3},\ b=1$

3rd $30(a+b)$의 값을 구한다.

$30(a+b)=30\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)=40$

답 40

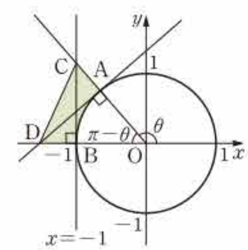
03 1st △OCD의 넓이를 θ에 대한 삼각함수로 나타낸다.

$$\triangle\mathrm{OCD}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{DO}}\cdot\overline{\mathrm{CB}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직각삼각형 OCB에서 $\angle\mathrm{BOC}=\pi-\theta$이므로

$$\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{BO}}\cdot\tan(\pi-\theta)$$

$$=-\tan\theta$$



직선 AD는 원의 접선이므로 두 직선 AD, AO는 서로 수직이다.

직각삼각형 OAD에서

$$\overline{\mathrm{DO}}=\frac{\overline{\mathrm{AO}}}{\cos(\pi-\theta)}=-\frac{1}{\cos\theta}$$

따라서 ㉠에서

$$\triangle\mathrm{OCD}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)\cdot(-\tan\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)\cdot\left(-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

2nd 부채꼴 AOB의 넓이를 θ에 대한 식으로 나타낸다.

부채꼴 AOB는 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\pi-\theta$이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\pi-\theta)=\frac{1}{2}(\pi-\theta) \qquad \cdots\cdots ㉢$$

3rd 색칠한 부분의 넓이를 구한다.

㉡, ㉢에서 색칠한 부분의 넓이는

(색칠한 부분의 넓이)
$=$△OCD
$-$(부채꼴 AOB의 넓이)

$$\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}-\frac{1}{2}(\pi-\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$$

답 ④

04 1st 곡선과 직선이 만나는 점의 x좌표를 구한다.

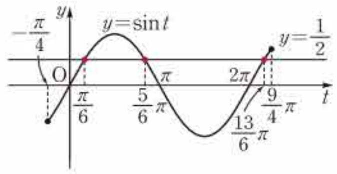
$y=2$를 $y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$에 대입하면

$$4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)=2$$

$$\therefore\ \sin\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{4}(x-\pi)=t$로 놓으면 $0\le x\le 10\pi$에서

$-\frac{\pi}{4}\le t\le \frac{9}{4}\pi$이고　　$\sin t=\frac{1}{2}$

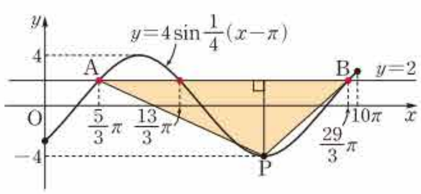


위의 그림과 같이 $-\frac{\pi}{4}\le t\le \frac{9}{4}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$이므로

$$\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{5}{6}\pi$$
$$\text{또는 } \frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{13}{6}\pi$$
$$\therefore x=\frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{13}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{29}{3}\pi$$

2nd △PAB의 넓이가 최대일 조건을 구한다.

$0\le x\le 10\pi$에서 곡선 $y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$와 직선 $y=2$는 다음 그림과 같다.



△PAB의 넓이가 최대이려면 밑변의 길이가 가장 길어야 하므로 두 점 A, B는 위의 그림과 같아야 하고, 높이도 가장 길어야 하므로 점 P는 위의 그림과 같이 y좌표가 -4인 점이어야 한다.

3rd k의 값을 구한다.

△PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{29}{3}\pi-\frac{5}{3}\pi\right)\cdot\{2-(-4)\}=\frac{1}{2}\cdot 8\pi\cdot 6$$
$$=24\pi$$
$$\therefore k=24$$

답 24

07 삼각함수의 활용 W 52쪽

01 ㄱ. $A+B+C=\pi$이므로

$$a\sin(A+C)=a\sin(\pi-B)=a\sin B$$

ㄴ. 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$이므로

$$a\sin B=b\sin A$$
$$\therefore a\sin(A+C)=a\sin B=b\sin A$$

ㄷ. 사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$이므로

$$\sin B=\frac{b\sin C}{c}$$
$$\therefore a\sin(A+C)=a\sin B=\frac{ab\sin C}{c}$$

이상에서 $a\sin(A+C)$와 항상 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

02 △ADC에서 $\angle ADC=90°-45°=45°$이므로

$\overline{CD}=\overline{AC}=4$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

△ABD에서　　$\angle BAD=45°-15°=30°$

따라서 △ABD에서 사인법칙에 의하여

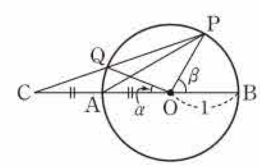
$$\frac{\overline{BD}}{\sin 30°}=\frac{4\sqrt{2}}{\sin 15°}$$
$$\overline{BD}\sin 15°=4\sqrt{2}\sin 30°$$
$$\therefore \overline{BD}=4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$
$$=4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$
$$=4+4\sqrt{3}$$

$$\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=8+4\sqrt{3}$$

답 $8+4\sqrt{3}$

03 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$를 그으면



$$\angle BAP=\frac{1}{2}\angle BOP=\frac{\beta}{2}$$
$$\angle APQ=\frac{1}{2}\angle AOQ=\frac{\alpha}{2}$$

따라서 △CAP에서 사인법칙에 의하여

$\overline{AC}=\overline{OA}=1$

$$\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle APC)}$$
$$\frac{\overline{CP}}{\sin\left(\pi-\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$\therefore \overline{CP}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

답 ①

04 △ABD와 △ACD의 외접원이 같으므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{5}{\sin(\angle ADC)}=\frac{3}{\sin(\angle ADB)}$$

△ABD와 △ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{5}{\sin(\angle ADC)}=\frac{3}{\sin(\angle ADB)}=2R$$

W 07 삼각함수의 활용

$5\sin(\angle ADB)=3\sin(\angle ADC)$

$\therefore \sin(\angle ADB)=\frac{3}{5}\sin(\angle ADC)$

$=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

05 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin 40^\circ}=2\cdot 2 \quad \therefore \overline{AB}=4\sin 40^\circ$

또 $\angle CBD=90^\circ-40^\circ=50^\circ$이고 $\triangle BCD$의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin 50^\circ}=2\cdot 2$

$\therefore \overline{CD}=4\sin 50^\circ=4\cos 40^\circ$

$\sin 50^\circ$
$=\sin(90^\circ-40^\circ)$
$=\cos 40^\circ$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{CD}^2=16\sin^2 40^\circ+16\cos^2 40^\circ$

$=16$ 답 ③

06 $\angle ABD=\angle ACD=70^\circ$이므로

$\widehat{AD}$에 대한 원주각

$\angle ABC=70^\circ+20^\circ=90^\circ$

따라서 $\overline{AC}$는 원의 지름이다.

한편 $\angle CAD=\angle CBD=20^\circ$이므로

$\widehat{CD}$에 대한 원주각

$\angle BAD=25^\circ+20^\circ=45^\circ$

따라서 $\triangle ABD$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin 45^\circ}=6$

$\therefore \overline{BD}=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

쌤 한마디

반원에 대한 원주각의 크기가 90°이므로 $\angle ABC=90^\circ$에서 $\overline{AC}$가 원의 지름임을 알 수 있다.

07 $ab : bc : ca=6 : 3 : 4$이므로

$ab=6k^2,\ bc=3k^2,\ ca=4k^2\ (k>0)$

으로 놓으면

$ab\cdot bc\cdot ca=6k^2\cdot 3k^2\cdot 4k^2$

$(abc)^2=72k^6$

$\therefore abc=6\sqrt{2}k^3\ (\because abc>0)$

따라서

$a=\frac{abc}{bc}=\frac{6\sqrt{2}k^3}{3k^2}=2\sqrt{2}k,$

$b=\frac{abc}{ac}=\frac{6\sqrt{2}k^3}{4k^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}k,$

$c=\frac{abc}{ab}=\frac{6\sqrt{2}k^3}{6k^2}=\sqrt{2}k$

이므로

$\sin A : \sin B : \sin C=a : b : c$

$=2\sqrt{2}k : \frac{3\sqrt{2}}{2}k : \sqrt{2}k$

$=4 : 3 : 2$ 답 ⑤

Q BOX

08 $6\sin A=3\sin B=2\sqrt{3}\sin C=k\ (k>0)$로 놓으면

세 각 A, B, C는 모두 0°보다 크고 180°보다 작으므로
$\sin A>0,\ \sin B>0,$
$\sin C>0$

$\sin A=\frac{k}{6},\ \sin B=\frac{k}{3},\ \sin C=\frac{k}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}k$

이때

$a : b : c=\sin A : \sin B : \sin C$

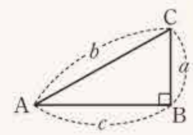
$=\frac{k}{6} : \frac{k}{3} : \frac{\sqrt{3}}{6}k$

$=1 : 2 : \sqrt{3}$

이므로

$a^2 : b^2 : c^2=1 : 4 : 3 \quad \therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이므로



$\sin C=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore C=60^\circ\ (\because 0^\circ<C<90^\circ)$ 답 60°

09 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{2})^2=c^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot c\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos 60^\circ$

$18=c^2+12-2\cdot c\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}$

$c^2-2\sqrt{3}c-6=0$

$\therefore c=3+\sqrt{3}\ (\because c>0)$ 답 $3+\sqrt{3}$

10 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=x^2+\left(\frac{3}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{x}\cdot\cos 120^\circ$

$=x^2+\frac{9}{x^2}-2\cdot x\cdot\frac{3}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=x^2+\frac{9}{x^2}+3$

이때 $x^2>0,\ \frac{9}{x^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a>0,\ b>0$일 때,
$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\overline{BC}^2=x^2+\frac{9}{x^2}+3\ge 2\sqrt{x^2\cdot\frac{9}{x^2}}+3=2\cdot 3+3=9$

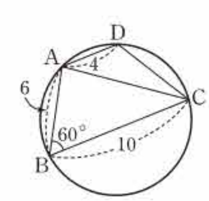
(단, 등호는 $x=\sqrt{3}$일 때 성립)

$x^2=\frac{9}{x^2}$에서 $x^4=9$이므로
$x^2=3\ (\because x^2>0)$
$\therefore x=\sqrt{3}\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{BC}\ge\sqrt{9}=3\ (\because \overline{BC}>0)$

따라서 $\overline{BC}$의 길이의 최솟값은 3이다. 답 ②

11 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{AC}^2$

$=6^2+10^2-2\cdot 6\cdot 10\cdot\cos 60^\circ$

$=36+100-2\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{1}{2}=76$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{19}\ (\because \overline{AC}>0)$

□ABCD가 원에 내접하므로

$\angle ADC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

$\overline{CD}=x$라 하면 $\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{19})^2=4^2+x^2-2\cdot 4\cdot x\cdot\cos 120^\circ$

$76=16+x^2-2\cdot4\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2+4x-60=0,\qquad (x+10)(x-6)=0$

$\therefore x=6\ (\because x>0)$

따라서 $\overline{\text{CD}}$의 길이는 6이다. 답 6

12 $\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}=1$에서

$c(a+c)+b(a+b)=(a+b)(a+c)$

$ac+c^2+ab+b^2=a^2+ac+ab+bc$

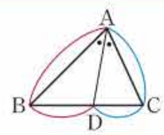
$\therefore b^2+c^2-a^2=bc$

따라서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$ 답 ④

13 $\overline{\text{BD}}:\overline{\text{CD}}=\overline{\text{AB}}:\overline{\text{AC}}=3:2$이므로

$9:\overline{\text{CD}}=3:2\qquad \therefore \overline{\text{CD}}=6$



$\Rightarrow \overline{\text{AB}}:\overline{\text{AC}}$
$=\overline{\text{BD}}:\overline{\text{CD}}$

$\overline{\text{AD}}=x$라 하고 $\angle\text{BAD}=\angle\text{CAD}=\theta$라 하면

$\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{15^2+x^2-9^2}{2\cdot15\cdot x}=\frac{144+x^2}{30x}$

$\triangle$ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{x^2+10^2-6^2}{2\cdot x\cdot 10}=\frac{x^2+64}{20x}$

따라서 $\frac{144+x^2}{30x}=\frac{x^2+64}{20x}$이므로

$288+2x^2=3x^2+192$

$x^2=96\qquad \therefore x=4\sqrt{6}\ (\because x>0)$

따라서 $\overline{\text{AD}}$의 길이는 $4\sqrt{6}$이다. 답 $4\sqrt{6}$

14 정육면체의 한 변의 길이를 $2a\,(a>0)$라 하면

직각삼각형 ABD에서

$\overline{\text{BD}}=\sqrt{\overline{\text{AD}}^2+\overline{\text{AB}}^2}=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{2}a$

직각삼각형 BIF에서

$\overline{\text{BI}}=\sqrt{\overline{\text{BF}}^2+\overline{\text{IF}}^2}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$

직각삼각형 DHI에서

$\overline{\text{DI}}=\sqrt{\overline{\text{DH}}^2+\overline{\text{HI}}^2}=\sqrt{(2a)^2+(\sqrt{5}a)^2}=3a$

$\overline{\text{HI}}=\overline{\text{BI}}=\sqrt{5}a$

따라서 $\triangle$DIB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle\text{DBI})=\frac{(2\sqrt{2}a)^2+(\sqrt{5}a)^2-(3a)^2}{2\cdot2\sqrt{2}a\cdot\sqrt{5}a}$

$=\frac{4a^2}{4\sqrt{10}a^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 답 ①

15 코사인법칙에 의하여

$c^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$
$\quad-2\cdot2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\cos30^\circ$

$=8+(8+4\sqrt{3})-2\cdot2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=4$

$\therefore c=2\ (\because c>0)$

사인법칙에 의하여

$\frac{2}{\sin30^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin A}$

$2\sin A=2\sqrt{2}\sin30^\circ$

$\therefore \sin A=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$A=45^\circ$ 또는 $A=135^\circ$

따라서 $A+B+C=180^\circ$이므로

$B=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$

또는 $B=180^\circ-(135^\circ+30^\circ)=15^\circ$

그런데 $90^\circ<B<180^\circ$이므로 $\quad B=105^\circ$ 답 105°

16 길이가 9인 변의 대각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{5^2+8^2-9^2}{2\cdot5\cdot8}=\frac{1}{10}$

이때 $0^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{3\sqrt{11}}{10}$

삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{9}{\sin\theta}=2R$

$\therefore R=\frac{9}{\frac{3\sqrt{11}}{10}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{15\sqrt{11}}{11}$

따라서 삼각형의 외접원의 넓이는

$\pi\cdot\left(\frac{15\sqrt{11}}{11}\right)^2=\frac{225}{11}\pi$ 답 ③

17 $\overline{\text{AD}}=2k$라 하면

$\overline{\text{AC}}=\overline{\text{CD}}=\sqrt{6}k$

$\overline{\text{AC}}=\overline{\text{CD}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{\text{AD}}$
$=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot2k=\sqrt{6}k$

이므로 $\triangle$ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{(\sqrt{6}k)^2+(\sqrt{6}k)^2-(2k)^2}{2\cdot\sqrt{6}k\cdot\sqrt{6}k}=\frac{2}{3}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

한편 $\overline{\text{AB}}=2\cdot2k=4k$이므로 $\triangle$ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{4k}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}k}{\sin B},\qquad 4k\sin B=\sqrt{6}k\sin C$

$\therefore \sin B=\sqrt{6}k\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{4k}=\frac{\sqrt{30}}{12}$ 답 $\frac{\sqrt{30}}{12}$

18 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$(a-b)\cdot\frac{c}{2R}=a\cdot\frac{a}{2R}-b\cdot\frac{b}{2R}$

W 07 삼각함수의 활용

$(a-b)c=a^2-b^2$

$(a-b)c-(a+b)(a-b)=0$

$\therefore (a-b)(c-a-b)=0$

$a+b\neq c$이므로 $\quad a=b$

따라서 $\triangle$ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ①

두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이와 같으면 삼각형이 만들어지지 않는다.

19 $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1$에서

$(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 C)=1$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C \quad \cdots\cdots ㉠$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

답 $C=90°$인 직각삼각형

20 $a^2\tan C=c^2\tan A$에서

$$a^2\cdot\frac{\sin C}{\cos C}=c^2\cdot\frac{\sin A}{\cos A}$$

$\therefore a^2\sin C\cos A=c^2\sin A\cos C \quad \cdots\cdots ㉠$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$a^2\cdot\frac{c}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c^2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$a^2(b^2+c^2-a^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)$

$a^4-c^4-a^2b^2+b^2c^2=0$

$(a^2+c^2)(a^2-c^2)-b^2(a^2-c^2)=0$

$(a^2+c^2-b^2)(a^2-c^2)=0$

$(a^2+c^2-b^2)(a+c)(a-c)=0$

$\therefore b^2=a^2+c^2$ 또는 $a=c$ ($\because a+c\neq 0$)

따라서 $\triangle$ABC는 $B=90°$인 직각삼각형 또는 $a=c$인 이등변삼각형이므로 $\triangle$ABC의 모양이 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

21 $A+B+C=180°$이므로

$B=180°-(70°+65°)=45°$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R cm라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sin 45°}=2R$$

$$\therefore R=\frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=4$$

원뿔의 전개도에서 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같다.

따라서 물통의 부피는

$\pi\cdot 4^2\cdot 5=80\pi\ (\text{cm}^3)$ 답 80π cm^3

22 $\angle$ACB$=\pi-\theta$이므로 $\triangle$BAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 1\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

$$-\cos\theta=-\frac{1}{2} \qquad \therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0<\theta<\pi$) 답 $\frac{\pi}{3}$

23 직각삼각형 ADC에서

$$\overline{\text{AC}}=\frac{\overline{\text{AD}}}{\sin 45°}=\frac{9\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=18\ (\text{m})$$

직각삼각형 BCE에서

$$\overline{\text{BC}}=\frac{\overline{\text{BE}}}{\sin 30°}=\frac{12}{\frac{1}{2}}=24\ (\text{m})$$

따라서 $\triangle$ACB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\text{AB}}^2=18^2+24^2-2\cdot 18\cdot 24\cdot\cos 60°$$
$$=324+576-2\cdot 18\cdot 24\cdot\frac{1}{2}=468$$

$\therefore \overline{\text{AB}}=6\sqrt{13}$ (m) ($\because \overline{\text{AB}}>0$)

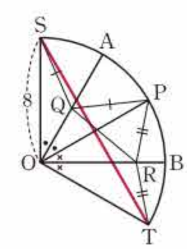
즉 다리 AB의 길이는 $6\sqrt{13}$ m이다. 답 ④

24 오른쪽 그림과 같이

$\angle$AOP$=\angle$AOS,

$\angle$BOP$=\angle$BOT

가 되도록 두 부채꼴 AOS, BOT를 그리면 $\triangle$PQR의 둘레의 길이는



$\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{QR}}+\overline{\text{RP}}$

$=\overline{\text{SQ}}+\overline{\text{QR}}+\overline{\text{RT}}\geq\overline{\text{ST}}$

$\triangle$SOT에서 $\angle$SOT$=2\angle$AOB$=120°$이므로 코사인법칙에 의하여

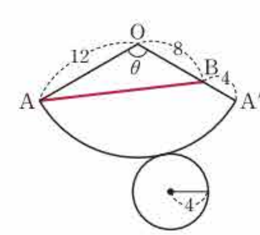
$$\overline{\text{ST}}^2=8^2+8^2-2\cdot 8\cdot 8\cdot\cos 120°$$
$$=64+64-2\cdot 8\cdot 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=192$$

$\therefore \overline{\text{ST}}=8\sqrt{3}$ ($\because \overline{\text{ST}}>0$)

따라서 $\triangle$PQR의 둘레의 길이의 최솟값은 $8\sqrt{3}$이다.

답 ②

25 주어진 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는



$2\pi\cdot 4=8\pi$

$\overline{\text{OA}}=12$이므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

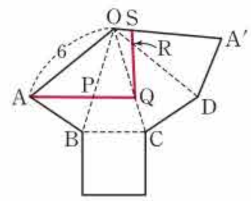
$$12\theta=8\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$$

점 P가 움직인 최단 거리는 $\overline{AB}$의 길이와 같으므로
△OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=12^2+8^2-2\cdot12\cdot8\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=144+64-2\cdot12\cdot8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=304$$

∴ $\overline{AB}=4\sqrt{19}$ (∵ $\overline{AB}>0$) 답 $4\sqrt{19}$

26 주어진 사각뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같으므로 점 T가 움직인 최단 거리는 $\overline{AQ}+\overline{QS}$의 길이와 같다.



점 Q는 $\overline{OC}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overline{OQ}=6\cdot\frac{2}{3}=4$$

△OAQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AQ}^2=6^2+4^2-2\cdot6\cdot4\cdot\cos60^\circ$$
$$=36+16-2\cdot6\cdot4\cdot\frac{1}{2}=28$$

∠AOB=∠BOC=30°이므로
∠AOQ=30°+30°
=60°

∴ $\overline{AQ}=2\sqrt{7}$ (∵ $\overline{AQ}>0$)

점 S는 $\overline{OA'}$을 1 : 5로 내분하는 점이므로

$$\overline{OS}=6\cdot\frac{1}{6}=1$$

△OQS에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{QS}^2=4^2+1^2-2\cdot4\cdot1\cdot\cos60^\circ$$
$$=16+1-2\cdot4\cdot1\cdot\frac{1}{2}=13$$

∴ $\overline{QS}=\sqrt{13}$ (∵ $\overline{QS}>0$)

따라서 점 T가 움직인 최단 거리는 $2\sqrt{7}+\sqrt{13}$이므로

$a=2,\ b=13$

∴ $a+b=15$ 답 15

27 $A+B+C=\pi$이므로

$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$

따라서 $\cos C=-\frac{2}{3}$이고, $0^\circ<C<180^\circ$이므로

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

∴ $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot6\cdot10\cdot\sin C$

$$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot10\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=10\sqrt{5}$$ 답 ⑤

28 코사인법칙에 의하여

$12^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos60^\circ$

$2\cdot b\cdot c\cdot\cos60^\circ$
$=2\cdot b\cdot c\cdot\frac{1}{2}$
$=bc$

$144=(b+c)^2-2bc-bc$

$144=15^2-3bc,\quad 3bc=81$

∴ $bc=27$

∴ $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin60^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot27\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{27\sqrt{3}}{4}$$ 답 $\frac{27\sqrt{3}}{4}$

29 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$이므로

$$\triangle APR=\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AR}\cdot\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}c\cdot\frac{3}{8}b\cdot\sin A$$
$$=\frac{15}{64}\cdot\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{15}{64}S$$

$\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}$

같은 방법으로 하면

$\triangle PBQ=\frac{15}{64}S,\ \triangle RQC=\frac{15}{64}S$

$S=\frac{1}{2}ca\sin B$이므로
$\triangle PBQ$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}c\cdot\frac{5}{8}a\cdot\sin B$
$=\frac{15}{64}S$

이므로

$$S'=\triangle ABC-(\triangle APR+\triangle PBQ+\triangle RQC)$$
$$=S-\left(\frac{15}{64}S+\frac{15}{64}S+\frac{15}{64}S\right)$$
$$=\frac{19}{64}S$$

∴ $\frac{S'}{S}=\frac{19}{64}$ 답 ④

30 $\overline{BP}=x,\ \overline{BQ}=y$라 하면 △ABC=3△PBQ이므로

$$\frac{1}{2}\cdot5\cdot9\cdot\sin60^\circ=3\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\sin60^\circ$$

∴ $xy=15$

△PBQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos60^\circ$$
$$=x^2+y^2-2\cdot15\cdot\frac{1}{2}$$
$$=x^2+y^2-15$$

이때 $x^2>0,\ y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-15\geq2\sqrt{x^2y^2}-15$$
$$=2xy-15\ (\because\ x>0,\ y>0)$$
$$=2\cdot15-15=15$$

(단, 등호는 $x=y=\sqrt{15}$일 때 성립)

$x^2=y^2$에서 $x=y$이고
$xy=15$이므로
$x=y=\sqrt{15}$
(∵ $x>0,\ y>0$)

∴ $\overline{PQ}\geq\sqrt{15}$ (∵ $\overline{PQ}>0$)

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{15}$이다. 답 $\sqrt{15}$

31 △ABC의 외접원의 반지름의 길이가 R이므로

$$\frac{7\cdot8\cdot9}{4R}=12\sqrt{5},\qquad \frac{126}{R}=12\sqrt{5}$$

∴ $R=\frac{21\sqrt{5}}{10}$

△ABC의 내접원의 반지름의 길이가 r이므로

$$\frac{1}{2}r(7+8+9)=12\sqrt{5}$$

$12r=12\sqrt{5}\qquad ∴\ r=\sqrt{5}$

∴ $R+r=\frac{31\sqrt{5}}{10}$ 답 $\frac{31\sqrt{5}}{10}$

32 △ABC의 둘레의 길이가 12이므로

$a+b+c=12$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$12^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot 47$

$\therefore a^2+b^2+c^2=50$

한편 △ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이므로

$\frac{abc}{4\cdot\frac{5}{2}}=6 \qquad \therefore abc=60$

$\therefore a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=12\cdot(50-47)+3\cdot 60=216$ 답 ⑤

33 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{(\sqrt{30})^2+(\sqrt{19})^2}=7$

직각삼각형 AFB에서

$\overline{AF}=\sqrt{(\sqrt{30})^2+(\sqrt{6})^2}=6$

직각삼각형 BFC에서

$\overline{CF}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{19})^2}=5$

헤론의 공식에서 $s=\frac{7+6+5}{2}=9$

$\therefore \triangle AFC=\sqrt{9(9-7)(9-6)(9-5)}$

$=6\sqrt{6}$ 답 $6\sqrt{6}$

다른 풀이 $\overline{AC}=7$, $\overline{AF}=6$, $\overline{CF}=5$이므로 △AFC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 6}=\frac{5}{7}$

이때 $0°<A<180°$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

$\therefore \triangle AFC=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 6\cdot \sin A$

$=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 6\cdot \frac{2\sqrt{6}}{7}=6\sqrt{6}$

34 헤론의 공식에서

$s=\frac{7+a+b}{2}=\frac{7+21}{2}=14$

△ABC의 넓이가 $14\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{14(14-7)(14-a)(14-b)}=14\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(14-a)(14-b)=10$

$a+b=21$에서 $b=21-a$이므로

$(14-a)(a-7)=10, \qquad a^2-21a+108=0$

$(a-9)(a-12)=0 \qquad \therefore a=9$ 또는 $a=12$

이때 $a<b$이므로 $a=9$ 답 ③

$14-b=14-(21-a)$
$=-7+a$

$a=9$이면 $b=12$
$a=12$이면 $b=9$

35 헤론의 공식에서 $s=\frac{8+11+13}{2}=16$

$\therefore \triangle ABC=\sqrt{16(16-8)(16-11)(16-13)}$

$=8\sqrt{30}$

△ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

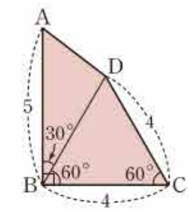
$\frac{1}{2}r(8+11+13)=8\sqrt{30}$

$16r=8\sqrt{30} \qquad \therefore r=\frac{\sqrt{30}}{2}$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2=\frac{15}{2}\pi$ 답 $\frac{15}{2}\pi$

36 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 △BCD는 $\overline{BC}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로



$\angle DBC=\frac{1}{2}(180°-60°)$

$=60°$

따라서 △BCD는 정삼각형이고

$\angle ABD=90°-60°=30°$이므로

$\square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

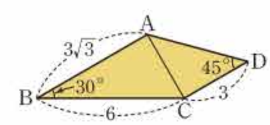
$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\sin 30°+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot \sin 60°$

$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=5+4\sqrt{3}$ 답 $5+4\sqrt{3}$

△BCD는 정삼각형이므로
$\overline{BD}=\overline{BC}=4$

37 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{AC}^2=(3\sqrt{3})^2+6^2-2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 6\cdot\cos 30°$

$=27+36-2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9$

$\therefore \overline{AC}=3$ ($\because \overline{AC}>0$)

따라서 $\overline{AC}=\overline{CD}$이고 $D=45°$이므로 △ACD는 $\angle ACD=90°$인 직각이등변삼각형이다.

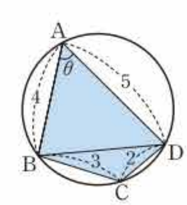
$\therefore \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot 6\cdot \sin 30°+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3$

$=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}+\frac{9}{2}$

$=\frac{9}{2}(\sqrt{3}+1)$ 답 ⑤

38 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 긋고 $\angle BAD=\theta$라 하면 △ABD에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{BD}^2=4^2+5^2-2\cdot 4\cdot 5\cdot\cos\theta$

$=41-40\cos\theta$

$\angle BCD=\pi-\theta$이므로 △BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos(\pi-\theta)$

$=13+12\cos\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

따라서 $41-40\cos\theta=13+12\cos\theta$이므로

$52\cos\theta=28 \qquad \therefore \cos\theta=\frac{7}{13}$

이때 $0°<\theta<180°$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{13}\right)^2}=\frac{2\sqrt{30}}{13}$

$\therefore \square ABCD$

$=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\sin(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{2\sqrt{30}}{13}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{2\sqrt{30}}{13}$

$=2\sqrt{30}$ 답 $2\sqrt{30}$

Q BOX: $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

39 $0°<C<180°$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\overline{DC}=\overline{AB}=4$이므로

$\square ABCD=4\cdot3\sqrt{5}\cdot\sin C$

$=4\cdot3\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=15\sqrt{3}$ 답 ③

40 평행사변형 ABCD의 넓이가 32이므로

$8\cdot5\cdot\sin B=32 \quad \therefore \sin B=\frac{4}{5}$

이때 $0°<B<90°$이므로

$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

따라서 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cdot\cos B$

$=64+25-2\cdot8\cdot5\cdot\frac{3}{5}=41$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{41}$ ($\because \overline{AC}>0$) 답 $\sqrt{41}$

41 $0°<\theta<180°$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\cdot9\cdot14\cdot\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot9\cdot14\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=42\sqrt{2}$ 답 $42\sqrt{2}$

42 □ABCD의 넓이가 $3\sqrt{3}$이므로

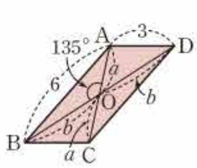
$\frac{1}{2}ab\sin60°=3\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}ab=3\sqrt{3} \quad \therefore ab=12$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=7^3-3\cdot12\cdot7=91$ 답 91

43 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점을 O라 하자.



평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 $\overline{AC}=2a$, $\overline{BD}=2b$라 하면 △ABO에서 코사인법칙에 의하여

$6^2=a^2+b^2-2ab\cos135°$

$\therefore 36=a^2+b^2+\sqrt{2}ab$ ...... ㉠

Q BOX: $\cos135°$
$=\cos(180°-45°)$
$=-\cos45°$
$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

△AOD에서 코사인법칙에 의하여

$3^2=a^2+b^2-2ab\cos45°$

$\therefore 9=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$ ...... ㉡

Q BOX: $\angle AOD=180°-135°$
$=45°$

㉠−㉡을 하면 $27=2\sqrt{2}ab$

$\therefore ab=\frac{27\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\cdot2a\cdot2b\cdot\sin45°$

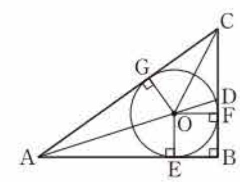
$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{27\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{27}{2}$

답 ②

도전! 수능 기출 W 59쪽

01 (1st) 원의 중심 O에서 △ABC의 세 변에 수선의 발 E, F, G를 내려 $\overline{CG}$의 길이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F, G라 하자.



$\overline{OE}=\overline{OF}=\overline{FB}=\overline{BE}=3$이므로

Q BOX: 원의 반지름의 길이

$\overline{DF}=\overline{DB}-\overline{FB}=4-3=1$

$\triangle DOF \backsim \triangle OAE$ (AA 닮음)이므로

Q BOX: $\angle DFO=\angle OEA=90°$,
$\angle DOF=\angle OAE$
(동위각)
이므로
$\triangle DOF \backsim \triangle OAE$
(AA 닮음)

$\overline{DF}:\overline{OE}=\overline{OF}:\overline{AE}$, $\quad 1:3=3:\overline{AE}$

$\therefore \overline{AE}=9$

$\therefore \overline{AG}=\overline{AE}=9$

$\overline{CG}=\overline{CF}=x$라 하면 직각삼각형 ABC에서

$(9+x)^2=(9+3)^2+(x+3)^2$

$81+18x+x^2=144+x^2+6x+9$

$12x=72 \quad \therefore x=6$

(2nd) △ADC의 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

△ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AD}}{\sin C}=2R$ ...... ㉠

직각삼각형 ABD에서

$\overline{AD}=\sqrt{12^2+4^2}=4\sqrt{10}$

직각삼각형 ABC에서

$\sin C=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

따라서 ㉠에서

$\frac{4\sqrt{10}}{\frac{4}{5}}=2R \quad \therefore R=\frac{5\sqrt{10}}{2}$

(3rd) △ADC의 외접원의 넓이를 구한다.

△ADC의 외접원의 넓이는

$\pi\cdot\left(\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)^2=\frac{125}{2}\pi$ 답 ①

02 (1st) $\angle BDC$의 크기를 구한다.

$\triangle ABC$는 정삼각형이므로

$$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \underline{\angle BDC=\angle BAC}=\frac{\pi}{3}$$

$\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각

(2nd) $\overline{BC}$, $\overline{DC}$의 길이를 r에 대한 식으로 나타낸다.

$\triangle DBC$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\overline{DC}}{\sin\theta}=2r$$

$$\therefore \overline{BC}=2r\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}r,$$

$$\overline{DC}=2r\cdot\sin\theta=2r\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

(3rd) r의 값을 구한다.

$\triangle DBC$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2-(\sqrt{3}r)^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}r}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2+\frac{4}{3}r^2-3r^2}{\frac{4\sqrt{6}}{3}r},\qquad \frac{1}{2}=\frac{6-5r^2}{4\sqrt{6}r}$$

$$5r^2+2\sqrt{6}r-6=0\qquad \therefore r=\frac{-\sqrt{6}\pm6}{5}$$

$r>0$이므로 $\quad r=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ 답 ①

03 (1st) $\angle BFG$의 크기를 θ에 대한 식으로 나타내어 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\angle BGF=\theta$이므로 $\triangle FBG$에서

$$\angle BFG=180^\circ-(120^\circ+\theta)$$
$$=60^\circ-\theta$$
$$\therefore \angle BFE=\angle BFG+\angle EFG$$
$$=(60^\circ-\theta)+30^\circ$$
$$=90^\circ-\theta$$

(2nd) $\triangle BGF$에서 사인법칙을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $\triangle EFG$에서

$$\angle FEG=180^\circ-2\cdot30^\circ=120^\circ$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{FG}^2=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cdot\cos120^\circ$$
$$=4+4-2\cdot2\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=12$$
$$\therefore \overline{FG}=2\sqrt{3}\ (\because \overline{FG}>0)$$

따라서 $\triangle BGF$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin120^\circ}=\frac{\overline{BF}}{\sin\theta}$$
$$2\sqrt{3}\sin\theta=\overline{BF}\sin120^\circ$$
$$\therefore \overline{BF}=2\sqrt{3}\sin\theta\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=4\sin\theta$$

(3rd) $\triangle EFB$에서 코사인법칙을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $\triangle EFB$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BE}^2$$
$$=(4\sin\theta)^2+2^2-2\cdot4\sin\theta\cdot2\cdot\cos(90^\circ-\theta)$$
$$=16\sin^2\theta+4-2\cdot4\sin\theta\cdot2\cdot\sin\theta$$
$$=16\sin^2\theta+4-16\sin^2\theta=4$$
$$\therefore \overline{BE}=2\ (\because \overline{BE}>0)$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

04 (1st) □APQB, □BRSC, □CTUA, $\triangle ABC$, $\triangle TCS$의 넓이를 각각 구한다.

□APQB, □BRSC, □CTUA의 넓이는 각각 c^2, a^2, b^2이고, $\triangle ABC$, $\triangle TCS$의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.

(2nd) $\triangle PAU$, $\triangle QRB$의 넓이를 각각 구한다.

$\angle BAC=\theta$라 하면 $\underline{\angle PAU=180^\circ-\theta}$이므로

$$\angle PAU$$
$$=360^\circ-\angle PAB$$
$$-\angle BAC-\angle CAU$$
$$=360^\circ-90^\circ-\theta-90^\circ$$
$$=180^\circ-\theta$$

$$\triangle PAU=\frac{1}{2}\cdot\overline{AU}\cdot\overline{AP}\cdot\sin(180^\circ-\theta)$$
$$=\frac{1}{2}bc\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{c}=\frac{1}{2}ab$$

또 $\underline{\angle QBR=90^\circ+\theta}$이므로

$\angle ABC=90^\circ-\theta$이므로

$$\angle QBR$$
$$=360^\circ-\angle ABQ$$
$$-\angle ABC-\angle CBR$$
$$=360^\circ-90^\circ-(90^\circ-\theta)$$
$$-90^\circ$$
$$=90^\circ+\theta$$

$$\triangle QRB=\frac{1}{2}\cdot\overline{BQ}\cdot\overline{BR}\cdot\sin(90^\circ+\theta)$$
$$=\frac{1}{2}ca\cos\theta$$
$$=\frac{1}{2}ca\cdot\frac{b}{c}=\frac{1}{2}ab$$

(3rd) 육각형 PQRSTU의 넓이를 구한다.

육각형 PQRSTU의 넓이는

$$c^2+a^2+b^2+4\cdot\frac{1}{2}ab=a^2+b^2+c^2+2ab$$
$$=2(c^2+ab)\ (\because a^2+b^2=c^2)$$

답 ③

08 등차수열과 등비수열

W 60쪽

01 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=\log_3 4$ ······ ㉠

$a_5=a+4d=\log_3 32$ ······ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$3d=\log_3 32-\log_3 4=\log_3 8$

$\therefore d=\frac{1}{3}\log_3 8=\log_3 2$

$d=\log_3 2$를 ㉠에 대입하면

$a+\log_3 2=\log_3 4$ $\quad\therefore a=\log_3 2$

따라서 $a_n=\log_3 2+(n-1)\log_3 2=n\log_3 2$이므로

$a_{10}=10\log_3 2$ 답 $10\log_3 2$

02 등차수열 $\{a_{2n}\}$은 a_2, a_4, a_6, $\cdots$이고 공차가 6이므로

$a_4-a_2=6$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$(a+3d)-(a+d)=6$

$2d=6$ $\quad\therefore d=3$

등차수열 $\{a_{3n+1}\}$은 a_4, a_7, a_{10}, $\cdots$이므로 구하는 공차는

$a_7-a_4=(a+6d)-(a+3d)$

$=3d=3\cdot 3=9$ 답 9

03 첫 번째 시행에서 만들어지는 수열은

2, 4, 6, 8, $\cdots$

이므로 첫째항과 공차가 모두 2인 등차수열이다.

두 번째 시행에서 만들어지는 수열은

4, 8, 12, 16, $\cdots$

이므로 첫째항과 공차가 모두 $4=2^2$인 등차수열이다.

세 번째 시행에서 만들어지는 수열은

8, 16, 24, 32, $\cdots$

이므로 첫째항과 공차가 모두 $8=2^3$인 등차수열이다.

따라서 여섯 번째 시행에서 만들어지는 수열은 첫째항과 공차가 모두 $2^6=64$인 등차수열이므로 제n항은

$64+(n-1)\cdot 64=64n$

따라서 구하는 제4항은

$64\cdot 4=256$ 답 ④

04 $|a_5|-a_6=0$에서 $\quad a_6=|a_5|$ ······ ㉠

$\therefore a_6=a_5$ 또는 $a_6=-a_5$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항이 -18이므로

(i) $a_6=a_5$일 때,

$d=a_6-a_5=0$이므로 $\quad a_5=a_6=a_1=-18$

이때 $a_6=-18$, $|a_5|=18$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_6=-a_5$일 때,

$-18+5d=-(-18+4d)$이므로

$9d=36$ $\quad\therefore d=4$

(i), (ii)에서 $\quad d=4$

따라서 $a_n=-18+(n-1)\cdot 4=4n-22$이므로

$a_{10}=4\cdot 10-22=18$ 답 ①

05 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$|a_3-1|=|a_6-3|$에서

$|(a+2\cdot 2)-1|=|(a+5\cdot 2)-3|$

$|a+3|=|a+7|$ $\quad\therefore a+3=\pm(a+7)$

이때 $a+3=a+7$을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않으므로

$a+3=-(a+7)$

$2a=-10$ $\quad\therefore a=-5$

따라서 $a_n=-5+(n-1)\cdot 2=2n-7$이므로 $a_k=75$에서

$2k-7=75$ $\quad\therefore k=41$ 답 41

06 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=a+4d=-15$ ······ ㉠

$a_{17}=a+16d=9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-23$, $d=2$

$\therefore a_n=-23+(n-1)\cdot 2=2n-25$

$2n-25>0$에서

$n>\frac{25}{2}=12.5$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제13항이다.

답 ③

07 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_7-a_{10}=9$에서

$(25+6d)-(25+9d)=9$

$-3d=9$ $\quad\therefore d=-3$

$\therefore a_n=25+(n-1)\cdot(-3)=-3n+28$

첫째항이 양수이고 공차가 음수이므로 $a_k a_{k+1}<0$을 만족시키려면 $a_k>0$, $a_{k+1}<0$이어야 한다.

즉 처음으로 음수가 되는 항이 제$(k+1)$항이므로

$-3(k+1)+28<0$, $\quad -3k<-25$

$\therefore k>\frac{25}{3}=8.\cdots$

따라서 구하는 자연수 k의 값은 9이다. 답 9

08 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \cdots\}$,

$B=\{1, 4, 7, 10, 13, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{1, 7, 13, \cdots\}$

따라서 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 6인 등차수열이므로

$c_n=1+(n-1)\cdot 6=6n-5$

$6n-5\geq 100$에서 $\quad 6n\geq 105$

$\therefore n\geq\frac{105}{6}=17.5$

따라서 구하는 n의 값은 18이다. 답 18

Q BOX

$a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때
① $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$
② $\log_a M-\log_a N=\log_a \frac{M}{N}$
③ $\log_a N^k=k\log_a N$ (단, k는 실수)

$A=|B|$이면 $A=B$ 또는 $A=-B$

$7-1=13-7=\cdots=6$

09 공차를 d라 하면 첫째항이 9, 제5항이 23이므로

$9+4d=23 \qquad \therefore d=\frac{7}{2}$

이때 a, b, c는 각각 주어진 수열의 제2항, 제3항, 제4항이므로

$a=9+\frac{7}{2}=\frac{25}{2}$, $b=9+2\cdot\frac{7}{2}=16$,

$c=9+3\cdot\frac{7}{2}=\frac{39}{2}$

$\therefore a+3b-c=\frac{25}{2}+3\cdot16-\frac{39}{2}=41$ 답 ①

10 공차를 d라 하면 a_9는 주어진 수열의 제10항이므로

$36+9d=18 \qquad \therefore d=-2$

제$(n+2)$항이 -4이므로

$36+(n+1)\cdot(-2)=-4$

$n+1=20 \qquad \therefore n=19$ 답 19

11 주어진 등차수열의 공차를 d라 하자.

수열 4, a_1, a_2, $\cdots$, a_m, 20에서 20은 제$(m+2)$항이므로

$4+(m+1)d=20$

$\therefore d=\frac{16}{m+1}$ ······ ㉠

또 수열 20, b_1, b_2, $\cdots$, b_n, 32에서 20을 첫째항으로 생각하면 32는 제$(n+2)$항이므로

$20+(n+1)d=32$

$\therefore d=\frac{12}{n+1}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{16}{m+1}=\frac{12}{n+1}$이므로

$4(n+1)=3(m+1)$

$\therefore 3m-4n=1$ 답 ③

12 네 개의 수 $\log_2 6$, a, $\log_2 24$, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a=\frac{\log_2 6+\log_2 24}{2}=\frac{\log_2 144}{2}=\log_2 12$

$2\log_2 24=a+b$에서 $\qquad 2\log_2 24=\log_2 12+b$

$\therefore b=2\log_2 24-\log_2 12=\log_2 48$

또 다섯 개의 수 11, c, 3, d, -5가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$c=\frac{11+3}{2}=7$, $d=\frac{3+(-5)}{2}=-1$

$\therefore a-b-c+d=\log_2 12-\log_2 48-7-1$

$=\log_2\frac{1}{4}-8=-2-8$

$=-10$ 답 ①

다른 풀이 $a-b=\log_2 6-\log_2 24=\log_2\frac{1}{4}=-2$,

$c-d=11-3=8$이므로

$a-b-c+d=a-b-(c-d)$

$=-2-8=-10$

13 α, β가 이차방정식 $x^2-6x-4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-4$

이때 m은 α, β의 등차중항이므로

$m=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$

또 n은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$의 등차중항이므로

$n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{6}{2\cdot(-4)}=-\frac{3}{4}$

$\therefore mn=-\frac{9}{4}$ 답 $-\frac{9}{4}$

b, d, f를 a에 대한 식으로 나타낸다.

14 세 수 a, b, 10이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\frac{a+10}{2}$

세 수 a, 2, e가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a+e=2\cdot2 \qquad \therefore e=4-a$

세 수 e, -4, f가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$e+f=2\cdot(-4) \qquad \therefore f=-e-8=a-12$

세 수 10, d, f가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$d=\frac{10+f}{2}=\frac{a-2}{2}$

$\therefore a-b+d-f=a-\frac{a+10}{2}+\frac{a-2}{2}-(a-12)$

$=6$ 답 ①

15 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 세 수의 합이 9이므로

$(a-d)+a+(a+d)=9$

$3a=9 \qquad \therefore a=3$

세 수의 곱이 -81이므로

$3(3-d)(3+d)=-81$

$9-d^2=-27, \qquad d^2=36$

$\therefore d=\pm6$

따라서 세 수는 -3, 3, 9이므로 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차는

$9-(-3)=12$ 답 12

삼차방정식
$ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$,
$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

16 삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=12$

$3a=12 \qquad \therefore a=4$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 4이므로 방정식에 $x=4$를 대입하면

$4^3-12\cdot4^2+4k-28=0, \qquad 4k=156$

$\therefore k=39$ 답 ③

다른 풀이 삼차방정식의 세 실근이 $4-d$, 4, $4+d$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4(4-d)(4+d)=28, \qquad 16-d^2=7$

$d^2=9 \qquad \therefore d=\pm3$

따라서 세 실근은 1, 4, 7이므로

$1\cdot4+4\cdot7+7\cdot1=k \qquad \therefore k=39$

17 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 모든 모서리의 길이의 합이 60이므로

$4\{(a-d)+a+(a+d)\}=60$

$3a=15 \quad \therefore a=5$

겉넓이가 142이므로

$2\{5(5-d)+(5+d)(5-d)+5(5+d)\}=142$

$75-d^2=71, \quad d^2=4$

$\therefore d=\pm 2$

따라서 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각 3, 5, 7 또는 7, 5, 3이므로 직육면체의 부피는

$3\cdot 5\cdot 7=105$ 답 105

Q BOX

밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 a, b, c인 직육면체에서
① (모든 모서리의 길이의 합) $=4(a+b+c)$
② (겉넓이) $=2(ab+bc+ca)$
③ (부피) $=abc$

18 갑, 을, 병, 정, 무, 기, 경의 몫을 차례대로

$a+3d$, $a+2d$, $a+d$, a, $a-d$, $a-2d$, $a-3d$

로 놓으면 갑, 을의 몫의 합은 100냥이므로

$(a+3d)+(a+2d)=100$

$\therefore 2a+5d=100$ …… ㉠

무, 기, 경의 몫의 합은 96냥이므로

$(a-d)+(a-2d)+(a-3d)=96$

$\therefore a-2d=32$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=40$, $d=4$

따라서 을의 몫은

$a+2d=40+2\cdot 4=48$ (냥) 답 ④

19 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 모두 a라 하면

$a_n=a+(n-1)a=an$

이때 제10항이 30이므로

$10a=30 \quad \therefore a=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$\dfrac{15\{2\cdot 3+(15-1)\cdot 3\}}{2}=360$ 답 ⑤

20 첫째항이 40, 제n항이 -10인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 165이므로

$\dfrac{n\{40+(-10)\}}{2}=165 \quad \therefore n=11$

즉 $a_{11}=-10$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$40+10d=-10 \quad \therefore d=-5$ 답 -5

21 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}=52+9d=25 \quad \therefore d=-3$

$\therefore a_n=52+(n-1)\cdot(-3)=-3n+55$

$a_n<0$에서 $-3n+55<0$

$\therefore n>\dfrac{55}{3}=18.\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제18항까지 양수이고, 제19항부터 음수이다.

이때 $a_{18}=-3\cdot 18+55=1$, $a_{19}=-3\cdot 19+55=-2$, $a_{30}=-3\cdot 30+55=-35$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18})$

$\quad -(a_{19}+a_{20}+a_{21}+\cdots+a_{30})$

$=\dfrac{18(52+1)}{2}-\dfrac{12\{-2+(-35)\}}{2}$

$=477+222=699$ 답 ⑤

첫째항이 a_{19}, 끝항이 a_{30}이고 항수가 12인 등차수열의 합

다른 풀이 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18})$

$\quad -(a_{19}+a_{20}+a_{21}+\cdots+a_{30})$

$=2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18})$

$\quad -(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30})$

$=2\cdot\dfrac{18(52+1)}{2}-\dfrac{30\{52+(-35)\}}{2}$

$=954-255=699$

22 $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{20})$

$=\dfrac{20(2a_1+19d)}{2}+\dfrac{20(2b_1+19d')}{2}$

$=10\{2(a_1+b_1)+19(d+d')\}$

$=10(2\cdot 14+19\cdot 5)=1230$ 답 ③

다른 풀이 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 14, 공차가 5인 등차수열이므로

(주어진 식)$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{20}+b_{20})$

$=\dfrac{20\{2\cdot 14+(20-1)\cdot 5\}}{2}=1230$

23 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면 $a_4+b_4=16$에서

$(a_1+3d)+(b_1+3d')=16$

$4+3(d+d')=16 \quad \therefore d+d'=4$

$\therefore (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_7)$

$=\dfrac{7(2a_1+6d)}{2}+\dfrac{7(2b_1+6d')}{2}$

$=7\{(a_1+b_1)+3(d+d')\}$

$=7(4+3\cdot 4)=112$ 답 112

다른 풀이 a_4는 a_1, a_7의 등차중항이고 b_4는 b_1, b_7의 등차중항이므로

$a_1+a_7=2a_4$, $b_1+b_7=2b_4$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{7(a_1+a_7)}{2}+\dfrac{7(b_1+b_7)}{2}$

$=7(a_4+b_4)$

$=7\cdot 16=112$

24 첫째항이 -6, 끝항이 42, 항수가 20인 등차수열의 합은

$\dfrac{20(-6+42)}{2}=360$

따라서 $-6+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}+42=360$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}=360-(-6+42)$

$=324$ 답 324

25 첫째항이 1, 끝항이 37, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 247이므로

$$\frac{(n+2)(1+37)}{2}=247$$

$n+2=13 \qquad \therefore n=11$

따라서 37은 주어진 수열의 제13항이므로

$1+12d=37 \qquad \therefore d=3$

$\therefore n+d=14$ 답 14

26 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 -4, 제$(n+2)$항이 25이므로

$-4+(n+1)d=25 \qquad \therefore n+1=\dfrac{29}{d}$

이때 n, d는 자연수이므로 d는 29를 제외한 29의 양의 약수이어야 한다.

$d=29$이면
$n+1=\dfrac{29}{29}=1$
$\therefore n=0$
그런데 n은 자연수이므로
$d\neq 29$

$\therefore d=1,\ n=28$

따라서 첫째항이 -4, 끝항이 25, 항수가 30인 등차수열의 합은

$$\frac{30(-4+25)}{2}=315$$

즉 $-4+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+25=315$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=294$ 답 294

27 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_5=35,\ S_{10}=35+85=120$

S_{10}
$=$(첫째항부터 제5항까지의 합)
$+$(제6항부터 제10항까지의 합)

$S_5=\dfrac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=35$에서

$a+2d=7$ ...... ㉠

$S_{10}=\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=120$에서

$2a+9d=24$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ d=2$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 제11항부터 제15항까지의 합은

$S_{15}-S_{10}=\dfrac{15\{2\cdot3+(15-1)\cdot2\}}{2}-120$

$=255-120=135$ 답 ③

28 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a=S_1=64$

$S_5=\dfrac{5\{2\cdot64+(5-1)d\}}{2}=280$에서

$64+2d=56 \qquad \therefore d=-4$

$S_k=S_{2k}$에서

$$\frac{k\{2\cdot64+(k-1)\cdot(-4)\}}{2}=\frac{2k\{2\cdot64+(2k-1)\cdot(-4)\}}{2}$$

$66k-2k^2=132k-8k^2$

$6k^2-66k=0, \qquad 6k(k-11)=0$

$\therefore k=11$ ($\because$ k는 자연수) 답 11

29 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공차가 $\dfrac{1}{4}$이므로

$$S_4=\frac{4\left\{2\cdot2+(4-1)\cdot\frac{1}{4}\right\}}{2}=\frac{19}{2}$$

$$S_{n+3}=\frac{(n+3)\left\{2\cdot2+(n+3-1)\cdot\frac{1}{4}\right\}}{2}=\frac{(n+3)(n+18)}{8}$$

$$S_{2n}=\frac{2n\left\{2\cdot2+(2n-1)\cdot\frac{1}{4}\right\}}{2}=\frac{n(2n+15)}{4}$$

이때 S_4, S_{n+3}, S_{2n}이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_{n+3}=S_4+S_{2n}$

$2\cdot\dfrac{(n+3)(n+18)}{8}=\dfrac{19}{2}+\dfrac{n(2n+15)}{4}$

$n^2+21n+54=38+2n^2+15n$

$n^2-6n-16=0, \qquad (n+2)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because$ n은 자연수) 답 ③

30 주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=-39+(n-1)\cdot6=6n-45$

$6n-45>0$에서 $\qquad n>\dfrac{15}{2}=7.5$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 양수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_7=6\cdot7-45=-3$이므로 구하는 최솟값은

$S_7=\dfrac{7\{-39+(-3)\}}{2}=-147$ 답 -147

다른 풀이 $S_n=\dfrac{n\{2\cdot(-39)+(n-1)\cdot6\}}{2}$

$=3n^2-42n=3(n-7)^2-147$

따라서 S_n은 $n=7$일 때 최솟값 -147을 갖는다.

31 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_4=\dfrac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=38$에서

$2a+3d=19$ ...... ㉠

$S_{11}=\dfrac{11\{2a+(11-1)d\}}{2}=-11$에서

$a+5d=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=14,\ d=-3$

$\therefore a_n=14+(n-1)\cdot(-3)=-3n+17$

$-3n+17<0$에서 $\qquad n>\dfrac{17}{3}=5.\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제6항부터 음수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최대이다.

$\therefore p=5$

이때 $a_5=-3\cdot5+17=2$이므로

$q=S_5=\dfrac{5(14+2)}{2}=40$

$\therefore p+q=45$ 답 45

32 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=84+(n-1)d$

이때 S_7의 값이 임의의 다른 S_n의 값보다 크려면

S_n의 최댓값이 S_7이다.

$a_7>0,\ a_8<0$

$a_7=84+6d>0$에서 $\quad d>-14$

$a_8=84+7d<0$에서 $\quad d<-12$

$\therefore\ -14<d<-12$

이때 d는 정수이므로 $\quad d=-13$ 　답 -13

33 100과 200 사이에 있는 자연수 중에서 6으로 나누었을 때의 나머지가 3인 수는

105, 111, 117, ⋯, 195

이때 $195=105+6\cdot15$에서 구하는 값은 첫째항이 105, 끝항이 195, 항수가 16인 등차수열의 합이므로

첫째항이 105, 공차가 6인 등차수열의 제16항

$$\frac{16(105+195)}{2}=2400$$ 　답 ④

34 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 4의 배수는

52, 56, 60, ⋯, 96 　⋯⋯ ㉠

이때 $96=52+4\cdot11$에서 ㉠은 첫째항이 52, 끝항이 96, 항수가 12인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{12(52+96)}{2}=888$$

50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 5의 배수는

55, 60, 65, ⋯, 95 　⋯⋯ ㉡

이때 $95=55+5\cdot8$에서 ㉡은 첫째항이 55, 끝항이 95, 항수가 9인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{9(55+95)}{2}=675$$

한편 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 20의 배수는 60, 80이므로 이 두 수의 합은

60, 80은 ㉠, ㉡에 모두 포함된다.

$60+80=140$

따라서 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 4 또는 5로 나누어떨어지는 수의 총합은

$888+675-140=1423$ 　답 1423

35 자연수 k의 배수 중에서 100 이하인 자연수의 개수를 n이라 하고, k의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$k,\ 2k,\ 3k,\ \cdots,\ nk\ (nk\le100)$

이 수들의 합은 첫째항이 k, 끝항이 nk, 항수가 n인 등차수열의 합이므로

$$\frac{n(k+nk)}{2}=285$$

$\therefore\ kn(n+1)=570=2\cdot3\cdot5\cdot19$

$n,\ n+1$은 연속하는 두 자연수이고 $570=2\cdot3\cdot5\cdot19$ 이므로 $n,\ n+1$로 가능한 두 자연수는 1, 2 또는 2, 3 또는 5, 6의 3가지이다.

(i) $n=1,\ n+1=2$일 때,

$$k=\frac{570}{n(n+1)}=\frac{570}{1\cdot2}=285$$

이때 $nk=285$이므로 $nk\le100$을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=2,\ n+1=3$일 때,

$$k=\frac{570}{n(n+1)}=\frac{570}{2\cdot3}=95$$

이때 $nk=190$이므로 $nk\le100$을 만족시키지 않는다.

(iii) $n=5,\ n+1=6$일 때,

$$k=\frac{570}{n(n+1)}=\frac{570}{5\cdot6}=19$$

이상에서 구하는 자연수 k의 값은 19이다. 　답 19

36 n각형의 내각의 크기의 합은

$180^\circ\times(n-2)=180^\circ\times n-360^\circ$

첫째항이 75°, 공차가 10°, 항수가 n인 등차수열의 합은

$$\frac{n\{2\times75^\circ+(n-1)\times10^\circ\}}{2}=5^\circ\times n^2+70^\circ\times n$$

따라서 $5^\circ\times n^2+70^\circ\times n=180^\circ\times n-360^\circ$이므로

$n^2-22n+72=0, \quad (n-4)(n-18)=0$

$\therefore\ n=4$ 또는 $n=18$

이때 $n=18$이면 가장 큰 내각의 크기가

$75^\circ+17\times10^\circ=245^\circ$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ n=4$ 　답 4

37 첫날 a분 동안 훈련하고 마지막 날에는 100분 동안 훈련하므로 n일 동안 훈련한다고 하면

$a+(n-1)\cdot5=100$

$\therefore\ a=105-5n$ 　⋯⋯ ㉠

훈련 첫날부터 마지막 날까지 훈련한 시간이 총 720분이 되려면

$$\frac{n(a+100)}{2}=720$$

$\therefore\ n(a+100)=1440$ 　⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$n(205-5n)=1440, \quad n^2-41n+288=0$

$(n-9)(n-32)=0 \quad \therefore\ n=9$ 또는 $n=32$

그런데 $n=32$를 ㉠에 대입하면

$a=105-5\cdot32=-55<0$

이므로

$n=9$

따라서 9일 동안 훈련해야 한다. 　답 9일

38 $Q_n(n,\ 3n+1)$이므로

일반항 a_n이 $a_n=pn+q$ (p, q는 상수) 인 수열은 첫째항이 $p+q$, 공차가 p인 등차수열이다.

$\overline{P_nQ_n}=3n+1$

따라서 $\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_kQ_k}$는 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제k항까지의 합과 같으므로

$$\frac{k\{2\cdot4+(k-1)\cdot3\}}{2}=175$$

$3k^2+5k-350=0, \quad (3k+35)(k-10)=0$

$\therefore\ k=10\ (\because\ k$는 자연수$)$ 　답 ②

39 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-1^2+8\cdot1=7$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=-n^2+8n-\{-(n-1)^2+8(n-1)\}$$
$$=-2n+9 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=7$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=-2n+9$

$-2n+9>0$에서 $\quad n<\frac{9}{2}=4.5$

따라서 양수인 항은 첫째항부터 제4항까지이므로 구하는 합은

$S_4=-4^2+8\cdot4=16$ 　　 16

40 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-4\cdot1+k=k-3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2-4n+k-\{(n-1)^2-4(n-1)+k\}$$
$$=2n-5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 $a_1=k-3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로

$k-3=-3 \qquad \therefore k=0$ 　　 0

41 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3\cdot1^2-1=2$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=3n^2-n-\{3(n-1)^2-(n-1)\}$$
$$=6n-4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=6n-4$

$10\le a_n\le50$에서 $\quad 10\le6n-4\le50$

$14\le6n\le54 \qquad \therefore \frac{7}{3}\le n\le9$

$\frac{7}{3}=2.\cdots$

따라서 자연수 n은 3, 4, 5, $\cdots$, 9의 7개이다. 　　 ③

42 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r<0)$라 하면

$a_2=-5$에서 $\quad ar=-5 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$a_6:a_8=1:4$에서 $\quad 4a_6=a_8,\quad 4ar^5=ar^7$

$a\ne0$, $r<0$이므로 양변을 ar^5으로 나누면 $4=r^2$

$r^2=4 \qquad \therefore r=-2\ (\because r<0)$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad -2a=-5$

$\therefore a=\frac{5}{2}$

따라서 $a_n=\frac{5}{2}\cdot(-2)^{n-1}$이므로

$a_7=\frac{5}{2}\cdot(-2)^6=160$ 　　 160

43 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_2=ar=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$a_4=ar^3=9 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^2=3 \qquad \therefore r=\sqrt{3}\ (\because r>0)$

$r=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $\quad \sqrt{3}a=3 \qquad \therefore a=\sqrt{3}$

따라서 $a_n=\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3})^{n-1}=(\sqrt{3})^n$이므로

$$a_1a_3a_5\cdots a_{19}=\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3})^3\cdot(\sqrt{3})^5\cdot\cdots\cdot(\sqrt{3})^{19}$$
$$=(\sqrt{3})^{1+3+5+\cdots+19}=3^{\frac{1}{2}\cdot\frac{10(1+19)}{2}}$$
$$=3^{50}$$

첫째항이 1, 끝항이 19, 항수가 10인 등차수열의 합

①

44 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_{20}}{a_{10}}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{a_{22}}{a_{12}}=\cdots=\frac{a_{39}}{a_{29}}=r^{10}$

이므로 주어진 식은

$r^{10}+r^{10}+r^{10}+\cdots+r^{10}=40$

20개

$20r^{10}=40 \qquad \therefore r^{10}=2$

$\therefore \frac{a_{40}}{a_{10}}=r^{30}=(r^{10})^3=2^3=8$ 　　 8

45 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_4=6r^3=\frac{3}{4},\qquad r^3=\frac{1}{8} \qquad \therefore r=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{100}$에서 $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{600}$

$2^{n-1}>600$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n-1\ge10 \qquad \therefore n\ge11$

따라서 처음으로 $\frac{1}{100}$보다 작아지는 항은 제11항이다.

제11항

46 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$라 하면

$3a_5=a_7$에서 $\quad 3\cdot5r^4=5r^6$

$r^2=3 \qquad \therefore r=\sqrt{3}\ (\because r>0)$

$\therefore a_n=5\cdot(\sqrt{3})^{n-1}$

$5\cdot(\sqrt{3})^{n-1}>125$에서 $\qquad (\sqrt{3})^{n-1}>25$

$3^{n-1}>625$

이때 $3^5=243$, $3^6=729$이므로

$n-1\ge6 \qquad \therefore n\ge7$

따라서 처음으로 125보다 커지는 항은 제7항이다.

①

47 주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 첫째항이 3, 제6항이 3072이므로

$3r^5=3072,\qquad r^5=1024 \qquad \therefore r=4$

이때 a_1과 a_3은 각각 주어진 수열의 제2항과 제4항이므로

$a_1=3\cdot4=12,\ a_3=3\cdot4^3=192$

$\therefore a_1+a_3=204$ 　　 ③

48 주어진 등비수열의 공비를 $r\,(r>0)$라 하면 첫째 항이 5, 제7항이 625이므로

$5r^6=625,\quad r^6=125\quad \therefore r=\sqrt{5}\ (\because r>0)$

모든 항이 양수이므로 공비도 양수이다.

이때 $a_1, a_2, \cdots, a_5$는 각각 주어진 수열의 제2항, 제3항, $\cdots$, 제6항이므로

$a_1=5\sqrt{5},\ a_2=5\cdot(\sqrt{5})^2,\ \cdots,\ a_5=5\cdot(\sqrt{5})^5$

$$\begin{aligned}\therefore a_1a_2a_3a_4a_5&=5\sqrt{5}\cdot\{5\cdot(\sqrt{5})^2\}\cdot\cdots\cdot\{5\cdot(\sqrt{5})^5\}\\&=5^5\cdot(\sqrt{5})^{1+2+\cdots+5}\\&=5^5\cdot(5^{\frac{1}{2}})^{15}=5^{\frac{25}{2}}\end{aligned}$$

따라서 $p=2,\ q=25$이므로

$p+q=27$ 답 27

49 세 수 $\sin\theta,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\theta$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

삼각함수 사이의 관계
① $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\sin\theta\cos\theta=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2\end{aligned}$$

답 ③

50 1이 아닌 세 양수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $b^2=ac$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}&=\log_x a+\log_x c\\&=\log_x ac=\log_x b^2\\&=2\log_x b\\&=\frac{2}{\log_b x}\end{aligned}$$

답 ③

51 다항식 $f(x)=3x^2-x+a$를 일차식 $x,\ x-1,\ x-2$로 나누었을 때의 나머지는 각각

나머지정리
다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$R=P(a)$

$R_1=f(0)=a,\ R_2=f(1)=a+2,$
$R_3=f(2)=a+10$

따라서 $a,\ a+2,\ a+10$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a+2)^2=a(a+10)$

$6a=4\quad \therefore a=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

52 삼차방정식의 세 실근을 $a,\ ar,\ ar^2$으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=3$에서

$a(1+r+r^2)=3$ ...... ㉠

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a=-6$에서

$a^2r(1+r+r^2)=-6$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $ar=-2$

$a\cdot ar\cdot ar^2=-p$에서

$p=-(ar)^3=-(-2)^3=8$ 답 8

53 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a,\ ar,\ ar^2$으로 놓으면 겉넓이가 312이므로

$2(a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a)=312$

$\therefore a^2r(1+r+r^2)=156$ ...... ㉠

부피가 216이므로 $a\cdot ar\cdot ar^2=216$

$(ar)^3=216\quad \therefore ar=6$

$ar=6$을 ㉠에 대입하면

$6a(1+r+r^2)=156$

$\therefore a(1+r+r^2)=26$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+ar+ar^2)=4a(1+r+r^2)=104$ 답 104

54 세 짝수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $b=ar,\ c=ar^2$ (r는 $r\geq2$인 자연수)으로 놓으면

$a+b+c=84$에서 $a+ar+ar^2=84$

$\therefore a(1+r+r^2)=84$ ...... ㉠

(i) $r=2$일 때,

㉠에서 $7a=84\quad \therefore a=12$

$a=12,\ r=2$일 때, 세 짝수는 12, 24, 48이므로
$12+24+48=84$

(ii) $r=3$일 때,

㉠에서 $13a=84\quad \therefore a=\frac{84}{13}$

그런데 a는 짝수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $r=4$일 때,

㉠에서 $21a=84\quad \therefore a=4$

$a=4,\ r=4$일 때, 세 짝수는 4, 16, 64이므로
$4+16+64=84$

(iv) $r=5$일 때,

㉠에서 $31a=84\quad \therefore a=\frac{84}{31}$

그런데 a는 짝수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(v) $r\geq6$일 때,

$1+r+r^2\geq43$이므로 ㉠을 만족시키는 짝수 a는 존재하지 않는다.

$a=\frac{84}{1+r+r^2}$이므로 a가 짝수이면
$1+r+r^2\leq42$
이다.

이상에서 모든 a의 값의 합은

$12+4=16$ 답 ③

55 정사각형 A_2의 넓이는

정사각형 A_1의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

$8\cdot\frac{1}{2}$

정사각형 A_3의 넓이는

$8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\vdots$

정사각형 A_n의 넓이는

$8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서 정사각형 A_6의 넓이는

$8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{4}$

정사각형 A_6의 한 변의 길이는 $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$이므로 그 둘레의 길이는

$4\cdot\frac{1}{2}=2$ 답 2

56 2월부터 5월까지 A 노래의 매월 다운로드 건수가 전월 다운로드 건수의 $r\,(0<r<1)$배라 하고, A 노래의 n월 다운로드 건수를 $a_n\,(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$이라 하면

$$a_5=640\cdot r^4=40$$

$$r^4=\frac{1}{16} \qquad \therefore\ r=\frac{1}{2}\ (\because\ 0<r<1)$$

따라서 A 노래의 3월 다운로드 건수는

$$a_3=640\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=160$$

답 160

다른 풀이 A 노래의 3월 다운로드 건수를 x라 하면 640, x, 40은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$x^2=640\cdot 40=25600 \qquad \therefore\ x=160\ (\because\ x>0)$$

57 $\overline{\mathrm{P_1P_2}}=\overline{\mathrm{OP_1}}\sin 45°=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1$

직선 $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\tan\theta=1$
$\therefore\ \theta=45°$

$\overline{\mathrm{P_2P_3}}=\overline{\mathrm{OP_2}}\sin 45°=1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\overline{\mathrm{OP_2}}=\overline{\mathrm{P_1P_2}}=1$

$\overline{\mathrm{P_3P_4}}=\overline{\mathrm{OP_3}}\sin 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\overline{\mathrm{OP_3}}=\overline{\mathrm{P_2P_3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\vdots$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{10}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$에서 $\qquad n=21$

따라서 구하는 선분은 $\overline{\mathrm{P_{21}P_{22}}}$이다.

답 ⑤

58 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_3=a_1r^2=6$ ······ ㉠

$a_7=a_1r^6=54$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^4=9 \qquad \therefore\ r^2=3$

$r^2=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad 3a_1=6 \qquad \therefore\ a_1=2$

따라서 $a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}+\cdots+a_{10}^{\,2}$은 첫째항이 $a_1^{\,2}=4$, 공비가 $r^2=3$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같으므로

$$a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}+\cdots+a_{10}^{\,2}=\frac{4(3^{10}-1)}{3-1}$$
$$=2(3^{10}-1)$$

답 ②

59 $a_n=1+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}n+\dfrac{1}{2}$이므로

$$b_n=2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}=2\cdot(\sqrt{2})^{n-1}$$

$2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}(n-1)+1}$
$=2\cdot(\sqrt{2})^{n-1}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로 구하는 합은

$$\frac{2\{(\sqrt{2})^{12}-1\}}{\sqrt{2}-1}=126(\sqrt{2}+1)$$

답 $126(\sqrt{2}+1)$

60 첫째항이 4, 공비가 5인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{4(5^n-1)}{5-1}=5^n-1$$

$S_n\ge 10^9$에서 $\qquad 5^n-1\ge 10^9$

$\therefore\ 5^n\ge 10^9+1$

$5^n\ge 10^9+1>10^9$

즉 $5^n>10^9$이므로 양변에 상용로그를 취하면

$\log 5^n>\log 10^9, \qquad n\log 5>9$

$$\therefore\ n>\frac{9}{\log 5}=\frac{9}{1-0.3}=12.\cdots$$

$\log 5=\log\dfrac{10}{2}$
$=1-\log 2$

따라서 첫째항부터 제13항까지의 합이 처음으로 10^9 이상이 되므로

$n=13$

답 13

61 주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(3+\frac{1}{4}\right)+\left(5+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(19+\frac{1}{2^{10}}\right)$$
$$=(1+3+5+\cdots+19)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}\right)$$
$$=\frac{10(1+19)}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=100+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=101-\frac{1}{2^{10}}$$

답 ⑤

62 $6^{100}=(2\cdot 3)^{100}=2^{100}\cdot 3^{100}$이므로 6^{100}의 양의 약수의 총합은

$$(1+2+2^2+\cdots+2^{100})(1+3+3^2+\cdots+3^{100})$$
$$=\frac{1\cdot(2^{101}-1)}{2-1}\cdot\frac{1\cdot(3^{101}-1)}{3-1}$$
$$=(2^{101}-1)\cdot\frac{3^{101}-1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(2\cdot 2^{100}-1)(3\cdot 3^{100}-1)$$
$$=\frac{1}{2}(2p-1)(3q-1)$$

답 ②

63 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=9$ ······ ㉠

$\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}$
$=-63$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^3+1=-7, \qquad r^3=-8$

$\therefore\ r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$3a=9 \qquad \therefore\ a=3$

따라서 $a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$이므로

$a_7=3\cdot(-2)^6=192$

답 ⑤

64 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$$
$$=r+r^3+r^5+\cdots+r^{2k-1}$$

$=\dfrac{r\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=\dfrac{r(r^{2k}-1)}{r^2-1}=682$ ······ ㉠

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}$$
$$=1+r^2+r^4+\cdots+r^{2k-2}$$
$$=\frac{1\cdot\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=\frac{r^{2k}-1}{r^2-1}=341 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠÷㉡을 하면 $\quad r=2$

$r=2$를 ㉡에 대입하면 $\quad \dfrac{4^k-1}{4-1}=341$

$$4^k-1=1023, \quad 4^k=1024=4^5$$
$$\therefore k=5$$

답 5

65 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$도 등비수열이다.

$a_n=a_1R^{n-1}$이면 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}\cdot\left(\dfrac{1}{R}\right)^{n-1}$

등비수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$S_3=\frac{a(r^3-1)}{r-1}=\frac{1}{8} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$
$$S_6=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}$$
$$=4 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^3+1=32 \quad \therefore r^3=31$

$$\therefore S_{12}=\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{a(r^6-1)(r^6+1)}{r-1}$$
$$=4\cdot(31^2+1)=3848$$

답 3848

66 1회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 한 변의 길이가 2인 정사각형의 넓이의 $\dfrac{1}{4}$이므로

$2^2=4$

$$4\cdot\frac{1}{4}$$

2회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$$4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

3회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$$4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3$$
$$\vdots$$

따라서 시행을 10회 반복했을 때 색칠한 부분의 넓이의 합은

$$4\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$
$$=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}$$

답 $\dfrac{4}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}\right\}$

67 처음 3 km 구간을 달리는 데 걸린 시간은 $\dfrac{3}{9}$시간이고, 이 구간에서 일정한 속력으로 1 km를 달리는 데 걸린 시간은 $\dfrac{1}{9}$시간이다. 이후 1 km를 달리는 데 걸린 시간은 $\dfrac{1}{9}$시간에서 10 %씩 증가하므로 전체 걸린 시간은

Q BOX

7 km를 달리는 데 걸린 시간

$$\frac{3}{9}+\frac{1}{9}\times1.1+\frac{1}{9}\times1.1^2+\cdots+\frac{1}{9}\times1.1^7$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{9}\times1.1\times(1.1^7-1)}{1.1-1}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{9}\times1.1\times0.9}{0.1}=\frac{43}{30}\text{ (시간)}$$

따라서 완주하는 데 걸린 시간은 $\dfrac{43}{30}$시간, 즉 1시간 26분이다.

$\dfrac{43}{30}\times60=86$(분)

답 ②

68 (ⅰ) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=4\cdot5^2+k=100+k$$

(ⅱ) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=4\cdot5^{n+1}+k-(4\cdot5^n+k)$$
$$=16\cdot5^n \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 수열이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $a_1=100+k$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로

$$80=100+k \quad \therefore k=-20$$

답 -20

69 (ⅰ) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=2-1=1$$

(ⅱ) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)$$
$$=2^{n-1} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2^{n-1}$$

$a_n>400$에서 $\quad 2^{n-1}>400$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$이므로

$$n-1\geq9 \quad \therefore n\geq10$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이다.

답 ④

70 매년 말에 a만 원씩 적립하면 10년째 말의 적립금의 원리합계는

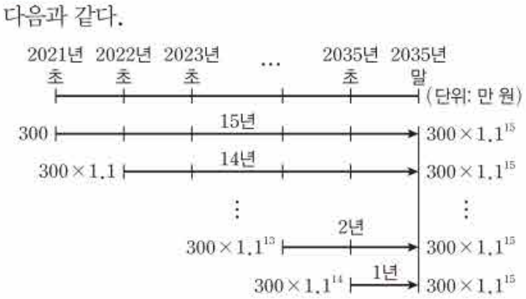
$$a+a(1+0.04)+a(1+0.04)^2+\cdots+a(1+0.04)^9$$
$$=\frac{a(1.04^{10}-1)}{1.04-1}$$
$$=\frac{a\times0.5}{0.04}$$
$$=12.5a\text{ (만 원)}$$

따라서 $12.5a=5000$이므로

$$a=400$$

답 ②

71 매년 초 적립금의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 2035년 말의 적립금의 원리합계는

$$300\times1.1^{15}\times15=4500\times1.1^{15}$$
$$=4500\times4.2$$
$$=18900\,(\text{만 원})$$

즉 1억 8천 9백만 원이다. 답 1억 8천 9백만 원

도전! 수능 기출

W 71쪽

01 (1st) a_1, a_2, a_3, a_4를 k에 대한 식으로 나타낸다.

함수 $y=|x^2-9|$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 점의 x좌표는 방정식 $|x^2-9|=k$의 실근과 같다.

그래프와 직선이 서로 다른 네 점에서 만나므로 $0<k<9$

$|x^2-9|=k$에서

$x^2-9=k$ 또는 $x^2-9=-k$

$x^2=9+k$ 또는 $x^2=9-k$

$\therefore x=\pm\sqrt{9+k}$ 또는 $x=\pm\sqrt{9-k}$

이때 $a_1<a_2<a_3<a_4$이므로

$a_1=-\sqrt{9+k}$, $a_2=-\sqrt{9-k}$,

$a_3=\sqrt{9-k}$, $a_4=\sqrt{9+k}$

(2nd) k의 값을 구한다.

네 수 $-\sqrt{9+k}$, $-\sqrt{9-k}$, $\sqrt{9-k}$, $\sqrt{9+k}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 세 수 $-\sqrt{9+k}$, $-\sqrt{9-k}$, $\sqrt{9-k}$도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

따라서 $-2\sqrt{9-k}=-\sqrt{9+k}+\sqrt{9-k}$이므로

$3\sqrt{9-k}=\sqrt{9+k}$

세 수 $-\sqrt{9-k}$, $\sqrt{9-k}$, $\sqrt{9+k}$도 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $2\sqrt{9-k}=-\sqrt{9-k}+\sqrt{9+k}$임을 이용하여 풀 수도 있다.

위의 식의 양변을 제곱하면

$9(9-k)=9+k$

$10k=72 \quad \therefore k=\dfrac{36}{5}$ 답 ③

다른 풀이 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_1=a-3d$, $a_2=a-d$, $a_3=a+d$,

$a_4=a+3d\ (d>0)$

로 놓자.

함수 $y=|x^2-9|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 a_1과 a_4, a_2와 a_3은 절댓값은 같고 부호는 다르다.

$f(x)=|x^2-9|$라 하면 $f(-x)=|(-x)^2-9|=|x^2-9|=f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

즉 $a_1+a_4=0$, $a_2+a_3=0$이므로

$2a=0 \quad \therefore a=0$

$a_1=-3d$는 $y=x^2-9$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표이므로

$k=(-3d)^2-9$

$\therefore 9d^2-k=9$ ...... ㉠

$a_2=-d$는 $y=-x^2+9$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표이므로

$k=-(-d)^2+9$

$\therefore d^2+k=9$ ...... ㉡

㉡$\times9-$㉠을 하면 $10k=72 \quad \therefore k=\dfrac{36}{5}$

02 (1st) S_1, S_2, S_3, $\cdots$, S_n 중에서 같은 값이 있는지 확인해야 함을 안다.

집합 T_n의 정의에 의하여

$T_1=\{S_1\}$, $T_2=\{S_1, S_2\}$, $T_3=\{S_1, S_2, S_3\}$, $\cdots$

이때 집합의 같은 원소는 중복하여 나열하지 않으므로 $i\neq j$일 때 $S_i=S_j$인 i, j가 있는지 확인해야 한다.

(2nd) 첫째항을 a, 공차를 d라 하고 $S_9=S_{18}$에서 a, d에 대한 식을 세운다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a\neq0)$, 공차를 d라 하면 $S_9=S_{18}$에서

$$\frac{9(2a+8d)}{2}=\frac{18(2a+17d)}{2}$$

$a+4d=2a+17d$

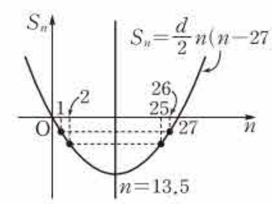
$\therefore a=-13d$

(3rd) 집합 T_n의 원소의 개수가 13인 경우를 생각한다.

$a=-13d$이므로

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$
$$=\frac{n\{-26d+(n-1)d\}}{2}$$
$$=\frac{d}{2}n(n-27) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠에서 $d>0$이라 하고 n에 대한 이차함수라 생각하면 그 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림의 그래프와 같이 직선 $n=\dfrac{27}{2}=13.5$에 대하여 대칭이다. 즉



$S_1=S_{26}$, $S_2=S_{25}$, $S_3=S_{24}$, $\cdots$, $S_{12}=S_{15}$, $S_{13}=S_{14}$

이므로

$T_{13}=T_{14}=T_{15}=\cdots=T_{26}=\{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{13}\}$

$\therefore n(T_{13})=n(T_{14})=n(T_{15})=\cdots=n(T_{26})=13$

(4th) 모든 자연수 n의 값의 합을 구한다.

집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 자연수 n은

13, 14, 15, $\cdots$, 26

자연수 n의 개수는 $26-13+1=14$

이므로 구하는 합은

$$13+14+15+\cdots+26=\frac{14(13+26)}{2}=273$$

답 273

참고 (3rd)에서 $d<0$일 때에는 위로 볼록한 그래프로 $d>0$일 때의 그래프와 개형만 다르고 집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 자연수 n은 같다.

한편 $d=0$일 때에는 $S_1=S_2=\cdots=S_n=\cdots=0$이므로 $n(T_n)=1$이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

03 (1st) 두 수열 $\{S_{2n-1}\}$, $\{S_{2n}\}$의 일반항을 각각 구한다.

수열 $\{S_{2n-1}\}$은 첫째항이 S_1, 공차가 -3인 등차수열이므로

$S_{2n-1}=S_1+(n-1)\cdot(-3)=-3n+3+S_1$

수열 $\{S_{2n}\}$은 첫째항이 S_2, 공차가 2인 등차수열이므로

$$S_{2n}=S_2+(n-1)\cdot 2=2n-2+S_2$$

2nd a_8의 값을 구한다.

$a_8=S_8-S_7$

$=(2\cdot 4-2+S_2)-\{(-3)\cdot 4+3+S_1\}$

$=(S_2+6)-(S_1-9)$

$=S_2-S_1+15=a_2+15$

$=1+15=16$ ($\because a_2=1$) 답 16

04 1st 공비가 1이 아님을 확인한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 할 때, 첫째항이 2이므로 $r=1$이면

$$S_{12}=12\cdot 2=24,\ S_{10}=10\cdot 2=20$$

$$\therefore S_{12}>S_{10}$$

즉 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $r\neq 1$

2nd 조건 (가)를 r에 대한 식으로 나타낸 후 r의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $S_{12}-S_2=4S_{10}$이므로

$$\frac{2(r^{12}-1)}{r-1}-\frac{2(r^2-1)}{r-1}=4\cdot\frac{2(r^{10}-1)}{r-1}$$

$$r^{12}-1-(r^2-1)=4(r^{10}-1)$$

$$r^{12}-r^2=4(r^{10}-1)$$

$$r^2(r^{10}-1)=4(r^{10}-1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $r=-1$이면 등비수열 $\{a_n\}$은

$$2,\ -2,\ 2,\ -2,\ \cdots$$

이므로 $S_{12}=S_{10}=0$

즉 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $r\neq -1$

따라서 $r\neq\pm1$이므로 ㉠에서

$$r^2=4 \qquad \therefore r=\pm 2$$

3rd 공비를 구한다.

첫째항이 양수이므로 $r>0$이면

$$S_{10}<S_{12}$$

이때 조건 (나)에서 $S_{12}<S_{10}$이므로

$$r<0 \qquad \therefore r=-2$$

4th a_4의 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공비가 -2이므로

$a_4=2\cdot(-2)^3=-16$ 답 ②

Q BOX

$S_{2n}=2n-2+S_2$의 n에 4를 대입한다.

$S_{2n-1}=-3n+3+S_1$의 n에 4를 대입한다.

$r\neq\pm1$이므로 $r^{10}-1\neq 0$

26^2-20^2
$=(26+20)(26-20)$
$=46\cdot 6$
$=276$

09 수열의 합 W 72쪽

01 $\displaystyle\sum_{k=0}^{14}(2k+1)^2+\sum_{k=1}^{15}(2k)^2$

$=(1^2+3^2+5^2+\cdots+29^2)+(2^2+4^2+6^2+\cdots+30^2)$

$=1^2+2^2+3^2+\cdots+30^2$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{30}k^2=\sum_{k=0}^{29}(k+1)^2$ 답 ④

02 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}ka_k=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}$

$=60 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}ka_{k+1}=a_2+2a_3+3a_4+\cdots+9a_{10}+10a_{11}$

$=35 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$-$㉡을 하면

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}-10a_{11}=25$$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k-10a_{11}=25$$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=25+10a_{11}=25+10\cdot 3=55$ 답 55

03 $a_7=S_7-S_6$

$=\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(3k+2)^2-\sum_{k=1}^{7}(3k-1)^2\right\}$

$\quad-\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(3k+2)^2-\sum_{k=1}^{6}(3k-1)^2\right\}$

$=\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(3k+2)^2-\sum_{k=1}^{7}(3k+2)^2\right\}$

$\quad-\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(3k-1)^2-\sum_{k=1}^{6}(3k-1)^2\right\}$

$=(3\cdot 8+2)^2-(3\cdot 7-1)^2$

$=26^2-20^2=276$ 답 276

04 $\sin\dfrac{n\pi}{4}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{\pi}{2}=1,\ \sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\pi=0,\ \sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{3}{2}\pi=-1,$$

$$\sin\frac{7}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin 2\pi=0,\ \cdots$$

이때 함수 $y=\sin x$의 주기는 2π이므로 수열 $\{a_n\}$은 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 1, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, -1, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 0이 이 순서대로 반복된다.

따라서 수열 $\{a_n^2\}$은 $\dfrac{1}{2}$, 1, $\dfrac{1}{2}$, 0이 이 순서대로 반복되므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{32}a_n^2=8\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+0\right)=8\cdot 2=16$ 답 16

05 $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $\quad 2x+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$$4x^2+4x+1=-3, \qquad x^2+x+1=0$$

양변에 $x-1$을 곱하면 $\quad (x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^3-1=0 \quad \therefore x^3=1$

따라서 k가 3의 배수일 때 x^k이 실수이므로

$f(1)=f(2)=0,$

$f(3)=f(4)=f(5)=1,$

$f(6)=f(7)=f(8)=2,$

$f(9)=f(10)=f(11)=3,$

$\vdots$

$f(18)=f(19)=f(20)=6$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20} f(n)=3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+\cdots+3\cdot6$$
$$=3(1+2+3+\cdots+6)$$
$$=3\cdot21=63$$

답 ③

06 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

이므로 $\quad 125=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+2\cdot45$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=35$$

답 ②

07 $\sum_{k=1}^{n}(2a_k+b_k)^2=n^2+2n,\ \sum_{k=1}^{n}(a_k-2b_k)^2=6n+10$

의 양변에 $n=10$을 각각 대입하면

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)^2=10^2+2\cdot10=120,$$

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)^2=6\cdot10+10=70$$

이때

$$\sum_{k=1}^{10}\{(2a_k+b_k)^2+(a_k-2b_k)^2\}=\sum_{k=1}^{10}(5a_k^2+5b_k^2)$$
$$=5\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2)$$

이므로 $\quad 5\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2)=190$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2)=38$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2-1)=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2)-\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=38-1\cdot10=28$$

답 28

08 $\sum_{k=1}^{20}(a_k+1)^2=64$에서 $\quad \sum_{k=1}^{20}(a_k^2+2a_k+1)=64$

$$\sum_{k=1}^{20}a_k^2+2\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{20}1=64$$

$$\sum_{k=1}^{20}a_k^2+2\sum_{k=1}^{20}a_k+1\cdot20=64$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k^2+2\sum_{k=1}^{20}a_k=44 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{20}a_k(a_k+1)=28$에서 $\quad \sum_{k=1}^{20}(a_k^2+a_k)=28$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k^2+\sum_{k=1}^{20}a_k=28 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡$\times2-$㉠을 하면 $\quad \sum_{k=1}^{20}a_k^2=12$

답 12

Q BOX

$x^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$
$=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
이므로 x^k은
$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ -\frac{1+\sqrt{3}i}{2},$
1이 이 순서대로 반복된다.

x^k이 실수가 되는 k는 3, 6, 9, 12, 15, 18의 6개

첫째항과 공비가 모두 16인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

$a_1=39,\ a_{10}=3$

$a_{11}=-1,\ a_{20}=-37$

$(2a_k+b_k)^2$
$+(a_k-2b_k)^2$
$=4a_k^2+4a_kb_k+b_k^2$
$+a_k^2-4a_kb_k+4b_k^2$
$=5a_k^2+5b_k^2$

09 다항식 $P(x)=x^{2n-1}(x-1)$을 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 $P(4)$이므로

$$a_n=4^{2n-1}\cdot3=\frac{3}{4}\cdot16^n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}16^k=\frac{3}{4}\cdot\frac{16(16^n-1)}{16-1}$$
$$=\frac{4(16^n-1)}{5}$$

답 ③

10 $S_n=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}S_k=\sum_{k=1}^{10}(2^k-1)=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}-1\cdot10$$
$$=2036$$

답 2036

11 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_7=15$에서

$39+6d=15 \quad \therefore d=-4$

$\therefore a_n=39+(n-1)\cdot(-4)=-4n+43$

$a_n<0$에서 $\quad -4n+43<0$

$\therefore n>\frac{43}{4}=10.75$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제10항까지 양수이고, 제11항부터 음수이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}|a_k|=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=11}^{20}(-a_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=11}^{20}a_k$$
$$=\frac{10(39+3)}{2}-\frac{10(-1-37)}{2}$$
$$=400$$

답 ①

12 $\sum_{k=1}^{9}(k-c)^2=\sum_{k=1}^{9}(k^2-2ck+c^2)$

$$=\frac{9\cdot10\cdot19}{6}-2c\cdot\frac{9\cdot10}{2}+c^2\cdot9$$
$$=9c^2-90c+285$$
$$=9(c-5)^2+60$$

따라서 $\sum_{k=1}^{9}(k-c)^2$의 값이 최소가 되도록 하는 c의 값은 5이다.

답 ③

13 세 점 $\left(n,\ \frac{3}{n}\right)$, $(n-1,\ 0)$, $(n+1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 x축 위의 변을 밑변이라 하면 밑변의 길이는 $(n+1)-(n-1)=2$이고 높이는 $\frac{3}{n}$이다.

따라서 삼각형의 넓이 a_n은

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{3}{n}=\frac{3}{n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{7}\frac{3}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{7}\frac{3}{\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{7}(n^2+n)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{7\cdot8\cdot15}{6}+\frac{7\cdot8}{2}\right)$$
$$=56$$

답 56

Q BOX

14 $\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=2}^{10}k^2+\sum_{k=3}^{10}k^2+\cdots+\sum_{k=10}^{10}k^2$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)+(2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2)$
$\quad+(3^2+4^2+5^2+\cdots+10^2)+\cdots+(9^2+10^2)+10^2$

$=1^2\cdot1+2^2\cdot2+3^2\cdot3+\cdots+10^2\cdot10$

$=1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3$

$=\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2=3025$ 답 ③

15 $\sum_{l=1}^{8}\left\{\sum_{k=1}^{l}(4k-l)\right\}=\sum_{l=1}^{8}\left\{4\cdot\frac{l(l+1)}{2}-l\cdot l\right\}$

l을 상수로 생각한다.

$=\sum_{l=1}^{8}(l^2+2l)$

$=\frac{8\cdot9\cdot17}{6}+2\cdot\frac{8\cdot9}{2}$

$=276$ 답 276

16 $\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}(k-i)\right\}$

k를 상수로 생각한다.

$=\sum_{k=1}^{n}\left\{k\cdot k-\frac{k(k+1)}{2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

따라서 $\frac{n(n-1)(n+1)}{6}=20$이므로

$n(n-1)(n+1)=120$

$n^3-n-120=0,\qquad (n-5)(n^2+5n+24)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & 0 & -1 & -120 \\ & & 5 & 25 & 120 \\ \hline & 1 & 5 & 24 & 0 \end{array}$$

$\therefore n=5$ ($\because$ n은 자연수) 답 5

17 $\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{n}2^{k+n}\right)=\sum_{n=1}^{5}\left(2^n\sum_{k=1}^{n}2^k\right)=\sum_{n=1}^{5}\left\{2^n\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1}\right\}$

n을 상수로 생각하므로 $2^{k+n}=2^k\cdot2^n$으로 변형한 후 정리한다.

$=\sum_{n=1}^{5}2^n(2^{n+1}-2)=\sum_{n=1}^{5}(2^{2n+1}-2^{n+1})$

$=2\sum_{n=1}^{5}4^n-2\sum_{n=1}^{5}2^n$

$=2\cdot\frac{4(4^5-1)}{4-1}-2\cdot\frac{2(2^5-1)}{2-1}$

$=2604$ 답 ③

18 수열 $1\cdot3,\ 2\cdot5,\ 3\cdot7,\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=n(2n+1)=2n^2+n$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k^2+k)$

$=2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+\frac{10\cdot11}{2}$

$=825$ 답 ②

19 $a_n=-4+(n-1)\cdot(-3)=-3n-1$,
$b_n=3+(n-1)\cdot2=2n+1$이므로

$\sum_{k=1}^{9}a_kb_k=\sum_{k=1}^{9}(-3k-1)(2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{9}(-6k^2-5k-1)$

$=-6\cdot\frac{9\cdot10\cdot19}{6}-5\cdot\frac{9\cdot10}{2}-1\cdot9$

$=-1944$ 답 -1944

20 위에서부터 k번째 층에 필요한 정육면체의 개수는

$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^2+k}{2}$

따라서 8층 탑을 쌓는 데 필요한 정육면체의 개수는

$\sum_{k=1}^{8}\frac{k^2+k}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{8\cdot9\cdot17}{6}+\frac{8\cdot9}{2}\right)=120$ 답 ⑤

21 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+4n$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2+4\cdot1=5$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2+4n-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$
$=2n+3$ …… ㉠

이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+3$

따라서 $ka_k=k(2k+3)=2k^2+3k$이므로

$\sum_{k=1}^{6}ka_k=\sum_{k=1}^{6}(2k^2+3k)$

$=2\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}+3\cdot\frac{6\cdot7}{2}$

$=245$ 답 ②

22 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2\cdot3^n-2$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\cdot3^1-2=4$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2\cdot3^n-2-(2\cdot3^{n-1}-2)$
$=4\cdot3^{n-1}$ …… ㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\cdot3^{n-1}$

따라서 $\frac{1}{a_k}=\frac{1}{4\cdot3^{k-1}}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{20}\left\{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$

첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제20항까지의 합

$=\frac{3}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}$ 답 ③

23 수열 $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, …의 일반항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{k}{n}$$

이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

$$\therefore S_{15}=\frac{15+1}{2}=8$$

답 ②

24 수열 $1\cdot(2n-1)$, $2\cdot(2n-3)$, $3\cdot(2n-5)$, …의 일반항을 a_k라 하면

$$a_k=k\{2n-(2k-1)\}=-2k^2+(2n+1)k$$

이므로

$$1\cdot(2n-1)+2\cdot(2n-3)+3\cdot(2n-5)+\cdots+n\cdot1$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+(2n+1)k\}$$
$$=-2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

따라서 $\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{30}k^2$을 만족시키는 n의 값은 30이다.

답 30

25 $a_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이므로 주어진 식의 값은

$$\sum_{k=1}^{11}\frac{2k+1}{a_k}=\sum_{k=1}^{11}\frac{6}{k(k+1)}$$
$$=6\sum_{k=1}^{11}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=6\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$
$$=6\left(1-\frac{1}{12}\right)=\frac{11}{2}$$

답 ④

26 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=-4,\ \alpha_n\beta_n=-(4n^2-1)$$

이므로

$$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{-4}{-(4n^2-1)}$$
$$=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{15}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{15}2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{31}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{60}{31}$$

답 $\frac{60}{31}$

Q BOX

수열이 n에 대한 식으로 이루어져 있으므로 수열의 일반항을 a_n이라 하지 않고 a_k로 놓는다.

수열 1, 3, 5, 7, …은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로 제k항은
$1+(k-1)\cdot2$
$=2k-1$

수열 3, 5, 7, …은 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이므로 제k항은
$3+(k-1)\cdot2$
$=2k+1$

27 $S_n=2n^2+3n$에서

(i) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=2\cdot1^2+3\cdot1=5$$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=2n^2+3n-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}$$
$$=4n+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=4n+1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+5}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4n+5}\right)$$
$$=\frac{n}{5(4n+5)}$$

답 ⑤

28 $\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})$$
$$=\sqrt{m+1}-1$$

따라서 $\sqrt{m+1}-1=3$이므로

$$\sqrt{m+1}=4,\qquad m+1=16$$
$$\therefore m=15$$

답 15

29 $a_n=\sqrt{n+2}+\sqrt{n}$이므로

$$\sum_{k=1}^{79}\frac{2}{a_k}=\sum_{k=1}^{79}\frac{2}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{79}\frac{2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}$$
$$=\sum_{k=1}^{79}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{80}-\sqrt{78})+(\sqrt{81}-\sqrt{79})$$
$$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{80}+\sqrt{81}$$
$$=4\sqrt{5}-\sqrt{2}+8$$

따라서 $p=4$, $q=8$이므로

$$p+q=12$$

답 ③

30 $\sum_{k=1}^{99}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{99}\log\frac{k+1}{k}$

$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{100}{99}$

$=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{99}\right)$

$=\log 100=2$ 답 2

31 $\sum_{n=1}^{20}\log a_n=\sum_{n=1}^{10}\log a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{10}\log a_{2n}$

$=\sum_{n=1}^{10}\log 2^n+\sum_{n=1}^{10}\log 5^n$

$=\sum_{n=1}^{10}n\log 2+\sum_{n=1}^{10}n\log 5$

$=\log 2\sum_{n=1}^{10}n+\log 5\sum_{n=1}^{10}n$

$=(\log 2+\log 5)\sum_{n=1}^{10}n$

$=\log 10\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=55$ 답 ④

$\sum_{n=1}^{20}\log a_n$
$=\log a_1+\log a_2+\log a_3+\log a_4+\cdots+\log a_{19}+\log a_{20}$
$=(\log a_1+\log a_3+\cdots+\log a_{19})+(\log a_2+\log a_4+\cdots+\log a_{20})$
$=\sum_{n=1}^{10}\log a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{10}\log a_{2n}$

32 $n\geq 2$일 때,

$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$=\log_3(n^2+n)-\log_3\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$=\log_3(n^2+n)-\log_3(n^2-n)$

$=\log_3\frac{n^2+n}{n^2-n}=\log_3\frac{n(n+1)}{n(n-1)}$

$=\log_3\frac{n+1}{n-1}$

$a_{2n+1}=\log_3\frac{2n+2}{2n}=\log_3\frac{n+1}{n}$이므로

$\sum_{n=1}^{26}a_{2n+1}=\sum_{n=1}^{26}\log_3\frac{n+1}{n}$

$=\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\cdots+\log_3\frac{27}{26}$

$=\log_3\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{27}{26}\right)$

$=\log_3 27=3$ 답 3

쌤한마디

a_{2n+1}의 n에 1, 2, 3, …을 대입하면 a_3, a_5, a_7, …이므로 $a_n=\log_3\frac{n+1}{n-1}$이 $n=1$일 때부터 성립하는지는 알아보지 않아도 된다.

33 주어진 수열을

(1), (1, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4, 5), …

와 같이 묶으면 처음으로 나타나는 20은 20 번째 묶음의 20 번째 항이다.

(1, 2, 3, …, 20)

이때 n 번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 19 번째 묶음까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{19}k=\frac{19\cdot 20}{2}=190$

따라서 190+20=210이므로 처음으로 나타나는 20은 제210항이다. 답 ①

34 위에서 m 번째 줄의 왼쪽에서 n 번째에 있는 수는

mn

대각선 위의 수는 m 번째 줄의 왼쪽에서 m 번째에 있는 수이므로 그 수는

m^2

121은 대각선 위의 수이므로 $121=11^2$에서 121은 11 번째 줄의 왼쪽에서 11 번째에 있다.

따라서 a는 10 번째 줄의 왼쪽에서 10 번째에 있는 수, b는 10 번째 줄의 왼쪽에서 11 번째에 있는 수, c는 11 번째 줄의 왼쪽에서 10 번째에 있는 수이므로

$a=10^2=100$, $b=10\cdot 11=110$, $c=11\cdot 10=110$

$\therefore a+b+c=320$ 답 320

35 위에서 10 번째 줄의 왼쪽에서 첫 번째 수는 위에서 첫 번째 줄부터 9 번째 줄까지 나열된 수의 개수보다 1만큼 큰 수이므로

$(1+2+3+\cdots+9)+1=\sum_{k=1}^{9}k+1$

$\sum_{k=1}^{9}k+1=\frac{9\cdot 10}{2}+1=46$

따라서 위에서 10 번째 줄에 나열된 수들은 첫째항이 46, 공차가 1, 항수가 10인 등차수열을 이루므로 구하는 합은

$\frac{10\{2\cdot 46+(10-1)\cdot 1\}}{2}=505$ 답 505

36 주어진 수열을

(1), (10, 11), (100, 101, 110, 111), …

과 같이 묶으면 n 번째 묶음의 항의 개수는 2^{n-1}이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

0과 1로 이루어진 n자리 자연수의 개수와 같다. 이때 첫 번째 자리에 올 수 있는 수는 1뿐이고 나머지 $(n-1)$자리에 올 수 있는 수는 0, 1이므로 $1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

$\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

$n=5$일 때 $2^5-1=31$, $n=6$일 때 $2^6-1=63$이므로 제33항은 6 번째 묶음의 2 번째 항이다.

이때 6 번째 묶음은 100000, 100001, …, 111111이므로 제33항은 100001이다. 답 ④

도전! 수능 기출

W 78쪽

01 1st a_2, a_{m-1}의 값을 구한다.

a_2는 a_1과 a_3의 등차중항이므로

$2a_2=a_1+a_3$

조건 (가)에서 $a_1+a_2+a_3=159$이므로

$2a_2+a_2=159$, $3a_2=159$

$\therefore a_2=53$

또 a_{m-1}은 a_{m-2}와 a_m의 등차중항이므로

$$2a_{m-1}=a_{m-2}+a_m$$

조건 (나)에서 $a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=96$이므로

$$2a_{m-1}+a_{m-1}=96, \qquad 3a_{m-1}=96$$

$$\therefore a_{m-1}=32$$

2nd 조건 (나)를 이용하여 m의 값을 구한다.

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{m}a_k$는 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{m(a_1+a_m)}{2}$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$a_1=a_2-d=53-d,\ a_m=a_{m-1}+d=32+d$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{m\{(53-d)+(32+d)\}}{2}=\frac{85}{2}m$$

즉 $\frac{85}{2}m=425$이므로

$$m=10$$

3rd 첫째항과 공차를 구한다.

$a_2=53$에서 $\quad a_1+d=53 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a_9=32$에서 $\quad a_1+8d=32 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a_1=56,\ d=-3$

4th a_{11}의 값을 구한다.

$a_n=56+(n-1)\cdot(-3)=-3n+59$이므로

$$a_{11}=-3\cdot 11+59=26$$

답 26

02 **1st** 점 D의 좌표를 구한다.

두 점 B(1, 0), C$(2^m,\ m)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{m}{2^m-1}(x-1)$$

이므로

$$D\left(2^n,\ \frac{m}{2^m-1}(2^n-1)\right)$$

2nd △ABD의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같음을 이용하여 부등식을 세운 후 a_n을 구한다.

△ABD의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같으므로

$$\frac{1}{2}(2^n-1)\cdot\frac{m}{2^m-1}(2^n-1)\le\frac{m}{2}$$

$$(2^n-1)^2\le 2^m-1$$

$$\therefore 2^m\ge(2^n-1)^2+1$$

(i) $n=1$일 때,

$2^m\ge 2$이므로 $\qquad m\ge 1$

$$\therefore a_1=1$$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$$(2^n-1)^2+1=2^{2n}-2^{n+1}+2$$

이때

$$\begin{aligned}2^{2n-1}-(2^{2n}-2^{n+1}+2)&=2^{2n-1}(1-2)+2^{n+1}-2\\&=2^{n+1}-2^{2n-1}-2\\&=2^{n+1}(1-2^{n-2})-2\\&<0\end{aligned}$$

이므로

$$2^{2n-1}<2^{2n}-2^{n+1}+2,\ 즉\ 2^{2n-1}<(2^n-1)^2+1$$

또 $(2^{2n}-2^{n+1}+2)-2^{2n}=-2(2^n-1)<0$이므로

$$2^{2n}-2^{n+1}+2<2^{2n},\ 즉\ (2^n-1)^2+1<2^{2n}$$

$$\therefore 2^{2n-1}<(2^n-1)^2+1<2^{2n}$$

즉 $2^m\ge(2^n-1)^2+1$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값이 $2n$이므로

$$a_n=2n$$

(i), (ii)에서 $\qquad a_1=1,\ a_n=2n\ (n\ge 2)$

3rd $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=1+\sum_{n=2}^{10}2n=1+2\sum_{n=1}^{10}n-2\cdot 1$$

$$=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-1=109$$

답 ①

03 **1st** 주어진 부등식의 좌변을 인수분해한다.

$4^k-(2^n+4^n)2^k+8^n\le 1$에서

$$2^{2k}-(2^n+4^n)2^k+2^n\cdot 4^n\le 1$$

$$\therefore (2^k-2^n)(2^k-4^n)\le 1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

2nd a_n을 구한다.

㉠에서 n과 k는 모두 자연수이므로 2^k-2^n, 2^k-4^n은 모두 정수이다.

(i) $(2^k-2^n)(2^k-4^n)=1$인 경우

$$2^k-2^n=1,\ 2^k-4^n=1$$

또는 $2^k-2^n=-1,\ 2^k-4^n=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

이때 $2^n<4^n$이므로

$$2^k-4^n<2^k-2^n \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡은 ㉢을 만족시키지 않으므로

$$(2^k-2^n)(2^k-4^n)\ne 1$$

(ii) $(2^k-2^n)(2^k-4^n)\le 0$인 경우

$$2^n\le 2^k\le 4^n, \qquad 2^n\le 2^k\le 2^{2n}$$

$$\therefore n\le k\le 2n$$

(i), (ii)에서 $n\le k\le 2n$이므로 이 부등식을 만족시키는 자연수 k의 합 a_n은

$$a_n=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+2n$$

$$=\frac{(n+1)(n+2n)}{2}$$

$$=\frac{3n(n+1)}{2}$$

3rd $p+q$의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{20}\frac{2}{3n(n+1)}$$

$$=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{63}$$

따라서 $p=63$, $q=40$이므로

$$p+q=103$$

답 103

Q BOX

$n\ge 2$이므로
$2^n-1>0$

첫째항이 n, 끝항이 $2n$, 항수가
$2n-n+1=n+1$
인 등차수열의 합

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}$

m이 자연수이므로
$2^m-1>0$
따라서 부등식의 양변에 2^m-1을 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$n\ge 2$이므로
$2^{n-2}\ge 1$
$\therefore 1-2^{n-2}\le 0$

04 (1st) $\sum_{k=1}^{m} a_k$를 m에 대한 식으로 나타낸다.

$a_n=\log_2\sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}=\frac{1}{2}\log_2\frac{2(n+1)}{n+2}$이므로

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\log_2\frac{2(k+1)}{k+2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\log_2\frac{2\cdot2}{3}+\log_2\frac{2\cdot3}{4}+\log_2\frac{2\cdot4}{5}+\cdots+\log_2\frac{2(m+1)}{m+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\log_2\left\{\frac{2\cdot2}{3}\cdot\frac{2\cdot3}{4}\cdot\frac{2\cdot4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2(m+1)}{m+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2} \quad\cdots\cdots ㉠$$

(2nd) 모든 m의 값의 합을 구한다.

자연수 m에 대하여 ㉠이 자연수가 되려면 $m+2$는 2의 거듭제곱의 꼴이어야 한다.

$m+2=2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \cdots$일 때 ㉠의 값은

(i) $m+2=2^2$, 즉 $m=2$일 때,

$$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^3}{2^2}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

(ii) $m+2=2^3$, 즉 $m=6$일 때,

$$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^7}{2^3}=\frac{1}{2}\cdot4=2$$

(iii) $m+2=2^4$, 즉 $m=14$일 때,

$$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{15}}{2^4}=\frac{1}{2}\cdot11=\frac{11}{2}$$

(iv) $m+2=2^5$, 즉 $m=30$일 때,

$$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{31}}{2^5}=\frac{1}{2}\cdot26=13$$

(v) $m+2=2^6$, 즉 $m=62$일 때,

$$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{63}}{2^6}=\frac{1}{2}\cdot57=\frac{57}{2}$$

(vi) $m+2=2^7$, 즉 $m=126$일 때,

$$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{127}}{2^7}=\frac{1}{2}\cdot120=60$$

(vii) $m+2\geq2^8$일 때, $\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}>100$

이상에서 $m=6$ 또는 $m=30$ 또는 $m=126$

따라서 모든 m의 값의 합은

$6+30+126=162$ 답 ④

10 수학적 귀납법

Ⓦ 79쪽

01 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -48, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=-48+(n-1)\cdot3=3n-51$

$\therefore a_{20}=3\cdot20-51=9$ 답 ③

$a_{20}=-48+19\cdot3=9$와 같이 구할 수도 있다.

02 $(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+36$에서

$a_{n+1}^2+2a_na_{n+1}+a_n^2=4a_na_{n+1}+36$

$a_{n+1}^2-2a_na_{n+1}+a_n^2=36$

$(a_{n+1}-a_n)^2=36$

이때 $a_n>a_{n+1}$이므로 $a_{n+1}-a_n=-6$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 -6인 등차수열이므로

$a_n=5+(n-1)\cdot(-6)=-6n+11$

$\therefore \sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{7}(-6k+11)$

$=-6\cdot\frac{7\cdot8}{2}+11\cdot7$

$=-91$ 답 -91

03 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고

a_{n+1}은 a_n과 a_{n+2}의 등차중항이다.

$a_1=65,\ a_2-a_1=61-65=-4$

이므로 첫째항이 65, 공차가 -4이다.

$\therefore a_n=65+(n-1)\cdot(-4)=-4n+69$

$-4n+69<0$에서 $n>\frac{69}{4}=17.25$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제18항부터 음수이므로 첫째항부터 제17항까지의 합이 최대이다.

양수인 항의 총합

즉 S_n의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 n의 값은 17이다. 답 17

04 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{4}$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 64, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

따라서 $a_n=64\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-4}$이므로

$64=4^3=\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

$a_{13}=\left(\frac{1}{4}\right)^9=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^9=\frac{1}{2^{18}}$ 답 ⑤

05 $a_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+2}}$의 양변을 제곱하면

$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$

a_{n+1}은 a_n과 a_{n+2}의 등비중항이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=3$인 등비수열이므로

$a_n=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$

$a_k=729$에서 $3^{k-1}=729=3^6$

$k-1=6 \quad \therefore k=7$ 답 7

수학적 귀납법

06 이차방정식 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a_{n+1}{}^2-a_na_{n+2}=0$$

$$\therefore\ a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{10}{5}=2$인 등비수열이다.

한편 주어진 이차방정식에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-a_{n+1}\pm\sqrt{a_{n+1}{}^2-a_na_{n+2}}}{a_n}$$

$$=-\frac{a_{n+1}}{a_n}\ (\because ㉠)$$

$$=-2$$

수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이므로 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$

즉 $b_n=-2$이므로 $\quad b_8=-2$ 답 ①

07 $a_{n+1}=a_n+3n^2$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 6을 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+3\cdot1^2$$
$$a_3=a_2+3\cdot2^2=a_1+3\cdot1^2+3\cdot2^2$$
$$a_4=a_3+3\cdot3^2=a_1+3\cdot1^2+3\cdot2^2+3\cdot3^2$$
$$\vdots$$
$$a_7=a_6+3\cdot6^2=a_1+3\cdot1^2+3\cdot2^2+3\cdot3^2+\cdots+3\cdot6^2$$
$$=1+3(1^2+2^2+3^2+\cdots+6^2)$$
$$=1+3\sum_{k=1}^{6}k^2$$
$$=1+3\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}=274$$

답 274

08 $a_n-a_{n-1}=2^{n-1}$, 즉 $a_n=a_{n-1}+2^{n-1}$의 n에 2, 3, 4, $\cdots$를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+2$$
$$a_3=a_2+2^2=a_1+2+2^2$$
$$a_4=a_3+2^3=a_1+2+2^2+2^3$$
$$\vdots$$
$$\therefore\ a_n=a_1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$$
$$=-2+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-4$$

$a_k=2044$에서 $\quad 2^k-4=2044$

$2^k=2048=2^{11} \quad \therefore\ k=11$ 답 ④

09 $a_{n+1}=a_n+f(n)$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 49를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+f(1)$$
$$a_3=a_2+f(2)=a_1+f(1)+f(2)$$
$$a_4=a_3+f(3)=a_1+f(1)+f(2)+f(3)$$
$$\vdots$$
$$a_{50}=a_{49}+f(49)=a_1+f(1)+f(2)+\cdots+f(49)$$
$$=a_1+\sum_{k=1}^{49}f(k)$$
$$=5+4\cdot49+1=202$$

답 202

10 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

$$=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore\ a_{n+1}=a_n+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+2\left(1-\frac{1}{2}\right)=a_1+2-1$$
$$a_3=a_2+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=a_1+2-1+1-\frac{2}{3}$$
$$=a_1+2-\frac{2}{3}$$
$$a_4=a_3+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=a_1+2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}$$
$$=a_1+2-\frac{2}{4}$$
$$\vdots$$
$$\therefore\ a_n=a_1+2-\frac{2}{n}=9-\frac{2}{n}$$

$|9-a_k|<\frac{1}{10}$에서 $\quad \left|9-\left(9-\frac{2}{k}\right)\right|<\frac{1}{10}$

$\frac{2}{k}<\frac{1}{10} \quad \therefore\ k>20$

k는 자연수이므로 $\left|\frac{2}{k}\right|=\frac{2}{k}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 21이다. 답 ⑤

11 $\sqrt{n+1}\,a_{n+1}=\sqrt{n}\,a_n$, 즉 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 99를 차례대로 대입하면

$$a_2=\sqrt{\frac{1}{2}}\,a_1$$
$$a_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\,a_1=\sqrt{\frac{1}{3}}\,a_1$$
$$a_4=\sqrt{\frac{3}{4}}\,a_3=\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\,a_1=\sqrt{\frac{1}{4}}\,a_1$$
$$\vdots$$
$$a_{100}=\sqrt{\frac{99}{100}}\,a_{99}=\sqrt{\frac{1}{100}}\,a_1=\frac{1}{10}\cdot30=3$$

답 3

12 $a_{2n+1}=\frac{n+1}{n}a_{2n-1}$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 8을 차례대로 대입하면

$2n+1=17$에서 $\quad 2n=16 \quad \therefore\ n=8$

$$a_3=2a_1$$
$$a_5=\frac{3}{2}a_3=\frac{3}{2}\cdot2a_1=3a_1$$
$$a_7=\frac{4}{3}a_5=\frac{4}{3}\cdot3a_1=4a_1$$
$$\vdots$$
$$a_{17}=\frac{9}{8}a_{15}=9a_1=9$$

$$a_{2n+1}=\frac{n+1}{n}a_{2n-1}=(n+1)a_1=n+1$$

또 $a_{2n+2}=\frac{2n-1}{2n+1}a_{2n}$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 13을 차례대로 대입하면

$2n+2=28$에서 $\quad 2n=26 \quad \therefore\ n=13$

$$a_4=\frac{1}{3}a_2$$
$$a_6=\frac{3}{5}a_4=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}a_2=\frac{1}{5}a_2$$

$a_8=\frac{5}{7}a_6=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{5}a_2=\frac{1}{7}a_2$

$\vdots$

$a_{28}=\frac{25}{27}a_{26}=\frac{1}{27}a_2=\frac{1}{27}$

$\therefore a_{17}a_{28}=9\cdot\frac{1}{27}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

Q BOX

$a_{2n+2}=\frac{2n-1}{2n+1}a_{2n}$
$=\frac{1}{2n+1}a_2$
$=\frac{1}{2n+1}$

13 $a_{n+1}=\left(\frac{1}{a_n}\right)^2$, 즉 $a_{n+1}=a_n^{-2}$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 8을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1^{-2}$

$a_3=a_2^{-2}=(a_1^{-2})^{-2}=a_1^{(-2)^2}$

$a_4=a_3^{-2}=\{a_1^{(-2)^2}\}^{-2}=a_1^{(-2)^3}$

$\vdots$

$a_9=a_8^{-2}=a_1^{(-2)^8}=2^{256}$

$\therefore \log_2 a_9=\log_2 2^{256}=256$ 답 ③

14 $\sum_{k=1}^{6}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}=\sum_{k=1}^{6}\frac{a_{k+2}-a_{k+1}}{a_{k+1}a_{k+2}}=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$

$=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{a_7}-\frac{1}{a_8}\right)$

$=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_8}$

$a_{k+2}=a_k+a_{k+1}$에서
$a_k=a_{k+2}-a_{k+1}$

$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 6을 차례대로 대입하면

$a_3=a_1+a_2=1+1=2$

$a_4=a_2+a_3=1+2=3$

$a_5=a_3+a_4=2+3=5$

$a_6=a_4+a_5=3+5=8$

$a_7=a_5+a_6=5+8=13$

$a_8=a_6+a_7=8+13=21$

$\therefore \sum_{k=1}^{6}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_8}=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$

답 $\frac{20}{21}$

15 $a_{n+1}+\frac{1}{a_n+1}=0$, 즉 $a_{n+1}=-\frac{1}{a_n+1}$의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하면

$a_2=-\frac{1}{a_1+1}=-\frac{1}{2+1}=-\frac{1}{3}$

$a_3=-\frac{1}{a_2+1}=-\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}=-\frac{3}{2}$

$a_4=-\frac{1}{a_3+1}=-\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}=2$

$a_5=-\frac{1}{a_4+1}=-\frac{1}{2+1}=-\frac{1}{3}$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 2, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{2}$이 이 순서대로 반복된다.

이때 $100=3\cdot33+1$이므로

$a_{100}=a_1=2$ 답 2

16 $a_1=3$이고

$a_2=(7\cdot3$을 5로 나누었을 때의 나머지$)=1$

$a_3=(7\cdot1$을 5로 나누었을 때의 나머지$)=2$

$a_4=(7\cdot2$를 5로 나누었을 때의 나머지$)=4$

$a_5=(7\cdot4$를 5로 나누었을 때의 나머지$)=3$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 3, 1, 2, 4가 이 순서대로 반복된다.

① $a_8=a_4=4$, $a_{10}=a_2=1$이므로 $a_8\neq a_{10}$

② $a_9=a_1=3$, $a_{15}=a_3=2$이므로 $a_9\neq a_{15}$

③ $a_{12}=a_4=4$, $a_{21}=a_1=3$이므로 $a_{12}\neq a_{21}$

④ $a_{28}=a_4=4$, $a_{60}=a_4=4$이므로 $a_{28}=a_{60}$

⑤ $a_{30}=a_2=1$, $a_{51}=a_3=2$이므로 $a_{30}\neq a_{51}$

답 ④

17 $a_1+a_2+a_3=a_2+a_3+a_4=6$이므로 $a_1=a_4$

$a_2+a_3+a_4=a_3+a_4+a_5=6$이므로 $a_2=a_5$

$a_3+a_4+a_5=a_4+a_5+a_6=6$이므로 $a_3=a_6$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 a_1, a_2, a_3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $8=2\cdot3+2$, $13=4\cdot3+1$이므로

$a_8=a_2=-2$, $a_{13}=a_1=3$

$a_1+a_2+a_3=6$에서

$a_3=6-a_1-a_2=6-3-(-2)=5$

$2023=3\cdot674+1$, $2025=3\cdot675$이므로

$a_{2023}-a_{2025}=a_1-a_3=3-5=-2$ 답 -2

18 $\begin{cases}a_n+b_{n+2}=3n & \cdots\cdots ㉠\\ a_{n+2}+b_n=3n+4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$(a_n+b_n)+(a_{n+2}+b_{n+2})=6n+4$

위의 식의 n에 1, 2, 5, 6, 9, 10을 차례대로 대입하면

$a_1+b_1+a_3+b_3=6\cdot1+4=10$

$a_2+b_2+a_4+b_4=6\cdot2+4=16$

$a_5+b_5+a_7+b_7=6\cdot5+4=34$

$a_6+b_6+a_8+b_8=6\cdot6+4=40$

$a_9+b_9+a_{11}+b_{11}=6\cdot9+4=58$

$a_{10}+b_{10}+a_{12}+b_{12}=6\cdot10+4=64$

$\therefore \sum_{k=1}^{12}(a_k+b_k)=10+16+34+40+58+64$

$=222$ 답 ②

19 조건 (나)의 $b_{n+1}+a_{n+1}=b_n-a_n$의 n에 $n+1$을 대입하면

$b_{n+2}+a_{n+2}=b_{n+1}-a_{n+1}$

이때 조건 (다)에서 $b_{n+1}-a_{n+1}=3(a_n+b_n)$이므로

$b_{n+2}+a_{n+2}=3(a_n+b_n)$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}+b_{2n-1}\}$은 첫째항이

$a_1+b_1=-4+5=1$, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_{2n-1}+b_{2n-1}=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$$

$$\therefore\ a_9+b_9=3^{5-1}=3^4=81$$

답 81

Q BOX

$2n-1=9$에서 $n=5$이므로 $a_{2n-1}+b_{2n-1}=3^{n-1}$의 n에 5를 대입한다.

20 주어진 식의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$a_1=2$는 짝수이므로

$$a_2=a_1-1=2-1=1$$

$a_2=1$은 홀수이므로

$$a_3=a_2+2=1+2=3$$

$a_3=3$은 홀수이므로

$$a_4=a_3+3=3+3=6$$

$a_4=6$은 짝수이므로

$$a_5=a_4-1=6-1=5$$

$a_5=5$는 홀수이므로

$$a_6=a_5+5=5+5=10$$

답 ⑤

수열 $\{a_n\}$은 a_n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나뉘어 정의되어 있다. n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 착각하지 않도록 주의한다.

21 $a_n=a_1+(n-1)\cdot a_1=a_1n$이므로

$$b_{n+1}=\begin{cases} b_n+3a_1n & (n\text{이 홀수}) \\ b_n-2 & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$n=1$은 홀수이므로

$$b_2=b_1+3a_1=a_1+3a_1=4a_1$$

$n=2$는 짝수이므로

$$b_3=b_2-2=4a_1-2$$

$n=3$은 홀수이므로

$$b_4=b_3+9a_1=(4a_1-2)+9a_1=13a_1-2$$

$n=4$는 짝수이므로

$$b_5=b_4-2=(13a_1-2)-2=13a_1-4$$

따라서 $13a_1-4=9$이므로

$$13a_1=13 \qquad \therefore\ a_1=1$$

답 1

22 $S_n=2a_n-1$에서

$$S_{n+1}=2a_{n+1}-1$$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$$a_{n+1}=2a_{n+1}-1-(2a_n-1)$$

$$\therefore\ a_{n+1}=2a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n=2^{n-1}$$

$$\therefore\ a_4+a_7=2^3+2^6=8+64=72$$

답 72

23 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라 하면 주어진 등식은

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$a_{n+1}=4S_n$$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$$S_{n+1}-S_n=4S_n$$

$$\therefore\ S_{n+1}=5S_n$$

이때 $a_1=S_1=5$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 5, 공비가 5인 등비수열이다.

따라서 $S_n=5\cdot5^{n-1}=5^n$이므로

$$a_n=S_n-S_{n-1}=5^n-5^{n-1}=4\cdot5^{n-1}\ (n\ge2)$$

$$\therefore\ a_{10}=4\cdot5^9$$

답 ④

24 $(n+1)$명을 두 조로 나누는 방법의 수는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) n명의 학생을 두 조로 나누는 방법의 수는 a_n이고 각각의 방법에서 추가된 1명을 두 조 중 어느 한 조에 넣는 방법의 수는 $2a_n$

(ii) n명과 추가된 1명으로 두 조를 나누는 방법의 수는 1

(i), (ii)에서 구하는 관계식은

$$a_{n+1}=2a_n+1\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

답 $a_{n+1}=2a_n+1\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

25 n번의 작업 후 남아 있는 수조의 물의 양을 a_n L라 하면

$$a_1=\frac{3}{4}\cdot48+\left(\frac{3}{4}\cdot48\right)\cdot\frac{1}{4}=45,$$

$$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{3}{4}a_n\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{16}a_n$$

$\frac{1}{4}$을 빼내면 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$이 남는다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 45, 공비가 $\frac{15}{16}$인 등비수열이므로

$$a_n=45\cdot\left(\frac{15}{16}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{10}=45\cdot\left(\frac{15}{16}\right)^9=\frac{3\cdot15^{10}}{(2^4)^9}=\frac{3\cdot15^{10}}{2^{36}}$$

$45=3\cdot15$

즉 $a=3$, $b=36$일 때, $a+b$의 값이 최소이므로 구하는 최솟값은

$$3+36=39$$

답 39

26 [1단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$$a_1=1$$

[2단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$$a_2=a_1+4$$

[3단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$$a_3=a_2+8$$

[4단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$$a_4=a_3+12$$

$$\vdots$$

따라서 [$(n+1)$단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$$a_{n+1}=a_n+4n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

답 $a_{n+1}=a_n+4n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

27 n회 시행 후 그릇 A에 담긴 모래의 양이 a_n kg이면 그릇 B에 담긴 모래의 양은 $(2-a_n)$ kg이므로

모래의 전체 양은 변하지 않으므로 두 그릇 A, B에 담긴 모래의 양의 합은 2 kg이다.

$$a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n+\frac{1}{2}\left\{(2-a_n)+\frac{2}{5}a_n\right\}$$
$$=\frac{3}{5}a_n+\frac{1}{2}\left(2-\frac{3}{5}a_n\right)=\frac{3}{10}a_n+1$$

따라서 $p=\frac{3}{10}$, $q=1$이므로

$$q-p=\frac{7}{10}$$

답 $\frac{7}{10}$

28 점 P_n의 좌표를 (x_n, y_n)이라 하면

$\overline{P_nP_{n+1}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}, \frac{y_n+y_{n+1}}{2}\right)$$

$\overline{P_{n+2}P_{n+3}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_{n+2}+x_{n+3}}{2}, \frac{y_{n+2}+y_{n+3}}{2}\right)$$

규칙 (나)에 의하여

$x_n+x_{n+1}=x_{n+2}+x_{n+3}$ …… ㉠

$y_n+y_{n+1}=y_{n+2}+y_{n+3}$ …… ㉡

규칙 (가)에서 $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=2$이고, ㉠에서

$x_{n+3}=x_n+x_{n+1}-x_{n+2}$이므로 이 식의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$x_4=x_1+x_2-x_3=0+0-2=-2$

$x_5=x_2+x_3-x_4=0+2-(-2)=4$

$x_6=x_3+x_4-x_5=2+(-2)-4=-4$

$x_7=x_4+x_5-x_6=-2+4-(-4)=6$

$\therefore a=6$

규칙 (가)에서 $y_1=-1$, $y_2=1$, $y_3=-1$이고, ㉡에서

$y_{n+3}=y_n+y_{n+1}-y_{n+2}$이므로 이 식의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$y_4=y_1+y_2-y_3=-1+1-(-1)=1$

$y_5=y_2+y_3-y_4=1+(-1)-1=-1$

$y_6=y_3+y_4-y_5=-1+1-(-1)=1$

$y_7=y_4+y_5-y_6=1+(-1)-1=-1$

$\therefore b=-1$

$\therefore a+b=5$

답 5

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 이은 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

29 $\overline{P_nP_{n+1}}=a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하면

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{3}a_1$$
$$a_3=\frac{2}{4}a_2=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1$$
$$a_4=\frac{3}{5}a_3=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1$$
$$\vdots$$
$$\therefore a_n=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1=\frac{2}{n(n+1)}$$

따라서

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n(n+1)}\cdot 1=\frac{1}{n(n+1)}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10}S_n=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$
$$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$$

답 $\frac{10}{11}$

30 두 조건 (가), (나)에 의하여 $p(1)$이 참이면

$p(2\cdot1+3)=p(5)$, $p(2\cdot5+3)=p(13)$,

$p(2\cdot13+3)=p(29)$, $p(2\cdot29+3)=p(61)$,

$p(61\cdot2+3)=p(125)$, …

가 참이다.

답 ④

31 명제 $p(n)$이 $n=3, 7, 15, 31, \cdots, 2^{m+1}-1, \cdots$일 때 참임을 보이려면

(i) $n=\boxed{3}$일 때, $p(n)$이 참임을 보인다.

(ii) $7=2\cdot3+1$, $15=2\cdot7+1$, $31=2\cdot15+1$, …이므로

$n=k$ $(k\ge3)$일 때 $p(n)$이 참이라고 가정하면

$n=\boxed{2k+1}$일 때도 $p(n)$이 참임을 보인다.

즉 $a=3$, $f(k)=2k+1$이므로

$f(a^2)=f(9)=2\cdot9+1=19$

답 ⑤

$$2^{m+1}-1$$
$$=2\cdot2^m-1$$
$$=2(2^m-1)+2-1$$
$$=2(2^m-1)+1$$

32 (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$$

위의 식의 양변에 $\boxed{2^k}$을 더하면

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=2^k-1+2^k$$
$$=2\cdot2^k-1$$
$$=\boxed{2^{k+1}-1}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

즉 $f(k)=2^k$, $g(k)=2^{k+1}-1$이므로

$f(5)=2^5=32$, $g(2)=2^{2+1}-1=8-1=7$

$\therefore f(5)-g(2)=25$

답 25

33
$$\left(\frac{1}{k+1}\right)^2-\left(\frac{2}{k+1}\right)^2+\left(\frac{3}{k+1}\right)^2-\cdots+(-1)^{k+2}\cdot\left(\frac{k+1}{k+1}\right)^2$$
$$=\boxed{\frac{k^2}{(k+1)^2}}\cdot\left\{\left(\frac{1}{k}\right)^2-\left(\frac{2}{k}\right)^2+\left(\frac{3}{k}\right)^2-\cdots+(-1)^{k+1}\cdot\left(\frac{k}{k}\right)^2+(-1)^{k+2}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{k^2}{(k+1)^2}\left\{(-1)^{k+1}\cdot\frac{k+1}{2k}+(-1)^{k+2}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{k^2}{(k+1)^2}\cdot(-1)^{k+2}\cdot\frac{k+1}{k}\left(-\frac{1}{2}+\frac{k+1}{k}\right)$$
$$=\frac{k^2}{(k+1)^2}\cdot(-1)^{k+2}\cdot\frac{k+1}{k}\cdot\boxed{\frac{k+2}{2k}}$$
$$=(-1)^{k+2}\cdot\frac{k+2}{2(k+1)}=(-1)^{(k+1)+1}\cdot\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$$

$\therefore$ (가) $\frac{k^2}{(k+1)^2}$ (나) $\frac{k+2}{2k}$

답 ③

$n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정했으므로

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2-\left(\frac{2}{k}\right)^2+\left(\frac{3}{k}\right)^2-\cdots+(-1)^{k+1}\cdot\left(\frac{k}{k}\right)^2=(-1)^{k+1}\cdot\frac{k+1}{2k}$$

34 (ii) $n=k$일 때 $2^{4n}-1$이 5의 배수라 가정하면

$$2^{4k}-1=5N\ (N\text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}2^{4(k+1)}-1&=\boxed{16}\cdot 2^{4k}-1\\&=16(5N+1)-1\\&=16\cdot 5N+\boxed{15}\\&=5(\boxed{16N+3})\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $2^{4n}-1$은 5의 배수이다.

즉 $a=16$, $b=15$, $f(N)=16N+3$이므로

$$f(a-b)=f(1)=16\cdot 1+3=19$$

답 ④

35 (ii) $n=k$일 때 $3^{n+1}+4^{2n-1}$이 13으로 나누어떨어진다고 가정하면

$$3^{k+1}+4^{2k-1}=13N\ (N\text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}3^{k+2}+4^{2k+1}&=\boxed{3}\cdot 3^{k+1}+\boxed{16}\cdot 4^{2k-1}\\&=3\cdot 3^{k+1}+3\cdot 4^{2k-1}+13\cdot 4^{2k-1}\\&=3(3^{k+1}+4^{2k-1})+13\cdot 4^{2k-1}\\&=3\cdot 13N+13\cdot\boxed{4^{2k-1}}\\&=13(3N+4^{2k-1})\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $3^{n+1}+4^{2n-1}$은 13으로 나누어떨어진다.

$\therefore$ (가) 3 (나) 16 (다) 4^{2k-1}

답 (가) 3 (나) 16 (다) 4^{2k-1}

36 (i) $n=\boxed{2}$일 때,

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$,

(우변)$=1+2h$

이때 $h^2>0$이므로 $1+2h+h^2>1+2h$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k>1+kh$$

위의 식의 양변에 $\boxed{1+h}$를 곱하면

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}&>(1+kh)(1+h)\\&=1+\boxed{(k+1)h}+kh^2\quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

1+h>0이므로 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

이때 $kh^2>0$이므로

$$1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h\quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$(1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) 2 (나) $1+h$ (다) $(k+1)h$

답 ⑤

37 (i) $n=4$일 때,

(좌변)$=3\cdot 4+2=14$, (우변)$=2^4=16$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge 4)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$3k+2<2^k$$

양변에 3을 더하면

$$3k+2+3<2^k+3$$

$$\therefore 3(k+1)+2<2^k+3$$

이때 $k\ge 4$인 자연수 k에 대하여 $2^{k+1}-2^k>3$, 즉 $2^k+3<2^{k+1}$이므로

$n=k+1$일 때 주어진 부등식의 우변은 2^{k+1}이므로 2^k+3과 2^{k+1}의 대소를 비교한다.

$$3(k+1)+2<2^{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\ge 4$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

답 풀이 참조

38 (ii) $n=k\ (k\ge 6)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\left(\frac{k}{2}\right)^k>k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1\quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\begin{aligned}\therefore \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}&=\frac{(k+1)(k+1)^k}{2^{k+1}}\\&=\frac{k+1}{2^{k+1}}\cdot\frac{(k+1)^k}{k^k}\cdot\boxed{k^k}\\&=\frac{k+1}{2}\cdot\frac{1}{2^k}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\cdot k^k\\&=\frac{k+1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cdot\boxed{\left(\frac{k}{2}\right)^k}\quad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

그런데 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k>2$이므로 ㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}&>\frac{k+1}{2}\cdot\boxed{2}\cdot k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1\\&=(k+1)k(k-1)\cdot\cdots\cdot 1\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) k^k (나) $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ (다) 2

답 (가) k^k (나) $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ (다) 2

도전! 수능 기출

W 87쪽

01 1st a_5의 값을 구한다.

$-1\le a_5<-\frac{1}{2}$이면 $a_6=-2a_5-2$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$$a_5-2a_5-2=0\qquad \therefore a_5=-2$$

그런데 이것은 $-1\le a_5<-\frac{1}{2}$을 만족시키지 않는다.

$-\frac{1}{2} \le a_5 \le \frac{1}{2}$이면 $a_6=2a_5$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$a_5+2a_5=0 \qquad \therefore a_5=0$

$\frac{1}{2} < a_5 \le 1$이면 $a_6=-2a_5+2$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$a_5-2a_5+2=0 \qquad \therefore a_5=2$

그런데 이것은 $\frac{1}{2} < a_5 \le 1$을 만족시키지 않는다.

$\therefore a_5=0$

2nd a_1의 값을 구한다.

$a_5=0$이므로

$-2a_4-2=0$ 또는 $2a_4=0$ 또는 $-2a_4+2=0$

$\therefore a_4=-1$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=1$

그런데 $a_4=-1$이면 $a_3<0$, $a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i) $a_4=0$일 때, $\quad a_3=-1$ 또는 $a_3=0$ 또는 $a_3=1$

그런데 $a_3=-1$이면 $a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ⓘ $a_3=0$일 때, $\quad a_2=-1$ 또는 $a_2=0$ 또는 $a_2=1$

그런데 $a_2=-1$이면 $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_2=0$일 때, $\quad a_1=1$ ($\because a_1>0$)

$a_2=1$일 때, $\quad a_1=\frac{1}{2}$

ⓘⓘ $a_3=1$일 때, $a_2=\frac{1}{2}$이므로

$a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=\frac{3}{4}$

(ii) $a_4=1$일 때, $a_3=\frac{1}{2}$이므로

$a_2=\frac{1}{4}$ 또는 $a_2=\frac{3}{4}$

$a_2=\frac{1}{4}$일 때, $\quad a_1=\frac{1}{8}$ 또는 $a_1=\frac{7}{8}$

$a_2=\frac{3}{4}$일 때, $\quad a_1=\frac{3}{8}$ 또는 $a_1=\frac{5}{8}$

(i), (ii)에서

$a_1=1$ 또는 $a_1=\frac{1}{2}$ 또는 $a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=\frac{3}{4}$

또는 $a_1=\frac{1}{8}$ 또는 $a_1=\frac{7}{8}$ 또는 $a_1=\frac{3}{8}$

또는 $a_1=\frac{5}{8}$

3rd 모든 a_1의 값의 합을 구한다.

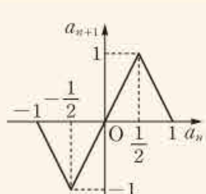
모든 a_1의 값의 합은

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{2}$

답 ①

쌤한마디

a_n과 a_{n+1} 사이의 관계를 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 이를 이용하여 a_4, a_3, a_2, a_1의 값을 구할 수도 있다.



Q BOX

$a_5=a_4=a_3=a_2=0$일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k>0$이려면 $a_1>0$이어야 한다.

반복되는 수 중 첫 번째 수와 두 번째 수의 합

$2^{m(m+1)} \times 2^{2m+2}$
$=2^{m(m+1)+2(m+1)}$
$=2^{(m+1)(m+2)}$

02 **1st** $a_2=k$로 놓고 조건 (가)를 이용하여 a_3, a_4, a_5, a_6을 구한다.

$a_2=k$로 놓고 조건 (가)의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_3=a_1-4=7-4=3$

$a_4=a_2-4=k-4$

$a_5=a_3-4=3-4=-1$

$a_6=a_4-4=(k-4)-4=k-8$

2nd 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾는다.

조건 (나)에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 7, k, 3, $k-4$, -1, $k-8$이 이 순서대로 반복된다.

3rd a_2의 값을 구한다.

$50=6\cdot 8+2$이므로

$\sum_{k=1}^{50} a_k$

$=\{7+k+3+(k-4)+(-1)+(k-8)\}\cdot 8+\underline{7+k}$

$=8(3k-3)+7+k$

$=25k-17$

따라서 $25k-17=258$이므로

$25k=275 \qquad \therefore k=11$

$\therefore a_2=k=11$

답 11

03 **1st** (가), (나)에 알맞은 식을 구한다.

(ii) $n=m$일 때, (∗)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

이다. $n=m+1$일 때,

$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=\sum_{k=1}^{m} a_k+a_{m+1}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

$\quad +\{2^{2(m+1)}-1\}\times 2^{m(m+1)}+m\times 2^{-(m+1)}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

$\quad +(2^{2m+2}-1)\times \boxed{2^{m(m+1)}}+m\times 2^{-m-1}$

$=2^{m(m+1)}\times \boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$

$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$

2nd $\frac{g(7)}{f(3)}$의 값을 구한다.

$f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$

답 ④

W 10 수학적 귀납법

MEMO