정답과 해설

1 | 지수

1 거듭제곱과 거듭제곱근

개념 확인 8쪽~11쪽

1 (1) a^{20} (2) $27a^{15}b^3$ (3) $\frac{a^6}{b^3}$ (4) $\frac{1}{a^3}$

2 (1) $-3, 3$ (2) -5

3 (1) 2 (2) 3 (3) 5 (4) 2 (5) $\sqrt{3}$

1 (1) $a^8\times(a^3)^4=a^8\times a^{12}=a^{8+12}=a^{20}$

(2) $(3a^5b)^3=3^3a^{15}b^3=27a^{15}b^3$

(3) $\left(\frac{a^2}{b}\right)^3=\frac{a^6}{b^3}$

(4) $a^{10}\div a^5\div a^8=a^{10-5}\div a^8=a^5\div a^8$

$=\frac{1}{a^{8-5}}=\frac{1}{a^3}$

2 (1) 81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$이므로

$x^4-81=0$, $(x^2-9)(x^2+9)=0$

$\therefore x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

따라서 81의 네제곱근 중 실수인 것은 -3, 3이다.

(2) -125의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-125$이므로

$x^3+125=0$, $(x+5)(x^2-5x+25)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=\frac{5\pm5\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -125의 세제곱근 중 실수인 것은 -5이다.

3 (1) $\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{8\times2}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(2) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{81}{3}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

(3) $(\sqrt[4]{25})^2=\sqrt[4]{25^2}=\sqrt[4]{(5^2)^2}=\sqrt[4]{5^4}=5$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3\times2]{64}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

(5) $\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[2\times6]{3^{1\times6}}=\sqrt[2]{3^1}=\sqrt{3}$

STEP 1 개념 드릴 | 13쪽~14쪽 |

개념 check

1-1 (1) 15, 25 (2) 6, 7 (3) 9, 9, 5

2-1 (1) $-\sqrt{7}, \sqrt{7}$ (2) -4 (3) $\pm2, \pm2i, -2, 2$

3-1 (1) 3, 3 (2) -2

4-1 (1) 3, 3 (2) 4, 2 (3) 3, 9 (4) 2, 6 (5) 4, $\sqrt{2}$

스스로 check

1-2 답 (1) a^{14} (2) $\frac{1}{a^2}$ (3) $-27a^{11}$ (4) a^5b^6 (5) $-a^4b^{11}$

(1) $(a^3)^2\times(a^2)^4=a^6\times a^8=a^{6+8}=a^{14}$

(2) $a^{11}\div a^8\div a^5=a^{11-8}\div a^5=a^3\div a^5$

$=\frac{1}{a^{5-3}}=\frac{1}{a^2}$

(3) $(-3a^3b^2)^3\times\left(\frac{a}{b^3}\right)^2=-27a^9b^6\times\frac{a^2}{b^6}=-27a^{11}$

(4) $(a^2b^3)^4\div(ab^2)^3=a^8b^{12}\div a^3b^6=a^{8-3}b^{12-6}=a^5b^6$

(5) $(-a^2b)^3\div\left(\frac{a}{b^2}\right)^3\times ab^2=-a^6b^3\div\frac{a^3}{b^6}\times ab^2$

$=-a^6b^3\times\frac{b^6}{a^3}\times ab^2$

$=-a^{6-3+1}b^{3+6+2}$

$=-a^4b^{11}$

2-2 답 (1) $-\sqrt{10}, \sqrt{10}$ (2) 3 (3) -2 (4) -5, 5

(1) 10의 제곱근을 x라 하면 $x^2=10$이므로

$x^2-10=0$, $(x+\sqrt{10})(x-\sqrt{10})=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{10}$

따라서 10의 제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt{10}, \sqrt{10}$이다.

(2) 27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=27$이므로

$x^3-27=0$, $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 27의 세제곱근 중 실수인 것은 3이다.

(3) -8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$이므로

$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다.

(4) 625의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=625$이므로

$x^4-5^4=0$, $(x^2-5^2)(x^2+5^2)=0$

$(x+5)(x-5)(x^2+25)=0$

$\therefore x=\pm5$ 또는 $x=\pm5i$

따라서 625의 네제곱근 중 실수인 것은 -5, 5이다.

3-2 답 (1) 0.3 (2) -5 (3) 3 (4) 2

(1) $\sqrt[3]{0.027}$은 $x^3=0.027$을 만족시키는 양수 x이고,

$0.3^3=0.027$이므로 $\sqrt[3]{0.027}=0.3$

(2) $\sqrt[3]{-125}$는 $x^3=-125$를 만족시키는 실수 x이고,

$(-5)^3=-125$이므로 $\sqrt[3]{-125}=-5$

(3) $\sqrt[4]{81}$은 $x^4=81$을 만족시키는 양수 x이고,

$3^4=81$이므로 $\sqrt[4]{81}=3$

(4) $\sqrt[5]{-32}$는 $x^5=-32$를 만족시키는 실수 x이고,

$(-2)^5=-32$이므로 $\sqrt[5]{-32}=-2$ $\quad\therefore -\sqrt[5]{-32}=2$

4-2 답 (1) 6 (2) 3 (3) 4 (4) 2 (5) 4 (6) 6 (7) $\sqrt{2}$ (8) $\sqrt{5}$ (9) $\sqrt{2}$ (10) 2

(1) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{4\times54}=\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=6$

(2) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3\times27}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(3) $\dfrac{\sqrt[4]{512}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{512}{2}}=\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{4^4}=4$

(4) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[5]{\dfrac{64}{2}}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

(5) $(\sqrt[3]{2})^6=\sqrt[3]{2^6}=\sqrt[3]{(2^2)^3}=\sqrt[3]{4^3}=4$

(6) $(\sqrt[4]{36})^2=\sqrt[4]{36^2}=\sqrt[4]{(6^2)^2}=\sqrt[4]{6^4}=6$

(7) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[3\times2]{8}=\sqrt[2\times3]{2^{1\times3}}=\sqrt[2]{2^1}=\sqrt{2}$

(8) $\sqrt[4]{\sqrt{625}}=\sqrt[4\times2]{625}=\sqrt[2\times4]{5^{1\times4}}=\sqrt[2]{5^1}=\sqrt{5}$

(9) $\sqrt[10]{2^5}=\sqrt[2\times5]{2^{1\times5}}=\sqrt[2]{2^1}=\sqrt{2}$

(10) $\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

STEP 2 필수 유형

15쪽~16쪽

01-1 답 ④

|해결 전략| 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 n이 홀수일 때는 1개이고, n이 짝수일 때는 a의 값에 따라 다르다.

① 64의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=64$이므로

$x^3-64=0$, $(x-4)(x^2+4x+16)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$

따라서 64의 세제곱근은 3개이다.

② -8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$이므로

$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2의 1개이다.

③ 8의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{8}$, $-\sqrt[4]{8}$이다.

④ n이 홀수일 때, 3의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{3}$의 1개이다.

⑤ n이 짝수일 때, -4의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

02-1 답 (1) 7 (2) 2 (3) $\sqrt[24]{a}$ (4) b

|해결 전략| $\sqrt[■]{●}$에서 ■를 통일시켜서 계산한다.

(1) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}+\sqrt[4]{4}\sqrt[4]{64}=\sqrt[3]{3\times9}+\sqrt[4]{4\times64}$

$=\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[4]{4^4}$

$=3+4=7$

(2) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}\times\sqrt{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{32}}\times\sqrt[3]{\sqrt{16}}$

$=\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^5}}\times\sqrt[3]{\sqrt{4^2}}$

$=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}$

$=\sqrt[3]{2\times4}$

$=\sqrt[3]{2^3}=2$

(3) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[4]{a}}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}\times\dfrac{\sqrt{\sqrt[6]{a}}}{\sqrt{\sqrt[4]{a}}}$

$=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}}\times\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}$

$=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}}=\dfrac{\sqrt[24]{a^4}}{\sqrt[24]{a^3}}$

$=\sqrt[24]{a}$

(4) $\sqrt[6]{ab^4}\times\sqrt{ab^4}\div\sqrt[3]{a^2b^5}=\sqrt[6]{ab^4}\times\sqrt[6]{a^3b^{12}}\div\sqrt[6]{a^4b^{10}}$

$=\sqrt[6]{\dfrac{ab^4\times a^3b^{12}}{a^4b^{10}}}$

$=\sqrt[6]{\dfrac{a^4b^{16}}{a^4b^{10}}}$

$=\sqrt[6]{b^6}=b$

02-2 답 풀이 참조

|해결 전략| 실수 a에 대하여 $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & (n\text{이 홀수})\\ |a| & (n\text{이 짝수})\end{cases}$이다.

$\sqrt{(-3)^6}=\sqrt{(-3)^{2\times3}}=\{\sqrt{(-3)^2}\}^3=|-3|^3=3^3=27$

따라서 등호가 성립하지 않는 곳은 ③이다.

2 지수의 확장

개념 확인 17쪽~19쪽

1 (1) a^3 (2) $\dfrac{1}{a^9}$ (3) $\dfrac{1}{8}$ (4) 1

2 (1) ① $\sqrt[3]{16}$ ② $\sqrt[3]{5}$ ③ $\sqrt[5]{8}$

(2) ① 5 ② 2 ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ 12

3 (1) $5^{-\sqrt{2}}$ (2) $6^{\sqrt{3}}$ (3) $\dfrac{1}{25}$ (4) $6^{\sqrt{3}}$

1 (1) $a^{-2}\times a^5=a^{-2+5}=a^3$

(2) $a^{-4}\div a^5=a^{-4-5}=a^{-9}=\dfrac{1}{a^9}$

(3) $(2^{-1})\times(4^{-1})=2^{-1}\times(2^2)^{-1}$

$=2^{-1}\times2^{-2}$

$=2^{-1-2}=2^{-3}=\dfrac{1}{8}$

(4) $3^5\times3^{-2}\div3^3=3^{5-2-3}$

$=3^0=1$

2 (1) ① $4^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{16}$

② $5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$

③ $2^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{2^3}=\sqrt[5]{8}$

(2) ① $5^{\frac{3}{8}}\times5^{\frac{5}{8}}=5^{\frac{3}{8}+\frac{5}{8}}=5^1=5$

② $2^3\div(2^{\frac{1}{2}})^4=2^3\div2^{\frac{1}{2}\times4}=2^3\div2^2=2^{3-2}$
$=2^1=2$

③ $(\sqrt[3]{16})^{-\frac{3}{2}}=(16^{\frac{1}{3}})^{-\frac{3}{2}}=16^{\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=16^{-\frac{1}{2}}$
$=(4^2)^{-\frac{1}{2}}=4^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=4^{-1}=\frac{1}{4}$

④ $(2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}})^4=(2^{\frac{1}{2}})^4\times(3^{\frac{1}{4}})^4=2^2\times3=12$

3 (1) $5^{\sqrt{2}}\times5^{-2\sqrt{2}}=5^{\sqrt{2}+(-2\sqrt{2})}=5^{-\sqrt{2}}$

(2) $6^{2\sqrt{3}}\div6^{\sqrt{3}}=6^{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}=6^{\sqrt{3}}$

(3) $(5^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}=5^{\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})}=5^{-2}=\frac{1}{25}$

(4) $(8^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\times3^{\sqrt{\frac{3}{2}}})^{\sqrt{2}}=(8^{\frac{1}{\sqrt{6}}})^{\sqrt{2}}\times(3^{\sqrt{\frac{3}{2}}})^{\sqrt{2}}$
$=8^{\frac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{2}}\times3^{\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{2}}$
$=8^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\times3^{\sqrt{3}}$
$=(2^3)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\times3^{\sqrt{3}}$
$=2^{3\times\frac{1}{\sqrt{3}}}\times3^{\sqrt{3}}$
$=2^{\sqrt{3}}\times3^{\sqrt{3}}$
$=(2\times3)^{\sqrt{3}}=6^{\sqrt{3}}$

STEP 1 개념 드릴 | 20쪽~21쪽 |

개념 check

1-1 (1) 1 (2) 1, $\frac{1}{9}$

2-1 (1) -2 (2) $-$, -7, 7 (3) -3, 1 (4) 2, 4, 4, 2

3-1 (1) 4 (2) -2, $-\frac{1}{4}$ (3) 2

4-1 (1) 3, 3, 2 (2) 2, 2, $\frac{1}{2}$ (3) 2, 6 (4) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$

5-1 (1) $-2\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{3}$ (3) 3, $2^{\frac{3}{2}}$

스스로 check

1-2 답 (1) 1 (2) 1 (3) $\frac{1}{5}$ (4) -27

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

(2) $(\sqrt{3})^0=1$

(3) $(\sqrt{5})^{-2}=\frac{1}{(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{5}$

(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}=(-3)^3=-27$

2-2 답 (1) a^4 (2) a^3 (3) $\frac{1}{a^{25}}$ (4) a^2b^{-3} (5) $\frac{1}{3^{10}}$ (6) 3^{18}

(1) $a^5\times a^3\times a^{-4}=a^{5+3+(-4)}=a^4$

(2) $a^{-3}\times a^4\div a^{-2}=a^{-3+4-(-2)}=a^3$

(3) $(a^2\times a^3)^{-5}=(a^{2+3})^{-5}=(a^5)^{-5}=a^{-25}=\frac{1}{a^{25}}$

(4) $(a^{-2}b^3)^{-1}=(a^{-2})^{-1}\times(b^3)^{-1}=a^2b^{-3}$

(5) $(3^{-2})^2\times(3^3)^{-2}=3^{-4}\times3^{-6}=3^{-4+(-6)}$
$=3^{-10}=\frac{1}{3^{10}}$

(6) $(3^{-2})^{-3}\div(3^3)^{-4}=3^6\div3^{-12}=3^{6-(-12)}=3^{18}$

3-2 답 (1) $2^{\frac{4}{3}}$ (2) $5^{-\frac{3}{4}}$ (3) $6^{\frac{3}{2}}$ (4) $3^{\frac{3}{4}}$

(4) $\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$

4-2 답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $2^{\frac{11}{2}}$ (3) 3 (4) $\frac{1}{32}$ (5) $a^{\frac{1}{12}}$ (6) $a^{\frac{3}{4}}$
(7) $a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{5}{6}}$ (8) $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

(1) $27^{-\frac{4}{3}}\times9^{\frac{3}{2}}=(3^3)^{-\frac{4}{3}}\times(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^{3\times\left(-\frac{4}{3}\right)}\times3^{2\times\frac{3}{2}}$
$=3^{-4}\times3^3=3^{-4+3}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

(2) $64^{\frac{3}{4}}\div8^{-\frac{1}{3}}=(2^6)^{\frac{3}{4}}\div(2^3)^{-\frac{1}{3}}=2^{6\times\frac{3}{4}}\div2^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}$
$=2^{\frac{9}{2}}\div2^{-1}=2^{\frac{9}{2}-(-1)}=2^{\frac{11}{2}}$

(3) $\sqrt{9^{-3}}\times\sqrt[3]{27^4}=\sqrt{(3^2)^{-3}}\times\sqrt[3]{(3^3)^4}$
$=\sqrt{3^{-6}}\times\sqrt[3]{3^{12}}=3^{-\frac{6}{2}}\times3^{\frac{12}{3}}$
$=3^{-3}\times3^4=3^{-3+4}$
$=3^1=3$

(4) $\sqrt{16^{-4}}\div\sqrt{8^{-2}}=\sqrt{(2^4)^{-4}}\div\sqrt{(2^3)^{-2}}$
$=\sqrt{2^{-16}}\div\sqrt{2^{-6}}=2^{-\frac{16}{2}}\div2^{-\frac{6}{2}}$
$=2^{-8}\div2^{-3}=2^{-8-(-3)}$
$=2^{-5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

(5) $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}\div\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\div a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}$
$=a^{\frac{1}{12}}$

(6) $\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[4]{a}\times\sqrt[3]{a}=a^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}$
$=a^{\frac{3}{4}}$

(7) $\sqrt{a^2b}\times\sqrt[3]{ab}=(a^2b)^{\frac{1}{2}}\times(ab)^{\frac{1}{3}}=ab^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$
$=a^{1+\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{5}{6}}$

(8) $\sqrt[3]{ab}\div\sqrt[6]{ab}=(ab)^{\frac{1}{3}}\div(ab)^{\frac{1}{6}}=(ab)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}$
$=(ab)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

5-2 답 (1) $5^{3\sqrt{3}}$ (2) $3^{3\sqrt{2}}$ (3) $\frac{1}{16}$ (4) $3^{3\sqrt{2}}$

(1) $5^{\sqrt{3}}\times5^{\sqrt{12}}=5^{\sqrt{3}}\times5^{2\sqrt{3}}=5^{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}=5^{3\sqrt{3}}$

(2) $3^{\sqrt{8}}\div3^{-\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}}\div3^{-\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}=3^{3\sqrt{2}}$

(3) $(4^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}=4^{\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})}=4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$

(4) $3^{5\sqrt{2}}\times3^{\sqrt{8}}\div3^{\sqrt{32}}=3^{5\sqrt{2}}\times3^{2\sqrt{2}}\div3^{4\sqrt{2}}$

$=3^{5\sqrt{2}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}}=3^{3\sqrt{2}}$

STEP 2 필수 유형

| 22쪽~28쪽 |

01-1 답 (1) $2^{-\frac{9}{2}}$ (2) 1 (3) 2 (4) $\frac{9}{16}$

|해결 전략| 밑을 통일시킨 다음 지수법칙을 이용하여 간단히 한다.

(1) $\{(-2)^4\}^{\frac{3}{8}}\times16^{-\frac{3}{2}}=16^{\frac{3}{8}}\times16^{-\frac{3}{2}}$

$=16^{\frac{3}{8}+\left(-\frac{3}{2}\right)}$

$=16^{-\frac{9}{8}}=(2^4)^{-\frac{9}{8}}$

$=2^{-\frac{9}{2}}$

(2) $9^{\frac{3}{2}}\div27^{\frac{2}{3}}\times3^{-1}=(3^2)^{\frac{3}{2}}\div(3^3)^{\frac{2}{3}}\times3^{-1}$

$=3^3\div3^2\times3^{-1}$

$=3^{3-2+(-1)}$

$=3^0=1$

(3) $4^{\frac{2}{3}}\div36^{\frac{1}{3}}\times18^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{2}{3}}\div(2^2\times3^2)^{\frac{1}{3}}\times(2\times3^2)^{\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{4}{3}}\div2^{\frac{2}{3}}\div3^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}\times3^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}$

$=2^1\times3^0=2$

(4) $\left\{\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=\left[\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\times\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}^{\frac{1}{4}}$

$=\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$=\frac{9}{16}$

02-1 답 (1) $-\frac{2}{3}$ (2) $\frac{23}{24}$

|해결 전략| $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$을 이용하여 거듭제곱근을 지수로 바꾼 후 지수법칙을 이용한다.

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times(\sqrt[3]{3})^{-\frac{9}{2}}=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{-\frac{3}{2}}$

$=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(-\frac{3}{2}\right)}$

$=3^{-\frac{2}{3}}$

$\therefore k=-\frac{2}{3}$

(2) $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}=\{2\times(4\times8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}$

$=\{2\times(2^2\times2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}=\{2\times(2^{2+\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}$

$=\{2\times(2^{\frac{11}{4}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}=(2\times2^{\frac{11}{12}})^{\frac{1}{2}}$

$=(2^{1+\frac{11}{12}})^{\frac{1}{2}}=(2^{\frac{23}{12}})^{\frac{1}{2}}$

$=2^{\frac{23}{12}\times\frac{1}{2}}=2^{\frac{23}{24}}$

$\therefore n=\frac{23}{24}$

02-2 답 13

|해결 전략| $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$을 이용하여 거듭제곱근을 지수로 바꾼 후 지수법칙을 이용한다.

$\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=\{a^2\times(a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{4}}=\{a^2\times(a^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{4}}$

$=\{a^2\times(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{4}}=(a^2\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}=(a^{2+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$

$=(a^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{5}{2}\times\frac{1}{4}}=a^{\frac{5}{8}}$

따라서 $p=5$, $q=8$이므로 $p+q=5+8=13$

03-1 답 (1) $x-y^{-1}$ (2) $x-y^{-1}$

|해결 전략| 공통 부분을 치환한 후 다음과 같은 곱셈 공식을 이용한다.

(1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(1) $x^{\frac{1}{2}}=A$, $y^{-\frac{1}{2}}=B$로 놓으면

$(x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})=(A+B)(A-B)$

$=A^2-B^2$

$=(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{-\frac{1}{2}})^2$

$=x-y^{-1}$

(2) $x^{\frac{1}{3}}=A$, $y^{-\frac{1}{3}}=B$로 놓으면 $x^{\frac{2}{3}}=A^2$, $y^{-\frac{2}{3}}=B^2$이므로

$(x^{\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}})=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

$=A^3-B^3$

$=(x^{\frac{1}{3}})^3-(y^{-\frac{1}{3}})^3$

$=x-y^{-1}$

03-2 답 -15

|해결 전략| $2^{\frac{1}{4}}=x$로 놓고 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타낸 후 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

$2^{\frac{1}{4}}=x$로 놓으면 $2^{\frac{1}{2}}=x^2$, $2=x^4$, $2^2=x^8$이므로

$(1-2^{\frac{1}{4}})(1+2^{\frac{1}{4}})(1+2^{\frac{1}{2}})(1+2)(1+2^2)$

$=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

$=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

$=(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)$

$=(1-x^8)(1+x^8)=1-x^{16}$

$=1-(2^{\frac{1}{4}})^{16}=1-2^4=-15$

04-1 답 (1) 14 (2) 52

|해결 전략| 주어진 식의 양변을 제곱 또는 세제곱한다.

(1) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=4^2$, $a+2+a^{-1}=16$

$\therefore a+a^{-1}=14$

(2) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 세제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3=4^3$, $a^{\frac{3}{2}}+3a\times a^{-\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}\times a^{-1}+a^{-\frac{3}{2}}=64$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})=64$, $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3\times4=64$

$\therefore a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=52$

04-2 답 21

|해결 전략| 주어진 식의 양변을 제곱하여 정리한 식을 다시 세제곱한다.

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=1$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=1$, $x-2+x^{-1}=1$

$\therefore x+x^{-1}=3$ ……㉠

㉠의 양변을 세제곱하면

$(x+x^{-1})^3=3^3$, $x^3+3x^2\times x^{-1}+3x\times x^{-2}+x^{-3}=27$

$x^3+x^{-3}+3(x+x^{-1})=27$

㉠에서 $x^3+x^{-3}+3\times3=27$

$\therefore x^3+x^{-3}=18$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x+x^{-1}+x^3+x^{-3}=3+18=21$

05-1 답 (1) $3-2\sqrt{2}$ (2) $\frac{18-10\sqrt{2}}{31}$

|해결 전략| 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하여 구하는 식에 a^{2x}이 나오도록 식을 변형한다.

(1) $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1}=3-2\sqrt{2}$$

(2) $\frac{a^x-a^{-x}}{a^{5x}+a^{-5x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$$\frac{a^x-a^{-x}}{a^{5x}+a^{-5x}}=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^{5x}+a^{-5x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{6x}+a^{-4x}}$$
$$=\frac{a^{2x}-1}{(a^{2x})^3+\frac{1}{(a^{2x})^2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^3+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+\frac{1}{2}}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}+1}$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}-1)(4\sqrt{2}-1)}{(4\sqrt{2}+1)(4\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{2(9-5\sqrt{2})}{32-1}$$
$$=\frac{18-10\sqrt{2}}{31}$$

05-2 답 $\frac{10}{3}$

|해결 전략| 분모, 분자에 2^a을 곱하여 4^a의 값을 구한다.

$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}$의 분모, 분자에 각각 2^a을 곱하면

$$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=\frac{2^a(2^a+2^{-a})}{2^a(2^a-2^{-a})}=\frac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=\frac{(2^2)^a+1}{(2^2)^a-1}=\frac{4^a+1}{4^a-1}=2$$

이므로 $4^a+1=2(4^a-1)$

$4^a+1=2\times4^a-2$ $\quad\therefore 4^a=3$

$\therefore 4^a+4^{-a}=4^a+\frac{1}{4^a}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

다른 풀이

$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=2$에서 $2^a+2^{-a}=2(2^a-2^{-a})$이므로

$2^a+2^{-a}=2\times2^a-2\times2^{-a}$, $2^a=2^{-a}+2\times2^{-a}$

$\therefore 2^a=3\times2^{-a}$

이때, 위 식의 양변에 2^a을 곱하면 $4^a=3$이므로

$4^a+4^{-a}=4^a+\frac{1}{4^a}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

06-1 답 (1) 1 (2) 6

|해결 전략| $a^x=b \Longleftrightarrow a=b^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 조건식의 밑을 통일한다.

(1) $6^x=243$의 양변을 $\frac{1}{x}$제곱하면

$6=243^{\frac{1}{x}}=(3^5)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{5}{x}}$ ……㉠

$2^y=27$의 양변을 $\frac{1}{y}$제곱하면

$2=27^{\frac{1}{y}}=(3^3)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{3}{y}}$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면

$6\div2=3^{\frac{5}{x}}\div3^{\frac{3}{y}}$, $3=3^{\frac{5}{x}-\frac{3}{y}}$

즉, $3^{\frac{5}{x}-\frac{3}{y}}=3^1$이므로

$\frac{5}{x}-\frac{3}{y}=1$

(2) $4^x=a$의 양변을 $\frac{1}{x}$제곱하면

$4=a^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$6^y=a$의 양변을 $\frac{1}{y}$제곱하면

$6=a^{\frac{1}{y}}$ ……㉡

$9^z=a$의 양변을 $\frac{1}{z}$제곱하면

$9=a^{\frac{1}{z}}$ ……㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$4\times6\times9=a^{\frac{1}{x}}\times a^{\frac{1}{y}}\times a^{\frac{1}{z}}$ $\quad\therefore 216=a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

이때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$이므로

$216=a^3$, $6^3=a^3$

$\therefore a=6$

07-1 답 3

|해결 전략| $t=1$일 때와 $t=8$일 때 각각 S_1과 S_2에 대한 식을 구한다.

햇볕에 노출되는 시간이 1시간일 때, 요구되는 자외선 차단 지수는 S_1이므로

$1=m\times2^{S_1}$ ……㉠

햇볕에 노출되는 시간이 8시간일 때, 요구되는 자외선 차단 지수는 S_2이므로

$8=m\times2^{S_2}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{8}{1}=\frac{m\times2^{S_2}}{m\times2^{S_1}}$ $\therefore 8=2^{S_2-S_1}$

즉, $2^{S_2-S_1}=2^3$이므로

$S_2-S_1=3$

STEP 3 유형 드릴

|29쪽~31쪽|

1-1 답 ③

|해결 전략| a의 n제곱근은 복소수 범위에서 n개이다.

① 네제곱근 81은 $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$이다.

② $3^3=27$이므로 3은 27의 세제곱근이다.

③ 4의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=4$이므로

$x^4-4=0$, $(x^2-2)(x^2+2)=0$

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

따라서 4의 네제곱근은 4개이다.

④ -1의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{(-1)^3}=-1$이다.

⑤ n이 1이 아닌 홀수일 때, -7의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-7}$이다.

1-2 답 ②

|해결 전략| a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 n이 홀수일 때는 1개이고, n이 짝수일 때는 a의 값에 따라 다르다.

ㄱ. -8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$이므로

$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다.

ㄴ. 0의 제곱근은 $\sqrt{0}=0$이다.

ㄷ. n이 짝수일 때, 5의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{5}$, $-\sqrt[n]{5}$의 2개이다.

ㄹ. n이 1이 아닌 홀수일 때, -5의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-5}$의 1개이다.

ㅁ. 실수 a에 대하여 $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & (n\text{이 홀수}) \\ |a| & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$이므로 n이 짝수이고 $a<0$일 때 $\sqrt[n]{a^n}=|a|=-a$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

LECTURE

n이 2 이상의 정수일 때, 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

2-1 답 7

|해결 전략| n이 홀수일 때, $\sqrt[n]{a^n}=a$이다.

64의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=64$이므로

$x^3-64=0$, $(x-4)(x^2+4x+16)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$

이때, 64의 세제곱근 중 실수인 것은 4이므로

$a=4$

$\sqrt[3]{27}$의 제곱근을 y라 하면 $y^2=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$이므로

$y=-\sqrt{3}$ 또는 $y=\sqrt{3}$ $\therefore b=\sqrt{3}$ ($\because b>0$)

$\therefore a+b^2=4+3=7$

2-2 답 5

|해결 전략| a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 실수 x의 개수와 같다.

-27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-27$이므로

$x^3+27=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

이때, -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3의 1개이므로

$f(-27, 3)=1$ $\therefore \alpha=1$

$\sqrt{(-2)^6}$의 네제곱근을 y라 하면 $y^4=\sqrt{(-2)^6}=\sqrt{2^6}=2^3=8$이므로

$y^4-8=0$, $(y^2-2\sqrt{2})(y^2+2\sqrt{2})=0$

$\therefore y=\pm2\sqrt{2}$ 또는 $y=\pm2\sqrt{2}i$

이때, $\sqrt{(-2)^6}$의 네제곱근 중 실수인 것은 $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$의 2개이므로

$f(\sqrt{(-2)^6}, 4)=2$ $\therefore \beta=2$

$\therefore \alpha+2\beta=1+2\times2=5$

3-1 답 ③

|해결 전략| 실수 a에 대하여 $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & (n\text{이 홀수}) \\ |a| & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$임을 이용한다.

$\sqrt{(-2)^2}+\sqrt[3]{(-2)^3}+\sqrt[4]{(-3)^4}+\sqrt[5]{(-3)^5}$

$=|-2|+(-2)+|-3|+(-3)$

$=2-2+3-3=0$

3-2 답 ②

|해결 전략| $a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 정수일 때, $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$임을 이용한다.

$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}+\frac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3^2}+\frac{\sqrt[4]{2^6}}{\sqrt[4]{2^2}}$

$=\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[4]{\frac{2^6}{2^2}}$

$=\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[4]{2^4}=3+2=5$

4-1 답 ①

|해결 전략| $\sqrt[\blacksquare]{\bullet}$에서 ■를 통일시켜서 계산한다.

$$\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt{ab}=\sqrt[6]{a^4b^2}\times\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[6]{a^3b^3}$$
$$=\sqrt[6]{\frac{a^4b^2\times a^5b}{a^3b^3}}=\sqrt[6]{\frac{a^9b^3}{a^3b^3}}$$
$$=\sqrt[6]{a^6}=|a|=a$$

4-2 답 $\frac{1}{2}$

|해결 전략| $\sqrt[\blacksquare]{\bullet}$에서 ■를 통일시켜서 계산한다.

$$\sqrt[6]{a^2b^3}\times\sqrt[3]{a^2b}\div\sqrt[12]{a^6b^{10}}=\sqrt[12]{a^4b^6}\times\sqrt[12]{a^8b^4}\div\sqrt[12]{a^6b^{10}}$$
$$=\sqrt[12]{\frac{a^4b^6\times a^8b^4}{a^6b^{10}}}=\sqrt[12]{\frac{a^{12}b^{10}}{a^6b^{10}}}$$
$$=\sqrt[12]{a^6}=\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$$

즉, $a^{\frac{1}{2}}=a^xb^y$이므로 $x=\frac{1}{2}$, $y=0$

$\therefore x+y=\frac{1}{2}$

5-1 답 (1) 6 (2) $\frac{15}{2}$

|해결 전략| 밑을 통일시키고 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 한다.

(1) $$2^{-3}\times2^5\times\left\{\left(\frac{8}{27}\right)^{0.5}\right\}^{-\frac{2}{3}}=2^{-3+5}\times\left[\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{2}{3}}$$
$$=2^2\times\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^{-\frac{2}{3}}$$
$$=2^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$
$$=2^2\times\frac{3}{2}=6$$

(2) $$25^{\frac{1}{2}}\div24^{\frac{1}{3}}\times81^{\frac{1}{3}}=(5^2)^{\frac{1}{2}}\div(3\times2^3)^{\frac{1}{3}}\times(3^4)^{\frac{1}{3}}$$
$$=5\div3^{\frac{1}{3}}\div2\times3^{\frac{4}{3}}$$
$$=5\div2\times3^{\frac{4}{3}}\div3^{\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{5}{2}\times3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{5}{2}\times3$$
$$=\frac{15}{2}$$

5-2 답 ④

|해결 전략| 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 한다.

$$\left(2^{\sqrt{\frac{4}{3}}}\right)^{\sqrt{3}}\times4^{-\frac{1}{2}}\div\{(-2)^4\}^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}}\times(2^2)^{-\frac{1}{2}}\div(2^4)^{\frac{1}{2}}$$
$$=2^2\times2^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\div2^{4\times\frac{1}{2}}$$
$$=2^2\times2^{-1}\div2^2$$
$$=2^{2+(-1)-2}$$
$$=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

LECTURE

지수 x	자연수	정수	유리수	실수
밑 a	a는 실수	$a\neq0$	$a>0$	$a>0$

6-1 답 2

|해결 전략| $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$을 이용하여 거듭제곱근을 지수로 바꾼 후 지수법칙을 이용하여 간단히 한다.

$$\left(\sqrt{a^3}\times\sqrt[5]{a}\div a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{10}{11}}=\left(a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{5}}\div a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{10}{11}}$$
$$=\left\{a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right\}^{\frac{10}{11}}$$
$$=\left(a^{\frac{11}{5}}\right)^{\frac{10}{11}}=a^{\frac{11}{5}\times\frac{10}{11}}$$
$$=a^2$$

즉, $a^2=a^k$이므로 $k=2$

6-2 답 11

|해결 전략| $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{a}}=\left(a\times a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$을 이용하여 거듭제곱근을 지수로 바꾼 후 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 한다.

$$\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=\left\{a\times\left(a\times a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{4}}=\left\{a\times\left(a^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{4}}$$
$$=\left\{a\times\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{4}}=\left(a\times a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$=\left(a^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$=a^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{4}}=a^{\frac{3}{8}}$$

따라서 $m=8$, $n=3$이므로 $m+n=8+3=11$

7-1 답 $\frac{11}{5}$

|해결 전략| $2^{\frac{1}{3}}=A$, $5^{-\frac{1}{3}}=B$로 놓고 주어진 식을 A, B에 대한 식으로 나타낸 후 곱셈 공식 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$을 이용한다.

$2^{\frac{1}{3}}=A$, $5^{-\frac{1}{3}}=B$로 놓으면 $4^{\frac{1}{3}}=A^2$, $25^{-\frac{1}{3}}=B^2$이므로

$$\left(2^{\frac{1}{3}}+5^{-\frac{1}{3}}\right)\left(4^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}5^{-\frac{1}{3}}+25^{-\frac{1}{3}}\right)=(A+B)(A^2-AB+B^2)$$
$$=A^3+B^3$$
$$=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(5^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$
$$=2+5^{-1}$$
$$=2+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$$

LECTURE

자주 이용되는 곱셈 공식

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$(A\pm B)^3=A^3\pm3A^2B+3AB^2\pm B^3$ (복부호동순)

$(A\pm B)(A^2\mp AB+B^2)=A^3\pm B^3$ (복부호동순)

7-2 답 4

|해결 전략| $6^{\frac{1}{4}}=A$, $2^{\frac{1}{4}}=B$로 놓고 주어진 식을 A, B에 대한 식으로 나타낸 후 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 식을 전개한다.

$6^{\frac{1}{4}}=A$, $2^{\frac{1}{4}}=B$로 놓으면 $6^{\frac{1}{2}}=A^2$, $2^{\frac{1}{2}}=B^2$이므로

$$\left(6^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right)\left(6^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}\right)\left(6^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}\right)=(A-B)(A+B)(A^2+B^2)$$
$$=(A^2-B^2)(A^2+B^2)$$
$$=A^4-B^4$$
$$=\left(6^{\frac{1}{4}}\right)^4-\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^4$$
$$=6^{\frac{1}{4}\times4}-2^{\frac{1}{4}\times4}$$
$$=6-2=4$$

8-1 답 18

|해결 전략| 주어진 식의 양변을 세제곱한다.

$a+a^{-1}=3$의 양변을 세제곱하면 $(a+a^{-1})^3=3^3$

$a^3+3a^2\times a^{-1}+3a\times a^{-2}+a^{-3}=27$

$a^3+a^{-3}+3(a+a^{-1})=27$

$a^3+a^{-3}+3\times3=27$

$\therefore\ a^3+a^{-3}=18$

8-2 답 $\sqrt{6}$

|해결 전략| $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=x$로 놓고 양변을 제곱하여 x의 값을 구한다.

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=x$로 놓고 양변을 제곱하면 $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=x^2$

$a+2a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}=x^2$, $a+a^{-1}+2=x^2$

즉, $4+2=x^2$이므로 $x^2=6$

$\therefore\ x=\sqrt{6}\ (\because\ x>0)$

9-1 답 $\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}$

|해결 전략| 분모, 분자에 a^x을 곱하여 구하는 식을 a^{2x}이 포함된 식으로 변형한다.

$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x(a^{3x}-a^{-3x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\frac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1}$$

$$=\frac{(a^{2x})^2-\frac{1}{a^{2x}}}{a^{2x}-1}=\frac{(\sqrt{2})^2-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{2-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{4-\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{(4-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$$

9-2 답 $-\dfrac{5}{4}$

|해결 전략| 분모, 분자에 2^a을 곱하여 4^a의 값을 구한다.

$\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}$의 분모, 분자에 각각 2^a을 곱하면

$$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=\frac{2^a(2^a+2^{-a})}{2^a(2^a-2^{-a})}=\frac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=\frac{(2^2)^a+1}{(2^2)^a-1}=\frac{4^a+1}{4^a-1}=-2$$

이므로 $4^a+1=-2(4^a-1)$

$4^a+1=-2\times4^a+2$

$3\times4^a=1\qquad\therefore\ 4^a=\dfrac{1}{3}$

$$\therefore\ \frac{4^a+4^{-a}}{4^a-4^{-a}}=\frac{4^a+\frac{1}{4^a}}{4^a-\frac{1}{4^a}}=\frac{\frac{1}{3}+3}{\frac{1}{3}-3}=\frac{\frac{10}{3}}{-\frac{8}{3}}=-\frac{5}{4}$$

다른 풀이

$\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$에서 $2^a+2^{-a}=-2(2^a-2^{-a})$이므로

$2^a+2^{-a}=-2\times2^a+2\times2^{-a}$

$3\times2^a=2^{-a}\qquad\therefore\ 2^a=\dfrac{1}{3}\times2^{-a}$

이때, 위 식의 양변에 2^a을 곱하면 $4^a=\dfrac{1}{3}$이므로

$$\frac{4^a+4^{-a}}{4^a-4^{-a}}=\frac{4^a+\frac{1}{4^a}}{4^a-\frac{1}{4^a}}=\frac{\frac{1}{3}+3}{\frac{1}{3}-3}=\frac{\frac{10}{3}}{-\frac{8}{3}}=-\frac{5}{4}$$

10-1 답 -2

|해결 전략| $a^x=b \Longleftrightarrow a=b^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 조건식의 밑을 통일한다.

$12^x=27$의 양변을 $\dfrac{1}{x}$제곱하면

$12=27^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ ……㉠

$108^y=81$의 양변을 $\dfrac{1}{y}$제곱하면

$108=81^{\frac{1}{y}}=(3^4)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면

$12\div108=3^{\frac{3}{x}}\div3^{\frac{4}{y}}$, $\dfrac{1}{9}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

즉, $3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}=3^{-2}$이므로 $\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=-2$

10-2 답 1

|해결 전략| $a^x=b \Longleftrightarrow a=b^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 조건식의 밑을 통일한다.

$2^a=10$의 양변을 $\dfrac{1}{a}$제곱하면

$2=10^{\frac{1}{a}}$ ……㉠

$5^b=10$의 양변을 $\dfrac{1}{b}$제곱하면

$5=10^{\frac{1}{b}}$ ……㉡

㉠×㉡을 하면

$2\times5=10^{\frac{1}{a}}\times10^{\frac{1}{b}}$, $10=10^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

즉, $10^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=10^1$이므로 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$

11-1 답 30

|해결 전략| $a^x=b \Longleftrightarrow a=b^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 조건식의 밑을 통일한다.

$2^{\frac{x}{2}}=a$의 양변을 $\dfrac{2}{x}$제곱하면

$2=a^{\frac{2}{x}}$ ……㉠

$9^y=a$, 즉 $3^{2y}=a$의 양변을 $\dfrac{1}{2y}$제곱하면

$3=a^{\frac{1}{2y}}$ ……㉡

$25^z=a$, 즉 $5^{2z}=a$의 양변을 $\dfrac{1}{2z}$제곱하면

$5=a^{\frac{1}{2z}}$ ……㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$2\times3\times5=a^{\frac{2}{x}}\times a^{\frac{1}{2y}}\times a^{\frac{1}{2z}}$ $\quad\therefore 30=a^{\frac{2}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}}$

이때, $\frac{2}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}=1$이므로 $a=30$

11-2 답 $\frac{1}{2}$

|해결 전략| $a^x=b \iff a=b^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 조건식의 밑을 통일한다.

$a^x=81$의 양변을 $\frac{1}{x}$제곱하면

$a=81^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$b^y=81$의 양변을 $\frac{1}{y}$제곱하면

$b=81^{\frac{1}{y}}$ ……㉡

$c^z=81$의 양변을 $\frac{1}{z}$제곱하면

$c=81^{\frac{1}{z}}$ ……㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$abc=81^{\frac{1}{x}}\times81^{\frac{1}{y}}\times81^{\frac{1}{z}}$ $\quad\therefore abc=81^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

이때, $abc=9$이므로 $9=81^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$\sqrt{81}=81^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$, $81^{\frac{1}{2}}=81^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

12-1 답 2

|해결 전략| $n=8$일 때와 $n=2$일 때 각각 t_1과 t_2의 식을 구한다.

전자레인지로 피자 8조각을 굽는 데 걸리는 시간 t_1은

$t_1=1.2\times8^{0.5}=1.2\times(2^3)^{0.5}=1.2\times2^{1.5}$

전자레인지로 피자 2조각을 굽는 데 걸리는 시간 t_2는

$t_2=1.2\times2^{0.5}$

$\therefore \frac{t_1}{t_2}=\frac{1.2\times2^{1.5}}{1.2\times2^{0.5}}=2^{1.5-0.5}=2$

12-2 답 (1) $f(5)=3f(3)$ (2) 3 (3) 9배

|해결 전략| (3) $f(8)$과 $f(4)$의 관계식을 구한다.

(1) 5시간 후의 박테리아의 수 $f(5)$가 3시간 후의 박테리아의 수 $f(3)$의 3배이므로 $f(5)=3f(3)$

(2) $f(5)=3f(3)$에서 $ka^{5b}=3ka^{3b}$

양변을 ka^{3b}으로 나누면

$a^{5b-3b}=3$ $\quad\therefore a^{2b}=3$

(3) 8시간 후의 박테리아의 수는 $f(8)=ka^{8b}$ ……㉠

4시간 후의 박테리아의 수는 $f(4)=ka^{4b}$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면

$\frac{f(8)}{f(4)}=\frac{ka^{8b}}{ka^{4b}}=a^{8b-4b}=a^{4b}=(a^{2b})^2=3^2=9$

$\therefore f(8)=9f(4)$

따라서 8시간 후의 박테리아의 수는 4시간 후의 박테리아의 수의 9배이다.

2 | 로그

1 로그의 뜻

개념 확인 34쪽

1 (1) $2=\log_5 25$ (2) $0=\log_{10} 1$

(3) $\frac{1}{3}=\log_{27} 3$ (4) $-2=\log_4 \frac{1}{16}$

STEP 1 개념 드릴 | 35쪽~36쪽 |

개념 check

1-1 (1) 16 (2) -3 (3) 36

2-1 (1) 0 (2) -2 (3) 4 (4) $\frac{1}{3}$

3-1 (1) 2 (2) 5^{-1}, $\frac{1}{5}$ (3) 2

4-1 (1) $>$, $x<-2$, $x>4$ (2) $>$, 1, $x>2$

스스로 check

1-2 답 (1) $0=\log_7 1$ (2) $4=\log_3 81$ (3) $2=\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25}$ (4) $-2=\log_{\frac{1}{2}} 4$ (5) $-\frac{2}{3}=\log_{27} \frac{1}{9}$

(1) $7^0=1$에서 $0=\log_7 1$

(2) $3^4=81$에서 $4=\log_3 81$

(3) $\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$에서 $2=\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25}$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$에서 $-2=\log_{\frac{1}{2}} 4$

(5) $27^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{9}$에서 $-\frac{2}{3}=\log_{27} \frac{1}{9}$

2-2 답 (1) $10^3=1000$ (2) $3^{-3}=\frac{1}{27}$ (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$ (4) $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ (5) $(\sqrt{3})^4=9$

(1) $\log_{10} 1000=3$에서 $10^3=1000$

(2) $\log_3 \frac{1}{27}=-3$에서 $3^{-3}=\frac{1}{27}$

(3) $\log_{\frac{1}{2}} 32=-5$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$

(4) $\log_5 \sqrt{5}=\frac{1}{2}$에서 $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

(5) $\log_{\sqrt{3}} 9=4$에서 $(\sqrt{3})^4=9$

3-2 답 (1) 9 (2) $\frac{1}{25}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{7}$ (5) 9 (6) 2

(1) $\log_3 x=2$에서 $3^2=x$ $\quad\therefore x=9$

(2) $\log_5 x=-2$에서 $5^{-2}=x$ $\quad\therefore x=\frac{1}{25}$

(3) $\log_4 x=-\frac{3}{2}$에서 $4^{-\frac{3}{2}}=x$ $\quad\therefore x=\frac{1}{8}$

(4) $\log_x 7=-1$에서 $x^{-1}=7$ $\quad\therefore x=\frac{1}{7}$

(5) $\log_x 81=2$에서 $x^2=81$

밑의 조건에서 $x>0$이므로 $x=9$

(6) $\log_x 64=6$에서 $x^6=64$

밑의 조건에서 $x>0$이므로 $x=2$

4-2 답 (1) $x<0$ 또는 $x>3$ (2) $1<x<2$ (3) $3<x<4$ 또는 $x>4$ (4) $0<x<1$ 또는 $1<x<2$

(1) 진수의 조건에서 $x^2-3x>0$이므로

$x(x-3)>0$ $\quad\therefore x<0$ 또는 $x>3$

(2) 진수의 조건에서 $-x^2+3x-2>0$이므로

$x^2-3x+2<0,\ (x-1)(x-2)<0$ $\quad\therefore 1<x<2$

(3) 밑의 조건에서 $x-3>0,\ x-3\neq1$이므로

$x>3,\ x\neq4$ $\quad\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$

(4) 진수의 조건에서 $4-2x>0$이므로 $x<2$ ……㉠

밑의 조건에서 $x>0,\ x\neq1$이므로

$0<x<1$ 또는 $x>1$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<1$ 또는 $1<x<2$

STEP 2 필수 유형

| 37쪽~38쪽 |

01-1 답 (1) 4 (2) $\frac{1}{5}$ (3) 9 (4) $3^{\frac{1}{8}}$ (5) 36 (6) $3^{\frac{1}{3}}$

| 해결 전략 | $a>0,\ a\neq1,\ N>0$일 때, $\log_a N=x \Longleftrightarrow a^x=N$임을 이용하여 계산한다.

(1) $\log_x 64=3$에서 $x^3=64$

$\therefore x=64^{\frac{1}{3}}=(2^6)^{\frac{1}{3}}=2^2=4$

(2) $\log_x 5=-1$에서 $x^{-1}=5$

$\therefore x=5^{-1}=\frac{1}{5}$

(3) $\log_{\frac{1}{3}} x=-2$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=x$

$\therefore x=(3^{-1})^{-2}=3^2=9$

(4) $\log_{\sqrt{3}} x=\frac{1}{4}$에서 $(\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}=x$

$\therefore x=(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{8}}$

(5) $\log_2(\log_6 x)=1$에서 $2=\log_6 x$

$6^2=x$ $\quad\therefore x=36$

(6) $\log_3(\log_{27} x)=-2$에서 $3^{-2}=\log_{27} x$이므로 $\log_{27} x=\frac{1}{9}$

$27^{\frac{1}{9}}=x$ $\quad\therefore x=(3^3)^{\frac{1}{9}}=3^{\frac{1}{3}}$

01-2 답 9

| 해결 전략 | 5^x의 값을 먼저 구한 후 5^{2x}의 값을 구한다.

$x=\log_5 3$에서 $5^x=3$

$\therefore 5^{2x}=(5^x)^2=3^2=9$

02-1 답 (1) $2<x<5$ (2) $4<x<5$ 또는 $5<x<7$

| 해결 전략 | 밑의 조건 (밑)>0, (밑)$\neq1$과 진수의 조건 (진수)>0을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

(1) 진수의 조건에서 $-x^2+7x-10>0$이므로

$x^2-7x+10<0,\ (x-2)(x-5)<0$

$\therefore 2<x<5$

(2) 밑의 조건에서 $x-4>0,\ x-4\neq1$이므로

$x>4,\ x\neq5$

$\therefore 4<x<5$ 또는 $x>5$ ……㉠

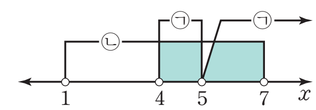
진수의 조건에서 $-x^2+8x-7>0$이므로

$x^2-8x+7<0,\ (x-1)(x-7)<0$

$\therefore 1<x<7$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$4<x<5$ 또는 $5<x<7$



02-2 답 18

| 해결 전략 | 밑의 조건 (밑)>0, (밑)$\neq1$과 진수의 조건 (진수)>0을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

밑의 조건에서 $x-3>0,\ x-3\neq1$이므로

$x>3,\ x\neq4$

$\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ ……㉠

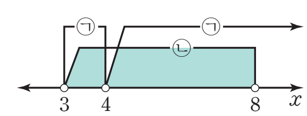
진수의 조건에서 $-x^2+11x-24>0$이므로

$x^2-11x+24<0,\ (x-3)(x-8)<0$

$\therefore 3<x<8$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<8$



따라서 $\log_{x-3}(-x^2+11x-24)$가 정의되기 위한 정수 x의 값은 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$5+6+7=18$

2 로그의 성질

개념 확인 39쪽~40쪽

1 (1) 0 (2) $\log_2 30$ (3) 2 (4) 3

2 $\frac{\log_2 7}{\log_2 3}$

3 (1) 1 (2) $\frac{3}{4}\log_2 3$ (3) 5

1 (2) $\log_2 5+\log_2 6=\log_2(5\times6)=\log_2 30$

(3) $\log_3 18-\log_3 2=\log_3\frac{18}{2}=\log_3 9$

$=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$

(4) $\log_7 7^3=3\log_7 7=3$

3 (1) $\log_4 3\times\log_3 4=\log_4 3\times\frac{1}{\log_4 3}=1$

(2) $\log_{16} 27=\log_{2^4} 3^3=\frac{3}{4}\log_2 3$

(3) $3^{\log_3 5}=5^{\log_3 3}=5$

STEP 1 개념 드릴 | 41쪽~42쪽 |

개념 check

1-1 (1) 0 (2) 28 (3) 5 (4) 12, 1 (5) 9, 2 (6) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

2-1 (1) 1 (2) 2 (3) 5, 5

3-1 (1) 2, 1 (2) $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ (3) 5, 7, 5 (4) 2, 16

스스로 check

1-2 답 (1) 0 (2) $\log_2 15$ (3) 3 (4) 2 (5) $\log_3 5$
(6) 3 (7) 7 (8) -1 (9) $\log_2 10$ (10) 2

(1) $\log_{10} 1=0$

(2) $\log_2 3+\log_2 5=\log_2 (3\times 5)=\log_2 15$

(3) $\log_3 18+\log_3 \frac{3}{2}=\log_3 \left(18\times\frac{3}{2}\right)=\log_3 27=3$

(4) $\log_6 3+2\log_6 \sqrt{12}=\log_6 3+\log_6 12=\log_6 36=2$

(5) $\log_3 20-\log_3 4=\log_3 \frac{20}{4}=\log_3 5$

(6) $\log_4 48-\log_4 \frac{3}{4}=\log_4 \left(48\times\frac{4}{3}\right)=\log_4 64=3$

(7) $2\log_2 \sqrt{8}+2\log_2 4=\log_2 8+\log_2 16=\log_2 (8\times 16)$
$=\log_2 128=7$

(8) $\log_2 18-4\log_2 \sqrt{6}=\log_2 18-\log_2 36$
$=\log_2 \frac{18}{36}=\log_2 \frac{1}{2}=-1$

(9) $\log_2 5+\log_2 6-\log_2 3=\log_2 \left(\frac{5\times 6}{3}\right)=\log_2 10$

(10) $\log_3 \frac{3}{7}+2\log_3 \sqrt{7}-\log_3 \frac{1}{3}=\log_3 \left(\frac{3}{7}\times 7\times 3\right)=\log_3 9=2$

2-2 답 (1) $\frac{1}{\log_{10} 2}$ (2) $\frac{2}{\log_{10} 3}$ (3) $\frac{\log_{10} 3}{2\log_{10} 2}$
(4) $\frac{\log_{10} 5}{2\log_{10} 3}$ (5) $\frac{3\log_{10} 2}{2\log_{10} 5}$

(1) $\log_2 10=\frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2}=\frac{1}{\log_{10} 2}$

(2) $\log_3 100=\frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 3}=\frac{\log_{10} 10^2}{\log_{10} 3}=\frac{2}{\log_{10} 3}$

(3) $\log_4 3=\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 4}=\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2^2}=\frac{\log_{10} 3}{2\log_{10} 2}$

(4) $\log_9 5=\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 9}=\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3^2}=\frac{\log_{10} 5}{2\log_{10} 3}$

(5) $\log_{25} 8=\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 25}=\frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 5^2}=\frac{3\log_{10} 2}{2\log_{10} 5}$

3-2 답 (1) 1 (2) 2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $-\frac{2}{3}$ (5) 9 (6) 15

(1) $\log_{10} 5\times\log_5 10=\log_{10} 5\times\frac{1}{\log_{10} 5}=1$

(2) $\log_3 2\times\log_2 9=\log_3 2\times\log_2 3^2=\log_3 2\times\frac{2}{\log_3 2}=2$

(3) $\log_{64} 16=\log_{2^6} 2^4=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(4) $\log_{27} \frac{1}{9}=\log_{3^3} 3^{-2}=-\frac{2}{3}$

(5) $4^{\log_2 3}=3^{\log_2 4}=3^{\log_2 2^2}=3^2=9$

(6) $2^{\log_2 5+\log_2 3}=2^{\log_2 15}=15^{\log_2 2}=15$

STEP 2 필수 유형 | 43쪽~48쪽 |

01-1 답 (1) 1 (2) 2 (3) 2 (4) 3

| 해결 전략 | 로그의 기본 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

(1) $\frac{1}{2}\log_5 \frac{25}{3}+\log_5 \sqrt{3}=\log_5 \left(\frac{25}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\log_5 \sqrt{3}$
$=\log_5 \sqrt{\frac{25}{3}}+\log_5 \sqrt{3}$
$=\log_5 \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}\right)$
$=\log_5 5=1$

(2) $\frac{1}{2}\log_2 \frac{3}{4}-\log_2 \frac{\sqrt{3}}{8}=\log_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\log_2 \frac{\sqrt{3}}{8}$
$=\log_2 \sqrt{\frac{3}{4}}-\log_2 \frac{\sqrt{3}}{8}$
$=\log_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$
$=\log_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$
$=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

(3) $5\log_3 \sqrt{3}+\frac{1}{2}\log_3 2-\log_3 \sqrt{6}$
$=\log_3 (\sqrt{3})^5+\log_3 2^{\frac{1}{2}}-\log_3 \sqrt{6}$
$=\log_3 9\sqrt{3}+\log_3 \sqrt{2}-\log_3 \sqrt{6}$
$=\log_3 \left(\frac{9\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)$
$=\log_3 9=\log_3 3^2=2$

(4) $2\log_2 \sqrt{6}+\frac{1}{2}\log_2 16-\log_2 3$
$=\log_2 (\sqrt{6})^2+\log_2 (4^2)^{\frac{1}{2}}-\log_2 3$
$=\log_2 6+\log_2 4-\log_2 3$
$=\log_2 (6\times 4\div 3)=\log_2 \left(6\times 4\times\frac{1}{3}\right)$
$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

01-2 답 5

| 해결 전략 | 로그의 기본 성질을 이용하여 식을 간단히 하여 k의 값을 구한다.

$2\log_2 \sqrt{3}-\log_2 6+6\log_2 \sqrt{2}$
$=\log_2 (\sqrt{3})^2-\log_2 6+\log_2 (\sqrt{2})^6$
$=\log_2 3-\log_2 6+\log_2 2^3$
$=\log_2 (3\div 6\times 2^3)=\log_2 \left(3\times\frac{1}{6}\times 2^3\right)$
$=\log_2 2^2=2$
따라서 $k=2$이므로
$\log_k 32=\log_2 32=\log_2 2^5=5$

02-1 답 (1) 1 (2) 3 (3) -2 (4) $-\frac{7}{4}$

|해결 전략| 밑의 변환 공식을 이용하여 식을 간단히 한다.

(1) $\log_4 \sqrt{5} \times \log_5 16 = \dfrac{\frac{1}{2}\log_{10} 5}{\log_{10} 4} \times \dfrac{2\log_{10} 4}{\log_{10} 5}$

$=1$

(2) $\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 8$

$= \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \times \dfrac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 5}$

$=3$

(3) $\dfrac{1}{\log_6 3} - \log_3 54 = \log_3 6 - \log_3 54 = \log_3 \dfrac{6}{54}$

$= \log_3 \dfrac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$

(4) $(\log_4 27 + \log_2 9)(\log_3 2 - \log_9 8)$

$= \left(\dfrac{\log_{10} 27}{\log_{10} 4} + \dfrac{\log_{10} 9}{\log_{10} 2}\right)\left(\dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} - \dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 9}\right)$

$= \left(\dfrac{3\log_{10} 3}{2\log_{10} 2} + \dfrac{2\log_{10} 3}{\log_{10} 2}\right)\left(\dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} - \dfrac{3\log_{10} 2}{2\log_{10} 3}\right)$

$= \dfrac{3\log_{10} 3 + 4\log_{10} 3}{2\log_{10} 2} \times \dfrac{2\log_{10} 2 - 3\log_{10} 2}{2\log_{10} 3}$

$= \dfrac{7\log_{10} 3}{2\log_{10} 2} \times \dfrac{(-\log_{10} 2)}{2\log_{10} 3} = -\dfrac{7}{4}$

03-1 답 (1) 14 (2) 243 (3) 4 (4) 6

|해결 전략| 로그의 성질 $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$, $a^{\log_a b} = b$, $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$를 이용하여 식을 간단히 한다.

(1) $\log_9 4 = \log_{3^2} 2^2 = \frac{2}{2}\log_3 2 = \log_3 2$이므로

$25^{\log_5 4} - 3^{\log_9 4} = 5^{2\log_5 4} - 3^{\log_3 2} = 5^{\log_5 16} - 3^{\log_3 2}$

$= 16^{\log_5 5} - 2^{\log_3 3}$

$= 16 - 2 = 14$

(2) $8^{\log_2 3} \times 49^{\log_7 3} = 2^{3\log_2 3} \times 7^{2\log_7 3} = 2^{\log_2 27} \times 7^{\log_7 9}$

$= 27^{\log_2 2} \times 9^{\log_7 7} = 27 \times 9 = 243$

(3) 먼저 지수 부분을 정리하면

$2\log_5 4 - 3\log_5 2 + \frac{1}{4}\log_5 16$

$= \log_5 4^2 - \log_5 2^3 + \log_5 (2^4)^{\frac{1}{4}}$

$= \log_5 16 - \log_5 8 + \log_5 2$

$= \log_5 \left(\dfrac{16 \times 2}{8}\right)$

$= \log_5 4$

$\therefore 5^{2\log_5 4 - 3\log_5 2 + \frac{1}{4}\log_5 16} = 5^{\log_5 4} = 4^{\log_5 5} = 4$

(4) 먼저 지수 부분을 정리하면

$\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 27 - \log_2 3 = \log_2 \left(\frac{2}{3} \times 27 \times \frac{1}{3}\right)$

$= \log_2 6$

$\therefore 2^{\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 27 - \log_2 3} = 2^{\log_2 6} = 6^{\log_2 2} = 6$

03-2 답 5

|해결 전략| 로그의 성질 $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$, $a^{\log_a b} = b$, $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$를 이용하여 식을 간단히 한다.

$\log_{\frac{1}{3}} 5 + \log_9 125 + \log_3 \sqrt{5}$

$= \log_{3^{-1}} 5 + \log_{3^2} 5^3 + \log_3 5^{\frac{1}{2}}$

$= -\log_3 5 + \frac{3}{2}\log_3 5 + \frac{1}{2}\log_3 5$

$= \log_3 5$

따라서 $x = \log_3 5$이므로

$3^x = 3^{\log_3 5} = 5^{\log_3 3} = 5$

04-1 답 (1) $a+b$ (2) $a+b+2$ (3) $a+\frac{b}{2}$ (4) $\frac{a+2b}{1+2a}$

|해결 전략| 주어진 식을 $\log_2 3$, $\log_2 5$가 포함된 형태로 변형한다.

(1) $\log_2 15 = \log_2 (3 \times 5) = \log_2 3 + \log_2 5 = a+b$

(2) $\log_2 60 = \log_2 (2^2 \times 3 \times 5)$

$= \log_2 2^2 + \log_2 3 + \log_2 5$

$= 2\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5$

$= a+b+2$

(3) $\log_2 \sqrt{45} = \log_2 45^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_2 45 = \frac{1}{2}\log_2 (3^2 \times 5)$

$= \frac{1}{2}(\log_2 3^2 + \log_2 5) = \frac{1}{2}(2\log_2 3 + \log_2 5)$

$= \log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2 5 = a + \frac{b}{2}$

(4) $\log_{18} 75 = \dfrac{\log_2 75}{\log_2 18} = \dfrac{\log_2 (3 \times 5^2)}{\log_2 (2 \times 3^2)}$

$= \dfrac{\log_2 3 + \log_2 5^2}{\log_2 2 + \log_2 3^2} = \dfrac{\log_2 3 + 2\log_2 5}{\log_2 2 + 2\log_2 3}$

$= \dfrac{a+2b}{1+2a}$

LECTURE

두 수 $\log_2 3$, $\log_2 5$의 밑이 모두 2이므로 주어진 식의 밑이 2가 되도록 밑의 변환 공식을 이용한다.

04-2 답 $\frac{3a+2b}{1-a}$

|해결 전략| 주어진 식을 $\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$이 포함된 형태로 변형한다.

$\log_5 72 = \dfrac{\log_{10} 72}{\log_{10} 5} = \dfrac{\log_{10} (2^3 \times 3^2)}{\log_{10} \frac{10}{2}}$

$= \dfrac{\log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2}{\log_{10} 10 - \log_{10} 2} = \dfrac{3\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3}{1 - \log_{10} 2}$

$= \dfrac{3a+2b}{1-a}$

05-1 답 (1) 1 (2) 1

|해결 전략| 지수를 로그로 나타낸 후 식의 값을 구한다.

(1) $15^x = 27$에서 $x = \log_{15} 27 = \log_{15} 3^3 = 3\log_{15} 3$

$\therefore \dfrac{3}{x} = \dfrac{1}{\log_{15} 3} = \log_3 15$

$45^y = 81$에서 $y = \log_{45} 81 = \log_{45} 3^4 = 4\log_{45} 3$

$\therefore \dfrac{4}{y} = \dfrac{1}{\log_{45} 3} = \log_3 45$

$\therefore \dfrac{4}{y} - \dfrac{3}{x} = \log_3 45 - \log_3 15 = \log_3 \dfrac{45}{15} = \log_3 3 = 1$

다른 풀이

$15^x=27$에서 $15=27^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ ……㉠

$45^y=81$에서 $45=81^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $3^{\frac{4}{y}}\div 3^{\frac{3}{x}}=3$, $3^{\frac{4}{y}-\frac{3}{x}}=3^1$

$\therefore \frac{4}{y}-\frac{3}{x}=1$

(2) $2^x=14$에서 $x=\log_2 14$

$\therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{\log_2 14}=\log_{14} 2$

$7^y=14$에서 $y=\log_7 14$

$\therefore \frac{1}{y}=\frac{1}{\log_7 14}=\log_{14} 7$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_{14} 2+\log_{14} 7=\log_{14}(2\times 7)=\log_{14} 14=1$

다른 풀이

$2^x=14$에서 $2=14^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$7^y=14$에서 $7=14^{\frac{1}{y}}$ ……㉡

㉠×㉡을 하면 $14^{\frac{1}{x}}\times 14^{\frac{1}{y}}=14$, $14^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=14^1$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

LECTURE

지수 단원에서 배운 밑을 같게 하여 식의 값 구하기(27쪽)와 동일한 문제이다. 이와 같은 문제는 지수를 이용하는 방법과 로그를 이용하는 방법 중에 편한 방법으로 해결한다.

06-1 답 -4

|해결 전략| 두 근의 합은 2, 두 근의 곱은 -2임을 이용한다.

이차방정식 $x^2-2x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{10} a+\log_{10} b=2$, $\log_{10} a\times\log_{10} b=-2$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a b+\log_b a&=\frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}+\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}\\&=\frac{(\log_{10} b)^2+(\log_{10} a)^2}{\log_{10} a\times\log_{10} b}\\&=\frac{(\log_{10} a+\log_{10} b)^2-2\log_{10} a\times\log_{10} b}{\log_{10} a\times\log_{10} b}\\&=\frac{2^2-2\times(-2)}{-2}\\&=-4\end{aligned}$$

06-2 답 2

|해결 전략| 두 근의 합은 4, 두 근의 곱은 2임을 이용한다.

이차방정식 $x^2-4x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 \alpha+\log_3 \beta=4$, $\log_3 \alpha\times\log_3 \beta=2$

$$\begin{aligned}\therefore \log_\alpha 3+\log_\beta 3&=\frac{1}{\log_3 \alpha}+\frac{1}{\log_3 \beta}\\&=\frac{\log_3 \beta+\log_3 \alpha}{\log_3 \alpha\times\log_3 \beta}\\&=\frac{4}{2}=2\end{aligned}$$

3 상용로그

개념 확인 49쪽~53쪽

1 (1) 3 (2) -3 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

2 (1) 0.6628 (2) 0.6739 (3) 0.6839

3 (1) 1.8603 (2) -0.1397

4 (1) 4 (2) -3

1 (1) $\log 1000=\log 10^3=3$

(2) $\log\frac{1}{1000}=\log 10^{-3}=-3$

(3) $\log\sqrt[3]{100}=\log(10^2)^{\frac{1}{3}}=\log 10^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

(4) $\log\sqrt{10}=\log 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

3 (1) $\log 72.5=\log(10\times 7.25)=\log 10+\log 7.25$

$=1+0.8603=1.8603$

(2) $\log 0.725=\log(10^{-1}\times 7.25)$

$=\log 10^{-1}+\log 7.25$

$=-1+0.8603=-0.1397$

STEP 1 개념 드릴 | 55쪽~56쪽 |

개념 check

1-1 (1) 4, 4 (2) -4, -4 (3) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{1}{2}$

2-1 (1) 3, 0.7505, 0.7505 (2) 5.7, 5.72, 5.72

3-1 (1) 2, 2, 2, 2.4942 (2) -1, -1, -1, -0.5058

4-1 (1) 0.5412 (2) 1, 0.2143, 0.2143

5-1 (1) 4 (2) -3

스스로 check

1-2 답 (1) -5 (2) $\frac{3}{4}$ (3) -1 (4) $\frac{3}{2}$ (5) $\frac{5}{2}$

(1) $\log\frac{1}{100000}=\log 10^{-5}=-5$

(2) $\log\sqrt[4]{1000}=\log(10^3)^{\frac{1}{4}}=\log 10^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$

(3) $\log\frac{1}{\sqrt{100}}=\log\frac{1}{(10^2)^{\frac{1}{2}}}=\log\frac{1}{10}=\log 10^{-1}=-1$

(4) $\log 10\sqrt{10}=\log 10^{1+\frac{1}{2}}=\log 10^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

(5) $\log 100\sqrt{10}=\log 10^{2+\frac{1}{2}}=\log 10^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$

2-2 답 (1) 0.7868 (2) 0.7993 (3) 0.8007 (4) 6.02 (5) 6.21

(1) 상용로그표에서 6.1의 행과 2의 열이 만나는 곳에 있는 수이므로

$\log 6.12=0.7868$

$\therefore x=0.7868$

(2) 상용로그표에서 6.3의 행과 0의 열이 만나는 곳에 있는 수이므로

$\log 6.30=0.7993$

$\therefore x=0.7993$

(3) 상용로그표에서 6.3의 행과 2의 열이 만나는 곳에 있는 수이므로
$\log 6.32=0.8007$
$\therefore x=0.8007$

(4) 상용로그표에서 0.7796은 6.0의 행과 2의 열이 만나는 곳에 있는 수이므로 $\log 6.02=0.7796$
$\therefore x=6.02$

(5) 상용로그표에서 0.7931은 6.2의 행과 1의 열이 만나는 곳에 있는 수이므로 $\log 6.21=0.7931$
$\therefore x=6.21$

3-2 답 (1) 1.0253 (2) 3.0253 (3) -0.9747 (4) -1.9747

(1) $\log 10.6=\log(10\times 1.06)$
$=\log 10+\log 1.06$
$=1+0.0253$
$=1.0253$

(2) $\log 1060=\log(10^3\times 1.06)$
$=\log 10^3+\log 1.06$
$=3+0.0253$
$=3.0253$

(3) $\log 0.106=\log(10^{-1}\times 1.06)$
$=\log 10^{-1}+\log 1.06$
$=-1+0.0253$
$=-0.9747$

(4) $\log 0.0106=\log(10^{-2}\times 1.06)$
$=\log 10^{-2}+\log 1.06$
$=-2+0.0253$
$=-1.9747$

4-2 답 (1) 정수 부분: 4, 소수 부분: 0.1327
(2) 정수 부분: -1, 소수 부분: 0.5848
(3) 정수 부분: -3, 소수 부분: 0.0877
(4) 정수 부분: -4, 소수 부분: 0.9205

(1) $\log N=4.1327=4+0.1327$
이므로 정수 부분은 4, 소수 부분은 0.1327

(2) $\log N=-0.4152=-1+(1-0.4152)$
$=-1+0.5848$
이므로 정수 부분은 -1, 소수 부분은 0.5848

(3) $\log N=-2.9123=-2+(-0.9123)$
$=(-2-1)+(1-0.9123)$
$=-3+0.0877$
이므로 정수 부분은 -3, 소수 부분은 0.0877

(4) $\log N=-3.0795=-3+(-0.0795)$
$=(-3-1)+(1-0.0795)$
$=-4+0.9205$
이므로 정수 부분은 -4, 소수 부분은 0.9205

5-2 답 (1) 3 (2) 4 (3) -2 (4) -4

(1) 4620은 네 자리의 수이므로 $\log 4620=\boxed{3}+0.6646$

(2) 46200은 다섯 자리의 수이므로 $\log 46200=\boxed{4}+0.6646$

(3) 0.0462는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $\log 0.0462=\boxed{-2}+0.6646$

(4) 0.000462는 소수점 아래 넷째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $\log 0.000462=\boxed{-4}+0.6646$

STEP 2 필수 유형

| 57쪽~62쪽 |

01-1 답 (1) 1.8572 (2) -0.5283 (3) 3.3801
(4) -1.2219 (5) 1.6532

| 해결 전략 | 주어진 식을 $\log 2$, $\log 3$이 포함된 형태로 변형한 후 각 로그의 값을 대입한다.

(1) $\log 72=\log(2^3\times 3^2)=3\log 2+2\log 3$
$=3\times 0.3010+2\times 0.4771$
$=1.8572$

(2) $\log \frac{8}{27}=\log\left(\frac{2}{3}\right)^3=3\log\frac{2}{3}$
$=3(\log 2-\log 3)$
$=3\times(0.3010-0.4771)$
$=3\times(-0.1761)=-0.5283$

(3) $\log 2400=\log(2^3\times 3\times 10^2)$
$=3\log 2+\log 3+2$
$=3\times 0.3010+0.4771+2$
$=3.3801$

(4) $\log 0.06=\log(2\times 3\times 10^{-2})$
$=\log 2+\log 3-2$
$=0.3010+0.4771-2$
$=-1.2219$

(5) $\log 45=\log(3^2\times 5)=2\log 3+\log 5$
$=2\log 3+\log\frac{10}{2}$
$=2\log 3+(\log 10-\log 2)$
$=2\times 0.4771+(1-0.3010)$
$=0.9542+0.6990=1.6532$

02-1 답 (1) 2.7536 (2) -2.2464 (3) 56700 (4) 0.0567

| 해결 전략 | 두 상용로그의 소수 부분이 같으면 진수의 숫자의 배열이 같음을 이용한다.

$\log 56.7=\log(10\times 5.67)=1+\log 5.67=1.7536$이므로
$\log 5.67=0.7536$

(1) $\log 567=\log(10^2\times 5.67)=2+\log 5.67$
$=2+0.7536=2.7536$
$\therefore x=2.7536$

(2) $\log 0.00567=\log(10^{-3}\times 5.67)=-3+0.7536$
$=-2.2464$
$\therefore x=-2.2464$

(3) $\log x=4.7536$에서 정수 부분이 4이므로 x는 5자리 수이다.
또, $\log x$의 소수 부분이 0.7536이므로 x의 숫자의 배열은 5, 6, 7 이다.
$\therefore x=56700$

다른 풀이

$\log x=4.7536=4+0.7536$
$=\log 10^4+\log 5.67=\log(10^4\times 5.67)$
$=\log 56700$

(4) $\log x=-1.2464=-1-0.2464$
$=(-1-1)+(1-0.2464)=-2+0.7536$
에서 정수 부분이 -2이므로 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
또, $\log x$의 소수 부분이 0.7536이므로 x의 숫자의 배열은 5, 6, 7 이다.
$\therefore x=0.0567$

다른 풀이

$\log x=-1.2464=-1-0.2464=-2+0.7536$
$=\log 10^{-2}+\log 5.67=\log(10^{-2}\times 5.67)$
$=\log 0.0567$

03-1 답 (1) 10자리 (2) 9자리

|해결 전략| $\log A$의 정수 부분이 n이면 A는 정수 부분이 $(n+1)$자리인 수이다.

(1) 3^{20}에 상용로그를 취하면
$\log 3^{20}=20\log 3=20\times 0.4771$
$=9.542$
따라서 $\log 3^{20}$의 정수 부분이 9이므로 3^{20}은 10자리의 정수이다.

(2) 54^5에 상용로그를 취하면
$\log 54^5=5\log 54=5\log(2\times 3^3)$
$=5(\log 2+3\log 3)$
$=5(0.3010+3\times 0.4771)$
$=8.6615$
따라서 $\log 54^5$의 정수 부분이 8이므로 54^5은 9자리의 정수이다.

04-1 답 (1) 소수점 아래 8째 자리 (2) 소수점 아래 6째 자리

|해결 전략| $\log B$의 정수 부분이 $-n$이면 B는 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

(1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{40}$에 상용로그를 취하면
$\log\left(\frac{2}{3}\right)^{40}=40\log\frac{2}{3}=40(\log 2-\log 3)$
$=40(0.3010-0.4771)$
$=-7.044=-7-0.044$
$=(-7-1)+(1-0.044)$
$=-8+0.956$
따라서 $\log\left(\frac{2}{3}\right)^{40}$의 정수 부분이 -8이므로 $\left(\frac{2}{3}\right)^{40}$은 소수점 아래 8째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

(2) $\left(\frac{3}{10}\right)^{10}$에 상용로그를 취하면
$\log\left(\frac{3}{10}\right)^{10}=10\log\frac{3}{10}=10(\log 3-\log 10)$
$=10(0.4771-1)$
$=-5.229=-5-0.229$
$=(-5-1)+(1-0.229)$
$=-6+0.771$
따라서 $\log\left(\frac{3}{10}\right)^{10}$의 정수 부분이 -6이므로 $\left(\frac{3}{10}\right)^{10}$은 소수점 아래 6째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

05-1 답 (1) $100\sqrt[3]{10}$ 또는 $100\sqrt[3]{100}$ (2) $1000\sqrt{10}$

|해결 전략| 두 상용로그의 소수 부분이 같으면 두 상용로그의 차는 정수임을 이용한다.

(1) $\log x$와 $\log\frac{1}{x^2}$의 소수 부분이 같으므로
$\log x-\log\frac{1}{x^2}=\log x-\log x^{-2}=3\log x=$(정수)
$100<x<1000$에서 $2<\log x<3$
즉, $6<3\log x<9$이므로
$3\log x=7$ 또는 $3\log x=8$에서
$\log x=\frac{7}{3}$ 또는 $\log x=\frac{8}{3}$
$\therefore x=100\sqrt[3]{10}$ 또는 $x=100\sqrt[3]{100}$

(2) $\log x$와 $\log x^3$의 소수 부분이 같으므로
$\log x^3-\log x=3\log x-\log x=2\log x=$(정수)
이때, $\log x$의 정수 부분이 3이므로 $3\le\log x<4$
$6\le 2\log x<8$이므로 $2\log x=6$ 또는 $2\log x=7$
$\therefore \log x=3$ 또는 $\log x=\frac{7}{2}$
여기서 $\log x=3$이면 소수 부분이 0이 되므로 조건에 모순이다.
따라서 $\log x=\frac{7}{2}$이므로 $x=10^{\frac{7}{2}}=1000\sqrt{10}$

06-1 답 890만 원

|해결 전략| $P=2\times 10^7$, $t=5$, $r=0.15$를 대입하여 W의 값을 구한다.

새 차의 가격이 2000만 원, 즉 (2×10^7)원이고 연평균 감가상각비율이 0.15일 때, 5년 후의 중고차 가격을 구해야 하므로 주어진 관계식에 $P=2\times 10^7$, $t=5$, $r=0.15$를 대입하면
$\log(1-0.15)=\frac{1}{5}\log\frac{W}{2\times 10^7}$
$\log 0.85=\frac{1}{5}\{\log W-(\log 2+7)\}$
$\log(8.5\times 10^{-1})=\frac{1}{5}(\log W-\log 2-7)$
$5(\log 8.5-1)=\log W-\log 2-7$
$\log W=5\log 8.5+\log 2+2=5\times 0.93+0.30+2$
$=6.95=6+0.95$
이때, 정수 부분이 6이므로 W는 7자리 수이고, 소수 부분이 0.95이므로 W의 숫자의 배열은 8, 9이다.
$\therefore W=8900000$
따라서 구하는 중고차의 가격은 890만 원이다.

STEP 3 유형 드릴
| 63쪽~65쪽 |

1-1 답 1

|해결 전략| 밑의 조건 (밑)>0, (밑)$\neq 1$과 진수의 조건 (진수)>0을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq 1$이므로

$x>3$, $x\neq 4$

$\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ ……㉠

진수의 조건에서

$-x^2+8x-12>0$이므로

$x^2-8x+12<0$, $(x-2)(x-6)<0$

$\therefore 2<x<6$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<4$ 또는 $4<x<6$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 5의 1이다.

1-2 답 7

|해결 전략| 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+5a>0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2-2ax+5a=0$의 판별식이 0보다 작아야 한다.

밑의 조건에서 $a-1>0$, $a-1\neq 1$이므로

$a>1$, $a\neq 2$

$\therefore 1<a<2$ 또는 $a>2$ ……㉠

진수의 조건에서 $x^2-2ax+5a>0$

이때, 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+5a>0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2-2ax+5a=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-5a<0$, $a(a-5)<0$

$\therefore 0<a<5$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<a<2$ 또는 $2<a<5$

따라서 구하는 정수 a의 값은 3, 4이므로 구하는 합은

$3+4=7$

2-1 답 ④

|해결 전략| 로그의 기본 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

$4\log_2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log_2 25-\log_2 45$

$=\log_2(\sqrt{3})^4+\log_2 25^{\frac{1}{2}}-\log_2 45$

$=\log_2 9+\log_2 5-\log_2 45$

$=\log_2\left(\frac{9\times 5}{45}\right)$

$=\log_2 1=0$

2-2 답 1

|해결 전략| 로그의 기본 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

$\log_{11}2+\log_{11}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{11}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{11}\left(1+\frac{1}{10}\right)$

$=\log_{11}2+\log_{11}\frac{3}{2}+\log_{11}\frac{4}{3}+\cdots+\log_{11}\frac{11}{10}$

$=\log_{11}\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{11}{10}\right)$

$=\log_{11}11=1$

3-1 답 ⑤

|해결 전략| 밑의 변환 공식과 로그의 성질 $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

ㄱ. $\log_3 2+\log_2 3=\log_3 2+\frac{1}{\log_3 2}\neq 1$

ㄴ. $\log_3 2-\log_3 5=\log_3\frac{2}{5}$

ㄷ. 분모, 분자의 로그를 모두 7을 밑으로 하는 로그로 나타내면

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 5}=\frac{\frac{\log_7 3}{\log_7 2}}{\frac{\log_7 5}{\log_7 2}}=\frac{\log_7 3}{\log_7 5}$$

ㄹ. $25^{\log_5 3}=3^{\log_5 25}=3^{\log_5 5^2}=3^2=9$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

3-2 답 20

|해결 전략| $\log_9 b$를 a를 밑으로 하는 로그로 나타내어 식을 간단히 한다.

먼저 $\log_9 b$의 a를 밑으로 하는 로그로 나타내면

$\log_9 b=\frac{\log_a b}{\log_a 9}$이므로

$$\log_a 3\times\log_9 b=\log_a 3\times\frac{\log_a b}{\log_a 9}$$

$$=\log_a 3\times\frac{\log_a b}{\log_a 3^2}$$

$$=\log_a 3\times\frac{\log_a b}{2\log_a 3}$$

$$=\frac{\log_a b}{2}=10$$

$\therefore \log_a b=20$

4-1 답 ③

|해결 전략| 주어진 식을 $\log_{10}2$, $\log_{10}3$이 포함된 꼴로 변형한다.

$$\log_5 12=\frac{\log_{10}12}{\log_{10}5}=\frac{\log_{10}(2^2\times 3)}{\log_{10}\frac{10}{2}}$$

$$=\frac{\log_{10}2^2+\log_{10}3}{\log_{10}10-\log_{10}2}=\frac{2\log_{10}2+\log_{10}3}{1-\log_{10}2}$$

$$=\frac{2a+b}{1-a}$$

4-2 답 ②

|해결 전략| 주어진 식을 $\log_2 3$, $\log_2 5$가 포함된 형태로 변형한 후 $\log_2 5=\log_2 3\times\log_3 5$임을 이용하여 간단히 한다.

$$\log_{12}60=\frac{\log_2 60}{\log_2 12}=\frac{\log_2(2^2\times 3\times 5)}{\log_2(2^2\times 3)}$$

$$=\frac{\log_2 2^2+\log_2 3+\log_2 5}{\log_2 2^2+\log_2 3}$$

$$=\frac{2+\log_2 3+\log_2 5}{2+\log_2 3}$$

이때, $\log_2 3\times\log_3 5=\log_2 3\times\frac{\log_2 5}{\log_2 3}=\log_2 5$이므로

$\log_2 5=ab$

$\therefore \log_{12}60=\frac{2+a+ab}{2+a}$

LECTURE

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $c>0$, $c\neq1$, $d>0$일 때,

❶ $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$

❷ $\log_a b\times\log_b a=1$

❸ $\log_a b\times\log_b c\times\log_c d=\log_a d$

❹ $\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=1$

5-1 답 -2

|해결 전략| 지수를 로그로 나타낸 후 식의 값을 구한다.

$10^a=2$에서 $a=\log_{10}2$

$\therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{\log_{10}2}=\log_2 10$

$40^b=8$에서 $b=\log_{40}8=\log_{40}2^3=3\log_{40}2$

$\therefore \frac{3}{b}=\frac{1}{\log_{40}2}=\log_2 40$

$\therefore \frac{1}{a}-\frac{3}{b}=\log_2 10-\log_2 40=\log_2\frac{10}{40}=\log_2\frac{1}{4}=-2$

다른 풀이

$10^a=2$에서 $10=2^{\frac{1}{a}}$ ······㉠

$40^b=8$에서 $40=8^{\frac{1}{b}}=2^{\frac{3}{b}}$ ······㉡

㉠÷㉡을 하면

$2^{\frac{1}{a}}\div2^{\frac{3}{b}}=\frac{1}{4}$, $2^{\frac{1}{a}-\frac{3}{b}}=2^{-2}$

$\therefore \frac{1}{a}-\frac{3}{b}=-2$

5-2 답 $\frac{2}{3}$

|해결 전략| 지수를 로그로 나타낸 후 식의 값을 구한다.

$a^x=27$에서 $x=\log_a 27$

$\therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{\log_a 27}=\log_{27}a$

$b^y=27$에서 $y=\log_b 27$

$\therefore \frac{1}{y}=\frac{1}{\log_b 27}=\log_{27}b$

$c^z=27$에서 $z=\log_c 27$

$\therefore \frac{1}{z}=\frac{1}{\log_c 27}=\log_{27}c$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\log_{27}a+\log_{27}b+\log_{27}c$

$=\log_{27}abc=\log_{27}9=\log_{3^3}3^2=\frac{2}{3}$

다른 풀이

$a^x=27$에서 $a=27^{\frac{1}{x}}$ ······㉠

$b^y=27$에서 $b=27^{\frac{1}{y}}$ ······㉡

$c^z=27$에서 $c=27^{\frac{1}{z}}$ ······㉢

㉠×㉡×㉢을 하면 $27^{\frac{1}{x}}\times27^{\frac{1}{y}}\times27^{\frac{1}{z}}=abc$

이때, $abc=9$이므로 $27^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=9$

$3^{3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=3^2$, $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=2$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$

6-1 답 -6

|해결 전략| 두 근의 합은 2, 두 근의 곱은 -1임을 이용한다.

이차방정식 $x^2-2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=2$, $\log_2\alpha\times\log_2\beta=-1$

$$\therefore \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\frac{\log_2\beta}{\log_2\alpha}+\frac{\log_2\alpha}{\log_2\beta}$$

$$=\frac{(\log_2\beta)^2+(\log_2\alpha)^2}{\log_2\alpha\times\log_2\beta}$$

$$=\frac{(\log_2\alpha+\log_2\beta)^2-2\log_2\alpha\times\log_2\beta}{\log_2\alpha\times\log_2\beta}$$

$$=\frac{2^2-2\times(-1)}{-1}=-6$$

6-2 답 $-\frac{2}{3}$

|해결 전략| 두 근의 합은 4, 두 근의 곱은 -3임을 이용한다.

이차방정식 $x^2-4x-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=4$, $\log_2 a\times\log_2 b=-3$

$$\therefore \log_a\sqrt{2}+\log_{b^2}2=\frac{1}{2}\log_a 2+\frac{1}{2}\log_b 2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_2 b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\log_2 b+\log_2 a}{\log_2 a\times\log_2 b}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{2}{3}$$

7-1 답 2.0048

|해결 전략| 구하는 로그의 진수를 3.18×10^n(n은 정수) 꼴로 고친다.

$\log 3180+\log 0.0318$

$=\log(3.18\times10^3)+\log(3.18\times10^{-2})$

$=3+\log 3.18+(-2)+\log 3.18$

$=1+2\log 3.18=1+2\times0.5024=2.0048$

7-2 답 -7.91

|해결 전략| 주어진 식을 $\log 2$, $\log 3$이 포함된 형태로 변형한다.

$$\log\left(\frac{5}{6}\right)^{100}=100\log\frac{5}{6}=100(\log 5-\log 6)$$

$$=100\left\{\log\frac{10}{2}-(\log 2+\log 3)\right\}$$

$$=100(1-\log 2-\log 2-\log 3)$$

$$=100(1-2\log 2-\log 3)$$

$$=100(1-2\times0.3010-0.4771)=-7.91$$

8-1 답 ④

|해결 전략| 두 상용로그의 소수 부분이 같으면 진수의 숫자의 배열이 같음을 이용한다.

$\log 48.9=\log(10\times4.89)=1+\log 4.89=1.6893$이므로

$\log 4.89=0.6893$

$\log x=4.6893$에서 정수 부분이 4이므로 x는 5자리 수이다.

또, $\log x$의 소수 부분이 0.6893이므로 x의 숫자의 배열은 4, 8, 9이다.

$\therefore x=48900$

8-2 답 3.4549

|해결 전략| 두 상용로그의 소수 부분이 같으면 진수의 숫자의 배열이 같음을 이용한다.

$\log 26.8=\log(10\times2.68)=1+\log 2.68=1.4281$이므로

$\log 2.68=0.4281$

$\log 2680=\log(10^3\times2.68)=3+\log 2.68$

$=3+0.4281=3.4281$

$\therefore a=3.4281$

$\log b=-1.5719=-1-0.5719$

$=(-1-1)+(1-0.5719)$

$=-2+0.4281$

$\log b$의 정수 부분이 -2이므로 b는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

또, $\log b$의 소수 부분이 0.4281이므로 b의 숫자의 배열은 2, 6, 8이다.

$\therefore b=0.0268$

$\therefore a+b=3.4281+0.0268=3.4549$

9-1 답 14자리

|해결 전략| $\log A$의 정수 부분이 n이면 A는 정수 부분이 $(n+1)$자리인 수이다.

5^{20}에 상용로그를 취하면

$\log 5^{20}=20\log 5=20\log\frac{10}{2}=20(1-\log 2)$

$=20(1-0.3010)=13.98$

따라서 $\log 5^{20}$의 정수 부분이 13이므로 5^{20}은 14자리의 정수이다.

9-2 답 21

|해결 전략| $\log A$의 정수 부분이 n이면 A는 정수 부분이 $(n+1)$자리인 수이고, $\log B$의 정수 부분이 $-n$이면 B는 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

6^{10}에 상용로그를 취하면

$\log 6^{10}=10\log 6=10\log(2\times3)=10(\log 2+\log 3)$

$=10(0.3010+0.4771)=7.781$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{100}$에 상용로그를 취하면

$\log\left(\frac{3}{4}\right)^{100}=100\log\frac{3}{4}=100(\log 3-\log 4)$

$=100(\log 3-\log 2^2)=100(\log 3-2\log 2)$

$=100(0.4771-2\times0.3010)$

$=-12.49=-12-0.49$

$=(-12-1)+(1-0.49)$

$=-13+0.51$

따라서 $\log 6^{10}$의 정수 부분이 7이므로 6^{10}은 8자리의 정수이고, $\log\left(\frac{3}{4}\right)^{100}$의 정수 부분이 -13이므로 $\left(\frac{3}{4}\right)^{100}$은 소수점 아래 13째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore m+n=8+13=21$

10-1 답 $10\sqrt[3]{10}$ 또는 $10\sqrt[3]{100}$

|해결 전략| 두 상용로그의 소수 부분이 같으면 두 상용로그의 차는 정수임을 이용한다.

$\log x^2$과 $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^2-\log\frac{1}{x}=\log x^2-\log x^{-1}=3\log x=$(정수)

$10<x<100$에서 $1<\log x<2$

즉, $3<3\log x<6$이므로

$3\log x=4$ 또는 $3\log x=5$에서

$\log x=\frac{4}{3}$ 또는 $\log x=\frac{5}{3}$

$\therefore x=10\sqrt[3]{10}$ 또는 $10\sqrt[3]{100}$

10-2 답 15

|해결 전략| $\log x$의 범위를 구하고 $\log x^4-\log x^2=$(정수)임을 이용한다.

조건 (나)에서 $\log x^2$과 $\log x^4$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^4-\log x^2=4\log x-2\log x=2\log x=$(정수)

조건 (가)에서 $\log x$의 정수 부분이 3이므로

$3\le\log x<4$, $6\le2\log x<8$

$\therefore 2\log x=6$ 또는 $2\log x=7$

즉, $\log x=3$ 또는 $\log x=\frac{7}{2}$

따라서 $x=10^3$ 또는 $x=10^{\frac{7}{2}}$이므로

$10^{\frac{q}{p}}=10^3\times10^{\frac{7}{2}}=10^{3+\frac{7}{2}}=10^{\frac{13}{2}}$

$\therefore p+q=2+13=15$

11-1 답 100

|해결 전략| $x=100$을 대입하여 I의 값을 구한다.

소리의 크기가 100 dB이므로 주어진 관계식에 $x=100$을 대입하면

$100=10\log\frac{I}{I_0}$, $10=\log\frac{I}{I_0}$

$10=\log I-\log I_0$

이때, $I_0=10^{-8}$이므로

$10=\log I-\log 10^{-8}$, $10=\log I+8$

$\log I=2$ $\therefore I=100$

11-2 답 35 ℃

|해결 전략| 비례상수 k를 먼저 구한 후, 처음 온도가 20 ℃인 물체의 2시간 후의 온도를 구한다.

공기의 온도가 40 ℃, 물체의 처음 온도가 20 ℃, 1시간 후의 물체의 온도가 30 ℃이므로

$D_0=40-20=20$, $t=1$, $D(1)=40-30=10$

주어진 관계식에 위 값을 각각 대입하면

$\log 10=-k+\log 20$

$\therefore k=\log 20-\log 10=\log\frac{20}{10}=\log 2$

따라서 주어진 관계식은 $\log D(t)=-t\log 2+\log D_0$이므로

공기의 온도가 40 ℃인 상태에서 처음 온도가 20 ℃인 물체의 2시간 후의 물체와 공기의 온도 차 $D(2)$는

$\log D(2)=-2\log 2+\log 20$

$=\log 20-\log 4=\log\frac{20}{4}=\log 5$

$\therefore D(2)=5$

즉, 2시간 후의 물체와 공기의 온도 차가 5 ℃이므로 구하는 물체의 온도는 $40-5=35$ (℃)

3 | 지수함수

1 지수함수와 그 그래프

개념 확인 68쪽~73쪽

1 (1) 1 (2) 125 (3) $\sqrt{5}$ (4) $\frac{1}{25}$ **2** 풀이 참조

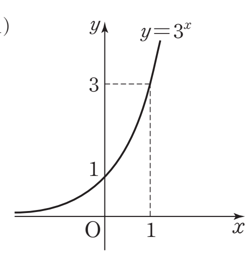
3 감소, 1, x **4** 풀이 참조

5 (1) 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{1}{9}$ (2) 최댓값: 4, 최솟값: $\frac{1}{16}$

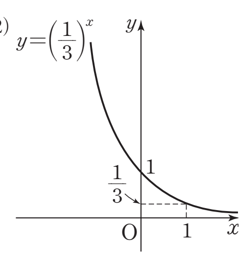
1 (1) $f(0)=5^0=1$ (2) $f(3)=5^3=125$

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ (4) $f(-2)=5^{-2}=\frac{1}{25}$

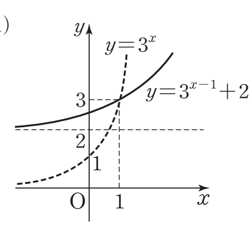
2 (1)



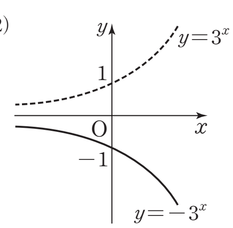
(2)



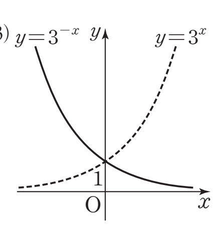
4 (1)



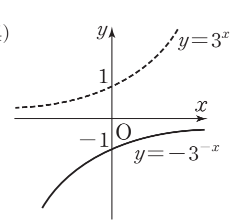
(2)



(3)



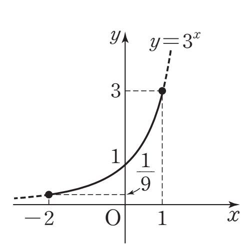
(4)



5 (1) 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$x=1$일 때, 최댓값은 $y=3^1=3$

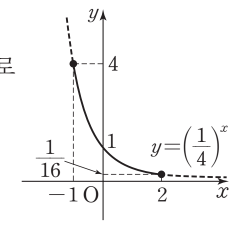
$x=-2$일 때, 최솟값은 $y=3^{-2}=\frac{1}{9}$



(2) 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$x=-1$일 때, 최댓값은 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$

$x=2$일 때, 최솟값은 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$



STEP 1 개념 드릴 | 74쪽~75쪽 |

개념 check

1-1 (1) $y+3$, 3, 3 (2) $-y$, $-y$, $x+1$, $x+1$

2-1 (1) 1, 2 (2) y축

3-1 (1) 1, 2 (2) y축, -1

4-1 (1) 증가, 2, 3, -1 (2) 감소, -1, 2, $\frac{1}{4}$

스스로 check

1-2 답 (1) $y=5^{x-1}-2$ (2) $y=2^{x+2}+3$ (3) $y=-3^x+2$ (4) $y=4^{-x-1}-3$

(1) $y=5^x$에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y+2$를 대입하면

$y+2=5^{x-1}$ $\quad\therefore y=5^{x-1}-2$

(2) $y=2^x$에 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-3$을 대입하면

$y-3=2^{x+2}$ $\quad\therefore y=2^{x+2}+3$

(3) 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=3^x$에 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=3^x$ $\quad\therefore y=-3^x$

이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-3^x$에 y 대신 $y-2$를 대입하면

$y-2=-3^x$ $\quad\therefore y=-3^x+2$

(4) 함수 $y=4^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=4^x$에 x 대신 $-x$를 대입하면 $y=4^{-x}$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=4^{-x}$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y+3$을 대입하면

$y+3=4^{-(x+1)}$ $\quad\therefore y=4^{-x-1}-3$

2-2 답 (1) 2, -1 (2) -1, 3 (3) y축, 1

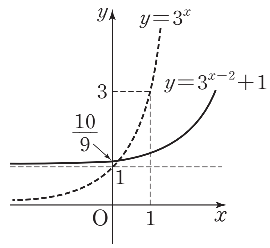
(1) $y=5^{x-2}-1$을 변형하면 $y+1=5^{x-2}$이므로 함수 $y=5^{x-2}-1$의 그래프는 함수 $y=5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\boxed{2}$ 만큼, y축의 방향으로 $\boxed{-1}$ 만큼 평행이동한 것이다.

(2) $y=2^{x+1}+3$을 변형하면 $y-3=2^{x+1}$이므로 함수 $y=2^{x+1}+3$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\boxed{-1}$ 만큼, y축의 방향으로 $\boxed{3}$ 만큼 평행이동한 것이다.

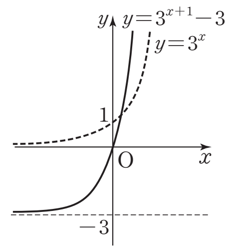
(3) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$을 변형하면 $y-1=3^{-x}$이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 $\boxed{y축}$ 에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 $\boxed{1}$ 만큼 평행이동한 것이다.

3-2 답 풀이 참조

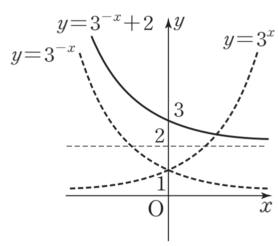
(1) $y=3^{x-2}+1$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=3^{x-2}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



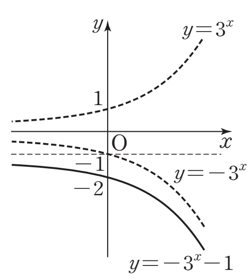
(2) $y=3^{x+1}-3$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=3^{x+1}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $y=3^{-x}+2$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=3^{-x}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

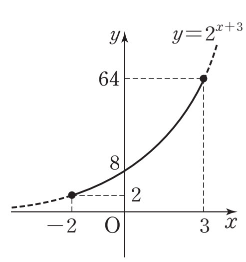


(4) $y=-3^x-1$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=-3^x-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

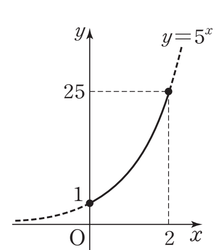


4-2 답 (1) 최댓값: 64, 최솟값: 2 (2) 최댓값: 25, 최솟값: 1 (3) 최댓값: 9, 최솟값: $\frac{1}{3}$ (4) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{64}$

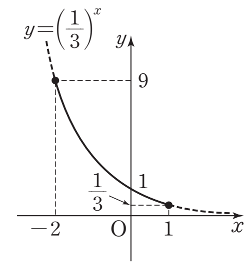
(1) 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2^{x+3}$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$x=3$일 때, 최댓값은 $y=2^6=64$
$x=-2$일 때, 최솟값은 $y=2^1=2$



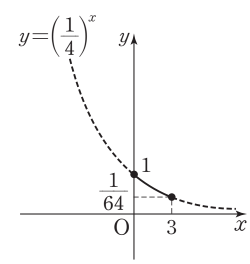
(2) 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$x=2$일 때, 최댓값은 $y=5^2=25$
$x=0$일 때, 최솟값은 $y=5^0=1$



(3) 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$x=-2$일 때, 최댓값은 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$
$x=1$일 때, 최솟값은 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$



(4) $y=4^{-x}$을 변형하면 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$
오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$x=0$일 때, 최댓값은 $y=4^0=1$
$x=3$일 때, 최솟값은 $y=4^{-3}=\frac{1}{64}$

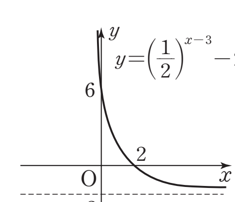


STEP 2 필수 유형 | 76쪽~80쪽 |

01-1 답 풀이 참조

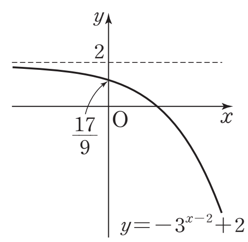
|해결 전략| 지수함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

(1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-2=2^{-(x-3)}-2$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
치역은 $\{y\,|\,y>-2\}$
점근선의 방정식은 $y=-2$



(2) $y=-3^{x-2}+2$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-3^{x-2}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\{y\,|\,y<2\}$ 점근선의 방정식은 $y=2$

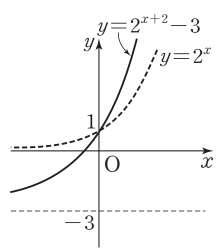


01-2 답 ④

|해결 전략| 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 지수함수 $y=2^{x+2}-3$의 그래프를 그려 본다.

$y=2^{x+2}-3$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=2^{x+2}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



02-1 답 (1) $m=-4$, $n=2$ (2) $m=2$, $n=5$

|해결 전략| 함수의 그래프에서 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다. 또, y축에 대하여 대칭이동하면 x 대신 $-x$를 대입한다.

(1) $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2^{x-m}+n$ ······㉠

따라서 $y=2^{x-m}+n$이 $y=16\times2^x+2=2^{x+4}+2$와 일치하므로

$-m=4$, $n=2$

$\therefore m=-4$, $n=2$

(2) $y=5^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=5^{-x}$ ······㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=5^{-(x-m)}+n$

따라서 $y=5^{-(x-m)}+n$이 $y=25\times\left(\frac{1}{5}\right)^x+5=5^{-(x-2)}+5$와 일치하므로

$m=2$, $n=5$

02-2 답 -2

|해결 전략| 주어진 그림에서 함수의 그래프가 원점을 지나고 점근선의 방정식이 $y=-2$임을 이용한다.

함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=2^{-x}$ ······㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2^{-(x-a)}+b$

주어진 그림에서 함수 $y=2^{-(x-a)}+b$의 그래프는 원점을 지나므로

$0=2^{-(0-a)}+b$

$2^a+b=0$ ······㉡

또, 점근선의 방정식은 $y=-2$이므로 $b=-2$

$b=-2$를 ㉡에 대입하면 $2^a-2=0$

$2^a=2$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore ab=1\times(-2)=-2$

03-1 답 (1) $3^{0.5}<\sqrt[3]{9}<\sqrt{27}$

(2) $0.2^{\frac{1}{3}}>\sqrt{0.008}>\sqrt[4]{0.2^7}$

|해결 전략| 밑이 1보다 크면 지수가 큰 수가 크고, 밑이 1보다 작으면 지수가 작은 수가 크다.

(1) 주어진 세 수를 밑이 3인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$3^{0.5}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=3^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$

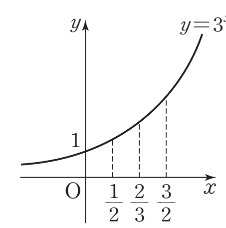
이때, 함수 $y=3^x$은 밑 3이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 즉, 지수가 큰 수가 크다.

따라서 지수의 크기를 비교하면

$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{2}$이므로

$3^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{2}}$

$\therefore 3^{0.5}<\sqrt[3]{9}<\sqrt{27}$



(2) 주어진 세 수를 밑이 0.2인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$0.2^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{0.2^7}=(0.2^7)^{\frac{1}{4}}=0.2^{\frac{7}{4}}$,

$\sqrt{0.008}=\sqrt{0.2^3}=(0.2^3)^{\frac{1}{2}}=0.2^{\frac{3}{2}}$

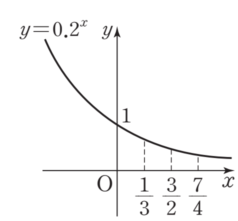
이때, 함수 $y=0.2^x$은 밑 0.2가 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 즉, 지수가 작은 수가 크다.

따라서 지수의 크기를 비교하면

$\frac{1}{3}<\frac{3}{2}<\frac{7}{4}$이므로

$0.2^{\frac{1}{3}}>0.2^{\frac{3}{2}}>0.2^{\frac{7}{4}}$

$\therefore 0.2^{\frac{1}{3}}>\sqrt{0.008}>\sqrt[4]{0.2^7}$



04-1 답 (1) 최댓값: 11, 최솟값: 4 (2) 최댓값: 28, 최솟값: $\frac{28}{27}$

|해결 전략| (1) 밑 2는 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

(2) 밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(1) 함수 $y=2^{x-2}+3$에서 밑 2는 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

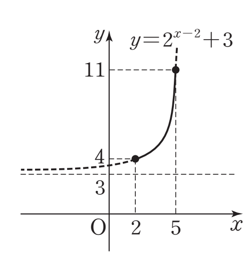
따라서 $2\le x\le5$에서

$x=5$일 때, 최댓값은

$y=2^{5-2}+3=8+3=11$

$x=2$일 때, 최솟값은

$y=2^{2-2}+3=1+3=4$



(2) 함수 $y=3^{2-x}+1=3^2\times3^{-x}+1=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$에서 밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

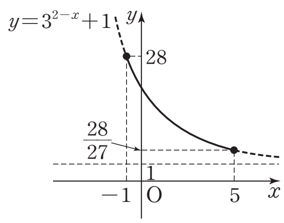
따라서 $-1\le x\le5$에서

$x=-1$일 때, 최댓값은

$y=3^{2-(-1)}+1=27+1=28$

$x=5$일 때, 최솟값은

$y=3^{2-5}+1=\frac{1}{27}+1=\frac{28}{27}$



04-2 답 최댓값: 32, 최솟값: 2

|해결 전략| 먼저 2^{x^2-2x+2}의 지수 x^2-2x+2의 값의 범위를 구한다.

$y=2^{x^2-2x+2}$에서 $f(x)=x^2-2x+2$로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2+1$

$-1\le x\le2$에서 $f(-1)=5$, $f(1)=1$, $f(2)=2$이므로

$1\le f(x)\le5$

이때, 밑 2는 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 y는 최댓값을 갖고, $f(x)$가 최소일 때 y는 최솟값을 갖는다.

$f(x)=5$일 때, 최댓값은 $y=2^5=32$

$f(x)=1$일 때, 최솟값은 $y=2^1=2$

LECTURE

x의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$인 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$의 최대, 최소

(1) $\alpha\le m\le\beta$일 때

➡ $f(m)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값

(2) $m<\alpha$ 또는 $m>\beta$일 때

➡ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값

05-1 답 (1) 최댓값: 39, 최솟값: 3 (2) 최댓값: 3, 최솟값: 2

|해결 전략| (1) $3^x=t$로 치환하여 이차함수의 최대, 최소를 이용한다.

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$로 치환하여 이차함수의 최대, 최소를 이용한다.

(1) $y=9^x-2\times3^{x+1}+12=(3^x)^2-6\times3^x+12$

$3^x=t$로 놓으면 $-1\le x\le2$에서 $\underline{3^{-1}\le3^x\le3^2}$

밑이 1보다 크므로 지수가 클수록 크다.

$\therefore \frac{1}{3}\le t\le9$

이때, 주어진 함수는

$y=t^2-6t+12=(t-3)^2+3$

따라서 $\frac{1}{3}\le t\le9$에서

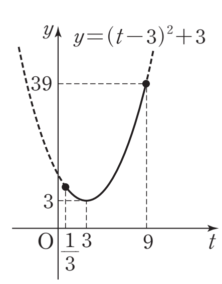
함수 $y=(t-3)^2+3$은

$t=9$일 때, 최대이고

최댓값은 $y=(9-3)^2+3=39$

$t=3$일 때, 최소이고

최솟값은 $y=(3-3)^2+3=3$



(2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$로 놓으면 $-1\le x\le2$에서 $\underline{\left(\frac{1}{2}\right)^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$

밑이 1보다 작으므로 지수가 작을수록 크다.

$\therefore \frac{1}{4}\le t\le2$

이때, 주어진 함수는

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

따라서 $\frac{1}{4}\le t\le2$에서

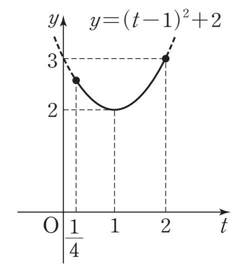
함수 $y=(t-1)^2+2$는

$t=2$일 때, 최대이고

최댓값은 $y=(2-1)^2+2=3$

$t=1$일 때, 최소이고

최솟값은 $y=(1-1)^2+2=2$



2 지수방정식

개념 확인 81쪽

1 (1) $x=1$ (2) $x=1$ (3) $x=2$

1 (1) $9=3^2$이므로 $3^{x+1}=3^2$에서 $x+1=2$ $\therefore x=1$

(2) $4^x=(2^2)^x=(2^x)^2$이므로 $(2^x)^2-2\times2^x=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t=0$, $t(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

즉, $2^x=2$이므로 $2^x=2^1$ $\therefore x=1$

(3) $3^{2x-4}=5^{2x-4}$에서 $2x-4=0$

$\therefore x=2$

STEP 1 개념 드릴 |82쪽|

개념 check

1-1 (1) 3, 3, 3 (2) -3 (3) 4, 4, 4, 5 (4) $2x$, $2x$, $-\frac{1}{2}$

2-1 (1) 0, 2 (2) 1

스스로 check

1-2 답 (1) $x=4$ (2) $x=3$ (3) $x=-\frac{3}{2}$ (4) $x=2$ (5) $x=-\frac{5}{2}$

(1) $81=3^4$이므로 $3^x=3^4$

$\therefore x=4$

(2) $0.3^x=0.027$에서 $\left(\frac{3}{10}\right)^x=\left(\frac{3}{10}\right)^3$

$\therefore x=3$

(3) $9^x=\frac{1}{27}$에서 $(3^2)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^3$

즉, $3^{2x}=3^{-3}$이므로 $2x=-3$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1}=2$에서 $2^{-(-x+1)}=2^1$

$x-1=1$ $\therefore x=2$

(5) $9^{-x-1}=27$에서 $(3^2)^{-x-1}=3^3$

즉, $3^{-2x-2}=3^3$이므로 $-2x-2=3$

$\therefore x=-\frac{5}{2}$

2-2 답 (1) $x=2$ 또는 $x=3$ (2) $x=0$
(3) $x=0$ 또는 $x=1$ (4) $x=1$ 또는 $x=2$

(1) $2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-12t+32=0$, $(t-4)(t-8)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=8$

$t=4$일 때, $2^x=4$에서 $x=2$

$t=8$일 때, $2^x=8$에서 $x=3$

(2) $3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2+9t-10=0$, $(t+10)(t-1)=0$

$\therefore t=1\,(\because t>0)$

$t=1$일 때, $3^x=1$에서 $x=0$

(3) $(2^2)^x-3\times2^x+2=0$, 즉 $(2^x)^2-3\times2^x+2=0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

$t=1$일 때, $2^x=1$에서 $x=0$

$t=2$일 때, $2^x=2$에서 $x=1$

(4) $(3^2)^x-12\times3^x+27=0$, 즉 $(3^x)^2-12\times3^x+27=0$

$3^x=t$로 놓으면

$t^2-12t+27=0$, $(t-3)(t-9)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=9$

$t=3$일 때, $3^x=3$에서 $x=1$

$t=9$일 때, $3^x=9$에서 $x=2$

STEP 2 필수 유형

| 83쪽~87쪽 |

01-1 답 (1) $x=1$ (2) $x=-3$ 또는 $x=1$ (3) $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

|해결 전략| 양변의 밑을 같게 하여 $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ 꼴로 변형한 후 $f(x)=g(x)$의 해를 구한다. (단, $a>0$, $a\neq1$)

(1) $5^{x+1}=25^x$에서

$5^{x+1}=(5^2)^x$ $\quad\therefore 5^{x+1}=5^{2x}$

따라서 $x+1=2x$이므로 $x=1$

(2) $4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3}$에서

$(2^2)^x=(2^{-1})^{x^2-3}$ $\quad\therefore 2^{2x}=2^{-x^2+3}$

따라서 $2x=-x^2+3$이므로

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x^2}=\left(\frac{5}{4}\right)^{-3x+1}$에서

$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x^2}=\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right\}^{-3x+1}$ $\quad\therefore \left(\frac{4}{5}\right)^{2x^2}=\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-1}$

따라서 $2x^2=3x-1$이므로

$2x^2-3x+1=0$, $(2x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

01-2 답 4

|해결 전략| 양변의 밑을 3으로 같게 한 후 지수가 같아야 함을 이용한다.

$3^{x^2+4x}=9^{x^2-2}$에서

$3^{x^2+4x}=(3^2)^{x^2-2}$ $\quad\therefore 3^{x^2+4x}=3^{2x^2-4}$

따라서 $x^2+4x=2x^2-4$이므로 $x^2-4x-4=0$

이차방정식 $x^2-4x-4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $a+b=4$

02-1 답 (1) $x=2$ (2) $x=0$ 또는 $x=1$

|해결 전략| (1) 식을 변형한 후 $3^x=t$로 치환하여 푼다.
(2) 식을 변형한 후 $2^x=t$로 치환하여 푼다.

(1) $3^{2x-1}-2\times3^x-9=0$에서 $3^{2x}\times3^{-1}-2\times3^x-9=0$

즉, $\frac{1}{3}\times(3^x)^2-2\times3^x-9=0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$\frac{1}{3}t^2-2t-9=0$, $\frac{1}{3}(t^2-6t-27)=0$

$\frac{1}{3}(t+3)(t-9)=0$

$\therefore t=9\,(\because t>0)$

$t=9$일 때, $3^x=9$에서 $x=2$

(2) $2^x+2^{1-x}=3$에서 $2^x+2\times2^{-x}-3=0$

즉, $2^x+\frac{2}{2^x}-3=0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t+\frac{2}{t}-3=0$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

$t=1$일 때, $2^x=1$에서 $x=0$

$t=2$일 때, $2^x=2$에서 $x=1$

02-2 답 2

|해결 전략| $3^x=t$로 치환하여 얻은 t에 대한 방정식에서 근과 계수의 관계를 이용한다.

$9^x-7\times3^x+9=0$에서 $(3^x)^2-7\times3^x+9=0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-7t+9=0$

이때, 이 방정식의 두 근은 3^α, 3^β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha\times3^\beta=9$, 즉 $3^{\alpha+\beta}=3^2$

$\therefore \alpha+\beta=2$

LECTURE

$a>0$, $a\neq 1$일 때,
$pa^{2x}+qa^{x}+r=0$ (단, $p\neq 0$) ……㉠
㉠에서 $a^x=t\,(t>0)$로 놓으면
$pt^2+qt+r=0$ ……㉡
이때, 방정식 ㉠의 해가 α, β이면 방정식 ㉡의 해는 a^α, a^β이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$a^\alpha+a^\beta=-\frac{q}{p}$, $a^\alpha\times a^\beta=\frac{r}{p}$

03-1 답 (1) $x=1$ 또는 $x=4$ (2) $x=-2$ 또는 $x=1$

|해결 전략| (1) 양변의 지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0일 때로 나누어 푼다.
(2) 양변의 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1일 때로 나누어 푼다.

(1) 지수가 같으므로 주어진 방정식이 성립하려면 밑이 같거나 밑이 달라도 지수가 0이면 등식이 성립한다.
(ⅰ) 밑이 같은 경우
$x+1=2$이므로 $x=1$
(ⅱ) 지수가 0인 경우
$x-4=0$이므로 $x=4$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=1$ 또는 $x=4$

(2) 밑이 같으므로 주어진 방정식이 성립하려면 지수가 같거나 밑이 1이면 등식이 성립한다.
(ⅰ) 지수가 같은 경우
$5x-2=2x+1$이므로 $x=1$
(ⅱ) 밑이 1인 경우
$x+3=1$이므로 $x=-2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

04-1 답 $\frac{1}{3}$

|해결 전략| 주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 주어진 방정식을 $3^x=t$로 치환한 후 얻은 방정식의 두 근은 3^α, 3^β이다.

$9^x-2\times 3^{x+1}+k=0$에서 $3^{2x}-2\times 3\times 3^x+k=0$이므로
$(3^x)^2-6\times 3^x+k=0$
$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t^2-6t+k=0$ ……㉠
이때, 방정식 $9^x-2\times 3^{x+1}+k=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 하면 ㉠의 두 근은 3^α, 3^β이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$3^\alpha\times 3^\beta=k$, $3^{\alpha+\beta}=k$
$3^{-1}=k\ (\because \alpha+\beta=-1)$
$\therefore k=\frac{1}{3}$

04-2 답 $k>4$

|해결 전략| 주어진 방정식을 $2^x=t$로 치환하여 얻은 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$4^x-k\times 2^{x-1}+1=0$에서 $2^{2x}-k\times 2^{-1}\times 2^x+1=0$이므로
$(2^x)^2-\frac{k}{2}\times 2^x+1=0$
$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t^2-\frac{k}{2}t+1=0$ ……㉠
이때, 방정식 $4^x-k\times 2^{x-1}+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면 ㉠은 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.
(ⅰ) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$D=\frac{k^2}{4}-4>0$, $\frac{1}{4}(k^2-16)>0$
$\frac{1}{4}(k+4)(k-4)>0$
$\therefore k<-4$ 또는 $k>4$ ……㉡
(ⅱ) (두 근의 합)$=\frac{k}{2}>0$, 즉 $k>0$ ……㉢
(ⅲ) (두 근의 곱)$=1>0$
㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면 $k>4$

05-1 답 28500년 전

|해결 전략| 주어진 식에 $f(t)=\frac{5}{16}$, $a=10$을 대입하여 t의 값을 구한다.

처음 이 도자기에 들어 있는 ^{14}C의 양은 10 g이었고, t년이 지난 후의 도자기에 남아 있는 ^{14}C의 양은 $\frac{5}{16}$ g이므로
$f(t)=a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$에 $f(t)=\frac{5}{16}$, $a=10$을 대입하면
$\frac{5}{16}=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}=\frac{1}{32}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$
$\frac{t}{5700}=5$ $\quad\therefore t=28500$
따라서 이 도자기는 28500년 전에 만들어진 것이다.

3 지수부등식

개념 확인 88쪽

1 (1) $x\le 3$ (2) $x<4$ (3) $0<x<1$

1 (1) $3^{x+1}\le 81$에서 $81=3^4$이므로 $3^{x+1}\le 3^4$
밑 3은 1보다 크므로 $x+1\le 4$
$\therefore x\le 3$
(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}>\frac{1}{8}$에서 $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}>\left(\frac{1}{2}\right)^3$
밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로 $x-1<3$
$\therefore x<4$
(3) $9^x-4\times 3^x+3<0$에서
$9^x=(3^2)^x=(3^x)^2$이므로 $(3^x)^2-4\times 3^x+3<0$
$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면
$t^2-4t+3<0$, $(t-1)(t-3)<0$
$\therefore 1<t<3$
즉, $1<3^x<3$이므로 $3^0<3^x<3^1$
밑 3은 1보다 크므로 $0<x<1$

STEP 1 개념 드릴
| 89쪽 |

개념 check

1-1 (1) $>$, $>$ (2) $>$

2-1 (1) $2<x<3$ (2) $>$, $x>2$

스스로 check

1-2 답 (1) $x<\frac{5}{4}$ (2) $x>4$ (3) $x>5$ (4) $x<1$

(1) $4=2^2$, $8=2^3$이므로 $4^{2x-1}<8$에서 $(2^2)^{2x-1}<2^3$

$2^{4x-2}<2^3$

밑 2는 1보다 크므로

$4x-2<3$ $\quad\therefore x<\frac{5}{4}$

(2) $9=3^2$이므로 $3^{x-2}>3^2$

밑 3은 1보다 크므로

$x-2>2$ $\quad\therefore x>4$

(3) $\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^5$

밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로

$x>5$

(4) $\frac{1}{125}=\left(\frac{1}{5}\right)^3$이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1}>\left(\frac{1}{5}\right)^3$

밑 $\frac{1}{5}$은 1보다 작으므로

$2x+1<3$ $\quad\therefore x<1$

2-2 답 (1) $1<x<2$ (2) $x<1$ (3) $x<2$ (4) $x>1$

(1) $2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+8<0$, $(t-2)(t-4)<0$

$\therefore 2<t<4$

따라서 $2<2^x<4$, 즉 $2^1<2^x<2^2$

밑 2는 1보다 크므로 부등식의 해는

$1<x<2$

(2) $5^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-15<0$, $(t+3)(t-5)<0$

$\therefore -3<t<5$

그런데 $t>0$이므로 $0<t<5$

따라서 $0<5^x<5$, 즉 $5^x<5^1$

밑 5는 1보다 크므로 부등식의 해는

$x<1$

(3) $2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-3t-4<0$, $(t+1)(t-4)<0$

$\therefore -1<t<4$

그런데 $t>0$이므로 $0<t<4$

따라서 $0<2^x<4$, 즉 $2^x<2^2$

밑 2는 1보다 크므로 부등식의 해는

$x<2$

(4) $3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2+3t-18>0$, $(t+6)(t-3)>0$

$\therefore t<-6$ 또는 $t>3$

그런데 $t>0$이므로 $t>3$

따라서 $3^x>3$, 즉 $3^x>3^1$

밑 3은 1보다 크므로 부등식의 해는

$x>1$

STEP 2 필수 유형
| 90쪽~92쪽 |

01-1 답 (1) $x<\frac{5}{2}$ (2) $x\ge -6$ (3) $x>1$ (4) $-3\le x\le 1$

|해결 전략| 밑을 같게 한 후 지수에 대한 부등식을 세운다.

(1) $2^{2x-1}<16$에서

$2^{2x-1}<2^4$

이때, 밑 2는 1보다 크므로

$2x-1<4$ $\quad\therefore x<\frac{5}{2}$

(2) $27^{x+2}\ge 3^{2x}$에서

$(3^3)^{x+2}\ge 3^{2x}$, $3^{3x+6}\ge 3^{2x}$

이때, 밑 3은 1보다 크므로

$3x+6\ge 2x$ $\quad\therefore x\ge -6$

(3) $5^x>\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3}$에서

$5^x>(5^{-1})^{2x-3}$이므로 $5^x>5^{-2x+3}$

이때, 밑 5는 1보다 크므로

$x>-2x+3$ $\quad\therefore x>1$

(4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}\ge\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3}$에서

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}\ge\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right\}^{2x-3}$이므로 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}\ge\left(\frac{2}{3}\right)^{-2x+3}$

이때, 밑 $\frac{2}{3}$는 1보다 작으므로

$x^2\le -2x+3$, $x^2+2x-3\le 0$

$(x+3)(x-1)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 1$

01-2 답 4

|해결 전략| 밑을 같게 한 후 지수에 대한 부등식을 세운다.

$2^{x^2-2x+2}\ge 4^{x^2-x}$에서 $2^{x^2-2x+2}\ge(2^2)^{x^2-x}$이므로

$2^{x^2-2x+2}\ge 2^{2x^2-2x}$

이때, 밑 2는 1보다 크므로

$x^2-2x+2\ge 2x^2-2x$

$x^2-2\le 0$, $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\le 0$

$\therefore -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$

따라서 $\alpha=-\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{2}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=2+2=4$

02-1 답 (1) $x\ge 1$ (2) $-1<x<2$ (3) $x<-3$ (4) $x\ge -1$

|해결 전략| 식을 변형한 후 $a^x=t$로 치환하여 푼다.

(1) $9^x+2\times3^{x+1}-27\geq0$에서 $(3^x)^2+6\times3^x-27\geq0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2+6t-27\geq0$, $(t+9)(t-3)\geq0$

$\therefore t\leq-9$ 또는 $t\geq3$

그런데 $t>0$이므로 $t\geq3$

따라서 $3^x\geq3$, 즉 $3^x\geq3^1$

밑 3은 1보다 크므로 $x\geq1$

(2) $2\times2^x+2^{2-x}<9$에서 $2\times2^x+2^2\times2^{-x}<9$이므로

$2\times2^x+\dfrac{4}{2^x}-9<0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $2t+\dfrac{4}{t}-9<0$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$2t^2-9t+4<0$, $(2t-1)(t-4)<0$

$\therefore \dfrac{1}{2}<t<4$

따라서 $\dfrac{1}{2}<2^x<4$, 즉 $2^{-1}<2^x<2^2$

밑 2는 1보다 크므로 $-1<x<2$

(3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-32>0$에서

$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}^2-4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-32>0$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-4t-32>0$, $(t+4)(t-8)>0$

$\therefore t<-4$ 또는 $t>8$

그런데 $t>0$이므로 $t>8$

따라서 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>8$, 즉 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

밑 $\dfrac{1}{2}$은 1보다 작으므로 $x<-3$

(4) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^x-2\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^x-15\leq0$에서

$\left\{\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\right\}^2-2\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^x-15\leq0$

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-15\leq0$, $(t+3)(t-5)\leq0$

$\therefore -3\leq t\leq5$

그런데 $t>0$이므로 $0<t\leq5$

따라서 $0<\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\leq5$, 즉 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$

밑 $\dfrac{1}{5}$은 1보다 작으므로 $x\geq-1$

03-1 답 (1) $1<x<2$ (2) $0<x<1$ 또는 $2<x<3$

|해결 전략| $x>1$, $0<x<1$, $x=1$의 세 가지 경우로 나누어 푼다.

(1) (i) $x>1$일 때

$2x+1<x+3$ $\quad\therefore x<2$

그런데 $x>1$이므로 $1<x<2$

(ii) $0<x<1$일 때

$2x+1>x+3$ $\quad\therefore x>2$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.

(iii) $x=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<2$

(2) (i) $x>1$일 때

$x^2<5x-6$, $x^2-5x+6<0$

$(x-2)(x-3)<0$ $\quad\therefore 2<x<3$

그런데 $x>1$이므로 $2<x<3$

(ii) $0<x<1$일 때

$x^2>5x-6$, $x^2-5x+6>0$

$(x-2)(x-3)>0$ $\quad\therefore x<2$ 또는 $x>3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(iii) $x=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $0<x<1$ 또는 $2<x<3$

STEP 3 유형 드릴

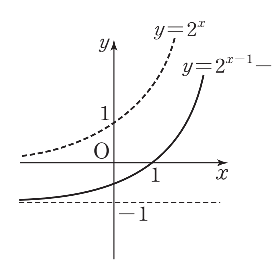
| 93쪽~95쪽 |

1-1 답 ②

|해결 전략| 주어진 함수의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 평행이동한 것이다.

$y=\dfrac{1}{2}\times2^x-1=2^{x-1}-1$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\dfrac{1}{2}\times2^x-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 치역은 $\{y\,|\,y>-1\}$이다.

② 그래프는 제1, 3, 4사분면을 지나고 제2사분면을 지나지 않는다.

③ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

⑤ $\dfrac{1}{2}\times2^1-1=0$

따라서 그래프는 점 $(1, 0)$을 지난다.

또, 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

1-2 답 -1

|해결 전략| 함수 $y=3^{x-a}+b$의 그래프는 점 $(3, 0)$을 지나고, 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.

주어진 그림에서 함수 $y=3^{x-a}+b$의 점근선의 방정식은 $y=-3$이므로

$b=-3$

또, 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=3^{3-a}-3$

$3^{3-a}=3^1$, $3-a=1$

$\therefore a=2$

따라서 $a+b=2+(-3)=-1$

2-1 답 2

|해결 전략| 함수의 그래프에서 y축에 대하여 대칭이동하면 x 대신 $-x$를 대입하고, x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

$y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=3^{-x}$ ······㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=3^{-(x-m)}+n \qquad \therefore y=3^{-x+m}+n$

따라서 $y=3^{-x+m}+n$이 $y=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x+2}$과 일치하므로

$m=2,\ n=0$

$\therefore m+n=2+0=2$

2-2 답 $a=2,\ b=3$

|해결 전략| 함수의 그래프에서 x축에 대하여 대칭이동하면 y 대신 $-y$를 대입하고, x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 x 대신 $x-1$, y 대신 $y-b$를 대입한다.

$y=a^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-a^x$ ······㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-a^{x-1}+b$ ······㉡

㉡의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$1=-a^{2-1}+b \qquad \therefore -a+b=1$

또, 점근선의 방정식이 $y=3$이므로 $b=3$

$\therefore a=2$

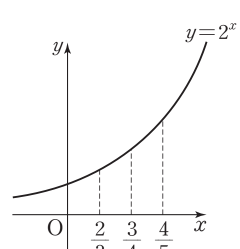
3-1 답 $A<B<C$

|해결 전략| 밑이 1보다 크면 지수가 큰 수가 크다.

주어진 세 수를 밑이 2인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$A=\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}},\ B=\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}},\ C=\sqrt[5]{16}=\sqrt[5]{2^4}=2^{\frac{4}{5}}$

이때, 함수 $y=2^x$에서 밑 2는 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 즉, 지수가 큰 수가 크다.



따라서 지수의 크기를 비교하면

$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$이므로

$2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{4}}<2^{\frac{4}{5}}$

$\therefore A<B<C$

3-2 답 ④

|해결 전략| 밑이 1보다 크면 지수가 큰 수가 크고, 밑이 1보다 작으면 지수가 작은 수가 크다.

함수 $y=3^x$에서 밑 3은 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 즉, 지수가 큰 수가 크다.

또, 함수 $y=a^x$에서 밑 a는 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 즉, 지수가 작은 수가 크다.

따라서 $0<a<1$이므로 $a^0>a^a>a^1$, 즉 $a<a^a<1$

$\therefore 3^a<3^{a^a}<3$

4-1 답 3

|해결 전략| 밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+b$에서 밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $-2\le x\le a$에서 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+b$는

$x=-2$일 때, 최대이고 최댓값은

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2-1}+b=27+b=30 \qquad \therefore b=3$

$x=a$일 때, 최소이고 최솟값은 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{a-1}+b=3^{-a+1}+3=6$

$3^{-a+1}=3,\ -a+1=1 \qquad \therefore a=0$

$\therefore a+b=0+3=3$

4-2 답 $\frac{5}{4}$

|해결 전략| $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+3}$의 지수 x^2-2x+3의 범위를 구한다.

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+3}$에서 $f(x)=x^2-2x+3$으로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2+2$

$f(x)$는 $x=1$일 때, 최솟값 2를 갖는다. 즉, $f(x)\ge 2$

이때, 밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최댓값을 갖는다.

따라서 $f(x)=2$, 즉 $x=1$일 때, 최댓값은 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로

$a=1,\ b=\frac{1}{4}$

$\therefore a+b=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

5-1 답 2

|해결 전략| $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$로 치환하여 이차함수의 최대, 최소를 이용한다.

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-2^{-x+3}+9=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^x-2^{-x}\times 2^3+9$

$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-8\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+9$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $-3\le x\le 0$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^0\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$이므로 $1\le t\le 8$

밑이 1보다 작으므로 지수가 작을수록 크다.

$1\le t\le 8$에서 함수

$y=t^2-8t+9=(t-4)^2-7$은

$t=8$일 때, 최대이고 최댓값은

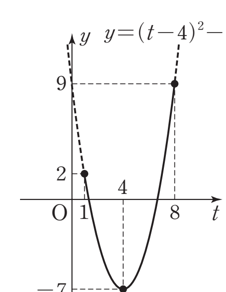
$y=(8-4)^2-7=9$

$t=4$일 때, 최소이고 최솟값은

$y=(4-4)^2-7=-7$

따라서 $M=9,\ m=-7$이므로

$M+m=2$



5-2 답 12

|해결 전략| $3^x=t$로 치환하여 이차함수의 최대, 최소를 이용한다.

$y=9^x-2\times3^{x+1}+a=(3^2)^x-2\times3\times3^x+a$

$=(3^x)^2-6\times3^x+a$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $y=t^2-6t+a=(t-3)^2+a-9$

$t>0$에서 함수 $y=(t-3)^2+a-9$는

$t=3$일 때, 최소이고 최솟값은

$y=(3-3)^2+a-9=a-9$

따라서 $t=3$에서 $3^x=3$이므로 $x=1$

$\therefore b=1$

또, $a-9=2$에서 $a=11$

$\therefore a+b=11+1=12$

6-1 답 1

|해결 전략| 양변의 밑을 2로 같게 한 후 지수에 대한 방정식의 해를 구한다.

$2^{x^2-5}=8\times2^x$에서

$2^{x^2-5}=2^3\times2^x$이므로 $2^{x^2-5}=2^{3+x}$

이때, $x^2-5=3+x$이므로 $x^2-x-8=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 근의 합은 1이다.

6-2 답 1

|해결 전략| 양변의 밑을 $\frac{1}{3}$로 같게 한 후 지수에 대한 방정식의 해를 구한다.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}=\frac{1}{27}\times3^{-x}$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{3+x}$

이때, $x^2+1=3+x$이므로 $x^2-x-2=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 근의 합은 1이다.

7-1 답 27

|해결 전략| 식을 변형한 후 $3^x=t$로 치환하여 푼다.

$9^x+3^x-12=0$에서 $(3^x)^2+3^x-12=0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2+t-12=0$, $(t+4)(t-3)=0$

그런데 $t>0$이므로 $t=3$

$t=3$일 때, $3^x=3$에서 $x=1$ $\quad\therefore \alpha=1$

$\therefore 3^{2\alpha+1}=3^3=27$

7-2 답 3

|해결 전략| 식을 변형한 후 $2^x=t$로 치환하여 푼다.

$4^x-3\times2^{x+1}+8=0$에서 $(2^2)^x-3\times2\times2^x+8=0$

즉, $(2^x)^2-6\times2^x+8=0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+8=0$, $(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

$t=2$일 때, $2^x=2$에서 $x=1$

$t=4$일 때, $2^x=4$에서 $x=2$

이때, $\alpha=1$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=3$

8-1 답 3

|해결 전략| 양변의 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1일 때로 나누어 푼다.

밑이 같으므로 주어진 방정식이 성립하려면 지수가 같거나 밑이 1이면 등식이 성립한다.

(i) 지수가 같은 경우

$-x+6=x^2$에서 $x^2+x-6=0$이므로 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x>0)$

(ii) 밑이 1인 경우

$x=1$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 구하는 모든 근의 합은

$1+2=3$

8-2 답 4

|해결 전략| 양변의 지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0일 때로 나누어 푼다.

지수가 같으므로 주어진 방정식이 성립하려면 밑이 같거나 밑이 달라도 지수가 0이면 등식이 성립한다.

(i) 밑이 같은 경우

$x^2-2x+7=10$에서 $x^2-2x-3=0$이므로

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) 지수가 0인 경우

$x=2$

(i), (ii)에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 구하는 모든 근의 합은

$-1+2+3=4$

9-1 답 5

|해결 전략| 주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 주어진 방정식을 $5^x=t$로 치환한 후 얻은 방정식의 두 근은 5^α, 5^β이다.

$25^x-6\times5^x+k=0$에서 $(5^2)^x-6\times5^x+k=0$이므로

$(5^x)^2-6\times5^x+k=0$

$5^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+k=0$ ……㉠

이때, 방정식 $25^x-6\times5^x+k=0$의 두 근을 α, β라 하면 ㉠의 두 근은 5^α, 5^β이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$5^\alpha\times5^\beta=k$, $5^{\alpha+\beta}=k$

$5^1=k\ (\because \alpha+\beta=1)$

$\therefore k=5$

9-2 답 $\frac{2}{3}<k<1$ 또는 $k>2$

|해결 전략| 주어진 방정식을 $2^x=t$로 치환하여 얻은 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$4^x-k\times2^{x+1}+3k-2=0$에서

$(2^2)^x-k\times2\times2^x+3k-2=0$이므로

$(2^x)^2-2k\times2^x+3k-2=0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-2kt+3k-2=0$ ……㉠

이때, 방정식 $4^x-k\times2^{x+1}+3k-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(3k-2)>0,\ k^2-3k+2>0,\ (k-1)(k-2)>0$

$\therefore k<1$ 또는 $k>2$ ……㉡

(ⅱ) (두 근의 합)$=2k>0$, 즉 $k>0$ ……㉢

(ⅲ) (두 근의 곱)$=3k-2>0$, 즉 $k>\frac{2}{3}$ ……㉣

㉡, ㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $\frac{2}{3}<k<1$ 또는 $k>2$

10-1 답 -1

|해결 전략| 식을 변형한 후 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$로 치환하여 이차부등식을 푼다.

$\left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x\le12$에서 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+\left(\frac{1}{3}\right)^x-12\le0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+t-12\le0,\ (t+4)(t-3)\le0$

$\therefore -4\le t\le3$

그런데 $t>0$이므로 $0<t\le3$

이때, $0<\left(\frac{1}{3}\right)^x\le3=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$에서 밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로

$x\ge-1$

따라서 구하는 x의 최솟값은 -1이다.

10-2 답 3

|해결 전략| 식을 변형한 후 $3^x=t$로 치환하여 이차부등식을 푼다.

$3^{2x}+1<9\times3^x+3^{x-2}$에서 $3^{2x}-(9\times3^x+3^{-2}\times3^x)+1<0$

즉, $(3^x)^2-\frac{82}{9}\times3^x+1<0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-\frac{82}{9}t+1<0,\ \frac{1}{9}(9t^2-82t+9)<0$

$\frac{1}{9}(9t-1)(t-9)<0$ $\quad\therefore \frac{1}{9}<t<9$

이때, $\frac{1}{9}<3^x<9$, 즉 $3^{-2}<3^x<3^2$에서 밑 3은 1보다 크므로

$-2<x<2$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 $-1, 0, 1$의 3이다.

11-1 답 3

|해결 전략| $x>1,\ 0<x<1,\ x=1$의 세 가지 경우로 나누어 푼다.

(ⅰ) $x>1$일 때

$5x-8\le3x-2$ $\quad\therefore x\le3$

그런데 $x>1$이므로 $1<x\le3$

(ⅱ) $0<x<1$일 때

$5x-8\ge3x-2$ $\quad\therefore x\ge3$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.

(ⅲ) $x=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식은 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $1\le x\le3$이므로 구하는 정수 x의 개수는 1, 2, 3의 3이다.

11-2 답 3

|해결 전략| $x>1,\ 0<x<1,\ x=1$의 세 가지 경우로 나누어 푼다.

(ⅰ) $x>1$일 때

$1+x<x^2-1,\ x^2-x-2>0$

$(x+1)(x-2)>0$ $\quad\therefore x<-1$ 또는 $x>2$

그런데 $x>1$이므로 $x>2$

(ⅱ) $0<x<1$일 때

$1+x>x^2-1,\ x^2-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0$ $\quad\therefore -1<x<2$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ⅲ) $x=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (좌변)$=$(우변)

따라서 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $0<x<1$ 또는 $x>2$이므로 구하는 정수 x의 최솟값은 3이다.

12-1 답 6

|해결 전략| 주어진 식에 $P=100,\ f(t)=121$을 대입하여 t의 값을 구한다.

처음 100만 원을 투자하면, t년 후에 121만 원이 되므로

$f(t)=P\times\left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{t}{3}}$에 $P=100,\ f(t)=121$을 대입하면

$121=100\times\left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{t}{3}}$

$\frac{121}{100}=\left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{t}{3}},\ \left(\frac{11}{10}\right)^2=\left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{t}{3}}$

$\frac{t}{3}=2$ $\quad\therefore t=6$

12-2 답 20

|해결 전략| $L(d)\le\frac{1}{32}a$를 만족시키는 d의 최솟값을 구한다.

수면에서의 빛의 세기가 $a\ \mathrm{W/m^2}$이고, 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기가 $L(d)$이므로

$L(d)=a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{4}}$

이때, 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 $\frac{1}{32}$ 이하가 되려면 $L(d)\le\frac{1}{32}a$를 만족시켜야 한다.

즉, $a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{4}}\le\frac{1}{32}a$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{4}}\le\left(\frac{1}{2}\right)^5\ (\because a>0)$

이때, 밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로 $\frac{d}{4}\ge5$

$\therefore d\ge20$

따라서 d의 최솟값은 20이다.

4 | 로그함수

1 로그함수와 그 그래프

개념 확인 98쪽~103쪽

1 (1) $y=\log_3 x$ (2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

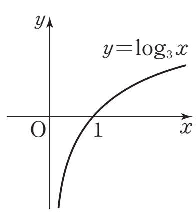
2 풀이 참조

3 감소, 1, y

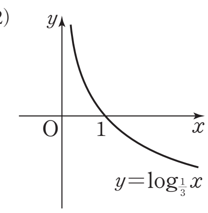
4 풀이 참조

5 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -1 (2) 최댓값: -1, 최솟값: -2

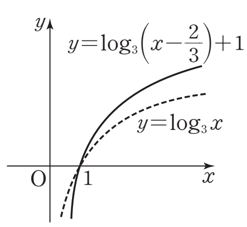
2 (1)



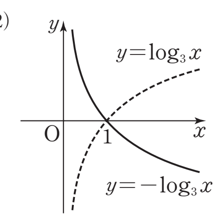
(2)



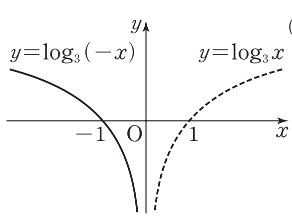
4 (1)



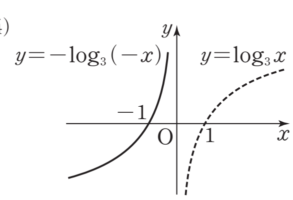
(2)



(3)



(4)



5 (1) 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

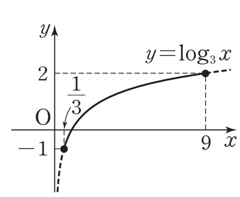
$x=9$일 때, 최댓값

$\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$

$x=\frac{1}{3}$일 때, 최솟값

$\log_3 \frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-\log_3 3=-1$

을 갖는다.



(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

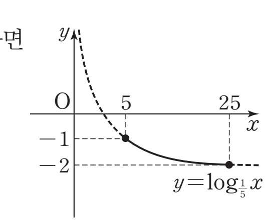
$x=5$일 때, 최댓값

$\log_{\frac{1}{5}} 5=\log_{5^{-1}} 5=-\log_5 5=-1$

$x=25$일 때, 최솟값

$\log_{\frac{1}{5}} 25=\log_{5^{-1}} 5^2=-2\log_5 5=-2$

를 갖는다.



STEP 1 개념 드릴 | 104쪽~105쪽 |

개념 check

1-1 역함수, $y=x$

2-1 (1) 1, 2 (2) -2, -1 (3) x

3-1 (1) -1, 2 (2) 3

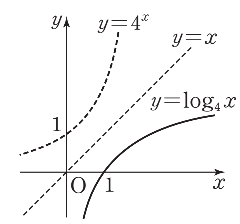
4-1 (1) 증가, 2, 8, 3, 2, 1 (2) 증가, 2, 6, $-\log_3 6$, 9, -2

스스로 check

1-2 답 풀이 참조

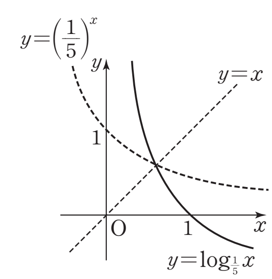
(1) 로그함수 $y=\log_4 x$는 지수함수 $y=4^x$의 역함수이다.

따라서 로그함수 $y=\log_4 x$의 그래프는 지수함수 $y=4^x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(2) 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$는 지수함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 역함수이다.

따라서 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$의 그래프는 지수함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



2-2 답 (1) -1, 3 (2) 2, -3 (3) y (4) x, 1

(1) 함수 $y=\log_2(x+1)+3$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}(x-2)-3$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

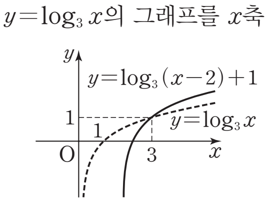
(3) 함수 $y=\log_3(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

(4) 함수 $y=-\log_2 x+1$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

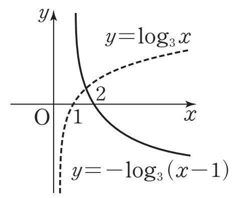
3-2 답 풀이 참조

(1) $y=\log_3(x-2)+1$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\log_3(x-2)+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $y=-\log_3(x-1)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=-\log_3(x-1)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



4-2 답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: 0 (2) 최댓값: 2, 최솟값: 1
(3) 최댓값: 0, 최솟값: -3 (4) 최댓값: 0, 최솟값: -2

(1) $y=\log_2(x+2)$에서 밑 2는 1보다 크고 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 $x=6$일 때, 최댓값은 $\log_2 8=3$
$x=-1$일 때, 최솟값은 $\log_2 1=0$

(2) $y=\log_3(5-x)$에서 밑 3은 1보다 크고 x의 값이 증가하면 $5-x$의 값이 감소하므로 y의 값도 감소한다.
따라서 $x=-4$일 때, 최댓값은 $\log_3 9=2$
$x=2$일 때, 최솟값은 $\log_3 3=1$

(3) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$에서 밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 $x=2$일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{2}} 1=0$
$x=9$일 때, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$

(4) $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)$에서 밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 $x=0$일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}} 1=0$
$x=4$일 때, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$

STEP 2 필수 유형

| 106쪽~112쪽 |

01-1 답 (1) $y=\log_2 x+\log_2 \frac{2}{3}\ (x>0)$ (2) $y=4^x-1$

| 해결 전략 | 로그의 정의를 이용하여 x를 y에 대한 식으로 나타낸 후 x와 y를 서로 바꾼다. 이때, 정의역에 유의한다.

(1) 함수 $y=3\times2^{x-1}$의 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\{y\,|\,y>0\}$이다.
$y=3\times2^{x-1}$에서 $\frac{y}{3}=2^{x-1}$
로그의 정의에 의하여
$\log_2 \frac{y}{3}=x-1$, $\log_2 y-\log_2 3=x-1$
$\therefore\ x=\log_2 y-\log_2 3+1=\log_2 y+\log_2 \frac{2}{3}$
x와 y를 서로 바꾸면 역함수는
$y=\log_2 x+\log_2 \frac{2}{3}\ (x>0)$

(2) 진수의 조건에서 $x+1>0$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x>-1\}$, 치역은 실수 전체의 집합이다.
$y=\log_2\sqrt{x+1}$에서 로그의 정의에 의하여 $2^y=\sqrt{x+1}$
양변을 제곱하면 $(2^y)^2=x+1$
$\therefore\ x=4^y-1$
x와 y를 서로 바꾸면 역함수는
$y=4^x-1$

01-2 답 8

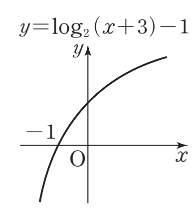
| 해결 전략 | 로그의 정의를 이용하여 역함수를 구한 후 주어진 식과 비교한다.

함수 $y=3^{2x-4}+3$의 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\{y\,|\,y>3\}$이다.
$y=3^{2x-4}+3$에서 $y-3=3^{2x-4}$
로그의 정의에 의하여
$\log_3(y-3)=2x-4$, $\log_3(y-3)+4=2x$
$x=\frac{1}{2}\log_3(y-3)+2=\log_{3^2}(y-3)+2$
$\therefore\ x=\log_9(y-3)+2$
x와 y를 서로 바꾸면 역함수는
$y=\log_9(x-3)+2\ (x>3)$
따라서 $a=9$, $b=-3$, $c=2$이므로 $a+b+c=8$

02-1 답 풀이 참조

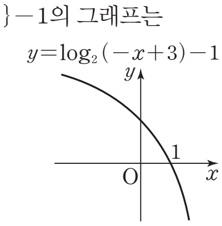
| 해결 전략 | $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 정의역은 $\{x\,|\,x>m\}$, 점근선의 방정식은 $x=m$이다.

(1) $y=\log_2(x+3)-1$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



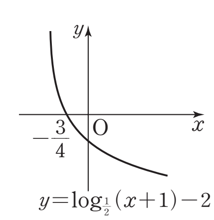
이때, 진수는 양수이어야 하므로
$x+3>0\quad\therefore\ x>-3$
따라서 정의역은 $\{x\,|\,x>-3\}$, 점근선의 방정식은 $x=-3$이다.

(2) $y=\log_2(-x+3)-1=\log_2\{-(x-3)\}-1$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



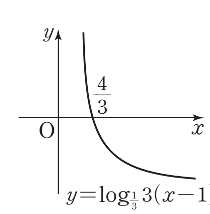
이때, 진수는 양수이어야 하므로
$-x+3>0\quad\therefore\ x<3$
따라서 정의역은 $\{x\,|\,x<3\}$, 점근선의 방정식은 $x=3$이다.

(3) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-2$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때, 진수는 양수이어야 하므로
$x+1>0\quad\therefore\ x>-1$
따라서 정의역은 $\{x\,|\,x>-1\}$, 점근선의 방정식은 $x=-1$이다.

(4) $y=\log_{\frac{1}{3}} 3(x-1)$
$=\log_{\frac{1}{3}} 3+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$
$=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)-1$
의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때, 진수는 양수이어야 하므로
$x-1>0\quad\therefore\ x>1$
따라서 정의역은 $\{x\,|\,x>1\}$, 점근선의 방정식은 $x=1$이다.

03-1 답 -3

| 해결 전략 | x축에 대하여 대칭이동하면 y 대신 $-y$를 대입하고, x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

$y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_2 x \qquad \therefore\ y=-\log_2 x$

$y=-\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=-\log_2 (x-m) \qquad \therefore\ y=-\log_2 (x-m)+n$

즉, $y=-\log_2 (x-m)+n$이

$y=\log_{\frac{1}{2}} 4(x+1)=\log_{\frac{1}{2}} 4+\log_{\frac{1}{2}} (x+1)=-\log_2 (x+1)-2$와 일치하므로

$m=-1,\ n=-2$

$\therefore\ m+n=-3$

03-2 답 -254

| 해결 전략 | x축에 대하여 대칭이동하면 y 대신 $-y$를 대입하고, x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-2$를 대입한다.

$y=\log_4 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_4 x \qquad \therefore\ y=-\log_4 x$

$y=-\log_4 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-2=-\log_4 (x-a) \qquad \therefore\ y=-\log_4 (x-a)+2$

이때, $y=-\log_4 (x-a)+2$의 그래프가 점 $(2,\ -2)$를 지나므로

$-2=-\log_4 (2-a)+2,\ \log_4 (2-a)=4$

$2-a=4^4 \qquad \therefore\ a=-254$

04-1 답 (1) $\log_{25} 16<2\log_5 3<2$ (2) $-3<\log_{\frac{1}{2}} 7<\log_{\frac{1}{4}} 9$

| 해결 전략 | (1) 세 수의 밑을 5로 통일한 후 진수의 크기를 비교한다.

(2) 세 수의 밑을 $\frac{1}{2}$로 통일한 후 진수의 크기를 비교한다.

(1) $\log_{25} 16$과 2를 밑이 5인 로그로 나타내면

$\log_{25} 16=\log_{5^2} 4^2=\log_5 4$

$2=\log_5 5^2=\log_5 25$

또, $2\log_5 3=\log_5 3^2=\log_5 9$

이때, $4<9<25$이고 함수 $y=\log_5 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_5 4<\log_5 9<\log_5 25$

$\therefore\ \log_{25} 16<2\log_5 3<2$

(2) -3과 $\log_{\frac{1}{4}} 9$를 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그로 나타내면

$-3=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\log_{\frac{1}{2}} 8$

$\log_{\frac{1}{4}} 9=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} 9=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 9=\log_{\frac{1}{2}} 9^{\frac{1}{2}}=\log_{\frac{1}{2}} 3$

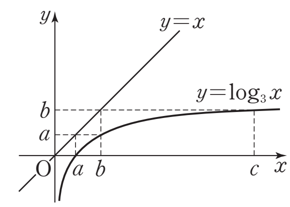
이때, $3<7<8$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{2}} 8<\log_{\frac{1}{2}} 7<\log_{\frac{1}{2}} 3$

$\therefore\ -3<\log_{\frac{1}{2}} 7<\log_{\frac{1}{4}} 9$

05-1 답 -2

| 해결 전략 | $\log_3 a=0$이고 직선 $y=x$ 위의 점은 (x좌표)$=$(y좌표)임을 이용하여 $a,\ b,\ c$의 값을 차례로 구한다.



오른쪽 그림에서 $\log_3 a=0$이므로

$a=1$

또, $\log_3 b=1$에서 $b=3$

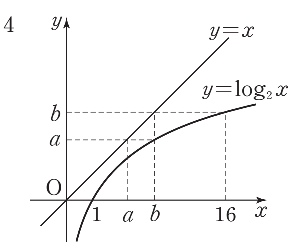
$\log_3 c=3$에서 $c=3^3=27$

$\therefore\ \log_3 \frac{ab}{c}=\log_3 \frac{1\times 3}{27}=\log_3 \frac{1}{9}$

$=\log_3 3^{-2}=-2$

05-2 답 4

| 해결 전략 | $b=\log_2 16,\ a=\log_2 b$임을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.



$b=\log_2 16$이므로 $2^b=16 \qquad \therefore\ b=4$

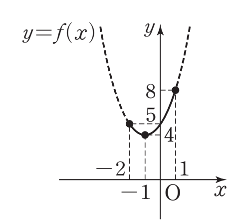
또, $a=\log_2 b$이므로 $a=\log_2 4=2$

$\therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^{a-b}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$=2^2=4$

06-1 답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: 2 (2) 최댓값: 0, 최솟값: -2

| 해결 전략 | 로그함수 $y=\log_a f(x)$에서 $a>1$인지 $0<a<1$인지 확인한다.



(1) 함수 $y=\log_2 (x^2+2x+5)$에서 밑 2는 1보다 크므로 x^2+2x+5의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$f(x)=x^2+2x+5$라 하면

$f(x)=(x+1)^2+4$

이므로 $-2\le x\le 1$에서 $4\le f(x)\le 8$

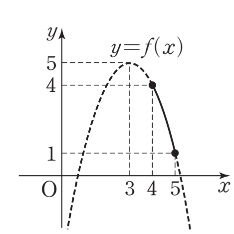
따라서 $-2\le x\le 1$에서

함수 $y=\log_2 (x^2+2x+5)=\log_2 f(x)$는

$f(x)=8$일 때 최대이고, 최댓값은 $\log_2 8=3$

$f(x)=4$일 때 최소이고, 최솟값은 $\log_2 4=2$

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} (-x^2+6x-4)$에서 밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로 $-x^2+6x-4$의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



$f(x)=-x^2+6x-4$라 하면

$f(x)=-(x-3)^2+5$

이므로 $4\le x\le 5$에서 $1\le f(x)\le 4$

따라서 $4\le x\le 5$에서

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} (-x^2+6x-4)=\log_{\frac{1}{2}} f(x)$는

$f(x)=1$일 때 최대이고, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{2}} 1=0$

$f(x)=4$일 때 최소이고, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$

07-1 답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -1 (2) 최댓값: 17, 최솟값: 1

| 해결 전략 | $\log_a x = t$로 치환한 후 t의 값의 범위에서 최대, 최소를 구한다.

(1) $y=(\log_2 x)^2-4\log_{\frac{1}{2}} x+3$에서

$y=(\log_2 x)^2+4\log_2 x+3$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$y=t^2+4t+3$

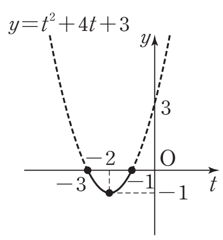
$=(t+2)^2-1$ ……㉠

이때, $\frac{1}{8}\le x\le\frac{1}{2}$에서

$\log_2\frac{1}{8}\le\log_2 x\le\log_2\frac{1}{2}$이므로

$-3\le t\le -1$

$-3\le t\le -1$에서 ㉠의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $-3\le t\le -1$에서

함수 $y=(t+2)^2-1$은

$t=-3$일 때 최대이고, 최댓값은 0

$t=-2$일 때 최소이고, 최솟값은 -1

(2) $y=(\log_{\frac{1}{3}} x)^2-\log_{\frac{1}{3}} x^2+2$에서

$y=(\log_{\frac{1}{3}} x)^2-2\log_{\frac{1}{3}} x+2$

$\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면

$y=t^2-2t+2$

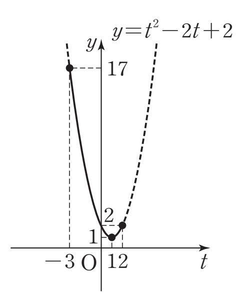
$=(t-1)^2+1$ ……㉠

이때, $\frac{1}{9}\le x\le 27$에서

$\log_{\frac{1}{3}} 27\le\log_{\frac{1}{3}} x\le\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$이므로

$-3\le t\le 2$

$-3\le t\le 2$에서 ㉠의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $-3\le t\le 2$에서

함수 $y=(t-1)^2+1$은

$t=-3$일 때 최대이고, 최댓값은 17

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은 1

07-2 답 최댓값: 8, 최솟값: -1

| 해결 전략 | 주어진 식을 변형하여 $\log_a x=t$로 치환한 후 이차함수의 최대, 최소를 이용한다.

$y=\log_3\frac{x}{3}\times\log_3\frac{x}{27}$

$=(\log_3 x-\log_3 3)(\log_3 x-\log_3 27)$

$=(\log_3 x-1)(\log_3 x-3)$

$=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3$

$\log_3 x=t$로 놓으면

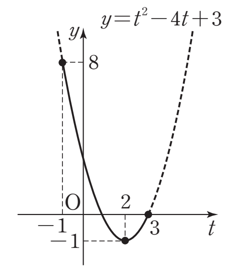
$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$ ……㉠

이때, $\frac{1}{3}\le x\le 27$에서

$\log_3\frac{1}{3}\le\log_3 x\le\log_3 27$이므로

$-1\le t\le 3$

$-1\le t\le 3$에서 ㉠의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $-1\le t\le 3$에서

함수 $y=(t-2)^2-1$은

$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은 8

$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은 -1

2 로그방정식

개념 확인 113쪽

1 (1) $x=9$ (2) $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=64$

1 (1) 진수의 조건에서 $x-2>0$이므로 $x>2$ ……㉠

밑이 같으므로 $x-2=7$ $\therefore\ x=9$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=9$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-4t-12=0$, $(t+2)(t-6)=0$

$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=6$

$t=-2$일 때, $\log_2 x=-2$에서 $x=2^{-2}=\frac{1}{4}$

$t=6$일 때, $\log_2 x=6$에서 $x=2^6=64$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=64$

STEP 1 개념 드릴 | 114쪽 |

개념 check

1-1 (1) 16, 17, 17 (2) 2, 1, 1 (3) $\frac{1}{3}$, 4, 4

2-1 0, 2, 4, 2, 4

스스로 check

1-2 답 (1) $x=\frac{19}{9}$ (2) $x=4$ (3) $x=5$ (4) $x=5$

(1) 진수의 조건에서 $x-2>0$

$\therefore\ x>2$ ……㉠

로그의 정의에 의하여 $x-2=3^{-2}=\frac{1}{9}$

$\therefore\ x=\frac{19}{9}$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=\frac{19}{9}$

(2) 진수의 조건에서 $3x+4>0$ $\quad \therefore\ x>-\frac{4}{3}$ ……㉠

로그의 정의에 의하여 $3x+4=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$

$\therefore\ x=4$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=4$

(3) 진수의 조건에서 $x+2>0$, $2x-3>0$이므로

$x>\frac{3}{2}$ ……㉠

밑이 같으므로 $x+2=2x-3$

$\therefore\ x=5$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=5$

(4) $\log_2 (x-1)=\log_4 2(x+3)$에서

$\log_2 (x-1)=\frac{1}{2}\log_2 2(x+3)$

$2\log_2 (x-1)=\log_2 2(x+3)$

$\log_2 (x-1)^2=\log_2 2(x+3)$

진수의 조건에서 $x-1>0$, $2(x+3)>0$이므로

$x>1$ ……㉠

밑이 같으므로 $(x-1)^2=2(x+3)$

$x^2-2x+1=2x+6$, $x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=5$

2-2 답 (1) $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=4$ (2) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=81$

(3) $x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=25$

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-4=0$, $(t+2)(t-2)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

$t=-2$일 때, $\log_2 x=-2$에서 $x=\frac{1}{4}$

$t=2$일 때, $\log_2 x=2$에서 $x=4$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는

$x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=4$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

$t=-1$일 때, $\log_3 x=-1$에서 $x=\frac{1}{3}$

$t=4$일 때, $\log_3 x=4$에서 $x=81$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는

$x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=81$

(3) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2-t-2=0$, $(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

$t=-1$일 때, $\log_5 x=-1$에서 $x=\frac{1}{5}$

$t=2$일 때, $\log_5 x=2$에서 $x=25$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는

$x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=25$

STEP 2 필수 유형

| 115쪽~119쪽 |

01-1 답 (1) $x=2$ (2) $x=5$ (3) $x=6$ (4) $x=1$

| 해결 전략 | $\log_a f(x)=\log_a g(x)$이면 $f(x)=g(x)$임을 이용한다.

(1) 밑의 조건에서 $2x>0$, $2x\neq1$이므로 $x>0$, $x\neq\frac{1}{2}$ ……㉠

$\log_{2x} 16=2$에서 로그의 정의에 의하여

$16=(2x)^2$, $4x^2=16$

$x^2=4$ $\quad \therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=2$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$, $x-3>0$이므로 $x>3$ ……㉠

$\log x+\log (x-3)=1$에서

$\log x(x-3)=1$, $\log (x^2-3x)=1$

로그의 정의에 의하여

$x^2-3x=10$, $x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0$ $\quad \therefore\ x=-2$ 또는 $x=5$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=5$

(3) 진수의 조건에서 $x^2-2x-15>0$, $x-3>0$이므로

(i) $x^2-2x-15>0$에서 $(x+3)(x-5)>0$

$x<-3$ 또는 $x>5$

(ii) $x-3>0$에서 $x>3$

(i), (ii)에서 $x>5$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}} (x^2-2x-15)+1=-\log_3 (x-3)$에서

$\log_{\frac{1}{3}} (x^2-2x-15)+1=\log_{\frac{1}{3}} (x-3)$

$\log_{\frac{1}{3}} (x^2-2x-15)=\log_{\frac{1}{3}} (x-3)-1$

$\log_{\frac{1}{3}} (x^2-2x-15)=\log_{\frac{1}{3}} (x-3)-\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$

$\log_{\frac{1}{3}} (x^2-2x-15)=\log_{\frac{1}{3}} 3(x-3)$

밑이 같으므로 $x^2-2x-15=3(x-3)$

$x^2-5x-6=0$, $(x+1)(x-6)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=6$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=6$

(4) 진수의 조건에서 $x+3>0$이므로 $x>-3$ ……㉠

$\log_2 (x+3)=\log_4 (x+3)+1$에서

$\log_2 (x+3)=\log_4 (x+3)+\log_4 4$

$\log_2 (x+3)=\log_{2^2} 4(x+3)$

$\log_2 (x+3)=\frac{1}{2}\log_2 4(x+3)$

$2\log_2 (x+3)=\log_2 4(x+3)$

$\log_2 (x+3)^2=\log_2 4(x+3)$

밑이 같으므로 $(x+3)^2=4(x+3)$

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=1$

02-1 답 (1) $x=\frac{1}{9}$ 또는 $x=27$ (2) $x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=25$

|해결 전략| $\log_a x=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ······㉠

$(\log_3 x)^2=\log_3 x+6$에서 $(\log_3 x)^2-\log_3 x-6=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-t-6=0$, $(t+2)(t-3)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=3$

$t=-2$일 때, $\log_3 x=-2$에서 $x=\frac{1}{9}$

$t=3$일 때, $\log_3 x=3$에서 $x=27$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는

$x=\frac{1}{9}$ 또는 $x=27$

(2) 진수와 밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$이므로

$0<x<1$ 또는 $x>1$ ······㉠

$\log_x 5=\frac{1}{\log_5 x}$이므로 $\log_5 x=t$로 놓으면

$t=\frac{2}{t}+1$, $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

$t=-1$일 때, $\log_5 x=-1$에서 $x=\frac{1}{5}$

$t=2$일 때, $\log_5 x=2$에서 $x=25$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는

$x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=25$

02-2 답 $x=\frac{1}{16}$ 또는 $x=1$

|해결 전략| 식을 변형한 후 $\log_2 x=t$로 치환하여 푼다.

진수의 조건에서 $x>0$ ······㉠

$\log_2 8x\times\log_2 2x=3$에서

$(\log_2 x+3)(\log_2 x+1)=3$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$(t+3)(t+1)=3$, $t^2+4t=0$

$t(t+4)=0$ $\therefore t=-4$ 또는 $t=0$

$t=-4$일 때, $\log_2 x=-4$에서 $x=\frac{1}{16}$

$t=0$일 때, $\log_2 x=0$에서 $x=1$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=\frac{1}{16}$ 또는 $x=1$

03-1 답 (1) $x=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$ (2) $x=10$

|해결 전략| (1) 주어진 식을 변형하여 양변에 로그를 취한다.
(2) 주어진 식을 변형하여 $3^{\log x}=t$로 치환한다.

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ······㉠

$x^{\log x}=\frac{100}{x}$에서 $x\times x^{\log x}=100$이므로

$x^{\log x+1}=100$

$x^{\log x+1}=100$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x+1}=2$, $(\log x+1)\times\log x=2$

$\therefore (\log x)^2+\log x-2=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2+t-2=0$, $(t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

$t=-2$일 때, $\log x=-2$에서 $x=\frac{1}{100}$

$t=1$일 때, $\log x=1$에서 $x=10$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ ······㉠

로그의 성질에 의하여 $x^{\log 3}=3^{\log x}$이므로 주어진 방정식은

$3^{\log x}\times3^{\log x}-3^{\log x}-6=0$

$\therefore (3^{\log x})^2-3^{\log x}-6=0$

$3^{\log x}=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-t-6=0$, $(t+2)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

$t=3$일 때, $3^{\log x}=3$에서

$\log x=1$ $\therefore x=10$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=10$

04-1 답 3

|해결 전략| 주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 $\log_3 x=t$로 치환한 후 얻은 방정식의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

$(\log_3 x)^2=\log_3 x+12$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-t-12=0$ ······㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=1$

즉, $\log_3\alpha\beta=1$ $\therefore \alpha\beta=3$

04-2 답 -1

|해결 전략| 주어진 방정식을 변형하고 $\log_3 x=t$로 치환한 후 얻은 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 상수 k의 값을 구한다.

$\log_3 x-2\log_x 3+k=0$에서 $\log_x 3=\frac{1}{\log_3 x}$이므로

$\log_3 x-\frac{2}{\log_3 x}+k=0$, $(\log_3 x)^2+k\log_3 x-2=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2+kt-2=0$ ······㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=\log_3\alpha\beta=-k$

이때, $\alpha\beta=3$이므로 $\log_3 3=-k$

$\therefore k=-1$

05-1 답 71.6 %

| 해결 전략 | 주어진 조건을 관계식에 대입해 본다.

지반 A, B의 유효수직응력을 각각 S_A, S_B, 저항력을 각각 R_A, R_B, 상대밀도를 각각 D_A, D_B라 하면

$S_A=1.44S_B$, $R_A=1.5R_B$, $D_B=65$

이므로

$65=-98+66\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}$, $\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}=10^{\frac{163}{66}}$

$\frac{R_A}{\sqrt{S_A}}=\frac{1.5R_B}{\sqrt{1.44S_B}}=\frac{5}{4}\times10^{\frac{163}{66}}$

따라서 구하는 지반 A의 상대밀도는

$$\begin{aligned}D_A&=-98+66\log\frac{R_A}{\sqrt{S_A}}\\&=-98+66\log\left(\frac{5}{4}\times10^{\frac{163}{66}}\right)\\&=-98+66\left(\log\frac{5}{4}+\log10^{\frac{163}{66}}\right)\\&=-98+66\left(\log\frac{10}{8}+\frac{163}{66}\right)\\&=-98+66\left\{(\log10-\log8)+\frac{163}{66}\right\}\\&=-98+66\left\{(1-3\log2)+\frac{163}{66}\right\}\\&=-98+66\left(0.1+\frac{163}{66}\right)\\&=71.6\,(\%)\end{aligned}$$

3 로그부등식

개념 확인 120쪽

1 (1) $x\ge3$ (2) $\frac{1}{4}<x<1$

1 (1) 진수의 조건에서 $x+3>0$, $2x>0$

$\therefore x>0$ ······㉠

밑 3은 1보다 크므로 $x+3\le2x$

$\therefore x\ge3$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\ge3$

(2) 진수의 조건에서 $x+2>0$, $4x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{4}$ ······㉠

밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로 $x+2>4x-1$

$\therefore x<1$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}<x<1$

STEP 1 개념 드릴

| 121쪽 |

개념 check

1-1 (1) $<$, 0 (2) 4, 3, 4 (3) 7, 3, 3

스스로 check

1-2 답 (1) $5<x\le25$ (2) $x>8$ (3) $x\ge3$ (4) $x>\frac{5}{9}$ (5) $3<x<4$ (6) $-1\le x<0$ 또는 $2<x\le3$ (7) $-3<x<-1$ 또는 $0<x<2$ (8) $\frac{4}{3}<x\le2$ 또는 $x\ge3$

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ······㉠

$1<\log_5 x\le2$에서 $\log_5 5<\log_5 x\le\log_5 25$

이때, 밑 5는 1보다 크므로 $5<x\le25$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $5<x\le25$

(2) 진수의 조건에서 $2x>0$ $\therefore x>0$ ······㉠

$\log_2 2x>4$에서 $\log_2 2x>\log_2 16$

이때, 밑 2는 1보다 크므로 $2x>16$ $\therefore x>8$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>8$

(3) 진수의 조건에서 $x+1>0$ $\therefore x>-1$ ······㉠

$\log_2(x+1)\ge2$에서 $\log_2(x+1)\ge\log_2 4$

이때, 밑 2는 1보다 크므로 $x+1\ge4$ $\therefore x\ge3$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\ge3$

(4) 진수의 조건에서 $2x-1>0$ $\therefore x>\frac{1}{2}$ ······㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)<2$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

이때, 밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로

$2x-1>\frac{1}{9}$ $\therefore x>\frac{5}{9}$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>\frac{5}{9}$

(5) 진수의 조건에서 $5-x>0$, $x-3>0$

$\therefore 3<x<5$ ······㉠

밑 $\frac{1}{5}$은 1보다 작으므로 $5-x>x-3$

$\therefore x<4$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<4$

(6) 진수의 조건에서 $x^2-2x>0$, $x(x-2)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>2$ ······㉠

밑 5는 1보다 크므로 $x^2-2x\le3$, $x^2-2x-3\le0$

$(x+1)(x-3)\le0$ $\therefore -1\le x\le3$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-1\le x<0$ 또는 $2<x\le3$

(7) 진수의 조건에서 $x^2+x>0$, $x(x+1)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>0$ ······㉠

밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로 $x^2+x<6$, $x^2+x-6<0$

$(x+3)(x-2)<0$ $\therefore -3<x<2$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-3<x<-1$ 또는 $0<x<2$

(8) 진수의 조건에서 $x^2-2x+2>0$, $3x-4>0$

$\therefore x>\frac{4}{3}$ ······㉠

밑 2는 1보다 크므로 $x^2-2x+2\ge3x-4$, $x^2-5x+6\ge0$

$(x-2)(x-3)\ge0$ $\therefore x\le2$ 또는 $x\ge3$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{4}{3}<x\le2$ 또는 $x\ge3$

STEP 2 필수 유형

| 122쪽~126쪽 |

01-1

답 (1) $0<x<\frac{1}{2}$ (2) $5<x<6$ (3) $3<x\le 4$ (4) $x\ge 2$

| 해결 전략 | $a>1$일 때 $\log_a f(x)<\log_a g(x)$이면 $0<f(x)<g(x)$이고, $0<a<1$일 때 $\log_a f(x)<\log_a g(x)$이면 $f(x)>g(x)>0$임을 이용한다.

(1) 진수의 조건에서 $1+x>0$, $1-2x>0$이므로

$-1<x<\frac{1}{2}$ ⋯⋯㉠

밑 10은 1보다 크므로

$1+x>1-2x$ $\quad \therefore x>0$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<\frac{1}{2}$

(2) 진수의 조건에서 $x^2-2x-15>0$, $3x-9>0$이므로

$x<-3$ 또는 $x>5$, $x>3$ $\quad \therefore x>5$ ⋯⋯㉠

밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로

$x^2-2x-15<3x-9$, $x^2-5x-6<0$

$(x+1)(x-6)<0$ $\quad \therefore -1<x<6$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $5<x<6$

(3) 진수의 조건에서 $x>0$, $x-3>0$

$\therefore x>3$ ⋯⋯㉠

$\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\ge -2$에서

$\log_{\frac{1}{2}} x(x-3)\ge \log_{\frac{1}{2}} 4$

이때, 밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로

$x(x-3)\le 4$, $x^2-3x-4\le 0$

$(x+1)(x-4)\le 0$ $\quad \therefore -1\le x\le 4$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x\le 4$

(4) 진수의 조건에서 $x+2>0$, $x>0$

$\therefore x>0$ ⋯⋯㉠

$\log_4 (x+2)\le \log_2 x$에서 $\frac{1}{2}\log_2 (x+2)\le \log_2 x$

$\log_2 (x+2)\le 2\log_2 x$, $\log_2 (x+2)\le \log_2 x^2$

이때, 밑 2는 1보다 크므로

$x+2\le x^2$, $x^2-x-2\ge 0$

$(x+1)(x-2)\ge 0$ $\quad \therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 2$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\ge 2$

02-1

답 (1) $\frac{1}{27}<x<\sqrt{3}$ (2) $\frac{1}{64}\le x\le 2$

| 해결 전략 | $\log_a x$ 꼴이 반복되는 로그부등식은 $\log_a x=t$로 치환하여 푼다.

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ⋯⋯㉠

$2(\log_3 x)^2+5\log_3 x-3<0$에서

$\log_3 x=t$로 놓으면 $2t^2+5t-3<0$, $(t+3)(2t-1)<0$

$\therefore -3<t<\frac{1}{2}$

따라서 $-3<\log_3 x<\frac{1}{2}$이므로 $\log_3 \frac{1}{27}<\log_3 x<\log_3 \sqrt{3}$

이때, 밑 3은 1보다 크므로 $\frac{1}{27}<x<\sqrt{3}$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{27}<x<\sqrt{3}$

(2) 진수의 조건에서 $4x>0$, $8x>0$이므로 $x>0$ ⋯⋯㉠

$\log_{\frac{1}{2}} 4x\times\log_{\frac{1}{2}} 8x\le 12$에서

$(\log_{\frac{1}{2}} 4+\log_{\frac{1}{2}} x)(\log_{\frac{1}{2}} 8+\log_{\frac{1}{2}} x)\le 12$

$(\log_{\frac{1}{2}} x-2)(\log_{\frac{1}{2}} x-3)\le 12$

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2-5\log_{\frac{1}{2}} x-6\le 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면 $t^2-5t-6\le 0$, $(t+1)(t-6)\le 0$

$\therefore -1\le t\le 6$

따라서 $-1\le \log_{\frac{1}{2}} x\le 6$이므로 $\log_{\frac{1}{2}} 2\le \log_{\frac{1}{2}} x\le \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$

이때, 밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로 $\frac{1}{64}\le x\le 2$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{64}\le x\le 2$

02-2

답 $\frac{1}{2}<x<16$

| 해결 전략 | 주어진 식을 $\log_2 x$ 꼴이 반복되는 형태로 변형하여 푼다.

진수의 조건에서 $x>0$ ⋯⋯㉠

$(3+\log_{\frac{1}{2}} x)\times\log_2 x+4>0$에서

$(3-\log_2 x)\times\log_2 x+4>0$

$-(\log_2 x)^2+3\log_2 x+4>0$

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x-4<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-3t-4<0$

$(t+1)(t-4)<0$ $\quad \therefore -1<t<4$

따라서 $-1<\log_2 x<4$이므로 $\log_2 \frac{1}{2}<\log_2 x<\log_2 16$

이때, 밑 2는 1보다 크므로 $\frac{1}{2}<x<16$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2}<x<16$

03-1

답 (1) $0<x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>27$ (2) $1<x<1000$

| 해결 전략 | 지수에 로그가 있을 때는 양변에 로그를 취하여 푼다.

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ⋯⋯㉠

$x^{\log_3 x}>27x^2$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}>\log_3 27x^2$, $\log_3 x\times\log_3 x>\log_3 27+\log_3 x^2$

$\log_3 x\times\log_3 x>3+2\log_3 x$

$\therefore (\log_3 x)^2-2\log_3 x-3>0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-2t-3>0$, $(t+1)(t-3)>0$

$\therefore t<-1$ 또는 $t>3$

따라서 $\log_3 x<-1$ 또는 $\log_3 x>3$이므로

$\log_3 x<\log_3 \frac{1}{3}$ 또는 $\log_3 x>\log_3 27$

이때, 밑 3은 1보다 크므로

$x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>27$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>27$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$x^{\log x}<x^3$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}<\log x^3$, $\log x\times\log x<3\log x$

$(\log x)^2-3\log x<0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-3t<0$

$t(t-3)<0$

$\therefore 0<t<3$

따라서 $0<\log x<3$이므로

$\log 1<\log x<\log 1000$

이때, 밑 10은 1보다 크므로 $1<x<1000$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<1000$

04-1 답 $\frac{1}{16}<a<16$

|해결 전략| 이차방정식이 허근을 가지려면 판별식 $D<0$이어야 함을 이용한다.

$\log_2 a$에서 진수의 조건에 의하여 $a>0$ ……㉠

이차방정식 $x^2-(\log_2 a)x+4=0$이 허근을 갖기 위해서는 판별식 $D<0$이어야 하므로

$D=(\log_2 a)^2-16<0$

$\log_2 a=t$로 놓으면

$t^2-16<0$, $(t+4)(t-4)<0$

$\therefore -4<t<4$

따라서 $-4<\log_2 a<4$이므로 $\log_2 \frac{1}{16}<\log_2 a<\log_2 16$

이때, 밑 2는 1보다 크므로 $\frac{1}{16}<a<16$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{16}<a<16$

04-2 답 $0<a<\frac{1}{10}$ 또는 $100<a<1000$ 또는 $a>1000$

|해결 전략| 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $D>0$이어야 함을 이용한다.

$\log a$에서 진수의 조건에 의하여 $a>0$ ……㉠

또, 이차방정식이므로 $3-\log a\neq0$ $\quad\therefore a\neq1000$ ……㉡

이차방정식 $(3-\log a)x^2+2(1-\log a)x+1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(1-\log a)^2-(3-\log a)>0$

$\therefore (\log a)^2-\log a-2>0$

$\log a=t$로 놓으면

$t^2-t-2>0$, $(t+1)(t-2)>0$

$\therefore t<-1$ 또는 $t>2$

따라서 $\log a<-1$ 또는 $\log a>2$이므로

$\log a<\log\frac{1}{10}$ 또는 $\log a>\log 100$

이때, 밑 10은 1보다 크므로

$a<\frac{1}{10}$ 또는 $a>100$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$0<a<\frac{1}{10}$ 또는 $100<a<1000$ 또는 $a>1000$

05-1 답 17시간 후

|해결 전략| 주어진 조건에 맞게 부등식을 세운다.

미생물 10마리가 분열을 시작하여 n시간 후에 미생물의 수가 처음으로 100만 마리 이상이 된다고 하면

$10\times2^n\geq10^6$

양변에 상용로그를 취하면

$\log(10\times2^n)\geq\log10^6$, $1+n\log2\geq6$

$\therefore n\geq\frac{5}{\log 2}=\frac{5}{0.3}=16.666\cdots$

따라서 미생물 10마리가 분열을 시작하여 처음으로 100만 마리 이상이 되는 것은 17시간 후이다.

STEP 3 유형 드릴

| 127쪽~129쪽 |

1-1 답 0

|해결 전략| 주어진 두 함수는 서로 역함수 관계임을 이용한다.

함수 $y=a\log_3(x+b)+c$의 그래프가 함수 $y=3^{x-1}+2$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=a\log_3(x+b)+c$는 함수 $y=3^{x-1}+2$의 역함수이다.

$y=3^{x-1}+2$에서 $3^{x-1}=y-2$

$x-1=\log_3(y-2)$ $\qquad\therefore x=\log_3(y-2)+1$

x와 y를 서로 바꾸면 함수 $y=3^{x-1}+2$의 역함수는

$y=\log_3(x-2)+1$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=1$이므로

$a+b+c=1+(-2)+1=0$

1-2 답 5

|해결 전략| 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g(a)=b$이면 $f(b)=a$임을 이용한다.

함수 $f(x)=3\log_2(x+3)-1$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(8)=a$라 하면 $f(a)=8$

$f(a)=3\log_2(a+3)-1=8$

$\log_2(a+3)=3$, $\log_2(a+3)=\log_2 8$

$a+3=8$이므로 $a=5$

$\therefore g(8)=5$

2-1 답 ⑤

|해결 전략| 함수 $y=\log_2(x-m)+n$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

①, ⑤ 함수 $y=\log_2(x-5)-3$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=5$이다.

③ $y=\log_2(x-5)-3$에 $x=6$을 대입하면 $y=-3$이므로 그래프는 점 $(6, -3)$을 지난다.

④ 밑 2가 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

2-2 답 ⑤

|해결 전략| 함수 $y=\log_a(-x)$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

함수 $y=\log_3(6-x)+2$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 정의역은 $\{x|x<6\}$이다.

ㄷ. $y=\log_3(6-x)+2$에 $x=3$을 대입하면 $y=3$이므로 그래프는 점 $(3, 3)$을 지난다.

3-1 답 $m=-\frac{1}{3}$, $n=3$

|해결 전략| 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 함수 $y=\log_a(x-m)+n$의 그래프를 얻을 수 있다.

$y=\log_3(27x+9)=\log_3 27\left(x+\frac{1}{3}\right)$

$=\log_3\left(x+\frac{1}{3}\right)+\log_3 27=\log_3\left(x+\frac{1}{3}\right)+3$

에서 함수 $y=\log_3(27x+9)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore$ $m=-\frac{1}{3}$, $n=3$

3-2 답 3

|해결 전략| 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=\log_a x$이다.

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+1$ ······㉠

또, ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-x=\log_{\frac{1}{3}}(y-1)+1$

$\log_3(y-1)=x+1$, $y-1=3^{x+1}$

$\therefore$ $y=3\times3^x+1$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로 $ab=3$

4-1 답 (1) 1, $\log_3 7$, $\log_9 100$ (2) -2, $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}36$, $\log_{\frac{1}{3}}5$

|해결 전략| 밑을 같게 하여 진수의 대소를 비교한다.

(1) $1=\log_3 3$, $\log_9 100=\log_3 10$

이때, $3<7<10$이고 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $\log_3 3<\log_3 7<\log_3 10$

따라서 작은 것부터 차례로 나열하면

1, $\log_3 7$, $\log_9 100$

(2) $-2=\log_{\frac{1}{3}}9$, $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}36=\log_{\frac{1}{3}}6$

이때, $5<6<9$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\log_{\frac{1}{3}}9<\log_{\frac{1}{3}}6<\log_{\frac{1}{3}}5$

따라서 작은 것부터 차례로 나열하면

-2, $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}36$, $\log_{\frac{1}{3}}5$

4-2 답 ④

|해결 전략| $a>1$일 때 $0<x_1<x_2$이면 $\log_a x_1<\log_a x_2$, $0<a<1$일 때 $0<x_1<x_2$이면 $\log_a x_1>\log_a x_2$임을 이용한다.

$y=\log_a x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이고 $0<a<b<1$이므로

$0<\log_a b<\log_a a=1$, $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}>1$

$\therefore$ $A<B$ ······㉠

또, $\frac{b}{a}>1$, $0<b<1$이므로 $\log_a\frac{b}{a}<\log_a b$

$\therefore$ $C<A$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $C<A<B$

5-1 답 30

|해결 전략| 두 함수 $y=3^x-1$과 $y=\log_3(x+1)$이 서로 역함수 관계임을 이용하여 점 B, C, D의 좌표를 구해 본다.

점 $A(2, 8)$을 지나고 기울기가 -1인 직선은 직선 $y=x$와 수직으로 만나고 두 함수 $y=3^x-1$과 $y=\log_3(x+1)$은 서로 역함수 관계이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 점 A, B도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $B(8, 2)$

$A(2, 8)$, $B(8, 2)$이므로 $C(2, 0)$, $D(8, 0)$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times(8+2)\times6=30$

5-2 답 $(6, 2)$

|해결 전략| 점 A의 y좌표가 2임을 이용한다.

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 점 A의 좌표를 $(t, \log_2 t)$라 하면

$\log_2 t=2$ $\quad\therefore$ $t=2^2=4$

따라서 $A(4, 2)$이므로 점 D의 좌표는 $(6, 2)$이다.

6-1 답 5

|해결 전략| 밑이 1보다 큰지 작은지 확인하여 푼다.

함수 $y=\log_2(x^2-2x+5)$에서 밑 2는 1보다 크므로 x^2-2x+5의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$f(x)=x^2-2x+5$로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2+4$

이므로 $-1\le x\le2$에서 $4\le f(x)\le8$

따라서 $-1\le x\le2$에서 함수 $y=\log_2 f(x)$는

$f(x)=8$일 때 최대이고, 최댓값은 $M=\log_2 8=3$

$f(x)=4$일 때 최소이고, 최솟값은 $m=\log_2 4=2$

$\therefore$ $M+m=3+2=5$

6-2 답 13

|해결 전략| $\log_a x=t$로 치환하여 이차함수의 최대, 최소를 이용한다.

$y=\log_2 x\times\log_{\frac{1}{2}} x+2\log_2 x+10$에서

$y=-(\log_2 x)^2+2\log_2 x+10$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$y=-t^2+2t+10=-(t-1)^2+11$

또, $1\le x\le 16$에서 $\log_2 1\le\log_2 x\le\log_2 16$

$\therefore 0\le t\le 4$

따라서 $0\le t\le 4$에서 함수 $y=-(t-1)^2+11$은

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은 $M=-(1-1)^2+11=11$

$t=4$일 때 최소이고, 최솟값은 $m=-(4-1)^2+11=2$

$\therefore M+m=11+2=13$

7-1 답 2

|해결 전략| 밑을 같게 한 후 진수에 대한 방정식을 세운다.

진수의 조건에서 $x-4>0$, $x-1>0$이므로

$x>4$ ……㉠

$\log_2(x-4)=1+\log_4(x-1)$에서

$\log_2(x-4)=1+\frac{1}{2}\log_2(x-1)$

$2\log_2(x-4)=2+\log_2(x-1)$

즉, $\log_2(x-4)^2=\log_2 4(x-1)$이므로

$(x-4)^2=4(x-1)$, $x^2-8x+16=4x-4$

$x^2-12x+20=0$, $(x-2)(x-10)=0$　　$\therefore x=2$ 또는 $x=10$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=10$이므로 $\alpha=10$

$\therefore \log_3(\alpha-1)=\log_3(10-1)=\log_3 9=2$

7-2 답 243

|해결 전략| $\log_3 x=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$(\log_3 x)^2-\log_3 x^5+4=0$에서 $(\log_3 x)^2-5\log_3 x+4=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-5t+4=0$, $(t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=4$

$t=1$일 때, $\log_3 x=1$에서 $x=3$

$t=4$일 때, $\log_3 x=4$에서 $x=81$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=3$ 또는 $x=81$

$\therefore \alpha\beta=3\times81=243$

8-1 답 2

|해결 전략| 밑을 같게 한 후 진수에 대한 부등식을 세운다. 이때, (밑)>1이면 부등호의 방향은 그대로이다.

진수의 조건에서 $x-1>0$, $3-x>0$이므로

$1<x<3$ ……㉠

$\log_2(x-1)<\log_4(3-x)$에서

$\log_2(x-1)<\frac{1}{2}\log_2(3-x)$

$2\log_2(x-1)<\log_2(3-x)$

$\log_2(x-1)^2<\log_2(3-x)$

이때, 밑 2는 1보다 크므로

$(x-1)^2<3-x$, $x^2-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0$　　$\therefore -1<x<2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로 $\alpha\beta=2$

8-2 답 3

|해결 전략| 밑을 같게 한 후 진수에 대한 부등식을 세운다. 이때, $0<$(밑)<1이면 부등호의 방향은 반대가 된다.

진수의 조건에서 $x-1>0$, $7-x>0$이므로

$1<x<7$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)<\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(7-x)$에서

$2\log_{\frac{1}{3}}(x-1)<\log_{\frac{1}{3}}(7-x)$

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)^2<\log_{\frac{1}{3}}(7-x)$

이때, 밑 $\frac{1}{3}$은 1보다 작으므로

$(x-1)^2>7-x$, $x^2-x-6>0$

$(x+2)(x-3)>0$　　$\therefore x<-2$ 또는 $x>3$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<7$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 4, 5, 6의 3이다.

9-1 답 2

|해결 전략| $\log_2 x=t$로 치환하여 t에 대한 이차부등식을 푼다.

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$(\log_2 x)^2+\log_2 x-2\le0$에서

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+t-2\le0$, $(t+2)(t-1)\le0$

$\therefore -2\le t\le 1$

따라서 $-2\le\log_2 x\le1$이므로 $\log_2\frac{1}{4}\le\log_2 x\le\log_2 2$

이때, 밑 2는 1보다 크므로 $\frac{1}{4}\le x\le2$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}\le x\le2$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 1, 2의 2이다.

9-2 답 $\frac{33}{8}$

|해결 전략| 주어진 식을 변형한 후 $\log_2 x=t$로 치환하여 이차부등식을 푼다.

진수의 조건에서 $8x>0$, $\frac{x}{4}>0$이므로 $x>0$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}} 8x\times\log_2\frac{x}{4}>0$에서

$\log_2 8x\times\log_2\frac{x}{4}<0$

$(\log_2 8+\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 4)<0$

$\therefore (\log_2 x+3)(\log_2 x-2)<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$(t+3)(t-2)<0$　　$\therefore -3<t<2$

따라서 $-3<\log_2 x<2$이므로 $\log_2\frac{1}{8}<\log_2 x<\log_2 4$

이때, 밑 2는 1보다 크므로

$\frac{1}{8}<x<4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{8}<x<4$

따라서 $\alpha=\frac{1}{8}$, $\beta=4$이므로 $\alpha+\beta=\frac{1}{8}+4=\frac{33}{8}$

10-1 답 $\frac{1}{8}$

|해결 전략| 양변에 밑이 2인 로그를 취한다.

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$x^{\log_2 x}=\frac{16}{x^3}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 \frac{16}{x^3}$, $\log_2 x\times\log_2 x=\log_2 16-\log_2 x^3$

$\therefore (\log_2 x)^2+3\log_2 x-4=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2+3t-4=0$

$(t+4)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

$t=-4$일 때, $\log_2 x=-4$에서 $x=\frac{1}{16}$

$t=1$일 때, $\log_2 x=1$에서 $x=2$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 근은 $x=\frac{1}{16}$ 또는 $x=2$이므로 모든 근의 곱은 $\frac{1}{16}\times2=\frac{1}{8}$

10-2 답 10

|해결 전략| 주어진 식을 변형하여 양변에 밑이 2인 로그를 취한다.

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$8x^{\log_2 x}<x^4$에서 $x^{\log_2 x}<\frac{x^4}{8}$

$x^{\log_2 x}<\frac{x^4}{8}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}<\log_2 \frac{x^4}{8}$, $\log_2 x\times\log_2 x<4\log_2 x-3$

$\therefore (\log_2 x)^2-4\log_2 x+3<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-4t+3<0$

$(t-1)(t-3)<0$ $\quad\therefore 1<t<3$

따라서 $1<\log_2 x<3$이므로 $\log_2 2<\log_2 x<\log_2 8$

이때, 밑 2는 1보다 크므로

$2<x<8$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x<8$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=8$이므로 $\alpha+\beta=2+8=10$

11-1 답 5

|해결 전략| 주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 $\log_5 x=t$로 치환한 후 얻은 방정식의 두 근은 $\log_5\alpha$, $\log_5\beta$이다.

$(\log_5 x)^2=\log_5 x+18$에서 $\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2-t-18=0$ ……㉠

이때, 주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_5\alpha$, $\log_5\beta$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_5\alpha+\log_5\beta=1$

즉, $\log_5\alpha\beta=1$ $\quad\therefore \alpha\beta=5$

11-2 답 $\frac{1}{4}<k<4$

|해결 전략| 이차방정식이 허근을 가지려면 판별식 $D<0$이어야 한다.

진수의 조건에서 $k>0$ ……㉠

이차방정식 $x^2-(3\log_2 k)x+9=0$이 허근을 갖기 위해서는 판별식 $D<0$이어야 하므로

$D=(3\log_2 k)^2-4\times9=9(\log_2 k)^2-36<0$

$\log_2 k=t$로 놓으면

$9t^2-36<0$, $9(t+2)(t-2)<0$

$\therefore -2<t<2$

따라서 $-2<\log_2 k<2$이므로 $\log_2\frac{1}{4}<\log_2 k<\log_2 4$

이때, 밑 2는 1보다 크므로

$\frac{1}{4}<k<4$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{4}<k<4$

12-1 답 31.62

|해결 전략| 동물 B의 몸무게가 W이면 동물 A의 몸무게는 $100W$임을 이용한다.

동물 A의 표준대사량을 E_A, 동물 B의 표준대사량을 E_B,

$E_B=kW^{\frac{3}{4}}$이라 하면

$E_A=k(100W)^{\frac{3}{4}}=100^{\frac{3}{4}}E_B$

따라서 $\alpha=100^{\frac{3}{4}}$이므로 양변에 상용로그를 취하면

$\log\alpha=\frac{3}{4}\log 100=1.5=1+0.5$

$\quad=\log 10+\log 3.162=\log 31.62$

$\therefore \alpha=31.62$

12-2 답 4초 후

|해결 전략| 주어진 조건에 맞게 부등식을 세운다.

자동차의 속력이 브레이크를 밟고 t초 후 80 km/h 이하가 된다고 하면

$120\times0.9^t\le80$, $0.9^t\le\frac{2}{3}$

양변에 상용로그를 취하면

$t\log 0.9\le\log\frac{2}{3}$

$t(2\log 3-1)\le\log 2-\log 3$

$\therefore t\ge\frac{\log 2-\log 3}{2\log 3-1}=\frac{0.3010-0.4771}{0.9542-1}=3.84\cdots$

따라서 이 자동차가 브레이크를 작동시킨 후 속력이 80 km/h 이하가 되는 것은 약 4초 후이다.

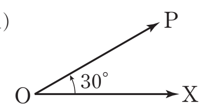
5 | 삼각함수

1 일반각

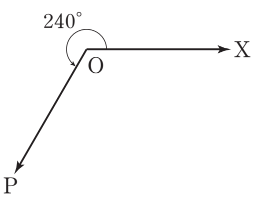
개념 확인 132쪽~134쪽

1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 풀이 참조
2 (1) $360^\circ \times n+330^\circ$($n$은 정수) (2) $360^\circ \times n+150^\circ$($n$은 정수)
3 (1) 제2사분면 (2) 제4사분면

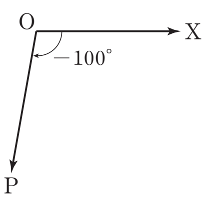
1 (1)



(2)



(3)



2 (1) $330^\circ=360^\circ\times 0+330^\circ$이므로 일반각은
$360^\circ \times n+330^\circ$($n$은 정수)
(2) $-570^\circ=360^\circ\times(-2)+150^\circ$이므로 일반각은
$360^\circ \times n+150^\circ$($n$은 정수)

3 (1) $500^\circ=360^\circ\times 1+140^\circ$
이므로 500°는 제2사분면의 각이다.
(2) $-420^\circ=360^\circ\times(-2)+300^\circ$
이므로 -420°는 제4사분면의 각이다.

STEP 1 개념 드릴 | 136쪽 |

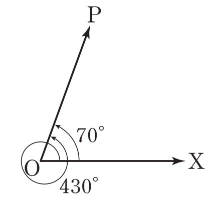
개념 check

1-1 (1) 210 (2) 60
2-1 (1) 1 (2) 100, 2 (3) 230, 3

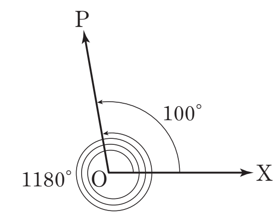
스스로 check

1-2 답 (1) 그림은 풀이 참조, $360^\circ \times n+70^\circ$($n$은 정수)
(2) 그림은 풀이 참조, $360^\circ \times n+100^\circ$($n$은 정수)
(3) 그림은 풀이 참조, $360^\circ \times n+130^\circ$($n$은 정수)
(4) 그림은 풀이 참조, $360^\circ \times n+320^\circ$($n$은 정수)

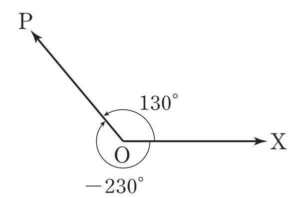
(1) 430°를 나타내는 동경 OP를 그리면 오른쪽 그림과 같다.
이때, $430^\circ=360^\circ\times 1+70^\circ$
이므로 일반각은
$360^\circ \times n+70^\circ$($n$은 정수)



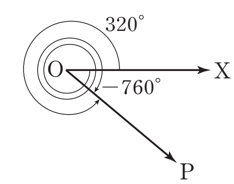
(2) 1180°를 나타내는 동경 OP를 그리면 오른쪽 그림과 같다.
이때, $1180^\circ=360^\circ\times 3+100^\circ$
이므로 일반각은
$360^\circ \times n+100^\circ$($n$은 정수)



(3) -230°를 나타내는 동경 OP를 그리면 오른쪽 그림과 같다.
이때,
$-230^\circ=360^\circ\times(-1)+130^\circ$
이므로 일반각은
$360^\circ \times n+130^\circ$($n$은 정수)



(4) -760°를 나타내는 동경 OP를 그리면 오른쪽 그림과 같다.
이때,
$-760^\circ=360^\circ\times(-3)+320^\circ$
이므로 일반각은
$360^\circ \times n+320^\circ$($n$은 정수)



2-2 답 (1) 제2사분면 (2) 제4사분면 (3) 제2사분면 (4) 제3사분면
(1) $470^\circ=360^\circ\times 1+110^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.
(2) $1720^\circ=360^\circ\times 4+280^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.
(3) $-225^\circ=360^\circ\times(-1)+135^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.
(4) $-880^\circ=360^\circ\times(-3)+200^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

STEP 2 필수 유형 | 137쪽~138쪽 |

01-1 답 제2사분면 또는 제4사분면

|해결 전략| 각 2θ의 범위를 일반각으로 나타낸다.

각 2θ가 제4사분면의 각이므로
$360^\circ \times n+270^\circ<2\theta<360^\circ\times n+360^\circ$ (n은 정수)

$$\therefore\ 360^\circ\times\frac{n}{2}+135^\circ<\theta<360^\circ\times\frac{n}{2}+180^\circ$$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,
$360^\circ\times k+135^\circ<\theta<360^\circ\times k+180^\circ$
이므로 각 θ는 제2사분면의 각이다.
(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$$360^\circ\times\frac{2k+1}{2}+135^\circ<\theta<360^\circ\times\frac{2k+1}{2}+180^\circ$$

$360^\circ\times k+315^\circ<\theta<360^\circ\times k+360^\circ$
이므로 각 θ는 제4사분면의 각이다.
(i), (ii)에서 각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

02-1 답 (1) $120°$ (2) $144°$

|해결 전략| 두 동경의 위치에 따른 두 각의 관계식을 구한다.

(1) 각 2θ를 나타내는 동경과 각 8θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$8\theta-2\theta=360°\times n$ (n은 정수)

$6\theta=360°\times n$ $\quad\therefore \theta=60°\times n$

이때, $90°<\theta<180°$이므로 $90°<60°\times n<180°$

$\therefore \frac{3}{2}<n<3$

n은 정수이므로 $n=2$

$\therefore \theta=60°\times 2=120°$

(2) 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=360°\times n$ (n은 정수)

$5\theta=360°\times n$ $\quad\therefore \theta=72°\times n$

이때, $90°<\theta<180°$이므로 $90°<72°\times n<180°$

$\therefore \frac{5}{4}<n<\frac{5}{2}$

n은 정수이므로 $n=2$

$\therefore \theta=72°\times 2=144°$

2 호도법

개념 확인 139쪽~140쪽

1 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{2}{3}\pi$ (3) $150°$ (4) $270°$

2 (1) 2π (2) 8π

1 (1) $45°=45\times 1°=45\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}$

(2) $120°=120\times 1°=120\times\frac{\pi}{180}=\frac{2}{3}\pi$

(3) $\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi\times\frac{180°}{\pi}=150°$

(4) $\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi\times\frac{180°}{\pi}=270°$

2 (1) $l=8\times\frac{\pi}{4}=2\pi$

(2) $S=\frac{1}{2}\times 8^2\times\frac{\pi}{4}=8\pi$

STEP 1 개념 드릴 | 141쪽 |

개념 check

1-1 (1) $\frac{3}{5}\pi$ (2) $\frac{10}{9}\pi$ (3) $36°$ (4) $15°$

2-1 (1) $\frac{5}{6}\pi$, 10π (2) $\frac{2}{3}\pi$, 12π

스스로 check

1-2 답 (1) $\frac{7}{6}\pi$ (2) $-\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{36}{5}\pi$ (4) $-960°$ (5) $135°$ (6) $1260°$

(1) $210°=210\times 1°=210\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{6}\pi$

(2) $-60°=-60\times 1°=-60\times\frac{\pi}{180}=-\frac{\pi}{3}$

(3) $1296°=1296\times 1°=1296\times\frac{\pi}{180}=\frac{36}{5}\pi$

(4) $-\frac{16}{3}\pi=-\frac{16}{3}\pi\times\frac{180°}{\pi}=-960°$

(5) $\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi\times\frac{180°}{\pi}=135°$

(6) $7\pi=7\pi\times\frac{180°}{\pi}=1260°$

2-2 답 (1) $\frac{5}{2}\pi$ (2) $\frac{75}{2}\pi$

(1) $90°=90\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{2}$이므로 부채꼴의 호의 길이는

$5\times\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi$

(2) 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 10^2\times\frac{3}{4}\pi=\frac{75}{2}\pi$

STEP 2 필수 유형 | 142쪽 |

01-1 답 $r=4$, $\theta=\frac{\pi}{2}$

|해결 전략| 부채꼴의 호의 길이와 넓이 사이의 관계를 이용한다.

부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $4\pi=\frac{1}{2}\times r\times 2\pi$

$\therefore r=4$

또, $l=r\theta$에서 $2\pi=4\theta$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$

01-2 답 반지름의 길이: 20, 부채꼴의 넓이의 최댓값: 400

|해결 전략| 부채꼴의 넓이를 반지름의 길이에 대한 이차함수로 나타낸다.

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면

$l=80-2r$ $(0<r<40)$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(80-2r)$

$=-r^2+40r$

$=-(r-20)^2+400$

따라서 $r=20$일 때, 부채꼴의 넓이 S의 최댓값은 400이다.

3 삼각함수

개념 확인 143쪽~146쪽

1 $\sin B=\frac{8}{17}$, $\cos B=\frac{15}{17}$, $\tan B=\frac{8}{15}$

2 (1) $\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\tan\theta=4$

(2) $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\theta=-\frac{1}{2}$

(3) $\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$, $\tan\theta=\frac{12}{5}$

(4) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

3 (1) 제3사분면 (2) 제2사분면

4 (1) $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (2) $-\frac{3}{8}$

1 $\triangle$ADC에서 $\overline{AC}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

또, $\triangle$ABC에서 $\overline{BC}=\sqrt{17^2-8^2}=15$

$\therefore \sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{8}{17}$, $\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{15}{17}$,

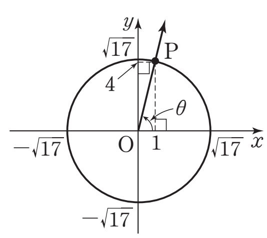
$\tan B=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{8}{15}$

2 (1) 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{17}}$,

$\tan\theta=4$

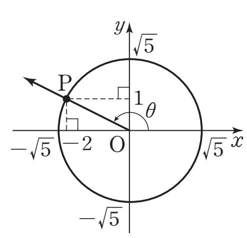


(2) 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\tan\theta=-\frac{1}{2}$



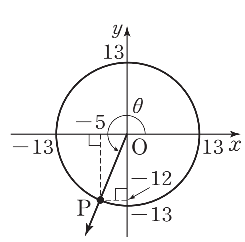
(3) 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=13$

이므로

$\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$,

$\tan\theta=\frac{12}{5}$

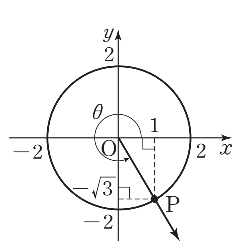


(4) 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$,

$\tan\theta=-\sqrt{3}$



3 (1) $\sin\theta\cos\theta>0$에서 각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이고, $\cos\theta\tan\theta<0$에서 각 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다. 따라서 두 조건을 동시에 만족시키는 각 θ는 제3사분면의 각이다.

(2) $\cos\theta\tan\theta>0$에서 각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\sin\theta\tan\theta<0$에서 각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다. 따라서 두 조건을 동시에 만족시키는 각 θ는 제2사분면의 각이다.

4 (1) $\sin\theta=\frac{1}{3}$일 때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

그런데 각 θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

또, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서

$\tan\theta=\frac{1}{3}\div\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

이때, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

STEP 1 개념 드릴 | 147쪽~149쪽 |

개념 check

1-1 -1, -1, $\sqrt{5}$, $-\frac{1}{2}$

2-1 1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

3-1 (1) 1, $>$, $>$, $>$ (2) 240, 3, $<$, $<$, $>$

4-1 (1) 2, 2, 2 (2) 3, 3, 3

5-1 $\cos^2\theta$, $\cos^2\theta$, $\frac{15}{16}$, $>$, $\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\frac{\sqrt{15}}{15}$

6-1 (1) 제곱, $\sin^2\theta$, $\frac{3}{2}$, 1, 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$

(2) 통분, $\sin\theta+\cos\theta$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $2\sqrt{6}$

스스로 check

1-2 답 (1) $\sin\theta=-\frac{5}{\sqrt{41}}$, $\cos\theta=-\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\tan\theta=\frac{5}{4}$

(2) $\sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan\theta=-2$

(3) $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\theta=-\frac{2}{3}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

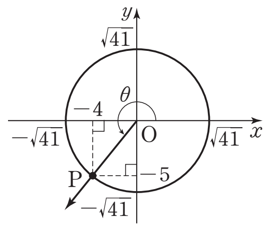
(1) 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+(-5)^2}=\sqrt{41}$

이므로

$\sin\theta=-\frac{5}{\sqrt{41}}$, $\cos\theta=-\frac{4}{\sqrt{41}}$,

$\tan\theta=\frac{5}{4}$



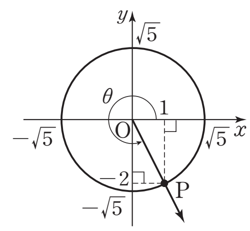
(2) 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

이므로

$\sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\tan\theta=-2$



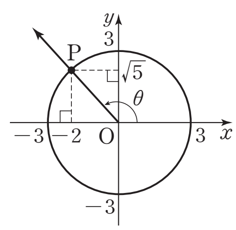
(3) 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-2)^2+(\sqrt{5})^2}=3$

이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\theta=-\frac{2}{3}$,

$\tan\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$



2-2 답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

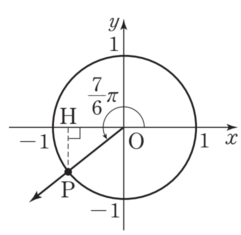
(1) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 단위원과 $\theta=\frac{7}{6}\pi$를 나타내는 동경의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

직각삼각형 POH에서 $\overline{OP}=1$,

$\angle POH=\frac{\pi}{6}$이므로 점 P의 좌표는

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$이다.

$\therefore\ \sin\frac{7}{6}\pi=-\frac{1}{2}$



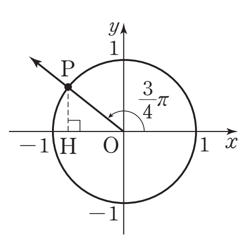
(2) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 단위원과 $\theta=\frac{3}{4}\pi$를 나타내는 동경의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

직각삼각형 POH에서 $\overline{OP}=1$,

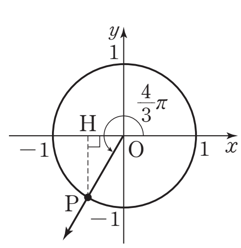
$\angle POH=\frac{\pi}{4}$이므로 점 P의 좌표는

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

$\therefore\ \cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$



(3) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 단위원과 $\theta=\frac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 POH에서 $\overline{OP}=1$,

$\angle POH=\frac{\pi}{3}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

$\therefore\ \tan\frac{4}{3}\pi=\sqrt{3}$

3-2 답 (1) $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

(2) $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

(3) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

(4) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

(1) $\theta=560^\circ=360^\circ\times1+200^\circ$에서 560°는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

(2) $\theta=\frac{7}{3}\pi=2\pi+\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{7}{3}\pi$는 제1사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

(3) $\theta=-25^\circ$는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

(4) $\theta=-\frac{7}{6}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{5}{6}\pi$에서 $-\frac{7}{6}\pi$는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

4-2 답 (1) 제2사분면 (2) 제3사분면

(3) 제2사분면 또는 제4사분면

(4) 제1사분면 또는 제2사분면

(1) $\sin\theta>0$에서 각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고,

$\tan\theta<0$에서 각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로

각 θ는 제2사분면의 각이다.

(2) $\cos\theta<0$에서 각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이고,

$\tan\theta>0$에서 각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이므로

각 θ는 제3사분면의 각이다.

(3) $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로

각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(4) $\cos\theta\tan\theta>0$에서

$\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로

각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

5-2 답 (1) $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

(2) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

(1) $\sin\theta=-\frac{4}{5}$일 때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

그런데 각 θ가 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{3}{5}$

또, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서 $\tan\theta=\left(-\frac{4}{5}\right)\div\frac{3}{5}=-\frac{4}{3}$

(2) $\cos\theta=-\frac{1}{2}$일 때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

그런데 각 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

또, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서 $\tan\theta=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$

6-2 답 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $-\frac{4}{3}$ (3) $\frac{8}{3}$

(1) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

이때, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

(2) $\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}$을 통분하면

$\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

이때, (1)에서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$이므로

$\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\left(-\frac{1}{2}\right)\div\frac{3}{8}=-\frac{4}{3}$

(3) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$\frac{1}{\tan\theta}+\tan\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

이때, (1)에서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$이므로

$\frac{1}{\tan\theta}+\tan\theta=\frac{8}{3}$

STEP 2 필수 유형 | 150쪽~154쪽 |

01-1 답 $\frac{3}{4}$

|해결 전략| $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이를 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.

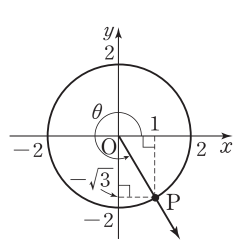
오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

$\therefore\ (\sin\theta-\tan\theta)^2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)^2$

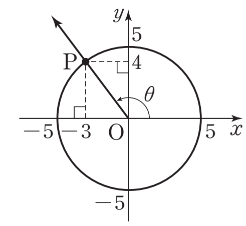
$=\frac{3}{4}$



01-2 답 1

|해결 전략| 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원을 그려 동경과 원의 교점의 좌표를 구한다.

각 θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta=\frac{4}{5}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원을 그리면 각 θ를 나타내는 동경과 원의 교점 P의 좌표는 $(-3,\ 4)$이다.



따라서 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$이므로

$5\cos\theta-3\tan\theta=5\times\left(-\frac{3}{5}\right)-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)=1$

02-1 답 $2\cos\theta$

|해결 전략| 각 θ에 대한 삼각함수의 값의 부호를 이용하여 절댓값 기호 안의 식의 부호를 구한다.

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\sin\theta-\cos\theta<0$

즉, $|\sin\theta|=-\sin\theta$, $|\cos\theta|=\cos\theta$,

$|\sin\theta-\cos\theta|=-(\sin\theta-\cos\theta)=-\sin\theta+\cos\theta$

$\therefore\ |\cos\theta|+|\sin\theta-\cos\theta|-|\sin\theta|$

$=\cos\theta-\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta=2\cos\theta$

02-2 답 $2\sin\theta$

|해결 전략| 주어진 조건을 만족시키는 각 θ가 제몇 사분면에 위치하는지 구한다.

$\frac{\sin\theta}{\tan\theta}<0$, $\sin\theta-\tan\theta>0$이므로

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$

즉, 각 θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore\ \sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}-\sqrt{(\cos\theta+\tan\theta)^2}+\sqrt{(\tan\theta-\sin\theta)^2}$

$=|\sin\theta-\cos\theta|-|\cos\theta+\tan\theta|+|\tan\theta-\sin\theta|$

$=\sin\theta-\cos\theta+(\cos\theta+\tan\theta)-(\tan\theta-\sin\theta)$

$=2\sin\theta$

03-1 답 $\frac{1}{\tan\theta}$

|해결 전략| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\frac{\tan\theta\sin\theta}{\tan\theta-\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}-\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$

03-2 답 1

|해결 전략| $\theta=20^\circ$로 생각하고, 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

$\tan^2 20^\circ+(1-\tan^4 20^\circ)\cos^2 20^\circ$

$=\dfrac{\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}+\left(1-\dfrac{\sin^4 20^\circ}{\cos^4 20^\circ}\right)\cos^2 20^\circ$

$=\dfrac{\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}+\dfrac{\cos^4 20^\circ-\sin^4 20^\circ}{\cos^4 20^\circ}\times\cos^2 20^\circ$

$=\dfrac{\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}+\dfrac{(\cos^2 20^\circ+\sin^2 20^\circ)(\cos^2 20^\circ-\sin^2 20^\circ)}{\cos^2 20^\circ}$

$=\dfrac{\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}+\dfrac{\cos^2 20^\circ-\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}$

$=\dfrac{\cos^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}=1$

LECTURE

$\cos^4 20^\circ-\sin^4 20^\circ$에서 인수분해 공식을 이용

➡ $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

04-1 답 $\dfrac{13}{27}$

|해결 전략| 삼각함수 사이의 관계와 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+3\times\dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{1}{27}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{13}{27}$

LECTURE

곱셈 공식의 변형

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

04-2 답 $-\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

|해결 전략| 삼각함수 사이의 관계와 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{3}{2}$

이때, 각 θ가 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

즉, $\sin\theta+\cos\theta<0$이므로 $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^3-3\times\dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

$=-\dfrac{3\sqrt{6}}{4}+\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

$=-\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

05-1 답 8

|해결 전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=a$, $\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2$

$\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=a$에서

$a=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2(\sin\theta+\cos\theta)$

$\therefore a^2=4(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=4(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=4(1+2\sin\theta\cos\theta)$

$=4\left(1+2\times\dfrac{1}{2}\right)=8$

LECTURE

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

05-2 답 $-\dfrac{20}{3}$

|해결 전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{4}{5}$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{a}{5}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$에서

$\dfrac{16}{25}=1+2\times\dfrac{a}{5}$ $\quad\therefore a=-\dfrac{9}{10}$

$\therefore \dfrac{1}{a}+\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{1}{a}+\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{a}+\dfrac{5}{a}=\dfrac{6}{a}$

$=6\times\left(-\dfrac{10}{9}\right)$

$=-\dfrac{20}{3}$

1-1 답 제2사분면 또는 제4사분면

| 해결 전략 | 각 $\frac{\theta}{2}$의 범위를 일반각으로 나타낸다.

각 θ는 제3사분면의 각이므로

$2n\pi+\pi<\theta<2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)

$\therefore\ n\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{3}{4}\pi$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{3}{4}\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\frac{3}{2}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{7}{4}\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{2}$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

1-2 답 제1사분면

| 해결 전략 | 각 $\frac{\theta}{3}$의 범위를 일반각으로 나타낸다.

각 θ는 제4사분면의 각이므로

$2n\pi+\frac{3}{2}\pi<\theta<2n\pi+2\pi$ (n은 정수)

$\therefore\ \frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{3}<\frac{2n}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{2}{3}\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\frac{7}{6}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{4}{3}\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\frac{11}{6}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+2\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재하지 않는 사분면은 제1사분면이다.

2-1 답 π

| 해결 전략 | 두 각의 동경의 위치에 따른 관계식을 구한다.

각 θ를 나타내는 동경과 각 11θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$11\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수), $10\theta=2n\pi$ $\qquad\therefore\ \theta=\frac{n\pi}{5}$

이때, $0<\theta<\pi$이므로 $0<\frac{n\pi}{5}<\pi$ $\qquad\therefore\ 0<n<5$

n은 정수이므로 $n=1, 2, 3, 4$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{5}, \frac{2}{5}\pi, \frac{3}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{5}$, $\beta=\frac{4}{5}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{5}+\frac{4}{5}\pi=\pi$

2-2 답 25

| 해결 전략 | 두 각의 동경의 위치에 따른 관계식을 구한다.

각 θ와 각 101θ가 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로 $101\theta-\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$100\theta=(2n+1)\pi$ $\qquad\therefore\ \theta=\frac{2n+1}{100}\pi$

이때, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\frac{2n+1}{100}\pi<\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ -\frac{1}{2}<n<\frac{49}{2}$

n은 정수이므로 $n=0, 1, 2, \cdots, 24$

$\therefore\ \theta=\frac{1}{100}\pi, \frac{3}{100}\pi, \cdots, \frac{49}{100}\pi$

따라서 조건을 만족시키는 각 θ의 개수는 25개이다.

3-1 답 $\frac{5}{3}\pi+2$

| 해결 전략 | 부채꼴의 호의 길이를 l, 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이는 $l+2r$임을 이용한다.

부채꼴의 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5}{3}\pi$이므로

호의 길이는 $1\times\frac{5}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는 $\frac{5}{3}\pi+2$

3-2 답 $18\pi^2$

| 해결 전략 | 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이는 $r\theta$, 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$임을 이용한다.

잘라 낸 부채꼴의 호의 길이가 2π이므로

$2\pi=r\times\frac{2}{3}\pi$ $\qquad\therefore\ r=3$

잘라 낸 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{2}{3}\pi=3\pi$ $\qquad\therefore\ b=3\pi$

잘라 내고 남은 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3^2\times\left(2\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=6\pi$ $\qquad\therefore\ a=6\pi$

$\therefore\ ab=6\pi\times3\pi=18\pi^2$

4-1 답 100 m^2

| 해결 전략 | 부채꼴의 넓이를 반지름의 길이에 대한 이차함수로 나타내어 최댓값을 구한다.

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면

$l=40-2r$ $(0<r<20)$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(40-2r)=-r^2+20r=-(r-10)^2+100$

따라서 $r=10$일 때, S의 최댓값이 100이므로 만들 수 있는 화단의 최대 넓이는 100 m^2이다.

다른 풀이

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$2r>0$, $l>0$이고 $2r+l=40$으로 일정하므로

$40=2r+l\geq 2\sqrt{2rl}=2\sqrt{4\times\frac{1}{2}rl}=2\sqrt{4S}$

즉, $2\sqrt{4S}\leq 40$에서 $S\leq 100$

여기서 등호는 $2r=l$일 때 성립한다.

따라서 S의 최댓값이 100이므로 만들 수 있는 화단의 최대 넓이는 $100\,\mathrm{m}^2$이다.

4-2 답 2

|해결 전략| 부채꼴의 넓이를 반지름의 길이에 대한 이차함수로 나타내어 최댓값을 구한다.

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면

$l=8-2r\ (0<r<4)$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(8-2r)$

$\quad=-r^2+4r=-(r-2)^2+4$

따라서 $r=2$일 때, S는 최댓값을 갖는다.

즉, $l=8-2r$에서 $r=2$일 때 $l=4$이므로

$4=2\theta \qquad \therefore \theta=2$

LECTURE

부채꼴의 둘레의 길이가 a로 일정할 때, 부채꼴의 넓이가 최대가 되려면 중심각의 크기는 항상 2이다.

즉, 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면

$l+2r=a \quad \therefore l=a-2r$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(a-2r)$

$\quad=-r^2+\frac{a}{2}r=-\left(r-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{16}$

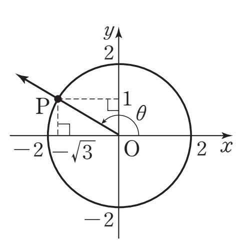
따라서 $r=\frac{a}{4}$일 때, 부채꼴의 넓이가 최대가 되고, 호의 길이는 $l=\frac{a}{2}$

이므로 중심각의 크기 θ는

$\frac{a}{2}=\frac{a}{4}\theta \qquad \therefore \theta=2$

5-1 답 $-\sqrt{3}$

|해결 전략| 각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이 만나는 점을 잡아 삼각함수의 정의를 이용한다.



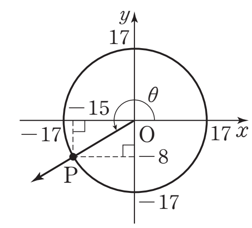
각 θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta=\frac{1}{2}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원을 그리면 각 θ를 나타내는 동경과 원의 교점 P의 좌표는 $(-\sqrt{3}, 1)$이다.

따라서 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta=-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$

5-2 답 1

|해결 전략| 각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 17인 원이 만나는 점을 잡아 삼각함수의 정의를 이용한다.



각 θ가 제3사분면의 각이고 $\tan\theta=\frac{8}{15}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 17인 원을 그리면 각 θ를 나타내는 동경과 원의 교점 P의 좌표는 $(-15,\ -8)$이다.

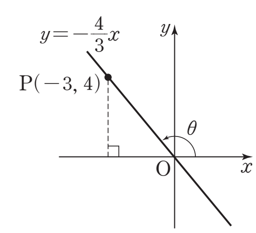
따라서 $\sin\theta=-\frac{8}{17}$, $\cos\theta=-\frac{15}{17}$이므로

$\frac{34\sin\theta}{17\cos\theta-1}=\frac{34\times\left(-\frac{8}{17}\right)}{17\times\left(-\frac{15}{17}\right)-1}$

$\qquad=\frac{-16}{-16}=1$

6-1 답 $\frac{7}{25}$

|해결 전략| 직선 $y=ax+b$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기가 θ일 때, 기울기는 $a=\tan\theta$임을 이용한다.



주어진 그림에서 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$이므로

점 P의 좌표를 $(-3, 4)$라 하면

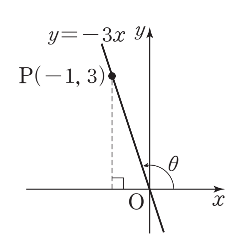
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

따라서 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$이므로

$\sin^2\theta-\cos^2\theta=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$

6-2 답 $-\frac{3}{10}$

|해결 전략| 직선 $y=ax+b$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기가 θ일 때, 기울기는 $a=\tan\theta$임을 이용한다.



오른쪽 그림에서 $\tan\theta=-3$이므로

점 P의 좌표를 $(-1, 3)$이라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

따라서 $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

이므로

$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{3}{10}$

7-1 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

|해결 전략| 주어진 그림에서 직각삼각형을 찾아 삼각비를 이용한다.

$\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$는 원의 지름이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{CQ}}$

$\therefore \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{CQ}}}=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

7-2 답 $\frac{3}{5}$

|해결 전략| 직각삼각형의 빗변의 중점은 삼각형의 외심임을 이용한다.

점 D가 직각삼각형 ABC의 빗변의 중점이므로

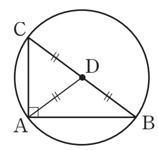
$\overline{CD}=\overline{BD}=\overline{AD}$, 즉 $\angle DBA=\theta$

또, $\overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{3}{5}$

LECTURE

삼각형의 외심은 각 꼭짓점에 이르는 거리가 같고,
지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로
$\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}$이다.



8-1 답 -1

|해결 전략| 주어진 조건을 만족시키는 각 θ가 위치하는 사분면을 구한다.

$\sin\theta\cos\theta>0$에서 각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이고,
$\tan\theta\sin\theta<0$에서 각 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.
따라서 조건을 만족시키는 각 θ는 제3사분면의 각이다.
즉, $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로

$$\frac{|\sin\theta|}{\sin\theta}+\frac{|\cos\theta|}{\cos\theta}+\frac{|\tan\theta|}{\tan\theta}$$
$$=\frac{-\sin\theta}{\sin\theta}+\frac{-\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\tan\theta}{\tan\theta}$$
$$=(-1)+(-1)+1=-1$$

8-2 답 1

|해결 전략| 주어진 조건을 만족시키는 각 θ가 위치하는 사분면을 구한다.

$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}<0$에서 $\sin\theta<0$이고 $\tan\theta<0$이므로 각 θ는 제4사분면의 각이다.
즉, $\cos\theta>0$, $1-\cos\theta>0$이므로

$$\sqrt{\cos^2\theta}+\sqrt{(1-\cos\theta)^2}=|\cos\theta|+|1-\cos\theta|$$
$$=\cos\theta+1-\cos\theta=1$$

9-1 답 1

|해결 전략| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식을 간단히 한다.

$$\left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$
$$=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1$$

9-2 답 ㅁ

|해결 전략| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식을 간단히 한다.

$$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta$$
$$=\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)$$
$$=\sin^2\theta\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times(1-\cos^2\theta)$$
$$=\tan^2\theta\sin^2\theta$$

따라서 $\tan^2\theta-\sin^2\theta$와 같은 것은 ㅁ이다.

10-1 답 $\frac{7}{8}$

|해결 전략| 곱셈 공식의 변형과 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$$\therefore \sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=1-2(\sin\theta\cos\theta)^2$$
$$=1-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$$

10-2 답 $\frac{8}{3}$

|해결 전략| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

$$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{8}{3}$$

11-1 답 5

|해결 전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계와 삼각함수 사이의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2+ax+\frac{1}{4}=0$의 두 근이 $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$이므로
근과 계수의 관계에 의하여

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=-a$, $\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore a=-1$

또, 이차방정식 $x^2+bx+1=0$의 두 근이 $\tan\theta$, $\frac{1}{\tan\theta}$이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=-b$

이때, $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$이므로

$b^2=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=4$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+4=5$

11-2 답 1

| 해결 전략 | 삼각함수 사이의 관계와 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 이차방정식의 계수를 구한다.

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

즉, 이차방정식 $8x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은 $-\frac{a}{8}$, 두 근의 곱은 $\frac{b}{8}$이다.

$-\frac{a}{8}=-\frac{1}{2}$에서 $a=4$, $\frac{b}{8}=-\frac{3}{8}$에서 $b=-3$

$\therefore a+b=4+(-3)=1$

12-1 답 $\frac{1}{\cos\theta}$

| 해결 전략 | 각 θ에 대한 동경 위의 점에서의 삼각함수의 값은 항상 같음을 이용한다.

주어진 그림에서 $\cos\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{BR}}=\frac{1}{\overline{BR}}$이므로 $\overline{BR}=\frac{1}{\cos\theta}$

$\therefore \overline{PR}=\overline{BR}-\overline{BP}=\frac{1}{\cos\theta}-1$ ······㉠

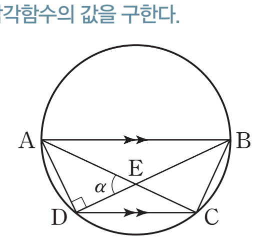
또, $\cos\theta=\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}=\overline{BQ}$이므로

$\overline{QC}=\overline{BC}-\overline{BQ}=1-\cos\theta$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{\overline{PR}}{\overline{QC}}=\frac{\frac{1}{\cos\theta}-1}{1-\cos\theta}=\frac{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}{1-\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$

12-2 답 $\cos^2\alpha$

| 해결 전략 | 직각삼각형을 찾은 후 각 α에 대한 삼각함수의 값을 구한다.



$\overline{AB}$는 지름이므로 $\angle ADB=90°$

$\therefore \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\cos\alpha$

$\overline{AB}/\!/\overline{DC}$이므로 $\angle ABD=\angle BDC$,

$\angle BAC=\angle ACD$ ($\because$ 엇각)

$\therefore \triangle CDE \backsim \triangle ABE$

이때, $\triangle ABE:\triangle CDE=\overline{AE}^2:\overline{CE}^2$이고,

$\triangle CDE$는 이등변삼각형이므로 $\overline{CE}=\overline{DE}$

$\therefore \frac{\triangle CDE}{\triangle ABE}=\frac{\overline{CE}^2}{\overline{AE}^2}=\frac{\overline{DE}^2}{\overline{AE}^2}=\cos^2\alpha$

LECTURE

$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$일 때, 두 삼각형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱의 비와 같다.

➡ $\triangle ABC:\triangle DEF=\overline{AB}^2:\overline{DE}^2$

6 | 삼각함수의 그래프

1 삼각함수의 그래프

개념 확인 160쪽~163쪽

1 (1) 2 (2) 2

2 (1) 치역: $\left\{y \,\middle|\, -\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\right\}$, 주기: 2π, 그래프는 풀이 참조

(2) 치역: $\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$, 주기: $\frac{2}{3}\pi$, 그래프는 풀이 참조

3 (1) 정의역: $x\ne\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$($n$은 정수)인 실수 전체의 집합,

주기: $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식: $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$($n$은 정수),

그래프는 풀이 참조

(2) 정의역: $x\ne\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$($n$은 정수)인 실수 전체의 집합,

주기: $\frac{\pi}{3}$, 점근선의 방정식: $x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$($n$은 정수),

그래프는 풀이 참조

4 (1) 주기: π, 최댓값: 3, 최솟값: -1, 그래프는 풀이 참조

(2) 주기: $\frac{\pi}{2}$, 최댓값: 없다., 최솟값: 없다., 그래프는 풀이 참조

1 (1) 함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{1}{2}$이면 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$

$f(2)=2$일 때, $f(6)$의 값을 구하면

$f(2)=f\left(\frac{5}{2}\right)=f(3)=\cdots=f(6)=2$

(2) 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x+2)=f(x-2)$일 때,

$x-2=t$라 하면 $x=t+2$이므로

$f(t+4)=f(t)$

따라서 함수 $f(x)$의 주기는 4이다.

$f(-1)=1$일 때, $f(19)$, $f(27)$의 값을 각각 구하면

$f(19)=f(15)=f(11)=\cdots=f(-1)=1$

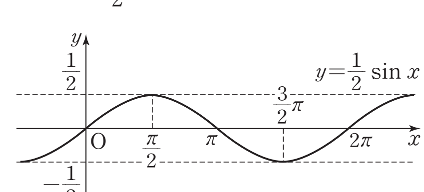
$f(27)=f(23)=f(19)=\cdots=f(-1)=1$

$\therefore f(19)+f(27)=1+1=2$

2 (1) $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\sin x\le\frac{1}{2}$이므로 치역은 $\left\{y\,\middle|\,-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\right\}$,

주기는 2π이다.

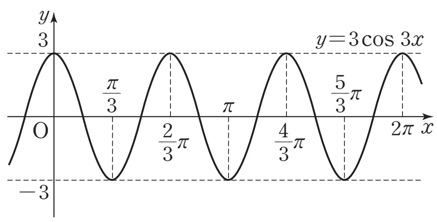
따라서 함수 $y=\frac{1}{2}\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $-3\le 3\cos 3x\le 3$이므로 치역은 $\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$,

주기는 $\frac{2}{3}\pi$이다.

따라서 함수 $y=3\cos 3x$의 그래프는 다음 그림과 같다.

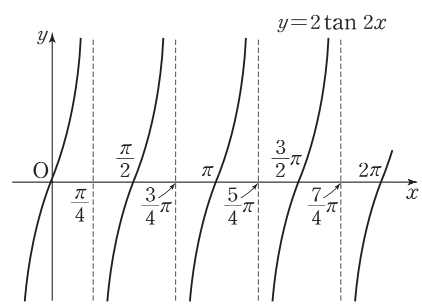


3 (1) 함수 $y=2\tan 2x$의 정의역은 $2x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$

즉, $x\ne\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고,

주기는 $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식은 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)이다.

따라서 함수 $y=2\tan 2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.

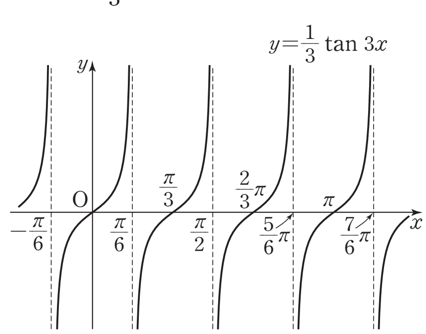


(2) 함수 $y=\frac{1}{3}\tan 3x$의 정의역은 $3x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$

즉, $x\ne\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고,

주기는 $\frac{\pi}{3}$, 점근선의 방정식은 $x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$ (n은 정수)이다.

따라서 함수 $y=\frac{1}{3}\tan 3x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



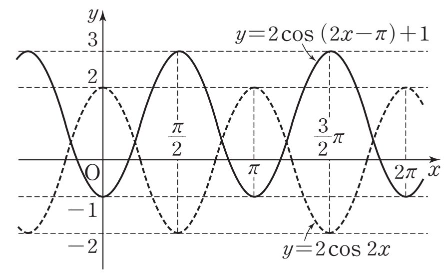
4 (1) 함수 $y=2\cos(2x-\pi)+1=2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는

함수 $y=2\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때, 주기는 $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$, 최댓값은 $2+1=3$,

최솟값은 $-2+1=-1$이다.

따라서 함수 $y=2\cos(2x-\pi)+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) 함수 $y=2\tan(2x-\pi)+1=2\tan 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는

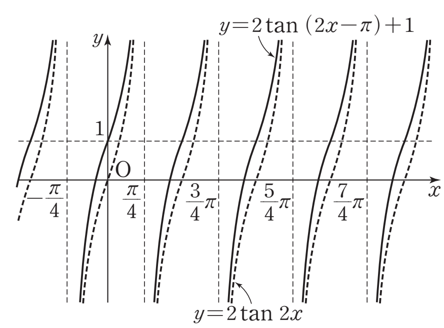
함수 $y=2\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때, 주기는 $\frac{\pi}{|2|}=\frac{\pi}{2}$, 최댓값, 최솟값은 없다.

또, 점근선의 방정식은 $2x-\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서

$x=\frac{2n+3}{4}\pi$ (n은 정수)이다.

따라서 그 그래프는 다음 그림과 같다.



STEP 1 개념 드릴

| 165쪽~166쪽 |

개념 check

1-1 (1) 실수, -2, 2 (2) 3 (3) -2, 2, 2

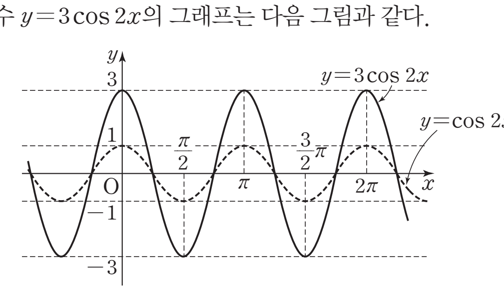
2-1 (1) 실수, -2, 2 (2) 3 (3) -2, 2, -2 (4) $\frac{\pi}{3}$, x, $\frac{\pi}{3}$

3-1 (1) $2(n+1)\pi$ (2) $\frac{1}{2}$, 2π (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) π, x, π, 1

스스로 check

1-2 답 (1) 실수 전체의 집합 (2) $\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$ (3) π
(4) 최댓값: 3, 최솟값: -3 (5) 풀이 참조

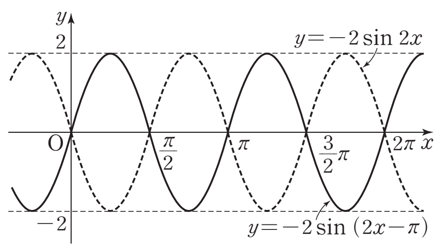
(5) 함수 $y=3\cos 2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



2-2 답 (1) 실수 전체의 집합 (2) $\{y \mid -2 \le y \le 2\}$ (3) π
(4) 최댓값: 2, 최솟값: -2 (5) 풀이 참조

(5) 함수 $y=-2\sin(2x-\pi)=-2\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는

함수 $y=-2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다. 따라서 함수 $y=-2\sin(2x-\pi)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

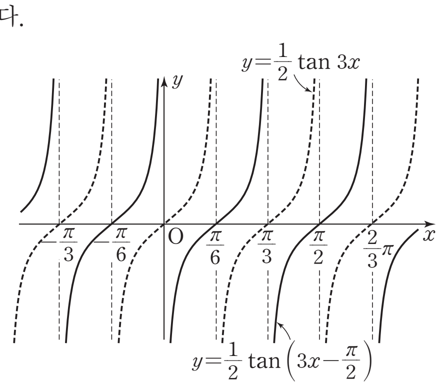


3-2 답 (1) $x \ne \frac{n+1}{3}\pi$(n은 정수)인 실수 전체의 집합 (2) $\frac{\pi}{3}$
(3) $x=\frac{n+1}{3}\pi$(n은 정수) (4) 풀이 참조

(1) 정의역은 $3x-\frac{\pi}{2} \ne n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x \ne \frac{n+1}{3}\pi$(n은 정수)인 실수 전체의 집합이다.

(4) 함수 $y=\frac{1}{2}\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\tan 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는

함수 $y=\frac{1}{2}\tan 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이다. 따라서 함수 $y=\frac{1}{2}\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



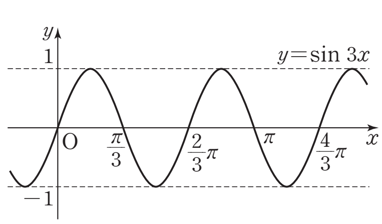
STEP 2 필수 유형

167쪽~171쪽

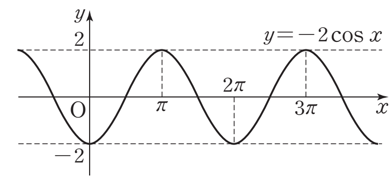
01-1 답 ㄴ, ㄷ

|해결 전략| 세 함수 $y=\sin 3x$, $y=-2\cos x$, $y=\tan 2x$의 그래프를 그려 각 함수의 성질을 파악한다.

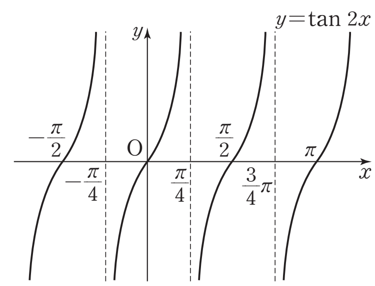
ㄱ. 함수 $y=\sin 3x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 최댓값은 1이다.



ㄴ. 함수 $y=-2\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 y축에 대하여 대칭이다.



ㄷ. 함수 $y=\tan 2x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.



이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

01-2 답 -16

|해결 전략| 함수 $y=-2\cos\frac{x}{2}$의 성질을 이용한다.

함수 $y=-2\cos\frac{x}{2}$의 최댓값은 $|-2|=2$, 최솟값은 $-|-2|=-2$

이고, 주기는 $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$이다.

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=4\pi$이므로

$\frac{abc}{\pi}=\frac{2\times(-2)\times 4\pi}{\pi}=-16$

02-1 답 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{16}\pi\right)-5$

|해결 전략| 함수 $y=f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동한 것은 y 대신 $-y$를 대입한 것이다.

함수 $y=-2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+3=-2\sin\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+3$의 그래프를

x축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y-2=-2\sin\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+3$

$\therefore y=-2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{16}\pi\right)+5$ ……㉠

또, ㉠을 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=-2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{16}\pi\right)+5$

$\therefore y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{16}\pi\right)-5$

03-1 답 5

| 해결 전략 | 함수 $y=a\cos bx+c$의 그래프에서 a, c는 최댓값과 최솟값을, b는 주기를 결정한다.

함수 $y=a\cos bx+c$의 주기가 π이므로 $\frac{2\pi}{|b|}=\pi$ $\therefore |b|=2$

이때, $b>0$이므로 $b=2$

또, $a>0$이고 최댓값이 3, 최솟값이 -1이므로

$a+c=3$, $-a+c=-1$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=1$

$\therefore a+b+c=2+2+1=5$

03-2 답 5

| 해결 전략 | 함수 $y=a\sin(bx+c)+d$의 그래프에서 a, d는 최댓값과 최솟값을, b는 주기를 결정한다.

조건 (가)에서 $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore |b|=4$

이때, $b>0$이므로 $b=4$

$a<0$이므로 조건 (나)에서 $-a+c=5$ ……㉠

또, 조건 (다)에서 $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=a+c=1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $c=3$

$\therefore a+b+c=(-2)+4+3=5$

04-1 답 $-\pi$

| 해결 전략 | 그래프가 주어졌을 때, 최댓값과 최솟값은 그래프의 폭으로 결정된다.

주어진 그래프에서 최댓값이 1, 최솟값이 -1이므로 $|a|=1$

이때, $a>0$이므로 $a=1$

주기는 π이므로 $\frac{2\pi}{|b|}=\pi$에서 $|b|=2$

이때, $b>0$이므로 $b=2$

또, $-\pi<c<\pi$에서 주어진 그래프는 함수 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore c=-\frac{\pi}{2}$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-\frac{\pi}{2}$ 이므로 $abc=1\times 2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi$

04-2 답 4

| 해결 전략 | 그래프에서 일정하게 반복되는 구간을 찾아 주기를 구한다.

주어진 그래프에서 주기는 $\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\pi$에서 $|b|=2$

이때, $b>0$이므로 $b=2$

또, $a>0$이고, 최댓값이 3, 최솟값이 -1이므로

$a+c=3$, $-a+c=-1$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=1$

따라서 $a=2$, $b=2$, $c=1$이므로 $abc=2\times 2\times 1=4$

05-1 답 $\frac{3}{2}\pi$

| 해결 전략 | 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

함수 $f(x)=2|\cos(2x-\pi)|+1=2\left|\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|+1$의 그래프는

함수 $f(x)=2|\cos 2x|$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때, $y=|\cos x|$의 주기가 π이므로 주어진 함수의 주기 $a=\frac{\pi}{2}$,

$0\leq|\cos 2x|\leq 1$이므로 최댓값 $b=2+1=3$, 최솟값 $c=0+1=1$

따라서 $a=\frac{\pi}{2}$, $b=3$, $c=1$이므로

$abc=\frac{\pi}{2}\times 3\times 1=\frac{3}{2}\pi$

2 삼각함수의 성질

개념 확인 172쪽

1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

1 (1) $\tan\frac{5}{4}\pi-\cos\left(-\frac{16}{3}\pi\right)+\sin\frac{7}{2}\pi$

$=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\frac{16}{3}\pi+\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{2}\right)$

$=\tan\frac{\pi}{4}-\cos\left(5\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\frac{\pi}{2}$

$=1+\cos\frac{\pi}{3}-1=\frac{1}{2}$

(2) $\sin\frac{2}{3}\pi\tan\frac{15}{4}\pi\cos\frac{11}{3}\pi$

$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-1)\times\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

STEP 1 개념 드릴 | 173쪽 |

개념 check

1-1 (1) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{2}$ (2) 2π, $\sqrt{3}$ (3) $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{1}{2}$

(4) $\frac{9}{4}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, -1 (5) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}$ (6) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(7) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}$ (8) $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

스스로 check

1-2 답 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) $\sqrt{3}$ (7) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) $\sin\frac{9}{4}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos\frac{19}{3}\pi=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(3) $\tan\frac{13}{6}\pi=\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\cos\left(-\frac{11}{3}\pi\right)=\cos\frac{11}{3}\pi=\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(6) $\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

(7) $\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

STEP 2 필수 유형

| 174쪽~177쪽 |

01-1 답 (1) 0 (2) 0

|해결 전략| 삼각함수의 성질을 이용한다.

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\cos\theta+(-\cos\theta)+(-\sin\theta)-(-\sin\theta)$

$=0$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

$\cos(3\pi-\theta)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\therefore$ (주어진 식) $=\frac{\cos\theta(-\cos\theta)}{-\cos\theta}+\frac{\cos\theta(-\sin\theta)}{\sin\theta}$

$=\cos\theta-\cos\theta=0$

02-1 답 (1) $\frac{89}{2}$ (2) 1

|해결 전략| (1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$ 임을 이용한다.

(2) $\tan(90°-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$ 임을 이용한다.

(1) $\cos 89°=\cos(90°-1°)=\sin 1°$,

$\cos 88°=\cos(90°-2°)=\sin 2°$, …이므로

(주어진 식)

$=(\cos^2 1°+\cos^2 89°)+(\cos^2 2°+\cos^2 88°)$

$+\cdots+(\cos^2 44°+\cos^2 46°)+\cos^2 45°+\cos^2 90°$

$=(\cos^2 1°+\sin^2 1°)+(\cos^2 2°+\sin^2 2°)$

$+\cdots+(\cos^2 44°+\sin^2 44°)+\cos^2 45°+\cos^2 90°$

$=1\times 44+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0=\frac{89}{2}$

(2) $\tan 89°=\tan(90°-1°)=\frac{1}{\tan 1°}$,

$\tan 88°=\tan(90°-2°)=\frac{1}{\tan 2°}$, …이므로

(주어진 식)

$=(\tan 1°\times\tan 89°)\times(\tan 2°\times\tan 88°)$

$\times\cdots\times(\tan 44°\times\tan 46°)\times\tan 45°$

$=\left(\tan 1°\times\frac{1}{\tan 1°}\right)\times\left(\tan 2°\times\frac{1}{\tan 2°}\right)$

$\times\cdots\times\left(\tan 44°\times\frac{1}{\tan 44°}\right)\times\tan 45°$

$=1$

03-1 답 4

|해결 전략| $\sin^2 x=1-\cos^2 x$임을 이용하여 $\cos x$에 대한 이차식으로 나타낸다.

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

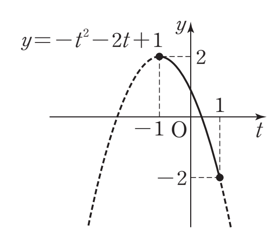
$y=\sin^2 x-2\cos x=(1-\cos^2 x)-2\cos x$

$=-\cos^2 x-2\cos x+1$

$\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2-2t+1=-(t+1)^2+2$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=-1$일 때 최댓값 $M=2$,

$t=1$일 때 최솟값 $m=-2$를 가진다.

$\therefore M-m=2-(-2)=4$

03-2 답 최댓값: 3, 최솟값: 2

|해결 전략| $\tan(\pi+x)=\tan x$, $\tan(\pi-x)=-\tan x$임을 이용하여 $\tan x$에 대한 이차식으로 나타낸다.

$\tan(\pi+x)=\tan x$, $\tan(\pi-x)=-\tan x$이므로

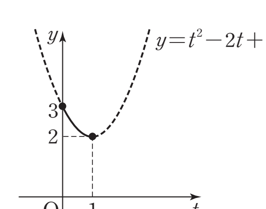
$y=\tan^2(\pi+x)+2\tan(\pi-x)+3$

$=\tan^2 x-2\tan x+3$

$\tan x=t$라 하면 $0\le t\le 1$이고

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=0$일 때 최댓값 3,

$t=1$일 때 최솟값 2를 가진다.

04-1 답 (1) 최댓값: 9, 최솟값: 5 (2) 최댓값: $\frac{7}{3}$, 최솟값: 1

|해결 전략| (1) $\cos x=t$로 놓고, 절댓값 기호를 포함한 일차함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(2) $\cos x=t$로 놓고, 유리함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) $y=|-2\cos x-2|+5$에서 $\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=|-2t-2|+5=2|t+1|+5$

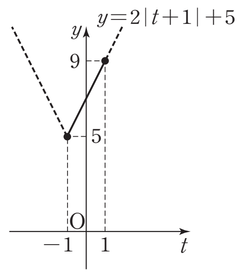
$t\ge -1$일 때,

$y=2(t+1)+5=2t+7$

$t<-1$일 때,

$y=2(-t-1)+5=-2t+3$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=1$일 때 최댓값 9,

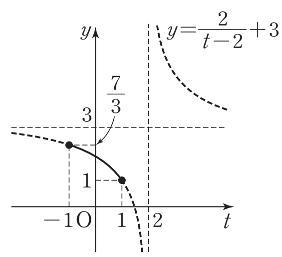
$t=-1$일 때 최솟값 5를 가진다.

(2) $y=\dfrac{3\cos x-4}{\cos x-2}$에서 $\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=\dfrac{3t-4}{t-2}=\dfrac{3(t-2)+2}{t-2}$

$=\dfrac{2}{t-2}+3$

따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=-1$일 때 최댓값 $\frac{7}{3}$,

$t=1$일 때 최솟값 1을 가진다.

3 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식

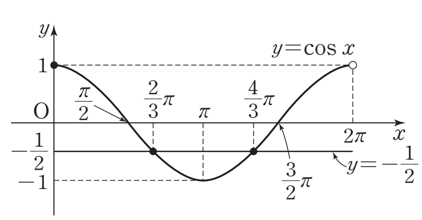
개념 확인 178~179쪽

1 (1) $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

2 (1) $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$

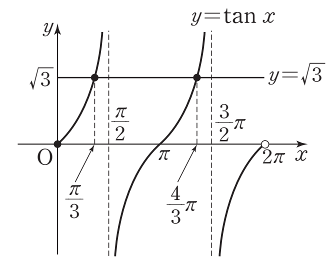
(2) $0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

1 (1) $0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같으므로 교점의 x좌표는 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$이다.



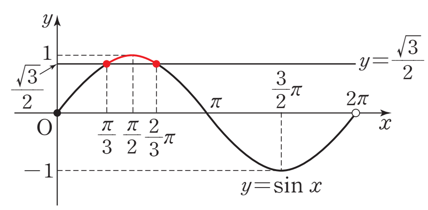
따라서 구하는 방정식의 해는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

(2) $0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$은 다음 그림과 같으므로 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이다.



따라서 구하는 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

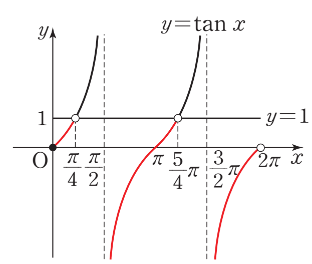
2 (1) $0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 다음 그림과 같으므로 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$이다.



따라서 구하는 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$

(2) $0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$은 다음 그림과 같으므로 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$이다.



따라서 구하는 부등식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=1$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

STEP 1 개념 드릴 | 180쪽 |

개념 check

1-1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$

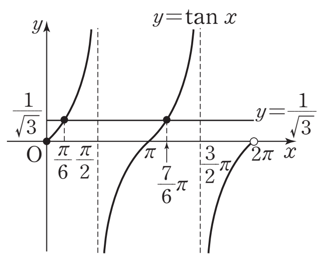
2-1 $\frac{3}{4}\pi$, -1, 위, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$

스스로 check

1-2 답 (1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

(1) 주어진 방정식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$의 교점의 x좌표와 같다.

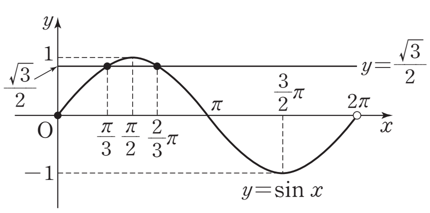
$0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$은 다음 그림과 같으므로 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7}{6}\pi$이다.



따라서 구하는 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

(2) 주어진 방정식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표와 같다.

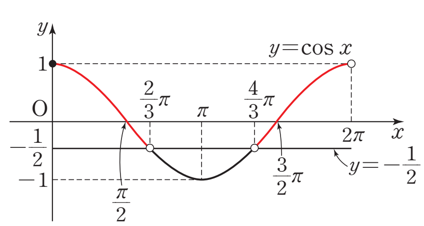
$0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 다음 그림과 같으므로 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$이다.



따라서 구하는 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

2-2 답 $0\le x<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x<2\pi$

$0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같으므로 교점의 x좌표는 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$이다.



따라서 구하는 부등식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$0\le x<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x<2\pi$

STEP 2 필수 유형

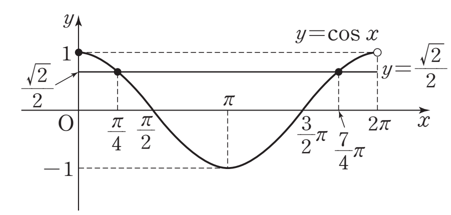
| 181쪽~184쪽 |

01-1 답 (1) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

| 해결 전략 | (1) $\cos x=k$의 꼴로 변형한 후 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 구한다.
(2) 양변을 $\cos x$로 나누고 $\tan x=k$의 꼴로 변형한 후 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 구한다.

(1) $2\cos x-\sqrt{2}=0$에서 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$는 다음 그림과 같으므로 교점의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{7}{4}\pi$이다.



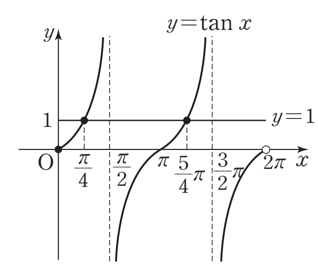
따라서 구하는 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(2) 양변을 $\cos x$로 나누면

$\frac{\sin x}{\cos x}=1$ $\quad\therefore \tan x=1$

$0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$은 다음 그림과 같으므로 교점의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$이다.



따라서 구하는 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

01-2 답 $\frac{14}{3}\pi$

| 해결 전략 | $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=t$로 놓고 t의 값의 범위에서 $\sin t=k$의 방정식을 푼다.

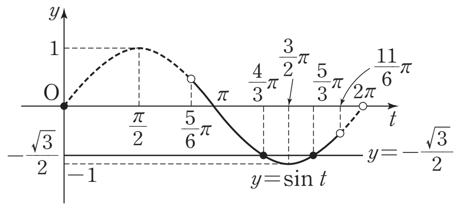
$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=t$라 하면 $\pi<x<3\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3}{2}\pi$

$\frac{5}{6}\pi<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}<\frac{11}{6}\pi$ $\quad\therefore \frac{5}{6}\pi<t<\frac{11}{6}\pi$

$2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$에서 $2\sin t+\sqrt{3}=0$

$\therefore \sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{5}{6}\pi<t<\frac{11}{6}\pi$일 때, 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$은 다음 그림과 같으므로 교점의 t좌표는 $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$이다.



방정식 $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 $t=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{5}{3}\pi$

즉, $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$이므로

$x=2\pi$ 또는 $x=\frac{8}{3}\pi$

따라서 모든 해의 합은 $2\pi+\frac{8}{3}\pi=\frac{14}{3}\pi$

02-1 답 -1

|해결 전략| $\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 이용하여 $\cos x$에 대한 이차방정식을 푼다.

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로 $4(1-\cos^2 x)=4\cos x+1$

$4\cos^2 x+4\cos x-3=0$, $(2\cos x-1)(2\cos x+3)=0$

이때, $2\cos x+3>0$이므로 $2\cos x-1=0$

$\therefore \cos x=\frac{1}{2}$

$\pi<x<2\pi$에서 $x=\frac{5}{3}\pi$

즉, $\alpha=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$

02-2 답 $\frac{7}{2}\pi$

|해결 전략| $\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 이용하여 $\cos x$에 대한 이차방정식을 푼다.

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로 $(1-\cos^2 x)+\sin x\cos x-1=0$

$\cos x(\sin x-\cos x)=0$ $\quad\therefore \cos x=0$ 또는 $\sin x=\cos x$

$0\le x<2\pi$에서 주어진 방정식의 해는

(ⅰ) $\cos x=0$이면 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

(ⅱ) $\sin x=\cos x$이면 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

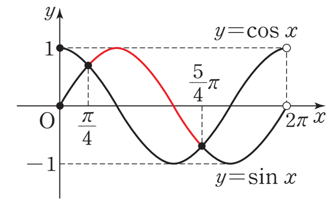
따라서 모든 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{5}{4}\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{7}{2}\pi$

03-1 답 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5}{4}\pi$

|해결 전략| $\sin x=\cos x$인 x의 값을 찾은 후 함수 $y=\sin x$의 그래프가 함수 $y=\cos x$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구한다.

$0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\sin x$의 그래프와 함수 $y=\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi$이다.



따라서 구하는 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 함수 $y=\cos x$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5}{4}\pi$

03-2 답 1

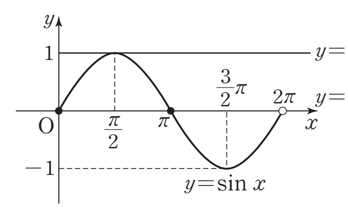
|해결 전략| $\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 이용하여 $\sin x$에 대한 이차부등식을 푼다.

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로 $\cos^2 x+\sin x-1\ge 0$에서

$1-\sin^2 x+\sin x-1\ge 0$, $\sin x(\sin x-1)\le 0$

$\therefore 0\le\sin x\le 1$

$0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=0$, $y=1$은 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는 $0\le x\le\pi$이므로 $\alpha=0$, $\beta=\pi$

$\therefore \cos^2(\alpha+\beta)=\cos^2\pi=(\cos\pi)^2=(-1)^2=1$

04-1 답 $0\le\theta<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$

|해결 전략| 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때, $D>0$임을 이용한다.

주어진 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면

판별식 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(\sqrt{2}\cos\theta)^2-(-3\sin\theta)>0$

$2\cos^2\theta+3\sin\theta>0$

이때, $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로 $2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta>0$

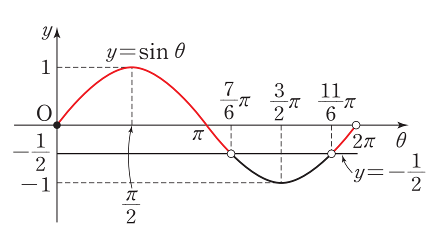
$2\sin^2\theta-3\sin\theta-2<0$, $(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)<0$

그런데 $\sin\theta-2<0$이므로 $2\sin\theta+1>0$

$\therefore \sin\theta>-\frac{1}{2}$

$0\le\theta<2\pi$일 때, 함수 $y=\sin\theta$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같으므로 구하는 θ의 값의 범위는

$0\le\theta<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$



1-1 답 ⑤

| 해결 전략 | 함수 $y=\cos 2x$의 그래프의 성질을 안다.

① 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

② 최댓값은 $3-1=2$이다.

③ 최솟값은 $-3-1=-4$이다.

④ 함수 $y=3\cos 2x-1$의 그래프는 함수 $y=3\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 y축에 대하여 대칭이다.

⑤ 함수 $y=3\cos x$의 그래프는 주기가 2π이고 함수 $y=3\cos 2x-1$의 그래프는 주기가 π이므로 두 그래프는 평행이동하여 겹칠 수 없다.

1-2 답 ⑤

| 해결 전략 | 함수 $y=\tan\frac{x}{2}$의 그래프의 성질을 안다.

① 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$이다.

②, ③ 최댓값과 최솟값은 없다.

④ 점 $(0, 1)$에 대하여 대칭이다.

⑤ $x=2\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\pi$($n$은 정수)를 점근선으로 가진다.

2-1 답 $-\frac{3}{5}$

| 해결 전략 | 함수 $y=\sin x$의 그래프의 성질을 이용한다.

함수 $f(x)=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \alpha+\beta=\pi$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(\alpha+\beta+\gamma)&=f(\pi+\gamma)=\sin(\pi+\gamma)\\&=-\sin\gamma=-\frac{3}{5}\end{aligned}$$

2-2 답 0

| 해결 전략 | 함수 $y=\sin 2x$의 그래프의 성질을 안다.

함수 $f(x)=\sin 2x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{4}$ 및 $x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$, $\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi$

즉, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma+\delta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$f(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=f(2\pi)=\sin 4\pi=0$

3-1 답 π

| 해결 전략 | 함수 $y=\cos 3x$의 그래프의 성질을 이용하여 주기, 최댓값, 최솟값을 구한다.

함수 $y=2\cos(3x-6)+1$의 그래프는 함수 $y=2\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

주기는 $\frac{2\pi}{3}$이므로 $p=\frac{2}{3}\pi$

최댓값은 $2+1=3$이므로 $m=3$

최솟값은 $-2+1=-1$이므로 $n=-1$

$\therefore \frac{3p}{m+n}=\frac{3\times\frac{2}{3}\pi}{3+(-1)}=\pi$

3-2 답 8π

| 해결 전략 | 함수 $y=\sin 2x$의 그래프의 성질을 이용하여 주기, 최댓값, 최솟값을 구한다.

함수 $y=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+3$의 그래프는 함수 $y=-\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 $p=\pi$

최댓값은 $|-1|+3=4$이므로 $m=4$

최솟값은 $-|-1|+3=2$이므로 $n=2$

$\therefore mnp=4\times2\times\pi=8\pi$

4-1 답 10

| 해결 전략 | 삼각함수의 주기와 최대, 최소를 이용하여 상수 a, b, p의 값을 각각 구한다.

$p>0$이고 주기가 2π이므로

$\frac{2\pi}{|-p|}=2\pi$에서 $p=1$

$a>0$이므로 최댓값은 $a+b=7$ ……㉠

또, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3$이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-a+b=-3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=2$

$\therefore a+2b+p=5+2\times2+1=10$

4-2 답 -1

| 해결 전략 | 삼각함수의 주기와 최대, 최소를 이용하여 상수 a, b, c의 값을 각각 구한다.

$b>0$이고 주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{b}\right|}=\pi$에서 $b=\frac{1}{2}$

$a>0$이므로 최솟값은 $-a+c=-3$ ……㉠

또, $f(\pi)=0$이므로 $f(\pi)=\frac{1}{2}a+c=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=-1$

$\therefore abc=2\times\frac{1}{2}\times(-1)=-1$

5-1 답 -18π

|해결 전략| 그래프를 이용하여 삼각함수의 미정계수를 구한다.

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -4이므로

$|a|+d=2,\ -|a|+d=-4$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a>0$이므로

$a=3,\ d=-1$

주기가 $\frac{3}{8}\pi-\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}$에서 $|b|=4$

그런데 $b>0$이므로 $b=4$

또, $0<c<2\pi$에서 주어진 그래프는 함수 $y=3\cos 4x-1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{8}\pi$만큼 평행이동한 것이므로

$y=3\cos 4\left(x-\frac{3}{8}\pi\right)-1=3\cos\left(4x-\frac{3}{2}\pi\right)-1\qquad \therefore\ c=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ abcd=3\times4\times\frac{3}{2}\pi\times(-1)=-18\pi$

5-2 답 $\frac{16}{3}$

|해결 전략| 그래프를 이용하여 삼각함수의 미정계수를 구한다.

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 5, 최솟값이 -1이므로

$|a|+d=5,\ -|a|+d=-1$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a>0$이므로

$a=3,\ d=2$

주기가 $2\left(\frac{9}{2}\pi-\frac{3}{2}\pi\right)=6\pi$이므로 $\frac{2\pi}{|b|}=6\pi$에서 $|b|=\frac{1}{3}$

그런데 $b>0$이므로 $b=\frac{1}{3}$

또, 점 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 5\right)$를 지나므로

$5=3\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)+2$에서 $c=0$

$\therefore\ a+b+c+d=3+\frac{1}{3}+0+2=\frac{16}{3}$

6-1 답 1

|해결 전략| 삼각함수의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

$\sin(\pi-\theta)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos(\pi+\theta)$

$=\sin\theta\times\sin\theta-\cos\theta\times(-\cos\theta)$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

6-2 답 1

|해결 전략| 삼각함수의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

$\frac{\cos(\pi+\theta)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\times\frac{\cos(\pi-\theta)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$=\frac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\frac{-\cos\theta}{1+\sin\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1$

7-1 답 5

|해결 전략| $\sin^2x+\cos^2x=1$과 삼각함수의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

$\sin(90^\circ-x^\circ)=\cos x^\circ$이므로

(주어진 식)

$=(\sin^2 10^\circ+\sin^2 80^\circ)+(\sin^2 20^\circ+\sin^2 70^\circ)+\cdots+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ)+(\sin^2 20+\cos^2 20^\circ)+\cdots+\sin^2 90^\circ$

$=1\times4+1=5$

7-2 답 1

|해결 전략| 삼각함수의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

$\tan(90^\circ-x^\circ)=\frac{1}{\tan x^\circ}$이므로

$\tan^2 5^\circ\times\tan^2 10^\circ\times\tan^2 15^\circ\times\ \cdots\ \times\tan^2 85^\circ$

$=\tan^2 5^\circ\times\tan^2 10^\circ\times\ \cdots\ \times\frac{1}{\tan^2 10^\circ}\times\frac{1}{\tan^2 5^\circ}\times\tan^2 45^\circ$

$=1$

8-1 답 ①

|해결 전략| 동경이 나타내는 각의 크기를 구한다.

$\overline{\mathrm{OD}}=2$이고 동경 OD가 나타내는 각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi+\theta$이므로

점 D의 x좌표는 $2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=2\sin\theta$

8-2 답 ③

|해결 전략| 점 A의 좌표를 삼각함수를 이용하여 나타낸다.

점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$이므로

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$이다.

한편, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로

$\cos(\pi-\theta)$는 점 C의 x좌표와 같다.

9-1 답 3

|해결 전략| $\sin^2x+\cos^2x=1$을 이용하여 $\sin x=t$라 하고, 이차함수의 최댓값을 구한다.

$\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=\cos^2x,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이고

$\cos^2x=1-\sin^2x$이므로

$y=\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1$

$=\cos^2x-2\sin x+1$

$=(1-\sin^2x)-2\sin x+1$

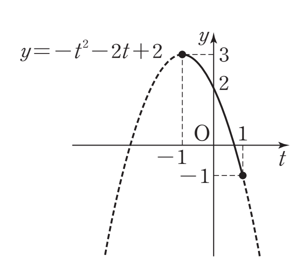
$=-\sin^2x-2\sin x+2$

$\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le1$이고

$y=-t^2-2t+2$

$=-(t+1)^2+3$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=-1$일 때, 최댓값은 3이다.



9-2 답 $-\frac{5}{4}$

|해결 전략| $\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 이용하여 $\cos x=t$라 하고, 이차함수의 최솟값을 구한다.

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$, $\sin^2(x+\pi)=\sin^2 x$이고

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2(x+\pi)$

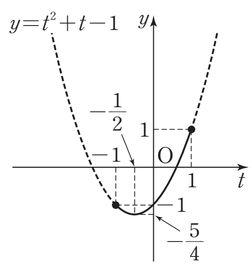
$=\cos x-\sin^2 x$

$=\cos x-(1-\cos^2 x)$

$=\cos^2 x+\cos x-1$

$\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2+t-1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=-\frac{1}{2}$일 때, 최솟값은 $-\frac{5}{4}$이다.

10-1 답 3π

|해결 전략| $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$를 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$에 대한 방정식을 푼다.

$\tan\theta=2\sin\theta$에서 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$

$\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$, $\sin\theta(2\cos\theta-1)=0$

$\therefore \sin\theta=0$ 또는 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

(i) $\sin\theta=0$이면 $\theta=0$ 또는 $\theta=\pi$

(ii) $\cos\theta=\frac{1}{2}$이면 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$0+\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=3\pi$

10-2 답 π

|해결 전략| $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 이용하여 $\sin x=t$라 하고, 이차방정식을 푼다.

$3\tan x=2\cos x$에서 $\frac{3\sin x}{\cos x}=2\cos x$

$3\sin x=2\cos^2 x$

이때, $\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로 $3\sin x=2(1-\sin^2 x)$

$2\sin^2 x+3\sin x-2=0$, $(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$

그런데 $\sin x+2>0$이므로 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$

11-1 답 $\frac{2}{3}\pi$

|해결 전략| $\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 이용하여 삼각함수를 포함한 부등식을 푼다.

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

$2\cos^2 x+3\sin x<0$에서 $2(1-\sin^2 x)+3\sin x<0$

$2\sin^2 x-3\sin x-2>0$, $(2\sin x+1)(\sin x-2)>0$

이때, $\sin x-2<0$이므로 $2\sin x+1<0$

$\therefore \sin x<-\frac{1}{2}$

즉, 주어진 부등식의 해는 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$이므로 $\alpha=\frac{7}{6}\pi$, $\beta=\frac{11}{6}\pi$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{11}{6}\pi-\frac{7}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi$

11-2 답 $\frac{5}{6}\pi$

|해결 전략| $\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 이용하여 삼각함수를 포함한 부등식을 푼다.

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로

$2\sin^2 x+\cos x>2$에서 $2(1-\cos^2 x)+\cos x>2$

$2\cos^2 x-\cos x<0$, $\cos x(2\cos x-1)<0$

$\therefore 0<\cos x<\frac{1}{2}$

즉, 주어진 부등식의 해는 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{6}\pi$

12-1 답 $-\frac{1}{2}$

|해결 전략| 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 실근을 가지려면 $D\ge 0$이어야 함을 이용한다.

이차방정식 $x^2-2x+2\cos\theta=0$이 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cos\theta=1-2\cos\theta\ge 0$

$\therefore \cos\theta\le\frac{1}{2}$

즉, $\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore \cos(\beta-\alpha)=\cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

12-2 답 1

|해결 전략| 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 실근을 갖지 않으려면 $D<0$이어야 함을 이용한다.

이차방정식 $4x^2+4x-\sqrt{2}\sin\theta=0$이 실근을 갖지 않으므로

$\frac{D}{4}=2^2-4\times(-\sqrt{2}\sin\theta)=4+4\sqrt{2}\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta<-\frac{\sqrt{2}}{2}$

즉, $\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$이므로 $\alpha=\frac{5}{4}\pi$, $\beta=\frac{7}{4}\pi$

$\therefore \sin(\beta-\alpha)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

7 | 사인법칙과 코사인법칙

1 사인법칙

개념 확인 190쪽

1 $\sqrt{3}$

1 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore b=\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

STEP 1 개념 드릴 | 192쪽 |

개념 check

1-1 (1) $\sin 60^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $4\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$, 30°, 30°

2-1 (1) 90°, $\frac{1}{2}$, 90°, 1, 1, 2 (2) 45°, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 90°, 1

스스로 check

1-2 답 (1) 3 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 1

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{4}{\frac{1}{3}}=\frac{b}{\frac{1}{4}}$에서 $b=\frac{4}{\frac{1}{3}}\times\frac{1}{4}=3$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{10}{\sin A}=\frac{3}{\frac{1}{5}}$에서 $\sin A=\frac{\frac{1}{5}}{3}\times 10=\frac{2}{3}$

(3) 사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\frac{1}{2}}=\frac{c}{\frac{1}{4}}$에서 $c=\frac{2}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{4}=1$

2-2 답 (1) $2:4:5$ (2) $\frac{3}{11}$ (3) $3:4:5$ (4) $\frac{11}{13}$

(1) $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=2:4:5$

(2) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}}=\frac{a}{b+c}=\frac{3}{11}$$

(3) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$

(4) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=5:6:7$이므로

$a=5k$, $b=6k$, $c=7k$ ($k\neq 0$인 상수)라 하면

$$\frac{a+b}{b+c}=\frac{5k+6k}{6k+7k}=\frac{11}{13}$$

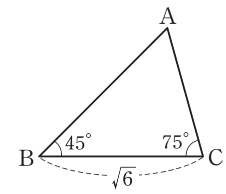
STEP 2 필수 유형 | 193쪽~196쪽 |

01-1 답 2

|해결 전략| 사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC에서 b의 값을 구한다.

삼각형 ABC에서 $A=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

이므로 사인법칙에 의하여



$$\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\frac{b}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore b=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$$

01-2 답 16π

|해결 전략| 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에 외접하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 $A=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=2R \qquad \therefore R=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$$

따라서 삼각형 ABC에 외접하는 원의 넓이는 $4^2\times\pi=16\pi$

02-1 답 2

|해결 전략| 사인법칙에 의하여 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$임을 이용한다.

$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$에서 $a:b:c=3:4:5$이므로

사인법칙에 의하여 $\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$

이때, $\sin A=3k$, $\sin B=4k$, $\sin C=5k$ ($k\neq 0$인 상수)라 하면

$$\frac{\sin A+\sin C}{\sin(A+C)}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin(180^\circ-B)}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}$$

$$=\frac{3k+5k}{4k}=\frac{8k}{4k}=2$$

02-2 답 $\sqrt{2}$

|해결 전략| 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°임을 이용하여 세 내각의 크기를 구한다.

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ\times\frac{2}{12}=30^\circ$, $B=180^\circ\times\frac{3}{12}=45^\circ$,

$C=180^\circ\times\frac{7}{12}=105^\circ$

이때, 사인법칙에 의하여

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

03-1 답 $C=90^\circ$인 직각삼각형

|해결 전략| $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$과 사인법칙을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\cos^2 A+\cos^2 B=\cos^2 C+1$에서

$(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)=(1-\sin^2 C)+1$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$

사인법칙에 의하여 $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$이므로

$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2 \qquad \therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

03-2 답 $B=90^\circ$인 직각삼각형

|해결 전략| 이차방정식이 중근을 갖기 위한 조건과 사인법칙을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\cos^2 B+(\sin C+\cos A)(\sin C-\cos A)=0$

$\cos^2 B+\sin^2 C-\cos^2 A=0$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$(1-\sin^2 B)+\sin^2 C-(1-\sin^2 A)=0$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 C=\sin^2 B$

사인법칙에 의하여 $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$이므로

$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2$

$\therefore a^2+c^2=b^2$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

> **LECTURE**
>
> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)이 중근을 가지려면 판별식을 D라 할 때, $D=b^2-4ac=0$

04-1 답 40 cm

|해결 전략| 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 $C=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=30^\circ$

이때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\dfrac{20}{\sin C}=2R$

$\therefore 2R=\dfrac{20}{\sin 30^\circ}=\dfrac{20}{\frac{1}{2}}=40\ (\text{cm})$

따라서 구하는 접시의 지름의 길이는 40 cm이다.

04-2 답 $\sqrt{3}$ km

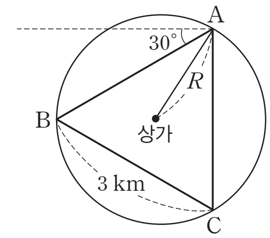
|해결 전략| 세 점으로부터 같은 거리에 있는 점은 세 점을 지나는 삼각형의 외접원의 중심임을 이용한다.

상가에서 A, B, C 세 아파트 단지에 이르는 거리가 같으므로 상가는 세 점 A, B, C를 지나는 삼각형에 외접하는 원의 중심이다.

즉, 상가와 A단지 사이의 거리는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이와 같다.

이때, 삼각형 ABC에서 $A=90^\circ-30^\circ=60^\circ$이므로 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\dfrac{3}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}\ (\text{km})$



따라서 상가와 A단지 사이의 거리는 $\sqrt{3}$ km이다.

2 코사인법칙

개념 확인 197쪽

1 120°

1 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{8^2+7^2-13^2}{2\times 8\times 7}=-\dfrac{1}{2}$

이때, $\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$이므로 $A=120^\circ$

STEP 1 개념 드릴 | 199쪽 |

개념 check

1-1 (1) $\cos A$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 1, 1 (2) a^2, $\cos B$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 8, $2\sqrt{2}$

(3) c^2, c^2, 39, $\sqrt{39}$

2-1 (1) a^2, 2^2, $\dfrac{7}{8}$ (2) a^2, 4^2, $\dfrac{9}{16}$ (3) $2ab$, 2, 1, $\sqrt{3}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

스스로 check

1-2 답 (1) $\sqrt{21}$ (2) 5 (3) $\sqrt{2}$ (4) 6 (5) $\sqrt{13}$ (6) $2\sqrt{14}$

(1) $a^2=3^2+(4\sqrt{3})^2-2\times 3\times 4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=21$

$\therefore a=\sqrt{21}$

(2) $a^2=4^2+7^2-2\times 4\times 7\times\dfrac{5}{7}=25$

$\therefore a=5$

(3) $b^2=(\sqrt{2})^2+2^2-2\times\sqrt{2}\times 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2$

$\therefore b=\sqrt{2}$

(4) $b^2=8^2+7^2-2\times 8\times 7\times\dfrac{11}{16}=36$

$\therefore b=6$

(5) $c^2=3^2+4^2-2\times 3\times 4\times\dfrac{1}{2}=13$

$\therefore c=\sqrt{13}$

(6) $c^2=8^2+6^2-2\times 8\times 6\times\dfrac{11}{24}=56$

$\therefore c=2\sqrt{14}$

2-2 답 (1) $\frac{13}{14}$ (2) $\frac{11}{12}$ (3) $\frac{29}{36}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (5) $\frac{2}{3}$ (6) 0

(1) $\cos A=\frac{5^2+7^2-3^2}{2\times5\times7}=\frac{13}{14}$

(2) $\cos A=\frac{4^2+3^2-(\sqrt{3})^2}{2\times4\times3}=\frac{11}{12}$

(3) $\cos B=\frac{6^2+3^2-4^2}{2\times6\times3}=\frac{29}{36}$

(4) $\cos B=\frac{(\sqrt{2})^2+1^2-2^2}{2\times\sqrt{2}\times1}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

(5) $\cos C=\frac{4^2+3^2-3^2}{2\times4\times3}=\frac{2}{3}$

(6) $\cos C=\frac{(\sqrt{7})^2+3^2-4^2}{2\times\sqrt{7}\times3}=0$

STEP 2 필수 유형

| 200쪽~203쪽 |

01-1 답 $90°$

| 해결 전략 | 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 C의 크기를 구한다.

코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{3})^2=c^2+1^2-2\times c\times1\times\cos60°$

$=c^2+1^2-2\times c\times1\times\frac{1}{2}$

위 식을 정리하면 $c^2-c-2=0$

$(c+1)(c-2)=0 \qquad \therefore c=2\ (\because c>0)$

또, 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{1^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\times1\times\sqrt{3}}=0$

$\therefore C=90°$

01-2 답 2

| 해결 전략 | 코사인법칙을 이용하여 사각형 ABCD에서 선분 AD의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos60°$

$=2^2+3^2-2\times2\times3\times\frac{1}{2}=7$

또, 삼각형 ACD에서 $\overline{AC}^2=7$이고, $\overline{AD}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$7=1^2+x^2-2\times1\times x\times\cos120°$

$=1^2+x^2-2\times1\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=x^2+x+1$

위 식을 정리하면 $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0 \qquad \therefore x=2\ (\because x>0)$

따라서 선분 AD의 길이는 2이다.

02-1 답 $\frac{3}{5}$

| 해결 전략 | $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$와 코사인법칙을 이용한다.

사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$ 이므로

$35\sin A=28\sqrt{2}\sin B=20\sqrt{2}\sin C$에서

$\frac{35a}{2R}=\frac{28b\sqrt{2}}{2R}=\frac{20c\sqrt{2}}{2R}$, $35a=28b\sqrt{2}=20c\sqrt{2}$

$\therefore a:b:c=\frac{1}{35}:\frac{1}{28\sqrt{2}}:\frac{1}{20\sqrt{2}}$

$=4\sqrt{2}:5:7$

이때, $a=4\sqrt{2}k$, $b=5k$, $c=7k$ ($k\neq0$인 상수)라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{(5k)^2+(7k)^2-(4\sqrt{2}k)^2}{2\times5k\times7k}=\frac{3}{5}$

02-2 답 $15°$

| 해결 전략 | 코사인법칙과 사인법칙을 이용하여 최소각의 크기를 구한다.

삼각형의 가장 짧은 변의 대각이 최소각이므로 최소각은 C이다.

코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\times(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때, $0°<B<180°$이므로 $B=135°$

또, 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{2}}{\sin A}=\frac{2}{\sin135°}$, $\sin A=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

그런데 $0°<A<90°$이므로 $A=30°$ ($\because B>90°$)

따라서 $A+B+C=180°$이므로 최소각 C의 크기는

$C=180°-(30°+135°)=15°$

03-1 답 $C=90°$인 직각삼각형

| 해결 전략 | 코사인법칙을 이용하여 세 변의 길이 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

$a+b\cos C=c\cos B$에서 코사인법칙에 의하여

$a+b\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$2a^2+a^2+b^2-c^2=c^2+a^2-b^2$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

03-2 답 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $C=90°$인 직각삼각형

| 해결 전략 | 코사인법칙을 이용하여 세 변의 길이 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

$a\cos A=b\cos B$에서 코사인법칙에 의하여

$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

$c^2(a^2-b^2)-(a^4-b^4)=0$

$c^2(a^2-b^2)-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$
$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$
$\therefore a^2=b^2$ 또는 $c^2=a^2+b^2$
따라서 삼각형 ABC는 $a^2=b^2$에서 $a=b$인 이등변삼각형
또는 $c^2=a^2+b^2$에서 $C=90°$인 직각삼각형이다.

04-1 답 43.6 m

|해결 전략| 코사인법칙을 이용하여 두 나무 A, B 사이의 거리를 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=30^2+50^2-2\times30\times50\times\cos60°$

$=30^2+50^2-2\times30\times50\times\frac{1}{2}=1900$

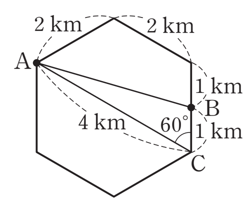
$\therefore \overline{AB}=\sqrt{1900}=10\sqrt{19}$ (m)

이때, $\sqrt{19}=4.36$이므로

$\overline{AB}=10\sqrt{19}=10\times4.36=43.6$ (m)

04-2 답 $\sqrt{13}$ km

|해결 전략| 코사인법칙을 이용하여 A 지점과 도착점 사이의 거리를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 A 지점에서 5 km를 갔을 때의 위치를 B, 6 km를 갔을 때의 위치를 C라 하면 삼각형 ACB에서
$\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=1$, $\angle ACB=60°$
이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=4^2+1^2-2\times4\times1\times\cos60°$

$=4^2+1^2-2\times4\times1\times\frac{1}{2}=13$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{13}$ (km)

따라서 A 지점에서 도착점까지의 직선거리는 $\sqrt{13}$ km이다.

3 삼각형의 넓이

개념 확인 204쪽~206쪽

1 16 **2** $\frac{33\sqrt{3}}{4}$

1 $A+B+C=180°$에서 $A+B=180°-C$이므로

$\sin(A+B)=\sin(180°-C)=\sin C=\frac{1}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times12\times8\times\frac{1}{3}=16$

2 삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times3\times\sin60°=\frac{1}{2}\times6\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

또, 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=6^2+3^2-2\times6\times3\times\cos60°$

$=6^2+3^2-2\times6\times3\times\frac{1}{2}=27$

즉, $\overline{BD}=3\sqrt{3}$이므로 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times3\sqrt{3}\times\sin30°=\frac{1}{2}\times5\times3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{9\sqrt{3}}{2}+\frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{33\sqrt{3}}{4}$

STEP 1 개념 드릴 | 207쪽 |

개념 check

1-1 (1) 2, $\frac{1}{2}$, 2 (2) 10, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $15\sqrt{2}$

2-1 (1) 4, 4, $\frac{1}{2}$, 4 (2) 180°, 180°, 60°, 60°, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{35\sqrt{3}}{2}$

스스로 check

1-2 답 (1) $16\sqrt{3}$ (2) $\frac{15}{2}$ (3) 6 (4) 3

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

(1) $S=\frac{1}{2}\times8\times8\times\sin120°$

$=\frac{1}{2}\times8\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$

(2) $S=\frac{1}{2}\times6\times5\times\sin30°$

$=\frac{1}{2}\times6\times5\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$

(3) $S=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times\sin60°$

$=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$

(4) $S=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin150°$

$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{1}{2}=3$

2-2 답 (1) 12 (2) $24\sqrt{3}$ (3) 10 (4) $6\sqrt{2}$

평행사변형 ABCD의 넓이를 S라 하면

(1) $B=D$이므로

$S=4\times2\sqrt{3}\times\sin60°$

$=4\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12$

(2) $S=6\times8\times\sin120°$

$=6\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$

(3) $C=A$이므로

$S=4\times5\times\sin150^\circ$

$=4\times5\times\frac{1}{2}=10$

(4) $A=C$이므로

$S=3\times4\times\sin135^\circ$

$=3\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

STEP 2 필수 유형
| 208쪽~210쪽 |

01-1 답 $3\sqrt{10}$

| 해결 전략 | 삼각형의 넓이를 구하는 공식과 코사인법칙을 이용한다.

삼각형 ABC의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}\times12\times b\times\sin45^\circ=18 \qquad \therefore b=3\sqrt{2}$

따라서 코사인법칙에 의하여

$c^2=12^2+(3\sqrt{2})^2-2\times12\times3\sqrt{2}\times\cos45^\circ$

$=12^2+(3\sqrt{2})^2-2\times12\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=90$

$\therefore c=3\sqrt{10}$

01-2 답 $14\sqrt{3}$

| 해결 전략 | 코사인법칙을 이용하여 한 각에 대한 코사인 값을 먼저 구한다.

$a+b=15$, $b+c=20$, $c+a=21$을 연립하여 풀면

$a=8$, $b=7$, $c=13$

코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{8^2+7^2-13^2}{2\times8\times7}=-\frac{1}{2} \qquad \therefore C=120^\circ$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times7\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times8\times7\times\frac{\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}$

02-1 답 $4\sqrt{3}$

| 해결 전략 | 외접원의 반지름의 길이가 주어졌을 때의 삼각형의 넓이는 사인법칙을 이용한다.

$A=30^\circ$, $B=120^\circ$라 하면 $C=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2\times4$

$\therefore a=8\sin A$, $b=8\sin B$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times8\sin A\times8\sin B\times\sin C$

$=32\sin A\sin B\sin C$

$=32\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$

LECTURE

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R, 넓이를 S라 하면 사인법칙에 의하여 $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$이므로

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2R\sin A\times2R\sin B\times\sin C$

$=2R^2\sin A\sin B\sin C$

03-1 답 $\frac{21\sqrt{3}}{4}$

| 해결 전략 | 원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합은 180°임을 이용한다.

사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\angle B=180^\circ-\angle D=60^\circ$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times3\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

03-2 답 $\frac{3}{13}$

| 해결 전략 | 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 $\tan^2\theta$의 값을 구한다.

사각형 ABCD의 넓이가 3이므로

$3=\frac{1}{2}\times2\times4\sqrt{3}\times\sin\theta$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$

따라서 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{13}{16}$이므로

$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{3}{13}$

STEP 3 유형 드릴
| 211쪽~213쪽 |

1-1 답 $2\sqrt{3}$

| 해결 전략 | 사인법칙을 이용하여 b의 값을 구한다.

사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin30^\circ}=\frac{4}{\sin C}$

$\sin C=4\times\frac{\sin30^\circ}{2}=4\times\frac{\frac{1}{2}}{2}=1$

$\therefore C=90^\circ$

이때, $B=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)=60^\circ$이므로

$\frac{2}{\sin30^\circ}=\frac{b}{\sin60^\circ}$

$\therefore b=\frac{2}{\sin30^\circ}\times\sin60^\circ=\frac{2}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

1-2 답 3

| 해결 전략 | 사인법칙을 이용하여 a의 값을 구한다.

사인법칙에 의하여 $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{3}{\sin C}$

$\sin C=3\times\dfrac{\sin 120^\circ}{3\sqrt{3}}=3\times\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $C=30^\circ$ 또는 $C=150^\circ$

그런데 $B=120^\circ$이므로 $C=30^\circ$

따라서 $A=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$이므로 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

$\therefore$ $a=3$

2-1 답 16

| 해결 전략 | 사인법칙을 이용하여 삼각형의 세 변의 길이의 합을 구한다.

외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A+\sin B+\sin C$

$=\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}+\dfrac{c}{2R}$

$=\dfrac{a+b+c}{2R}=\dfrac{8}{5}$

이때, $R=5$이므로

$a+b+c=\dfrac{8}{5}\times 2R=\dfrac{8}{5}\times 2\times 5=16$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 16이다.

2-2 답 1

| 해결 전략 | 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C}$

$=\dfrac{(2R\sin A)^3+(2R\sin B)^3+(2R\sin C)^3}{\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C}$

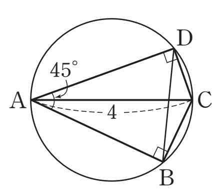
$=\dfrac{8R^3(\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C)}{\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C}$

$=8R^3=8$

$\therefore$ $R=1$

3-1 답 $2\sqrt{2}$

| 해결 전략 | 원의 지름에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용하여 사각형 ABCD의 외접원의 반지름의 길이를 구한다.



오른쪽 그림에서 $\angle B=\angle D=90^\circ$이므로 $\overline{AC}$는 원의 지름이다. 즉, 사각형 ABCD는 반지름의 길이가 2인 원에 내접한다.

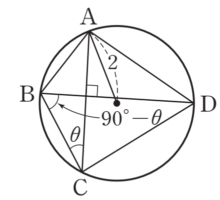
이때, 이 원은 삼각형 ABD의 외접원이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin 45^\circ}=4$

$\therefore$ $\overline{BD}=4\times\sin 45^\circ=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

3-2 답 16

| 해결 전략 | 선분 AB의 길이와 선분 CD의 길이를 사인법칙을 이용하여 삼각함수로 나타낸다.



오른쪽 그림과 같이 $\angle ACB=\theta$라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\overline{AB}=2R\sin\theta=4\sin\theta$

또, $\angle CBD=90^\circ-\theta$이므로

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\overline{CD}=2R\sin(90^\circ-\theta)=4\cos\theta$

$\therefore$ $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=(4\sin\theta)^2+(4\cos\theta)^2$

$=16\sin^2\theta+16\cos^2\theta=16$

4-1 답 $10\sqrt{6}$ m

| 해결 전략 | 사인법칙을 이용하여 두 지점 A, B 사이의 거리를 구한다.

$\angle A=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{30}{\sin 60^\circ}$

$\therefore$ $\overline{AB}=\dfrac{30}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ$

$=\dfrac{30}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{6}\ (\mathrm{m})$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $10\sqrt{6}$ m이다.

4-2 답 $3\sqrt{2}$ km

| 해결 전략 | 사인법칙을 이용하여 두 지점 B, C 사이의 거리를 구한다.

삼각형 ABC에서 $45^\circ+\angle C=75^\circ$ $\quad\therefore$ $\angle C=30^\circ$

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{3}{\sin 30^\circ}$

$\therefore$ $\overline{BC}=\dfrac{3}{\sin 30^\circ}\times\sin 45^\circ$

$=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}\ (\mathrm{km})$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $3\sqrt{2}$ km이다.

5-1 답 8

| 해결 전략 | 코사인법칙을 이용하여 선분 AC의 길이를 구한다.

사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\angle B+\angle D=180^\circ$

$\therefore$ $\cos B=\cos(180^\circ-D)=-\cos D=-\dfrac{1}{4}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=6^2+4^2-2\times 6\times 4\times\cos B$

$=6^2+4^2-2\times 6\times 4\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=64$

$\therefore$ $\overline{AC}=8$ ($\because$ $\overline{AC}>0$)

5-2 답 7

| 해결 전략 | 평행사변형에서 이웃하는 두 내각의 크기의 합은 $180°$임을 이용한다.

삼각형 ACD에서 $\angle \mathrm{D}=120°$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos120°$

$=5^2+3^2-2\times5\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=49$

$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=7$ ($\because \overline{\mathrm{AC}}>0$)

6-1 답 60°

| 해결 전략 | 코사인법칙을 이용하여 길이가 c인 변의 대각의 크기를 구한다.

$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$에서

$(a+b)^2-c^2=3ab$, $a^2+2ab+b^2-c^2=3ab$

$\therefore a^2+b^2-c^2=ab$

한편, 길이가 c인 변의 대각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=60°$

6-2 답 120°

| 해결 전략 | 최대각은 변의 길이가 가장 긴 변의 대각임을 이용한다.

$\sqrt{a^2+ab+b^2}>a$, $\sqrt{a^2+ab+b^2}>b$이므로 세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $\sqrt{a^2+ab+b^2}$이고, 이 변의 대각이 최대각이다.

이때, 변의 길이가 $\sqrt{a^2+ab+b^2}$인 변의 대각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-(a^2+ab+b^2)}{2ab}=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=120°$

따라서 최대각의 크기는 $120°$이다.

7-1 답 6

| 해결 전략 | 삼각형 ABC에서 $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$가 성립함을 이용한다.

삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=4$, $\overline{\mathrm{CD}}=3$

이때, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{8^2+7^2-6^2}{2\times8\times7}=\frac{11}{16}$

또, 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2=8^2+4^2-2\times8\times4\times\cos B$

$=8^2+4^2-2\times8\times4\times\frac{11}{16}=36$

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=6$ ($\because \overline{\mathrm{AD}}>0$)

7-2 답 5

| 해결 전략 | 코사인법칙을 이용하여 $\angle$B 또는 $\angle$C의 코사인 값을 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\times6\times5}=\frac{1}{5}$

또, 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2=2^2+5^2-2\times2\times5\times\cos C$

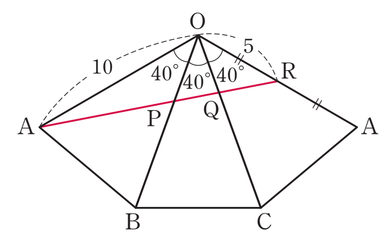
$=2^2+5^2-2\times2\times5\times\frac{1}{5}=25$

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=5$ ($\because \overline{\mathrm{AD}}>0$)

8-1 답 $5\sqrt{7}$

| 해결 전략 | 정삼각뿔의 전개도를 그려 최단 거리를 생각하고, 코사인법칙을 이용한다.

정삼각뿔의 전개도를 그려 보면 다음 그림과 같다.



이때, 최단 거리는 $\overline{\mathrm{AR}}$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AR}}^2=10^2+5^2-2\times10\times5\times\cos120°$

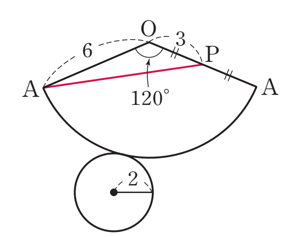
$=10^2+5^2-2\times10\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=175$

$\therefore \overline{\mathrm{AR}}=5\sqrt{7}$ ($\because \overline{\mathrm{AR}}>0$)

8-2 답 $3\sqrt{7}$

| 해결 전략 | 원뿔의 전개도를 그려 최단 거리를 생각하고, 코사인법칙을 이용한다.

원뿔의 전개도를 그려 보면 오른쪽 그림과 같다.



원뿔의 옆면의 전개도인 부채꼴에서 호의 길이가 4π이므로 중심각의 크기를 θ라 하면

$6\theta=4\pi$, $\theta=\frac{2}{3}\pi$, 즉

$\theta=120°$

이때, 최단 거리는 $\overline{\mathrm{AP}}$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}^2=6^2+3^2-2\times6\times3\times\cos120°$

$=6^2+3^2-2\times6\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=63$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}=3\sqrt{7}$ ($\because \overline{\mathrm{AP}}>0$)

9-1 답 $a=b$인 이등변삼각형

| 해결 전략 | 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 세 변의 길이 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

사인법칙과 코사인법칙에 의하여 $\sin A\cos B=\sin B\cos A$에서

$\frac{a}{2R}\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{b}{2R}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$a^2+c^2-b^2=b^2+c^2-a^2$

$a^2=b^2 \qquad \therefore a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

9-2 답 $A=90^\circ$인 직각삼각형

|해결 전략| 코사인법칙을 이용하여 세 변의 길이 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

코사인법칙에 의하여 $a\cos B - b\cos A = c$에서

$$a\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$$

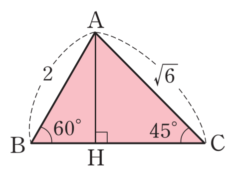
$$(a^2+c^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)=2c^2$$

$$\therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

10-1 답 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

|해결 전략| 삼각비의 성질을 이용하여 변 BC의 길이를 먼저 구하고, 삼각형의 넓이를 구한다.



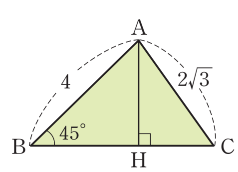
삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}$$
$$=2\cos 60^\circ+\sqrt{6}\cos 45^\circ$$
$$=1+\sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\times(1+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

10-2 답 $4+2\sqrt{2}$

|해결 전략| 삼각비의 성질을 이용하여 변 BC의 길이를 먼저 구하고, 삼각형의 넓이를 구한다.



삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=4\cos 45^\circ=2\sqrt{2}$,

$\overline{AH}=4\sin 45^\circ=2\sqrt{2}$

삼각형 ACH에서 피타고라스 정리에 의하여

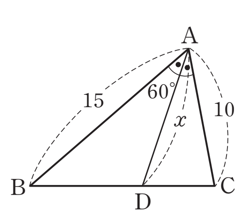
$\overline{CH}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}=2$이므로

$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=2\sqrt{2}+2$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times 4\times(2\sqrt{2}+2)\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=4+2\sqrt{2}$$

11-1 답 $6\sqrt{3}$

|해결 전략| 삼각형 ABD와 삼각형 ADC의 넓이의 합이 삼각형 ABC의 넓이임을 이용한다.



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 15\times 10\times\sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times 15\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{75\sqrt{3}}{2}$$

$\angle BAD=\angle DAC=30^\circ$이고,

$\overline{AD}=x$라 하면

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times 15\times x\times\sin 30^\circ=\frac{15}{4}x$$

$$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times 10\times x\times\sin 30^\circ=\frac{5}{2}x$$

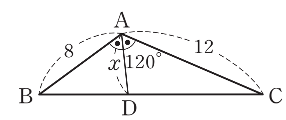
이때, $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$이므로

$$\frac{75\sqrt{3}}{2}=\frac{15}{4}x+\frac{5}{2}x \qquad \therefore x=6\sqrt{3}$$

따라서 선분 AD의 길이는 $6\sqrt{3}$이다.

11-2 답 $\dfrac{24}{5}$

|해결 전략| 삼각형 ABD와 삼각형 ADC의 넓이의 합이 삼각형 ABC의 넓이임을 이용한다.



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times\sin 120^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$$

$\angle BAD=\angle DAC=60^\circ$이고, $\overline{AD}=x$라 하면

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times 8\times x\times\sin 60^\circ=2\sqrt{3}x$$

$$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times 12\times x\times\sin 60^\circ=3\sqrt{3}x$$

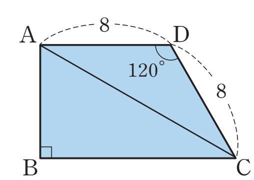
이때, $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$이므로

$$24\sqrt{3}=2\sqrt{3}x+3\sqrt{3}x \qquad \therefore x=\frac{24}{5}$$

따라서 선분 AD의 길이는 $\dfrac{24}{5}$이다.

12-1 답 $40\sqrt{3}$

|해결 전략| 코사인법칙을 이용하여 대각선 AC의 길이를 구한다.



코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=8^2+8^2-2\times 8\times 8\times\cos 120^\circ$$
$$=8^2+8^2-2\times 8\times 8\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=192$$

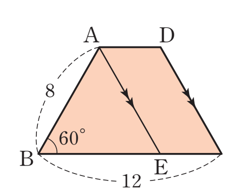
$\therefore \overline{AC}=8\sqrt{3}$ ($\because \overline{AC}>0$)

이때, $\overline{AB}:\overline{BC}=1:\sqrt{3}$이므로 $\overline{AB}=4\sqrt{3}$, $\overline{BC}=12$

$$\therefore \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$$
$$=\frac{1}{2}\times 12\times 4\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times 8\times 8\times\sin 120^\circ$$
$$=24\sqrt{3}+16\sqrt{3}=40\sqrt{3}$$

12-2 답 $32\sqrt{3}$

|해결 전략| 등변사다리꼴의 두 밑각의 크기가 같음을 이용하여 사각형의 넓이를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나고 변 CD에 평행한 선분이 변 BC와 만나는 점을 E라 하면 삼각형 ABE는 한 변의 길이가 8인 정삼각형이다.

이때, $\overline{EC}=4$, $\angle C=60^\circ$이므로

$$\square ABCD=\triangle ABE+\square AECD$$
$$=\frac{1}{2}\times 8^2\times\sin 60^\circ+8\times 4\times\sin 60^\circ$$
$$=16\sqrt{3}+16\sqrt{3}=32\sqrt{3}$$

8 | 등차수열

1 등차수열

개념 확인 216쪽~220쪽

1 (1) 3, 5, 7, 9, 11 (2) 2, 4, 8, 16, 32

2 (1) 13, 19 (2) 5, -7 (3) 2, $\frac{7}{2}$

3 (1) $a_n=-5n+13$ (2) $a_n=4n-2$

4 (1) 4 (2) $\frac{7}{2}$ (3) 2

1 (1) $a_n=2n+1$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$a_1=2\times1+1=3$

$a_2=2\times2+1=5$

$a_3=2\times3+1=7$

$a_4=2\times4+1=9$

$a_5=2\times5+1=11$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지 차례로 나열하면

3, 5, 7, 9, 11

(2) $a_n=2^n$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$a_1=2^1=2$

$a_2=2^2=4$

$a_3=2^3=8$

$a_4=2^4=16$

$a_5=2^5=32$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지 차례로 나열하면

2, 4, 8, 16, 32

2 (1) $7-4=3$에서 공차가 3이므로

4, 7, 10, $\boxed{13}$, 16, $\boxed{19}$, …

(2) $-3-1=-4$에서 공차가 -4이므로

9, $\boxed{5}$, 1, -3, $\boxed{-7}$, -11, …

(3) $\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$에서 공차가 $\frac{1}{2}$이므로

1, $\frac{3}{2}$, $\boxed{2}$, $\frac{5}{2}$, 3, $\boxed{\frac{7}{2}}$, …

3 (1) 첫째항이 8, 공차가 -5이므로

$a_n=8+(n-1)\times(-5)=-5n+13$

(2) 첫째항이 2, 공차가 $6-2=4$이므로

$a_n=2+(n-1)\times4=4n-2$

4 (1) x가 1과 7의 등차중항이므로 $x=\frac{1+7}{2}=4$

(2) $2x$가 3과 11의 등차중항이므로

$2x=\frac{3+11}{2}=7$ $\quad\therefore x=\frac{7}{2}$

(3) $x+3$이 -1과 $6x-1$의 등차중항이므로

$x+3=\frac{-1+(6x-1)}{2}$, $2x+6=6x-2$ $\quad\therefore x=2$

STEP 1 개념 드릴 | 221쪽~222쪽 |

개념 check

1-1 8, 28

2-1 4, 5, 5, 35, 35

3-1 (1) 8, 26 (2) 1, -2

4-1 (1) 2, 2 (2) 20, 22

5-1 (1) 5, 5, 5, 5, 47 (2) -7, -7, -7, -7, -53

6-1 (1) 11, 8 (2) x, $\frac{1}{2}$

스스로 check

1-2 답 (1) 제5항: 3, 제8항: 12 (2) 제5항: 16, 제8항: 128

(1) 첫째항부터 시작하여 다섯 번째와 여덟 번째에 있는 항을 각각 찾으면 제5항은 3이고, 제8항은 12이다.

(2) 첫째항부터 시작하여 다섯 번째와 여덟 번째에 있는 항을 각각 찾으면 제5항은 16이고, 제8항은 128이다.

2-2 답 (1) 4, 9, 14, 19, 24 (2) 3, 9, 19, 33, 51 (3) -1, 1, -1, 1, -1 (4) 1, 2, 5, 12, 27

(1) $a_n=5n-1$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$a_1=5\times1-1=4$

$a_2=5\times2-1=9$

$a_3=5\times3-1=14$

$a_4=5\times4-1=19$

$a_5=5\times5-1=24$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지 차례로 나열하면

4, 9, 14, 19, 24

(2) $a_n=2n^2+1$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$a_1=2\times1^2+1=3$

$a_2=2\times2^2+1=9$

$a_3=2\times3^2+1=19$

$a_4=2\times4^2+1=33$

$a_5=2\times5^2+1=51$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지 차례로 나열하면

3, 9, 19, 33, 51

(3) $a_n=(-1)^n$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$a_1=(-1)^1=-1$

$a_2=(-1)^2=1$

$a_3=(-1)^3=-1$

$a_4=(-1)^4=1$

$a_5=(-1)^5=-1$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지 차례로 나열하면

-1, 1, -1, 1, -1

(4) $a_n=2^n-n$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$a_1=2^1-1=1$

$a_2=2^2-2=2$

$a_3=2^3-3=5$

$a_4=2^4-4=12$

$a_5=2^5-5=27$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지 차례로 나열하면

$1, 2, 5, 12, 27$

3-2 답 (1) $5, 19$ (2) $11, -5$ (3) $-\frac{2}{3}, 0$ (4) $\frac{1}{2}, 0$

(1) $-2-(-9)=7$에서 공차가 7이므로

$-9, -2, \boxed{5}, 12, \boxed{19}, 26, \cdots$

(2) $3-7=-4$에서 공차가 -4이므로

$15, \boxed{11}, 7, 3, -1, \boxed{-5}, \cdots$

(3) $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$에서 공차가 $\frac{1}{3}$이므로

$-1, \boxed{-\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3}, \boxed{0}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \cdots$

(4) $\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$에서 공차가 $-\frac{1}{2}$이므로

$2, \frac{3}{2}, 1, \boxed{\frac{1}{2}}, \boxed{0}, -\frac{1}{2}, \cdots$

4-2 답 (1) $a_n=2n+1$ (2) $a_n=3n-10$ (3) $a_n=-4n+9$ (4) $a_n=-3n+2$

(1) 첫째항이 3, 공차가 2이므로

$a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$

(2) 첫째항이 -7, 공차가 3이므로

$a_n=-7+(n-1)\times3=3n-10$

(3) 첫째항이 5, 공차가 -4이므로

$a_n=5+(n-1)\times(-4)=-4n+9$

(4) 첫째항이 -1, 공차가 -3이므로

$a_n=-1+(n-1)\times(-3)=-3n+2$

5-2 답 (1) 57 (2) 15 (3) -50 (4) -37

(1) 첫째항이 3, 공차가 6이므로

$a_n=3+(n-1)\times6=6n-3$

$\therefore a_{10}=6\times10-3=57$

(2) 첫째항이 -3, 공차가 2이므로

$a_n=-3+(n-1)\times2=2n-5$

$\therefore a_{10}=2\times10-5=15$

(3) 첫째항이 4, 공차가 -6이므로

$a_n=4+(n-1)\times(-6)=-6n+10$

$\therefore a_{10}=-6\times10+10=-50$

(4) 첫째항이 -1, 공차가 -4이므로

$a_n=-1+(n-1)\times(-4)=-4n+3$

$\therefore a_{10}=-4\times10+3=-37$

6-2 답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) 3 (3) -1

(1) $3x$가 8과 19의 등차중항이므로

$3x=\frac{8+19}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{9}{2}$

(2) $2x-1$이 x와 $x+4$의 등차중항이므로

$2x-1=\frac{x+(x+4)}{2}$, $2x-1=x+2$ $\quad\therefore x=3$

(3) $3x+1$이 $x-1$과 $2x$의 등차중항이므로

$3x+1=\frac{(x-1)+2x}{2}$, $6x+2=3x-1$ $\quad\therefore x=-1$

STEP 2 필수 유형

| 223쪽~229쪽 |

01-1 답 (1) $a_n=n\times2^n$, $a_7=896$ (2) $a_n=3\times(-1)^{n-1}$, $a_7=3$ (3) $a_n=\frac{n}{n+1}$, $a_7=\frac{7}{8}$

| 해결 전략 | 주어진 항 사이의 규칙을 찾아 일반항 a_n을 구한다.

(1) $a_1=1\times2=1\times2^1$, $a_2=2\times4=2\times2^2$,

$a_3=3\times8=3\times2^3$, $a_4=4\times16=4\times2^4$, $\cdots$

따라서 주어진 수열의 일반항 a_n은

$a_n=n\times2^n$

$a_n=n\times2^n$에 $n=7$을 대입하면

$a_7=7\times2^7=896$

(2) $a_1=3=3\times(-1)^0$, $a_2=-3=3\times(-1)^1$,

$a_3=3=3\times(-1)^2$, $a_4=-3=3\times(-1)^3$, $\cdots$

따라서 주어진 수열의 일반항 a_n은

$a_n=3\times(-1)^{n-1}$

$a_n=3\times(-1)^{n-1}$에 $n=7$을 대입하면

$a_7=3\times(-1)^6=3$

(3) $a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$, $a_2=\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1}$,

$a_3=\frac{3}{4}=\frac{3}{3+1}$, $a_4=\frac{4}{5}=\frac{4}{4+1}$, $\cdots$

따라서 주어진 수열의 일반항 a_n은

$a_n=\frac{n}{n+1}$

$a_n=\frac{n}{n+1}$에 $n=7$을 대입하면

$a_7=\frac{7}{8}$

02-1 답 (1) $a_n=6n$ (2) $a_n=3n-17$

| 해결 전략 | 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$이다.

(1) 공차를 d라 하면 첫째항은 6이므로

$a_5=6+(5-1)d=30$, $6+4d=30$

$\therefore d=6$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 6, 공차는 6이므로

$a_n=6+(n-1)\times6=6n$

(2) 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+(2-1)d=-11$에서 $a+d=-11$ ……㉠

$a_{10}=a+(10-1)d=13$에서 $a+9d=13$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-14$, $d=3$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -14, 공차는 3이므로

$a_n=-14+(n-1)\times3=3n-17$

02-2 답 제10항

|해결 전략| 주어진 조건을 이용하여 일반항 a_n을 구한 후 $a_k=42$를 만족시키는 k의 값을 구한다.

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+(2-1)d=10$에서 $a+d=10$ ……㉠

$a_7=a+(7-1)d=30$에서 $a+6d=30$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $d=4$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 6, 공차는 4이므로

$a_n=6+(n-1)\times4=4n+2$

42를 제k항이라 하면

$4k+2=42$ $\therefore k=10$

따라서 42는 제10항이다.

03-1 답 $a_n=3n-4$

|해결 전략| 주어진 조건을 등차수열의 첫째항 a, 공차 d에 대한 식으로 나타낸다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4-a_2=6$에서 $(a+3d)-(a+d)=6$

$2d=6$ $\therefore d=3$

$a_4+a_2=10$에서 $(a+3d)+(a+d)=10$

$2a+4d=10$, $2a+12=10$

$\therefore a=-1$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -1, 공차는 3이므로

$a_n=-1+(n-1)\times3=3n-4$

다른 풀이

$a_4-a_2=6$ ……㉠

$a_4+a_2=10$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a_4=8$, $a_2=2$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=a+3d=8$, $a_2=a+d=2$

위 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=3$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -1, 공차는 3이므로

$a_n=-1+(n-1)\times3=3n-4$

03-2 답 38

|해결 전략| 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 일반항 a_n을 구한 후 $n=10$을 대입하여 a_{10}을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3-a_1=8$에서 $(a+2d)-a=8$

$2d=8$ $\therefore d=4$

$a_3a_4=140$에서 $(a+2d)(a+3d)=140$

$(a+8)(a+12)=140$, $a^2+20a+96=140$

$a^2+20a-44=0$, $(a+22)(a-2)=0$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 2, 공차는 4이므로

$a_n=2+(n-1)\times4=4n-2$

$\therefore a_{10}=4\times10-2=38$

04-1 답 제26항

|해결 전략| 처음으로 양수가 되는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하면 된다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -98, 공차가 4이므로

$a_n=-98+(n-1)\times4=4n-102$

이때, 처음으로 양수가 되는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 최초의 항이므로

$4n-102>0$에서 $4n>102$ $\therefore n>\frac{102}{4}=25.5$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제26항이다.

04-2 답 -3

|해결 전략| 처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하면 된다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1-a_4=9$에서 $a-(a+3d)=9$

$-3d=9$ $\therefore d=-3$

$a_3+a_4=99$에서 $(a+2d)+(a+3d)=99$

$2a+5d=99$, $2a-15=99$ $\therefore a=57$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 57, 공차는 -3이므로

$a_n=57+(n-1)\times(-3)=-3n+60$

이때, 처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로

$-3n+60<0$에서 $3n>60$ $\therefore n>20$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제21항이므로 $k=21$

$\therefore a_{21}=-3\times21+60=-3$

05-1 답 16

|해결 전략| 등차수열의 첫째항이 -4, 제10항이 32임을 이용하여 공차를 구한다.

등차수열 -4, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_8, 32의 공차를 d라 하면 첫째항이 -4, 제10항이 32이므로

$-4+9d=32$에서 $9d=36$ $\therefore d=4$

이때, x_5는 제6항이므로

$x_5=-4+(6-1)\times4=16$

05-2 답 15

|해결 전략| 첫째항이 7, 공차가 $-\frac{3}{4}$인 등차수열의 제$(n+2)$항이 -5임을 이용하여 n의 값을 구한다.

첫째항이 7, 공차가 $-\frac{3}{4}$인 등차수열의 제$(n+2)$항이 -5이므로

$7+(n+1)\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-5$

$-\frac{3}{4}(n+1)=-12,\ n+1=16$

$\therefore\ n=15$

06-1 답 2, 4, 6

|해결 전략| 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$라 하고, 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$라 하면

세 수의 합이 12이므로 $(a-d)+a+(a+d)=12$ ……㉠

세 수의 곱이 48이므로 $(a-d)\times a\times(a+d)=48$ ……㉡

㉠에서 $3a=12 \qquad \therefore\ a=4$

㉡에 $a=4$를 대입하면

$(4-d)\times4\times(4+d)=48,\ 16-d^2=12$

$d^2=4 \qquad \therefore\ d=\pm2$

따라서 구하는 세 수는

2, 4, 6

06-2 답 24

|해결 전략| 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

삼차방정식의 세 실근을 $a-d,\ a,\ a+d$라 하면

세 실근의 합이 6이므로

$(a-d)+a+(a+d)=6$

$3a=6 \qquad \therefore\ a=2$

삼차방정식 $x^3-6x^2-4x+k=0$의 한 근이 2이므로 방정식에 $x=2$를 대입하면

$2^3-6\times2^2-4\times2+k=0 \qquad \therefore\ k=24$

LECTURE

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

07-1 답 (1) $a=8,\ b=20$ (2) 28

|해결 전략| (1) a는 4와 12의 등차중항이고, 16은 12와 b의 등차중항임을 이용한다.

(2) 7은 b와 c의 등차중항일 뿐만 아니라 a와 d의 등차중항임을 이용한다.

(1) a는 4와 12의 등차중항이므로

$a=\frac{4+12}{2}=8$

또, 16은 12와 b의 등차중항이므로

$16=\frac{12+b}{2} \qquad \therefore\ b=20$

(2) 7은 b와 c의 등차중항이므로

$7=\frac{b+c}{2} \qquad \therefore\ b+c=14$

또, 7은 a와 d의 등차중항이므로

$7=\frac{a+d}{2} \qquad \therefore\ a+d=14$

$\therefore\ a+b+c+d=(a+d)+(b+c)$
$=14+14=28$

다른 풀이

등차수열을 이루는 다섯 개의 수를 $7-2x,\ 7-x,\ 7,\ 7+x,\ 7+2x$라 하면

$a+b+c+d=(7-2x)+(7-x)+(7+x)+(7+2x)=28$

07-2 답 5

|해결 전략| 나머지정리에 의하여 $f(x)$를 $x-1,\ x,\ x+2$로 나누었을 때의 나머지는 각각 $f(1),\ f(0),\ f(-2)$이다.

나머지정리에 의하여 $f(x)=x^2+ax+5$를 $x-1,\ x,\ x+2$로 나누었을 때의 나머지는 각각

$f(1)=1+a+5=a+6,\ f(0)=5,\ f(-2)=4-2a+5=-2a+9$

이때, $f(0)$은 $f(1)$과 $f(-2)$의 등차중항이므로

$f(0)=\frac{f(1)+f(-2)}{2}$

$5=\frac{(a+6)+(-2a+9)}{2}$

$-a+15=10 \qquad \therefore\ a=5$

2 등차수열의 합

개념 확인 230쪽~232쪽

1 (1) 1400 (2) 435

2 (1) $a_n=4n-2$ (2) $a_1=2,\ a_n=2n-1\ (n\ge2)$

1 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

(1) $S_{20}=\frac{20(5+135)}{2}=1400$

(2) $S_{15}=\frac{15\{2\times8+(15-1)\times3\}}{2}=435$

2 (1) $a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2n^2-2(n-1)^2$
$=4n-2\ (n\ge2)$ ……㉠

$a_1=S_1=2\times1^2=2$ ……㉡

이때, ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 $a_n=4n-2$이다.

(2) $a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2+1-\{(n-1)^2+1\}$
$=2n-1\ (n\ge2)$ ……㉠

$a_1=S_1=1^2+1=2$ ……㉡

이때, ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 $a_1=2,\ a_n=2n-1\ (n\ge2)$이다.

STEP 1 개념 드릴

| 233쪽~234쪽 |

개념 check

1-1 (1) 18, 17, 180　(2) 15, 9, 30
2-1 (1) 2, 400　(2) 7, -114
3-1 (1) -3, 5, 480　(2) 10, -4, -80
4-1 (1) $2n$, 2, $2n$　(2) $6n-3$, 5, 5, $6n-3$

스스로 check

1-2 답 (1) 590　(2) 572　(3) 810　(4) 50　(5) 992

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

(1) $S_{20}=\dfrac{20(1+58)}{2}=590$

(2) $S_{11}=\dfrac{11(4+100)}{2}=572$

(3) $S_{15}=\dfrac{15(12+96)}{2}=810$

(4) $S_{10}=\dfrac{10\{12+(-2)\}}{2}=50$

(5) $S_{32}=\dfrac{32(-1+63)}{2}=992$

2-2 답 (1) 407　(2) 240　(3) -350　(4) -416　(5) 85

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

(1) $S_{11}=\dfrac{11\{2\times2+(11-1)\times7\}}{2}=407$

(2) $S_{15}=\dfrac{15\{2\times(-5)+(15-1)\times3\}}{2}=240$

(3) $S_{14}=\dfrac{14\{2\times1+(14-1)\times(-4)\}}{2}=-350$

(4) $S_{13}=\dfrac{13\{2\times(-2)+(13-1)\times(-5)\}}{2}=-416$

(5) $S_{10}=\dfrac{10\{2\times22+(10-1)\times(-3)\}}{2}=85$

3-2 답 (1) 190　(2) -360　(3) -1520　(4) 299

(1) 첫째항이 1, 공차가 4이므로 주어진 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은
$\dfrac{10\{2\times1+(10-1)\times4\}}{2}=190$

(2) 첫째항이 20, 공차가 -4이므로 주어진 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은
$\dfrac{20\{2\times20+(20-1)\times(-4)\}}{2}=-360$

(3) 첫째항이 1, 공차가 -2이므로 주어진 등차수열의 첫째항부터 제40항까지의 합은
$\dfrac{40\{2\times1+(40-1)\times(-2)\}}{2}=-1520$

(4) 첫째항이 -7, 공차가 5이므로 주어진 등차수열의 첫째항부터 제13항까지의 합은
$\dfrac{13\{2\times(-7)+(13-1)\times5\}}{2}=299$

4-2 답 (1) ① $a_n=2n+1\ (n\geq2)$　② 3　③ $a_n=2n+1$
(2) ① $a_n=2n-1\ (n\geq2)$　② 0
③ $a_1=0$, $a_n=2n-1\ (n\geq2)$

(1) ① $a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$
$=2n+1\ (n\geq2)$ ……㉠
② $a_1=S_1=1^2+2\times1=3$ ……㉡
③ ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=2n+1$

(2) ① $a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2-1-\{(n-1)^2-1\}$
$=2n-1\ (n\geq2)$ ……㉠
② $a_1=S_1=1^2-1=0$ ……㉡
③ ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로
$a_1=0$, $a_n=2n-1\ (n\geq2)$

STEP 2 필수 유형

| 235쪽~238쪽 |

01-1 답 (1) 10　(2) -170

|해결 전략| 주어진 조건을 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구한 후 합을 구한다.

(1) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2=-6$에서 $a+d=-6$ ……㉠
$a_{10}=10$에서 $a+9d=10$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8$, $d=2$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은
$\dfrac{10(-8+10)}{2}=10$

(2) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_4=-28$에서 $a+3d=-28$ ……㉠
$a_{11}=-7$에서 $a+10d=-7$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-37$, $d=3$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은
$\dfrac{20\{2\times(-37)+(20-1)\times3\}}{2}=-170$

01-2 답 10

|해결 전략| 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$임을 이용한다.

첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은
$S_n=\dfrac{n\{2\times4+(n-1)\times2\}}{2}=n(n+3)$
이때, $S_n=130$이므로 $n(n+3)=130$
$n^2+3n-130=0$, $(n+13)(n-10)=0$
$\therefore n=10$ ($\because n$은 자연수)

02-1 답 1085

|해결 전략| 첫째항이 -10, 공차가 3인 등차수열의 제$(n+2)$항은 80임을 이용하여 n의 값을 구한다.

첫째항이 -10, 공차가 3인 등차수열의 제$(n+2)$항이 80이므로

$-10+(n+1)\times3=80$, $3n-7=80$ $\quad\therefore n=29$

따라서 제31항이 80이므로 첫째항부터 제31항까지의 합은

$\dfrac{31(-10+80)}{2}=1085$

02-2 답 $n=14$, $d=-\dfrac{7}{3}$

|해결 전략| 두 수 25와 -10 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등차수열의 전체 항수는 $(n+2)$이다.

첫째항이 25, 제$(n+2)$항이 -10인 등차수열의 합이 120이므로

$\dfrac{(n+2)\{25+(-10)\}}{2}=120$, $15(n+2)=240$ $\quad\therefore n=14$

따라서 제16항이 -10이므로

$25+15d=-10$ $\quad\therefore d=-\dfrac{7}{3}$

03-1 답 14

|해결 전략| 첫째항이 양수이고 공차가 음수일 때, 처음으로 음수가 되는 항이 제k항이면 첫째항부터 제$(k-1)$항까지의 합이 최대가 된다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 40, 공차가 -3이므로

$a_n=40+(n-1)\times(-3)=-3n+43$

이때, 처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로

$-3n+43<0$에서 $3n>43$ $\quad\therefore n>\dfrac{43}{3}=14.33\cdots$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제14항까지가 양수이고 제15항부터 음수가 되므로 S_n이 최대가 되는 n의 값은 14이다.

03-2 답 -98

|해결 전략| 첫째항이 음수이고 공차가 양수일 때, 처음으로 양수가 되는 항이 제k항이면 첫째항부터 제$(k-1)$항까지의 합이 최소가 된다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -26, 공차가 4이므로

$a_n=-26+(n-1)\times4=4n-30$

이때, 처음으로 양수가 되는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 최초의 항이므로

$4n-30>0$에서 $4n>30$ $\quad\therefore n>\dfrac{30}{4}=7.5$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제7항까지가 음수이고 제8항부터 양수가 되므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최소가 된다.

따라서 S_n의 최솟값은

$S_7=\dfrac{7\{2\times(-26)+(7-1)\times4\}}{2}=-98$

04-1 답 74

|해결 전략| $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$임을 이용하여 a_n을 구한다.

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=4n^2-3n-\{4(n-1)^2-3(n-1)\}$

$\quad=8n-7\ (n\ge2)$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$a_1=S_1=4\times1^2-3\times1=1$ $\quad\cdots\cdots$㉡

이때, ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=8n-7$

$\therefore a_1+a_{10}=1+(8\times10-7)=74$

다른 풀이

$S_n=4n^2-3n$이므로

$a_1=S_1=4\times1^2-3\times1=1$

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$\quad=(4\times10^2-3\times10)-(4\times9^2-3\times9)$

$\quad=(400-30)-(324-27)=73$

$\therefore a_1+a_{10}=1+73=74$

04-2 답 45

|해결 전략| $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$임을 이용하여 a_n을 구한다.

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=n^2+2n+1-\{(n-1)^2+2(n-1)+1\}$

$\quad=2n+1\ (n\ge2)$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$a_1=S_1=1^2+2\times1+1=4$ $\quad\cdots\cdots$㉡

이때, ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=4$, $a_n=2n+1\ (n\ge2)$

$\therefore a_1+a_{20}=4+(2\times20+1)=45$

다른 풀이

$S_n=n^2+2n+1$이므로

$a_1=S_1=1^2+2\times1+1=4$

$a_{20}=S_{20}-S_{19}$

$\quad=(20^2+2\times20+1)-(19^2+2\times19+1)$

$\quad=(400+40+1)-(361+38+1)=41$

$\therefore a_1+a_{20}=4+41=45$

STEP 3 유형 드릴

| 239쪽~241쪽 |

1-1 답 ③

|해결 전략| 등차수열 $\{a_n\}$은 이웃하는 두 항의 차가 일정하다.
즉, $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots=d$ (일정)이다.

① 수열 $\{n+2\}$의 각 항을 나열하면 3, 4, 5, 6, $\cdots$이다.
이때, 이웃하는 두 항의 차가 $4-3=5-4=6-5=\cdots=1$로 일정하므로 수열 $\{n+2\}$는 공차가 1인 등차수열이다.

② 수열 $\{2n^2+1\}$의 각 항을 나열하면 3, 9, 19, 33, $\cdots$이다.
이때, 이웃하는 두 항의 차가 일정하지 않으므로 등차수열이 아니다.

③ 수열 $\{2n-3\}$의 각 항을 나열하면 -1, 1, 3, 5, $\cdots$이다.
이때, 이웃하는 두 항의 차가 $1-(-1)=3-1=5-3=\cdots=2$로 일정하므로 수열 $\{2n-3\}$은 공차가 2인 등차수열이다.

④ 수열 2, 2, 2, 2, 2, $\cdots$는 이웃하는 두 항의 차가 $2-2=0$으로 일정하므로 공차가 0인 등차수열이다.

⑤ 수열 1, 2, 4, 8, 16, $\cdots$은 이웃하는 두 항의 차가 일정하지 않으므로 등차수열이 아니다.

1-2 답 3

|해결 전략| 두 수열의 일반항을 각각 구한 후 주어진 조건을 이용하여 d의 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 -1인 등차수열이므로
$a_n=2+(n-1)\times(-1)=-n+3$
또, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 -5, 공차가 d인 등차수열이므로
$b_n=-5+(n-1)d$
$a_5=b_2$에서 $-5+3=-5+d$
$\therefore d=3$

2-1 답 12

|해결 전략| 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 제n항은 $a+(n-1)d$이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=-9$에서 $a+2d=-9$ ⋯⋯㉠
$a_7=3$에서 $a+6d=3$ ⋯⋯㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-15$, $d=3$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -15, 공차는 3이므로
$a_n=-15+(n-1)\times3=3n-18$
$\therefore a_{10}=3\times10-18=12$

2-2 답 제20항

|해결 전략| 조건을 이용하여 일반항 a_n을 구한 후 $a_k=-31$을 만족시키는 k의 값을 찾는다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2=5$에서 $a+d=5$ ⋯⋯㉠
$a_{10}=-11$에서 $a+9d=-11$ ⋯⋯㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=7$, $d=-2$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 7, 공차는 -2이므로
$a_n=7+(n-1)\times(-2)=-2n+9$
-31을 제k항이라 하면
$-2k+9=-31$ $\quad\therefore k=20$
따라서 -31은 제20항이다.

3-1 답 56

|해결 전략| 주어진 조건을 이용하여 일반항 a_n을 구한 후 $n=10$을 대입하여 a_{10}을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2=4a_1$에서 $a+d=4a$
$\therefore d=3a$ ⋯⋯㉠
$a_4+a_5=46$에서 $(a+3d)+(a+4d)=46$
$\therefore 2a+7d=46$ ⋯⋯㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=6$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 2, 공차는 6이므로
$a_n=2+(n-1)\times6=6n-4$
$\therefore a_{10}=6\times10-4=56$

3-2 답 8

|해결 전략| $|a_2|=|a_8|$이면 $a_2=a_8$ 또는 $a_2=-a_8$이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$|a_2|=|a_8|$에서 $|a+d|=|a+7d|$
$\therefore a+d=a+7d$ 또는 $a+d=-(a+7d)$
이때, $a+d=a+7d$이면 $d=0$이므로
$a+d=-(a+7d)$
$\therefore a+4d=0$ ⋯⋯㉠
$a_{15}=40$에서 $a+14d=40$ ⋯⋯㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-16$, $d=4$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -16, 공차는 4이므로
$a_n=-16+(n-1)\times4=4n-20$
$\therefore a_{10}-a_8=4\times10-20-(4\times8-20)=8$

4-1 답 제7항

|해결 전략| 처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하면 된다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=6$에서 $a+2d=6$ ⋯⋯㉠
$a_{10}=-8$에서 $a+9d=-8$ ⋯⋯㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $d=-2$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 10, 공차는 -2이므로
$\therefore a_n=10+(n-1)\times(-2)=-2n+12$
이때, 처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로
$-2n+12<0$에서 $2n>12$ $\quad\therefore n>6$
따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제7항이다.

4-2 답 32

|해결 전략| 주어진 조건을 이용하여 일반항 a_n을 구한 후 부등식 $a_k>100$을 푼다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=-12$에서 $a+2d=-12$ ⋯⋯㉠
$a_4+a_6+a_8=0$에서 $(a+3d)+(a+5d)+(a+7d)=0$
$3a+15d=0$ $\quad\therefore a+5d=0$ ⋯⋯㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-20$, $d=4$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -20, 공차는 4이므로
$a_n=-20+(n-1)\times4=4n-24$
이때, $a_k>100$에서 $4k-24>100$
$4k>124$ $\quad\therefore k>31$
따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 32이다.

5-1 답 2

|해결 전략| 등차수열의 첫째항이 8, 제7항이 -4임을 이용하여 공차를 구한다.

등차수열 8, x_1, x_2, ⋯, x_5, -4의 공차를 d라 하면 첫째항이 8, 제7항이 -4이므로
$8+6d=-4$에서 $6d=-12$ $\quad\therefore d=-2$
이때, x_3은 제4항이므로
$x_3=8+(4-1)\times(-2)=2$

5-2 답 17

|해결 전략| 첫째항이 10, 공차가 5인 등차수열의 제$(n+2)$항이 100임을 이용하여 n의 값을 구한다.

첫째항이 10, 공차가 5인 등차수열의 제$(n+2)$항이 100이므로

$10+(n+1)\times5=100$, $n+1=18$ $\quad\therefore n=17$

6-1 답 -3

|해결 전략| 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하고 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하면

세 수의 합이 3이므로 $(a-d)+a+(a+d)=3$ ……㉠

세 수의 곱이 -15이므로 $(a-d)\times a\times(a+d)=-15$ ……㉡

㉠에서 $3a=3$ $\quad\therefore a=1$

㉡에 $a=1$을 대입하면

$(1-d)\times1\times(1+d)=-15$, $1-d^2=-15$

$d^2=16$ $\quad\therefore d=\pm4$

따라서 세 수는 -3, 1, 5이므로 이 중 가장 작은 수는 -3이다.

6-2 답 12

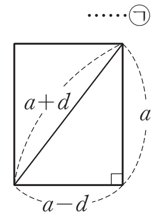
|해결 전략| 직사각형의 가로, 세로, 대각선의 길이를 각각 $a-d$, a, $a+d$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

직사각형의 가로, 세로, 대각선의 길이를 각각 $a-d$, a, $a+d$라 하면 직사각형의 둘레의 길이가 14이므로

$2(a-d)+2a=14$

$\therefore 2a-d=7$ ……㉠

또, 오른쪽 그림에서 피타고라스 정리에 의하여



$(a+d)^2=(a-d)^2+a^2$

$a^2+2ad+d^2=a^2-2ad+d^2+a^2$

$a^2-4ad=0$, $a(a-4d)=0$

$\therefore a=4d$ ($\because a\neq0$) ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=1$

따라서 직사각형의 넓이는

$(a-d)\times a=(4-1)\times4=12$

7-1 답 $a=2$, $b=4$

|해결 전략| $a+3$은 $3a$와 b의 등차중항이고, b는 $a-b$와 $a+2b$의 등차중항이다.

$a+3$이 $3a$와 b의 등차중항이므로

$a+3=\dfrac{3a+b}{2}$, $2a+6=3a+b$

$\therefore a+b=6$ ……㉠

b가 $a-b$와 $a+2b$의 등차중항이므로

$b=\dfrac{a-b+(a+2b)}{2}$, $2b=2a+b$

$\therefore b=2a$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$

7-2 답 33

|해결 전략| 등차수열을 이루는 세 수를 찾고 등차중항을 이용하여 a, b, c, d, e의 값을 각각 구한다.

세 수 3, a, 1에서 a는 3과 1의 등차중항이므로

$a=\dfrac{3+1}{2}=2$

세 수 3, b, 13에서 b는 3과 13의 등차중항이므로

$b=\dfrac{3+13}{2}=8$

세 수 b, c, 4에서 c는 b와 4의 등차중항이므로

$c=\dfrac{b+4}{2}=\dfrac{8+4}{2}=6$

세 수 1, 4, e에서 4는 1과 e의 등차중항이므로

$4=\dfrac{1+e}{2}$ $\quad\therefore e=7$

세 수 13, d, e에서 d는 13과 e의 등차중항이므로

$d=\dfrac{13+e}{2}=\dfrac{13+7}{2}=10$

$\therefore a+b+c+d+e=2+8+6+10+7=33$

8-1 답 10

|해결 전략| 첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$임을 이용한다.

첫째항이 1, 제n항이 -20이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\dfrac{n\{1+(-20)\}}{2}=-\dfrac{19}{2}n$

이때, $S_n=-95$이므로 $-\dfrac{19}{2}n=-95$

$\therefore n=10$

8-2 답 1650

|해결 전략| 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 자연수들을 작은 수부터 차례로 나열하면 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열을 이룬다.

100보다 작은 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수는 2, 5, 8, 11, 14, …이다.

즉, 수열 2, 5, 8, 11, 14, …는 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로 제n항은 $2+(n-1)\times3=3n-1$

$3n-1<100$에서 $n<33.66\cdots$

따라서 구하는 합은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제33항까지의 합이므로

$\dfrac{33\{2\times2+(33-1)\times3\}}{2}=1650$

9-1 답 6

|해결 전략| 두 수 2와 16 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등차수열의 전체 항수는 $(n+2)$이다.

첫째항이 2, 제$(n+2)$항이 16인 등차수열의 합이 72이므로

$\dfrac{(n+2)(2+16)}{2}=72$

$9(n+2)=72$, $n+2=8$

$\therefore n=6$

9-2 답 65

|해결 전략| 첫째항이 1, 제7항이 25임을 이용하여 공차를 구한다.

등차수열 1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 25의 공차를 d라 하면 첫째항이 1, 제7항이 25이므로

$1+6d=25$에서 $6d=24$ $\quad\therefore d=4$

따라서 제n항은

$1+(n-1)\times4=4n-3$

이때, x_1은 제2항, x_5는 제6항이므로

$x_1=4\times2-3=5$, $x_5=4\times6-3=21$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\dfrac{5(5+21)}{2}=65$

다른 풀이

$1+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+25=\dfrac{7(1+25)}{2}$이므로

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\dfrac{7(1+25)}{2}-(1+25)=65$

10-1 답 -360

|해결 전략| 첫째항이 음수이고 공차가 양수일 때, 처음으로 양수가 되는 항이 제k항이면 S_n의 최솟값은 S_{k-1}이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -46, 공차가 3이므로

$a_n=-46+(n-1)\times3=3n-49$

이때, 처음으로 양수가 되는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 최초의 항이므로

$3n-49>0$에서 $3n>49$ $\quad\therefore n>\dfrac{49}{3}=16.33\cdots$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제16항까지가 음수이고 제17항부터 양수가 되므로 첫째항부터 제16항까지의 합이 최소가 된다.

$\therefore n=16$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n의 최솟값은

$S_{16}=\dfrac{16\{2\times(-46)+(16-1)\times3\}}{2}=-376$

$\therefore k=-376$

$\therefore n+k=16+(-376)=-360$

10-2 답 52

|해결 전략| 먼저 등차수열 $\{a_n\}$이 처음으로 음수가 되는 항을 찾는다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 7, 공차가 -2이므로

$a_n=7+(n-1)\times(-2)=-2n+9$

이때, 처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로

$-2n+9<0$에서 $2n>9$ $\quad\therefore n>\dfrac{9}{2}=4.5$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제5항이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|$

$=a_1+a_2+a_3+a_4-a_5-a_6-a_7-a_8-a_9-a_{10}$

$=a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$

$=\dfrac{4(a_1+a_4)}{2}-\dfrac{6(a_5+a_{10})}{2}$

$=\dfrac{4(7+1)}{2}-\dfrac{6\{(-1)+(-11)\}}{2}$

$=16+36=52$

11-1 답 7

|해결 전략| $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\ge2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한 후 $a_k=11$을 만족시키는 k의 값을 찾는다.

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=n^2-2n+1-\{(n-1)^2-2(n-1)+1\}$

$\quad=2n-3\ (n\ge2)$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$a_1=S_1=1^2-2\times1+1=0$ $\quad\cdots\cdots$㉡

이때, ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=0$, $a_n=2n-3\ (n\ge2)$

$a_k=11$에서 $2k-3=11$

$2k=14$ $\quad\therefore k=7$

11-2 답 5

|해결 전략| $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\ge2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한 후 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 개수를 구한다.

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=n^2-10n-\{(n-1)^2-10(n-1)\}$

$\quad=2n-11\ (n\ge2)$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$a_1=S_1=1^2-10\times1=-9$ $\quad\cdots\cdots$㉡

이때, ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-11$

$a_n<0$에서 $2n-11<0$

$2n<11$ $\quad\therefore n<\dfrac{11}{2}=5.5$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5이다.

12-1 답 175장

|해결 전략| n번째 날에 사용한 종이의 장수를 a_n이라 하고 수열 $\{a_n\}$이 어떤 수열인지 알아본다.

n번째 날에 사용한 종이의 장수를 a_n이라 하면 첫 번째 날에 사용한 종이가 10장이고, 그 다음날에는 그 전날보다 종이 5장을 더 사용하므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 10, 공차가 5인 등차수열이다.

따라서 학생이 일주일 동안 연습했을 때, 사용한 종이는

$a_1+a_2+\cdots+a_7=\dfrac{7\{2\times10+(7-1)\times5\}}{2}=175$(장)

12-2 답 185 cm

|해결 전략| n번째 측정한 그림자의 길이를 a_n cm라 하고 수열 $\{a_n\}$이 어떤 수열인지 알아본다.

n번째 측정한 그림자의 길이를 a_n cm라 하면 처음 그림자의 길이가 5 cm이고, 다음 번부터는 바로 전에 측정한 것보다 그림자의 길이가 3 cm씩 길어졌으므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 3인 등차수열이다.

따라서 그림자의 길이를 총 10번 측정했을 때, 측정한 모든 그림자의 길이의 합은

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\dfrac{10\{2\times5+(10-1)\times3\}}{2}=185$ (cm)

9 | 등비수열

1 등비수열

개념 확인 244쪽~246쪽

1 (1) 8, 2 (2) 9, $-\frac{1}{3}$

2 (1) $a_n=33\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (2) $a_n=(-125)\times\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

3 (1) 2 (2) -32 (3) -6, 6

1 (1) 공비가 $\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$이므로

$32,\ 16,\ \boxed{8},\ 4,\ \boxed{2},\ \cdots$

(2) 공비가 $\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$이므로

$-27,\ \boxed{9},\ -3,\ 1,\ \boxed{-\frac{1}{3}},\ \cdots$

2 (1) $a_n=33\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2) 첫째항이 -125, 공비가 $-\frac{1}{5}$이므로

$a_n=(-125)\times\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

3 (1) 4는 x와 8의 등비중항이므로

$4^2=x\times8$ $\therefore x=2$

(2) 8은 -2와 x의 등비중항이므로

$8^2=-2\times x$ $\therefore x=-32$

(3) x는 -9와 -4의 등비중항이므로

$x^2=-9\times(-4)=36$ $\therefore x=-6$ 또는 $x=6$

STEP 1 개념 드릴 | 247쪽~248쪽 |

개념 check

1-1 (1) $\frac{1}{5}$ (2) -6 (3) 4, 256 (4) -2, 2 (5) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{243}$

2-1 (1) 3 (2) 4 (3) -3

3-1 (1) 3, 3^{n-1} (2) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ (3) -2, -2 (4) -2, -2

(5) 125, 125

4-1 (1) $\frac{1}{4}$, 64 (2) 8, 12

스스로 check

1-2 답 (1) 4 (2) 2 (3) -25, -125 (4) 5, -5

(5) $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$ (6) 10, 80

(1) 공비가 $\frac{-8}{16}=-\frac{1}{2}$이므로 $16,\ -8,\ \boxed{4},\ -2,\ 1,\ \cdots$

(2) 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$이므로 $1,\ \sqrt{2},\ \boxed{2},\ 2\sqrt{2},\ 4,\ \cdots$

(3) 공비가 $\frac{-5}{-1}=5$이므로 $-1,\ -5,\ \boxed{-25},\ \boxed{-125},\ -625,\ \cdots$

(4) 공비가 $\frac{5}{-5}=-1$이므로 $\boxed{5},\ -5,\ 5,\ \boxed{-5},\ 5,\ \cdots$

(5) 공비가 $\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$이므로 $4,\ -1,\ \boxed{\frac{1}{4}},\ \boxed{-\frac{1}{16}},\ \boxed{\frac{1}{64}},\ \cdots$

(6) 공비가 $\frac{40}{20}=2$이므로 $5,\ \boxed{10},\ 20,\ 40,\ \boxed{80},\ \cdots$

2-2 답 (1) $a_n=2\times4^{n-1}$ (2) $a_n=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) $a_n=5\times(-4)^{n-1}$ (4) $a_n=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3-2 답 (1) $a_n=2^{n+1}$ (2) $a_n=-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) $a_n=3\times(-1)^{n-1}$ (4) $a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(5) $a_n=2\times(-4)^{n-1}$ (6) $a_n=(-7)^{n-1}$

(1) 첫째항이 4, 공비가 2이므로

$a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$

(2) 첫째항이 -3, 공비가 $-\frac{1}{3}$이므로

$a_n=-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) 첫째항이 3, 공비가 -1이므로

$a_n=3\times(-1)^{n-1}$

(4) 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(5) 첫째항이 2, 공비가 -4이므로

$a_n=2\times(-4)^{n-1}$

(6) 첫째항이 1, 공비가 -7이므로

$a_n=1\times(-7)^{n-1}=(-7)^{n-1}$

4-2 답 (1) 25 (2) -9, 9 (3) -3, 3 (4) -2, 2

(1) 5는 x와 1의 등비중항이므로

$5^2=x\times1$ $\therefore x=25$

(2) $2x$는 9와 36의 등비중항이므로

$(2x)^2=9\times36,\ x^2=81$

$\therefore x=-9$ 또는 $x=9$

(3) x는 $\frac{1}{2}$과 18의 등비중항이므로

$x^2=\frac{1}{2}\times18=9$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

(4) x는 -5와 $-\frac{4}{5}$의 등비중항이므로

$x^2=-5\times\left(-\frac{4}{5}\right)=4$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

STEP 2 필수 유형

| 249쪽~255쪽 |

01-1 답 (1) $\frac{1}{16}$ (2) 첫째항: $-\frac{3}{2}$, 공비: -2

|해결 전략| 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용한다.

(1) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=16$에서 $ar=16$ ······㉠

$a_4=4$에서 $ar^3=4$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=\frac{1}{4}$이므로 $r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

㉠에 $r=\frac{1}{2}$을 대입하면 $\frac{1}{2}a=16$이므로 $a=32$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 32, 공비는 $\frac{1}{2}$이므로

$a_n=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10}=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}=2^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

(2) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=-6$에서 $ar^2=-6$ ······㉠

$a_6=48$에서 $ar^5=48$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-8$이므로 $r=-2$

㉠에 $r=-2$를 대입하면 $4a=-6$이므로 $a=-\frac{3}{2}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $-\frac{3}{2}$, 공비는 -2이다.

01-2 답 99

|해결 전략| 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4=24$에서 $ar^3=24$ ······㉠

$a_7=192$에서 $ar^6=192$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$이므로 $r=2$

㉠에 $r=2$를 대입하면 $8a=24$이므로 $a=3$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 3, 공비는 2이므로

$a_n=3\times2^{n-1}$

$\therefore a_1+a_6=3+3\times2^5=3+96=99$

02-1 답 (1) 1 (2) 16

|해결 전략| 주어진 조건을 첫째항 a, 공비 r에 대한 식으로 표현한 후 주어진 식의 값을 구한다.

(1) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_3=16$에서

$a+ar^2=a(1+r^2)=16$ ······㉠

$a_2+a_4=4$에서

$ar+ar^3=ar(1+r^2)=4$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=\frac{1}{4}$

$\therefore a_3+a_5=ar^2+ar^4=ar^2(1+r^2)$

$=ar(1+r^2)\times r=4\times\frac{1}{4}=1$

(2) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2a_4=16$에서

$ar\times ar^3=a^2r^4=16$

$\therefore ar^2=4$ ($\because ar^2=a_3>0$) ······㉠

$a_3+a_5=12$에서

$ar^2+ar^4=ar^2(1+r^2)=12$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $1+r^2=3$이므로 $r^2=2$

㉠에 $r^2=2$를 대입하면 $2a=4$이므로 $a=2$

$\therefore a_7=ar^6=2\times2^3=16$

02-2 답 $a_n=3^n$

|해결 전략| 주어진 조건을 이용하여 공비 r를 구한 후 일반항 a_n을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 첫째항은 3이므로

$\frac{a_8+a_9}{a_3+a_4}=\frac{3r^7+3r^8}{3r^2+3r^3}=\frac{3r^7(1+r)}{3r^2(1+r)}=r^5=243$, 즉 $r=3$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 3, 공비는 3이므로

$a_n=3\times3^{n-1}=3^n$

03-1 답 $\frac{19}{18}$

|해결 전략| 주어진 조건을 이용하여 공비 r를 구한다.

등비수열 $\frac{3}{4}$, a, b, c, $\frac{4}{27}$의 공비를 $r(r>0)$라 하면

첫째항이 $\frac{3}{4}$, 제5항이 $\frac{4}{27}$이므로

$\frac{3}{4}\times r^4=\frac{4}{27}$에서 $r^4=\frac{16}{81}$ $\quad\therefore r=\frac{2}{3}$ ($\because r>0$)

따라서

$a=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$

$b=\frac{3}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$

$c=\frac{3}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$

이므로 $a+b+c=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{19}{18}$

03-2 답 126

|해결 전략| 주어진 조건을 이용하여 공비 r를 구한다.

등비수열 3, x_1, x_2, $\cdots$, x_5, 192의 공비를 $r(r>0)$라 하면

첫째항이 3, 제7항이 192이므로

$3\times r^6=192$에서 $r^6=64$ $\quad\therefore r=2$ ($\because r>0$)

따라서

$x_1=3\times2=6$

$x_3=3\times2^3=24$

$x_5=3\times2^5=96$

이므로 $x_1+x_3+x_5=6+24+96=126$

04-1 답 -12

|해결 전략| 세 실수가 등비수열의 연속한 항일 때, a, ar, ar^2으로 놓는다.

등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2이라 하면

세 실수의 합이 -9이므로 $a+ar+ar^2=-9$

$\therefore a(1+r+r^2)=-9$ ……㉠

세 실수의 곱이 216이므로 $a\times ar\times ar^2=a^3r^3=216$

$\therefore ar=6$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{a(1+r+r^2)}{ar}=\dfrac{1+r+r^2}{r}=-\dfrac{3}{2}$

$2r^2+5r+2=0,\ (2r+1)(r+2)=0$

$\therefore r=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $r=-2$

$r=-\dfrac{1}{2}$일 때, $a=-12$이므로 세 실수는 $-12, 6, -3$

$r=-2$일 때, $a=-3$이므로 세 실수는 $-3, 6, -12$

따라서 세 수는 $-12, 6, -3$이므로 가장 작은 수는 -12이다.

04-2 답 14

|해결 전략| 삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓는다.

삼차방정식 $x^3-7x^2+kx-8=0$의 세 실근을 $a,\ ar,\ ar^2$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=7$에서 $a(1+r+r^2)=7$

$a\times ar\times ar^2=8$에서 $a^3r^3=8$ $\quad\therefore ar=2$

$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=k$에서

$a^2r(1+r+r^2)=k,\ ar\times a(1+r+r^2)=k$

$\therefore k=2\times 7=14$

> **LECTURE**
> 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면
> ➡ $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

05-1 답 3

|해결 전략| 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $b=\dfrac{a+c}{2}$이고, 등비수열을 이루면 $b^2=ac$이다.

a가 12와 b의 등차중항이므로

$a=\dfrac{12+b}{2}$ ……㉠

b가 a와 4의 등비중항이므로

$b^2=4a$ ……㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$b^2=4\times\dfrac{12+b}{2}$

$b^2-2b-24=0,\ (b+4)(b-6)=0$

$\therefore b=6\ (\because b>0)$

㉠에 $b=6$을 대입하면 $a=\dfrac{12+6}{2}=9$

$\therefore a-b=9-6=3$

05-2 답 -5

|해결 전략| 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $b=\dfrac{a+c}{2}$이고, 등비수열을 이루면 $b^2=ac$이다.

2가 a와 b의 등비중항이므로

$4=ab$ ……㉠

$b+1$이 a와 4의 등차중항이므로

$b+1=\dfrac{a+4}{2}$ $\quad\therefore a=2b-2$ ……㉡

㉠에 ㉡을 대입하면

$4=b(2b-2)$

$b^2-b-2=0,\ (b+1)(b-2)=0$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=2$

(i) $b=-1$이면 $a=-4$

(ii) $b=2$이면 $a=2$

그런데 a, b는 서로 다른 두 실수이므로 모순이다.

(i), (ii)에서 $a=-4,\ b=-1$이므로

$a+b=-4+(-1)=-5$

06-1 답 제10항

|해결 전략| $a_n=ar^{n-1}<x$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 첫째항이 125, 제5항이 $\dfrac{1}{5}$이므로

$125\times r^4=\dfrac{1}{5},\ r^4=\dfrac{1}{625}$

$\therefore r=\dfrac{1}{5}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 125, 공비가 $\dfrac{1}{5}$이므로

$a_n=125\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-4}$

$a_n<\dfrac{1}{10000}$인 n을 구하면

$a_n=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-4}<\dfrac{1}{10000}$에서

$n-4>\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{10000}$

$$\begin{aligned}n&>4+\log_5 10000\\&=4+\frac{\log_5 10000}{\log 5}\\&=4+\frac{4}{1-\log 2}\\&=4+\frac{4}{1-0.3010}\\&=4+\frac{4}{0.6990}\\&=4+5.7224\cdots\\&=9.7224\cdots\end{aligned}$$

이때, n은 자연수이므로 n의 최솟값은 10이다.

따라서 처음으로 $\dfrac{1}{10000}$보다 작게 되는 항은 제10항이다.

07-1 답 $4\times\left(\frac{4}{3}\right)^6$

|해결 전략| 첫째항부터 차례로 나열하여 규칙을 찾아 일반항을 구한 후 구하고자 하는 항의 숫자를 대입한다.

주어진 정삼각형의 한 변의 길이가 1이므로 둘레의 길이는 3이다.

[1단계]에서는 세 변마다 길이가 $\frac{1}{3}$인 선분이 4개씩 생기므로

둘레의 길이는 $3\times\frac{4}{3}=4$ $\therefore a_1=4$

$a_1=4$

$a_2=4\times\left(\frac{4}{3}\right)^1$

$\vdots$

$a_n=4\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_7=4\times\left(\frac{4}{3}\right)^6$

2 등비수열의 합

개념 확인 256쪽

1 (1) $4\left(1-\frac{1}{2^8}\right)$ (2) $\frac{1}{2}(3^8-1)$

1 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

(1) 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$S_8=\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=4\left(1-\frac{1}{2^8}\right)$$

(2) 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이므로

$$S_8=\frac{1\times(3^8-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^8-1)$$

STEP 1 개념 드릴 257쪽

개념 check

1-1 (1) 3 (2) 4 (3) 3^n

2-1 (1) 2, 2 (2) -2, 3 (3) 1, $\left(\frac{1}{3}\right)^n$

스스로 check

1-2 답 (1) $2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ (2) $-2(2^n-1)$ (3) $1-(-3)^n$ (4) $1-(-4)^n$ (5) 5^n-1

(1) $S_n=\dfrac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

(2) $S_n=\dfrac{-2(2^n-1)}{2-1}=-2(2^n-1)$

(3) $S_n=\dfrac{4\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=1-(-3)^n$

(4) $S_n=\dfrac{5\{1-(-4)^n\}}{1-(-4)}=1-(-4)^n$

(5) $S_n=\dfrac{4(5^n-1)}{5-1}=5^n-1$

2-2 답 (1) $\frac{1}{4}(5^n-1)$ (2) $\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}$ (3) $\frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ (4) $\frac{4}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ (5) $\frac{3}{4}\{1-(-3)^n\}$

(1) 첫째항이 1, 공비가 5인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{1\times(5^n-1)}{5-1}=\frac{1}{4}(5^n-1)$$

(2) 첫째항이 1, 공비가 -2인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{1\times\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}$$

(3) 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

(4) 첫째항이 2, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{2\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

(5) 첫째항이 3, 공비가 -3인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{3\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\frac{3}{4}\{1-(-3)^n\}$$

STEP 2 필수 유형 | 258쪽~261쪽 |

01-1 답 (1) $\frac{1}{4}(2^n-1)$
(2) $-\frac{1}{2}\{1-(-3)^n\}$ 또는 $3(2^n-1)$

|해결 전략| 주어진 조건을 첫째항 a, 공비 r에 대한 식으로 표현하여 a, r의 값을 구한 후 등비수열의 합 S_n을 구한다.

(1) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=\frac{1}{2}$에서 $ar=\frac{1}{2}$ ……㉠

$a_6=8$에서 $ar^5=8$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=16$이므로 $r=2$ ($\because r>0$)

㉠에 $r=2$를 대입하면 $2a=\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{1}{4}$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{\frac{1}{4}(2^n-1)}{2-1}=\frac{1}{4}(2^n-1)$$

(2) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=6$에서 $ar=6$ ……㉠

$a_3+a_4=36$에서 $ar^2+ar^3=ar^2(1+r)=36$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r(1+r)=6$

$r^2+r-6=0$, $(r+3)(r-2)=0$

$\therefore r=-3$ 또는 $r=2$

(i) $r=-3$일 때,

$a=-2$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{-2\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=-\frac{1}{2}\{1-(-3)^n\}$$

(ii) $r=2$일 때,

$a=3$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$$

(i), (ii)에서 첫째항부터 제n항까지의 합은

$-\frac{1}{2}\{1-(-3)^n\}$ 또는 $3(2^n-1)$

01-2 답 $\frac{126}{5}$

|해결 전략| 주어진 조건을 첫째항 a, 공비 r에 대한 식으로 표현하여 a, r의 값을 각각 구한 후 첫째항부터 제6항까지의 합을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2+a_4=4$에서

$ar+ar^3=ar(1+r^2)=4$ ……㉠

$a_4+a_6=16$에서

$ar^3+ar^5=ar^3(1+r^2)=16$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$이므로 $r=2$ ($\because r>0$)

㉠에 $r=2$를 대입하면 $10a=4$이므로 $a=\frac{2}{5}$

따라서 첫째항부터 제6항까지의 합 S_6은

$$S_6=\frac{\frac{2}{5}(2^6-1)}{2-1}=\frac{2\times2^6-2}{5}=\frac{126}{5}$$

02-1 답 504

|해결 전략| 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=24$ ……㉠

$S_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}=\frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=120$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4+1=5$이므로 $r^4=4$

$\therefore S_{12}=\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1}$

$=24(4^2+4+1)=504$

02-2 답 744

|해결 전략| 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=24$ ……㉠

제11항부터 제20항까지의 합이 120이므로

$S_{20}-S_{10}=120$, $S_{20}=S_{10}+120=144$

$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=144$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^{10}+1=6$이므로 $r^{10}=5$

$\therefore S_{30}=\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}$

$=24(5^2+5+1)=744$

03-1 답 $a_n=4\times5^n$

|해결 전략| $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge2)$임을 이용한다.

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(5^{n+1}-5)-(5^n-5)$

$=5\times5^n-5^n=4\times5^n\ (n\ge2)$ ……㉠

$a_1=S_1=5^2-5=20$ ……㉡

이때, ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\times5^n$

03-2 답 -12

|해결 전략| 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $a_n=S_n-S_{n-1}$에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 S_1이 일치해야 한다.

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3\times2^{n+2}+k)-(3\times2^{n+1}+k)$

$=6\times2^{n+1}-3\times2^{n+1}$

$=3\times2^{n+1}\ (n\ge2)$ ……㉠

$a_1=S_1=3\times2^3+k=24+k$ ……㉡

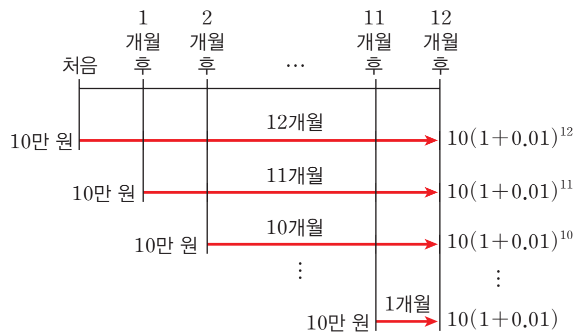
수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 ㉡이 같아야 하므로

$12=24+k \qquad \therefore k=-12$

04-1 답 131만 원

|해결 전략| 월이율 1 %의 복리로 매월 초에 10만 원씩 적립하였을 때, 1년 후에 받는 금액을 먼저 그림으로 나타내 본다.

월이율 1 %의 복리로 매월 초에 10만 원씩 적립하였을 때, 1년 후에 받는 금액을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 1년 후에 받는 금액은

$10(1+0.01)+10(1+0.01)^2+\cdots+10(1+0.01)^{12}$

$=\dfrac{10(1+0.01)\{(1+0.01)^{12}-1\}}{(1+0.01)-1}$

$=\dfrac{10\times1.01(1.01^{12}-1)}{0.01}$

$=\dfrac{10.1(1.13-1)}{0.01}=131.3$

따라서 1년 후에 받는 금액은 131만 원이다.

STEP 3 유형 드릴 | 263쪽~265쪽 |

1-1 답 15

|해결 전략| 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=160$에서 $ar=160$ ……㉠

$a_3=80$에서 $ar^2=80$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=\dfrac{1}{2}$

㉠에 $r=\dfrac{1}{2}$을 대입하면 $\dfrac{1}{2}a=160$이므로 $a=320$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 320, 공비는 $\dfrac{1}{2}$이므로

$a_n=320\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_6+a_7=320\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^5+320\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=10+5=15$

1-2 답 9

|해결 전략| 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4=45$에서 $ar^3=45$ ……㉠

$a_7=135$에서 $ar^6=135$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=3$

$\therefore\ \dfrac{a_8}{a_2}=\dfrac{ar^7}{ar}=r^6=3^2=9$

2-1 답 ③

|해결 전략| 주어진 조건을 첫째항 a, 공비 r에 대한 식으로 표현한 후 a_1의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=9$에서 $ar^2=9$ ……㉠

$a_2 : a_5=8 : 1$에서 $a_2=8a_5$

$ar=8ar^4$, $r^3=\dfrac{1}{8}$ $\quad\therefore\ r=\dfrac{1}{2}$

㉠에 $r=\dfrac{1}{2}$을 대입하면

$\dfrac{1}{4}a=9$ $\quad\therefore\ a=a_1=36$

2-2 답 ④

|해결 전략| 주어진 조건을 첫째항 a, 공비 r에 대한 식으로 표현한 후 a_{13}의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\dfrac{a_5}{a_2}=3$에서 $\dfrac{ar^4}{ar}=r^3=3$

$a_4+a_7=12$에서 $ar^3+ar^6=ar^3(1+r^3)=12$ ……㉠

㉠에 $r^3=3$을 대입하면

$3a(1+3)=12$ $\quad\therefore\ a=1$

$\therefore\ a_{13}=ar^{12}=1\times3^4=81$

3-1 답 ②

|해결 전략| 주어진 조건을 이용하여 공비 r를 구한다.

등비수열 2, a, b, c, 162의 공비를 $r\,(r>0)$라 하면 첫째항이 2, 제5항이 162이므로

$2r^4=162$에서 $r^4=81$ $\quad\therefore\ r=3\ (\because\ r>0)$

따라서

$a=2\times3=6$

$b=2\times3^2=18$

$c=2\times3^3=54$

이므로 $a+b+c=6+18+54=78$

3-2 답 3

|해결 전략| 첫째항이 $\dfrac{3}{8}$, 공비가 4인 등차수열의 제$(n+2)$항이 96임을 이용하여 n의 값을 구한다.

첫째항이 $\dfrac{3}{8}$, 공비가 4인 등비수열의 제$(n+2)$항이 96이므로

$\dfrac{3}{8}\times4^{n+1}=96$에서 $4^{n+1}=256$

$4^{n+1}=4^4$, $n+1=4$ $\quad\therefore\ n=3$

4-1 답 8

|해결 전략| 등비수열을 이루는 세 실수는 a, ar, ar^2으로 놓는다.

등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2이라 하면

세 실수의 합이 14이므로 $a+ar+ar^2=14$

$\therefore a(1+r+r^2)=14$ ……㉠

세 실수의 곱이 64이므로 $a\times ar\times ar^2=a^3r^3=64$

$\therefore ar=4$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{a(1+r+r^2)}{ar}=\dfrac{1+r+r^2}{r}=\dfrac{7}{2}$

$2r^2-5r+2=0$, $(2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=\dfrac{1}{2}$ 또는 $r=2$

$r=\dfrac{1}{2}$일 때, $a=8$이므로 세 실수는 8, 4, 2

$r=2$일 때, $a=2$이므로 세 실수는 2, 4, 8

따라서 세 실수는 2, 4, 8이므로 가장 큰 수는 8이다.

4-2 답 $\frac{1}{8}$

|해결 전략| 삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓는다.

삼차방정식 $x^3-2x^2+x-k=0$의 세 실근을 a, ar, ar^2이라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=2$에서 $a(1+r+r^2)=2$

$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=1$에서

$a^2r(1+r+r^2)=ar\times a(1+r+r^2)=1$

$2ar=1$ $\quad\therefore ar=\dfrac{1}{2}$

$a\times ar\times ar^2=k$에서 $a^3r^3=k$

$\therefore k=(ar)^3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

LECTURE

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

5-1 답 ②

|해결 전략| 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=ar^{n-1}$이고, 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 b_n은 $b_n=a+(n-1)d$이다.

첫째항이 2, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=2r^{n-1}$

첫째항이 1, 공차가 5인 등차수열의 일반항 b_n은

$b_n=1+(n-1)\times5=5n-4$

$a_4=b_4$에서 $2r^3=5\times4-4$

$r^3=8$ $\quad\therefore r=2$

5-2 답 81

|해결 전략| 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하고 주어진 조건을 이용하여 a, r의 값을 구한다.

첫째항이 3, 공차가 6인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=3+(n-1)\times6=6n-3$

등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 일반항 b_n은

$b_n=ar^{n-1}$

$a_3=5b_3$에서

$6\times3-3=5ar^2$ $\quad\therefore ar^2=3$ ……㉠

$a_5=b_5$에서

$6\times5-3=ar^4$ $\quad\therefore ar^4=27$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=9$이므로 $r=3$ ($\because r>0$)

㉠에 $r=3$을 대입하면 $9a=3$이므로 $a=\dfrac{1}{3}$

따라서 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 $\dfrac{1}{3}$, 공비는 3이므로

$b_n=\dfrac{1}{3}\times3^{n-1}$

$\therefore b_6=\dfrac{1}{3}\times3^5=3^4=81$

6-1 답 ①

|해결 전략| 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $b=\dfrac{a+c}{2}$이고, 등비수열을 이루면 $b^2=ac$이다.

3은 a와 b의 등차중항이므로

$3=\dfrac{a+b}{2}$ $\quad\therefore a+b=6$ ……㉠

$a+b$는 1과 $2b$의 등비중항이므로

$(a+b)^2=2b$ ……㉡

㉡에 ㉠을 대입하면 $6^2=2b$이므로 $b=18$

㉠에 $b=18$을 대입하면 $a+18=6$이므로 $a=-12$

$\therefore b-a=18-(-12)=30$

6-2 답 9

|해결 전략| 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2b=a+c$이고, 등비수열을 이루면 $b^2=ac$이다.

$\log a$가 $\log 3$과 $\log b$의 등차중항이므로

$2\log a=\log 3+\log b$, $\log a^2=\log 3b$

$\therefore a^2=3b$ ……㉠

2^{2a}은 2와 2^{9b}의 등비중항이므로

$(2^{2a})^2=2\times2^{9b}$, $2^{4a}=2^{9b+1}$

$\therefore 4a=9b+1$ ……㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$4a=3a^2+1$, $3a^2-4a+1=0$

$(3a-1)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{3}$ 또는 $a=1$

그런데 $a=1$이면 $\log a=\log 1=0$이므로 $a=\dfrac{1}{3}$

㉠에 $a=\dfrac{1}{3}$을 대입하면 $b=\dfrac{1}{27}$

$\therefore \dfrac{a}{b}=9$

LECTURE

두 양수 M, N에 대하여

❶ $\log M+\log N=\log MN$ ❷ $\log M-\log N=\log\dfrac{M}{N}$

7-1 답 제8항

|해결 전략| 첫째항이 1.5, 공비가 3인 등비수열에서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

주어진 등비수열의 첫째항은 1.5, 공비는 3이므로 일반항 a_n은

$a_n=1.5\times3^{n-1}=\frac{1}{2}\times3^n$

$a_n=\frac{1}{2}\times3^n>3000$에서

$\log\frac{1}{2}+n\log3>\log(3\times1000)$

$n\log3>\log3+3+\log2$

$\therefore n>\frac{\log3+3+\log2}{\log3}=\frac{0.48+3+0.3}{0.48}=7.875$

이때, n은 자연수이므로 n의 최솟값은 8이다.

따라서 처음으로 3000보다 크게 되는 항은 제8항이다.

7-2 답 제15항

|해결 전략| 첫째항이 243, 공비가 r인 등비수열에서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 첫째항은 243, 제6항이 1이므로

$243r^5=1,\ r^5=\frac{1}{243}\qquad\therefore r=\frac{1}{3}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 243, 공비는 $\frac{1}{3}$이므로

$a_n=243\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$a_n=243\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\frac{1}{8000}$에서

$5\log3-(n-1)\log3<-(3\log2+3)$

$n\log3>5\log3+\log3+3\log2+3$

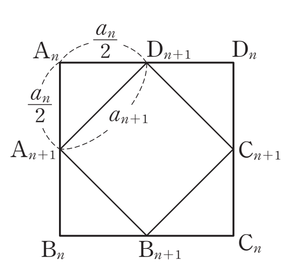
$\therefore n>\frac{6\log3+3\log2+3}{\log3}=\frac{2.88+0.9+3}{0.48}=14.125$

이때, n은 자연수이므로 n의 최솟값은 15이다.

따라서 처음으로 $\frac{1}{8000}$보다 작게 되는 항은 제15항이다.

8-1 답 1

|해결 전략| 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 변의 길이의 비를 구한다.



오른쪽 그림의 직각삼각형 $A_nA_{n+1}D_{n+1}$에서

$a_{n+1}{}^2=\left(\frac{a_n}{2}\right)^2+\left(\frac{a_n}{2}\right)^2=\frac{1}{2}a_n{}^2$

$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}a_n$

즉, 첫째항은 $2\sqrt{2}$, 공비는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 등비수열이므로

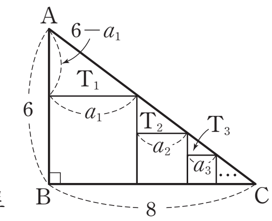
$a_n=2\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

따라서 정사각형 $A_8B_8C_8D_8$의 둘레의 길이는

$4a_8=4\times2\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^7=1$

8-2 답 $\frac{24}{7}\times\left(\frac{4}{7}\right)^7$

|해결 전략| 첫째항부터 차례로 나열하여 규칙을 찾아 a_8을 구한다.



오른쪽 그림에서 삼각형 T_1과 삼각형 ABC는 닮음이므로

$(6-a_1):a_1=6:8=3:4$에서

$24-4a_1=3a_1\qquad\therefore a_1=\frac{24}{7}$

삼각형 T_2와 삼각형 ABC는 닮음이므로

$(a_1-a_2):a_2=3:4$에서

$4a_1-4a_2=3a_2\qquad\therefore a_2=\frac{4}{7}a_1=\frac{4}{7}\times\frac{24}{7}$

같은 방법으로 $a_3=\left(\frac{4}{7}\right)^2\times\frac{24}{7}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{24}{7}$, 공비가 $\frac{4}{7}$인 등비수열이므로

$a_n=\frac{24}{7}\times\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}$

$\therefore a_8=\frac{24}{7}\times\left(\frac{4}{7}\right)^7$

9-1 답 9

|해결 전략| 주어진 조건을 첫째항 a, 공비 r에 대한 식으로 표현하여 a, r의 값을 각각 구한 후 $S_n=1533$일 때의 n의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=12$에서 $ar^2=12$ ······㉠

$a_6=96$에서 $ar^5=96$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$이므로 $r=2$

㉠에 $r=2$를 대입하면 $4a=12$이므로 $a=3$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 1533이므로

$\frac{3(2^n-1)}{2-1}=1533,\ 2^n-1=511$

$2^n=512$

$\therefore n=9$

9-2 답 ④

|해결 전략| 주어진 조건을 첫째항 a, 공비 r에 대한 식으로 표현하여 a, r의 값을 구한 후 첫째항부터 제6항까지의 합을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_4=3$에서 $a+ar^3=a(1+r^3)=3$ ······㉠

$a_4+a_7=24$에서 $ar^3+ar^6=ar^3(1+r^3)=24$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$이므로 $r=2$

㉠에 $r=2$를 대입하면 $9a=3$이므로 $a=\frac{1}{3}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합은

$\frac{\frac{1}{3}(2^6-1)}{2-1}=\frac{1}{3}\times63=21$

10-1 답 ④

|해결 전략| 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 공비는 3이므로

$S_{10}=kS_5$에서 $\frac{a(3^{10}-1)}{3-1}=k\times\frac{a(3^5-1)}{3-1}$

$3^{10}-1=k(3^5-1)$, $(3^5+1)(3^5-1)=k(3^5-1)$

$\therefore k=3^5+1=243+1=244$

10-2 답 130

|해결 전략| 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_5=\frac{a(r^5-1)}{r-1}=10$ ······㉠

등비수열 $\{a_n\}$의 제6항부터 제10항까지의 합이 30이므로

$S_{10}-S_5=30$, $S_{10}=S_5+30=40$

$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=\frac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}=40$ ······㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^5+1=4$이므로 $r^5=3$

$\therefore S_{15}=\frac{a(r^{15}-1)}{r-1}=\frac{a(r^5-1)(r^{10}+r^5+1)}{r-1}$

$=10(3^2+3+1)=130$

11-1 답 ①

|해결 전략| $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^{n+1}+4)-(2^n+4)$

$=2\times2^n-2^n=2^n\ (n\geq2)$ ······㉠

$a_1=S_1=2^2+4=8$ ······㉡

이때, ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=8$, $a_n=2^n\ (n\geq2)$

$\therefore \frac{a_3}{a_1}=\frac{2^3}{8}=1$

11-2 답 6

|해결 전략| $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2\times3^{2n+1}-k)-(2\times3^{2n-1}-k)$

$=6\times3^{2n}-\frac{2}{3}\times3^{2n}=\frac{16}{3}\times3^{2n}\ (n\geq2)$ ······㉠

$a_1=S_1=2\times3^3-k=54-k$ ······㉡

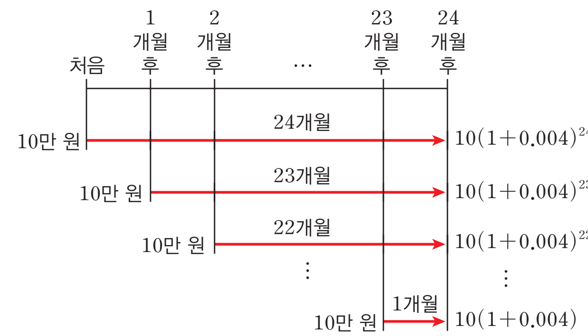
수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 ㉡이 같아야 하므로

$\frac{16}{3}\times3^2=54-k$ $\quad\therefore k=6$

12-1 답 ③

|해결 전략| 월이율 0.4 %의 복리로 매월 초에 10만 원씩 적립했을 때, 24개월 후에 받는 금액을 먼저 그림으로 나타내 본다.

월이율 0.4 %의 복리로 매달 초에 10만 원씩 적립하였을 때, 24개월 후에 적립된 금액을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 24개월 후에 적립된 총액은

$10(1+0.004)+10(1+0.004)^2+\cdots+10(1+0.004)^{24}$

$=\frac{10(1+0.004)\{(1+0.004)^{24}-1\}}{(1+0.004)-1}$

$=\frac{10\times1.004(1.004^{24}-1)}{0.004}$

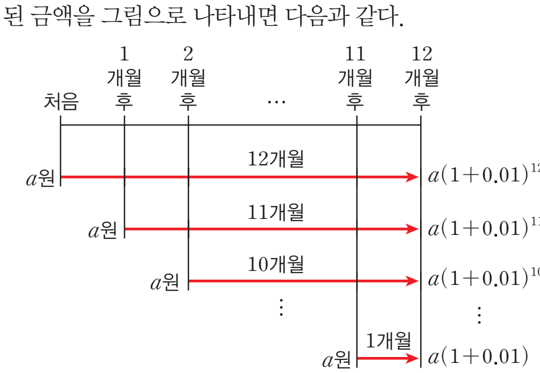
$=\frac{10.04(1.1-1)}{0.004}$

$=251$(만 원)

12-2 답 ⑤

|해결 전략| 월이율 1 %의 복리로 매월 초에 a원씩 적립했을 때, 12개월 후에 받는 금액을 먼저 그림으로 나타내 본다.

월이율 1 %의 복리로 매월 초에 a원씩 적립하였을 때, 12개월 후에 적립된 금액을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 12개월 후 적립된 총액은

$a(1+0.01)+a(1+0.01)^2+\cdots+a(1+0.01)^{12}$

$=\frac{a(1+0.01)\{(1+0.01)^{12}-1\}}{(1+0.01)-1}$

$=\frac{a\times1.01(1.01^{12}-1)}{0.01}$

$=\frac{a\times1.01\times0.13}{0.01}$

$=13.13a$

이때, 적립된 금액이 100만 원이어야 하므로

$13.13a=1000000$, $a\fallingdotseq76000$(원)

$\therefore$ 76000원

10 | 수열의 합

1 합의 기호 $\sum$

개념 확인 268쪽~269쪽

1 (1) $\sum_{k=1}^{14} 2k$ (2) $\sum_{k=1}^{25} 3\times 2^k$

2 (1) 1 (2) -22

1 (1) 수열 2, 4, 6, $\cdots$, 28은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=2+(n-1)\times 2=2n$

이때, $2n=28$에서 $n=14$이므로

$2+4+6+\cdots+28=\sum_{k=1}^{14} 2k$

(2) 수열 3×2, 3×2^2, 3×2^3, $\cdots$, 3×2^{25}은 첫째항이 3×2, 공비가 2인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=3\times 2\times 2^{n-1}=3\times 2^n$

이때, $3\times 2^n=3\times 2^{25}$에서 $n=25$이므로

$3\times 2+3\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+3\times 2^{25}=\sum_{k=1}^{25} 3\times 2^k$

2 (1) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3b_k)=2\sum_{k=1}^{10} a_k+3\sum_{k=1}^{10} b_k$

$=2\times 8+3\times(-5)=1$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k-4)=\sum_{k=1}^{10} a_k-2\sum_{k=1}^{10} b_k-\sum_{k=1}^{10} 4$

$=8-2\times(-5)-4\times 10=-22$

STEP 1 개념 드릴 | 270쪽 |

개념 check

1-1 (1) 12 (2) 8, 3

2-1 (1) 1, 3, $3k-2$ (2) 3, 3, 3^k

3-1 (1) 2, 2, 44 (2) 3, 3, 53

스스로 check

1-2 답 (1) $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10}$ (2) $-1+2-3+4-5$

(1) $\sum_{k=1}^{10} 2^k=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10}$

(2) $\sum_{k=1}^{5}(-1)^k\times k$

$=(-1)^1\times 1+(-1)^2\times 2+(-1)^3\times 3+(-1)^4\times 4+(-1)^5\times 5$

$=-1+2-3+4-5$

2-2 답 (1) $\sum_{k=1}^{5} 2$ (2) $\sum_{k=1}^{5} 5\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$

(1) $2+2+2+2+2=\sum_{k=1}^{5} 2$

(2) 수열 15, 5, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{27}$는 첫째항이 15, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

일반항 a_n은 $a_n=15\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=5\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

$\therefore 15+5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}=\sum_{k=1}^{5} 5\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$

3-2 답 (1) -25 (2) 20

(1) $\sum_{k=1}^{5}(a_k-2b_k)=\sum_{k=1}^{5} a_k-2\sum_{k=1}^{5} b_k=-15-2\times 5=-25$

(2) $\sum_{k=1}^{5}(a_k+5b_k+2)=\sum_{k=1}^{5} a_k+5\sum_{k=1}^{5} b_k+\sum_{k=1}^{5} 2$

$=-15+5\times 5+2\times 5=20$

STEP 2 필수 유형 | 271쪽~272쪽 |

01-1 답 50

|해결 전략| $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$를 $\sum$를 사용하지 않고 나타내 본다.

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n} a_k$

이때, $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=2n^2$이므로 $\sum_{k=1}^{2n} a_k=2n^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k=2\times 5^2=50$

01-2 답 25

|해결 전략| $\sum_{k=2}^{11} ka_{k-1}$, $\sum_{k=1}^{10} ka_k$를 각각 $\sum$를 사용하지 않고 나타내 본다.

$\sum_{k=2}^{11} ka_{k-1}=35$에서

$2a_1+3a_2+4a_3+\cdots+11a_{10}=35$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{10} ka_k=10$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=10$ ……㉡

㉠$-$㉡을 하면 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=25$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k=25$

02-1 답 5

|해결 전략| $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=9$에서 $(a_k+b_k)^2$을 전개하여 주어진 조건을 이용한다.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

이때, $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=9$, $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=2$이므로

$$9=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+2\times2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=5$$

LECTURE

$\sum$의 성질

❶ $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

❷ $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

❸ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

❹ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

02-2 답 45

|해결 전략| $\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3)^2$에서 $(2a_k-3)^2$을 전개하여 $\sum$의 성질을 이용한다.

$$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3)^2=\sum_{k=1}^{5}(4a_k^2-12a_k+9)$$
$$=4\sum_{k=1}^{5}a_k^2-12\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}9$$
$$=4\times15-12\times5+9\times5=45$$

2 기호 $\sum$와 수열의 합

개념 확인 273쪽~274쪽

1 (1) 72 (2) 1436 **2** (1) $\frac{10}{21}$ (2) 5

1 (1) $\sum_{k=1}^{6}(4k-2)=4\sum_{k=1}^{6}k-\sum_{k=1}^{6}2$

$$=4\times\frac{6(6+1)}{2}-2\times6$$
$$=84-12=72$$

(2) $\sum_{k=1}^{7}k^2+\sum_{k=1}^{8}k^3=\frac{7(7+1)(2\times7+1)}{6}+\left\{\frac{8(8+1)}{2}\right\}^2$

$$=140+1296=1436$$

2 (1) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$$=\frac{1}{2k+1-(2k-1)}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$$

(2) $\sum_{k=1}^{35}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$$=\sum_{k=1}^{35}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$=\sum_{k=1}^{35}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{36}-\sqrt{35})$$
$$=\sqrt{36}-1=6-1=5$$

STEP 1 개념 드릴 | 276쪽~277쪽 |

개념 check

1-1 (1) 3, 27, 63 (2) 21, 40, 315

(3) 6, 11, 20, 140 (4) 39, 2660

2-1 (1) 2, 2, 9, 10, 2, 10, $\frac{14}{45}$

(2) $\sqrt{3k-1}-\sqrt{3k+2}$, $\sqrt{3k-1}-\sqrt{3k+2}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{50}$, $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

스스로 check

1-2 답 (1) 124 (2) 199 (3) 885 (4) 1168 (5) 1771 (6) 5950

(1) $\sum_{k=1}^{8}(3k+2)=3\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}2=3\times\frac{8\times9}{2}+2\times8=124$

(2) $\sum_{k=1}^{6}(k+2)^2=\sum_{k=1}^{6}(k^2+4k+4)=\sum_{k=1}^{6}k^2+4\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}4$

$$=\frac{6\times7\times13}{6}+4\times\frac{6\times7}{2}+4\times6=199$$

(3) $\sum_{k=1}^{5}k(2k+1)(2k-1)=\sum_{k=1}^{5}(4k^3-k)=4\sum_{k=1}^{5}k^3-\sum_{k=1}^{5}k$

$$=4\times\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2-\frac{5\times6}{2}=885$$

(4) $\sum_{k=1}^{12}(2+k^2)-\sum_{k=1}^{12}(2k-k^2)$

$$=\sum_{k=1}^{12}(2+k^2-2k+k^2)=\sum_{k=1}^{12}(2k^2-2k+2)$$
$$=2\sum_{k=1}^{12}k^2-2\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}2$$
$$=2\times\frac{12\times13\times25}{6}-2\times\frac{12\times13}{2}+2\times12=1168$$

(5) $1^2+3^2+5^2+\cdots+21^2$

$=\sum_{k=1}^{11}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{11}(4k^2-4k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{11}k^2-4\sum_{k=1}^{11}k+\sum_{k=1}^{11}1$

$=4\times\frac{11\times12\times23}{6}-4\times\frac{11\times12}{2}+1\times11=1771$

(6) $1\times3+2\times5+3\times7+\cdots+20\times41$

$=\sum_{k=1}^{20}k(2k+1)=\sum_{k=1}^{20}(2k^2+k)$

$=2\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=1}^{20}k$

$=2\times\frac{20\times21\times41}{6}+\frac{20\times21}{2}=5950$

2-2 답 (1) $\frac{5}{24}$ (2) $\frac{175}{264}$ (3) $\frac{15}{46}$ (4) 4 (5) $2\sqrt{2}$ (6) 6

(1) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)=\frac{5}{24}$

(2) $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\cdots+\frac{1}{11^2-1}$

$=\sum_{k=2}^{11}\frac{1}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{11}\frac{1}{(k-1)(k+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{11}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)=\frac{175}{264}$

(3) $\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{43}-\frac{1}{46}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{46}\right)=\frac{15}{46}$

(4) $\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$

$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})$

$=-\frac{1}{2}\{(1-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{7})+\cdots+(\sqrt{79}-\sqrt{81})\}$

$=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{81})=4$

(5) $\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k}}$

$=\sum_{k=1}^{24}\frac{(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})}{(\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k})(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{50}-\sqrt{48})\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{50}-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

(6) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{49}+\sqrt{48}}$

$=\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$=\sum_{k=1}^{48}\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$

$=\sum_{k=1}^{48}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$

$=\sqrt{49}-1=6$

STEP 2 필수 유형

| 278쪽~282쪽 |

01-1 답 (1) 240 (2) 201

|해결 전략| 자연수의 거듭제곱의 합과 $\sum$의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

(1) $\sum_{k=1}^{8}k(k+1)=\sum_{k=1}^{8}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{8}k^2+\sum_{k=1}^{8}k$

$=\frac{8\times9\times17}{6}+\frac{8\times9}{2}$

$=204+36=240$

(2) $\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3-1}{15}=\frac{1}{15}\left(\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{10}1\right)$

$=\frac{1}{15}\left\{\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2-1\times10\right\}$

$=\frac{3015}{15}=201$

01-2 답 265

|해결 전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계와 $\sum$의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

주어진 이차방정식의 두 근이 α_k, β_k이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha_k+\beta_k=-3$, $\alpha_k\beta_k=-k^2$

이때, $(\alpha_k-\beta_k)^2=(\alpha_k+\beta_k)^2-4\alpha_k\beta_k=(-3)^2+4k^2=4k^2+9$

이므로

$\sum_{k=1}^{5}(\alpha_k-\beta_k)^2=\sum_{k=1}^{5}(4k^2+9)=4\sum_{k=1}^{5}k^2+\sum_{k=1}^{5}9$

$=4\times\frac{5\times6\times11}{6}+9\times5=265$

02-1 답 975

ㅣ해결 전략ㅣ $\sum$ 기호가 여러 개 있는 식의 계산에서는 괄호 안부터 차례로 계산한다.

$$\sum_{m=1}^{25}\left(\sum_{l=1}^{m}3\right)=\sum_{m=1}^{25}3m=3\sum_{m=1}^{25}m$$
$$=3\times\frac{25\times26}{2}=975$$

02-2 답 270

ㅣ해결 전략ㅣ $\sum$ 기호가 여러 개 있는 식의 계산에서는 괄호 안부터 차례로 계산한다.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}ij\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{m}i\right)=\sum_{j=1}^{n}\left\{j\times\frac{m(m+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{m(m+1)}{2}\sum_{j=1}^{n}j=\frac{m(m+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{mn(mn+m+n+1)}{4}$$

이때, 이차방정식 $x^2-12x+27=0$의 두 근이 m, n이므로
근과 계수의 관계에 의하여 $m+n=12$, $mn=27$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{27\times(27+12+1)}{4}=270$

03-1 답 ④

ㅣ해결 전략ㅣ 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 주어진 수열의 일반항을 먼저 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n+1}-2$$

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$\quad=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)=(2-1)\times2^n=2^n\ (n\ge2)$ ……㉠

$a_1=S_1=2$ ……㉡

이때, ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 $a_n=2^n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{4^k}=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

03-2 답 1150

ㅣ해결 전략ㅣ 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 주어진 수열의 일반항을 먼저 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2n^3$

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$\quad=2n^3-2(n-1)^3=6n^2-6n+2\ (n\ge2)$ ……㉠

$a_1=S_1=2$ ……㉡

이때, ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=6n^2-6n+2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_{2k}=\sum_{k=1}^{5}(24k^2-12k+2)$$
$$=24\sum_{k=1}^{5}k^2-12\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}2$$
$$=24\times\frac{5\times6\times11}{6}-12\times\frac{5\times6}{2}+2\times5$$
$$=1320-180+10=1150$$

04-1 답 (1) $\dfrac{n}{4(n+1)}$ (2) $\dfrac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$

ㅣ해결 전략ㅣ 주어진 수열의 일반항을 찾아 부분분수로 변형한다.

(1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4n(n+1)}$$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k(k+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$
$$=\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$$

04-2 답 $\dfrac{4}{255}$

ㅣ해결 전략ㅣ 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 주어진 수열의 일반항을 먼저 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+2n$$

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$\quad=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}=2n+1\ (n\ge2)$ ……㉠

$a_1=S_1=3$ ……㉡

이때, ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=2n+1$

$\therefore \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$

$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{6}\left\{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}-\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}\right\}$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3\times5}-\frac{1}{5\times7}\right)+\left(\frac{1}{5\times7}-\frac{1}{7\times9}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{13\times15}-\frac{1}{15\times17}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3\times5}-\frac{1}{15\times17}\right)=\frac{4}{255}$

05-1 답 $3-\sqrt{2}+\sqrt{15}$

|해결 전략| 주어진 수열의 일반항을 찾아 분모를 유리화한다.

수열 $\frac{2}{1+\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}, \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}, \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$

$=\frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})}$

$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

$\therefore \sum_{k=1}^{14} a_k=\sum_{k=1}^{14}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$+\cdots+(\sqrt{15}-\sqrt{13})+(\sqrt{16}-\sqrt{14})$

$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{15}+\sqrt{16}$

$=3-\sqrt{2}+\sqrt{15}$

05-2 답 24

|해결 전략| 주어진 수열의 일반항을 찾아 분모를 유리화한다.

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$이므로

$\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

$=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

$+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$

이때, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=3$이므로 $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)=3$

$\sqrt{2n+1}=7,\ 2n+1=49 \qquad \therefore n=24$

STEP 3 유형 드릴 | 283쪽~285쪽 |

1-1 답 ④

|해결 전략| $\sum_{k=1}^{n} 3^k=\frac{3(3^n-1)}{3-1}$임을 이용하여 계산한다.

$\sum_{k=1}^{8} 2(3^k+1)=2\sum_{k=1}^{8}3^k+\sum_{k=1}^{8}2$

$=2\times\frac{3(3^8-1)}{3-1}+2\times8$

$=3^9-3+16$

$=3^9+13$

$\therefore p=9$

1-2 답 -364

|해결 전략| $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용하여 계산한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 -3인 등비수열이므로

$\sum_{k=1}^{6} a_k=\frac{2\{(-3)^6-1\}}{-3-1}=-364$

2-1 답 ①

|해결 전략| 수열 $\{a_n\}$은 1, 1, 0이 반복됨을 알아낸다.

$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=0,\ a_4=1,\ a_5=1,\ a_6=0,\ \cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 1, 1, 0이 반복되므로

$\sum_{n=1}^{21} a_n=7(1+1+0)=14$

2-2 답 ④

|해결 전략| 수열 $\{a_n\}$은 3, 9, 7, 1이 반복됨을 알아낸다.

$a_1=3,\ a_2=9,\ a_3=7,\ a_4=1,\ a_5=3,\ a_6=9,\ a_7=7,\ a_8=1,\ \cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 3, 9, 7, 1이 반복되므로 $a_{4k}=1$

$\therefore \sum_{k=1}^{15} a_{4k}=\sum_{k=1}^{15}1=15$

3-1 답 7

|해결 전략| -1의 개수를 α, 0의 개수를 β, 1의 개수를 γ라 하고 주어진 $\sum$를 α, β, γ를 이용하여 나타낸 후 식을 연립하여 계산한다.

$a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 중에서 -1의 개수를 α, 0의 개수를 β, 1의 개수를 γ라 하면

$\sum_{k=1}^{10} a_k=-\alpha+\gamma=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\sum_{k=1}^{10} {a_k}^2=\alpha+\gamma=7 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면 $2\gamma=10 \qquad \therefore \gamma=5$

$\gamma=5$를 ㉡에 대입하면 $\alpha=2$

이때, $\alpha+\beta+\gamma=10$이므로 $\beta=3$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}|a_k-1|=2|-1-1|+3|0-1|+5|1-1|$

$=4+3=7$

3-2 답 ③

| 해결 전략 | $f^n(1)$을 밑이 3인 거듭제곱으로 나타낸다.

$f^1(1)=f(1)=3$

$f^2(1)=f(f(1))=f(3)=3\times3=3^2$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(3^2)=3\times3^2=3^3$

$\vdots$

따라서 자연수 n에 대하여 $f^n(1)=3^n$

$\therefore \sum_{n=1}^{5} f^n(1)=3+3^2+3^3+3^4+3^5$

$=\frac{3(3^5-1)}{3-1}=363$

4-1 답 44

| 해결 전략 | $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$를 이용한다.

$\sum_{k=1}^{7}(2a_k+2b_k)^2=\sum_{k=1}^{7}(4a_k^2+8a_kb_k+4b_k^2)$

$=\sum_{k=1}^{7}4a_k^2+\sum_{k=1}^{7}8a_kb_k+\sum_{k=1}^{7}4b_k^2$

$=4\sum_{k=1}^{7}a_k^2+8\sum_{k=1}^{7}a_kb_k+4\sum_{k=1}^{7}b_k^2$

$=4\left(\sum_{k=1}^{7}a_k^2+\sum_{k=1}^{7}b_k^2\right)+8\sum_{k=1}^{7}a_kb_k$

$=4\sum_{k=1}^{7}(a_k^2+b_k^2)+8\sum_{k=1}^{7}a_kb_k$

$=4\times5+8\times3=44$

4-2 답 0

| 해결 전략 | $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$를 이용한다.

$\sum_{k=1}^{15}\{3(3a_k-b_k)+(a_k+3b_k)\}=\sum_{k=1}^{15}10a_k$이므로

$\sum_{k=1}^{15}10a_k=3\sum_{k=1}^{15}(3a_k-b_k)+\sum_{k=1}^{15}(a_k+3b_k)$

$10\sum_{k=1}^{15}a_k=3\times8+(-4)=20 \qquad \therefore 10\sum_{k=1}^{15}a_k=20$

$\sum_{k=1}^{15}\{(3a_k-b_k)-3(a_k+3b_k)\}=\sum_{k=1}^{15}(-10b_k)$이므로

$\sum_{k=1}^{15}(-10b_k)=\sum_{k=1}^{15}(3a_k-b_k)-3\sum_{k=1}^{15}(a_k+3b_k)$

$-10\sum_{k=1}^{15}b_k=8-3\times(-4)=20 \qquad \therefore 10\sum_{k=1}^{15}b_k=-20$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}(10a_k+10b_k)=10\sum_{k=1}^{15}a_k+10\sum_{k=1}^{15}b_k=20+(-20)=0$

5-1 답 ②

| 해결 전략 | $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{5}(a_{2n-1}+a_{2n})$과 자연수의 제곱의 합 공식을 이용한다.

$a_{2n-1}+a_{2n}=3n^2$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{5}3k^2=3\times\frac{5\times6\times11}{6}=165$

5-2 답 ③

| 해결 전략 | m의 값에 따른 $\sum_{n=1}^{m}i^{2k}$의 값의 규칙을 알아본다.

$\sum_{k=1}^{m}i^{2k}=-1$에서

$m=1$일 때, $\sum_{k=1}^{1}i^{2k}=i^2=-1$

$m=2$일 때, $\sum_{k=1}^{2}i^{2k}=i^2+i^4=0$

$m=3$일 때, $\sum_{k=1}^{3}i^{2k}=i^2+i^4+i^6=-1$

$m=4$일 때, $\sum_{k=1}^{4}i^{2k}=i^2+i^4+i^6+i^8=0$

$\vdots$

따라서 m이 홀수일 때, $\sum_{k=1}^{m}i^{2k}=-1$이므로 20 이하의 자연수 m의 값의 합은

$1+3+5+\cdots+19=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=2\times\frac{10\times11}{2}-10=100$

6-1 답 ③

| 해결 전략 | $\sum_{k=1}^{9}k=\frac{9\times10}{2}$, $\sum_{k=1}^{9}k^2=\frac{9\times10\times19}{6}$를 이용한다.

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+9\times10$

$=\sum_{k=1}^{9}k(k+1)=\sum_{k=1}^{9}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}k$

$=\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{9\times10}{2}=285+45=330$

6-2 답 ②

| 해결 전략 | $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$을 이용한다.

$\sum_{k=1}^{n}k(3k-1)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k)=3\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$

$=3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\{(2n+1)-1\}=n^2(n+1)$

즉, $n^2(n+1)=1100$이므로 $n=10$

7-1 답 100

| 해결 전략 | $\sum_{k=1}^{n}\square$의 꼴 ⇨ k를 제외한 $\square$ 안의 문자는 상수로 생각하여 계산한다.

$\sum_{k=1}^{l}5=5l$이므로

$\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}5\right)=\sum_{l=1}^{m}5l=5\sum_{l=1}^{m}l=5\times\frac{m(m+1)}{2}=\frac{5}{2}m(m+1)$

$\therefore \sum_{m=1}^{4}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}5\right)\right\}=\sum_{m=1}^{4}\left\{\frac{5}{2}m(m+1)\right\}$

$=\frac{5}{2}\left(\sum_{m=1}^{4}m^2+\sum_{m=1}^{4}m\right)$

$=\frac{5}{2}\left(\frac{4\times5\times9}{6}+\frac{4\times5}{2}\right)$

$=\frac{5}{2}(30+10)=100$

7-2 답 24

| 해결 전략 | $\sum_{k=1}^{n}$ □의 꼴 ⇨ k를 제외한 □ 안의 문자는 상수로 생각하여 계산한다.

$\sum_{m=1}^{4} l=4l$이므로

$$f(k)=\sum_{l=1}^{k}\left(\sum_{m=1}^{4} l\right)=\sum_{l=1}^{k} 4l=4\sum_{l=1}^{k} l$$

$$=4\times\frac{k(k+1)}{2}=2k(k+1)$$

$f(6)=2\times6\times7=84$, $f(5)=2\times5\times6=60$이므로

$f(6)-f(5)=84-60=24$

8-1 답 95

| 해결 전략 | $\sum_{k=1}^{n} a_k$가 주어지면 $a_1=\sum_{k=1}^{1} a_k$, $a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k\ (n\geq2)$임을 이용하여 일반항을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=n^2$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=n^2-(n-1)^2=2n-1\ (n\geq2)$ ……㉠

$a_1=S_1=1^2=1$ ……㉡

이때, ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5} ka_k=\sum_{k=1}^{5} k(2k-1)=\sum_{k=1}^{5}(2k^2-k)$$

$$=2\sum_{k=1}^{5} k^2-\sum_{k=1}^{5} k$$

$$=2\times\frac{5\times6\times11}{6}-\frac{5\times6}{2}$$

$$=110-15=95$$

8-2 답 -438

| 해결 전략 | $\sum_{k=1}^{n} a_k$가 주어지면 $a_1=\sum_{k=1}^{1} a_k$, $a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k\ (n\geq2)$임을 이용하여 일반항을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{1}{n+1}$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}$$

$$=-\frac{1}{n(n+1)}\ (n\geq2)$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{10}\frac{1}{a_k}=-\sum_{k=2}^{10} k(k+1)$$

$$=-\left\{\sum_{k=1}^{10} k(k+1)\right\}+2$$

$$=-\sum_{k=1}^{10} k^2-\sum_{k=1}^{10} k+2$$

$$=-\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}+2$$

$$=-385-55+2=-438$$

9-1 답 ①

| 해결 전략 | $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+a)}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right)$임을 이용한다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{n}{n+1}$$

즉, $\frac{n}{n+1}=\frac{49}{50}$이므로 $n=49$

9-2 답 ④

| 해결 전략 | $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+a)}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right)$임을 이용한다.

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{1+2+\cdots+k}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}$$

$$=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

10-1 답 -2

| 해결 전략 | 분모에 무리식이 포함되어 있으면 분모를 유리화한 후 계산한다.

$$\frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+2}}=\frac{\sqrt{2k}-\sqrt{2k+2}}{(\sqrt{2k}+\sqrt{2k+2})(\sqrt{2k}-\sqrt{2k+2})}$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2k}-\sqrt{2k+2})$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{31}\frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+2}}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{31}(\sqrt{2k}-\sqrt{2k+2})$$

$$=-\frac{1}{2}\{(\sqrt{2}-\sqrt{4})+(\sqrt{4}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{62}-\sqrt{64})\}$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{64})$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-8)$$

$$=4-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $a=4$, $b=-\frac{1}{2}$이므로 $ab=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

10-2 답 3

|해결 전략| 수열의 합을 $\sum$를 쓰지 않은 합의 꼴로 나타낸 후 계산한다.

이차방정식 $x^2-(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})x-\sqrt{k^2+k}=0$의 두 실근이 α_k, β_k이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_k+\beta_k=\sqrt{k}-\sqrt{k+1}$, $\alpha_k\beta_k=-\sqrt{k^2+k}=-\sqrt{k(k+1)}$

$$\begin{aligned}(\alpha_k-\beta_k)^2&=(\alpha_k+\beta_k)^2-4\alpha_k\beta_k\\&=(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})^2+4\sqrt{k(k+1)}\\&=(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})^2\end{aligned}$$

$|\alpha_k-\beta_k|=\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\alpha_k-\beta_k|}&=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\\&=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}\\&=-(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{15}\frac{1}{|\alpha_k-\beta_k|}&=-\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})\\&=-\{(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})\\&\qquad+\cdots+(\sqrt{15}-\sqrt{16})\}\\&=-(1-\sqrt{16})\\&=-(1-4)\\&=3\end{aligned}$$

LECTURE

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

➡ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

11-1 답 $8\times3^{10}+3$

|해결 전략| 주어진 수열의 합 S에 대하여 $S-rS$를 계산한다.

$$\begin{aligned}S&=1\times3+3\times9+5\times27+\cdots+17\times3^9\\&=1\times3+3\times3^2+5\times3^3+\cdots+17\times3^9\end{aligned}$$

이라 하면

$$\begin{array}{rl} S= & 1\times3+3\times3^2+5\times3^3+\cdots+17\times3^9\\ -\big)\ 3S= & \qquad\quad 1\times3^2+3\times3^3+\cdots+15\times3^9+17\times3^{10}\\ \hline -2S= & 1\times3+2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\times3^9-17\times3^{10}\end{array}$$

$$\begin{aligned}&=2(3+3^2+3^3+\cdots+3^9)-3-17\times3^{10}\\&=2\times\frac{3(3^9-1)}{3-1}-3-17\times3^{10}\\&=3^{10}-3-3-17\times3^{10}\\&=-16\times3^{10}-6\end{aligned}$$

$\therefore S=8\times3^{10}+3$

11-2 답 $3-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^8$

|해결 전략| 주어진 수열의 합 S에 대하여 $S-rS$를 계산한다.

$S=2\times\frac{1}{2}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+10\times\left(\frac{1}{2}\right)^9$이라 하면

$$\begin{array}{rl} S= & 2\times\frac{1}{2}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+10\times\left(\frac{1}{2}\right)^9\\ -\big)\ \frac{1}{2}S= & \qquad 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+9\times\left(\frac{1}{2}\right)^9+10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\\ \hline \frac{1}{2}S= & 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^9-10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\end{array}$$

$$\begin{aligned}&=1+\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}-10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\\&=1+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^9-5\times\left(\frac{1}{2}\right)^9\\&=\frac{3}{2}-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^9\end{aligned}$$

$\therefore S=3-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^8$

12-1 답 ④

|해결 전략| 규칙성을 갖는 군으로 나누어 묶은 후 각 군의 항의 개수를 찾는다.

주어진 수열을 군수열로 나타내면

(1), (1, 3), (1, 3, 5), (1, 3, 5, 7), (1, 3, 5, 7, 9), ⋯

제n군의 항의 개수는 n이므로 제1군부터 제n군까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$n=12$일 때, $\frac{12\times13}{2}=78$이므로 제84항은 제13군의 6번째 항이다.

이때, 각 군은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로 제13군의 6번째 항은

$1+(6-1)\times2=11$

따라서 제84항은 11이다.

12-2 답 137

|해결 전략| 주어진 수열을 같은 수끼리 묶은 후 각 군의 규칙성을 찾는다.

주어진 수열을 같은 수끼리 묶으면

$(1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \cdots$

이므로 제n군의 수는 $\frac{1}{n}$이고, 항의 개수는 n이다.

즉, $\frac{1}{n}=\frac{1}{17}$에서 $n=17$이므로 $\frac{1}{17}$은 제17군의 수이다.

또, 제n군의 항의 개수는 n이므로 제1군부터 제16군까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{16}k=\frac{16\times17}{2}=136$

따라서 $\frac{1}{17}$이 처음으로 나오는 항은 제137항이므로

$k=137$

11 | 수학적 귀납법

1 수열의 귀납적 정의

개념 확인 288쪽~290쪽

1 (1) 23 (2) 21 (3) 17 (4) 120

2 (1) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+5$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n-3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

3 (1) $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1=3$, $a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

4 (1) $a_n=4n^2-3n+4$ (2) $a_n=\frac{2^{n-1}}{n}$

1 (1) $a_{n+1}=a_n+5$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+5=3+5=8$

$a_3=a_2+5=8+5=13$

$a_4=a_3+5=13+5=18$

$a_5=a_4+5=18+5=23$

(2) $a_{n+1}=a_n+2n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2\times1=1+2=3$

$a_3=a_2+2\times2=3+4=7$

$a_4=a_3+2\times3=7+6=13$

$a_5=a_4+2\times4=13+8=21$

(3) $a_{n+1}=2a_n-1$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=2a_1-1=4-1=3$

$a_3=2a_2-1=6-1=5$

$a_4=2a_3-1=10-1=9$

$a_5=2a_4-1=18-1=17$

(4) $a_{n+1}=na_n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2=a_1=5$

$a_3=2a_2=2\times5=10$

$a_4=3a_3=3\times10=30$

$a_5=4a_4=4\times30=120$

2 (1) 주어진 수열은 첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열이므로

$a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+5$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 1, 공차가 -3인 등차수열이므로

$a_1=1$, $a_{n+1}=a_n-3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

3 (1) 주어진 수열은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 $-\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_1=3$, $a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

4 (1) $a_{n+1}=a_n+8n+1$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=a_1+8\times1+1\\
\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+8\times2+1\\
\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+8\times3+1\\
&\vdots\\
+)\; a_n&=\cancel{a_{n-1}}+8\times(n-1)+1\\
\hline
a_n&=a_1+8\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}+1\times(n-1)\\
&=a_1+8\sum_{k=1}^{n-1}k+n-1\\
&=5+8\times\frac{(n-1)n}{2}+n-1\\
&=4n^2-3n+4
\end{aligned}$$

(2) $a_{n+1}=\frac{2n}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=\frac{2\times1}{2}a_1\\
\cancel{a_3}&=\frac{2\times2}{3}\cancel{a_2}\\
\cancel{a_4}&=\frac{2\times3}{4}\cancel{a_3}\\
&\vdots\\
\times)\; a_n&=\frac{2(n-1)}{n}\cancel{a_{n-1}}\\
\hline
a_n&=a_1\times2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\right)\\
&=a_1\times\frac{2^{n-1}}{n}\\
&=\frac{2^{n-1}}{n}
\end{aligned}$$

STEP 1 개념 드릴

291쪽~292쪽

개념 check

1-1 6, 5, $\frac{13}{3}$, 8, 6, 5, $\frac{13}{3}$

2-1 (1) 2, -5 (2) 1, 2

3-1 (1) -1, 3 (2) 3, $\frac{1}{3}$

4-1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{n^2-n+4}{4}$

5-1 1, 2, 3, $n-1$, 1, 2, 3, $n-1$, n, $n+1$

스스로 check

1-2 답 (1) $3, \frac{3}{4}, \frac{3}{7}, \frac{3}{10}$ (2) $2, 3, 4, 5$

(1) $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{a_1}{a_1+1}=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$$

$$a_3=\frac{a_2}{a_2+1}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+1}=\frac{3}{7}$$

$$a_4=\frac{a_3}{a_3+1}=\frac{\frac{3}{7}}{\frac{3}{7}+1}=\frac{3}{10}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제4항까지 차례로 나열하면

$3, \frac{3}{4}, \frac{3}{7}, \frac{3}{10}$

(2) $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$의 n에 1, 2를 차례로 대입하면

$a_3=2a_2-a_1=2\times3-2=4$

$a_4=2a_3-a_2=2\times4-3=5$

이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제4항까지 차례로 나열하면

2, 3, 4, 5

2-2 답 (1) $a_n=3n+2$ (2) $a_n=-n-1$

(1) 주어진 수열은 첫째항이 5, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=5+(n-1)\times3=3n+2$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 -2, 공차가 -1인 등차수열이므로

$a_n=-2+(n-1)\times(-1)=-n-1$

3-2 답 (1) $a_n=2\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ (2) $a_n=(-2)^n$

(1) 주어진 수열은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열이므로

$$a_n=2\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 -2, 공비가 -2인 등비수열이므로

$a_n=(-2)\times(-2)^{n-1}=(-2)^n$

4-2 답 (1) $a_n=2n^2-2n+1$ (2) $a_n=\frac{n^3-3n^2+2n+1}{3}$

(3) $a_n=\frac{3^n+5}{2}$ (4) $a_n=2^n-n+2$

(1) $a_{n+1}-a_n=4n$에서 $a_{n+1}=a_n+4n$

$a_{n+1}=a_n+4n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=a_1+4\times1 \\ & \cancel{a_3}=\cancel{a_2}+4\times2 \\ & \cancel{a_4}=\cancel{a_3}+4\times3 \\ & \vdots \\ +) & a_n=\cancel{a_{n-1}}+4\times(n-1) \\ \hline & a_n=a_1+4\{1+2+3+\cdots+(n-1)\} \end{array}$$

$$=a_1+4\sum_{k=1}^{n-1}k=1+4\times\frac{(n-1)n}{2}=2n^2-2n+1$$

(2) $a_{n+1}-a_n=n^2-n$에서 $a_{n+1}=a_n+n^2-n$

$a_{n+1}=a_n+n^2-n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=a_1+1^2-1 \\ & \cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2^2-2 \\ & \cancel{a_4}=\cancel{a_3}+3^2-3 \\ & \vdots \\ +) & a_n=\cancel{a_{n-1}}+(n-1)^2-(n-1) \\ \hline & a_n=a_1+\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\} \\ & \qquad -\{1+2+3+\cdots+(n-1)\} \end{array}$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{(n-1)n}{2}$$

$$=\frac{n^3-3n^2+2n+1}{3}$$

(3) $a_{n+1}-a_n=3^n$에서 $a_{n+1}=a_n+3^n$

$a_{n+1}=a_n+3^n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=a_1+3^1 \\ & \cancel{a_3}=\cancel{a_2}+3^2 \\ & \cancel{a_4}=\cancel{a_3}+3^3 \\ & \vdots \\ +) & a_n=\cancel{a_{n-1}}+3^{n-1} \\ \hline & a_n=a_1+(3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}) \end{array}$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k$$

$$=4+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$=\frac{3^n+5}{2}$$

(4) $a_{n+1}-a_n=2^n-1$에서 $a_{n+1}=a_n+2^n-1$

$a_{n+1}=a_n+2^n-1$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=a_1+2^1-1 \\ & \cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2^2-1 \\ & \cancel{a_4}=\cancel{a_3}+2^3-1 \\ & \vdots \\ +) & a_n=\cancel{a_{n-1}}+2^{n-1}-1 \\ \hline & a_n=a_1+(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})+(-1)\times(n-1) \end{array}$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k-(n-1)$$

$$=3+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)$$

$$=2^n-n+2$$

5-2 답 (1) $a_n=\frac{6}{(n+1)(n+2)}$ (2) $a_n=\frac{6}{n+1}$

(3) $a_n=n$ (4) $a_n=2^{\frac{(n-1)n}{2}}$

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{n+3}$에서 $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+3}a_n$

$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+3}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=\dfrac{2}{4}a_1 \\ & \cancel{a_3}=\dfrac{3}{5}\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}=\dfrac{4}{6}\cancel{a_3} \\ & \quad\vdots \\ \times\big) & a_n=\dfrac{n}{n+2}\cancel{a_{n-1}} \\ \hline & a_n=a_1\times\left(\dfrac{2}{4}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{6}\times\cdots\times\dfrac{n}{n+2}\right) \end{array}$$

$$=a_1\times\dfrac{2\times3}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{6}{(n+1)(n+2)}$$

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1-\dfrac{1}{n+2}$에서 $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}a_n$

$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=\dfrac{2}{3}a_1 \\ & \cancel{a_3}=\dfrac{3}{4}\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}=\dfrac{4}{5}\cancel{a_3} \\ & \quad\vdots \\ \times\big) & a_n=\dfrac{n}{n+1}\cancel{a_{n-1}} \\ \hline & a_n=a_1\times\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}\times\cdots\times\dfrac{n}{n+1}\right) \end{array}$$

$$=a_1\times\dfrac{2}{n+1}=\dfrac{6}{n+1}$$

(3) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1+\dfrac{1}{n}$에서 $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$

$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=\dfrac{2}{1}a_1 \\ & \cancel{a_3}=\dfrac{3}{2}\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}=\dfrac{4}{3}\cancel{a_3} \\ & \quad\vdots \\ \times\big) & a_n=\dfrac{n}{n-1}\cancel{a_{n-1}} \\ \hline & a_n=a_1\times\left(\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-1}\right) \end{array}$$

$$=a_1\times n=n$$

(4) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$에서 $a_{n+1}=2^na_n$

$a_{n+1}=2^na_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=2^1a_1 \\ & \cancel{a_3}=2^2\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}=2^3\cancel{a_3} \\ & \quad\vdots \\ \times\big) & a_n=2^{n-1}\cancel{a_{n-1}} \\ \hline & a_n=a_1\times(2^1\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^{n-1}) \end{array}$$

$$=a_1\times2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$$

$$=2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

STEP 2 필수 유형

| 293쪽~298쪽 |

01-1 답 (1) -25 (2) 55

|해결 전략| 주어진 수열이 등차수열임을 이용하여 일반항을 구한 후 a_{15}를 구한다.

(1) 주어진 수열은 첫째항이 3, 공차가 -2인 등차수열이므로

$a_n=3+(n-1)\times(-2)=-2n+5$

$\therefore a_{15}=-2\times15+5=-25$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 -1, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_n=-1+(n-1)\times4=4n-5$

$\therefore a_{15}=4\times15-5=55$

01-2 답 13

|해결 전략| 주어진 수열이 등차수열임을 이용하여 일반항을 구한 후 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=4$에서 $a+2d=4$ ……㉠

$a_5=9$에서 $a+4d=9$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=\dfrac{5}{2}$

$\therefore a_n=-1+(n-1)\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}n-\dfrac{7}{2}$

이때, $a_k=29$이므로

$a_k=\dfrac{5}{2}k-\dfrac{7}{2}=29$ $\qquad\therefore k=13$

02-1 답 (1) 2×3^{19} (2) 3×5^{19}

|해결 전략| 주어진 수열이 등비수열임을 이용하여 일반항을 구한 후 a_{20}을 구한다.

(1) 주어진 수열은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n=2\times3^{n-1}$

$\therefore a_{20}=2\times3^{19}$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 -3, 공비가 -5인 등비수열이므로

$a_n=-3\times(-5)^{n-1}$

$\therefore a_{20}=-3\times(-5)^{19}=3\times5^{19}$

02-2 답 1023

| 해결 전략 | 주어진 수열이 등비수열이므로 등비수열의 합 공식을 이용한다.

주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 4인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^{5} a_k=\frac{3(4^5-1)}{4-1}=4^5-1=2^{10}-1=1023$$

03-1 답 526

| 해결 전략 | 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입하여 변끼리 더한다.

$a_{n+1}=a_n+2n^2-n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=a_1+2\times1^2-1\\
\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+2\times2^2-2\\
\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+2\times3^2-3\\
&\vdots\\
+)\ a_{10}&=\cancel{a_9}+2\times9^2-9\\
\hline
a_{10}&=a_1+2(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2)-(1+2+3+\cdots+9)\\
&=a_1+2\sum_{k=1}^{9}k^2-\sum_{k=1}^{9}k\\
&=1+2\times\frac{9\times10\times19}{6}-\frac{9\times10}{2}=526
\end{aligned}$$

LECTURE

자연수의 거듭제곱의 합

❶ $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

❷ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

03-2 답 10

| 해결 전략 | 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하고, $a_k=127$임을 이용하여 식을 세운다.

$a_{n+1}=a_n+3n-1$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=a_1+3\times1-1\\
\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+3\times2-1\\
\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+3\times3-1\\
&\vdots\\
+)\ a_n&=\cancel{a_{n-1}}+3(n-1)-1\\
\hline
a_n&=a_1+3\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}+(-1)\times(n-1)\\
&=a_1+3\sum_{k=1}^{n-1}k+(-1)\times(n-1)\\
&=1+3\times\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)=\frac{3n^2-5n+4}{2}
\end{aligned}$$

$a_k=127$이므로 $\frac{3k^2-5k+4}{2}=127$

$3k^2-5k-250=0$, $(3k+25)(k-10)=0$

$\therefore\ k=-\frac{25}{3}$ 또는 $k=10$

이때, k는 자연수이므로 $k=10$

04-1 답 5

| 해결 전략 | 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 22를 차례로 대입하여 변끼리 곱한다.

$a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n-1}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 22를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=\frac{3}{1}a_1\\
\cancel{a_3}&=\frac{5}{3}\cancel{a_2}\\
\cancel{a_4}&=\frac{7}{5}\cancel{a_3}\\
&\vdots\\
\times)\ a_{23}&=\frac{45}{43}\cancel{a_{22}}\\
\hline
a_{23}&=a_1\times\left(\frac{3}{1}\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\cdots\times\frac{45}{43}\right)\\
&=\frac{1}{9}\times45=5
\end{aligned}$$

04-2 답 $\frac{\sqrt{10}}{180}$

| 해결 전략 | 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 79를 차례로 대입하여 변끼리 곱한다.

$\sqrt{n+2}\,a_{n+1}=\sqrt{n}\,a_n$에서 $a_{n+1}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}a_n$

$a_{n+1}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 79를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}a_1\\
\cancel{a_3}&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\cancel{a_2}\\
\cancel{a_4}&=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cancel{a_3}\\
&\vdots\\
\times)\ a_{80}&=\frac{\sqrt{79}}{\sqrt{81}}\cancel{a_{79}}\\
\hline
a_{80}&=a_1\times\left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\cdots\times\frac{\sqrt{79}}{\sqrt{81}}\right)\\
&=\frac{\sqrt{1}\times\sqrt{2}}{\sqrt{80}\times\sqrt{81}}=\frac{\sqrt{2}}{36\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{180}
\end{aligned}$$

05-1 답 $\frac{5^8}{2^9}$

| 해결 전략 | $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$임을 이용하여 주어진 식을 a_n에 대한 식으로 변형한다.

$3S_n=2a_{n+1}$ ⋯⋯㉠

$3S_{n-1}=2a_n\ (n\ge2)$ ⋯⋯㉡

㉠−㉡을 하면 $3a_n=2(a_{n+1}-a_n)$ $\therefore\ a_{n+1}=\frac{5}{2}a_n\ (n\ge2)$

이때, $a_1=S_1=\frac{1}{3}$이므로 $3S_1=2a_2$에서 $a_2=\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_1=\frac{1}{3},\ a_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}\right)^{n-2}\ (n\geq 2)$

$\therefore\ a_{10}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}\right)^{8}=\frac{5^8}{2^9}$

05-2 답 $\frac{3^9+1}{2}$

| 해결 전략 | $a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$임을 이용하여 주어진 식을 a_n에 대한 식으로 변형한다.

$S_{n+1}=3S_n-1$ ……㉠

$S_n=3S_{n-1}-1\ (n\geq 2)$ ……㉡

㉠－㉡을 하면 $a_{n+1}=3a_n\ (n\geq 2)$

이때, $a_1=S_1=1$이므로 $S_2=3S_1-1=3-1=2$이고,

$S_2=a_1+a_2=2$이므로 $a_2=1$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_1=1,\ a_n=3^{n-2}\ (n\geq 2)$

$\therefore\ S_{10}=a_1+\sum_{k=2}^{10}a_k=1+\frac{3^9-1}{3-1}=\frac{3^9+1}{2}$

06-1 답 255

| 해결 전략 | 주어진 조건을 이용하여 a_1을 구하고 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

1시간이 지날 때마다 전 시간의 2배보다 1마리 많게 번식하므로

$a_1=15\times 2+1=31$

$(n+1)$시간 후 박테리아 수 a_{n+1}은 a_n의 2배보다 1마리 많으므로

$a_{n+1}=2a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_{n+1}=2a_n+1$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1+1=2\times 31+1=63$

$a_3=2a_2+1=2\times 63+1=127$

$\therefore\ a_4=2a_3+1=2\times 127+1=255$

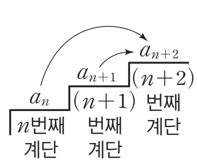
06-2 답 8

| 해결 전략 | $(n+2)$번째 계단을 오르는 방법은 n번째 계단에서 두 계단을 올라가는 방법과 $(n+1)$번째 계단에서 한 계단을 올라가는 방법이 있음을 이용한다.

첫 번째 계단을 오르는 방법은 1가지이고, 두 번째 계단을 오르는 방법은 2가지이므로

$a_1=1,\ a_2=2$

오른쪽 그림과 같이 $(n+2)$번째 계단을 오르는 방법은 n번째 계단에서 두 계단을 올라가는 방법과 $(n+1)$번째 계단에서 한 계단을 올라가는 방법이 있다.



$\therefore\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_3=a_2+a_1=2+1=3$

$a_4=a_3+a_2=3+2=5$

$\therefore\ a_5=a_4+a_3=5+3=8$

2 수학적 귀납법

개념 확인 299쪽

1 풀이 참조

1 (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=\frac{1\times(1+1)}{2}=1$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

위 식의 양변에 $k+1$을 더하면

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{k^2+3k+2}{2}\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

STEP 1 개념 드릴 300쪽

개념 check

1-1 $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{k+1}{k+2},\ k+1$

2-1 $1,\ 1,\ 3k-2,\ \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$

스스로 check

1-2 답 풀이 참조

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{2\times 1+1}=\frac{1}{3}$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$

위 식의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}\\&\quad+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

2-2 풀이 참조

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=2$, (우변)$=\frac{1}{3}\times1\times2\times3=2$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

위 식의 양변에 $(k+1)(k+2)$를 더하면

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$

$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

STEP 2 필수 유형 | 301쪽~302쪽 |

01-1 풀이 참조

| 해결 전략 | $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립함을 보인 후 $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립함을 보인다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=2^1-1=1$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$

위 식의 양변에 2^k을 더하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=2^k-1+2^k=2^{k+1}-1$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

02-1 풀이 참조

| 해결 전략 | $n=4$일 때 명제 $p(n)$이 성립함을 보인 후 $n=k(k\geq4)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립함을 보인다.

(i) $n=4$일 때,

(좌변)$=2^4=16$, (우변)$=4^2=16$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq4)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k\geq k^2$이므로 $2^k\times2\geq k^2\times2=2k^2$

이때, $k\geq4$인 모든 자연수 k에 대하여

$2k^2-(k+1)^2=(k-1)^2-2>0$

이므로

$2^{k+1}\geq2k^2>(k+1)^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq4$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

STEP 3 유형 드릴 | 303쪽~305쪽 |

1-1 답 199

| 해결 전략 | 주어진 수열이 등차수열임을 이용하여 일반항을 구한 후 a_{100}을 구한다.

주어진 수열은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1 \qquad \therefore a_{100}=199$

1-2 답 -92

| 해결 전략 | 주어진 수열이 등차수열임을 이용하여 일반항을 구한다.

주어진 수열은 첫째항이 -22, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=-22+(n-1)\times3=3n-25>0 \qquad \therefore n>\frac{25}{3}=8.3\cdots$

따라서 $\sum_{k=1}^{n}a_k$의 최솟값은

$\sum_{k=1}^{8}a_k=\frac{8(-44+7\times3)}{2}=-92$

2-1 답 256

| 해결 전략 | 주어진 수열이 등비수열임을 이용하여 일반항을 구한다.

주어진 수열은 공비가 2인 등비수열이므로 첫째항을 a라 하면

$a_3=2$에서 $a\times2^2=2$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore a_{10}=\frac{1}{2}\times2^9=2^8=256$

2-2 답 192

| 해결 전략 | 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 등비수열임을 이용한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=2+(n-1)\times2=2n$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3인 등비수열이므로 공비를 r라 하면

$b_n=3r^{n-1}$

이때, $a_{12}=24$, $b_9=3r^8$이므로 $24=3r^8 \qquad \therefore r^8=8$

$\therefore b_{17}=3r^{16}=3(r^8)^2=3\times8^2=192$

3-1 답 $\frac{199}{100}$

| 해결 전략 | 주어진 식의 n에 $1, 2, 3, \cdots, 99$를 차례로 대입하여 변끼리 더한다.

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$의 n에 $1, 2, 3, \cdots, 99$를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=a_1+\frac{1}{1\times2}\\
\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+\frac{1}{2\times3}\\
&\vdots\\
+)\ a_{100}&=\cancel{a_{99}}+\frac{1}{99\times100}\\
\hline
a_{100}&=a_1+\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{99\times100}\right)\\
&=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\\
&=1+\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{199}{100}
\end{aligned}$$

3-2 답 50

|해결 전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 99를 차례로 대입한다.

$a_{n+1}=a_n+(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 99를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+(-1)=1+(-1)=0$

$a_3=a_2+(-1)^2=0+1=1$

$a_4=a_3+(-1)^3=1+(-1)=0$

⋮

$a_{100}=a_{99}+(-1)^{99}=1+(-1)=0$

$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k=50$

4-1 답 $\frac{1}{5}$

|해결 전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입하여 변끼리 곱한다.

$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{1}{3}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{2}{4}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{3}{5}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_{10}=\frac{9}{11}\cancel{a_9}$$

$$a_{10}=a_1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{9}{11}$$
$$=a_1\times\frac{1\times2}{10\times11}=11\times\frac{1\times2}{10\times11}=\frac{1}{5}$$

4-2 답 9

|해결 전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입한다.

$a_{n+1}=na_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하면

$a_2=a_1=1$

$a_3=2a_2=2\times1$

$a_4=3a_3=3\times2\times1$

$a_5=4a_4=4\times3\times2\times1=3\times2^3$

$a_6=5a_5=5\times4\times3\times2\times1=5\times3\times2^3$

$a_7=6a_6=6\times5\times4\times3\times2\times1=5\times3^2\times2^4$

$a_8=7a_7=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=7\times5\times3^2\times2^4$

$a_9=8a_8=8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=7\times5\times3^2\times2^7$

따라서 a_n이 32의 배수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 9이다.

5-1 답 ①

|해결 전략| $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$임을 이용하여 주어진 식을 a_n에 대한 식으로 변형한다.

$S_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+n)$ ⋯⋯㉠

$S_n=\frac{1}{2}(a_n+n-1)\ (n\ge2)$ ⋯⋯㉡

㉠−㉡을 하면

$\frac{1}{2}(a_{n+1}+n)-\frac{1}{2}(a_n+n-1)=a_{n+1}$이므로 $a_n+a_{n+1}=1\ (n\ge2)$

$\therefore \sum_{k=2}^{11} a_k=(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{10}+a_{11})=5$

5-2 답 ④

|해결 전략| $a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\ge2)$임을 이용하여 주어진 식을 a_n에 대한 식으로 변형한다.

$S_n=2a_{n+1}$ ⋯⋯㉠

$S_{n-1}=2a_n\ (n\ge2)$ ⋯⋯㉡

㉠−㉡을 하면

$a_n=2a_{n+1}-2a_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n\ (n\ge2)$

$a_1=S_1=2$이므로

$S_1=2a_2=2$에서 $a_2=1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5} a_k=a_1+\sum_{k=2}^{5} a_k$$
$$=2+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4-1}{\frac{3}{2}-1}$$
$$=2+2\left(\frac{81}{16}-1\right)$$
$$=\frac{81}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=81$이므로 $p+q=89$

6-1 답 ①

|해결 전략| 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 7을 차례로 대입하여 변끼리 더한다.

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+2n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 7을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\cancel{\frac{1}{a_2}}=\frac{1}{a_1}+2$$
$$\cancel{\frac{1}{a_3}}=\cancel{\frac{1}{a_2}}+4$$
$$\cancel{\frac{1}{a_4}}=\cancel{\frac{1}{a_3}}+6$$
$$\vdots$$
$$+)\ \frac{1}{a_8}=\cancel{\frac{1}{a_7}}+14$$

$$\frac{1}{a_8}=\frac{1}{a_1}+(2+4+6+\cdots+14)$$
$$=1+\frac{7(2+14)}{2}=57$$

$\therefore a_8=\frac{1}{57}$

6-2 답 ③

|해결 전략| 주어진 식의 n에 $1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입한다.

$a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$의 n에 $1, 2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면

$a_3=a_1+a_2=1+1=2$

$a_4=a_2+a_3=1+2=3$

$a_5=a_3+a_4=2+3=5$

$a_6=a_4+a_5=3+5=8$

$\therefore\ a_7=a_5+a_6=5+8=13$

7-1 답 ①

|해결 전략| $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots$를 구하여 $f(n)$을 추측해 본다.

$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=7,\ a_4=11,\ a_5=16, \cdots$이므로

$a_2-a_1=2,\ a_3-a_2=3,\ a_4-a_3=4,\ a_5-a_4=5, \cdots$

따라서 $a_{n+1}-a_n=n+1$이므로 $a_{n+1}=a_n+n+1$

$\therefore\ f(n)=n+1$

$f(n)=10$에서 $n+1=10$

$\therefore\ n=9$

7-2 답 ⑤

|해결 전략| 수직선 위의 두 점을 이은 선분의 중점을 이용하여 x_n, x_{n+1}, x_{n+2} 사이의 관계식을 구한다.

$x_1=5,\ x_2=\dfrac{0+5}{2}=\dfrac{5}{2}$

선분 P_nP_{n+1}의 중점이 P_{n+2}이므로 $x_{n+2}=\dfrac{x_n+x_{n+1}}{2}$

$x_{n+2}=\dfrac{x_n+x_{n+1}}{2}$의 n에 $1, 2$를 차례로 대입하면

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{5+\frac{5}{2}}{2}=\frac{15}{4}$$

$$\therefore\ x_4=\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{\frac{5}{2}+\frac{15}{4}}{2}=\frac{25}{8}$$

LECTURE

수직선 위의 선분의 중점

➡ 수직선 위의 두 점 $A(x_1), B(x_2)$에서 선분 AB의 중점 M은

$M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

8-1 답 ④

|해결 전략| 주어진 등식이 $n=1$일 때 성립함을 보인 후 $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 성립함을 보인다.

모든 자연수 n에 대하여 등식

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ ……㉠

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=1^3=1$, (우변)$=\left(\dfrac{1\times2}{2}\right)^2=1$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\dfrac{k(k+1)}{2}\right\}^2$

위 식의 양변에 $\boxed{(k+1)^3}$을 더하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+\boxed{(k+1)^3}$

$=\left\{\dfrac{k(k+1)}{2}\right\}^2+\boxed{(k+1)^3}$

$=\dfrac{(k+1)^2\times\boxed{(k+2)^2}}{4}=\left\{\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

8-2 답 ③

|해결 전략| 주어진 부등식이 $n=2$일 때 성립함을 보인 후 $n=k\,(k\geq2)$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 성립함을 보인다.

$h>0$일 때, $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$(1+h)^n>1+nh$ ……㉠

(ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$, (우변)$=1+2h$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (k\geq2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$

위 식의 양변에 $\boxed{1+h}$를 곱하면

$(1+h)^{k+1}>(1+kh)(\boxed{1+h})$

$=1+(k+1)h+\boxed{kh^2}$

이때, $\boxed{kh^2}>0$이므로

$1+(k+1)h+\boxed{kh^2}>1+(k+1)h$

$\therefore\ (1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

9-1 답 ③

|해결 전략| $p(1)$이 참이므로 ㈏, ㈐를 이용하여 참인 명제를 연달아 찾는다.

㈎, ㈐에서 $p(1)$이 참이므로 참인 명제는 $p(3), p(9), p(27), \cdots$이다.

또, ㈏에서 $p(3)$이 참이므로 참인 명제는 $p(5), p(9), p(17), p(33), \cdots$이다.

따라서 반드시 참인 명제가 아닌 것은 $p(13)$이다.

9-2 답 ④

|해결 전략| $p(1)$이 참이므로 ㈏, ㈐를 이용하여 참인 명제를 연달아 찾는다.

㈎, ㈐에서 $p(1)$이 참이므로 참인 명제는 $p(2), p(4), p(8), \cdots$이다.

또, ㈏에서 $p(2)$가 참이므로 참인 명제는 $p(5), p(8), p(11), p(14), \cdots$이고, $p(4)$가 참이므로 참인 명제는 $p(7), p(10), p(13), \cdots$이다.

따라서 반드시 참인 명제는 $p(11)$이다.