쎈 정답 및 풀이

⋯→ 정답을 확인하려 할 때에는 「**빠른 정답 찾기**」를 이용하면 편리합니다.

01 지수

0001 -4의 제곱근을 x라 하면 $x^2=-4$이므로

$x=\pm 2i$ 답 $\pm 2i$

0002 27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=27$이므로

$x^3-27=0,\quad (x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$ 답 $3,\ \frac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$

0003 -8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$이므로

$x^3+8=0,\quad (x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$ 답 $-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$

0004 81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$이므로

$x^4-81=0,\quad (x^2+9)(x^2-9)=0$

$(x^2+9)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=\pm 3i$ 또는 $x=\pm 3$ 답 $\pm 3i,\ \pm 3$

0005 9의 제곱근을 x라 하면 $x^2=9$이므로

$x=\pm 3$

따라서 9의 제곱근 중 실수인 것은 ± 3이다. 답 ± 3

0006 0.008의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=0.008$이므로

$x^3-0.008=0,\quad (x-0.2)(x^2+0.2x+0.04)=0$

$\therefore x=0.2$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{10}$

따라서 0.008의 세제곱근 중 실수인 것은 0.2이다. 답 0.2

0007 $(-2)^4$의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=(-2)^4$, 즉 $x^4=16$이므로 $\quad x^4-16=0,\quad (x^2+4)(x^2-4)=0$

$(x^2+4)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm 2$

따라서 $(-2)^4$의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 2이다. 답 ± 2

0008 $\frac{81}{16}$의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=\frac{81}{16}$이므로

$x^4-\frac{81}{16}=0,\quad \left(x^2+\frac{9}{4}\right)\left(x^2-\frac{9}{4}\right)=0$

$\left(x^2+\frac{9}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$

$\therefore x=\pm\frac{3}{2}i$ 또는 $x=\pm\frac{3}{2}$

따라서 $\frac{81}{16}$의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\frac{3}{2}$이다. 답 $\pm\frac{3}{2}$

0009 $\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{4^4}=4$ 답 4

0010 $\sqrt[3]{0.027}=\sqrt[3]{0.3^3}=0.3$ 답 0.3

0011 $\sqrt[6]{(-2)^6}=\sqrt[6]{2^6}=2$ 답 2

0012 $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{2}{5}\right)^3}=-\frac{2}{5}$ 답 $-\frac{2}{5}$

0013 $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4\times 16}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$ 답 4

0014 $\frac{\sqrt[4]{3125}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{\frac{3125}{5}}=\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5$ 답 5

0015 $(\sqrt[6]{9})^3=\sqrt[6]{9^3}=\sqrt[6]{(3^2)^3}=\sqrt[6]{3^6}=3$ 답 3

0016 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}=\sqrt[9]{512}=\sqrt[9]{2^9}=2$ 답 2

0017 $\sqrt[12]{9^4}\times\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ 답 3

0018 답 1 **0019** 답 1

0020 $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

0021 $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16$ 답 16

0022 답 $a^{\frac{1}{4}}$ **0023** 답 $a^{\frac{3}{5}}$

0024 $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}=a^{-\frac{3}{4}}$ 답 $a^{-\frac{3}{4}}$

0025 $\frac{1}{\sqrt[6]{a^{-2}}}=\frac{1}{a^{-\frac{2}{6}}}=\frac{1}{a^{-\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}$ 답 $a^{\frac{1}{3}}$

0026 $100^{0.25}=(10^2)^{\frac{1}{4}}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

0027 $8^{\frac{5}{6}}=(2^3)^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{2^5}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ 답 $4\sqrt{2}$

0028 $27^{-\frac{1}{6}}=(3^3)^{-\frac{1}{6}}=3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0029 $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{9}}=(2^{-3})^{-\frac{1}{9}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$ 답 $\sqrt[3]{2}$

0030 $(2^{\frac{9}{4}})^2\times 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{9}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{9}{2}+\frac{1}{2}}=2^5=32$ 답 32

0031 $(3^{\frac{3}{4}})^2\times\sqrt{3}\div(3^{\frac{1}{3}})^6=3^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}}\div 3^2$

$=3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-2}=3^0=1$ 답 1

0032 $(\sqrt[9]{a^6}\times\sqrt[4]{b^2})^6=(a^{\frac{2}{3}}\times b^{\frac{1}{2}})^6=a^4b^3$ 　　답 a^4b^3

0033 $(a^2b^3)^{\frac{1}{6}}\times(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}})^2=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}$
$=a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\times b^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=ab^2$ 　　답 ab^2

0034 $2^{\sqrt{12}}\times2^{\sqrt{3}}=2^{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}=2^{3\sqrt{3}}$ 　　답 $2^{3\sqrt{3}}$

0035 $5^{\sqrt{32}}\div5^{\sqrt{18}}\times5^{\sqrt{8}}=5^{4\sqrt{2}-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=5^{3\sqrt{2}}$ 　　답 $5^{3\sqrt{2}}$

0036 $(a^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}}=a^{\sqrt{100}}=a^{10}$ 　　답 a^{10}

0037 $(a^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\times b^{\sqrt{\frac{2}{3}}})^{\sqrt{6}}=(a^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\times b^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}})^{\sqrt{6}}=ab^2$ 　　답 ab^2

유형 01 거듭제곱근 　　본책 10쪽

(1) a의 n제곱근 ➡ 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x
(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	2	1	0
n이 홀수	1	1	1

0038 ① 64의 세제곱근은 방정식 $x^3=64$의 근이므로 3개이다.
② -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다.
③ 8의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{8}$이다.
④ n이 홀수일 때, 3의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{3}$의 한 개이다.
⑤ n이 짝수일 때, -4의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.
답 ④

0039 $\sqrt{(-2)^2}+\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[4]{(-4)^4}+\cdots+\sqrt[10]{(-10)^{10}}$
$=2+(-3)+4+(-5)+\cdots+10$
$=(-1)\times4+10=6$ 　　답 6

0040 $a=\sqrt{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$
$b=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\times2}=2\sqrt[3]{2}$
$\therefore a+b=\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$ 　　답 ③

0041 $B=\{2, 3\}$이므로 　　⋯ ❶
(i) $b=2$일 때,
$\sqrt{-3}$, $\sqrt{-2}$는 실수가 아니고, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$은 실수이다.
(ii) $b=3$일 때,
$\sqrt[3]{-3}$, $\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$은 모두 실수이다.
(i), (ii)에서
$C=\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{-3}, \sqrt[3]{-2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}\}$ 　　⋯ ❷
따라서 집합 C의 원소의 개수는 6이다. 　　⋯ ❸
답 6

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 집합 C를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	70 %
❸ 집합 C의 원소의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0042 3의 제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{3}$의 2개이므로
$f_2(3)=2$
$\sqrt{3}$의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$의 1개이므로
$f_3(\sqrt{3})=1$
-3의 네제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로
$f_4(-3)=0$
$-\sqrt{3}$의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-\sqrt{3}}$의 1개이므로
$f_5(-\sqrt{3})=1$
$\therefore f_2(3)+f_3(\sqrt{3})+f_4(-3)+f_5(-\sqrt{3})$
$=2+1+0+1=4$ 　　답 ②

0043 (i) $-n^2+7n-10>0$일 때,
$n^2-7n+10<0$에서 　$(n-2)(n-5)<0$
$\therefore 2<n<5$
이때 $-n^2+7n-10$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면 n이 짝수이어야 하므로
$n=4$
(ii) $-n^2+7n-10=0$일 때,
0의 n제곱근은 항상 0이므로 음의 실수가 존재하지 않는다.
(iii) $-n^2+7n-10<0$일 때,
$n^2-7n+10>0$에서 　$(n-2)(n-5)>0$
$\therefore n<2$ 또는 $n>5$
그런데 $2\le n\le10$이므로
$5<n\le10$
이때 $-n^2+7n-10$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면 n이 홀수이어야 하므로
$n=7, 9$
이상에서 모든 n의 값의 합은
$4+7+9=20$ 　　답 20

SSEN 특강 a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재할 조건

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면 $a>0$일 때 n은 짝수, $a<0$일 때 n은 홀수이어야 한다.

유형 02 거듭제곱근의 계산 　　본책 11쪽

근호 안의 수를 소인수분해한 후 거듭제곱근의 성질을 이용한다.
➡ $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때,
① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ 　② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ 　③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$
④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ 　⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

0044 ① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^4}\times\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{2^4\times2^3}=\sqrt[12]{2^7}$

② $\sqrt[3]{-\sqrt{64}}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

③ $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt[5]{2}$

④ $\dfrac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{-8}}=\dfrac{\sqrt[3]{(-3)^3}}{\sqrt[3]{(-2)^3}}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$, $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \dfrac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{-8}}=\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$

⑤ $\left(\sqrt[3]{7}\times\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^6=\left(\sqrt[6]{7^2}\times\dfrac{1}{\sqrt[6]{7^3}}\right)^6=\left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{7}}\right)^6=\dfrac{1}{7}$

답 ⑤

0045 $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9})$

$=(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2})$

$=(\sqrt[3]{4})^3+(\sqrt[3]{3})^3$

$=4+3=7$

답 7

0046 $\dfrac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{36}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}+\sqrt{\sqrt[3]{9}}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^3\times2}+\sqrt[6]{6^2}}{\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[6]{3^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}}{2+\sqrt[3]{3}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{2}(2+\sqrt[3]{3})}{2+\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{2}$

답 ①

0047 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sqrt[3]{2}+b=\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{2}b=a$

$\sqrt[3]{2}+b=\sqrt[3]{54}$에서

$b=\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{3^3\times2}-\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$

$b=2\sqrt[3]{2}$를 $\sqrt[3]{2}b=a$에 대입하면

$a=\sqrt[3]{2}\cdot2\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{4}$

$\therefore ab=2\sqrt[3]{4}\cdot2\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{8}=4\sqrt[3]{2^3}=4\cdot2=8$

답 8

0048 정육면체의 한 모서리의 길이는

$\sqrt[3]{\sqrt{3}}=\sqrt[6]{3}$ ··· ❶

삼각형 AFC는 한 변의 길이가 $\sqrt[6]{3}\times\sqrt{2}$인 정삼각형이므로

$\triangle AFC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt[6]{3}\times\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[6]{3^2}}{2}=\dfrac{\sqrt[6]{3^5}}{2}$ ··· ❷

따라서 $m=5$, $n=6$이므로

$m+n=11$ ··· ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ 정육면체의 한 모서리의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❷ 삼각형 AFC의 넓이를 구할 수 있다.	60 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 문자를 포함한 거듭제곱근의 계산

본책 11쪽

거듭제곱근의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다. 이때 근호가 여러 개인 경우는 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$임을 이용하여 근호를 하나로 변형한다.

0049 $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}}=\dfrac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[8]{x}}\times\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[12]{x}}\times\dfrac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

$=1$

답 1

0050 $\sqrt[4]{4ab^2}\times\sqrt[12]{a^5b^4}\div\sqrt[6]{8a^3b}=\dfrac{\sqrt[12]{4^3a^3b^6}\times\sqrt[12]{a^5b^4}}{\sqrt[12]{8^2a^6b^2}}$

$=\sqrt[12]{\dfrac{64a^8b^{10}}{64a^6b^2}}$

$=\sqrt[12]{a^2b^8}$

$=\sqrt[6]{ab^4}$

답 ④

0051 $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}}}{\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[12]{a}\times\sqrt[60]{a}}{\sqrt[5]{a}\times\sqrt[20]{a}\times\sqrt[60]{a}}=\dfrac{\sqrt[60]{a^{20}\times a^5\times a}}{\sqrt[60]{a^{12}\times a^3\times a}}$

$=\sqrt[60]{\dfrac{a^{26}}{a^{16}}}=\sqrt[60]{a^{10}}=\sqrt[6]{a}$

따라서 $m=1$, $n=6$이므로

$m+n=7$

답 7

0052 ㄱ. $R(2,\ 4)=\sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}}=R(\sqrt{2},\ 2)$

ㄴ. $R(a,\ 3)R(a,\ 3)R(a,\ 3)=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}=a$, $R(3a,\ 3)=\sqrt[3]{3a}$ 이므로

$R(a,\ 3)R(a,\ 3)R(a,\ 3)\neq R(3a,\ 3)$

ㄷ. $R(R(a,\ n),\ n)=\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n^2]{a}$, $R(a,\ 2n)=\sqrt[2n]{a}$이므로

$R(R(a,\ n),\ n)\neq R(a,\ 2n)$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

유형 04 거듭제곱근의 대소 비교

본책 12쪽

다음을 이용하여 거듭제곱근의 대소를 비교한다.

➡ $A>0$, $B>0$이고 k는 2 이상의 자연수일 때

① $A<B$이면 $\sqrt[k]{A}<\sqrt[k]{B}$

② $(\sqrt[m]{A})^k<(\sqrt[n]{B})^k$이면 $\sqrt[m]{A}<\sqrt[n]{B}$

(단, m, n은 2 이상의 자연수)

0053 3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$\sqrt[3]{5}=\sqrt[12]{5^4}=\sqrt[12]{625}$, $\sqrt[4]{10}=\sqrt[12]{10^3}=\sqrt[12]{1000}$,

$\sqrt[6]{20}=\sqrt[12]{20^2}=\sqrt[12]{400}$

$\sqrt[12]{400}<\sqrt[12]{625}<\sqrt[12]{1000}$이므로

$\sqrt[6]{20}<\sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{10}$

답 ④

다른 풀이 $(\sqrt[3]{5})^{12}=\sqrt[3]{5^{12}}=5^4=625$, $(\sqrt[4]{10})^{12}=\sqrt[4]{10^{12}}=10^3=1000$, $(\sqrt[6]{20})^{12}=\sqrt[6]{20^{12}}=20^2=400$이므로

$\sqrt[6]{20}<\sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{10}$

0054 $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[3]{3^3\times3}}=\sqrt[6]{81}$, $\sqrt{4\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{4^3\times2}}=\sqrt[6]{128}$, $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{5^2\times5}}=\sqrt[6]{125}$에서

$\sqrt[6]{81}<\sqrt[6]{125}<\sqrt[6]{128}$

따라서 $a=\sqrt[6]{81}$, $b=\sqrt[6]{128}$이므로 부등식 $\sqrt[6]{81}<\sqrt[6]{n}<\sqrt[6]{128}$을 만족시키는 자연수 n은

$\underline{82,\ 83,\ 84,\ \cdots,\ 127}$

의 46개이다. 답 ⑤

$127-82+1=46$(개)

0055 (i) $A-B=(2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})-(\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2})$

$=\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$

$=\sqrt[6]{9}-\sqrt[6]{8}>0$

$\therefore A>B$ ⋯ ❶

(ii) $C-D=(3\sqrt{2}-2\sqrt[3]{3})-(3\sqrt[3]{3}-2\sqrt{2})$

$=5(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})$

$=5(\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9})<0$

$\therefore C<D$ ⋯ ❷

(iii) $B-D=(\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2})-(3\sqrt[3]{3}-2\sqrt{2})$

$=2(\sqrt{8}-\sqrt[3]{3})$

$=2(\sqrt[6]{512}-\sqrt[6]{9})>0$

$\therefore B>D$ ⋯ ❸

이상에서 $C<D<B<A$이므로 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합은

$A+C=(2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-2\sqrt[3]{3})=4\sqrt{2}$ ⋯ ❹

답 $4\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ A와 B의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❷ C와 D의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❸ B와 D의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❹ 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합을 구할 수 있다.	10 %

SSEN 특강 두 수 또는 두 식의 대소 관계의 판정

① 차의 부호를 조사한다. ➡ $A-B>0 \Longleftrightarrow A>B$

② 제곱의 차의 부호를 조사한다.

➡ $A>0$, $B>0$일 때,

$A^2-B^2>0 \Longleftrightarrow A^2>B^2 \Longleftrightarrow A>B$

③ 비를 조사한다.

➡ $A>0$, $B>0$일 때, $\dfrac{A}{B}>1 \Longleftrightarrow A>B$

유형 05 지수가 정수인 식의 계산

본책 12쪽

$a\neq0$이고 n이 양의 정수일 때

① $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

② $a^{-n}+a^{-n+1}=a^{-n}(1+a)$

0056 $\dfrac{3^{-5}+27^{-2}}{4}=\dfrac{3^{-5}+(3^3)^{-2}}{4}=\dfrac{3^{-5}+3^{-6}}{4}$

$=\dfrac{3^{-6}(3+1)}{4}=3^{-6}$

$\dfrac{9}{4^3+8^3}=\dfrac{9}{(2^2)^3+(2^3)^3}=\dfrac{9}{2^6+2^9}=\dfrac{9}{2^6(1+2^3)}=\dfrac{1}{2^6}=2^{-6}$

$\therefore$ (주어진 식)$=3^{-6}\times2^{-6}=(3\times2)^{-6}=6^{-6}$ 답 ②

0057 $4^{-3}\div(4^{-6}\div2^{-5})^{-4}=\dfrac{1}{4^3}\div\left(\dfrac{1}{4^6}\div\dfrac{1}{2^5}\right)^{-4}$

$=\dfrac{1}{2^6}\div\left(\dfrac{1}{2^{12}}\times2^5\right)^{-4}$

$=\dfrac{1}{2^6}\div\left(\dfrac{1}{2^7}\right)^{-4}=\dfrac{1}{2^6}\div2^{28}$

$=\dfrac{1}{2^6}\times\dfrac{1}{2^{28}}=\dfrac{1}{2^{34}}=2^{-34}$

$\therefore n=-34$ 답 -34

0058 $\dfrac{1}{2^{-4}+1}+\dfrac{1}{2^{-2}+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\dfrac{1}{2^4+1}$

$=\dfrac{2^4}{1+2^4}+\dfrac{2^2}{1+2^2}+\dfrac{1}{2^2+1}+\dfrac{1}{2^4+1}$

$=\dfrac{2^4+1}{2^4+1}+\dfrac{2^2+1}{2^2+1}$

$=1+1=2$ 답 2

다른 풀이 $\dfrac{1}{2^{-4}+1}+\dfrac{1}{2^{-2}+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\dfrac{1}{2^4+1}$

$=\left(\dfrac{1}{2^{-4}+1}+\dfrac{1}{2^4+1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^{-2}+1}+\dfrac{1}{2^2+1}\right)$

$=\dfrac{2^4+1+2^{-4}+1}{(2^{-4}+1)(2^4+1)}+\dfrac{2^2+1+2^{-2}+1}{(2^{-2}+1)(2^2+1)}$

$=\dfrac{2^4+2^{-4}+2}{1+2^{-4}+2^4+1}+\dfrac{2^2+2^{-2}+2}{1+2^{-2}+2^2+1}$

$=1+1=2$

0059 $\dfrac{a^{-2}+a^{-4}+a^{-6}+a^{-8}+a^{-10}}{a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}}$

$=\dfrac{a^{-10}(a^8+a^6+a^4+a^2+1)}{a^2(1+a^2+a^4+a^6+a^8)}$

$=\dfrac{a^{-10}}{a^2}=a^{-12}$

$=(\sqrt[6]{2-\sqrt{3}})^{-12}=(2-\sqrt{3})^{-2}$

$=\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^2}=\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}$

$=\dfrac{7+4\sqrt{3}}{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$ 답 ⑤

유형 06 지수가 실수인 식의 계산

본책 13쪽

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$

0060 $\left\{\left(\dfrac{9}{25}\right)^{\frac{5}{4}}\right\}^{\frac{2}{5}}\times\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{4}{3}}=\left(\dfrac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

$=\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\times(3^{-1})^{-2}$

$=\dfrac{3}{5}\times3^2$

$=\dfrac{27}{5}$ 답 $\dfrac{27}{5}$

0061 $3^{\frac{3}{4}}2^{-\frac{4}{3}}\times(3^{-\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{4}}2^{-\frac{4}{3}}\times3^{\frac{1}{4}}2^{-\frac{1}{6}}$

$=3^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\times2^{-\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)}$

$=3\times2^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2\times2^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ 답 ③

0062 $(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}+1}\times(a^{\sqrt{5}})^{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}\div(a^{4})^{2-\sqrt{3}}$

$=a^{\sqrt{3}(\sqrt{12}+1)}\times a^{\sqrt{5}(2\sqrt{5}-\sqrt{15})}\div a^{4(2-\sqrt{3})}$

$=a^{6+\sqrt{3}}\times a^{10-5\sqrt{3}}\div a^{8-4\sqrt{3}}$

$=a^{6+\sqrt{3}+10-5\sqrt{3}-(8-4\sqrt{3})}=a^{8}$

$\therefore k=8$ 답 8

0063 $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{a}{6}}=(2^{-3})^{\frac{a}{6}}=2^{-\frac{a}{2}}$

$=(2^{a})^{-\frac{1}{2}}=9^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$ 답 ③

유형 07 ~ 08 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내기 본책 13, 14쪽

$a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ ② $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=a^{\frac{1}{mn}}$

0064 $\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\times\sqrt[4]{\dfrac{1}{4}}\times\sqrt[6]{\dfrac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{3}}\times4^{-\frac{1}{4}}\times6^{-\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{3}}\times2^{-\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{1}{6}}\times3^{-\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\times3^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{7}{6}}\times3^{-\frac{1}{2}}$

따라서 $p=-\dfrac{7}{6}$, $q=-\dfrac{1}{2}$이므로

$p+q=-\dfrac{5}{3}$ 답 ⑤

0065 $\sqrt[3]{a}=3$에서 $a^{\frac{1}{3}}=3$ $\therefore a=3^{3}$

$\sqrt[4]{b}=5$에서 $b^{\frac{1}{4}}=5$ $\therefore b=5^{4}$

$\therefore \sqrt[6]{ab}=a^{\frac{1}{6}}\times b^{\frac{1}{6}}=(3^{3})^{\frac{1}{6}}\times(5^{4})^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{2}{3}}$

따라서 $p=\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{2}{3}$이므로

$pq=\dfrac{1}{3}$ 답 ③

0066 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-\dfrac{7}{2}$ ⋯ ❶

따라서 $\sqrt[3]{5^{\alpha}}\times\sqrt[3]{5^{\beta}}=5^{\frac{\alpha}{3}}\times5^{\frac{\beta}{3}}=5^{\frac{\alpha+\beta}{3}}=5^{\frac{3}{3}}=5$,

$(25^{\alpha})^{\beta}=25^{\alpha\beta}=(5^{2})^{-\frac{7}{2}}=5^{-7}$이므로

$\dfrac{\sqrt[3]{5^{\alpha}}\times\sqrt[3]{5^{\beta}}}{(25^{\alpha})^{\beta}}=\dfrac{5}{5^{-7}}=5^{8}$ ⋯ ❷

답 5^{8}

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 식의 값을 구할 수 있다.	70 %

0067 조건 (가)에서 $a^{2}=\sqrt[3]{b}$이므로 $a=b^{\frac{1}{6}}$

조건 (나)에서 $b^{3}=\sqrt{c}$이므로 $c=b^{6}$

따라서 $ac=b^{\frac{1}{6}}\times b^{6}=b^{\frac{1}{6}+6}=b^{\frac{37}{6}}$이므로

$k=\dfrac{37}{6}$ 답 $\dfrac{37}{6}$

0068 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}=\sqrt[16]{a}=a^{\frac{1}{16}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[64]{a}=a^{\frac{1}{64}}$이므로

(주어진 식)$=a^{\frac{1}{16}}\times a^{\frac{1}{64}}=a^{\frac{1}{16}+\frac{1}{64}}=a^{\frac{5}{64}}$

$\therefore k=\dfrac{5}{64}$ 답 ②

0069 $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}=\sqrt{a}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[8]{a}\times\sqrt[16]{a}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{1}{16}}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=a^{\frac{15}{16}}$

$\therefore k=\dfrac{15}{16}$ 답 $\dfrac{15}{16}$

0070 $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\div\sqrt{a^{3}\sqrt{a^{k}}}\times\sqrt[4]{a^{3}}=(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}}\div(a^{3+\frac{k}{2}})^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{3}{4}}$

$=a^{\frac{4}{9}-\frac{3}{2}-\frac{k}{4}+\frac{3}{4}}$

$=a^{-\frac{11}{36}-\frac{k}{4}}$

즉 $\underbrace{-\dfrac{11}{36}-\dfrac{k}{4}=0}_{1=a^{0}\text{이므로 } a^{-\frac{11}{36}-\frac{k}{4}}=a^{0}}$이므로 $\dfrac{k}{4}=-\dfrac{11}{36}$

$\therefore k=-\dfrac{11}{9}$ 답 ②

0071 $\sqrt[3]{a\sqrt{a}\sqrt[4]{a^{3}}}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[12]{a^{3}}=a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{3}{12}}$

$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{3}{4}}$ ⋯ ❶

$\sqrt[6]{a\sqrt{a^{m}}}=\sqrt[6]{a}\times\sqrt[12]{a^{m}}=a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{m}{12}}=a^{\frac{1}{6}+\frac{m}{12}}=a^{\frac{2+m}{12}}$ ⋯ ❷

따라서 $\dfrac{3}{4}=\dfrac{2+m}{12}$이므로 $m+2=9$

$\therefore m=7$ ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 좌변을 a^{r} 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 우변을 a^{r} 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ m의 값을 구할 수 있다.	20 %

0072 $\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt{a}}}=\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\dfrac{\sqrt[3k]{a}}{\sqrt[6]{a}}$

$=a^{\frac{1}{12}-\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{3k}-\frac{1}{6}}$

$=a^{\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3k}-\frac{1}{6}\right)}$

$=a^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{3k}}$

$\sqrt[6]{\frac{1}{a}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{6}}=a^{-\frac{1}{6}}$

따라서 $-\frac{1}{4}+\frac{1}{3k}=-\frac{1}{6}$이므로 $\quad \frac{1}{3k}=\frac{1}{12}$

$\therefore k=4$

답 4

유형 09 거듭제곱을 주어진 문자로 나타내기 본책 15쪽

$a>0$, $k>0$이고 x가 0이 아닌 정수일 때

$a^x=k \Longleftrightarrow a=k^{\frac{1}{x}}$

0073 $3^4=a$에서 $\quad 3=a^{\frac{1}{4}}$

$8^2=b$에서 $\quad (2^3)^2=b, \quad 2^6=b \quad \therefore 2=b^{\frac{1}{6}}$

$\therefore 12^{11}=(2^2\times3)^{11}=2^{22}\times3^{11}$

$=(b^{\frac{1}{6}})^{22}\times(a^{\frac{1}{4}})^{11}=a^{\frac{11}{4}}b^{\frac{11}{3}}$

답 ④

0074 $a=9^3=(3^2)^3=3^6$이므로 $\quad 3=a^{\frac{1}{6}}$

$\therefore 27^7=(3^3)^7=3^{21}$

$=(a^{\frac{1}{6}})^{21}=a^{\frac{7}{2}}$

답 ④

0075 $a=\sqrt{5}$에서 $\quad a^2=5$

$b=\sqrt[3]{3}$에서 $\quad b^3=3$

$\therefore 15^{\frac{1}{6}}=(3\times5)^{\frac{1}{6}}=(a^2\times b^3)^{\frac{1}{6}}$

$=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

답 ③

유형 10 a^r이 자연수가 될 조건 본책 15쪽

자연수 a가 소수일 때, $a^{\frac{n}{m}}$이 자연수가 되려면 n이 m의 배수이어야 한다. (단, m, n은 자연수이다.)

0076 $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{n}}=64^{\frac{1}{n}}=(2^6)^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 정수 n은 6의 양의 약수이다.

따라서 모든 정수 n의 값의 합은

$1+2+3+6=12$

답 12

0077 $a^2=3$, $b^5=7$, $c^6=11$에서

$a=3^{\frac{1}{2}}$, $b=7^{\frac{1}{5}}$, $c=11^{\frac{1}{6}}$

$\therefore (abc)^n=(3^{\frac{1}{2}}\times7^{\frac{1}{5}}\times11^{\frac{1}{6}})^n=3^{\frac{n}{2}}\times7^{\frac{n}{5}}\times11^{\frac{n}{6}}$ ··· ❶

따라서 $(abc)^n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n은 2, 5, 6의 공배수이므로 자연수 n의 최솟값은 30이다. ··· ❷

답 30

채점 기준	비율
❶ $(abc)^n$을 지수를 사용하여 나타낼 수 있다.	50 %
❷ n의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0078 $(\sqrt[3]{5^{10}})^{\frac{1}{3}}$이 자연수 N의 n제곱근이라 하면

$\left\{(\sqrt[3]{5^{10}})^{\frac{1}{3}}\right\}^n=(5^{\frac{10}{3}})^{\frac{n}{3}}=5^{\frac{10n}{9}}=N$

따라서 $5^{\frac{10n}{9}}$이 자연수가 되려면 $10n$이 9의 배수이어야 하므로 n이 9의 배수이어야 한다.

이때 $2\le n\le100$이므로 n은 9, 18, 27, ⋯, 99의 11개이다.

답 ④

0079 $\sqrt{\frac{n}{2}}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$이므로 $\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$이 자연수이려면

$n=2k^2$ (k는 자연수)

꼴이어야 하고, $\sqrt[3]{\frac{n}{3}}=\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$이므로 $\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$이 자연수이려면

$n=3l^3$ (l은 자연수)

꼴이어야 한다.

즉 $n=2k^2=3l^3$에서 k는 3의 배수, l은 2의 배수이어야 하므로

$k=3p$, $l=2q$ (p, q는 자연수)

로 놓을 수 있다.

$n=2k^2$에서 $\quad n=2\times(3p)^2=2\times3^2\times p^2$

$n=3l^3$에서 $\quad n=3\times(2q)^3=2^3\times3\times q^3$

따라서 $p=2\times3$, $q=3$일 때 n의 값이 최소이므로 구하는 n의 최솟값은 $\quad 2^3\times3^4=648$

답 648

유형 11 곱셈 공식을 이용한 식의 계산 본책 16쪽

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

① $(a^r+b^s)(a^r-b^s)=a^{2r}-b^{2s}$

② $(a^r+b^s)^2=a^{2r}+2a^rb^s+b^{2s}$, $(a^r-b^s)^2=a^{2r}-2a^rb^s+b^{2s}$

③ $(a^r+b^s)^3=a^{3r}+3a^{2r}b^s+3a^rb^{2s}+b^{3s}$,

$(a^r-b^s)^3=a^{3r}-3a^{2r}b^s+3a^rb^{2s}-b^{3s}$

0080 $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})$

$=(a^{\frac{1}{2}})^2+2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^2-\{(a^{\frac{1}{2}})^2-(a^{-\frac{1}{2}})^2\}$

$=a+2+a^{-1}-(a-a^{-1})$

$=2a^{-1}+2$

답 ④

0081 $x=3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}$이므로

$x^3=(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}})^3$

$=3+3^{-1}+3(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}})$

$=\frac{10}{3}+3x$

$\therefore x^3-3x-2=\frac{10}{3}-2=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

0082 $2^{\frac{a}{2}}-2^{\frac{b}{2}}=5$의 양변을 제곱하면

$(2^{\frac{a}{2}}-2^{\frac{b}{2}})^2=5^2, \quad 2^a-2\cdot2^{\frac{a}{2}}\cdot2^{\frac{b}{2}}+2^b=25$

$2^a-2^{1+\frac{a+b}{2}}+2^b=25$

$2^a-2^{1+\frac{4}{2}}+2^b=25$

$2^a-8+2^b=25 \quad \therefore 2^a+2^b=33$

답 ⑤

0083 (주어진 식)

$=(x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$

$=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$

$=(x-x^{-1})(x+x^{-1})$

$=x^2-x^{-2}=x^2-\frac{1}{x^2}$

$=2^2-\frac{1}{2^2}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$ 답 $\frac{15}{4}$

0084 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$22=18+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=2$ ··· ❶

$\therefore (2^a)^{b+c}\times(2^b)^{c+a}\times(2^c)^{a+b}=2^{ab+ac}\times 2^{bc+ba}\times 2^{ca+cb}$

$=2^{2(ab+bc+ca)}$

$=2^4=16$ ··· ❷

답 16

채점 기준	비율
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

유형 12 x^n+x^{-n} 꼴의 식의 값 구하기 본책 16쪽

$x>0$일 때

① $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2$, $(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}-2$

② $(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3=x+x^{-1}+3(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})$,

$(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})^3=x-x^{-1}-3(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})$

0085 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 제곱하면

$x+x^{-1}+2=16 \qquad \therefore x+x^{-1}=14$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2+x^{-2}+2=196 \qquad \therefore x^2+x^{-2}=194$ 답 ④

0086 $3^x+3^{1-x}=10$의 양변을 제곱하면

$9^x+9^{1-x}+2\cdot 3=100$

$\therefore 9^x+9^{1-x}=94$ 답 94

다른 풀이 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $3^{1-x}=\frac{3}{t}$이므로

$9^x+9^{1-x}=(3^x)^2+(3^{1-x})^2$

$=t^2+\frac{9}{t^2}=\left(t+\frac{3}{t}\right)^2-6$

$=10^2-6=94$

0087 $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=2+\sqrt{3}$의 양변을 세제곱하면

$x+\frac{1}{x}+3\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=26+15\sqrt{3}$

$\therefore x+\frac{1}{x}=26+15\sqrt{3}-3(2+\sqrt{3})$

$=20+12\sqrt{3}$

따라서 $a=20$, $b=12$이므로

$a-b=8$ 답 ④

0088 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$x+x^{-1}+2=9 \qquad \therefore x+x^{-1}=7$ ··· ❶

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=27$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=27-3\cdot 3=18$ ··· ❷

$\therefore \frac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3}{x+x^{-1}-2}=\frac{18-3}{7-2}=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $x+x^{-1}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0089 $\frac{x^3+x^2}{x+1}-\frac{x^{-3}+x^{-2}}{x^{-1}+1}$

$=\frac{x^2(x+1)}{x+1}-\frac{x^{-2}(x^{-1}+1)}{x^{-1}+1}$

$=x^2-x^{-2}=(x+x^{-1})(x-x^{-1})$ ······ ㉠

$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=2$의 양변을 제곱하면

$x+\frac{1}{x}-2=4 \qquad \therefore x+x^{-1}=6$ ······ ㉡

$\therefore (x-x^{-1})^2=(x+x^{-1})^2-4=6^2-4=32$

그런데 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>0$에서 $x>1$이므로 $x-x^{-1}>0$

$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>0$의 양변에 $\sqrt{x}$를 곱하면 $x-1>0 \quad \therefore x>1$

$\therefore x-x^{-1}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 구하는 식의 값은

$6\cdot 4\sqrt{2}=24\sqrt{2}$ 답 ⑤

유형 13 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 꼴의 식의 값 구하기 본책 17쪽

주어진 식의 값을 이용할 수 있도록 구하는 식의 분모와 분자에 $a^x\ (a>0)$을 곱한다.

0090 구하는 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$

$=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0091 $5^{\frac{1}{x}}=9$에서 $\quad 9^x=5 \qquad \therefore 3^{2x}=5$

구하는 식의 분모, 분자에 3^x을 곱하면

$\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}=\frac{3^x(3^x+3^{-x})}{3^x(3^x-3^{-x})}=\frac{3^{2x}+1}{3^{2x}-1}$

$=\frac{5+1}{5-1}=\frac{3}{2}$ 답 ③

0092 $a^{4x}=(a^{2x})^2=(3+2\sqrt{2})^2=17+12\sqrt{2}$

구하는 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}$$

$$=\frac{a^{4x}+\frac{1}{a^{2x}}}{a^{2x}+1}=\frac{17+12\sqrt{2}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}}{(3+2\sqrt{2})+1}$$

$$=\frac{17+12\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\frac{10(2+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})}$$

$=5$ 답 ④

0093 $\frac{a^m-a^{-m}}{a^m+a^{-m}}=\frac{3}{5}$의 좌변의 분모, 분자에 a^m을 곱하면

$\frac{a^m(a^m-a^{-m})}{a^m(a^m+a^{-m})}=\frac{3}{5}$, $\frac{a^{2m}-1}{a^{2m}+1}=\frac{3}{5}$ ⋯ ❶

$5a^{2m}-5=3a^{2m}+3$, $2a^{2m}=8$ $\therefore a^{2m}=4$ ⋯ ❷

$\therefore a^{6m}=(a^{2m})^3=4^3=64$ ⋯ ❸

답 64

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변의 분모, 분자에 a^m을 곱하여 정리할 수 있다.	40 %
❷ a^{2m}의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a^{6m}의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 14 $a^x=k$가 주어질 때 식의 값 구하기 본책 18쪽

$a^x=k$, $b^y=k$ $(a>0,\ b>0,\ xy\neq0)$일 때

➡ $a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$임을 이용하여 밑을 통일한다.

➡ $ab=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$, $\frac{a}{b}=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

0094 $5^x=8$에서 $5=8^{\frac{1}{x}}=(2^3)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{3}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$40^y=32$에서 $40=32^{\frac{1}{y}}=(2^5)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{5}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{1}{8}=2^{\frac{3}{x}}\div2^{\frac{5}{y}}$

$2^{\frac{3}{x}-\frac{5}{y}}=2^{-3}$ $\therefore \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=-3$ 답 -3

0095 $5^x=10$에서 $5=10^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$2^y=10$에서 $2=10^{\frac{1}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠×㉡을 하면 $10=10^{\frac{1}{x}}\times10^{\frac{1}{y}}=10^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ 답 ①

0096 $\left(\frac{1}{10}\right)^x=9$에서

$\frac{1}{10}=9^{\frac{1}{x}}=(3^2)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$20^y=27$에서 $20=27^{\frac{1}{y}}=(3^3)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{3}{y}}$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❶

㉠×㉡을 하면 $2=3^{\frac{2}{x}}\times3^{\frac{3}{y}}$

$\therefore 3^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $\frac{1}{10}$, 20을 3^r 꼴로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $3^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0097 $a^x=3$에서 $a=3^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$(ab)^y=3^2$에서 $ab=3^{\frac{2}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

$(abc)^z=3^3$에서 $abc=3^{\frac{3}{z}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$a\times ab\div abc=3^{\frac{1}{x}}\times3^{\frac{2}{y}}\div3^{\frac{3}{z}}$

$\therefore 3^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}}=\frac{a^2b}{abc}=\frac{a}{c}$ 답 ④

0098 $160^x=2$에서 $2^{\frac{1}{x}}=160$ ⋯⋯ ㉠

$10^y=4$에서 $2^{\frac{2}{y}}=10$ ⋯⋯ ㉡

$a^z=\frac{1}{4}$에서 $a^z=2^{-2}$ $\therefore 2^{\frac{1}{z}}=a^{-\frac{1}{2}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠÷㉡×㉢을 하면

$2^{\frac{1}{x}}\div2^{\frac{2}{y}}\times2^{\frac{1}{z}}=160\div10\times a^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore 2^{\frac{1}{x}-\frac{2}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{16}{\sqrt{a}}$

즉 $2^2=\frac{16}{\sqrt{a}}$이므로 $\sqrt{a}=4$

$\therefore a=16$ 답 16

유형 15 $a^x=b^y$이 주어질 때 식의 값 구하기 본책 18쪽

$a^x=b^y=c^z$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ xyz\neq0)$일 때

➡ $a^x=b^y=c^z=k$ $(k>0)$로 놓고 $a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$, $c=k^{\frac{1}{z}}$임을 이용한다.

0099 $3^x=4^y=12^z=k$ $(k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$3^x=k$에서 $3=k^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$4^y=k$에서 $4=k^{\frac{1}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

$12^z=k$에서 $12=k^{\frac{1}{z}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면 $1=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}$

$\therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$

그런데 $k\neq1$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$ 답 0

0100 $x^y=y^x$에서 $x=y^{\frac{x}{y}}$ $\therefore x=y^{\frac{2}{3}}$

위의 식을 $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$에 대입하면

$\frac{y^{\frac{2}{3}}}{y}=\frac{2}{3}$, $y^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$

$\therefore y=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$ 답 ③

0101 $4^x=7^y=k\ (k>0)$로 놓으면 $xy\neq0$에서

$\frac{1}{2x}-\frac{1}{y}=-1$이므로 $x\neq0,\ y\neq0$

$k\neq1$

$4^x=2^{2x}=k$에서 $2=k^{\frac{1}{2x}}$ …… ㉠

$7^y=k$에서 $7=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{2}{7}=k^{\frac{1}{2x}}\div k^{\frac{1}{y}}$

$\therefore k^{\frac{1}{2x}-\frac{1}{y}}=\frac{2}{7}$

즉 $k^{-1}=\frac{2}{7}$이므로 $k=\frac{7}{2}$ $\therefore 4^x=\frac{7}{2}$

답 $\frac{7}{2}$

0102 $a^x=b^y=3^z=k\ (k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{z}$이므로 $x\neq0,\ y\neq0,\ z\neq0$

$k\neq1$

$a^x=k$에서 $a=k^{\frac{1}{x}}$

$b^y=k$에서 $b=k^{\frac{1}{y}}$

$3^z=k$에서 $3=k^{\frac{1}{z}}$ ··· ❶

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{z}$이므로

$ab=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{4}{z}}=(k^{\frac{1}{z}})^4$

$=3^4=81$ ··· ❷

답 81

채점 기준	비율
❶ a, b, 3을 k^r 꼴로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ ab의 값을 구할 수 있다.	50 %

0103 $2^x=3^{-y}=k\ (k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서

$k\neq1$

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$3^{-y}=k$에서 $3=k^{-\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면 $6=k^{\frac{1}{x}}\times k^{-\frac{1}{y}}$

$\therefore 6=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ …… ㉢

한편 $3^{-y}=k$에서 $9^y=(3^{-y})^{-2}=k^{-2}$이므로

$6^z=k^{-2}$ $\therefore 6=k^{-\frac{2}{z}}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=k^{-\frac{2}{z}}$이고 $k\neq1$이므로

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{2}{z}$

답 ①

유형 16 지수의 실생활에의 활용

본책 19쪽

① 식이 주어진 경우 ➡ 주어진 식에 알맞은 값을 대입한다.
② 식이 주어지지 않은 경우 ➡ 주어진 상황을 식으로 나타낸다.

0104 3년 후 방사성 물질의 양이 $\frac{1}{2}m_0$이므로

$\frac{1}{2}m_0=m_0\cdot a^{-3}$ $\therefore a^{-3}=\frac{1}{2}$

따라서 12년 후의 방사성 물질의 양은

$m_{12}=m_0\cdot a^{-12}=m_0\cdot(a^{-3})^4=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}m_0$

$\therefore k=\frac{1}{16}$

답 $\frac{1}{16}$

0105 어떤 음보다 반음 높은 음의 진동수가 어떤 음의 진동수의 x배라 하면

$x^{12}=2$ $\therefore x=\sqrt[12]{2}$

따라서 '미'음의 진동수는 '도'음의 진동수의

$(\sqrt[12]{2})^4=\sqrt[3]{2}$ (배)

답 $\sqrt[3]{2}$배

0106 $G=\frac{H-65}{14}\times1.05^T$에서

$H=80$, $T=30$일 때, $G_1=\frac{80-65}{14}\times1.05^{30}$

$H=75$, $T=15$일 때, $G_2=\frac{75-65}{14}\times1.05^{15}$

$\therefore \frac{G_1}{G_2}=\frac{\frac{15}{14}\times1.05^{30}}{\frac{10}{14}\times1.05^{15}}=\frac{3}{2}\times1.05^{15}=\frac{3}{2}\times2=3$

답 3

0107 원본의 글자 크기를 a라 하면 6번째 복사본의 글자 크기가 원본의 2배이므로

$a\left(\frac{r}{100}\right)^6=2a$ $\therefore \left(\frac{r}{100}\right)^6=2$

8번째 복사본의 글자 크기는 $a\left(\frac{r}{100}\right)^8$이므로

$a\left(\frac{r}{100}\right)^8\div a\left(\frac{r}{100}\right)^6=\left(\frac{r}{100}\right)^2=\left\{\left(\frac{r}{100}\right)^6\right\}^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$

따라서 8번째 복사본의 글자 크기는 6번째 복사본의 $2^{\frac{1}{3}}$배이므로

$p=3,\ q=1$

$\therefore p+q=4$

답 4

0108 (1st) $f_n(a)$의 정의를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. -3의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-3}$의 1개이므로

$f_5(-3)=1$

(2nd) $2n+1$은 홀수, $2n$은 짝수임을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $a<0$이고 $2n+1$은 홀수이므로 a의 $2n+1$제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[2n+1]{a}$의 1개이다. $\therefore f_{2n+1}(a)=1$

또 $a<0$이고 $2n$은 짝수이므로 a의 $2n$제곱근 중 실수인 것은 없다. $\therefore f_{2n}(a)=0$

$\therefore f_{2n+1}(a)-f_{2n}(a)=1$

(3rd) n이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. (i) $a>0$이고 n이 짝수일 때,

$n+1$은 홀수이고 $n+2$는 짝수이므로

$f_n(a)=f_{n+2}(a)=2,\ f_{n+1}(a)=1$

즉 $g(n)=f_{n+1}(a)-f_n(a)=1-2=-1$,

$g(n+1)=f_{n+2}(a)-f_{n+1}(a)=2-1=1$이므로

$g(n)<g(n+1)$

(ii) $a>0$이고 n이 홀수일 때,

$n+1$은 짝수이고 $n+2$는 홀수이므로

$f_n(a)=f_{n+2}(a)=1,\ f_{n+1}(a)=2$

즉 $g(n)=f_{n+1}(a)-f_n(a)=2-1=1$,

$g(n+1)=f_{n+2}(a)-f_{n+1}(a)=1-2=-1$이므로

$g(n)>g(n+1)$

(i), (ii)에서 n이 홀수일 때에는 $g(n)<g(n+1)$이 성립하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0109 1st $n=3, 4, 5, \cdots, 10$일 때, $a^n<121<(a+1)^n$을 만족시키는 자연수 a를 찾아 $[\sqrt[n]{121}]$의 값을 구한다.

$11^2=121$이므로 $[\sqrt{121}]=[11]=11$

$64=4^3<121<5^3=125$이므로

$4<\sqrt[3]{121}<5 \quad \therefore [\sqrt[3]{121}]=4$

$81=3^4<121<4^4=256$이므로

$3<\sqrt[4]{121}<4 \quad \therefore [\sqrt[4]{121}]=3$

$32=2^5<121<3^5=243$이므로

$2<\sqrt[5]{121}<3 \quad \therefore [\sqrt[5]{121}]=2$

$64=2^6<121<3^6=729$이므로

$2<\sqrt[6]{121}<3 \quad \therefore [\sqrt[6]{121}]=2$

$2^7=128$이므로

$[\sqrt[7]{121}]=[\sqrt[8]{121}]=[\sqrt[9]{121}]=[\sqrt[10]{121}]=1$

2nd $[\sqrt{121}]+[\sqrt[3]{121}]+[\sqrt[4]{121}]+\cdots+[\sqrt[10]{121}]$의 값을 구한다.

$[\sqrt{121}]+[\sqrt[3]{121}]+[\sqrt[4]{121}]+\cdots+[\sqrt[10]{121}]$

$=11+4+3+2+2+4\cdot 1=26$ 답 26

0110 1st a_n을 간단히 나타낸다.

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$
$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

이므로 $a_n=2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

2nd 자연수 k의 값을 구한다.

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{63}$

$=2^{\sqrt{2}-1}\times 2^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times 2^{\sqrt{4}-\sqrt{3}}\times\cdots\times 2^{\sqrt{64}-\sqrt{63}}$

$=2^{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{64}-\sqrt{63})}$

$=2^{\sqrt{64}-1}$

$=2^{8-1}=2^7$

$\therefore k=7$ 답 ④

0111 1st a와 b, b와 c, c와 a 사이의 관계식을 구한다.

조건 (가)에서 $\sqrt[3]{a}=\sqrt[m]{b}$이므로

$(\sqrt[3]{a})^m=b \quad \therefore a^{\frac{m}{3}}=b$ …… ㉠

조건 (나)에서 $\sqrt{b}=\sqrt[n]{c}$이므로

$(\sqrt{b})^n=c \quad \therefore b^{\frac{n}{2}}=c$ …… ㉡

조건 (다)에서 $c=\sqrt[4]{a^{12}}$이므로

$c=a^3$ …… ㉢

2nd a, b, c 사이의 관계식을 이용하여 mn의 값을 구한다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$c=(a^{\frac{m}{3}})^{\frac{n}{2}}=a^{\frac{mn}{6}}$

이때 ㉢에서 $a^{\frac{mn}{6}}=a^3$이므로

$\frac{mn}{6}=3 \quad \therefore mn=18$

3rd 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

$mn=18$을 만족시키는 1이 아닌 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은

$(2, 9), (3, 6), (6, 3), (9, 2)$

의 4개이다. 답 ①

0112 1st 거듭제곱근을 지수를 사용하여 나타낸 후 m, n의 조건을 찾는다.

$\sqrt[7]{\frac{5^{n+1}}{3^{m-1}}}=\frac{5^{\frac{n+1}{7}}}{3^{\frac{m-1}{7}}}$이 유리수이려면 $5^{\frac{n+1}{7}}$, $3^{\frac{m-1}{7}}$이 모두 자연수이어야 하므로 $m-1$, $n+1$이 모두 7의 배수이어야 한다.

또 $\sqrt[9]{\frac{9^{n-2}}{7^m}}=\frac{3^{\frac{2n-4}{9}}}{7^{\frac{m}{9}}}$이 유리수이려면 $3^{\frac{2n-4}{9}}$, $7^{\frac{m}{9}}$이 모두 자연수이어야 하므로 m, $2n-4$가 모두 9의 배수이어야 한다.

2nd $m+n$의 최솟값을 구한다.

m은 9의 배수, $m-1$은 7의 배수이므로 m의 최솟값은 36이다.

$n+1=7l$ (l은 자연수)이라 하면

$2n-4=2(7l-1)-4=14l-6$

$l=3$일 때 $14l-6=36$, 즉 9의 배수이므로 n의 최솟값은

$7\cdot 3-1=20$

따라서 $m+n$의 최솟값은

$36+20=56$ 답 56

0113 1st $m=1, 2, 3$일 때, $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 n의 값을 구한다.

$1\le n\le 8$인 자연수 n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되려면

(i) $m=1$일 때, $n^{\frac{m}{3}}=n^{\frac{1}{3}}$에서 n은 어떤 자연수의 세제곱이어야 하므로 n의 값은

$1^3, 2^3$, 즉 $1, 8$

(ii) $m=2$일 때, $n^{\frac{m}{3}}=n^{\frac{2}{3}}$에서 n은 어떤 자연수의 세제곱이어야 하므로 n의 값은

$1^3, 2^3$, 즉 $1, 8$

(iii) $m=3$일 때, $n^{\frac{m}{3}}=n^{\frac{3}{3}}=n$이므로 n의 값은

$1, 2, \cdots, 8$

2nd 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$2+2+8=12$ 답 ④

다른 풀이 $1\le m\le 3$인 자연수 m에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되려면

(i) $n=1$일 때, $n^{\frac{m}{3}}=1^{\frac{m}{3}}=1$이므로 m의 값은

$1, 2, 3$

(ii) $n=2, 3, \cdots, 7$일 때, $n^{\frac{m}{3}}$에서 m은 3의 배수이어야 하므로 m의 값은 3

(iii) $n=8$일 때, $n^{\frac{m}{3}}=8^{\frac{m}{3}}=(2^3)^{\frac{m}{3}}=2^m$이므로 m의 값은

$1, 2, 3$

이상에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$3+6\cdot 1+3=12$

0114 1st 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수를 파악한다.

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고, 조건 ㈏에서 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

2nd n이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 자연수 n의 값을 구한다.

(i) n이 짝수일 때

방정식 $x^n-64=0$, 즉 $\underbrace{x^n=64\text{의 실근}}_{64\text{의 } n\text{제곱근 중 실수인 것}}$은

$x=\sqrt[n]{64}$ 또는 $x=-\sqrt[n]{64}$

$\therefore\ x=2^{\frac{6}{n}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{n}}$

이때 조건 ㈎를 만족시키기 위해서는

$f(x)=(x-2^{\frac{6}{n}})(x+2^{\frac{6}{n}})$

이어야 한다.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖고, 그 값은

$f(0)=-2^{\frac{6}{n}}\times 2^{\frac{6}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$

조건 ㈏에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수이므로 n이 12의 양의 약수이어야 한다.

$\therefore\ n=2,\ 4,\ 6,\ 12$

(ii) n이 홀수일 때

방정식 $x^n-64=0$, 즉 $x^n=64$의 실근은

$x=\sqrt[n]{64}$

따라서 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$의 근이 모두 중근일 수 없으므로 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$가 존재하지 않는다.

3rd 모든 자연수 n의 값의 합을 구한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+4+6+12=24$

답 24

0115 1st $x=\sqrt[4]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$의 양변을 제곱한다.

$x=\sqrt[4]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$, 즉 $x=2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}$의 양변을 제곱하면

$x^2=2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}+2$

2nd $2(x+\sqrt{x^2-4})$의 값을 구한다.

$x^2-4=2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}-2=(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})^2$이므로

$$
\begin{aligned}
2(x+\sqrt{x^2-4})&=2\left\{2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}+\sqrt{(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})^2}\right\}\\
&=2(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})\\
&=2\cdot 2\cdot 2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{9}{4}}
\end{aligned}
$$

답 ⑤

0116 1st 주어진 등식의 좌변을 간단히 정리한다.

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}+\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}\\
&=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}+\frac{(a^x-a^{-x})(a^{2x}+1+a^{-2x})}{a^x-a^{-x}}\\
&=(a^{2x}-1+a^{-2x})+(a^{2x}+1+a^{-2x})\\
&=2(a^{2x}+a^{-2x})
\end{aligned}
$$

2nd a^x+a^{-x}의 값을 구한다.

$2(a^{2x}+a^{-2x})=12$이므로 $\quad a^{2x}+a^{-2x}=6$ …… ㉠

$(a^x+a^{-x})^2-2=6,\quad (a^x+a^{-x})^2=8$

$a^x+a^{-x}>0$이므로 $\quad a^x+a^{-x}=2\sqrt{2}$

3rd $a^{2x}-a^{-2x}$의 값을 구한다.

㉠에서 $\quad (a^x-a^{-x})^2+2=6,\quad (a^x-a^{-x})^2=4$

$a^x>1$, $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}<1$에서 $a^x-a^{-x}>0$ 이므로

$a^x-a^{-x}=2$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ a^{2x}-a^{-2x}&=(a^x+a^{-x})(a^x-a^{-x})\\
&=2\sqrt{2}\cdot 2=4\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

답 $4\sqrt{2}$

0117 1st $2^a=3^b=6^c=k\ (k>0)$로 놓고 2, 3, 6을 k^r 꼴로 나타낸다.

$2^a=3^b=6^c=k\ (k>0)$로 놓으면 $abc\neq 0$에서

$k\neq 1$

$2^a=k$에서 $\quad 2=k^{\frac{1}{a}}$ …… ㉠

$3^b=k$에서 $\quad 3=k^{\frac{1}{b}}$ …… ㉡

$6^c=k$에서 $\quad 6=k^{\frac{1}{c}}$ …… ㉢

2nd $(a-4)(b-4)=16$을 변형하여 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$의 값을 구한다.

$(a-4)(b-4)=16$에서

$ab-4a-4b+16=16,\quad ab-4a-4b=0$

$ab\neq 0$이므로 양변을 ab로 나누면

$1-\dfrac{4}{b}-\dfrac{4}{a}=0,\quad \dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{b}=1$

$\therefore\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{4}$ …… ㉣

3rd $k^{\frac{1}{4}}$의 값을 구한다.

㉠×㉡을 하면 $\quad 6=k^{\frac{1}{a}}\times k^{\frac{1}{b}}=k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

$\therefore\ k^{\frac{1}{4}}=6\ (\because ㉣)$ …… ㉤

4th c의 값을 구한다.

㉢, ㉤에서 $\quad k^{\frac{1}{c}}=k^{\frac{1}{4}}$

$k\neq 1$이므로 $\quad \dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ c=4$

답 ②

0118 1st 주어진 식에 A 지역의 값을 대입하여 식을 정리한다.

A 지역에서 지면으로부터 12 m인 높이에서 풍속이 2 m/s이고, 36 m인 높이에서 풍속이 8 m/s이므로

$8=2\times\left(\dfrac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$\therefore\ 4=3^{\frac{2}{2-k}}$ …… ㉠

2nd 주어진 식에 B 지역의 값을 대입하여 식을 정리한다.

B 지역에서 지면으로부터 10 m인 높이에서 풍속이 a m/s이고, 90 m인 높이에서 풍속이 b m/s이므로

$b=a\times\left(\dfrac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}\qquad \therefore\ \dfrac{b}{a}=9^{\frac{2}{2-k}}$

3rd $\dfrac{b}{a}$의 값을 구한다.

$\dfrac{b}{a}=9^{\frac{2}{2-k}}=(3^{\frac{2}{2-k}})^2=4^2=16\ (\because ㉠)$

답 ③

0119 전략 △AQB에서 $\overline{PQ}$가 ∠AQB의 이등분선임을 이용한다.

풀이 한 원에서 길이가 같은 현에 대한 원주각의 크기는 같으므로 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\angle PQA=\angle PQB$

따라서 $\overline{PQ}$는 ∠AQB의 이등분선이므로 △AQB에서

$$\begin{aligned}\overline{AQ}:\overline{BQ}&=\overline{AR}:\overline{BR}\\&=4\sqrt[3]{3}:3\sqrt[3]{3}\\&=4:3\end{aligned}$$ ···➊

$\overline{AQ}=4k$, $\overline{BQ}=3k\,(k>0)$로 놓으면 △AQB는 $\angle AQB=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(4k)^2+(3k)^2}=5k$

또 $\overline{AB}=\overline{AR}+\overline{BR}=4\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=7\sqrt[3]{3}$이므로

$5k=7\sqrt[3]{3}\qquad \therefore k=\frac{7}{5}\sqrt[3]{3}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{5}{7}\overline{BQ}&=\frac{5}{7}\cdot 3k=\frac{5}{7}\cdot 3\cdot\frac{7}{5}\sqrt[3]{3}\\&=3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^4}\end{aligned}$$ ···➋

따라서 $m=4$, $n=3$이므로

$m+n=7$ ···➌

답 7

채점 기준	비율
➊ $\overline{AQ}:\overline{BQ}$를 구할 수 있다.	30 %
➋ $\frac{5}{7}\overline{BQ}$의 값을 구할 수 있다.	60 %
➌ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0120 전략 먼저 두 금덩이의 부피의 합을 지수를 사용하여 나타낸다.

풀이 두 금덩이의 부피의 합은

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2^{14}}+\sqrt[3]{2^{17}}&=2^{\frac{14}{3}}+2^{\frac{17}{3}}=2^{\frac{14}{3}}+2^{\frac{14}{3}+1}\\&=2^{\frac{14}{3}}(1+2)=3\cdot 2^{\frac{14}{3}}\end{aligned}$$ ···➊

한 모서리의 길이가 $\sqrt[9]{2^8}$인 정육면체 한 개의 부피는

$(\sqrt[9]{2^8})^3=(2^{\frac{8}{9}})^3=2^{\frac{8}{3}}$ ···➋

이므로 $\quad 3\cdot 2^{\frac{14}{3}}\ge 2^{\frac{8}{3}}n$

$\therefore n\le\dfrac{3\cdot 2^{\frac{14}{3}}}{2^{\frac{8}{3}}}=3\cdot 2^{\frac{14}{3}-\frac{8}{3}}=3\cdot 2^2=12$

따라서 정육면체 모양의 금덩이를 최대 12개 만들 수 있다. ···➌

답 12

채점 기준	비율
➊ 두 금덩이의 부피의 합을 구할 수 있다.	30 %
➋ 한 모서리의 길이가 $\sqrt[9]{2^8}$인 정육면체 한 개의 부피를 구할 수 있다.	30 %
➌ n의 값을 구할 수 있다.	40 %

0121 전략 다항식 $f(x)$를 $x-p$로 나누었을 때의 나머지는 $f(p)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$가 $x-\sqrt{a}$로 나누어떨어지므로

$f(\sqrt{a})=0$

$(\sqrt{a})^3-81=0,\qquad a^{\frac{3}{2}}=3^4$

$\therefore a^6=3^{16}$ ···➊

이때 $\sqrt[4]{\sqrt{a^6}}=\sqrt[8]{3^{16}}=3^2$이므로 $f(x)$를 $x-\sqrt[4]{\sqrt{a^6}}$으로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned}f(3^2)&=(3^2)^3-81=3^6-81\\&=729-81=648\end{aligned}$$ ···➋

답 648

채점 기준	비율
➊ a^6의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ $f(x)$를 $x-\sqrt[4]{\sqrt{a^6}}$으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	60 %

0122 전략 a가 어떤 자연수의 n제곱근이려면 a^n이 자연수가 되어야 함을 이용한다.

풀이 $\sqrt[3]{3^4}$이 자연수 N의 n제곱근이라 하면

$(\sqrt[3]{3^4})^n=3^{\frac{4n}{3}}=N$

따라서 $3^{\frac{4n}{3}}$이 자연수가 되려면 $4n$은 3의 배수이어야 하므로 n은 3의 배수이어야 한다.

이때 $2\le n\le 50$이므로 n은 3, 6, 9, ⋯, 48의 16개이다.

$\therefore k=16$ ···➊

한편

$$\begin{aligned}\frac{3}{3^k+1}+\frac{3}{3^{-k}+1}&=3\left(\frac{1}{3^k+1}+\frac{3^k}{1+3^k}\right)\\&=3\cdot\frac{3^k+1}{3^k+1}=3\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}&\frac{3}{3^{-16}+1}+\cdots+\frac{3}{3^{-6}+1}+\frac{3}{3^{-4}+1}+\frac{3}{3^{-2}+1}\\&+\frac{3}{3^0+1}+\frac{3}{3^2+1}+\frac{3}{3^4+1}+\frac{3}{3^6+1}+\cdots+\frac{3}{3^{16}+1}\\&=\left(\frac{3}{3^{-16}+1}+\frac{3}{3^{16}+1}\right)+\left(\frac{3}{3^{-14}+1}+\frac{3}{3^{14}+1}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{3}{3^{-2}+1}+\frac{3}{3^2+1}\right)+\frac{3}{3^0+1}\\&=3\cdot 8+\frac{3}{2}=\frac{51}{2}\end{aligned}$$ ···➋

답 $\frac{51}{2}$

채점 기준	비율
➊ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

0123 전략 인수분해 공식을 이용하여 $x+y$, $x-y$를 간단히 한다.

풀이
$$\begin{aligned}x+y&=(a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})+(b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})\\&=(a^{\frac{1}{3}})^3+3(a^{\frac{1}{3}})^2b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}})^2+(b^{\frac{1}{3}})^3\\&=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^3\end{aligned}$$ ···➊

$$\begin{aligned}x-y&=(a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})-(b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})\\&=(a^{\frac{1}{3}})^3-3(a^{\frac{1}{3}})^2b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}})^2-(b^{\frac{1}{3}})^3\\&=(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^3\end{aligned}$$ ···➋

$\therefore (x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}$

$=\{(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^3\}^{\frac{2}{3}}+\{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^3\}^{\frac{2}{3}}$

$=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^2$

$=a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$

$=2(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=2\cdot 2=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $x+y$를 인수분해할 수 있다.	30 %
❷ $x-y$를 인수분해할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

0124 전략 거듭제곱근을 지수를 사용하여 나타낸 후 p, q, r에 대한 식을 세운다.

풀이 $\sqrt[p]{a}=\sqrt[q]{b^2}=\sqrt[r]{c^3}=8$에서 $a^{\frac{1}{p}}=8$, $b^{\frac{2}{q}}=8$, $c^{\frac{3}{r}}=8$

$\therefore a=8^p$, $b=8^{\frac{q}{2}}$, $c=8^{\frac{r}{3}}$

$\sqrt[3]{abc}=1024$에서

$abc=1024^3=(2^{10})^3=2^{30}$

즉 $8^p\cdot 8^{\frac{q}{2}}\cdot 8^{\frac{r}{3}}=2^{30}$이므로 $2^{3p+\frac{3}{2}q+r}=2^{30}$

$\therefore 6p+3q+2r=60$ ⋯ ❶

이때 $6p+3q+2r$의 값이 짝수이므로 $3q$는 짝수이어야 한다.

즉 q는 2의 배수이다.

또 $2r=60-(6p+3q)$에서 $6p$, $3q$가 모두 6의 배수이고 60도 6의 배수이므로 r는 3의 배수이어야 한다. $2r$는 6의 배수이어야 한다.

따라서 $q=2k$, $r=3l$ (k, l은 자연수)로 놓으면

$6p+3q+2r=6p+6k+6l=60$

이므로 $p+k+l=10$ $\therefore p=10-k-l$

$\therefore p+q+r=(10-k-l)+2k+3l$

$=k+2l+10$

따라서 $k=1$, $l=1$일 때 $p+q+r$의 값이 최소이므로 구하는 최솟값은

$1+2+10=13$ ⋯ ❷

답 13

채점 기준	비율
❶ p, q, r에 대한 등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ $p+q+r$의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

02 로그

0125 답 $2=\log_4 16$

0126 답 $-2=\log_2 0.25$

0127 답 $\frac{1}{2}=\log_{100} 10$

0128 답 $0=\log_5 1$

0129 답 $2^5=32$

0130 답 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=81$

0131 답 $(\sqrt{3})^4=9$

0132 답 $4^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$

0133 진수의 조건에서 $x-5>0$

$\therefore x>5$ 답 $x>5$

0134 진수의 조건에서 $-x^2+4x>0$

$x^2-4x<0$, $x(x-4)<0$

$\therefore 0<x<4$ 답 $0<x<4$

0135 밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq 1$

$x>3$, $x\neq 4$ $\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$

답 $3<x<4$ 또는 $x>4$

0136 밑의 조건에서 $x+4>0$, $x+4\neq 1$

$x>-4$, $x\neq -3$

$\therefore -4<x<-3$ 또는 $x>-3$ ⋯⋯ ㉠

진수의 조건에서 $(x-2)^2>0$

$\therefore x\neq 2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-4<x<-3$ 또는 $-3<x<2$ 또는 $x>2$

답 $-4<x<-3$ 또는 $-3<x<2$ 또는 $x>2$

0137 $\log_3 x=-3$에서 $x=3^{-3}=\frac{1}{27}$ 답 $\frac{1}{27}$

0138 $\log_{\sqrt{5}} x=4$에서 $x=(\sqrt{5})^4=25$ 답 25

0139 $\log_x 81=3$에서 $x^3=81$

$\therefore x=\sqrt[3]{81}=3^{\frac{4}{3}}$ 답 $3^{\frac{4}{3}}$

0140 $\log_x 4=\frac{1}{2}$에서 $x^{\frac{1}{2}}=4$

$\therefore x=4^2=16$ 답 16

0141 $\log_5 5-\log_3 1-\log_2 \frac{1}{2}=\log_5 5-\log_3 1-\log_2 2^{-1}$

$=1-0-(-1)=2$ 답 2

0142 $\log_2 8+\log_5 125-\log_3\sqrt{3}=\log_2 2^3+\log_5 5^3-\log_3 3^{\frac{1}{2}}$

$=3+3-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$　　답 $\frac{11}{2}$

0143 $\log_3 72+3\log_3\frac{3}{2}=\log_3 72+\log_3\left(\frac{3}{2}\right)^3$

$=\log_3\left(72\times\frac{27}{8}\right)$

$=\log_3 3^5=5$　　답 5

0144 $\log_6 3\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_6 3=\log_6 3\sqrt{2}-\log_6 3^{\frac{1}{2}}$

$=\log_6 3\sqrt{2}-\log_6\sqrt{3}$

$=\log_6\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\log_6\sqrt{6}$

$=\log_6 6^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$　　답 $\frac{1}{2}$

0145 $\log_3 8\cdot\log_2 3=3\log_3 2\cdot\frac{1}{\log_3 2}=3$　　답 3

0146 $\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 3=\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}7}{\log_{10}5}\cdot\frac{\log_{10}3}{\log_{10}7}$

$=1$　　답 1

0147 $\log_8 32=\log_{2^3}2^5=\frac{5}{3}\log_2 2=\frac{5}{3}$　　답 $\frac{5}{3}$

0148 $\log_{\frac{1}{10}}\sqrt{10}=\log_{10^{-1}}10^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\log_{10}10=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

0149 $2^{\log_5 3}+5^{\log_2 3}=3^{\log_5 2}+3^{\log_2 5}=3+3=6$　　답 6

0150 $3^{\log_9 5}=5^{\log_9 3}=5^{\frac{1}{2}\log_3 3}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$　　답 $\sqrt{5}$

0151 $\log_2 18=\frac{\log_5(2\cdot 3^2)}{\log_5 2}=\frac{\log_5 2+2\log_5 3}{\log_5 2}$

$=\frac{a+2b}{a}=1+\frac{2b}{a}$　　답 $1+\frac{2b}{a}$

0152 $\log 1000=\log 10^3=3$　　답 3

0153 $\log\sqrt[3]{100}=\log\sqrt[3]{10^2}=\log 10^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$　　답 $\frac{2}{3}$

0154 $\log\frac{1}{\sqrt[5]{1000}}=\log\frac{1}{\sqrt[5]{10^3}}=\log 10^{-\frac{3}{5}}=-\frac{3}{5}$

답 $-\frac{3}{5}$

0155 $\log\frac{1}{50}+\log\frac{1}{20}=\log\frac{1}{1000}=\log 10^{-3}=-3$

답 -3

0156 $\log 25.4=\log(2.54\times 10)=\log 2.54+\log 10$

$=0.4048+1=1.4048$　　답 1.4048

0157 $\log 25400=\log(2.54\times 10^4)=\log 2.54+\log 10^4$

$=0.4048+4=4.4048$　　답 4.4048

0158 $\log 0.254=\log(2.54\times 10^{-1})=\log 2.54+\log 10^{-1}$

$=0.4048-1=-0.5952$　　답 -0.5952

0159 $\log 0.0254=\log(2.54\times 10^{-2})=\log 2.54+\log 10^{-2}$

$=0.4048-2=-1.5952$　　답 -1.5952

유형 01 로그의 정의　　본책 26쪽

$a>0$, $a\neq 1$, $N>0$일 때,

$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

0160 $\log_a 3=2$에서　$a^2=3$　…… ㉠

$\log_3 5=b$에서　$3^b=5$　…… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면　$(a^2)^b=5$

$(a^b)^2=5$　$\therefore a^b=\sqrt{5}$ ($\because a>0$)　　답 ②

0161 $\log_2\{\log_3(\log_4 n)\}=0$에서

$\log_3(\log_4 n)=2^0=1$　··· ❶

$\log_4 n=3^1=3$　··· ❷

$\therefore n=4^3=64$　··· ❸

답 64

채점 기준	비율
❶ $\log_3(\log_4 n)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\log_4 n$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	30 %

0162 $x=\log_3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$에서　$3^x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\therefore 3^x-3^{-x}=3^x-\frac{1}{3^x}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=2\sqrt{2}$　　답 ③

유형 02 로그의 밑과 진수의 조건　　본책 26쪽

$\log_{f(x)}g(x)$가 정의되려면

① $f(x)>0$, $f(x)\neq 1$

② $g(x)>0$

0163 밑의 조건에서　$x-1>0$, $x-1\neq 1$

$x>1$, $x\neq 2$　$\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$　…… ㉠

진수의 조건에서　$-x^2+6x-5>0$

$x^2-6x+5<0$,　$(x-1)(x-5)<0$

$\therefore 1<x<5$　…… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<2$ 또는 $2<x<5$

따라서 정수 x는 3, 4이므로 구하는 합은

$3+4=7$ 답 7

0164 밑의 조건에서 $a-2>0,\ a-2\neq1$

$a>2,\ a\neq3 \quad \therefore\ 2<a<3$ 또는 $a>3$ …… ㉠

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+2a>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot2a<0, \quad a(a-8)<0$

$\therefore\ 0<a<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<a<3$ 또는 $3<a<8$

따라서 정수 a는 4, 5, 6, 7의 4개이다. 답 ②

유형 03~04 로그의 성질

본책 26, 27쪽

$a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0$일 때

① $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

0165 ① $\log_2\frac{8}{3}+2\log_2\sqrt{6}=\log_2\frac{8}{3}+\log_2(\sqrt{6})^2$

$=\log_2\frac{8}{3}+\log_2 6$

$=\log_2\left(\frac{8}{3}\cdot6\right)=\log_2 16$

$=\log_2 2^4=4$

② $\log_2\frac{1}{32}\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}=\log_2 2^{-5}\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$=-5\cdot4=-20$

③ $\log_3\frac{4}{3}+3\log_3\frac{1}{\sqrt[3]{12}}=\log_3\frac{4}{3}+\log_3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{12}}\right)^3$

$=\log_3\frac{4}{3}+\log_3\frac{1}{12}$

$=\log_3\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{12}\right)=\log_3\frac{1}{9}$

$=\log_3 3^{-2}=-2$

④ $\log_5(6-\sqrt{11})+\log_5(6+\sqrt{11})=\log_5(6-\sqrt{11})(6+\sqrt{11})$

$=\log_5 25=\log_5 5^2=2$

⑤ $\log_2 4\sqrt{3}+\log_2 6-\underbrace{\frac{3}{2}\log_2 3}_{\log_2 3^{\frac{3}{2}}}$

$=\log_2 4\sqrt{3}+\log_2 6-\log_2 3\sqrt{3}$

$=\log_2\frac{4\sqrt{3}\cdot6}{3\sqrt{3}}=\log_2 8$

$=\log_2 2^3=3$

답 ③

0166 $\log_{12}x+\log_{12}2y+\log_{12}3z=1$에서

$\log_{12}(x\cdot2y\cdot3z)=1, \quad \log_{12}6xyz=1$

$6xyz=12 \quad \therefore\ xyz=2$ 답 2

0167 (주어진 식)

$=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\cdots+\log_2\frac{31}{32}$

$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{31}{32}\right)=\log_2\frac{1}{32}$

$=\log_2 2^{-5}=-5$ 답 -5

0168 $216=6^3$이므로 216의 양의 약수를 작은 수부터 차례대로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{16}$이라 하면

216=$2^3\cdot3^3$이므로 양의 약수의 개수는 $(3+1)\cdot(3+1)=16$

$a_1a_{16}=a_2a_{15}=\cdots=a_8a_9=6^3$

$\therefore\ \log_6 a_1+\log_6 a_2+\log_6 a_3+\cdots+\log_6 a_{16}$

$=\log_6 a_1a_2a_3\cdots a_{16}$

$=\log_6\{(a_1a_{16})(a_2a_{15})\cdots(a_8a_9)\}$

$=\log_6(6^3)^8=\log_6 6^{24}=24$ 답 24

0169 $\log_2(x+y)=3$에서 $x+y=2^3=8$

$\log_2 x+\log_2 y=3$에서 $\log_2 xy=3 \quad \therefore\ xy=2^3=8$

$\therefore\ x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=8^3-3\cdot8\cdot8=320$ 답 320

0170 $\log_2 x$가 자연수이려면 $x=2^p$ (p는 자연수)

$\therefore\ A=\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}$

$\log_3 x$가 자연수이려면 $x=3^q$ (q는 자연수)

$\therefore\ B=\{3,\ 9,\ 27,\ 81\}$

이때 $A\cap B=\varnothing$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=6+4=10$ 답 ⑤

0171 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$이므로

$3:2=\log_3 x^2:\log_3 y$ ··· ❶

$4\log_3 x=3\log_3 y, \quad \log_3 x=\frac{3}{4}\log_3 y$

$\therefore\ x=y^{\frac{3}{4}}$ ··· ❷

$\therefore\ k=\frac{3}{4}$ ··· ❸

답 $\frac{3}{4}$

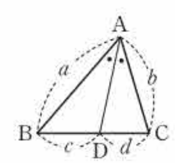
채점 기준	비율
❶ 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용하여 비례식을 세울 수 있다.	40 %
❷ x를 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	10 %

SSEN 특강 삼각형의 내각의 이등분선의 성질

오른쪽 그림과 같은 △ABC에서

∠BAD=∠CAD이면

$a:b=c:d$



0172 $\log_c(a+b)+\log_c(a-b)=2$에서

$\log_c(a+b)(a-b)=2 \qquad \therefore \log_c(a^2-b^2)=2$

즉 $c^2=a^2-b^2$이므로

$a^2=b^2+c^2$

따라서 △ABC는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다. 답 ④

유형 05 로그의 밑의 변환 본책 28쪽

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)

② $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

0173 $\log_2 6\cdot\log_3 6-\log_2 3-\log_3 2$

$=\log_2(2\cdot3)\cdot\log_3(2\cdot3)-\log_2 3-\log_3 2$

$=(\log_2 2+\log_2 3)(\log_3 2+\log_3 3)-\log_2 3-\log_3 2$

$=(1+\log_2 3)(\log_3 2+1)-\log_2 3-\log_3 2$

$=\log_3 2+1+\log_2 3\cdot\log_3 2+\log_2 3-\log_2 3-\log_3 2$

$=1+\underbrace{\log_2 3\cdot\log_3 2}_{\log_2 3\cdot\frac{1}{\log_2 3}=1}$

$=1+1=2$ 답 2

0174 $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_4 x}=\log_x 2+\log_x 3+\log_x 4$

$=\log_x(2\cdot3\cdot4)=\log_x 24$

$\therefore k=24$ 답 ⑤

0175 $\log_b 8=\dfrac{\log_a 8}{\log_a b}=\dfrac{3\log_a 2}{\log_a b}$

즉 $\dfrac{3\cdot5}{\log_a b}=-1$이므로 $\quad \log_a b=-15$ ··· ❶

$\therefore \log_a 4b=\log_a 4+\log_a b$

$=2\log_a 2+\log_a b$

$=2\cdot5-15=-5$ ··· ❷

답 -5

채점 기준	비율
❶ $\log_a b$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\log_a 4b$의 값을 구할 수 있다.	40 %

다른 풀이 $\log_b 8=-1$에서 $\quad b^{-1}=8 \quad \therefore b=\dfrac{1}{8}$

$\therefore \log_a 4b=\log_a\left(4\cdot\dfrac{1}{8}\right)=\log_a 2^{-1}$

$=-\log_a 2=-5$

0176 (주어진 식)

$=\log_5(\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\cdots\cdot\log_{31} 32)$

$=\log_5\left(\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 5}{\log_2 4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{\log_2 32}{\log_2 31}\right)$

$=\log_5(\log_2 32)=\log_5(\log_2 2^5)$

$=\log_5 5=1$ 답 1

0177 $(\log_a\sqrt{b})^2+(\log_b a)^2=\left(\dfrac{1}{2}\log_a b\right)^2+\left(\dfrac{1}{\log_a b}\right)^2$

$=\dfrac{1}{4}(\log_a b)^2+\dfrac{1}{(\log_a b)^2}$

$\dfrac{1}{4}(\log_a b)^2>0$, $\dfrac{1}{(\log_a b)^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{4}(\log_a b)^2+\dfrac{1}{(\log_a b)^2}\geq2\sqrt{\dfrac{1}{4}(\log_a b)^2\cdot\dfrac{1}{(\log_a b)^2}}$

$=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

(단, 등호는 $(\log_a b)^2=2$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 1이다. 답 1

SSEN 특강 산술평균과 기하평균의 관계

$x>0$, $y>0$일 때,

$\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

0178 ㄱ. $b=a^2$이면 $\log_a b\cdot\log_c d=1$에서

$\log_a a^2\cdot\log_c d=1, \qquad 2\log_c d=1$

$\therefore \log_c d=\dfrac{1}{2}$

즉 $c^{\frac{1}{2}}=d$이므로 $\qquad c=d^2$

ㄴ. $ad=1$이면 $d=\dfrac{1}{a}$이므로 $\log_a b\cdot\log_c d=1$에서

$\log_a b\cdot\log_c\dfrac{1}{a}=1, \qquad \log_a b\cdot(-\log_c a)=1$

$\therefore \log_a b\cdot\log_c a=-1$

즉 $\log_a b\cdot\dfrac{1}{\log_a c}=\dfrac{\log_a b}{\log_a c}=-1$이므로

$\log_c b=-1 \qquad \therefore b=c^{-1}=\dfrac{1}{c}$

$\therefore bc=1$

ㄷ. $b=c$이면 $\log_a b\cdot\log_c d=1$에서 $\qquad \log_a b\cdot\log_b d=1$

즉 $\log_a b\cdot\dfrac{\log_a d}{\log_a b}=\log_a d=1$이므로

$a=d$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

유형 06 로그의 여러 가지 성질 본책 28쪽

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수, $m\neq0$)

② $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)

0179 $2\log_3 5-3\log_{\frac{1}{3}} 4-2\log_3 20=\log_3 5^2+\log_3 4^3-\log_3 20^2$

$=\log_3\dfrac{5^2\cdot4^3}{20^2}$

$=\log_3 4$

$\therefore$ (주어진 식) $=9^{\log_3 4}=4^{\log_3 9}=4^{2\log_3 3}$

$=4^2=16$ 답 16

0180 $x=\log_9 4+\log_3 6=\log_{3^2}2^2+\log_3 6$

$=\log_3 2+\log_3 6=\log_3(2\cdot 6)=\log_3 12$

$\therefore\ 3^x=3^{\log_3 12}=12$

답 ②

0181 $\left(\log_2\sqrt{3}+\dfrac{3}{4}\log_{\sqrt{2}}3\right)\cdot\log_9 2\sqrt{2}$

$=\left(\log_2 3^{\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{4}\log_{2^{\frac{1}{2}}}3\right)\cdot\log_{3^2}2^{\frac{3}{2}}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\log_2 3+\dfrac{3}{2}\log_2 3\right)\cdot\dfrac{3}{4}\log_3 2$

$=2\log_2 3\cdot\dfrac{3}{4}\log_3 2=\dfrac{3}{2}$

답 ③

0182 $\log_3 4+\log_3 2=\log_3(4\cdot 2)=\log_3 8$

$\therefore$ (주어진 식)$=(3^{\log_3 8})^2+(2^{\log_3 8})^{\log_2 3}=8^2+2^{3\log_3 2\cdot\log_2 3}$

$=64+2^3=72$

답 ③

0183 $A=5^{\log_5 9-\log_5 6}=5^{\log_5\frac{9}{6}}=5^{\log_5\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}$ ⋯ ❶

$B=\log_4 2+\log_9 3=\log_{2^2}2+\log_{3^2}3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$ ⋯ ❷

$C=\log_8(\log_{\sqrt{2}}4)=\log_8(\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^2)=\log_8 4=\log_{2^3}2^2=\dfrac{2}{3}$ ⋯ ❸

$\therefore\ C<B<A$ ⋯ ❹

답 $C<B<A$

채점 기준	비율
❶ A의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ B의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ C의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ A, B, C의 대소를 비교할 수 있다.	10 %

0184 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ \log_2 a)$, $\mathrm{B}(3,\ \log_4 b)$라 하면 세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기가 같다.

즉 $\dfrac{\log_2 a}{2}=\dfrac{\log_4 b}{3}$이므로 $\quad\dfrac{\log_2 a}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}\log_2 b}{3}$

$3\log_2 a=\log_2 b,\quad \dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}=3\quad \therefore\ \log_a b=3$

답 ③

다른 풀이 두 점 $(2,\ \log_2 a)$, $(3,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 방정식은 $\quad y-\log_4 b=(\log_4 b-\log_2 a)(x-3)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\log_4 b=(\log_4 b-\log_2 a)\cdot(-3)$

$3\log_2 a=2\log_4 b,\quad 3\log_2 a=\log_2 b$

$\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}=3\quad\therefore\ \log_a b=3$

SSEN 특강 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$이 한 직선 위에 있다.

➡ (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

=(직선 CA의 기울기)

➡ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$ (단, $x_1\neq x_2$, $x_2\neq x_3$, $x_3\neq x_1$)

유형 07 로그에 대한 증명

본책 29쪽

로그의 정의와 성질을 이용하여 빈칸에 알맞은 식을 구한다.

0185 $\log_a x=r$로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $x=a^r$이므로

$x^n=(a^r)^n=\boxed{a^{nr}}$

따라서 $x^n=a^{nr}$에서 로그의 정의에 의하여

$\log_a x^n=\boxed{nr}$

이므로 $\quad\log_a x^n=n\log_a x$

$\therefore$ (가) a^{nr} (나) nr

답 ③

0186 $x=a^{\log_b c}$으로 놓고 양변에 b를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_b x=\log_b a^{\log_b c}=\log_b c\cdot\boxed{\log_b a}$

$=\log_b a\cdot\log_b c=\log_b c^{\boxed{\log_b a}}$

즉 $x=c^{\boxed{\log_b a}}$이므로 $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$이다.

답 $\log_b a$

0187 $\log_{20}5$가 유리수라 가정하면 서로소인 두 자연수 m, n $(m<n)$에 대하여 $\log_{20}5=\dfrac{m}{n}$으로 나타내어진다.

로그의 정의에 의하여 $\quad 20^{\frac{m}{n}}=5,\quad 20^m=5^n$

$\dfrac{20^m}{5^m}=\dfrac{5^n}{5^m}\qquad\therefore\ \boxed{4^m}=5^{n-m}$

이때 4^m은 짝수이고 5^{n-m}은 홀수이므로 4^m과 5^{n-m}은 항상 같지 않다.

따라서 $\log_{20}5$는 무리수이다.

$\therefore$ (가) 유리수 (나) 4^m (다) 짝수

답 (가) 유리수 (나) 4^m (다) 짝수

유형 08 로그의 정수 부분과 소수 부분

본책 30쪽

$a>1$이고 양수 M과 정수 n에 대하여 $a^n\le M<a^{n+1}$일 때,

$\log_a a^n\le\log_a M<\log_a a^{n+1}\qquad\therefore\ n\le\log_a M<n+1$

➡ $\log_a M$의 정수 부분은 n, 소수 부분은 $\log_a M-n$이다.

0188 $\log_3 9<\log_3 20<\log_3 27$에서 $\quad 2<\log_3 20<3$

즉 $\log_3 20$의 정수 부분이 2이므로

$a=2,\ b=\log_3 20-2=\log_3\dfrac{20}{9}$

$\therefore\ 9(2^a+3^b)=9(2^2+3^{\log_3\frac{20}{9}})$

$=9\left(4+\dfrac{20}{9}\right)=56$

답 ④

0189 $\log_2 8<\log_2 12<\log_2 16$에서 $\quad 3<\log_2 12<4$

즉 $\log_2 12$의 정수 부분이 3이므로

$a=\log_2 12-3=\log_2\dfrac{12}{8}=\log_2\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ 4^a=2^{2\log_2\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

답 ④

0190 $\log 10 < \log 40 < \log 100$에서 $1 < \log 40 < 2$
즉 $\log 40$의 정수 부분이 1이므로
$n=1$, $\alpha=\log 40-1=\log 4$ ··· ❶
$\therefore \dfrac{10^n+10^\alpha}{10^n-10^\alpha}=\dfrac{10+10^{\log 4}}{10-10^{\log 4}}=\dfrac{10+4}{10-4}=\dfrac{7}{3}$ ··· ❷

답 $\dfrac{7}{3}$

채점 기준	비율
❶ n, α의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\dfrac{10^n+10^\alpha}{10^n-10^\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0191 (i) $1 \le N < 10$일 때,
$\log 1 \le \log N < \log 10$에서 $0 \le \log N < 1$
즉 $\log N$의 정수 부분이 0이므로 $f(N)=0$
$\therefore f(2)=f(3)=\cdots=f(9)=0$
(ii) $10 \le N < 100$일 때,
$\log 10 \le \log N < \log 100$에서 $1 \le \log N < 2$
즉 $\log N$의 정수 부분이 1이므로 $f(N)=1$
$\therefore f(10)=f(11)=\cdots=f(99)=1$
(iii) $100 \le N < 1000$일 때,
$\log 100 \le \log N < \log 1000$에서 $2 \le \log N < 3$
즉 $\log N$의 정수 부분이 2이므로 $f(N)=2$
$\therefore f(100)=f(101)=\cdots=f(111)=2$
이상에서
$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(111)$
$=1\cdot 90+2\cdot 12=114$

답 ③

유형 09 로그의 성질의 활용 ; $\log_a b=c$가 주어진 경우 본책 30쪽

$\log_a b=c$ 꼴이 주어지고 이를 이용하여 다른 로그를 나타낼 때
➡ ① 밑이 같으면 진수를 변형한다.
② 밑이 다르면 밑을 통일한다.

0192 $\log_3 2=a$, $\log_3 5=\dfrac{1}{b}$이므로

$$\log_{150} 180=\frac{\log_3 180}{\log_3 150}=\frac{\log_3(2^2\cdot 3^2\cdot 5)}{\log_3(2\cdot 3\cdot 5^2)}$$
$$=\frac{2\log_3 2+2\log_3 3+\log_3 5}{\log_3 2+\log_3 3+2\log_3 5}$$
$$=\frac{2a+2+\frac{1}{b}}{a+1+\frac{2}{b}}=\frac{2ab+2b+1}{ab+b+2}$$

답 $\dfrac{2ab+2b+1}{ab+b+2}$

0193 $\log \dfrac{8}{15}=\log 8-\log 15$
$=\log 2^3-(\log 3+\log 5)$
$=3\log 2-\log 3-\log \dfrac{10}{2}$
$=3\log 2-\log 3-(1-\log 2)$
$=4\log 2-\log 3-1$
$=4a-b-1$

답 $4a-b-1$

0194 $\log_2 15=a$에서 $\log_2 3+\log_2 5=a$ ······ ㉠
$\log_2 \dfrac{9}{5}=b$에서 $\log_2 3^2-\log_2 5=b$
$\therefore 2\log_2 3-\log_2 5=b$ ······ ㉡
㉠+㉡을 하면
$3\log_2 3=a+b$ $\therefore \log_2 3=\dfrac{a+b}{3}$
이것을 ㉠에 대입하면
$\dfrac{a+b}{3}+\log_2 5=a$ $\therefore \log_2 5=\dfrac{2a-b}{3}$
$\therefore \log_2 75=\log_2(3\cdot 5^2)=\log_2 3+2\log_2 5$
$=\dfrac{a+b}{3}+2\cdot\dfrac{2a-b}{3}=\dfrac{5a-b}{3}$

답 ①

0195 $\log_3 2=\dfrac{1}{a}$이고, $\log_5 7=\dfrac{\log_3 7}{\log_3 5}$에서
$\log_3 7=\log_3 5\cdot\log_5 7=bc$

$$\therefore \log_{14} 105=\frac{\log_3 105}{\log_3 14}=\frac{\log_3(3\cdot 5\cdot 7)}{\log_3(2\cdot 7)}$$
$$=\frac{\log_3 3+\log_3 5+\log_3 7}{\log_3 2+\log_3 7}$$
$$=\frac{1+b+bc}{\frac{1}{a}+bc}$$
$$=\frac{a+ab+abc}{1+abc}$$

답 $\dfrac{a+ab+abc}{1+abc}$

유형 10 로그의 성질의 활용 ; $a^x=b$가 주어진 경우 본책 31쪽

$a^x=b$ 꼴이 주어지고 이를 이용하여 어떤 로그를 나타낼 때
➡ $a^x=b$에서 $\log_a b=x$임을 이용할 수 있도록 구하는 로그를 변형한다.

0196 $3^a=x$, $3^b=y$, $3^c=z$에서
$\log_3 x=a$, $\log_3 y=b$, $\log_3 z=c$

$$\therefore \log_{xy} y^2z^3=\frac{\log_3 y^2z^3}{\log_3 xy}=\frac{2\log_3 y+3\log_3 z}{\log_3 x+\log_3 y}$$
$$=\frac{2b+3c}{a+b}$$

답 ③

다른 풀이 $xy=3^a\cdot 3^b=3^{a+b}$, $y^2z^3=3^{2b}\cdot 3^{3c}=3^{2b+3c}$이므로
$\log_{xy} y^2z^3=\log_{3^{a+b}} 3^{2b+3c}=\dfrac{2b+3c}{a+b}$

0197 $5^a=3$, $5^b=8$에서 $\log_5 3=a$, $\log_5 8=3\log_5 2=b$
$\therefore \log_5 3=a$, $\log_5 2=\dfrac{1}{3}b$

$$\therefore \log_6 18=\frac{\log_5 18}{\log_5 6}=\frac{\log_5(2\cdot 3^2)}{\log_5(2\cdot 3)}$$
$$=\frac{\log_5 2+2\log_5 3}{\log_5 2+\log_5 3}$$
$$=\frac{2a+\frac{1}{3}b}{a+\frac{1}{3}b}=\frac{6a+b}{3a+b}$$

답 ③

0198 $a^m=b^n=5$에서 $\log_a 5=m,\ \log_b 5=n$

$\therefore \log_5 a=\dfrac{1}{m},\ \log_5 b=\dfrac{1}{n}$ ⋯ ❶

$\therefore \log_{ab} b^2=\dfrac{\log_5 b^2}{\log_5 ab}=\dfrac{2\log_5 b}{\log_5 a+\log_5 b}$

$=\dfrac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=\dfrac{2m}{m+n}$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{2m}{m+n}$

채점 기준	비율
❶ $\log_5 a$, $\log_5 b$를 m, n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\log_{ab} b^2$을 m, n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %

유형 11 식의 값 구하기
본책 31쪽

주어진 조건을 변형하여 문자 사이의 관계식을 구한 후 값을 구하려는 식에 대입한다.

0199 $a^3b^2=1$의 양변에 a를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_a a^3b^2=\log_a 1,\quad \log_a a^3+\log_a b^2=0$

$3+2\log_a b=0 \quad \therefore \log_a b=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore \log_a a^5b^3=\log_a a^5+\log_a b^3=5+3\log_a b$

$=5+3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

답 ①

다른 풀이 $a^3b^2=1$에서 $\quad b^2=a^{-3} \quad \therefore b=a^{-\frac{3}{2}}$

$\therefore \log_a a^5b^3=\log_a\{a^5\cdot(a^{-\frac{3}{2}})^3\}=\log_a a^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

0200 $\log_2 x+\log_4 y^2=2$에서 $\quad \log_2 x+\log_{2^2} y^2=2$

$\therefore \log_2 x+\log_2 y=2$

$\therefore 4^{\log_2 x}\cdot 2^{\log_{\sqrt{2}} y}=2^{2\log_2 x}\cdot 2^{2\log_2 y}=2^{2(\log_2 x+\log_2 y)}$

$=2^{2\cdot 2}=16$

답 16

0201 $\log_a b:\log_c b=1:3$에서 $\quad \log_c b=3\log_a b$

$\dfrac{1}{\log_b c}=\dfrac{3}{\log_b a},\quad \log_b a=3\log_b c$

$\therefore a=c^3$ ⋯ ❶

$\therefore \log_a c+\log_c a=\log_{c^3} c+\log_c c^3$

$=\dfrac{1}{3}+3=\dfrac{10}{3}$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{10}{3}$

채점 기준	비율
❶ a, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\log_a c+\log_c a$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0202 조건 (가)에서 $\quad 2\log_3 b=\log_3 \dfrac{c}{a}$

$b^2=\dfrac{c}{a} \quad \therefore ab^2=c$ ⋯⋯ ㉠

조건 (나)에서 $\quad \dfrac{2\log_3 c}{\log_3 a}=\log_b c,\quad 2\log_a c=\log_b c$

$\dfrac{2}{\log_c a}=\dfrac{1}{\log_c b},\quad 2\log_c b=\log_c a$

$\therefore a=b^2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $c=ab^2=b^2\cdot b^2=b^4$이므로

$\log_c \dfrac{b}{a}=\log_{b^4}\dfrac{b}{b^2}=\dfrac{1}{4}\log_b b^{-1}=-\dfrac{1}{4}$

답 ③

0203 $\log_a b=\dfrac{\log_b c}{4}=\dfrac{\log_c a}{2}=k$ (k는 실수)로 놓으면

$\log_a b=k,\ \log_b c=4k,\ \log_c a=2k$

이때 $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$이므로 $\quad k\cdot 4k\cdot 2k=1$

$k^3=\dfrac{1}{8} \quad \therefore k=\dfrac{1}{2}$ ($\because$ k는 실수)

$\therefore \log_a b+\log_b c+\log_c a=k+4k+2k=7k$

$=7\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$

답 ①

0204 $a^2=b^3=c^5=k$ ($k>0,\ k\neq 1$)로 놓으면

$a^2=k$에서 $\quad a=k^{\frac{1}{2}}$

$b^3=k$에서 $\quad b=k^{\frac{1}{3}}$

$c^5=k$에서 $\quad c=k^{\frac{1}{5}}$

이때 $\dfrac{b}{a}=k^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=k^{-\frac{1}{6}},\ \dfrac{c}{b}=k^{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}=k^{-\frac{2}{15}},\ \dfrac{a}{c}=k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}=k^{\frac{3}{10}}$이므로

$\log_{\frac{b}{a}} b+\log_{\frac{c}{b}} c+\log_{\frac{a}{c}} a=\log_{k^{-\frac{1}{6}}} k^{\frac{1}{3}}+\log_{k^{-\frac{2}{15}}} k^{\frac{1}{5}}+\log_{k^{\frac{3}{10}}} k^{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}}+\dfrac{\frac{1}{5}}{-\frac{2}{15}}+\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{10}}$

$=-2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{3}$

$=-\dfrac{11}{6}$

답 $-\dfrac{11}{6}$

유형 12 이차방정식과 로그
본책 32쪽

이차방정식 $px^2+qx+r=0$의 두 근이 $\log_a \alpha$, $\log_a \beta$이면

① $\log_a \alpha+\log_a \beta=\log_a \alpha\beta=-\dfrac{q}{p}$

② $\log_a \alpha\cdot\log_a \beta=\dfrac{r}{p}$

0205 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=5,\ \log_2 a\cdot\log_2 b=1$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}+\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\cdot\log_2 b}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{5^2-2\cdot 1}{1}=23$

답 23

0206 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=2$

$$\begin{aligned}\therefore \log_3(\alpha+1)+\log_3(\beta+1)&=\log_3(\alpha+1)(\beta+1)\\&=\log_3(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)\\&=\log_3(2+6+1)\\&=\log_3 9=2\end{aligned}$$

답 2

0207 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\log_2 5=-a$, $1\cdot\log_2 5=b$

이므로 $a=-(\log_2 2+\log_2 5)=-\log_2 10$, $b=\log_2 5$

$\therefore \dfrac{b}{a}=-\dfrac{\log_2 5}{\log_2 10}=-\log 5$

답 ③

0208 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2\log_5 2$, $\alpha\beta=1-\log_5 10$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha-1)(\beta-1)&=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\\&=1-\log_5 10-2\log_5 2+1\\&=1-(1+\log_5 2)-2\log_5 2+1\\&=1-3\log_5 2=\log_5 5-\log_5 2^3\\&=\log_5\frac{5}{8}\end{aligned}$$

$\therefore k=\dfrac{5}{8}$

답 ④

0209 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=\dfrac{9}{2}$ ··· ❶

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6^2-2\cdot\dfrac{9}{2}=27$ ··· ❷

$$\begin{aligned}\therefore \log_{\alpha^2+\beta^2}2\alpha+\log_{\alpha^2+\beta^2}\beta&=\log_{\alpha^2+\beta^2}2\alpha\beta\\&=\log_{27}\left(2\cdot\frac{9}{2}\right)\\&=\log_{3^3}3^2=\frac{2}{3}\end{aligned}$$ ··· ❸

답 $\dfrac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 13 로그의 값이 정수가 되도록 하는 조건

본책 33쪽

$\log_a N$의 값이 정수가 되도록 하는 자연수 a 또는 N의 값을 구하는 경우에는

➡ ① $\log_a N=k$(k는 정수)로 놓고 $N=a^k$ 또는 $a=N^{\frac{1}{k}}$ 꼴로 변형한 후 a 또는 N이 자연수임을 이용한다.

② 특정한 값의 범위가 주어지면 주어진 범위를 이용하여 $\log_a N$의 값의 범위를 구한 후 그 범위에 속하는 정수를 모두 찾는다.

0210 $\log x^2-\log\sqrt{x}=2\log x-\dfrac{1}{2}\log x=\dfrac{3}{2}\log x$

$1<x<100$에서 $0<\log x<2$

$\therefore 0<\dfrac{3}{2}\log x<3$

이때 $\dfrac{3}{2}\log x$가 정수이므로 $\dfrac{3}{2}\log x=1,\ 2$

$\log x=\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}$ $\therefore x=10^{\frac{2}{3}},\ 10^{\frac{4}{3}}$

따라서 구하는 곱은

$10^{\frac{2}{3}}\cdot10^{\frac{4}{3}}=10^2=100$

답 100

0211 $3\log_n 2=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$\log_n 2=\dfrac{k}{3}$, $n^{\frac{k}{3}}=2$ $\therefore n=2^{\frac{3}{k}}$

이때 n이 2 이상의 자연수이므로 $\dfrac{3}{k}$도 자연수이어야 한다.

즉 주어진 조건을 만족시키는 k의 값은 1, 3

(i) $k=1$일 때, $n=2^3=8$

(ii) $k=3$일 때, $n=2^1=2$

(i), (ii)에서 모든 n의 값의 합은 $8+2=10$

답 ①

다른 풀이 $3\log_n 2=\dfrac{3}{\log_2 n}$ ······ ㉠

n이 2 이상의 자연수이므로

$\log_2 n=1,\ \log_2 3,\ 2,\ \log_2 5,\ \cdots$

이때 ㉠의 값이 자연수이려면

$\log_2 n=1,\ 3$ $\therefore n=2,\ 8$

따라서 모든 n의 값의 합은 $2+8=10$

0212 $\log x-\log\dfrac{1}{x^2}=\log x+2\log x=3\log x$

$10<x<1000$에서 $1<\log x<3$

$\therefore 3<3\log x<9$

이때 $3\log x$가 정수이므로 $3\log x=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$

$\log x=\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3},\ 2,\ \dfrac{7}{3},\ \dfrac{8}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{4}{3}},\ 10^{\frac{5}{3}},\ 10^2,\ 10^{\frac{7}{3}},\ 10^{\frac{8}{3}}$

따라서 조건을 만족시키는 x의 개수는 5이다.

답 5

유형 14 상용로그의 값

본책 33쪽

양수 A에 대하여 $\log A=k$이고, n이 실수일 때

① $\log A^n=n\log A=nk$

② $\log(10^n\times A)=\log 10^n+\log A=n+k$

0213
$$\begin{aligned}\log 5+\log 72&=\log\frac{10}{2}+\log(2^3\cdot3^2)\\&=\log 10-\log 2+\log 2^3+\log 3^2\\&=1-\log 2+3\log 2+2\log 3\\&=1+2\log 2+2\log 3\\&=1+2\times0.3010+2\times0.4771\\&=2.5562\end{aligned}$$

답 ③

0214 ③ $\log 0.761=\log(76.1\times10^{-2})=\log 76.1+\log 10^{-2}$
$=1.8814-2=-0.1186$

답 ③

0215 $\log\sqrt{x}+\log x^2=\frac{1}{2}\log x+2\log x=\frac{5}{2}\log x$
$=\frac{5}{2}\times0.8=2$

답 2

0216 $\log 60.4-\log x=1.7810+0.2190$
$=2=\log100$

즉 $\log\frac{60.4}{x}=\log100$이므로

$\frac{60.4}{x}=100 \qquad \therefore x=\frac{60.4}{100}=0.604$

답 0.604

유형 15 상용로그의 실생활에의 활용 ; 관계식이 주어질 때 본책 34쪽

(i) 주어진 관계식에 알맞은 문자 또는 값을 대입한다.
(ii) (i)의 관계식에서 로그의 정의 및 성질을 이용한다.

0217 규모가 5인 지진의 에너지를 E_1, 규모가 4인 지진의 에너지를 E_2라 하면

$\log E_1=11.8+1.5\times5=19.3 \qquad \therefore E_1=10^{19.3}$
$\log E_2=11.8+1.5\times4=17.8 \qquad \therefore E_2=10^{17.8}$

$\therefore \frac{E_1}{E_2}=\frac{10^{19.3}}{10^{17.8}}=10^{1.5}=10\sqrt{10}$

따라서 규모가 5인 지진의 에너지는 규모가 4인 지진의 에너지의 $10\sqrt{10}$배이다.

답 ③

0218 $I=400$일 때 $S=0.5$이므로 $\qquad 0.5=k\log 400$

$\therefore k=\frac{0.5}{\log400}=\frac{0.5}{\log(2^2\cdot10^2)}=\frac{0.5}{2+2\log2}$
$=\frac{0.5}{2+2\times0.3}=\frac{0.5}{2.6}=\frac{5}{26}$

따라서 $I=20$일 때의 감각의 세기는

$\frac{5}{26}\log20=\frac{5}{26}(1+\log2)=\frac{5}{26}\times1.3=0.25$

답 0.25

다른 풀이 $I=20$일 때의 감각의 세기는

$k\log20=\frac{1}{2}k\log400=\frac{1}{2}\times0.5=0.25$

0219 2등급인 별의 밝기를 I_1, 5등급인 별의 밝기를 I_2라 하면

$2=-\frac{5}{2}\log I_1+C$ ...... ㉠

$5=-\frac{5}{2}\log I_2+C$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면

$-3=-\frac{5}{2}(\log I_1-\log I_2), \qquad \log\frac{I_1}{I_2}=\frac{6}{5}$

$\therefore \frac{I_1}{I_2}=10^{\frac{6}{5}}=\underbrace{(10^{\frac{2}{5}})}_{\sqrt[5]{10^2}=\sqrt[5]{100}}{}^3=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$

따라서 2등급인 별의 밝기는 5등급인 별의 밝기의 $\frac{125}{8}$배이다.

답 ②

0220 $t=15$일 때 $P=P_1$, $t=45$일 때 $P=P_2$이므로

$\log P_1=8.11-\frac{1750}{15+235}=1.11 \qquad \therefore P_1=10^{1.11}$

$\log P_2=8.11-\frac{1750}{45+235}=1.86 \qquad \therefore P_2=10^{1.86}$

$\therefore \frac{P_2}{P_1}=\frac{10^{1.86}}{10^{1.11}}=10^{0.75}=10^{\frac{3}{4}}$

답 ③

0221 초기 온도가 30 °C이므로 $\qquad T_x=30+k\log(8x+1)$

$x=\frac{9}{8}$일 때 $T_x=240$이므로

$30+k\log\left(8\cdot\frac{9}{8}+1\right)=240, \qquad 30+k=240$

$\therefore k=210$ ···➊

따라서 화재가 발생한 지 a분 후의 온도를 450 °C라 하면

$30+210\log(8a+1)=450, \qquad \log(8a+1)=2$

$8a+1=10^2=100 \qquad \therefore a=\frac{99}{8}$

따라서 화재가 발생한 후 온도가 450 °C가 되는 데 걸리는 시간은 $\frac{99}{8}$분이다. ···➋

답 $\frac{99}{8}$분

채점 기준	비율
➊ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ 450 °C가 되는 데 걸리는 시간을 구할 수 있다.	50 %

유형 16 상용로그의 실생활에의 활용 ; 일정하게 증가하거나 감소할 때 본책 35쪽

올해의 양이 A이고
① 매년 a %씩 증가할 때, k년 후의 양 ➡ $A\left(1+\frac{a}{100}\right)^k$
② 매년 a %씩 감소할 때, k년 후의 양 ➡ $A\left(1-\frac{a}{100}\right)^k$

0222 처음 빛의 밝기를 A라 하면 유리를 5장 통과한 빛의 밝기는

$A\left(1-\frac{19}{100}\right)^5=A\times0.81^5$

0.81^5에 상용로그를 취하면

$\log0.81^5=5\log0.81=5\log(81\times10^{-2})$
$=5(4\log3-2)=5(4\times0.48-2)=-0.4$

$\log3.99-\log0.81^5=0.6+0.4=1$이므로

$\log\frac{3.99}{0.81^5}=\log10$

즉 $\frac{3.99}{0.81^5}=10$이므로 $\qquad 0.81^5=0.399$

따라서 유리를 5장 통과한 빛의 밝기는 $0.399A$이므로 처음 밝기의 39.9 %이다.

답 ⑤

0223 10마리의 세균을 3시간, 즉 180분 동안 배양하면 전체 세균의 수는 $10\cdot2^{18}$마리이다.

$10\cdot2^{18}$에 상용로그를 취하면

$$\log(10\cdot2^{18})=1+18\log2=1+18\times0.3=6.4$$

$$\therefore\ 10\cdot2^{18}=10^{6.4}$$

따라서 3시간 후의 세균의 수는 $10^{6.4}$마리이므로

$k=6.4$ 　　답 6.4

0224 15년 전 매출액을 A원, 매출액이 매년 a %씩 증가했다고 하면

$$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{15}=3A \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \left(1+\frac{a}{100}\right)^{15}=3$$

양변에 상용로그를 취하면

$$15\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log3$$

$$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{15}\log3=\frac{1}{15}\times0.48=0.032 \quad \cdots ❷$$

이때 $\log1.077=0.032$이므로

$$1+\frac{a}{100}=1.077 \qquad \therefore\ a=7.7$$

따라서 매출액은 매년 7.7 %씩 증가했다. 　　⋯ ❸

답 7.7 %

채점 기준	비율
❶ 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $\log\left(1+\frac{a}{100}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 매출액이 매년 몇 %씩 증가했는지 구할 수 있다.	30 %

0225 현재의 인구는

$$A(1-0.1)^5(1+0.1)^5=A\times0.99^5$$

0.99^5에 상용로그를 취하면

$$\log0.99^5=5\log0.99=5\log(9.9\times10^{-1})$$
$$=5(0.996-1)=-0.02$$

$\log9.55-\log0.99^5=0.98+0.02=1$이므로

$$\log\frac{9.55}{0.99^5}=\log10$$

즉 $\frac{9.55}{0.99^5}=10$이므로 　$0.99^5=0.955$

따라서 현재의 인구는 $0.955A$이므로

$k=0.955$ 　　답 0.955

0226 (1st) 두 집합 A, B의 원소는 모두 자연수임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

집합 B의 원소가 모두 자연수이므로 a, b, c, d는 모두 2^k (k는 자연수) 꼴이다.

이때 $a+b=12$이므로 　$a=4,\ b=8$ ($\because a<b$)

(2nd) 집합 $A\cap B$를 이용하여 c, d의 값을 구한다.

$A=\{4,\ 8,\ c,\ d\}$, $B=\{2,\ 3,\ \log_2c,\ \log_2d\}$이고 　$\log_24=2$, $\log_28=3$

$A\cap B=\{4,\ 8\}$이므로 　$\log_2c=4,\ \log_2d=8$

$$\therefore\ c=2^4=16,\ d=2^8=256$$

(3rd) $d-c$의 값을 구한다.

$c=16$, $d=256$이므로 　$d-c=240$ 　　답 240

0227 (1st) 주어진 등식을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

$$\log_5a-2\log_5b=\log_5a-\log_5b^2=\log_5\frac{a}{b^2}$$

즉 $\log_5\frac{a}{b^2}=2$에서

$$\frac{a}{b^2}=5^2 \qquad \therefore\ a=25b^2$$

(2nd) a의 값의 범위에 따른 b^2의 값의 범위를 구한다.

$100\le a<1000$이므로 　$100\le25b^2<1000$

$$\therefore\ 4\le b^2<40 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(3rd) 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구한다.

부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 b의 값은

2, 3, 4, 5, 6

이므로 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 5이다. 　　답 5

0228 (1st) 조건 (가)를 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

조건 (가)에서 　$(\sqrt[3]{a})^4=ab$

$$a^{\frac{4}{3}}=ab \qquad \therefore\ b=a^{\frac{4}{3}-1}=a^{\frac{1}{3}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(2nd) 조건 (나)를 이용하여 c를 a에 대한 식으로 나타낸다.

조건 (나)의 좌변에 ㉠을 대입하면

$$\log_abc+\log_bac=\log_aa^{\frac{1}{3}}c+\log_{a^{\frac{1}{3}}}ac$$
$$=\log_aa^{\frac{1}{3}}+\log_ac+3\log_aac$$
$$=\frac{1}{3}+\log_ac+3(1+\log_ac)$$
$$=\frac{10}{3}+4\log_ac$$

즉 $\frac{10}{3}+4\log_ac=4$이므로 　$4\log_ac=\frac{2}{3}$

$$\log_ac=\frac{1}{6} \qquad \therefore\ c=a^{\frac{1}{6}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

(3rd) $\frac{b}{c}$를 a에 대한 식으로 나타내어 k의 값을 구한다.

㉠, ㉡에서

$$\frac{b}{c}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{6}}$$

따라서 $a=\left(\frac{b}{c}\right)^k=(a^{\frac{1}{6}})^k=a^{\frac{k}{6}}$이므로

$$1=\frac{k}{6} \qquad \therefore\ k=6$$

답 ①

0229 (1st) 연산 $*$의 정의를 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $a*1=a^{\log_21}=a^0=1$

ㄴ. $a*b=a^{\log_2b}=b^{\log_2a}=b*a$

ㄷ. $(a*b)*c=a^{\log_2b}*c=(a^{\log_2b})^{\log_2c}=a^{\log_2b\cdot\log_2c}$

$a*(b*c)=a*(b^{\log_2c})=a^{\log_2b^{\log_2c}}=a^{\log_2c\cdot\log_2b}$

$$\therefore\ (a*b)*c=a*(b*c)$$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 　　답 ④

0230 (1st) $k=1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}$일 때 $f(k)$의 값을 구한다.

$\log_3 1=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$\log_3\frac{1}{2}=-\log_3 2$이고 $\underline{-1<-\log_3 2<0}$이므로 $\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

$0<\log_3 2<1$이므로 $-1<-\log_3 2<0$

$\log_3\frac{1}{3}=-1$이므로 $\quad f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$

$\log_3\frac{1}{4}=-\log_3 4$이고 $\underline{-2<-\log_3 4<-1}$이므로

$1<\log_3 4<2$이므로 $-2<-\log_3 4<-1$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=-2$

$\log_3\frac{1}{5}=-\log_3 5$이고 $-2<-\log_3 5<-1$이므로

$f\left(\frac{1}{5}\right)=-2$

(2nd) $k=1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}$일 때 $g(k)-f(k)$의 값을 구한다.

$\log_3 x=f(x)+g(x)$에서 $g(x)-f(x)=\log_3 x-2f(x)$이므로

$g(1)-f(1)=\log_3 1-2f(1)=0$

$g\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_3\frac{1}{2}-2f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_3\frac{1}{2}-2\cdot(-1)$

$=\log_3\frac{1}{2}+2=\log_3\frac{9}{2}$

$g\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3\frac{1}{3}-2f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3\frac{1}{3}-2\cdot(-1)=1$

$g\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_3\frac{1}{4}-2f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_3\frac{1}{4}-2\cdot(-2)$

$=\log_3\frac{1}{4}+4=\log_3\frac{81}{4}$

$g\left(\frac{1}{5}\right)-f\left(\frac{1}{5}\right)=\log_3\frac{1}{5}-2f\left(\frac{1}{5}\right)=\log_3\frac{1}{5}-2\cdot(-2)$

$=\log_3\frac{1}{5}+4=\log_3\frac{81}{5}$

(3rd) 주어진 식의 값을 구한다.

(주어진 식) $=1\cdot 3^0+2\cdot 3^{\log_3\frac{9}{2}}+3\cdot 3^1+4\cdot 3^{\log_3\frac{81}{4}}+5\cdot 3^{\log_3\frac{81}{5}}$

$=1+2\cdot\frac{9}{2}+9+4\cdot\frac{81}{4}+5\cdot\frac{81}{5}$

$=1+9+9+81+81=181$

답 181

0231 (1st) 조건 (가)에서 $a,\ b,\ c$를 로그를 사용하여 나타낸다.

조건 (가)에서 $3^a=5^b=k^c=t$ $(\underline{t>1})$로 놓으면

$a,\ b$가 양수이므로 $t>1$

$a=\log_3 t,\ b=\log_5 t,\ c=\log_k t$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(2nd) 조건 (나)를 이용하여 $a,\ b,\ c$ 사이의 관계식을 구한다.

조건 (나)에서 $\quad \log c=\log\frac{2ab}{2a+b},\quad c=\frac{2ab}{2a+b}$

$\frac{1}{c}=\frac{2a+b}{2ab}\qquad\therefore\ \frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{2a}$

(3rd) k^2의 값을 구한다.

$\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{2a}$에 ㉠을 대입하면

$\frac{1}{\log_k t}=\frac{1}{\log_5 t}+\frac{1}{2\log_3 t}$

$\log_t k=\log_t 5+\frac{1}{2}\log_t 3=\log_t 5+\log_t 3^{\frac{1}{2}}=\log_t 5\sqrt{3}$

이므로

$k=5\sqrt{3}\qquad\therefore\ k^2=75$

답 75

다른 풀이 조건 (가)에서 $3^a=5^b=k^c=t\ (t>1)$로 놓으면

$3=t^{\frac{1}{a}},\ 5=t^{\frac{1}{b}},\ k=t^{\frac{1}{c}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

조건 (나)에서 $\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{2a}$이므로

$t^{\frac{1}{c}}=t^{\frac{1}{b}+\frac{1}{2a}}\qquad\therefore\ t^{\frac{1}{c}}=t^{\frac{1}{b}}\cdot\left(t^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{1}{2}}$

이 식에 ㉡을 대입하면

$k=5\cdot 3^{\frac{1}{2}}\qquad\therefore\ k^2=5^2\cdot 3=75$

0232 (1st) $\frac{b}{a}=9$를 이용하여 $\log_3 a$와 $\log_3 b$에 대한 식을 구한다.

$\frac{b}{a}=9$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3\frac{b}{a}=\log_3 9\qquad\therefore\ \log_3 b-\log_3 a=2$

(2nd) $a^{\log_3 b}=\sqrt[3]{3}$을 이용하여 $\log_3 a$와 $\log_3 b$에 대한 식을 구한다.

$a^{\log_3 b}=\sqrt[3]{3}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 a^{\log_3 b}=\log_3\sqrt[3]{3}\qquad\therefore\ \log_3 a\cdot\log_3 b=\frac{1}{3}$

(3rd) $(\log_3 a)^3-(\log_3 b)^3$의 값을 구한다.

$(\log_3 a)^3-(\log_3 b)^3$

$=(\log_3 a-\log_3 b)^3+3\log_3 a\cdot\log_3 b\cdot(\log_3 a-\log_3 b)$

$=(-2)^3+3\cdot\frac{1}{3}\cdot(-2)$

$=-8-2=-10$

답 -10

0233 (1st) 로그의 진수를 $f(x)$로 놓고 주어진 조건을 만족시키는 $f(x)$의 조건을 파악한다.

$f(x)=-x^2+ax+4$라 하면 진수의 조건에서 $\quad f(x)>0$

또 $\log_2 f(x)$의 값이 자연수이려면

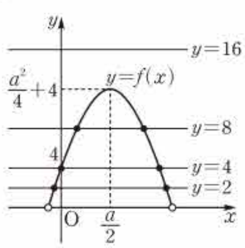
$f(x)=2^n$ (n은 자연수)

꼴이어야 하므로 $\log_2 f(x)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2^n$의 교점의 개수와 같다.

(2nd) 그래프를 그려서 주어진 조건을 만족시키는 a의 값을 구한다.

$f(x)=-x^2+ax+4=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+4$

이고, $\log_2 f(x)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수가 6이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=2,\ y=4,\ y=8$과 각각 두 점에서 만나고, 직선 $y=16$과는 만나지 않아야 한다.



즉 $8<\frac{a^2}{4}+4<16$이어야 하므로

$4<\frac{a^2}{4}<12\qquad\therefore\ 16<a^2<48$

이때 a는 자연수이므로 $\quad a=5$ 또는 $a=6$

(3rd) 모든 자연수 a의 값의 곱을 구한다.

모든 자연수 a의 값의 곱은 $\quad 5\cdot 6=30$

답 30

참고 진수의 조건에 의하여 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 x축의 위쪽에 존재한다. 또 x^2의 계수가 음수이므로 위로 볼록하고 y절편은 4, 축의 방정식은 $x=\frac{a}{2}>0$ ($\because$ a는 자연수)이므로 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점은 제1사분면에 존재한다.

0234 1st 조건 (나)를 이용하여 m, n의 꼴을 찾는다.

조건 (나)에 의하여

$\log_m n=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로 다른 자연수) — $m\neq n$이므로 $\log_m n\neq 1$이다.

라 하면

$n=m^{\frac{q}{p}}$ $\quad\therefore n^p=m^q$ ······ ㉠

이때 m, n이 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 m, n은

$m=l^p$, $n=l^q$ (l은 1보다 큰 자연수)

꼴이다.

2nd 조건 (가)를 이용하여 l의 값에 따른 순서쌍 (p, q)를 구한다.

조건 (가)에서 $mn<200$이므로

$l^pl^q=l^{p+q}<200$

(i) $l=2$일 때,

$3\le p+q\le 7$이므로

$p+q=3$일 때, 순서쌍 (p, q)는 $(1, 2)$, $(2, 1)$

$p+q=4$일 때, 순서쌍 (p, q)는 $(1, 3)$, $(3, 1)$

$p+q=5$일 때, 순서쌍 (p, q)는

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$

$p+q=6$일 때, 순서쌍 (p, q)는

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$

$p+q=7$일 때, 순서쌍 (p, q)는

$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$

따라서 순서쌍 (p, q)의 개수는

$2+2+4+4+6=18$

(ii) $l=3$일 때,

$3\le p+q\le 4$이므로 순서쌍 (p, q)의 개수는 $2+2=4$ — $p+q=3$, $p+q=4$

(iii) $l=5$일 때,

$p+q=3$이므로 순서쌍 (p, q)의 개수는 2

(iv) $l\ge 6$일 때,

조건을 만족시키는 p, q는 존재하지 않는다.

3rd 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$18+4+2=24$

답 ②

참고 $l=2$일 때 순서쌍 (p, q)가 $(1, 2)$이면 $m=2$, $n=4$이고, $l=3$일 때 순서쌍 (p, q)가 $(1, 2)$이면 $m=3$, $n=9$이다.
따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는 위에서 구한 순서쌍 (p, q)의 개수와 같다.
또 $4=2^2$이므로 $l=4$인 경우는 (i)에 포함된다.

0235 1st 주어진 조건을 관계식에 각각 대입하여 식을 정리한다.

$x=R^{\frac{27}{23}}$, $v=\frac{1}{2}v_c$를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{v_c}{\frac{1}{2}v_c}=1-k\log\frac{R^{\frac{27}{23}}}{R},\qquad 2=1-k\log R^{\frac{4}{23}}$$

$\therefore 1=-k\log R^{\frac{4}{23}}$ ······ ㉠

$x=R^a$, $v=\frac{1}{3}v_c$를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{v_c}{\frac{1}{3}v_c}=1-k\log\frac{R^a}{R},\qquad 3=1-k\log R^{a-1}$$

$\therefore 2=-k\log R^{a-1}$ ······ ㉡

2nd a의 값을 구한다.

㉠÷㉡을 하면 $\frac{1}{2}=\frac{\log R^{\frac{4}{23}}}{\log R^{a-1}}$

$\log R^{a-1}=2\log R^{\frac{4}{23}}$, $\quad a-1=\frac{8}{23}$ ($\because \log R\neq 0$) — $R<1$이므로 $\log R\neq 0$

$\therefore a=\frac{31}{23}$

답 ⑤

0236 1st 10년 후 전체 신생아 수에 대한 남자 신생아 수의 비율을 구한다.

올해 신생아의 수를 A라 하면 10년 후 전체 신생아 수에 대한 남자 신생아 수의 비율은

$$\frac{\frac{1}{2}A(1+0.1)^{10}}{A(1+0.07)^{10}}=\frac{1.1^{10}}{2\times 1.07^{10}}$$

2nd $\frac{1.1^{10}}{1.07^{10}}$의 값을 구한다.

$\frac{1.1^{10}}{1.07^{10}}=k$로 놓고 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log k&=10\log 1.1-10\log 1.07\\&=10\times 0.0414-10\times 0.0294\\&=0.12\end{aligned}$$

이때 $\log 1.32=0.12$이므로 $k=1.32$

3rd 10년 후 남자 신생아의 수를 구한다.

$\frac{1.1^{10}}{2\times 1.07^{10}}=\frac{1}{2}\times 1.32=0.66$이므로 10년 후 신생아 100명 중 남자 신생아는 66명이다.

답 66명

0237 전략 $\log_{f(x)}g(x)$가 정의되려면 $f(x)>0$, $f(x)\neq 1$이고, $g(x)>0$이어야 함을 이용한다.

풀이 밑의 조건에서 $(k-2)^2>0$, $(k-2)^2\neq 1$

$\therefore k\neq 1$, $k\neq 2$, $k\neq 3$ ······ ㉠ ··· ❶

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여

$kx^2+kx+4>0$ ······ ㉡

이어야 한다.

(i) $k=0$일 때,

㉡에서 $4>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k\neq 0$일 때,

$k>0$이어야 하고 이차방정식 $kx^2+kx+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-16k<0$, $\quad k(k-16)<0$

$\therefore 0<k<16$

(i), (ii)에서 $0\le k<16$ ······ ㉢ ··· ❷

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 k는

$0, 4, 5, 6, \cdots, 13, 14, 15$

의 13개이다. ··· ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 밑의 조건을 이용하여 k의 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ 진수의 조건을 이용하여 k의 조건을 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

02 로그

0238 전략 두 로그자에서 거리가 같은 눈금의 위치를 이용한다.

풀이 눈금 4에서 눈금 8까지의 거리와 눈금 y에서 눈금 4까지의 거리가 같으므로

$\log 8-\log 4=\log 4-\log y,\qquad \log\frac{8}{4}=\log\frac{4}{y}$

$2=\frac{4}{y}\qquad \therefore y=2$ ⋯ ❶

눈금 x에서 눈금 8까지의 거리와 눈금 3에서 눈금 4까지의 거리가 같으므로

$\log 8-\log x=\log 4-\log 3,\qquad \log\frac{8}{x}=\log\frac{4}{3}$

$\frac{8}{x}=\frac{4}{3}\qquad \therefore x=6$ ⋯ ❷

$\therefore x+y=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ y의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0239 전략 로그의 성질 $\log_a x^n=n\log_a x$, $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$를 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $\log_{500}2^a+\log_{500}5^b=c$

$\log_{500}2^a\cdot5^b=c,\qquad 2^a\cdot5^b=500^c$

이때 $500^c=(2^2\cdot5^3)^c=2^{2c}\cdot5^{3c}$이므로

$a=2c,\ b=3c$ ⋯ ❶

$a,\ b,\ c$, 즉 $2c,\ 3c,\ c$의 최대공약수는 c이므로 조건 (나)에 의하여 $c=3$

따라서 $a=6,\ b=9,\ c=3$이므로

$a+b+c=18$ ⋯ ❷

답 18

채점 기준	비율
❶ $a,\ b$를 각각 c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0240 전략 로그의 밑의 변환을 이용하여 $a,\ b,\ c$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\frac{\log_c b}{\log_a b}=\frac{1}{2}$에서 $\qquad \frac{\log_b a}{\log_b c}=\frac{1}{2}$

$\log_c a=\frac{1}{2},\qquad \log_a c=2$

$\therefore c=a^2$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$\frac{\log_b c}{\log_a c}=\frac{1}{3}$에서 $\qquad \frac{\log_c a}{\log_c b}=\frac{1}{3}$

$\log_b a=\frac{1}{3},\qquad \log_a b=3$

$\therefore b=a^3$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $a,\ b,\ c$는 1보다 크고 10보다 작은 자연수이므로

$\underline{a=2},\ b=8,\ c=4$ — $a\ge3$이면 $b\ge27$, 즉 b가 10보다 크므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a+3b+2c=2+3\cdot8+2\cdot4=34$ ⋯ ❸

답 34

채점 기준	비율
❶ $a,\ c$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a,\ b$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+3b+2c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0241 전략 주어진 조건을 이용하여 등식을 세운다.

풀이 주어진 조건에서

$\log N(2k)=\log A-a\log 2k$ ⋯⋯ ㉠

$\log N(k)=\log A-a\log k$ ⋯⋯ ㉡

$\log N(4k)=\log A-a\log 4k$ ⋯⋯ ㉢

㉠－㉡을 하면

$\log N(2k)-\log N(k)=a(\log k-\log 2k)$

$\therefore \log\frac{N(2k)}{N(k)}=a\log\frac{1}{2}=\log 2^{-a}$

이때 $\frac{N(2k)}{N(k)}=\frac{\sqrt{2}}{8}$이므로 $\qquad 2^{-a}=\frac{\sqrt{2}}{8}=2^{-\frac{5}{2}}$

$\therefore a=\frac{5}{2}$ ⋯ ❶

㉢－㉡을 하면

$\log N(4k)-\log N(k)=a(\log k-\log 4k)$

$\therefore \log\frac{N(4k)}{N(k)}=\frac{5}{2}\log\frac{1}{4}=\log 2^{-5}$

즉 $\frac{N(4k)}{N(k)}=2^{-5}=\frac{1}{32}$이므로

$p=32$ ⋯ ❷

답 32

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	50 %

0242 전략 보험료의 인상률이 p일 때, 사고를 n번 내면 보험료는 처음 보험료의 $(1+p)^n$배가 됨을 이용한다.

풀이 처음 보험료를 P원, 사고를 낼 때마다의 보험료 인상률을 p라 하면 5번 사고를 낸 A의 보험료는 처음 보험료의 2배이므로

$P(1+p)^5=2P\qquad \therefore (1+p)^5=2$

양변에 상용로그를 취하면

$5\log(1+p)=\log 2$

$\therefore \log(1+p)=\frac{1}{5}\log 2=\frac{1}{5}\times0.3=0.06$ ⋯ ❶

B의 보험료는 $P(1+p)^3$원이므로 $(1+p)^3=k$로 놓고 양변에 상용로그를 취하면

$\log k=3\log(1+p)=3\times0.06=0.18$

이때 $\log 1.51=0.18$이므로 $\qquad k=1.51$ ⋯ ❷

따라서 B의 보험료는 처음 보험료의 151 %이다. ⋯ ❸

답 151 %

채점 기준	비율
❶ $\log(1+p)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $(1+p)^3$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ B의 보험료가 처음 보험료의 몇 %인지 구할 수 있다.	20 %

I. 지수함수와 로그함수

03 지수함수

0243 답 ㄴ, ㄷ

0244 $f(0)=2^0=1$ 답 1

0245 $f(2)=2^2=4$ 답 4

0246 $f\left(\frac{3}{2}\right)=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

0247 $f(-4)f(3)=2^{-4}\cdot 2^3=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0248 $f(0)=\left(\frac{1}{5}\right)^0=1$ 답 1

0249 $f(3)=\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$ 답 $\frac{1}{125}$

0250 $f(-4)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}=5^4=625$ 답 625

0251 $f(-1)f(2)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

0252 ㄱ. $f(x)=a^x$은 일대일함수이므로 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다. 즉 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.
ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.
ㄹ. 정의역은 $\{x|x$는 모든 실수$\}$이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

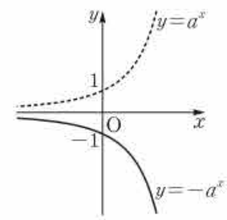
0253 $\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[3]{3^4}=3^{\frac{4}{3}}$
이때 $\frac{3}{4}<\frac{4}{3}$이고 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
밑이 1보다 크다.
$3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{3}}$ $\quad\therefore \sqrt[4]{3^3}<\sqrt[3]{3^4}$ 답 $\sqrt[4]{3^3}<\sqrt[3]{3^4}$

0254 $-1<2$이고 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
밑이 1보다 작다.
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}>\left(\frac{1}{3}\right)^2$ 답 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}>\left(\frac{1}{3}\right)^2$

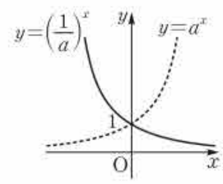
0255 $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$
이때 $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$이고 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$2^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{2}}$ $\quad\therefore \sqrt[3]{2}<\sqrt{2}<\sqrt{8}$ 답 $\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}<\sqrt{8}$

0256 $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^3=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$
이때 $-0.2<1<\frac{3}{2}$이고 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}<\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.2}$ $\quad\therefore \left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^3<\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.2}$
답 $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^3<\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.2}$

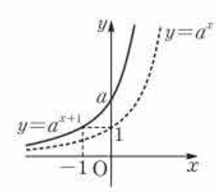
0257 $y=-a^x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
답 풀이 참조



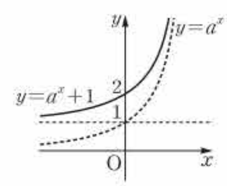
0258 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
답 풀이 참조



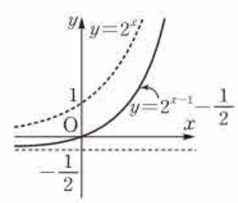
0259 $y=a^{x+1}$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
답 풀이 참조



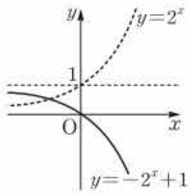
0260 $y=a^x+1$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
답 풀이 참조



0261 $y=2^{x-1}-\frac{1}{2}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\left\{y\middle|y>-\frac{1}{2}\right\}$
점근선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}$ 답 풀이 참조



0262 $y=-2^x+1$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

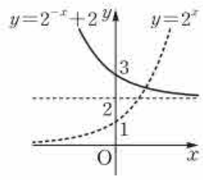


따라서 치역은 $\{y|y<1\}$

점근선의 방정식은 $y=1$

답 풀이 참조

0263 $y=2^{-x}+2$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

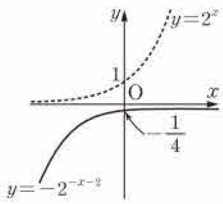


따라서 치역은 $\{y|y>2\}$

점근선의 방정식은 $y=2$

답 풀이 참조

0264 $y=-2^{-x-2}=-2^{-(x+2)}$에서 $y=-2^{-x-2}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y<0\}$

점근선의 방정식은 $y=0$

답 풀이 참조

0265 함수 $y=5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-1\le x\le 2$에서

$x=2$일 때 최대이고 최댓값은 $5^2=25$

$x=-1$일 때 최소이고 최솟값은 $5^{-1}=\frac{1}{5}$

답 최댓값: 25, 최솟값: $\frac{1}{5}$

0266 함수 $y=10^{-x}=\left(\frac{1}{10}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-3\le x\le 2$에서

$x=-3$일 때 최대이고 최댓값은 $10^3=1000$

$x=2$일 때 최소이고 최솟값은 $10^{-2}=\frac{1}{100}$

답 최댓값: 1000, 최솟값: $\frac{1}{100}$

0267 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-2\le x\le 2$에서

$x=-2$일 때 최대이고 최댓값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+1=10$

$x=2$일 때 최소이고 최솟값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^2+1=\frac{10}{9}$

답 최댓값: 10, 최솟값: $\frac{10}{9}$

0268 함수 $y=2^{x+2}-3$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $1\le x\le 3$에서

$x=3$일 때 최대이고 최댓값은 $2^{3+2}-3=29$

$x=1$일 때 최소이고 최솟값은 $2^{1+2}-3=5$

답 최댓값: 29, 최솟값: 5

0269 $8^x=128$에서 $2^{3x}=2^7$이므로

$3x=7 \qquad \therefore x=\frac{7}{3}$

답 $x=\frac{7}{3}$

0270 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}=2\sqrt{2}$에서 $2^{x-1}=2^{\frac{3}{2}}$이므로

$x-1=\frac{3}{2} \qquad \therefore x=\frac{5}{2}$

답 $x=\frac{5}{2}$

0271 $\left(\frac{1}{9}\right)^x=81\cdot 3^x$에서 $3^{-2x}=3^{4+x}$이므로

$-2x=4+x, \qquad 3x=-4$

$\therefore x=-\frac{4}{3}$

답 $x=-\frac{4}{3}$

0272 $4^{2x}-4^x-12=0$에서 $(4^x)^2-4^x-12=0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$\boxed{t^2-t-12}=0, \qquad (t+3)(t-4)=0$

$\therefore t=\boxed{4}\ (\because t>0)$

즉 $4^x=4$이므로 $x=\boxed{1}$

$\therefore$ (가) t^2-t-12 (나) 4 (다) 1

답 풀이 참조

0273 $3^{2x}-12\cdot 3^x+27=0$에서

$(3^x)^2-12\cdot 3^x+27=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-12t+27=0, \qquad (t-3)(t-9)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=9$

즉 $3^x=3$ 또는 $3^x=9$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$

답 $x=1$ 또는 $x=2$

0274 $\left(\frac{1}{9}\right)^x-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-27=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-27=0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-6t-27=0, \qquad (t+3)(t-9)=0$

$\therefore t=9\ (\because t>0)$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$\therefore x=-2$

답 $x=-2$

0275 $2^{4x+1}=5^{4x+1}$에서 $4x+1=0$

$\therefore x=-\frac{1}{4}$

답 $x=-\frac{1}{4}$

0276 $(x-1)^{x-3}=4^{x-3}$에서

(i) $x-3=0$, 즉 $x=3$일 때, 주어진 방정식은 $2^0=4^0$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x-3\neq0$일 때, $x-1=4$이므로 $\quad x=5$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=3$ 또는 $x=5$ 답 $x=3$ 또는 $x=5$

0277 $5^{2x-1}>25\sqrt{5}$에서 $\quad 5^{2x-1}>5^{\frac{5}{2}}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 2x-1>\frac{5}{2}$

$2x>\frac{7}{2} \quad \therefore x>\frac{7}{4}$ 답 $x>\frac{7}{4}$

0278 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}\leq2^{x-1}$에서 $\quad 2^{-3x-2}\leq2^{x-1}$

밑이 1보다 크므로 $\quad -3x-2\leq x-1$

$-4x\leq1 \quad \therefore x\geq-\frac{1}{4}$ 답 $x\geq-\frac{1}{4}$

0279 $2^{3-x}\geq(\sqrt{2})^{3x}$에서 $\quad 2^{3-x}\geq2^{\frac{3}{2}x}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 3-x\geq\frac{3}{2}x$

$-\frac{5}{2}x\geq-3 \quad \therefore x\leq\frac{6}{5}$ 답 $x\leq\frac{6}{5}$

0280 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2}<\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-3}$에서 $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2}<\left(\frac{3}{4}\right)^{-2x+3}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x^2>-2x+3$

$x^2+2x-3>0, \quad (x+3)(x-1)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>1$ 답 $x<-3$ 또는 $x>1$

0281 $\left(\frac{1}{9}\right)^x-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3\leq0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3\leq0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$\boxed{t^2-4t+3}\leq0, \quad (t-1)(t-3)\leq0$

$\therefore \boxed{1}\leq t\leq\boxed{3}$

즉 $1\leq\left(\frac{1}{3}\right)^x\leq3$이므로 $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^0\leq\left(\frac{1}{3}\right)^x\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad \boxed{-1}\leq x\leq\boxed{0}$

$\therefore$ (가) t^2-4t+3 (나) 1 (다) 3 (라) -1 (마) 0

답 풀이 참조

0282 $5^{2x}-30\cdot5^x+125<0$에서

$(5^x)^2-30\cdot5^x+125<0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-30t+125<0, \quad (t-5)(t-25)<0$

$\therefore 5<t<25$

즉 $5<5^x<5^2$이고 밑이 1보다 크므로

$1<x<2$ 답 $1<x<2$

0283 $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-8\leq0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-8\leq0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2+2t-8\leq0, \quad (t+4)(t-2)\leq0$

$\therefore -4\leq t\leq2$

이때 $t>0$이므로 $\quad 0<t\leq2$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$이고 밑이 1보다 작으므로

$x\geq-1$ 답 $x\geq-1$

유형 01 지수함수의 함숫값 본책 44쪽

지수함수 $f(x)=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$에서 $f(p)$의 값을 구할 때에는 $f(x)$에 x 대신 p를 대입하고 지수법칙을 이용한다.

0284 ㄱ. $f(-m)=a^{-m}=\frac{1}{a^m}=\frac{1}{f(m)}$

ㄴ. $f(3m)=a^{3m}=(a^m)^3=\{f(m)\}^3$

ㄷ. $f(mn)=a^{mn}$, $f(m)+f(n)=a^m+a^n$이므로

$f(mn)\neq f(m)+f(n)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0285 $f(p)=q$에서 $\quad 2^p=q$

$\therefore f\left(\frac{p}{2}\right)+f\left(-\frac{p}{2}\right)=2^{\frac{p}{2}}+2^{-\frac{p}{2}}$

$=(2^p)^{\frac{1}{2}}+(2^p)^{-\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{q}+\frac{1}{\sqrt{q}}$ 답 ④

0286 $f(0)=a^n=5$, $f(2)=a^{2m+n}=20$이므로

$5a^{2m}=20, \quad a^{2m}=4$

$\therefore a^m=2\ (\because a^m>0)$

$\therefore f(1)=a^{m+n}=a^m\cdot a^n=2\cdot5=10$ 답 10

0287 $f(a+b)=\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b}=\left(\frac{1}{2}\right)^a\left(\frac{1}{2}\right)^b$

이때 $p=f(-a)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-a}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^a\right\}^{-1}$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\frac{1}{p}$

또 $q=f(b)=\left(\frac{1}{2}\right)^b$이므로

$f(a+b)=\left(\frac{1}{2}\right)^a\left(\frac{1}{2}\right)^b=\frac{q}{p}$ 답 $\frac{q}{p}$

0288 $f(2k)=a^{2k}+a^{-2k}=14$

$(a^k+a^{-k})^2=a^{2k}+a^{-2k}+2$이므로

$(a^k+a^{-k})^2=14+2=16$

$\therefore a^k+a^{-k}=4\ (\because a^k+a^{-k}>0)$

$\therefore f(3k)=a^{3k}+a^{-3k}$

$=(a^k+a^{-k})^3-3(a^k+a^{-k})$

$=4^3-3\cdot4=52$ 답 52

유형 02 지수함수의 성질

본책 44쪽

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$에 대하여
① 정의역: 실수 전체의 집합
　치역: 양의 실수 전체의 집합
② $a>1$ ➡ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가
　$0<a<1$ ➡ x의 값이 증가하면 y의 값은 감소
③ 그래프의 점근선: x축 (직선 $y=0$)

0289 $f(2)=a^2=\frac{1}{9}$에서　$a=\frac{1}{3}$ $(\because a>0)$

$\therefore f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

ㄱ. $f(-4)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=3^4=81$

ㄹ. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.　답 ④

0290 $a<b$일 때 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 함수이다. 이때

$$f(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^{-x}=\left(\frac{4}{5}\right)^x,\ f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=3^x$$

이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ③이다.　답 ③

0291 $y=(a^2+a+1)^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하려면　$0<a^2+a+1<1$　⋯➊

(i) $0<a^2+a+1$에서

$$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

이므로 항상 성립한다.

(ii) $a^2+a+1<1$에서　$a^2+a<0$

$a(a+1)<0$　$\therefore -1<a<0$

(i), (ii)에서　$-1<a<0$　⋯➋

답 $-1<a<0$

채점 기준	비율
➊ a^2+a+1의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
➋ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %

유형 03 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

본책 45쪽

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를
① x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동
　➡ $y=a^{x-m}+n$
② x축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-a^x$
③ y축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=a^{-x}$
④ 원점에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-a^{-x}$

0292 $y=4^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=4^{2(x-m)}$　$\therefore y=4^{-2m}\cdot4^{2x}+n$

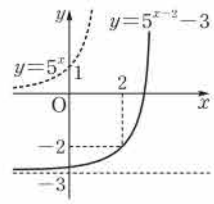
이 식이 $y=16\cdot4^{2x}+16$과 일치하므로

$4^{-2m}=16=4^2,\ n=16$

따라서 $m=-1,\ n=16$이므로

$m+n=15$　답 15

0293 $y=5^{x-2}-3$의 그래프는 $y=5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



④ 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.

답 ④

0294 $y=3^{-x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$이므로

$b=-2$　⋯➊

또 이 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=3^a-2$,　$3^a=3$

$\therefore a=1$　⋯➋

$\therefore ab=-2$　⋯➌

답 -2

채점 기준	비율
➊ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0295 ㄱ. $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x+3=9^{-x}+3$이므로 $y=9^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x+3$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄴ. $y=3^{2x+1}=9^{x+\frac{1}{2}}$이므로 $y=9^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동하면 $y=3^{2x+1}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y=-9\cdot3^{x-2}=-3^2\cdot3^{x-2}=-3^x$이므로 $y=9^x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 $y=-9\cdot3^{x-2}$의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=\frac{9^x-1}{3}=\frac{9^x}{3}-\frac{1}{3}=9^{x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}$이므로 $y=9^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$만큼 평행이동하면 $y=\frac{9^x-1}{3}$의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 $y=9^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.　답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

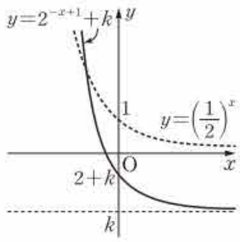
0296 $y=2^{-x+1}+k=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k$이므로 $y=2^{-x+1}+k$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$\underbrace{2+k}_{x=0\text{일 때의 함숫값}}\le 0$$

$\therefore k\le -2$

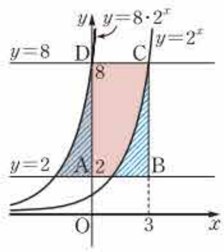
따라서 실수 k의 최댓값은 -2이다.



답 ①

0297 $y=8\cdot 2^x=2^{x+3}$이므로 $y=8\cdot 2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 두 함수 $y=2^x$, $y=8\cdot 2^x$의 그래프와 두 직선 $y=2$, $y=8$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

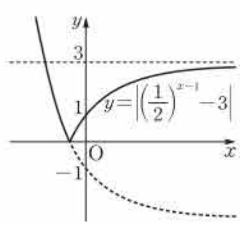


따라서 구하는 넓이는

$\overline{AB}\cdot\overline{AD}=3\cdot 6=18$ 답 ④

0298 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-3$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-3\right|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$가 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면 $0<k<3$



즉 자연수 k는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$ 답 3

참고 $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-3\right|$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-3$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

유형 04 지수함수의 그래프 위의 점 본책 46쪽

지수함수 $y=a^x(a>0,\ a\ne 1)$의 그래프가 점 $(m,\ n)$을 지난다.
⇒ $n=a^m$

0299 $y=a^x$의 그래프가 두 점 $(b,\ 2)$, $(c,\ 6)$을 지나므로

$2=a^b,\ 6=a^c$

$\therefore f\left(\frac{b-c}{2}\right)=a^{\frac{b-c}{2}}=(a^{b-c})^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a^b}{a^c}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{2}{6}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 ②

0300 $a=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, $b=2^a=2^{\sqrt{2}}$이므로

$b^a=(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^2=4$ 답 ④

0301 $A(a,\ 3^a)$, $B(b,\ 3^b)$이고, 직선 AB의 기울기가 3이므로

$\frac{3^b-3^a}{b-a}=3\qquad \therefore b-a=\frac{1}{3}(3^b-3^a)$ ...... ㉠

또 $\overline{AB}=2\sqrt{5}$이므로 $(b-a)^2+(3^b-3^a)^2=(2\sqrt{5})^2$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$\frac{1}{9}(3^b-3^a)^2+(3^b-3^a)^2=20$

$(3^b-3^a)^2=18\qquad \therefore 3^b-3^a=3\sqrt{2}$ $(\because \underbrace{3^a<3^b}_{a<b\text{이므로 }3^a<3^b})$ 답 $3\sqrt{2}$

0302 점 P의 좌표를 $(a,\ 4^a)$이라 하면 $\overline{OP}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{a}{1+3},\ \frac{4^a}{1+3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{4},\ 4^{a-1}\right)$

이 점이 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프 위에 있으므로

$4^{a-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a}{4}},\qquad 2^{2(a-1)}=2^{-\frac{a}{4}}$

$2(a-1)=-\frac{a}{4},\qquad 8a-8=-a\qquad \therefore a=\frac{8}{9}$ 답 ④

0303 점 A의 좌표가 $(k,\ 2^k)$이고 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로 $4^x=2^k$에서 $2^{2x}=2^k\qquad \therefore x=\frac{k}{2}$

따라서 $C\left(\frac{k}{2},\ 2^k\right)$이므로 $\overline{AC}=\frac{k}{2}$ ··· ❶

한편 점 B의 좌표가 $(k,\ 4^k)$이고 두 점 B, D의 y좌표가 같으므로 $2^x=4^k$에서 $2^x=2^{2k}\qquad \therefore x=2k$

따라서 $D(2k,\ 4^k)$이므로 $\overline{BD}=k$ ··· ❷

$\therefore \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}=\frac{k}{\frac{k}{2}}=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $\overline{AC}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\overline{BD}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0304 두 삼각형 ACB, ADC의 높이가 $\overline{AB}$로 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$\therefore \overline{BC}:\overline{CD}=\triangle ACB:\triangle ADC=2:1$

따라서 $\overline{BC}:\overline{BD}=2:3$이므로 두 점 C, D의 x좌표를 각각 $2b$, $3b\ (b>0)$로 놓으면

$2^{2b}=a^{3b}=k,\qquad 4^b=(a^3)^b$

$4=a^3\qquad \therefore a=\sqrt[3]{4}$ 답 $\sqrt[3]{4}$

유형 05 지수함수를 이용한 수의 대소 비교 본책 47쪽

주어진 수의 밑을 같게 한 후 다음과 같은 지수함수의 성질을 이용한다.
① $a>1$일 때, $m<n \Longleftrightarrow a^m<a^n$
② $0<a<1$일 때, $m<n \Longleftrightarrow a^m>a^n$

0305 $A=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$, $B=0.5^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$,

$C=\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$

이때 $\frac{1}{3}<\frac{2}{3}<\frac{3}{2}$이고 밑이 1보다 크므로

$2^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{2}}$, 즉 $B<C<A$ 답 ③

0306 $\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}=(2^3\cdot2^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{11}{12}}$,

$\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{4}}=(2^{-6})^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$,

$(2^{\frac{1}{3}}\cdot8^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{6}}=(2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{15}{2}})^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{47}{36}}$,

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}}=(2^8)^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{2}}$ ⋯ ❶

이때 $\frac{1}{2}<\frac{11}{12}<\frac{47}{36}<\frac{3}{2}$이고 밑이 1보다 크므로

$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{11}{12}}<2^{\frac{47}{36}}<2^{\frac{3}{2}}$ ⋯ ❷

따라서 가장 큰 수는 $2^{\frac{3}{2}}$이고, 가장 작은 수는 $2^{\frac{1}{2}}$이므로 구하는 곱은

$2^{\frac{3}{2}}\cdot2^{\frac{1}{2}}=2^2=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 네 수의 밑을 같게 할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 네 수의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❸ 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0307 $A=a^{\frac{n+1}{n}}$, $B=a^{\frac{n+2}{n+1}}$, $C=a^{\frac{n+3}{n+2}}$

$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$, $\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$, $\frac{n+3}{n+2}=1+\frac{1}{n+2}$이고 n이 자연수이므로

$\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$

따라서 $1+\frac{1}{n+2}<1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n}$, 즉 $\frac{n+3}{n+2}<\frac{n+2}{n+1}<\frac{n+1}{n}$

이고 $a>1$이므로

$a^{\frac{n+3}{n+2}}<a^{\frac{n+2}{n+1}}<a^{\frac{n+1}{n}}$, 즉 $C<B<A$ 답 $C<B<A$

0308 $0<a<1$일 때 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$에서

$a^1<a^a<a^0$, 즉 $a<a^a<1$

마찬가지로 $0<a<1$이므로 $a<a^a<1$에서

$a^1<a^{a^a}<a^a$, 즉 $a<a^{a^a}<a^a$ 답 ②

유형 06 지수함수의 최대·최소; $y=a^{px+q}+r$ 꼴 본책 48쪽

정의역이 $\{x\,|\,m\le x\le n\}$인 함수 $f(x)=a^{px+q}+r\ (p>0)$의 최대·최소를 구할 때에는 먼저 a의 값의 범위를 확인한 후 다음을 이용한다.
① $a>1$일 때 ➡ 최댓값: $f(n)$, 최솟값: $f(m)$
② $0<a<1$일 때 ➡ 최댓값: $f(m)$, 최솟값: $f(n)$

0309 $y=2^{x+1}+k$에서 $x=1$일 때 최대이고 최댓값은

$2^{1+1}+k=4+k$

즉 $4+k=1$이므로 $k=-3$ 답 ①

0310 $y=5^{-x}\cdot3^x=\left(\frac{3}{5}\right)^x$이므로 $x=-3$일 때 최대이고 최댓값은

$M=\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$

$x=1$일 때 최소이고 최솟값은 $m=\frac{3}{5}$

$\therefore Mm=\left(\frac{3}{5}\right)^{-3+1}=\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$ 답 $\frac{25}{9}$

0311 (i) $a>1$일 때,

최댓값은 $f(3)$, 최솟값은 $f(0)$이므로

$f(3)=8f(0)$, $a^4=8a$

$a^3=8$ $\therefore a=2$ ⋯ ❶

(ii) $0<a<1$일 때,

최댓값은 $f(0)$, 최솟값은 $f(3)$이므로

$f(0)=8f(3)$, $a=8a^4$

$a^3=\frac{1}{8}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 모든 양수 a의 값의 합은 $\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ $a>1$일 때 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $0<a<1$일 때 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 양수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0312 $f(x)=|x-1|+2$로 놓으면 $-1\le x\le2$에서

$-2\le x-1\le1$, $0\le|x-1|\le2$

$\therefore 2\le|x-1|+2\le4$, 즉 $2\le f(x)\le4$

(i) $a>1$일 때,

$y=a^{f(x)}$은 $f(x)=4$일 때 최댓값을 가지므로

$a^4=\frac{1}{4}$ $\therefore a=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because a>0$)

그런데 이것은 $a>1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<1$일 때,

$y=a^{f(x)}$은 $f(x)=2$일 때 최댓값을 가지므로

$a^2=\frac{1}{4}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$이고, $f(x)=4$일 때 최소이므로 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^4=2^{-4}$ 답 ②

유형 07 지수함수의 최대·최소; $y=a^{px^2+qx+r}$ 꼴 본책 48쪽

함수 $y=a^{px^2+qx+r}$의 최대·최소를 구할 때에는
$f(x)=px^2+qx+r$로 놓고 주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한 후 a의 값의 범위에 따라 다음을 이용한다.
① $a>1$일 때
➡ $f(x)$가 최대일 때 y도 최대, $f(x)$가 최소일 때 y도 최소
② $0<a<1$일 때
➡ $f(x)$가 최대일 때 y는 최소, $f(x)$가 최소일 때 y는 최대

0313 $f(x)=x^2-4x+1$로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2-3$

$f(-1)=6$, $f(2)=-3$, $f(3)=-2$이므로 $-1\le x\le 3$에서

$-3\le f(x)\le 6$

$y=2^{x^2-4x+1}=2^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=2^{f(x)}$은

$f(x)=6$, 즉 $x=-1$일 때 최댓값 $2^6=64$를 갖는다.

따라서 $a=-1$, $b=64$이므로

$a+b=63$

답 ④

0314 $f(x)=-x^2+4x-2$로 놓으면

$f(x)=-(x-2)^2+2$ $\quad\therefore f(x)\le 2$

$y=a^{-x^2+4x-2}=a^{f(x)}$에서 $0<a<1$이므로 함수 $y=a^{f(x)}$은

$f(x)=2$일 때 최솟값 $\frac{1}{4}$을 갖는다.

즉 $a^2=\frac{1}{4}$이므로

$a=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

답 ④

0315 $f(x)=x^2-8x+15$로 놓으면

$f(x)=(x-4)^2-1$

$f(2)=3$, $f(4)=-1$, $f(5)=0$이므로 $2\le x\le 5$에서

$-1\le f(x)\le 3$ ··· ❶

$y=3^{x^2-8x+15}=3^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=3^{f(x)}$은

$f(x)=3$일 때 최대이고 최댓값은 $3^3=27$

$f(x)=-1$일 때 최소이고 최솟값은 $3^{-1}=\frac{1}{3}$ ··· ❷

따라서 구하는 곱은 $27\cdot\frac{1}{3}=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $y=3^{f(x)}$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

0316 $f(x)=x^2-4x+b$로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2+b-4$

$f(2)=b-4$, $f(3)=b-3$이므로 $2\le x\le 3$에서

$b-4\le f(x)\le b-3$

$y=a^{x^2-4x+b}=a^{f(x)}$에서 $0<a<1$이므로 함수 $y=a^{f(x)}$은

$f(x)=b-4$일 때 최대이고 최댓값은 a^{b-4}

$\therefore a^{b-4}=81$ ······ ㉠

또 $f(x)=b-3$일 때 최소이고 최솟값은 a^{b-3}

$\therefore a^{b-3}=9$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $a^{b-3-(b-4)}=\frac{9}{81}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{9}$

$a=\frac{1}{9}$을 ㉡에 대입하면 $\left(\frac{1}{9}\right)^{b-3}=9$

$9^{-b+3}=9$, $\quad -b+3=1$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore ab=\frac{2}{9}$

답 $\frac{2}{9}$

유형 **08** **지수함수의 최대·최소; a^x 꼴이 반복되는 경우** 본책 49쪽

함수 $y=pa^{2x}+qa^x+r$의 최대·최소는 $a^x=t$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차함수 $y=pt^2+qt+r$의 최대·최소를 이용하여 구한다.

0317 $y=4^x-2^{x+1}+3=(2^x)^2-2\cdot 2^x+3$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $-1\le x\le 2$에서 $\quad\frac{1}{2}\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

이므로 $t=4$, 즉 $x=2$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad 11$

$t=1$, 즉 $x=0$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad 2$

따라서 $a=2$, $b=11$, $c=0$, $d=2$이므로

$a+b+c-d=11$

답 ①

0318 $y=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^x=1+2^{-a}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=-t^2+2^{-a}\cdot t+1=-(t-2^{-a-1})^2+2^{-2a-2}+1$

따라서 $t=2^{-a-1}$일 때 최댓값 $2^{-2a-2}+1$을 가지므로

$2^{-2a-2}+1=\frac{129}{128}$, $\quad 2^{-2a-2}=\frac{1}{128}=2^{-7}$

$-2a-2=-7$ $\quad\therefore a=\frac{5}{2}$

답 ①

0319 $y=3^{-2x}-2\cdot 3^{-x}-1=(3^{-x})^2-2\cdot 3^{-x}-1$

$3^{-x}=t$ $(t>0)$로 놓으면 $-2\le x\le 3$에서 $\quad\frac{1}{27}\le t\le 9$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$

이므로 $t=9$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad 62$

$t=1$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad -2$

따라서 $M=62$, $m=-2$이므로

$M+m=60$

답 60

유형 **09** **지수함수의 최대·최소 ; 산술평균과 기하평균의 관계 이용** 본책 49쪽

함수 $y=a^x+a^{-x}$ $(a>0, a\ne 1)$의 최대·최소

➡ 모든 실수 x에 대하여 $a^x>0$, $a^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^x+a^{-x}\ge 2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}=2$

임을 이용한다. (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

0320 $3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=3^x+3^{-x}\ge 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=6t-(t^2-2)=-t^2+6t+2$

$=-(t-3)^2+11$ $(t\ge 2)$

따라서 주어진 함수는 $t=3$일 때 최댓값 11을 갖는다. 답 ④

0321 $4^x>0$, $4^{-x+4}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4^x+4^{-x+4}\ge 2\sqrt{4^x\cdot 4^{-x+4}}$$
$$=2\sqrt{4^4}=2\cdot 4^2=32$$

이때 등호는 $4^x=4^{-x+4}$일 때 성립하므로

$x=-x+4$ $\quad\therefore x=2$

따라서 주어진 함수는 $x=2$일 때 최솟값 32를 가지므로

$a=2$, $b=32$ $\quad\therefore a+b=34$

답 ②

0322 $5^x+5^{-x}=t$로 놓으면 $5^x>0$, $5^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=5^x+5^{-x}\ge 2\sqrt{5^x\cdot 5^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립) ⋯ ❶

이때 $25^x+25^{-x}=(5^x+5^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=(t^2-2)+2t-3=t^2+2t-5$

$=(t+1)^2-6\ (t\ge 2)$ ⋯ ❷

따라서 $t=2$, 즉 $x=0$일 때 최솟값 3을 가지므로

$a=0$, $b=3$ $\quad\therefore a-b=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 함수를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0323 $x+2y-4=0$에서 $x=4-2y$이므로

$7^x+49^y=7^{4-2y}+7^{2y}$

$7^{4-2y}>0$, $7^{2y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$7^{4-2y}+7^{2y}\ge 2\sqrt{7^{4-2y}\cdot 7^{2y}}$$
$$=2\sqrt{7^4}=2\cdot 7^2=98$$

이때 등호는 $7^{4-2y}=7^{2y}$일 때 성립하므로

$4-2y=2y$ $\quad\therefore y=1$

$y=1$을 $x=4-2y$에 대입하면 $\quad x=2$

따라서 7^x+49^y은 $x=2$, $y=1$일 때 최솟값 98을 가지므로

$\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=98$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=101$

답 101

유형 10 지수방정식; 밑을 같게 할 수 있는 경우 (본책 50쪽)

방정식의 각 항의 밑을 같게 한 다음

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)=g(x)\ (a>0,\ a\neq 1)$

임을 이용한다.

0324 $8^x-2^{x^2-4}=0$에서 $2^{3x}=2^{x^2-4}$이므로

$3x=x^2-4$, $\quad x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 실근의 합은

$-1+4=3$

답 ③

0325 $(2^x-8)(3^{2x}-9)=0$에서

$2^x=8$ 또는 $3^{2x}=9$

$2^x=8$에서 $\quad 2^x=2^3$ $\quad\therefore x=3$

$3^{2x}=9$에서 $\quad 9^x=9$ $\quad\therefore x=1$

따라서 주어진 방정식의 두 실근이 1, 3이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$

답 10

0326 $(5\sqrt{5})^{x^2}=25^{x+1}$에서 $5^{\frac{3}{2}x^2}=5^{2x+2}$이므로

$\frac{3}{2}x^2=2x+2$, $\quad 3x^2-4x-4=0$

$(3x+2)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

그런데 x는 정수이므로

$x=2$

답 ⑤

0327 $\frac{9^{x^2+1}}{3^{x+4}}=81$에서 $\quad \frac{(3^2)^{x^2+1}}{3^{x+4}}=3^4$

$\therefore 3^{2x^2-x-2}=3^4$ ⋯ ❶

즉 $2x^2-x-2=4$이므로 $\quad 2x^2-x-6=0$

$(2x+3)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$ ⋯ ❷

따라서 모든 실근의 곱은

$\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 2=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 $3^{f(x)}=3^{g(x)}$ 꼴로 변형할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 방정식의 실근을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 실근의 곱을 구할 수 있다.	20 %

유형 11 지수방정식; a^x 꼴이 반복되는 경우 (본책 50쪽)

방정식 $pa^{2x}+qa^x+r=0$의 해는 $a^x=t\ (t>0)$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차방정식 $pt^2+qt+r=0$의 해를 이용하여 구한다.

0328 $4^x+4^{2-x}=10$의 양변에 4^x을 곱하면

$(4^x)^2+4^2=10\cdot 4^x$ $\quad\therefore (4^x)^2-10\cdot 4^x+16=0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-10t+16=0$, $\quad (t-2)(t-8)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=8$

즉 $4^x=2$ 또는 $4^x=8$이므로 $\quad 2^{2x}=2$ 또는 $2^{2x}=2^3$

$2x=1$ 또는 $2x=3$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$이므로

$\beta-\alpha=1$

답 ①

0329 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=3^{2x+1}$,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3^x)=2\cdot 3^x+1$이므로 방정식

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$는

$3^{2x+1}=2\cdot 3^x+1$ $\quad\therefore 3\cdot(3^x)^2-2\cdot 3^x-1=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$3t^2-2t-1=0,\qquad (3t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=1\ (\because t>0)$

즉 $3^x=1$이므로 $\quad x=0$ 답 $x=0$

0330 $a^{2x}-a^x=6$에서 $\quad (a^x)^2-a^x-6=0$

$a^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-t-6=0$ ···➊

$(t+2)(t-3)=0\qquad \therefore t=3\ (\because t>0)$ ···➋

즉 $a^x=3$에서 방정식의 해가 $x=\frac{1}{4}$이므로 $\quad a^{\frac{1}{4}}=3$

$\therefore a=3^4=81$ ···➌

답 81

채점 기준	비율
➊ 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.	30 %
➋ t의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0331 $2^x+2^{-x}=t\ (t\geq 2)$로 놓으면

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

$2^x>0,\ 2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $t=2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

이므로 주어진 방정식은

$2(t^2-2)-3t-1=0,\qquad 2t^2-3t-5=0$

$(t+1)(2t-5)=0\qquad \therefore t=\frac{5}{2}\ (\because t\geq 2)$

즉 $2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$이므로 양변에 2^x을 곱하면

$(2^x)^2+1=\frac{5}{2}\cdot 2^x\qquad \therefore 2\cdot(2^x)^2-5\cdot 2^x+2=0$

$2^x=k\ (k>0)$로 놓으면

$2k^2-5k+2=0,\qquad (2k-1)(k-2)=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}$ 또는 $k=2$

즉 $2^x=\frac{1}{2}$ 또는 $2^x=2$이므로

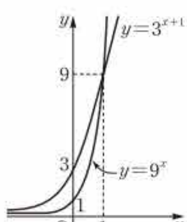
$x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 모든 실근의 합은 $\quad -1+1=0$ 답 ③

0332 $9^x=3^{x+1}$에서 $\quad 3^{2x}=3^{x+1}$

$2x=x+1\qquad \therefore x=1$

따라서 두 함수 $y=9^x$, $y=3^{x+1}$의 그래프의 교점의 x좌표는 1이므로 주어진 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$A(k,\ 9^k)$, $B(k,\ 3^{k+1})$이므로

(i) $k>1$인 경우

$\overline{AB}=9^k-3^{k+1}=54$이므로

$3^k=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-3t-54=0,\qquad (t+6)(t-9)=0$

$\therefore t=9\ (\because t>0)$

즉 $3^k=9$이므로 $\quad k=2$

(ii) $k<1$인 경우

$\overline{AB}=3^{k+1}-9^k=54$이므로 $3^k=t\ (t>0)$로 놓으면

$3t-t^2=54\qquad \therefore t^2-3t+54=0$ ······ ㉠

이때 t에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot 54=-207<0$

이므로 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

따라서 $\overline{AB}=54$를 만족시키는 상수 k가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad k=2$ 답 2

유형 12 지수방정식; 연립방정식 (본책 51쪽)

(i) $a^x=X,\ b^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 치환하여 $X,\ Y$에 대한 연립방정식을 세운다.
(ii) $X,\ Y$에 대한 연립방정식을 푼다.
(iii) $a^x=X,\ b^y=Y$에서 $x,\ y$의 값을 구한다.

0333 $\begin{cases}2^{x-1}+3^{y+1}=11\\ 2^{x+2}-3^{y-1}=15\end{cases}$에서 $\quad \begin{cases}\frac{1}{2}\cdot 2^x+3\cdot 3^y=11\\ 4\cdot 2^x-\frac{1}{3}\cdot 3^y=15\end{cases}$

$2^x=X,\ 3^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}\frac{1}{2}X+3Y=11\\ 4X-\frac{1}{3}Y=15\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $\quad X=4,\ Y=3$

즉 $2^x=4,\ 3^y=3$이므로 $\quad x=2,\ y=1$

따라서 $\alpha=2,\ \beta=1$이므로 $\quad \alpha\beta=2$ 답 ⑤

0334 $\begin{cases}2^{x+1}+2^{y+1}=24\\ 2^{x+y-2}=8\end{cases}$에서 $\quad \begin{cases}2\cdot 2^x+2\cdot 2^y=24\\ \frac{1}{4}\cdot 2^x\cdot 2^y=8\end{cases}$

$2^x=X,\ 2^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}2X+2Y=24\\ \frac{1}{4}XY=8\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}X+Y=12\\ XY=32\end{cases}$ ···➊

이 연립방정식을 풀면

$X=4,\ Y=8$ 또는 $X=8,\ Y=4$ ···➋

즉 $2^x=4,\ 2^y=8$ 또는 $2^x=8,\ 2^y=4$이므로

$x=2,\ y=3$ 또는 $x=3,\ y=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=2^2+3^2=13$ ···➌

답 13

채점 기준	비율
➊ 주어진 방정식을 $X,\ Y$에 대한 방정식으로 정리할 수 있다.	40 %
➋ $X,\ Y$의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 13 지수방정식; 밑 또는 지수가 같은 경우 (본책 51쪽)

① $\{h(x)\}^{f(x)}=\{h(x)\}^{g(x)}$ 꼴의 방정식
➡ $h(x)=1$ 또는 $f(x)=g(x)$의 해를 구한다. (단, $h(x)>0$)
② $\{h(x)\}^{f(x)}=\{g(x)\}^{f(x)}$ 꼴의 방정식
➡ $h(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=0$의 해를 구한다.
(단, $h(x)>0,\ g(x)>0$)

0335 $x^x \cdot x^8=(x^x)^2$에서 $\quad x^{x+8}=x^{2x}$

(i) $x=1$일 때, 주어진 방정식은 $1^9=1^2$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\neq1$일 때, $x+8=2x$에서 $\quad x=8$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$1+8=9$

답 ④

0336 (i) $x-5=0$, 즉 $x=5$일 때, 주어진 방정식은 $3^0=6^0$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x-5\neq0$일 때, $x-2=6$에서 $\quad x=8$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은

$5\cdot8=40$

답 40

0337 $x^{x^2-8}=x^{2x+7}$에서

(i) $x=1$일 때, 주어진 방정식은 $1^{-7}=1^9$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\neq1$일 때, $x^2-8=2x+7$에서 $\quad x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0 \quad \therefore x=5\left(\because x>\frac{1}{2}\right)$

(i), (ii)에서 $\quad a=1+5=6$ ⋯ ❶

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{3-2x}=3^{3-2x}$에서

(iii) $3-2x=0$, 즉 $x=\frac{3}{2}$일 때, 주어진 방정식은 $1^0=3^0$이므로 등식이 성립한다.

(iv) $3-2x\neq0$일 때, $x-\frac{1}{2}=3$에서 $\quad x=\frac{7}{2}$

(iii), (iv)에서 $\quad b=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5$ ⋯ ❷

$\therefore ab=30$ ⋯ ❸

답 30

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 14 지수방정식의 활용

본책 51쪽

방정식 $pa^{2x}+qa^x+r=0$의 두 근이 α, β이면 $a^x=t\ (t>0)$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차방정식 $pt^2+qt+r=0$의 두 근이 a^α, a^β임을 이용한다.

0338 $3^{2x}-3^{x+1}=a$에서 $\quad (3^x)^2-3\cdot3^x-a=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-3t-a=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-3)^2-4\cdot(-a)>0$

$9+4a>0 \quad \therefore a>-\frac{9}{4}$

(ii) 이차방정식 ㉠의 $\quad$(두 근의 합)$=3>0$

(iii) 이차방정식 ㉠의 $\quad$(두 근의 곱)$=-a>0 \quad \therefore a<0$

이상에서 $-\frac{9}{4}<a<0$이므로 $\quad m=-\frac{9}{4}$, $n=0$

$\therefore m+n=-\frac{9}{4}$

답 $-\frac{9}{4}$

SSEN 특강 이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 할 때

① 두 근이 모두 양수일 조건 ➡ $D\geq0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음수일 조건 ➡ $D\geq0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호일 조건 ➡ $\alpha\beta<0$

0339 $25^x-9\cdot5^x+15=0$에서 $\quad (5^x)^2-9\cdot5^x+15=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-9t+15=0$

이 방정식의 두 근이 5^α, 5^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$5^\alpha+5^\beta=9$, $5^\alpha\cdot5^\beta=15$

$\therefore 25^\alpha+25^\beta=(5^\alpha)^2+(5^\beta)^2=(5^\alpha+5^\beta)^2-2\cdot5^\alpha\cdot5^\beta$

$=9^2-2\cdot15=51$

답 ④

0340 $9^x-2\cdot3^{x+2}+k=0$에서 $\quad (3^x)^2-18\cdot3^x+k=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-18t+k=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 방정식의 서로 다른 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=2$

이고 방정식 ㉠의 두 근은 3^α, 3^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k=3^\alpha\cdot3^\beta=3^{\alpha+\beta}=3^2=9$

답 9

0341 $4^{2x}+a\cdot4^{x+1}+44-4a=0$에서

$(4^x)^2+4a\cdot4^x+44-4a=0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+4at+44-4a=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 m, $2m\ (m\neq0)$이라 하면 방정식 ㉠의 두 근은 4^m, 4^{2m}이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4^m+4^{2m}=-4a$, $4^m\cdot4^{2m}=44-4a$

$4^m=k\ (k>0)$로 놓으면

$k+k^2=-4a$, $k^3=44-4a$

따라서 $k^3=44+k+k^2$이므로 $\quad k^3-k^2-k-44=0$

$(k-4)(k^2+3k+11)=0$

$\therefore k=4\ (\because k^2+3k+11>0)$

따라서 $k+k^2=-4a$에서 $\quad -4a=4+4^2=20$

$\therefore a=-5$

답 ①

0342 $4^x+4^{-x}-2^{1+x}-2^{1-x}+k=0$에서

$4^x+4^{-x}-2(2^x+2^{-x})+k=0$

$2^x+2^{-x}=t\ (t\geq2)$로 놓으면

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 방정식은

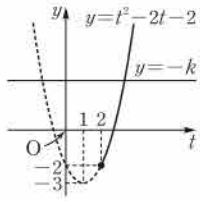
$(t^2-2)-2t+k=0 \qquad \therefore t^2-2t-2=-k \quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식이 적어도 하나의 실근을 가지려면 $t\geq 2$에서 방정식 ㉠이 적어도 하나의 실근을 가져야 한다.

이때 $t\geq 2$에서 함수

$y=t^2-2t-2=(t-1)^2-3$

의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$-k\geq -2$

$\therefore k\leq 2$ 답 $k\leq 2$

유형 15 지수부등식; 밑을 같게 할 수 있는 경우 본책 52쪽

부등식의 각 항의 밑을 같게 한 후 다음을 이용한다.
① $a>1$일 때, $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)>g(x)$
② $0<a<1$일 때, $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)<g(x)$

0343 $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x+1}<\left(\frac{1}{36}\right)^{3-2x}$에서 $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x+1}<\left(\frac{1}{6}\right)^{6-4x}$

밑이 1보다 작으므로 $2x+1>6-4x$

$6x>5 \qquad \therefore x>\frac{5}{6}$ 답 ②

0344 $10^{-f(x)}>10^{-g(x)}$에서 밑이 1보다 크므로

$-f(x)>-g(x) \qquad \therefore f(x)<g(x)$

주어진 그래프에서 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는

$-4<x<0$ 답 $-4<x<0$

0345 $3^{2x+1}>(\sqrt{27})^x$에서 $3^{2x+1}>3^{\frac{3}{2}x}$

밑이 1보다 크므로 $2x+1>\frac{3}{2}x$

$\frac{1}{2}x>-1 \qquad \therefore x>-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠ ··· ❶

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2+1}\geq\left(\frac{4}{3}\right)^{3x-5}$에서 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2+1}\geq\left(\frac{3}{4}\right)^{-3x+5}$

밑이 1보다 작으므로 $x^2+1\leq -3x+5$

$x^2+3x-4\leq 0, \qquad (x+4)(x-1)\leq 0$

$\therefore -4\leq x\leq 1 \quad \cdots\cdots$ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-2<x\leq 1$ ··· ❸

답 $-2<x\leq 1$

채점 기준	비율
❶ $3^{2x+1}>(\sqrt{27})^x$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2+1}\geq\left(\frac{4}{3}\right)^{3x-5}$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0346 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}\leq 2^{x^2-1}\leq\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2}$

밑이 1보다 작으므로 $x+5\geq -x^2+1\geq 2x-2$

(i) $x+5\geq -x^2+1$에서 $x^2+x+4\geq 0$

이때 $x^2+x+4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$이므로 이 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $-x^2+1\geq 2x-2$에서 $x^2+2x-3\leq 0$

$(x+3)(x-1)\leq 0 \qquad \therefore -3\leq x\leq 1$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$-3\leq x\leq 1$ 답 $-3\leq x\leq 1$

0347 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2}>3^{ax}$에서 $3^{-2x^2}>3^{ax}$

밑이 1보다 크므로 $-2x^2>ax$

$2x^2+ax<0, \qquad x(2x+a)<0$

$\therefore -\frac{a}{2}<x<0$ ($\because$ a는 자연수)

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4이므로
└ $-4, -3, -2, -1$의 4개

$-5\leq -\frac{a}{2}<-4 \qquad \therefore 8<a\leq 10$

따라서 자연수 a는 9, 10이므로 구하는 합은

$9+10=19$ 답 ②

0348 $10^{(x-2)^2}\leq\sqrt{10^{5-x}}$에서 $10^{(x-2)^2}\leq 10^{\frac{5-x}{2}}$

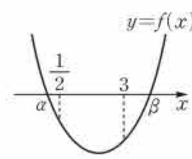
밑이 1보다 크므로 $(x-2)^2\leq\frac{5-x}{2}$

$2(x^2-4x+4)\leq 5-x, \qquad 2x^2-7x+3\leq 0$

$(2x-1)(x-3)\leq 0 \qquad \therefore \frac{1}{2}\leq x\leq 3$

$\therefore A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leq x\leq 3\right\}$ ··· ❶

집합 B에서 $f(x)=x^2+ax+6$으로 놓고 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다. ··· ❷



$f\left(\frac{1}{2}\right)\leq 0$에서 $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a+6\leq 0$

$\frac{1}{2}a\leq -\frac{25}{4} \qquad \therefore a\leq -\frac{25}{2} \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(3)\leq 0$에서 $9+3a+6\leq 0$

$3a\leq -15 \qquad \therefore a\leq -5 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $A\subset B$를 만족시키는 a의 값의 범위는

$a\leq -\frac{25}{2}$ ··· ❸

답 $a\leq -\frac{25}{2}$

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $A\subset B$를 만족시키는 $y=x^2+ax+6$의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	30 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

유형 16 지수부등식; a^x 꼴이 반복되는 경우 본책 53쪽

부등식 $pa^{2x}+qa^x+r>0$의 해는 $a^x=t\ (t>0)$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차부등식 $pt^2+qt+r>0$의 해를 이용하여 구한다.

0349 $3^{2x+1}-28\cdot3^x+9<0$에서

$3\cdot(3^x)^2-28\cdot3^x+9<0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $3t^2-28t+9<0$

$(3t-1)(t-9)<0$ $\therefore \frac{1}{3}<t<9$

즉 $3^{-1}<3^x<3^2$이고 밑이 1보다 크므로

$-1<x<2$

따라서 정수 x는 0, 1이므로 구하는 합은

$0+1=1$ 답 ③

0350 $\left(\frac{1}{49}\right)^x-56\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x+343\le0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^x\right\}^2-56\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x+343\le0$

$\left(\frac{1}{7}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-56t+343\le0$

$(t-7)(t-49)\le0$ $\therefore 7\le t\le49$

즉 $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^x\le\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$이고 밑이 1보다 작으므로

$-2\le x\le-1$

따라서 $M=-1$, $m=-2$이므로 $M-m=1$ 답 ①

유형 17 지수부등식; 밑에 미지수가 있는 경우 본책 53쪽

$x^{f(x)}>x^{g(x)}\ (x>0)$ 꼴의 부등식은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) $x=1$일 때, 주어진 부등식이 성립하지 않음을 보인다.

(ii) $0<x<1$일 때, $f(x)<g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

(iii) $x>1$일 때, $f(x)>g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

(iv) (ii), (iii)에서 구한 해의 합집합이 주어진 부등식의 해이다.

0351 $x^{3x-2}>x^{x+4}$에서 $x=1$일 때 $1^1=1^5$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(i) $0<x<1$일 때, $3x-2<x+4$이므로 $x<3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $x>1$일 때, $3x-2>x+4$이므로 $x>3$

그런데 $x>1$이므로 $x>3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<1$ 또는 $x>3$ 답 $0<x<1$ 또는 $x>3$

0352 $x^{x^2-8}<x^{2x}$에서 $x=1$일 때 $1^{-7}=1^2$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(i) $0<x<1$일 때, $x^2-8>2x$이므로 $x^2-2x-8>0$

$(x+2)(x-4)>0$ $\therefore x<-2$ 또는 $x>4$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.

(ii) $x>1$일 때, $x^2-8<2x$이므로 $x^2-2x-8<0$

$(x+2)(x-4)<0$ $\therefore -2<x<4$

그런데 $x>1$이므로 $1<x<4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<4$이므로

$\alpha=1$, $\beta=4$ $\therefore \alpha+\beta=5$ 답 ⑤

0353 (i) $x^2-2x+1=1$이면 $1=1$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.

따라서 $x^2-2x+1\ne1$에서 $x^2-2x\ne0$, $x(x-2)\ne0$

$\therefore x\ne0,\ x\ne2$

(ii) $0<x^2-2x+1<1$일 때,

$0<(x-1)^2<1$에서 $-1<x-1<0$ 또는 $0<x-1<1$

$\therefore 0<x<1$ 또는 $1<x<2$ …… ㉠

주어진 부등식 $(x^2-2x+1)^{x-1}<(x^2-2x+1)^0$에서 밑이 1보다 작으므로

$x-1>0$ $\therefore x>1$

그런데 ㉠이므로 $1<x<2$

(iii) $x^2-2x+1>1$일 때,

$x(x-2)>0$에서 $x<0$ 또는 $x>2$ …… ㉡

주어진 부등식 $(x^2-2x+1)^{x-1}<(x^2-2x+1)^0$에서 밑이 1보다 크므로

$x-1<0$ $\therefore x<1$

그런데 ㉡이므로 $x<0$

이상에서 $S=\{x\,|\,x<0$ 또는 $1<x<2\}$이므로 집합 S의 원소가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

유형 18 지수부등식이 항상 성립할 조건 본책 53쪽

모든 실수 x에 대하여 부등식 $pa^{2x}+qa^x+r>0$이 성립하려면 $a^x=t\ (t>0)$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차부등식 $pt^2+qt+r>0$이 $t>0$에서 항상 성립해야 한다.

0354 $4^x-2^{x+2}+k\ge0$에서 $(2^x)^2-4\cdot2^x+k\ge0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-4t+k\ge0$

$\therefore (t-2)^2+k-4\ge0$

이 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$k-4\ge0$ $\therefore k\ge4$

따라서 k의 최솟값은 4이다. 답 4

0355 $\left(\frac{1}{16}\right)^x-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}>a$에서

$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^x\right\}^2-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x-a>0$

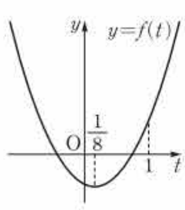
$\left(\frac{1}{4}\right)^x=t$로 놓으면 $x\le0$에서 $t\ge1$이고

$t^2-\frac{1}{4}t-a>0$

이 부등식이 $t\ge1$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로

$f(t)=t^2-\frac{1}{4}t-a$

$=\left(t-\frac{1}{8}\right)^2-a-\frac{1}{64}$



로 놓으면 오른쪽 그림에서 $f(1)>0$이어야 한다.

즉 $f(1)=1-\frac{1}{4}-a>0$이므로

$a<\frac{3}{4}$ 답 $a<\frac{3}{4}$

0356 $9^x-2a\cdot 3^x+9\geq 0$에서

$(3^x)^2-2a\cdot 3^x+9\geq 0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-2at+9\geq 0$

$\therefore\ (t-a)^2-a^2+9\geq 0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠ $\quad\cdots$ ❶

부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

(i) $a>0$일 때,

$-a^2+9\geq 0$에서 $\quad a^2-9\leq 0$

$(a+3)(a-3)\leq 0 \quad \therefore\ -3\leq a\leq 3$

그런데 $a>0$이므로 $\quad 0<a\leq 3 \quad\cdots$ ❷

(ii) $a\leq 0$일 때,

$t=0$이면 ㉠에서 $9\geq 0$이므로 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다. $\quad\cdots$ ❸

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는 $a\leq 3$이므로 a의 최댓값은 3이다. $\quad\cdots$ ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 t에 대한 이차부등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $a>0$일 때의 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ $a\leq 0$일 때의 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

유형 19 지수방정식과 지수부등식의 실생활에의 활용 본책 54쪽

처음의 양이 p이고 매시간마다 a배씩 변할 때, x시간 후의 양을 y라 하면

⇒ $y=pa^x$

0357 50마리의 박테리아가 4시간 후에 4050마리가 되었으므로

$50a^4=4050, \quad a^4=81=3^4$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

따라서 한 마리의 박테리아가 x시간 후에 3^x마리가 되므로

$50\cdot 3^x=36450, \quad 3^x=729=3^6$

$\therefore\ x=6$

즉 박테리아는 6시간 후에 36450마리가 된다. 답 ②

0358 수면에서의 빛의 밝기가 I_0 cd일 때, 수심이 x m인 곳에서의 빛의 밝기는 $I_0\cdot 4^{-0.2x}$ cd이므로

$I_0\cdot 4^{-0.2x}\leq \frac{1}{64}I_0, \quad 4^{-0.2x}\leq \frac{1}{64}=4^{-3}$

밑이 1보다 크므로 $\quad -0.2x\leq -3$

$\therefore\ x\geq 15$

즉 수심은 최소 15 m이어야 한다. 답 15 m

0359 처음 빛의 양을 1이라 하면 필름을 n장 붙일 때 통과하는 빛의 양은 $\left(\frac{1}{4}\right)^n$이므로

$\left(\frac{1}{4}\right)^n\leq \frac{1}{512}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\leq \left(\frac{1}{2}\right)^9$

밑이 1보다 작으므로 $\quad 2n\geq 9$

$\therefore\ n\geq 4.5$

이때 n은 자연수이므로 n의 최솟값은 5이다.

즉 필름은 최소 5장을 붙여야 한다. 답 ③

0360 처음 ^{14}C의 양이 1 kg, 즉 1000 g일 때 x년 후에 남아 있는 ^{14}C의 양은 62.5 g이므로

$1000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=62.5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=\frac{62.5}{1000}=\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\frac{x}{5730}=4 \qquad \therefore\ x=22920$

즉 유물은 22920년 전의 것이다. 답 22920년

0361 1st $x=-1$에서의 함숫값을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

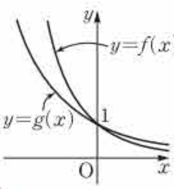
ㄱ. $g(-1)<1$에서 $\quad b^{-1}<b^0 \quad \therefore\ b>1$

$f(-1)>1$에서 $\quad a^{-1}>a^0 \quad \therefore\ 0<a<1$

$\therefore\ a<1<b$

2nd $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $a<b<1$일 때, $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x>0$에서

$f(x)<g(x)$

$\therefore\ f(a)<g(a)$ — $a>0$이므로 $f(a)<g(a)$

3rd $0<a<1$일 때와 $a>1$일 때로 나누어 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $ab=1$이면 $b=\frac{1}{a}$이고

$f(a)=a^a,\ g(-b)=b^{-b}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{a}}=a^{\frac{1}{a}}$

이므로

(i) $0<a<1$일 때,

$a<\frac{1}{a}$이므로 $\quad a^a>a^{\frac{1}{a}} \quad \therefore\ f(a)>g(-b)$

(ii) $a>1$일 때,

$a>\frac{1}{a}$, 즉 $a>b$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad f(a)>g(-b)$

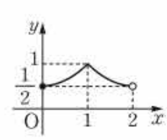
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0362 1st $0\leq x<2$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

조건 (나)에서

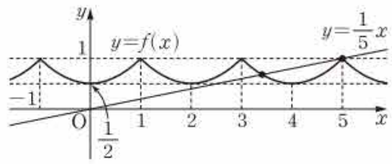
$$f(x)=\begin{cases} 2^{x-1} & (0\leq x<1) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} & (1\leq x<2) \end{cases}$$

따라서 $0\leq x<2$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2nd 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{5}x$의 교점의 개수를 구한다.

조건 ㈎에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{5}x$는 두 점에서 만나므로 구하는 교점의 개수는 2이다.

답 2

0363 1st $\overline{AB}=6\sqrt{2}$임을 이용하여 두 점 A, B의 x좌표에 대한 식을 구한다.

두 점 A, B가 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$A(p, p)$, $B(q, q)$ $(p<q)$

라 하면 $\overline{AB}=6\sqrt{2}$에서 $\sqrt{(q-p)^2+(q-p)^2}=6\sqrt{2}$

$\sqrt{2}(q-p)=6\sqrt{2}$ ($\because q-p>0$)

$\therefore q-p=6$ …… ㉠

2nd 사각형 ACDB의 넓이가 30임을 이용하여 두 점 A, B의 x좌표에 대한 식을 구한다.

사각형 ACDB의 넓이가 30이고 $\overline{AC}=p$, $\overline{BD}=q$, $\overline{CD}=q-p$ 이므로

사다리꼴

$\underbrace{\frac{1}{2}(p+q)(q-p)}_{\frac{1}{2}\cdot(\overline{AC}+\overline{BD})\cdot\overline{CD}}=30$

$\frac{1}{2}\cdot(p+q)\cdot 6=30$ ($\because$ ㉠)

$\therefore p+q=10$ …… ㉡

3rd 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=2$, $q=8$

$\therefore A(2, 2)$, $B(8, 8)$

4th $a+b$의 값을 구한다.

점 $A(2, 2)$가 곡선 $y=2^{ax+b}$ 위에 있으므로

$2=2^{2a+b}$ $\therefore 1=2a+b$ …… ㉢

또 점 $B(8, 8)$이 곡선 $y=2^{ax+b}$ 위에 있으므로

$8=2^{8a+b}$, $2^3=2^{8a+b}$

$\therefore 3=8a+b$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=\frac{2}{3}$

답 ④

0364 1st $\overline{AC}=6$임을 이용하여 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 구한다.

$a^{2x}=t$에서 $2x=\log_a t$ $\therefore x=\frac{1}{2}\log_a t$

$\therefore A\left(\frac{1}{2}\log_a t, t\right)$

$a^{\frac{x}{2}}=t$에서 $\frac{x}{2}=\log_a t$ $\therefore x=2\log_a t$

$\therefore C(2\log_a t, t)$

따라서 $\overline{AC}=2\log_a t-\frac{1}{2}\log_a t=\frac{3}{2}\log_a t$이므로

$\frac{3}{2}\log_a t=6$, $\log_a t=4$ $\therefore t=a^4$

$\therefore A(2, a^4)$, $C(8, a^4)$

한편 점 B는 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=a^4$의 교점이므로

$B(4, a^4)$

2nd 삼각형 ADB의 넓이가 6임을 이용하여 a^2의 값을 구한다.

$D(2, a^2)$이고, 삼각형 ADB의 넓이가 6이므로

$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(4-2)\cdot(a^4-a^2)}_{\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}}=6$

$a^4-a^2-6=0$, $(a^2+2)(a^2-3)=0$

$\therefore a^2=3$ ($\because a^2>1$)

3rd 삼각형 BCE의 넓이를 구한다.

$E(8, a^8)$이므로 삼각형 BCE의 넓이는

$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(8-4)\cdot(a^8-a^4)}_{\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CE}}=2\{(a^2)^4-(a^2)^2\}$

$=2(81-9)$

$=144$

답 144

0365 1st 함수의 그래프의 평행이동을 이용하여 $\overline{PQ}$의 길이를 구한다.

함수 $y=3^{-x+2}$의 그래프는 $y=3^{-x-2}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{PQ}=4$

2nd $\overline{PQ}=\overline{QR}$임을 이용하여 상수 k의 값을 구한다.

$3^{-q+2}=k$에서 $-q+2=\log_3 k$이므로

$q=2-\log_3 k$

$3^{r-2}=k$에서 $r-2=\log_3 k$이므로

$r=2+\log_3 k$

$\overline{QR}=\underbrace{4}_{\overline{PQ}=4}$에서

$(2+\log_3 k)-(2-\log_3 k)=4$, $\log_3 k=2$

$\therefore k=3^2=9$

답 9

다른 풀이 두 함수 $y=3^{-x-2}$, $y=3^{x-2}$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $\overline{PQ}=\overline{QR}$를 만족시키는 점 Q는 y축 위의 점이다.

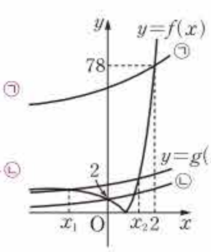
즉 $y=3^{-x+2}$의 그래프가 점 $(0, k)$를 지나야 하므로

$k=3^2=9$

0366 1st 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=2^{x+k}$의 그래프의 위치를 파악한다.

$f(x)=|9^x-3|$, $g(x)=2^{x+k}$이라 하자.

$f(2)=|9^2-3|=78$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2, 78)$을 지날 때보다 위쪽에 위치하면 $x_2>2$가 되고, 점 $(0, 2)$를 지날 때보다 아래쪽에 위치하면 $x_1>0$이 된다.



따라서 $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프가 ㉠, ㉡ 사이에 있어야 한다.

2nd 주어진 조건을 만족시키는 k에 대한 부등식을 구한다.

$g(2)<f(2)$, $g(0)>f(0)$을 만족시켜야 하므로

(i) $g(2)<f(2)$에서 $2^{2+k}<78$

$4\cdot 2^k<78$ $\therefore 2^k<19.5$

(ii) $g(0)>f(0)$에서 $2^k>2$

(i), (ii)에서 $2<2^k<19.5$

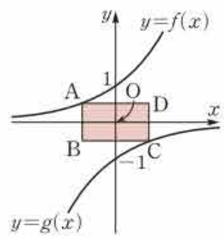
(3rd) 모든 자연수 k의 값의 합을 구한다.
주어진 조건을 만족시키는 자연수 k는 2, 3, 4이므로 구하는 합은
$2+3+4=9$ 답 ②

0367 (1st) $p>1$이고 $m<n$이면 $p^m<p^n$임을 이용하여 b, c의 대소를 비교한다.
$\sqrt{2}<\sqrt{3}$이므로 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}<(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$
$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}<(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}=(\sqrt{6})^{\sqrt{3}}$
$\therefore b<c$
(2nd) $\dfrac{a}{b}$의 값의 범위를 이용하여 a, b의 대소를 비교한다.
$$\frac{a}{b}=\frac{(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}}{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}}=(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$
에서 $0<\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<1$이고 $\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$이므로
$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}<1 \qquad \therefore a<b$
(3rd) a, b, c의 대소를 비교한다.
$b<c$, $a<b$이므로 $a<b<c$ 답 $a<b<c$

0368 (1st) $1\le x\le 4$에서 $f(x)$의 값의 범위를 구한다.
$f(x)=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$이고
$f(1)=-2$, $f(3)=-6$, $f(4)=-5$
이므로 $1\le x\le 4$에서
$-6\le f(x)\le -2$
(2nd) m의 값을 구한다.
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=a^{f(x)}$에서
(i) $a>1$일 때,
$(g\circ f)(x)$는 $f(x)=-2$일 때 최댓값 27을 가지므로
$a^{-2}=27$, $a^2=\dfrac{1}{27}$
$\therefore a=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ ($\because a>0$)
그런데 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$은 $a>1$을 만족시키지 않는다.
(ii) $0<a<1$일 때,
$(g\circ f)(x)$는 $f(x)=-6$일 때 최댓값 27을 가지므로
$a^{-6}=27$, $a^6=\dfrac{1}{27}$
$\therefore a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because a>0$)
또 $f(x)=-2$일 때 최솟값 m을 가지므로
$m=a^{-2}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2}=3$
(i), (ii)에서 $m=3$ 답 ④

0369 (1st) 함수 $f(x)$의 식을 이용하여 함수 $g(x)$의 식을 구한다.
함수 $y=2^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-2^{-x}$이므로
$g(x)=-2^{-x}$

(2nd) $\overline{AB}$의 길이의 최솟값을 구한다.
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



사각형 ABCD는 직사각형이고
$\beta-\alpha=2$, 즉 $\beta=\alpha+2$이므로
$\overline{AB}=f(\alpha)-g(\beta)=2^\alpha-(-2^{-\beta})$
$=2^\alpha+2^{-\beta}$
$=2^\alpha+2^{-\alpha-2}$
이때 $2^\alpha>0$, $2^{-\alpha-2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2^\alpha+2^{-\alpha-2}\ge 2\sqrt{2^\alpha\cdot 2^{-\alpha-2}}$
$=2\sqrt{2^{-2}}=2\cdot\dfrac{1}{2}$
$=1$ (단, 등호는 $\alpha=-1$일 때 성립)
$2^\alpha=2^{-\alpha-2}$에서 $\alpha=-\alpha-2$
$2\alpha=-2 \quad \therefore \alpha=-1$
(3rd) 사각형 ABCD의 넓이의 최솟값을 구한다.
$\overline{AB}$의 길이의 최솟값이 1이므로 사각형 ABCD의 넓이의 최솟값은
$\overline{AB}\cdot\overline{AD}=1\cdot 2=2$ 답 ②

0370 (1st) 주어진 부등식을 만족시키는 $f(x)$, $g(x)$의 값의 범위를 구한다.
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\ge\left(\dfrac{1}{8}\right)^{g(x)}$에서 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\ge\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3g(x)}$
밑이 1보다 작으므로 $f(x)g(x)\le 3g(x)$
$g(x)\{f(x)-3\}\le 0$
$\therefore g(x)=0$ 또는 $f(x)=3$
또는 $(g(x)>0,\ f(x)<3)$
또는 $(g(x)<0,\ f(x)>3)$
(2nd) 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.
(i) $g(x)=0$일 때, $x=3$
(ii) $f(x)=3$일 때, $x=1$ 또는 $x=5$
(iii) $f(x)<3$, $g(x)>0$일 때,
주어진 그래프에서 부등식 $f(x)<3$의 해는
$1<x<5$
또 부등식 $g(x)>0$의 해는 $x>3$
따라서 $f(x)<3$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$3<x<5$
(iv) $f(x)>3$, $g(x)<0$일 때,
주어진 그래프에서 부등식 $f(x)>3$의 해는
$x<1$ 또는 $x>5$
또 부등식 $g(x)<0$의 해는 $x<3$
따라서 $f(x)>3$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$x<1$
이상에서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는
$x\le 1$ 또는 $3\le x\le 5$
(3rd) 모든 자연수 x의 값의 합을 구한다.
주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 3, 4, 5이므로 구하는 합은
$1+3+4+5=13$ 답 ④

03 지수함수

0371 1st $-2\le x\le 2$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 값의 범위를 구한다.

$-2\le x\le 2$에서 $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\therefore \frac{1}{4}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 4$ …… ㉠

2nd a의 값의 범위를 구한다.

(i) $a\cdot 2^{-x}\le 2^{-2x+1}$에서

$a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

양변을 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$으로 나누면

$a\le 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$, 즉 $\frac{a}{2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x$

㉠에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 최솟값이 $\frac{1}{4}$이므로 위의 부등식이 성립하려면

$\frac{a}{2}\le\frac{1}{4}\qquad\therefore a\le\frac{1}{2}$

3rd b의 값의 범위를 구한다.

(ii) $2^{-2x+1}\le b\cdot 8^{-x}$에서

$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\le b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$

양변을 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$으로 나누면 $\quad 2\le b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$b\le 0$이면 부등식이 성립하지 않으므로 $\quad b>0$

양변을 b로 나누면 $\quad \frac{2}{b}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x$

㉠에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 최솟값이 $\frac{1}{4}$이므로 위의 부등식이 성립하려면

$\frac{2}{b}\le\frac{1}{4}\qquad\therefore b\ge 8$

4th $b-a$의 최솟값을 구한다.

(i), (ii)에서 $\quad b-a\ge 8-\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$

따라서 $b-a$의 최솟값은 $\frac{15}{2}$이다.

답 $\frac{15}{2}$

0372 1st 주어진 식에 $t=15$, $W_0=w_0$, $W=3w_0$을 대입하여 10^{15a}의 값을 구한다.

$t=15$일 때 $W_0=w_0$, $W=3w_0$이므로

$3w_0=\frac{w_0}{2}10^{15a}(1+10^{15a}),\qquad 10^{30a}+10^{15a}=6$

$\therefore 10^{30a}+10^{15a}-6=0$

$10^{15a}=X(X>0)$로 놓으면

$X^2+X-6=0,\qquad (X+3)(X-2)=0$

$\therefore X=2\ (\because X>0)\qquad\therefore 10^{15a}=2$

2nd k의 값을 구한다.

$t=30$일 때의 기대자산은

$$\frac{w_0}{2}10^{30a}(1+10^{30a})=\frac{w_0}{2}(10^{15a})^2\{1+(10^{15a})^2\}$$
$$=\frac{w_0}{2}\cdot 2^2(1+2^2)$$
$$=10w_0$$

$\therefore k=10$

답 ②

0373 전략 점 A의 x좌표를 t로 놓고 두 직선 OA, AB의 기울기를 t에 대한 식으로 나타낸 후 두 직선이 서로 수직임을 이용한다.

풀이 점 A의 x좌표를 t라 하면 $\quad A(t, \sqrt{5})$

세 점 $O(0, 0)$, $A(t, \sqrt{5})$, $B(6, 0)$에 대하여

직선 OA의 기울기는 $\quad \frac{\sqrt{5}}{t}$

직선 AB의 기울기는 $\quad \frac{\sqrt{5}}{t-6}$ ··· ❶

두 직선 OA, AB가 서로 수직이므로

$\frac{\sqrt{5}}{t}\cdot\frac{\sqrt{5}}{t-6}=-1,\qquad t(t-6)=-5$

$t^2-6t+5=0,\qquad (t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$ ··· ❷

(i) $t=1$일 때,

점 $A(1, \sqrt{5})$가 함수 $y=a^x$의 그래프 위에 있으므로

$a=\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$

(ii) $t=5$일 때,

점 $A(5, \sqrt{5})$가 함수 $y=a^x$의 그래프 위에 있으므로

$a^5=\sqrt{5}$

$\therefore a=(\sqrt{5})^{\frac{1}{5}}=(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}}=5^{\frac{1}{10}}$ ··· ❸

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 곱은

$5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{10}}=5^{\frac{3}{5}}$ ··· ❹

답 $5^{\frac{3}{5}}$

채점 기준	비율
❶ 점 A의 x좌표를 t로 놓고 두 직선 OA, AB의 기울기를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ t의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0374 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭임을 이용하여 m의 값을 구한다.

풀이 $y=a^x$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로 두 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 $y=a^{x-m}$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-m}$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$\therefore m=3$ ··· ❶

따라서 $f(x)=a^{x-3}$, $g(x)=a^{3-x}$이므로

$f(2)=a^{2-3}=\frac{1}{a}$, $g(2)=a$

즉 $P\left(2, \frac{1}{a}\right)$, $Q(2, a)$이고 $\overline{PQ}=\frac{3}{2}$이므로

$a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2},\qquad 2a^2-3a-2=0$

$(2a+1)(a-2)=0\qquad\therefore a=2\ (\because a>1)$ ··· ❷

$\therefore am=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ am의 값을 구할 수 있다.	10 %

0375 전략 $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{x}{3}\right)$, $f\left(\frac{x}{6}\right)$를 각각 구한 후 방정식에 대입한다.

풀이 $f(1)=64$이고 $f(ab)=\{f(b)\}^a$이므로

$f(x)=f(x\cdot 1)=\{f(1)\}^x=64^x=2^{6x}$ ➊

따라서

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{6\cdot\frac{1}{2}}=2^3=8,$

$f\left(\frac{x}{3}\right)=2^{6\cdot\frac{x}{3}}=2^{2x},$

$f\left(\frac{x}{6}\right)=2^{6\cdot\frac{x}{6}}=2^x$

이므로 주어진 방정식은 $8\cdot 2^{2x}-2^x=0$ ➋

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $8t^2-t=0$

$t(8t-1)=0$ $\quad \therefore t=\frac{1}{8}\ (\because t>0)$

즉 $2^x=\frac{1}{8}$이므로 $x=-3$ ➌

답 $x=-3$

채점 기준	비율
➊ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
➋ 주어진 방정식을 밑이 2인 지수방정식으로 나타낼 수 있다.	40 %
➌ 방정식의 해를 구할 수 있다.	30 %

0376 전략 점 P_k의 좌표를 이용하여 $\triangle OP_kQ_k$의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P_k는 곡선 $y=3^{x-2}$과 직선 $x=k$의 교점이므로

$P_k(k,\ 3^{k-2})$

$y=3^{x-2}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $\overline{P_kQ_k}=2$

$\therefore S_k=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3^{k-2}=3^{k-2}$ ➊

$S_kS_{k+1}>S_{10}$에서 $3^{k-2}\cdot 3^{k-1}>3^{10-2}$, $\quad 3^{2k-3}>3^8$

밑이 1보다 크므로 $2k-3>8$

$2k>11$ $\quad \therefore k>\frac{11}{2}$ ➋

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다. ➌

답 6

채점 기준	비율
➊ S_k를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
➋ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
➌ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0377 전략 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$임을 이용한다.

풀이 $4^x+a\cdot 2^x+b<0$에서 $(2^x)^2+a\cdot 2^x+b<0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2+at+b<0$ ...... ㉠

이때 $-1<x<0$에서 $2^{-1}<2^x<2^0$, 즉 $\frac{1}{2}<t<1$이고 이것이 ㉠의 해와 같으므로

$a=-\left(\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{3}{2}$, $\quad b=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ ➊

따라서 $\left(\frac{1}{4}\right)^x+3a\left(\frac{1}{2}\right)^x+4b<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+2<0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=s\ (s>0)$로 놓으면 $s^2-\frac{9}{2}s+2<0$ ➋

$2s^2-9s+4<0,$ $\quad (2s-1)(s-4)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<s<4$

즉 $\frac{1}{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$이고 밑이 1보다 작으므로

$-2<x<1$ ➌

답 $-2<x<1$

채점 기준	비율
➊ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ $\left(\frac{1}{4}\right)^x+3a\left(\frac{1}{2}\right)^x+4b<0$을 이차부등식으로 나타낼 수 있다.	20 %
➌ 부등식 $\left(\frac{1}{4}\right)^x+3a\left(\frac{1}{2}\right)^x+4b<0$의 해를 구할 수 있다.	40 %

0378 전략 $2x$시간 후의 세균 수를 거듭제곱으로 나타낸 후 세균 수의 합을 이용하여 지수부등식을 세운다.

풀이 배양액 A에 있는 세균 수는 1시간마다 3배가 되므로 2시간마다 9배가 된다.

$2x$시간 후 배양액 A, B에 있는 세균 수는 각각

$10\cdot 9^x$, $90\cdot 3^x$

이때 세균 수의 합이 1620마리 이상이 되려면

$10\cdot 9^x+90\cdot 3^x\ge 1620$ ➊

$\therefore (3^x)^2+9\cdot 3^x-162\ge 0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2+9t-162\ge 0$ ➋

$(t+18)(t-9)\ge 0$ $\quad \therefore t\ge 9\ (\because t>0)$

즉 $3^x\ge 9$에서 $x\ge 2$

따라서 최소 4시간이 지나야 한다. ➌

답 4시간

채점 기준	비율
➊ 지수부등식을 세울 수 있다.	40 %
➋ 지수부등식을 이차부등식으로 나타낼 수 있다.	20 %
➌ 최소 몇 시간이 지나야 하는지 구할 수 있다.	40 %

04 로그함수

0379 주어진 함수는 $\{x|x\text{는 실수}\}$에서 $\{y|y>0\}$으로의 일대일대응이다.
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 로그의 정의에 의하여 $x=\log_{\frac{1}{2}}y$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 답 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$

참고 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$에서 정의역 $\{x|x>0\}$은 생략할 수 있다.

0380 주어진 함수는 $\{x|x>0\}$에서 $\{y|y\text{는 실수}\}$로의 일대일대응이다.
$y=\log_3 x$에서 로그의 정의에 의하여 $x=3^y$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=3^x$ 답 $y=3^x$

0381 $f(1)=\log_2 1=0$ 답 0

0382 $f(2)=\log_2 2=1$ 답 1

0383 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2\frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$ 답 -2

0384 $f(8)=\log_2 8=\log_2 2^3=3$,
$f\left(\frac{1}{16}\right)=\log_2\frac{1}{16}=\log_2 2^{-4}=-4$
이므로 $f(8)f\left(\frac{1}{16}\right)=3\cdot(-4)=-12$ 답 -12

0385 $f(1)=\log_{\frac{1}{3}}1=0$ 답 0

0386 $f\left(\frac{1}{27}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3=3$ 답 3

0387 $f(\sqrt{3})=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0388 $f(9)=\log_{\frac{1}{3}}9=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=-2$,
$f\left(\frac{1}{9}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2=2$
이므로 $f(9)-f\left(\frac{1}{9}\right)=-2-2=-4$ 답 -4

0389 ㄱ. 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.
ㄷ. $y=\log_3 x$의 그래프는 점 $(3,\ \underbrace{1}_{\log_3 3=1})$을 지난다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

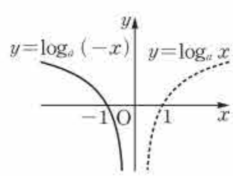
0390 $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$ 답 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

0391 $\log_4 25=\log_{2^2}5^2=\log_2 5$
이때 $5<12$이고 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $\log_2 5<\log_2 12$
$\therefore \log_4 25<\log_2 12$ 답 $\log_4 25<\log_2 12$

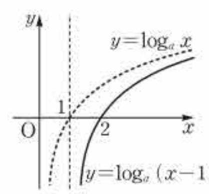
0392 $2=\log_3 3^2=\log_3 9$
이때 $8<9<11$이고 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $\log_3 8<\log_3 9<\log_3 11$
$\therefore \log_3 8<2<\log_3 11$ 답 $\log_3 8<2<\log_3 11$

0393 $-1=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{4}}4$,
$\log_{\frac{1}{16}}81=\log_{\left(\frac{1}{4}\right)^2}9^2=\log_{\frac{1}{4}}9$,
$2\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{5}=\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{5})^2=\log_{\frac{1}{4}}5$
이때 $4<5<9$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\log_{\frac{1}{4}}9<\log_{\frac{1}{4}}5<\log_{\frac{1}{4}}4$
$\therefore \log_{\frac{1}{16}}81<2\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{5}<-1$
답 $\log_{\frac{1}{16}}81<2\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{5}<-1$

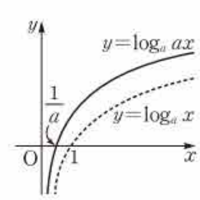
0394 $y=\log_a(-x)$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



0395 $y=\log_a(x-1)$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조

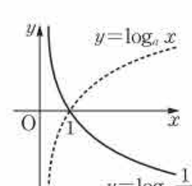


0396 $y=\log_a ax=\log_a a+\log_a x$
$=1+\log_a x$
따라서 $y=\log_a ax$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



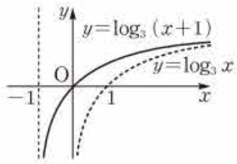
답 풀이 참조

0397 $y=\log_a\frac{1}{x}=\log_a x^{-1}=-\log_a x$
따라서 $y=\log_a\frac{1}{x}$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

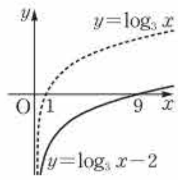
0398 $y=\log_3(x+1)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x \mid x>-1\}$
점근선의 방정식은 $x=-1$

답 풀이 참조

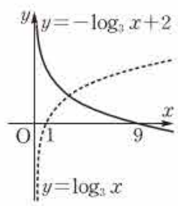
0399 $y=\log_3 x-2$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x \mid x>0\}$
점근선의 방정식은 $x=0$

답 풀이 참조

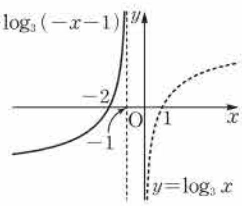
0400 $y=-\log_3 x+2$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x \mid x>0\}$
점근선의 방정식은 $x=0$

답 풀이 참조

0401 $y=-\log_3(-x-1)=-\log_3\{-(x+1)\}$
에서 $y=-\log_3(-x-1)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x \mid x<-1\}$
점근선의 방정식은 $x=-1$ 답 풀이 참조

0402 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $2\le x\le 128$에서
$x=128$일 때 최대이고 최댓값은 $\log_2 128=\log_2 2^7=7$
$x=2$일 때 최소이고 최솟값은 $\log_2 2=1$

답 최댓값: 7, 최솟값: 1

0403 함수 $y=\log_{\frac{1}{10}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\frac{1}{10}\le x\le 1000$에서
$x=\frac{1}{10}$일 때 최대이고 최댓값은 $\log_{\frac{1}{10}}\frac{1}{10}=1$
$x=1000$일 때 최소이고 최솟값은

$\log_{\frac{1}{10}} 1000=\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}=-3$

답 최댓값: 1, 최솟값: -3

0404 함수 $y=-\log_5(x-1)=\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $6\le x\le 126$에서
$x=6$일 때 최대이고 최댓값은 $-\log_5 5=-1$
$x=126$일 때 최소이고 최솟값은 $-\log_5 125=-\log_5 5^3=-3$

답 최댓값: -1, 최솟값: -3

0405 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} 3x+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\frac{1}{3}\le x\le \frac{8}{3}$에서
$x=\frac{1}{3}$일 때 최대이고 최댓값은 $\log_{\frac{1}{2}} 1+1=0+1=1$
$x=\frac{8}{3}$일 때 최소이고 최솟값은 $\log_{\frac{1}{2}} 8+1=-3+1=-2$

답 최댓값: 1, 최솟값: -2

0406 진수의 조건에서

$2x-1>0 \qquad \therefore x>\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2(2x-1)=3$에서 $2x-1=2^3 \qquad \therefore x=\frac{9}{2}$
$x=\frac{9}{2}$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

답 $x=\frac{9}{2}$

0407 밑의 조건에서 $2x>0,\ 2x\ne 1$

$\therefore x>0,\ x\ne\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$\log_{2x} 16=2$에서 $16=(2x)^2, \quad 2x=\pm 4$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=2$ 답 $x=2$

0408 진수의 조건에서

$5x-1>0,\ 2x+3>0 \qquad \therefore x>\frac{1}{5}$ ⋯⋯ ㉠

$\log_3(5x-1)=\log_3(2x+3)$에서

$5x-1=2x+3, \quad 3x=4 \qquad \therefore x=\frac{4}{3}$

$x=\frac{4}{3}$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

답 $x=\frac{4}{3}$

0409 진수의 조건에서

$x+1>0,\ 3x+7>0 \qquad \therefore x>-1$ ⋯⋯ ㉠

$2\log_{\frac{1}{5}}(x+1)=\log_{\frac{1}{5}}(3x+7)$에서

$\log_{\frac{1}{5}}(x+1)^2=\log_{\frac{1}{5}}(3x+7)$

즉 $(x+1)^2=3x+7$이므로 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

이때 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=3$ 답 $x=3$

0410 $(\log x)^2-\log x^4=0$에서 $(\log x)^2-4\log x=0$
$\log x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-4t=0, \quad t(t-4)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=4$

따라서 $\log x=0$ 또는 $\log x=4$이므로

$x=1$ 또는 $x=10^4=10000$ 　　답 $x=1$ 또는 $x=10000$

참고 $\log x=t$에서 $x=10^t$이므로 $x>0$이다. 즉 진수의 조건을 항상 만족시킨다.

0411 $\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$(t+1)(t-3)=5,\quad t^2-2t-8=0$

$(t+2)(t-4)=0\quad \therefore t=-2$ 또는 $t=4$

따라서 $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=4$이므로

$x=3^{-2}=\frac{1}{9}$ 또는 $x=3^4=81$ 　　답 $x=\frac{1}{9}$ 또는 $x=81$

0412 진수의 조건에서

$x+4>0\quad \therefore x>-4$ 　　...... ㉠

$\log_2(x+4)=\log_3(x+4)$에서

$x+4=1\quad \therefore x=-3$

$x=-3$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

답 $x=-3$

0413 밑과 진수의 조건에서

$x+6>0,\ x+6\neq 1,\ 2x-4>0,\ 2x-4\neq 1,\ x-7>0$

$\therefore x>7$ 　　...... ㉠

(i) $x+6=2x-4$일 때, 　$x=10$

$x=10$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(ii) $x-7=1$일 때, 　$x=8$

$x=8$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=8$ 또는 $x=10$ 　　답 $x=8$ 또는 $x=10$

0414 $x^{\log_2 x}=16$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 16,\quad \log_2 x\cdot\log_2 x=\log_2 2^4$

$(\log_2 x)^2-\boxed{4}=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 　$t^2-4=0$

$(t+2)(t-2)=0\quad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$

즉 $\log_2 x=\boxed{-2}$ 또는 $\log_2 x=2$이므로

$x=2^{-2}=\boxed{\frac{1}{4}}$ 또는 $x=2^2=4$

$\therefore$ (가) 4 　(나) -2 　(다) $\frac{1}{4}$ 　　답 풀이 참조

0415 진수의 조건에서

$3x+1>0\quad \therefore x>-\frac{1}{3}$ 　　...... ㉠

$\log_4(3x+1)>\underbrace{\frac{1}{2}}_{\log_4 4^{\frac{1}{2}}=\log_4 2}$에서 　$\log_4(3x+1)>\log_4 2$

밑이 1보다 크므로

$3x+1>2\quad \therefore x>\frac{1}{3}$ 　　...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 　$x>\frac{1}{3}$ 　　답 $x>\frac{1}{3}$

0416 진수의 조건에서

$x^2>0\quad \therefore x\neq 0$ 　　...... ㉠

$\log_5 x^2<1$에서 　$\log_5 x^2<\log_5 5$

밑이 1보다 크므로

$x^2<5\quad \therefore -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ 　　...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 　$-\sqrt{5}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{5}$

답 $-\sqrt{5}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{5}$

0417 진수의 조건에서

$x>0,\ 2-x>0\quad \therefore 0<x<2$ 　　...... ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} x\geq\log_{\frac{1}{2}}(2-x)$에서 밑이 1보다 작으므로

$x\leq 2-x,\quad 2x\leq 2\quad \therefore x\leq 1$ 　　...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 　$0<x\leq 1$ 　　답 $0<x\leq 1$

0418 진수의 조건에서

$12-2x>0,\ x-3>0\quad \therefore 3<x<6$ 　　...... ㉠

$\log_3(12-2x)\leq-\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$에서

$\log_3(12-2x)\leq\log_3(x-3)$

밑이 1보다 크므로 　$12-2x\leq x-3$

$3x\geq 15\quad \therefore x\geq 5$ 　　...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 　$5\leq x<6$ 　　답 $5\leq x<6$

0419 진수의 조건에서 　$x>0$ 　　...... ㉠

$\log x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-t\leq 12,\quad t^2-t-12\leq 0$

$(t+3)(t-4)\leq 0\quad \therefore -3\leq t\leq 4$

즉 $-3\leq\log x\leq 4$이므로

$\log\frac{1}{10^3}\leq\log x\leq\log 10^4$

밑이 1보다 크므로 　$\frac{1}{1000}\leq x\leq 10000$ 　　...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{1000}\leq x\leq 10000$ 　　답 $\frac{1}{1000}\leq x\leq 10000$

0420 진수의 조건에서

$x>0,\ x^3>0\quad \therefore x>0$ 　　...... ㉠

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^3>0$에서 　$(\log_2 x)^2-3\log_2 x>0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-3t>0,\quad t(t-3)>0\quad \therefore t<0$ 또는 $t>3$

즉 $\log_2 x<0$ 또는 $\log_2 x>3$이므로

$\log_2 x<\log_2 1$ 또는 $\log_2 x>\log_2 2^3$

밑이 1보다 크므로 　$x<1$ 또는 $x>8$ 　　...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<1$ 또는 $x>8$ 　　답 $0<x<1$ 또는 $x>8$

0421 진수의 조건에서 　$x>\boxed{0}$ 　　...... ㉠

$x^{\log_3 x}\geq 9x$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}\geq\log_3 9x,\quad \log_3 x\cdot\log_3 x\geq\underbrace{\log_3 9}_{\log_3 3^2=2}+\log_3 x$

$(\log_3 x)^2-\log_3 x-\boxed{2}\geq 0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 　$t^2-t-2\geq 0$

$(t+1)(t-2)\geq 0\quad \therefore t\leq -1$ 또는 $t\geq 2$

즉 $\log_3 x \le \boxed{-1}$ 또는 $\log_3 x \ge \boxed{2}$이므로

$\log_3 x \le \log_3 3^{-1}$ 또는 $\log_3 x \ge \log_3 3^2$

밑이 1보다 크므로

$x \le \boxed{\frac{1}{3}}$ 또는 $x \ge \boxed{9}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0 < x \le \frac{1}{3}$ 또는 $x \ge 9$

∴ (가) 0 (나) 2 (다) -1 (라) 2 (마) $\frac{1}{3}$ (바) 9 답 풀이 참조

유형 01 로그함수의 함숫값 본책 62쪽

로그함수 $f(x)=\log_a x$ $(a>0,\ a\ne1)$에서 $f(p)$의 값을 구할 때에는 $f(x)$에 x 대신 p를 대입하고

$\log_a p = q \iff a^q = p$

와 로그의 성질을 이용한다.

0422 $f(2)=\log_a 4+1=5$이므로

$\log_a 4=4,\quad a^4=4$

$\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$

따라서 $f(x)=\log_{\sqrt{2}}(x+2)+1$이므로

$f(14)=\log_{\sqrt{2}}16+1=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^4+1=2\cdot4+1=9$ 답 ③

0423 $f(-3)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}=(2^{-2})^{-3}=2^6$이므로

$(g\circ f)(-3)=g(f(-3))=g(2^6)=\log_2 2^6=6$ 답 6

0424 $a=\log_3 6,\ b=\log_3 9$이므로

$f(k)=\frac{a+b}{3}=\frac{\log_3 6+\log_3 9}{3}=\frac{1}{3}\log_3 54$

즉 $\log_3 k=\frac{1}{3}\log_3 54$이므로

$k=\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{2}$ 답 ②

0425 $f(x)=\log_2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\log_2\frac{x}{x+1}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\cdots+\log_2\frac{n}{n+1}$

$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\right)$

$=\log_2\frac{1}{n+1}$

즉 $\log_2\frac{1}{n+1}=-5$이므로 $\quad 2^{-5}=\frac{1}{n+1}$

$32=n+1\qquad \therefore n=31$ 답 31

0426 $(a,\ b)\in A$이므로 $\quad b=\log_3 a$

ㄱ. $y=\log_3 x$의 x에 $\frac{1}{a}$을 대입하면

$y=\log_3\frac{1}{a}=\log_3 a^{-1}=-\log_3 a=-b$

$\therefore \left(\frac{1}{a},\ -b\right)\in A$

ㄴ. $y=\log_3 x$의 x에 $3a$를 대입하면

$y=\log_3 3a=1+\log_3 a=1+b$

$\therefore (3a,\ 1+b)\in A$

ㄷ. $y=\log_3 x$의 x에 $\frac{a}{9}$를 대입하면

$y=\log_3\frac{a}{9}=\log_3 a-2=b-2$

$\therefore \left(\frac{a}{9},\ b-3\right)\notin A$

ㄹ. $y=\log_3 x$의 x에 a^2을 대입하면

$y=\log_3 a^2=2\log_3 a=2b$

$\therefore (a^2,\ 2b)\in A$

이상에서 집합 A의 원소인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0427 $f_2(x)=f_1(x^3)+f_1(x)=\log_2 x^3+\log_2 x$

$=3\log_2 x+\log_2 x=4\log_2 x$

$f_3(x)=f_2(x^3)+f_2(x)=4\log_2 x^3+4\log_2 x$

$=12\log_2 x+4\log_2 x=16\log_2 x$

$f_4(x)=f_3(x^3)+f_3(x)=16\log_2 x^3+16\log_2 x$

$=48\log_2 x+16\log_2 x=64\log_2 x$ ··· ❶

$\therefore \log_4\{f_4(16)\}=\log_4(64\log_2 16)=\log_4(64\cdot4)$

$=\log_4 4^4=4$ ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ $f_4(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $\log_4\{f_4(16)\}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 02 로그함수의 성질 본책 63쪽

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\ne1)$에 대하여

① 정의역: 양의 실수 전체의 집합
치역: 실수 전체의 집합

② $a>1$ ➡ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가
$0<a<1$ ➡ x의 값이 증가하면 y의 값은 감소

③ 그래프의 점근선: y축 (직선 $x=0$)

0428 ⑤ $y=\log_{\frac{1}{a}}x=-\log_a x$이므로 $y=\log_a x$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

답 ⑤

0429 ㄱ. 일대일함수이므로 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.

ㄴ. 밑이 1보다 크므로 $x_1>x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

ㄷ. $y=-\log\frac{1}{x}=-\log x^{-1}=\log x$이고 정의역이 같으므로 두 함수의 그래프는 일치한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 로그함수

0430 $y=\log(25-x^2)$에서 $25-x^2>0$이므로

$x^2-25<0,\quad (x+5)(x-5)<0 \quad \therefore -5<x<5$

$\therefore A=\{x\mid -5<x<5\}$

$y=\log(\log x)$에서 $x>0$이고 $\log x>0$이므로

$x>1 \quad \therefore B=\{x\mid x>1\}$

$\therefore A\cap B=\{x\mid 1<x<5\}$ ⋯ ❶

따라서 $1<x<5$를 만족시키는 정수 x는 2, 3, 4이므로 구하는 합은 $\quad 2+3+4=9$ ⋯ ❷

답 9

채점 기준	비율
❶ 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	80 %
❷ 집합 $A\cap B$의 원소 중 모든 정수의 합을 구할 수 있다.	20 %

0431 $y=\log_a bx$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 $\quad a>1$

또 $x=1$일 때 $y<0$이므로

$\log_a b<0 \quad \therefore 0<b<1$

따라서 함수 $y=\log_b ax$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고, $x=1$일 때 $y=\log_b a<0$이므로 그래프의 개형은 ②와 같다.

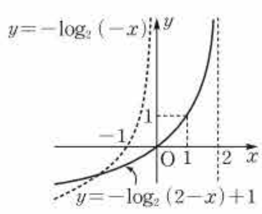
답 ②

유형 03 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 본책 63쪽

로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프를
① x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동
➡ $y=\log_a(x-m)+n$
② x축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-\log_a x$
③ y축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=\log_a(-x)$
④ 원점에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-\log_a(-x)$
⑤ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 ➡ $y=a^x$

0432 $y=-\log_2(2-x)+1=-\log_2\{-(x-2)\}+1$이므로 $y=-\log_2(2-x)+1$의 그래프는 $y=-\log_2(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=-\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y=-\log_2(2-x)+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



④ x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.

답 ④

0433 $y=\log_3(x+a)+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$이므로

$-a=-2 \quad \therefore a=2$

또 이 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\log_3(1+2)+b \quad \therefore b=-1$

$\therefore a+b=1$

답 1

0434 ㄱ. $y=\log_{\frac{1}{10}}x=-\log x$이므로 $y=\log x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=\log_{\frac{1}{10}}x$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄴ. $y=\log\dfrac{10}{x}=\log10-\log x=1-\log x$이므로 $y=\log x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=\log\dfrac{10}{x}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y=\log x^2=2\log|x|$이므로 $y=\log x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 $y=\log x^2$의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=\log_{\frac{1}{10}}(2-x)=-\log(2-x)=-\log\{-(x-2)\}$이므로 $y=\log x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $y=\log_{\frac{1}{10}}(2-x)$의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 $y=\log x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0435 $y=\log_5 ax$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_5 ax-2 \quad \therefore y=\log_5\dfrac{ax}{25}$ ⋯ ❶

$y=\log_5\dfrac{ax}{25}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-\log_5\dfrac{ax}{25} \quad \therefore y=\log_5\dfrac{25}{ax}$ ⋯ ❷

따라서 $\dfrac{25}{a}=\dfrac{5}{2}$이므로 $\quad a=10$ ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	10 %

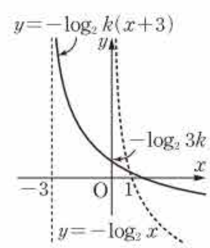
0436 $y=-\log_2 k(x+3)=-\log_2(x+3)-\log_2 k$이므로 $y=-\log_2 k(x+3)$의 그래프는 $y=-\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $-\log_2 k$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$\underbrace{-\log_2 3k}_{x=0\text{일 때의 함숫값}}\geq0,\quad \log_2\dfrac{1}{3k}\geq\log_2 1$

밑이 1보다 크므로 $\quad \dfrac{1}{3k}\geq1$

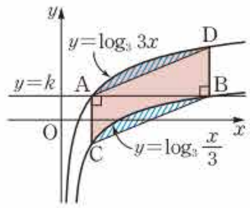
$\therefore 0<k\leq\dfrac{1}{3}$



따라서 양수 k의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$이다. 답 $\dfrac{1}{3}$

0437 $y=\log_3 3x=\log_3\left(9\cdot\dfrac{x}{3}\right)=2+\log_3\dfrac{x}{3}$이므로 $y=\log_3 3x$의 그래프는 $y=\log_3\dfrac{x}{3}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 두 함수 $y=\log_3 3x$, $y=\log_3 \frac{x}{3}$의 그래프와 두 선분 AC, BD로 둘러싸인 부분의 넓이는 평행사변형 ACBD의 넓이와 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\overline{AC}\cdot\overline{AB}=2\cdot 5=10$

답 10

유형 04 로그함수의 그래프 위의 점 (본책 64쪽)

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$의 그래프가 점 (m, n)을 지난다.

$\Rightarrow n=\log_a m \Longleftrightarrow a^n=m$

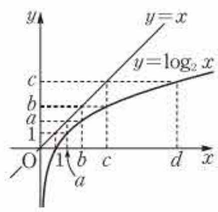
0438 $\log_2 c=b$, $\log_2 b=a$이므로

$a-b=\log_2 b-\log_2 c=\log_2 \frac{b}{c}$

따라서 $2^{a-b}=\frac{b}{c}$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{a-b}=\frac{c}{b}$

답 ②



다른 풀이 $\log_2 a=1$이므로 $a=2$

$\log_2 b=a=2$이므로 $b=2^2=4$

$\log_2 c=b=4$이므로 $c=2^4=16$

$\log_2 d=c=16$이므로 $d=2^{16}$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{a-b}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-4}=4=\frac{c}{b}$

0439 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3이므로 $b=3$

즉 $3=\log_2 a$에서 $a=2^3=8$ — $y=\log_2 x$의 그래프가 점 $A(a, 3)$을 지난다.

따라서 A(8, 3)이므로 점 D의 좌표는

(11, 3)

답 (11, 3)

0440 $\overline{OP}=\log_{\sqrt{3}} p$, $\overline{OQ}=\log_3 q$이므로 $\overline{OP}:\overline{OQ}=3:2$에서

$\log_{\sqrt{3}} p:\log_3 q=3:2$, $\quad 2\log_3 p:\log_3 q=3:2$

$4\log_3 p=3\log_3 q$, $\quad \log_3 p^4=\log_3 q^3$

$\therefore p^4=q^3$

답 ⑤

0441 점 A의 y좌표는 0이므로 $\log_{\frac{1}{2}} x=0$에서

$x=1 \quad \therefore A(1, 0)$

$x=4$일 때 $y=\log_a 4$이므로 $\quad B(4, \log_a 4)$

$x=4$일 때 $y=\log_{\frac{1}{2}} 4=\log_{2^{-1}} 2^2=-2$이므로 $\quad C(4, -2)$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\cdot\{\log_a 4-(-2)\}\cdot(4-1)=9$

$\log_a 4=4$, $\quad a^4=4$

$\therefore a=4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ $(\because a>1)$

답 $\sqrt{2}$

0442 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$(3, \log_a 3)$, $(3, \log_b 3)$, $(3, -\log_a 3)$

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:4$에서 $4\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$4(\log_a 3-\log_b 3)=\log_b 3+\log_a 3$

$3\log_a 3=5\log_b 3$, $\quad \frac{3}{\log_3 a}=\frac{5}{\log_3 b}$

$\frac{\log_3 a}{\log_3 b}=\frac{3}{5}$, $\quad \log_b a=\frac{3}{5}$

$\therefore g(a)=\log_b a=\frac{3}{5}$

답 ③

0443 두 점 A, B의 y좌표는 1이므로

$\log_a x=1$에서 $\quad x=a \quad \therefore A(a, 1)$

$\log_b x=1$에서 $\quad x=b \quad \therefore B(b, 1)$ ··· ❶

선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{9}{4}, 1\right)$이므로

$\frac{a+b}{2}=\frac{9}{4} \quad \therefore a+b=\frac{9}{2}$ ······ ㉠

또 $\overline{AB}=1$이므로

$b-a=1$ $(\because a<b)$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{7}{4}$, $b=\frac{11}{4}$ ··· ❷

두 점 C, D의 y좌표는 2이므로

$\log_{\frac{7}{4}} x=2$에서 $\quad x=\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{49}{16} \quad \therefore C\left(\frac{49}{16}, 2\right)$

$\log_{\frac{11}{4}} x=2$에서 $\quad x=\left(\frac{11}{4}\right)^2=\frac{121}{16} \quad \therefore D\left(\frac{121}{16}, 2\right)$

$\therefore \overline{CD}=\frac{121}{16}-\frac{49}{16}=\frac{9}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{9}{2}$

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{CD}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %

유형 05 로그함수의 역함수 (본책 65쪽)

(1) $y=\log_a (x-p)+q$ $(a>0, a\neq 1)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) x를 y에 대하여 푼다. $\Rightarrow x=a^{y-q}+p$

(ii) x와 y를 서로 바꾼다. $\Rightarrow y=a^{x-q}+p$

(2) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때

① $f(p)=q \Longleftrightarrow g(q)=p$

② 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

0444 $y=\log_4 (x-2)+3$에서 $\quad y-3=\log_4 (x-2)$

$x-2=4^{y-3} \quad \therefore x=4^{y-3}+2$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=4^{x-3}+2=2^{2x-6}+2$

따라서 $a=2$, $b=-6$, $c=2$이므로

$a+b+c=-2$

답 -2

0445 $f(x)$는 $y=\log_3(x+a)$의 역함수이고 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ 4)$를 지나므로 $y=\log_3(x+a)$의 그래프는 점 $(4,\ 3)$을 지난다.

즉 $3=\log_3(4+a)$이므로

$4+a=3^3 \qquad \therefore\ a=23$ 답 ①

다른 풀이 $f(x)$는 $y=\log_3(x+a)$의 역함수이다.

$y=\log_3(x+a)$에서 $\quad x+a=3^y$

$\therefore\ x=3^y-a$

따라서 $f(x)=3^x-a$이고 $f(3)=4$이므로

$3^3-a=4 \qquad \therefore\ a=23$

0446 $(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 $g(2)=k$로 놓으면 $f(k)=2$이므로

$\log_3(k^3+1)=2, \qquad k^3+1=3^2$

$k^3=8 \qquad \therefore\ k=2$ ··· ❶

즉 $g(2)=2$이므로

$(g\circ g\circ g)(2)=g(g(g(2)))=g(g(2))$

$=g(2)=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(k)=2$를 만족시키는 k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $(g\circ g\circ g)(2)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0447 $g(x)$는 $y=\log_2 x$의 역함수이므로

$g(x)=2^x$

점 A는 $y=g(x)$의 그래프와 y축의 교점이므로 $\quad$ A$(0,\ 1)$

점 B의 y좌표가 1이므로 $1=\log_2 x$에서 $\quad x=2$

따라서 B$(2,\ 1)$이므로 $\quad \overline{AB}=2$

점 C의 x좌표가 2이므로 $\quad$ C$(2,\ 2^2)$, 즉 C$(2,\ 4)$

점 D의 y좌표가 4이므로 $4=\log_2 x$에서 $\quad x=16$

따라서 D$(16,\ 4)$이므로 $\quad \overline{CD}=16-2=14$

$\therefore\ \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\dfrac{14}{2}=7$ 답 7

0448 함수 $y=\log_a x+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\log_a x+b$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이때 두 교점의 x좌표가 1, 2이므로 $y=\log_a x+b$의 그래프는 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지난다.

$1=\log_a 1+b$에서 $\quad b=1$

$2=\log_a 2+1$에서 $\quad 1=\log_a 2 \qquad \therefore\ a=2$

$\therefore\ ab=2$ 답 2

유형 06 로그함수를 이용한 수의 대소 비교

본책 66쪽

주어진 수의 밑을 같게 한 후 다음과 같은 로그함수의 성질을 이용한다.

① $a>1$일 때, $\quad m<n \Longleftrightarrow \log_a m<\log_a n$

② $0<a<1$일 때, $\quad m<n \Longleftrightarrow \log_a m>\log_a n$

0449 $A=2\log_5 3=\log_5 9$,

$B=3=\log_5 5^3=\log_5 125$,

$C=\log_{25}115=\log_{5^2}115=\dfrac{1}{2}\log_5 115=\log_5\sqrt{115}$

이때 $9<\sqrt{115}<125$이고 밑이 1보다 크므로

$\log_5 9<\log_5\sqrt{115}<\log_5 125$, 즉 $A<C<B$ 답 ②

0450 ㄱ. $0<a<1$이고 $a<b$이므로 $\qquad a^a>a^b$

ㄴ. $b>1$이고 $a>a^2$이므로

$\log_b a>\log_b a^2$

ㄷ. $\log_a b-\log_b a=\dfrac{\log b}{\log a}-\dfrac{\log a}{\log b}$

$=\dfrac{(\log b)^2-(\log a)^2}{\log a\log b}$

$=\dfrac{(\log b+\log a)(\log b-\log a)}{\log a\log b}$

이때 $\log a<0<\log b<-\log a$이므로

$\log b+\log a<0,\ \log b-\log a>0,\ \log a\log b<0$

$\therefore\ \log_a b-\log_b a>0$, 즉 $\log_a b>\log_b a$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

0451 $a<b<1$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a 1<\log_a b<\log_a a \qquad \therefore\ 0<\log_a b<1$ ······ ㉠

또 $a<b<1$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b 1<\log_b b<\log_b a \qquad \therefore\ 0<1<\log_b a$

$\log_a \dfrac{b}{a}=\log_a b-\log_a a=\log_a b-1$이고 ㉠에서

$-1<\log_a b-1<0 \qquad \therefore\ -1<\log_a \dfrac{b}{a}<0$

$\log_a \dfrac{a}{b}=\log_a a-\log_a b=1-\log_a b$이고 ㉠에서

$-1<-\log_a b<0, \qquad 0<1-\log_a b<1$

$\therefore\ 0<\log_a \dfrac{a}{b}<1$

따라서 가장 큰 값은 $\log_b a$, 가장 작은 값은 $\log_a \dfrac{b}{a}$이다.

답 ②

유형 07 로그함수의 최대·최소 ; $y=\log_a(px+q)+r$ 꼴

본책 67쪽

정의역이 $\{x\,|\,m\le x\le n\}$인 함수 $f(x)=\log_a(px+q)+r\ (p>0)$의 최대·최소를 구할 때에는 먼저 a의 값의 범위를 확인한 후 다음을 이용한다.

① $a>1$일 때 ➡ 최댓값: $f(n)$, 최솟값: $f(m)$

② $0<a<1$일 때 ➡ 최댓값: $f(m)$, 최솟값: $f(n)$

0452 $y=\log_5(4x+1)-3$에서 $x=6$일 때 최대이고 최댓값은

$M=\log_5 25-3=2-3=-1$

$x=1$일 때 최소이고 최솟값은

$m=\log_5 5-3=1-3=-2$

$\therefore\ M+2m=-1+2\cdot(-2)=-5$ 답 -5

0453 $y=3\log_{\frac{1}{3}}(x+k)$는 $x=0$일 때 최댓값 -6을 가지므로

$3\log_{\frac{1}{3}}k=-6,\qquad \log_3 k=2$

$\therefore k=3^2=9$

$x=18$일 때 최솟값 m을 가지므로

$m=3\log_{\frac{1}{3}}27=3\cdot(-3)=-9$

$\therefore k-m=9-(-9)=18$

답 ④

유형 08 로그함수의 최대·최소 ; $y=\log_a(px^2+qx+r)$ 꼴 본책 67쪽

함수 $y=\log_a(px^2+qx+r)$의 최대·최소를 구할 때에는 $f(x)=px^2+qx+r$로 놓고 주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한 후 a의 값의 범위에 따라 다음을 이용한다.
① $a>1$일 때
⇒ $f(x)$가 최대일 때 y도 최대, $f(x)$가 최소일 때 y도 최소
② $0<a<1$일 때
⇒ $f(x)$가 최대일 때 y는 최소, $f(x)$가 최소일 때 y는 최대

0454 $f(x)=-x^2+2x+7$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+8$

$f(-1)=4,\ f(1)=8,\ f(2)=7$이므로 $-1\le x\le 2$에서

$4\le f(x)\le 8$

$y=\log_2 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=\log_2 f(x)$는

$f(x)=8$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad\log_2 8=3$

$f(x)=4$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad\log_2 4=2$

따라서 구하는 곱은 $\quad 3\cdot 2=6$

답 ③

0455 진수의 조건에서

$3-x>0,\ x+5>0\qquad \therefore -5<x<3$

$y=\log_{\frac{1}{2}}(3-x)+\log_{\frac{1}{2}}(x+5)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2-2x+15)$이므로

$f(x)=-x^2-2x+15$로 놓으면

$f(x)=-(x+1)^2+16$

$f(-1)=16$이므로 $-5<x<3$에서 $f(x)$의 최댓값은 16이다.

$y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$에서 밑이 1보다 작으므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$는

$f(x)=16$일 때 최소이다.

따라서 구하는 최솟값은

$\log_{\frac{1}{2}}16=\log_{2^{-1}}2^4=-4$

답 -4

0456 $f(x)=x^2-3x+4$로 놓으면 $\quad f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

$f(-1)=8,\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{4},\ f(4)=8$이므로 $-1\le x\le 4$에서

$\frac{7}{4}\le f(x)\le 8$ ⋯ ❶

$y=\log_a f(x)$에서 $0<a<1$이므로 함수 $y=\log_a f(x)$는

$f(x)=8$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

즉 $\log_a 8=-3$이므로

$a^{-3}=8\qquad \therefore a=\frac{1}{2}$ ⋯ ❷

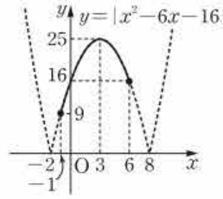
답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

0457 $f(x)=|x^2-6x-16|$으로 놓으면

$f(x)=|(x+2)(x-8)|=|(x-3)^2-25|$

따라서 $-1\le x\le 6$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$9\le f(x)\le 25$

$y=\log_5 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=\log_5 f(x)$는 $f(x)=25$일 때 최대이고 최댓값은

$\log_5 25=2$

답 ④

유형 09 로그함수의 최대·최소 ; $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우 본책 67쪽

함수 $y=p(\log_a x)^2+q\log_a x+r$의 최대·최소는 $\log_a x=t$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차함수 $y=pt^2+qt+r$의 최대·최소를 이용하여 구한다.

0458 $\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 16$에서

$\log_2 1\le \log_2 x\le \log_2 16\qquad \therefore 0\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

이므로 $t=4$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad M=11$

$t=1$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad m=2$

$\therefore M-m=9$

답 ④

0459 $y=(\log_3 x)^2+a\log_{\frac{1}{3}}x+b$에서

$y=(\log_3 x)^2-a\log_3 x+b$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad y=t^2-at+b$ ⋯ ❶

$x=\frac{1}{9}$, 즉 $t=\log_3\frac{1}{9}=-2$에서 최솟값 -1을 갖고 t^2의 계수가 1인 이차함수는

$y=(t+2)^2-1=t^2+4t+3$ ⋯ ❷

따라서 $a=-4,\ b=3$이므로

$ab=-12$ ⋯ ❸

답 -12

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 주어진 조건을 만족시키는 t에 대한 이차함수를 세울 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0460 $y=\log_5 25x\cdot\log_5\frac{x}{5}=(\log_5 x+2)(\log_5 x-1)$

$=(\log_5 x)^2+\log_5 x-2$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{5}\le x\le 125$에서

$\log_5\frac{1}{5}\le\log_5 x\le\log_5 125\qquad \therefore -1\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2+t-2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

이므로 $t=3$일 때 최대이고 최댓값은 10

$t=-\frac{1}{2}$일 때 최소이고 최솟값은 $-\frac{9}{4}$

따라서 구하는 합은

$$10+\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{31}{4}$$

답 ①

0461 $x^{\log 3}=3^{\log x}$이므로

$$y=-3^{\log x}\cdot x^{\log 3}+2\cdot 3^{\log 100x}$$
$$=-3^{\log x}\cdot 3^{\log x}+2\cdot 3^2\cdot 3^{\log x}$$
$$=-(3^{\log x})^2+18\cdot 3^{\log x}$$

$3^{\log x}=t$로 놓으면 $\underline{x>1}$에서 $t>1$

└ $\log x>0$이므로 $3^{\log x}>1$

이때 주어진 함수는

$$y=-t^2+18t=-(t-9)^2+81$$

따라서 $t=9$일 때 최댓값 81을 가지므로 $3^{\log x}=9$에서

$3^{\log x}=3^2,\quad \log x=2\quad \therefore x=10^2=100$

즉 $a=100$, $b=81$이므로

$a-b=19$

답 19

유형 10 로그함수의 최대·최소; $y=x^{f(x)}$ 꼴

본책 68쪽

$y=x^{f(x)}$ 꼴의 함수의 최대·최소는 양변에 로그를 취하여 구한다.

0462 $y=x^{-4+\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 y=\log_2 x^{-4+\log_2 x}=(-4+\log_2 x)\log_2 x$$
$$=(\log_2 x)^2-4\log_2 x$$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 8$에서

$\log_2 1\le \log_2 x\le \log_2 8\quad \therefore 0\le t\le 3$

이때 주어진 함수는 $\log_2 y=t^2-4t=(t-2)^2-4$

따라서 $\log_2 y$는 $t=0$일 때 최댓값 0, $t=2$일 때 최솟값 -4를 가지므로

$\log_2 y=0$에서 $y=1\quad \therefore M=1$

$\log_2 y=-4$에서 $y=2^{-4}=\frac{1}{16}\quad \therefore m=\frac{1}{16}$

$\therefore Mm=\frac{1}{16}$

답 $\frac{1}{16}$

0463 $y=\frac{x^2}{x^{\log x}}=x^{2-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log y=\log x^{2-\log x}=(2-\log x)\log x$$
$$=-(\log x)^2+2\log x$$

$\log x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$$\log y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$$

따라서 $\log y$는 $t=1$일 때 최댓값 1을 가지므로

$\log x=1$에서 $x=10\quad \therefore a=10$

$\log y=1$에서 $y=10\quad \therefore b=10$

$\therefore a+b=20$

답 20

유형 11 로그함수의 최대·최소 ; 산술평균과 기하평균의 관계 이용

본책 68쪽

함수 $y=\log_a x+\log_x a$ $(\log_a x>0,\ \log_x a>0)$의 최대·최소

➡ 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_a x+\log_x a\ge 2\sqrt{\log_a x\cdot \log_x a}=2$

임을 이용한다. (단, 등호는 $\log_a x=\log_x a$일 때 성립)

0464 $y=\log_4 x+\log_x 256=\log_4 x+\frac{1}{\log_{256} x}$

$$=\log_4 x+\frac{4}{\log_4 x}$$

이때 $x>1$에서 $\log_4 x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_4 x+\frac{4}{\log_4 x}\ge 2\sqrt{\log_4 x\cdot\frac{4}{\log_4 x}}$$
$$=2\cdot 2=4\ (\text{단, 등호는 } \log_4 x=2\text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

답 ③

0465 $\log_3 x+\log_3 y=\underline{\log_3 xy}$ ┌ 밑이 1보다 크므로 $\log_3 xy$는 xy의 값이 최대일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

즉 $x+y=18$이므로 $18\ge 2\sqrt{xy}\quad \therefore xy\le 81$

따라서 구하는 최댓값은 $\log_3 81=4$이다.

답 4

0466 $\log_2(x+2y)+\log_2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}\right)$

$$=\log_2(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}\right)$$
$$=\underline{\log_2\left(2+\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}\right)}$$

┌ 밑이 1보다 크므로 $\log_2\left(2+\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}\right)$는 $2+\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}$의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $x>0$, $y>0$에서 $\frac{x}{2y}>0$, $\frac{2y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2+\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}\ge 2+2\sqrt{\frac{x}{2y}\cdot\frac{2y}{x}}$$
$$=2+2\cdot 1=4\ (\text{단, 등호는 } x=2y\text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 $\log_2 4=2$이다.

답 2

0467 $\frac{1}{4}<x<25$에서 $\log 4x>0$, $\log\frac{25}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log 4x+\log\frac{25}{x}\ge 2\sqrt{\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}}$$

이때 $\log 4x+\log\frac{25}{x}=\log\left(4x\cdot\frac{25}{x}\right)=\log 100=2$이므로

$$2\ge 2\sqrt{\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}},\quad \sqrt{\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}}\le 1$$

$$\therefore 0<\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}\le 1$$

즉 $\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}$의 최댓값은 1이므로 $b=1$ ⋯ ❶

한편 등호는 $\log 4x=\log\frac{25}{x}$, 즉 $4x=\frac{25}{x}$일 때 성립하므로

$$x^2=\frac{25}{4}\quad \therefore x=\frac{5}{2}\ \left(\because \frac{1}{4}<x<25\right)$$

따라서 $a=\frac{5}{2}$이므로 ···· ❷

$a+b=\frac{7}{2}$ ···· ❸

답 $\frac{7}{2}$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 12 로그방정식; 밑을 같게 할 수 있는 경우 본책 69쪽

방정식의 각 항의 밑을 같게 한 다음

$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$

$(a>0,\ a\neq1,\ f(x)>0,\ g(x)>0)$

임을 이용한다.

0468 진수의 조건에서

$x>0,\ (x+2)^2>0 \qquad \therefore x>0$ ······ ㉠

$\log_2 x+\log_4 (x+2)^2=3$에서

$\log_2 x+\log_2 (x+2)=3$

$\therefore \log_2 (x^2+2x)=\log_2 8$

즉 $x^2+2x-8=0$이므로 $\quad (x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

이때 ㉠에 의하여 $\quad x=2$

답 $x=2$

0469 진수의 조건에서

$5x+5>0,\ 3x-1>0 \qquad \therefore x>\frac{1}{3}$ ······ ㉠

$\log\sqrt{5x+5}=1-\frac{1}{2}\log(3x-1)$에서

$\frac{1}{2}\log(5x+5)+\frac{1}{2}\log(3x-1)=1$

$\log(5x+5)(3x-1)=2$

$\therefore \log(15x^2+10x-5)=\log 100$

즉 $15x^2+10x-5=100$이므로 $\quad 3x^2+2x-21=0$

$(x+3)(3x-7)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{7}{3}$

이때 ㉠에 의하여 $\quad x=\frac{7}{3}$

따라서 $a=\frac{7}{3}$이므로 $\quad 3a=7$

답 ④

0470 밑과 진수의 조건에서 $(x-2)^2>0,\ (x-2)^2\neq1$이므로 $x\neq1,\ x\neq2,\ x\neq3$

$x^2-4x+4>0,\ x^2-4x+4\neq1,\ 2-x>0$

$\therefore x<1$ 또는 $1<x<2$ ······ ㉠ ···· ❶

(i) $x^2-4x+4=9$일 때,

$x^2-4x-5=0, \qquad (x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

이때 ㉠에 의하여 $\quad x=-1$ ···· ❷

(ii) $2-x=1$일 때, $\quad x=1$

$x=1$은 ㉠을 만족시키지 않는다. ···· ❸

(i), (ii)에서 $\quad x=-1$ ···· ❹

답 $x=-1$

채점 기준	비율
❶ 밑과 진수의 조건을 이용하여 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 밑이 같을 때의 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 진수가 1일 때의 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ 해를 구할 수 있다.	10 %

0471 $\log_2\{\log_5(x^2+y^2)\}=1$에서

$\log_5(x^2+y^2)=2 \qquad \therefore x^2+y^2=25$ ······ ㉠

$\log_{x^2} y^2=1$에서 $\quad y^2=x^2$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2x^2=25, \quad x^2=\frac{25}{2} \qquad \therefore x=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

㉡에서 $\quad y^2=x^2=\frac{25}{2} \qquad \therefore y=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 주어진 연립방정식의 해 $(x,\ y)$는

$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 또는 $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 또는

$\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 또는 $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

의 4개이다.

답 ④

유형 13 로그방정식; $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우 본책 69쪽

$\log_a x$ 꼴이 반복되는 로그방정식은 $\log_a x=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

0472 $\log_4 x^2+\log_x 4-3=0$에서

$2\log_4 x+\frac{1}{\log_4 x}-3=0$

$\log_4 x=t\ (t\neq0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$2t+\frac{1}{t}-3=0, \qquad 2t^2-3t+1=0$

$(2t-1)(t-1)=0 \qquad \therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=1$

즉 $\log_4 x=\frac{1}{2}$ 또는 $\log_4 x=1$이므로

$x=4^{\frac{1}{2}}=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 근의 곱은 $\quad 2\cdot4=8$

답 ④

0473 $\log_{\frac{1}{3}} x^3+(\log_3 x)^2-10=0$에서

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x-10=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad t^2-3t-10=0$

$(t+2)(t-5)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=5$ ···· ❶

즉 $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=5$이므로

$x=3^{-2}$ 또는 $x=3^5$ ···· ❷

$\therefore \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\log_{3^{-2}}3^5+\log_{3^5}3^{-2}$

$=-\frac{5}{2}-\frac{2}{5}=-\frac{29}{10}$ ···· ❸

답 $-\frac{29}{10}$

채점 기준	비율
❶ t에 대한 방정식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0474 $x^{\log 2} = 2^{\log x}$이므로 주어진 방정식은

$(2^{\log x})^2 - 2^{\log x} - 12 = 0$

$2^{\log x} = t\,(t>0)$로 놓으면 $\quad t^2 - t - 12 = 0$

$(t+3)(t-4)=0 \quad \therefore t=4\ (\because t>0)$

즉 $2^{\log x} = 4 = 2^2$이므로 $\quad \log x = 2$

$\therefore x = 10^2 = 100$

답 ⑤

0475 $\log_2 x + \log_3 y = 6$에서

$\dfrac{\log x}{\log 2} + \dfrac{\log y}{\log 3} = 6$

$\log_3 x \cdot \log_2 y = 8$에서

$\dfrac{\log x}{\log 3} \cdot \dfrac{\log y}{\log 2} = 8$, 즉 $\dfrac{\log x}{\log 2} \cdot \dfrac{\log y}{\log 3} = 8$

$\dfrac{\log x}{\log 2} = X$, $\dfrac{\log y}{\log 3} = Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} X+Y=6 \\ XY=8 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $\quad X=2,\ Y=4$ 또는 $X=4,\ Y=2$

이때 $x>y$이면 $X>Y$이므로 $\quad X=4,\ Y=2$

즉 $\dfrac{\log x}{\log 2} = 4$, $\dfrac{\log y}{\log 3} = 2$이므로

$\log x = 4\log 2,\ \log y = 2\log 3$

$\therefore x = 2^4 = 16,\ y = 3^2 = 9$

따라서 $\alpha=16$, $\beta=9$이므로

$\alpha + \beta = 25$

답 25

유형 14 양변에 로그를 취하는 방정식 본책 70쪽

(1) $x^{\log_a f(x)} = g(x)$ 꼴: 양변에 밑이 a인 로그를 취한다.
➡ $\log_a f(x) \cdot \log_a x = \log_a g(x)$
(2) $a^{f(x)} = b^{g(x)}\ (a \neq b)$ 꼴: 양변에 밑이 c인 로그를 취한다.
➡ $f(x)\log_c a = g(x)\log_c b$

0476 $x^{\log x} = \dfrac{100}{x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x} = \log \dfrac{100}{x}$, $\quad (\log x)^2 = \log 100 - \log x$

$\therefore (\log x)^2 + \log x - 2 = 0$

$\log x = t$로 놓으면 $\quad t^2 + t - 2 = 0$

$(t+2)(t-1) = 0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=1$

즉 $\log x = -2$ 또는 $\log x = 1$이므로

$x = 10^{-2} = \dfrac{1}{100}$ 또는 $x = 10$

따라서 모든 근의 곱은

$\dfrac{1}{100} \cdot 10 = \dfrac{1}{10}$

답 $\dfrac{1}{10}$

0477 $5^{2x} = 2^{4-2x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$2x\log 5 = (4-2x)\log 2$, $\quad 2x(\log 5 + \log 2) = 4\log 2$

$2x\log 10 = 4\log 2 \quad \therefore x = 2\log 2 = \log 4$

답 ①

0478 $x^{\log_2 x} - 8x^2 = 0$, 즉 $x^{\log_2 x} = 8x^2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 8x^2$, $\quad (\log_2 x)^2 = \log_2 8 + \log_2 x^2$

$\therefore (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 = 0$

$\log_2 x = t$로 놓으면 $\quad t^2 - 2t - 3 = 0$

$(t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 3$이므로

$x = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ 또는 $x = 2^3 = 8$

따라서 모든 근의 합은

$\dfrac{1}{2} + 8 = \dfrac{17}{2}$

답 ④

0479 $(4x)^{\log 4} - (3x)^{\log 3} = 0$, 즉 $(4x)^{\log 4} = (3x)^{\log 3}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 4 \cdot \log 4x = \log 3 \cdot \log 3x$

$\log 4(\log 4 + \log x) = \log 3(\log 3 + \log x)$

$(\log 4)^2 + \log 4 \cdot \log x = (\log 3)^2 + \log 3 \cdot \log x$

$(\log 4 - \log 3)\log x = (\log 3)^2 - (\log 4)^2$

$\therefore \log x = \dfrac{-(\log 4 + \log 3)(\log 4 - \log 3)}{\log 4 - \log 3}$

$= -(\log 4 + \log 3) = -\log 12 = \log \dfrac{1}{12}$

$\therefore x = \dfrac{1}{12}$

답 $x = \dfrac{1}{12}$

유형 15 로그방정식의 활용 본책 70쪽

방정식 $p(\log_a x)^2 + q\log_a x + r = 0$의 두 근이 α, β이면
$\log_a x = t$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차방정식
$pt^2 + qt + r = 0$의 두 근이 $\log_a \alpha$, $\log_a \beta$임을 이용한다.

0480 주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\quad \alpha\beta = 3$

$\log_3 x = t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2 + kt - 6 = 0$

이 방정식의 해는 $\log_3 \alpha$, $\log_3 \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = -k$, $\quad \log_3 \alpha\beta = -k$

$\therefore k = -\log_3 3 = -1$

답 -1

0481 $\log \dfrac{x}{4} \cdot \log \dfrac{x}{3} = 1$에서

$(\log x - \log 4)(\log x - \log 3) = 1$

$(\log x)^2 - (\log 3 + \log 4)\log x + \log 4 \cdot \log 3 - 1 = 0$

$\therefore (\log x)^2 - \log 12 \cdot \log x + \log 4 \cdot \log 3 - 1 = 0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-t\log 12+\log 4\cdot\log 3-1=0$

이 방정식의 두 근이 $\log\alpha$, $\log\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=\log 12$, $\log\alpha\beta=\log 12$

$\therefore \alpha\beta=12$

답 12

0482 $(\log_2 4x)^2-4\log_2 4x^2=2$에서

$(2+\log_2 x)^2-4(2+2\log_2 x)=2$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $(2+t)^2-4(2+2t)=2$

$\therefore t^2-4t-6=0$ ⋯ ❶

이 방정식의 두 근이 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=4$, $\log_2\alpha\cdot\log_2\beta=-6$ ⋯ ❷

$$\therefore (\log_\alpha 2)^2+(\log_\beta 2)^2=\frac{1}{(\log_2\alpha)^2}+\frac{1}{(\log_2\beta)^2}=\frac{(\log_2\alpha)^2+(\log_2\beta)^2}{(\log_2\alpha)^2(\log_2\beta)^2}=\frac{(\log_2\alpha+\log_2\beta)^2-2\log_2\alpha\cdot\log_2\beta}{(\log_2\alpha\cdot\log_2\beta)^2}=\frac{4^2-2\cdot(-6)}{(-6)^2}=\frac{7}{9}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{7}{9}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\log_2\alpha+\log_2\beta$, $\log_2\alpha\cdot\log_2\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $(\log_\alpha 2)^2+(\log_\beta 2)^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0483 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(\log a-1)\}^2-(3-\log a)=0$$

$\therefore (\log a)^2-\log a-2=0$

$\log a=t$로 놓으면 $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

즉 $\log a=-1$ 또는 $\log a=2$이므로

$a=10^{-1}=\frac{1}{10}$ 또는 $a=10^2=100$

따라서 구하는 곱은 $\frac{1}{10}\cdot 100=10$

답 ④

0484 $\log x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-(k+3)t+k+6=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 방정식의 두 근이 $x>1$인 부분에 있으려면 $t=\log x$에서 이차방정식 ㉠의 두 근이 $t>0$인 부분에 있어야 하므로

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때,

$D=\{-(k+3)\}^2-4(k+6)\ge 0$

$k^2+2k-15\ge 0$, $(k+5)(k-3)\ge 0$

$\therefore k\le -5$ 또는 $k\ge 3$

(ii) 이차방정식 ㉠의

(두 근의 합)$=k+3>0$ $\therefore k>-3$

(iii) 이차방정식 ㉠의

(두 근의 곱)$=k+6>0$ $\therefore k>-6$

이상에서 $k\ge 3$이므로 실수 k의 최솟값은 3이다.

답 3

유형 16 로그부등식; 밑을 같게 할 수 있는 경우 본책 71쪽

부등식의 각 항의 밑을 같게 한 후 다음을 이용한다.

① $a>1$일 때,

$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)>g(x)>0$

② $0<a<1$일 때,

$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Longleftrightarrow 0<f(x)<g(x)$

0485 진수의 조건에서

$x+3>0$, $1-x>0$ $\therefore -3<x<1$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2(x+3)-\log_2(1-x)-1>0$에서

$\log_2(x+3)>\log_2(1-x)+1$

$\therefore \log_2(x+3)>\log_2 2(1-x)$

밑이 1보다 크므로 $x+3>2(1-x)$

$3x>-1$ $\therefore x>-\frac{1}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-\frac{1}{3}<x<1$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}$

답 ②

0486 진수의 조건에서

$x+1>0$, $x+6>0$ $\therefore x>-1$ ⋯⋯ ㉠

$\log_{0.5}(x+1)+\log_{0.5}(x+6)>\log_{0.5}14$에서

$\log_{0.5}(x+1)(x+6)>\log_{0.5}14$

$\therefore \log_{0.5}(x^2+7x+6)>\log_{0.5}14$

밑이 1보다 작으므로 $x^2+7x+6<14$

$x^2+7x-8<0$, $(x+8)(x-1)<0$

$\therefore -8<x<1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-1<x<1$

답 ③

0487 $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-1}\ge\left(\frac{4}{3}\right)^{x-3}$에서 $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-3x}\ge\left(\frac{4}{3}\right)^{x-3}$

밑이 1보다 크므로 $1-3x\ge x-3$

$4x\le 4$ $\therefore x\le 1$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$\log_2(x^2-2x+5)<3$에서

$x^2-2x+5=(x-1)^2+4>0$

즉 모든 실수 x가 진수의 조건을 만족시킨다.

$\log_2(x^2-2x+5)<\log_2 8$에서 밑이 1보다 크므로

$x^2-2x+5<8$, $x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$ $\therefore -1<x<3$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-1<x\le 1$ ⋯ ❸

답 $-1<x\le 1$

04 로그함수

채점 기준	비율
❶ 지수부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 로그부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0488 진수의 조건에서 $f(x)>0$, $-x+5>0$

$-1<x<6$, $x<5$ $\quad\therefore -1<x<5$ …… ㉠

$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(-x+5)\geq 0$에서

$\log_3 f(x)-\log_3(-x+5)\geq 0$

$\therefore \log_3 f(x)\geq \log_3(-x+5)$

밑이 1보다 크므로 $f(x)\geq -x+5$

주어진 그래프에서 $f(x)\geq -x+5$의 해는

$2\leq x\leq 7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2\leq x<5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$2+3+4=9$

답 9

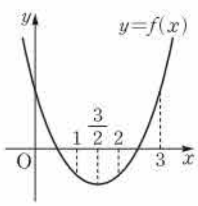
0489 진수의 조건에서

$3x+3>0$ $\quad\therefore x>-1$ …… ㉠

$\log_2(3x+3)\geq \log_2(x^2+k)$에서 밑이 1보다 크므로

$3x+3\geq x^2+k$ $\quad\therefore x^2-3x+k-3\leq 0$ …… ㉡

$f(x)=x^2-3x+k-3$이라 할 때, ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x의 개수가 2이려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(0)>0$, $f(1)\leq 0$,

$f(2)\leq 0$, $f(3)>0$

$f(0)=f(3)=k-3$이므로 $k-3>0$에서 $k>3$

$f(1)=f(2)=k-5$이므로 $k-5\leq 0$에서 $k\leq 5$

$\therefore 3<k\leq 5$

답 $3<k\leq 5$

유형 17 로그부등식; 진수에 로그가 있는 경우 본책 71쪽

$\log_a(\log_b x)>k$ ($a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$) 꼴의 부등식은 다음을 이용하여 푼다.

① 진수의 조건에서 $\log_b x>0$

② $a>1$일 때 ➡ $\log_b x>a^k$

$0<a<1$일 때 ➡ $\log_b x<a^k$

0490 진수의 조건에서

$x>0$, $\log_3 x>0$ $\quad\therefore x>1$ …… ㉠

$\log_2(\log_3 x)\leq 1$에서 $\log_2(\log_3 x)\leq \log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $\log_3 x\leq 2$ $\quad\therefore x\leq 9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x\leq 9$

답 ④

0491 진수의 조건에서

$x>0$, $\log_3 x>0$, $\log_4(\log_3 x)>0$

$\log_4(\log_3 x)>\log_4 1$에서 $\log_3 x>1$

$\therefore x>3$ …… ㉠ ⋯➔ ❶

$\log_{\frac{1}{2}}\{\log_4(\log_3 x)\}>0$에서

$\log_{\frac{1}{2}}\{\log_4(\log_3 x)\}>\log_{\frac{1}{2}}1$

밑이 1보다 작으므로 $\log_4(\log_3 x)<1$

밑이 1보다 크므로 $\log_3 x<4$

$\therefore x<81$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<81$ ⋯➔ ❷

따라서 정수 x는 4, 5, 6, ⋯, 80의 77개이다. ⋯➔ ❸

답 77

채점 기준	비율
❶ 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 로그부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

유형 18 로그부등식; $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우 본책 72쪽

로그부등식 $p(\log_a x)^2+q\log_a x+r>0$의 해는 $\log_a x=t$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차부등식 $pt^2+qt+r>0$의 해를 이용하여 구한다.

0492 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}125x\cdot\log_5\dfrac{x}{5}\geq 0$에서

$(\log_{\frac{1}{5}}125+\log_{\frac{1}{5}}x)(\log_5 x-\log_5 5)\geq 0$

$\therefore (-3-\log_5 x)(\log_5 x-1)\geq 0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $(-3-t)(t-1)\geq 0$

$(t+3)(t-1)\leq 0$ $\quad\therefore -3\leq t\leq 1$

즉 $-3\leq \log_5 x\leq 1$이므로 $\log_5 5^{-3}\leq \log_5 x\leq \log_5 5$

밑이 1보다 크므로 $\dfrac{1}{125}\leq x\leq 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\dfrac{1}{125}\leq x\leq 5$

따라서 $\alpha=\dfrac{1}{125}$, $\beta=5$이므로

$\alpha\beta=\dfrac{1}{25}$

답 $\dfrac{1}{25}$

0493 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2+t-2\geq 0$

$(t+2)(t-1)\geq 0$ $\quad\therefore t\leq -2$ 또는 $t\geq 1$

즉 $\log_2 x\leq -2$ 또는 $\log_2 x\geq 1$이므로

$\log_2 x\leq \log_2 2^{-2}$ 또는 $\log_2 x\geq \log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $x\leq\dfrac{1}{4}$ 또는 $x\geq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x\leq\dfrac{1}{4}$ 또는 $x\geq 2$

답 ④

0494 $\log_{\frac{1}{4}}x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2+at+b<0$ …… ㉠

$\frac{1}{16}<x<16$에서

$\log_{\frac{1}{4}}16<\log_{\frac{1}{4}}x<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{16}$, 즉 $-2<\log_{\frac{1}{4}}x<2$

$\therefore -2<t<2$

해가 $-2<t<2$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(t+2)(t-2)<0 \quad \therefore t^2-4<0$

이 부등식이 ㉠과 일치해야 하므로 $\quad a=0,\ b=-4$

$\therefore a+b=-4$ 답 ①

0495 진수의 조건에서 $\quad x>0$ ...... ㉠

$[\log_3 x]=t$ (t는 정수)로 놓으면 $\quad t^2-t-6<0$

$(t+2)(t-3)<0 \quad \therefore -2<t<3$

이때 t는 정수이므로 $\quad t=-1,\ 0,\ 1,\ 2$

$[\log_3 x]=-1$일 때, $\quad -1\le\log_3 x<0 \quad \therefore \frac{1}{3}\le x<1$

$[\log_3 x]=0$일 때, $\quad 0\le\log_3 x<1 \quad \therefore 1\le x<3$

$[\log_3 x]=1$일 때, $\quad 1\le\log_3 x<2 \quad \therefore 3\le x<9$

$[\log_3 x]=2$일 때, $\quad 2\le\log_3 x<3 \quad \therefore 9\le x<27$

$\therefore \frac{1}{3}\le x<27$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad \frac{1}{3}\le x<27$

답 $\frac{1}{3}\le x<27$

유형 19 양변에 로그를 취하는 부등식 본책 72쪽

(1) $x^{\log_a f(x)}>g(x)$ 꼴: 양변에 밑이 a인 로그를 취한다.
① $a>1$일 때 ➡ $\log_a f(x)\cdot\log_a x>\log_a g(x)$
② $0<a<1$일 때 ➡ $\log_a f(x)\cdot\log_a x<\log_a g(x)$
(2) $a^{f(x)}>b^{g(x)}$ $(a\ne b)$ 꼴: 양변에 밑이 c인 로그를 취한다.
① $c>1$일 때 ➡ $f(x)\log_c a>g(x)\log_c b$
② $0<c<1$일 때 ➡ $f(x)\log_c a<g(x)\log_c b$

0496 진수의 조건에서 $\quad x>0$ ...... ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}}x}>4x^3$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}}x^{\log_{\frac{1}{2}}x}<\log_{\frac{1}{2}}4x^3$

$(\log_{\frac{1}{2}}x)^2<\log_{\frac{1}{2}}4+3\log_{\frac{1}{2}}x$

$\therefore (\log_{\frac{1}{2}}x)^2-3\log_{\frac{1}{2}}x+2<0$

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 놓으면 $\quad t^2-3t+2<0$

$(t-1)(t-2)<0 \quad \therefore 1<t<2$

즉 $1<\log_{\frac{1}{2}}x<2$이므로 $\quad \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로 $\quad \frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad \frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

0497 진수의 조건에서 $\quad x>0$ ...... ㉠

$x^{\log x}<x$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}<\log x \quad \therefore (\log x)^2-\log x<0$

$\log x=t$로 놓으면 $\quad t^2-t<0$

$t(t-1)<0 \quad \therefore 0<t<1$

즉 $0<\log x<1$이므로 $\quad \log 1<\log x<\log 10$

밑이 1보다 크므로 $\quad 1<x<10$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad 1<x<10$

따라서 정수 x는 2, 3, 4, ⋯, 9의 8개이다. 답 ①

0498 $2^{2x+1}>5^{4-x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(2x+1)\log 2>(4-x)\log 5$

$\therefore (2\log 2+\log 5)x>4\log 5-\log 2$

이때 $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0.3=0.7$이므로

$(2\times 0.3+0.7)x>4\times 0.7-0.3$

$1.3x>2.5 \quad \therefore x>\frac{2.5}{1.3}=1.9\cdots$

따라서 가장 작은 정수 x의 값은 2이다. 답 2

유형 20 로그부등식의 활용 본책 72쪽

모든 양의 실수 x에 대하여 부등식 $(\log_a x)^2+p\log_a x+q>0$이 성립하려면 $\log_a x=t$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차부등식 $t^2+pt+q>0$이 항상 성립해야 한다.

0499 $2(\log_4 x)^2-\log_4 ax^2\ge 0$에서

$2(\log_4 x)^2-2\log_4 x-\log_4 a\ge 0$

$\log_4 x=t$로 놓으면 $\quad 2t^2-2t-\log_4 a\ge 0$

모든 양의 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $2t^2-2t-\log_4 a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2+2\log_4 a\le 0$

$\log_4 a\le -\frac{1}{2}, \quad \log_4 a\le \log_4\frac{1}{2}$

밑이 1보다 크므로 $\quad a\le\frac{1}{2}$

이때 $a>0$이므로 $\quad 0<a\le\frac{1}{2}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다. 답 $\frac{1}{2}$

0500 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2(2-\log a)x+\log a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2-\log a)^2-\log a<0$

$\therefore (\log a)^2-5\log a+4<0$ ⋯➊

$\log a=t$로 놓으면 $\quad t^2-5t+4<0$

$(t-1)(t-4)<0 \quad \therefore 1<t<4$

즉 $1<\log a<4$이므로 $\quad \log 10<\log a<\log 10^4$

밑이 1보다 크므로 $10<a<10000$ ⋯ ❷

따라서 정수 a는 $\underbrace{11, 12, 13, \cdots, 9999}_{9999-11+1=9989(\text{개})}$의 9989개이다. ⋯ ❸

답 9989

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 로그부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0501 $(\log x+\log 2)(\log x+\log 8)=-(\log k)^2$에서

$(\log x)^2+(\log 2+\log 8)\log x+\log 2\cdot\log 8+(\log k)^2=0$

$\therefore (\log x)^2+4\log 2\cdot\log x+3(\log 2)^2+(\log k)^2=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2+4t\log 2+3(\log 2)^2+(\log k)^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\log 2)^2-\{3(\log 2)^2+(\log k)^2\}>0$

$(\log k)^2-(\log 2)^2<0$

$(\log k+\log 2)(\log k-\log 2)<0$

$\therefore -\log 2<\log k<\log 2$

즉 $\log 2^{-1}<\log k<\log 2$이고 밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{2}<k<2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=1$ 답 ③

유형 21 로그방정식과 로그부등식의 실생활에의 활용 본책 73쪽

주어진 조건에 맞게 방정식 또는 부등식을 세운 다음 양변에 상용로그를 취하여 해를 구한다.

0502 n년 후의 휴대 전화의 가격은

$80\times(1-0.15)^n=0.85^n\times 80$ (만 원)

n년 후에 휴대 전화의 가격이 8만 원 이하가 된다고 하면

$0.85^n\times 80\le 8$ $\therefore 0.85^n\le\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log 0.85\le -1$

$n(\log 8.5-1)\le -1$, $n(0.9294-1)\le -1$

$-0.0706n\le -1$ $\therefore n\ge 14.\cdots$

따라서 15년 후인 2036년에 휴대 전화의 가격이 처음으로 8만 원 이하가 된다. 답 ⑤

0503 현재의 미세 먼지 농도를 a라 할 때 n년 후의 미세 먼지 농도는

$a\times(1+0.05)^n=a\times 1.05^n$

n년 후에 미세 먼지 농도가 현재의 2배 이상이 된다고 하면

$a\times 1.05^n\ge 2a$ $\therefore 1.05^n\ge 2$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log 1.05\ge\log 2$

$0.02n\ge 0.3$ $\therefore n\ge\frac{0.3}{0.02}=15$

따라서 미세 먼지 농도가 현재의 2배 이상이 되는 것은 최소 15년 후이다. 답 15년

0504 여과기를 1개 설치하면 불순물의 $\frac{4}{5}$가 여과기를 통과하므로 n개 설치하면 불순물의 $\left(\frac{4}{5}\right)^n$이 여과기를 통과한다.

여과기를 n개 설치하여 전체 불순물의 $\frac{1}{10}$만 여과기를 통과한다고 하면 $\left(\frac{4}{5}\right)^n=\frac{1}{10}$ ⋯ ❶

양변에 상용로그를 취하면 $n\log\frac{4}{5}=\log\frac{1}{10}$

이때 $\log\frac{4}{5}=\log\frac{8}{10}=3\log 2-1=3\times 0.3-1=-0.1$이므로

$n\times(-0.1)=-1$ $\therefore n=\frac{1}{0.1}=10$

따라서 필요한 여과기는 10개이다. ⋯ ❷

답 10

채점 기준	비율
❶ 로그방정식을 세울 수 있다.	50 %
❷ 필요한 여과기의 개수를 구할 수 있다.	50 %

0505 사업을 시작할 때의 자본을 K원이라 하면 n년 후의 두 회사 A, B의 자본은 각각

$K(1+0.1)^n=K\times 1.1^n$(원),

$K(1+0.2)^n=K\times 1.2^n$(원)

n년 후에 B 회사의 자본이 A 회사의 자본의 10배 이상이 된다고 하면

$K\times 1.2^n\ge 10\times K\times 1.1^n$ $\therefore 1.2^n\ge 10\times 1.1^n$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log 1.2\ge\log 10+n\log 1.1$

$0.079n\ge 1+0.041n$, $0.038n\ge 1$

$\therefore n\ge 26.\cdots$

따라서 사업을 시작한 지 27년 후에 B 회사의 자본이 처음으로 A 회사의 자본의 10배 이상이 된다. 답 ②

0506 **1st** $(f\circ g)(n)$의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 값을 구한다.

$(f\circ g)(n)=f(g(n))=f(\log_4 n)=2^{\log_4 n}=\sqrt{n}$

$\sqrt{n}$의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 값은

$1^2, 2^2, 3^2, \cdots, 10^2$ ⋯⋯ ㉠

2nd $(g\circ f)(n)$의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 값을 구한다.

$(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(2^n)=\log_4 2^n=\frac{n}{2}$

$\frac{n}{2}$의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 값은

$2, 4, 6, \cdots, 100$ ⋯⋯ ㉡

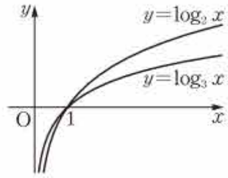
3rd 모든 자연수 n의 값의 합을 구한다.

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 n의 값은 $2^2, 4^2, 6^2, 8^2, 10^2$이므로 그 합은

$4+16+36+64+100=220$ 답 220

0507 1st $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

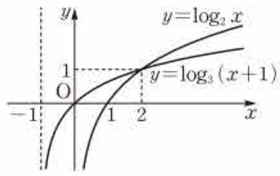
ㄱ. $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x>1$이면 $\log_2 x>\log_3 x$이다.



2nd $y=\log_2 x$, $y=\log_3 (x+1)$의 그래프를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $y=\log_3 (x+1)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 (x+1)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0<x<2$이면

$$\log_2 x<\log_3 (x+1)$$



3rd $y=2^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

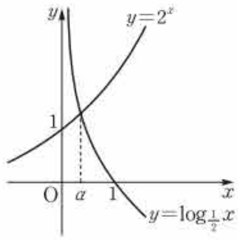
ㄷ. $2^x+\log_2 x=0$에서

$$2^x=\log_{\frac{1}{2}} x$$

$y=2^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$0<x<a$일 때, $\quad 2^x<\log_{\frac{1}{2}} x$

$x>a$일 때, $\quad 2^x>\log_{\frac{1}{2}} x$



그런데 $x=\frac{1}{2}$일 때 $\underbrace{2^{\frac{1}{2}}}_{\sqrt{2}}>\underbrace{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}}_{1}$이므로

$$a<\frac{1}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0508 1st 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 좌표를 구한다.

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $\log_a (bx-1)=0$에서

$$bx-1=1 \qquad \therefore x=\frac{2}{b}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$$

2nd 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식을 구한다.

$y=g(x)$에서

$$y=\log_b (ax-1)=\log_b a\left(x-\frac{1}{a}\right)=\log_b\left(x-\frac{1}{a}\right)+\log_b a$$

이므로 곡선 $y=g(x)$는 함수 $y=\log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{a}$만큼, y축의 방향으로 $\log_b a$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $\quad x=\frac{1}{a}$

3rd a와 b 사이의 관계식과 a의 범위를 구한다.

점 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이 직선 $x=\frac{1}{a}$ 위에 있어야 하므로

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a} \qquad \therefore b=2a$$

한편 $b>1$에서 $a>\frac{1}{2}$이므로 $\quad \frac{1}{2}<a<1$ 답 ③

0509 1st 두 점 O, A를 평행이동한 점의 좌표를 구한다.

원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점을 각각 O', A'이라 하면

$$\mathrm{O}'(5,\ 3),\ \mathrm{A}'(6,\ 3)$$

2nd 그래프가 점 O'을 지날 때와 점 A'을 지날 때의 a의 값을 구한다.

$y=\log_2 (x+a)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이므로 그래프가 점 O'을 지날 때 a의 값이 최대이고, 점 A'을 지날 때 a의 값이 최소이다.

그래프가 점 O'을 지날 때, $\log_2 (5+a)=3$이므로

$$5+a=2^3 \qquad \therefore a=3$$

그래프가 점 A'을 지날 때, $\log_2 (6+a)=3$이므로

$$6+a=2^3 \qquad \therefore a=2$$

3rd a의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

a의 최댓값은 3, 최솟값은 2이므로 구하는 합은

$$3+2=5$$

답 5

0510 1st 점 P의 좌표를 $(a,\ a)$로 놓고 두 점 Q, R의 좌표를 a를 이용하여 나타낸다.

직선 $y=x$ 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ a)$라 하자.

점 Q는 직선 $y=a$와 곡선 $y=\log_4\left(x-\frac{1}{4}\right)$의 교점이므로

$\log_4\left(x-\frac{1}{4}\right)=a$에서 $\quad x-\frac{1}{4}=4^a \quad \therefore x=4^a+\frac{1}{4}$

$$\therefore \mathrm{Q}\left(4^a+\frac{1}{4},\ a\right)$$

점 R는 직선 $x=a$와 곡선 $y=2^x$의 교점이므로

$$\mathrm{R}(a,\ 2^a)$$

2nd a의 값을 구한다.

삼각형 PQR가 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$인 이등변삼각형이므로

$$4^a+\frac{1}{4}-a=2^a-a \qquad \therefore 4^a-2^a+\frac{1}{4}=0$$

$2^a=t\,(t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-t+\frac{1}{4}=0$

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=0 \qquad \therefore t=\frac{1}{2}$$

즉 $2^a=\frac{1}{2}=2^{-1}$이므로 $\quad a=-1$

3rd 삼각형 PQR의 넓이를 구한다.

$\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$, $\mathrm{R}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$이므로 삼각형 PQR의 넓이는

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)}_{\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{PR}}}=\frac{9}{8}$$

답 ③

0511 1st 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.

$\mathrm{P}(p,\ \log_a p)$, $\mathrm{Q}(q,\ \log_a q)\,(p>q)$로 놓으면 선분 PQ의 중점이 원의 중심 $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$과 일치하므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$에서 $\quad p+q=\frac{5}{2}$ $\quad$ …… ㉠

$\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서 $\quad \log_a pq=0$

$\therefore pq=1$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad p=2,\ q=\frac{1}{2}\ (\because p>q)$

$\therefore$ P$(2, \log_a 2)$, Q$\left(\frac{1}{2}, -\log_a 2\right)$

(2nd) a의 값을 구한다.

선분 PQ의 길이가 원의 지름의 길이와 같으므로

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\{\log_a 2-(-\log_a 2)\}^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

$4(\log_a 2)^2=1 \qquad \therefore \log_a 2=\pm\frac{1}{2}$

이때 $a>1$이므로 $\qquad \log_a 2=\frac{1}{2}, \qquad \sqrt{a}=2$

$\therefore a=4$ 답 ③

0512 (1st) $\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$임을 이용하여 k의 값을 구한다.

$\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$이고 $\overline{OC}=k$이므로

A(k, k), B$(2k, k)$

점 A는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$k=-\log_a k$ …… ㉠

점 B는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$k=\log_a 2k$ …… ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $\qquad 0=\log_a 2k+\log_a k$

$\log_a 2k^2=0, \qquad 2k^2=1, \qquad k^2=\frac{1}{2}$

$\therefore k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because k>0)$ …… ㉢

(2nd) d를 a에 대한 식으로 나타낸다.

곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$-\log_a \alpha=2\sqrt{2}$에서 $\qquad \alpha=a^{-2\sqrt{2}}$

$\log_a \beta=2\sqrt{2}$에서 $\qquad \beta=a^{2\sqrt{2}}$

$\therefore d=\beta-\alpha=a^{2\sqrt{2}}-a^{-2\sqrt{2}}$ …… ㉣

(3rd) $a^{2\sqrt{2}}$의 값을 구한다.

㉡에서 $\qquad a^k=2k$

위의 식에 ㉢을 대입하면 $\qquad a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore a^{2\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^4=4$

(4th) $20d$의 값을 구한다.

㉣에서 $\qquad d=4-4^{-1}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

$\therefore 20d=20\cdot\frac{15}{4}=75$ 답 75

0513 (1st) $1<x<4$에서 $\log_2 x$의 값의 범위를 구한다.

$1<x<4$의 각 변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 1<\log_2 x<\log_2 4 \qquad \therefore 0<\log_2 x<2$

(2nd) A, B의 대소를 비교한다.

$A-B=\log_2 x^2-(\log_2 x)^2=2\log_2 x-(\log_2 x)^2$

$=\log_2 x(2-\log_2 x)>0$

$\therefore A>B$

(3rd) B, C의 대소를 비교한다.

$0<\log_2 x\le1$일 때,

$0<(\log_2 x)^2\le1$, $\log_2(\log_2 x)\le0$

$\therefore (\log_2 x)^2>\log_2(\log_2 x)$ …… ㉠

$1<\log_2 x<2$일 때,

$1<(\log_2 x)^2<4$, $0<\log_2(\log_2 x)<1$

$\therefore (\log_2 x)^2>\log_2(\log_2 x)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\qquad B>C$

(4th) A, B, C의 대소를 비교한다.

$A>B$, $B>C$이므로

$A>B>C$ 답 ①

0514 (1st) $\log_2 x=t$로 놓고 $\log_2\frac{x^2}{y}$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le8$에서 $0\le t\le3$이고

$$\log_2\frac{x^2}{y}=2\log_2 x-\log_2 y$$
$$=2\log_2 x-(\log_2 x)^2$$
$$=2t-t^2=-(t-1)^2+1$$

따라서 $\log_2\frac{x^2}{y}$은 $t=1$일 때 최댓값 1, $t=3$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

(2nd) $\frac{x^2}{y}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

$-3\le\log_2\frac{x^2}{y}\le1$이므로 $\qquad \log_2 2^{-3}\le\log_2\frac{x^2}{y}\le\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $\qquad \frac{1}{8}\le\frac{x^2}{y}\le2$

따라서 $\frac{x^2}{y}$의 최댓값은 2, 최솟값은 $\frac{1}{8}$이므로 구하는 합은

$2+\frac{1}{8}=\frac{17}{8}$ 답 $\frac{17}{8}$

0515 (1st) 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

진수의 조건에서

$5-x>0$, $x+3>0 \qquad \therefore -3<x<5$ …… ㉠

(2nd) $a>1$일 때와 $0<a<1$일 때로 나누어 a의 값을 구한다.

$\log_a(5-x)<\log_a(x+3)+1$에서

$\log_a(5-x)<\log_a a(x+3)$

(i) $a>1$일 때,

$5-x<a(x+3), \qquad (a+1)x>5-3a$

$\therefore x>\frac{5-3a}{a+1}$ $(\because a+1>0)$ …… ㉡

이때 ㉠, ㉡의 공통 범위가 $-1<x<5$이어야 하므로

$\frac{5-3a}{a+1}=-1, \qquad 5-3a=-a-1$

$\therefore a=3$

(ii) $0<a<1$일 때,

$5-x>a(x+3), \qquad (a+1)x<5-3a$

$\therefore x<\frac{5-3a}{a+1}$ $(\because a+1>0)$ …… ㉢

이때 ㉠, ㉢의 공통 범위가 $-1<x<5$가 되도록 하는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\qquad a=3$ 답 3

0516 (1st) 집합 A의 원소를 x의 값의 범위로 나타낸다.

$x^2-5x+4\le0$에서 $\qquad (x-1)(x-4)\le0 \qquad \therefore 1\le x\le4$

$\therefore A=\{x|1\le x\le4\}$

(2nd) 집합 B의 원소를 x의 값의 범위로 나타낸다.

$(\log_2 x)^2-2k\log_2 x+k^2-1\le 0$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면

$$t^2-2kt+k^2-1\le 0$$
$$(t-k+1)(t-k-1)\le 0$$
$$\therefore k-1\le t\le k+1$$

즉 $k-1\le \log_2 x\le k+1$이므로

$$\log_2 2^{k-1}\le \log_2 x\le \log_2 2^{k+1}$$

밑이 1보다 크므로 $2^{k-1}\le x\le 2^{k+1}$

$$\therefore B=\{x\,|\,2^{k-1}\le x\le 2^{k+1}\}$$

(3rd) 정수 k의 개수를 구한다.

$A\cap B\neq\varnothing$이 되려면 $2^{k+1}\ge 1$, $2^{k-1}\le 4$이어야 한다.

$2^{k+1}\ge 1$, 즉 $2^{k+1}\ge 2^0$에서 밑이 1보다 크므로

$$k+1\ge 0 \qquad \therefore k\ge -1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$2^{k-1}\le 4$, 즉 $2^{k-1}\le 2^2$에서 밑이 1보다 크므로

$$k-1\le 2 \qquad \therefore k\le 3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$-1\le k\le 3$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 k는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 ①

0517 (1st) 두 선수 A, B의 n년 후의 연봉을 각각 구하여 부등식을 세운다.

n년 후에 A의 연봉이 B의 연봉을 초과한다고 하면

$$6\times 1.28^n>8\times 1.2^n, \text{ 즉 } 3\times 1.28^n>4\times 1.2^n$$

(2nd) 양변에 상용로그를 취하여 n의 값의 범위를 구한다.

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 3+n\log 1.28>2\log 2+n\log 1.2$$
$$n(\log 1.28-\log 1.2)>2\log 2-\log 3$$
$$n\log\frac{32}{30}>2\log 2-\log 3$$
$$n(5\log 2-\log 3-1)>2\log 2-\log 3$$
$$\therefore n>\frac{2\log 2-\log 3}{5\log 2-\log 3-1}=\frac{0.1249}{0.0279}=4.4\cdots$$

따라서 5년 후, 즉 2027년에 A의 연봉이 처음으로 B의 연봉을 초과한다. 답 ④

0518 전략 두 점 A, B의 좌표를 k를 이용하여 나타낸 후 $\overline{AB}=3$임을 이용하여 k에 대한 방정식을 세운다.

풀이 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(k, \log_2 k)$, $(k, -\log_2(6-k))$이므로 $\overline{AB}=3$에서

$$|\log_2 k-\{-\log_2(6-k)\}|=3$$
$$|\log_2 k(6-k)|=3$$
$$\therefore \log_2 k(6-k)=3 \text{ 또는 } \log_2 k(6-k)=-3 \quad \cdots ❶$$

(i) $\log_2 k(6-k)=3$일 때,

$$k(6-k)=2^3\text{에서} \qquad k^2-6k+8=0$$
$$(k-2)(k-4)=0 \qquad \therefore \underbrace{k=2 \text{ 또는 } k=4}_{0<k<6\text{을 만족시킨다.}}$$

(ii) $\log_2 k(6-k)=-3$일 때,

$$k(6-k)=2^{-3}\text{에서} \qquad k^2-6k+\frac{1}{8}=0$$
$$8k^2-48k+1=0 \qquad \therefore \underbrace{k=\frac{12\pm\sqrt{142}}{4}}_{0<k<6\text{을 만족시킨다.}} \quad \cdots ❷$$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$$2\cdot 4\cdot\frac{12-\sqrt{142}}{4}\cdot\frac{12+\sqrt{142}}{4}=1 \quad \cdots ❸$$

답 1

채점 기준	비율
❶ k에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ ❶에서 얻은 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 실수 k의 값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

참고 두 방정식 $k^2-6k+8=0$, $k^2-6k+\frac{1}{8}=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계를 각각 이용하여 두 근의 곱을 구하는 방법을 생각할 수 있다. 그러나 이 문제에서는 실근 k의 값의 범위가 주어졌으므로 근을 직접 구한 다음 범위를 만족시키는 k의 값을 찾아야 한다.

0519 전략 두 점 A, G가 함수 $y=\log_4 x$의 그래프 위의 점임을 이용하여 $\overline{AB}$, $\overline{GC}$의 길이를 구한 후 주어진 조건을 이용하여 b, c를 a를 이용하여 나타낸다.

풀이 $B(a, 0)$, $C(b, 0)$이므로

$$\overline{AB}=\log_4 a,\ \overline{GC}=\log_4 b$$

조건 (가)에 의하여 $\overline{DG}=\log_4 b-\log_4 a=1$이므로

$$\log_4\frac{b}{a}=\log_4 4 \qquad \therefore b=4a$$

$\overline{BC}=b-a=3a$이므로 조건 (가)에 의하여 $\overline{CE}=4a$

$$\therefore c=\overline{OB}+\overline{BC}+\overline{CE}=a+3a+4a=8a \quad \cdots ❶$$

조건 (나)에 의하여 $\overline{GC}\cdot\overline{CE}=4\,\overline{AB}\cdot\overline{BC}$이므로

$$\log_4 4a\cdot 4a=4\cdot\log_4 a\cdot 3a$$
$$1+\log_4 a=3\log_4 a, \qquad \log_4 a=\frac{1}{2}$$
$$\therefore a=\sqrt{4}=2 \quad \cdots ❷$$

$b=4\cdot 2=8$, $c=8\cdot 2=16$이므로

$$a+b+c=26 \quad \cdots ❸$$

답 26

채점 기준	비율
❶ b, c를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0520 전략 먼저 삼각형 ABC가 직각삼각형임을 이용하여 $S(x)$를 구한다.

풀이
$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot 6\log_3 x\cdot\log_9\frac{81}{x}$$
$$=3\log_3 x\left(2-\frac{1}{2}\log_3 x\right)$$
$$=-\frac{3}{2}(\log_3 x)^2+6\log_3 x \qquad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $1<x<81$에서

$$\log_3 1<\log_3 x<\log_3 81 \qquad \therefore 0<t<4$$

이때 ㉠은

$$-\frac{3}{2}t^2+6t=-\frac{3}{2}(t-2)^2+6$$

이므로 $0<t<4$에서 $t=2$일 때 최댓값 6을 갖는다.

$$\therefore M=6 \quad \cdots ❷$$

$t=2$에서 $\quad \log_3 x=2 \quad \therefore x=3^2=9$

따라서 $a=9$이므로

$a+M=15$ ··· ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ $S(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ M의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+M$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0521 전략 $\log_x y=t$로 놓고 t에 대한 이차방정식의 해를 구한다.

풀이 $2\log_x y-2\log_y x+3=0$에서

$$2\log_x y-\frac{2}{\log_x y}+3=0$$

$\log_x y=t$로 놓으면 $x>1$, $y>1$에서 $t>0$이고

$$2t-\frac{2}{t}+3=0, \quad 2t^2+3t-2=0$$

$$(t+2)(2t-1)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2}\ (\because t>0)$$ ··· ❶

즉 $\log_x y=\frac{1}{2}$이므로 $\quad y=\sqrt{x}$ ··· ❷

$y=\sqrt{x}$를 $4y^2-x^2$에 대입하면

$$4x-x^2=-(x-2)^2+4$$

따라서 $4y^2-x^2$은 $x=2$일 때 최댓값 4를 갖는다. ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $\log_x y=t$로 치환한 이차방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ x, y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $4y^2-x^2$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0522 전략 a의 값의 범위를 나누어 주어진 로그부등식을 푼다.

풀이 (i) $a\ge5$일 때,

주어진 부등식은 $\quad \log_2 a-\log_2 5+\log_2 b\le2$

$$\log_2\frac{ab}{5}\le\log_2 4$$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{ab}{5}\le4$

$\therefore ab\le20$

$a=5$이면 $\quad b=1, 2, 3, 4$

$a=6$이면 $\quad b=1, 2, 3$

$a=7$이면 $\quad b=1, 2$

$a=8$이면 $\quad b=1, 2$

$a=9$이면 $\quad b=1, 2$

$a=10$이면 $\quad b=1, 2$

$11\le a\le20$이면 $\quad b=1$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$4+3+2\cdot4+1\cdot10=25$ ··· ❶

(ii) $0<a<5$일 때,

주어진 부등식은 $\quad -\log_2 a+\log_2 5+\log_2 b\le2$

$$\log_2\frac{5b}{a}\le\log_2 4$$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{5b}{a}\le4$

$\therefore b\le\frac{4}{5}a$

$a=1$이면 이를 만족시키는 자연수 b는 존재하지 않는다.

$a=2$이면 $\quad b=1$

$a=3$이면 $\quad b=1, 2$

$a=4$이면 $\quad b=1, 2, 3$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+2+3=6$ ··· ❷

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$25+6=31$ ··· ❸

답 31

채점 기준	비율
❶ $a\ge5$일 때 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❷ $0<a<5$일 때 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0523 전략 x^2의 계수가 0일 때와 0이 아닐 때로 나누어 생각한다.

풀이 (i) $1-\log_3 a=0$, 즉 $a=3$일 때,

주어진 부등식은 $\quad 1>0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. ··· ❶

(ii) $1-\log_3 a\ne0$, 즉 $a\ne3$일 때,

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$1-\log_3 a>0$에서 $\quad \log_3 a<1$

즉 $\log_3 a<\log_3 3$이고 밑이 1보다 크므로

$a<3$ ······ ㉠

이차방정식 $(1-\log_3 a)x^2-2(1-\log_3 a)x+\log_3 a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(1-\log_3 a)^2-(1-\log_3 a)\log_3 a<0$$

$$\therefore 2(\log_3 a)^2-3\log_3 a+1<0$$

$\log_3 a=t$로 놓으면 $\quad 2t^2-3t+1<0$

$$(2t-1)(t-1)<0 \quad \therefore \frac{1}{2}<t<1$$

즉 $\frac{1}{2}<\log_3 a<1$이므로 $\quad \log_3 3^{\frac{1}{2}}<\log_3 a<\log_3 3$

밑이 1보다 크므로 $\quad \sqrt{3}<a<3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad \sqrt{3}<a<3$ ··· ❷

(i), (ii)에서 $\quad \sqrt{3}<a\le3$ ··· ❸

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$2+3=5$ ··· ❹

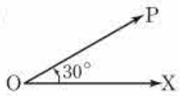
답 5

채점 기준	비율
❶ x^2의 계수가 0일 때 주어진 부등식이 성립하도록 하는 a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ x^2의 계수가 0이 아닐 때 주어진 부등식이 성립하도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 주어진 부등식이 성립하도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ 모든 자연수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

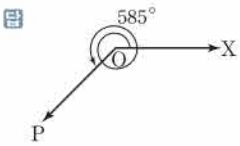
Ⅱ. 삼각함수

05 삼각함수

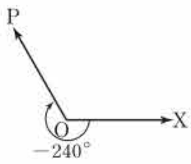
0524 답



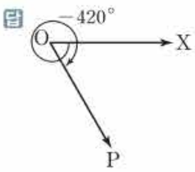
0525 답



0526 답



0527 답



0528 답 $360^\circ\times n+135^\circ$

0529 답 $360^\circ\times n+315^\circ$

0530 $630^\circ=360^\circ\times1+270^\circ$이므로

$360^\circ\times n+270^\circ$ 답 $360^\circ\times n+270^\circ$

0531 $1140^\circ=360^\circ\times3+60^\circ$이므로

$360^\circ\times n+60^\circ$ 답 $360^\circ\times n+60^\circ$

0532 $-855^\circ=360^\circ\times(-3)+225^\circ$이므로

$360^\circ\times n+225^\circ$ 답 $360^\circ\times n+225^\circ$

0533 $-1200^\circ=360^\circ\times(-4)+240^\circ$이므로

$360^\circ\times n+240^\circ$ 답 $360^\circ\times n+240^\circ$

0534 $650^\circ=360^\circ\times1+290^\circ$

따라서 650°는 제4사분면의 각이다. 답 제4사분면

0535 $1280^\circ=360^\circ\times3+200^\circ$

따라서 1280°는 제3사분면의 각이다. 답 제3사분면

0536 $-705^\circ=360^\circ\times(-2)+15^\circ$

따라서 -705°는 제1사분면의 각이다. 답 제1사분면

0537 $-945^\circ=360^\circ\times(-3)+135^\circ$

따라서 -945°는 제2사분면의 각이다. 답 제2사분면

0538 $135^\circ=135\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{3}{4}\pi$ 답 $\frac{3}{4}\pi$

0539 $-210^\circ=(-210)\cdot\frac{\pi}{180}=-\frac{7}{6}\pi$ 답 $-\frac{7}{6}\pi$

0540 $\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{5}\pi\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=108^\circ$ 답 108°

0541 $-\frac{5}{4}\pi=\left(-\frac{5}{4}\pi\right)\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=-225^\circ$ 답 -225°

0542 답 $2n\pi+\frac{1}{3}$

0543 답 $2n\pi+\frac{\pi}{3}$

0544 $\frac{7}{2}\pi=2\pi\times1+\frac{3}{2}\pi$이므로

$2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ 답 $2n\pi+\frac{3}{2}\pi$

0545 $-\frac{\pi}{4}=2\pi\times(-1)+\frac{7}{4}\pi$이므로

$2n\pi+\frac{7}{4}\pi$ 답 $2n\pi+\frac{7}{4}\pi$

0546 $l=4\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$, $S=\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$

답 $l=\frac{2}{3}\pi$, $S=\frac{4}{3}\pi$

0547 $r\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$이므로 $r=3$

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{3}{4}\pi=\frac{9}{8}\pi$ 답 $r=3$, $S=\frac{9}{8}\pi$

0548 $\frac{1}{2}r\cdot8=12$이므로 $r=3$

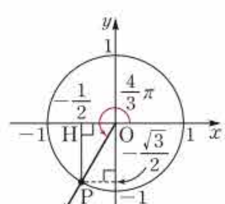
$3\theta=8$이므로 $\theta=\frac{8}{3}$ 답 $r=3$, $\theta=\frac{8}{3}$

0549 $\overline{OP}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$이므로

$\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$

답 풀이 참조

0550 오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



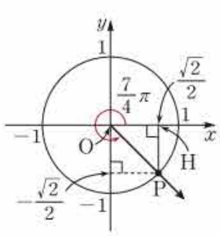
$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{3}$이므로

$P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

답 풀이 참조

0551 오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{7}{4}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



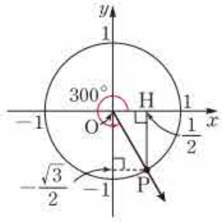
$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{4}$이므로

$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

답 풀이 참조

0552 오른쪽 그림과 같이 각 300°를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



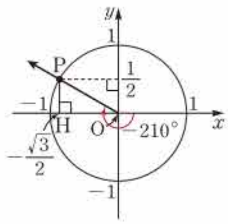
$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=60°$이므로

$$P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\theta=\frac{1}{2},\ \tan\theta=-\sqrt{3}$$

답 풀이 참조

0553 오른쪽 그림과 같이 각 $-210°$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=30°$이므로

$$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{2},\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 풀이 참조

0554 $\theta=380°=360°\times1+20°$에서 θ는 제1사분면의 각이므로

$\sin\theta>0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta>0$

답 $\sin\theta>0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta>0$

0555 $\theta=-\frac{17}{6}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{7}{6}\pi$에서 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

답 $\sin\theta<0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

0556 $\theta=-560°=360°\times(-2)+160°$에서 θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta<0$

답 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta<0$

0557 $\theta=\frac{18}{5}\pi=2\pi\times1+\frac{8}{5}\pi$에서 θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta<0$

답 $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta<0$

0558 $\cos\theta<0$이므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이고, $\tan\theta>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.
따라서 θ는 제3사분면의 각이다. 답 제3사분면

0559 $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

따라서 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 제2사분면 또는 제4사분면

0560 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$$\therefore\ \sin\theta=-\frac{3}{5},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$$

답 $\sin\theta=-\frac{3}{5},\ \tan\theta=-\frac{3}{4}$

0561 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$$\therefore\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3},\ \tan\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

0562 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}\qquad\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$$

(2) $$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{-\frac{4}{9}}=-\frac{9}{4}$$

답 (1) $-\frac{4}{9}$ (2) $-\frac{9}{4}$

0563 (1) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

(2) $$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{2}$

0564 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$이므로

$$(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)=\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$$
$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

답 1

0565 $$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)-\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta-\cos\theta\sin\theta-\cos\theta-\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{-2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}=-2\tan\theta$$

답 $-2\tan\theta$

유형 01 동경의 위치 본책 82쪽

$\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (n은 정수, $0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ$)이면 각 α°를 나타내는 동경과 각 θ를 나타내는 동경은 일치한다.

0566 ① $420^\circ=360^\circ\times1+60^\circ$ ➡ 제1사분면
② $870^\circ=360^\circ\times2+150^\circ$ ➡ 제2사분면
③ $1560^\circ=360^\circ\times4+120^\circ$ ➡ 제2사분면
④ $-750^\circ=360^\circ\times(-3)+330^\circ$ ➡ 제4사분면
⑤ $-1610^\circ=360^\circ\times(-5)+190^\circ$ ➡ 제3사분면

답 ⑤

0567 ㄱ. $-970^\circ=360^\circ\times(-3)+110^\circ$
ㄴ. $-620^\circ=360^\circ\times(-2)+100^\circ$
ㄷ. $-170^\circ=360^\circ\times(-1)+190^\circ$
ㄹ. $460^\circ=360^\circ\times1+100^\circ$
ㅁ. $1180^\circ=360^\circ\times3+100^\circ$
이상에서 각을 나타내는 동경이 100°를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

0568 131°를 나타내는 동경 OP가 주어진 조건을 만족시키며 회전한 후 나타내는 각의 크기를 θ라 하면

$$\theta=131^\circ-705^\circ+240^\circ=-334^\circ$$

이때 $-334^\circ=360^\circ\times(-1)+26^\circ$이므로 동경 OP는 제1사분면에 있다. 답 제1사분면

유형 02 사분면의 각 본책 82쪽

정수 n에 대하여
① θ가 제1사분면의 각
➡ $360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+90^\circ$
② θ가 제2사분면의 각
➡ $360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ$
③ θ가 제3사분면의 각
➡ $360^\circ\times n+180^\circ<\theta<360^\circ\times n+270^\circ$
④ θ가 제4사분면의 각
➡ $360^\circ\times n+270^\circ<\theta<360^\circ\times n+360^\circ$

0569 θ가 제2사분면의 각이므로

$$360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ \ (n\text{은 정수})$$

$$\therefore\ 360^\circ\times\frac{n}{3}+30^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times\frac{n}{3}+60^\circ$$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$$360^\circ\times k+30^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+60^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$$360^\circ\times k+150^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+180^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

$$360^\circ\times k+270^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+300^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

이상에서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경은 제3사분면에 존재할 수 없다.

답 제3사분면

0570 2θ가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ\times n+180^\circ<2\theta<360^\circ\times n+270^\circ \ (n\text{은 정수})$$

$$\therefore\ 360^\circ\times\frac{n}{2}+90^\circ<\theta<360^\circ\times\frac{n}{2}+135^\circ \quad \cdots ❶$$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$$360^\circ\times k+90^\circ<\theta<360^\circ\times k+135^\circ$$

따라서 θ는 제2사분면의 각이다. ⋯ ❷

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$$360^\circ\times k+270^\circ<\theta<360^\circ\times k+315^\circ$$

따라서 θ는 제4사분면의 각이다. ⋯ ❸

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. ⋯ ❹

답 제2사분면 또는 제4사분면

채점 기준	비율
❶ θ의 범위를 n에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $n=2k$일 때 θ가 제몇 사분면의 각인지 말할 수 있다.	30 %
❸ $n=2k+1$일 때 θ가 제몇 사분면의 각인지 말할 수 있다.	30 %
❹ θ가 제몇 사분면의 각인지 말할 수 있다.	10 %

0571 θ가 제1사분면의 각이므로

$$360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+90^\circ \ (n\text{은 정수})$$

$$\therefore\ 360^\circ\times\frac{n}{2}<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times\frac{n}{2}+45^\circ$$

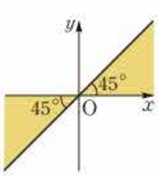
(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$$360^\circ\times k<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+45^\circ$$

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$$360^\circ\times k+180^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+225^\circ$$

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 속하는 모든 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. (단, 경계선은 제외한다.)



답 ③

유형 03 육십분법과 호도법 본책 83쪽

① 육십분법의 각을 호도법의 각으로 나타내려면
➡ (육십분법의 각)$\times\frac{\pi}{180}$
② 호도법의 각을 육십분법의 각으로 나타내려면
➡ (호도법의 각)$\times\frac{180^\circ}{\pi}$

0572 ㄱ. $50° = 50 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5}{18}\pi$

ㄹ. $240° = 240 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4}{3}\pi$

ㅂ. $\frac{4}{5}\pi = \frac{4}{5}\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 144°$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다. 답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

0573 ㄱ. $1 = \frac{180°}{\pi}$이므로

$2 = \frac{360°}{\pi}$

ㄴ. $-220° = 360° \times (-1) + 140°$이므로 $-220°$는 제2사분면의 각이다.

ㄷ. $\frac{21}{5}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{\pi}{5}$, $-\frac{19}{5}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{\pi}{5}$이므로 $\frac{\pi}{5}$, $\frac{21}{5}\pi$, $-\frac{19}{5}\pi$를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0574 ① $-1120° = 360° \times (-4) + 320°$ ➡ 제4사분면

② $-790° = 360° \times (-3) + 290°$ ➡ 제4사분면

③ $693° = 360° \times 1 + 333°$ ➡ 제4사분면

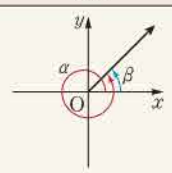
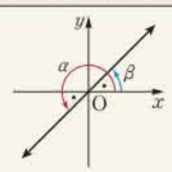
④ $-\frac{25}{3}\pi = 2\pi \times (-5) + \frac{5}{3}\pi$ ➡ 제4사분면

⑤ $\frac{13}{4}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{5}{4}\pi$ ➡ 제3사분면

답 ⑤

유형 04 두 동경의 위치 관계 ; 일치 또는 원점에 대하여 대칭 본책 83쪽

두 각 α, β를 나타내는 동경이 일치하거나 원점에 대하여 대칭이면 다음과 같이 두 동경의 차를 일반각으로 나타낸다.

일치	원점에 대하여 대칭
	
$\alpha - \beta = 2n\pi$ (n은 정수)	$\alpha - \beta = (2n+1)\pi$ (n은 정수)

0575 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$6\theta - \theta = 2n\pi$ (n은 정수)

$5\theta = 2n\pi$ $\quad \therefore \theta = \frac{2n}{5}\pi$ ...... ㉠

$0 < \theta < \pi$에서 $0 < \frac{2n}{5}\pi < \pi$이므로

$0 < n < \frac{5}{2}$

n은 정수이므로 $\quad n = 1, 2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta = \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi$ 답 $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{4}{5}\pi$

0576 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로 ─ 원점에 대하여 대칭이다.

$5\theta - \theta = (2n+1)\pi$ (n은 정수)

$4\theta = (2n+1)\pi$ $\quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{4}\pi$ ...... ㉠

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$에서 $\frac{\pi}{2} < \frac{2n+1}{4}\pi < \pi$이므로

$2 < 2n+1 < 4$ $\quad \therefore \frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$

n은 정수이므로 $\quad n = 1$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta = \frac{3}{4}\pi$ 답 $\frac{3}{4}\pi$

0577 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$4\theta - \theta = 2n\pi$ (n은 정수)

$3\theta = 2n\pi$ $\quad \therefore \theta = \frac{2n}{3}\pi$ ...... ㉠

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$에서 $\frac{\pi}{2} < \frac{2n}{3}\pi < \pi$이므로

$\frac{3}{4} < n < \frac{3}{2}$

n은 정수이므로 $\quad n = 1$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta = \frac{2}{3}\pi$

$\therefore \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0578 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$7\theta - \theta = (2n+1)\pi$ (n은 정수)

$6\theta = (2n+1)\pi$ $\quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{6}\pi$ ...... ㉠ ··· ❶

$0 < \theta < 2\pi$에서 $0 < \frac{2n+1}{6}\pi < 2\pi$이므로

$0 < 2n+1 < 12$ $\quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{11}{2}$

n은 정수이므로 $\quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$ ··· ❷

따라서 구하는 모든 각 θ의 크기의 합은

$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\pi + \frac{7}{6}\pi + \frac{3}{2}\pi + \frac{11}{6}\pi = 6\pi$ ··· ❸

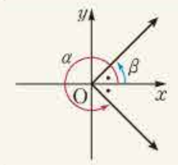
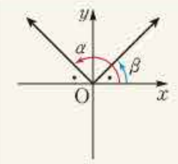
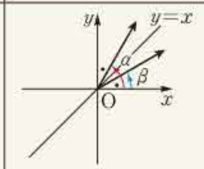
답 6π

채점 기준	비율
❶ θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ θ의 크기를 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 θ의 크기의 합을 구할 수 있다.	20 %

유형 05 두 동경의 위치 관계; 직선에 대하여 대칭

본책 84쪽

두 각 α, β를 나타내는 동경이 좌표축 또는 직선에 대하여 대칭이면 다음과 같이 두 동경의 합을 일반각으로 나타낸다.

x축에 대하여 대칭	y축에 대하여 대칭	직선 $y=x$에 대하여 대칭
		
$\alpha+\beta=2n\pi$ (n은 정수)	$\alpha+\beta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)	$\alpha+\beta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

0579 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi \qquad \therefore\ \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$ ...... ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{2n+1}{6}\pi<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<2n+1<3 \qquad \therefore\ -\frac{1}{2}<n<1$

n은 정수이므로 $n=0$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{6}$

답 ②

0580 각 3θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$3\theta+5\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$8\theta=2n\pi \qquad \therefore\ \theta=\frac{n}{4}\pi$ ...... ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{n}{4}\pi<\pi$이므로

$0<n<4$

n은 정수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

따라서 구하는 모든 각 θ의 크기의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

답 $\frac{3}{2}\pi$

0581 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$5\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\ \theta=\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}$ ⋯ ❶

$0<\theta<2\pi$에서 $0<\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}<2\pi$이므로

$-\frac{1}{10}<\frac{2n}{5}<\frac{19}{10} \qquad \therefore\ -\frac{1}{4}<n<\frac{19}{4}$

n은 정수이므로 $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

따라서 구하는 각 θ의 개수는 5이다. ⋯ ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ θ의 개수를 구할 수 있다.	50 %

참고 $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$를 $\theta=\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}$에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{10},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{9}{10}\pi,\ \frac{13}{10}\pi,\ \frac{17}{10}\pi$

유형 06 부채꼴의 호의 길이와 넓이

본책 84쪽

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$l=r\theta,\ S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

0582 반지름의 길이가 a, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 호의 길이가 4π이므로

$a\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi \qquad \therefore\ a=6$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\pi=12\pi$

이므로 $b=12$

$\therefore\ a+b=18$

답 18

0583 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 호의 길이는 $\frac{3}{4}r$이므로 부채꼴의 둘레의 길이는

$r+r+\frac{3}{4}r=22, \qquad \frac{11}{4}r=22 \qquad \therefore\ r=8$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot8^2\cdot\frac{3}{4}=24$

답 ①

0584 $\angle\mathrm{COD}=\theta$라 하면 $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}=20\pi\,\mathrm{cm}$이므로

$24\theta=20\pi \qquad \therefore\ \theta=\frac{5}{6}\pi$ ⋯ ❶

따라서 구하는 종이의 넓이는

(부채꼴 COD의 넓이)−(부채꼴 AOB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\cdot24\cdot20\pi-\frac{1}{2}\cdot6^2\cdot\frac{5}{6}\pi$

$=240\pi-15\pi=225\pi(\mathrm{cm}^2)$ ⋯ ❷

답 $225\pi\,\mathrm{cm}^2$

채점 기준	비율
❶ ∠COD의 크기를 구할 수 있다.	40 %
❷ 필요한 종이의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

0585 원을 세 바퀴 굴렸을 때 처음의 위치로 되돌아왔으므로 부채꼴의 둘레의 길이는 원의 둘레의 길이의 3배와 같다.

원의 둘레의 길이는 $2\pi\cdot 1=2\pi$이고, 부채꼴의 둘레의 길이는

$6+6+6\theta=12+6\theta$

이므로 $12+6\theta=2\pi\cdot 3$, $6\theta=6\pi-12$

$\therefore \theta=\pi-2$

답 ②

0586 (1) 호 AB의 길이는

$6\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi$

$\overline{OC}=3$, $\angle COD=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$이므로 호 CD의 길이는

$3\cdot\frac{\pi}{3}=\pi$

$\overline{OE}=\frac{3}{2}$, $\angle EOF=\frac{2}{3}\pi$이므로 호 EF의 길이는

$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi=\pi$

$\overline{OG}=\frac{3}{4}$, $\angle GOH=\frac{\pi}{3}$이므로 호 GH의 길이는

$\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$

따라서 구하는 호의 길이의 합은

$4\pi+\pi+\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{25}{4}\pi$

(2) $\overline{AC}=\overline{OC}=3$, $\overline{DE}=\overline{OE}=\frac{3}{2}$, $\overline{FG}=\overline{OG}=\frac{3}{4}$이고

$\overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=\overline{OB}-\overline{FG}$

$=6-\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$

따라서 색칠한 도형의 둘레의 길이는

$\widehat{AB}+\widehat{CD}+\widehat{EF}+\widehat{GH}+\overline{AC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{BH}$

$=\frac{25}{4}\pi+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{21}{4}$

$=\frac{25}{4}\pi+\frac{21}{2}$

답 (1) $\frac{25}{4}\pi$ (2) $\frac{25}{4}\pi+\frac{21}{2}$

0587 부채꼴 AOB의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 BOC에서

$\overline{OC}=r\cos\frac{\pi}{3}=\frac{r}{2}$

이때 삼각형 BOC의 넓이가 $18\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{r}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=18\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{8}r^2=18\sqrt{3}$, $r^2=144$

$\therefore r=12$ ($\because r>0$)

따라서 $\overline{OB}=12$, $\overline{OC}=6$이므로 두 호 AB, CD와 두 선분 AC, BD로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 12^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\frac{\pi}{3}=18\pi$

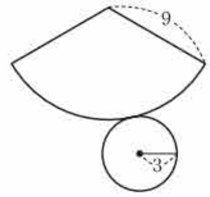
답 18π

유형 07 부채꼴의 호의 길이와 넓이의 활용

본책 85쪽

원뿔의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 밑면인 원의 둘레의 길이가 같음을 이용한다.

0588 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는 원의 둘레의 길이와 같으므로



$2\pi\cdot 3=6\pi$

따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6\pi=27\pi$

$\therefore$ (원뿔의 겉넓이)$=27\pi+\pi\cdot 3^2=36\pi$

답 36π

0589 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$10\theta=2\pi r$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{5}r$ ··· ❶

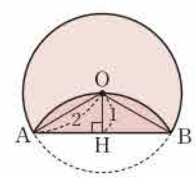
$\therefore a=\frac{\pi}{5}\cdot 1=\frac{\pi}{5}$, $b=\frac{\pi}{5}\cdot 3=\frac{3}{5}\pi$ ··· ❷

$\therefore b-a=\frac{2}{5}\pi$ ··· ❸

답 $\frac{2}{5}\pi$

채점 기준	비율
❶ θ를 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0590 오른쪽 그림과 같이 접힌 선분의 양 끝 점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OAH에서



$\cos(\angle AOH)=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{1}{2}$

이므로

$\angle AOH=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because 0<\angle AOH<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \angle AOB=2\angle AOH=\frac{2}{3}\pi$

접힌 활꼴의 호의 길이는 $\widehat{AB}$의 길이와 같으므로

$2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로

$pq=12$

답 12

유형 08 부채꼴의 둘레의 길이와 넓이의 최대·최소

본책 85쪽

반지름의 길이가 r, 둘레의 길이가 a인 부채꼴의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}r(a-2r)$

➡ 이차함수의 최대·최소를 이용하여 S의 최댓값을 구한다.

0591 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이가 10이므로 호의 길이는

$10-2r$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}r(10-2r)=-r^2+5r$$
$$=-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\ (0<r<5)$$

$r>0$, $10-2r>0$이므로 $0<r<5$

따라서 $r=\frac{5}{2}$일 때 S가 최대이므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이다.

답 ⑤

0592 부채꼴의 반지름의 길이를 r m라 하면 둘레의 길이가 200 m이므로 호의 길이는 $(200-2r)$ m

화단의 넓이를 S m²라 하면

$$S=\frac{1}{2}r(200-2r)=-r^2+100r$$
$$=-(r-50)^2+2500\ (0<r<100)$$

따라서 $r=50$일 때 S의 최댓값이 2500이므로 화단의 넓이의 최댓값은 2500 m²이다.

답 2500 m²

0593 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 넓이가 9이므로

$$\frac{1}{2}rl=9 \qquad \therefore l=\frac{18}{r}$$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$$l+2r=\frac{18}{r}+2r$$ ···➊

$\frac{18}{r}>0$, $2r>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{18}{r}+2r\geq 2\sqrt{\frac{18}{r}\cdot 2r}$$
$$=2\cdot 6=12\ (\text{단, 등호는 } r=3\text{일 때 성립})$$

$\frac{18}{r}=2r$에서 $r^2=9$

$r>0$이므로 $r=3$

즉 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 12이다. ···➋

답 12

채점 기준	비율
➊ 부채꼴의 둘레의 길이를 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
➋ 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

유형 09 삼각함수

본책 86쪽

원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 임의의 점 P(x, y)에 대하여 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

① $r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x^2+y^2}$

② $\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$

0594 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$이므로

$$\sin\theta=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5},\ \cos\theta=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},$$
$$\tan\theta=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$$
$$\therefore 5\sin\theta-5\cos\theta+3\tan\theta=5\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-5\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$$
$$=-4-3-4=-11$$

답 ①

0595 점 P$(-2\sqrt{3}, a)$에서 $\tan\theta=\frac{a}{-2\sqrt{3}}$이므로

$$\frac{a}{-2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore a=-2$$

따라서 점 P의 좌표가 $(-2\sqrt{3}, -2)$이므로

$$r=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4$$
$$\therefore a+r=2$$

답 ②

0596 θ가 제2사분면의 각이므로 각 θ를 나타내는 동경을 OP라 할 때, $\tan\theta=\frac{1}{-3}$에서 점 P의 좌표를 $(-3a, a)\ (a>0)$로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a\ (\because a>0)$이므로

$$\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{10}a}=\frac{\sqrt{10}}{10},\ \cos\theta=\frac{-3a}{\sqrt{10}a}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$$
$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

답 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

다른 풀이 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$이므로 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{3}$

$$\therefore \cos\theta=-3\sin\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\sin^2\theta+(-3\sin\theta)^2=1$$
$$10\sin^2\theta=1, \qquad \sin^2\theta=\frac{1}{10}$$

이때 θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$

$$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

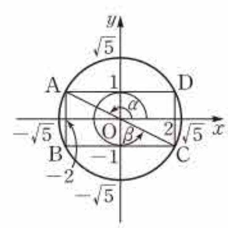
㉠에서 $\cos\theta=-3\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

0597 $\overline{\mathrm{AD}}=4$, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로

A$(-2, 1)$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5}$이므로



$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$ ···➊

두 점 A, C가 원점에 대하여 대칭이므로

C$(2, -1)$

$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{5}$이므로

$$\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$ ···➋

$$\therefore \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$ ···➌

답 $\frac{4}{5}$

채점 기준	비율
➊ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ $\sin\beta$, $\cos\beta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ $\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0598 점 P는 직선 $y=3$과 원 $x^2+y^2=10$의 교점이므로 $x^2+y^2=10$에 $y=3$을 대입하면

$x^2+3^2=10,\quad x^2=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

이때 점 P는 제2사분면 위의 점이므로 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$이고 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{10}$이므로

$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

점 Q는 직선 $y=3$과 원 $x^2+y^2=24$의 교점이므로 $x^2+y^2=24$에 $y=3$을 대입하면

$x^2+3^2=24,\quad x^2=15$

$\therefore x=-\sqrt{15}$ 또는 $x=\sqrt{15}$

이때 점 Q는 제2사분면 위의 점이므로 $\mathrm{Q}(-\sqrt{15},\ 3)$이고 $\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{6}$이므로

$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

$\therefore \sin\alpha\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)=-\dfrac{3}{4}$ 　답 $-\dfrac{3}{4}$

유형 10 삼각함수의 값의 부호 본책 87쪽

각 사분면에서 값이 양수인 삼각함수는 오른쪽 그림과 같다.

① $\sin\theta>0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta>0$
⇒ θ는 제1사분면의 각
② $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta<0$
⇒ θ는 제2사분면의 각
③ $\sin\theta<0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta>0$ ⇒ θ는 제3사분면의 각
④ $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta<0$ ⇒ θ는 제4사분면의 각

0599 (i) $\sin\theta\cos\theta>0$일 때,
$\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.
(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$일 때,
$\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.
(i), (ii)에서 θ는 제3사분면의 각이다. 　답 제3사분면

0600 θ가 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\cos\theta+\sin\theta+\tan\theta-\cos\theta-\sin\theta+\tan\theta$

$=2\tan\theta$ 　답 ⑤

0601 $\dfrac{\sqrt{\tan\theta}}{\sqrt{\cos\theta}}=-\sqrt{\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}}$, $\sin\theta\neq0$이므로

$\cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

즉 θ는 제3사분면의 각이므로 　$\sin\theta<0$

ㄱ. $\sin\theta+\cos\theta<0$

ㄴ. $\tan\theta-\cos\theta>0$

ㄷ. $\sin\theta\cos\theta>0$

ㄹ. $\dfrac{\tan\theta}{\sin\theta}<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 　답 ㄱ, ㄴ

SSEN 특강 음수의 제곱근의 성질

실수 $a,\ b$에 대하여
① $a<0,\ b<0$이면 　$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
그 외에는 　$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
② $a>0,\ b<0$이면 　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
그 외에는 　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

0602 $\sin\theta\cos\theta<0$에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 다르고 $\sin\theta-\cos\theta>0$에서 $\sin\theta>\cos\theta$이므로

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

즉 θ는 제2사분면의 각이므로 　$\tan\theta<0$ 　⋯ ❶

따라서 $1-\cos\theta>0,\ \cos\theta+\tan\theta<0$이므로

(주어진 식)

$=\sin\theta-(-\tan\theta)-(1-\cos\theta)-(\cos\theta+\tan\theta)$

$=\sin\theta-1$ 　⋯ ❷

답 $\sin\theta-1$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$의 값의 부호를 알 수 있다.	50 %
❷ 식을 간단히 할 수 있다.	50 %

0603 $\sin\theta<0,\ \tan\theta<0$이므로 θ는 제4사분면의 각이다.

이때 $0<\theta<2\pi$이므로 　$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

① $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$이므로 　$\sin\theta\cos\theta<0$

② $\cos\theta>0,\ \tan\theta<0$이므로 　$\cos\theta\tan\theta<0$

③ $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 　$\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{\theta}{2}<\pi$

즉 $\dfrac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이므로 　$\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

④ $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 　$3\pi<2\theta<4\pi$

즉 2θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이므로

$\sin2\theta<0$

⑤ $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 　$\pi<\theta-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3}{2}\pi$

즉 $\theta-\dfrac{\pi}{2}$는 제3사분면의 각이므로 　$\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)>0$

답 ③

유형 11~12 삼각함수 사이의 관계 본책 87, 88쪽

① $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

0604 $\left(1+\tan\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)\left(1+\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}\right)$

$=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$ 답 2

0605 $\sin\theta\cos\theta-\dfrac{\cos^2\theta(1+\tan\theta)^2}{2}$

$=\sin\theta\cos\theta-\dfrac{\cos^2\theta(1+2\tan\theta+\tan^2\theta)}{2}$

$=\sin\theta\cos\theta-\dfrac{\cos^2\theta\left(1+\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)}{2}$

$=\sin\theta\cos\theta-\dfrac{\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta}{2}$

$=\sin\theta\cos\theta-\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{2}=-\dfrac{1}{2}$ 답 $-\dfrac{1}{2}$

0606 ㄱ. $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=1-\sin^2\theta-\sin^2\theta$

$=1-2\sin^2\theta$

ㄴ. $\dfrac{\tan\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta}{1-\cos\theta}$

$=\dfrac{\tan\theta(1-\cos\theta)+\tan\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\tan\theta}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{\sin^2\theta}$

$=2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta\cos\theta}$

ㄷ. $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}+\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}$

$=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0607 $\sqrt{4-8\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{4+8\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{4(1-2\sin\theta\cos\theta)}-\sqrt{4(1+2\sin\theta\cos\theta)}$

$=\sqrt{4(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}$

$\quad-\sqrt{4(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}$

$=\sqrt{2^2(\sin\theta-\cos\theta)^2}-\sqrt{2^2(\sin\theta+\cos\theta)^2}$

$=|2(\sin\theta-\cos\theta)|-|2(\sin\theta+\cos\theta)|$

$=2\sin\theta-2\cos\theta-(2\sin\theta+2\cos\theta)$ ($\because 0<\cos\theta<\sin\theta$)

$=-4\cos\theta$ 답 ②

0608 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{8}{17}\right)^2=\dfrac{225}{289}$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta=-\dfrac{15}{17}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\dfrac{15}{17}}{-\dfrac{8}{17}}=\dfrac{15}{8}$

$\therefore \dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\tan\theta}=-\dfrac{17}{15}+\dfrac{8}{15}=-\dfrac{3}{5}$ 답 ②

0609 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=-1$

$\therefore \sqrt{2}\cos\theta-2\tan\theta=\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\cdot(-1)=1$ 답 1

0610 $\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\sin^2\theta}$

따라서 $\dfrac{2}{\sin^2\theta}=\dfrac{5}{2}$이므로 $\sin^2\theta=\dfrac{4}{5}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$이므로

$\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\ \left(\because \pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}{-\dfrac{\sqrt{5}}{5}}=2$ 답 2

0611 $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=2-\sqrt{3}$에서

$1+\tan\theta=(2-\sqrt{3})(1-\tan\theta)$

$(3-\sqrt{3})\tan\theta=1-\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

즉 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\cos\theta=-\sqrt{3}\sin\theta$ …… ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin^2\theta+(-\sqrt{3}\sin\theta)^2=1$

$4\sin^2\theta=1,\quad \sin^2\theta=\dfrac{1}{4}$

이때 θ는 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$

따라서 ㉠에서 $\cos\theta=-\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0612 $|\sin\theta|=|\cos\theta|$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$2\sin^2\theta=1,\quad \sin^2\theta=\dfrac{1}{2}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ··· ❶

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$$이므로 ··· ❷

$$\sin\theta\cos\theta+\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+(-1)=-\frac{3}{2}$$ ··· ❸

답 $-\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sin\theta\cos\theta+\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0613 $\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta}+(1-\sin\theta)\tan\theta$

$$=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{(1-\sin\theta)\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$$
$$=\frac{(\cos^2\theta+1-2\sin\theta+\sin^2\theta)\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$$
$$=\frac{2(1-\sin\theta)\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}$$

따라서 $\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}=1$이므로 $2\sin\theta=\cos\theta$ ······ ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin^2\theta+(2\sin\theta)^2=1$

$5\sin^2\theta=1$, $\sin^2\theta=\frac{1}{5}$

이때 θ는 제1사분면의 각이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

㉠에서 $\cos\theta=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

답 ②

유형 13 삼각함수 사이의 관계 ; $\sin\theta\pm\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$ 이용

본책 89쪽

$\sin\theta\pm\cos\theta$의 값 또는 $\sin\theta\cos\theta$의 값이 주어진 경우에는

$$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=\sin^2\theta\pm2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1\pm2\sin\theta\cos\theta\ (\text{복호동순})$$

임을 이용한다.

0614 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore (1+\sin^2\theta)(1+\cos^2\theta)$
$=1+\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta$
$=1+1+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$

답 $\frac{33}{16}$

0615 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1-2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

0616 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$
$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{16}$

답 ④

0617 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$ ··· ❶

이때

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1-2\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{17}{9}$$

이고 θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$에서

$\sin\theta-\cos\theta<0$ $\quad\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{17}}{3}$ ··· ❷

$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{17}}{3}\right)=\frac{\sqrt{17}}{9}$$ ··· ❸

답 $\frac{\sqrt{17}}{9}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sin^2\theta-\cos^2\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0618 $\sin\theta+\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\sin^2\theta\cos^2\theta$

$\therefore (\sin\theta\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta-1=0$

$\sin\theta\cos\theta=t\ (t<0)$로 놓으면

$t^2-2t-1=0$ $\quad\therefore t=1-\sqrt{2}\ (\because t<0)$

$$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}=-1-\sqrt{2}$$

따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로

$a-5b=4$ 답 4

유형 14 삼각함수와 이차방정식 본책 89쪽

이차방정식의 두 근이 삼각함수로 주어진 경우
➡ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

0619 $2x^2+x+a=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\cos\theta+\sin\theta)+(\cos\theta-\sin\theta)=-\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{a}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $2\cos\theta=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \cos\theta=-\frac{1}{4}$

㉡의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned}(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)&=\cos^2\theta-\sin^2\theta\\&=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)\\&=2\cos^2\theta-1\end{aligned}$$

즉 $2\cos^2\theta-1=\frac{a}{2}$이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{4}$을 대입하면

$\frac{1}{8}-1=\frac{a}{2}$ $\quad\therefore a=-\frac{7}{4}$ 답 ⑤

0620 $2x^2-\sqrt{2}x+k=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ··· ❶

이 식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$ ··· ❷

$$\begin{aligned}\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2&=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=1-2\sin\theta\cos\theta\\&=1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이때 $\sin\theta>\cos\theta$에서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0621 $8x^2-4x+a=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$$

이 식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\tan\theta$와 $\frac{1}{\tan\theta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$$3\left\{x^2-\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)x+\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}\right\}=0$$

이때

$$\begin{aligned}\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{8}{3}\end{aligned}$$

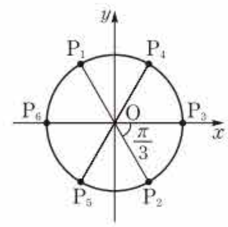
이므로 구하는 이차방정식은

$3\left\{x^2-\left(-\frac{8}{3}\right)x+1\right\}=0$ $\quad\therefore 3x^2+8x+3=0$

답 $3x^2+8x+3=0$

0622 (1st) 동경 OP_n이 나타내는 각의 크기를 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

동경 OP_n이 나타내는 각의 크기를 θ_n이라 하면



$\theta_1=3\pi-\frac{\pi}{3}=2\pi+\frac{2}{3}\pi$

$\theta_2=5\pi+\frac{2}{3}\pi=4\pi+\frac{5}{3}\pi$

$\theta_3=7\pi-\pi=6\pi$

$\theta_4=9\pi+\frac{4}{3}\pi=10\pi+\frac{\pi}{3}$

$\theta_5=11\pi-\frac{5}{3}\pi=8\pi+\frac{4}{3}\pi$

$\theta_6=13\pi+2\pi=14\pi+\pi$

$\theta_7=15\pi-\frac{7}{3}\pi=12\pi+\frac{2}{3}\pi$

$\theta_8=17\pi+\frac{8}{3}\pi=18\pi+\frac{5}{3}\pi$

⋮

따라서 동경 OP_n의 위치는 동경 OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, OP_5, OP_6의 위치가 이 순서대로 반복된다.

(2nd) 동경 OP_1과 일치하는 동경의 개수를 구한다.

동경 OP_n이 동경 OP_1과 일치하려면

$n=6m+1$ (m은 자연수)

꼴이어야 하므로

$n=7,\ 13,\ 19,\ \cdots,\ \underset{}{97}$ $\quad 97=6\cdot16+1$

따라서 구하는 동경의 개수는 16이다. 답 ③

0623 (1st) 각 $\frac{n}{5}\pi$의 범위를 부등식으로 나타내어 n의 최솟값 m을 구한다.

$\frac{n}{5}\pi$가 제2사분면의 각이려면

$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{n}{5}\pi<2k\pi+\pi$ (k는 음이 아닌 정수)

$\therefore 10k+\frac{5}{2}<n<10k+5$

n은 자연수이므로

$n=10k+3$ 또는 $n=10k+4$

따라서 $k=0$일 때 n의 값이 최소이므로

$m=3$

(2nd) 각 $\frac{n}{7}\pi$의 범위를 부등식으로 나타내어 n의 최댓값 M을 구한다.

$\frac{n}{7}\pi$가 제3사분면의 각이려면

$2t\pi+\pi<\frac{n}{7}\pi<2t\pi+\frac{3}{2}\pi$ (t는 음이 아닌 정수)

$\therefore\ 14t+7<n<14t+\frac{21}{2}$

n은 자연수이므로

$n=14t+8$ 또는 $n=14t+9$ 또는 $n=14t+10$

따라서 $t=6$일 때 100 이하의 자연수 n의 값이 최대이므로

$M=94$

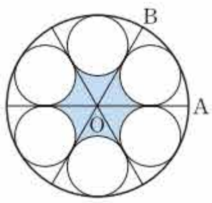
(3rd) $M-m$의 값을 구한다.

$M=94$, $m=3$이므로

$M-m=91$

답 ①

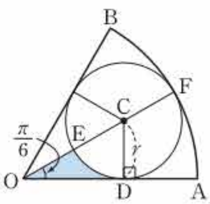
0624 (1st) 작은 원 하나가 내접하는 부채꼴의 중심각의 크기를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 주어진 원을 6등분하여 작은 원이 하나씩 내접하는 똑같은 6개의 부채꼴로 나누면 한 부채꼴의 중심각의 크기는

$2\pi\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{3}$

(2nd) 내접하는 작은 원의 반지름의 길이를 구한다.



부채꼴 AOB에 내접하는 작은 원의 중심을 C라 하고, 점 C에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 D라 하면

$\angle COD=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$,

$\angle OCD=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

내접하는 작은 원의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 COD에서

$\overline{OC}=2r$, $\overline{OD}=\sqrt{3}r$

직선 OC가 작은 원과 만나는 점을 각각 E, F라 하면 큰 원의 반지름의 길이가 6이므로

$\overline{OC}+\overline{CF}=6$, $\quad 2r+r=6$

$\therefore\ r=2$

(3rd) S의 값을 구한다.

위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

($\triangle$COD의 넓이)$-$(부채꼴 DCE의 넓이)

$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{3}$

$=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

따라서 색칠한 부분의 넓이 S는

$S=12\left(2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi\right)=24\sqrt{3}-8\pi$

(4th) $p+q$의 값을 구한다.

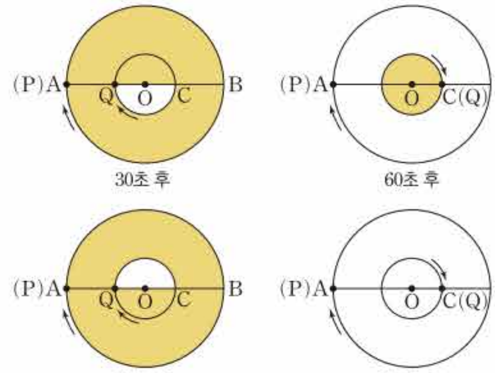
$p=24$, $q=-8$이므로

$p+q=16$

답 16

0625 (1st) 시간에 따른 원의 내부의 색의 변화를 파악한다.

두 점 P, Q가 출발한 지 30초, 60초, 90초, 120초 후의 두 원은 다음 그림과 같다.

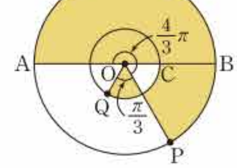


30초 후　60초 후　90초 후　120초 후

즉 출발한 지 120초 후에 처음과 같이 원의 내부가 모두 흰색이 된다.

(2nd) 출발한 지 500초 후의 노란색 부분의 넓이를 구한다.

$500=120\times4+20$이므로 출발한 지 500초 후의 노란색 부분의 넓이는 출발한 지 20초 후의 노란색 부분의 넓이와 같다.



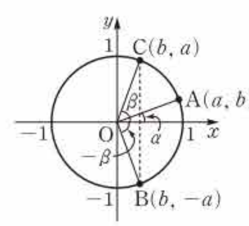
즉 출발한 지 20초 후의 노란색 부분은 오른쪽 그림과 같으므로 20초 후의 노란색 부분의 넓이는 반지름의 길이가 10이고 중심각의 크기가 $\frac{4}{3}\pi$인 부채꼴의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot10^2\cdot\frac{4}{3}\pi=\frac{200}{3}\pi$

답 $\frac{200}{3}\pi$

0626 (1st) a, b의 값을 구한다.



오른쪽 그림과 같이 점 A$(a,\ b)$에 대하여 $\sin\alpha=\frac{b}{1}$이므로

$b=\frac{1}{3}$

점 A$\left(a,\ \frac{1}{3}\right)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$a^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1$, $\quad a^2=\frac{8}{9}$ $\quad \therefore\ a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\because\ a>0$)

(2nd) 각 β를 나타내는 동경과 원의 교점의 좌표를 이용하여 $\sin\beta$의 값을 구한다.

각 $-\beta$를 나타내는 동경과 원의 교점이 B$(b,\ -a)$이므로 각 β를 나타내는 동경과 원의 교점을 C라 하면 점 C는 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점이다.

따라서 C$(b,\ a)$, 즉 C$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$이므로

$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

0627 (1st) θ가 제1, 2, 3, 4사분면의 각인 경우로 나누어 각각 $f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)$의 값을 구한다.

(i) θ가 제1사분면의 각일 때,

$f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)=1+1+2\cdot1=4$

(ii) θ가 제2사분면의 각일 때,

$f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)=1-1+2\cdot(-1)$
$=-2$

(iii) θ가 제3사분면의 각일 때,

$f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)=-1-1+2\cdot1=0$

(iv) θ가 제4사분면의 각일 때,

$f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)=-1+1+2\cdot(-1)$
$=-2$

이상에서 주어진 식을 만족시키는 θ는 제3사분면의 각이다.

답 제3사분면

0628 1st 점 P의 x좌표, y좌표를 삼각함수를 이용하여 나타낸다.

점 $\mathrm{P}(x, y)$가 단위원 위의 점이므로

$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$

2nd $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-\frac{5}{2}$임을 이용하여 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구한다.

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{5}{2}$$

이므로 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{5}$

3rd $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구한다.

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=1-2\sin\theta\cos\theta$
$=1-2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{9}{5}$

이때 $x<0$, $y>0$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$ $\quad\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

답 ④

0629 1st $\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{1}{2}(\log_2 x-4)$를 정리하여 x를 삼각함수에 대한 식으로 나타낸다.

$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{1}{2}(\log_2 x-4)$에서

$2\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\log_2 x-\log_2 2^4$

$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)^2=\log_2\frac{x}{16}$, $\quad(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{x}{16}$

$\therefore x=16(\sin\theta+\cos\theta)^2$
$=16(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=16(1+2\sin\theta\cos\theta)$ …… ㉠

2nd $\log_2\sin\theta+\log_2\cos\theta=-4$에서 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구한다.

$\log_2\sin\theta+\log_2\cos\theta=-4$에서 $\quad\log_2\sin\theta\cos\theta=-4$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=2^{-4}=\frac{1}{16}$ …… ㉡

$\log_a N=x \Longleftrightarrow N=a^x$

3rd x의 값을 구한다.

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad x=16\left(1+2\cdot\frac{1}{16}\right)=18$

답 18

0630 1st 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a의 값을 구한다.

$x^2-ax+2a=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=a$, $\sin\theta\cos\theta=2a$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$a^2=1+4a$, $\quad a^2-4a-1=0$

$\therefore a=2-\sqrt{5}$ ($\because a<0$)

2nd $\sin^3\theta+\cos^3\theta$의 값을 구한다.

$\sin\theta+\cos\theta=2-\sqrt{5}$, $\sin\theta\cos\theta=4-2\sqrt{5}$이므로

$\sin^3\theta+\cos^3\theta$
$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$
$=(2-\sqrt{5})(-3+2\sqrt{5})=7\sqrt{5}-16$

답 $7\sqrt{5}-16$

0631 전략 두 동경이 일직선 위에 있으려면 두 동경이 일치하거나 두 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이어야 함을 이용한다.

풀이 (i) 두 동경이 일치할 때,

$6\theta-2\theta=2n\pi$ (n은 정수)이므로

$4\theta=2n\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{n}{2}\pi$ …… ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{n}{2}\pi<\pi$이므로 $\quad 0<n<2$

n은 정수이므로 $\quad n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad\theta=\frac{\pi}{2}$ ··· ❶

(ii) 두 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대일 때,

$6\theta-2\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)이므로

$4\theta=(2n+1)\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{2n+1}{4}\pi$ …… ㉡

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n+1}{4}\pi<\pi$이므로

$0<2n+1<4$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}<n<\frac{3}{2}$

n은 정수이므로 $\quad n=0, 1$

이것을 ㉡에 대입하면 $\quad\theta=\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ ··· ❷

(i), (ii)에서 모든 각 θ의 크기의 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$ ··· ❸

답 $\frac{3}{2}\pi$

채점 기준	비율
❶ 두 동경이 일치할 때 θ의 크기를 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대일 때 θ의 크기를 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 θ의 크기의 합을 구할 수 있다.	20 %

0632 전략 y축에 대하여 대칭인 점들을 짝 지어 본다.

풀이 주어진 그림에서 점 P_1과 점 P_6, 점 P_2와 점 P_5, 점 P_3과 점 P_4, 점 P_7과 점 P_{10}, 점 P_8과 점 P_9는 각각 y축에 대하여 대칭이므로 이 점들의 x좌표는 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이다. ··· ❶

이때 삼각함수의 정의에 의하여 점 P_2의 x좌표는 $\cos\theta$, 점 P_5의 x좌표는 $\cos 4\theta$이므로

$\cos\theta+\cos 4\theta=0$

같은 방법으로 하면

$\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$, $\cos 6\theta+\cos 9\theta=0$,

$\cos 7\theta+\cos 8\theta=0$, $\cos 5\theta+\cos 10\theta=0$ ··· ❷

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 10\theta=0$ ··· ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ y축에 대하여 대칭인 점끼리 짝 지을 수 있다.	40 %
❷ 합이 0인 $\cos n\theta$끼리 더할 수 있다.	50 %
❸ $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 10\theta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0633 전략 $ab\neq0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$임을 이용하여 삼각함수의 부호를 찾고 삼각함수 사이의 관계를 이용한다.

풀이 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서 $\sin\theta=\cos\theta\tan\theta$이므로

$$\sqrt{\cos\theta}\sqrt{\tan\theta}=-\sqrt{\sin\theta}=-\sqrt{\cos\theta\tan\theta}$$

따라서 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로 θ는 제2사분면의 각이다. ⋯ ❶

$|\tan\theta|=\sqrt{3}$에서 $\quad \tan\theta=-\sqrt{3}$

즉 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\sqrt{3}$이므로 $\quad \sin\theta=-\sqrt{3}\cos\theta$ ⋯⋯ ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\quad (-\sqrt{3}\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$

$4\cos^2\theta=1,\quad \cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

이때 $\cos\theta<0$이므로 $\quad \cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

㉠에서 $\quad \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore \sin\theta+\cos\theta+\tan\theta=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
❶ θ가 제몇 사분면의 각인지 알 수 있다.	30 %
❷ $\tan\theta$, $\cos\theta$, $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0634 전략 $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구한 후 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 각각 구한다.

풀이 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 제곱하면 $\quad \sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

$1-2\sin\theta\cos\theta=2 \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ ⋯ ❶

이때 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=0$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⋯ ❸

$$\therefore \frac{1}{\sin^{10}\theta}+\frac{1}{\cos^{10}\theta}=(\sqrt{2})^{10}+(-\sqrt{2})^{10}$$
$$=32+32=64$$ ⋯ ❹

답 64

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $\dfrac{1}{\sin^{10}\theta}+\dfrac{1}{\cos^{10}\theta}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

06 삼각함수의 그래프

0635 함수 $f(x)$의 주기가 3이므로 $\quad f(x+3)=f(x)$

$\therefore f(10)=f(7)=f(4)=f(1)=1$

답 1

0636 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로 $\quad f(x+2)=f(x)$

$\therefore f(9)=f(7)=f(5)=f(3)=f(1)$

$0\le x<2$에서 $f(x)=x^2$이므로

$f(9)=f(1)=1$

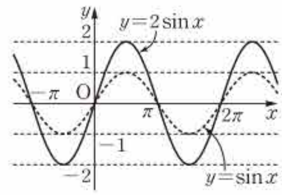
답 1

0637 답 (가) 실수 전체의 집합 (나) $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$
(다) $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$ (라) y축에 대하여 대칭
(마) 2π (바) 2π

0638 (1) $-1\le\sin x\le1$에서 $-2\le 2\sin x\le 2$이므로 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$

(2) $2\sin x=2\sin(x+2\pi)$이므로 주기는 2π이다.

(3) 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 원점에 대하여 대칭이다.

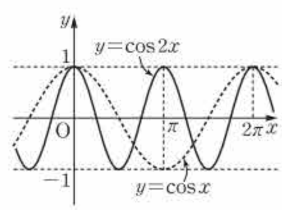


답 (1) $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$ (2) 2π (3) 원점

0639 (1) $-1\le\cos 2x\le 1$이므로 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$

(2) $\cos 2x=\cos(2x+2\pi)$
$=\cos 2(x+\pi)$
이므로 주기는 π이다.

(3) 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 y축에 대하여 대칭이다.



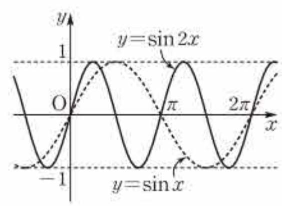
답 (1) $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$ (2) π (3) y축

0640 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이고,

$\sin 2x=\sin(2x+2\pi)$
$=\sin 2(x+\pi)$

이므로 주기는 π이다.

따라서 $y=\sin 2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



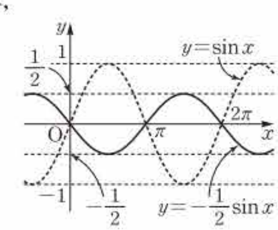
답 풀이 참조

0641 치역은 $\left\{y\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{2}\right\}$이고,

$-\dfrac{1}{2}\sin x=-\dfrac{1}{2}\sin(x+2\pi)$

이므로 주기는 2π이다.

따라서 $y=-\dfrac{1}{2}\sin x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



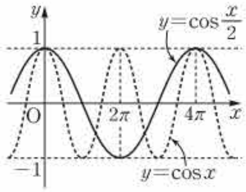
답 풀이 참조

0642 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이고,

$$\cos\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\cos\frac{1}{2}(x+4\pi)$$

이므로 주기는 4π이다.

따라서 $y=\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



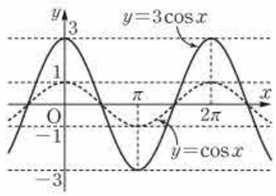
답 풀이 참조

0643 치역은 $\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$이고,

$3\cos x=3\cos(x+2\pi)$

이므로 주기는 2π이다.

따라서 $y=3\cos x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0644 (2) $\tan\frac{x}{2}=\tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right)=\tan\frac{1}{2}(x+2\pi)$

이므로 주기는 2π이다.

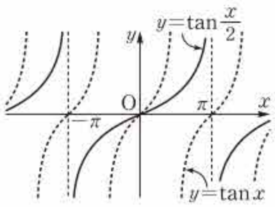
(3) 점근선의 방정식은

$\frac{x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 에서

$x=2n\pi+\pi$

$=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

(4) 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 원점에 대하여 대칭이다.

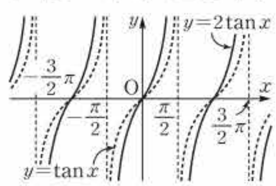


답 (1) 실수 (2) 2π (3) $(2n+1)\pi$ (4) 원점

0645 $2\tan x=2\tan(x+\pi)$이므로 주기는 π이고, 점근선의 방정식은

$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

따라서 $y=2\tan x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



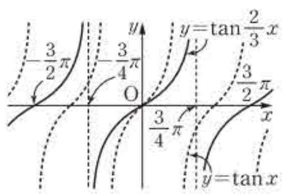
답 풀이 참조

0646 $\tan\frac{2}{3}x=\tan\left(\frac{2}{3}x+\pi\right)=\tan\frac{2}{3}\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)$이므로 주기는 $\frac{3}{2}\pi$이고, 점근선의 방정식은

$\frac{2}{3}x=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서

$x=\frac{3}{2}n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)

따라서 $y=\tan\frac{2}{3}x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0647 $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$에서

최댓값: $\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\left|\frac{1}{2}\right|=-\frac{1}{2}$,

주기: $\frac{2}{3}\pi$

답 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

0648 $y=-2\cos\left(\frac{x}{2}-\pi\right)+1$에서

최댓값: $|-2|+1=3$, 최솟값: $-|-2|+1=-1$,

주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

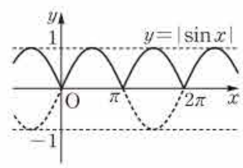
답 최댓값: 3, 최솟값: -1, 주기: 4π

0649 $y=\tan 4\pi x-2$에서 최댓값, 최솟값은 없다.

주기: $\frac{\pi}{4\pi}=\frac{1}{4}$

답 최댓값, 최솟값은 없다., 주기: $\frac{1}{4}$

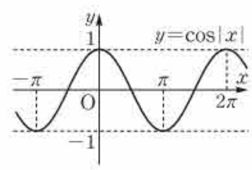
0650 $y=|\sin x|$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=|\sin x|$의 주기는 π이다.

답 π

0651 $y=\cos|x|$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프에서 $x\ge 0$인 부분만 그리고 $x\ge 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=\cos|x|$의 주기는 2π이다.

답 2π

0652 $\sin\frac{19}{3}\pi=\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0653 $\cos\frac{17}{4}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0654 $\tan 405^\circ=\tan(360^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ=1$ 답 1

0655 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0656 $\cos 300^\circ=\cos(360^\circ-60^\circ)=\cos(-60^\circ)$

$=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0657 $\tan\frac{23}{6}\pi=\tan\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

06 삼각함수의 그래프

0658 $\sin\frac{5}{4}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

0659 $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

0660 $\tan 225°=\tan(180°+45°)=\tan 45°=1$　　답 1

0661 $\sin 755°=\sin(360°\times 2+35°)=\sin 35°=0.5736$

답 0.5736

0662 $\cos 217°=\cos(180°+37°)=-\cos 37°=-0.7986$

답 -0.7986

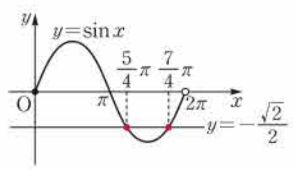
0663 $\tan 144°=\tan(180°-36°)=-\tan 36°=-0.7265$

답 -0.7265

0664 $\cos 53°=\cos(90°-37°)=\sin 37°=0.6018$

답 0.6018

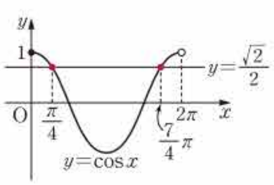
0665 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이므로



$x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$　　답 $x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

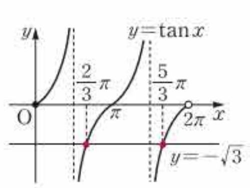
0666 $2\cos x-\sqrt{2}=0$에서　$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$이므로



$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$　　답 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

0667 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-\sqrt{3}$의 교점의 x좌표가 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$이므로

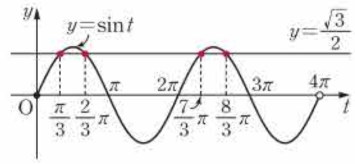


$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$　　답 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

0668 $2\sin 2x=\sqrt{3}$에서　$\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le t<4\pi$이고, 주어진 방정식은

$\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$



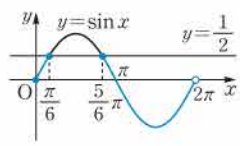
위의 그림과 같이 $0\le t<4\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{7}{3}\pi$, $\frac{8}{3}\pi$이므로

$2x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $2x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $2x=\frac{7}{3}\pi$ 또는 $2x=\frac{8}{3}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

답 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

0669 부등식 $\sin x\le\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

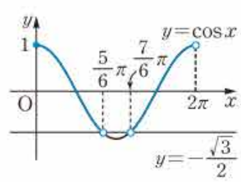


$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

답 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

0670 $2\cos x>-\sqrt{3}$에서　$\cos x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$

부등식 $\cos x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

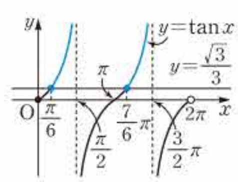


$0\le x<\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x<2\pi$

답 $0\le x<\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x<2\pi$

0671 $\sqrt{3}\tan x-1\ge 0$에서　$\tan x\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$

부등식 $\tan x\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



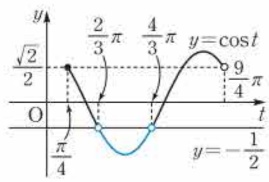
$\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$

답 $\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$

0672 $x+\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{4}\le t<\frac{9}{4}\pi$이고, 주어진 부등식은

$\cos t<-\frac{1}{2}$

부등식 $\cos t < -\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos t$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분의 t의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



$\frac{2}{3}\pi < t < \frac{4}{3}\pi$

$\therefore \frac{5}{12}\pi < x < \frac{13}{12}\pi$ 답 $\frac{5}{12}\pi < x < \frac{13}{12}\pi$

유형 01 주기함수 본책 96쪽

① 함수 $f(x)$는 주기가 p인 주기함수이다.
➡ $f(x)=f(x+p)=f(x+2p)=f(x+3p)=\cdots$
② $f(x-a)=f(x+a) \Longleftrightarrow f(x)=f(x+2a)$
➡ 함수 $f(x)$는 주기함수이다.

0673 함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+p)=f(x)$

$\therefore f(p)=f(0)=\sin 0+\cos 0+1=2$ 답 ④

0674 조건 (가)에 의하여

$f(20)=f(17)=f(14)=\cdots=f(2)=f(-1)$

조건 (나)에 의하여 $f(-1)=\cos(-\pi)=-1$이므로

$f(20)=-1$ 답 -1

0675 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x-1)$이 성립하므로 위의 식의 양변에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x+2)=f(x)$

즉 함수 $f(x)$는 주기함수이다. ··· ❶

따라서

$f(2024)=f(2022)=f(2020)=\cdots=f(0)=1,$

$f(2023)=f(2021)=f(2019)=\cdots=f(1)=-2$

이므로

$f(2022)+f(2023)+f(2024)=1-2+1=0$ ··· ❷

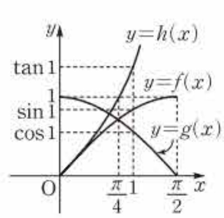
답 0

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 주기함수임을 알 수 있다.	50 %
❷ $f(2022)+f(2023)+f(2024)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 02 삼각함수의 값의 대소 비교 본책 96쪽

삼각함수의 그래프를 이용하여 대소를 비교한다.

0676 $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$이므로 오른쪽 그림에서

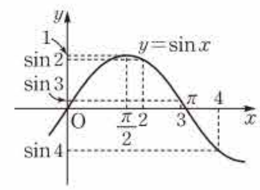


$\cos 1 < \sin 1 < \tan 1$

$\therefore g(1) < f(1) < h(1)$

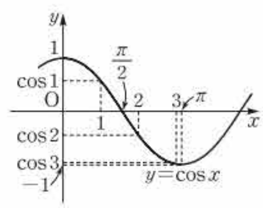
답 ③

0677 ㄱ. $\frac{\pi}{2}<2<3<\pi<4$이므로 오른쪽 그림에서



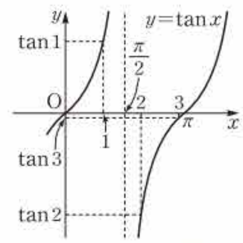
$\sin 4 < \sin 3 < \sin 2$

ㄴ. $0<1<\frac{\pi}{2}<2<3<\pi$이므로 오른쪽 그림에서



$\cos 3 < \cos 2 < \cos 1$

ㄷ. $0<1<\frac{\pi}{2}<2<3<\pi$이므로 오른쪽 그림에서



$\tan 2 < \tan 3 < \tan 1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0678 $A-B=x\sin y+y\sin x-(x\cos x+y\cos y)$

$=x(\sin y-\cos x)+y(\sin x-\cos y)$

$0<x<\frac{\pi}{4}$, $0<y<\frac{\pi}{4}$인 모든 x, y $(x\neq y)$에 대하여

$\sin y<\cos x$, $\sin x<\cos y$

$\therefore \sin y-\cos x<0$, $\sin x-\cos y<0$

따라서 $x(\sin y-\cos x)+y(\sin x-\cos y)<0$이므로

$A-B<0$ $\therefore A<B$ 답 $A<B$

유형 03 삼각함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 본책 97쪽

$y=a\sin(bx+c)+d=a\sin b\left(x+\frac{c}{b}\right)+d$의 그래프는 $y=a\sin bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다.

0679 $y=2\cos(\pi x-\pi)-2=2\cos\pi(x-1)-2$의 그래프는 $y=2\cos\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=1$, $n=-2$이므로

$m+n=-1$ 답 -1

0680 $y=-\cos 3x+1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-\cos 3x+1$, 즉 $y=\cos 3x-1$

이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+3=\cos 3x-1$ $\therefore y=\cos 3x-4$

따라서 $a=1$, $b=-4$이므로

$a+b=-3$ 답 ②

SSEN 특강 평행이동·대칭이동한 도형의 방정식

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을
① x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동
$\Rightarrow f(x-a, y-b)=0$
② x축에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow f(x, -y)=0$
③ y축에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow f(-x, y)=0$
④ 원점에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow f(-x, -y)=0$

0681 $y=\tan\frac{\pi}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\tan\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}$ ⋯ ❶

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{3}{4}, a\right)$를 지나므로

$a=\tan\frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

0682 ㄱ. $y=2\sin 2x-3$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배한 후 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄴ. $y=\sin(2x+\pi)+1=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y=-\sin 2x+5$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $y=\sin(2x-3\pi)=\sin 2\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}\pi$만큼 평행이동한 것과 같다.

이상에서 $y=\sin 2x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

유형 04 삼각함수의 최대·최소와 주기

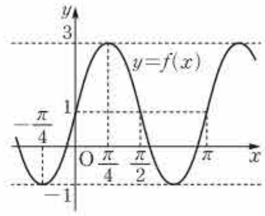
본책 97쪽

삼각함수	최댓값	최솟값	주기
$y=a\sin(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\cos(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\tan(bx+c)+d$	없다.	없다.	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$

0683 ① $f(x)=2\sin 2x+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고, $g(x)=\tan 2x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

② 최댓값은 $|2|+1=3$, 최솟값은 $-|2|+1=-1$이다.

③ $f(x)=2\sin 2x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.



④ $f(0)+f(\pi)=1+1=2$

⑤ $f(-x)=2\sin(-2x)+1$
$=-2\sin 2x+1$

따라서 $-f(-x)=2\sin 2x-1$이므로
$f(x)\neq -f(-x)$

답 ④

0684 $y=2\cos\frac{\pi}{3}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2\cos\left\{\frac{\pi}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}-4$ ⋯ ❶

이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이므로

$a=6$

또 최댓값은 $|2|-4=-2$이므로

$b=-2$ ⋯ ❷

$\therefore ab=-12$ ⋯ ❸

답 -12

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0685 $y=\sin\pi x+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄱ. $y=2\cos\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄴ. $y=\sin\pi x-3$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄷ. $y=\tan\left(2\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

ㄹ. $y=\tan\frac{\pi}{2}x+1$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

이상에서 $y=\sin\pi x+1$과 주기가 같은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ⑤

0686 ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$

ㄴ. $f(3)=-2\tan 2\pi+1=1$이므로 그래프는 점 $(3, 1)$을 지난다.

ㄷ. 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 존재하지 않는다.

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{\pi}{3}x+\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore x=3n-\frac{3}{2}$ (n은 정수)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

0687 ① $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

$\therefore f(x+4)=f(x)$

② $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{4}{3}$

$\therefore f(x+4)=f\left(x+\frac{8}{3}\right)=f\left(x+\frac{4}{3}\right)=f(x)$

③ $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{5}{2}\pi}=\frac{4}{5}$

$\therefore f(x+4)=f\left(x+\frac{16}{5}\right)=f\left(x+\frac{12}{5}\right)=\cdots=f(x)$

④ $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{8}{3}\pi}=\frac{3}{4}$

이때

$f(x+4)=f\left(x+\frac{13}{4}\right)=f\left(x+\frac{5}{2}\right)$

$=\cdots=f\left(x+\frac{1}{4}\right)=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$

이므로 $f(x+4)\neq f(x)$

⑤ $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x+4)=f\left(x+\frac{7}{2}\right)=f(x+3)=\cdots=f(x)$

답 ④

참고 $f(x+4)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{4}{n}$ (n은 자연수)이다.

유형 05 삼각함수의 미정계수의 결정 ; 조건이 주어진 경우

본책 98쪽

① $y=a\sin bx+c$, $y=a\cos bx+c$
➡ a, c: 삼각함수의 최대·최소 또는 함숫값을 이용하여 결정
b: 삼각함수의 주기를 이용하여 결정
② $y=a\tan bx+c$
➡ a, c: 함숫값을 이용하여 결정
b: 삼각함수의 주기 또는 점근선의 방정식을 이용하여 결정

0688 조건 ㈎에서 $f(x)$의 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$-a+c=-1$ …… ㉠

$-|a|+c=-1$

조건 ㈏에서 $f(x)$의 주기가 4π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

$\frac{2\pi}{|b|}=4\pi$

$\therefore f(x)=a\sin\frac{x}{2}+c$

조건 ㈐에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{2}$이므로

$a\sin\frac{\pi}{6}+c=\frac{7}{2}$ $\quad\therefore \frac{a}{2}+c=\frac{7}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=2$

$\therefore a+b+c=\frac{11}{2}$ 답 $\frac{11}{2}$

0689 $f(x)=a\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+k$의 최댓값이 2이고 $a<0$이므로

$-a+k=2$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$이므로 $a\cos\frac{\pi}{2}+k=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore k=\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 $-a+\frac{1}{2}=2$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$이므로 $f(x)$의 최솟값은

$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$ 답 ③

0690 $y=2\tan(ax-b)+3$의 주기가 3π이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=3\pi$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 함수 $y=2\tan\left(\frac{1}{3}x-b\right)+3$의 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{1}{3}x-b=l\pi+\frac{\pi}{2}$, $\quad\frac{1}{3}x=l\pi+\frac{\pi}{2}+b$

$\therefore x=3l\pi+\frac{3}{2}\pi+3b$ (l은 정수)

이 방정식이 $x=3n\pi$와 일치하므로

$\frac{3}{2}\pi+3b=3k\pi$ (k는 정수)

이때 $-\pi<b<0$이므로 $b=-\frac{\pi}{2}$

$k=0$일 때, $\frac{3}{2}\pi+3b=0$

$\therefore ab=-\frac{\pi}{6}$ 답 ①

0691 조건 ㈎에서 $f(x)$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore b=2$ ··· ❶

$\therefore f(x)=a\tan(2x+c)+d=a\tan 2\left(x+\frac{c}{2}\right)+d$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 $y=a\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{2}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이므로

조건 ㈏에서

$-\frac{c}{2}=\frac{\pi}{6}$, $d=-1$

$\therefore c=-\frac{\pi}{3}$, $d=-1$ ··· ❷

조건 ㈐에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}-1$이므로

$a\tan\frac{\pi}{3}-1=2\sqrt{3}-1$

$a\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}-1$ $\quad\therefore a=2$ ··· ❸

$\therefore abcd=2\cdot2\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot(-1)=\frac{4}{3}\pi$ ··· ❹

답 $\frac{4}{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ c, d의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $abcd$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 06 삼각함수의 미정계수의 결정 ; 그래프가 주어진 경우

본책 99쪽

주어진 그래프에서 주기, 최댓값, 최솟값을 구한 후 삼각함수의 미정계수를 결정한다.

0692 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$a=2$

또 주기가 $\frac{5}{6}\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

따라서 주어진 함수는 $y=2\sin(2x-c)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$을 지나므로

$0=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-c\right) \qquad \therefore \sin\left(\frac{2}{3}\pi-c\right)=0$

이때 $0<c<\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}<\frac{2}{3}\pi-c<\frac{2}{3}\pi$이므로

$\frac{2}{3}\pi-c=0 \qquad \therefore c=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore abc=\frac{8}{3}\pi$

답 $\frac{8}{3}\pi$

0693 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -4이고 $a>0$이므로

$a+b=2,\ -a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-1$

따라서 주어진 함수는 $y=3\cos\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)-1$이고, 이 함수의 그래프의 주기가 $2\left(c-\frac{1}{2}\right)$이므로

$\frac{2\pi}{\pi}=2\left(c-\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore c=\frac{3}{2}$

$\therefore a+2b-2c=3-2-3=-2$

답 ②

0694 $f(x)=a\sin bx+c$ 또는 $f(x)=a\cos bx+c$ $(a>0,\ b>0)$로 놓으면 함수 $f(x)$의 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로

$a+c=1,\ -a+c=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ c=-1$

또 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi \qquad \therefore b=3$

$\therefore f(x)=2\sin 3x-1$ 또는 $f(x)=2\cos 3x-1$

그런데 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 구하는 함수 $f(x)$는 ④이다.

답 ④

0695 주어진 그래프의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore a=2$ ⋯ ❶

따라서 주어진 함수는 $y=\tan(2x-b)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$을 지나므로

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=0$

이때 $0<b<\pi$에서 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-b<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{2}-b=0 \qquad \therefore b=\frac{\pi}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore ab=\pi$ ⋯ ❸

답 π

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0696 함수 $f(x)$의 최댓값이 5, 최솟값이 1이고 $a>0$이므로

$a+d=5,\ -a+d=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ d=3$

또 주어진 그래프의 주기가 $2\cdot\{1-(-2)\}=6$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=6 \qquad \therefore b=\frac{\pi}{3}$

따라서 $f(x)=2\sin\frac{\pi}{3}(x+c)+3$이고, 이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 5)$를 지나므로

$2\sin\frac{\pi}{3}(1+c)+3=5 \qquad \therefore \sin\frac{\pi}{3}(1+c)=1$

이때 $0<c<1$에서 $\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}(1+c)<\frac{2}{3}\pi$이므로

$\frac{\pi}{3}(1+c)=\frac{\pi}{2}, \qquad 1+c=\frac{3}{2}$

$\therefore c=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=2\sin\frac{\pi}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)+3$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+3=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3=\sqrt{3}+3$

답 $\sqrt{3}+3$

0697 주어진 그래프에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 6, -6이고, 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 2, -2이다. 이때 두 함수의 주기가 모두 16이므로 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배한 후 x축의 방향으로 $16n+5$(n은 정수)만큼 평행이동한 것과 같다.

$\therefore a=\frac{1}{3},\ b=16n+5$ (n은 정수)

그런데 $-8<b<8$이므로 $b=5$

$\therefore a+b=\frac{16}{3}$

답 ②

유형 07 삼각함수의 그래프의 대칭성

본책 100쪽

① $f(x)=\sin x\ (0\le x\le\pi)$에서

$f(a)=f(b)=k \Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow a+b=\pi$ (단, $a\neq b$)

② $f(x)=\cos x\ (0\le x\le 2\pi)$에서

$f(a)=f(b)=k \Rightarrow \frac{a+b}{2}=\pi \Rightarrow a+b=2\pi$ (단, $a\neq b$)

③ $f(x)=\tan x$에서

$f(a)=f(b)=k \Rightarrow a-b=n\pi$ (단, n은 정수)

0698 $y=\sin x$의 그래프에서

$\frac{a+c}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore a+c=\pi$

$y=\cos x$의 그래프에서

$\frac{b+d}{2}=\pi$ $\quad\therefore b+d=2\pi$

$\therefore \tan(a+b+c+d)=\tan 3\pi=0$ 답 0

0699 $y=\sin x$의 그래프에서

$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\quad x_1+x_2=\pi$

$\frac{x_3+x_4}{2}=2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi$이므로 $\quad x_3+x_4=5\pi$

$\frac{x_5+x_6}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{9}{2}\pi$이므로 $\quad x_5+x_6=9\pi$

$\vdots$

$\frac{x_{11}+x_{12}}{2}=10\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{21}{2}\pi$이므로 $\quad x_{11}+x_{12}=21\pi$ 답 ③

0700 두 점 A, D는 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\delta}{2}=2\pi$ $\quad\therefore \alpha+\delta=4\pi$ ··· ❶

두 점 B, C는 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=2\pi$ $\quad\therefore \beta+\gamma=4\pi$ ··· ❷

$\therefore \alpha+2\beta+2\gamma+\delta=\alpha+\delta+2(\beta+\gamma)$

$=4\pi+2\cdot 4\pi=12\pi$ ··· ❸

답 12π

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\delta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha+2\beta+2\gamma+\delta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 두 점 A, B는 점 $(\pi, 0)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi$ $\quad\therefore \alpha+\beta=2\pi$

두 점 C, D는 점 $(3\pi, 0)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=3\pi$ $\quad\therefore \gamma+\delta=6\pi$

두 점 B, C는 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=2\pi$ $\quad\therefore \beta+\gamma=4\pi$

$\therefore \alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)+(\beta+\gamma)$

$=2\pi+6\pi+4\pi=12\pi$

0701 $y=4\sin\frac{\pi}{8}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=16$이므로 두 점 B, C는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

이때 $\overline{BC}=4$이므로 $\quad$B$(2, 0)$, C$(6, 0)$

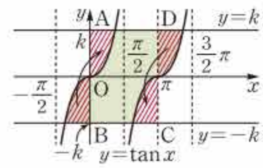
$x=2$일 때 $y=4\sin\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$이므로

A$(2, 2\sqrt{2})$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$4\cdot 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ 답 ④

0702 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 모두 같으므로 $y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\right)$의 그래프와 두 직선 $y=k$, $y=-k$로 둘러싸인 도형의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



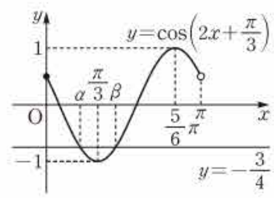
$\overline{AB}=2k$, $\overline{AD}=\pi$이므로 직사각형 ABCD의 넓이는

$2k\pi$

즉 $2k\pi=4\pi$이므로 $\quad k=2$ 답 2

0703 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x<\pi$에서 함수 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{3}{4}$은 오른쪽 그림과 같으므로



$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore \frac{\alpha+\beta}{4}=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

유형 08 절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 그래프 본책 101쪽

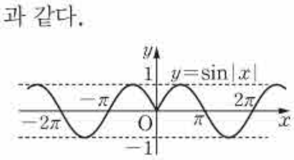
① $y=f(|x|)$의 그래프

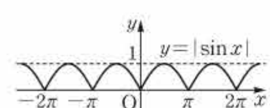
⇒ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\ge 0$인 부분만 그린 후 $x\ge 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.

② $y=|f(x)|$의 그래프

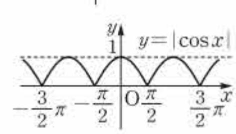
⇒ $y=f(x)$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

0704 ㄱ. $y=\sin|x|$, $y=|\sin x|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.

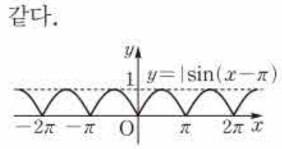


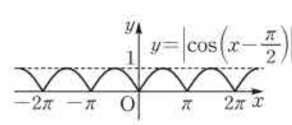


ㄴ. $y=|\cos x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄷ. $y=|\sin(x-\pi)|$의 그래프는 $y=|\sin x|$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이고, $y=\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|$의 그래프는 $y=|\cos x|$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 두 함수의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.

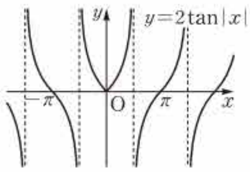




이상에서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

06 삼각함수의 그래프

0705 $y=2\tan|x|$의 그래프는 $y=2\tan x$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 그리고 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



① 주기함수가 아니다.
② 최솟값, 최댓값이 존재하지 않는다.
③ 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
⑤ 정의역은 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이다.

답 ④

0706 함수 $f(x)=2|\cos 3(x-\pi)|+1$의 주기는 $y=|\cos 3x|$의 주기와 같으므로

$$a=\frac{\pi}{3}$$

$0\leq|\cos 3(x-\pi)|\leq 1$이므로

$$0\leq 2|\cos 3(x-\pi)|\leq 2$$

$$\therefore\ 1\leq 2|\cos 3(x-\pi)|+1\leq 3$$

따라서 최댓값은 3, 최솟값은 1이므로

$$b=3,\ c=1$$

$$\therefore\ abc=\pi$$

답 ①

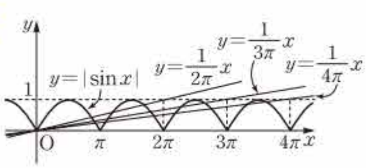
SSEN 특강 절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 주기

① $y=|\sin x|$의 주기: π
➡ $y=|\sin bx|$의 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

② $y=|\cos x|$의 주기: π
➡ $y=|\cos bx|$의 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

③ $y=|\tan x|$의 주기: π
➡ $y=|\tan bx|$의 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

0707



위의 그림에서 함수 $y=|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2\pi}x$의 교점의 개수는 4이므로

$$f(2)=4$$

함수 $y=|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3\pi}x$의 교점의 개수는 6이므로

$$f(3)=6$$

함수 $y=|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4\pi}x$의 교점의 개수는 8이므로

$$f(4)=8$$

$$\therefore\ f(2)+f(3)+f(4)=18$$

답 18

유형 09 여러 가지 각의 삼각함수 본책 101쪽

$\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ 또는 $90^\circ\times n\pm\theta$ (n은 정수) 꼴의 삼각함수의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) n이 짝수일 때, sin ➡ sin, cos ➡ cos, tan ➡ tan
n이 홀수일 때, sin ➡ cos, cos ➡ sin, tan ➡ $\frac{1}{\tan}$

(ii) θ를 예각으로 생각하여 $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ 또는 $90^\circ\times n\pm\theta$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면에서 처음 주어진 삼각함수의 부호가 양이면 +, 음이면 −를 붙인다.

0708 $\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{5}{6}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)=\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\tan\frac{7}{4}\pi=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

$$\therefore\ (\text{주어진 식})=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\cdot(-1)=-1$$

답 −1

0709 $\sin 100^\circ=\sin(90^\circ\times 1+10^\circ)=\cos 10^\circ=0.9848$

$\cos 250^\circ=\cos(90^\circ\times 3-20^\circ)=-\sin 20^\circ=-0.3420$

$$\therefore\ \sin 100^\circ+\cos 250^\circ=0.9848-0.3420=0.6428$$

답 ④

0710 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore\ (\text{주어진 식})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0711 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$\sin(\pi-\theta)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{2}{5}$에서

$$\sin\theta\cdot\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)=\frac{2}{5},\qquad \sin\theta\cdot\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{2}{5}$$

$$\therefore\ \cos\theta=-\frac{2}{5}$$

$$\therefore\ 20(1+\cos\theta)=20\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)=20\cdot\frac{3}{5}=12$$

답 ②

0712 ㄱ. $\sin 330^\circ=\sin(90^\circ\times 3+60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

$\cos 570° = \cos(90° \times 6 + 30°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 495° = \tan(90° \times 5 + 45°) = -\dfrac{1}{\tan 45°} = -1$

$\therefore \sin 330° - \sqrt{3}\cos 570° + \tan 495°$

$= -\dfrac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1) = 0$

ㄴ. $\cos \dfrac{10}{3}\pi = \cos\left(3\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\sin\dfrac{11}{6}\pi = \sin\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

$\tan\dfrac{5}{4}\pi = \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

$\therefore \cos\dfrac{10}{3}\pi - \sin\dfrac{11}{6}\pi + \tan\dfrac{5}{4}\pi = -\dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1$

$= 1$

ㄷ. $\tan 55° = \tan(90° - 35°) = \dfrac{1}{\tan 35°}$

$\tan 125° = \tan(90° + 35°) = -\dfrac{1}{\tan 35°}$

$\therefore$ (주어진 식)

$= \left(\tan 35° + \dfrac{1}{\tan 35°}\right)^2 - \left(\tan 35° - \dfrac{1}{\tan 35°}\right)^2$

$= 4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0713 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) - \sin(3\pi - \theta)\cos(3\pi + \theta)$

$= \cos\theta \cdot \sin\theta - \sin\theta \cdot (-\cos\theta)$

$= 2\sin\theta\cos\theta$ …… ㉠ ⋯ ➊

직선 $y = -\dfrac{1}{3}x$의 기울기는 $-\dfrac{1}{3}$이므로

$\tan\theta = -\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta = -\dfrac{1}{3}\cos\theta$ …… ㉡

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로 $\left(-\dfrac{1}{3}\cos\theta\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\dfrac{10}{9}\cos^2\theta = 1$ $\therefore \cos^2\theta = \dfrac{9}{10}$

이때 $a < 0$에서 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 제2사분면 위의 점이므로

$\cos\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

㉡에서 $\sin\theta = -\dfrac{1}{3} \cdot \left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ⋯ ➋

따라서 ㉠에서

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) - \sin(3\pi - \theta)\cos(3\pi + \theta)$

$= 2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\dfrac{3}{5}$ ⋯ ➌

답 $-\dfrac{3}{5}$

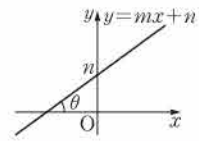
채점 기준	비율
➊ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	30 %
➋ $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

SSEN 특강 직선의 기울기

직선 $y = mx + n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때,

$m = \tan\theta$

이다.



유형 10 여러 가지 각의 삼각함수 ; 일정하게 증가하는 각 본책 102쪽

각의 크기의 합이 $\dfrac{\pi}{2}$인 것끼리 짝 지어 다음을 이용한다.

➡ $A + B = \dfrac{\pi}{2}$일 때, $B = \dfrac{\pi}{2} - A$이므로

① $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - A\right)$

$= \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

② $\tan^2 A \cdot \tan^2 B = \tan^2 A \cdot \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2} - A\right)$

$= \tan^2 A \cdot \dfrac{1}{\tan^2 A} = 1$

0714 $\sin 10° = \sin(90° - 80°) = \cos 80°$

$\sin 20° = \sin(90° - 70°) = \cos 70°$

$\sin 30° = \sin(90° - 60°) = \cos 60°$

$\sin 40° = \sin(90° - 50°) = \cos 50°$

$\therefore \sin^2 10° + \sin^2 20° + \cdots + \sin^2 80° + \sin^2 90°$

$= (\sin^2 10° + \sin^2 80°) + (\sin^2 20° + \sin^2 70°)$

$+ (\sin^2 30° + \sin^2 60°) + (\sin^2 40° + \sin^2 50°) + \sin^2 90°$

$= (\cos^2 80° + \sin^2 80°) + (\cos^2 70° + \sin^2 70°)$

$+ (\cos^2 60° + \sin^2 60°) + (\cos^2 50° + \sin^2 50°) + \sin^2 90°$

$= 4 + 1 = 5$ 답 ⑤

0715 $\tan 89° = \tan(90° - 1°) = \dfrac{1}{\tan 1°}$

$\tan 88° = \tan(90° - 2°) = \dfrac{1}{\tan 2°}$

$\vdots$

$\tan 46° = \tan(90° - 44°) = \dfrac{1}{\tan 44°}$

$\therefore \tan 1° \times \tan 2° \times \cdots \times \tan 88° \times \tan 89°$

$= \tan 1° \times \tan 2° \times \cdots \times \tan 44° \times \tan 45°$

$\times \dfrac{1}{\tan 44°} \times \cdots \times \dfrac{1}{\tan 2°} \times \dfrac{1}{\tan 1°}$

$= \tan 45° = 1$ 답 1

0716 $6\theta = \dfrac{\pi}{2}$에서 $3\theta = \dfrac{\pi}{4}$이고

$\cos\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 5\theta\right) = \sin 5\theta$,

$\cos 2\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 4\theta\right) = \sin 4\theta$

$\therefore$ (주어진 식)

$= \sin^2 5\theta + \sin^2 4\theta + \cos^2 3\theta + \cos^2 4\theta + \cos^2 5\theta$

$= (\sin^2 5\theta + \cos^2 5\theta) + (\sin^2 4\theta + \cos^2 4\theta) + \cos^2\dfrac{\pi}{4}$

$= 1 + 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$ 답 ③

유형 11 여러 가지 각의 삼각함수 ; 도형에의 활용

본책 103쪽

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로
① $B+C=\pi-A$
② $C=\frac{\pi}{2}$이면 $A+B=\frac{\pi}{2}$

0717 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle C=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

$\triangle$ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+(\sqrt{7})^2}=4$

$\therefore \cos(\alpha+2\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\sin\beta$

$=-\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=-\frac{3}{4}$

답 $-\frac{3}{4}$

0718 $\triangle$ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$A+B+C=\pi,\ B=C$

ㄱ. $A+2B=\pi$에서

$\sin A=\sin(\pi-2B)=\sin 2B$

ㄴ. $A+2B=\pi$에서

$\cos 2A=\cos(2\pi-4B)=\cos(-4B)=\cos 4B$

ㄷ. $A+2C=\pi$에서

$\tan\frac{A}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\frac{1}{\tan C}$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0719 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$이므로 주어진 식은

$\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\tan^2\alpha=4$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\tan^2\alpha=4$

$1+\tan^2\alpha=4,\quad \tan^2\alpha=3$

$\therefore \tan\alpha=\sqrt{3}\ \left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

즉 $\alpha=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{OA}=\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0720 $\cos\alpha=\frac{2}{3}>0$에서 α는 예각이므로

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ··· ❶

한편 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\alpha+\beta=\pi$

$\therefore \tan^2\alpha+\sin^2\beta=\tan^2\alpha+\sin^2(\pi-\alpha)$

$=\tan^2\alpha+\sin^2\alpha$

$=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{65}{36}$ ··· ❷

따라서 $m=36,\ n=65$이므로

$m+n=101$ ··· ❸

답 101

채점 기준	비율
❶ $\sin\alpha$, $\tan\alpha$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\tan^2\alpha+\sin^2\beta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 $180°$이다.

유형 12 삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소 ; 일차식의 꼴

본책 103쪽

① 두 종류 이상의 삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소
➡ 한 종류의 삼각함수로 통일한다.
② 절댓값 기호를 포함한 함수의 최대·최소
➡ $0\le|\sin x|\le1,\ 0\le|\cos x|\le1$임을 이용한다.

0721 $-1\le\cos x\le1$이므로 $\cos x-2<0$

$\therefore y=\cos x-2+k$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $1-2+k=-1+k$

최솟값은 $-1-2+k=-3+k$

따라서 $(-1+k)+(-3+k)=0$이므로

$-4+2k=0$

$\therefore k=2$

답 2

0722 $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$y=2\sin x-\sin x-1=\sin x-1$

$-1\le\sin x\le1$이므로 $-2\le\sin x-1\le0$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 0, 최솟값은 -2이므로

$M=0,\ m=-2$

$\therefore M-m=2$

답 2

0723 $-1\le\sin 3x\le1$이므로 $\sin 3x-5<0$

$\therefore y=-a\sin 3x+5a+b$

$a>0$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $a+5a+b=6a+b$

최솟값은 $-a+5a+b=4a+b$

따라서 $6a+b=6,\ 4a+b=2$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-6$

$\therefore a-b=8$

답 ④

유형 13~14 삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소 ; 분수식 또는 이차식의 꼴

본책 104쪽

(i) 주어진 식의 삼각함수를 t로 치환하여 t에 대한 함수를 얻는다.
(ii) (i)에서 얻은 함수의 그래프를 그린다.
(iii) (ii)의 그래프를 이용하여 최댓값과 최솟값을 구한다. 이때 t의 값의 범위에 유의한다.

0724 $y=\frac{-\sin x+2}{\sin x+3}$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=\frac{-t+2}{t+3}=\frac{-(t+3)+5}{t+3}=\frac{5}{t+3}-1$

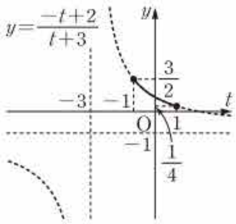
오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 $\frac{3}{2}$,

$t=1$일 때 최솟값은 $\frac{1}{4}$

이므로 $\quad M=\frac{3}{2},\ m=\frac{1}{4}$

$\therefore M+m=\frac{7}{4}$



답 ③

0725 $y=\dfrac{2\tan x-1}{\tan x+2}$에서 $\tan x=t$로 놓으면 $0\le t\le 1$이고

$\pi\le x\le\frac{5}{4}\pi$이므로 $0\le\tan x\le 1$

$y=\dfrac{2t-1}{t+2}=\dfrac{2(t+2)-5}{t+2}=\dfrac{-5}{t+2}+2$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값 $\frac{1}{3}$을 가지므로

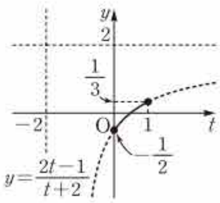
$b=\frac{1}{3}$

한편 $t=1$, 즉 $\tan x=1$에서

$x=\frac{5}{4}\pi\ \left(\because\ \pi\le x\le\frac{5}{4}\pi\right)$

이므로 $\quad a=\frac{5}{4}\pi$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{5}{4}\pi\cdot 3=\frac{15}{4}\pi$



답 $\frac{15}{4}\pi$

0726 $y=\dfrac{\cos x+a}{\cos x-2}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

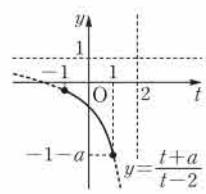
$y=\dfrac{t+a}{t-2}=\dfrac{(t-2)+a+2}{t-2}=\dfrac{a+2}{t-2}+1$

이때 $a>-2$에서 $a+2>0$이므로

$y=\dfrac{t+a}{t-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $t=1$일 때 최솟값 $-1-a$를 가지므로 $\quad -1-a=-3$

$\therefore a=2$



답 ④

0727 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로

$y=\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin x+2}=\dfrac{-2\sin x}{\sin x+2}$ ⋯ ❶

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=\dfrac{-2t}{t+2}=\dfrac{-2(t+2)+4}{t+2}=\dfrac{4}{t+2}-2$

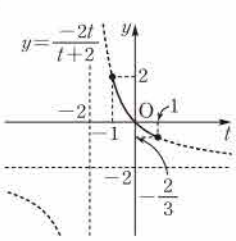
오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 2,

$t=1$일 때 최솟값은 $-\frac{2}{3}$ ⋯ ❷

이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$2+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$ ⋯ ❸



답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $\sin x$에 대한 함수로 변형할 수 있다.	30 %
❷ 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	60 %
❸ 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0728 $y=\cos^2 x+2\sin x+1$

$=(1-\sin^2 x)+2\sin x+1$

$=-\sin^2 x+2\sin x+2$

$\sin x=t$로 놓으면 $-\pi\le x\le\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2+2t+2=-(t-1)^2+3$

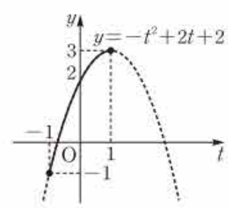
오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최솟값 -1을 가지므로 $\quad b=-1$

한편 $t=-1$, 즉 $\sin x=-1$에서

$x=-\frac{\pi}{2}\ (\because\ -\pi\le x\le\pi)$

이므로 $\quad a=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=\frac{\pi}{2}$



답 ①

0729 $y=\cos^2 x-\cos x$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2-t=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

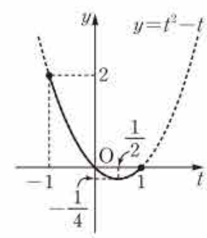
오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 2,

$t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $-\frac{1}{4}$

이므로 $\quad M=2,\ m=-\frac{1}{4}$

$\therefore Mm=-\frac{1}{2}$



답 $-\frac{1}{2}$

0730 $y=2a\sin^2 x+2a\cos x-b$

$=2a(1-\cos^2 x)+2a\cos x-b$

$=-2a\cos^2 x+2a\cos x+2a-b$ ⋯ ❶

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-2at^2+2at+2a-b=-2a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}a-b$

$a>0$이므로 오른쪽 그림에서

$t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{5}{2}a-b$,

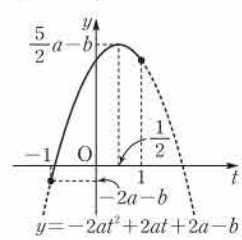
$t=-1$일 때 최솟값은 $-2a-b$ ⋯ ❷

따라서

$\frac{5}{2}a-b=8,\ -2a-b=-1$

이므로 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=-3$

$\therefore a+b=-1$ ⋯ ❸



답 -1

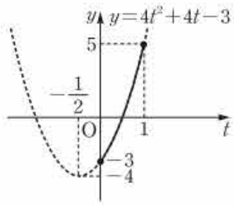
채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $\cos x$에 대한 함수로 변형할 수 있다.	20 %
❷ 최댓값과 최솟값을 a, b로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0731 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$, $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$이므로

$$y=\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos^2\theta-4\sin(\theta+\pi)$$
$$=\sin^2\theta-3\cos^2\theta+4\sin\theta$$
$$=\sin^2\theta-3(1-\sin^2\theta)+4\sin\theta$$
$$=4\sin^2\theta+4\sin\theta-3$$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $0\le\theta<\pi$에서 $0\le t\le1$이고

$$y=4t^2+4t-3=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-4$$



오른쪽 그림에서

$t=1$일 때 최댓값은 5,

$t=0$일 때 최솟값은 -3

이므로 $M=5$, $m=-3$

$\therefore M-m=8$ 답 ④

0732 $y=\cos^2x+2k\sin x-1+4k$

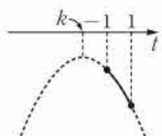
$$=(1-\sin^2x)+2k\sin x-1+4k$$
$$=-\sin^2x+2k\sin x+4k$$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le1$이고

$$y=-t^2+2kt+4k=-(t-k)^2+k^2+4k$$

$f(t)=-(t-k)^2+k^2+4k$로 놓으면

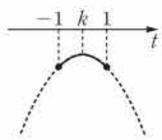
(i) $k<-1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(-1)$이므로



$-1+2k=-4$

$\therefore k=-\frac{3}{2}$

(ii) $-1\le k\le1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(k)$이므로

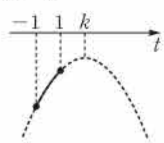


$k^2+4k=-4$, $(k+2)^2=0$

$\therefore k=-2$

그런데 $k=-2$는 $-1\le k\le1$을 만족시키지 않는다.

(iii) $k>1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(1)$이므로



$-1+6k=-4$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$

그런데 $k=-\frac{1}{2}$은 $k>1$을 만족시키지 않는다.

이상에서 $k=-\frac{3}{2}$이고 $f(t)$는 $t=-1$, 즉 $\sin x=-1$일 때 최댓값을 가지므로

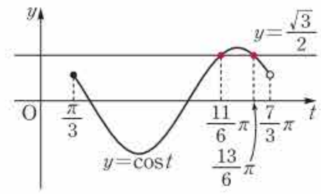
$$x=\frac{3}{2}\pi\ (\because 0\le x<2\pi)$$

$\therefore \alpha=\frac{3}{2}\pi$ 답 $\alpha=\frac{3}{2}\pi$, $k=-\frac{3}{2}$

유형 15 삼각방정식; 일차식의 꼴 본책 105쪽

(i) 주어진 방정식을 $\sin x=k$ (또는 $\cos x=k$ 또는 $\tan x=k$) 꼴로 변형한다.
(ii) 함수 $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 구한다.

0733 $2x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$이고, 주어진 방정식은 $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$



오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{11}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$이므로

$$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{11}{6}\pi \text{ 또는 } 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{6}\pi$$

$$\therefore x=\frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x=\frac{11}{12}\pi$$

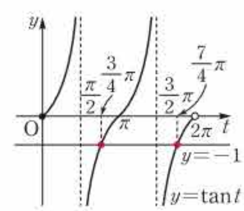
따라서 모든 근의 합은

$\frac{3}{4}\pi+\frac{11}{12}\pi=\frac{5}{3}\pi$ 답 $\frac{5}{3}\pi$

0734 $\tan\frac{x}{2}+1=0$에서 $\tan\frac{x}{2}=-1$

$\frac{x}{2}=t$로 놓으면 $0\le x<4\pi$에서 $0\le t<2\pi$이고, 주어진 방정식은

$$\tan t=-1$$



오른쪽 그림과 같이 $0\le t<2\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=-1$의 교점의 t좌표가 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이므로

$$\frac{x}{2}=\frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{x}{2}=\frac{7}{4}\pi$$

$$\therefore x=\frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } x=\frac{7}{2}\pi$$

따라서 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}\pi+\frac{7}{2}\pi=5\pi$이므로

$\cos(\alpha+\beta)=\cos5\pi=-1$ 답 ①

0735 $2\log\cos x$, $2\log\sin x$에서 진수의 조건에 의하여

$$\cos x>0,\ \sin x>0$$

$\therefore 0<x<\frac{\pi}{2}\ (\because 0<x<2\pi)$ ⋯ ❶

$2\log\cos x-2\log\sin x=\log3$에서

$$2\log\frac{\cos x}{\sin x}=\log3$$

따라서 $\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2=3$이므로 $\tan^2x=\frac{1}{3}$

$\therefore \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ ⋯ ❷

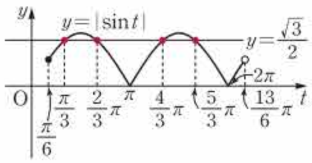
$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ ⋯ ❸

답 $x=\frac{\pi}{6}$

채점 기준	비율
❶ 진수의 조건을 이용하여 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\tan x$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 방정식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0736 $x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$이고, 주어진 방정식은

$$|\sin t|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$에서 함수 $y=|\sin t|$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$이므로

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x+\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는}$$

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi$$

따라서 모든 근의 곱은

$$\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{7}{6}\pi\cdot\frac{3}{2}\pi=\frac{7}{48}\pi^4$$

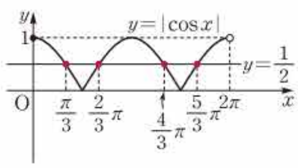
이므로

$p=48$, $q=7$

$\therefore p-q=41$

답 ④

0737 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=|\cos x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$이므로 방정식 $|\cos x|=\frac{1}{2}$의 해는

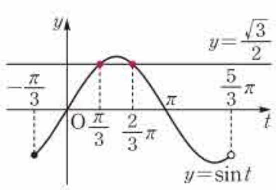


$$x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}\pi$$

…… ㉠

$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$에서 $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$이고, 방정식은 $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$



오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$이므로

$$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\pi$$

…… ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 연립방정식의 해는

$$x=\frac{2}{3}\pi$$

답 $x=\frac{2}{3}\pi$

0738 $\pi\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서

$0\le\sin x\le 1$ $\quad\therefore 0\le t\le\pi$

이때 주어진 방정식은 $\cos t=0$이므로

$$t=\frac{\pi}{2}$$

즉 $\pi\sin x=\frac{\pi}{2}$이므로 $\quad\sin x=\frac{1}{2}$

$$\therefore x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{5}{6}\pi\ (\because 0\le x<\pi)$$

따라서 두 근의 차는

$$\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$$

답 $\frac{2}{3}\pi$

유형 16 삼각방정식; 이차식의 꼴

본책 106쪽

(i) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 주어진 방정식을 한 종류의 삼각함수에 대한 방정식으로 변형한다.
(ii) 삼각함수를 t로 치환하여 t에 대한 이차방정식을 얻는다.
(iii) (ii)의 해를 구한 다음 치환한 식에 대입하여 x의 값을 구한다.

0739 $2\cos^2 x+\sin x-1=0$에서

$2(1-\sin^2 x)+\sin x-1=0$

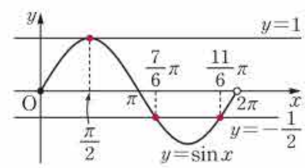
$\therefore 2\sin^2 x-\sin x-1=0$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 방정식은 $\quad 2t^2-t-1=0$

$(2t+1)(t-1)=0 \quad \therefore t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=1$

$\therefore \sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

(i) $\sin x=-\frac{1}{2}$일 때,



$0\le x<2\pi$이므로

$$x=\frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x=\frac{11}{6}\pi$$

(ii) $\sin x=1$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로 $\quad x=\frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 근의 합은

$$\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$$

답 $\frac{7}{2}\pi$

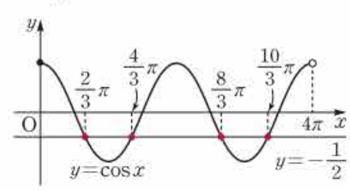
0740 $4\cos^2 x-8\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=-3$에서

$4\cos^2 x+8\cos x+3=0$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x<4\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 방정식은 $\quad 4t^2+8t+3=0$

$(2t+3)(2t+1)=0 \quad \therefore t=-\frac{1}{2}\ (\because -1\le t\le 1)$

$\therefore \cos x=-\frac{1}{2}$



이때 $0\le x<4\pi$이므로

$$x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{8}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{10}{3}\pi$$

따라서 $M=\frac{10}{3}\pi$, $m=\frac{2}{3}\pi$이므로

$M+m=4\pi$ 답 ②

0741 $4\sin^2 A+4\cos A=5$에서

$4(1-\cos^2 A)+4\cos A=5$

$4\cos^2 A-4\cos A+1=0$

$(2\cos A-1)^2=0$

$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$

$0<A<\pi$이므로 $A=\frac{\pi}{3}$ ⋯ ❶

이때 $A+B+C=\pi$이므로

$B+C-2\pi=(\pi-A)-2\pi$

$=-\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{4}{3}\pi$ ⋯ ❷

$\therefore \sin\frac{B+C-2\pi}{2}=\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=-\sin\frac{2}{3}\pi$

$=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
❶ A의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $B+C-2\pi$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\sin\frac{B+C-2\pi}{2}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0742 $\sqrt{\cos\theta+1}=2\sin\theta$의 양변을 제곱하면

$\cos\theta+1=4\sin^2\theta$

$\cos\theta+1=4(1-\cos^2\theta)$

$4\cos^2\theta+\cos\theta-3=0$

$(\cos\theta+1)(4\cos\theta-3)=0$

$\therefore \cos\theta=-1$ 또는 $\cos\theta=\frac{3}{4}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\cos\theta<1$이므로

$\cos\theta=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{\cos\theta+1}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 답 ③

0743 $2\sin^2 x-1=0$에서

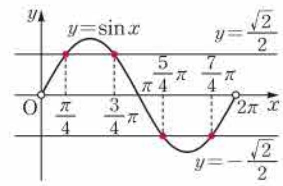
$\sin^2 x=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(i) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$



(ii) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로

$x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식을 만족시키는 x의 값은

$\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ ⋯⋯ ㉠

한편 $\sin x\cos x>0$에서 $\sin x$와 $\cos x$의 부호가 같으므로 x는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다. $\sin x>0$, $\cos x>0$ 또는 $\sin x<0$, $\cos x<0$

$\therefore 0<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$ ⋯⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값은

$\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$ 답 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$

0744 $\tan x\ne 0$이므로 $\tan x+\frac{\sqrt{3}}{\tan x}=1+\sqrt{3}$의 양변에 $\tan x$를 곱하여 정리하면

$\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$

$\tan x=t$로 놓으면

$t^2-(1+\sqrt{3})t+\sqrt{3}=0$

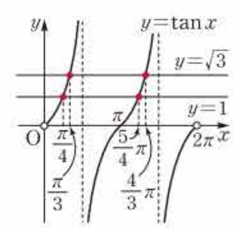
$(t-1)(t-\sqrt{3})=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=\sqrt{3}$

$\therefore \tan x=1$ 또는 $\tan x=\sqrt{3}$

(i) $\tan x=1$일 때,

$0<x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$



(ii) $\tan x=\sqrt{3}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

(i), (ii)에서 $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{3}$, $x_3=\frac{5}{4}\pi$, $x_4=\frac{4}{3}\pi$이므로

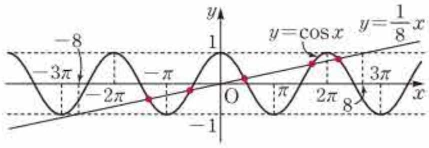
$x_2+x_4-(x_1+x_3)=\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi\right)$

$=\frac{\pi}{6}$ 답 ①

유형 17 삼각함수의 그래프와 삼각방정식의 실근 본책 106쪽

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근
➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

0745 방정식 $\cos x=\frac{1}{8}x$의 실근은 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}x$의 교점의 x좌표와 같다.



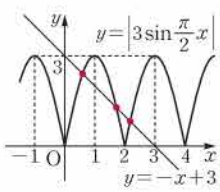
위의 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}x$의 교점의 개수는 5이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

답 ①

참고 $y=\frac{1}{8}x$에서 $x>8$이면 $y>1$, $x<-8$이면 $y<-1$이므로 $x>8$ 또는 $x<-8$에서 직선 $y=\frac{1}{8}x$는 $y=\cos x$의 그래프와 만나지 않는다.

0746 방정식 $\left|3\sin\frac{\pi}{2}x\right|=-x+3$의 실근은 함수 $y=\left|3\sin\frac{\pi}{2}x\right|$의 그래프와 직선 $y=-x+3$의 교점의 x좌표와 같다.

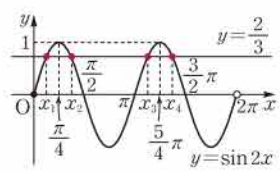
오른쪽 그림에서 함수 $y=\left|3\sin\frac{\pi}{2}x\right|$의 그래프와 직선 $y=-x+3$의 교점의 개수는 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



답 3

0747 방정식 $\sin 2x=\frac{2}{3}$의 실근은 함수 $y=\sin 2x$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$의 교점의 x좌표와 같다.

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin 2x$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면



$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{4},\ \frac{x_3+x_4}{2}=\frac{5}{4}\pi$$

$$\therefore x_1+x_2=\frac{\pi}{2},\ x_3+x_4=\frac{5}{2}\pi$$

따라서 구하는 모든 근의 합은

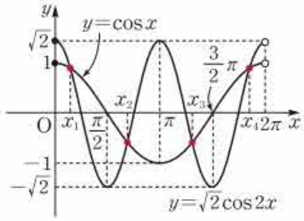
$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{2}\pi=3\pi$$

답 3π

0748 $\sqrt{2}\cos 2x-\cos x=0$에서 $\sqrt{2}\cos 2x=\cos x$

방정식 $\sqrt{2}\cos 2x=\cos x$의 실근은 두 함수 $y=\sqrt{2}\cos 2x$, $y=\cos x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sqrt{2}\cos 2x$, $y=\cos x$의 그래프의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면



$$\frac{x_1+x_4}{2}=\pi,\ \frac{x_2+x_3}{2}=\pi$$

$$\therefore x_1+x_4=2\pi,\ x_2+x_3=2\pi$$

따라서 구하는 모든 근의 합은

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2\pi+2\pi=4\pi$$

답 ⑤

유형 18 삼각방정식의 근의 조건

본책 107쪽

(i) 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형한다.
(ii) $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

0749 $4\sin^2 x+4\cos x-a=0$에서

$$4(1-\cos^2 x)+4\cos x=a$$

$$\therefore -4\cos^2 x+4\cos x+4=a$$

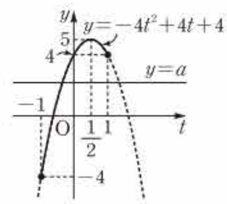
따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-4\cos^2 x+4\cos x+4$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 한다.

$y=-4\cos^2 x+4\cos x+4$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=-4t^2+4t+4=-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+5$$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위는

$$-4\le a\le 5$$



답 ②

0750 $\cos^2 x-2\sin(x+\pi)+k=0$에서

$$(1-\sin^2 x)-2(-\sin x)+k=0$$

$$\therefore k=\sin^2 x-2\sin x-1$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=\sin^2 x-2\sin x-1$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

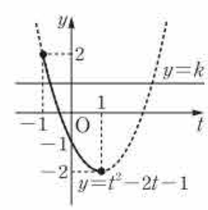
$y=\sin^2 x-2\sin x-1$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위는

$$-2\le k\le 2$$

이므로 k의 최댓값은 2이다.



답 2

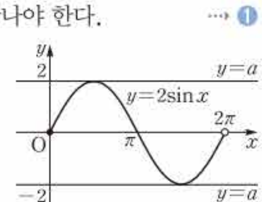
0751 $\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+a$에서

$$\sin x=-\sin x+a \qquad \therefore 2\sin x=a$$

따라서 주어진 방정식이 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=2\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나야 한다. ⋯ ❶

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=2\sin x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $y=2\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나려면

$$a=-2 \text{ 또는 } a=2 \quad \cdots ❷$$



따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-2\cdot 2=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ $y=2\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나야 함을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

유형 19 삼각부등식; 일차식의 꼴

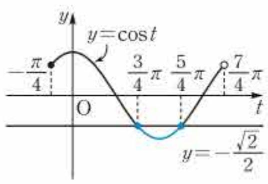
본책 107쪽

① $\sin x>k$ (또는 $\cos x>k$ 또는 $\tan x>k$)
➡ $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프가 직선 $y=k$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위

② $\sin x<k$ (또는 $\cos x<k$ 또는 $\tan x<k$)
➡ $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프가 직선 $y=k$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위

0752 $x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le t<\frac{7}{4}\pi$이고,

주어진 부등식은 $\cos t\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$



오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는

$\frac{3}{4}\pi\le t\le \frac{5}{4}\pi$이므로

$\frac{3}{4}\pi\le x-\frac{\pi}{4}\le \frac{5}{4}\pi$

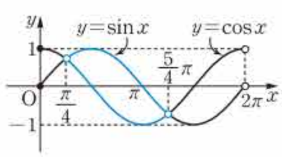
$\therefore \pi\le x\le \frac{3}{2}\pi$

따라서 $\alpha=\pi$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin(\beta-\alpha)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

답 ⑤

0753 부등식 $\sin x>\cos x$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$



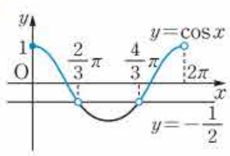
답 ②

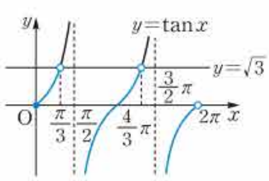
0754 $\sin\theta_1=\frac{4}{3}\sin\theta_2\le\frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로 $\sin\theta_2\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore 0<\theta_2\le\frac{\pi}{4}$ $\left(\because 0<\theta_2<\frac{\pi}{2}\right)$

답 $0<\theta_2\le\frac{\pi}{4}$

0755





위의 그림에서

$A=\left\{x\,\middle|\,0\le x<\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi<x<2\pi\right\}$

$B=\left\{x\,\middle|\,0\le x<\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2}<x<\frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi<x<2\pi\right\}$

$\therefore A\cap B$

$=\left\{x\,\middle|\,0\le x<\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi<x<2\pi\right\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

0756 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$에서 $3\alpha+3\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$3\beta=\frac{3}{2}\pi-3\alpha$

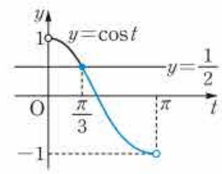
$3\cos 3\alpha+\sin 3\beta\le 1$에서

$3\cos 3\alpha+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)\le 1$, $3\cos 3\alpha-\cos 3\alpha\le 1$

$2\cos 3\alpha\le 1$ $\therefore \cos 3\alpha\le\frac{1}{2}$ ⋯ ❶

$3\alpha=t$로 놓으면 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$에서 $0<t<\pi$이고, 주어진 부등식은

$\cos t\le\frac{1}{2}$



오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3}\le t<\pi$이므로

$\frac{\pi}{3}\le 3\alpha<\pi$

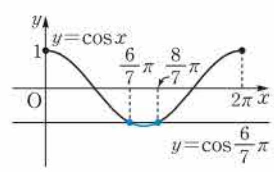
$\therefore \frac{\pi}{9}\le\alpha<\frac{\pi}{3}$ ⋯ ❷

따라서 α의 최솟값은 $\frac{\pi}{9}$이다. ⋯ ❸

답 $\frac{\pi}{9}$

채점 기준	비율
❶ 한 종류의 삼각함수에 대한 부등식으로 변형할 수 있다.	50 %
❷ α의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ α의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0757 부등식 $\cos x\le\cos\frac{6}{7}\pi$의 해는



$\frac{6}{7}\pi\le x\le\frac{8}{7}\pi$

$\therefore \frac{\pi}{4}\le\frac{7}{24}x\le\frac{\pi}{3}$

따라서 $\sin\frac{7}{24}x$의 값의 범위는 $\sin\frac{\pi}{4}\le\sin\frac{7}{24}x\le\sin\frac{\pi}{3}$

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\frac{7}{24}x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉 $M=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$Mm=\frac{\sqrt{6}}{4}$

답 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

유형 20 삼각부등식; 이차식의 꼴

본책 108쪽

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 주어진 부등식을 한 종류의 삼각함수에 대한 삼각부등식으로 변형한 후 그래프를 이용하여 해를 구한다.

0758 $2\sin^2 x-\cos x-1\ge 0$에서

$2(1-\cos^2 x)-\cos x-1\ge 0$

$2\cos^2 x+\cos x-1\le 0$, $\quad (\cos x+1)(2\cos x-1)\le 0$

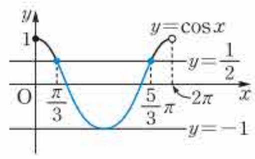
$\therefore\ -1\le \cos x\le \frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3}\le x\le \frac{5}{3}\pi$

이므로 $\quad \alpha=\frac{\pi}{3},\ \beta=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore\ \alpha+\beta=2\pi$



답 ⑤

0759 $2\sin^2\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)+3\sin x-3\ge 0$에서

$2\cos^2 x+3\sin x-3\ge 0$

$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-3\ge 0$, $\quad 2\sin^2 x-3\sin x+1\le 0$

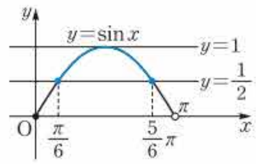
$(2\sin x-1)(\sin x-1)\le 0$

$\therefore\ \frac{1}{2}\le \sin x\le 1$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6}\le x\le \frac{5}{6}\pi$

답 $\frac{\pi}{6}\le x\le \frac{5}{6}\pi$



0760 $\cos^2\theta-4\sin\theta\le 2a$에서

$(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta\le 2a$

$\therefore\ \sin^2\theta+4\sin\theta+2a-1\ge 0$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 부등식은

$t^2+4t+2a-1\ge 0$

$y=t^2+4t+2a-1$이라 하면

$y=(t+2)^2+2a-5$

이므로 $-1\le t\le 1$에서 $t=-1$일 때

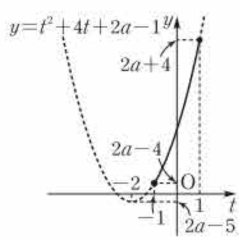
최솟값 $2a-4$를 갖는다.

이때 부등식이 항상 성립하려면

$2a-4\ge 0$이어야 하므로

$a\ge 2$

따라서 a의 최솟값은 2이다. 답 ⑤



유형 21 삼각방정식과 삼각부등식의 활용

본책 109쪽

a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라 하면

① $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근을 갖는다.
③ $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

0761 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차방정식 $x^2-2(2\sin\theta+1)x+4=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\sin\theta+1)^2-4<0$, $\quad 4\sin^2\theta+4\sin\theta-3<0$

$\therefore\ (2\sin\theta+3)(2\sin\theta-1)<0$

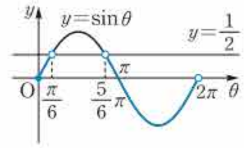
$0\le\theta<2\pi$에서 $2\sin\theta+3>0$이므로

$2\sin\theta-1<0 \quad \therefore\ \sin\theta<\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$0\le\theta<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$

답 $0\le\theta<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$



0762 이차방정식 $x^2+2x+5-4\tan\theta=0$의 판별식을 D라 하면

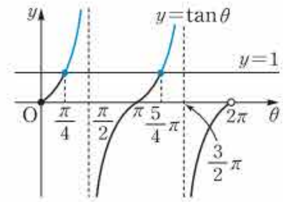
$\frac{D}{4}=1-(5-4\tan\theta)\ge 0$

$4\tan\theta-4\ge 0 \quad \therefore\ \tan\theta\ge 1$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le\theta<\frac{3}{2}\pi$

이므로 조건을 만족시키는 θ의 값이 아닌 것은 ④이다. 답 ④



0763 주어진 이차함수의 그래프가 x축에 접하려면 이차방정식 $x^2-2x\cos\theta+1-\frac{3}{2}\cos\theta=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-\cos\theta)^2-\left(1-\frac{3}{2}\cos\theta\right)=0$ ··· ❶

$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$, $\quad (\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)=0$

$0<\theta<2\pi$에서 $-1\le\cos\theta<1$이므로

$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$ ··· ❷

따라서 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$, $\theta_2=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\theta_2-\theta_1=\frac{4}{3}\pi$ ··· ❸

답 $\frac{4}{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 θ에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 방정식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\theta_2-\theta_1$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0764 $y=x^2+2x\sin\theta+\cos^2\theta$

$=(x+\sin\theta)^2-\sin^2\theta+\cos^2\theta$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $\quad (-\sin\theta,\ -\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

이 점이 직선 $y=5x+3$ 위에 있으려면

$-\sin^2\theta+\cos^2\theta=5(-\sin\theta)+3$

$-\sin^2\theta+(1-\sin^2\theta)=-5\sin\theta+3$

$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2=0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)=0$

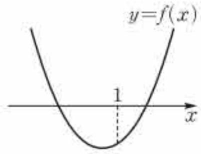
$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{2}$ ($\because\ -1\le\sin\theta\le 1$)

06 삼각함수의 그래프

$0<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$을 만족시키는 θ의 값은

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$ 답 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$

0765 $f(x)=x^2-4x\sin\theta+1$이라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

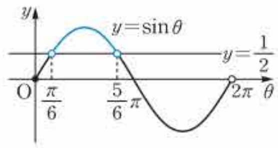


즉 $f(1)<0$이어야 하므로

$1-4\sin\theta+1<0,\qquad -4\sin\theta<-2$

$\therefore \sin\theta>\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 구하는 θ의 조건은



$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$

답 ③

0766 1st 조건 (가)를 이용하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 사이의 관계를 파악한다.

조건 (가)에서 $f(x-2)=f(x+2)$이므로 x 대신 $x+2$를 대입하면

$f(x)=f(x+4)$

따라서 $f(x-1)=f(x+3)$이므로

$$g(x)=\frac{f(x-1)+f(x+3)}{2}=\frac{2f(x-1)}{2}=f(x-1)$$

즉 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

2nd 1st의 결과와 조건 (나)를 이용하여 $g(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

조건 (나)에서 $f(1)=2$이므로 $\quad f(1)=f(5)=f(9)=\cdots=2$

$\therefore g(6)=f(5)=2$

또 $f(3)=-2$이므로 $\quad f(3)=f(7)=f(11)=\cdots=-2$

$\therefore g(8)=f(7)=-2$

따라서 $g(x)$는 $x=6$에서 최댓값 2, $x=8$에서 최솟값 -2를 갖는다.

3rd $ad+bc$의 값을 구한다.

$a=6$, $b=2$, $c=8$, $d=-2$이므로

$ad+bc=6\cdot(-2)+2\cdot8=4$ 답 4

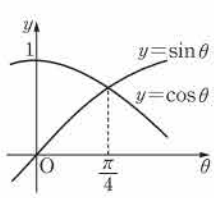
참고 $g(x)=\frac{f(x-1)+f(x+3)}{2}=\frac{2f(x+3)}{2}=f(x+3)$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것으로 생각할 수도 있다.

이때 $g(6)=f(9)=2$, $g(8)=f(11)=-2$이므로

$a=6$, $b=2$, $c=8$, $d=-2$

0767 1st $0<\theta<\frac{\pi}{4}$일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값의 범위를 구한다.

두 함수 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$0<\theta<\frac{\pi}{4}$이면

$0<\sin\theta<\cos\theta<1$

2nd A, B의 대소를 비교한다.

$0<\sin\theta<1$이므로 함수 $y=(\sin\theta)^x$은 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

이때 $0<\sin\theta<\cos\theta$이므로

$(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\sin\theta)^{\sin\theta}\qquad \therefore B<A$

3rd A, C의 대소를 비교한다.

$0<\sin\theta<\cos\theta$이므로

$(\sin\theta)^{\sin\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}\qquad \therefore A<C$

4th A, B, C의 대소를 비교한다.

$B<A$, $A<C$이므로

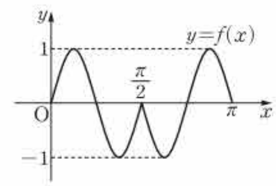
$B<A<C$ 답 $B<A<C$

0768 1st $0\le x\le\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

두 함수 $y=\sin4x$, $y=-\sin4x$에서

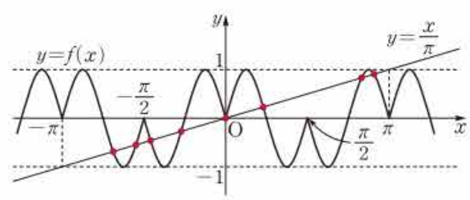
최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

조건 (나), (다)에 의하여 $0\le x\le\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2nd 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수를 구한다.

조건 (가)에 의하여 함수 $\underbrace{y=f(x)\text{의 그래프는 }\pi}_{\text{주기가 }\pi\text{이다.}}$ 간격으로 반복되므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$는 다음 그림과 같다.

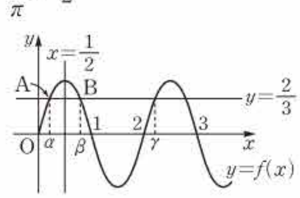


따라서 구하는 점의 개수는 8이다. 답 ⑤

0769 1st 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 $\alpha+\beta$의 값을 구한다.

함수 $f(x)=\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

오른쪽 그림에서 두 점 A, B는 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$



$\therefore \alpha+\beta=1$

2nd $f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)$의 값을 구한다.

$\gamma=2+\alpha$이므로

$\alpha+\beta+\gamma+1=1+(2+\alpha)+1=4+\alpha$,

$\alpha+\beta+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서

함수 $f(x)$의 주기가 2이므로 $f(4+\alpha)=f(2+\alpha)=f(\alpha)$

$f(\alpha+\beta+\gamma+1)=f(4+\alpha)=f(\alpha)=\frac{2}{3}$,

$f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$

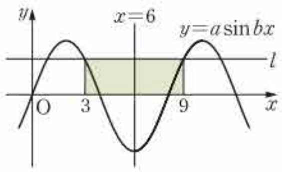
이므로

$$f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}+(-1)=-\frac{1}{3}$$

답 ②

0770 1st 주기를 이용하여 b의 값을 구한다.

함수 $y=a\sin bx$의 그래프의 일부분과 직선 l이 만나는 점의 x좌표가 3, 9이므로 $y=a\sin bx$의 그래프는 직선



$$x=\frac{3+9}{2}=6$$

에 대하여 대칭이다.

따라서 $y=a\sin bx$의 주기는 $6\cdot\frac{4}{3}=8$이고 $b>0$이므로

$$\frac{2\pi}{b}=8 \qquad \therefore b=\frac{\pi}{4}$$

2nd 주어진 도형의 넓이를 이용하여 a의 값을 구한다.

$y=a\sin\frac{\pi}{4}x$이므로 $x=3$일 때,

$$y=a\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

x축과 직선 l 및 두 직선 $x=3$, $x=9$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $48\sqrt{2}$이므로

$$6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=48\sqrt{2} \qquad \therefore a=16$$

3rd $\frac{a}{b}$의 값을 구한다.

$a=16$, $b=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\frac{a}{b}=16\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{64}{\pi}$$

답 $\frac{64}{\pi}$

0771 1st 두 점 A, B의 좌표를 $y=f(x)$에 대입하여 a의 값을 구한다.

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$에서 $\quad \underbrace{2\sin\left(-\frac{a\pi}{2}\right)}_{\sin(-\theta)=-\sin\theta}+b=0$

$$-2\sin\frac{a\pi}{2}+b=0$$

$$\therefore b=2\sin\frac{a\pi}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

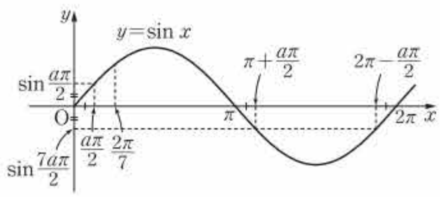
$f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=0$에서 $\quad 2\sin\frac{7a\pi}{2}+b=0$

$$\therefore b=-2\sin\frac{7a\pi}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad \sin\frac{a\pi}{2}=-\sin\frac{7a\pi}{2} \qquad \cdots\cdots ㉢$

이때 $0<a<\frac{4}{7}$에서 $\quad 0<\frac{a\pi}{2}<\frac{2\pi}{7}$, $0<\frac{7a\pi}{2}<2\pi$

또 ㉢에서 $\sin\frac{7a\pi}{2}=-\sin\frac{a\pi}{2}$이므로 함수 $y=\sin x$의 그래프에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $\frac{7a\pi}{2}=\pi+\frac{a\pi}{2}$ 또는 $\frac{7a\pi}{2}=2\pi-\frac{a\pi}{2}$이므로

$$3a\pi=\pi \text{ 또는 } 4a\pi=2\pi$$

$$\therefore a=\frac{1}{3} \text{ 또는 } a=\frac{1}{2}$$

2nd a의 값에 따른 b의 값을 구한다.

㉠에서

(i) $a=\frac{1}{3}$일 때, $\quad b=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1$

(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때, $\quad b=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

이때 b가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad a=\frac{1}{3}$, $b=1$

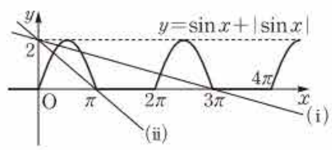
3rd $30(a+b)$의 값을 구한다.

$$30(a+b)=30\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)=40$$

답 40

0772 1st 함수 $y=\sin x+|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=ax+2$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 직선 $y=ax+2$의 위치를 파악한다.

$y=\sin x+|\sin x|=\begin{cases} 2\sin x & (\sin x\ge 0) \\ 0 & (\sin x<0) \end{cases}$이고, 직선 $y=ax+2$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$를 지난다.



위의 그림에서 $y=\sin x+|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=ax+2$ $(a<0)$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선이 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.

2nd 음수 a의 값의 범위를 구한다.

(i) 직선 $y=ax+2$가 점 $(3\pi, 0)$을 지날 때,

$$0=3\pi a+2 \qquad \therefore a=-\frac{2}{3\pi}$$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 점 $(\pi, 0)$을 지날 때,

$$0=\pi a+2 \qquad \therefore a=-\frac{2}{\pi}$$

(i), (ii)에서 $\quad -\frac{2}{\pi}<a<-\frac{2}{3\pi}$

답 $-\frac{2}{\pi}<a<-\frac{2}{3\pi}$

0773 1st 두 동경이 일치함을 이용하여 θ의 값을 구한다.

각 θ를 나타내는 동경과 각 9θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$$9\theta-\theta=2n\pi \ (n\text{은 정수})$$

$$8\theta=2n\pi \qquad \therefore \theta=\frac{n\pi}{4}$$

이때 $\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{3}{8}\pi$이므로 $\quad \theta=\frac{\pi}{4}$

2nd $\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cdots+\cos9\theta$의 값을 구한다.

$4\theta=\pi$이므로

$$\cos5\theta=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta,$$
$$\cos6\theta=\cos(\pi+2\theta)=-\cos2\theta,$$
$$\cos7\theta=\cos(\pi+3\theta)=-\cos3\theta,$$
$$\cos8\theta=\cos(\pi+4\theta)=-\cos4\theta$$

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 9\theta$

$=(\cos\theta+\cos 5\theta)+(\cos 2\theta+\cos 6\theta)+(\cos 3\theta+\cos 7\theta)$

$\quad+(\cos 4\theta+\cos 8\theta)+\cos 9\theta$

$=(\cos\theta-\cos\theta)+(\cos 2\theta-\cos 2\theta)+(\cos 3\theta-\cos 3\theta)$

$\quad+(\cos 4\theta-\cos 4\theta)+\cos(2\pi+\theta)$

$=\cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ③

0774 1st $f(\theta)$, $g(\theta)$, $s(\theta)$를 각각 구한다.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$이므로

$\mathrm{Q}(-\sin\theta,\ \cos\theta)$

$\therefore f(\theta)=-\sin\theta$

사각형 PQRS가 평행사변형이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PS}}=\sin\theta$

$\therefore g(\theta)=\cos\theta-\sin\theta$

$\overline{\mathrm{PS}}$를 평행사변형의 밑변이라 하면 높이는 $\cos\theta+\sin\theta$이므로

$s(\theta)=\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)$

2nd $\frac{s(\theta)}{f(\theta)g(\theta)}=-2$임을 이용하여 $\tan\theta$의 값을 구한다.

$\frac{s(\theta)}{f(\theta)g(\theta)}=\frac{\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{-\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}=-\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$이므로

$-\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=-2$

$\cos\theta+\sin\theta=2\cos\theta-2\sin\theta,\qquad \cos\theta=3\sin\theta$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{3}$ 답 ①

0775 1st 삼각함수의 각을 통일하고 $f(x)$를 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$

$=\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$

$=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$

$=\left\{1-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$

$=-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k+1$

2nd $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$로 놓고 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낸다.

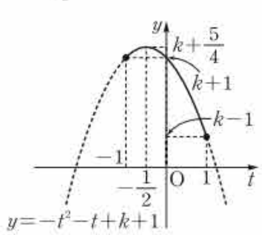
$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 $y=f(x)$라 하면

$y=-t^2-t+k+1=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}$

오른쪽 그림에서

$t=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $k+\frac{5}{4}$,

$t=1$일 때 최솟값은 $k-1$



3rd $k+m$의 값을 구한다.

$k+\frac{5}{4}=3$, $k-1=m$이므로

$k=\frac{7}{4}$, $m=\frac{3}{4}\qquad \therefore k+m=\frac{5}{2}$ 답 ③

0776 1st 주어진 식에 $m=144$, $L=10$, $t=2$를 대입하여 추의 높이를 구한다.

$m=144$, $L=10$, $t=2$일 때 추의 높이를 h_1 cm라 하면

$h_1=20-10\cos\frac{4\pi}{\sqrt{144}}=20-10\cos\frac{\pi}{3}$

$=20-10\cdot\frac{1}{2}=15$

2nd 주어진 식에 $m=a$, $L=5\sqrt{2}$, $t=2$를 대입하여 추의 높이를 구한다.

$m=a$, $L=5\sqrt{2}$, $t=2$일 때 추의 높이를 h_2 cm라 하면

$h_2=20-5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}$

3rd 두 추의 높이가 같음을 이용하여 a의 값을 구한다.

$h_1=h_2$이므로

$20-5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=15,\qquad 5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=5$

$\therefore \cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ …… ㉠

$a\ge 100$에서 $0<\frac{1}{\sqrt{a}}\le\frac{1}{10}$이므로 $\quad 0<\frac{4\pi}{\sqrt{a}}\le\frac{2}{5}\pi$

따라서 ㉠에서 $\quad \frac{4\pi}{\sqrt{a}}=\frac{\pi}{4}$

$\sqrt{a}=16\qquad \therefore a=256$ 답 256

0777 1st 주어진 방정식을 만족시키는 $f^{-1}(x)$의 값을 구한다.

$f^{-1}(x)=t$로 놓으면 $0\le t<\pi$이고, 주어진 방정식은

$g(f^{-1}(x))=g(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉 $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\quad t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{2}{3}\pi$ ($\because 0\le t<\pi$)

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{\pi}{3}$ 또는 $f^{-1}(x)=\frac{2}{3}\pi$

2nd $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구한다.

(i) $f^{-1}(x)=\frac{\pi}{3}$일 때,

$x=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(ii) $f^{-1}(x)=\frac{2}{3}\pi$일 때,

$x=f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

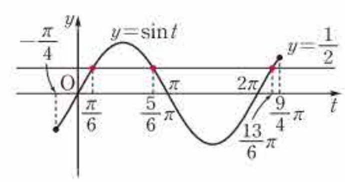
0778 1st 곡선과 직선이 만나는 점의 x좌표를 구한다.

$4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)=2$에서 $\quad \sin\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\frac{1}{4}(x-\pi)=t$로 놓으면

$0\le x\le 10\pi$에서

$-\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{9}{4}\pi$이고 ㉠에서



$\sin t=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\frac{\pi}{6}$ 또는 $t=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{13}{6}\pi$

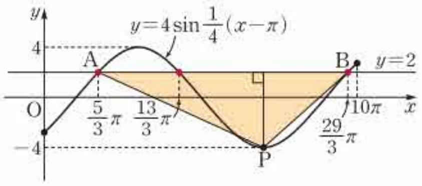
즉

$\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{13}{6}\pi$

이므로 $x=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{29}{3}\pi$

2nd 삼각형 PAB의 넓이가 최대일 조건을 구한다.

$0\le x\le 10\pi$에서 곡선 $y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$와 직선 $y=2$는 다음 그림과 같다.



삼각형 PAB의 넓이가 최대이려면 밑변의 길이가 가장 길어야 하므로 두 점 A, B는 위의 그림과 같아야 하고, 높이도 가장 길어야 하므로 점 P는 위의 그림과 같이 y좌표가 -4인 점이어야 한다.

3rd k의 값을 구한다.

삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{29}{3}\pi-\frac{5}{3}\pi\right)\cdot\{2-(-4)\}=\frac{1}{2}\cdot 8\pi\cdot 6=24\pi$

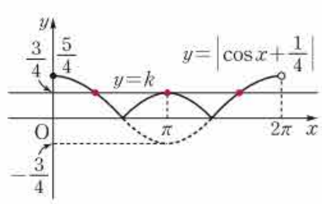
$\therefore k=24$

답 24

0779 **1st** $y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프를 그려서 α의 값을 구한다.

방정식 $\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|=k$가 서로 다른 3개의 실근을 가지려면 함수 $y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 세 점에서 만나야 한다.

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와의 교점이 3개이려면



$k=\frac{3}{4}$

따라서 $\alpha=\frac{3}{4}$이므로 $40\alpha=40\cdot\frac{3}{4}=30$

답 30

0780 **1st** $g(x)$를 구한다.

$\mathrm{P}(t,\ \cos t)$라 하면 $\mathrm{Q}\left(\frac{t+\pi}{2},\ \frac{\cos t+1}{2}\right)$

$x=\frac{t+\pi}{2}$, $y=\frac{\cos t+1}{2}$이라 하면 $t=2x-\pi$에서

$y=\frac{\cos(2x-\pi)+1}{2}=\frac{\cos(\pi-2x)+1}{2}$

$=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$

$\therefore g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$

2nd ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

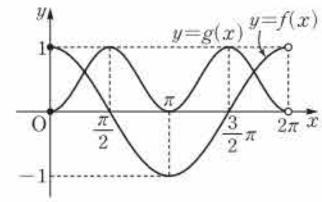
ㄴ. 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\left|-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}=1$

ㄷ. $0\le x<2\pi$에서 두 함수

$f(x)=\cos x$,

$g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 부등식 $f(x)g(x)<0$의 해는

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 또는 $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

이므로 자연수 x의 값은 2, 3, 4이다.

마찬가지로 $2\pi\le x<4\pi$에서 부등식 $f(x)g(x)<0$의 해는

$\frac{5}{2}\pi<x<3\pi$ 또는 $3\pi<x<\frac{7}{2}\pi$

이므로 자연수 x의 값은 8, 9, 10이다.

따라서 부등식 $f(x)g(x)<0$을 만족시키는 10 이하의 모든 자연수 x의 값의 합은

$2+3+4+8+9+10=36$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0781 **1st** 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -1보다 크고 1보다 작을 조건을 이용하여 θ의 값의 범위를 구한다.

(i) 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재해야 하므로 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\cos^2\theta-4(\sin\theta-1)\ge 0$

$(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta+4\ge 0$

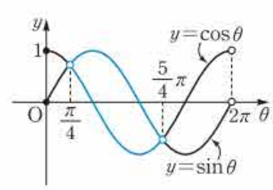
$\therefore -(\sin\theta+2)^2+9\ge 0$

이때 $1\le\sin\theta+2\le 3$이므로 모든 θ에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $f(-1)=-\cos\theta+\sin\theta>0$이어야 하므로

$\sin\theta>\cos\theta$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

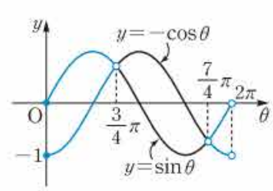


$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5}{4}\pi$

(iii) $f(1)=\cos\theta+\sin\theta>0$이어야 하므로

$\sin\theta>-\cos\theta$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는



$0\le\theta<\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=-\frac{\cos\theta}{2}$

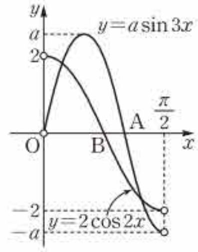
$-\frac{1}{2}\le-\frac{\cos\theta}{2}\le\frac{1}{2}$이므로 θ의 값에 관계없이 축은 직선 $x=-1$과 직선 $x=1$ 사이에 있다.

이상에서 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$

답 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$

0782 전략 두 점 A, B의 좌표를 구하여 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

풀이 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 두 함수 $y=a\sin 3x$, $y=2\cos 2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$a\sin 3x=0$에서 $3x=\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ $\quad \therefore \mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

$2\cos 2x=0$에서 $2x=\frac{\pi}{2}$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ $\quad \therefore \mathrm{B}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

$\therefore \overline{AB}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$ ··· ❶

점 P는 함수 $y=a\sin 3x$의 그래프 위의 점이므로 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때의 점 P의 y좌표는 a이다.

이때 △ABP의 넓이가 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot a=\frac{1}{3}$, $\quad \frac{\pi}{24}a=\frac{1}{3}$

$\therefore a=\frac{8}{\pi}$ ··· ❷

답 $\frac{8}{\pi}$

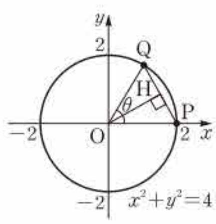
채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	60 %
❷ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0783 전략 $f(x)$를 x에 대한 삼각함수로 나타내어 주기와 최댓값, 최솟값을 구한다.

풀이 동경 OQ가 나타내는 각의 크기를 θ라 하면 원의 반지름의 길이가 2이므로

$x=2\theta$ $\quad \therefore \theta=\frac{x}{2}$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle\mathrm{POH}=\frac{\theta}{2}$

이므로 직각삼각형 POH에서

$\overline{PH}=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$

$\overline{PQ}=2\overline{PH}=4\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|=4\left|\sin\frac{x}{4}\right|$이므로

$f(x)=2\overline{PQ}+1=8\left|\sin\frac{x}{4}\right|+1$ ··· ❶

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi$이므로 $\quad a=4$

$0\le\left|\sin\frac{x}{4}\right|\le 1$이므로 $\quad 0\le 8\left|\sin\frac{x}{4}\right|\le 8$

$\therefore 1\le 8\left|\sin\frac{x}{4}\right|+1\le 9$, 즉 $1\le f(x)\le 9$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 9, 최솟값은 1이므로

$b=9$, $c=1$ ··· ❷

$\therefore a+b-c=12$ ··· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 x에 대한 삼각함수로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b-c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 $\pi<\theta<2\pi$일 때 $\angle\mathrm{POH}=\frac{1}{2}(2\pi-\theta)=\pi-\frac{\theta}{2}$이므로

$\overline{PH}=2\left|\sin\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right|=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$

따라서 $\pi<\theta<2\pi$일 때에도 $f(x)=8\left|\sin\frac{x}{4}\right|+1$이 성립한다.

0784 전략 점 A_k의 x좌표를 이용하여 선분 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$의 길이를 삼각함수로 나타낸다.

풀이 $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi}{16}$이므로 점 A_k의 x좌표는 차례대로

$\frac{\pi}{16}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3}{16}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{16}\pi$, $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{7}{16}\pi$ ··· ❶

따라서

$\overline{A_1B_1}=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{16}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7}{16}\pi\right)=\sqrt{2}\cos\frac{7}{16}\pi$,

$\overline{A_2B_2}=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{8}\pi\right)=\sqrt{2}\cos\frac{3}{8}\pi$,

$\overline{A_3B_3}=\sqrt{2}\sin\frac{3}{16}\pi=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{16}\pi\right)=\sqrt{2}\cos\frac{5}{16}\pi$

이므로 ··· ❷

$$\begin{aligned}&\overline{A_1B_1}^2+\overline{A_2B_2}^2+\overline{A_3B_3}^2+\cdots+\overline{A_7B_7}^2\\&=\left(\sqrt{2}\cos\frac{7}{16}\pi\right)^2+\left(\sqrt{2}\cos\frac{3}{8}\pi\right)^2+\left(\sqrt{2}\cos\frac{5}{16}\pi\right)^2\\&\quad+\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\sqrt{2}\sin\frac{5}{16}\pi\right)^2+\left(\sqrt{2}\sin\frac{3}{8}\pi\right)^2\\&\quad+\left(\sqrt{2}\sin\frac{7}{16}\pi\right)^2\\&=2\left(\cos^2\frac{7}{16}\pi+\sin^2\frac{7}{16}\pi\right)+2\left(\cos^2\frac{3}{8}\pi+\sin^2\frac{3}{8}\pi\right)\\&\quad+2\left(\cos^2\frac{5}{16}\pi+\sin^2\frac{5}{16}\pi\right)+2\sin^2\frac{\pi}{4}\\&=2+2+2+1=7\end{aligned}$$ ··· ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 점 A_k의 x좌표를 차례대로 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$의 길이를 코사인함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

0785 전략 $f(x)$를 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 나타낸 후 삼각함수를 t로 치환한다.

풀이 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$$f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\sin^2 x+\sin^2 x+1}{\sin x}$$

$=2\sin x+\frac{1}{\sin x}$ ··· ❶

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $0<x<\pi$에서 $0<t\le 1$이고

$f(x)=2t+\frac{1}{t}\ge 2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{t}}=2\sqrt{2}$

(단, 등호는 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 성립)

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다. ⋯➋

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
➊ $f(x)$를 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
➋ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0786 전략 주어진 방정식을 $\sin x$에 대한 방정식으로 변형한다.

풀이 $2\cos^2 x+(2k+1)\sin x-k-2=0$에서

$2(1-\sin^2 x)+(2k+1)\sin x-k-2=0$

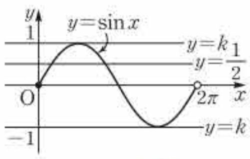
$2\sin^2 x-(2k+1)\sin x+k=0$

$(2\sin x-1)(\sin x-k)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=k$ ⋯➊

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 오른쪽 그림에서

$k=-1$ 또는 $k=1$ ⋯➋



답 -1, 1

채점 기준	비율
➊ 주어진 방정식을 만족시키는 $\sin x$의 값을 구할 수 있다.	60 %
➋ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

0787 전략 $y=-x^2+2$를 $x\sin\theta+y\cos\theta=2$에 대입하여 얻은 이차방정식이 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $y=-x^2+2$를 $x\sin\theta+y\cos\theta=2$에 대입하면

$x\sin\theta+(-x^2+2)\cos\theta=2$

$\therefore x^2\cos\theta-x\sin\theta+2-2\cos\theta=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 직선과 곡선이 만나려면 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다. ⋯➊

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-\sin\theta)^2-4\cos\theta(2-2\cos\theta)\ge 0$

$\sin^2\theta-8\cos\theta+8\cos^2\theta\ge 0$

$(1-\cos^2\theta)-8\cos\theta+8\cos^2\theta\ge 0$

$7\cos^2\theta-8\cos\theta+1\ge 0$

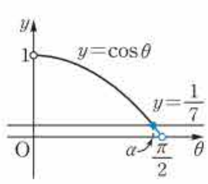
$\therefore (7\cos\theta-1)(\cos\theta-1)\ge 0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta-1<0$이므로

$7\cos\theta-1\le 0$ $\quad\therefore \cos\theta\le\frac{1}{7}$ ⋯➋

따라서 오른쪽 그림에서 $\alpha\le\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\alpha=\frac{1}{7}$ ⋯➌



답 $\frac{1}{7}$

채점 기준	비율
➊ 이차방정식이 실근을 가질 조건으로 변형할 수 있다.	30 %
➋ $\cos\theta$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
➌ $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Ⅱ. 삼각함수

07 삼각함수의 활용

0788 사인법칙에 의하여 $\frac{5}{\sin 60^\circ}=\frac{c}{\sin 45^\circ}$이므로

$c\sin 60^\circ=5\sin 45^\circ$

$\therefore c=5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$

답 $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

0789 $A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{12}{\sin 120^\circ}=\frac{c}{\sin 30^\circ}$이므로

$c\sin 120^\circ=12\sin 30^\circ$

$\therefore c=12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

답 $4\sqrt{3}$

0790 사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\frac{2}{\sin B}$이므로

$2\sqrt{3}\sin B=2\sin 120^\circ$

$\therefore \sin B=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로 $\quad B=30^\circ$ 또는 $B=150^\circ$

그런데 $A+B<180^\circ$이므로 $\quad B=30^\circ$

답 30°

0791 사인법칙에 의하여 $\frac{5}{\sin 30^\circ}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin C}$이므로

$5\sin C=5\sqrt{2}\sin 30^\circ$

$\therefore \sin C=5\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로 $\quad C=45^\circ$ 또는 $C=135^\circ$

$A=180^\circ-(B+C)$이므로 $\quad A=105^\circ$ 또는 $A=15^\circ$

답 15° 또는 105°

0792 사인법칙에 의하여 $\quad\frac{20}{\sin 30^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{20}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}=20$

답 20

0793 $A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(35^\circ+100^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\quad\frac{3}{\sin 45^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

0794 코사인법칙에 의하여

$a^2=3^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ$

$=9+2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5$

$a>0$이므로 $\quad a=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

0795 코사인법칙에 의하여

$b^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cos60°$

$=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{2}=21$

$b>0$이므로　$b=\sqrt{21}$　답 $\sqrt{21}$

0796 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{(\sqrt{3})^2+1^2-1^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0°<C<180°$이므로　$C=30°$　답 $30°$

0797 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{7^2+8^2-13^2}{2\cdot7\cdot8}=-\frac{1}{2}$

$0°<A<180°$이므로　$A=120°$　답 $120°$

0798 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot10\cdot6\cdot\sin45°$

$=\frac{1}{2}\cdot10\cdot6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=15\sqrt{2}$　답 $15\sqrt{2}$

0799 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot2\cdot5\cdot\sin150°$

$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot5\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$　답 $\frac{5}{2}$

0800 (1) 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{3^2+(\sqrt{7})^2-2^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

(2) $\sin^2A=1-\cos^2A=1-\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2=\frac{3}{7}$이므로

$\sin A=\frac{\sqrt{21}}{7}$ $(\because 0°<A<180°)$

(3) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

답 (1) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　(2) $\frac{\sqrt{21}}{7}$　(3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

0801 $\triangle ABC=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot3}{4\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=\frac{3}{2}$　답 $\frac{3}{2}$

0802 $\square ABCD=6\cdot9\cdot\sin60°$

$=6\cdot9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=27\sqrt{3}$　답 $27\sqrt{3}$

0803 $A=C=135°$이므로

$\square ABCD=3\cdot4\cdot\sin135°$

$=3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$　답 $6\sqrt{2}$

0804 $\square ABCD=\frac{1}{2}\cdot4\cdot11\cdot\sin150°$

$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot11\cdot\frac{1}{2}=11$　답 11

유형 01 사인법칙

본책 116쪽

삼각형 ABC에서

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

0805 사인법칙에 의하여 $\frac{5}{\sin60°}=\frac{4}{\sin B}$이므로

$\sin B=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$

$\therefore \cos^2B=1-\sin^2B=1-\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2=\frac{13}{25}$　답 ⑤

0806 $\triangle ABC$에서 $A+B+C=\pi$이므로

$a\sin(A+B)=a\sin(\pi-C)=a\sin C$

사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$이므로　$a\sin C=c\sin A$

$\therefore a\sin(A+B)=a\sin C=c\sin A$

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$이므로　$\sin C=\frac{c\sin B}{b}$

$\therefore a\sin(A+B)=a\sin C=\frac{ac\sin B}{b}$

이상에서 항상 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다.　답 ③

0807 $C=180°-(75°+60°)=45°$이므로 $\triangle APC$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}=\frac{\overline{AP}}{\sin45°}=\sqrt{2}\,\overline{AP}$　…… ㉠　⋯ ❶

따라서 $\overline{AP}$의 길이가 최소일 때 ㉠의 값도 최소이다.

$\overline{AP}\perp\overline{BC}$일 때 $\overline{AP}$의 길이가 최소이므로

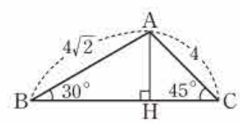
$\overline{AP}\ge6\sqrt{3}\sin60°=6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9$　⋯ ❷

따라서 ㉠의 최솟값은 $9\sqrt{2}$이다.　⋯ ❸

답 $9\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 $\overline{AP}$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\overline{AP}$의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0808 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ABH$에서



$\overline{BH}=\overline{AB}\cos30°=4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$

$\triangle AHC$에서

$\overline{CH}=\overline{AC}\cos45°=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

$\angle BAC=180°-(30°+45°)=105°$이므로 $\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{\sin105°}=\frac{4}{\sin30°}$

$\therefore \sin 105° = \frac{1}{4}\cdot(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})\cdot\sin 30°$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 답 ⑤

0809 $\angle ABE = 90° - \angle AEB = \angle CED$

$\angle ABE = \theta$라 하면 $\triangle ABE$에서 $\overline{AE} = 2\sin\theta$이므로

$\overline{CD} = \overline{AE} = 2\sin\theta$

$\triangle CED$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CE}}{\sin(\angle CDE)} = \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CED)}$$

$$\frac{\overline{CE}}{\underbrace{\sin 120°}_{\triangle EBD\text{에서 } \angle CDE = 90°+30°=120°}} = \frac{2\sin\theta}{\sin\theta}$$

$\therefore \overline{CE} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

유형 02 사인법칙과 삼각형의 외접원 본책 116쪽

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

➡ $\sin A = \frac{a}{2R}$, $a = 2R\sin A$

0810 $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$의 외접원이 같으므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{5}{\sin(\angle DAB)} = \frac{2}{\sin(\angle DAC)}$$

$\therefore \sin(\angle DAC) = \frac{2}{5}\sin(\angle DAB)$

$= \frac{2}{5}\cdot\frac{7}{10} = \frac{7}{25}$ 답 $\frac{7}{25}$

0811 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2\cdot 4} + \frac{b}{2\cdot 4} + \frac{c}{2\cdot 4}$

$= \frac{a+b+c}{2\cdot 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ 답 ③

0812 $\triangle ABC$에서 $A+B+C=\pi$이므로

$\cos(B+C) = \cos(\pi - A) = -\cos A$ ⋯ ❶

$4\cos A\cos(B+C) = -3$에서 $4\cos A\cdot(-\cos A) = -3$

$-4\cos^2 A = -3$, $\cos^2 A = \frac{3}{4}$

$\therefore \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin A = \frac{1}{2}$ ($\because 0 < A < \pi$) ⋯ ❷

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

$\therefore R = 3$ ⋯ ❸

답 3

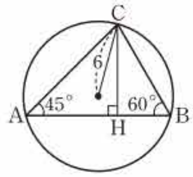
채점 기준	비율
❶ $\cos(B+C)$를 $\cos A$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\sin A$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %

0813 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 45°} = \frac{\overline{AC}}{\sin 60°} = 2\cdot 6$$

$\therefore \overline{BC} = 12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$, $\overline{AC} = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle CAH$에서

$\overline{AH} = \overline{AC}\cos 45° = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{6}$

$\triangle CBH$에서

$\overline{BH} = \overline{BC}\cos 60° = 6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = 3\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{BH} = 3\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$ 답 ⑤

0814 $\underbrace{\angle BDC = \angle BAC = 45°}_{\widehat{BC}\text{에 대한 원주각}}$이므로 $\triangle BCD$에서

$\angle BCD = 180° - (15° + 45°) = 120°$

또 $\underbrace{\angle ABD = \angle ACD = 75°}_{\widehat{AD}\text{에 대한 원주각}}$이므로

$\angle ABC = 75° + 15° = 90°$

따라서 현 AC는 원의 지름이므로 $\triangle BCD$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$2R = \overline{AC} = 8\sqrt{6}$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BD}}{\sin 120°} = 8\sqrt{6}$

$\therefore \overline{BD} = 8\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{2}$ 답 $12\sqrt{2}$

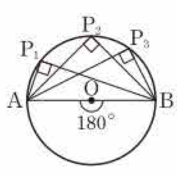
SSEN 특강 반원에 대한 중심각과 원주각

원 O에서 $\overline{AB}$가 지름이면 $\widehat{AB}$에 대한 중심각의 크기는 180°이다.

따라서 $\widehat{AB}$에 대한 원주각의 크기는

$\angle AP_1B = \angle AP_2B$

$= \angle AP_3B = 90°$



유형 03 사인법칙의 변형 본책 117쪽

삼각형 ABC에서

$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

0815 $\frac{a+b}{5} = \frac{b+c}{6} = \frac{c+a}{7} = k$ $(k>0)$라 하면

$a+b=5k$, $b+c=6k$, $c+a=7k$ ⋯⋯ ㉠

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2a+2b+2c=18k$ $\therefore a+b+c=9k$ ⋯⋯ ㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면

$a=3k,\ b=2k,\ c=4k$

$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 3k : 2k : 4k$

$= 3 : 2 : 4$ 답 $3:2:4$

0816 $ab : bc : ca = 4 : 3 : 6$이므로 $ab=4k^2,\ bc=3k^2,$ $ca=6k^2\ (k>0)$으로 놓으면

$ab\cdot bc\cdot ca = 4k^2\cdot 3k^2\cdot 6k^2$

$(abc)^2=72k^6 \quad \therefore abc=6\sqrt{2}k^3\ (\because abc>0)$

$\therefore a=\dfrac{abc}{bc}=\dfrac{6\sqrt{2}k^3}{3k^2}=2\sqrt{2}k,$

$b=\dfrac{abc}{ca}=\dfrac{6\sqrt{2}k^3}{6k^2}=\sqrt{2}k,$

$c=\dfrac{abc}{ab}=\dfrac{6\sqrt{2}k^3}{4k^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}k$

$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

$=2\sqrt{2}k : \sqrt{2}k : \dfrac{3\sqrt{2}}{2}k$

$=4:2:3$ 답 ④

0817 △ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B) : \sin(B+C) : \sin(C+A)$

$=\sin(\pi-C) : \sin(\pi-A) : \sin(\pi-B)$

$=\sin C : \sin A : \sin B$

$=2:3:4$

따라서 $c : a : b = 2 : 3 : 4$이므로 $a=3k,\ b=4k,\ c=2k\ (k>0)$로 놓으면 구하는 값은

$\dfrac{b^2+c^2}{ac}=\dfrac{(4k)^2+(2k)^2}{3k\cdot 2k}=\dfrac{20k^2}{6k^2}=\dfrac{10}{3}$ 답 $\dfrac{10}{3}$

유형 04 삼각형의 결정 (1) 본책 118쪽

삼각형 ABC에서 $\sin A,\ \sin B,\ \sin C$에 대한 관계식이 주어지면 외접원의 반지름의 길이 R에 대하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R}$

임을 이용하여 $a,\ b,\ c$에 대한 관계식으로 변형하여 삼각형을 결정한다.

0818 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R}$

이를 주어진 식에 대입하면

$(a-c)\cdot\dfrac{b}{2R}=a\cdot\dfrac{a}{2R}-c\cdot\dfrac{c}{2R}$

$(a-c)b=a^2-c^2, \quad (a-c)b=(a+c)(a-c)$

$(a-c)(b-a-c)=0$

이때 $a+c\neq b$이므로 $\quad a-c=0 \quad \therefore a=c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다. 답 ②

0819 △ABC에서 $A+B+C=180°$이므로

$\sin(A+B)=\sin(180°-C)=\sin C$ ⋯ ❶

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R}$

이를 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$에 대입하면

$\dfrac{a^2}{4R^2}+\dfrac{b^2}{4R^2}=\dfrac{c^2}{4R^2} \quad \therefore a^2+b^2=c^2$ ⋯ ❷

따라서 삼각형 ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다. ⋯ ❸

답 $C=90°$인 직각삼각형

채점 기준	비율
❶ $\sin(A+B)=\sin C$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $a,\ b,\ c$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❸ △ABC를 결정할 수 있다.	20 %

0820 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-2\sqrt{b}\sin(B+C)\}^2-4a\sin^2 A=0$

$4b\sin^2(B+C)-4a\sin^2 A=0$ — $A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$

$4b\sin^2(\pi-A)-4a\sin^2 A=0$

$4b\sin^2 A-4a\sin^2 A=0, \quad 4(b-a)\sin^2 A=0$

$\therefore a=b$ 또는 $\sin^2 A=0$

이때 $0°<A<180°$이므로 $\quad \sin A\neq 0$

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ③

유형 05 사인법칙의 활용 본책 118쪽

주어진 상황에서 삼각형의 각의 크기, 변의 길이, 외접원의 반지름의 길이 등을 알아내어 사인법칙에 대입한다.

0821 드론의 위치를 C라 하면

$\angle ACB=180°-(45°+75°)=60°$

△ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{30}{\sin 60°}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin 45°}$

$\therefore \overline{BC}=30\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=10\sqrt{6}\ (m)$

따라서 B 지점에서 드론까지의 거리는 $10\sqrt{6}$ m이다. 답 ③

0822 $C=180°-(55°+65°)=60°$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R cm라 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 60°}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8 \quad \therefore R=4$

따라서 물통의 부피는 $\quad \pi\cdot 4^2\cdot 6=96\pi\ (cm^3)$ 답 $96\pi\ cm^3$

0823 △ABQ에서

$\angle AQB=180°-(45°+75°)=60°$

이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BQ}}{\sin 45°}=\dfrac{120}{\sin 60°}$

$\therefore \overline{BQ}=120\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=40\sqrt{6}\ (m)$

이때 △PBQ에서

$$\overline{PQ}=\overline{BQ}\tan 30°=40\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=40\sqrt{2}\,(\mathrm{m})$$

따라서 건물의 높이 PQ의 길이는 $40\sqrt{2}$ m이다. 답 $40\sqrt{2}$ m

유형 06 코사인법칙

본책 119쪽

삼각형에서 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때
➡ 코사인법칙을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.
➡ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

0824 △ABC에서 $\overline{AC}=\dfrac{2}{\sin 30°}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=4$

△CDE에서 $\overline{CE}=\dfrac{3}{\sin 30°}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=6$

$\angle ACE=180°-(30°+30°)=120°$이므로 △ACE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AE}^2=4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cdot\cos 120°$$
$$=16+36-2\cdot4\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=76$$

$\therefore \overline{AE}=2\sqrt{19}$ 답 $2\sqrt{19}$

0825 □ABCD가 원에 내접하므로 $B+D=180°$
즉 $D=180°-B$이므로

$$\cos D=\cos(180°-B)=-\cos B=-\frac{1}{9}$$

따라서 △DAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=3^2+6^2-2\cdot3\cdot6\cdot\cos D$$
$$=9+36-2\cdot3\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=49$$

$\therefore \overline{AC}=7$ 답 ②

0826 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}$이므로

$\cos\theta=\dfrac{3}{4}\left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ ⋯ ❶

△DCG에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DG}^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cdot\cos\theta$$
$$=16+4-2\cdot4\cdot2\cdot\frac{3}{4}=8$$

$\therefore \overline{DG}=2\sqrt{2}$ ⋯ ❷

$\angle BCE=2\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi-\theta$이므로

$$\cos(\angle BCE)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{3}{4}$$

△BEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BE}^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cdot\cos(\angle BCE)$$
$$=16+4-2\cdot4\cdot2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=32$$

$\therefore \overline{BE}=4\sqrt{2}$ ⋯ ❸

$\therefore \overline{DG}\cdot\overline{BE}=2\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}=16$ ⋯ ❹

답 16

채점 기준	비율
❶ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{DG}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{BE}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❹ $\overline{DG}\cdot\overline{BE}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 07 코사인법칙의 변형

본책 119쪽

삼각형에서 세 변의 길이가 주어질 때
➡ 코사인법칙의 변형을 이용하여 세 각의 크기를 구할 수 있다.
➡ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$,
$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

0827 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{5^2+9^2-7^2}{2\cdot5\cdot\underbrace{9}_{6+3=9}}=\frac{19}{30}$$

△ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cdot\cos B$$
$$=25+36-2\cdot5\cdot6\cdot\frac{19}{30}=23$$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{23}$ 답 $\sqrt{23}$

0828 가장 짧은 변의 대각의 크기가 가장 작으므로 그 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{3^2+(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot3\cdot2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0°<\theta<180°$이므로 $\theta=45°$ 답 45°

0829 $5a^2=5b^2+6bc+5c^2$에서

$$5b^2+5c^2-5a^2=-6bc \qquad \therefore b^2+c^2-a^2=-\frac{6bc}{5}$$

따라서 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-\frac{6bc}{5}}{2bc}=-\frac{3}{5}$$

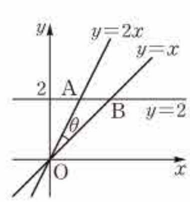
$\underline{\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$이므로

$0°<A<180°$이므로 $\sin A>0$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=-\frac{4}{3}$$

답 ①

0830 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=2x$, $y=x$와 직선 $y=2$의 교점을 각각 A, B라 하면



A(1, 2), B(2, 2)

$\therefore \overline{OA}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,
$\overline{OB}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,
$\overline{AB}=1$

따라서 △AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{2})^2-1^2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

답 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

0831 정육각형의 한 내각의 크기는

$\frac{180^\circ \times (6-2)}{6}=120^\circ$ ··· ①

$\overline{MF}=4$이므로 △AMF에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AM}^2=8^2+4^2-2\cdot8\cdot4\cdot\cos 120^\circ$

$=64+16-2\cdot8\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=112$

$\therefore \overline{AM}=4\sqrt{7}$ ··· ②

$\therefore \cos\theta=\frac{4^2+(4\sqrt{7})^2-8^2}{2\cdot4\cdot4\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ··· ③

답 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

채점 기준	비율
① 정육각형의 한 내각의 크기를 구할 수 있다.	20 %
② $\overline{AM}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %
③ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0832 $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$이므로 $\overline{BD}=2x$, $\overline{CD}=3x$ $(x>0)$라 하고 $\angle BAD=\theta$라 하면

△ABD에서 $\cos\theta=\frac{10^2+(4\sqrt{6})^2-(2x)^2}{2\cdot10\cdot4\sqrt{6}}=\frac{196-4x^2}{80\sqrt{6}}$

△ADC에서 $\cos\theta=\frac{(4\sqrt{6})^2+15^2-(3x)^2}{2\cdot4\sqrt{6}\cdot15}=\frac{321-9x^2}{120\sqrt{6}}$

따라서 $\frac{196-4x^2}{80\sqrt{6}}=\frac{321-9x^2}{120\sqrt{6}}$이므로

$98-2x^2=107-3x^2$, $x^2=9$ $\therefore x=3$ $(\because x>0)$

$\therefore \overline{BD}=2x=6$

답 ②

0833 세 원 A, B, C의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3이라 하면 세 원의 넓이의 비가 $1:2:8$이므로

$\pi r_1^2:\pi r_2^2:\pi r_3^2=1:2:8$

$\therefore r_1:r_2:r_3=1:\sqrt{2}:2\sqrt{2}$

$r_1=k$, $r_2=\sqrt{2}k$, $r_3=2\sqrt{2}k$ $(k>0)$라 하면

$\overline{AB}=r_1+r_2=(1+\sqrt{2})k$,

$\overline{BC}=r_2+r_3=3\sqrt{2}k$,

$\overline{CA}=r_3+r_1=(2\sqrt{2}+1)k$

따라서 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{\{(1+\sqrt{2})k\}^2+(3\sqrt{2}k)^2-\{(2\sqrt{2}+1)k\}^2}{2\cdot(1+\sqrt{2})k\cdot3\sqrt{2}k}$

$=\frac{6-\sqrt{2}}{6+3\sqrt{2}}=\frac{7-4\sqrt{2}}{3}$

답 $\frac{7-4\sqrt{2}}{3}$

유형 08 사인법칙과 코사인법칙

본책 120쪽

① 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때
➡ 코사인법칙과 사인법칙 이용

② 세 변의 길이가 주어질 때
➡ 코사인법칙의 변형 이용

0834 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos 60^\circ$

$=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=13$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{13}$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{39}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{39}}{3}$

0835 △ABC에서 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

따라서 $a=k$, $b=\sqrt{2}k$, $c=\sqrt{3}k$ $(k>0)$로 놓으면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{(\sqrt{3}k)^2+k^2-(\sqrt{2}k)^2}{2\cdot\sqrt{3}k\cdot k}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0836 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$b^2=2^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-2\cdot2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\cos 45^\circ$

$=4+(8+4\sqrt{3})-2\cdot2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=8$

$\therefore b=2\sqrt{2}$ $(\because b>0)$ ··· ①

△ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin C}$

$\therefore \sin C=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=30^\circ$ 또는 $C=150^\circ$

그런데 $B+C<180^\circ$이므로 $C=30^\circ$ ··· ②

이때 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$ ··· ③

답 105°

채점 기준	비율
① b의 값을 구할 수 있다.	40 %
② ∠C의 크기를 구할 수 있다.	40 %
③ ∠A의 크기를 구할 수 있다.	20 %

0837 길이가 9인 변의 대각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{7^2+8^2-9^2}{2\cdot7\cdot8}=\frac{2}{7}$

이때 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{2}{7}\right)^2=\frac{45}{49}$이므로

$\sin\theta=\frac{3\sqrt{5}}{7}$ $(\because 0^\circ<\theta<180^\circ)$

삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{9}{\sin\theta}=2R$ $\therefore R=\frac{1}{2}\cdot9\cdot\frac{7}{3\sqrt{5}}=\frac{21\sqrt{5}}{10}$

따라서 구하는 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\pi\left(\frac{21\sqrt{5}}{10}\right)^2=\frac{441}{20}\pi$

답 ③

0838 △ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin 120^\circ}=2\cdot7$

$\therefore \overline{BC}=14\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$

$\overline{AB}:\overline{AC}=3:5$이므로 $\overline{AB}=3k$, $\overline{AC}=5k\ (k>0)$라 하면
△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(7\sqrt{3})^2=(3k)^2+(5k)^2-2\cdot 3k\cdot 5k\cdot\cos 120^\circ$

$147=9k^2+25k^2-2\cdot 3k\cdot 5k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$49k^2=147,\qquad k^2=3$

$\therefore k=\sqrt{3}\ (\because k>0)$

$\therefore \overline{AC}=5\sqrt{3}$

답 ④

유형 09 삼각형의 결정 (2) 본책 121쪽

삼각형 ABC의 세 각의 크기 A, B, C에 대한 관계식이 주어지면 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 세 변의 길이 a, b, c에 대한 관계식으로 변형하여 삼각형을 결정한다.

0839 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이를 주어진 식에 대입하면

$\frac{a}{2R}=2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$a^2=a^2+b^2-c^2,\qquad b^2=c^2$

$\therefore b=c$

따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 ②

0840 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로 주어진 식에 대입하면

$b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$b^2+c^2-a^2=c^2+a^2-b^2,\qquad a^2=b^2$

$\therefore a=b$

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 $a=b$인 이등변삼각형

0841 $b^2\tan A=a^2\tan B$에서

$b^2\cdot\frac{\sin A}{\cos A}=a^2\cdot\frac{\sin B}{\cos B}$

$\therefore b^2\sin A\cos B=a^2\sin B\cos A$ …… ㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$,

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

이를 ㉠에 대입하면

$b^2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=a^2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b^2(c^2+a^2-b^2)=a^2(b^2+c^2-a^2)$

$a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2=0$

$(a^2+b^2)(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)=0$

$(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2)=0$

$(a^2+b^2-c^2)(a+b)(a-b)=0$

$\therefore a^2+b^2=c^2$ 또는 $a=b\ (\because a\neq -b)$

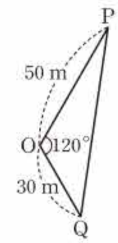
따라서 $C=90^\circ$인 직각삼각형 또는 $a=b$인 이등변삼각형이므로 △ABC의 모양이 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

유형 10 코사인법칙의 활용 본책 121쪽

주어진 상황에서 삼각형의 각의 크기, 변의 길이 등을 알아내어 코사인법칙에 대입한다.

0842 10초 후의 두 자전거 A, B의 위치를 각각 P, Q라 하면



$\overline{OP}=10\cdot 5=50\ (\text{m})$,

$\overline{OQ}=10\cdot 3=30\ (\text{m})$

△OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=50^2+30^2-2\cdot 50\cdot 30\cdot\cos 120^\circ$

$=2500+900-2\cdot 50\cdot 30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=4900$

$\therefore \overline{PQ}=70\ (\text{m})$

따라서 10초 후의 두 자전거 사이의 거리는 70 m이다.

답 70 m

0843 △ACD에서 $\overline{AC}=\frac{20}{\sin 30^\circ}=\frac{20}{\frac{1}{2}}=40\ (\text{m})$

△BCE에서 $\overline{BC}=\frac{15\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{15\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=30\ (\text{m})$

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=40^2+30^2-2\cdot 40\cdot 30\cdot\cos 60^\circ$

$=1600+900-2\cdot 40\cdot 30\cdot\frac{1}{2}=1300$

$\therefore \overline{AB}=10\sqrt{13}\ (\text{m})$

답 ⑤

0844 $\angle ACB=\pi-\theta$이므로 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\pi-\theta)=\frac{6^2+12^2-(6\sqrt{7})^2}{2\cdot 6\cdot 12}=-\frac{1}{2}$

$-\cos\theta=-\frac{1}{2}\qquad \therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\ (\because 0<\theta<\pi)$

답 $\frac{\pi}{3}$

유형 11 삼각형의 넓이 본책 122쪽

두 변의 길이 a, b와 그 끼인각의 크기 C가 주어진 △ABC의 넓이
➡ $\frac{1}{2}ab\sin C$

0845 △ABC의 넓이가 $10\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\sin C=10\sqrt{3}$

$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<C<90^\circ$이므로 $C=60^\circ$

따라서 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$c^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos60^\circ$$
$$=25+64-2\cdot5\cdot8\cdot\frac{1}{2}=49$$

$\therefore c=7$ 답 ④

0846 $\overline{BD}=x$라 하면 △ABC=△ABD+△BCD이므로

$$\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot6\cdot x\cdot\sin30^\circ+\frac{1}{2}\cdot x\cdot4\cdot\sin30^\circ$$

$6\sqrt{3}=\frac{3}{2}x+x,\quad \frac{5}{2}x=6\sqrt{3}\quad \therefore x=\frac{12\sqrt{3}}{5}$ 답 ⑤

0847 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2=8^2+7^2-2\cdot8\cdot7\cdot\cos120^\circ$$
$$=64+49-2\cdot8\cdot7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=169$$

$\therefore a=13$ ⋯ ❶

△ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\cdot8\cdot7\cdot\sin120^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}$$ ⋯ ❷

△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$S=\frac{1}{2}r(13+8+7)=14\sqrt{3}\quad \therefore r=\sqrt{3}$ ⋯ ❸

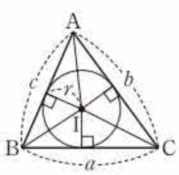
답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ a를 구할 수 있다.	30 %
❷ △ABC의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 내접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %

SSEN 특강 삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 길이

삼각형 ABC의 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$$
$$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$
$$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$



0848 $\overline{BC}=3\overline{AD}$에서 $\overline{BC}:\overline{AD}=3:1$이므로

△ABC : △ACD=3 : 1

즉 △ABC=3△ACD이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{CD}\cdot\sin\beta$$

$\therefore \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{3\overline{CD}}{\overline{AB}}$ 답 ③

0849 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$4^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos60^\circ$$

$\therefore 16=a^2+b^2-ab$ ⋯⋯ ㉠

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로

$a^2+b^2=5^2-2ab=25-2ab$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$16=25-3ab\quad \therefore ab=3$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot\sin60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

답 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

0850 $\overline{AP}=x$, $\overline{AQ}=y$라 하면 △ABC=4△APQ이므로

$$\frac{1}{2}\cdot9\cdot12\cdot\sin60^\circ=4\left(\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\sin60^\circ\right)$$

$\therefore xy=27$

△APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos60^\circ$$
$$=x^2+y^2-27$$

이때 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-27$$
$$\geq2\sqrt{x^2y^2}-27=2xy-27$$
$$=27\ (\text{단, 등호는 } x=y=3\sqrt{3}\text{일 때 성립})$$

$\therefore \overline{PQ}\geq\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{3}$이다. 답 $3\sqrt{3}$

0851 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$이므로

$$\triangle APR=\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AR}\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3c}{5}\cdot\frac{2b}{5}\cdot\sin A$$
$$=\frac{6}{25}\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)=\frac{6}{25}S$$

같은 방법으로

$\triangle BQP=\frac{6}{25}S$, $\triangle CRQ=\frac{6}{25}S$

$$\therefore S'=\triangle ABC-(\triangle APR+\triangle BQP+\triangle CRQ)$$
$$=S-\left(\frac{6}{25}S+\frac{6}{25}S+\frac{6}{25}S\right)=\frac{7}{25}S$$

$\therefore \frac{S'}{S}=\frac{7}{25}$ 답 ②

유형 12 외접원의 반지름의 길이와 삼각형의 넓이 본책 123쪽

세 각의 크기와 외접원의 반지름의 길이 R가 주어진 △ABC의 넓이

➡ $2R^2\sin A\sin B\sin C$

0852 $B=C=30^\circ$이므로

$A=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이가 5이므로

$$\triangle ABC=2\cdot5^2\cdot\sin120^\circ\cdot\sin30^\circ\cdot\sin30^\circ$$
$$=2\cdot25\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{4}$$

답 $\frac{25\sqrt{3}}{4}$

0853 $\widehat{BC}:\widehat{CA}:\widehat{AB}=3:4:5$이므로 삼각형 ABC에서

$A=180^\circ\times\frac{3}{12}=45^\circ$, $B=180^\circ\times\frac{4}{12}=60^\circ$,

$C=180^\circ\times\frac{5}{12}=75^\circ$ ⋯ ❶

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 20이므로

$\triangle ABC = 2 \cdot 20^2 \cdot \sin 45° \cdot \sin 60° \cdot \sin 75°$

$= 2 \cdot 400 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$= 100(3+\sqrt{3})$ ⋯ ❷

답 $100(3+\sqrt{3})$

채점 기준	비율
❶ A, B, C를 구할 수 있다.	50 %
❷ △ABC의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

유형 13 헤론의 공식
본책 123쪽

세 변의 길이가 주어진 △ABC의 넓이

⇒ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\left(\text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}\right)$

0854 $\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{11})^2+(2\sqrt{5})^2}=8$,

$\overline{AF}=\sqrt{(2\sqrt{11})^2+(\sqrt{5})^2}=7$,

$\overline{CF}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}=5$

헤론의 공식에서 $s=\frac{8+7+5}{2}=10$

따라서 삼각형 AFC의 넓이는

$\sqrt{10(10-8)(10-7)(10-5)}=10\sqrt{3}$

답 $10\sqrt{3}$

다른 풀이 △AFC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A = \frac{7^2+8^2-5^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{11}{14}$

$0° < A < 180°$에서 $\sin A > 0$이므로

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$

따라서 △AFC의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AC} \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = 10\sqrt{3}$

0855 헤론의 공식에서

$s=\frac{9+10+11}{2}=15$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\sqrt{15(15-9)(15-10)(15-11)}=30\sqrt{2}$

답 ④

0856 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=8:13:15$이므로

$a=8k$, $b=13k$, $c=15k$ $(k>0)$

로 놓으면 헤론의 공식에서

$s=\frac{8k+13k+15k}{2}=18k$

△ABC의 넓이는

$\sqrt{18k(18k-8k)(18k-13k)(18k-15k)}=30\sqrt{3}k^2$

즉 $30\sqrt{3}k^2=\frac{15\sqrt{3}}{2}$이므로 $k^2=\frac{1}{4}$

$\therefore k=\frac{1}{2}$ $(\because k>0)$

따라서 △ABC의 둘레의 길이는

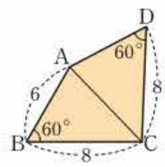
$8k+13k+15k=36k=18$

답 18

유형 14 사각형의 넓이; 삼각형 이용
본책 124쪽

(i) 사각형을 두 개의 삼각형으로 나눈다.
(ii) 각각의 삼각형의 넓이를 구한다.
(iii) 삼각형의 넓이의 합으로 사각형의 넓이를 구한다.

0857 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 긋고 $\overline{AC}=x$라 하면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여



$x^2=8^2+6^2-2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 60°=52$

$\therefore x=2\sqrt{13}$

$\overline{AD}=y$라 하면 △ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{13})^2=8^2+y^2-2 \cdot 8 \cdot y \cdot \cos 60°$

$52=64+y^2-8y$, $\quad y^2-8y+12=0$

$(y-2)(y-6)=0 \quad \therefore y=2$ 또는 $y=6$

그런데 $y>2$이므로 $\quad y=6$

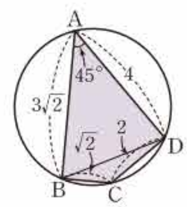
$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD = 2\triangle ABC$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 60° = 24\sqrt{3}$

답 $24\sqrt{3}$

0858 $\angle BCD = 180° - \angle BAD = 135°$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 사각형 ABCD의 넓이는



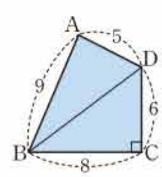
$\triangle ABD + \triangle BCD$

$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sin 45° + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sin 135°$

$= 6+1 = 7$

답 7

0859 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 긋고 $\overline{BD}=x$라 하면 △BCD에서



$x^2=6^2+8^2=100 \quad \therefore x=10$

△ABD에서 헤론의 공식에 의하여

$s=\frac{10+5+9}{2}=12$

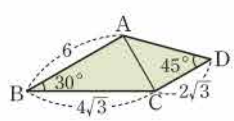
$\therefore \triangle ABD = \sqrt{12(12-10)(12-5)(12-9)} = 6\sqrt{14}$

$\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$이므로

$\square ABCD = 24 + 6\sqrt{14}$

답 ④

0860 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 긋고 $\overline{AC}=x$라 하면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여



$x^2=6^2+(4\sqrt{3})^2-2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos 30°=12$

$\therefore x=2\sqrt{3}$

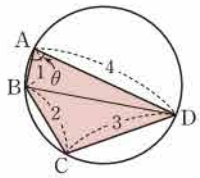
$\overline{AC}=\overline{CD}$이고 $\angle ADC=45°$이므로 △ACD는 $\angle ACD=90°$인 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$

$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin 30° + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3} + 6$ 답 ③

0861 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 긋고 $\angle BAD = \theta$라 하면 $\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{BD}^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \cos\theta$

$= 17 - 8\cos\theta$ …… ㉠

또 $\angle BCD = 180° - \angle BAD = 180° - \theta$이므로 $\triangle BCD$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos(\pi - \theta)$

$= 13 + 12\cos\theta$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $17 - 8\cos\theta = 13 + 12\cos\theta$이므로

$20\cos\theta = 4$ $\quad \therefore \cos\theta = \frac{1}{5}$

$0° < \theta < 180°$에서 $\sin\theta > 0$이므로

$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \sin\theta + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin(180° - \theta)$

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$= 2\sqrt{6}$ 답 $2\sqrt{6}$

유형 15 평행사변형의 넓이

본책 124쪽

이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 평행사변형의 넓이

➡ $ab\sin\theta$

0862 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$

$0° < B < 180°$이므로 $\quad B = 120°$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin 120° = 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

0863 $\overline{AD} = \overline{BC} = 8$이므로

$7 \cdot 8 \cdot \sin A = 28\sqrt{3}$ $\quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$90° < A < 180°$이므로 $\quad A = 120°$ 답 $120°$

0864 $a = 3 \cdot 6 \cdot \sin 60° = 3 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ ⋯➊

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$b^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 60° = 27$

$\therefore b = 3\sqrt{3}$ ⋯➋

$\therefore a + b = 12\sqrt{3}$ ⋯➌

답 $12\sqrt{3}$

채점 기준	비율
➊ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 16 사각형의 넓이; 대각선 이용

본책 125쪽

두 대각선의 길이가 p, q이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형의 넓이

➡ $\frac{1}{2}pq\sin\theta$

0865 $\triangle BCD$에서

$\overline{BD} = \frac{\overline{CD}}{\tan 30°} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3\sqrt{3}$

$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sin 60°$

$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{45}{4}$ 답 ①

0866 $\cos\theta = \frac{1}{3}$이고 $0° < \theta < 180°$에서 $\sin\theta > 0$이므로

$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⋯➊

$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 12\sqrt{2}$ ⋯➋

답 $12\sqrt{2}$

채점 기준	비율
➊ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ □ABCD의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

0867 □ABCD의 넓이가 $2\sqrt{2}$이므로

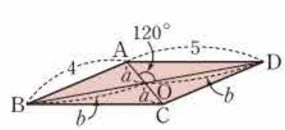
$\frac{1}{2}ab\sin 45° = 2\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{4}ab = 2\sqrt{2}$ $\quad \therefore ab = 8$

$\therefore a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$= 6^3 - 3 \cdot 8 \cdot 6 = 72$ 답 ⑤

0868 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점을 O라 하자.



평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC} = 2a$, $\overline{BD} = 2b$라 하면 $\triangle ABO$에서 코사인법칙에 의하여

$4^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°$

$\therefore 16 = a^2 + b^2 - ab$ …… ㉠

$\triangle AOD$에서 코사인법칙에 의하여

$5^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°$

$\therefore 25 = a^2 + b^2 + ab$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $\quad 9 = 2ab$ $\quad \therefore ab = \frac{9}{2}$

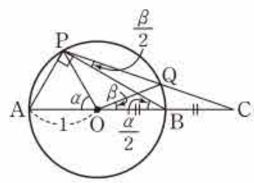
따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b\cdot \sin 60^\circ = 2\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

0869 1st $\angle$ABP, $\angle$BPQ의 크기를 α, β를 이용하여 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BP}$를 그으면



$$\angle ABP=\frac{1}{2}\angle AOP=\frac{\alpha}{2},$$

$$\angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ=\frac{\beta}{2}$$

2nd $\overline{CP}$의 길이를 α, β를 이용하여 나타낸다.

△BCP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CBP)}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BPC)}$$

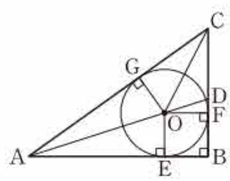
즉 $\dfrac{\overline{CP}}{\sin\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}$이므로

$$\overline{CP}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

답 ②

0870 1st 원의 중심 O에서 △ABC의 세 변에 수선의 발 E, F, G를 내려 $\overline{CG}$의 길이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F, G라 하자.



$\overline{OE}=\overline{OF}=\overline{FB}=\overline{BE}=3$이므로 (원의 반지름의 길이)

$\overline{DF}=\overline{DB}-\overline{FB}=4-3=1$

△DOF∽△OAE (AA 닮음)이므로

$\overline{DF}:\overline{OF}=\overline{OE}:\overline{AE}$, $\quad 1:3=3:\overline{AE}$

$\therefore \overline{AE}=9$

$\therefore \overline{AG}=\overline{AE}=9$

$\overline{CG}=\overline{CF}=x$라 하면 △ABC에서

$(9+x)^2=(9+3)^2+(x+3)^2$

$81+18x+x^2=144+x^2+6x+9$

$12x=72 \quad \therefore x=6$

2nd △ADC의 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

△ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin C}=2R \quad \cdots\cdots ㉠$$

△ABD에서 $\quad \overline{AD}=\sqrt{12^2+4^2}=4\sqrt{10}$

△ABC에서 $\quad \sin C=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$

따라서 ㉠에서

$$\frac{4\sqrt{10}}{\frac{4}{5}}=2R \quad \therefore R=\frac{5\sqrt{10}}{2}$$

3rd △ADC의 외접원의 넓이를 구한다.

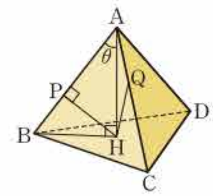
△ADC의 외접원의 넓이는

$$\pi\cdot\left(\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)^2=\frac{125}{2}\pi$$

답 ①

0871 1st $\overline{AH}$의 길이를 구한다.

점 H는 △BCD의 무게중심이므로



$$\overline{BH}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

△ABH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

2nd $\overline{AP}$의 길이를 구한다.

$\angle BAH=\theta$라 하면 △ABH에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 △APH에서 $\quad \overline{AP}=\overline{AH}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2}{3}$

3rd $\overline{QH}$의 길이를 구한다.

$\overline{CQ}=\overline{AP}=\dfrac{2}{3}$에서 $\overline{AQ}=\dfrac{1}{3}$이므로 △AHQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{QH}^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cos\theta$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}-2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \overline{QH}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

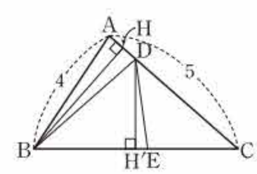
답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0872 1st △ABD에서 $\overline{BD}$, $\overline{AD}$의 길이를 구한다.

△ABD에서 $\angle BAD=\angle BDA$이므로

$\overline{BD}=\overline{AB}=4$

$\angle BAC=\theta$라 하고 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △ABH에서



$$\overline{AH}=\overline{AB}\cos\theta=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\quad \overline{AD}=2\overline{AH}=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

2nd 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 길이를 구한다.

△DBC는 $\overline{BD}=\underbrace{\overline{DC}}_{5-1=4}=4$인 이등변삼각형이므로 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$$\overline{BH'}=\frac{1}{2}\overline{BC} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cdot\cos\theta$$

$$=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{8}=36$$

이므로 $\quad \overline{BC}=6$

따라서 ㉠에서 $\overline{BH'}=\dfrac{1}{2}\cdot6=3$이므로 △DBH′에서

$$\overline{DH'}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$

3rd $\overline{DE}$의 길이를 구한다.

$\cos\theta=\dfrac{1}{8}$이고 $0^\circ<\theta<180^\circ$에서 $\sin\theta>0$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

따라서 △DH′E에서

$$\overline{DE}=\frac{\overline{DH'}}{\sin\theta}=\sqrt{7}\cdot\frac{8}{3\sqrt{7}}=\frac{8}{3}$$

답 ③

0873 (1st) 사인법칙을 이용하여 두 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

두 정삼각형 ACQ, ABR의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}=2R_1,\ \frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=2R_2$$

$$\therefore\ R_1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$R_2=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

(2nd) ∠CAB의 크기를 구한다.

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle CAB)=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\angle CAB=60^\circ$

(3rd) $\overline{O_1O_2}^2$의 값을 구한다.

$\angle O_1AO_2=30^\circ+60^\circ+30^\circ=120^\circ$이므로 $\triangle O_1AO_2$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{O_1O_2}^2=\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2-2\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\cos 120^\circ$$

$$=\frac{25}{3}+\frac{64}{3}-2\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=43$$

답 43

0874 (1st) ∠BDC의 크기를 구한다.

정삼각형 ABC에서 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$

$$\therefore\ \angle BDC=\angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

(2nd) $\overline{BC}$, $\overline{DC}$의 길이를 r에 대한 식으로 나타낸다.

△DBC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\overline{DC}}{\sin\theta}=2r$$

$$\therefore\ \overline{BC}=2r\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}r,$$

$$\overline{DC}=2r\cdot\sin\theta=2r\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

(3rd) r의 값을 구한다.

△DBC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2-(\sqrt{3}r)^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}r}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2+\frac{4}{3}r^2-3r^2}{\frac{4\sqrt{6}}{3}r},\qquad \frac{1}{2}=\frac{6-5r^2}{4\sqrt{6}r}$$

$$5r^2+2\sqrt{6}r-6=0\qquad \therefore\ r=\frac{-\sqrt{6}\pm 6}{5}$$

$r>0$이므로 $r=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$

답 ①

0875 (1st) ∠BFG의 크기를 θ에 대한 식으로 나타내어 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\angle BGF=\theta$이므로 $\angle BFG=60^\circ-\theta$

$$\therefore\ \angle BFE=\angle BFG+\angle EFG$$

$$=(60^\circ-\theta)+30^\circ=90^\circ-\theta$$

(2nd) △BGF에서 사인법칙을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. △EFG에서

$$\overline{FG}=2\overline{EF}\cos 30^\circ=2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

이므로 △BGF에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{FG}}{\sin 120^\circ}=\frac{\overline{BF}}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ \overline{BF}=2\sqrt{3}\cdot\sin\theta\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=4\sin\theta$$

(3rd) △EFB에서 코사인법칙을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. △EFB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BE}^2=\overline{BF}^2+\overline{EF}^2-2\overline{BF}\cdot\overline{EF}\cdot\cos(90^\circ-\theta)$$

$$=(4\sin\theta)^2+2^2-2\cdot 4\sin\theta\cdot 2\cdot\sin\theta=4$$

따라서 $\overline{BE}=2$로 항상 일정하다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0876 (1st) □APQB, □BRSC, □CTUA, △ABC, △TCS의 넓이를 각각 구한다.

□APQB, □BRSC, □CTUA의 넓이는 각각 c^2, a^2, b^2이고, △ABC, △TCS의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.

(2nd) △PAU, △QBR의 넓이를 각각 구한다.

$\angle BAC=\theta$라 하면 $\angle PAU=180^\circ-\theta$이므로

$$\triangle PAU=\frac{1}{2}\overline{AU}\cdot\overline{AP}\cdot\sin(180^\circ-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}bc\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{c}=\frac{1}{2}ab$$

또 $\angle QBR=180^\circ-(90^\circ-\theta)=90^\circ+\theta$이므로

$$\triangle QBR=\frac{1}{2}\overline{BQ}\cdot\overline{BR}\cdot\sin(90^\circ+\theta)$$

$$=\frac{1}{2}ca\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}ca\cdot\frac{b}{c}=\frac{1}{2}ab$$

(3rd) 육각형 PQRSTU의 넓이를 구한다.

육각형 PQRSTU의 넓이는

$$c^2+a^2+b^2+4\cdot\frac{1}{2}ab=a^2+b^2+c^2+2ab$$

$$=2(c^2+ab)\ (\because\ a^2+b^2=c^2)$$

답 ③

0877 (1st) 헤론의 공식을 이용하여 △ABC의 넓이를 구한다.

헤론의 공식에서

$$s=\frac{10+12+14}{2}=18$$

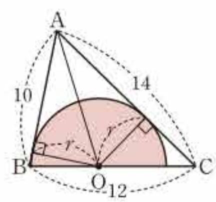
따라서 △ABC의 넓이는

$$\sqrt{18(18-10)(18-12)(18-14)}=24\sqrt{6}$$

(2nd) 반원의 반지름의 길이를 구한다.

반원의 반지름의 길이를 r라 하면

△ABO+△AOC=△ABC에서



$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 14\cdot r=24\sqrt{6}$$

$$12r=24\sqrt{6}\qquad \therefore\ r=2\sqrt{6}$$

3rd 반원의 넓이를 구한다.

구하는 반원의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(2\sqrt{6})^2=12\pi$$

답 12π

0878 1st □ACBD=△ACB+△ABD임을 이용하여 사각형 ACBD의 넓이를 구한다.

△ACB는 ∠ACB=90°인 직각삼각형이므로

$$\overline{BC}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$$

또 △ABD에서 ∠ADB=90°, ∠DAB=∠DBA=45°이므로

$$\overline{AD}=\overline{BD}=4\cdot\sin 45^\circ=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore \square ACBD=\triangle ACB+\triangle ABD$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}$$

$$=2\sqrt{3}+4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

2nd □ACBD=△ACD+△DCB임을 이용하여 사각형 ACBD의 넓이를 구한다.

∠ADC=∠ABC=30°이므로 $\overline{CD}=x$라 하면

$$\square ACBD=\triangle ACD+\triangle DCB$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot x\cdot\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot x\cdot\sin 60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}x \quad \cdots\cdots ㉡$$

3rd 선분 CD의 길이를 구한다.

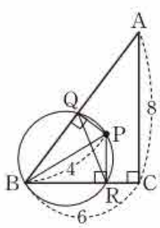
㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}x=2(\sqrt{3}+2)$이므로

$$x=\frac{4(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

답 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

0879 전략 두 점 Q, R가 지름이 $\overline{BP}$인 원 위의 점임을 이용한다.

풀이 ∠BQP=∠BRP=90°이므로 오른쪽 그림과 같이 두 점 Q, R는 $\overline{BP}$를 지름으로 하는 원 위의 점이다. ··· ❶



따라서 △BRQ의 외접원의 지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{QR}}{\sin B}=4$$

$$\therefore \overline{QR}=4\sin B \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❷$$

한편 △ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10$이므로

$$\sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

따라서 ㉠에서

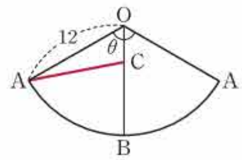
$$\overline{QR}=4\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{5} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{16}{5}$

채점 기준	비율
❶ 두 점 Q, R가 지름이 $\overline{BP}$인 원 위의 점임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\overline{QR}$의 길이를 $\sin B$를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\overline{QR}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %

0880 전략 원뿔의 옆면의 전개도에서 최단 거리를 찾는다.

풀이 원뿔의 전개도에서 부채꼴의 호의 길이 l은 원뿔의 밑면의 둘레의 길이와 같으므로



$$l=2\pi\cdot4=8\pi$$

$\overline{OA}=12$이므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$$l=12\theta \qquad \therefore \theta=\frac{8\pi}{12}=\frac{2}{3}\pi \quad \cdots ❶$$

△OAC에서 $\angle AOC=\frac{1}{2}\theta=\frac{\pi}{3}$이고 점 C는 선분 OB를 1 : 2로 내분하므로

$$\overline{OC}=12\cdot\frac{1}{3}=4$$

점 P가 움직인 최단 거리는 선분 AC의 길이와 같으므로 ··· ❷

△OAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=12^2+4^2-2\cdot12\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=144+16-2\cdot12\cdot4\cdot\frac{1}{2}=112$$

$$\therefore \overline{AC}=4\sqrt{7} \quad \cdots ❸$$

답 $4\sqrt{7}$

채점 기준	비율
❶ 전개도에서 부채꼴의 중심각의 크기를 구할 수 있다.	20 %
❷ 전개도에서 점 P가 움직인 최단 거리를 알 수 있다.	30 %
❸ 점 P가 움직인 최단 거리를 구할 수 있다.	50 %

0881 전략 △ABP와 △ACQ에서 l^2, m^2을 각각 n, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 △ABC에서

$$\cos B=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{c}{3n},\ \cos C=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{b}{3n} \quad \cdots ❶$$

△ABP에서 코사인법칙에 의하여

$$l^2=n^2+c^2-2n\cdot c\cdot\cos B$$

$$=n^2+c^2-2nc\cdot\frac{c}{3n}$$

$$=n^2+\frac{1}{3}c^2 \quad \cdots ❷$$

△ACQ에서 코사인법칙에 의하여

$$m^2=n^2+b^2-2n\cdot b\cdot\cos C$$

$$=n^2+b^2-2nb\cdot\frac{b}{3n}$$

$$=n^2+\frac{1}{3}b^2 \quad \cdots ❸$$

△ABC가 직각삼각형이므로

$$b^2+c^2=(3n)^2$$

$$\therefore l^2+m^2=\left(n^2+\frac{1}{3}c^2\right)+\left(n^2+\frac{1}{3}b^2\right)$$

$$=2n^2+\frac{1}{3}(b^2+c^2)$$

$$=2n^2+\frac{1}{3}\cdot(3n)^2=5n^2$$

$$\therefore k=5 \quad \cdots ❹$$

답 5

채점 기준	비율
❶ △ABC에서 $\cos B$, $\cos C$를 구할 수 있다.	20 %
❷ l^2을 n, c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ m^2을 n, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0882 전략 △ABD에서 코사인법칙을 이용하여 $\cos B$의 값을 구한 후 △ABC에서 사인법칙을 이용한다.

풀이 $\overline{AD}=2k$라 하면 조건 (가)에 의하여

$\overline{AB}=\overline{BD}=\sqrt{3}k$

이므로 △ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}k)^2+(\sqrt{3}k)^2-(2k)^2}{2\cdot\sqrt{3}k\cdot\sqrt{3}k}=\frac{1}{3}$$ ⋯ ❶

$0°<B<180°$에서 $\sin B>0$이므로

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ ⋯ ❷

조건 (나)에 의하여 $\overline{AC}=4k$이므로 △ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{4k}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}k}{\sin C}$

$$\therefore \sin C=\sqrt{3}k\cdot\frac{1}{4k}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

채점 기준	비율
❶ $\cos B$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin B$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\sin C$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0883 전략 먼저 주어진 식을 삼각형의 변의 길이에 대한 식으로 나타내어 △ABC가 어떤 삼각형인지 결정한다.

풀이 △ABC의 세 변의 길이를 a, b, c라 하고, 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{a}{2R}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$ ⋯ ❶

$$b+c=\frac{a^2b+bc^2-b^3+a^2c+b^2c-c^3}{2bc}$$

$$b^3+b^2c+(c^2-a^2)b+c(c^2-a^2)=0$$

$$b^2(b+c)+(c^2-a^2)(b+c)=0$$

$$\therefore (b^2+c^2-a^2)(b+c)=0$$

이때 $b+c>0$이므로

$$b^2+c^2-a^2=0 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$$

즉 △ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이다. ⋯ ❷

△ABC의 넓이가 4이므로

$$\frac{1}{2}bc=4 \qquad \therefore bc=8$$

$b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b+c=\sqrt{b^2+c^2}+b+c$$
$$\geq\sqrt{2bc}+2\sqrt{bc}$$
$$=4(\sqrt{2}+1)\ (\text{단, 등호는 } b=c\text{일 때 성립})$$

따라서 △ABC의 둘레의 길이의 최솟값은

$4(\sqrt{2}+1)$ ⋯ ❸

답 $4(\sqrt{2}+1)$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 삼각형의 변의 길이에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ △ABC를 결정할 수 있다.	30 %
❸ △ABC의 둘레의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

0884 전략 △OAB, △OCA의 넓이를 이용하여 $\cos(\angle AOB)$의 값을 구한 후 △OAB에서 코사인법칙을 이용한다.

풀이 △OBC에서 $\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{5}$, $\overline{BC}=\sqrt{10}$이므로

$$\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=\overline{BC}^2 \qquad \therefore \angle BOC=\frac{\pi}{2}$$ ⋯ ❶

$\angle AOB=\theta$라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sin\theta=\frac{5}{2}\sin\theta$$

$\angle AOC=2\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}\pi-\theta$이므로

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\frac{5}{2}\cos\theta$$

이때 $4S_1=3S_2$이므로

$$4\cdot\frac{5}{2}\sin\theta=3\cdot\left(-\frac{5}{2}\cos\theta\right)$$

$$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{4}\cos\theta$$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\left(-\frac{3}{4}\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta=1$$

$$\frac{25}{16}\cos^2\theta=1 \qquad \therefore \cos^2\theta=\frac{16}{25}$$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ ⋯ ❷

△OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\theta$$
$$=5+5-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=18$$

$$\therefore \overline{AB}=3\sqrt{2}$$ ⋯ ❸

답 $3\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\angle BOC$의 크기를 구할 수 있다.	20 %
❷ $4S_1=3S_2$임을 이용하여 $\cos(\angle AOB)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %

Ⅲ. 수열

08 등차수열과 등비수열

0885 $a_n=8n-7$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례대로 대입하면

$a_1=8\cdot1-7=1,\quad a_2=8\cdot2-7=9,\quad a_3=8\cdot3-7=17,$

$a_4=8\cdot4-7=25,\quad a_5=8\cdot5-7=33$

답 1, 9, 17, 25, 33

0886 $a_n=\dfrac{n+5}{2n}$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례대로 대입하면

$a_1=\dfrac{1+5}{2\cdot1}=3,\quad a_2=\dfrac{2+5}{2\cdot2}=\dfrac{7}{4},\quad a_3=\dfrac{3+5}{2\cdot3}=\dfrac{4}{3},$

$a_4=\dfrac{4+5}{2\cdot4}=\dfrac{9}{8},\quad a_5=\dfrac{5+5}{2\cdot5}=1$

답 $3,\ \dfrac{7}{4},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{9}{8},\ 1$

0887 답 $a_n=(-1)^n\cdot n$ **0888** 답 $a_n=\dfrac{n}{n+2}$

0889 답 $a_n=n(n+1)$

0890 $4-1=3$에서 공차가 3이므로 주어진 수열은

$1,\ 4,\ \boxed{7},\ \boxed{10},\ 13,\ \cdots$

답 7, 10

0891 $14-16=-2$에서 공차가 -2이므로 주어진 수열은

$20,\ \boxed{18},\ 16,\ 14,\ \boxed{12},\ \cdots$

답 18, 12

0892 $a_n=15+(n-1)\cdot(-3)$

$=-3n+18$

답 $a_n=-3n+18$

0893 첫째항이 2, 공차가 -4이므로 $-2-2=-4$

$a_n=2+(n-1)\cdot(-4)=-4n+6$

답 $a_n=-4n+6$

0894 (1) $a_n=72+(n-1)\cdot(-6)=-6n+78$이므로

$a_7=-6\cdot7+78=36$

(2) -18을 제n항이라 하면

$-18=-6n+78,\quad 6n=96\quad \therefore n=16$

따라서 -18은 제16항이다.

답 (1) 36 (2) 제16항

0895 공차를 d라 하면 $a_8=35$에서

$7+7d=35,\quad 7d=28$

$\therefore d=4$

답 4

0896 공차를 d라 하면 $a_{10}=-5$에서

$13+9d=-5,\quad 9d=-18$

$\therefore d=-2$

답 -2

0897 $x=\dfrac{3+(-5)}{2}=-1$

답 -1

0898 $\dfrac{12\{(-2)+40\}}{2}=228$

답 228

0899 $\dfrac{20\{2\cdot11+(20-1)\cdot(-2)\}}{2}=-160$

답 -160

0900 $3,\ 12,\ 21,\ \cdots,\ 93$은 첫째항이 3, 공차가 9인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=3+(n-1)\cdot9=9n-6$

93을 제n항이라 하면

$93=9n-6,\quad 9n=99\quad \therefore n=11$

$\therefore 3+12+21+\cdots+93=\dfrac{11(3+93)}{2}=528$

답 528

0901 $64,\ 59,\ 54,\ \cdots,\ -16$은 첫째항이 64, 공차가 -5인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=64+(n-1)\cdot(-5)=-5n+69$

-16을 제n항이라 하면

$-16=-5n+69,\quad 5n=85\quad \therefore n=17$

$\therefore 64+59+54+\cdots+(-16)=\dfrac{17\{64+(-16)\}}{2}$

$=408$

답 408

0902 $a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(3\cdot10^2+10)-(3\cdot9^2+9)=58$

답 58

0903 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\cdot1^2+3\cdot1=5$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2+3n-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=2n^2+3n-(2n^2-n-1)$

$=4n+1$ …… ㉠

이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n+1$

답 $a_n=4n+1$

0904 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-3\cdot1+1=-1$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-3n+1)-\{(n-1)^2-3(n-1)+1\}$

$=(n^2-3n+1)-(n^2-5n+5)$

$=2n-4$ …… ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1=2\cdot1-4=-2$ $a_1=S_1$을 이용하여 얻은 값과 다르다.

(i), (ii)에서 구하는 수열의 일반항은

$a_1=-1,\ a_n=2n-4\ (n\ge2)$

답 $a_1=-1,\ a_n=2n-4\ (n\ge2)$

0905 $\frac{4}{2}=2$에서 공비가 2이므로 주어진 수열은

$2,\ 4,\ \boxed{8},\ \boxed{16},\ 32,\ \cdots$ 답 8, 16

0906 $-\frac{1}{27}\div\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}$에서 공비가 $-\frac{1}{3}$이므로 주어진 수열은

$1,\ \boxed{-\frac{1}{3}},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \boxed{\frac{1}{81}},\ \cdots$ 답 $-\frac{1}{3},\ \frac{1}{81}$

0907 답 $a_n=5^{n-1}$

0908 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$a_n=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 답 $a_n=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

0909 첫째항이 3, 공비가 -1이므로

$a_n=3\cdot(-1)^{n-1}$ 답 $a_n=3\cdot(-1)^{n-1}$

0910 (1) $a_n=\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{3})^{n-1}$이므로

$a_5=\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{3})^4=\frac{1}{3}\cdot 9=3$

(2) 81이 제 n 항이라 하면

$81=\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{3})^{n-1}$, $\quad(\sqrt{3})^{n-1}=243$

$3^{\frac{n-1}{2}}=3^5$, $\quad\frac{n-1}{2}=5\quad\therefore n=11$

따라서 81은 제 11 항이다. 답 (1) 3 (2) 제 11 항

0911 공비를 r라 하면 $a_4=1$에서

$8\cdot r^3=1$, $\quad r^3=\frac{1}{8}\quad\therefore r=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0912 공비를 r라 하면 $a_5=80$에서

$5\cdot r^4=80$, $\quad r^4=16\quad\therefore r=\pm2$ 답 -2 또는 2

0913 $x^2=3\cdot12=36\quad\therefore x=\pm6$ 답 -6 또는 6

0914 $\dfrac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}=\frac{255}{128}$ 답 $\frac{255}{128}$

0915 첫째항이 1, 공비가 -2인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$\frac{-2}{1}=-2$

$1-2+4-8+\cdots+(-2)^{n-1}$

$=\dfrac{1\cdot\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}$ 답 $\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}$

0916 0.1, 0.01, 0.001, $\cdots$, 0.00000001은 첫째항이 0.1, 공비가 0.1인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=0.1\times0.1^{n-1}=0.1^n$

0.00000001을 제 n 항이라 하면

$0.00000001=0.1^n$, $\quad 0.1^8=0.1^n\quad\therefore n=8$

$\therefore 0.1+0.01+0.001+\cdots+0.00000001$

$=\dfrac{0.1\times(1-0.1^8)}{1-0.1}=\frac{1}{9}(1-0.1^8)$ 답 $\frac{1}{9}(1-0.1^8)$

0917 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3^1-1=2$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)$

$=3^{n-1}(3-1)=2\cdot3^{n-1}$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\cdot3^{n-1}$ 답 $a_n=2\cdot3^{n-1}$

0918 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2^2-5=-1$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-5)-(2^n-5)$

$=2^n(2-1)=2^n$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면 $\quad a_1=2^1=2$

(i), (ii)에서 구하는 수열의 일반항은

$a_1=-1,\ a_n=2^n\ (n\ge2)$ 답 $a_1=-1,\ a_n=2^n\ (n\ge2)$

유형 01 등차수열의 일반항

본책 134쪽

① 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 d
➡ $d=a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots$

② 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항
➡ $a_n=a+(n-1)d$

③ 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 제 k 항이 m
➡ $a+(k-1)d=m$

0919 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_6=a+5\cdot3=11\quad\therefore a=-4$

$\therefore a_n=-4+(n-1)\cdot3=3n-7$

$a_k=3k-7=32$이므로

$3k=39\quad\therefore k=13$ 답 ③

0920 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_{100}-a_{99}=d$

$\therefore a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{99}-a_{100}$

$=-\{(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{100}-a_{99})\}$

$=-50d$

즉 $-50d=250$이므로 $\quad d=-5$ 답 -5

0921 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=\log_2 9$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_5=a+4d=\log_2 243$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$3d=\log_2 243-\log_2 9=\log_2 27$

$\therefore\ d=\frac{1}{3}\log_2 27=\log_2 3$

$d=\log_2 3$을 ㉠에 대입하면

$a+\log_2 3=\log_2 9 \qquad \therefore\ a=\log_2 3$

따라서 $a_n=\log_2 3+(n-1)\log_2 3=n\log_2 3$이므로

$a_9=9\log_2 3$ 답 $9\log_2 3$

0922 등차수열 $\{a_{2n}\}$은 $a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots$이고 공차가 8이므로

$a_4-a_2=8$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$(a+3d)-(a+d)=8$

$2d=8 \qquad \therefore\ d=4$ ··· ❶

등차수열 $\{a_{3n+1}\}$은 $a_4,\ a_7,\ a_{10},\ \cdots$이므로 구하는 공차는

$a_7-a_4=(a+6d)-(a+3d)$

$=3d=3\cdot4=12$ ··· ❷

답 12

채점 기준	비율
❶ 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 구할 수 있다.	50 %
❷ 등차수열 $\{a_{3n+1}\}$의 공차를 구할 수 있다.	50 %

0923 왼쪽 창가의 좌석 번호를 뒤에서부터 차례대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 하면 $\{a_n\}$은

$89,\ 85,\ 81,\ \cdots,\ 5,\ 1$

즉 첫째항이 89, 공차가 -4인 등차수열이므로

$a_n=89+(n-1)\cdot(-4)=-4n+93$

따라서 구하는 좌석 번호는

$a_7=-4\cdot7+93=65$ 답 65

0924 첫 번째 시행에서 만들어지는 수열은

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$

이므로 공차가 2인 등차수열이다.

두 번째 시행에서 만들어지는 수열은

$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \cdots$

이므로 공차가 $4=2^2$인 등차수열이다.

세 번째 시행에서 만들어지는 수열은

$1,\ 9,\ 17,\ 25,\ \cdots$

이므로 공차가 $8=2^3$인 등차수열이다.

따라서 7번째 시행에서 만들어지는 수열은 첫째항이 1, 공차가 $2^7=128$인 등차수열이므로 제 n 항은

$1+(n-1)\cdot128=128n-127$

따라서 구하는 제 3 항은 $\quad 128\cdot3-127=257$ 답 ⑤

유형 02 항 사이의 관계가 주어진 등차수열 본책 134쪽

항 사이의 관계가 주어진 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 첫째항을 a, 공차를 d라 하고 주어진 조건을 이용하여 a, d에 대한 방정식을 세운다.

(ii) (i)의 방정식에서 a, d의 값을 구하여 일반항 a_n을 구한다.

0925 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_{10}=(a+2d)+(a+9d)$

$=2a+11d=63$ ······ ㉠

$a_6+a_{15}=(a+5d)+(a+14d)$

$=2a+19d=103$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ d=5$

따라서 $a_n=4+(n-1)\cdot5=5n-1$이므로

$a_{27}=5\cdot27-1=134$ 답 ⑤

0926 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2+a_7=0$이므로 $\quad (a+d)+(a+6d)=0$

$\therefore\ 2a+7d=0$ ······ ㉠

또 $a_4=-2$이므로 $\quad a+3d=-2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-14,\ d=4$ ··· ❶

$\therefore\ a_n=-14+(n-1)\cdot4=4n-18$ ··· ❷

82를 제 n 항이라 하면

$4n-18=82, \qquad 4n=100$

$\therefore\ n=25$ ··· ❸

답 제 25 항

채점 기준	비율
❶ 첫째항과 공차를 구할 수 있다.	50 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	20 %
❸ 82는 제몇 항인지 구할 수 있다.	30 %

0927 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2+a_4=(a_1+d)+(a_1+3d)=2a_1+4d,$

$a_3+a_7=(a_1+2d)+(a_1+6d)=2a_1+8d$

이때 $(a_2+a_4):(a_3+a_7)=1:5$이므로

$(2a_1+4d):(2a_1+8d)=1:5$

$5(2a_1+4d)=2a_1+8d, \qquad 8a_1+12d=0$

$12d=-8a_1 \qquad \therefore\ d=-\frac{2}{3}a_1$

$\therefore\ a_{16}=a_1+15d=a_1+15\cdot\left(-\frac{2}{3}a_1\right)=-9a_1$ 답 ③

0928 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d\ (d>0)$라 하면

조건 ㈎에서 $a_6+a_8=0$이므로

$(a+5d)+(a+7d)=0, \qquad 2a=-12d$

$\therefore\ a=-6d$ ······ ㉠

조건 ㈏에서 $|a_6|=|a_7|+2$이므로

$|a+5d|=|a+6d|+2$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$|-6d+5d|=|-6d+6d|+2$

$|-d|=2 \qquad \therefore\ |d|=2$

이때 $d>0$이므로 $\quad d=2$

$d=2$를 ㉠에 대입하면

$a=-6\cdot2=-12$

따라서 $a_n=-12+(n-1)\cdot2=2n-14$이므로

$a_3=2\cdot3-14=-8$ 답 ②

유형 03 대소 관계를 만족시키는 등차수열의 항
본책 135쪽

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열에서
① 처음으로 양수가 되는 항
➡ $a+(n-1)d>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.
② 처음으로 음수가 되는 항
➡ $a+(n-1)d<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

0929 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=a+6d=29$ ······ ㉠

$a_{10}=a+9d=20$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=47,\ d=-3$

$\therefore a_n=47+(n-1)\cdot(-3)=-3n+50$

$-3n+50<0$에서 $3n>50$

$\therefore n>\frac{50}{3}=16.\cdots$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제17항이다. 답 ③

0930 $a_n=1005+(n-1)\cdot(-4)=-4n+1009$

$-4n+1009<10$에서 $4n>999$

$\therefore n>249.75$

따라서 처음으로 10보다 작아지는 항은 제250항이다.

답 제250항

0931 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_{23}=a+22\cdot 4=23 \quad \therefore a=-65$

$\therefore a_n=-65+(n-1)\cdot 4=4n-69$ ··· ❶

$4n-69=0$에서 $n=17.25$

이때 $a_{17}=4\cdot 17-69=-1,\ a_{18}=4\cdot 18-69=3$이므로

$|a_{17}|<|a_{18}|$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 17이다. ··· ❷

답 17

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\|a_n\|$의 값이 최소가 되는 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	60 %

0932 $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \cdots\}$,
$B=\{4, 7, 10, 13, 16, \cdots\}$

이므로 $A\cap B=\{4, 10, 16, \cdots\}$

따라서 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 6인 등차수열이므로

$c_n=4+(n-1)\cdot 6=6n-2$

$6n-2\geq 100$에서 $6n\geq 102 \quad \therefore n\geq 17$

따라서 구하는 n의 값은 17이다. 답 17

유형 04 두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등차수열
본책 136쪽

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등차수열에서
➡ a는 첫째항이고, b는 제$(n+2)$항이다.
➡ $b=a+(n+1)d$ (단, d는 공차)

0933 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 1, 제21항이 101이므로

$1+20d=101, \quad 20d=100 \quad \therefore d=5$

이때 a_8은 주어진 수열의 제9항이므로

$a_8=1+8\cdot 5=41$ 답 41

0934 첫째항이 -3, 공차가 $\frac{3}{2}$인 등차수열의 제$(n+2)$항이 15이므로

$-3+(n+1)\cdot\frac{3}{2}=15, \quad \frac{3}{2}(n+1)=18$

$n+1=12 \quad \therefore n=11$ 답 11

0935 주어진 등차수열의 공차를 d라 하자.

수열 $4, a_1, a_2, \cdots, a_m, 16$에서 16은 제$(m+2)$항이므로

$4+(m+1)d=16 \quad \therefore d=\frac{12}{m+1}$ ······ ㉠

또 수열 $16, b_1, b_2, \cdots, b_n, 40$에서 16을 첫째항으로 생각하면 40은 제$(n+2)$항이므로

$16+(n+1)d=40 \quad \therefore d=\frac{24}{n+1}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{12}{m+1}=\frac{24}{n+1}$이므로 $n+1=2(m+1)$

$\therefore n=2m+1$ 답 ②

유형 05 등차중항
본책 136쪽

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
➡ $b=\frac{a+c}{2}$, 즉 $2b=a+c$

0936 세 수 $2a$, a^2+2a, 4가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a^2+2a)=2a+4, \quad a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=1$

따라서 모든 a의 값의 합은 $-2+1=-1$ 답 ②

참고 $a=-2$일 때, 주어진 세 수는 $-4, 0, 4$이므로 공차가 4인 등차수열을 이루고, $a=1$일 때, 주어진 세 수는 $2, 3, 4$이므로 공차가 1인 등차수열을 이룬다.

0937 $P(x)=ax^2-x+3$이라 하면 $P(x)$를 $x+1$, $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 각각

$P(-1)=a+1+3=a+4$,

$P(2)=4a-2+3=4a+1$,

$P(3)=9a-3+3=9a$

즉 세 수 $a+4$, $4a+1$, $9a$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(4a+1)=(a+4)+9a, \quad 2a=-2$

$\therefore a=-1$ 답 -1

SSEN 특강 나머지정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=P(a)$

0938 네 개의 수 $\log_3 4$, a, $\log_3 36$, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a=\frac{\log_3 4+\log_3 36}{2}=\frac{\log_3 144}{2}=\frac{2\log_3 12}{2}=\log_3 12$$

$2\log_3 36=a+b$에서

$2\log_3 36=\log_3 12+b$

$\therefore b=2\log_3 36-\log_3 12=\log_3 108$

또 다섯 개의 수 10, c, 2, d, -6이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$c=\frac{10+2}{2}=6,\ d=\frac{2+(-6)}{2}=-2$$

$$\begin{aligned}\therefore a-b-c+d&=\log_3 12-\log_3 108-6-2\\&=\log_3\frac{1}{9}-8=-2-8\\&=-10\end{aligned}$$

답 -10

다른 풀이 $a-b=\log_3 4-\log_3 36=\log_3\frac{1}{9}=-2$,

$c-d=10-2=8$

$$\begin{aligned}\therefore a-b-c+d&=a-b-(c-d)\\&=-2-8=-10\end{aligned}$$

0939 α, β가 이차방정식 $x^2-4x-8=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-8$ ··· ❶

이때 m은 α, β의 등차중항이므로

$$m=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{4}{2}=2$$

또 n은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$의 등차중항이므로

$$n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{4}{2\cdot(-8)}=-\frac{1}{4}$$ ··· ❷

$\therefore mn=-\frac{1}{2}$ ··· ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ mn의 값을 구할 수 있다.	20 %

0940 세 수 a, b, 14가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b=\frac{a+14}{2}$$

세 수 a, 6, e가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a+e=2\cdot6\qquad\therefore e=12-a$

세 수 e, 0, f가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$e+f=0\qquad\therefore f=-e=a-12$

세 수 14, d, f가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$d=\frac{14+f}{2}=\frac{a+2}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore a+b-d-f&=a+\frac{a+14}{2}-\frac{a+2}{2}-(a-12)\\&=18\end{aligned}$$

답 ④

유형 06 등차수열을 이루는 수 본책 137쪽

등차수열을 이루는
세 수는 ➡ $a-d$, a, $a+d$
네 수는 ➡ $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$
로 놓고 식을 세운다.

0941 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

$(a-d)+a+(a+d)=21$ ······ ㉠

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=165$ ······ ㉡

㉠에서 $3a=21\qquad\therefore a=7$

$a=7$을 ㉡에 대입하면

$(7-d)^2+7^2+(7+d)^2=165$

$2d^2+147=165,\qquad d^2=9\qquad\therefore d=\pm3$

따라서 세 수는 4, 7, 10이므로 세 수의 곱은

$4\cdot7\cdot10=280$

답 280

0942 삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=15$

$3a=15\qquad\therefore a=5$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 5이므로 방정식에 $x=5$를 대입하면

$5^3-15\cdot5^2+5k-105=0,\qquad 5k=355$

$\therefore k=71$

답 ③

0943 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 놓으면

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=12$ ······ ㉠

$(a-3d)(a+3d)=-135$ ······ ㉡ ··· ❶

㉠에서 $4a=12\qquad\therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면

$(3-3d)(3+3d)=-135$

$9-9d^2=-135,\qquad 9d^2=144$

$d^2=16\qquad\therefore d=\pm4$ ··· ❷

따라서 네 수는 -9, -1, 7, 15이므로 가장 큰 수는 15이다. ··· ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 네 수를 a, d로 나타내고 a, d에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, d의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 네 수 중 가장 큰 수를 구할 수 있다.	20 %

0944 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 모든 모서리의 길이의 합이 84이므로

$4\{(a-d)+a+(a+d)\}=84,\qquad 3a=21$

$\therefore a=7$

또 겉넓이가 244이므로

$2\{a(a-d)+(a+d)(a-d)+a(a+d)\}=244$

$3a^2-d^2=122$

$a=7$을 위의 식에 대입하면 $\quad 147-d^2=122$

$d^2=25 \quad \therefore d=\pm5$

따라서 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각

2, 7, 12 또는 12, 7, 2

이므로 구하는 부피는

$2\cdot7\cdot12=168$ 답 168

0945 갑, 을, 병, 정, 무, 기, 경의 몫을 차례대로

$a+3d,\ a+2d,\ a+d,\ a,\ a-d,\ a-2d,\ a-3d$

로 놓으면 갑, 을의 몫의 합은 100냥이므로

$(a+3d)+(a+2d)=100$

$\therefore 2a+5d=100$ ······ ㉠

무, 기, 경의 몫의 합은 96냥이므로

$(a-d)+(a-2d)+(a-3d)=96$

$\therefore a-2d=32$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=40,\ d=4$

따라서 병의 몫은

$a+d=40+4=44$ (냥) 답 44냥

유형 07 등차수열의 합 본책 137쪽

첫째항이 a, 제n항이 l, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때

① 첫째항과 제n항이 주어지면 ➡ $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

② 첫째항과 공차가 주어지면 ➡ $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

0946 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=4$ ······ ㉠

$a_5=a+4d=22$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ d=6$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\dfrac{20\{2\cdot(-2)+(20-1)\cdot6\}}{2}=1100$ 답 ④

0947 $a_1=3\cdot1-6=-3$, $a_9=3\cdot9-6=21$이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은

$\dfrac{9(-3+21)}{2}=81$ 답 81

0948 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -40, 공차가 6이므로

$S_n=\dfrac{n\{2\cdot(-40)+(n-1)\cdot6\}}{2}=3n^2-43n$ ··· ❶

$S_n>0$에서 $\quad 3n^2-43n>0,\quad n(3n-43)>0$

$\therefore n>\dfrac{43}{3}=14.\cdots$ ··· ❷

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 15이다. ··· ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ S_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ n의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0949 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면

$a_1+b_1=4,\ d+d'=2$

$\therefore (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{15})$

$=\dfrac{15(2a_1+14d)}{2}+\dfrac{15(2b_1+14d')}{2}$

$=\dfrac{15\{2(a_1+b_1)+14(d+d')\}}{2}$

$=\dfrac{15(2\cdot4+14\cdot2)}{2}$

$=270$ 답 ④

다른 풀이 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이므로

(주어진 식)$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{15}+b_{15})$

$=\dfrac{15\{2\cdot4+(15-1)\cdot2\}}{2}$

$=270$

0950 첫째항이 50, 제n항이 -10인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 220이므로

$\dfrac{n\{50+(-10)\}}{2}=220,\quad 20n=220$

$\therefore n=11$

즉 $a_{11}=-10$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$50+10d=-10,\quad 10d=-60$

$\therefore d=-6$ 답 -6

0951 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}=50+9d=23$

$9d=-27 \quad \therefore d=-3$

$\therefore a_n=50+(n-1)\cdot(-3)=-3n+53$

$a_n<0$에서 $\quad -3n+53<0$

$\therefore n>\dfrac{53}{3}=17.\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제17항까지 양수이고, 제18항부터 음수이다.

이때

$a_{17}=-3\cdot17+53=2$,

$a_{18}=-3\cdot18+53=-1$,

$a_{30}=-3\cdot30+53=-37$

이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{17})-(a_{18}+a_{19}+a_{20}+\cdots+a_{30})$

$=\dfrac{17(50+2)}{2}-\dfrac{13\{-1+(-37)\}}{2}$

$=442+247=689$ 답 ⑤

유형 08 두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등차수열의 합 본책 138쪽

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등차수열의 합을 S라 하면
➡ S는 첫째항이 a, 끝항이 b, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이다.
➡ $S=\frac{(n+2)(a+b)}{2}$

0952 첫째항이 4, 끝항이 56, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 660이므로

$\frac{(n+2)(4+56)}{2}=660$, $\quad n+2=22$

$\therefore n=20$ 답 ③

0953 첫째항이 -3, 끝항이 33, 항수가 30인 등차수열의 합은

$\frac{30(-3+33)}{2}=450$

따라서 $-3+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{28}+33=450$이므로

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{28}=420$ 답 ③

0954 $10+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+(-24)=10-91-24$
$=-105$

즉 첫째항이 10, 끝항이 -24, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 -105이므로

$\frac{(n+2)(10-24)}{2}=-105$, $\quad n+2=15$

$\therefore n=13$ 답 13

유형 09 부분의 합이 주어진 등차수열 본책 139쪽

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$\begin{cases} S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} \\ S_{2n}=\frac{2n\{2a+(2n-1)d\}}{2} \end{cases}$$

➡ 두 식을 연립하여 a, d의 값을 구한다.

0955 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=140$

$\therefore 2a+9d=28$ ...... ㉠

$S_{20}=\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=480$

$\therefore 2a+19d=48$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5$, $d=2$

$\therefore S_{30}=\frac{30\{2\cdot5+(30-1)\cdot2\}}{2}$
$=1020$ 답 ④

0956 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_5=\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=160$

$\therefore a+2d=32$ ...... ㉠

$S_{15}=\frac{15\{2a+(15-1)d\}}{2}=630$

$\therefore a+7d=42$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=28$, $d=2$

$\therefore a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{40}=S_{40}-S_5$
$=\frac{40\{2\cdot28+(40-1)\cdot2\}}{2}-160$
$=2680-160$
$=2520$ 답 2520

0957 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$라 하면

$S_7=\frac{7\{2a+(7-1)d\}}{2}=42$

$\therefore a+3d=6$ ...... ㉠

$|S_3|=\left|\frac{3\{2a+(3-1)d\}}{2}\right|=42$

$|3(a+d)|=42$, $\quad |a+d|=14$

$\therefore a+d=14$ 또는 $a+d=-14$

(i) $a+d=14$일 때, ... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=18$, $d=-4$

이때 공차가 음수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+d=-14$일 때, ... ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-24$, $d=10$

(i), (ii)에서

$a_n=-24+(n-1)\cdot10=10n-34$

이므로

$a_5=10\cdot5-34=16$ 답 16

0958 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공차가 $\frac{1}{4}$이므로

$S_5=\frac{5\left\{2\cdot1+(5-1)\cdot\frac{1}{4}\right\}}{2}=\frac{15}{2}$

$S_{n+3}=\frac{(n+3)\left\{2\cdot1+(n+3-1)\cdot\frac{1}{4}\right\}}{2}=\frac{(n+3)(n+10)}{8}$

$S_{2n}=\frac{2n\left\{2\cdot1+(2n-1)\cdot\frac{1}{4}\right\}}{2}=\frac{n(2n+7)}{4}$

이때 S_5, S_{n+3}, S_{2n}이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_{n+3}=S_5+S_{2n}$

$2\cdot\frac{(n+3)(n+10)}{8}=\frac{15}{2}+\frac{n(2n+7)}{4}$

$n^2+13n+30=30+2n^2+7n$

$n^2-6n=0$, $\quad n(n-6)=0$

$\therefore n=6$ ($\because$ n은 자연수) 답 ②

유형 10 등차수열의 합의 최대·최소

본책 139쪽

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n이라 할 때
① $a_k>0$, $a_{k+1}<0$
➡ 제$(k+1)$항부터 음수 ➡ S_n의 최댓값: S_k
② $a_k<0$, $a_{k+1}>0$
➡ 제$(k+1)$항부터 양수 ➡ S_n의 최솟값: S_k

0959 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=a+4d=8$ …… ㉠

$a_{13}=a+12d=-16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=20$, $d=-3$

$\therefore a_n=20+(n-1)\cdot(-3)=-3n+23$

$-3n+23<0$에서 $n>\frac{23}{3}=7.\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제 8 항부터 음수이므로 첫째항부터 제 7 항까지의 합이 최대이다.

이때 $a_7=-3\cdot7+23=2$이므로 구하는 최댓값은

$S_7=\frac{7(20+2)}{2}=77$ 답 77

0960 $a_n>0$에서 $n\log_2 5-100>0$

$\therefore n>\frac{100}{\log_2 5}=\frac{100}{\frac{\log 5}{\log 2}}=\frac{100\log 2}{1-\log 2}=\frac{100\times0.3}{1-0.3}$

$=\frac{30}{0.7}=42.\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제43항부터 양수이므로 첫째항부터 제42항까지의 합이 최소이다. 답 42

0961 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$\frac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=24$, $\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=0$

$\therefore 2a+3d=12$, $2a+9d=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=9$, $d=-2$

$\therefore a_n=9+(n-1)\cdot(-2)=-2n+11$ … ❶

$-2n+11>0$에서 $n<5.5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제6항부터 음수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최대이다.

$\therefore p=5$ … ❷

이때 $a_5=-2\cdot5+11=1$이므로

$q=\frac{5(9+1)}{2}=25$ … ❸

$\therefore p+q=30$ … ❹

답 30

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0962 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_3=\frac{3\{2\cdot(-4)+(3-1)d\}}{2}=3d-12$

$S_8=\frac{8\{2\cdot(-4)+(8-1)d\}}{2}=28d-32$

$S_3=S_8$에서 $3d-12=28d-32$

$25d=20$ $\therefore d=\frac{4}{5}$

$\therefore a_n=-4+(n-1)\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}n-\frac{24}{5}$

$\frac{4}{5}n-\frac{24}{5}>0$에서 $n>6$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제 7 항부터 양수이므로 첫째항부터 제 6 항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_6=\frac{4}{5}\cdot6-\frac{24}{5}=0$이므로 구하는 최솟값은

$S_6=\frac{6\{(-4)+0\}}{2}=-12$ 답 ④

0963 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=112+(n-1)d$

이때 S_8의 값이 임의의 다른 S_n의 값보다 크려면

$a_8>0$, $a_9<0$

$a_8=112+7d>0$에서 $d>-16$

$a_9=112+8d<0$에서 $d<-14$

$\therefore -16<d<-14$

이때 d는 정수이므로 $d=-15$ 답 -15

유형 11 나머지가 같은 자연수의 합

본책 140쪽

① 자연수 d의 양의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면
d, $2d$, $3d$, $\cdots$
➡ 첫째항과 공차가 d인 등차수열
② 자연수 d로 나누었을 때의 나머지가 a $(0<a<d)$인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면
a, $a+d$, $a+2d$, $\cdots$
➡ 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열

0964 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

1, 4, 7, 10, $\cdots$, 97, 100

이때 $\underbrace{100=1+3\cdot33}_{\text{첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열의 제 34항}}$에서 구하는 값은 첫째항이 1, 끝항이 100, 항수가 34인 등차수열의 합이므로

$\frac{34(1+100)}{2}=1717$ 답 ④

0965 100과 200 사이에 있는 7의 배수는

105, 112, 119, $\cdots$, 196

이때 $196=105+7\cdot13$에서 구하는 값은 첫째항이 105, 끝항이 196, 항수가 14인 등차수열의 합이므로

$\frac{14(105+196)}{2}=2107$ 답 ②

0966 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 3의 배수는

$51, 54, 57, \cdots, 99$ …… ㉠

이때 $99=51+3\cdot16$에서 ㉠은 첫째항이 51, 끝항이 99, 항수가 17인 등차수열이므로 그 합은

$\dfrac{17(51+99)}{2}=1275$ ⋯ ❶

50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 5의 배수는

$55, 60, 65, \cdots, 95$ …… ㉡

이때 $95=55+5\cdot8$에서 ㉡은 첫째항이 55, 끝항이 95, 항수가 9인 등차수열이므로 그 합은

$\dfrac{9(55+95)}{2}=675$ ⋯ ❷

한편 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 15의 배수는

$60, 75, 90$

이므로 이 세 수의 합은

$60+75+90=225$ ⋯ ❸

따라서 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 3 또는 5로 나누어떨어지는 수의 총합은

$1275+675-225=1725$ ⋯ ❹

답 1725

채점 기준	비율
❶ 50보다 크고 100보다 작은 3의 배수의 합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 50보다 크고 100보다 작은 5의 배수의 합을 구할 수 있다.	30 %
❸ 50보다 크고 100보다 작은 15의 배수의 합을 구할 수 있다.	20 %
❹ 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중 3 또는 5로 나누어떨어지는 수의 총합을 구할 수 있다.	20 %

0967 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, \cdots$ …… ㉠

5로 나누었을 때의 나머지가 2인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, \cdots$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$7, 27, 47, \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 7, 공차가 20인 등차수열이므로 구하는 합은

$\dfrac{10\{2\cdot7+(10-1)\cdot20\}}{2}=970$

답 ①

유형 12 등차수열의 합의 활용 본책 140쪽

주어진 상황에서 첫째항과 공차를 찾아 등차수열의 합에 대한 식을 세운다.

0968 연속하는 20개의 자연수 중에서 가장 큰 수를 a라 하면 20개의 자연수는 첫째항이 a, 공차가 -1인 등차수열을 이루므로

$\dfrac{20\{2a+(20-1)\cdot(-1)\}}{2}=530, \qquad 2a-19=53$

$2a=72 \qquad \therefore a=36$

따라서 구하는 가장 큰 수는 36이다.

답 ④

0969 n일째 공부 시간을 a_n시간이라 하면

$a_n=1+\dfrac{1}{4}(n-1)=\dfrac{1}{4}n+\dfrac{3}{4}$ $\dfrac{15}{60}=\dfrac{1}{4}$(시간)

공부 시간이 3시간 30분, 즉 $\dfrac{7}{2}$시간인 날은

$\dfrac{1}{4}n+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{2}, \qquad \dfrac{1}{4}n=\dfrac{11}{4}$

$\therefore n=11$

따라서 공부한 시간의 총합은 첫째항이 1, 제11항이 $\frac{7}{2}$인 등차수열의 첫째항부터 제11항까지의 합

$\dfrac{11\left(1+\frac{7}{2}\right)}{2}=\dfrac{99}{4}$(시간)

답 $\dfrac{99}{4}$시간

0970 $a_1=1+2+2+3=8$

$a_2=3+4+4+5=16$

$a_3=5+6+6+7=24$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 8, 공차가 8인 등차수열이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_8=\dfrac{8\{2\cdot8+(8-1)\cdot8\}}{2}=288$

답 288

0971 n각형의 내각의 크기의 합은

$180°\times(n-2)=180°\times n-360°$ ⋯ ❶

첫째항이 $40°$, 공차가 $20°$, 항수가 n인 등차수열의 합은

$\dfrac{n\{2\times40°+(n-1)\times20°\}}{2}=10°\times n^2+30°\times n$ ⋯ ❷

따라서 $10°\times n^2+30°\times n=180°\times n-360°$이므로

$n^2-15n+36=0, \qquad (n-3)(n-12)=0$

$\therefore n=3$ 또는 $n=12$

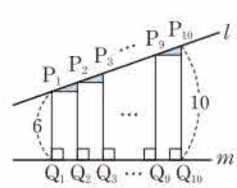
이때 $n=12$이면 가장 큰 내각의 크기가 $40°+11\times20°=260°$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore n=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ n각형의 내각의 크기의 합을 알 수 있다.	20 %
❷ 등차수열의 합의 공식을 이용하여 n각형의 내각의 크기의 합을 구할 수 있다.	40 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	40 %

0972 오른쪽 그림에서 색칠한 직각삼각형은 모두 합동이므로



$\overline{P_2Q_2}-\overline{P_1Q_1}=\overline{P_3Q_3}-\overline{P_2Q_2}$

⋮

$=\overline{P_{10}Q_{10}}-\overline{P_9Q_9}$

즉 선분 P_1Q_1, P_2Q_2, $\cdots$, $P_{10}Q_{10}$의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 d라 하면

$\overline{P_2Q_2}=6+d$, $\overline{P_9Q_9}=10-d$

$\therefore \overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\overline{P_4Q_4}+\cdots+\overline{P_9Q_9}$

$=\dfrac{8\{(6+d)+(10-d)\}}{2}=64$ 답 ⑤

유형 13 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계 본책 141쪽

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합 S_n이 주어진 경우
① (i) $a_1=S_1$
(ii) $n\ge2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$
임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.
② $a_k=S_k-S_{k-1}$ (단, $k\ge2$)

0973 $S_n=n^2+2n$에서

(i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=1^2+2\cdot1=3$

(ii) $n\ge2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$
$=2n+1$ …… ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=2n+1$

따라서 $a_1=3$, $a_3=7$, $a_5=11$, $\cdots$, $a_{99}=199$이므로 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$는 첫째항이 3, 끝항이 199, 항수가 50인 등차수열의 합과 같다.

$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=\dfrac{50(3+199)}{2}=5050$ 답 5050

0974 $a_1=S_1=2\cdot1^2+2\cdot1-4=0$이므로 $k\ne1$

$\therefore a_k=S_k-S_{k-1}$
$=2k^2+2k-4-\{2(k-1)^2+2(k-1)-4\}$
$=4k$

즉 $4k=48$이므로 $k=12$ 답 ③

0975 $S_n=2\cdot(-n)^2-12\cdot(-n)=2n^2+12n$이므로

$a_4=S_4-S_3$
$=(2\cdot4^2+12\cdot4)-(2\cdot3^2+12\cdot3)=26$

$a_8=S_8-S_7$
$=(2\cdot8^2+12\cdot8)-(2\cdot7^2+12\cdot7)=42$

$\therefore a_4+a_8=68$ 답 ①

다른 풀이 $S_n=2n^2+12n$이므로

(i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=2\cdot1^2+12\cdot1=14$

(ii) $n\ge2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2n^2+12n-\{2(n-1)^2+12(n-1)\}$
$=4n+10$ …… ㉠

이때 $a_1=14$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=4n+10$
$\therefore a_4+a_8=(4\cdot4+10)+(4\cdot8+10)=68$

0976 $S_n=n^2+kn+2$, $S_n'=2n^2-3n$이라 하면

$a_{10}=S_{10}-S_9$
$=(10^2+10k+2)-(9^2+9k+2)$
$=19+k$

$b_{10}=S_{10}'-S_9'$
$=(2\cdot10^2-3\cdot10)-(2\cdot9^2-3\cdot9)$
$=35$

이때 $a_{10}=b_{10}$이므로 $19+k=35$
$\therefore k=16$ 답 16

0977 $S_n=n^2-6n$에서

(i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=1^2-6\cdot1=-5$

(ii) $n\ge2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2-6n-\{(n-1)^2-6(n-1)\}$
$=2n-7$ …… ㉠

이때 $a_1=-5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=2n-7$ ⋯ ❶

$1\le a_n\le40$에서 $1\le2n-7\le40$
$8\le2n\le47$ $\therefore 4\le n\le23.5$ ⋯ ❷

따라서 자연수 n은 4, 5, 6, $\cdots$, 23의 20개이다. ⋯ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 자연수 n의 개수를 구할 수 있다.	20 %

유형 14 등비수열의 일반항 본책 142쪽

① 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 r
➡ $r=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\cdots$
② 첫째항이 a, 공비가 r $(r\ne0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항
➡ $a_n=ar^{n-1}$
③ 첫째항이 a, 공비가 r $(r\ne0)$인 등비수열의 제k항이 m
➡ $ar^{k-1}=m$

0978 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=2$ …… ㉠
$a_5=ar^4=54$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=27$ $\therefore r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $a=\dfrac{2}{3}$

따라서 $a_n=\dfrac{2}{3}\cdot3^{n-1}$이므로

$a_4=\dfrac{2}{3}\cdot3^3=18$ 답 ②

0979 $a_n=\dfrac{3}{4^{2n-1}}$에서 $a_1=\dfrac{3}{4}$, $a_2=\dfrac{3}{4^3}=\dfrac{3}{64}$

$\therefore \frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{64}\div\frac{3}{4}=\frac{1}{16}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\frac{3}{4}$, 공비는 $\frac{1}{16}$이다.

답 첫째항: $\frac{3}{4}$, 공비: $\frac{1}{16}$

0980 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_3=a\cdot(-2)^2=-4 \quad \therefore a=-1$

$\therefore a_n=-1\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^{n-1}$

$a_k=-(-2)^{k-1}=32$이므로

$(-2)^{k-1}=(-2)^5$

따라서 $k-1=5$이므로 $\quad k=6$

답 6

0981 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (r>0)$라 하면

$a_2=ar=10$ …… ㉠

$a_4=ar^3=100$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^2=10 \quad \therefore r=\sqrt{10}\ (\because r>0)$

$r=\sqrt{10}$을 ㉠에 대입하면 $\quad \sqrt{10}a=10 \quad \therefore a=\sqrt{10}$

따라서 $a_n=\sqrt{10}\cdot(\sqrt{10})^{n-1}=(\sqrt{10})^n$이므로

$a_1a_3a_5\cdots a_{19}=\sqrt{10}\cdot(\sqrt{10})^3\cdot(\sqrt{10})^5\cdot\cdots\cdot(\sqrt{10})^{19}$

$=10^{\frac{1+3+5+\cdots+19}{2}}=10^{\frac{10(1+19)}{4}}$

$=10^{50}$

답 ①

유형 15 항 사이의 관계가 주어진 등비수열

본책 142쪽

항 사이의 관계가 주어진 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 첫째항을 a, 공비를 r라 하고 주어진 조건을 이용하여 a, r에 대한 방정식을 세운다.

(ii) (i)의 방정식에서 a, r의 값을 구하여 일반항 a_n을 구한다.

0982 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=18$에서 $\quad ar=18$ …… ㉠

$a_9=\frac{1}{9}a_7$에서 $\quad ar^8=\frac{1}{9}ar^6$

$r^2=\frac{1}{9} \quad \therefore r=\frac{1}{3}\ (\because r>0)$

모든 항이 양수이므로 공비도 양수이다.

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}a=18 \quad \therefore a=54$

따라서 $a_n=54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로

$a_6=54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{2}{9}$

답 $\frac{2}{9}$

다른 풀이 $ar=18$, $r^2=\frac{1}{9}$이므로

$a_6=ar^5=(ar)\cdot(r^2)^2=18\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{2}{9}$

0983 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3=6$에서 $\quad a_1+a_1r+a_1r^2=6$

$\therefore a_1(1+r+r^2)=6$ …… ㉠

$a_4+a_5+a_6=48$에서 $\quad a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5=48$

$\therefore a_1r^3(1+r+r^2)=48$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^3=8 \quad \therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad 7a_1=6 \quad \therefore a_1=\frac{6}{7}$

$\therefore a_2+a_4+a_6=a_1r+a_1r^3+a_1r^5=a_1r(1+r^2+r^4)$

$=\frac{6}{7}\cdot 2\cdot 21=36$

답 36

0984 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_{15}}{a_5}=\frac{a_{16}}{a_6}=\frac{a_{17}}{a_7}=\cdots=\frac{a_{34}}{a_{24}}=r^{10}$

이므로 주어진 식은

$\underbrace{r^{10}+r^{10}+r^{10}+\cdots+r^{10}}_{20\text{개}}=60$

$20r^{10}=60 \quad \therefore r^{10}=3$

$\therefore \frac{a_{25}}{a_5}=r^{20}=(r^{10})^2=3^2=9$

답 9

0985 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_5}{a_3}=\frac{1}{4}$에서

$\frac{64r^2}{64r}-\frac{64r^4}{64r^2}=\frac{1}{4}$

$r-r^2=\frac{1}{4}, \quad 4r^2-4r+1=0$

$(2r-1)^2=0 \quad \therefore r=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=64\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

1을 제k항이라 하면

$64\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=1 \quad \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$

따라서 $k-1=6$이므로 $\quad k=7$

답 제7항

유형 16 대소 관계를 만족시키는 등비수열의 항

본책 143쪽

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열에서

① 처음으로 k보다 커지는 항

➡ $ar^{n-1}>k$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

② 처음으로 k보다 작아지는 항

➡ $ar^{n-1}<k$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

0986 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=3$ …… ㉠

$a_5=ar^4=9$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^2=3 \quad \therefore r=\sqrt{3}\ (\because r>0)$

$r=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $\quad 3a=3 \quad \therefore a=1$

따라서 $a_n=(\sqrt{3})^{n-1}$이므로

$a_n^{\ 2}=3^{n-1}$

$a_n^{\ 2}>1000$, 즉 $3^{n-1}>1000$에서 $3^6=729$, $3^7=2187$이므로

$n-1\geq 7 \quad \therefore n\geq 8$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다.

답 ③

0987 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_3=5\cdot r^2=\frac{5}{4}$, $r^2=\frac{1}{4}$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$) ··· ❶

따라서 $a_n=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{200}$ ··· ❷

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{1000}$, $2^{n-1}>1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n-1\geq10$ $\therefore n\geq11$

따라서 처음으로 $\frac{1}{200}$보다 작아지는 항은 제11항이다. ··· ❸

답 제11항

채점 기준	비율
❶ 공비를 구할 수 있다.	40 %
❷ 부등식을 세울 수 있다.	20 %
❸ 처음으로 $\frac{1}{200}$보다 작아지는 항은 제몇 항인지 구할 수 있다.	40 %

0988 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\log a_2=\frac{1}{2}$에서 $a_2=ar=10^{\frac{1}{2}}$ ······ ㉠

$\log a_5=2$에서 $a_5=ar^4=10^2$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=10^{\frac{3}{2}}$ $\therefore r=10^{\frac{1}{2}}$

$r=10^{\frac{1}{2}}$을 ㉠에 대입하면 $a=1$

따라서 $a_n=10^{\frac{n-1}{2}}$이므로 $100<a_n<10000$에서

$10^2<10^{\frac{n-1}{2}}<10^4$, $2<\frac{n-1}{2}<4$

$4<n-1<8$ $\therefore 5<n<9$

따라서 자연수 n은 6, 7, 8의 3개이다. 답 3

유형 17 두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등비수열 본책 143쪽

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등비수열에서
➡ a는 첫째항이고, b는 제$(n+2)$항이다.
➡ $b=ar^{n+1}$ (단, r는 공비)

0989 주어진 등비수열의 공비를 r $(r>0)$라 하면 첫째항이 2, 제5항이 162이므로

$2r^4=162$, $r^4=81$ $\therefore r=3$ ($\because r>0$)

따라서 $a=6$, $b=18$, $c=54$이므로

$a+b+c=78$ 답 ⑤

0990 주어진 등비수열의 첫째항이 81, 공비가 $\frac{2}{3}$, 제$(n+2)$항이 $\frac{128}{27}$이므로

$81\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\frac{128}{27}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^7$

$n+1=7$ $\therefore n=6$ 답 ④

0991 주어진 등비수열의 공비를 r $(r>0)$라 하면 첫째항이 2, 제11항이 64이므로

$2\cdot r^{10}=64$, $r^{10}=32=2^5=(\sqrt{2})^{10}$

$\therefore r=\sqrt{2}$ ($\because r>0$)

따라서 $x_n=2\cdot(\sqrt{2})^n=2^{1+\frac{n}{2}}$이므로

$\log_2 x_n=1+\frac{n}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{2}{2}\right)+\left(1+\frac{3}{2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{9}{2}\right)$

$=9+\frac{1+2+3+\cdots+9}{2}=\frac{63}{2}$ 답 $\frac{63}{2}$

유형 18 등비중항 본책 144쪽

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
➡ $b^2=ac$

0992 세 양수 x, $x+12$, $9x$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $(x+12)^2=x\cdot9x$

$8x^2-24x-144=0$, $x^2-3x-18=0$

$(x+3)(x-6)=0$ $\therefore x=6$ ($\because x>0$) 답 6

0993 세 수 $\sin\theta$, $\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos60°=\frac{1}{2}$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2=\sin\theta\cdot\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta+\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$ 답 ③

0994 2, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=2b$ ······ ㉠ ··· ❶

a, b, 12가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+12$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2=a+12$, $a^2-a-12=0$

$(a+3)(a-4)=0$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $16=2b$ $\therefore b=8$ ··· ❸

$\therefore a+b=12$ ··· ❹

답 12

채점 기준	비율
❶ 등비중항을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	20 %
❷ 등차중항을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0995 1이 아닌 세 양수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $b^2=ac$

$\therefore \frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}=\log_x a+\log_x c$

$=\log_x ac=\log_x b^2$

$=2\log_x b=\frac{2}{\log_b x}$ 답 ③

0996 $0.\dot{a}=\frac{a}{9}$, $0.0\dot{b}=\frac{b}{90}$, $0.00\dot{c}=\frac{c}{900}$에서 $\frac{a}{9}$, $\frac{b}{90}$, $\frac{c}{900}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\left(\frac{b}{90}\right)^2=\frac{a}{9}\cdot\frac{c}{900}$ $\quad\therefore b^2=ac$

이때 a, b, c는 $a<b<c$인 한 자리 자연수이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 2, 4)$, $(1, 3, 9)$, $(2, 4, 8)$, $(4, 6, 9)$

의 4개이다. 답 4

유형 19 등비수열을 이루는 수 본책 144쪽

등비수열을 이루는 수를 차례대로 a, ar, ar^2, ar^3, …으로 놓고 식을 세운다.

0997 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=7$ $\quad\therefore a(1+r+r^2)=7$ …… ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=8$ $\quad\therefore (ar)^3=8$ …… ㉡

㉡에서 $ar=2$ $\quad\therefore a=\frac{2}{r}$ …… ㉢

$a=\frac{2}{r}$를 ㉠에 대입하면 $\frac{2}{r}(1+r+r^2)=7$

양변에 r를 곱하여 정리하면

$2r^2-5r+2=0$, $\quad(2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$

㉢에서 $r=\frac{1}{2}$일 때 $a=4$, $r=2$일 때 $a=1$이므로 세 실수는 1, 2, 4이다.

따라서 가장 큰 수는 4이다. 답 4

0998 삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=p$

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a=156$ …… ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=216$ …… ㉡

㉡에서 $(ar)^3=216$ $\quad\therefore ar=6$

㉠에서 $ar(a+ar+ar^2)=156$이므로

$6p=156$ $\quad\therefore p=26$ 답 ②

0999 네 자연수를 a, ar, ar^2, ar^3 (a, r는 자연수, $r>1$)으로 놓으면

$ar^3\le 100$

(i) $r=2$일 때, $a\le\frac{100}{8}=12.5$에서

$a=1, 2, 3, \cdots, 12$

(ii) $r=3$일 때, $a\le\frac{100}{27}=3.\cdots$에서

$a=1, 2, 3$

(iii) $r=4$일 때, $a\le\frac{100}{64}=1.5625$에서

$a=1$

(iv) $r\ge 5$일 때, $ar^3\le 100$을 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 경우의 수는

$12+3+1=16$ 답 16

유형 20 등비수열의 활용 본책 145쪽

① 도형의 길이, 넓이, 부피 등이 일정한 비율로 변할 때
➡ 처음 몇 개의 항을 나열하여 규칙성을 파악한다.
② 처음의 양을 a, 매시간(또는 매년) 일정한 증가율을 r라 하면
➡ n시간(또는 n년) 후의 양은 $a(1+r)^n$

1000 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2=4\sqrt{3}$

1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$4\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$4\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=4\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$4\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 10회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$4\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ 답 ③

1001 주어진 정사각형의 넓이가 8이므로 한 변의 길이는

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

정사각형 T_1의 한 변의 길이는

$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

정사각형 T_2의 한 변의 길이는

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

정사각형 T_3의 한 변의 길이는

$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$ … ❶

⋮

따라서 정사각형 T_n의 한 변의 길이는

$2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}=2^{\frac{3-n}{2}}$ … ❷

$2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}=2\cdot 2^{\frac{1-n}{2}}=2^{\frac{3-n}{2}}$

즉 $f(n)=\frac{3-n}{2}$이므로

$f(99)=-48$ … ❸

답 -48

채점 기준	비율
❶ 정사각형 T_1, T_2, T_3의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ 정사각형 T_n의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(99)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1002 1월의 데이터 사용량을 a MB, 매월 데이터 사용량의 증가율을 r라 하자.

1월부터 n개월 후의 데이터 사용량은

$$a(1+r)^n$$

5개월 후인 6월의 데이터 사용량이 1월의 3배이므로

$$a(1+r)^5=3a \qquad \therefore (1+r)^5=3$$

10개월 후인 11월의 데이터 사용량이 $a(1+r)^{10}$이므로 5개월 동안 증가한 데이터 사용량은

$$a(1+r)^{10}-a(1+r)^5=a(1+r)^5\{(1+r)^5-1\}$$
$$=3a(3-1)=6a$$

즉 $6a=2400$이므로 $\quad a=400$

따라서 1월의 데이터 사용량은 400 MB이다. 답 400 MB

1003 $\cos 45°=\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\overline{OP_1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$$\overline{P_1P_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OP_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\overline{P_2P_3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{P_1P_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$\therefore \overline{P_nP_{n+1}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{10}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$에서 $\qquad n=20$

따라서 구하는 선분은 $\overline{P_{20}P_{21}}$이다. 답 ④

유형 21 등비수열의 합 본책 145쪽

주어진 조건을 이용하여 등비수열의 첫째항 a와 공비 r를 구하고 첫째항부터 제n 항까지의 합 S_n이

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

임을 이용한다. (단, $r\neq1$)

1004 $a_n=2^{2n-1}$에서

$$a_1=2,\ a_2=2^3,\ a_3=2^5,\ \cdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{2(4^{10}-1)}{4-1}=\frac{2(2^{20}-1)}{3}$$
$$=\frac{2^{21}-2}{3}$$

$\therefore p=21$ 답 ⑤

1005 주어진 수열은 첫째항이 -2, 공비가 -3인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{-2\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=-\frac{1}{2}\{1-(-3)^n\}$$

$S_k=364$에서 $\qquad -\dfrac{1}{2}\{1-(-3)^k\}=364$

$$1-(-3)^k=-728, \qquad (-3)^k=729=(-3)^6$$

$\therefore k=6$ 답 6

1006 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$a_2+a_4=ar+ar^3=10 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$a_4+a_6=ar^3+ar^5=r^2(ar+ar^3)=40 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$r^2=4 \qquad \therefore r=2\ (\because r>0)$$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$2a+8a=10 \qquad \therefore a=1$ ⋯ ❶

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$\dfrac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=1023$ ⋯ ❷

답 1023

채점 기준	비율
❶ 첫째항과 공비를 구할 수 있다.	60 %
❷ 첫째항부터 제 10 항까지의 합을 구할 수 있다.	40 %

1007 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$a_3=a_1r^2=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$a_7=a_1r^6=24 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면 $\qquad r^4=4$

r는 실수이므로 $\qquad r^2=2$

$r^2=2$를 ㉠에 대입하면

$$2a_1=6 \qquad \therefore a_1=3$$

따라서 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2$은 첫째항이 $a_1^2=9$, 공비가 $r^2=2$인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합과 같으므로

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2=\frac{9(2^{10}-1)}{2-1}$$
$$=9(2^{10}-1)$$

답 ④

1008 첫째항이 2, 공비가 5인 등비수열의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{2(5^n-1)}{5-1}=\frac{1}{2}(5^n-1)$$

$S_n\geq10^8$에서 $\qquad \dfrac{1}{2}(5^n-1)\geq10^8$

$\therefore 5^n\geq2\cdot10^8+1$ $\quad 5^n\geq2\cdot10^8+1>2\cdot10^8$

즉 $5^n>2\cdot10^8$이므로 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 5^n>\log(2\cdot10^8), \qquad n\log 5>8+\log 2$$
$$\therefore n>\frac{8+\log 2}{\log 5}=\frac{8+0.3}{1-0.3}=11.\cdots$$

따라서 첫째항부터 제12항까지의 합이 처음으로 10^8 이상이 되므로

$n=12$ 답 12

1009 주어진 수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$3+33+333+\cdots+33\cdots3$

$=\frac{1}{3}(9+99+999+\cdots+99\cdots9)$

$=\frac{1}{3}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{10}-1)\}$

$=\frac{1}{3}\{(10+10^2+10^3+\cdots+10^{10})-10\}$

$=\frac{1}{3}(10^2+10^3+\cdots+10^{10})$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{100(10^9-1)}{10-1}$

$=\frac{100}{27}(10^9-1)$

답 ④

유형 22 부분의 합이 주어진 등비수열 본책 146쪽

첫째항이 a, 공비가 $r\ (r\neq1)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$$\begin{cases} S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \\ S_{2n}=\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1} \end{cases}$$

➡ $S_{2n}\div S_n=r^n+1$

1010 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=30$ ...... ㉠

$S_{2n}=\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}=50$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^n+1=\frac{5}{3}$ $\therefore r^n=\frac{2}{3}$

$\therefore S_{3n}=\frac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$

$=30\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}+1\right\}$

$=30\cdot\frac{19}{9}=\frac{190}{3}$

답 $\frac{190}{3}$

1011 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{a(r^3-1)}{r-1}=21$ ...... ㉠

$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=-147$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3+1=-7$, $r^3=-8$

$\therefore r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$3a=21$ $\therefore a=7$

따라서 $a_n=7\cdot(-2)^{n-1}$이므로

$a_5=7\cdot(-2)^4=112$

답 ⑤

1012 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}=12$ ...... ㉠

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=a_1+a_1r^2+a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8$

$=\frac{a_1\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}$ ← 첫째항이 a_1, 공비가 r^2인 등비수열

$=\frac{a_1(r^{10}-1)}{(r+1)(r-1)}=8$ ...... ㉡

㉠÷㉡을 하면 $r+1=\frac{3}{2}$

$\therefore r=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

1013 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$

$=r+r^3+r^5+\cdots+r^{2k-1}$

$=\frac{r\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=\frac{r(r^{2k}-1)}{r^2-1}=170$ ...... ㉠ ··· ❶

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}$

$=1+r^2+r^4+\cdots+r^{2k-2}$

$=\frac{1\cdot\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=\frac{r^{2k}-1}{r^2-1}=85$ ...... ㉡ ··· ❷

㉠÷㉡을 하면 $r=2$ ··· ❸

$r=2$를 ㉡에 대입하면 $\frac{4^k-1}{4-1}=85$

$4^k-1=255$, $4^k=256=4^4$

$\therefore k=4$ ··· ❹

답 4

채점 기준	비율
❶ $a_2+a_4+\cdots+a_{2k}$를 r, k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}$을 r, k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ r의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

$a_n=a_1r^{n-1}$이면 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$

1014 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$도 등비수열이다.

등비수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_3=\frac{a(r^3-1)}{r-1}=\frac{1}{27}$ ...... ㉠

$S_6=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=3$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3+1=81$ $\therefore r^3=80$

$\therefore S_{12}=\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{a(r^6-1)(r^6+1)}{r-1}$

$=3\cdot(80^2+1)=19203$

답 19203

유형 23 등비수열의 합의 활용 본책 147쪽

처음의 양을 a, 매시간(또는 매년) 일정하게 증가 또는 감소하는 비율을 r라 하면

$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=k$ $\therefore \frac{a(1-r^n)}{1-r}=k$

1015 2001년의 전입자 수를 a라 하고, 매년 전입자 수가 전년도의 전입자 수의 r배라 하면 2001년부터 2020년까지의 전입자 수가 50만 명이므로

$$\frac{a(1-r^{20})}{1-r}=500000 \quad \cdots\cdots ㉠$$

2011년부터 2020년까지의 전입자 수가 10만 명이므로

$$\frac{ar^{10}(1-r^{10})}{1-r}=100000 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠÷㉡을 하면

$$\frac{1-r^{20}}{r^{10}(1-r^{10})}=5, \quad \frac{(1+r^{10})(1-r^{10})}{r^{10}(1-r^{10})}=5$$

$$\frac{1+r^{10}}{r^{10}}=5, \quad 1+r^{10}=5r^{10} \quad \therefore r^{10}=\frac{1}{4}$$

따라서 2021년의 전입자 수는

$$ar^{20}=a(r^{10})^2=a\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}a$$

이므로 2001년의 전입자 수의 $\frac{1}{16}$배이다. 답 ⑤

1016 V석의 구역은 1개이고 등급에 따라 구역의 개수가 4배씩 늘어나므로 전체 구역의 개수는

$$1+1\cdot4+1\cdot4^2+1\cdot4^3+1\cdot4^4=\frac{4^5-1}{4-1}=341$$

이때 한 구역의 좌석이 30개이므로 전체 좌석의 개수는

$341\cdot30=10230$ 답 10230

1017 1회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 $\underbrace{\text{한 변의 길이가 3인 정사각형의 넓이}}_{3^2=9}$의 $\frac{1}{4}$이므로

$$9\cdot\frac{1}{4}$$

2회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$$9\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

3회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$$9\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\vdots$$

따라서 시행을 10회 반복했을 때 색칠한 부분의 넓이의 합은

$$9\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

$$=\frac{\frac{9}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{4}}=3\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}$$

답 $3\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}$

1018 처음 4 km 구간을 달리는 데 걸린 시간은 $\frac{4}{8}$시간이고, 일정한 속력으로 1 km를 달리는 데 걸린 시간은 $\frac{1}{8}$시간이다.

이후 1 km를 달리는 데 걸린 시간은 $\frac{1}{8}$시간에서 10 %씩 증가하므로 전체 걸린 시간은

$$\frac{4}{8}+\underbrace{\frac{1}{8}\times1.1+\frac{1}{8}\times1.1^2+\cdots+\frac{1}{8}\times1.1^6}_{6\text{ km를 달리는 데 걸린 시간}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{8}\times1.1\times(1.1^6-1)}{1.1-1}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{8}\times1.1\times0.8}{0.1}=\frac{8}{5}$$

따라서 완주하는 데 걸린 시간은 $\frac{8}{5}$시간, 즉 1시간 36분이다.

답 ④

유형 24 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계

본책 147쪽

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 주어진 경우에는
(ⅰ) $a_1=S_1$
(ⅱ) $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq2)$
임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

1019 $S_n+100=10^{n+2}$에서 $S_n=10^{n+2}-100$

(ⅰ) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=10^3-100=900$$

(ⅱ) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=10^{n+2}-100-(10^{n+1}-100)$$
$$=10^{n+1}(10-1)=9\cdot10^{n+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=900$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=9\cdot10^{n+1}$$

따라서 $p=9$, $q=10$이므로

$p-q=-1$ 답 ②

1020 ㄱ. $a_1=S_1=5^1-2=3$,

$a_3=S_3-S_2=123-23=100$

$\therefore a_1+a_3=103$

ㄴ. $a_n=S_n-S_{n-1}=5^n-2-(5^{n-1}-2)$

$=5^{n-1}(5-1)=4\cdot5^{n-1}$ $(n\geq2)$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=3$, $a_n=4\cdot5^{n-1}$ $(n\geq2)$

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 공비가 5인 등비수열을 이루므로 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=4\cdot5^{2-1}=20$, 공비가 $5^2=25$인 등비수열이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1021 $S_n=2\cdot3^{n+1}+k$에서

(ⅰ) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=2\cdot3^2+k=18+k \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ⅱ) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2\cdot3^{n+1}+k-(2\cdot3^n+k)$$
$$=2\cdot3^n(3-1)=4\cdot3^n \quad \cdots\cdots ㉡$$

이 수열이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 것과 ㉠이 같아야 하므로

$12=18+k$ $\therefore k=-6$ 답 -6

1022 $S_n=2^{n+1}-2$에서

(i) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=2^2-2=2$$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2-(2^n-2)$$
$$=2^n(2-1)=2^n \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2^n \qquad \cdots ❶$$

$$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=2+2^3+2^5+2^7+2^9$$
$$=\frac{2\{(2^2)^5-1\}}{2^2-1}$$
$$=682 \qquad \cdots ❷$$

답 682

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	60 %
❷ $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 25 원리합계

본책 148쪽

연이율이 r이고 1년마다 복리로 매년 초에 a원씩 n년 동안 적립할 때, n년째 말의 적립금의 원리합계 S_n은

$$S_n=a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$$
$$=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}\text{ (원)}$$

1023 매년 초에 100만 원씩 적립하면 5년째 말의 적립금의 원리합계는

$$100(1+0.04)+100(1+0.04)^2+\cdots+100(1+0.04)^5$$
$$=\frac{100\times1.04\times(1.04^5-1)}{1.04-1}=\frac{100\times1.04\times0.2}{0.04}$$
$$=520\text{ (만 원)}$$

답 520만 원

1024 매년 초에 적립하는 금액을 a만 원이라 하면 3년째 말의 적립금의 원리합계는

$$a(1+0.05)+a(1+0.05)^2+a(1+0.05)^3$$
$$=\frac{a\times1.05\times(1.05^3-1)}{1.05-1}=\frac{a\times1.05\times0.16}{0.05}$$
$$=3.36a\text{ (만 원)}$$

$3.36a=420$이므로 $\qquad a=125$

따라서 매년 초에 125만 원씩 적립해야 한다.

답 ④

1025 지우와 민석이가 각각 24개월, 12개월째 말에 받는 금액을 A만 원, B만 원이라 하면

$$A=10(1+0.003)+10(1+0.003)^2+\cdots+10(1+0.003)^{24}$$
$$=\frac{10\times1.003\times(1.003^{24}-1)}{1.003-1}$$
$$=\frac{10030(1.003^{24}-1)}{3}$$

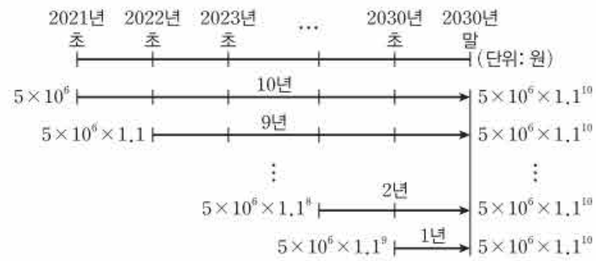
$$B=20(1+0.003)+20(1+0.003)^2+\cdots+20(1+0.003)^{12}$$
$$=\frac{20\times1.003\times(1.003^{12}-1)}{1.003-1}$$
$$=\frac{20060(1.003^{12}-1)}{3}$$

$$\therefore \frac{A}{B}=\frac{10030(1.003^{24}-1)}{3}\cdot\frac{3}{20060(1.003^{12}-1)}$$
$$=\frac{1.003^{12}+1}{2}=\frac{1.04+1}{2}$$
$$=1.02$$

따라서 지우가 받는 금액은 민석이가 받는 금액의 1.02배이다.

답 ①

1026 매년 초 적립금의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 2030년 말의 적립금의 원리합계는

$$5\times10^6\times1.1^{10}\times10=5\times1.1^{10}\times10^7$$
$$=5\times2.6\times10^7$$
$$=13\times10^7\text{ (원)}$$

즉 1억 3천만 원이다.

답 1억 3천만 원

1027 1st a_{n+1}이 a_n과 a_{n+2}의 등차중항임을 이용하여 식을 세운다.

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 세 수 a_n, a_{n+1}, a_{n+2}는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$$\therefore 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

2nd 주어진 이차방정식의 해를 구한다.

㉠을 주어진 이차방정식에 대입하면

$$a_nx^2-(a_n+a_{n+2})x+a_{n+2}=0$$
$$(x-1)(a_nx-a_{n+2})=0$$
$$\therefore x=1\text{ 또는 }x=\frac{a_{n+2}}{a_n}\ (\because a_n\ne0)$$

3rd 등차수열 $\left\{\frac{b_n+1}{b_n-1}\right\}$의 공차를 구한다.

$b_n\ne1$이므로 $\qquad b_n=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$

$$\therefore \frac{b_n+1}{b_n-1}=\frac{\frac{a_{n+2}}{a_n}+1}{\frac{a_{n+2}}{a_n}-1}=\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+2}-a_n}\ (\because a_n\ne0)$$
$$=\frac{2a_{n+1}}{a_{n+2}-a_n}\ (\because \text{㉠})$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\frac{b_n+1}{b_n-1}=\frac{2a_1+2nd}{2d}=n+\frac{a_1}{d}=\left(\frac{a_1}{d}+1\right)+(n-1)\cdot1$$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{b_n+1}{b_n-1}\right\}$의 공차는 1이다.

답 1

1028 1st 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표가 등차수열을 이룸을 이용하여 식을 세운다.

두 곡선 $y=x^3+a^2x+2a$, $y=6x^2+8$의 세 교점의 x좌표는 방정식

$x^3+a^2x+2a=6x^2+8$, 즉 $x^3-6x^2+a^2x+2(a-4)=0$

의 세 실근과 같다.

이 방정식의 세 실근을 $\alpha-d$, α, $\alpha+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-d)+\alpha+(\alpha+d)=6$ …… ㉠

$(\alpha-d)\alpha+\alpha(\alpha+d)+(\alpha+d)(\alpha-d)=a^2$ …… ㉡

$(\alpha-d)\alpha(\alpha+d)=-2(a-4)$ …… ㉢

2nd d의 값을 구한다.

㉠에서 $3\alpha=6$ $\therefore \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉡에 대입하면

$(2-d)\cdot2+2(2+d)+(2+d)(2-d)=a^2$

$\therefore 12-d^2=a^2$ …… ㉣

$\alpha=2$를 ㉢에 대입하면

$(2-d)\cdot2\cdot(2+d)=-2(a-4)$

$\therefore a=d^2$ …… ㉤

㉤을 ㉣에 대입하면 $12-d^2=d^4$

$d^4+d^2-12=0$, $(d^2+4)(d^2-3)=0$

$d^2+4>0$이므로 $d^2=3$

$\therefore d=\sqrt{3}$ ($\because d>0$) 답 ②

1029 1st 수열 $\{a_n\}$의 각 항의 부호를 구하고, 이를 이용하여 T_5를 나타낸다.

조건 ㈎에서 $a_5<0$, $a_6>0$이므로

$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<0<a_6<a_7<\cdots$

$\therefore T_5=|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|$

$=-a_1-a_2-a_3-a_4-a_5$

2nd 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $d>0$이고 조건 ㈏에서 $T_5=S_5+70$이므로

$-a_1-a_2-a_3-a_4-a_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+70$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-35$

$\frac{5(2a_1+4d)}{2}=-35$

$\therefore a_1+2d=-7$, 즉 $a_3=-7$

$a_5=a_3+2d<0$에서 $-7+2d<0$ $\therefore d<\frac{7}{2}$

$a_6=a_3+3d>0$에서 $-7+3d>0$ $\therefore d>\frac{7}{3}$

즉 $\frac{7}{3}<d<\frac{7}{2}$이고 d는 정수이므로 $d=3$

3rd $S_{10}+T_{10}$의 값을 구한다.

$a_1+2d=-7$에서

$a_1=-7-2d=-7-2\cdot3=-13$

$\therefore S_{10}=\frac{10\{2\cdot(-13)+9\cdot3\}}{2}=5$

조건 ㈏에서 $T_{10}=S_{10}+70=75$이므로

$S_{10}+T_{10}=5+75=80$ 답 ①

1030 1st 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 이용하여 주어진 식을 m, k, d에 대한 식으로 나타낸다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 30이고 공차가 $-d$이므로

$a_n=30+(n-1)\cdot(-d)=30-(n-1)d$

$\therefore a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}$

$=\frac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}$

$=\frac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2}=0$

2nd d의 조건을 구한다.

$k+1>0$이므로

$(2m+k-2)d=60$ $\therefore 2m+k=2+\frac{60}{d}$

위의 식을 만족시키는 두 자연수 m, k가 존재하려면 d는 60의 양의 약수이어야 한다.

3rd 자연수 d의 개수를 구한다.

$60=2^2\cdot3\cdot5$이므로 구하는 d의 개수는

$(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=12$ 답 ②

1031 1st 등차수열 $\{a_n\}$에서 등차중항과 조건 ㈎를 이용하여 a_{k-2}의 값을 구한다.

a_{k-3}, a_{k-2}, a_{k-1}이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a_{k-2}=a_{k-3}+a_{k-1}$

조건 ㈎에서 $a_{k-3}+a_{k-1}=-24$이므로

$2a_{k-2}=-24$ $\therefore a_{k-2}=-12$

2nd 조건 ㈏를 이용하여 k의 값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{k\{(a_3-2d)+(a_{k-2}+2d)\}}{2}$

$=\frac{k(a_3+a_{k-2})}{2}=\frac{k\{42+(-12)\}}{2}$

$=15k$

조건 ㈏에서 $S_k=k^2$이므로

$15k=k^2$, $k(k-15)=0$

$\therefore k=15$ ($\because k$는 자연수) 답 ③

SSEN 특강

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 공차를 d라 하면

$a_1+a_n=a_1+\{a_1+(n-1)d\}=2a_1+(n-1)d$,

$a_2+a_{n-1}=(a_1+d)+\{a_1+(n-2)d\}=2a_1+(n-1)d$,

$a_3+a_{n-2}=(a_1+2d)+\{a_1+(n-3)d\}=2a_1+(n-1)d$,

⋮

이므로 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\frac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$

1032 1st S_{10}, S_{20}의 값을 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}=430$

$\therefore 2a+9d=86$ …… ㉠

$$S_{20}=\frac{20(2a+19d)}{2}=660$$

$\therefore 2a+19d=66$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=52,\ d=-2$

(2nd) a_{2n}을 구한다.

$a_n=52+(n-1)\cdot(-2)=-2n+54$이므로

$a_{2n}=-4n+54$

(3rd) $|a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}|$이 최소가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구한다.

$a_{2n}=-4n+54=50+(n-1)\cdot(-4)$에서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열이므로

$$|a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}|=\left|\frac{n\{2\cdot50+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}\right|=|-2n^2+52n|$$

이때 $|-2n^2+52n|$의 값이 최소이려면

$-2n^2+52n=0,\quad n(n-26)=0$

$\therefore n=26$ ($\because$ n은 자연수)

답 26

1033 (1st) 조건 (가)를 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (r>1)$라 하면

조건 (가)에서 $a_3\times a_5\times a_7=125$이므로

$ar^2\cdot ar^4\cdot ar^6=125,\quad a^3r^{12}=125$

$(ar^4)^3=125=5^3\quad \therefore ar^4=5$ …… ㉠

(2nd) 조건 (나)를 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비에 대한 식으로 정리한 후 r^2의 값을 구한다.

조건 (나)에서 $\dfrac{a_4+a_8}{a_6}=\dfrac{13}{6}$이므로

$\dfrac{ar^3+ar^7}{ar^5}=\dfrac{13}{6},\quad \dfrac{1+r^4}{r^2}=\dfrac{13}{6}$

$6(1+r^4)=13r^2,\quad 6r^4-13r^2+6=0$

$r^2=X$로 놓으면 $\quad 6X^2-13X+6=0$

$(3X-2)(2X-3)=0\quad \therefore X=\dfrac{2}{3}$ 또는 $X=\dfrac{3}{2}$

즉 $r^2=\dfrac{2}{3}$ 또는 $r^2=\dfrac{3}{2}$이고 $r>1$에서 $r^2>1$이므로

$r^2=\dfrac{3}{2}$ …… ㉡

(3rd) a_9의 값을 구한다.

㉠, ㉡에서

$a_9=ar^8=ar^4\cdot r^4=5\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{45}{4}$

답 ②

1034 (1st) a_n과 a_{n+1} 사이의 규칙을 찾아 ㄱ, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $a_1=\dfrac{1}{2},\ a_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^2},\ a_3=\dfrac{1}{2^2}\cdot\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{2^4},$

$a_4=\dfrac{1}{2^4}\cdot\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{2^8},\ a_5=\dfrac{1}{2^8}\cdot\dfrac{1}{2^8}=\dfrac{1}{2^{16}}$

ㄴ. ㄱ에서 $a_{n+1}=a_n^{\ 2}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}+\frac{a_5}{a_4}+\frac{a_6}{a_5}=\frac{a_1^{\ 2}}{a_1}+\frac{a_2^{\ 2}}{a_2}+\frac{a_3^{\ 2}}{a_3}+\frac{a_4^{\ 2}}{a_4}+\frac{a_5^{\ 2}}{a_5}=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

($\because a_n\neq0$)

(2nd) 수열 $\left\{\log_2\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$의 규칙을 찾아 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n}{a_n^{\ 2}}=\dfrac{1}{a_n}$이므로

$b_n=\log_2\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\log_2\dfrac{1}{a_n}$

이라 하면

$b_1=\log_2 2=1,\ b_2=\log_2 2^2=2,\ b_3=\log_2 2^4=4,\ \cdots$

즉 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이므로

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=\dfrac{2^{10}-1}{2-1}=1023$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

1035 (1st) $m=200$일 때 공비에 대한 조건을 구한다.

$A(200)$은 첫째항이 3이고 공비가 2 이상의 자연수인 등비수열의 제k항이 3×2^{200}이 되는 모든 k의 값의 합이다.

이때

$2^{200}=(2^1)^{200}=(2^2)^{100}=(2^4)^{50}=\cdots=(2^{200})^1$

이므로 공비가 될 수 있는 수는

$2^1,\ 2^2,\ 2^4,\ \cdots,\ 2^{200}$

즉 공비를 2^p(p는 자연수)이라 하면 p는 200의 약수이다.

(2nd) k의 값을 구한다.

(i) 공비가 2^1일 때, 제k항은 $3\cdot2^{k-1}$이므로

$k-1=200\quad \therefore k=201$

(ii) 공비가 2^2일 때, 제k항은 $3\cdot(2^2)^{k-1}=3\cdot2^{2(k-1)}$이므로

$2(k-1)=200\quad \therefore k=101$

(iii) 공비가 2^4일 때, 제k항은 $3\cdot(2^4)^{k-1}=3\cdot2^{4(k-1)}$이므로

$4(k-1)=200\quad \therefore k=51$

⋮

이상에서 k의 값은 201, 101, 51, ⋯, 2, 즉 $200+1,\ 100+1,\ 50+1,\ \cdots,\ 1+1$이다.

(3rd) $A(200)$의 값을 구한다.

$200=2^3\cdot5^2$에서 200의 약수의 개수는

$(3+1)\cdot(2+1)=12$

이므로

$$\begin{aligned}A(200)&=(200+1)+(100+1)+(50+1)+\cdots+(1+1)\\&=(200\text{의 약수의 합})+1\cdot12\\&=(1+2+2^2+2^3)\cdot(1+5+5^2)+12\\&=15\cdot31+12=477\end{aligned}$$

답 477

SSEN 특강 약수의 합

$200=2^3\cdot5^2$에서 200의 약수는 오른쪽과 같으므로

	1	5	5^2
1	$1\cdot1$	$1\cdot5$	$1\cdot5^2$
2	$2\cdot1$	$2\cdot5$	$2\cdot5^2$
2^2	$2^2\cdot1$	$2^2\cdot5$	$2^2\cdot5^2$
2^3	$2^3\cdot1$	$2^3\cdot5$	$2^3\cdot5^2$

$$\begin{aligned}&(200\text{의 약수의 합})\\&=(1+2+2^2+2^3)\cdot1\\&\quad+(1+2+2^2+2^3)\cdot5\\&\quad+(1+2+2^2+2^3)\cdot5^2\\&=(1+2+2^2+2^3)\cdot(1+5+5^2)\end{aligned}$$

즉 $N=a^m\cdot b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)의 약수의 합은

$(1+a+a^2+\cdots+a^m)\cdot(1+b+b^2+\cdots+b^n)$

1036 (1st) 주어진 조건을 이용하여 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비에 대한 식을 세운다.

$S_{n+3}-S_n=13\times3^{n-1}$에서

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\cdot3^{n-1}$$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$n=1$일 때, $a_2+a_3+a_4=13$이므로

$$ar+ar^2+ar^3=13$$

$$\therefore ar(1+r+r^2)=13 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$n=2$일 때, $a_3+a_4+a_5=39$이므로

$$ar^2+ar^3+ar^4=39$$

$$\therefore ar^2(1+r+r^2)=39 \quad \cdots\cdots ㉡$$

(2nd) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구한다.

㉡÷㉠을 하면 $\quad r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$$3a(1+3+3^2)=13 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$$

(3rd) a_4의 값을 구한다.

$a_n=\frac{1}{3}\cdot3^{n-1}=3^{n-2}$이므로

$$a_4=3^{4-2}=9$$

답 9

1037 (1st) $(2011+n)$년 초에 통장에 남아 있는 금액을 a_n원이라 하고 a_{10}의 값을 구한다.

$(2011+n)$년 초에 통장에 남아 있는 금액을 a_n원이라 하면

$$a_1=10^8\times1.05-10^7$$

$$a_2=a_1\times1.05-10^7=10^8\times1.05^2-10^7(1.05+1)$$

$$a_3=a_2\times1.05-10^7=10^8\times1.05^3-10^7(1.05^2+1.05+1)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\therefore a_{10}&=a_9\times1.05-10^7\\&=10^8\times1.05^{10}-10^7(1.05^9+\cdots+1.05+1)\\&=10^8\times1.05^{10}-10^7\times\frac{1.05^{10}-1}{1.05-1}\\&=10^8\times1.63-10^7\times\frac{1.63-1}{0.05}\\&=3.7\times10^7\end{aligned}$$

따라서 2021년 초에 통장에 남아 있는 금액은 3700만 원이다.

답 3700만 원

1038 전략 수열 $\{b_n\}$의 홀수 번째 항의 합과 짝수 번째 항의 합을 각각 구한 다음 $a_2-a_1=a_4-a_3=a_6-a_5=$(공차)임을 이용한다.

풀이 $b_1+b_3+b_5=a_1+(a_1-2a_3)+(a_1-2a_3+3a_5)$

$$=3a_1-4a_3+3a_5$$

$b_2+b_4+b_6=-a_2+(-a_2+2a_4)+(-a_2+2a_4-3a_6)$

$$=-3a_2+4a_4-3a_6 \quad \cdots ❶$$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\begin{aligned}&b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6\\&=3a_1-4a_3+3a_5-3a_2+4a_4-3a_6\\&=-3(a_2-a_1)+4(a_4-a_3)-3(a_6-a_5)\\&=-3d+4d-3d=-2d\end{aligned}$$

즉 $-2d=10$이므로 $\quad d=-5$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 공차는 -5이다. $\cdots$ ❷

답 -5

채점 기준	비율
❶ $b_1+b_3+b_5$, $b_2+b_4+b_6$을 a_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 공차를 구할 수 있다.	50 %

1039 전략 5개의 삼각형의 넓이를 $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$로 놓고 주어진 조건을 이용한다.

풀이 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5를 차례대로

$$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d\ (d>0)$$

라 하면 5개의 삼각형의 넓이의 합은 정삼각형의 넓이와 같으므로

$$5a=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot10^2 \qquad \therefore a=5\sqrt{3}$$

$$\therefore a_3=5\sqrt{3} \quad \cdots ❶$$

$a_5=1.5a_1$, 즉 $a+2d=\frac{3}{2}(a-2d)$이므로

$$5d=\frac{a}{2} \qquad \therefore d=\frac{a}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots ❷$$

$$\begin{aligned}\therefore a_2a_4&=(a-d)(a+d)=a^2-d^2\\&=(5\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{297}{4}\end{aligned} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{297}{4}$

채점 기준	비율
❶ a_3의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ d의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a_2a_4의 값을 구할 수 있다.	30 %

1040 전략 등차수열의 합의 공식을 이용하여 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공차가 5이므로

$$\begin{aligned}a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n&=\frac{n\{2\cdot2+(n-1)\cdot5\}}{2}\\&=\frac{n(5n-1)}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=\frac{5n-1}{2} \quad \cdots ❶$$

$b_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$으로 놓으면

$$b_{2n-1}=\frac{5(2n-1)-1}{2}=5n-3$$

따라서 수열 $\{b_{2n-1}\}$은 첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{25}=\frac{13(b_1+b_{25})}{2}\\&=\frac{13(2+62)}{2}=416\end{aligned} \quad \cdots ❷$$

답 416

채점 기준	비율
❶ $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

다른 풀이 $a_n=2+(n-1)\cdot5=5n-3$이고

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}=\frac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}$$

이때 a_n은 a_1과 a_{2n-1}의 등차중항이므로

$$a_n=\frac{a_1+a_{2n-1}}{2}$$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}=(2n-1)a_n$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식})&=a_1+\frac{3a_2}{3}+\frac{5a_3}{5}+\cdots+\frac{25a_{13}}{25}\\&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{13}\\&=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}\\&=\frac{13(2+62)}{2}=416\end{aligned}$$

1041 **전략** 등차수열의 합의 공식을 이용하여 S_k, S_{k+3}을 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 공차가 2이므로

$S_k=-15$에서 $\quad \dfrac{k\{2a+(k-1)\cdot2\}}{2}=-15$

$k(a+k-1)=-15$

$\therefore k^2+ak=k-15 \quad \cdots\cdots ㉠$

$S_{k+3}=-12$에서 $\quad \dfrac{(k+3)\{2a+(k+2)\cdot2\}}{2}=-12$

$(k+3)(a+k+2)=-12$

$\therefore k^2+ak=-5k-3a-18 \quad \cdots\cdots ㉡ \quad$ ⋯ ❶

㉠, ㉡에서 $\quad k-15=-5k-3a-18$

$3a=-6k-3 \quad \therefore a=-2k-1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$k^2+(-2k-1)k=k-15$

$k^2+2k-15=0, \quad (k+5)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k$는 자연수)

$k=3$을 ㉢에 대입하면

$a=-2\cdot3-1=-7$ ⋯ ❷

따라서 $a_n=-7+(n-1)\cdot2=2n-9$이므로

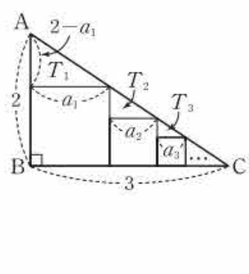
$a_{3k}=a_9=2\cdot9-9=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 a, k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a, k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a_{3k}의 값을 구할 수 있다.	20 %

1042 **전략** 삼각형의 닮음비를 이용하여 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 알고, 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 구한다.

풀이 오른쪽 그림의 삼각형 T_1과 삼각형 ABC는 닮음이므로



$(2-a_1):a_1=2:3$

$6-3a_1=2a_1$

$\therefore a_1=\dfrac{6}{5}$ ⋯ ❶

삼각형 T_2와 삼각형 ABC도 닮음이므로

$(a_1-a_2):a_2=2:3, \quad 3a_1-3a_2=2a_2$

$\therefore a_2=\dfrac{3}{5}a_1=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{6}{5}$

삼각형 T_3과 삼각형 ABC도 닮음이므로

$(a_2-a_3):a_3=2:3, \quad 3a_2-3a_3=2a_3$

$\therefore a_3=\dfrac{3}{5}a_2=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\dfrac{6}{5}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{6}{5}$, 공비가 $\dfrac{3}{5}$인 등비수열이므로

$a_n=\dfrac{6}{5}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$ ⋯ ❷

$\therefore \dfrac{1}{2}a_9=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^8=\left(\dfrac{3}{5}\right)^9$ ⋯ ❸

답 $\left(\dfrac{3}{5}\right)^9$

채점 기준	비율
❶ a_1의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	60 %
❸ $\frac{1}{2}a_9$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1043 **전략** 등차수열과 등비수열의 성질을 이용한다.

풀이 각 행의 등차수열의 공차를 d라 하면 $a_{20}=a_{14}+6d$이므로

$13=11+6d \quad \therefore d=\dfrac{1}{3}$ ⋯ ❶

$a_{14}=a_{11}+3d$이므로 $\quad a_{11}=11-3\cdot\dfrac{1}{3}=10$

또 $a_{37}=a_{31}+6d$이므로 $\quad a_{31}=22-6\cdot\dfrac{1}{3}=20$

등비수열 a_1, a_{11}, a_{21}, $\cdots$, a_{91}의 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_{31}=a_{11}r^2$이므로 $\quad 20=10\cdot r^2$

$r^2=2 \quad \therefore r=\sqrt{2}$ ($\because r>0$) ⋯ ❷

따라서 $a_{11}=a_1r$에서 $\quad 10=\sqrt{2}a_1 \quad \therefore a_1=5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}&\therefore a_1+a_{12}+a_{23}+a_{34}+\cdots+a_{100}\\&=a_1+(a_1r+d)+(a_1r^2+2d)+(a_1r^3+3d)\\&\quad+\cdots+(a_1r^9+9d)\\&=a_1(1+r+r^2+\cdots+r^9)+45d\\&=\frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}+45\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{5\sqrt{2}\{(\sqrt{2})^{10}-1\}}{\sqrt{2}-1}+15\\&=\frac{155\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+15\\&=155\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+15\\&=325+155\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $p=325$, $q=155$이므로

$p+q=480$ ⋯ ❸

답 480

채점 기준	비율
❶ d의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ r의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	50 %

09 수열의 합

1044 $\sum_{k=1}^{5} 3k = 3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+3\cdot4+3\cdot5$
$=3+6+9+12+15$

답 $3+6+9+12+15$

1045 $\sum_{n=1}^{7} 2^n = 2^1+2^2+2^3+\cdots+2^7$
$=2+4+8+\cdots+128$

답 $2+4+8+\cdots+128$

1046 $\sum_{i=1}^{n}(4i+3)=(4\cdot1+3)+(4\cdot2+3)+(4\cdot3+3)$
$+\cdots+(4n+3)$
$=7+11+15+\cdots+(4n+3)$

답 $7+11+15+\cdots+(4n+3)$

1047 $\sum_{j=1}^{n} j(j+2)=1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+n(n+2)$
$=3+8+15+\cdots+n(n+2)$

답 $3+8+15+\cdots+n(n+2)$

1048 답 $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

1049 답 $\sum_{k=1}^{n} 3^k$

1050 주어진 수열의 제 k 항을 a_k라 하면

$a_k=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

$\frac{1}{729}=\left(-\frac{1}{3}\right)^6$이므로

$-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{729}=\sum_{k=1}^{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

답 $\sum_{k=1}^{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

1051 $\sum_{k=1}^{10}(-a_k+3b_k)=-\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k$
$=-4+3\cdot7=17$

답 17

1052 $\sum_{k=1}^{10}4(2a_k-5b_k)=\sum_{k=1}^{10}(8a_k-20b_k)$
$=8\sum_{k=1}^{10}a_k-20\sum_{k=1}^{10}b_k$
$=8\cdot4-20\cdot7=-108$

답 -108

1053 $\sum_{k=1}^{10}(k^2+3)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-2)=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+3)-(k^2-2)\}$
$=\sum_{k=1}^{10}5=5\cdot10=50$

답 50

1054 $\sum_{k=1}^{8}(k-2)^2-\sum_{k=1}^{8}(k^2-4k)$
$=\sum_{k=1}^{8}\{(k-2)^2-(k^2-4k)\}$
$=\sum_{k=1}^{8}\{(k^2-4k+4)-(k^2-4k)\}$
$=\sum_{k=1}^{8}4=4\cdot8=32$

답 32

1055 $\sum_{k=1}^{10}(k^2-k+1)=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$
$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-\frac{10\cdot11}{2}+1\cdot10$
$=385-55+10=340$

답 340

1056 $\sum_{k=1}^{10}k(k-1)(2k+1)$
$=\sum_{k=1}^{10}(2k^3-k^2-k)$
$=2\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k$
$=2\cdot\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2-\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-\frac{10\cdot11}{2}$
$=6050-385-55=5610$

답 5610

1057 $4^2+5^2+6^2+\cdots+20^2=\sum_{k=4}^{20}k^2=\sum_{k=1}^{20}k^2-\sum_{k=1}^{3}k^2$
$=\frac{20\cdot21\cdot41}{6}-\frac{3\cdot4\cdot7}{6}$
$=2870-14=2856$

답 2856

다른 풀이 $4^2+5^2+6^2+\cdots+20^2=\sum_{k=1}^{17}(k+3)^2=\sum_{k=1}^{17}(k^2+6k+9)$
$=\sum_{k=1}^{17}k^2+6\sum_{k=1}^{17}k+\sum_{k=1}^{17}9$
$=\frac{17\cdot18\cdot35}{6}+6\cdot\frac{17\cdot18}{2}+9\cdot17$
$=1785+918+153=2856$

1058 $3\cdot6+5\cdot10+7\cdot14+\cdots+21\cdot42$
$=\sum_{k=1}^{10}(2k+1)(4k+2)$
$=\sum_{k=1}^{10}(8k^2+8k+2)$
$=8\sum_{k=1}^{10}k^2+8\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}2$
$=8\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+8\cdot\frac{10\cdot11}{2}+2\cdot10$
$=3080+440+20=3540$

답 3540

1059 (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$
$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$
$+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$
$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

답 $\frac{n}{n+1}$

1060 (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

답 $\frac{n}{2n+1}$

1061 (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=2\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$$

$$=2(\sqrt{n+1}-1)$$

답 $2(\sqrt{n+1}-1)$

1062 $\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(k+2)}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{29}{45}$$

답 $\frac{29}{45}$

1063 $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+3}}$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+3})}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+1})$$

$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{12}-\sqrt{10})+(\sqrt{13}-\sqrt{11})\}$$

$$=\frac{1}{2}(-\sqrt{2}\underbrace{-\sqrt{3}+\sqrt{12}}_{-\sqrt{3}+\sqrt{12}=-\sqrt{3}+2\sqrt{3}=\sqrt{3}}+\sqrt{13})$$

$$=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{13}}{2}$$

답 $\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{13}}{2}$

유형 01 기호 Σ

본책 154쪽

① $\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

② $\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$

③ $\sum_{k=1}^{n}ka_k=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$

④ $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

1064 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$$

이므로 $\sum_{k=1}^{2n}a_k=4n^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=4\cdot10^2=400$

답 ③

1065 $\sum_{k=1}^{18}f(k+2)-\sum_{k=3}^{20}f(k-1)$

$=\{f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(20)\}$

$\quad-\{f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(19)\}$

$=f(20)-f(2)=30-4=26$

답 26

1066 ㄱ. $\sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_9+a_{10}$

$$=(a_1+a_3+\cdots+a_9)+(a_2+a_4+\cdots+a_{10})$$

$$=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$$

ㄴ. $1-1+1-1+1-1=\sum_{k=1}^{6}(-1)^{k-1}$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\sum_{k=2}^{11}(k-1)^3$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

1067 $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)^2+\sum_{k=1}^{10}(2k)^2$

$=(1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2)+(2^2+4^2+6^2+\cdots+20^2)$

$=1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

$=\sum_{k=1}^{20}k^2=\sum_{k=0}^{19}(k+1)^2$

답 ②

1068 $\sum_{k=1}^{10}ka_k=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}$

$=100$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{10}ka_{k+1}=a_2+2a_3+3a_4+\cdots+9a_{10}+10a_{11}$

$=40$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}-10a_{11}=60$

$\sum_{k=1}^{10}a_k-10a_{11}=60$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=60+10a_{11}=60+10\cdot2=80$

답 80

1069 $a_8=S_8-S_7$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{9}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{8}(2k-1)^2\right\}-\left\{\sum_{k=1}^{8}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{7}(2k-1)^2\right\}$$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{9}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{8}(2k+1)^2\right\}-\left\{\sum_{k=1}^{8}(2k-1)^2-\sum_{k=1}^{7}(2k-1)^2\right\}$$

$$=(2\cdot9+1)^2-(2\cdot8-1)^2$$

$$=19^2-15^2=136$$

답 136

다른 풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n+1}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

$=\{3^2+5^2+\cdots+(2n+3)^2\}$
$\quad-\{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\}$
$=(2n+1)^2+(2n+3)^2-1^2$
$=8n^2+16n+9$

$\therefore a_8=S_8-S_7$
$=8\cdot8^2+16\cdot8+9-(8\cdot7^2+16\cdot7+9)=136$

유형 02 특정한 값이 반복되는 수열의 합 본책 154쪽

수열 $\{a_n\}$의 각 항이 특정한 값이 반복되어 나타날 때, $\sum_{k=1}^{n}a_k$는 같은 값을 갖는 항의 개수를 이용하여 구한다.

1070 자연수 k에 대하여

(i) $n=2k-1$일 때,
$n^2=(2k-1)^2=4(k^2-k)+1$이므로 $\quad a_{2k-1}=1$

(ii) $n=2k$일 때,
$n^2=(2k)^2=4k^2$이므로 $\quad a_{2k}=0$

$\therefore \sum_{n=1}^{2000}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1999}+a_{2000}$
$=\underbrace{1+0+1+\cdots+1+0}_{1\text{이 }1000\text{개, }0\text{이 }1000\text{개}}$
$=1\cdot1000=1000$ 답 ③

1071 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 중 1이 a개, 2가 b개라 하면

$\sum_{i=1}^{n}x_i=1\cdot a+2\cdot b=13$

$\therefore a+2b=13$ …… ㉠

$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1^2\cdot a+2^2\cdot b=23$

$\therefore a+4b=23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3, b=5$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}x_i^5=1^5\cdot3+2^5\cdot5=163$ 답 163

1072 $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $\quad 2x-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $\quad 4x^2-4x+1=-3, \quad x^2-x+1=0$

양변에 $x+1$을 곱하면 $\quad (x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^3+1=0 \quad \therefore x^3=-1$

따라서 k가 3의 배수일 때 x^k이 실수이므로

$f(1)=f(2)=0,$
$f(3)=f(4)=f(5)=1,$
$f(6)=f(7)=f(8)=2,$
$f(9)=f(10)=f(11)=3,$
$\vdots$
$f(27)=f(28)=f(29)=9,$
$f(30)=10$

$\therefore \sum_{n=1}^{30}f(n)=3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+\cdots+3\cdot9+10$
$=3(1+2+3+\cdots+9)+10$
$=3\cdot45+10=145$ 답 145

유형 03 Σ의 성질 본책 155쪽

① $\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k$ (단, p, q는 상수)

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k+c)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2c\sum_{k=1}^{n}a_k+c^2n$ (단, c는 상수)

1073 $\sum_{k=1}^{10}(3a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(9a_k^2-6a_k+1)$
$=9\sum_{k=1}^{10}a_k^2-6\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$
$=9\cdot8-6\cdot4+1\cdot10=58$ 답 ②

1074 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)$
$=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$ ⋯ ❶

이므로 $\quad 100=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+2\cdot30$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=40$ ⋯ ❷

답 40

채점 기준	비율
❶ $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2$을 변형할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

1075 $\sum_{k=1}^{n}a_k=7n$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=-3n^2$에 $n=10$을 각각 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}a_k=7\cdot10=70$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=-3\cdot10^2=-300$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k+6)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}6$
$=2\cdot70-(-300)+6\cdot10$
$=500$ 답 ③

1076 $\sum_{k=11}^{20}(3b_k-2a_k)=3\sum_{k=11}^{20}b_k-2\sum_{k=11}^{20}a_k$
$=3\left(\sum_{k=1}^{20}b_k-\sum_{k=1}^{10}b_k\right)-2\left(\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k\right)$
$=3(60-20)-2(42-12)$
$=60$ 답 60

1077 $\sum_{k=1}^{30}(a_k+1)^2=56$에서 $\quad \sum_{k=1}^{30}(a_k^2+2a_k+1)=56$

$\sum_{k=1}^{30}a_k^2+2\sum_{k=1}^{30}a_k+\sum_{k=1}^{30}1=56$

$\sum_{k=1}^{30}a_k^2+2\sum_{k=1}^{30}a_k+1\cdot30=56$

$\therefore \sum_{k=1}^{30}a_k^2+2\sum_{k=1}^{30}a_k=26$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{30}a_k(a_k+1)=24$에서 $\quad \sum_{k=1}^{30}(a_k^2+a_k)=24$

$\therefore \sum_{k=1}^{30}a_k^2+\sum_{k=1}^{30}a_k=24$ …… ㉡

㉡$\times2-$㉠을 하면 $\quad \sum_{k=1}^{30}a_k^2=22$ 답 22

유형 04 ∑와 등차수열, 등비수열 본책 155쪽

① 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열일 때

➡ $a_n=a+(n-1)d$, $\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

② 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq 1)$인 등비수열일 때

➡ $a_n=ar^{n-1}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

1078 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} a_{2k}-\sum_{k=1}^{100} a_{2k+1}&=(a_2+a_4+\cdots+a_{200})-(a_3+a_5+\cdots+a_{201})\\&=(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+\cdots+(a_{200}-a_{201})\\&=\underbrace{-d-d-\cdots-d}_{-d\text{가 100개}}\\&=-100d\end{aligned}$$

이때 $a_3=1$, $a_7=-7$이므로

$a_1+2d=1$ ...... ㉠

$a_1+6d=-7$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=5$, $d=-2$

따라서 구하는 값은 $-100d=200$

답 200

1079 다항식 $P(x)=x^{2n-1}(x-2)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 $P(5)$이므로

$a_n=5^{2n-1}\cdot 3=\frac{3}{5}\cdot 25^n$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{3}{5}\sum_{k=1}^{n} 25^k&=\frac{3}{5}\cdot\underbrace{\frac{25(25^n-1)}{25-1}}_{\text{첫째항이 25, 공비가 25인 등비수열의 첫째항부터 제}n\text{항까지의 합}}\\&=\frac{5(25^n-1)}{8}\end{aligned}$$

답 ②

1080 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4+a_9=5a_5$에서 $(a+3d)+(a+8d)=5(a+4d)$

$2a+11d=5a+20d$, $3a+9d=0$

$\therefore a+3d=0$ ...... ㉠

$\sum_{k=1}^{10} a_k=-15$에서 $\frac{10(2a+9d)}{2}=-15$

$\therefore 2a+9d=-3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=-1$

따라서 $a_n=3+(n-1)\cdot(-1)=-n+4$이므로

$a_6=-6+4=-2$

답 ②

1081 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3a_5=a_9$에서 $ar^2\cdot ar^4=ar^8$ $\therefore a=r^2$ ...... ㉠

$a_2=8$에서 $ar=8$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=4$

$\therefore a_n=4\cdot 2^{n-1}$ ··· ❶

$\sum_{k=1}^{n} a_k=252$에서 $\frac{4(2^n-1)}{2-1}=4(2^n-1)=252$

$2^n-1=63$, $2^n=64=2^6$ $\therefore n=6$ ··· ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	50 %

1082

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}\frac{2^k-3^k}{4^{k-1}}&=\sum_{k=1}^{20}\left\{4\left(\frac{1}{2}\right)^k-4\left(\frac{3}{4}\right)^k\right\}\\&=4\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^k-4\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{3}{4}\right)^k\\&=4\cdot\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-4\cdot\frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{3}{4}}\\&=4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}-12\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}\\&=4-\underbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}_{4\left(\frac{1}{2}\right)^{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^{18}}-12+12\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\\&=12\left(\frac{3}{4}\right)^{20}-\left(\frac{1}{2}\right)^{18}-8\end{aligned}$$

따라서 $a=12$, $b=8$이므로

$a+b=20$

답 20

1083 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_8=11$에서

$46+7d=11$, $7d=-35$

$\therefore d=-5$

$\therefore a_n=46+(n-1)\cdot(-5)=-5n+51$

$a_n<0$에서 $-5n+51<0$

$\therefore n>\frac{51}{5}=10.2$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제10항까지 양수이고, 제11항부터 음수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{20}|a_k|&=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=11}^{20}(-a_k)\\&=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=11}^{20}a_k\\&=\underbrace{\frac{10(46+1)}{2}}_{a_1=46,\ a_{10}=1}-\underbrace{\frac{10(-4-49)}{2}}_{a_{11}=-4,\ a_{20}=-49}\\&=500\end{aligned}$$

답 ④

유형 05 자연수의 거듭제곱의 합 본책 156쪽

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$　　② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

1084

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k}&=\sum_{k=1}^{30}\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k}\\&=\sum_{k=1}^{30}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{30}(k+1)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{30\cdot 31}{2}+30\right)\\&=\frac{495}{2}\end{aligned}$$

답 ③

1085 $\sum_{k=1}^{n-1}(4k+3)=4\cdot\frac{(n-1)n}{2}+3(n-1)$

$=2n^2+n-3$

따라서 $2n^2+n-3=52$이므로　$2n^2+n-55=0$

$(2n+11)(n-5)=0$　$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)　답 5

1086 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_k+\beta_k=k,\ \alpha_k\beta_k=-k$

이므로

$\alpha_k^3+\beta_k^3=(\alpha_k+\beta_k)^3-3\alpha_k\beta_k(\alpha_k+\beta_k)$

$=k^3-3\cdot(-k)\cdot k=k^3+3k^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{6}(\alpha_k^3+\beta_k^3)=\sum_{k=1}^{6}(k^3+3k^2)$

$=\left(\frac{6\cdot7}{2}\right)^2+3\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}$

$=714$　답 ②

1087 $\sum_{k=1}^{10}(k-c)^2=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2ck+c^2)$

$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-2c\cdot\frac{10\cdot11}{2}+c^2\cdot10$

$=10c^2-110c+385$

$=10\left(c-\frac{11}{2}\right)^2+\frac{165}{2}$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(k-c)^2$의 값이 최소가 되도록 하는 c의 값은 $\frac{11}{2}$이다.

답 ④

1088 세 점 $\left(n,\ \frac{5}{n}\right)$, $(n-1,\ 0)$, $(n+1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 x축 위의 변을 밑변이라 하면 밑변의 길이는 $(n+1)-(n-1)=2$이고 높이는 $\frac{5}{n}$이다.

따라서 삼각형의 넓이 a_n은　$a_n=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{5}{n}=\frac{5}{n}$　⋯ ❶

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{5}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{10}\frac{5}{\frac{5}{n}\cdot\frac{5}{n+1}}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{10}(n^2+n)$

$=\frac{1}{5}\left(\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+\frac{10\cdot11}{2}\right)=88$　⋯ ❷

답 88

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{10}\frac{5}{a_na_{n+1}}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

1089 $\sum_{k=1}^{7}k^2+\sum_{k=2}^{7}k^2+\sum_{k=3}^{7}k^2+\cdots+\sum_{k=7}^{7}k^2$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2)+(2^2+3^2+4^2+\cdots+7^2)$

$+(3^2+4^2+5^2+6^2+7^2)+\cdots+(6^2+7^2)+7^2$

$=1^2\cdot1+2^2\cdot2+3^2\cdot3+\cdots+7^2\cdot7$

$=1^3+2^3+3^3+\cdots+7^3=\sum_{k=1}^{7}k^3$

$=\left(\frac{7\cdot8}{2}\right)^2=784$　답 784

유형 **06** $\sum$를 여러 개 포함한 식　본책 157쪽

$\sum$를 여러 개 포함한 식은 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별하여 계산한다. 이때 괄호가 있으면 괄호 안부터 계산한다.

① $\sum_{k=1}^{n}(k+n)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}n=\frac{n(n+1)}{2}+n\cdot n$

② $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}kl\right)=\sum_{l=1}^{n}\left(l\sum_{k=1}^{l}k\right)=\sum_{l=1}^{n}\left\{l\cdot\frac{l(l+1)}{2}\right\}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(l^3+l^2)$

$=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

1090 $\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}6\right)\right\}=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}6l\right)$

$=\sum_{m=1}^{n}\left\{6\cdot\frac{m(m+1)}{2}\right\}=3\sum_{m=1}^{n}(m^2+m)$

$=3\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1+3)$

$=n(n+1)(n+2)$　답 ①

1091 $\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{m=1}^{n}mn\right)=\sum_{n=1}^{5}\left(n\sum_{m=1}^{n}m\right)=\sum_{n=1}^{5}\left\{n\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}$　⋯ ❶

n을 상수로 생각한다.

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}(n^3+n^2)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5\cdot6}{2}\right)^2+\frac{5\cdot6\cdot11}{6}\right\}=140$　⋯ ❷

답 140

채점 기준	비율
❶ $\sum_{m=1}^{n}mn$을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

1092 $\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}(i+k)\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}i+\sum_{i=1}^{k}k\right)$

$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k(k+1)}{2}+k^2\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k\right)$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{4}\cdot(2n+1+1)$

$=\frac{n(n+1)^2}{2}$

따라서 $\frac{n(n+1)^2}{2}=50$이므로　$n(n+1)^2=100$

$n^3+2n^2+n-100=0$,　$(n-4)(n^2+6n+25)=0$

$\therefore n=4$ ($\because n$은 자연수)　답 ②

1093 $\sum_{n=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{n}2^{k+n}\right)=\sum_{n=1}^{4}\left(2^n\sum_{k=1}^{n}2^k\right)=\sum_{n=1}^{4}\left\{2^n\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{4}2^n(2^{n+1}-2)=\sum_{n=1}^{4}(2^{2n+1}-2^{n+1})$

$=2\sum_{n=1}^{4}4^n-2\sum_{n=1}^{4}2^n$

$=2\cdot\frac{4(4^4-1)}{4-1}-2\cdot\frac{2(2^4-1)}{2-1}$

$=620$　답 ①

유형 07 Σ를 이용한 여러 가지 수열의 합 본책 158쪽

(i) 주어진 수열의 제k항 a_k를 구한다.
(ii) Σ의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

1094 수열 $1\cdot3,\ 2\cdot5,\ 3\cdot7,\ \cdots,\ 12\cdot25$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=k(2k+1)=2k^2+k$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}(2k^2+k)$

$=2\cdot\frac{12\cdot13\cdot25}{6}+\frac{12\cdot13}{2}=1378$ 답 ②

1095 $a_n=3n-2$에서 $a_{2k}=3\cdot2k-2=6k-2$

$\therefore \sum_{k=1}^{2n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{2n}(6k-2)$

$=6\cdot\frac{2n(2n+1)}{2}-2\cdot2n$

$=12n^2+2n$ 답 ④

1096 주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=2k(k+1)^2=2k^3+4k^2+2k$ ⋯ ❶

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^3+4k^2+2k)$

$=2\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{6}\{3n(n+1)+4(2n+1)+6\}$

$=\frac{n(n+1)}{6}(3n^2+11n+10)$ ⋯ ❷

따라서 $f(n)=3n^2+11n+10$이므로

$f(5)=3\cdot5^2+11\cdot5+10=140$ ⋯ ❸

답 140

채점 기준	비율
❶ 주어진 수열의 제k항을 구할 수 있다.	30 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(5)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1097 $a_n=-2+(n-1)\cdot(-3)=-3n+1$,

$b_n=4+(n-1)\cdot2=2n+2$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_kb_k=\sum_{k=1}^{10}(-3k+1)(2k+2)$

$=\sum_{k=1}^{10}(-6k^2-4k+2)$

$=-6\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-4\cdot\frac{10\cdot11}{2}+2\cdot10$

$=-2510$ 답 -2510

1098 주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=1\cdot k+2\cdot k+3\cdot k+\cdots+k\cdot k$

$=k(1+2+3+\cdots+k)$

$=k\cdot\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^3+k^2}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3+k^2}{2}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2+\frac{10\cdot11\cdot21}{6}\right\}$

$=1705$ 답 1705

1099 위에서부터 k번째 층에 필요한 정육면체의 개수는

$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^2+k}{2}$

따라서 7층 탑을 쌓는 데 필요한 정육면체의 개수는

$\sum_{k=1}^{7}\frac{k^2+k}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{7\cdot8\cdot15}{6}+\frac{7\cdot8}{2}\right)=84$ 답 ③

유형 08 Σ로 표현된 수열의 합과 일반항 본책 158쪽

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $\sum_{k=1}^{n}a_k$를 S_n이라 하면
(i) $a_1=S_1=\sum_{k=1}^{1}a_k$
(ii) $a_n=S_n-S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k\ (n\ge2)$
임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

1100 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+n$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$=2n$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n$

따라서 $a_{2k-1}=2(2k-1)=4k-2$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}(4k-2)=4\cdot\frac{10\cdot11}{2}-2\cdot10=200$ 답 200

1101 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=3\cdot4^n-3$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=9$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=3\cdot4^n-3-(3\cdot4^{n-1}-3)$

$=3\cdot4^{n-1}(4-1)=9\cdot4^{n-1}$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=9$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=9\cdot4^{n-1}$

따라서 $\frac{1}{a_k}=\frac{1}{9\cdot4^{k-1}}=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{15}}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{4}{27}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{15}\right\}$ 답 ③

1102 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-2n$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=-1$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^2-2n-\{(n-1)^2-2(n-1)\}\\&=2n-3\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-3$ ⋯ ❶

$$\therefore S=\sum_{n=1}^{5}2^{a_n}=\sum_{n=1}^{5}2^{2n-3}=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{5}4^n$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{4(4^5-1)}{4-1}=\frac{341}{2}$$

$\therefore 2S=341$ ⋯ ❷

답 341

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ $2S$의 값을 구할 수 있다.	50 %

1103 $\sum_{k=1}^{n}ka_k=n(n+1)(n+2)$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=\sum_{k=1}^{1}ka_k=1\cdot2\cdot3=6$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}na_n&=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k\\&=n(n+1)(n+2)-n(n-1)(n+1)\\&=n(n+1)\{(n+2)-(n-1)\}\\&=3n(n+1)\end{aligned}$$

$n\ne0$이므로 $a_n=3(n+1)$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=3(n+1)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=3\sum_{k=1}^{20}(k+1)=3\left(\frac{20\cdot21}{2}+1\cdot20\right)=690$$

답 ⑤

유형 09 일반항이 k, n에 대한 식인 수열의 합 본책 159쪽

(i) 주어진 수열의 제k항 a_k를 k와 n에 대한 식으로 나타낸다.
(ii) $\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 n은 상수임에 유의하여 수열의 합을 구한다.

1104 수열 $1\cdot n$, $2\cdot(n-1)$, $3\cdot(n-2)$, $\cdots$, $n\cdot1$의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=k\{n-(k-1)\}=-k^2+(n+1)k$

이므로 주어진 식은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}\\&=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k\\&=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\end{aligned}$$

답 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

1105 수열 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$, $\left(\frac{n+2}{n}\right)^2$, $\left(\frac{n+3}{n}\right)^2$, $\cdots$, $\left(\frac{2n}{n}\right)^2$의 제$k$항을 a_k라 하면

$$a_k=\left(\frac{n+k}{n}\right)^2=\left(1+\frac{k}{n}\right)^2=1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$$

이므로 주어진 식은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=n+\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}\end{aligned}$$

답 $\frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}$

1106 수열 $1\cdot(2n-1)$, $2\cdot(2n-3)$, $3\cdot(2n-5)$, $\cdots$, $n\cdot1$의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=k\{2n-(2k-1)\}=(2n+1)k-2k^2$

주어진 등식의 좌변은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1)k-2k^2\}\\&=(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $a+2b=4$

답 ②

유형 10 로그가 포함된 수열의 합 본책 159쪽

로그가 포함된 수열의 합을 구할 때에는 다음 로그의 성질을 이용한다.
$a>0$, $a\ne1$이고 $x>0$, $y>0$일 때
① $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$
② $\log_a x^n=n\log_a x$ (단, n은 실수)

1107 $a_k=3\cdot9^{k-1}=3\cdot3^{2k-2}=3^{2k-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\log_3 a_k=\sum_{k=1}^{10}\log_3 3^{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)$$
$$=2\cdot\frac{10\cdot11}{2}-10=100$$

답 ③

1108
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}\log a_n&=\sum_{n=1}^{5}\log a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{5}\log a_{2n}\\&=\sum_{n=1}^{5}\log 2^n+\sum_{n=1}^{5}\log 5^n\\&=\sum_{n=1}^{5}n\log 2+\sum_{n=1}^{5}n\log 5\\&=\log 2\sum_{n=1}^{5}n+\log 5\sum_{n=1}^{5}n\\&=(\log 2+\log 5)\sum_{n=1}^{5}n\\&=\log 10\cdot\frac{5\cdot6}{2}=15\end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이 $\sum_{n=1}^{10}\log a_n$

$=\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_{10}$

$=\log(a_1a_2a_3\cdots a_{10})$

$=\log\{(a_1a_3a_5a_7a_9)(a_2a_4a_6a_8a_{10})\}$

$=\log\{(2^1\cdot2^2\cdot2^3\cdot2^4\cdot2^5)(5^1\cdot5^2\cdot5^3\cdot5^4\cdot5^5)\}$

$=\log(2^{1+2+3+4+5}\cdot5^{1+2+3+4+5})$

$=\log(2^{15}\cdot5^{15})$

$=\log10^{15}=15$

1109 $\sum_{k=2}^{n}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

$=\sum_{k=2}^{n}\log\frac{k^2-1}{k^2}$

$=\sum_{k=2}^{n}\log\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

$=\log\frac{1\cdot3}{2^2}+\log\frac{2\cdot4}{3^2}+\log\frac{3\cdot5}{4^2}$

$+\cdots+\log\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

$=\log\left\{\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\right\}$

$=\log\frac{n+1}{2n}$

한편 $\log51-2=\log51-\log100=\log\frac{51}{100}$이므로

$\frac{n+1}{2n}=\frac{51}{100},\quad 50(n+1)=51n$

$\therefore n=50$

답 50

1110 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=\log3$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\log\frac{n(n+1)}{2}$

$=\log\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\cdot\frac{2}{n(n+1)}\right\}$

$=\log\frac{n+2}{n}$ ...... ㉠

이때 $a_1=\log3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\log\frac{n+2}{n}$

따라서 $a_{2k}=\log\frac{2k+2}{2k}=\log\frac{k+1}{k}$이므로

$p=\sum_{k=1}^{20}\log\frac{k+1}{k}$

$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{21}{20}$

$=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{21}{20}\right)$

$=\log21$

$\therefore 10^p=10^{\log21}=21$

답 ②

유형 11 분수 꼴인 수열의 합 본책 160쪽

(i) 수열 $\{a_n\}$의 제k항 a_k를 부분분수로 변형한다.

➡ $\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

(ii) $k=1, 2, 3, \cdots, n$을 차례대로 대입하여 주어진 식을 간단히 한다.

1111 수열 $\frac{1}{3^2-1}, \frac{1}{5^2-1}, \frac{1}{7^2-1}, \cdots, \frac{1}{25^2-1}$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=\frac{1}{(2k+1)^2-1}=\frac{1}{4k(k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

이므로 주어진 수열의 합은

$\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{13}\right)=\frac{3}{13}$

항이 연달아 소거될 때, 앞에서 첫 번째 수가 남으면 뒤에서도 첫 번째 수가 남는다.

따라서 $p=13$, $q=3$이므로

$p+q=16$

답 16

1112 $a_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)}=3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=3\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3n}{n+1}$

따라서 $a_m=\frac{3m}{m+1}=\frac{120}{41}$이므로

$41m=40(m+1)\quad \therefore m=40$

답 ③

1113 $a_n=\frac{n^3+n^2+3}{n^2+n}=\frac{n^2(n+1)+3}{n(n+1)}$

$=n+\frac{3}{n(n+1)}=n+3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k$

$=\sum_{k=1}^{10}\left\{k+3\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{10}k+3\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{10\cdot11}{2}+3\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=55+3\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{635}{11}$

답 $\frac{635}{11}$

1114 $(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(n+1)$

$=(2n+1)(2n+3)$ ⋯→ ❶

$\therefore \sum_{n=1}^{15} \frac{12}{(g\circ f)(n)}$

$= \sum_{n=1}^{15} \frac{12}{(2n+1)(2n+3)}$

$= 6\sum_{n=1}^{15}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$ ⋯ ❷

$= 6\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{33}\right)\right\}$

$= 6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{33}\right)=\frac{20}{11}$ ⋯ ❸

답 $\frac{20}{11}$

채점 기준	비율
❶ $(g\circ f)(n)$을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ 부분분수로 변형할 수 있다.	30 %
❸ $\sum_{n=1}^{15}\frac{12}{(g\circ f)(n)}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1115 $S_n=n^2+2n$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+1$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{n}{3(2n+3)}$

답 ⑤

1116 자연수 k에 대하여

$f(k^2)=\frac{1}{k^2+\sqrt{4k^2}}=\frac{1}{k^2+2k}=\frac{1}{k(k+2)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

이므로

$f(1)+f(4)+f(9)+\cdots+f(64)$

$=\sum_{k=1}^{8}f(k^2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

항이 건너뛰며 소거될 때, 앞에서 첫 번째, 세 번째 수가 남으면 뒤에서도 첫 번째, 세 번째 수가 남는다.

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{29}{45}$

답 $\frac{29}{45}$

유형 12 근호가 포함된 수열의 합

본책 161쪽

(i) 수열 $\{a_n\}$의 제k항 a_k의 분모를 유리화한다.

$\Rightarrow a_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+c}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+c}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+c})(\sqrt{k}-\sqrt{k+c})}$

$=\frac{1}{c}(\sqrt{k+c}-\sqrt{k})$ (단, $c\neq 0$)

(ii) $k=1, 2, 3, \cdots, n$을 차례대로 대입하여 주어진 식을 간단히 한다.

1117 수열 $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{48}+\sqrt{49}}$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$

$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제47항까지의 합이므로

$\sum_{k=1}^{47}a_k=\sum_{k=1}^{47}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$

$=\sqrt{49}-\sqrt{2}=7-\sqrt{2}$

항이 연달아 소거될 때, 앞에서 두 번째 수가 남으면 뒤에서도 두 번째 수가 남는다.

답 ②

1118 $a_n=9+(n-1)\cdot 2=2n+7$이므로

$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}$

$=\sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}=\sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{2}$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})$

$+\cdots+(\sqrt{a_{21}}-\sqrt{a_{20}})\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{21}}-\sqrt{a_1})=\frac{1}{2}(\sqrt{2\cdot 21+7}-\sqrt{9})$

$=\frac{1}{2}(7-3)=2$

답 ②

1119 $a_k=\sqrt{k+2}+\sqrt{k}$이므로 ⋯ ❶

$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}$

$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$ ⋯ ❷

따라서 $-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}=2+\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}=3+2\sqrt{2}=\sqrt{9}+\sqrt{8}$

$\therefore n=7$ ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ a_k를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{a_k}$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❸ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	20 %

1120 $\mathrm{P}_k(k, \sqrt{k+1})$, $\mathrm{Q}_k(k, -\sqrt{k})$이므로

$\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}=\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}}&=\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\\&=\sum_{k=1}^{48}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}\\&=\sum_{k=1}^{48}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})\\&=\sqrt{49}-1=6\end{aligned}$$

답 6

유형 13~14 수열의 항을 묶어 규칙 찾기 본책 161, 162쪽

(i) 주어진 수열을 규칙성을 갖도록 묶는다.
(ii) 각 묶음의 항의 개수와 규칙성을 조사한다.

1121 주어진 수열을

$(1), (-2, -1), (3, 2, 1), (-4, -3, -2, -1),$
$(5, 4, 3, 2, 1), \cdots$

과 같이 묶으면 처음으로 나타나는 20은 21번째 묶음의 2번째 항이다.

이때 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 20번째 묶음까지의 항의 개수는 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}k=\frac{20\cdot21}{2}=210$

따라서 $210+2=212$이므로 처음으로 나타나는 20은 제212항이다.

답 ②

1122 주어진 수열을

$(11), (101, 110), (1001, 1010, 1100), \cdots$

과 같이 묶으면 n번째 묶음은 $(n+1)$자리 수이므로 10010000은 7번째 묶음의 5번째 항이다.

이때 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 6번째 묶음까지의 항의 개수는 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}k=\frac{6\cdot7}{2}=21$

따라서 $21+5=26$이므로 10010000은 제26항이다.

답 제26항

1123 주어진 수열을

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \cdots$$

와 같이 분모가 같은 항끼리 묶으면 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 n번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$n=11$일 때, $\dfrac{11\cdot12}{2}=66$이므로 제64항은 11번째 묶음의 끝에서 3번째 항이다.

이때 11번째 묶음은 $\dfrac{1}{12}, \dfrac{2}{12}, \dfrac{3}{12}, \cdots, \dfrac{9}{12}, \dfrac{10}{12}, \dfrac{11}{12}$이므로

제64항은 $\dfrac{9}{12}$이다.

답 $\dfrac{9}{12}$

1124 주어진 수열을

$\{(1, 1)\}, \{(1, 2), (2, 1)\}, \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\},$
$\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}, \cdots$

과 같이 두 수의 합이 같은 순서쌍끼리 묶으면 n번째 묶음의 순서쌍의 두 수의 합은 $n+1$이므로 $(10, 11)$은 20번째 묶음의 10번째 항이다.

이때 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 19번째 묶음까지의 항의 개수는 $\displaystyle\sum_{k=1}^{19}k=\frac{19\cdot20}{2}=190$

따라서 $190+10=200$이므로 $(10, 11)$은 제200항이다. 답 ③

1125 위에서 k번째 줄에 나열된 수들은 첫째항이 k, 공차가 k, 항수가 k인 등차수열을 이루므로 위에서 k번째 줄에 나열된 수의 합은 $\dfrac{k\{2k+(k-1)k\}}{2}=\dfrac{k^3+k^2}{2}$

따라서 첫 번째 줄부터 10번째 줄까지 나열된 모든 수의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3+k^2}{2}&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2+\frac{10\cdot11\cdot21}{6}\right\}\\&=1705\end{aligned}$$

답 1705

1126 위에서 m번째 줄에 나열된 수들은 첫째항이 m이고, 공차가 m인 등차수열이다. 즉 m번째 줄의 왼쪽에서 m번째에 있는 수는 $m+(m-1)\cdot m=m^2$

이때 $400=20^2$에서 c와 400은 20번째 줄에 차례대로 나열되었으므로 $400-c=20$ $\therefore c=380$

a, b는 19번째 줄에 차례대로 나열되었으므로 $b-a=19$

$\therefore b-a+c=19+380=399$ 답 ⑤

다른 풀이 위에서 m번째 줄의 왼쪽에서 n번째에 있는 수는 mn이고 400은 대각선 위의 수이므로 $400=20^2$에서 400은 20번째 줄의 왼쪽에서 20번째에 있는 수이다.

따라서 a는 19번째 줄의 왼쪽에서 19번째에 있는 수, b는 19번째 줄의 왼쪽에서 20번째에 있는 수, c는 20번째 줄의 왼쪽에서 19번째에 있는 수이므로

$a=19^2=361$, $b=19\cdot20=380$, $c=20\cdot19=380$

$\therefore b-a+c=380-361+380=399$

1127 위에서 k번째 줄에 나열된 수의 개수는 $2k-1$이므로 위에서 14번째 줄까지 나열된 수의 개수는

$$\sum_{k=1}^{14}(2k-1)=2\cdot\frac{14\cdot15}{2}-14=196$$

이때 $196=5\cdot39+1$이므로 위에서 15번째 줄에 나열된 수는 4, 6, 8, 10, 2가 이 순서대로 반복된다.

한편 위에서 15번째 줄에 나열된 수의 개수는 $2\cdot15-1=29$이고 $29=5\cdot5+4$이므로 나열된 모든 수의 합은

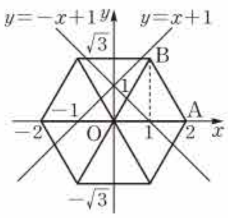
$(4+6+8+10+2)\cdot5+(4+6+8+10)=178$ 답 178

1128 1st 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾는다.

정삼각형의 한 내각의 크기는 60°이므로 정삼각형 OAB를 원점 O를 중심으로 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로 60°만큼 6번 회전시킨 정삼각형은 정삼각형 OAB와 일치한다.

09 수열의 합

즉 정삼각형 OAB를 $60° \times n$만큼 회전시킨 정삼각형과 직선 $y=(-1)^n x+1$은 오른쪽 그림과 같다.



따라서

$a_1=2,\ a_2=2,\ a_3=0,\ a_4=0,$

$a_5=2,\ a_6=0,\ \cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 2, 2, 0, 0, 2, 0이 이 순서대로 반복된다.

2nd $\sum_{n=1}^{50} a_n$의 값을 구한다.

$50=6\cdot 8+2$이므로

$$\sum_{n=1}^{50} a_n=8(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+a_{49}+a_{50}$$
$$=8\cdot 6+2+2=52$$

답 52

1129

1st $(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{39}-a_{40})$의 값을 구한다.

$$(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)+\cdots+(a_{39}-a_{40})$$
$$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{39})-(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{40})$$
$$=\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)-\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}\left\{\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)+\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{21}\right)$$
$$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$$

2nd $p+q$의 값을 구한다.

$p=21,\ q=20$이므로 $\quad p+q=41$

답 41

1130

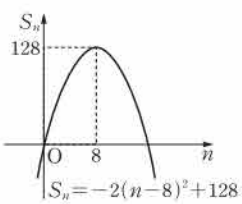
1st S_n을 구한다.

주어진 등차수열의 첫째항이 30, 공차가 -4이므로

$$S_n=\frac{n\{2\cdot 30+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}$$
$$=-2n^2+32n=-2(n-8)^2+128$$

2nd $\sum_{k=m}^{m+2} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값을 구한다.

S_n을 n에 대한 이차함수로 생각하면 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때

$$\sum_{k=m}^{m+2} S_k=S_m+S_{m+1}+S_{m+2}$$

이고, 오른쪽 그림에서 S_n의 값은 $n=8$일 때 최대이고 그 그래프는 직선 $n=8$에 대하여 대칭이므로 $\sum_{k=m}^{m+2} S_k$의 값이 최대가 되려면 $S_{m+1}=S_8$이어야 한다.

따라서 $m+1=8$이므로 $\quad m=7$

답 7

다른 풀이 첫째항이 30, 공차가 -4인 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면 $\quad a_n=30+(n-1)\cdot(-4)=-4n+34$

이때 S_n의 최댓값을 구하려면 $a_n \ge 0$을 만족시키는 n의 최댓값을 구해야 하므로

$$-4n+34\ge 0,\quad 4n\le 34\quad \therefore n\le \frac{17}{2}=8.5$$

즉 등차수열 $\{a_n\}$이 처음으로 음수가 되는 항은 a_9이므로

$$S_1<S_2<\cdots<S_6<S_7<S_8,\quad S_8>S_9>S_{10}>\cdots$$

따라서 S_n은 $n=8$일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $a_8=2,\ a_9=-2$이므로

$$S_7=S_8-a_8=S_8-2,\ S_9=S_8+a_9=S_8-2$$
$$\therefore S_7=S_9$$

같은 방법으로 구해 보면 $\quad S_6=S_{10},\ S_5=S_{11},\ \cdots,\ S_1=S_{15}$

따라서 $\sum_{k=m}^{m+2} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은 7이다.

1131

1st n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 a_n을 구한다.

자연수 k에 대하여

(i) $n=2k-1$일 때,

$$a_n=a_{2k-1}=\frac{\{(2k-1)+1\}^2}{2}=2k^2$$

(ii) $n=2k$일 때,

$$a_n=a_{2k}=\frac{(2k)^2}{2}+2k+1=2k^2+2k+1$$

2nd $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5} a_{2k}=\sum_{k=1}^{5} 2k^2+\sum_{k=1}^{5}(2k^2+2k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\{2k^2+(2k^2+2k+1)\}=\sum_{k=1}^{5}(4k^2+2k+1)$$
$$=4\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}+2\cdot\frac{5\cdot 6}{2}+1\cdot 5$$
$$=255$$

답 ⑤

1132

1st 점 D의 좌표를 구한다.

두 점 $B(1,\ 0)$, $C(2^m,\ m)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{m}{2^m-1}(x-1)$$

이므로 점 D의 좌표는 $\quad \left(2^n,\ \frac{m(2^n-1)}{2^m-1}\right)$

2nd $\triangle ABD$의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같음을 이용하여 부등식을 세운 후 a_n을 구한다.

$\triangle ABD$의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같으므로

$$\underbrace{\frac{1}{2}(2^n-1)\cdot\frac{m(2^n-1)}{2^m-1}}_{\triangle ABD=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}}\le\frac{m}{2}$$
$$\therefore (2^n-1)^2\le 2^m-1$$

(i) $n=1$일 때,

$1\le 2^m-1,\quad 2^m\ge 2$

즉 $m\ge 1$이므로 $\quad a_1=1$

(ii) $n=2$일 때,

$3^2\le 2^m-1,\quad 2^m\ge 10$

즉 $m\ge 4$이므로 $\quad a_2=4$

(iii) $n=3$일 때,

$7^2\le 2^m-1,\quad 2^m\ge 50$

즉 $m\ge 6$이므로 $\quad a_3=6$

(iv) $n=4$일 때,

$15^2\le 2^m-1,\quad 2^m\ge 226$

즉 $m\ge 8$이므로 $\quad a_4=8$

이상에서 $a_1=1,\ a_n=2n\ (n\geq 2)$

3rd $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=1+\sum_{n=2}^{10} 2n=1+\sum_{n=1}^{10} 2n-2$$
$$=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-1=109$$

답 ①

1133 **1st** 주어진 등식의 좌변을 Σ를 사용하여 나타낸다.

$$(1^3-2)+(2^3-4)+(3^3-6)+\cdots+(n^3-2n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(k^3-2k)=\sum_{k=1}^{n}k^3-2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-2\sum_{k=1}^{n}k$$

2nd $\sum_{k=1}^{n}k$의 값을 구한다.

$\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-2\sum_{k=1}^{n}k=44^2-1$에서 $\sum_{k=1}^{n}k=t$로 놓으면

$t^2-2t=44^2-1,\quad t^2-2t-(44-1)(44+1)=0$

$(t+43)(t-45)=0\qquad \therefore t=45\ (\because t>0)$

3rd n의 값을 구한다.

$\sum_{k=1}^{n}k=45$이므로 $\quad \frac{n(n+1)}{2}=45$

$n(n+1)=90,\quad n^2+n-90=0$

$(n+10)(n-9)=0\qquad \therefore n=9\ (\because n$은 자연수$)$

답 9

1134 **1st** $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$일 때, $f(n)$의 값을 구하여 규칙을 찾는다.

$n=2$일 때, $\{3,\ 3^3\}$이므로

$S=\{3^4\}\qquad \therefore f(2)=1$

$n=3$일 때, $\{3,\ 3^3,\ 3^5\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ 3^8\}\qquad \therefore f(3)=3$

$n=4$일 때, $\{3,\ 3^3,\ 3^5,\ 3^7\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ 3^8,\ 3^{10},\ 3^{12}\}\qquad \therefore f(4)=5$

$\vdots$

$n=k$일 때, $\{3,\ 3^3,\ 3^5,\ \cdots,\ 3^{2k-1}\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ 3^8,\ \cdots,\ 3^{4(k-1)}\}$

$\therefore f(k)=2(k-1)-1=2k-3\ (k\geq 2)$

2nd $\sum_{n=2}^{11} f(n)$의 값을 구한다.

$$\sum_{n=2}^{11} f(n)=\sum_{n=2}^{11}(2n-3)=\sum_{n=1}^{11}(2n-3)-(-1)$$
$$=2\cdot\frac{11\cdot 12}{2}-3\cdot 11+1=100$$

답 100

1135 **1st** $2a_n+b_n$을 구한다.

$\sum_{k=1}^{n}(2a_k+b_k)=n^3+2n^2+n$에서

(i) $n=1$일 때, $\quad 2a_1+b_1=4$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$2a_n+b_n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2a_k+b_k)-\sum_{k=1}^{n-1}(2a_k+b_k)$$
$$=n^3+2n^2+n-\{(n-1)^3+2(n-1)^2+(n-1)\}$$
$$=3n^2+n \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $2a_1+b_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$2a_n+b_n=3n^2+n \qquad \cdots\cdots ㉡$$

2nd a_n-b_n을 구한다.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=-2n^2-2n$에서

(iii) $n=1$일 때, $\quad a_1-b_1=-4$

(iv) $n\geq 2$일 때,

$$a_n-b_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-b_k)$$
$$=-2n^2-2n-\{-2(n-1)^2-2(n-1)\}$$
$$=-4n \qquad \cdots\cdots ㉢$$

이때 $a_1-b_1=-4$는 ㉢에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n-b_n=-4n \qquad \cdots\cdots ㉣$$

3rd $a_n,\ b_n$을 구한다.

㉡, ㉣을 연립하여 풀면

$a_n=n^2-n,\ b_n=n^2+3n$

4th $\sum_{k=1}^{5}(b_k{}^2-a_k{}^2)$의 값을 구한다.

$$\sum_{k=1}^{5}(b_k{}^2-a_k{}^2)=\sum_{k=1}^{5}\{(k^2+3k)^2-(k^2-k)^2\}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(8k^3+8k^2)$$
$$=8\cdot\left(\frac{5\cdot 6}{2}\right)^2+8\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}$$
$$=2240$$

답 ③

1136 **1st** $f(a_k)$를 구한다.

$36=2^2\cdot 3^2$이므로 36의 양의 약수는

$1,\ 2,\ 3,\ 2^2,\ 2\cdot 3,\ 3^2,\ 2^2\cdot 3,\ 2\cdot 3^2,\ 2^2\cdot 3^2$

이때

$f(1)=1,\ f(2)=f(3)=2,\ f(2^2)=f(3^2)=3,$

$f(2\cdot 3)=4,\ f(2^2\cdot 3)=f(2\cdot 3^2)=6,\ f(2^2\cdot 3^2)=9$

이므로 $f(1),\ f(2^2),\ f(3^2),\ f(2^2\cdot 3^2)$은 홀수이고,

$f(2),\ f(3),\ f(2\cdot 3),\ f(2^2\cdot 3),\ f(2\cdot 3^2)$은 짝수이다.

2nd $\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$의 값을 구한다.

$$\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$$
$$=-\log 1+\log 2+\log 3-\log 2^2+\log(2\cdot 3)-\log 3^2$$
$$+\log(2^2\cdot 3)+\log(2\cdot 3^2)-\log(2^2\cdot 3^2)$$
$$=\log\frac{2\cdot 3\cdot(2\cdot 3)\cdot(2^2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3^2)}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot(2^2\cdot 3^2)}$$
$$=\log(2\cdot 3)=\log 2+\log 3$$

답 ①

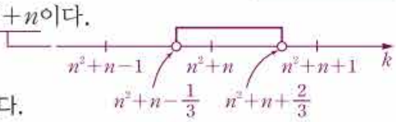
1137 **1st** a_n을 구한다.

$f(x)=x^2+x-\frac{1}{3}$이므로 부등식 $f(n)<k<f(n)+1$에서

$$n^2+n-\frac{1}{3}<k<n^2+n+\frac{2}{3}$$

이때 자연수 n에 대하여 n^2+n은 자연수이므로 위의 부등식을 만족시키는 정수 k는 n^2+n이다.

$\therefore a_n=n^2+n$



2nd $\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{a_n}$의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$$
$$=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$$

3rd $p+q$의 값을 구한다.

$p=101$, $q=100$이므로 $\quad p+q=201$

답 201

1138 **1st** α_n, β_n을 구한다.

이차방정식 $x^2-(2n+7)x+(n+3)(n+4)=0$에서

$$(x-n-3)(x-n-4)=0$$
$$\therefore\ x=n+3 \text{ 또는 } x=n+4$$
$$\therefore\ \alpha_n=n+3,\ \beta_n=n+4 \text{ 또는 } \alpha_n=n+4,\ \beta_n=n+3$$

2nd $\displaystyle\sum_{n=1}^{60}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}$의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{60}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}=\sum_{n=1}^{60}\frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}}$$
$$=\sum_{n=1}^{60}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4}}{(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4})(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4})}$$
$$=\sum_{n=1}^{60}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3})$$
$$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{64}-\sqrt{63})$$
$$=-\sqrt{4}+\sqrt{64}=6$$

답 6

1139 **전략** 주어진 식에 n 대신 $n-1$을 대입한다.

풀이 $na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots+2a_{n-1}+a_n$

$=n^3-n^2+n$ ······ ㉠

에서 $n=1$일 때, $\quad a_1=1$

㉠에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$(n-1)a_1+(n-2)a_2+(n-3)a_3+\cdots+2a_{n-2}+a_{n-1}$

$=(n-1)^3-(n-1)^2+(n-1)\ (n\geq2)$ ······ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=3n^2-5n+3\ (n\geq2)$

······ ㉢

이때 $a_1=1$은 ㉢에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=3n^2-5n+3$ ··· ❶

$\displaystyle\therefore\ \sum_{k=1}^{20}a_k=3\cdot20^2-5\cdot20+3=1103$ ··· ❷

답 1103

채점 기준	비율
❶ $\sum_{k=1}^{n}a_k$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	80 %
❷ $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1140 **전략** $10\in A_n$을 만족시키는 n의 값의 범위를 구하여 n의 값에 따른 a_n을 구한다.

풀이 $(x-\sqrt{n})(x-n^2)\leq0$에서 $\quad\sqrt{n}\leq x\leq n^2$

$\therefore\ A_n=\{x\mid\sqrt{n}\leq x\leq n^2,\ n\text{은 자연수}\}$

$10\in A_n$인 n의 값의 범위를 구하면 $\quad\sqrt{n}\leq10\leq n^2$ ··· ❶

$10\leq n^2$에서 $\quad n\geq4$ ($\because$ n은 자연수)

$\sqrt{n}\leq10$에서 $\quad n\leq100$

$$\therefore\ a_n=\begin{cases}1 & (4\leq n\leq100)\\ -1 & (1\leq n\leq3 \text{ 또는 } n\geq101)\end{cases}$$ ··· ❷

따라서 S_n은 $n=100$일 때 최대이고 최댓값은

$-1\cdot3+1\cdot97=94$ ··· ❸

답 94

채점 기준	비율
❶ $10\in A_n$일 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ S_n의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

1141 **전략** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3(k^2+k)$를 n에 대한 식으로 나타내고 a_n, b_n을 구한다.

풀이 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3(k^2+k)=3\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$$=3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$
$$=n(n+1)(n+2)$$ ··· ❶

$\displaystyle a_n+nb_n=\sum_{k=1}^{n}3(k^2+k)$에서

$a_n+nb_n=n(n+1)(n+2)$

이때 $a_n=a+(n-1)\cdot a=an$이므로

$nb_n=n(n+1)(n+2)-an$

$\therefore\ b_n=(n+1)(n+2)-a$

$=n^2+3n+2-a$ ··· ❷

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}b_k=\sum_{k=1}^{10}(k^2+3k+2-a)$

$\displaystyle=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+3\cdot\frac{10\cdot11}{2}+10(2-a)$

$=570-10a$

이므로 $\quad 570-10a=170$

$10a=400 \quad \therefore\ a=40$ ··· ❸

$a_n=an=40n$이므로 $a_n\leq1000$에서

$40n\leq1000 \quad \therefore\ n\leq25$

따라서 자연수 n의 최댓값은 25이다. ··· ❹

답 25

채점 기준	비율
❶ $\sum_{k=1}^{n}3(k^2+k)$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ a_n, b_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 자연수 n의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

1142 **전략** 제 10 항의 분자, 분모를 각각 구한다.

풀이 제 10 항의 분자는 $1+3+5+\cdots+21$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{11}(2k-1)=2\cdot\frac{11\cdot12}{2}-11=121$ ··· ❶

제 10 항의 분모는 $21+23+25+\cdots+41$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{11}(2k+19)=2\cdot\frac{11\cdot12}{2}+19\cdot11=341$ ··· ❷

따라서 제 10 항은 $\frac{121}{341}=\frac{11}{31}$이므로

$p=31,\ q=11 \qquad \therefore p+q=42$ ⋯ ❸

답 42

채점 기준	비율
❶ 제10항의 분자를 구할 수 있다.	40 %
❷ 제10항의 분모를 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1143 전략 $\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k=a_n\ (n\geq 2)$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-3}{a_k}=2n^2+7n$에서 $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}\frac{4n-3}{a_n}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4k-3}{a_k}\\&=(2n^2+7n)-\{2(n-1)^2+7(n-1)\}\\&=4n+5\end{aligned}$$

$4n+5\neq 0$이므로 $\quad a_n=\frac{4n-3}{4n+5}\ (n\geq 2)$ ⋯ ❶

$\therefore a_3a_5=\frac{9}{17}\cdot\frac{17}{25}=\frac{9}{25}$ ⋯ ❷

따라서 $p^2=\frac{9}{25}$이므로 $\quad p=\frac{3}{5}\ (\because p>0)$

$\therefore 100p=60$ ⋯ ❸

답 60

채점 기준	비율
❶ $n\geq 2$일 때, a_n을 구할 수 있다.	60 %
❷ a_3a_5의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $100p$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1144 전략 두 점 P_n, Q_n의 좌표를 이용하여 a_n을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P_n은 직선 $x=n$과 함수 $y=x^2-2x$의 그래프의 교점이므로 $\quad \mathrm{P}_n(n,\ n^2-2n)$

따라서 점 Q_n의 y좌표가 n^2-2n이고, 점 Q_n은 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프 위의 점이므로 $n^2-2n=\frac{2}{x}$에서

$x=\frac{2}{n^2-2n} \qquad \therefore a_n=\frac{2}{n(n-2)}$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=3}^{12} a_n&=\sum_{n=3}^{12}\frac{2}{n(n-2)}=\sum_{n=3}^{12}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\\&=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}=\frac{175}{132}\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{175}{132}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\sum_{n=3}^{12} a_n$의 값을 구할 수 있다.	40 %

Ⅲ. 수열

10 수학적 귀납법

1145 $a_{n+1}=a_n+(-1)^n$에서 $a_1=10$이므로

$a_2=a_1+(-1)=10-1=9$

$a_3=a_2+(-1)^2=9+1=10$

$a_4=a_3+(-1)^3=10-1=9$

$\therefore a_5=a_4+(-1)^4=9+1=10$ 답 10

1146 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서 $a_1=1,\ a_2=2$이므로

$a_3=a_2+a_1=2+1=3$

$a_4=a_3+a_2=3+2=5$

$\therefore a_5=a_4+a_3=5+3=8$ 답 8

1147 $a_{n+2}=a_{n+1}a_n$에서 $a_1=-1,\ a_2=3$이므로

$a_3=a_2a_1=3\cdot(-1)=-3$

$a_4=a_3a_2=(-3)\cdot 3=-9$

$\therefore a_5=a_4a_3=(-9)\cdot(-3)=27$ 답 27

1148 $a_{n+1}-a_n=-1$에서 주어진 수열은 공차가 -1인 등차수열이다. 이때 첫째항이 $a_1=2$이므로

$a_n=2+(n-1)\cdot(-1)=-n+3$ 답 $a_n=-n+3$

1149 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이고,

$a_1=1,\ a_2-a_1=3-1=2$

이므로 첫째항이 1, 공차가 2이다.

$\therefore a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$ 답 $a_n=2n-1$

1150 $a_{n+1}=-5a_n$에서 주어진 수열은 공비가 -5인 등비수열이다. 이때 첫째항이 $a_1=2$이므로

$a_n=2\cdot(-5)^{n-1}$ 답 $a_n=2\cdot(-5)^{n-1}$

1151 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이고,

$a_1=1,\ a_2\div a_1=4\div 1=4$

이므로 첫째항이 1, 공비가 4이다.

$\therefore a_n=1\cdot 4^{n-1}=4^{n-1}$ 답 $a_n=4^{n-1}$

1152 $a_{n+1}=a_n+n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+1$

$a_3=a_2+2=a_1+1+2$

$a_4=a_3+3=a_1+1+2+3$

⋮

$a_{10}=a_9+9=a_1+1+2+\cdots+9$

$\quad=1+45=46$ 답 46

1153 $a_{n+1}-a_n=3^n$, 즉 $a_{n+1}=a_n+3^n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+3$

$a_3=a_2+3^2=a_1+3+3^2$

10 수학적 귀납법

$a_4=a_3+3^3=a_1+3+3^2+3^3$

$\vdots$

$a_{10}=a_9+3^9=a_1+3+3^2+\cdots+3^9$

$=3+\dfrac{3(3^9-1)}{3-1}=\dfrac{3^{10}+3}{2}$ 답 $\dfrac{3^{10}+3}{2}$

1154 $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=\dfrac{1}{2}a_1$

$a_3=\dfrac{2}{3}a_2=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}a_1$

$a_4=\dfrac{3}{4}a_3=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}a_1$

$\vdots$

$a_{10}=\dfrac{9}{10}a_9=\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{7}{8}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}a_1$

$=\dfrac{1}{10}a_1=\dfrac{2}{5}$ 답 $\dfrac{2}{5}$

1155 $a_{n+1}=2^n a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1$

$a_3=2^2a_2=2^2\cdot2a_1$

$a_4=2^3a_3=2^3\cdot2^2\cdot2a_1$

$\vdots$

$a_{10}=2^9a_9=2^9\cdot2^8\cdot2^7\cdot\cdots\cdot2a_1$

$=2^{1+2+3+\cdots+9}=2^{45}$ 답 2^{45}

1156 명제 $p(n)$이 $n=2, 4, 8, \cdots, 2^m, \cdots$ (m은 자연수)일 때 성립함을 보이려면

(i) $n=\boxed{2}$일 때, $p(n)$이 성립함을 보인다.

(ii) $2^{m+1}=2\cdot2^m$이므로 $n=k\ (k\ge2)$일 때 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=\boxed{2k}$일 때도 $p(n)$이 성립함을 보인다.

∴ (가) 2 (나) $2k$ 답 풀이 참조

1157 (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=\dfrac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(\boxed{2k^2+7k+6})}{6}$

$=\dfrac{\boxed{(k+1)(k+2)(2k+3)}}{6}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

∴ (가) $2k^2+7k+6$ (나) $(k+1)(k+2)(2k+3)$

답 풀이 참조

1158 (i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

위의 식의 양변에 $2k+1$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1$

$=(k+1)^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

답 풀이 참조

유형 01 등차수열의 귀납적 정의 본책 168쪽

수열 $\{a_n\}$에서

① $a_{n+1}-a_n=d$ (일정) 또는 $a_{n+1}=a_n+d$

② $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$ 또는 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

➡ 수열 $\{a_n\}$은 등차수열

1159 $a_{n+1}-a_n=-3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -3인 등차수열이다. 이때 $a_1=100$이므로

$a_n=100+(n-1)\cdot(-3)=-3n+103$

$a_k=13$에서 $-3k+103=13$

$3k=90$ ∴ $k=30$ 답 ③

1160 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=2$ ⋯⋯ ㉠

$a_8=a+7d=17$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $d=3$

∴ $a_n=-4+(n-1)\cdot3=3n-7$

$3n-7>100$에서 $3n>107$

∴ $n>\dfrac{107}{3}=35.\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 36이다. 답 ⑤

1161 $(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+25$에서

$a_{n+1}{}^2+2a_na_{n+1}+a_n{}^2=4a_na_{n+1}+25$

$a_{n+1}{}^2-2a_na_{n+1}+a_n{}^2=25$

$(a_{n+1}-a_n)^2=25$

이때 $a_n<a_{n+1}$이므로 $a_{n+1}-a_n=5$ ⋯ ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 10, 공차가 5인 등차수열이므로

$a_n=10+(n-1)\cdot5=5n+5$ ⋯ ❷

∴ $a_{20}=5\cdot20+5=105$ ⋯ ❸

답 105

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ a_{20}의 값을 구할 수 있다.	20 %

1162 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고

$a_1=-62$, $a_2-a_1=-58-(-62)=4$

이므로 첫째항이 -62, 공차가 4이다.

$\therefore a_n=-62+(n-1)\cdot 4=4n-66$

$4n-66>0$에서 $\quad n>\frac{66}{4}=16.5$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제17항부터 양수이므로 첫째항부터 제16항까지의 합이 최소가 된다. 답 16

└ 음수인 항만 더한 것이다.

유형 02 등비수열의 귀납적 정의 본책 168쪽

수열 $\{a_n\}$에서
① $a_{n+1}\div a_n=r$ (일정) 또는 $a_{n+1}=ra_n$
② $a_{n+1}\div a_n=a_{n+2}\div a_{n+1}$ 또는 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$
➡ 수열 $\{a_n\}$은 등비수열

1163 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다. 이때 $a_1=2$이므로

$$a_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-2}}$$

따라서 $a_{100}=\frac{1}{2^{98}}$이므로 $\quad k=98$ 답 ①

1164 $a_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+2}}$, 즉 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고 첫째항이 $a_1=1$이므로 공비를 r라 하면

$a_4=1\cdot r^3=125 \qquad \therefore r=5$

따라서 $\frac{a_{10}}{a_6}=\frac{a_{11}}{a_7}=\frac{a_{12}}{a_8}=\frac{a_{13}}{a_9}=r^4=625$이므로

$$\frac{a_{10}}{a_6}+\frac{a_{11}}{a_7}+\frac{a_{12}}{a_8}+\frac{a_{13}}{a_9}=4\cdot 625=2500$$ 답 2500

1165 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, 즉 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=16 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a_5=ar^4=64 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=4 \qquad \therefore r=2\ (\because r>0)$

└ 모든 항이 양수이므로 공비도 양수이다.

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$4a=16 \qquad \therefore a=4$

따라서 $a_n=4\cdot 2^{n-1}=2^2\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}2^{k+1}=\frac{2^2(2^5-1)}{2-1}=2^7-4=124$$ 답 124

1166 이차방정식 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a_{n+1}{}^2-a_na_{n+2}=0$$

$\therefore a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고

$a_1=2$, $\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{2}=3$

이므로 첫째항이 2, 공비가 3이다.

한편 주어진 이차방정식에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-a_{n+1}\pm\sqrt{a_{n+1}{}^2-a_na_{n+2}}}{a_n}$$
$$=-\frac{a_{n+1}}{a_n}\ (\because ㉠)$$
$$=-3$$

즉 $b_n=-3$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}b_k=\sum_{k=1}^{10}(-3)=-3\cdot 10=-30$$ 답 ①

1167 $\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n-\underbrace{2}_{\log_2 4}$에서

$\log_2 a_{n+1}=\log_2\frac{a_n}{4} \qquad \therefore a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n \qquad \cdots$ ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 8^8, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$a_n=8^8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=(2^3)^8\cdot\left(\frac{1}{2^2}\right)^{n-1}=2^{26-2n} \qquad \cdots ❷$$

$a_k=\frac{1}{8^8}$에서 $\qquad 2^{26-2k}=2^{-24}$

$26-2k=-24, \qquad 2k=50 \qquad \therefore k=25 \qquad \cdots$ ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 k의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴로 정의된 수열 본책 169쪽

$a_{n+1}=a_n+f(n)$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.
➡ $a_n=a_1+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)$

1168 $a_{n+1}=a_n+3n$의 n에 1, 2, 3, …, 10을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+3\cdot 1$
$a_3=a_2+3\cdot 2=a_1+3\cdot 1+3\cdot 2$
$a_4=a_3+3\cdot 3=a_1+3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3$
$\vdots$
$a_{11}=a_{10}+3\cdot 10=a_1+3\cdot 1+3\cdot 2+\cdots+3\cdot 10$
$\quad =a_1+\sum_{k=1}^{10}3k=1+3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=166$ 답 166

1169 $a_n-a_{n-1}=2^{n-1}$, 즉 $a_n=a_{n-1}+2^{n-1}$의 n에 2, 3, 4, …를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+2$
$a_3=a_2+2^2=a_1+2+2^2$
$a_4=a_3+2^3=a_1+2+2^2+2^3$
$\vdots$
$\therefore a_n=a_1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$
$\quad =1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$

$a_k=1023$에서 $\quad 2^k-1=1023$

$2^k=1024=2^{10} \quad \therefore k=10$

답 10

1170 $a_{n+1}=a_n+f(n)$의 n에 1, 2, 3, …, 49를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+f(1)$

$a_3=a_2+f(2)=a_1+f(1)+f(2)$

$a_4=a_3+f(3)=a_1+f(1)+f(2)+f(3)$

$\vdots$

$a_{50}=a_{49}+f(49)=a_1+f(1)+f(2)+\cdots+f(49)$

$=a_1+\sum_{k=1}^{49}f(k)=2+49^2-2=49^2$

답 ①

1171 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$에서

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+1-\frac{1}{2}$

$a_3=a_2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=a_1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$=a_1+1-\frac{1}{3}$

$a_4=a_3+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=a_1+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$=a_1+1-\frac{1}{4}$

$\vdots$

$\therefore a_n=a_1+1-\frac{1}{n}=3-\frac{1}{n}$

$\therefore a_{30}-a_5=\left(3-\frac{1}{30}\right)-\left(3-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

유형 04 $a_{n+1}=a_nf(n)$ 꼴로 정의된 수열

본책 169쪽

$a_{n+1}=a_nf(n)$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

➡ $a_n=a_1f(1)f(2)\cdots f(n-1)$

1172 $a_{n+1}=3^na_n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=3a_1$

$a_3=3^2a_2=3^2\cdot 3a_1$

$a_4=3^3a_3=3^3\cdot 3^2\cdot 3a_1$

$\vdots$

$a_{10}=3^9a_9=3^9\cdot 3^8\cdot \cdots \cdot 3a_1$

$=3^{1+2+\cdots+9}\cdot 3=3^{46}$

$\therefore \log_3 a_{10}=\log_3 3^{46}=46$

답 ④

1173 $\sqrt{n+1}\,a_{n+1}=\sqrt{n}\,a_n$에서

$a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,a_n$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …, 48을 차례대로 대입하면

$a_2=\sqrt{\frac{1}{2}}\,a_1$

$a_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\,a_1=\sqrt{\frac{1}{3}}\,a_1$

$a_4=\sqrt{\frac{3}{4}}\,a_3=\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\,a_1=\sqrt{\frac{1}{4}}\,a_1$

$\vdots$

$a_{49}=\sqrt{\frac{1}{49}}\,a_1=\frac{1}{7}$

답 $\frac{1}{7}$

1174 $a_n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)a_{n-1}=\frac{n^2-1}{n^2}a_{n-1}$

$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}a_{n-1}$ ⋯ ❶

위의 식의 n에 2, 3, 4, …를 차례대로 대입하면

$a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a_1$

$a_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}a_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}a_1$

$a_4=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}a_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}a_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}a_1$

$\vdots$

$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}a_1=\frac{2(n+1)}{n}$ ⋯ ❷

$a_k=\frac{21}{10}$에서 $\quad \frac{2(k+1)}{k}=\frac{21}{10}$

$21k=20k+20 \quad \therefore k=20$ ⋯ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 k의 값을 구할 수 있다.	20 %

1175 $a_{n+1}=(n+1)a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 2021을 차례대로 대입하면

$a_2=2\cdot a_1$

$a_3=3\cdot a_2=3\cdot 2\cdot a_1$

$a_4=4\cdot a_3=4\cdot 3\cdot 2\cdot a_1$

$\vdots$

$a_{2022}=2022\cdot a_{2021}=2022\cdot 2021\cdot\cdots\cdot 2\cdot a_1$

이때 $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$이므로 a_5, a_6, …, a_{2022}는 모두 120으로 나누어떨어진다.

즉 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2022}$를 120으로 나누었을 때의 나머지는 $a_1+a_2+a_3+a_4$를 120으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4=1+2+6+24=33$이므로 구하는 나머지는 33이다.

답 33

유형 05 여러 가지 수열의 귀납적 정의

본책 170쪽

관계식으로부터 수열 $\{a_n\}$의 특징을 파악하기 어려운 경우에는 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 항을 구한다.

1176 $a_{n+1}=-3a_n+2$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$a_2=-3a_1+2=-3\cdot1+2=-1$

$a_3=-3a_2+2=-3\cdot(-1)+2=5$

$a_4=-3a_3+2=-3\cdot5+2=-13$

$a_5=-3a_4+2=-3\cdot(-13)+2=41$

$\therefore a_6=-3a_5+2=-3\cdot41+2=-121$ 답 ④

1177 주어진 식의 n에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+1=2+1=3$ $n=1$은 홀수

$a_3=2a_2=2\cdot3=6$ $n=2$는 짝수

$a_4=a_3+1=6+1=7$

$a_5=2a_4=2\cdot7=14$

$a_6=a_5+1=14+1=15$

$\therefore a_7=2a_6=2\cdot15=30$ 답 30

1178 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_2=\dfrac{a_1}{2a_1+1}=\dfrac{1}{2\cdot1+1}=\dfrac{1}{3}$

$a_3=\dfrac{a_2}{2a_2+1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}=\dfrac{1}{5}$

$a_4=\dfrac{a_3}{2a_3+1}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+1}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}}=\dfrac{1}{7}$

⋮

$\therefore a_n=\dfrac{1}{2n-1}$

$a_k=\dfrac{1}{93}$에서 $\dfrac{1}{2k-1}=\dfrac{1}{93}$ $\therefore k=47$ 답 ②

1179 $a_n+a_{n+1}=n+1$의 n에 1, 3, 5, …, 49를 차례대로 대입하면

$a_1+a_2=2$

$a_3+a_4=4$

$a_5+a_6=6$

⋮

$a_{49}+a_{50}=50$

$\therefore \sum_{k=1}^{50}a_k=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{49}+a_{50})$

$=2+4+6+\cdots+50$

$=\sum_{k=1}^{25}2k=2\cdot\dfrac{25\cdot26}{2}=650$ 답 ⑤

1180 $\sum_{k=1}^{8}\dfrac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}=\sum_{k=1}^{8}\dfrac{a_{k+2}-a_{k+1}}{a_{k+1}a_{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{8}\left(\dfrac{1}{a_{k+1}}-\dfrac{1}{a_{k+2}}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}\right)+\left(\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_4}\right)+\left(\dfrac{1}{a_4}-\dfrac{1}{a_5}\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{a_9}-\dfrac{1}{a_{10}}\right)$

$=\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_{10}}$

이때 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 나열하면

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

이므로 구하는 값은

$1-\dfrac{1}{55}=\dfrac{54}{55}$ 답 $\dfrac{54}{55}$

유형 06 같은 수가 반복되는 수열 본책 171쪽

주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 같은 수가 반복되는 규칙을 찾는다.

1181 $a_{n+1}=a_n+(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+(-1)=5-1=4$

$a_3=a_2+(-1)^2=4+1=5$

$a_4=a_3+(-1)^3=5-1=4$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 5, 4가 이 순서대로 반복된다.

이때 $100=2\cdot50$이므로

$a_{100}=4$ 답 4

1182 조건 (가)에서 $a_{n+1}=2a_n-1$의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1-1=2\cdot3-1=5$

$a_3=2a_2-1=2\cdot5-1=9$

$a_4=2a_3-1=2\cdot9-1=17$ … ❶

조건 (나)에서 $a_{n+4}=a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 3, 5, 9, 17이 이 순서대로 반복된다. … ❷

이때 $30=4\cdot7+2$이므로

$\sum_{k=1}^{30}a_k=7(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_1+a_2$

$=7(3+5+9+17)+3+5=246$ … ❸

답 246

채점 기준	비율
❶ a_2, a_3, a_4의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾을 수 있다.	30 %
❸ $\sum_{k=1}^{30}a_k$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1183 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_3=a_2-a_1=9-3=6$

$a_4=a_3-a_2=6-9=-3$

$a_5=a_4-a_3=-3-6=-9$

$a_6=a_5-a_4=-9-(-3)=-6$

$a_7=a_6-a_5=-6-(-9)=3$

$a_8=a_7-a_6=3-(-6)=9$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 3, 9, 6, −3, −9, −6이 이 순서대로 반복된다.

반복되는 6개의 수 중에서 $|a_k|=9$를 만족시키는 수는 9, -9의 2개이다.

이때 $80=\overbrace{6\cdot13}^{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{78}}+\underbrace{2}_{a_{79},\ a_{80}}$이므로 구하는 80 이하의 자연수 k의 개수는

$$2\cdot13+\underbrace{1}_{a_{80}=9}=27$$

답 ⑤

1184 $a_1+a_2+a_3=a_2+a_3+a_4=10$이므로 $\quad a_1=a_4$

$a_2+a_3+a_4=a_3+a_4+a_5=10$이므로 $\quad a_2=a_5$

$a_3+a_4+a_5=a_4+a_5+a_6=10$이므로 $\quad a_3=a_6$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 a_1, a_2, a_3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $7=2\cdot3+1$, $12=3\cdot4$이므로

$$a_1=a_7=3,\ a_3=a_{12}=5$$

$a_1+a_2+a_3=10$에서

$$a_2=10-a_1-a_3=10-3-5=2$$

$101=3\cdot33+2$, $106=3\cdot35+1$이므로

$$a_{101}a_{106}=a_2a_1=2\cdot3=6$$

답 6

유형 07 a_n과 S_n 사이의 관계식이 주어진 수열 본책 171쪽

$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$임을 이용하여 주어진 등식을 a_n 또는 S_n에 대한 식으로 변형한다.

1185 $S_n=4a_n-9$에서

$$S_{n+1}=4a_{n+1}-9$$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$$a_{n+1}=4a_{n+1}-9-(4a_n-9)$$

$$3a_{n+1}=4a_n \qquad \therefore\ a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=3$, 공비가 $\frac{4}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{100}=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{99}=\frac{4^{99}}{3^{98}}$$

답 ④

1186 $S_{n+1}=2S_n+3$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$S_2=2S_1+3=2\cdot1+3=5$$
$$S_3=2S_2+3=2\cdot5+3=13$$
$$S_4=2S_3+3=2\cdot13+3=29$$
$$S_5=2S_4+3=2\cdot29+3=61$$
$$S_6=2S_5+3=2\cdot61+3=125$$
$$\therefore\ a_6=S_6-S_5=125-61=64$$

답 64

1187 $S_n=2a_n+n$에서

$$S_{n+1}=2a_{n+1}+n+1$$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$$a_{n+1}=2a_{n+1}+n+1-(2a_n+n)$$

$$\therefore\ a_{n+1}=2a_n-1$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2=2a_1-1=2\cdot(-1)-1=-3$$
$$a_3=2a_2-1=2\cdot(-3)-1=-7$$
$$a_4=2a_3-1=2\cdot(-7)-1=-15$$
$$\therefore\ a_5=2a_4-1=2\cdot(-15)-1=-31$$

답 -31

1188 ㄱ. $S_n=\frac{a_na_{n+1}}{3}$에 $n=1$을 대입하면

$$S_1=\frac{a_1a_2}{3}$$

$S_1=a_1$이므로 $\quad a_2=3$

ㄴ. $S_n=\frac{a_na_{n+1}}{3}$에서

$$3S_n=a_na_{n+1} \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$
$$\therefore\ 3S_{n+1}=a_{n+1}a_{n+2} \qquad \cdots\cdots\ ㉡$$

㉡$-$㉠을 하면

$$3(S_{n+1}-S_n)=a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$$
$$3a_{n+1}=a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$$
$$\therefore\ a_{n+2}-a_n=3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

ㄷ. $a_{n+2}-a_n=3$, 즉 $a_{n+2}=a_n+3$의 n에 1, 2, 3, 4, $\cdots$를 차례대로 대입하면

$$a_3=a_1+3=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$$
$$a_4=a_2+3=3+3=6$$
$$a_5=a_3+3=\frac{9}{2}+3=\frac{15}{2}$$
$$a_6=a_4+3=6+3=9$$
$$\vdots$$

즉 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $\frac{3}{2}$인 등차수열이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

유형 08 ~ 09 수열의 귀납적 정의의 활용 본책 172쪽

(i) 제n항과 제$(n+1)$항 사이의 관계를 식으로 나타낸다.
(ii) (i)의 식을 변형하거나 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 대입한다.

1189 n개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$개의 새로운 평면이 생긴다. 즉 $(n+1)$개의 직선에 의하여 분할된 평면은 n개의 직선에 의하여 분할된 평면보다 $(n+1)$개가 많으므로

$$a_{n+1}=a_n+n+1$$

이때 $a_3=7$이므로

$$a_4=a_3+3+1=7+3+1=11$$
$$a_5=a_4+4+1=11+4+1=16$$
$$\therefore\ a_6=a_5+5+1=16+5+1=22$$

답 ③

1190 시행을 한 번 하면 전체 끈의 길이의 $\frac{2}{3}$가 남으므로

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n \qquad \cdots\ ❶$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=\frac{2}{3}\cdot81=54$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n=54\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots❷$$

$$\therefore\ a_8=54\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^7=\frac{256}{81} \quad \cdots❸$$

답 $\frac{256}{81}$

채점 기준	비율
❶ a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ a_8의 값을 구할 수 있다.	20 %

1191 주어진 그림에서

$a_1=4$

$a_2=a_1+6$

$a_3=a_2+8$

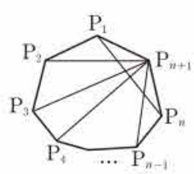
⋮

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+2(n+2)$

$=a_n+2n+4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 $a_{n+1}=a_n+2n+4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

1192 오른쪽 그림과 같이 n각형의 꼭짓점을 각각 P_1, P_2, $\cdots$, P_n이라 하고 두 꼭짓점 P_1과 P_n 사이에 꼭짓점 P_{n+1}을 추가하여 $(n+1)$각형을 만들면 추가되는 대각선은



$\overline{P_1P_n}$, $\overline{P_2P_{n+1}}$, $\overline{P_3P_{n+1}}$, $\cdots$, $\overline{P_{n-1}P_{n+1}}$

의 $(n-1)$개이므로

$a_{n+1}=a_n+n-1\ (n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots)$

따라서 $f(n)=n-1$이므로

$f(11)=10$

답 10

1193 n주 후 어항의 물의 양을 a_n L라 하면

$$a_1=\frac{4}{5}\cdot25+\left(\frac{4}{5}\cdot25\right)\cdot\frac{1}{5}=24,$$

$$a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n+\frac{4}{5}a_n\cdot\frac{1}{5}=\frac{24}{25}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 24, 공비가 $\frac{24}{25}$인 등비수열이므로

$$a_n=24\cdot\left(\frac{24}{25}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{10}=24\cdot\left(\frac{24}{25}\right)^9=\frac{24^{10}}{5^{18}}$$

즉 $a=24$, $b=10$일 때 $a+b$의 값이 최소이므로 구하는 최솟값은

$24+10=34$

답 ⑤

1194 (1) $a_{n+1}=3(a_n-4)=3a_n-12\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=3\cdot(20-4)=48$이므로

$a_2=3a_1-12=3\cdot48-12=132$

답 (1) $a_{n+1}=3a_n-12\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ (2) 132

1195 $(n+1)$명을 두 조로 나누는 방법의 수는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) n명의 학생을 두 조로 나누는 방법의 수는 a_n이고 각각의 방법에서 추가된 1명을 두 조 중 어느 한 조에 넣는 방법의 수는 $2a_n$

(ii) n명과 추가된 1명으로 두 조를 나누는 방법의 수는 1

(i), (ii)에서 구하는 관계식은

$a_{n+1}=2a_n+1\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

답 $a_{n+1}=2a_n+1\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

1196 a_n %의 소금물 150 g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{a_n}{100}\times150=\frac{3}{2}a_n\ (\text{g})$$

10 %의 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{10}{100}\times50=5\ (\text{g})$$

$$\therefore\ a_{n+1}=\frac{\frac{3}{2}a_n+5}{200}\times100=\frac{3}{4}a_n+\frac{5}{2}$$

따라서 $p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{5}{2}$이므로 $pq=\frac{15}{8}$

답 $\frac{15}{8}$

1197 n회 시행 후 그릇 A에 담긴 밀가루의 양이 a_n kg이면 그릇 B에 담긴 밀가루의 양은 $(2-a_n)$ kg이므로

$$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{2}\left\{(2-a_n)+\frac{1}{4}a_n\right\}$$

$$=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{2}\left(2-\frac{3}{4}a_n\right)=\frac{3}{8}a_n+1$$

따라서 $p=\frac{3}{8}$, $q=1$이므로 $p-q=-\frac{5}{8}$

답 ⑤

1198 각 층에 필요한 정육면체의 개수를 위에서부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 하면

$a_1=1$

$a_2=a_1+4$

$a_3=a_2+4\cdot2=a_1+4+4\cdot2$

$a_4=a_3+4\cdot3=a_1+4+4\cdot2+4\cdot3$

⋮

$\therefore\ a_n=a_1+4+4\cdot2+4\cdot3+\cdots+4\cdot(n-1)$

$=1+4\{1+2+\cdots+(n-1)\}$

$=1+4\cdot\frac{n(n-1)}{2}$

$=2n^2-2n+1 \quad \cdots❶$

따라서 10층 탑을 쌓을 때 필요한 정육면체의 개수는

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-2k+1)$$

$$=2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot11}{2}+10$$

$=670 \quad \cdots❷$

답 670

채점 기준	비율
❶ n층에 필요한 정육면체의 개수를 구할 수 있다.	60 %
❷ 10층 탑을 쌓을 때 필요한 정육면체의 개수를 구할 수 있다.	40 %

유형 10 수학적 귀납법
본책 173쪽

모든 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이
① $p(1)$이 참이다.
② $p(k)$가 참이면 $p(k+n)$이 참이다.
를 모두 만족시키면
⇒ $p(1)$, $p(1+n)$, $p(1+2n)$, $\cdots$이 모두 참이다.

1199 조건 (가), (나)에 의하여

$p(1)$, $p(2)$, $p(2^2)$, $p(2^3)$, $\cdots$, $p(2^a)$ (a는 음이 아닌 정수)

이 참이다.

또 조건 (가), (다)에 의하여

$p(1)$, $p(3)$, $p(3^2)$, $p(3^3)$, $\cdots$, $p(3^b)$ (b는 음이 아닌 정수)

이 참이다.

따라서 조건 (나), (다)에 의하여 $p(2^a\times3^b)$은 참이다.

① $p(42)=p(2\cdot3\cdot7)$
② $p(45)=p(3^2\cdot5)$
③ $p(66)=p(2\cdot3\cdot11)$
④ $p(108)=p(2^2\cdot3^3)$
⑤ $p(120)=p(2^3\cdot3\cdot5)$

따라서 반드시 참인 명제는 $p(108)$이다.

답 ④

1200 ㄱ. $p(1)$이 참이면 주어진 조건에 의하여

$p(4)$, $p(7)$, $p(10)$, $\cdots$, $p(3l+1)$ (l은 자연수)

이 모두 참이지만 $p(3l)$이 참인지는 알 수 없다.

ㄴ. $p(3)$이 참이면 주어진 조건에 의하여

$p(6)$, $p(9)$, $p(12)$, $\cdots$, $p(3l)$ (l은 자연수)

이 모두 참이므로 모든 3의 양의 배수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다.

ㄷ. $p(1)$이 참이면 ㄱ에서 $p(3l+1)$ (l은 자연수)이 참이다.

또 $p(2)$가 참이면 주어진 조건에 의하여

$p(5)$, $p(8)$, $p(11)$, $\cdots$, $p(3l+2)$

가 참이다. 그러나 $p(3l)$이 참인지는 알 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

1201 ㄱ. $p(1)$이 참이면

$p(3)$, $p(5)$, $p(7)$, $\cdots$, $p(2l+1)$ (l은 자연수)

이 참이므로 $p(31)=p(2\cdot15+1)$도 참이다.

ㄴ. $p(1)$이 참이면

$p(2)$, $p(2^2)$, $\cdots$, $p(2^l)$ (l은 자연수)

은 참이지만 31은 2의 거듭제곱 꼴이 아니므로 $p(31)$이 참인지는 알 수 없다.

ㄷ. 대우 '$p(k)$가 참이면 $p(2k+1)$도 참이다.'에 의하여 $p(1)$이 참이면

$p(2\cdot1+1)=p(3)$, $p(2\cdot3+1)=p(7)$,
$p(2\cdot7+1)=p(15)$, $p(2\cdot15+1)=p(31)$, $\cdots$

도 참이다.

이상에서 (나)의 조건이 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

유형 11 수학적 귀납법; 등식의 증명
본책 174쪽

모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립함을 증명할 때에는
(i) $n=1$일 때, 등식이 성립함을 확인한다.
(ii) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정한다.
(iii) (ii)의 등식의 양변에 적당한 식을 더하여 $n=k+1$일 때도 등식이 성립함을 보인다.

1202 (ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$$

위의 식의 양변에 $\boxed{2^k}$을 더하면

$$\begin{aligned}1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k&=2^k-1+2^k\\&=2\cdot2^k-1=\boxed{2^{k+1}-1}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

$\therefore$ (가) 2^k (나) $2^{k+1}-1$

즉 $f(k)=2^k$, $g(k)=2^{k+1}-1$이므로

$$f(3)+g(4)=8+31=39$$

답 39

1203 (i) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=\frac{1}{1\cdot3}=\frac{1}{3},\ (\text{우변})=\frac{1}{2\cdot1+1}=\frac{1}{3}$$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

위의 식의 양변에 $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\&+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

답 풀이 참조

1204
$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{k+1}\right)^2-\left(\frac{2}{k+1}\right)^2+\left(\frac{3}{k+1}\right)^2-\cdots+(-1)^{k+2}\cdot\left(\frac{k+1}{k+1}\right)^2\\&=\boxed{\frac{k^2}{(k+1)^2}}\left\{\left(\frac{1}{k}\right)^2-\left(\frac{2}{k}\right)^2+\left(\frac{3}{k}\right)^2\right.\\&\qquad\left.-\cdots+(-1)^{k+1}\cdot\left(\frac{k}{k}\right)^2+(-1)^{k+2}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right\}\\&=\frac{k^2}{(k+1)^2}\left\{(-1)^{k+1}\cdot\frac{k+1}{2k}+(-1)^{k+2}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right\}\\&=\frac{k^2}{(k+1)^2}\cdot(-1)^{k+2}\cdot\frac{k+1}{k}\left(\frac{k+1}{k}-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{k^2}{(k+1)^2}\cdot(-1)^{k+2}\cdot\frac{k+1}{k}\cdot\boxed{\frac{k+2}{2k}}\\&=(-1)^{k+2}\cdot\frac{k+2}{2(k+1)}=(-1)^{(k+1)+1}\cdot\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}\end{aligned}$$

$\therefore$ (가) $\dfrac{k^2}{(k+1)^2}$ (나) $\dfrac{k+2}{2k}$

즉 $f(k)=\dfrac{k^2}{(k+1)^2}$, $g(k)=\dfrac{k+2}{2k}$이므로

$f(4)g(8)=\dfrac{16}{25}\cdot\dfrac{10}{16}=\dfrac{2}{5}$ 답 $\dfrac{2}{5}$

유형 12 수학적 귀납법; 배수의 증명 본책 175쪽

$n\geq a$인 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 l의 배수임을 증명할 때에는

(i) $f(a)$가 l의 배수임을 확인한다. (단, a는 자연수)

(ii) $f(k)$ $(k\geq a)$가 l의 배수라 가정한다.

(iii) $f(k+1)=l(■+▲)$ 꼴로 정리하여 $f(k+1)$도 l의 배수임을 보인다.

1205 (ii) $n=k$일 때 n^3+5n이 6의 배수라 가정하면

$k^3+5k=6N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}(k+1)^3+5(k+1)&=k^3+3k^2+\boxed{8k+6}\\&=\boxed{k^3+5k}+6+3k(k+1)\\&=6(N+1)+3k(k+1)\end{aligned}$$

이고, k 또는 $k+1$이 2의 배수이므로 $3k(k+1)$은 $\boxed{6}$의 배수이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 n^3+5n이 6의 배수이다.

$\therefore$ (가) $8k+6$ (나) k^3+5k (다) 6

즉 $f(k)=8k+6$, $g(k)=k^3+5k$, $a=6$이므로

$\dfrac{g(a)}{f(a)}=\dfrac{g(6)}{f(6)}=\dfrac{246}{54}=\dfrac{41}{9}$

따라서 $p=9$, $q=41$이므로 $p+q=50$ 답 ③

1206 (ii) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때 8^n-7n-1이 49의 배수라 가정하면

$8^k-7k-1=49N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}8^{k+1}-7(k+1)-1&=\boxed{8\cdot 8^k}-7k-8\\&=8(8^k-7k-1)+\boxed{49k}\\&=8\cdot 49N+49k\\&=49(\boxed{8N+k})\end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 8^n-7n-1이 49의 배수이다.

$\therefore$ (가) $8\cdot 8^k$ (나) $49k$ (다) $8N+k$ 답 ⑤

1207 (ii) $n=k$일 때 $2^{n+1}+3^{2n-1}$이 7의 배수라 가정하면

$2^{k+1}+3^{2k-1}=7N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}2^{k+2}+3^{2k+1}&=\boxed{2}\cdot 2^{k+1}+\boxed{9}\cdot 3^{2k-1}\\&=2\cdot 2^{k+1}+2\cdot 3^{2k-1}+7\cdot 3^{2k-1}\\&=2(2^{k+1}+3^{2k-1})+7\cdot 3^{2k-1}\\&=2\cdot 7N+7\cdot\boxed{3^{2k-1}}\\&=7(2N+3^{2k-1})\end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 $2^{n+1}+3^{2n-1}$이 7의 배수이다.

$\therefore$ (가) 2 (나) 9 (다) 3^{2k-1}

즉 $a=2$, $b=9$, $f(k)=3^{2k-1}$이므로

$f(b-a)=f(7)=3^{2\cdot 7-1}=3^{13}$ 답 ①

유형 13 수학적 귀납법; 부등식의 증명 본책 176쪽

$n\geq a$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식이 성립함을 증명할 때에는

(i) $n=a$일 때, 부등식이 성립함을 확인한다. (단, a는 자연수)

(ii) $n=k$ $(k\geq a)$일 때 부등식이 성립한다고 가정한다.

(iii) $A>B$, $B>C$이면 $A>C$임을 이용하여 $n=k+1$일 때도 부등식이 성립함을 보인다.

1208 (ii) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}<2-\dfrac{1}{k}$

위의 식의 양변에 $\dfrac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}$

$<2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}$ …… ㉡

이때

$$\begin{aligned}&\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\left(\boxed{2-\frac{1}{k+1}}\right)\\&=-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+1}=\frac{-(k+1)^2+k+k(k+1)}{k(k+1)^2}\\&=-\frac{1}{k(k+1)^2}<\boxed{0}\end{aligned}$$

이므로 $2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}<2-\dfrac{1}{k+1}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}<2-\dfrac{1}{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

$\therefore$ (가) $2-\dfrac{1}{k+1}$ (나) 0

즉 $f(k)=2-\dfrac{1}{k+1}$, $a=0$이므로

$f(a)=f(0)=2-1=1$ 답 1

1209 (ii) $n=k$ $(k\geq 5)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k>k^2$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+1}>2k^2$ …… ㉠

그런데 $k\geq 5$이면

$k^2-2k-1=\boxed{(k-1)^2}-2>0$

이므로 $k^2>2k+1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$2^{k+1}>2k^2=k^2+k^2>k^2+2k+1=\boxed{(k+1)^2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $(k-1)^2$ (나) $(k+1)^2$ 답 ④

1210 (ii) $n=k$ ($k\ge 6$)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\left(\frac{k}{2}\right)^k > k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} = \frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{(k+1)(k+1)^k}{2^{k+1}}$$
$$= \frac{k+1}{2^{k+1}}\cdot\frac{(k+1)^k}{k^k}\cdot k^k$$
$$= \frac{k+1}{2}\cdot\frac{1}{2^k}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\cdot k^k$$
$$= \frac{k+1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cdot\boxed{\left(\frac{k}{2}\right)^k} \quad \cdots\cdots ㉡$$

그런데 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k>2$이므로 ㉠, ㉡에서

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} > \frac{k+1}{2}\cdot 2\cdot k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1$$
$$= \frac{k+1}{2}\cdot\boxed{2k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1}$$
$$= (k+1)k(k-1)\cdot\cdots\cdot 1$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ (나) $2k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1$

즉 $f(k)=\left(\frac{k}{2}\right)^k$, $g(k)=2k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1$이므로

$$f(4)+g(3)=2^4+2\cdot 3\cdot 2\cdot 1=28$$

답 ⑤

1211 1st a_1, a_2, a_3, a_4, a_5의 값을 구한다.

조건 (가), (나)에 의하여

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\ a_4=7,\ a_5=9$$

2nd $\sum_{k=1}^{30} a_k$의 값을 구한다.

조건 (다)에 의하여

$$a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$$
$$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=2(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$$
$$=2^2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$$
$$a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=2(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15})$$
$$=2^3(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$$
$$\vdots$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{30} a_k=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)(1+2+2^2+\cdots+2^5)$$
$$=(1+3+5+7+9)\cdot\frac{2^6-1}{2-1}$$
$$=25\cdot 63=1575$$

답 1575

1212 1st 수열 $\{a_n+b_n\}$의 일반항을 구한다.

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+2b_n & \cdots\cdots ㉠ \\ b_{n+1}=2a_n+3b_n & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠+㉡을 하면

$$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$$

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=2$, 공비가 5인 등비수열이므로

$$a_n+b_n=2\cdot 5^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉢$$

2nd a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

㉢을 ㉠에 대입하면

$$a_{n+1}=3a_n+2b_n=a_n+2(a_n+b_n)$$
$$=a_n+4\cdot 5^{n-1}$$

3rd a_{10}의 값을 구한다.

$a_{n+1}=a_n+4\cdot 5^{n-1}$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+4\cdot 1$$
$$a_3=a_2+4\cdot 5=a_1+4\cdot 1+4\cdot 5$$
$$a_4=a_3+4\cdot 5^2=a_1+4\cdot 1+4\cdot 5+4\cdot 5^2$$
$$\vdots$$
$$a_{10}=a_9+4\cdot 5^8=a_1+4\cdot 1+4\cdot 5+\cdots+4\cdot 5^8$$
$$=2+4(1+5+\cdots+5^8)$$
$$=2+4\cdot\frac{5^9-1}{5-1}=5^9+1$$

답 ②

1213 1st a_2의 값을 구한다.

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(k+3)a_k$의 n에 1을 대입하면

$$a_2=(1+3)\cdot a_1=4\cdot 5=20$$

2nd $\frac{a_{31}}{a_{30}}$의 값을 구한다.

$n\ge 2$일 때, $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(k+3)a_k$이므로

$$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n}(k+3)a_k-\sum_{k=1}^{n-1}(k+3)a_k$$
$$=(n+3)a_n$$
$$\therefore a_{n+1}=(n+4)a_n\ (n\ge 2)$$

위의 식의 n에 30을 대입하면 $\quad a_{31}=34a_{30}$

$$\therefore \frac{a_{31}}{a_{30}}=34$$

3rd $a_2+\frac{a_{31}}{a_{30}}$의 값을 구한다.

$a_2=20$, $\frac{a_{31}}{a_{30}}=34$이므로 $\quad a_2+\frac{a_{31}}{a_{30}}=54$

답 ⑤

1214 1st a_n을 구한다.

$a_{n+1}=3a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다. 이때 첫째항이 1이므로

$$a_n=3^{n-1}$$

2nd b_n을 구한다.

$b_{n+1}=(n+1)b_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$$b_2=2b_1$$
$$b_3=3b_2=3\cdot 2b_1$$
$$b_4=4b_3=4\cdot 3\cdot 2b_1$$
$$\vdots$$
$$\therefore b_n=n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2b_1$$
$$=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$$

3rd $\sum_{n=1}^{50} 2c_n$의 값을 구한다.

$1\le n\le 4$일 때, $a_n\ge b_n$이므로

$$c_n=b_n$$

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=9,\ a_4=27$
$b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=6,\ b_4=24$

$n\ge 5$일 때, $a_n<b_n$이므로

$$c_n=a_n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{50} 2c_n = 2\left\{\sum_{n=1}^{4}(1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n)+\underbrace{\sum_{n=5}^{50}3^{n-1}}\right\}$$

첫째항이 3^4, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제46항까지의 합

$$=2\left\{1+2+6+24+\frac{3^4(3^{46}-1)}{3-1}\right\}$$

$$=3^{50}-15$$

답 ③

1215 (1st) $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하여 수열 $\{a_{3n}\}$의 일반항을 구한다.

$a_1=a$이므로 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+(-1)\cdot2=a-2$
$a_3=a_2+(-1)^2\cdot2=a$
$a_4=a_3+1=a+1$
$a_5=a_4+(-1)^4\cdot2=a+3$
$a_6=a_5+(-1)^5\cdot2=a+1$
$a_7=a_6+1=a+2$
$a_8=a_7+(-1)^7\cdot2=a$
$a_9=a_8+(-1)^8\cdot2=a+2$
⋮

이므로 $a_{3n}=a+(n-1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2nd) a의 값을 구한다.

$a_{15}=a+4=43$이므로 $a=39$

답 ⑤

1216 (1st) $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾는다.

주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_2=\dfrac{a_1+93}{2}=\dfrac{3+93}{2}=48$ ($a_1=3$은 홀수)

$a_3=\dfrac{a_2}{2}=\dfrac{48}{2}=24$ ($a_2=48$은 짝수)

$a_4=\dfrac{a_3}{2}=\dfrac{24}{2}=12$

$a_5=\dfrac{a_4}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

$a_6=\dfrac{a_5}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 3, 48, 24, 12, 6이 이 순서대로 반복된다.

(2nd) $a_k=3$을 만족시키는 50 이하의 모든 자연수 k의 값의 합을 구한다.

수열 $\{a_n\}$은 5개의 수가 반복되고 $a_1=3$이므로 $a_k=3$을 만족시키는 자연수 k는

1, 6, 11, 16, …

즉 첫째항이 1, 공차가 5인 등차수열을 이루므로 이 수열의 일반항을 b_n이라 하면

$b_n=1+(n-1)\cdot5=5n-4$

$b_n\le50$에서 $5n-4\le50$

$5n\le54$ $\therefore n\le\dfrac{54}{5}=10.8$

따라서 구하는 합은 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$\dfrac{10(2\cdot1+9\cdot5)}{2}=235$

답 235

1217 (1st) $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾는다.

$a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $a_{n+2}=-a_{n+1}-a_n$에서

$a_3=-a_2-a_1=-1-(-1)=0$
$a_4=-a_3-a_2=0-1=-1$
$a_5=-a_4-a_3=-(-1)-0=1$
$a_6=-a_5-a_4=-1-(-1)=0$
⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 -1, 1, 0이 이 순서대로 반복된다.

(2nd) 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $a_{121}=a_{3\cdot40+1}=a_1=-1$

ㄴ. $a_{100}=a_{3\cdot33+1}=a_1=-1$, $a_{200}=a_{3\cdot66+2}=a_2=1$이므로

$a_{100}+a_{200}=0$

ㄷ. $S_{3n}=S_{3n-1}+a_{3n}$이고 $a_{3n}=0$이므로

$S_{3n-1}=S_{3n}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

1218 (1st) 조건 (나)에서 $n=3, 4, 5, \cdots$를 차례대로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾는다.

조건 (나)에서

$a_n=(a_{n-2}+a_{n-1}$을 4로 나눈 나머지$)$ …… ㉠

이므로 ㉠의 n에 3, 4, 5, …를 차례대로 대입하면

$a_1+a_2=1+2=3$이므로 $a_3=3$
$a_2+a_3=2+3=5$이므로 $a_4=1$
$a_3+a_4=3+1=4$이므로 $a_5=0$
$a_4+a_5=1+0=1$이므로 $a_6=1$
$a_5+a_6=0+1=1$이므로 $a_7=1$
$a_6+a_7=1+1=2$이므로 $a_8=2$
⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 3, 1, 0, 1이 이 순서대로 반복된다.

(2nd) m의 값을 구한다.

$\sum_{k=1}^{6}a_k=1+2+3+1+0+1=8$이므로

$\sum_{k=1}^{6t}a_k=8t$ (단, t는 자연수)

$t=20$일 때, $\sum_{k=1}^{120}a_k=160$이고

$a_{121}=a_1=1$, $a_{122}=a_2=2$, $a_{123}=a_3=3$

이므로

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=166=160+1+2+3$$
$$=\sum_{k=1}^{120}a_k+a_{121}+a_{122}+a_{123}$$
$$=\sum_{k=1}^{123}a_k$$

$\therefore m=123$

답 123

1219 (1st) $f(n)=a_n$, $\sum_{k=1}^{n}f(k)=S_n$으로 놓고 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

$f(n)=a_n$이라 하면 $\sum_{k=1}^{n}f(k)=n^2f(n)$에서

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2a_n$$

$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이라 하면

$$S_n = n^2 a_n \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$S_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡－㉠을 하면

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$$

$$a_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$$

$$n(n+2)a_{n+1} = n^2 a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n$$

2nd $f(100)$의 값을 구한다.

$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 99를 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{3} a_1$$

$$a_3 = \frac{2}{4} a_2 = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} a_1$$

$$a_4 = \frac{3}{5} a_3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} a_1$$

$$\vdots$$

$$a_{100} = \frac{99}{101} a_{99} = \frac{99}{101} \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{97}{99} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} a_1$$

$$= \frac{2}{100 \cdot 101} = \frac{1}{5050}$$

$$\therefore f(100) = \frac{1}{5050}$$

답 $\frac{1}{5050}$

1220 1st (가)에 알맞은 식을 구한다.

$b_n = \frac{S_{n+1}}{S_n}$이라 하면 $b_1 = \frac{S_2}{S_1} = \frac{2}{1} = 2$이고

$$b_n = b_{n-1} + 2n \ (n \geq 2)$$

위의 식의 n에 2, 3, 4, …를 차례대로 대입하면

$$b_2 = b_1 + 2 \cdot 2$$

$$b_3 = b_2 + 2 \cdot 3 = b_1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3$$

$$b_4 = b_3 + 2 \cdot 4 = b_1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

$$\vdots$$

$$\therefore b_n = b_1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + 2n$$

$$= 2 + 2(2 + 3 + \cdots + n)$$

$$= 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \boxed{n}(n+1) \ (n \geq 1)$$

즉 $\frac{S_{n+1}}{S_n} = n(n+1)$이므로

$$S_{n+1} = n(n+1)S_n \ (n \geq 1)$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$$S_2 = 1 \cdot 2 \cdot S_1$$

$$S_3 = 2 \cdot 3 \cdot S_2 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot S_1$$

$$S_4 = 3 \cdot 4 \cdot S_3 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot S_1$$

$$\vdots$$

$$\therefore S_n = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \cdots \cdot (n-1)^2 \cdot nS_1$$

$$= n\{(n-1)!\}^2 \ (n \geq 1)$$

2nd (나)에 알맞은 식을 구한다.

따라서 $a_1 = 1$이고, $n \geq 2$일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n\{(n-1)!\}^2 - (n-1)\{(n-2)!\}^2$$

$$= n(n-1)^2\{(n-2)!\}^2 - (n-1)\{(n-2)!\}^2$$

$$= \{(n-2)!\}^2\{n(n-1)^2 - (n-1)\}$$

$$= \boxed{(n^3 - 2n^2 + 1)}\{(n-2)!\}^2$$

3rd $f(10) + g(6)$의 값을 구한다.

$f(n) = n$, $g(n) = n^3 - 2n^2 + 1$이므로

$$f(10) + g(6) = 10 + 145 = 155$$

답 ④

1221 1st (가)에 알맞은 수를 구한다.

(i) $n = 1$일 때, (우변)$= 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{6}$

2nd (나), (다)에 알맞은 식을 구한다.

(ii) $n = k$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\{k(k-1)(k-2) \cdot \cdots \cdot 1\}^3 \cdot 27^k$$

$$> 3k(3k-1)(3k-2) \cdot \cdots \cdot 1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $\boxed{27(k+1)^3}$을 곱하면

$$\{(k+1)k(k-1) \cdot \cdots \cdot 1\}^3 \cdot 27^{k+1}$$

$$> 27(k+1)^3 \cdot 3k(3k-1)(3k-2) \cdot \cdots \cdot 1$$

$$= 3^3 \cdot (k+1)^3 \cdot 3k(3k-1)(3k-2) \cdot \cdots \cdot 1$$

$$= (3k+3)^3 \cdot 3k(3k-1)(3k-2) \cdot \cdots \cdot 1$$

$$> (3k+3) \cdot \boxed{(3k+2)(3k+1)} \cdot 3k \cdot \cdots \cdot 1$$

이므로 $n = k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

3rd $a + f(1) + g(2)$의 값을 구한다.

$a = 6$, $f(k) = 27(k+1)^3$, $g(k) = (3k+2)(3k+1)$이므로

$$a + f(1) + g(2) = 6 + 216 + 56 = 278$$

답 278

1222 전략 주어진 수열 $\{a_n\}$은 등차수열, 수열 $\{b_n\}$은 등비수열임을 이용한다.

풀이 조건 (나), (다)에서 a가 $a \geq 3$인 자연수이므로 수열 $\{b_n\}$은

$$a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a, \cdots, 12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \cdots$$

조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$은

$$a, a - \frac{1}{4}, a - \frac{1}{2}, a - \frac{3}{4}, a - 1, \cdots,$$

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \cdots$$

따라서 수열 $\{b_n\}$의 항 중에서 $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$과 모든 자연수인 항은 수열 $\{a_n\}$과 공통인 항이 될 수 있다. ⋯ ❶

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공통인 항이 8개이려면 공통인 항은 작은 것부터 차례대로

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 6, 12, 24, 48, 96$$

이어야 한다.

$$\therefore a = 96$$ ⋯ ❷

답 96

채점 기준	비율
❶ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공통인 항의 꼴을 알 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

1223 전략 식을 변형한 후 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입한다.

풀이 $a_{n+1}-a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

$$=(-1)^n\cdot\frac{n+(n+1)}{n(n+1)}$$

$$=(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) \quad \cdots ❶$$

즉 $a_{n+1}=a_n+(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$이므로 n에 $1, 2, 3, \cdots, 29$를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1-1-\frac{1}{2}$$

$$a_3=a_2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=a_1-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$=a_1-1+\frac{1}{3}$$

$$a_4=a_3-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=a_1-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$=a_1-1-\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$a_{30}=a_1-1-\frac{1}{30}=3-1-\frac{1}{30}$$

$$=\frac{59}{30} \quad \cdots ❷$$

따라서 $p=30$, $q=59$이므로

$$p+q=89 \quad \cdots ❸$$

답 89

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ a_{30}의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1224 전략 $a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\ge2)$임을 이용하여 주어진 식을 S_n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\ge2)$이므로 $S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$에서

$$S_n=\frac{1}{2}\left(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}\right)$$

$$\therefore S_n^2-S_{n-1}^2=1\ (n\ge2)$$

또 $a_1=S_1$이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\left(S_1+\frac{1}{S_1}\right),\qquad 2S_1=S_1+\frac{1}{S_1}$$

$$S_1=\frac{1}{S_1}\qquad \therefore S_1^2=1$$

즉 수열 $\{S_n^2\}$은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열이므로

$$S_n^2=1+(n-1)\cdot1=n$$

$$\therefore S_n=\sqrt{n}\ (\because a_n>0) \quad \cdots ❶$$

$$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\ (n\ge2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$a_1=S_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1} \quad \cdots ❷$$

따라서 $a_{50}=\sqrt{50}-\sqrt{49}=5\sqrt{2}-7$이므로

$$p=5,\ q=7 \qquad \therefore pq=35 \quad \cdots ❸$$

답 35

채점 기준	비율
❶ S_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ pq의 값을 구할 수 있다.	20 %

1225 전략 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$의 길이를 n에 대한 식으로 나타내어 S_n을 구한다.

풀이 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=a_n$이라 하면

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$$

$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n$의 n에 $1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{3}a_1$$

$$a_3=\frac{2}{4}a_2=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1$$

$$a_4=\frac{3}{5}a_3=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_n=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1$$

$$=\frac{2}{n(n+1)} \quad \cdots ❶$$

이때 점 R_n은 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$의 중점이므로

$$\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

$\square\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{R}_n$
$=\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}})\cdot\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n}$

$$\therefore S_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}+\frac{2}{n(n+1)}\right\}\cdot1$$

$$=\frac{3}{2n(n+1)} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}S_n=\sum_{n=1}^{20}\frac{3}{2n(n+1)}$$

$$=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{7} \quad \cdots ❸$$

답 $\dfrac{10}{7}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\sum_{n=1}^{20}S_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

memo