쎈

정답 및 풀이

확률과 통계

정답을 확인하려 할 때는 《빠른 정답 찾기》를 이용하면 편리합니다.

01 순열

0001 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우는
$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$의 3가지
(ii) 눈의 수의 합이 7이 되는 경우는
$(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$의 6가지
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+6=9$ 답 9

0002 5의 배수가 적힌 공은 $5,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ 50$의 10개
11의 배수가 적힌 공은 $11,\ 22,\ 33,\ 44$의 4개
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$10+4=14$ 답 14

0003 3의 배수가 적힌 공은 $3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 48$의 16개
7의 배수가 적힌 공은 $7,\ 14,\ 21,\ \cdots,\ 49$의 7개
3과 7의 최소공배수인 21의 배수가 적힌 공은 21, 42의 2개
따라서 구하는 경우의 수는
$16+7-2=21$ 답 21

0004 $3\cdot2=6$ 답 6

0005 $3\cdot3=9$ 답 9

0006 $2\cdot2=4$ 답 4

0007 144를 소인수분해하면
$144=2^4\cdot3^2$
2^4의 양의 약수는
$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4$의 5개
3^2의 양의 약수는
$1,\ 3,\ 3^2$의 3개
이 중에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수는 모두 144의 약수가 된다.
따라서 구하는 약수의 개수는
$5\cdot3=15$ 답 15

$\times$	1	3	3^2
1	1	3	3^2
2	2	$2\cdot3$	$2\cdot3^2$
2^2	2^2	$2^2\cdot3$	$2^2\cdot3^2$
2^3	2^3	$2^3\cdot3$	$2^3\cdot3^2$
2^4	2^4	$2^4\cdot3$	$2^4\cdot3^2$

0008 $6\cdot4\cdot3=72$ 답 72

0009 ${}_6\mathrm{P}_3=6\cdot5\cdot4=120$ 답 120

0010 ${}_6\mathrm{P}_0=1$ 답 1

0011 ${}_4\mathrm{P}_4=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

0012 ${}_5\mathrm{P}_1\cdot3!=5\cdot3\cdot2\cdot1=30$ 답 30

0013 ${}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)$이므로
$n(n-1)=30=6\cdot5$ $\quad\therefore n=6$ 답 6

0014 $60=5\cdot4\cdot3$이므로 ${}_5\mathrm{P}_3=60$ $\quad\therefore r=3$ 답 3

0015 ${}_7\mathrm{P}_r=\dfrac{7!}{(7-r)!}=\dfrac{7!}{4!}$이므로
$7-r=4$ $\quad\therefore r=3$ 답 3

0016 ${}_n\mathrm{P}_n=n!,\ 120=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$이므로
$n!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ $\quad\therefore n=5$ 답 5

0017 5장의 카드에서 3장을 뽑는 순열의 수이므로
${}_5\mathrm{P}_3=5\cdot4\cdot3=60$ 답 60

0018 (i) 일의 자리에 2가 오는 경우
2를 제외한 나머지 4장의 카드에서 2장을 뽑는 순열의 수이므로
${}_4\mathrm{P}_2=4\cdot3=12$
(ii) 일의 자리에 4가 오는 경우
4를 제외한 나머지 4장의 카드에서 2장을 뽑는 순열의 수이므로
${}_4\mathrm{P}_2=4\cdot3=12$
(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는
$12+12=24$ 답 24

0019 4개를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

0020 A를 제외한 3개를 일렬로 나열하고, 그 뒤에 A를 나열하면 되므로 구하는 방법의 수는
$3!=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

0021 B와 C를 한 문자로 생각하여 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=3\cdot2\cdot1=6$
이때 각 경우에 대하여 B와 C가 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!=2$이므로 구하는 방법의 수는
$6\cdot2=12$ 답 12

0022 $(5-1)!=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

0023 $(6-1)!=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 답 120

0024 반장과 부반장을 한 사람으로 생각하여 5명의 학생이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는
$(5-1)!=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

이때 각 경우에 대하여 반장과 부반장이 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!=2$이므로 구하는 방법의 수는

$24\cdot2=48$ 답 48

0025 4가지 색을 원형으로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

0026 ${}_5\Pi_2=5^2=25$ 답 25

0027 ${}_2\Pi_7=2^7=128$ 답 128

0028 ${}_8\Pi_1=8^1=8$ 답 8

0029 ${}_6\Pi_0=6^0=1$ 답 1

0030 ${}_n\Pi_3=n^3$이므로 $n^3=125=5^3$

$\therefore n=5$ 답 5

0031 ${}_2\Pi_r=2^r$이므로 $2^r=64=2^6$

$\therefore r=6$ 답 6

0032 1, 2, 3의 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$ 답 81

0033 ○, ×의 2개에서 10개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_{10}=2^{10}=1024$ 답 1024

0034 7개의 숫자 중 1이 2개, 3이 4개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\dfrac{7!}{2!\cdot4!}=105$ 답 105

0035 6개의 문자 중 f가 2개, e가 2개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot2!}=180$ 답 180

0036 하나의 f를 제외한 5개의 문자를 일렬로 나열하면 된다.
이때 5개의 문자 중 e가 2개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$ 답 60

0037 A에서 B까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 5칸, 위쪽으로 3칸을 가야 한다.
오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b로 나타내면 구하는 방법의 수는 a, a, a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.
이때 a가 5개, b가 3개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\dfrac{8!}{5!\cdot3!}=56$ 답 56

01 합의 법칙 본책 12쪽

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면
(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)$=m+n$

0038 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지
(ii) 눈의 수의 합이 10이 되는 경우는
(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$4+3=7$ 답 7

0039 1부터 30까지의 자연수 중에서 소수는
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29의 10개
6의 배수는
6, 12, 18, 24, 30의 5개
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$10+5=15$ 답 ③

0040 꺼낸 공에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 세 수의 곱이 3이 되는 경우는
(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)
의 3가지 ··· ❶
(ii) 세 수의 곱이 4가 되는 경우는
(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1),
(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)
의 6가지 ··· ❷
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+6=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준표

채점 기준	배점
❶ 세 수의 곱이 3이 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 세 수의 곱이 4가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 세 수의 곱이 3 또는 4가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%

0041 1부터 100까지의 자연수 중에서
(i) 2로 나누어떨어지는 수, 즉 2의 배수는
2, 4, 6, ⋯, 100의 50개
(ii) 5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는
5, 10, 15, ⋯, 100의 20개
(iii) 2와 5로 나누어떨어지는 수, 즉 10의 배수는
10, 20, 30, ⋯, 100의 10개
이상에서 2 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수는
$50+20-10=60$
이므로 2와 5로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는

$100-60=40$ 답 ③

유형 02 방정식과 부등식의 해의 개수 (본책 12쪽)

① 방정식 $ax+by+cz=d$ (a, b, c, d는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 x, y, z 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 구한다.
② 부등식 $ax+by \le c$ (a, b, c는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수는 주어진 x, y의 값의 조건을 이용하여 부등식이 성립하는 $ax+by$의 값을 찾은 후, $ax+by=d$ 꼴의 방정식을 만들어 이 방정식의 해의 개수를 구한다.

0042 (i) $z=1$일 때, $x+2y=17$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(15, 1)$, $(13, 2)$, $(11, 3)$, $(9, 4)$,
$(7, 5)$, $(5, 6)$, $(3, 7)$, $(1, 8)$의 8개
(ii) $z=2$일 때, $x+2y=14$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(12, 1)$, $(10, 2)$, $(8, 3)$,
$(6, 4)$, $(4, 5)$, $(2, 6)$의 6개
(iii) $z=3$일 때, $x+2y=11$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(9, 1)$, $(7, 2)$, $(5, 3)$, $(3, 4)$, $(1, 5)$의 5개
(iv) $z=4$일 때, $x+2y=8$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(6, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$의 3개
(v) $z=5$일 때, $x+2y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(3, 1)$, $(1, 2)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$8+6+5+3+2=24$
답 24

0043 순서쌍 (x, y)는
$(20, 0)$, $(15, 3)$, $(10, 6)$, $(5, 9)$, $(0, 12)$
의 5개이다.
답 5

0044 x, y가 자연수이므로 $x+2y \le 6$을 만족시키는 경우는
$x+2y=3$, $x+2y=4$, $x+2y=5$, $x+2y=6$
(i) $x+2y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$의 1개
(ii) $x+2y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(2, 1)$의 1개
(iii) $x+2y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$, $(3, 1)$의 2개
(iv) $x+2y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(2, 2)$, $(4, 1)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+1+2+2=6$
답 ②

다른 풀이 (i) $y=1$일 때, $x+2 \le 6$, 즉 $x \le 4$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$의 4개
(ii) $y=2$일 때, $x+4 \le 6$, 즉 $x \le 2$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$, $(2, 2)$의 2개
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$4+2=6$

0045 100원, 300원, 500원짜리 사탕을 각각 x개, y개, z개 산다고 하면
$100x+300y+500z=1000$
$\therefore x+3y+5z=10$ …… ㉠
(i) $z=0$일 때, ㉠에서 $x+3y=10$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(10, 0)$, $(7, 1)$, $(4, 2)$, $(1, 3)$의 4개
(ii) $z=1$일 때, ㉠에서 $x+3y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(5, 0)$, $(2, 1)$의 2개
(iii) $z=2$일 때, ㉠에서 $x+3y=0$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(0, 0)$의 1개
이상에서 구하는 방법의 수는
$4+2+1=7$
답 7

유형 03 곱의 법칙 (본책 13쪽)

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면
(두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수)$=m \times n$

0046 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
1, 3, 5, 7, 9의 5개
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
2, 3, 5, 7의 4개
따라서 구하는 자연수의 개수는 $5 \cdot 4=20$
답 ②

0047 a가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개
b가 될 수 있는 것은 2, 4, 6의 3개
따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $4 \cdot 3=12$이므로
$n(C)=12$
답 12

0048 $(a+b+c)(x+y+z)$에서 a, b, c에 곱해지는 항이 각각 x, y, z의 3개이므로 항의 개수는 $3 \cdot 3=9$
답 ③

유형 04 약수의 개수 (본책 13쪽)

자연수 N이 $N=x^a y^b z^c$ (x, y, z는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 개수
➡ $(a+1)(b+1)(c+1)$

0049 280과 420의 최대공약수는 140이므로 280과 420의 양의 공약수의 개수는 140의 양의 약수의 개수와 같다.
이때 $140=2^2 \cdot 5 \cdot 7$이므로 양의 약수의 개수는
$(2+1)(1+1)(1+1)=12$
답 12

0050 72를 소인수분해하면 $72=2^3 \cdot 3^2$
72의 양의 약수의 개수는
$(3+1)(2+1)=12$ $\therefore a=12$
72의 양의 약수의 총합은
$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=195$ $\therefore b=195$
$\therefore b-a=183$
답 ③

SSEN 특강

자연수의 양의 약수의 총합

자연수 N이 $N=x^a y^b z^c$ (x, y, z는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 총합은

$(1+x+x^2+\cdots+x^a)(1+y+y^2+\cdots+y^b)(1+z+z^2+\cdots+z^c)$

0051 540을 소인수분해하면 $540=2^2\cdot3^3\cdot5$ ··· ①

짝수는 2를 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 짝수의 개수는 $2\cdot3^3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$\therefore p=(1+1)(3+1)(1+1)=16$ ··· ②

3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는 $2^2\cdot3^2\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$\therefore q=(2+1)(2+1)(1+1)=18$ ··· ③

$\therefore p+q=34$ ··· ④

답 34

채점 기준표

① 540을 소인수분해할 수 있다.	10%
② p의 값을 구할 수 있다.	40%
③ q의 값을 구할 수 있다.	40%
④ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 05 수형도를 이용하는 경우의 수 본책 13쪽

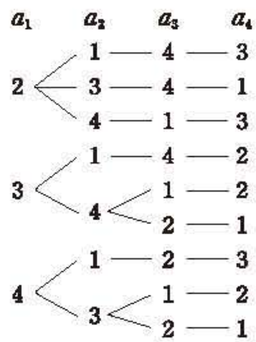
규칙성을 찾기 어려운 경우의 수를 구할 때

⇒ 수형도를 이용하면 중복되지 않고 빠짐없이 모든 경우를 나열할 수 있다.

0052 $a_1\neq1$이므로 a_1이 2, 3, 4인 경우에 대하여 $a_2\neq2$, $a_3\neq3$, $a_4\neq4$인 경우를 각각 구해 보면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 9이다.

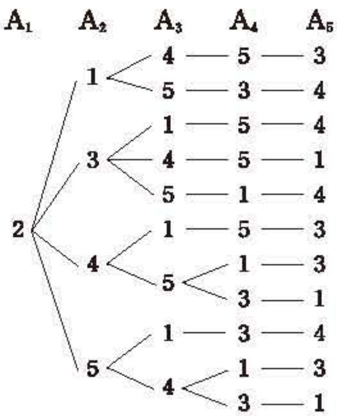
답 ①



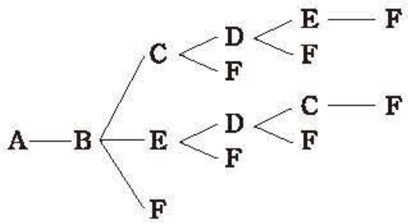
0053 2가 적힌 공은 A_1에 넣고 k가 적힌 공은 A_k에 넣지 않는 경우를 구해 보면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 방법의 수는 11이다.

답 11



0054 주어진 팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우를 구해 보면 다음과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C 또는 D 또는 E로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우도 각각 7가지씩이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $7\cdot4=28$

답 28

유형 06 지불 방법의 수와 지불 금액의 수 본책 14쪽

① 지불 방법의 수

x원짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 방법

⇒ 0개, 1개, 2개, ⋯, n개의 $n+1$가지

② 지불 금액의 수

x원짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 금액과 y원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같을 때

⇒ y원짜리 동전 1개를 x원짜리 동전 n개로 바꾸어 생각한다.

0055 (i) 지불할 수 있는 방법의 수

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개의 2가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$2\cdot4\cdot3-1=23$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 5개, 10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, ⋯, 250원의 6가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$6\cdot3-1=17$

(i), (ii)에서 $a=23$, $b=17$이므로 $a-b=6$

답 ③

0056 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지 ··· ①

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지 ··· ②

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지 ··· ③

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$3\cdot4\cdot5-1=59$ ⋯➊4

답 59

채점 기준표

❶ 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%
❷ 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%
❸ 50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%
❹ 동전의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%

0057 5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 2장을 5000원짜리 지폐 4장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000원짜리 지폐 6장, 1000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 5000원, 10000원, ⋯, 30000원의 7가지

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원, 3000원의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$7\cdot4-1=27$

답 27

유형 07 도로망에서의 방법의 수 (본책 14쪽)

① 동시에 갈 수 없는 길이면 ➡ 합의 법칙
② 이어지는 길이면 ➡ 곱의 법칙

0058 (ⅰ) A → B → C로 가는 방법의 수는 $4\cdot2=8$

(ⅱ) A → D → C로 가는 방법의 수는 $3\cdot4=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$8+12=20$

답 20

0059 (ⅰ) 집 → A → 도서관으로 가는 방법의 수는 $3\cdot2=6$

(ⅱ) 집 → B → 도서관으로 가는 방법의 수는 $1\cdot3=3$

(ⅲ) 집 → A → B → 도서관으로 가는 방법의 수는 $3\cdot2\cdot3=18$

(ⅳ) 집 → B → A → 도서관으로 가는 방법의 수는 $1\cdot2\cdot2=4$

이상에서 구하는 방법의 수는

$6+3+18+4=31$

답 31

0060 B지점과 D지점 사이에 x개의 도로를 추가한다고 하면

(ⅰ) A → B → C로 가는 방법의 수는 $2\cdot3=6$

(ⅱ) A → D → C로 가는 방법의 수는 $3\cdot2=6$

(ⅲ) A → B → D → C로 가는 방법의 수는 $2\cdot x\cdot2=4x$

(ⅳ) A → D → B → C로 가는 방법의 수는 $3\cdot x\cdot3=9x$

이상에서 A지점에서 C지점으로 가는 방법의 수는

$6+6+4x+9x=13x+12$

$13x+12=90$에서 $13x=78$ $\therefore x=6$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 6이다.

답 ④

유형 08 색칠하는 방법의 수 (본책 15쪽)

각 영역을 칠하는 방법의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용하여 색칠하는 모든 방법의 수를 구한다. 이때
① 인접한 영역이 가장 많은 영역에 색칠하는 방법의 수를 먼저 구한다.
② 같은 색을 칠할 수 있는 영역은 같은 색인 경우와 다른 색인 경우로 나누어 생각한다.

0061 A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3=540$

답 540

0062 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $4\cdot3\cdot3=36$

답 ④

0063 (ⅰ) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 C(A)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$ ⋯➊

(ⅱ) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ ⋯➋

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$36+48=84$ ⋯➌

답 84

채점 기준표

❶ A와 C에 같은 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ A와 C에 다른 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0064 A, B, C, D, E의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

(ⅰ) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는 $5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot3=180$

(ii) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우
D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는 $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2=240$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$180+240=420$ 답 ④

다른 풀이 (i) 모두 다른 색을 칠하는 경우의 수는
$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$
(ii) B와 D에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는 $5\cdot4\cdot3\cdot2=120$
(iii) C와 E에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는 $5\cdot4\cdot3\cdot2=120$
(iv) B와 D, C와 E에 각각 같은 색을 칠하는 경우의 수는
$5\cdot4\cdot3=60$
이상에서 구하는 방법의 수는
$120+120+120+60=420$

유형 09 ${}_nP_r$의 계산 본책 15쪽

① ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)
$=\frac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)
② ${}_nP_n=n!$, $0!=1$, ${}_nP_0=1$

0065 ${}_nP_4=20\cdot{}_nP_2$에서
$n(n-1)(n-2)(n-3)=20n(n-1)$
${}_nP_4$에서 $n\ge4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$(n-2)(n-3)=20$, $n^2-5n-14=0$
$(n+2)(n-7)=0$ $\therefore n=7$ ($\because n\ge4$) 답 7

0066 ${}_nP_3 : {}_nP_2=8 : 1$에서 ${}_nP_3=8\cdot{}_nP_2$
$n(n-1)(n-2)=8n(n-1)$
${}_nP_3$에서 $n\ge3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$n-2=8$ $\therefore n=10$ 답 ⑤

0067 ${}_nP_2+3\cdot{}_nP_1=48$에서
$n(n-1)+3n=48$, $n^2+2n-48=0$
$(n+8)(n-6)=0$ $\therefore n=6$ ($\because n\ge2$) 답 6

유형 10 이웃하는 순열의 수 본책 16쪽

(i) 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.
(ii) (i)의 결과와 이웃하는 것끼리 자리를 바꾸는 방법의 수를 곱한다.

0068 1학년 학생 3명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$
1학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는 $120\cdot6=720$ 답 ④

0069 P와 R를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$
P와 R의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot2=48$ 답 48

0070 초등학생 4명을 한 사람, 중학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$
초등학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4!=24$
중학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot24\cdot6=3456$ 답 ②

0071 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 $n+1$명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $(n+1)!$
여학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 $(n+1)!\cdot6=36$이므로 $(n+1)!=6=3!$
$n+1=3$ $\therefore n=2$ 답 2

유형 11 이웃하지 않는 순열의 수 본책 16쪽

(i) 이웃해도 상관없는 것을 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.
(ii) (i)에서 나열한 것 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열하는 방법의 수를 구한다.
(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

0072 여자 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$
여자들 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 남자 2명을 세우는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$
따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot12=72$ 답 72

0073 4개의 자음 c, l, m, t를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$4!=24$
자음의 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 3개의 모음 i, a, e를 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_3=60$
따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot60=1440$ 답 ⑤

0074 의자 3개에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 5개이다.
빈 의자들 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리에 학생이 앉은 의자 3개를 놓으면 되므로 구하는 방법의 수는 ${}_6P_3=120$ 답 120

유형 12 자리에 대한 조건이 있는 순열의 수 본책 16쪽

특정한 자리에 대한 조건이 있을 때
➡ 특정한 자리에 오는 것의 위치를 고정시킨 후 나머지를 나열한다.

0075 여학생은 4명이므로 양 끝에 여학생 2명을 세우는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$
양 끝의 여학생 2명을 제외한 나머지 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$
따라서 구하는 방법의 수는
$12\cdot120=1440$ 답 ⑤

0076 자음은 p, r, m, s의 4개, 모음은 o, i, e의 3개이므로 자음 4개를 일렬로 나열하고 그 사이사이에 모음 3개를 나열하면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
$4!\cdot 3!=24\cdot 6=144$ 답 ③

0077 2송이의 노란색 꽃을 세 군데의 홀수 번째 자리 중 두 군데에 심는 방법의 수는
${}_3P_2=6$ ··· ❶
나머지 빈 세 자리에 빨간색 꽃 3송이를 심는 방법의 수는
$3!=6$ ··· ❷
따라서 구하는 방법의 수는
$6\cdot 6=36$ ··· ❸
답 36

채점 기준표

❶ 노란색 꽃을 홀수 번째 자리에 심는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 빨간색 꽃을 심는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 꽃을 심는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0078 w와 t 사이에 w와 t를 제외한 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$
w, t와 그 사이의 2개의 문자를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$
w와 t가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는
$12\cdot 6\cdot 2=144$ 답 144

유형 13 '적어도'의 조건이 있는 순열의 수 본책 17쪽

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

0079 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$6!=720$
자음은 s, l, n, t의 4개이므로 양 끝에 모두 자음이 오도록 나열하는 방법의 수는
$\overbrace{{}_4P_2}^{\text{자음 4개에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 방법의 수}}\cdot\underbrace{4!}_{\text{양 끝의 자음을 제외한 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수}}=288$
따라서 구하는 방법의 수는
$720-288=432$ 답 ⑤

0080 (1) 10명의 학생 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로
${}_{10}P_2=90$ ··· ❶
(2) 남학생 4명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로
${}_4P_2=12$ ··· ❷
(3) 모든 방법의 수에서 반장, 부반장 모두 남학생이 뽑히는 방법의 수를 뺀 것과 같으므로
$90-12=78$ ··· ❸
답 (1) 90 (2) 12 (3) 78

채점 기준표

❶ 모든 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 반장, 부반장 모두 남학생이 뽑히는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ 반장, 부반장 중에서 적어도 한 명은 여학생이 뽑히는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%

0081 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!=120$
a, b, c의 3개의 문자 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는 d, e를 일렬로 나열하고 d와 e 사이 및 양 끝에 a, b, c를 나열하는 방법의 수와 같으므로 $2!\cdot 3!=12$
따라서 구하는 방법의 수는
$120-12=108$ 답 108

유형 14 자연수의 개수 본책 17쪽

① 1, 2, 3, …, n ($3\le n\le 9$)의 n개의 숫자를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는
두 자리 자연수의 개수 ➡ ${}_nP_2$
세 자리 자연수의 개수 ➡ ${}_nP_3$
② 0, 1, 2, …, n ($2\le n\le 9$)의 $n+1$개의 숫자를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는
두 자리 자연수의 개수 ➡ $n\cdot {}_nP_1$
세 자리 자연수의 개수 ➡ $n\cdot {}_nP_2$

0082 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.
0, 1, 2 또는 0, 2, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 3, 4
(i) 0, 1, 2로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
$2\cdot 2!=4$
(ii) 0, 2, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
$2\cdot 2!=4$
(iii) 1, 2, 3으로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
$3!=6$
(iv) 2, 3, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
$3!=6$
이상에서 구하는 자연수의 개수는
$4+4+6+6=20$ 답 ③

0083 백의 자리와 일의 자리에는 2, 4, 6의 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로 ${}_3P_2=6$
천의 자리와 십의 자리에는 백의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로
${}_4P_2=12$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$6\cdot 12=72$ 답 72

0084 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.
(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 ${}_5P_3=60$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 7, 9의 4개

백의 자리와 십의 자리의 숫자를 택하는 방법의 수는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$_4P_2=12$

따라서 일의 자리의 숫자가 5인 네 자리 자연수의 개수는

$4\cdot12=48$

(i), (ii)에서 5의 배수의 개수는

$60+48=108$

답 108

유형 15 사전식 배열법을 이용하는 방법의 수 본책 18쪽

문자를 사전식으로 배열하거나 자연수를 크기 순으로 나열하는 방법의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 기준이 되는 문자열 또는 수의 꼴을 살핀 후 먼저 자리를 정할 수 있는 자리에 문자 또는 수를 배열한다.

(ii) 순열을 이용하여 나머지 자리에 올 수 있는 것을 배열하는 방법의 수를 구한다.

0085 A로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

B로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

CA로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

CBA로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

CBD로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

CBE로 시작하는 것은 순서대로

CBEAD, CBEDA의 2개

따라서 CBEDA까지의 개수는

$24+24+6+2+2+2=60$

이므로 CBEDA는 60번째에 온다.

답 60번째

0086 4300보다 큰 자연수는 43○○, 45○○, 46○○, 5○○○, 6○○○ 꼴이다.

43○○ 꼴인 자연수의 개수는 $_4P_2=12$

45○○ 꼴인 자연수의 개수는 $_4P_2=12$

46○○ 꼴인 자연수의 개수는 $_4P_2=12$

5○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $_5P_3=60$

6○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $_5P_3=60$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$12+12+12+60+60=156$

답 156

0087 D로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

E로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

FD로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

FE로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

FID로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

FIE로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

따라서 D로 시작하는 것부터 FIE로 시작하는 것까지의 총 개수는

$120+120+24+24+6+6=300$

이므로 301번째에 오는 것은 FINDER

답 ②

0088 54○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

53○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

52○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

51○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

504○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

503○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

따라서 543210부터 503124까지의 자연수의 개수는

$24+24+24+24+6+6=108$

이므로 구하는 수는 502431, 502413, …에서 502413이다.

답 ④

유형 16 원탁에 둘러앉는 방법의 수 본책 18쪽

(1) n명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(n-1)!$

(2) 원탁에 둘러앉을 때,

① 이웃하는 사람이 있으면

⇒ 이웃하는 사람을 한 사람으로 생각한다.

② 이웃하지 않는 사람이 있으면

⇒ 이웃해도 되는 사람을 먼저 원형으로 배열한다.

0089 커플 2명을 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(4-1)!=3!=6$

커플끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 각각 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=96$

답 96

0090 일본인 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

일본인들 사이사이의 4개의 자리에 중국인 3명이 앉는 방법의 수는

$_4P_3=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot24=144$

답 ①

SSEN 특강

이웃하지 않는 원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열할 때, 이웃하지 않는 것이 있으면 다음과 같은 순서로 방법의 수를 구한다.

(i) 이웃해도 되는 것을 원형으로 배열하는 방법의 수를 구한다.

(ii) (i)에서 배열한 것 사이사이에 이웃하지 않는 것을 나열하는 방법의 수를 구한다.

(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

0091 (1) 남학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(4-1)!=3!=6$

남학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot6=36$

⋯ ❶

(2) 남학생 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

남학생들 사이사이의 3개의 자리에 여학생 3명이 앉는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\cdot 6=12$ ⋯ ❷

답 (1) 36 (2) 12

채점 기준표

❶ 남학생끼리 이웃하게 않는 방법의 수를 구할 수 있다.	50%
❷ 남학생과 여학생이 번갈아 앉는 방법의 수를 구할 수 있다.	50%

0092 부모님과 인성이를 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

부모님이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot 2=48$

답 48

0093 영철이 아버지의 자리가 결정되면 어머니의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 구하는 방법의 수는 7명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수와 같다.
3쌍의 부부와 영철이 아버지

$\therefore (7-1)!=6!=720$

답 ④

다른 풀이 영철이네 부모님이 마주 보도록 원탁에 앉은 다음 나머지 여섯 자리에 6명을 앉히면 되므로 구하는 방법의 수는

$6!=720$

유형 17 색칠하는 방법의 수; 원순열 (본책 19쪽)

(i) 기준이 될 수 있는 영역에 색칠하는 방법의 수를 구한다.
(ii) 원순열을 이용하여 나머지 부분에 색칠하는 방법의 수를 구한다.
(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

0094 가운데 오각형을 칠하는 방법의 수는 6이고, 나머지 5개의 삼각형을 칠하는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot 24=144$

답 ①

0095 (1) 빨간색과 보라색을 한 가지 색으로 생각하여 4가지 색을 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

빨간색과 보라색으로 칠할 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot 2=12$ ⋯ ❶

(2) 5가지 색을 칠하는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

(1)에서 빨간색과 보라색이 이웃하게 칠하는 방법의 수가 12이므로 구하는 방법의 수는

$24-12=12$ ⋯ ❷

답 (1) 12 (2) 12

채점 기준표

❶ 빨간색과 보라색이 이웃하게 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	50%
❷ 빨간색과 보라색이 이웃하지 않게 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	50%

SSEN 특강

이웃하지 않는 경우의 순열의 수를 구할 때

(전체 경우의 수) − (이웃하는 경우의 수)

를 이용하는 것은 2개가 이웃하지 않는 경우에만 해당됨에 주의한다.

0096 사각뿔의 밑면을 칠하는 방법의 수는 5이고, 밑면을 제외한 4개의 옆면을 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot 6=30$

답 ⑤

0097 사각뿔대의 윗면과 아랫면을 칠하는 방법의 수는

${}_6P_2=30$

윗면과 아랫면을 제외한 4개의 옆면을 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$30\cdot 6=180$

답 180

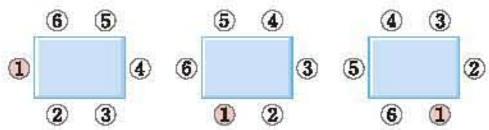
유형 18 여러 가지 모양의 탁자에 둘러앉는 방법의 수 (본책 20쪽)

(i) 원형으로 배열하는 방법의 수를 구한다.
(ii) 원형으로 배열하는 각 경우에 대하여 서로 다른 경우가 몇 가지씩 존재하는지 구한다.
(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

0098 6명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는

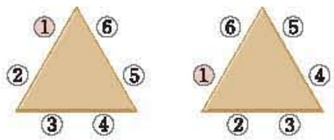
$120\cdot 3=360$

답 ⑤

0099 6명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



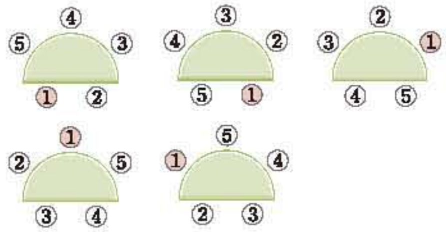
따라서 구하는 방법의 수는

$120\cdot2=240$ 답 240

0100 5명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 주어진 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



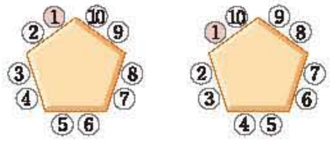
따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot5=120$ 답 120

0101 10명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 정오각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 10명이 둘러앉는 방법의 수는

$9!\cdot2=9!\cdot10\cdot\frac{1}{5}=10!\cdot\frac{1}{5}$

$\therefore a=\frac{1}{5}$ 답 ①

유형 19 중복순열 본책 20쪽

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택할 때, 순서를 고려해야 하는 경우 ➡ ${}_n\Pi_r=n^r$

0102 서로 다른 3개의 방에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_4=3^4=81$ 답 ④

0103 서로 다른 4개의 반에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_3=4^3=64$ 답 64

0104 A중학교 학생 2명이 고등학교에 배정되는 방법의 수는 서로 다른 3개의 고등학교에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$ ➡ ❶

B중학교 학생 3명이 고등학교에 배정되는 방법의 수는 서로 다른 4개의 고등학교에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$ ➡ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$9\cdot64=576$ ➡ ❸

답 576

채점 기준표

❶ A중학교 학생 2명이 고등학교에 배정되는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ B중학교 학생 3명이 고등학교에 배정되는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 고등학교에 배정되는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0105 점검표에 ○, △, ×가 표시되는 경우의 수는 ○, △, ×에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_6=3^6=729$

(i) ○가 0개 표시되는 경우

6개의 급식소에 △ 또는 ×가 표시되는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_6=2^6=64$

(ii) ○가 1개 표시되는 경우

6개의 급식소 중 1개에 ○가 표시되고 5개의 급식소에 △ 또는 ×가 표시되는 경우의 수와 같으므로

$6\cdot{}_2\Pi_5=6\cdot2^5=192$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$729-(64+192)=473$ 답 ③

유형 20 신호 만들기 본책 21쪽

서로 다른 n개에서 최대 r개까지 택할 수 있는 중복순열의 수

➡ ${}_n\Pi_1+{}_n\Pi_2+{}_n\Pi_3+\cdots+{}_n\Pi_r$

0106 전구 4개를 각각 켜거나 꺼서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

이때 전구가 모두 꺼진 경우는 신호에서 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는

$16-1=15$ 답 15

0107 주어진 기호를 2번 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_2=2^2$

기호를 3번 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3$

같은 방법으로 기호를 4번, 5번, $\cdots$, 8번 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_2\Pi_4$, ${}_2\Pi_5$, $\cdots$, ${}_2\Pi_8$이므로 구하는 신호의 개수는

$2^2+2^3+2^4+\cdots+2^8=\frac{2^2(2^7-1)}{2-1}=508$ 답 ④

0108 깃발을 한 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_1=2$

깃발을 두 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_2=2^2$

같은 방법으로 깃발을 세 번, 네 번, $\cdots$, n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_2\Pi_3$, ${}_2\Pi_4$, $\cdots$, ${}_2\Pi_n$이므로 n번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$

따라서 $2^{n+1}-2\geq400$이어야 하므로

$2^{n+1}\geq402$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$이므로

$n+1\ge 9 \quad \therefore n\ge 8$

따라서 n의 최솟값은 8이다. 답 8

유형 21 자연수의 개수; 중복순열 본책 21쪽

① 1, 2, 3, ⋯, $n(1\le n\le 9)$의 n개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 m자리 자연수의 개수

➡ ${}_n\Pi_m$

② 0, 1, 2, ⋯, $n(1\le n\le 9)$의 $n+1$개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 m자리 자연수의 개수

➡ $n\cdot{}_{n+1}\Pi_{m-1}$

0109 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

6, 8의 2개

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 5, 6, 7, 8, 9의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$2\cdot 125=250$ 답 ②

0110 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3, ⋯, 9의 9개 ← 천의 자리에는 0이 올 수 없다.

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 5의 2개

백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 방법의 수는 0, 1, 2, ⋯, 9의 10개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{10}\Pi_2=10^2=100$

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$9\cdot 2\cdot 100=1800$ 답 ④

0111 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

2를 제외한 나머지 3개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$64-27=37$ 답 ③

0112 한 자리 자연수의 개수는 5

두 자리 자연수의 개수는 $5\cdot{}_6\Pi_1=5\cdot 6=30$

세 자리 자연수의 개수는 $5\cdot{}_6\Pi_2=5\cdot 6^2=180$

따라서 1000보다 작은 자연수의 개수는

$5+30+180=215$

이므로 1000은 216번째 수이다. 답 216번째

다른 풀이 한 자리 자연수를 백의 자리와 십의 자리의 숫자가 0인 세 자리 자연수로, 두 자리 자연수를 백의 자리의 숫자가 0인 세 자리 자연수로 생각하면 세 자리 이하의 자연수의 개수는

${}_6\Pi_3-\underbrace{1}_{000\text{인 경우}}=215$

따라서 1000은 216번째 수이다.

0113 3, 6, 9를 제외한 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8의 7개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 999 이하의 자연수의 개수를 구해 보면

(i) 한 자리 자연수의 개수는 6

(ii) 두 자리 자연수의 개수는 $6\cdot{}_7\Pi_1=6\cdot 7=42$

(iii) 세 자리 자연수의 개수는 $6\cdot{}_7\Pi_2=6\cdot 7^2=294$

이상에서 1부터 999까지의 자연수 중에서 3, 6, 9가 들어 있지 않은 수의 개수는

$6+42+294=342$ ⋯➊

따라서 3 또는 6 또는 9가 들어 있는 수의 개수는

$999-342=657$

이므로 박수를 모두 657번 친다. ⋯➋

답 657번

채점 기준표

➊ 1부터 999까지의 자연수 중에서 3, 6, 9가 들어 있지 않은 수의 개수를 구할 수 있다.	70%
➋ 박수를 모두 몇 번 치는지 구할 수 있다.	30%

유형 22 함수의 개수; 순열 본책 22쪽

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때

① X에서 Y로의 함수의 개수: ${}_n\Pi_m=n^m$

② X에서 Y로의 일대일함수의 개수: ${}_nP_m$ (단, $n\ge m$)

③ X에서 X로의 일대일 대응의 개수: ${}_mP_m=m!$

0114 X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$a={}_4\Pi_3=4^3=64$

X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$b={}_4P_3=24$

$\therefore a-b=40$ 답 40

0115 $f(a)=p$, $f(b)=r$이므로 Y의 원소 p, q, r의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 c, d에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$ 답 ②

0116 조건 (가), (나)에서 순서쌍 $(f(a), f(b))$는

(1, 5), (2, 4), (4, 2), (5, 1)의 4개

그 각각에 대하여 일대일 대응인 f의 개수는

$3!=6$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$4\cdot 6=24$ 답 24

0117 X에서 Y로의 함수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

X에서 Y로의 함수 중 $f(2)=2$인 함수 f의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$125-25=100$ 답 ③

다른 풀이 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 5개, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 2를 제외한 4개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 5개이므로 구하는 함수 f의 개수는

$5\cdot 4\cdot 5=100$

0118 (i) $f(2)=1$ 또는 $f(2)=3$ 또는 $f(2)=5$인 경우
$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(2)$의 값과 4를 제외한 3개이므로 일대일 대응인 f의 개수는

$3\cdot 3\cdot 3!=54$ ··· ❶

(ii) $f(2)=4$인 경우
$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 5의 4개이므로 일대일 대응인 f의 개수는

$1\cdot 4\cdot 3!=24$ ··· ❷

(i), (ii)에서 일대일 대응인 f의 개수는

$54+24=78$ ··· ❸

답 78

채점 기준표

❶ $f(2)=1$ 또는 $f(2)=3$ 또는 $f(2)=5$인 경우의 일대일 대응인 f의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ $f(2)=4$인 경우의 일대일 대응인 f의 개수를 구할 수 있다.	40%
❸ $f(2)\neq 2$, $f(4)\neq 4$이고 일대일 대응인 f의 개수를 구할 수 있다.	20%

유형 23, 24 같은 것이 있는 순열 본책 22, 23쪽

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수

➡ $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

0119 c와 e를 제외한 6개의 문자 o, n, t, i, n, u를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!}=360$ — n이 2개

양 끝에 c와 e를 나열하는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$360\cdot 2=720$

답 720

0120 모음 a, e, a를 한 문자 A로 생각하여 6개의 문자 A, b, s, b, l, l을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 2!}=180$

이때 모음끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$180\cdot 3=540$

답 ①

0121 7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{7!}{3!\cdot 2!}=420$

C, D를 한 문자 T로 생각하여 6개의 문자 A, A, A, B, B, T를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{3!\cdot 2!}=60$

이때 C와 D가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

이므로 C, D가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는

$60\cdot 2=120$

따라서 구하는 방법의 수는

$420-120=300$

답 ⑤

다른 풀이 C, D를 제외한 5개의 문자 A, A, A, B, B를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=10$

이때 A, A, A, B, B의 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 C, D를 나열하는 방법의 수는

${}_6P_2=30$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot 30=300$

0122 (i) r끼리 이웃하는 경우
2개의 문자 r를 한 문자 A로 생각하여 7개의 문자 A, e, e, e, m, m, b를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{7!}{3!\cdot 2!}=420$ ··· ❶

(ii) m끼리 이웃하는 경우
2개의 문자 m을 한 문자 B로 생각하여 7개의 문자 B, r, r, e, e, e, b를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{7!}{2!\cdot 3!}=420$ ··· ❷

(iii) r끼리, m끼리 이웃하는 경우
2개의 문자 r, 2개의 문자 m을 각각 한 문자 A, B로 생각하여 6개의 문자 A, B, e, e, e, b를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{3!}=120$ ··· ❸

이상에서 구하는 방법의 수는

$420+420-120=720$ ··· ❹

답 720

채점 기준표

❶ r끼리 이웃하도록 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ m끼리 이웃하도록 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ r끼리, m끼리 이웃하도록 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❹ r끼리 또는 m끼리 이웃하도록 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	10%

0123 6개의 숫자 0, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 2!}=180$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 5개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$180-30=150$ 답 ⑤

다른 풀이 주어진 6개의 숫자를 모두 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수의 맨 앞자리는 1 또는 2 또는 3이다.

(i) 맨 앞자리의 숫자가 1인 경우

5개의 숫자 0, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(iii) 맨 앞자리의 숫자가 3인 경우

5개의 숫자 0, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$30+60+60=150$

0124 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수일 때 3의 배수가 된다.

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3에서 4개를 택하여 그 합이

6이 되는 경우는 1, 1, 2, 2

9가 되는 경우는 2, 2, 2, 3

(i) 4개의 숫자 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

(ii) 4개의 숫자 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$6+4=10$ 답 10

0125 일의 자리의 숫자가 0 또는 2일 때 짝수가 된다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

0, 1, 2, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

$\therefore 20-4=16$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

0, 0, 1, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

$\therefore 30-12=18$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$16+18=34$ 답 ④

다른 풀이 주어진 6장의 카드를 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수의 맨 앞자리의 숫자는 1 또는 2이다.

(i) 맨 앞자리의 숫자가 1인 경우

0, 0, 2, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

0, 0, 1, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

이때 일의 자리의 숫자가 1인 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

$\therefore 30-6=24$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$10+24=34$

유형 25 순서가 정해진 순열 본책 23쪽

서로 다른 n개를 일렬로 나열할 때, 특정한 r $(0<r\le n)$개를 미리 정해진 순서대로 나열하는 방법의 수

➡ 순서가 정해진 r개를 같은 것으로 생각하여 같은 것이 r개 포함된 n개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

➡ $\frac{n!}{r!}$

0126 c, d의 순서가 정해져 있으므로 c, d를 모두 x로 생각하여 다섯 개의 문자 a, b, x, x, e를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 c, 두 번째 x는 d로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$ 답 ③

0127 모음 i, e, a, e를 한 문자로 생각하고, 자음 p, n, p, p, l을 다른 한 문자로 생각하였을 때, 모음이 자음보다 앞에 오도록 나열하는 방법의 수는 1

이때 모음끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

또 자음끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $\frac{5!}{3!}=20$

따라서 구하는 방법의 수는

$1\cdot 12\cdot 20=240$ 답 240

0128 a, e와 b, d의 순서가 각각 정해져 있으므로 a, e를 모두 x로, b, d를 모두 y로 생각하여 6개의 문자 x, y, c, y, x, f를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 a, 두 번째 x는 e로, 첫 번째 y는 b, 두 번째 y는 d로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot 2!}=180$ 답 ②

0129 3, 4, 5의 순서가 정해져 있으므로 3, 4, 5를 모두 x로 생각하여 1, 1, 2, 2, x, x, x를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 3, 두 번째 x는 4, 세 번째 x는 5로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

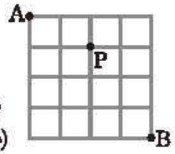
$$\frac{7!}{2!\cdot2!\cdot3!}=210$$

답 ③

26 최단 거리로 가는 방법의 수

본책 26쪽

오른쪽 그림과 같은 도로망에서



① A에서 출발하여 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수
➡ (A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수)
×(P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수)

② A에서 출발하여 P를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 방법의 의 수
➡ (A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수)
−(A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수)

0130 A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$$\frac{6!}{4!\cdot2!}=15$$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$$

따라서 A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$15\cdot6=90$

답 90

0131 (1) A에서 $\overline{PQ}$를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$$\underbrace{\frac{5!}{3!\cdot2!}}_{\text{A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수}}\cdot1\cdot\overbrace{\frac{3!}{2!}}^{\text{Q에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수}}=10\cdot1\cdot3=30$$

(2) A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$$\frac{9!}{6!\cdot3!}=84$$

이때 (1)에서 A에서 $\overline{PQ}$를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수가 30이므로 구하는 방법의 수는

$84-30=54$

답 (1) 30 (2) 54

0132 (i) A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$$

(ii) P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$$\frac{7!}{4!\cdot3!}=35$$

P에서 Q를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$$\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot\frac{3!}{2!}=6\cdot3=18$$

이므로 P에서 Q를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 $35-18=17$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$6\cdot17=102$

답 102

0133 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 4번, 3번, 4번 이동해야 하므로 구하는 방법의 수는

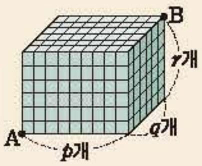
$$\frac{11!}{4!\cdot3!\cdot4!}=11550$$

답 ⑤

SSEN 특강

입체도형에서 최단 거리로 가는 방법의 수

오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체를 가로, 세로, 높이의 칸의 개수가 각각 p, q, r가 되도록 쌓아 올려 직육면체를 만들었을 때, 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수



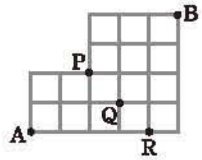
➡ $\dfrac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$

27 최단 거리로 가는 방법의 수; 장애물이 있는 경우

본책 26쪽

A에서 B로 갈 때, 반드시 거쳐야 하는 점을 잡아 최단 거리로 가는 방법의 수를 구한다.

0134 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은



A → P → B, A → Q → B,
A → R → B

(i) A → P → B로 가는 방법의 수: $\dfrac{4!}{2!\cdot2!}\cdot\dfrac{5!}{3!\cdot2!}=6\cdot10=60$

(ii) A → Q → B로 가는 방법의 수: $\dfrac{4!}{3!}\cdot\dfrac{5!}{2!\cdot3!}=4\cdot10=40$

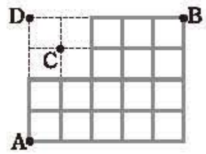
(iii) A → R → B로 가는 방법의 수: $1\cdot\dfrac{5!}{4!}=5$

이상에서 구하는 방법의 수는

$60+40+5=105$

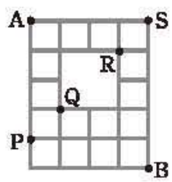
답 ③

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 두 지점 C, D를 잡으면 구하는 방법의 수는 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수에서 C 또는 D를 거쳐 최단 거리로 가는 방법의 수를 뺀 것과 같으므로



$$\frac{9!}{5!\cdot4!}-\Big(1+\underbrace{\frac{4!}{3!}\cdot\frac{5!}{4!}}_{\text{A → C → B로 가는 방법의 수}}\Big)=126-(1+4\cdot5)=105$$

0135 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은



A → P → B, A → Q → B,
A → R → B, A → S → B

(i) A → P → B로 가는 방법의 수: $1\cdot\dfrac{5!}{4!}=5$

(ii) A → Q → B로 가는 방법의 수: $\dfrac{4!}{3!}\cdot\dfrac{5!}{3!\cdot2!}=4\cdot10=40$

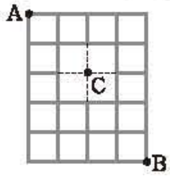
(iii) A → R → B로 가는 방법의 수: $\dfrac{4!}{3!}\cdot\dfrac{5!}{4!}=4\cdot5=20$

(iv) A → S → B로 가는 방법의 수: $1\cdot1=1$

이상에서 구하는 방법의 수는

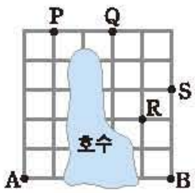
$5+40+20+1=66$ 답 ⑤

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 지점 C를 잡으면 구하는 방법의 수는 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수에서 C를 거쳐 최단 거리로 가는 방법의 수를 뺀 것과 같으므로



$$\frac{9!}{4!\cdot5!}-\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!}=126-6\cdot10=66$$

0136 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은



A → P → Q → R → B,
A → P → Q → S → B

(i) A → P → Q → R → B로 가는 방법의 수

$$\frac{6!}{5!}\cdot1\cdot\frac{4!}{3!}\cdot\frac{3!}{2!}=6\cdot1\cdot4\cdot3=72$$

(ii) A → P → Q → S → B로 가는 방법의 수

$$\frac{6!}{5!}\cdot1\cdot\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot1=6\cdot1\cdot6\cdot1=36$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$72+36=108$ 답 ⑤

0137 **전략** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D<0$임을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=x^2+(a+b)x+ab+1$의 그래프와 x축이 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+(a+b)x+ab+1=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$D=(a+b)^2-4(ab+1)<0$, $\quad (a-b)^2-4<0$

$\{(a-b)+2\}\{(a-b)-2\}<0$

$\therefore -2<a-b<2$

이때 $a-b$의 값은 정수이므로

$a-b=-1$ 또는 $a-b=0$ 또는 $a-b=1$

(i) $a-b=-1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$의 5개

(ii) $a-b=0$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6개

(iii) $a-b=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

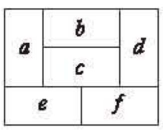
$(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 5)$의 5개

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$5+6+5=16$ 답 ③

0138 **전략** 먼저 서로 이웃한 2개의 지역을 선택하는 경우의 수를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 6개 지역을 각각 a, b, c, d, e, f라 하면 서로 이웃한 2개의 지역을 선택하는 경우의 수는



(a, b), (a, c), (a, e), (b, c), (b, d),
(c, d), (c, e), (c, f), (d, f), (e, f)의 10

서로 이웃한 2개 지역을 조사하는 조사원을 정하는 경우의 수는

5

나머지 4개 지역을 나머지 4명의 조사원이 조사하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot5\cdot24=1200$ 답 ⑤

0139 **전략** 첫 번째 숫자와 마지막 숫자 사이에 들어갈 수 있는 숫자를 기준으로 나누어 생각한다.

풀이 비밀번호의 첫 번째 숫자와 마지막 숫자를 각각 a, b라 하면 비밀번호는 a★∗b이다.

이때 $a+b=9$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(0, 9)$, $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$,
$(5, 4)$, $(6, 3)$, $(7, 2)$, $(8, 1)$, $(9, 0)$의 10개

(i) ★이 b인 경우

∗이 될 수 있는 숫자는 b를 제외한 9개

(ii) ★이 a, b가 아닌 경우

★이 될 수 있는 숫자는 8개, ∗이 될 수 있는 숫자도 8개이므로

$8\cdot8=64$

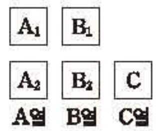
(i), (ii)에서 $\quad 9+64=73$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$10\cdot73=730$ 답 730

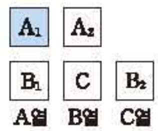
0140 **전략** 1부 공연의 좌석을 지정하고 2부 공연 때 같은 열에 앉는 경우를 나눈다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 1부 공연에 다섯 명의 학생이 앉은 좌석을 각각 A_1, A_2, B_1, B_2, C라 하자.



(i) 1부 공연 때 A열에 앉은 학생 중에서 한 명이 2부 공연에서도 A열에 앉은 경우

A_1에 앉았던 학생이 A열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

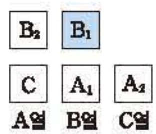


이때 A_1과 A_2, B_1과 B_2는 자리를 바꿀 수 있고, 같은 열에 앉은 학생들끼리도 자리를 바꿀 수 있으므로 가능한 방법의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

(ii) 1부 공연 때 B열에 앉은 학생 중에서 한 명이 2부 공연에서도 B열에 앉은 경우

B_1에 앉았던 학생이 B열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

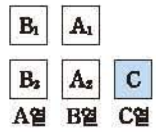


따라서 가능한 방법의 수는 (i)과 같이

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

(iii) 1부 공연 때 C열에 앉은 학생 한 명이 2부 공연에서도 C열에 앉은 경우

C에 앉았던 학생이 C열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.



이때 A_1과 A_2, B_1과 B_2는 자리를 바꿀 수 있으므로 가능한 방법의 수는

$2!\cdot2!=4$

이상에서 구하는 방법의 수는

$16+16+4=36$ 답 36

0141 전략 4의 배수 중 3의 배수를 찾는다.

풀이 12의 배수이려면 3의 배수이면서 동시에 4의 배수이어야 한다.
4의 배수이려면 오른쪽 끝의 두 자리의 수가 4의 배수이어야 하므로 다음의 6가지의 경우가 있고, 그 각각의 경우에서 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되는 경우는 아래와 같다.

(i) ○○04 꼴인 경우
앞의 두 자리에 2, 3을 나열하면 되므로 $2!=2$

(ii) ○○12 꼴인 경우
앞의 두 자리에 0, 3을 나열하면 되므로 1

(iii) ○○20 꼴인 경우
앞의 두 자리에 1, 3 또는 3, 4를 나열하면 되므로
$2!+2!=4$

(iv) ○○24 꼴인 경우
앞의 두 자리에 0, 3을 나열하면 되므로 1

(v) ○○32 꼴인 경우
앞의 두 자리에 0, 1 또는 0, 4를 나열하면 되므로 $1+1=2$

(vi) ○○40 꼴인 경우
앞의 두 자리에 2, 3을 나열하면 되므로 $2!=2$

이상에서 구하는 경우의 수는
$2+1+4+1+2+2=12$

답 ⑤

0142 전략 원형으로 배열하는 각 경우에 대하여 서로 다른 경우가 몇 가지씩 있는지 구한다.

풀이 가운데 정사각형을 칠하는 방법의 수는 9이고, 나머지 8개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는 $(8-1)!=7!$
이때 8개의 정사각형을 칠하는 한 가지 방법에 대하여 주어진 도형에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.

②	③	④
⑨	①	⑤
⑧	⑦	⑥

⑨	②	③
⑧	①	④
⑦	⑥	⑤

따라서 색칠하는 방법의 수는 $9\cdot 7!\cdot 2=18\cdot 7!$
$\therefore k=18$

답 18

0143 전략 국번 4자리와 나머지 번호 4자리를 만들 수 있는 방법의 수를 각각 구한다.

풀이 국번의 첫 번째 자리에는 0을 제외한 2, 4, 6, 8이 올 수 있고 국번의 나머지 3자리에는 0, 2, 4, 6, 8을 중복하여 사용할 수 있으므로 만들 수 있는 국번의 개수는
$4\cdot {}_5\Pi_3=4\cdot 5^3=500$
또 전화번호의 나머지 번호 4자리는 0부터 9까지의 숫자를 중복하여 사용할 수 있으므로
${}_{10}\Pi_4=10^4=10000$
따라서 구하는 전화번호의 개수는
$500\cdot 10000=5000000$

답 5000000

0144 전략 $f(3)$의 값이 1, 3, 5인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) $f(3)=1$인 경우
$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 존재하지 않으므로 f는 함수가 아니다.

(ii) $f(3)=3$인 경우
$f(1)$과 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는
4 또는 5 또는 6
$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는
1 또는 2
따라서 함수 f의 개수는
${}_3\Pi_2\cdot {}_2\Pi_3=3^2\cdot 2^3=72$

(iii) $f(3)=5$인 경우
$f(1)$과 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 6
$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는
1 또는 2 또는 3 또는 4
따라서 함수 f의 개수는
$1\cdot {}_4\Pi_3=1\cdot 4^3=64$

이상에서 구하는 함수 f의 개수는
$72+64=136$

답 136

0145 전략 마주 보고 있는 사람과 짝을 짓는 경우와 바로 옆에 있는 사람과 짝을 짓는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 마주 보고 있는 사람과 짝을 짓는 경우를 A, 바로 옆에 있는 사람과 짝을 짓는 경우를 B라 하면 20명의 학생이 모두 짝이 있도록 짝을 짓는 방법은 다음과 같다.

(i) AAAAAAAAAA인 경우의 수는 1

(ii) AAAAAAAAB인 경우의 수는 $\dfrac{9!}{8!}=9$

(iii) AAAAAABB인 경우의 수는 $\dfrac{8!}{6!\cdot 2!}=28$

(iv) AAAABBB인 경우의 수는 $\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}=35$

(v) AABBBB인 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}=15$

(vi) BBBBB인 경우의 수는 1

이상에서 구하는 방법의 수는
$1+9+28+35+15+1=89$

답 ④

0146 전략 먼저 다크초콜릿과 밀크초콜릿을 일렬로 나열한 후 아몬드 초콜릿 2개가 놓일 수 있는 자리를 생각한다.

풀이 다크초콜릿을 a, 밀크초콜릿을 b, 아몬드 초콜릿을 c라 하자.
a, a, a, b, b, b, b를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$\dfrac{7!}{3!\cdot 4!}=35$
a, a, a, b, b, b, b를
① a ② a ③ a ④ b ⑤ b ⑥ b ⑦ b ⑧
과 같이 일렬로 나열한 후 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧의 8개의 자리 중 c와 c 사이에 홀수 개의 초콜릿이 놓이도록 c가 놓일 두 자리를 택하는 방법은
①과 ②, ①과 ④, ①과 ⑥, ①과 ⑧,
②와 ③, ②와 ⑤, ②와 ⑦, ③과 ④,
③과 ⑥, ③과 ⑧, ④와 ⑤, ④와 ⑦,
⑤와 ⑥, ⑤와 ⑧, ⑥과 ⑦, ⑦과 ⑧
의 16가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $35\cdot 16=560$

답 ④

0147 **전략** 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수의 개수를 구한다.

풀이 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수는 다음의 숫자들을 나열하여 만들 수 있다.

4, 0, 0, 0 또는 3, 1, 0, 0 또는 2, 2, 0, 0
또는 2, 1, 1, 0 또는 1, 1, 1, 1

(i) 4, 0, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ii) 3, 1, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(iii) 2, 2, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

(iv) 2, 1, 1, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(v) 1, 1, 1, 1로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

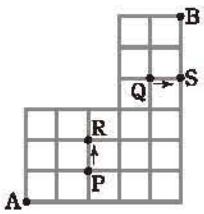
1

이상에서 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수의 개수는 $4+12+6+12+1=35$

따라서 구하는 자연수는 36번째 수이다. 답 36번째

0148 **전략** P의 위쪽 지점을 R, Q의 오른쪽 지점을 S라 하고 R 또는 S를 거쳐 최단 거리로 가는 방법의 수를 생각한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 P의 위쪽 지점을 R, Q의 오른쪽 지점을 S라 하자.



(i) A→P→R→B로 가는 방법의 수

$\frac{3!}{2!}\cdot 1\cdot\left(\frac{5!}{2!\cdot 3!}+\frac{6!}{2!\cdot 4!}\right)$

$=3\cdot(10+15)=75$

(ii) A→Q→S→B로 가는 방법의 수

$\left(\frac{6!}{3!\cdot 3!}+\frac{7!}{4!\cdot 3!}\right)\cdot 1\cdot 1=20+35=55$

(iii) A→P→R→Q→S→B로 가는 방법의 수

$\frac{3!}{2!}\cdot 1\cdot\left(2+\frac{3!}{2!}\right)\cdot 1\cdot 1=3\cdot(2+3)=15$

이상에서 구하는 방법의 수는

$75+55-15=115$ 답 115

0149 **전략** 넓이가 2이기 위한 윗변과 아랫변의 길이를 구한다.

풀이 두 평행한 직선에서 각각 두 점을 택할 때 사각형이 되고, 이 사각형은 사다리꼴이다.

사다리꼴의 윗변과 아랫변의 길이를 각각 a, b라 할 때, 사다리꼴의 넓이가 2이려면

$\frac{1}{2}(a+b)\cdot 1=2 \quad \therefore a+b=4$ ⋯→ ①

(i) $a=1$, $b=3$일 때,

$a=1$인 경우는 4가지, $b=3$인 경우는 2가지이므로

$4\cdot 2=8$ ⋯→ ②

(ii) $a=2$, $b=2$일 때, 평행사변형도 사다리꼴이다.

$a=2$인 경우는 3가지, $b=2$인 경우는 3가지이므로

$3\cdot 3=9$ ⋯→ ③

(iii) $a=3$, $b=1$일 때,

$a=3$인 경우는 2가지, $b=1$인 경우는 4가지이므로

$2\cdot 4=8$ ⋯→ ④

이상에서 구하는 사각형의 개수는

$8+9+8=25$ ⋯→ ⑤

답 25

채점 기준표

① 구하는 사각형의 윗변의 길이와 아랫변의 길이에 대한 관계식을 구할 수 있다.	20%
② 윗변의 길이가 1, 아랫변의 길이가 3인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	20%
③ 윗변의 길이가 2, 아랫변의 길이가 2인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	20%
④ 윗변의 길이가 3, 아랫변의 길이가 1인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	20%
⑤ 넓이가 2인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	20%

0150 **전략** 각 우리를 이웃하는 우리의 개수에 따라 분류한다.

풀이 (i) 호랑이를 ⟨1⟩ 또는 ⟨5⟩에 넣는 경우

이웃하는 우리가 2개이므로 사자를 넣을 수 있는 우리는 3개이고, 나머지 4개의 우리에 각 동물을 넣는 방법의 수는 4!이므로

$2\cdot 3\cdot 4!=144$ ⋯→ ①

(ii) 호랑이를 ⟨2⟩ 또는 ⟨4⟩에 넣는 경우

이웃하는 우리가 3개이므로 사자를 넣을 수 있는 우리는 2개이고, 나머지 4개의 우리에 각 동물을 넣는 방법의 수는 4!이므로

$2\cdot 2\cdot 4!=96$ ⋯→ ②

(iii) 호랑이를 ⟨3⟩ 또는 ⟨6⟩에 넣는 경우

이웃하는 우리가 1개이므로 사자를 넣을 수 있는 우리는 4개이고, 나머지 4개의 우리에 각 동물을 넣는 방법의 수는 4!이므로

$2\cdot 4\cdot 4!=192$ ⋯→ ③

이상에서 구하는 방법의 수는

$144+96+192=432$ ⋯→ ④

답 432

채점 기준표

① 호랑이를 ⟨1⟩ 또는 ⟨5⟩에 넣는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
② 호랑이를 ⟨2⟩ 또는 ⟨4⟩에 넣는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
③ 호랑이를 ⟨3⟩ 또는 ⟨6⟩에 넣는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
④ 6마리의 동물들을 서로 다른 우리에 각각 넣는 방법의 수를 구할 수 있다.	10%

0151 **전략** 같은 숫자가 없을 때, 한 쌍 있을 때, 두 쌍 있을 때로 나누어 각각의 자연수의 개수를 구한다.

풀이 (i) 같은 숫자가 없는 경우

네 자리 자연수의 개수는 ${}_5P_4=120$ ⋯→ ①

(ii) 같은 숫자가 한 쌍 있는 경우

V□V□, □V□V, V□□V의 3가지

V의 자리에 서로 같은 수를 넣고 □의 자리에 서로 다른 두 수를 각각 넣으면 되므로 네 자리 자연수의 개수는

$3\cdot 2\cdot {}_4P_2=72$ 4 또는 5를 택하는 방법의 수 ⋯→ ②

(iii) 같은 숫자가 두 쌍 있는 경우

네 자리 자연수는 4545, 5454의 2가지 ⋯→ ③

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$120+72+2=194$ ⋯ ❹

답 194

채점 기준표

❶ 같은 숫자가 없는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30%
❷ 같은 숫자가 한 쌍 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30%
❸ 같은 숫자가 두 쌍 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30%
❹ 같은 숫자끼리는 이웃하지 않는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	10%

0152 전략 8이 포함되는 경우와 포함되지 않는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 8이 포함되는 경우

8이 놓일 수 있는 자리는 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 3가지이고, 8을 제외한 8개의 숫자 중에서 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수는

$_8P_2=56$

이므로 8이 포함되는 세 자리 자연수의 개수는

$3\cdot 56=168$ ⋯ ❶

(ii) 8이 포함되지 않은 경우

각 자리의 숫자의 곱이 8의 배수가 되려면 4가 반드시 포함되고 2 또는 6이 포함되어야 한다.

8이 포함되지 않고 2, 4가 포함되도록 뽑는 방법의 수는 6이고, 이때 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 $3!=6$이므로 2, 4가 포함된 세 자리 자연수의 개수는

$6\cdot 6=36$

마찬가지로 8이 포함되지 않고 4, 6이 포함된 세 자리 자연수의 개수는 36

이때 2, 4, 6이 모두 포함된 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

이므로 8이 포함되지 않은 세 자리 자연수의 개수는

$36+36-6=66$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$168+66=234$ ⋯ ❸

답 234

채점 기준표

❶ 8이 포함되는 세 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ 8이 포함되지 않는 세 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	50%
❸ 각 자리의 숫자의 곱이 8의 배수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	10%

0153 전략 A, B 두 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수에서 A, B, C 세 나라의 대표들이 모두 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수를 뺀다.

풀이 A, B 두 나라의 대표를 각각 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때 같은 나라 대표들끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$3!\cdot 3!=36$

이므로 A, B 두 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수는

$24\cdot 36=864$ ⋯ ❶

A, B, C 세 나라의 대표를 각각 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

이때 같은 나라 대표들끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$3!\cdot 3!\cdot 3!=216$

이므로 A, B, C 세 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수는

$2\cdot 216=432$ ⋯ ❷

따라서 A, B 두 나라의 대표들만 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수는

$864-432=432$ ⋯ ❸

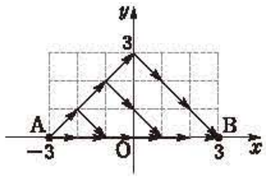
답 432

채점 기준표

❶ A, B 두 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ A, B, C 세 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ A, B 두 나라의 대표들만 자국의 대표끼리 이웃하게 않는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0154 전략 점 A에서 점 B까지 이동하는 방법을 좌표평면 위에 나타내어 본다.

풀이 점 A(−3, 0)에서 점 B(3, 0)까지 6번만 '점프'하여 이동하는 경우에서 길이가 1만큼 이동하는 방향은 →, 길이가 $\sqrt{2}$만큼 이동하는 방향은 ↗ 또는 ↘ 이다. ⋯ ❶



이때 점 A에서 점 B까지 이동하는 방법은 다음과 같다.

(i) →, →, →, →, →, →로 이동하는 경우의 수는

1 ⋯ ❷

(ii) ↗, ↘, →, →, →, →로 이동하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4!}=30$ ⋯ ❸

(iii) ↗, ↗, ↘, ↘, →, →로 이동하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$ ⋯ ❹

(iv) ↗, ↗, ↗, ↘, ↘, ↘로 이동하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!\cdot 3!}=20$ ⋯ ❺

이상에서 구하는 방법의 수는

$1+30+90+20=141$ ⋯ ❻

답 141

채점 기준표

❶ '점프' 하는 방향을 생각할 수 있다.	10%
❷ →, →, →, →, →, →로 이동하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
❸ ↗, ↘, →, →, →, →로 이동하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
❹ ↗, ↗, ↘, ↘, →, →로 이동하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
❺ ↗, ↗, ↗, ↘, ↘, ↘로 이동하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
❻ 점 A(−3, 0)에서 점 B(3, 0)까지 6번만 '점프'하여 이동하는 방법의 수를 구할 수 있다.	10%

02 조합

0155 ${}_9C_2=\frac{{}_9P_2}{2!}=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}=36$ 답 36

0156 ${}_{10}C_8={}_{10}C_2=\frac{{}_{10}P_2}{2!}=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}=45$ 답 45

0157 ${}_4C_4=1$ 답 1

0158 ${}_5C_0=1$ 답 1

0159 ${}_nC_3=56$에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=56$

$n(n-1)(n-2)=8\cdot7\cdot6$ $\quad\therefore n=8$ 답 8

0160 ${}_{2n+1}C_2=78$에서 $\frac{(2n+1)\cdot2n}{2\cdot1}=78$

$2n^2+n-78=0$, $\quad(2n+13)(n-6)=0$

$\underbrace{n\ge\frac{1}{2}}_{2n+1\ge2}$이므로 $\quad n=6$ 답 6

0161 ${}_nC_4={}_nC_6$에서 $\quad 6=n-4$ $\quad\therefore n=10$ 답 10

0162 ${}_7C_r={}_7C_{r-3}$에서 $\quad r=r-3$ 또는 $r-3=7-r$

$r\ne r-3$이므로 $\quad 2r=10$ $\quad\therefore r=5$ 답 5

0163 ${}_9C_6={}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ 답 84

0164 동호회 회원 8명 중에서 2명을 택하는 방법의 수와 같으므로 악수한 총 횟수는

${}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$ 답 28

0165 7명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

0166 남학생 4명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

여학생 3명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는 $\quad{}_3C_1=3$

따라서 구하는 방법의 수는 $\quad 6\cdot3=18$ 답 18

0167 빨간색을 제외한 6가지 색 중에서 3가지 색을 택한 후 각각의 경우에 빨간색을 포함하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 답 20

0168 보라색을 제외한 6가지 색 중에서 4가지 색을 택하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

0169 노란색과 초록색을 제외한 5가지 색 중에서 3가지 색을 택한 후 각각의 경우에 노란색을 포함하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

0170 9명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$

여자만 3명을 뽑는 방법의 수는 $\quad{}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 방법의 수는 $\quad 84-4=80$ 답 80

0171 ${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$ 답 5

0172 ${}_5H_4={}_8C_4=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$ 답 70

0173 ${}_6H_0={}_5C_0=1$ 답 1

0174 ${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

0175 ${}_4H_2={}_5C_2$이므로 $\quad n=5$ 답 5

0176 ${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1$이므로 $\quad n=4$ 답 4

0177 ${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ 답 84

0178 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 과일을 고르는 방법의 수는

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}=36$ 답 36

유형 01 조합의 수 본책 30쪽

① 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 방법의 수 ➡ ${}_nC_r$

② 서로 다른 n개에서 a개를 택한 후 나머지에서 b개를 택하는 방법의 수 ➡ ${}_nC_a\cdot{}_{n-a}C_b$

0179 경찰관 7명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 $\quad{}_7C_3=35$

소방관 6명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 $\quad{}_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는 $\quad 35+20=55$ 답 ③

0180 10명 중에서 단장 1명을 뽑는 방법의 수는 $_{10}C_1=10$
나머지 9명 중에서 부단장 2명을 뽑는 방법의 수는 $_9C_2=36$
따라서 구하는 방법의 수는 $10\cdot36=360$ 답 ②

0181 색연필 n자루 중에서 3자루를 택하는 방법의 수는 $_nC_3$
공책 5권 중에서 2권을 택하는 방법의 수는 $_5C_2=10$
따라서 $_nC_3\cdot10=200$이므로 $_nC_3=20$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=20,\qquad n(n-1)(n-2)=6\cdot5\cdot4$$

$\therefore n=6$ 답 6

0182 10개의 팀이 다른 모든 팀과 한 번씩 경기를 하는 방법의 수는 $_{10}C_2=45$
따라서 각 팀이 다른 한 팀과 n번씩 경기를 한다면
$45n=720$ $\therefore n=16$ 답 16번

0183 5개의 동아리 중에서 3개를 택하는 방법의 수는
$_5C_3={_5C_2}=10$
택한 3개의 동아리에서 각각 1명씩 뽑는 방법의 수는
$_4C_1\cdot{_4C_1}\cdot{_4C_1}=64$
따라서 구하는 방법의 수는 $10\cdot64=640$ 답 ⑤

0184 세 수의 합이 짝수가 되기 위해서는 세 수 모두 짝수이거나 하나는 짝수, 두 개는 홀수이어야 한다.
(i) 세 수 모두 짝수인 경우
2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 3장을 꺼내는 경우의 수는
$_4C_3=4$ → ①
(ii) 하나는 짝수, 두 개는 홀수인 경우
2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 1장을 꺼내고 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 2장을 꺼내는 경우의 수는
$_4C_1\cdot{_5C_2}=40$ → ②
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $4+40=44$ → ③
답 44

채점 기준표

① 짝수가 적힌 카드 3장을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
② 짝수가 적힌 카드 1장, 홀수가 적힌 카드 2장을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
③ 카드에 적힌 수의 총합이 짝수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%

유형 02 $_nC_r$의 계산 본책 30쪽

① $_nC_r=\frac{_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)
② $_nC_0=1$, $_nC_n=1$
③ $_nC_r={_nC_{n-r}}$ (단, $0\le r\le n$)

0185 $_nC_r=\frac{_nP_r}{r!}$이므로 $15=\frac{360}{r!}$
$r!=24=4\cdot3\cdot2\cdot1$ $\therefore r=4$
또 $_nP_4=360=6\cdot5\cdot4\cdot3$에서 $n=6$
$\therefore n+r=10$ 답 ⑤

0186 $_{n-1}C_2+{_{n-3}C_2}={_nC_2}$에서

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot1}+\frac{(n-3)(n-4)}{2\cdot1}=\frac{n(n-1)}{2\cdot1}$$

$(n-1)(n-2)+(n-3)(n-4)=n(n-1)$
$n^2-9n+14=0$, $(n-2)(n-7)=0$
$n\ge5$이므로 $n=7$ 답 ③
$n-1\ge2$, $n-3\ge2$, $n\ge2$에서 $n\ge5$

0187 $_{14}C_{r^2}={_{14}C_{r+2}}$에서
$r^2=r+2$ 또는 $r^2+(r+2)=14$
(i) $r^2=r+2$일 때,
$r^2-r-2=0$, $(r+1)(r-2)=0$
$\therefore r=2$
(ii) $r^2+(r+2)=14$일 때,
$r^2+r-12=0$, $(r+4)(r-3)=0$
$\therefore r=3$
(i), (ii)에서 구하는 자연수 r의 값의 합은
$2+3=5$ 답 5

0188 $_nP_2+6\cdot{_nC_2}=12\cdot{_{n-1}C_3}$에서

$$n(n-1)+6\cdot\frac{n(n-1)}{2\cdot1}=12\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2\cdot1}$$

$n-1\ge3$, 즉 $n\ge4$이므로 등식의 양변을 $n-1$로 나누면
$n+3n=2(n-2)(n-3)$, $4n=2n^2-10n+12$
$n^2-7n+6=0$, $(n-1)(n-6)=0$
$\therefore n=6$ 답 6

0189 이차방정식 $_nC_2x^2-{_nC_3}x+{_nC_5}=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{_nC_3}{_nC_2},\ \alpha\beta=\frac{_nC_5}{_nC_2}$$

이때 $\alpha\beta=1$이므로 $\frac{_nC_5}{_nC_2}=1$, $_nC_5={_nC_2}$
$\therefore n=5+2=7$ → ①

$$\therefore \alpha+\beta=\frac{_7C_3}{_7C_2}=\frac{\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{7\cdot6}{2\cdot1}}=\frac{5}{3}$$ → ②

답 $\frac{5}{3}$

채점 기준표

① n의 값을 구할 수 있다.	70%
② $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	30%

유형 03 $_nP_r$와 $_nC_r$를 이용한 증명 본책 31쪽

① $_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)
② $n!=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n\cdot(n-1)!$

0190 ④ $_{n+1}C_r={_{n+1}C_{n-r+1}}$ 답 ④

0191 $_{n}C_{n-r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!}$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}={}_{n}C_{r}$

$\therefore {}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r}$ 답 풀이 참조

0192 $n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(n-r)!}}$

$=\dfrac{\boxed{n!}}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\dfrac{r\cdot n!}{\boxed{r!}(n-r)!}=r\cdot{}_{n}C_{r}$

$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$ 답 ⑤

0193 $_{n-1}C_{r}+{}_{n-1}C_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}+\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-r)\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}+\dfrac{r\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{\{(n-r)+r\}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}={}_{n}C_{r}$

$\therefore {}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r}+{}_{n-1}C_{r-1}$ 답 풀이 참조

유형 04 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수 본책 33쪽

① 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수
➡ $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 뽑는 방법의 수와 같다.
➡ $_{n-k}C_{r-k}$

② 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 제외하고 r개를 뽑는 방법의 수
➡ $(n-k)$개에서 r개를 뽑는 방법의 수와 같다.
➡ $_{n-k}C_{r}$

0194 혜원이와 민준이를 제외한 10명의 회원 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는

$_{10}C_{3}=120$ 답 ①

0195 2와 7이 적힌 공을 제외한 8개의 공 중에서 2개를 꺼내는 방법의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는

$_{8}C_{2}=28$ 답 28

0196 A는 뽑고 B는 뽑지 않는 방법의 수는 A, B를 제외한 7명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

$_{7}C_{3}=35$

B는 뽑고 A는 뽑지 않는 방법의 수는 A, B를 제외한 7명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

$_{7}C_{3}=35$

따라서 구하는 방법의 수는

$35+35=70$ 답 70

다른 풀이 A, B를 제외한 7명의 학생 중에서 3명을 뽑고, A, B 중에서 한 명을 뽑으면 되므로 구하는 방법의 수는

$_{7}C_{3}\cdot{}_{2}C_{1}=35\cdot2=70$

0197 (1) 5를 제외한 11개의 자연수 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$_{11}C_{2}=55$ ··· ❶

(2) 3, 6, 9, 12를 제외한 8개의 자연수 중에서 4개 이하를 택하는 방법의 수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$_{8}C_{4}+{}_{8}C_{3}+{}_{8}C_{2}+{}_{8}C_{1}+{}_{8}C_{0}=70+56+28+8+1$

$=163$ ··· ❷

답 (1) 55 (2) 163

채점 기준표

❶ 5를 원소로 갖고 원소의 개수가 3인 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ 3의 배수를 원소로 갖지 않고 원소의 개수가 4 이하인 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	60%

0198 짝이 맞는 구두 한 켤레를 택하는 방법의 수는

$_{5}C_{1}=5$

한 켤레를 제외한 구두 8짝 중에서 2짝을 택하는 방법의 수는

$_{8}C_{2}=28$

이때 구두 8짝 중에서 짝이 맞는 2짝, 즉 구두 4켤레 중에서 한 켤레를 택하는 방법의 수는

$_{4}C_{1}=4$

이므로 구두 8짝 중에서 짝이 맞지 않는 구두를 택하는 방법의 수는

$28-4=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot24=120$ 답 ②

유형 05 '적어도'의 조건이 있는 조합의 수 본책 33쪽

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
$=$(모든 경우의 수)$-$(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

0199 12명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$_{12}C_{4}=495$

남자만 4명을 뽑는 방법의 수는 $_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

여자만 4명을 뽑는 방법의 수는 $_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

따라서 구하는 방법의 수는

$495-(15+15)=465$ 답 ②

0200 (1) 10송이 중에서 4송이를 고르는 방법의 수는

$_{10}C_{4}=210$

노란색 꽃과 보라색 꽃 중에서 4송이를 고르는 방법의 수는

$_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

따라서 구하는 방법의 수는

$210-15=195$ ··· ❶

(2) (i) 노란색 꽃이 2송이 포함되도록 고르는 방법의 수는

$_3C_2\cdot{}_7C_2=3\cdot21=63$

(ii) 노란색 꽃이 3송이 포함되도록 고르는 방법의 수는

$_3C_3\cdot{}_7C_1=1\cdot7=7$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$63+7=70$ ⋯ ❷

답 (1) 195 (2) 70

채점 기준표

❶ 빨간색 꽃이 적어도 1송이 포함되도록 고르는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 노란색 꽃이 적어도 2송이 포함되도록 고르는 방법의 수를 구할 수 있다.	60%

다른 풀이 (2) 10송이 중에서 4송이를 고르는 방법의 수는

$_{10}C_4=210$

(i) 빨간색 꽃과 보라색 꽃 중에서 4송이를 고르는 방법의 수는

$_7C_4={}_7C_3=35$

(ii) 빨간색 꽃과 보라색 꽃 중에서 3송이를 고르고, 노란색 꽃 중에서 1송이를 고르는 방법의 수는 $_7C_3\cdot{}_3C_1=35\cdot3=105$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$210-(35+105)=70$

0201 12명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_{12}C_3=220$

여자 지원자를 n명이라 하면 여자만 3명을 뽑는 방법의 수는

$_nC_3$

이때 남자 지원자를 적어도 한 명 포함하도록 뽑는 방법의 수가 164이므로 $220-{}_nC_3=164$

$_nC_3=56$, $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=56$

$n(n-1)(n-2)=8\cdot7\cdot6$ $\therefore n=8$

따라서 여자 지원자가 8명이므로 남자 지원자 수는

$12-8=4$

답 4

0202 홀수와 짝수를 각각 적어도 2개씩 뽑을 때 홀수의 개수를 a, 짝수의 개수를 b라 하면 순서쌍 (a, b)는 $(2, 3), (3, 2)$

10 미만의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로

(i) 홀수 2개, 짝수 3개를 뽑는 방법의 수는

$_5C_2\cdot{}_4C_3=10\cdot4=40$

(ii) 홀수 3개, 짝수 2개를 뽑는 방법의 수는

$_5C_3\cdot{}_4C_2=10\cdot6=60$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$40+60=100$

답 100

유형 06 뽑아서 나열하는 방법의 수 본책 33쪽

m개 중에서 r개, n개 중에서 s개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수

➡ $_mC_r\cdot{}_nC_s\cdot(r+s)!$

0203 어른 5명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_1=5$

어린이 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_6C_2=15$

3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot15\cdot6=450$

답 ④

0204 딸기케이크와 치즈케이크를 제외한 나머지 4가지 중에서 2가지를 뽑는 방법의 수는 $_4C_2=6$

4가지를 일렬로 진열하는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot24=144$

답 ④

0205 1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로

홀수 3개를 택하는 방법의 수는 $_5C_3={}_5C_2=10$

짝수 2개를 택하는 방법의 수는 $_4C_2=6$

5개의 자연수를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$10\cdot6\cdot120=7200$

답 ④

0206 지원이와 수현이를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 $_6C_3=20$ ⋯ ❶

지원이와 수현이를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$이고, 이때 지원이와 수현이가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 지원이와 수현이를 이웃하도록 세우는 방법의 수는 $24\cdot2=48$ ⋯ ❷

따라서 구하는 방법의 수는 $20\cdot48=960$ ⋯ ❸

답 960

채점 기준표

❶ 지원이와 수현이를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 지원이와 수현이를 이웃하도록 세우는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 지원이와 수현이가 모두 포함되고 이들이 서로 이웃하도록 세우는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0207 7명의 학생 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$_7C_4={}_7C_3=35$

4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\cdot6=210$

답 210

0208 7가지 색 중에서 5가지 색을 고르는 방법의 수는

$_7C_5={}_7C_2=21$

5가지 색 중에서 중앙에 칠할 색을 고르는 방법의 수는

$_5C_1=5$

중앙에 칠한 색을 제외한 4가지 색으로 4개의 날개를 칠하는 방법의 수는 $(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $21\cdot5\cdot6=630$

답 ③

다른 풀이 7가지 색 중에서 중앙에 칠할 색을 고르는 방법의 수는

$_7C_1=7$

나머지 6가지 색 중에서 4가지 색을 고르는 방법의 수는

$_6C_4={_6C_2}=15$

4가지 색으로 4개의 날개를 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $7\cdot15\cdot6=630$

유형 07 직선의 개수 본책 33쪽

서로 다른 n개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 주어진 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수

➡ $_nC_2$

0209 5개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

$_5C_2=10$

답 ②

0210 6개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

$_6C_2=15$

답 ④

0211 두 직선 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

$_3C_1\cdot{_5C_1}=3\cdot5=15$

주어진 두 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$15+2=17$

답 ③

다른 풀이 8개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_8C_2=28$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_3C_2={_3C_1}=3$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_5C_2=10$

주어진 두 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$28-3-10+2=17$

0212 10개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{10}C_2=45$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 5개이므로 구하는 직선의 개수는

$45-6\cdot5+5=20$

답 20

0213 12개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

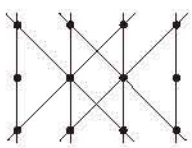
$_{12}C_2=66$

(i) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_3C_2={_3C_1}=3$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 8개이다.

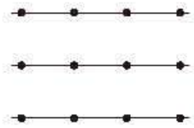


(ii) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이다.



(i), (ii)에서 구하는 직선의 개수는

$66-3\cdot8-6\cdot3+8+3=35$

답 35

유형 08 다각형의 대각선의 개수 본책 34쪽

n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같다.

➡ $_nC_2-n$

0214 구하는 대각선의 개수는 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 8을 뺀 것과 같으므로

$_8C_2-8=28-8=20$

답 ②

0215 구하는 다각형의 꼭짓점의 개수를 n이라 하면 대각선의 개수가 44이므로

$_nC_2-n=44,\quad \dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}-n=44$

$n^2-3n-88=0,\quad (n+8)(n-11)=0$

$\therefore n=11\ (\because n\geq3)$

답 ②

0216 대각선의 교점은 두 대각선에 의해 결정되고 한 점에서 만나는 두 대각선은 4개의 꼭짓점에 의해 결정된다.

따라서 십이각형의 서로 다른 대각선의 교점의 최대 개수는 12개의 꼭짓점에서 서로 다른 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_{12}C_4=495$

답 495

유형 09 다각형의 개수 본책 35쪽

서로 다른 n개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때,

① 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수 ➡ $_nC_3$

② 점을 이어서 만들 수 있는 사각형의 개수 ➡ $_nC_4$

0217 9개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_9C_3=84$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_4C_3={_4C_1}=4$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이다.

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-3\cdot4=72$

답 72

0218 7개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는

$_7C_3=35$

답 ④

0219 7개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{7}C_{3}=35$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$35-4=31$

답 ②

0220 직선 l 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{4}C_{2}=6$

직선 m 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{5}C_{2}=10$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$6\cdot10=60$

답 60

0221 16개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

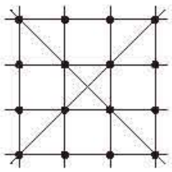
$_{16}C_{3}=560$

(i) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 10개이다.

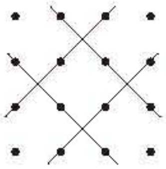


(ii) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{3}C_{3}=1$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 4개이다.



(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$560-4\cdot10-1\cdot4=516$

답 516

유형 10 평행사변형의 개수

본책 35쪽

m개의 평행한 직선과 n개의 평행한 직선이 만날 때, 이 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수 ➡ $_{m}C_{2}\cdot{}_{n}C_{2}$

0222 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형을 만들 수 있으므로 평행사변형의 개수는

$_{5}C_{2}\cdot{}_{4}C_{2}=10\cdot6=60$

답 ④

0223 (1) 한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수는 각각 9, 4, 1이므로 정사각형의 개수는

$9+4+1=14$ ··· ❶

(2) 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형을 만들 수 있으므로 직사각형의 총 개수는 $_{4}C_{2}\cdot{}_{4}C_{2}=6\cdot6=36$ ··· ❷

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$36-14=22$ ··· ❸

답 (1) 14 (2) 22

채점 기준표

❶ 주어진 직선으로 만들 수 있는 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 직선으로 만들 수 있는 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	40%
❸ 주어진 직선으로 만들 수 있는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	20%

0224 n개의 평행한 직선 중에서 2개, $n+2$개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형을 만들 수 있으므로

$_{n}C_{2}\cdot{}_{n+2}C_{2}=210$

$\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}\cdot\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}=210$

$(n+2)(n+1)n(n-1)=7\cdot6\cdot5\cdot4 \quad \therefore n=5$

답 5

유형 11 중복조합의 수

본책 36쪽

① 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복조합의 수

➡ $_{n}H_{r}$

② 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 $r\ (n\le r)$개를 택할 때, 서로 다른 n개가 적어도 한 개씩 포함되도록 택하는 중복조합의 수

➡ $_{n}H_{r-n}$

0225 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는

$_{3}H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_{2}=66$

답 ④

0226 서로 다른 4개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는

$_{4}H_{9}={}_{12}C_{9}={}_{12}C_{3}=220$

답 220

0227 3개의 문자 a, b, c 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 항의 개수는

$_{3}H_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$

답 21

SSEN 특강

전개식의 항의 개수

자연수 n에 대하여 $(a+b+c)^{n}$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수 ➡ $\underbrace{{}_{3}}_{a,\,b,\,c\text{의 3개}}H_{n}$

0228 무기명으로 투표하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}H_{6}={}_{8}C_{6}={}_{8}C_{2}=28 \quad \therefore a=28$ ··· ❶

기명으로 투표하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_{3}\Pi_{6}=3^{6}=729 \quad \therefore b=729$ ··· ❷

$\therefore a+b=757$ ··· ❸

답 757

채점 기준표

❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0229 먼저 구슬을 바구니 A에 2개, 바구니 B에 3개를 담고 나머지 7개의 구슬을 나누어 담으면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 $_4H_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$

답 ②

0230 먼저 세 사람에게 빨간 펜과 파란 펜을 각각 한 자루씩 나누어 주면 빨간 펜 5자루, 파란 펜 3자루가 남는다.
이때 빨간 펜 5자루를 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

파란 펜 3자루를 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 방법의 수는 $21\cdot10=210$

답 210

유형 12 방정식과 부등식의 해의 개수; 중복조합 (본책 31쪽)

방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m=n$ (m, n은 자연수)에 대하여
① 음이 아닌 정수인 해의 개수 ➡ $_mH_n$
② 자연수인 해의 개수 ➡ $_mH_{n-m}$ (단, $n\ge m$)

0231 $a={}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$
한편 $x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$
(X, Y, Z는 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x+y+z=7$에서

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=7 \quad \therefore X+Y+Z=4$

즉 b의 값은 방정식 $X+Y+Z=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

$b={}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

$\therefore a+b=51$

답 51

0232 x, y, z, w가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z+w=0$ 또는 $x+y+z+w=1$ 또는 $x+y+z+w=2$

(i) $x+y+z+w=0$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
$_4H_0={}_3C_0=1$
(ii) $x+y+z+w=1$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
$_4H_1={}_4C_1=4$
(iii) $x+y+z+w=2$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
$_4H_2={}_5C_2=10$

이상에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$1+4+10=15$

답 15

0233 $a=A+1$, $b=B+2$, $c=C+3$
(A, B, C는 음이 아닌 정수)으로 놓으면 $a+b+c=k$에서

$(A+1)+(B+2)+(C+3)=k$

$\therefore A+B+C=k-6$

방정식 $A+B+C=k-6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수는

$_3H_{k-6}={}_{k-4}C_{k-6}={}_{k-4}C_2$

이때 순서쌍 (A, B, C)의 개수는 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로 $\dfrac{(k-4)(k-5)}{2}=15$

$(k-4)(k-5)=30, \quad k^2-9k-10=0$

$(k+1)(k-10)=0 \quad \therefore k=10$ ($\because$ k는 자연수)

답 10

0234 $x=2X+1$, $y=2Y+1$, $z=2Z+1$
(X, Y, Z는 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x+y+z=13$에서

$(2X+1)+(2Y+1)+(2Z+1)=13$

$2X+2Y+2Z=10$

$\therefore X+Y+Z=5$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $X+Y+Z=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

$_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

답 ②

유형 13 함수의 개수; 조합 (본책 32쪽)

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때, 함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중에서
① $a<b$이면 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수
➡ $_nC_m$ (단, $n\ge m$)
② $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수
➡ $_nH_m$

0235 $f(3)=8$이므로 조건 (나)에 의하여

$f(1)\le f(2)\le 8\le f(4)$

$f(1)\le f(2)\le 8$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수의 개수는 6, 7, 8의 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_2={}_4C_2=6$

$8\le f(4)$에서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는

8, 9, 10의 3개

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$6\cdot3=18$

답 ①

0236 집합 A의 원소 4개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

택한 2개의 원소를 한 원소로 생각하여 집합 A의 원소 3개를 집합 B의 각 원소에 대응시키는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 함수의 개수는

$6\cdot6=36$

답 ④

0237 (1) 서로 다른 4개에서 3개를 택하여 작은 것부터 차례대로 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$_4C_3=4$ ➊

(2) 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 함수 f의 개수는

$_4H_3={}_6C_3=20$ ➋

답 (1) 4 (2) 20

채점 기준표

➊ $f(1)<f(2)<f(3)$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	50%
➋ $f(1)\le f(2)\le f(3)$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	50%

0238 조건 (가), (나)에서 함수 f는 집합 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에서 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$으로의 일대일 대응으로 생각할 수 있다.
조건 (다)에서 $f(2)\le 2$이므로 $f(2)$의 값을 정하는 방법의 수는

$${}_2C_1$$

$f(3)\le 3$, $f(3)\ne f(2)$이므로 $f(3)$의 값을 정하는 방법의 수는

$${}_2C_1$$

마찬가지로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 방법의 수는 각각 ${}_2C_1$이고, $f(7)$의 값을 정하는 방법의 수는 1이다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는

$${}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot 1=32$$

답 ③

0239 전략 재석이와 명수가 푼 문제 중에서 3번 문제만 답이 ③으로 일치함을 이용한다.

풀이 재석이와 명수 둘 다 3문제씩 맞히기 위해서는 3번의 정답은 반드시 ③이어야 한다.
따라서 재석이는 3번 문제를 제외한 나머지 4개의 문제 중에서 2문제를 맞히고, 명수는 3번 문제와 재석이가 맞힌 2문제를 제외한 나머지 2문제 중에서 2문제를 맞혀야 하므로 구하는 경우의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_2=6\cdot 1=6$$

답 6

0240 전략 부분집합의 원소 사이의 대소 관계를 생각한다.

풀이 주어진 조건을 만족시키는 부분집합을 $A=\{a, b, c, d, e\}$ $(1\le a<b<c<d<e\le 19)$라 하면
$a+1<b$, $b+1<c$, $c+1<d$, $d+1<e$를 만족시켜야 하므로

$$a+4<b+3<c+2<d+1<e$$

이때 $a'=a+4$, $b'=b+3$, $c'=c+2$, $d'=d+1$, $e'=e$라 하면

$$5\le a'<b'<c'<d'<e'\le 19 \quad\cdots\cdots\ ㉠$$

따라서 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는 5부터 19까지의 15개의 자연수 중에서 5개를 택하는 경우의 수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$${}_{15}C_5=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=3003$$

답 ③

0241 전략 12개의 자연수를 3으로 나누었을 때의 나머지에 따라 세 집합으로 나누어 생각한다.

풀이 1부터 12까지의 자연수를 3으로 나누었을 때 나머지가 0, 1, 2인 수들의 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면

$$A_0=\{3, 6, 9, 12\},\ A_1=\{1, 4, 7, 10\},\ A_2=\{2, 5, 8, 11\}$$

이때 12개의 자연수 중 서로 다른 네 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는

A_0에서 4개를 택하는 경우
A_0에서 2개, A_1에서 1개, A_2에서 1개를 택하는 경우
A_0에서 1개, A_1에서 3개를 택하는 경우
A_0에서 1개, A_2에서 3개를 택하는 경우
A_1에서 2개, A_2에서 2개를 택하는 경우

이다. 각각의 경우에 대하여 서로 다른 네 수의 곱이 6의 배수가 되는 경우의 수는

(i) A_0에서 4개를 택하는 경우

$${}_4C_4=1$$

(ii) A_0에서 2개, A_1에서 1개, A_2에서 1개를 택하는 경우

$${}_4C_2\cdot{}_4C_1\cdot{}_4C_1-\underbrace{{}_2C_1\cdot{}_2C_1}_{A_0\text{의 원소 3, 9를 택하고 }A_1\text{의 원소 1, 7 중 1개, }A_2\text{의 원소 5, 11 중 1개를 택하는 경우}}=96-4=92$$

(iii) A_0에서 1개, A_1에서 3개를 택하는 경우

$${}_4C_1\cdot{}_4C_3=4\cdot 4=16$$

(iv) A_0에서 1개, A_2에서 3개를 택하는 경우

$${}_4C_1\cdot{}_4C_3=4\cdot 4=16$$

(v) A_1에서 2개, A_2에서 2개를 택하는 경우
네 수의 곱이 6의 배수가 되는 경우는 없다.

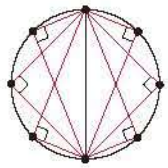
이상에서 구하는 경우의 수는

$$1+92+16+16=125$$

답 125

0242 전략 원에서 반원에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용한다.

풀이 8개의 점으로 만들 수 있는 지름은 4개이고, 오른쪽 그림과 같이 1개의 지름에 대하여 6개의 직각삼각형을 만들 수 있으므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는



$$4\cdot 6=24 \qquad \therefore a=24$$

원에 내접하는 직사각형의 두 대각선의 교점은 원의 중심이고, 오른쪽 그림과 같이 2개의 지름에 대하여 1개의 직사각형을 만들 수 있으므로 만들 수 있는 직사각형의 개수는

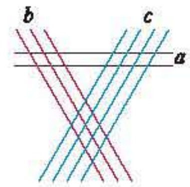
$${}_4C_2=6 \qquad \therefore b=6$$

$$\therefore a+b=30$$

답 30

0243 전략 평행사변형이 아닌 사다리꼴은 한 쌍의 대변만 평행하다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 2개의 평행한 직선, 3개의 평행한 직선, 4개의 평행한 직선을 각각 a, b, c라 하면 평행사변형이 아닌 사다리꼴이 결정되는 경우는 다음과 같다.



(i) a에서 2개, b, c에서 각각 1개씩을 택하는 경우의 수는

$${}_2C_2\cdot{}_3C_1\cdot{}_4C_1=1\cdot 3\cdot 4=12$$

(ii) b에서 2개, a, c에서 각각 1개씩을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_4C_1=3\cdot 2\cdot 4=24$$

(iii) c에서 2개, a, b에서 각각 1개씩을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_3C_1=6\cdot 2\cdot 3=36$$

이상에서 구하는 사다리꼴의 개수는

$$12+24+36=72$$

답 72

0244 전략 지수법칙을 이용하여 세 수의 곱이 100 이하가 되는 경우를 생각한다.

풀이 네 개의 자연수 1, 2, 4, 8 중에서 중복을 허용하여 세 수를 선택하는 경우의 수는 ${}_4H_3={}_6C_3=20$
이때 1, 2, 4, 8, 즉 2^0, 2^1, 2^2, 2^3에서 세 수를 곱하여 100 초과가 되는 경우는

$$(2^3, 2^3, 2^3),\ (2^3, 2^3, 2^2),\ (2^3, 2^3, 2),\ (2^3, 2^2, 2^2)$$

의 4가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $20-4=16$

답 ③

0245 전략 세 가지 맛 사탕을 적어도 한 개씩 포함해야 하므로 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 0개, 1개, 2개, ⋯, 12개를 택하는 방법의 수와 같다.

풀이 먼저 딸기 맛, 포도 맛, 사과 맛 사탕을 각각 한 개씩 사고 나머지 12개 이하의 사탕을 사면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 12개 이하를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$
\begin{aligned}
&{}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3+\cdots+{}_3H_{12}\\
&={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{14}C_{12}\\
&=\underbrace{{}_3C_0}_{{}_2C_0={}_3C_0}+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{14}C_{12}\\
&={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{14}C_{12}\\
&={}_5C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{14}C_{12}\\
&\quad\vdots\\
&={}_{14}C_{11}+{}_{14}C_{12}\\
&={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3=455
\end{aligned}
$$

답 ②

0246 **전략** 먼저 주어진 등식을 간단하게 정리한다.

풀이 $ad+ae+bd+be+cd+ce$
$=a(d+e)+b(d+e)+c(d+e)$
$=(a+b+c)(d+e)=51$
이때 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$는 자연수이므로
$a+b+c=3,\ d+e=17$ 또는 $a+b+c=17,\ d+e=3$
(i) $a+b+c=3,\ d+e=17$인 경우
$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1,\ d=d'+1,\ e=e'+1$
($a',\ b',\ c',\ d',\ e'$은 음이 아닌 정수)로 놓으면
$a'+b'+c'=0,\ d'+e'=15$
따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$1\cdot{}_2H_{15}={}_{16}C_{15}={}_{16}C_1=16$
(ii) $a+b+c=17,\ d+e=3$인 경우
$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1,\ d=d'+1,\ e=e'+1$
($a',\ b',\ c',\ d',\ e'$은 음이 아닌 정수)로 놓으면
$a'+b'+c'=14,\ d'+e'=1$
따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
${}_3H_{14}\cdot{}_2H_1={}_{16}C_{14}\cdot{}_2C_1={}_{16}C_2\cdot{}_2C_1=120\cdot2=240$
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$16+240=256$

답 256

0247 **전략** 함숫값이 모두 다른 경우, 2개가 같은 경우, 3개가 같은 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$인 경우
Y의 원소 5개 중에서 4개를 뽑는 방법의 수와 같으므로
${}_5C_4=5$
(ii) $f(1)=f(2)<f(3)<f(4)$ 또는 $f(1)<f(2)=f(3)<f(4)$인 경우
각 경우는 Y의 원소 5개 중에서 3개를 뽑는 방법의 수와 같으므로
${}_5C_3=10\qquad\therefore\ 2\cdot10=20$
(iii) $f(1)=f(2)=f(3)<f(4)$인 경우
Y의 원소 5개 중에서 2개를 뽑는 방법의 수와 같으므로
${}_5C_2=10$
이상에서 구하는 함수 f의 개수는
$5+20+10=35$

답 35

0248 **전략** 흰 바둑돌과 검은 바둑돌의 개수에 따라 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.

풀이 흰 바둑돌끼리 이웃하지 않도록 일렬로 나열하려면 흰 바둑돌은 4개 이하이어야 한다.
(i) 흰 바둑돌이 4개, 검은 바둑돌이 4개인 경우
검은 바둑돌 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 4개의 자리에 흰 바둑돌을 넣는 방법의 수는
∨●∨●∨●∨●∨
${}_5C_4={}_5C_1=5$ ⋯ ❶
(ii) 흰 바둑돌이 3개, 검은 바둑돌이 5개인 경우
검은 바둑돌 사이사이와 양 끝의 6개의 자리 중에서 3개의 자리에 흰 바둑돌을 넣는 방법의 수는
∨●∨●∨●∨●∨●∨
${}_6C_3=20$ ⋯ ❷
(iii) 흰 바둑돌이 2개, 검은 바둑돌이 6개인 경우
검은 바둑돌 사이사이와 양 끝의 7개의 자리 중에서 2개의 자리에 흰 바둑돌을 넣는 방법의 수는
∨●∨●∨●∨●∨●∨●∨
${}_7C_2=21$ ⋯ ❸
이상에서 구하는 방법의 수는
$5+20+21=46$ ⋯ ❹

답 46

채점 기준표

채점 기준	배점
❶ 흰 바둑돌 4개, 검은 바둑돌 4개를 흰 바둑돌끼리 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 흰 바둑돌 3개, 검은 바둑돌 5개를 흰 바둑돌끼리 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ 흰 바둑돌 2개, 검은 바둑돌 6개를 흰 바둑돌끼리 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❹ 흰 바둑돌끼리 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	10%

0249 **전략** 4가지 색, 3가지 색, 2가지 색을 사용하는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 4가지 색을 모두 사용하는 경우
$(4-1)!=3!=6$(가지) ⋯ ❶
(ii) 3가지 색을 사용하는 경우
오른쪽 그림과 같이 3가지 색 중에서 1가지 색으로 두 영역을 칠하고 나머지 색으로 한 영역씩 칠할 수 있으므로 ${}_4C_3\cdot{}_3C_1=4\cdot3=12$(가지) ⋯ ❷

A	C
B	A

(iii) 2가지 색을 사용하는 경우
오른쪽 그림과 같이 2가지 색으로 두 영역씩 칠할 수 있으므로 ${}_4C_2=6$(가지) ⋯ ❸

A	B
B	A

이상에서 구하는 방법의 수는
$6+12+6=24$ ⋯ ❹

답 24

채점 기준표

채점 기준	배점
❶ 4가지 색을 모두 사용하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 3가지 색을 사용하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ 2가지 색을 사용하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❹ 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	10%

참고 (ii)에서 오른쪽 두 가지 경우는 회전하여 일치하므로 같은 경우로 본다.

A	C
B	A

A	B
C	A

0250 전략 4개의 문자 a, c, d, e 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같음을 이용한다.

풀이 b는 포함하지 않고 e는 포함하는 항의 개수는 4개의 문자 a, c, d, e 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같다. ➊

따라서 구하는 항의 개수는

$${}_4H_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$$ ➋

답 120

채점 기준표

➊ 4개의 문자 a, c, d, e 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같음을 알 수 있다.	50%
➋ b는 포함하지 않고 e는 포함하는 항의 개수를 구할 수 있다.	50%

0251 전략 치역의 원소가 3개이려면 함숫값이 같은 정의역의 원소가 2개씩 2쌍 또는 3개 존재해야 함을 이용한다.

풀이 집합 X의 5개의 원소 중에서 치역의 원소가 되는 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=10$$ ➊

이때 치역의 원소가 3개인 경우는 함숫값이 같은 정의역의 원소가 2개씩 2쌍인 경우와 3개인 경우로 나눌 수 있다.

(i) 함숫값이 같은 정의역의 원소가 2개씩 2쌍인 경우

치역의 원소를 a, b, c라 하면 함숫값이

a, a, b, b, c 또는 a, b, b, c, c 또는 a, a, b, c, c

인 경우가 있고, 각 경우의 함수의 개수는

$$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$$

이므로 함숫값이 같은 정의역의 원소가 2개씩 2쌍인 함수의 개수는

$$3\cdot 30=90$$ ➋

(ii) 함숫값이 같은 정의역의 원소가 3개인 경우

치역의 원소를 a, b, c라 하면 함숫값이

a, a, a, b, c 또는 a, b, b, b, c 또는 a, b, c, c, c

인 경우가 있고, 각 경우의 함수의 개수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

이므로 함숫값이 같은 정의역의 원소가 3개인 함수의 개수는

$$3\cdot 20=60$$ ➌

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$10\cdot(90+60)=1500$$ ➍

답 1500

채점 기준표

➊ 치역의 원소 3개를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%
➋ 함숫값이 같은 정의역의 원소가 2개씩 2쌍인 함수의 개수를 구할 수 있다.	30%
➌ 함숫값이 같은 정의역의 원소가 3개인 함수의 개수를 구할 수 있다.	30%
➍ 치역의 원소가 3개인 함수의 개수를 구할 수 있다.	20%

Ⅰ 순열과 조합

03 이항정리와 분할

0252 $(x+y)^6$

$$={}_6C_0\,x^6+{}_6C_1\,x^5y+{}_6C_2\,x^4y^2+{}_6C_3\,x^3y^3+{}_6C_4\,x^2y^4+{}_6C_5\,xy^5+{}_6C_6\,y^6$$
$$=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

답 $x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$

0253 $(a-3)^4={}_4C_0\,a^4+{}_4C_1\,a^3(-3)+{}_4C_2\,a^2(-3)^2+{}_4C_3\,a(-3)^3+{}_4C_4(-3)^4$

$$=a^4-12a^3+54a^2-108a+81$$

답 $a^4-12a^3+54a^2-108a+81$

0254 $(2a-b)^5$

$$={}_5C_0(2a)^5+{}_5C_1(2a)^4(-b)+{}_5C_2(2a)^3(-b)^2+{}_5C_3(2a)^2(-b)^3+{}_5C_4(2a)(-b)^4+{}_5C_5(-b)^5$$
$$=32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5$$

답 $32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5$

0255 $\left(x+\frac{2}{x}\right)^3={}_3C_0\,x^3+{}_3C_1\,x^2\left(\frac{2}{x}\right)+{}_3C_2\,x\left(\frac{2}{x}\right)^2+{}_3C_3\left(\frac{2}{x}\right)^3$

$$=x^3+6x+\frac{12}{x}+\frac{8}{x^3}$$

답 $x^3+6x+\frac{12}{x}+\frac{8}{x^3}$

0256 $(a+b)^7$의 전개식의 일반항은 ${}_7C_r\,a^{7-r}b^r$

$a^{7-r}b^r=a^4b^3$에서 $r=3$

따라서 a^4b^3의 계수는 ${}_7C_3=35$

답 35

0257 $(x+2)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_r\,x^{5-r}2^r={}_5C_r\,2^rx^{5-r}$

$x^{5-r}=x^3$에서 $5-r=3$ $\therefore r=2$

따라서 x^3의 계수는 ${}_5C_2\cdot 2^2=40$

답 40

0258 $(a-3b)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r\,a^{4-r}(-3b)^r={}_4C_r(-3)^ra^{4-r}b^r$

$a^{4-r}b^r=a^2b^2$에서 $r=2$

따라서 a^2b^2의 계수는 ${}_4C_2\cdot(-3)^2=54$

답 54

0259 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r\,x^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r(-1)^rx^{6-2r}$$

상수항은 $6-2r=0$일 때이므로 $r=3$

따라서 상수항은 ${}_6C_3\cdot(-1)^3=-20$

답 -20

0260 $(a+b+c)^4$의 전개식의 일반항은

$$\frac{4!}{p!\,q!\,r!}a^pb^qc^r \text{ (단, } p+q+r=4,\ p\ge 0,\ q\ge 0,\ r\ge 0\text{)}$$

$a^p b^q c^r = abc^2$에서 $\quad p=1,\ q=1,\ r=2$

따라서 abc^2의 계수는 $\quad \dfrac{4!}{1!\cdot 1!\cdot 2!}=12$ 답 12

0261 $(x+y+z)^8$의 전개식의 일반항은

$\dfrac{8!}{p!q!r!}x^p y^q z^r$ (단, $p+q+r=8,\ p\ge 0,\ q\ge 0,\ r\ge 0$)

$x^p y^q z^r = x^4 y^2 z^2$에서 $\quad p=4,\ q=2,\ r=2$

따라서 $x^4y^2z^2$의 계수는 $\quad \dfrac{8!}{4!\cdot 2!\cdot 2!}=420$ 답 420

0262 오른쪽 파스칼의 삼각형에서

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

답 풀이 참조

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & \boxed{2} & & 1 & & \\ & 1 & & \boxed{3} & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & \boxed{6} & & \boxed{4} & & 1 \end{array}$$

0263 오른쪽 파스칼의 삼각형에서

$(x-y)^5$

$=x^5+5x^4\cdot(-y)+10x^3\cdot(-y)^2$

$\quad +10x^2\cdot(-y)^3+5x\cdot(-y)^4+(-y)^5$

$=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$

답 풀이 참조

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & \boxed{3} & & 1 & & \\ & 1 & & \boxed{4} & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & \\ 1 & & \boxed{5} & & \boxed{10} & & \boxed{10} & & 5 & & 1 \end{array}$$

0264 ${}_5C_2+{}_5C_3={}_6C_3$ 답 ${}_6C_3$

0265 ${}_6C_2+{}_6C_3+{}_7C_4={}_7C_3+{}_7C_4={}_8C_4$ 답 ${}_8C_4$

0266 ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_7=2^7$이므로

${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_6=2^7-1=127$ 답 127

0267 ${}_4C_0-{}_4C_1+{}_4C_2-{}_4C_3+{}_4C_4=0$ 답 0

0268 ${}_6C_0+{}_6C_2+{}_6C_4+{}_6C_6=2^{6-1}=2^5=32$ 답 32

0269 $5=3+1+1=2+2+1$ 답 풀이 참조

0270 $8=5+1+1+1=4+2+1+1$

$\quad =3+3+1+1=3+2+2+1$

$\quad =2+2+2+2$ 답 풀이 참조

0271 답 1

0272 $5=4+1=3+2$이므로

$P(5,\ 2)=2$ 답 2

0273 $6=2+1+1+1+1$이므로

$P(6,\ 5)=1$ 답 1

0274 답 1

0275 $4=3+1=2+2$

$\quad =2+1+1$

$\quad =1+1+1+1$

따라서 4의 분할의 수는

$P(4,\ 1)+P(4,\ 2)+P(4,\ 3)+P(4,\ 4)$

$=1+2+1+1=5$ 답 5

0276 $7=6+1=5+2=4+3$

$\quad =5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$

$\quad =4+1+1+1=3+2+1+1=2+2+2+1$

$\quad =3+1+1+1+1=2+2+1+1+1$

$\quad =2+1+1+1+1+1$

$\quad =1+1+1+1+1+1+1$

따라서 7의 분할의 수는

$P(7,\ 1)+P(7,\ 2)+P(7,\ 3)+P(7,\ 4)+P(7,\ 5)$

$+P(7,\ 6)+P(7,\ 7)$

$=1+3+4+3+2+1+1=15$ 답 15

0277 8을 5개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같으므로

$P(8,\ 5)$ 답 $P(8,\ 5)$

0278 답 ○ **0279** 답 ×

0280 답 ○

0281 (1) $\{1\}\cup\{2,\ 3,\ 4\}$, $\{2\}\cup\{1,\ 3,\ 4\}$,

$\{3\}\cup\{1,\ 2,\ 4\}$, $\{4\}\cup\{1,\ 2,\ 3\}$

(2) $\{1,\ 2\}\cup\{3,\ 4\}$, $\{1,\ 3\}\cup\{2,\ 4\}$, $\{1,\ 4\}\cup\{2,\ 3\}$

(3) $S(4,\ 2)=4+3=7$

답 풀이 참조

0282 답 1

0283 $5=4+1=3+2$이므로 다음과 같이 나누어 구한다.

(i) 두 집합의 원소가 각각 1개, 4개인 경우의 수는

${}_5C_1\cdot{}_4C_4=5\cdot 1=5$

(ii) 두 집합의 원소가 각각 2개, 3개인 경우의 수는

${}_5C_2\cdot{}_3C_3=10\cdot 1=10$

(i), (ii)에서 $\quad S(5,\ 2)=5+10=15$ 답 15

0284 $6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$이므로 다음과 같이 나누어 구한다.

(i) 세 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 4개인 경우의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_4\cdot\dfrac{1}{2!}=6\cdot 5\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=15$

(ii) 세 집합의 원소가 각각 1개, 2개, 3개인 경우의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot 10\cdot 1=60$

(iii) 세 집합의 원소가 각각 2개, 2개, 2개인 경우의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\dfrac{1}{3!}=15\cdot 6\cdot 1\cdot\dfrac{1}{6}=15$

이상에서 $\quad S(6,\ 3)=15+60+15=90$ 답 90

0285 답 1

0286 원소의 개수가 9인 집합을 4개의 집합으로 분할하는 방법의 수와 같으므로 $\quad S(9,\ 4)$ 답 $S(9,\ 4)$

0287 서로 다른 사탕 9개를 2개, 3개, 4개로 나누는 방법의 수는

$${}_9C_2\cdot{}_7C_3\cdot{}_4C_4=36\cdot35\cdot1=1260$$ 답 1260

0288 서로 다른 사탕 9개를 2개, 2개, 5개로 나누는 방법의 수는

$${}_9C_2\cdot{}_7C_2\cdot{}_5C_5\cdot\frac{1}{2!}=36\cdot21\cdot1\cdot\frac{1}{2}=378$$ 답 378

0289 서로 다른 사탕 9개를 3개, 3개, 3개로 나누는 방법의 수는

$${}_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{3!}=84\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{6}=280$$ 답 280

유형 01 $(a+b)^n$의 전개식 본책 44쪽

$(ax+by)^n$의 전개식에서
① 일반항 ➡ ${}_nC_r(ax)^{n-r}(by)^r={}_nC_r a^{n-r}b^r x^{n-r}y^r$
② $x^{n-r}y^r$의 계수 ➡ ${}_nC_r a^{n-r}b^r$

0290 $\left(ax+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(ax)^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_5C_r a^{5-r}2^r x^{5-2r}$$

$x^{5-2r}=x^3$에서 $\quad 5-2r=3 \quad \therefore r=1$
이때 x^3의 계수가 160이므로 $\quad {}_5C_1\cdot a^4\cdot2=160$
$a^4=16 \quad \therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 ②

0291 $(2+x)^8$의 전개식의 일반항은 ${}_8C_r 2^{8-r}x^r$이므로
$a_r={}_8C_r 2^{8-r}$

$$\therefore \frac{a_2}{a_5}=\frac{{}_8C_2\cdot2^6}{{}_8C_5\cdot2^3}=\frac{{}_8C_2\cdot2^3}{{}_8C_3}=\frac{28\cdot8}{56}=4$$ 답 4

0292 $(x+a)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r x^{6-r}a^r={}_6C_r a^r x^{6-r}$ ⋯ ❶
$x^{6-r}=x^2$에서 $\quad 6-r=2 \quad \therefore r=4$
따라서 x^2의 계수는 $\quad {}_6C_4 a^4=15a^4$ ⋯ ❷
또 $x^{6-r}=x^3$에서 $\quad 6-r=3 \quad \therefore r=3$
따라서 x^3의 계수는 $\quad {}_6C_3 a^3=20a^3$ ⋯ ❸
이때 x^2의 계수와 x^3의 계수가 같으므로

$15a^4=20a^3, \quad 5a^3(3a-4)=0$

$\therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>0)$ ⋯ ❹

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준표

❶ $(x+a)^6$의 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	20%
❷ x^2의 계수를 구할 수 있다.	30%
❸ x^3의 계수를 구할 수 있다.	30%
❹ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	20%

0293 $(x^2+1)^n$의 전개식의 일반항은
${}_nC_r(x^2)^{n-r}1^r={}_nC_r x^{2n-2r}$
$x^{2n-2r}=x^4$에서 $\quad 2n-2r=4 \quad \therefore r=n-2$
이때 x^4의 계수가 36이므로 $\quad {}_nC_{n-2}={}_nC_2=36$

$\frac{n(n-1)}{2}=36, \quad n^2-n-72=0$

$(n+8)(n-9)=0 \quad \therefore n=9\ (\because n$은 자연수) 답 ④

0294 $\left(x+\frac{1}{x^n}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r x^{10-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r={}_{10}C_r x^{10-r(1+n)}$$

상수항은 $10-r(1+n)=0$일 때이므로 $\quad r(1+n)=10$
이를 만족시키는 $\underbrace{r,\ n}_{r\text{는 } 0\le r\le10\text{인 정수, } n\text{은 자연수}}$의 순서쌍 $(r,\ n)$은
$(1,\ 9),\ (2,\ 4),\ (5,\ 1)$
따라서 n의 최댓값은 9이다. 답 9

유형 02 $(1+x)^n$의 전개식의 응용 본책 44쪽

${}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n=(1+x)^n$에서 x 대신 상수 a를 대입
➡ ${}_nC_0+{}_nC_1a+{}_nC_2a^2+\cdots+{}_nC_na^n=(1+a)^n$

0295 ${}_nC_0+{}_nC_1\cdot3+{}_nC_2\cdot3^2+\cdots+{}_nC_n\cdot3^n=(1+3)^n=4^n=2^{2n}$
따라서 $\log_2 2^{2n}=60$에서
$2n=60 \quad \therefore n=30$ 답 30

0296 ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1\cdot4+{}_{10}C_2\cdot4^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot4^{10}=(1+4)^{10}=5^{10}$
답 ④

0297
$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{10}{}_{10}C_r\cdot2^{10-r}&=\sum_{r=1}^{10}{}_{10}C_r\cdot2^{10-r}\cdot1^r\\&=\sum_{r=0}^{10}{}_{10}C_r\cdot2^{10-r}\cdot1^r-{}_{10}C_0\cdot2^{10}\cdot1^0\\&=(2+1)^{10}-2^{10}\\&=3^{10}-2^{10}\end{aligned}$$
답 ③

0298
$$\begin{aligned}11^{99}&=(1+10)^{99}\\&={}_{99}C_0+{}_{99}C_1\cdot10+{}_{99}C_2\cdot10^2+{}_{99}C_3\cdot10^3+\cdots+{}_{99}C_{99}\cdot10^{99}\\&=1+99\cdot10+10^2({}_{99}C_2+{}_{99}C_3\cdot10+\cdots+{}_{99}C_{99}\cdot10^{97})\\&=991+10^2({}_{99}C_2+{}_{99}C_3\cdot10+\cdots+{}_{99}C_{99}\cdot10^{97})\end{aligned}$$
이때 $10^2({}_{99}C_2+{}_{99}C_3\cdot10+\cdots+{}_{99}C_{99}\cdot10^{97})$은 100으로 나누어떨어지므로 11^{99}을 100으로 나누었을 때의 나머지는 991을 100으로 나누었을 때의 나머지와 같다.
따라서 구하는 나머지는 91이다. 답 ④

0299
$$\begin{aligned}21^{20}&=(1+20)^{20}\\&={}_{20}C_0+{}_{20}C_1\cdot20+{}_{20}C_2\cdot20^2+{}_{20}C_3\cdot20^3+\cdots+{}_{20}C_{20}\cdot20^{20}\\&=1+20\cdot20+20^2({}_{20}C_2+{}_{20}C_3\cdot20+\cdots+{}_{20}C_{20}\cdot20^{18})\\&=401+20^2({}_{20}C_2+{}_{20}C_3\cdot20+\cdots+{}_{20}C_{20}\cdot20^{18})\end{aligned}$$
이때 $20^2({}_{20}C_2+{}_{20}C_3\cdot20+\cdots+{}_{20}C_{20}\cdot20^{18})$의 백의 자리 이하의 숫자가 모두 0이므로 21^{20}의 백의 자리의 숫자는 4, 일의 자리의 숫자는 1이다.
따라서 $a=4,\ b=1$이므로 $\quad a+b=5$ 답 5

유형 03 $(a+b)(c+d)^n$의 전개식 본책 45쪽

$(a+b)(c+d)^n$의 전개식의 일반항
⇒ $a(c+d)^n+b(c+d)^n$으로 바꾸어 생각한다.

0300 $(x^2+x)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+x\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r x^{5-2r} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(x^2+x)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 상수항은 x^2과 ㉠의 $\frac{1}{x^2}$항, x와 ㉠의 $\frac{1}{x}$항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $x^{5-2r}=\frac{1}{x^2}$에서 $\quad 5-2r=-2 \quad \therefore r=\frac{7}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le 5$인 정수이므로 ㉠의 $\frac{1}{x^2}$항은 존재하지 않는다.

(ii) $x^{5-2r}=\frac{1}{x}$에서 $\quad 5-2r=-1 \quad \therefore r=3$

따라서 ㉠의 $\frac{1}{x}$항은 $\quad {}_5C_3x^{-1}=\frac{10}{x}$

(i), (ii)에서 구하는 상수항은

$x\cdot\frac{10}{x}=10$

답 ③

0301 $(ax^3-3)\left(x-\frac{1}{x}\right)^7=ax^3\left(x-\frac{1}{x}\right)^7-3\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r x^{7-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_7C_r(-1)^r x^{7-2r} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(ax^3-3)\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$의 전개식에서 x^2항은 ax^3과 ㉠의 $\frac{1}{x}$항, -3과 ㉠의 x^2항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $x^{7-2r}=\frac{1}{x}$에서 $\quad 7-2r=-1 \quad \therefore r=4$

따라서 ㉠의 $\frac{1}{x}$항은 $\quad {}_7C_4(-1)^4x^{-1}=\frac{35}{x}$

(ii) $x^{7-2r}=x^2$에서 $\quad 7-2r=2 \quad \therefore r=\frac{5}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le 7$인 정수이므로 ㉠의 x^2항은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 x^2항은

$ax^3\cdot\frac{35}{x}=35ax^2$

이때 x^2의 계수가 70이므로

$35a=70 \quad \therefore a=2$

답 2

0302 $(1+x+x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}+x\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}+x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r x^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_{10}C_r x^{10-2r} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(1+x+x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 x항은 1과 ㉠의 x항, x와 ㉠의 상수항, x^2과 ㉠의 $\frac{1}{x}$항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $x^{10-2r}=x$에서 $\quad 10-2r=1 \quad \therefore r=\frac{9}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le 10$인 정수이므로 ㉠의 x항은 존재하지 않는다.

(ii) 상수항은 $10-2r=0$일 때이므로 $\quad r=5$

따라서 ㉠의 상수항은 $\quad {}_{10}C_5$

(iii) $x^{10-2r}=\frac{1}{x}$ 에서 $\quad 10-2r=-1 \quad \therefore r=\frac{11}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le 10$인 정수이므로 ㉠의 $\frac{1}{x}$항은 존재하지 않는다.

이상에서 x항은 ${}_{10}C_5 x$이므로 x의 계수는

${}_{10}C_5$

답 ⑤

유형 04 $(a+b)^p(c+d)^q$의 전개식 본책 45쪽

$(a+b)^p(c+d)^q$의 전개식의 일반항
⇒ $(a+b)^p$과 $(c+d)^q$의 전개식의 일반항을 각각 구하여 곱한다.
⇒ ${}_pC_r\cdot{}_qC_s a^{p-r}b^r c^{q-s}d^s$

0303 $(1+x)^5$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_5C_r x^r$

$(2+x)^4$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_4C_s 2^{4-s}x^s$

따라서 $(1+x)^5(2+x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^r\cdot{}_4C_s 2^{4-s}x^s={}_5C_r\cdot{}_4C_s 2^{4-s}x^{r+s}$

x^2항은 $r+s=2\ (0\le r\le 5,\ 0\le s\le 4)$일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2), (1, 1), (2, 0)$

따라서 x^2의 계수는

${}_5C_0\cdot{}_4C_2\cdot 2^2+{}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot 2^3+{}_5C_2\cdot{}_4C_0\cdot 2^4$

$=24+160+160=344$

답 344

0304 $(a+x)^3$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_3C_r a^{3-r}x^r$

$(1+x)^5$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_5C_s x^s$

따라서 $(a+x)^3(1+x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r a^{3-r}x^r\cdot{}_5C_s x^s={}_3C_r\cdot{}_5C_s a^{3-r}x^{r+s}$ ➊

x항은 $r+s=1\ (0\le r\le 3,\ 0\le s\le 5)$일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 1), (1, 0)$

이때 x의 계수가 8이므로

${}_3C_0\cdot{}_5C_1\cdot a^3+{}_3C_1\cdot{}_5C_0\cdot a^2=8$ ➋

$5a^3+3a^2=8, \quad 5a^3+3a^2-8=0$

$(a-1)(5a^2+8a+8)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a$는 실수) ➌

답 1

채점 기준표

❶ $(a+x)^3(1+x)^5$의 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	40%
❷ a에 대한 식을 세울 수 있다.	30%
❸ 실수 a의 값을 구할 수 있다.	30%

0305 $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}({}_7C_k)^2$

$={}_7C_0\cdot{}_7C_0+{}_7C_1\cdot{}_7C_1+{}_7C_2\cdot{}_7C_2+\cdots+{}_7C_7\cdot{}_7C_7$

$={}_7C_0\cdot{}_7C_7+{}_7C_1\cdot{}_7C_6+{}_7C_2\cdot{}_7C_5+\cdots+{}_7C_7\cdot{}_7C_0$

이므로 주어진 식은 $(1+x)^7(1+x)^7$, 즉 $(1+x)^{14}$의 전개식에서 x^7의 계수와 같다.

$(1+x)^{14}$의 전개식에서 x^7의 계수는 ${}_{14}C_7$이므로

$n=14,\ r=7\qquad \therefore n+r=21$ 답 ③

SSEN 특강

$(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수

$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$이므로 $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는

${}_nC_0\cdot{}_nC_n+{}_nC_1\cdot{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\cdot{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_0$

$=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\cdot{}_nC_{n-k}$

이때 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

${}_nC_0\cdot{}_nC_n+{}_nC_1\cdot{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\cdot{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_0$

$={}_nC_0\cdot{}_nC_0+{}_nC_1\cdot{}_nC_1+{}_nC_2\cdot{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}({}_nC_k)^2$

유형 05 등비수열의 합과 이항정리 본책 46쪽

(i) 등비수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 식을 정리한다.

➡ 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$, 항의 개수가 n인 등비수열의 합은 $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(ii) 이항정리를 이용하여 x^k의 계수를 찾는다.

0306 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$ …… ㉠

㉠은 첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$$\frac{(1+x)\{(1+x)^{10}-1\}}{(1+x)-1}=\frac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x}\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠의 전개식에서 x의 계수는 ㉡의 $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^2의 계수와 같다.

$(1+x)^{11}$의 전개식의 일반항은 ${}_{11}C_rx^r$

$x^r=x^2$에서 $r=2$

따라서 구하는 계수는 ${}_{11}C_2=55$ 답 ⑤

0307 $x^2(1+x^2)+x^2(1+x^2)^2+x^2(1+x^2)^3+\cdots+x^2(1+x^2)^8$ …… ㉠

㉠은 첫째항이 $x^2(1+x^2)$, 공비가 $1+x^2$, 항의 개수가 8인 등비수열의 합이므로

$$\frac{x^2(1+x^2)\{(1+x^2)^8-1\}}{(1+x^2)-1}=(1+x^2)^9-(1+x^2)\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠의 전개식에서 x^8의 계수는 ㉡의 $(1+x^2)^9$의 전개식에서 x^8의 계수와 같다.

$(1+x^2)^9$의 전개식의 일반항은 ${}_9C_r(x^2)^r={}_9C_rx^{2r}$

$x^{2r}=x^8$에서 $2r=8\qquad\therefore r=4$

따라서 구하는 계수는 ${}_9C_4$ 답 ⑤

0308 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(1+2x)^n=(1+2x)+(1+2x)^2+\cdots+(1+2x)^{10}$ …… ㉠

㉠은 첫째항이 $1+2x$, 공비가 $1+2x$, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$$\frac{(1+2x)\{(1+2x)^{10}-1\}}{(1+2x)-1}=\frac{(1+2x)^{11}-(1+2x)}{2x}\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠의 전개식에서 x^9의 계수는 ㉡의 $\dfrac{(1+2x)^{11}}{2x}$의 전개식에서 x^9의 계수와 같다.

이때 $(1+2x)^{11}$의 전개식의 일반항은 ${}_{11}C_r(2x)^r={}_{11}C_r2^rx^r$

$\dfrac{(1+2x)^{11}}{2x}$의 전개식의 일반항은

${}_{11}C_r2^rx^r\cdot(2x)^{-1}={}_{11}C_r2^{r-1}x^{r-1}$

$x^{r-1}=x^9$에서 $r-1=9\qquad\therefore r=10$

따라서 구하는 계수는 ${}_{11}C_{10}\cdot2^9=11\cdot2^9$ 답 ③

유형 06 $(a+b+c)^n$의 전개식 본책 46쪽

$(a+b+c)^n$의 전개식에서 $p+q+r=n,\ p\ge0,\ q\ge0,\ r\ge0$일 때

① 일반항 ➡ $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$

② $a^pb^qc^r$의 계수 ➡ $\dfrac{n!}{p!q!r!}$

0309 $\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$$\frac{6!}{p!q!r!}x^p\left(\frac{1}{x}\right)^r=\frac{6!}{p!q!r!}x^{p-r}$$

(단, $p+q+r=6,\ p\ge0,\ q\ge0,\ r\ge0$)

$x^{p-r}=x^5$에서 $p-r=5$이므로 $p=5,\ q=1,\ r=0$

따라서 x^5의 계수는 $\dfrac{6!}{5!\cdot1!\cdot0!}=6$ 답 6

0310 $(x+y-2z)^4$의 전개식의 일반항은

$$\frac{4!}{p!q!r!}x^py^q(-2z)^r=\frac{4!}{p!q!r!}(-2)^rx^py^qz^r$$

(단, $p+q+r=4,\ p\ge0,\ q\ge0,\ r\ge0$)

$x^py^qz^r=x^2yz$에서 $p=2,\ q=1,\ r=1$

따라서 x^2yz의 계수는 $\dfrac{4!}{2!\cdot1!\cdot1!}\cdot(-2)=-24$ 답 ①

0311 $(ax^2-x+1)^7$의 전개식의 일반항은

$$\frac{7!}{p!q!r!}(ax^2)^p(-x)^q=\frac{7!}{p!q!r!}a^p(-1)^qx^{2p+q}$$

(단, $p+q+r=7,\ p\ge0,\ q\ge0,\ r\ge0$)

03 이항정리와 분할

$x^{2p+q}=x^3$에서 $2p+q=3$이므로 이를 만족시키는 $p,\ q,\ r$의 순서쌍 $(p,\ q,\ r)$는

$(0,\ 3,\ 4),\ (1,\ 1,\ 5)$

이때 x^3의 계수가 7이므로

$$\frac{7!}{0!\cdot3!\cdot4!}\cdot a^0\cdot(-1)^3+\frac{7!}{1!\cdot1!\cdot5!}\cdot a\cdot(-1)=7$$

$-35-42a=7,\quad 42a=-42\quad \therefore a=-1$

답 ②

유형 07 이항계수의 합 (본책 46쪽)

① ${}_1C_0={}_2C_0={}_3C_0=\cdots={}_nC_0=1$

② ${}_1C_1={}_2C_2={}_3C_3=\cdots={}_nC_n=1$

③ 파스칼의 삼각형에서 각 단계에서 이웃하는 두 수의 합은 그 두 수의 아래쪽 중앙에 있는 수와 같다. ➡ ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$

0312 ${}_1C_0={}_2C_0$이므로

$${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_4C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_5C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_6C_4+{}_6C_5={}_7C_5$$

답 ②

0313 ${}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_5C_3+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$\vdots$

$={}_{10}C_3+{}_{10}C_2={}_{11}C_3={}_{11}C_8$

답 ③

0314 주어진 식을 A라 하면

${}_5C_0+A={}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5$

$={}_6C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5$

$={}_7C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5$

$={}_8C_3+{}_8C_4+{}_9C_5$

$={}_9C_4+{}_9C_5$

$={}_{10}C_5=252$

$\therefore A=252-{}_5C_0=252-1=251$

답 251

유형 08 이항계수의 성질 (본책 47쪽)

① ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

② ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

③ ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots=2^{n-1}$

0315 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

따라서 주어진 부등식은

$500<2^n-1<1000\qquad \therefore 501<2^n<1001$

이때 $2^8=256,\ 2^9=512,\ 2^{10}=1024$이므로

$n=9$

답 9

0316 ${}_{17}C_0+{}_{17}C_1+{}_{17}C_2+\cdots+{}_{17}C_{17}=2^{17}$이므로

$\log_2({}_{17}C_0+{}_{17}C_1+{}_{17}C_2+\cdots+{}_{17}C_{17})=\log_2 2^{17}$

$=17$

답 ③

0317 ${}_{50}C_0-{}_{50}C_1+{}_{50}C_2-\cdots-{}_{50}C_{49}+{}_{50}C_{50}=0$이므로

${}_{50}C_1-{}_{50}C_2+{}_{50}C_3-{}_{50}C_4+\cdots+{}_{50}C_{49}={}_{50}C_0+{}_{50}C_{50}$

$=1+1=2$

답 ②

0318 ${}_{16}C_1+{}_{16}C_3+{}_{16}C_5+\cdots+{}_{16}C_{15}=2^{16-1}=2^{15}$ ⋯➊

또 ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3={}_7C_7+{}_7C_6+{}_7C_5+{}_7C_4$이고

$({}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3)+({}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7)=2^7$

이므로

$2({}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3)=2^7$

$\therefore {}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3=2^6$ ⋯➋

따라서 $\dfrac{{}_{16}C_1+{}_{16}C_3+{}_{16}C_5+\cdots+{}_{16}C_{15}}{{}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3}=\dfrac{2^{15}}{2^6}=2^9$이므로

$n=9$ ⋯➌

답 9

채점 기준표

➊ ${}_{16}C_1+{}_{16}C_3+{}_{16}C_5+\cdots+{}_{16}C_{15}$의 값을 구할 수 있다.	20%
➋ ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3$의 값을 구할 수 있다.	50%
➌ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	30%

0319 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_2$

원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_4$

원소의 개수가 6인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_6$

원소의 개수가 8인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_8$

원소의 개수가 10인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_{10}$

이때 ${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^{10-1}=2^9$이므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^9-{}_{10}C_0$

$=512-1=511$

답 ②

0320 $\displaystyle\sum_{l=1}^{k}{}_{2k}C_{2l-1}={}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1}$

$=2^{2k-1}$ ⋯➊

$\therefore f(10)=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}2^{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}2\cdot4^{k-1}$

$=\dfrac{2(4^{10}-1)}{4-1}=\dfrac{2}{3}(4^{10}-1)$

$=\dfrac{2}{3}(2^{20}-1)$ ⋯➋

답 $\dfrac{2}{3}(2^{20}-1)$

채점 기준표

➊ 이항계수의 성질을 이용하여 $\displaystyle\sum_{l=1}^{k}{}_{2k}C_{2l-1}$을 간단히 할 수 있다.	50%
➋ $f(10)$의 값을 구할 수 있다.	50%

유형 09 자연수의 분할 본책 48쪽

① 자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수
➡ $P(n, k)$
② 자연수 n의 분할의 수
➡ $P(n, 1)+P(n, 2)+P(n, 3)+\cdots+P(n, n)$

0321 $7=3+1+1+1+1$
$=2+2+1+1+1$
$=2+1+1+1+1+1$
$=1+1+1+1+1+1+1$
따라서 구하는 방법의 수는
$P(7, 5)+P(7, 6)+P(7, 7)=2+1+1=4$ 답 ①

0322 $6=5+1=4+2=3+3$
$=4+1+1=3+2+1=2+2+2$
$=3+1+1+1=2+2+1+1$
$=2+1+1+1+1$
$=1+1+1+1+1+1$
따라서 홀수로만 이루어지는 분할의 개수는
$5+1$, $3+3$, $3+1+1+1$, $1+1+1+1+1+1$
의 4이다. 답 4

0323 (1) $8=7+1=6+2=5+3=4+4$
$=6+1+1=5+2+1=4+3+1$
$=4+2+2=3+3+2$
따라서 구하는 방법의 수는
$P(8, 1)+P(8, 2)+P(8, 3)=1+4+5=10$ ➡ ❶
(2) (i) 3이 두 개인 경우
$3+3+2$, $3+3+1+1$
의 2가지
(ii) 3이 한 개인 경우
$3+2+2+1$, $3+2+1+1+1$, $3+1+1+1+1+1$
의 3가지
(iii) 3이 없는 경우
$2+2+2+2$, $2+2+2+1+1$, $2+2+1+1+1+1$,
$2+1+1+1+1+1+1$, $1+1+1+1+1+1+1+1$
의 5가지
이상에서 구하는 방법의 수는
$2+3+5=10$ ➡ ❷
답 (1) 10 (2) 10

채점 기준표

❶ 8을 3개 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 8을 3 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수를 구할 수 있다.	70%

0324 10을 3개의 자연수로 분할하는 방법은
$10=8+1+1=7+2+1=6+3+1=6+2+2$
$=5+4+1=5+3+2=4+4+2=4+3+3$
이므로 구하는 순서쌍의 개수는
$P(10, 3)=8$ 답 ⑤

유형 10 $P(n, k)$의 성질 본책 48쪽

$1<k<n$일 때
① $P(n, k)=P(n-k, 1)+P(n-k, 2)+P(n-k, 3)$
$+\cdots+P(n-k, k)$
② $P(n, k)=P(n-1, k-1)+P(n-k, k)$

0325 $P(n, 3)=P(n-3, 1)+P(n-3, 2)+P(n-3, 3)$
이므로 $n-3=5$ $\therefore n=8$ 답 8

0326 먼저 k개의 유리병에 구슬을 1개씩 담은 후, 남은 $\boxed{30-k}$개의 구슬을 1개, 2개, 3개, …, $\boxed{k}$개의 유리병에 나누어 담으면 된다.
$\therefore$ (가) $30-k$ (나) k
따라서 $f(k)=30-k$, $g(k)=k$이므로
$f(10)=20$, $g(10)=10$
$\therefore f(10)-g(10)=10$ 답 10
참고 $30-k$개의 구슬을 1개, 2개, 3개, …, k개의 유리병에 나누어 담는 방법의 수는 차례대로 $P(30-k, 1)$, $P(30-k, 2)$, $P(30-k, 3)$, …, $P(30-k, k)$이므로 주어진 등식이 성립한다.

0327 $P(n, 3)$을 똑같은 상품권 n장을 똑같은 봉투 3장에 빈 봉투가 없도록 나누어 넣는 방법의 수로 생각하자.
(i) 1장의 상품권만 넣은 봉투가 있는 경우
1장의 상품권만 넣은 봉투를 제외한 2장의 봉투에 $n-1$장의 상품권을 빈 봉투가 없도록 나누어 넣으면 되므로 1장의 상품권만 넣은 봉투가 있도록 나누어 넣는 방법의 수는
$P(n-1, 2)$
(ii) 모든 봉투에 2장 이상의 상품권을 넣는 경우
3장의 봉투에 상품권을 1장씩 넣은 후, 남은 $n-3$장의 상품권을 빈 봉투가 없도록 3장의 봉투에 나누어 넣으면 되므로 모든 봉투에 2장 이상의 상품권을 나누어 넣는 방법의 수는
$P(n-3, 3)$
(i), (ii)에서 $P(n, 3)=P(n-1, 2)+P(n-3, 3)$
따라서 $a=n-1$, $b=n-3$이므로 $a-b=2$ 답 2

유형 11 분할하는 방법의 수; 자연수의 분할 본책 48쪽

똑같은 공 n개를 똑같은 상자 k개에 넣을 때
① 빈 상자가 없도록 넣는 방법의 수 ➡ $P(n, k)$
② 빈 상자가 있어도 되는 방법의 수
➡ $P(n, 1)+P(n, 2)+\cdots+P(n, k)$

0328 6을 3개의 자연수로 분할하면
$6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$
따라서 구하는 방법의 수는 $P(6, 3)=3$ 답 3

0329 7을 4개 이하의 자연수로 분할하면
$7=6+1=5+2=4+3$
$=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$
$=4+1+1+1=3+2+1+1=2+2+2+1$

03 이항정리와 분할

따라서 구하는 방법의 수는

$P(7,\ 1)+P(7,\ 2)+P(7,\ 3)+P(7,\ 4)$
$=1+3+4+3=11$ 답 ⑤

참고 빈 상자가 0개, 1개, 2개, 3개인 방법의 수는 차례대로 $P(7,\ 4)$, $P(7,\ 3)$, $P(7,\ 2)$, $P(7,\ 1)$이다.

0330 9를 3개 이하의 자연수로 분할하면

$9=8+1=7+2=6+3=5+4$
$=7+1+1=6+2+1=5+3+1=5+2+2$
$=4+4+1=4+3+2=3+3+3$

따라서 구하는 방법의 수는

$P(9,\ 1)+P(9,\ 2)+P(9,\ 3)=1+4+7=12$ 답 12

0331 각 필통에 연필을 한 자루씩 넣은 후, 남은 7자루의 연필을 3개의 필통에 빈 필통이 없도록 나누어 넣으면 된다. 이때

$7=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$

이므로 구하는 방법의 수는

$P(7,\ 3)=4$ 답 4

다른 풀이 각 필통에 연필을 2자루씩 넣은 후, 남은 4자루의 연필을 3개 이하의 필통에 넣으면 된다. 이때

$4=3+1=2+2$
$=2+1+1$

이므로 구하는 방법의 수는

$P(4,\ 1)+P(4,\ 2)+P(4,\ 3)=1+2+1=4$

유형 12 집합의 분할 본책 49쪽

원소의 개수가 n인 집합을 k개의 집합으로 분할하는 방법의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) k개의 집합의 원소의 개수를 각각 구한다.
(ii) 조합의 수를 이용하여 (i)의 각 경우의 분할하는 방법의 수를 구한다.
(iii) (ii)의 결과를 모두 더한다.

0332 (i) 두 집합의 원소가 각각 1개, 3개인 경우의 수는

$_4C_1\cdot{}_3C_3=4\cdot1=4$

(ii) 두 집합의 원소가 각각 2개, 2개인 경우의 수는

$$_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $4+3=7$ 답 7

0333 집합 A를 원소의 개수가 같은 4개의 집합으로 분할하면 각 집합의 원소는 2개씩이다.
따라서 구하는 방법의 수는

$$_8C_2\cdot{}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{4!}=28\cdot15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{24}=105$$ 답 ③

0334 (i) 4개의 집합으로 분할하는 경우

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 3개인 경우의 수는

$$_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{3!}=6\cdot5\cdot4\cdot1\cdot\frac{1}{6}=20$$

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 2개, 2개인 경우의 수는

$$_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot5\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=45$$

$\therefore S(6,\ 4)=20+45=65$ ⋯ ❶

(ii) 5개의 집합으로 분할하는 경우

다섯 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 1개, 2개인 경우의 수는

$$_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{4!}=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{24}=15$$

$\therefore S(6,\ 5)=15$ ⋯ ❷

(iii) 6개의 집합으로 분할하는 경우

여섯 집합의 원소가 각각 1개씩이므로

$S(6,\ 6)=1$ ⋯ ❸

이상에서 구하는 방법의 수는

$65+15+1=81$ ⋯ ❹

답 81

채점 기준표

❶ $S(6,\ 4)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $S(6,\ 5)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $S(6,\ 6)$을 구할 수 있다.	30%
❹ 4개 이상의 집합으로 분할하는 방법의 수를 구할 수 있다.	10%

0335 (1) 구하는 방법의 수는 집합 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$을 원소가 각각 2개, 2개, 2개인 3개의 집합으로 분할하는 방법의 수와 같으므로

$$_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$$

(2) 구하는 방법의 수는 집합 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$을 3개의 집합으로 분할하는 방법의 수와 같다.

(i) 세 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 4개인 경우의 수는

$$_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot5\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$$

(ii) 세 집합의 원소가 각각 1개, 2개, 3개인 경우의 수는

$_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot10\cdot1=60$

(iii) 세 집합의 원소가 각각 2개, 2개, 2개인 경우의 수는

15

이상에서 구하는 방법의 수는

$S(6,\ 3)=15+60+15=90$

답 (1) 15 (2) 90

유형 13 $S(n,\ k)$의 성질 본책 50쪽

$1<k<n$일 때,
$S(n,\ k)=S(n-1,\ k-1)+k\cdot S(n-1,\ k)$

0336 $S(7,\ 6)=S(6,\ 5)+6\cdot S(6,\ 6)$
$=S(6,\ 5)+6$

따라서 $a=1$, $b=6$이므로 $b-a=5$ 답 5

0337 (ii) 원소 4가 다른 원소와 함께 집합을 이루는 경우

집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$을 2개의 집합으로 분할하는 방법의 수는

$S(3,\ 2)$

원소 4를 두 집합 중에서 한 집합에 넣는 방법의 수는 ${}_2C_1=\boxed{2}$
이므로 경우의 수는
$S(3,\ 2)\cdot\boxed{2}$
(i), (ii)에서
$S(4,\ 2)=S(3,\ 1)+S(3,\ 2)\cdot 2=1+3\cdot 2=\boxed{7}$
∴ (가) 2 (나) 7
따라서 $a=2$, $b=7$이므로 $a+b=9$ 답 9

0338 $S(6,\ 2)=S(5,\ 1)+2\cdot S(5,\ 2)$
$=1+2\cdot 15=31$ 답 ⑤

유형 14 분할하는 방법의 수; 집합의 분할 본책 50쪽

서로 다른 n개를 p개, q개, r개$(p+q+r=n)$로 분할하는 방법의 수는
① p, q, r가 모두 다른 수일 때 ➡ ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r$
② p, q, r 중 어느 두 수가 같을 때 ➡ ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r\cdot\frac{1}{2!}$
③ p, q, r가 모두 같은 수일 때 ➡ ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r\cdot\frac{1}{3!}$

0339 $6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$이므로 6개의 과일을 똑같은 바구니 3개에 빈 바구니가 없도록 나누어 담는 방법은 다음과 같다.
(i) 1개, 1개, 4개로 나누는 방법의 수는
$${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot 5\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=15$$
(ii) 1개, 2개, 3개로 나누는 방법의 수는
$${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot 10\cdot 1=60$$
(iii) 2개, 2개, 2개로 나누는 방법의 수는
$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot 6\cdot 1\cdot\frac{1}{6}=15$$
이상에서 구하는 방법의 수는
$15+60+15=90$ 답 90

0340 서로 다른 종류의 꽃 10송이를 3송이, 3송이, 4송이로 나누는 방법의 수는
$${}_{10}C_3\cdot{}_7C_3\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=120\cdot 35\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=2100$$ 답 ③

0341 남자 8명 중 2명이 여자 4명과 한 조를 이루면 되므로 남자 8명을 2명, 6명으로 나누면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
${}_8C_2\cdot{}_6C_6=28\cdot 1=28$ 답 28

0342 10명을 5명, 5명으로 나누는 방법의 수는
$${}_{10}C_5\cdot{}_5C_5\cdot\frac{1}{2!}=252\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=126$$ ➡ ❶
경찰관 7명 중 5명이 같은 조가 되는 방법의 수는
${}_7C_5=21$ ➡ ❷
따라서 구하는 방법의 수는
$126-21=105$ ➡ ❸
답 105

채점 기준표

❶ 10명을 5명, 5명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 경찰관 7명 중 5명이 같은 조가 되는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 각 조에 적어도 한 명의 소방관이 포함되도록 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0343 구하는 방법의 수는 원소의 개수가 5인 집합을 4개 이하의 집합으로 분할하는 방법의 수와 같다. ➡ ❶
(i) 1개의 집합으로 분할하는 경우
$S(5,\ 1)=1$
(ii) 2개의 집합으로 분할하는 경우
두 집합의 원소가 각각 1개, 4개인 경우의 수는
${}_5C_1\cdot{}_4C_4=5\cdot 1=5$
두 집합의 원소가 각각 2개, 3개인 경우의 수는
${}_5C_2\cdot{}_3C_3=10\cdot 1=10$
∴ $S(5,\ 2)=5+10=15$
(iii) 3개의 집합으로 분할하는 경우
세 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 3개인 경우의 수는
$${}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=5\cdot 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=10$$
세 집합의 원소가 각각 1개, 2개, 2개인 경우의 수는
$${}_5C_1\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=5\cdot 6\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=15$$
∴ $S(5,\ 3)=10+15=25$
(iv) 4개의 집합으로 분할하는 경우
네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 2개인 경우의 수는
$${}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=5\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot\frac{1}{6}=10$$
∴ $S(5,\ 4)=10$ ➡ ❷
이상에서 구하는 방법의 수는
$1+15+25+10=51$ ➡ ❸
답 51

채점 기준표

❶ 구하는 방법의 수는 원소의 개수가 5인 집합을 4개 이하의 집합으로 분할하는 방법의 수와 같음을 알 수 있다.	20%
❷ $S(5,\ 1)$, $S(5,\ 2)$, $S(5,\ 3)$, $S(5,\ 4)$를 각각 구할 수 있다.	70%
❸ 상자에 구슬이 담기는 방법의 수를 구할 수 있다.	10%

유형 15 분할한 후 분배하는 방법의 수 본책 51쪽

n개를 k개의 묶음으로 분할하여 k명에게 분배하는 방법의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) n개를 k개의 묶음으로 분할하는 방법의 수를 구한다. ➡ $S(n,\ k)$
(ii) k명에게 분배하는 방법의 수를 구한다. ➡ $k!$
(iii) (i), (ii)의 결과를 곱한다. ➡ $S(n,\ k)\cdot k!$

0344 7명의 학생을 3명, 3명, 1명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는
$${}_7C_3\cdot{}_4C_3\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}=35\cdot 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=70$$
3개의 조를 3개의 청소 구역에 배정하는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는 $70\cdot 6=420$ 답 ④

0345 서로 다른 6개의 젤리를 2개, 2개, 2개로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{3!} = 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 15$$

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$15 \cdot 6 = 90$ 답 90

0346 2층에서 7층까지 6개의 층 중에서 사람들이 내리는 3개의 층을 택하는 방법의 수는 ${}_6C_3 = 20$

7명을 2명, 2명, 3명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 21 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 105$$

3개의 조를 3개의 층에 분배하는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$20 \cdot 105 \cdot 6 = 12600$ 답 ④

다른 풀이 7명을 2명, 2명, 3명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_3 \cdot {}_5C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 105$$

3개의 조가 2층부터 7층까지 6개의 층 중에서 3개의 층에 각각 내리면 되므로 구하는 방법의 수는

$105 \cdot {}_6P_3 = 105 \cdot 120 = 12600$

0347 운전자를 제외한 나머지 7명을 3개의 조로 나눌 때, 각 승용차에 탑승하는 인원수는

1, 3, 3 또는 2, 2, 3

(i) 1명, 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 7 \cdot 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 70$$

(ii) 2명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 21 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 105$$

(i), (ii)에서 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$70 + 105 = 175$

3개의 조를 3대의 승용차에 배정하는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$175 \cdot 6 = 1050$ 답 1050

유형 16 대진표 작성하기 본책 51쪽

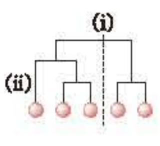
오른쪽 그림과 같은 대진표에서

(i) 5명을 3명, 2명의 2개의 조로 나눈다.

➡ ${}_5C_3 \cdot {}_2C_2$

(ii) 3명인 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 택한다. ➡ ${}_3C_1$

(iii) (i), (ii)의 결과를 곱한다. ➡ ${}_5C_3 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_3C_1$



0348 구하는 방법의 수는 먼저 3명, 3명의 두 조로 나눈 후 각 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 방법의 수와 같으므로

$$\left({}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!}\right) \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 90$$ 답 ④

0349 구하는 방법의 수는 먼저 2개, 4개 학급으로 나눈 후 4개의 학급을 다시 2개, 2개 학급으로 나누는 방법의 수와 같으므로

$$({}_6C_2 \cdot {}_4C_4) \cdot \left({}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!}\right) = 15 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 45$$ 답 45

0350 9개의 팀을 5개, 4개의 팀으로 나누는 방법의 수는

${}_9C_5 \cdot {}_4C_4 = 126 \cdot 1 = 126$

5개의 팀을 3개, 2개의 팀으로 나눈 후 3개의 팀 중에서 부전승으로 올라가는 1개의 팀을 택하는 방법의 수는

$({}_5C_3 \cdot {}_2C_2) \cdot {}_3C_1 = 10 \cdot 1 \cdot 3 = 30$

4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

따라서 구하는 방법의 수는

$126 \cdot 30 \cdot 3 = 11340$ 답 11340

0351 전략 $(x+a)^{10}$의 전개식의 일반항을 이용하여 각 항의 계수를 구한다.

풀이 $(x+a)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_r x^{10-r} a^r = {}_{10}C_r a^r x^{10-r}$

x^2, x^4, x^8의 계수는 각각

${}_{10}C_8 a^8$, ${}_{10}C_6 a^6$, ${}_{10}C_2 a^2$, 즉 $45a^8$, $210a^6$, $45a^2$

위의 세 수가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(210a^6)^2 = 45a^8 \cdot 45a^2$, $\quad 210^2 a^{12} = 45^2 a^{10}$

$$a^2 = \left(\frac{45}{210}\right)^2 = \left(\frac{3}{14}\right)^2 \qquad \therefore a = \frac{3}{14} \ (\because a > 0)$$ 답 $\frac{3}{14}$

SSEN 특강

등비중항

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라 한다. ➡ $b^2 = ac$

0352 전략 $(1+x)^n$의 전개식을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $9^2 \cdot {}_5C_1 + 9^3 \cdot {}_5C_2 + 9^4 \cdot {}_5C_3 + 9^5 \cdot {}_5C_4 + 9^6 \cdot {}_5C_5$

$= 9(1 + 9 \cdot {}_5C_1 + 9^2 \cdot {}_5C_2 + 9^3 \cdot {}_5C_3 + 9^4 \cdot {}_5C_4 + 9^5 \cdot {}_5C_5) - 9$

$= 9(1+9)^5 - 9$

$= 9 \cdot 10^5 - 9$

$= 899991$

따라서 각 자리의 숫자의 합은

$8 + 9 + 9 + 9 + 9 + 1 = 45$ 답 ①

0353 전략 $(1+a)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 \cdot a + {}_nC_2 \cdot a^2 + \cdots + {}_nC_n \cdot a^n$임을 이용한다.

풀이 $(1+43)^7 = {}_7C_0 + {}_7C_1 \cdot 43 + {}_7C_2 \cdot 43^2 + \cdots + {}_7C_7 \cdot 43^7$

에서 ${}_7C_0$, ${}_7C_7 \cdot 43^7$을 제외한 나머지 항은 모두 7의 배수이다.

이때 ${}_7C_0 + {}_7C_7 \cdot 43^7 = 43^7 + 1$이고 오늘부터 43^7일째 되는 날이 목요일이므로 $(1+43)^7$일째 되는 날은 목요일 다음 날인 금요일이다.

답 ⑤

0354 전략 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 $a^pb^qc^r$의 계수는 $\frac{n!}{p!q!r!}$임을 이용한다.

풀이 $(x+y-z)^{n+2}$의 전개식에서 x^ny^2의 계수는

$$\frac{(n+2)!}{n!\cdot 2!\cdot 0!}\cdot(-1)^0=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

따라서 $a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)=\frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$

SSEN 특강

부분분수로의 변형

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

0355 전략 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$임을 이용하여 주어진 식을 정리한다.

풀이 $({}_4C_0+{}_4C_4)+({}_5C_1+{}_5C_4)+({}_6C_2+{}_6C_4)+({}_7C_3+{}_7C_4)+2\cdot{}_8C_4$

$=({}_4C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4)+({}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4)$

$=({}_5C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4)+({}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4)$

$=({}_6C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4)+({}_6C_5+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4)$

$=({}_7C_2+{}_7C_3+{}_8C_4)+({}_7C_5+{}_7C_4+{}_8C_4)$

$=({}_8C_3+{}_8C_4)+({}_8C_5+{}_8C_4)$

$={}_9C_4+{}_9C_5={}_{10}C_5$

답 ④

0356 전략 주어진 부등식이 성립하도록 식을 변형한다.

풀이 ${}_{2n}C_n\leq\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}C_k=2^{2n}=4^n$이므로

${}_{2n}C_n\leq\boxed{4^n}$ ...... ㉠

또 $1\leq k\leq n$을 만족시키는 자연수 k에 대하여

$$\frac{n+k}{k}\geq\frac{k+k}{k}=2$$

이므로

$${}_{2n}C_n=\frac{2n!}{n!\cdot(2n-n)!}$$

$$=\frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{1}$$

$$=\boxed{2}\cdot\frac{n+(n-1)}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{1}$$

$\geq 2\cdot2\cdot\cdots\cdot2=2^n$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $2^n\leq{}_{2n}C_n\leq4^n$

∴ (가) 4^n (나) 2

따라서 $f(n)=4^n$, $a=2$이므로

$f(a)=f(2)=4^2=16$

답 ①

0357 전략 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k=2^n-{}_nC_0=2^n-1$ ...... ㉠

㉠에 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$을 대입하면 1, 3, 7, 15, 31, 63, …이므로 n이 짝수일 때 ㉠은 3의 배수이다.

50 이하의 자연수 중에서 짝수의 개수는 25이므로 구하는 n의 개수는 25이다.

답 25

참고 n이 짝수일 때, 즉 $n=2k$(k는 자연수)일 때,

$2^n-1=2^{2k}-1=4^k-1=(4-1)(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+1)$

$=3(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+1)$

이므로 2^n-1은 3의 배수이다.

0358 전략 $P(n, k)$의 정의와 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $4=3+1=2+2$이므로

$P(4, 2)=2$

ㄴ. $10=8+1+1=7+2+1=6+3+1=6+2+2$

$=5+4+1=5+3+2=4+4+2=4+3+3$

이므로 $P(10, 3)=8$

$7=6+1=5+2=4+3$

$=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$

이므로

$P(7, 1)=1$, $P(7, 2)=3$, $P(7, 3)=4$

$\therefore P(7, 1)+P(7, 2)+P(7, 3)=8$

$\therefore P(10, 3)=P(7, 1)+P(7, 2)+P(7, 3)$

ㄷ. [반례] $4=3+1=2+2$이므로 $P(4, 2)=2$

$4=2+1+1$이므로 $P(4, 3)=1$

$\therefore P(4, 2)>P(4, 3)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0359 전략 먼저 바지 7벌을 3개 이하의 쇼핑백에 나누어 담는 방법을 구한다.

풀이 바지 7벌을 3개 이하의 쇼핑백에 나누어 담는 방법은

$7=6+1=5+2=4+3$

$=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$

이때 각 쇼핑백에 담은 바지가 4벌 이하이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키는 방법의 수는

$4+3$, $4+2+1$, $3+3+1$, $3+2+2$

의 4이다.

답 4

0360 전략 남학생과 여학생을 각각 3개의 조로 나눈 다음 남학생 조와 여학생 조를 대응시킨다.

풀이 남학생 6명을 3개의 조로 나눌 때, 각 조의 학생 수는

1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(i) 1명, 1명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot5\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$$

(ii) 1명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot10\cdot1=60$

03 이항정리와 분할

(iii) 2명, 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${_6C_2}\cdot{_4C_2}\cdot{_2C_2}\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$$

이상에서 남학생 6명을 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$15+60+15=90$

또 여학생 4명을 3개의 조, 즉 1명, 1명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${_4C_1}\cdot{_3C_1}\cdot{_2C_2}\cdot\frac{1}{2!}=4\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=6$$

한편 남학생 3개의 조와 여학생 3개의 조를 서로 대응시키는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$90\cdot6\cdot6=3240$

답 ⑤

0361 전략 7일을 4일, 1일, 1일, 1일 또는 3일, 2일, 1일, 1일 또는 2일, 2일, 2일, 1일로 나눈 후 4과목을 배정한다.

풀이 $7=4+1+1+1=3+2+1+1=2+2+2+1$이므로 7일을 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) 4일, 1일, 1일, 1일로 나누는 방법의 수는

$${_7C_4}\cdot{_3C_1}\cdot{_2C_1}\cdot{_1C_1}\cdot\frac{1}{3!}=35\cdot3\cdot2\cdot1\cdot\frac{1}{6}=35$$

(ii) 3일, 2일, 1일, 1일로 나누는 방법의 수는

$${_7C_3}\cdot{_4C_2}\cdot{_2C_1}\cdot{_1C_1}\cdot\frac{1}{2!}=35\cdot6\cdot2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=210$$

(iii) 2일, 2일, 2일, 1일로 나누는 방법의 수는

$${_7C_2}\cdot{_5C_2}\cdot{_3C_2}\cdot{_1C_1}\cdot\frac{1}{3!}=21\cdot10\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{6}=105$$

이상에서 7일을 나누는 방법의 수는

$35+210+105=350$

4과목을 배정하는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$350\cdot24=8400$

답 ④

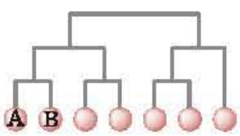
0362 전략 모든 방법의 수에서 A, B가 예선에서 만나도록 대진표를 작성하는 방법의 수를 제외한다.

풀이 모든 대진표를 작성하는 방법의 수는 먼저 7명을 4명, 3명의 두 조로 나눈 후 4명을 다시 2명, 2명으로 나누고 3명에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 방법의 수와 같으므로

$$({_7C_4}\cdot{_3C_3})\cdot\left({_4C_2}\cdot{_2C_2}\cdot\frac{1}{2!}\right)\cdot{_3C_1}=35\cdot1\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot3=315$$

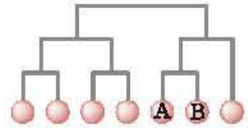
A, B가 예선에서 만나도록 대진표를 작성하려면 A, B가 모두 4명의 조에 있거나 3명의 조에 있어야 한다.

(i) A, B가 모두 4명의 조에 있는 경우
오른쪽 그림과 같이 A, B를 제외한 나머지 5명의 선수를 2명, 3명의 두 조로 나눈 후 3명에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 방법의 수와 같으므로



$$({_5C_2}\cdot{_3C_3})\cdot{_3C_1}=10\cdot1\cdot3=30$$

(ii) A, B가 모두 3명의 조에 있는 경우
오른쪽 그림과 같이 A, B를 제외한 나머지 5명의 선수를 4명, 1명의 두 조로 나눈 후 4명을 다시 2명, 2명으로 나누는 방법의 수와 같으므로



$$({_5C_4}\cdot{_1C_1})\cdot\left({_4C_2}\cdot{_2C_2}\cdot\frac{1}{2!}\right)=5\cdot1\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$315-(30+15)=270$

답 ③

0363 전략 $(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1$임을 이용하여 $(x^4+2x^2+2)^{10}$을 변형한다.

풀이 $(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1$이므로 $A=(x^2+1)^2$이라 하면

$$\begin{aligned}&(x^4+2x^2+2)^{10}\\&=(A+1)^{10}\\&={_{10}C_0}A^0+{_{10}C_1}A+{_{10}C_2}A^2+\cdots+{_{10}C_{10}}A^{10}\\&=1+10A+A^2({_{10}C_2}+{_{10}C_3}A+\cdots+{_{10}C_{10}}A^8)\end{aligned}$$ ··· ❶

이때 $A^2({_{10}C_2}+{_{10}C_3}A+\cdots+{_{10}C_{10}}A^8)$은 A^2, 즉 $(x^2+1)^4$으로 나누어떨어지므로 $(x^4+2x^2+2)^{10}$을 $(x^2+1)^4$으로 나누었을 때의 나머지는 $1+10A$를 $(x^2+1)^4$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

그런데 $1+10A=1+10(x^2+1)^2$이므로

$R(x)=1+10(x^2+1)^2$ ··· ❷

$\therefore R(1)=1+10\cdot2^2=41$ ··· ❸

답 41

채점 기준표

❶ $(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1$임을 이용하여 $(x^4+2x^2+2)^{10}$을 변형할 수 있다.	60%
❷ $R(x)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $R(1)$의 값을 구할 수 있다.	10%

0364 전략 먼저 이항정리를 이용하여 a_n을 간단히 나타낸다.

풀이
$$\begin{aligned}a_n&={_nC_0}-\frac{{_nC_1}}{2}+\frac{{_nC_2}}{2^2}-\cdots+(-1)^n\frac{{_nC_n}}{2^n}\\&={_nC_0}\left(-\frac{1}{2}\right)^0+{_nC_1}\left(-\frac{1}{2}\right)^1+{_nC_2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+{_nC_n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$ ··· ❶

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{m}a_n&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\\&=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)}{1-\frac{1}{2}}\\&=1-\frac{1}{2^m}\end{aligned}$$ ··· ❷

$1-\sum_{n=1}^{m}a_n<0.01$에서 $\frac{1}{2^m}<\frac{1}{100}$

$\therefore 2^m>100$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$이므로 자연수 m의 최솟값은 7이다. ··· ❸

답 7

채점 기준표

❶ 이항정리를 이용하여 a_n을 간단히 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\sum_{n=1}^{m} a_n$을 간단히 나타낼 수 있다.	30%
❸ 자연수 m의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

0365 전략 a, n 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $4(x+a)^n$의 전개식의 일반항은 $4\cdot{}_n\mathrm{C}_r x^{n-r}a^r$

$x^{n-r}=x^{n-1}$에서 $r=1$

따라서 x^{n-1}의 계수는 $4\cdot{}_n\mathrm{C}_1\cdot a=4an$ …… ㉠ ⋯❶

한편 $(x-1)(x+a)^n=x(x+a)^n-(x+a)^n$이므로 x^{n-1}의 계수는 $(x+a)^n$의 전개식의 x^{n-2}의 계수에서 $(x+a)^n$의 전개식의 x^{n-1}의 계수를 뺀 것이다.

$(x+a)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_n\mathrm{C}_s x^{n-s}a^s$

x^{n-2}항은 $s=2$일 때이고, x^{n-1}항은 $s=1$일 때이므로

$${}_n\mathrm{C}_2\cdot a^2-{}_n\mathrm{C}_1\cdot a=\frac{a^2n(n-1)}{2}-an \quad \cdots\cdots ㉡$$ ⋯❷

이때 주어진 두 다항식의 전개식의 x^{n-1}의 계수가 같으므로 ㉠, ㉡에서

$$4an=\frac{a^2n(n-1)}{2}-an, \quad 8=a(n-1)-2$$

$$\therefore a=\frac{10}{n-1}$$

$n\ge2$이므로 a의 최댓값은 10이다. ⋯❸

답 10

채점 기준표

❶ $4(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수를 구할 수 있다.	20%
❷ $(x-1)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수를 구할 수 있다.	40%
❸ 실수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	40%

0366 전략 a_n을 조합의 수로 나타낸 다음 이항계수의 성질을 이용한다.

풀이 a_n은 1부터 20까지의 자연수에서 n을 제외한 19개의 자연수 중에서 서로 다른 $n-1$개의 자연수를 택하는 방법의 수와 같으므로

$a_n={}_{19}\mathrm{C}_{n-1}$ ⋯❶

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=2}^{20}a_n&=\sum_{n=2}^{20}{}_{19}\mathrm{C}_{n-1}\\&={}_{19}\mathrm{C}_1+{}_{19}\mathrm{C}_2+{}_{19}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{19}\mathrm{C}_{19}\\&=({}_{19}\mathrm{C}_0+{}_{19}\mathrm{C}_1+{}_{19}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{19}\mathrm{C}_{19})-{}_{19}\mathrm{C}_0\\&=2^{19}-1\end{aligned}$$

$\therefore p=19$ ⋯❷

답 19

채점 기준표

❶ $a_n={}_{19}\mathrm{C}_{n-1}$임을 알 수 있다.	40%
❷ 자연수 p의 값을 구할 수 있다.	60%

0367 전략 각 층에 설치하는 에어컨의 수를 미지수로 놓고 식을 세워 본다.

풀이 1, 2, 3, 4층에 설치하는 에어컨의 수를 각각 n_1, n_2, n_3, n_4라 하면 $n_1+n_2+n_3+n_4=8$이고 $n_1\ge n_2\ge n_3\ge n_4\ge1$이므로 구하는 방법의 수는 8을 4개의 자연수로 분할하는 방법의 수 $P(8, 4)$와 같다. ⋯❶

이때

$$\begin{aligned}8&=5+1+1+1=4+2+1+1=3+3+1+1\\&=3+2+2+1=2+2+2+2\end{aligned}$$

이므로 구하는 방법의 수는 $P(8, 4)=5$ ⋯❷

답 5

채점 기준표

❶ 구하는 방법의 수가 $P(8, 4)$와 같음을 알 수 있다.	50%
❷ $P(8, 4)$를 구할 수 있다.	50%

0368 전략 승객 6명을 2개의 조로 나누어 세 정류장 A, B, C 중에서 두 정류장에 분배한다.

풀이 세 정류장 A, B, C 중에서 승객이 내리는 2개의 정류장을 택하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$ ⋯❶

승객 6명을 2개의 조로 나눌 때, 각 조의 인원수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

(i) 승객을 1명, 5명으로 나누는 방법의 수는

${}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_5=6\cdot1=6$

(ii) 승객을 2명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_4=15\cdot1=15$

(iii) 승객을 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$$

이상에서 승객을 2개의 조로 나누는 방법의 수는

$6+15+10=31$ ⋯❷

2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 방법의 수는

$2!=2$ ⋯❸

따라서 구하는 방법의 수는

$3\cdot31\cdot2=186$ ⋯❹

답 186

채점 기준표

❶ 세 정류장 중에서 2개의 정류장을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%
❷ 승객을 2개의 조로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%
❹ 2개의 정류장에 모든 승객이 내리는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

04 확률의 뜻과 활용

0369 답 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

0370 답 $\{1, 3, 5\}$

0371 $A=\{3, 6, 9, 12, 15\}$, $B=\{5, 10, 15\}$이므로
$A \cup B=\{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$
답 $\{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$

0372 $A \cap B=\{15\}$ 답 $\{15\}$

0373 $A^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$
답 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$

0374 $A^C \cap B^C=(A \cup B)^C=\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$
답 $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$

0375 $A \cap B=\{5\}$이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.
$B \cap C=\varnothing$이므로 B와 C는 서로 배반사건이다.
$A \cap C=\{1\}$이므로 서로 배반사건이 아니다. 답 B와 C

0376 세 개의 동전을 동시에 던질 때 모든 경우의 수는
$2 \cdot 2 \cdot 2=8$
동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 모두 같은 면이 나오는 경우는
(H, H, H), (T, T, T)의 2가지
따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0377 앞면이 한 개 나오는 경우는
(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)의 3가지
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

0378 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$
E를 가장 앞에 세우는 방법의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

0379 A, B를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!$이고, A, B가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!$이므로 A, B가 이웃하게 세우는 방법의 수는
$4! \cdot 2!=48$
따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

0380 A, B, C를 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!$이고, A, B, C의 사이사이 및 양 끝에 D, E를 세우는 방법의 수는 ${}_4P_2$이므로 D, E가 이웃하지 않게 세우는 방법의 수는
$3! \cdot {}_4P_2=6 \cdot 12=72$
따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{120}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0381 10명 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑는 방법의 수는
${}_{10}P_2=90$
여학생 6명 중에서 반장, 부반장을 모두 뽑는 방법의 수는
${}_6P_2=30$
따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0382 남학생 4명 중에서 반장을, 여학생 6명 중에서 부반장을 뽑는 방법의 수는
${}_4C_1 \cdot {}_6C_1=24$
따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{90}=\frac{4}{15}$ 답 $\frac{4}{15}$

0383 7가지 색 중에서 5가지 색을 택하는 방법의 수는
${}_7C_5=21$
초록을 택하는 방법의 수는 초록을 제외한 6가지 색 중에서 4가지를 택하고 초록을 포함시키는 방법의 수와 같으므로
${}_6C_4=15$
따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$ 답 $\frac{5}{7}$

0384 노랑은 택하지 않고 파랑은 택하는 방법의 수는 노랑과 파랑을 제외한 5가지 색 중에서 4가지를 택하고 파랑을 포함시키는 방법의 수와 같으므로
${}_5C_4=5$
따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{21}$ 답 $\frac{5}{21}$

0385 어떤 위염 환자에게 약을 투여할 때 위염이 치료될 확률은
$\frac{280}{400}=\frac{7}{10}$ 답 $\frac{7}{10}$

0386 주어진 수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로
$\frac{(\text{소수가 적힌 영역의 넓이})}{(\text{전체 과녁의 넓이})}=\frac{4}{9}$ 답 $\frac{4}{9}$

0387 꺼낸 구슬이 빨간 구슬 또는 노란 구슬인 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다. 답 1

0388 꺼낸 구슬이 파란 구슬인 사건은 절대로 일어날 수 없으므로 구하는 확률은 0이다. 답 0

0389 짝수는 2, 4, 6, ⋯, 24의 12개이므로
$P(A)=\frac{12}{25}$ 답 $\frac{12}{25}$

0390 모든 카드에는 짝수 또는 홀수가 적혀 있으므로
$P(A\cup B)=1$ 답 1

0391 $A\cap B=\varnothing$이므로 $P(A\cap B)=0$ 답 0

0392 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$ 답 $\frac{8}{15}$

0393 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서
$\frac{2}{3}=\frac{1}{4}+P(B)$ $\therefore P(B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$ 답 $\frac{5}{12}$

0394 카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 4의 배수인 사건을 B라 하면
$P(A)=\frac{33}{100}$, $P(B)=\frac{25}{100}$, $P(A\cap B)=\frac{8}{100}$ (12의 배수인 사건)
$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=\frac{33}{100}+\frac{25}{100}-\frac{8}{100}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0395 카드에 적힌 수가 7의 배수인 사건을 A, 15의 배수인 사건을 B라 하면 $P(A)=\frac{14}{100}$, $P(B)=\frac{6}{100}$
A, B는 서로 배반사건이므로
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{14}{100}+\frac{6}{100}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

0396 9의 배수가 아닌 사건을 A라 하면 A^C는 9의 배수인 사건이므로 $P(A^C)=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$
$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$ 답 $\frac{9}{10}$

0397 앞면이 적어도 한 번 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 모두 뒷면이 나오는 사건이므로
$P(A^C)=\frac{1}{8}$
$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ 답 $\frac{7}{8}$

0398 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 A^C는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건이다.
나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는
(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3),
(3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)
의 9가지이므로 $P(A^C)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$
$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

0399 8명의 학생 중에서 대표 3명을 뽑는 방법의 수는
${}_8C_3=56$
(1) 남학생 5명 중에서 대표 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$이므로
구하는 확률은 $\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$
(2) 대표 중에서 적어도 한 명은 여학생인 사건을 A라 하면 A^C는 3명 모두 남학생인 사건이므로
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{28}=\frac{23}{28}$ 답 (1) $\frac{5}{28}$ (2) $\frac{23}{28}$

유형 01 시행과 사건 본책 58쪽

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여
① 합사건 ➡ 합집합 ➡ $A\cup B$
② 곱사건 ➡ 교집합 ➡ $A\cap B$
③ 여사건 ➡ 여집합 ➡ A^C, B^C
④ 배반사건 ➡ 서로소 ➡ $A\cap B=\varnothing$

0400 $A=\{3, 6\}$, $B=\{6, 8\}$, $C=\{3, 5, 7, 11\}$이므로
$A\cap B=\{6\}$, $A\cap C=\{3\}$, $B\cap C=\varnothing$
따라서 B와 C는 서로 배반사건이다. 답 ②

0401 표본공간을 S라 하면
$S=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{3, 5, 7, 9\}$
② $A\cup B=\{3, 5, 6, 7, 9\}$
③ $A\cap B=\{3, 9\}$
④ $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$이므로
$n(A^C\cup B^C)=8$
⑤ $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{1, 2, 4, 8, 10\}$ 답 ⑤

0402 사건 A와 배반인 사건은 사건 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 배반인 사건은 사건 B^C의 부분집합이므로 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다. 이때
$A^C\cap B^C=\{5, 6, 7, 9\}\cap\{3, 7, 8, 9\}=\{7, 9\}$
이므로 구하는 사건의 개수는 $2^2=4$ 답 ④
참고 원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

유형 02 수학적 확률 본책 58쪽

표본공간이 S인 어떤 시행에서 각 결과가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어날 수학적 확률은
$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

0403 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 모든 경우의 수는
$6\cdot6=36$
(i) 두 눈의 수의 차가 2인 경우
(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6),
(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)
의 8가지

(ii) 두 눈의 수의 차가 1인 경우

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6),
(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)

의 10가지

(iii) 두 눈의 수의 차가 0인 경우

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)

의 6가지

이상에서 두 눈의 수의 차가 2 이하인 경우의 수는

$8+10+6=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$ 답 ⑤

0404 S의 부분집합 X가 될 수 있는 모든 경우의 수는

$2^9=512$

2와 4를 반드시 원소로 갖고 9를 반드시 원소로 갖지 않는 S의 부분집합의 개수는 $2^{9-3}=2^6=64$

따라서 구하는 확률은 $\frac{64}{512}=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

0405 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가지려면 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 하므로

$D=a^2-4b=0 \quad \therefore a^2=4b$

$a^2=4b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

(2, 1), (4, 4)의 2가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ 답 $\frac{1}{18}$

0406 $648=2^3\cdot3^4$이므로 648의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(4+1)=20$

이 중에서 60의 약수는 648과 60의 공약수와 같다.

$60=2^2\cdot3\cdot5$이므로 648과 60의 최대공약수는 $2^2\cdot3$

따라서 648과 60의 양의 공약수의 개수는

$(2+1)(1+1)=6$

이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ 답 $\frac{3}{10}$

유형 03 순열을 이용하는 확률 본책 61쪽

① 서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 방법의 수

⇒ ${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$

② 서로 다른 n개 중에서 r개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수

⇒ ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)

$=\frac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

0407 5권을 일렬로 꽂는 방법의 수는 $5!=120$

시집 3권 중에서 2권을 양 끝에 꽂는 방법의 수는 ${}_3P_2=6$

소설책 2권과 양 끝에 오지 않은 시집 1권을 일렬로 꽂는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 양 끝에 시집을 꽂는 방법의 수는

$6\cdot6=36$

이므로 구하는 확률은 $\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$ 답 ③

0408 다섯 개의 숫자를 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는 $5!=120$

짝수인 자연수는 일의 자리의 숫자가 짝수, 즉

□□□□2 또는 □□□□4

꼴이므로 짝수의 개수는 $4!\cdot2=48$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

0409 5명의 학생 중에서 3명이 소파에 나란히 앉는 방법의 수는

${}_5P_3=60$ ➊

A가 소파 가운데에 앉고, 4명의 학생 중에서 2명이 양 끝에 앉는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$ ➋

따라서 A가 소파 가운데에 앉을 확률이 $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$이므로

$n=5$ ➌

답 5

채점 기준표

➊ 3명이 소파에 나란히 앉는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
➋ A가 소파 가운데에 앉는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
➌ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	30%

0410 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $6!=720$

p와 n 사이에 들어가는 2개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$

p와 n을 포함한 4개의 문자를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

p와 n이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 p와 n 사이에 2개의 문자가 있도록 나열하는 방법의 수는

$12\cdot6\cdot2=144$

이므로 구하는 확률은 $\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$ 답 ②

0411 네 사람을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$

앞에서 세 번째에 서 있는 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 작으므로 세 번째에는 키가 가장 작은 사람 또는 키가 두 번째로 작은 사람이 설 수 있다.

(i) 키가 가장 작은 사람이 세 번째에 서는 경우

나머지 3명을 일렬로 세우면 되므로 방법의 수는 $3!=6$

(ii) 키가 두 번째로 작은 사람이 세 번째에 서는 경우

키가 가장 작은 사람을 첫 번째에 세우고 나머지 2명을 일렬로 세우면 되므로 방법의 수는 $2!=2$

(i), (ii)에서 앞에서 세 번째에 서 있는 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 작도록 세우는 방법의 수는 $6+2=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

유형 04 원순열을 이용하는 확률 본책 61쪽

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수

➡ $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$

0412 6명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$

남학생 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

남학생 사이사이의 3개의 자리에 여학생 3명이 앉는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 남녀가 번갈아 가며 앉는 방법의 수는

$2\cdot 6=12$

이므로 구하는 확률은 $\dfrac{12}{120}=\dfrac{1}{10}$ 답 ③

0413 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

부모님을 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

부모님이 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 부모님이 이웃하게 앉는 방법의 수는

$6\cdot 2=12$

이므로 구하는 확률은 $\dfrac{12}{24}=\dfrac{1}{2}$ 답 ⑤

0414 6가지 색을 원판에 모두 칠하는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$ ⋯❶

검은색을 칠한 맞은편에 흰색을 칠하고 나머지 4가지 색을 4개의 영역에 칠하는 방법의 수는 ${}_4P_4=4!=24$ ⋯❷

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{24}{120}=\dfrac{1}{5}$ ⋯❸

답 $\dfrac{1}{5}$

채점 기준표

❶ 6가지 색을 원판에 모두 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 검은색의 맞은편에 흰색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 검은색의 맞은편에 흰색을 칠할 확률을 구할 수 있다.	30%

유형 05 중복순열을 이용하는 확률 본책 62쪽

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수

➡ ${}_n\Pi_r=n^r$

0415 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

이때 홀수의 개수는 ${}_3\Pi_3\cdot 1=3^3=27$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{27}{81}=\dfrac{1}{3}$ 답 ④

0416 집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때 일대일 대응의 개수는 ${}_3P_3=3!=6$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$ 답 ③

0417 네 명의 여행객이 다섯 곳의 게스트하우스 중에서 임의로 각각 한 곳을 택하는 방법의 수는 ${}_5\Pi_4=5^4=625$ ⋯❶

서로 다른 게스트하우스를 택하는 방법의 수는

${}_5P_4=120$ ⋯❷

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{120}{625}=\dfrac{24}{125}$ ⋯❸

답 $\dfrac{24}{125}$

채점 기준표

❶ 다섯 곳의 게스트하우스 중에서 임의로 각각 한 곳을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 서로 다른 게스트하우스를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 서로 다른 게스트하우스를 택할 확률을 구할 수 있다.	30%

0418 세 사람이 가위바위보를 한 번 할 때 모든 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이기는 두 명을 정하는 경우는 지는 한 명을 정하는 경우와 같으므로 3가지이고, 이기는 두 명이 가위, 바위, 보 중에서 어느 하나를 냈을 때 나머지 한 명이 내는 것은 정해져 있으므로 두 명이 이기는 경우의 수는 $3\cdot 3=9$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

유형 06 같은 것이 있는 순열을 이용하는 확률 본책 62쪽

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, ⋯, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수

➡ $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

0419 7개의 문자 A, L, P, H, A, G, O를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{7!}{2!}=2520$

모음 A, A, O를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!=120$

A, A, O가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 모음끼리 이웃하도록 나열하는 방법의 수는

$120\cdot 3=360$

이므로 구하는 확률은 $\dfrac{360}{2520}=\dfrac{1}{7}$ 답 $\dfrac{1}{7}$

0420 여섯 개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 3!}=60$

맨 끝에 3을 나열하고, 나머지 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

0421 집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수는
$_2\Pi_3=2^3=8$
$f(1)+f(2)+f(3)=14$를 만족시키는 함수 f의 개수는 4, 5, 5를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

유형 07 조합을 이용하는 확률 본책 63쪽

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수

➡ $_nC_r=\frac{_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

0422 9명의 학생 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는
$_9C_4=126$
남학생 5명 중에서 2명, 여학생 4명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는
$_5C_2\cdot {_4C_2}=10\cdot 6=60$
따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{126}=\frac{10}{21}$ 답 ⑤

0423 6송이 중에서 2송이를 구입하는 방법의 수는
$_6C_2=15$
장미는 구입하고 수국은 구입하지 않는 방법의 수는 장미와 수국을 제외한 나머지 4송이 중에서 1송이를 구입하고 장미를 포함시키는 방법의 수와 같으므로 $_4C_1=4$
따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{15}$ 답 $\frac{4}{15}$

0424 1학년 학생 수를 x라 하면 2학년 학생 수는 $16-x$이므로

$\frac{_xC_1\cdot {_{16-x}C_1}}{_{16}C_2}=\frac{1}{2}$, $\frac{x(16-x)}{120}=\frac{1}{2}$

$x^2-16x+60=0$, $(x-6)(x-10)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=10$ 1학년 학생이 6명, 2학년 학생이 10명 또는 1학년 학생이 10명, 2학년 학생이 6명

따라서 구하는 학생 수의 차는 4이다. 답 4

0425 5장의 카드 중에서 3장의 카드를 꺼내는 방법의 수는
$_5C_3=10$
이때 세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 다음과 같다.
(i) (홀수)+(홀수)+(짝수)인 경우
홀수가 적힌 2장의 카드 중에서 2장, 짝수가 적힌 3장의 카드 중에서 1장을 뽑는 방법의 수는 $_2C_2\cdot {_3C_1}=3$
(ii) (짝수)+(짝수)+(짝수)인 경우
짝수가 적힌 3장의 카드 중에서 3장을 뽑는 방법의 수는
$_3C_3=1$

(i), (ii)에서 세 수의 합이 짝수인 경우의 수는 $3+1=4$
따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ 답 ②

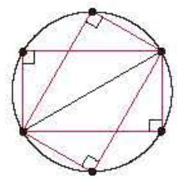
0426 정육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 두 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 $_8C_2=28$ ··· ❶
이 중에서 두 꼭짓점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우는 다음과 같다.
(i) 두 꼭짓점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$인 경우의 수는 각 면의 대각선의 개수와 같으므로 $2\cdot 6=12$
(ii) 두 꼭짓점 사이의 거리가 $\sqrt{3}$인 경우의 수는 정육면체의 대각선의 개수와 같으므로 4
(i), (ii)에서 거리가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우의 수는
$12+4=16$ ··· ❷
따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$ ··· ❸

답 $\frac{4}{7}$

채점 기준표

❶ 8개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 두 꼭짓점을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
❷ 두 꼭짓점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우의 수를 구할 수 있다.	60%
❸ 두 꼭짓점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이상일 확률을 구할 수 있다.	20%

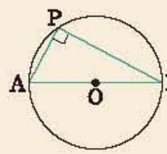
0427 6개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 방법의 수는
$_6C_3=20$
오른쪽 그림과 같이 1개의 지름에 대하여 4개의 직각삼각형을 만들 수 있고, 6개의 점으로 만들 수 있는 지름은 3개이므로 직각삼각형의 개수는 $4\cdot 3=12$



따라서 직각삼각형일 확률은 $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$이므로
$a=5$, $b=3$ $\therefore a+b=8$ 답 8

SSEN 특강

원에 내접하는 직각삼각형
반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 원의 지름의 양 끝점과 원 위의 다른 한 점을 택하면 직각삼각형을 만들 수 있다.



유형 08 통계적 확률 본책 63쪽

① 사건 A가 n번 중에서 r번의 꼴로 일어날 때, 사건 A가 일어날 통계적 확률은 $\frac{r}{n}$

② 시행 횟수가 충분히 클 때, 통계적 확률은 수학적 확률에 가까워진다.

0428 흰 구슬이 나올 확률은 $\frac{1}{8}$이므로

$\frac{1}{8}=\frac{2}{2+3+n}$, $2+3+n=16$

$\therefore n=11$ 답 ③

0429 A자동차에 하자가 발생할 확률은

$$a=\frac{50}{10000}=\frac{1}{200}$$

B자동차에 하자가 발생할 확률은

$$b=\frac{10}{5000}=\frac{1}{500}$$

$$\therefore ab=\frac{1}{200}\cdot\frac{1}{500}=\frac{1}{100000}=10^{-5}$$

답 ②

0430 2단계까지 합격한 여학생은 69120명이고 5단계까지 최종 합격한 여학생은 20520명이므로 $p=\frac{20520}{69120}=\frac{19}{64}$

$$\therefore 64p=64\cdot\frac{19}{64}=19$$

답 ①

0431 주머니 속에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라 하면 꺼낸 2개의 제비가 모두 당첨 제비일 확률은

$$\frac{{}_nC_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{6},\quad \frac{n(n-1)}{72}=\frac{1}{6}$$

$$n(n-1)=12=4\cdot3 \qquad \therefore n=4$$

따라서 주머니 속에 들어 있는 당첨 제비는 4개라고 할 수 있다.

답 ③

0432 이번 시즌에 던진 3점슛의 개수를 a라 하면 성공한 3점슛의 개수가 $\frac{54}{3}=18$이므로

$$\frac{18}{a}=\frac{45}{100} \qquad \therefore a=40$$ ➊

이번 시즌에 던진 2점슛의 개수를 b라 하면 성공한 2점슛의 개수가 $\frac{168}{2}=84$이므로

$$\frac{84}{b}=\frac{70}{100} \qquad \therefore b=120$$ ➋

따라서 구하는 3점슛과 2점슛의 개수의 합은

$$a+b=160$$ ➌

답 160

채점 기준표

➊ 이번 시즌에 던진 3점슛의 개수를 구할 수 있다.	40%
➋ 이번 시즌에 던진 2점슛의 개수를 구할 수 있다.	40%
➌ 이번 시즌에 던진 3점슛과 2점슛의 개수의 합을 구할 수 있다.	20%

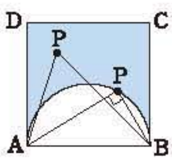
유형 09 기하학적 확률

본책 64쪽

길이, 넓이, 부피, 시간 등 연속적으로 변하여 그 개수를 구할 수 없는 경우의 확률은 길이, 넓이, 부피, 시간 등의 비율로 확률을 구한다.

➡ $\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{사건 }A\text{가 일어나는 영역의 크기})}{(\text{일어날 수 있는 전 영역의 크기})}$

0433 점 P가 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때 △PAB는 직각삼각형이 되므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 △PAB는 예각삼각형이 된다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\mathrm{ABCD}\text{의 넓이})}=\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1}$$

$$=1-\frac{\pi}{8}$$

답 $1-\frac{\pi}{8}$

0434 반지름의 길이가 6인 원의 넓이는 $\pi\cdot6^2=36\pi$

색칠한 부분의 넓이는 $\pi\cdot4^2-\pi\cdot2^2=12\pi$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12\pi}{36\pi}=\frac{1}{3}$

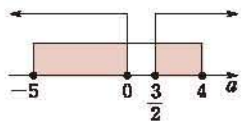
답 ④

0435 이차방정식 $x^2-4ax+6a=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-6a\geq0,\qquad a(2a-3)\geq0$$

$$\therefore a\leq0\text{ 또는 }a\geq\frac{3}{2}$$

따라서 구하는 확률은



$$\frac{\{0-(-5)\}+\left(4-\frac{3}{2}\right)}{4-(-5)}=\frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$

0436 양규가 도착한 시각을 오후 2시 x분, 은경이가 도착한 시각을 오후 2시 y분이라 하면

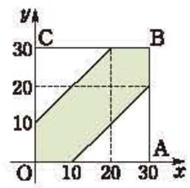
$0\leq x\leq30,\ 0\leq y\leq30$ …… ㉠

두 사람이 만나려면 $|x-y|\leq10$이어야 하므로

$-10\leq x-y\leq10$

$\therefore x-10\leq y\leq x+10$ …… ㉡

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 영역은 □OABC의 내부(경계선 포함)이고, 부등식 ㉠, ㉡의 공통인 영역은 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\mathrm{OABC}\text{의 넓이})}=\frac{30\cdot30-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot20\cdot20\right)}{30\cdot30}=\frac{5}{9}$$

답 $\frac{5}{9}$

유형 10 확률의 기본 성질

본책 65쪽

① 임의의 사건 A가 일어날 확률은 $0\leq\mathrm{P}(A)\leq1$

② 전사건 S가 일어날 확률은 $\mathrm{P}(S)=1$

③ 공사건 $\varnothing$이 일어날 확률은 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

0437 ㄱ. $\mathrm{P}(S)=1,\ \mathrm{P}(\varnothing)=0$이므로

$\mathrm{P}(S)+\mathrm{P}(\varnothing)=1$

ㄴ. $\varnothing\subset(A\cup B)\subset S$이므로 $\mathrm{P}(\varnothing)\leq\mathrm{P}(A\cup B)\leq\mathrm{P}(S)$

$\therefore 0\leq\mathrm{P}(A\cup B)\leq1$

ㄷ. [반례] $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이면 $\quad \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(S)>\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0438 ㄱ. $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$, $0\le \mathrm{P}(B)\le 1$이므로

$0\le \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le 2$

ㄴ. [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4, 5\}$이면 $A\cup B=S$이지만

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\ne 1$

ㄷ. A와 A^C는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(S)=1$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

유형 11 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률 (본책 65쪽)

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여
① $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
② $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

0439 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$0.9=0.7+\mathrm{P}(B)-0.2 \quad \therefore \mathrm{P}(B)=0.4$

$\therefore \mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-0.4=0.6$ 답 ⑤

0440 $S=A\cup B$이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cup B)=1$

A, B가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$1=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{5} \quad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{4}{5}$ 답 $\frac{4}{5}$

0441 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$ ⋯ ❶

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$ ⋯ ❷

답 $\frac{7}{12}$

채점 기준표

❶ $\mathrm{P}(A\cup B)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$를 구할 수 있다.	50%

0442 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{16}{15}-\mathrm{P}(A\cup B)$

이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최소일 때 $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최대이고 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대일 때 $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최소이다.

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)\ge \mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge \mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cup B)\le 1$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)\ge \frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge \frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A\cup B)\le 1$

즉 $\frac{2}{3}\le \mathrm{P}(A\cup B)\le 1$이므로 $\quad \frac{1}{15}\le \frac{16}{15}-\mathrm{P}(A\cup B)\le \frac{2}{5}$

$\therefore \frac{1}{15}\le \mathrm{P}(A\cap B)\le \frac{2}{5}$

따라서 $M=\frac{2}{5}$, $m=\frac{1}{15}$이므로

$M+m=\frac{7}{15}$ 답 $\frac{7}{15}$

유형 12, 13 확률의 덧셈정리 (본책 65, 66쪽)

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여
① $A\cap B\ne\varnothing$일 때 ➡ $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
② $A\cap B=\varnothing$일 때 ➡ $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

0443 두 주머니 A, B에서 각각 1장의 카드를 꺼낼 때 모든 경우의 수는 $\quad 5\cdot 7=35$

두 카드에 적힌 숫자의 합이 10 이상인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 할 때, 두 카드에 적힌 숫자를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(3, 7), (4, 6), (5, 5), (4, 7), (5, 6), (5, 7)\}$

$B=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (3, 7), (4, 6), (5, 5)\}$

$A\cap B=\{(3, 7), (4, 6), (5, 5)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{6}{35}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{35}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{6}{35}+\frac{1}{5}-\frac{3}{35}=\frac{2}{7}$ 답 ①

0444 수학을 좋아하는 학생을 택하는 사건을 A, 영어를 좋아하는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.15$, $\mathrm{P}(B)=0.25$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.05$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=0.15+0.25-0.05=0.35$ 답 0.35

0445 ㄱ이 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, ㅎ이 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{13}\mathrm{C}_2}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{14}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_{13}\mathrm{C}_2}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{14}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_{12}\mathrm{C}_1}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{91}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{3}{14}+\frac{3}{14}-\frac{3}{91}=\frac{36}{91}$ 답 ②

0446 $f(1)=1$인 사건을 A, $f(2)=2$인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\Pi_2}{{}_5\Pi_3}=\frac{5^2}{5^3}=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\Pi_2}{{}_5\Pi_3}=\frac{5^2}{5^3}=\frac{1}{5},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_5\Pi_1}{{}_5\Pi_3}=\frac{5}{5^3}=\frac{1}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{25}=\frac{9}{25}$$

답 $\frac{9}{25}$

0447 5개의 공 중에서 2개를 꺼낼 때 2개가 모두 흰 공인 사건을 A, 2개가 모두 검은 공인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}$$

답 ④

0448 A가 맨 앞에 오는 사건을 A, A가 맨 뒤에 오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

답 ③

0449 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

두 눈의 수의 합이 4인 사건을 A, 차가 4인 사건을 B라 할 때, 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$

$B=\{(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)\}$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12},\ \mathrm{P}(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{7}{36}$$

답 $\frac{7}{36}$

0450 빨간 구슬이 파란 구슬보다 많으려면 6개의 구슬 중에서 빨간 구슬이 4개 또는 5개이어야 한다. ··· ❶

빨간 구슬이 4개인 사건을 A, 5개인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_6}=\frac{5}{14},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_5\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_6}=\frac{1}{21}$$ ··· ❷

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{5}{14}+\frac{1}{21}$$
$$=\frac{17}{42}$$ ··· ❸

답 $\frac{17}{42}$

채점 기준표

❶ 빨간 구슬이 4개 또는 5개임을 알 수 있다.	30%
❷ 빨간 구슬이 4개, 5개일 확률을 각각 구할 수 있다.	40%
❸ 빨간 구슬이 파란 구슬보다 많을 확률을 구할 수 있다.	30%

유형 14, 15 여사건의 확률

본책 66, 67쪽

표본공간 S의 사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

0451 적어도 1개가 파란 공인 사건을 A라 하면 A^C는 3개가 모두 빨간 공인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{1}{21}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$$

답 ⑤

0452 적어도 한쪽 끝에 남학생을 세우는 사건을 A라 하면 A^C는 양쪽 끝에 모두 여학생을 세우는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{P}_2\cdot3!}{5!}=\frac{3}{10}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

답 $\frac{7}{10}$

0453 윤희와 태화 사이에 적어도 한 명의 학생을 세우는 사건을 A라 하면 A^C는 윤희와 태화를 이웃하게 세우는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4!\cdot2!}{5!}=\frac{2}{5}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

답 ④

0454 적어도 1개가 흰 바둑돌일 확률이 $\frac{17}{38}$이므로 2개 모두 검은 바둑돌일 확률은 $1-\frac{17}{38}=\frac{21}{38}$ ··· ❶

즉 $\frac{{}_{15}\mathrm{C}_2}{{}_{n+15}\mathrm{C}_2}=\frac{21}{38}$이므로

$$\frac{15\cdot14}{(n+15)(n+14)}=\frac{21}{38},\quad (n+15)(n+14)=380$$

$$n^2+29n-170=0,\quad (n+34)(n-5)=0$$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수) ··· ❷

답 5

채점 기준표

❶ 2개 모두 검은 바둑돌일 확률을 구할 수 있다.	30%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	70%

0455 앞면이 2개 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 앞면이 1개이거나 모두 뒷면이 나오는 사건이다.

(i) 앞면이 1개일 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{2^4}=\frac{1}{4}$

(ii) 모두 뒷면일 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_0}{2^4}=\frac{1}{16}$

(i), (ii)에서　$P(A^C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$$

답 ③

0456 두 눈의 수의 곱이 소수가 아닌 사건을 A라 하면 A^C는 두 눈의 수의 곱이 소수인 사건이므로 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$$A^C=\{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (3, 1), (5, 1)\}$$

따라서 $P(A^C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$이므로

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

답 ④

0457 세 자리 자연수가 450 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 451 이상인 사건이고 451 이상인 자연수는 45○ 꼴 또는 5○○ 꼴이다.

(i) 45○ 꼴일 확률은　$\frac{3}{{}_5P_3}=\frac{1}{20}$

(ii) 5○○ 꼴일 확률은　$\frac{{}_4P_2}{{}_5P_3}=\frac{1}{5}$

(i), (ii)에서　$P(A^C)=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0458 3장의 카드의 무늬가 두 종류 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 3장이 모두 같은 무늬인 사건이다.

(i) 3장 모두 스페이드 무늬일 확률은　$\frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{1}{55}$

(ii) 3장 모두 하트 무늬일 확률은　$\frac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{1}{220}$

(iii) 3장 모두 다이아몬드 무늬일 확률은　$\frac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{1}{22}$

이상에서　$P(A^C)=\frac{1}{55}+\frac{1}{220}+\frac{1}{22}=\frac{3}{44}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{44}=\frac{41}{44}$$

답 $\frac{41}{44}$

0459 6과 서로소이려면 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니어야 한다. 2의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 A, 3의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ P(A\cap B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{6\text{의 배수}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

6과 서로소인 수가 적힌 공을 꺼내는 사건은 $A^C\cap B^C$, 즉 $(A\cup B)^C$이므로 구하는 확률은

$$P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

답 ④

0460 전략 어떤 수가 5로 나누어떨어지려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

풀이 10 이하의 자연수 m, n을 택하는 모든 경우의 수는

$$10\cdot10=100$$

3^m+4^n이 5로 나누어떨어지려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

이때 3^m의 일의 자리 숫자는 3, 9, 7, 1이 이 순서대로 반복되고, 4^n의 일의 자리 숫자는 4, 6이 이 순서대로 반복되므로 3^m+4^n이 5로 나누어떨어지는 경우는 다음과 같다.

(i) 4^n의 일의 자리 숫자가 4인 경우

3^m의 일의 자리 숫자는 1이어야 하므로 n의 값은 1, 3, 5, 7, 9의 5개, m의 값은 4, 8의 2개이다.

$\therefore 5\cdot2=10$

(ii) 4^n의 일의 자리 숫자가 6인 경우

3^m의 일의 자리 숫자는 9이어야 하므로 n의 값은 2, 4, 6, 8, 10의 5개, m의 값은 2, 6, 10의 3개이다.

$\therefore 5\cdot3=15$

(i), (ii)에서 3^m+4^n이 5로 나누어떨어지는 경우의 수는

$$10+15=25$$

따라서 구하는 확률은　$\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

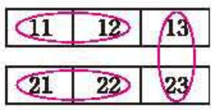
답 ①

0461 전략 먼저 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되는 경우를 찾는다.

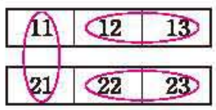
풀이 6명의 학생이 6개의 좌석에 앉는 경우의 수는

$$6!=720$$

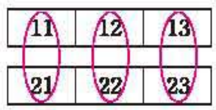
같은 나라의 두 학생끼리 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉는 경우는 다음과 같다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

이때 [그림 1], [그림 2], [그림 3]과 같이 앉는 경우의 수는 각각

$$\underbrace{3!\cdot2!\cdot2!\cdot2!}_{\text{세 나라를 정하는 경우의 수는 } 3!\text{이고 같은 나라의 학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 } 2!\cdot2!\cdot2!\text{이다.}}=6\cdot2\cdot2\cdot2=48$$

이므로　$3\cdot48=144$

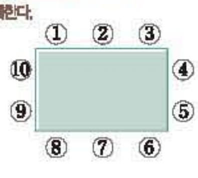
따라서 구하는 확률은　$\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

답 ④

0462 전략 남학생이 앉는 자리에 따라 여학생이 앉는 자리가 정해진다.

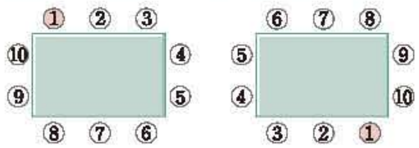
풀이 10명의 학생이 탁자에 둘러앉는 방법의 수는

$$(10-1)!\cdot\underbrace{5}_{\text{10명을 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.}}=9!\cdot5$$



남학생과 여학생이 바로 앞에 마주 보고 앉으려면 오른쪽 그림에서 남학생은 ①, ⑧ 중 하나, ②, ⑦ 중 하나, ③, ⑥ 중 하나, ④, ⑩ 중 하나, ⑤, ⑨ 중 하나에 앉고 나머지의 자리에 여학생이 앉으면 된다.

이때 다음 그림과 같이 회전하여 일치하는 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 남학생과 여학생이 바로 앞에 마주 보고 앉는 방법의 수는

$2^5\cdot5!\cdot5!\cdot\frac{1}{2}$

이므로 구하는 확률은 $\dfrac{2^5\cdot5!\cdot5!\cdot\frac{1}{2}}{9!\cdot5}=\dfrac{8}{63}$

즉 $p=63$, $q=8$이므로 $p+q=71$ 답 71

0463 전략 3가지 색을 1번, 1번, 4번 또는 1번, 2번, 3번 또는 2번, 2번, 2번 칠하는 방법의 수를 각각 구한다.

풀이 3가지 색을 적어도 한 번씩은 사용하여 칠하므로 6개의 영역을 3가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우는 다음과 같다.

(i) 3가지 색을 1번, 1번, 4번 칠하는 경우
3가지 색 중에서 4번 칠하는 색을 정하는 방법의 수는 ${}_3C_1=3$이므로 6개의 영역을 칠하는 방법의 수는 $3\cdot\dfrac{6!}{4!}=90$

(ii) 3가지 색을 1번, 2번, 3번 칠하는 경우
3가지 색 중에서 1번, 2번, 3번 칠하는 색을 정하는 방법의 수는 $3!=6$이므로 6개의 영역을 칠하는 방법의 수는

$6\cdot\dfrac{6!}{2!\cdot3!}=360$

(iii) 3가지 색을 2번, 2번, 2번 칠하는 경우
6개의 영역을 칠하는 방법의 수는 $\dfrac{6!}{2!\cdot2!\cdot2!}=90$

이상에서 3가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수는

$90+360+90=540$

한편 이웃하는 영역을 서로 다른 색으로 칠하는 방법의 수는

$3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=96$

이 중에서 2가지 색만을 사용하여 칠하는 방법의 수는

${}_3C_2\cdot2=6$

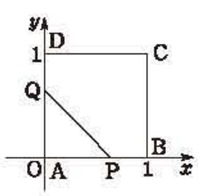
이므로 구하는 확률은 $\dfrac{96-6}{540}=\dfrac{90}{540}=\dfrac{1}{6}$ 답 $\dfrac{1}{6}$

다른 풀이 3가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수는 3가지 색으로 칠하는 모든 방법의 수에서 2가지 색만을 사용하는 방법의 수와 1가지 색만을 사용하는 방법의 수를 빼면 된다.

$\therefore {}_3\Pi_6-\{\underbrace{{}_3C_2\cdot({}_2\Pi_6-2)}_{\text{3가지 색 중에서 2가지 색만을 사용하는 방법의 수}}+3\}=729-(186+3)=540$

0464 전략 정사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓고 주어진 조건을 만족시키는 영역을 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A가 원점 O에 오고 $\overline{AB}$와 $\overline{AD}$가 각각 x축과 y축의 양의 방향에 오도록 정사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓자.



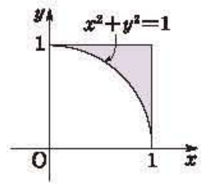
P$(x,\ 0)$, Q$(0,\ y)$라 하면

$0\le x\le1,\ 0\le y\le1$ …… ㉠

$\overline{PQ}\ge1$에서 $\sqrt{x^2+y^2}\ge1$

$\therefore x^2+y^2\ge1$ …… ㉡

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 영역은 정사각형의 내부(경계선 포함)이고, 부등식 ㉠, ㉡의 공통인 영역은 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



따라서 구하는 확률은

$\dfrac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{정사각형의 넓이})}=\dfrac{1\cdot1-\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot1^2}{1\cdot1}$

$=1-\dfrac{\pi}{4}$ 답 ①

0465 전략 i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$가 나올 확률을 p_i로 놓고 주어진 조건을 p_i로 나타낸다.

풀이 육면체를 한 번 던지는 시행에서 i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$가 나올 확률을 p_i라 하면

$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ …… ㉠

$p_1=p_2=p_3=p_4$ …… ㉡

$p_5=2p_1$ …… ㉢

$p_6=2p_5=2\cdot2p_1=4p_1$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣을 ㉠에 대입하면

$p_1+p_1+p_1+p_1+2p_1+4p_1=1$

$10p_1=1 \qquad \therefore p_1=\dfrac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은 $p_5=2p_1=2\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{5}$ 답 $\dfrac{1}{5}$

0466 전략 방정식의 해를 구하여 해가 정수가 되도록 하는 a의 조건을 구한다.

풀이 이차방정식 $6x^2-5ax+a^2=0$에서

$(3x-a)(2x-a)=0 \qquad \therefore x=\dfrac{a}{3}$ 또는 $x=\dfrac{a}{2}$

표본공간을 S, $x=\dfrac{a}{3}$가 정수인 사건을 A, $x=\dfrac{a}{2}$가 정수인 사건을 B라 하면

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 20\}$, $A=\{a\,|\,a$는 3의 배수$\}$,
$B=\{a\,|\,a$는 2의 배수$\}$, $A\cap B=\{a\,|\,a$는 6의 배수$\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{20}=\dfrac{13}{20}$ 답 ⑤

0467 전략 두 사건 A, B가 서로 배반사건일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$이다.

풀이 조건 (가)에서 $a+b+c$가 홀수이므로 a, b, c 모두 홀수이거나 a, b, c 중 두 개는 짝수, 한 개는 홀수이어야 하고, 조건 (나)에서 $a\times b\times c$가 3의 배수이므로 a, b, c 중 적어도 한 개는 3의 배수이어야 한다.

(ⅰ) a, b, c 모두 홀수이면서 a, b, c 중 적어도 한 개는 3의 배수인 경우

홀수 1, 3, 5, 7, 9 중에서 3개를 꺼내는 경우에서 3과 9가 모두 포함되지 않는 경우를 제외하면 되므로 경우의 수는

$_5C_3-1=10-1=9$ 세 수가 1, 5, 7인 경우의 1가지

따라서 그 확률은 $\dfrac{9}{_9C_3}=\dfrac{9}{84}=\dfrac{3}{28}$

(ⅱ) a, b, c 중 두 개는 짝수, 한 개는 홀수이면서 a, b, c 중 적어도 한 개는 3의 배수인 경우

짝수 2, 4, 6, 8 중에서 2개, 홀수 1, 3, 5, 7, 9 중에서 1개를 꺼내는 경우에서 짝수 중 6이 포함되지 않고 홀수 중 3과 9가 모두 포함되지 않는 경우를 제외하면 되므로 경우의 수는

$_4C_2\cdot{}_5C_1-{}_3C_2\cdot{}_3C_1=6\cdot5-3\cdot3=21$

따라서 그 확률은 $\dfrac{21}{_9C_3}=\dfrac{21}{84}=\dfrac{1}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\dfrac{3}{28}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{14}$ 답 ①

0468 전략 먼저 시행을 2번 반복한 후 불이 켜져 있는 전구가 2개인 경우를 생각한다.

풀이 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

주사위를 던지기 전에 불이 켜져 있는 전구를 a, b, 불이 꺼져 있는 전구를 c, d, e, f라 하자.

시행을 2번 반복한 후 불이 켜져 있는 전구가 2개인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 두 번 모두 같은 번호가 나오는 경우

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지

이므로 확률은 $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

(ⅱ) 한 번은 a, b 중 하나의 번호가 나오고 다른 한 번은 c, d, e, f 중 하나의 번호가 나오는 경우

경우의 수는 $_2C_1\cdot{}_4C_1\cdot2!=16$이므로 확률은 $\dfrac{16}{36}=\dfrac{4}{9}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\dfrac{1}{6}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{11}{18}$ 답 $\dfrac{11}{18}$

0469 전략 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n 중에서 1이 아닌 수가 2개인 경우와 3개인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 한 개의 주사위를 n번 던질 때 모든 경우의 수는 6^n

조건 (가)에서 $a_1>a_2a_3\cdots a_{n-1}$이므로 $a_1\neq1$

또 조건 (나)에서 $a_1=a_2a_3\cdots a_n$이므로 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 중에서 1이 아닌 수는 2개 또는 3개이다.

(ⅰ) a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n 중에서 1이 아닌 수가 2개인 경우

$a_1=p(p=2, 3, 4, 5, 6)$, $a_2=a_3=\cdots=a_{n-1}=1$, $a_n=p$

이므로 경우의 수는 5

따라서 그 확률은 $\dfrac{5}{6^n}$

(ⅱ) a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n 중에서 1이 아닌 수가 3개인 경우

$a_1=6$, a_2, a_3, $\cdots$, a_{n-1} 중에서 1개는 3, 나머지는 1, $a_n=2$

또는 $a_1=6$, a_2, a_3, $\cdots$, a_{n-1} 중에서 1개는 2, 나머지는 1, $a_n=3$

또는 $a_1=4$, a_2, a_3, $\cdots$, a_{n-1} 중에서 1개는 2, 나머지는 1, $a_n=2$

이므로 경우의 수는 $3(n-2)$

따라서 그 확률은 $\dfrac{3(n-2)}{6^n}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 주어진 조건을 모두 만족시킬 확률은

$\dfrac{5}{6^n}+\dfrac{3(n-2)}{6^n}=\dfrac{3n-1}{2^n\cdot3^n}$

$3n-1$과 3^n은 서로소이므로 $\dfrac{3n-1}{2^n\cdot3^n}=\dfrac{7}{2^{16}\cdot3^k}$에서

$n=k(n\geq16)$

$n=16$이면 $\dfrac{3\cdot16-1}{2^{16}\cdot3^{16}}\neq\dfrac{7}{2^{16}\cdot3^{16}}$

$n=17$이면 $\dfrac{3\cdot17-1}{2^{17}\cdot3^{17}}\neq\dfrac{7}{2^{16}\cdot3^{17}}$

$n=18$이면 $\dfrac{3\cdot18-1}{2^{18}\cdot3^{18}}\neq\dfrac{7}{2^{16}\cdot3^{18}}$

$n=19$이면 $\dfrac{3\cdot19-1}{2^{19}\cdot3^{19}}=\dfrac{7}{2^{16}\cdot3^{19}}$

따라서 $n=k=19$이므로 $n+k=38$ 답 38

0470 전략 '적어도'의 조건이 있는 경우 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되는 사건을 A라 하면 A^C는 남학생끼리 이웃하지 않게 배정되는 사건이다.

남	여	남
여		여
남	여	남

여	남	여
남		남
여	남	여

이때 남학생끼리 이웃하지 않게 배정되는 경우는 남학생, 여학생의 자리가 위의 그림과 같은 2가지이고, 각 좌석에 남학생 4명, 여학생 4명이 배정되는 경우의 수는 각각 $4!$, $4!$이므로 남학생끼리 이웃하지 않게 배정되는 경우의 수는 $2\cdot4!\cdot4!$

즉 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{2\cdot4!\cdot4!}{8!}=\dfrac{1}{35}$이므로

8개의 좌석에 8명이 배정되는 경우의 수

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{35}=\dfrac{34}{35}$

따라서 $p=\dfrac{34}{35}$이므로 $70p=70\cdot\dfrac{34}{35}=68$ 답 68

0471 전략 합성함수 $g\circ f$의 치역이 Z가 아닐 확률을 이용한다.

풀이 일대일함수 f의 개수는 $_3P_2=6$

치역이 Z인 함수 g의 개수는 치역의 원소가 0뿐이거나 1뿐인 경우를 제외하면 되므로 $_2\Pi_3-2=2^3-2=6$

즉 합성함수 $g\circ f$의 개수는 $6\cdot6=36$

합성함수 $g\circ f$의 치역이 Z인 사건을 A라 하면 A^C는 치역이 {0} 또는 {1}인 사건이다.

(i) 치역이 {0}인 경우
$f(1)=a$, $f(2)=b$라 하면
$g(a)=0$, $g(b)=0$, $g(c)=1$ $(c\neq a,\ c\neq b)$
이어야 하므로 치역이 {0}인 $g\circ f$의 개수는
${}_3\mathrm{P}_2=6$

$f(1)$과 $f(2)$의 값이 정해지면 함수 g가 하나로 정해진다.

(ii) 치역이 {1}인 경우
$f(1)=a$, $f(2)=b$라 하면
$g(a)=1$, $g(b)=1$, $g(c)=0$ $(c\neq a,\ c\neq b)$
이어야 하므로 치역이 {1}인 $g\circ f$의 개수는
${}_3\mathrm{P}_2=6$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{6+6}{36}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

답 ④

0472 전략 같은 것이 있는 순열의 수를 이용한다.

풀이 9개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$\frac{9!}{2!\cdot2!}$ ··· ❶

t가 c보다 앞에 오려면 c, c, t를 모두 x로 생각하여 일렬로 나열한 다음 맨 앞의 x를 t로, 나머지 x를 c로 바꾸면 된다.
x, x, x를 포함하여 9개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$\frac{9!}{2!\cdot3!}$ ··· ❷

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{9!}{2!\cdot3!}}{\frac{9!}{2!\cdot2!}}=\frac{1}{3}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{3}$

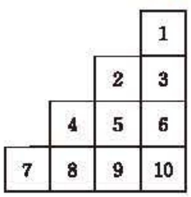
채점 기준표

❶ 9개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ t가 c보다 앞에 오도록 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ t가 c보다 앞에 올 확률을 구할 수 있다.	30%

0473 전략 각 정사각형에 번호를 매겨 가능한 경우를 순서쌍으로 나타낸다.

풀이 모든 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_5=252$ ··· ❶

오른쪽 그림과 같이 정사각형에 1부터 10까지의 번호를 매기고 a, b, c, d, e $(a<b<c<d<e)$에 화분을 놓는 것을 순서쌍 (a, b, c, d, e)로 나타내자.



(i) $a=1$인 경우
(1, 2, 4, 6, 7), (1, 2, 4, 6, 9),
(1, 2, 4, 7, 9), (1, 2, 4, 7, 10),
(1, 2, 6, 7, 9), (1, 4, 6, 7, 9)의 6가지

(ii) $a=2$인 경우
(2, 4, 6, 7, 9)의 1가지

(i), (ii)에서 어느 두 개의 화분도 서로 이웃하지 않게 놓는 방법의 수는
$6+1=7$ ··· ❷

이므로 그 확률은 $\frac{7}{252}=\frac{1}{36}$ ··· ❸

따라서 $p=36$, $q=1$이므로 $p+q=37$ ··· ❹

답 37

채점 기준표

❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	10%
❷ 어느 두 개의 화분도 서로 이웃하지 않게 놓는 방법의 수를 구할 수 있다.	60%
❸ 어느 두 개의 화분도 서로 이웃하지 않을 확률을 구할 수 있다.	20%
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10%

0474 전략 치역과 공역이 같으므로 함숫값이 같은 정의역의 두 원소가 존재한다.

풀이 정의역의 원소 6개 중에서 함숫값이 같은 두 원소를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2$이므로 치역과 공역이 같은 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수는 ${}_6\mathrm{C}_2\cdot5!=1800$ ··· ❶

정의역의 어떤 두 원소의 함숫값을 a라 하면

(i) $a=1$일 때, Y의 모든 원소와 a의 곱은 $400=20^2$이므로 조건을 만족시키는 경우는 $1\cdot2\cdot10=1\cdot4\cdot5$일 때이다.
$\therefore 3!\cdot3!\cdot2!=72$

(ii) $a=2$일 때, Y의 모든 원소와 a의 곱은 800이므로 조건을 만족시키는 경우는 존재하지 않는다.

(iii) $a=4$일 때, Y의 모든 원소와 a의 곱은 $1600=40^2$이므로 조건을 만족시키는 경우는 $1\cdot4\cdot10=2\cdot4\cdot5$일 때이다.
$\therefore 3!\cdot3!\cdot2!=72$

(iv) $a=5$일 때, Y의 모든 원소와 a의 곱은 2000이므로 조건을 만족시키는 경우는 존재하지 않는다.

(v) $a=10$일 때, Y의 모든 원소와 a의 곱은 4000이므로 조건을 만족시키는 경우는 존재하지 않는다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{1800}+\frac{72}{1800}=\frac{2}{25}$ ··· ❷

답 $\frac{2}{25}$

채점 기준표

❶ 치역과 공역이 같은 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	30%
❷ $f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot f(x_3)=f(x_4)\cdot f(x_5)\cdot f(x_6)$을 만족시킬 확률을 구할 수 있다.	70%

0475 전략 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$인 사건을 A라 하고 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$임을 이용한다.

풀이 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$에서
$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ··· ❶

$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$인 사건을 A라 하면 A^C는 $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$, 즉 세 개의 주사위의 눈의 수가 모두 다른 사건이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3}=\frac{5}{9}$ ··· ❷

따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ ··· ❸

답 $\frac{4}{9}$

채점 기준표	
❶ $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$임을 알 수 있다.	20%
❷ $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$일 확률을 구할 수 있다.	40%
❸ $(a-b)(b-c)(c-a)=0$일 확률을 구할 수 있다.	40%

0476 전략 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 두 꼭짓점을 택할 때 서로 다른 모서리 위의 두 점을 택하는 사건을 A라 하면 A^C는 같은 모서리 위의 두 점을 택하는 사건이다.
주어진 입체도형의 모서리의 개수가 16이므로 같은 모서리 위의 두 꼭짓점을 택할 확률은

$$P(A^C)=\frac{16}{{}_9C_2}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$ ⋯ ❶

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{5}{9}$

채점 기준표	
❶ 같은 모서리 위의 두 꼭짓점을 택할 확률을 구할 수 있다.	70%
❷ 서로 다른 모서리 위의 두 꼭짓점을 택할 확률을 구할 수 있다.	30%

0477 전략 자연수의 분할을 이용하여 눈의 수의 합이 8, 16인 경우의 수를 구한다.

풀이 세 눈의 수의 합이 8의 배수가 아닌 사건을 A라 하면 A^C는 세 눈의 수의 합이 8의 배수인 사건이다.

(i) 세 눈의 수의 합이 8인 경우

$8=6+1+1=5+2+1=4+3+1$
$=4+2+2=3+3+2$

이므로 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}+3!+3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=21$$ ⋯ ❶

(ii) 세 눈의 수의 합이 16인 경우

$16=6+6+4=6+5+5$

이므로 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=6$$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 $P(A^C)=\frac{21+6}{6^3}=\frac{1}{8}$ ⋯ ❸

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$ ⋯ ❹

답 $\frac{7}{8}$

채점 기준표	
❶ 세 눈의 수의 합이 8인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 세 눈의 수의 합이 16인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ 세 눈의 수의 합이 8의 배수일 확률을 구할 수 있다.	20%
❹ 세 눈의 수의 합이 8의 배수가 아닐 확률을 구할 수 있다.	20%

05 조건부확률

0478 $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{1, 3, 5\}$에서 $A\cap B=\{3, 5\}$이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0479 $A^C=\{1, 4, 6\}$, $B=\{1, 3, 5\}$에서 $A^C\cap B=\{1\}$이므로

$$P(A^C|B)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0480 동전의 앞면이 1개 나오는 사건을 A, 100원짜리 동전의 앞면이 나오는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{3}{8}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0481 (1) $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

(2) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$

답 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{4}$

0482 (1) (i) 첫 번째에 흰 공, 두 번째에 검은 공을 꺼낼 확률은

$\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{4}{15}$

(ii) 첫 번째에 검은 공, 두 번째에 검은 공을 꺼낼 확률은

$\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $P(B)=\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$

(2) 사건 $A\cap B$는 첫 번째에 꺼낸 공이 흰 공이고 두 번째에 꺼낸 공이 검은 공인 사건이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{10}}=\frac{2}{3}$$

(3) $P(B|A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{3}{5}$에서

$P(B|A)\neq P(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

답 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) 종속

0483 $P(A)P(B)=0.15\times0.2=0.03$, $P(A\cap B)=0.05$이므로
$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$
따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다. 답 종속

0484 $P(A)P(B)=0.8\times0.5=0.4$, $P(A\cap B)=0.4$이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$
따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다. 답 독립

0485 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.25\times0.4=0.1$ 답 0.1

0486 두 사건 A^C, B가 서로 독립이므로
$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)=(1-0.25)\times0.4=0.3$ 답 0.3

0487 두 사건 A, B^C가 서로 독립이므로
$P(A|B^C)=P(A)=0.25$ 답 0.25

0488 두 사건 A^C, B^C가 서로 독립이므로
$P(B^C|A^C)=P(B^C)=1-0.4=0.6$ 답 0.6

0489 주사위의 홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 동전의 앞면이 나오는 사건을 B라 하면 A, B는 서로 독립이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0490 두 선수 A, B가 표적을 명중시키는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.7\times0.8=0.56$ 답 0.56

0491 (1) $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
(2) $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이고, 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은 ${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$
답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{32}{81}$

0492 오지선다형인 한 문제에 임의로 답할 때 문제를 맞히는 사건을 A라 하면
$P(A)=\frac{1}{5}$, $P(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$
각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은
${}_3C_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{12}{125}$ 답 $\frac{12}{125}$

0493 정사면체를 한 번 던질 때 바닥에 놓인 면에 적힌 숫자가 1인 사건을 A라 하면
$P(A)=\frac{1}{4}$, $P(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은
${}_4C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$ 답 $\frac{27}{64}$

유형 01, 02 조건부확률 본책 74쪽

사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $P(A)$, $P(A\cap B)$를 구한다.
(ii) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$를 구한다. (단, $P(A)>0$)

0494 $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=0.2$
이므로 $P(A\cup B)=0.8$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로
$0.8=0.5+0.4-P(A\cap B)$
$\therefore P(A\cap B)=0.1$
$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.1}{0.5}=\frac{1}{5}=0.2$ 답 ②

0495 $P(B^C|A)=2P(B|A)$에서
$\frac{P(A\cap B^C)}{P(A)}=2\cdot\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$
$\therefore P(A\cap B^C)=2P(A\cap B)=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0496 $P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$
$\therefore P(A^C|B^C)=\frac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0497 $P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로
$A\cap B=\varnothing$ $\therefore A\subset B^C$
따라서 $A\cap B^C=A$이므로 $P(A\cap B^C)=P(A)=\frac{1}{4}$
$\therefore P(A|B^C)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

SSEN 특강

배반사건
사건 A와 사건 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉
$A\cap B=\varnothing$
일 때, A와 B는 서로 배반사건이라 한다.

0498 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}$에서
$P(B)=2P(A\cap B)$ ······ ①

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{3}$$ 에서

$$P(A)=3P(A\cap B)$$ ⋯ ②

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$$\frac{4}{5}=3P(A\cap B)+2P(A\cap B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{4}{5}=4P(A\cap B)\qquad \therefore P(A\cap B)=\frac{1}{5}$$ ⋯ ③

답 $\frac{1}{5}$

채점 기준표

① $P(B)$, $P(A\cap B)$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
② $P(A)$, $P(A\cap B)$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
③ $P(A\cap B)$를 구할 수 있다.	40%

0499 중국어 말하기 대회에 참가한 학생을 택하는 사건을 A, 2학년 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{32}{80},\ P(A\cap B)=\frac{22}{80}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{22}{80}}{\frac{32}{80}}=\frac{11}{16}$$

답 $\frac{11}{16}$

0500 남학생을 택하는 사건을 A, 자전거로 등교한 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$P(A)=0.4,\ P(A\cap B)=0.24$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.24}{0.4}=0.6$$

답 ③

0501 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 1등 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{\overbrace{{}_6C_1\cdot{}_4C_1}^{\text{당첨 제비가 1개}}+\overbrace{{}_6C_2\cdot{}_4C_0}^{\text{당첨 제비가 2개}}}{{}_{10}C_2}=\frac{24+15}{45}=\frac{13}{15},$$

$$P(A\cap B)=\frac{{}_1C_1\cdot{}_9C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{13}{15}}=\frac{3}{13}$$

답 ④

0502 음악 동호회의 전체 회원 수는 $x+45$이고, 여자 회원을 택하는 사건을 A, S노래를 선호하는 회원을 택하는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{x+15}{x+45},\ P(A\cap B)=\frac{x}{x+45}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{x}{x+45}}{\frac{x+15}{x+45}}=\frac{x}{x+15}$$

따라서 $\frac{x}{x+15}=\frac{1}{6}$이므로 $\quad 6x=x+15$

$$\therefore x=3$$

답 3

0503 두 영화 A, B의 관람 여부를 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	여학생	남학생	합계
A를 관람한 학생	125	145	270
B를 관람한 학생	110	180	290
A, B를 모두 관람한 학생	35	25	60

이때 두 영화 A, B를 모두 관람한 학생을 택하는 사건을 S, 남학생을 택하는 사건을 M이라 하면

$$P(S)=\frac{60}{500}=\frac{3}{25},\ P(S\cap M)=\frac{25}{500}=\frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(M|S)=\frac{P(S\cap M)}{P(S)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{25}}=\frac{5}{12}$$

답 ②

참고 두 영화 A, B를 관람한 남학생 수는 각각

$270-125=145,\ 290-110=180$

또 여학생은 200명, 남학생은 300명이므로 두 영화 A, B를 모두 관람한 여학생, 남학생 수는 각각

$125+110-200=35,\ 145+180-300=25$

유형 03 확률의 곱셈정리

본책 75쪽

두 사건 A, B에 대하여 $P(A)>0$, $P(B)>0$일 때,
$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$

0504 갑이 당첨권을 뽑는 사건을 A, 을이 당첨권을 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10},\ P(B|A)=\frac{5}{19}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{19}=\frac{3}{38}$$

답 ③

0505 빨간 주머니를 택하는 사건을 A, 100원짜리 동전을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B|A)=\frac{5}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{16}$$

답 ①

0506 첫 번째에 흰 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 빨간 공이 나오는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{n}{n+3},\ P(B|A)=\frac{3}{n+2}$$ ⋯ ①

따라서 첫 번째는 흰 공, 두 번째는 빨간 공이 나올 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{n}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}$$

$$=\frac{3n}{(n+3)(n+2)}$$

이므로 $\dfrac{3n}{(n+3)(n+2)}=\dfrac{1}{4}$ ⋯→ ❷

$(n+3)(n+2)=12n,\quad n^2-7n+6=0$

$(n-1)(n-6)=0\quad \therefore n=1$ 또는 $n=6$ ⋯→ ❸

따라서 모든 n의 값의 합은 7이다. ⋯→ ❹

답 7

채점 기준표

❶ $P(A)$, $P(B\|A)$를 구할 수 있다.	30%
❷ n에 대한 식을 세울 수 있다.	30%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ 모든 n의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

유형 04 $P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$ 본책 76쪽

두 사건 A, E에 대하여

$P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$
$=P(A)P(E|A)+P(A^C)P(E|A^C)$

0507 내일 비가 내리는 사건을 A, 내일 경기에서 이기는 사건을 E라 하면 내일 비가 내리지 않는 사건은 A^C이므로

$P(A)=0.2,\ P(A^C)=0.8,\ P(E|A)=0.7,\ P(E|A^C)=0.5$

따라서 구하는 확률은

$P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$
$=P(A)P(E|A)+P(A^C)P(E|A^C)$
$=0.2\times0.7+0.8\times0.5=0.54$

답 0.54

참고 확률이 0이 아닌 두 사건 A, E에 대하여 두 사건 $A\cap E$와 $A^C\cap E$는 서로 배반사건이다.
따라서 $E=(A\cap E)\cup(A^C\cap E)$와 확률의 덧셈정리에 의하여
$P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$

0508 암에 걸린 사람을 택하는 사건을 A, 의사가 암에 걸렸다고 진단하는 사건을 E라 하면 암에 걸리지 않은 사람을 택하는 사건은 A^C이므로

$P(A)=0.2,\ P(A^C)=0.8,\ P(E|A)=0.9,\ P(E|A^C)=0.05$

따라서 구하는 확률은

$P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$
$=P(A)P(E|A)+P(A^C)P(E|A^C)$
$=0.2\times0.9+0.8\times0.05=0.22$

답 ②

0509 A지역의 사람을 뽑는 사건을 A, B지역의 사람을 뽑는 사건을 B, 성이 김씨인 사람을 뽑는 사건을 E라 하면

$P(A)=\dfrac{25}{40}=\dfrac{5}{8},\ P(B)=\dfrac{15}{40}=\dfrac{3}{8},$

$P(E|A)=\dfrac{1}{4},\ P(E|B)=\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$
$=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)$
$=\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{32}$

답 ②

0510 A주머니를 택하는 사건을 A, B주머니를 택하는 사건을 B, 꺼낸 2개의 구슬이 서로 다른 색인 사건을 E라 하면

$P(A)=\dfrac{1}{2},\ P(B)=\dfrac{1}{2},\ P(E|A)=\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_5C_1}{{}_7C_2}=\dfrac{10}{21}$

$P(E|B)=\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_4C_1}{{}_7C_2}=\dfrac{4}{7}$ ⋯→ ❶

따라서 구하는 확률은

$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$
$=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)$
$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{10}{21}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{7}=\dfrac{11}{21}$ ⋯→ ❷

답 $\dfrac{11}{21}$

채점 기준표

❶ $P(A)$, $P(B)$, $P(E\|A)$, $P(E\|B)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $P(E)$를 구할 수 있다.	50%

유형 05 $P(A|E)=\dfrac{P(A\cap E)}{P(A\cap E)+P(A^C\cap E)}$ 본책 76쪽

사건 E가 일어났을 때 사건 A의 조건부확률

➡ $P(A|E)=\dfrac{P(A\cap E)}{P(E)}=\dfrac{P(A\cap E)}{P(A\cap E)+P(A^C\cap E)}$

0511 안경을 쓴 학생을 택하는 사건을 A, 재검사 요청을 받은 학생을 택하는 사건을 E라 하면

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\dfrac{60}{100}\cdot\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{40}$

$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)=\left(1-\dfrac{60}{100}\right)\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{25}$

$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)=\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{25}=\dfrac{13}{200}$

따라서 구하는 확률은

$P(A|E)=\dfrac{P(A\cap E)}{P(E)}=\dfrac{\frac{1}{40}}{\frac{13}{200}}=\dfrac{5}{13}$

답 ⑤

0512 홈 경기인 사건을 A, 경기에서 승리하는 사건을 E라 하면

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=0.3\times0.6=0.18$

$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)=(1-0.3)\times0.4=0.28$

$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)=0.18+0.28=0.46$

따라서 구하는 확률은

$P(A|E)=\dfrac{P(A\cap E)}{P(E)}=\dfrac{0.18}{0.46}=\dfrac{9}{23}$

답 ③

0513 A공장에서 생산된 제품을 택하는 사건을 A, B공장에서 생산된 제품을 택하는 사건을 B, 불량품인 사건을 E라 하면

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=0.4\times0.02=0.008$

$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=0.6\times0.05=0.03$

$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$
$=0.008+0.03=0.038$ ⋯→ ❶

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.008}{0.038}=\frac{4}{19}$$ ··· ❷

답 $\frac{4}{19}$

채점 기준표

❶ $\mathrm{P}(A\cap E)$, $\mathrm{P}(E)$를 구할 수 있다.	80%
❷ $\mathrm{P}(A|E)$를 구할 수 있다.	20%

0514 준열이가 2개의 동전을 던져서 뒷면이 0개 나오는 사건을 A, 1개 나오는 사건을 B, 2개 나오는 사건을 C, 혜리가 동전을 던져서 뒷면이 1개 나오는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{4}\cdot 0=0$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$$
$$=0+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(C|E)=\frac{\mathrm{P}(C\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$

답 ③

0515 양면이 모두 빨간색인 카드, 양면이 모두 검은색인 카드, 한 면은 빨간색이고 다른 면은 검은색인 카드를 꺼내는 사건을 각각 A, B, C, 바닥에 놓인 카드의 윗면이 빨간색인 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{3}\cdot 0=0$$

$$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$$
$$=\frac{1}{3}+0+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(C|E)=\frac{\mathrm{P}(C\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

답 ②

유형 06 사건의 독립과 종속의 판정

본책 77쪽

두 사건 A, B에 대하여
① $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ ➡ 독립
② $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ ➡ 종속

0516 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 표본공간은 {HH, HT, TH, TT}이고

$A=\{\mathrm{HH, HT}\}$, $B=\{\mathrm{HH, TH}\}$, $C=\{\mathrm{HT, TH}\}$

$\therefore A\cap B=\{\mathrm{HH}\}$, $B\cap C=\{\mathrm{TH}\}$, $A\cap C=\{\mathrm{HT}\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 B와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 A와 C는 서로 독립이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 서로 독립인 사건이다. 답 ⑤

0517 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $C=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\{2\}$, $A\cap C=\{3, 5, 7, 11, 13\}$

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(A)=\frac{8}{15}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 A와 C는 서로 종속이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(B)=\frac{7}{15}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{15}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 B와 C는 서로 종속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0518 $\mathrm{P}(A)=\frac{75+k}{200}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{80}{200}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{k}{200}$

두 사건 A, B가 서로 독립이기 위해서는 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이어야 하므로

$\frac{k}{200}=\frac{75+k}{200}\cdot\frac{2}{5}$, $\quad 5k=150+2k$

$3k=150 \quad \therefore k=50$

답 50

유형 07 독립과 종속의 성질

본책 78쪽

두 사건 A, B가 서로
① 독립 ➡ $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$,
$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$
② 종속 ➡ $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B|A^C)$, $\mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(A|B^C)$

0519 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^C)$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}$$
$$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$$
$$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$$

따라서 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.

ㄷ. $1-\mathrm{P}(A^C|B)=1-\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$=1-\dfrac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(A|B)$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A|B)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=1-\mathrm{P}(A^C|B)$

ㄹ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq 0$, $\mathrm{P}(B)\neq 0$이면

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이므로 A, B는 서로 독립이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0520 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\boxed{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$

$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$이고 $A\cap B$와 $A\cap B^C$는 서로 $\boxed{\text{배반}}$사건이므로 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)-\boxed{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$

$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=\mathrm{P}(A)\boxed{\mathrm{P}(B^C)}$

따라서 두 사건 A와 B^C도 서로 독립이다.

$\therefore$ (가) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (나) 배반 (다) $\mathrm{P}(B^C)$ 답 ⑤

유형 08, 09 독립인 사건의 확률 본책 78쪽

① 두 사건 A, B가 서로 독립이다.
$\Longleftrightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

② 세 사건 A, B, C가 서로 독립이다.
$\Longleftrightarrow \mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

0521 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$, $\quad \frac{4}{5}\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}-\mathrm{P}(B)$

$\frac{9}{5}\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}$ $\quad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}$ 답 $\frac{4}{9}$

0522 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B^C|A)=\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$ $\quad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(B^C|A)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 답 ⑤

0523 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, $\quad \frac{1}{6}=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$ ⋯ ❶

두 사건 B, C가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$\frac{7}{9}=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(C)$ $\quad \therefore \mathrm{P}(C)=\frac{1}{9}$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{9}$

채점 기준표	
❶ $\mathrm{P}(B)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $\mathrm{P}(C)$를 구할 수 있다.	50%

0524 A, B, C 세 도시에서 내일 비가 오는 사건을 각각 A, B, C라 하면 세 사건은 서로 독립이므로 내일 세 도시 중 두 도시에서만 비가 올 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B\cap C^C)+\mathrm{P}(A\cap B^C\cap C)+\mathrm{P}(A^C\cap B\cap C)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}$

$=\frac{5}{12}$ 답 $\frac{5}{12}$

0525 A, B가 합격하는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$

또 A, B 중 적어도 한 명이 합격할 확률이 $\frac{3}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$, $\quad \frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0526 두 수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다. 두 상자 A, B에서 짝수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이므로

(i) A, B에서 모두 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

(ii) A, B에서 모두 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\quad \frac{4}{25}+\frac{9}{25}=\frac{13}{25}$ 답 ⑤

0527 민준이의 미술 점수가 80점이려면 1차 수행 평가에서 A, 2차 수행 평가에서 C를 받거나 1차, 2차 수행 평가에서 모두 B를 받거나 1차 수행 평가에서 C, 2차 수행 평가에서 A를 받아야 한다.

⋯ ❶

(i) 1차 수행 평가에서 A, 2차 수행 평가에서 C를 받을 확률은

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

(ii) 1차, 2차 수행 평가에서 모두 B를 받을 확률은

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(iii) 1차 수행 평가에서 C, 2차 수행 평가에서 A를 받을 확률은

$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$ ⋯ ❷

이상에서 구하는 확률은 $\frac{1}{18}+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}=\frac{13}{36}$ ⋯ ❸

답 $\frac{13}{36}$

채점 기준표

❶ 민준이의 미술 점수가 80점이 되는 경우를 구할 수 있다.	30%
❷ 각각의 경우에 대한 확률을 구할 수 있다.	60%
❸ 민준이의 미술 점수가 80점일 확률을 구할 수 있다.	10%

0528 대한민국과 일본이 시합을 하려면 준결승 또는 결승에서 만나야 한다. 이때 대한민국을 제외한 나머지 6개의 나라를 4개, 2개의 두 조로 나누었을 때, 일본이 4개의 조에 배정되면 결승에서 만날 수 있고, 2개의 조에 배정되면 준결승에서 만날 수 있다.

(i) 준결승에서 만나 시합을 하게 될 확률은 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(ii) 결승에서 만나 시합을 하게 될 확률은 $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

답 ②

유형 10, 11 **독립시행의 확률** 본책 79, 80쪽

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

${}_nC_r p^r(1-p)^{n-r}$ (단, $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

0529 자유투를 한 번 이상 성공하는 사건을 A라 하면 자유투를 한 번도 성공하지 못하는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_3C_0\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{125}=\frac{124}{125}$

답 $\frac{124}{125}$

0530 빨간 공이 x번, 노란 공이 y번 나온다고 하면

$x+y=5,\ x+2y=7$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=2$

따라서 5회의 시행에서 7점을 얻으려면 빨간 공이 3번, 노란 공이 2번 나와야 하므로 구하는 확률은 ${}_5C_3\left(\frac{3}{7}\right)^3\left(\frac{4}{7}\right)^2$

답 ③

0531 경품을 받을 확률이 $\frac{1}{10}$이므로 음료수를 3병 구입한 사람이 경품으로 1병의 음료수를 받을 확률은

${}_3C_1\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\underbrace{\frac{9}{10}}=\frac{3\cdot 9^3}{10^4}=\frac{3^7}{10^4}$

경품으로 받은 음료수에는 '한 병 더'가 새겨져 있지 않을 확률

따라서 $\frac{3^7}{10^4}=\frac{3^k}{10^4}$이므로 $k=7$

답 7

0532 졸업시험에 통과하려면 1차 시험에 통과하거나 2차 시험에 통과해야 하므로 한 학생이 졸업시험에 통과할 확률은

$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

따라서 5명 중에서 3명만 졸업시험에 통과할 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

이므로 $p=16,\ q=5$

$\therefore p+q=21$

답 21

0533 여섯 번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 우승팀은 5번의 경기에서 3번 이기고 마지막 여섯 번째 경기에서도 이겨야 한다.
이때 두 팀 A, B는 실력이 같은 정도로 기대되므로 A팀과 B팀이 이길 확률은 각각 $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$이다.

(i) A팀이 우승할 확률은 ${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$

(ii) B팀이 우승할 확률은 ${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{5}{32}+\frac{5}{32}=\frac{5}{16}$

답 ②

0534 $10\cdot\frac{4}{5}=8$(명)이므로 8명 이상 참석해야 동아리 활동을 진행할 수 있다.

(i) 8명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{2^{10}}$

(ii) 9명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{10}{2^{10}}$

(iii) 10명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{2^{10}}$

이상에서 동아리 활동이 진행될 확률은

$\frac{45}{2^{10}}+\frac{10}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}=\frac{56}{2^{10}}=\frac{7}{2^7}$ $\therefore n=7$

답 7

0535 (i) 소수가 적힌 공을 꺼내고 동전을 3번 던져서 3번 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{3}{8}\cdot{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{64}$ ⋯ ❶

(ii) 짝수가 적힌 공을 꺼내고 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은 $\frac{4}{8}\cdot{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{8}$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{3}{64}+\frac{1}{8}=\frac{11}{64}$ ⋯ ❸

답 $\frac{11}{64}$

채점 기준표

❶ 소수가 적힌 공을 꺼내고 동전의 앞면이 3번 나올 확률을 구할 수 있다.	40%
❷ 짝수가 적힌 공을 꺼내고 동전의 앞면이 3번 나올 확률을 구할 수 있다.	40%
❸ 동전의 앞면이 3번 나올 확률을 구할 수 있다.	20%

0536 점 P가 색칠한 부분을 지나려면 점 (3, 1) 또는 점 (3, 2)를 지나야 한다.

(i) 점 P가 점 (3, 1)을 지날 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$$

4 이하의 눈이 나올 확률

(ii) 점 P가 점 (3, 2)를 지날 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$$

(iii) 점 P가 두 점 (3, 1), (3, 2)를 모두 지날 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\frac{1}{3}=\frac{32}{243}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{32}{81}+\frac{80}{243}-\frac{32}{243}=\frac{16}{27}$$

답 ③

0537 전략 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$이다.

풀이 도서관 이용자 300명 중에서 임의로 선택한 한 명이 남성인 사건을 A, 20대인 사건을 B, 30대인 사건을 C라 하자.

이때 30대가 차지하는 비율이 12%이므로

$$(60-a)+b=300\cdot\frac{12}{100}\qquad\therefore a-b=24\qquad\cdots\cdots ㉠$$

또 $P(B|A)=P(C|A^C)$이므로

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A^C\cap C)}{P(A^C)}$$

$$\frac{\frac{a}{300}}{\frac{200}{300}}=\frac{\frac{b}{300}}{\frac{100}{300}},\qquad \frac{a}{200}=\frac{b}{100}\qquad\therefore a=2b\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=48$, $b=24$

$\therefore a+b=72$

답 72

0538 전략 n번째에 A가 공을 받지 못할 확률을 각각 구한다. $(1\le n\le 5)$

풀이 A에서 시작하여 n번째에 공을 받은 사람을 a_n이라 하자.

a_1이 될 수 있는 사람은 B, C, D, E, F의 5명이므로 A가 공을 받지 못할 확률은 1

a_2가 될 수 있는 사람은 A, a_1을 제외한 4명이므로 A가 공을 받지 못할 확률은 1

a_3이 될 수 있는 사람은 a_1, a_2를 제외한 4명이고 이 4명에 A가 포함되므로 A가 공을 받지 못할 확률은 $\frac{3}{4}$

a_4가 될 수 있는 사람은 a_2, a_3을 제외한 4명이고 이 4명에 A가 포함되므로 A가 공을 받지 못할 확률은 $\frac{3}{4}$

a_5가 될 수 있는 사람은 a_3, a_4를 제외한 4명이고 이 4명에 A가 포함되므로 A가 공을 받지 못할 확률은 $\frac{3}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$1\cdot1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$$

답 ③

0539 전략 첫 번째에 이긴 학생이 없는 경우와 첫 번째에 이긴 학생이 2명인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 가위바위보를 2번 하여 A가 최종 승자로 정해지는 사건을 X, 두 번째 가위바위보를 한 학생이 2명인 사건을 Y라 하자.

(i) 첫 번째에 이긴 학생이 없는 경우

첫 번째에 모두 다른 것을 내거나 모두 같은 것을 내고, 두 번째에 A가 이길 확률은

$$P(X\cap Y^C)=\frac{3!+3}{3^3}\cdot\frac{3}{3^3}=\frac{1}{27}$$

모두 다른 것을 내는 경우의 수는 3!
모두 같은 것을 내는 경우의 수는 3
A가 이기는 경우는 (가위, 보, 보), (바위, 가위, 가위), (보, 바위, 바위)의 3가지

(ii) 첫 번째에 이긴 학생이 2명인 경우

첫 번째에 A를 포함하여 2명이 이기고, 두 번째에 A가 이길 확률은

$$P(X\cap Y)=\frac{3\cdot2}{3^3}\cdot\frac{3}{3^2}=\frac{2}{27}$$

(i), (ii)에서

$$P(X)=P(X\cap Y^C)+P(X\cap Y)$$
$$=\frac{1}{27}+\frac{2}{27}=\frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}$$

답 ④

0540 전략 두 사건 A, B에 대하여 $A\cap B=\varnothing$이면 A, B는 서로 배반사건이고, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이면 A, B는 서로 독립이다.

풀이 ㄱ. $A_4=\{4, 8\}$, $A_6=\{6\}$이므로

$A_4\cap A_6=\varnothing$

따라서 A_4와 A_6은 서로 배반사건이다.

ㄴ. $A_2=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A_5=\{5, 10\}$, $A_2\cap A_5=\{10\}$이므로

$$P(A_2)=\frac{1}{2},\ P(A_5)=\frac{1}{5},\ P(A_2\cap A_5)=\frac{1}{10}$$

$\therefore P(A_2)P(A_5)=P(A_2\cap A_5)$

따라서 A_2와 A_5는 서로 독립이다.

ㄷ. $A_n\subset A_m$이므로 $A_m\cap A_n=A_n$

A_m과 A_n의 원소의 개수를 각각 a, b라 하면

$$P(A_m)=\frac{a}{10},\ P(A_n)=\frac{b}{10},$$

$$P(A_m\cap A_n)=P(A_n)=\frac{b}{10}$$

따라서 $P(A_m)P(A_n)=\frac{ab}{100}$이므로

$$P(A_m)P(A_n)\neq P(A_m\cap A_n)\ (\because a\neq10)$$

즉 A_m과 A_n은 서로 종속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0541 전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이다.

풀이 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A)P(B)=P(A\cap B)=\frac{1}{9}$$

05 조건부확률

$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A^C \cap B^C) &= \mathrm{P}((A \cup B)^C) \\ &= 1 - \mathrm{P}(A \cup B) \\ &= 1 - \{\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)\} \\ &= \frac{10}{9} - \{\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)\} \end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$가 최소일 때 $\mathrm{P}(A^C \cap B^C)$는 최대이다.
이때 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B) &\ge 2\sqrt{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)} \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

즉 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$의 최솟값이 $\frac{2}{3}$이므로 $\mathrm{P}(A^C \cap B^C)$의 최댓값은

$$\frac{10}{9} - \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

답 $\frac{4}{9}$

0542 전략 $f(n_1)+f(n_2)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(f(n_1), f(n_2))$를 구한다.

풀이 $f(1)=f(5)=-i$, $f(2)=f(6)=-1$, $f(3)=i$, $f(4)=1$이므로 $f(n_1)+f(n_2)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(f(n_1), f(n_2))$는

$(-i, i)$, $(i, -i)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$

(i) $f(n_1)=-i$, $f(n_2)=i$일 확률은 $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

(ii) $f(n_1)=i$, $f(n_2)=-i$일 확률은 $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18}$

(iii) $f(n_1)=-1$, $f(n_2)=1$일 확률은 $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

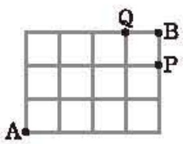
(iv) $f(n_1)=1$, $f(n_2)=-1$일 확률은 $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18}$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$$

답 ②

0543 전략 동전을 7번 던지는 경우와 8번 던지는 경우로 나누어 생각한다.



풀이 (i) 동전을 7번 던져서 B에 도착할 확률

① P를 지날 때

앞면이 4번, 뒷면이 2번 나와야 하므로

$${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\mathrm{P}\to\mathrm{B}} = \frac{15}{2^7}$$

② Q를 지날 때

앞면이 3번, 뒷면이 3번 나와야 하므로

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\mathrm{Q}\to\mathrm{B}} = \frac{20}{2^7}$$

(ii) 동전을 8번 던져서 B에 도착할 확률

① P를 지날 때

앞면이 5번, 뒷면이 2번 나와야 하므로

$${}_7\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\mathrm{P}\to\mathrm{B}} = \frac{21}{2^8}$$

② Q를 지날 때

앞면이 3번, 뒷면이 4번 나와야 하므로

$${}_7\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\mathrm{Q}\to\mathrm{B}} = \frac{35}{2^8}$$

따라서 동전을 던진 횟수가 8회 이하로 게임이 끝나는 사건을 A, P를 지나는 사건을 B라 하면

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B|A) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \\ &= \frac{\frac{15}{2^7}+\frac{21}{2^8}}{\frac{15}{2^7}+\frac{20}{2^7}+\frac{21}{2^8}+\frac{35}{2^8}} \\ &= \frac{30+21}{30+40+21+35} = \frac{17}{42} \end{aligned}$$

답 $\frac{17}{42}$

0544 전략 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$임을 이용하여 조건부확률을 구한다.

풀이 각 과목을 4시간씩 나누는 경우는 다음과 같다.

수학, 영어, 국어, 사회

또는 수학, 영어, 국어, 과학

또는 수학, 영어, 사회, 과학 ⋯ ❶

같은 요일에 같은 과목을 2시간 이상 배치하지 않는 사건을 A, 1교시에 수학 또는 영어를 배치하는 사건을 B라 하면 사건 A의 경우의 수는 $n(A)=3!\cdot4!\cdot4!\cdot4!$ ⋯ ❷

또 사건 $A\cap B$의 경우의 수는

$$\begin{aligned} n(A\cap B) &= 3!\cdot({}_2\mathrm{C}_1\cdot3!)\cdot({}_2\mathrm{C}_1\cdot3!)\cdot({}_2\mathrm{C}_1\cdot3!) \\ &= 8\cdot3!\cdot3!\cdot3!\cdot3! \end{aligned}$$ ⋯ ❸

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{8\cdot3!\cdot3!\cdot3!\cdot3!}{3!\cdot4!\cdot4!\cdot4!}=\frac{1}{8}$$ ⋯ ❹

답 $\frac{1}{8}$

채점 기준표

❶ 각 과목을 4시간씩 나누는 경우를 구할 수 있다.	20%
❷ $n(A)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $n(A\cap B)$를 구할 수 있다.	30%
❹ $\mathrm{P}(B\|A)$를 구할 수 있다.	20%

0545 전략 $a=0$, $a=1$, $a=2$인 경우로 나누어 구한다.

풀이 (i) $a=0$일 때

$b\ge1$이므로 $3a=b$일 확률은 0이다. ⋯ ❶

(ii) $a=1$일 때

$a=1$이므로 3번 중 흰 공 2번, 검은 공 1번이 나와야 한다.

$$\therefore \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{14}$$

또 $b=3$이므로 남은 2번 중 흰 공 1번, 노란 공 1번 또는 검은 공 2번이 나와야 한다.

$$\therefore \left(\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}\right)+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{3}$$

따라서 $3a=b$일 확률은

$$\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{14}$$ → ❷

(iii) $a=2$일 때

$a=2$이므로 3번 중 흰 공 1번, 검은 공 2번 또는 흰 공 2번, 노란 공 1번이 나와야 한다.

그런데 $b=6$이므로 흰 공 2번, 노란 공 1번은 나올 수 없다.

따라서 3번 중 흰 공 1번, 검은 공 2번이 나와야 하므로

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{1}{7}$$

또 $b=6$에서 남은 2번 모두 노란 공이 나와야 하므로

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

따라서 $3a=b$일 확률은

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{105}$$ → ❸

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{105}=\frac{17}{210}$$ → ❹

답 $\frac{17}{210}$

채점 기준표

❶ $a=0$일 때 $3a=b$일 확률을 구할 수 있다.	20%
❷ $a=1$일 때 $3a=b$일 확률을 구할 수 있다.	30%
❸ $a=2$일 때 $3a=b$일 확률을 구할 수 있다.	30%
❹ $3a=b$일 확률을 구할 수 있다.	20%

참고 $a=3,\ 4,\ 5$일 때 $b=9,\ 12,\ 15$이므로 $3a=b$일 확률은 0이다.

0546 **전략** A가 7번째, 8번째, 9번째 게임에서 이기는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 7번째 게임에서 A가 상금을 모두 가지는 경우

A가 6번째, 7번째 게임에서 모두 이겨야 하므로 확률은

$${}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$ → ❶

(ii) 8번째 게임에서 A가 상금을 모두 가지는 경우

A가 6번째, 7번째 게임 중에서 1번 이기고 8번째 게임에서 이겨야 하므로 확률은

$${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$ → ❷

(iii) 9번째 게임에서 A가 상금을 모두 가지는 경우

A가 6번째, 7번째, 8번째 게임 중에서 1번 이기고 9번째 게임에서 이겨야 하므로 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$ → ❸

이상에서 구하는 확률은 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$ → ❹

답 $\frac{11}{16}$

채점 기준표

❶ 7번째 게임에서 A가 상금을 모두 가질 확률을 구할 수 있다.	30%
❷ 8번째 게임에서 A가 상금을 모두 가질 확률을 구할 수 있다.	30%
❸ 9번째 게임에서 A가 상금을 모두 가질 확률을 구할 수 있다.	30%
❹ A가 상금을 모두 가질 확률을 구할 수 있다.	10%

Ⅲ 통계

06 확률분포

0547 이산확률변수는 확률변수가 가질 수 있는 값을 셀 수 있어야 하므로 보기에서 이산확률변수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

0548 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

$X=1$인 경우는 HTT, THT, TTH의 3가지

$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{8}$

$X=2$인 경우는 HHT, HTH, THH의 3가지

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8}$

$X=3$인 경우는 HHH의 1가지

$\therefore \mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

답 풀이 참조

0549 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값은 0, 1, 2

(2) $\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2C_0\cdot{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{5}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2C_2\cdot{}_4C_1}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$

(3)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

답 풀이 참조

0550 5개의 제비 중 2개의 제비를 동시에 뽑는 방법의 수는

${}_5C_2$

뽑은 2개의 제비 중에 x개의 당첨 제비가 포함되는 경우의 수는

${}_3C_x\cdot{}_{5-3}C_{2-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3C_{\boxed{x}}\cdot{}_2C_{\boxed{2-x}}}{{}_5C_2}\ (x=0,\ 1,\ 2)$$

답 x, $2-x$

0551 확률의 총합은 1이므로 $b=1$

또 $\frac{1}{10}+a+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=1$이므로 $a=\frac{3}{10}$

답 $a=\frac{3}{10}$, $b=1$

0552 $\mathrm{P}(X=0$ 또는 $X=2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0553 $P(-1\le X\le 1)$

$=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)$

$=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$ 답 $\frac{4}{5}$

다른 풀이 $P(-1\le X\le 1)=1-P(X=2)$

$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

0554 (1) $E(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

(2) $E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{2}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{15}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{5}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

0555 (1) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

$P(X=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,

$P(X=1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,

$P(X=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

(2) $E(X)=0\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{9}+1^2\cdot\frac{4}{9}+2^2\cdot\frac{4}{9}=\frac{20}{9}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{20}{9}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

답 풀이 참조

0556 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$P(X=100)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$P(X=200)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+100\cdot\frac{1}{2}+200\cdot\frac{1}{4}=100$

따라서 구하는 기댓값은 100원이다. 답 100원

0557 $E(3X-1)=3E(X)-1=3\cdot 10-1=29$

$V(3X-1)=3^2V(X)=9\cdot 9=81$

$\sigma(3X-1)=3\sigma(X)=3\cdot 3=9$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ 답 평균: 29, 분산: 81, 표준편차: 9

0558 $E\left(-\frac{1}{2}X+6\right)=-\frac{1}{2}E(X)+6=-\frac{1}{2}\cdot 10+6=1$

$V\left(-\frac{1}{2}X+6\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2V(X)=\frac{1}{4}\cdot 9=\frac{9}{4}$

$\sigma\left(-\frac{1}{2}X+6\right)=\left|-\frac{1}{2}\right|\sigma(X)=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$

답 평균: 1, 분산: $\frac{9}{4}$, 표준편차: $\frac{3}{2}$

0559 $E(X)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{23}{6}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{23}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{19}{12}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{19}{12}}=\frac{\sqrt{57}}{6}$

(1) $E(2X+3)=2E(X)+3=2\cdot\frac{3}{2}+3=6$

(2) $V(6X-2)=6^2V(X)=36\cdot\frac{19}{12}=57$

(3) $\sigma(-6X+5)=|-6|\sigma(X)=6\cdot\frac{\sqrt{57}}{6}=\sqrt{57}$

답 (1) 6 (2) 57 (3) $\sqrt{57}$

0560 한 개의 동전을 던질 때 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 뒷면이 나오는 동전의 개수 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

답 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$

0561 2개의 구슬을 차례대로 꺼낼 때 꺼낸 구슬을 다시 넣지 않으므로 각 시행은 서로 독립이 아니다.

따라서 X는 이항분포를 따르지 않는다.

답 이항분포를 따르지 않는다.

0562 한 문제를 맞힐 확률은 $\frac{1}{5}$이므로 맞히는 문제의 개수 X는 이항분포 $B\left(12, \frac{1}{5}\right)$을 따른다. 답 $B\left(12, \frac{1}{5}\right)$

0563 (1) $P(X=x)={}_6C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

(2) $P(X=2)={}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$

답 풀이 참조

0564 (1) $P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$

(2) $P(X=3)={}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{45}{512}$

답 풀이 참조

0565 $E(X)=150\cdot\frac{2}{5}=60$

$V(X)=150\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=36$

$\sigma(X)=\sqrt{36}=6$

답 평균: 60, 분산: 36, 표준편차: 6

0566 $E(X)=240\cdot\frac{3}{4}=180$

$V(X)=240\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=45$

$\sigma(X)=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

답 평균: 180, 분산: 45, 표준편차: $3\sqrt{5}$

0567 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(27,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

(1) $E(X)=27\cdot\frac{1}{3}=9$

(2) $V(X)=27\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=6$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{6}$

답 (1) 9 (2) 6 (3) $\sqrt{6}$

0568 (1) $E(X)=1$에서 $\quad 10p=1 \qquad \therefore p=\frac{1}{10}$

(2) X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$V(X)=10\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{10}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

답 (1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{9}{10}$ (3) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

유형 01 확률질량함수의 성질; $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$ 본책 86쪽

확률변수 X의 확률질량함수 $P(X=x_i)=p_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$에 대하여

$\sum_{i=1}^{n} p_i=p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

0569 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$k\cdot1^2+k\cdot2^2+k\cdot3^2=1, \quad 14k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{14}$

답 ④

0570 확률의 총합은 1이므로

$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}+a^2=1, \qquad 2a^2+a-1=0$

$(a+1)(2a-1)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

이때 $0\le P(X=x)\le1$이므로 $\quad a=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0571 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=100)=1$

$\frac{a}{1\cdot2}+\frac{a}{2\cdot3}+\cdots+\frac{a}{100\cdot101}=1$

$a\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)\right\}=1$

$a\left(1-\frac{1}{101}\right)=1, \qquad \frac{100}{101}a=1 \qquad \therefore a=\frac{101}{100}$

답 ⑤

SSEN 특강

부분분수로의 변형

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

유형 02 확률질량함수의 성질; $P(X=x_i$ 또는 $X=x_j)$ 본책 86쪽

확률변수 X의 확률질량함수 $P(X=x_i)=p_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$에 대하여

① $P(X=x_i$ 또는 $X=x_j)=P(X=x_i)+P(X=x_j)=p_i+p_j$

(단, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ i\neq j$)

② $P(x_i\le X\le x_j)=\sum_{k=i}^{j}P(X=x_k)=\sum_{k=i}^{j}p_k$ (단, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ i\le j$)

0572 확률의 총합은 1이므로

$3a+4a+a=1, \qquad 8a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$P(X^2=1)=P(X=-1$ 또는 $X=1)$

$=P(X=-1)+P(X=1)$

$=3a+a=4a=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

답 ③

0573 확률의 총합은 1이므로

$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=1$

$\left(k-\frac{2}{8}\right)+\left(k-\frac{1}{8}\right)+k+\left(k-\frac{1}{8}\right)=1$

$4k-\frac{1}{2}=1, \qquad 4k=\frac{3}{2} \qquad \therefore k=\frac{3}{8}$

$$\therefore P(X=x)=\begin{cases}\frac{3}{8}+\frac{x}{8} & (x=-2,\ -1)\\ \frac{3}{8}-\frac{x}{8} & (x=0,\ 1)\end{cases}$$

따라서 구하는 확률은

$P(X=-1$ 또는 $X=0)=P(X=-1)+P(X=0)$

$=\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\right)+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

답 $\frac{5}{8}$

0574 $P(X=2)=\frac{3}{4}P(X=4)$에서

$$b=\frac{3}{4}\cdot 2a \qquad \therefore b=\frac{3}{2}a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

확률의 총합은 1이므로

$$a+b+3b+2a+\frac{1}{4}=1 \qquad \therefore 3a+4b=\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{12}$, $b=\frac{1}{8}$ ⋯➊

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(2\le X\le 4)&=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\ &=b+3b+2a=2a+4b\\ &=2\cdot\frac{1}{12}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{2}{3} \end{aligned}$$ ⋯➋

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준표	
➊ 상수 a, b의 값을 구할 수 있다.	60%
➋ $P(2\le X\le 4)$를 구할 수 있다.	40%

0575 p_1, p_2, p_3, p_4가 이 순서대로 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열을 이루므로 $p_2=\frac{1}{2}p_1$, $p_3=\frac{1}{2^2}p_1$, $p_4=\frac{1}{2^3}p_1$

확률의 총합은 1이므로 $p_1+\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{2^2}p_1+\frac{1}{2^3}p_1=1$

$$\frac{15}{8}p_1=1 \qquad \therefore p_1=\frac{8}{15}$$

$X^2-5X+6=0$에서

$$(X-2)(X-3)=0 \qquad \therefore X=2 \text{ 또는 } X=3$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X^2-5X+6=0)&=P(X=2 \text{ 또는 } X=3)\\ &=P(X=2)+P(X=3)\\ &=p_2+p_3=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{2^2}p_1\\ &=\frac{3}{4}p_1=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{15}=\frac{2}{5} \end{aligned}$$

답 ③

유형 03 확률분포와 확률

본책 [illegible]쪽

(i) 확률변수가 가질 수 있는 값을 모두 찾는다.
(ii) 확률변수가 각 값을 가질 확률을 구한다.

0576 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14},\ P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_5C_1}{{}_8C_2}=\frac{15}{28},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_5C_0}{{}_8C_2}=\frac{3}{28}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X\ge 1)&=P(X=1)+P(X=2)\\ &=\frac{15}{28}+\frac{3}{28}=\frac{9}{14} \end{aligned}$$

답 $\frac{9}{14}$

0577 나오는 두 눈의 수를 각각 a, b라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수 중 작지 않은 수가 크거나 같은

3인 경우는 (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)의 5가지

4인 경우는

(1, 4), (4, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4)의 7가지

5인 경우는

(1, 5), (5, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 5)의 9가지

이므로 그 확률은 각각

$$P(X=3)=\frac{5}{36},\ P(X=4)=\frac{7}{36},\ P(X=5)=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(3\le X\le 5)&=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\\ &=\frac{5}{36}+\frac{7}{36}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12} \end{aligned}$$

답 ④

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	1

0578 (1) 10개의 제품 중에서 3개의 제품을 뽑는 방법의 수는

${}_{10}C_3$

뽑힌 3개의 제품 중에서 불량품이 x개인 경우의 수는

${}_4C_x\cdot{}_{10-4}C_{3-x}$ $(x=0, 1, 2, 3)$

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{{}_4C_x\cdot{}_6C_{3-x}}{{}_{10}C_3} \ (x=0, 1, 2, 3)$$ ⋯➊

(2) 불량품이 2개 이하로 나올 확률은

$$\begin{aligned} P(X\le 2)&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\ &=1-P(X=3) \end{aligned}$$

이때 $P(X=3)=\frac{{}_4C_3\cdot{}_6C_0}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{30}$이므로 구하는 확률은

$$1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$$ ⋯➋

답 (1) $P(X=x)=\frac{{}_4C_x\cdot{}_6C_{3-x}}{{}_{10}C_3}$ $(x=0, 1, 2, 3)$ (2) $\frac{29}{30}$

채점 기준표	
➊ X의 확률질량함수를 구할 수 있다.	50%
➋ 불량품이 2개 이하로 나올 확률을 구할 수 있다.	50%

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

0579 $X^2-3X<0$에서

$X(X-3)<0 \quad \therefore 0<X<3$

이때 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이므로

$P(X^2-3X<0)=P(0<X<3)$
$=P(X=1)+P(X=2)$

뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수의 차가

1인 경우는 (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)의 4가지

2인 경우는 (1, 3), (2, 4), (3, 5)의 3가지

이므로 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{4}{{}_5C_2}=\frac{2}{5},\ P(X=2)=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$P(X^2-3X<0)=P(X=1)+P(X=2)$
$=\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

답 ⑤

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

0580 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_7C_2}{{}_{10}C_5}=\frac{1}{12},\ P(X=3)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_7C_3}{{}_{10}C_5}=\frac{5}{12},$$

$$P(X=4)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_4}{{}_{10}C_5}=\frac{5}{12},\ P(X=5)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_7C_5}{{}_{10}C_5}=\frac{1}{12}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

따라서

$$P(X=4)+P(X=5)=\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$$

이므로 $P(X\geq4)=\frac{1}{2} \quad \therefore a=4$

답 4

유형 04 확률변수의 평균, 분산, 표준편차 ; 확률분포가 주어진 경우 본책 89쪽

확률변수 X의 확률질량함수가 $P(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$일 때

① 평균: $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

② 분산: $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

③ 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

0581 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+a+\frac{1}{4}=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}=\frac{13}{8}$

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{29}{8}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{29}{8}-\left(\frac{13}{8}\right)^2=\frac{63}{64}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

따라서 X의 평균은 $\frac{13}{8}$, 표준편차는 $\frac{3\sqrt{7}}{8}$이다.

답 평균: $\frac{13}{8}$, 표준편차: $\frac{3\sqrt{7}}{8}$

0582 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\cdot\frac{1}{7}+2\cdot\frac{3}{14}+3\cdot\frac{2}{7}+4\cdot\frac{5}{14}=\frac{20}{7}$

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{7}+2^2\cdot\frac{3}{14}+3^2\cdot\frac{2}{7}+4^2\cdot\frac{5}{14}=\frac{65}{7}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{65}{7}-\left(\frac{20}{7}\right)^2=\frac{55}{49}$

답 ④

0583 확률의 총합은 1이므로

$a+b+c=1$ ······ ㉠

$E(X)=1$이므로 $0\cdot a+1\cdot b+2\cdot c=1$

$\therefore b+2c=1$ ······ ㉡

$V(X)=\frac{1}{2}$이므로 $(0^2\cdot a+1^2\cdot b+2^2\cdot c)-1^2=\frac{1}{2}$

$\therefore b+4c=\frac{3}{2}$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{4}$

$\therefore abc=\frac{1}{32}$

답 ①

0584 확률의 총합은 1이므로 $\frac{2}{5}+a+b+c=1$

$\therefore a+b+c=\frac{3}{5}$ ······ ㉠

a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+c$ ······ ㉡

㉠에서 $a+c=\frac{3}{5}-b$이므로 ㉡에 대입하면

$2b=\frac{3}{5}-b,\quad 3b=\frac{3}{5} \quad \therefore b=\frac{1}{5}$

또 $\frac{2}{5}$, a, $\frac{1}{5}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5} \quad \therefore a=\frac{3}{10}$

$a=\frac{3}{10}$, $b=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{10}+\frac{1}{5}+c=\frac{3}{5} \quad \therefore c=\frac{1}{10}$

한편 E$(X)=4$이므로

$$k\cdot\frac{2}{5}+2k\cdot\frac{3}{10}+3k\cdot\frac{1}{5}+4k\cdot\frac{1}{10}=4$$

$2k=4 \quad \therefore k=2$

$$\therefore E(X^2)=2^2\cdot\frac{2}{5}+4^2\cdot\frac{3}{10}+6^2\cdot\frac{1}{5}+8^2\cdot\frac{1}{10}=20$$ 답 20

SSEN 특강

등차중항

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라 한다. ➡ $b=\frac{a+c}{2}$

유형 05 확률변수의 평균, 분산, 표준편차 ; 확률분포가 주어지지 않은 경우

본책 ●쪽

(i) 확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값에 대하여 그 값을 가질 확률을 각각 구한다.
(ii) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.
(iii) 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.

0585 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35},\ P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_4C_2}{{}_7C_3}=\frac{18}{35},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35},\ P(X=3)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_4C_0}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{4}{35}+1\cdot\frac{18}{35}+2\cdot\frac{12}{35}+3\cdot\frac{1}{35}=\frac{9}{7},$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{4}{35}+1^2\cdot\frac{18}{35}+2^2\cdot\frac{12}{35}+3^2\cdot\frac{1}{35}=\frac{15}{7}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{15}{7}-\left(\frac{9}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$$ 답 $\frac{24}{49}$

0586 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{15},$$

$$P(X=1)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{15}+1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{8}{15}=\frac{22}{15}$$ 답 ③

0587 뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수 중 큰 수가

1인 경우는 $(0, 1)$의 1가지
2인 경우는 $(0, 2)$, $(1, 2)$의 2가지
3인 경우는 $(0, 3)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$의 3가지

이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6},\ P(X=2)=\frac{2}{{}_4C_2}=\frac{1}{3},$$

$$P(X=3)=\frac{3}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

··· ❶

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{3},$$

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{2}=6$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=6-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$ ··· ❷

답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

채점 기준표	
❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	50%
❷ $\sigma(X)$를 구할 수 있다.	50%

0588 두 눈의 수의 차는 다음 표와 같다.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ P(X=1)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18},$$

$$P(X=2)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9},\ P(X=3)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$

$P(X=4)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, $P(X=5)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{5}{18}+2\cdot\frac{2}{9}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{9}+5\cdot\frac{1}{18}$$
$$=\frac{35}{18}$$

답 ④

유형 06 기댓값 본책 91쪽

확률변수 X의 확률질량함수가 $P(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$일 때,
X의 기댓값 ➡ $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

0589 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고, 100원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 2개를 동시에 던져서 나오는 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

100원	50원	50원	받는 금액(원)
H	H	H	200
H	H	T	150
H	T	H	150
H	T	T	100
T	H	H	100
T	H	T	50
T	T	H	50
T	T	T	0

한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 50, 100, 150, 200이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{1}{8}$, $P(X=50)=\frac{1}{4}$, $P(X=100)=\frac{1}{4}$,

$P(X=150)=\frac{1}{4}$, $P(X=200)=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	50	100	150	200	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+50\cdot\frac{1}{4}+100\cdot\frac{1}{4}+150\cdot\frac{1}{4}+200\cdot\frac{1}{8}$$
$$=100$$

따라서 구하는 기댓값은 100원이다. 답 ②

0590 한 장의 행운권으로 받을 수 있는 상금을 X원이라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10000	50000	100000	1000000	합계
$P(X=x)$	$\frac{649}{1000}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{1000}$	1

$$\therefore E(X)=0\cdot\frac{649}{1000}+10000\cdot\frac{1}{5}+50000\cdot\frac{1}{10}+100000\cdot\frac{1}{20}$$
$$+1000000\cdot\frac{1}{1000}$$
$$=13000$$

따라서 구하는 기댓값은 13000원이다. 답 13000원

0591 한 번의 게임에서 받을 수 있는 상금을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 700, 1400, 1750이고, 그 확률은 각각

$$P(X=700)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_3C_0}{{}_7C_2}=\frac{2}{7},$$
$$P(X=1400)=\frac{{}_4C_0\cdot{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7},$$
$$P(X=1750)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. ···➊

X	700	1400	1750	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

$$\therefore E(X)=700\cdot\frac{2}{7}+1400\cdot\frac{1}{7}+1750\cdot\frac{4}{7}=1400$$

따라서 구하는 기댓값은 1400원이다. ···➋

답 1400원

채점 기준표	
➊ X의 확률분포를 구할 수 있다.	50%
➋ 상금의 기댓값을 구할 수 있다.	50%

0592 카드의 총 개수는 $1+2+3+\cdots+10=\frac{10\cdot11}{2}=55$

한 장의 카드를 꺼낼 때 나오는 숫자를 X라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	$\cdots$	10	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{3}{55}$	$\cdots$	$\frac{10}{55}$	1

$$\therefore E(X)=1\cdot\frac{1}{55}+2\cdot\frac{2}{55}+3\cdot\frac{3}{55}+\cdots+10\cdot\frac{10}{55}$$
$$=\frac{1}{55}(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$$
$$=\frac{1}{55}\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}=7$$

따라서 구하는 기댓값은 7이다. 답 7

SSEN 특강

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

유형 07 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 ; 평균, 분산이 주어진 경우
본책 91쪽

확률변수 X와 두 상수 $a\,(a\neq0)$, b에 대하여
① $E(aX+b)=aE(X)+b$
② $V(aX+b)=a^2V(X)$
③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

0593 $E(X)=-1$, $V(X)=2$이므로
$E(Y)=1$에서 $E(aX+b)=1$
$aE(X)+b=1$ $\therefore -a+b=1$ …… ㉠
$V(Y)=2$에서 $V(aX+b)=2$
$a^2V(X)=2$, $2a^2=2$, $a^2=1$
$\therefore a=1$ ($\because a>0$)
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$
$\therefore a+b=3$

답 ②

0594 $E(2X+3)=9$에서 $2E(X)+3=9$
$\therefore E(X)=3$
$V(2X)=8$에서 $4V(X)=8$
$\therefore V(X)=2$
이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로
$2=E(X^2)-3^2$ $\therefore E(X^2)=11$

답 11

0595 $E(Y)=\frac{3}{2}$에서 $E\left(\frac{1}{2}X-1\right)=\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}E(X)-1=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}E(X)=\frac{5}{2}$
$\therefore E(X)=5$
$E(Y^2)=\frac{25}{4}$이므로 $V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$에서
$$V(Y)=\frac{25}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=4$$
즉 $V\left(\frac{1}{2}X-1\right)=4$이므로 $\frac{1}{4}V(X)=4$
$\therefore V(X)=16$
따라서 $\sigma(X)=\sqrt{16}=4$이므로
$$\frac{\sigma(X)}{E(X)}=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

다른 풀이 $Y^2=\frac{1}{4}X^2-X+1$이므로 $E(Y^2)=\frac{25}{4}$에서
$$E\left(\frac{1}{4}X^2-X+1\right)=\frac{25}{4}$$
$$\frac{1}{4}E(X^2)-E(X)+1=\frac{25}{4}$$
$E(X)=5$이므로
$\frac{1}{4}E(X^2)-4=\frac{25}{4}$ $\therefore E(X^2)=41$
따라서 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=41-5^2=16$이므로
$\sigma(X)=\sqrt{16}=4$
$$\therefore \frac{\sigma(X)}{E(X)}=\frac{4}{5}$$

0596 $E(X)=960$, $\sigma(X)=80$이므로
$$E(Y)=E\left(\frac{5}{4}X+240\right)=\frac{5}{4}E(X)+240$$
$$=\frac{5}{4}\cdot960+240=1440$$
$$\sigma(Y)=\sigma\left(\frac{5}{4}X+240\right)=\frac{5}{4}\sigma(X)$$
$$=\frac{5}{4}\cdot80=100$$
따라서 확률변수 Y의 평균은 1440원, 표준편차는 100원이다.

답 평균: 1440원, 표준편차: 100원

0597 $E(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이므로 표준 점수 T의 평균과 표준편차는
$$E(T)=E\left(10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50\right)$$
$$=\frac{10}{\sigma}E(X)-\frac{10m}{\sigma}+50$$
$$=\frac{10m}{\sigma}-\frac{10m}{\sigma}+50=50 \quad ➊$$
$$\sigma(T)=\sigma\left(10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50\right)=\left|\frac{10}{\sigma}\right|\sigma(X)$$
$$=\frac{10}{\sigma}\cdot\sigma=10 \quad ➋$$

답 평균: 50점, 표준편차: 10점

채점 기준표

➊ 표준 점수 T의 평균을 구할 수 있다.	50%
➋ 표준 점수 T의 표준편차를 구할 수 있다.	50%

0598 $E(X)=a$, $E(X^2)=a+2$이므로
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=a+2-a^2$
$\therefore V(2X+1)=4V(X)=4(a+2-a^2)$
$$=4\left\{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right\}$$
$$=-4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+9$$
따라서 $V(2X+1)$은 $a=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 9를 가지므로
$\sigma(2X+1)$의 최댓값은 $\sqrt{9}=3$

답 3

유형 08 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 ; 확률분포가 주어진 경우
본책 92쪽

확률변수 X의 확률분포를 이용하여 X의 평균, 분산, 표준편차를 구한 후
$E(aX+b)=aE(X)+b$, $V(aX+b)=a^2V(X)$,
$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$
임을 이용한다. (단, a, b는 상수, $a\neq0$)

0599 확률의 총합은 1이므로
$2a+a+a=1$, $4a=1$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=(-1)\cdot\frac{2}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{4},$$

$$E(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{2}{4}+0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{11}{16}}=\frac{\sqrt{11}}{4}$$

$$\therefore \sigma(4X+5)=4\sigma(X)=4\cdot\frac{\sqrt{11}}{4}=\sqrt{11}$$

답 ①

0600 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$
$=1$

$k+2k+3k+4k+5k=1$

$15k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{15}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{15}+2\cdot\frac{2}{15}+3\cdot\frac{3}{15}+4\cdot\frac{4}{15}+5\cdot\frac{5}{15}=\frac{11}{3}$$

이므로

$$E(3X-4)=3E(X)-4=3\cdot\frac{11}{3}-4=7$$

답 7

0601 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+a+2a=1, \quad 3a=\frac{1}{2} \quad \therefore a=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{25}{3}$$

(2) $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{25}{3}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$$

이때 $a=\frac{1}{6}$이므로

$$V\left(\frac{1}{a}X+a\right)=\frac{1}{a^2}V(X)=6^2V(X)=36\cdot\frac{11}{9}=44$$

답 (1) $\frac{25}{3}$ (2) 44

0602 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{10}=1$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{2}{5}+1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{1}{10}=2$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-1^2=1$$

$E(Y)=3$에서 $E(aX+b)=3$

$aE(X)+b=3 \quad \therefore a+b=3$ ······ ㉠

$V(Y)=4$에서 $V(aX+b)=4$

$a^2V(X)=4, \quad a^2=4 \quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a^2+b^2=2^2+1^2=5$

답 5

유형 09 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 ; 확률분포가 주어지지 않은 경우 본책 92쪽

(i) 확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값에 대하여 그 값을 가질 확률을 각각 구한다.
(ii) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.
(iii) 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.
(iv) $E(aX+b)=aE(X)+b$, $V(aX+b)=a^2V(X)$,
$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)
임을 이용하여 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.

0603 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_2C_0}{{}_5C_2}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{5},$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{3}{10}+1^2\cdot\frac{3}{5}+2^2\cdot\frac{1}{10}=1$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

$$\therefore V(5X+3)=5^2V(X)=25\cdot\frac{9}{25}=9$$

답 ⑤

0604 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{1}{6}\ (x=1, 2, \cdots, 6)$$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

$$\therefore E(4X-1)=4E(X)-1=4\cdot\frac{7}{2}-1=13$$

답 13

0605 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{1}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_3\cdot{}_2C_0}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{1}{5}=2$$

이므로

$$E(3X-2)=3E(X)-2=3\cdot2-2=4$$

답 ④

0606 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 동전을 세 번 던졌을 때 받을 수 있는 점수는

HHH일 때, $3\cdot3=9$

HHT, HTH, THH일 때, $3\cdot2+(-2)\cdot1=4$

HTT, THT, TTH일 때, $3\cdot1+(-2)\cdot2=-1$

TTT일 때, $(-2)\cdot3=-6$

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 9, 4, -1, -6이고, 그 확률은 각각 $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	9	4	-1	-6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=9\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{3}{8}+(-1)\cdot\frac{3}{8}+(-6)\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2},$$

$$E(X^2)=9^2\cdot\frac{1}{8}+4^2\cdot\frac{3}{8}+(-1)^2\cdot\frac{3}{8}+(-6)^2\cdot\frac{1}{8}=21$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=21-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{75}{4}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sigma(2X)=|2|\sigma(X)=2\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$$

답 ②

0607 $X=1$이려면 여학생 2명 중에서 1명을 세우고, 그 뒤에 나머지 4명을 세우면 되므로

$$P(X=1)=\frac{{}_2P_1\cdot4!}{5!}=\frac{2}{5}$$

$X=2$이려면 맨 앞에 남학생 3명 중에서 1명을, 그 뒤에 여학생 2명 중에서 1명을 세우고, 나머지 3명을 세우면 되므로

$$P(X=2)=\frac{{}_3P_1\cdot{}_2P_1\cdot3!}{5!}=\frac{3}{10}$$

$X=3$이려면 맨 앞과 그 뒤에 남학생 3명 중에서 2명을, 그 뒤에 여학생 2명 중에서 1명을 세우고, 나머지 2명을 세우면 되므로

$$P(X=3)=\frac{{}_3P_2\cdot{}_2P_1\cdot2!}{5!}=\frac{1}{5}$$

$X=4$이려면 남학생 3명을 세우고, 그 뒤에 여학생 2명을 세우면 되므로 $P(X=4)=\frac{3!\cdot2!}{5!}=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

⋯→ ①

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{10}=2,$$

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{10}=5$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$$ ⋯→ ②

$$\therefore V(10X+7)=10^2V(X)=100\cdot1=100$$ ⋯→ ③

답 100

채점 기준표	
① X의 확률분포를 구할 수 있다.	50%
② $V(X)$를 구할 수 있다.	30%
③ $V(10X+7)$을 구할 수 있다.	20%

유형 10 이항분포에서의 확률

본책 93쪽

확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, n)$$

0608 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{10-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 10)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le9)&=1-P(X=10)\\&=1-{}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^0\\&=1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\end{aligned}$$

답 ④

0609 (1) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 2 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(6, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_6C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 6)$$

(2) $$\begin{aligned}P(2\le X\le4)&=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\&={}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_6C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_6C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2\\&=\frac{240}{729}+\frac{160}{729}+\frac{60}{729}=\frac{460}{729}\end{aligned}$$

답 풀이 참조

0610 싹이 튼 씨앗의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}\ (x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge4)&=P(X=4)+P(X=5)\\&={}_5C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{81}{128}\end{aligned}$$

답 ②

0611 실제로 고속버스에 탑승하는 사람 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(30,\ 0.9)$를 따르므로

$$P(X=x)={}_{30}C_x\,0.9^x\times0.1^{30-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 30)$$

좌석이 부족하려면 $X>28$이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X>28)&=P(X=29)+P(X=30)\\&={}_{30}C_{29}\,0.9^{29}\times0.1+{}_{30}C_{30}\,0.9^{30}\times0.1^{0}\\&=30\times0.047\times0.1+1\times0.042\times1\\&=0.183\end{aligned}$$

답 0.183

유형 11 이항분포의 평균, 분산, 표준편차 ; 이항분포가 주어진 경우 본책 94쪽

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때,
$E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$, $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

0612 $E(X)=4$에서 $10p=4$ $\quad\therefore p=\frac{2}{5}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$$V(X)=10\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$\begin{aligned}E(X^2)&=V(X)+\{E(X)\}^2\\&=\frac{12}{5}+4^2=\frac{92}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{92}{5}$

0613 $E(X)=16$, $V(X)=12$이므로

$E(X)=np=16$ …… ㉠

$V(X)=np(1-p)=12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $16(1-p)=12$

$1-p=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore p=\frac{1}{4}$

$p=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{4}n=16$

$\therefore n=64$

답 ①

0614 $P(X=x)={}_{45}C_x\cdot\frac{2^x}{3^{45}}$

$$={}_{45}C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{45-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 45)$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(45,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$E(X)=45\cdot\frac{2}{3}=30,\ V(X)=45\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=10$$

답 ⑤

0615 $\sigma(X)=\sqrt{20p(1-p)}=\sqrt{-20\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+5}$

$p=\frac{1}{2}$일 때 표준편차가 최대이므로 이때의 X의 평균은

$$E(X)=20p=20\cdot\frac{1}{2}=10$$

답 10

0616 $V(X)=16p(1-p)=4$에서

$4p^2-4p+1=0,\quad(2p-1)^2=0\quad\therefore p=\frac{1}{2}$ ➊

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(16,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X=x)&={}_{16}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{16-x}\\&={}_{16}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^{16}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 16)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{P(X=1)}{P(X=2)}=\frac{{}_{16}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{16}}{{}_{16}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{16}}=\frac{{}_{16}C_1}{{}_{16}C_2}=\frac{2}{15}$$ ➋

답 $\frac{2}{15}$

채점 기준표	
➊ p의 값을 구할 수 있다.	50%
➋ $\frac{P(X=1)}{P(X=2)}$의 값을 구할 수 있다.	50%

0617 $\sigma(X)=10$에서 $V(X)=100$이므로

$n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=100\quad\therefore n=450$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$P(X=r)={}_{450}C_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{450-r}\ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 450)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{r=0}^{450}3^rP(X=r)&=\sum_{r=0}^{450}3^r\cdot{}_{450}C_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{450-r}\\&=\sum_{r=0}^{450}{}_{450}C_r\left(\frac{3}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{450-r}\\&=\left(\frac{3}{3}+\frac{2}{3}\right)^{450}=\left(\frac{5}{3}\right)^{450}\end{aligned}$$

답 ⑤

SSEN 특강

이항정리
n이 자연수일 때, $(p+q)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,p^{n-r}q^r=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,p^rq^{n-r}$

유형 12 이항분포의 평균, 분산, 표준편차 ; 이항분포가 주어지지 않은 경우 본책 94쪽

이항분포를 따르는 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차를 구할 때는 먼저 시행 횟수 n과 한 번의 시행에서 어떤 사건이 일어날 확률 p를 구하여 $B(n,\ p)$로 나타낸 후
$E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$, $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$
임을 이용한다.

0618 4개의 동전을 동시에 한 번 던질 때 2개는 앞면, 2개는 뒷면이 나올 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=6\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{3}{8}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4, \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$$E(X)=4\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

0619 치료제를 투여한 환자 한 명이 치료될 확률은 0.8이므로 확률변수 X는 이항분포 $B(10000, 0.8)$을 따른다.

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{10000\times0.8\times0.2}=40$$

답 40

0620 가위바위보를 한 번 할 때 A가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

이때 $E(X)=\frac{10}{3}$이므로 $\frac{1}{3}n=\frac{10}{3}$ $\therefore n=10$

따라서

$$V(X)=10\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{20}{9}$$

이므로 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{20}{9}+\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{40}{3}$$

답 ④

0621 윷가락 한 개를 던질 때 평평한 면이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$, 볼록한 면이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이므로 윷가락 네 개를 동시에 던져 도가 나올 확률은

평평한 면 1개, 볼록한 면 3개

$${}_4C_1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{96}{625}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(25, \frac{96}{625}\right)$을 따르므로

$$E(X)=25\cdot\frac{96}{625}=\frac{96}{25}$$

답 ②

0622 $x+3$개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 나올 확률은 $\frac{x}{x+3}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{x}{x+3}\right)$를 따르므로

$$E(X)=n\cdot\frac{x}{x+3}=36 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$V(X)=n\cdot\frac{x}{x+3}\cdot\frac{3}{x+3}=9 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$36\cdot\frac{3}{x+3}=9$, $x+3=12$ $\therefore x=9$

$x=9$를 ㉠에 대입하면

$n\cdot\frac{9}{12}=36$ $\therefore n=48$

$\therefore n+x=57$

답 57

유형 13 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 ; X가 이항분포를 따르는 경우 — 본책 ○○쪽

(i) 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구한다. ➡ $B(n, p)$

(ii) X의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.
➡ $E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$, $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

(iii) $aX+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.
➡ $E(aX+b)=aE(X)+b$, $V(aX+b)=a^2V(X)$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

0623 공을 한 번 굴릴 때 스트라이크를 칠 확률은 $\frac{7}{10}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{7}{10}\right)$을 따르므로

$$V(X)=5\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{21}{20}$$

$$\therefore V(2X+3)=2^2V(X)=4\cdot\frac{21}{20}=\frac{21}{5}$$

답 $\frac{21}{5}$

0624 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(8, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$E(X)=8\cdot\frac{1}{2}=4$$

$$\therefore E\left(\frac{1}{4}X+1\right)=\frac{1}{4}E(X)+1=\frac{1}{4}\cdot4+1=2$$

답 ②

0625 $E(X)=\frac{1}{3}n$, $V(X)=n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$이고

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$\frac{2}{9}n=40-\left(\frac{1}{3}n\right)^2$, $\frac{2}{9}n=40-\frac{1}{9}n^2$

$n^2+2n-360=0$, $(n+20)(n-18)=0$

$\therefore n=18$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\sigma(X)=\sqrt{18\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\sqrt{4}=2$$

$$\therefore \sigma(3X-2)=|3|\sigma(X)=3\cdot2=6$$

답 ⑤

0626 한 번의 시행에서 불량인 전구가 나올 확률은 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(30, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로 ➊

$$V(X)=30\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{5} \quad ➋$$

$$\therefore V(5X+4)=5^2V(X)=25\cdot\frac{24}{5}=120 \quad ➌$$

답 120

채점 기준표

➊ X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	40%
➋ $V(X)$를 구할 수 있다.	30%
➌ $V(5X+4)$를 구할 수 있다.	30%

0627 동전을 10번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $10-Y$이므로

$X=3Y-2(10-Y)=5Y-20$

한편 동전 한 개를 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(Y)=10\cdot\frac{1}{2}=5$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(5Y-20)=5\mathrm{E}(Y)-20$
$=5\cdot5-20=5$

답 ④

0628 전략 확률의 총합은 1임을 이용한다.

풀이 p_3은 p_1과 p_5의 등차중항이므로

$2p_3=p_1+p_5$

또 p_3은 p_2와 p_4의 등차중항이므로

$2p_3=p_2+p_4$

이때 확률의 총합은 1이므로

$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$

$5p_3=1 \qquad \therefore p_3=\frac{1}{5}$

$X^2-6X+5\ge0$에서

$(X-1)(X-5)\ge0 \qquad \therefore X\le1$ 또는 $X\ge5$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X^2-6X+5\ge0)=\mathrm{P}(X\le1$ 또는 $X\ge5)$
$=\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=5)$
$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=5)$
$=p_1+p_5$
$=2p_3=\frac{2}{5}$

답 $\frac{2}{5}$

0629 전략 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$, $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{i=1}^{n}p_i(4p_i+3)=4$에서 $\quad 4\sum_{i=1}^{n}p_i^2+3\sum_{i=1}^{n}p_i=4$

이때 $\underbrace{\sum_{i=1}^{n}p_i=1}_{\text{확률의 총합은 1}}$이므로 $\quad 4\sum_{i=1}^{n}p_i^2+3=4 \qquad \therefore \sum_{i=1}^{n}p_i^2=\frac{1}{4}$

또 $\mathrm{E}(X)=6$에서 $\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=6$이므로

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-kp_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2kx_ip_i+k^2p_i^2)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2k\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+k^2\sum_{i=1}^{n}p_i^2$$
$$=200-2k\cdot6+k^2\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}(k-24)^2+56$$

따라서 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-kp_i)^2$은 $k=24$일 때 최솟값 56을 갖는다.

답 56

SSEN 특강

Σ의 성질

상수 p, q에 대하여 $\quad \sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k$

0630 전략 P가 P_1, P_5일 때의 X의 값이 같고, P_2, P_4일 때의 X의 값이 같다.

풀이 부채꼴 OAB의 넓이는 $\quad \pi\cdot1^2\cdot\frac{90}{360}=\frac{\pi}{4}$

따라서 부채꼴 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$의 넓이는

$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{24}$

P가 P_1 또는 P_5일 때, $\quad X=\left|\frac{\pi}{24}-\frac{5}{24}\pi\right|=\frac{\pi}{6}$

P가 P_2 또는 P_4일 때, $\quad X=\left|\frac{2}{24}\pi-\frac{4}{24}\pi\right|=\frac{\pi}{12}$

P가 P_3일 때, $\quad X=0$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{5}+\frac{\pi}{12}\cdot\frac{2}{5}+\frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{\pi}{10}$

답 ②

SSEN 특강

부채꼴의 넓이

반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 넓이 S는

$S=\pi r^2\cdot\frac{x}{360}$

0631 전략 X의 확률분포를 표로 나타내고 $\mathrm{E}(X)$를 구한 후 $\mathrm{E}(aX)=a\mathrm{E}(X)$임을 이용한다. (단, a는 0이 아닌 상수이다.)

풀이 5개 중 임의로 2개를 배정하는 경우의 수는 $\quad {}_5\mathrm{C}_2=10$

$X=1$인 경우는 $\quad$ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)의 4가지

$X=2$인 경우는 $\quad$ (2, 3), (2, 4), (2, 5)의 3가지

$X=3$인 경우는 $\quad$ (3, 4), (3, 5)의 2가지

$X=4$인 경우는 $\quad$ (4, 5)의 1가지

이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{10}=2$

$\therefore \mathrm{E}(10X)=10\mathrm{E}(X)=10\cdot2=20$

답 20

0632 전략 X의 확률분포를 표로 나타내고 $\mathrm{E}(X)$를 구한 후 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$임을 이용한다. (단, a, b는 상수, $a\ne0$)

풀이 세 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는 $\quad {}_6\mathrm{C}_3=20$

삼각형을 세 꼭짓점에 적힌 세 수의 순서쌍으로 나타내고, 그때의 확률변수 X의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) 예각삼각형인 경우

$(1, 3, 5)$, $(2, 4, 6)$

의 2가지이고, 그때의 X의 값은 각각 4, 6이다.

(ii) 직각삼각형인 경우

$(1, 4, 2)$, $(1, 4, 3)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 4, 6)$,
$(2, 5, 1)$, $(2, 5, 3)$, $(2, 5, 4)$, $(2, 5, 6)$,
$(3, 6, 1)$, $(3, 6, 2)$, $(3, 6, 4)$, $(3, 6, 5)$

의 12가지이고, 그때의 X의 값은 각각 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9이다.

(iii) 둔각삼각형인 경우

$(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$,
$(4, 5, 6)$, $(5, 6, 1)$, $(6, 1, 2)$

의 6가지이고, 그때의 X의 값은 각각 3, 4, 5, 6, 6, 6이다.

이상에서

$$P(X=3)=\frac{1}{20},\ P(X=4)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10},$$
$$P(X=5)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4},\ P(X=6)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5},$$
$$P(X=7)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5},\ P(X=9)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	7	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=3\cdot\frac{1}{20}+4\cdot\frac{1}{10}+5\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{5}+7\cdot\frac{1}{5}+9\cdot\frac{1}{5}=\frac{31}{5}$$

$$\therefore E(5X+4)=5E(X)+4=5\cdot\frac{31}{5}+4=35$$

답 35

0633 전략 인형이 불량품이 아닐 확률과 상자가 불량품이 아닐 확률을 이용하여 인형과 상자가 모두 불량품이 아닐 확률을 구한다.

풀이 인형이 불량품이 아닐 확률은 $1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

상자가 불량품이 아닐 확률은 $1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$

인형과 상자가 모두 불량품이 아닐 확률은

$$\frac{10}{11}\cdot\frac{99}{100}=\frac{9}{10}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(200, \frac{9}{10}\right)$를 따르므로

$$E(X)=200\cdot\frac{9}{10}=180$$

답 180

0634 전략 확률변수 X가 이항분포를 따름을 이용한다.

풀이 $(2x+3)^{100}$의 전개식에서 일반항은

$${}_{100}C_r(2x)^r\,3^{100-r}={}_{100}C_r\,2^r\cdot 3^{100-r}\cdot x^r\ (r=0, 1, 2, \cdots, 100)$$

이므로 x^n의 계수는

$$a_n={}_{100}C_n\,2^n\cdot 3^{100-n}$$

$$\therefore P(X=n)=\frac{1}{5^{100}}\cdot a_n$$
$$=\frac{1}{5^{100}}\cdot{}_{100}C_n\,2^n\cdot 3^{100-n}$$
$$=\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{100-n}\cdot{}_{100}C_n\,2^n\cdot 3^{100-n}$$
$$={}_{100}C_n\left(\frac{2}{5}\right)^n\left(\frac{3}{5}\right)^{100-n}\ (n=0, 1, 2, \cdots, 100)$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$$E(X)=100\cdot\frac{2}{5}=40,\ V(X)=100\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=24$$

이고 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=24+40^2=1624$$

$$\therefore E\left(\frac{1}{8}X^2\right)=\frac{1}{8}E(X^2)=\frac{1}{8}\cdot 1624=203$$

답 ②

0635 전략 확률변수 X의 평균과 분산을 이용하여 $(X-a)^2$의 기댓값을 구한다.

풀이 확률변수 X는 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

ㄱ. $V(X)=36\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=8$

ㄴ. $E(X)=36\cdot\frac{1}{3}=12$, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이고, $f(a)$는 $(X-a)^2$의 기댓값이므로

$$f(a)=E((X-a)^2)$$

$a=0$을 대입하면

$$f(0)=E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=8+12^2=152$$

ㄷ. $f(a)=E((X-a)^2)=E(X^2-2aX+a^2)$
$$=E(X^2)-2aE(X)+a^2$$
$$=152-24a+a^2=(a-12)^2+8$$

이므로 $f(a)$는 $a=12$일 때 최솟값을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0636 전략 확률변수 X가 가질 수 있는 값이 2, 3, 4, 5임을 이용하여 그 각각의 확률을 구한다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5},$$
$$P(X=3)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}\cdot\frac{2}{4}=\frac{9}{15}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10},$$
$$P(X=4)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_3C_1}{{}_6C_3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{9}{20}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{10},$$

두 번째까지 검은 공 1개, 흰 공 1개가 나오고 세 번째에 흰 공이 나올 확률

$$P(X=5)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_3C_1}{{}_6C_4}\cdot 1=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

⋯ ❶

따라서 구하는 확률은

$$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준표

❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	60%
❷ $P(X\geq 4)$를 구할 수 있다.	40%

0637 전략 정육각형의 한 변의 길이를 확률변수 X라 하고 X의 평균, 분산을 구한다.

풀이 정육각형의 한 변의 길이를 확률변수 X라 하면 둘레의 길이는 $6X$이므로

$$E(6X)=33,\ \underbrace{V(6X)=63}_{\sigma(6X)=3\sqrt{7}}$$

확률변수의 성질에 의하여

$$6E(X)=33,\ 6^2V(X)=63$$

$$\therefore E(X)=\frac{11}{2},\ V(X)=\frac{7}{4}$$ ⋯ ❶

이때 한 변의 길이가 X인 정육각형의 넓이는

$$\underbrace{6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot X^2}_{\text{한 변의 길이가 }X\text{인 정삼각형 6개의 넓이의 합}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}X^2$$

이고, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{7}{4}+\left(\frac{11}{2}\right)^2=32$$ ⋯ ❷

따라서 구하는 정육각형의 넓이의 평균은

$$E\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}X^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}E(X^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 32=48\sqrt{3}$$ ⋯ ❸

답 $48\sqrt{3}$

채점 기준표

❶ $E(X)$, $V(X)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $E(X^2)$을 구할 수 있다.	40%
❸ 정육각형의 넓이의 평균을 구할 수 있다.	20%

0638 전략 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르면 $P(X=x)={}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$이다.

풀이 확률변수 X는 이항분포 $B(4,\ p)$를 따르므로

$$E(X)=4p$$

확률변수 Y는 이항분포 $B(2,\ 1-p)$를 따르므로

$$E(Y)=2(1-p)$$

이때 $E(X)=E(5Y-3)$에서 $E(X)=5E(Y)-3$이므로

$$4p=10(1-p)-3,\quad 14p=7\quad \therefore p=\frac{1}{2}$$ ⋯ ❶

$$\therefore P(X=3)+P(Y=1)={}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1$$
$$=4\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준표

❶ p의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ $P(X=3)+P(Y=1)$의 값을 구할 수 있다.	50%

0639 전략 A, B가 점수를 얻는 횟수에 대한 확률변수는 이항분포를 따름을 이용한다.

풀이 두 사람 A와 B가 동시에 공을 한 개씩 꺼내는 방법의 수는

$$6\cdot 5=30$$

A가 꺼낸 공에 적힌 숫자가 B가 꺼낸 공에 적힌 숫자보다 큰 경우는

A가 3을 꺼낼 때, $2\cdot 4=8$ (가지)

A가 2를 꺼낼 때, $2\cdot 2=4$ (가지)

이므로 한 번의 시행에서 A가 점수를 얻을 확률은

$$\frac{8+4}{30}=\frac{2}{5}$$

15회의 시행에서 A가 점수를 얻는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(15,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$$E(X)=15\cdot\frac{2}{5}=6$$

따라서 A가 얻는 점수의 합 $10X$에 대하여

$$E(10X)=10E(X)=10\cdot 6=60$$

이므로 A가 얻는 점수의 합의 기댓값은 60점이다. ⋯ ❶

한편 15회의 시행에서 B가 점수를 얻는 횟수를 확률변수 Y라 하면 $Y=15-X$이므로

$$E(Y)=E(15-X)=15-E(X)=15-6=9$$

따라서 B가 얻는 점수의 합 $5Y$에 대하여

$$E(5Y)=5E(Y)=5\cdot 9=45$$

이므로 B가 얻는 점수의 합의 기댓값은 45점이다. ⋯ ❷

답 A: 60점, B: 45점

채점 기준표

❶ A가 얻는 점수의 합의 기댓값을 구할 수 있다.	50%
❷ B가 얻는 점수의 합의 기댓값을 구할 수 있다.	50%

참고 한 번의 시행에서 B가 점수를 얻을 확률은 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$이므로 B가 점수를 얻는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B\left(15,\ \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

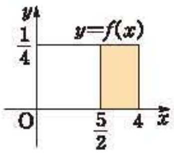
Ⅲ 통계

07 정규분포

0640 연속확률변수는 어떤 범위에 속하는 모든 실수 값을 가질 수 있으므로 보기에서 연속확률변수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

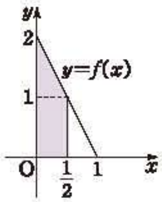
0641 $\mathrm{P}\left(X\ge\frac{5}{2}\right)$는 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\frac{5}{2}$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{5}{2}\right)=\left(4-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

0642 $\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)$은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

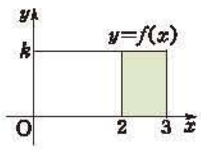


$$\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(2+1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

다른 풀이 $\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot1=\frac{3}{4}$

0643 (1) $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



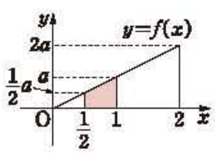
$$3\cdot k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$$

(2) $\mathrm{P}(X\ge2)$는 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(X\ge2)=(3-2)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$

0644 (1) $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



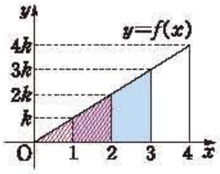
$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot2a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

(2) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le1\right)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le1\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{16}$

0645 (1) $f(x)=kx$라 하면 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{8}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{8}x\ (0\le x\le4)$$

(2) $\mathrm{P}(1\le X\le3)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(1\le X\le3)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)\cdot2=\frac{1}{2}$$

(3) $\mathrm{P}(X<2)$는 위의 그림의 빗금친 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(X<2)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

답 (1) $f(x)=\frac{1}{8}x\ (0\le x\le4)$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$

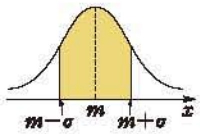
0646 답 $\mathrm{N}(8,\ 2^2)$

0647 답 $\mathrm{N}(3,\ 3^2)$

0648 ㄷ. m이 일정할 때, σ의 값이 클수록 모양은 옆으로 퍼진다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

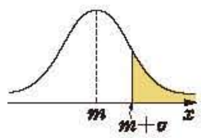
0649 $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)$



$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)$
$\quad+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=2a$

답 $2a$

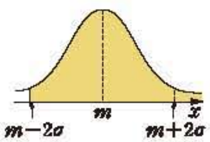
0650 $\mathrm{P}(X\ge m+\sigma)$



$=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=0.5-a$

답 $0.5-a$

0651 $\mathrm{P}(X\ge m-2\sigma)$



$=\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(X\ge m)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)+0.5$
$=b+0.5$

답 $b+0.5$

0652 $\mathrm{P}(-1.5\le Z\le1.5)=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$
$=0.4332+0.4332$
$=0.8664$

답 0.8664

0653 $\mathrm{P}(Z\le1.75)=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.75)$
$=0.5+0.4599=0.9599$

답 0.9599

0654 $\mathrm{P}(Z\le-1.25)=\mathrm{P}(Z\ge1.25)$
$=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1.25)$
$=0.5-0.3944=0.1056$

답 0.1056

0655 $P(1.5\le Z\le 2)=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1.5)$
$=0.4772-0.4332=0.044$ 답 0.044

0656 $P(Z\ge 2)=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$ 답 0.0228

0657 $P(Z\ge -1.5)=P(-1.5\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)$
$=P(0\le Z\le 1.5)+P(Z\ge 0)$
$=0.4332+0.5=0.9332$ 답 0.9332

0658 $P(Z\ge a)=0.3085$에서
$P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le a)=0.3085$
$0.5-P(0\le Z\le a)=0.3085$
$\therefore P(0\le Z\le a)=0.1915$
$\therefore a=0.5$ 답 0.5

0659 $P(Z\le a)=0.9772$에서
$P(Z\le 0)+P(0\le Z\le a)=0.9772$
$0.5+P(0\le Z\le a)=0.9772$
$\therefore P(0\le Z\le a)=0.4772$
$\therefore a=2$ 답 2

0660 $P(-a\le Z\le a)=0.6826$에서
$P(-a\le Z\le 0)+P(0\le Z\le a)=0.6826$
$2P(0\le Z\le a)=0.6826$
$\therefore P(0\le Z\le a)=0.3413$
$\therefore a=1$ 답 1

0661 $P(Z\ge a-2)=0.6915$에서
$P(a-2\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)=0.6915$
$P(0\le Z\le -a+2)+0.5=0.6915$
$\therefore P(0\le Z\le -a+2)=0.1915$
따라서 $-a+2=0.5$이므로 $a=1.5$ 답 1.5

0662 $P(Z\le 3a)=0.0668$에서
$P(Z\le 0)-P(3a\le Z\le 0)=0.0668$
$0.5-P(0\le Z\le -3a)=0.0668$
$\therefore P(0\le Z\le -3a)=0.4332$
따라서 $-3a=1.5$이므로 $a=-0.5$ 답 -0.5

0663 $P(-a\le Z\le 2a)=0.5328$에서
$P(-a\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2a)=0.5328$
$\therefore P(0\le Z\le a)+P(0\le Z\le 2a)=0.5328$
이때
$P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 1)=0.1915+0.3413=0.5328$
이므로 $a=0.5$ 답 0.5

0664 답 $Z=\dfrac{X-18}{2}$

0665 답 $Z=\dfrac{X-50}{10}$

0666 (1) $Z=\dfrac{X-27}{4}$

(2) $P(23\le X\le 33)=P\left(\dfrac{23-27}{4}\le Z\le \dfrac{33-27}{4}\right)$
$=P(-1\le Z\le 1.5)$
$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)$
$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 1.5)$
$=0.3413+0.4332=0.7745$

답 (1) $Z=\dfrac{X-27}{4}$ (2) 0.7745

0667 $E(X)=48\cdot\dfrac{1}{4}=12$, $V(X)=48\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=9$
이때 $n=48$은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(12,\ 3^2)$을 따른다. 답 $N(12,\ 3^2)$

0668 $E(X)=180\cdot\dfrac{5}{6}=150$, $V(X)=180\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=25$
이때 $n=180$은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(150,\ 5^2)$을 따른다. 답 $N(150,\ 5^2)$

0669 (1) $E(X)=400\cdot\dfrac{1}{5}=80$, $V(X)=400\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}=64$
이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(80,\ 8^2)$을 따른다.
따라서 X를 확률변수 Z로 표준화하면
$Z=\dfrac{X-80}{8}$

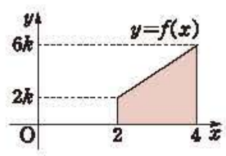
(2) $P(X\ge 104)=P\left(Z\ge \dfrac{104-80}{8}\right)$
$=P(Z\ge 3)$
$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 3)$
$=0.5-0.4987=0.0013$

답 (1) $Z=\dfrac{X-80}{8}$ (2) 0.0013

유형 01 확률밀도함수 본책 102쪽

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$ $(\alpha\le x\le\beta)$에 미정계수가 있는 경우에는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1임을 이용하여 미정계수를 구한다.

0670 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\dfrac{1}{2}\cdot(2k+6k)\cdot 2=1$

$8k=1 \quad \therefore k=\dfrac{1}{8}$ 답 ②

07 정규분포

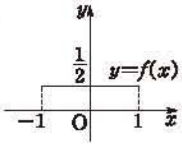
0671 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로 $\frac{1}{2}\cdot1\cdot k+1\cdot k+\frac{1}{2}\cdot1\cdot k=1$

$2k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$

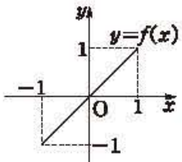
답 $\frac{1}{2}$

0672 보기의 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)\,(-1\le x\le1)$의 그래프는 각각 다음과 같다.

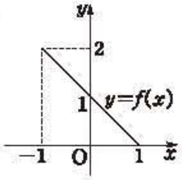
ㄱ.



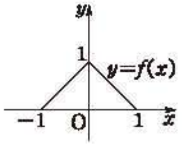
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



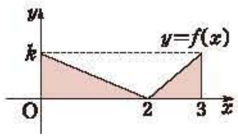
ㄴ. $-1\le x<0$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수가 아니다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=-1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니므로 확률밀도함수가 아니다.

이상에서 확률밀도함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

0673 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로 $\frac{1}{2}\cdot2\cdot k+\frac{1}{2}\cdot1\cdot k=1$

$\frac{3}{2}k=1 \quad \therefore k=\frac{2}{3}$ ⋯ ❷

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준표

❶ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40%
❷ 상수 k의 값을 구할 수 있다.	60%

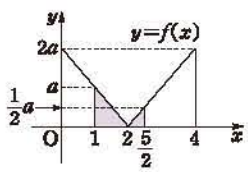
유형 02 확률밀도함수를 이용하여 확률 구하기 본책 102쪽

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)\ (\alpha\le x\le\beta)$에 대하여

① $P(a\le X\le b)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

② $P(a\le X\le b)=P(\alpha\le X\le b)-P(\alpha\le X\le a)$ (단, $\alpha\le a\le b\le\beta$)

0674 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot2\cdot2a+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2a=1$

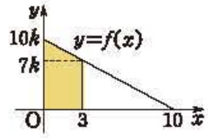
$4a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

이때 $P\left(1\le X\le\frac{5}{2}\right)$는 앞의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$P\left(1\le X\le\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{32}$

답 $\frac{5}{32}$

0675 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot10\cdot10k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{50}$

이때 버스를 기다리는 시간이 3분 이내일 확률, 즉 $P(X\le3)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

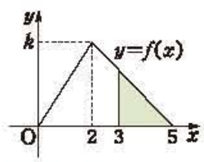
$P(X\le3)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{7}{50}\right)\cdot3=\frac{51}{100}$

답 $\frac{51}{100}$

다른 풀이 $P(X\le3)=1-P(3\le X\le10)$

$=1-\frac{1}{2}\cdot7\cdot\frac{7}{50}=\frac{51}{100}$

0676 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot5\cdot k=1 \quad \therefore k=\frac{2}{5}$

$2\le x\le5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(2,\ \frac{2}{5}\right)$, $(5,\ 0)$을 지나는 직선이므로 그 직선의 방정식은

$y=\frac{-\frac{2}{5}}{5-2}(x-5), \quad y=-\frac{2}{15}x+\frac{2}{3}$

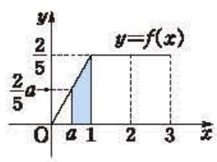
$\therefore f(x)=-\frac{2}{15}x+\frac{2}{3}\ (2\le x\le5)$

따라서 $f(3)=\frac{4}{15}$이고, $P(X\ge3)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$P(X\ge3)=\frac{1}{2}\cdot(5-3)\cdot\frac{4}{15}=\frac{4}{15}$

답 ②

0677 $P(1\le X\le2)=1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$이므로



$P(a\le X\le2)=\frac{11}{20}$에서 $0\le a<1$이고

$P(a\le X\le1)=\frac{11}{20}-\frac{2}{5}=\frac{3}{20}$

이때 $P(a\le X\le1)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}a+\frac{2}{5}\right)\cdot(1-a)=\frac{3}{20}, \quad \frac{1}{5}(1-a^2)=\frac{3}{20}$

$1-a^2=\frac{3}{4}, \quad a^2=\frac{1}{4} \quad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because 0\le a<1)$

답 $\frac{1}{2}$

0678 조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이고, $P(-1\le X\le1)=1$이므로

$P(-1\le X\le0)=P(0\le X\le1)=\frac{1}{2}$

$\therefore P\left(0\le X\le\frac{3}{4}\right)+P\left(\frac{3}{4}\le X\le1\right)=\frac{1}{2}$

이때 조건 (나)에 의하여 $P\left(\frac{3}{4} \le X \le 1\right)=\frac{1}{7}P\left(0 \le X \le \frac{3}{4}\right)$이므로

$$P\left(0 \le X \le \frac{3}{4}\right)+\frac{1}{7}P\left(0 \le X \le \frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{7}P\left(0 \le X \le \frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2} \qquad \therefore P\left(0 \le X \le \frac{3}{4}\right)=\frac{7}{16}$$

$$\therefore P\left(-\frac{3}{4} \le X \le 0\right)=P\left(0 \le X \le \frac{3}{4}\right)=\frac{7}{16}$$

답 $\frac{7}{16}$

유형 03 정규분포 곡선의 성질

본책 103쪽

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포 곡선은 다음과 같은 성질을 갖는다.

① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이다.

② 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

③ σ의 값이 일정할 때, m의 값이 달라지면 대칭축의 위치는 바뀌지만 모양은 변하지 않는다.

④ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 클수록 가운데 부분의 높이는 낮아지고 옆으로 퍼진 모양이 된다.

0679 ㄱ. $x_1 < x_2$일 때,

$P(x_1 \le X \le x_2)=P(X \le x_2)-P(X \le x_1)$

ㄴ. 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$P(X \le m)=P(X \ge m)=0.5$

ㄷ. 정규분포 곡선과 x축 사이의 넓이가 1이므로

$P(X \le a)+P(X \ge a)=1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0680 두 학교 A, B의 정규분포 곡선이 각각 직선 $x=m_1$, 직선 $x=m_2$에 대하여 대칭이므로 $\quad m_1 < m_2$

또 표준편차가 클수록 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 옆으로 퍼지므로 $\quad \sigma_1 > \sigma_2$

답 ③

0681 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $P(X \le 10)=P(X \ge 20)$이므로

$$m=\frac{10+20}{2}=15$$ ··· ❶

또 $V\left(\frac{1}{4}X\right)=4$에서 $\quad \frac{1}{16}V(X)=4 \qquad \therefore V(X)=64$

즉 $\sigma^2=64$이므로 $\quad \sigma=8\ (\because \sigma>0)$ ··· ❷

$\therefore m+\sigma=23$ ··· ❸

답 23

채점 기준표

❶ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ σ의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $m+\sigma$의 값을 구할 수 있다.	20%

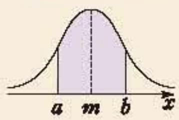
0682 확률변수 X의 평균이 7이므로 X의 확률밀도함수는 $x=7$에서 최댓값을 갖고, 정규분포 곡선은 직선 $x=7$에 대하여 대칭이다. 따라서 $P(a-5 \le X \le a-3)$이 최대가 되려면

$$\frac{a-5+a-3}{2}=7, \quad 2a-8=14 \quad \therefore a=11$$

답 11

SSEN 특강

확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따를 때, 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다. 따라서 $P(a \le X \le b)$가 최대이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{a+b}{2}=m$ (단, $b-a$는 일정)

유형 04, 05 정규분포에서의 확률

본책 103, 104쪽

확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따를 때, 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

① $P(X \le m)=P(X \ge m)=0.5$

② $P(m-\sigma \le X \le m)=P(m \le X \le m+\sigma)$

0683 $P(m-\sigma \le X \le m+\sigma)=a$에서

$2P(m \le X \le m+\sigma)=a \qquad \therefore P(m \le X \le m+\sigma)=\frac{a}{2}$

$P(m-2\sigma \le X \le m+2\sigma)=b$에서

$2P(m \le X \le m+2\sigma)=b \qquad \therefore P(m \le X \le m+2\sigma)=\frac{b}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore P(m-2\sigma \le X \le m+\sigma) &=P(m-2\sigma \le X \le m)+P(m \le X \le m+\sigma)\\ &=P(m \le X \le m+2\sigma)+P(m \le X \le m+\sigma)\\ &=\frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

답 ③

0684 $P(m-2\sigma \le X \le m+2\sigma)=0.9544$에서

$2P(m \le X \le m+2\sigma)=0.9544$

$\therefore P(m \le X \le m+2\sigma)=0.4772$

$$\begin{aligned}\therefore P(X \ge m-2\sigma) &=P(m-2\sigma \le X \le m)+P(X \ge m)\\ &=P(m \le X \le m+2\sigma)+0.5\\ &=0.4772+0.5=0.9772\end{aligned}$$

답 0.9772

0685 이차방정식 $t^2-Xt+4=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 허근을 가지려면

$D=X^2-4\cdot4<0, \quad (X+4)(X-4)<0$

$\therefore -4<X<4$ ··· ❶

이때 $m=4$, $\sigma=4$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(-4<X<4) &=P(4-2\cdot4<X<4)\\ &=P(m-2\sigma<X<m)\\ &=P(m \le X \le m+2\sigma)\\ &=0.48\end{aligned}$$ ··· ❷

답 0.48

채점 기준표

❶ 주어진 이차방정식이 허근을 가질 조건을 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 이차방정식이 허근을 가질 확률을 구할 수 있다.	60%

0686 $P(X \le a)=0.1587$에서

$P(X \le m)-P(a \le X \le m)=0.1587$

$0.5-\mathrm{P}(a\le X\le m)=0.1587$

$\therefore \mathrm{P}(a\le X\le m)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.3413$이므로

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=0.3413$

따라서 $a=m-\sigma$이므로 $a=53-7=46$ 답 ②

0687 $\mathrm{P}(X\ge a)=0.8849$에서

$\mathrm{P}(a\le X\le m)+\mathrm{P}(X\ge m)=0.8849$

$\mathrm{P}(a\le X\le m)+0.5=0.8849$

$\therefore \mathrm{P}(a\le X\le m)=0.3849$

한편 $\mathrm{P}(X\ge m+1.2\sigma)=0.1151$에서

$\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+1.2\sigma)=0.1151$

$0.5-\mathrm{P}(m\le X\le m+1.2\sigma)=0.1151$

$\mathrm{P}(m\le X\le m+1.2\sigma)=0.3849$

$\therefore \mathrm{P}(m-1.2\sigma\le X\le m)=0.3849$

따라서 $a=m-1.2\sigma$이므로 $a=50-1.2\times5=44$ 답 ①

0688 ㈎ $\mathrm{P}(X\ge m+a)=0.04$에서

$\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+a)=0.04$

$0.5-\mathrm{P}(m\le X\le m+a)=0.04$

$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+a)=0.46$

㈏ $\mathrm{P}(X\le m-b)=0.12$에서

$\mathrm{P}(X\ge m+b)=0.12$

$\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+b)=0.12$

$0.5-\mathrm{P}(m\le X\le m+b)=0.12$

$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+b)=0.38$

㈐ $\mathrm{P}(|X-m|\le c)=0.45$에서

$\mathrm{P}(m-c\le X\le m+c)=0.45$

$2\mathrm{P}(m\le X\le m+c)=0.45$

$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+c)=0.225$

㈑ $\mathrm{P}(X\ge m-d)=0.81$에서

$\mathrm{P}(m-d\le X\le m)+\mathrm{P}(X\ge m)=0.81$

$\mathrm{P}(m-d\le X\le m)+0.5=0.81$

$\mathrm{P}(m-d\le X\le m)=0.31$

$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+d)=0.31$

이상에서 $c<d<b<a$ 답 $c<d<b<a$

유형 06 정규분포의 표준화 본책 104쪽

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때

① 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

② $\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma}\le Z\le\frac{b-m}{\sigma}\right)$

0689 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$, $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-10}{2},\ Z_Y=\frac{Y-20}{4}$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(12\le X\le 16)=\mathrm{P}(24\le Y\le k)$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{12-10}{2}\le Z_X\le\frac{16-10}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{24-20}{4}\le Z_Y\le\frac{k-20}{4}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(1\le Z_X\le 3)=\mathrm{P}\left(1\le Z_Y\le\frac{k-20}{4}\right)$

따라서 $\frac{k-20}{4}=3$이므로 $k-20=12$ $\therefore k=32$ 답 ④

0690 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 5^2)$, $\mathrm{N}(30,\ 10^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-15}{5},\ Z_Y=\frac{Y-30}{10}$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}(Y\le k)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{k-15}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{k-30}{10}\right)$

이므로 $\frac{k-15}{5}=-\frac{k-30}{10}$, $10(k-15)=-5(k-30)$

$15k=300$ $\therefore k=20$ 답 20

0691 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(2,\ 1)$, $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르므로

$Z_X=X-2,\ Z_Y=\frac{Y-m}{4}$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$2\mathrm{P}(2\le X\le 4)=\mathrm{P}(3\le Y\le 2m-3)$에서

$2\mathrm{P}(2-2\le Z_X\le 4-2)=\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{4}\le Z_Y\le\frac{2m-3-m}{4}\right)$

$2\mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)=\mathrm{P}\left(-\frac{m-3}{4}\le Z_Y\le\frac{m-3}{4}\right)$

$2\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{m-3}{4}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)=\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{m-3}{4}\right)$

따라서 $\frac{m-3}{4}=2$이므로 $m-3=8$ $\therefore m=11$ 답 11

유형 07 표준화하여 확률 구하기 본책 105쪽

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화한 후 이를 이용하여 구하는 확률을 Z에 대한 확률로 나타낸다.

➡ $\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma}\le Z\le\frac{b-m}{\sigma}\right)$

0692 $Z=\frac{X-40}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(35\le X\le 55)&=\mathrm{P}\left(\frac{35-40}{10}\le Z\le\frac{55-40}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.1915+0.4332=0.6247\end{aligned}$$

답 0.6247

0693 $Z=\frac{X-15}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 N(0, 1)을 따른다.

① $P(12\le X\le 15)=P\left(\frac{12-15}{3}\le Z\le \frac{15-15}{3}\right)$
$=P(-1\le Z\le 0)$
$=P(0\le Z\le 1)=0.3413$

② $P(12\le X\le 18)=P\left(\frac{12-15}{3}\le Z\le \frac{18-15}{3}\right)$
$=P(-1\le Z\le 1)=2P(0\le Z\le 1)$
$=2\times 0.3413=0.6826$

③ $P(X\le 12)=P\left(Z\le \frac{12-15}{3}\right)$
$=P(Z\le -1)=P(Z\ge 1)$
$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)$
$=0.5-0.3413=0.1587$

④ $P(15\le X\le 18)=P\left(\frac{15-15}{3}\le Z\le \frac{18-15}{3}\right)$
$=P(0\le Z\le 1)=0.3413$

⑤ $P(X\ge 15)=P\left(Z\ge \frac{15-15}{3}\right)=P(Z\ge 0)=0.5$

답 ③

0694 $Z=\frac{X-33}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 N(0, 1)을 따른다. ➊

$P(30\le X\le 36)=0.4514$에서

$P\left(\frac{30-33}{5}\le Z\le \frac{36-33}{5}\right)=0.4514$

$P(-0.6\le Z\le 0.6)=0.4514$

$2P(0\le Z\le 0.6)=0.4514$

$\therefore P(0\le Z\le 0.6)=0.2257$ ➋

$\therefore P(X>36)=P\left(Z>\frac{36-33}{5}\right)=P(Z>0.6)$
$=0.5-P(0\le Z\le 0.6)$
$=0.5-0.2257=0.2743$ ➌

답 0.2743

채점 기준표

➊ X를 표준화할 수 있다.	20%
➋ $P(30\le X\le 36)=0.4514$를 변형할 수 있다.	40%
➌ $P(X>36)$을 구할 수 있다.	40%

0695 $E(X)=50$, $\sigma(X)=10$에서

$E(Y)=E(2X-1)=2E(X)-1=2\cdot 50-1=99$

$\sigma(Y)=\sigma(2X-1)=2\sigma(X)=2\cdot 10=20$

이때 X가 정규분포 $N(50, 10^2)$을 따르므로 Y는 정규분포 $N(99, 20^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-99}{20}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 N(0, 1)을 따르므로

$P(Y\le 89)=P\left(Z\le \frac{89-99}{20}\right)=P(Z\le -0.5)$
$=P(Z\ge 0.5)=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.5)$
$=0.5-0.1915=0.3085$

답 0.3085

다른 풀이 $Y=2X-1$이므로

$P(Y\le 89)=P(2X-1\le 89)=P(X\le 45)$

$Z=\frac{X-50}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 N(0, 1)을 따르므로

$P(Y\le 89)=P(X\le 45)=P\left(Z\le \frac{45-50}{10}\right)$
$=P(Z\le -0.5)=P(Z\ge 0.5)$
$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.5)$
$=0.5-0.1915$
$=0.3085$

SSEN 특강

$aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X와 상수 $a(a\ne 0)$, b에 대하여

① $E(aX+b)=aE(X)+b$

② $V(aX+b)=a^2V(X)$

③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

유형 08 표준화하여 미지수의 값 구하기

본책 105쪽

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $P(m\le X\le a)=k$이면

$P\left(0\le Z\le \frac{a-m}{\sigma}\right)=k$

➡ 표준정규분포표에서 이를 만족시키는 a의 값을 찾는다.

0696 $Z=\frac{X-45}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 N(0, 1)을 따르므로 $P(40\le X\le a)=0.8185$에서

$P\left(\frac{40-45}{5}\le Z\le \frac{a-45}{5}\right)=0.8185$

$P\left(-1\le Z\le \frac{a-45}{5}\right)=0.8185$

$P(-1\le Z\le 0)+P\left(0\le Z\le \frac{a-45}{5}\right)=0.8185$

$P(0\le Z\le 1)+P\left(0\le Z\le \frac{a-45}{5}\right)=0.8185$

$0.3413+P\left(0\le Z\le \frac{a-45}{5}\right)=0.8185$

$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{a-45}{5}\right)=0.4772$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{a-45}{5}=2,\quad a-45=10$

$\therefore a=55$

답 ②

0697 $Z=\frac{X-m}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 N(0, 1)을 따르므로 $P(X\ge 57)=0.0228$에서

$P\left(Z\ge \frac{57-m}{2}\right)=0.0228$

$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le \frac{57-m}{2}\right)=0.0228$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le \frac{57-m}{2}\right)=0.0228$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{57-m}{2}\right)=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$$\frac{57-m}{2}=2,\quad 57-m=4$$

$$\therefore m=53$$

답 ③

0698 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(m-k\sigma\le X\le m+k\sigma)=0.823$에서

$$P\left(\frac{m-k\sigma-m}{\sigma}\le Z\le \frac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right)=0.823$$

$$P(-k\le Z\le k)=0.823$$

$$2P(0\le Z\le k)=0.823$$

$$\therefore P(0\le Z\le k)=0.4115$$

이때 $P(0\le Z\le 1.35)=0.4115$이므로

$$k=1.35$$

답 ③

유형 09 표준화하여 확률 비교하기 본책 98쪽

확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(m_X,\ \sigma_X{}^2)$, $N(m_Y,\ \sigma_Y{}^2)$을 따를 때, X, Y를

$$Z_X=\frac{X-m_X}{\sigma_X},\ Z_Y=\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}$$

로 각각 표준화하여 확률을 비교한다.

➡ $0<a<b$이면 $P(Z\ge a)>P(Z\ge b)$

0699 서준이네 반 전체 학생의 국어, 수학, 영어 시험 성적을 각각 확률변수 X_A, X_B, X_C라 하면 X_A, X_B, X_C는 각각 정규분포 $N(70,\ 15^2)$, $N(72,\ 18^2)$, $N(74,\ 16^2)$을 따르므로

$$Z_A=\frac{X_A-70}{15},\ Z_B=\frac{X_B-72}{18},\ Z_C=\frac{X_C-74}{16}$$

로 놓으면 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
다른 학생들이 서준이보다 국어, 수학, 영어 성적이 높을 확률은 각각

$$P(X_A>85)=P\left(Z_A>\frac{85-70}{15}\right)=P(Z_A>1),$$

$$P(X_B>92)=P\left(Z_B>\frac{92-72}{18}\right)=P\left(Z_B>\frac{10}{9}\right),$$

$$P(X_C>88)=P\left(Z_C>\frac{88-74}{16}\right)=P\left(Z_C>\frac{7}{8}\right)$$

이때 $P\left(Z_B>\frac{10}{9}\right)<P(Z_A>1)<P\left(Z_C>\frac{7}{8}\right)$이므로

$$P(X_B>92)<P(X_A>85)<P(X_C>88)$$

따라서 서준이의 성적이 상대적으로 좋은 과목부터 순서대로 나열하면 수학, 국어, 영어이다. └ 확률이 낮은 과목일수록 상대적으로 성적이 좋다.

답 수학, 국어, 영어

0700 확률변수 W, X, Y는 각각 정규분포 $N(60,\ a^2)$, $N(62,\ b^2)$, $N(64,\ c^2)$을 따르므로

$$Z_W=\frac{W-60}{a},\ Z_X=\frac{X-62}{b},\ Z_Y=\frac{Y-64}{c}$$

로 놓으면 Z_W, Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
이때

$$p=P(W\ge 66)=P\left(Z_W\ge \frac{66-60}{a}\right)=P\left(Z_W\ge \frac{6}{a}\right),$$

$$q=P(X\le 56)=P\left(Z_X\le \frac{56-62}{b}\right)$$

$$=P\left(Z_X\le -\frac{6}{b}\right)=P\left(Z_X\ge \frac{6}{b}\right),$$

$$r=P(Y\ge 70)=P\left(Z_Y\ge \frac{70-64}{c}\right)=P\left(Z_Y\ge \frac{6}{c}\right)$$

이고 $0<a<b<c$에서 $0<\frac{6}{c}<\frac{6}{b}<\frac{6}{a}$이므로

$$P\left(Z_W\ge \frac{6}{a}\right)<P\left(Z_X\ge \frac{6}{b}\right)<P\left(Z_Y\ge \frac{6}{c}\right)$$

$$\therefore p<q<r$$

답 ①

0701 1반, 2반, 3반 학생의 키를 각각 확률변수 X_1, X_2, X_3이라 하면 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $N(174,\ 6^2)$, $N(170,\ 2^2)$, $N(172,\ 3^2)$을 따르므로

$$Z_1=\frac{X_1-174}{6},\ Z_2=\frac{X_2-170}{2},\ Z_3=\frac{X_3-172}{3}$$

로 놓으면 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
1반, 2반, 3반 학생이 각각 A, B, C보다 키가 클 확률은

$$P(X_1>175)=P\left(Z_1>\frac{175-174}{6}\right)=P\left(Z_1>\frac{1}{6}\right),$$

$$P(X_2>173)=P\left(Z_2>\frac{173-170}{2}\right)=P\left(Z_2>\frac{3}{2}\right),$$

$$P(X_3>174)=P\left(Z_3>\frac{174-172}{3}\right)=P\left(Z_3>\frac{2}{3}\right)$$

이때 $P\left(Z_2>\frac{3}{2}\right)<P\left(Z_3>\frac{2}{3}\right)<P\left(Z_1>\frac{1}{6}\right)$이므로

$$P(X_2>173)<P(X_3>174)<P(X_1>175)$$

따라서 각자 자기 반에서 상대적으로 키가 큰 학생부터 순서대로 나열하면 B, C, A이다.

답 B, C, A

유형 10 정규분포의 활용; 확률 구하기 본책 98쪽

정규분포에 대한 실생활 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.
(i) 확률변수 X를 정한 후 X가 따르는 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 구한다.
(ii) X를 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화한다.
(iii) 구하는 확률을 식으로 나타낸 후 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

0702 학생들의 진단 평가 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(67,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-67}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(X\le 65)=P\left(Z\le \frac{65-67}{4}\right)=P(Z\le -0.5)$$
$$=P(Z\ge 0.5)=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.5-0.19=0.31$$

답 ④

0703 수축기 혈압을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(120,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore P(135\le X\le 140)=P\left(\frac{135-120}{10}\le Z\le \frac{140-120}{10}\right)$$
$$=P(1.5\le Z\le 2)$$
$$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1.5)$$
$$=0.48-0.43=0.05$$

따라서 수축기 혈압이 135 mmHg 이상 140 mmHg 이하인 사원은 전체의 5 %이다.

답 ①

0704 승연이가 등교하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(30,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-30}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ➊

학교에 오전 8시 30분이 지난 후에 도착하면, 즉 $X>36$이면 지각이므로 구하는 확률은

$$P(X>36)=P\left(Z>\frac{36-30}{5}\right)=P(Z>1.2)$$
$$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.2)$$
$$=0.5-0.38=0.12$$ ➋

답 0.12

채점 기준표

➊ 확률변수 X를 정하고 표준화할 수 있다.	40%
➋ 승연이가 지각할 확률을 구할 수 있다.	60%

0705 온도계의 눈금을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(27.5,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-27.5}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

자동 검사 장비의 기준 온도가 30 °C이므로 구하는 확률은

$$P(|X-30|\ge 5)$$
$$=P(X\le 25)+P(X\ge 35)$$
$$=P\left(Z\le \frac{25-27.5}{5}\right)+P\left(Z\ge \frac{35-27.5}{5}\right)$$
$$=P(Z\le -0.5)+P(Z\ge 1.5)$$
$$=P(Z\ge 0.5)+P(Z\ge 1.5)$$
$$=0.5-P(0\le Z\le 0.5)+0.5-P(0\le Z\le 1.5)$$
$$=1-0.19-0.43=0.38$$

답 ②

0706 응시자들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(55,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-55}{\sigma}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

점수가 50점 이상 60점 이하인 학생이 680명이므로

$$P(50\le X\le 60)=\frac{680}{1000}=0.68$$
$$P\left(\frac{50-55}{\sigma}\le Z\le \frac{60-55}{\sigma}\right)=0.68$$
$$P\left(-\frac{5}{\sigma}\le Z\le \frac{5}{\sigma}\right)=0.68$$
$$2P\left(0\le Z\le \frac{5}{\sigma}\right)=0.68$$
$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{5}{\sigma}\right)=0.34$$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.34$이므로

$$\frac{5}{\sigma}=1 \qquad \therefore \sigma=5$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X\ge 65)=P\left(Z\ge \frac{65-55}{5}\right)=P(Z\ge 2)$$
$$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.48=0.02$$

답 0.02

유형 11 정규분포의 활용; 도수 구하기 본책 107쪽

정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여 n개의 자료 중 특정 범위에 속하는 자료의 개수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) X를 표준화한다.

(ii) 표준정규분포표를 이용하여 X가 특정 범위에 속할 확률 p를 구한다.

(iii) $p\times n$의 값을 구한다.

0707 학생들의 몸무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(65,\ 7^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-65}{7}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore P(54.5\le X\le 68.5)=P\left(\frac{54.5-65}{7}\le Z\le \frac{68.5-65}{7}\right)$$
$$=P(-1.5\le Z\le 0.5)$$
$$=P(-1.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)$$
$$=P(0\le Z\le 1.5)+P(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.43+0.19=0.62$$

따라서 몸무게가 54.5 kg 이상 68.5 kg 이하인 학생 수는

$0.62\times 1400=868$

답 ②

0708 신입생들의 용돈을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(40,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ➊

$$\therefore P(X\le 30)=P\left(Z\le \frac{30-40}{5}\right)$$
$$=P(Z\le -2)=P(Z\ge 2)$$
$$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.48=0.02$$ ➋

따라서 용돈이 30만 원 이하인 학생 수는

$0.02\times300=6$ ⋯ ③

답 6

채점 기준표

① 확률변수 X를 정하고 표준화할 수 있다.	30%
② 용돈이 30만 원 이하일 확률을 구할 수 있다.	40%
③ 용돈이 30만 원 이하인 학생 수를 구할 수 있다.	30%

0709 TV 사용 기간을 확률변수 X라 하면 X의 평균은 108개월, 즉 9년이고 표준편차는 12개월, 즉 1년이므로 X는 정규분포 $N(9,\ 1)$을 따른다.

$Z=X-9$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(10\le X\le11)&=P(10-9\le Z\le11-9)\\&=P(1\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le2)-P(0\le Z\le1)\\&=0.48-0.34=0.14\end{aligned}$$

따라서 조사 대상의 소비자 150만 명 중에서 사용 기간이 10년에서 11년 사이인 소비자는

$0.14\times150=21$(만 명)

$\therefore n=21$

답 ②

0710 사원들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$M=-0.3$이므로 $\frac{m-80}{5\sigma}=-0.3$에서

$m-80=-1.5\sigma \quad \therefore 80-m=1.5\sigma$

$$\begin{aligned}\therefore P(X\ge80)&=P\left(Z\ge\frac{80-m}{\sigma}\right)\\&=P\left(Z\ge\frac{1.5\sigma}{\sigma}\right)=P(Z\ge1.5)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.5)\\&=0.5-0.43=0.07\end{aligned}$$

따라서 성과급을 받는 사원 수는

$0.07\times400=28$

답 28

유형 12 정규분포의 활용; 미지수의 값 구하기 본책 100쪽

확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 상위 $k\%$ 안에 드는 X의 최솟값을 a라 하면

$P(X\ge a)=\frac{k}{100}$, 즉 $P\left(Z\ge\frac{a-m}{\sigma}\right)=\frac{k}{100}$

를 만족시키는 a의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구한다.

0711 응시자들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(65,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-65}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라 하면

$P(X\ge a)=\frac{200}{1000}=0.2$

$P\left(Z\ge\frac{a-65}{10}\right)=0.2$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-65}{10}\right)=0.2$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-65}{10}\right)=0.2$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-65}{10}\right)=0.3$

이때 $P(0\le Z\le0.85)=0.3$이므로

$\frac{a-65}{10}=0.85, \quad a-65=8.5$

$\therefore a=73.5$

따라서 합격자의 최저 점수는 73.5점이다.

답 73.5점

0712 학생들의 지능 지수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(100,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-100}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

상위 10% 이내에 속하는 학생의 최저 지능 지수를 a라 하면

$P(X\ge a)=0.1$

$P\left(Z\ge\frac{a-100}{5}\right)=0.1$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-100}{5}\right)=0.1$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-100}{5}\right)=0.1$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-100}{5}\right)=0.4$

이때 $P(0\le Z\le1.3)=0.4$이므로

$\frac{a-100}{5}=1.3, \quad a-100=6.5$

$\therefore a=106.5$

따라서 상위 10% 이내에 속하는 학생의 최저 지능 지수는 106.5이다.

답 ③

0713 염소들의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(70,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-70}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

무게가 가벼운 쪽에서 200번째인 염소의 무게를 a kg이라 하면

$P(X\le a)=\frac{200}{500}=0.4$

$P\left(Z\le\frac{a-70}{12}\right)=0.4$

$P\left(Z\ge\frac{70-a}{12}\right)=0.4$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{70-a}{12}\right)=0.4$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{70-a}{12}\right)=0.4$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{70-a}{12}\right)=0.1$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.25)=0.1$이므로

$\frac{70-a}{12}=0.25,\quad 70-a=3$

$\therefore a=67$

따라서 무게가 가벼운 쪽에서 200번째인 염소의 무게는 67 kg이다.

답 ⑤

0714 A반 학생들의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(165.9,\ 10^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-165.9}{10}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

A반에서 학생의 키가 180 cm 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 180)&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{180-165.9}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge 1.41)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 1.41)\\&=0.5-0.42=0.08\end{aligned}$$

한편 B반 학생들의 키를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(169.8,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_Y=\frac{Y-169.8}{5}$로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 B반에서 키가 a cm 이상인 학생 수는 A반에서 키가 180 cm 이상인 학생 수의 2배이므로 B반에서 학생의 키가 a cm 이상일 확률도 A반에서 학생의 키가 180 cm 이상일 확률의 2배이다. 즉

$\mathrm{P}(Y\ge a)=2\mathrm{P}(X\ge 180)$

$\mathrm{P}\left(Z_Y\ge \frac{a-169.8}{5}\right)=2\times 0.08=0.16$

$\mathrm{P}(Z_Y\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le \frac{a-169.8}{5}\right)=0.16$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le \frac{a-169.8}{5}\right)=0.16$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le \frac{a-169.8}{5}\right)=0.34$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 1)=0.34$이므로

$\frac{a-169.8}{5}=1,\quad a-169.8=5$

$\therefore a=174.8$

답 174.8

유형 13 이항분포와 정규분포의 관계 본책 108쪽

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때

➡ n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

0715 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=192\cdot\frac{3}{4}=144,\ \mathrm{V}(X)=192\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=36$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(144,\ 6^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-144}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge 135)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{135-144}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -1.5)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+0.5\\&=0.4332+0.5\\&=0.9332\end{aligned}$$

답 ④

0716 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로 ➊

$\mathrm{E}(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20,\ \mathrm{V}(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

➋

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(16\le X\le 24)&=\mathrm{P}\left(\frac{16-20}{4}\le Z\le \frac{24-20}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=2\times 0.34\\&=0.68\end{aligned}$$

➌

답 0.68

채점 기준표

➊ X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	20%
➋ X를 표준화할 수 있다.	40%
➌ $\mathrm{P}(16\le X\le 24)$를 구할 수 있다.	40%

0717 ${}_{450}\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{450-x}$은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{2}{3}$인 어떤 사건이 450번의 독립시행에서 x번 일어날 확률이다.

이 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=450\cdot\frac{2}{3}=300,\ \mathrm{V}(X)=450\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=100$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 10^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}&\therefore {}_{450}\mathrm{C}_{450}\left(\frac{2}{3}\right)^{450}+{}_{450}\mathrm{C}_{449}\left(\frac{2}{3}\right)^{449}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}+\cdots+{}_{450}\mathrm{C}_{330}\left(\frac{2}{3}\right)^{330}\left(\frac{1}{3}\right)^{120}\\&=\mathrm{P}(X=450)+\mathrm{P}(X=449)+\cdots+\mathrm{P}(X=330)\\&=\mathrm{P}(X\ge 330)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{330-300}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 3)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$

답 0.0013

유형 14 이항분포와 정규분포의 관계의 활용 ; 확률 구하기 본책 189쪽

n번의 독립시행에서 사건 A가 a번 이상 b번 이하로 일어날 확률은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하고, X가 따르는 이항분포를 $\mathrm{B}(n, p)$로 나타낸다.
(ii) X의 평균 m과 분산 σ^2을 구한다.
(iii) X가 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따름을 이용하여 X를 표준화한다.
(iv) 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$를 구한다.

0718 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=720\cdot\frac{1}{6}=120,\ \mathrm{V}(X)=720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=100$$

즉 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120, 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(100\le X\le 130)&=\mathrm{P}\left(\frac{100-120}{10}\le Z\le\frac{130-120}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772+0.3413\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 ②

0719 예약을 취소하는 손님의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400, 0.1)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=400\times0.1=40,\ \mathrm{V}(X)=400\times0.1\times0.9=36$$

즉 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(40, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
비행기를 타러 온 모든 손님이 비행기를 타려면 예약을 취소하는 손님이 $400-375=25$(명) 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 25)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{25-40}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2.5)\\&=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)+0.5\\&=0.49+0.5\\&=0.99\end{aligned}$$

답 0.99

0720 B회사의 제품을 택할 확률은 $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$이므로 192명의 고객 중 B회사의 제품을 택하는 고객의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192, \frac{1}{4}\right)$을 따른다. → ❶

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=192\cdot\frac{1}{4}=48,\ \mathrm{V}(X)=192\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=36$$

즉 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-48}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. → ❷
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 42)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{42-48}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -1)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+0.5\\&=0.3413+0.5=0.8413\end{aligned}$$

→ ❸

답 0.8413

채점 기준표

❶ 확률변수 X를 정하고 X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	30%
❷ X를 표준화할 수 있다.	30%
❸ B회사의 제품을 택하는 고객이 42명 이상일 확률을 구할 수 있다.	40%

0721 10점을 얻는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1600, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=1600\cdot\frac{1}{5}=320,\ \mathrm{V}(X)=1600\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=256$$

즉 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320, 16^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-320}{16}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
한편 1600번의 시행 중에서 2점을 잃는 횟수는 $1600-X$이므로 736점 이상을 얻기 위해서는

$$10X-2(1600-X)\ge 736,\qquad 12X\ge 3936\qquad \therefore\ X\ge 328$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 328)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{328-320}{16}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5-0.1915=0.3085\end{aligned}$$

답 0.3085

유형 15 이항분포와 정규분포의 관계의 활용 ; 미지수의 값 구하기 본책 189쪽

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, $\mathrm{P}(X\ge a)=\alpha$ (α는 상수)를 만족시키는 a의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) X가 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, np(1-p))$를 따름을 이용하여 X를 표준화한다.
(ii) 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(Z\ge k)=\alpha$를 만족시키는 k를 찾아 a의 값을 구한다.

0722 맞힌 문제의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20,\ \mathrm{V}(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge a)=0.01$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{a-20}{4}\right)=0.01$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-20}{4}\right)=0.01$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-20}{4}\right)=0.01$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-20}{4}\right)=0.49$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.49$이므로

$$\frac{a-20}{4}=2.5,\quad a-20=10\quad \therefore\ a=30$$

답 ⑤

0723 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(1458,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=1458\cdot\frac{1}{3}=486,\ \mathrm{V}(X)=1458\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=324$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(486,\ 18^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-486}{18}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge k)=0.1587$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{k-486}{18}\right)=0.1587$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-486}{18}\right)=0.1587$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-486}{18}\right)=0.1587$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-486}{18}\right)=0.3413$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\frac{k-486}{18}=1,\quad k-486=18\quad \therefore\ k=504$$

답 504

0724 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=n\cdot\frac{1}{10}=\frac{n}{10},\ \mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9n}{100}$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{n}{10},\ \left(\frac{3\sqrt{n}}{10}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-\frac{n}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(\left|X-\frac{n}{10}\right|\le\frac{15}{2}\right)\ge 0.8664$에서

$$\mathrm{P}\left(-\frac{15}{2}\le X-\frac{n}{10}\le\frac{15}{2}\right)\ge 0.8664$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}\le Z\le\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}\right)\ge 0.8664$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}\right)\ge 0.4332$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}\ge 1.5,\quad \frac{150}{6\sqrt{n}}\ge\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{n}\le\frac{50}{3}\quad \therefore\ n\le\frac{2500}{9}=277.777\cdots$$

n은 자연수이므로 n의 최댓값은 277이다.

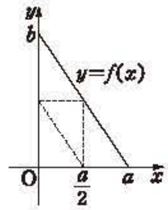
답 277

0725 전략 $\mathrm{P}\left(\frac{a}{2}\le X\le a\right)=\frac{1}{4}$임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=1\quad \therefore\ ab=2 \quad\cdots\cdots\ ㉠$$

또 $\mathrm{P}(b-a\le X\le a)=\frac{1}{4}$이므로 오른쪽 그림에서



$$b-a=\frac{a}{2}\quad \therefore\ 3a-2b=0 \quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠에서 $b=\frac{2}{a}$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$$3a-\frac{4}{a}=0,\quad 3a^2-4=0\quad \therefore\ a^2=\frac{4}{3}$$

따라서 $b^2=\frac{4}{a^2}=3$이므로

$$12(b^2-a^2)=12\left(3-\frac{4}{3}\right)=20$$

답 ②

0726 전략 확률변수 X의 정규분포 곡선은 직선 $x=4$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 확률변수 X의 평균이 4이므로 정규분포 곡선은 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sum_{n=1}^{7}\mathrm{P}(X\le n)\\ &=\mathrm{P}(X\le 1)+\mathrm{P}(X\le 2)+\mathrm{P}(X\le 3)+\mathrm{P}(X\le 4)\\ &\quad+\mathrm{P}(X\le 5)+\mathrm{P}(X\le 6)+\mathrm{P}(X\le 7)\\ &=\mathrm{P}(X\le 1)+\mathrm{P}(X\le 2)+\mathrm{P}(X\le 3)+\mathrm{P}(X\le 4)\\ &\quad+\mathrm{P}(X\ge 3)+\mathrm{P}(X\ge 2)+\mathrm{P}(X\ge 1)\\ &=\{\mathrm{P}(X\le 1)+\mathrm{P}(X\ge 1)\}+\{\mathrm{P}(X\le 2)+\mathrm{P}(X\ge 2)\}\\ &\quad+\{\mathrm{P}(X\le 3)+\mathrm{P}(X\ge 3)\}+\mathrm{P}(X\le 4)\\ &=1+1+1+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{7}{2}$이므로 $10a=35$

답 35

0727 전략 확률변수 X, Y를 표준화하여 각 확률을 비교한다.

풀이 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ (2\sigma)^2)$, $\mathrm{N}(2m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-m}{2\sigma},\ Z_Y=\frac{Y-2m}{\sigma}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. $P(X\le 0)=P\left(Z_X\le -\frac{m}{2\sigma}\right)$, $P(Y\ge 0)=P\left(Z_Y\ge -\frac{2m}{\sigma}\right)$

이고 $-\frac{2m}{\sigma}<-\frac{m}{2\sigma}<0$이므로

$$P\left(Z_X\le -\frac{m}{2\sigma}\right)<0.5<P\left(Z_Y\ge -\frac{2m}{\sigma}\right)$$

$\therefore P(X\le 0)<P(Y\ge 0)$

ㄴ. $P(m\le X\le 2m)=P\left(0\le Z_X\le \frac{m}{2\sigma}\right)$

$$\frac{1}{2}P(m\le Y\le 2m)=\frac{1}{2}P\left(-\frac{m}{\sigma}\le Z_Y\le 0\right)$$
$$=\frac{1}{2}P\left(0\le Z_Y\le \frac{m}{\sigma}\right)$$

이때 $P\left(0\le Z_X\le \frac{m}{2\sigma}\right)=\frac{1}{2}P\left(0\le Z_Y\le \frac{m}{\sigma}\right)$인지는 알 수 없다.

ㄷ. $P(X\ge a)=P(Y\le b)$에서

$$P\left(Z_X\ge \frac{a-m}{2\sigma}\right)=P\left(Z_Y\le \frac{b-2m}{\sigma}\right)$$

따라서 $\frac{a-m}{2\sigma}+\frac{b-2m}{\sigma}=0$이므로

$a-m+2b-4m=0 \qquad \therefore a+2b=5m$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0728 전략 두 곡선과 x축 및 두 직선 $x=50$, $x=m$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 이용하여 S_1, S_2를 나타낸다.

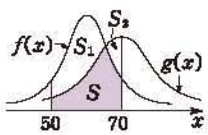
풀이 $E(X)=60$, $\sigma(X)=10$이고, $Y=2X-50$이므로

$E(Y)=E(2X-50)=2E(X)-50=2\cdot 60-50=70$

$\sigma(Y)=\sigma(2X-50)=2\sigma(X)=2\cdot 10=20$

따라서 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(60,\ 10^2)$, $N(70,\ 20^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-60}{10}$, $Z_Y=\frac{Y-70}{20}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

오른쪽 그림과 같이 두 곡선과 x축 및 두 직선 $x=50$, $x=70$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면



$S_1=P(50\le X\le 70)-S$

$S_2=P(50\le Y\le 70)-S$

$$\therefore S_1-S_2=P(50\le X\le 70)-P(50\le Y\le 70)$$
$$=P\left(\frac{50-60}{10}\le Z_X\le \frac{70-60}{10}\right)$$
$$-P\left(\frac{50-70}{20}\le Z_Y\le \frac{70-70}{20}\right)$$
$$=P(-1\le Z_X\le 1)-P(-1\le Z_Y\le 0)$$
$$=P(0\le Z\le 1)=0.3413$$

답 0.3413

0729 전략 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $f(80-x)=f(80+x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=80$에 대하여 대칭이고, 확률변수 X가 정규분포 $N(m_X,\ \sigma^2)$을 따르므로

$m_X=80$

따라서 $Z_X=\frac{X-80}{\sigma}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(80\le X\le 90)=0.4938$에서

$$P\left(\frac{80-80}{\sigma}\le Z_X\le \frac{90-80}{\sigma}\right)=0.4938$$

$$P\left(0\le Z_X\le \frac{10}{\sigma}\right)=0.4938$$

이때 $P(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$\frac{10}{\sigma}=2.5 \qquad \therefore \sigma=4$

한편 $g(x)=g(80-x)$에 x 대신 $40-x$를 대입하면

$g(40-x)=g(40+x)$

이므로 $g(x)$의 그래프는 직선 $x=40$에 대하여 대칭이고, 확률변수 Y가 정규분포 $N\left(m_Y,\ \frac{4^2}{4}\right)$, 즉 $N(m_Y,\ 2^2)$을 따르므로

$m_Y=40$

따라서 $Z_Y=\frac{Y-40}{2}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(36\le Y\le 46)=P\left(\frac{36-40}{2}\le Z_Y\le \frac{46-40}{2}\right)$$
$$=P(-2\le Z_Y\le 3)$$
$$=P(-2\le Z_Y\le 0)+P(0\le Z_Y\le 3)$$
$$=P(0\le Z_Y\le 2)+P(0\le Z_Y\le 3)$$
$$=0.4772+0.4987$$
$$=0.9759$$

답 ⑤

0730 전략 확률변수 X에 대하여 $E(aX+b)=aE(X)+b$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$임을 이용한다. (단, a, b는 상수, $a\ne 0$)

풀이 확률변수 X가 정규분포 $N(60,\ 10^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-60}{10}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\le 50)=0.1587$에서

$$P\left(Z_X\le \frac{50-60}{10}\right)=0.1587, \qquad P(Z_X\le -1)=0.1587$$

$\therefore P(Z_X\ge 1)=0.1587 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

한편 $Y=3X-4$에서

$E(Y)=E(3X-4)=3E(X)-4=3\cdot 60-4=176$

$\sigma(Y)=\sigma(3X-4)=3\sigma(X)=3\cdot 10=30$

따라서 Y는 정규분포 $N(176,\ 30^2)$을 따르므로 $Z_Y=\frac{Y-176}{30}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore P(Y\le 206)=P\left(Z_Y\le \frac{206-176}{30}\right)=P(Z_Y\le 1)$$
$$=1-P(Z_Y\ge 1)=1-0.1587 \ (\because ㉠)$$
$$=0.8413$$

답 ⑤

다른 풀이 $Y=3X-4$이므로 $Y\le 206$에서

$3X-4\le 206 \qquad \therefore X\le 70$

$$\therefore P(Y\le 206)=P(X\le 70)=P\left(Z_X\le \frac{70-60}{10}\right)$$
$$=P(Z_X\le 1)=1-P(Z_X\ge 1)$$
$$=1-0.1587=0.8413$$

0731 전략 P학과의 중간고사에서의 재시험률이 16%임을 이용하여 m의 값을 구한다.

풀이 P학과 학생들의 중간고사, 기말고사 점수를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$, $\mathrm{N}(m+6,\ 8^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-m}{10},\ Z_Y=\frac{Y-(m+6)}{8}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
P학과의 중간고사에서의 재시험률이 16%이므로

$$\mathrm{P}(X\le 60)=0.16,\quad \mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{60-m}{10}\right)=0.16$$

$$\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{m-60}{10}\right)=0.16$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{m-60}{10}\right)=0.16$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{m-60}{10}\right)=0.34$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.34$이므로

$$\frac{m-60}{10}=1\quad \therefore m=70$$

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(76,\ 8^2)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le 60)&=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{60-76}{8}\right)=\mathrm{P}(Z_Y\le -2)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\ge 2)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

즉 P학과의 기말고사에서의 재시험률은 2%이므로 P학과의 학업성취도 지수 S는 $S=\dfrac{(70+76)-(16+2)}{2}=64$

답 64

0732 전략 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}(X\le b)$이면 $m=\dfrac{a+b}{2}$임을 이용한다.

풀이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}(X\ge 54)=\mathrm{P}(X\le 46)$에서

$$m=\frac{54+46}{2}=50 \quad ❶$$

이때 $\mathrm{E}(X^2)=2516$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2516-50^2=16 \quad ❷$$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 4^2)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 56)&=\mathrm{P}(X\le 50)+\mathrm{P}(50\le X\le 56)\\&=\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+1.5\sigma)\\&=0.5+0.4332=0.9332 \quad ❸\end{aligned}$$

답 0.9332

채점 기준표

❶ m의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $\mathrm{P}(X\le 56)$을 구할 수 있다.	40%

0733 전략 전교생 중 임의로 택한 한 학생의 기록이 18초 이상일 확률은 $\dfrac{159}{1000}=0.159$이고, 14초 이하일 확률은 $\dfrac{67}{1000}=0.067$임을 이용한다.

풀이 전교생의 100 m 달리기 기록을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ❶

전교생 중 100 m 달리기 기록이 18초 이상인 학생이 159명이므로

$$\mathrm{P}(X\ge 18)=\frac{159}{1000}=0.159$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{18-m}{\sigma}\right)=0.159$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{18-m}{\sigma}\right)=0.159$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{18-m}{\sigma}\right)=0.341$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.341$이므로

$$\frac{18-m}{\sigma}=1\quad \therefore 18-m=\sigma \quad \cdots\cdots ㉠$$

전교생 중 100 m 달리기 기록이 14초 이하인 학생이 67명이므로

$$\mathrm{P}(X\le 14)=\frac{67}{1000}=0.067$$

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{14-m}{\sigma}\right)=0.067,\quad \mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m-14}{\sigma}\right)=0.067$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-14}{\sigma}\right)=0.067$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-14}{\sigma}\right)=0.433$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.433$이므로

$$\frac{m-14}{\sigma}=1.5\quad \therefore m-14=1.5\sigma \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=16.4,\ \sigma=1.6$ ❷

따라서 X는 정규분포 $\mathrm{N}(16.4,\ 1.6^2)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 15.6)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{15.6-16.4}{1.6}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0.5)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5+0.192=0.692 \quad ❸\end{aligned}$$

답 0.692

채점 기준표

❶ 확률변수 X를 정하고 표준화할 수 있다.	20%
❷ m, σ의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ 임의로 택한 한 학생의 기록이 15.6초 이상일 확률을 구할 수 있다.	20%

0734 전략 확률변수 X, Y를 정하고 각각 표준화한 후 확률을 비교한다.

풀이 두 회사 A, B에서 생산한 호스의 길이를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 0.5^2)$, $\mathrm{N}(15,\ 0.7^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-12}{0.5},\ Z_Y=\frac{Y-15}{0.7}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ❶

A회사에서 생산한 호스를 A회사에서 생산한 호스로 판단할 확률은

$$\mathrm{P}(X<t)=\mathrm{P}\left(Z_X<\frac{t-12}{0.5}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

B회사에서 생산한 호스를 B회사에서 생산한 호스로 판단할 확률은

$$P(Y \ge t)=P\left(Z_Y \ge \frac{t-15}{0.7}\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉠, ㉡이 같아야 하므로

$$\frac{t-12}{0.5}+\frac{t-15}{0.7}=0$$

$7(t-12)+5(t-15)=0, \quad 12t=159$

$\therefore t=\frac{53}{4}=13.25$ ⋯ ❷

답 13.25

채점 기준표

❶ 확률변수 X, Y를 정하고 표준화할 수 있다.	30%
❷ t의 값을 구할 수 있다.	70%

0735 전략 말의 위치가 80 이상이 되려면 짝수의 눈이 몇 회 이상 나와야 하는지를 먼저 구한다.

풀이 짝수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 ⋯ ❶

$$E(X)=100\cdot\frac{1}{2}=50, \quad V(X)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=25$$

즉 X는 근사적으로 정규분포 $N(50, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. ⋯ ❷

한편 홀수의 눈이 나오는 횟수는 $100-X$이므로

$2X-(100-X) \ge 80, \quad 3X \ge 180$

$\therefore X \ge 60$

따라서 구하는 확률은

$$P(X \ge 60)=P\left(Z \ge \frac{60-50}{5}\right)=P(Z \ge 2)$$
$$=P(Z \ge 0)-P(0 \le Z \le 2)$$
$$=0.5-0.48=0.02$$ ⋯ ❸

답 0.02

채점 기준표

❶ 확률변수 X를 정하고 X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	20%
❷ X를 표준화할 수 있다.	20%
❸ 말의 좌표가 80 이상일 확률을 구할 수 있다.	60%

다른 풀이 말의 좌표를 확률변수 Y라 하면

$Y=2X-(100-X)=3X-100$

$\therefore E(Y)=E(3X-100)=3E(X)-100=3\cdot 50-100=50$

$\sigma(Y)=\sigma(3X-100)=3\sigma(X)=3\cdot 5=15$

즉 Y는 근사적으로 정규분포 $N(50, 15^2)$을 따르므로

$Z_Y=\frac{Y-50}{15}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(Y \ge 80)=P\left(Z_Y \ge \frac{80-50}{15}\right)=P(Z_Y \ge 2)$$
$$=P(Z_Y \ge 0)-P(0 \le Z_Y \le 2)$$
$$=0.5-0.48$$
$$=0.02$$

08 통계적 추정

0736 답 ㄱ, ㄷ

0737 카드를 복원추출로 1장씩 3번 꺼내는 경우의 수는 6장의 카드에서 3장을 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

${}_6\Pi_3=6^3=216$

답 216

0738 카드를 비복원추출로 1장씩 3번 꺼내는 경우의 수는 6장의 카드에서 3장을 뽑는 순열의 수와 같으므로

${}_6P_3=120$

답 120

0739 모집단 {1, 3, 5, 7}에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 방법의 수는 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

(i) $\overline{X}=3$인 경우

(1, 5), (3, 3), (5, 1)의 3가지이므로

$a=P(\overline{X}=3)=\frac{3}{16}$

(ii) $\overline{X}=4$인 경우

(1, 7), (3, 5), (5, 3), (7, 1)의 4가지이므로

$b=P(\overline{X}=4)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

(iii) $\overline{X}=6$인 경우

(5, 7), (7, 5)의 2가지이므로

$c=P(\overline{X}=6)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

답 $a=\frac{3}{16}$, $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{8}$

0740 (1) $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $E(\overline{X})=2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{2}{9}+4\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{2}{9}+6\cdot\frac{1}{9}=\frac{36}{9}=4$

$$V(\overline{X})=2^2\cdot\frac{1}{9}+3^2\cdot\frac{2}{9}+4^2\cdot\frac{1}{3}+5^2\cdot\frac{2}{9}+6^2\cdot\frac{1}{9}-4^2$$
$$=\frac{156}{9}-16=\frac{4}{3}$$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 풀이 참조

0741 모평균이 30, 모표준편차가 3, 표본의 크기가 100이므로

(1) $E(\overline{X})=30$

(2) $V(\overline{X})=\frac{9}{100}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{3}{\sqrt{100}}=\frac{3}{10}$

답 (1) 30 (2) $\frac{9}{100}$ (3) $\frac{3}{10}$

0742 모평균이 50, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 25이므로
(1) $E(\overline{X})=50$
(2) $V(\overline{X})=\frac{4}{25}$
(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}$
답 (1) 50 (2) $\frac{4}{25}$ (3) $\frac{2}{5}$

0743 (1) $E(\overline{X})=100$, $V(\overline{X})=\frac{125}{5}=25$
(2) $N(100,\ 5^2)$
(3) $Z=\frac{\overline{X}-100}{5}$
(4) $P(\overline{X}\le 95)=P\left(Z\le\frac{95-100}{5}\right)=P(Z\le -1)$
$=P(Z\ge 1)=0.5-P(0\le Z\le 1)$
$=0.5-0.3413=0.1587$
답 (1) 평균: 100, 분산: 25 (2) $N(100,\ 5^2)$
(3) $Z=\frac{\overline{X}-100}{5}$ (4) 0.1587

0744 $E(\overline{X})=180$, $V(\overline{X})=\frac{24^2}{36}=16$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N(180,\ 4^2)$을 따른다.
$Z=\frac{\overline{X}-180}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은
$P(\overline{X}\ge 174)=P\left(Z\ge\frac{174-180}{4}\right)=P(Z\ge -1.5)$
$=P(-1.5\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)$
$=P(0\le Z\le 1.5)+P(Z\ge 0)$
$=0.4332+0.5=0.9332$
답 0.9332

0745 $P(184\le\overline{X}\le 188)=P\left(\frac{184-180}{4}\le Z\le\frac{188-180}{4}\right)$
$=P(1\le Z\le 2)$
$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)$
$=0.4772-0.3413$
$=0.1359$
답 0.1359

0746 $55-1.96\times\frac{6}{\sqrt{144}}\le m\le 55+1.96\times\frac{6}{\sqrt{144}}$이므로
$54.02\le m\le 55.98$
답 $54.02\le m\le 55.98$

0747 $55-2.58\times\frac{6}{\sqrt{144}}\le m\le 55+2.58\times\frac{6}{\sqrt{144}}$이므로
$53.71\le m\le 56.29$
답 $53.71\le m\le 56.29$

0748 $130-1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 130+1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}$이므로
$126.08\le m\le 133.92$
답 $126.08\le m\le 133.92$

0749 $130-2.58\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 130+2.58\times\frac{20}{\sqrt{100}}$이므로
$124.84\le m\le 135.16$
답 $124.84\le m\le 135.16$

0750 $2\times 1.96\times\frac{15}{\sqrt{400}}=2.94$
답 2.94

0751 $2\times 2.58\times\frac{15}{\sqrt{400}}=3.87$
답 3.87

0752 (1) $p=\frac{600}{1250}=0.48$
(2) $\hat{p}=\frac{19}{40}=0.475$
답 (1) 0.48 (2) 0.475

0753 (1) $E(\hat{p})=\frac{1}{3}$
(2) $V(\hat{p})=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{25}=\frac{2}{225}$
(3) $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{2}{225}}=\frac{\sqrt{2}}{15}$
답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{225}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{15}$

0754 (1) $E(\hat{p})=0.5$, $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{0.5\times 0.5}{100}}=0.05$
(2) $N(0.5,\ 0.05^2)$
(3) $Z=\frac{\hat{p}-0.5}{0.05}$
(4) $P(\hat{p}\le 0.55)=P\left(Z\le\frac{0.55-0.5}{0.05}\right)=P(Z\le 1)$
$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)$
$=0.5+0.3413=0.8413$
답 (1) 평균: 0.5, 표준편차: 0.05 (2) $N(0.5,\ 0.05^2)$
(3) $Z=\frac{\hat{p}-0.5}{0.05}$ (4) 0.8413

0755 모비율 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간은
$0.75-1.96\sqrt{\frac{0.75(1-0.75)}{300}}\le p\le 0.75+1.96\sqrt{\frac{0.75(1-0.75)}{300}}$
$0.75-0.049\le p\le 0.75+0.049$
$\therefore 0.701\le p\le 0.799$
답 $0.701\le p\le 0.799$

0756 모비율 p의 신뢰도 99%의 신뢰구간은
$0.75-2.58\sqrt{\frac{0.75(1-0.75)}{300}}\le p\le 0.75+2.58\sqrt{\frac{0.75(1-0.75)}{300}}$
$0.75-0.0645\le p\le 0.75+0.0645$
$\therefore 0.6855\le p\le 0.8145$
답 $0.6855\le p\le 0.8145$

0757 (1) $\hat{p}=\frac{20}{100}=0.2$
(2) 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은
$0.2-2.58\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{100}}\le p\le 0.2+2.58\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{100}}$
$0.2-0.1032\le p\le 0.2+0.1032$
$\therefore 0.0968\le p\le 0.3032$
답 (1) 0.2 (2) $0.0968\le p\le 0.3032$

유형 01 표본평균의 평균, 분산, 표준편차 ; 모평균, 모표준편차가 주어진 경우 본책 116쪽

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

0758 $\mathrm{E}(\overline{X})=10,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{2}=2$

이때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=2+10^2=102$$

답 102

0759 $\mathrm{E}(\overline{X})=36,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\frac{1}{3}$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})\sigma(\overline{X})=36\cdot\frac{1}{3}=12$$

답 ③

0760 $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}},\ \sigma(\overline{Y})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이고 $n_1=4n_2$이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{4n_2}}=\frac{\sigma}{2\sqrt{n_2}}=\frac{1}{2}\sigma(\overline{Y})$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0761 표본평균의 표준편차가 $\frac{0.4}{\sqrt{n}}$이므로

$$\frac{0.4}{\sqrt{n}}\le 0.2,\qquad \sqrt{n}\ge 2\qquad \therefore n\ge 4$$

따라서 n의 최솟값은 4이다.

답 ②

유형 02 표본평균의 평균, 분산, 표준편차 ; 모집단의 확률분포가 주어진 경우 본책 116쪽

(i) 모평균 m, 모분산 σ^2을 구한다.

➡ $m=\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i,\ \sigma^2=\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

(ii) 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.

➡ $\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

0762 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}=1\qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}=2$$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{4}-2^2=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{8}$$

답 평균: 2, 분산: $\frac{1}{8}$

0763 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{3}{16}+5\cdot\frac{5}{16}+7\cdot\frac{7}{16}=\frac{21}{4}$$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{1}{16}+3^2\cdot\frac{3}{16}+5^2\cdot\frac{5}{16}+7^2\cdot\frac{7}{16}-\left(\frac{21}{4}\right)^2$$

$$=31-\frac{441}{16}=\frac{55}{16}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{55}{16}}=\frac{\sqrt{55}}{4}$$

이때 표본의 크기가 9이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{55}}{4}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{55}}{12}$$

$$\therefore \sigma(12\overline{X})=12\sigma(\overline{X})=12\cdot\frac{\sqrt{55}}{12}=\sqrt{55}$$

답 ②

0764 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{V}(X)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$ ➡ ❶

표본의 크기가 n일 때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{4}$이므로

$$\frac{\frac{3}{4}}{n}=\frac{1}{4}\qquad \therefore n=3$$ ➡ ❷

답 3

채점 기준표	
❶ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	50%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	50%

유형 03 표본평균의 평균, 분산, 표준편차 ; 모집단이 주어진 경우 본책 117쪽

(i) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

(ii) 모평균 m, 모분산 σ^2을 구한다.

(iii) 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.

➡ $\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

0765 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{2}{7}+2\cdot\frac{3}{7}+3\cdot\frac{2}{7}=2$

$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{2}{7}+2^2\cdot\frac{3}{7}+3^2\cdot\frac{2}{7}-2^2=\frac{32}{7}-4=\frac{4}{7}$

이때 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{4}{7}}{4}=\frac{1}{7}$ 답 $\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{7}$

0766 상자에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{3}{8}=2$

$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{3}{8}-2^2=\frac{19}{4}-4=\frac{3}{4}$

표본의 크기가 n일 때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{20}$이므로

$\frac{\frac{3}{4}}{n}=\frac{1}{20}$ $\therefore n=15$ 답 ②

유형 04 표본평균의 확률 구하기 본책 117쪽

(i) 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 구한다.

(ii) 표본평균 $\overline{X}$를 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 표준화한다.

(iii) 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

0767 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(65,\ \frac{5^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(65,\ 1)$을 따른다.

$Z=\overline{X}-65$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(64\le\overline{X}\le66)=\mathrm{P}(64-65\le Z\le66-65)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le1)=2\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=2\times0.34=0.68$ 답 ①

0768 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40,\ \frac{10^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(40,\ 5^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-40}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\le45)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{45-40}{5}\right)=\mathrm{P}(Z\le1)$

$=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.5+0.34=0.84$ 답 ④

0769 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(80,\ \frac{12^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$을 따른다. ➊

$Z=\frac{\overline{X}-80}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge70)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{70-80}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\ge-2.5)$

$=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(Z\ge0)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)+0.5$

$=0.494+0.5$

$=0.994$ ➋

답 0.994

채점 기준표

➊ 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30%
➋ 평균이 70점 이상일 확률을 구할 수 있다.	70%

0770 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 9^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{9^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{3}{2}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

표본평균과 모평균의 차가 3 이하일 확률은

$\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le3)=\mathrm{P}(m-3\le\overline{X}\le m+3)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{m-3-m}{\frac{3}{2}}\le Z\le\frac{m+3-m}{\frac{3}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le2)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=2\times0.48$

$=0.96$ 답 ⑤

유형 05 표본평균의 확률; 표본의 크기 구하기 본책 118쪽

표본평균 $\overline{X}$가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따를 때, $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 표준화하고 주어진 확률과 표준정규분포표를 이용하여 표본의 크기를 구한다.

0771 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(250,\ 18^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(250,\ \frac{18^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-250}{\frac{18}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\ge 253)=0.0668$에서

$$P\left(Z\ge \frac{253-250}{\frac{18}{\sqrt{n}}}\right)=0.0668$$

$$P\left(Z\ge \frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.0668$$

$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.0668$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.0668$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.4332$$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{6}=1.5$, $\sqrt{n}=9$

$\therefore n=81$

답 ④

SSEN 특강

표준정규분포에서의 확률

① $P(Z\le k)<0.5$이면 $k<0$
➡ $P(Z\le k)=0.5-P(k\le Z\le 0)=0.5-P(0\le Z\le -k)$

② $P(Z\le k)>0.5$이면 $k>0$
➡ $P(Z\le k)=0.5+P(0\le Z\le k)$

③ $P(Z\ge k)<0.5$이면 $k>0$
➡ $P(Z\ge k)=0.5-P(0\le Z\le k)$

④ $P(Z\ge k)>0.5$이면 $k<0$
➡ $P(Z\ge k)=0.5+P(k\le Z\le 0)=0.5+P(0\le Z\le -k)$

0772 모집단이 정규분포 $N(0.9,\ 3^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(0.9,\ \frac{3^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-0.9}{\frac{3}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P\left(\overline{X}\le 1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}\right)=0.05$에서

$$P\left(Z\le \frac{1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}-0.9}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)=0.05$$

$P(Z\le 1.96-0.3\sqrt{n})=0.05$

$P(Z\le 0)-P(1.96-0.3\sqrt{n}\le Z\le 0)=0.05$

$0.5-P(0\le Z\le 0.3\sqrt{n}-1.96)=0.05$

$\therefore P(0\le Z\le 0.3\sqrt{n}-1.96)=0.45$

이때 $P(0\le Z\le 1.64)=0.45$이므로

$0.3\sqrt{n}-1.96=1.64$, $\sqrt{n}=12$

$\therefore n=144$

답 144

0773 모집단이 정규분포 $N(24,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(24,\ \frac{4^2}{n}\right)$을 따른다. ⋯ ❶

$Z=\frac{\overline{X}-24}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(22\le \overline{X}\le 26)\ge 0.96$에서

$$P\left(\frac{22-24}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\le Z\le \frac{26-24}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)\ge 0.96$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.96$$

$$2P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.96$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.48$$

이때 $P(0\le Z\le 2.05)=0.48$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}\ge 2.05$, $\sqrt{n}\ge 4.1$

$\therefore n\ge 16.81$

따라서 n의 최솟값은 17이다. ⋯ ❷

답 17

채점 기준표

❶ 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30%
❷ n의 최솟값을 구할 수 있다.	70%

유형 06 표본평균의 확률; 미지수의 값 구하기

본책 118쪽

표본평균 $\overline{X}$가 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따를 때, $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 표준화하고 주어진 확률과 표준정규분포표를 이용하여 미지수의 값을 구한다.

0774 모집단이 정규분포 $N(2000,\ 200^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(2000,\ \frac{200^2}{100}\right)$, 즉 $N(2000,\ 20^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-2000}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\le k)=0.08$에서

$$P\left(Z\le \frac{k-2000}{20}\right)=0.08$$

$$P(Z\le 0)-P\left(\frac{k-2000}{20}\le Z\le 0\right)=0.08$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le \frac{2000-k}{20}\right)=0.08$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{2000-k}{20}\right)=0.42$$

이때 $P(0\le Z\le 1.4)=0.42$이므로

$\frac{2000-k}{20}=1.4$, $2000-k=28$

$\therefore k=1972$

답 1972

0775 모집단이 정규분포 $N(0,\ 9^2)$을 따르고 표본의 크기가 324이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(0,\ \frac{9^2}{324}\right)$, 즉 $N\left(0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}}{\frac{1}{2}}=2\overline{X}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\ge k)\ge 0.983$에서 $\quad P(Z\ge 2k)\ge 0.983$

$P(2k\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)\ge 0.983$

$P(0\le Z\le -2k)+0.5\ge 0.983$

$\therefore P(0\le Z\le -2k)\ge 0.483$

이때 $P(0\le Z\le 2.12)=0.483$이므로

$-2k\ge 2.12 \quad \therefore k\le -1.06$

따라서 k의 최댓값은 -1.06이다. 답 ①

0776 모집단이 정규분포 $N(60,\ 15^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60,\ \frac{15^2}{9}\right)$, 즉 $N(60,\ 5^2)$을 따르고, $Z=\frac{\overline{X}-60}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

9명의 몸무게의 합이 M kg 이상이면 경고음이 울리고, 경고음이 울릴 확률이 0.05이므로

$P(9\overline{X}\ge M)=0.05, \quad P\left(\overline{X}\ge\frac{M}{9}\right)=0.05$

$P\left(Z\ge\frac{\frac{M}{9}-60}{5}\right)=0.05, \quad P\left(Z\ge\frac{M}{45}-12\right)=0.05$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{M}{45}-12\right)=0.05$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{M}{45}-12\right)=0.05$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{M}{45}-12\right)=0.45$

이때 $P(0\le Z\le 1.6)=0.45$이므로

$\frac{M}{45}-12=1.6, \quad \frac{M}{45}=13.6$

$\therefore M=612$ 답 612

유형 07 모평균의 추정; 모표준편차가 주어진 경우 본책 119쪽

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m의 신뢰도 α%의 신뢰구간은

$\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

0777 표본평균이 3.5, 모표준편차가 0.2, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$3.5-1.96\times\frac{0.2}{\sqrt{400}}\le m\le 3.5+1.96\times\frac{0.2}{\sqrt{400}}$

$\therefore 3.4804\le m\le 3.5196$ 답 $3.4804\le m\le 3.5196$

0778 표본평균이 124, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m의 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$124-2.58\times\frac{6}{\sqrt{36}}\le m\le 124+2.58\times\frac{6}{\sqrt{36}}$

$\therefore 121.42\le m\le 126.58$ 답 ⑤

0779 표본평균이 150, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 9이므로 $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 할 때 모평균 m의 신뢰도 α%의 신뢰구간은

$150-k\cdot\frac{6}{\sqrt{9}}\le m\le 150+k\cdot\frac{6}{\sqrt{9}}$

$\therefore 150-2k\le m\le 150+2k$

이때 $147.74\le m\le 152.26$이므로

$150-2k=147.74,\ 150+2k=152.26$

$\therefore k=1.13$ ··· ❶

따라서 주어진 표준정규분포표에서

$P(|Z|\le 1.13)=2P(0\le Z\le 1.13)=2\times 0.37=0.74$

이므로 $\frac{\alpha}{100}=0.74 \quad \therefore \alpha=74$ ··· ❷

답 74

채점 기준표	
❶ k의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ α의 값을 구할 수 있다.	40%

0780 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 $70.2\le m\le 89.8$이므로

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=70.2,\ \overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=89.8$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad \overline{x}=80,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5$

모평균 m의 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$80-2.58\times 5\le m\le 80+2.58\times 5$

$\therefore 67.1\le m\le 92.9$

따라서 신뢰도 99%의 신뢰구간에 속하는 자연수는 68, 69, ⋯, 92의 25개이다. 답 ⑤

유형 08 모평균의 추정; 표본표준편차가 주어진 경우 본책 119쪽

정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n $(n\ge 30)$인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$, 표본표준편차 S의 값이 s일 때, 모평균 m의 신뢰도 α%의 신뢰구간은

$\overline{x}-k\frac{s}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{s}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

0781 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 20을 사용할 수 있고, 표본평균이 100이므로 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$100-2\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 100+2\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 96\le m\le 104$ 답 $96\le m\le 104$

0782 표본의 크기 400이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 40을 사용할 수 있고, 표본평균이 $3\cdot 60+50=230$이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$230-2.58\times\frac{40}{\sqrt{400}}\le m\le 230+2.58\times\frac{40}{\sqrt{400}}$$

$\therefore 224.84\le m\le 235.16$ 답 ③

0783 표본의 크기 256이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 24를 사용할 수 있고, 표본평균이 128이므로 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$128-1.96\times\frac{24}{\sqrt{256}}\le m\le 128+1.96\times\frac{24}{\sqrt{256}}$$

$\therefore 125.06\le m\le 130.94$

따라서 신뢰구간에 속하는 정수는 126, 127, 128, 129, 130의 5개이다. 답 5

유형 09 모평균의 추정; 표본의 크기 구하기 본책 120쪽

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m의 신뢰도 α%의 신뢰구간이 $p\le m\le q$이면

➡ $p=\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $q=\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용하여 표본의 크기 n의 값을 구한다. $\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

0784 표본평균이 13.2, 모표준편차가 5이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$13.2-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le 13.2+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$$

이때 $12.34\le m\le 14.06$이므로

$$13.2-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=12.34,\quad 13.2+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=14.06$$

따라서 $2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=0.86$이므로

$\sqrt{n}=15$ $\quad\therefore n=225$ 답 225

0785 표본평균이 15, 모표준편차가 10이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$15-2\cdot\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le 15+2\cdot\frac{10}{\sqrt{n}}$$

이때 $13\le m\le 17$이므로

$$15-2\cdot\frac{10}{\sqrt{n}}=13,\quad 15+2\cdot\frac{10}{\sqrt{n}}=17$$

따라서 $2\cdot\frac{10}{\sqrt{n}}=2$이므로 $\quad\sqrt{n}=10\quad\therefore n=100$ 답 100

유형 10~12 신뢰구간의 길이 본책 120, 121쪽

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m을 신뢰도 α%로 추정하면

① 신뢰구간 ➡ $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 신뢰구간의 길이 ➡ $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

0786 모표준편차가 5, 표본의 크기가 400이므로 신뢰도 99 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2\times 2.58\times\frac{5}{\sqrt{400}}=1.29$$

답 ④

0787 모표준편차가 4, 표본의 크기가 100이므로 신뢰도 95%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$a=2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{100}}=1.568 \quad\cdots ❶$$

또 신뢰도 99%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$b=2\times 2.58\times\frac{4}{\sqrt{100}}=2.064 \quad\cdots ❷$$

$\therefore b-a=0.496$ ⋯ ❸

답 0.496

채점 기준표

❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20%

0788 모표준편차가 2이고 신뢰도 95 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이가 2 이하이어야 하므로

$$2\times 1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\le 2,\quad \sqrt{n}\ge 3.92\quad\therefore n\ge 15.3664$$

따라서 n의 최솟값은 16이다. 답 ②

0789 표본의 크기가 900일 때 신뢰도 99 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot 3\cdot\frac{30000}{\sqrt{900}}=6000 \quad\cdots ❶$$

표본의 크기가 n일 때 신뢰도 95 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot 2\cdot\frac{30000}{\sqrt{n}}=\frac{120000}{\sqrt{n}} \quad\cdots ❷$$

두 신뢰구간의 길이가 같으므로

$$\frac{120000}{\sqrt{n}}=6000,\quad \sqrt{n}=20\quad\therefore n=400 \quad\cdots ❸$$

답 400

채점 기준표

❶ 신뢰도 99%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이를 구할 수 있다.	30%
❷ 신뢰도 95%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이를 구할 수 있다.	30%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	40%

0790 $P(-k\le Z\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하고, 신뢰도 α%로 모평균을 추정할 때 표본의 크기가 9, 신뢰구간의 길이가 3이므로

$$2k\cdot\frac{1}{\sqrt{9}}=3 \qquad \therefore k=\frac{9}{2}$$

또 표본의 크기를 n이라 하고 같은 신뢰도로 모평균을 추정할 때 신뢰구간의 길이가 1 이하가 되려면

$$2\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\le 1, \qquad \sqrt{n}\ge 9 \qquad \therefore n\ge 81$$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 81이다. 답 ④

0791 모표준편차가 50, 표본의 크기가 64이므로

$P(-k\le Z\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는 $2k\cdot\dfrac{50}{\sqrt{64}}=25 \qquad \therefore k=2$

따라서 $P(-2\le Z\le 2)=\dfrac{\alpha}{100}$이므로

$$\alpha=100P(-2\le Z\le 2)=200P(0\le Z\le 2)$$
$$=200\times 0.48=96$$

답 96

0792 모표준편차가 2, 표본의 크기가 144이므로

$P(-k\le Z\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는 $2k\cdot\dfrac{2}{\sqrt{144}}=0.2 \qquad \therefore k=0.6$

$P(-0.6\le Z\le 0.6)=\dfrac{\alpha}{100}$에서

$$\alpha=100P(-0.6\le Z\le 0.6)=200P(0\le Z\le 0.6)$$
$$=200\times 0.23=46$$

$P(-k'\le Z\le k')=\dfrac{2\alpha}{100}=\dfrac{92}{100}$라 하면

$$2P(0\le Z\le k')=0.92 \qquad \therefore P(0\le Z\le k')=0.46$$

이때 $P(0\le Z\le 1.8)=0.46$이므로 $k'=1.8$

따라서 신뢰도 2α%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2\times 1.8\times\frac{2}{\sqrt{144}}=0.6$$

답 0.6

0793 $P(-2\le Z\le 2)=2\times 0.48=0.96$이므로 신뢰도 96%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\cdot 2\cdot\frac{2}{\sqrt{100}}=\frac{4}{5}$$

또 $P(-k\le Z\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이가 $\dfrac{l}{4}$이므로

$$2k\cdot\frac{2}{\sqrt{100}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} \qquad \therefore k=0.5$$

따라서 $P(-0.5\le Z\le 0.5)=\dfrac{\alpha}{100}$이므로

$$\alpha=100P(-0.5\le Z\le 0.5)=200P(0\le Z\le 0.5)$$
$$=200\times 0.19=38$$

답 38

유형 13 모평균과 표본평균의 차 본책 121쪽

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α%로 모평균 m을 추정할 때, 모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차는

$$|m-\overline{X}|\le k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

0794 표본평균이 $\overline{X}$, 모표준편차가 5일 때 표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 99%로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$$\overline{X}-3\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+3\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{15}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le\frac{15}{\sqrt{n}} \qquad \therefore |m-\overline{X}|\le\frac{15}{\sqrt{n}}$$

모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차가 1 이하이어야 하므로

$$\frac{15}{\sqrt{n}}\le 1, \qquad \sqrt{n}\ge 15 \qquad \therefore n\ge 225$$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 225이다. 답 ②

0795 표본평균이 $\overline{X}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$$\overline{X}-2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \therefore |m-\overline{X}|\le\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차가 $\dfrac{1}{6}\sigma$ 이하이어야 하므로

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{\sigma}{6}, \qquad \sqrt{n}\ge 12 \qquad \therefore n\ge 144$$

따라서 n의 최솟값은 144이다. 답 144

유형 14 신뢰구간의 성질 본책 122쪽

① 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아질수록 신뢰구간의 길이는 커진다.
② 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 커질수록 신뢰구간의 길이는 작아진다.

0796 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

ㄱ. 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 작아진다.
ㄴ. 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고 표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이가 반드시 커진다고 할 수 없다.
ㄷ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 작을수록 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 커진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

08 통계적 추정

0797 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ (t\text{는 상수})$$

이므로 n 대신 $9n$을 대입하면 신뢰구간의 길이는

$$2t\frac{\sigma}{\sqrt{9n}}=\frac{1}{3}\cdot 2t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 표본의 크기가 9배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{3}$배가 되므로

$$k=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0798 $\mathrm{P}(|Z|\le a)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z|\le b)=0.99$라 하면 각각의 신뢰구간의 길이는

① $2b\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=\frac{b\sigma}{3}$ ② $2a\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{81}}=\frac{2a\sigma}{9}$

③ $2b\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{81}}=\frac{2b\sigma}{9}$ ④ $2a\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{a\sigma}{5}$

⑤ $2b\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{b\sigma}{5}$

이때 $a<b$이므로

$$\frac{a\sigma}{5}<\frac{b\sigma}{5}<\frac{2b\sigma}{9}<\frac{b\sigma}{3},\ \frac{2a\sigma}{9}<\frac{2b\sigma}{9}$$

따라서 가장 큰 것은 ①이다. 답 ①

유형 15 표본비율의 분포 본책 122쪽

모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

➡ $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

0799 임의추출한 회원 400명 중에서 작년에 제주도를 다녀온 회원의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.1,\ \frac{0.1\times0.9}{400}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.1,\ 0.015^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\hat{p}-0.1}{0.015}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0.07\le\hat{p}\le0.13)&=\mathrm{P}\left(\frac{0.07-0.1}{0.015}\le Z\le\frac{0.13-0.1}{0.015}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le2)=2\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=2\times0.4772=0.9544\end{aligned}$$

답 0.9544

0800 임의추출한 씨앗 100개 중에서 발아한 씨앗의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.8,\ \frac{0.8\times0.2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.8,\ 0.04^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\hat{p}-0.8}{0.04}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ⋯ ❶

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{75}{100}\right)&=\mathrm{P}(\hat{p}\ge0.75)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{0.75-0.8}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge-1.25)\\&=\mathrm{P}(-1.25\le Z\le0)+\mathrm{P}(Z\ge0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1.25)+0.5\\&=0.3944+0.5=0.8944\end{aligned}$$

⋯ ❷

답 0.8944

채점 기준표

❶ 표본비율 $\hat{p}$이 따르는 정규분포를 구하고 표준화할 수 있다.	40%
❷ 75개 이상 발아할 확률을 구할 수 있다.	60%

0801 임의추출한 학생 400명 중에서 하루 수면 시간이 8시간 이상인 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.36,\ \frac{0.36\times0.64}{400}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.36,\ 0.024^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\hat{p}-0.36}{0.024}$으로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p}\le\frac{168}{400}\right)&=\mathrm{P}(\hat{p}\le0.42)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0.42-0.36}{0.024}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)\\&=0.5+0.4938=0.9938\end{aligned}$$

답 0.9938

0802 임의추출한 가입자 100명 중에서 A사이트의 이메일 계정으로 가입한 사람의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.1,\ \frac{0.1\times0.9}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.1,\ 0.03^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\hat{p}-0.1}{0.03}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{a}{100}\right)=0.9772$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\frac{a}{100}-0.1}{0.03}\right)=0.9772$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-10}{3}\right)=0.9772$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{a-10}{3}\le Z\le0\right)+\mathrm{P}(Z\ge0)=0.9772$$

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10-a}{3}\right)+0.5=0.9772$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10-a}{3}\right)=0.4772$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$$\frac{10-a}{3}=2,\quad 10-a=6\quad \therefore a=4$$

답 ②

유형 16 모비율의 추정 (본책 123쪽)

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율 $\hat{p}$에 대하여 표본의 크기 n이 충분히 크면 모비율 p의 신뢰구간은 다음과 같다.

(단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

① 신뢰도 95%의 신뢰구간 ➡ $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

② 신뢰도 99%의 신뢰구간 ➡ $\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

0803 표본의 크기가 400, 표본비율이 $\hat{p}=\frac{320}{400}=0.8$이므로 당도가 16브릭스 이상인 바나나의 비율 p의 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$0.8-2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{400}}\le p\le 0.8+2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{400}}$

$0.8-0.0516\le p\le 0.8+0.0516$

$\therefore 0.7484\le p\le 0.8516$ 답 $0.7484\le p\le 0.8516$

0804 표본의 크기가 525, 표본비율이 $\hat{p}=0.16$이므로 자전거 사용률 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$0.16-2\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{525}}\le p\le 0.16+2\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{525}}$

$0.16-0.032\le p\le 0.16+0.032$

$\therefore 0.128\le p\le 0.192$ 답 ①

0805 표본비율이 $\hat{p}=0.02$이므로 표본의 크기가 n일 때 실업률 p의 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$0.02-3\sqrt{\frac{0.02\times0.98}{n}}\le p\le 0.02+3\sqrt{\frac{0.02\times0.98}{n}}$

이때 $0.006\le p\le 0.034$이므로

$0.02-3\sqrt{\frac{0.02\times0.98}{n}}=0.006,\ 0.02+3\sqrt{\frac{0.02\times0.98}{n}}=0.034$

따라서 $3\sqrt{\frac{0.02\times0.98}{n}}=0.014$이므로

$\sqrt{n}=30 \quad \therefore n=900$ 답 900

유형 17 모비율의 신뢰구간의 길이 (본책 123쪽)

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율 $\hat{p}$에 대하여 표본의 크기 n이 충분히 크면 모비율 p의 신뢰도 α%의 신뢰구간의 길이는

$2k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ \left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

0806 표본의 크기가 100, 표본비율이 $\hat{p}=\frac{64}{100}=0.64$이므로 신뢰도 95%로 추정한 모비율의 신뢰구간의 길이는

$2\times2\times\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{100}}=0.192$ 답 0.192

0807 표본비율이 $\hat{p}=0.1$이므로 표본의 크기를 n이라 하면

$2\times2.58\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}\le 0.05$

$\sqrt{n}\ge 30.96 \quad \therefore n\ge 958.5216$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 959이다. 답 959

0808 표본비율이 $\hat{p}=0.2$이므로 표본의 크기가 n일 때 모비율 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$0.2-1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}\le p\le 0.2+1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}$

$-1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}\le p-0.2\le 1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}$

$\therefore |p-0.2|\le 1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}$

이때 모비율과 표본비율의 차가 0.02 이하가 되어야 하므로

$1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}\le 0.02$

$\sqrt{n}\ge 39.2 \quad \therefore n\ge 1536.64$

따라서 n의 최솟값은 1537이다. 답 ③

0809 전략 $\overline{X}=1$이려면 2번의 시행에서 모두 1의 숫자가 적혀 있는 공을 꺼내야 함을 이용한다.

풀이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 1의 숫자가 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{n+1}$, 3의 숫자가 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 $\frac{n}{n+1}$이다.

$\overline{X}=1$이려면 2번의 시행에서 모두 1의 숫자가 적혀 있는 공을 꺼내야 하므로

$P(\overline{X}=1)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{49}$

$(n+1)^2=49, \quad n+1=\pm7 \quad \therefore n=6\,(\because n\text{은 자연수})$

2번의 시행에서 첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a, 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 b라 하면 $\overline{X}=\frac{a+b}{2}$

$\overline{X}=2$이려면 $a+b=4$이어야 하므로

$a=1, b=3$ 또는 $a=3, b=1$

$\therefore P(\overline{X}=2)=\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{12}{49}$

$\overline{X}=3$이려면 $a+b=6$이어야 하므로

$a=3, b=3$

$\therefore P(\overline{X}=3)=\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}=\frac{36}{49}$

$\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	2	3	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{36}{49}$	1

따라서 $E(\overline{X})=1\cdot\frac{1}{49}+2\cdot\frac{12}{49}+3\cdot\frac{36}{49}=\frac{19}{7}$이므로

$p=7, q=19 \quad \therefore p+q=26$ 답 26

다른 풀이 $n=6$이므로 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	1

따라서 $E(X)=1\cdot\frac{1}{7}+3\cdot\frac{6}{7}=\frac{19}{7}$이고 $E(\overline{X})$는 $E(X)$와 같으므로 $E(\overline{X})=\frac{19}{7}$ $\quad\therefore p+q=7+19=26$

0810 **전략** 두 확률변수 $\overline{X}$, $\overline{Y}$를 각각 표준화한다.

풀이 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(50, 2^2)$을 따르고, 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(75, \frac{\sigma^2}{25}\right)$, 즉 $\left(75, \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-50}{2}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-75}{\frac{\sigma}{5}}$로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(\overline{X}\le 53)+P(\overline{Y}\le 69)=1$에서

$$P\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{53-50}{2}\right)+P\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{69-75}{\frac{\sigma}{5}}\right)=1$$

$$P(Z_{\overline{X}}\le 1.5)+P\left(Z_{\overline{Y}}\le -\frac{30}{\sigma}\right)=1$$

$$P(Z_{\overline{X}}\le 1.5)+P\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{30}{\sigma}\right)=1$$

즉 $\frac{30}{\sigma}=1.5$이므로 $\quad\sigma=20$

$$\begin{aligned}\therefore P(\overline{Y}\ge 71)&=P\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{71-75}{4}\right)=P(Z_{\overline{Y}}\ge -1)\\&=P(-1\le Z_{\overline{Y}}\le 0)+P(Z_{\overline{Y}}\ge 0)\\&=P(0\le Z_{\overline{Y}}\le 1)+0.5\\&=0.3413+0.5=0.8413\end{aligned}$$

답 ①

0811 **전략** 남학생 4명이 곤돌라에 탑승할 확률과 여학생 4명이 곤돌라에 탑승할 확률을 구한 후 확률의 곱셈정리를 이용한다.

풀이 임의추출한 남학생 4명의 몸무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(71, \frac{12^2}{4}\right)$, 즉 $N(71, 6^2)$을 따르므로

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-71}{6}$로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

남학생 4명의 몸무게의 합이 260 kg 이하이려면 $4\overline{X}\le 260$, 즉 $\overline{X}\le 65$이어야 하므로 남학생 4명이 곤돌라에 탑승할 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le 65)&=P\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{65-71}{6}\right)\\&=P(Z_{\overline{X}}\le -1)=P(Z_{\overline{X}}\ge 1)\\&=P(Z_{\overline{X}}\ge 0)-P(0\le Z_{\overline{X}}\le 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

또 임의추출한 여학생 4명의 몸무게의 평균을 $\overline{Y}$라 하면 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(61, \frac{8^2}{4}\right)$, 즉 $N(61, 4^2)$을 따르므로

$Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-61}{4}$로 놓으면 $Z_{\overline{Y}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

여학생 4명의 몸무게의 합이 260 kg 이하이려면 $4\overline{Y}\le 260$, 즉 $\overline{Y}\le 65$이어야 하므로 여학생 4명이 곤돌라에 탑승할 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{Y}\le 65)&=P\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{65-61}{4}\right)=P(Z_{\overline{Y}}\le 1)\\&=P(Z_{\overline{Y}}\le 0)+P(0\le Z_{\overline{Y}}\le 1)\\&=0.5+0.34=0.84\end{aligned}$$

따라서 남학생 4명과 여학생 4명이 모두 곤돌라에 탑승할 확률은

$P(\overline{X}\le 65)\times P(\overline{Y}\le 65)=0.16\times 0.84=0.1344$

답 ③

0812 **전략** 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균은 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(m, 15^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{15^2}{9}\right)$, 즉 $N(m, 5^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(|m-\overline{X}|\ge k)=0.05$에서

$$P\left(\frac{|\overline{X}-m|}{5}\ge\frac{k}{5}\right)=0.05,\quad P\left(|Z|\ge\frac{k}{5}\right)=0.05$$

$$P\left(Z\le -\frac{k}{5}\right)+P\left(Z\ge\frac{k}{5}\right)=0.05$$

$$2P\left(Z\ge\frac{k}{5}\right)=0.05,\quad P\left(Z\ge\frac{k}{5}\right)=0.025$$

$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{k}{5}\right)=0.025$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k}{5}\right)=0.025$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{k}{5}\right)=0.475$$

이때 $P(0\le Z\le 1.96)=0.475$이므로

$\frac{k}{5}=1.96\quad\therefore k=9.8$

답 9.8

0813 **전략** 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구하고 표준화한다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(130, \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(130, \frac{\sigma^2}{25}\right)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-130}{\frac{\sigma}{5}}$으로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge 135)=0.1056$에서

$$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{135-130}{\frac{\sigma}{5}}\right)=0.1056,\quad P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{25}{\sigma}\right)=0.1056$$

$$P(Z_{\overline{X}}\ge 0)-P\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{25}{\sigma}\right)=0.1056$$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_{\bar{X}}\le \dfrac{25}{\sigma}\right)=0.1056$

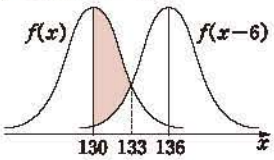
$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z_{\bar{X}}\le \dfrac{25}{\sigma}\right)=0.3944$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.25)=0.3944$이므로

$\dfrac{25}{\sigma}=1.25 \qquad \therefore \sigma=20$

따라서 표본평균 $\bar{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(130,\ 4^2)$을 따른다.

확률변수 $\bar{X}$의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=130$에 대하여 대칭이고, 함수 $f(x-6)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이므로 직선 $x=136$에 대하여 대칭이다.



함수 $f(x-6)$을 확률밀도함수로 갖는 확률변수를 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(136,\ 4^2)$을 따르고 $Z_Y=\dfrac{Y-136}{4}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 두 곡선 $f(x)$, $f(x-6)$과 직선 $x=130$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(130\le \bar{X}\le 133)-\mathrm{P}(130\le Y\le 133)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{130-130}{4}\le Z_{\bar{X}}\le \frac{133-130}{4}\right)\\&\quad-\mathrm{P}\left(\frac{130-136}{4}\le Z_Y\le \frac{133-136}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le Z_{\bar{X}}\le 0.75)-\mathrm{P}(-1.5\le Z_Y\le -0.75)\\&=\mathrm{P}(0\le Z_{\bar{X}}\le 0.75)-\mathrm{P}(0.75\le Z_Y\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z_{\bar{X}}\le 0.75)-\{\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 0.75)\}\\&=0.2734-(0.4332-0.2734)\\&=0.1136\end{aligned}$$

답 ②

0814 전략 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는 $2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다. $\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}\right)$

풀이 $\mathrm{P}(-2.70\le Z\le 2.70)=2\times 0.4965=0.993$이므로 신뢰도 99.3 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이 l은

$l=2\times 2.70\times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

또 $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는 $\dfrac{l}{2}$이므로

$2\times k\times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2.70\times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore k=1.35$

따라서 $\mathrm{P}(-1.35\le Z\le 1.35)=\dfrac{\alpha}{100}$이므로

$$\begin{aligned}\alpha&=100\mathrm{P}(-1.35\le Z\le 1.35)\\&=200\mathrm{P}(0\le Z\le 1.35)\\&=200\times 0.4115=82.3\end{aligned}$$

답 82.3

0815 전략 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$로 놓고 주어진 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하자.

$\bar{x}_1$를 이용하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간 I_1은

$9.82-k\times \dfrac{1.6}{\sqrt{16}}\le m\le 9.82+k\times \dfrac{1.6}{\sqrt{16}}$

$\therefore 9.82-0.4k\le m\le 9.82+0.4k$

9가 I_1에 포함되지 않으므로

$9<9.82-0.4k$

$0.4k<0.82 \qquad \therefore k<2.05$ …… ㉠

$\bar{x}_2$를 이용하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간 I_2는

$8.67-k\times \dfrac{1.6}{\sqrt{64}}\le m\le 8.67+k\times \dfrac{1.6}{\sqrt{64}}$

$\therefore 8.67-0.2k\le m\le 8.67+0.2k$

9가 I_2에 포함되므로

$9\le 8.67+0.2k$

$0.2k\ge 0.33 \qquad \therefore k\ge 1.65$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 1.65\le k<2.05$

이때

$\mathrm{P}(|Z|\le 1.65)=0.450\times 2=0.90$,

$\mathrm{P}(|Z|\le 2.05)=0.480\times 2=0.96$

이므로 $\quad 90\le \alpha<96$

따라서 $\alpha_2-\alpha_1$의 최댓값은

$96-90=6$

답 ②

0816 전략 신뢰구간의 길이를 이용하여 $\hat{p}$을 구한다.

풀이 $\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)=2\times 0.48=0.96$이고, 표본의 크기 3600이 충분히 크므로 모비율의 신뢰도 96 %의 신뢰구간의 길이는

$2\cdot 2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{3600}}=0.02$

$\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}=\dfrac{3}{10}, \qquad \hat{p}(1-\hat{p})=\dfrac{9}{100}$

$\therefore \hat{p}=\dfrac{1}{10}=0.1 \ (\because 0<\hat{p}<0.5)$

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.1)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times 0.1=40$

$\mathrm{V}(X)=400\times 0.1\times 0.9=36$

이때 $n=400$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-40}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 34)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{34-40}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -1)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+0.5\\&=0.34+0.5\\&=0.84\end{aligned}$$

답 ③

SSEN 특강

이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $N(np, npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

0817 전략 임의추출한 한 개의 통조림의 무게가 110 g 이상일 확률과 n개의 통조림의 무게의 평균이 110 g 이상일 확률을 각각 구한다.

풀이 통조림의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(100, 10^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-100}{10}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\therefore p_1=P(X\ge 110)=P\left(Z_X\ge \frac{110-100}{10}\right)$$
$$=P(Z_X\ge 1)=P(Z_X\ge 0)-P(0\le Z_X\le 1)$$
$$=0.5-0.3413=0.1587$$ ⋯ ❶

한편 임의추출한 n개의 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(100, \dfrac{10^2}{n}\right)$을 따르므로 $Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-100}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\therefore p_2=P(\overline{X}\ge 110)=P\left(Z_{\overline{X}}\ge \frac{110-100}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=P(Z_{\overline{X}}\ge \sqrt{n})$$

$p_1-p_2=0.1359$에서

$$p_2=p_1-0.1359=0.1587-0.1359=0.0228$$ ⋯ ❷

즉 $P(Z_{\overline{X}}\ge\sqrt{n})=0.0228$이므로

$$P(Z_{\overline{X}}\ge 0)-P(0\le Z_{\overline{X}}\le \sqrt{n})=0.0228$$
$$0.5-P(0\le Z_{\overline{X}}\le\sqrt{n})=0.0228$$
$$\therefore P(0\le Z_{\overline{X}}\le\sqrt{n})=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\sqrt{n}=2$ $\quad\therefore n=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준표	
❶ p_1의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ p_2의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	40%

0818 전략 모든 실수 x에 대하여 $f(a-x)=f(a+x)$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

풀이 확률밀도함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(10-x)=f(10+x)$를 만족시키므로 모평균은 10이다.

모평균이 10, 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(10, \left(\dfrac{\sigma}{10}\right)^2\right)$을 따르고 $Z=\dfrac{\overline{X}-10}{\frac{\sigma}{10}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. ⋯ ❶

$$\therefore P(9\le\overline{X}\le 12)=P\left(\frac{9-10}{\frac{\sigma}{10}}\le Z\le\frac{12-10}{\frac{\sigma}{10}}\right)$$
$$=P\left(-\frac{10}{\sigma}\le Z\le\frac{20}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)+P\left(0\le Z\le 2\cdot\frac{10}{\sigma}\right)$$

이때 $P(9\le\overline{X}\le 12)=0.8185$이고, 주어진 확률밀도함수의 그래프에서 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$, $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$$P\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)=0.3413,\ P\left(0\le Z\le 2\cdot\frac{10}{\sigma}\right)=0.4772$$

따라서 $\dfrac{10}{\sigma}=1$이므로 $\quad\sigma=10$ ⋯ ❷

답 10

채점 기준표	
❶ 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구하고 표준화할 수 있다.	40%
❷ 모집단의 표준편차를 구할 수 있다.	60%

0819 전략 모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(p, \dfrac{pq}{n}\right)$를 따름을 이용한다. (단, $q=1-p$)

풀이 크기가 100인 표본의 표본비율이 $\hat{p}_1=0.2$이고, $P(|Z|\le 1.65)=0.90$이므로 모비율 p의 신뢰도 90%의 신뢰구간은

$$0.2-1.65\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}\le p\le 0.2+1.65\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}$$
$$\therefore c=1.65\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}=0.066$$ ⋯ ❶

한편 $p=\hat{p}_1=0.2$이고, 표본의 크기가 64일 때 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.2, \dfrac{0.2\times0.8}{64}\right)$, 즉 $N(0.2, 0.05^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.2}{0.05}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. ⋯ ❷

따라서 구하는 확률은

$$P(p-c\le\hat{p}\le p+1.5c)$$
$$=P(0.2-c\le\hat{p}\le 0.2+1.5c)$$
$$=P\left(\frac{0.2-c-0.2}{0.05}\le Z\le\frac{0.2+1.5c-0.2}{0.05}\right)$$
$$=P(-20c\le Z\le 30c)$$
$$=P(-1.32\le Z\le 1.98)$$
$$=P(0\le Z\le 1.32)+P(0\le Z\le 1.98)$$
$$=0.407+0.476=0.883$$ ⋯ ❸

답 0.883

채점 기준표	
❶ c의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ 크기가 64인 표본의 표본비율 $\hat{p}$이 따르는 정규분포를 구하고 표준화할 수 있다.	30%
❸ $\hat{p}$이 $p-c$ 이상 $p+1.5c$ 이하일 확률을 구할 수 있다.	40%