# 정답 및 풀이

## I 지수와 로그



## II 지수함수와 로그함수



## III 삼각함수



## IV 수열

# 01 지수

## 01 거듭제곱과 거듭제곱근

### 확인

본책 6~8쪽

**1** (1) $x^3\times xy^2\times y^6=x^{3+1}y^{2+6}=x^4y^8$

(2) $(x^7y^4)^3=x^{7\times3}y^{4\times3}=x^{21}y^{12}$

(3) $(x^3y)^2\times(xy)^5=x^{3\times2}y^2\times x^5y^5=x^{6+5}y^{2+5}=x^{11}y^7$

(4) $x^5y^2\div\left(\frac{x^3}{y}\right)^2=x^5y^2\div\frac{x^{3\times2}}{y^2}=x^5y^2\times\frac{y^2}{x^6}$

$=\frac{y^{2+2}}{x^{6-5}}=\frac{y^4}{x}$

답 (1) $x^4y^8$ (2) $x^{21}y^{12}$ (3) $x^{11}y^7$ (4) $\frac{y^4}{x}$

**2** (1) $-8$의 세제곱근을 $x$라 하면 $x^3=-8$이므로

$x^3+8=0,\quad (x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 $-8$의 세제곱근은 $-2,\ 1-\sqrt{3}i,\ 1+\sqrt{3}i$이다.

(2) 16의 네제곱근을 $x$라 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0,\quad (x^2+4)(x^2-4)=0$

$(x+2i)(x-2i)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm2i$ 또는 $x=\pm2$

따라서 16의 네제곱근은 $-2i,\ 2i,\ -2,\ 2$이다.

답 (1) $-2,\ 1-\sqrt{3}i,\ 1+\sqrt{3}i$ (2) $-2i,\ 2i,\ -2,\ 2$

**3** (1) 64의 세제곱근을 $x$라 하면 $x^3=64$이므로

$x^3-64=0,\quad (x-4)(x^2+4x+16)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$

따라서 64의 세제곱근 중 실수인 것은 4이다.

(2) $-81$의 네제곱근을 $x$라 하면 $x^4=-81$

이때 실수 $x$에 대하여 $x^4\geq0$이므로 $x^4=-81$의 실근은 없다.

따라서 $-81$의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

답 (1) 4 (2) 없다.

**4** (1) 256의 네제곱근 중 실수인 것은 $-4,\ 4$이고 $\sqrt[4]{256}$은 양수이므로

$\sqrt[4]{256}=4$

(2) $-27$의 세제곱근 중 실수인 것은 $-3$이므로

$\sqrt[3]{-27}=-3$

답 (1) 4 (2) $-3$

**5** (1) $\sqrt[5]{9}\sqrt[5]{27}=\sqrt[5]{9\times27}=\sqrt[5]{3^5}=3$

(2) $\frac{\sqrt[3]{864}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{864}{4}}=\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=6$

(3) $(\sqrt[4]{5})^8=\sqrt[4]{5^8}=\sqrt[4]{(5^2)^4}=\sqrt[4]{25^4}=25$

(4) $\sqrt[4]{\sqrt{256}}=\sqrt[4\times2]{256}=\sqrt[8]{2^8}=2$

답 (1) 3 (2) 6 (3) 25 (4) 2

### 유제

본책 9~10쪽

**1** ① 0의 세제곱근을 $x$라 하면 $x^3=0$이므로

$x=0$

따라서 0의 세제곱근은 0이다.

② $-9$의 제곱근을 $x$라 하면 $x^2=-9$이므로

$x^2+9=0,\quad (x+3i)(x-3i)=0$

$\therefore x=-3i$ 또는 $x=3i$

따라서 $-9$의 제곱근은 $-3i,\ 3i$이다.

③ 16의 제곱근을 $x$라 하면 $x^2=16$이므로

$x^2-16=0,\quad (x+4)(x-4)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=4$

따라서 16의 제곱근 중 실수인 것은 $-4,\ 4$의 2개이다.

④ $\sqrt{64}=8$의 세제곱근을 $x$라 하면 $x^3=8$이므로

$x^3-8=0,\quad (x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 $\sqrt{64}$의 세제곱근 중 실수인 것은 2이다.

⑤ 256의 네제곱근을 $x$라 하면 $x^4=256$이므로

$x^4-256=0,\quad (x^2+16)(x^2-16)=0$

$(x+4i)(x-4i)(x+4)(x-4)=0$

$\therefore x=\pm4i$ 또는 $x=\pm4$

따라서 256의 네제곱근 중 실수인 것은 $-4,\ 4$의 2개이다.

답 ⑤

**2** $\sqrt{256}=16$의 네제곱근을 $x$라 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0,\quad (x^2+4)(x^2-4)=0$

$(x+2i)(x-2i)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm2i$ 또는 $x=\pm2$

$\sqrt{256}$의 네제곱근 중 음의 실수인 것은 $-2$이므로

$a=-2$

$-216$의 세제곱근을 $y$라 하면 $y^3=-216$이므로

$y^3+216=0,\quad (y+6)(y^2-6y+36)=0$

$\therefore y=-6$ 또는 $y=3\pm3\sqrt{3}i$

$-216$의 세제곱근 중 실수인 것은 $-6$이므로

$b=-6$

$\therefore a+b=-8$

답 $-8$

**3** (1) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{4}}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{256}}=\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[12]{2^8}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}$

$=\sqrt[3]{2\times2^2}=\sqrt[3]{2^3}$

$=2$

(2) $\sqrt[4]{32}\times\sqrt[4]{40}\div\sqrt{\sqrt[4]{25}}=\sqrt[4]{32\times40}\div\sqrt[8]{25}$

$=\sqrt[4]{2^8\times5}\div\sqrt[8]{5^2}$

$=\sqrt[4]{2^8\times5}\div\sqrt[4]{5}$

$=2^2\times\sqrt[4]{5}\div\sqrt[4]{5}$

$=4$

(3) $\sqrt[4]{\sqrt{a^3}}\times\sqrt{\sqrt[3]{a}}\div\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^2}}=\sqrt[8]{a^3}\times\sqrt[6]{a}\div\sqrt[24]{a^2}$

$=\sqrt[24]{a^9}\times\sqrt[24]{a^4}\div\sqrt[24]{a^2}$

$=\sqrt[24]{a^9\times a^4}\div\sqrt[24]{a^2}$

$=\sqrt[24]{a^{13}\div a^2}$

$=\sqrt[24]{a^{11}}$

(4) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[5]{a}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[6]{a}}}\times\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}=\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[15]{a}}\times\frac{\sqrt[10]{a}}{\sqrt[12]{a}}\times\frac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[10]{a}}=1$

답 (1) 2 (2) 4 (3) $\sqrt[24]{a^{11}}$ (4) 1

**4** $\sqrt[k]{16}\times\sqrt[4]{64}\div\sqrt[3]{32}=\sqrt[6]{2}$에서

$\sqrt[k]{2^4}=\sqrt[6]{2}\times\sqrt[3]{2^5}\div\sqrt[4]{2^6}$

$=\sqrt[12]{2^2}\times\sqrt[12]{2^{20}}\div\sqrt[12]{2^{18}}$

$=\sqrt[12]{2^2\times2^{20}}\div\sqrt[12]{2^{18}}$

$=\sqrt[12]{2^{22}\div2^{18}}=\sqrt[12]{2^4}$

따라서 $\sqrt[k]{2^4}=\sqrt[12]{2^4}$이므로 $k=12$

답 12

**5** $\sqrt[6]{a^3b}\times\sqrt[4]{ab^3}\div\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[12]{a^6b^2}\times\sqrt[12]{a^3b^9}\div\sqrt[12]{a^8b^4}$

$=\sqrt[12]{a^6b^2\times a^3b^9}\div\sqrt[12]{a^8b^4}$

$=\sqrt[12]{a^9b^{11}\div a^8b^4}=\sqrt[12]{ab^7}$

따라서 $p=12$, $q=7$이므로

$p+q=19$

답 19

## 02 지수의 확장

### 확인

본책 12~13쪽

**1** (1) $7^0=1$ (2) $10^{-1}=\frac{1}{10}$

(3) $(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81}$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16$

답 (1) 1 (2) $\frac{1}{10}$ (3) $\frac{1}{81}$ (4) 16

**2** (1) $2^{-1}\times2^7\times2^{-4}=2^{-1+7+(-4)}=2^2=4$

(2) $3^4\div(3^{-1})^{-3}=3^4\div3^{(-1)\times(-3)}=3^4\div3^3=3^{4-3}=3$

(3) $(a^5)^6\times(a^{-3})^7=a^{5\times6}\times a^{(-3)\times7}=a^{30}\times a^{-21}=a^{30+(-21)}=a^9$

(4) $(a^5b^2)^2=a^{5\times2}b^{2\times2}=a^{10}b^4$

답 (1) 4 (2) 3 (3) $a^9$ (4) $a^{10}b^4$

**3** (1) $16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^{4\times\frac{3}{4}}=2^3=8$

(2) $216^{-\frac{2}{3}}=(6^3)^{-\frac{2}{3}}=6^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}=6^{-2}=\frac{1}{36}$

(3) $49^{0.5}=(7^2)^{\frac{1}{2}}=7^{2\times\frac{1}{2}}=7$

(4) $625^{-0.75}=(5^4)^{-\frac{3}{4}}=5^{4\times\left(-\frac{3}{4}\right)}=5^{-3}=\frac{1}{125}$

답 (1) 8 (2) $\frac{1}{36}$ (3) 7 (4) $\frac{1}{125}$

**4** (1) $4^{\frac{5}{2}}\times4^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}=4^3=64$

(2) $2^{-\frac{7}{3}}\div2^{-\frac{1}{3}}=2^{-\frac{7}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)}=2^{-2}=\frac{1}{4}$

(3) $(32^{\frac{3}{5}})^{-\frac{1}{3}}=32^{\frac{3}{5}\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=32^{-\frac{1}{5}}=(2^5)^{-\frac{1}{5}}=2^{5\times\left(-\frac{1}{5}\right)}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

(4) $(\sqrt[4]{2}\times\sqrt[6]{3})^{12}=(2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{6}})^{12}=2^{\frac{1}{4}\times12}\times3^{\frac{1}{6}\times12}=2^3\times3^2=72$

답 (1) 64 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 72

**5** (1) $3^{\sqrt{20}}\times3^{\sqrt{5}}=3^{2\sqrt{5}}\times3^{\sqrt{5}}=3^{2\sqrt{5}+\sqrt{5}}=3^{3\sqrt{5}}$

(2) $2^{6\sqrt{3}}\div2^{\sqrt{108}-2}=2^{6\sqrt{3}}\div2^{6\sqrt{3}-2}=2^{6\sqrt{3}-(6\sqrt{3}-2)}=2^2=4$

(3) $(7^{\sqrt{6}})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=7^{\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{3}}}=7^{\sqrt{2}}$

(4) $\left(2^{\sqrt{\frac{9}{5}}}\times7^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)^{\sqrt{5}}=2^{\sqrt{\frac{9}{5}}\times\sqrt{5}}\times7^{\frac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}}=2^{\sqrt{9}}\times7=2^3\times7=56$

답 (1) $3^{3\sqrt{5}}$ (2) 4 (3) $7^{\sqrt{2}}$ (4) 56

### 유제

본책 14~20쪽

**1** (1) $(4^{-5}\div2^{-3})^{-2}\div2^{12}=(2^{-10}\div2^{-3})^{-2}\div2^{12}$

$=\{2^{-10-(-3)}\}^{-2}\div2^{12}$

$=(2^{-7})^{-2}\div2^{12}$

$=2^{14}\div2^{12}$

$=2^{14-12}$

$=2^2=4$

(2) $5^{\frac{3}{4}}\times2^{-\frac{5}{6}}\times(5^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}=5^{\frac{3}{4}}\times2^{-\frac{5}{6}}\times5^{\frac{1}{4}}\times2^{-\frac{1}{6}}$

$=5^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\times2^{-\frac{5}{6}+\left(-\frac{1}{6}\right)}$

$=5\times2^{-1}=\frac{5}{2}$

답 (1) 4 (2) $\frac{5}{2}$

**2** $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^4\right\}^{0.75}\times\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}\right)^6=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}^{\frac{3}{4}}\times\left(\frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^6$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{3^4}{3^3}$

$=(3^{-1})^3\times\frac{3^4}{3^3}$

$=3^{-3+4-3}$

$=3^{-2}=\frac{1}{9}$ 답 $\frac{1}{9}$

**3** $3^{-2}\div(3^{-4})^{-3}\times3^{-10}=3^{-2}\div3^{12}\times3^{-10}$

$=3^{-2-12+(-10)}$

$=3^{-24}=\left(\frac{1}{3}\right)^{24}$

$\therefore k=24$ 답 24

**4** (1) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{4\sqrt{8}}}=\sqrt[4]{2}\times\sqrt[12]{2^2}\times\sqrt[24]{2^3}$

$=2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{1}{6}}\times2^{\frac{1}{8}}$

$=2^{\frac{6+4+3}{24}}=2^{\frac{13}{24}}$

$\therefore k=\frac{13}{24}$

(2) $\sqrt{3\sqrt[4]{3^3}}=\sqrt{3}\times\sqrt[8]{3^3}=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{3}{8}}=3^{\frac{4+3}{8}}=3^{\frac{7}{8}}$

$3^{\frac{7}{8}}=3^{\frac{k}{4}}$에서 $\quad\frac{7}{8}=\frac{k}{4}\quad\therefore k=\frac{7}{2}$

답 (1) $\frac{13}{24}$ (2) $\frac{7}{2}$

**5** (1) $\sqrt{\frac{\sqrt[6]{a^5}\times\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a^6}}}=\frac{\sqrt[12]{a^5}\times\sqrt[6]{a}}{\sqrt[4]{a^6}}$

$=(a^{\frac{5}{12}}\times a^{\frac{1}{6}})\div a^{\frac{3}{2}}$

$=a^{\frac{5}{12}+\frac{1}{6}-\frac{3}{2}}$

$=a^{-\frac{11}{12}}$

(2) $\sqrt{\sqrt{a^3b^2}\div\sqrt[3]{a^2b}}=\sqrt[4]{a^3b^2}\div\sqrt[6]{a^2b}$

$=a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}$

$=a^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}$

$=a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{1}{3}}$

답 (1) $a^{-\frac{11}{12}}$ (2) $a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{1}{3}}$

**6** $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}\times\sqrt[4]{\sqrt[12]{a}}=\sqrt[8]{a}\times\sqrt[48]{a}=a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{1}{48}}$

$=a^{\frac{1}{8}+\frac{1}{48}}=a^{\frac{7}{48}}$

$\sqrt[8]{\sqrt[m]{a^7}}=\sqrt[8m]{a^7}=a^{\frac{7}{8m}}$이므로

$a^{\frac{7}{48}}=a^{\frac{7}{8m}},\qquad\frac{7}{48}=\frac{7}{8m}$

$\therefore m=6$ 답 6

**7** (1) $(4+3^{\frac{1}{2}})(2+3^{\frac{1}{4}})(2-3^{\frac{1}{4}})=(4+3^{\frac{1}{2}})\{2^2-(3^{\frac{1}{4}})^2\}$

$=(4+3^{\frac{1}{2}})(4-3^{\frac{1}{2}})$

$=4^2-(3^{\frac{1}{2}})^2$

$=16-3=13$

(2) $(5^{\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}})(5^{\frac{1}{2}}-5^{-\frac{1}{2}})+(5^{\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}})^2$

$=(5^{\frac{1}{2}})^2-(5^{-\frac{1}{2}})^2+\{(5^{\frac{1}{2}})^2+2\times5^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{1}{2}}+(5^{-\frac{1}{2}})^2\}$

$=5-5^{-1}+(5+2+5^{-1})=12$

답 (1) 13 (2) 12

**8** $(a-a^{-1})\div(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})$

$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})\div(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})$

$=a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$ 답 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$

**9** $(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3+(a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})^3$

$=(a^{\frac{2}{3}})^3+3\times(a^{\frac{2}{3}})^2\times a^{-\frac{1}{3}}+3\times a^{\frac{2}{3}}\times(a^{-\frac{1}{3}})^2+(a^{-\frac{1}{3}})^3+(a^{\frac{2}{3}})^3$

$-3\times(a^{\frac{2}{3}})^2\times a^{-\frac{1}{3}}+3\times a^{\frac{2}{3}}\times(a^{-\frac{1}{3}})^2-(a^{-\frac{1}{3}})^3$

$=2(a^2+3)$

$=2(2^2+3)=14$ 답 14

**10** (1) $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=2^2,\qquad a-2+a^{-1}=4$

$\therefore a+a^{-1}=6$

(2) $a+a^{-1}=6$의 양변을 제곱하면

$(a+a^{-1})^2=6^2,\qquad a^2+2+a^{-2}=36$

$\therefore a^2+a^{-2}=34$

(3) $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 세제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^3=2^3$

$a^{\frac{3}{2}}-3(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})-a^{-\frac{3}{2}}=8$

$\therefore a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=8+3\cdot2=14$

답 (1) 6 (2) 34 (3) 14

**11** $2^x+2^{-x}=4$의 양변을 세제곱하면

$(2^x+2^{-x})^3=4^3$

$2^{3x}+3(2^x+2^{-x})+2^{-3x}=64$

$\therefore 8^x+8^{-x}=64-3\cdot4=52$ 답 52

**12** $(a+a^{-1})^2=a^2+2+a^{-2}=7+2=9$이므로

$a+a^{-1}=3$ ($\because a+a^{-1}>0$)

또 $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+2+a^{-1}=3+2=5$이므로

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ ($\because a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}>0$)

$\therefore\frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a+a^{-1}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

**13** $4^x=3$에서 $\quad 2^{2x}=3$

$\dfrac{2^x+2^{-x}}{8^x-8^{-x}}$의 분모, 분자에 $2^x$을 곱하면

$$\frac{2^x+2^{-x}}{8^x-8^{-x}}=\frac{2^x(2^x+2^{-x})}{2^x(2^{3x}-2^{-3x})}=\frac{2^{2x}+1}{2^{4x}-2^{-2x}}$$
$$=\frac{2^{2x}+1}{(2^{2x})^2-(2^{2x})^{-1}}=\frac{3+1}{3^2-3^{-1}}$$
$$=\frac{4}{9-\frac{1}{3}}=\frac{6}{13}$$

답 $\dfrac{6}{13}$

**14** $\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=6$의 좌변의 분모, 분자에 $a^x$을 곱하면

$$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}$$

즉 $\dfrac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=6$이므로 $\quad a^{2x}+1=6(a^{2x}-1)$

$$a^{2x}+1=6a^{2x}-6$$
$$5a^{2x}=7 \qquad \therefore a^{2x}=\frac{7}{5}$$
$$\therefore a^{2x}+a^{-2x}=a^{2x}+\frac{1}{a^{2x}}=\frac{7}{5}+\frac{5}{7}=\frac{74}{35}$$

답 $\dfrac{74}{35}$

**15** $2^{\frac{1}{x}}=9$에서 $\quad 9^x=2$

$\dfrac{(3^x-3^{-x})^3}{3^x+3^{-x}}$의 분모, 분자에 $3^x$을 곱하면

$$\frac{(3^x-3^{-x})^3}{3^x+3^{-x}}=\frac{3^x\{3^{3x}-3(3^x-3^{-x})-3^{-3x}\}}{3^x(3^x+3^{-x})}$$
$$=\frac{3^{4x}-3(3^{2x}-1)-3^{-2x}}{3^{2x}+1}$$
$$=\frac{(9^x)^2-3(9^x-1)-(9^x)^{-1}}{9^x+1}$$
$$=\frac{2^2-3(2-1)-2^{-1}}{2+1}$$
$$=\frac{4-3-\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}$$

답 $\dfrac{1}{6}$

**16** $2^x=3^y=6^z=k\ (k>0)$로 놓으면

$2^x=k$에서 $\quad 2=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$3^y=k$에서 $\quad 3=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$6^z=k$에서 $\quad 6=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$$2\times3\div6=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}$$
$$k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$$

이때 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$이므로

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$$

답 0

**17** $13^x=4$에서 $\quad 13=(2^2)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{2}{x}}$ …… ㉠

$208^y=32$에서 $\quad 208=(2^5)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{5}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면

$$\frac{13}{208}=2^{\frac{2}{x}}\div2^{\frac{5}{y}}, \qquad 2^{\frac{2}{x}-\frac{5}{y}}=\frac{1}{16}=2^{-4}$$
$$\therefore \frac{2}{x}-\frac{5}{y}=-4$$

답 $-4$

**18** $2^x=k$에서 $\quad 2=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$4^y=k$에서 $\quad 4=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$8^z=k$에서 $\quad 8=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$$2\times4\times8=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\times k^{\frac{1}{z}}$$
$$k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=2^6, \qquad k^3=2^6$$
$$\therefore k=2^2=4$$

답 4

**19** 세 수 $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{10}$을 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}},\ \sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}},\ \sqrt[6]{10}=10^{\frac{1}{6}}$$

3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$$3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{12}}=(3^4)^{\frac{1}{12}}=81^{\frac{1}{12}}$$
$$5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{12}}=(5^3)^{\frac{1}{12}}=125^{\frac{1}{12}}$$
$$10^{\frac{1}{6}}=10^{\frac{2}{12}}=(10^2)^{\frac{1}{12}}=100^{\frac{1}{12}}$$

이때 $81<100<125$이므로 $\quad 81^{\frac{1}{12}}<100^{\frac{1}{12}}<125^{\frac{1}{12}}$

$$\therefore \sqrt[3]{3}<\sqrt[6]{10}<\sqrt[4]{5}$$

답 ②

**20** (i) $A-B=(4\sqrt{3}+2\sqrt[3]{4})-(3\sqrt{3}+3\sqrt[3]{4})$

$$=\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{27}-\sqrt[6]{16}>0$$
$$\therefore A>B$$

(ii) $B-C=(3\sqrt{3}+3\sqrt[3]{4})-(\sqrt{3}+5\sqrt[3]{4})$

$$=2(\sqrt{3}-\sqrt[3]{4})=2(\sqrt[6]{27}-\sqrt[6]{16})>0$$
$$\therefore B>C$$

(i), (ii)에서 $\quad A>B>C$

답 $A>B>C$

## 중단원 연습 문제

본책 21~23쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ① | 02 ④ | 03 ④ | 04 24 | 05 ⑤ |
| 06 48 | 07 ③ | 08 ② | 09 7 | 10 125 |
| 11 $-\frac{1}{3}$ | 12 ④ | 13 9 | 14 ② | 15 3 |
| 16 9 | 17 ① | 18 11 | 19 72 | 20 ② |
| 21 ② | | | | |

**01** 전략 $a>0$이고 $n$이 짝수일 때, 실수 $a$의 $n$제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[n]{a}$이다.

풀이 $a=\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

$-27$의 세제곱근 중 실수인 것은 $-3$이므로 $b=-3$

$\therefore a+b=-1$ 답 ①

**02** 전략 $n$이 홀수일 때, 실수 $a$의 $n$제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$뿐이다.

풀이 ㄴ. $n$이 홀수이고 $x<0$일 때, $x$의 $n$제곱근 중 실수인 것은 1개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

**03** 전략 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 ① $\sqrt[4]{3}\times\sqrt{2}=\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{2^2}=\sqrt[4]{3\times2^2}=\sqrt[4]{12}$

② $\sqrt[3]{\sqrt{(-5)^{18}}}=\sqrt[6]{5^{18}}=5^3=125$

③ $\sqrt[3]{4\sqrt{4}}=\sqrt[3]{\sqrt{4^3}}=\sqrt[6]{2^6}=2$

④ $\dfrac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[4]{16}}=\dfrac{\sqrt[3]{6^3}}{\sqrt[4]{2^4}}=\dfrac{6}{2}=3$

⑤ $\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[4]{5}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}}}=\dfrac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[8]{5}}\times\dfrac{\sqrt[8]{5}}{\sqrt[12]{3}}=1$ 답 ④

**04** 전략 거듭제곱근의 성질을 이용하여 자연수 $n$의 값을 구한다.

풀이 (좌변)$=\sqrt[n]{4}\times\sqrt[n]{16}=\sqrt[n]{64}$

(우변)$=\sqrt[4]{2}=\sqrt[4\times6]{2^6}=\sqrt[24]{64}$

$\therefore n=24$ 답 24

다른 풀이 $\sqrt[n]{4}\times\sqrt[n]{16}=2^{\frac{2}{n}}\times2^{\frac{4}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$

$2^{\frac{6}{n}}=2^{\frac{1}{4}}$에서 $\dfrac{6}{n}=\dfrac{1}{4}$ $\therefore n=24$

**05** 전략 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 $2^{\frac34}\times3^{-\frac14}\times6^{\frac54}=2^{\frac34}\times3^{-\frac14}\times(2\times3)^{\frac54}$

$=2^{\frac34}\times3^{-\frac14}\times2^{\frac54}\times3^{\frac54}$

$=2^{\frac34+\frac54}\times3^{-\frac14+\frac54}$

$=2^2\times3=12$ 답 ⑤

**06** 전략 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 $\left\{\left(\dfrac{9}{16}\right)^{\frac34}\right\}^{\frac23}\times\left\{\left(\dfrac14\right)^{-\frac52}\right\}^{\frac65}=\left(\dfrac{9}{16}\right)^{\frac12}\times\left(\dfrac14\right)^{-3}$

$=\left\{\left(\dfrac34\right)^2\right\}^{\frac12}\times(4^{-1})^{-3}$

$=\dfrac34\times4^3=48$ 답 48

**07** 전략 $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$임을 이용하여 거듭제곱근을 지수가 유리수인 꼴로 나타낸 후 지수법칙을 이용하여 간단히 한다.

풀이 $\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}}\div\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}\div\dfrac{\sqrt[4]{2}\times\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{2}}$

$=(2^{\frac12}\div2^{\frac16})\div\{(2^{\frac14}\times2^{\frac16})\div2^{\frac1{12}}\}$

$=2^{\frac12-\frac16}\div2^{\frac14+\frac16-\frac1{12}}$

$=2^{\frac13}\div2^{\frac13}=1$

따라서 $2^m=1$이므로 $m=0$ 답 ③

**08** 전략 먼저 주어진 수를 $a^r$ ($r$는 유리수) 꼴로 나타낸다.

풀이 $(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3=(\sqrt{2}\times\sqrt[6]{4})^3=(2^{\frac12}\times2^{\frac26})^3=2^{\frac32}\times2=2^{\frac52}$

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3$보다 큰 자연수를 $n$이라 하면

$n>2^{\frac52}$ $\therefore n^2>2^5=32$

따라서 $n$은 6 이상의 자연수이므로 $(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다. 답 ②

다른 풀이 $(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3=\{(2\times2^{\frac23})^{\frac12}\}^3=\{(2^{\frac53})^{\frac12}\}^3$

$=(2^{\frac56})^3=2^{\frac52}=\sqrt{32}$

이때 $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로 $(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

**09** 전략 $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$임을 이용하여 거듭제곱근을 $a^r$ ($r$는 유리수) 꼴로 나타낸다.

풀이 $\sqrt[3]{a\sqrt{a^3}\sqrt[4]{a}}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[12]{a}=a^{\frac13}\times a^{\frac12}\times a^{\frac1{12}}$

$=a^{\frac13+\frac12+\frac1{12}}=a^{\frac{11}{12}}$ ⋯ ❶

$\sqrt[6]{a^2\sqrt{a^m}}=\sqrt[6]{a^2}\times\sqrt[12]{a^m}=a^{\frac13}\times a^{\frac{m}{12}}=a^{\frac{4+m}{12}}$ ⋯ ❷

즉 $a^{\frac{11}{12}}=a^{\frac{4+m}{12}}$이고 $a\neq1$이므로

$\dfrac{11}{12}=\dfrac{4+m}{12}$, $11=4+m$

$\therefore m=7$ ⋯ ❸

답 7

| 채점 기준 | 비율 |
| --- | --- |
| ❶ $\sqrt[3]{a\sqrt{a^3}\sqrt[4]{a}}$를 지수가 유리수인 식으로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❷ $\sqrt[6]{a^2\sqrt{a^m}}$을 지수가 유리수인 식으로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❸ $m$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**10** 전략 지수가 실수일 때의 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 주어진 두 식을 변끼리 곱하면 $5^{2a+b}\times5^{a-b}=32\times2$이므로

$5^{(2a+b)+(a-b)}=64$, $5^{3a}=4^3$

$5^a=4$ $\therefore 5=4^{\frac1a}$

$5^{a-b}=2$에서 $5^a\times5^{-b}=2$, $(4^{\frac1a})^a\times5^{-b}=2$

$5^{-b}=\dfrac12$ $\therefore 5=\left(\dfrac12\right)^{-\frac1b}=2^{\frac1b}$

$$\therefore\ 4^{\frac{a+b}{ab}}=4^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=4^{\frac{1}{a}}\times4^{\frac{1}{b}}$$
$$=5\times(2^{\frac{1}{b}})^2=5\times5^2$$
$$=125$$
답 125

**11** 전략 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$임을 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 $\dfrac{1}{1-5^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{1+5^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+5}$

$$=\frac{1+5^{\frac{1}{4}}+1-5^{\frac{1}{4}}}{(1-5^{\frac{1}{4}})(1+5^{\frac{1}{4}})}+\frac{2}{1+5^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+5}$$
$$=\frac{2}{1-5^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{1+5^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+5}$$
$$=\frac{2(1+5^{\frac{1}{2}})+2(1-5^{\frac{1}{2}})}{(1-5^{\frac{1}{2}})(1+5^{\frac{1}{2}})}+\frac{4}{1+5}$$
$$=\frac{4}{1-5}+\frac{4}{1+5}=-1+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$$
답 $-\dfrac{1}{3}$

**12** 전략 곱셈 공식을 이용하여 주어진 조건식을 구하는 식의 꼴로 변형한다.

풀이 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=2^2,\qquad x+2+x^{-1}=4$

$\therefore\ x+x^{-1}=2$

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3=2^3$

$x^{\frac{3}{2}}+3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})+x^{-\frac{3}{2}}=8$

$\therefore\ x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=8-3\cdot2=2$

$\therefore\ \dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}}{x+x^{-1}}=\dfrac{2}{2}=1$

답 ④

다른 풀이 $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}}{x+x^{-1}}=\dfrac{(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})}{(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}}$

$$=\frac{2^3-3\cdot2}{2^2-2}=1$$

**13** 전략 $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$의 분모, 분자에 $a^x$을 곱하여 $a^{2x}$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$의 분모, 분자에 $a^x$을 곱하면

$$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x(a^{3x}-a^{-3x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\frac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1}$$
$$=\frac{(a^{2x})^2-(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1}\quad\cdots ❶$$
$$=\frac{2^2-2^{-1}}{2-1}$$
$$=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\quad\cdots ❷$$

따라서 $p=2,\ q=7$이므로 $\quad p+q=9$ ⋯ ❸

답 9

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$을 $a^{2x}$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❷ $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**14** 전략 $a>0,\ b>0$이고 0이 아닌 실수 $x$에 대하여 $a^x=b$이면 $a=b^{\frac{1}{x}}$임을 이용한다.

풀이 $80^x=2$에서 $\qquad 80=2^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$\left(\dfrac{1}{10}\right)^y=4$에서 $\qquad \dfrac{1}{10}=(2^2)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{2}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

$a^z=8$에서 $\qquad a^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{z}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$$80\times\frac{1}{10}\div\sqrt[3]{a}=2^{\frac{1}{x}}\times2^{\frac{2}{y}}\div2^{\frac{1}{z}}$$
$$2^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}}=\frac{8}{\sqrt[3]{a}},\qquad 2=\frac{8}{\sqrt[3]{a}}$$
$$\sqrt[3]{a}=4\qquad\therefore\ a=64$$
답 ②

**15** 전략 거듭제곱근을 $a^r$ ($r$는 유리수) 꼴로 변형하여 지수를 통일한 후 대소를 비교한다.

풀이 $\sqrt[3]{\sqrt{27}}=\sqrt[6]{27}=27^{\frac{1}{6}}$,

$\sqrt[3]{2\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{3}=2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}$,

$\sqrt{2\sqrt[3]{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt[6]{3}=2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{6}}$

2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$$2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{2}{6}}\times3^{\frac{1}{6}}=(2^2\times3)^{\frac{1}{6}}=12^{\frac{1}{6}}$$
$$2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{3}{6}}\times3^{\frac{1}{6}}=(2^3\times3)^{\frac{1}{6}}=24^{\frac{1}{6}}$$

이때 $12<24<27$이므로 $\qquad 12^{\frac{1}{6}}<24^{\frac{1}{6}}<27^{\frac{1}{6}}$

$\therefore\ \sqrt[3]{2\sqrt{3}}<\sqrt{2\sqrt[3]{3}}<\sqrt[3]{\sqrt{27}}$

따라서 $k=\sqrt[3]{\sqrt{27}}$이므로

$k^2=(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^2=(\sqrt[6]{3^3})^2=(3^{\frac{1}{2}})^2=3$

답 3

**16** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식 $3x^2-9x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-\frac{1}{3}\quad\cdots ❶$$
$$\therefore\ \frac{\sqrt[3]{3^\alpha}\times\sqrt[3]{3^\beta}}{(27^\alpha)^\beta}=\frac{3^{\frac{\alpha}{3}}\times3^{\frac{\beta}{3}}}{27^{\alpha\beta}}=\frac{3^{\frac{\alpha+\beta}{3}}}{3^{3\alpha\beta}}$$
$$=3^{\frac{\alpha+\beta}{3}-3\alpha\beta}=3^{\frac{3}{3}-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$=3^2=9\quad\cdots ❷$$
답 9

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $\dfrac{\sqrt[3]{3^\alpha}\times\sqrt[3]{3^\beta}}{(27^\alpha)^\beta}$의 값을 구할 수 있다. | 60% |

**17** 전략 $\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{c+a}{3}=\dfrac{a+b}{5}=k\,(k\neq0)$로 놓고 문자 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{c+a}{3}=\dfrac{a+b}{5}=k\,(k\neq0)$로 놓으면

$\dfrac{b+c}{4}=k$에서 $\quad b+c=4k \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{c+a}{3}=k$에서 $\quad c+a=3k \quad \cdots\cdots$ ㉡

$\dfrac{a+b}{5}=k$에서 $\quad a+b=5k \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면 $\quad 2(a+b+c)=12k$

$\therefore\ a+b+c=6k$

㉠, ㉡, ㉢을 이 식에 각각 대입하면

$a=2k,\ b=3k,\ c=k$

$\therefore\ (2^a\div2^b)^{\frac{1}{c}}=(2^{a-b})^{\frac{1}{c}}=2^{\frac{a-b}{c}}$

$=2^{\frac{2k-3k}{k}}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

답 ①

**18** 전략 $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)\,(A\neq B)$임을 이용하여 지수를 간단히 한다.

풀이 $2^{\frac{1}{n(n+1)}}=2^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$이므로

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_m=2^{\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{m(m+1)}}$

$=2^{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)}$

$=2^{1-\frac{1}{m+1}}=2^{\frac{m}{m+1}}$ ⋯➜ ❶

$2^{\frac{m}{m+1}}=2^{\frac{11}{12}}$에서 $\quad \dfrac{m}{m+1}=\dfrac{11}{12}$

$12m=11m+11 \quad \therefore\ m=11$ ⋯➜ ❷

답 11

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_m$의 지수를 간단히 할 수 있다. | 60% |
| ❷ $m$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**19** 전략 $\sqrt{a}$가 자연수이려면 $a=b^2$ ($b$는 0이 아닌 정수) 꼴이어야 함을 이용한다.

풀이 $\sqrt{2m}$이 자연수이려면

$m=2p^2$ ($p$는 0이 아닌 정수) $\cdots\cdots$ ㉠

$\sqrt[3]{3m}$이 자연수이려면

$m=3^2q^3$ ($q$는 자연수) $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $m=2^3\times3^2\times k^6$ ($k$는 자연수) 꼴이어야 한다.

따라서 $k=1$일 때 $m$이 최소이므로 구하는 최솟값은

$2^3\times3^2\times1^6=72$

답 72

**20** 전략 $\sqrt[3]{n^m}$을 $a^r$ ($r$는 유리수) 꼴로 나타낸 후 $n$의 값의 범위를 나누어 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍의 개수를 구한다.

풀이 $\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$에서 $n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되는 경우는

$n=1$일 때, $\quad m=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$2\le n\le7$일 때, $\quad m=3$

$n=8$일 때, $8^{\frac{m}{3}}=2^m$이므로 $\quad m=1,\ 2,\ 3,\ 4$

따라서 구하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$4+6+4=14$

답 ②

**21** 전략 수심이 5 m, 15 m인 곳에서의 빛의 세기를 각각 구한 후 지수법칙을 이용한다.

풀이 수심이 5 m인 곳에서의 빛의 세기는

$I_5=I_0\times10^{-0.8\times5}=I_0\times10^{-4}$

수심이 15 m인 곳에서의 빛의 세기는

$I_{15}=I_0\times10^{-0.8\times15}=I_0\times10^{-12}$

$\therefore\ \dfrac{I_5}{I_{15}}=\dfrac{I_0\times10^{-4}}{I_0\times10^{-12}}=10^{-4-(-12)}=10^8$

따라서 수심이 5 m인 곳에서의 빛의 세기는 수심이 15 m인 곳에서의 빛의 세기의 $10^8$배이다.

답 ②

I. 지수와 로그

# 02 로그

## 01 로그

**확인** 본책 26쪽

**1** 답 (1) $3=\log_5 125$ (2) $-4=\log_{\frac{1}{3}} 81$ (3) $0=\log_9 1$

**2** 답 (1) $2^5=32$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$ (3) $7^0=1$

**3** (1) 밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq 1$

$x>3$, $x\neq 4$

$\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$

(2) 진수의 조건에서 $x-2>0$

$\therefore x>2$

답 (1) $3<x<4$ 또는 $x>4$ (2) $x>2$

**유제** 본책 27~28쪽

**1** (1) $\log_{\sqrt{3}} 81=x$에서 $(\sqrt{3})^x=81$

$81=3^4=(\sqrt{3})^8$이므로 $x=8$

(2) $\log_8 128=x$에서 $8^x=128$

$128=2^7=(2^3)^{\frac{7}{3}}=8^{\frac{7}{3}}$이므로 $x=\frac{7}{3}$

(3) $\log_{16} x=\frac{1}{4}$에서 $16^{\frac{1}{4}}=x$ $\therefore x=(2^4)^{\frac{1}{4}}=2$

(4) $\log_x 4=\frac{2}{5}$에서 $x^{\frac{2}{5}}=4$

$\therefore x=4^{\frac{5}{2}}=(2^2)^{\frac{5}{2}}=2^5=32$

답 (1) 8 (2) $\frac{7}{3}$ (3) 2 (4) 32

**2** $\log_a 25=\frac{2}{3}$에서 $a^{\frac{2}{3}}=25$

$\therefore a=25^{\frac{3}{2}}=(5^2)^{\frac{3}{2}}=5^3=125$

$\log_{\sqrt{5}} b=-4$에서 $(\sqrt{5})^{-4}=b$

$\therefore b=(5^{\frac{1}{2}})^{-4}=5^{-2}=\frac{1}{25}$

$\therefore ab=125\cdot\frac{1}{25}=5$ 답 5

**3** $x=\log_7 64$에서 $7^x=64$

$\therefore 7^{\frac{x}{3}}=(7^x)^{\frac{1}{3}}=64^{\frac{1}{3}}=(4^3)^{\frac{1}{3}}=4$ 답 4

**4** 밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq 1$

$x>3$, $x\neq 4$

$\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ …… ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+6x+7>0$

$x^2-6x-7<0$, $(x+1)(x-7)<0$

$\therefore -1<x<7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<7$

따라서 정수 $x$는 5, 6이다. 답 5, 6

**5** 밑의 조건에서 $2x-5>0$, $2x-5\neq 1$

$x>\frac{5}{2}$, $x\neq 3$

$\therefore \frac{5}{2}<x<3$ 또는 $x>3$ …… ㉠

진수의 조건에서 $x^2+2x-8>0$

$(x+4)(x-2)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{5}{2}<x<3$ 또는 $x>3$

따라서 정수 $x$의 최솟값은 4이다. 답 4

**6** 밑의 조건에서 $k>0$, $k\neq 1$

$\therefore 0<k<1$ 또는 $k>1$ …… ㉠

진수의 조건에서 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2+kx+2k>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+kx+2k=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=k^2-4\cdot 2k<0$, $k(k-8)<0$

$\therefore 0<k<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<k<1$ 또는 $1<k<8$

따라서 정수 $k$는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다. 답 6

**라이트 UP**

**이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건**

모든 실수 $x$에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면

$a>0$, $b^2-4ac<0$

## 02 로그의 성질

**확인** 본책 29~30쪽

**1** (1) $\log_4 \frac{8}{3}+\log_4 6=\log_4\left(\frac{8}{3}\cdot 6\right)=\log_4 4^2=2$

(2) $\log_2\sqrt{6}-\frac{1}{2}\log_2 3=\log_2\sqrt{6}-\log_2 3^{\frac{1}{2}}=\log_2\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$=\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

답 (1) 2 (2) $\frac{1}{2}$

**2** (1) $\dfrac{\log_6 49}{\log_6 7}=\log_7 49=\log_7 7^2=2$

(2) $\log_9 243=\dfrac{\log_3 243}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 3^5}{\log_3 3^2}=\dfrac{5}{2}$

답 (1) 2　(2) $\dfrac{5}{2}$

**3** (1) $\log_6 8\cdot\log_2 6=\log_6 2^3\cdot\log_2 6=3\log_6 2\cdot\log_2 6=3$

(2) $\log_8 256=\log_{2^3} 2^8=\dfrac{8}{3}$

(3) $4^{\log_2 3}=3^{\log_2 4}=3^{\log_2 2^2}=3^{2\log_2 2}=3^2=9$

답 (1) 3　(2) $\dfrac{8}{3}$　(3) 9

**유제**　본책 31~34쪽

**1** (1) $\dfrac{2}{3}\log_3 6-2\log_3 \sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{2}\log_3 27$

$=\dfrac{2}{3}\log_3 (2\cdot3)-2\log_3 2^{\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{2}\log_3 3^3$

$=\dfrac{2}{3}(\log_3 2+\log_3 3)-\dfrac{2}{3}\log_3 2+\dfrac{3}{2}\log_3 3$

$=\dfrac{2}{3}(\log_3 2+1)-\dfrac{2}{3}\log_3 2+\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{13}{6}$

(2) $\dfrac{1}{3}\log_6 16-2\log_6 \dfrac{\sqrt{2}}{3}-5\log_6 \sqrt[3]{3}$

$=\dfrac{1}{3}\log_6 2^4-2(\log_6 2^{\frac{1}{2}}-\log_6 3)-5\log_6 3^{\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{4}{3}\log_6 2-\log_6 2+2\log_6 3-\dfrac{5}{3}\log_6 3$

$=\dfrac{1}{3}\log_6 2+\dfrac{1}{3}\log_6 3=\dfrac{1}{3}(\log_6 2+\log_6 3)$

$=\dfrac{1}{3}\log_6 (2\cdot3)=\dfrac{1}{3}\log_6 6=\dfrac{1}{3}$

답 (1) $\dfrac{13}{6}$　(2) $\dfrac{1}{3}$

**2** $\log_5 x+\log_5 3y+\log_5 5z=\log_5 (x\cdot3y\cdot5z)=\log_5 15xyz$
이므로 $\log_5 15xyz=1$에서

$15xyz=5$　　$\therefore\ xyz=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \{(125^x)^y\}^z=125^{xyz}=(5^3)^{\frac{1}{3}}=5$　　답 5

**3** (1) $\dfrac{\log_2 5\cdot\log_3 8\cdot\log_5 10}{\log_3 2+\log_3 5}=\dfrac{\dfrac{\log_3 5}{\log_3 2}\cdot\log_3 2^3\cdot\dfrac{\log_3 10}{\log_3 5}}{\log_3 (2\cdot5)}$

$=\dfrac{\dfrac{\log_3 5}{\log_3 2}\cdot3\log_3 2\cdot\dfrac{\log_3 10}{\log_3 5}}{\log_3 10}$

$=3$

(2) $(\log_3 2+\log_9 8)(\log_2 27-\log_4 9)$

$=(\log_3 2+\log_{3^2} 2^3)(\log_2 3^3-\log_{2^2} 3^2)$

$=\left(\log_3 2+\dfrac{3}{2}\log_3 2\right)(3\log_2 3-\log_2 3)$

$=\dfrac{5}{2}\log_3 2\cdot2\log_2 3$

$=5\log_3 2\cdot\dfrac{1}{\log_3 2}=5$

(3) $2\log_3 2+\log_{\frac{1}{3}} 10+\log_{\sqrt{3}} 5=2\log_3 2+\log_{3^{-1}} 10+\log_{3^{\frac{1}{2}}} 5$

$=2\log_3 2-\log_3 10+2\log_3 5$

$=2\log_3 (2\cdot5)-\log_3 10$

$=\log_3 10$

$\therefore\ 9^{2\log_3 2+\log_{\frac{1}{3}} 10+\log_{\sqrt{3}} 5}=9^{\log_3 10}=10^{\log_3 9}=10^{\log_3 3^2}$

$=10^2=100$

답 (1) 3　(2) 5　(3) 100

**4** $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_6 x}=\log_x 2+\log_x 3+\log_x 6$

$=\log_x (2\cdot3\cdot6)$

$=\log_x 6^2=2\log_x 6$

즉 $2\log_x 6=2$이므로　　$\log_x 6=1$　　$\therefore\ x=6$　　답 6

**5** $\log_2 (\log_9 10)+\log_2 (\log_{10} 11)+\log_2 (\log_{11} 12)$
$+\cdots+\log_2 (\log_{80} 81)$

$=\log_2 (\log_9 10\cdot\log_{10} 11\cdot\log_{11} 12\cdot\cdots\cdot\log_{80} 81)$

$=\log_2\left(\dfrac{\log_3 10}{\log_3 9}\cdot\dfrac{\log_3 11}{\log_3 10}\cdot\dfrac{\log_3 12}{\log_3 11}\cdot\cdots\cdot\dfrac{\log_3 81}{\log_3 80}\right)$

$=\log_2 \dfrac{\log_3 81}{\log_3 9}=\log_2 \dfrac{\log_3 3^4}{\log_3 3^2}$

$=\log_2 \dfrac{4\log_3 3}{2\log_3 3}=\log_2 2=1$　　답 1

**6** (1) $\log_2 3=a$, $\log_2 5=\dfrac{1}{b}$이므로

$\log_{24} 30=\dfrac{\log_2 30}{\log_2 24}=\dfrac{\log_2 (2\cdot3\cdot5)}{\log_2 (2^3\cdot3)}$

$=\dfrac{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 5}{3\log_2 2+\log_2 3}$

$=\dfrac{1+a+\dfrac{1}{b}}{3+a}=\dfrac{ab+b+1}{ab+3b}$

(2) $3^a=x$, $3^b=y$에서　　$\log_3 x=a$, $\log_3 y=b$

$\therefore\ \log_{\sqrt{xy}} xy^2=\dfrac{\log_3 xy^2}{\log_3 \sqrt{xy}}=\dfrac{\log_3 x+2\log_3 y}{\dfrac{1}{2}(\log_3 x+\log_3 y)}$

$=\dfrac{a+2b}{\dfrac{1}{2}(a+b)}=\dfrac{2a+4b}{a+b}$

답 (1) $\dfrac{ab+b+1}{ab+3b}$　(2) $\dfrac{2a+4b}{a+b}$

**7** $a^x=2$, $a^y=3$, $a^z=5$에서

$\log_a 2=x$, $\log_a 3=y$, $\log_a 5=z$

$\therefore \log_{90} 80=\dfrac{\log_a 80}{\log_a 90}=\dfrac{\log_a(2^4\cdot 5)}{\log_a(2\cdot 3^2\cdot 5)}$

$=\dfrac{4\log_a 2+\log_a 5}{\log_a 2+2\log_a 3+\log_a 5}$

$=\dfrac{4x+z}{x+2y+z}$ 답 $\dfrac{4x+z}{x+2y+z}$

**8** $8^x=27^y=216$에서

$x=\log_8 216$, $y=\log_{27} 216$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_8 216}+\dfrac{1}{\log_{27} 216}$

$=\log_{216} 8+\log_{216} 27$

$=\log_{216}(8\cdot 27)$

$=\log_{216} 216=1$ 답 1

**9** $45^x=125$에서

$x=\log_{45} 125=\log_{45} 5^3=3\log_{45} 5$

$\therefore \dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{\log_{45} 5}=\log_5 45$

$9^y=5$에서 $y=\log_9 5$

$\therefore \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_9 5}=\log_5 9$

$\therefore \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=\log_5 45-\log_5 9$

$=\log_5 \dfrac{45}{9}=\log_5 5=1$ 답 1

**10** $3^x=4^y=36^z=k\,(k>0,\ k\neq 1)$로 놓으면

$x=\log_3 k$, $y=\log_4 k$, $z=\log_{36} k$

$x=\log_3 k$에서 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\log_3 k}=\log_k 3$

$y=\log_4 k$에서 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_4 k}=\log_k 4$

$z=\log_{36} k$에서 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\log_{36} k}=\log_k 36$

$\therefore \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=2\log_k 3+\log_k 4-\log_k 36$

$=\log_k \dfrac{3^2\cdot 4}{36}$

$=\log_k 1=0$ 답 0

## 03 상용로그

**확인** 본책 35쪽

**1** (1) $\log 100=\log 10^2=2$

(2) $\log \sqrt[4]{10}=\log 10^{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{4}$

(3) $\log \dfrac{1}{1000}=\log 10^{-3}=-3$

답 (1) 2 (2) $\dfrac{1}{4}$ (3) $-3$

**2** (1) 상용로그표에서 4.0의 가로줄과 8의 세로줄이 만나는 곳의 수가 0.6107이므로

$\log 4.08=0.6107$

(2) 상용로그표에서 9.5의 가로줄과 7의 세로줄이 만나는 곳의 수가 0.9809이므로

$\log 9.57=0.9809$

답 (1) 0.6107 (2) 0.9809

**유제** 본책 36~37쪽

**1** ㄱ. $\log 25=\log 5^2=2\log 5=2\times 0.6990=1.3980$

ㄴ. $\log 2=\log \dfrac{10}{5}=\log 10-\log 5=1-0.6990=0.3010$

ㄷ. $\log 50=\log(5\times 10)=\log 5+\log 10=0.6990+1=1.6990$

ㄹ. $\log \dfrac{1}{5}=\log 5^{-1}=-\log 5=-0.6990$

ㅁ. $\log 0.05=\log(5\times 10^{-2})=\log 5+\log 10^{-2}$

$=0.6990-2=-1.3010$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

**2** 상용로그표에서 $\log 6.12=0.7868$이므로

$\log \sqrt[4]{61.2}=\dfrac{1}{4}\log(6.12\times 10)=\dfrac{1}{4}(\log 6.12+\log 10)$

$=\dfrac{1}{4}(0.7868+1)$

$=0.4467$ 답 0.4467

**3** $\log x$의 정수 부분이 2이므로

$2\le \log x<3$, $\log 10^2\le \log x<\log 10^3$

$\therefore 100\le x<1000$

따라서 $M=999$, $m=100$이므로

$M+m=1099$ 답 1099

**4** $\log a=3+0.2405=\log 10^3+\log 1.74$

$=\log(10^3\times 1.74)=\log 1740$

$\therefore a=1740$

$\log b=-2+0.2405=\log 10^{-2}+\log 1.74$

$=\log(10^{-2}\times 1.74)=\log 0.0174$

$\therefore b=0.0174$ 답 $a=1740$, $b=0.0174$

## 중단원 연습 문제

본책 38~40쪽

**01** ③ **02** ④ **03** ① **04** ⑤
**05** $C<B<A$ **06** $\frac{3a+b}{2}$ **07** 81 **08** ①
**09** ② **10** ④ **11** 0.0317 **12** 9000 **13** 10
**14** $10^{\frac{3}{2}}$ **15** 11.7 % **16** ④ **17** ③ **18** 10
**19** ④ **20** 770

**01** 전략 $\log_a b^m = m\log_a b$임을 이용한다.

풀이 $\log_2 a = \frac{1}{2}$에서 $a = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$b = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3\log_3 3 = 3$

$\therefore a^b = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

답 ③

**02** 전략 로그가 정의되기 위한 조건은 (밑)$>0$, (밑)$\neq 1$, (진수)$>0$임을 이용한다.

풀이 (i) $\log_x(x^2-x)$의 밑의 조건에서

$x>0,\ x\neq 1$

$\therefore 0<x<1$ 또는 $x>1$ ...... ㉠

진수의 조건에서 $x^2-x>0$, $x(x-1)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>1$

(ii) $\log_{5-x}|5-x|$의 밑의 조건에서

$5-x>0,\ 5-x\neq 1$, $x<5,\ x\neq 4$

$\therefore x<4$ 또는 $4<x<5$ ...... ㉢

진수의 조건에서 $|5-x|>0$ $\therefore x\neq 5$ ...... ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$x<4$ 또는 $4<x<5$

(i), (ii)에서 $1<x<4$ 또는 $4<x<5$

따라서 정수 $x$는 2, 3이므로 구하는 합은

$2+3=5$

답 ④

**03** 전략 $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$, $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$임을 이용한다.

풀이 $\log_2 12 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_2 6 = \log_2 \frac{12}{8\cdot 6} = \log_2 \frac{1}{4}$

$= \log_2 2^{-2} = -2$

답 ①

**04** 전략 $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$임을 이용한다.

풀이 $\log_5 \frac{2}{1} + \log_5 \frac{3}{2} + \log_5 \frac{4}{3} + \cdots + \log_5 \frac{25}{24}$

$= \log_5\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{25}{24}\right)$

$= \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

답 ⑤

**05** 전략 로그의 성질을 이용하여 $A$, $B$, $C$를 간단히 한 후 대소를 비교한다.

풀이 $A = 5^{\log_5 125 - \log_5 25} = 5^{\log_5 5^3 - \log_5 5^2}$

$= 5^{3-2} = 5$

$B = \log_3 81 - \frac{1}{\log_3 27} = \log_3 3^4 - \frac{1}{\log_3 3^3}$

$= 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$

$C = \log_2(\log_4 256) = \log_2(\log_4 4^4)$

$= \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

$\therefore C<B<A$

답 $C<B<A$

**06** 전략 주어진 식을 이용하여 $\log_5 2$와 $\log_5 3$을 먼저 $a$, $b$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\log_5 6 = a$에서 $\log_5(2\cdot 3) = a$

$\log_5 2 + \log_5 3 = a$ ...... ㉠

$\log_5 \frac{2}{3} = b$에서

$\log_5 2 - \log_5 3 = b$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\log_5 2 = a+b$

$\therefore \log_5 2 = \frac{a+b}{2}$ ··· ❶

㉠−㉡을 하면 $2\log_5 3 = a-b$

$\therefore \log_5 3 = \frac{a-b}{2}$ ··· ❷

$\therefore \log_5 12 = \log_5(2^2\cdot 3)$

$= 2\log_5 2 + \log_5 3$

$= 2\cdot\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$

$= \frac{3a+b}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{3a+b}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\log_5 2$를 $a$, $b$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ $\log_5 3$을 $a$, $b$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❸ $\log_5 12$를 $a$, $b$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40% |

**07** 전략 두 직선의 수직 조건과 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

풀이 직선 AB는 직선 $y=-x+4$에 수직이므로 직선 AB의 기울기는 1이다. 즉

$\frac{\log_3 b - \log_3 a}{3-(-1)} = 1$, $\log_3 b - \log_3 a = 4$

$\log_3 \frac{b}{a} = 4$ $\therefore \frac{b}{a} = 3^4 = 81$

답 81

**08** 전략 $a^2b^3=1$의 양변에 $a$를 밑으로 하는 로그를 취하여 $\log_a b$의 값을 구한다.

풀이 $a^2b^3=1$의 양변에 $a$를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_a a^2b^3=\log_a 1$, $\log_a a^2+\log_a b^3=0$

$2+3\log_a b=0$ $\therefore \log_a b=-\dfrac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a a^2b^6&=\log_a a^2+\log_a b^6\\&=2+6\log_a b\\&=2+6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\\&=-2\end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이 $a^2b^3=1$에서 $b^3=a^{-2}$

$\therefore b^6=(a^{-2})^2=a^{-4}$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a a^2b^6&=\log_a(a^2\cdot a^{-4})=\log_a a^{2-4}\\&=\log_a a^{-2}=-2\end{aligned}$$

**09** 전략 $\log_a k=m$이면 $\log_k a=\dfrac{1}{m}$임을 이용한다.

풀이 $\log_a 3=\log_b 2=\log_c 7=\log_{abc} x=\dfrac{1}{k}$이라 하면

$\log_3 a=\log_2 b=\log_7 c=\log_x abc=k$

$\therefore a=3^k$, $b=2^k$, $c=7^k$

이때

$k=\log_x abc=\log_x(3^k\cdot 2^k\cdot 7^k)=\log_x(2\cdot 3\cdot 7)^k=k\log_x 42$

에서 $\log_x 42=1$

$\therefore x=42$

답 ②

**10** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log a+\log b=6$, $\log a\cdot\log b=4$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a b+\log_b a&=\frac{\log b}{\log a}+\frac{\log a}{\log b}\\&=\frac{(\log a)^2+(\log b)^2}{\log a\cdot\log b}\\&=\frac{(\log a+\log b)^2-2\log a\cdot\log b}{\log a\cdot\log b}\\&=\frac{6^2-2\cdot 4}{4}=7\end{aligned}$$

답 ④

**11** 전략 양수 $A$에 대하여 $\log A=k$일 때, $\log(10^n\times A)=n+k$임을 이용한다. (단, $n$은 실수)

풀이 $\log 31.7=1.5011$에서

$\log(3.17\times 10)=1.5011$, $\log 3.17+1=1.5011$

$\therefore \log 3.17=0.5011$

이때 $\log x=-1.4989$에서

$$\begin{aligned}\log x&=-2+0.5011=\log 10^{-2}+\log 3.17\\&=\log(10^{-2}\times 3.17)=\log 0.0317\end{aligned}$$

$\therefore x=0.0317$

답 0.0317

**12** 전략 $-4\le\log\dfrac{1}{n}<-3$이 성립함을 이용한다.

풀이 $\log\dfrac{1}{n}=-4+\alpha\ (0\le\alpha<1)$이므로

$-4\le\log\dfrac{1}{n}<-3$, $-4\le-\log n<-3$

$3<\log n\le 4$, $\log 10^3<\log n\le\log 10^4$

$\therefore 1000<n\le 10000$

따라서 구하는 자연수 $n$의 개수는

$10000-1000=9000$

답 9000

**13** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $\log A=n+\alpha$ ($n$은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면 이차방정식 $3x^2-17x+k=0$의 두 근이 $n$, $\alpha$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\dfrac{17}{3}=5+\dfrac{2}{3}$ …… ㉠

$n\alpha=\dfrac{k}{3}$ …… ㉡ ··· ❶

이때 $n$은 정수이고 $0\le\alpha<1$이므로 ㉠에서

$n=5$, $\alpha=\dfrac{2}{3}$ ··· ❷

이것을 ㉡에 대입하면

$5\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{k}{3}$ $\therefore k=10$ ··· ❸

답 10

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 정수 부분과 소수 부분의 관계식을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ 정수 부분과 소수 부분을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $k$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**14** 전략 $10<x<100$에서 $1<\log x<2$이고, $\log x^4-\log x^2=$(정수)임을 이용한다.

풀이 $\log x^4-\log x^2=4\log x-2\log x=2\log x$에서 $2\log x$가 정수이다.

$10<x<100$에서 $1<\log x<2$

$\therefore 2<2\log x<4$

이때 $2\log x$가 정수이므로 $2\log x=3$

$\log x=\dfrac{3}{2}$ $\therefore x=10^{\frac{3}{2}}$

답 $10^{\frac{3}{2}}$

**15** 전략 처음 매출액이 $A$원이고 매년 $a\%$씩 증가할 때, 10년 후의 매출액은 $A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}$원이다.

풀이 10년 전 매출액을 $A$원이라 하고 매출액이 매년 $a\%$씩 증가하였다고 하면

$$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}=3A \qquad \therefore \left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}=3$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 3$$

$$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{10}\log 3=\frac{1}{10}\times 0.48=0.048$$

이때 $\log 1.117=0.048$이므로

$$1+\frac{a}{100}=1.117 \qquad \therefore a=11.7$$

따라서 10년 동안 이 회사의 매출액은 매년 $11.7\%$씩 증가하였다.

답 $11.7\%$

**16** 전략 $\sqrt[3]{a}=\sqrt{b}=\sqrt[4]{c}=k$라 하고 $a$, $b$, $c$를 $k$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 조건 (가)에서 $\sqrt[3]{a}=\sqrt{b}=\sqrt[4]{c}=k$라 하면

$$a=k^3,\ b=k^2,\ c=k^4$$

이것을 조건 (나)의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\log_8 a+\log_4 b+\log_2 c&=\log_8 k^3+\log_4 k^2+\log_2 k^4\\&=\log_2 k+\log_2 k+4\log_2 k\\&=6\log_2 k\end{aligned}$$

즉 $6\log_2 k=2$이므로 $\quad \log_2 k=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore \log_2 abc&=\log_2(k^3\cdot k^2\cdot k^4)=\log_2 k^9=9\log_2 k\\&=9\cdot\frac{1}{3}=3\end{aligned}$$

답 ④

**17** 전략 주어진 로그의 밑을 통일한 후 진수가 같음을 이용한다.

풀이 $\log_{\sqrt{3}}a=2\log_3 a=\log_3 a^2$,

$\log_9 ab=\frac{1}{2}\log_3 ab=\log_3(ab)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$a^2=(ab)^{\frac{1}{2}}, \qquad a^4=ab$$

$$a(a^3-b)=0 \qquad \therefore b=a^3\ (\because a\neq 0)$$

$$\therefore \log_a b=\log_a a^3=3$$

답 ③

**18** 전략 $\log_m n=\frac{1}{\log_n m}$임을 이용하여 $a$, $b$, $c$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\frac{\log_c b}{\log_a b}=2$에서 $\qquad \frac{\log_b a}{\log_b c}=2$

$$\log_b a=2\log_b c, \qquad \log_b a=\log_b c^2$$

$$\therefore a=c^2 \qquad \cdots ❶$$

$\frac{\log_c a}{\log_b a}=3$에서 $\qquad \frac{\log_a b}{\log_a c}=3$

$$\log_a b=3\log_a c, \qquad \log_a b=\log_a c^3$$

$$\therefore b=c^3 \qquad \cdots ❷$$

이때 $a$, $b$, $c$는 1보다 크고 10보다 작은 자연수이므로

$$a=4,\ b=8,\ c=2$$

$$\therefore a+b-c=10 \qquad \cdots ❸$$

답 10

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a$와 $c$ 사이의 관계식을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $b$와 $c$ 사이의 관계식을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $a+b-c$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**19** 전략 주어진 조건을 식에 대입하여 $k$의 값을 구한다.

풀이 교통량이 도로용량의 2배이므로 $\qquad V=2C$

또 통행시간은 기준통행시간 $t_0$의 $\frac{7}{2}$배이므로 $\qquad t=\frac{7}{2}t_0$

$V=2C$, $t=\frac{7}{2}t_0$을 $\log\left(\frac{t}{t_0}-1\right)=k+4\log\frac{V}{C}$에 대입하면

$$\log\left(\frac{\frac{7}{2}t_0}{t_0}-1\right)=k+4\log\frac{2C}{C}$$

$$\log\frac{5}{2}=k+4\log 2$$

$$\begin{aligned}\therefore k&=\log\frac{5}{2}-4\log 2=\log\frac{10}{2^2}-4\log 2\\&=1-2\log 2-4\log 2\\&=1-6\log 2\end{aligned}$$

답 ④

**20** 전략 $\log a$의 소수 부분과 $\log b$의 소수 부분이 같으면 $a=b\times 10^m$ ($m$은 정수) 꼴임을 이용한다.

풀이 $\log n=f(n)+g(n)$ ($f(n)$은 정수, $0\le g(n)<1$)이므로

조건 (가)에서

$$f(n)=1 \text{ 또는 } f(n)=2$$

$$\therefore 10\le n<1000 \qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad \cdots ❶$$

한편 $g(2n)=g(14)$에서

$$2n=1.4\times 10^m\ (m\text{은 정수})$$

$$\therefore n=0.7\times 10^m\ (m\text{은 정수}) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\qquad n=70$ 또는 $n=700 \qquad \cdots ❷$

따라서 모든 $n$의 값의 합은

$$70+700=770 \qquad \cdots ❸$$

답 770

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $n$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $n$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ 모든 $n$의 값의 합을 구할 수 있다. | 20% |

Ⅱ. 지수함수와 로그함수

# 03 지수함수

## 01 지수함수와 그 그래프

### 확인

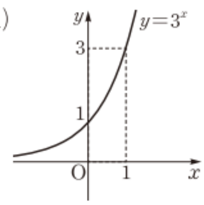
본책 42~44쪽

**1** (1) $f(2)=4^2=16$  (2) $f(-3)=4^{-3}=\frac{1}{64}$

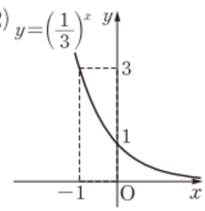
(3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$

답 (1) 16 (2) $\frac{1}{64}$ (3) 2

**2** 답 (1)




(2)




**3** (1) $y-(-1)=-5^{x-2}$  $\therefore y=-5^{x-2}-1$

(2) $-y=-5^x$  $\therefore y=5^x$

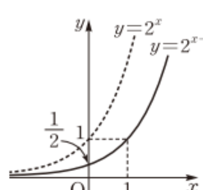
(3) $y=-5^{-x}$  $\therefore y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$

(4) $-y=-5^{-x}$  $\therefore y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

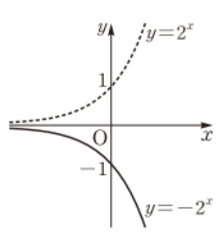
답 (1) $y=-5^{x-2}-1$ (2) $y=5^x$

(3) $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$ (4) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

**4** (1) $y=2^{x-1}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

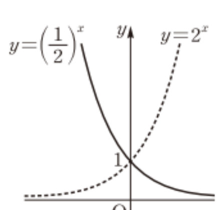



(2) $y=-2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




(3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$이므로 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 것이다.

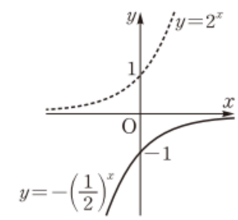
따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(4) $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x=-2^{-x}$이므로

$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**5** (1) 함수 $y=2^x$은 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.

따라서 정의역이 $\{x\,|\,-3\le x\le 1\}$일 때, 함수 $y=2^x$은

$x=1$일 때 최대이고, 최댓값은 $2^1=2$

$x=-3$일 때 최소이고, 최솟값은 $2^{-3}=\frac{1}{8}$

(2) 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.

따라서 정의역이 $\{x\,|\,-3\le x\le 1\}$일 때, 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은

$x=-3$일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{1}{8}$ (2) 최댓값: 27, 최솟값: $\frac{1}{3}$

**6** (1) $f(0)=3^0=1$

(2) $f(3)=3^3$, $f(1)f(2)=3^1\cdot 3^2=3^3$이므로

$f(3)=f(1)f(2)$

(3) $f(4)=3^4$, $\frac{f(8)}{f(2)}=\frac{3^8}{3^2}=3^6$이므로

$f(4)\neq\frac{f(8)}{f(2)}$

(4) $f(6)=3^6$, $\{f(3)\}^2=(3^3)^2=3^6$이므로

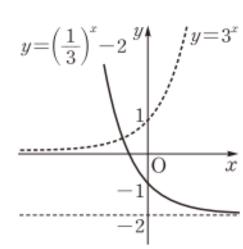
$f(6)=\{f(3)\}^2$

답 (1) ○ (2) ○ (3) × (4) ○

### 유제

본책 45~49쪽

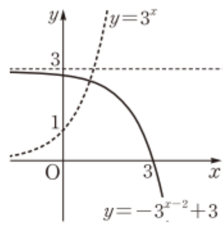
**1** (1) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-2=3^{-x}-2$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




따라서 치역은 $\{y\,|\,y>-2\}$

점근선의 방정식은 $y=-2$

(2) $y=-3^{x-2}+3$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

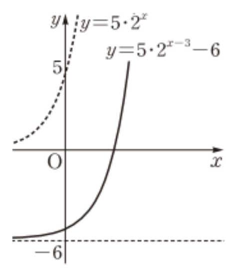



따라서 치역은 $\{y|y<3\}$

점근선의 방정식은 $y=3$

답 풀이 참조

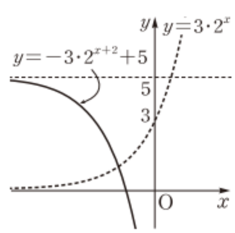
**2** (1) $y=5\cdot2^{x-3}-6$의 그래프는 $y=5\cdot2^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 $-6$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




따라서 치역은 $\{y|y>-6\}$

점근선의 방정식은 $y=-6$

(2) $y=-3\cdot2^{x+2}+5$의 그래프는 $y=3\cdot2^x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




따라서 치역은 $\{y|y<5\}$

점근선의 방정식은 $y=5$

답 풀이 참조

**3** ㄷ. $0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

**4** $y=2^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-3=2^{x+1}\qquad \therefore y=2^{x+1}+3$

$y=2^{x+1}+3$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=2^{-x+1}+3,\qquad -y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3$

$\therefore y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-3$ 답 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-3$

**5** $y=5^x$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=5^{-x}$

$y=5^{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=5^{-(x-m)}\qquad \therefore y=5^{-x+m}+n$

따라서 $y=5^{-x+m}+n$이 $y=25\cdot5^{-x}-3=5^{-x+2}-3$과 일치하므로

$m=2,\ n=-3\qquad \therefore m+n=-1$ 답 $-1$

**6** (1) $25^{0.25}$, $\sqrt[3]{625}$, $125^{\frac{1}{4}}$을 밑이 5인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$25^{0.25}=(5^2)^{0.25}=5^{0.5}=5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{625}=\sqrt[3]{5^4}=5^{\frac{4}{3}}$,

$125^{\frac{1}{4}}=(5^3)^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{4}}$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{4}{3}$이고, 함수 $y=5^x$은 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로

$5^{\frac{1}{2}}<5^{\frac{3}{4}}<5^{\frac{4}{3}}\qquad \therefore 25^{0.25}<125^{\frac{1}{4}}<\sqrt[3]{625}$

(2) $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{64}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{32}}$을 밑이 $\frac{1}{2}$인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$\sqrt[3]{\frac{1}{16}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{64}}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^6}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{5}}$,

$\sqrt[4]{\frac{1}{32}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$

이때 $\frac{6}{5}<\frac{5}{4}<\frac{4}{3}$이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{5}}$

$\therefore \sqrt[3]{\frac{1}{16}}<\sqrt[4]{\frac{1}{32}}<\sqrt[5]{\frac{1}{64}}$

답 (1) $25^{0.25}<125^{\frac{1}{4}}<\sqrt[3]{625}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}<\sqrt[4]{\frac{1}{32}}<\sqrt[5]{\frac{1}{64}}$

**7** 주어진 세 수를 밑이 2인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$A=\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}}$, $B=4^{\frac{1}{5}}=(2^2)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{2}{5}}$,

$C=0.5^{-0.9}=(2^{-1})^{-\frac{9}{10}}=2^{\frac{9}{10}}$

이때 $\frac{2}{5}<\frac{3}{4}<\frac{9}{10}$이고, 함수 $y=2^x$은 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로

$2^{\frac{2}{5}}<2^{\frac{3}{4}}<2^{\frac{9}{10}}$

따라서 주어진 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$B,\ A,\ C$ 답 $B,\ A,\ C$

**8** 두 수 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2}$의 지수 $3x$와 $2x^2$에 대하여

$2x^2-3x=x(2x-3)$

이때 $0<x<1$에서 $x>0$, $2x-3<0$이므로

$2x^2-3x=x(2x-3)<0\qquad \therefore 2x^2<3x$

또 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$은 $t$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2}$ 답 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2}$

**9** (1) 함수 $y=2^{-x+1}-4=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-4$에서 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.

따라서 $-1\le x\le 4$에서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-4$는

$x=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1-1}-4=4-4=0$

$x=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}-4=\frac{1}{8}-4=-\frac{31}{8}$

(2) 함수 $y=5^{2x}\cdot 2^{-3x}=\left(\frac{25}{8}\right)^{x}$에서 밑이 $\frac{25}{8}$이고 $\frac{25}{8}>1$이므로 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.

따라서 $1\le x\le 2$에서 함수 $y=\left(\frac{25}{8}\right)^{x}$은

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(\frac{25}{8}\right)^{2}=\frac{625}{64}$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은 $\frac{25}{8}$

답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: $-\frac{31}{8}$

(2) 최댓값: $\frac{625}{64}$, 최솟값: $\frac{25}{8}$

**10** 함수 $y=3^{x^2-2x-2}$에서 밑이 3이고 $3>1$이므로 $x^2-2x-2$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.

$f(x)=x^2-2x-2$로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2-3$

$f(-1)=1$, $f(1)=-3$, $f(2)=-2$이므로 $-1\le x\le 2$에서

$-3\le f(x)\le 1$

따라서 함수 $y=3^{x^2-2x-2}=3^{f(x)}$은

$f(x)=1$일 때 최대이고, 최댓값은 $3^1=3$

$f(x)=-3$일 때 최소이고, 최솟값은 $3^{-3}=\frac{1}{27}$

답 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{1}{27}$

**11** 함수 $y=a^{-x^2+2x-5}$에서 밑이 $a$이고 $0<a<1$이므로 $-x^2+2x-5$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.

$f(x)=-x^2+2x-5$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2-4$

이므로 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $-4$를 갖는다.

따라서 함수 $y=a^{-x^2+2x-5}=a^{f(x)}$은 $f(x)=-4$일 때 최솟값 16을 가지므로 $a^{-4}=16$

$a^4=\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because 0<a<1$) 답 $\frac{1}{2}$

**12** (1) $y=16^x-4^{x+1}-3=(4^x)^2-4\cdot 4^x-3$

$4^x=t$로 놓으면 $-1\le x\le 1$에서

$4^{-1}\le 4^x\le 4^1$ $\quad\therefore \frac{1}{4}\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t-3=(t-2)^2-7$

따라서 $\frac{1}{4}\le t\le 4$에서 함수 $y=(t-2)^2-7$은

$t=4$일 때 최대이고, 최댓값은 $(4-2)^2-7=-3$

$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은 $-7$

(2) $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+3=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$로 놓으면 $-1\le x\le 0$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^0\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $\quad\therefore 1\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-6t+3=(t-3)^2-6$

따라서 $1\le t\le 3$에서 함수 $y=(t-3)^2-6$은

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은 $(1-3)^2-6=-2$

$t=3$일 때 최소이고, 최솟값은 $-6$

답 (1) 최댓값: $-3$, 최솟값: $-7$

(2) 최댓값: $-2$, 최솟값: $-6$

**13** $y=5^{1-x}+5^{1+x}=\frac{5}{5^x}+5\cdot 5^x$

이때 $\frac{1}{5^x}>0$, $5^x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=\frac{5}{5^x}+5\cdot 5^x\ge 2\sqrt{\frac{5}{5^x}\cdot 5\cdot 5^x}=10$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 10이다. 답 10

참고 $\frac{5}{5^x}+5\cdot 5^x\ge 2\sqrt{\frac{5}{5^x}\cdot 5\cdot 5^x}$에서 등호는 $\frac{5}{5^x}=5\cdot 5^x$일 때 성립하므로

$(5^x)^2=1$, $\quad 5^{2x}=5^0$ $\quad\therefore x=0$

따라서 등호는 $x=0$일 때 성립한다.

## 02 지수방정식

확인 본책 50쪽

**1** (1) $\frac{1}{81}=3^{-4}$이므로 주어진 방정식은

$3^x=3^{-4}$ $\quad\therefore x=-4$

(2) $4^{x-1}=8^{2-x}$에서 $(2^2)^{x-1}=(2^3)^{2-x}$

$\therefore 2^{2x-2}=2^{6-3x}$

따라서 $2x-2=6-3x$이므로

$5x=8 \quad \therefore x=\frac{8}{5}$

(3) $9^x-6\cdot3^x+9=0$에서 $(3^x)^2-6\cdot3^x+9=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-6t+9=0$

$(t-3)^2=0 \quad \therefore t=3$

따라서 $3^x=3$이므로 $x=1$

(4) $3^{5x-10}=4^{5x-10}$에서 $3\neq4$이므로

$5x-10=0 \quad \therefore x=2$

답 (1) $x=-4$ (2) $x=\frac{8}{5}$ (3) $x=1$ (4) $x=2$

**유제** 본책 51~53쪽

**1** (1) $9^{x+3}=\sqrt{27}$에서

$(3^2)^{x+3}=(3^3)^{\frac{1}{2}} \quad \therefore 3^{2x+6}=3^{\frac{3}{2}}$

따라서 $2x+6=\frac{3}{2}$이므로

$2x=-\frac{9}{2} \quad \therefore x=-\frac{9}{4}$

(2) $25^{x-2}=5\cdot(\sqrt{5})^{-x+1}$에서

$(5^2)^{x-2}=5\cdot(5^{\frac{1}{2}})^{-x+1} \quad \therefore 5^{2x-4}=5^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

따라서 $2x-4=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$이므로

$\frac{5}{2}x=\frac{11}{2} \quad \therefore x=\frac{11}{5}$

답 (1) $x=-\frac{9}{4}$ (2) $x=\frac{11}{5}$

**2** $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}-4\cdot2^{x^2-3}=0$에서 $(2^{-2})^{x-1}-2^2\cdot2^{x^2-3}=0$

$\therefore 2^{-2x+2}=2^{x^2-1}$

따라서 $-2x+2=x^2-1$이므로

$x^2+2x-3=0, \quad (x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

즉 구하는 실근의 곱은 $-3\cdot1=-3$

답 $-3$

**3** $\frac{4^{x^2-3}}{2^{x-2}}=4$에서 $(2^2)^{x^2-3}=2^2\cdot2^{x-2}$

$\therefore 2^{2x^2-6}=2^x$

따라서 $2x^2-6=x$이므로

$2x^2-x-6=0, \quad (2x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x>0)$

답 2

**4** (1) $25^x-4\cdot5^x-5=0$에서 $(5^x)^2-4\cdot5^x-5=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-4t-5=0, \quad (t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

따라서 $5^x=5$이므로 $x=1$

(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-27=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-27=0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-6t-27=0, \quad (t+3)(t-9)=0$

$\therefore t=9\ (\because t>0)$

따라서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$이므로 $x=-2$

(3) $10^x+10^{2-x}=20$에서 $10^x+\frac{100}{10^x}-20=0$

$10^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t+\frac{100}{t}-20=0$

양변에 $t$를 곱하여 정리하면

$t^2-20t+100=0, \quad (t-10)^2=0$

$\therefore t=10$

따라서 $10^x=10$이므로 $x=1$

(4) $2^x-2^{-x+3}=2$에서 $2^x-\frac{8}{2^x}-2=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t-\frac{8}{t}-2=0$

양변에 $t$를 곱하여 정리하면

$t^2-2t-8=0, \quad (t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=4\ (\because t>0)$

따라서 $2^x=4=2^2$이므로 $x=2$

답 (1) $x=1$ (2) $x=-2$ (3) $x=1$ (4) $x=2$

**5** $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=3-2\sqrt{2}$

이므로 $(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x=6$에서

$(3+2\sqrt{2})^x+\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^x}-6=0$

$(3+2\sqrt{2})^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t+\frac{1}{t}-6=0$

양변에 $t$를 곱하여 정리하면

$t^2-6t+1=0 \quad \therefore t=3\pm2\sqrt{2}$

따라서 $(3+2\sqrt{2})^x=3-2\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^{-1}$ 또는

$(3+2\sqrt{2})^x=3+2\sqrt{2}$이므로

$x=-1$ 또는 $x=1$

답 $x=-1$ 또는 $x=1$

**6** $4^x-7\cdot2^x+8=0$에서 $(2^x)^2-7\cdot2^x+8=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-7t+8=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 방정식의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 방정식 ㉠의 두 근은 $2^\alpha$, $2^\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha\cdot2^\beta=8$, $2^{\alpha+\beta}=2^3$ $\therefore \alpha+\beta=3$ 답 3

**7** (1) (i) $x=1$일 때,

주어진 방정식은 $1^{-2}=1^{-4}=1$이므로 성립한다.

(ii) $x\neq1$일 때,

$3x-5=-x-3$이므로 $4x=2$ $\therefore x=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

(2) (i) $x+4=1$, 즉 $x=-3$일 때,

주어진 방정식은 $1^9=1^3=1$이므로 성립한다.

(ii) $x+4\neq1$, 즉 $x\neq-3$일 때,

$x^2=x+6$이므로

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

답 (1) $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

(2) $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

**8** $2^{-x}=(x+1)^x$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=(x+1)^x$

(i) $x=0$일 때,

주어진 방정식은 $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1^0=1$이므로 성립한다.

(ii) $x\neq0$일 때,

$\frac{1}{2}=x+1$이므로 $x=-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=0$

답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=0$

**9** (i) $x-2=1$, 즉 $x=3$일 때,

주어진 방정식은 $1^{18}=1^{25}=1$이므로 성립한다.

(ii) $x-2\neq1$, 즉 $x\neq3$일 때,

$2x^2=7x+4$이므로 $2x^2-7x-4=0$

$(2x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=4\ (\because x>2)$

(i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=4$이므로 모든 실근의 합은

$3+4=7$ 답 7

## 03 지수부등식

### 확인

본책 54쪽

**1** $\left(\frac{1}{25}\right)^x-5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x\geq0$에서 $\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2-5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x\geq0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-5t\geq0$

$t(t-5)\geq0$ $\therefore t\geq5\ (\because t>0)$

따라서 $\left(\frac{1}{5}\right)^x\geq5$이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^x\geq\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

밑이 $\frac{1}{5}$이고 $0<\frac{1}{5}<1$이므로

$x\leq-1$ 답 $x\leq-1$

### 유제

본책 55~57쪽

**1** (1) $7^{3-2x}\geq49^{x-5}$에서

$7^{3-2x}\geq(7^2)^{x-5}$ $\therefore 7^{3-2x}\geq7^{2x-10}$

밑이 7이고 $7>1$이므로

$3-2x\geq2x-10$, $-4x\geq-13$ $\therefore x\leq\frac{13}{4}$

(2) $0.3^{x+1}>0.0081^{x-2}$에서

$0.3^{x+1}>(0.3^4)^{x-2}$ $\therefore 0.3^{x+1}>0.3^{4x-8}$

밑이 0.3이고 $0<0.3<1$이므로

$x+1<4x-8$, $-3x<-9$ $\therefore x>3$

답 (1) $x\leq\frac{13}{4}$ (2) $x>3$

**2** $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-4}-\left(\frac{16}{9}\right)^{x^2+1}\geq0$에서

$\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-4}-\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right\}^{x^2+1}\geq0$ $\therefore \left(\frac{3}{4}\right)^{3x-4}\geq\left(\frac{3}{4}\right)^{-2x^2-2}$

밑이 $\frac{3}{4}$이고 $0<\frac{3}{4}<1$이므로

$3x-4\leq-2x^2-2$, $2x^2+3x-2\leq0$

$(x+2)(2x-1)\leq0$ $\therefore -2\leq x\leq\frac{1}{2}$ 답 $-2\leq x\leq\frac{1}{2}$

**3** $\left(\frac{1}{4}\right)^x<4\sqrt{2}<2^{3-2x}$에서

$(2^{-2})^x<2^2\cdot2^{\frac{1}{2}}<2^{3-2x}$ $\therefore 2^{-2x}<2^{\frac{5}{2}}<2^{3-2x}$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$-2x<\frac{5}{2}<3-2x$

(i) $-2x<\frac{5}{2}$에서 $x>-\frac{5}{4}$

(ii) $\frac{5}{2}<3-2x$에서 $2x<\frac{1}{2}$ $\therefore x<\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $-\frac{5}{4}<x<\frac{1}{4}$ 답 $-\frac{5}{4}<x<\frac{1}{4}$

**라이트 UP**

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 두 부등식 $A<B$와 $B<C$를 하나로 나타낸 것이므로 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

**4** (1) $9^x-10\cdot3^{x+1}+81<0$에서

$(3^x)^2-30\cdot3^x+81<0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-30t+81<0,\qquad (t-3)(t-27)<0$

$\therefore 3<t<27$

따라서 $3<3^x<27$, 즉 $3^1<3^x<3^3$에서 밑이 3이고 $3>1$이므로

$1<x<3$

(2) $2^x+2\geq2^{3-x}$에서

$2^x+2\geq\dfrac{8}{2^x},\qquad 2^x+2-\dfrac{8}{2^x}\geq0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t+2-\dfrac{8}{t}\geq0$

양변에 $t$를 곱하여 정리하면

$t^2+2t-8\geq0,\qquad (t+4)(t-2)\geq0$

$\therefore t\leq-4$ 또는 $t\geq2$

이때 $t>0$이므로 $\quad t\geq2$

따라서 $2^x\geq2=2^1$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로

$x\geq1$

답 (1) $1<x<3$ (2) $x\geq1$

**5** (1) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^x+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-1}-50>0$에서

$\left\{\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\right\}^2+5\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^x-50>0$

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+5t-50>0,\qquad (t+10)(t-5)>0$

$\therefore t<-10$ 또는 $t>5$

이때 $t>0$이므로 $\quad t>5$

따라서 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x>5=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$에서 밑이 $\dfrac{1}{5}$이고 $0<\dfrac{1}{5}<1$이므로

$x<-1$

(2) $0.04^x-0.2^x\leq0.2^{x-1}-5$에서

$(0.2^x)^2-0.2^x\leq5\times0.2^x-5$

$(0.2^x)^2-6\times0.2^x+5\leq0$

$0.2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+5\leq0,\qquad (t-1)(t-5)\leq0$

$\therefore 1\leq t\leq5$

따라서 $1\leq0.2^x\leq5$, 즉 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^0\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$에서 밑이 $\dfrac{1}{5}$이고 $0<\dfrac{1}{5}<1$이므로

$-1\leq x\leq0$

답 (1) $x<-1$ (2) $-1\leq x\leq0$

**6** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}+8\leq0$에서

$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}^2-6\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+8\leq0$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+8\leq0,\qquad (t-2)(t-4)\leq0$

$\therefore 2\leq t\leq4$

따라서 $2\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\leq4$, 즉 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$에서 밑이 $\dfrac{1}{2}$이고 $0<\dfrac{1}{2}<1$이므로 $\quad -2\leq x\leq-1$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-1$이므로 $\quad \alpha+\beta=-3$

답 $-3$

**7** 처음 $^{14}C$의 양이 100 mg일 때 $x$년 후에 남아 있는 $^{14}C$의 양이 25 mg이라 하면

$100\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=25,\qquad \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=\dfrac{25}{100}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$\dfrac{x}{5730}=2\qquad \therefore x=11460$

따라서 유물은 11460년 전의 것이라고 할 수 있다.

답 11460년

**8** $x$시간 후 혈중 농도가 0.81 μg/mL 이하가 된다고 하면

$2.56\times\left(1-\dfrac{25}{100}\right)^x\leq0.81$

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^x\leq\dfrac{0.81}{2.56}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^4\qquad \therefore x\geq4$

따라서 치료제의 혈중 농도가 처음으로 0.81 μg/mL 이하가 되는 것은 4시간 후이다.

답 4시간

**9** (1) $I_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}=\dfrac{1}{16}I_0$에서

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}=\dfrac{1}{16}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^4,\qquad \dfrac{x}{4}=4$

$\therefore x=16$

따라서 수심은 16 m이다.

(2) $12.5\,\%=\dfrac{125}{1000}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$이므로 $I_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^3I_0$에서

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^3,\qquad \dfrac{x}{4}\geq3$

$\therefore x\geq12$

따라서 수심은 최소 12 m이어야 한다.

답 (1) 16 m (2) 12 m

## 중단원 연습 문제

본책 58~60쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** ③ | **02** 17 | **03** 2 | **04** $-2$ | |
| **05** ㄱ, ㄴ, ㄹ | | **06** ④ | **07** $\frac{3}{4}$ | **08** 3 |
| **09** 8 | **10** 15 | **11** ③ | **12** 36 | **13** ④ |
| **14** ⑤ | **15** 5 | **16** ⑤ | **17** ① | **18** 31 |
| **19** 43 | **20** 9 | **21** 8 | **22** $k\le 6$ | **23** ② |

**01** 전략 지수함수의 성질에 대한 명제의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $a>0$일 때, $a^x$은 항상 양수이므로 임의의 실수 $x$에 대하여 $f(x)>0$이다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 $x$축이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $a>1$일 때, $x$의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

**02** 전략 함수 $y=a^{x-m}+n\,(a>0,\ a\ne1)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=n$임을 이용한다.

풀이 함수 $y=5^{-x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-3$이므로

$b=-3$ ···➊

함수 $y=5^{-x+a}-3$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=5^{-1+a}-3,\quad 5^{-1+a}=5$

따라서 $-1+a=1$이므로 $\quad a=2$ ···➋

$\therefore\ 10a+b=10\cdot2-3=17$ ···➌

답 17

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $b$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ➋ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ➌ $10a+b$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**03** 전략 함수 $y=a^x\,(a>1)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-n=a^{x-m}$이고, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=a^{-x}$임을 이용한다.

풀이 $y=a^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 $-4$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-(-4)=a^{x-(-3)}\qquad \therefore\ y=a^{x+3}-4$

이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=a^{-x+3}-4\qquad \therefore\ y=-a^{-x+3}+4$

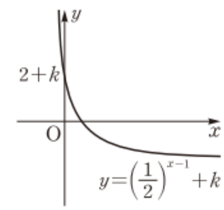
이 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=-a^2+4,\quad a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>1)$ 답 2

**04** 전략 주어진 함수의 그래프를 좌표평면에 그려서 생각한다.

풀이 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면




$2+k\ge0\qquad \therefore\ k\ge-2$

따라서 $k$의 최솟값은 $-2$이다.

답 $-2$

**05** 전략 $y=a^{x-m}+n\,(a>0,\ a\ne1)$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 것임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $y=-8\cdot2^x=-2^{x+3}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-(x+3)}$

이므로 $y=-8\cdot2^x$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=2^{-x+2}+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+1$

이므로 $y=2^{-x+2}+1$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=2^{-2x}-1=\left(\frac{1}{4}\right)^x-1$

ㄹ. $y=4\cdot2^{-x}-3=2^{-x+2}-3=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-3$

이므로 $y=4\cdot2^{-x}-3$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

**06** 전략 $y=a^x$은 $0<a<1$일 때, $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소함을 이용한다.

풀이 $y=a^x$은 $0<a<1$일 때, $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로 $0<a<1$에서

$a^1<a^a<a^0\qquad \therefore\ a<a^a<1$

이때 $y=2^x$은 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로

$2^a<2^{a^a}<2$ 답 ④

**07** 전략 주어진 함수를 변형하여 밑이 1보다 큰지 작은지 확인한 후 주어진 정의역에서 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $y=4^x\cdot3^{-x}+1=\left(\frac{4}{3}\right)^x+1$에서 밑이 $\frac{4}{3}$이고 $\frac{4}{3}>1$이므로 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.

따라서 $-1\le x\le 1$에서 주어진 함수는

$x=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$$\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$$

$x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}+1=\frac{7}{4}$$

즉 치역은 $\left\{y \,\middle|\, \frac{7}{4}\le y\le \frac{7}{3}\right\}$이므로

$$a=\frac{7}{4},\ b=\frac{7}{3}$$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

**08** 전략 $0<a<1$이므로 $-x^2+6x-6$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소함을 이용한다.

풀이 $y=a^{-x^2+6x-6}$에서 밑이 $a$이고 $0<a<1$이므로

$-x^2+6x-6$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.

$f(x)=-x^2+6x-6$으로 놓으면

$$f(x)=-(x-3)^2+3$$

$f(1)=-1$, $f(3)=3$, $f(4)=2$이므로 $1\le x\le 4$에서

$$-1\le f(x)\le 3 \qquad \cdots ❶$$

따라서 $y=a^{-x^2+6x-6}=a^{f(x)}$은 $f(x)=3$일 때 최소이고, 최솟값은 $a^3$이므로

$$a^3=\frac{1}{27}=\left(\frac{1}{3}\right)^3 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}\ (\because a\text{는 실수}) \qquad \cdots ❷$$

또 $f(x)=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$$a^{-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3 \qquad \cdots ❸$$

답 3

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 지수의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ 최댓값을 구할 수 있다. | 30% |

**09** 전략 $2^x=t$로 놓고 주어진 함수를 $t$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y=4^x-2^{x+2}+a=(2^x)^2-4\cdot 2^x+a$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

$$y=t^2-4t+a$$
$$=(t-2)^2+a-4$$

따라서 $t=2$에서 최솟값 $a-4$를 가지므로

$$a-4=3 \qquad \therefore a=7$$

또 $t=2$, 즉 $2^x=2$에서

$$x=1 \qquad \therefore b=1$$

$$\therefore a+b=8$$

답 8

**10** 전략 $3^x+3^{-x}=t$로 놓고 주어진 식을 $t$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=3^x+3^{-x}$$
$$\ge 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2\ (\text{단, 등호는 } 3^x=3^{-x}\text{일 때 성립}) \qquad \cdots ❶$$

한편 $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$이므로

$$y=9^x+9^{-x}+4(3^x+3^{-x})+5$$
$$=t^2-2+4t+5$$
$$=(t+2)^2-1\ (t\ge 2) \qquad \cdots ❷$$

따라서 주어진 함수는 $t=2$일 때 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$$(2+2)^2-1=15 \qquad \cdots ❸$$

답 15

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $3^x+3^{-x}$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $y$를 $t$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❸ 최솟값을 구할 수 있다. | 30% |

**11** 전략 실수 $a$의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{a}$임을 이용하여 $a$의 값을 구한다.

풀이 9의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{9}$이므로

$$a=\sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}$$

주어진 방정식은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}=3^{\frac{2}{3}}$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

따라서 $x-2=-\frac{2}{3}$이므로 $\quad x=\frac{4}{3}$

답 ③

**12** 전략 $2^x-2^{-x}=t$로 놓고 주어진 식을 $t$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$에서

$4^x+4^{-x}=(2^x-2^{-x})^2+2$이므로

$$(2^x-2^{-x})^2+2+a(2^x-2^{-x})+7=0$$
$$\therefore (2^x-2^{-x})^2+a(2^x-2^{-x})+9=0$$

$2^x-2^{-x}=t$로 놓으면 $\quad t^2+at+9=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 $t$에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 하므로 판별식을 $D$라 하면

$$D=a^2-4\cdot 9\ge 0, \qquad a^2-36\ge 0$$
$$(a+6)(a-6)\ge 0$$
$$\therefore a\le -6 \text{ 또는 } a\ge 6$$

따라서 양수 $a$의 최솟값은 6이므로 $\quad m=6$

$$\therefore m^2=36$$

답 36

**13** 전략 $x=1$일 때와 $x\neq1$일 때로 나누어 방정식의 해를 구한다.

풀이 $(x^x)^3=x^x\cdot x^6$에서 $\quad x^{3x}=x^{x+6}$

(i) $x=1$일 때,

주어진 방정식은 $1^3=1^7=1$이므로 성립한다.

(ii) $x\neq1$일 때,

$3x=x+6$에서 $\quad 2x=6 \quad \therefore x=3$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 구하는 합은

$1+3=4$

답 ④

**14** 전략 $18n$년 후의 방사성 물질의 양은 처음의 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$이 됨을 이용한다.

풀이 처음 방사성 물질의 양을 $A$라 하면 18년 후의 방사성 물질의 양은 $\frac{1}{2}A$이므로 $18n$년 후의 방사성 물질의 양은

$\left(\frac{1}{2}\right)^n A$

이때 $6.25\,\%=\frac{6.25}{100}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^n A=\left(\frac{1}{2}\right)^4 A \quad \therefore n=4$

따라서 방사성 물질의 양이 처음의 $6.25\,\%$로 줄어드는 데 걸리는 시간은

$18\cdot4=72$(년)

답 ⑤

**15** 전략 밑을 같게 한 후 지수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 $2^{x^2+1}>(\sqrt{32})^x$에서 $\quad 2^{x^2+1}>2^{\frac{5}{2}x}$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$x^2+1>\frac{5}{2}x, \quad 2x^2-5x+2>0$

$(2x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$ ······ ㉠ ⋯ ❶

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}>\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-1}$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}>\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{2x-1} \quad \therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-2}$

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x^2+1<4x-2, \quad x^2-4x+3<0$

$(x-1)(x-3)<0$

$\therefore 1<x<3$ ······ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $\quad 2<x<3$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=5$ ⋯ ❸

답 5

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 부등식 $2^{x^2+1}>(\sqrt{32})^x$의 해를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ 부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}>\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-1}$의 해를 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**16** 전략 $2^x=t\ (t>0)$로 놓고 주어진 식을 $t$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $2^{2x+2}-33\cdot2^x+8\leq0$에서

$4\cdot(2^x)^2-33\cdot2^x+8\leq0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$4t^2-33t+8\leq0, \quad (4t-1)(t-8)\leq0$

$\therefore \frac{1}{4}\leq t\leq8$

따라서 $\frac{1}{4}\leq2^x\leq8$, 즉 $2^{-2}\leq2^x\leq2^3$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로

$-2\leq x\leq3$

즉 정수 $x$는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+0+1+2+3=3$

답 ⑤

**17** 전략 $a^x=t\ (t>0)$로 놓으면 방정식 $t^2-6at+2=0$의 두 근은 $a^\alpha$, $a^\beta$임을 이용한다.

풀이 $a^{2x}-6a^{x+1}+2>0$에서 $\quad (a^x)^2-6a\cdot a^x+2>0$

$a^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-6at+2>0$ ······ ㉠

주어진 부등식의 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이므로 부등식 ㉠의 해는 $t<a^\alpha$ 또는 $t>a^\beta$이다.

즉 $t$에 대한 이차방정식 $t^2-6at+2=0$의 두 근이 $a^\alpha$, $a^\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}=2$

이때 $\alpha+\beta=5$이므로 $\quad a^5=2$

$\therefore a=2^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{2}$

답 ①

**18** 전략 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 $x$축에 대칭이동하여 그린다.

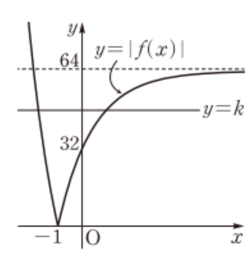
풀이 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 5만큼, $y$축의 방향으로 $-64$만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=f(x)$의 그래프의 $y$절편은

$f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}-64$

$=32-64=-32$

이고 점근선의 방정식은 $y=-64$이므로 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 제1사분면에서 만나려면

$32<k<64$

따라서 자연수 $k$는 33, 34, 35, ⋯, 63의 31개이다. 답 31

**라이트 UP**

**절댓값 기호를 포함한 식의 그래프**

① $y=|f(x)|$의 그래프

➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 $x$축에 대하여 대칭이동한다.

② $y=f(|x|)$의 그래프

➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 $y$축에 대하여 대칭이동한다.

③ $|y|=f(x)$의 그래프

➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분만 남기고, $y<0$인 부분은 $y\geq 0$인 부분을 $x$축에 대하여 대칭이동한다.

④ $|y|=f(|x|)$의 그래프

➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분만 남기고, 이 그래프를 $x$축, $y$축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한다.

**19** 전략 정사각형의 한 변의 길이가 4임을 이용하여 네 점 A, B, C, D의 $y$좌표를 문자를 사용하여 나타낸다.

풀이 정사각형 ACDB의 한 변의 길이가 4이므로 두 점 A, C의 $x$좌표를 $t$라 하면 두 점 B, D의 $x$좌표는 $t+4$이다.

네 점 A, B, C, D의 $y$좌표가 각각 $a^t$, $b^{t+4}$, $b^t$, $c^{t+4}$이므로

$a^t=8$, $b^{t+4}=8$, $b^t=4$, $c^{t+4}=4$

$b^{t+4}=8$, $b^t=4$에서 $4b^4=8$

$b^4=2$ $\therefore b=2^{\frac{1}{4}}$

$b^t=4$에서 $(2^{\frac{1}{4}})^t=2^2$

$2^{\frac{1}{4}t}=2^2$, $\frac{1}{4}t=2$ $\therefore t=8$

$a^t=8$에서 $a^8=8=2^3$ $\therefore a=2^{\frac{3}{8}}$

$c^{t+4}=4$에서 $c^{12}=4=2^2$ $\therefore c=2^{\frac{1}{6}}$

$\therefore abc=2^{\frac{3}{8}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{19}{24}}$

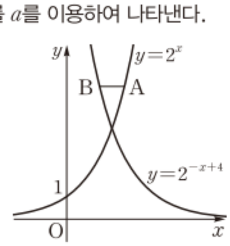
따라서 $p=24$, $q=19$이므로

$p+q=43$ 답 43

**20** 전략 A$(a, 2^a)$으로 놓고 점 B의 좌표를 $a$를 이용하여 나타낸다.

풀이 점 A의 좌표를 $(a, 2^a)$이라 하면 점 B의 $y$좌표는 $2^a$이다.

점 B의 $x$좌표를 $t$라 하면 $2^a=2^{-t+4}$에서 $a=-t+4$이므로




$t=4-a$ $\therefore$ B$(4-a, 2^a)$

$\therefore \overline{AB}=a-(4-a)$

$=2a-4$ ($\because a>2$) ⋯ ❶

이때 $2<\overline{AB}<8$이므로

$2<2a-4<8$, $6<2a<12$

$\therefore 3<a<6$

따라서 자연수 $a$는 4, 5이므로 구하는 합은

$4+5=9$ ⋯ ❷

답 9

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\overline{AB}$의 길이를 $a$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 50% |
| ❷ 자연수 $a$의 값의 합을 구할 수 있다. | 50% |

**21** 전략 $2^x=t$로 치환한 방정식의 근의 조건을 생각한다.

풀이 $2^{2x}-2^{x+3}+k=0$에서

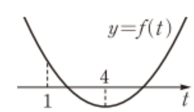
$(2^x)^2-8\cdot 2^x+k=0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-8t+k=0$ ⋯⋯ ㉠

$x>0$이면 $t>1$이므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지려면 $t$에 대한 이차방정식 ㉠은 1보다 큰 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다. ⋯ ❶

즉 $f(t)=t^2-8t+k$라 하면 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로




(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-k>0$

$\therefore k<16$

(ii) $f(1)>0$이므로

$1-8+k>0$ $\therefore k>7$

(i), (ii)에서 $7<k<16$ ⋯ ❷

따라서 정수 $k$는 8, 9, 10, ⋯, 15의 8개이다. ⋯ ❸

답 8

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 이차방정식 ㉠이 1보다 큰 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 함을 알 수 있다. | 30% |
| ❷ $k$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ 정수 $k$의 개수를 구할 수 있다. | 10% |

**라이트 UP**

**이차방정식의 근의 분리**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 $D$라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때

축의 방정식: $x=-\frac{b}{2a}$

① 두 근이 모두 $p$보다 크다. ➡ $D\geq 0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}>p$

② 두 근이 모두 $p$보다 작다. ➡ $D\geq 0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}<p$

③ 두 근이 사이에 $p$가 있다. ➡ $f(p)<0$

**22** 전략 $3^x=t\,(t>0)$로 놓고 주어진 식을 $t$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $9^x-k\cdot3^x+9\ge0$에서 $(3^x)^2-k\cdot3^x+9\ge0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-kt+9\ge0$

$f(t)=t^2-kt+9$라 하면

$f(t)=\left(t-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+9$

이때 모든 실수 $x$에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 $t>0$인 모든 실수 $t$에 대하여 $f(t)\ge0$이어야 한다.

(i) $k\ge0$일 때,

$f(t)$는 $t=\frac{k}{2}$에서 최솟값 $-\frac{k^2}{4}+9$를 가지므로

$-\frac{k^2}{4}+9\ge0,\quad k^2-36\le0$

$(k+6)(k-6)\le0\quad\therefore -6\le k\le6$

그런데 $k\ge0$이므로 $0\le k\le6$

(ii) $k<0$일 때,

$f(0)=9>0$이므로 $t>0$인 모든 실수 $t$에 대하여 $f(t)\ge0$이 성립한다.

(i), (ii)에서 $k\le6$

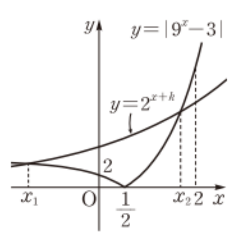
답 $k\le6$

**23** 전략 두 곡선의 교점의 $x$좌표가 조건을 만족시키도록 곡선 $y=2^{x+k}$을 그려 본다.

풀이 $|9^x-3|=0$에서 $9^x=3$이므로 $3^{2x}=3$

즉 $2x=1$이므로 $x=\frac{1}{2}$

두 곡선 $y=|9^x-3|$, $y=2^{x+k}$의 교점의 $x$좌표 $x_1$, $x_2$가 $x_1<0<x_2<2$를 만족시키는 경우는 오른쪽 그림과 같다.




(i) $x=0$에서 곡선 $y=2^{x+k}$이 곡선 $y=|9^x-3|$보다 위쪽에 있어야 하므로

$2^k>2$

(ii) $x=2$에서 곡선 $y=|9^x-3|$이 곡선 $y=2^{x+k}$보다 위쪽에 있어야 하므로

$2^{2+k}<|9^2-3|,\quad 4\cdot2^k<78$

$\therefore 2^k<19.5$

(i), (ii)에서 $2<2^k<19.5$

이때 $k$는 자연수이므로

$k=2$ 또는 $k=3$ 또는 $k=4$

따라서 구하는 합은

$2+3+4=9$

답 ②

Ⅱ. 지수함수와 로그함수

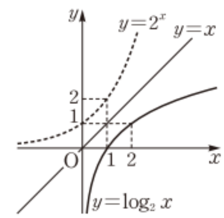
# 04 로그함수

## 01 로그함수와 그 그래프

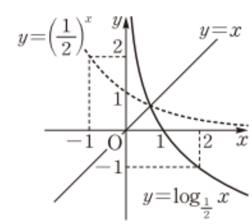
**확인** 본책 62~64쪽

**1** 답 (1) $y=\log_3 x$ (2) $y=\log_{\frac{1}{5}} x$

**2** (1) $y=\log_2 x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.




(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**3** (1) $y-(-3)=\log_3(x-1)$

$\therefore y=\log_3(x-1)-3$

(2) $-y=\log_3 x\quad\therefore y=-\log_3 x$

(4) $-y=\log_3(-x)\quad\therefore y=-\log_3(-x)$

(5) $x=\log_3 y\quad\therefore y=3^x$

답 (1) $y=\log_3(x-1)-3$ (2) $y=-\log_3 x$
(3) $y=\log_3(-x)$ (4) $y=-\log_3(-x)$
(5) $y=3^x$

**4** (1) 함수 $y=\log_4 x$는 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.

따라서 $\frac{1}{2}\le x\le16$에서 함수 $y=\log_4 x$는

$x=16$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_4 16=\log_4 4^2=2$

$x=\frac{1}{2}$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_4 \frac{1}{2}=\log_{2^2} 2^{-1}=-\frac{1}{2}$

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$는 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.

따라서 $5\le x\le125$에서 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$는

$x=5$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{5}} 5=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=-1$

$x=125$일 때 최소이고, 최솟값은

$$\log_{\frac{1}{5}}125=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=-3$$

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: $-\frac{1}{2}$

(2) 최댓값: $-1$, 최솟값: $-3$

**5** (1) $f(2)=\log_2 2=1$

(2) $f(5)=\log_2 5$, $f(2)+f(3)=\log_2 2+\log_2 3=\log_2 6$이므로

$f(5)\neq f(2)+f(3)$

(3) $f(3)=\log_2 3$, $f(6)-f(2)=\log_2 6-\log_2 2=\log_2\frac{6}{2}=\log_2 3$

이므로

$f(3)=f(6)-f(2)$

(4) $f(8)=\log_2 8=\log_2 2^3=3$, $4f(2)=4\log_2 2=4\cdot 1=4$이므로

$f(8)\neq 4f(2)$

답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ×

유제 본책 65~71쪽

**1** (1) $y=9^{\frac{x}{3}+1}$에서 로그의 정의에 의하여

$\frac{x}{3}+1=\log_9 y$ $\quad\therefore x=3\log_9 y-3$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=3\log_9 x-3$

(2) $y=\log_2\sqrt{x-1}$에서 로그의 정의에 의하여

$\sqrt{x-1}=2^y$

양변을 제곱하면

$x-1=(2^y)^2$ $\quad\therefore x=4^y+1$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=4^x+1$

답 (1) $y=3\log_9 x-3$ (2) $y=4^x+1$

**2** $y=\log(x+2)-a$에서 $\quad y+a=\log(x+2)$

로그의 정의에 의하여

$x+2=10^{y+a}$ $\quad\therefore x=10^{y+a}-2$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 역함수는

$y=10^{x+a}-2$

이 함수가 $y=10^{x-2}+b$와 일치하므로

$a=-2$, $b=-2$

$\therefore a+b=-4$

답 $-4$

**3** $(f\circ g)(x)=x$이므로 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$y=2^x+1$이라 하면 $\quad 2^x=y-1$

로그의 정의에 의하여 $\quad x=\log_2(y-1)$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 역함수는 $\quad y=\log_2(x-1)$

따라서 $g(x)=\log_2(x-1)$이므로

$(g\circ g)(9)=g(g(9))=g(\log_2 8)=g(3)$

$=\log_2 2=1$

답 1

다른 풀이 $g(9)=a$라 하면 $f(a)=9$이므로

$2^a+1=9$, $\quad 2^a=8=2^3$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore g(9)=3$

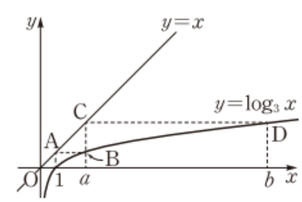
$g(3)=b$라 하면 $f(b)=3$이므로

$2^b+1=3$, $\quad 2^b=2$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore g(3)=1$

$\therefore (g\circ g)(9)=g(g(9))=g(3)=1$

**4** 오른쪽 그림에서 A(1, 1)이므로 B($a$, 1)이라 하면




$\log_3 a=1$ $\quad\therefore a=3$

C(3, 3)이므로 D($b$, 3)이라 하면

$\log_3 b=3$ $\quad\therefore b=3^3=27$

$\therefore a+b=30$

답 30

**5** $f(x)=2^x$이므로 $\quad f^{-1}(x)=\log_2 x$

$y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $x$축과 점 (1, 0)에서 만나므로

A(1, 0)

$f(1)=2$이므로 $\quad$ B(1, 2)

C($a$, 2)라 하면 $\quad\log_2 a=2$ $\quad\therefore a=2^2=4$

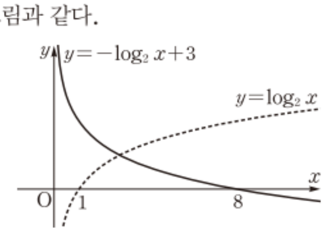
C(4, 2)이므로 D(4, $b$)라 하면

$b=2^4=16$

$\therefore$ D(4, 16)

답 (4, 16)

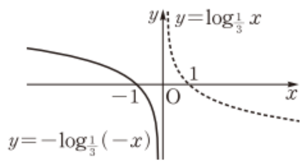
**6** (1) $y=-\log_2 x+3$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




따라서 정의역은 $\quad\{x\,|\,x>0\}$

점근선의 방정식은 $\quad x=0$

(2) $y=-\log_{\frac{1}{3}}(-x)$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




따라서 정의역은 $\{x|x<0\}$

점근선의 방정식은 $x=0$

답 풀이 참조

참고 (2) $y=-\log_{\frac{1}{3}}(-x)=-\log_{3^{-1}}(-x)$

$=\log_3(-x)$

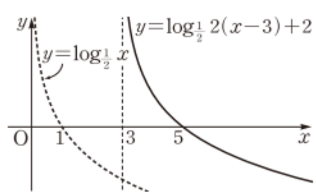
에서 $y=-\log_{\frac{1}{3}}(-x)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동하여 그릴 수도 있다.

**7** (1) $y=\log_{\frac{1}{2}}2(x-3)+2$

$=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+\log_{\frac{1}{2}}2+2$

$=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+1$

에서 $y=\log_{\frac{1}{2}}2(x-3)+2$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




따라서 정의역은 $\{x|x>3\}$

점근선의 방정식은 $x=3$

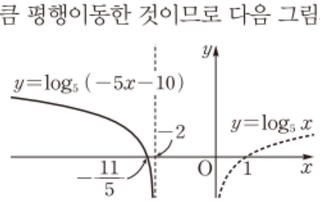
(2) $y=\log_5(-5x-10)$

$=\log_5\{-5(x+2)\}$

$=\log_5\{-(x+2)\}+\log_5 5$

$=\log_5\{-(x+2)\}+1$

에서 $y=\log_5(-5x-10)$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

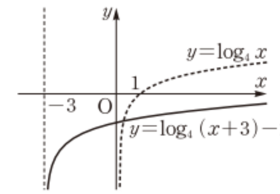



따라서 정의역은 $\{x|x<-2\}$

점근선의 방정식은 $x=-2$

답 풀이 참조

**8** $y=\log_4(x+3)-2$의 그래프는 $y=\log_4 x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




ㄱ. $\log_4(-2+3)-2=-2$이므로 그래프는 점 $(-2, -2)$를 지난다.

ㄴ. 정의역은 $\{x|x>-3\}$이다.

ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-3$이다.

ㄹ. 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

**9** $y=\log_2 x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=\log_2(x-m)$ $\therefore y=\log_2(x-m)+n$

$y=\log_2(x-m)+n$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=\log_2(x-m)+n$

$\therefore y=-\log_2(x-m)-n=\log_{\frac{1}{2}}(x-m)-n$

이 함수가 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+4)-3$과 일치하므로

$m=-4,\ n=3$ $\therefore mn=-12$ 답 $-12$

**10** $y=\log_7 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=\log_7(-x)$ $\therefore y=-\log_7(-x)$

$y=-\log_7(-x)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

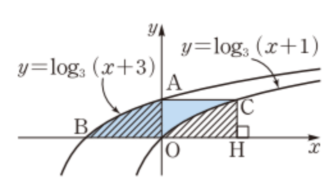
$y-3=-\log_7\{-(x-1)\}$

$\therefore y=-\log_7(-x+1)+3$

이 식에 $x=0$을 대입하면 $y=3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, 3)$이다. 답 $(0, 3)$

**11** $y=\log_3(x+3)$의 그래프는 $y=\log_3(x+1)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이다. 따라서 다음 그림과 같이 점 C에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하면 빗금친 두 부분의 넓이가 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 AOHC의 넓이와 같다.




$y=\log_3(x+3)$에 $x=0$을 대입하면 $y=\log_3 3=1$

따라서 $\overline{AO}=1$, $\overline{AC}=2$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$2\cdot 1=2$ 답 2

**12** (1) 주어진 세 수를 정리하면

$2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$,

$4=4\log_2 2=\log_2 2^4=\log_2 16$,

$\log_4 72=\log_{2^2}72=\frac{1}{2}\log_2 72=\log_2 72^{\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{72}$

이때 $\sqrt{72}<9<16$이고, 함수 $y=\log_2 x$는 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로

$\log_2\sqrt{72}<\log_2 9<\log_2 16$

$\therefore \log_4 72<2\log_2 3<4$

(2) 주어진 세 수를 정리하면

$2\log_{0.2}7=\log_{0.2}7^2=\log_{0.2}49$,

$3\log_{0.2}4=\log_{0.2}4^3=\log_{0.2}64$,

$4\log_{0.2}3=\log_{0.2}3^4=\log_{0.2}81$

이때 $49<64<81$이고, 함수 $y=\log_{0.2}x$는 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로

$\log_{0.2}81<\log_{0.2}64<\log_{0.2}49$

$\therefore 4\log_{0.2}3<3\log_{0.2}4<2\log_{0.2}7$

답 (1) $\log_4 72<2\log_2 3<4$

(2) $4\log_{0.2}3<3\log_{0.2}4<2\log_{0.2}7$

**13** $A$와 $C$를 밑이 2인 로그로 나타내면

$A=-3\log_{\frac{1}{2}}2=-3\log_{2^{-1}}2=3\log_2 2$

$=\log_2 2^3=\log_2 8$,

$C=-\log_4\frac{1}{32}=-\log_{2^2}\frac{1}{32}=-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{32}$

$=\log_2\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{32}$

이때 $\sqrt{30}<\sqrt{32}<8$이고, 함수 $y=\log_2 x$는 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로

$\log_2\sqrt{30}<\log_2\sqrt{32}<\log_2 8$

따라서 주어진 세 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$B$, $C$, $A$ 답 $B$, $C$, $A$

**14** $0<a<1<b$에서 함수 $y=\log_a x$는 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로

$\log_a b<\log_a 1$ $\therefore \log_a b<0$

또 함수 $y=\log_b x$는 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로

$\log_b a<\log_b 1$, $\log_b a<0$ $\therefore -\log_b a>0$

한편 $\log_b\frac{b}{a}=\log_b b-\log_b a=1-\log_b a>-\log_b a$이므로

$\log_a b<-\log_b a<\log_b\frac{b}{a}$

답 $\log_a b<-\log_b a<\log_b\frac{b}{a}$

**15** (1) 함수 $y=\log_3(-x+11)$에서 밑이 3이고 $3>1$이므로 $-x+11$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.

즉 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.

따라서 $2\le x\le 8$에서 함수 $y=\log_3(-x+11)$은

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_3 9=\log_3 3^2=2$

$x=8$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_3 3=1$

(2) $y=\log_2(-x^2+2x+32)$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로 $-x^2+2x+32$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.

$f(x)=-x^2+2x+32$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+33$

$f(2)=32$, $f(6)=8$이므로 $2\le x\le 6$에서

$8\le f(x)\le 32$

따라서 함수 $y=\log_2(-x^2+2x+32)=\log_2 f(x)$는

$f(x)=32$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_2 32=\log_2 2^5=5$

$f(x)=8$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_2 8=\log_2 2^3=3$

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: 1

(2) 최댓값: 5, 최솟값: 3

**16** 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}(|x+2|+1)$에서 밑이 $\frac{1}{4}$이고 $0<\frac{1}{4}<1$이므로 $|x+2|+1$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.

이때 $-4\le x\le 5$에서 $-2\le x+2\le 7$

$0\le|x+2|\le 7$ $\therefore 1\le|x+2|+1\le 8$

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}(|x+2|+1)$은

$|x+2|+1=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{4}}1=0$

$|x+2|+1=8$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{4}}8=\log_{2^{-2}}2^3=-\frac{3}{2}$

답 최댓값: 0, 최솟값: $-\frac{3}{2}$

**17** 함수 $y=\log_5(x^2-6x+a)$에서 밑이 5이고 $5>1$이므로 $x^2-6x+a$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.

$f(x)=x^2-6x+a$로 놓으면

$f(x)=(x-3)^2+a-9$

이므로 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 $a-9$를 갖는다.

따라서 $y=\log_5(x^2-6x+a)=\log_5 f(x)$는 $f(x)=a-9$일 때 최솟값 1을 가지므로

$\log_5(a-9)=1, \quad a-9=5$

$\therefore a=14$

답 14

**18** (1) $y=(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-\log_{\frac{1}{2}}x^3+\frac{1}{4}$

$=(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-3\log_{\frac{1}{2}}x+\frac{1}{4}$

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 놓으면 $\frac{1}{8}\le x\le 4$에서

$\log_{\frac{1}{2}}4\le\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\le\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\therefore -2\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-3t+\frac{1}{4}=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-2$

따라서 $-2\le t\le 3$에서 함수 $y=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-2$는

$t=-2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(-2-\frac{3}{2}\right)^2-2=\frac{41}{4}$

$t=\frac{3}{2}$일 때 최소이고, 최솟값은 $\quad -2$

(2) $y=\log_3 27x\cdot\log_3\frac{3}{x}$

$=(\log_3 27+\log_3 x)(\log_3 3-\log_3 x)$

$=(3+\log_3 x)(1-\log_3 x)$

$=-(\log_3 x)^2-2\log_3 x+3$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 81$에서

$\log_3 1\le\log_3 x\le\log_3 81, \quad \log_3 3^0\le\log_3 x\le\log_3 3^4$

$\therefore 0\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2-2t+3=-(t+1)^2+4$

따라서 $0\le t\le 4$에서 함수 $y=-(t+1)^2+4$는

$t=0$일 때 최대이고, 최댓값은 $\quad -(0+1)^2+4=3$

$t=4$일 때 최소이고, 최솟값은 $\quad -(4+1)^2+4=-21$

답 (1) 최댓값: $\frac{41}{4}$, 최솟값: $-2$ (2) 최댓값: 3, 최솟값: $-21$

**19** $y=\log_2 x\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{4}+5=\log_2 x\cdot\left(-\log_2\frac{x}{4}\right)+5$

$=\log_2 x\cdot\{-(\log_2 x-\log_2 4)\}+5$

$=\log_2 x\cdot(-\log_2 x+2)+5$

$=-(\log_2 x)^2+2\log_2 x+5$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 16$에서

$\log_2 1\le\log_2 x\le\log_2 16, \quad \log_2 2^0\le\log_2 x\le\log_2 2^4$

$\therefore 0\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+2t+5=-(t-1)^2+6$

따라서 $0\le t\le 4$에서 함수 $y=-(t-1)^2+6$은

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은 $\quad 6$

$t=4$일 때 최소이고, 최솟값은 $\quad -(4-1)^2+6=-3$

답 최댓값: 6, 최솟값: $-3$

**20** $y=-\log_{\frac{1}{5}}\frac{x}{25}\cdot\log_{\frac{1}{5}}x+k$

$=-(\log_{\frac{1}{5}}x-\log_{\frac{1}{5}}25)\log_{\frac{1}{5}}x+k$

$=-(\log_{\frac{1}{5}}x+2)\log_{\frac{1}{5}}x+k$

$=-(\log_{\frac{1}{5}}x)^2-2\log_{\frac{1}{5}}x+k$

$\log_{\frac{1}{5}}x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=-t^2-2t+k=-(t+1)^2+k+1$

따라서 $y=-(t+1)^2+k+1$은 $t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$k+1$

즉 $k+1=4$이므로 $\quad k=3$

답 3

## 02 로그방정식

### 확인

본책 72쪽

**1** (1) $\log_3(x+2)=1$에서 $\quad x+2=3$

$\therefore x=1$

(2) 진수의 조건에서 $3-x>0$, $x>0$이므로

$0<x<3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_2(3-x)=2\log_4 x$에서 $\quad \log_2(3-x)=2\log_{2^2}x$

$\therefore \log_2(3-x)=\log_2 x$

따라서 $3-x=x$이므로 $\quad 2x=3$

$\therefore x=\frac{3}{2}$

$x=\frac{3}{2}$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(3) $(\log x)^2-2\log x=0$에서 $\log x=t$로 놓으면

$t^2-2t=0, \quad t(t-2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

즉 $\log x=0$ 또는 $\log x=2$이므로

$x=1$ 또는 $x=10^2=100$

(4) $\log_4(x+1)=\log_5(x+1)$에서 $\quad x+1=1$

$\therefore x=0$

답 (1) $x=1$ (2) $x=\frac{3}{2}$

(3) $x=1$ 또는 $x=100$ (4) $x=0$

유제 본책 73~76쪽

**1** (1) 밑의 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq1$이므로

$1<x<2$ 또는 $x>2$ ...... ㉠

$\log_{x-1}8=3$에서 $(x-1)^3=8=2^3$

$x-1=2$ $\therefore x=3$

$x=3$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(2) 진수의 조건에서 $x+3>0$, $x-1>0$이므로

$x>1$ ...... ㉠

$\log_2(x+3)-1=\log_2(x-1)$에서

$\log_2(x+3)-\log_2 2=\log_2(x-1)$

$\therefore \log_2\frac{x+3}{2}=\log_2(x-1)$

따라서 $\frac{x+3}{2}=x-1$이므로

$x+3=2(x-1)$ $\therefore x=5$

$x=5$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(3) 진수의 조건에서 $2(x-2)>0$, $x^2-3x-18>0$

(i) $2(x-2)>0$에서 $x-2>0$ $\therefore x>2$

(ii) $x^2-3x-18>0$에서 $(x+3)(x-6)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>6$

(i), (ii)에서 $x>6$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}2(x-2)=-\log_3(x^2-3x-18)$에서

$\log_{\frac{1}{3}}2(x-2)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x-18)$

따라서 $2(x-2)=x^2-3x-18$이므로

$x^2-5x-14=0$, $(x+2)(x-7)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=7$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=7$

(4) 진수의 조건에서 $x+16>0$, $x+4>0$이므로

$x>-4$ ...... ㉠

$\log_5(x+16)+\log_5 2=\log_{\sqrt{5}}(x+4)$에서

$\log_5 2(x+16)=\log_{5^{\frac{1}{2}}}(x+4)$

$\log_5 2(x+16)=2\log_5(x+4)$

$\therefore \log_5 2(x+16)=\log_5(x+4)^2$

따라서 $2(x+16)=(x+4)^2$이므로

$x^2+6x-16=0$, $(x+8)(x-2)=0$

$\therefore x=-8$ 또는 $x=2$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=2$

답 (1) $x=3$ (2) $x=5$ (3) $x=7$ (4) $x=2$

**2** 진수의 조건에서 $3x-2>0$이므로

$x>\frac{2}{3}$ ...... ㉠

밑의 조건에서 $x^2-2x-8>0$, $x^2-2x-8\neq1$이므로

$x<1-\sqrt{10}$ 또는 $1-\sqrt{10}<x<-2$

또는 $4<x<1+\sqrt{10}$ 또는 $x>1+\sqrt{10}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$4<x<1+\sqrt{10}$ 또는 $x>1+\sqrt{10}$ ...... ㉢

(i) $x^2-2x-8=7$일 때,

$x^2-2x-15=0$, $(x+3)(x-5)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

이때 ㉢에 의하여 $x=5$

(ii) $3x-2=1$일 때,

$3x=3$ $\therefore x=1$

$x=1$은 ㉢을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $x=5$

답 $x=5$

**3** (1) $(\log_2 x)^2=-\log_2 x^2+8$에서

$(\log_2 x)^2+2\log_2 x-8=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+2t-8=0$, $(t+4)(t-2)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=2$

따라서 $\log_2 x=-4$ 또는 $\log_2 x=2$이므로

$x=2^{-4}=\frac{1}{16}$ 또는 $x=2^2=4$

(2) $\log_{25}x-\log_x 25=\frac{3}{2}$에서

$$\frac{\log_5 x}{\log_5 25}-\frac{\log_5 25}{\log_5 x}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{\log_5 x}{2}-\frac{2}{\log_5 x}=\frac{3}{2}$$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\frac{t}{2}-\frac{2}{t}=\frac{3}{2}$

양변에 $2t$를 곱하여 정리하면

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

따라서 $\log_5 x=-1$ 또는 $\log_5 x=4$이므로

$x=5^{-1}=\frac{1}{5}$ 또는 $x=5^4=625$

답 (1) $x=\frac{1}{16}$ 또는 $x=4$ (2) $x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=625$

**4** $\log_3 3x\cdot\log_3 81x=-2$에서

$(\log_3 3+\log_3 x)(\log_3 81+\log_3 x)=-2$

$(1+\log_3 x)(4+\log_3 x)=-2$

$\therefore (\log_3 x)^2+5\log_3 x+6=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2+5t+6=0$, $(t+3)(t+2)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=-2$

따라서 $\log_3 x=-3$ 또는 $\log_3 x=-2$이므로

$x=3^{-3}=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3^{-2}=\frac{1}{9}$

답 $x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=\frac{1}{9}$

**5** $\log_{\sqrt{5}} x-\log_x 25=3$에서

$\frac{\log_5 x}{\log_5\sqrt{5}}-\frac{\log_5 25}{\log_5 x}=3 \qquad \therefore 2\log_5 x-\frac{2}{\log_5 x}=3$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\quad 2t-\frac{2}{t}=3$

양변에 $t$를 곱하여 정리하면

$2t^2-3t-2=0, \quad (2t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

따라서 $\log_5 x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\log_5 x=2$이므로

$x=5^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 또는 $x=5^2=25$

$\therefore \alpha^2\beta^2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\cdot 25^2=125$

답 125

**6** (1) $x^{\log x}=\frac{100}{x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log\frac{100}{x}$

$\log x\cdot\log x=\log 100-\log x$

$\therefore (\log x)^2+\log x-2=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2+t-2=0, \quad (t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

따라서 $\log x=-2$ 또는 $\log x=1$이므로

$x=10^{-2}=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$

(2) $x^{\log_3 x}-81x^3=0$에서 $\quad x^{\log_3 x}=81x^3$

양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 81x^3$

$\log_3 x\cdot\log_3 x=\log_3 81+\log_3 x^3$

$\therefore (\log_3 x)^2-3\log_3 x-4=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-3t-4=0, \quad (t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

따라서 $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=4$이므로

$x=3^{-1}=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3^4=81$

답 (1) $x=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$ (2) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=81$

**7** (1) $x^{\log_2 3}=3^{\log_2 x}$이므로 주어진 방정식은

$(3^{\log_2 x})^2-2\cdot 3^{\log_2 x}-3=0$

$3^{\log_2 x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-3=0, \quad (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3\ (\because t>0)$

따라서 $3^{\log_2 x}=3$이므로

$\log_2 x=1 \qquad \therefore x=2$

(2) $x^{\log 5}=5^{\log x}$이므로 주어진 방정식은

$(5^{\log x})^2-13(5^{\log x}+5^{\log x})+25=0$

$(5^{\log x})^2-26\cdot 5^{\log x}+25=0$

$5^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-26t+25=0, \quad (t-1)(t-25)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=25$

따라서 $5^{\log x}=1=5^0$ 또는 $5^{\log x}=25=5^2$이므로

$\log x=0$ 또는 $\log x=2$

$\therefore x=10^0=1$ 또는 $x=10^2=100$

답 (1) $x=2$ (2) $x=1$ 또는 $x=100$

**8** $\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-6t-3=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 $t$에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=6$, $\log_2\alpha\cdot\log_2\beta=-3$

$\therefore (\log_\alpha 2)^2+(\log_\beta 2)^2$

$=\frac{1}{(\log_2\alpha)^2}+\frac{1}{(\log_2\beta)^2}$

$=\frac{(\log_2\alpha)^2+(\log_2\beta)^2}{(\log_2\alpha)^2(\log_2\beta)^2}$

$=\frac{(\log_2\alpha+\log_2\beta)^2-2\cdot\log_2\alpha\cdot\log_2\beta}{(\log_2\alpha\cdot\log_2\beta)^2}$

$=\frac{6^2-2\cdot(-3)}{(-3)^2}=\frac{14}{3}$

답 $\frac{14}{3}$

**9** $\log_2 x-a\log_x 2+a-1=0$에서

$\log_2 x-\frac{a}{\log_2 x}+a-1=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t-\frac{a}{t}+a-1=0$

양변에 $t$를 곱하여 정리하면

$t^2+(a-1)t-a=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 $t$에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=-(a-1)$ $\therefore \log_2\alpha\beta=-a+1$

이때 $\alpha\beta=8$이므로

$\log_2 8=-a+1,$ $3=-a+1$

$\therefore a=-2$ 답 $-2$

**10** $(\log x)^2-a(\log x^2-1)+b=0$에서

$(\log x)^2-2a\log x+a+b=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-2at+a+b=0$ …… ㉠

이때 주어진 방정식이 하나의 실근을 가지므로 $t$에 대한 이차방정식 ㉠은 중근을 갖는다.

따라서 방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(a+b)=0$

$\therefore b=a^2-a$ 답 $b=a^2-a$

## 03 로그부등식

### 확인

본책 77쪽

**1** (1) 진수의 조건에서 $2x-1>0$이므로

$2x>1$ $\therefore x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_2(2x-1)\ge\log_2 3$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로

$2x-1\ge3,$ $2x\ge4$

$\therefore x\ge2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\ge2$

(2) 진수의 조건에서 $x+1>0,\ -x+1>0$이므로

$-1<x<1$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)<\log_{\frac{1}{3}}(-x+1)$에서 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x+1>-x+1,$ $2x>0$

$\therefore x>0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<1$

(3) 진수의 조건에서 $x-2>0$이므로

$x>2$ …… ㉠

$\log_3(x-2)>2$에서

$\log_3(x-2)>2\log_3 3$ $\therefore \log_3(x-2)>\log_3 3^2$

밑이 3이고 $3>1$이므로

$x-2>9$ $\therefore x>11$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>11$

(4) 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$(\log x)^2\le\log x$에서 $\log x=t$로 놓으면

$t^2\le t,$ $t(t-1)\le0$ $\therefore 0\le t\le1$

따라서 $0\le\log x\le1$이므로

$\log 1\le\log x\le\log 10$

밑이 10이고 $10>1$이므로

$1\le x\le10$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1\le x\le10$

답 (1) $x\ge2$ (2) $0<x<1$ (3) $x>11$ (4) $1\le x\le10$

### 유제

본책 78~82쪽

**1** (1) 진수의 조건에서 $x+4>0,\ x-1>0,\ x+2>0$이므로

$x>1$ …… ㉠

$\log(x+4)>\log(x-1)+\log(x+2)$에서

$\log(x+4)>\log(x-1)(x+2)$

밑이 10이고 $10>1$이므로

$x+4>(x-1)(x+2),$ $x^2-6<0$

$(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})<0$

$\therefore -\sqrt{6}<x<\sqrt{6}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<\sqrt{6}$

(2) 진수의 조건에서 $x+3>0,\ x+9>0$이므로

$x>-3$ …… ㉠

$\log_{\sqrt{0.4}}(x+3)\le\log_{0.4}(x+9)$에서

$\log_{0.4^{\frac{1}{2}}}(x+3)\le\log_{0.4}(x+9)$

$2\log_{0.4}(x+3)\le\log_{0.4}(x+9)$

$\therefore \log_{0.4}(x+3)^2\le\log_{0.4}(x+9)$

밑이 0.4이고 $0<0.4<1$이므로

$(x+3)^2\ge x+9,$ $x^2+5x\ge0,$ $x(x+5)\ge0$

$\therefore x\le-5$ 또는 $x\ge0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\ge0$

답 (1) $1<x<\sqrt{6}$ (2) $x\ge0$

**2** 진수의 조건에서 $\log_5 2x>0$ $\therefore \log_5 2x>\log_5 1$

밑이 5이고 $5>1$이므로

$2x>1$ $\therefore x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(\log_5 2x)<-1$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(\log_5 2x)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}(\log_5 2x)<\log_{\frac{1}{2}}2$

밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$\log_5 2x>2$ $\therefore \log_5 2x>\log_5 25$

밑이 5이고 $5>1$이므로

$2x>25$ $\therefore x>\frac{25}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>\frac{25}{2}$

따라서 정수 $x$의 최솟값은 13이다. 답 13

**3** 진수의 조건에서 $3x-2>0$, $x>0$이므로

$x>\frac{2}{3}$ …… ㉠

밑의 조건에서 $x+1>0$, $x+1\neq1$이므로

$-1<x<0$ 또는 $x>0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>\frac{2}{3}$ …… ㉢

$\log_{x+1}(3x-2)\ge 2\log_{x+1}x$에서

$\log_{x+1}(3x-2)\ge\log_{x+1}x^2$

밑이 $x+1$이고 ㉢에서 $x+1>1$이므로

$3x-2\ge x^2$, $x^2-3x+2\le0$

$(x-1)(x-2)\le0$ $\therefore 1\le x\le2$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $1\le x\le 2$

따라서 정수 $x$는 1, 2의 2개이다. 답 2

**4** (1) 진수의 조건에서 $x>0$, $x^2>0$이므로

$x>0$ …… ㉠

$(\log_5 x)^2-\log_5 x^2\le3$에서

$(\log_5 x)^2-2\log_5 x-3\le0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3\le0$

$(t+1)(t-3)\le0$ $\therefore -1\le t\le3$

따라서 $-1\le\log_5 x\le3$이므로

$\log_5\frac{1}{5}\le\log_5 x\le\log_5 125$

밑이 5이고 $5>1$이므로

$\frac{1}{5}\le x\le125$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{5}\le x\le125$

(2) 진수의 조건에서 $3x>0$, $9x>0$이므로

$x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}3x\cdot\log_{\frac{1}{3}}9x>12$에서

$(\log_{\frac{1}{3}}3+\log_{\frac{1}{3}}x)(\log_{\frac{1}{3}}9+\log_{\frac{1}{3}}x)>12$

$(\log_{\frac{1}{3}}x-1)(\log_{\frac{1}{3}}x-2)>12$

$\therefore (\log_{\frac{1}{3}}x)^2-3\log_{\frac{1}{3}}x-10>0$

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 $t^2-3t-10>0$

$(t+2)(t-5)>0$ $\therefore t<-2$ 또는 $t>5$

따라서 $\log_{\frac{1}{3}}x<-2$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x>5$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}9$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{243}$

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x<\frac{1}{243}$ 또는 $x>9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<\frac{1}{243}$ 또는 $x>9$

답 (1) $\frac{1}{5}\le x\le125$ (2) $0<x<\frac{1}{243}$ 또는 $x>9$

**5** 진수의 조건에서 $2x>0$, $\frac{x}{8}>0$이므로

$x>0$ …… ㉠

$\log_2 2x\cdot\log_2\frac{x}{8}\le5$에서

$(\log_2 2+\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 8)\le5$

$(\log_2 x+1)(\log_2 x-3)\le5$

$\therefore (\log_2 x)^2-2\log_2 x-8\le0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-8\le0$

$(t+2)(t-4)\le0$ $\therefore -2\le t\le4$

따라서 $-2\le\log_2 x\le4$이므로

$\log_2\frac{1}{4}\le\log_2 x\le\log_2 16$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $\frac{1}{4}\le x\le16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}\le x\le16$

따라서 정수 $x$는 1, 2, 3, …, 16의 16개이다. 답 16

**6** (1) 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_2 x}\ge16x^3$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}\ge\log_2 16x^3$

$\log_2 x\cdot\log_2 x\ge\log_2 16+\log_2 x^3$

$\therefore (\log_2 x)^2-3\log_2 x-4\ge0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-3t-4\ge0$

$(t+1)(t-4)\ge0$ $\therefore t\le-1$ 또는 $t\ge4$

따라서 $\log_2 x\le-1$ 또는 $\log_2 x\ge4$이므로

$\log_2 x\le\log_2\frac{1}{2}$ 또는 $\log_2 x\ge\log_2 16$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge16$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ ······ ㉠

$x^{\log_{0.1}x}\ge\frac{x}{100}$의 양변에 밑이 0.1인 로그를 취하면

$$\log_{0.1}x^{\log_{0.1}x}\le\log_{0.1}\frac{x}{100}$$

$$\log_{0.1}x\cdot\log_{0.1}x\le\log_{0.1}x-\log_{0.1}100$$

$$\therefore (\log_{0.1}x)^2-\log_{0.1}x-2\le0$$

$\log_{0.1}x=t$로 놓으면

$$t^2-t-2\le0,\quad (t+1)(t-2)\le0$$

$$\therefore -1\le t\le2$$

따라서 $-1\le\log_{0.1}x\le2$이므로

$$\log_{0.1}10\le\log_{0.1}x\le\log_{0.1}0.01$$

밑이 0.1이고 $0<0.1<1$이므로

$$0.01\le x\le10 \quad\cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0.01\le x\le10$

답 (1) $0<x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge16$ (2) $0.01\le x\le10$

**7** $5^{x-2}>3^{x+1}$의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log5^{x-2}>\log3^{x+1}$$

$$(x-2)\log5>(x+1)\log3$$

$$\therefore x(\log5-\log3)>2\log5+\log3$$

$\log5-\log3>0$이므로 양변을 $\log5-\log3$으로 나누면

$$x>\frac{2\log5+\log3}{\log5-\log3}$$

답 $x>\frac{2\log5+\log3}{\log5-\log3}$

**8** (1) 주어진 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-\log_3a)^2-2(\log_3a+4)=0$$

$$\therefore (\log_3a)^2-2\log_3a-8=0$$

$\log_3a=t$로 놓으면

$$t^2-2t-8=0,\quad (t+2)(t-4)=0$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=4$$

따라서 $\log_3a=-2$ 또는 $\log_3a=4$이므로

$$a=3^{-2}=\frac{1}{9} \text{ 또는 } a=3^4=81$$

(2) 주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하고 판별식을 $D$라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-\log_3a)^2-2(\log_3a+4)\ge0$에서

$$(\log_3a)^2-2\log_3a-8\ge0$$

$\log_3a=t$로 놓으면

$$t^2-2t-8\ge0,\quad (t+2)(t-4)\ge0$$

$$\therefore t\le-2 \text{ 또는 } t\ge4$$

따라서 $\log_3a\le-2$ 또는 $\log_3a\ge4$이므로

$$\log_3a\le\log_3\frac{1}{9} \text{ 또는 } \log_3a\ge\log_381$$

밑이 3이고 $3>1$이므로

$$a\le\frac{1}{9} \text{ 또는 } a\ge81$$

이때 진수의 조건에서 $a>0$이므로

$$0<a\le\frac{1}{9} \text{ 또는 } a\ge81 \quad\cdots\cdots \text{㉠}$$

(ii) $\alpha+\beta=2\log_3a<0$에서

$$\log_3a<0 \quad \therefore \log_3a<\log_31$$

밑이 3이고 $3>1$이므로 $a<1$

이때 진수의 조건에서 $a>0$이므로

$$0<a<1 \quad\cdots\cdots \text{㉡}$$

(iii) $\alpha\beta=2(\log_3a+4)>0$에서

$$\log_3a+4>0,\quad \log_3a>-4$$

$$\therefore \log_3a>\log_3\frac{1}{81}$$

밑이 3이고 $3>1$이므로 $a>\frac{1}{81}$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$$\frac{1}{81}<a\le\frac{1}{9}$$

답 (1) $a=\frac{1}{9}$ 또는 $a=81$ (2) $\frac{1}{81}<a\le\frac{1}{9}$

라이트 UP

**이차방정식의 실근의 부호**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D$라 하면

① 두 근이 모두 양 $\Longleftrightarrow D\ge0,\ -\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{a}>0$

② 두 근이 모두 음 $\Longleftrightarrow D\ge0,\ -\frac{b}{a}<0,\ \frac{c}{a}>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\Longleftrightarrow \frac{c}{a}<0$

**9** 주어진 이차부등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2+2(\log a-4)x+2\log a=0$의 판별식을 $D$라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(\log a-4)^2-2\log a<0$$

$$\therefore (\log a)^2-10\log a+16<0$$

$\log a=t$로 놓으면

$$t^2-10t+16<0,\quad (t-2)(t-8)<0$$

$$\therefore 2<t<8$$

따라서 $2<\log a<8$이므로

$$\log10^2<\log a<\log10^8$$

밑이 10이고 $10>1$이므로

$$10^2<a<10^8$$

답 $10^2<a<10^8$

라이트 UP

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하려면

$a>0$, $b^2-4ac<0$

**10** $x$년 후의 중고차의 가격은

$$300\times\left(1-\frac{20}{100}\right)^x=300\times\left(\frac{8}{10}\right)^x(\text{만 원})$$

중고차의 가격이 30만 원이 되어야 하므로

$$300\times\left(\frac{8}{10}\right)^x=30$$

$$\therefore \left(\frac{8}{10}\right)^x=\frac{1}{10}$$

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$x(\log 8-\log 10)=\log\frac{1}{10}$$

$$x(3\log 2-1)=-1$$

$$\therefore x=\frac{-1}{3\log 2-1}=\frac{-1}{3\times 0.3-1}=10$$

따라서 30만 원이 되는 해는 올해로부터 10년 후이다. 답 10년

**11** 올해의 연구비를 $a$원이라 하면 $n$년 후의 연구비는

$(1+0.1)^n a=1.1^n a$(원)

연구비가 $a$원의 3배를 초과해야 하므로

$1.1^n a>3a$

$a>0$이므로 양변을 $a$로 나누면

$1.1^n>3$

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 1.1^n>\log 3,\qquad n\log 1.1>\log 3$

$$\therefore n>\frac{\log 3}{\log 1.1}=\frac{0.48}{0.04}=12$$

따라서 13년 후에 연구비가 처음으로 올해 연구비의 3배를 초과하게 되므로

$n=13$ 답 13

**12** 평균 해수면에서의 높이가 9960 m, 즉 9.96 km 이상이므로

$h\geq 9.96$

즉 $-3.32\log P\geq 9.96$에서

$\log P\leq -3,\qquad \log P\leq\log\frac{1}{1000}$

밑이 10이고 $10>1$이므로

$$P\leq\frac{1}{1000}$$

따라서 기압의 범위는 $\frac{1}{1000}$기압 이하이다.

답 $\frac{1}{1000}$기압 이하

## 중단원 연습 문제

본책 83~86쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** $x=4$ | **02** $\sqrt{2}$ | **03** ② | **04** 13 | **05** ⑤ |
| **06** $\frac{4}{5}$ | **07** $C<B<A$ | **08** ② | **09** 4 | |
| **10** ③ | **11** ② | **12** ③ | **13** $x=\frac{1}{6}$ | **14** ⑤ |
| **15** 81 | **16** ① | **17** 7 | **18** ② | **19** ① |
| **20** 3 | **21** ② | **22** $\frac{99}{8}$분 | **23** ③ | |
| **24** A(1, 3), B(3, 1) | **25** 1 | | **26** ④ | **27** ② |
| **28** 3 | | | | |

**01** 전략 주어진 함수를 변형하여 $x$를 $y$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y=\frac{1}{4}\cdot 5^{x-1}+4$로 놓으면

$y-4=\frac{1}{4}\cdot 5^{x-1},\qquad y-4=\frac{1}{20}\cdot 5^x$

$\therefore 5^x=20(y-4)$

로그의 정의에 의하여 $\quad x=\log_5 20(y-4)$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 역함수는

$y=\log_5 20(x-4)=\log_5(x-4)+\log_5 20$

즉 $g(x)=\log_5(x-4)+\log_5 20$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 $\log_5 20$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 구하는 점근선의 방정식은 $\quad x=4$ 답 $x=4$

다른 풀이 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\frac{1}{4}\cdot 5^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은

$y=4$

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=4$

**02** 전략 주어진 함수와 그 역함수의 그래프의 교점은 주어진 함수의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같음을 이용한다.

풀이 함수 $y=\log_a x+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\log_a x+b$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이때 두 교점의 $x$좌표가 2, 4이므로 $y=\log_a x+b$의 그래프는 두 점 (2, 2), (4, 4)를 지난다. 즉

$2=\log_a 2+b$ ······ ㉠

$4=\log_a 4+b$ ······ ㉡ ⋯ ❶

㉡−㉠을 하면 $\quad 2=\log_a 2,\qquad a^2=2$

$\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>1)$

$a=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$2=\log_{\sqrt{2}}2+b$

$2=2+b \quad \therefore b=0$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=\sqrt{2}$ ⋯ ❸

답 $\sqrt{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a$, $b$에 대한 연립방정식을 세울 수 있다. | 40% |
| ❷ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**03** 전략 □ABCD가 한 변의 길이가 2인 정사각형이므로 점 A의 $y$좌표가 2임을 이용한다.

풀이 점 A의 좌표를 $(t, \log_2 t)$라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 $\overline{AB}=2$에서

$\log_2 t=2 \quad \therefore t=2^2=4$

따라서 $A(4, 2)$이므로 $\quad D(6, 2)$

즉 $a=6$, $b=2$이므로 $\quad ab=12$

답 ②

**04** 전략 $y=\log_a(x-m)+n$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=m$임을 이용한다.

풀이 점근선의 방정식이 $x=5$이므로 $\quad a=5$

따라서 $f(x)=\log_6(x-5)+b$이므로 $f(11)=9$에서

$\log_6 6+b=9, \quad 1+b=9 \quad \therefore b=8$

$\therefore a+b=13$

답 13

**05** 전략 함수 $y=2^x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\log_2 x$임을 이용한다.

풀이 ① $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 것이다.

② $y=2^x+3$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\log_2\frac{1}{x}=\log_2 x^{-1}=-\log_2 x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이다.

④ $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{2^{-1}}(x-1)=-\log_2(x-1)$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 직선 $y=x$, $x$축에 대하여 차례대로 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\log_2\sqrt{x}=\log_2 x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 포갤 수 없다.

답 ⑤

**06** 전략 대칭이동과 평행이동의 순서에 유의한다.

풀이 $y=\log_2 10x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_2 10x-3, \quad y=\log_2 10x-\log_2 8$

$\therefore y=\log_2\frac{5}{4}x$

$y=\log_2\frac{5}{4}x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_2\frac{5}{4}x, \quad y=-\log_2\frac{5x}{4} \quad \therefore y=\log_2\frac{4}{5x}$

$\therefore a=\frac{4}{5}$

답 $\frac{4}{5}$

**07** 전략 $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$에서 $1<\log_{\frac{1}{2}}x<2$임을 이용하여 $A$, $B$, $C$의 대소 관계를 파악한다.

풀이 $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$의 각 변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

$\therefore 1<\log_{\frac{1}{2}}x<2$ ⋯ ❶

(i) $A-B=\log_{\frac{1}{2}}x^2-(\log_{\frac{1}{2}}x)^2=2\log_{\frac{1}{2}}x-(\log_{\frac{1}{2}}x)^2$

$=\log_{\frac{1}{2}}x(2-\log_{\frac{1}{2}}x)>0$

$\therefore A>B$

또 $B>0$이므로 $\quad A>B>0$ ⋯ ❷

(ii) $1<\log_{\frac{1}{2}}x<2$이므로 각 변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}}2<\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{2}}x)<\log_{\frac{1}{2}}1$

$\therefore -1<\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{2}}x)<0$

$\therefore -1<C<0$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 $\quad C<B<A$ ⋯ ❹

답 $C<B<A$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\log_{\frac{1}{2}}x$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $A>B>0$임을 알 수 있다. | 30% |
| ❸ $-1<C<0$임을 알 수 있다. | 30% |
| ❹ $A$, $B$, $C$의 대소를 비교할 수 있다. | 10% |

**08** 전략 주어진 최솟값을 이용하여 $k$의 값을 구한다.

풀이 함수 $y=\log_3(x^2-4x+k)$에서 밑이 3이고 $3>1$이므로 $x^2-4x+k$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.

$f(x)=x^2-4x+k$로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2+k-4$

즉 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $k-4$를 갖는다.

따라서 $y=\log_3(x^2-4x+k)=\log_3 f(x)$는 $f(x)=k-4$일 때 최솟값 2를 가지므로

$\log_3(k-4)=2,\quad k-4=3^2=9\quad \therefore k=13$

따라서 $f(x)=x^2-4x+13$에서

$f(0)=13,\ f(3)=10$

이므로 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 13을 갖는다.

즉 $y=\log_3 f(x)$는 $f(x)=13$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_3 13$ 답 ②

**09** 전략 $\log_2 x=t$로 치환하여 주어진 함수를 $t$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y=2(\log_2 x)^2+a\log_{\frac{1}{2}}x+b$에서

$y=2(\log_2 x)^2-a\log_2 x+b$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$y=2t^2-at+b$ …… ㉠ ⋯ ❶

주어진 함수가 $x=\frac{1}{8}$, 즉 $t=\log_2\frac{1}{8}=-3$일 때 최솟값 $-2$를 가지므로

$y=2(t+3)^2-2=2t^2+12t+16$ …… ㉡

㉠, ㉡이 서로 일치하므로

$a=-12,\ b=16$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=4$ ⋯ ❸

답 4

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 주어진 함수를 $t$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**10** 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.

풀이 곡선 $y=2^x+5$의 점근선의 방정식은 $y=5$

직선 $y=5$와 곡선 $y=\log_3 x+3$의 교점의 $x$좌표는

$5=\log_3 x+3,\quad \log_3 x=2\quad \therefore x=3^2=9$ 답 ③

**11** 전략 로그의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구한다.

풀이 진수의 조건에서 $6+x>0$, $6-x>0$이므로

$-6<x<6$ …… ㉠

$\log_5(6+x)+\log_5(6-x)=2$에서

$\log_5(6+x)(6-x)=2$

$(6+x)(6-x)=5^2$

$36-x^2=25,\quad x^2=11$

$\therefore x=-\sqrt{11}$ 또는 $x=\sqrt{11}$

$x=-\sqrt{11}$, $x=\sqrt{11}$은 모두 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 근이다.

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$-\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}=-11$ 답 ②

**12** 전략 $\log_3 x=X$, $\log_5 y=Y$로 치환하여 $X$, $Y$에 대한 연립방정식으로 나타낸다.

풀이 $\begin{cases}\log_3 x^3-\log_5 y=4\\ \log_3 x+\log_5 y^2=-1\end{cases}$에서 $\begin{cases}3\log_3 x-\log_5 y=4\\ \log_3 x+2\log_5 y=-1\end{cases}$

$\log_3 x=X$, $\log_5 y=Y$로 놓으면

$\begin{cases}3X-Y=4\\ X+2Y=-1\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X=1,\ Y=-1$

즉 $\log_3 x=1$, $\log_5 y=-1$이므로 $x=3,\ y=\frac{1}{5}$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=\frac{1}{5}$이므로 $\frac{\alpha}{\beta}=15$ 답 ③

**13** 전략 지수에 로그가 있는 방정식은 양변에 로그를 취하여 푼다.

풀이 $(2x)^{\log 2}-(3x)^{\log 3}=0$, 즉 $(2x)^{\log 2}=(3x)^{\log 3}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log(2x)^{\log 2}=\log(3x)^{\log 3}$

$\log 2\cdot\log 2x=\log 3\cdot\log 3x$

$\log 2(\log 2+\log x)=\log 3(\log 3+\log x)$

$(\log 2)^2+\log 2\cdot\log x=(\log 3)^2+\log 3\cdot\log x$

$(\log 2-\log 3)\log x=(\log 3)^2-(\log 2)^2$

$\therefore \log x=\frac{-(\log 2+\log 3)(\log 2-\log 3)}{\log 2-\log 3}$

$=-(\log 2+\log 3)$

$=-\log 6=\log\frac{1}{6}$

$\therefore x=\frac{1}{6}$ 답 $x=\frac{1}{6}$

**14** 전략 밑이 서로 다른 지수방정식은 양변에 로그를 취하여 푼다.

풀이 $4^{x-3}=\frac{1}{25^x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 4^{x-3}=\log\frac{1}{25^x}$

$(x-3)\log 4=-\log 25^x$

$x\log 4-3\log 4=-x\log 25$

$x(\log 4+\log 25)=3\log 4$

$x\log 100=3\log 4,\quad 2x=3\log 4$

$\therefore x=\frac{3}{2}\log 4=\log(2^2)^{\frac{3}{2}}=\log 8$

$\therefore k=8$ 답 ⑤

**15** 전략 $\log_3 x=t$로 치환하여 주어진 식을 $t$에 대한 방정식으로 나타낸다.

풀이 $(\log_3 x)^2-8\log_3\sqrt{x}+3=0$에서

$(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad t^2-4t+3=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 주어진 방정식의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=4,\qquad \log_3\alpha\beta=4$

$\therefore\ \alpha\beta=3^4=81$

답 81

**16** 전략 밑의 크기에 주의하여 진수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 진수의 조건에서 $x-1>0$, $\frac{1}{2}x+k>0$이고 $k$는 자연수이므로

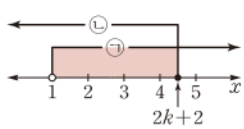
$x>1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\log_5(x-1)\le\log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$에서 밑이 5이고 $5>1$이므로

$x-1\le\frac{1}{2}x+k,\qquad 2x-2\le x+2k$

$\therefore\ x\le 2k+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 $x$의 개수가 3이므로 오른쪽 그림에서




$4\le 2k+2<5$

$2\le 2k<3\qquad\therefore\ 1\le k<\frac{3}{2}$

따라서 구하는 자연수 $k$의 값은 1이다.

답 ①

**17** 전략 로그의 밑을 같게 한 후 진수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 진수의 조건에서 $x>0$, $8-x>0$이므로

$0<x<8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠ $\quad\cdots$ ❶

$\log_2 x>\log_4(8-x)+1$에서

$\log_2 x>\frac{1}{2}\log_2(8-x)+1$

$2\log_2 x>\log_2(8-x)+2$

$\therefore\ \log_2 x^2>\log_2 4(8-x)$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$x^2>4(8-x),\qquad x^2+4x-32>0$

$(x+8)(x-4)>0$

$\therefore\ x<-8$ 또는 $x>4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$4<x<8$ $\quad\cdots$ ❷

따라서 정수 $x$의 최댓값은 7이다. $\quad\cdots$ ❸

답 7

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 진수의 조건을 이용하여 $x$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ 부등식의 해를 구할 수 있다. | 70% |
| ❸ 정수 $x$의 최댓값을 구할 수 있다. | 10% |

**18** 전략 밑의 크기에 주의하여 진수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 진수의 조건에서 $|x-1|>0$이므로

$x\ne1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2\log_2|x-1|\le1-\log_2\frac{1}{2}$에서

$2\log_2|x-1|\le2,\qquad \log_2|x-1|\le1$

$\therefore\ \log_2|x-1|\le\log_2 2$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $\qquad |x-1|\le2$

$-2\le x-1\le2\qquad\therefore\ -1\le x\le3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1\le x<1$ 또는 $1<x\le3$

따라서 정수 $x$는 $-1$, 0, 2, 3의 4개이다.

답 ②

**19** 전략 $\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 치환하여 주어진 식을 $t$에 대한 부등식으로 나타낸다.

풀이 진수의 조건에서 $3x>0$, $27x>0$이므로

$x>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}3x\cdot\log_{\frac{1}{3}}27x\le8$에서

$(\log_{\frac{1}{3}}3+\log_{\frac{1}{3}}x)(\log_{\frac{1}{3}}27+\log_{\frac{1}{3}}x)\le8$

$(\log_{\frac{1}{3}}x-1)(\log_{\frac{1}{3}}x-3)\le8$

$\therefore\ (\log_{\frac{1}{3}}x)^2-4\log_{\frac{1}{3}}x-5\le0$

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 $\qquad t^2-4t-5\le0$

$(t+1)(t-5)\le0\qquad\therefore\ -1\le t\le5$

따라서 $-1\le\log_{\frac{1}{3}}x\le5$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}3\le\log_{\frac{1}{3}}x\le\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{243}$

밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$\frac{1}{243}\le x\le3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\qquad\frac{1}{243}\le x\le3$

따라서 정수 $x$는 1, 2, 3의 3개이다.

답 ①

**20** 전략 $\log_2 x=t$로 치환하여 주어진 식을 $t$에 대한 부등식으로 나타낸다.

풀이 $(\log_2 x)^2+2\log_2 a\cdot\log_4 8x^2-\log_2 2a+1>0$에서

$(\log_2 x)^2+2\log_2 a\cdot\log_{2^2}8x^2-\log_2 2a+1>0$

$(\log_2 x)^2+\log_2 a\cdot\log_2 8x^2-\log_2 2a+1>0$

$(\log_2 x)^2+\log_2 a(3+\log_2 x^2)-(1+\log_2 a)+1>0$

$(\log_2 x)^2+\log_2 a(3+2\log_2 x)-\log_2 a>0$

$\therefore\ (\log_2 x)^2+2\log_2 a\cdot\log_2 x+2\log_2 a>0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+2t\log_2 a+2\log_2 a>0$ $\quad\cdots$ ❶

주어진 부등식이 모든 양수 $x$에 대하여 성립하므로 앞의 부등식은 모든 실수 $t$에 대하여 성립한다.

이차방정식 $t^2+2t\log_2 a+2\log_2 a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(\log_2 a)^2-2\log_2 a<0$$

$\log_2 a=k$로 놓으면 $\quad k^2-2k<0$

$k(k-2)<0 \quad \therefore 0<k<2$

즉 $0<\log_2 a<2$에서 $\quad \log_2 1<\log_2 a<\log_2 4$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $\quad 1<a<4$ ⋯ ❷

따라서 자연수 $a$의 최댓값은 3이다. ⋯ ❸

답 3

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 주어진 부등식을 $t$에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❷ $a$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ 자연수 $a$의 최댓값을 구할 수 있다. | 10% |

**21** 전략 이차함수의 그래프의 성질을 이용하여 $\log_2 a$에 대한 부등식을 세운다.

풀이 $f(x)=x^2+2(\log_2 a+1)x+\log_2 a$라 하고 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(\log_2 a+1)^2-\log_2 a\geq 0$에서

$(\log_2 a)^2+\log_2 a+1\geq 0$

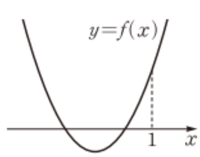
$\log_2 a=t$로 놓으면

$$t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

이므로 위의 부등식은 항상 성립한다.

이때 진수의 조건에서 $\quad a>0 \quad$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $f(1)>0$에서




$1+2(\log_2 a+1)+\log_2 a>0$

$3\log_2 a+3>0$

$\log_2 a>-1$

$\therefore \log_2 a>\log_2 \frac{1}{2}$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $\quad a>\frac{1}{2} \quad$ ⋯⋯ ㉡

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\log_2 a-1$이므로

$-\log_2 a-1<1, \quad \log_2 a>-2$

$\therefore \log_2 a>\log_2 \frac{1}{4}$

밑이 2이고 $2>1$이므로 $\quad a>\frac{1}{4} \quad$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면 $\quad a>\frac{1}{2}$

답 ②

**22** 전략 $f\left(\frac{9}{8}\right)=275$임을 이용하여 먼저 $k$의 값을 구한다.

풀이 초기 온도가 25 °C이므로

$f(x)=25+k\log(8x+1)$

$f\left(\frac{9}{8}\right)=275$이므로

$$25+k\log\left(8\cdot\frac{9}{8}+1\right)=275$$

$\therefore k=250$

화재가 발생한 지 $a$분 후 건물의 온도가 525 °C가 된다고 하면 $f(a)=525$이므로

$25+250\log(8a+1)=525$

$\log(8a+1)=2, \quad 8a+1=10^2=100$

$\therefore a=\frac{99}{8}$

따라서 건물의 온도가 525 °C가 되는 데 걸리는 시간은 $\frac{99}{8}$분이다.

답 $\frac{99}{8}$분

**23** 전략 $\overline{PQ}$가 원 $C$의 지름이므로 $\overline{PQ}$의 중점이 원의 중심임을 이용한다.

풀이 $\overline{PQ}$가 원 $C$의 지름이므로 $\overline{PQ}$의 중점은 원의 중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이다.

두 점 P, Q의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta(\alpha>\beta)$라 하면

$\mathrm{P}(\alpha, \log_a \alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta, \log_a \beta)$

이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{5}{4}$에서

$\alpha+\beta=\frac{5}{2}$

$\log_a \alpha+\log_a \beta=0$에서 $\quad \log_a \alpha\beta=0$

$\therefore \alpha\beta=1$

$\alpha$, $\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식을 $t^2-\frac{5}{2}t+1=0$이라 하면

$2t^2-5t+2=0, \quad (2t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

$\therefore \alpha=2, \beta=\frac{1}{2} \ (\because \alpha>\beta)$

따라서 점 P의 $x$좌표가 2이므로 점 P의 $y$좌표는

$\left(2-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$에서

$y^2=\frac{1}{4} \quad \therefore y=\frac{1}{2} \ (\because y>0)$

이때 점 $\mathrm{P}\left(2, \frac{1}{2}\right)$은 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

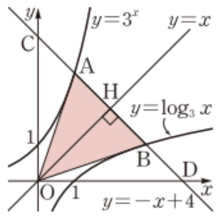
$\frac{1}{2}=\log_a 2, \quad 2=a^{\frac{1}{2}} \quad \therefore a=4$

답 ③

04 로그함수

**24** 전략 함수 $f(x)$가 함수 $g(x)$의 역함수이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서 $\mathrm{C}(0,\ 4)$, $\mathrm{D}(4,\ 0)$이므로




$$\triangle\mathrm{OCD}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$$

한편 함수 $y=\log_3 x$는 함수 $y=3^x$의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 또 두 직선 $y=x$, $y=-x+4$는 서로 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 직선 $y=x$, $y=-x+4$의 교점을 H라 하면

$$\triangle\mathrm{OCH}=\triangle\mathrm{ODH}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{OCD}=\frac{1}{2}\cdot8=4,$$

$$\triangle\mathrm{OAH}=\triangle\mathrm{OBH}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot4=2$$

이므로

$$\triangle\mathrm{OAC}=\triangle\mathrm{OCH}-\triangle\mathrm{OAH}=4-2=2$$

$\mathrm{A}(a,\ b)$라 하면 $\triangle\mathrm{OAC}=2$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot a=2 \qquad \therefore a=1$$

즉 점 $\mathrm{A}(1,\ b)$는 직선 $y=-x+4$ 위의 점이므로

$$b=-1+4=3 \qquad \therefore \mathrm{A}(1,\ 3)$$

점 B는 점 A와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{B}(3,\ 1)$ 답 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$

**25** 전략 $\log x=X$로 치환하여 $X$에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 구한다.

풀이 $(\log x+\log2)(\log x+\log4)=-(\log k)^2$에서 $\log x=X$로 놓으면

$$(X+\log2)(X+2\log2)=-(\log k)^2$$

$$\therefore X^2+3\log2\cdot X+2(\log2)^2+(\log k)^2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $X$에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$$D=(3\log2)^2-4\{2(\log2)^2+(\log k)^2\}>0$$

$$9(\log2)^2-8(\log2)^2-4(\log k)^2>0$$

$$\therefore 4(\log k)^2-(\log2)^2<0$$

$\log k=t$로 놓으면 $\quad 4t^2-(\log2)^2<0$

$$(2t+\log2)(2t-\log2)<0$$

$$\therefore -\frac{1}{2}\log2<t<\frac{1}{2}\log2$$

즉 $\log2^{-\frac{1}{2}}<\log k<\log2^{\frac{1}{2}}$에서 밑이 10이고 $10>1$이므로

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<k<\sqrt{2}$$

따라서 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta=\sqrt{2}$이므로

$\alpha\beta=1$ 답 1

**26** 전략 먼저 진수의 조건을 이용하여 $x$의 값의 범위를 구한다.

풀이 진수의 조건에서 $|x|>0$, $x^2>0$이므로

$$x\neq0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$4\log_3|x|-\log_3 x^2<4$에서

$$4\log_3|x|-2\log_3|x|<4$$

$$2\log_3|x|<4, \qquad \log_3|x|<2$$

$$\therefore \log_3|x|<\log_3 9$$

밑이 3이고 $3>1$이므로 $\quad |x|<9$

$$\therefore -9<x<9 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 정수 $x$는

$$-8,\ -7,\ \cdots,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ 8$$

의 16개이다. 답 ④

**27** 전략 주어진 부등식의 양변에 밑이 2인 로그를 취한다.

풀이 진수의 조건에서 $\quad k>0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$2^{x^2+3\log_2 k}\geq\frac{k^{2x}}{16}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 2^{x^2+3\log_2 k}\geq\log_2\frac{k^{2x}}{16}$$

$$(x^2+3\log_2 k)\log_2 2\geq\log_2 k^{2x}-\log_2 16$$

$$x^2+3\log_2 k\geq2x\log_2 k-4$$

$$\therefore x^2-2x\log_2 k+3\log_2 k+4\geq0$$

위의 부등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2-2x\log_2 k+3\log_2 k+4=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-\log_2 k)^2-(3\log_2 k+4)\leq0$$

$$\therefore (\log_2 k)^2-3\log_2 k-4\leq0$$

$\log_2 k=t$로 놓으면

$$t^2-3t-4\leq0, \qquad (t+1)(t-4)\leq0$$

$$\therefore -1\leq t\leq4$$

따라서 $-1\leq\log_2 k\leq4$이므로

$$\log_2\frac{1}{2}\leq\log_2 k\leq\log_2 16$$

밑이 2이고 $2>1$이므로

$$\frac{1}{2}\leq k\leq16 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad \frac{1}{2}\leq k\leq16$

즉 $M=16$, $m=\frac{1}{2}$이므로

$Mm=8$ 답 ②

**28** 전략 처음 빛의 양을 $A$라 하면 투과율이 $a$ %인 유리를 $n$장 통과한 빛의 양은 $\left(\frac{a}{100}\right)^n A$임을 이용한다.

풀이 처음 빛의 양을 $A$라 하면 투과율이 90 %인 유리 P를 20장 통과한 빛의 양은

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{20} A \quad \cdots\cdots ㉠$$

투과율이 60 %인 유리 Q를 $n$장 통과한 빛의 양은

$$\left(\frac{6}{10}\right)^{n} A \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠이 ㉡보다 적어야 하므로

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{20} A < \left(\frac{6}{10}\right)^{n} A,\ 즉 \left(\frac{6}{10}\right)^{n} > \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log\left(\frac{6}{10}\right)^{n} > \log\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

$$n(\log 6-1) > 20(\log 9-1)$$

$$\therefore n(\log 2+\log 3-1) > 20(2\log 3-1)$$

$\log 2+\log 3-1<0$이므로

$$n < \frac{20(2\log 3-1)}{\log 2+\log 3-1} = \frac{20(2\times 0.48-1)}{0.30+0.48-1}$$

$$= \frac{-0.8}{-0.22} = 3.636\cdots$$

따라서 자연수 $n$의 최댓값은 3이다. 답 3

Ⅲ. 삼각함수

# 05 삼각함수

## 01 일반각

### 확인

본책 89쪽

**1** (1) $680° = 360° \times 1 + 320°$이므로 일반각은

$360° \times n + 320°$

(2) $-520° = 360° \times (-2) + 200°$이므로 일반각은

$360° \times n + 200°$

답 풀이 참조

**2** (1) $410° = 360° \times 1 + 50°$

따라서 $410°$는 제1사분면의 각이다.

(2) $-870° = 360° \times (-3) + 210°$

따라서 $-870°$는 제3사분면의 각이다.

답 (1) 제1사분면 (2) 제3사분면

### 유제

본책 91~92쪽

**1** $\theta$가 제1사분면의 각이므로

$360° \times n < \theta < 360° \times n + 90°$ ($n$은 정수)

$\therefore 360° \times \frac{n}{2} < \frac{\theta}{2} < 360° \times \frac{n}{2} + 45°$

(i) $n=2k$ ($k$는 정수)일 때,

$360° \times k < \frac{\theta}{2} < 360° \times k + 45°$

이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ ($k$는 정수)일 때,

$360° \times k + 180° < \frac{\theta}{2} < 360° \times k + 225°$

이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

답 제1사분면 또는 제3사분면

**2** $2\theta$가 제3사분면의 각이므로

$360° \times n + 180° < 2\theta < 360° \times n + 270°$ ($n$은 정수)

$\therefore 360° \times \frac{n}{2} + 90° < \theta < 360° \times \frac{n}{2} + 135°$

(i) $n=2k$ ($k$는 정수)일 때,

$360° \times k + 90° < \theta < 360° \times k + 135°$

이므로 $\theta$는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ ($k$는 정수)일 때,

$$360°\times k+270°<\theta<360°\times k+315°$$

이므로 $\theta$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\theta$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 제2사분면 또는 제4사분면

**3** 각 $\theta$를 나타내는 동경과 각 $5\theta$를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$5\theta-\theta=360°\times n+180°$ ($n$은 정수)

$4\theta=360°\times n+180°$

$\therefore\ \theta=90°\times n+45°$

이때 $270°<\theta<360°$이므로

$270°<90°\times n+45°<360°$

$225°<90°\times n<315°$ $\quad\therefore\ \dfrac{5}{2}<n<\dfrac{7}{2}$

$n$은 정수이므로 $\quad n=3$

$\therefore\ \theta=90°\times 3+45°=315°$ 답 $315°$

**4** 각 $\theta$를 나타내는 동경과 각 $8\theta$를 나타내는 동경이 $x$축에 대하여 대칭이므로

$\theta+8\theta=360°\times n$ ($n$은 정수)

$9\theta=360°\times n$

$\therefore\ \theta=40°\times n$

이때 $0°<\theta<90°$이므로

$0°<40°\times n<90°$ $\quad\therefore\ 0<n<\dfrac{9}{4}$

$n$은 정수이므로 $\quad n=1$ 또는 $n=2$

$\therefore\ \theta=40°\times 1=40°$ 또는 $\theta=40°\times 2=80°$

답 $40°$ 또는 $80°$

**5** 각 $\theta$를 나타내는 동경과 각 $4\theta$를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=360°\times n+90°$ ($n$은 정수)

$5\theta=360°\times n+90°$

$\therefore\ \theta=72°\times n+18°$

이때 $180°<\theta<270°$이므로

$180°<72°\times n+18°<270°$

$162°<72°\times n<252°$ $\quad\therefore\ \dfrac{9}{4}<n<\dfrac{7}{2}$

$n$은 정수이므로 $\quad n=3$

$\therefore\ \theta=72°\times 3+18°=234°$ 답 $234°$

## 02 호도법

### 확인

본책 93~94쪽

**1** (1) $150°=150\cdot\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{5}{6}\pi$

(2) $-315°=-315\cdot\dfrac{\pi}{180}=-\dfrac{7}{4}\pi$

(3) $\dfrac{8}{3}\pi=\dfrac{8}{3}\pi\cdot\dfrac{180°}{\pi}=480°$

(4) $-\dfrac{11}{6}\pi=-\dfrac{11}{6}\pi\cdot\dfrac{180°}{\pi}=-330°$

답 (1) $\dfrac{5}{6}\pi$ (2) $-\dfrac{7}{4}\pi$ (3) $480°$ (4) $-330°$

**2** (1) $0\le\dfrac{2}{3}\pi<2\pi$이므로 $\quad 2n\pi+\dfrac{2}{3}\pi$

(2) $\dfrac{13}{6}\pi=2\pi+\dfrac{\pi}{6}$이므로 $\quad 2n\pi+\dfrac{\pi}{6}$

답 (1) $2n\pi+\dfrac{2}{3}\pi$ (2) $2n\pi+\dfrac{\pi}{6}$

**3** (1) $3\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$

(2) $\dfrac{1}{2}\cdot3^2\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{4}\pi$

답 (1) $\dfrac{\pi}{2}$ (2) $\dfrac{3}{4}\pi$

### 유제

본책 95쪽

**1** 부채꼴의 반지름의 길이를 $r$라 하면 부채꼴의 중심각의 크기가 $\dfrac{3}{4}\pi$, 넓이가 $18\pi$이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot r^2\cdot\dfrac{3}{4}\pi=18\pi$, $\quad r^2=48$

$\therefore\ r=4\sqrt{3}$ ($\because\ r>0$)

또 부채꼴의 호의 길이를 $l$이라 하면

$l=4\sqrt{3}\cdot\dfrac{3}{4}\pi=3\sqrt{3}\pi$

답 반지름의 길이: $4\sqrt{3}$, 호의 길이: $3\sqrt{3}\pi$

**2** 부채꼴의 반지름의 길이를 $r$, 호의 길이를 $l$이라 하면 넓이가 12이므로

$\dfrac{1}{2}rl=12$ $\quad\therefore\ l=\dfrac{24}{r}$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$l+2r=\dfrac{24}{r}+2r$

이때 $\dfrac{24}{r}>0$, $2r>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{24}{r}+2r\ge 2\sqrt{\frac{24}{r}\cdot 2r}=2\cdot 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$$

(단, 등호는 $r=2\sqrt{3}$일 때 성립)

즉 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 $8\sqrt{3}$이다. 답 $8\sqrt{3}$

참고 $\frac{24}{r}+2r\ge 2\sqrt{\frac{24}{r}\cdot 2r}=8\sqrt{3}$에서 등호는 $\frac{24}{r}=2r$일 때 성립하므로 $2r^2=24$, $r^2=12$ $\therefore r=2\sqrt{3}$ ($\because r>0$)

따라서 등호는 $r=2\sqrt{3}$일 때 성립한다.

**라이트 UP**

**산술평균과 기하평균의 관계**

$a>0$, $b>0$일 때,

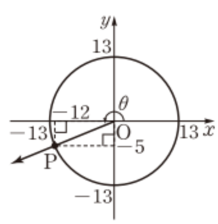
$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

## 03 삼각함수

### 확인

본책 96~97쪽

**1** 오른쪽 그림에서




$\overline{OP}=\sqrt{(-12)^2+(-5)^2}=13$

이므로

$\sin\theta=-\frac{5}{13}$, $\cos\theta=-\frac{12}{13}$,

$\tan\theta=\frac{5}{12}$

답 풀이 참조

**2** (1) $240°$는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

(2) $\frac{11}{3}\pi$는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

(3) $-580°$는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

(4) $-\frac{7}{4}\pi$는 제1사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$ 답 풀이 참조

**3** (1) $\sin\theta<0$이므로 각 $\theta$는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

$\cos\theta<0$이므로 각 $\theta$는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 각 $\theta$는 제3사분면의 각이다.

(2) $\cos\theta>0$이므로 각 $\theta$는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

$\tan\theta<0$이므로 각 $\theta$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 각 $\theta$는 제4사분면의 각이다.

(3) $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

이므로 각 $\theta$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(4) $\sin\theta\tan\theta>0$에서

$\sin\theta>0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$

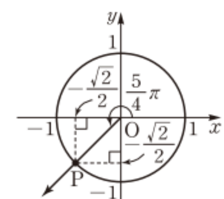
이므로 각 $\theta$는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 풀이 참조

### 유제

본책 98~99쪽

**1** $\theta=\frac{5}{4}\pi$이므로 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta$를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점 P는



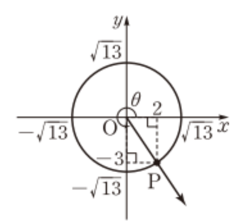

$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=0$ 답 0

**2** (1) $\theta$가 제4사분면의 각이고 $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$인 원을 그리면 각 $\theta$를 나타내는 동경과 이 원의 교점 P는



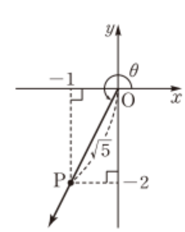

$P(2, -3)$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\tan\theta=-\frac{3}{2}$

$\therefore \sqrt{13}\sin\theta+2\tan\theta=\sqrt{13}\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-6$

(2) $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이고 $\tan\theta=2$이므로 점 P의 좌표를 $(-1, -2)$로 놓고 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



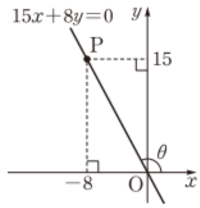

이때 $\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{5}$

답 (1) $-6$ (2) $\frac{2}{5}$

**3** 직선 $15x+8y=0$을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




이때 직선 위의 한 점 P$(-8,\ 15)$를 잡으면

$$\overline{OP}=\sqrt{(-8)^2+15^2}=17$$

이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin\theta=\frac{15}{17},\ \cos\theta=-\frac{8}{17}$$

$$\therefore\ 17(\sin\theta+\cos\theta)=17\left\{\frac{15}{17}+\left(-\frac{8}{17}\right)\right\}=7$$

답 7

**4** (i) $\sin\theta\tan\theta>0$에서

$\sin\theta>0,\ \tan\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0,\ \tan\theta<0$

$\sin\theta>0,\ \tan\theta>0$일 때, 각 $\theta$는 제1사분면의 각이다.

$\sin\theta<0,\ \tan\theta<0$일 때, 각 $\theta$는 제4사분면의 각이다.

따라서 각 $\theta$는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$에서

$\cos\theta>0,\ \tan\theta<0$ 또는 $\cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

$\cos\theta>0,\ \tan\theta<0$일 때, 각 $\theta$는 제4사분면의 각이다.

$\cos\theta<0,\ \tan\theta>0$일 때, 각 $\theta$는 제3사분면의 각이다.

따라서 각 $\theta$는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\theta$는 제4사분면의 각이다. 답 제4사분면

다른 풀이 (i) $\sin\theta>0$이면 $\cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

이를 만족시키는 각 $\theta$는 존재하지 않는다.

(ii) $\sin\theta<0$이면 $\cos\theta>0,\ \tan\theta<0$

이를 만족시키는 각 $\theta$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\theta$는 제4사분면의 각이다.

**5** $\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta}=-\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$

따라서 각 $\theta$는 제3사분면의 각이다. 답 제3사분면

라이트 UP

**음수의 제곱근의 성질**

① $a<0,\ b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $a>0,\ b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

**6** $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$이므로

$$\begin{aligned}&|\sin\theta|-\sqrt{\cos^2\theta}+\sin\theta-\cos\theta\\&=|\sin\theta|-|\cos\theta|+\sin\theta-\cos\theta\\&=\sin\theta-(-\cos\theta)+\sin\theta-\cos\theta\\&=2\sin\theta\end{aligned}$$

답 $2\sin\theta$

## 04 삼각함수 사이의 관계

### 확인

본책 100쪽

**1** $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

이때 $\theta$가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{4}{5}$$

또 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta=\dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$

답 $\sin\theta=\frac{4}{5},\ \tan\theta=-\frac{4}{3}$

**2** $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$$

답 $-\frac{3}{8}$

### 유제

본책 101~103쪽

**1** (1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$$\begin{aligned}&=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&\quad+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2\cdot1=2\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta&=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\&=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}\\&=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}\\&=\frac{1}{\cos\theta}\end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) $\frac{1}{\cos\theta}$

**2** $$\begin{aligned}&\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}+\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}\\&=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}\\&\quad+\sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}\\&=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}\\&=|\sin\theta+\cos\theta|+|\sin\theta-\cos\theta|\end{aligned}$$

이때 $0<\cos\theta<\sin\theta$이므로

$\sin\theta+\cos\theta>0,\ \sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore$ (주어진 식)

$=|\sin\theta+\cos\theta|+|\sin\theta-\cos\theta|$

$=\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta$

$=2\sin\theta$ 답 $2\sin\theta$

**3** $\dfrac{\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}=-\sqrt{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$, $\sin\theta\cos\theta\neq0$에서

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

따라서 $\theta$는 제4사분면의 각이므로

$\tan\theta<0$, $\tan\theta+\sin\theta<0$

$\therefore \sqrt{\tan^2\theta}-|\tan\theta+\sin\theta|=-\tan\theta+(\tan\theta+\sin\theta)$

$=\sin\theta$ 답 $\sin\theta$

**4** $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$에서 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{3}{4}\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+\dfrac{9}{16}\sin^2\theta=1$ $\therefore \sin^2\theta=\dfrac{16}{25}$

이때 $\theta$가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{4}{5}$

$\cos\theta=\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{3}{5}$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{7}{5}$ 답 $-\dfrac{7}{5}$

**5** $\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{2}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2}{\sin^2\theta}$

즉 $\dfrac{2}{\sin^2\theta}=20$이므로 $\sin^2\theta=\dfrac{1}{10}$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ 답 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

**6** $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=-2-\sqrt{3}$에서

$1-\tan\theta=-(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})\tan\theta$

$(1+\sqrt{3})\tan\theta=-(3+\sqrt{3})$

$\therefore \tan\theta=-\dfrac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$

즉 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=-\sqrt{3}$이므로 $\sin\theta=-\sqrt{3}\cos\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $(-\sqrt{3}\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$

$4\cos^2\theta=1$ $\therefore \cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

이때 $\theta$가 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

**7** (1) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$, $2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{11}{16}$

답 (1) $\dfrac{3}{8}$ (2) $\dfrac{11}{16}$

**8** $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\dfrac{6}{13}\right)=\dfrac{25}{13}$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$ 답 $\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$

## 중단원 연습 문제

본책 104~106쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ⑤ | 02 $3\pi$ | 03 ① | 04 ③ | 05 42 |
| 06 ③ | 07 7 | 08 ① | 09 ② | 10 $-2\tan\theta$ |
| 11 $-2$ | 12 40 | 13 $-1$ | 14 9 | 15 $-\dfrac{2}{3}$ |
| 16 제2사분면 또는 제4사분면 | | | 17 16 | 18 10 |
| 19 ① | 20 $\dfrac{4}{3}$ | | | |

**01** 전략 주어진 각을 $2n\pi+\alpha$ ($n$은 정수, $0\le\alpha<2\pi$) 꼴로 나타낸다.

풀이 ① $860^\circ=360^\circ\times2+140^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.

② $-620^\circ=360^\circ\times(-2)+100^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.

③ $\dfrac{27}{10}\pi=2\pi+\dfrac{7}{10}\pi$이므로 제2사분면의 각이다.

④ $\dfrac{11}{4}\pi=2\pi+\dfrac{3}{4}\pi$이므로 제2사분면의 각이다.

⑤ $-\dfrac{23}{12}\pi=2\pi\times(-1)+\dfrac{\pi}{12}$이므로 제1사분면의 각이다.

답 ⑤

**02** 전략 $5\theta-2\theta=2n\pi+\pi$ ($n$은 정수)임을 이용한다.

풀이 각 $2\theta$를 나타내는 동경과 각 $5\theta$를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$5\theta-2\theta=2n\pi+\pi$ ($n$은 정수)

$3\theta=(2n+1)\pi \qquad \therefore\ \theta=\dfrac{2n+1}{3}\pi$

이때 $0<\theta<2\pi$이므로 $\quad 0<\dfrac{2n+1}{3}\pi<2\pi$

$0<2n+1<6 \qquad \therefore\ -\dfrac{1}{2}<n<\dfrac{5}{2}$

$n$은 정수이므로 $\quad n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\pi$ 또는 $\theta=\dfrac{5}{3}\pi$이므로 구하는 합은

$\dfrac{\pi}{3}+\pi+\dfrac{5}{3}\pi=3\pi$

답 $3\pi$

**03** 전략 옆면을 이루는 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 부채꼴 모양의 종이의 호의 길이는 원뿔 모양의 고깔모자의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로 부채꼴 모양의 종이의 호의 길이는

$2\pi\cdot 8=16\pi\,(\text{cm})$

따라서 부채꼴 모양의 종이의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot 16\pi=160\pi\,(\text{cm}^2)$

답 ①

**04** 전략 반지름의 길이가 $r$, 중심각의 크기가 $\theta$인 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{2}r^2\theta$임을 이용한다.

풀이 부채꼴 AOB의 반지름의 길이와 호의 길이가 같으므로 부채꼴 AOB의 중심각의 크기는 1(라디안)이다.

$\overline{\text{BH}}=2$이므로 $\sin 1=\dfrac{\overline{\text{BH}}}{\overline{\text{OB}}}$에서

$\overline{\text{OB}}=\dfrac{\overline{\text{BH}}}{\sin 1}=\dfrac{2}{\sin 1}$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{\sin 1}\right)^2\cdot 1=\dfrac{2}{\sin^2 1}$

답 ③

**05** 전략 반지름의 길이가 $r$, 호의 길이가 $l$인 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{2}rl$임을 이용한다.

풀이 반지름의 길이가 $r$이고 둘레의 길이가 24인 부채꼴의 호의 길이는 $24-2r$이므로 부채꼴의 넓이를 $S$라 하면

$S=\dfrac{1}{2}r(24-2r)=-r^2+12r$

$\quad=-(r-6)^2+36$

따라서 부채꼴의 넓이는 $r=6$일 때 최댓값 36을 가지므로

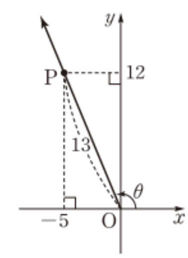
$a=6,\ b=36$

$\therefore\ a+b=42$

답 42

**06** 전략 동경을 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




이때 $\overline{\text{OP}}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\dfrac{12}{13},\ \cos\theta=-\dfrac{5}{13},$

$\tan\theta=-\dfrac{12}{5}$

$\therefore\ 13(\sin\theta-\cos\theta)+5\tan\theta$

$=13\left\{\dfrac{12}{13}-\left(-\dfrac{5}{13}\right)\right\}+5\cdot\left(-\dfrac{12}{5}\right)$

$=5$

답 ③

**07** 전략 점 P의 좌표를 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구한다.

풀이 제3사분면 위의 점 P의 $x$좌표를 $-a\ (a>0)$라 하면

$\text{P}(-a,\ -3a)$ ❶

이때 $\overline{\text{OP}}=\sqrt{(-a)^2+(-3a)^2}=\sqrt{10}a$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\dfrac{-3a}{\sqrt{10}a}=-\dfrac{3}{\sqrt{10}},\ \cos\theta=\dfrac{-a}{\sqrt{10}a}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}},$

$\tan\theta=\dfrac{-3a}{-a}=3$ ❷

$\therefore\ 10(\sin\theta-\cos\theta)^2+\tan\theta$

$=10\left\{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\}^2+3$

$=7$ ❸

답 7

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 점 P의 좌표를 $a$로 나타낼 수 있다. | 20% |
| ❷ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**08** 전략 각각의 조건을 만족시키는 각 $\theta$가 제몇 사분면의 각인지 구한다.

풀이 (i) $\sin\theta\tan\theta>0$에서

$\sin\theta>0,\ \tan\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0,\ \tan\theta<0$

$\sin\theta>0$, $\tan\theta>0$일 때, 각 $\theta$는 제1사분면의 각이다.

$\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$일 때, 각 $\theta$는 제4사분면의 각이다.

따라서 각 $\theta$는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta>0$에서

$\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

$\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$일 때, 각 $\theta$는 제1사분면의 각이다.

$\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$일 때, 각 $\theta$는 제2사분면의 각이다.

따라서 각 $\theta$는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\theta$는 제1사분면의 각이다.

$-\frac{5}{3}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{\pi}{3}$이므로 $\theta$의 값이 될 수 있는 것은

① $-\frac{5}{3}\pi$이다. 답 ①

참고 ② $-\frac{5}{4}\pi$는 제2사분면의 각이다.

③ $-\frac{\pi}{6}$는 제4사분면의 각이다.

④ $\frac{2}{3}\pi$는 제2사분면의 각이다.

⑤ $\frac{5}{4}\pi$는 제3사분면의 각이다.

**09** 전략 주어진 조건을 만족시키는 각 $\theta$가 제몇 사분면의 각인지 구한다.

풀이 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$일 때, 각 $\theta$는 제3사분면의 각이다.

$\therefore\ \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

ㄱ. $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로 $\sin\theta\cos\theta>0$

ㄴ. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3}{4}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이므로 $\cos\frac{\theta}{2}<0$

ㄷ. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $2\pi<2\theta<3\pi$

따라서 $2\theta$는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이므로

$\sin2\theta>0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

**10** 전략 각각의 조건을 만족시키는 각 $\theta$가 제몇 사분면의 각인지 구한다.

풀이 (i) $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$일 때, 각 $\theta$는 제2사분면의 각이다.

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$일 때, 각 $\theta$는 제4사분면의 각이다.

따라서 각 $\theta$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}<0$에서

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$일 때, 각 $\theta$는 제2사분면의 각이다.

$\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$일 때, 각 $\theta$는 제3사분면의 각이다.

따라서 각 $\theta$는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\theta$는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$ ··· ❶

따라서 $\tan\theta+\cos\theta<0$, $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sqrt{(\tan\theta+\cos\theta)^2}+\sqrt{\tan^2\theta}-|\sin\theta-\cos\theta|+\sin\theta$

$=-(\tan\theta+\cos\theta)-\tan\theta-(\sin\theta-\cos\theta)+\sin\theta$

$=-\tan\theta-\cos\theta-\tan\theta-\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta$

$=-2\tan\theta$ ··· ❷

답 $-2\tan\theta$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호를 구할 수 있다. | 60% |
| ❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다. | 40% |

**11** 전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 $\sin\theta$를 $a$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\frac{\cos^2\theta}{a-\sin\theta}+\frac{\cos^2\theta}{a+\sin\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta(a+\sin\theta)+\cos^2\theta(a-\sin\theta)}{(a-\sin\theta)(a+\sin\theta)}=\frac{2a\cos^2\theta}{a^2-\sin^2\theta}$

이때 $\cos\theta=\sqrt{1-a}$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-(1-a)=a$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{2a\cos^2\theta}{a^2-\sin^2\theta}=\frac{2a(1-a)}{a^2-a}$

$=\frac{-2a(a-1)}{a(a-1)}=-2$ 답 $-2$

**12** 전략 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$임을 이용한다.

풀이 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$, $2\sin\theta\cos\theta=\frac{8}{9}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$ ··· ❶

$\therefore\ \sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{9}\right)=\frac{13}{27}$ ··· ❷

따라서 $p=27$, $q=13$이므로

$p+q=40$ ··· ❸

답 40

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $\sin^3\theta-\cos^3\theta$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**13** 전략 주어진 식을 정리하여 $\cos\theta$를 $\sin\theta$로 나타낸다.

풀이 $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=2-\sqrt{3}$에서

$\cos\theta+\sin\theta=(2-\sqrt{3})(\cos\theta-\sin\theta)$

$(1-\sqrt{3})\cos\theta=(3-\sqrt{3})\sin\theta$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{3-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\sin\theta=-\sqrt{3}\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+(-\sqrt{3}\sin\theta)^2=1$

$4\sin^2\theta=1 \qquad \therefore \sin^2\theta=\dfrac{1}{4}$

이때 $\theta$가 제4사분면의 각이므로 $\qquad \sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{1}{2}$

$\cos\theta=-\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$이므로

$a+b=-1$ 답 $-1$

**14** 전략 로그의 성질을 이용한다.

풀이 $\log_2\sin\theta+\log_2\cos\theta=-4$에서

$\log_2\sin\theta\cos\theta=-4 \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=2^{-4}=\dfrac{1}{16}$

$$\begin{aligned}\therefore (\sin\theta+\cos\theta)^2&=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=1+2\sin\theta\cos\theta\\&=1+2\cdot\frac{1}{16}=\frac{9}{8}\end{aligned}$$

한편 $\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{1}{2}(\log_2 x-3)$에서

$2\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\log_2 x-3$

$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)^2=\log_2 x-\log_2 2^3$

즉 $\log_2\dfrac{9}{8}=\log_2\dfrac{x}{8}$이므로

$x=9$ 답 9

**15** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $x^2-2kx+4k=0$의 두 근이 $\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\dfrac{1}{\cos\theta}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=2k \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}=4k$, 즉 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4k} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2k$이므로 ㉡을 대입하면

$4k(\sin\theta+\cos\theta)=2k$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4} \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

따라서 $\dfrac{1}{4k}=-\dfrac{3}{8}$이므로 $\quad k=-\dfrac{2}{3}$ 답 $-\dfrac{2}{3}$

**16** 전략 $\theta$를 일반각으로 나타낸 후 $\dfrac{\theta}{4}$가 제몇 사분면의 각인지 구한다.

풀이 $\theta$가 제1사분면의 각이므로

$\theta=2n\pi+\alpha$ $\left(\text{단, } n\text{은 정수, } 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $\dfrac{\theta}{2}=n\pi+\dfrac{\alpha}{2}$이므로

(i) $n=2m$ ($m$은 정수)일 때,

$\dfrac{\theta}{2}=2m\pi+\dfrac{\alpha}{2}$에서 $0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\dfrac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2m+1$ ($m$은 정수)일 때,

$\dfrac{\theta}{2}=(2m+1)\pi+\dfrac{\alpha}{2}=2m\pi+\pi+\dfrac{\alpha}{2}$에서 $\pi<\pi+\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{5}{4}\pi$이므로 $\dfrac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $n=2m+1$ ($m$은 정수)이므로

$\dfrac{\theta}{2}=(2m+1)\pi+\dfrac{\alpha}{2} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $\dfrac{\theta}{4}=m\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{4}$이므로

ⓘ $m=2k$ ($k$는 정수)일 때,

$\dfrac{\theta}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{4}$에서 $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{4}<\dfrac{5}{8}\pi$이므로 $\dfrac{\theta}{4}$는 제2사분면의 각이다.

ⓘⓘ $m=2k+1$($k$는 정수)일 때,

$\dfrac{\theta}{4}=(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{4}=2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{\alpha}{4}$에서

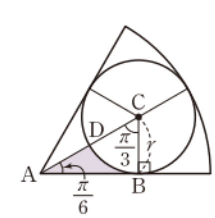
$\dfrac{3}{2}\pi<\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{\alpha}{4}<\dfrac{13}{8}\pi$이므로 $\dfrac{\theta}{4}$는 제4사분면의 각이다.

ⓘ, ⓘⓘ에서 $\dfrac{\theta}{4}$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 제2사분면 또는 제4사분면

**17** 전략 작은 원이 내접하는 부채꼴을 생각하여 내접원의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 내접원의 반지름의 길이를 $r$라 하면 오른쪽 그림에서 $\angle\text{CAB}=\dfrac{\pi}{6}$이므로




$\angle\text{ACB}=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{\text{AC}}=2r$, $\overline{\text{AB}}=\sqrt{3}r$

큰 원의 반지름의 길이가 6이므로

$2r+r=6 \qquad \therefore r=2$

$\therefore$ ($\triangle$ABC의 넓이)$-$(부채꼴 BCD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

따라서 색칠한 부분의 넓이 $S$는

$$S=12\left(2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi\right)=24\sqrt{3}-8\pi$$

이므로 $p=24,\ q=-8$

$\therefore p+q=16$ 답 16

**18** 전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구한다.

풀이 $\sin\theta+\cos\theta=-1$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1$$

$1+2\sin\theta\cos\theta=1 \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=0$ ··· ❶

따라서 $\sin\theta=-1$, $\cos\theta=0$ 또는 $\sin\theta=0$, $\cos\theta=-1$이므로

$f(n)=\sin^n\theta+\cos^n\theta=(-1)^n$ ··· ❷

$\therefore f(1)+2f(2)+3f(3)+\cdots+20f(20)$

$=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-19+20)$

$=1\cdot 10=10$ ··· ❸

답 10

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $f(n)$을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**19** 전략 $\overline{OQ}$, $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$의 길이를 $\theta$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{OA}=4$, $\overline{OB}=4$이므로

$\overline{OQ}=\overline{OB}\cos\theta=4\cos\theta$,

$\overline{BQ}=\overline{OB}\sin\theta=4\sin\theta$,

$\overline{AP}=\overline{OA}\tan\theta=4\tan\theta$

$\overline{OQ}=2\,\overline{AP}\cdot\overline{BQ}$에서 $\quad 4\cos\theta=2\cdot 4\tan\theta\cdot 4\sin\theta$

$1=8\tan\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad 8\tan^2\theta=1$

$\therefore \tan^2\theta=\dfrac{1}{8}$ 답 ①

**20** 전략 삼각함수 사이의 관계와 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $\dfrac{\sin\theta-3}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta-3}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin\theta(\sin\theta-3)+\cos\theta(\cos\theta-3)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-3(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1-3(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$ ··· ❶

한편 $2x^2-x-a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2},\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{a}{2}$$

$\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\dfrac{a}{2}\right)$

$=a+\dfrac{1}{4}$

즉 $a+\dfrac{1}{4}=1$이므로 $\quad a=\dfrac{3}{4}$ ··· ❷

따라서 $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{\frac{3}{4}}{2}=-\dfrac{3}{8}$이므로

$$(\text{주어진 식})=\frac{1-3(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1-3\cdot\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}}=\frac{4}{3}$$ ··· ❸

답 $\dfrac{4}{3}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다. | 20% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다. | 20% |

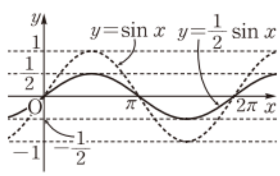
# 06 삼각함수의 그래프

## 01 삼각함수의 그래프

유제 본책 112~116쪽

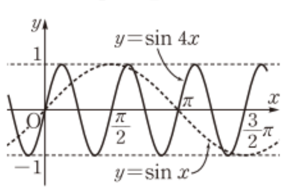
**1** (1) $y=\frac{1}{2}\sin x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이다.

따라서 $y=\frac{1}{2}\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$, 주기는 $\frac{2\pi}{1}=2\pi$이다.



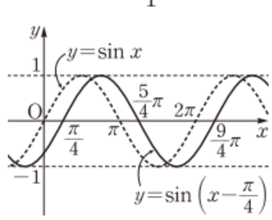

(2) $y=\sin 4x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{1}{4}$배 한 것이다.

따라서 $y=\sin 4x$의 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 1, 최솟값은 $-1$, 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이다.




(3) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

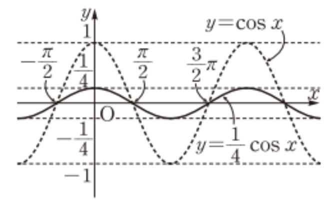
따라서 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 1, 최솟값은 $-1$, 주기는 $\frac{2\pi}{1}=2\pi$이다.




답 풀이 참조

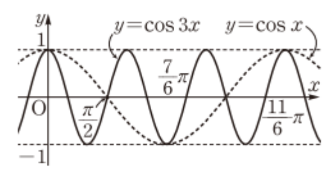
**2** (1) $y=\frac{1}{4}\cos x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $\frac{1}{4}$배 한 것이다.

따라서 $y=\frac{1}{4}\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 $\frac{1}{4}$, 최솟값은 $-\frac{1}{4}$, 주기는 $\frac{2\pi}{1}=2\pi$이다.



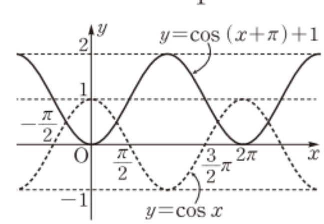

(2) $y=\cos 3x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배 한 것이다.

따라서 $y=\cos 3x$의 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 1, 최솟값은 $-1$, 주기는 $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이다.




(3) $y=\cos(x+\pi)+1$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\pi$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

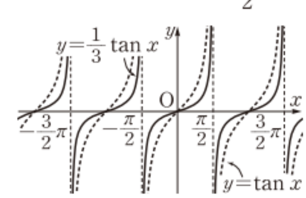
따라서 $y=\cos(x+\pi)+1$의 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 2, 최솟값은 0, 주기는 $\frac{2\pi}{1}=2\pi$이다.




답 풀이 참조

**3** (1) $y=\frac{1}{3}\tan x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배 한 것이다.

따라서 $y=\frac{1}{3}\tan x$의 그래프는 다음 그림과 같고, 주기는 $\frac{\pi}{1}=\pi$, 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ ($n$은 정수)이다.

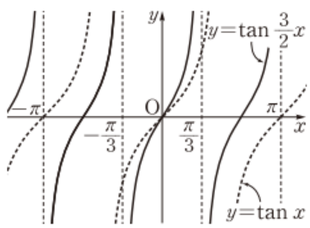



(2) $y=\tan\frac{3}{2}x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{2}{3}$배 한 것이다.

따라서 $y=\tan\frac{3}{2}x$의 그래프는 다음 그림과 같고, 주기는

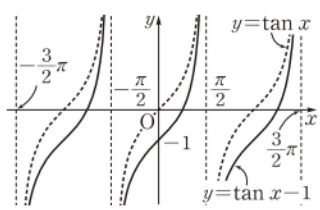
$\frac{\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\pi$, 점근선의 방정식은 $\frac{3}{2}x=n\pi+\frac{\pi}{2}$,

즉 $x=\frac{2}{3}n\pi+\frac{\pi}{3}$ ($n$은 정수)이다.




(3) $y=\tan x-1$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\tan x-1$의 그래프는 다음 그림과 같고, 주기는 $\frac{\pi}{1}=\pi$, 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ ($n$은 정수)이다.




답 풀이 참조

**4** 주어진 함수의 최댓값이 2이고 $a>0$이므로

$a+c=2$ …… ㉠

주기가 $\frac{2}{3}\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi \qquad \therefore b=3$

따라서 $f(x)=a\cos 3x+c$에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로

$a\cos\frac{3}{2}\pi+c=1 \qquad \therefore c=1$

$c=1$을 ㉠에 대입하면 $a=1$

$\therefore a+b-c=3$

답 3

**5** 주어진 함수의 그래프에서 주기는 $\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$이고

$b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore b=2$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=a\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+c$이고 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$을 지나므로

$a\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)+c=0, \qquad a\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)+c=0$

$-\frac{\sqrt{3}}{3}a+c=0 \qquad \therefore a=\sqrt{3}c$ …… ㉠

또 주어진 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$을 지나므로

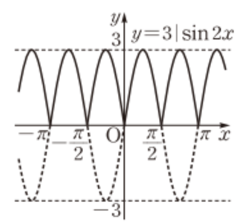
$a\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+c=1 \qquad \therefore c=1$

$c=1$을 ㉠에 대입하면 $a=\sqrt{3}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(\sqrt{3})^2+2^2+1^2=8$

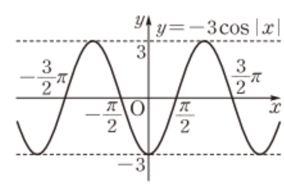
답 8

**6** (1) $y=3|\sin 2x|$의 그래프는 $y=3\sin 2x$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




따라서 최댓값은 3, 최솟값은 0이다.

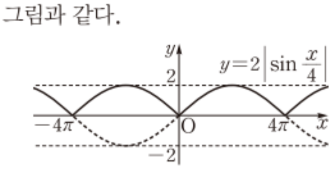
(2) $y=-3\cos|x|$의 그래프는 $y=-3\cos x$의 그래프에서 $x\ge 0$인 부분만 남기고, $x\ge 0$인 부분을 $y$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




따라서 최댓값은 3, 최솟값은 $-3$이다.

답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: 0
(2) 최댓값: 3, 최솟값: $-3$

**7** $y=2\left|\sin\frac{x}{4}\right|$의 그래프는 $y=2\sin\frac{x}{4}$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




따라서 최댓값은 2, 최솟값은 0이므로

$M=2,\ m=0$

$\therefore M+m=2$

답 2

**8** $y=|\cos ax|+b$의 그래프는 $y=\cos ax$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=|\cos ax|+b$의 최댓값이 4이므로

$1+b=4 \qquad \therefore b=3$

또 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore a=2$

$\therefore a+b=5$

답 5

## 02 삼각함수의 성질

**확인** 본책 119쪽

**1** (1) $\sin 570°=\sin(90°\times 6+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$

(2) $\cos 330°=\cos(90°\times 3+60°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\sin\frac{14}{3}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 9+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\tan\frac{13}{4}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}\times 6+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) 1

**유제** 본책 120~122쪽

**1** (1) $\sin 690°=\sin(90°\times 7+60°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$,

$\cos 300°=\cos(90°\times 3+30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$,

$\tan 405°=\tan(90°\times 4+45°)=\tan 45°=1$이므로

(주어진 식) $=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1=-2$

(2) $\sin\frac{10}{3}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 6+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\frac{11}{6}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 3+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\frac{5}{3}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}\times 3+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$이므로

(주어진 식) $=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

(3) $\sin 89°=\sin(90°-1°)=\cos 1°$,

$\sin 88°=\sin(90°-2°)=\cos 2°$,

$\vdots$

$\sin 46°=\sin(90°-44°)=\cos 44°$이므로

(주어진 식)

$=\sin^2 1°+\sin^2 2°+\cdots+\sin^2 44°+\sin^2 45°$

$\quad+\cos^2 44°+\cdots+\cos^2 2°+\cos^2 1°$

$=(\sin^2 1°+\cos^2 1°)+(\sin^2 2°+\cos^2 2°)$

$\quad+\cdots+(\sin^2 44°+\cos^2 44°)+\sin^2 45°$

$=44\times 1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{89}{2}$

답 (1) $-2$ (2) $-\sqrt{3}$ (3) $\frac{89}{2}$

**2** $\cos\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin(3\pi-\theta)=\sin\theta$,

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$이므로

(주어진 식)

$=\cos^2\theta+(-\sin\theta)^2+\sin^2\theta+(-\cos\theta)^2$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta=2$

답 2

**3** (1) $y=4\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2$

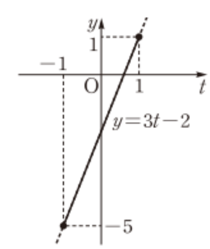
$=4\sin x-\sin x-2$

$=3\sin x-2$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=3t-2$

따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=1$일 때 최댓값은 1이고, $t=-1$일 때 최솟값은 $-5$이다.




(2) $y=\sin(x+\pi)-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-2$

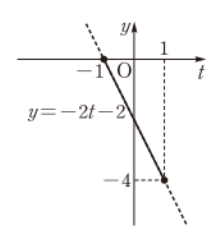
$=-\sin x-\sin x-2$

$=-2\sin x-2$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=-2t-2$

따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=-1$일 때 최댓값은 0이고, $t=1$일 때 최솟값은 $-4$이다.

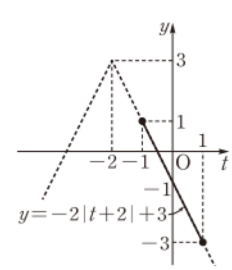



(3) $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=-2|t+2|+3$

$=\begin{cases}-2t-1 & (t\ge -2)\\ 2t+7 & (t<-2)\end{cases}$

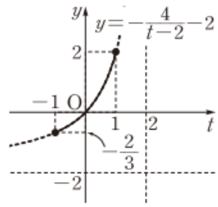
따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=-1$일 때 최댓값은 1이고, $t=1$일 때 최솟값은 $-3$이다.



(4) $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

주어진 함수는

$$y=\frac{-2t}{t-2}$$
$$=\frac{-2(t-2)-4}{t-2}$$
$$=-\frac{4}{t-2}-2$$




따라서 이 함수의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $t=1$일 때 최댓값은 2이고, $t=-1$일 때 최솟값은 $-\frac{2}{3}$이다.

답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: $-5$ (2) 최댓값: 0, 최솟값: $-4$
(3) 최댓값: 1, 최솟값: $-3$ (4) 최댓값: 2, 최솟값: $-\frac{2}{3}$

다른 풀이 (1) $y=4\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2=3\sin x-2$

$-1\le\sin x\le 1$이므로 $-3\le 3\sin x\le 3$

$\therefore\ -5\le 3\sin x-2\le 1$

(2) $y=\sin(x+\pi)-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-2=-2\sin x-2$

$-1\le\sin x\le 1$이므로 $-2\le -2\sin x\le 2$

$\therefore\ -4\le -2\sin x-2\le 0$

(3) $-1\le\cos x\le 1$이므로 $1\le\cos x+2\le 3$

$1\le|\cos x+2|\le 3$

$-6\le -2|\cos x+2|\le -2$

$\therefore\ -3\le -2|\cos x+2|+3\le 1$

(4) $y=\frac{-2\sin x}{\sin x-2}=-\frac{4}{\sin x-2}-2$

$-1\le\sin x\le 1$에서 $-3\le\sin x-2\le -1$이므로

$-1\le\frac{1}{\sin x-2}\le -\frac{1}{3}$

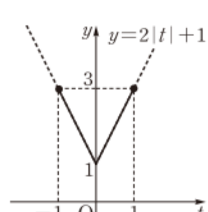
$\frac{4}{3}\le -\frac{4}{\sin x-2}\le 4$

$\therefore\ -\frac{2}{3}\le -\frac{4}{\sin x-2}-2\le 2$

**4** $\cos\frac{x}{4}=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

주어진 함수는

$$y=2|t|+1$$
$$=\begin{cases}2t+1 & (t\ge 0)\\ -2t+1 & (t<0)\end{cases}$$




따라서 이 함수의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $t=1$ 또는 $t=-1$일 때 최댓값은 3이고, $t=0$일 때 최솟값은 1이다.

따라서 $M=3$, $m=1$이므로

$M+m=4$

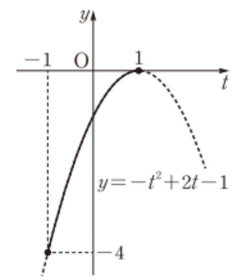
답 4

**5** $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, $\sin(2\pi-x)=-\sin x$이므로

$$y=\cos^2 x-2\sin(2\pi-x)-2$$
$$=1-\sin^2 x+2\sin x-2$$
$$=-\sin^2 x+2\sin x-1$$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$$y=-t^2+2t-1$$
$$=-(t-1)^2$$




따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=1$일 때 최댓값은 0이고, $t=-1$일 때 최솟값은 $-4$이다.

답 최댓값: 0, 최솟값: $-4$

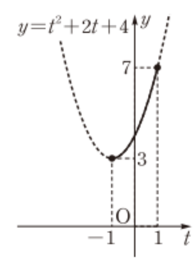
**6** $\tan(\pi+x)=\tan x$, $\tan\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=\frac{1}{\tan x}$이므로

$$y=\tan^2(\pi+x)+\frac{2}{\tan\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)}+4$$
$$=\tan^2 x+2\tan x+4$$

$\tan x=t$로 놓으면 $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$에서

$-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$$y=t^2+2t+4=(t+1)^2+3$$




따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=1$일 때 최댓값은 7이고, $t=-1$일 때 최솟값은 3이다.

답 최댓값: 7, 최솟값: 3

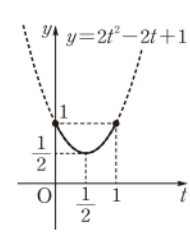
**7** $\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)=-\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$이므로

$$y=\sin^2\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^2 x-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1$$
$$=(-\cos x)^2+\cos^2 x-2\cos x+1$$
$$=2\cos^2 x-2\cos x+1$$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$에서

$0\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$$y=2t^2-2t+1$$
$$=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$



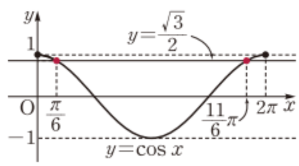

따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=0$ 또는 $t=1$일 때 최댓값은 1이고, $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{2}$

# 03 삼각방정식과 삼각부등식

**확인** 본책 124~125쪽

**1** (1) 다음 그림과 같이 $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 $x$좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{6}\pi$이다.



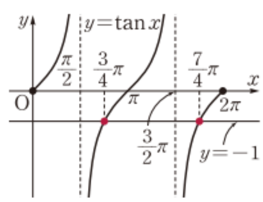

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(2) $\tan x+1=0$에서

$\tan x=-1$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-1$의 교점의 $x$좌표는 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이다.



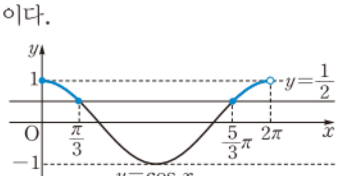

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

답 (1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(2) $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

**2** (1) 부등식 $\cos x\ge\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이다.



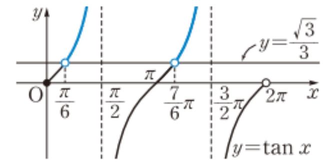

따라서 주어진 부등식의 해는

$0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$

(2) $\sqrt{3}\tan x-1>0$에서

$\tan x>\frac{\sqrt{3}}{3}$

부등식 $\tan x>\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$보다 위쪽에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이다.




따라서 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

답 (1) $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$

(2) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

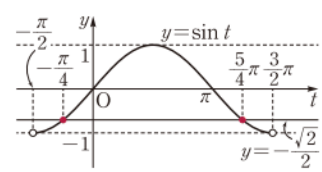
**유제** 본책 126~129쪽

**1** (1) $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $0<x<2\pi$에서

$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{3}{2}\pi$

이고, 주어진 방정식은

$\sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$




$\therefore t=-\frac{\pi}{4}$ 또는 $t=\frac{5}{4}\pi$

즉 $x-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$ 또는 $x-\frac{\pi}{2}=\frac{5}{4}\pi$이므로

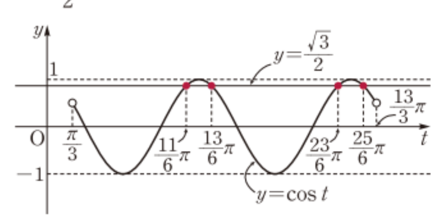
$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(2) $2x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0<x<2\pi$에서

$\frac{\pi}{3}<t<\frac{13}{3}\pi$

이고, 주어진 방정식은

$\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$




$\therefore t=\frac{11}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{23}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{25}{6}\pi$

즉 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{11}{6}\pi$ 또는 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{23}{6}\pi$ 또는 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{25}{6}\pi$이므로

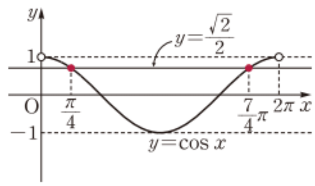
$x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{12}\pi$

답 (1) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(2) $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{12}\pi$

다른 풀이 (1) $2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{2}$에서

$-2\cos x=-\sqrt{2}$ $\quad\therefore \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$



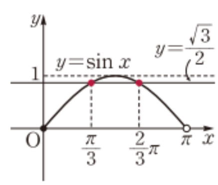

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

**2** (1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$이므로 주어진 방정식은

$\sin x+\sin x=\sqrt{3}$, $\quad 2\sin x=\sqrt{3}$

$\therefore \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$




따라서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

(2) $\frac{x}{3}=t$로 놓으면 $-\pi<x<\pi$에서

$-\frac{\pi}{3}<t<\frac{\pi}{3}$

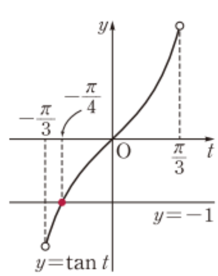
이고, 주어진 방정식은 $\quad \sin t+\cos t=0$

$\cos t\neq 0$이므로 양변을 $\cos t$로 나누면

$\frac{\sin t}{\cos t}+1=0$

$\therefore \tan t=-1$

$\therefore t=-\frac{\pi}{4}$




즉 $\frac{x}{3}=-\frac{\pi}{4}$이므로 $\quad x=-\frac{3}{4}\pi$

답 (1) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ $\quad$ (2) $x=-\frac{3}{4}\pi$

**3** (1) $2\sin^2 x-\cos x-1=0$에서

$2(1-\cos^2 x)-\cos x-1=0$

$2\cos^2 x+\cos x-1=0$

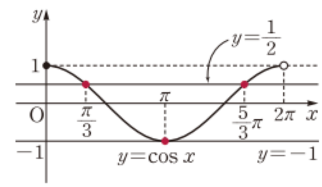
$(\cos x+1)(2\cos x-1)=0$

$\therefore \cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

(i) $\cos x=-1$일 때,

$0\leq x<2\pi$이므로

$x=\pi$




(ii) $\cos x=\frac{1}{2}$일 때,

$0\leq x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(2) $\sqrt{3}\tan^2 x-4\tan x+\sqrt{3}=0$에서

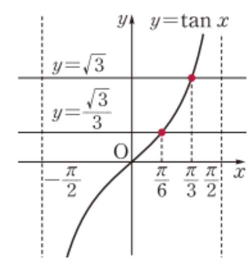
$(\sqrt{3}\tan x-1)(\tan x-\sqrt{3})=0$

$\therefore \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $\tan x=\sqrt{3}$

(i) $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때,

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이므로

$x=\frac{\pi}{6}$




(ii) $\tan x=\sqrt{3}$일 때,

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $\quad x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$

답 (1) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

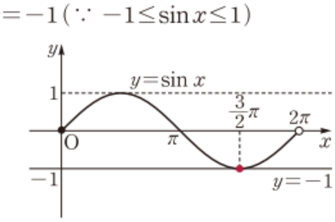
(2) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$

**4** $2\sin^2 x-\sin(\pi-x)-3=0$에서

$2\sin^2 x-\sin x-3=0$

$(\sin x+1)(2\sin x-3)=0$

$\therefore \sin x=-1$ ($\because -1\leq\sin x\leq 1$)




따라서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{3}{2}\pi$ $\qquad$ 답 $x=\frac{3}{2}\pi$

**5** 주어진 식의 양변에 $\cos x$를 곱하여 정리하면

$2\cos^2 x-\cos x-1=0$

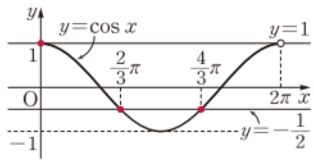
$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$

$\therefore \cos x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x = 1$

(i) $\cos x = -\frac{1}{2}$일 때,

$0 \le x < 2\pi$이므로

$x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$




(ii) $\cos x = 1$일 때, $0 \le x < 2\pi$이므로

$x = 0$

(i), (ii)에서 구하는 모든 해의 합은

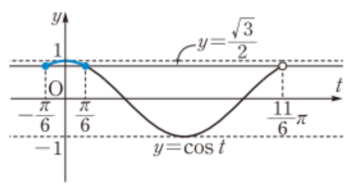
$\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi + 0 = 2\pi$ 　　답 $2\pi$

**6** (1) $x - \frac{\pi}{6} = t$로 놓으면 $0 \le x < 2\pi$에서

$-\frac{\pi}{6} \le t < \frac{11}{6}\pi$

이고, 주어진 부등식은

$2\cos t \ge \sqrt{3}$ 　　$\therefore \cos t \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

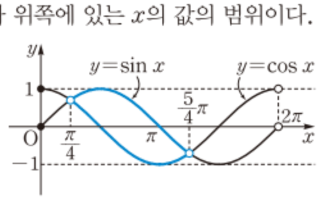



위의 그림에서 $\cos t \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$을 만족시키는 $t$의 값의 범위는

$-\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{6}$

즉 $-\frac{\pi}{6} \le x - \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{6}$이므로 　　$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

(2) 부등식 $\cos x < \sin x$의 해는 $y = \sin x$의 그래프가 $y = \cos x$의 그래프보다 위쪽에 있는 $x$의 값의 범위이다.




따라서 위의 그림에서 구하는 해는 　$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$

답 (1) $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ 　(2) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$

**7** (1) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 5\cos x + 1 > 0$에서

$2\sin^2 x + 5\cos x + 1 > 0$

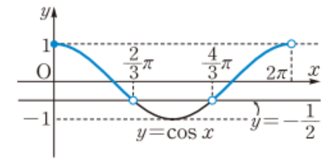
$2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x + 1 > 0$

$2\cos^2 x - 5\cos x - 3 < 0$

$\therefore (2\cos x + 1)(\cos x - 3) < 0$

$\cos x - 3 < 0$이므로 　　$2\cos x + 1 > 0$

$\therefore \cos x > -\frac{1}{2}$




따라서 위의 그림에서 구하는 해는

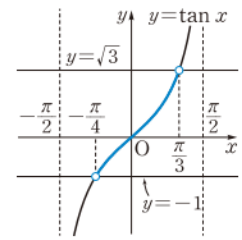
$0 \le x < \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$

(2) $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x < \sqrt{3}$에서

$\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} < 0$

$(\tan x + 1)(\tan x - \sqrt{3}) < 0$

$\therefore -1 < \tan x < \sqrt{3}$




따라서 오른쪽 그림에서 구하는 해는 　$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

답 (1) $0 \le x < \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$ 　(2) $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

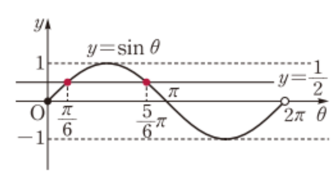
**8** $x$에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(2\sin\theta - 1)x + 4\sin\theta - 2 = 0$이 중근을 가지므로 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4} = (2\sin\theta - 1)^2 - (4\sin\theta - 2) = 0$

$4\sin^2\theta - 8\sin\theta + 3 = 0$

$(2\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 3) = 0$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$ ($\because -1 \le \sin\theta \le 1$)



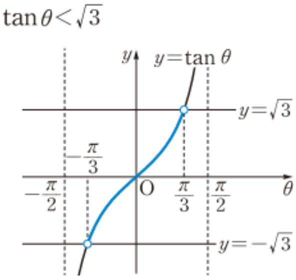

따라서 위의 그림에서 구하는 $\theta$의 값은

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta = \frac{5}{6}\pi$ 　　답 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$

**9** $x$에 대한 이차방정식 $x^2 - 2x\tan\theta + 3 = 0$이 허근을 가지므로 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4} = \tan^2\theta - 3 < 0$, 　　$(\tan\theta + \sqrt{3})(\tan\theta - \sqrt{3}) < 0$

$\therefore -\sqrt{3} < \tan\theta < \sqrt{3}$



앞의 그림에서 $\theta$의 값의 범위는

$$-\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{3}$$

따라서 $\alpha=-\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi$$

답 $\frac{2}{3}\pi$

## 중단원 연습 문제

본책 130~132쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ④ | 02 1 | 03 28 | 04 $-1$ | 05 ③ |
| 06 4 | 07 ① | 08 ② | 09 $1-a-a^2$ | |
| 10 ⑤ | 11 $\frac{2}{3}\pi$ | 12 $\frac{7}{4}\pi$ | 13 4 | 14 7 |
| 15 $-\frac{\pi}{6}$ | 16 ④ | 17 ③ | 18 $\frac{131}{65}$ | 19 ③ |
| 20 $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$ | | | | |

**01** 전략 $y=\sin bx$, $y=\cos bx$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이고, $y=\tan bx$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$이다.

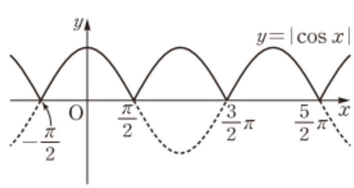
풀이 각 함수의 주기를 구해 보면 다음과 같다.

① $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ② $\pi$ ③ $\pi$

④ $2\pi$ ⑤ $\frac{2\pi}{2}=\pi$

답 ④

참고 ③ $y=|\cos x|$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기는 $\pi$이다.




**02** 전략 함수 $f(x)$는 주기가 4인 함수임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여

$f(17)=f(13)=f(9)=\cdots=f(-3)$ ··· ❶

조건 (나)에 의하여

$f(-3)=\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)=-\sin\frac{3}{2}\pi=1$ ··· ❷

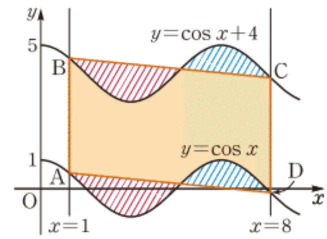
$\therefore f(17)=f(-3)=1$ ··· ❸

답 1

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(17)=f(-3)$임을 알 수 있다. | 40% |
| ❷ $f(-3)$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $f(17)$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**03** 전략 $y=\cos x$와 $y=\cos x+4$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\cos x+4$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y=\cos x$와 $y=\cos x+4$의 그래프는 다음 그림과 같다.



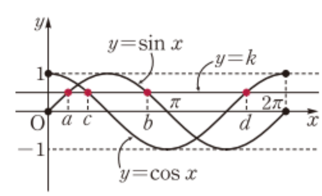

이때 빗금친 부분의 넓이는 각각 서로 같으므로 두 함수의 그래프와 두 직선 $x=1$, $x=8$로 둘러싸인 부분의 넓이는 평행사변형 ABCD의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는 $(5-1)\cdot(8-1)=28$

답 28

**04** 전략 $y=\sin x$와 $y=\cos x$의 그래프의 대칭성을 이용한다.

풀이 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 $x$좌표를 $a$, $b$라 하면




$b=\pi-a$

$\therefore a+b=\pi$

$y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 $x$좌표를 $c$, $d$라 하면

$d=2\pi-c$ $\therefore c+d=2\pi$

$\therefore \cos(a+b+c+d)=\cos 3\pi=-1$

답 $-1$

**05** 전략 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 $f(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1$의 그래프는 $y=3\sin x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. $y=3\sin x$의 주기는 $2\pi$이므로 $y=f(x)$의 주기도 $2\pi$이다.

$\therefore f(x+2\pi)=f(x)$

ㄴ. $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\le1$에서 $-3\le3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\le3$

$\therefore -4\le3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1\le2$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$2+(-4)=-2$

ㄷ. [반례] $x=\frac{\pi}{2}$일 때,

$f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=f(0)=3\sin\left(0+\frac{\pi}{2}\right)-1=2$

$f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=f(\pi)=3\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)-1=-4$

06 삼각함수의 그래프

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

**06** 전략 주어진 함수의 주기와 최댓값, 최솟값을 $a$, $b$, $c$로 나타낸다.

풀이 $f(x)=a\sin bx+c$의 최댓값은 6, 최솟값은 2이고 $a>0$이므로

$a+c=6$, $-a+c=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=4$

또 주기가 $\frac{\pi}{3}$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore b=6$

$\therefore a+b-c=4$ 답 4

**07** 전략 함수 $y=\tan(ax-b)$의 그래프에서 주기와 지나는 점을 찾는다.

풀이 주어진 함수의 그래프에서 주기가 $\frac{3}{2}\pi$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{3}{2}\pi$ $\therefore a=\frac{2}{3}$

또 주어진 그래프가 점 $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 0\right)$을 지나므로

$0=\tan\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi-b\right)$ $\therefore \tan\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=0$

이때 $0<b<\pi$에서 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-b<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{2}-b=0$ $\therefore b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=\frac{\pi}{3}$ 답 ①

**08** 전략 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $\pi$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$

ㄴ. $\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$

ㄷ. $\tan\frac{B+C}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$이므로

$$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B+C}{2}=\tan\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}=1$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

**09** 전략 삼각함수의 성질을 이용하여 각을 통일한다.

풀이 $\sin 75°=\sin(90°-15°)=\cos 15°$이므로

$\sin^2 75°=\cos^2 15°=1-\sin^2 15°=1-a^2$

또 $\cos 105°=\cos(90°+15°)=-\sin 15°=-a$이므로

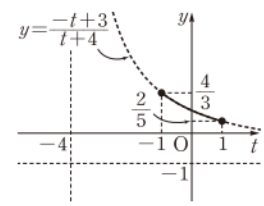
$\sin^2 75°+\cos 105°=1-a-a^2$ 답 $1-a-a^2$

**10** 전략 $\sin x=t$로 치환하여 주어진 식을 $t$에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$$y=\frac{-t+3}{t+4}=\frac{-(t+4)+7}{t+4}=\frac{7}{t+4}-1$$

따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=-1$일 때 최댓값은 $\frac{4}{3}$이고, $t=1$일 때 최솟값은 $\frac{2}{5}$이다.




따라서 $M=\frac{4}{3}$, $m=\frac{2}{5}$이므로

$15(M+m)=15\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)=26$ 답 ⑤

**11** 전략 $\cos x=t$로 치환하여 주어진 식을 $t$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(x)=\sin^2 x-\cos x+1$

$=(1-\cos^2 x)-\cos x+1$

$=-\cos^2 x-\cos x+2$ ··· ❶

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수를 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$$g(t)=-t^2-t+2=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

따라서 $t=-\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{9}{4}$, $t=1$에서 최솟값 0을 갖는다. ··· ❷

이때 $0\le x<2\pi$에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$이면

$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

이고, $\cos x=1$이면 $x=0$

따라서 $a=\frac{2}{3}\pi$, $b=\frac{4}{3}\pi$, $c=0$이므로

$b-a+c=\frac{2}{3}\pi$ ··· ❸

답 $\frac{2}{3}\pi$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(x)$를 $\cos x$에 대한 함수로 변형할 수 있다. | 30% |
| ❷ $g(t)$가 최댓값, 최솟값을 갖는 $t$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $b-a+c$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**12** 전략 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구한 후 조건을 만족시키는 $\theta$의 값을 구한다.

풀이 $y=-x^2-2x\sin\theta+\cos^2\theta$

$=-x^2-2x\sin\theta+(1-\sin^2\theta)$

$=-(x+\sin\theta)^2+1$ ··· ❶

따라서 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-\sin\theta,\ 1)$ ··· ❷

직선 $y=\sqrt{2}x$가 점 $(-\sin\theta,\ 1)$을 지나므로

$-\sqrt{2}\sin\theta=1,\qquad \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{7}{4}\pi\left(\because\ \dfrac{3}{2}\pi\le\theta<2\pi\right)$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{7}{4}\pi$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 포물선의 식을 이차함수의 표준형으로 변형할 수 있다. | 30% |
| ❷ 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다. | 20% |
| ❸ $\theta$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

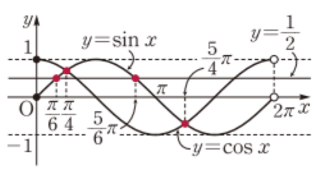
**13** 전략 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $2\sin^2x-2\sin x\cos x-\sin x+\cos x=0$에서

$2\sin x(\sin x-\cos x)-(\sin x-\cos x)=0$

$(2\sin x-1)(\sin x-\cos x)=0$

$\therefore\ \sin x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\sin x=\cos x$




(ⅰ) $\sin x=\dfrac{1}{2}$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

(ⅱ) $\sin x=\cos x$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 해는

$x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$

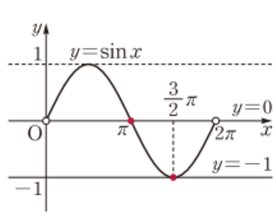
이므로 해의 개수는 4이다. 답 4

**14** 전략 $\cos^2x=1-\sin^2x$임을 이용한다.

풀이 $\cos^2x-\sin x=1$에서 $\quad(1-\sin^2x)-\sin x=1$

$\sin^2x+\sin x=0,\qquad \sin x(\sin x+1)=0$

$\therefore\ \sin x=-1$ 또는 $\sin x=0$




(ⅰ) $\sin x=-1$일 때,

$0<x<2\pi$이므로

$x=\dfrac{3}{2}\pi$

(ⅱ) $\sin x=0$일 때,

$0<x<2\pi$이므로

$x=\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$\dfrac{3}{2}\pi+\pi=\dfrac{5}{2}\pi$

이므로 $\quad p=2,\ q=5$

$\therefore\ p+q=7$ 답 7

**15** 전략 한 종류의 삼각함수로 통일한 후 인수분해한다.

풀이 $4\cos^2x-2(\sqrt{3}-1)\sin x+\sqrt{3}-4>0$에서

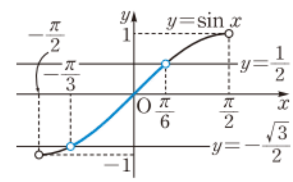
$4(1-\sin^2x)-2(\sqrt{3}-1)\sin x+\sqrt{3}-4>0$

$4\sin^2x+2(\sqrt{3}-1)\sin x-\sqrt{3}<0$

$(2\sin x+\sqrt{3})(2\sin x-1)<0$

$\therefore\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin x<\dfrac{1}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서 부등식의 해는




$-\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{6}$

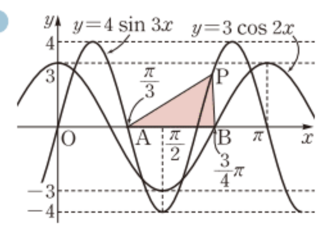
이므로

$\alpha=-\dfrac{\pi}{3},\ \beta=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore\ \alpha+\beta=-\dfrac{\pi}{6}$ 답 $-\dfrac{\pi}{6}$

**16** 전략 삼각함수의 그래프의 성질을 이용한다.

풀이




$y=4\sin 3x$의 그래프가 $x$축과 만나는 점이 $\mathrm{A}(a,\ 0)$이므로

$4\sin 3a=0$에서 $\qquad\sin 3a=0$

$0<a<\dfrac{\pi}{2}$에서 $0<3a<\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$3a=\pi\qquad\therefore\ a=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\ \mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$

$y=3\cos 2x$의 그래프가 $x$축과 만나는 점이 $\mathrm{B}(b,\ 0)$이므로

$3\cos 2b=0$에서 $\qquad\cos 2b=0$

$\dfrac{\pi}{2}<b<\pi$에서 $\pi<2b<2\pi$이므로

$2b=\dfrac{3}{2}\pi\qquad\therefore\ b=\dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore\ \mathrm{B}\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ 0\right)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{12}\pi$

또 $-1\le\sin 3x\le 1$에서 $-4\le 4\sin 3x\le 4$이므로 점 P의 $y$좌표의 최댓값은 4이다.

따라서 △ABP의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}\pi\cdot 4=\frac{5}{6}\pi$$

답 ④

**17** 전략 삼각함수의 주기와 그래프의 대칭성을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=\sin kx\left(0\le x\le\frac{5\pi}{2k}\right)$의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$이므로

$$\beta=\frac{\pi}{k}-\alpha \qquad \therefore\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{k}$$

$$\therefore\ f(\alpha+\beta+\gamma)=f\left(\frac{\pi}{k}+\gamma\right)=\sin(\pi+k\gamma)$$

$$=-\sin k\gamma=-f(\gamma)=-\frac{3}{4}$$

답 ③

**18** 전략 $\alpha+\beta=\pi$임을 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 $\cos\alpha=\frac{5}{13}>0$에서 $\alpha$는 예각이므로

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$$

$$\therefore\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12}{5} \quad \cdots ❶$$

한편 □ABCD가 원에 내접하므로 $\alpha+\beta=\pi$

$$\therefore\ \cos\beta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{5}{13} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore\ \tan\alpha+\cos\beta=\frac{12}{5}+\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{131}{65} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{131}{65}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\tan\alpha$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $\cos\beta$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $\tan\alpha+\cos\beta$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**19** 전략 $10\theta=2\pi$이고 $\cos n\theta=\cos(2\pi-n\theta)$ ($n$은 상수)임을 이용하여 식을 간단히 한다.

풀이 $\angle P_1OP_2=\theta$이고 단위원을 10등분 하였으므로

$$10\theta=2\pi$$

$$\therefore\ \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 9\theta+\cos 10\theta$$

$$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta$$

$$+\cos(2\pi-4\theta)+\cos(2\pi-3\theta)$$

$$+\cos(2\pi-2\theta)+\cos(2\pi-\theta)+\cos 2\pi$$

$$=2\cos\theta+2\cos 2\theta+2\cos 3\theta+2\cos 4\theta+\cos 5\theta+\cos 2\pi$$

$$=2\{\cos\theta+\cos 2\theta+\cos(\pi-2\theta)+\cos(\pi-\theta)\}$$

$$+\cos\pi+\cos 2\pi$$

$$=2(\cos\theta+\cos 2\theta-\cos 2\theta-\cos\theta)+(-1)+1$$

$$=0$$

답 ③

**20** 전략 이차방정식의 두 근이 모두 양수일 조건은 (판별식)$\ge 0$, (두 근의 합)$>0$, (두 근의 곱)$>0$이다.

풀이 $x$에 대한 이차방정식 $2x^2-4x\sin\theta+3\cos\theta=0$의 두 근이 모두 양수이므로

(i) 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(2\sin\theta)^2-2\cdot 3\cos\theta\ge 0$$

$$2\sin^2\theta-3\cos\theta\ge 0, \qquad 2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta\ge 0$$

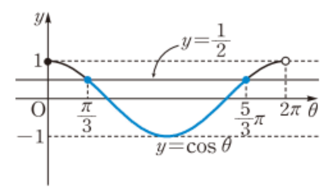
$$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2\le 0$$

$$\therefore\ (\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)\le 0$$

$\cos\theta+2>0$이므로

$$2\cos\theta-1\le 0$$

$$\therefore\ \cos\theta\le\frac{1}{2}$$




오른쪽 그림에서

$$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi \quad \cdots ❶$$

(ii) 두 근의 합이 양수이므로

$$\frac{4\sin\theta}{2}>0 \qquad \therefore\ \sin\theta>0$$

$$\therefore\ 0<\theta<\pi \quad \cdots ❷$$

(iii) 두 근의 곱이 양수이므로

$$\frac{3\cos\theta}{2}>0 \qquad \therefore\ \cos\theta>0$$

$$\therefore\ 0\le\theta<\frac{\pi}{2}\ \text{또는}\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi \quad \cdots ❸$$

이상에서 공통 범위를 구하면

$$\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2} \quad \cdots ❹$$

답 $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ (판별식)$\ge 0$을 만족시키는 $\theta$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ (두 근의 합)$>0$을 만족시키는 $\theta$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 20% |
| ❸ (두 근의 곱)$>0$을 만족시키는 $\theta$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 20% |
| ❹ 답을 구할 수 있다. | 20% |

Ⅲ. 삼각함수

# 07 삼각함수의 활용

## 01 사인법칙

### 확인

본책 135쪽

**1** (1) 사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{6}}{\sin 120°}=\frac{4}{\sin B}$이므로

$2\sqrt{6}\sin B=4\sin 120°$, $\quad 2\sqrt{6}\sin B=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0°<B<180°$이므로 $\quad B=45°$ 또는 $B=135°$

그런데 $0°<A+B<180°$이므로 $\quad B=45°$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{6}}{\sin 120°}=2R$이므로

$R=\frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{2}$

답 (1) $45°$ (2) $2\sqrt{2}$

**2** (1) $A+B+C=180°$이므로

$A=180°-(75°+60°)=45°$

사인법칙에 의하여 $\frac{8}{\sin 45°}=\frac{c}{\sin 60°}$이므로

$8\sin 60°=c\sin 45°$, $\quad 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}c$

$\therefore c=4\sqrt{6}$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{8}{\sin 45°}=2R$이므로

$R=\frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=4\sqrt{2}$

답 (1) $4\sqrt{6}$ (2) $4\sqrt{2}$

### 유제

본책 136~138쪽

**1** (1) $A+B+C=180°$이므로

$A=180°-(75°+45°)=60°$

사인법칙에 의하여 $\frac{3}{\sin 60°}=\frac{c}{\sin 45°}$이므로

$3\sin 45°=c\sin 60°$, $\quad 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$

$\therefore c=\sqrt{6}$

또 사인법칙에 의하여

$\frac{3}{\sin 60°}=2R \qquad \therefore R=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60°}=\frac{4}{\sin C}$이므로

$4\sqrt{3}\sin C=4\sin 60°$, $\quad 4\sqrt{3}\sin C=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin C=\frac{1}{2}$

$0°<C<180°$이므로 $\quad C=30°$ 또는 $C=150°$

그런데 $0°<B+C<180°$이므로 $\quad C=30°$

$\therefore A=180°-(60°+30°)=90°$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 90°}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60°}$이므로

$a\sin 60°=4\sqrt{3}\sin 90°$, $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}a=4\sqrt{3}$

$\therefore a=8$

답 (1) $c=\sqrt{6}$, $R=\sqrt{3}$ (2) $a=8$, $A=90°$, $C=30°$

다른 풀이 (2) △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 $R$라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60°}=2R \qquad \therefore R=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=4$

또 사인법칙에 의하여 $\frac{4}{\sin C}=2\cdot 4$이므로

$\sin C=\frac{1}{2}$

$0°<C<180°$이므로 $\quad C=30°$ 또는 $C=150°$

그런데 $0°<B+C<180°$이므로 $\quad C=30°$

$\therefore A=180°-(60°+30°)=90°$

사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin 90°}=2\cdot 4 \qquad \therefore a=8$

**2** △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 $R$라 하면 사인법칙에 의하여

$a:b:c=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C$
$=\sin A:\sin B:\sin C$
$=3:2:6$

이므로 $a=3k$, $b=2k$, $c=6k\ (k>0)$라 하면

$ab:bc:ca=(3k\cdot 2k):(2k\cdot 6k):(6k\cdot 3k)$
$=6k^2:12k^2:18k^2$
$=1:2:3$

답 $1:2:3$

**라이트 UP**

조건이 비례식으로 주어진 경우에는

$x:y=a:b \Longleftrightarrow x=ak,\ y=bk\ (k\neq 0)$

임을 이용한다.

07 삼각함수의 활용

**3** $(a+b):(b+c):(c+a)=5:6:7$이므로

$a+b=5k$, $b+c=6k$, $c+a=7k\,(k>0)$라 하자.

위의 세 식을 변끼리 더하면

$$2(a+b+c)=18k \qquad \therefore a+b+c=9k$$

$$\therefore a=3k,\ b=2k,\ c=4k$$

따라서 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 $R$라 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\sin A:\sin B:\sin C&=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}\\&=a:b:c\\&=3k:2k:4k\\&=3:2:4\end{aligned}$$

답 $3:2:4$

**4** △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 $R$라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

이것을 $b\sin^2 B=c\sin^2 C$에 대입하면

$$b\cdot\left(\frac{b}{2R}\right)^2=c\cdot\left(\frac{c}{2R}\right)^2, \qquad b^3=c^3$$

$$b^3-c^3=0, \qquad (b-c)(b^2+bc+c^2)=0$$

그런데 $b^2+bc+c^2>0$이므로

$$b-c=0 \qquad \therefore b=c$$

따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 $b=c$인 이등변삼각형

**라이트 UP**

**인수분해 공식**

① $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

② $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

**5** $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1$에서

$$(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 C)=1$$

$$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C \qquad \cdots\cdots ㉠$$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 $R$라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$\therefore a^2+b^2=c^2$$

따라서 △ABC는 ∠C$=90°$인 직각삼각형이다.

답 ∠C$=90°$인 직각삼각형

## 02 코사인법칙

**확인** 본책 140쪽

**1** (1) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos120°\\&=9+25-30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=49\end{aligned}$$

$c>0$이므로 $\quad c=7$

(2) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=(4\sqrt{3})^2+6^2-2\cdot4\sqrt{3}\cdot6\cdot\cos30°\\&=48+36-48\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\end{aligned}$$

$a>0$이므로 $\quad a=2\sqrt{3}$

답 (1) 7 (2) $2\sqrt{3}$

**2** 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

**유제** 본책 141~143쪽

**1** 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}b^2&=6^2+9^2-2\cdot6\cdot9\cdot\cos60°\\&=36+81-108\cdot\frac{1}{2}=63\end{aligned}$$

$b>0$이므로 $\quad b=3\sqrt{7}$

또 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{6^2+(3\sqrt{7})^2-9^2}{2\cdot6\cdot3\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$$

답 $b=3\sqrt{7}$, $\cos C=\frac{\sqrt{7}}{14}$

**2** 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{19})^2}{2\cdot2\cdot3}=-\frac{1}{2}$$

$0°<B<180°$이므로 $\quad B=120°$

답 $120°$

**3** 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$a^2=b^2-bc+c^2$을 ㉠에 대입하면

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-b^2+bc-c^2}{2bc}=\frac{1}{2}$$

$0°<A<180°$이므로 $\quad A=60°$

답 $60°$

**4** $4\sin A=3\sin B=6\sin C$에서

$$\sin A : \sin B : \sin C=\frac{1}{4} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}=3 : 4 : 2$$

이때 사인법칙에 의하여

$$a : b : c=\sin A : \sin B : \sin C=3 : 4 : 2$$

이므로 $a=3k$, $b=4k$, $c=2k\,(k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\cdot 3k\cdot 4k}=\frac{7}{8}$$

답 $\frac{7}{8}$

**5** $A+B+C=180°$이므로

$$A+B=180°-C,\ B+C=180°-A,\ C+A=180°-B$$

위의 식을 주어진 식에 대입하면

$$\sin(180°-C) : \sin(180°-A) : \sin(180°-B)=2 : 3 : 4$$

$$\sin C : \sin A : \sin B=2 : 3 : 4$$

이때 사인법칙에 의하여

$$c : a : b=\sin C : \sin A : \sin B=2 : 3 : 4$$

이므로 $a=3k$, $b=4k$, $c=2k\,(k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{(4k)^2+(2k)^2-(3k)^2}{2\cdot 4k\cdot 2k}=\frac{11}{16}$$

답 $\frac{11}{16}$

**6** 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{(\sqrt{2})^2+4^2-(\sqrt{10})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0°<A<180°$이므로 $A=45°$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 $R$라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{10}}{\sin 45°}=2R$$

$$\therefore R=\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

**7** $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$이므로 이것을 $a\cos B-b\cos A=c$에 대입하면

$$a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$$

$$\frac{a^2+c^2-b^2-b^2-c^2+a^2}{2c}=c$$

$$2a^2-2b^2=2c^2 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 $\triangle$ABC는 $\angle$A$=90°$인 직각삼각형이다.

답 $\angle$A$=90°$인 직각삼각형

**8** $\tan B\sin^2 C=\tan C\sin^2 B$에서

$$\frac{\sin B}{\cos B}\cdot\sin^2 C=\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\sin^2 B$$

$$\frac{\sin C}{\cos B}=\frac{\sin B}{\cos C}$$

$$\therefore \sin C\cos C=\sin B\cos B \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 $R$라 하면

$$\sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{c}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$c^2(a^2+b^2-c^2)=b^2(a^2+c^2-b^2)$$

$$a^2c^2+b^2c^2-c^4=a^2b^2+b^2c^2-b^4$$

$$a^2b^2-a^2c^2-b^4+c^4=0$$

$$a^2(b^2-c^2)-(b^2+c^2)(b^2-c^2)=0$$

$$(b^2-c^2)(a^2-b^2-c^2)=0$$

$$\therefore (b+c)(b-c)(a^2-b^2-c^2)=0$$

그런데 $b+c>0$이므로

$$b-c=0 \text{ 또는 } a^2-b^2-c^2=0$$

$$\therefore b=c \text{ 또는 } a^2=b^2+c^2$$

따라서 $\triangle$ABC는 $b=c$인 이등변삼각형 또는 $\angle$A$=90°$인 직각삼각형이다.

답 $b=c$인 이등변삼각형 또는 $\angle$A$=90°$인 직각삼각형

## 03 삼각형의 넓이

**확인** 본책 145~146쪽

**1** (1) $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\sin 30°=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=5$

(2) $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sin 120°=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{27}{2}$

답 (1) 5 (2) $\frac{27}{2}$

**2** (1) 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{(2\sqrt{2})^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0°<A<180°$이므로 $A=45°$

$$\therefore \sin A=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $S=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}=3$

답 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) 3

**3** (1) 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형 ABCD는 평행사변형이므로 구하는 넓이는

$$3\cdot 4\cdot \sin 45°=3\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$$

(2) $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot \sin 60°=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$

답 (1) $6\sqrt{2}$ (2) $12\sqrt{3}$

라이트 UP

**평행사변형의 성질**
① 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
② 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
③ 두 대각선은 서로를 이등분한다.

**4** $S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot \sin 30°=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot \frac{1}{2}=6$ 답 6

## 유제

본책 147~148쪽

**1** $A+B+C=180°$이므로

$C=180°-(76°+40°)=64°$

사인법칙에 의하여

$\frac{b}{\sin 40°}=\frac{45}{\sin 64°}$, $b\sin 64°=45\sin 40°$

$0.90\times b=45\times 0.64$ $\therefore b=32$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times 45\times 32\times \sin 76°$

$=\frac{1}{2}\times 45\times 32\times 0.97$

$=698.4$ 답 698.4

**2** 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{6^2+3^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 3}=-\frac{1}{9}$

$\sin A>0$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot \frac{4\sqrt{5}}{9}=4\sqrt{5}$ 답 $4\sqrt{5}$

**3** △ABC에서 $\overline{AC}=x\,(x>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$x^2=6^2+10^2-2\cdot 6\cdot 10\cdot \cos 120°$

$=36+100-2\cdot 6\cdot 10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=196$

$x>0$이므로 $x=14$

△ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos D=\frac{12^2+10^2-14^2}{2\cdot 12\cdot 10}=\frac{1}{5}$

$\sin D>0$이므로

$\sin D=\sqrt{1-\cos^2 D}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\therefore S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot \sin 120°+\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 10\cdot \sin D$

$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 10\cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$=15\sqrt{3}+24\sqrt{6}$ 답 $15\sqrt{3}+24\sqrt{6}$

## 중단원 연습 문제

본책 149~152쪽

**01** 105° **02** ⑤ **03** ③ **04** $\frac{3}{8}$ **05** $50\sqrt{6}$ m
**06** 54.4 m **07** 120° **08** ③ **09** $\frac{\sqrt{21}}{3}$ **10** 50
**11** ② **12** ② **13** $10\sqrt{19}$ cm **14** $\frac{12}{5}$
**15** $9(3+\sqrt{3})$ **16** $\sqrt{3}+1$ **17** ④ **18** $\frac{21\sqrt{3}}{4}$
**19** ④ **20** $\frac{9}{4}$ **21** $8\sqrt{2}$ m **22** $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ **23** ⑤
**24** 103 **25** $5\sqrt{3}$

**01** 전략 두 변의 길이와 한 대각의 크기가 주어지면 사인법칙을 이용하여 나머지 대각의 크기를 구한다.

풀이 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{2}}{\sin A}=\frac{2}{\sin 45°}$, $\sqrt{2}\sin 45°=2\sin A$

$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sin A$ $\therefore \sin A=\frac{1}{2}$

$0°<A<180°$이므로 $A=30°$ 또는 $A=150°$

그런데 $0°<A+B<180°$이므로 $A=30°$

$\therefore C=180°-(30°+45°)=105°$ 답 105°

**02** 전략 △BCD의 외접원의 반지름의 길이가 5임을 이용한다.

풀이 △BCD의 외접원의 반지름의 길이가 5이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin 120°}=2\cdot 5$

$\therefore \overline{BD}=2\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ 답 ⑤

**03** 전략 $\sin A$의 값을 구한 후 사인법칙을 이용한다.

풀이 $\sin A>0$이므로

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2\cdot 6$$

$$\therefore \overline{BC}=2\cdot 6\cdot \sin A=2\cdot 6\cdot \frac{\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$$

답 ③

**04** 전략 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$임을 이용한다.

풀이 사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=2:3:4$

이므로 $\sin A=2k$, $\sin B=3k$, $\sin C=4k\,(k>0)$라 하면

$$\frac{\sin A\sin B}{\sin^2 C}=\frac{2k\cdot 3k}{(4k)^2}=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

**05** 전략 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 $180°$임을 이용하여 $C$를 구한 후 사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한다.

풀이 $A+B+C=180°$이므로

$C=180°-(60°+75°)=45°$ ···➊

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60°}=\frac{100}{\sin 45°},\qquad \overline{BC}\sin 45°=100\sin 60°$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BC}=100\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \therefore \overline{BC}=50\sqrt{6}$$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $50\sqrt{6}$ m이다. ···➋

답 $50\sqrt{6}$ m

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $C$를 구할 수 있다. | 30% |
| ➋ 두 지점 B, C 사이의 거리를 구할 수 있다. | 70% |

**06** 전략 $\triangle$ABC, $\triangle$BDC에서 각각 사인법칙을 이용한다.

풀이 $\triangle$ABC에서 $\angle$ACB$=58°-40°=18°$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 40°}=\frac{31}{\sin 18°},\qquad \overline{BC}\sin 18°=31\sin 40°$$

$$\overline{BC}\times 0.31=31\times 0.64\qquad \therefore \overline{BC}=64$$

$\triangle$BDC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin 58°}=\frac{64}{\sin 90°},\qquad \overline{CD}\sin 90°=64\sin 58°$$

$$\therefore \overline{CD}=64\times 0.85=54.4$$

따라서 구하는 건물의 높이는 54.4 m이다. 답 54.4 m

**07** 전략 $\triangle$ABC에서 가장 긴 변의 대각이 세 내각 중 크기가 가장 큰 각이므로 코사인법칙을 이용하여 각의 크기를 구한다.

풀이 $a:b:c=3:7:5$이므로

$a=3k,\ b=7k,\ c=5k\,(k>0)$

라 하면 $\triangle$ABC에서 길이가 가장 긴 변의 대각이 세 내각 중 크기가 가장 큰 각이므로 크기가 가장 큰 각은 $\angle$B이다. ···➊

코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{(5k)^2+(3k)^2-(7k)^2}{2\cdot 5k\cdot 3k}=-\frac{1}{2}$$ ···➋

$0°<B<180°$이므로 $B=120°$ ···➌

답 $120°$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $\triangle$ABC에서 크기가 가장 큰 내각을 알 수 있다. | 40% |
| ➋ $\cos B$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ➌ $B$를 구할 수 있다. | 20% |

**08** 전략 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$임을 이용하여 $\triangle$ABC의 세 변의 길이의 비를 구한 후 코사인법칙을 이용한다.

풀이 $2\sin A=\sqrt{3}\sin B=2\sqrt{3}\sin C$에서

$$\sin A:\sin B:\sin C=\frac{1}{2}:\frac{1}{\sqrt{3}}:\frac{1}{2\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{3}:2:1$$

이때 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{3}:2:1$

이므로

$a=\sqrt{3}k,\ b=2k,\ c=k\,(k>0)$

라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{(2k)^2+k^2-(\sqrt{3}k)^2}{2\cdot 2k\cdot k}=\frac{1}{2}$$

$0°<A<180°$이므로 $A=60°$ 답 ③

**09** 전략 $\triangle$ABC에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한 후 사인법칙을 이용한다.

풀이 $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos 60°$$
$$=4+9-12\cdot\frac{1}{2}=7$$

$\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{7}$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 $R$라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin 60°}=2R$$

$\therefore R=\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$이다. 답 $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

**10** 전략 사인법칙과 코사인법칙을 이용한다.

풀이 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$a^2=5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cdot\cos A$

$=25+36-60\cdot\dfrac{3}{5}=25$

$\therefore a=5\,(\because a>0)$

$\sin A>0$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{5}{\sin A}=2R$이므로

$R=\dfrac{5}{\frac{4}{5}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{25}{8}$

$\therefore 16R=50$ 답 50

**11** 전략 출발한 지 10분 후 두 자동차 A, B가 이동한 거리를 구하여 △OAB에서 코사인법칙을 이용한다.

풀이 출발한 지 10분 후, 즉 $\dfrac{1}{6}$시간 후 두 자동차 A, B가 이동한 거리는 각각

$60\cdot\dfrac{1}{6}=10\,(\text{km}),\ 90\cdot\dfrac{1}{6}=15\,(\text{km})$

이때 △OAB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=10^2+15^2-2\cdot10\cdot15\cdot\cos 60°$

$=100+225-300\cdot\dfrac{1}{2}=175$

$\overline{AB}>0$이므로 $\overline{AB}=5\sqrt{7}$

따라서 두 자동차 사이의 거리는 $5\sqrt{7}$ km이다. 답 ②

**12** 전략 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 $R$라 하면

$\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R},$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이것을 $2\sin B\cos C=\sin A+\sin B-\sin C$에 대입하면

$2\cdot\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}-\dfrac{c}{2R}$

$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a}=a+b-c$

$a^2+b^2-c^2=a^2+ab-ac$

$b^2-c^2-ab+ac=0$

$(b+c)(b-c)-a(b-c)=0$

$(b-c)(b+c-a)=0$

이때 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로

$b+c-a>0$

즉 $b-c=0$이므로 $b=c$

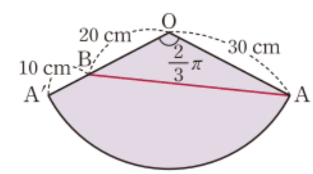
따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다. 답 ②

**13** 전략 옆면의 전개도를 그려 본다.

풀이 원뿔의 전개도에서 밑면인 원의 둘레의 길이와 옆면인 부채꼴의 호의 길이가 같으므로 부채꼴의 중심각의 크기를 $\theta$라 하면

$2\pi\cdot10=30\theta \quad \therefore \theta=\dfrac{2}{3}\pi$ ❶

감은 실의 길이의 최솟값은 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$의 길이와 같다.




$\overline{AB}=x$ cm라 하면 △OAB에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=20^2+30^2-2\cdot20\cdot30\cdot\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$=400+900-1200\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=1900$

$x>0$이므로 $x=10\sqrt{19}$

따라서 감은 실의 길이의 최솟값은 $10\sqrt{19}$ cm이다. ❷

답 $10\sqrt{19}$ cm

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 부채꼴의 중심각의 크기를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ 실의 길이의 최솟값을 구할 수 있다. | 70% |

**14** 전략 $\overline{AD}=x$라 하고 삼각형의 넓이를 이용한다.

풀이 $\overline{AD}=x$라 하면

△ABC=△ABD+△ACD

이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\sin120°=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot x\cdot\sin60°+\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot x\cdot\sin60°$

$24\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+4x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$10x=24 \quad \therefore x=\dfrac{12}{5}$

답 $\dfrac{12}{5}$

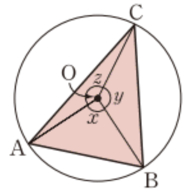
**15** 전략 한 원에서 부채꼴의 중심각의 크기는 호의 길이에 정비례함을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이

$\angle AOB=x$, $\angle BOC=y$,

$\angle COA=z$

라 하면 부채꼴의 중심각의 크기는 호의 길이에 정비례하므로




$x:y:z=3:4:5$

$\therefore\ x=360°\times\frac{3}{12}=90°$

$y=360°\times\frac{4}{12}=120°$

$z=360°\times\frac{5}{12}=150°$

한편 △ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로

$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin90°+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin120°$

$+\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin150°$

$=18\cdot1+18\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+18\cdot\frac{1}{2}$

$=9(3+\sqrt{3})$ 답 $9(3+\sqrt{3})$

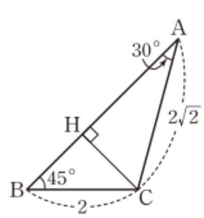
**16** 전략 사인법칙을 이용하여 $a$, $b$의 길이를 구한 후 꼭짓점 C에서 $\overline{AB}$에 수선을 그어 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

풀이 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin30°}=2\cdot2$ $\quad\therefore\ a=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=2$

$\frac{b}{\sin45°}=2\cdot2$ $\quad\therefore\ b=2\cdot2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면




$\overline{AH}=2\sqrt{2}\cos30°$

$=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$

$\overline{BH}=2\cos45°=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$\therefore\ c=\overline{AH}+\overline{BH}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\sin45°=\frac{1}{2}\cdot2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{3}+1$ 답 $\sqrt{3}+1$

**17** 전략 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AD}$의 길이를 구한다.

풀이 $\overline{AD}=x\ (x>0)$라 하면 △ADC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{21})^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\cos30°$

$=9+x^2-6x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$21=9+x^2-3\sqrt{3}x$, $\quad x^2-3\sqrt{3}x-12=0$

$(x+\sqrt{3})(x-4\sqrt{3})=0$ $\quad\therefore\ x=4\sqrt{3}\ (\because\ x>0)$

따라서 △ABC의 넓이는

$\triangle ABD+\triangle ADC$

$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\sqrt{3}\cdot\sin150°+\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\sqrt{3}\cdot\sin30°$

$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}$

$=8\sqrt{3}$ 답 ④

**18** 전략 대각선 AC를 그어 두 개의 삼각형으로 나누어 생각한다.

풀이 □ABCD가 원에 내접하므로

$B+D=180°$ $\quad\therefore\ D=180°-60°=120°$ ···· ❶

□ABCD에서 대각선 AC를 그으면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin60°=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\sin120°=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ···· ❷

따라서 □ABCD의 넓이는

$\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{15\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{21\sqrt{3}}{4}$ ···· ❸

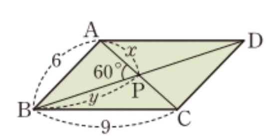
답 $\frac{21\sqrt{3}}{4}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $D$를 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ △ABC, △ACD의 넓이를 각각 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ □ABCD의 넓이를 구할 수 있다. | 20% |

**19** 전략 평행사변형에서 두 대각선에 의하여 나누어진 네 삼각형의 넓이는 모두 같음을 이용한다.

풀이 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD에 의하여 나누어진 네 개의 삼각형의 넓이는 모두 같다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=y$라 하고 평행사변형 ABCD의 넓이를 $S$라 하면




$S=4\triangle ABP=4\cdot\frac{1}{2}xy\sin60°$

$=2xy\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}xy$ ······ ㉠

△ABP에서 코사인법칙에 의하여

$6^2=x^2+y^2-2xy\cos60°$

$36=x^2+y^2-2xy\cdot\frac{1}{2}$

$\therefore 36=x^2+y^2-xy$ ...... ㉡

$\triangle$PBC에서 $\angle$BPC$=120°$이고, $\overline{\text{PC}}=\overline{\text{AP}}=x$이므로 코사인 법칙에 의하여

$$9^2=x^2+y^2-2xy\cos 120°$$

$$81=x^2+y^2-2xy\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore 81=x^2+y^2+xy$ ...... ㉢

㉢$-$㉡을 하면 $45=2xy$ $\therefore xy=\frac{45}{2}$

$xy=\frac{45}{2}$를 ㉠에 대입하면 구하는 평행사변형의 넓이는

$$\sqrt{3}\cdot\frac{45}{2}=\frac{45\sqrt{3}}{2}$$

답 ④

**20** 전략 $\angle$ADB$=\theta$라 하고 $\triangle$ABD와 $\triangle$ACD에서 사인법칙을 이용하여 $\overline{\text{BD}}$, $\overline{\text{CD}}$의 길이를 각각 $\theta$로 나타낸다.

풀이 $\sin\alpha=3k$, $\sin\beta=2k\,(k>0)$, $\angle$ADB$=\theta$라 하면

$\triangle$ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{BD}}}{\sin\alpha}=\frac{9}{\sin\theta},\quad \overline{\text{BD}}\sin\theta=9\sin\alpha$$

$$\therefore \overline{\text{BD}}=\frac{9\sin\alpha}{\sin\theta}=\frac{27k}{\sin\theta}$$

$\triangle$ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{CD}}}{\sin\beta}=\frac{6}{\sin(180°-\theta)},\quad \overline{\text{CD}}\sin(180°-\theta)=6\sin\beta$$

$$\therefore \overline{\text{CD}}=\frac{6\sin\beta}{\sin(180°-\theta)}=\frac{12k}{\sin\theta}$$

$$\therefore \frac{\overline{\text{BD}}}{\overline{\text{CD}}}=\frac{\frac{27k}{\sin\theta}}{\frac{12k}{\sin\theta}}=\frac{9}{4}$$

답 $\frac{9}{4}$

**21** 전략 $\triangle$PBQ에서 사인법칙을 이용하여 $\overline{\text{PB}}$의 길이를 구한 후 $\triangle$ABP에서 $\overline{\text{AB}}$의 길이를 구한다.

풀이 $\triangle$PBQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{PB}}}{\sin 45°}=\frac{24}{\sin 60°},\quad \overline{\text{PB}}\sin 60°=24\sin 45°$$

$$\overline{\text{PB}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=24\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \therefore \overline{\text{PB}}=8\sqrt{6}$$

$\triangle$ABP에서

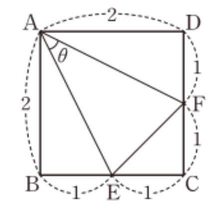
$$\overline{\text{AB}}=\overline{\text{PB}}\tan 30°=8\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{2}$$

따라서 건물의 높이는 $8\sqrt{2}$ m이다.

답 $8\sqrt{2}$ m

**22** 전략 $\angle$EAF$=\theta$라 하고 $\triangle$AEF에서 코사인법칙을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 먼저 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서




$$\overline{\text{AE}}=\overline{\text{AF}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$\overline{\text{EF}}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$\triangle$AEF에서 $\angle$EAF$=\theta$라 하면 코사인 법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

$\sin\theta>0$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

$\triangle$AEF의 외접원의 반지름의 길이를 $R$라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}=2R$$

$$\therefore R=\frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{5}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$$

답 $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

**23** 전략 $\angle$BCA$=\theta$라 하고 $\triangle$ABC에서 코사인법칙을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 먼저 구한다.

풀이 $\triangle$ABC에서 $\angle$BCA$=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{7^2+4^2-5^2}{2\cdot7\cdot4}=\frac{5}{7}$$

$\sin\theta>0$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

또 $\angle$DCE$=360°-90°-90°-\theta=180°-\theta$이므로

$$\triangle\text{CDE}=\frac{1}{2}\cdot7\cdot4\cdot\sin(180°-\theta)=14\sin\theta$$

$$=14\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}=4\sqrt{6}$$

답 ⑤

**24** 전략 $\triangle$ABC의 넓이를 이용하여 $\overline{\text{PF}}$의 길이를 먼저 구한다.

풀이 $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot5}=\frac{3}{4}$$

$\sin A>0$이므로

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$\overline{\text{PF}}=x$라 하면 $\triangle$ABC의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{2}\left(6\cdot x+4\cdot\sqrt{7}+5\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

$$\frac{15\sqrt{7}}{2}=6x+\frac{13\sqrt{7}}{2},\quad 6x=\sqrt{7}$$

$$\therefore x=\frac{\sqrt{7}}{6}$$

따라서 $\triangle$EFP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{6}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\sin(180°-A)=\frac{7}{24}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{7\sqrt{7}}{96}$$

이므로 $p=96$, $q=7$

$\therefore\ p+q=103$ 답 103

**25** 전략 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$라 하면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(180°-60°)=\frac{a^2+b^2-6^2}{2ab}$$

$$-\frac{1}{2}=\frac{a^2+b^2-36}{2ab}$$

$\therefore\ a^2+b^2-36=-ab$ …… ㉠ ··· ❶

$\overline{AD}=\overline{BC}=b$이므로 △ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 60°=\frac{a^2+b^2-4^2}{2ab}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{a^2+b^2-16}{2ab}$$

$\therefore\ a^2+b^2-16=ab$ …… ㉡ ··· ❷

㉡－㉠을 하면 $20=2ab$ $\therefore\ ab=10$ ··· ❸

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$ab\sin 60°=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ ··· ❹

답 $5\sqrt{3}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ △ABC에서 $a$, $b$ 사이의 관계를 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ △ABD에서 $a$, $b$ 사이의 관계를 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❸ $ab$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ❹ 평행사변형 ABCD의 넓이를 구할 수 있다. | 20% |

Ⅳ. 수열

# 08 등차수열

## 01 등차수열

확인 본책 154~156쪽

**1** (1) $a_n=2^n+1$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례대로 대입하면

$a_1=2^1+1=3$, $a_2=2^2+1=5$,

$a_3=2^3+1=9$, $a_4=2^4+1=17$

(2) $a_n=n^2+n$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례대로 대입하면

$a_1=1^2+1=2$, $a_2=2^2+2=6$,

$a_3=3^2+3=12$, $a_4=4^2+4=20$

답 (1) $a_1=3$, $a_2=5$, $a_3=9$, $a_4=17$
(2) $a_1=2$, $a_2=6$, $a_3=12$, $a_4=20$

**2** (1) $a_1=-1=(-1)^1$, $a_2=1=(-1)^2$, $a_3=-1=(-1)^3$,

$a_4=1=(-1)^4$, …이므로 $a_n=(-1)^n$

(2) $a_1=3=2\cdot 4+1$, $a_2=5=2\cdot 2+1$, $a_3=7=2\cdot 3+1$,

$a_4=9=2\cdot 4+1$, …이므로 $a_n=2n+1$

(3) $a_1=9=10^1-1$, $a_2=99=10^2-1$, $a_3=999=10^3-1$,

$a_4=9999=10^4-1$, …이므로 $a_n=10^n-1$

(4) $a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$, $a_2=\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1}$, $a_3=\frac{3}{4}=\frac{3}{3+1}$,

$a_4=\frac{4}{5}=\frac{4}{4+1}$, …이므로 $a_n=\frac{n}{n+1}$

답 (1) $a_n=(-1)^n$ (2) $a_n=2n+1$
(3) $a_n=10^n-1$ (4) $a_n=\frac{n}{n+1}$

**3** (1) $a_n=-1+(n-1)\cdot 4=4n-5$

(2) $a_n=3+(n-1)\cdot(-3)=-3n+6$

(3) 첫째항이 18, 공차가 $13-18=-5$이므로

$a_n=18+(n-1)\cdot(-5)=-5n+23$

(4) 첫째항이 $-9$, 공차가 $-3-(-9)=6$이므로

$a_n=-9+(n-1)\cdot 6=6n-15$

답 (1) $a_n=4n-5$ (2) $a_n=-3n+6$
(3) $a_n=-5n+23$ (4) $a_n=6n-15$

**4** 첫째항이 11, 공차가 $-2$이므로

$a_n=11+(n-1)\cdot(-2)=-2n+13$

$\therefore\ a_7=-2\cdot 7+13=-1$ 답 $-1$

**5** (1) $x$는 5와 $-9$의 등차중항이므로

$$x=\frac{5+(-9)}{2}=-2$$

(2) $2x$는 $-3$과 $x$의 등차중항이므로

$2x=\frac{-3+x}{2}$, $4x=-3+x$

$3x=-3$ $\therefore x=-1$

답 (1) $-2$ (2) $-1$

**6** (1) $x$는 1과 11의 등차중항이므로

$x=\frac{1+11}{2}=6$

또 11은 $x$와 $y$의 등차중항이므로

$11=\frac{x+y}{2}=\frac{6+y}{2}$

$6+y=22$ $\therefore y=16$

(2) $x$는 2와 $-4$의 등차중항이므로

$x=\frac{2+(-4)}{2}=-1$

또 $-4$는 $x$와 $y$의 등차중항이므로

$-4=\frac{x+y}{2}=\frac{-1+y}{2}$

$-1+y=-8$ $\therefore y=-7$

답 (1) $x=6$, $y=16$ (2) $x=-1$, $y=-7$

유제 본책 157~160쪽

**1** (1) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$a_4=26$에서 $a+3d=26$ ...... ㉠

$a_7=50$에서 $a+6d=50$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=8$

$\therefore a_n=2+(n-1)\cdot 8=8n-6$

(2) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$a_3+a_9=40$에서 $(a+2d)+(a+8d)=40$

$2a+10d=40$ $\therefore a+5d=20$ ...... ㉠

$a_7+a_{10}=70$에서 $(a+6d)+(a+9d)=70$

$2a+15d=70$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-10$, $d=6$

$\therefore a_n=-10+(n-1)\cdot 6=6n-16$

답 (1) $a_n=8n-6$ (2) $a_n=6n-16$

**2** 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하자.

$|a_3|=|a_7|$이고 $a_3\neq a_7$이므로

$a_3+a_7=0$, $(a+2d)+(a+6d)=0$

$2a+8d=0$ $\therefore a+4d=0$ ...... ㉠

또 $a_9=-12$이므로 $a+8d=-12$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=12$, $d=-3$

$\therefore a_n=12+(n-1)\cdot(-3)=-3n+15$

답 $a_n=-3n+15$

**3** 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$a_3=8$에서 $a+2d=8$ ...... ㉠

$a_6=-4$에서 $a+5d=-4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=16$, $d=-4$

$\therefore a_n=16+(n-1)\cdot(-4)=-4n+20$

$-100$을 제$k$항이라 하면

$-4k+20=-100$, $-4k=-120$

$\therefore k=30$

따라서 $-100$은 제30항이다.

답 제30항

**4** 주어진 등차수열의 일반항을 $a_n$이라 하면 첫째항이 46, 공차가 $-3$이므로

$a_n=46+(n-1)\cdot(-3)=-3n+49$

$-3n+49<0$에서 $3n>49$

$\therefore n>\frac{49}{3}=16.3\cdots$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제17항이다.

답 제17항

**5** 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$a_7=2a_5$에서 $a+6d=2(a+4d)$

$\therefore a+2d=0$ ...... ㉠

$a_3+a_9=12$에서 $(a+2d)+(a+8d)=12$

$2a+10d=12$ $\therefore a+5d=6$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $d=2$

$\therefore a_n=-4+(n-1)\cdot 2=2n-6$

$2n-6>50$에서 $2n>56$ $\therefore n>28$

따라서 처음으로 50보다 커지는 항은 제29항이다.

답 제29항

**6** 주어진 등차수열의 공차를 $d$라 하면 첫째항이 2, 제10항이 20이므로

$2+9d=20$, $9d=18$ $\therefore d=2$

답 2

**7** 주어진 등차수열의 공차를 $d$라 하면 첫째항이 1, 제12항이 45이므로

$1+11d=45$, $11d=44$ $\therefore d=4$

이때 $x_7$은 주어진 수열의 제8항이므로

$x_7=1+(8-1)\cdot 4=29$

답 29

**8** 첫째항이 7, 공차가 $-3$인 등차수열의 제$(n+2)$항이 $-41$이므로

$7+(n+1)\cdot(-3)=-41$

$-3n=-45$ $\therefore n=15$

답 15

**9** 세 수 $a$, $a^2$, 15가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a^2=\frac{a+15}{2}$, $\quad 2a^2-a-15=0$

$(2a+5)(a-3)=0 \quad \therefore a=3\ (\because a>0)$

세 수 $b$, $2a$, 8, 즉 $b$, 6, 8도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$6=\frac{b+8}{2} \quad \therefore b=4$

$\therefore a+b=7$ 답 7

**10** 등차수열을 이루는 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 놓으면

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=-4$ … ㉠

$(a-3d)(a+3d)=-35$ … ㉡

㉠에서 $\quad 4a=-4 \quad \therefore a=-1$

㉡에서 $a^2-9d^2=-35$이므로 $a=-1$을 대입하면

$1-9d^2=-35$, $\quad d^2=4 \quad \therefore d=\pm 2$

따라서 네 수 중 가장 작은 수는 $-7$이다. 답 $-7$

참고 등차수열을 이루는 네 수를 $a$, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$로 놓을 수도 있지만 네 수의 합이 주어지는 경우에는 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 놓아야 $d$가 소거되어 $a$의 값을 쉽게 구할 수 있다.

## 02 등차수열의 합

### 확인

본책 161~162쪽

**1** (1) $\frac{10(2+12)}{2}=70$

(2) $\frac{10\{2\cdot 8+(10-1)\cdot(-3)\}}{2}=-55$

답 (1) 70 (2) $-55$

**2** 주어진 등차수열의 첫째항이 $-6$, 공차가 $-2-(-6)=4$이므로 구하는 합은

$\frac{14\{2\cdot(-6)+(14-1)\cdot 4\}}{2}=280$ 답 280

**3** (1) (i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=2\cdot 1^2+1=3$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n&=S_n-S_{n-1}\\ &=2n^2+n-\{2(n-1)^2+(n-1)\}\\ &=2n^2+n-(2n^2-3n+1)\\ &=4n-1 \qquad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-1$

(2) (i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=1^2-2\cdot 1+1=0$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n&=S_n-S_{n-1}\\ &=n^2-2n+1-\{(n-1)^2-2(n-1)+1\}\\ &=n^2-2n+1-(n^2-4n+4)\\ &=2n-3 \qquad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

이때 $a_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=0$, $a_n=2n-3\ (n\geq 2)$

답 (1) $a_n=4n-1$ (2) $a_1=0$, $a_n=2n-3\ (n\geq 2)$

### 유제

본책 163~166쪽

**1** (1) 5, 11, 17, …은 첫째항이 5, 공차가 $11-5=6$인 등차수열이므로 이 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=5+(n-1)\cdot 6=6n-1$

71을 제$k$항이라 하면

$71=6k-1$, $\quad 6k=72$

$\therefore k=12$

따라서 주어진 합은 첫째항이 5, 제12항이 71인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합이므로

$5+11+17+\cdots+71=\frac{12(5+71)}{2}=456$

(2) 30, 26, 22, …는 첫째항이 30, 공차가 $26-30=-4$인 등차수열이므로 이 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=30+(n-1)\cdot(-4)=-4n+34$

$-10$을 제$k$항이라 하면

$-10=-4k+34$, $\quad 4k=44$

$\therefore k=11$

따라서 주어진 합은 첫째항이 30, 제11항이 $-10$인 등차수열의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$30+26+22+\cdots+(-10)=\frac{11\{30+(-10)\}}{2}=110$

답 (1) 456 (2) 110

**2** (1) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$S_3=-27$에서 $\quad \frac{3\{a+(a+2d)\}}{2}=-27$

$\therefore a+d=-9 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$S_{10}=15$에서 $\quad \frac{10\{a+(a+9d)\}}{2}=15$

$\therefore 2a+9d=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-12$, $d=3$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $-12$, 공차는 3이다.

(2) $S_{20}=\dfrac{20\{2\cdot(-12)+(20-1)\cdot 3\}}{2}=330$

답 (1) 첫째항: $-12$, 공차: $3$ (2) $330$

**3** 첫째항이 $-5$, 제$(n+2)$항이 100인 등차수열의 첫째항부터 제$(n+2)$항까지의 합이 760이므로

$\dfrac{(n+2)(-5+100)}{2}=760$, $n+2=16$

$\therefore n=14$

이 수열의 공차를 $d$라 하면 제16항이 100이므로

$-5+15d=100$, $15d=105$

$\therefore d=7$ 답 7

**4** 주어진 등차수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=-42+(n-1)\cdot 8=8n-50$

$8n-50>0$에서 $n>\dfrac{25}{4}=6.25$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소이다.

따라서 최솟값은

$\dfrac{6\{2\cdot(-42)+(6-1)\cdot 8\}}{2}=-132$

답 제6항, $-132$

**5** 주어진 등차수열의 공차를 $d$라 하고 일반항을 $a_n$이라 하면 첫째항이 50, 제5항이 26이므로

$50+4d=26$, $4d=-24$ $\therefore d=-6$

$\therefore a_n=50+(n-1)\cdot(-6)=-6n+56$

$-6n+56<0$에서 $n>\dfrac{28}{3}=9.3\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제10항부터 음수이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최대이다.

따라서 $S_n$의 최댓값은

$S_9=\dfrac{9\{2\cdot 50+(9-1)\cdot(-6)\}}{2}=234$ 답 234

**6** 주어진 등차수열의 공차를 $d$라 하고 일반항을 $a_n$이라 하면 첫째항부터 제5항까지의 합이 $-145$이므로

$\dfrac{5\{2\cdot(-33)+(5-1)d\}}{2}=-145$

$-33+2d=-29$, $2d=4$ $\therefore d=2$

$\therefore a_n=-33+(n-1)\cdot 2=2n-35$

$2n-35>0$에서 $n>\dfrac{35}{2}=17.5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제18항부터 양수이므로 첫째항부터 제17항까지의 합이 최소이다.

따라서 최솟값은

$\dfrac{17\{2\cdot(-33)+(17-1)\cdot 2\}}{2}=-289$

이므로 $n=17$, $S=-289$

$\therefore n+S=-272$ 답 $-272$

**7** 100 이하의 자연수 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 5인 수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

5, 12, 19, ⋯, 96

이므로 첫째항이 5, 공차가 7인 등차수열이다.

이 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=5+(n-1)\cdot 7=7n-2$

이때 $7n-2=96$에서 $n=14$이므로 96은 제14항이다.

따라서 구하는 합은 $\dfrac{14(5+96)}{2}=707$ 답 707

**8** 100과 200 사이에 있는 자연수 중에서 6의 배수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

102, 108, 114, ⋯, 198

이므로 첫째항이 102, 공차가 6인 등차수열이다.

이 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=102+(n-1)\cdot 6=6n+96$

이때 $6n+96=198$에서 $n=17$이므로 198은 제17항이다.

따라서 구하는 합은 $\dfrac{17(102+198)}{2}=2550$ 답 2550

**9** 80 이하의 자연수 중에서 5의 배수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

5, 10, 15, ⋯, 80

이므로 이 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=5n$

이때 $5n=80$에서 $n=16$이므로 80은 제16항이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제16항까지의 합은

$\dfrac{16(5+80)}{2}=680$ ⋯⋯ ㉠

80 이하의 자연수 중에서 7의 배수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

7, 14, 21, ⋯, 77

이므로 이 수열의 일반항을 $b_n$이라 하면

$b_n=7n$

이때 $7n=77$에서 $n=11$이므로 77은 제11항이다.

따라서 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제11항까지의 합은

$\dfrac{11(7+77)}{2}=462$ ⋯⋯ ㉡

한편 5의 배수이면서 7의 배수인 수는 5와 7의 최소공배수인 35의 배수이다.

80 이하의 자연수 중에서 35의 배수는 35, 70이므로 이 두 수의 합은

$35+70=105$ …… ㉢

따라서 80 이하의 자연수 중에서 5 또는 7의 배수의 합은

㉠+㉡−㉢$=680+462-105=1037$ 답 1037

**10** $S_n=-2n^2+5n+1$에서

$a_5=S_5-S_4$

$=(-2\cdot5^2+5\cdot5+1)-(-2\cdot4^2+5\cdot4+1)$

$=-24-(-11)=-13$ 답 $-13$

**11** $S_4=36$에서

$k\cdot4^2-7\cdot4=36,\quad 16k=64\quad \therefore k=4$

즉 $S_n=4n^2-7n$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=4\cdot1^2-7\cdot1=-3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=4n^2-7n-\{4(n-1)^2-7(n-1)\}$

$=8n-11$ …… ㉠

이때 $a_1=-3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=8n-11$ 답 $a_n=8n-11$

**12** $S_n=2n^2-3n$, $T_n=n^2+kn$이라 하면

$a_5=S_5-S_4=(2\cdot5^2-3\cdot5)-(2\cdot4^2-3\cdot4)$

$=35-20=15$

$b_5=T_5-T_4=(5^2+5k)-(4^2+4k)$

$=k+9$

이때 $a_5=b_5$이므로

$15=k+9\quad \therefore k=6$ 답 6

## 중단원 연습 문제

본책 167~169쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ⑤ | 02 ① | 03 −39 | 04 27 | 05 ③ |
| 06 ③ | 07 8 | 08 12 | 09 ③ | |
| 10 $a_n=\dfrac{6}{7-n}$ | | 11 −60 | 12 ③ | 13 ② |
| 14 532 | 15 ① | 16 32 | 17 570 | 18 제13항 |
| 19 26 | 20 24 | 21 ① | 22 4 | 23 ② |

**01** 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$로 놓고 연립방정식을 세운다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$a_2=7$에서 $a+d=7$ …… ㉠

$a_6=23$에서 $a+5d=23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ d=4$

$\therefore a_n=3+(n-1)\cdot4=4n-1$

$\therefore a_{10}=4\cdot10-1=39$ 답 ⑤

**02** 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$로 놓고 연립방정식을 세운다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d\ (d>0)$라 하면 조건 (가)에서

$(a+5d)+(a+7d)=0$

$2a+12d=0\quad \therefore a=-6d$ …… ㉠

조건 (나)에서

$|a+5d|=|a+6d|+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$|-d|=3\quad \therefore d=3\ (\because d>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=-18$

$\therefore a_2=-18+3=-15$ 답 ①

**03** 전략 $a_3+a_{11}=0$임을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$라 하면 공차가 $-3$이므로

$a_3=a+2\cdot(-3)=a-6$

$a_{11}=a+10\cdot(-3)=a-30$

$|a_3|=|a_{11}|$이고 $a_3\ne a_{11}$이므로

$a_3+a_{11}=0$

$(a-6)+(a-30)=0$

$2a=36\quad \therefore a=18$ ··· ❶

따라서 $a_n=18+(n-1)\cdot(-3)=-3n+21$이므로

$a_{20}=-3\cdot20+21=-39$ ··· ❷

답 $-39$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $a_{20}$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**04** 전략 $a_{n+1}-a_n=a+1$임을 이용한다.

풀이 $a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=a_2+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)$

$=(a+a+1)+(a+1)+(a+1)$

$=4a+3$

즉 $4a+3=15$이므로 $4a=12\quad \therefore a=3$

$\therefore a_7=a+6(a+1)=7a+6$

$=7\cdot3+6=27$ 답 27

**05** 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$로 놓고 연립방정식을 세운다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$a_3=-41$에서 $a+2d=-41$ …… ㉠

$a_7-a_5=6$에서 $(a+6d)-(a+4d)=6$

$2d=6$ $\therefore d=3$

$d=3$을 ㉠에 대입하면

$a+2\cdot3=-41$ $\therefore a=-47$

$\therefore a_n=-47+(n-1)\cdot3=3n-50$

$3n-50>0$에서 $n>\frac{50}{3}=16.6\cdots$

따라서 구하는 자연수 $n$의 최솟값은 17이다. 답 ③

**06** 전략 주어진 등차수열의 첫째항이 7, 제$(m+2)$항이 37임을 이용한다.

풀이 첫째항이 7, 공차가 3인 등차수열의 제$(m+2)$항이 37이므로

$7+(m+1)\cdot3=37$

$3m=27$ $\therefore m=9$ 답 ③

**07** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 먼저 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2-9x+5=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=9$, $\alpha\beta=5$

$\alpha+\beta$, $q$, $\alpha\beta$, 즉 9, $q$, 5가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$q=\frac{9+5}{2}=7$

다섯 개의 수 $p$, 9, 7, 5, $r$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$9=\frac{p+7}{2}$, $5=\frac{7+r}{2}$

따라서 $p=11$, $r=3$이므로

$p-r=8$ 답 8

다른 풀이 이차방정식 $x^2-9x+5=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=9$, $\alpha\beta=5$

다섯 개의 수 $p$, 9, $q$, 5, $r$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 $d$라 하면

$5-9=2d$ $\therefore d=-2$

이때 $r-p=4d$이므로

$r-p=4\cdot(-2)=-8$ $\therefore p-r=8$

**08** 전략 세 수 $a$, $b$, $c$가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $b=\frac{a+c}{2}$임을 이용한다.

풀이 세 수 3, $a$, $b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a=\frac{3+b}{2}$ $\therefore b=2a-3$ …… ㉠

세 수 $a^2$, 16, $b$도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$16=\frac{a^2+b}{2}$ $\therefore 32=a^2+b$ …… ㉡ ⋯ ❶

㉠을 ㉡에 대입하면 $32=a^2+2a-3$

$a^2+2a-35=0$, $(a+7)(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a$는 자연수)

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=7$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=12$ ⋯ ❸

답 12

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 등차중항의 성질을 이용하여 연립방정식을 세울 수 있다. | 50% |
| ❷ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**09** 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다

풀이 삼차방정식의 세 근을 $a-d$, $a$, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=-6$

$3a=-6$ $\therefore a=-2$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 $-2$이므로 방정식에 $x=-2$를 대입하면

$(-2)^3+6\cdot(-2)^2+k\cdot(-2)-10=0$

$-2k=-6$ $\therefore k=3$ 답 ③

다른 풀이 삼차방정식의 세 근을 $a-d$, $a$, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=-6$ …… ㉠

$a(a-d)+(a-d)(a+d)+a(a+d)=k$ …… ㉡

$a(a-d)(a+d)=10$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-2$, $d=\pm3$

따라서 세 근은 $-5$, $-2$, 1이므로 ㉡에 대입하면

$k=3$

라이트 UP

**삼차방정식의 근과 계수의 관계**

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$라 할 때,

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

**10** 전략 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 첫째항이 $a$, 공차가 $d$인 등차수열
➡ $\frac{1}{a_n}=a+(n-1)d$

풀이 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 첫째항이 1, 제6항이 $\frac{1}{6}$이므로 공차를 $d$라 하면 $\frac{1}{a_6}=\frac{1}{6}$에서

$1+5d=\frac{1}{6}$, $\quad 5d=-\frac{5}{6}$ $\quad \therefore d=-\frac{1}{6}$ ⋯ ❶

따라서 $\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{7-n}{6}$이므로 ⋯ ❷

$a_n=\frac{6}{7-n}$ ⋯ ❸

답 $a_n=\frac{6}{7-n}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 공차를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다. | 20% |

**11** 전략 첫째항이 $a$, 공차가 $d$인 등차수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합 ➡ $\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$a_4=-15$에서 $\quad a+3d=-15$ ⋯⋯ ㉠

$a_9:a_{14}=1:5$에서 $\quad 5a_9=a_{14}$, $\quad 5(a+8d)=a+13d$

$\therefore 4a+27d=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-27$, $d=4$

$\therefore S_{12}=\frac{12\{2\cdot(-27)+(12-1)\cdot 4\}}{2}=-60$ 답 $-60$

**12** 전략 첫째항이 $a$, 제$n$항이 $l$인 등차수열의 합 ➡ $\frac{n(a+l)}{2}$

풀이 첫째항이 $-20$, 제$n$항이 10인 등차수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이 $-105$이므로

$\frac{n(-20+10)}{2}=-105$, $\quad -5n=-105$

$\therefore n=21$

즉 제21항이 10이므로 공차를 $d$라 하면

$-20+20d=10$, $\quad 20d=30$

$\therefore d=\frac{3}{2}$ 답 ③

**13** 전략 $S_n$의 최댓값은 음이 아닌 항을 모두 더한 값이다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$a_4=11$에서 $\quad a+3d=11$ ⋯⋯ ㉠

$a_9=-24$에서 $\quad a+8d=-24$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=32$, $d=-7$

$\therefore a_n=32+(n-1)\cdot(-7)=-7n+39$

$-7n+39<0$에서 $\quad n>\frac{39}{7}=5.5\cdots$

따라서 처음으로 음수가 나오는 항은 제6항이므로 $n=5$일 때 $S_n$이 최대가 된다. 답 ②

**14** 전략 나머지가 같은 자연수 ➡ 작은 수부터 순서대로 나열하면 등차수열이다.

풀이 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23,
26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, ⋯ ⋯⋯ ㉠

5로 나누었을 때의 나머지가 4인 수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, ⋯ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 공통인 수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

14, 29, 44, ⋯

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 14, 공차가 15인 등차수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{8\{2\cdot 14+(8-1)\cdot 15\}}{2}=532$ 답 532

다른 풀이 3으로 나누었을 때의 나머지가 2이고, 5로 나누었을 때의 나머지가 4인 수를 $x$라 하면 $x+1$은 3과 5의 공배수이다. 이때 3과 5의 최소공배수는 15이므로

$x+1=15, 30, 45, \cdots$

$\therefore x=14, 29, 44, \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 14, 공차가 15인 등차수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{8\{2\cdot 14+(8-1)\cdot 15\}}{2}=532$

**15** 전략 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$임을 이용한다.

풀이 첫째항이 6이고 공차가 $d$이므로

$a_8-a_6=2d$,

$S_8-S_6=a_8+a_7=(6+7d)+(6+6d)=13d+12$

$\frac{a_8-a_6}{S_8-S_6}=2$에서 $\quad \frac{2d}{13d+12}=2$

$d=13d+12$, $\quad -12d=12$ $\quad \therefore d=-1$ 답 ①

**16** 전략 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$임을 이용한다.

풀이 $S_n=2n^2+n-2$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\cdot 1^2+1-2=1$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=2n^2+n-2-\{2(n-1)^2+(n-1)-2\}$$
$$=4n-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=1,\ a_n=4n-1\,(n\geq 2)$ ··· ❶

$a_k=123$에서 $\quad 4k-1=123$

$4k=124 \qquad \therefore k=31$ ··· ❷

$\therefore a+k=32$ ··· ❸

답 32

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $k$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $a+k$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**17** 전략 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}=S_{20}-S_{10}$임을 이용한다.

풀이 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$

$=S_{20}-S_{10}$

$=(2\cdot 20^2-3\cdot 20)-(2\cdot 10^2-3\cdot 10)$

$=740-170$

$=570$

답 570

**18** 전략 두 집합 $A$, $B$를 원소나열법으로 나타내어 공통인 원소를 찾는다.

풀이 $A=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ \cdots\}$,

$B=\{2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ \cdots\}$

이므로

$A\cap B=\{7,\ 17,\ 27,\ \cdots\}$ ··· ❶

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 7, 공차가 10인 등차수열이므로

$a_n=7+(n-1)\cdot 10=10n-3$ ··· ❷

$10n-3>123$에서 $\qquad 10n>126$

$\therefore n>12.6$

따라서 수열 $\{a_n\}$이 처음으로 123보다 커지는 항은 제13항이다. ··· ❸

답 제13항

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ 처음으로 123보다 커지는 항이 제몇 항인지 구할 수 있다. | 30% |

**19** 전략 $A=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}$, $B=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}$으로 놓고 $A+B=32$임을 이용한다.

풀이 $A=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}$, $B=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}$이라 하면

$A+B=32$ ······ ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$$B-A=(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})$$
$$=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{20}-a_{19})$$
$$=10\cdot 2=20 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$A=6,\ B=26$

$\therefore B=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=26$

답 26

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$라 하면 공차가 2이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=32$

$a+(a+2)+(a+4)+\cdots+(a+38)=32$

$20a+\dfrac{19(2+38)}{2}=32$

$20a=-348 \qquad \therefore a=-\dfrac{87}{5}$

$\therefore a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}$

$=(a+2)+(a+6)+(a+10)+\cdots+(a+38)$

$=10a+\dfrac{10(2+38)}{2}$

$=10a+200$

$=10\cdot\left(-\dfrac{87}{5}\right)+200$

$=26$

**20** 전략 $x=\dfrac{4+y}{2}$, $y=\dfrac{x+z}{2}$임을 이용하여 주어진 조건을 한 문자에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 세 수 4, $x$, $y$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$x=\dfrac{4+y}{2} \qquad \therefore y=2x-4$ ······ ㉠

세 수 $x$, $y$, $z$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$y=\dfrac{x+z}{2} \qquad \therefore z=2y-x$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$z=2(2x-4)-x=3x-8$ ······ ㉢

㉠, ㉢을 $2x+y=2z$에 대입하면

$2x+(2x-4)=2(3x-8)$

$4x-4=6x-16$

$2x=12 \qquad \therefore x=6$

따라서 $x=6,\ y=8,\ z=10$이므로

$x+y+z=24$

답 24

다른 풀이 주어진 등차수열의 공차를 $d$라 하면

$x=4+d,\ y=4+2d,\ z=4+3d$

$2x+y=2z$에서

$$2(4+d)+(4+2d)=2(4+3d)$$
$$8+2d+4+2d=8+6d$$
$$2d=4 \qquad \therefore d=2$$

따라서 $x=6$, $y=8$, $z=10$이므로

$$x+y+z=24$$

**21** 전략 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 일반항 $a_n$을 먼저 구한다.

풀이 $S_n=n^2-10n$에서

(i) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=1^2-10\cdot1=-9$$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2-10n-\{(n-1)^2-10(n-1)\}$$
$$=2n-11 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=-9$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2n-11$$

$2n-11<0$에서 $\quad n<\frac{11}{2}=5.5$

따라서 구하는 자연수 $n$은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. 답 ①

**22** 전략 5개의 원기둥의 부피를 작은 것부터 순서대로 $a-2d$, $a-d$, $a$, $a+d$, $a+2d$ $(d>0)$로 놓고 조건에 맞게 식을 세운다.

풀이 5개의 원기둥의 부피가 등차수열을 이루므로 작은 것부터 순서대로

$$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d\ (d>0)$$

라 하자. ⋯➊

5개의 원기둥의 부피의 합은 큰 원기둥의 부피와 같으므로

$$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=\pi r^2\cdot5$$
$$5a=5\pi r^2 \qquad \therefore a=\pi r^2$$

두 번째와 네 번째의 원기둥의 부피의 합이 $32\pi$이므로

$$(a-d)+(a+d)=32\pi, \qquad 2a=32\pi$$
$$\therefore a=16\pi \qquad ⋯➋$$

$16\pi=\pi r^2$에서 $\quad r^2=16$

$$\therefore r=4\ (\because r>0) \qquad ⋯➌$$

답 4

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ 각 원기둥의 부피를 $a-2d$, $a-d$, $a$, $a+d$, $a+2d$로 놓을 수 있다. | 20% |
| ➋ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ➌ $r$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

다른 풀이 밑면의 반지름의 길이가 같은 5개의 원기둥의 부피가 등차수열을 이루므로 높이도 등차수열을 이룬다.

높이가 작은 것부터 순서대로

$$h-2d,\ h-d,\ h,\ h+d,\ h+2d\ (d>0)$$

라 하자.

5개의 원기둥의 높이의 합이 5이므로

$$(h-2d)+(h-d)+h+(h+d)+(h+2d)=5$$
$$5h=5 \qquad \therefore h=1$$

한편 $a_3$은 $a_2$와 $a_4$의 등차중항이므로

$$a_3=\frac{a_2+a_4}{2}=\frac{32\pi}{2}=16\pi$$

따라서 반지름의 길이가 $r$이고 높이가 $h$, 즉 1인 원기둥의 부피가 $16\pi$이므로

$$\pi r^2\cdot1=16\pi, \qquad r^2=16$$
$$\therefore r=4\ (\because r>0)$$

**23** 전략 $a_1+a_{10}=a_2+a_9=a_3+a_8=a_4+a_7$임을 이용하여 $S_{10}$의 값을 구한다.

풀이 $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=12$,

$S_{10}-S_6=a_7+a_8+a_9+a_{10}=28$

이때 $a_1+a_{10}=a_2+a_9=a_3+a_8=a_4+a_7$이므로 $a_1+a_{10}=k$로 놓으면

$$S_4+(S_{10}-S_6)$$
$$=(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_7+a_8+a_9+a_{10})$$
$$=4k=12+28=40$$
$$\therefore k=10$$
$$\therefore S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10\cdot10}{2}=50$$

답 ②

다른 풀이 주어진 등차수열의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$$S_4=\frac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=12$$
$$\therefore 2a+3d=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$S_{10}-S_6=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}-\frac{6\{2a+(6-1)d\}}{2}$$
$$=10a+45d-(6a+15d)$$
$$=4a+30d=28$$
$$\therefore 2a+15d=14 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ d=\frac{2}{3}$

$$\therefore S_{10}=\frac{10\left\{2\cdot2+(10-1)\cdot\frac{2}{3}\right\}}{2}=50$$

# 09 등비수열

## 01 등비수열

### 확인

본책 172~173쪽

**1** (1) $a_n=3\cdot 2^{n-1}$

(2) $a_n=5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

(3) 첫째항이 18, 공비가 $\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$이므로

$a_n=18\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(4) 첫째항이 $-2$, 공비가 $\frac{8}{-2}=-4$이므로

$a_n=-2\cdot(-4)^{n-1}$

답 (1) $a_n=3\cdot 2^{n-1}$ (2) $a_n=5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ (3) $a_n=18\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (4) $a_n=-2\cdot(-4)^{n-1}$

**2** 첫째항이 $-27$, 공비가 $-\frac{1}{3}$이므로

$a_n=-27\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_5=-27\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

$=-27\cdot\frac{1}{81}=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

**3** (1) $x$는 9와 4의 등비중항이므로

$x^2=9\cdot4=36$ $\therefore x=6\ (\because x>0)$

(2) $x$는 5와 8의 등비중항이므로

$x^2=5\cdot8=40$ $\therefore x=2\sqrt{10}\ (\because x>0)$

답 (1) 6 (2) $2\sqrt{10}$

**4** (1) $x$는 2와 32의 등비중항이므로

$x^2=2\cdot32=64$ $\therefore x=8\ (\because x>0)$

또 32는 $x$와 $y$의 등비중항이므로

$32^2=xy=8y$ $\therefore y=128$

(2) $x$는 3과 $\frac{4}{3}$의 등비중항이므로

$x^2=3\cdot\frac{4}{3}=4$ $\therefore x=2\ (\because x>0)$

또 $\frac{4}{3}$는 $x$와 $y$의 등비중항이므로

$\left(\frac{4}{3}\right)^2=xy=2y$ $\therefore y=\frac{8}{9}$

답 (1) $x=8$, $y=128$ (2) $x=2$, $y=\frac{8}{9}$

### 유제

본책 174~179쪽

**1** (1) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_4=32$에서 $ar^3=32$ ······ ㉠

$a_8=2$에서 $ar^7=2$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=\frac{1}{16}$

$\therefore r=\frac{1}{2}\ (\because r>0)$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=32$

$\therefore a=256$

$\therefore a_n=256\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_2+a_3=12$에서 $ar+ar^2=12$

$\therefore ar(1+r)=12$ ······ ㉠

$a_4+a_5=108$에서 $ar^3+ar^4=108$

$\therefore ar^3(1+r)=108$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=9$ $\therefore r=3\ (\because r>0)$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $12a=12$ $\therefore a=1$

$\therefore a_n=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$

답 (1) $a_n=256\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (2) $a_n=3^{n-1}$

**2** 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_2=-2$에서 $ar=-2$ ······ ㉠

$a_4:a_6=9:4$에서 $4a_4=9a_6$

$4ar^3=9ar^5$, $r^2=\frac{4}{9}$ $\therefore r=-\frac{2}{3}\ (\because r<0)$

$r=-\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면 $a\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-2$

$\therefore a=3$

따라서 $a_n=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$이므로

$a_5=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{27}$ 답 $\frac{16}{27}$

**3** 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_3=24$에서 $ar^2=24$ ······ ㉠

$a_5=6$에서 $ar^4=6$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=\frac{1}{4}$

$\therefore r=\frac{1}{2}\ (\because r>0)$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=24$

$\therefore a=96$

$\therefore a_n=96\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{3}{2}$을 제$k$항이라 하면

$96\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{3}{2}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$k-1=6 \quad \therefore k=7$

따라서 $\frac{3}{2}$은 제7항이다. 답 제7항

**4** 주어진 등비수열의 일반항을 $a_n$, 공비를 $r$라 하면 첫째항이 8, 제4항이 $\frac{1}{8}$이므로

$8r^3=\frac{1}{8}, \quad r^3=\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{4}\right)^3$

$\therefore r=\frac{1}{4}$ ($\because$ $r$는 실수)

따라서 $a_n=8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로 $8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<\frac{1}{100}$에서

$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<\frac{1}{800}$

이때 $\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{1024}$이므로

$n-1\geq 5 \quad \therefore n\geq 6$

따라서 처음으로 $\frac{1}{100}$보다 작아지는 항은 제6항이다.

답 제6항

**5** 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_1a_5=4$에서 $\quad a\cdot ar^4=4$

$\therefore a^2r^4=4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a_3a_7=16$에서 $\quad ar^2\cdot ar^6=16$

$\therefore a^2r^8=16 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^4=4$

$\therefore r=\sqrt{2}$ ($\because r>0$)

$r=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면 $\quad a^2\cdot(\sqrt{2})^4=4$

$a^2=1 \quad \therefore a=1$ ($\because a>0$)

$\therefore a_n=1\cdot(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^{n-1}$

$a_m=16$에서 $\quad (\sqrt{2})^{m-1}=16, \quad (\sqrt{2})^{m-1}=(\sqrt{2})^8$

$m-1=8 \quad \therefore m=9$ 답 9

**6** 주어진 등비수열의 공비를 $r$라 하면 첫째항이 $-32$, 제6항이 243이므로

$-32r^5=243, \quad r^5=-\frac{243}{32}=\left(-\frac{3}{2}\right)^5$

$\therefore r=-\frac{3}{2}$ ($\because$ $r$는 실수) 답 $-\frac{3}{2}$

**7** 주어진 등비수열의 공비를 $r$라 하면 첫째항이 8, 제4항이 1000이므로

$8r^3=1000, \quad r^3=125$

$\therefore r=5$ ($\because$ $r$는 실수)

이때 $x$와 $y$는 각각 주어진 수열의 제2항과 제3항이므로

$x=8\cdot 5=40$, $y=8\cdot 5^2=200$

$\therefore xy=8000$ 답 8000

다른 풀이 주어진 등비수열의 공비를 $r$라 하면 $x=8r$, $y=8r^2$이므로

$xy=64r^3$

이때 $8r^3=1000$이므로 $\quad xy=8\cdot 8r^3=8000$

**8** 첫째항이 48, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 제$(n+2)$항이 $\frac{3}{8}$이므로

$48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{3}{8}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$n+1=7 \quad \therefore n=6$ 답 6

**9** $\sin\theta$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\sin\theta\cos\theta \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}+1&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+1\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+1\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}+1\\&=5+1=6\end{aligned}$$

답 6

**10** 세 수 $-4$, $a$, $b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a=\frac{-4+b}{2} \quad \therefore b=2a+4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

세 수 $a$, $b$, 32가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=32a \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2a+4)^2=32a, \quad 4a^2+16a+16=32a$

$a^2-4a+4=0, \quad (a-2)^2=0$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=8$

$\therefore a+b=10$ 답 10

**11** $P(x)=x^2+ax+2a$를 일차식 $x+1$, $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 각각

$P(-1)=1-a+2a=a+1$

$P(1)=1+a+2a=3a+1$

$P(2)=4+2a+2a=4a+4$

따라서 $a+1$, $3a+1$, $4a+4$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(3a+1)^2=(a+1)(4a+4)$

$9a^2+6a+1=4a^2+8a+4$

$5a^2-2a-3=0$, $\quad (5a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=1\,(\because a>0)$ 답 1

**라이트 UP**

**나머지정리**

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 $R$라 하면

$R=P(a)$

**12** 세 실수를 $a$, $ar$, $ar^2$으로 놓으면

$a+ar+ar^2=62$에서 $\quad a(1+r+r^2)=62$ ⋯⋯ ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=1000$에서 $\quad (ar)^3=1000$ ⋯⋯ ㉡

㉡에서 $\quad ar=10 \quad \therefore a=\dfrac{10}{r}$

$a=\dfrac{10}{r}$을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{10}{r}(1+r+r^2)=62$

양변에 $r$를 곱하여 정리하면

$5r^2-26r+5=0$, $\quad (5r-1)(r-5)=0$

$\therefore r=\dfrac{1}{5}$ 또는 $r=5$

$r=\dfrac{1}{5}$일 때 $a=50$, $r=5$일 때 $a=2$이므로 세 실수는

2, 10, 50

따라서 가장 작은 수는 2이다. 답 2

**13** 주어진 삼차방정식의 세 실근을 $a$, $ar$, $ar^2$으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=-k$ ⋯⋯ ㉠

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a=14$ ⋯⋯ ㉡

$a\cdot ar\cdot ar^2=-8$ ⋯⋯ ㉢

㉢에서 $\quad (ar)^3=-8 \quad \therefore ar=-2$

㉡에서 $ar(a+ar+ar^2)=14$이므로 $\quad 2k=14\,(\because$ ㉠$)$

$\therefore k=7$ 답 7

**14** 세 실수를 $a$, $ar$, $ar^2$으로 놓으면

$a+ar+ar^2=9$에서 $\quad a(1+r+r^2)=9$ ⋯⋯ ㉠

$a^2+(ar)^2+(ar^2)^2=189$에서

$a^2+a^2r^2+a^2r^4=189$

$\therefore a^2(1+r^2+r^4)=189$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변을 제곱하면 $\quad a^2(1+r+r^2)^2=81$

$a^2(1+r^2+r^4+2r+2r^2+2r^3)=81$

$a^2(1+r^2+r^4)+2ar\cdot a(1+r+r^2)=81$

$189+2ar\cdot 9=81\,(\because$ ㉠, ㉡$)$

$\therefore ar=-6$

$\therefore a\cdot ar\cdot ar^2=(ar)^3=(-6)^3=-216$ 답 $-216$

**15** 1시간 후의 세균의 수는 $\quad 2\cdot 4$

2시간 후의 세균의 수는 $\quad 2\cdot 4\cdot 4=2\cdot 4^2$

3시간 후의 세균의 수는 $\quad 2\cdot 4^2\cdot 4=2\cdot 4^3$

⋮

$n$시간 후의 세균의 수는 $\quad 2\cdot 4^n$

이때 $k$시간 후에 세균이 2048마리가 된다고 하면

$2\cdot 4^k=2048$, $\quad 4^k=1024=4^5 \quad \therefore k=5$

따라서 처음으로부터 5시간이 지나야 세균이 2048마리가 된다.

답 5시간

**16** 1회 시행 후의 도형의 길이는 $\quad 3\cdot\dfrac{4}{3}$

2회 시행 후의 도형의 길이는 $\quad 3\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{3}=3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$

3회 시행 후의 도형의 길이는 $\quad 3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^2\cdot\dfrac{4}{3}=3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^3$

⋮

$n$회 시행 후의 도형의 길이는 $\quad 3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$

즉 6회 시행 후의 도형의 길이는

$3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^6=3\cdot\dfrac{2^{12}}{3^6}=\dfrac{2^{12}}{3^5}$

따라서 $p=12$, $q=5$이므로 $\quad p+q=17$ 답 17

## 02 등비수열의 합

**확인**

본책 180~182쪽

**1** (1) $\dfrac{-3(2^6-1)}{2-1}=-3\cdot 2^6+3=-189$

(2) $\dfrac{10\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=20\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}=\dfrac{315}{16}$

답 (1) $-189$ (2) $\dfrac{315}{16}$

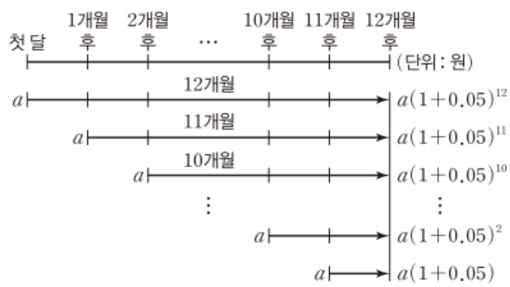
**2** 첫째항이 0.1, 공비가 0.1인 등비수열이므로

$$\frac{0.1\times(1-0.1^{10})}{1-0.1}=\frac{1}{9}(1-0.1^{10})$$

답 $\frac{1}{9}(1-0.1^{10})$

**3** 답 $10(1+0.03)^9$, $10(1+0.03)^8$, $10(1+0.03)$, 1.03, 10, 1751

**4** 매월 초에 $a$원씩 적립한 금액의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.




1년째 말까지 적립금의 원리합계를 $S$원이라 하면

$$S=a(1+0.05)+a(1+0.05)^2+\cdots+a(1+0.05)^{12}$$

$$=\frac{a(1+0.05)(1.05^{12}-1)}{1.05-1}=\frac{a\times1.05(1.8-1)}{0.05}$$

$$=16.8a$$

답 $16.8a$원

**유제** 본책 183~185쪽

**1** (1) 주어진 합은 첫째항이 32, 공비가 $\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$인 등비수열의 합이므로 이 수열의 제$k$항을 $\frac{1}{16}$이라 하면

$$32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{16},\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$k-1=9\quad \therefore k=10$

따라서 첫째항이 32, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$32+16+8+4+\cdots+\frac{1}{16}=\frac{32\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}=\frac{1023}{16}$$

(2) 주어진 합은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$인 등비수열의 합이므로 이 수열의 제$k$항을 $-54\sqrt{3}$이라 하면

$2\cdot(-\sqrt{3})^{k-1}=-54\sqrt{3}$

$(-\sqrt{3})^{k-1}=-27\sqrt{3}=(-\sqrt{3})^7$

$k-1=7\quad \therefore k=8$

따라서 첫째항이 2, 공비가 $-\sqrt{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$$2-2\sqrt{3}+6-6\sqrt{3}+\cdots-54\sqrt{3}=\frac{2\{1-(-\sqrt{3})^8\}}{1-(-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{-160}{1+\sqrt{3}}$$

$$=80(1-\sqrt{3})$$

(3) $\log_2 8+\log_2 8^2+\log_2 8^4+\cdots+\log_2 8^{256}$

$=\log_2 8+2\log_2 8+4\log_2 8+\cdots+256\log_2 8$

$=3+2\cdot3+4\cdot3+\cdots+256\cdot3$

즉 주어진 합은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 합이므로 이 수열의 제$k$항을 $256\cdot3$이라 하면

$3\cdot2^{k-1}=256\cdot3,\quad 2^{k-1}=2^8$

$k-1=8\quad \therefore k=9$

따라서 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제9항까지의 합이므로

$\log_2 8+\log_2 8^2+\log_2 8^4+\cdots+\log_2 8^{256}$

$$=\frac{3(2^9-1)}{2-1}=1533$$

답 (1) $\frac{1023}{16}$ (2) $80(1-\sqrt{3})$ (3) 1533

**2** 주어진 등비수열의 첫째항이 3, 공비가 $\frac{9}{3}=3$이므로

$$S_n=\frac{3(3^n-1)}{3-1}=\frac{3}{2}(3^n-1)$$

$S_k=1092$에서 $\frac{3}{2}(3^k-1)=1092$

$3^k-1=728,\quad 3^k=729=3^6$

$\therefore k=6$

답 6

**3** 주어진 등비수열의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면 첫째항부터 제3항까지의 합이 10이므로

$$\frac{a(r^3-1)}{r-1}=10 \quad\cdots\cdots ㉠$$

첫째항부터 제6항까지의 합이 100이므로

$$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=100$$

$$\therefore \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=100 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $10(r^3+1)=100$

$r^3+1=10\quad \therefore r^3=9$

따라서 첫째항부터 제9항까지의 합은

$$\frac{a(r^9-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^6+r^3+1)}{r-1}$$

$$=10(9^2+9+1)=910$$

답 910

**4** $S_n=5\cdot2^n-5$에서

$a_4=S_4-S_3=(5\cdot2^4-5)-(5\cdot2^3-5)=40$

답 40

**5** $S_n=1-\left(\frac{1}{4}\right)^n$에서

(ⅰ) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

(ⅱ) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}\\&=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\\&=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=\frac{3}{4}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$a_n<\frac{1}{300}$에서 $\quad \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<\frac{1}{300},\qquad \left(\frac{1}{4}\right)^n<\frac{1}{900}$

이때 $\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{1024}$이므로

$$n\ge5$$

따라서 자연수 $n$의 최솟값은 5이다. 답 5

**6** $S_n=2^{n+3}+k$에서

(ⅰ) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=2^4+k=16+k$$

(ⅱ) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=(2^{n+3}+k)-(2^{n+2}+k)\\&=2\cdot2^{n+2}-2^{n+2}=2^{n+2}\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $a_1=16+k$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로

$16+k=2^3\qquad\therefore k=-8$ 답 $-8$

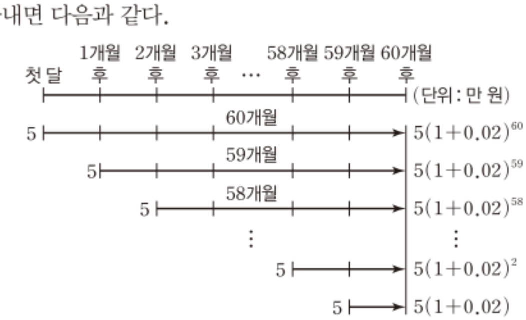
**라이트 UP**

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합 $S_n$이 $S_n=Ar^n+B$ ($A$, $B$는 상수)일 때

① $B=-A$ ➡ 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

② $B\ne-A$ ➡ 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등비수열을 이룬다.

**7** 매월 초에 5만 원씩 적립한 금액의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

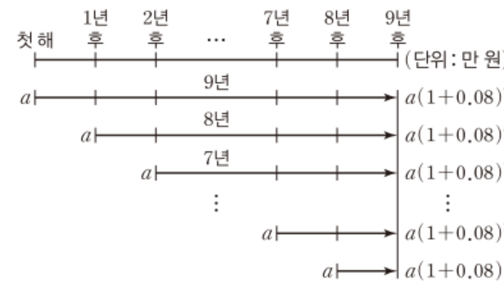



5년째 말까지 적립금의 원리합계를 $S$만 원이라 하면

$$\begin{aligned}S&=5(1+0.02)+5(1+0.02)^2+\cdots+5(1+0.02)^{60}\\&=\frac{5\times1.02(1.02^{60}-1)}{1.02-1}=\frac{5\times1.02(3.28-1)}{0.02}\\&=581.4\end{aligned}$$

따라서 구하는 원리합계는 581만 원이다. 답 581만 원

**8** 매년 초에 적립해야 하는 금액을 $a$만 원이라 하고, 매년 초에 $a$만 원씩 적립한 금액의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.




9년째 말까지 적립금의 원리합계를 $S$만 원이라 하면

$$S=a(1+0.08)+a(1+0.08)^2+\cdots+a(1+0.08)^9$$

이고 이 값이 270만 원이므로

$$\frac{a\times1.08(1.08^9-1)}{1.08-1}=270$$

$$\therefore a=\frac{270\times0.08}{1.08}=20$$

따라서 구하는 금액은 20만 원이다. 답 20만 원

## 중단원 연습 문제

본책 186~188쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ③ | 02 ① | 03 9 | 04 제7항 | 05 63 |
| 06 ② | 07 ② | 08 78 | 09 ③ | 10 20 % |
| 11 153 | 12 6 | 13 ④ | 14 ② | 15 ④ |
| 16 ⑤ | 17 6 | 18 36 | 19 ④ | 20 105 |
| 21 12 | | | | |

**01** 전략 등비수열은 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 2이므로

$a_5=a_3\cdot2^2=12\cdot4=48$ 답 ③

다른 풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$라 하면

$a_3=a\cdot2^2=12\qquad\therefore a=3$

$\therefore a_5=3\cdot2^4=48$

**02** 전략 $a_2a_4a_6a_8$을 첫째항과 공비를 이용하여 나타내어 본다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_5=ar^4=\sqrt{3}$

$\therefore a_2a_4a_6a_8=ar\cdot ar^3\cdot ar^5\cdot ar^7$
$=a^4r^{16}=(ar^4)^4$
$=(\sqrt{3})^4=9$

답 ①

**03** 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_2 : a_5=8 : 1$에서 $8a_5=a_2$

$8ar^4=ar,\quad r^3=\frac{1}{8}$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because$ $r$는 실수) ··· ❶

$a_6=a\left(\frac{1}{2}\right)^5=1$이므로 $a=32$ ··· ❷

따라서 $a_k=32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{8}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^8$

$k-1=8\quad \therefore k=9$ ··· ❸

답 9

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $k$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**04** 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$로 놓고 $\log_a N=x \Longleftrightarrow a^x=N\,(a>0,\ a\neq1,\ N>0)$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$\log_2 a_3=2$에서 $a_3=2^2\quad \therefore ar^2=4$ ······ ㉠

$\log_2 a_5=6$에서 $a_5=2^6\quad \therefore ar^4=64$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=16\quad \therefore r=4$ ($\because r>0$)

$r=4$를 ㉠에 대입하면 $16a=4$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

즉 $a_n=\frac{1}{4}\cdot4^{n-1}$이므로 $\frac{1}{4}\cdot4^{n-1}>1000$에서

$2^{2n-4}>1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$2n-4\geq10\quad \therefore n\geq7$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제7항이다. 답 제7항

**05** 전략 두 수 $x$, $y$ 사이에 3개의 수를 넣어서 만든 등비수열 ➡ 첫째항은 $x$, 제5항은 $y$

풀이 주어진 등비수열의 공비를 $r$라 하면 첫째항이 3, 제5항이 243이므로

$3r^4=243,\quad r^4=81\quad \therefore r=3$ ($\because r>0$)

따라서 $a=9$, $b=27$, $c=81$이므로

$a-b+c=63$

답 63

**06** 전략 세 수 $a$, $b$, $c$가 이 순서대로 등비수열을 이루면 $b^2=ac$가 성립한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$a_1=a,\ a_3=a+2d,\ a_4=a+3d$ ······ ㉠

즉 $a$, $a+2d$, $a+3d$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a+2d)^2=a(a+3d)$

$a^2+4ad+4d^2=a^2+3ad$

$ad+4d^2=0,\quad d(a+4d)=0$

$\therefore a=-4d$ ($\because d\neq0$) ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a_1=-4d,\ a_3=-2d,\ a_4=-d$

따라서 구하는 공비는

$\frac{-2d}{-4d}=\frac{1}{2}$

답 ②

**07** 전략 세 수 $a$, $b$, $c$가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2b=a+c$, 등비수열을 이루면 $b^2=ac$가 성립한다.

풀이 세 항 $a_2$, $a_k$, $a_8$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a_k=a_2+a_8$

$2\{a_1+(k-1)\cdot6\}=(a_1+6)+(a_1+7\cdot6)$

$12k-12=48\quad \therefore k=5$

세 항 $a_1$, $a_2$, $a_5$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

${a_2}^2=a_1a_5$

$(a_1+6)^2=a_1(a_1+4\cdot6)$

${a_1}^2+12a_1+36={a_1}^2+24a_1$

$12a_1=36\quad \therefore a_1=3$

$\therefore k+a_1=8$

답 ②

**08** 전략 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a$, $ar$, $ar^2$으로 놓고 연립방정식을 세운다.

풀이 주어진 등비수열의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하고 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a$, $ar$, $ar^2$이라 하자. ··· ❶

모든 모서리의 길이의 합이 52이므로

$4(a+ar+ar^2)=52$

$\therefore a+ar+ar^2=13$ ··· ❷

직육면체의 부피가 27이므로

$a\cdot ar\cdot ar^2=27,\quad a^3r^3=(ar)^3=27$

$\therefore ar=3$ ··· ❸

09 등비수열

따라서 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned}2(a\cdot ar+a\cdot ar^2+ar\cdot ar^2)&=2(a^2r+a^2r^2+a^2r^3)\\&=2ar(a+ar+ar^2)\\&=2\cdot 3\cdot 13=78\end{aligned}$$ ···➍

답 78

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a$, $ar$, $ar^2$으로 놓을 수 있다. | 10% |
| ❷ 모서리의 길이의 합을 이용하여 식을 세울 수 있다. | 30% |
| ❸ 부피를 이용하여 식을 세울 수 있다. | 30% |
| ❹ 겉넓이를 구할 수 있다. | 30% |

**09** 전략 공을 떨어뜨렸을 때 튀어 오르는 일정한 비율을 먼저 구한다.

풀이 공이 튀어 오르는 비율은 $\frac{1.2}{1.8}=\frac{2}{3}$

공이 $n$번째 튀어 오른 높이를 $a_n$ m라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1.2, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n=1.2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$1.2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{64}{405}$에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^5$

$n-1=5$ $\quad\therefore n=6$

따라서 튀어 오른 높이가 $\frac{64}{405}$ m가 되는 것은 6번째 튀어 올랐을 때이다.

답 ③

**10** 전략 처음 빛의 양이 $a$일 때 그 양이 $r$ % 줄어들면 빛의 양은 $a\left(1-\frac{r}{100}\right)$임을 이용한다.

풀이 처음 빛의 양을 $a$, 빛이 유리를 한 장 통과할 때마다 그 양이 $r$ % 줄어든다고 하면 유리를 $n$장 통과한 후 빛의 양은

$$a\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$$

이때 유리를 6장 통과한 후 빛의 양이 처음 빛의 양보다 36 % 줄어들었으므로

$$a\left(1-\frac{r}{100}\right)^6=a\left(1-\frac{36}{100}\right)$$

$$\left(1-\frac{r}{100}\right)^6=\left(\frac{8}{10}\right)^2,\quad \left(1-\frac{r}{100}\right)^3=\frac{8}{10}$$

$$\therefore \left(1-\frac{r}{100}\right)^3=1-\frac{20}{100}$$

따라서 유리를 3장 통과한 후 빛의 양은

$$a\left(1-\frac{r}{100}\right)^3=a\left(1-\frac{20}{100}\right)$$

이므로 처음 빛의 양보다 20 % 줄어든다.

답 20 %

**11** 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$로 놓고 연립방정식을 세운다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_2+a_4=6$에서

$ar+ar^3=ar(1+r^2)=6$ ······ ㉠

$a_4+a_6=24$에서

$ar^3+ar^5=ar^3(1+r^2)=24$ ······ ㉡ ···➊

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$

$\therefore r=2$ ($\because r>0$)

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $10a=6$

$\therefore a=\frac{3}{5}$ ···➋

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{\frac{3}{5}(2^8-1)}{2-1}=\frac{3}{5}(256-1)=153$$ ···➌

답 153

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$로 놓고 연립방정식을 세울 수 있다. | 20% |
| ❷ $a$, $r$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합을 구할 수 있다. | 50% |

**12** 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$로 놓고 연립방정식을 세운다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_3=6$에서 $ar^2=6$ ······ ㉠

$a_7=486$에서 $ar^6=486$ ······ ㉡ ···➊

㉡÷㉠을 하면 $r^4=81$

$\therefore r=3$ ($\because r>0$)

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $9a=6$ $\quad\therefore a=\frac{2}{3}$ ···➋

$$\therefore S_n=\frac{\frac{2}{3}(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{3}(3^n-1)$$

$\frac{1}{3}(3^n-1)>200$에서 $3^n>601$

이때 $3^5=243$이고 $3^6=729$이므로 $n\ge 6$

따라서 구하는 자연수 $n$의 최솟값은 6이다. ···➌

답 6

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$로 놓고 연립방정식을 세울 수 있다. | 20% |
| ❷ $a$, $r$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $S_n>200$을 만족시키는 자연수 $n$의 최솟값을 구할 수 있다. | 50% |

**13** 전략 등비수열의 합의 공식을 이용하여 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면 $\frac{S_4}{S_2}=9$에서

$$\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{a(1-r^4)}{1-r}}{\frac{a(1-r^2)}{1-r}}=\frac{1-r^4}{1-r^2}$$

$$=\frac{(1-r^2)(1+r^2)}{1-r^2}=1+r^2=9$$

$\therefore r^2=8$

$\therefore \frac{a_4}{a_2}=\frac{ar^3}{ar}=r^2=8$ 답 ④

**14** 전략 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이 $S_n$일 때
➡ $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq2)$

풀이 $S_n=2^n-1$에서

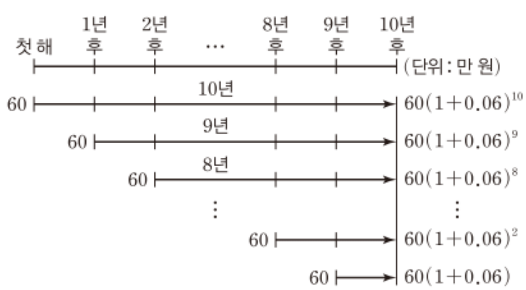
$a_1=S_1=2-1=1$

$a_5=S_5-S_4=(2^5-1)-(2^4-1)=16$

$\therefore a_1+a_5=17$ 답 ②

**15** 전략 연이율 $r$, 1년마다 복리로 매년 초에 $a$원씩 $n$년 동안 적립할 때, $n$년째 말의 적립금의 원리합계 ➡ $\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$ (원)

풀이 매년 초에 60만 원씩 적립한 금액의 원리합계를 그림으로 타내면 다음과 같다.




10년째 말까지 적립금의 원리합계를 $S$만 원이라 하면

$$S=60(1+0.06)+60(1+0.06)^2+\cdots+60(1+0.06)^{10}$$

$$=\frac{60\times1.06(1.06^{10}-1)}{1.06-1}$$

$$=\frac{60\times1.06(1.79-1)}{0.06}$$

$$=837.4$$

따라서 구하는 원리합계는 837만 원이다. 답 ④

**16** 전략 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 이용하여 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=2^{n-1}$

$\therefore b_n=(a_{n+1})^2-(a_n)^2$

$=(2^n)^2-(2^{n-1})^2=2^{2n}-2^{2(n-1)}$

$\therefore \frac{b_6}{b_3}=\frac{2^{12}-2^{10}}{2^6-2^4}=\frac{2^{10}(2^2-1)}{2^4(2^2-1)}=2^6=64$ 답 ⑤

**17** 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 이용하여 수열 $\{3a_n-a_{n+1}\}$의 일반항을 나타낸다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$\therefore 3a_n-a_{n+1}=3ar^{n-1}-ar^n=(3-r)ar^{n-1}$ ⋯ ❶

즉 수열 $\{3a_n-a_{n+1}\}$은 첫째항이 $(3-r)a$이고 공비가 $r$인 등비수열이므로

$(3-r)a=15$, $r=2$

따라서 $a=15$, $r=2$이므로

$a_n=15\cdot2^{n-1}$ ⋯ ❷

$a_m=480$에서

$15\cdot2^{m-1}=480$, $2^{m-1}=32=2^5$

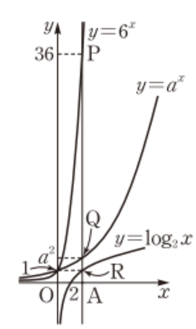
$m-1=5$ $\therefore m=6$ ⋯ ❸

답 6

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비로 수열 $\{3a_n-a_{n+1}\}$의 일반항을 나타낼 수 있다. | 20% |
| ❷ 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $m$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**18** 전략 세 점 P, Q, R의 좌표를 먼저 구한다.

풀이 함수 $y=6^x$, $y=a^x$, $y=\log_2 x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




즉 P$(2, 36)$, Q$(2, a^2)$, R$(2, 1)$이므로

$\overline{AP}=36$, $\overline{AQ}=a^2$, $\overline{AR}=1$

따라서 36, $a^2$, 1이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a^2)^2=36\cdot1$

$\therefore a^4=36$ 답 36

**19** 전략 올해 인구를 $a$명, 인구 증가율을 $r$라 하면 $n$년 후의 인구는 $a(1+r)^n$명임을 이용한다.

풀이 올해 인구를 $a$만 명, 인구 증가율을 $r$라 하면 10년 후의 인구는 10만 명이므로

$a(1+r)^{10}=10$ ⋯⋯ ㉠

20년 후의 인구는 40만 명이므로

$a(1+r)^{20}=40$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $(1+r)^{10}=4$ ...... ㉢

$\therefore (1+r)^5=2\,(\because r>0)$

㉢을 ㉠에 대입하면 $4a=10$ $\therefore a=2.5$

따라서 이 도시의 15년 후의 인구는

$a(1+r)^{15}=a\{(1+r)^5\}^3=2.5\times2^3=20$(만 명)

답 ④

**20** 전략 등비수열의 합의 공식과 $S_{10}$, $S_{20}$ 사이의 관계를 이용하여 $S_{30}$의 값을 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=60 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

$$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=90 \quad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots ❷$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $60(r^{10}+1)=90$

$r^{10}+1=\frac{3}{2}$ $\therefore r^{10}=\frac{1}{2}$ ...❸

$$\therefore S_{30}=\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}=60\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1\right\}=60\cdot\frac{7}{4}=105 \quad \cdots ❹$$

답 105

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $S_{10}$을 공비와 첫째항으로 나타낼 수 있다. | 20% |
| ❷ $S_{20}$을 공비와 첫째항으로 나타낼 수 있다. | 20% |
| ❸ $r^{10}$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❹ $S_{30}$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**21** 전략 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n$과 $S_n$ 사이의 관계를 이용하여 수열 $\{a_n\}$이 어떤 수열인지 알아본다.

풀이 $S_n=2a_{n+1}-3$이므로 ...... ㉠

$S_{n-1}=2a_n-3$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면

$S_n-S_{n-1}=2(a_{n+1}-a_n)$

$a_n=2(a_{n+1}-a_n)$, $3a_n=2a_{n+1}$

$\therefore a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n\ (n\ge2)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이므로

$a_5=a_3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=27$에서

$a_3=27\cdot\frac{4}{9}=12$

답 12



# 10 수열의 합

## 01 합의 기호 $\sum$

확인 본책 190~192쪽

**1** (1) 수열 $1, 3, 3^2, \cdots, 3^{n-1}$의 일반항 $a_n$은

$a_n=3^{n-1}$

따라서 $1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이므로

$$1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}$$

(2) 수열 $1, 3, 5, \cdots, 15$의 일반항 $a_n$은

$a_n=2n-1$

이때 $2n-1=15$에서 $n=8$

따라서 $1+3+5+\cdots+15$는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$$1+3+5+\cdots+15=\sum_{k=1}^{8}(2k-1)$$

답 (1) $\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}$ (2) $\sum_{k=1}^{8}(2k-1)$

**2** (1) $\sum_{k=1}^{5}k^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=1+4+9+16+25$

(2) $\sum_{i=1}^{n}(-3)^i=(-3)^1+(-3)^2+(-3)^3+\cdots+(-3)^n=-3+9-27+\cdots+(-3)^n$

답 (1) $1+4+9+16+25$
(2) $-3+9-27+\cdots+(-3)^n$

**3** (1) $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=5+1\cdot10=15$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(4a_k+b_k)=4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=4\cdot5+10=30$

(3) $\sum_{k=1}^{10}2(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}(2a_k+2b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k=2\cdot5+2\cdot10=30$

(4) $\sum_{k=1}^{10}(3a_k-b_k+4)=3\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}4=3\cdot5-10+4\cdot10=45$

답 (1) 15 (2) 30 (3) 30 (4) 45

**4** (1) $1+2+3+\cdots+20=\sum_{k=1}^{20}k$

$=\frac{20(20+1)}{2}$

$=210$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=\frac{10(10+1)(2\cdot10+1)}{6}$

$=385$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+7^3=\sum_{k=1}^{7}k^3$

$=\left\{\frac{7(7+1)}{2}\right\}^2=784$

(4) $6^2+7^2+8^2+\cdots+15^2$

$=\sum_{k=6}^{15}k^2=\sum_{k=1}^{15}k^2-\sum_{k=1}^{5}k^2$

$=\frac{15(15+1)(2\cdot15+1)}{6}-\frac{5(5+1)(2\cdot5+1)}{6}$

$=1240-55$

$=1185$

답 (1) 210 (2) 385 (3) 784 (4) 1185

**5** (1) $\sum_{k=1}^{6}(5k-2)=5\sum_{k=1}^{6}k-\sum_{k=1}^{6}2$

$=5\cdot\frac{6(6+1)}{2}-2\cdot6$

$=105-12$

$=93$

(2) $\sum_{k=1}^{4}(k^2-3k^3)=\sum_{k=1}^{4}k^2-3\sum_{k=1}^{4}k^3$

$=\frac{4(4+1)(2\cdot4+1)}{6}-3\left\{\frac{4(4+1)}{2}\right\}^2$

$=30-300$

$=-270$

(3) $\sum_{k=1}^{7}(k^2+2k-1)=\sum_{k=1}^{7}k^2+2\sum_{k=1}^{7}k-\sum_{k=1}^{7}1$

$=\frac{7(7+1)(2\cdot7+1)}{6}+2\cdot\frac{7(7+1)}{2}-1\cdot7$

$=140+56-7$

$=189$

(4) $\sum_{k=1}^{8}(k+1)(k-1)=\sum_{k=1}^{8}(k^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{8}k^2-\sum_{k=1}^{8}1$

$=\frac{8(8+1)(2\cdot8+1)}{6}-1\cdot8$

$=204-8$

$=196$

답 (1) 93 (2) $-270$ (3) 189 (4) 196

유제 본책 193~197쪽

**1** $\sum_{k=2}^{100}a_k-\sum_{k=1}^{99}a_k=(a_2+a_3+\cdots+a_{100})-(a_1+a_2+\cdots+a_{99})$

$=a_{100}-a_1$

$=20-5$

$=15$

답 15

**2** $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

이므로

$\sum_{k=1}^{2n}a_k=4n^2$

위의 식의 양변에 $n=5$를 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}a_k=4\cdot5^2=100$

답 100

**3** $\sum_{k=1}^{50}ka_k=400$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+50a_{50}=400$ ······ ㉠

$\sum_{k=1}^{49}ka_{k+1}=250$에서

$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+49a_{50}=250$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50}=150$

$\therefore \sum_{k=1}^{50}a_k=150$

답 150

**4** (1) $\sum_{k=1}^{100}\frac{3k}{k+2}+\sum_{k=1}^{100}\frac{6}{k+2}=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{3k}{k+2}+\frac{6}{k+2}\right)$

$=\sum_{k=1}^{100}\frac{3(k+2)}{k+2}$

$=\sum_{k=1}^{100}3$

$=3\cdot100$

$=300$

(2) $\sum_{k=1}^{50}\frac{1-4^k}{2^k}=\sum_{k=1}^{50}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k-2^k\right\}$

$=\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{50}2^k$

$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2(2^{50}-1)}{2-1}$

$=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{50}-2^{51}$

답 (1) 300 (2) $3-\left(\frac{1}{2}\right)^{50}-2^{51}$

10 수열의 합

라이트 UP

**등비수열의 합**

첫째항이 $a$, 공비가 $r$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합 $S_n$은

① $r\neq1$일 때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

② $r=1$일 때, $S_n=na$

**5** $\sum_{k=1}^{n}a_k=2n^2-7n$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=5n$의 양변에 각각 $n=10$을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=2\cdot10^2-7\cdot10=130,\ \sum_{k=1}^{10}b_k=5\cdot10=50$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}(3a_k+2b_k)&=3\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k\\&=3\cdot130+2\cdot50\\&=490\end{aligned}$$

답 490

**6** $\sum_{k=1}^{15}a_k=\alpha$, $\sum_{k=1}^{15}b_k=\beta$라 하면

$\sum_{k=1}^{15}(a_k+b_k)=30$에서 $\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}b_k=30$

$\therefore \alpha+\beta=30$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{15}(a_k-b_k)=8$에서 $\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}b_k=8$

$\therefore \alpha-\beta=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=19,\ \beta=11$

따라서 $\sum_{k=1}^{15}a_k=19$, $\sum_{k=1}^{15}b_k=11$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}(2a_k-b_k+4)&=2\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}b_k+\sum_{k=1}^{15}4\\&=2\cdot19-11+4\cdot15\\&=87\end{aligned}$$

답 87

**7** (1) 주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=(2n)^2=4n^2$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}4k^2&=4\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}\end{aligned}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=(2n-1)(2n+1)=4n^2-1$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-1)\\&=4\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}1\\&=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n\\&=\frac{n\{2(n+1)(2n+1)-3\}}{3}\\&=\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ (2) $\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$

**8** 주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}\\&=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}\\&=2^n-1\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)&=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1\\&=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n\\&=2^{n+1}-n-2\end{aligned}$$

답 $2^{n+1}-n-2$

**9** 수열 $1\cdot20,\ 2\cdot19,\ 3\cdot18,\ \cdots,\ 20\cdot1$의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=n(21-n)=21n-n^2$

따라서 구하는 합은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}a_k&=\sum_{k=1}^{20}(21k-k^2)\\&=21\sum_{k=1}^{20}k-\sum_{k=1}^{20}k^2\\&=21\cdot\frac{20\cdot21}{2}-\frac{20\cdot21\cdot41}{6}\\&=4410-2870\\&=1540\end{aligned}$$

답 1540

**10** (1)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j}2\right)\right\}&=\sum_{k=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{k}2j\right)\\&=\sum_{k=1}^{5}\left(2\sum_{j=1}^{k}j\right)\\&=\sum_{k=1}^{5}\left\{2\cdot\frac{k(k+1)}{2}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)\\&=\sum_{k=1}^{5}k^2+\sum_{k=1}^{5}k\\&=\frac{5\cdot6\cdot11}{6}+\frac{5\cdot6}{2}\\&=55+15=70\end{aligned}$$

(2) $\sum_{m=1}^{5}\left(\sum_{n=1}^{5}mn\right)=\sum_{m=1}^{5}\left(m\sum_{n=1}^{5}n\right)$

$=\sum_{m=1}^{5}\left(m\cdot\frac{5\cdot6}{2}\right)$

$=15\sum_{m=1}^{5}m$

$=15\cdot\frac{5\cdot6}{2}=225$

답 (1) 70 (2) 225

**11** $\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{10}(2k-l)\right\}=\sum_{l=1}^{n}\left(2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}l\right)$

$=\sum_{l=1}^{n}\left(2\cdot\frac{10\cdot11}{2}-10l\right)$

$=\sum_{l=1}^{n}110-10\sum_{l=1}^{n}l$

$=110n-10\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=-5n^2+105n$

즉 $-5n^2+105n=400$이므로

$n^2-21n+80=0$, $(n-5)(n-16)=0$

$\therefore n=16$ ($\because n>10$)

답 16

**12** $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}ij\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(i\sum_{j=1}^{n}j\right)$

$=\sum_{i=1}^{m}\left\{i\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{m}i$

$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{2}$

$=\frac{mn(mn+m+n+1)}{4}$

$=\frac{20(20+9+1)}{4}$

$=150$

답 150

**13** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=3n^2+2n$

이므로

$a_1=S_1=3\cdot1^2+2\cdot1=5$

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(3\cdot10^2+2\cdot10)-(3\cdot9^2+2\cdot9)$

$=320-261$

$=59$

$\therefore a_1+a_{10}=64$

답 64

**14** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n}{n+1}$

(ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(ⅱ) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}$

$=\frac{1}{n(n+1)}$ …… ㉠

이때 $a_1=\frac{1}{2}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

따라서

$\frac{1}{a_k}=k(k+1)=k^2+k$

이므로

$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{12}(k^2+k)$

$=\sum_{k=1}^{12}k^2+\sum_{k=1}^{12}k$

$=\frac{12\cdot13\cdot25}{6}+\frac{12\cdot13}{2}$

$=650+78$

$=728$

답 728

**15** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=3\cdot2^n-3$

(ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3\cdot2^1-3=3$

(ⅱ) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3\cdot2^n-3-(3\cdot2^{n-1}-3)$

$=3\cdot2^{n-1}$ …… ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=3\cdot2^{n-1}$

따라서 $a_{2k-1}=3\cdot2^{2k-2}=3\cdot2^{2(k-1)}=3\cdot4^{k-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{5}3\cdot4^{k-1}$

$=\frac{3(4^5-1)}{4-1}$

$=1023$

답 1023

10 수열의 합

## 02 여러 가지 수열의 합

**확인** 본책 198~199쪽

**1** (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}$

$\displaystyle=\frac{2}{5}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\frac{2}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{12}\frac{2}{(k+2)-k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$\displaystyle=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\right)$

$\displaystyle=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{13}-\frac{1}{14}$

$\displaystyle=\frac{123}{91}$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{123}{91}$

**2** (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{10}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{10}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{12}-\sqrt{11})$

$=\sqrt{12}-\sqrt{2}$

$=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{17}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{17}\frac{2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{17}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{18}-\sqrt{16})+(\sqrt{19}-\sqrt{17})$

$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{18}+\sqrt{19}$

$=-1+2\sqrt{2}+\sqrt{19}$

답 (1) $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (2) $-1+2\sqrt{2}+\sqrt{19}$

**유제** 본책 200~201쪽

**1** (1) 수열 $\frac{3}{1\cdot4}, \frac{3}{4\cdot7}, \frac{3}{7\cdot10}, \cdots$의 일반항을 $a_n$이라 하면

$\displaystyle a_n=\frac{3}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}$

$a_k=\frac{3}{37\cdot40}$이라 하면

$\displaystyle\frac{3}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{3}{37\cdot40}$

$3k-2=37 \quad \therefore k=13$

$\displaystyle\therefore \frac{3}{1\cdot4}+\frac{3}{4\cdot7}+\frac{3}{7\cdot10}+\cdots+\frac{3}{37\cdot40}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{13}a_k=\sum_{k=1}^{13}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$\displaystyle=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{37}-\frac{1}{40}\right)$

$\displaystyle=1-\frac{1}{40}=\frac{39}{40}$

(2) 수열 $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \cdots$의 일반항을 $a_n$이라 하면

$\displaystyle a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$a_k=\frac{1}{1+2+3+\cdots+50}$이라 하면

$\displaystyle\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\frac{1}{1+2+3+\cdots+50}$

$\therefore k=50$

$\displaystyle\therefore 1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+50}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{50}a_k=\sum_{k=1}^{50}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$\displaystyle=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)\right\}$

$\displaystyle=2\left(1-\frac{1}{51}\right)=\frac{100}{51}$

답 (1) $\frac{39}{40}$ (2) $\frac{100}{51}$

**2** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+3n$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2+3\cdot1=4$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}\\&=2n+2 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+2$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{8}\frac{1}{a_ka_{k+1}}&=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}\\&=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{4(k+1)(k+2)}\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)\\&=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{10}$

**3** 수열 $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$, …의 일반항을 $a_n$이라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\\&=\frac{2(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}\\&=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\end{aligned}$$

$a_k=\frac{2}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$라 하면

$\frac{2}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}=\frac{2}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$

$2k-1=79 \qquad \therefore k=40$

$$\begin{aligned}&\therefore \frac{2}{1+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}\\&=\sum_{k=1}^{40}a_k=\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})\\&=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{79})\\&=\sqrt{81}-1\\&=8\end{aligned}$$

답 8

**4** 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\cdot4=4n-3$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}&=\frac{1}{\sqrt{4k-3}+\sqrt{4k+1}}\\&=\frac{\sqrt{4k+1}-\sqrt{4k-3}}{(\sqrt{4k+1}+\sqrt{4k-3})(\sqrt{4k+1}-\sqrt{4k-3})}\\&=\frac{1}{4}(\sqrt{4k+1}-\sqrt{4k-3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{20}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}&=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{4}(\sqrt{4k+1}-\sqrt{4k-3})\\&=\frac{1}{4}\{(\sqrt{5}-\sqrt{1})+(\sqrt{9}-\sqrt{5})+(\sqrt{13}-\sqrt{9})\\&\qquad+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{77})\}\\&=\frac{1}{4}(\sqrt{81}-1)=2\end{aligned}$$

답 2

**5** $a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n}&=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\\&=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}\\&=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})\\&=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})\\&\qquad+\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\\&=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{n+2}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{n+2}=5\sqrt{2}, \qquad n+2=50$

$\therefore n=48$

답 48

## 중단원 연습 문제

본책 202~204쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ④ | 02 ② | 03 90 | 04 ① | 05 ① |
| 06 15 | 07 0 | 08 ② | 09 ② | 10 ④ |
| 11 300 | 12 715 | 13 460 | 14 ③ | 15 19 |
| 16 ④ | 17 9 | 18 100 | 19 110 | 20 $\frac{1}{13}$ |
| 21 ③ | 22 144 | | | |

**01** 전략 주어진 수열에서 1과 $\frac{1}{125}$이 제몇 항인지 구한다.

풀이 1을 제$l$항이라 하면

$\frac{1}{2^l-3}=1, \qquad 2^l-3=1$

$\therefore l=2$

$\frac{1}{125}$을 제$m$항이라 하면

$$\frac{1}{2^m-3}=\frac{1}{125}, \quad 2^m-3=125$$

$\therefore m=7$

$\therefore 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{125}=\sum_{k=2}^{7}a_k$ 답 ④

**02** 전략 $\log_a M+\log_a N=\log_a MN\ (a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0)$임을 이용한다.

풀이 $a_n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log\frac{n+1}{n}$이므로

$$\sum_{n=1}^{99}a_n=\sum_{n=1}^{99}\log\frac{n+1}{n}$$
$$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{100}{99}$$
$$=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{99}\right)$$
$$=\log 100$$
$$=\log 10^2=2$$

답 ②

라이트 UP

**로그의 성질**

$a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0$일 때

① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

② $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

③ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, $k$는 실수)

**03** 전략 $\sum_{k=2}^{n}a_k=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n$임을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$$a_1+a_8=a+(a+7d)=2a+7d=30$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{7}a_k=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_7$$
$$=\frac{6(a_2+a_7)}{2}$$
$$=\frac{6\{(a+d)+(a+6d)\}}{2}$$
$$=3(2a+7d)$$
$$=3\cdot30=90$$

답 90

**04** 전략 $\sum_{k=1}^{9}f(k+1)-\sum_{k=2}^{10}f(k-1)$을 $f(1)$과 $f(10)$으로 나타낸다.

풀이 $\sum_{k=1}^{9}f(k+1)-\sum_{k=2}^{10}f(k-1)$

$$=\{f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)\}$$
$$-\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)\}$$
$$=f(10)-f(1)$$
$$=3-5=-2$$

답 ①

**05** 전략 자연수 $n$을 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 나머지를 구한다.

풀이 자연수 $n$은 $2k-1$, $2k$ ($k$는 자연수) 꼴 중 하나이다.

(i) $n=2k-1$일 때,

$n^2=(2k-1)^2=4(k^2-k)+1$이므로 $\quad a_n=1$

(ii) $n=2k$일 때,

$n^2=(2k)^2=4k^2$이므로 $\quad a_n=0$

(i), (ii)에서 $\quad a_{2k-1}=1,\ a_{2k}=0$

$$\therefore \sum_{n=1}^{100}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}+a_{100}$$
$$=1+0+1+\cdots+1+0$$
$$=1\cdot50=50$$

답 ①

**06** 전략 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$임을 이용한다.

풀이 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n+b_n=5$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}(2a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)+\sum_{k=1}^{5}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{5}5+\sum_{k=1}^{5}a_k=25+\sum_{k=1}^{5}a_k$$

즉 $25+\sum_{k=1}^{5}a_k=40$이므로 $\quad \sum_{k=1}^{5}a_k=15$

답 15

**07** 전략 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)$

$$=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2)+2\sum_{k=1}^{10}a_kb_k$$

이므로 $\quad 20=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2)+2\cdot5$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2)=10$ ···❶

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-2a_kb_k+b_k^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2)-2\sum_{k=1}^{10}a_kb_k$$

$=10-2\cdot5=0$ ···❷

답 0

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2)$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)^2$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

라이트 UP

**곱셈 공식의 변형**

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

③ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

**08** 전략 $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n}c=cn$($c$는 상수)임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n}(6k-2)=6\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2$

$$=6\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2n$$

$$=3n^2+n$$

즉 $3n^2+n=80$에서 $\quad 3n^2+n-80=0$

$(3n+16)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)

답 ②

**09** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

풀이 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)=\sum_{k=1}^{10}\{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1$$

$$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot11}{2}-10$$

$$=385-110-10$$

$$=265$$

답 ②

라이트 UP

**이차방정식의 근과 계수의 관계**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

**10** 전략 등비수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 수열의 일반항을 구한다.

풀이 주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$$a_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$$

$$=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}$$

$$=2^n-1$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(2^k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{8}2^k-\sum_{k=1}^{8}1$$

$$=\frac{2(2^8-1)}{2-1}-1\cdot8$$

$$=510-8$$

$$=502$$

답 ④

**11** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계와 자연수의 거듭제곱의 합의 공식을 이용한다.

풀이 $x^2-13x+40=0$의 두 근이 $m$, $n$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=13$, $mn=40$ ⋯ ❶

$$\therefore \sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right\}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}i+\sum_{j=1}^{n}j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{in+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}in+\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=n\sum_{i=1}^{m}i+\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=n\cdot\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\cdot m$$

$$=\frac{mn(m+n+2)}{2}$$ ⋯ ❷

$$=\frac{40(13+2)}{2}=300$$ ⋯ ❸

답 300

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $m+n$, $mn$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ $\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right\}$를 $m$, $n$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 60% |
| ❸ $\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right\}$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**12** 전략 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$로 놓고 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq2)$임을 이용하여 일반항 $a_n$을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-2n$$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-2\cdot1=-1$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=n^2-2n-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$$

$$=2n-3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-3$ ⋯ ❶

따라서 $a_{k+1}=2(k+1)-3=2k-1$이므로

$ka_{k+1}=k(2k-1)=2k^2-k$ ⋯ ❷

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-k)=2\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k$$

$$=2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-\frac{10\cdot11}{2}$$

$$=770-55=715$$ ⋯ ❸

답 715

10 수열의 합

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 일반항 $a_n$을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $ka_{k+1}$을 $k$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 20% |
| ❸ $\sum_{k=1}^{10} ka_{k+1}$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**13** 전략 주어진 수열의 일반항 $a_n$을 이용하여 $a_{2n}-a_n$을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면

$$a_n=4+(n-1)d$$

$a_{2k}-a_k=\{4+(2k-1)d\}-\{4+(k-1)d\}=dk$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}-a_k)=\sum_{k=1}^{10}dk=d\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=d\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=55d$$

즉 $55d=110$에서 $\quad d=2$

따라서 $a_n=4+(n-1)\cdot 2=2n+2$이므로

$$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}(2k+2)=2\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}2$$
$$=2\cdot\frac{20\cdot 21}{2}+2\cdot 20$$
$$=420+40=460$$

답 460

**14** 전략 먼저 주어진 수열의 일반항을 구한다.

풀이 수열 $\frac{1}{1+1^2}, \frac{1}{2+2^2}, \frac{1}{3+3^2}, \cdots$의 일반항을 $a_n$이라 하면

$$a_n=\frac{1}{n+n^2}=\frac{1}{n(1+n)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$a_k=\frac{1}{9+9^2}$이라 하면

$$\frac{1}{k+k^2}=\frac{1}{9+9^2}\qquad\therefore k=9$$

$$\therefore \frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{2+2^2}+\frac{1}{3+3^2}+\cdots+\frac{1}{9+9^2}$$
$$=\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

답 ③

**15** 전략 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$임을 이용하여 $S_n$을 구한다.

풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$
$$=n^2$$

이므로

$$\frac{1}{S_n-1}=\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore \sum_{k=2}^{10}\frac{1}{S_k-1}=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$
$$=\frac{36}{55}$$

따라서 $p=55$, $q=36$이므로 $\qquad p-q=19$

답 19

**16** 전략 먼저 $\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$의 분모를 유리화한다.

풀이 $\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$$=\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{79})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{81}-1)=4$$

답 ④

**17** 전략 두 점 $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이다.

풀이 두 점 $(n, \sqrt{n})$, $(n+1, \sqrt{n+1})$을 지나는 직선의 기울기가 $a_n$이므로

$$a_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\qquad\cdots ❶$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{99}a_k=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$
$$=\sqrt{100}-1=9\qquad\cdots ❷$$

답 9

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 기울기 $a_n$을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $\sum_{k=1}^{99}a_k$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**18** 전략 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 중 1의 개수를 $a$, 2의 개수를 $b$로 놓고 연립방정식을 세운다.

풀이 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 중 1의 개수를 $a$, 2의 개수를 $b$라 하면

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\cdot a + 2\cdot b = 10$에서

$a+2b=10$ ...... ㉠

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1^2\cdot a + 2^2\cdot b = 16$에서

$a+4b=16$ ...... ㉡ ⋯➊

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=3$

$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_i^5 = 1^5\cdot 4 + 2^5\cdot 3 = 100$ ⋯➋

답 100

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ 1의 개수를 $a$, 2의 개수를 $b$로 놓고 연립방정식을 세울 수 있다. | 50% |
| ➋ $\sum_{i=1}^{n} x_i^5$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

다른 풀이 0, 1, 2의 제곱의 값은 각각 0, 1, 4이므로 제곱의 값이 변화가 있는 것은 2뿐이다.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i = 16-10=6$$

이므로 2의 값을 갖는 $x_i$는 $\frac{6}{2}=3$(개)이다.

$2^5=32$이므로

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^5 = \sum_{i=1}^{n} x_i + (2^5-2)\cdot 3 = 10+90=100$$

**19** 전략 $b_n=na_n$이라 하고 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용한다.

풀이 $b_n=na_n$이라 하고 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} b_k = 2n^2+3n$$

(i) $n=1$일 때,

$b_1=S_1=2\cdot 1^2+3\cdot 1=5$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2+3n-\{2(n-1)^2+3(n-1)\} \\ &= 4n+1 \end{aligned}$$ ...... ㉠

이때 $b_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$b_n=4n+1$

$\therefore a_n=\frac{b_n}{n}=4+\frac{1}{n}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{a_n-4} = \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{\left(4+\frac{1}{n}\right)-4} = 2\sum_{n=1}^{10} n = 2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=110$$

답 110

**20** 전략 주어진 조건을 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

$a_4 : a_7 = 5 : 9$에서 $9a_4=5a_7$

$9(a+3d)=5(a+6d),\quad 9a+27d=5a+30d$

$\therefore 4a-3d=0$ ...... ㉠

$\sum_{k=1}^{9} a_k = 171$에서 $\frac{9(2a+8d)}{2}=171$

$\therefore a+4d=19$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ d=4$

$\therefore a_n=3+(n-1)\cdot 4=4n-1$ ⋯➊

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)} \\ &= \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{35}-\frac{1}{39}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{39}\right)=\frac{1}{13} \end{aligned}$$ ⋯➋

답 $\frac{1}{13}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ 일반항 $a_n$을 구할 수 있다. | 50% |
| ➋ $\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

라이트 UP

**등차수열의 합**

첫째항이 $a$, 공차가 $d$인 등차수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합 $S_n$은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

**21** 전략 주어진 수열을 같은 수끼리 묶은 후 각 군의 규칙성을 찾는다.

풀이 주어진 수열을 같은 수끼리 묶으면

$$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}},\ \underbrace{(3,\ 3)}_{\text{제2군}},\ \underbrace{(5,\ 5,\ 5)}_{\text{제3군}},\ \underbrace{(7,\ 7,\ 7,\ 7)}_{\text{제4군}},\ \cdots$$

이므로 제$n$군의 수는 $2n-1$이 $n$번 나타난다.

$2n-1=27$에서 $n=14$

즉 27은 제14군의 수이다.

또 제$n$군의 항의 개수는 $n$이므로 제1군부터 제13군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{13} k = \frac{13\cdot 14}{2}=91$$

따라서 27은 제92항부터 14번 나타나므로

$p=92,\ q=14\quad \therefore p+q=106$

답 ③

10 수열의 합

**22** 전략 같은 대각선 위에 있는 수끼리 묶은 후 각 군의 규칙성을 찾는다.

풀이 오른쪽과 같이 대각선 방향으로 배열된 수끼리 묶으면

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | … |
| 2 | 5 | 9 | 14 | | |
| 4 | 8 | 13 | | | |
| 7 | 12 | | ⋱ | | |
| 11 | | | | | |
| ⋮ | | | | | |

$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}}, \underbrace{(2,\ 3)}_{\text{제2군}}, \underbrace{(4,\ 5,\ 6)}_{\text{제3군}},$

$\underbrace{(7,\ 8,\ 9,\ 10)}_{\text{제4군}}, \cdots$

이때 $m$번째 줄의 왼쪽에서 $n$번째에 있는 수는 제$(m+n-1)$군의 $n$번째 항이므로 구하는 수는 제17군의 8번째 항이다.

각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1=1$

$a_2=2=1+1$

$a_3=4=1+1+2$

$a_4=7=1+1+2+3$

$\vdots$

$a_{17}=1+1+2+3+\cdots+16$

$=1+\dfrac{16\cdot17}{2}=137$

이때 각 군의 수는 공차가 1인 등차수열을 이루므로 구하는 수는

$137+(8-1)\cdot1=144$ 답 144

참고 주어진 표에서 $m$번째 줄의 왼쪽에서 $n$번째에 있는 수를 $(m,\ n)$으로 표현하고 대각선 방향으로 배열된 수끼리 묶으면

$(1,\ 1)$ ➡ 제1군

$(2,\ 1),\ (1,\ 2)$ ➡ 제2군

$(3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3)$ ➡ 제3군

$(4,\ 1),\ (3,\ 2),\ (2,\ 3),\ (1,\ 4)$ ➡ 제4군

$\vdots$

$(k,\ 1),\ (k-1,\ 2),\ (k-2,\ 3),\ \cdots,\ (2,\ k-1),\ (1,\ k)$

➡ 제$k$군

따라서 $m$번째 줄의 왼쪽에서 $n$번째에 있는 수는 제$(m+n-1)$군의 $n$번째 항이다.



# 11 수학적 귀납법

## 01 수열의 귀납적 정의

### 확인

본책 206~207쪽

**1** (1) $a_{n+1}=a_n+2^n$의 $n$에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+2^1=-1+2=1$

$a_3=a_2+2^2=1+4=5$

$\therefore\ a_4=a_3+2^3=5+8=13$

(2) $a_{n+1}=na_n$의 $n$에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=1\cdot a_1=1\cdot2=2$

$a_3=2\cdot a_2=2\cdot2=4$

$\therefore\ a_4=3\cdot a_3=3\cdot4=12$

답 (1) 13 (2) 12

**2** (1) 주어진 수열은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 2, 공차가 $-2$인 등차수열이므로

$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n-2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 (1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n-2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

**3** (1) 주어진 수열은 첫째항이 1, 공비가 $-3$인 등비수열이므로

$a_1=1,\ a_{n+1}=-3a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 4, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 (1) $a_1=1,\ a_{n+1}=-3a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

### 유제

본책 208~212쪽

**1** (1) $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이고

$a_1=-3,\ a_2-a_1=2-(-3)=5$

이므로 첫째항이 $-3$, 공차가 5이다.

따라서 $a_n=-3+(n-1)\cdot5=5n-8$이므로

$a_8=5\cdot8-8=32$

(2) $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이고

$a_1=3,\ \dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{6}{3}=2$

이므로 첫째항이 3, 공비가 2이다.

따라서 $a_n=3\cdot2^{n-1}$이므로

$a_8=3\cdot2^{8-1}=384$ 답 (1) 32 (2) 384

**2** $a_{n+1}=a_n-4$이므로 주어진 수열은 공차가 $-4$인 등차수열이고 $a_1=8$이므로

$a_n=8+(n-1)\cdot(-4)=-4n+12$

$\therefore \sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}(-4k+12)$

$=-4\cdot\frac{9\cdot10}{2}+12\cdot9=-72$ 답 $-72$

**3** $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$에서 주어진 수열은 등비수열이고

$a_1=4,\ \frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{8}$

이므로 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{8}$이다.

$\therefore a_n=4\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

$a_k=\frac{1}{4^{11}}$에서 $4\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}=\frac{1}{4^{11}}$

$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3k-3}=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$, $3k-3=24$

$\therefore k=9$ 답 9

**4** $a_{n+1}-a_n=3n+1$의 $n$에 1, 2, 3, $\cdots$, 10을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}-a_1&=3\cdot1+1\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2}&=3\cdot2+1\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3}&=3\cdot3+1\\
&\vdots\\
+)\ a_{11}-\cancel{a_{10}}&=3\cdot10+1\\
\hline
a_{11}-a_1&=\sum_{k=1}^{10}(3k+1)\\
&=3\cdot\frac{10\cdot11}{2}+10=175
\end{aligned}$$

$\therefore a_{11}=a_1+175=176$ 답 176

**5** $a_{n+1}=a_n+3^n$의 $n$에 1, 2, 3, $\cdots$, 6을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=a_1+3^1\\
\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+3^2\\
\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+3^3\\
&\vdots\\
+)\ a_7&=\cancel{a_6}+3^6\\
\hline
a_7&=a_1+\sum_{k=1}^{6}3^k\\
&=\frac{1}{2}+\frac{3(3^6-1)}{3-1}=\frac{2185}{2}
\end{aligned}$$

답 $\frac{2185}{2}$

**라이트 UP**

**등비수열의 합**

첫째항이 $a$, 공비가 $r$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합 $S_n$은

① $r\neq1$일 때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

② $r=1$일 때, $S_n=na$

**6** $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n^2+n}$에서

$\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

이므로 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$의 $n$에 1, 2, 3, $\cdots$, 49를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}-a_1&=1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2}&=\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3}&=\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\\
&\vdots\\
+)\ a_{50}-\cancel{a_{49}}&=\cancel{\tfrac{1}{49}}-\tfrac{1}{50}\\
\hline
a_{50}-a_1&=1-\tfrac{1}{50}
\end{aligned}$$

$\therefore a_{50}=a_1+1-\frac{1}{50}=-\frac{1}{50}$ 답 $-\frac{1}{50}$

**7** $a_{n+1}=\frac{2n-1}{2n+1}a_n$의 $n$에 1, 2, 3, $\cdots$, 12를 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=\tfrac{1}{3}a_1\\
\cancel{a_3}&=\tfrac{3}{5}\cancel{a_2}\\
\cancel{a_4}&=\tfrac{5}{7}\cancel{a_3}\\
&\vdots\\
\times)\ a_{13}&=\tfrac{23}{25}\cancel{a_{12}}\\
\hline
a_{13}&=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{5}{7}\cdot\cdots\cdot\tfrac{23}{25}\cdot a_1=\tfrac{1}{25}
\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{25}$

**8** $\frac{a_n}{a_{n-1}}=1-\frac{1}{n}$에서

$1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$

이므로 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n}$의 $n$에 2, 3, 4, $\cdots$, 15를 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{4}$$
$$\vdots$$
$$\times\Big)\ \frac{a_{15}}{a_{14}}=\frac{14}{15}$$
$$\frac{\cancel{a_2}}{a_1}\cdot\frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}}\cdot\frac{\cancel{a_4}}{\cancel{a_3}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{15}}{\cancel{a_{14}}}=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\cdots\cdot\frac{\cancel{14}}{15}$$
$\therefore\ a_{15}=a_1\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{30}$ 답 $\frac{1}{30}$

**9** $a_{n+1}=3^n a_n$의 $n$에 1, 2, 3, ⋯, 19를 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=3^1a_1$$
$$\cancel{a_3}=3^2\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=3^3\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$+\Big)\ a_{20}=3^{19}\cancel{a_{19}}$$
$$\begin{aligned}a_{20}&=3^1\cdot3^2\cdot3^3\cdot\cdots\cdot3^{19}\cdot a_1\\&=3^{1+2+3+\cdots+19}\cdot9\\&=3^{\frac{19\cdot20}{2}}\cdot3^2\\&=3^{192}\end{aligned}$$
$\therefore\ \log_3 a_{20}=\log_3 3^{192}=192$ 답 192

**10** $S_n=2a_n+n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에서

$S_{n+1}=2a_{n+1}+n+1$

이때

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}+n+1-(2a_n+n)\\&=2a_{n+1}-2a_n+1\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

이므로

$a_{n+1}=2a_n-1$

$a_{n+1}=2a_n-1$의 $n$에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1-1=2\cdot(-1)-1=-3$

$a_3=2a_2-1=2\cdot(-3)-1=-7$

$\therefore\ a_4=2a_3-1=2\cdot(-7)-1=-15$ 답 $-15$

**11** $S_n=3a_n-n-1\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에서

$S_{n+1}=3a_{n+1}-n-2$

이때

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=S_{n+1}-S_n\\&=3a_{n+1}-n-2-(3a_n-n-1)\\&=3a_{n+1}-3a_n-1\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

이므로 $a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+\frac{1}{2}$

$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+\frac{1}{2}$의 $n$에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_2=\frac{3}{2}a_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot1+\frac{1}{2}=2$

$a_3=\frac{3}{2}a_2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot2+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

$a_4=\frac{3}{2}a_3+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=\frac{23}{4}$

$\therefore\ a_5=\frac{3}{2}a_4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{23}{4}+\frac{1}{2}=\frac{73}{8}$ 답 $\frac{73}{8}$

**12** $S_{n+1}=4S_n+3$의 $n$에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$S_2=4S_1+3=4\cdot(-2)+3=-5$

$S_3=4S_2+3=4\cdot(-5)+3=-17$

$S_4=4S_3+3=4\cdot(-17)+3=-65$

$\therefore\ a_2+a_3+a_4=S_4-S_1=-65-(-2)=-63$ 답 $-63$

**13** (1) 첫 번째 시행 후 유리병에 남은 물의 양은 1 L의 $\frac{3}{4}$에 1 L를 더한 양이므로

$a_1=1\cdot\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$

$(n+1)$번째 시행 후 유리병에 남은 물의 양 $a_{n+1}$ L는 $a_n$ L의 $\frac{3}{4}$에 1 L를 더한 양이므로

$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+1\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+1$의 $n$에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=\frac{3}{4}a_1+1=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}+1=\frac{37}{16}$

$a_3=\frac{3}{4}a_2+1=\frac{3}{4}\cdot\frac{37}{16}+1=\frac{175}{64}$

$\therefore\ a_4=\frac{3}{4}a_3+1=\frac{3}{4}\cdot\frac{175}{64}+1=\frac{781}{256}$

답 (1) $a_1=\frac{7}{4}$, $a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+1\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ (2) $\frac{781}{256}$

**14** 한 직선에 의하여 분할된 평면의 개수는 2이므로

$a_1=2$

$n$개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 $n$개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$개의 새로운 평면이 생긴다. 즉 $(n+1)$개의 직선에 의하여 분할된 평면은 $n$개의 직선에 의하여 분할된 평면보다 $(n+1)$개가 많다.

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+n+1$

$a_{n+1}=a_n+n+1$의 $n$에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$\cancel{a_2}=a_1+1+1$
$\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2+1$
$\cancel{a_4}=\cancel{a_3}+3+1$
$\cancel{a_5}=\cancel{a_4}+4+1$
$+\big)\ a_6=\cancel{a_5}+5+1$

$$a_6=a_1+\sum_{k=1}^{5}(k+1)$$
$$=2+\frac{5\cdot 6}{2}+5=22$$

답 22

## 02 수학적 귀납법

유제 본책 214~215쪽

**1** (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=2^1-1=1$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$$

위의 식의 양변에 $2^k$을 더하면

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=2^k-1+2^k$$
$$=2\cdot 2^k-1$$
$$=2^{k+1}-1$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

답 풀이 참조

**2** (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

답 풀이 참조

**3** (ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$,

(우변)$=1+2h$

이때 $h^2>0$이므로 $1+2h+h^2>1+2h$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\,(k\ge 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k>1+kh$$

위의 식의 양변에 $\boxed{1+h}$를 곱하면

$$(1+h)^{k+1}>(1+kh)(1+h)$$
$$=\boxed{1+(k+1)h}+kh^2$$
$$>1+(k+1)h$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\ge 2$인 모든 자연수 $n$에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $1+h$ (나) $1+(k+1)h$

답 (가) $1+h$ (나) $1+(k+1)h$

**4** (ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\frac{5}{4}<\frac{3}{2}$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\,(k\ge 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

이때

$$2-\frac{1}{k+1}-\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$$

이므로 $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

$$\therefore 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\ge 2$인 모든 자연수 $n$에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

답 풀이 참조

11 수학적 귀납법

## 중단원 연습 문제

본책 216~218쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** 105 | **02** 340 | **03** ① | **04** 8 | **05** ④ |
| **06** ④ | **07** $-40$ | **08** 129 | **09** ③ | **10** ③ |
| **11** 10 | **12** 11 | **13** 풀이 참조 | | **14** 25 |
| **15** ④ | **16** 11 | **17** 128 | **18** ③ | |

**01** 전략 $a_{n+1}=a_n+d$ ($d$는 상수) 꼴인 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $d$인 등차수열임을 이용한다.

풀이 $a_{n+1}=a_n-3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $-3$인 등차수열이고 $a_1=40$이므로

$$a_n=40+(n-1)\cdot(-3)=-3n+43$$

$$\therefore a_5=-3\cdot5+43=28$$

$$a_{19}=-3\cdot19+43=-14$$

$$\therefore a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{19}=\frac{15\{28+(-14)\}}{2}=105$$

답 105

**02** 전략 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

풀이 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고

$$a_1=52,\ a_2-a_1=48-52=-4$$

이므로 $a_n=52+(n-1)\cdot(-4)=-4n+56$ ⋯ ❶

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(-4k+56)=-4\cdot\frac{10\cdot11}{2}+56\cdot10=340$$ ⋯ ❷

답 340

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**03** 전략 $a_{n+1}=ra_n$ ($r$는 상수) 꼴인 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $r$인 등비수열임을 이용한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n=9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \log_3 a_8=\log_3 9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7=\log_3 3^{-5}=-5$$

답 ①

**04** 전략 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

풀이 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 $a_1=1$이므로 공비를 $r$라 하면 $\frac{a_4}{a_1}+\frac{a_6}{a_3}+\frac{a_8}{a_5}=6$에서

$$\frac{r^3}{1}+\frac{r^5}{r^2}+\frac{r^7}{r^4}=6,\quad 3r^3=6\quad \therefore r^3=2$$

$$\therefore \frac{a_{15}}{a_6}=\frac{r^{14}}{r^5}=r^9=(r^3)^3=2^3=8$$

답 8

**05** 전략 $a_{n+1}=a_n+n^2-1$의 $n$에 1, 2, 3, ⋯, 6을 차례대로 대입하여 변끼리 더한다.

풀이 $a_{n+1}=a_n+n^2-1$의 $n$에 1, 2, 3, ⋯, 6을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\cancel{a_2}=a_1+1^2-1$$
$$\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2^2-1$$
$$\cancel{a_4}=\cancel{a_3}+3^2-1$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_7=\cancel{a_6}+6^2-1$$

$$a_7=a_1+\sum_{k=1}^{6}(k^2-1)=3+\frac{6\cdot7\cdot13}{6}-6=88$$

답 ④

**06** 전략 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}a_n$의 $n$에 1, 2, 3, ⋯, 15를 차례대로 대입하여 변끼리 곱한다.

풀이 $\sqrt{n+1}a_{n+1}=\sqrt{n}a_n$에서

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}a_n \quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠의 $n$에 1, 2, 3, ⋯, 15를 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\sqrt{\frac{1}{2}}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\sqrt{\frac{3}{4}}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_{16}=\sqrt{\frac{15}{16}}\cancel{a_{15}}$$

$$a_{16}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\cdots\cdot\sqrt{\frac{15}{16}}\cdot a_1=\frac{1}{2}$$

답 ④

**07** 전략 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge2)$임을 이용하여 주어진 관계식을 $a_n$에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $S_n=2a_n+2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에서

$$S_{n+1}=2a_{n+1}+2^{n+1}$$

이때

$$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}+2^{n+1}-(2a_n+2^n)=2a_{n+1}-2a_n+2^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이므로 $a_{n+1}=2a_n-2^n$ ⋯ ❶

$a_{n+1}=2a_n-2^n$의 $n$에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1-2^1=2\cdot(-2)-2=-6$

$a_3=2a_2-2^2=2\cdot(-6)-4=-16$

$\therefore a_4=2a_3-2^3=2\cdot(-16)-8=-40$ ⋯ ❷

답 $-40$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a_n$과 $a_{n+1}$ 사이의 관계식을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $a_4$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**08** 전략 $a_1$을 구하고 $a_n$과 $a_{n+1}$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 한 시간 후 박테리아 수는 5마리의 2배보다 1마리 부족하므로

$a_1=5\cdot2-1=9$

$(n+1)$시간 후 박테리아 수 $a_{n+1}$은 $a_n$마리의 2배보다 1마리 부족하므로

$a_{n+1}=2a_n-1\,(n=1, 2, 3, \cdots)$ ⋯ ❶

따라서 $a_{n+1}=2a_n-1$의 $n$에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1-1=2\cdot9-1=17$

$a_3=2a_2-1=2\cdot17-1=33$

$a_4=2a_3-1=2\cdot33-1=65$

$\therefore a_5=2a_4-1=2\cdot65-1=129$ ⋯ ❷

답 129

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a_1$의 값과 $a_n$과 $a_{n+1}$ 사이의 관계식을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $a_5$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**09** 전략 $a_{n+1}=\dfrac{k}{a_n+2}$의 $n$에 1, 2를 차례대로 대입하여 $a_3$을 $k$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_{n+1}=\dfrac{n}{a_n+2}$의 $n$에 1, 2를 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{k}{a_1+2}=\frac{k}{1+2}=\frac{k}{3}$$

$$a_3=\frac{k}{a_2+2}=\frac{k}{\frac{k}{3}+2}=\frac{3k}{k+6}$$

즉 $\dfrac{3k}{k+6}=\dfrac{3}{2}$이므로

$6k=3k+18,\qquad 3k=18$

$\therefore k=6$

답 ③

**10** 전략 $a_n+a_{n+1}=2n$의 $n$에 1, 3, 5, 7, 9를 차례대로 대입하여 변끼리 더한다.

풀이 $a_n+a_{n+1}=2n$의 $n$에 1, 3, 5, 7, 9를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_1+a_2=2\cdot1 \\ & a_3+a_4=2\cdot3 \\ & a_5+a_6=2\cdot5 \\ & a_7+a_8=2\cdot7 \\ +\big) & \underline{a_9+a_{10}=2\cdot9} \\ & (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_9+a_{10}) \end{array}$$

$=2(1+3+5+7+9)$

$=2\cdot\dfrac{5(1+9)}{2}$

$=50$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=50$

답 ③

**11** 전략 $a_7=2a_6$임을 이용하여 $a_6$의 값을 먼저 구한다.

풀이 $a_7=2a_6$이므로 $a_6+a_7=120$에서

$a_6+2a_6=120\qquad \therefore a_6=40$ ⋯ ❶

이때 $a_6=a_5=2a_4=2a_3=2\cdot2a_2=2\cdot2a_1=4a_1$이므로

$4a_1=40\qquad \therefore a_1=10$ ⋯ ❷

답 10

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a_6$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $a_1$의 값을 구할 수 있다. | 60% |

다른 풀이 자연수 $m$에 대하여

$$\frac{a_{2m+1}}{a_{2m}}=2,\ \frac{a_{2m}}{a_{2m-1}}=1$$

이 성립하므로

$$\frac{a_7}{a_1}=\frac{a_7}{a_6}\cdot\frac{a_6}{a_5}\cdot\frac{a_5}{a_4}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}$$

$=2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1=8$

$\therefore a_7=8a_1$

$$\frac{a_6}{a_1}=\frac{a_6}{a_5}\cdot\frac{a_5}{a_4}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}$$

$=1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1=4$

$\therefore a_6=4a_1$

$a_6+a_7=120$에서

$4a_1+8a_1=120,\qquad 12a_1=120$

$\therefore a_1=10$

**12** 전략 수학적 귀납법으로 부등식이 성립함을 증명하는 과정에서 전후 관계를 파악하여 빈칸에 적당한 식을 채운다.

풀이 (i) $n=2$일 때,

$(좌변)=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$, $(우변)=\dfrac{2\cdot2}{2+1}=\dfrac{4}{3}$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

11 수학적 귀납법

(ⅱ) $n=k\,(k\ge2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\boxed{\frac{2k+1}{k+1}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

그런데 $k\ge2$이므로

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}=\boxed{\frac{k}{(k+1)(k+2)}}>0$$

$$\therefore \frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\ge2$인 모든 자연수 $n$에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{2k+1}{k+1}$, $g(k)=\frac{k}{(k+1)(k+2)}$이므로

$$f(5)=\frac{11}{6},\ g(2)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \frac{f(5)}{g(2)}=\frac{11}{6}\times6=11$$

답 11

**13** 전략 $n=1$일 때 성립함을 보인 후 $n=k$일 때 성립한다고 가정하여 $n=k+1$일 때 성립함을 보인다.

풀이 (ⅰ) $n=1$일 때,

$$9^1-1=8$$

따라서 $9^n-1$은 8의 배수이다.

(ⅱ) $n=k$일 때 $9^k-1$이 8의 배수라고 가정하면

$$9^k-1=8m\ (m\text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있으므로

$$9^k=8m+1$$

위의 식의 양변에 9를 곱하면

$$9\cdot9^k=9(8m+1)=72m+9$$
$$=8(9m+1)+1$$

이므로

$$9^{k+1}-1=8(9m+1)$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 $9^n-1$은 8의 배수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여 $9^n-1$은 8의 배수이다.

답 풀이 참조

**14** 전략 이차방정식의 판별식을 이용하여 $a_n$과 $a_{n+1}$, $a_{n+2}$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 이차방정식 $a_nx^2-2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=a_{n+1}{}^2-a_na_{n+2}=0$$

$$\therefore a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2} \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

즉 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고

$$a_1=2,\ \frac{a_2}{a_1}=\frac{5}{2}$$

이므로 첫째항이 2, 공비가 $\frac{5}{2}$이다. ⋯ ❷

한편 주어진 이차방정식에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{a_{n+1}\pm\sqrt{a_{n+1}{}^2-a_na_{n+2}}}{a_n}$$
$$=\frac{a_{n+1}}{a_n}\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{5}{2}\ (\text{중근})$$

따라서 $b_n=\frac{5}{2}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}b_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\cdot10=25 \quad \cdots ❸$$

답 25

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$임을 알 수 있다. | 30% |
| ❷ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**15** 전략 $b_n=(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=2(a_{n+1}+a_n)$임을 이용한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$이 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_{n+1}-a_n=2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_n=a_{n+1}{}^2-a_n{}^2=(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)$$
$$=2(a_{n+1}+a_n)$$
$$\therefore b_{n+1}-b_n=2(a_{n+2}+a_{n+1})-2(a_{n+1}+a_n)$$
$$=2(a_{n+2}-a_n)$$
$$=2\cdot4=8$$

따라서 등차수열 $\{b_n\}$의 공차는 8이다. 답 ④

**16** 전략 조건 ㈎와 수열 $\{a_n\}$에서 항이 반복되는 규칙을 이용하여 $\sum_{k=1}^{50}a_k$를 $a_2$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_1=7$이고 조건 ㈎에서 $a_{n+2}=a_n-4$이므로 이 식의 $n$에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_3=a_1-4=7-4=3$$
$$a_4=a_2-4$$
$$a_5=a_3-4=3-4=-1$$
$$a_6=a_4-4=a_2-8$$

이때 조건 (나)에서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$이 차례대로 반복되므로

$$\sum_{k=1}^{50} a_k = 8(a_1+a_2+\cdots+a_6)+a_1+a_2$$
$$=8\{7+a_2+3+(a_2-4)+(-1)+(a_2-8)\}+7+a_2$$
$$=8(3a_2-3)+7+a_2$$
$$=25a_2-17$$

즉 $25a_2-17=258$이므로

$a_2=11$

답 11

**17** 전략 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라 하고 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 관계식을 변형한다.

풀이 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라 하면 주어진 식은

$a_{n+1}=S_n$

$S_1=a_1=8$이고 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$S_{n+1}-S_n=S_n$

$\therefore S_{n+1}=2S_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 8, 공비가 2인 등비수열이므로

$S_6=8\cdot 2^5=256$

$S_5=8\cdot 2^4=128$

$\therefore a_6=S_6-S_5=128$

답 128

**18** 전략 $n=m$일 때 성립한다고 가정한 후 $n=m+1$일 때 성립함을 보인다.

풀이 (i) $n=1$일 때,

$$S_1=\sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$T_1=\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{1+k}=\frac{1}{2}$$

따라서 $S_1=\boxed{\frac{1}{2}}=T_1$이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}$$
$$=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}$$

$n=m+1$일 때,

$$S_{m+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}$$
$$+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$$
$$=S_m+\boxed{\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}}$$

$$T_{m+1}=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}$$
$$=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m+1}$$
$$+\frac{1}{2m+2}-\frac{1}{m+1}$$
$$=T_m+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}-\boxed{\frac{1}{m+1}}$$
$$=T_m+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$$

따라서 $S_{m+1}=T_{m+1}$이므로 $n=m+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여 ㉠이 성립한다.

$\therefore$ (가) $\frac{1}{2}$ (나) $\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$ (다) $\frac{1}{m+1}$

답 ③

11 수학적 귀납법

MEMO