정답 및 풀이

공통수학 1

I 다항식

01 다항식의 연산 ······ 2
02 나머지 정리와 인수분해 ······ 11

II 방정식

03 복소수 ······ 26
04 이차방정식 ······ 37
05 이차방정식과 이차함수 ······ 52
06 여러 가지 방정식 ······ 62

III 부등식

07 일차부등식 ······ 81
08 이차부등식 ······ 92

IV 순열과 조합

09 순열 ······ 109
10 조합 ······ 122

V 행렬

11 행렬과 그 연산 ······ 131

01 다항식의 연산

0001 답 $-5x^3+2x^2-x+4$

0002 답 $4-x+2x^2-5x^3$

0003 x에 대하여 차수가 높은 항부터 정리하면
$x^3+2yx^2-x-3y^2+4y-1$
답 $x^3+2yx^2-x-3y^2+4y-1$

0004 y에 대하여 차수가 낮은 항부터 정리하면
$x^3-x-1+(2x^2+4)y-3y^2$
답 $x^3-x-1+(2x^2+4)y-3y^2$

0005 $A+B=(x^3+6x^2+x-7)+(5x^3-2x+1)$
$=x^3+6x^2+x-7+5x^3-2x+1$
$=6x^3+6x^2-x-6$ 답 $6x^3+6x^2-x-6$

0006 $B-A=(5x^3-2x+1)-(x^3+6x^2+x-7)$
$=5x^3-2x+1-x^3-6x^2-x+7$
$=4x^3-6x^2-3x+8$ 답 $4x^3-6x^2-3x+8$

0007 $2A-B-3C$
$=2(x^2+4x-5)-(2x^2-3x+1)-3(-x^2-2x+7)$
$=2x^2+8x-10-2x^2+3x-1+3x^2+6x-21$
$=3x^2+17x-32$ 답 $3x^2+17x-32$

0008 $(A+2B)-(4A-C)$
$=A+2B-4A+C$
$=-3A+2B+C$
$=-3(x^2+4x-5)+2(2x^2-3x+1)+(-x^2-2x+7)$
$=-3x^2-12x+15+4x^2-6x+2-x^2-2x+7$
$=-20x+24$ 답 $-20x+24$

0009 답 $3x^3-x^2+2x$

0010 답 $2a^3b+5a^2b-2ab^2$

0011 $(x+y)(3x+4y)=3x^2+4xy+3xy+4y^2$
$=3x^2+7xy+4y^2$ 답 $3x^2+7xy+4y^2$

0012 $(x-1)(x^2-x-3)=x^3-x^2-3x-x^2+x+3$
$=x^3-2x^2-2x+3$
답 x^3-2x^2-2x+3

0013 $(2a^2+2a-1)(a+3)=2a^3+6a^2+2a^2+6a-a-3$
$=2a^3+8a^2+5a-3$
답 $2a^3+8a^2+5a-3$

0014 $(5a^2-b)(a^2-a+2b)$
$=5a^4-5a^3+10a^2b-a^2b+ab-2b^2$
$=5a^4-5a^3+9a^2b+ab-2b^2$
답 $5a^4-5a^3+9a^2b+ab-2b^2$

0015 $(3x^2-xy+1)(x-y^2)$
$=3x^3-3x^2y^2-x^2y+xy^3+x-y^2$
답 $3x^3-3x^2y^2-x^2y+xy^3+x-y^2$

0016 $(a-1)(a+2)(a+3)$
$=\{(a-1)(a+2)\}(a+3)$
$=(a^2+2a-a-2)(a+3)$
$=(a^2+a-2)(a+3)$
$=a^3+3a^2+a^2+3a-2a-6$
$=a^3+4a^2+a-6$ 답 a^3+4a^2+a-6

0017 $(x+y)(x+2y)(2x+y)$
$=\{(x+y)(x+2y)\}(2x+y)$
$=(x^2+2xy+xy+2y^2)(2x+y)$
$=(x^2+3xy+2y^2)(2x+y)$
$=2x^3+x^2y+6x^2y+3xy^2+4xy^2+2y^3$
$=2x^3+7x^2y+7xy^2+2y^3$
답 $2x^3+7x^2y+7xy^2+2y^3$

0018 답 (가) 분배법칙 (나) 결합법칙 (다) 교환법칙 (라) 분배법칙

0019 $(2x+1)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2$
$=4x^2+4x+1$ 답 $4x^2+4x+1$

0020 $(3x-5)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5+5^2$
$=9x^2-30x+25$ 답 $9x^2-30x+25$

0021 $(4x+y)(4x-y)=(4x)^2-y^2$
$=16x^2-y^2$ 답 $16x^2-y^2$

0022 $(x+2)(x-7)=x^2+(2-7)x+2\cdot(-7)$
$=x^2-5x-14$ 답 $x^2-5x-14$

0023 $(3x+4)(2x-1)=3\cdot 2x^2+(-3+8)x+4\cdot(-1)$
$=6x^2+5x-4$ 답 $6x^2+5x-4$

0024 $(a-b+2c)^2$
$=a^2+(-b)^2+(2c)^2+2\cdot a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot 2c+2\cdot 2c\cdot a$
$=a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$
답 $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$

0025 $(x+4)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2+4^3$
$=x^3+12x^2+48x+64$
답 $x^3+12x^2+48x+64$

0026 $(x-2y)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
$=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$
답 $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

0027 $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+3^3=x^3+27$ 답 x^3+27

0028 $(2x-1)(4x^2+2x+1)=(2x)^3-1^3=8x^3-1$
답 $8x^3-1$

0029 $(a+2b-c)(a^2+4b^2+c^2-2ab+2bc+ca)$
$=a^3+(2b)^3+(-c)^3-3a\cdot 2b\cdot(-c)$
$=a^3+8b^3-c^3+6abc$ 답 $a^3+8b^3-c^3+6abc$

0030 $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$
$=x^4+x^2\cdot(2y)^2+(2y)^4$
$=x^4+4x^2y^2+16y^4$ 답 $x^4+4x^2y^2+16y^4$

0031 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=6^2-2\cdot 4=28$ 답 28

0032 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=5^2-4\cdot(-1)=29$ 답 29

0033 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=3^3-3\cdot(-6)\cdot 3=81$ 답 81

0034 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=8^3+3\cdot 2\cdot 8=560$ 답 560

0035 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=2^2-2\cdot(-5)=14$ 답 14

0036 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$ 답 14

0037 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$=4^3-3\cdot 4=52$ 답 52

0038 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$ 답 11

0039 $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
$=3^3+3\cdot 3=36$ 답 36

0040 $x+y=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}$,
$xy=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$이므로
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{2})^2-2\cdot 1=6$ 답 6

0041 $x+y=2\sqrt{2}$, $xy=1$이므로
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=(2\sqrt{2})^3-3\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$ 답 $10\sqrt{2}$

0042 답 몫: x^2-3x, 나머지: 2
3, $-3x^2-6x$

0043 답 몫: $2x+3$, 나머지: $x-8$
3, $2x^3-2x^2+2x$, $3x^2-3x+3$, $x-8$

0044
$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^2+3\,\overline{\big)\,x^3-2x^2+4x+1} \\ \underline{x^3+3x} \\ -2x^2+\ x+1 \\ \underline{-2x^2-6} \\ x+7 \end{array}$$
답 몫: $x-2$, 나머지: $x+7$

0045
$$\begin{array}{r} 2x-5 \\ x^2-x-2\,\overline{\big)\,2x^3-7x^2+\ 6} \\ \underline{2x^3-2x^2-4x} \\ -5x^2+4x+\ 6 \\ \underline{-5x^2+5x+10} \\ -x-\ 4 \end{array}$$
답 몫: $2x-5$, 나머지: $-x-4$

0046
$$\begin{array}{r} -2x^2+\ x-3 \\ 2x^2+x-3\,\overline{\big)\,-4x^4+\ x^2+\ x-\ 1} \\ \underline{-4x^4-2x^3+6x^2} \\ 2x^3-5x^2+\ x \\ \underline{2x^3+\ x^2-3x} \\ -6x^2+4x-\ 1 \\ \underline{-6x^2-3x+\ 9} \\ 7x-10 \end{array}$$
답 몫: $-2x^2+x-3$, 나머지: $7x-10$

0047
$$\begin{array}{r} -5x-2 \\ x-1\,\overline{\big)\,-5x^2+3x+8} \\ \underline{-5x^2+5x} \\ -2x+8 \\ \underline{-2x+2} \\ 6 \end{array}$$
따라서 $Q=-5x-2$, $R=6$이므로
$-5x^2+3x+8=(x-1)(-5x-2)+6$
답 $-5x^2+3x+8=(x-1)(-5x-2)+6$

0048
$$\begin{array}{r} 2x^2-\ x+3 \\ 2x+3\,\overline{\big)\,4x^3+4x^2+3x-\ 2} \\ \underline{4x^3+6x^2} \\ -2x^2+3x \\ \underline{-2x^2-3x} \\ 6x-\ 2 \\ \underline{6x+\ 9} \\ -11 \end{array}$$
따라서 $Q=2x^2-x+3$, $R=-11$이므로
$4x^3+4x^2+3x-2=(2x+3)(2x^2-x+3)-11$
답 $4x^3+4x^2+3x-2=(2x+3)(2x^2-x+3)-11$

0049 $(2A+B)-(3A-B)$

$=2A+B-3A+B$

$=-A+2B$

$=-(x^3-2x^2+5x-4)+2(x^3+x-3)$

$=-x^3+2x^2-5x+4+2x^3+2x-6$

$=x^3+2x^2-3x-2$ 답 ⑤

0050 $2A-B+C$

$=2(x^3-2x^2)-(-x^3+4x+2)+(2x^2-x+5)$

$=2x^3-4x^2+x^3-4x-2+2x^2-x+5$

$=3x^3-2x^2-5x+3$

따라서 $a=3$, $b=-2$, $c=-5$, $d=3$이므로

$a+b+c+d=-1$ 답 ②

0051 $2(B-X)=A-X$에서 $\quad 2B-2X=A-X$

$\therefore X=-A+2B$

$=-(2x^2+xy+3y^2)+2\left(-\frac{1}{2}x^2+4xy+y^2\right)$

$=-2x^2-xy-3y^2-x^2+8xy+2y^2$

$=-3x^2+7xy-y^2$ 답 $-3x^2+7xy-y^2$

0052 $A+2B=7x^2+xy-3y^2$ ······ ㉠

$A-B=-5x^2+4xy+3y^2$ ······ ㉡

㉠$+2\times$㉡을 하면 $\quad 3A=-3x^2+9xy+3y^2$

$\therefore A=-x^2+3xy+y^2$ ··· ❶

㉠$-$㉡을 하면 $\quad 3B=12x^2-3xy-6y^2$

$\therefore B=4x^2-xy-2y^2$ ··· ❷

$\therefore A+B=-x^2+3xy+y^2+4x^2-xy-2y^2$

$=3x^2+2xy-y^2$ ··· ❸

답 $3x^2+2xy-y^2$

채점 기준	비율
❶ 다항식 A를 구할 수 있다.	40 %
❷ 다항식 B를 구할 수 있다.	40 %
❸ $A+B$를 계산할 수 있다.	20 %

0053 $A+BC=(3x^3+2x^2+x-1)+(x^2-2)(x+1)$

$=3x^3+2x^2+x-1+x^3+x^2-2x-2$

$=4x^3+3x^2-x-3$ 답 ④

0054 $(x+3y)(2x+y)-(2x^2-xy+3y^2)$

$=(2x^2+7xy+3y^2)-(2x^2-xy+3y^2)$

$=2x^2+7xy+3y^2-2x^2+xy-3y^2$

$=8xy$ 답 ③

0055 $AC-BA$

$=(x-2)(x^2-3x+1)-(x^3+x-1)(x-2)$

$=(x^3-5x^2+7x-2)-(x^4-2x^3+x^2-3x+2)$

$=x^3-5x^2+7x-2-x^4+2x^3-x^2+3x-2$

$=-x^4+3x^3-6x^2+10x-4$

답 $-x^4+3x^3-6x^2+10x-4$

다른 풀이 $AC-BA=AC-AB=A(C-B)$

$=(x-2)\{(x^2-3x+1)-(x^3+x-1)\}$

$=(x-2)(-x^3+x^2-4x+2)$

$=-x^4+x^3-4x^2+2x+2x^3-2x^2+8x-4$

$=-x^4+3x^3-6x^2+10x-4$

0056 $\{(3x-1)+x+(3x-1)\}(x+2)+x\cdot x$

$=(7x-2)(x+2)+x^2$

$=7x^2+12x-4+x^2$

$=8x^2+12x-4$ 답 $8x^2+12x-4$

0057 $(3x^2+2x+1)(x^2+2x+3)$의 전개식에서 x^3항은

$3x^2\cdot 2x+2x\cdot x^2=8x^3$

따라서 x^3의 계수는 8이다. 답 ④

0058 $(2x-y+3)(4x+5y-1)$의 전개식에서 xy항은

$2x\cdot 5y+(-y)\cdot 4x=6xy$

따라서 xy의 계수는 6이다. 답 6

0059 $(2x^2+3x-1)(x^2+x+k)$의 전개식에서 x항은

$3x\cdot k+(-1)\cdot x=(3k-1)x$ ··· ❶

이때 x의 계수가 8이므로

$3k-1=8, \quad 3k=9$

$\therefore k=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ x항을 구할 수 있다.	60 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

0060 $(3x^2-x+1)(x^2+ax+2)$의 전개식에서 x^2항은

$3x^2\cdot 2-x\cdot ax+1\cdot x^2=(7-a)x^2$

이때 x^2의 계수가 5이므로

$7-a=5 \quad \therefore a=2$

따라서 $(3x^2-x+1)(x^2+2x+2)$의 전개식에서 x항은

$-x\cdot 2+1\cdot 2x=0$

이므로 x의 계수는 0이다. 답 ③

0061 $(1+x+x^2+x^3)^2=(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)$의 전개식에서 x^2항은

$1\cdot x^2+x\cdot x+x^2\cdot 1=3x^2$

따라서 x^2의 계수는 3이다. 답 3

라쎈 특강

$(1+x+x^2+x^3)^2$을 전개할 때, x^3항은 x^2의 계수에 영향을 주지 않으므로 $(1+x+x^2)^2$의 전개식에서 x^2의 계수를 구해도 된다.

0062 $(a+b)^2(a-b)^2=\{(a+b)(a-b)\}^2$

$=(a^2-b^2)^2$

$=a^4-2a^2b^2+b^4$ 답 $a^4-2a^2b^2+b^4$

다른 풀이 $(a+b)^2(a-b)^2$

$=(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)$

$=a^4-2a^3b+a^2b^2+2a^3b-4a^2b^2+2ab^3+a^2b^2-2ab^3+b^4$

$=a^4-2a^2b^2+b^4$

0063 $(a+2b+c)^2=a^2+4b^2+c^2+2\cdot a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot c+2\cdot c\cdot a$

$=a^2+4b^2+c^2+2(2ab+2bc+ca)$

$=26+2\cdot 19=64$ 답 ②

0064 $(x+ay-z)^2$

$=x^2+a^2y^2+z^2+2\cdot x\cdot ay+2\cdot ay\cdot(-z)+2\cdot(-z)\cdot x$

$=x^2+a^2y^2+z^2+2axy-2ayz-2zx$ ··· ❶

이때 xy의 계수가 -8이므로

$2a=-8 \quad \therefore a=-4$ ··· ❷

따라서 yz의 계수는 $-2a=-2\cdot(-4)=8$이므로

$b=8$ ··· ❸

답 $a=-4,\ b=8$

채점 기준	비율
❶ $(x+ay-z)^2$을 전개할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	20 %

0065 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=0$

$\therefore xy+yz+zx=0$

이때

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$=2+2\cdot 0=2$

이므로

$(x+y+z)^4=\{(x+y+z)^2\}^2=2^2=4$ 답 ①

0066 $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}$

$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=x^6-y^6$ 답 ②

다른 풀이 $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$=x^6-y^6$

0067 $(x-1)^3-(x-2)(x^2+2x+4)$

$=(x^3-3x^2+3x-1)-(x^3-8)$

$=-3x^2+3x+7$

따라서 x^2의 계수는 -3이다. 답 ②

0068 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$=8-3\cdot(-5)=23$ 답 23

0069 $A=(x-1)^3,\ B=(x+1)^3$이므로 ··· ❶

$A+B=(x-1)^3+(x+1)^3$

$=(x^3-3x^2+3x-1)+(x^3+3x^2+3x+1)$

$=2x^3+6x$ ··· ❷

답 $2x^3+6x$

채점 기준	비율
❶ A, B를 각각 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $A+B$를 계산할 수 있다.	60 %

0070 정사각형 A의 한 변의 길이가 x^2+2이므로 정사각형 B의 한 변의 길이는

$2x^2-x+3-(x^2+2)=x^2-x+1$

이때 직사각형 C의 가로의 길이는 정사각형 B의 한 변의 길이와 같으므로

x^2-x+1

이고, 직사각형 C의 세로의 길이는

$x^2+2-(x^2-x+1)=x+1$

따라서 직사각형 C의 넓이는

$(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$ 답 x^3+1

0071 $x^2+3x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+1)(t-3)$

$=t^2-2t-3$

$=(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-3$

$=x^4+6x^3+9x^2-2x^2-6x-3$

$=x^4+6x^3+7x^2-6x-3$

답 $x^4+6x^3+7x^2-6x-3$

0072 $y-z=t$로 놓으면

(주어진 식)$=\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}$

$=(x-t)(x+t)$

$=x^2-t^2$

$=x^2-(y-z)^2$

$=x^2-(y^2-2yz+z^2)$

$=x^2-y^2-z^2+2yz$ 답 $x^2-y^2-z^2+2yz$

0073 $(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)$

$=\{(x+3)(x-4)\}\{(x+1)(x-2)\}$

$=(x^2-x-12)(x^2-x-2)$

상수항끼리 더한 값이 같아지도록 다항식을 2개씩 짝 지어 전개한다.

$x^2-x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-12)(t-2)$

$=t^2-14t+24$

$=(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$

$=x^4-2x^3+x^2-14x^2+14x+24$

$=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

따라서 $a=-13,\ b=14$이므로

$a+2b=-13+2\cdot 14=15$ 답 ⑤

0074 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$7=3^2-2xy, \quad 2xy=2$

$\therefore xy=1$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\cdot1\cdot3=18$

답 ④

0075 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ ······ ㉠

이때

$x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4,$

$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=4^2-2\cdot1=14$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$\dfrac{14}{1}=14$

답 ②

다른 풀이 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{(4+4\sqrt{3}+3)+(4-4\sqrt{3}+3)}{4-3}=14$

0076 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$에서

$-19=-1-3ab, \quad 3ab=18$

$\therefore ab=6$

답 6

0077 $x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2$

$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2(xy)^2$ ······ ㉠ ··· ❶

이때 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$10=1^3-3xy, \quad 3xy=-9$

$\therefore xy=-3$ ··· ❷

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$\{1^2-2\cdot(-3)\}^2-2\cdot(-3)^2=31$ ··· ❸

답 31

채점 기준	비율
❶ x^4+y^4을 $x+y$와 xy에 대한 식으로 변형할 수 있다.	40 %
❷ xy의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ x^4+y^4의 값을 구할 수 있다.	20 %

0078 $x\neq0$이므로 $x^2-5x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x^2-5x+1=0$에 $x=0$을 대입하면 (좌변)$=1$이므로 $x\neq0$

$x-5+\dfrac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\dfrac{1}{x}=5$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=5^2-2=23$

답 ②

라쎈 특강

$x^2-px\pm1=0$ (p는 상수)의 양변을 x로 나누면

$x-p\pm\dfrac{1}{x}=0 \quad \therefore x\pm\dfrac{1}{x}=p$

0079 $x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ ······ ㉠

이때 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4$에서

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3^2+4=13$

그런데 $x>0$이면 $x+\dfrac{1}{x}>0$이므로

$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{13}$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$\sqrt{13}\cdot3=3\sqrt{13}$

답 ⑤

0080 (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$에서

$6=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2 \quad \therefore \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=8$

그런데 $x>0$이면 $x+\dfrac{1}{x}>0$이므로

$x+\dfrac{1}{x}=2\sqrt{2}$ ··· ❶

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ ··· ❷

$=(2\sqrt{2})^3-3\cdot2\sqrt{2}$

$=10\sqrt{2}$ ··· ❸

답 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $10\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $x+\dfrac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $x^3+\dfrac{1}{x^3}$을 $x+\dfrac{1}{x}$에 대한 식으로 변형할 수 있다.	30 %
❸ $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0081 $x^3+2x^2+3x+4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$

$=x^3-\dfrac{1}{x^3}+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+4$ ······ ㉠

이때 $x\neq0$이므로 $x^2-4x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4-\dfrac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\dfrac{1}{x}=4$

따라서

$x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=4^3+3\cdot4=76,$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=4^2+2=18$

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$76+2\cdot18+3\cdot4+4=128$

답 128

0082 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$13=5^2-2(xy+yz+zx), \quad 2(xy+yz+zx)=12$

$\therefore xy+yz+zx=6$

답 ②

0083 $a^2+b^2+4c^2=a^2+b^2+(2c)^2$

$=(a+b+2c)^2-2(ab+2bc+2ca)$

$=11^2-2\cdot32=57$

답 ④

0084 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$

$=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$ ...... ㉠ ··· ❶

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$46=8^2-2(ab+bc+ca),\quad 2(ab+bc+ca)=18$

$\therefore ab+bc+ca=9$ ··· ❷

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$2\cdot46-2\cdot9=74$ ··· ❸

답 74

채점 기준	비율
❶ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$을 변형할 수 있다.	40 %
❷ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0085 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ac+c^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\}$ ...... ㉠

이때 $a-b=7$, $b-c=-3$을 변끼리 더하면

$a-c=4$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$\frac{1}{2}\{7^2+(-3)^2+4^2\}=\frac{1}{2}\cdot74=37$

답 37

0086 $(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$

$=(3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$

$=(3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$

$=(3^4-2^4)(3^4+2^4)$

$=3^8-2^8$

답 ③

0087 $98^2+102^2=(100-2)^2+(100+2)^2$

$=100^2-2\cdot100\cdot2+2^2+100^2+2\cdot100\cdot2+2^2$

$=20008$

답 ⑤

0088 $\frac{108^3}{107\times109+1}=\frac{108^3}{(108-1)(108+1)+1}$

$=\frac{108^3}{(108^2-1)+1}$

$=108$

답 108

0089 $99\times10101=(100-1)(10000+100+1)$

$=(100-1)(100^2+100+1)$

$=100^3-1=1000000-1$

$=999999$

답 999999

0090 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 넓이는 ab이다.

직사각형의 대각선의 길이가 15이므로

$a^2+b^2=15^2=225$

또 직사각형의 둘레의 길이가 42이므로

$2(a+b)=42\quad \therefore a+b=21$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$225=21^2-2ab\quad \therefore ab=108$

따라서 직사각형의 넓이는 108이다.

답 ①

0091 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 넓이는 ab이다.

직사각형의 대각선의 길이는 사분원의 반지름의 길이와 같으므로

$a^2+b^2=8^2=64$

또 직사각형의 가로와 세로의 길이의 합이 10이므로

$a+b=10$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

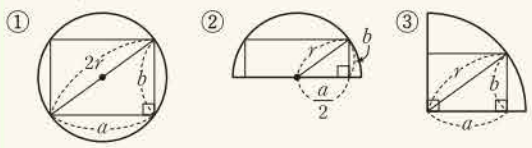
$64=10^2-2ab\quad \therefore ab=18$

따라서 직사각형의 넓이는 18이다.

답 18

라쎈 특강

가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b인 직사각형이 아래와 같이 내접할 때, 다음이 성립한다.



→ $a^2+b^2=(2r)^2$ → $\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2=r^2$ → $a^2+b^2=r^2$

0092 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b, 높이를 c라 하면 직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$이다.

직육면체의 겉넓이가 10이므로

$2(ab+bc+ca)=10\quad \therefore ab+bc+ca=5$

또 모든 모서리의 길이의 합이 16이므로

$4(a+b+c)=16\quad \therefore a+b+c=4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=4^2-2\cdot5=6$

따라서 직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{6}$이다.

답 $\sqrt{6}$

0093 두 구의 반지름의 길이를 각각 a, b라 하면 두 구의 부피의 합은 $\frac{4}{3}\pi(a^3+b^3)$이다.

두 구의 지름의 길이의 합이 8이므로

$2a+2b=8\quad \therefore a+b=4$

또 두 구의 겉넓이의 합이 40π이므로

$4\pi a^2+4\pi b^2=40\pi\quad \therefore a^2+b^2=10$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$10=4^2-2ab\quad \therefore ab=3$

따라서

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=4^3-3\cdot3\cdot4=28$

이므로 두 구의 부피의 합은

$\frac{4}{3}\pi\cdot28=\frac{112}{3}\pi$

답 ⑤

0094
$$\begin{array}{r} 3x-5 \\ x^2+x-1\,\overline{)\,3x^3-2x^2+4x-1} \\ \underline{3x^3+3x^2-3x} \\ -5x^2+7x-1 \\ \underline{-5x^2-5x+5} \\ 12x-6 \end{array}$$
따라서 몫은 $3x-5$, 나머지는 $12x-6$이다. 답 ③

0095 $a=5$, $b=5$, $c=4$, $d=16$이므로
$a+b+c+d=30$ 답 30

0096
$$\begin{array}{r} 3x+3 \\ x^2-x+2\,\overline{)\,3x^3+5x+11} \\ \underline{3x^3-3x^2+6x} \\ 3x^2-x+11 \\ \underline{3x^2-3x+6} \\ 2x+5 \end{array}$$
즉 $2x+5=2x+k$이므로 $k=5$ 답 ①

0097
$$\begin{array}{r} -2x+7 \\ x^2+x+1\,\overline{)\,-2x^3+5x^2+5x+a} \\ \underline{-2x^3-2x^2-2x} \\ 7x^2+7x+a \\ \underline{7x^2+7x+7} \\ a-7 \end{array}$$
이때 나머지가 0이므로
$a-7=0$ $\therefore a=7$ 답 7

0098
$$\begin{array}{r} x-3 \\ x^2+1\,\overline{)\,x^3-3x^2+4x-1} \\ \underline{x^3+x} \\ -3x^2+3x-1 \\ \underline{-3x^2-3} \\ 3x+2 \end{array}$$
따라서 몫은 $x-3$, 나머지는 $3x+2$이므로 ⋯ ❶
$a=1$, $b=-3$, $c=3$, $d=2$ ⋯ ❷
$\therefore ad+bc=1\cdot2+(-3)\cdot3=-7$ ⋯ ❸
답 -7

채점 기준	비율
❶ 몫과 나머지를 구할 수 있다.	60 %
❷ a, b, c, d의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $ad+bc$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0099 $2x^3+x^2-8x-1=A(2x+3)-x+5$이므로
$A(2x+3)=2x^3+x^2-7x-6$
$\therefore A=(2x^3+x^2-7x-6)\div(2x+3)$
$$\begin{array}{r} x^2-x-2 \\ 2x+3\,\overline{)\,2x^3+x^2-7x-6} \\ \underline{2x^3+3x^2} \\ -2x^2-7x \\ \underline{-2x^2-3x} \\ -4x-6 \\ \underline{-4x-6} \\ 0 \end{array}$$
$\therefore A=x^2-x-2$ 답 ①

0100 $4x^3-13x^2-36x+5=A(x-5)$이므로
$A=(4x^3-13x^2-36x+5)\div(x-5)$
$$\begin{array}{r} 4x^2+7x-1 \\ x-5\,\overline{)\,4x^3-13x^2-36x+5} \\ \underline{4x^3-20x^2} \\ 7x^2-36x \\ \underline{7x^2-35x} \\ -x+5 \\ \underline{-x+5} \\ 0 \end{array}$$
$\therefore A=4x^2+7x-1$ 답 $4x^2+7x-1$

0101 $P(x)=(x+3)(3x-4)-2$
$=3x^2+5x-14$ ⋯ ❶
$$\begin{array}{r} 3x+14 \\ x-3\,\overline{)\,3x^2+5x-14} \\ \underline{3x^2-9x} \\ 14x-14 \\ \underline{14x-42} \\ 28 \end{array}$$
따라서 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫은 $3x+14$, 나머지는 28이다. ⋯ ❷
답 몫: $3x+14$, 나머지: 28

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	50 %

0102 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 A라 하면
$A(x-3)(x+1)=2x^3-5x^2-4x+3$
$A(x^2-2x-3)=2x^3-5x^2-4x+3$
$\therefore A=(2x^3-5x^2-4x+3)\div(x^2-2x-3)$
$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ x^2-2x-3\,\overline{)\,2x^3-5x^2-4x+3} \\ \underline{2x^3-4x^2-6x} \\ -x^2+2x+3 \\ \underline{-x^2+2x+3} \\ 0 \end{array}$$
$\therefore A=2x-1$
따라서 직육면체의 밑면의 가로의 길이는 $2x-1$이다.
답 $2x-1$

0103 $P(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로
$$P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$$
$$=\frac{1}{2}(2x-1)Q(x)+R$$
$$=(2x-1)\cdot\frac{1}{2}Q(x)+R$$
따라서 $P(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 ①

0104 $P(x)$를 $2x+3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned}P(x)&=(2x+3)Q(x)+R\\&=2\left(x+\frac{3}{2}\right)Q(x)+R\\&=\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot 2Q(x)+R\end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $x+\frac{3}{2}$으로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)$, 나머지는 R이므로

$a=2$, $b=1$ 　　답 $a=2$, $b=1$

0105 $P(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이므로

$$P(x)=(2x-1)Q(x)+1$$

$$\begin{aligned}\therefore xP(x)&=x(2x-1)Q(x)+x\\&=2x\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\\&=\left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)+1\}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $xP(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2xQ(x)+1$, 나머지는 $\frac{1}{2}$이다. 　　답 몫: $2xQ(x)+1$, 나머지: $\frac{1}{2}$

0106 전략 다항식을 y에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타내었는지 확인한다.

풀이 ⑤ $(x-1)y^3+6y^2+y-2x-4$ 　　답 ⑤

0107 전략 먼저 X를 A, B에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $X-A=B$에서

$$\begin{aligned}X&=A+B\\&=(2x^2-4x-2)+(3x+3)\\&=2x^2-x+1\end{aligned}$$

답 ①

0108 전략 x^3항은 (상수항)×(x^3항), (x항)×(x^2항), (x^2항)×(x항), (x^3항)×(상수항)에서 나올 수 있으므로 각 다항식에서 이 항들만 선택하여 곱한다.

풀이 $(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})^2$

$$=\underline{(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})}$$

└ $(1+x+2x^2+3x^3)(1+x+2x^2+3x^3)$의 전개식에서 생각해도 된다.

이 식의 전개식에서 x^3항은

$$1\cdot 3x^3+x\cdot 2x^2+2x^2\cdot x+3x^3\cdot 1=10x^3$$

따라서 x^3의 계수는 10이다. 　　답 10

0109 전략 $(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$임을 이용한다.

풀이
$$\begin{aligned}(x-y-2z)^2&=x^2+y^2+4z^2-2xy+4yz-4zx\\&=x^2+y^2+4z^2-2(xy-2yz+2zx)\\&=62-2\cdot 13=36\end{aligned}$$

답 36

0110 전략 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$임을 이용한다.

풀이 $(3x+ay)^3=27x^3+27ax^2y+9a^2xy^2+a^3y^3$

이때 x^2y의 계수가 54이므로

$27a=54$ 　　$\therefore a=2$ 　　답 2

0111 전략 계수의 부호에 주의하여 곱셈 공식에 대입한다.

풀이 ㄱ. $(2x-y-z)^2=4x^2+y^2+z^2-4xy+2yz-4zx$

ㄴ. $(x-3y)^3=x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 　　답 ⑤

0112 전략 $a+b$를 t로 치환하여 주어진 식을 정리한다.

풀이 $a+b=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(a+b-1)\{(a+b)^2+a+b+1\}&=(t-1)(t^2+t+1)\\&=t^3-1\end{aligned}$$

즉 $t^3-1=8$이므로 　　$t^3=9$

$\therefore (a+b)^3=9$ 　　답 ⑤

0113 전략 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$임을 이용한다.

풀이 $\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}=\frac{x^3-y^3}{xy}$ 　　…… ㉠

이때

$x-y=(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)=2$,

$xy=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=2$

이므로

$$\begin{aligned}x^3-y^3&=(x-y)^3+3xy(x-y)\\&=2^3+3\cdot 2\cdot 2=20\end{aligned}$$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$\frac{20}{2}=10$ 　　답 ④

다른 풀이
$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}&=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}-1}-\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}+1}\\&=\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\\&=\frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)-(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\\&=\frac{10+6\sqrt{3}-(-10+6\sqrt{3})}{2}\\&=\frac{20}{2}=10\end{aligned}$$

0114 전략 a^4+b^4을 a^2+b^2과 ab에 대한 식으로 변형하고, 주어진 조건을 이용하여 ab의 값을 구한다.

풀이 $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2$ 　　…… ㉠

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$7=3^2-2ab$, 　　$2ab=2$

$\therefore ab=1$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$7^2-2\cdot 1^2=47$ 　　답 ⑤

0115 전략 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$을 통분한 후 구해야 하는 값을 곱셈 공식을 이용하여 찾는다.

풀이 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$ 　　…… ㉠

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$25=7^2-2(ab+bc+ca)$, $\quad 2(ab+bc+ca)=24$

$\therefore\ ab+bc+ca=12$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$\frac{12}{4}=3$ 답 ⑤

0116 전략 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$임을 이용하여 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$을 변형한다.

풀이 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$

$=(ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$

$=(ab+bc+ca)^2-2abc(\underbrace{a+b+c}_{0})$

$=(ab+bc+ca)^2$ ...... ㉠

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$0=3+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=-\frac{3}{2}$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ 답 $\frac{9}{4}$

0117 전략 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$임을 이용한다.

풀이 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^4-1)(x^4+1)$

$=x^8-1$

$=32-1=31$ 답 31

0118 전략 공통부분이 생기도록 적당히 항을 묶은 후 곱셈 공식을 이용하여 주어진 등식을 간단히 한다.

풀이 $(a+b+c)(a-b+c)+(a+b-c)(a-b-c)$

$=\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}+\{(a-c)+b\}\{(a-c)-b\}$

$=(a+c)^2-b^2+(a-c)^2-b^2$

$=a^2+2ac+c^2-b^2+a^2-2ac+c^2-b^2$

$=2(a^2-b^2+c^2)=0$

따라서 $a^2-b^2+c^2=0$, 즉 $b^2=a^2+c^2$이므로 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다. 답 ④

0119 전략 주어진 조건을 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=b$, $\overline{BF}=c$라 하면

$\overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2=(a^2+c^2)+(b^2+c^2)+(a^2+b^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$ ...... ㉠

직육면체의 겉넓이가 148이므로

$2(ab+bc+ca)=148$

$\therefore\ ab+bc+ca=74$

또 모든 모서리의 길이의 합이 60이므로

$4(a+b+c)=60$ $\quad\therefore\ a+b+c=15$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=15^2-2\cdot74=77$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$2\cdot77=154$ 답 ④

0120 전략 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 다항식의 나눗셈을 하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $a=3$, $b=5$이므로 $\quad a+b=8$ 답 ④

0121 전략 다항식 $4x^3-3x^2-x+8$을 x^2-2x+3으로 나누어 몫과 나머지를 구한다.

풀이

$$\begin{array}{r}
4x+5\\
x^2-2x+3\,\overline{)\,4x^3-3x^2-x+8}\\
\underline{4x^3-8x^2+12x\phantom{+8}}\\
5x^2-13x+8\\
\underline{5x^2-10x+15}\\
-3x-7
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=4x+5$, $R(x)=-3x-7$이므로

$Q(1)+R(-2)=9+(-1)=8$ 답 8

0122 전략 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$임을 이용한다.

풀이 $A=(x^2-3x)(3x+1)+x-6$

$=3x^3+x^2-9x^2-3x+x-6$

$=3x^3-8x^2-2x-6$ 답 ③

0123 전략 $(x-2)(x+3)$을 전개한 후 공통부분을 치환한다.

풀이 $(x-2)(x+3)(x^2+x+1)=(x^2+x-6)(x^2+x+1)$

$x^2+x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-6)(t+1)$

$=t^2-5t-6$

$=(x^2+x)^2-5(x^2+x)-6$

$=x^4+2x^3+x^2-5x^2-5x-6$

$=x^4+2x^3-4x^2-5x-6$ ··· ❶

따라서 $a=2$, $b=-4$, $c=-5$이므로

$a+b-c=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 전개할 수 있다.	80 %
❷ $a+b-c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0124 전략 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$임을 이용한다.

풀이 $x\neq0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore\ x+\frac{1}{x}=3$ ··· ❶

$\therefore\ \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$

$=3^2-4=5$ ··· ❷

그런데 $x>1$이면 $x-\frac{1}{x}>0$이므로

$x>1$이면 $0<\frac{1}{x}<1$이므로 $x>\frac{1}{x}$ $\quad\therefore\ x-\frac{1}{x}>0$

$x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ ··· ❸

답 $\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $x-\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0125 전략 100을 기준으로 하여 주어진 수들을 나타낸다.

풀이 $99(100^2+101)=(100-1)(100^2+100+1)$

$=100^3-1$ ··· ❶

즉 $100^k-1=100^3-1$이므로

$k=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $99(100^2+101)$을 100^k-1 꼴로 나타낼 수 있다.	80 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0126 전략 다항식 A를 x^2-x-1로 나누어 몫과 나머지를 구한다.

풀이 (1)

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2-x-1 \\ x^2-x-1 & 2x^4-3x^3-2x^2+2x+3 \\ & 2x^4-2x^3-2x^2 \\ \hline & -x^3\qquad+2x \\ & -x^3+x^2+x \\ \hline & -x^2+x+3 \\ & -x^2+x+1 \\ \hline & 2 \end{array}$$

따라서 몫은 $2x^2-x-1$, 나머지는 2이다. ··· ❶

(2) $A=(x^2-x-1)(2x^2-x-1)+2$

$=0\cdot(2x^2-x-1)+2=2$ ··· ❷

답 (1) 몫: $2x^2-x-1$, 나머지: 2 (2) 2

채점 기준	비율
❶ 다항식 A를 x^2-x-1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	50 %
❷ 다항식 A의 값을 구할 수 있다.	50 %

02 나머지 정리와 인수분해

0127 답 ×

0128 답 ○

0129 답 ×

0130 답 ×

0131 답 ㄴ, ㄷ

0132 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-2=0,\ b=0\quad \therefore a=2,\ b=0$ 답 $a=2,\ b=0$

0133 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=0,\ b+2=0\quad \therefore a=0,\ b=-2$ 답 $a=0,\ b=-2$

0134 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1,\ b=1,\ c=3$ 답 $a=1,\ b=1,\ c=3$

0135 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2a=2,\ 1=-c,\ 4b=8$

$\therefore a=1,\ b=2,\ c=-1$ 답 $a=1,\ b=2,\ c=-1$

0136 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-1=3,\ b+4=-1,\ 7=c$

$\therefore a=4,\ b=-5,\ c=7$ 답 $a=4,\ b=-5,\ c=7$

0137 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-3=b,\ a-2=5,\ -5=c$

$\therefore a=7,\ b=-3,\ c=-5$ 답 $a=7,\ b=-3,\ c=-5$

0138 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a=0,\ b=0,\ c+4=0$

$\therefore a=0,\ b=0,\ c=-4$ 답 $a=0,\ b=0,\ c=-4$

0139 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a=-3,\ b=4,\ c=-1$ 답 $a=-3,\ b=4,\ c=-1$

0140 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+2=1,\ b-8=1,\ 3=c$

$\therefore a=-1,\ b=9,\ c=3$ 답 $a=-1,\ b=9,\ c=3$

0141 답 $a=2,\ b=-1$ ◎ $a+b,\ a+b,\ -2a+b,\ 2,\ -1$

0142 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면

$(a-b)x-3a+2b=-x$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a-b=-1,\ -3a+2b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=3$ 답 $a=2,\ b=3$

0143 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면

$x^3-3x^2+3x-1=x^3+ax^2+bx+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=-3,\ b=3,\ c=-1$ 답 $a=-3,\ b=3,\ c=-1$

0144 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면

$ax^2+bx+c=x^2+3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1,\ b=0,\ c=3$ 답 $a=1,\ b=0,\ c=3$

0145 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면

$x^2-2x+3=ax^2+(a+b)x+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1=a,\ -2=a+b,\ 3=c$

$\therefore a=1,\ b=-3,\ c=3$ 답 $a=1,\ b=-3,\ c=3$

0146 답 $a=3,\ b=4$ $-3,\ -12,\ 3,\ 1,\ 16,\ 4$

0147 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-a=11 \quad \therefore a=-11$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$b=7$ 답 $a=-11,\ b=7$

0148 주어진 등식의 양변에 $x=5$를 대입하면

$30a=30 \quad \therefore a=1$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-5b=5 \quad \therefore b=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$6c=18 \quad \therefore c=3$ 답 $a=1,\ b=-1,\ c=3$

0149 주어진 등식의 양변에 $x=-4$를 대입하면

$24a=48 \quad \therefore a=2$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-12b=-12 \quad \therefore b=1$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-6b+12c=-18$

이때 $b=1$이므로 $-6+12c=-18$

$12c=-12 \quad \therefore c=-1$ 답 $a=2,\ b=1,\ c=-1$

0150 $P(1)=1-5+2=-2$ 답 -2

0151 $P(-2)=4+10+2=16$ 답 16

0152 $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-1=-2$ 답 -2

0153 $P\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{4}+\frac{9}{4}+\frac{9}{2}-1=-1$ 답 -1

0154 $P(1)=-2$이므로

$2+a-1=-2 \quad \therefore a=-3$ 답 -3

0155 $P(-2)=1$이므로

$-8-16-2a+9=1, \quad 2a=-16$

$\therefore a=-8$ 답 -8

0156 $P(1)=0$이므로

$1-2-1+a=0 \quad \therefore a=2$ 답 2

0157 $P(-1)=0$이므로

$4-a+5=0 \quad \therefore a=9$ 답 9

0158 $P(2)=0$이므로

$8+4a-6+6=0, \quad 4a=-8$

$\therefore a=-2$ 답 -2

0159 $P(1)=0$이므로

$1+a+b+6=0 \quad \therefore a+b=-7$ …… ㉠

$P(3)=0$이므로

$27+9a+3b+6=0 \quad \therefore 3a+b=-11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=-5$ 답 $a=-2,\ b=-5$

0160 답 몫: x^2+x+4, 나머지: 17 $3,\ -2,\ 4,\ 17$

0161

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & -4 & -8 \\ & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{-4} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-4, 나머지: -4

답 몫: x^2-4, 나머지: -4

0162

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 3 & 1 & -3 & -1 & 5 \\ & & 6 & 14 & 22 & 42 \\ \hline & 3 & 7 & 11 & 21 & \boxed{47} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $3x^3+7x^2+11x+21$, 나머지: 47

답 몫: $3x^3+7x^2+11x+21$, 나머지: 47

0163

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & -3 & 9 & -18 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & \boxed{-16} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-3x+6, 나머지: -16

답 몫: x^2-3x+6, 나머지: -16

0164

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 5 & -3 & 1 \\ & & 1 & 3 & 0 \\ \hline & 2 & 6 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x^2+6x$, 나머지: 1 답 몫: $2x^2+6x$, 나머지: 1

0165 답 몫: x^2-x, 나머지: -1

$1,\ 1,\ -1,\ 0,\ -2,\ 0,\ 2x^2-2x,\ x^2-x$

0166

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & -4 & 6 & 0 & 5 \\ & & 2 & -4 & 2 \\ \hline & -4 & 8 & -4 & \boxed{7} \end{array}$$

$\therefore -4x^3+6x^2+5=\left(x+\frac{1}{2}\right)(-4x^2+8x-4)+7$

$=(2x+1)(-2x^2+4x-2)+7$

따라서 구하는 몫은 $-2x^2+4x-2$, 나머지는 7이다.

답 몫: $-2x^2+4x-2$, 나머지: 7

0167

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 3 & 5 & 1 & -2 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 3 & 6 & 3 & \boxed{-1} \end{array}$$

$\therefore 3x^3+5x^2+x-2=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+6x+3)-1$

$=(3x-1)(x^2+2x+1)-1$

따라서 구하는 몫은 x^2+2x+1, 나머지는 -1이다.

답 몫: x^2+2x+1, 나머지: -1

0168

$$\begin{array}{r|rrrrr} -\frac{3}{4} & 4 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ & & -3 & 3 & -6 & 6 \\ \hline & 4 & -4 & 8 & -8 & \boxed{6} \end{array}$$

$\therefore 4x^4-x^3+5x^2-2x=\left(x+\frac{3}{4}\right)(4x^3-4x^2+8x-8)+6$

$=(4x+3)(x^3-x^2+2x-2)+6$

따라서 구하는 몫은 x^3-x^2+2x-2, 나머지는 6이다.

답 몫: x^3-x^2+2x-2, 나머지: 6

0169 답 $(a+b)(x-y)$

0170 답 $ax^2(x+y)$

0171 답 $(a+5b)^2$

0172 $16x^2-9y^2=(4x)^2-(3y)^2$

$=(4x+3y)(4x-3y)$

답 $(4x+3y)(4x-3y)$

0173 답 $(a+2)(a-4)$

0174 답 $(2x+1)(2x+3)$

0175 $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

$=a^2+(-b)^2+c^2+2a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot c+2ca$

$=(a-b+c)^2$

답 $(a-b+c)^2$

0176 $x^3+9x^2+27x+27=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3$

$=(x+3)^3$

답 $(x+3)^3$

0177 $x^3-12x^2+48x-64=x^3-3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2-4^3$

$=(x-4)^3$

답 $(x-4)^3$

0178 $x^3+125=x^3+5^3=(x+5)(x^2-5x+25)$

답 $(x+5)(x^2-5x+25)$

0179 $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

답 $(x-2)(x^2+2x+4)$

0180 $a^3-b^3+c^3+3abc$

$=a^3+(-b)^3+c^3-3a\cdot(-b)\cdot c$

$=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

답 $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

0181 $x^4+4x^2y^2+16y^4=x^4+x^2\cdot(2y)^2+(2y)^4$

$=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

답 $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

0182 $x+y=t$로 놓으면

$(x+y)(x+y+3)+2=t(t+3)+2$

$=t^2+3t+2$

$=(t+1)(t+2)$

$=(x+y+1)(x+y+2)$

답 $(x+y+1)(x+y+2)$

0183 $a-2=t$로 놓으면

$(a-2)^2-7(a-2)+12=t^2-7t+12$

$=(t-3)(t-4)$

$=(a-2-3)(a-2-4)$

$=(a-5)(a-6)$

답 $(a-5)(a-6)$

0184 $x^2=X$로 놓으면

$x^4-10x^2+9=X^2-10X+9$

$=(X-1)(X-9)$

$=(x^2-1)(x^2-9)$

$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

답 $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

0185 $x^4+4x^2+16=(x^4+8x^2+16)-4x^2$

$=(x^2+4)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

답 $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

0186 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+xy+2x+3y-3=(x+3)y+x^2+2x-3$

$=(x+3)y+(x+3)(x-1)$

$=(x+3)(x+y-1)$

답 $(x+3)(x+y-1)$

0187 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^2+3ab+2b^2-2a-5b-3\\&=a^2+(3b-2)a+2b^2-5b-3\\&=a^2+(3b-2)a+(2b+1)(b-3)\\&=(a+2b+1)(a+b-3)\end{aligned}$$

답 $(a+2b+1)(a+b-3)$

다른 풀이 주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^2+3ab+2b^2-2a-5b-3\\&=2b^2+(3a-5)b+a^2-2a-3\\&=2b^2+(3a-5)b+(a+1)(a-3)\\&=(a+2b+1)(a+b-3)\end{aligned}$$

0188 답 (가) 0 (나) $x-1$ (다) x^2-x-6
(라) $(x-1)(x+2)(x-3)$

0189 $P(x)=x^3-x^2-5x-3$이라 하면

$P(-1)=-1-1+5-3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-1 & 1 & -1 & -5 & -3\\ & & -1 & 2 & 3\\\hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)(x^2-2x-3)\\&=(x+1)^2(x-3)\end{aligned}$$

답 $(x+1)^2(x-3)$

0190 $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$이라 하면

$P(-1)=1+5+5-5-6=0$,

$P(1)=1-5+5+5-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}-1 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6\\ & & -1 & 6 & -11 & 6\\\hline 1 & 1 & -6 & 11 & -6 & \boxed{0}\\ & & 1 & -5 & 6 & \\\hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(x)&=(x+1)(x-1)(x^2-5x+6)\\&=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

답 $(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$

0191 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면

$x^3+ax-6=x^3+(b+c)x^2+(bc+3)x+3b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=b+c,\ a=bc+3,\ -6=3b$

$\therefore a=-1,\ b=-2,\ c=2$

$\therefore a+b+c=-1$

답 ⑤

0192 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면

$(a+1)x^2+(3-b)x=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+1=0,\ 3-b=0$

$\therefore a=-1,\ b=3$

답 $a=-1,\ b=3$

0193 주어진 등식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$(a+2b)x+(2a-b)y+c=4x+3y-2$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+2b=4,\ 2a-b=3,\ c=-2$

$a+2b=4,\ 2a-b=3$을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=1$

$\therefore a-b+c=-1$

답 ②

0194 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(x+y-3)k+xy-2=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x+y-3=0,\ xy-2=0$

$\therefore x+y=3,\ xy=2$

$$\begin{aligned}\therefore x^2+y^2&=(x+y)^2-2xy\\&=3^2-2\cdot2=5\end{aligned}$$

답 ③

0195 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-4=2c \qquad \therefore c=-2$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a-3=0 \qquad \therefore a=3$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2a=2b, \qquad a=b \qquad \therefore b=3$

$\therefore abc=-18$

답 ②

0196 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$6=c$ ··· ❶

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a-b+c, \qquad 1=a-b+6$

$\therefore a-b=-5$ ······ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$17=a+b+c, \qquad 17=a+b+6$

$\therefore a+b=11$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=8$ ··· ❷

$\therefore 2a+b-c=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $2a+b-c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0197 주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$27-36+3a+1=-2, \qquad 3a=6$

$\therefore a=2$

$\therefore x^3-4x^2+2x+1=(x-3)P(x)-2$

이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8-16+4+1=-P(2)-2$

$\therefore P(a)=P(2)=1$

답 1

0198 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b \quad \therefore a+b=-1$ …… ㉠

주어진 등식의 양변에 $x^2=2$를 대입하면

$0=4+2a+b \quad \therefore 2a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-3)^2+2^2=13$ 답 ③

0199 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)-a_0$

$=2^5-1=31$ 답 31

0200 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$3^5=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=243$ 답 ④

0201 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$5^3=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$

$\therefore a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=125$ 답 ⑤

0202 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1^4=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$ …… ㉠ ··· ❶

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$3^4=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$ …… ㉡ ··· ❷

㉠+㉡을 하면 $\quad 82=2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=41$ ··· ❸

답 41

채점 기준	비율
❶ $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0203 x^3+ax^2+b를 x^2+x+2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+b=(x^2+x+2)(x+c)+2x+3$

$=x^3+(c+1)x^2+(c+4)x+2c+3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c+1,\ 0=c+4,\ b=2c+3$

$\therefore a=-3,\ b=-5,\ c=-4$

$\therefore ab=15$ 답 ④

참고 x^3+ax^2+b의 최고차항의 계수가 1, x^2+x+2의 최고차항의 계수가 1이므로 몫은 $x+c$ (c는 상수) 꼴이다.

0204 x^3+2x^2+3을 x^2+ax+b로 나누었을 때의 몫이 $x+1$이고 나머지가 $-3x+1$이므로

$x^3+2x^2+3=(x^2+ax+b)(x+1)-3x+1$

$=x^3+(a+1)x^2+(a+b-3)x+b+1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2=a+1,\ 0=a+b-3,\ 3=b+1$

$\therefore a=1,\ b=2$ 답 $a=1,\ b=2$

0205 x^3+ax+b를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax+b=(x^2-x+1)(x+c)$

$=x^3+(c-1)x^2+(1-c)x+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c-1,\ a=1-c,\ b=c$

$\therefore a=0,\ b=1,\ c=1$

$\therefore a^2+b^2=1$ 답 ①

0206 $x^5+ax^2+(a+3)x-2=(x-1)Q(x)+4$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+(a+3)-2=4$

$2a=2 \quad \therefore a=1$

$\therefore x^5+x^2+4x-2=(x-1)Q(x)+4$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+1-4-2=-2Q(-1)+4$

$-2Q(-1)=-10 \quad \therefore Q(-1)=5$

$\therefore a+Q(-1)=6$ 답 6

0207 $P(x)=x^3+ax^2+bx+1$이라 하면 나머지 정리에 의하여 $P(1)=1,\ P(3)=13$이므로

$1+a+b+1=1,\ 27+9a+3b+1=13$

$\therefore a+b=-1,\ 3a+b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=1$ 답 $a=-2,\ b=1$

0208 나머지 정리에 의하여

$P(2)=-4$

따라서 구하는 나머지는

$3P(2)=3\cdot(-4)=-12$ 답 ③

0209 $P(x)=x^3-ax+4$라 하면 나머지 정리에 의하여

$P(1)=1-a+4=-a+5,$

$P(-2)=-8+2a+4=2a-4$

이때 $P(1)=P(-2)$이므로

$-a+5=2a-4, \quad -3a=-9$

$\therefore a=3$ 답 3

0210 나머지 정리에 의하여

$P(-5)=3,\ Q(-5)=-1$

따라서 구하는 나머지는

$4P(-5)+3Q(-5)=4\cdot3+3\cdot(-1)=9$ 답 ⑤

0211 나머지 정리에 의하여

$P(-3)=-7,\ P(2)=3$

$P(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^2+x-6)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+3)(x-2)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=-3$, $x=2$를 각각 대입하면

$$P(-3)=-3a+b,\ P(2)=2a+b$$
$$\therefore\ -3a+b=-7,\ 2a+b=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=-1$$

따라서 구하는 나머지는 $2x-1$이다. 답 $2x-1$

0212 나머지 정리에 의하여

$$P(-1)=8,\ P(1)=-2$$

$(x+2)P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$(x+2)P(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b \quad \cdots ❶$$

양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$$P(-1)=-a+b,\ 3P(1)=a+b$$
$$\therefore\ -a+b=8,\ a+b=-6$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-7,\ b=1 \quad \cdots ❷$$

따라서 $R(x)=-7x+1$이므로

$$R(-2)=15 \quad \cdots ❸$$

답 15

채점 기준	비율
❶ $(x+2)P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 항등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $R(-2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0213 $P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2-3x+2)Q_1(x)+4x-1$$
$$=(x-1)(x-2)Q_1(x)+4x-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$P(x)$를 x^2+4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2+4x+3)Q_2(x)-x+3$$
$$=(x+1)(x+3)Q_2(x)-x+3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$P(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^2-x-2)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $P(2)=7$

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $P(-1)=4$

㉢의 양변에 $x=2$, $x=-1$을 각각 대입하면

$$P(2)=2a+b,\ P(-1)=-a+b$$
$$\therefore\ 2a+b=7,\ -a+b=4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=5$$

따라서 구하는 나머지는 $x+5$이다. 답 ②

0214 $x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5$$
$$=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$$
$$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=c$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$0=a-b+c \qquad \therefore\ a-b=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$4=a+b+c \qquad \therefore\ a+b=4 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=2$$

따라서 $R(x)=2x^2+2x$이므로

$$R(2)=12$$

답 ④

0215 $P(x)$를 $x(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$$P(x)=x(x-2)Q_1(x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+x-2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$P(x)$를 $x(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=x(x-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠의 양변에 $x=0$, $x=2$를 각각 대입하면

$$P(0)=0,\ P(2)=0$$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$P(1)=-1$$

㉢의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$$P(0)=c,\ P(1)=a+b+c,\ P(2)=4a+2b+c$$
$$c=0,\ a+b+c=-1,\ 4a+2b+c=0$$

$a+b+c=-1$, $4a+2b+c=0$에서 $c=0$이므로

$$a+b=-1,\ 2a+b=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=-2$$

따라서 구하는 나머지는 x^2-2x이다. 답 ④

0216 $P(x)$를 $(x-1)(x^2+x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ㉠$$

$P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x+4$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x+4$이다.

$$\therefore\ ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+3x+4$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$P(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+a(x^2+x+1)+3x+4$$

한편 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$$P(1)=3a+7=4 \qquad \therefore\ a=-1$$

따라서 $R(x)=-(x^2+x+1)+3x+4=-x^2+2x+3$이므로

$$R(3)=0$$

답 0

0217 $P(3x+5)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P(3\cdot(-3)+5)=P(-4)$

이므로 나머지 정리에 의하여 구하는 나머지는

$P(-4)=5$ 답 5

0218 $xP(x-1)$을 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$4P(4-1)=4P(3)$

이므로 나머지 정리에 의하여 구하는 나머지는

$4P(3)=4\cdot 2=8$ 답 8

0219 $P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+2x-4$ …… ㉠

이때 $P(2x+3)$을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(2\cdot(-2)+3)=P(-1)$

이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 구하는 나머지는

$P(-1)=-6$ 답 ①

0220 $P(x)$를 $2x^2-5x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(2x^2-5x-3)Q(x)+x+7$

$=(2x+1)(x-3)Q(x)+x+7$ …… ㉠

이때 $P(3x+4)$를 $3x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P\left(3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+4\right)=P(3)$ └ $P(3x+4)$에 $x=-\frac{1}{3}$을 대입한다.

이므로 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 구하는 나머지는

$P(3)=10$ 답 10

0221 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$P(x)=(x-1)Q(x)+2$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$Q(2)=4$

따라서 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(2)=(2-1)Q(2)+2=4+2=6$ 답 ③

0222 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$P(x)=(x-3)Q(x)+2$

이때 나머지 정리에 의하여 $P(-2)=-8$이므로

$P(-2)=-5Q(-2)+2=-8$

$-5Q(-2)=-10$ $\therefore Q(-2)=2$

따라서 $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 2이다. 답 ①

0223 x^3-2x^2+ax+6을 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 5이므로

$x^3-2x^2+ax+6=(x+1)Q(x)+5$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-2-a+6=5$ $\therefore a=-2$ ⋯ ❶

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-2-2+6=2Q(1)+5,$ $-2Q(1)=2$

$\therefore Q(1)=-1$

따라서 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 -1이다. ⋯ ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50 %

0224 x^{10}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^{10}=(x-1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=1$

㉠의 양변에 $x=99$를 대입하면

$99^{10}=98Q(99)+1$

따라서 99^{10}을 98로 나누었을 때의 나머지는 1이다. 답 ①

0225 (1) x^{2025}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^{2025}=(x-1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=1$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

(2) ㉠의 양변에 $x=2025$를 대입하면

$2025^{2025}=2024Q(2025)+1$

따라서 2025^{2025}을 2024로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 (1) 1 (2) 1

0226 $2x^{10}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$2x^{10}=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=2$

㉠의 양변에 $x=5$를 대입하면

$2\cdot 5^{10}=6Q(5)+2$

따라서 $2\cdot 5^{10}$을 6으로 나누었을 때의 나머지는 2이다. 답 ②

0227 $x^{10}+x^5+1$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^{10}+x^5+1=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=1$

㉠의 양변에 $x=49$를 대입하면

$49^{10}+49^5+1=50Q(49)+1$

따라서 $49^{10}+49^5+1$을 50으로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 1

0228 $P(x)=x^4+kx^3-2x^2-7x-8$이라 하면 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$P(-1)=0$

$1-k-2+7-8=0$ $\therefore k=-2$ 답 ④

0229 $P(x)=ax^3+bx^2+2x+3$이라 하면 $P(x)$가 $x-1$, $x-3$으로 각각 나누어떨어지므로

$P(1)=0$, $P(3)=0$

$a+b+2+3=0$, $27a+9b+6+3=0$

$\therefore\ a+b=-5$, $3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-7$

$\therefore\ ab=-14$ 답 -14

0230 $P(x)=x^3-4x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로

$P(1)=0$, $P(2)=0$

$1-4+a+b=0$, $8-16+2a+b=0$

$\therefore\ a+b=3$, $2a+b=8$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=-2$

따라서 $Q(x)=x^2+5x+2$라 하면 $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$Q(-2)=4-10+2=-4$ 답 -4

0231 $P(x)=(ax^2-4)(ax+3)-ax$라 하면 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$P(-1)=0$ ⋯❶

$(a-4)(-a+3)+a=0$, $a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$ $\therefore\ a=2$ 또는 $a=6$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$2+6=8$ ⋯❷

답 8

채점 기준	비율
❶ $P(-1)=0$임을 알 수 있다.	50 %
❷ 모든 상수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	50 %

0232 $P(x)=x^3-2x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 x^2+3x+2, 즉 $(x+2)(x+1)$로 나누어떨어지므로

$P(-2)=0$, $P(-1)=0$

$-8-8-2a+b=0$, $-1-2-a+b=0$

$\therefore\ 2a-b=-16$, $a-b=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-13$, $b=-10$

$\therefore\ a+b=-23$ 답 ①

0233 $P(x)=2x^3+ax^2-3x+b$라 하면 $P(x)$가 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$P(-1)=0$, $P(2)=0$

$-2+a+3+b=0$, $16+4a-6+b=0$

$\therefore\ a+b=-1$, $4a+b=-10$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=2$

$\therefore\ P(x)=2x^3-3x^2-3x+2$

따라서 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P(3)=54-27-9+2=20$ 답 20

0234 $P(x)=2x^3+9x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 x^2+2x-3, 즉 $(x+3)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$P(-3)=0$, $P(1)=0$ ⋯❶

$-54+81-3a+b=0$, $2+9+a+b=0$

$\therefore\ 3a-b=27$, $a+b=-11$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=-15$ ⋯❷

$Q(x)=ax^2-bx+11=4x^2+15x+11$이라 하면 $Q(\alpha)=0$이므로

$4\alpha^2+15\alpha+11=0$, $(4\alpha+11)(\alpha+1)=0$

$\therefore\ \alpha=-1$ ($\because$ α는 정수) ⋯❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $P(-3)=0$, $P(1)=0$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 α의 값을 구할 수 있다.	40 %

0235 $P(x)-4$가 x^2-4x+3, 즉 $(x-1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$P(1)-4=0$, $P(3)-4=0$

$\therefore\ P(1)=4$, $P(3)=4$

$P(x+3)$을 x^2+2x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x+3)=(x^2+2x)Q(x)+ax+b$

$=x(x+2)Q(x)+ax+b$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$P(3)=b$ $\therefore\ b=4$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$P(1)=-2a+b$, $4=-2a+4$

$\therefore\ a=0$

따라서 구하는 나머지는 4이다. 답 ②

0236 x^3+ax^2+2x+b를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|cccc}
-2 & 1 & a & 2 & b \\
 & & -2 & -2a+4 & 4a-12 \\
\hline
 & 1 & a-2 & -2a+6 & \boxed{4a+b-12}
\end{array}$$

따라서 $k=-2$, $c=-2$, $a-2=2$, $-2a+4=d$, $-2a+6=-2$, $4a-12=4$, $4a+b-12=1$이므로

$k=-2$, $a=4$, $b=-3$, $c=-2$, $d=-4$ 답 ②

0237 주어진 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로 다항식 x^3-2x^2+4x-7을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$는

$$\begin{array}{r|cccc}
3 & 1 & -2 & 4 & -7 \\
 & & 3 & 3 & 21 \\
\hline
-2 & 1 & 1 & 7 & \boxed{14} \\
 & & -2 & 2 & \\
\hline
 & 1 & -1 & \boxed{9} &
\end{array}$$

$Q(x)=x^2+x+7$

또 $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫 $Q'(x)$는

$Q'(x)=x-1$ 답 $x-1$

0238 (1) $P(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 오른쪽과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & -7 & 2 & 1 \\ & & -1 & 4 & -3 \\ \hline & 2 & -8 & 6 & \boxed{-2} \end{array}$$

$\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=-8,\ c=4,\ d=-2$

(2) $P(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-8x+6$, 나머지는 -2이므로

$$\begin{aligned} P(x)&=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-8x+6)-2 \\ &=(2x+1)(x^2-4x+3)-2 \end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 x^2-4x+3, 나머지는 -2이다.

답 (1) $a=-\frac{1}{2},\ b=-8,\ c=4,\ d=-2$
(2) 몫: x^2-4x+3, 나머지: -2

0239 주어진 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 1 & 2 & -4 \\ & & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 & \boxed{-1} \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & \boxed{4} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &x^2+2x-4 \\ &=(x-1)(x+3)-1 \\ &=(x-1)\{(x-1)+4\}-1 \\ &=(x-1)^2+4(x-1)-1 \end{aligned}$$

$\therefore a=1,\ b=4,\ c=-1$ 답 $a=1,\ b=4,\ c=-1$

라쎈 특강

$x^2+2x-4=1\cdot(x-1)^2+4(x-1)-1$과 같이 다항식을 $x-1$에 대하여 내림차순으로 정리한 식에서 계수 1, 4, -1은 조립제법을 연속으로 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

0240 오른쪽 조립제법에서

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & 0 & -1 \\ & & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & \boxed{0} \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & \boxed{-2} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^2-1&=(x+1)(x-1) \\ &=(x+1)\{(x+1)-2\} \\ &=(x+1)^2-2(x+1) \end{aligned}$$

따라서 $a=1,\ b=-2,\ c=0$이므로

$a-2b+c=5$ 답 ⑤

다른 풀이 $a(x+1)^2+b(x+1)+c=x^2-1$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $c=0$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a+b+c=-1 \quad \therefore a+b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$a-b+c=3 \quad \therefore a-b=3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-2$

$\therefore a-2b+c=5$

0241

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ & & 2 & 8 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 2 & \boxed{1} \\ & & 2 & 12 & \\ \hline 2 & 1 & 6 & \boxed{14} & \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{8} & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-6x-3&=(x-2)(x^2+4x+2)+1 \\ &=(x-2)\{(x-2)(x+6)+14\}+1 \\ &=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+8\}+14]+1 \\ &=(x-2)\{(x-2)^2+8(x-2)+14\}+1 \\ &=(x-2)^3+8(x-2)^2+14(x-2)+1 \end{aligned}$$

따라서 $a=8,\ b=14,\ c=1$이므로

$2a+b+c=31$ 답 31

0242 $4x^4-x^2=x^2(4x^2-1)=x^2(2x+1)(2x-1)$

답 $x^2(2x+1)(2x-1)$

0243 $xy(z+1)-(z+1)=(xy-1)(z+1)$

답 $(xy-1)(z+1)$

0244

$$\begin{aligned} xy^2-xz^2+y^3-yz^2&=x(y^2-z^2)+y(y^2-z^2) \\ &=(y^2-z^2)(x+y) \\ &=(x+y)(y+z)(y-z) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②, ④이다. 답 ②, ④

0245 ① $4x^2+12xy+9y^2=(2x+3y)^2$

② $x^2-(y+z)^2=(x+y+z)(x-y-z)$

③ $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3=(2a-b)^3$

⑤ $2a^3-54=2(a^3-27)=2(a-3)(a^2+3a+9)$

답 ④

0246 ⑤ $x^4+8x=x(x^3+8)=x(x+2)(x^2-2x+4)$

답 ⑤

0247

$$\begin{aligned} a^6-b^6&=(a^3)^2-(b^3)^2 \\ &=(a^3+b^3)(a^3-b^3) \\ &=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2) \\ &=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2) \end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0248 $x^2+2x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식})&=(t-2)(t-6)+3 \\ &=t^2-8t+15 \\ &=(t-3)(t-5) \\ &=(x^2+2x-3)(x^2+2x-5) \\ &=(x+3)(x-1)(x^2+2x-5) \end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ②이다. 답 ②

0249 $x+3=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=t^2+3t+2\\&=(t+1)(t+2)\\&=(x+4)(x+5)\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b=4+5=9$

답 9

0250 $(x+1)(x-2)(x+3)(x+6)+54$

$=\underline{\{(x+1)(x+3)\}\{(x-2)(x+6)\}}+54$

$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-12)+54$ ··· ❶

상수항의 합이 같은 두 일차식끼리 짝 지어 전개한다.

$x^2+4x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(t+3)(t-12)+54\\&=t^2-9t+18\\&=(t-3)(t-6)\\&=(x^2+4x-3)(x^2+4x-6)\end{aligned}$$ ··· ❷

따라서 $a=-3$, $b=4$이므로

$ab=-12$ ··· ❸

답 -12

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 공통부분이 생기도록 짝 지어 전개할 수 있다.	40 %
❷ 공통부분을 치환하여 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0251 $(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15$

$$\begin{aligned}&=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15\\&=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15\\&=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15\end{aligned}$$

$x^2+8x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(t+7)(t+15)+15\\&=t^2+22t+120\\&=(t+12)(t+10)\\&=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)\\&=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b+c=2+6+8=16$

답 ②

0252 $x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-5x^2+4&=X^2-5X+4\\&=(X-1)(X-4)\\&=(x^2-1)(x^2-4)\\&=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

이때 $a<b<c<d$이므로

$a=-2$, $b=-1$, $c=1$, $d=2$

$\therefore\ ad+bc=-5$

답 ①

0253 $x^2=X$, $y^2=Y$로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-x^2y^2-12y^4&=X^2-XY-12Y^2\\&=(X+3Y)(X-4Y)\\&=(x^2+3y^2)(x^2-4y^2)\\&=(x^2+3y^2)(x+2y)(x-2y)\end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

0254 $x^4-x^2+16=(x^4+8x^2+16)-9x^2$

$$\begin{aligned}&=(x^2+4)^2-(3x)^2\\&=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)\end{aligned}$$ ··· ❶

따라서 $a=3$, $b=4$, $c=4$이므로

$a-b+c=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	70 %
❷ $a-b+c$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0255 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2+2xy-3y^2+3x+5y+2\\&=x^2+(2y+3)x-(3y^2-5y-2)\\&=x^2+(2y+3)x-(3y+1)(y-2)\\&=\{x+(3y+1)\}\{x-(y-2)\}\\&=(x+3y+1)(x-y+2)\end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=1$, $c=-1$이므로

$a+b-c=5$

답 5

다른 풀이 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2+2xy-3y^2+3x+5y+2\\&=-3y^2+(2x+5)y+(x^2+3x+2)\\&=-3y^2+(2x+5)y+(x+1)(x+2)\\&=\{3y+(x+1)\}\{-y+(x+2)\}\\&=(x+3y+1)(x-y+2)\end{aligned}$$

0256 주어진 식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}a^2b-ac-ab^2+bc&=(-a+b)c+(a^2b-ab^2)\\&=-(a-b)c+ab(a-b)\\&=(a-b)(ab-c)\end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ①이다.

답 ①

0257 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2-3xy+2y^2+4x-5y+3\\&=x^2+(-3y+4)x+(2y^2-5y+3)\\&=x^2+(-3y+4)x+(y-1)(2y-3)\\&=\{x-(y-1)\}\{x-(2y-3)\}\\&=(x-y+1)(x-2y+3)\end{aligned}$$

따라서 두 일차식의 합은

$(x-y+1)+(x-2y+3)=2x-3y+4$

답 $2x-3y+4$

0258 주어진 식을 전개한 다음 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc\\&=a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc\\&=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)\\&=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=(b+c)(a+b)(a+c)\\&=(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

답 ⑤

참고 b 또는 c에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해해도 결과는 같다.

0259 $P(x)=x^4-2x^3+2x^2-x-6$이라 하면

$P(2)=16-16+8-2-6=0$,

$P(-1)=1+2+2+1-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & -2 & 2 & -1 & -6 \\
 & & 2 & 0 & 4 & 6 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 2 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
 & & -1 & 1 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -1 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x+1)(x^2-x+3)$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=3$이므로

$a-b+c=5$ 답 5

0260 $P(x)=2x^4-5x^3-8x^2+17x-6$이라 하면

$P(1)=2-5-8+17-6=0$,

$P(-2)=32+40-32-34-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 2 & -5 & -8 & 17 & -6 \\
 & & 2 & -3 & -11 & 6 \\
\hline
-2 & 2 & -3 & -11 & 6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
 & & -4 & 14 & -6 & \\
\hline
 & 2 & -7 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(2x^2-7x+3)$

$=(x-1)(x+2)(2x-1)(x-3)$

따라서 인수가 아닌 것은 ②이다. 답 ②

0261 $P(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로

$P(2)=8a-16+2a+6=0 \quad \therefore a=1$

따라서 $P(x)=x^3-4x^2+x+6$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\
 & & 2 & -4 & -6 \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}$$

$P(x)=(x-2)(x^2-2x-3)$

$=(x-2)(x+1)(x-3)$

따라서 $P(x)$의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

0262 $P(x)=x^3+ax-2$라 하면 $P(x)$가 $x+1$을 인수로 가지므로

$P(-1)=-1-a-2=0$

$\therefore a=-3$ ··· ❶

따라서 $P(x)=x^3-3x-2$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
 & & -1 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-x-2)=(x+1)^2(x-2)$

$\therefore b=-2$ ··· ❷

$\therefore ab=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0263 주어진 등식의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2-ac-b^2+bc=(-a+b)c+a^2-b^2$

$=-(a-b)c+(a+b)(a-b)$

$=(a-b)(a+b-c)$

즉 $(a-b)(a+b-c)=0$에서 $a+b-c\neq0$이므로

$a-b=0 \quad \therefore a=b$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ④

참고 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 항상 크므로 $a+b>c$, 즉 $a+b-c\neq0$이다.

0264 주어진 등식의 좌변을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2+c^2-2ac+ab-bc=(a-c)b+a^2-2ac+c^2$

$=(a-c)b+(a-c)^2$

$=(a-c)(a+b-c)$

즉 $(a-c)(a+b-c)=0$에서 $a+b-c\neq0$이므로

$a-c=0 \quad \therefore a=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다. 답 ④

0265 주어진 등식의 좌변에서

$a^4-b^4+c^4+2a^2c^2=(a^2+c^2)^2-(b^2)^2$

$=(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)$

즉 $(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)=0$에서 $\underline{a^2+b^2+c^2\neq0}$이므로

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $a^2+b^2+c^2\neq0$

$a^2-b^2+c^2=0 \quad \therefore a^2+c^2=b^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}ac$ 답 ③

0266 $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$

$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-(xy)^2$

$=(4^2-2\cdot2)^2-2^2=140$ 답 ②

0267 $a^3-a^2b+ab^2-b^3$

$=a^2(a-b)+b^2(a-b)$

$=(a-b)(\underline{a^2+b^2})$ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$임을 이용해도 된다.

$=(a-b)\{(a+b)^2-2ab\}$ ······ ㉠

이때

$a+b=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$,

$a-b=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$,

$ab=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$2\sqrt{2}\cdot\{2^2-2\cdot(-1)\}=12\sqrt{2}$ 답 $12\sqrt{2}$

0268 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab^2-a^2b+bc^2-b^2c-ac^2+a^2c$

$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$

$=(c-b)a^2-(c+b)(c-b)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)$

$=-(c-b)(a-b)(c-a)$ ······ ㉠ ··· ❶

02 나머지 정리와 인수분해

이때 $a-b=3+\sqrt{3}$, $c-a=3-\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$c-b=6$ ⋯ ❷

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$-6\cdot(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})=-36$ ⋯ ❸

답 -36

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	60 %
❷ $c-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0269 $77=x$, $33=y$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{77^3-33^3}{77^2+33\cdot110}&=\frac{x^3-y^3}{x^2+y(x+y)}\\&=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}\\&=x-y\\&=77-33\\&=44\end{aligned}$$

답 ②

0270 $2026=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{2025\cdot(2026^2+2027)}{2027\cdot2026+1}&=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)x+1}\\&=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}\\&=x-1\\&=2026-1\\&=2025\end{aligned}$$

답 ③

0271 $11=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}11\cdot12\cdot13\cdot14+1&=x(x+1)(x+2)(x+3)+1\\&=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1\\&=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1\end{aligned}$$

$x^2+3x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}t(t+2)+1&=t^2+2t+1=(t+1)^2\\&=(x^2+3x+1)^2=(11^2+3\cdot11+1)^2\\&=155^2\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{11\cdot12\cdot13\cdot14+1}=\sqrt{155^2}=155$

답 155

0272 $19=x$로 놓으면

$19^3-7\cdot19^2-17\cdot19-9=x^3-7x^2-17x-9$ ⋯ ❶

이때 $P(x)=x^3-7x^2-17x-9$라 하면

$P(-1)=-1-7+17-9=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -7 & -17 & -9 \\ & & -1 & 8 & 9 \\ \hline & 1 & -8 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)(x^2-8x-9)\\&=(x+1)^2(x-9)\end{aligned}$$ ⋯ ❷

$$\begin{aligned}\therefore 19^3-7\cdot19^2-17\cdot19-9&=P(19)\\&=20^2\cdot10\\&=4000\end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 4000

채점 기준	비율
❶ $19=x$로 놓고 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ ❶의 식을 인수분해할 수 있다.	60 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0273 전략 주어진 등식의 우변을 전개한 후 양변의 동류항의 계수를 비교한다.

풀이 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면

$2x^2+ax+1=bx^2+(b+1)x+1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2=b$, $a=b+1$ $\quad\therefore a=3$, $b=2$

$\therefore a+b=5$

답 ⑤

0274 전략 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리한 후 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(x^2-x-2)k+(2y-16)=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2-x-2=0$, $2y-16=0$

(i) $x^2-x-2=0$에서 $\quad(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $2y-16=0$에서 $\quad y=8$

(i), (ii)에서 x, y는 자연수이므로

$x=2$, $y=8$

$\therefore xy=16$

답 ③

0275 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 값을 대입한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-a+b$ ⋯⋯ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$6=a+b$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=3$

따라서 주어진 등식은

$x(x+1)(x+2)=(x+1)(x-1)P(x)+3x+3$

이고 $a-b=0$이므로 위의 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-P(0)+3$

$\therefore P(a-b)=P(0)=3$

답 ③

0276 전략 주어진 등식의 우변이 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$이 되도록 양변에 적당한 값을 대입한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=4^4=256$

답 256

0277 전략 다항식 $A(x)$가 다항식 $B(x)$로 나누어떨어질 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $A(x)=B(x)Q(x)$임을 이용하여 항등식을 세운다.

풀이 $(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)$을 x^2+4x+5로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)=(x^2+4x+5)Q(x)$

$\therefore (x-1)\{(x+2)(x+a)+b\}=(x^2+4x+5)Q(x)$

이때 x^2+4x+5는 $x-1$을 인수로 갖지 않고, 좌변은 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$Q(x)=x-1$,

$x^2+4x+5=(x+2)(x+a)+b$

$=x^2+(a+2)x+2a+b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$4=a+2$, $5=2a+b$ $\quad\therefore a=2, b=1$

$\therefore a+b=3$ 답 3

0278 전략 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $P(\alpha)$임을 이용한다.

풀이 나머지 정리에 의하여 $P(k)+P(-k)=14$이므로

$(k^3+k^2+5k+4)+(-k^3+k^2-5k+4)=14$

$2k^2+8=14$ $\quad\therefore k^2=3$

따라서 구하는 나머지는

$P(k^2)=P(3)=27+9+15+4=55$ 답 55

0279 전략 다항식 $f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하고 식을 세운다.

풀이 $f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)(x+1)(ax+b)+ax+b$

이때 조건 (가), (나)에서 나머지 정리에 의하여 $f(2)=7$, $f(-1)=1$이므로

$2a+b=7$, $-a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$

따라서 $f(x)=(x-2)(x+1)(2x+3)+2x+3$이므로

$f(0)=-2\cdot3+3=-3$ 답 ①

0280 전략 $P(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 이용하여 $P(x)$를 $(x-2)^2(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 나타낸다.

풀이 $P(x)$를 $(x-2)^2(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ ······ ㉠

$P(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x-2)^2+x-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+a(x-2)^2+x-1$

한편 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 7이므로

$P(-1)=9a-2=7$ $\quad\therefore a=1$

따라서 구하는 나머지는

$(x-2)^2+x-1=x^2-3x+3$ 답 ②

0281 전략 다항식 $P(x^2)$을 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $P(\alpha^2)$임을 이용한다.

풀이 $P(x)$를 $x^2-9x+20$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x^2-9x+20)Q(x)+3x-1$

$=(x-4)(x-5)Q(x)+3x-1$ ······ ㉠

이때 $P(x^2)$을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$P((-2)^2)=P(4)$

이므로 ㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면 구하는 나머지는

$P(4)=3\cdot4-1=11$ 답 11

0282 전략 다항식 $f(x+1)$을 x로 나누었을 때의 나머지는 $f(1)$의 값과 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 x^2-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-x)Q(x)+ax+a$

$=x(x-1)Q(x)+ax+a$ ······ ㉠

이때 $f(x+1)$을 x로 나누었을 때의 나머지는 6이므로

$f(0+1)=f(1)=6$

따라서 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2a=6$ $\quad\therefore a=3$ 답 ③

0283 전략 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이면 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 5이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+5$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 10이므로

$Q(x)=(x-2)Q'(x)+10$

이때

$f(x)=(x-1)\{(x-2)Q'(x)+10\}+5$

$=(x-1)(x-2)Q'(x)+10x-5$

이므로 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는 $10x-5$이다.

따라서 $a=10$, $b=-5$이므로

$3a+b=25$ 답 25

0284 전략 다항식 $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$임을 이용한다.

풀이 $P(x)=(kx^3+4)(kx^2-6)-kx$라 하면 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$P(-1)=0$, $\quad(-k+4)(k-6)+k=0$

$-k^2+11k-24=0$, $\quad k^2-11k+24=0$

$(k-3)(k-8)=0$ $\quad\therefore k=3$ 또는 $k=8$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$3+8=11$ 답 ②

0285 전략 다항식 $P(ax+b)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어지면 $P(a\alpha+b)=0$, $P(a\beta+b)=0$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 다항식 $f(x+3)-f(x)$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어떨어지므로

$f(1+3)-f(1)=0$, $f(-2+3)-f(-2)=0$

$\therefore f(4)=f(1),\ f(1)=f(-2)$

즉 $f(-2)=f(1)=f(4)=k$ (k는 상수)라 하면 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$는

$f(x)=(x+2)(x-1)(x-4)+k$

이때 조건 (나)에서 나머지 정리에 의하여 $f(2)=-3$이므로

$-8+k=-3 \quad \therefore k=5$

따라서 $f(x)=(x+2)(x-1)(x-4)+5$이므로

$f(0)=8+5=13$

답 ①

0286 **전략** 먼저 주어진 조립제법을 이용하여 다항식 $P(x)$를 구한다.

풀이 주어진 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

2	a	b	c	d
		2	8	12
	1	4	6	10

$a=1,\ b+2=4,\ c+8=6,$

$d+12=10$

$\therefore a=1,\ b=2,\ c=-2,\ d=-2$

$\therefore P(x)=x^3+2x^2-2x-2$

따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=-1+2+2-2=1$

답 ①

0287 **전략** 주어진 등식의 우변을 조립제법을 이용하여 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지로 나타낸다.

풀이

1	1	2	-3	1
		1	3	0
1	1	3	0	1
		1	4	
1	1	4	4	
		1		
	1	5		

위의 조립제법에서

x^3+2x^2-3x+1

$=(x-1)(x^2+3x)+1$

$=(x-1)\{(x-1)(x+4)+4\}+1$

$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+5\}+4]+1$

$=(x-1)\{(x-1)^2+5(x-1)+4\}+1$

$=(x-1)^3+5(x-1)^2+4(x-1)+1$

따라서 $a=5,\ b=4,\ c=1$이므로

$2a+b-c=13$

답 13

0288 **전략** 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $x^2+x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+3)(t-4)+10$

$=t^2-t-2$

$=(t+1)(t-2)$

$=(x^2+x+1)(x^2+x-2)$

$=(x^2+x+1)(x+2)(x-1)$

$=(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

따라서 $a=2,\ b=1$이므로

$a+b=3$

답 ②

0289 **전략** 주어진 식을 A^2-B^2 꼴로 변형한다.

풀이 $x^4+2x^2+9=x^4+6x^2+9-4x^2$

$=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

답 $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

0290 **전략** 주어진 식을 전개한 다음 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $[a,\ b,\ c]+[b,\ c,\ a]+[c,\ a,\ b]$

$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$

답 ⑤

0291 **전략** 주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해한다.

풀이 주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1=(a^2+2a+1)b+(a^2+2a+1)$

$=(a+1)^2b+(a+1)^2$

$=(a+1)^2(b+1)$

위의 식의 값이 $245=7^2\cdot 5$이므로

$(a+1)^2(b+1)=7^2\cdot 5$

이때 $a,\ b$는 자연수이므로

$a+1=7,\ b+1=5$

따라서 $a=6,\ b=4$이므로

$a+b=10$

답 ②

0292 **전략** 나무 블록의 부피를 x에 대한 식으로 나타내고, 인수 정리와 조립제법을 이용하여 이 식을 인수분해한다.

풀이 나무 블록의 부피는

$x^2(x+3)-1^3\cdot 2=x^3+3x^2-2$

$P(x)=x^3+3x^2-2$라 하면

$P(-1)=-1+3-2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	3	0	-2
		-1	-2	2
	1	2	-2	0

$P(x)=(x+1)(x^2+2x-2)$

따라서 $a=1,\ b=2,\ c=-2$이므로

$a\times b\times c=-4$

답 ②

0293 **전략** 주어진 식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^3+b^3+a^2b+ab^2-ac^2-bc^2$

$=-(a+b)c^2+a^3+b^3+a^2b+ab^2$

$=-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)$

즉 $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$에서 $a+b\neq0$이므로

$a^2+b^2-c^2=0 \qquad \therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다. 답 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

0294 전략 인수분해 공식과 곱셈 공식을 이용하여 주어진 값을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$

$=(a^2-b^2)\{(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2\}$

$=(a^2-b^2)\{(a^2-b^2)^2+3a^2b^2\}$

$=2\cdot\{2^2+3\cdot(2\sqrt{2})^2\}=56$ 답 ②

0295 전략 68을 문자로 치환한 다음 인수분해 공식을 이용한다.

풀이 $68=x$로 놓으면

$$a=\frac{68^3+2^3}{68\cdot66+4}$$
$$=\frac{x^3+2^3}{x(x-2)+4}$$
$$=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}$$
$$=x+2=68+2=70$$

$\therefore \frac{a-2}{a+2}=\frac{70-2}{70+2}=\frac{68}{72}=\frac{17}{18}$ 답 $\frac{17}{18}$

0296 전략 다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$임을 이용한다.

풀이 나머지 정리에 의하여

$P(3)+Q(3)=8,\ P(3)Q(3)=6$ ⋯ ❶

이때 $\{P(x)\}^2+\{Q(x)\}^2$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$\{P(3)\}^2+\{Q(3)\}^2=\{P(3)+Q(3)\}^2-2P(3)Q(3)$

$=8^2-2\cdot6=52$ ⋯ ❷

답 52

채점 기준	비율
❶ 나머지 정리를 이용할 수 있다.	50 %
❷ $\{P(x)\}^2+\{Q(x)\}^2$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50 %

0297 전략 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하고 식을 세운다.

풀이 $P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ ⋯ ❶

양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$P(-1)=-a+b,\ P(1)=a+b$

$-1-3-4-6=-a+b,\ 1-3+4-6=a+b$

$\therefore a-b=14,\ a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=5,\ b=-9$ ⋯ ❷

따라서 $R(x)=5x-9$이므로

$R(3)=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하고 항등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $R(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이

$$\begin{array}{r} x\ -3 \\ x^2-1\overline{)\,x^3-3x^2+4x-6} \\ \underline{x^3\qquad\ \ -x\quad} \\ -3x^2+5x-6 \\ \underline{-3x^2\qquad +3} \\ 5x-9 \end{array}$$

따라서 $R(x)=5x-9$이므로

$R(3)=6$

0298 전략 자연수 a를 자연수 b로 나누었을 때의 몫을 q, 나머지를 r라 하면 $a=bq+r$ $(0\le r<b)$임을 이용한다.

풀이 (1) x^8을 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^8=(x+2)Q(x)+R$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$R=(-2)^8=256$

따라서 구하는 나머지는 256이다. ⋯ ❷

(2) ㉠의 양변에 $x=99$를 대입하면

$99^8=101Q(99)+\underbrace{256}_{2\cdot101+54}$

$=101\{Q(99)+2\}+54$

따라서 구하는 나머지는 54이다. ⋯ ❸

답 (1) 256 (2) 54

채점 기준	비율
❶ x^8을 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ x^8을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	30 %
❸ 99^8을 101로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

0299 전략 항등식의 성질을 이용하여 a의 값을 구한 후 인수 정리와 조립제법을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-3-6+5=-a$

$\therefore a=5$ ⋯ ❶

$x^3-3x^2+6x+5=(x+1)P(x)+5x$에서

$(x+1)P(x)=x^3-3x^2+x+5$

$Q(x)=x^3-3x^2+x+5$라 하면

$Q(-1)=-1-3-1+5=0$

조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 1 & 5 \\ & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$Q(x)=(x+1)(x^2-4x+5)$

$\therefore (x+1)P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)$ ⋯ ❷

이 등식이 x에 대한 항등식이고 $P(x)$가 다항식이므로

$P(x)=x^2-4x+5$ ⋯ ❸

답 x^2-4x+5

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $(x+1)P(x)$를 인수분해할 수 있다.	50 %
❸ $P(x)$를 구할 수 있다.	30 %

0300 전략 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 인수분해하여 가로 방향과 세로 방향에 필요한 정사각형의 개수를 구한다.

풀이 $P(n)=n^3+4n^2+5n+2$라 하면

$P(-1)=-1+4-5+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(n)$을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ & & -1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(n)=n^3+4n^2+5n+2$

$=(n+1)(n^2+3n+2)$

$=(n+1)^2(n+2)$

즉 한 변의 길이가 $n+1$인 정사각형은 가로 방향으로 $(n+1)(n+2)$개 필요하다. ⋯ ❶

또 $4n+4=4(n+1)$이므로 한 변의 길이가 $n+1$인 정사각형은 세로 방향으로 4개 필요하다. ⋯ ❷

따라서 필요한 정사각형의 개수는

$4(n+1)(n+2)$ ⋯ ❸

답 $4(n+1)(n+2)$

채점 기준	비율
❶ 가로 방향으로 필요한 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 세로 방향으로 필요한 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 필요한 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

03 복소수

0301 답 실수부분: 2, 허수부분: 3

0302 답 실수부분: -3, 허수부분: $\sqrt{5}$

0303 답 실수부분: $\frac{4}{3}$, 허수부분: $-\frac{2}{3}$

0304 답 실수부분: 0, 허수부분: -2

0305 답 실수부분: 7, 허수부분: 0

0306 답 ㄱ, ㄷ

0307 답 ㄷ, ㄹ

0308 순허수는 $-i$, $\frac{i}{2}$의 2개이다. 답 2

실수부분이 0인 허수

0309 답 $a=-1$, $b=3$

0310 답 $a=0$, $b=-4$

0311 답 $a=6$, $b=0$

0312 답 $a=-3$, $b=2$

0313 $2a=4$, $a-5b=7$이므로

$a=2$, $b=-1$ 답 $a=2$, $b=-1$

0314 $a+9=0$, $a+b=0$이므로

$a=-9$, $b=9$ 답 $a=-9$, $b=9$

0315 답 $4-3i$

0316 답 $-5i-8$

$5i-8$의 허수부분은 5이므로 5의 부호를 바꾼다.

0317 답 $6i$

참고 ① 실수 a의 켤레복소수는 a이다.
② 순허수 bi의 켤레복소수는 $-bi$이다.

0318 답 $a=-7$, $b=2$

0319 답 $a=-1$, $b=-4$

0320 답 $a=\sqrt{5}$, $b=0$

0321 $(2+3i)+(1+2i)=(2+1)+(3+2)i$

$=3+5i$ 답 $3+5i$

0322 $(5-2i)+(3+i)=(5+3)+(-2+1)i$
$=8-i$ 답 $8-i$

0323 $(-1+4i)+(7-6i)=(-1+7)+(4-6)i$
$=6-2i$ 답 $6-2i$

0324 $5i+(-5-4i)=-5+(5-4)i$
$=-5+i$ 답 $-5+i$

0325 $(3+5i)-(2+6i)=(3-2)+(5-6)i$
$=1-i$ 답 $1-i$

0326 $(-4-2i)-(1+i)=(-4-1)+(-2-1)i$
$=-5-3i$ 답 $-5-3i$

0327 $(2+5i)-(-8+i)=(2+8)+(5-1)i$
$=10+4i$ 답 $10+4i$

0328 $(-3+i)-(9-2i)+6i=(-3-9)+(1+2+6)i$
$=-12+9i$ 답 $-12+9i$

0329 $(4+i)(2+5i)=8+20i+2i+5i^2$
$=8+22i-5$
$=3+22i$ 답 $3+22i$

0330 $(6-i)(-1-4i)=-6-24i+i+4i^2$
$=-6-23i-4$
$=-10-23i$ 답 $-10-23i$

0331 $(3-i)^2=9-6i+i^2$
$=9-6i-1$
$=8-6i$ 답 $8-6i$

0332 $(5+2i)(5-2i)=25-4i^2$
$=25+4=29$ 답 29

0333 $\dfrac{3}{1+i}=\dfrac{3(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3-3i}{1-i^2}$
분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱한다.
$=\dfrac{3-3i}{1+1}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}i$ 답 $\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}i$

0334 $\dfrac{5i}{1-2i}=\dfrac{5i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{5i+10i^2}{1-4i^2}$
$=\dfrac{5i-10}{1+4}=-2+i$ 답 $-2+i$

0335 $\dfrac{1+3i}{3-i}=\dfrac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{3+i+9i+3i^2}{9-i^2}$
$=\dfrac{3+10i-3}{9+1}=\dfrac{10i}{10}=i$ 답 i

0336 $\dfrac{4-i}{2i}=\dfrac{(4-i)i}{2i\cdot i}=\dfrac{4i-i^2}{2i^2}$
분자, 분모에 i를 곱하여 분모가 실수가 되게 한다.
$=\dfrac{4i+1}{-2}=-\dfrac{1}{2}-2i$ 답 $-\dfrac{1}{2}-2i$

0337 $\overline{z}=\overline{4-3i}=4+3i$ 답 $4+3i$

0338 $\overline{(\overline{z})}=z=4-3i$ 답 $4-3i$

0339 $z+\overline{z}=(4-3i)+(4+3i)=8$ 답 8

0340 $z\overline{z}=(4-3i)(4+3i)=16-9i^2$
$=16+9=25$ 답 25

0341 $z_1+z_2=(3+i)+(5-4i)=8-3i$이므로
$\overline{z_1+z_2}=8+3i$ 답 $8+3i$

0342 $\overline{z_1}+\overline{z_2}=(3-i)+(5+4i)=8+3i$ 답 $8+3i$

0343 $z_1z_2=(3+i)(5-4i)=15-12i+5i-4i^2$
$=15-7i+4=19-7i$
이므로
$\overline{z_1z_2}=19+7i$ 답 $19+7i$

0344 $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(3-i)(5+4i)=15+12i-5i-4i^2$
$=15+7i+4=19+7i$ 답 $19+7i$

0345 $i^6=i^4\cdot i^2=-1$ 답 -1

0346 $(-i)^{15}=-i^{15}=-(i^4)^3\cdot i^3=i$ 답 i

0347 $i^{21}=(i^4)^5\cdot i=i$이므로
$\dfrac{1}{i^{21}}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$ 답 $-i$

0348 $i^{10}+i^{100}=(i^4)^2\cdot i^2+(i^4)^{25}=-1+1=0$ 답 0

0349 $i+i^2+i^3+i^4+i^5=i-1-i+1+i=i$ 답 i

0350 $(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$이므로
$(1+i)^8=\{(1+i)^2\}^4=(2i)^4$
$=16i^4=16$ 답 16

0351 $(1-i)^2=1-2i+i^2=1-2i-1=-2i$이므로
$(1-i)^{10}=\{(1-i)^2\}^5$
$=(-2i)^5=-32i^5$
$=-32i$ 답 $-32i$

03 복소수

0352 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4=(-i)^4=i^4=1$ 답 1

0353 $\sqrt{-6}=\sqrt{6}i$ 답 $\sqrt{6}i$

0354 $\sqrt{-25}=\sqrt{25}i=5i$ 답 $5i$

0355 $-\sqrt{-9}=-\sqrt{9}i=-3i$ 답 $-3i$

0356 $-\sqrt{-12}=-\sqrt{12}i=-2\sqrt{3}i$ 답 $-2\sqrt{3}i$

0357 $-\sqrt{-\frac{4}{9}}=-\sqrt{\frac{4}{9}}i=-\frac{2}{3}i$ 답 $-\frac{2}{3}i$

0358 $\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{5}i$ 답 $\pm\sqrt{5}i$

라쎈 특강

a의 제곱근

실수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라 한다.
즉 $x^2=a$일 때 x를 a의 제곱근이라 한다.

0359 $\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}i=\pm2\sqrt{2}i$ 답 $\pm2\sqrt{2}i$

0360 $\pm\sqrt{-16}=\pm\sqrt{16}i=\pm4i$ 답 $\pm4i$

0361 $\pm\sqrt{-20}=\pm\sqrt{20}i=\pm2\sqrt{5}i$ 답 $\pm2\sqrt{5}i$

0362 $\pm\sqrt{-\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}i=\pm\frac{1}{2}i$ 답 $\pm\frac{1}{2}i$

0363 $\sqrt{-2}\sqrt{-6}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{6}i=\sqrt{12}i^2=-2\sqrt{3}$ 답 $-2\sqrt{3}$

0364 $\sqrt{-4}\sqrt{9}=\sqrt{4}i\cdot\sqrt{9}=\sqrt{36}i=6i$ 답 $6i$

0365 $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}=\frac{3i}{i^2}=-3i$ 답 $-3i$

0366 $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-12}}=\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{12}i}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0367 ④ $1-5i$의 실수부분은 1, 허수부분은 -5이다.

답 ④

0368 $a=\sqrt{2}$, $b=\frac{4}{2}=2$이므로

$a^2+b^2=(\sqrt{2})^2+2^2=6$ 답 6

0369 허수는 $-3i$, $-1-i$, $3+\sqrt{-1}=3+i$의 3개이다. 답 3

참고 $2+i^2=2-1=1$이므로 실수이다.

0370 $2(1+7i)+(5-i)-(2i-6)=2+14i+5-i-2i+6$

$=13+11i$ 답 ⑤

0371 $z_1z_2=(2-3i)(2+3i)=4+9=13$ 답 ④

0372 $(3-i)(4+2i)+\frac{4+3i}{2-i}$

$=12+6i-4i+2+\frac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$=14+2i+\frac{8+4i+6i-3}{4+1}$

$=14+2i+\frac{5+10i}{5}$

$=14+2i+1+2i=15+4i$ 답 $15+4i$

0373 $(1-2i)z=8-i$에서

$z=\frac{8-i}{1-2i}=\frac{(8-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$=\frac{8+16i-i+2}{1+4}=\frac{10+15i}{5}$

$=2+3i$ ··· ❶

따라서 복소수 $z=2+3i$의 실수부분은 2, 허수부분은 3이므로

$a=2$, $b=3$ ··· ❷

$\therefore a+b=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 복소수 z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0374 $z=1+\sqrt{3}i$에서 $z-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $z^2-2z+1=-3$

$\therefore z^2-2z=-4$

$\therefore z^2-2z+2=-4+2=-2$ 답 ①

다른 풀이 $z^2-2z+2=(1+\sqrt{3}i)^2-2(1+\sqrt{3}i)+2$

$=1+2\sqrt{3}i-3-2-2\sqrt{3}i+2$

$=-2$

0375 $x=\frac{1-3i}{2}$에서 $2x-1=-3i$

양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=-9$

$4x^2-4x=-10$ $\therefore x^2-x=-\frac{5}{2}$

$\therefore 3x^2-3x+5=3(x^2-x)+5$

$=3\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+5=-\frac{5}{2}$ 답 $-\frac{5}{2}$

다른 풀이 $3x^2-3x+5=3\cdot\left(\frac{1-3i}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1-3i}{2}+5$

$=3\cdot\frac{1-6i-9}{4}-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}i+5$

$=-6-\frac{9}{2}i-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}i+5=-\frac{5}{2}$

0376 $z=\frac{2+i}{1+i}=\frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-2i+i+1}{1+1}=\frac{3-i}{2}$에서

$2z-3=-i$ ··· ❶

양변을 제곱하면 $4z^2-12z+9=-1$

$4z^2-12z+10=0$ $\therefore 2z^2-6z+5=0$

$\therefore 2z^3-6z^2+5z+2=z(2z^2-6z+5)+2=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $az+b=ci$ (a, b, c는 실수) 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $2z^3-6z^2+5z+2$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0377 $x=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$에서 $2x+1=\sqrt{7}i$

양변을 제곱하면 $4x^2+4x+1=-7$

$4x^2=-4x-8$ $\therefore x^2=-x-2$

$\therefore x^3-3x^2+4x-5=x(-x-2)-3(-x-2)+4x-5$

$=-x^2+5x+1$

$=-(-x-2)+5x+1$

$=6x+3=6\cdot\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+3$

$=3\sqrt{7}i$

답 ④

0378 $z=x(2-i)+2(i-3)=2x-xi+2i-6$

$=(2x-6)+(-x+2)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$2x-6=0$, $\underline{-x+2\neq0}$ ($x\neq2$)

$\therefore x=3$

답 3

0379 $x(x-1+i)-(2+i)=x^2-x+xi-2-i$

$=(x^2-x-2)+(x-1)i$ ······ ㉠

㉠이 실수가 되려면 ㉠의 허수부분이 0이어야 하므로

$x-1=0$ $\therefore x=1$

답 ③

0380 z^2이 실수가 되려면 z의 실수부분이 0 또는 허수부분이 0이어야 하므로

$\underline{a^2-4a+3=0}$ 또는 $a-1=0$ ($(a-1)(a-3)=0$)

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$1+3=4$

답 ②

참고 $a=1$이면 $z=0$이므로 $z^2=0$

$a=3$이면 $z=2i$이므로 $z^2=-4$

0381 $(1+5i)(a-i)=a-i+5ai+5$

$=(a+5)+(5a-1)i$ ······ ㉠

㉠을 제곱하여 양의 실수가 되려면 ㉠의 실수부분은 0이 아니고, 허수부분은 0이어야 하므로

$\underline{a+5\neq0}$, $5a-1=0$ ($a\neq-5$)

$\therefore a=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

0382 $z=i(x+2i)^2=i(x^2+4xi-4)$

$=x^2i-4x-4i$

$=-4x+(x^2-4)i$ ··· ❶

$z^2<0$이면 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$-4x=0$, $\underline{x^2-4\neq0}$ ($x\neq\pm2$)

$\therefore x=0$ ··· ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	60 %

0383 $x(2-i)-y(3+2i)=3-5i$에서

$2x-xi-3y-2yi=3-5i$

$(2x-3y)-(x+2y)i=3-5i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x-3y=3$, $x+2y=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=1$

$\therefore x^2+y^2=10$

답 ③

0384 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-6=0$, $2x-13y+1=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=6$, $y=1$

$\therefore x-y=5$

답 5

0385 $\frac{x}{2+i}+\frac{y}{2-i}=\frac{8}{1+3i}$에서

$\frac{x(2-i)+y(2+i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{8(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$

$\frac{2x-xi+2y+yi}{4+1}=\frac{8-24i}{1+9}$

$\frac{2(x+y)-(x-y)i}{5}=\frac{4-12i}{5}$

$2(x+y)-(x-y)i=4-12i$ ··· ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=2$, $x-y=12$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=7$, $y=-5$ ··· ❷

$\therefore x+2y=-3$ ··· ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식을 정리하여 양변을 각각 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $x+2y$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0386 $x^2+y^2i+x+yi-2-6i=0$에서

$(x^2+x-2)+(y^2+y-6)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+x-2=0$, $y^2+y-6=0$

$x^2+x-2=0$에서 $\quad (x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$y^2+y-6=0$에서 $\quad (y+3)(y-2)=0$

$\therefore y=-3$ 또는 $y=2$

$\therefore xy=-4$ 또는 $xy=-3$ 또는 $xy=2$ 또는 $xy=6$

따라서 xy의 값이 될 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

0387 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$|x-y|=5$, $x-3=-1$

$x-3=-1$에서 $\quad x=2$

한편 $x<y$에서 $x-y<0$이므로

$|x-y|=-x+y=-2+y$

즉 $-2+y=5$이므로 $\quad y=7$

$\therefore x+y=9$ 답 ⑤

0388 $(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=\{(1+2i)-(2-5i)\}\{(1-2i)-(2+5i)\}$

$=(-1+7i)(-1-7i)$

$=1+49=50$ 답 50

0389 $\dfrac{1-z}{\overline{z}}=\dfrac{1-(3-2i)}{3+2i}=\dfrac{(-2+2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$=\dfrac{-6+4i+6i+4}{9+4}=\dfrac{-2+10i}{13}$

$=-\dfrac{2}{13}+\dfrac{10}{13}i$ 답 ②

0390 $z=\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{2(1-i)}{1+1}=1-i$ ··· ❶

$\therefore 1+\overline{z}+z\overline{z}=1+(1+i)+(1-i)(1+i)$

$=1+1+i+1+1$

$=4+i$ ··· ❷

답 $4+i$

채점 기준	비율
❶ z를 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ $1+\overline{z}+z\overline{z}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0391 $x+y=(3+i)+(3-i)=6$, $xy=(3+i)(3-i)=10$이므로

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\dfrac{6^2-2\cdot10}{10}=\dfrac{8}{5}$ 답 ②

다른 풀이 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{3-i}{3+i}+\dfrac{3+i}{3-i}=\dfrac{(3-i)^2+(3+i)^2}{(3+i)(3-i)}$

$=\dfrac{9-6i-1+9+6i-1}{9+1}=\dfrac{8}{5}$

0392 $x+y=(2+\sqrt{5}i)+(2-\sqrt{5}i)=4$,

$xy=(2+\sqrt{5}i)(2-\sqrt{5}i)=9$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=4^2-2\cdot9=-2$ 답 -2

다른 풀이 $x^2+y^2=(2+\sqrt{5}i)^2+(2-\sqrt{5}i)^2$

$=4+4\sqrt{5}i-5+4-4\sqrt{5}i-5=-2$

0393 $x+y=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$,

$xy=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

① $x+y=1$

② $x^2y^2=(xy)^2=1^2=1$

③ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{1}=1$

④ $x^2y+xy^2=xy(x+y)=1\cdot1=1$

⑤ $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1^3-3\cdot1\cdot1=-2$

답 ⑤

0394 $x=\dfrac{5}{1+2i}=\dfrac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=1-2i$,

$y=\dfrac{5}{1-2i}=\dfrac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=1+2i$이므로

$x+y=(1-2i)+(1+2i)=2$,

$xy=(1-2i)(1+2i)=5$ ··· ❶

$\therefore x^3y+xy^3-x^2-y^2=xy(x^2+y^2)-(x^2+y^2)$

$=(xy-1)(x^2+y^2)$

$=(xy-1)\{(x+y)^2-2xy\}$

$=(5-1)\cdot(2^2-2\cdot5)$

$=-24$ ··· ❷

답 -24

채점 기준	비율
❶ $x+y$, xy의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

0395 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\overline{z}=a-bi$

ㄱ. $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

따라서 $z+\overline{z}$는 실수이다.

ㄴ. $z=1+i$이면 $\quad -\overline{z}=-(1-i)=-1+i$

$\therefore z\neq-\overline{z}$

ㄷ. $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$이면

$a=0$, $b=0$ $\quad \therefore z=0$

따라서 $z\overline{z}=0$이면 $z=0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0396 $z=\overline{z}$를 만족시키는 z는 실수이다.

따라서 z가 될 수 있는 것은 0, $\sqrt{2}+1$의 2개이다. 답 2

0397 $z=-\bar{z}$이고 $z\neq0$이므로 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니다.

따라서 $z=(x^2-x-6)+(x^2-4)i$에서

$x^2-x-6=0,\ x^2-4\neq0$ ···➊

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$ ······ ㉠ ···➋

$x^2-4\neq0$에서 $x^2\neq4$

$\therefore x\neq\pm2$ ······ ㉡ ···➌

㉠, ㉡에서 $x=3$ ···➍

답 3

채점 기준	비율
➊ 0이 아닌 복소수 z가 $z=-\bar{z}$일 조건을 구할 수 있다.	40 %
➋ $x^2-x-6=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
➌ $x^2-4\neq0$을 만족시키는 x의 조건을 구할 수 있다.	20 %
➍ x의 값을 구할 수 있다.	20 %

0398 z^2이 실수이므로 $z^2=\bar{z}^2$

$z^2-\bar{z}^2=0,\quad (z-\bar{z})(z+\bar{z})=0$

$\therefore z=\bar{z}$ 또는 $z=-\bar{z}$

이때 z는 허수이므로 $z\neq\bar{z}$이다.

$\therefore z=-\bar{z}$

답 ②

참고 z^2이 실수이므로 $z=bi$ (b는 0이 아닌 실수)라 하면

③ $z\bar{z}=bi\cdot(-bi)=-b^2i^2=b^2\neq0$

④ $z\bar{z}=-1$, 즉 $b^2=-1$을 만족시키는 실수 b는 존재하지 않으므로 $z\bar{z}\neq-1$

⑤ $z\bar{z}\neq0$, $z+\bar{z}=0$이므로 $z\bar{z}\neq z+\bar{z}$

0399
$$\begin{aligned}\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}&=\bar{\alpha}(\alpha+\beta)+\bar{\beta}(\alpha+\beta)\\&=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})\end{aligned}$$

이때 $\alpha=4+3i$, $\beta=-1-2i$이므로

$\alpha+\beta=3+i$, $\overline{\alpha+\beta}=3-i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(3+i)(3-i)=10$

답 10

0400
$$\begin{aligned}\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}&=\alpha(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta})\\&=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})\\&=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})\\&=(5-3i)(5+3i)\\&=34\end{aligned}$$

답 34

0401
$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{\alpha}}+\frac{1}{\bar{\beta}}&=\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}}=\frac{\overline{\alpha+\beta}}{\overline{\alpha\beta}}\\&=\frac{3-i}{4-3i}\\&=\frac{(3-i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}\\&=\frac{15+5i}{25}\\&=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i\end{aligned}$$

답 ③

0402 $\alpha\bar{\beta}=1$에서 $\alpha=\dfrac{1}{\bar{\beta}}$

$\overline{(\alpha\bar{\beta})}=\bar{1}$에서 $\bar{\alpha}\beta=1$이므로 $\beta=\dfrac{1}{\bar{\alpha}}$

$\overline{(\alpha\bar{\beta})}=\bar{\alpha}\cdot\overline{(\bar{\beta})}=\bar{\alpha}\beta$

$\therefore \beta+\dfrac{1}{\bar{\beta}}=\dfrac{1}{\bar{\alpha}}+\alpha=5i$

답 $5i$

0403 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$(3-i)z+2i\bar{z}=3+7i$에서

$(3-i)(a+bi)+2i(a-bi)=3+7i$

$3a+3bi-ai+b+2ai+2b=3+7i$

$(3a+3b)+(a+3b)i=3+7i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a+3b=3,\ a+3b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=3$

$\therefore z=-2+3i$

답 ②

0404 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z+\bar{z}=6$에서 $(a+bi)+(a-bi)=6$

$2a=6 \quad \therefore a=3$ ···➊

$z\bar{z}=25$에서 $(3+bi)(3-bi)=25$

$9+b^2=25,\quad b^2=16$

$\therefore b=\pm4$ ···➋

$\therefore z=3\pm4i$ ···➌

답 $3\pm4i$

채점 기준	비율
➊ z의 실수부분을 구할 수 있다.	40 %
➋ z의 허수부분을 구할 수 있다.	40 %
➌ 복소수 z를 구할 수 있다.	20 %

0405 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$$\begin{aligned}z+zi&=(a+bi)+(a+bi)i\\&=a+bi+ai-b\\&=(a-b)+(a+b)i\end{aligned}$$

$\overline{z+zi}=4-2i$에서

$(a-b)-(a+b)i=4-2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=4,\ a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-1$

따라서 $z=3-i$이므로 z의 허수부분은 -1이다.

답 ⑤

0406 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$$\begin{aligned}\frac{z}{1+i}+\frac{\bar{z}}{1-i}&=\frac{a+bi}{1+i}+\frac{a-bi}{1-i}\\&=\frac{(a+bi)(1-i)+(a-bi)(1+i)}{(1+i)(1-i)}\\&=\frac{(a-ai+bi+b)+(a+ai-bi+b)}{2}\\&=a+b\end{aligned}$$

즉 $a+b=1$이므로 z의 실수부분과 허수부분의 합은 1이다.

③ $1+i$는 (실수부분)+(허수부분)$=1+1=2$이므로 $a+b=1$을 만족시키지 않는다.

답 ③

0407 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\quad \overline{z}=a-bi$

조건 (가)에서

$$(1+i)+z=(1+i)+(a+bi)=(a+1)+(b+1)i$$

가 양의 실수이므로

$$a+1>0,\ b+1=0 \qquad \therefore a>-1,\ b=-1$$

조건 (나)에서 $z\overline{z}=4$이므로

$$(a-i)(a+i)=4, \qquad a^2+1=4$$

$$a^2=3 \qquad \therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>-1)$$

따라서 $z=\sqrt{3}-i$이므로

$$z+\overline{z}=(\sqrt{3}-i)+(\sqrt{3}+i)=2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

0408 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{197}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{198}=-1$, $i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{199}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{200}=1$이므로

$$\begin{aligned}&1-i+i^2-i^3+\cdots+i^{200}\\&=(1-i-1+i)+(1-i-1+i)+\cdots+(1-i-1+i)+1\\&=1\end{aligned}$$

답 ④

0409 $i^{10}+i^{11}+\dfrac{1}{i^{12}}+\dfrac{1}{i^{13}}$

$$\begin{aligned}&=(i^4)^2\cdot i^2+(i^4)^2\cdot i^3+\frac{1}{(i^4)^3}+\frac{1}{(i^4)^3\cdot i}\\&=i^2+i^3+1+\underbrace{\frac{1}{i}}_{\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i}\\&=-1-i+1-i\\&=-2i\end{aligned}$$

답 $-2i$

0410 $i=i^5=i^9$, $i^2=i^6=i^{10}=-1$, $i^3=i^7=-i$, $i^4=i^8=1$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{10}}\\&=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\frac{1}{i}-1\\&=\frac{1}{i}-1\\&=\frac{i}{i^2}-1\\&=-1-i\end{aligned}$$

⋯ ❶

따라서 $-1-i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=-1,\ b=-1$$ ⋯ ❷

$$\therefore a+b=-2$$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0411 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{29}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{30}=-1$, $i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{27}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{28}=1$이므로

$$\begin{aligned}&i+2i^2+3i^3+\cdots+30i^{30}\\&=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)\\&\quad+\cdots+(25i-26-27i+28)+(29i-30)\\&=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+(29i-30)\\&=7(2-2i)+(29i-30)\\&=-16+15i\end{aligned}$$

따라서 $-16+15i=x+yi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x=-16,\ y=15$$

$$\therefore x-y=-31$$

답 ①

0412 $f(k)=0$이 되려면

$$\begin{aligned}f(k)&=i^2+i^3+i^4+\cdots+i^k\\&=(-1-i+1+i)+(-1-i+1+i)\\&\quad+\cdots+(-1-i+1+i)\end{aligned}$$

따라서 k는 4로 나누었을 때의 나머지가 1이어야 하므로 두 자리 자연수 k는

$$\underbrace{13,\ 17,\ 21,\ \cdots,\ 97}_{k=4m+1\ (m=3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 24)}$$

의 22개이다.

답 22

0413 $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}=i^{100}=(i^4)^{25}=1$$

답 1

0414 $(1+i)^{50}=\{(1+i)^2\}^{25}=(2i)^{25}=2^{25}\cdot(i^4)^6\cdot i=2^{25}i$,
$(1-i)^{50}=\{(1-i)^2\}^{25}=(-2i)^{25}=(-2)^{25}\cdot(i^4)^6\cdot i=-2^{25}i$
이므로

$$(1+i)^{50}+(1-i)^{50}=2^{25}i+(-2^{25}i)=0$$

답 ③

0415 $z^2=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$$\begin{aligned}z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}&=i+i^2+i^3+i^4+i^5\\&=i-1-i+1+i\\&=i\end{aligned}$$

답 ⑤

0416 $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$,

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$$f(n)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=(-i)^n+i^n$$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}&\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\\&=\{(-i)+i\}+\{(-i)^2+i^2\}+\{(-i)^3+i^3\}+\{(-i)^4+i^4\}\\&=0-2+0+2\\&=0\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0417 $\sqrt{-2}\sqrt{-4}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{-4}=-\sqrt{8}-\sqrt{\dfrac{12}{-3}}+\sqrt{4}i$

$=-2\sqrt{2}-2i+2i$

$=-2\sqrt{2}$ 답 $-2\sqrt{2}$

라쎈 특강

$x>0$일 때, $\sqrt{-x}=\sqrt{x}i$임을 이용하여 다음을 알 수 있다.

① $\sqrt{-2}\sqrt{-4}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{4}i=-\sqrt{8}$

➜ $a<0,\ b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

$\sqrt{-2}\sqrt{4}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{4}=\sqrt{8}i=\sqrt{-8}$,

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{-4}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}i=\sqrt{8}i=\sqrt{-8}$

➜ $a<0,\ b>0$ 또는 $a>0,\ b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}i}=-\dfrac{\sqrt{12}i}{\sqrt{3}}=-\sqrt{\dfrac{12}{3}}i=-\sqrt{\dfrac{12}{-3}}$

➜ $a>0,\ b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{12}i}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{12}{3}}i=\sqrt{\dfrac{-12}{3}}$,

$\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{12}i}{\sqrt{3}i}=\sqrt{\dfrac{12}{3}}=\sqrt{\dfrac{-12}{-3}}$

➜ $a<0,\ b>0$ 또는 $a<0,\ b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

0418 ① $\sqrt{-2}\sqrt{7}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{7}=\sqrt{14}i=\sqrt{-14}$

② $\sqrt{-2}\sqrt{-7}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{7}i=\sqrt{14}i^2=-\sqrt{14}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-7}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}i}=\dfrac{\sqrt{2}i}{-\sqrt{7}}=-\sqrt{-\dfrac{2}{7}}$

④ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-7}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{7}i}=\sqrt{\dfrac{2}{7}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{2}{7}}i=\sqrt{-\dfrac{2}{7}}$ 답 ③

0419 $z=\dfrac{2-\sqrt{-4}}{2+\sqrt{-4}}=\dfrac{2-\sqrt{4}i}{2+\sqrt{4}i}=\dfrac{2-2i}{2+2i}=\dfrac{1-i}{1+i}$

$=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$ ⋯ ❶

$\therefore z+\bar{z}=-i+i=0$ ⋯ ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ z를 간단히 할 수 있다.	70 %
❷ $z+\bar{z}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0420 $\sqrt{-3}\sqrt{-27}+\sqrt{-4}\sqrt{4}+\dfrac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-5}}+\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{-3}}$

$=-\sqrt{81}+\sqrt{-16}+\sqrt{\dfrac{20}{5}}-\sqrt{\dfrac{48}{-3}}$

$=-9+4i+2-4i$

$=-7$

따라서 $-7=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-7,\ b=0$

$\therefore b-a=7$ 답 7

0421 $0<a<1$일 때,

$a-1<0,\ a>0,\ 1-a>0,\ -a<0$

이므로

$\sqrt{a-1}\times\sqrt{a}\times\sqrt{1-a}\times\sqrt{-a}$

$=\sqrt{1-a}i\times\sqrt{a}\times\sqrt{1-a}\times\sqrt{a}i$

$=(\sqrt{1-a})^2\times(\sqrt{a})^2\times i^2$

$=(1-a)\cdot a\cdot(-1)$

$=a^2-a$ 답 ②

0422 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0,\ b<0$

$\therefore \sqrt{(a+b)^2}-|b|=-(a+b)+b=-a$ 답 $-a$

라쎈 특강

$\sqrt{x^2}$의 성질

$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x\ (x\ge 0) \rightarrow \sqrt{(\text{양수})^2}=(\text{양수}),\ \sqrt{0^2}=0 \\ -x\ (x<0) \rightarrow \sqrt{(\text{음수})^2}=-(\text{음수}) \end{cases}$

0423 $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-8}}=-\sqrt{\dfrac{x-5}{x-8}}$에서

$x-5>0,\ x-8<0$

$\therefore |x-5|+|x-8|=(x-5)-(x-8)=3$ 답 ②

0424 $\sqrt{x-y}\sqrt{y-z}=-\sqrt{(x-y)(y-z)}$에서

$x-y<0,\ y-z<0$

즉 $x<y,\ y<z$이므로 $x<y<z$ ⋯ ❶

$\therefore |x-y|+|y-z|+|z-x|$

$=-(x-y)-(y-z)+\underbrace{(z-x)}_{z-x>0}$

$=-2x+2z$ ⋯ ❷

답 $-2x+2z$

채점 기준	비율
❶ $x,\ y,\ z$의 대소를 비교할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	50 %

0425 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$에서 $a>0,\ b<0$

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

② $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=-b\sqrt{a}$

④ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

⑤ $-a<0,\ b<0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{b}=-\sqrt{-ab}$

답 ④

0426 전략 순허수는 실수부분이 0인 허수임을 이용한다.

풀이 순허수는 $-5i,\ \sqrt{2}i,\ -\sqrt{-1}=-i$의 3개이다. 답 3

0427 전략 복소수의 곱셈은 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 전개한 후 $i^2=-1$임을 이용하여 계산한다.

풀이 $(5-6i)(6+i)=30+5i-36i+6=36-31i$

따라서 $a=36$, $b=-31$이므로

$a+b=5$ 답 5

0428 전략 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 계산한 후 복소수의 실수부분과 허수부분을 구한다.

풀이 $\frac{a+3i}{2-i}=\frac{(a+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2a+ai+6i-3}{4+1}$

$=\frac{(2a-3)+(a+6)i}{5}$

$=\frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}i$

이므로 복소수 $\frac{a+3i}{2-i}$의 실수부분은 $\frac{2a-3}{5}$, 허수부분은 $\frac{a+6}{5}$이다.

이때 실수부분과 허수부분의 합이 3이므로

$\frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}=3$, $3a+3=15$

$3a=12$ $\therefore a=4$ 답 ④

0429 전략 α^2, β^2을 구하여 식에 대입한다.

풀이 $\alpha=\frac{1+i}{2i}$에서 $\alpha^2=\frac{2i}{-4}=-\frac{i}{2}$

$\beta=\frac{1-i}{2i}$에서 $\beta^2=\frac{-2i}{-4}=\frac{i}{2}$

$\therefore (2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)=(-i+3)(i+3)$

$=1+9=10$ 답 ②

0430 전략 새로운 규칙을 적용한 후 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 식을 간단히 한다.

풀이 $f(1, 2)+f(2, 4)+f(3, 6)+\cdots+f(20, 40)$

$=\frac{1+2i}{1-2i}+\frac{2+4i}{2-4i}+\frac{3+6i}{3-6i}+\cdots+\frac{20+40i}{20-40i}$

$=\frac{1+2i}{1-2i}+\frac{1+2i}{1-2i}+\frac{1+2i}{1-2i}+\cdots+\frac{1+2i}{1-2i}$

$=20\cdot\frac{1+2i}{1-2i}=20\cdot\frac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}$

$=20\cdot\frac{-3+4i}{5}$

$=-12+16i$ 답 $-12+16i$

0431 전략 주어진 등식을 우변에 순허수만 남도록 변형한 후 양변을 제곱하여 z에 대한 이차방정식을 만든다.

풀이 $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4z^2-4z+1=-3$

$4z^2-4z+4=0$, $z^2-z+1=0$

$\therefore z^2=z-1$

이때 $z^3=z^2-z=z-1-z=-1$이므로

$z^4=-z$, $z^5=-z^2$, $z^6=1$

$\therefore z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=z+z^2-1-z-z^2+1$

$=0$ 답 ③

0432 전략 복소수 z에 대하여 z^2이 실수가 되려면 z의 실수부분이 0 또는 허수부분이 0이어야 함을 이용한다.

풀이 z^2이 실수가 되려면 z의 실수부분이 0 또는 허수부분이 0이어야 하므로

$m-n=0$ 또는 $m+n-4=0$

$\therefore m=n$ 또는 $m+n=4$

(i) $m=n$일 때,

$m=n$을 만족시키는 5 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍은

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$

의 5개이다.

(ii) $m+n=4$일 때,

$m+n=4$를 만족시키는 5 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍은

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$

의 3개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$5+3-\underbrace{1}_{(2,\ 2)}=7$ 답 ②

0433 전략 $a+bi=c+di$ (a, b, c, d는 실수)이면 $a=c$, $b=d$임을 이용한다.

풀이 $(a-bi)^2=18i$에서 $a^2-b^2-2abi=18i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$, $-2ab=18$

$a^2-b^2=0$에서 $(a+b)(a-b)=0$

$\therefore a=b$ 또는 $a=-b$

(i) $a=b$일 때,

$-2ab=18$에서 $a^2=-9$이므로 이를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $a=-b$일 때,

$-2ab=18$에서 $a^2=9$이므로

$a=3$, $b=-3$ ($\because a>0$)

(i), (ii)에서

$30a+b=30\cdot3-3=87$ 답 87

0434 전략 x, y가 서로 켤레복소수이므로 $x+y$, xy의 값을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

풀이 $x+y=(2+i)+(2-i)=4$, $xy=(2+i)(2-i)=5$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{4}{5}$ 답 ②

다른 풀이 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2+i}+\frac{1}{2-i}$

$=\frac{(2-i)+(2+i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4}{5}$

0435 전략 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하고 복소수의 연산과 켤레복소수의 성질을 이용한다.

풀이 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하면

$\overline{z_1}=a-bi$, $\overline{z_2}=c-di$

① $z_1\overline{z_1}=0$이면 $\quad (a+bi)(a-bi)=0$

$a^2+b^2=0 \quad \therefore a=0,\ b=0$

따라서 z_1은 실수이다.

② $z_1=\overline{z_2}$이면 $a+bi=c-di$에서 $a=c,\ b=-d$이므로

$z_2=c+di=a-bi=\overline{z_1}$

③ $z_1=\overline{z_2}$이면

$z_1z_2=\overline{z_2}z_2=(c-di)(c+di)=c^2+d^2$

따라서 z_1z_2는 실수이다.

④ $z_1+z_2=0$이면 $\quad \overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}=\overline{0}=0$

⑤ $z_1\overline{z_2}=1$이면 $\quad z_1=\dfrac{1}{\overline{z_2}},\ \overline{z_2}=\dfrac{1}{z_1}$

$z_1=\dfrac{1}{\overline{z_2}}$에서 $\quad \overline{z_1}=\dfrac{1}{z_2}$

$\therefore \overline{z_1}+\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{z_2}+\overline{z_2}=\overline{z_2}+\dfrac{1}{z_2}$

답 ③

0436 전략 켤레복소수의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. z^2-z가 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다.

ㄴ. $z^2-z=(a+bi)^2-(a+bi)$

$=a^2+2abi-b^2-a-bi$

$=(a^2-a-b^2)+(2ab-b)i$

이때 z^2-z가 실수이므로

$2ab-b=0, \quad b(2a-1)=0$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}\ (\because b\neq0)$

따라서 $z=\dfrac{1}{2}+bi,\ \overline{z}=\dfrac{1}{2}-bi$이므로

$z+\overline{z}=1$

ㄷ. $z\overline{z}=\left(\dfrac{1}{2}+bi\right)\left(\dfrac{1}{2}-bi\right)=\dfrac{1}{4}+b^2$

이때 b는 0이 아닌 실수이므로 $\quad b^2>0$

$\therefore z\overline{z}>\dfrac{1}{4}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0437 전략 주어진 식을 간단히 정리한 후 켤레복소수의 성질을 이용한다.

풀이 $\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha-\beta)-\overline{\beta}(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

이때 $\alpha=1+4i,\ \beta=3+2i$이므로

$\alpha-\beta=1+4i-(3+2i)=-2+2i,\ \overline{\alpha-\beta}=-2-2i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-2+2i)(-2-2i)=8$

답 8

0438 전략 $z=a+3i$에서 $\overline{z}=a-3i$이므로 이를 주어진 식에 대입하여 정리한다.

풀이 $\overline{z}=\dfrac{z^2}{6i}$에서 $\quad a-3i=\dfrac{(a+3i)^2}{6i}$

$6i(a-3i)=a^2+6ai-9$

$18+6ai=a^2-9+6ai$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$18=a^2-9 \quad \therefore a^2=27$

답 ⑤

0439 전략 z가 허수이므로 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하고 주어진 식에 대입한다.

풀이 z가 허수이므로 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$\overline{z}=a-bi$

조건 (나)에서 $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=8$이므로

$2a=8 \quad \therefore a=4$

조건 (가)에서

$z^2+mz+n=(4+bi)^2+m(4+bi)+n$

$=(16+8bi-b^2)+(4m+mbi)+n$

$=(16-b^2+4m+n)+b(8+m)i$

즉 $(16-b^2+4m+n)+b(8+m)i=0$이므로

$16-b^2+4m+n=0,\ b(8+m)=0$

$b(8+m)=0$에서 $b\neq0$이므로 $\quad m=-8$

$16-b^2+4m+n=0$에서 $n=16+b^2$이므로

$n>16$

따라서 정수 n의 최솟값은 17이므로 $m+n$의 최솟값은

$-8+17=9$

답 ④

0440 전략 i^n (n은 자연수)의 값은 $i,\ -1,\ -i,\ 1$이 이 순서대로 반복되어 나타남을 이용한다.

풀이 $(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$

$=(i+i^2+i^3+\cdots+i^{18})+(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{19})$

$=(i^{17}+i^{18})+(i^{18}+i^{19})$

$=(i+i^2)+(i^2+i^3)$

$=(i-1)+(-1-i)$

$=-2$

따라서 $-2=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-2,\ b=0$

$\therefore a^2+b^2=4$

답 4

다른 풀이 $i+i^{19}=i+(-i)=0$이므로

$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$

$=i+\{(i^2+i^2)+(i^3+i^3)+(i^4+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{18})\}+i^{19}$

$=2(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{18})$

$=2\cdot i^{18}=2\cdot i^2$

$=2\cdot(-1)=-2$

0441 전략 $(1-i)^{2n}=\{(1-i)^2\}^n$임을 이용한다.

풀이 $(1-i)^{2n}=\{(1-i)^2\}^n=(-2i)^n=2^n(-i)^n$이므로

$2^n(-i)^n=2^ni \quad \therefore (-i)^n=i$

이때 $(-i)^n$의 값은

$-i,\ (-i)^2=-1,\ (-i)^3=i,\ (-i)^4=1,\ \cdots$

이므로 $-i,\ -1,\ i,\ 1$이 이 순서대로 반복되어 나타난다.

따라서 $(-i)^n=i$를 만족시키는 n은 4로 나누었을 때의 나머지가 3이어야 하므로 100 이하의 자연수 n은

$\underbrace{3,\ 7,\ 11,\ \cdots,\ 99}_{n=4k+3\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 24)}$

의 25개이다.

답 25

0442 전략 z^2, z^3, z^4, …을 차례대로 구한다.

풀이 $z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^2=\frac{2i}{-2}=-i$

$z^3=z^2z=-i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$

$z^5=z^4z=-1\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}i}$

$z^6=z^4z^2=-1\cdot(-i)=i$

$z^7=z^6z=i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

따라서 $z^n=1$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

답 ④

0443 전략 $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$임을 이용한다.

풀이 $2=\sqrt{4}=\sqrt{(-2)(-2)}$

$=-\sqrt{-2}\sqrt{-2}=-(\sqrt{-2})^2$

$=-(-2)=2$

답 ③

0444 전략 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$에서

$x<0$, $y<0$ 또는 $x=0$ 또는 $y=0$ …… ㉠

$x^2-3x-(y+4)i=10+7i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-3x=10$, $-(y+4)=7$

$x^2-3x=10$에서 $x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0$ $\therefore x=-2$ ($\because$ ㉠)

$-(y+4)=7$에서 $y+4=-7$ $\therefore y=-11$

따라서 $x=-2$, $y=-11$이므로

$xy=22$

답 ①

0445 전략 복소수 z가 순허수이려면 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 함을 이용한다.

풀이 $z=(1+i)x^2-(3+6i)x+2+5i$

$=x^2+x^2i-3x-6xi+2+5i$

$=(x^2-3x+2)+(x^2-6x+5)i$ …… ㉠ ··· ❶

z가 순허수이려면 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$x^2-3x+2=0$, $x^2-6x+5\neq0$

$(x-1)(x-2)=0$, $(x-1)(x-5)\neq0$

$\therefore x=2$ ··· ❷

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$z=-3i$ ··· ❸

답 $x=2$, $z=-3i$

채점 기준	비율
❶ 복소수 z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ z의 값을 구할 수 있다.	20 %

0446 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 주어진 등식을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $z^2=2+6i$에서

$(a+bi)^2=2+6i$

$a^2-b^2+2abi=2+6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=2$, $ab=3$ ··· ❶

한편 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)$

$=a^2+b^2=\sqrt{(a^2+b^2)^2}$

$=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}$

$=\sqrt{2^2+4\cdot3^2}=2\sqrt{10}$ ··· ❷

답 $2\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$라 하고 주어진 등식을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ ❶을 이용하여 $z\bar{z}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0447 전략 $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$임을 이용한다.

풀이 $f(i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98}=\left\{\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right\}^{98}$

$=i^{98}=i^2=-1$ ··· ❶

$f(-i)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}=\left\{\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right\}^{98}$

$=(-i)^{98}=i^{98}=-1$ ··· ❷

$\therefore f(i)+f(-i)=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f(i)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(-i)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(i)+f(-i)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0448 전략 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$ ··· ❶

$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{c}{b}}$에서 $b<0$, $c>0$ ··· ❷

$\therefore \sqrt{a^2}-|b|+\sqrt{c^2}=-a-(-b)+c$

$=-a+b+c$ ··· ❸

답 $-a+b+c$

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$임을 이용하여 a, b의 부호를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{c}{b}}$임을 이용하여 c의 부호를 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	40 %

04 이차방정식

0449 $x^2+8x+12=0$에서 $(x+2)(x+6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-6$

답 $x=-2$ 또는 $x=-6$

0450 $4x^2-1=0$에서 $(2x+1)(2x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

0451 $2x^2+5x-3=0$에서 $(x+3)(2x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

답 $x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

0452 $x^2-2x+1=0$에서 $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

답 $x=1$

0453 $x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

답 $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

0454 $x^2+2\cdot1\cdot x-4=0$이므로

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-4)}}{1}=-1\pm\sqrt{5}$

답 $x=-1\pm\sqrt{5}$

0455 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{4}$

$=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{4}$

답 $x=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{4}$

0456 $4x^2+2\cdot(-4)\cdot x-7=0$이므로

$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot(-7)}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{44}}{4}$

$=\frac{2\pm\sqrt{11}}{2}$

답 $x=\frac{2\pm\sqrt{11}}{2}$

0457 $4x^2+4x-3=0$에서 $(2x+3)(2x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

답 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$, 실근

0458 $x^2-10x+25=0$에서 $(x-5)^2=0$

$\therefore x=5$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

답 $x=5$, 실근

0459 $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{2}$

$=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 $x=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$, 허근

0460 $3x^2+2\cdot2x+6=0$이므로

$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot6}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{-14}}{3}$

$=\frac{-2\pm\sqrt{14}i}{3}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 $x=\frac{-2\pm\sqrt{14}i}{3}$, 허근

0461 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\cdot2\cdot(-3)=73>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 서로 다른 두 실근

참고 이차방정식 $2x^2-7x-3=0$에서 x^2의 계수 2, 상수항 -3의 부호가 다르므로 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0462 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}=0$

따라서 중근을 갖는다.

답 중근

0463 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot3\cdot8=-87<0$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 서로 다른 두 허근

0464 $x^2+2\cdot2x-1=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot(-1)=5>0$

$D=4^2-4\cdot1\cdot(-1)=20>0$ 임을 이용해도 된다.

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 서로 다른 두 실근

0465 $5x^2+2\cdot(-\sqrt{2})x+3=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-\sqrt{2})^2-5\cdot3=-13<0$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 서로 다른 두 허근

0466 $9x^2+2\cdot12x+16=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=12^2-9\cdot16=0$

따라서 중근을 갖는다.

답 중근

0467 주어진 각 방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $D=3^2-4\cdot1\cdot5=-11<0$

ㄴ. $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=1>0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-7)=8>0$

ㄹ. $\frac{D}{4}=(-3)^2-9\cdot1=0$

ㅁ. $D=5^2-4\cdot2\cdot4=-7<0$

ㅂ. $\frac{D}{4}=1^2-3\cdot(-1)=4>0$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이므로 ㄴ, ㄷ, ㅂ
(2) 중근을 가지면 $D=0$이므로 ㄹ
(3) 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이므로 ㄱ, ㅁ

답 (1) ㄴ, ㄷ, ㅂ (2) ㄹ (3) ㄱ, ㅁ

0468 이차방정식 $x^2+5x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=5^2-4\cdot1\cdot k=25-4k$
(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로
$D=25-4k>0 \quad \therefore k<\frac{25}{4}$
(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로
$D=25-4k=0 \quad \therefore k=\frac{25}{4}$
(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로
$D=25-4k<0 \quad \therefore k>\frac{25}{4}$

답 (1) $k<\frac{25}{4}$ (2) $k=\frac{25}{4}$ (3) $k>\frac{25}{4}$

0469 $\alpha+\beta=-\frac{-4}{1}=4$, $\alpha\beta=\frac{2}{1}=2$ 답 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

0470 $\alpha+\beta=-\frac{-5}{2}=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta=\frac{-4}{2}=-2$
답 $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta=-2$

0471 $\alpha+\beta=-\frac{5}{3}$, $\alpha\beta=\frac{6}{3}=2$ 답 $\alpha+\beta=-\frac{5}{3}$, $\alpha\beta=2$

0472 $\alpha+\beta=-\frac{3}{1}=-3$, $\alpha\beta=\frac{-2}{1}=-2$이므로
$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-2\cdot(-3)=6$ 답 6

0473 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0474 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(-3)^2-2\cdot(-2)=13$ 답 13

0475 $x^2-(-2+5)x+(-2)\cdot5=0$
$\therefore x^2-3x-10=0$ 답 $x^2-3x-10=0$

0476 $x^2-\{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\}x+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$
$\therefore x^2-4x+1=0$ 답 $x^2-4x+1=0$

0477 $x^2-\{(1+i)+(1-i)\}x+(1+i)(1-i)=0$
$\therefore x^2-2x+2=0$ 답 $x^2-2x+2=0$

0478 $2\left\{x^2-\left(1+\frac{1}{2}\right)x+1\cdot\frac{1}{2}\right\}=0$
$2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=0 \quad \therefore 2x^2-3x+1=0$
답 $2x^2-3x+1=0$

0479 $6\left\{x^2-\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)x+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}\right\}=0$
$6\left(x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}\right)=0 \quad \therefore 6x^2-x-2=0$
답 $6x^2-x-2=0$

0480 $x^2-4x-1=0$에서 근의 공식에 의하여
$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-1)}=2\pm\sqrt{5}$
$\therefore x^2-4x-1=\{x-(2+\sqrt{5})\}\{x-(2-\sqrt{5})\}$
$=(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$
답 $(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$

0481 $x^2+8=0$에서 $x^2=-8 \quad \therefore x=\pm2\sqrt{2}i$
$\therefore x^2+8=(x+2\sqrt{2}i)(x-2\sqrt{2}i)$
답 $(x+2\sqrt{2}i)(x-2\sqrt{2}i)$

0482 $x^2-2x+3=0$에서 근의 공식에 의하여
$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot3}=1\pm\sqrt{-2}$
$=1\pm\sqrt{2}i$
$\therefore x^2-2x+3=\{x-(1+\sqrt{2}i)\}\{x-(1-\sqrt{2}i)\}$
$=(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$
답 $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

0483 $x^2+x+1=0$에서 근의 공식에 의하여
$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$
$=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
$\therefore x^2+x+1=\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$
$=\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$
답 $\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

0484 답 $1-\sqrt{5}$, $a=-2$, $b=-4$
풀이 $1-\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$, -2, -4

0485 계수가 유리수이고 한 근이 $-2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은
$-2+\sqrt{3}$ └ 계수가 유리수가 아니면 켤레근을 이용할 수 없다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(-2-\sqrt{3})+(-2+\sqrt{3})=-a$, $(-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})=b$
$\therefore a=4$, $b=1$ 답 $-2+\sqrt{3}$, $a=4$, $b=1$

0486 계수가 유리수이고 한 근이 $5-3\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은
$5+3\sqrt{2}$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(5-3\sqrt{2})+(5+3\sqrt{2})=-a$, $(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})=b$
$\therefore a=-10$, $b=7$ 답 $5+3\sqrt{2}$, $a=-10$, $b=7$

0487 답 $1-i$, $a=-2$, $b=2$

풀이 $1-i$, $1-i$, $1-i$, -2, 2

0488 계수가 실수이고 한 근이 $2-i$이므로 다른 한 근은 $2+i$

계수가 실수가 아니면 켤레근을 이용할 수 없다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-i)+(2+i)=-a$, $(2-i)(2+i)=b$

$\therefore a=-4$, $b=5$ 답 $2+i$, $a=-4$, $b=5$

0489 계수가 실수이고 한 근이 $3+2i$이므로 다른 한 근은 $3-2i$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+2i)+(3-2i)=-a$, $(3+2i)(3-2i)=b$

$\therefore a=-6$, $b=13$ 답 $3-2i$, $a=-6$, $b=13$

0490 $3(x-2)^2-4=12-x$에서

$3(x^2-4x+4)-4=12-x$, $3x^2-12x+8=12-x$

$3x^2-11x-4=0$, $(3x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=4$ 답 ③

0491 $6x^2-7x-3=0$에서 $(3x+1)(2x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=-\frac{1}{3}$이므로

$\alpha-\beta=\frac{11}{6}$ 답 ④

0492 $x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

$\therefore M=4$ ··· ❶

$2x^2+3x-2=0$에서 $(x+2)(2x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore m=-2$ ··· ❷

$\therefore M+m=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ M의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0493 $x^2+2x+3=0$에서

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot 3}=-1\pm\sqrt{2}i$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$a+b=1$ 답 ④

0494 $3x^2-1=2\sqrt{6}x$에서 $3x^2-2\sqrt{6}x-1=0$

$\therefore x=\frac{-(-\sqrt{6})\pm\sqrt{(-\sqrt{6})^2-3\cdot(-1)}}{3}=\frac{\sqrt{6}\pm 3}{3}$

답 $x=\frac{\sqrt{6}\pm 3}{3}$

0495 $2x(x-2)=4x-3$에서

$2x^2-4x=4x-3$, $2x^2-8x+3=0$

$\therefore x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-2\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$

따라서 $a=\frac{4-\sqrt{10}}{2}$이므로 $2a=4-\sqrt{10}$

$\therefore 2a+\sqrt{10}=4$ 답 ③

0496 $\frac{(5x-4)(x+1)-4}{3}-2x(x+1)=0$에서

$(5x-4)(x+1)-4-6x(x+1)=0$

$5x^2+x-4-4-6x^2-6x=0$

$x^2+5x+8=0$

$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{2}$

답 $x=\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{2}$

0497 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{3}+2$를 곱하면

$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)x^2+(\sqrt{3}+2)x+(\sqrt{3}+2)(3-\sqrt{3})=0$

$-x^2+(\sqrt{3}+2)x+(\sqrt{3}+3)=0$

$x^2-(\sqrt{3}+2)x-(\sqrt{3}+3)=0$

$(x+1)(x-\sqrt{3}-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+3$ 답 $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+3$

0498 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{5}$를 곱하면

$5x^2-\sqrt{5}(5-2\sqrt{5})x-10\sqrt{5}=0$

$5x^2-(5\sqrt{5}-10)x-10\sqrt{5}=0$

$x^2-(\sqrt{5}-2)x-2\sqrt{5}=0$

$(x+2)(x-\sqrt{5})=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\sqrt{5}$ 답 $x=-2$ 또는 $x=\sqrt{5}$

0499 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$

$x^2+(2\sqrt{2}-1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$

$(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-1)=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2}+1$

따라서 $\alpha=-\sqrt{2}$, $\beta=-\sqrt{2}+1$이므로

$\alpha-2\beta=-\sqrt{2}-2(-\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}-2$ 답 ③

0500 이차방정식 $x^2+kx-2k+1=0$의 한 근이 1이므로

$1^2+k\cdot 1-2k+1=0$ $\therefore k=2$

$k=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 -3이다. 답 -3

0501 이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 한 근이 $-\sqrt{2}$이므로

$(-\sqrt{2})^2-\sqrt{2}a+4=0$, $-\sqrt{2}a=-6$

$\therefore a=3\sqrt{2}$ 답 ②

0502 이차방정식 $x^2-(2m-3)x+m=0$의 한 근이 4이므로

$4^2-(2m-3)\cdot 4+m=0$

$16-8m+12+m=0$

$7m=28\qquad \therefore m=4$ ⋯ ❶

$m=4$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-5x+4=0,\qquad (x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4\qquad \therefore n=1$ ⋯ ❷

$\therefore m-n=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m-n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0503 이차방정식 $2x^2-(k+1)x-k+3=0$의 한 근이 $k-1$이므로

$2(k-1)^2-(k+1)(k-1)-k+3=0$

$k^2-5k+6=0,\qquad (k-2)(k-3)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$2+3=5$

답 ⑤

0504 이차방정식 $(k-3)x^2-ax+(k+2)b=0$의 한 근이 -1이므로

$(k-3)\cdot(-1)^2-a\cdot(-1)+(k+2)b=0$

$(1+b)k-3+a+2b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 — k에 대한 항등식

$1+b=0,\ -3+a+2b=0$

따라서 $a=5,\ b=-1$이므로

$ab=-5$

답 -5

라쎈 특강

항등식에 대한 여러 가지 표현

다음은 모두 k에 대한 항등식을 나타낸다.

① k의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식

② 모든 k에 대하여 성립하는 등식

③ 임의의 k에 대하여 성립하는 등식

0505 (i) $x<3$일 때, — 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나눈다.

$x^2-(x-3)=9$에서 $\qquad x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0\qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

그런데 $x<3$이므로 $\qquad x=-2$

(ii) $x\geq 3$일 때,

$x^2+(x-3)=9$에서 $\qquad x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0\qquad \therefore x=-4$ 또는 $x=3$

그런데 $x\geq 3$이므로 $\qquad x=3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 모든 근의 합은

$-2+3=1$

답 ①

0506 (i) $x<0$일 때,

$x^2-x-20=0$에서 $\qquad (x+4)(x-5)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=5$

그런데 $x<0$이므로 $\qquad x=-4$

(ii) $x\geq 0$일 때,

$x^2+x-20=0$에서 $\qquad (x+5)(x-4)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=4$

그런데 $x\geq 0$이므로 $\qquad x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-4$ 또는 $x=4$

답 $x=-4$ 또는 $x=4$

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$|x|^2+|x|-20=0,\qquad (|x|+5)(|x|-4)=0$

이때 $|x|\geq 0$이므로 $\qquad |x|=4$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=4$

0507 $\sqrt{(x-1)^2}=x^2-3$에서 $\qquad |x-1|=x^2-3$

(i) $x<1$일 때,

$-(x-1)=x^2-3$에서 $\qquad x^2+x-4=0$

$$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

그런데 $x<1$이므로 $\qquad x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$

(ii) $x\geq 1$일 때,

$x-1=x^2-3$에서 $\qquad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0\qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq 1$이므로 $\qquad x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ 또는 $x=2$

답 $x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ 또는 $x=2$

참고 $x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$에서 $4<\sqrt{17}<5$이므로

$3<-1+\sqrt{17}<4\qquad \therefore \dfrac{3}{2}<\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}<2$

0508 처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 새로 만든 직사각형의 가로의 길이는 $(x+2)$ cm, 세로의 길이는 $(x-3)$ cm이므로

$(x+2)(x-3)=36,\qquad x^2-x-42=0$

$(x+6)(x-7)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=7$

그런데 $x>3$이므로 $\qquad x=7$ — 길이는 항상 양수이므로 $x-3>0$ $\therefore x>3$

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 7 cm이므로 처음 정사각형의 넓이는 49 cm^2이다.

답 49 cm^2

0509 가장 작은 반원의 반지름의 길이를 x cm라 하면 두 번째로 작은 반원의 반지름의 길이는 $\underbrace{(9-x)}_{\frac{18-2x}{2}=9-x}$ cm이므로

$\dfrac{1}{2}\pi\cdot 9^2-\dfrac{1}{2}\pi\cdot(9-x)^2-\dfrac{1}{2}\pi\cdot x^2=18\pi$

$81-(81-18x+x^2)-x^2=36$

$x^2-9x+18=0,\qquad (x-3)(x-6)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=6$

그런데 $0<x<\frac{9}{2}$이므로 $\quad x=3$ ← $x<9-x$이므로 $x<\frac{9}{2}$

따라서 가장 작은 반원의 반지름의 길이는 3 cm이다. 답 ③

0510 처음 종이의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $2x$ cm이다. ··· ❶

직육면체 모양의 상자의 밑면의 가로의 길이는 $(2x-2)$ cm, 세로의 길이는 $(x-2)$ cm, 높이는 1 cm이므로

$(2x-2)(x-2)\cdot 1=40$ ··· ❷

$2x^2-6x-36=0, \quad x^2-3x-18=0$

$(x+3)(x-6)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=6$

그런데 $x>2$이므로 $\quad x=6$

따라서 처음 종이의 가로의 길이는 12 cm이다. ··· ❸

답 12 cm

채점 기준	비율
❶ 세로의 길이를 x cm라 하고 가로의 길이를 x로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ x에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 처음 종이의 가로의 길이를 구할 수 있다.	40 %

0511 처음 물건의 가격을 a원이라 하면 x % 인상한 물건의 가격은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

다시 x % 인하한 물건의 가격은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

이 가격은 처음 가격보다 9 % 낮아진 가격이므로

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)=a\left(1-\frac{9}{100}\right)$

$1-\frac{x^2}{10000}=1-\frac{9}{100}, \quad \frac{x^2}{10000}=\frac{9}{100}$

$x^2=900 \quad \therefore x=\pm 30$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=30$ 답 ③

다른 풀이 x % 인상한 후 다시 x % 인하한 가격이 9 % 인하한 가격과 같으므로

$\frac{x}{100}\cdot\left(-\frac{x}{100}\right)=-\frac{9}{100}, \quad x^2=900 \quad \therefore x=\pm 30$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=30$

라쎈 특강

가격의 인상, 인하에 대한 조건이 주어진 경우 다음을 이용하여 식을 세운다.

① a원인 물건의 가격을 x % 인상한 가격

→ $\left(a+a\cdot\frac{x}{100}\right)$원, 즉 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

② a원인 물건의 가격을 x % 인하한 가격

→ $\left(a-a\cdot\frac{x}{100}\right)$원, 즉 $a\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

0512 이차방정식 $x^2+(2k+1)x+k^2+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k+1)^2-4(k^2+3)>0$

$4k^2+4k+1-4k^2-12>0$

$4k-11>0 \quad \therefore k>\frac{11}{4}$

따라서 가장 작은 정수 k의 값은 3이다. 답 ④

0513 이차방정식 $x^2-5x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4(k+1)\geq 0$

$21-4k\geq 0 \quad \therefore k\leq\frac{21}{4}$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$ 답 15

0514 이차방정식 $x^2+2ax+2a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(2a-1)=0$

$a^2-2a+1=0, \quad (a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+2x+1=0, \quad (x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

따라서 $m=-1$이므로 $\quad a+m=0$ 답 ②

0515 이차방정식 $x^2+2(1-k)x-k+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(1-k)^2-(-k+3)=0$

$k^2-k-2=0, \quad (k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$ ······ ㉠ ··· ❶

이차방정식 $2x^2-x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\cdot 2\cdot k<0$

$1-8k<0 \quad \therefore k>\frac{1}{8}$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 $\quad k=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $x^2+2(1-k)x-k+3=0$이 중근을 가질 때, k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차방정식 $2x^2-x+k=0$이 허근을 가질 때, k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0516 이차방정식 $x^2+2(a+k)x+k^2+4k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+k)^2-(k^2+4k+b)=0$

$a^2+2ak+k^2-k^2-4k-b=0$

$(2a-4)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a-4=0, \; a^2-b=0$

$\therefore a=2, \; b=4$

$\therefore a+b=6$ 답 6

0517 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+3a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a^2+3a-3)=-3a+3$$

$a>1$일 때 $-3a+3<0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 ③

$a>1$에서 $-3a<-3$
$\therefore -3a+3<0$

0518 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면

$a<0$, $b<0$ ⋯ ❶

이때 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4b=a^2-4b>0$

따라서 이차방정식 $x^2-ax+b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ⋯ ❷

답 서로 다른 두 실근

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 a, b의 부호를 알 수 있다.	40 %
❷ 판별식을 이용하여 주어진 이차방정식의 근을 판별할 수 있다.	60 %

0519 이차방정식 $x^2-ax+b-1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4(b-1)=0$

$\therefore a^2=4b-4$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $x^2+2ax+b^2+2b-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D_2}{4}&=a^2-(b^2+2b-1)\\&=(4b-4)-(b^2+2b-1)\ (\because ㉠)\\&=-b^2+2b-3\\&=-(b-1)^2-2<0\end{aligned}$$

따라서 이차방정식 $x^2+2ax+b^2+2b-1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

0520 이차방정식 $x^2+2cx+a^2-b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=c^2-(a^2-b^2)<0$ $\quad\therefore b^2+c^2<a^2$

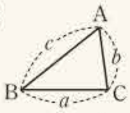
따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 둔각삼각형이다.

답 ③

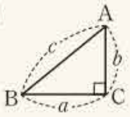
라쎈 특강

변의 길이에 따른 삼각형의 모양

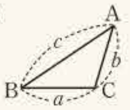
$\triangle$ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$이고 c가 가장 긴 변의 길이일 때, $\triangle$ABC의 모양은 다음과 같다.

①


$a^2+b^2>c^2$ → 예각삼각형

②


$a^2+b^2=c^2$ → 직각삼각형

③


$a^2+b^2<c^2$ → 둔각삼각형

0521 이차방정식 $3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+b+c)\}^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

이때 a, b, c가 실수이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

0522 이차방정식 $2x^2-(2a+b)x+ab=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a+b)\}^2-4\cdot2\cdot ab=0$

$4a^2+4ab+b^2-8ab=0$, $\quad 4a^2-4ab+b^2=0$

$(2a-b)^2=0$ $\quad\therefore b=2a$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2}&=\sqrt{a^2+(2a)^2}\\&=\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}a\ (\because a>0)\end{aligned}$$
답 ④

0523 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+2k^2-4k+3=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-4k+3)=0$

$k^2-2k^2+4k-3=0$, $\quad k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$1+3=4$ 답 ④

0524 주어진 식이 이차식이므로

$k\neq0$ ⋯⋯ ㉠

또 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $kx^2-2kx-4=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-k\cdot(-4)=0$

$k^2+4k=0$, $\quad k(k+4)=0$

$\therefore k=-4\ (\because ㉠)$ 답 -4

0525 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-(2k+a)x+(k+1)^2+a^2-b=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k+a)\}^2-4\{(k+1)^2+a^2-b\}=0$ ⋯ ❶

$4k^2+4ak+a^2-4k^2-8k-4-4a^2+4b=0$

$(4a-8)k-3a^2+4b-4=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a-8=0,\ -3a^2+4b-4=0 \quad \therefore a=2,\ b=4$ ··· ❷

$\therefore ab=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 이차식이 완전제곱식이 되는 조건을 이용하여 k에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0526 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(a+1)x+a^2-b+12=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-(a^2-b+12)=0$

$a^2+2a+1-a^2+b-12=0, \quad 2a+b-11=0$

$\therefore b=11-2a$ ······ ㉠

이때 a, b는 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 9), (2, 7), (3, 5), (4, 3), (5, 1)$

의 5개이다. 답 ③

0527 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=3^3-3\cdot\frac{1}{3}\cdot3=24$ 답 ①

0528 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=7,\ \alpha\beta=3$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=3-7+1=-3$ 답 -3

0529 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=\frac{3}{2}$ ··· ❶

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-3)^2-4\cdot\frac{3}{2}=3$ ··· ❷

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{3}$ ··· ❸

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\|\alpha-\beta\|$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0530 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}$

$=4(\alpha-\beta)\cdot2=8(\alpha-\beta)$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\cdot\frac{1}{2}=14$이므로

$\alpha-\beta=\sqrt{14}\ (\because \alpha>\beta)$

따라서 구하는 식의 값은

$8(\alpha-\beta)=8\sqrt{14}$ 답 ④

0531 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=1$

이때 $\alpha>0,\ \beta>0$이므로 (판별식)>0, (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)>0이므로 $\alpha>0,\ \beta>0$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\beta=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=6+2\cdot1=8$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{2}\ (\because \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>0)$ 답 ③

0532 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-\alpha-3=0,\ \beta^2-\beta-3=0$

$\therefore \alpha^2-2\alpha-1=-\alpha+2,\ \beta^2-2\beta-1=-\beta+2$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-3$

$\therefore (\alpha^2-2\alpha-1)(\beta^2-2\beta-1)=(-\alpha+2)(-\beta+2)$

$=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$

$=-3-2\cdot1+4$

$=-1$ 답 ⑤

0533 α가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-3\alpha+5=0 \quad \therefore \alpha^2=3\alpha-5$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$이므로

$\alpha^2+3\beta=3\alpha-5+3\beta=3(\alpha+\beta)-5$

$=3\cdot3-5=4$ 답 4

0534 α가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-5\alpha-3=0 \quad \therefore \alpha^2-5\alpha=3$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=-3$

$\therefore \alpha^3-5\alpha^2+\alpha\beta+3\beta=\alpha(\alpha^2-5\alpha)+\alpha\beta+3\beta$

$=3\alpha+\alpha\beta+3\beta$

$=3(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=3\cdot5-3=12$ 답 ③

0535 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-4\alpha+1=0,\ \beta^2-4\beta+1=0$

$\therefore \alpha^2-3\alpha+1=\alpha,\ \beta^2-3\beta+1=\beta$ ··· ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$ ··· ❷

$\therefore \frac{\beta}{\alpha^2-3\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta^2-3\beta+1}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{4^2-2\cdot1}{1}=14$ ··· ❸

답 14

04 이차방정식

채점 기준	비율
❶ $\alpha^2-3\alpha+1=\alpha$, $\beta^2-3\beta+1=\beta$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\frac{\beta}{\alpha^2-3\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta^2-3\beta+1}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0536 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2+\alpha-4=0$, $\beta^2+\beta-4=0$

$\therefore \alpha^2+\alpha=4$, $\beta^2+\beta=4$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-4$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^5+\beta^5+\alpha^4+\beta^4&=\alpha^3(\alpha^2+\alpha)+\beta^3(\beta^2+\beta)\\&=4\alpha^3+4\beta^3=4(\alpha^3+\beta^3)\\&=4\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}\\&=4\{(-1)^3-3\cdot(-4)\cdot(-1)\}\\&=-52\end{aligned}$$

답 ②

0537 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $3\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha=-4(m+1)$ $\quad\therefore \alpha=-m-1$ …… ㉠

$\alpha\cdot3\alpha=-4m$ $\quad\therefore 3\alpha^2=-4m$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3(-m-1)^2=-4m$, $\quad 3m^2+10m+3=0$

$(m+3)(3m+1)=0$

$\therefore m=-3$ 또는 $m=-\frac{1}{3}$

따라서 정수 m의 값은 -3이다. 답 ①

0538 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

└ 두 근을 $\alpha-1$, α라 할 수도 있다.

$\alpha+(\alpha+1)=2k-3$ $\quad\therefore \alpha=k-2$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+1)=k-1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(k-2)(k-1)=k-1$, $\quad k^2-3k+2=k-1$

$k^2-4k+3=0$, $\quad (k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$1+3=4$ 답 ④

다른 풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\beta\,(\alpha>\beta)$라 하면 $\alpha-\beta=1$이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k-3$, $\alpha\beta=k-1$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$1^2=(2k-3)^2-4(k-1)$

$k^2-4k+3=0$, $\quad (k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다.

0539 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $4\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+4\alpha=5m$ $\quad\therefore \alpha=m$ …… ㉠

$\alpha\cdot4\alpha=4m-1$ $\quad\therefore 4\alpha^2=4m-1$ …… ㉡ ⋯ ❶

㉠을 ㉡에 대입하면

$4m^2=4m-1$, $\quad 4m^2-4m+1=0$

$(2m-1)^2=0$ $\quad\therefore m=\frac{1}{2}$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $4\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하고 α, m에 대한 식을 세울 수 있다.	60 %
❷ m의 값을 구할 수 있다.	40 %

0540 주어진 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로 두 실근을 α, $-\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=-(m^2+m-12)=0$ …… ㉠

$\alpha\cdot(-\alpha)=m+2$ …… ㉡

㉠에서 $m^2+m-12=0$이므로 $\quad (m+4)(m-3)=0$

$\therefore m=-4$ 또는 $m=3$ …… ㉢

㉡에서 $m+2<0$이므로 $\quad m<-2$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $\quad m=-4$ 답 -4

라쎈 특강

절댓값이 같고 부호가 서로 다른 두 실근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르면 두 근을 α, $-\alpha\,(\alpha\neq0)$라 할 수 있다.

이때 $\alpha+(-\alpha)=0$, $\alpha\cdot(-\alpha)=-\alpha^2<0$이므로

$-\frac{b}{a}=0$, $\frac{c}{a}<0$ └ (두 근의 합)$=0$, (두 근의 곱)<0

0541 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2k$, $\alpha\beta=2k-1$

이므로

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2k)^2-2(2k-1)\\&=4k^2-4k+2\end{aligned}$$

이때 $\alpha^2+\beta^2=10$이므로

$4k^2-4k+2=10$, $\quad k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$ $\quad\therefore k=2\ (\because k>0)$ 답 2

0542 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3k-1$, $\alpha\beta=k$

이므로

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha+\beta&=\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)\\&=k(3k-1)+3k-1\\&=3k^2+2k-1\end{aligned}$$

이때 $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha+\beta=7$이므로

$3k^2+2k-1=7$, $\quad 3k^2+2k-8=0$

$(k+2)(3k-4)=0$ $\quad\therefore k=-2$ 또는 $k=\frac{4}{3}$

따라서 정수 k의 값은 -2이다. 답 ①

0543 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ ⋯ ❶

$(\alpha+1)(\beta+1)=5$에서

$\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=5,\qquad b-a+1=5$

$\therefore a-b=-4$ ⋯⋯ ㉠

$(2\alpha+1)(2\beta+1)=-1$에서

$4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1=-1,\qquad 4b-2a+1=-1$

$\therefore a-2b=1$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9,\ b=-5$ ⋯ ❸

$\therefore ab=45$ ⋯ ❹

답 45

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ ❶을 이용하여 주어진 관계식을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0544 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=\frac{a}{2}$

$|\alpha|+|\beta|=5$의 양변을 제곱하면

$|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=25,\qquad \alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=25$

$|\alpha|^2=\alpha^2,\ |\beta|^2=\beta^2,\ |\alpha||\beta|=|\alpha\beta|$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=25$

$1^2-2\cdot\frac{a}{2}+2\cdot\left|\frac{a}{2}\right|=25$

$\therefore a-|a|=-24$

이때 $a\ge0$이면 $a-|a|=0$이므로 $\quad a<0$

따라서 $a-(-a)=-24$이므로 $\quad 2a=-24$

$\therefore a=-12$

답 ②

다른 풀이 $\alpha+\beta=1$이고 $|\alpha|+|\beta|=5$에서 α와 β의 부호가 다르다.

$\alpha\ge0,\ \beta\ge0$이면 $\alpha+\beta=5$
$\alpha\le0,\ \beta\le0$이면 $\alpha+\beta=-5$
즉 $\alpha+\beta=1$을 만족시키지 않는다.

즉 $\alpha>0>\beta$라 하면

$\alpha+\beta=1,\ \alpha-\beta=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=3,\ \beta=-2$

이때 $\alpha\beta=\frac{a}{2}$에서 $\quad -6=\frac{a}{2}\qquad \therefore a=-12$

0545 이차방정식 $x^2+ax-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=-3$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $x^2+7x+b=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-7,\ (\alpha+\beta)\alpha\beta=b$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a-3=-7,\ 3a=b$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=12$

$\therefore a+b=16$

답 16

0546 이차방정식 $2x^2+ax+6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{a}{2},\ \alpha\beta=3$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $6x^2-3x+b=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{b}{6}$

$\therefore \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{\alpha\beta}=\frac{b}{6}$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\frac{a}{6}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}=\frac{b}{6}\qquad \therefore a=-3,\ b=2$

$\therefore b-a=5$

답 5

0547 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $x^2-(b-3)x-4a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=b-3,\ (\alpha+1)(\beta+1)=-4a$

$\therefore \alpha+\beta=b-5,\ \alpha\beta+\alpha+\beta+1=-4a$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a=b-5,\ b-a+1=-4a$

$\therefore a+b=5,\ 3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=8$

$\therefore ab=-24$

답 ①

0548 이차방정식 $x^2+4x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-2$

$\therefore (\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=-4-2=-6,$
$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-2+4+1=3$

따라서 $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+6x+3=0$

답 ⑤

다른 풀이 $P(x)=x^2+4x-2$라 하면 방정식 $P(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$P(\alpha)=0,\ P(\beta)=0$

$\alpha-1=\alpha'$, $\beta-1=\beta'$이라 하면 $\alpha=\alpha'+1$, $\beta=\beta'+1$이므로

$P(\alpha'+1)=0,\ P(\beta'+1)=0$

즉 α', β'은 이차방정식 $P(x+1)=0$의 두 근이고

$P(x+1)=(x+1)^2+4(x+1)-2$
$=x^2+6x+3$

이므로 구하는 이차방정식은 $\quad x^2+6x+3=0$

0549 이차방정식 $x^2-7x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=7,\ \alpha\beta=3$

따라서 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, 즉 7, 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(7+3)x+7\cdot3=0$

$\therefore x^2-10x+21=0$ 답 $x^2-10x+21=0$

0550 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\dfrac{b}{c}$, $\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{a}{c}$

따라서 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 c인 이차방정식은

$c\left(x^2+\dfrac{b}{c}x+\dfrac{a}{c}\right)=0$

$\therefore cx^2+bx+a=0$ 답 ⑤

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(c\neq0)$의 두 근이 α, β이면 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 두 근은 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$이다.

0551 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 -1이므로

$1-a+b=0$

$\therefore a-b=1$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $x^2+(b+5)x+3a-2=0$의 한 근이 2이므로

$4+2b+10+3a-2=0$

$\therefore 3a+2b=-12$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-3$ ⋯ ❶

$x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2-2x-3=0$에서

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore \alpha=3$

$x^2+(b+5)x+3a-2=0$, 즉 $x^2+2x-8=0$에서

$(x+4)(x-2)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

$\therefore \beta=-4$ ⋯ ❷

따라서 3, -4를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-\{3+(-4)\}x+3\cdot(-4)=0$

$\therefore x^2+x-12=0$ ⋯ ❸

답 $x^2+x-12=0$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ α, β의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구할 수 있다.	40 %

0552 유리와 준호가 푼 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ (a, b는 상수)이라 하자.

유리는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$b=-5\cdot3=-15$

준호는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-a=(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=2$ $\therefore a=-2$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-2x-15=0$ 답 ①

0553 나은이는 a, c를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\dfrac{c}{a}=-6\cdot2=-12$ $\therefore c=-12a$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

민주는 a, b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\dfrac{b}{a}=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$

$\therefore b=-4a$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-4ax-12a=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$ax^2+bx+c=0$이 이차방정식이므로 $a\neq0$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 음수인 근은 -2이다. ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ c를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 이차방정식의 음수인 근을 구할 수 있다.	40 %

0554 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식을 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 1, 2이므로

$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=1+2$에서

$\dfrac{-2b}{2a}=3$ $\therefore b=-3a$ ⋯⋯ ㉠

$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\cdot\dfrac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=1\cdot2$에서

$\dfrac{b^2-(b^2-ac)}{4a^2}=2$, $\dfrac{c}{4a}=2$

$\therefore c=8a$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-3ax+8a=0$

따라서 주어진 방정식의 두 근의 합은 $-\dfrac{-3a}{a}=3$이고, 두 근의 곱은 $\dfrac{8a}{a}=8$이다. 답 합: 3, 곱: 8

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 올바른 근의 공식은

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

이므로 주어진 근의 공식은 c의 값을 $\dfrac{1}{4}c$로 잘못 대입한 것과 같다.

이때 1, 2를 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a\{x^2-(1+2)x+1\cdot2\}=0$

$\therefore ax^2-3ax+2a=0$

따라서 주어진 방정식의 상수항은 $c=2a\cdot4=8a$이므로 주어진 방정식은

$ax^2-3ax+8a=0$

즉 주어진 방정식의 두 근의 합은 $-\dfrac{-3a}{a}=3$이고, 두 근의 곱은 $\dfrac{8a}{a}=8$이다.

0555 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x+1)=0$이려면

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{4-2}{2}=1$ 답 ④

0556 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=27$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x)=0$이려면

$3x=\alpha$ 또는 $3x=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{\beta}{3}=\frac{\alpha\beta}{9}=\frac{27}{9}=3$ 답 ③

0557 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x-1)=0$이려면

$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{3}$ ··· ❶

따라서 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha+1}{3}\cdot\frac{\beta+1}{3}=\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{9}$$
$$=\frac{3+5+1}{9}=1$$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근을 α, β에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱을 구할 수 있다.	50 %

0558 $f(\alpha+1)=0$, $f(\beta+1)=0$이므로 $f(x-2)=0$이려면

$x-2=\alpha+1$ 또는 $x-2=\beta+1$

$\therefore x=\alpha+3$ 또는 $x=\beta+3$

따라서 이차방정식 $f(x-2)=0$의 두 근의 합과 곱은 각각

$(\alpha+3)+(\beta+3)=\alpha+\beta+6=3+6=9$,

$(\alpha+3)(\beta+3)=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9=4+3\cdot3+9=22$

답 합: 9, 곱: 22

0559 $x^2-4x+6=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot6}=2\pm\sqrt{2}i$

$$\therefore x^2-4x+6=\{x-(2+\sqrt{2}i)\}\{x-(2-\sqrt{2}i)\}$$
$$=(x-2-\sqrt{2}i)(x-2+\sqrt{2}i)$$ 답 ②

0560 $x^2+2x+5=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot5}=-1\pm2i$

$$\therefore x^2+2x+5=\{x-(-1+2i)\}\{x-(-1-2i)\}$$
$$=(x+1-2i)(x+1+2i)$$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0561 $\frac{1}{2}x^2-3x+5=0$, 즉 $x^2-6x+10=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot10}=3\pm i$ ··· ❶

$$\therefore \frac{1}{2}x^2-3x+5=\frac{1}{2}\{x-(3+i)\}\{x-(3-i)\}$$
$$=\frac{1}{2}(x-3-i)(x-3+i)$$ ··· ❷

따라서 $a=-1$, $b=-3$이므로

$ab=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-3x+5=0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차식 $\frac{1}{2}x^2-3x+5$를 인수분해할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0562 $f(\alpha)=f(\beta)=4$이므로

$f(\alpha)-4=0$, $f(\beta)-4=0$

따라서 이차방정식 $f(x)-4=0$의 두 근이 α, β이고, $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$$f(x)-4=(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=x^2-4x-3$$

이차방정식 $x^2-4x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 $x^2-4x-3=(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore f(x)=x^2-4x+1$

$\therefore f(2)=4-8+1=-3$ 답 ③

0563 $f(\alpha)=f(\beta)=-2$이므로

$f(\alpha)+2=0$, $f(\beta)+2=0$

따라서 이차방정식 $f(x)+2=0$, 즉 $x^2+5x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=3$

$$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=(-5)^3-3\cdot3\cdot(-5)=-80$$ 답 -80

0564 이차방정식 $x^2+2x-5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-5$

$f(\alpha)=f(\beta)=-5$이므로

$f(\alpha)+5=0$, $f(\beta)+5=0$

따라서 이차방정식 $f(x)+5=0$의 두 근이 α, β이므로

$$f(x)+5=a(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=a(x^2+2x-5)$$

이차방정식 $x^2+2x-5=0$의 두 근이 α, β이므로 $x^2+2x-5=(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore f(x)=a(x^2+2x-5)-5$

이때 $f(0)=5$이므로 $-5a-5=5$

$-5a=10$ $\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2(x^2+2x-5)-5=-2x^2-4x+5$이므로

$f(-1)=-2+4+5=7$ 답 ②

0565 a, b가 실수이면 ab, $a-b$도 실수이므로 이차방정식 $x^2+abx+a-b=0$의 한 근이 $2+3i$이면 다른 한 근은 $2-3i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+3i)+(2-3i)=-ab,\ (2+3i)(2-3i)=a-b$

이므로 $ab=-4,\ a-b=13$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=13^2+2\cdot(-4)=161$ 답 ①

0566 a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3-i$이면 다른 한 근은 $3+i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3-i)+(3+i)=-a,\ (3-i)(3+i)=b$

이므로 $a=-6,\ b=10$

$\therefore ab=-60$ 답 -60

0567 a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 한 근이 $b-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $b+\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(b-\sqrt{3})+(b+\sqrt{3})=4,\ (b-\sqrt{3})(b+\sqrt{3})=a$

이므로 $a=1,\ b=2$

$\therefore a+b=3$ 답 3

0568 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$ ··· ❶

a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-i$이면 다른 한 근은 i이다. ··· ❷

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-i+i=-a,\ -i\cdot i=b$

이므로 $a=0,\ b=1$ ··· ❸

따라서 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+x=0$에서

$x(x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-1$ ··· ❹

답 $x=0$ 또는 $x=-1$

채점 기준	비율
❶ $\frac{1-i}{1+i}$를 간단히 할 수 있다.	20 %
❷ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 다른 한 근을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 근을 구할 수 있다.	20 %

0569 전략 주어진 이차방정식을 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 변형한 후 인수분해를 이용하여 근을 구한다.

풀이 $(2x+1)(x-1)=9$에서 $2x^2-x-1=9$

$2x^2-x-10=0,\quad (x+2)(2x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{5}{2},\ \beta=-2$이므로

$2\alpha-\beta=7$ 답 7

0570 전략 근의 공식을 이용하여 주어진 이차방정식의 해를 구한다.

풀이 $x^2-3x+5=0$에서

$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot5}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$

따라서 $a=3,\ b=11$이므로

$a+b=14$ 답 ③

0571 전략 주어진 이차방정식에 $x=2$를 대입하여 얻은 식이 k에 대한 항등식임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $kx^2+ax-(k+1)a^2+8=0$의 한 근이 2이므로

$4k+2a-(k+1)a^2+8=0$

$(4-a^2)k+(-a^2+2a+8)=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4-a^2=0,\ -a^2+2a+8=0$

$4-a^2=0$에서 $a^2=4\quad \therefore a=\pm2$ ······ ㉠

$-a^2+2a+8=0$에서 $a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-2$ 답 -2

0572 전략 주어진 근을 방정식에 대입하여 무리수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$7a+3b+c+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때 a, b, c가 유리수이므로

$7a+3b+c=0,\ 4a+2b=0$

$4a+2b=0$에서 $b=-2a$

$b=-2a$를 $7a+3b+c=0$에 대입하면

$a+c=0\quad \therefore c=-a$

따라서 주어진 방정식은 $ax^2-2\sqrt{3}ax-a=0$, 즉

$a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$이고 $a\neq0$이므로

$ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$이 이차방정식이므로 $a\neq0$

$x^2-2\sqrt{3}x-1=0$

$\therefore x=-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-1\cdot(-1)}=\sqrt{3}\pm2$

즉 $\beta=\sqrt{3}-2$이므로

$\alpha+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}$

$=2+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)=0$ 답 ③

라쎈 특강

$\sqrt{3}b$가 무리수이므로 주어진 방정식의 계수가 모두 유리수인 것은 아니다. 따라서 이차방정식의 켤레근을 이용하여 $\beta=2-\sqrt{3}$으로 생각하지 않도록 주의한다.

0573 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 하여 x의 값의 범위를 나누어 푼다.

풀이 (i) $x<0$일 때,

$x^2-3x+2x-6=0$에서 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0\quad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

그런데 $x<0$이므로 $x=-2$

(ii) $x \ge 0$일 때,

$x^2+3x+2x-6=0$에서 $\quad x^2+5x-6=0$

$(x+6)(x-1)=0 \quad \therefore x=-6$ 또는 $x=1$

그런데 $x \ge 0$이므로 $\quad x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 모든 근의 곱은

$-2 \cdot 1=-2$ 답 ④

0574 전략 길의 폭을 x m라 하고 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 방정식을 세운다.

풀이 길의 폭을 x m라 하면 길을 제외한 땅의 가로, 세로의 길이는 각각 $(24-x)$ m, $\underbrace{(16-2x)}_{16-2x>0\text{이므로 } x<8}$ m이므로

$(24-x)(16-2x)=210$

$x^2-32x+87=0, \quad (x-3)(x-29)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=29$

그런데 $0<x<8$이므로 $\quad x=3$

따라서 구하는 길의 폭은 3 m이다. 답 3 m

0575 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이면 중근을 가짐을 이용한다.

풀이 주어진 각 방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $D=3^2-4\cdot1\cdot(-2)=17>0$

ㄴ. $\frac{D}{4}=(-\sqrt{5})^2-5\cdot1=0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=(-3)^2-9\cdot4=-27<0$

ㄹ. $x^2=4(x-1)$, 즉 $x^2-4x+4=0$에서

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot4=0$

이상에서 중근을 갖는 이차방정식은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0576 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은 $D>0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2-24=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2-24)>0$

$k^2-4k+4-k^2+24>0$

$-4k+28>0 \quad \therefore k<7$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다. 답 6

0577 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 허근을 가질 조건은 $D<0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+16=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot1\cdot16<0 \quad \therefore a^2<64$

이때 a는 자연수이고 $7^2=49$, $8^2=64$이므로 자연수 a의 최댓값은 7이다. 답 ④

0578 전략 이차식 kx^2+lx+m이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $kx^2+lx+m=0$이 중근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $(a+b)x^2-2cx+a-b=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-c)^2-(a+b)(a-b)=0$

$c^2-a^2+b^2=0 \quad \therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}bc$ 답 ②

0579 전략 주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 (이차식)$=0$의 판별식이 완전제곱식이어야 함을 이용한다.

풀이 주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(ky+1)x-3y^2+11y-6$

이때 x에 대한 이차방정식 $x^2+(ky+1)x-3y^2+11y-6=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(ky+1)^2-4(-3y^2+11y-6)$

$=k^2y^2+2ky+1+12y^2-44y+24$

$=(k^2+12)y^2+2(k-22)y+25$

가 완전제곱식이어야 한다.

y에 대한 이차방정식 $(k^2+12)y^2+2(k-22)y+25=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(k-22)^2-25(k^2+12)=0$

$6k^2+11k-46=0, \quad (k-2)(6k+23)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k$는 자연수) 답 2

참고 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 풀어도 같은 결과를 얻을 수 있다.

다른 풀이 $x^2+(ky+1)x-3y^2+11y-6$

$=x^2+(ky+1)x-(3y-2)(y-3)$

위의 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$(3y-2)-(y-3)=ky+1 \quad \therefore k=2$

라쎈 특강

이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a는 상수, b, c는 y에 대한 다항식)의 근이

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로 b^2-4ac가 완전제곱식일 때, ax^2+bx+c가 두 일차식의 곱으로 인수분해될 수 있다.

따라서 x, y에 대한 이차식 A가 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) A를 x (또는 y)에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(ii) 이차방정식 $A=0$의 판별식 D_1이 완전제곱식이어야 한다.

(iii) 이차방정식 $D_1=0$의 판별식 D_2가 $D_2=0$이다.

0580 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 α이면 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-3\alpha+k=0$, $\beta^2-3\beta+k=0$

$\therefore\ \alpha^2-\alpha+k=2\alpha,\ \beta^2-\beta+k=2\beta$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=k$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\frac{1}{\beta^2-\beta+k}=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{3}{2k}$$

이때 $\frac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\frac{1}{\beta^2-\beta+k}=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{3}{2k}=\frac{1}{4},\qquad 2k=12$

$\therefore\ k=6$

답 6

0581 전략 조건 (가)를 만족시키는 α, β의 값을 모두 구하고 근과 계수의 관계를 이용하여 조건 (나)를 만족시키는 p, q의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 α, β가 될 수 있는 수는

$2,\ 3,\ 5,\ 7$ ← 소수는 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수이다.

한편 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$p=\alpha+\beta,\ q=\alpha\beta$

이때 조건 (나)에서 p, q는 10보다 작은 서로 다른 자연수이므로

$p=2+3=5,\ q=2\cdot3=6$

$\therefore\ p+q=11$

답 ③

0582 전략 $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$를 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-4$

이므로

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{a^2-2\cdot(-4)}{-4}=-\frac{a^2+8}{4}$$

이때 $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-6$이므로

$-\frac{a^2+8}{4}=-6,\qquad a^2+8=24$

$a^2=16\qquad \therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$

답 ②

0583 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 p, q, r에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+rx+p=0$의 두 근이 2α, 2β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=-r,\ 2\alpha\cdot2\beta=4\alpha\beta=p$

$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{r}{2},\ \alpha\beta=\frac{p}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -p=-\frac{r}{2},\ q=\frac{p}{4}\qquad \therefore\ r=2p,\ q=\frac{p}{4}$

$$\therefore\ \frac{r}{q}=\frac{2p}{\frac{p}{4}}=8$$

답 ⑤

0584 전략 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

$$\therefore\ \frac{1+\alpha}{1+\beta}+\frac{1+\beta}{1+\alpha}=\frac{(1+\alpha)^2+(1+\beta)^2}{(1+\beta)(1+\alpha)}=\frac{1+2\alpha+\alpha^2+1+2\beta+\beta^2}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}=\frac{2+2(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=\frac{2+2\cdot1+1^2-2\cdot(-1)}{1+1-1}=7,$$

$$\frac{1+\alpha}{1+\beta}\cdot\frac{1+\beta}{1+\alpha}=1$$

따라서 $\frac{1+\alpha}{1+\beta}$, $\frac{1+\beta}{1+\alpha}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-7x+1=0$

답 ④

0585 전략 $\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$라 하고 직사각형 PFCG의 둘레의 길이와 넓이를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

풀이 $\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$라 하면

$\overline{PF}=10-\alpha,\ \overline{PG}=10-\beta$

직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이므로

$2\{(10-\alpha)+(10-\beta)\}=28$

$20-(\alpha+\beta)=14\qquad \therefore\ \alpha+\beta=6$

또 직사각형 PFCG의 넓이가 46이므로

$(10-\alpha)(10-\beta)=46,\qquad 100-10(\alpha+\beta)+\alpha\beta=46$

$100-10\cdot6+\alpha\beta=46\qquad \therefore\ \alpha\beta=6$

따라서 $\overline{AE}$, $\overline{AH}$의 길이 α, β를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x+6=0$

답 ②

0586 전략 승우는 b를 바르게 보고 풀었고, 서연이는 a를 바르게 보고 풀었음을 이용한다.

풀이 승우는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$b=-2\cdot4=-8$

서연이는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-a=(-1+\sqrt{7}i)+(-1-\sqrt{7}i)=-2\qquad \therefore\ a=2$

$\therefore\ ab=-16$

답 ①

0587 전략 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이면 이차방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근은 $\frac{\alpha-b}{a}$, $\frac{\beta-b}{a}$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=10$

$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$이므로 $f(2025-8x)=0$이려면

$2025-8x=\alpha$ 또는 $2025-8x=\beta$

$\therefore\ x=\frac{2025-\alpha}{8}$ 또는 $x=\frac{2025-\beta}{8}$

따라서 이차방정식 $f(2025-8x)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{2025-\alpha}{8}+\frac{2025-\beta}{8}=\frac{4050-(\alpha+\beta)}{8}$$

$$=\frac{4050-10}{8}=505$$

답 505

0588 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식을 $f(x)$로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $x^2-x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=4$ $\quad\therefore \alpha=1-\beta$, $\beta=1-\alpha$

$f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$에서 $f(\alpha)=1-\alpha$, $f(\beta)=1-\beta$이므로

$f(\alpha)+\alpha-1=0$, $f(\beta)+\beta-1=0$

따라서 이차방정식 $f(x)+x-1=0$의 두 근이 α, β이고, $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)+x-1=(x-\alpha)(x-\beta)$

$=x^2-x+4$

이차방정식 $x^2-x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 $x^2-x+4=(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore f(x)=x^2-2x+5$

$\therefore f(1)=1-2+5=4$

답 ④

0589 전략 먼저 주어진 근의 분모를 유리화한 후 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용한다.

풀이 $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}=\dfrac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}=-2-\sqrt{5}$

a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-2-\sqrt{5}$이면 다른 한 근은 $-2+\sqrt{5}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-2-\sqrt{5})+(-2+\sqrt{5})=-a$,

$(-2-\sqrt{5})(-2+\sqrt{5})=b$

이므로 $\quad a=4$, $b=-1$

$\therefore ab=-4$

답 -4

0590 전략 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=P(\alpha)$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로

$1+p+q=1$ $\quad\therefore p+q=0$ ...... ㉠

한편 $x^2+px+q=0$에서 p, q가 실수이고 조건 (나)에서 한 근이 $a+i$이므로 다른 한 근은 $a-i$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+i)+(a-i)=-p$, $(a+i)(a-i)=q$

이므로

$p=-2a$, $q=a^2+1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면

$p=-2$, $q=2$

$\therefore p+2q=2$

답 ①

0591 전략 주어진 방정식에 $x=\alpha$를 대입한 후 양변을 α로 나눈다.

풀이 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-3\alpha+1=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$x=0$을 $x^2-3x+1=0$에 대입하면 $0^2-3\cdot0+1\neq0$ 즉 $x=0$은 $x^2-3x+1=0$의 근이 아니므로 $\alpha\neq0$

$\alpha-3+\dfrac{1}{\alpha}=0$

$\therefore \alpha+\dfrac{1}{\alpha}=3$ ··· ❶

$\therefore \alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2$

$=3^2-2=7$ ··· ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0592 전략 계수가 실수인 이차방정식의 근은 판별식의 부호를 조사하여 판별한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-b\geq0$ ...... ㉠ ··· ❶

이차방정식 $x^2+2(a-1)x-2a+b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(a-1)^2-(-2a+b)$

$=a^2-2a+1+2a-b$

$=a^2-b+1>0\ (\because ㉠)$

따라서 이차방정식 $x^2+2(a-1)x-2a+b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ··· ❷

답 서로 다른 두 실근

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 판별식을 이용하여 a, b에 대한 부등식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 이차방정식 $x^2+2(a-1)x-2a+b=0$의 판별식을 이용하여 근을 판별할 수 있다.	70 %

0593 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하고, 이를 이용하여 α, β의 부호를 파악한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=2$ ··· ❶

이때 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$이므로

$\alpha<0$, $\beta<0$ ··· ❷

$\therefore \dfrac{1}{|\alpha|}+\dfrac{1}{|\beta|}=-\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{-(-6)}{2}=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ α, β의 부호를 알 수 있다.	20 %
❸ $\dfrac{1}{\lvert\alpha\rvert}+\dfrac{1}{\lvert\beta\rvert}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0594 전략 주어진 이차방정식의 두 근이 연속인 정수이므로 두 근을 α, $\alpha+1$ (α는 정수)이라 한다.

풀이 주어진 방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$(α는 정수)이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=2k+1 \qquad \therefore \alpha=k$ ······ ㉠

$\alpha(\alpha+1)=3k-1$ ······ ㉡ ··· ❶

㉠을 ㉡에 대입하면

$k(k+1)=3k-1, \qquad k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0 \qquad \therefore k=1$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 두 근을 α, $\alpha+1$(α는 정수)이라 하고 근과 계수의 관계를 이용하여 α, k에 대한 식을 구할 수 있다.	60 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

0595 전략 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(2\alpha-1)=0$, $f(2\beta-1)=0$이므로 $f(x)=0$이려면

$x=2\alpha-1$ 또는 $x=2\beta-1$ ··· ❶

따라서 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned}(2\alpha-1)(2\beta-1)&=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1\\&=4\cdot3-2\cdot(-2)+1\\&=17\end{aligned}$$ ··· ❷

답 17

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱을 구할 수 있다.	50 %

0596 전략 이차방정식의 켤레근의 성질과 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 먼저 구한다.

풀이 a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-2i$이면 다른 한 근은 $1+2i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-2i)+(1+2i)=-a$, $(1-2i)(1+2i)=b$

이므로 $\quad a=-2$, $b=5$ ··· ❶

이때 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)x+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{5}=0$$

$$\therefore x^2+\frac{3}{10}x-\frac{1}{10}=0$$

따라서 $m=\frac{3}{10}$, $n=\frac{1}{10}$이므로

$m+n=\frac{2}{5}$ ··· ❷

답 $\frac{2}{5}$

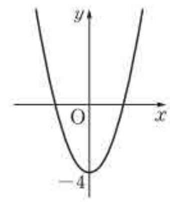
채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	50 %

05 이차방정식과 이차함수

0597 꼭짓점의 좌표: $(0, -4)$

축의 방정식: $x=0$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

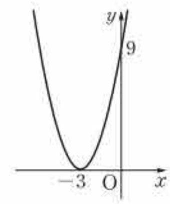


답 풀이 참조

0598 꼭짓점의 좌표: $(-3, 0)$

축의 방정식: $x=-3$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

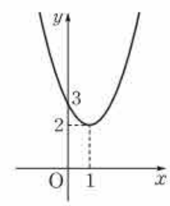


답 풀이 참조

0599 꼭짓점의 좌표: $(1, 2)$

축의 방정식: $x=1$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

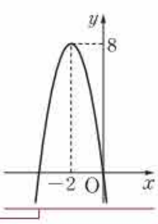


답 풀이 참조

0600 꼭짓점의 좌표: $(-2, 8)$

축의 방정식: $x=-2$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

$y=-2(x+2)^2+8$에서 $-2<0$이므로 그래프는 위로 볼록한 포물선이다.

0601 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$이므로

꼭짓점의 좌표: $(1, -1)$

축의 방정식: $x=1$

답 풀이 참조

0602 $y=-x^2-4x-4=-(x+2)^2$이므로

꼭짓점의 좌표: $(-2, 0)$

축의 방정식: $x=-2$

답 풀이 참조

0603 $y=2x^2-12x+5=2(x-3)^2-13$이므로

꼭짓점의 좌표: $(3, -13)$

축의 방정식: $x=3$

답 풀이 참조

0604 $y=-3x^2-6x+1=-3(x+1)^2+4$이므로

꼭짓점의 좌표: $(-1, 4)$

축의 방정식: $x=-1$

답 풀이 참조

0605 $2x^2-6x=0$에서 $\quad 2x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

답 0, 3

0606 $-3x^2+x+2=0$에서 $\quad 3x^2-x-2=0$

$(3x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

답 $-\frac{2}{3}$, 1

0607 $4x^2-20x+25=0$에서 $(2x-5)^2=0$

$\therefore x=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0608 이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot3=13>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이다.

답 2

0609 이차방정식 $-2x^2+x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot(-2)\cdot(-3)=-23<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 0이다.

답 0

0610 이차방정식 $9x^2+6x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-9\cdot1=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 1이다.

답 1

0611 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot k=1-k>0$ $\therefore k<1$ 답 $k<1$

0612 $\frac{D}{4}=1-k=0$ $\therefore k=1$ 답 $k=1$

0613 $\frac{D}{4}=1-k<0$ $\therefore k>1$ 답 $k>1$

0614 $x^2-x-4=-2x+2$에서 $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ 답 -3, 2

0615 $2x^2+5x+3=x+1$에서 $x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$ 답 -1

0616 $-3x^2-2x+4=x-2$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 답 -2, 1

0617 $x^2+4x+3=2x-1$, 즉 $x^2+2x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot4=-3<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

0618 $-x^2-2x+1=-x-4$, 즉 $x^2+x-5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-5)=21>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0619 $-x^2-3x+6=x+10$, 즉 $x^2+4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot4=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.) 답 한 점에서 만난다.(접한다.)

0620 $2x^2-5x+1=-3x-2$, 즉 $2x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot3=-5<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

0621 $x^2+x+5=3x+k$, 즉 $x^2-2x+5-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(5-k)=k-4>0$

$\therefore k>4$ 답 $k>4$

0622 $\frac{D}{4}=k-4=0$ $\therefore k=4$ 답 $k=4$

0623 $\frac{D}{4}=k-4<0$ $\therefore k<4$ 답 $k<4$

0624 $y=3x^2+6x-2=3(x+1)^2-5$

따라서 $x=-1$에서 최솟값 -5를 갖는다. 답 최솟값: -5

0625 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+5=-\frac{1}{2}(x+2)^2+7$

따라서 $x=-2$에서 최댓값 7을 갖는다. 답 최댓값: 7

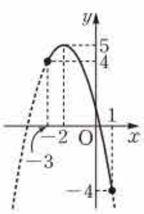
0626 답 1, 1, 5, 1, 2, 5, 1

0627 $f(x)=-x^2-4x+1$

$=-(x+2)^2+5$

$-3\le x\le1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때

꼭짓점의 x좌표가 -2이므로 이 범위에 속한다.



$f(-3)=4$, $f(-2)=5$, $f(1)=-4$

이므로 $f(x)$의 최댓값은 5, 최솟값은 -4이다.

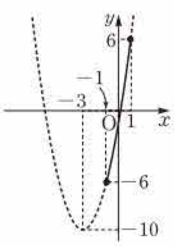
답 최댓값: 5, 최솟값: -4

0628 $f(x)=x^2+6x-1$

$=(x+3)^2-10$

$-1\le x\le1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때

꼭짓점의 x좌표가 -3이므로 이 범위에 속하지 않는다.



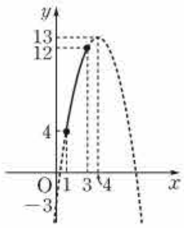
$f(-1)=-6$, $f(1)=6$

이므로 $f(x)$의 최댓값은 6, 최솟값은 -6이다.

답 최댓값: 6, 최솟값: -6

0629 $f(x)=-x^2+8x-3$
$=-(x-4)^2+13$
$1\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때

꼭짓점의 x좌표가 4이므로 이 범위에 속하지 않는다.

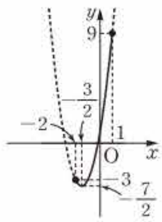


$f(1)=4,\ f(3)=12$
이므로 $f(x)$의 최댓값은 12, 최솟값은 4이다.

답 최댓값: 12, 최솟값: 4

0630 $f(x)=2x^2+6x+1$
$=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{7}{2}$
$-2\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때

꼭짓점의 x좌표가 $-\dfrac{3}{2}$이므로 이 범위에 속한다.



$f(-2)=-3,\ f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{7}{2},\ f(1)=9$
이므로 $f(x)$의 최댓값은 9, 최솟값은 $-\dfrac{7}{2}$이다.

답 최댓값: 9, 최솟값: $-\dfrac{7}{2}$

0631 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$1+3=-\dfrac{a}{2},\ 1\cdot3=\dfrac{b}{2}$
$\therefore a=-8,\ b=6$
$\therefore b-a=14$

답 14

0632 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근의 합이 3, 곱이 -4이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$3=-a,\ -4=b$
$\therefore a=-3,\ b=-4$
$\therefore ab=12$

답 ④

0633 이차방정식 $3x^2-9x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\dfrac{-9}{3}=3,\ \alpha\beta=-\dfrac{4}{3}$
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=3^3-3\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)\cdot3$
$=39$

답 ⑤

0634 이차방정식 $x^2-ax+4a=0$의 두 근이 2, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$2+b=a,\ 2\cdot b=4a$
$\therefore a-b=2,\ 2a-b=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-2,\ b=-4$ ➊
이차함수 $y=x^2-bx+6a$, 즉 $y=x^2+4x-12$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+4x-12=0$의 근이므로
$(x+6)(x-2)=0 \quad \therefore x=-6$ 또는 $x=2$ ➋
따라서 두 점 $(-6,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 사이의 거리는
$2-(-6)=8$ ➌

답 8

채점 기준	비율
➊ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ 이차함수 $y=x^2-bx+6a$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
➌ x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	10 %

0635 이차함수 $y=x^2+kx-2$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표를 α, β라 하면 이차방정식 $x^2+kx-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=-2$ …… ㉠
이때 두 교점 사이의 거리가 3이므로
$|\alpha-\beta|=3$
양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=9$
$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $k^2+8=9,\quad k^2=1$
$\therefore k=1\ (\because k>0)$

답 1

다른 풀이 이차함수 $y=x^2+kx-2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 α, $\alpha+3$이라 하면 이차방정식 $x^2+kx-2=0$의 두 근이 α, $\alpha+3$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+3)=-k$ …… ㉠
$\alpha(\alpha+3)=-2$ …… ㉡
㉡에서 $\alpha^2+3\alpha+2=0,\quad (\alpha+1)(\alpha+2)=0$
$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=-2$ …… ㉢
㉢을 ㉠에 대입하여 풀면 $k=-1$ 또는 $k=1$
$\therefore k=1\ (\because k>0)$

0636 이차방정식 $x^2+2kx+k^2-3k+9=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=k^2-(k^2-3k+9)>0$
$3k-9>0 \quad \therefore k>3$
따라서 정수 k의 최솟값은 4이다.

답 ④

0637 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-k\ge0$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만난다.
➡ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D\ge0$

$\therefore k\le4$
따라서 실수 k의 최댓값은 4이다.

답 4

0638 이차방정식 $x^2+kx+k-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-4(k-1)=0$
$k^2-4k+4=0,\quad (k-2)^2=0$
$\therefore k=2$
따라서 $x^2+2x+1=0$에서 $(x+1)^2=0$
$\therefore x=-1$
즉 접점의 x좌표는 -1이다.

답 ②

0639 이차방정식 $x^2-2kx+k+6=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\dfrac{D_1}{4}=(-k)^2-(k+6)=0$

$k^2-k-6=0, \quad (k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

또 이차방정식 $-2x^2+x+k-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot(-2)\cdot(k-1)<0$

$8k-7<0 \quad \therefore k<\frac{7}{8}$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $\quad k=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 이차함수 $y=x^2-2kx+k+6$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차함수 $y=-2x^2+x+k-1$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0640 이차방정식 $x^2+2(a-k)x+k^2+4k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-k)^2-(k^2+4k+b)=0$

$a^2-2ak+k^2-k^2-4k-b=0$

$\therefore (-2a-4)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a-4=0, \ a^2-b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2, \ b=4$

$\therefore ab=-8$

답 ①

0641 이차방정식 $2x^2+ax+3=2x+b$, 즉 $2x^2+(a-2)x+3-b=0$의 두 근이 -1, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=-\frac{a-2}{2}, \ -1\cdot2=\frac{3-b}{2}$

$a-2=-2, \ 3-b=-4 \quad \therefore a=0, \ b=7$

$\therefore b-a=7$

답 ①

0642 이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 두 교점의 x좌표가 -2, 2이므로 이차방정식 $-x^2+ax+b=x+2$, 즉 $x^2+(1-a)x+2-b=0$의 두 근이 -2, 2이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+2=-(1-a), \ -2\cdot2=2-b$

$\therefore a=1, \ b=6$

$\therefore ab=6$

답 6

0643 이차방정식 $2x^2-x-1=3x+k$, 즉 $2x^2-4x-1-k=0$의 한 근이 3이므로

$18-12-1-k=0 \quad \therefore k=5$ ⋯ ❶

$2x^2-4x-6=0$에서 $\quad x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$ ⋯ ❷

$x=-1$을 $y=3x+5$에 대입하면 $\quad y=2$

따라서 점 B의 좌표는 $\quad (-1, 2)$ ⋯ ❸

답 $(-1, 2)$

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %

0644 이차방정식 $x^2-4x+5=ax+b$, 즉 $x^2-(4+a)x+5-b=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $3+2\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $3-2\sqrt{2}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=4+a,$

$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=5-b$

이므로

$6=4+a, \ 1=5-b \quad \therefore a=2, \ b=4$

$\therefore a+b=6$

답 ③

0645 이차방정식 $x^2-ax+3=2x-4$, 즉 $x^2-(a+2)x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+2, \ \alpha\beta=7$ ⋯⋯ ㉠

한편 $|\alpha-\beta|=6$이므로 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=36$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad (a+2)^2-4\cdot7=36$

$a^2+4a-60=0, \quad (a+10)(a-6)=0$

$\therefore a=6 \ (\because a>0)$

답 6

0646 이차방정식 $x^2+kx+3=-x+2$, 즉 $x^2+(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4=0$

$k^2+2k-3=0, \quad (k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=1 \ (\because k>0)$

답 1

0647 이차방정식 $2x^2+(m-3)x+m-1=mx$, 즉 $2x^2-3x+m-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(m-1)>0$

$17-8m>0 \quad \therefore m<\frac{17}{8}$

따라서 정수 m의 최댓값은 2이다.

답 ②

0648 이차방정식 $kx^2+2kx+1=x-k$, 즉 $kx^2+(2k-1)x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4k(k+1)<0$

$-8k+1<0 \quad \therefore k>\frac{1}{8}$

$\therefore a=\frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

0649 이차방정식 $x^2-2kx+k^2=2x+1$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-1)\geq0$ ⋯ ❶

$2k+2\ge 0 \qquad \therefore k\ge -1$ ⋯ ❷

따라서 실수 k의 최솟값은 -1이다. ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 이차함수의 그래프와 직선이 적어도 한 점에서 만나기 위한 조건을 구할 수 있다.	60 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0650 조건 (가)에서 이차방정식 $x^2+kx+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=k^2-4k=0, \qquad k(k-4)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=4$ ⋯⋯ ㉠

조건 (나)에서 이차방정식 $x^2+kx+k=(k+1)x$, 즉 $x^2-x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4k>0, \qquad 1-4k>0$

$\therefore k<\frac{1}{4}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad k=0$

답 ③

0651 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+k$라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-4x+3=2x+k$, 즉 $x^2-6x+3-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(3-k)=0$

$6+k=0 \qquad \therefore k=-6$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=2x-6$

답 $y=2x-6$

0652 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-3x+5$에 평행하므로

$a=-3$ ← 서로 평행한 두 직선의 기울기는 같다.

직선 $y=-3x+b$가 이차함수 $y=x^2-7x+2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-7x+2=-3x+b$, 즉 $x^2-4x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(2-b)=0$

$2+b=0 \qquad \therefore b=-2$

$\therefore ab=6$

답 ④

참고 두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$이 평행하면 $a=a'$, $b\neq b'$이다.

0653 점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-1)+2$라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=2x^2-x+1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $2x^2-x+1=a(x-1)+2$, 즉 $2x^2-(1+a)x+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(1+a)\}^2-4\cdot 2\cdot(a-1)=0$

$a^2-6a+9=0, \qquad (a-3)^2=0$

$\therefore a=3$

따라서 직선의 방정식은 $y=3(x-1)+2=3x-1$이므로 구하는 y절편은 -1이다.

답 -1

0654 점 $(2, 4)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-2)+4$라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=-2x^2+7x-4$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-2x^2+7x-4=a(x-2)+4$, 즉 $2x^2+(a-7)x-2a+8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-7)^2-4\cdot 2\cdot(-2a+8)=0$

$a^2+2a-15=0, \qquad (a+5)(a-3)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=3$

따라서 두 직선의 기울기는 -5, 3이므로 구하는 곱은

$-5\cdot 3=-15$

답 ②

0655 $y=-3x^2+18x+k-7=-3(x-3)^2+k+20$

이므로 $x=3$에서 최댓값 $k+20$을 갖는다.

즉 $k+20=6$이므로

$k=-14$

답 ①

0656 $y=x^2+ax-8$의 그래프가 점 $(1, -3)$을 지나므로

$-3=1+a-8 \qquad \therefore a=4$ ⋯ ❶

따라서 $y=x^2+4x-8=(x+2)^2-12$이므로 $x=-2$에서 최솟값 -12를 갖는다. ⋯ ❷

답 -12

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 함수의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0657 이차함수 $y=-2x^2-ax+3$이 $x=-1$에서 최댓값 b를 가지므로

$-2x^2-ax+3=-2(x+1)^2+b$

$=-2x^2-4x-2+b$

따라서 $-a=-4$, $3=-2+b$이므로

$a=4, \ b=5$

$\therefore a+b=9$

답 9

라쎈 특강

이차함수가 $x=p$에서 최댓값 또는 최솟값을 가지면 이 그래프의 축의 방정식은 $x=p$이고 꼭짓점의 x좌표는 p이다.
따라서 $x=p$에서 최댓값 또는 최솟값 q를 갖는 이차함수의 식은 $y=a(x-p)^2+q$이다.

0658 $y=-2x^2+8x+6+2k=-2(x-2)^2+14+2k$

이므로 $x=2$에서 최댓값 $14+2k$를 갖는다.

또

$y=(x+3)(x-5)-k$

$=x^2-2x-15-k$

$=(x-1)^2-16-k$

이므로 $x=1$에서 최솟값 $-16-k$를 갖는다.

따라서 $14+2k=-16-k$이므로 $\qquad 3k=-30$

$\therefore k=-10$

답 -10

0659 $y=-x^2-2ax+6a-4=-(x+a)^2+a^2+6a-4$

이므로 $x=-a$에서 최댓값 a^2+6a-4를 갖는다.

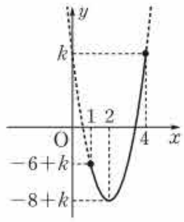
따라서

$m=a^2+6a-4=(a+3)^2-13$

이므로 m은 $a=-3$에서 최솟값 -13을 갖는다. 답 ③

0660 $f(x)=2x^2-8x+k$

$=2(x-2)^2-8+k$



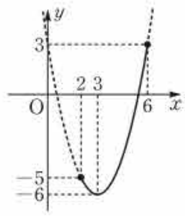
이므로 $1\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=4$에서 최댓값 k를 가지므로

$k=4$ 답 ②

0661 $f(x)=x^2-6x+3$

$=(x-3)^2-6$



이므로 $2\le x\le 6$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

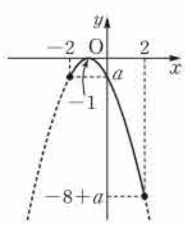
따라서 $x=6$에서 최댓값 3을 갖고, $x=3$에서 최솟값 -6을 가지므로

$M=3,\ m=-6$

$\therefore Mm=-18$ 답 ①

0662 $f(x)=-x^2-2x+a$

$=-(x+1)^2+1+a$



이므로 $-2\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=2$에서 최솟값 $-8+a$를 가지므로

$-8+a=-9$

$\therefore a=-1$ ··· ❶

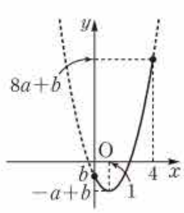
즉 $f(x)=-(x+1)^2$이므로 $x=-1$에서 최댓값 0을 갖는다. ··· ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0663 $y=ax^2-2ax+b$

$=a(x-1)^2-a+b$



이므로 $0\le x\le 4$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

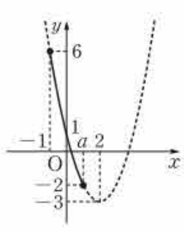
따라서 $x=4$에서 최댓값 $8a+b$를 갖고, $x=1$에서 최솟값 $-a+b$를 가지므로

$8a+b=7,\ -a+b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1$

$\therefore a+b=0$ 답 ③

0664 $f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$이라 하면 $f(2)=-3$이므로



$-1<\underline{a<2}$ $a\ge 2$이면 최솟값이 -3이다.

따라서 $x=a$에서 최솟값 -2를 가지므로

$a^2-4a+1=-2,\quad a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1\ (\because -1<a<2)$ 답 1

0665 $x^2-2x=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2-1\ge -1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+4t-3=(t+2)^2-7\ (t\ge -1)$

따라서 $t=-1$에서 최솟값 -6을 갖는다. 답 -6

0666 $2x-1=t$로 놓으면 $x=1$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=7$이므로 $1\le t\le 7$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+5=(t-2)^2+1\ (1\le t\le 7)$

따라서 $t=2$에서 최솟값 1, $t=7$에서 최댓값 26을 가지므로 구하는 합은

$26+1=27$ 답 ④

0667 $x^2+2x-1=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2-2\ge -2$ ··· ❶

이때 주어진 함수는

$y=-2t^2+6(\underline{t+1})+k$ ··· ❷ $x^2+2x-1=t$이므로 $x^2+2x=t+1$

$=-2t^2+6t+6+k$

$=-2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{21}{2}+k\ (t\ge -2)$

따라서 $t=\frac{3}{2}$에서 최댓값 $\frac{21}{2}+k$를 가지므로

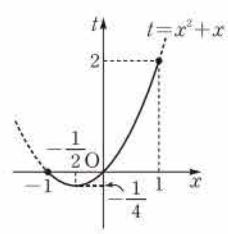
$\frac{21}{2}+k=10\qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$ ··· ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $x^2+2x-1=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ y를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0668 $x^2+x=t$로 놓으면

$t=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$



$-1\le x\le 1$이므로 오른쪽 그림에서

$-\frac{1}{4}\le t\le 2$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\le t\le 2\right)$

따라서 $t=2$에서 최댓값 3, $t=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{3}{4}$을 가지므로

$M=3,\ m=\frac{3}{4}$

$\therefore Mm=\frac{9}{4}$ 답 ④

0669 $2x-y=8$에서 $y=2x-8$

$\therefore xy=x(2x-8)=2x^2-8x=2(x-2)^2-8$

이때 $0\le x\le 5$이므로 $x=5$일 때 최댓값은 10, $x=2$일 때 최솟값은 -8이다.

따라서 구하는 합은 $10+(-8)=2$ 답 ①

0670 $x+y=2$에서 $\quad y=2-x$

$\therefore \underline{2x+y^2}=2x+(2-x)^2$ $x=2-y$를 대입하여 $2(2-y)+y^2$에서 최솟값을 구해도 된다.

$=x^2-2x+4$

$=(x-1)^2+3$

따라서 $x=1$일 때 최솟값은 3이다. 답 3

0671 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $3x+y-4=0$ 위의 점이므로

$3a+b-4=0 \quad \therefore b=4-3a$

$\therefore a^2+b^2=a^2+(4-3a)^2$

$=10a^2-24a+16$

$=10\left(a-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{8}{5}$

따라서 $a=\frac{6}{5}$일 때 최솟값은 $\frac{8}{5}$이다. 답 $\frac{8}{5}$

0672 $x-y^2=1$에서 $\quad y^2=x-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

y가 실수이므로 $\quad y^2=x-1\geq 0 \quad \therefore x\geq 1$

㉠을 x^2+4y^2에 대입하면

$x^2+4(x-1)=x^2+4x-4$

$=(x+2)^2-8$

이때 $x\geq 1$이므로 $x=1$일 때 최솟값은 1이다. 답 ④

0673 $y=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$이므로 이 이차함수의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

점 A의 좌표를 $(a,\ -a^2+8a)\ (0<\underline{a<4})$라 하면 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 4이므로 $a<4$

$\mathrm{D}(8-a,\ -a^2+8a)$

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=8-2a,\ \overline{\mathrm{AB}}=-a^2+8a$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(8-2a-a^2+8a)=-2a^2+12a+16$

$=-2(a-3)^2+34$

이때 $0<a<4$이므로 $a=3$일 때 최댓값은 34이다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 34이다.

답 ③

다른 풀이 점 C의 좌표를 $(b,\ 0)\ (4<b<8)$이라 하면

$\mathrm{B}(8-b,\ 0),\ \mathrm{D}(b,\ -b^2+8b)$

$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=2b-8,\ \overline{\mathrm{CD}}=-b^2+8b$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(2b-8-b^2+8b)=-2b^2+20b-16$

$=-2(b-5)^2+34$

이때 $4<b<8$이므로 $b=5$일 때 최댓값은 34이다.

0674 $y=-5t^2+40t$

$=-5(t-4)^2+80$

따라서 $t=4$일 때 최댓값은 80이므로 구하는 높이는 80 m이다.

답 80 m

0675 부채꼴의 반지름의 길이를 x cm라 하면 호의 길이는

$(28-2x)$ cm

이때 반지름의 길이와 호의 길이는 양수이므로

$0<x<14$ $x>0,\ 28-2x>0$이므로 $0<x<14$

부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}x(28-2x)=-x^2+14x$

$=-(x-7)^2+49$

이때 $0<x<14$이므로 $x=7$일 때 최댓값은 49이다.

따라서 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는 7 cm이다.

답 ②

참고 반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}rl$

0676 쿠키 한 개의 가격이 $(1000-x)$원일 때 하루 판매량은 $(200+x)$개이므로 하루 판매액은

$(1000-x)(200+x)=-x^2+800x+200000$

$=-(x-400)^2+360000$

따라서 $x=400$일 때 하루 판매액이 최대이므로 이때의 쿠키 한 개의 가격은

$1000-400=600$(원) 답 600원

0677 두 점 P, Q는 각각 $\mathrm{P}(t,\ 2t^2+3),\ \mathrm{Q}(t,\ -(t-3)^2+3)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2t^2+3-\{-(t-3)^2+3\}$

$=2t^2+3-(-t^2+6t-6)$

$=3t^2-6t+9$ ··· ❶

한편 $\overline{\mathrm{AB}}=3$이고 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 $\underline{\text{사각형 PAQB의 넓이는}}$ $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}$

$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3t^2-6t+9)=\frac{9}{2}(t^2-2t+3)$ ··· ❷

$=\frac{9}{2}(t-1)^2+9$

이때 $0<t<3$이므로 $t=1$일 때 최솟값은 9이다.

따라서 사각형 PAQB의 넓이의 최솟값은 9이다. ··· ❸

답 9

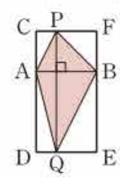
채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 사각형 PAQB의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 사각형 PAQB의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

참고 오른쪽 직사각형 CDEF에서

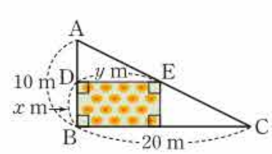
$\square\mathrm{PAQB}=\frac{1}{2}\square\mathrm{CDEF}$

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CF}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}$

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}$



0678 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BD}}=x$ m, $\overline{\mathrm{DE}}=y$ m라 하면



$\underline{\triangle\mathrm{ADE}\backsim\triangle\mathrm{ABC}}$ (AA 닮음)이므로 ∠A는 공통, ∠ADE=∠ABC=90°

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{BC}}$

즉 $(10-x):10=y:20$이므로

$y=20-2x$

이때 변의 길이는 양수이므로

$20-2x>0 \quad \therefore 0<x<10$

꽃밭의 넓이는

$$xy=x(20-2x)$$
$$=-2x^2+20x$$
$$=-2(x-5)^2+50$$

이때 $0<x<10$이므로 $x=5$일 때 최댓값은 50이다.

따라서 꽃밭의 최대 넓이는 $50\ \text{m}^2$이다. 답 ③

0679 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근과 같음을 이용한다.

풀이 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, 1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3+1=-\frac{a}{3},\ -3\cdot 1=\frac{b}{3}$$

$\therefore a=6,\ b=-9$

$\therefore ab=-54$ 답 ②

다른 풀이 $y=3x^2+ax+b=3(x+3)(x-1)=3x^2+6x-9$이므로 $a=6,\ b=-9$

0680 전략 이차방정식 $f(x+2)=0$의 두 근을 α, β에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

즉 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(x+2)=0$이려면

$x+2=\alpha$ 또는 $x+2=\beta$

$\therefore x=\alpha-2$ 또는 $x=\beta-2$

따라서 이차방정식 $f(x+2)=0$의 두 근의 합은

$(\alpha-2)+(\beta-2)=\alpha+\beta-4=5-4=1$ 답 1

0681 전략 꼭짓점의 좌표를 이용하여 이차함수의 식을 나타낸 후 이차함수의 그래프가 축에 대하여 대칭임을 이용하여 x축과의 교점의 x좌표를 구한다.

풀이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -1)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2-1$이라 하면

$$y=ax^2+bx+c$$
$$=a(x-1)^2-1$$
$$=ax^2-2ax+a-1$$

이 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 $\overline{\text{PQ}}=6$이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 -2, 4이다. $1-\frac{6}{2}=-2,\ 1+\frac{6}{2}=4$

즉 이차방정식 $ax^2-2ax+a-1=0$의 두 근이 -2, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2\cdot 4=\frac{a-1}{a},\quad 9a-1=0\quad \therefore a=\frac{1}{9}$$

따라서 $y=\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{8}{9}$이므로

$$b=-\frac{2}{9},\ c=-\frac{8}{9}$$

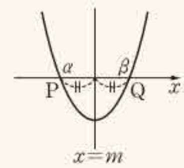
$$\therefore a-b-3c=\frac{1}{9}-\left(-\frac{2}{9}\right)-3\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)=3$$ 답 ⑤

라쎈 특강

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 이 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표가 $\text{P}(\alpha,\ 0)$, $\text{Q}(\beta,\ 0)$ $(\alpha<\beta)$이면

$$\alpha=m-\frac{\overline{\text{PQ}}}{2},\ \beta=m+\frac{\overline{\text{PQ}}}{2}$$

이다.



0682 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2(a+1)x+a^2-a+7=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a^2-a+7)<0$$

$a^2+2a+1-a^2+a-7<0$

$3a-6<0 \quad \therefore a<2$

따라서 자연수 a는 1의 1개이다. 답 1

0683 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같음을 이용한다.

풀이 곡선 $y=2x^2-5x+a$와 직선 $y=x+12$의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 이차방정식 $2x^2-5x+a=x+12$, 즉 $2x^2-6x+a-12=0$의 두 근이 α, β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=\frac{a-12}{2}$$

이때 $\alpha\beta=-4$이므로

$$\frac{a-12}{2}=-4,\quad a-12=-8$$

$\therefore a=4$ 답 ②

0684 전략 두 점 A, B의 x좌표가 이차방정식 $ax^2=x+6$의 두 근임을 이용하여 α, β에 대한 식을 세운다.

풀이 이차방정식 $ax^2=x+6$, 즉 $ax^2-x-6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{1}{a},\ \alpha\beta=-\frac{6}{a}$$

이때 $\text{A}(\alpha,\ \alpha+6)$, $\text{B}(\beta,\ \beta+6)$이므로

$$\overline{\text{BC}}=(\beta+6)-(\alpha+6)=\beta-\alpha=\frac{7}{2}$$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{6}{a}\right),\quad \left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{24}{a}-\frac{49}{4}=0$$

$49a^2-96a-4=0,\quad (49a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

따라서 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=-\frac{6}{2}=-3$이므로

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot(-3)=\frac{25}{4}$$ 답 ②

0685 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있거나 항상 아래쪽에 있으려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=2x^2+2x+a$의 그래프가 직선 $y=-2x+1$보다 항상 위쪽에 있으면 교점이 존재하지 않는다.

이차방정식 $2x^2+2x+a=-2x+1$, 즉 $2x^2+4x+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-2(a-1)<0, \qquad 6-2a<0 \qquad \therefore a>3$$

따라서 정수 a의 최솟값은 4이다. 답 4

0686 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-4kx+4k^2+k=2ax+b$, 즉 $x^2-2(2k+a)x+4k^2+k-b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(2k+a)\}^2-(4k^2+k-b)=0$$

$$4k^2+4ak+a^2-4k^2-k+b=0$$

$$\therefore (4a-1)k+a^2+b=0$$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4a-1=0,\ a^2+b=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{16}$$

$$\therefore a+b=\frac{3}{16}$$

답 ②

0687 전략 직선의 방정식을 $y=-x+m$이라 하고 이차함수의 식과 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식이 0임을 이용한다.

풀이 기울기가 -1인 직선의 방정식을 $y=-x+m$이라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=-2x^2+x+1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-2x^2+x+1=-x+m$, 즉 $2x^2-2x+m-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2(m-1)=0$$

$$3-2m=0 \qquad \therefore m=\frac{3}{2}$$

따라서 직선의 방정식은 $y=-x+\frac{3}{2}$이므로 y절편은 $\frac{3}{2}$이다.

답 $\frac{3}{2}$

0688 전략 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 최솟값을 구한다.

풀이 ① 최솟값은 4이다.

② 최솟값은 1이다.

③ $y=\frac{2}{5}x^2+4x+1=\frac{2}{5}(x+5)^2-9$이므로 최솟값은 -9이다.

④ $y=x^2+4x+6=(x+2)^2+2$이므로 최솟값은 2이다.

⑤ $y=2x^2-8x+2=2(x-2)^2-6$이므로 최솟값은 -6이다.

따라서 최솟값이 가장 작은 것은 ③이다. 답 ③

0689 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 각각 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한 후 최솟값, 최댓값을 구한다.

풀이 $f(x)=ax^2+4ax+b$

$\quad\quad =a(x+2)^2-4a+b$

에서 최솟값이 -7이므로 $a>0$이고 $\quad -4a+b=-7$

$a<0$이면 최솟값이 존재하지 않는다.

$\therefore 4a-b=7$ ...... ㉠

$g(x)=-x^2+4x+2a+b$

$\quad\quad =-(x-2)^2+2a+b+4$

에서 최댓값이 3이므로 $\quad 2a+b+4=3$

$\therefore 2a+b=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-3$

$\therefore a-b=4$ 답 4

라쎈 특강

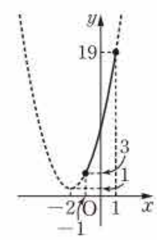
x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수는 x^2의 계수가 양수이면 최솟값만 갖고, 음수이면 최댓값만 갖는다.

0690 전략 먼저 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 $|x|\le 1$에 속하는지 확인한다.

풀이 $|x|\le 1$에서 $\quad -1\le x\le 1$

$y=2x^2+8x+9=2(x+2)^2+1$이므로

$-1\le x\le 1$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=1$에서 최댓값 19를 갖는다.

답 ④

0691 전략 $x-2\ge 0$인 경우와 $x-2<0$인 경우로 나눈 후 이차함수의 식을 $f(x)\times f(|x-2|)=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 (i) $-1\le x<2$일 때,

$$f(x)\times f(|x-2|)=f(x)\times \underbrace{f(-x+2)}_{(-x+2)-3\,=\,-x-1}$$

$$=(x-3)(-x-1)$$

$$=-x^2+2x+3$$

$$=-(x-1)^2+4$$

따라서 $x=1$에서 최댓값 4, $x=-1$에서 최솟값 0을 갖는다.

(ii) $2\le x\le 5$일 때,

$$f(x)\times f(|x-2|)=f(x)\times \underbrace{f(x-2)}_{(x-2)-3\,=\,x-5}$$

$$=(x-3)(x-5)$$

$$=x^2-8x+15$$

$$=(x-4)^2-1$$

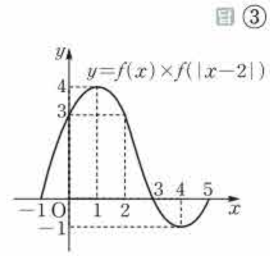
따라서 $x=2$에서 최댓값 3, $x=4$에서 최솟값 -1을 갖는다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)\times f(|x-2|)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$$4+(-1)=3$$

답 ③

참고 $-1\le x\le 5$에서 $y=f(x)\times f(|x-2|)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



라쎈 특강

이 문제에서 함수 $f(x)$와 함수 $f(|x-2|)$의 최댓값, 최솟값을 각각 구하여 함수 $f(x)\times f(|x-2|)$의 최댓값과 최솟값을 구하지 않도록 주의한다. $f(x)$와 $f(|x-2|)$는 x의 값에 따라 함숫값이 동시에 변하는 함수이다.

0692 전략 이차함수의 식을 $f(x)=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한 후 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다.

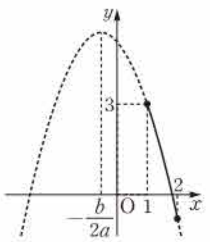
풀이 이차함수

$$f(x)=ax^2+bx+5=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+5$$

에서 꼭짓점의 x좌표는 $\quad x=-\frac{b}{2a}$

이때 $a<0$, $b<0$에서 $-\frac{b}{2a}<0$이므로

$1\le x\le 2$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=1$에서 최댓값 3을 가지므로

$a+b+5=3$

$\therefore a+b=-2$

한편 a, b는 음의 정수이므로

$a=-1$, $b=-1$

따라서 $f(x)=-x^2-x+5$이므로

$f(-2)=-4+2+5=3$ 답 3

0693 전략 주어진 등식을 이용하여 이차식을 한 문자에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x+y=1$에서 $\quad y=1-x$

$$\begin{aligned}\therefore x^2+2y^2&=x^2+2(1-x)^2\\&=3x^2-4x+2\\&=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 $x=\frac{2}{3}$일 때 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다. 답 ②

0694 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+bx+3=-x+a$, 즉

$x^2+(b+1)x+3-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(b+1)^2-4(3-a)=0$

$b^2+2b+1-12+4a=0$

$4a=-b^2-2b+11$

$\therefore a=-\frac{1}{4}(b+1)^2+3$

따라서 $b=-1$일 때 a의 최댓값은 3이다. 답 ③

0695 전략 $2\le x\le 5$일 때 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $y=-30x^2+240x=-30(x-4)^2+480$

이때 $2\le x\le 5$이므로 $x=4$일 때 최댓값은 480, $x=2$일 때 최솟값은 360이다.

따라서 판매 수익의 최댓값은 480만 원, 최솟값은 360만 원이므로 그 합은

$480+360=840$(만 원) 답 840만 원

0696 전략 피타고라스 정리를 이용하여 각 변의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 2이므로

$\overline{AP}=\sqrt{3}$ ← 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\overline{PQ}=x$이므로 $\quad \overline{AQ}^2=(\sqrt{3}-x)^2$

한편 $\overline{BP}=\frac{1}{2}\overline{BC}=1$, $\angle APB=90°$이므로 $\triangle QBP$에서 피타고라스 정리에 의하여

← 정삼각형의 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선의 발은 밑변을 이등분한다.

$\overline{BQ}^2=1^2+x^2$

같은 방법으로 $\triangle QPC$에서 $\overline{CQ}^2=1+x^2$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2&=(\sqrt{3}-x)^2+2(1+x^2)\\&=3x^2-2\sqrt{3}x+5\\&=3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+4\end{aligned}$$

이때 $0<x<\sqrt{3}$이므로 $\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2$은 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 최솟값 4를 갖는다.

즉 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $m=4$이므로 $\quad \frac{m}{a}=4\cdot\frac{3}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ 답 ③

0697 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D의 부호를 조사하여 구한다.

풀이 이차방정식 $-x^2+6x-9=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=3^2-(-1)\cdot(-9)=0$

이므로 이 이차방정식은 중근을 갖는다.

즉 함수 $y=-x^2+6x-9$의 그래프와 x축의 교점은 1개이므로

$m=1$ ⋯ ❶

이차방정식 $2x^2-7x+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-7)^2-4\cdot2\cdot4=17>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉 함수 $y=2x^2-7x+4$의 그래프와 x축의 교점은 2개이므로

$n=2$ ⋯ ❷

$\therefore m+n=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0698 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $2x^2-x=-5x+k$, 즉 $2x^2+4x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2\cdot(-k)=0 \quad \therefore k=-2$ ⋯ ❶

따라서 $2x^2+4x+2=0$에서

$2(x+1)^2=0 \qquad \therefore x=-1$ ⋯ ❷

$x=-1$을 $y=-5x-2$에 대입하면 $\quad y=3$

즉 접점의 좌표는 $(-1, 3)$이므로

$a=-1, b=3$

$\therefore b-a=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0699 전략 $x^2+2x+2=t$로 놓고 t의 값의 범위에 주의하여 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낸다.

풀이 $x^2+2x+2=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2+1\geq1$

이때 주어진 함수는

$$\begin{aligned} y&=-t^2+2t+3 \\ &=-(t-1)^2+4\,(t\geq1) \end{aligned}$$

따라서 $t=1$에서 최댓값 4를 갖는다. ⋯ ❶

$t=1$에서 $\quad x^2+2x+2=1, \quad x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0 \qquad \therefore x=-1$ ⋯ ❷

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로

$ab=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 함수가 최댓값을 가질 때의 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0700 전략 새로운 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 구하여 직사각형의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 새로운 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각

$(12-x)$ cm, $(8+x)$ cm ⋯ ❶

이때 변의 길이는 양수이므로

$0<x<12$ ⋯ ❷

새로운 직사각형의 넓이는

$$\begin{aligned} (12-x)(8+x)&=-x^2+4x+96 \\ &=-(x-2)^2+100 \end{aligned}$$ ⋯ ❸

이때 $0<x<12$이므로 $x=2$일 때 최댓값은 100이다.

따라서 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값은 100 cm^2이다. ⋯ ❹

답 100 cm^2

채점 기준	비율
❶ 새로운 직사각형의 가로, 세로의 길이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	10 %
❸ 새로운 직사각형의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❹ 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

06 여러 가지 방정식

0701 $x^3-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

0702 $x^3-2x^2-3x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2-2x-3)=0, \qquad x(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

답 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

0703 $x^4+8x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^3+8)=0, \qquad x(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

답 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

0704 $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면

$P(1)=1-2-5+6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x)&=(x-1)(x^2-x-6) \\ &=(x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

답 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

라쎈 특강

다항식 $P(x)$의 계수와 상수항이 모두 정수일 때, $P(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은

$$\pm\frac{(P(x)\text{의 상수항의 약수})}{(P(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수})}$$

중에서 찾을 수 있다.

0705 $P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$이라 하면

$P(1)=1-1-7+1+6=0$,

$P(-1)=1+1-7-1+6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \\ & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(x)&=(x-1)(x+1)(x^2-x-6) \\ &=(x-1)(x+1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

답 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

0706 $P(x)=x^4+3x^3-6x^2-14x+12$라 하면

$P(2)=16+24-24-28+12=0$,

$P(-3)=81-81-54+42+12=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 3 & -6 & -14 & 12 \\ & & 2 & 10 & 8 & -12 \\ \hline -3 & 1 & 5 & 4 & -6 & \boxed{0} \\ & & -3 & -6 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x+3)(x^2+2x-2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x+3)(x^2+2x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}$

답 $x=-3$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}$

0707 답 (가) X^2-X-2 (나) $X-2$ (다) 2 (라) 1 (마) ±1

0708 $x^2-1=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+X-6=0$, $(X+3)(X-2)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=2$

(i) $X=-3$일 때, $x^2-1=-3$, 즉 $x^2=-2$에서

$x=\pm\sqrt{2}i$

(ii) $X=2$일 때, $x^2-1=2$, 즉 $x^2=3$에서

$x=\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

답 $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

0709 $x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$6X^2+X-1=0$, $(2X+1)(3X-1)=0$

$\therefore X=-\frac{1}{2}$ 또는 $X=\frac{1}{3}$

(i) $X=-\frac{1}{2}$일 때, $x^2+x=-\frac{1}{2}$, 즉 $2x^2+2x+1=0$에서

$x=\frac{-1\pm i}{2}$

(ii) $X=\frac{1}{3}$일 때, $x^2+x=\frac{1}{3}$, 즉 $3x^2+3x-1=0$에서

$x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

(i), (ii)에서 $x=\frac{-1\pm i}{2}$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

답 $x=\frac{-1\pm i}{2}$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

0710 답 (가) $X-4$ (나) 4 (다) ±2

0711 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-8X-9=0$, $(X+1)(X-9)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=9$

따라서 $x^2=-1$ 또는 $x^2=9$이므로

$x=\pm i$ 또는 $x=\pm3$

답 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm3$

0712 답 (가) 1 (나) 2 (다) x^2-2x-1 (라) $1\pm\sqrt{2}$

0713 $x^4+5x^2+9=0$에서 $(x^4+6x^2+9)-x^2=0$

$(x^2+3)^2-x^2=0$, $(x^2+x+3)(x^2-x+3)=0$

$\therefore x^2+x+3=0$ 또는 $x^2-x+3=0$

따라서 구하는 해는

$x=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

답 $x=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

0714 답 (가) 3 (나) 3 (다) 1 (라) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

0715 $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

주어진 방정식에 $x=0$을 대입하면 (좌변)$=1$이므로 $x\neq0$

$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X-6=0$, $(X+6)(X-1)=0$

$\therefore X=-6$ 또는 $X=1$

(i) $X=-6$일 때, $x+\frac{1}{x}=-6$에서

$x^2+6x+1=0$ $\therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서

$x^2-x+1=0$ $\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 $x=-3\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=-3\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

0716 답 $\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=7$

0717 답 $\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{2}$

0718 답 $\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{5}{3}$, $\alpha\beta\gamma=0$

0719 답 $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5$, $\alpha\beta\gamma=\frac{9}{2}$

0720 (4) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=-9$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{-9}=\frac{1}{3}$

답 (1) 5 (2) -3 (3) -9 (4) $\frac{1}{3}$

0721 x^3의 계수가 1이고 근이 1, 2, 4인 삼차방정식은

$x^3-(1+2+4)x^2+(1\cdot2+2\cdot4+4\cdot1)x-1\cdot2\cdot4=0$

$\therefore x^3-7x^2+14x-8=0$ 　　답 $x^3-7x^2+14x-8=0$

0722 x^3의 계수가 1이고 근이 -2, 3, 5인 삼차방정식은

$x^3-(-2+3+5)x^2+\{(-2)\cdot3+3\cdot5+5\cdot(-2)\}x$
$-(-2)\cdot3\cdot5=0$

$\therefore x^3-6x^2-x+30=0$ 　　답 $x^3-6x^2-x+30=0$

0723 x^3의 계수가 1이고 근이 -1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$인 삼차방정식은

$x^3-\{-1+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\}x^2$
$+\{(-1)\cdot(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\cdot(-1)\}x$
$-(-1)\cdot(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^3-3x^2-3x+1=0$ 　　답 $x^3-3x^2-3x+1=0$

0724 x^3의 계수가 1이고 근이 3, $2i$, $-2i$인 삼차방정식은

$x^3-\{3+2i+(-2i)\}x^2+\{3\cdot2i+2i\cdot(-2i)+(-2i)\cdot3\}x$
$-3\cdot2i\cdot(-2i)=0$

$\therefore x^3-3x^2+4x-12=0$ 　　답 $x^3-3x^2+4x-12=0$

0725 x^3의 계수가 1이고 근이 2, $1+i$, $1-i$인 삼차방정식은

$x^3-\{2+(1+i)+(1-i)\}x^2$
$+\{2(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot2\}x$
$-2(1+i)(1-i)=0$

$\therefore x^3-4x^2+6x-4=0$ 　　답 $x^3-4x^2+6x-4=0$

0726 계수가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로 $1-\sqrt{3}$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 -2, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\cdot(-2)=a$,
$-2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-b$

$\therefore a=-6,\ b=-4$ 　　답 $a=-6,\ b=-4$

0727 계수가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1-i$이므로 $1+i$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 1, $1-i$, $1+i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(1-i)+(1+i)=a$,
$1\cdot(1-i)(1+i)=-b$

$\therefore a=3,\ b=-2$ 　　답 $a=3,\ b=-2$

0728 (1) 계수가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $2-\sqrt{5}$이므로 $2+\sqrt{5}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})=-1$ 　　$\therefore \alpha=-5$

따라서 나머지 두 근은 -5, $2+\sqrt{5}$이다.

(2) 주어진 방정식의 세 근이 -5, $2-\sqrt{5}$, $2+\sqrt{5}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-5(2-\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})\cdot(-5)=a$,
$-5(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=-b$

$\therefore a=-21,\ b=-5$

답 (1) -5, $2+\sqrt{5}$ (2) $a=-21,\ b=-5$

0729 (1) 계수가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $3+i$이므로 $3-i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha(3+i)(3-i)=-10$ 　　$\therefore \alpha=-1$

따라서 나머지 두 근은 -1, $3-i$이다.

(2) 주어진 방정식의 세 근이 -1, $3+i$, $3-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+(3+i)+(3-i)=-a$,
$-1\cdot(3+i)+(3+i)(3-i)+(3-i)\cdot(-1)=b$

$\therefore a=-5,\ b=4$

답 (1) -1, $3-i$ (2) $a=-5,\ b=4$

0730 $x^3=1$에서 　$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 　$\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^2+\omega=-1$ 　　답 -1

0731 $\omega^5+\omega^4+\omega^3=\omega^3(\omega^2+\omega+1)=1\cdot0=0$ 　　답 0

0732 $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$ 　　답 -1

0733 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+\overline{\omega}+\omega\overline{\omega}=0$ 　　답 0

0734 $x^3=-1$에서 　$x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 　$\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \omega^2-\omega=-1$ 　　답 -1

0735 $\omega^5-\omega^4+\omega^3=\omega^3(\omega^2-\omega+1)=-1\cdot0=0$ 　　답 0

0736 $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{\omega}{\omega}=1$ 　　답 1

0737 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+\overline{\omega}-\omega\overline{\omega}=0$ 　　답 0

0738 $x+y=1$에서 $\quad y=1-x \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(1-x)^2=5, \quad 2x^2-2x-4=0$

$x^2-x-2=0, \quad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 답 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

0739 $2x+y=3$에서 $\quad y=3-2x \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 $y^2-x^2=24$에 대입하면

$(3-2x)^2-x^2=24, \quad 3x^2-12x-15=0$

$x^2-4x-5=0, \quad (x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=5$

$x=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-7$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-7 \end{cases}$ 답 $\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-7 \end{cases}$

0740 $x-y=6$에서 $\quad y=x-6 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 $x^2+xy+y^2=12$에 대입하면

$x^2+x(x-6)+(x-6)^2=12, \quad 3x^2-18x+24=0$

$x^2-6x+8=0, \quad (x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-4$

$x=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-2$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 답 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

0741 $x^2+xy-2y^2=0$에서

$(x+2y)(x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하면

$8y^2+y^2=9, \quad 9y^2=9, \quad y^2=1$

$\therefore y=\pm1, x=\mp2$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하면

$2y^2+y^2=9, \quad 3y^2=9, \quad y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3}, x=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

답 풀이 참조

0742 $x^2-2xy-3y^2=0$에서

$(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 $x^2-xy=18$에 대입하면

$y^2+y^2=18, \quad 2y^2=18, \quad y^2=9$

$\therefore y=\pm3, x=\mp3$ (복호동순)

(ii) $x=3y$를 $x^2-xy=18$에 대입하면

$9y^2-3y^2=18, \quad 6y^2=18, \quad y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3}, x=\pm3\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

답 풀이 참조

0743 $x^2-y^2=0$에서 $\quad (x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-y$를 $x^2+5xy-2y^2=24$에 대입하면

$y^2-5y^2-2y^2=24, \quad -6y^2=24, \quad y^2=-4$

$\therefore y=\pm2i, x=\mp2i$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 $x^2+5xy-2y^2=24$에 대입하면

$y^2+5y^2-2y^2=24, \quad 4y^2=24, \quad y^2=6$

$\therefore y=\pm\sqrt{6}, x=\pm\sqrt{6}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2i \\ y=2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2i \\ y=-2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$

답 풀이 참조

0744 x, y는 이차방정식 $t^2-4t-12=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-6)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=6$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$ 답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$

0745 $x-xy+y=1$에서 $x+y=-2$이므로

$xy=-3$

즉 x, y는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 답 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

0746 $x^3-x^2-4x+4=0$에서

$x^2(x-1)-4(x-1)=0, \quad (x-1)(x^2-4)=0$

$(x-1)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 가장 큰 근은 2, 가장 작은 근은 -2이므로

$\alpha=2, \beta=-2 \quad \therefore \alpha-\beta=4$ 답 4

0747 $P(x)=x^3+x^2+2x-4$라 하면

$P(1)=1+1+2-4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+2x+4)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 주어진 방정식의 허근인 것은 ①이다. 답 ①

0748 $P(x)=x^4-3x^3-x^2+5x+2$라 하면

$P(-1)=1+3-1-5+2=0$,

$P(2)=16-24-4+10+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & -1 & 5 & 2 \\ & & -1 & 4 & -3 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore$ $P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)$

즉 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)=0$ ··· ❶

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$ ··· ❷

따라서 모든 실근의 합은

$-1+2+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 실근의 합을 구할 수 있다.	20 %

0749 $P(x)=x^4-4x+3$이라 하면

$P(1)=1-4+3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ & & 1 & 1 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

— $Q(x)=x^3+x^2+x-3$으로 놓으면 $Q(1)=0$

$\therefore$ $P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)^2(x^2+2x+3)=0$

이때 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+2x+3=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

└ 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot3=-2<0$

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

$\therefore$ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-2)^3-3\cdot3\cdot(-2)=10$

답 ⑤

0750 $P(x)=x^3+(k-2)x^2-4k$라 하면

$P(2)=8+4(k-2)-4k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & k-2 & 0 & -4k \\ & & 2 & 2k & 4k \\ \hline & 1 & k & 2k & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-2)(x^2+kx+2k)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2+kx+2k)=0$

이때 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+kx+2k=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$

$\alpha+\beta=-3$이므로 $-k=-3$

$\therefore$ $k=3$

답 3

0751 $x^2+3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+1)(X-3)=5$, $X^2-2X-8=0$

$(X+2)(X-4)=0$ $\therefore$ $X=-2$ 또는 $X=4$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+3x+2=0$에서

$(x+2)(x+1)=0$ $\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=4$일 때, $x^2+3x-4=0$에서

$(x+4)(x-1)=0$ $\therefore$ $x=-4$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서

$x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore$ $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|$

$=|-4|+|-2|+|-1|+|1|=8$

답 ④

0752 $x^2-2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+X-12=0$, $(X+4)(X-3)=0$

$\therefore$ $X=-4$ 또는 $X=3$

(i) $X=-4$일 때, $x^2-2x+4=0$에서

$x=1\pm\sqrt{3}i$

(ii) $X=3$일 때, $x^2-2x-3=0$에서

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서

$x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 주어진 방정식의 근인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0753 $x^2+4x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+2)^2-2X-19=0$, $X^2+2X-15=0$

$(X+5)(X-3)=0$ $\therefore$ $X=-5$ 또는 $X=3$

(i) $X=-5$일 때,

$x^2+4x+5=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=2^2-1\cdot5=-1<0$

즉 방정식 $x^2+4x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=3$일 때,

$x^2+4x-3=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=2^2-1\cdot(-3)=7>0$

즉 방정식 $x^2+4x-3=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2+4x-3=0$의 근이고, 두 허근은 방정식 $x^2+4x+5=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-4$, $b=5$

$\therefore$ $a-b=-9$

답 -9

0754 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$에서

$\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+15=0$ 상수항의 합이 같아지도록 짝을 짓는다.

$(x^2+6x)(x^2+6x+8)+15=0$

$x^2+6x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X(X+8)+15=0$ ⋯ ❶

$X^2+8X+15=0,\quad (X+5)(X+3)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=-3$

(i) $X=-5$일 때, $x^2+6x+5=0$에서

$(x+5)(x+1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=-3$일 때, $x^2+6x+3=0$에서

$x=-3\pm\sqrt{6}$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 α, β의 값은 -5, -1이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-5)^2+(-1)^2=26$ ⋯ ❸

답 26

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 한 문자에 대한 이차방정식으로 변형할 수 있다.	40 %
❷ 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0755 $x^4-14x^2+25=0$에서

$(x^4-10x^2+25)-4x^2=0,\quad (x^2-5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)=0$

$\therefore x^2+2x-5=0$ 또는 $x^2-2x-5=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

따라서 주어진 방정식의 양수인 근은 $-1+\sqrt{6}$, $1+\sqrt{6}$이므로 구하는 합은

$(-1+\sqrt{6})+(1+\sqrt{6})=2\sqrt{6}$

답 ⑤

0756 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+3X-4=0,\quad (X+4)(X-1)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=1$

즉 $x^2=-4$ 또는 $x^2=1$이므로

$x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm 1$

따라서 주어진 방정식의 실근은 1, -1이므로 모든 실근의 곱은

$1\cdot(-1)=-1$

답 -1

0757 $x^4-x^2+16=0$에서

$(x^4+8x^2+16)-9x^2=0,\quad (x^2+4)^2-(3x)^2=0$

$\therefore (x^2+3x+4)(x^2-3x+4)=0$ ⋯ ❶

방정식 $x^2+3x+4=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=4,\ \gamma+\delta=3,\ \gamma\delta=4$ ⋯ ❷

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\\&=(-3)^2-2\cdot4+3^2-2\cdot4\\&=2\end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ $x^2+3x+4=0$, $x^2-3x+4=0$에서 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0758 방정식 $x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x+6+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\quad x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X+4=0,\quad (X+4)(X+1)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=-1$

(i) $X=-4$일 때, $x+\frac{1}{x}=-4$에서

$x^2+4x+1=0\quad \therefore x=-2\pm\sqrt{3}$

판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=2^2-1=3>0$이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=-1$일 때, $x+\frac{1}{x}=-1$에서

$x^2+x+1=0\quad \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$(-2+\sqrt{3})+(-2-\sqrt{3})=-4$

답 ③

0759 방정식 $x^4-4x^3+2x^2-4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-4x+2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\quad x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-4X=0,\quad X(X-4)=0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=4$

(i) $X=0$일 때, $x+\frac{1}{x}=0$에서

$x^2+1=0,\quad x^2=-1\quad \therefore x=\pm i$

(ii) $X=4$일 때, $x+\frac{1}{x}=4$에서

$x^2-4x+1=0\quad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근의 합은

$a=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

두 허근의 곱은 $\quad b=i\cdot(-i)=1$

$\therefore a+b=5$

답 5

0760 방정식 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\quad x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+2X-3=0,\quad (X+3)(X-1)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=1$ ⋯ ❶

06 여러 가지 방정식

(i) $X=-3$일 때, $x+\frac{1}{x}=-3$에서

$$x^2+3x+1=0$$

이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=3^2-4\cdot1\cdot1=5>0$$

즉 방정식 $x^2+3x+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ⋯ ❷

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서

$$x^2-x+1=0$$

이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$$

즉 방정식 $x^2-x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. ⋯ ❸

(i), (ii)에서 α는 방정식 $x^2+3x+1=0$의 한 실근이므로

$$\alpha^2+3\alpha+1=0$$

$$\therefore \alpha^2+3\alpha=-1$$ ⋯ ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}=X$로 놓고 X에 대한 이차방정식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷ $X=-3$일 때, 근을 판별할 수 있다.	20 %
❸ $X=1$일 때, 근을 판별할 수 있다.	20 %
❹ $\alpha^2+3\alpha$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0761 $2x^3+kx^2+(k-2)x+2=0$의 한 근이 1이므로

$$2+k+(k-2)+2=0$$

$$2+2k=0 \qquad \therefore k=-1$$

즉 주어진 방정식은

$$2x^3-x^2-3x+2=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ & & 2 & 1 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(2x^2+x-2)=0$$

이때 α, β는 방정식 $2x^2+x-2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{2}$$

답 ④

0762 $x^3+ax^2+bx+10=0$의 한 근이 $\sqrt{2}$이므로

$$(\sqrt{2})^3+a(\sqrt{2})^2+b\sqrt{2}+10=0$$

$$2\sqrt{2}+2a+b\sqrt{2}+10=0$$

$$(2a+10)+(2+b)\sqrt{2}=0$$

이때 a, b가 유리수이므로 $\quad 2a+10=0,\ 2+b=0$

따라서 $a=-5$, $b=-2$이므로

$$a+b=-7$$

답 -7

라쎈 특강

a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때,

$a+b\sqrt{m}=0 \rightarrow a=0,\ b=0$

0763 방정식 $3x^3-ax^2+x+b=0$의 두 근이 -1, 2이므로

$-3-a-1+b=0$에서 $\quad a-b=-4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$24-4a+2+b=0$에서 $\quad 4a-b=26 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=10,\ b=14$$

즉 주어진 방정식은 $3x^3-10x^2+x+14=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -10 & 1 & 14 \\ & & -3 & 13 & -14 \\ \hline 2 & 3 & -13 & 14 & 0 \\ & & 6 & -14 & \\ \hline & 3 & -7 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore (x+1)(x-2)(3x-7)=0$$

따라서 나머지 한 근은 $\frac{7}{3}$이므로 $\quad \alpha=\frac{7}{3}$

$$\therefore \frac{ab}{\alpha}=10\cdot14\cdot\frac{3}{7}=60$$

답 ③

0764 방정식 $x^4+ax^3+5x^2-ax+b=0$의 두 근이 2, 3이므로

$16+8a+20-2a+b=0$에서 $\quad 6a+b=-36 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$81+27a+45-3a+b=0$에서 $\quad 24a+b=-126 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-5,\ b=-6$$ ⋯ ❶

즉 주어진 방정식은 $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & 2 & -6 & -2 & 6 \\ \hline 3 & 1 & -3 & -1 & 3 & 0 \\ & & 3 & 0 & -3 & \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore (x-2)(x-3)(x^2-1)=0$$ ⋯ ❷

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 방정식 $x^2-1=0$의 근이므로

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$ ⋯ ❸

답 -1, 1

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❸ 나머지 두 근을 구할 수 있다.	20 %

0765 $P(x)=x^3-3x^2+(k-4)x+k$라 하면

$$P(-1)=-1-3-(k-4)+k=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & k-4 & k \\ & & -1 & 4 & -k \\ \hline & 1 & -4 & k & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-4x+k)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+1)(x^2-4x+k)=0$$

이 방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-4x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-k\geq0$$

$$\therefore k\leq4$$

답 ④

0766 $x^3+x^2+kx+k=0$에서

$x^2(x+1)+k(x+1)=0$

$\therefore (x^2+k)(x+1)=0$ ··· ❶

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+k=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\cdot1\cdot k<0 \qquad \therefore k>0$ ··· ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	30 %
❷ 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0767 $P(x)=x^3-(1+3k)x+3k$라 하면

$P(1)=1-(1+3k)+3k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -(1+3k) & 3k \\ & & 1 & 1 & -3k \\ \hline & 1 & 1 & -3k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+x-3k)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+x-3k)=0$

이 방정식이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+x-3k=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때,

$1+1-3k=0 \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$

(ii) 방정식 $x^2+x-3k=0$이 중근을 가질 때,

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-3k)=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{12}$

(i), (ii)에서 모든 k의 값의 합은

$\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{12}$

답 ④

0768 방정식 $(x-2)(x^2-4kx+3k+1)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 $x=2$를 근으로 가질 때,

$4-8k+3k+1=0 \qquad \therefore k=1$

그런데 $k=1$이면 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-4x+4)=0$, 즉 $(x-2)^3=0$

이므로 서로 같은 세 실근을 갖는다.

$\therefore k\neq1$

(ii) 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 중근을 가질 때,

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(3k+1)=0$

$4k^2-3k-1=0, \qquad (4k+1)(k-1)=0$

$\therefore k=-\frac{1}{4}$ 또는 $k=1$

(i), (ii)에서 $\qquad k=-\frac{1}{4}$

답 ②

라쎈 특강

삼차방정식 $(x-2)(x^2-4kx+3k+1)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 2와 2가 아닌 실근을 갖는 경우와 2가 아닌 중근을 갖는 경우의 두 가지가 있다. 그런데 (i)에서 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 2를 근으로 가지면 다른 한 근도 2이므로 주어진 삼차방정식은 서로 같은 세 실근을 갖는다. 따라서 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$은 2가 아닌 중근을 가져야 한다.

0769 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$(x+1)(x+2)\cdot\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x^3$

$2x^3-3x^2-2x=0, \qquad x(2x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

그런데 $x>0$이므로 $\qquad x=2$ 길이는 양수이어야 한다.

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2 cm이다.

답 ①

0770 $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot6^2\cdot9=\pi\cdot r^2\cdot(r-3)$이므로

$r^3-3r^2-108=0$ ··· ❶

$P(r)=r^3-3r^2-108$이라 하면

$P(6)=216-108-108=0$

조립제법을 이용하여 $P(r)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -3 & 0 & -108 \\ & & 6 & 18 & 108 \\ \hline & 1 & 3 & 18 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(r)=(r-6)(r^2+3r+18)$

따라서 방정식은

$(r-6)(r^2+3r+18)=0$

$\therefore r=6$ ($\because r^2+3r+18>0$) ··· ❷

$r^2+3r+18=\left(r+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{63}{4}>0$

답 6

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ r의 값을 구할 수 있다.	60 %

0771 처음 3개의 구의 반지름의 길이를 각각 $(x-1)$ cm, x cm, $(x+1)$ cm라 하면 새로 만든 구의 반지름의 길이는 $(x+2)$ cm이므로

$\frac{4}{3}\pi(x-1)^3+\frac{4}{3}\pi x^3+\frac{4}{3}\pi(x+1)^3=\frac{4}{3}\pi(x+2)^3$

$(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=(x+2)^3$

$\therefore x^3-3x^2-3x-4=0$

$P(x)=x^3-3x^2-3x-4$라 하면

$P(4)=64-48-12-4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -3 & -3 & -4 \\ & & 4 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-4)(x^2+x+1)$

즉 방정식은

$(x-4)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x^2+x+1>0$) $\quad x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

따라서 새로 만든 구의 반지름의 길이는

$4+2=6\ (\mathrm{cm})$ ㉰ ③

0772 $S=18x^2$, $V=4x^3$이므로 $S=V-50$에서

$18x^2=4x^3-50, \qquad 2x^3-9x^2-25=0$

$P(x)=2x^3-9x^2-25$라 하면

$P(5)=250-225-25=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 2 & -9 & 0 & -25 \\ & & 10 & 5 & 25 \\ \hline & 2 & 1 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-5)(2x^2+x+5)$

따라서 방정식은

$(x-5)(2x^2+x+5)=0$

$\therefore x=5\ (\because \underline{2x^2+x+5>0})$ ㉰ ④

$2x^2+x+5=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{8}>0$

0773 삼차방정식 $x^3+2x^2-5x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$, $\alpha\beta\gamma=-3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-2)^2-2\cdot(-5)=14$ ㉰ ④

0774 삼차방정식 $x^3+3x-5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=5$ ··· ❶

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-0+3-5=-1$ ··· ❷

㉰ -1

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

0775 삼차방정식 $x^3-x^2+4x-6=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=6$

$\therefore \dfrac{3}{\alpha}+\dfrac{3}{\beta}+\dfrac{3}{\gamma}=\dfrac{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$

$=\dfrac{3\cdot4}{6}=2$ ㉰ 2

0776 $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}=2$에서

$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2$ ······ ㉠

이때 삼차방정식 $x^3-ax^2+8x+5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha\beta\gamma=-5$

따라서 ㉠에서 $\dfrac{a}{-5}=2$이므로

$a=-10$ ㉰ ①

0777 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근을 α, β, 삼차방정식 $x^3-3x^2+bx-4=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면 이차방정식과 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha+\beta+\gamma=3$

이므로 $\quad \gamma=1$

또 $\alpha\beta=a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=4$이므로

$\underline{a+2=b}$, $a=4$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$에서
$a+\beta+\alpha=b \quad \therefore a+2=b$

$\therefore a=4$, $b=6$

$\therefore a+b=10$ ㉰ 10

다른 풀이 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근이 삼차방정식 $x^3-3x^2+bx-4=0$의 근이므로 x^3-3x^2+bx-4는 x^2-2x+a를 인수로 갖는다. 즉

$x^3-3x^2+bx-4=(x-c)(x^2-2x+a)$

$=x^3-(2+c)x^2+(a+2c)x-ac$ (c는 상수)

라 하면 이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3=2+c$, $b=a+2c$, $4=ac$

$\therefore a=4$, $b=6$, $c=1$

$\therefore a+b=10$

0778 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, $3\alpha\ (\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+3\alpha=12, \qquad 6\alpha=12$

$\therefore \alpha=2$

따라서 세 근이 2, 4, 6이므로

$2\cdot4+4\cdot6+6\cdot2=a$, $2\cdot4\cdot6=-b$

$\therefore a=44$, $b=-48$

$\therefore a+b=-4$ ㉰ ④

0779 주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=3, \qquad 3\alpha=3$

$\therefore \alpha=1$

따라서 세 근이 0, 1, 2이므로 ··· ❶

$0\cdot1+1\cdot2+2\cdot0=a$, $0\cdot1\cdot2=-b$

$\therefore a=2$, $b=0$ ··· ❷

$\therefore a-b=2$ ··· ❸

㉰ 2

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식의 세 근을 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0780 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, $\alpha+1$, β라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)+\beta=1$이므로 $\qquad \beta=-2\alpha$ ······ ㉠

$\alpha(\alpha+1)+(\alpha+1)\beta+\beta\alpha=-10$이므로

$\alpha^2+2\alpha\beta+\alpha+\beta=-10$ ······ ㉡

$\alpha(\alpha+1)\beta=-k$ ······ ㉢

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$3\alpha^2+\alpha-10=0,\quad (\alpha+2)(3\alpha-5)=0$

$\therefore \alpha=-2$ ($\because$ α는 정수)

$\therefore \beta=-2\cdot(-2)=4$

$\alpha=-2$, $\beta=4$를 ㉢에 대입하면 $\quad -k=-2\cdot(-1)\cdot4=8$

$\therefore k=-8$ 답 ③

0781 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{-1}=-2,$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{-1}=-3,$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3+2x^2-3x+1=0$ 답 ④

다른 풀이 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha+1=0$

$\alpha\neq0$이므로 위의 식의 양변을 α^3으로 나누면

$1-\frac{3}{\alpha}+\frac{2}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}=0 \quad \therefore \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-3\left(\frac{1}{\alpha}\right)+1=0$

즉 $\frac{1}{\alpha}$은 삼차방정식 $x^3+2x^2-3x+1=0$의 근이다.

같은 방법으로 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 다른 두 근 β, γ에 대하여 $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$은 삼차방정식 $x^3+2x^2-3x+1=0$의 근이다.

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3+2x^2-3x+1=0$

라쎈 특강

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(d\neq0)$의 세 근이 α, β, γ이면 삼차방정식 $dx^3+cx^2+bx+a=0$의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$이다.

0782 삼차방정식 $x^3-2x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore (\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3=3,$

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$

$=\alpha\beta+\alpha+\beta+1+\beta\gamma+\beta+\gamma+1+\gamma\alpha+\gamma+\alpha+1$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$

$=-2+2\cdot0+3=1,$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=-1+(-2)+0+1=-2$

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-3x^2+x+2=0$ 답 $x^3-3x^2+x+2=0$

0783 삼차방정식 $2x^3-5x^2+4x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-2$

$\therefore \alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta=\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma$

$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=-2\cdot\frac{5}{2}=-5,$

$\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=(-2)^2=4$

따라서 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-2x^2-5x-4=0$ 답 $x^3-2x^2-5x-4=0$

0784 $P(1)=P(2)=P(3)=1$이므로

$P(1)-1=0,\ P(2)-1=0,\ P(3)-1=0$

즉 삼차방정식 $P(x)-1=0$의 세 근이 1, 2, 3이다. ⋯ ❶

1, 2, 3을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+2+3)x^2+(1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1)x-1\cdot2\cdot3=0$

$\therefore x^3-6x^2+11x-6=0$ ⋯ ❷

즉 $P(x)-1=x^3-6x^2+11x-6$이므로

$P(x)=x^3-6x^2+11x-5$ ⋯ ❸

$\therefore P(-1)=-1-6-11-5=-23$ ⋯ ❹

답 -23

채점 기준	비율
❶ 방정식 $P(x)-1=0$의 세 근을 구할 수 있다.	30 %
❷ 1, 2, 3을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $P(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $P(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0785 a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 $1+\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a$ ⋯ ㉠

$\alpha(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+\alpha(1-\sqrt{2})=b$ ⋯ ㉡

$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-2$ ⋯ ㉢

㉢에서 $\quad \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉠, ㉡에 대입하면

$a=-4$, $b=3$

$\therefore ab=-12$ 답 ②

참고 주어진 방정식에 $x=1-\sqrt{2}$를 대입한 후 무리수가 서로 같을 조건을 이용하여 유리수 a, b의 값을 구할 수도 있다.

0786 a가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $3+2\sqrt{2}$이므로 $3-2\sqrt{2}$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 α, $3+2\sqrt{2}$, $3-2\sqrt{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=a,$

$\alpha(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=-2$

앞의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ \alpha=-2$

$\therefore\ a\alpha=-8$ 답 -8

0787 $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)라 하면 방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $2+i$이므로 $2-i$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 -1, $2+i$, $2-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+(2+i)+(2-i)=-a,$

$-1\cdot(2+i)+(2+i)(2-i)+(2-i)\cdot(-1)=b,$

$-1\cdot(2+i)(2-i)=-c$

$\therefore\ a=-3,\ b=1,\ c=5$

따라서 $P(x)=x^3-3x^2+x+5$이므로

$P(1)=1-3+1+5=4$ 답 ①

다른 풀이 방정식 $P(x)=0$의 세 근이 -1, $2+i$, $2-i$이므로

$P(x)=(x+1)(x-2-i)(x-2+i)$

$\therefore\ P(1)=2\cdot(-1-i)\cdot(-1+i)=4$

0788 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $1+\sqrt{5}i$이므로 $1-\sqrt{5}i$도 근이다.
이때 $(1+\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i)\neq 8$이므로 $1+\sqrt{5}i$, $1-\sqrt{5}i$는 이차방정식 $x^2+ax+8=0$의 두 근이 될 수 없다.
이차방정식 $x^2+ax+8=0$의 두 근을 m, n이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=-a,\ mn=8$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(1+\sqrt{5}i)+(1-\sqrt{5}i)+m=2+m$

따라서 $m+n=2+m$이므로

$n=2$

$mn=8$에서 $m=4$ 답 ⑤

0789 조건 (가)에서 $P(x)$는 $x-4$를 인수로 가지므로 4는 방정식 $P(x)=0$의 한 근이다.
조건 (나)에서 방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $6i$이고 계수가 모두 실수이므로 $-6i$도 근이다.
즉 방정식 $P(x)=0$의 세 근이 4, $6i$, $-6i$이므로

$P(x)=(x-4)(x-6i)(x+6i)$ ⋯ ❶

$\therefore\ P(2x)=(2x-4)(2x-6i)(2x+6i)$

$=8(x-2)(x-3i)(x+3i)$

방정식 $P(2x)=0$에서

$8(x-2)(x-3i)(x+3i)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=3i$ 또는 $x=-3i$ ⋯ ❷

따라서 모든 근의 곱은

$2\cdot 3i\cdot(-3i)=18$ ⋯ ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ 삼차식 $P(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 방정식 $P(2x)=0$의 근을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 근의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0790 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.
따라서 $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$이므로

$$\frac{\omega^{10}+1}{\omega^2}=\frac{(\omega^3)^3\cdot\omega+1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}$$

$$=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$$ 답 -1

0791 ㄱ. $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore\ \omega^2+\omega+1=0$

ㄴ, ㄷ. ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

ㄹ. $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2=-\omega-1$이고, $\omega+\overline{\omega}=-1$에서 $\overline{\omega}=-\omega-1$이므로

$\omega^2=\overline{\omega}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

0792 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.
따라서 $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$$\frac{\omega^2}{1-\omega}+\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}+\frac{\omega}{\omega}=0$$ 답 ③

0793 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.
따라서 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$이므로 ⋯ ❶

$\omega^6-\omega^5+\omega^4-\omega^3+\omega^2-\omega+1$

$=(\omega^3)^2-\omega^3(\omega^2-\omega+1)+(\omega^2-\omega+1)$

$=(-1)^2=1$ ⋯ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$임을 알 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

0794 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$$\therefore\ \frac{\omega}{\omega+1}+\frac{\overline{\omega}}{\overline{\omega}+1}+\frac{(2\omega+1)\overline{(2\omega+1)}}{(\omega-1)\overline{(\omega-1)}}$$

$$=\frac{\omega(\overline{\omega}+1)+\overline{\omega}(\omega+1)}{(\omega+1)(\overline{\omega}+1)}+\frac{(2\omega+1)(2\overline{\omega}+1)}{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}$$

$$=\frac{2\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}+\frac{4\omega\overline{\omega}+2(\omega+\overline{\omega})+1}{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}$$

$$=\frac{2\cdot1-1}{1-1+1}+\frac{4\cdot1+2\cdot(-1)+1}{1-(-1)+1}$$

$=1+1=2$ 답 ⑤

0795 $\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-1)^2+y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2(x-1)^2=8, \quad (x-1)^2=4$

$x-1=\pm 2 \quad \therefore x=3$ 또는 $x=-1$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=3, y=2$ 또는 $x=-1, y=-2$

따라서 $\underbrace{\alpha=3, \beta=2}_{\alpha>0,\ \beta>0}$이므로

$\alpha+\beta=5$ 답 ③

0796 $\begin{cases} y=x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=13, \quad x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=2$

이것을 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-3, y=-2$ 또는 $x=2, y=3$

따라서 $\alpha=-3, \beta=-2$ 또는 $\alpha=2, \beta=3$이므로

$\alpha\beta=6$ 답 ②

0797 $x=-1, y=1$을 $\begin{cases} x-y=a \\ x^2-xy+2y^2=b \end{cases}$에 대입하면

$a=-2, b=4$

$\therefore \begin{cases} x-y=-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x+2$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(x+2)+2(x+2)^2=4, \quad x^2+3x+2=0$

$(x+2)(x+1)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

$x=-2$를 ㉢에 대입하면 $y=0$

따라서 나머지 한 근은

$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ 답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$

0798 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3y^2=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $x=1-2y$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(1-2y)^2-3y^2=-2, \quad y^2-4y+3=0$

$(y-1)(y-3)=0 \quad \therefore y=1$ 또는 $y=3$

이것을 ㉢에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$x=-1, y=1$ 또는 $x=-5, y=3$ ··· ❶

(i) $x=-1, y=1$을 $x^2+ay^2=7, -4x+by=8$에 대입하면

$a=6, b=4$

(ii) $x=-5, y=3$을 $x^2+ay^2=7, -4x+by=8$에 대입하면

$a=-2, b=-4$

(i), (ii)에서 a, b는 자연수이므로

$a=6, b=4$ ··· ❷

$\therefore ab=24$ ··· ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ 두 연립방정식의 공통인 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 자연수 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0799 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+2x^2=4, \quad x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}, y=\mp\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=4, \quad x^2=1$

$\therefore x=\pm 1, y=\pm 1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$의 값은 $\alpha=-1, \beta=-1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$-1+(-1)=-2$ 답 -2

0800 $\begin{cases} 4x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-xy+y^2=16 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(2x+y)(2x-y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2+2x^2+4x^2=16, \quad x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}, y=\mp 2\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2-2x^2+4x^2=16, \quad x^2=4$

$\therefore x=\pm 2, y=\pm 4$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (2, 4), (-2, -4)$

답 $(\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (2, 4), (-2, -4)$

0801 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+2y)(x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2-2y^2+y^2=3, \quad y^2=1$

$\therefore y=\pm 1, x=\mp 2$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2+y^2=3, \quad y^2=1$

$\therefore y=\pm 1, x=\pm 1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha\beta$의 값은 -2, 1이다. 답 -2, 1

0802 $\begin{cases} x^2-y^2+x+y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)+(x+y)=0$

$(x+y)(x-y+1)=0 \qquad \therefore y=-x$ 또는 $y=x+1$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=1, \qquad x^2=\frac{1}{4}$

$\therefore x=\pm\frac{1}{2},\ y=\mp\frac{1}{2}$ (복호동순)

(ii) $y=x+1$을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(x+1)+2(x+1)^2=1$

$2x^2+3x+1=0, \qquad (x+1)(2x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

(i), (ii)에서 x, y는 정수이므로

$x=-1,\ y=0$

$\therefore x^2+y^2=1$

답 ①

0803 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=34 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-30=34, \qquad u^2=64$

$\therefore u=\pm 8$

(i) $u=8$, $v=15$, 즉 $x+y=8$, $xy=15$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-5)=0 \qquad \therefore t=3$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

(ii) $u=-8$, $v=15$, 즉 $x+y=-8$, $xy=15$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2+8t+15=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t+5)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=-5$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(-5, -3), (-3, -5), (3, 5), (5, 3)$

답 $(-5, -3), (-3, -5), (3, 5), (5, 3)$

0804 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-4v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x^2-2xy+y^2=(x+y)^2-4xy$

㉠에서 $v=u+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$u^2-4u-5=0, \qquad (u+1)(u-5)=0$

$\therefore u=-1$ 또는 $u=5$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-1,\ v=0$ 또는 $u=5,\ v=6$

(i) $u=-1$, $v=0$, 즉 $x+y=-1$, $xy=0$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2+t=0$의 두 근이므로

$t(t+1)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=-1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

(ii) $u=5$, $v=6$, 즉 $x+y=5$, $xy=6$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 x^2-y^2의 값은 $x=3$, $y=2$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$3^2-2^2=5$

답 ⑤

0805 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2+u-2v=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $v=u^2-1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$u^2-u=0, \qquad u(u-1)=0$

$\therefore u=0$ 또는 $u=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=0,\ v=-1$ 또는 $u=1,\ v=0$

(i) $u=0$, $v=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

(ii) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로

$t(t-1)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $2x+y$의 값은 $x=-1$, $y=1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$2\cdot(-1)+1=-1$

답 ③

0806 $\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=-x+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $x^2+(-x+k)^2=10$

$\therefore 2x^2-2kx+k^2-10=0$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-10)=0$

$k^2-2k^2+20=0, \qquad k^2=20$

$\therefore k=\pm 2\sqrt{5}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$2\sqrt{5}\cdot(-2\sqrt{5})=-20$

답 ②

0807 $\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=5-x$

이것을 ㉡에 대입하면 $x^2-x(5-x)+k=0$

$\therefore 2x^2-5x+k=0$ ··· ❶

이를 만족시키는 실수 x의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\cdot 2\cdot k\geq 0 \qquad \therefore k\leq \frac{25}{8}$ ··· ❷

따라서 자연수 k는 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 연립방정식을 이용하여 x에 대한 이차방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0808 $\begin{cases} 2x-y-7=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-7$

이것을 ㉡에 대입하면 $x^2-2(2x-7)=k$

$\therefore x^2-4x+14-k=0$ ······ ㉢

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(14-k)=0$

$-10+k=0 \qquad \therefore k=10$

$k=10$을 ㉢에 대입하면

$x^2-4x+4=0, \qquad (x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$

$x=2$를 $y=2x-7$에 대입하면

$y=2\cdot 2-7=-3$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-3$이므로

$\alpha-\beta+k=2-(-3)+10=15$

답 15

0809 주어진 연립방정식을 만족시키는 x, y는 이차방정식 $t^2-(2a-1)t+a^2+a+4=0$의 두 근이다.

따라서 이 이차방정식이 실근을 갖지 않아야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a-1)\}^2-4(a^2+a+4)<0$

$-8a-15<0 \qquad \therefore a>-\frac{15}{8}$

따라서 정수 a의 최솟값은 -1이다.

답 ③

0810 처음 땅의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=13^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-2)(y+2)=xy-18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $xy+2x-2y-4=xy-18$

$\therefore y=x+7$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(x+7)^2=169, \qquad x^2+7x-60=0$

$(x+12)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-12$ 또는 $x=5$

그런데 $x>2$이므로 $x=5$

$x=5$를 ㉢에 대입하면 $y=12$

따라서 처음 땅의 넓이는

$xy=5\cdot 12=60\ (\text{m}^2)$

답 60 m^2

0811 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=58 & \cdots\cdots ㉠ \\ (10y+x)+(10x+y)=110 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=10-x$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(10-x)^2=58, \qquad x^2-10x+21=0$

$(x-3)(x-7)=0 \qquad \therefore x=3$ 또는 $x=7$

$x=3$을 ㉢에 대입하면 $y=7$

$x=7$을 ㉢에 대입하면 $y=3$

그런데 $x>y$이므로 $x=7$, $y=3$

따라서 처음 수는 73이다.

답 73

0812 $\overline{PA}=x$, $\overline{PB}=y$라 하면 $\angle APB=90°$이므로 (반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.)

$\begin{cases} x+y=14 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=14-x$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(14-x)^2=100, \qquad x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0 \qquad \therefore x=6$ 또는 $x=8$

$x=6$을 ㉢에 대입하면 $y=8$

$x=8$을 ㉢에 대입하면 $y=6$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$

답 ⑤

0813 마름모의 넓이가 96 cm^2이므로

$\frac{1}{2}ab=96 \qquad \therefore ab=192$ ······ ㉠

또 마름모의 한 변의 길이가 10 cm이고 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^2=10^2 \qquad \therefore a^2+b^2=400$ ······ ㉡

㉡에서 $(a+b)^2-2ab=400$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$(a+b)^2-2\cdot 192=400, \qquad (a+b)^2=784$

$\therefore a+b=28\ (\because a>0,\ b>0)$ ······ ㉢

㉢에서 $b=28-a$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$a(28-a)=192, \qquad a^2-28a+192=0$

$(a-12)(a-16)=0 \qquad \therefore a=12$ 또는 $a=16$

$a=12$를 ㉢에 대입하면 $b=16$

$a=16$을 ㉢에 대입하면 $b=12$

그런데 $a>b$이므로 $a=16$, $b=12$

$\therefore 2a-b=20$

답 ④

0814 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=15^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10(x+1)(y+1)=10xy+220 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases} \quad \cdots ❶$$

㉡에서 $xy+x+y+1=xy+22$

$\therefore y=21-x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(21-x)^2=225,\quad x^2-21x+108=0$

$(x-9)(x-12)=0\quad \therefore x=9$ 또는 $x=12$

$x=9$를 ㉢에 대입하면 $y=12$

$x=12$를 ㉢에 대입하면 $y=9$

그런데 $x>y$이므로

$x=12,\ y=9$ ⋯ ❷

따라서 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이는 12 cm이다. ⋯ ❸

답 12 cm

채점 기준	비율
❶ 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하고 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 구할 수 있다.	10 %

0815 전략 인수 정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$이라 하면

$P(1)=1-5+5+5-6=0,$

$P(-1)=1+5+5-5-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline -1 & 1 & -4 & 1 & 6 & \boxed{0} \\ & & -1 & 5 & -6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$

즉 주어진 방정식은

$(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=3$이므로

$\beta-\alpha=4$

답 ④

0816 전략 인수 정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $P(x)=x^3+x-2$라 하면

$P(1)=1+1-2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+x+2)$

즉 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+x+2)=0$

이때 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+x+2=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=2$

$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(-1)^2-2\cdot 2}{2}=-\dfrac{3}{2}$

답 ③

0817 전략 $f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해한다.

풀이 $f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} a & 1 & -(a+4) & 4a-5 & 5a \\ & & a & -4a & -5a \\ \hline & 1 & -4 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-a)(x^2-4x-5)$

$=(x-a)(x+1)(x-5)$

$f(x)=0$에서

$x=a$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=5$

한편 $f(a+3)=0$에서 $a+3$은 방정식 $f(x)=0$의 근이므로

$a+3=-1$ 또는 $a+3=5$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

따라서 실수 a의 값의 합은

$-4+2=-2$

답 ②

0818 전략 공통부분이 나오도록 묶어서 전개한 후 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $(x^2+2x-8)(x^2+4x-5)=112$에서

$(x+4)(x-2)(x+5)(x-1)=112$

$\{(x+4)(x-1)\}\{(x-2)(x+5)\}=112$

$(x^2+3x-4)(x^2+3x-10)=112$

$x^2+3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-4)(X-10)=112,\quad X^2-14X-72=0$

$(X-18)(X+4)=0$

즉 $(x^2+3x-18)(x^2+3x+4)=0$이므로

$(x+6)(x-3)(x^2+3x+4)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2+3x+4=0$의 한 허근이므로

판별식을 D라 하면 $D=3^2-4\cdot1\cdot4=-7<0$이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$\omega^2+3\omega+4=0$

$\therefore \omega^2+3\omega=-4$

답 -4

0819 전략 이차항을 적당히 분리하여 $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

풀이 $x^4+6x^2+25=0$에서

$(x^4+10x^2+25)-4x^2=0,\quad (x^2+5)^2-(2x)^2=0$

$\therefore (x^2+2x+5)(x^2-2x+5)=0$

방정식 $x^2+2x+5=0$의 두 근을 α, $\overline{\alpha}$, 방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 β, $\overline{\beta}$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\overline{\alpha}=5,\ \beta\overline{\beta}=5$

$\therefore \alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=10$

답 10

0820 전략 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나눈 후 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 치환하여 인수분해한다.

풀이 방정식 $2x^4-x^3-6x^2-x+2=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$2x^2-x-6-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$
$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$
$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$2X^2-X-10=0,\quad (X+2)(2X-5)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=\frac{5}{2}$

(i) $X=-2$일 때, $x+\frac{1}{x}=-2$에서

$x^2+2x+1=0,\quad (x+1)^2=0\quad \therefore x=-1$

(ii) $X=\frac{5}{2}$일 때, $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$에서

$2x^2-5x+2=0,\quad (2x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 양수인 근은 $\frac{1}{2}$, 2이므로 그 합은

$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0821 전략 사차방정식 $P(x)=0$의 두 근이 α, β이면 $P(\alpha)=0$, $P(\beta)=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 방정식의 두 근이 -1, 2이므로

$1+2+a+1+b=0$에서

$a+b=-4$ ······ ㉠

$16-16+4a-2+b=0$에서

$4a+b=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-6$

$\therefore a-b=8$ 답 ⑤

0822 전략 삼차방정식 $P(x)=0$이 중근 k를 가지면 $P(k)=0$이므로 먼저 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^3+ax^2-3x+b$라 하면 $P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 1 & a & -3 & b \\ & & 1 & a+1 & a-2 \\ \hline & 1 & a+1 & a-2 & \boxed{a+b-2} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)\{x^2+(a+1)x+a-2\}$

이때 방정식 $P(x)=0$이 중근 1을 가지므로 방정식 $x^2+(a+1)x+a-2=0$의 한 근이 1이다.

즉 $1+a+1+a-2=0$이므로

$a=0$

또 $P(1)=0$에서 $a+b-2=0$이므로

$b=2$

따라서 $P(x)=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)$이므로 방정식 $P(x)=0$의 나머지 한 근은 $\alpha=-2$이다.

$\therefore \alpha+a-b=-4$ 답 -4

다른 풀이 삼차방정식 $x^3+ax^2-3x+b=0$의 세 근이 1, 1, α이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+1+\alpha=-a,\ 1\cdot1+1\cdot\alpha+\alpha\cdot1=-3,\ 1\cdot1\cdot\alpha=-b$

$\therefore \alpha=-2,\ a=0,\ b=2$

$\therefore \alpha+a-b=-4$

0823 전략 먼저 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하여 근의 조건을 확인한다.

풀이 $P(x)=x^3-(4+a)x^2+5ax-a^2$이라 하면

$P(a)=a^3-4a^2-a^3+5a^2-a^2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|cccc} a & 1 & -4-a & 5a & -a^2 \\ & & a & -4a & a^2 \\ \hline & 1 & -4 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-a)(x^2-4x+a)$

즉 주어진 방정식은

$(x-a)(x^2-4x+a)=0$

이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a>0\quad \therefore a<4$ ······ ㉠

한편 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 $x=a$를 근으로 갖지 않아야 하므로

$a^2-4a+a\neq0,\quad a^2-3a\neq0$

$a(a-3)\neq0\quad \therefore a\neq0,\ a\neq3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 자연수 a는 1, 2의 2개이다. 답 ②

0824 전략 사차방정식을 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=0$ 꼴로 변형한 후 두 이차방정식 $x^2+ax+b=0$, $x^2+cx+d=0$의 판별식을 이용한다.

풀이 $x^2+kx=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+2)(X+6)+3=0,\quad X^2+8X+15=0$

$(X+3)(X+5)=0$

즉 $(x^2+kx+3)(x^2+kx+5)=0$이므로 두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+kx+5=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=k^2-12,\ D_2=k^2-20$

이때 사차방정식 $(x^2+kx+2)(x^2+kx+6)+3=0$이 실근과 허근을 모두 가지려면

$D_1<0,\ D_2\geq0$ 또는 $D_1\geq0,\ D_2<0$

이어야 한다.

(i) $D_1<0,\ D_2\geq0$일 때,

$k^2-12<0,\ k^2-20\geq0$, 즉 $k^2<12,\ k^2\geq20$을 만족시키는 자연수 k는 존재하지 않는다.

(ii) $D_1\geq0,\ D_2<0$일 때,

$k^2-12\geq0,\ k^2-20<0$, 즉 $12\leq k^2<20$을 만족시키는 자연수 k는 4이다.

(i), (ii)에서 $k=4$ 답 4

0825 전략 상자의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 x에 대한 식으로 나타내어 방정식을 세운다.

풀이 상자의 밑면의 가로의 길이는 $(40-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(30-2x)$ cm이므로

$(40-2x)(30-2x)x=3000$

$x(x-20)(x-15)=750$

$\therefore x^3-35x^2+300x-750=0$

$P(x)=x^3-35x^2+300x-750$이라 하면

$P(5)=125-875+1500-750=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -35 & 300 & -750 \\ & & 5 & -150 & 750 \\ \hline & 1 & -30 & 150 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-5)(x^2-30x+150)$

따라서 방정식은

$(x-5)(\underbrace{x^2-30x+150}_{})=0$ $x^2-30x+150=0$의 해는 $x=15\pm5\sqrt{3}$

그런데 x는 자연수이므로

$x=5$ 답 5

0826 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 삼차방정식 $x^3-x^2+4x-3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=3$

$\therefore \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$

$=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}+\dfrac{1-\beta}{\beta}+\dfrac{1-\gamma}{\gamma}$

$=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}-3$

$=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3$

$=\dfrac{4}{3}-3=-\dfrac{5}{3}$ 답 $-\dfrac{5}{3}$

0827 전략 주어진 방정식의 한 근이 1임을 이용하여 먼저 좌변을 인수분해한다.

풀이 주어진 방정식의 한 근이 1이므로 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & k+2 & -k \\ & & 1 & -2 & k \\ \hline & 1 & -2 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)(x^2-2x+k)=0$

이 방정식의 서로 다른 세 실근이 1, α, β이므로 α, β는 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 서로 다른 두 실근이다.

즉 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$ ······ ㉠

$\alpha\beta=k$ ······ ㉡

한편 1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이이고 $\alpha<1<\beta$이므로

$\alpha^2+1=\beta^2$, $\alpha^2-\beta^2=-1$ 빗변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합과 같다.

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-1$, $2(\alpha-\beta)=-1$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \alpha-\beta=-\dfrac{1}{2}$ ······ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=\dfrac{3}{4}$, $\beta=\dfrac{5}{4}$

따라서 ㉡에서 $k=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{15}{16}$

$\therefore 16k=15$ 답 ④

0828 전략 세 수 a, b, c를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$임을 이용한다.

풀이 삼차방정식 $x^3+3x^2-x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=2$

$\therefore (-\alpha)+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=3$,

$(-\alpha)\cdot(-\beta)+(-\beta)\cdot(-\gamma)+(-\gamma)\cdot(-\alpha)$

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$,

$(-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-2$

따라서 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-3x^2-x+2=0$ 답 ②

0829 전략 계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $3i$이면 $-3i$도 근임을 이용한다.

풀이 삼차방정식 $x^3-x^2+kx-k=0$의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $3i$이므로 $-3i$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 $3i$, $-3i$, α이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3i+(-3i)+\alpha=1$

$3i\cdot(-3i)\cdot\alpha=k$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=1$, $k=9$

$\therefore k+\alpha=10$ 답 10

0830 전략 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이면 $\overline{\omega}$도 이 방정식의 허근임을 이용한다.

풀이 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 허근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+\dfrac{1}{\omega}+\overline{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}=(\omega+\overline{\omega})+\left(\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}\right)$

$=(\omega+\overline{\omega})+\dfrac{\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}}$

$=1+\dfrac{1}{1}=2$ 답 2

0831 전략 방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이면 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이용한다.

풀이 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이다. 즉 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$

ㄴ. $\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}=(-1)^2-2\cdot1=-1$

한편 ω, $\overline{\omega}$가 $x^3=1$의 근이므로

$\omega^3=\overline{\omega}^3=1 \qquad \therefore \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

$\therefore \omega^2+\overline{\omega}^2\neq\omega^3+\overline{\omega}^3$

ㄷ. $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{40}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{36}(1+\omega+\omega^2)$
$+(\omega^3)^{13}+(\omega^3)^{13}\cdot\omega$

$=1+\omega$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0832 전략 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입한다.

풀이 $\begin{cases} 2x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2-x-y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-1$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$4x^2-x-(2x-1)^2=5, \qquad 3x=6$

$\therefore x=2$

$x=2$를 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=2,\ y=3$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=3$이므로

$\alpha\beta=6$ 답 ①

0833 전략 두 연립방정식의 서로 같은 해는 네 방정식의 공통인 해임을 이용한다.

풀이 주어진 두 연립방정식의 서로 같은 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+3y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 한 해이다.

㉠에서 $x=5-3y$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(5-3y)^2+y^2=5, \qquad y^2-3y+2=0$

$(y-1)(y-2)=0$

$\therefore y=1$ 또는 $y=2$

이것을 ㉢에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$x=2,\ y=1$ 또는 $x=-1,\ y=2$

(i) $x=2$, $y=1$을 $ax-y=3$, $5x+2y=b$에 대입하여 풀면

$a=2,\ b=12$

(ii) $x=-1$, $y=2$를 $ax-y=3$, $5x+2y=b$에 대입하여 풀면

$a=-5,\ b=-1$

(i), (ii)에서 a, b는 양수이므로

$a=2,\ b=12$

$\therefore ab=24$ 답 ⑤

0834 전략 인수분해가 되는 이차방정식에서 이차식을 두 일차식의 곱으로 인수분해한다.

풀이 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면 $y^2-y^2\neq9$이므로 주어진 방정식을 만족시키지 않는다.

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2-y^2=9, \qquad y^2=3$

$\therefore x=\pm2\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서

$\alpha_1=-2\sqrt{3},\ \beta_1=-\sqrt{3},\ \alpha_2=2\sqrt{3},\ \beta_2=\sqrt{3}\ (\because \alpha_1<\alpha_2)$

$\therefore \beta_1-\beta_2=-2\sqrt{3}$ 답 ①

0835 전략 인수분해가 되는 이차방정식에서 이차식을 두 일차식의 곱으로 인수분해한다.

풀이 $\begin{cases} 3x^2-5xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2xy+4y^2=21 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(3x-2y)(x-y)=0$

$\therefore 3x=2y$ 또는 $x=y$

(i) $3x=2y$를 ㉡에 대입하면

$x^2-3x^2+9x^2=21, \qquad x^2=3$

$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2x^2+4x^2=21, \qquad x^2=7$

$\therefore x=\pm\sqrt{7},\ y=\pm\sqrt{7}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 xy는 $x=\pm\sqrt{7}$, $y=\pm\sqrt{7}$ (복호동순)일 때 최대이므로 구하는 최댓값은 7이다. 답 7

0836 전략 $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 x, y가 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용한다.

풀이 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u+v=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ uv=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x^2y+xy^2=xy(x+y)$
$=uv$

㉠에서 $v=7-u$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$u^2-7u+12=0, \qquad (u-3)(u-4)=0$

$\therefore u=3$ 또는 $u=4$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=3,\ v=4$ 또는 $u=4,\ v=3$

(i) $u=3$, $v=4$, 즉 $x+y=3$, $xy=4$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-3t+4=0$의 두 근이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot4=-7<0$

즉 방정식 $t^2-3t+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $u=4$, $v=3$, 즉 $x+y=4$, $xy=3$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $x>y$이므로

$x=3,\ y=1$

$\therefore x-y=2$ 답 ②

0837 전략 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입하여 이차방정식의 판별식을 이용한다.

풀이 $\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-ky=-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-2x+1$

이것을 ㉡에 대입하면

$x^2-k(-2x+1)=-6$

$\therefore x^2+2kx+6-k=0$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-(6-k)=0,\quad k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0\quad \therefore k=2\ (\because k>0)$

답 ②

0838 전략 인수 정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^3-5x^2+2x+8$이라 하면

$P(-1)=-1-5-2+8=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 2 & 8 \\ & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-6x+8)$

$=(x+1)(x-2)(x-4)$

즉 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x-4)=0$ ··· ❶

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$ ··· ❷

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=2,\ \gamma=4$이므로

$\alpha-\beta+\gamma=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	60 %
❷ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\alpha-\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0839 전략 $x^2=X$로 치환한 후 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$4X^2-17X+4=0,\quad (4X-1)(X-4)=0$

$\therefore X=\dfrac{1}{4}$ 또는 $X=4$ ··· ❶

즉 $x^2=\dfrac{1}{4}$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\pm2$ ··· ❷

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|=\left|\dfrac{1}{2}\right|+\left|-\dfrac{1}{2}\right|+|2|+|-2|$

$=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $x^2=X$로 놓고 X의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\|\alpha\|+\|\beta\|+\|\gamma\|+\|\delta\|$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0840 전략 주어진 방정식의 좌변을 $(x-\alpha)(x^2+px+q)=0$ (α는 실수) 꼴로 인수분해한 후 이차방정식 $x^2+px+q=0$이 두 개의 허근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $P(x)=x^3+(2a+1)x^2+(a^2-2a-2)x-a^2$이라 하면

$P(1)=1+2a+1+a^2-2a-2-a^2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2a+1 & a^2-2a-2 & -a^2 \\ & & 1 & 2a+2 & a^2 \\ \hline & 1 & 2a+2 & a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)\{x^2+2(a+1)x+a^2\}$

즉 주어진 방정식은

$(x-1)\{x^2+2(a+1)x+a^2\}=0$ ··· ❶

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2(a+1)x+a^2=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-a^2<0$

$2a+1<0\quad \therefore a<-\dfrac{1}{2}$ ··· ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ 판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0841 전략 $x,\ y$를 근으로 하는 이차방정식의 판별식을 이용한다.

풀이 $\begin{cases} x+y=2a & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y+xy=a^2-a+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a+xy=a^2-a+6$

$\therefore xy=a^2-3a+6$ ······ ㉢ ··· ❶

㉠, ㉢을 만족시키는 실수 $x,\ y$는 이차방정식 $t^2-2at+a^2-3a+6=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(a^2-3a+6)\ge0$

$3a-6\ge0\quad \therefore a\ge2$ ··· ❷

따라서 실수 a의 최솟값은 2이다. ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ xy를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $x,\ y$를 근으로 하는 이차방정식의 판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0842 전략 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 $x,\ y\ (x<y)$라 하고 연립방정식을 세운다.

풀이 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 $x,\ y\ (x<y)$라 하면

$\begin{cases} 4x+4y=24 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ··· ❶

㉠에서 $y=6-x$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(6-x)^2=20$, $x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=4$

$x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=4$

$x=4$를 ㉢에 대입하면 $y=2$

그런데 $x<y$이므로 $x=2$, $y=4$ ··· ❷

따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 2이다. ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x, y라 하고 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

㉠에서 $4u=24$ $\therefore u=6$

㉡에서 $u^2-2v=20$

$u=6$을 위의 식에 대입하면

$36-2v=20$ $\therefore v=8$

즉 $x+y=6$, $xy=8$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2-6t+8=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-4)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore x=2$, $y=4$ ($\because x<y$)

07 일차부등식

0843 $a>b$의 양변에 2를 더하면

$a+2>b+2$ 답 $>$

0844 $a>b$의 양변에서 1을 빼면

$a-1>b-1$ 답 $>$

0845 $a>b$의 양변에 3을 곱하면

$3a>3b$ 답 $>$

0846 $a>b$의 양변에 -1을 곱하면

$-a<-b$ 답 $<$

0847 $a>b$의 양변을 3으로 나누면

$\frac{a}{3}>\frac{b}{3}$ 답 $>$

0848 $a>b$의 양변을 -2로 나누면

$-\frac{a}{2}<-\frac{b}{2}$ 답 $<$

0849 $x+1>4x-5$에서 $-3x>-6$

$\therefore x<2$ 답 $x<2$

0850 $3(x+2)<x-4$에서 $3x+6<x-4$

$2x<-10$ $\therefore x<-5$ 답 $x<-5$

0851 $-2(x+1)\le 3(x+4)+2x$에서

$-2x-2\le 5x+12$

$-7x\le 14$ $\therefore x\ge -2$ 답 $x\ge -2$

0852 $0.1x-3<-0.2x-1.5$의 양변에 10을 곱하면

$x-30<-2x-15$

$3x<15$ $\therefore x<5$ 답 $x<5$

0853 $\frac{1}{2}x+7\ge 2(x-1)$의 양변에 2를 곱하면

$x+14\ge 4(x-1)$, $x+14\ge 4x-4$

$-3x\ge -18$ $\therefore x\le 6$ 답 $x\le 6$

0854 $\frac{x-2}{3}-\frac{x+3}{4}\ge -2$의 양변에 12를 곱하면

$4(x-2)-3(x+3)\ge -24$

$x-17\ge -24$ $\therefore x\ge -7$ 답 $x\ge -7$

0855 답 $\begin{cases} a>0\text{일 때,} & x>\frac{a+1}{a} \\ a<0\text{일 때,} & x<\frac{a+1}{a} \\ a=0\text{일 때, 해는 없다.} & \end{cases}$

>, <, 없다

0856 $(a-1)x<a$에서

(i) $a>1$일 때, $\quad x<\dfrac{a}{a-1}$

(ii) $a<1$일 때, $\quad x>\dfrac{a}{a-1}$ 부등식의 양변을 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

(iii) $a=1$일 때, $0\cdot x<1$이므로 해는 모든 실수이다.

답 풀이 참조

0857 답 $x>4$

0858 답 $-2\le x\le 0$

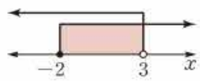
0859 답 $x\le -5$

0860 $x-1\ge -3$에서 $\quad x\ge -2$

$4x<12$에서 $\quad x<3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-2\le x<3$



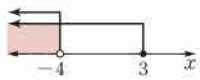
답 $-2\le x<3$

0861 $3x-5\le 4$에서 $\quad 3x\le 9 \quad \therefore x\le 3$

$2x<-8$에서 $\quad x<-4$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x<-4$



답 $x<-4$

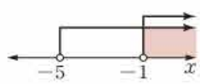
0862 $-x+2<3$에서 $\quad -x<1 \quad \therefore x>-1$

$6x+2>4(x-2)$에서 $\quad 6x+2>4x-8$

$2x>-10 \quad \therefore x>-5$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>-1$



답 $x>-1$

0863 $2(x+1)-1\le 9$에서 $\quad 2x+1\le 9$

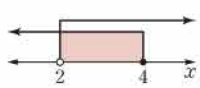
$2x\le 8 \quad \therefore x\le 4$

$3(2-x)<x-2$에서 $\quad 6-3x<x-2$

$-4x<-8 \quad \therefore x>2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$2<x\le 4$



답 $2<x\le 4$

0864 $\dfrac{1}{6}x-\dfrac{7}{2}<-x$의 양변에 6을 곱하면

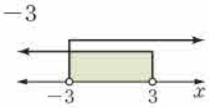
$x-21<-6x, \quad 7x<21 \quad \therefore x<3$

$0.2x-0.1>-0.7$의 양변에 10을 곱하면

$2x-1>-7, \quad 2x>-6 \quad \therefore x>-3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-3<x<3$



답 $-3<x<3$

0865 $0.3x-5\le 0.7(x-2)$의 양변에 10을 곱하면

$3x-50\le 7(x-2), \quad 3x-50\le 7x-14$

$-4x\le 36 \quad \therefore x\ge -9$

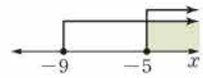
$\dfrac{x-3}{2}\ge\dfrac{x}{5}-3$의 양변에 10을 곱하면

$5(x-3)\ge 2x-30, \quad 5x-15\ge 2x-30$

$3x\ge -15 \quad \therefore x\ge -5$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x\ge -5$



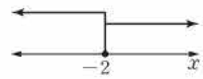
답 $x\ge -5$

0866 $3x+1\ge -5$에서 $\quad 3x\ge -6 \quad \therefore x\ge -2$

$-2x\ge 4$에서 $\quad x\le -2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=-2$



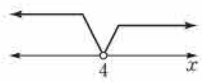
답 $x=-2$

0867 $-x+6<2$에서 $\quad -x<-4 \quad \therefore x>4$

$5x-10<10$에서 $\quad 5x<20$

$\therefore x<4$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.

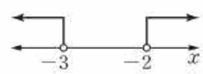


답 해는 없다.

0868 $4x<2x-6$에서 $\quad 2x<-6 \quad \therefore x<-3$

$2x+5>x+3$에서 $\quad x>-2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

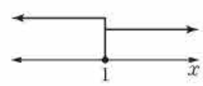
0869 $6x+3\ge 10-x$에서 $\quad 7x\ge 7 \quad \therefore x\ge 1$

$2(x-1)-1\le -x$에서 $\quad 2x-3\le -x$

$3x\le 3 \quad \therefore x\le 1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=1$



답 $x=1$

0870 $5(x-1)+6\le 4x+3$에서 $\quad 5x+1\le 4x+3$

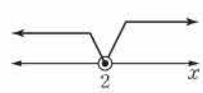
$\therefore x\le 2$

$7(3-x)<-5x+17$에서

$21-7x<-5x+17$

$-2x<-4 \quad \therefore x>2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

0871 답 (가) $2x+1$ (나) -2 (다) -1

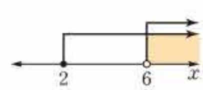
0872 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 2\le 3x-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-4<4x-10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad -3x\le -6 \quad \therefore x\ge 2$

㉡에서 $\quad -x<-6 \quad \therefore x>6$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x>6$



답 $x>6$

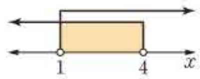
0873 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x-1<2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3<7x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x<4$

㉡에서 $-5x<-5$ $\therefore x>1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$1<x<4$



답 $1<x<4$

0874 답 $-4<x<4$

0875 답 $x\le-5$ 또는 $x\ge5$

0876 $|x-2|<3$에서 $-3<x-2<3$

$\therefore -1<x<5$ 답 $-1<x<5$

0877 $|x+1|>6$에서 $x+1<-6$ 또는 $x+1>6$

$\therefore x<-7$ 또는 $x>5$ 답 $x<-7$ 또는 $x>5$

0878 $|6-5x|\le4$에서 $-4\le6-5x\le4$

$-10\le-5x\le-2$

$\therefore \frac{2}{5}\le x\le2$ 답 $\frac{2}{5}\le x\le2$

0879 $|3x+2|\ge5$에서 $3x+2\le-5$ 또는 $3x+2\ge5$

$3x\le-7$ 또는 $3x\ge3$

$\therefore x\le-\frac{7}{3}$ 또는 $x\ge1$ 답 $x\le-\frac{7}{3}$ 또는 $x\ge1$

0880 답 $-\frac{1}{2}$, 0, 0, 1, 1, $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

0881 ① $a>b$에서 $a+6>b+6$

② $a>b$에서 $-a<-b$ $\therefore 5-a<5-b$

③ $a>b$에서 $3a>3b$ $\therefore 3a-1>3b-1$

④ $a>b$에서 $-\frac{a}{4}<-\frac{b}{4}$ $\therefore -\frac{a}{4}+1<-\frac{b}{4}+1$

⑤ $a=1$, $b=-1$이면 $a>b$이지만 $\frac{3}{a}>\frac{3}{b}$이다.

답 ②

0882 ㄱ. $a<b$, $c>0$이므로 $ac<bc$

$c<d$, $b>0$이므로 $bc<bd$

$\therefore ac<bd$

ㄴ. $b<c$에서 $b-a<c-a$

ㄷ. $a=1$, $b=-2$이면 $a>b$이지만 $a^2<b^2$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0883 ㄱ. $b<0$이므로 $a<b$의 양변을 b로 나누면 $\frac{a}{b}>1$

ㄴ. $a<b$이므로 $a-b<0$

$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$이므로

$(a-b)(a^2+ab+b^2)<0$

$a^3-b^3<0$ $\therefore a^3<b^3$

ㄷ. $|a|>|b|$이므로 $a^2>b^2$

$ab>0$이므로 $a^2>b^2$의 양변을 ab로 나누면 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

다른 풀이 ㄷ. $a<0$이므로 $a<b$의 양변을 a로 나누면 $1>\frac{b}{a}$

ㄱ에서 $\frac{a}{b}>1$이므로 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$

0884 부등식 $ax\le b$의 해가 $x\le1$이므로

$a>0$, $\frac{b}{a}=1$ $\therefore b=a$

이것을 $ax\le a-2b$에 대입하면

$ax\le a-2a$, $ax\le-a$

$a>0$이므로 $x\le-1$ 답 ②

0885 $ax+2b>bx+2a$에서 $(a-b)x>2(a-b)$

이때 $a<b$, 즉 $a-b<0$이므로

$x<2$ 답 $x<2$

0886 부등식 $(a+1)x-(a-b)\ge0$, 즉 $(a+1)x\ge a-b$의 해가 $x\le-3$이므로

$a+1<0$, $\frac{a-b}{a+1}=-3$ 부등식 $(a+1)x\ge a-b$의 부등호의 방향과 해 $x\le-3$의 부등호의 방향이 반대이므로 x의 계수는 음수이다. ⋯ ❶

$\therefore 4a-b=-3$

이것을 $(4a-b)x\ge9$에 대입하면

$-3x\ge9$ $\therefore x\le-3$ ⋯ ❷

답 $x\le-3$

채점 기준	비율
❶ $4a-b=-3$임을 알 수 있다.	70 %
❷ $(4a-b)x\ge9$의 해를 구할 수 있다.	30 %

참고 $(a+1)x\ge a-b$에서

(i) $a+1>0$이면 $x\ge\frac{a-b}{a+1}$

(ii) $a+1=0$이면 $0\cdot x\ge-1-b$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해가 $x\le-3$이 될 수 없다.

0887 $a^2x-a\le x$에서 $(a^2-1)x\le a$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$a^2-1=0$, $a<0$

$\therefore a=-1$ 답 ②

0888 $ax-2>b+x$에서 $(a-1)x>b+2$

이 부등식의 해가 모든 실수이려면

$a-1=0$, $b+2<0$

$\therefore a=1$, $b<-2$ ⋯ ❶

이때 정수 b의 최댓값은 -3이므로 $a+b$의 최댓값은

$1+(-3)=-2$ ⋯ ❷

답 -2

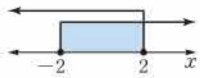
채점 기준	비율
❶ a의 값과 b의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %
❷ $a+b$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0889 $2x-3\le 4x+1$에서 $\quad -2x\le 4 \quad \therefore x\ge -2$

$-x+6\ge 3x-2$에서 $\quad -4x\ge -8 \quad \therefore x\le 2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-2\le x\le 2$



즉 $a=-2$, $b=2$이므로

$b-a=4$

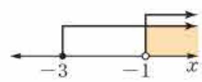
답 ④

0890 $4x-1>3x-2$에서 $\quad x>-1$

$3x+7\ge x+1$에서 $\quad 2x\ge -6 \quad \therefore x\ge -3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>-1$



이므로 정수 x의 최솟값은 0이다.

답 0

0891 $5(x+1)\ge 1+2(x-4)$에서 $\quad 5x+5\ge 2x-7$

$3x\ge -12 \quad \therefore x\ge -4$

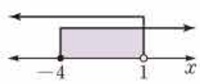
$\dfrac{x+1}{2}<\dfrac{4-x}{3}$에서 $\quad 3(x+1)<2(4-x)$

양변에 분모의 최소공배수인 6을 곱한다.

$3x+3<8-2x, \quad 5x<5 \quad \therefore x<1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-4\le x<1$



이므로 x의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0892 $0.3x-0.5<\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{5}$에서 $\quad 3x-5<5x+2$

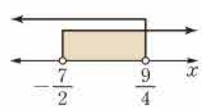
$-2x<7 \quad \therefore x>-\dfrac{7}{2}$

$\dfrac{1}{3}x-\dfrac{7}{4}<-1$에서 $\quad 4x-21<-12$

$4x<9 \quad \therefore x<\dfrac{9}{4}$ ··· ❶

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{9}{4}$ ··· ❷



이므로 정수 x는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$의 6개이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0893 $2x+6\le -x-9$에서 $\quad 3x\le -15$

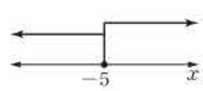
$\therefore x\le -5$

$3(2x+3)\ge 4(x-2)+7$에서 $\quad 6x+9\ge 4x-1$

$2x\ge -10 \quad \therefore x\ge -5$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=-5$

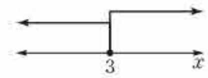


답 ②

0894 ① $4x-7\le 5$에서 $\quad 4x\le 12 \quad \therefore x\le 3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=3$



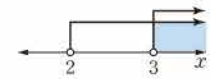
② $3(x-1)>-x+9$에서 $\quad 3x-3>-x+9$

$4x>12 \quad \therefore x>3$

$5x-8>2$에서 $\quad 5x>10 \quad \therefore x>2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>3$



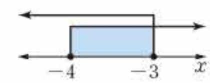
③ $2x-6\le 2(2x+1)$에서 $\quad 2x-6\le 4x+2$

$-2x\le 8 \quad \therefore x\ge -4$

$4x+1\le 3x-2$에서 $\quad x\le -3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

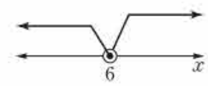
$-4\le x\le -3$



④ $0.2(x-1)\le 1$에서 $\quad x-1\le 5$

$\therefore x\le 6$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



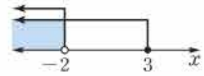
⑤ $5x+1<-9$에서 $\quad 5x<-10 \quad \therefore x<-2$

$\dfrac{x-1}{2}\le\dfrac{8-x}{5}$에서 $\quad 5(x-1)\le 2(8-x)$

$5x-5\le 16-2x, \quad 7x\le 21 \quad \therefore x\le 3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

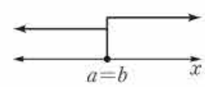
$x<-2$



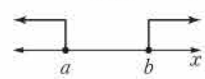
이상에서 해가 없는 것은 ④이다.

답 ④

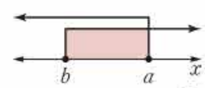
0895 ㄱ. $a=b$이면 오른쪽 그림과 같으므로 해는 $\quad x=a$



ㄴ. $a<b$이면 오른쪽 그림과 같으므로 해는 없다.



ㄷ. $a>b$이면 오른쪽 그림과 같으므로 해는 $\quad b\le x\le a$



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

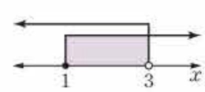
0896 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 15x-24<5x+6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+6\le 10x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 10x<30 \quad \therefore x<3$

㉡에서 $\quad -5x\le -5 \quad \therefore x\ge 1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$1\le x<3$



이므로 정수 x는 1, 2의 2개이다.

답 ②

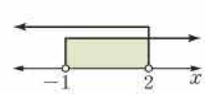
0897 주어진 부등식에서 $\begin{cases} -2<-3x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -3x+4<7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 3x<6 \quad \therefore x<2$

㉡에서 $\quad -3x<3 \quad \therefore x>-1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-1<x<2$ ··· ❶



이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$0+1=1$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	70 %
❷ 모든 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 $-2<-3x+4<7$의 각 변에서 4를 빼면

$-6<-3x<3$

$-6<-3x<3$의 각 변을 -3으로 나누면

$-1<x<2$

라쎈 특강

$A<B<C$ 꼴의 부등식에서 A와 C가 상수인 경우에는 부등식의 성질을 이용하여 해를 구할 수도 있다.

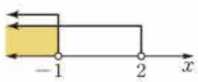
0898 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 5x-8<\dfrac{x}{2}+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{x}{2}+1<\dfrac{x+3}{4} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $10x-16<x+2$, $9x<18$ $\therefore x<2$

㉡에서 $2x+4<x+3$ $\therefore x<-1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x<-1$



이므로 정수 x의 최댓값은 -2이다.

답 -2

0899 $3x-1\le x+a$에서 $2x\le a+1$

$\therefore x\le\dfrac{a+1}{2}$

$2x+3\le 3x+1$에서 $-x\le -2$

$\therefore x\ge 2$

주어진 연립부등식의 해가 $2\le x\le 4$이므로

$\dfrac{a+1}{2}=4$, $a+1=8$

$\therefore a=7$

답 ③

0900 $x-3a\ge 0$에서 $x\ge 3a$

$2x+b>0$에서 $x>-\dfrac{b}{2}$

주어진 그림에서 각 부등식의 해가 $x>-1$, $x\ge 3$이므로

$3a=3$, $-\dfrac{b}{2}=-1$ $\therefore a=1$, $b=2$

$\therefore ab=2$

답 2

0901 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x-a\le 2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x<5x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le a$

㉡에서 $-3x<b$ $\therefore x>-\dfrac{b}{3}$

주어진 부등식의 해가 $-2<x\le 1$이므로

$a=1$, $-\dfrac{b}{3}=-2$ $\therefore a=1$, $b=6$

$\therefore a+b=7$

답 ③

0902 $\dfrac{5x+1}{8}+\dfrac{3}{4}x\le x-1$에서 $5x+1+6x\le 8x-8$

$3x\le -9$ $\therefore x\le -3$

$3(x+2)+1\ge a-x$에서 $3x+7\ge a-x$

$4x\ge a-7$ $\therefore x\ge\dfrac{a-7}{4}$ ··· ❶

주어진 연립부등식의 해가 $x=-3$이므로

$\dfrac{a-7}{4}=-3$, $a-7=-12$

$\therefore a=-5$ ··· ❷

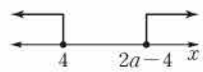
답 -5

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	60 %
❷ 상수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0903 $3x-7\le 5$에서 $3x\le 12$ $\therefore x\le 4$

$x+4\ge 2a$에서 $x\ge 2a-4$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$2a-4>4$, $2a>8$

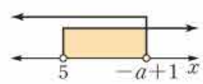
$\therefore a>4$

답 ⑤

0904 $3(x-2)>2x-1$에서 $3x-6>2x-1$ $\therefore x>5$

$4x-1<3x-a$에서 $x<-a+1$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$-a+1>5$ $\therefore a<-4$

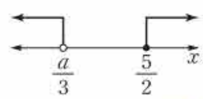
답 ②

0905 $3x+a<2a$에서 $3x<a$ $\therefore x<\dfrac{a}{3}$

$-(x-5)\le x$에서 $-x+5\le x$, $-2x\le -5$

$\therefore x\ge\dfrac{5}{2}$ ··· ❶

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$\dfrac{a}{3}\le\dfrac{5}{2}$ $\therefore a\le\dfrac{15}{2}$ ··· ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 7이다. ··· ❸

답 7

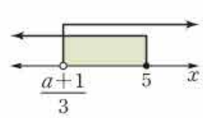
채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0906 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x-4\le 2x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+1<5x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le 5$

㉡에서 $-3x<-a-1$ $\therefore x>\dfrac{a+1}{3}$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$\dfrac{a+1}{3}<5$, $a+1<15$

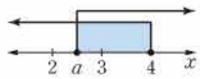
$\therefore a<14$

답 $a<14$

07 일차부등식

0907 $x+4\geq 2x$에서 $\quad x\leq 4$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이므로 오른쪽 그림에서



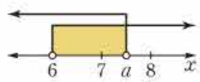
$2<a\leq 3$ 답 ③

라쎈 특강

$a=2$이면 주어진 연립부등식의 해가 $2\leq x\leq 4$이므로 정수인 해가 2, 3, 4의 3개이다. 즉 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
이와 같이 정수인 해의 개수가 주어진 연립부등식에서 미지수의 값의 범위를 구할 때는 양 끝 값의 포함 여부를 반드시 확인하도록 한다.

0908 $x-1>5$에서 $\quad x>6$

주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x가 1개뿐이므로 오른쪽 그림에서



$7<a\leq 8$

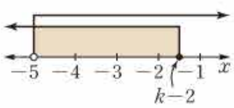
이때 a는 자연수이므로 $\quad a=8$ 답 8

0909 주어진 부등식에서 $\begin{cases} x-8<3x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+2\leq 2x+k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad -2x<10 \quad \therefore x>-5$

㉡에서 $\quad x\leq k-2$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$-2\leq k-2<-1$

$\therefore 0\leq k<1$ 답 ④

0910 형광펜을 x자루 산다고 하면 색연필은 $(12-x)$자루 살 수 있으므로

$7200\leq 500(12-x)+800x\leq 8400$

$7200\leq 300x+6000\leq 8400, \quad 1200\leq 300x\leq 2400$

$\therefore 4\leq x\leq 8$

따라서 형광펜은 4자루 이상 8자루 이하 살 수 있다. 답 ③

참고 $7200\leq 500(12-x)+800x\leq 8400$의 각 변을 100으로 나눈 후 부등식을 풀면 계산이 간단하다.

0911 연속하는 세 짝수를 $x-2$, x, $x+2$라 하면

$63<(x-2)+x+(x+2)<72$

$63<3x<72 \quad \therefore 21<x<24$

이때 x는 짝수이므로 $\quad x=22$

따라서 연속하는 세 짝수는 20, 22, 24이므로 가장 큰 수는 24이다. 답 ④

다른 풀이 연속하는 세 짝수를 $x-4$, $x-2$, x라 하면

$63<(x-4)+(x-2)+x<72$

$63<3x-6<72, \quad 69<3x<78$

$\therefore 23<x<26$

이때 x는 짝수이므로 $\quad x=24$

따라서 세 짝수 중 가장 큰 수는 24이다.

라쎈 특강

① 연속하는 세 정수에 대한 문제
→ 세 수를 $x-1$, x, $x+1$로 놓고 식을 세운다.
② 연속하는 세 짝수(또는 홀수)에 대한 문제
→ 세 수를 $x-2$, x, $x+2$로 놓고 식을 세운다.

0912 세 변의 길이는 각각 x cm, x cm, $(60-2x)$ cm이다.

(i) 세 변의 길이가 같을 때,

$x=60-2x$에서 $\quad 3x=60$

$\therefore x=20$

(ii) 가장 긴 변의 길이가 x cm일 때,

$60-2x<x$에서 $\quad -3x<-60$

$\therefore x>20 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 $x<x+(60-2x)$이어야 하므로 $\quad 2x<60$

$\therefore x<30 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\quad 20<x<30$

(iii) 가장 긴 변의 길이가 $(60-2x)$ cm일 때,

$x<60-2x$에서 $\quad 3x<60$

$\therefore x<20 \quad \cdots\cdots ㉢$

또 $60-2x<x+x$이어야 하므로 $\quad -4x<-60$

$\therefore x>15 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣에서 $\quad 15<x<20$

이상에서 삼각형을 만들 수 있는 x의 값의 범위는

$15<x<30$ 답 $15<x<30$

라쎈 특강

삼각형의 변의 길이
삼각형의 세 변의 길이가 주어질 때
① (가장 긴 변의 길이)<(나머지 두 변의 길이의 합)
② (가장 짧은 변의 길이)>0

0913 학생 수를 x라 하면 볼펜은 $(3x+18)$자루이므로

$5(x-1)+1\leq 3x+18<5(x-1)+4$,

즉 $\begin{cases} 5(x-1)+1\leq 3x+18 \\ 3x+18<5(x-1)+4 \end{cases}$

$5(x-1)+1\leq 3x+18$에서 $\quad 5x-4\leq 3x+18$

$2x\leq 22 \quad \therefore x\leq 11 \quad \cdots\cdots ㉠$

$3x+18<5(x-1)+4$에서 $\quad 3x+18<5x-1$

$-2x<-19 \quad \therefore x>\frac{19}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{19}{2}<x\leq 11$

따라서 최대 학생 수는 11이다. 답 11

0914 상자의 개수를 x라 하면

$45x+20\leq 500\leq 60x-100$,

즉 $\begin{cases} 45x+20\leq 500 \\ 500\leq 60x-100 \end{cases}$ ⋯ ❶

$45x+20\le 500$에서 $\quad 45x\le 480$

$\therefore x\le \frac{32}{3}$ …… ㉠

$500\le 60x-100$에서 $\quad -60x\le -600$

$\therefore x\ge 10$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$10\le x\le \frac{32}{3}$ ⋯ ❷

따라서 상자의 개수는 10이다. ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 상자의 개수를 x라 하고 연립부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 상자의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0915 의자의 개수를 x라 하면 학생은 $(5x+8)$명이므로

$6(x-4)+1\le 5x+8\le 6(x-4)+6$,

즉 $\begin{cases}6(x-4)+1\le 5x+8\\5x+8\le 6(x-4)+6\end{cases}$

$6(x-4)+1\le 5x+8$에서 $\quad 6x-23\le 5x+8$

$\therefore x\le 31$ …… ㉠

$5x+8\le 6(x-4)+6$에서 $\quad 5x+8\le 6x-18$

$-x\le -26 \quad \therefore x\ge 26$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$26\le x\le 31$

따라서 의자의 개수가 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

참고 6명씩 앉으면 의자가 3개 남으므로 6명씩 앉은 의자의 개수는 $x-4$이고, 마지막 1개의 의자에는 최소 1명에서 최대 6명까지 앉을 수 있다.

0916 $|4x-3|<9$에서 $\quad -9<4x-3<9$

$-6<4x<12 \quad \therefore -\frac{3}{2}<x<3$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=3$이므로

$ab=-\frac{9}{2}$ 답 $-\frac{9}{2}$

0917 $|x-2a|<b$에서 $\quad -b<x-2a<b$

$\therefore 2a-b<x<2a+b$

주어진 부등식의 해가 $-4<x<6$이므로

$2a-b=-4$, $2a+b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{2}$, $b=5$

$\therefore 2ab=5$ 답 ③

0918 $|x-1|\ge a$에서 $\quad x-1\le -a$ 또는 $x-1\ge a$

$\therefore x\le 1-a$ 또는 $x\ge 1+a$ ⋯ ❶

주어진 부등식의 해가 $x\le -1$ 또는 $x\ge b$이므로

$1-a=-1$, $1+a=b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=3$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $\|x-1\|\ge a$의 해를 a를 사용하여 나타낼 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0919 $|x-a|<6$에서 $\quad -6<x-a<6$

$\therefore a-6<x<a+6$

이때 a가 정수이므로 이 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값은

$a+5$

따라서 $a+5=10$이므로

$a=5$ 답 ②

다른 풀이 $|x-a|<6$에서 $\quad a-6<x<a+6$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값이 10이므로

$10<a+6\le 11 \quad \therefore 4<a\le 5$

따라서 정수 a의 값은 5이다.

0920 $|3x-2|\le x+6$에서

(i) $x\ge \frac{2}{3}$일 때, $3x-2\ge 0$이므로

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나눈다.

$3x-2\le x+6, \quad 2x\le 8 \quad \therefore x\le 4$

그런데 $x\ge \frac{2}{3}$이므로 $\quad \frac{2}{3}\le x\le 4$

(ii) $x<\frac{2}{3}$일 때, $3x-2<0$이므로

$-(3x-2)\le x+6, \quad -4x\le 4 \quad \therefore x\ge -1$

그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로 $\quad -1\le x<\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1\le x\le 4$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로

$a-b=-5$ 답 -5

0921 $|1-x|<4x-1$에서

(i) $x\le 1$일 때, $1-x\ge 0$이므로

$1-x<4x-1, \quad -5x<-2 \quad \therefore x>\frac{2}{5}$

그런데 $x\le 1$이므로 $\quad \frac{2}{5}<x\le 1$

(ii) $x>1$일 때, $1-x<0$이므로

$-(1-x)<4x-1, \quad -3x<0 \quad \therefore x>0$

그런데 $x>1$이므로 $\quad x>1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\quad x>\frac{2}{5}$

$\therefore k=\frac{2}{5}$ 답 ②

0922 $2|x-3|+x\ge 9$에서

(i) $x\ge 3$일 때, $x-3\ge 0$이므로

$2(x-3)+x\ge 9, \quad 3x\ge 15 \quad \therefore x\ge 5$

그런데 $x\ge 3$이므로 $\quad x\ge 5$

(ii) $x<3$일 때, $x-3<0$이므로

$-2(x-3)+x\ge 9, \quad -x\ge 3 \quad \therefore x\le -3$

그런데 $x<3$이므로 $\quad x\le -3$ ⋯ ❶

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x \le -3$ 또는 $x \ge 5$ ⋯ ❷

따라서 자연수 x의 최솟값은 5이다. ⋯ ❸

답 5

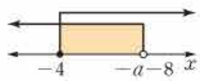
채점 기준	비율
❶ $x \ge 3$, $x < 3$으로 x의 값의 범위를 나누어 부등식을 각각 풀 수 있다.	40 %
❷ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 x의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0923 $|2x+8| < x-a$에서

(i) $x \ge -4$일 때, $2x+8 \ge 0$이므로

$2x+8 < x-a \quad \therefore x < -a-8$

그런데 $x \ge -4$이므로 이 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



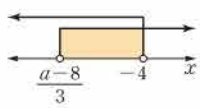
$-4 < -a-8 \quad \therefore a < -4$

(ii) $x < -4$일 때, $2x+8 < 0$이므로

$-(2x+8) < x-a, \quad -3x < -a+8$

$\therefore x > \dfrac{a-8}{3}$

그런데 $x < -4$이므로 이 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$\dfrac{a-8}{3} < -4 \quad \therefore a < -4$

(i), (ii)에서 $\quad a < -4$

답 $a < -4$

참고 (i) $x \ge -4$일 때와 (ii) $x < -4$일 때 중 어느 한 범위에서라도 해를 가지면 주어진 부등식은 해를 갖는다.

0924 $|x-2| + |x| < 4$에서

(i) $x < 0$일 때,

$-(x-2)-x < 4, \quad -2x < 2 \quad \therefore x > -1$

그런데 $x < 0$이므로 $\quad -1 < x < 0$

(ii) $0 \le x < 2$일 때,

$-(x-2)+x < 4 \quad \therefore 0 \cdot x < 2$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

그런데 $0 \le x < 2$이므로 $\quad 0 \le x < 2$

(iii) $x \ge 2$일 때,

$x-2+x < 4, \quad 2x < 6 \quad \therefore x < 3$

그런데 $x \ge 2$이므로 $\quad 2 \le x < 3$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-1 < x < 3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$b-a=4$

답 ③

0925 $|x-1| + 3|x+1| < 8$에서

(i) $x < -1$일 때,

$-(x-1)-3(x+1) < 8$

$-4x < 10 \quad \therefore x > -\dfrac{5}{2}$

그런데 $x < -1$이므로 $\quad -\dfrac{5}{2} < x < -1$

(ii) $-1 \le x < 1$일 때,

$-(x-1)+3(x+1) < 8$

$2x < 4 \quad \therefore x < 2$

그런데 $-1 \le x < 1$이므로 $\quad -1 \le x < 1$

(iii) $x \ge 1$일 때,

$x-1+3(x+1) < 8$

$4x < 6 \quad \therefore x < \dfrac{3}{2}$

그런데 $x \ge 1$이므로 $\quad 1 \le x < \dfrac{3}{2}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-\dfrac{5}{2} < x < \dfrac{3}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -2, -1, 0, 1이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$

답 ①

0926 $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$이므로 주어진 부등식은

$|x-2| + |x+1| < x+3$ ⋯ ❶

(i) $x < -1$일 때,

$-(x-2)-(x+1) < x+3$

$-3x < 2 \quad \therefore x > -\dfrac{2}{3}$

그런데 $x < -1$이므로 해는 없다.

(ii) $-1 \le x < 2$일 때,

$-(x-2)+x+1 < x+3$

$-x < 0 \quad \therefore x > 0$

그런데 $-1 \le x < 2$이므로 $\quad 0 < x < 2$

(iii) $x \ge 2$일 때,

$x-2+x+1 < x+3 \quad \therefore x < 4$

그런데 $x \ge 2$이므로 $\quad 2 \le x < 4$ ⋯ ❷

이상에서 주어진 부등식의 해는

$0 < x < 4$ ⋯ ❸

답 $0 < x < 4$

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{A^2} = \|A\|$임을 이용하여 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	20 %
❷ $x < -1$, $-1 \le x < 2$, $x \ge 2$로 x의 값의 범위를 나누어 부등식을 각각 풀 수 있다.	60 %
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0927 전략 부등식의 기본 성질을 이용한다.

풀이 ① $a=-2$, $b=-1$이면 $a < b$이지만 $|a| > |b|$이다.

② $a=-2$, $b=2$이면 $a < b$이지만 $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$이다.

③ $a < b$, $c < 0$이면 $ac > bc$이다.

⑤ $a=-2$, $b=-1$, $c=1$이면 $a < b < c$이지만 $ab > c^2$이다.

답 ④

0928 전략 부등식 $Ax \ge B$의 해가 $x \ge C$이면 $A > 0$, $\dfrac{B}{A} = C$임을 이용한다.

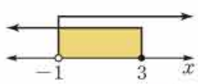
풀이 $a(x-1) \geq -(x-a)$에서 $(a+1)x \geq 2a$
이 부등식의 해가 $x \geq 1$이므로
$a+1>0$, $\dfrac{2a}{a+1}=1$
$2a=a+1$ $\therefore a=1$
답 ②

0929 전략 부등식 $Ax \leq B$의 해가 모든 실수일 조건은 $A=0$, $B \geq 0$이고, 해가 존재하지 않을 조건은 $A=0$, $B<0$임을 이용한다.

풀이 $a^2x-a \leq 4x-1$에서 $(a^2-4)x \leq a-1$
$\therefore (a+2)(a-2)x \leq a-1$ …… ㉠
부등식 ㉠의 해가 모든 실수이려면
$(a+2)(a-2)=0$, $a-1 \geq 0$
$\therefore a=2$
부등식 ㉠의 해가 없으려면
$(a+2)(a-2)=0$, $a-1<0$
$\therefore a=-2$
따라서 $m=2$, $n=-2$이므로
$m-n=4$
답 4

0930 전략 각 부등식을 풀어 공통부분을 수직선 위에 나타낸다.

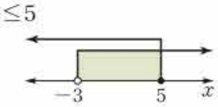
풀이 $3x-8 \leq 4-x$에서 $4x \leq 12$ $\therefore x \leq 3$
$5x+2>2x-1$에서 $3x>-3$ $\therefore x>-1$
따라서 주어진 연립부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



답 ③

0931 전략 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 구한다.

풀이 $4x>x-9$에서 $3x>-9$ $\therefore x>-3$
$x+2 \geq 2x-3$에서 $-x \geq -5$ $\therefore x \leq 5$
따라서 주어진 연립부등식의 해는
$-3<x \leq 5$



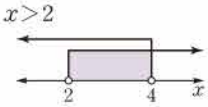
이므로 정수 x는 $-2, -1, 0, \cdots, 5$의 8개이다.
답 ①

라쎈 특강

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수
정수 a, b에 대하여 $a<b$일 때, 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 다음과 같다.
① $a<x<b$일 때, $b-a-1$
② $a \leq x<b$ 또는 $a<x \leq b$일 때, $b-a$
③ $a \leq x \leq b$일 때, $b-a+1$

0932 전략 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값을 구한 후 일차방정식에 대입한다.

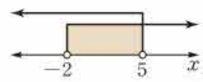
풀이 $3x-1<x+7$에서 $2x<8$ $\therefore x<4$
$4x-1>-(x-9)$에서 $5x>10$ $\therefore x>2$
따라서 주어진 연립부등식의 해는
$2<x<4$



이므로 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 3이다.
$x=3$을 $ax+10=7$에 대입하면
$3a+10=7$ $\therefore a=-1$
답 -1

0933 전략 부등식 $A<B<C$는 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

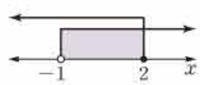
풀이 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 4x-7<6x-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x-3<5x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $-2x<4$ $\therefore x>-2$
㉡에서 $x<5$
따라서 주어진 부등식의 해는
$-2<x<5$



즉 $a=-2$, $b=5$이므로
$a+b=3$
답 3

0934 전략 y를 x에 대한 식으로 나타내고 주어진 부등식에 대입하여 x에 대한 연립부등식으로 바꾼 후 해를 구한다.

풀이 $2x+y=5$에서 $y=5-2x$
이것을 주어진 부등식에 대입하면
$3x-9 \leq 5-2x-4<2x+5$
$\therefore 3x-9 \leq 1-2x<2x+5$,
즉 $\begin{cases} 3x-9 \leq 1-2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 1-2x<2x+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $5x \leq 10$ $\therefore x \leq 2$
㉡에서 $-4x<4$ $\therefore x>-1$
따라서 주어진 부등식의 해는
$-1<x \leq 2$



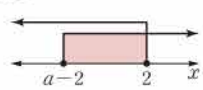
이므로 정수 x는 0, 1, 2의 3개이고 구하는 해의 개수는 3이다.
$x=0$, $y=5$ 또는 $x=1$, $y=3$ 또는 $x=2$, $y=1$
답 3

0935 전략 각 부등식을 푼 후 주어진 해와 비교한다.

풀이 $x-1>8$에서 $x>9$
$2x-16 \leq x+a$에서 $x \leq a+16$
주어진 연립부등식의 해가 $b<x \leq 28$이므로
$b=9$, $a+16=28$ $\therefore a=12$, $b=9$
$\therefore a+b=21$
답 21

0936 전략 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 있도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

풀이 $x-2 \leq 2x-a$에서 $-x \leq -a+2$
$\therefore x \geq a-2$
$3x-4 \leq 12-5x$에서 $8x \leq 16$ $\therefore x \leq 2$
주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$a-2 \leq 2$ $\therefore a \leq 4$
따라서 a의 최댓값은 4이다.
답 ④

0937 전략 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되도록 하는 a의 값을 구한다.

풀이 $x+2>3$에서 $\quad x>1$

$3x<a+1$에서 $\quad x<\frac{a+1}{3}$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 해는

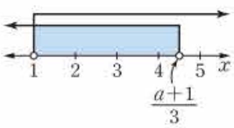
$1<x<\frac{a+1}{3}$

이어야 한다.

이때 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되어야 하므로 정수 x의 값은

$\underline{2,\ 3,\ 4}$ $x>1$이므로 2부터 차례대로 정수를 더하여 그 합이 9가 되는 경우를 찾는다.

따라서 오른쪽 그림에서



$4<\frac{a+1}{3}\le 5$

$12<a+1\le 15$

$\therefore 11<a\le 14$

즉 자연수 a의 최댓값은 14이다. 답 ⑤

0938 전략 세로의 길이를 x cm라 하고 둘레의 길이가 150 cm임을 이용하여 가로의 길이를 x로 나타낸 후 부등식을 세운다.

풀이 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는

$\frac{1}{2}(150-2x)=75-x\,(\text{cm})$

이므로

$x+15\le 75-x<2x$, 즉 $\begin{cases} x+15\le 75-x \\ 75-x<2x \end{cases}$

$x+15\le 75-x$에서 $\quad 2x\le 60 \quad \therefore x\le 30 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$75-x<2x$에서 $\quad -3x<-75 \quad \therefore x>25 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$25<x\le 30$

따라서 세로의 길이는 25 cm 초과 30 cm 이하이다.

답 25 cm 초과 30 cm 이하

0939 전략 빵 A의 개수를 x라 하고 빵 B의 개수를 x로 나타낸다.

풀이 빵 A의 개수를 x라 하면 빵 B의 개수는 $12-x$이므로

$\begin{cases} 50x+100(12-x)\le 1000 & \cdots\cdots ㉠ \\ 20x+15(12-x)\le 220 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad -50x\le -200 \quad \therefore x\ge 4$

㉡에서 $\quad 5x\le 40 \quad \therefore x\le 8$

$\therefore 4\le x\le 8$

따라서 빵 A는 최대 8개까지 만들 수 있다. 답 ⑤

0940 전략 부등식 $|x-a|\le b\,(b>0)$의 해는 $a-b\le x\le a+b$임을 이용한다.

풀이 $2x+5\le 9$에서 $\quad 2x\le 4 \quad \therefore x\le 2$

$|x-3|\le 7$에서 $\quad -7\le x-3\le 7 \quad \therefore -4\le x\le 10$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-4\le x\le 2$

이므로 정수 x는 $-4, -3, -2, \cdots, 2$의 7개이다. 답 7

0941 전략 절댓값 기호를 포함한 부등식을 푼 후 $a<b$인 정수 a, b에 대하여 부등식 $a\le x\le b$를 만족시키는 정수 x의 개수는 $b-a+1$임을 이용한다.

풀이 $|x-7|\le a+1$에서 $\quad -(a+1)\le x-7\le a+1$

$\therefore -a+6\le x\le a+8$

이때 $-a+6$, $a+8$이 정수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는

$(a+8)-(-a+6)+1=2a+3$

따라서 $2a+3=9$이므로 $\quad 2a=6$

$\therefore a=3$ 답 ③

0942 전략 $x\ge 3$, $x<3$으로 x의 값의 범위를 나누어 푼다.

풀이 $|x-3|\le 2x$에서

(i) $x\ge 3$일 때, $x-3\ge 0$이므로

$x-3\le 2x, \quad -x\le 3 \quad \therefore x\ge -3$

그런데 $x\ge 3$이므로 $\quad x\ge 3$

(ii) $x<3$일 때, $x-3<0$이므로

$-(x-3)\le 2x, \quad -3x\le -3 \quad \therefore x\ge 1$

그런데 $x<3$이므로 $\quad 1\le x<3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\ge 1 \quad \therefore k=1$ 답 ②

0943 전략 $a<b$일 때, $|x-a|\ge |x-b|$ 꼴의 부등식은 x의 값의 범위를 $x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$로 나누어 푼다.

풀이 $|3x-2|\ge |2x-7|$에서

(i) $x<\frac{2}{3}$일 때,

$-(3x-2)\ge -(2x-7)$

$-x\ge 5 \quad \therefore x\le -5$

그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로 $\quad x\le -5$

(ii) $\frac{2}{3}\le x<\frac{7}{2}$일 때,

$3x-2\ge -(2x-7)$

$5x\ge 9 \quad \therefore x\ge \frac{9}{5}$

그런데 $\frac{2}{3}\le x<\frac{7}{2}$이므로 $\quad \frac{9}{5}\le x<\frac{7}{2}$

(iii) $x\ge \frac{7}{2}$일 때,

$3x-2\ge 2x-7 \quad \therefore x\ge -5$

그런데 $x\ge \frac{7}{2}$이므로 $\quad x\ge \frac{7}{2}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x\le -5$ 또는 $x\ge \frac{9}{5}$

따라서 $a=-5$, $b=\frac{9}{5}$이므로

$ab=-9$ 답 ①

0944 전략 부등식 $Ax<B$의 해가 $x<C$이면 $A>0$, $\frac{B}{A}=C$임을 이용한다.

풀이 $a+b=0$에서 $\quad b=-a$

$b=-a$를 주어진 부등식에 대입하면

$ax-2a<4ax+3a-12$

$-3ax<5a-12 \quad \cdots$ ❶

이 부등식의 해가 $x<-3$이므로

$$\underline{a<0},\ \frac{5a-12}{-3a}=-3 \quad -3a>0\text{이므로 } a<0$$

$5a-12=9a,\qquad -4a=12$

$\therefore\ a=-3,\ b=3$ ··· ❷

$\therefore\ a-b=-6$ ··· ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ 조건을 이용하여 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0945 전략 연립부등식 $\begin{cases} x\ge a \\ x\le b \end{cases}$의 해가 한 개이면 $a=b$임을 이용한다.

풀이 $2-7x\le x+a$에서 $\qquad -8x\le a-2$

$\therefore\ x\ge \dfrac{2-a}{8}$

$4x+1\ge 5x+2$에서 $\qquad -x\ge 1$

$\therefore\ x\le -1$ ··· ❶

주어진 연립부등식의 해가 한 개이므로

$\dfrac{2-a}{8}=-1,\qquad 2-a=-8$

$\therefore\ a=10$ ··· ❷

이때 그 해는 $x=-1$이므로

$b=-1$ ··· ❸

답 $a=10$, $b=-1$

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %

0946 전략 염소 우리의 개수를 x라 하고 염소의 수를 x로 나타낸다.

풀이 염소 우리의 개수를 x라 하면 염소는 $(6x+5)$마리이므로

$8(x-2)+1\le 6x+5\le 8(x-2)+8$,

즉 $\begin{cases} 8(x-2)+1\le 6x+5 \\ 6x+5\le 8(x-2)+8 \end{cases}$ ··· ❶

$8(x-2)+1\le 6x+5$에서 $\qquad 8x-15\le 6x+5$

$2x\le 20 \qquad \therefore\ x\le 10$ ······ ㉠

$6x+5\le 8(x-2)+8$에서 $\qquad 6x+5\le 8x-8$

$-2x\le -13 \qquad \therefore\ x\ge \dfrac{13}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\dfrac{13}{2}\le x\le 10$ ··· ❷

따라서 염소 우리는 최대 10개이다. ··· ❸

답 10개

채점 기준	비율
❶ 염소 우리의 개수를 x라 하고 연립부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 염소 우리는 최대 몇 개인지 구할 수 있다.	20 %

0947 전략 x의 값의 범위를 $x<1$, $1\le x<4$, $x\ge 4$로 나누어 푼다.

풀이 $2|x-4|+|x-1|\ge 9$에서

(i) $x<1$일 때,

$-2(x-4)-(x-1)\ge 9$

$-3x\ge 0 \qquad \therefore\ x\le 0$

그런데 $x<1$이므로 $\qquad x\le 0$

(ii) $1\le x<4$일 때,

$-2(x-4)+(x-1)\ge 9$

$-x\ge 2 \qquad \therefore\ x\le -2$

그런데 $1\le x<4$이므로 해는 없다.

(iii) $x\ge 4$일 때,

$2(x-4)+(x-1)\ge 9$

$3x\ge 18 \qquad \therefore\ x\ge 6$

그런데 $x\ge 4$이므로 $\qquad x\ge 6$ ··· ❶

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x\le 0$ 또는 $x\ge 6$ ··· ❷

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 최솟값은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $x<1$, $1\le x<4$, $x\ge 4$로 x의 값의 범위를 나누어 부등식을 각각 풀 수 있다.	60 %
❷ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 자연수 x의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 $f(x)=2|x-4|+|x-1|$이라 하면

(i) $x<1$일 때,

$f(x)=-2(x-4)-(x-1)$

$=-3x+9$

(ii) $1\le x<4$일 때,

$f(x)=-2(x-4)+(x-1)$

$=-x+7$

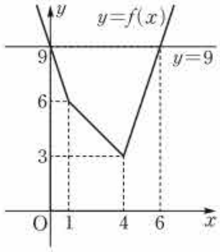
(iii) $x\ge 4$일 때,

$f(x)=2(x-4)+(x-1)$

$=3x-9$

이상에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는

$x\le 0$ 또는 $x\ge 6$



07 일차부등식

08 이차부등식

0948 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하면 다음과 같다.

ㄱ. $-x-3<0$　　ㄴ. $x^2-3x-1>0$

ㄷ. $6\geq0$　　ㄹ. $x^2-1\leq0$

이상에서 이차부등식은 ㄴ, ㄹ이다. 　　답 ㄴ, ㄹ

0949 답 $x<-3$ 또는 $x>-1$

0950 답 $-3<x<-1$

0951 답 $x\leq-3$ 또는 $x\geq-1$

0952 답 $-3\leq x\leq-1$

0953 답 $-2\leq x\leq2$

0954 답 $x<-2$ 또는 $x>2$

0955 답 $x\leq-3$ 또는 $x\geq1$

0956 답 $-3<x<1$

0957 답 $x<3$ 또는 $x>5$

0958 답 $3\leq x\leq5$

0959 답 $x\neq2$인 모든 실수

0960 답 $x=2$

0961 답 해는 없다.

0962 답 모든 실수

0963 답 $x\leq2$ 또는 $x\geq7$

0964 답 $-5<x<1$

0965 답 모든 실수

0966 답 해는 없다.

0967 답 모든 실수

0968 답 해는 없다.

0969 $x^2-5x+6<0$에서 　$(x-2)(x-3)<0$

$\therefore 2<x<3$ 　　답 $2<x<3$

0970 $-3x^2+10x-3\leq0$에서 　$3x^2-10x+3\geq0$

$(3x-1)(x-3)\geq0$ 　$\therefore x\leq\frac{1}{3}$ 또는 $x\geq3$

답 $x\leq\frac{1}{3}$ 또는 $x\geq3$

0971 $x^2-6x+9=(x-3)^2\geq0$

따라서 $x^2-6x+9>0$의 해는 $x\neq3$인 모든 실수이다.

답 $x\neq3$인 모든 실수

0972 $-x^2+2x-1\geq0$에서 　$x^2-2x+1\leq0$

그런데 $x^2-2x+1=(x-1)^2\geq0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=1$이다. 　　답 $x=1$

0973 $x^2+6x+11=(x+3)^2+2\geq2$

따라서 $x^2+6x+11>0$의 해는 모든 실수이다. 　　답 모든 실수

0974 $-x^2-x-1\geq0$에서 　$x^2+x+1\leq0$

그런데 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 없다. 　　답 해는 없다.

0975 $(x-1)(x-3)<0$에서 　$x^2-4x+3<0$

답 $x^2-4x+3<0$

0976 $(x+7)(x-1)>0$에서 　$x^2+6x-7>0$

답 $x^2+6x-7>0$

0977 $(x+5)(x-2)\leq0$에서 　$x^2+3x-10\leq0$

답 $x^2+3x-10\leq0$

0978 $(x+2)(x-9)\geq0$에서 　$x^2-7x-18\geq0$

답 $x^2-7x-18\geq0$

0979 $(x+1)^2\leq0$에서 　$x^2+2x+1\leq0$

답 $x^2+2x+1\leq0$

0980 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-kx+k+3$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot(k+3)<0$

$k^2-4k-12<0$, 　$(k+2)(k-6)<0$

$\therefore -2<k<6$ 　　답 $-2<k<6$

0981 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2+2kx-k$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2+2kx-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-1\cdot(-k)\leq0$

$k^2+k\leq0$, 　$k(k+1)\leq0$

$\therefore -1\leq k\leq0$ 　　답 $-1\leq k\leq0$

0982 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+kx-4$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+kx-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)\le 0$

$k^2-16\le 0,\quad (k+4)(k-4)\le 0$

$\therefore -4\le k\le 4$ 답 $-4\le k\le 4$

0983 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면

$k>0$ …… ㉠

이차함수 $y=kx^2+3kx+2$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $kx^2+3kx+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(3k)^2-4\cdot k\cdot 2\le 0$

$9k^2-8k\le 0,\quad k(9k-8)\le 0$

$\therefore 0\le k\le \frac{8}{9}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<k\le \frac{8}{9}$ 답 $0<k\le \frac{8}{9}$

0984 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면

$k<0$ …… ㉠

이차함수 $y=kx^2-kx-4$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $kx^2-kx-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot k\cdot(-4)<0$

$k^2+16k<0,\quad k(k+16)<0$

$\therefore -16<k<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-16<k<0$ 답 $-16<k<0$

0985 답 $-1<x<1$

풀 $-3,\ 1,\ -3,\ 1,\ 1$

0986 $3x-1\ge -7$에서 $3x\ge -6$

$\therefore x\ge -2$ …… ㉠

$x^2-8x+15\le 0$에서 $(x-3)(x-5)\le 0$

$\therefore 3\le x\le 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3\le x\le 5$ 답 $3\le x\le 5$

0987 $-x+6<2x-9$에서 $-3x<-15$

$\therefore x>5$ …… ㉠

$x^2-5x-6\ge 0$에서 $(x+1)(x-6)\ge 0$

$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\ge 6$ 답 $x\ge 6$

0988 $5x+2\le 3x-10$에서 $2x\le -12$

$\therefore x\le -6$ …… ㉠

$x^2-3x<54$에서 $x^2-3x-54<0$

$(x+6)(x-9)<0\quad \therefore -6<x<9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

답 해는 없다.

0989 답 $-3<x\le 0$ 또는 $2\le x<4$

풀 $0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2$

0990 $x^2+10x+16<0$에서 $(x+8)(x+2)<0$

$\therefore -8<x<-2$ …… ㉠

$x^2+5x\le 0$에서 $x(x+5)\le 0$

$\therefore -5\le x\le 0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5\le x<-2$ 답 $-5\le x<-2$

0991 $x^2-8>-7x$에서 $x^2+7x-8>0$

$(x+8)(x-1)>0\quad \therefore x<-8$ 또는 $x>1$ …… ㉠

$x^2-5x<x-8$에서 $x^2-6x+8<0$

$(x-2)(x-4)<0\quad \therefore 2<x<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x<4$ 답 $2<x<4$

0992 $2\le x^2+x$에서 $x^2+x-2\ge 0$

$(x+2)(x-1)\ge 0\quad \therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 1$ …… ㉠

$x^2+x\le 6$에서 $x^2+x-6\le 0$

$(x+3)(x-2)\le 0\quad \therefore -3\le x\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x\le -2$ 또는 $1\le x\le 2$

답 $-3\le x\le -2$ 또는 $1\le x\le 2$

0993 $-2x-6<x^2-14$에서 $x^2+2x-8>0$

$(x+4)(x-2)>0\quad \therefore x<-4$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$x^2-14\le 5x$에서 $x^2-5x-14\le 0$

$(x+2)(x-7)\le 0\quad \therefore -2\le x\le 7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x\le 7$ 답 $2<x\le 7$

0994 답 $\frac{3}{4}\le k<1$

풀 $\ge,\ \ge,\ >,\ <,\ \le,\ <$

0995 주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $D=(k-2)^2-4\cdot 1\cdot 1\ge 0$

$k^2-4k\ge 0,\quad k(k-4)\ge 0$

$\therefore k\le 0$ 또는 $k\ge 4$

(ii) $\alpha+\beta=-k+2<0\quad \therefore k>2$

(iii) $\alpha\beta=1>0$

이상에서 공통부분을 구하면

$k\ge 4$ 답 $k\ge 4$

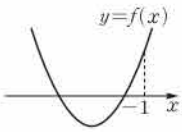
0996 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta<0$이어야 하므로

$k+2<0\quad \therefore k<-2$ 답 $k<-2$

0997 답 $2<k\le 3$

풀 $\ge,\ \le,\ >,\ >,\ <,\ \le$

0998 $f(x)=x^2+6x-2k-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=3^2-1\cdot(-2k-1)\ge 0$$

$10+2k\ge 0 \qquad \therefore k\ge -5$

(ii) $f(-1)=1-6-2k-1>0$에서

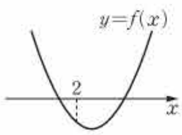
$-2k>6 \qquad \therefore k<-3$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-3$이고 $-3<-1$이다.

이상에서 공통부분을 구하면

$-5\le k<-3$ 답 $-5\le k<-3$

0999 $f(x)=x^2+(3-k)x+k-8$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(2)<0$이어야 하므로

$4+2(3-k)+k-8<0, \qquad -k+2<0$

$\therefore k>2$ 답 $k>2$

1000 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<2$ 또는 $x>3$ 답 ③

1001 $px^2+(q-m)x+r-n\le 0$에서

$px^2+qx+r-(mx+n)\le 0$

$\therefore px^2+qx+r\le mx+n$

부등식 $px^2+qx+r\le mx+n$의 해는 이차함수 $y=px^2+qx+r$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$b\le x\le d$ 답 $b\le x\le d$

1002 $f(x)g(x)>0$에서

$f(x)>0,\ g(x)>0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)<0$ ··· ❶

(i) $f(x)>0,\ g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)>0$일 때, $\quad x<-1$ 또는 $x>2$ ······ ㉠

$g(x)>0$일 때, $\quad -3<x<1$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3<x<-1$ ··· ❷

(ii) $f(x)<0,\ g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)<0$일 때, $\quad -1<x<2$ ······ ㉢

$g(x)<0$일 때, $\quad x<-3$ 또는 $x>1$ ······ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$1<x<2$ ··· ❸

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-3<x<-1$ 또는 $1<x<2$ ··· ❹

답 $-3<x<-1$ 또는 $1<x<2$

채점 기준	비율
❶ $f(x)g(x)>0$이면 $f(x)>0,\ g(x)>0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)<0$임을 알 수 있다.	10 %
❷ $f(x)>0,\ g(x)>0$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)<0,\ g(x)<0$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(x)g(x)>0$의 해를 구할 수 있다.	10 %

1003 $x^2+2x-15>0$에서 $\qquad (x+5)(x-3)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>3$

따라서 $\alpha=-5,\ \beta=3$이므로

$\alpha-\beta=-8$ 답 ①

다른 풀이 $\alpha,\ \beta$가 이차방정식 $x^2+2x-15=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-15$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-2)^2-4\cdot(-15)=64$

$\therefore \alpha-\beta=\pm 8$

이때 $\alpha<\beta$에서 $\alpha-\beta<0$이므로

$\alpha-\beta=-8$

1004 $x^2-x-20\le 0$에서 $\qquad (x+4)(x-5)\le 0$

$\therefore -4\le x\le 5$ 답 ②

1005 $(3x+4)(x-3)<16$에서

$3x^2-5x-12<16, \qquad 3x^2-5x-28<0$

$(3x+7)(x-4)<0$

$\therefore -\frac{7}{3}<x<4$ ··· ❶

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 6개이다. ··· ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ 이차부등식의 해를 구할 수 있다.	70 %
❷ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	30 %

1006 ① $x^2-10x+25=(x-5)^2\ge 0$

따라서 $x^2-10x+25\le 0$의 해는 $x=5$이다.

② $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\ge 2$

따라서 $x^2-2x+3\le 0$의 해는 없다.

③ $-4x^2+4x-\frac{7}{4}<0$에서 $\qquad 4x^2-4x+\frac{7}{4}>0$

그런데 $4x^2-4x+\frac{7}{4}=(2x-1)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

④ $9x^2\le 6x-1$에서 $\qquad 9x^2-6x+1\le 0$

그런데 $9x^2-6x+1=(3x-1)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=\frac{1}{3}$이다.

⑤ $2(x^2+5)>x^2-8x-6$에서 $\qquad x^2+8x+16>0$

그런데 $x^2+8x+16=(x+4)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x\ne -4$인 모든 실수이다.

답 ②

1007 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+2)(x-1)\ (a<0)$

로 놓을 수 있다.

이때 이 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4=-2a \qquad \therefore a=-2$

$\therefore f(x)=-2(x+2)(x-1)$

$f(x)+8\geq 0$에서 $\qquad -2(x+2)(x-1)+8\geq 0$

$(x+2)(x-1)-4\leq 0, \qquad x^2+x-6\leq 0$

$(x+3)(x-2)\leq 0 \qquad \therefore -3\leq x\leq 2$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=9+4=13$ 답 13

라쎈 특강

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 만나면

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$

로 놓는다. 이때 이차함수의 그래프가 아래로 볼록하면 $a>0$, 위로 볼록하면 $a<0$이다.

1008 해가 $-4\leq x\leq 2$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은

$2(x+4)(x-2)\leq 0 \qquad \therefore 2x^2+4x-16\leq 0$

이 부등식이 $2x^2+ax+b\leq 0$과 같으므로

$a=4,\ b=-16$

$\therefore a-b=20$ 답 ③

다른 풀이 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이 -4, 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{a}{2}=-4+2,\ \frac{b}{2}=-4\cdot 2 \qquad \therefore a=4,\ b=-16$

$\therefore a-b=20$

1009 해가 $x<1$ 또는 $x>b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-b)>0 \qquad \therefore x^2-(b+1)x+b>0$

이 부등식이 $x^2+ax+3>0$과 같으므로

$a=-(b+1),\ 3=b \qquad \therefore a=-4,\ b=3$

$\therefore ab=-12$ 답 ①

다른 풀이 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 두 근이 1, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=1+b,\ 3=1\cdot b \qquad \therefore a=-4,\ b=3$

$\therefore ab=-12$

1010 이차부등식 $ax^2+bx+2<0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<1$이므로

$a>0$

해가 $\frac{1}{3}<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)<0 \qquad \therefore x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}<0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-\frac{4}{3}ax+\frac{1}{3}a<0\ (\because a>0)$

이 부등식이 $ax^2+bx+2<0$과 같으므로

$-\frac{4}{3}a=b,\ \frac{1}{3}a=2 \qquad \therefore a=6,\ b=-8$

이것을 $bx+a>0$에 대입하면

$-8x+6>0, \qquad -8x>-6$

$\therefore x<\frac{3}{4}$ 답 $x<\frac{3}{4}$

1011 부등식 $f(x)\leq 0$의 해가 $-2\leq x\leq 0$이므로

$f(x)=ax(x+2)\ (a>0)$

로 놓을 수 있다. ··· ❶

이때 $f(1)=6$에서 $\qquad f(1)=a\cdot 1\cdot 3=6$

$\therefore a=2$ ··· ❷

따라서 $f(x)=2x(x+2)$이므로

$f(3)=2\cdot 3\cdot 5=30$ ··· ❸

답 30

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 이차식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1012 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>5$이므로

$a<0$

해가 $x<-3$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-5)>0 \qquad \therefore x^2-2x-15>0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-2ax-15a<0\ (\because a<0)$

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로

$b=-2a,\ c=-15a$

이것을 $cx^2+bx+a>0$에 대입하면

$-15ax^2-2ax+a>0$

$15x^2+2x-1>0\ (\because -a>0)$

$(3x+1)(5x-1)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>\frac{1}{5}$ 답 ⑤

1013 $f(x)<0$의 해가 $-1<x<4$이므로

$f(x)=a(x+1)(x-4)\ (a>0)$

라 하면

$f(2x)=a(2x+1)(2x-4)$

$=2a(2x+1)(x-2)$

따라서 부등식 $f(2x)<0$의 해는 $2a(2x+1)(x-2)<0$에서

$(2x+1)(x-2)<0\ (\because a>0)$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<2$ 답 $-\frac{1}{2}<x<2$

1014 $f(x)\leq 0$의 해가 $2\leq x\leq 5$이므로

$f(x)=a(x-2)(x-5)\ (a>0)$

라 하면

08 이차부등식

$f(3x-1)=a(3x-1-2)(3x-1-5)$
$=9a(x-1)(x-2)$
즉 부등식 $f(3x-1)\ge0$의 해는 $9a(x-1)(x-2)\ge0$에서
$(x-1)(x-2)\ge0$ ($\because a>0$)
$\therefore x\le1$ 또는 $x\ge2$
따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로
$\alpha\beta=2$ 답 ④

1015 $f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>6$이므로
$f(x)=a(x+2)(x-6)$ $(a<0)$
이라 하면
$f(-x)=a(-x+2)(-x-6)$
$=a(x-2)(x+6)$
즉 부등식 $f(-x)>0$의 해는 $a(x-2)(x+6)>0$에서
$(x+6)(x-2)<0$ ($\because a<0$)
$\therefore -6<x<2$
따라서 정수 x는 $-5, -4, -3, \cdots, 1$의 7개이다. 답 7

1016 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(4, 0)$에서 만나므로
$f(x)=a(x+1)(x-4)(a>0)$
로 놓으면
$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=a\left(\frac{x+1}{2}+1\right)\left(\frac{x+1}{2}-4\right)$
$=\frac{a}{4}(x+1+2)(x+1-8)$
$=\frac{a}{4}(x+3)(x-7)$ ··· ❶
즉 부등식 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)<0$의 해는 $\frac{a}{4}(x+3)(x-7)<0$에서
$(x+3)(x-7)<0$ ($\because a>0$)
$\therefore -3<x<7$ ··· ❷
따라서 $\alpha=-3$, $\beta=7$이므로
$\alpha+\beta=4$ ··· ❸
답 4

채점 기준	비율
❶ $f\left(\frac{x+1}{2}\right)$을 이차식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 부등식 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)<0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)<0$에서 $\frac{x+1}{2}=t$로 놓으면 주어진 그래프에서 $f(t)<0$을 만족시키는 t의 값의 범위는 $-1<t<4$이므로
$-1<\frac{x+1}{2}<4$, $\quad -2<x+1<8$
$\therefore -3<x<7$
따라서 $\alpha=-3$, $\beta=7$이므로 $\quad \alpha+\beta=4$

1017 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(x)\ge0$의 해가 $x\le3$ 또는 $x\ge4$이므로
$f(x)=a(x-3)(x-4)(a>0)$
부등식 $a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$, 즉 $f(x-5)<0$의 해는
$a(x-5-3)(x-5-4)<0$에서
$(x-8)(x-9)<0$ ($\because a>0$)
$\therefore 8<x<9$ 답 $8<x<9$

다른 풀이1 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(x)\ge0$의 해가
$x\le3$ 또는 $x\ge4$
이므로 $f(x)<0$의 해는 $3<x<4$이다.
따라서 $a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$, 즉 $f(x-5)<0$의 해는
$3<x-5<4$ $\quad \therefore 8<x<9$

다른 풀이2 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
$f(x)=a(x-3)(x-4)(a>0)$
$=ax^2-7ax+12a$
따라서 $b=-7a$, $c=12a$이므로 이것을 $a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$에 대입하면
$a(x-5)^2-7a(x-5)+12a<0$
$x^2-17x+72<0$ ($\because a>0$)
$(x-8)(x-9)<0$ $\quad \therefore 8<x<9$

1018 $x^2-|x|-2<0$에서
(i) $x\ge0$일 때,
$x^2-x-2<0$, $\quad (x+1)(x-2)<0$
$\therefore -1<x<2$
그런데 $x\ge0$이므로
$0\le x<2$
(ii) $x<0$일 때,
$x^2+x-2<0$, $\quad (x+2)(x-1)<0$
$\therefore -2<x<1$
그런데 $x<0$이므로
$-2<x<0$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$-2<x<2$
따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로
$\frac{\beta}{\alpha}=-1$ 답 ②

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 부등식은
$|x|^2-|x|-2<0$, $\quad (|x|+1)(|x|-2)<0$
$\therefore -1<|x|<2$
그런데 $|x|\ge0$이므로 $\quad 0\le|x|<2$
$\therefore -2<x<2$
따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로 $\quad \frac{\beta}{\alpha}=-1$

1019 $x^2-5x\le|x-5|$에서
(i) $x\ge5$일 때,
$x^2-5x\le x-5$, $\quad x^2-6x+5\le0$
$(x-1)(x-5)\le0$ $\quad \therefore 1\le x\le5$
그런데 $x\ge5$이므로
$x=5$
(ii) $x<5$일 때,
$x^2-5x\le-(x-5)$, $\quad x^2-4x-5\le0$

$(x+1)(x-5) \le 0 \qquad \therefore -1 \le x \le 5$

그런데 $x<5$이므로

$-1 \le x < 5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1 \le x \le 5$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, \cdots, 5$의 7개이다. 답 7

1020 $|x^2-1|>3$에서

$x^2-1<-3$ 또는 $x^2-1>3$ ··· ❶

(i) $x^2-1<-3$에서

$x^2+2<0$

그런데 $x^2+2 \ge 2$이므로 해는 없다.

(ii) $x^2-1>3$에서

$x^2-4>0, \qquad (x+2)(x-2)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>2$ ··· ❷

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-2$ 또는 $x>2$ ··· ❸

답 $x<-2$ 또는 $x>2$

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

1021 이차부등식 $x^2-4x+a \le 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot a=0$

$4-a=0 \qquad \therefore a=4$ 답 ④

1022 이차부등식 $-x^2+kx-5 \ge 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $-x^2+kx-5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=0$

$k^2-20=0$

$\therefore k=-2\sqrt{5}$ 또는 $k=2\sqrt{5}$ ··· ❶

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$-2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}=-20$ ··· ❷

답 -20

채점 기준	비율
❶ k의 값을 모두 구할 수 있다.	70 %
❷ 모든 실수 k의 값의 곱을 구할 수 있다.	30 %

1023 주어진 이차부등식의 해가 오직 한 개 존재하므로

$a+1>0 \qquad \therefore a>-1$ ······ ㉠

이차방정식 $(a+1)x^2+2(a+1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a+1)\cdot 2=0$

$a^2-1=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$ 답 1

1024 이차부등식 $x^2-x+a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot a>0$

$1-4a>0 \qquad \therefore a<\frac{1}{4}$ 답 $a<\frac{1}{4}$

1025 이차부등식 $-2x^2+4x-a>0$이 해를 가지려면 이차방정식 $-2x^2+4x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-2)\cdot(-a)>0$

$4-2a>0 \qquad \therefore a<2$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. 답 ④

1026 (i) $a>0$일 때,

이차함수 $y=ax^2+4x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot a>0$

$4-a^2>0, \qquad (a+2)(a-2)<0$

$\therefore -2<a<2$

그런데 $a<0$이므로

$-2<a<0$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는

$-2<a<0$ 또는 $a>0$ 답 ②

참고 $a=0$이면 주어진 부등식이 이차부등식이 아니므로 $a \ne 0$이다.

1027 모든 실수 x에 대하여 $kx^2+4kx+8>0$이 성립해야 하므로 $k>0$ ······ ㉠

이차방정식 $kx^2+4kx+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-k\cdot 8<0$

$4k^2-8k<0, \qquad k(k-2)<0$

$\therefore 0<k<2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는

$0<k<2$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=2$ 답 ②

1028 모든 실수 x에 대하여 $x^2+(a+3)x+2a+3 \ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+(a+3)x+2a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+3)^2-4\cdot 1\cdot(2a+3) \le 0$

$a^2-2a-3 \le 0, \qquad (a+1)(a-3) \le 0$

$\therefore -1 \le a \le 3$ 답 $-1 \le a \le 3$

1029 실수 x의 값에 관계없이 $(k-1)x^2+2(k-1)x-1\le 0$이 항상 성립해야 하므로

$k-1<0 \quad \therefore k<1$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)\cdot(-1)\le 0$

$k^2-k\le 0, \quad k(k-1)\le 0$

$\therefore 0\le k\le 1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는

$0\le k<1$

따라서 정수 k는 0의 1개이다. 답 ①

1030 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-(k-8)x+k\ge 0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(k-8)x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k-8)\}^2-4\cdot 1\cdot k\le 0$

$k^2-20k+64\le 0, \quad (k-4)(k-16)\le 0$

$\therefore 4\le k\le 16$

따라서 k의 최댓값은 16, 최솟값은 4이므로 구하는 합은

$16+4=20$ 답 20

참고 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건은 이차부등식이 항상 성립할 조건으로 바꾸어 생각한다.

1031 이차부등식 $x^2-2ax+7a\le 0$을 만족시키는 해가 없으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-2ax+7a>0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2ax+7a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-7a<0$

$a^2-7a<0, \quad a(a-7)<0$

$\therefore 0<a<7$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, ⋯, 6의 6개이다. 답 ②

1032 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$-x^2+4(a+2)x+a+2\le 0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $-x^2+4(a+2)x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{2(a+2)\}^2-(-1)\cdot(a+2)\le 0$

$4a^2+17a+18\le 0, \quad (4a+9)(a+2)\le 0$

$\therefore -\frac{9}{4}\le a\le -2$

따라서 정수 a의 값은 -2이다. 답 ①

1033 주어진 이차부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$(k-4)x^2-2(k-4)x-1\le 0$

이 성립해야 하므로

$k-4<0 \quad \therefore k<4$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

이차방정식 $(k-4)x^2-2(k-4)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-4)\}^2-(k-4)\cdot(-1)\le 0$

$k^2-7k+12\le 0, \quad (k-3)(k-4)\le 0$

$\therefore 3\le k\le 4$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는

$3\le k<4$ ⋯ ❸

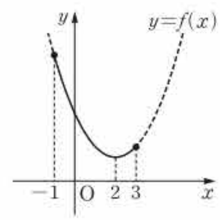
답 $3\le k<4$

채점 기준	비율
❶ x^2의 계수를 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차방정식의 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

1034 $f(x)=x^2-4x+2a^2-a+1$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2+2a^2-a-3$

$-1\le x\le 3$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-1\le x\le 3$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최소이므로 $f(2)>0$에서

$2a^2-a-3>0$

$(a+1)(2a-3)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$ 답 $a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$

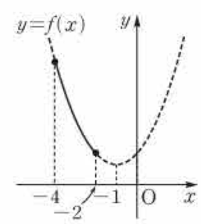
1035 $x^2+3x-1\ge x-4a^2$에서

$x^2+2x+4a^2-1\ge 0$

$f(x)=x^2+2x+4a^2-1$이라 하면

$f(x)=(x+1)^2+4a^2-2$

$-4\le x\le -2$에서 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-4\le x\le -2$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최소이므로 $f(-2)\ge 0$에서

$4a^2-1\ge 0$

$(2a+1)(2a-1)\ge 0$

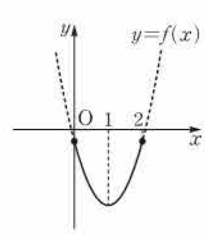
$\therefore a\le -\frac{1}{2}$ 또는 $a\ge \frac{1}{2}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 ①

1036 $f(x)=2x^2-4x+a^2-3a+2$라 하면

$f(x)=2(x-1)^2+a^2-3a$

$0\le x\le 2$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$0 \le x \le 2$에서 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=2$일 때 최대이므로 $f(0)<0$에서

$a^2-3a+2<0, \quad (a-1)(a-2)<0$

$\therefore 1<a<2$ 답 $1<a<2$

1037 $2x^2+5x-3 \le 0$에서 $\quad (x+3)(2x-1) \le 0$

$\therefore -3 \le x \le \frac{1}{2}$

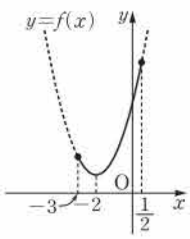
$-x^2+x \le 5x-a$에서 $\quad -x^2-4x+a \le 0$

$\therefore x^2+4x-a \ge 0$

$f(x)=x^2+4x-a$라 하면

$f(x)=(x+2)^2-a-4$

$-3 \le x \le \frac{1}{2}$에서 $f(x) \ge 0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-3 \le x \le \frac{1}{2}$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최소이므로 $f(-2) \ge 0$에서

$-a-4 \ge 0 \quad \therefore a \le -4$

따라서 실수 a의 최댓값은 -4이다. 답 -4

1038 $y=x^2-x+5$의 그래프가 직선 $y=2x+15$보다 위쪽에 있으면

$x^2-x+5>2x+15, \quad x^2-3x-10>0$

$(x+2)(x-5)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>5$ 답 $x<-2$ 또는 $x>5$

1039 $y=3x^2+2x-8$의 그래프가 직선 $y=-x+10$보다 아래쪽에 있으면

$3x^2+2x-8<-x+10, \quad 3x^2+3x-18<0$

$x^2+x-6<0, \quad (x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$

따라서 이 범위에 속하는 x의 값이 아닌 것은 ①이다. 답 ①

1040 $y=-x^2+ax-b$의 그래프가 직선 $y=-x+5$보다 위쪽에 있으면

$-x^2+ax-b>-x+5$

$\therefore x^2-(a+1)x+b+5<0$ …… ㉠

해가 $5<x<6$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-5)(x-6)<0$

$\therefore x^2-11x+30<0$ …… ㉡

이때 ㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$a+1=11,\ b+5=30$

따라서 $a=10,\ b=25$이므로

$b-a=15$ 답 ③

1041 $y=2x^2-3x-3$의 그래프가 $y=x^2+mx+n$의 그래프보다 아래쪽에 있으면

$2x^2-3x-3<x^2+mx+n$

$\therefore x^2-(3+m)x-(3+n)<0$ …… ㉠ ··· ❶

해가 $-1<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-2)<0$

$\therefore x^2-x-2<0$ …… ㉡ ··· ❷

이때 ㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$3+m=1,\ 3+n=2$

따라서 $m=-2,\ n=-1$이므로

$m+n=-3$ ··· ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 두 그래프의 위치 관계를 이용하여 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 해가 $-1<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1042 $y=-2x^2-4x+1$의 그래프가 직선 $y=ax+3$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $-2x^2-4x+1<ax+3$, 즉 $2x^2+(4+a)x+2>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $2x^2+(4+a)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(4+a)^2-4 \cdot 2 \cdot 2<0$

$a^2+8a<0, \quad a(a+8)<0$

$\therefore -8<a<0$ 답 $-8<a<0$

라쎈 특강

'항상 아래쪽에 있도록'이라는 말에서 '부등식이 항상 성립하도록'이라는 말을 떠올릴 수 있어야 한다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있다는 것은 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립함을 뜻한다. 따라서 부등식 $f(x)-g(x)<0$이 항상 성립할 조건을 이용한다.

1043 $y=x^2-3x+1$의 그래프가 직선 $y=kx-3$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-3x+1>kx-3$, 즉 $x^2-(3+k)x+4>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(3+k)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3+k)\}^2-4 \cdot 1 \cdot 4<0$

$k^2+6k-7<0, \quad (k+7)(k-1)<0$

$\therefore -7<k<1$

따라서 정수 k의 최댓값은 0, 최솟값은 -6이므로

$M=0,\ m=-6$

$\therefore Mm=0$ 답 ③

1044 $y=x^2-kx$의 그래프는 아래로 볼록하므로 이 그래프가 직선 $y=-3$과 만나지 않으려면 $y=x^2-kx$의 그래프가 직선 $y=-3$보다 항상 위쪽에 있어야 한다. ··· ❶

모든 실수 x에 대하여 $x^2-kx>-3$, 즉 $x^2-kx+3>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-kx+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4 \cdot 1 \cdot 3<0$

$k^2-12<0, \quad (k+2\sqrt{3})(k-2\sqrt{3})<0$

$\therefore -2\sqrt{3}<k<\underbrace{2\sqrt{3}}_{3<2\sqrt{3}<4}$ ··· ❷

따라서 정수 k는 $-3, -2, -1, \cdots, 3$의 7개이다. ··· ❸

답 7

08 이차부등식

채점 기준	비율
❶ $y=x^2-kx$의 그래프와 직선 $y=-3$의 위치 관계를 알 수 있다.	30 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1045 가격을 x만 원 인상한다고 하면 구두의 가격은 $(10+x)$만 원이고 하루 판매량은 $\underline{(30-2x)}$켤레이므로 하루 판매액이 308만 원 이상이 되려면

$30-2x>0$이어야 하므로 $0<x<15$

$(10+x)(30-2x)\geq 308$

$-2x^2+10x+300\geq 308$

$x^2-5x+4\leq 0,\quad (x-1)(x-4)\leq 0$

$\therefore 1\leq x\leq 4$

따라서 x의 최댓값은 4이다.

답 4

1046 야구공의 높이가 3.2 m 이상이려면

$-5t^2+8t+0.8\geq 3.2,\quad 5t^2-8t+2.4\leq 0$

$25t^2-40t+12\leq 0,\quad (5t-2)(5t-6)\leq 0$

$\therefore \frac{2}{5}\leq t\leq \frac{6}{5}$

따라서 야구공의 높이가 3.2 m 이상인 시간은

$\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$(초)

동안이다.

답 ②

1047 도로의 폭을 x m라 하면 도로를 제외한 땅을 직사각형 모양으로 이어 붙였을 때 가로, 세로의 길이는 각각

$\underline{(40-x)\text{ m},\ (30-x)\text{ m}}$

$40-x>0$, $30-x>0$이어야 하므로 $0<x<30$

이므로 도로를 제외한 땅의 넓이가 600 m² 이상이 되려면

$(40-x)(30-x)\geq 600$ ··· ❶

$x^2-70x+600\geq 0,\quad (x-10)(x-60)\geq 0$

$\therefore x\leq 10$ 또는 $x\geq 60$

그런데 $0<x<30$이어야 하므로

$0<x\leq 10$ ··· ❷

따라서 도로의 최대 폭은 10 m이다. ··· ❸

답 10 m

채점 기준	비율
❶ 도로의 폭을 x m라 하고 x에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 도로의 최대 폭을 구할 수 있다.	20 %

1048 $x^2+3x-10>0$에서 $\quad (x+5)(x-2)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>2$ ······ ㉠

$x^2-x-12\leq 0$에서 $\quad (x+3)(x-4)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x\leq 4$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로

$ab=8$

답 ④

1049 $2x+6<0$에서 $\quad x<-3$ ······ ㉠

$x^2+6x-7<0$에서 $\quad (x+7)(x-1)<0$

$\therefore -7<x<1$ ······ ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-7<x<-3$ ··· ❷

따라서 정수 x는 -6, -5, -4이므로 구하는 합은

$-6+(-5)+(-4)=-15$ ··· ❸

답 -15

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

1050 $|x-2|<6$에서 $\quad -6<x-2<6$

$\therefore -4<x<8$ ······ ㉠

$x^2-10x+9>0$에서 $\quad (x-1)(x-9)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>9$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<x<1$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0의 4개이다.

답 ③

1051 $x^2+5x-3\leq 3x^2$에서 $\quad 2x^2-5x+3\geq 0$

$(x-1)(2x-3)\geq 0$

$\therefore x\leq 1$ 또는 $x\geq \frac{3}{2}$ ······ ㉠

$3x^2\leq -x+2$에서 $\quad 3x^2+x-2\leq 0$

$(x+1)(3x-2)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq \frac{2}{3}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\leq x\leq \frac{2}{3}$

따라서 실수 x의 최댓값은 $\frac{2}{3}$이다.

답 $\frac{2}{3}$

1052 $x^2+x-2\geq 0$에서 $\quad (x+2)(x-1)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 1$ ······ ㉠

$x^2+4\leq 9x-x^2$에서 $\quad 2x^2-9x+4\leq 0$

$(2x-1)(x-4)\leq 0$

$\therefore \frac{1}{2}\leq x\leq 4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1\leq x\leq 4$

해가 $1\leq x\leq 4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-4)\leq 0\quad \therefore x^2-5x+4\leq 0$

양변에 -2를 곱하면

$-2x^2+10x-8\geq 0$

이 부등식이 $ax^2+10x+b\geq 0$과 같으므로

$a=-2$, $b=-8$

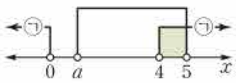
$\therefore a-b=6$

답 ④

1053 $x^2-4x>0$에서 $\quad x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$ ...... ㉠

㉠과 $(x-a)(x-5)<0$의 해의 공통부분이 $4<x<5$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$0\le a\le 4$

답 $0\le a\le 4$

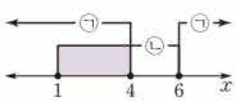
라쎈 특강

부등식 문제에서 어떤 범위의 경계가 되는 값의 포함 여부는 그 값을 부등식에 대입하여 주어진 조건을 만족시키는지 확인하여 정한다.
이 문제에서 $a=0$이면 $(x-a)(x-5)<0$의 해가 $0<x<5$이므로 ㉠과의 공통부분이 $4<x<5$가 된다. 또 $a=4$이면 $(x-a)(x-5)<0$의 해가 $4<x<5$이므로 ㉠과의 공통부분이 $4<x<5$가 된다. 즉 $a=0$, $a=4$는 모두 주어진 조건을 만족시키므로 a의 값의 범위에 포함된다.

1054 연립부등식

$$\begin{cases} x^2+ax+b\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+cx+d\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해가 $1\le x\le 4$ 또는 $x=6$이려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $x^2+ax+b\ge 0$의 해는 $x\le 4$ 또는 $x\ge 6$이므로

$(x-4)(x-6)\ge 0, \quad x^2-10x+24\ge 0$

$\therefore a=-10,\ b=24$

또 $x^2+cx+d\le 0$의 해는 $1\le x\le 6$이므로

$(x-1)(x-6)\le 0, \quad x^2-7x+6\le 0$

$\therefore c=-7,\ d=6$

$\therefore a+b+c+d=13$

답 ③

참고 $x^2+ax+b\ge 0$의 해는 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$ 꼴이고, $x^2+cx+d\le 0$의 해는 $\gamma\le x\le\delta$ 꼴이다.

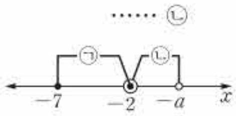
1055 $x^2+9x+14\le 0$에서 $\quad (x+7)(x+2)\le 0$

$\therefore -7\le x\le -2$ ...... ㉠

$x^2+(a+2)x+2a<0$에서

$(x+2)(x+a)<0$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-a\ge -2 \quad \therefore a\le 2$

답 ③

1056 $x^2+2x-15>0$에서 $\quad (x+5)(x-3)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>3$ ...... ㉠

$|x-a|\le 1$에서 $\quad -1\le x-a\le 1$

$\therefore a-1\le x\le a+1$ ...... ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하려면

$a-1<-5$ 또는 $a+1>3$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>2$ ··· ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다. ··· ❸

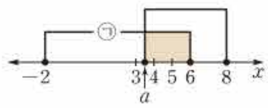
답 3

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

1057 $x^2-4x-12\le 0$에서 $\quad (x+2)(x-6)\le 0$

$\therefore -2\le x\le 6$ ...... ㉠

㉠과 $(x-8)(x-a)\le 0$을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 3이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$3<a\le 4$

답 $3<a\le 4$

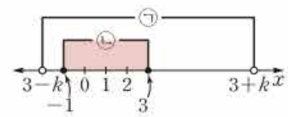
1058 $|x-3|<k$에서 $\quad -k<x-3<k$

$\therefore 3-k<x<3+k$ ...... ㉠

$x^2-2x-3\le 0$에서 $\quad (x+1)(x-3)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 5이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) $3-k<-1$에서 $\quad k>4$

(ii) $3+k>3$에서 $\quad k>0$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는 $\quad k>4$

따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다.

답 5

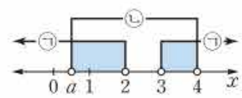
1059 $x^2-5x+6>0$에서 $\quad (x-2)(x-3)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>3$ ...... ㉠

$x^2-(a+4)x+4a<0$에서

$(x-a)(x-4)<0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 1뿐이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$0\le a<1$

답 ②

참고 $a=1$이면 $(x-a)(x-4)<0$의 해가 $1<x<4$이므로 ㉠과의 공통부분이 $1<x<2$ 또는 $3<x<4$가 된다. 즉 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 존재하지 않는다.

1060 $x-1,\ x,\ x+1$은 변의 길이이므로

$x-1>0 \quad \therefore x>1$ ...... ㉠

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+1$이므로 삼각형이 만들어질 조건에 의하여

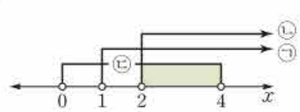
$x+1<(x-1)+x \quad \therefore x>2$ ...... ㉡

둔각삼각형이 되려면

$(x+1)^2>(x-1)^2+x^2$

$x^2-4x<0, \quad x(x-4)<0$

$\therefore 0<x<4$ ...... ㉢



㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$2<x<4$

08 이차부등식

따라서 정수 x의 값은 3이다. 답 ①

라쎈 특강

삼각형의 변의 길이와 모양

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\le b\le c)$일 때

① $c^2<a^2+b^2$ → 예각삼각형

② $c^2=a^2+b^2$ → 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

③ $c^2>a^2+b^2$ → 둔각삼각형

1061 테두리 장식의 넓이는

$(2x+20)(2x+15)-20\cdot 15=4x^2+70x\,(\text{cm}^2)$

테두리 장식의 넓이가 114 cm^2 이상 200 cm^2 이하이어야 하므로

$114\le 4x^2+70x\le 200$

$\therefore 57\le 2x^2+35x\le 100$

$57\le 2x^2+35x$에서

$2x^2+35x-57\ge 0,\quad (x+19)(2x-3)\ge 0$

$\therefore x\le -19$ 또는 $x\ge \frac{3}{2}$

그런데 $x>0$이므로

$x\ge \frac{3}{2}$ …… ㉠

$2x^2+35x\le 100$에서

$2x^2+35x-100\le 0,\quad (x+20)(2x-5)\le 0$

$\therefore -20\le x\le \frac{5}{2}$

그런데 $x>0$이므로

$0<x\le \frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{3}{2}\le x\le \frac{5}{2}$ 답 $\frac{3}{2}\le x\le \frac{5}{2}$

1062 새로 만든 직육면체의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이, 높이는 각각 $a+5$, a, $a-3$이므로

$a-3>0\quad \therefore a>3$ …… ㉠ ⋯ ❶

이 직육면체의 부피는 $a(a+5)(a-3)$이고 처음 정육면체의 부피는 a^3이므로

$a(a+5)(a-3)<a^3$

$2a^2-15a<0,\quad a(2a-15)<0$

$\therefore 0<a<\frac{15}{2}$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3<a<\frac{15}{2}$ ⋯ ❸

따라서 자연수 a는 4, 5, 6, 7의 4개이다. ⋯ ❹

답 4

채점 기준	비율
❶ 길이를 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❷ 부피를 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ 자연수 a의 개수를 구할 수 있다.	10 %

1063 △AQP, △PRC는 모두 직각이등변삼각형이므로

$\overline{QP}=\overline{AQ}=a,\ \overline{RC}=\overline{PR}=9-a$

따라서 □PQBR의 넓이는 $a(9-a)$

△AQP의 넓이는 $\frac{1}{2}a^2$

△PRC의 넓이는 $\frac{1}{2}(9-a)^2$

□PQBR의 넓이가 △AQP의 넓이보다 크므로

$a(9-a)>\frac{1}{2}a^2,\quad 3a^2-18a<0$

$3a(a-6)<0$

$\therefore 0<a<6$ …… ㉠

또 □PQBR의 넓이가 △PRC의 넓이보다 크므로

$a(9-a)>\frac{1}{2}(9-a)^2,\quad a^2-12a+27<0$

$(a-3)(a-9)<0$

$\therefore 3<a<9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3<a<6$

따라서 자연수 a는 4, 5이므로 구하는 곱은

$4\cdot 5=20$ 답 ③

1064 이차방정식 $x^2+2kx+3k=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3k>0,\quad k(k-3)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>3$

따라서 실수 k의 값이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

1065 이차방정식 $x^2-4kx+k^2+1=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(k^2+1)<0$

$3k^2-1<0,\quad (\sqrt{3}k+1)(\sqrt{3}k-1)<0$

$\therefore -\frac{1}{\sqrt{3}}<k<\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$\alpha\beta=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

1066 이차방정식 $x^2-2kx+9=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-9<0$

$k^2-9<0,\quad (k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2kx+k+2=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=k^2-(k+2)\ge 0$

$k^2-k-2\ge 0,\quad (k+1)(k-2)\ge 0$

$\therefore k\le -1$ 또는 $k\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3<k\le-1$ 또는 $2\le k<3$

따라서 정수 k는 -2, -1, 2의 3개이다. 답 ③

1067 이차방정식 $x^2+2(1-k)x-k^2-ak-1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(1-k)^2-(-k^2-ak-1)\ge0$

$\therefore 2k^2+(a-2)k+2\ge0$

이 이차부등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 k에 대한 이차방정식 $2k^2+(a-2)k+2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(a-2)^2-4\cdot2\cdot2\le0$

$a^2-4a-12\le0$, $(a+2)(a-6)\le0$

$\therefore -2\le a\le6$ 답 $-2\le a\le6$

1068 이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}kx+k+1=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

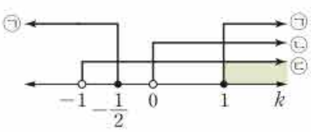
(i) $\frac{D}{4}=(-\sqrt{2}k)^2-(k+1)\ge0$

$2k^2-k-1\ge0$, $(2k+1)(k-1)\ge0$

$\therefore k\le-\frac{1}{2}$ 또는 $k\ge1$ ...... ㉠

(ii) $\alpha+\beta=2\sqrt{2}k>0$ $\therefore k>0$ ...... ㉡

(iii) $\alpha\beta=k+1>0$ $\therefore k>-1$ ...... ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$k\ge1$ 답 $k\ge1$

1069 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+5-k=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

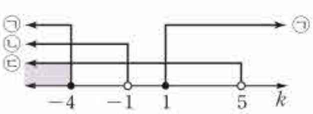
(i) $\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(5-k)\ge0$

$k^2+3k-4\ge0$, $(k+4)(k-1)\ge0$

$\therefore k\le-4$ 또는 $k\ge1$ ...... ㉠

(ii) $\alpha+\beta=2(k+1)<0$ $\therefore k<-1$ ...... ㉡

(iii) $\alpha\beta=5-k>0$ $\therefore k<5$ ...... ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$k\le-4$

따라서 실수 k의 최댓값은 -4이다. 답 ②

1070 이차방정식 $x^2-(k-1)(k-2)x-k+2=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=-k+2<0$ $\therefore k>2$ ...... ㉠ ··· ❶

또 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작으므로

$\alpha+\beta=(k-1)(k-2)>0$

$\therefore k<1$ 또는 $k>2$ ...... ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$k>2$ ··· ❸

답 $k>2$

채점 기준	비율
❶ 두 근의 부호가 다름을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작음을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

라쎈 특강

근의 절댓값에 대한 조건

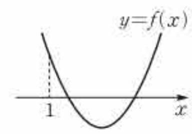
이차방정식의 두 근이 서로 다른 부호일 때

① |양수인 근|=|음수인 근|
→ (두 근의 합)=0, (두 근의 곱)<0

② |양수인 근|>|음수인 근|
→ (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)<0

③ |양수인 근|<|음수인 근|
→ (두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0

1071 $f(x)=x^2+ax+9$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot1\cdot9\ge0$

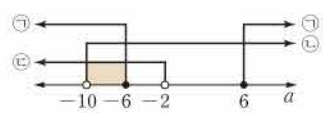
$a^2-36\ge0$, $(a+6)(a-6)\ge0$

$\therefore a\le-6$ 또는 $a\ge6$ ...... ㉠

(ii) $f(1)=1+a+9>0$에서 $a>-10$ ...... ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{a}{2}$이므로

$-\frac{a}{2}>1$ $\therefore a<-2$ ...... ㉢

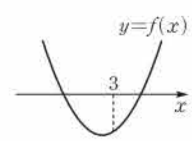


이상에서 공통부분을 구하면

$-10<a\le-6$

따라서 정수 a는 -9, -8, -7, -6의 4개이다. 답 ④

1072 $f(x)=x^2+(k-1)x+k^2-10$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(3)<0$이어야 하므로

$9+3(k-1)+k^2-10<0$

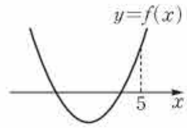
$k^2+3k-4<0$, $(k+4)(k-1)<0$

$\therefore -4<k<1$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=-3$ 답 ②

1073 $f(x)=x^2-2kx+k+20$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 5보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+20)\geq 0$$

$k^2-k-20\geq 0$, $(k+4)(k-5)\geq 0$

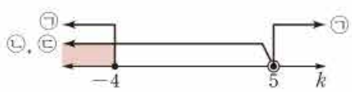
$\therefore k\leq -4$ 또는 $k\geq 5$ ······ ㉠ ··· ❶

(ii) $f(5)=25-10k+k+20>0$에서

$-9k>-45$ $\therefore k<5$ ······ ㉡ ··· ❷

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k<5$ ······ ㉢ ··· ❸



이상에서 공통부분을 구하면

$k\leq -4$ ··· ❹

답 $k\leq -4$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식의 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 함숫값을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 축의 방정식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	10 %

1074 **전략** 부등식 $f(x)-g(x)\leq 0$, 즉 $f(x)\leq g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac>0$

ㄴ. $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 직선 $y=px+q$의 y절편 q가 양수이므로 ($x>0$일 때, $f(x)>0$)

$f(q)=aq^2+bq+c>0$

ㄷ. $ax^2+(b-p)x+c-q\leq 0$에서

$ax^2+bx+c-(px+q)\leq 0$

$\therefore ax^2+bx+c\leq px+q$

부등식 $ax^2+bx+c\leq px+q$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=px+q$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\alpha\leq x\leq \beta$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 ㄷ. $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=px+q$의 교점의 x좌표가 α, β이므로 $ax^2+bx+c=px+q$, 즉 $ax^2+(b-p)x+c-q=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다.

$\therefore ax^2+(b-p)x+c-q=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$ax^2+(b-p)x+c-q\leq 0$에서

$a(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$

이때 $a>0$이므로 부등식의 해는

$\alpha\leq x\leq \beta$

1075 **전략** 각 부등식의 좌변을 $a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다. 이때 x^2의 계수가 음수이면 부등식의 양변에 -1을 곱한다.

풀이 ㄱ. $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geq 0$

따라서 $4x^2-4x+1\geq 0$의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$

따라서 $x^2+x+1\leq 0$의 해는 없다.

ㄷ. $-x^2+8x-16>0$에서

$x^2-8x+16<0$

그런데 $x^2-8x+16=(x-4)^2\geq 0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

ㄹ. $-3x^2+x-1\leq 0$에서

$3x^2-x+1\geq 0$

그런데 $3x^2-x+1=3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{12}\geq\frac{11}{12}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

이상에서 해가 모든 실수인 부등식은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

1076 **전략** 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$임을 이용한다.

풀이 해가 $-4<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

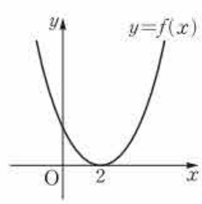
$(x+4)(x-3)<0$ $\therefore x^2+x-12<0$

따라서 $a=1$, $b=-12$이므로

$a-b=13$ 답 ⑤

1077 **전략** 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\neq k$인 모든 실수이면 $f(x)=a(x-k)^2\ (a>0)$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\neq 2$인 모든 실수이므로 이차함수 $f(x)$에서 x^2의 계수는 양수이고 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 점 $(2, 0)$에서 접한다.



즉 $f(x)=a(x-2)^2(a>0)$이라 하면 조건 (가)에서 $f(0)=8$이므로

$4a=8$ $\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(x-2)^2$이므로

$f(5)=2\cdot(5-2)^2=18$ 답 ④

1078 **전략** 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 오직 한 개이면 $a<0$임을 파악하고, a, b, c 사이의 관계식을 먼저 구한다.

풀이 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 3뿐이므로 $a<0$이고

$ax^2+bx+c=a(x-3)^2$

즉 $ax^2+bx+c=ax^2-6ax+9a$이므로

$b=-6a$, $c=9a$

이것을 $bx^2+cx+6a<0$에 대입하면

$-6ax^2+9ax+6a<0$, $-3a(2x^2-3x-2)<0$

$2x^2-3x-2<0$ ($\because -3a>0$)

$(2x+1)(x-2)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<2$ 답 $-\frac{1}{2}<x<2$

1079 전략 이차함수 $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)$에 대하여 $f(x-a)=p(x-a-\alpha)(x-a-\beta)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-x-12=(x+3)(x-4)$이므로

$$f(x-1)=(x-1+3)(x-1-4)=(x+2)(x-5)$$

즉 부등식 $f(x-1)<0$의 해는 $(x+2)(x-5)<0$에서

$-2<x<5$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, \cdots, 4$이므로 구하는 합은

$-1+0+1+2+3+4=9$ 답 ③

1080 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나눈다.

풀이 $x^2-2x-5<|x-1|$에서

(i) $x\geq1$일 때,

$x^2-2x-5<x-1$, $x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0$ $\therefore -1<x<4$

그런데 $x\geq1$이므로

$1\leq x<4$

(ii) $x<1$일 때,

$x^2-2x-5<-(x-1)$, $x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0$ $\therefore -2<x<3$

그런데 $x<1$이므로

$-2<x<1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-2<x<4$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, 2, 3$의 5개이다. 답 5

1081 전략 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$의 해가 오직 한 개 존재하면 $a<0$, $b^2-4ac=0$임을 이용한다.

풀이 이차부등식 $(1-k)x^2+2(k-1)x-1\geq0$의 해가 오직 한 개 존재하므로

$1-k<0$ $\therefore k>1$ …… ㉠

이차방정식 $(1-k)x^2+2(k-1)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(1-k)\cdot(-1)=0$$

$k^2-3k+2=0$, $(k-1)(k-2)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=2$ 답 ③

1082 전략 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq0$이 항상 성립하려면 $a<0$, $b^2-4ac\leq0$이어야 함을 이용한다.

풀이 실수 x의 값에 관계없이 $ax^2-4\sqrt{2}x+a+2\leq0$이 항상 성립해야 하므로

$a<0$ …… ㉠

이차방정식 $ax^2-4\sqrt{2}x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2\sqrt{2})^2-a(a+2)\leq0$$

$a^2+2a-8\geq0$, $(a+4)(a-2)\geq0$

$\therefore a\leq-4$ 또는 $a\geq2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a\leq-4$

따라서 실수 a의 최댓값은 -4이다. 답 ②

1083 전략 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 해를 갖지 않으면 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$이 항상 성립함을 이용한다.

풀이 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2+8x+a-6\geq0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+8x+a-6=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4^2-(a-6)\leq0$$

$-a+22\leq0$ $\therefore a\geq22$

따라서 실수 a의 최솟값은 22이다. 답 22

1084 전략 $\alpha\leq x\leq\beta$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $\alpha\leq x\leq\beta$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0이어야 함을 이용한다.

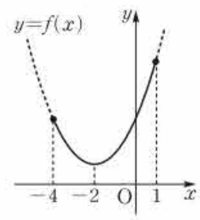
풀이 $x^2-4x<2x^2+a^2-3a$에서

$x^2+4x+a^2-3a>0$

$f(x)=x^2+4x+a^2-3a$라 하면

$f(x)=(x+2)^2+a^2-3a-4$

$-4\leq x\leq1$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-4\leq x\leq1$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최소이므로 $f(-2)>0$에서

$a^2-3a-4>0$

$(a+1)(a-4)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>4$ 답 $a<-1$ 또는 $a>4$

1085 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 이차부등식 $f(x)<g(x)$의 해와 같음을 이용한다.

풀이 $y=x^2-4x$의 그래프가 직선 $y=a$보다 아래쪽에 있으면

$x^2-4x<a$

$\therefore x^2-4x-a<0$ …… ㉠

해가 $b<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-b)(x-5)<0$

$\therefore x^2-(b+5)x+5b<0$ …… ㉡

이때 ㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$4=b+5$, $-a=5b$

따라서 $a=5$, $b=-1$이므로

$ab=-5$ 답 ①

1086 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으려면 이차부등식 $f(x)>g(x)$가 항상 성립해야 함을 이용한다.

풀이 $y=x^2-x+2$의 그래프가 직선 $y=x+k-1$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+2>x+k-1$, 즉 $x^2-2x-k+3>0$이 성립해야 한다.

08 이차부등식

이차방정식 $x^2-2x-k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-k+3)<0$

$1+k-3<0 \qquad \therefore k<2$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다. 답 ④

1087 전략 새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이를 이용하여 부등식을 세운다.

풀이 새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각

$(20-x)$ cm, $(16+x)$ cm

이므로 넓이가 288 cm^2 이상이 되려면

$(20-x)(16+x)\ge 288, \qquad 320+4x-x^2\ge 288$

$x^2-4x-32\le 0, \qquad (x+4)(x-8)\le 0$

$\therefore -4\le x\le 8$

그런데 $0<\underline{x<20}$이어야 하므로 ($20-x>0$이어야 하므로 $x<20$)

$0<x\le 8$

따라서 x의 최댓값은 8이다. 답 ①

1088 전략 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 구한다.

풀이 $x^2-3x-18\le 0$에서 $\qquad (x+3)(x-6)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 6$ …… ㉠

$x^2-8x+15\ge 0$에서 $\qquad (x-3)(x-5)\ge 0$

$\therefore x\le 3$ 또는 $x\ge 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x\le 3$ 또는 $5\le x\le 6$

따라서 정수 x는

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6$

이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+1+2+3+5+6=11$ 답 ⑤

1089 전략 $A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

풀이 $-x^2-3x+4\le x^2-x-8$에서

$-2x^2-2x+12\le 0$

$x^2+x-6\ge 0, \qquad (x+3)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 2$ …… ㉠

$x^2-x-8<2x^2-5x-4$에서

$-x^2+4x-4<0$

$x^2-4x+4>0, \qquad (x-2)^2>0$

$\therefore x\ne 2$인 모든 실수 …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\le -3$ 또는 $x>2$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=2$이므로

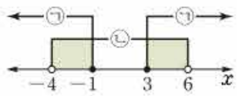
$\alpha+\beta=-1$ 답 -1

1090 전략 각 부등식의 해의 공통부분이 주어진 해와 일치하도록 수직선 위에 나타낸다.

풀이 연립부등식

$\begin{cases} x^2-2x+a\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2x+b<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해가 $-4<x\le -1$ 또는 $3\le x<6$이려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $x^2-2x+a\ge 0$의 해는 $x\le -1$ 또는 $x\ge 3$이므로

$(x+1)(x-3)\ge 0, \qquad x^2-2x-3\ge 0$

$\therefore a=-3$

또 $x^2-2x+b<0$의 해는 $-4<x<6$이므로

$(x+4)(x-6)<0, \qquad x^2-2x-24<0$

$\therefore b=-24$

$\therefore a-b=21$ 답 21

1091 전략 각 부등식의 해를 구하여 공통부분이 존재하도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2+4x-21\le 0$에서 $\qquad (x+7)(x-3)\le 0$

$\therefore -7\le x\le 3$ …… ㉠

$x^2-5kx-6k^2>0$에서

$(x+k)(x-6k)>0$

$\therefore x<-k$ 또는 $x>6k$ ($\because k>0$) …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하려면

$-k>-7$ 또는 $6k<3$

$k<7$ 또는 $k<\frac{1}{2}$

$\therefore k<7$

따라서 양의 정수 k는 1, 2, 3, …, 6의 6개이다. 답 ③

1092 전략 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 5가 되도록 수직선 위에 나타낸다.

풀이 $x^2-2x-3\ge 0$에서 $\qquad (x+1)(x-3)\ge 0$

$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 3$

$x^2-(5+k)x+5k\le 0$에서

$(x-5)(x-k)\le 0$

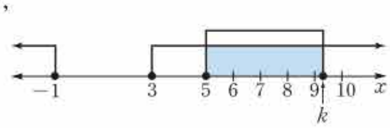
(i) $k<5$일 때,

정수 x의 개수가 5가 되려면 위의 그림과 같아야 하므로

$-3<k\le -2$

따라서 정수 k의 값은 -2이다.

(ii) $k\ge 5$일 때,



정수 x의 개수가 5가 되려면 위의 그림과 같아야 하므로

$9\le k<10$

따라서 정수 k의 값은 9이다.

(i), (ii)에서 모든 정수 k의 값의 곱은

$-2\cdot 9=-18$ 답 ④

1093 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 y절편을 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.

풀이 $f(0)=k^2+4$이므로

$\underline{A(0,\ k^2+4)}$ 점 A는 y축 위의 점이다.

$-x^2+2kx+k^2+4=k^2+4$에서

$x^2-2kx=0, \quad x(x-2k)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2k$ 점 B는 점 A와 y좌표가 같다.

$\therefore \underline{B(2k,\ k^2+4)},\ \underline{C(2k,\ 0)}$ 점 C는 점 B와 x좌표가 같다.

이때 $k>0$이므로

$\overline{OA}=k^2+4,\ \overline{OC}=2k$

$\therefore g(k)=2\{2k+(k^2+4)\}=2k^2+4k+8$

$14\le g(k)\le 78$에서 $\quad 14\le 2k^2+4k+8\le 78$

$\therefore 7\le k^2+2k+4\le 39$, 즉 $\begin{cases} 7\le k^2+2k+4 \\ k^2+2k+4\le 39 \end{cases}$

$7\le k^2+2k+4$에서 $\quad k^2+2k-3\ge 0$

$(k+3)(k-1)\ge 0$

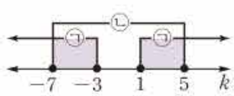
$\therefore k\le -3$ 또는 $k\ge 1$ …… ㉠

$k^2+2k+4\le 39$에서 $\quad k^2+2k-35\le 0$

$(k+7)(k-5)\le 0$

$\therefore -7\le k\le 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-7\le k\le -3$ 또는 $1\le k\le 5$

그런데 $k>0$이므로

$1\le k\le 5$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

답 15

1094 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$, 허근을 가지면 $D<0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $2x^2-ax+3a=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4\cdot 2\cdot 3a<0$

$a^2-24a<0, \quad a(a-24)<0$

$\therefore 0<a<24$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2ax+2-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(-a)^2-(2-a)>0$

$a^2+a-2>0, \quad (a+2)(a-1)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<a<24$

답 $1<a<24$

1095 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 부호가 서로 다르면 $\dfrac{c}{a}<0$임을 이용한다.

풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=k^2-4k-12<0, \quad (k+2)(k-6)<0$

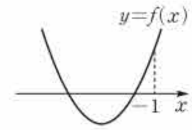
$\therefore -2<k<6$

따라서 정수 k의 최댓값은 5이다.

답 ①

1096 전략 $f(x)=x^2-4ax+8$이라 하고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 조건에 맞게 그려 본다.

풀이 $f(x)=x^2-4ax+8$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2a)^2-8\ge 0$

$4a^2-8\ge 0, \quad a^2-2\ge 0$

$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})\ge 0$

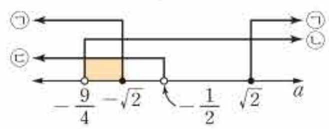
$\therefore a\le -\sqrt{2}$ 또는 $a\ge \sqrt{2}$ …… ㉠

(ii) $f(-1)=1+4a+8>0$에서 $\quad 4a>-9$

$\therefore a>-\dfrac{9}{4}$ …… ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2a$이므로

$2a<-1 \quad \therefore a<-\dfrac{1}{2}$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$-\dfrac{9}{4}<a\le -\sqrt{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\sqrt{2}$이다.

답 $-\sqrt{2}$

1097 전략 주어진 그래프를 이용하여 먼저 이차함수의 식을 구한다.

풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(4,\ 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+1)(x-4)\,(a>0)$

로 놓을 수 있다.

이때 이 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=a\cdot 1\cdot(-4) \quad \therefore a=\dfrac{1}{2}$ … ❶

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)(x-4)$이므로 $f(x)<3$에서

$\dfrac{1}{2}(x+1)(x-4)<3, \quad x^2-3x-10<0$

$(x+2)(x-5)<0$

$\therefore -2<x<5$ … ❷

답 $-2<x<5$

채점 기준	비율
❶ $f(x)=a(x+1)(x-4)$로 놓고 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 부등식 $f(x)<3$의 해를 구할 수 있다.	60 %

1098 전략 해가 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta\,(\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)\ge 0$임을 이용한다.

풀이 해가 $x\le -2$ 또는 $x\ge 4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-4)\ge 0$

$\therefore x^2-2x-8\ge 0$ … ❶

이 부등식이 $-x^2+ax+b\le0$, 즉 $x^2-ax-b\ge0$과 같으므로

$a=2$, $b=8$

$\therefore\ a+b=10$ ⋯ ❷

답 10

채점 기준	비율
❶ 해가 $x\le-2$ 또는 $x\ge4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	50 %

1099 전략 $\sqrt{A}$가 실수가 되려면 $A\ge0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $\sqrt{x^2-2(k+2)x-k}$가 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2(k+2)x-k\ge0$이 성립해야 한다. ⋯ ❶

이차방정식 $x^2-2(k+2)x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(-k)\le0$ ⋯ ❷

$k^2+5k+4\le0$, $(k+4)(k+1)\le0$

$\therefore\ -4\le k\le-1$ ⋯ ❸

답 $-4\le k\le-1$

채점 기준	비율
❶ $x^2-2(k+2)x-k\ge0$임을 알 수 있다.	30 %
❷ 판별식을 이용하여 k에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

1100 전략 물체의 높이 y m가 지면으로부터 5 m 이상이면 $y\ge5$임을 이용하여 t에 대한 이차부등식을 세운다.

풀이 물체의 높이 y m가 5 m 이상이면

$10-5t^2\ge5$ ⋯ ❶

$t^2-1\le0$, $(t+1)(t-1)\le0$

$\therefore\ -1\le t\le1$

그런데 $t\ge0$이므로

$0\le t\le1$ ⋯ ❷

따라서 높이가 5 m 이상인 시간은 1초 동안이다. ⋯ ❸

답 1초

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 높이가 5 m 이상인 시간을 구할 수 있다.	20 %

1101 전략 각 부등식을 풀어 해의 공통부분을 생각한다.

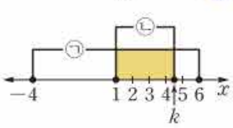
풀이 $x^2-2x-24\le0$에서 $(x+4)(x-6)\le0$

$\therefore\ -4\le x\le6$ ⋯⋯ ㉠

$x^2-(k+1)x+k\le0$에서

$(x-1)(x-k)\le0$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❶

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 x의 개수가 4이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$4\le k<5$ ⋯ ❷

답 $4\le k<5$

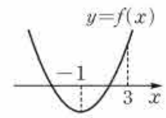
채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

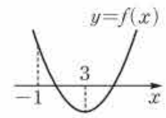
1102 전략 이차방정식 $x^2-2x-3=0$의 해를 이용하여 이차함수 $y=x^2+2ax+9$의 그래프의 개형을 생각한다.

풀이 $x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$ ⋯ ❶

즉 $x^2+2ax+9=0$의 한 근이 -1과 3 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2+2ax+9$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.





즉 $f(-1)f(3)<0$이므로

$(1-2a+9)(9+6a+9)<0$

$(10-2a)(6a+18)<0$, $(a+3)(a-5)>0$

$\therefore\ a<-3$ 또는 $a>5$ ⋯ ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $x^2-2x-3=0$의 두 근을 구할 수 있다.	20 %
❷ a에 대한 이차부등식을 세우고, 그 해를 구할 수 있다.	60 %
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $a=-3$이면 $x^2-6x+9=0$에서

$(x-3)^2=0$ $\therefore\ x=3$

즉 $x^2-6x+9=0$의 두 근 중 -1과 3 사이에 있는 근은 없다.

또 $a=5$이면 $x^2+10x+9=0$에서

$(x+9)(x+1)=0$ $\therefore\ x=-9$ 또는 $x=-1$

즉 $x^2+10x+9=0$의 두 근 중 -1과 3 사이에 있는 근은 없다.

09 순열

1103 $5+2=7$ 답 7

1104 $12+10=22$ 답 22

1105 6의 배수가 적힌 공은 6, 12, 18의 3개
7의 배수가 적힌 공은 7, 14의 2개
따라서 구하는 경우의 수는
$\underbrace{3+2}_{\text{두 사건은 동시에 일어나지 않는다.}}=5$ 답 5

1106 4의 배수가 적힌 공은
4, 8, 12, 16, 20의 5개
5의 배수가 적힌 공은
5, 10, 15, 20의 4개
4와 5의 공배수, 즉 20의 배수가 적힌 공은
20의 1개
따라서 구하는 경우의 수는
$5+4-1=8$ 답 8

라쎈 특강

두 개 이상의 자연수의 공통인 배수를 공배수라 한다. 이때 두 개 이상의 자연수의 공배수는 모두 그들의 최소공배수의 배수이고, 서로소인 두 자연수의 최소공배수는 두 자연수의 곱과 같다.

1107 $7\cdot8=56$ 답 56

1108 첫 번째에 소수의 눈이 나오는 경우는
2, 3, 5의 3가지
두 번째에 짝수의 눈이 나오는 경우는
2, 4, 6의 3가지
따라서 구하는 경우의 수는
$3\cdot3=9$ 답 9

1109 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
1, 3, 5, 7, 9의 5개
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 2, 4, 8의 4개
따라서 구하는 자연수의 개수는
$5\cdot4=20$ 답 20

1110 (i) A 지점에서 B 지점을 거쳐 C 지점으로 가는 경우의 수는
$2\cdot3=6$
(ii) A 지점에서 B 지점을 거치지 않고 C 지점으로 가는 경우의 수는
1
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$6+1=7$ 답 7

1111 ${}_4P_2=4\cdot3=12$ 답 12

1112 답 1

1113 답 5

1114 ${}_3P_3=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

1115 $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 답 120

1116 답 1

1117 ${}_nP_2=n(n-1)$이므로
$n(n-1)=56=8\cdot7$ $\therefore n=8$ 답 8

1118 ${}_nP_n=n!$이므로
$n!=24=4\cdot3\cdot2\cdot1$ $\therefore n=4$ 답 4

1119 답 1
참고 ${}_nP_r=n$이면 $r=1$이다.

1120 $r-1=0$이므로 $r=1$ 답 1
참고 ${}_nP_{r-1}=1$이면 $r-1=0$ 또는 $n=1$이다.

1121 $360=6\cdot5\cdot4\cdot3$이므로 ${}_6P_4=360$
$\therefore r=4$ 답 4

1122 $336=8\cdot7\cdot6$이므로 ${}_8P_3=336$
$\therefore r=3$ 답 3

1123 ${}_{10}P_4=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}$ $\therefore \square=6$ 답 6

1124 ${}_7P_\square=\frac{7!}{(7-\square)!}=\frac{7!}{2!}$이므로
$7-\square=2$ $\therefore \square=5$ 답 5

1125 4장의 카드 중에서 3장을 뽑는 순열의 수는
${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$ 답 24

1126 10명의 학생 중에서 2명을 뽑는 순열의 수는
${}_{10}P_2=10\cdot9=90$ 답 90

1127 $6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ 답 720

1128 아버지를 제외한 나머지 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$3!=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

1129 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는

$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$의 4가지

(ii) 눈의 수의 합이 6이 되는 경우는

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$의 5가지

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$4+5=9$

답 ④

1130 1부터 34까지의 자연수 중에서 소수는

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31의 11개

8의 배수는

8, 16, 24, 32의 4개

따라서 구하는 경우의 수는

$11+4=15$

답 15

1131 정십이면체를 두 번 던질 때 바닥에 오는 면에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 수의 합이 20인 경우는

$(8, 12), (9, 11), (10, 10), (11, 9), (12, 8)$의 5가지

(ii) 두 수의 합이 21인 경우는

$(9, 12), (10, 11), (11, 10), (12, 9)$의 4가지

(iii) 두 수의 합이 22인 경우는

$(10, 12), (11, 11), (12, 10)$의 3가지

(iv) 두 수의 합이 23인 경우는

$(11, 12), (12, 11)$의 2가지

(v) 두 수의 합이 24인 경우는

$(12, 12)$의 1가지 ⋯ ❶

이상에서 구하는 경우의 수는

$5+4+3+2+1=15$ ⋯ ❷

답 15

채점 기준	비율
❶ 바닥에 오는 면에 적힌 수의 합이 20 이상인 경우의 순서쌍을 구할 수 있다.	70 %
❷ 바닥에 오는 면에 적힌 수의 합이 20 이상인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %

1132 4의 배수는 4, 8, 12, ⋯, 100의 25개

6의 배수는 6, 12, 18, ⋯, 96의 16개

4와 6의 공배수, 즉 12의 배수는

12, 24, 36, ⋯, 96의 8개

따라서 4의 배수 또는 6의 배수를 택하는 경우의 수는

$25+16-8=33$

답 ①

1133 $36=2^2\times3^2$이므로 36과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수이다.

2의 배수가 적힌 공은 2, 4, 6, ⋯, 36의 18개

3의 배수가 적힌 공은 3, 6, 9, ⋯, 36의 12개

2와 3의 공배수, 즉 6의 배수가 적힌 공은

6, 12, 18, ⋯, 36의 6개

따라서 2의 배수 또는 3의 배수가 적힌 공의 개수는

$18+12-6=24$

이므로 구하는 경우의 수는

$36-24=12$

답 12

1134 5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는

5, 10, 15, ⋯, 80의 16개

7로 나누어떨어지는 수, 즉 7의 배수는

7, 14, 21, ⋯, 77의 11개

5와 7로 모두 나누어떨어지는 수, 즉 35의 배수는

35, 70의 2개

따라서 5 또는 7로 나누어떨어지는 자연수의 개수는

$16+11-2=25$

이므로 5와 7로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는

$80-25=55$

답 ③

1135 (i) $x=1$일 때,

$y+z=6$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(1, 1, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 3), (1, 4, 2), (1, 5, 1)$의 5개

(ii) $x=2$일 때,

$y+z=4$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1)$의 3개

(iii) $x=3$일 때,

$y+z=2$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(3, 1, 1)$의 1개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+3+1=9$

답 9

1136 x, y가 자연수이므로 $x+3y\le8$을 만족시키는 경우는

$x+3y=4$, $x+3y=5$, $x+3y=6$, $x+3y=7$, $x+3y=8$

(i) $x+3y=4$인 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1)$의 1개

(ii) $x+3y=5$인 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$의 1개

(iii) $x+3y=6$인 순서쌍 (x, y)는

$(3, 1)$의 1개

(iv) $x+3y=7$인 순서쌍 (x, y)는

$(4, 1), (1, 2)$의 2개

(v) $x+3y=8$인 순서쌍 (x, y)는

$(5, 1), (2, 2)$의 2개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+1+1+2+2=7$

답 ⑤

다른 풀이 (i) $y=1$일 때,

$x+3\le8$, 즉 $x\le5$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)$의 5개

(ii) $y=2$일 때,

$x+6\le 8$, 즉 $x\le 2$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2), (2, 2)$의 2개

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+2=7$

1137 100원, 200원, 400원짜리 초콜릿을 각각 x개, y개, z개 산다고 하면

$100x+200y+400z=1500$

$\therefore x+2y+4z=15$ (단, x, y, z는 자연수)

(i) $z=1$일 때,

$x+2y=11$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(9, 1, 1), (7, 2, 1), (5, 3, 1), (3, 4, 1), (1, 5, 1)$의 5개

(ii) $z=2$일 때,

$x+2y=7$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(5, 1, 2), (3, 2, 2), (1, 3, 2)$의 3개

(iii) $z=3$일 때,

$x+2y=3$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(1, 1, 3)$의 1개

이상에서 구하는 경우의 수는

$5+3+1=9$

답 ③

1138 $|a-b|\le 1$에서

$|a-b|=0$ 또는 $|a-b|=1$ ··· ❶

(i) $|a-b|=0$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$의 6개

(ii) $|a-b|=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3),$
$(4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$의 10개 ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$6+10=16$ ··· ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ $\|a-b\|$의 값이 될 수 있는 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\|a-b\|$의 값에 따른 순서쌍 (a, b)의 개수를 각각 구할 수 있다.	60 %
❸ 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1139 이차방정식 $ax^2-2bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 중근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=(-b)^2-ac=0 \quad \therefore b^2=ac$$

(i) $b=1$일 때,

$ac=1$이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 1, 1)$의 1개

(ii) $b=2$일 때,

$ac=4$이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 2, 4), (2, 2, 2), (4, 2, 1)$의 3개

(iii) $b=3$일 때,

$ac=9$이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(3, 3, 3)$의 1개

(iv) $b=4$일 때,

$ac=16$이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(4, 4, 4)$의 1개

(v) $b=5$일 때,

$ac=25$이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(5, 5, 5)$의 1개

(vi) $b=6$일 때,

$ac=36$이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(6, 6, 6)$의 1개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+3+1+1+1+1=8$

답 8

1140 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 3, 5, 7, 9의 5개

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 3, 5, 7의 4개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 2, 4, 6, 8의 5개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$5\cdot 4\cdot 5=100$

답 100

1141 $(x+y+z)(a+b+c+d)$를 전개할 때, x, y, z에 곱해지는 항이 각각 a, b, c, d의 4개이므로 항의 개수는

$3\cdot 4=12$

답 ②

라쎈 특강

전개식의 항의 개수

두 다항식 A, B의 각 항의 문자가 모두 다를 때, AB의 전개식의 항의 개수

→ (A의 항의 개수)×(B의 항의 개수)

1142 인문학, 사회 과학 과목의 강좌를 수강하는 경우의 수는

$4\cdot 3=12$

인문학, 자연 과학 과목의 강좌를 수강하는 경우의 수는

$4\cdot 5=20$

사회 과학, 자연 과학 과목의 강좌를 수강하는 경우의 수는

$3\cdot 5=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$12+20+15=47$

답 ①

1143 1부터 99까지의 자연수 중에서 어느 자리의 숫자에도 3, 6, 9가 포함되지 않은 수는 각 자리의 숫자가 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8만으로 이루어져야 한다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$7\cdot 7-\underbrace{1}_{\text{00인 경우는 제외한다.}}=48$

답 ④

다른 풀이 (i) 한 자리 자연수는

$1, 2, 4, 5, 7, 8$의 6개

(ii) 두 자리 자연수는

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 $1, 2, 4, 5, 7, 8$의 6개이고 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 $0, 1, 2, 4, 5, 7, 8$의 7개이므로 그 개수는

$6\cdot7=42$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+42=48$

1144 $a+b+ab$가 홀수이려면

$\underbrace{a\text{는 짝수, } b\text{는 홀수}}_{ab\text{는 짝수}}$ 또는 $\underbrace{a\text{는 홀수, } b\text{는 짝수}}_{ab\text{는 짝수}}$

또는 $\underbrace{a, b\text{가 모두 홀수}}_{ab\text{는 홀수}}$

이어야 한다. ··· ❶

(i) a는 짝수, b는 홀수일 때,

A 주머니에서 짝수가 적힌 공을 꺼내고 B 주머니에서 홀수가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는

$3\cdot3=9$

(ii) a는 홀수, b는 짝수일 때,

A 주머니에서 홀수가 적힌 공을 꺼내고 B 주머니에서 짝수가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는

$3\cdot3=9$

(iii) a, b가 모두 홀수일 때,

두 주머니 A, B에서 모두 홀수가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는

$3\cdot3=9$ ··· ❷

이상에서 구하는 경우의 수는

$9+9+9=27$ ··· ❸

답 27

채점 기준	비율
❶ $a+b+ab$가 홀수인 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 조건에 따른 경우의 수를 각각 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b+ab$가 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

참고 a, b가 모두 짝수인 경우에는 ab도 짝수이므로 $a+b+ab$가 짝수이다.

1145 $54=2\cdot3^3$이므로 54의 양의 약수의 개수는

$(1+1)(3+1)=8 \qquad \therefore a=8$

$90=2\cdot3^2\cdot5$이므로 90의 양의 약수의 개수는

$(1+1)(2+1)(1+1)=12 \qquad \therefore b=12$

$\therefore a+b=20$ 답 20

1146 ① $3^2\times8=2^3\times3^2$이므로 양의 약수의 개수는

$(3+1)(2+1)=12$

② $3^2\times10=2\times3^2\times5$이므로 양의 약수의 개수는

$(1+1)(2+1)(1+1)=12$

③ $3^2\times12=2^2\times3^3$이므로 양의 약수의 개수는

$(2+1)(3+1)=12$

④ $3^2\times21=3^3\times7$이므로 양의 약수의 개수는

$(3+1)(1+1)=8$

⑤ $3^2\times35=3^2\times5\times7$이므로 양의 약수의 개수는

$(2+1)(1+1)(1+1)=12$

답 ④

1147 $168=2^3\cdot3\cdot7$, $252=2^2\cdot3^2\cdot7$이므로 두 수의 최대공약수는

$2^2\cdot3\cdot7$

168과 252의 양의 공약수의 개수는 $2^2\cdot3\cdot7$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$(2+1)(1+1)(1+1)=12$ 답 ⑤

1148 $80=2^4\cdot5$이므로

$80^n=(2^4\cdot5)^n=2^{4n}\cdot5^n$

$2^{4n}\cdot5^n$의 양의 약수의 개수는

$(4n+1)(n+1)$

이때 $(4n+1)(n+1)=27$이므로

$4n^2+5n-26=0, \qquad (4n+13)(n-2)=0$

$\therefore n=2$ ($\because$ n은 자연수) 답 2

1149 $720=2^4\cdot3^2\cdot5$이므로 720의 양의 약수의 개수는

$(4+1)(2+1)(1+1)=30$ ··· ❶

이 중에서 홀수의 개수는 $3^2\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$(2+1)(1+1)=6$ ··· ❷

따라서 구하는 짝수의 개수는

$30-6=24$ ··· ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ 720의 양의 약수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 720의 양의 약수 중에서 홀수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 720의 양의 약수 중에서 짝수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1150 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개의 2가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$2\cdot3\cdot4-1=23$ 답 23

1151 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, 1500원의 4가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은 ─ 금액이 중복되는 경우가 없다.

0원, 100원, 200원, 300원의 4가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원의 2가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$4\cdot4\cdot2-1=31$ 답 31

1152 (i) 지불할 수 있는 방법의 수
1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은
0장, 1장, 2장의 3가지
500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는
$3\cdot4\cdot4-1=47$ $\therefore a=47$ ··· ❶
(ii) 지불할 수 있는 금액의 수
1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액이 중복된다.
따라서 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 7개, 100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 500원, 1000원, ⋯, 3500원의 8가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는
$8\cdot4-1=31$ $\therefore b=31$ ··· ❷
(i), (ii)에서 $a-b=16$ ··· ❸
답 16

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1153 (i) A → B → C로 가는 경우의 수는
$2\cdot4=8$
(ii) A → D → C로 가는 경우의 수는
$3\cdot2=6$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$8+6=14$
답 ③

1154 (i) 매표소 → 정상 → 약수터 → 매표소로 가는 경우의 수는
$3\cdot2\cdot4=24$
(ii) 매표소 → 약수터 → 정상 → 매표소로 가는 경우의 수는
$4\cdot2\cdot3=24$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$24+24=48$
답 ③

1155 (i) 공원 → A → 서점으로 가는 경우의 수는
$3\cdot2=6$
(ii) 공원 → B → 서점으로 가는 경우의 수는
$2\cdot1=2$ ··· ❶
(iii) 공원 → A → B → 서점으로 가는 경우의 수는
$3\cdot2\cdot1=6$
(iv) 공원 → B → A → 서점으로 가는 경우의 수는
$2\cdot2\cdot2=8$ ··· ❷
이상에서 구하는 경우의 수는
$6+2+6+8=22$ ··· ❸
답 22

채점 기준	비율
❶ A, B 중 한 지점만 지나는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A, B 지점을 모두 지나는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 공원에서 출발하여 서점으로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1156 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$
답 48

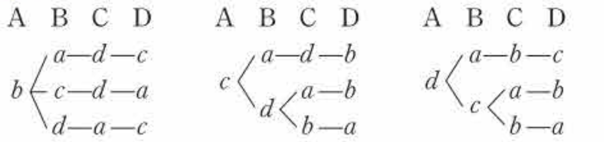
1157 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot3\cdot3=36$
답 ⑤

1158 C에 칠할 수 있는 색은 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 1가지, B에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 1가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1=12$
답 ③

1159 (i) A와 C가 같은 색인 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 칠하는 경우의 수는
$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$ ··· ❶
(ii) A와 C가 다른 색인 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 칠하는 경우의 수는
$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ ··· ❷
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$36+48=84$ ··· ❸
답 84

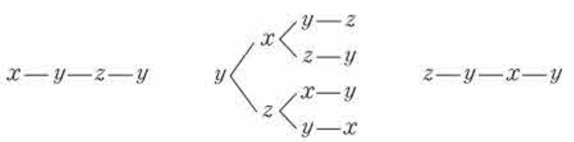
채점 기준	비율
❶ A와 C에 같은 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A와 C에 다른 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1160 모든 자물쇠가 열리지 않는 경우는 다음과 같다.



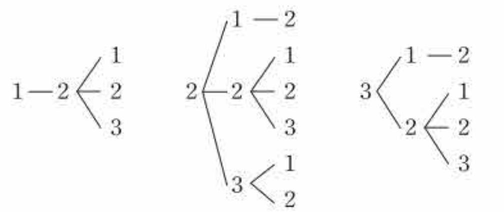
따라서 구하는 경우의 수는 9이다. 답 ②

1161 조건을 만족시키도록 네 개의 문자를 일렬로 나열하면 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 6이다. 답 6

1162 조건을 만족시키는 세 자리 자연수는 다음과 같다.



따라서 구하는 자연수의 개수는 13이다. 답 13

1163 구하는 경우의 수는 10명의 회원 중에서 3명을 택하여 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$_{10}P_3=10\cdot9\cdot8=720$ 답 ⑤

1164 구하는 경우의 수는 6곡의 노래 중에서 4곡을 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$ 답 360

1165 앞줄에 상장을 진열하는 경우의 수는 $3!=6$
뒷줄에 트로피를 진열하는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$ 답 ③

1166 $_nP_2=72$이므로

$n(n-1)=72=9\cdot8 \quad \therefore n=9$ 답 9

1167 $_nP_3-{}_{n+1}P_2=6\cdot{}_nP_1$에서

$n(n-1)(n-2)-(n+1)n=6n$

양변을 n으로 나누면

$(n-1)(n-2)-(n+1)=6$

$n^2-4n-5=0, \quad (n+1)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because$ n은 자연수) 답 ③

1168 서로 다른 탄산음료 3개를 한 묶음으로 생각하여 5개를 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

서로 다른 탄산음료 3개의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot6=720$ 답 ①

1169 A와 D를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

A와 D가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2=12$ 답 12

1170 4쌍의 부부를 각각 한 사람으로 생각하여 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$4!=24$

4쌍의 부부가 각각 부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot16=384$ 답 ④

1171 학생 3명을 한 사람, 학부모 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

학부모끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot6\cdot6=864$ 답 864

1172 배우 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$2!=2$

배우들 사이 및 양 끝의 3개의 자리에 가수 2명을 세우는 경우의 수는

$_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot6=12$ 답 ②

1173 4개의 모음 o, u, i, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$ ··· ❶

모음들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 3개의 자음 t, s, d를 나열하는 경우의 수는

$_5P_3=60$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot60=1440$ ⋯ ❸

답 1440

채점 기준	비율
❶ 모음을 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 자음을 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자음끼리 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1174 3개의 의자에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 4개이다.
따라서 빈 의자들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 학생이 앉은 의자 3개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는

$_5P_3=60$ 답 60

참고 의자가 모두 똑같으므로 빈 의자 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1이다.

1175 A와 B를 한 묶음으로 생각하여 D와 E를 제외한 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

A와 B의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

3개의 문자의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 D, E를 나열하는 경우의 수는

$_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2\cdot12=144$ 답 ③

1176 (i) 남자, 여자의 순서로 번갈아 세우는 경우의 수는

$3!\cdot3!=36$

(ii) 여자, 남자의 순서로 번갈아 세우는 경우의 수는

$3!\cdot3!=36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+36=72$ 답 72

1177 빨간색 꽃은 4송이, 노란색 꽃은 3송이이므로 빨간색 꽃 4송이를 일렬로 심은 뒤 그 사이사이에 노란색 꽃 3송이를 심으면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는

$4!\cdot3!=24\cdot6=144$ 답 ③

1178 (i) 맨 앞자리에 짝수가 오는 경우
짝수 2, 4, 6, 8을 일렬로 나열한 후 그 사이사이에 홀수 1, 3, 5, 7, 9에서 3개를 택하여 나열하면 된다.
따라서 이 경우의 수는

$4!\cdot{}_5P_3=24\cdot60=1440$ ⋯ ❶

(ii) 맨 앞자리에 홀수가 오는 경우
홀수 1, 3, 5, 7, 9에서 4개를 택하여 일렬로 나열한 후 그 사이사이에 짝수 2, 4, 6, 8에서 3개를 택하여 나열하면 된다.
따라서 이 경우의 수는

$_5P_4\cdot{}_4P_3=120\cdot24=2880$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$1440+2880=4320$ ⋯ ❸

답 4320

채점 기준	비율
❶ 맨 앞자리에 짝수가 오도록 자연수를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 맨 앞자리에 홀수가 오도록 자연수를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 짝수와 홀수가 번갈아 나타나도록 자연수를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1179 남학생은 4명이므로 양 끝에 남학생 2명을 세우는 경우의 수는 $_4P_2=12$
양 끝의 남학생 2명을 제외한 나머지 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot24=288$ 답 ③

1180 구하는 경우의 수는 A를 제외한 나머지 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

A를 맨 뒤에 나열한 후 2개를 나열

$_4P_2=12$ 답 12

1181 부모 중 운전석에 앉을 사람을 정하는 경우의 수는

$_2P_1=2$

나머지 5명이 앉을 좌석을 정하는 경우의 수는

$_6P_5=720$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot720=1440$ 답 ⑤

1182 모음 i, e를 세 군데의 홀수 번째 자리 중 두 군데에 나열하는 경우의 수는

$_3P_2=6$ ⋯ ❶

나머지 세 자리에 자음 3개를 나열하는 경우의 수는

$3!=6$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot6=36$ ⋯ ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ 모음을 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 자음을 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 문자를 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1183 5개의 자리 중 흰 돌을 나열할 자리를 정하면 나머지 자리에 검은 돌을 크기순으로 나열하면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는

$_5P_2=20$ 답 20

다른 풀이 5개의 서로 다른 돌을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

이때 검은 돌의 순서가 정해져 있으므로 검은 돌 3개를 일렬로 나열하는 경우를 모두 한 가지 경우로 생각해야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{120}{3!}=20$

라쎈 특강

검은 돌 3개를 작은 것부터 차례대로 ❶, ❷, ❸, 흰 돌 2개를 ○, ◎라 하면 다음을 모두 한 가지 경우로 생각해야 한다.

○◎❶❷❸, ○◎❶❸❷, ○◎❷❶❸, ○◎❷❸❶, ○◎❸❶❷, ○◎❸❷❶

1184 지수와 미영이 사이에 2명이 앉도록 묶음을 만드는 경우의 수는

$\underbrace{2!}_{\text{지수와 미영이가 자리를 바꾸는 경우의 수}}\cdot\underbrace{{}_4P_2}_{\text{지수와 미영이를 제외한 4명 중에서 2명이 앉는 경우의 수}}=24$

이 묶음과 나머지 2명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot6=144$ 답 ④

1185 d와 m 사이에 3개의 문자가 오도록 묶음을 만드는 경우의 수는

$2!\cdot{}_5P_3=120$

이 묶음과 나머지 2개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot6=720$ 답 ⑤

1186 (i) A와 B 사이에 2개의 문자가 오도록 묶음을 만드는 경우의 수는

$2!\cdot{}_3P_2=12$

이 묶음과 나머지 1개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 경우의 수는

$12\cdot2=24$ ··· ❶

(ii) A와 B 사이에 3개의 문자가 오도록 나열하는 경우의 수는

$2!\cdot{}_3P_3=12$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24+12=36$ ··· ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ A와 B 사이에 2개의 문자가 오도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A와 B 사이에 3개의 문자가 오도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ A와 B 사이에 2개 이상의 문자가 오도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1187 5권의 책을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$5!=120$

양 끝에 만화책을 꽂는 경우의 수는

${}_3P_2\cdot3!=36$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-36=84$ 답 ④

1188 (1) 구하는 경우의 수는 8명의 선수 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

${}_8P_2=56$ ··· ❶

(2) 구하는 경우의 수는 농구 선수 3명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

${}_3P_2=6$ ··· ❷

(3) 구하는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 대표, 부대표를 모두 농구 선수로 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$56-6=50$ ··· ❸

답 (1) 56 (2) 6 (3) 50

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 모두 농구 선수로 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 적어도 한 명은 야구 선수로 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %

1189 7명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$7!=5040$

여학생끼리 이웃하지 않게 세우는 경우의 수는 남학생 4명을 일렬로 세우고 남학생들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 여학생 3명을 세우는 경우의 수와 같으므로

$4!\cdot{}_5P_3=1440$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-1440=3600$ 답 3600

1190 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

A와 B 사이에 문자가 없도록 나열하는 경우의 수는 A와 B를 이웃하게 나열하는 경우의 수와 같다.

A와 B를 하나의 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

A와 B의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉 A와 B를 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$120\cdot2=240$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-240=480$ 답 ④

1191 일의 자리의 숫자가 홀수이어야 하므로 일의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는

${}_2P_1=2$

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리의 숫자를 제외한 3개이다.
또 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$_3P_2=6$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$2\cdot3\cdot6=36$ 답 ①

1192 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 2, 4, 6, 8의 4개이다.
십의 자리와 일의 자리에는 백의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$_4P_2=12$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$4\cdot12=48$ 답 48

1193 7개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$_7P_3=210$

백의 자리와 일의 자리의 숫자가 모두 홀수인 자연수의 개수는

$\underbrace{_4P_2}_{\text{백의 자리와 일의 자리에 1, 3, 5, 7 중 2개를 택하여 나열한다.}}\cdot5=60$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$210-60=150$ 답 ④

다른 풀이 (i) 백의 자리의 숫자는 짝수, 일의 자리의 숫자는 홀수인 경우
백의 자리에 올 수 있는 숫자는
2, 4, 6의 3개
일의 자리에 올 수 있는 숫자는
1, 3, 5, 7의 4개
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 5개이므로 자연수의 개수는

$3\cdot4\cdot5=60$

(ii) 백의 자리의 숫자는 홀수, 일의 자리의 숫자는 짝수인 경우
백의 자리에 올 수 있는 숫자는
1, 3, 5, 7의 4개
일의 자리에 올 수 있는 숫자는
2, 4, 6의 3개
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 5개이므로 자연수의 개수는

$4\cdot3\cdot5=60$

(iii) 백의 자리와 일의 자리의 숫자가 모두 짝수인 경우
백의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6의 3개이므로 그 경우의 수는

$_3P_2=6$

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 5개이므로 자연수의 개수는

$6\cdot5=30$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$60+60+30=150$

1194 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.
(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
일의 자리의 숫자가 0인 네 자리 자연수의 개수는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$_5P_3=60$ ··· ❶

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 1, 2, 3, 4의 4개이다.
또 백의 자리, 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$_4P_2=12$

따라서 일의 자리의 숫자가 5인 네 자리 자연수의 개수는

$4\cdot12=48$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$60+48=108$ ··· ❸

답 108

채점 기준	비율
❶ 일의 자리의 숫자가 0인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 일의 자리의 숫자가 5인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

라쎈 특강

배수의 판정
① 2의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수인 수
② 3의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 수
③ 4의 배수: 끝의 두 자리 수가 00이거나 4의 배수인 수
④ 5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5인 수

1195 a로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
ba로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
bc로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
bd로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
bea로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$
bec로 시작하는 것은 순서대로
$becad$, $becda$의 2개
따라서 $abcde$부터 $becda$까지의 개수는

$24+6+6+6+2+2=46$

이므로 $becda$는 46번째에 온다. 답 46번째

1196 320보다 작은 자연수는 1□□, 2□□, 30□, 31□ 꼴이다.
1□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_5P_2=20$
2□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_5P_2=20$ ··· ❶
30□ 꼴인 자연수의 개수는 4
31□ 꼴인 자연수의 개수는 4 ··· ❷

09 순열

따라서 구하는 자연수의 개수는

$20+20+4+4=48$ ··· ❸

답 48

채점 기준	비율
❶ 1□□, 2□□ 꼴인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 30□, 31□ 꼴인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 320보다 작은 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1197 8□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

6□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

48□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

46□□ 꼴인 자연수는 큰 수부터 4682, 4628의 2개

따라서 8642부터 4628까지의 자연수의 개수는

$6+6+2+2=16$

이므로 4628은 16번째로 큰 수이다. 답 ②

참고 4628이 몇 번째로 큰 수인지 묻고 있으므로 작은 수가 아닌 큰 수부터 차례대로 개수를 구해야 한다.

1198 a, n, s, w, e, r를 사전식으로 배열하면 a, e, n, r, s, w의 순이다.

a로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

e로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

na로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

ne로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

nra로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

따라서 aenrsw부터 nrawse까지의 개수는

nra로 시작하는 것 중 제일 마지막

$120+120+24+24+6=294$

이므로 295번째에 오는 것은 nre로 시작하는 것 중 제일 처음의 것이다.

∴ nreasw 답 ③

1199 전략 원판 A가 가리키는 수에 따라 경우를 나누어 생각한다.

풀이 (i) $a=2$일 때,

$a<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 3)$, $(2, 5)$, $(2, 8)$의 3개

(ii) $a=4$일 때,

$a<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(4, 5)$, $(4, 8)$의 2개

(iii) $a=7$일 때,

$a<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(7, 8)$의 1개

이상에서 구하는 경우의 수는

$3+2+1=6$ 답 6

다른 풀이 (i) $b=2$일 때,

$a<b$를 만족시키는 a의 값은 없다.

(ii) $b=3$일 때,

$a<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 3)$의 1개

(iii) $b=5$일 때,

$a<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 5)$, $(4, 5)$의 2개

(iv) $b=8$일 때,

$a<b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 8)$, $(4, 8)$, $(7, 8)$의 3개

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+2+3=6$

1200 전략 펜의 개수를 x, 노트의 권수를 y라 하고 부등식을 세운다.

풀이 500원짜리 펜을 x개, 1000원짜리 노트를 y권 산다고 하면

$0<500x+1000y\le2000$ 적어도 1개는 구매해야 한다.

$\therefore 0<x+2y\le4$ (단, x, y는 음이 아닌 정수)

따라서

$x+2y=1$ 또는 $x+2y=2$ 또는 $x+2y=3$ 또는 $x+2y=4$

이다.

(i) $x+2y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(1, 0)$의 1개

(ii) $x+2y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(0, 1)$, $(2, 0)$의 2개

(iii) $x+2y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1)$, $(3, 0)$의 2개

(iv) $x+2y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(0, 2)$, $(2, 1)$, $(4, 0)$의 3개

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+2+2+3=8$ 답 ③

1201 전략 각 항의 문자가 모두 다를 때, 전개식의 항의 개수는 각 다항식의 항의 개수의 곱과 같음을 이용한다.

풀이 $(x+y+z+w)(a+b+c)(p+q)$의 전개식에서 a, p를 포함하지 않는 항의 개수는

$4\cdot2\cdot1=8$ $(x+y+z+w)(b+c)q$의 전개식의 항과 같다. 답 ⑤

1202 전략 약수의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 $1\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5=2\cdot3^3\cdot5^2$

따라서 뽑은 카드에 적힌 숫자를 모두 곱한 값이 될 수 있는 수는 $2\cdot3^3\cdot5^2$의 양의 약수 중에서 1을 제외한 수이므로 구하는 수의 개수는

2장 이상의 카드를 뽑는다.

$(1+1)(3+1)(2+1)-1=23$ 답 ①

1203 전략 각각의 추마다 이용하거나 이용하지 않는 2가지의 경우가 있음을 이용한다.

풀이 각각의 추마다 이용하거나 이용하지 않는 2가지의 경우가 있으므로 모든 경우의 수는

$2\cdot2\cdot2\cdot2=16$

이때 0 g을 재는 것은 제외하므로 구하는 경우의 수는

$16-1=15$ 답 15

1204 전략 동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙을, 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 (i) A → B → C → A로 가는 경우의 수는

$5\cdot2\cdot2=20$

(ii) A → C → B → A로 가는 경우의 수는

$2\cdot2\cdot5=20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$20+20=40$ 답 ②

1205 전략 2, 1(6), 3, 5, 4가 적힌 정사각형에 색을 칠하는 경우의 수를 차례대로 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은

4가지

1과 6이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외해야 하므로 같은 색을 칠해야 한다.

3가지

3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외해야 하므로

2가지

5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외해야 하므로

2가지

4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1, 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외해야 하므로

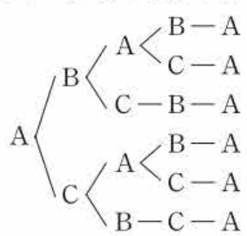
2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2=96$ 답 ③

1206 전략 수형도를 이용하여 문자열의 개수를 구한다.

풀이 양 끝 자리에 A가 오는 문자열은 다음과 같다.



따라서 양 끝 자리에 A가 오는 문자열의 개수는 6이고, 마찬가지로 양 끝 자리에 B, C가 오는 문자열의 개수도 각각 6이므로 만들 수 있는 문자열의 개수는

$3\cdot6=18$ 답 18

다른 풀이 (i) 양 끝 자리와 세 번째 자리에 같은 문자가 오는 경우

양 끝 자리와 세 번째 자리에 오는 문자를 택하는 경우의 수는 3

두 번째 자리와 네 번째 자리에 오는 문자를 택하는 경우의 수는 각각 양 끝 자리와 세 번째 자리에 오는 문자를 제외해야 하므로 2

따라서 이 경우의 수는

$3\cdot2\cdot2=12$

(ii) 양 끝 자리와 세 번째 자리에 다른 문자가 오는 경우

양 끝 자리에 오는 문자를 택하는 경우의 수는 3

세 번째 자리에 오는 문자를 택하는 경우의 수는 양 끝 자리에 오는 문자를 제외해야 하므로 2

두 번째 자리와 네 번째 자리에는 양 끝 자리와 세 번째 자리에 오는 문자를 제외한 문자가 와야 한다.

따라서 이 경우의 수는

$3\cdot2=6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+6=18$

1207 전략 먼저 A, B가 좌석에 앉는 경우의 수를 구한다.

풀이 A, B가 앉을 좌석의 줄을 택하는 경우의 수는

2

한 줄에 놓인 3개의 좌석 중에서 2개의 좌석을 택하여 A, B가 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

나머지 세 명이 맞은편 줄의 3개의 좌석에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot6\cdot6=72$ 답 ⑤

1208 전략 첫째 날과 둘째 날에 공연을 하는 팀의 수에 따라 경우를 나누어 생각한다.

풀이 매일 두 팀 이상이 공연해야 하므로 축제의 첫째 날에는 두 팀 또는 세 팀이 공연을 해야 한다.

(i) 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연을 하는 경우

첫째 날에 공연하는 두 팀을 택하여 공연 순서를 정하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

둘째 날에 공연하는 세 팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는 첫째 날에 공연한 두 팀을 제외한 나머지 세 팀

$3!=6$

따라서 이 경우의 수는

$20\cdot6=120$

(ii) 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연을 하는 경우

첫째 날에 공연하는 세 팀을 택하여 공연 순서를 정하는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

둘째 날에 공연하는 두 팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 이 경우의 수는

$60\cdot2=120$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$120+120=240$ 답 ③

다른 풀이 구하는 경우의 수는 첫째 날과 둘째 날에 각각 공연하는 팀의 수를 정한 후 다섯 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수와 같다.

이때 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연하거나 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연하는 2가지 방법이 있고, 다섯 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $5!=120$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$2 \cdot 120=240$

1209 전략 빨간색 그릇끼리 서로 이웃하는 경우의 수와 파란색 그릇끼리 서로 이웃하는 경우의 수를 더한 후 빨간색 그릇과 파란색 그릇이 같은 색 그릇끼리 서로 이웃하는 경우의 수를 뺀다.

풀이 빨간색 그릇 2개를 1개의 그릇으로 생각하여 5개의 그릇을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

빨간색 그릇 2개가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 빨간색 그릇 2개가 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$120 \cdot 2=240$

마찬가지로 파란색 그릇 2개가 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수도 240이다.

빨간색 그릇 2개와 파란색 그릇 2개를 각각 1개의 그릇으로 생각하여 4개의 그릇을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

빨간색 그릇 2개와 파란색 그릇 2개가 각각 같은 색 그릇끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2! \cdot 2!=4$

따라서 빨간색 그릇 2개와 파란색 그릇 2개가 같은 색 그릇끼리 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$24 \cdot 4=96$

즉 구하는 경우의 수는

$240+240-96=384$ 답 384

1210 전략 이웃해도 상관없는 홀수가 적혀 있는 카드를 일렬로 나열한 후 그 사이사이와 양 끝에 짝수가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수를 구한다.

풀이 홀수 1, 3, 5가 적혀 있는 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

홀수가 적혀 있는 카드들 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 짝수 2, 4가 적혀 있는 2장의 카드를 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \cdot 12=72$ 답 ⑤

1211 전략 맨 앞자리에 자음이 오는 경우와 모음이 오는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 mexico에서 자음은 m, x, c의 3개이고 모음은 e, i, o의 3개이다.

(i) 자음, 모음의 순서로 번갈아 나열하는 경우의 수는

$3! \cdot 3!=36$

(ii) 모음, 자음의 순서로 번갈아 나열하는 경우의 수는

$3! \cdot 3!=36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+36=72$ 답 72

1212 전략 전체 경우의 수에서 숫자 1이 첫 번째 자리에 오거나 숫자 2가 두 번째 자리에 오는 경우의 수를 뺀다.

풀이 만들 수 있는 다섯 자리 비밀번호의 개수는

${}_6P_5=720$

첫 번째 자리에 1이 오는 경우의 수는

${}_5P_4=120$

두 번째 자리에 2가 오는 경우의 수는

${}_5P_4=120$

첫 번째 자리에 1이 오고, 두 번째 자리에 2가 오는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$720-(120+120-24)=504$ 답 504

1213 전략 A와 B, C와 D가 앉는 경우의 수를 먼저 구한다.

풀이 조건 (가)에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 마부가 앉는 의자를 제외한 3개이고, A, B 두 사람이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 A와 B가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$3 \cdot 2=6$

남은 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

이때 C와 D가 이웃하여 앉을 수 있는 2인용 의자는 A와 B가 앉는 의자와 마부가 앉는 의자를 제외한 2개이고, C, D 두 사람이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 C와 D가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$2 \cdot 2=4$

조건 (나)에서 C와 D가 이웃하여 앉지 않아야 하므로 그 경우의 수는

$20-4=16$

남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \cdot 16 \cdot 6=576$ 답 576

1214 전략 천의 자리, 백의 자리를 기준으로 나누어 생각한다.

풀이 2400보다 큰 자연수는 24□□, 3□□□, 4□□□ 꼴이다.

24□□ 꼴인 자연수의 개수는

$2!=2$

3□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$3!=6$

4□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2+6+6=14$ 답 ③

1215 전략 A 바구니에 담는 과일에 따라 경우를 나누어 B 바구니에 과일을 담는 경우의 수를 구한다.

풀이 (i) A 바구니에 사과를 담는 경우 – B 바구니에는 사과를 담을 수 없다.

B 바구니에 복숭아 a개, 자두 b개를 담는다고 하면

$a+b=8$이므로 가능한 순서쌍 (a, b)는

$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1)$의 6개 ··· ❶

(ii) A 바구니에 복숭아를 담는 경우

B 바구니에 사과 a개, 자두 b개를 담는다고 하면

$a+b=8$이므로 가능한 순서쌍 (a, b)는

$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3)$의 4개 ··· ❷

(iii) A 바구니에 자두를 담는 경우

B 바구니에 사과 a개, 복숭아 b개를 담는다고 하면

$a+b=8$이므로 가능한 순서쌍 (a, b)는

$(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3)$의 5개 ··· ❸

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+4+5=15$ ··· ❹

답 15

채점 기준	비율
❶ A 바구니에 사과를 담는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ A 바구니에 복숭아를 담는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ A 바구니에 자두를 담는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ A, B 바구니에 과일을 담는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

1216 전략 두 자연수의 합이 짝수인 경우는 두 자연수가 모두 짝수이거나 모두 홀수인 경우이다.

풀이 십의 자리의 숫자를 a, 일의 자리의 숫자를 b라 할 때, $a+b$의 값이 짝수이려면 a, b가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

(i) a, b가 모두 짝수인 경우

a가 될 수 있는 숫자는

$2, 4, 6, 8$의 4개

b가 될 수 있는 숫자는

$0, 2, 4, 6, 8$의 5개

따라서 두 자리 자연수의 개수는

$4\cdot5=20$ ··· ❶

(ii) a, b가 모두 홀수인 경우

a가 될 수 있는 숫자는

$1, 3, 5, 7, 9$의 5개

b가 될 수 있는 숫자는

$1, 3, 5, 7, 9$의 5개

따라서 두 자리 자연수의 개수는

$5\cdot5=25$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$20+25=45$ ··· ❸

답 45

채점 기준	비율
❶ 각 자리의 숫자가 모두 짝수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 각 자리의 숫자가 모두 홀수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 각 자리의 숫자의 합이 짝수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1217 전략 서로 이웃하는 학생들을 한 사람으로 생각한다.

풀이 같은 반 학생들을 각각 한 사람으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$2!=2$

각 반의 학생들끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!\cdot3!=144$

$\therefore a=2\cdot144=288$ ··· ❶

7명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$7!=5040$

양 끝에 2반 학생을 세우는 경우의 수는

${}_3P_2\cdot5!=720$

$\therefore b=5040-720=4320$ ··· ❷

$\therefore a+b=4608$ ··· ❸

답 4608

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1218 전략 어떤 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 함을 이용한다.

풀이 5개의 숫자 $1, 2, 3, 4, 5$에서 서로 다른 3개를 택할 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

$1, 2, 3$ 또는 $1, 3, 5$ 또는 $2, 3, 4$ 또는 $3, 4, 5$ ··· ❶

각각의 3개의 숫자를 이용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$4\cdot6=24$ ··· ❷

답 24

채점 기준	비율
❶ 합이 3의 배수가 되는 세 자연수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 3의 배수의 개수를 구할 수 있다.	50 %

10 조합

1219 ${}_4C_2=\frac{{}_4P_2}{2!}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$ 답 6

1220 ${}_7C_3=\frac{{}_7P_3}{3!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

1221 답 1

1222 답 1

1223 ${}_nC_2=10$에서 $\frac{n(n-1)}{2\cdot1}=10$

$n(n-1)=20=5\cdot4$

$\therefore n=5$ 답 5

1224 ${}_nC_3=4$에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=4$

$n(n-1)(n-2)=4\cdot3\cdot2$

$\therefore n=4$ 답 4

1225 ${}_6C_r=20$에서 $\frac{6!}{r!(6-r)!}=20$

$6!=20\cdot r!(6-r)!,\quad 6\cdot3\cdot2\cdot1=r!(6-r)!$

$3!\cdot3!=r!(6-r)!$

$\therefore r=3$ 답 3

1226 ${}_8C_r=56$에서 $\frac{8!}{r!(8-r)!}=56$

$8!=56\cdot r!(8-r)!,\quad 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=r!(8-r)!$

$3!\cdot5!=r!(8-r)!$

$\therefore r=3$ 또는 $r=5$ 답 3 또는 5

1227 ${}_{12}C_7={}_{12}C_{12-7}={}_{12}C_5$

$\therefore r=5$ 답 5

1228 ${}_nC_9={}_nC_6$에서 $6=n-9$

$\therefore n=15$ 답 15

1229 ${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

1230 ${}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ 답 56

1231 ${}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

1232 ${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 답 20

1233 2, 4, 6, 8, 10이 각각 하나씩 적힌 5장의 카드 중에서 3장의 카드를 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

1234 ${}_nC_2+{}_{n-1}C_2={}_{n+2}C_2$에서

$\frac{n(n-1)}{2\cdot1}+\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot1}=\frac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}$

$n(n-1)+(n-1)(n-2)=(n+2)(n+1)$

$2n^2-4n+2=n^2+3n+2$

$n^2-7n=0,\quad n(n-7)=0$

$\therefore n=7$ ($\because$ n은 자연수) 답 ②

1235 ${}_8C_r={}_8C_{r-4}$에서

$r=r-4$ 또는 $8-r=r-4$

(i) $r=r-4$에서 $0\neq-4$이므로 r의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $8-r=r-4$에서

$-2r=-12\quad\therefore r=6$

(i), (ii)에서 $r=6$ 답 6

1236 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$이므로

$35=\frac{210}{r!},\quad r!=6=3\cdot2\cdot1$

$\therefore r=3$

또 ${}_nP_3=210=7\cdot6\cdot5$에서

$n=7$

$\therefore n+r=10$ 답 ③

1237 ${}_{9-n}C_2=10$에서

$\frac{(9-n)(8-n)}{2\cdot1}=10,\quad (9-n)(8-n)=20$

$n^2-17n+52=0,\quad (n-4)(n-13)=0$

$\therefore n=4$ ($\because$ $\underline{3\le n\le7}$) $9-n\ge2$, $n\ge2$, $n\ge3$에서 $3\le n\le7$ ··· ❶

$\therefore n\cdot{}_nP_2+{}_nC_3=4\cdot{}_4P_2+{}_4C_3$

$=4\cdot12+{}_4C_1$

$=48+4$

$=52$ ··· ❷

답 52

채점 기준	비율
❶ n의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $n\cdot{}_nP_2+{}_nC_3$의 값을 구할 수 있다.	50 %

1238 ${}_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(\boxed{n-r})\}!}$

$=\frac{n!}{(n-r)!\boxed{r!}}={}_nC_r$

$\therefore$ (가) $n-r$ (나) $r!$

답 (가) $n-r$ (나) $r!$

라쎈 특강

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 뽑히지 않을 $(n-r)$개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$가 성립한다.
따라서 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$의 값을 구할 때 $r>n-r$인 경우에는 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$를 이용하면 계산을 간단히 할 수 있다.

1239 $${}_{n}\mathrm{C}_{k}\cdot{}_{n-k}\mathrm{C}_{r-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(r-k)!\{n-k-(r-k)\}!}$$
$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(r-k)!\boxed{(n-r)!}}$$
$$=\frac{\boxed{n!}}{k!(r-k)!(n-r)!}$$
$$=\frac{n!}{\boxed{r!}(n-r)!}\cdot\frac{\boxed{r!}}{k!(r-k)!}$$
$$={}_{n}\mathrm{C}_{r}\cdot{}_{r}\mathrm{C}_{k}$$
$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$ (라) $r!$ 답 ④

1240 $${}_{n-1}\mathrm{C}_{r}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$$
$$=\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!}$$
$$=\frac{(n-1)!}{r!\boxed{(n-1-r)!}}+\frac{(n-1)!}{\boxed{(r-1)!}(n-r)!}$$
$$=\frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}$$
$$=\frac{\{(n-r)+r\}(n-1)!}{r!(n-r)!}$$
$$=\frac{n\boxed{(n-1)!}}{r!(n-r)!}$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_{n}\mathrm{C}_{r}$$
$\therefore$ (가) $(n-1-r)!$ (나) $(r-1)!$ (다) $(n-1)!$

답 (가) $(n-1-r)!$ (나) $(r-1)!$ (다) $(n-1)!$

라쎈 특강

${}_{n}\mathrm{C}_{r}$는 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 경우의 수이므로 r개 중에서 특정한 1개가 포함되지 않는 경우와 특정한 1개가 포함되는 경우로 나누어 다음과 같이 증명할 수도 있다.
(i) r개 중에서 특정한 1개가 포함되지 않는 경우
특정한 1개를 제외한 $(n-1)$개 중에서 r개를 택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$
(ii) r개 중에서 특정한 1개가 포함되는 경우
특정한 1개를 제외한 $(n-1)$개 중에서 $(r-1)$개를 택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여
${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n-1}\mathrm{C}_{r}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$
이 성립한다.

1241 플루트 연주자 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$
바이올린 연주자 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_{6}\mathrm{C}_{2}=15$
따라서 구하는 경우의 수는
$10\cdot15=150$ 답 ②

1242 배우 10명 중에서 주연 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_{10}\mathrm{C}_{1}=10$
나머지 배우 9명 중에서 조연 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_{9}\mathrm{C}_{3}=84$
따라서 구하는 경우의 수는
$10\cdot84=840$ 답 840

참고 배우 10명 중에서 조연 3명을 먼저 뽑고 나머지 배우 7명 중에서 주연 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_{10}\mathrm{C}_{3}\cdot{}_{7}\mathrm{C}_{1}=120\cdot7=840$
이므로 뽑는 순서와 상관없이 결과가 같다.

1243 디자이너 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$
모델 n명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_{n}\mathrm{C}_{3}$
따라서 $10+{}_{n}\mathrm{C}_{3}=66$이므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{3}=56$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=56,\quad n(n-1)(n-2)=8\cdot7\cdot6$
$\therefore n=8$ 답 ①

1244 일주일 중에서 요가를 하는 3일을 택하는 경우의 수는
${}_{7}\mathrm{C}_{3}=35$
요가를 하는 날을 제외한 나머지 4일 중에서 조깅을 하는 3일을 택하는 경우의 수는
${}_{4}\mathrm{C}_{3}=4$
나머지 하루에 할 운동으로 줄넘기, 수영 중에서 하나를 택하는 경우의 수는
${}_{2}\mathrm{C}_{1}=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$35\cdot4\cdot2=280$ 답 ⑤

1245 세 수의 합이 홀수가 되기 위해서는 세 수가 모두 홀수이거나 한 개는 홀수, 두 개는 짝수이어야 한다.
(i) 세 수가 모두 홀수인 경우
1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는
${}_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$ ··· ❶
(ii) 한 개는 홀수, 두 개는 짝수인 경우
1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 1장을 뽑고, 2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 2장을 뽑는 경우의 수는
${}_{5}\mathrm{C}_{1}\cdot{}_{4}\mathrm{C}_{2}=5\cdot6=30$ ··· ❷
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$10+30=40$ ··· ❸
답 40

10 조합

채점 기준	비율
❶ 세 수가 모두 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 한 개는 홀수, 두 개는 짝수인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 카드에 적힌 수의 총합이 홀수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1246 구하는 경우의 수는 A, B, C를 제외한 7명의 학생 중에서 5명의 위원을 선출하는 경우의 수와 같으므로

$_7C_5={}_7C_2=21$ 답 ③

1247 구하는 경우의 수는 동엽이와 다은이를 제외한 6명의 선수 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_6C_3=20$ 답 ③

1248 구하는 경우의 수는 특정한 남학생 1명을 제외한 3명의 남학생 중에서 2명을 뽑고, 특정한 여학생 2명을 제외한 4명의 여학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_3C_2\cdot{}_4C_2=3\cdot6=18$ 답 18

1249 1부터 20까지의 자연수 중에서

12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개 ··· ❶

5의 배수는 5, 10, 15, 20의 4개 ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는 12의 약수와 5의 배수가 적힌 공을 제외한 10개의 공 중에서 $\underbrace{2}_{8-6=2}$개의 공을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_{10}C_2=45$ ··· ❸

답 45

채점 기준	비율
❶ 12의 약수의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 12의 약수가 적힌 공은 모두 뽑고, 5의 배수가 적힌 공은 뽑지 않는 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %

1250 녹차 아이스크림과 딸기 아이스크림 중에서 한 가지 아이스크림을 고르는 경우의 수는

$_2C_1=2$

녹차 아이스크림과 딸기 아이스크림을 제외한 6가지 아이스크림 중에서 4가지 아이스크림을 고르는 경우의 수는

$_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot15=30$ 답 ③

1251 9명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$_9C_4=126$

안전 요원만 4명을 뽑는 경우의 수는

$_4C_4=1$

어린이만 4명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$126-(1+5)=120$ 답 120

1252 8벌의 옷 중에서 3벌을 고르는 경우의 수는

$_8C_3=56$

검정색 옷과 파란색 옷 중에서 3벌을 고르는 경우의 수는

$_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$56-20=36$ 답 ①

1253 10가지 종류의 제품 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$_{10}C_4=210$ ··· ❶

(i) B 회사의 제품이 하나도 포함되지 않는 경우

A 회사와 C 회사의 제품 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$_5C_4={}_5C_1=5$ ··· ❷

(ii) B 회사의 제품이 1개 포함되는 경우

B 회사의 제품 중에서 1개를 택하고 A 회사와 C 회사의 제품 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_5C_1\cdot{}_5C_3=5\cdot10=50$ ··· ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$210-(5+50)=155$ ··· ❹

답 155

채점 기준	비율
❶ 4개의 제품을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ B 회사의 제품이 하나도 포함되지 않는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ B 회사의 제품이 1개 포함되는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ B 회사의 제품이 적어도 2개 포함되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

라쎈 특강

'적어도 2개 포함한다.'는 것은 '2개 이상을 포함한다.'는 뜻이므로 전체 경우의 수에서 하나도 포함하지 않거나 1개를 포함하는 경우의 수를 빼면 쉽게 해결할 수 있다. 유사한 표현인 '최소한'이 있을 때도 같은 방법을 이용한다.

1254 12명의 무용수 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{12}C_3=220$

남자 무용수가 n명이라 할 때 남자 무용수만 3명을 뽑는 경우의 수는 $_nC_3$

이때 여자 무용수를 적어도 한 명 포함하도록 뽑는 경우의 수가 210이므로

$220-{}_nC_3=210,\quad {}_nC_3=10$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=10,\quad n(n-1)(n-2)=5\cdot4\cdot3$

$\therefore n=5$

따라서 남자 무용수가 5명이므로 여자 무용수는

$12-5=7$(명) 답 ⑤

1255 5개의 실내 놀이 기구 중에서 3개를 고르는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

4개의 야외 놀이 기구 중에서 2개를 고르는 경우의 수는

$_4C_2=6$

5개의 놀이 기구를 타는 순서를 정하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot6\cdot120=7200$ 답 ④

1256 3, 6을 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\cdot24=96$ 답 96

1257 A, B를 제외한 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$ ··· ❶

A, B를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$이고, A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 A, B가 이웃하게 세우는 경우의 수는

$24\cdot2=48$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot48=480$ ··· ❸

답 480

채점 기준	비율
❶ A, B를 포함하여 5명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A, B가 이웃하게 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1258 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 8개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_2=28$ 답 ①

1259 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$ 답 10

1260 구각형의 대각선의 개수는 9개의 꼭짓점 중 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 9를 뺀 것과 같으므로

${}_9C_2-9=27$ 답 ②

라쎈 특강

n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같으므로

${}_nC_2-n$

이다. 이때

$${}_nC_2-n=\frac{n(n-1)}{2\cdot1}-n=\frac{n(n-3)}{2}$$

이므로 n각형의 대각선의 개수를 구하는 공식 $\frac{n(n-3)}{2}$과 같음을 알 수 있다.

1261 n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같으므로

${}_nC_2-n=54$ ··· ❶

$\frac{n(n-1)}{2\cdot1}-n=54,\quad n^2-3n-108=0$

$(n+9)(n-12)=0\quad \therefore n=12\ (\because n\ge3)$

따라서 십이각형의 꼭짓점의 개수는 12이다. ··· ❷

답 12

채점 기준	비율
❶ n각형의 대각선의 개수를 이용하여 n에 대한 식을 세울 수 있다.	50 %
❷ 다각형의 꼭짓점의 개수를 구할 수 있다.	50 %

1262 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$

한 선분 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

이때 한 선분 위에 있는 5개의 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이고 이러한 직선이 2개 있으므로 구하는 직선의 개수는

$45-2\cdot10+2\cdot1=27$ 답 ②

참고 한 직선 위에 있는 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 1임에 유의한다.

다른 풀이 두 선분 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

${}_5C_1\cdot{}_5C_1=25$

또 주어진 선분 위의 5개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선은 각각 한 개씩이므로 구하는 직선의 개수는

$25+2=27$

1263 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$56-4=52$ 답 ④

1264 주어진 8개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같다.

$\therefore {}_8C_3=56$ 답 ③

1265 직선 l 위의 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

직선 m 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$3\cdot6=18$ 답 18

다른 풀이 7개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_4={}_7C_3=35$

직선 l 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 m 위의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3\cdot{}_4C_1=1\cdot4=4$

직선 m 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 l 위의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 \cdot {}_3C_1 = 4 \cdot 3 = 12$$

직선 m 위의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_4 = 1$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$$35 - (4 + 12 + 1) = 18$$

1266 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_3 = 84$$

한 직선 위에 있는 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$$4 \cdot {}_3C_3 = 4 \cdot 1 = 4$$

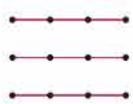
이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$84 - 4 = 80$$

답 ③

1267 12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = 220$$ ⋯ ❶

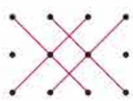


(i) 오른쪽 그림과 같이 가로 방향의 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$3 \cdot {}_4C_3 = 3 \cdot 4 = 12$$

(ii) 오른쪽 그림과 같이 세로 방향의 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$4 \cdot {}_3C_3 = 4 \cdot 1 = 4$$



(iii) 오른쪽 그림과 같이 대각선 방향의 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$4 \cdot {}_3C_3 = 4 \cdot 1 = 4$$ ⋯ ❷

이상에서 구하는 삼각형의 개수는

$$220 - (12 + 4 + 4) = 200$$ ⋯ ❸

답 200

채점 기준	비율
❶ 12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %
❸ 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

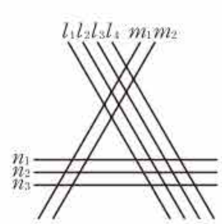
1268 가로로 나열된 5개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로로 나열된 3개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정된다.

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 = 10 \cdot 3 = 30$$

답 ②

1269 오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 l_i, m_j, n_k $(i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, k=1, 2, 3)$라 하자.



(i) l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하고, m_1, m_2를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 = 6 \cdot 1 = 6$$ ⋯ ❶

(ii) m_1, m_2를 택하고, n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_2C_2 \cdot {}_3C_2 = 1 \cdot 3 = 3$$ ⋯ ❷

(iii) n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하고, l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_4C_2 = 3 \cdot 6 = 18$$ ⋯ ❸

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$$6 + 3 + 18 = 27$$ ⋯ ❹

답 27

채점 기준	비율
❶ 4개의 평행한 직선과 2개의 평행한 직선에서 만들어지는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 2개의 평행한 직선과 3개의 평행한 직선에서 만들어지는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 3개의 평행한 직선과 4개의 평행한 직선에서 만들어지는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	10 %

1270 가로로 나열된 4개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로로 나열된 6개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 개수는

$${}_4C_2 \cdot {}_6C_2 = 6 \cdot 15 = 90$$

(i) 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는

15

(ii) 한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는

8

(iii) 한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는

3

이상에서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$90 - (15 + 8 + 3) = 64$$

답 ②

1271 동전 6개를 똑같은 주머니 2개에 빈 주머니가 없도록 나누어 담을 때, 각 주머니에 담을 수 있는 동전의 개수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

(i) 6개를 1개, 5개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_5 = 6 \cdot 1 = 6$$

(ii) 6개를 2개, 4개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$$

(iii) 6개를 3개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 15 + 10 = 31$$

답 31

1272 $a = {}_9C_5 \cdot {}_4C_4 = 126 \cdot 1 = 126$ ⋯ ❶

$b = {}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 84 \cdot 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 280$ ⋯ ❷

$\therefore a + b = 406$ ⋯ ❸

답 406

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1273 8명을 4명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!}=70\cdot 1\cdot \frac{1}{2}=35$$

학생 5명 중에서 4명이 같은 조가 되는 경우의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

따라서 구하는 경우의 수는

$35-5=30$ 답 ③

다른 풀이 각 조에 적어도 한 명의 선생님이 포함되려면

선생님 1명과 학생 3명, 선생님 2명과 학생 2명

의 두 조로 나누어야 한다.

선생님 1명과 학생 3명을 뽑으면 나머지 한 조가 자동으로 결정되므로 구하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \cdot {}_5C_3=3\cdot 10=30$$

1274 9명을 3명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!}=84\cdot 20\cdot 1\cdot \frac{1}{6}=280$$

규현이와 유진이가 같은 조가 되는 경우의 수는 규현이와 유진이를 제외한 7명을 1명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!}=7\cdot 20\cdot 1\cdot \frac{1}{2}=70$$

따라서 구하는 경우의 수는

$280-70=210$ 답 210

다른 풀이 규현이와 유진이를 제외한 7명을 2명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!}=21\cdot 10\cdot 1\cdot \frac{1}{2}=105$$

2명씩인 조에 규현이와 유진이를 배정하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$105\cdot 2=210$

1275 5개의 사탕을 2개, 2개, 1개로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!}=10\cdot 3\cdot 1\cdot \frac{1}{2}=15$$

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot 6=90$ 답 ②

1276 9장의 포토카드를 3장, 3장, 3장으로 나누는 경우의 수는

$${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!}=84\cdot 20\cdot 1\cdot \frac{1}{6}=280 \quad \cdots ❶$$

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$3!=6$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$280\cdot 6=1680$ ⋯ ❸

답 1680

채점 기준	비율
❶ 3개의 묶음으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 3개의 묶음을 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 9장을 3명의 학생에게 3장씩 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1277 6명을 2명, 2명, 1명, 1명으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!}\cdot \frac{1}{2!}=15\cdot 6\cdot 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{2}=45$$

4개의 조를 4개의 층에 분배하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$45\cdot 24=1080$ 답 1080

1278 5개의 마카롱을 3명의 어린이가 적어도 한 개씩은 받도록 나눌 때, 각 어린이가 받을 수 있는 마카롱의 개수는

1, 1, 3 또는 1, 2, 2

(i) 5개의 마카롱을 1개, 1개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!}=5\cdot 4\cdot 1\cdot \frac{1}{2}=10$$

(ii) 5개의 마카롱을 1개, 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!}=5\cdot 6\cdot 1\cdot \frac{1}{2}=15$$

(i), (ii)에서 마카롱을 3개의 묶음으로 나누는 경우의 수는

$10+15=25$

3개의 묶음을 3명의 어린이에게 나누어 주는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$25\cdot 6=150$ 답 ②

1279 2대의 자동차를 각각 A, B라 하면 운전할 수 있는 두 사람이 두 자동차 A, B에 나누어 타는 경우의 수는

$2!=2$ ⋯ ❶

운전자를 제외한 4명을 2명, 2명의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!}=6\cdot 1\cdot \frac{1}{2}=3$$

두 조를 두 자동차 A, B에 배정하는 경우의 수는

$2!=2$ ⋯ ❷

자동차 A에서 운전자를 제외한 2명이 자리에 앉는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

마찬가지로 자동차 B에서 운전자를 제외한 2명이 자리에 앉는 경우의 수도 12이다. ⋯ ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot 3\cdot 2\cdot 12\cdot 12=1728$ ⋯ ❹

답 1728

10 조합

채점 기준	비율
❶ 운전할 수 있는 두 사람을 두 자동차에 배정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 운전자를 제외한 4명을 두 자동차에 배정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 자동차에서 운전자를 제외한 2명이 자리에 앉는 경우의 수를 각각 구할 수 있다.	30 %
❹ 자동차에 나누어 타는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

1280 구하는 경우의 수는 먼저 5개의 학급을 2개, 3개의 두 조로 나눈 후, 3개인 조에서 부전승으로 올라가는 한 학급을 택하는 경우의 수와 같으므로

$({}_5C_2\cdot{}_3C_3)\cdot{}_3C_1=10\cdot1\cdot3=30$ 답 ②

1281 구하는 경우의 수는 먼저 6명을 2명, 2명, 2명의 세 조로 나눈 후, 부전승으로 올라가는 한 조를 택하는 경우의 수와 같으므로

$\left({}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}\right)\cdot{}_3C_1=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}\cdot3=45$ 답 ①

다른 풀이 6명을 2명, 4명의 두 조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_4=15\cdot1=15$

4명인 조를 다시 2명, 2명의 두 조로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot3=45$

1282 구하는 경우의 수는 먼저 8개의 팀을 2개, 2개, 2개, 2개의 네 조로 나눈 후, 네 조를 다시 2개, 2개의 두 조로 나누는 경우의 수와 같으므로

$\left({}_8C_2\cdot{}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{4!}\right)\cdot\left({}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\right)$

$=\left(28\cdot15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{24}\right)\cdot\left(6\cdot1\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=105\cdot3$

$=315$ 답 315

다른 풀이 8개의 팀을 4개, 4개의 두 조로 나누는 경우의 수는

${}_8C_4\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=70\cdot1\cdot\frac{1}{2}=35$

4개의 팀을 다시 2개, 2개의 두 조로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$

나머지 4개의 팀을 2개, 2개의 두 조로 나누는 경우의 수도 3이므로 구하는 경우의 수는

$35\cdot3\cdot3=315$

1283 전략 ${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$임을 이용한다.

풀이 ${}_nC_3 : {}_{n+1}C_4=4 : 9$에서

$9\cdot{}_nC_3=4\cdot{}_{n+1}C_4$

$9\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=4\cdot\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$

$9=n+1 \qquad \therefore n=8$ 답 ②

1284 전략 a, b, c의 대소 관계가 주어졌으므로 순서를 생각하지 않는 경우임을 이용한다.

풀이 구하는 순서쌍의 개수는 2부터 9까지의 8개의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_3=56$ 답 56

1285 전략 서로 다른 n개에서 a개를 택하고 서로 다른 m개에서 b개를 택하는 경우의 수는 ${}_nC_a\cdot{}_mC_b$임을 이용한다.

풀이 주머니에는 짝수가 적힌 공이 2, 4, 6, 8의 4개, 홀수가 적힌 공이 1, 3, 5, 7, 9의 5개가 들어 있다.

짝수가 적힌 4개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

홀수가 적힌 5개의 공 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot5=30$ 답 30

1286 전략 이웃해도 되는 수를 먼저 배열한다.

풀이 0끼리는 이웃하지 않아야 하고 아홉 자리의 자연수의 첫 번째 자리에는 0이 올 수 없으므로 다음과 같이 1을 먼저 일렬로 나열하면 ∨가 표시된 자리에만 0이 올 수 있다.

1∨1∨1∨1∨1∨1∨

따라서 1의 사이사이 및 한쪽 끝의 6개의 자리에 3개의 0을 나열하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$ 답 ⑤

1287 전략 남녀 혼합 복식, 남자 복식, 여자 복식, 단식에 출전할 회원을 정하는 경우의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 남녀 혼합 복식에 출전할 회원 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_1\cdot{}_6C_1=4\cdot6=24$

남자 복식, 여자 복식에 출전할 회원 2명씩을 뽑는 경우의 수는

${}_3C_2\cdot{}_5C_2=3\cdot10=30$

남은 4명 중에서 단식에 출전할 회원 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot30\cdot4=2880$ 답 2880

1288 전략 9명 중에서 민정이는 이미 뽑았다고 생각하고 지훈이를 제외한 7명에 대하여 생각한다.

풀이 구하는 경우의 수는 민정이와 지훈이를 제외한 7명의 회원 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_3=35$ 답 35

1289 전략 '적어도' 조건이 있는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 빼서 구한다.

풀이 10장의 카드 중에서 4장을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

10의 약수는 1, 2, 5, 10이므로 10의 약수가 적힌 카드를 제외한 6장의 카드 중에서 4장을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-15=195$ 답 ④

1290 전략 A 조와 B 조에서 적어도 1명씩 뽑는 경우의 수는 A 조에서 모두 뽑거나 B 조에서 모두 뽑는 경우의 수를 이용하여 구한다.

풀이 A 조의 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

B 조의 6명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_1=6$

$\therefore a=10\cdot6=60$

전체 11명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_{11}C_4=330$

A 조의 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

B 조의 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

$\therefore b=330-(5+15)=310$

A 조의 특정한 2명이 반드시 포함되도록 뽑는 경우의 수는 A 조의 특정한 2명을 제외한 나머지 9명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$c={}_9C_2=36$

$\therefore a+b+c=406$ 답 ③

1291 전략 정사각형 모양과 직각이등변삼각형 모양의 시트지를 붙이는 경우의 수를 각각 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 창문 네 개 중 두 개를 택하여 정사각형 모양의 노란색 시트지 2장을 붙이는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

나머지 창문 2개를 직각이등변삼각형 모양으로 각각 나누는 경우의 수는 $2\cdot2=4$이고, 나누어진 네 개의 영역에 직각이등변삼각형 모양의 시트지 4장을 붙이는 경우의 수는 $4!$이므로 직각이등변삼각형 모양의 시트지를 붙이는 경우의 수는

$4\cdot4!=4\cdot24=96$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot96=576$ 답 ④

1292 전략 만나는 2개의 선분은 두 직선 l, m에서 각각 2개의 점을 택하여 그을 수 있음을 이용한다.

풀이 직선 l 위의 6개의 점 중에서 2개의 점을 택하고, 직선 m 위의 5개의 점 중에서 2개의 점을 택하여 두 선분을 그을 때 두 선분이 만나는 경우는 한 가지뿐이므로 구하는 경우의 수는

└ 두 선분이 × 모양으로 만나는 경우

${}_6C_2\cdot{}_5C_2=15\cdot10=150$ 답 150

1293 전략 한 직선 위에 있지 않은 n개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는 ${}_nC_3$임을 이용한다.

풀이 10개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

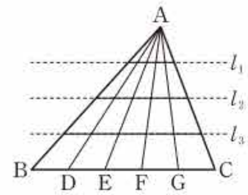
한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없고 이러한 직선이 5개가 있으므로 구하는 삼각형의 개수는

$120-5\cdot4=100$ 답 100

1294 전략 삼각형을 만들기 위해 필요한 직선을 택하는 경우의 수를 이용한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 6개의 직선 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중에서 서로 다른 2개의 직선을 택하고, 4개의 직선 l_1, l_2, l_3, BC 중에서 1개의 직선을 택하면 삼각형이 1개 만들어진다.

따라서 만들 수 있는 삼각형의 개수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_1=15\cdot4=60$ 답 ④

1295 전략 먼저 330을 소인수분해한다.

풀이 $330=2\cdot3\cdot5\cdot11$

이때 330의 소인수 2, 3, 5, 11을 2개의 묶음으로 나누어 곱하면 330이 되므로 구하는 경우의 수는 2, 3, 5, 11을 2개의 묶음으로 나누는 경우의 수와 같다.

(i) 1개, 3개로 나누는 경우의 수는

${}_4C_1\cdot{}_3C_3=4\cdot1=4$

(ii) 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+3=7$ 답 ②

다른 풀이 $330=2\cdot3\cdot5\cdot11$의 양의 약수의 개수는

$(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)=16$

330을 두 자연수의 곱으로 나타내는 것은 두 양의 약수의 곱으로 나타내는 것이므로 그 경우의 수는

$\frac{16}{2}=8$

이때 $330=1\cdot330$으로 나타내는 것은 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$8-1=7$

1296 전략 6개의 수를 2개씩 3묶음으로 나눈 후 그 합이 작은 것부터 차례대로 1열, 2열, 3열에 채운다.

풀이 $a_1<a_2<a_3$이려면 6개의 수를 2개, 2개, 2개로 나눈 후 그 합이 작은 것부터 차례대로 1열, 2열, 3열에 채우면 된다.

6개의 수를 2개씩 3묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$

이때 각 열의 수끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot8=120$ 답 ②

└ 순서가 정해져 있으므로 3묶음으로 나누기만 하면 된다.

10 조합

1297 전략 6명을 3명, 3명의 두 조로 나눈 후, 각 조에서 부전승으로 올라가는 선수를 뽑는다.

풀이 6명을 3명, 3명의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

각 조에서 부전승으로 올라갈 선수를 뽑는 경우의 수는

$${}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 3 \cdot 3 = 9$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \cdot 9 = 90$$

답 ③

1298 전략 같은 문자가 적힌 공의 개수에 따라 경우를 나누어 생각한다.

풀이 (i) 모두 같은 문자가 적힌 경우

AAA, BBB의 2가지이므로 이 경우의 수는

2 ⋯ ❶

(ii) 같은 문자가 적힌 공이 2개인 경우

같은 문자가 적힌 공은 A, B, C, D, E에서 1종류를 고르고, 나머지 1개의 공은 위에서 선택한 종류를 제외한 나머지 7종류에서 1개를 고르는 경우와 같으므로 이 경우의 수는

${}_5C_1 \cdot {}_7C_1 = 35$ ⋯ ❷

(iii) 모두 다른 문자가 적힌 경우

A, B, C, D, E, F, G, H에서 3개를 고르는 경우와 같으므로 이 경우의 수는

${}_8C_3 = 56$ ⋯ ❸

이상에서 구하는 경우의 수는

$2 + 35 + 56 = 93$ ⋯ ❹

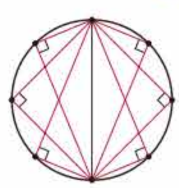
답 93

채점 기준	비율
❶ 모두 같은 문자가 적힌 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 같은 문자가 적힌 공이 2개인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 모두 다른 문자가 적힌 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

1299 전략 반원에 대한 원주각의 크기가 $90°$임을 이용하여 직각삼각형의 개수를 구한다.

풀이 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_3 = 56$ ⋯ ❶



8개의 점 중에서 2개의 점을 이어 만들 수 있는 지름은 4개이고, 오른쪽 그림과 같이 1개의 지름에 대하여 6개의 직각삼각형을 만들 수 있으므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는

$4 \cdot 6 = 24$ ⋯ ❷

따라서 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수는

$56 - 24 = 32$ ⋯ ❸

답 32

채점 기준	비율
❶ 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 직각삼각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1300 전략 10명을 두 조로 나눈 후 두 조를 서로 다른 2대의 승강기에 분배하는 경우의 수를 구한다.

풀이 학생 10명이 서로 다른 2대의 승강기에 탈 때, 각 승강기에 탈 수 있는 학생 수는

3, 7 또는 4, 6 또는 5, 5

(i) 10명을 3명, 7명으로 나누는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 \cdot {}_7C_7 = 120$$

(ii) 10명을 4명, 6명으로 나누는 경우의 수는

$${}_{10}C_4 \cdot {}_6C_6 = 210$$

(iii) 10명을 5명, 5명으로 나누는 경우의 수는

$${}_{10}C_5 \cdot {}_5C_5 \cdot \frac{1}{2!} = 126$$

이상에서 10명을 두 조로 나누는 경우의 수는

$120 + 210 + 126 = 456$ ⋯ ❶

두 조를 서로 다른 2대의 승강기에 분배하는 경우의 수는

$2! = 2$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$456 \cdot 2 = 912$ ⋯ ❸

답 912

채점 기준	비율
❶ 10명을 두 조로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %
❷ 두 조를 2대의 승강기에 분배하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 10명이 2대의 승강기에 타는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

11 행렬과 그 연산

1301 답 1×2 행렬

1302 답 3×1 행렬

1303 답 2×2 행렬

1304 답 3×2 행렬

1305 (3) $a_{11}=-1$, $a_{32}=-4$이므로

$a_{11}+a_{32}=-5$

답 (1) 5, 2 (2) 0, 2 (3) -5

1306 $a_{11}=1+2\cdot1=3$, $a_{21}=2+2\cdot1=4$, $a_{31}=3+2\cdot1=5$

$\therefore A=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

1307 $a_{11}=1\cdot(1-1)=0$, $a_{12}=1\cdot(2-1)=1$,
$a_{21}=2\cdot(1-1)=0$, $a_{22}=2\cdot(2-1)=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$

1308 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-1=1$, $b+4=2$

$\therefore a=2$, $b=-2$ 답 $a=2$, $b=-2$

1309 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4a=-12$, $a+b=7$

$\therefore a=-3$, $b=10$ 답 $a=-3$, $b=10$

1310 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2a-1=0$, $b+c=-2$, $-b+2c=5$, $2d=4$

$\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=-3$, $c=1$, $d=2$

답 $a=\frac{1}{2}$, $b=-3$, $c=1$, $d=2$

1311 $\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+2\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

1312 $\begin{pmatrix}0&3\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1\\5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+2&3-1\\1+5&2-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&2\\6&0\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}2&2\\6&0\end{pmatrix}$

1313 $\begin{pmatrix}1&0&5\\2&-2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-3&2\\0&6&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4&0-3&5+2\\2+0&-2+6&3+5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5&-3&7\\2&4&8\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}5&-3&7\\2&4&8\end{pmatrix}$

1314 $(7\quad -4)-(-2\quad 8)=(7+2\quad -4-8)$

$=(9\quad -12)$ 답 $(9\quad -12)$

1315 $\begin{pmatrix}1&3\\0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\7&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-0&3-1\\0-7&-2+3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&2\\-7&1\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}1&2\\-7&1\end{pmatrix}$

1316 $\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-1\\0&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-4\\3&1\\-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-3&1+4\\-1-3&-1-1\\0+2&6+3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-5&5\\-4&-2\\2&9\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}-5&5\\-4&-2\\2&9\end{pmatrix}$

1317 $X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&5\\1&-4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1+2&2+5\\3+1&4-4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&7\\4&0\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}3&7\\4&0\end{pmatrix}$

1318 $X=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2-2&-1-1\\1-3&7-4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4&-2\\-2&3\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}-4&-2\\-2&3\end{pmatrix}$

1319 (1) $2A=2\begin{pmatrix}1&0\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\-6&4\end{pmatrix}$

(2) $-3A=-3\begin{pmatrix}1&0\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0\\9&-6\end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix}2&0\\-6&4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-3&0\\9&-6\end{pmatrix}$

1320 (1) $4A-2B=4\begin{pmatrix}0&3\\-2&-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&4\\3&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&12\\-8&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-8\\-6&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&4\\-14&0\end{pmatrix}$

(2) $-A+3B=-\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -14 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}$

1321 $A+X=O$에서

$X=-A=-\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

1322 $A-B+X=O$에서

$X=B-A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1323 (1) $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$

$B+A=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=\left\{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right\}+\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A+(B+C)=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}+\left\{\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore (A+B)+C=A+(B+C)$

답 풀이 참조

1324 (1) $1\cdot A=1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot a & 1\cdot b \\ 1\cdot c & 1\cdot d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=A$

$(-1)\cdot A=(-1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\cdot a & -1\cdot b \\ -1\cdot c & -1\cdot d \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}=-A$

(2) $0\cdot A=0\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\cdot a & 0\cdot b \\ 0\cdot c & 0\cdot d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$

$kO=k\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k\cdot 0 & k\cdot 0 \\ k\cdot 0 & k\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$

답 풀이 참조

1325 (1) $-2(A+B)+3A=-2A-2B+3A$

$=A-2B$

$=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$

(2) $4(A+B)-(A-B)=4A+4B-A+B$

$=3A+5B$

$=3\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -25 & 5 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -13 & -4 \\ 3 & 36 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -13 & -4 \\ 3 & 36 \end{pmatrix}$

1326 $2X-A=B$에서 $2X=A+B$

$\therefore X=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

1327 $(2 \ \ -3)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=(2\cdot 4-3\cdot 1)=(5)$ 답 (5)

1328 $(-3 \ \ 7)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=(-3\cdot 0+7\cdot 1 \ \ -3\cdot 1+7\cdot 0)$

$=(7 \ \ -3)$ 답 $(7 \ \ -3)$

1329 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}(5 \ \ 8)=\begin{pmatrix} -2\cdot 5 & -2\cdot 8 \\ 1\cdot 5 & 1\cdot 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & -16 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} -10 & -16 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

1330 $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\cdot 2-2\cdot 1 \\ 2\cdot 2+4\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

1331 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1\cdot 3+3\cdot(-1) & -1\cdot 2+3\cdot 0 \\ 1\cdot 3-2\cdot(-1) & 1\cdot 2-2\cdot 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

1332 (1) $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 2\cdot2+0\cdot(-1) & 2\cdot0+0\cdot1 \\ -1\cdot2+1\cdot(-1) & -1\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 4\cdot2+0\cdot(-1) & 4\cdot0+0\cdot1 \\ -3\cdot2+1\cdot(-1) & -3\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$

1333 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 2\cdot(-3)+0\cdot(-2) & 2\cdot1+0\cdot0 \\ 4\cdot(-3)-1\cdot(-2) & 4\cdot1-1\cdot0 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -3\cdot2+1\cdot4 & -3\cdot0+1\cdot(-1) \\ -2\cdot2+0\cdot4 & -2\cdot0+0\cdot(-1) \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore AB\neq BA$

답 풀이 참조

1334 (1) $5E=5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $E^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $(-E)^5=-E^5=-E=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $(-E)^{49}+E^{50}=-E^{49}+E^{50}=-E+E=O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1335 (1) $(A+E)(A-E)=A^2-AE+EA-E^2$
$=A^2-A+A-E$
$=A^2-E$

(2) $(A-E)^2=(A-E)(A-E)=A^2-AE-EA+E^2$
$=A^2-A-A+E=A^2-2A+E$

답 풀이 참조

1336 $a_{11}=1+1-1\cdot1=1$, $a_{12}=1+2-1\cdot2=1$,
$a_{21}=2+1-2\cdot1=1$, $a_{22}=2+2-2\cdot2=0$,
$a_{31}=3+1-3\cdot1=1$, $a_{32}=3+2-3\cdot2=-1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1337 $a_{11}=1^2=1$, $a_{12}=1+2\cdot2=5$, $a_{13}=1+2\cdot3=7$,
$a_{21}=2\cdot2-1=3$, $a_{22}=2^2=4$, $a_{23}=2+2\cdot3=8$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은
$1+5+7+3+4+8=28$

답 ③

1338 $a_{11}=0$, $a_{12}=3$, $a_{13}=3\cdot2+1=7$, $a_{21}=3$, $a_{22}=0$, $a_{23}=2$,
$a_{31}=2\cdot3+1=7$, $a_{32}=2$, $a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1339 $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{13}=2$, $a_{21}=1$, $a_{22}=1$, $a_{23}=1$,
$a_{31}=1$, $a_{32}=0$, $a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

답 ②

1340 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x+y=3$, $x^3+y^3=9$
이때 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이므로
$9=3^3-3xy\cdot3$, $9xy=18$
$\therefore xy=2$

답 ⑤

1341 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$a+b=3$, $a-b=b$, $b-c=-2$, $b+c=7-c$
$a+b=3$, $a-b=b$를 연립하여 풀면
$a=2$, $b=1$
$b=1$을 $b-c=-2$에 대입하여 정리하면
$c=3$

답 $a=2$, $b=1$, $c=3$

1342 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x^2-2=\frac{x^2}{2}$, $x^2+1=5$, $3x-2=-x^2+2x$ ··· ❶
$x^2+1=5$에서 $x^2=4$
$\therefore x=\pm2$ ...... ㉠
$3x-2=-x^2+2x$에서
$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서 $x=-2$ ··· ❷

답 -2

채점 기준	비율
❶ x에 대한 식을 구할 수 있다.	50 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	50 %

11 행렬과 그 연산

1343 $3(X+Y)-(X+4Y)=3X+3Y-X-4Y=2X-Y$

$$=2\begin{pmatrix}6&3\\-3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}12&6\\-6&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}12&7\\-7&-2\end{pmatrix}$$

답 ④

1344 $\begin{pmatrix}1&2\\3&x\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&y\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\1&3\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2y\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\1&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}3&2+2y\\1&x+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\1&3\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+4=3,\ 2+2y=6 \qquad \therefore x=-1,\ y=2$

$\therefore xy=-2$

답 -2

1345 $3X-B=2(X-A)-4B$에서

$3X-B=2X-2A-4B$

$\therefore X=-2A-3B$ ··· ❶

$$=-2\begin{pmatrix}3&2\\-2&4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-4\\-5&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6&-4\\4&-8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&12\\15&-9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-9&8\\19&-17\end{pmatrix}$$ ··· ❷

따라서 행렬 X의 $(2,\ 2)$ 성분은 -17이다. ··· ❸

답 -17

채점 기준	비율
❶ 행렬 X를 두 행렬 A, B로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 행렬 X를 구할 수 있다.	50 %
❸ 행렬 X의 $(2,\ 2)$성분을 구할 수 있다.	20 %

1346 $xA+yB=3C$에서

$$x\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2&-1\\1&6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2&1\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2x&x\\-x&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2y&-y\\y&6y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3\\-3&-6\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}2x-2y&x-y\\-x+y&6y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3\\-3&-6\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x-2y=6,\ x-y=3,\ -x+y=-3,\ 6y=-6$

$\therefore x=2,\ y=-1$

$\therefore x+y=1$

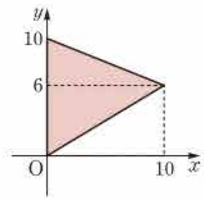
답 ④

1347 $3A-B=3\begin{pmatrix}1&3\\3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-1\\-1&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3&9\\9&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&10\\10&6\end{pmatrix}$$

오른쪽 그림에서 $S(3A-B)$는 세 점 $(0,\ 10)$, $(10,\ 6)$, $(0,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이이므로



$$S(3A-B)=\frac{1}{2}\cdot10\cdot10=50$$

답 ⑤

1348 $2X+Y=A$ …… ㉠

$X-Y=B$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$3X=A+B$

$$=\begin{pmatrix}-2&-3\\4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&6\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6&3\\3&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6&3\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$X=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}$을 ㉡에 대입하면

$$\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}-Y=\begin{pmatrix}-4&6\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore Y=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&6\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5\\2&0\end{pmatrix}$$

답 $X=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}2&-5\\2&0\end{pmatrix}$

1349 $A+3B=\begin{pmatrix}7&3\\14&6\end{pmatrix}$ …… ㉠

$2A-B=\begin{pmatrix}7&6\\14&5\end{pmatrix}$ …… ㉡

$2\times$㉠$-$㉡을 하면

$$7B=2\begin{pmatrix}7&3\\14&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&6\\14&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}14&6\\28&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&6\\14&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7&0\\14&7\end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}7&0\\14&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$$ ··· ❶

$B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$을 ㉠에 대입하면

$$A+3\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&3\\14&6\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}7&3\\14&6\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7&3\\14&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&0\\-6&-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&3\\8&3\end{pmatrix}$$ ··· ❷

$$\therefore A+B=\begin{pmatrix}4&3\\8&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\10&4\end{pmatrix}$$

따라서 $p=5$, $q=3$, $r=10$, $s=4$이므로

$ps+qr=5\cdot 4+3\cdot 10=50$ ⋯ ❸

답 50

채점 기준	비율
❶ 행렬 B를 구할 수 있다.	40 %
❷ 행렬 A를 구할 수 있다.	40 %
❸ $ps+qr$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1350 $X+2Y=A+B$ ⋯⋯ ㉠

$2(X-Y)=A-B$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$$3X=2A=2\begin{pmatrix}6&12\\0&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&24\\0&-12\end{pmatrix}$$

$$\therefore X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12&24\\0&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8\\0&-4\end{pmatrix}$$

$X=\begin{pmatrix}4&8\\0&-4\end{pmatrix}$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{pmatrix}4&8\\0&-4\end{pmatrix}+2Y=\begin{pmatrix}6&12\\0&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\4&-8\end{pmatrix}$$

$$2Y=\begin{pmatrix}7&15\\4&-14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&8\\0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&7\\4&-10\end{pmatrix}$$

$$\therefore Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&7\\4&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{7}{2}\\2&-5\end{pmatrix}$$

따라서 $x_{12}=8$, $y_{21}=2$이므로

$x_{12}+y_{21}=10$

답 ③

1351 $\begin{pmatrix}x&y\\x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\y&x\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2&-1\\x&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y&5\\0&1\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}2x+y^2&x+xy\\2x&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2\\2x&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y&5\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}2x+y^2&x+xy\\2x&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+y&3\\2x&1\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y^2=4+y$, $x+xy=3$, $x=1$

$\therefore x=1$, $y=2$

$\therefore x^2+y^2=1^2+2^2=5$

답 ③

1352 ② A는 2×1 행렬, C는 2×2 행렬이므로 AC는 구할 수 없다.

답 ②

1353 $AB=O$에서

$$\begin{pmatrix}-1&x\\3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}-y+2x&-2+x\\3y-12&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-y+2x=0$, $-2+x=0$, $3y-12=0$ ⋯ ❶

$\therefore x=2$, $y=4$

$\therefore xy=8$ ⋯ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ x, y에 대한 식을 구할 수 있다.	60 %
❷ xy의 값을 구할 수 있다.	40 %

1354 $\frac{1}{2}(AB-BA)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&8\\-2&4\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-8\\2&-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix}$$

답 ④

1355 $\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&0\\0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&d\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&0\\ab&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&d\\0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}b&bd\\ab&abd+c\end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{pmatrix}b&bd\\ab&abd+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\6&-5\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$b=2$, $bd=-4$, $ab=6$, $abd+c=-5$

$\therefore a=3$, $b=2$, $c=7$, $d=-2$

$\therefore a+b+c+d=10$

답 10

1356 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$A=\begin{pmatrix}\alpha&1\\1&\beta\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}\alpha&1\\1&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&1\\1&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+1&\alpha+\beta\\\alpha+\beta&1+\beta^2\end{pmatrix}$$

따라서 A^2의 모든 성분의 합은

$(\alpha^2+1)+(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)+(1+\beta^2)$

$=\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta)+2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+2$

$=3^2-2\cdot 1+2\cdot 3+2=15$

답 15

1357 $A^2=\begin{pmatrix}a&4\\-2&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&4\\-2&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-8&4a+4b\\-2a-2b&-8+b^2\end{pmatrix}$

이므로

$$\begin{pmatrix}a^2-8&4a+4b\\-2a-2b&-8+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-8=1$, $4a+4b=0$, $-2a-2b=0$, $-8+b^2=1$

$\therefore a+b=0$

답 ①

1358 $A^2=\begin{pmatrix}k&-1\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k&-1\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^2+3&-k-1\\-3k-3&4\end{pmatrix}$

11 행렬과 그 연산

이때 행렬 A^2의 모든 성분이 합이 0이 되려면

$(k^2+3)+(-k-1)+(-3k-3)+4=0$

$k^2-4k+3=0, \qquad (k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 상수 k의 값의 곱은

$1\cdot3=3$ 답 ⑤

1359 $A^2=pA+qE$이므로

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7&15\\10&22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&3p\\2p&4p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q&0\\0&q\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}7&15\\10&22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+q&3p\\2p&4p+q\end{pmatrix}$$ ➊

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$7=p+q,\ 15=3p,\ 10=2p,\ 22=4p+q$

$\therefore p=5,\ q=2$ ➋

답 $p=5,\ q=2$

채점 기준	비율
➊ 주어진 등식에 행렬을 대입하여 정리할 수 있다.	50 %
➋ p, q의 값을 구할 수 있다.	50 %

1360 $A+B=\begin{pmatrix}2&2\\1&4\end{pmatrix}$ ······ ㉠

$A-B=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&-2\end{pmatrix}$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$$2A=\begin{pmatrix}2&2\\1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-4\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}+B=\begin{pmatrix}2&2\\1&4\end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}2&2\\1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\1&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2+B^2=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&-3\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&9\\3&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&6\\3&13\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^2+B^2의 $(2,\ 1)$ 성분은 3이다. 답 ①

1361 $A=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}3^2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^3&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}3^3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^4&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}81&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore n=4$ 답 4

라쎈 특강

다음과 같이 특수한 꼴로 정리되는 행렬의 거듭제곱은 자주 나오므로 기억해 두면 편리하다. (단, n은 자연수)

① $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&an\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\an&1\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&a^n\end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&0\\0&b^n\end{pmatrix}$

1362 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^3\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^4\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{20}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^{20}\end{pmatrix}$$ 답 $\begin{pmatrix}1&0\\0&2^{20}\end{pmatrix}$

1363 $A=\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\cdot5\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2\cdot5\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\cdot5\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&3\cdot5\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\cdot5\\0&1\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1&5n\\0&1\end{pmatrix}$$ ➊

$$\therefore A^{100}=\begin{pmatrix}1&500\\0&1\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^{100}의 $(1,\ 2)$ 성분은 500이다. ➋

답 500

채점 기준	비율
➊ 행렬 A^n을 구할 수 있다.	70 %
➋ 행렬 A^{100}의 $(1,\ 2)$ 성분을 구할 수 있다.	30 %

1364 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}$

$=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}1&10\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}10&1+2+3+\cdots+10\\0&10\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}10&55\\0&10\end{pmatrix}$

따라서 $a=10$, $b=55$, $c=0$, $d=10$이므로

$a-b+c-d=-55$ 답 ①

1365 $A=\begin{pmatrix}2&7\\-1&-3\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}2&7\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7\\-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-7\\1&2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-3&-7\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7\\-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

$\therefore A^{2025}=(A^3)^{675}=E$

따라서 행렬 A^{2025}의 모든 성분의 합은

$1+0+0+1=2$ 답 ③

1366 $A=\begin{pmatrix}-2&5\\-1&2\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}-2&5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$A^3=A^2A=(-E)A=-A$

$\therefore A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

따라서 $A^n=E$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

답 4

1367 $A=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$A^4=A^3A=(-E)A=-A$

$A^5=A^4A=-AA=-A^2$

$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

$\therefore A^{25}=(A^6)^4A=A$

$A^{25}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}2x+3y\\-x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+3y=-1$, $-x-y=-2$

$\therefore x=7$, $y=-5$

$\therefore 2x-y=19$ 답 ②

1368 3월 S 자동차의 판매 금액의 총합은 cp만 원이고, 3월 T 자동차의 판매 금액의 총합은 dq만 원이므로 S 자동차와 T 자동차의 3월 판매 금액의 총합은 $(cp+dq)$만 원이다.

$\therefore x=cp+dq$

이때

$AB=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap+bq\\cp+dq\end{pmatrix}$

이므로 x의 값은 행렬 AB의 $(2,\ 1)$ 성분과 같다. 답 ②

1369 $AB=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae+bg&af+bh\\ce+dg&cf+dh\end{pmatrix}$이므로 AB의 $(2,\ 2)$ 성분은

$cf+dh$

따라서 행렬 AB의 $(2,\ 2)$ 성분은 재욱이가 Q 마트에서 감자와 양파를 살 경우 지불해야 하는 금액이다. 답 ④

참고 행렬 AB의 각 성분이 의미하는 것은 다음과 같다.

① $(1,\ 1)$ 성분 $ae+bg$

→ 승진이가 P 마트에서 감자와 양파를 살 경우 지불해야 하는 금액

② $(1,\ 2)$ 성분 $af+bh$

→ 재욱이가 P 마트에서 감자와 양파를 살 경우 지불해야 하는 금액

③ $(2,\ 1)$ 성분 $ce+dg$

→ 승진이가 Q 마트에서 감자와 양파를 살 경우 지불해야 하는 금액

1370 A 상자를 20개, B 상자를 10개 만들기 위해 구입하려는 사과와 복숭아의 개수를 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}\text{사과의 개수}\\\text{복숭아의 개수}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\cdot20+6\cdot10\\2\cdot20+4\cdot10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&6\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\10\end{pmatrix}$

따라서 필요한 금액은

$3000\times(\text{사과의 개수})+5000\times(\text{복숭아의 개수})$

이므로

$(3000\quad 5000)\begin{pmatrix}\text{사과의 개수}\\\text{복숭아의 개수}\end{pmatrix}$

$=(3000\quad 5000)\begin{pmatrix}8&6\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\10\end{pmatrix}$ 답 ⑤

참고 A 상자를 1개, B 상자를 1개 만들기 위해 사과와 복숭아를 구입하는 데 필요한 금액을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}\text{A 상자 1개 금액}\\\text{B 상자 1개 금액}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\cdot3000+2\cdot5000\\6\cdot3000+4\cdot5000\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}8&2\\6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3000\\5000\end{pmatrix}$

따라서 필요한 금액은

$20\times(\text{A 상자 1개 금액})+10\times(\text{B 상자 1개 금액})$

이므로

$(20\quad 10)\begin{pmatrix}\text{A 상자 1개 금액}\\\text{B 상자 1개 금액}\end{pmatrix}=(20\quad 10)\begin{pmatrix}8&2\\6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3000\\5000\end{pmatrix}$

1371 $A^2-AB+BA-B^2$

$$=A(A-B)+B(A-B)$$
$$=(A+B)(A-B)$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}\right\}\left\{\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\begin{pmatrix}3&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&-5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3&-8\\0&-5\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A^2-AB+BA-B^2$의 $(2, 2)$ 성분은 -5이다.

답 ②

1372 $ABA+ABC$

$$=AB(A+C)$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\-2&4\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&3\\-2&5\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-3\\-8&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&3\\0&8\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-4&-21\\32&120\end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix}-4&-21\\32&120\end{pmatrix}$

1373 $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$이므로

$$A^2+B^2=(A+B)^2-(AB+BA)$$ ··· ❶
$$=\begin{pmatrix}5&-1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-1\\2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&7\\7&-6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}23&-4\\8&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&7\\7&-6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}19&-11\\1&5\end{pmatrix}$$ ··· ❷

따라서 행렬 A^2+B^2의 모든 성분의 합은

$19-11+1+5=14$ ··· ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ A^2+B^2을 $A+B$, $AB+BA$로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 행렬 A^2+B^2을 구할 수 있다.	50 %
❸ 행렬 A^2+B^2의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	20 %

1374 $(A+B)(A-2B)=\begin{pmatrix}4&4\\7&-1\end{pmatrix}$에서

$$A^2-2AB+BA-2B^2=\begin{pmatrix}4&4\\7&-1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&-1\end{pmatrix}-2AB+BA=\begin{pmatrix}4&4\\7&-1\end{pmatrix}$$
$$\therefore 2AB-BA=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&4\\7&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-6\\-9&0\end{pmatrix}$$
$$\therefore (A-B)(A+2B)=A^2+2AB-BA-2B^2$$
$$=A^2-2B^2+2AB-BA$$
$$=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&-6\\-9&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2&-8\\-11&-1\end{pmatrix}$$

답 ①

1375 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$에서

$$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$$

이므로 $-AB-BA=-2AB$

$\therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k&1\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}-k+2&7\\2k-3&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k+2&2k-3\\7&-10\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2k-3=7$, $2k=10$

$\therefore k=5$

답 ③

1376 $AB=BA$에서

$$\begin{pmatrix}2&x\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&4\\y&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4\\y&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&x\\-1&1\end{pmatrix}$$
$$\therefore \begin{pmatrix}-2+xy&8\\1+y&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-x+4\\2y&xy\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-2+xy=-6$, $8=-x+4$, $1+y=2y$, $-4=xy$

$\therefore x=-4$, $y=1$

$\therefore x-2y=-6$

답 -6

1377 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$에서

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$$

이므로 $-AB+BA=O$

$\therefore AB=BA$ ··· ❶

즉 $\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-1\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}3a-2&0\\2a-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a-2&a-1\\0&1\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-1=0$ $\therefore a=1$ ··· ❷

한편 $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$이므로

$$A^3B^3=AAABBB=AABB$$
$$=AB=E$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$ ··· ❸

따라서 행렬 A^3B^3의 모든 성분의 합은

$1+0+0+1=2$ ··· ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ $AB=BA$임을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 행렬 A^3B^3을 구할 수 있다.	20 %
❹ 행렬 A^3B^3의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	10 %

1378 주어진 조건에서

$$A\begin{pmatrix}3a\\-2b\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}-a\\4b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}2a\\2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\quad 2A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

답 ④

1379 주어진 조건에서

$$A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-2A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix}a-2c\\b-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A\begin{pmatrix}a-2c\\b-2d\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$-5+1=-4$

답 -4

1380 주어진 조건에서

$$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$ ··· ❶

$A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$에서

$$A^2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

$$A^3\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=AA^2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\therefore A^{100}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$ ··· ❷

답 $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

채점 기준	비율
❶ 행렬 $A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 행렬 $A^{100}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$를 구할 수 있다.	50 %

1381 실수 a, b에 대하여

$$a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

가 성립한다고 하면

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$이 주어졌으므로 $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$를 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{pmatrix}a-b\\2a+3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=-3$, $2a+3b=4$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$$\therefore A\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\11\end{pmatrix}$$

답 ②

1382 $(A-E)(A^2+A+E)=A^3-E^3=A^3-E$

$A=\begin{pmatrix}-2&0\\1&-3\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}-2&0\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\-5&9\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}4&0\\-5&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&0\\19&-27\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^3-E=\begin{pmatrix}-8&0\\19&-27\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-9&0\\19&-28\end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix}-9&0\\19&-28\end{pmatrix}$

1383 $(E+2A)^2=xE+yA$에서

$$(E+2A)^2=E+4A+4A^2$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=5E+4A$$ ··· ❶

따라서 $x=5$, $y=4$이므로

$x+y=9$ ··· ❷

답 9

채점 기준	비율
❶ 행렬 $(E+2A)^2$을 간단히 할 수 있다.	70 %
❷ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1384 $(A+E)(A-E)=E$에서

$A^2-E=E \quad \therefore A^2=2E$

이때 $A=\begin{pmatrix}-1&a\\1&b\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&a\\1&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&a\\1&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a&-a+ab\\-1+b&a+b^2\end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{pmatrix}1+a&-a+ab\\-1+b&a+b^2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}1+a&-a+ab\\-1+b&a+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1+a=2$, $-a+ab=0$, $-1+b=0$, $a+b^2=2$

$\therefore a=1$, $b=1$

$\therefore a-b=0$

답 ③

1385 $A^2-2A+4E=O$의 양변에 $A+2E$를 곱하면

$(A+2E)(A^2-2A+4E)=O$

$A^3+8E=O \quad \therefore A^3=-8E$

$\therefore A^{30}=(A^3)^{10}=(-8E)^{10}=8^{10}E$

따라서 $8^{10}E=kE$이므로

$k=8^{10}$

답 ⑤

11 행렬과 그 연산

1386 $A+B=2E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A(A+B)=A(2E),\quad A^2+AB=2A$

$\therefore A^2=2A\ (\because AB=O)$

$\therefore A^3=A^2A=2A^2=4A$

$A+B=2E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$(A+B)B=(2E)B,\quad AB+B^2=2B$

$\therefore B^2=2B\ (\because AB=O)$

$\therefore B^3=B^2B=2B^2=4B$

$\therefore A^3+B^3=4A+4B=4(A+B)$

$=4(2E)=8E$

$=\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}$

1387 $A^2-A=E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$(A^2-A)B=EB,\quad A^2B-AB=B$

$A(3E)-3E=B\ (\because AB=3E)$

$\therefore 3A-3E=B$

$\therefore B^2=(3A-3E)^2=9(A-E)^2$

$=9(A^2-2A+E)=9(E-A+E)$

$=9(-A+2E)=-9A+18E$

답 ②

다른 풀이 $AB=3E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A^2B=3A$

이때 $A^2-A=E$에서 $A^2=A+E$이므로

$(A+E)B=3A,\quad AB+B=3A$

$3E+B=3A\quad \therefore B=3A-3E$

1388 $A+B=O$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A(A+B)=O,\quad A^2+AB=O$

$A^2+E=O\quad \therefore A^2=-E$

$A+B=O$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$(A+B)B=O,\quad AB+B^2=O$

$E+B^2=O\quad \therefore B^2=-E$

$\therefore A^{2024}+B^{2025}=(A^2)^{1012}+(B^2)^{1012}B$

$=(-E)^{1012}+(-E)^{1012}B$

$=E+B=B+E$

답 ⑤

1389 ㄱ. $A+B=E$에서 $B=-A+E$이므로

$AB=A(-A+E)=-A^2+A,$

$BA=(-A+E)A=-A^2+A$

$\therefore AB=BA$

ㄴ. $A-B=E$에서 $B=A-E$이므로

$B^2=(A-E)^2=A^2-2A+E$

$\therefore A^2-B^2=2A-E=A+(A-E)$

$=A+B$

ㄷ. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

따라서 $AB=O$, $A\neq O$이지만 $B\neq O$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

다른 풀이 ㄴ. $A-B=E$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$A(A-B)=AE,\quad A^2-AB=A$

$\therefore A^2=AB+A$

$A-B=E$의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면

$(A-B)B=EB,\quad AB-B^2=B$

$\therefore B^2=AB-B$

$\therefore A^2-B^2=(AB+A)-(AB-B)=A+B$

1390 ② $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$

$BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

따라서 $AB=O$이지만 $BA\neq O$이다.

④ $A^5=E$에서

$A^5=A^3A^2=EA^2=A^2\quad \therefore A^2=E$

$A^3=E$에서

$A^3=A^2A=EA=A\quad \therefore A=E$

⑤ $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$이면

$A^2=E^2=E,$

$B^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

따라서 $A^2=B^2=E$이지만 $A\neq B$이고 $A\neq -B$이다.

답 ④

1391 $(A-B)(A+B)=A^2-2BA-B^2$에서

$A^2+AB-BA-B^2=A^2-2BA-B^2$

$\therefore AB=-BA$

ㄱ. $A^2B^2=A(AB)B=A(-BA)B$

$=-ABAB=-(AB)(AB)=-(AB)^2$

ㄴ. $A^2B^2=A(AB)B=A(-BA)B$

$=-ABAB=-(-BA)(-BA)$

$=-BABA=-B(AB)A$

$=-B(-BA)A=BBAA$

$=B^2A^2$

ㄷ. $(A-B)^2=(A-B)(A-B)$

$=A^2-AB-BA+B^2$

$=A^2-AB+AB+B^2$

$=A^2+B^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

1392 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(2+2)A+\{2\cdot2-(-1)\cdot(-3)\}E=O$

$A^2-4A+E=O$

$\therefore A^2=4A-E$

위의 식의 양변에 행렬 A를 곱하면

$A^3=4A^2-A=4(4A-E)-A$

$=15A-4E$

$\therefore A^3-3A^2+4A-2E$

$=(15A-4E)-3(4A-E)+4A-2E$

$=7A-3E$ 답 ①

라쎈 특강

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때, 케일리-해밀턴 정리를 이용하면

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

$\rightarrow \underbrace{A^2}_{2\text{차식}}=\underbrace{(a+d)A-(ad-bc)E}_{1\text{차 이하의 식}}$

따라서 2×2 행렬 A에 대한 2차식을 1차 이하의 식으로 변형할 수 있다. 이와 같이 케일리-해밀턴 정리는 행렬 A에 대한 차수가 높은 식의 차수를 낮추는 데 활용할 수 있다.

1393 $A=\begin{pmatrix} a & -3 \\ b & 0 \end{pmatrix}\neq kE$ (k는 실수)이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$a+0=2,\ 0+3b=3$

$\therefore a=2,\ b=1$

$\therefore a-b=1$ 답 1

1394 (i) $A\neq kE$ (k는 실수)일 때,

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$a+d=-5$ ··· ❶

(ii) $A=kE$ (k는 실수)일 때,

$A=kE$를 $A^2+5A-6E=O$에 대입하면

$(kE)^2+5(kE)-6E=O$

$(k^2+5k-6)E=O,\quad (k+6)(k-1)E=O$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=1$

따라서 $A=-6E$ 또는 $A=E$이므로

$A=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore a+d=-12$ 또는 $a+d=2$ ··· ❷

(i), (ii)에서 $a+d$의 최솟값은 -12이다. ··· ❸

답 -12

채점 기준	비율
❶ $A\neq kE$일 때, $a+d$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $A=kE$일 때, $a+d$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+d$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

참고 (ii)에서 $A=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$인 경우

$a+d\neq-5,\ ad-bc\neq-6$

임을 알 수 있다.

이와 같이 $A^2-pA+qE=O$ (p, q는 실수)를 만족시키는 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 항상 $a+d=p$, $ad-bc=q$인 것은 아니다.

따라서 $A^2-pA+qE=O$를 만족시키는 행렬 A를 구할 때는 $A\neq kE$인 경우와 $A=kE$인 경우로 나누어 생각한다.

1395 전략 주어진 규칙에 따라 a_{ij}의 값을 구한다.

풀이 $a_{11}=3\cdot1-4\cdot1=-1$, $a_{12}=-a_{21}=-(3\cdot2-4\cdot1)=-2$,

$a_{13}=-a_{31}=-(3\cdot3-4\cdot1)=-5$, $a_{21}=3\cdot2-4\cdot1=2$,

$a_{22}=3\cdot2-4\cdot2=-2$, $a_{23}=-a_{32}=-(3\cdot3-4\cdot2)=-1$,

$a_{31}=3\cdot3-4\cdot1=5$, $a_{32}=3\cdot3-4\cdot2=1$,

$a_{33}=3\cdot3-4\cdot3=-3$

$\therefore A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$-1-2-5+2-2-1+5+1-3=-6$ 답 ②

1396 전략 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배에 대한 성질을 이용한다.

풀이 $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

1397 전략 행렬 B를 두 행렬 A, E로 나타낸 후 행렬 $A-B$를 구한다.

풀이 $A+B=2E$에서 $\quad B=2E-A$

$\therefore A-B=A-(2E-A)=2(A-E)$

$=2\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$=2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은

$0+4-4+4=4$ 답 ④

다른 풀이 $B=2E-A=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\therefore A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은

$0+4-4+4=4$

1398 전략 주어진 두 등식을 연립하여 X, Y를 A, B로 나타낸다.

풀이 $X+Y=3A$ ······ ㉠

$X-2Y=-3B$ ······ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $\quad 3Y=3A+3B$

$\therefore Y=A+B$

11 행렬과 그 연산

$Y=A+B$를 ㉠에 대입하면

$$X+(A+B)=3A$$
$$\therefore X=2A-B$$
$$\therefore X-Y=(2A-B)-(A+B)$$
$$=A-2B$$
$$=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10 & -6\\ -4 & -4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-12 & -5\\ -1 & -8\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $X-Y$의 $(2, 1)$ 성분은 -1이다. 답 -1

1399 전략 $(m\times l$ 행렬$)\times(l\times n$ 행렬$)=(m\times n$ 행렬$)$임을 이용한다.

풀이 A는 1×2 행렬, B는 2×1 행렬, C는 2×2 행렬이므로 곱을 구할 수 있는 것은

AB, AC, CB, C^2, ACB, CBA의 6개 답 ③

1400 전략 먼저 주어진 규칙에 따라 a_{ij}, b_{ij}의 값을 구한다.

풀이 $a_{11}=1-1+1=1$, $a_{12}=1-2+1=0$,
$a_{21}=2-1+1=2$, $a_{22}=2-2+1=1$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$b_{11}=1+1+1=3$, $b_{12}=1+2+1=4$,
$b_{21}=2+1+1=4$, $b_{22}=2+2+1=5$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$
$$\therefore AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 10 & 13\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 AB의 $(2, 2)$ 성분은 13이다. 답 13

1401 전략 A^2, A^3, A^4, $\cdots$을 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot(-3)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot(-3)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\cdot(-3)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 3\cdot(-3)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\cdot(-3)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1 & -3n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\therefore A^{98}-A^{100}=\begin{pmatrix}1 & -294\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -300\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A^{98}-A^{100}$의 모든 성분의 합은

$0+6+0+0=6$ 답 ⑤

라쎈 특강

행렬 A에 대하여 A^2, A^3, A^4, $\cdots$을 차례대로 계산하여 행렬 A^n의 각각의 성분을 n에 대한 식으로 나타낸다.
이때 A^2만으로 A^n의 성분을 추론하면 오류를 범할 수 있으므로 정확한 규칙을 찾을 때까지 거듭제곱한다.

1402 전략 A^2, A^3, A^4, $\cdots$을 차례대로 구하여 규칙을 찾고, 주어진 등식을 만족시키는 m, n의 값의 조건을 찾는다.

풀이 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$$
$$A^3=A^2A=-EA=-A$$
$$A^4=A^3A=-AA=-A^2=E$$
$$A^5=A^4A=EA=A$$
$$\vdots$$

따라서 A의 거듭제곱은 A, $-E$, $-A$, E가 이 순서대로 반복되므로 $A^m=A^n$을 만족시키는 m, n은 4로 나누었을 때의 나머지가 같은 수이다.

4로 나눈 나머지가 0인 경우, 10개의 수 4, 8, 12, $\cdots$, 40 중에서 2개를 뽑아 큰 수를 m, 작은 수를 n이라 하면 되므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$${}_{10}C_2=\frac{10\cdot9}{2}=45$$

같은 방법으로 4로 나눈 나머지가 1, 2, 3인 경우 순서쌍 (m, n)의 개수도 각각 45이다.

따라서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$45\cdot4=180$ 답 180

1403 전략 먼저 행렬 AB를 구한 후 AB의 거듭제곱을 차례대로 구한다.

풀이 $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$이므로

$$(AB)^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$$
$$(AB)^3=(AB)^2(AB)=-E(AB)=-AB$$
$$\therefore (AB)^4=\{(AB)^2\}^2=(-E)^2=E$$

따라서 n의 값이 4의 배수일 때 $(AB)^n=E$를 만족시키므로 구하는 자연수 n은

4, 8, 12, 16, $\cdots$, 200의 50개 답 50

1404 전략 필요한 금액을 행렬의 곱셈을 이용하여 나타낸다.

풀이 구입하려는 과자와 사탕의 개수를 행렬로 나타내면

$$(\text{과자의 개수} \quad \text{사탕의 개수})=(10\cdot5+15\cdot2 \quad 10\cdot1+15\cdot4)$$
$$=(10 \quad 15)\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

따라서 필요한 금액은

(과자의 개수)$\times500+$(사탕의 개수)$\times800$

이므로

(과자의 개수 사탕의 개수)$\begin{pmatrix} 500 \\ 800 \end{pmatrix}$

$=(10 \quad 15)\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 800 \end{pmatrix}$ 답 ④

1405 전략 $(AB)^3=ABABAB$임을 이용한다.

풀이 $(AB)^3=ABABAB=(ABA)(BAB)$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$(BA)^3=BABABA=(BAB)(ABA)$

$$=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (AB)^3-(BA)^3=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 18 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$ 답 ④

1406 전략 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$임을 이용한다.

풀이 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$에서

$A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$

$\therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} 3k & 4 \\ 4k & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ k+6 & 3k+4 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3k=6,\ 4k=k+6,\ 10=3k+4$

$\therefore k=2$ 답 ②

1407 전략 이차 정사각행렬 A에 대하여 $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$이면 $A\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p+r \\ q+s \end{pmatrix}$임을 이용한다.

풀이 $3A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$에서

$$A\begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$A\begin{pmatrix} 3a-c \\ 3b-d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠－㉡을 하면

$$A\begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} 3a-c \\ 3b-d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A\left\{\begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3a-c \\ 3b-d \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$7+(-2)=5$ 답 ⑤

1408 전략 먼저 행렬 A^2을 두 행렬 A와 E로 나타낸다.

풀이 조건 (가)에서

$A^2=2A+E$

조건 (나)의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

이때

$$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(2A+E)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+E\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

이므로

$$A\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$의 모든 성분의 곱은

$9\cdot 7=63$ 답 63

1409 전략 먼저 주어진 등식을 변형하여 행렬 B를 A와 E로 나타낸다.

풀이 $A^2+2A=E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$(A^2+2A)B=EB$

$\therefore A^2B+2AB=B$

$AB+E=O$, 즉 $AB=-E$를 위의 식에 대입하면

$-A-2E=B$

$\therefore B^2=(-A-2E)^2$

$=A^2+4A+4E$

$=E+2A+4E$

$=2A+5E$ 답 ④

1410 전략 행렬의 연산의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $A+B=E$에서 $\quad A=E-B$

$\therefore A^2-B^2=(E-B)^2-B^2$

$=E-2B+B^2-B^2$

$=E-2B=(E-B)-B$

$=A-B$

ㄴ. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$이면

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=2A$$

따라서 $A^2=2A$이지만 $A\neq O$이고 $A\neq 2E$이다.

ㄷ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이면

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A,$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=B$$

따라서 $AB=A$이고 $BA=B$이지만 $AB\neq BA$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

1411 전략 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 a, b, c에 대한 식을 세운다.

풀이 $\begin{pmatrix} a^3 & a^2 \\ a & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b^3 & b^2 \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a^3+b^3 & a^2+b^2 \\ a+b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^3+b^3=c,\ a^2+b^2=6,\ a+b=3$ ⋯ ❶

$\therefore ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}$

$=\frac{1}{2}(3^2-6)=\frac{3}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore c=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=3^3-3\cdot\frac{3}{2}\cdot3=\frac{27}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{27}{2}$

채점 기준	비율
❶ a, b, c에 대한 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ ab의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	30 %

1412 전략 행렬의 성분을 한 문자에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $A=(x\ \ y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$=(x-y\ \ 2x+y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$=(x(x-y)+y(2x+y))$

$=(x^2+xy+y^2)$ ⋯ ❶

한편 $x+y=6$에서 $y=6-x$이므로 행렬 A의 성분은

$x^2+xy+y^2=x^2+x(6-x)+(6-x)^2$

$=x^2-6x+36$

$=(x-3)^2+27$

따라서 행렬 A의 성분의 최솟값은 27이다. ⋯ ❷

답 27

채점 기준	비율
❶ 행렬 A를 구할 수 있다.	50 %
❷ 행렬 A의 성분의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

라쎈 특강

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

① $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.

② $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.

1413 전략 $n=1,\ 2,\ 3$인 각각의 경우에 대하여 a의 값을 구한다.

풀이 (i) $n=1$일 때,

$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}$이므로 $a=3$

이때 a는 10 이하의 자연수이므로

$a=3$ ⋯ ❶

(ii) $n=2$일 때,

$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 6a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

$a^2=6a$에서 $a^2-6a=0,\quad a(a-6)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=6$

이때 a는 10 이하의 자연수이므로

$a=6$ ⋯ ❷

(iii) $n=3$일 때,

$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^2 & 6a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^3 & 9a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$

$a^3=9a^2$에서 $a^3-9a^2=0,\quad a^2(a-9)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=9$

이때 a는 10 이하의 자연수이므로

$a=9$ ⋯ ❸

이상에서 모든 a의 값의 곱은

$3\cdot6\cdot9=162$ ⋯ ❹

답 162

채점 기준	비율
❶ $n=1$일 때, a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $n=2$일 때, a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $n=3$일 때, a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

참고 $n=4$일 때,

$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^3 & 9a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^4 & 12a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$

$a^4=12a^3$에서 $a^4-12a^3=0,\quad a^3(a-12)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=12$

이때 조건을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

마찬가지 방법으로 $n\geq5$일 때도 조건을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

1414 전략 AB와 BA를 구한 후 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 $AB=BA$에서

$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 2x+y & -x \\ 2y+2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & xy \\ 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=y,\ -x=xy,\ 2y+2=0,\ -1=2x-1$ ⋯ ❶

$\therefore x=0,\ y=-1$

$\therefore x+y=-1$ ⋯ ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ x, y에 대한 식을 구할 수 있다.	60 %
❷ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	40 %