베이직쎈 수학Ⅱ

정답 및 풀이

01 함수의 극한

01 함수의 극한

개념 01 $x \longrightarrow a$일 때 함수의 수렴

본책 8쪽

01 (1) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 2가 아니면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 2} f(x)=1$$

(2) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

답 (1) 1 (2) 0

02 (1) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 1} f(x)=0$$

(2) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -2가 아니면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to -2} f(x)=2$$

답 (1) 0 (2) 2

03 (1) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1이 아니면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1이므로

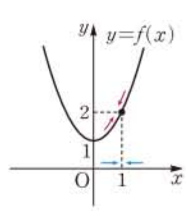
$$\lim_{x\to -1} f(x)=1$$

(2) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 3이 아니면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 3} f(x)=1$$

답 (1) 1 (2) 1

04 $f(x)=x^2+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

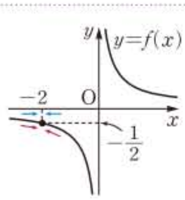


따라서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2$$

답 2

05 $f(x)=\dfrac{1}{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



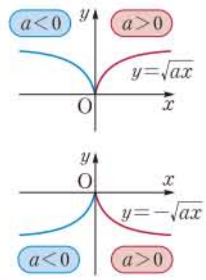
따라서 x의 값이 -2가 아니면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $-\dfrac{1}{2}$에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to -2}\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\dfrac{1}{2}$

베이직쎈 BOX

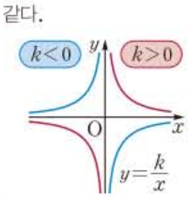
무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



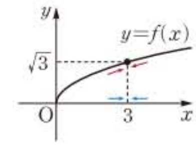
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되지 않을 때도 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재할 수 있다.

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 함숫값과 극한값이 다를 수 있다.

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



06 $f(x)=\sqrt{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

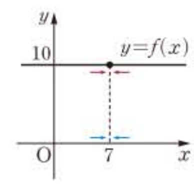


따라서 x의 값이 3이 아니면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\sqrt{3}$에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x}=\sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

07 $f(x)=10$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 7이 아니면서 7에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 10이므로

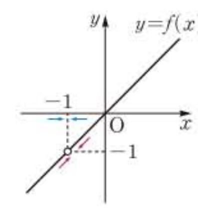
$$\lim_{x\to 7} 10=10$$

답 10

08 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+1}$로 놓으면 $x\neq -1$일 때

$$f(x)=\frac{x(x+1)}{x+1}=x$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 -1이 아니면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x+1}=-1$$

답 -1

개념 02 $x \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow -\infty$일 때 함수의 수렴

본책 9쪽

09 (1) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=2$$

(2) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$

답 (1) 2 (2) 2

10 (1) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

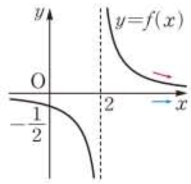
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

(2) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

답 (1) 0 (2) 0

11 $f(x)=\frac{1}{x-2}$로 놓으면
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



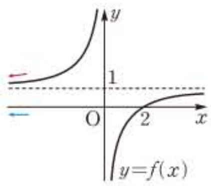
따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

답 0

$y=\frac{1}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

12 $f(x)=1-\frac{2}{x}$로 놓으면
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

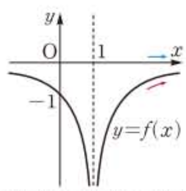


따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1$$

답 1

13 $f(x)=-\frac{1}{|x-1|}$로 놓으면
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



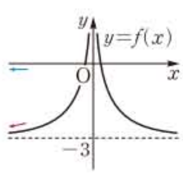
따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{|x-1|}\right)=0$$

답 0

$y=-\frac{1}{|x-1|}$의 그래프는 $y=\frac{1}{|x|}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

14 $f(x)=-3+\frac{1}{|x|}$로 놓으면
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{1}{|x|}\right)=-3$$

답 -3

개념 03 함수의 발산

본책 10쪽

15 (1) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로 $\lim_{x\to0}f(x)=\infty$

(2) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

(3) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

답 (1) ∞ (2) 0 (3) 0

16 (1) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1이 아니면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to-1}f(x)=-\infty$$

(2) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

(3) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

답 (1) $-\infty$ (2) 0 (3) 0

17 (1) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

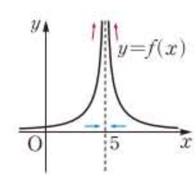
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

(2) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

답 (1) ∞ (2) $-\infty$

18 $f(x)=\frac{1}{|x-5|}$로 놓으면
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

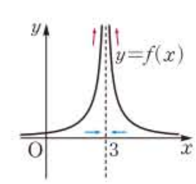


따라서 x의 값이 5가 아니면서 5에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to5}\frac{1}{|x-5|}=\infty$$

답 ∞

19 $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$로 놓으면
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



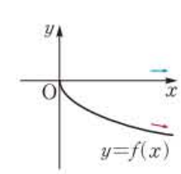
따라서 x의 값이 3이 아니면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty$$

답 ∞

$y=\frac{1}{(x-3)^2}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x^2}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이다.

20 $f(x)=-\sqrt{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



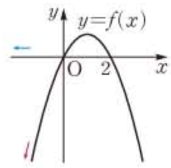
따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to\infty}(-\sqrt{x})=-\infty$$

답 $-\infty$

베이직쎈 BOX

21 $f(x)=-x^2+2x$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x \to -\infty}(-x^2+2x)=-\infty$ 답 $-\infty$

개념 04 우극한과 좌극한

본책 11쪽

22 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to -1+} f(x)=1$ 답 1

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되지 않을 때도 $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\lim_{x \to a-} f(x)$의 값이 존재할 수 있다.

23 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to -1-} f(x)=1$ 답 1

24 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 1+} f(x)=0$ 답 0

25 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 1-} f(x)=-1$ 답 -1

26 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 2+} f(x)=1$ 답 1

27 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3이므로

$\lim_{x \to 2-} f(x)=3$ 답 3

$x<2$에서 $f(x)$의 함숫값은 항상 3이다.

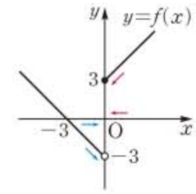
28 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 4보다 크면서 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 4+} f(x)=3$ 답 3

29 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 4보다 작으면서 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 4-} f(x)=2$ 답 2

30 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워진다.

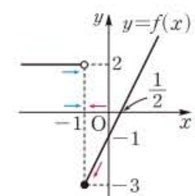


$\therefore \lim_{x \to 0+} f(x)=3$ 답 3

31 **30**의 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x \to 0-} f(x)=-3$ 답 -3

32 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워진다.



$\therefore \lim_{x \to -1+} f(x)=-3$

답 -3

33 **32**의 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2이다.

$\therefore \lim_{x \to -1-} f(x)=2$ 답 2

개념 05 함수의 극한값의 존재

본책 12쪽

34 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 1+} f(x)=1$ 답 1

35 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 1-} f(x)=1$ 답 1

36 $\lim_{x \to 1+} f(x)=\lim_{x \to 1-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to 1} f(x)=1$ 답 1

37 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to -1+} f(x)=-1$ 답 -1

38 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

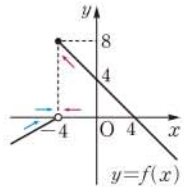
$\lim_{x \to -1-} f(x)=1$ 답 1

베이직쎈 BOX

39 $\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. 답 존재하지 않는다.

> 우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 같지 않으면 극한값은 존재하지 않는다.

40 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 -4보다 크면서 -4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 8에 한없이 가까워진다.



$\therefore \lim_{x\to-4+}f(x)=8$ 답 8

41 **40**의 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -4보다 작으면서 -4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to-4-}f(x)=0$ 답 0

42 $\lim_{x\to-4+}f(x)\neq\lim_{x\to-4-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to-4}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. 답 존재하지 않는다.

43 답 존재하지 않는다.

1, -1, 1, -1, 존재하지 않는다

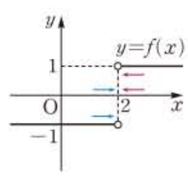
44 $|2-x|=\begin{cases}-(2-x) & (x\geq2)\\ 2-x & (x<2)\end{cases}$이므로

$f(x)=\dfrac{|2-x|}{x-2}$로 놓으면

$f(x)=\begin{cases}1 & (x>2)\\ -1 & (x<2)\end{cases}$

> $f(x)$는 $x=2$에서 정의되지 않는다.

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to2+}f(x)=1$,

$\lim_{x\to2-}f(x)=-1$

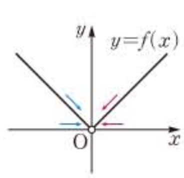
따라서 $\lim_{x\to2+}f(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)$, 즉 $\lim_{x\to2}\dfrac{|2-x|}{x-2}$의 값은 존재하지 않는다. 답 존재하지 않는다.

45 $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$으로 놓으면

$f(x)=\begin{cases}x & (x>0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$

> $x>0$일 때
> $f(x)=\dfrac{x^2}{x}=x$
> $x<0$일 때
> $f(x)=\dfrac{x^2}{-x}=-x$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=0$, 즉

$\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{|x|}=0$ 답 0

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 13쪽

01 ㄱ. $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to0}f(x)=0$

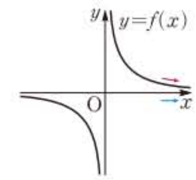
ㄴ. $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to0}f(x)=-2$

이상에서 $x\to0$일 때, $f(x)$가 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

02 ㄱ. $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

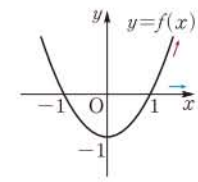
> 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값에 한없이 가까워지는 것을 찾는다.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$



ㄴ. $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

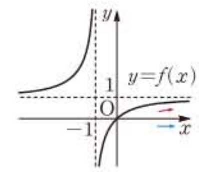


ㄷ. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1-1}{x+1}$

$=1-\dfrac{1}{x+1}$

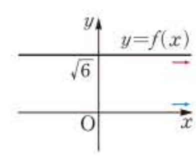
$y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$



ㄹ. $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

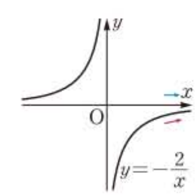
$\lim_{x\to\infty}f(x)=\sqrt{6}$



이상에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$가 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

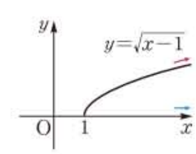
03 ① $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to\infty}\left(-\dfrac{2}{x}\right)=0$



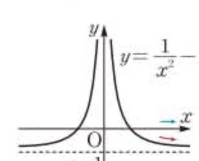
② $y=\sqrt{x-1}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x-1}=\infty$



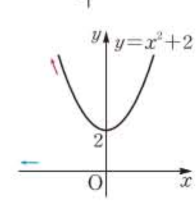
③ $y=\dfrac{1}{x^2}-1$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)=-1$



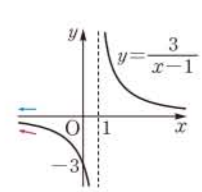
④ $y=x^2+2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to-\infty}(x^2+2)=\infty$



⑤ $y=\dfrac{3}{x-1}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x-1}=0$



답 ⑤

04 $\lim_{x\to2+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)=3+1=4$ 답 4

05 $\lim_{x\to-1-}f(x)-\lim_{x\to0+}f(x)+f(1)$

$=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+1=2$ 답 2

06 ① $\lim_{x\to-1+}f(x)=-1$ ② $\lim_{x\to-1-}f(x)=-2$

④ $\lim_{x\to1-}f(x)=1$ ⑤ $\lim_{x\to2-}f(x)=0$

답 ③

07 $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to-2+}f(x)=a+2$이므로

$a+2=5$ $\therefore a=3$

$\therefore \lim_{x\to-2-}f(x)=a-2$

$=3-2=1$ 답 3, 1

08 ① $\lim_{x\to-2+}f(x)=1$

② $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=-1$

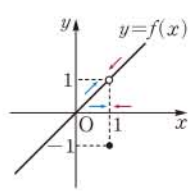
④ $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$

⑤ $\lim_{x\to2-}f(x)=1$

답 ②

09 ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

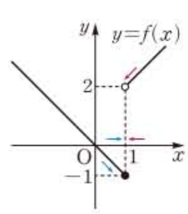


$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$

$=1$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=1$

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



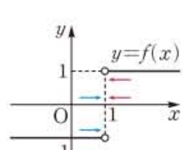
$\lim_{x\to1+}f(x)=2$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=-1$

따라서 $\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

이므로 $x=1$에서의 극한값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(x)=\begin{cases}1 & (x>1)\\-1 & (x<1)\end{cases}$이므로



$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때

$\lim_{x\to1+}f(x)=1$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=-1$

이므로 $\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 $x=1$에서의 극한값이 존재하지 않는다.

이상에서 $f(x)$의 $x=1$에서의 극한값이 존재하는 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

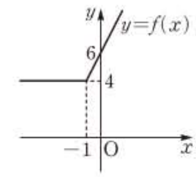
베이직쎈 BOX

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$ $(k\neq0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$

$\lim_{x\to1}5=5$

함수 $f(x)$가 다항함수이면 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

10 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하려면



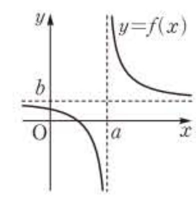
$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)$

이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. 이때

$\lim_{x\to-1+}f(x)=4$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=k$

이므로 $k=4$ 답 4

11 $y=f(x)$의 그래프에서



$\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 조건 (가)에서

$a=3$

또 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=b$이므로 조건 (나)에서

$b=1$

$\therefore a-b=3-1=2$ 답 2

02 함수의 극한값의 계산 (1)

개념 06 함수의 극한에 대한 성질

본책 15쪽

01 $\lim_{x\to1}5f(x)=5\lim_{x\to1}f(x)$

$=5\cdot4=20$ 답 20

02 $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to1}g(x)$

$=4+(-2)=2$ 답 2

03 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}f(x)\cdot\lim_{x\to1}g(x)$

$=4\cdot(-2)=-8$ 답 −8

04 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to1}f(x)}{\lim_{x\to1}g(x)}=\frac{4}{-2}=-2$

답 −2

05 $\lim_{x\to1}\{2f(x)-3g(x)\}=2\lim_{x\to1}f(x)-3\lim_{x\to1}g(x)$

$=2\cdot4-3\cdot(-2)$

$=14$ 답 14

06 $\lim_{x\to1}\{4f(x)g(x)-5\}$

$=4\lim_{x\to1}f(x)\cdot\lim_{x\to1}g(x)-\lim_{x\to1}5$

$=4\cdot4\cdot(-2)-5=-37$ 답 −37

07 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{2g(x)}=\frac{\lim_{x\to1}f(x)-\lim_{x\to1}1}{2\lim_{x\to1}g(x)}$

$=\frac{4-1}{2\cdot(-2)}=-\frac{3}{4}$ 답 $-\frac{3}{4}$

08 $\lim_{x\to0}(3x-2)=3\cdot0-2=-2$ 답 −2

09 $\lim_{x\to5}(x^2-2x)=5^2-2\cdot5=15$ 답 15

10 답 2, 4, 18

11 $\lim_{x\to-3}(5-x)(x^2+1)$
$=\lim_{x\to-3}(5-x)\cdot\lim_{x\to-3}(x^2+1)$
$=\{5-(-3)\}\cdot(9+1)=80$ 답 80

12 답 -3, -1, 1

13 $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-x}{x+6}=\dfrac{\lim_{x\to2}(x^2-x)}{\lim_{x\to2}(x+6)}$
$=\dfrac{4-2}{2+6}=\dfrac{1}{4}$ 답 $\dfrac{1}{4}$

개념 07 $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 함수의 극한

본책 16쪽

14 답 $x+1$, 2

15 $\lim_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to-1}\dfrac{x+1}{(x+1)(x-4)}$
$=\lim_{x\to-1}\dfrac{1}{x-4}$
$=-\dfrac{1}{5}$ 답 $-\dfrac{1}{5}$

16 $\lim_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(2x-1)}{(x+1)(x+3)}$
$=\lim_{x\to-3}\dfrac{2x-1}{x+1}$
$=\dfrac{7}{2}$ 답 $\dfrac{7}{2}$

17 $\lim_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3$ 답 3

18 답 2, 2, $x-4$, 2, 2, $\dfrac{1}{4}$

19 $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}$
$=\lim_{x\to0}\dfrac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}$
$=\lim_{x\to0}\dfrac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x}$
$=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+9}+3)$
$=3+3=6$ 답 6

20 $\lim_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$
$=\lim_{x\to-1}\dfrac{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}$
$=\lim_{x\to-1}\dfrac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}$
$=\lim_{x\to-1}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+1}$
$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

베이직쎈 BOX

$\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$에서
$\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$,
$\lim_{x\to1}(x-1)=0$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x-1}{2x+3}$에서
$\lim_{x\to\infty}(5x-1)=\infty$,
$\lim_{x\to\infty}(2x+3)=\infty$

분모의 최고차항은 $\sqrt{x^2}$, 즉 x이다.

$\lim_{x\to\infty}(x^2-x)$에서
$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$,
$\lim_{x\to\infty}x=\infty$

21 $\lim_{x\to-5}\dfrac{x+5}{\sqrt{x+6}-1}$
$=\lim_{x\to-5}\dfrac{(x+5)(\sqrt{x+6}+1)}{(\sqrt{x+6}-1)(\sqrt{x+6}+1)}$
$=\lim_{x\to-5}\dfrac{(x+5)(\sqrt{x+6}+1)}{x+5}$
$=\lim_{x\to-5}(\sqrt{x+6}+1)$
$=1+1=2$ 답 2

개념 08 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한

본책 17쪽

22 답 5, 2, $\dfrac{5}{2}$

23 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-6}{x^2+3x+5}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\dfrac{2}{1}=2$
답 2

24 답 x^2, 1, 1, 2

25 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{6x}{\sqrt{2x^2+x+1}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{6}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}}}$
$=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

26 답 x, 0

27 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x}{1-5x-2x^2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{x}-2}=0$
답 0

28 답 $6x$, 1, 7, ∞

29 답 -1 🎯 ∞, $-t$, 5, -1, -1, -1

30 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로
$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3}{2x-1}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{t^2-2t}+3}{-2t-1}$
$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{2}{t}}+\dfrac{3}{t}}{-2-\dfrac{1}{t}}$
$=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$ 답 $-\dfrac{1}{2}$

개념 09 $\infty-\infty$, $\infty\times0$ 꼴의 함수의 극한

본책 18쪽

31 답 x^2, ∞

32 $\lim_{x\to\infty}(1+2x^2-x^3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{x}-1\right)$
$=-\infty$ 답 $-\infty$

33 답 $x,\ x,\ x,\ x,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{2}$

34 $\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{x^2+3x}-x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{6(\sqrt{x^2+3x}+x)}{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(\sqrt{x^2+3x}+x)}{x}$
$=\lim_{x\to\infty}2\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)$
$=2(1+1)=4$ 답 4

35 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}$
$=0$ 답 0

36 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2})$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2})(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2})}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}$
$=0$ 답 0

37 답 $x,\ \frac{1}{x-1},\ -1$

38 $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{2(x-1)}{x(x-2)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{2}{x(x-2)}$
$=\frac{2}{1\cdot(-1)}$
$=-2$ 답 -2

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 19쪽

01 $\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-g(x)}{1+f(x)g(x)}=\frac{3\cdot(-1)-k}{1+(-1)\cdot k}=\frac{-3-k}{1-k}$
이므로
$\frac{-3-k}{1-k}=2,\qquad -3-k=2-2k$
$\therefore k=5$ 답 ⑤

02 $\lim_{x\to0}\frac{x-2f(x)}{x+3f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-2\cdot\frac{f(x)}{x}}{1+3\cdot\frac{f(x)}{x}}$
$=\frac{1-2\cdot3}{1+3\cdot3}$
$=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

베이직쎈 BOX

조립제법을 이용하여 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3-x^2+x-1$
$=(x-1)(x^2+1)$

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$에서
$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$,
$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=0$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$을 이용할 수 있도록 분자, 분모를 각각 x로 나누어 식을 변형한다.

03 $5f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면
$\lim_{x\to a}h(x)=34$
이때 $g(x)=\frac{5f(x)-h(x)}{2}$이므로
$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{5f(x)-h(x)}{2}$
$=\frac{5\cdot6-34}{2}=-2$ 답 -2

04 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to1-}f(x)g(x)$
$=\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)+\lim_{x\to1-}f(x)\cdot\lim_{x\to1-}g(x)$
$=0+1+1\cdot1=2$ 답 ④

05 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}=6$에서 $\quad\alpha-\beta=6$
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-2$에서 $\quad\frac{\alpha}{\beta}=-2\quad\therefore \alpha=-2\beta$
$\alpha-\beta=6$에 $\alpha=-2\beta$를 대입하면
$-3\beta=6\quad\therefore \beta=-2$
$\therefore \alpha=-2\cdot(-2)=4$
$\lim_{x\to\infty}f(x)g(x)=4\cdot(-2)=-8$이므로 $\quad\gamma=-8$
$\therefore \alpha+\beta+\gamma=4+(-2)+(-8)=-6$ 답 -6

06 $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+1}{x+1}$
$=1$ 답 1

07 ㄱ. $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$
$=\lim_{x\to3}(x+3)=6$

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2+2x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(x+2)}$
$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}$

ㄷ. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$
$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

ㄹ. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}$
$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}$
$=\frac{1}{2\cdot6}=\frac{1}{12}$
이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ③

베이직쎈 BOX

08 $\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)f(x)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)f(x)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)f(x)}{x-4}$

$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)f(x)$

$=4\cdot(-5)$

$=-20$

답 -20

$\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)f(x)$
$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)\cdot\lim_{x\to 4}f(x)$
$=(\sqrt{4}+2)\cdot(-5)$

09 $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+x}{x^2-2x}$

$=\lim_{x\to 0+}\frac{x+1}{x-2}=-\frac{1}{2}$

$|x|=\begin{cases}x & (x\ge 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2-x}{x^2-2x}$

$=\lim_{x\to 0-}\frac{x-1}{x-2}=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x\to 0+}f(x)-\lim_{x\to 0-}f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

$=-1$

답 ②

10 $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-5)(3x+1)}{2x^2+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-14x-5}{2x^2+9}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{14}{x}-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{9}{x^2}}$

$=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

11 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2-5}+\sqrt{x^2+x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

$=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

답 ①

12 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-5}{3x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t}-5}{-3t+1}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}-\frac{5}{t}}{-3+\frac{1}{t}}$

$=-\frac{1}{3}$

답 $-\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

13 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\{f(x)\}^2}{3x^2+f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{3+\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}}$

$=\frac{1+2^2}{3+2\cdot 0}$

$=\frac{5}{3}$

답 ③

14 ① $\lim_{x\to\infty}(x^2-3x+2)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=\infty$

② $\lim_{x\to\infty}(-3x^3+x^2+x-2)$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{-x^3\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\right\}=-\infty$

③ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

④ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$

$=\frac{4}{1+1}=2$

⑤ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2}-x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+x}{(\sqrt{x^2-2}-x)(\sqrt{x^2-2}+x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+x}{-2}=-\infty$

답 ④

15 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x-\sqrt{4x^2-3x+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt{4x^2-3x+1}}{(2x-\sqrt{4x^2-3x+1})(2x+\sqrt{4x^2-3x+1})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt{4x^2-3x+1}}{3x-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{1}{x}}$

$=\frac{2+2}{3}=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

16 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-ax}-\sqrt{x^2+3ax})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-ax}-\sqrt{x^2+3ax})(\sqrt{x^2-ax}+\sqrt{x^2+3ax})}{\sqrt{x^2-ax}+\sqrt{x^2+3ax}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4ax}{\sqrt{x^2-ax}+\sqrt{x^2+3ax}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4a}{\sqrt{1-\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{3a}{x}}}$

$=\frac{-4a}{1+1}=-2a$

따라서 $-2a=-4$이므로

$a=2$

답 ⑤

17 $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\left(x-\frac{3}{x-2}\right)$

$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\cdot\frac{x^2-2x-3}{x-2}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\cdot\frac{(x+1)(x-3)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-2}$

$=4$

답 4

18 $\lim_{x\to-1}\frac{1}{x^2-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x+1}{x}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x(x-1)}$

$=\frac{1}{-1\cdot(-2)}=\frac{1}{2}$ 답 ③

19 $\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$ 답 ②

03 함수의 극한값의 계산 (2)

개념 10 미정계수의 결정

본책 22쪽

01 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(2x+a)=0$이므로 $a=0$ 답 0

02 $x\to2$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(x^2+ax-2)=0$이므로

$4+2a-2=0$ $\therefore a=-1$ 답 -1

03 답 $a=2$, $b=-3$

0, 0, 0, 1, 1, a, a, 2, 2, 2, -3

04 $x\to-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(ax+b)=0$이므로

$-2a+b=0$ $\therefore b=2a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to-2}\frac{ax+2a}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2}\frac{a(x+2)}{(x+2)(x-1)}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{a}{x-1}=-\frac{a}{3}$

즉 $-\frac{a}{3}=-1$이므로 $a=3$

따라서 ㉠에서 $b=6$ 답 $a=3$, $b=6$

05 $x\to3$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(x^2+ax+b)=0$이므로

$9+3a+b=0$ $\therefore b=-3a-9$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2+ax-3a-9}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+a+3)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{1}{x+a+3}$

$=\frac{1}{a+6}$

즉 $\frac{1}{a+6}=\frac{1}{2}$이므로 $a+6=2$ $\therefore a=-4$

따라서 ㉠에서 $b=3$ 답 $a=-4$, $b=3$

06 $x\to-4$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-4}(ax+b)=0$이므로

$-4a+b=0$ $\therefore b=4a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to-4}\frac{x^2+2x-8}{ax+4a}=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x-2)}{a(x+4)}$

$=\lim_{x\to-4}\frac{x-2}{a}$

$=-\frac{6}{a}$

즉 $-\frac{6}{a}=-3$이므로 $a=2$

따라서 ㉠에서 $b=8$ 답 $a=2$, $b=8$

07 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(a\sqrt{x+1}+b)=0$이므로

$a+b=0$ $\therefore b=-a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+1}-a}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{a(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{ax}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{a}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{a}{2}$

즉 $\frac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

따라서 ㉠에서 $b=-2$ 답 $a=2$, $b=-2$

08 $x\to-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(\sqrt{x+a}-b)=0$이므로

$\sqrt{a-2}-b=0$ $\therefore b=\sqrt{a-2}$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2}}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2}}=\frac{1}{2\sqrt{a-2}}$

베이직쎈 BOX

$x^2+ax-3a-9$
$=x^2+ax-3(a+3)$
에서

$\begin{array}{lll} 1 & -3 & \to -3 \\ 1 & a+3 & \to a+3 \\ \hline & & a \end{array}$

$\therefore x^2+ax-3a-9$
$=(x-3)(x+a+3)$

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한이고 분자에 근호가 있으므로 분자를 유리화한다.

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한이고 분자, 분모가 모두 다항식이므로 분자, 분모를 각각 인수분해한다.

베이직쎈 BOX

즉 $\frac{1}{2\sqrt{a-2}}=\frac{1}{4}$이므로 $\quad\sqrt{a-2}=2$

양변을 제곱한다.

$a-2=4 \qquad \therefore a=6$

따라서 ㉠에서 $\qquad b=2$ 답 $a=6,\ b=2$

09 $x \longrightarrow -1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고

(분자) $\longrightarrow$ 0이므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(a\sqrt{x+5}+b)=0$이므로

$2a+b=0 \qquad \therefore b=-2a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{a\sqrt{x+5}-2a}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{a(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{a(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}+2}{a}=\frac{4}{a}$$

즉 $\frac{4}{a}=\frac{4}{3}$이므로 $\qquad a=3$

따라서 ㉠에서 $\qquad b=-6$ 답 $a=3,\ b=-6$

10 $x \longrightarrow 4$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고

(분자) $\longrightarrow$ 0이므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to4}(\sqrt{x+a}+b)=0$이므로

$\sqrt{a+4}+b=0 \qquad \therefore b=-\sqrt{a+4}$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a+4}}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+4})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a+4})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+4})}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+4})}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+4})=2\sqrt{a+4}$$

즉 $2\sqrt{a+4}=6$이므로 $\qquad \sqrt{a+4}=3$

$a+4=9 \qquad \therefore a=5$

따라서 ㉠에서 $\qquad b=-3$ 답 $a=5,\ b=-3$

개념 11 함수의 극한의 대소 관계

본책 23쪽

11 모든 실수 x에 대하여 $2x-1\le f(x)\le x^2$이고

$\lim_{x\to1}(2x-1)=1,\ \lim_{x\to1}x^2=1$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to1}f(x)=1$ 답 1

12 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+1\le f(x)\le x^2-4x+3$ 이고

$\lim_{x\to1}(-x^2+1)=0,\ \lim_{x\to1}(x^2-4x+3)=0$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to1}f(x)=0$ 답 0

13 모든 양의 실수 x에 대하여 $1-\frac{1}{x}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x}$ 이고

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ 답 1

14 모든 양의 실수 x에 대하여 $\frac{2x}{x+1}\le f(x)\le\frac{2x+3}{x+2}$ 이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}=2,\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+2}=2$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한에서 분자의 차수와 분모의 차수가 같으면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$ 답 2

15 답 5 ◎ 5, 5, 5

16 $3x^2+1<f(x)<3x^2+3$의 각 변을 x^2으로 나누면

$$\frac{3x^2+1}{x^2}<\frac{f(x)}{x^2}<\frac{3x^2+3}{x^2}$$

$x^2>0$이므로 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}=3,\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+3}{x^2}=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=3$ 답 3

17 $-x^2+2x+1<f(x)<-x^2+2x+7$의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{-x^2+2x+1}{x^2+1}<\frac{f(x)}{x^2+1}<\frac{-x^2+2x+7}{x^2+1}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+2x+1}{x^2+1}=-1,$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+2x+7}{x^2+1}=-1$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=-1$ 답 -1

개념 12 함수의 극한의 도형에의 활용

본책 24쪽

18 답 $y=-\frac{1}{t}x+t^2+1$ ◎ $t,\ t^2,\ -\frac{1}{t},\ -\frac{1}{t},\ t^2$

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

19 $y=-\frac{1}{t}x+t^2+1$에 $x=0$을 대입하면

$y=t^2+1$

이므로 $\qquad f(t)=t^2+1$ 답 t^2+1

20 $x \longrightarrow 0$일 때, $t \longrightarrow 0$이다. 답 0

21 구하는 값은

$\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}(t^2+1)=1$ 답 1

22 답 $t-1$

23 답 $1-t$

24 답 $1-t$, $\sqrt{1-t^2}$

25 $\lim_{t\to1-}\overline{OB}\cdot\overline{PH}=\lim_{t\to1-}\frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t}\cdot\sqrt{1-t^2}$

$=\lim_{t\to1-}\frac{1-t^2}{1-t}$

$=\lim_{t\to1-}\frac{(1+t)(1-t)}{1-t}$

$=\lim_{t\to1-}(1+t)=2$ 답 2

베이직쎈 BOX

점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-1}(x-1)$에 $x=0$을 대입하면

$y=\frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t}$

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 25쪽

01 $x\to-4$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-4}(x^2+3x+a)=0$이므로

$16-12+a=0$ $\quad\therefore a=-4$

$a=-4$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to-4}\frac{x^2+3x-4}{x+4}=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x-1)}{x+4}$

$=\lim_{x\to-4}(x-1)=-5$

따라서 $b=-5$이므로

$a+b=-4+(-5)=-9$ 답 -9

02 $x\to-2$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(x^2+ax-b)=0$이므로

$4-2a-b=0$ $\quad\therefore b=-2a+4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+2x}{x^2+ax+2a-4}=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)}{(x+2)(x+a-2)}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{x}{x+a-2}=\frac{2}{4-a}$

즉 $\frac{2}{4-a}=\frac{2}{3}$이므로 $\quad 4-a=3$ $\quad\therefore a=1$

따라서 ㉠에서 $\quad b=2$

$\therefore ab=1\cdot2=2$ 답 ⑤

03 $x\to3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(ax+b)=0$이므로

$3a+b=0$ $\quad\therefore b=-3a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to3}\frac{ax-3a}{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}$

$=\lim_{x\to3}\frac{a(x-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{5})(\sqrt{x+2}+\sqrt{5})}$

$=\lim_{x\to3}\frac{a(x-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5})}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}a(\sqrt{x+2}+\sqrt{5})=2\sqrt{5}a$

즉 $2\sqrt{5}a=6\sqrt{5}$이므로 $\quad a=3$

따라서 ㉠에서 $\quad b=-9$

$\therefore a-b=3-(-9)=12$ 답 ②

04 $x\to1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(\sqrt{x^2+a}+b)=0$이므로

$\sqrt{a+1}+b=0$ $\quad\therefore b=-\sqrt{a+1}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a+1}}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a+1})}{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a+1})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a+1})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a+1})}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a+1})}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a+1}}{x+1}=\sqrt{a+1}$

즉 $\sqrt{a+1}=3$이므로 $\quad a+1=9$

$\therefore a=8$

따라서 ㉠에서 $\quad b=-3$

$\therefore a+b=8+(-3)=5$ 답 5

05 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x-2}=2$에서 $f(x)$는 일차항의 계수가 2인 일차식임을 알 수 있다.

$f(x)=2x+a$ (a는 상수)라 하면

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(2x+a)=a+2$

따라서 $a+2=-3$이므로 $\quad a=-5$

$\therefore f(x)=2x-5$ 답 $f(x)=2x-5$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x-2}$의 값이 2, 즉 0이 아닌 실수이므로

① $f(x)$와 $x-2$의 차수가 같다.

② $f(x)$와 $x-2$의 최고차항의 계수의 비는 2이다.

➡ $f(x)$는 x의 계수가 2인 일차식이다.

06 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x+3}=3$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2+x}=5$에서 $x\to-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $\quad f(-1)=0$

$f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

$f(x)=(x+1)(3x+a)$ (a는 상수)라 하면

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2+x}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(3x+a)}{x(x+1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{3x+a}{x}$

$=3-a$

따라서 $3-a=5$이므로 $\quad a=-2$

$\therefore f(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2+x-2$

답 $f(x)=3x^2+x-2$

베쎈 TIP

다항식 $P(x)$에 대하여 다음은 모두 같은 의미이다.

① $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어진다.

② $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지가 0이다.

③ $P(a)=0$

④ $P(x)$가 $x-a$를 인수로 갖는다.

베이직쎈 BOX

07 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{4x^2+1}=\frac{1}{2}$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{f(x)}=4$에서 $x\to-2$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) ⟶ 0이므로 (분모) ⟶ 0이다.

즉 $\lim_{x\to-2}f(x)=0$이므로 $\quad f(-2)=0$

$f(x)=(x+2)(2x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{f(x)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(2x+a)}=\lim_{x\to-2}\frac{x-2}{2x+a}=\frac{4}{4-a}$$

따라서 $\frac{4}{4-a}=4$이므로 $\quad 4-a=1 \quad \therefore a=3$

$f(x)=(x+2)(2x+3)$이므로

$f(1)=3\cdot5=15$ 답 ①

08 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-1$에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) ⟶ 0이므로 (분자) ⟶ 0이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $\quad f(0)=0$

또 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\frac{1}{3}$에서 $x\to1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) ⟶ 0이므로 (분모) ⟶ 0이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면

$f(0)=0$, $f(1)=0$이므로 $f(x)$는 x, $x-1$을 인수로 갖는 삼차식이다.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x}=\lim_{x\to0}(x-1)(ax+b)=-b$$

이므로 $\quad -b=-1 \quad \therefore b=1$

또

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x(x-1)(ax+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x(ax+1)}=\frac{1}{a+1}$$

이므로 $\quad \frac{1}{a+1}=\frac{1}{3}$

$a+1=3 \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=x(x-1)(2x+1)$이므로

$f(-1)=-1\cdot(-2)\cdot(-1)=-2$ 답 -2

09 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고

$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right)=0$,

$\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}(x^2-5x+6)=0$

이므로 $\quad \lim_{x\to2}h(x)=0$ 답 0

10 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여

$\frac{6x+2}{x+3}<f(x)<\frac{6x^2+x-1}{x^2-x}$이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2}{x+3}=6$, $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+x-1}{x^2-x}=6$

이므로 $\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=6$ 답 6

11 $3x+1<f(x)<3x+5$에서 $x>0$일 때,

$(3x+1)^2<\{f(x)\}^2<(3x+5)^2$

$\therefore \frac{(3x+1)^2}{x^2+3}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+3}<\frac{(3x+5)^2}{x^2+3}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)^2}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+6x+1}{x^2+3}=9$,

$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+5)^2}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+30x+25}{x^2+3}=9$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+3}=9$ 답 ⑤

12 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)$, 점 C의 좌표를 $(0,\ k)$라 하면 $\overline{OC}=\overline{CP}$, 즉 $\overline{OC}^2=\overline{CP}^2$이므로

$\overline{OC}$와 $\overline{CP}$는 모두 원 C의 반지름이므로 $\overline{OC}=\overline{CP}$

$k^2=t^2+(t^2-k)^2$, $\quad k^2=t^2+t^4-2t^2k+k^2$

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$2t^2k=t^2+t^4 \quad \therefore k=\frac{1+t^2}{2}$ ($\because t\ne0$)

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\to0$이므로

$\lim_{t\to0}k=\lim_{t\to0}\frac{1+t^2}{2}=\frac{1}{2} \quad \therefore a=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

13 $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=4$, $\overline{AB}=\sqrt{a^2+16}$이고

$\triangle OAB=\frac{1}{2}r(\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{OB})=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}$

$\triangle OAB$는 $\angle BOA=90°$인 직각삼각형이므로 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}$

이므로

$\frac{1}{2}r(a+\sqrt{a^2+16}+4)=\frac{1}{2}a\cdot4$

$\therefore \frac{r}{a}=\frac{4}{a+4+\sqrt{a^2+16}}$

$$\therefore \lim_{a\to0+}\frac{r}{a}=\lim_{a\to0+}\frac{4}{a+4+\sqrt{a^2+16}}=\frac{4}{4+4}=\frac{1}{2}$$

답 ②

베쎈TIP
삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 r일 때,
$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$

14 $\triangle PBC=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\left(\frac{1}{2}t^2-2\right)=\frac{1}{2}t^2-2$,

(△PBC의 높이) = (점 P의 y좌표) − (점 C의 y좌표)

$\triangle PCA=\frac{1}{2}\cdot2\cdot(t-2)=t-2$

(△PCA의 높이) = (점 P의 x좌표) − (점 C의 x좌표)

이므로 $\quad f(t)=\frac{1}{2}t^2+t-4$

$$\therefore \lim_{t\to2+}\frac{f(t)}{t-2}=\lim_{t\to2+}\frac{\frac{1}{2}t^2+t-4}{t-2}=\lim_{t\to2+}\frac{\frac{1}{2}(t-2)(t+4)}{t-2}=\lim_{t\to2+}\frac{1}{2}(t+4)=3$$

답 3

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

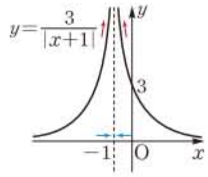
본책 27쪽

01 전략 그래프를 그려 극한을 조사한다.

베이직쎈 BOX

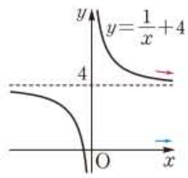
풀이 ② $y=\dfrac{3}{|x+1|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3}{|x+1|}=\infty$



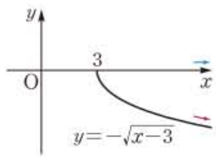
③ $y=\dfrac{1}{x}+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+4\right)=4$



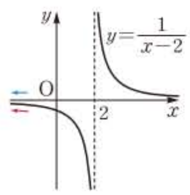
④ $y=-\sqrt{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to\infty}(-\sqrt{x-3})=-\infty$



⑤ $y=\dfrac{1}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$



답 ⑤

02 전략 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)$이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값이 존재한다.

풀이 ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=1$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $-1<a<1$인 모든 실수 a에 대하여

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값이 항상 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

03 전략 그래프에서 각 극한값을 구한다.

풀이 $\lim\limits_{x\to0}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)+\lim\limits_{x\to2-}f(x)$

$=2+1+2=5$

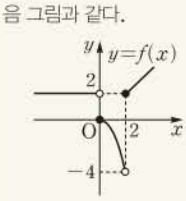
답 ⑤

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)$
$=2$
$\therefore \lim\limits_{x\to0}f(x)=2$

04 전략 함수 $F(x)=\begin{cases}g(x) & (x\ge a)\\ h(x) & (x<a)\end{cases}$에 대하여

$\lim\limits_{x\to a+}F(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)$, $\lim\limits_{x\to a-}F(x)=\lim\limits_{x\to a-}h(x)$임을 이용한다.

$y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



풀이 $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}2=2$,

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}(-x^2)=-4$

$\therefore \lim\limits_{x\to0-}f(x)+\lim\limits_{x\to2-}f(x)=2+(-4)$

$=-2$

답 ②

05 전략 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. [반례] $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$이면

$\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0}1=1$

이지만 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, 즉 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x}=\infty$,
$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$이면

$\lim\limits_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=0$이지만 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$와 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$의 값은 모두 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\cdot\dfrac{g(x)}{f(x)}=\alpha\beta$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

06 전략 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 각 함수의 $x=1$에서의 우극한과 좌극한이 같은지 조사한다.

풀이 ① $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$

② $\lim\limits_{x\to1+}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to1+}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to1+}g(x)=1\cdot1=1$

$\lim\limits_{x\to1-}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to1-}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to1-}g(x)$

$=(-1)\cdot(-1)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\{g(x)\}^2=1$

③ $\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to1+}g(x)=0\cdot1=0$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to1-}g(x)$

$=0\cdot(-1)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=0$

④ $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1+}f(x)}{\lim\limits_{x\to1+}g(x)}=\dfrac{0}{1}=0$

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1-}f(x)}{\lim\limits_{x\to1-}g(x)}=\dfrac{0}{-1}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

⑤ $\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to1+}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}g(x)$

$=0+1=1$

$\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to1-}g(x)$

$=0+(-1)=-1$

따라서 $\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}\neq\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}$이므로 $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$의 값은 존재하지 않는다.

답 ⑤

07 전략 분자를 인수분해한 후 약분한다.

풀이 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{(x-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)f(x)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+1)(x+1)}{f(x)}$

$=\dfrac{4}{f(1)}$

따라서 $\dfrac{4}{f(1)}=\dfrac{1}{4}$이므로

$f(1)=16$

답 ④

08 전략 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나누어 극한값을 구한다.

베이직쎈 BOX

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{5}{x^2}}=0 \qquad \therefore a=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-x}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{6}{3}=2 \qquad \therefore b=2$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}=2 \qquad \therefore c=2$

① $a<b$ ② $b=c$

③ $a\neq c$ ④ $a+b=c$

⑤ $a-c\neq b$ 답 ④

$a-c=-2$

09 **전략** $x=-t$로 치환하여 식을 변형한 후 근호를 포함한 식을 유리화한다.

풀이 $x=-t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x}+2x)\\&=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2-t}-2t)\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{4t^2-t}-2t)(\sqrt{4t^2-t}+2t)}{\sqrt{4t^2-t}+2t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{4t^2-t}+2t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{t}}+2}\\&=\frac{-1}{2+2}=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ①

10 **전략** $x \longrightarrow a$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이면 (분자) $\longrightarrow 0$임을 이용한다.

풀이 $x \longrightarrow -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(3x^2+ax+b)=0$이므로

$3-a+b=0 \qquad \therefore b=a-3$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+ax+a-3}{x+1}&=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(3x+a-3)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}(3x+a-3)\\&=a-6\end{aligned}$$

즉 $a-6=-4$이므로 $a=2$

따라서 ㉠에서 $b=-1$이므로

$f(x)=3x^2+2x-1$

$\therefore f(1)=3+2-1=4$ 답 ④

11 **전략** 두 다항식 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=a\ (a\neq0)$이면 $g(x)$와 $h(x)$의 차수가 같음을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=3$에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1이고 이차항의 계수가 3인 삼차식임을 알 수 있다.

$f(x)-x^3$은 이차항의 계수가 3인 이차식이다.

또 $\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}=-1$에서 $x \longrightarrow 0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$f(x)=x^3+3x^2+ax$ (a는 상수)라 하면

삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 3, $f(0)=0$을 만족시키는 $f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}&=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^3+3x^2+ax}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+3x+a}\\&=\frac{1}{a}\end{aligned}$$

이므로 $\frac{1}{a}=-1 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-x$이므로

$f(-1)=-1+3+1=3$ 답 ②

12 **전략** $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$이어야 함을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(2x-1)=1$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x-k)^2=(1-k)^2$ … ❶

이때 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이어야 하므로

$1=(1-k)^2, \qquad 1-k=\pm1$

$\therefore k=0$ 또는 $k=2$ … ❷

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

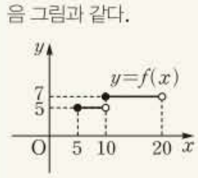
$0+2=2$ … ❸

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	$\lim_{x\to1+}f(x)$, $\lim_{x\to1-}f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷	k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

13 **전략** 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

$y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



풀이 $f(x)=\begin{cases}5 & (5\le x<10)\\7 & (10\le x<20)\end{cases}$이므로 … ❶

$\lim_{x\to10+}f(x)+\lim_{x\to10-}f(x)=7+5=12$ … ❷

답 12

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷	$\lim_{x\to10+}f(x)+\lim_{x\to10-}f(x)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

14 **전략** $\lim_{x\to-3}xf(x)$의 값을 이용할 수 있도록 $\lim_{x\to-3}(x^2+6x)f(x)$를 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to-3}(x^2+6x)f(x)=\lim_{x\to-3}x(x+6)f(x)$

$=\lim_{x\to-3}(x+6)\cdot xf(x)$

$=3\cdot5=15$ 답 15

$\lim_{x\to-3}(x+6)$, $\lim_{x\to-3}xf(x)$의 값이 모두 존재하므로 함수의 극한에 대한 성질을 이용할 수 있다.

15 **전략** 먼저 $\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값을 구한 후 이를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to4}f(x)=3$, $\lim_{x\to4}g(x)=\infty$이므로

$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

$$\therefore \lim_{x\to 4}\frac{2f(x)+g(x)}{f(x)+4g(x)}=\lim_{x\to 4}\frac{2\cdot\frac{f(x)}{g(x)}+1}{\frac{f(x)}{g(x)}+4}$$

$$=\frac{2\cdot 0+1}{0+4}$$

$$=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

16 전략 $x\longrightarrow a$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow$ 0이면 (분모) $\longrightarrow$ 0임을 이용한다.

풀이 $x\longrightarrow 3$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow$ 0이므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

베이직쎈 BOX: $\lim_{x\to 3}(3\sqrt{x^2-5}-2x)$ $=3\cdot 2-2\cdot 3$ $=0$

즉 $\lim_{x\to 3}(ax+b)=0$이므로

$3a+b=0$ $\quad\therefore b=-3a$ …… ㉠ ➊

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{3\sqrt{x^2-5}-2x}{ax-3a}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(3\sqrt{x^2-5}-2x)(3\sqrt{x^2-5}+2x)}{a(x-3)(3\sqrt{x^2-5}+2x)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{5x^2-45}{a(x-3)(3\sqrt{x^2-5}+2x)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{5(x+3)(x-3)}{a(x-3)(3\sqrt{x^2-5}+2x)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{5(x+3)}{a(3\sqrt{x^2-5}+2x)}=\frac{5}{2a}$$

즉 $\frac{5}{2a}=\frac{5}{4}$이므로

$2a=4$ $\quad\therefore a=2$ ➋

따라서 ㉠에서 $\quad b=-6$ ➌

$\therefore a+b=2+(-6)=-4$ ➍

답 -4

단계	채점 기준	비율
➊	b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
➋	a의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌	b의 값을 구할 수 있다.	10 %
➍	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

17 전략 조건 (가)에서 $f(x)$는 이차 이하의 다항식임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $f(x)$의 최고차항의 차수는 삼차보다 작아야 하므로 $f(x)$는 이차 이하의 다항식이다. ➊

베이직쎈 BOX: 0에 수렴하므로 (분자의 차수) <(분모의 차수)

또 조건 (나)에서 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

또 조건 (다)에서 $\quad f(2)=0$ ➋

$f(x)=a(x-1)(x-2)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)(x-2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}a(x-2)$$

$$=-a$$

이므로 $\quad -a=3$ $\quad\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-3(x-1)(x-2)$이므로 ➌

$f(0)=-3\cdot(-1)\cdot(-2)=-6$ ➍

답 -6

단계	채점 기준	비율
➊	$f(x)$가 이차 이하의 다항식임을 알 수 있다.	20 %
➋	$f(1)=0$, $f(2)=0$임을 알 수 있다.	30 %
➌	$f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
➍	$f(0)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

18 전략 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 $x>2$인 모든 실수 x에 대하여

$\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x}<f(x)<\frac{2x^2-5x+2}{x-2}$이고

$$\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x+4)(x-2)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{x+4}{x}=3,$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{2x^2-5x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(2x-1)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}(2x-1)=3$$

이므로 $\quad \lim_{x\to 2+}f(x)=3$

답 3

19 전략 두 선분 OA, OB의 길이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\mathrm{A}(k, \sqrt{3k})$, $\mathrm{B}(k, \sqrt{k})$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{k^2+3k}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{k^2+k}$

$$\therefore \lim_{k\to\infty}(\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OB}})$$

$$=\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2+k})$$

베이직쎈 BOX: $\infty-\infty$ 꼴이므로 분모를 1로 보고 분자를 유리화한다.

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{(\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2+k})(\sqrt{k^2+3k}+\sqrt{k^2+k})}{\sqrt{k^2+3k}+\sqrt{k^2+k}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{\sqrt{k^2+3k}+\sqrt{k^2+k}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{k}}+\sqrt{1+\frac{1}{k}}}=1$$

답 1

I. 함수의 극한과 연속

02 함수의 연속

04 함수의 연속

개념 13 함수의 연속과 불연속

본책 30쪽

01 $\lim_{x\to1+}f(x)=1,\ \lim_{x\to1-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않는다. 답 ㄴ

02 $f(1)=2,\ \lim_{x\to1}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$ 답 ㄷ

03 답 ㄱ

04 $f(0)=-1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 정의되어 있다. 답 있다

05 $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=-1$

즉 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재한다. 답 한다

06 $f(0)=-1,\ \lim_{x\to0}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$ 답 같다

07 답 연속

08 $f(-1)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 정의되어 있다. 답 있다

09 $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$

즉 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재한다. 답 한다

10 $f(-1)=1,\ \lim_{x\to-1}f(x)=-2$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)$ 답 같지 않다

11 답 불연속

12 $f(-3)=0,\ \lim_{x\to-3}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to-3}f(x)=f(-3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 연속이다. 답 연속

13 $f(x)$가 $x=5$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 불연속이다. 답 불연속

14 $f(1)=1,\ \lim_{x\to1}f(x)=1$이므로

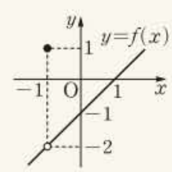
$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

베이직쎈 BOX

$f(x)=x|x|$
$=\begin{cases}x^2 & (x\geq0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$

$y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=-1$일 때 그래프가 끊어져 있으므로 $x=-1$에서 불연속임을 직관적으로 알 수 있다.

$x=1$일 때 그래프가 이어져 있으므로 $x=1$에서 연속임을 직관적으로 알 수 있다.

15 (i) $f(-2)=-3$

(ii) $\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+2x}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}x=-2$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to-2}f(x)\neq f(-2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

답 불연속

16 $\lim_{x\to4+}f(x)=\lim_{x\to4+}\sqrt{x-4}=0$,

$\lim_{x\to4-}f(x)=\lim_{x\to4-}(x-5)=-1$

$\therefore \lim_{x\to4+}f(x)\neq\lim_{x\to4-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to4}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 불연속이다. 답 불연속

17 (i) $f(0)=0$

(ii) $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}x^2=0$,

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(-x^2)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=0$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 답 연속

18 $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=0$ 답 ○

19 $f(-1)=1$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. 답 ×

20 $f(1)=0,\ \lim_{x\to1}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 ○

21 $-2<x<2$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 -1, 0의 2개이다. 답 ×

22 답 5 2, 4, 1, 2, 4, 4, 5

23 함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-3}f(x)=f(-3)$

이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to-3}f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{x^2+5x+6}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x+2)}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3}(x+2)=-1$,

$f(-3)=a$

이므로

$a=-1$ 답 -1

개념 14 구간

본책 32쪽

24 답 $[-1, 3]$

25 답 $[0, 5)$

26 답 $(-4, 1]$

27 답 $(-6, -2)$

28 답 $(-\infty, 4]$

29 답 $(-5, \infty)$

30 $f(x)=3x+5$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로
$(-\infty, \infty)$ 답 $(-\infty, \infty)$

31 $f(x)=-x^2$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로
$(-\infty, \infty)$ 답 $(-\infty, \infty)$

32 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$의 정의역은 $x\neq-1$, 즉 $x<-1$ 또는 $x>-1$인 x의 값들의 집합이므로
$(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$
답 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$

33 $f(x)=\sqrt{x-2}$의 정의역은 $x-2\geq0$, 즉 $x\geq2$인 x의 값들의 집합이므로 $[2, \infty)$ 답 $[2, \infty)$

개념 15 연속함수

본책 33쪽

34 $x=2$에서 함수 $f(x)$가 불연속이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 4]$에서 연속함수가 아니다. 답 ×

35 함수 $f(x)$가 구간 $(-2, 3)$에 속하는 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 연속함수이다. 답 ○

36 $x=0$에서 함수 $f(x)$가 불연속이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속함수가 아니다. 답 ×

37 함수 $f(x)=x^2+2$는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

38 함수 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$은 $x\neq0$, 즉 $x<0$ 또는 $x>0$인 x에서 연속이므로 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

39 함수 $f(x)=-\sqrt{x+1}$은 $x+1\geq0$, 즉 $x\geq-1$인 x에서 연속이므로 구간 $[-1, \infty)$에서 연속이다.
답 $[-1, \infty)$

40 답 8 $-1, -1, -3, 5, -1, -3, -3, 8$

베이직쎈 BOX

$y=\dfrac{x^2+2x+a}{x-1}$는 $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$x=0$에서의 함숫값과 극한을 조사한다.

41 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$$

이때

$$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}(\sqrt{x-3}+1)=1,$$
$$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}(ax-5)=3a-5,$$
$$f(3)=1$$

이므로 $3a-5=1$ $\therefore a=2$ 답 2

42 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2+2x+a}{x-1}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2+2x+a)=0$이므로

$1+2+a=0$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

$\therefore b=4$ 답 $a=-3$, $b=4$

43 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-2$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$$

$$\therefore \lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax-6}{x+2}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(x^2+ax-6)=0$이므로

$4-2a-6=0$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-3)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x-3)=-5$$

$\therefore b=-5$ 답 $a=-1$, $b=-5$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 34쪽

01 ① $f(0)=3$, $\lim_{x\to0}f(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

② $f(0)=1$, $\lim_{x\to0}f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

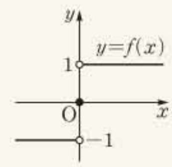
베이직쎈 BOX

③ $f(0)=\sqrt{2}$, $\lim_{x\to0}f(x)=\sqrt{2}$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

④ $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0+}1=1$,

> $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.
>
> 
>

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to0-}(-1)=-1$

이므로 $\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to0}(x+1)=1$

이때 $f(0)=1$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 답 ④

02 ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되어 있지 않다.

> 유리함수는 (분모)$=0$이 되는 값에서 정의되어 있지 않다.

ㄴ. $f(3)=3$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 정의되어 있다.

ㄷ. $\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{(x-1)(x-3)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x-1}=3$

ㄹ. $f(x)$가 $x=1$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고, $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

03 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

이때 $f(a)=4$, $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}(x^2-3x)=a^2-3a$이므로

$a^2-3a=4$, $a^2-3a-4=0$

> 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a의 값의 합을 3으로 바로 구할 수도 있다.

$(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

따라서 구하는 합은 $-1+4=3$ 답 3

04 (i) $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $f(0)=1$, $\lim_{x\to0}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 -1의 1개이고 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 -1, 0의 2개이므로 $a=1$, $b=2$

$\therefore a-b=-1$ 답 -1

05 ㄴ. $\lim_{x\to3+}f(x)=3$, $\lim_{x\to3-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to3+}f(x)\neq\lim_{x\to3-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄹ. ㄴ에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이고, $f(x)$가 $x=1$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 구간 $(0, 4)$에서 불연속인 모든 x의 값의 합은 $1+3=4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

06 (1) $f(1)g(1)=1\cdot(-1)=-1$

(2) $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\cdot\lim_{x\to1+}g(x)$

$=1\cdot(-1)=-1$,

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\cdot\lim_{x\to1-}g(x)$

$=(-1)\cdot1=-1$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=-1$

(3) $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

답 (1) -1 (2) -1 (3) 연속

07 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

이때

> | | | | | |
> |---|---|---|---|---|
> | 1 | 1 | 0 | −4 | 3 |
> | | | 1 | 1 | −3 |
> | | 1 | 1 | −3 | 0 |
>
> $\therefore x^3-4x+3$
> $=(x-1)(x^2+x-3)$

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-4x+3}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x-3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x^2+x-3)$

$=-1$

이고 $f(1)=k$이므로 $k=-1$ 답 -1

08 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$

이때

$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2+}\sqrt{x+3}=1$,

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2-}(-x^2+2x+a)=a-8$,

$f(-2)=1$

이므로 $a-8=1$

$\therefore a=9$ 답 ③

09 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$

$\therefore \lim_{x\to3+}\frac{a\sqrt{x+1}+b}{x-3}=1$ ······ ㉠

> $\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}1$
> $=1$,
> $f(3)=1$

㉠에서 $x\to3+$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3+}(a\sqrt{x+1}+b)=0$이므로

$2a+b=0$ $\therefore b=-2a$

$b=-2a$를 ㉠의 좌변에 대입하면

베이직쎈 BOX

$$\lim_{x\to3+}\frac{a\sqrt{x+1}-2a}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{a(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{a}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{a}{4}$$

이므로 $\frac{a}{4}=1$ $\therefore a=4$

따라서 $b=-8$이므로

$a+b=4+(-8)=-4$ 답 -4

$b=-2a$
$=-2\cdot4=-8$

10 $f(x)=\begin{cases}-x^2-x & (x\le-1 \text{ 또는 } x\ge1)\\ x^2+ax+b & (-1<x<1)\end{cases}$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$|x|\ge1$에서
$x\le-1$ 또는 $x\ge1$
$|x|<1$에서
$-1<x<1$

(i) $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^2+ax+b)=1-a+b$

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(-x^2-x)=0$

$f(-1)=0$

따라서 $1-a+b=0$이므로

$a-b=1$ …… ㉠

(ii) $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(-x^2-x)=-2$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x^2+ax+b)=1+a+b$

$f(1)=-2$

따라서 $1+a+b=-2$이므로

$a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

$\therefore ab=2$ 답 ⑤

11 (1) $x\ne-1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=x-1$$

$x\ne-1$이므로 $(x+1)f(x)=x^2-1$의 양변을 $x+1$로 나눌 수 있다.

(2) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$
$=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$

답 (1) $f(x)=x-1$ (2) -2

12 $x\ne3$일 때, $f(x)=\frac{x^2+ax-15}{x-3}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서 연속이므로

$$f(3)=\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2+ax-15}{x-3}$$

$x\to3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(x^2+ax-15)=0$이므로

$9+3a-15=0$ $\therefore a=2$

$$\therefore f(3)=\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+5)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x+5)=8$$ 답 ④

13 $x\ne2$일 때, $f(x)=\frac{\sqrt{x+7}-a}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x\ge-7$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-a}{x-2}$$

$x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(\sqrt{x+7}-a)=0$이므로

$3-a=0$ $\therefore a=3$

$$\therefore f(2)=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}$$
$$=\frac{1}{6}$$ 답 ②

05 연속함수의 성질

개념 16 연속함수의 성질

본책 36쪽

01 $f(x)=2x^2-x+5$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

답 모든 실수에서 연속이다.

베쎈 TIP

일차함수 $y=x$는 모든 실수에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수

$y=x^2$, $y=x^3$, $\cdots$, $y=x^n$ (n은 자연수)

도 모든 실수에서 연속이다. 또 상수함수도 모든 실수에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 다항함수

$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_1, a_0은 상수)

도 모든 실수에서 연속이다.

02 $f(x)=(x+4)(x-3)=x^2+x-12$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

답 모든 실수에서 연속이다.

다음과 같이 생각할 수도 있다.
$f(x)=(x+4)(x-3)$에서 $p(x)=x+4$, $q(x)=x-3$이라 하면 $p(x)$, $q(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 $p(x)q(x)$도 모든 실수에서 연속이다.

03 $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$는 유리함수이므로 $x+1\ne0$, 즉 $x\ne-1$인 모든 실수에서 연속이다.

답 $x\ne-1$인 모든 실수에서 연속이다.

베쎈 TIP

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 유리함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 분모가 0이 되는 x의 값, 즉 $g(x)=0$인 x의 값을 제외한 모든 실수에서 연속이다.

04 $f(x)=x^3+x^2-x+1$은 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

05 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$은 유리함수이므로 $x-2\neq0$, 즉 $x\neq2$인 모든 실수에서 연속이다.
즉 구간 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$

06 $f(x)=\dfrac{2}{x^2-9}=\dfrac{2}{(x+3)(x-3)}$는 유리함수이므로 $(x+3)(x-3)\neq0$, 즉 $x\neq-3$, $x\neq3$인 모든 실수에서 연속이다.
즉 구간 $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$, $(3, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$, $(3, \infty)$

$x<-3$ 또는 $-3<x<3$ 또는 $x>3$

07 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $-2f(x)$도 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

08 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $f(x)+g(x)$도 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

09 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $f(x)-g(x)$도 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

10 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $f(x)g(x)$도 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

11 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$인 x에서 불연속이다.

$f(x)=x+2=0$에서 $\quad x=-2$

따라서 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x\neq-2$인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, -2)$, $(-2, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, -2)$, $(-2, \infty)$

12 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$인 x에서 불연속이다.

$g(x)=x^2-5x=0$에서 $\quad x(x-5)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=5$

따라서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x\neq0$, $x\neq5$인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, 5)$, $(5, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, 0)$, $(0, 5)$, $(5, \infty)$

개념 17 최대·최소 정리

본책 37쪽

13 함수 $f(x)$는 구간 $[-4, -1]$에서 $x=-1$일 때 최댓값 2, $x=-4$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -1

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-4, -1]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

14 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 3]$에서 $x=1$일 때 최댓값 4를 갖고, 최솟값은 없다.

답 최댓값: 4, 최솟값: 없다.

15 함수 $f(x)$는 구간 $[2, 4]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

답 최댓값: 없다, 최솟값: 없다.

16 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 1)$에서 $x=-1$일 때 최솟값 2를 갖고, 최댓값은 없다.

답 최댓값: 없다, 최솟값: 2

17 함수 $f(x)$는 구간 $(4, 7]$에서 $x=5$일 때 최댓값 4, $x=7$일 때 최솟값 0을 갖는다.

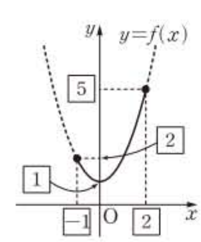
답 최댓값: 4, 최솟값: 0

18 함수 $f(x)$는 구간 $(-5, 2)$에서 $x=1$일 때 최댓값 4, $x=-4$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

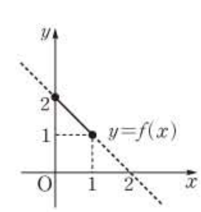
답 최댓값: 4, 최솟값: -1

19 답 최댓값: 5, 최솟값: 1

연속, 2, 5, 0, 1



20 함수 $f(x)=-x+2$는 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



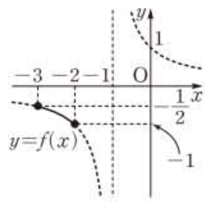
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 2, $x=1$에서 최솟값 1을 갖는다.

답 최댓값: 2, 최솟값: 1

최댓값과 최솟값을 구할 때에는 그래프를 그려서 생각한다.

베이직쎈 BOX

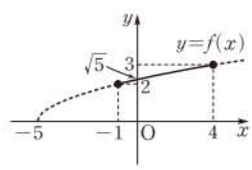
21 함수 $f(x)=\frac{1}{x+1}$은 구간 $[-3, -2]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최댓값 $-\frac{1}{2}$, $x=-2$에서 최솟값 -1을 갖는다.

답 최댓값: $-\frac{1}{2}$, 최솟값: -1

22 함수 $f(x)=\sqrt{x+5}$는 구간 $[-1, 4]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 3, $x=-1$에서 최솟값 2를 갖는다.

답 최댓값: 3, 최솟값: 2

개념 18 사잇값의 정리

본책 38쪽

23 답 연속, 0, 3, 1

24 답 -7, 3, $<$, 0

25 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 연속이다.
또 $f(-1)=-5$, $f(0)=1$에서

$f(-1)f(0)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 0)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$은 열린구간 $(-1, 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

26 $f(x)=-x^3+x^2+5$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2, 3]$에서 연속이다.
또 $f(2)=1$, $f(3)=-13$에서

$f(2)f(3)<0$

$f(2)=-8+4+5=1$
$f(3)=-27+9+5$
$=-13$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(2, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $-x^3+x^2+5=0$은 열린구간 $(2, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

27 $f(x)=x^4+2x^2-1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이다.
또 $f(0)=-1$, $f(1)=2$에서

$f(0)f(1)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^4+2x^2-1=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

28 $f(x)=x^4+x^3-x-2$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이다.
또 $f(1)=-1$, $f(2)=20$에서

$f(2)=16+8-2-2$
$=20$

$f(1)f(2)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^4+x^3-x-2=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 39쪽

01 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$인 x에서 불연속이다.
$g(x)=x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 x의 값의 곱을 -6으로 바로 구할 수도 있다.

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=-3$, $x=2$에서 불연속이므로 구하는 곱은 $(-3)\cdot 2=-6$

답 -6

02 ① 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로
$\{f(x)\}^2=f(x)\cdot f(x)$도 모든 실수에서 연속이다.
② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 두 함수 $2f(x)$, $3g(x)$도 모든 실수에서 연속이다.
따라서 $2f(x)+3g(x)$도 모든 실수에서 연속이다.
③ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $f(x)g(x)$도 모든 실수에서 연속이다.
④ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$인 x에서 불연속이다.
그런데 $g(x)=x^2+2>0$이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 모든 실수에서 연속이다.

$x^2+2=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 존재하지 않는다.

⑤ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$인 x에서 불연속이다.
$f(x)=x-1=0$에서 $x=1$
따라서 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=1$에서 불연속이다.

답 ⑤

03 ㄱ. $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면

$g(x)=f(x)-h(x)$

이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$, $g(x)=0$이라 하면

$f(x)g(x)=0$

따라서 $g(x)$와 $f(x)g(x)$가 연속함수이지만 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=1$, $g(x)=x$라 하면 $f(x)$와 $g(x)$는 연속함수이지만 $\dfrac{f(x)}{|g(x)|}=\dfrac{1}{|x|}$이므로 $\dfrac{f(x)}{|g(x)|}$는 $|x|=0$인 x의 값, 즉 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

04 ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=0$에서 연속이므로 $f(x)+g(x)$도 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=0$에서 연속이지만 $x=0$일 때 $g(x)=0$이므로 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to1+}g(x)=2\cdot0=0$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to1-}g(x)=1\cdot0=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=0$

이때 $f(1)g(1)=2\cdot0=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

05 ① $\lim\limits_{x\to3+}f(x)=3$

② $x=3$에서 함수 $f(x)$는 불연속이므로 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 1개이다.

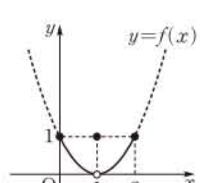
③ 함수 $f(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 반드시 최댓값을 갖는다.

④ 함수 $f(x)$는 구간 $[2,\ 3]$에서 $x=3$일 때 최솟값 2를 갖는다.

⑤ 함수 $f(x)$는 구간 $[1,\ 4]$에서 최솟값을 갖지 않는다.

답 ④

06 구간 $[0,\ 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$일 때 최댓값 1을 갖고, 최솟값은 없다.

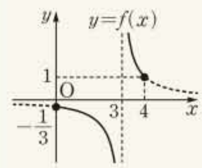


답 최댓값: 1, 최솟값: 없다.

07 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$은 $x=3$에서 불연속이고, $x\neq3$인 모든 실수 x에서 연속이다.

베이직쎈 BOX

구간 $[0,\ 4]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(0)=0$,
$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$이므로
$\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

$f(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로 연속함수의 성질을 이용할 수 없다. 따라서 $x=1$에서의 극한값과 함숫값을 비교한다.

함수의 극한에 대한 성질
$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$,
$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$
(α, β는 실수)
일 때,
$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha\beta$

방정식 $f(x)=0$에 대하여 각 보기에 주어진 구간 $(a,\ b)$에서 $f(a)$, $f(b)$의 값을 구한 후 $f(a)f(b)<0$인 구간을 찾는다.

함수 $f(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 $x=2$일 때 최댓값 3을 갖는다.

$f(x)$
$=4x^2-4x+a$
$=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+a-1$
이므로 $f(x)$는 구간 $(-1,\ 0)$에서 중근을 가질 수 없다.

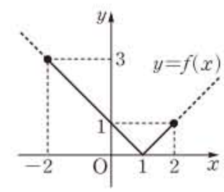
①, ④, ⑤ $f(x)$는 주어진 닫힌구간에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

② 구간 $[0,\ 3)$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소하므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최댓값 $f(0)=-\dfrac{1}{3}$을 갖고, 최솟값은 없다.

③ 구간 $(3,\ 4]$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소하므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최솟값 $f(4)=1$을 갖고, 최댓값은 없다.

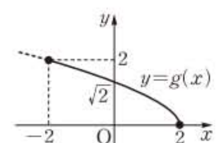
답 ②

08 구간 $[-2,\ 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 $x=-2$일 때 최댓값 3을 갖는다.



$\therefore a=3$

구간 $[-2,\ 2]$에서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $g(x)$는 이 구간에서 $x=2$일 때 최솟값 0을 갖는다.



$\therefore b=0$

$\therefore a+b=3+0=3$

답 3

09 $f(-3)f(-1)=(-1)\cdot1=-1<0$,

$f(-1)f(0)=1\cdot2=2>0$,

$f(0)f(2)=2\cdot(-2)=-4<0$,

$f(2)f(3)=(-2)\cdot(-3)=6>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-3,\ -1)$, $(0,\ 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 2개의 실근을 가지므로 $n=2$

답 ②

10 $f(x)=x^3+2x-1$로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=-13$, $f(-1)=-4$, $f(0)=-1$,

$f(1)=2$, $f(2)=11$, $f(3)=32$

따라서 $f(0)f(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 그런데 방정식 $f(x)=0$은 오직 하나의 실근을 가지므로 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(0,\ 1)$이다.

답 ③

11 $f(x)=4x^2-4x+a$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이다. 이때

$f(-1)=a+8$, $f(0)=a$

이고 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-1,\ 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 경우는 이 구간에서 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 갖는 경우이다.

따라서 $f(-1)f(0)<0$이어야 하므로

$a(a+8)<0\quad \therefore -8<a<0$

답 $-8<a<0$

12 $f(2)f(7)>0$에서

$f(2)>0,\ f(7)>0$ 또는 $f(2)<0,\ f(7)<0$

$f(4)f(7)<0$에서

$f(4)>0,\ f(7)<0$ 또는 $f(4)<0,\ f(7)>0$

따라서

$f(2)>0,\ f(4)<0$ 또는 $f(2)<0,\ f(4)>0$

이므로 $f(2)f(4)<0$

$f(2)f(4)<0$, $f(4)f(7)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(2,\ 4)$, $(4,\ 7)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉 방정식 $f(x)=0$은 구간 $[2,\ 7]$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

답 ②

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 41쪽

01 전략 경곗값에서의 함수의 연속성을 조사한다.

풀이 ㄱ. $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}=0,\ \lim\limits_{x\to0-}f(x)=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

이때 $f(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}x=1$

이때 $f(1)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+}(x^2+1)=2,$

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}(-x+1)=2$

이므로 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=2$

이때 $f(-1)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

이상에서 모든 실수 x에서 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

02 전략 함수의 극한값이 존재할 조건과 연속일 조건을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

베이직쎈 BOX

$f(2)$와 $f(7)$의 부호는 같고, $f(4)$와 $f(7)$의 부호는 다르므로 $f(2)$와 $f(4)$의 부호는 다르다.

주어진 그래프가 $x=1$에서 끊어져 있으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속임을 직관적으로 알 수도 있다.

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 각 함수의 우극한과 좌극한을 구한다.

풀이 ① $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=-1$

② $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to2-}f(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to2-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ $f(1)=1,\ \lim\limits_{x\to1}f(x)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

④ $f(3)=1,\ \lim\limits_{x\to3}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

⑤ $\lim\limits_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 $-1\le x\le3$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 1, 2의 2개이다.

답 ⑤

03 전략 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to0}h(x)=h(0)$이어야 함을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\lim\limits_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to0+}f(x)+\lim\limits_{x\to0+}g(x)=1+0=1,$

$\lim\limits_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to0-}f(x)+\lim\limits_{x\to0-}g(x)$

$=0+1=1$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=1$

이때 $f(0)+g(0)=1+0=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=f(0)+g(0)$

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0+}\{f(x)-g(x)\}=\lim\limits_{x\to0+}f(x)-\lim\limits_{x\to0+}g(x)$

$=1-0=1,$

$\lim\limits_{x\to0-}\{f(x)-g(x)\}=\lim\limits_{x\to0-}f(x)-\lim\limits_{x\to0-}g(x)$

$=0-1=-1$

이므로

$\lim\limits_{x\to0+}\{f(x)-g(x)\}\neq\lim\limits_{x\to0-}\{f(x)-g(x)\}$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to0+}g(x)$

$=1\cdot0=0,$

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to0-}g(x)$

$=0\cdot1=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=0$

이때 $f(0)g(0)=1\cdot0=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 $x=0$에서 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

04 전략 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 함을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+a}-3}{x-2}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x \longrightarrow 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}(\sqrt{x^2+a}-3)=0$이므로

$$\sqrt{4+a}-3=0$$

$$\sqrt{4+a}=3$$

$$4+a=9 \qquad \therefore a=5$$

$a=5$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}\\ &=\frac{4}{3+3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore b=\frac{2}{3}$$

$$\therefore a+b=5+\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$$

답 ③

05 **전략** $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$, $x=-1$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $x^2-1\neq 0$, 즉 $x\neq -1$, $x\neq 1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^3-x}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}=x$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$, $x=-1$에서 연속이므로

$$\begin{aligned}f(1)&=\lim_{x\to 1}f(x)\\ &=\lim_{x\to 1}x=1\\ f(-1)&=\lim_{x\to -1}f(x)\\ &=\lim_{x\to -1}x=-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(1)-f(-1)&=1-(-1)\\ &=2\end{aligned}$$

답 ①

06 **전략** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 두 함수의 실수배, 합, 차, 곱도 $x=a$에서 연속임을 이용한다.

풀이 ① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $5f(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

② 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $\{g(x)\}^2=g(x)\cdot g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

③ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

④ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $3f(x)$도 $x=a$에서 연속이다. 또 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $3f(x)+g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

⑤ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $\dfrac{1}{f(x)-g(x)}$은 $f(x)-g(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$인 x의 값에서 불연속이다.

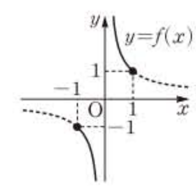
따라서 $f(a)=g(a)$이면 함수 $\dfrac{1}{f(x)-g(x)}$은 $x=a$에서 불연속이다.

답 ⑤

07 **전략** 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가지므로 주어진 구간에서 함수의 연속성을 살펴본다.

풀이 ①, ②, ③, ⑤ 주어진 함수는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

④ 구간 $[-1, 1]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.



답 ④

베이직쎈 BOX

$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$이므로 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$은 구간 $[-1, 1]$에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않는다.

08 **전략** P 지점을 출발한 지 x분 후의 자전거의 속력을 $f(x)$ km/h라 하고 주어진 속력을 이용하여 사잇값의 정리를 적용한다.

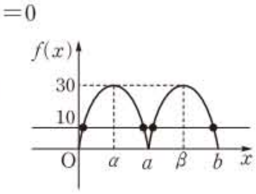
풀이 P 지점을 출발한 지 x분 후의 자전거의 속력을 $f(x)$ km/h라 하면 함수 $f(x)$는 연속함수이다.

자전거의 속력은 시간이 변함에 따라 연속적으로 변한다.

P 지점을 출발한 지 a분, b분 후에 각각 A 지점, B 지점에 도착하였다고 하면

$$f(0)=0,\ f(a)=0,\ f(b)=0$$

이때 $0<\alpha<a$, $a<\beta<b$이고 $f(\alpha)=30$, $f(\beta)=30$인 α, β가 존재하므로 $f(k)=10$인 k가 구간 $(0, \alpha)$, (α, a), (a, β), (β, b)에 각각 적어도 하나씩 존재한다.



따라서 자전거의 속력이 10 km/h인 순간은 적어도 4번 존재한다.

$$\therefore n=4$$

답 ④

09 **전략** 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)$이어야 함을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)$$

이때

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(x+5)=a+5,$$

$$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(-2x+2)=-2a+2,$$

$$f(a)=a+5$$

이므로 $\quad a+5=-2a+2, \qquad 3a=-3$

$$\therefore a=-1$$

답 -1

베이직쎈 BOX

10 전략 조건 (가), (나)를 이용하여 먼저 a의 값을 구한다.

풀이 주어진 그래프에서 조건 (나)를 만족시키는 x의 값은 1, 3이다.

이때 조건 (가)를 만족시키는 x의 값은 1이므로

$a=1$ ··· ❶

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=1$

조건 (다)에서 $b=f(1+2)=f(3)=3$ ··· ❷

$\therefore ab=1\cdot3=3$ ··· ❸

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷	b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

11 전략 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1-}g(x)=g(1)$이어야 함을 이용한다.

풀이 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1-}g(x)=g(1)$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}g(x)&=\lim_{x\to1+}(x-k)f(x)\\&=\lim_{x\to1+}(x-k)\cdot\lim_{x\to1+}f(x)\\&=(1-k)\cdot0=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}g(x)&=\lim_{x\to1-}(x-k)f(x)\\&=\lim_{x\to1-}(x-k)\cdot\lim_{x\to1-}f(x)\\&=(1-k)\cdot2\\&=2-2k,\end{aligned}$$

$$g(1)=(1-k)f(1)=2-2k$$

이므로 $2-2k=0$

$\therefore k=1$

답 1

12 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$, $x=-1$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f(2)=2$에서 $4-a=2$

$\therefore a=2$ ··· ❶

$x\ge1$일 때, $f(x)=2x-a$ 이므로 $f(2)=4-a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$, $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1),$$

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$$

(i) $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(2x-2)=0$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x^2+b)=1+b$,

$f(1)=0$

이므로 $0=1+b$ $\therefore b=-1$ ··· ❷

(ii) $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^2-1)=0$,

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(-x+c)=1+c$,

$f(-1)=0$

이므로 $0=1+c$ $\therefore c=-1$ ··· ❸

$\therefore a+b+c=2+(-1)+(-1)=0$ ··· ❹

답 0

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷	b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹	$a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

13 전략 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $x\neq-2$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x+2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$에서 연속이므로

$$f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}$$

$x\to-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(x^2+ax+b)=0$이므로

$4-2a+b=0$

$\therefore 2a-b=4$ ······ ㉠

또 $f(1)=5$이므로 주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3f(1)=1+a+b$, $15=1+a+b$

$\therefore a+b=14$ ······ ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=8$ ··· ❷

$\therefore a-b=-2$ ··· ❸

답 -2

단계	채점 기준	비율
❶	a, b에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	70 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸	$a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

베이직쎈 BOX

Ⅱ. 다항함수의 미분법

03 미분계수와 도함수

06 미분계수

개념 19 평균변화율

본책 44쪽

01 답 5 　 1, 3, 2, 2, 5

02 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(6)-f(0)}{6-0}=\frac{42-0}{6}=7$ 　 답 7

03 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{30-6}{3}=8$ 　 답 8

04 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-5)}{1-(-5)}=\frac{2-20}{6}=-3$ 　 답 -3

$f(-5)=(-5)^2-5$
$=20$

05 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(-1)-f(-6)}{-1-(-6)}=\frac{0-30}{5}=-6$ 　 답 -6

06 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=\frac{14-(-1)}{5}=3$ 　 답 3

07 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=\frac{-1-(-31)}{3}=10$

답 10

08 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{(1+\Delta x)-1}$

$=\frac{\{-(1+\Delta x)^2+1\}-0}{\Delta x}$

$=\frac{-(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x}$

$=-\Delta x-2$ 　 답 $-\Delta x-2$

$f(1+\Delta x)$는 함수 $f(x)$의 x 대신에 $1+\Delta x$를 대입한 것이다.

09 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{(2+\Delta x)-2}$

$=\frac{\{(2+\Delta x)^2+3(2+\Delta x)\}-10}{\Delta x}$

$=\frac{(\Delta x)^2+7\Delta x}{\Delta x}$

$=\Delta x+7$ 　 답 $\Delta x+7$

10 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$

$=\frac{(a+\Delta x)^3-a^3}{\Delta x}$

$=\frac{(\Delta x)^3+3a(\Delta x)^2+3a^2\Delta x}{\Delta x}$

$=(\Delta x)^2+3a\Delta x+3a^2$

답 $(\Delta x)^2+3a\Delta x+3a^2$

개념 20 미분계수

본책 45쪽

11 답 1, 3, $(\Delta x)^2$, 2, 4, 4, 1, 3, $2(x+1)$, $2(x+1)$, 4

[방법 1], [방법 2] 중 어느 것으로 구해도 결과는 같다.

12 $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(2+\Delta x)-2\}-4}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$ 　 답 3

다른 풀이 $f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-2)-4}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x-2}=3$

13 $f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(-1+\Delta x)^2-(-1+\Delta x)\}-2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x-3)=-3$ 　 답 -3

14 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)\}-3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+4\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+4)=4$ 　 답 4

15 $f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-(\Delta x)^2+3\Delta x+1\}-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-\Delta x+3)=3$ 　 답 3

16 $f'(-2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(-2+\Delta x)^3+4\}-(-4)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3-6(\Delta x)^2+12\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{(\Delta x)^2-6\Delta x+12\}$

$=12$ 　 답 12

17 $f(x)=3x^2-1$이라 하면 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(-1+\Delta x)^2-1\}-2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(\Delta x)^2-6\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(3\Delta x-6)=-6$ 　 답 -6

18 $f(x)=x^2-x+1$이라 하면 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(2+\Delta x)^2-(2+\Delta x)+1\}-3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+3)=3$$

답 3

개념 21 미분계수를 이용한 극한값의 계산 본책 46쪽

19 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{3h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{3}$
$=\frac{1}{3}f'(a)$

답 $\frac{1}{3}f'(a)$

20 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\cdot 4$
$=4f'(a)$

답 $4f'(a)$

$h\longrightarrow 0$일 때 $4h\longrightarrow 0$

21 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+6h)-f(a)}{2h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+6h)-f(a)}{6h}\cdot 3$
$=3f'(a)$

답 $3f'(a)$

22 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{-4h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{5h}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)$
$=-\frac{5}{4}f'(a)$

답 $-\frac{5}{4}f'(a)$

분자가 $f(a+5h)-f(a)$이므로 분모가 $5h$가 되도록 $-\frac{5}{4}$를 곱해야 한다.

23 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\cdot(-1)$
$=-f'(a)$

답 $-f'(a)$

$h\longrightarrow 0$일 때 $-h\longrightarrow 0$

24 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\cdot\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}f'(3)=\frac{1}{2}\cdot 2$
$=1$

답 1

25 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+3h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+3h)-f(3)}{3h}\cdot 3$
$=3f'(3)=3\cdot 2$
$=6$

답 6

26 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+5h)-f(3)}{2h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+5h)-f(3)}{5h}\cdot\frac{5}{2}$
$=\frac{5}{2}f'(3)=\frac{5}{2}\cdot 2=5$

답 5

27 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+4h)-f(3)}{6h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+4h)-f(3)}{4h}\cdot\frac{4}{6}$
$=\frac{2}{3}f'(3)=\frac{2}{3}\cdot 2$
$=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

28 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3-2h)-f(3)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3-2h)-f(3)}{-2h}\cdot(-2)$
$=-2f'(3)=-2\cdot 2$
$=-4$

답 -4

29 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3-8h)-f(3)}{3h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3-8h)-f(3)}{-8h}\cdot\frac{-8}{3}$
$=-\frac{8}{3}f'(3)=-\frac{8}{3}\cdot 2$
$=-\frac{16}{3}$

답 $-\frac{16}{3}$

30 답 $f(3)$, $f(3)$, 2, $2f'(3)$, -2

31 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+5h)-f(3+4h)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(3+5h)-f(3)\}-\{f(3+4h)-f(3)\}}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+5h)-f(3)}{5h}\cdot 5$
$-\lim_{h\to 0}\frac{f(3+4h)-f(3)}{4h}\cdot 4$
$=5f'(3)-4f'(3)$
$=f'(3)=2$

답 2

32 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+3h)-f(3-4h)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(3+3h)-f(3)\}-\{f(3-4h)-f(3)\}}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+3h)-f(3)}{3h}\cdot 3$
$-\lim_{h\to 0}\frac{f(3-4h)-f(3)}{-4h}\cdot(-4)$
$=3f'(3)-\{-4f'(3)\}$
$=7f'(3)=7\cdot 2=14$

답 14

33 $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$
$=f'(-2)$
$=1$

답 1

베이직쎈 BOX

34 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$
$=f'(0)=4$ 답 4

35 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{3x-3}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{3(x-1)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{3}$
$=\frac{1}{3}f'(1)$
$=\frac{1}{3}\cdot3=1$ 답 1

36 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+3)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+3}$
$=\frac{1}{4}f'(1)$
$=\frac{1}{4}\cdot3=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

함수의 극한에 대한 성질을 이용하면
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+3}=f'(1)\cdot\frac{1}{4}$

37 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$
$=\frac{1}{3}f'(1)$
$=\frac{1}{3}\cdot3=1$ 답 1

38 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\cdot(x+1)$
$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$
$=2f'(1)$
$=2\cdot3=6$ 답 6

$x\longrightarrow1$일 때 $x^2\longrightarrow1$이므로
$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x^2\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}=f'(1)$

베쎈TIP
주어진 극한의 분자가 $f(x^2)-f(1)$이므로 분모가 x^2-1이 되도록 적당한 식을 분자, 분모에 곱하여
$\lim_{▲\to●}\frac{f(▲)-f(●)}{▲-●}$ 꼴로 변형한다.

43 답

x의 값	연속이다.	미분가능하다.
-1	○	○
0	×	×
1	○	×
2	○	○
3	○	×
4	×	×

44 답 연속이지만 미분가능하지 않다.
연속, x, 1, $-x$, -1, 미분가능, 연속, 미분가능

45 (i) $f(0)=0$, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x|x|=0$이므로
$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
(ii) $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to0+}x=0$,
$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to0-}(-x)=0$
이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다. 답 연속이고 미분가능하다.

46 (i) $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x^2+1)=1$,
$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(2x+1)=1$
$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=1$
이때 $f(0)=1$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
(ii) $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(x^2+1)-1}{x}=\lim_{x\to0+}x=0$,
$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(2x+1)-1}{x}=\lim_{x\to0-}2=2$
이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다. 답 연속이지만 미분가능하지 않다.

우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 같지 않으면 극한값은 존재하지 않는다.

개념 22 미분가능성과 연속성

본책 48쪽

39 답 ○

40 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다. 답 ×

41 답 ×

주어진 그림과 같이 뾰족한 점에서는 미분계수가 존재하지 않는다.

42 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다. 답 ×

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 49쪽

01 함수 $f(x)$에서 x의 값이 3에서 5까지 변할 때의 평균변화율은
$\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{(125-25a)-(27-9a)}{2}$
$=\frac{98-16a}{2}=49-8a$
따라서 $49-8a=9$이므로 $8a=40$
$\therefore a=5$ 답 5

베이직쎈 BOX

02 함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^3-3a-1)-(-3)}{a-1}$$
$$=\frac{a^3-3a+2}{a-1}=\frac{(a-1)(a^2+a-2)}{a-1}$$
$$=a^2+a-2$$

따라서 $a^2+a-2=18$이므로

$a^2+a-20=0$, $(a+5)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>1)$ 답 ③

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore a^3-3a+2$
$=(a-1)(a^2+a-2)$

03 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{22-(-2)}{4}=6$$

$f(3)=9+12+1=22$
$f(-1)=1-4+1$
$=-2$

또 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{(a^2+4a+1)-1}{a}=\frac{a^2+4a}{a}$$
$$=a+4$$

따라서 $6=a+4$이므로 $a=2$ 답 ②

04 $f'(3)$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(3+h)^2-5(3+h)+2\}-(-4)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2+h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h+1)=1$$ 답 1

05 $f'(-1)$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{-2(-1+h)^2+a(-1+h)\}-(-2-a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-2h^2+(a+4)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(-2h+a+4)=a+4$$

따라서 $a+4=7$이므로 $a=3$ 답 ③

06 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -2에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{13-1}{4}=3$$

또 함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$f'(c)$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(c+h)^2+3(c+h)+3\}-(c^2+3c+3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2+(2c+3)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h+2c+3)=2c+3$$

따라서 $3=2c+3$이므로 $c=0$ 답 0

07 $$f'(2)=\lim_{x\to0}\frac{f(2+x)-f(2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4x^2-3x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(4x-3)=-3$$ 답 -3

08 함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은 두 점 $\mathrm{P}(1, f(1))$, $\mathrm{Q}(4, f(4))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

따라서 구하는 평균변화율은 -2 답 -2

09 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(-2)=3$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=f'(-2)$$
$$=3$$ 답 ④

10 $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(-x^2+4x)-(-a^2+4a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{-(x+a)(x-a)+4(x-a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\{-(x+a)+4\}=-2a+4$$

따라서 $-2a+4=-6$이므로 $a=5$

$\therefore f(5)=-25+20=-5$ 답 -5

11 직선 OA의 기울기는 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{1}{2}$$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $f(-2)=f(2)$

이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 y축에 대하여 대칭인 포물선이다.

따라서 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -2에서 0까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{f(0)-f(2)}{2}$$
$$=-\frac{f(2)-f(0)}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}$$ 답 ④

12 $$\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{5h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot\frac{3}{5}$$
$$=\frac{3}{5}f'(a)$$ 답 ②

13 $$\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1)}{4h}\cdot4$$
$$=4f'(1)$$

따라서 $4f'(1)=8$이므로

$f'(1)=2$ 답 2

베이직쎈 BOX

14 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+2h)-f(a)\}-\{f(a-h)-f(a)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot2$

$\quad-\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\cdot(-1)$

$=2f'(a)-\{-f'(a)\}$

$=3f'(a)=3\cdot(-3)=-9$ 답 ①

15 $h\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{h\to0}\{f(2-h)-5\}=0$이므로 $\quad f(2)=5$

$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-5}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\cdot(-1)$

$=-f'(2)$

따라서 $-f'(2)=-1$이므로 $\quad f'(2)=1$

$\therefore\ f(2)+f'(2)=5+1=6$ 답 6

> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

16 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{(x-3)(x+3)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}$

$=\frac{1}{6}f'(3)$

$=\frac{1}{6}\cdot6=1$ 답 ④

17 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^3-8}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+4}$

$=\frac{1}{12}f'(2)=\frac{1}{12}\cdot3=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(2)=3$

18 $x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}\{f(x)+1\}=0$이므로

$f(-1)=-1$

$\therefore\ \lim_{x\to-1}\frac{f(x)+1}{x^2-2x-3}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(x-3)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\cdot\frac{1}{x-3}$

$=-\frac{1}{4}f'(-1)$

따라서 $-\frac{1}{4}f'(-1)=4$이므로

$f'(-1)=-16$

$\therefore\ f(-1)+f'(-1)=-1+(-16)$

$=-17$ 답 -17

19 $\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\{x^2f(1)-f(1)\}-\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\cdot f(1)-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+1)f(1)-f'(1)$

$=2f(1)-f'(1)$

$=2\cdot5-(-2)=12$

답 ⑤

20 (1) 주어진 식에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)\qquad\therefore\ f(0)=0$

> 주어진 식은 모든 실수 x, y에 대하여 성립하는 항등식이므로 $x=0$, $y=0$을 대입해도 등식이 성립한다.

(2) $f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}$

$=f'(0)=2$

> $f(x+y)=f(x)+f(y)$에 $x=1$, $y=h$를 대입하면 $f(1+h)=f(1)+f(h)$

답 (1) 0 (2) 2

21 주어진 식에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0\qquad\therefore\ f(0)=0$

$\therefore\ f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+2h-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+2$

$=f'(0)+2=4+2=6$

답 6

22 주어진 식에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0\qquad\therefore\ f(0)=0$

$\therefore\ f'(3a)=\lim_{h\to0}\frac{f(3a+h)-f(3a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(3a)+f(h)+9ah-f(3a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+9ah}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+9a$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+9a$

$=f'(0)+9a=1+9a$

> $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$에 $x=3a$, $y=h$를 대입하면 $f(3a+h)=f(3a)+f(h)+9ah$

따라서 $1+9a=-8$이므로 $\quad a=-1$ 답 ②

23 ①, ② 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

④, ⑤ $f'(a)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다. 답 ③

24 ① $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=5$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 또

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{(3x+5)-5}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{x}=3$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

② $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 또

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x-|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x-x}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x-|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x-(-x)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{2x}{x}=2$$

이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

③ $f(x)$가 $x=0$에서 정의되어 있지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

④ $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 또

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to0}x^2=0$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

⑤ $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 또

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0+}x=0,$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to0-}(-x)=0$$

이므로 $\quad\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

답 ②

25 ① $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재한다.

② $x=\frac{1}{2}$에서의 접선의 기울기는 양수이므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$$

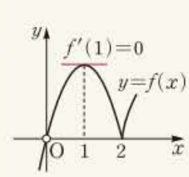
③ $f'(x)=0$인 x의 값은 1뿐이다.

④ 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 3, 4의 2개이다.

⑤ 함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다. 또 $f'(2)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다. 따라서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 x의 값은 2, 3, 4의 3개이다.

답 ②

베이직쎈 BOX



$x=1$에서의 접선의 기울기가 0이므로 $f'(1)=0$

26 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로 $\quad\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to0-}(x^2-x+b)=f(0)\qquad\therefore b=2$$

또 $f'(0)$이 존재하므로

$x=0$에서의 미분계수가 존재
➡ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재
➡ $x=0$에서의 (우극한)=(좌극한)

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(ax+2)-2}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{ax}{x}=a,$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(x^2-x+2)-2}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to0-}(x-1)=-1$$

에서 $\quad a=-1$

답 $a=-1$, $b=2$

27 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 미분가능하면 $x=-2$에서 연속이므로 $\quad\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$

$$\lim_{x\to-2-}(ax+b)=f(-2)$$

$\therefore -2a+b=6 \quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(-2)$가 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{\{(-2+h)^2+2\}-6}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2-4h}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}(h-4)=-4,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{a(-2+h)+b-6}{h}$$

$-2a+b=6$에서 $b-6=2a$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{a(-2+h)+2a}{h}\quad(\because ㉠)$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{ah}{h}=a$$

에서 $\quad a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $\quad 8+b=6\quad\therefore b=-2$

$\therefore ab=8$

답 ④

28 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하다.

즉 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1),\qquad\lim_{x\to1-}x^3=f(1)$$

$\therefore 1=a+b \quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{(ax^2+bx)-(a+b)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{ax^2+(1-a)x-1}{x-1}\quad(\because ㉠)$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(ax+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}(ax+1)=a+1,$$

베이직쎈 BOX

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3-(a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3-1}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x^2+x+1)=3$$

에서 $a+1=3 \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$1=2+b \quad \therefore b=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}2x^2-x & (x\ge1)\\ x^3 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(2)=8-2=6$ 답 6

$x\ge1$일 때,
$f(x)=2x^2-x$
이므로
$f(2)=2\cdot2^2-2=6$

07 도함수

개념 23 도함수

본책 53쪽

01 답 $f'(x)=3$ $x+h$, $3h$, 3

02 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2+(x+h)\}-(x^2+x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2+(2x+1)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h+2x+1)=2x+1$$
답 $f'(x)=2x+1$

03 $f'(x)$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{-(x+h)^2+2(x+h)-3\}-(-x^2+2x-3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-h^2+(-2x+2)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(-h-2x+2)$$
$$=-2x+2$$
답 $f'(x)=-2x+2$

04 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^3-1\}-(x^3-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^3+3xh^2+3x^2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h^2+3xh+3x^2)$$
$$=3x^2$$
답 $f'(x)=3x^2$

$(a+b)^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

05 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{321-321}{h}=0$$
답 $f'(x)=0$

06 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{2(x+h)+5\}-(2x+5)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2h}{h}=2$$
$\therefore f'(0)=2$ 답 2

07 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{2(x+h)^2-3\}-(2x^2-3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2h^2+4xh}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(2h+4x)$$
$$=4x$$
$\therefore f'(-1)=-4$ 답 -4

08 $f'(x)$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2-3(x+h)-4\}-(x^2-3x-4)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2+(2x-3)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h+2x-3)$$
$$=2x-3$$
$\therefore f'(2)=4-3=1$ 답 1

09 $f'(x)$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{-(x+h)^2+4(x+h)\}-(-x^2+4x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-h^2+(-2x+4)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(-h-2x+4)$$
$$=-2x+4$$
$\therefore f'(3)=-6+4=-2$ 답 -2

10 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{3(x+h)^3-3x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{3h^3+9xh^2+9x^2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(3h^2+9xh+9x^2)$$
$$=9x^2$$
$\therefore f'(1)=9$ 답 9

개념 24 미분법의 공식

본책 54쪽

11 $y'=(x^5)'=5x^4$ 　답 $y'=5x^4$

12 $y'=(-11)'=0$ 　답 $y'=0$

13 $y'=(12x^4)'=12(x^4)'$
$=12\cdot 4x^3=48x^3$ 　답 $y'=48x^3$

14 $y'=(5x+4)'=(5x)'+(4)'=5$ 　답 $y'=5$

15 $y'=(-4x^2+7x)'=(-4x^2)'+(7x)'$
$=-8x+7$ 　답 $y'=-8x+7$

16 $y'=(2x^3-5x)'=(2x^3)'-(5x)'$
$=6x^2-5$ 　답 $y'=6x^2-5$

17 $y'=(-2x^3+6x^2+3)'$
$=(-2x^3)'+(6x^2)'+(3)'$
$=-6x^2+12x$ 　답 $y'=-6x^2+12x$

18 $y'=\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+8x^2\right)'$
$=\left(\frac{1}{2}x^4\right)'-\left(\frac{1}{3}x^3\right)'+(8x^2)'$
$=2x^3-x^2+16x$ 　답 $y'=2x^3-x^2+16x$

19 함수 $f(x)+g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는
$f'(0)+g'(0)=-1+2=1$ 　답 1

> 베이직쎈 BOX: $\{f(x)+g(x)\}'$
> $=f'(x)+g'(x)$

20 함수 $f(x)-2g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는
$f'(0)-2g'(0)=-1-2\cdot 2=-5$ 　답 -5

21 함수 $3f(x)-5g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는
$3f'(0)-5g'(0)=3\cdot(-1)-5\cdot 2$
$=-13$ 　답 -13

개념 25 함수의 곱의 미분법

본책 55쪽

22 $y'=(3x)'(x-1)+3x(x-1)'$
$=3(x-1)+3x\cdot 1$
$=6x-3$ 　답 $y'=6x-3$

23 $y'=(x+2)'(2x+1)+(x+2)(2x+1)'$
$=1\cdot(2x+1)+(x+2)\cdot 2$
$=4x+5$ 　답 $y'=4x+5$

24 $y'=(x+3)'(x^2-1)+(x+3)(x^2-1)'$
$=1\cdot(x^2-1)+(x+3)\cdot 2x$
$=3x^2+6x-1$ 　답 $y'=3x^2+6x-1$

25 y'
$=(x^2+3x+2)'(2x-5)+(x^2+3x+2)(2x-5)'$
$=(2x+3)(2x-5)+(x^2+3x+2)\cdot 2$
$=6x^2+2x-11$ 　답 $y'=6x^2+2x-11$

26 y'
$=-\{(x+6)'(3x^2-8x+6)+(x+6)(3x^2-8x+6)'\}$
$=-1\cdot(3x^2-8x+6)-(x+6)(6x-8)$
$=-9x^2-20x+42$ 　답 $y'=-9x^2-20x+42$

27 $y'=(3x-1)'(x^3+2)+(3x-1)(x^3+2)'$
$=3(x^3+2)+(3x-1)\cdot 3x^2$
$=12x^3-3x^2+6$ 　답 $y'=12x^3-3x^2+6$

28 y'
$=(2x^2-1)'(-x^2+4x)+(2x^2-1)(-x^2+4x)'$
$=4x(-x^2+4x)+(2x^2-1)(-2x+4)$
$=-8x^3+24x^2+2x-4$
답 $y'=-8x^3+24x^2+2x-4$

29 y'
$=(x)'(x+8)(3x-5)+x(x+8)'(3x-5)$
$+x(x+8)(3x-5)'$
$=1\cdot(x+8)(3x-5)+x\cdot 1\cdot(3x-5)+x(x+8)\cdot 3$
$=9x^2+38x-40$ 　답 $y'=9x^2+38x-40$

30 y'
$=(x-3)'(x+5)(4x+9)+(x-3)(x+5)'(4x+9)$
$+(x-3)(x+5)(4x+9)'$
$=1\cdot(x+5)(4x+9)+(x-3)\cdot 1\cdot(4x+9)$
$+(x-3)(x+5)\cdot 4$
$=12x^2+34x-42$ 　답 $y'=12x^2+34x-42$

31 $y'=2(3x+2)(3x+2)'$
$=2(3x+2)\cdot 3$
$=18x+12$ 　답 $y'=18x+12$

> 베이직쎈 BOX: 우변 $(3x+2)^2$을 전개하여 도함수를 구하는 것보다 계산이 간단하다.

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 56쪽

01 답 (가) $2xh$ (나) $2x$ (다) $f'(x)$

02 ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}=f'(x)$

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot(-1)$
$=-f'(x)$

ㄷ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+2h)-f(x)\}-\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot 2-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$=2f'(x)-f'(x)=f'(x)$

ㄹ. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

이상에서 $f'(x)$와 같은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

03 $f(x)=x^8-x^6+x^4+x^2-1$에서

$f(1)=1-1+1+1-1=1$

$f'(x)=8x^7-6x^5+4x^3+2x$이므로

$f'(1)=8-6+4+2=8$

$\therefore f(1)+f'(1)=9$ 답 ③

04 $f'(x)=3x^2+2$이므로 $f'(a)=14$에서

$3a^2+2=14,\quad a^2=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 2

05 $f(x)=-x^2+ax+b$에서 $f(3)=5$이므로

$-9+3a+b=5$

$\therefore 3a+b=14$ …… ㉠

$f'(x)=-2x+a$이므로 $f'(3)=2$에서

$-6+a=2\quad \therefore a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하면

$24+b=14\quad \therefore b=-10$

따라서 $f(x)=-x^2+8x-10$이므로

$f(1)=-1+8-10=-3$ 답 -3

06 $f(x)=x^3-6x$에서 $f(a)=b$이므로

$a^3-6a=b$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2-6$이므로 $f'(a)=-3$에서

$3a^2-6=-3,\quad a^2=1$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$b=1-6=-5$

$\therefore ab=-5$ 답 ①

07 $f(x)=4x^2-xf'(4)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=8x-f'(4)$

위의 식에 $x=4$를 대입하면

$f'(4)=32-f'(4),\quad 2f'(4)=32$

$\therefore f'(4)=16$

따라서 $f'(x)=8x-16$이므로

$f'(-2)=-16-16=-32$

답 ①

08 $f'(x)$

$=(x^2+x+1)'(x^3-x-1)$

$\quad+(x^2+x+1)(x^3-x-1)'$

$=(2x+1)(x^3-x-1)+(x^2+x+1)(3x^2-1)$

$\therefore f'(-1)=-1\cdot(-1)+1\cdot 2=3$ 답 ③

09 $f'(x)=2(x^2+3x)(x^2+3x)'$

$=2(x^2+3x)(2x+3)$

$\therefore f'(1)-f'(2)=2\cdot 4\cdot 5-2\cdot 10\cdot 7$

$=-100$

답 ⑤

베이직쎈 BOX

$f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수
⇨ 도함수 $f'(x)$의 x에 a를 대입한 값

$-12x^2+16x-3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=64-36$
$=28>0$
이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$,
$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 m이면
$f(a)=b,\ f'(a)=m$

$f'(4)$는 상수이다.

10 $g'(x)=(x^2+4x-3)'f(x)+(x^2+4x-3)f'(x)$

$=(2x+4)f(x)+(x^2+4x-3)f'(x)$

$\therefore g'(2)=8f(2)+9f'(2)$

$=8\cdot 7+9\cdot(-2)$

$=38$ 답 38

11 $f'(x)$

$=(x)'(2x-1)(-2x+3)+x(2x-1)'(-2x+3)$

$\quad+x(2x-1)(-2x+3)'$

$=(2x-1)(-2x+3)+2x(-2x+3)-2x(2x-1)$

$=-12x^2+16x-3$

$f'(a)=0$에서 a는 이차방정식 $-12x^2+16x-3=0$의 실근이므로 모든 실수 a의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{16}{-12}=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

12 $f'(x)$

$=(x-a)'(x^2-2x+5)+(x-a)(x^2-2x+5)'$

$=x^2-2x+5+(x-a)(2x-2)$

이때 $f'(a)=4$이므로

$a^2-2a+5=4$

$a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0\quad \therefore a=1$

따라서 $f'(x)=x^2-2x+5+(x-1)(2x-2)$이므로

$f'(3)=9-6+5+2\cdot 4$

$=16$ 답 16

13 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$

이때 $f'(x)=6x^2+1$이므로

$f'(3)=54+1=55$ 답 ④

14 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2)-f(2-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=f'(2)$

이때

$f'(x)=(2x+5)'(8-x)+(2x+5)(8-x)'$

$=2(8-x)-(2x+5)$

이므로

$f'(2)=2\cdot 6-9=3$ 답 3

15 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)$

$=2f'(1)$

이때 $f'(x)=-4x^3+12x$이므로

$2f'(1)=2\cdot(-4+12)$

$=16$ 답 ④

베이직쎈 BOX

16 $x \longrightarrow 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)-6\}=0$이므로 $f(2)=6$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-6}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{4}f'(2)$$

따라서 $\frac{1}{4}f'(2)=7$이므로 $f'(2)=28$

한편 $f(x)=x^3+ax+b$, $f'(x)=3x^2+a$이므로

$f(2)=6$에서 $8+2a+b=6$

$\therefore 2a+b=-2$ …… ㉠

$f'(2)=28$에서 $12+a=28$ $\therefore a=16$

$a=16$을 ㉠에 대입하면

$32+b=-2$ $\therefore b=-34$

$\therefore a+b=-18$ 답 -18

17 $x \longrightarrow -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$

따라서

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=f'(-1)$$

이므로 $f'(-1)=5$

한편 $f(x)=x^3+ax^2+b$, $f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$f(-1)=0$에서 $-1+a+b=0$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠

$f'(-1)=5$에서

$3-2a=5$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-1+b=1$ $\therefore b=2$

$\therefore ab=-2$ 답 ①

18 $h \longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{h\to0}\{f(1+3h)-6\}=0$이므로 $f(1)=6$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-6}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot3$$
$$=3f'(1)$$

따라서 $3f'(1)=12$이므로 $f'(1)=4$

한편

$f(x)=x^3+ax^2+bx-1$, $f'(x)=3x^2+2ax+b$

이므로

$f(1)=6$에서 $1+a+b-1=6$

$\therefore a+b=6$ …… ㉠

$f'(1)=4$에서 $3+2a+b=4$

$\therefore 2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=11$

$f(x)=x^3-5x^2+11x-1$이므로

$f(2)=8-20+22-1=9$ 답 9

19 $f'(x)=\begin{cases}2ax+4 & (x>1)\\ 8x & (x<1)\end{cases}$이고 $f'(1)$이 존재하므로

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$
$4+a=a+4$

$\lim_{x\to1+}f'(x)=\lim_{x\to1-}f'(x)$

$\lim_{x\to1+}(2ax+4)=\lim_{x\to1-}8x$

$2a+4=8$ $\therefore a=2$ 답 ①

20 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=2$에서 미분가능하다.

즉 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$
$\Rightarrow \lim_{x\to2+}(3x-a)$
$=\lim_{x\to2-}(2x^2+bx)$
$=f(2)$
이때
$\lim_{x\to2+}(3x-a)=f(2)$
이므로
$\lim_{x\to2-}(2x^2+bx)=f(2)$

$\lim_{x\to2-}(2x^2+bx)=f(2)$

$8+2b=6-a$

$\therefore a+2b=-2$ …… ㉠

또 $f'(x)=\begin{cases}3 & (x>2)\\ 4x+b & (x<2)\end{cases}$이고 $f'(2)$가 존재하므로

$\lim_{x\to2+}f'(x)=\lim_{x\to2-}f'(x)$

$\lim_{x\to2+}3=\lim_{x\to2-}(4x+b)$

$3=8+b$ $\therefore b=-5$

$b=-5$를 ㉠에 대입하면 $a-10=-2$ $\therefore a=8$

$\therefore a-b=13$ 답 13

21 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

$\lim_{x\to-1-}(-x^3+3x)=f(-1)$

$-2=1-a+b$

$\therefore a-b=3$ …… ㉠

또 $f'(x)=\begin{cases}2x+a & (x>-1)\\ -3x^2+3 & (x<-1)\end{cases}$이고 $f'(-1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to-1+}f'(x)=\lim_{x\to-1-}f'(x)$

$\lim_{x\to-1+}(2x+a)=\lim_{x\to-1-}(-3x^2+3)$

$-2+a=0$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $2-b=3$ $\therefore b=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & (x\ge-1)\\ -x^3+3x & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(1)=1+2-1=2$ 답 ②

22 답 (가) 4 (나) 1 (다) 18

23 $f(x)=x^6+3x$로 놓으면 $f(-1)=-2$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^6+3x+2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=f'(-1)$$

이때 $f'(x)=6x^5+3$이므로

$f'(-1)=-6+3=-3$ 답 -3

24 $f(x)=x^n-4x$로 놓으면 $f(1)=-3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)$$

$\therefore\ f'(1)=4$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}-4$이므로

$n-4=4 \qquad \therefore\ n=8$

답 ④

25 $f(x)=x^8+ax^4+b$로 놓으면

$f'(x)=8x^7+4ax^3$

$f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=0,\ f'(1)=0$

$f(1)=0$에서 $\quad 1+a+b=0$

$\therefore\ a+b=-1$ …… ㉠

$f'(1)=0$에서

$8+4a=0 \qquad \therefore\ a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-2+b=-1 \qquad \therefore\ b=1$

$\therefore\ b-a=3$

답 ③

베쎈 TIP

다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 때, 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$ …… ㉡

이때 $x=a$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$f(a)=0,\ f'(a)=0$

26 x^5+ax^2+b를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-8x$이므로

$x^5+ax^2+b=(x-2)^2Q(x)-8x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$32+4a+b=-16$

$\therefore\ 4a+b=-48$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4+2ax=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)-8$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$80+4a=-8 \qquad \therefore\ a=-22$

$a=-22$를 ㉡에 대입하면

$-88+b=-48 \qquad \therefore\ b=40$

$\therefore\ a+b=18$

답 ④

27 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

이때 $f(-1)=2$이므로 ㉠에서

$-a+b=2$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

베이직쎈 BOX

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(-1)=3$

$f'(1)=n\cdot1^{n-1}-4$
$=n-4$

직접 나눗셈을 하는 것보다 항등식의 성질과 미분을 이용하는 것이 간단하다.

㉠은 x에 대한 항등식이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-4x+9$가 점 $(1,\ 5)$에서 접하므로 점 $(1,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 -4이다.

다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이거나 일차식이므로 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓는다.

점 $(-1,\ 2)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $\quad f(-1)=2$

이때 $f'(-1)=3$이므로 $\qquad a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면

$-3+b=2 \qquad \therefore\ b=5$

따라서 $R(x)=3x+5$이므로

$R(2)=11$

답 11

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 60쪽

01 전략 평균변화율과 순간변화율을 각각 구한 후 방정식을 세운다.

풀이 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=\frac{(a^3-2)-(-3)}{a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a+1}$$
$$=a^2-a+1$$

또 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 순간변화율은

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(1+h)^3-2\}-(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^3+3h^2+3h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h^2+3h+3)=3$$

따라서 $a^2-a+1=3$이므로

$a^2-a-2=0$

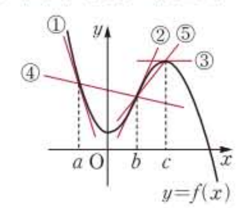
$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

답 ②

02 전략 평균변화율과 미분계수의 기하적 의미를 이용한다.

풀이 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이고, 평균변화율은 두 점을 지나는 직선의 기울기이다.



따라서 오른쪽 그림의 직선 중 그 기울기가 가장 큰 것은 ②이다.

답 ②

03 전략 주어진 극한값을 $f'(1)$을 이용하여 나타낸다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 5)$에서의 접선의 기울기가 -4이므로

$f'(1)=-4$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{6h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(-4)=-2$$

답 ④

베이직쎈 BOX

04 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능함을 보이려면 미분계수 $f'(a)$가 존재함을 보인다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)|x-1|}{x-1}$
$=\lim_{x\to1+}(x-1)=0,$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)|x-1|}{x-1}$
$=\lim_{x\to1-}\{-(x-1)\}=0$

이므로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 정의되어 있지 않다. 따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x-1+|x-1|}{x-1}$
$=\lim_{x\to1+}\frac{2(x-1)}{x-1}=2,$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)+|x-1|}{x-1}$
$=\lim_{x\to1-}\frac{0}{x-1}=0$

이므로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 $x=1$에서 미분가능한 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

05 전략 미분법의 공식을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $x=1$을 대입한다.

풀이 $f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{24}$이므로
$f'(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}=25$ 답 ④

$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{25개}$

06 전략 먼저 양변을 x에 대하여 미분한 후 $x=-2$를 대입하여 $f'(-2)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=2x^3+8x^2-xf'(-2)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(-2)$는 상수이다.

$f'(x)=6x^2+16x-f'(-2)$

위의 식의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$f'(-2)=24-32-f'(-2)$
$2f'(-2)=-8$
$\therefore f'(-2)=-4$

따라서 $f'(x)=6x^2+16x+4$이므로
$f'(1)=6+16+4=26$ 답 ③

07 전략 곱의 미분법을 이용한다.

풀이 $f'(x)=(3x^2-1)'(5x+a)+(3x^2-1)(5x+a)'$
$=6x(5x+a)+5(3x^2-1)$

이때 $f'(2)=19$이므로
$12(10+a)+55=19$
$12a=-156$
$\therefore a=-13$ 답 ②

08 전략 $h\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$임을 이용한다.

풀이 $h\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{h\to0}\{f(1-h)-2\}=0$이므로
$f(1)=2$
$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\cdot(-1)$
$=-f'(1)$

따라서 $-f'(1)=2$이므로
$f'(1)=-2$

한편
$f(x)=x^3+2ax^2+bx,\ f'(x)=3x^2+4ax+b$
이므로

$f(1)=2$에서 $1+2a+b=2$
$\therefore 2a+b=1$ …… ㉠

$f'(1)=-2$에서 $3+4a+b=-2$
$\therefore 4a+b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

㉠−㉡을 하면
$-2a=6\quad\therefore a=-3$
$a=-3$을 ㉠에 대입하면
$-6+b=1\quad\therefore b=7$

$a=-3,\ b=7$
$\therefore a+b=4$ 답 ⑤

09 전략 주어진 식의 일부를 치환한 후 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $f(x)=x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8$으로 놓으면 $f(1)=1$이므로

(주어진 식)$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

이때 $f'(x)=12x^{11}-11x^{10}+10x^9-9x^8+8x^7$이므로
$f'(1)=12-11+10-9+8$
$=10$ 답 ①

10 전략 $f'(1)$을 미분계수의 정의를 이용하여 나타낸 식을 주어진 항등식을 이용하여 변형한다.

풀이 주어진 식에 $x=0,\ y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)+0-2$
$\therefore f(0)=2$

$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+4h-2-f(1)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2}{h}+4$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+4$
$=f'(0)+4$

즉 $f'(0)+4=8$이므로
$f'(0)=4$

답 4

11 전략 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$

$=\frac{1}{4}f'(2)$ ··· ❶

이때 $f'(x)=-x^2+10x+12$이므로

$\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}(-4+20+12)=7$ ··· ❷

답 7

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식을 변형할 수 있다.	50 %
❷	극한값을 구할 수 있다.	50 %

12 **전략** 주어진 식에서 극한값이 존재함을 이용하여 $f(3)$, $g(3)$의 값을 구하고, 미분계수의 정의를 이용하여 $f'(3)$, $g'(3)$의 값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}=5$에서 $x\to3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(3)=2$

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$에서

$f'(3)=5$ ··· ❶

또 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)+1}{x-3}=2$에서 $x\to3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}\{g(x)+1\}=0$이므로 $g(3)=-1$

$\lim_{x\to3}\frac{g(x)+1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)$에서

$g'(3)=2$ ··· ❷

이때 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 $x=3$에서의 미분계수는

$f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=5\cdot(-1)+2\cdot2$

$=-1$ ··· ❸

답 -1

단계	채점 기준	비율
❶	$f(3)$, $f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	$g(3)$, $g'(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$y=f(x)g(x)$의 $x=3$에서의 미분계수를 구할 수 있다.	20 %

13 **전략** 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이고 미분가능함을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서 미분가능하다.

즉 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to0-}(6x-a)=f(0)$

$\therefore -a=b$ ······ ㉠

$x=0$일 때
$f(x)=3x^3-ax+b$
이므로
$f(0)=b$

또 $f'(x)=\begin{cases}9x^2-a & (x>0)\\ 6 & (x<0)\end{cases}$이고 $f'(0)$이 존재하므로

$\lim_{x\to0+}f'(x)=\lim_{x\to0-}f'(x)$

$\lim_{x\to0+}(9x^2-a)=\lim_{x\to0-}6$

$-a=6$ $\therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면

$b=6$

따라서 $f(x)=\begin{cases}3x^3+6x+6 & (x\ge0)\\ 6x+6 & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(2)=24+12+6=42$

답 42

14 **전략** 다항식 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$임을 이용한다.

풀이 $x^{10}+x^3$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{10}+x^3=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

··· ❶

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-1=-a+b$ $\therefore a=b$ ······ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+3x^2=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

$\{(x+1)^2\}'$
$=2(x+1)(x+1)'$
$=2(x+1)$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-10+3=a$

$\therefore a=-7$

㉡에서 $b=-7$

따라서 $R(x)=-7x-7$이므로 ··· ❷

$R(3)=-21-7=-28$ ··· ❸

답 -28

단계	채점 기준	비율
❶	$x^{10}+x^3$을 몫과 나머지를 이용하여 나타낼 수 있다.	20 %
❷	$R(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❸	$R(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Ⅱ. 다항함수의 미분법

04 도함수의 활용 (1)

08 접선의 방정식

개념 26 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식

본책 62쪽

01 $f(x)=2x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=4x$

점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=4$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=4(x-1)$

$\therefore y=4x-1$ 답 $y=4x-1$

02 $f(x)=x^2-3x+4$로 놓으면

$f'(x)=2x-3$

점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=4-3=1$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=1\cdot(x-2)$

$\therefore y=x$ 답 $y=x$

03 $f(x)=-6x^2+4x$로 놓으면

$f'(x)=-12x+4$

점 $(-1, -10)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=12+4=16$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-10)=16\{x-(-1)\}$

$\therefore y=16x+6$ 답 $y=16x+6$

04 $f(x)=x^3+5x-9$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+5$

점 $(0, -9)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=5$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-9)=5(x-0)$

$\therefore y=5x-9$ 답 $y=5x-9$

05 $f(x)=x^3+9x^2+8x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+18x+8$

점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3-18+8=-7$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=-7\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-7x-5$ 답 $y=-7x-5$

06 $f(x)=-4x^3+x+2$로 놓으면

$f'(x)=-12x^2+1$

점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-12+1=-11$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-1)=-11(x-1)$

$\therefore y=-11x+10$ 답 $y=-11x+10$

개념 27 기울기가 주어진 접선의 방정식

본책 63쪽

07 $f(x)=2x^2+10x$로 놓으면

$f'(x)=4x+10$

접점의 좌표를 $(a, 2a^2+10a)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(a)=4a+10=2$

$4a=-8 \qquad \therefore a=-2$

따라서 구하는 접점의 좌표는 $(-2, \underline{-12})$

베이직쎈 BOX: $f(-2)=8-20=-12$

답 $(-2, -12)$

08 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x+\frac{5}{3}$로 놓으면

$f'(x)=x^2+1$

접점의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{3}a^3+a+\frac{5}{3}\right)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(a)=a^2+1=2$

$a^2=1 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 접점의 좌표는

$\left(-1, \underline{\frac{1}{3}}\right), (1, \underline{3})$ 답 $\left(-1, \frac{1}{3}\right), (1, 3)$

베이직쎈 BOX: $f(-1)=-\frac{1}{3}-1+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$, $f(1)=\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}=3$

09 $f(x)=3x^2+4x-1$로 놓으면

$f'(x)=6x+4$

접점의 좌표를 $(a, 3a^2+4a-1)$이라 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(a)=6a+4=-2$

$6a=-6 \qquad \therefore a=-1$

따라서 접점의 좌표가 $(-1, -2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=-2\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-2x-4$ 답 $y=-2x-4$

10 $f(x)=-x^2+7x+6$으로 놓으면

$f'(x)=-2x+7$

접점의 좌표를 $(a, -a^2+7a+6)$이라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=-2a+7=3$

$-2a=-4 \qquad \therefore a=2$

따라서 접점의 좌표가 $(2, 16)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-16=3(x-2)$

$\therefore y=3x+10$ 답 $y=3x+10$

베이직쎈 BOX

11 $f(x)=x^3-3x^2+4x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+4$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-3a^2+4a+1)$이라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(a)=3a^2-6a+4=4$

$3a^2-6a=0,\quad a(a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=2$

따라서 접점의 좌표가 $(0,\ 1)$, $(2,\ 5)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=4(x-0)$, $y-5=4(x-2)$

$\therefore y=4x+1,\ y=4x-3$

주어진 곡선에 접하고 기울기가 4인 직선은 두 개이다.

답 $y=4x+1,\ y=4x-3$

12 $f(x)=4x^2+19x+12$로 놓으면

$f'(x)=8x+19$

접점의 좌표를 $(a,\ 4a^2+19a+12)$라 하면 직선 $y=3x+2$와 평행한 직선의 기울기는 3이므로

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 평행하면 $m=m'$

$f'(a)=8a+19=3$

$8a=-16\quad \therefore a=-2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ -10)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-10)=3\{x-(-2)\}$

$\therefore y=3x-4$

답 $y=3x-4$

13 $f(x)=-x^3+x+1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+1$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^3+a+1)$이라 하면 직선 $2x+y+3=0$, 즉 $y=-2x-3$과 평행한 직선의 기울기는 -2이므로

$f'(a)=-3a^2+1=-2$

$-3a^2=-3,\quad a^2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-2\{x-(-1)\}$, $y-1=-2(x-1)$

$\therefore y=-2x-1,\ y=-2x+3$

답 $y=-2x-1,\ y=-2x+3$

14 $f(x)=-2x^2+3x$로 놓으면

$f'(x)=-4x+3$

접점의 좌표를 $(a,\ -2a^2+3a)$라 하면 직선 $y=\frac{1}{9}x+7$과 수직인 직선의 기울기는 -9이므로

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 수직이면 $mm'=-1$

$f'(a)=-4a+3=-9$

$-4a=-12\quad \therefore a=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3,\ -9)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-9)=-9(x-3)$

$\therefore y=-9x+18$

답 $y=-9x+18$

15 $f(x)=x^3+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3+1)$이라 하면 직선 $2x+24y+3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{12}x-\frac{1}{8}$과 수직인 직선의 기울기는 12이므로

$f'(a)=3a^2=12$

$a^2=4\quad \therefore a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ -7)$, $(2,\ 9)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-7)=12\{x-(-2)\}$, $y-9=12(x-2)$

$\therefore y=12x+17,\ y=12x-15$

답 $y=12x+17,\ y=12x-15$

개념 28 곡선 밖의 한 점이 주어진 접선의 방정식

본책 64쪽

16 $f(x)=x^2+x$로 놓으면

$f(1)=2$이므로 점 $(1,\ 1)$은 주어진 곡선 위의 점이 아니다.

$f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2+a)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=2a+1$

이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+a)=(2a+1)(x-a)$

$\therefore y=(2a+1)x-a^2$ ...... ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=(2a+1)-a^2,\quad a^2-2a=0$

$a(a-2)=0\quad \therefore a=0$ 또는 $a=2$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=x$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=5x-4$

답 $y=x,\ y=5x-4$

17 $f(x)=-x^2-4x$로 놓으면

$f'(x)=-2x-4$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^2-4a)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=-2a-4$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-a^2-4a)=(-2a-4)(x-a)$

$\therefore y=(-2a-4)x+a^2$ ...... ㉠

직선 ㉠이 점 $(2,\ -3)$을 지나므로

$-3=2(-2a-4)+a^2,\quad a^2-4a-5=0$

$(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-2x+1$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-14x+25$

답 $y=-2x+1,\ y=-14x+25$

18 $f(x)=x^2-6x+8$로 놓으면

$f'(x)=2x-6$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2-6a+8)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=2a-6$

이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-6a+8)=(2a-6)(x-a)$

$\therefore\ y=(2a-6)x-a^2+8$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(-1,\ 6)$을 지나므로

$6=-(2a-6)-a^2+8,\quad a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-4$ 또는 $a=2$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-14x-8$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-2x+4$

답 $y=-14x-8,\ y=-2x+4$

19 $f(x)=-2x^2+x+4$로 놓으면

$f'(x)=-4x+1$

접점의 좌표를 $(a,\ -2a^2+a+4)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=-4a+1$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-2a^2+a+4)=(-4a+1)(x-a)$

$\therefore\ y=(-4a+1)x+2a^2+4$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(-2,\ -4)$를 지나므로

$-4=-2(-4a+1)+2a^2+4$

$a^2+4a+3=0,\quad (a+3)(a+1)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=-1$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=13x+22$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=5x+6$

답 $y=13x+22,\ y=5x+6$

20 $f(x)=x^3+5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3+5)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2$

이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3+5)=3a^2(x-a)$

$\therefore\ y=3a^2x-2a^3+5$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ -11)$을 지나므로

$-11=-2a^3+5$

$a^3=8\quad \therefore\ a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=12x-11$

답 $y=12x-11$

21 $f(x)=3x^3-2x+6$으로 놓으면

$f'(x)=9x^2-2$

접점의 좌표를 $(a,\ 3a^3-2a+6)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=9a^2-2$

이므로 접선의 방정식은

$y-(3a^3-2a+6)=(9a^2-2)(x-a)$

$\therefore\ y=(9a^2-2)x-6a^3+6$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-6a^3+6$

$a^3=1\quad \therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=7x$

답 $y=7x$

베이직쎈 BOX

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는
① $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 갖고 최댓값은 없다.
② $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 갖고 최솟값은 없다.

$a^3=8$에서 $a^3-8=0$
$(a-2)(a^2+2a+4)=0$
이때
$a^2+2a+4=(a+1)^2+3>0$
이므로 $a=2$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 65쪽

01 $f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$

점 $(1,\ 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=2,\quad 1+a+b=2$

$\therefore\ a+b=1$ …… ㉠

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 -5이므로

$f'(1)=-5,\quad 3+a=-5$

$\therefore\ a=-8$

$a=-8$을 ㉠에 대입하면

$-8+b=1\quad \therefore\ b=9$

$\therefore\ b-a=17$

답 ④

02 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ 5)$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f(3)=5,\ f'(3)=2$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(3+4h)-5}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(3+4h)-f(3)}{4h}\cdot4=4f'(3)=4\cdot2=8$$

답 8

03 $f(x)=x^3+3x^2-6x-8$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x-6=3(x+1)^2-9$

이므로 $f'(x)$는 $x=-1$에서 최소이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=-1$인 점에서의 접선의 기울기가 최소이므로 구하는 접점의 좌표는

$(-1,\ 0)$

답 ②

04 $f(x)=2x^2+x-4$로 놓으면

$f'(x)=4x+1$

점 $(-1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=-3\{x-(-1)\}$

$\therefore\ y=-3x-6$

따라서 구하는 접선의 y절편은 -6이다.

답 ②

베이직쎈 BOX

05 $f(x)=-x^3+2x^2-7$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+4x$

점 $(1, -6)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 직선 l의 방정식은

$y-(-6)=1\cdot(x-1)$

$\therefore y=x-7$

점 $(2, -7)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-4$이므로 직선 m의 방정식은

$y-(-7)=-4(x-2)$

$\therefore y=-4x+1$

두 직선 l, m의 교점의 x좌표는 $x-7=-4x+1$에서

$5x=8 \qquad \therefore x=\frac{8}{5}$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$\left(\frac{8}{5}, -\frac{27}{5}\right)$ 답 $\left(\frac{8}{5}, -\frac{27}{5}\right)$

$y=x-7$에 $x=\frac{8}{5}$을 대입하면

$y=\frac{8}{5}-7=-\frac{27}{5}$

$y=-4x+1$에 $x=\frac{8}{5}$을 대입하면

$y=-\frac{32}{5}+1=-\frac{27}{5}$

따라서 두 식 중 어느 식에 x의 값을 대입해도 그 결과는 같다.

06 $f(x)=x^3-ax+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-a$

점 $(-2, 8)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-2)=8, \qquad -8+2a+4=8$

$\therefore a=6$

점 $(-2, 8)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=12-6=6$

이므로 접선의 방정식은

$y-8=6\{x-(-2)\}$

$\therefore y=6x+20$

따라서 $b=6$, $c=20$이므로

$a+b+c=32$ 답 ③

07 $f(x)=5x^2+8x+6$으로 놓으면

$f'(x)=10x+8$

점 $(-1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-2$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

$-\frac{1}{f'(-1)}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$

따라서 점 $(-1, 3)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y-3=\frac{1}{2}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ 답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

08 $f(x)=-x^3+x^2+2x+4$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+2x+2$

점 $(1, 6)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

즉 점 $(1, 6)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-6=-(x-1)$

$\therefore y=-x+7$

$-x+7=0$에서 $\qquad x=7$

따라서 구하는 x절편은 7이다. 답 ③

09 $f(x)=2x^2+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=4x+a$

점 $(2, 4)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=4, \qquad 8+2a+b=4$

$\therefore 2a+b=-4$ ······ ㉠

점 $(2, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=8+a$이므로

$(8+a)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

$8+a=3 \qquad \therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면

$-10+b=-4 \qquad \therefore b=6$

$\therefore a+b=1$ 답 ④

10 $g(x)=x^3-3x^2+6x-1$로 놓으면

$g'(x)=3x^2-6x+6$

접점의 좌표를 (a, a^3-3a^2+6a-1)이라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$g'(a)=3a^2-6a+6=3$

$a^2-2a+1=0, \qquad (a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

즉 접점의 좌표가 $(1, 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=3(x-1) \qquad \therefore y=3x$

따라서 $f(x)=3x$이므로

$f(2)=6$ 답 ③

11 $f(x)=3x^2-3x+1$로 놓으면

$f'(x)=6x-3$

점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 -2이므로

직선 $y=-2x+1$을 평행이동하면 곡선 $y=f(x)$에 접하므로 이 직선과 접선은 평행하다. 즉 기울기가 같다.

$f'(a)=6a-3=-2 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$

$b=f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{2}+1=\frac{7}{12}$이므로

$a-2b=\frac{1}{6}-2\cdot\frac{7}{12}=-1$ 답 ②

12 두 점 $(-1, 2)$, $(3, 10)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{10-2}{3-(-1)}=2$

$f(x)=x^2+4x-2$로 놓으면

$f'(x)=2x+4$

접점의 좌표를 (a, a^2+4a-2)라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(a)=2a+4=2$

$\therefore a=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -5)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-5)=2\{x-(-1)\}$

$\therefore y=2x-3$

$\therefore k=2\cdot4-3=5$ 답 5

13 $f(x)=-x^2+3x+a$로 놓으면

$f'(x)=-2x+3$

점 $(t, -t+6)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=-2t+3=-1$

$\therefore t=2$

따라서 접점의 좌표가 $(2, 4)$이고 이 점은 곡선 $y=-x^2+3x+a$ 위의 점이므로

$4=-4+6+a \quad \therefore a=2$ 　　답 $a=2$, $t=2$

14 $f(x)=x^3-2x^2+ax$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-4x+a$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t^2+at)라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-4t+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t^2+at)=(3t^2-4t+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-4t+a)x-2t^3+2t^2$

이 직선이 직선 $y=5x-8$과 일치해야 하므로

$3t^2-4t+a=5$ ...... ㉠

$-2t^3+2t^2=-8$ ...... ㉡

㉡에서 $t^3-t^2-4=0, \quad (t-2)(t^2+t+2)=0$

$\therefore t=2 \ (\because t^2+t+2>0)$

$t=2$를 ㉠에 대입하면

$12-8+a=5 \quad \therefore a=1$ 　　답 ④

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ & & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$\therefore t^3-t^2-4$
$=(t-2)(t^2+t+2)$

t^2+t+2
$=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

15 $f(x)=x^3-9$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3-9)라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-9)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3-9$

이 직선이 직선 $y=12x+a$와 일치해야 하므로

$3t^2=12$ ...... ㉠

$-2t^3-9=a$ ...... ㉡

㉠에서 $t^2=4 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$

$t=-2$를 ㉡에 대입하면 $a=7$

$t=2$를 ㉡에 대입하면 $a=-25$

따라서 구하는 a의 값의 합은

$7-25=-18$ 　　답 -18

16 $f(x)=x^2+2x+3$으로 놓으면

$f'(x)=2x+2$

접점의 좌표를 (a, a^2+2a+3)이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=2a+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+2a+3)=(2a+2)(x-a)$

$\therefore y=(2a+2)x-a^2+3$

이 직선이 점 $(-1, 1)$을 지나므로

$1=-(2a+2)-a^2+3, \quad a^2+2a=0$

$a(a+2)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=0$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-2)f'(0)=-2\cdot 2=-4$ 　　답 -4

17 $f(x)=-x^3+x$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+1$

접점의 좌표를 $(a, -a^3+a)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=-3a^2+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(-a^3+a)=(-3a^2+1)(x-a)$

$\therefore y=(-3a^2+1)x+2a^3$ ...... ㉠

직선 ㉠이 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=2a^3, \quad a^3=-1 \quad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=-2x-2$

따라서 이 직선이 점 $(k, 6)$을 지나므로

$6=-2k-2 \quad \therefore k=-4$ 　　답 ①

18 $f(x)=x^4+12$로 놓으면

$f'(x)=4x^3$

접점의 좌표를 (a, a^4+12)라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=4a^3$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^4+12)=4a^3(x-a)$

$\therefore y=4a^3x-3a^4+12$

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=-3a^4+12, \quad a^4-4=0$

$(a^2+2)(a^2-2)=0$

$\therefore a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2} \ (\because a^2+2>0)$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2}, 16)$, $(\sqrt{2}, 16)$이므로 두 접점 사이의 거리는

$2\sqrt{2}$ 　　답 $2\sqrt{2}$

두 점의 y좌표가 같으므로 두 점 사이의 거리는 x좌표의 차와 같다.

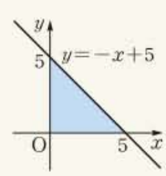
19 $f(x)=x^3-4x+7$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4$

점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-4=-(x-1) \quad \therefore y=-x+5$

따라서 접선의 x절편과 y절편이 모두 5이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5=\frac{25}{2}$ 　　답 $\frac{25}{2}$



20 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+6x+4$로 놓으면

$f'(x)=x+6$

접점의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{2}a^2+6a+4\right)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

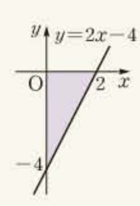
$f'(a)=a+6=2 \quad \therefore a=-4$

즉 접점의 좌표는 $(-4, -12)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-12)=2\{x-(-4)\} \quad \therefore y=2x-4$

따라서 접선의 x절편은 2, y절편은 -4이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4$ 　　답 ②



21 (1) $f(x)=x^2-2x$로 놓으면 $f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 (a, a^2-2a)라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=2a-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-2a)=(2a-2)(x-a)$

$\therefore y=(2a-2)x-a^2$

이 직선이 점 $(3, 2)$를 지나므로

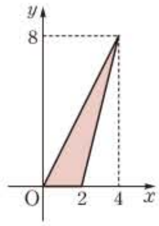
$2=6a-6-a^2, \quad a^2-6a+8=0$

$(a-2)(a-4)=0 \quad \therefore a=2$ 또는 $a=4$

즉 두 접점의 좌표는 $(2, 0)$, $(4, 8)$

(2) 두 접점과 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 오른쪽 그림과 같다.
따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 8=8$



답 (1) $(2,\ 0),\ (4,\ 8)$ (2) 8

22 (1) $f(a)=g(a)$에서 $\quad a^3=a^2+a-1$

$\underline{a^3-a^2-a+1=0}$

$(a+1)(a-1)^2=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

(2) $f'(x)=3x^2,\ g'(x)=2x+1$이므로

$f'(a)=g'(a)$에서 $\quad 3a^2=2a+1$

$3a^2-2a-1=0$

$(3a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{3}$ 또는 $a=1$

(3) $a=1$일 때, 즉 점 $(1,\ 1)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(1)=g'(1)=3$이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-1=3(x-1) \qquad \therefore y=3x-2$

답 (1) $-1,\ 1$ (2) $-\frac{1}{3},\ 1$ (3) $y=3x-2$

23 (1) $f(x)=x^3+ax,\ g(x)=bx^2-10x-9$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2bx-10$

두 곡선이 $x=3$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(3)=g(3)$에서 $\quad 27+3a=9b-39$

$\therefore a-3b=-22 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(3)=g'(3)$에서 $\quad 27+a=6b-10$

$\therefore a-6b=-37 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-7,\ b=5$

(2) 두 곡선 $y=x^3-7x,\ y=5x^2-10x-9$는 점 $(3,\ 6)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(3)=27-7=20$이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-6=20(x-3)$

$\therefore y=20x-54$

답 (1) $a=-7,\ b=5$ (2) $y=20x-54$

24 $f(x)=x^3-4x,\ g(x)=x^2+ax+3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-4,\ g'(x)=2x+a$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad t^3-4t=t^2+at+3$

$\therefore t^3-t^2-(4+a)t-3=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 3t^2-4=2t+a$

$\therefore a=3t^2-2t-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입한 후 정리하면

$\underline{2t^3-t^2+3=0}$

$(t+1)(2t^2-3t+3)=0$

$\therefore t=-1\ (\because \underline{2t^2-3t+3>0})$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면

$a=3+2-4=1$

답 ③

베이직쎈 BOX

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore a^3-a^2-a+1$
$=(a-1)(a^2-1)$
$=(a+1)(a-1)^2$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ & & -2 & 3 & -3 \\ \hline & 2 & -3 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore 2t^3-t^2+3$
$=(t+1)(2t^2-3t+3)$

$2t^2-3t+3$
$=2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$

09 평균값 정리

개념 29 롤의 정리

본책 69쪽

01 답 $\frac{3}{2}$ 연속, 미분가능, $f(3)$, 0, 0, $\frac{3}{2}$

02 함수 $f(x)=x^2+2x-3$은 닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 0)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(0)=-3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=2x+2$이므로

$f'(c)=2c+2=0$

$\therefore c=-1$

답 -1

03 함수 $f(x)=-x^2+5x-4$는 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(4)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-2x+5$이므로

$f'(c)=-2c+5=0$

$\therefore c=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

04 함수 $f(x)=x^3+5x^2-8x-7$은 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(2)=5$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2+10x-8$이므로

$f'(c)=3c^2+10c-8=0$

$(c+4)(3c-2)=0$

$\therefore c=\frac{2}{3}\ (\because -1<c<2)$

답 $\frac{2}{3}$

05 함수 $f(x)=-x^3-3x^2+5$는 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(1)=1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-3x^2-6x$이므로

$f'(c)=-3c^2-6c=0$

$c^2+2c=0, \qquad c(c+2)=0$

$\therefore c=0\ (\because -2<c<1)$

답 0

06 함수 $f(x)=x^3-9x+2$는 닫힌구간 $[-3,\ 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 0)$에서 미분가능하며 $f(-3)=f(0)=2$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-9$이므로

$f'(c)=3c^2-9=0, \qquad c^2=3$

$\therefore c=-\sqrt{3}\ (\because -3<c<0)$

따라서 상수 c는 1개이다.

답 1

07 함수 $f(x)=x^3-9x+2$는 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(-3)=f(3)=2$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-9$이므로

$$f'(c)=3c^2-9=0, \qquad c^2=3$$
$$\therefore c=-\sqrt{3} \text{ 또는 } c=\sqrt{3}$$

따라서 상수 c는 2개이다. 답 2

08 함수 $f(x)=-x^4+3x^2+1$은 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-4x^3+6x$이므로

$$f'(c)=-4c^3+6c=0$$
$$2c^3-3c=0, \qquad c(\underline{2c^2-3})=0$$
$$\therefore c=0\ (\because -1<c<1)$$

따라서 상수 c는 1개이다. 답 1

베이직쎈 BOX

$2c^2-3=0$에서
$c^2=\frac{3}{2}$
$\therefore c=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$
$-\frac{\sqrt{6}}{2}<-1,\ 1<\frac{\sqrt{6}}{2}$
이므로 $c=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$은 주어진 구간에 속하지 않는다.

09 함수 $f(x)=-x^4+3x^2+1$은 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(2)=-3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-4x^3+6x$이므로

$$f'(c)=-4c^3+6c=0$$
$$c(2c^2-3)=0$$
$$\therefore c=0 \text{ 또는 } c=-\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 또는 } c=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

따라서 상수 c는 3개이다. 답 3

개념 30 평균값 정리

본책 70쪽

10 답 2 연속, 미분가능, $f'(c)$, $2x+4$, 4, 2

11 함수 $f(x)=x^2-3x$는 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=2x-3$이므로

$$\frac{-2-4}{2-(-1)}=2c-3, \qquad 2c=1$$
$$\therefore c=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

$f(2)=4-6=-2$,
$f(-1)=1+3=4$

12 함수 $f(x)=-x^2+6x+2$는 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(0,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-2x+6$이므로

$$\frac{10-2}{4-0}=-2c+6, \qquad 2c=4$$
$$\therefore c=2$$

답 2

13 함수 $f(x)=x^3-7x$는 닫힌구간 $[-3,\ 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 0)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-3,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-7$이므로

$$\frac{0-(-6)}{0-(-3)}=3c^2-7, \qquad c^2=3$$
$$\therefore c=-\sqrt{3}\ (\because -3<c<0)$$

답 $-\sqrt{3}$

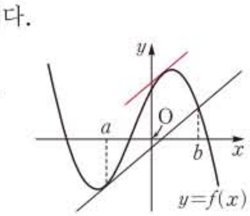
14 함수 $f(x)=-x^3+4x^2+1$은 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-2,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-3x^2+8x$이므로

$$\frac{10-25}{3-(-2)}=-3c^2+8c$$
$$3c^2-8c-3=0$$
$$(3c+1)(c-3)=0$$
$$\therefore c=-\frac{1}{3}\ (\because -2<c<3)$$

답 $-\frac{1}{3}$

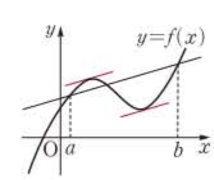
15 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.
오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 1개 그을 수 있으므로 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 1개이다.

기울기가 같은 접선



답 1

16 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.
오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있으므로 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 2개이다.

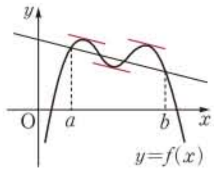


답 2

17 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

베이직쎈 BOX

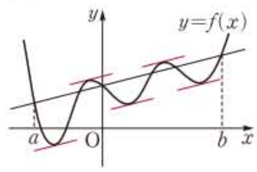
오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 3개 그을 수 있으므로 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 3개이다.



답 3

18 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 5개 그을 수 있으므로 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 5개이다.



답 5

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 71쪽

01 함수 $f(x)=2x^3-6x+1$은 닫힌구간 $[-\sqrt{3},\ \sqrt{3}]$에서 연속이고 열린구간 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$에서 미분가능하며 $f(-\sqrt{3})=f(\sqrt{3})=1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$에 적어도 하나 존재한다.

$f(-\sqrt{3})$
$=-6\sqrt{3}+6\sqrt{3}+1=1$
$f(\sqrt{3})$
$=6\sqrt{3}-6\sqrt{3}+1=1$

이때 $f'(x)=6x^2-6$이므로

$f'(c)=6c^2-6=0, \qquad c^2=1$

$\therefore c=-1$ 또는 $c=1$

따라서 모든 상수 c의 값의 합은

$-1+1=0$

답 0

02 $f(x)=-x^2+kx+3$에서

$f'(x)=-2x+k$

닫힌구간 $[-1,\ 5]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수가 2이므로

$f'(2)=0, \qquad -4+k=0$

$\therefore k=4$

답 ④

03 ③ 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하지 않은 x의 값이 존재하므로 롤의 정리가 성립하지 않는다.

롤의 정리는 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능할 때, $f(0)=f(2)$이면 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

답 ③

04 함수 $f(x)=x^3-3x+4$는 닫힌구간 $[-4,\ -1]$에서 연속이고 열린구간 $(-4,\ -1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(-1)-f(-4)}{-1-(-4)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-4,\ -1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-3$이므로

$\dfrac{6-(-48)}{-1-(-4)}=3c^2-3, \qquad c^2=7$

$\therefore c=-\sqrt{7}\ (\because -4<c<-1)$

$-\sqrt{16}<-\sqrt{7}<-\sqrt{1}$

답 $-\sqrt{7}$

05 $f(x)=x^2+3x+2$에서

$f'(x)=2x+3$

닫힌구간 $[2,\ k]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 3이므로

$\dfrac{f(k)-f(2)}{k-2}=f'(3)$

$\dfrac{(k^2+3k+2)-12}{k-2}=9$

$k^2+3k-10=9k-18$

$k^2-6k+8=0$

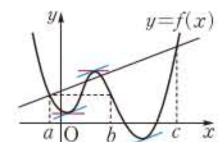
$(k-2)(k-4)=0$

$\therefore k=4\ (\because k>2)$

답 4

06 오른쪽 그림과 같이 열린구간 $(a,\ b)$에서 x축과 평행한 접선을 2개 그을 수 있으므로

$m=2$



또 열린구간 $(a,\ c)$에서 두 점 $(a,\ f(a))$, $(c,\ f(c))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 3개 그을 수 있으므로

$n=3$

$\therefore m+n=5$

답 ④

07 답 (가) $(a,\ x)$ (나) $f(a)$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 72쪽

01 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(p,\ f(p))$에서의 접선의 기울기는 $f'(p)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+4x-1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+4$

점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(1)=3+2a+4=3$

$2a=-4 \qquad \therefore a=-2$

즉 $f(x)=x^3-2x^2+4x-1$에서

$f(1)=1-2+4-1=2$

이므로 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=3(x-1)$

$\therefore y=3x-1$

따라서 $b=-1$이므로

$a+b=-3$

답 ①

04 도함수의 활용 (1)

베이직쎈 BOX

02 전략 기울기가 k인 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{k}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=6x^2+21x+8$로 놓으면

$f'(x)=12x+21$

점 $(-2, -10)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=-3$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

즉 점 $(-2, -10)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y-(-10)=\frac{1}{3}\{x-(-2)\}$

$\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{28}{3}$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{28}{3}$이므로

$2a-b=2\cdot\frac{1}{3}-\left(-\frac{28}{3}\right)=10$ 답 ⑤

03 전략 평행한 두 직선은 기울기가 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=x^2+4x$

접점의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{3}a^3+2a^2+2\right)$라 하면 접선의 기울기가 -4이므로

직선 $y=-4x-1$과 평행한 직선의 기울기는 -4이다.

$f'(a)=a^2+4a=-4$

$a^2+4a+4=0$, $(a+2)^2=0$

$\therefore a=-2$

즉 접점의 좌표는 $\left(-2, \frac{22}{3}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{22}{3}=-4\{x-(-2)\}$ $\therefore y=-4x-\frac{2}{3}$

따라서 구하는 y절편은 $-\frac{2}{3}$이다. 답 ②

04 전략 접점의 x좌표를 t로 놓고 접선의 기울기가 8임을 이용하여 t의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=3x^3-x+a$로 놓으면

$f'(x)=9x^2-1$

접점의 좌표를 $(t, 3t^3-t+a)$라 하면 접선의 기울기가 8이므로

$f'(t)=9t^2-1=8$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

(i) $t=-1$일 때, 접점의 좌표는 $(-1, -2+a)$

$f(-1)=-3+1+a$
$=-2+a$

이 점은 직선 $y=8x+b$ 위의 점이므로

$-2+a=-8+b$

$\therefore a-b=-6$

(ii) $t=1$일 때, 접점의 좌표는 $(1, 2+a)$

$f(1)=3-1+a$
$=2+a$

이 점은 직선 $y=8x+b$ 위의 점이므로

$2+a=8+b$

$\therefore a-b=6$

(i), (ii)에서 $|a-b|=6$

답 ④

05 전략 접점의 x좌표를 a로 놓은 후 접선의 방정식을 세우고 접선이 점 $(2, -12)$를 지남을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=2x^2-x$로 놓으면

$f'(x)=4x-1$

접점의 좌표를 $(a, 2a^2-a)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=4a-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(2a^2-a)=(4a-1)(x-a)$

$\therefore y=(4a-1)x-2a^2$

이 직선이 점 $(2, -12)$를 지나므로

$-12=8a-2-2a^2$

$a^2-4a-5=0$

$(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

따라서 두 접선의 기울기의 합은

$f'(-1)+f'(5)=-5+19$
$=14$ 답 ⑤

06 전략 접점의 x좌표를 a로 놓은 후 접선의 방정식을 세우고 접선이 점 $(0, 4)$를 지남을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=3x^3-2$로 놓으면

$f'(x)=9x^2$

접점의 좌표를 $(a, 3a^3-2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=9a^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(3a^3-2)=9a^2(x-a)$

$\therefore y=9a^2x-6a^3-2$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=-6a^3-2$, $a^3=-1$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=9x+4$

이 직선이 점 $(k, -14)$를 지나므로

$-14=9k+4$, $9k=-18$

$\therefore k=-2$

답 ①

07 전략 접선의 방정식을 구한 후 x절편과 y절편을 구한다.

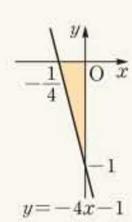
풀이 $f(x)=-2x^3+x^2-4$로 놓으면

$f'(x)=-6x^2+2x$

점 $(1, -5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(-5)=-4(x-1)$

$\therefore y=-4x-1$



따라서 접선의 x절편은 $-\frac{1}{4}$, y절편은 -1이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot1=\frac{1}{8}$ 답 ⑤

08 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax-b$, $g(x)=-x^2+3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=-2x$

두 곡선이 $x=-2$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(-2)=g(-2)$에서

$-8-2a-b=-1$

$\therefore 2a+b=-7$ …… ㉠

$f'(-2)=g'(-2)$에서

$12+a=4$

$\therefore a=-8$

$a=-8$을 ㉠에 대입하면

$-16+b=-7$ $\therefore b=9$

$\therefore ab=-72$

답 ⑤

09 전략 평균값 정리가 성립하기 위한 조건을 생각한다.

풀이 평균값 정리가 성립하려면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능해야 한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하지 않은 x의 값이 존재하므로 평균값 정리가 성립하지 않는다.

ㄹ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 불연속인 x의 값이 존재하므로 평균값 정리가 성립하지 않는다.

이상에서 평균값 정리가 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

10 전략 접선의 방정식을 구한 후 곡선과 접선의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=x^3+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$

점 A(1, 2)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-2=3(x-1)$

$\therefore y=3x-1$

곡선 $y=x^3+1$과 직선 $y=3x-1$이 만나는 점의 x좌표는

$x^3+1=3x-1$

$x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 B$(-2, -7)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(-7-2)^2}=3\sqrt{10}$

답 $3\sqrt{10}$

11 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서의 접선 중 기울기가 최대인 경우는 도함수 $f'(x)$가 최댓값을 갖는 경우이다.

풀이 $f(x)=-x^3+3x^2-8$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3(x-1)^2+3$

이므로 $f'(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 3을 갖는다. ⋯ ❶

따라서 접선의 기울기가 최대일 때의 접점의 좌표는 $(1, -6)$이고 기울기는 3이므로 접선의 방정식은

$y-(-6)=3(x-1)$

$\therefore y=3x-9$ ⋯ ❷

답 $y=3x-9$

베이직쎈 BOX

두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로 기울기가 같다.

직선 $y=-3x$ 위의 점 중에서 계산이 간단한 점을 택한다.

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3-3x+2$
$=(x-1)(x^2+x-2)$
$=(x+2)(x-1)^2$

단계	채점 기준	비율
❶	기울기가 최대일 때의 접점의 x좌표와 기울기를 구할 수 있다.	50 %
❷	기울기가 최대일 때의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %

12 전략 두 점 A, B에서의 접선의 기울기가 같음을 이용하여 점 B의 x좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2-10x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-10$

점 A에서의 접선의 기울기가

$f'(4)=48-24-10=14$

이므로 점 B의 좌표를 $(a, a^3-3a^2-10a+2)$라 하면

$f'(a)=3a^2-6a-10=14$

$a^2-2a-8=0$, $(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a\neq 4$)

따라서 점 B의 좌표는 $(-2, 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-2=14\{x-(-2)\}$

$\therefore y=14x+30$

답 $y=14x+30$

13 전략 두 직선 사이의 거리는 한 직선 위의 점과 다른 직선 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-6x-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6$

접점의 좌표를 (a, a^3-6a-2)라 하면 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(a)=3a^2-6=-3$, $a^2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ ⋯ ❶

즉 접점의 좌표는 $(-1, 3)$, $(1, -7)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-3\{x-(-1)\}$, $y-(-7)=-3(x-1)$

$\therefore y=-3x$, $y=-3x-4$ ⋯ ❷

따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=-3x$ 위의 점 $(0, 0)$과 직선 $y=-3x-4$, 즉 $3x+y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷	접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸	두 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

14 전략 두 직선 l, m의 기울기의 곱이 -1임을 이용하여 두 직선 l, m의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-2x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2$

점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-2$이므로 직선 l의 방정식은

$y-2=-2(x-0)$

$\therefore y=-2x+2$ ⋯ ❶

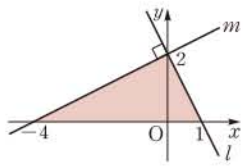
직선 l과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 점 $(0,\ 2)$를 지나고 직선 l과 수직인 직선 m의 방정식은

$$y-2=\frac{1}{2}(x-0)$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}x+2 \quad \cdots❷$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot5\cdot2=5 \quad \cdots❸$$



답 5

단계	채점 기준	비율
❶	직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷	직선 m의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸	도형의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

15 전략 $f(-a)=f(a)$이고 $f'(c)=0$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=3x^3+6x^2-12x+1$은 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(-a,\ a)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로

$$-3a^3+6a^2+12a+1=3a^3+6a^2-12a+1$$

$$a^3-4a=0$$

$$a(a+2)(a-2)=0$$

$$\therefore\ a=2\ (\because\ a\text{는 자연수})$$

따라서 함수 $f(x)=3x^3+6x^2-12x+1$은 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=9x^2+12x-12$이므로

$$f'(c)=9c^2+12c-12=0$$

$$3c^2+4c-4=0$$

$$(c+2)(3c-2)=0$$

$$\therefore\ c=\frac{2}{3}\ (\because\ -2<c<2)$$

답 $a=2,\ c=\frac{2}{3}$

베이직쎈 BOX

Ⅱ. 다항함수의 미분법

05 도함수의 활용 (2)

10 함수의 증가와 감소

개념 31 함수의 증가와 감소

본책 74쪽

01 답 ○

02 답 ○

03 함수 $f(x)$는 구간 $[e,\ f]$에서 감소한다. 답 ×

04 함수 $f(x)$는 구간 $[f,\ g]$에서 감소하고 구간 $[g,\ h]$에서 증가한다. 답 ×

05 답 증가 $\le$, $<$, 증가

$0\le x_1<x_2$이므로 $x_1+x_2>0$, $x_1-x_2<0$ $\therefore\ 2(x_1+x_2)\times(x_1-x_2)<0$

06 $x_1<x_2\le2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=(x_1^2-4x_1)-(x_2^2-4x_2)\\&=(x_1^2-x_2^2)-4(x_1-x_2)\\&=(x_1+x_2)(x_1-x_2)-4(x_1-x_2)\\&=(x_1+x_2-4)(x_1-x_2)>0\end{aligned}$$

$x_1<2,\ x_2\le2$이므로 $x_1+x_2<4$ $\therefore\ x_1+x_2-4<0$

$$\therefore\ f(x_1)>f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 2]$에서 감소한다.

답 감소

07 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=x_1^3-x_2^3\\&=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0\end{aligned}$$

$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$

$$\therefore\ f(x_1)<f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

답 증가

08 $-1<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\frac{1}{x_1+1}-\frac{1}{x_2+1}\\&=\frac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}>0\end{aligned}$$

$$\therefore\ f(x_1)>f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-1,\ \infty)$에서 감소한다.

답 감소

개념 32 함수의 증가와 감소의 판정

본책 75쪽

09 $f(x)=x^2-2x-3$에서

$$f'(x)=2x-2=2(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty,\ 1]$에서 감소한다. 답 풀이 참조

베이직쎈 BOX

10 $f(x)=x^3-6x$에서

$f'(x)=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\searrow$	$-4\sqrt{2}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

$3x^2-6$
$=3(x^2-2)$
$=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

11 $f(x)=-x^3+6x^2-9x-12$에서

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	-12	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 3]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 1]$, $[3, \infty)$에서 감소한다. 답 풀이 참조

$-3x^2+12x-9$
$=-3(x^2-4x+3)$
$=-3(x-1)(x-3)$

12 $f(x)=x^4-8x^2+2$에서

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-14	$\nearrow$	2	$\searrow$	-14	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-2, 0]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -2]$, $[0, 2]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

13 답 $a\ge3$ $\quad\ge$, $\le$, $\ge$

14 $f(x)=x^3+2ax^2+4x-5$에서

$f'(x)=3x^2+4ax+4$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-12\le0, \quad a^2-3\le0$

$(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})\le0$

$\therefore -\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$ 답 $-\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$

베쎈TIP

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$이 성립하려면 $\quad a>0$, $D\le0$

② 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$이 성립하려면 $\quad a<0$, $D\le0$

15 $f(x)=-x^3+x^2-ax+2$에서

$f'(x)=-3x^2+2x-a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-3a\le0$

$\therefore a\ge\frac{1}{3}$ 답 $a\ge\frac{1}{3}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 76쪽

01 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-18x+\frac{1}{2}$에서

$f'(x)=3x^2-3x-18=3(x+2)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{45}{2}$	$\searrow$	-40	$\nearrow$

$f(-2)$
$=-8-6+36+\frac{1}{2}$
$=\frac{45}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-2, 3]$에서 감소한다.

즉 $\alpha=-2$, $\beta=3$이므로

$\alpha\beta=-6$ 답 ①

02 ① 구간 $(-\infty, -3)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

② 구간 $(-3, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

③ 구간 $(-1, 1)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

④ 구간 $(1, 3)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

⑤ 구간 $(3, \infty)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

답 ③

03 $f(x)=x^3+ax^2-2ax+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-2a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+6a\le0, \quad a(a+6)\le0$

$\therefore -6\le a\le0$ 답 $-6\le a\le0$

04 $f(x)=x^3-3ax^2+9ax-5$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+9a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-27a\le0, \quad a(a-3)\le0$

$\therefore 0\le a\le3$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3의 4개이다. 답 4

05 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+4x^2-2ax+1$에서

$f'(x)=-x^2+8x-2a$

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16-2a\le 0$ $\quad\therefore a\ge 8$

따라서 실수 a의 최솟값은 8이다. 답 ③

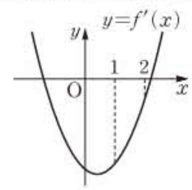
06 $f(x)=x^3-x^2+ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-2x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(1, 2)$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

> $y=3x^2-2x+a$
> $=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+a-\frac{1}{3}$
> 의 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식이 $x=\frac{1}{3}$인 포물선이다.

오른쪽 그림에서



$f'(1)\le 0$이어야 하므로

$1+a\le 0$

$\therefore a\le -1$ ...... ㉠

$f'(2)\le 0$이어야 하므로

$8+a\le 0$

$\therefore a\le -8$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\le -8$ 답 ①

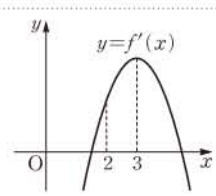
07 $f(x)=-x^3+9x^2-ax+4$에서

$f'(x)=-3x^2+18x-a$

함수 $f(x)$가 $2<x<3$에서 증가하려면 $2<x<3$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

> $y=-3x^2+18x-a$
> $=-3(x-3)^2-a+27$
> 의 그래프는 위로 볼록하고 축의 방정식이 $x=3$인 포물선이다.

오른쪽 그림에서



$f'(2)\ge 0$이어야 하므로

$24-a\ge 0$

$\therefore a\le 24$ ...... ㉠

$f'(3)\ge 0$이어야 하므로

$27-a\ge 0$

$\therefore a\le 27$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\le 24$

따라서 실수 a의 최댓값은 24이다. 답 24

11 함수의 극대와 극소

개념 33 함수의 극대와 극소

본책 77쪽

01 $f(x)$가 $x=a$, $x=c$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 극댓값을 갖는 x의 값은 a, c이다. 답 a, c

02 $f(x)$가 $x=b$, $x=d$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 극솟값을 갖는 x의 값은 b, d이다. 답 b, d

03 $f(x)$가 $x=3$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $x=3$에서 극대이고 극댓값은

$f(3)=4$

$f(x)$가 $x=-2$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $x=-2$에서 극소이고 극솟값은

$f(-2)=-3$ 답 극댓값: 4, 극솟값: -3

04 $f(x)$가 $x=-1$, $x=5$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $x=-1$, $x=5$에서 극대이고 극댓값은

$f(-1)=2$, $f(5)=5$

$f(x)$가 $x=2$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $x=2$에서 극소이고 극솟값은

$f(2)=1$ 답 극댓값: 2, 5, 극솟값: 1

05 $f(x)$가 $x=-3$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $x=-3$에서 극대이고 극댓값은

$f(-3)=1$

$f(x)$가 $x=-6$, $x=-1$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $x=-6$, $x=-1$에서 극소이고 극솟값은

$f(-6)=f(-1)=-3$

답 극댓값: 1, 극솟값: -3

06 $f(x)$가 $x=1$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $x=1$에서 극소이고 극솟값은

> $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$에서 뾰족한 모양이어도 극값을 가질 수 있다.

$f(1)=1$ 답 극댓값: 없다, 극솟값: 1

07 $f(x)$가 $x=0$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $x=0$에서 극대이고 극댓값은

$f(0)=2$

$f(x)$가 $x=-2$, $x=2$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $x=-2$, $x=2$에서 극소이고 극솟값은

$f(-2)=f(2)=0$ 답 극댓값: 2, 극솟값: 0

개념 34 함수의 극대와 극소의 판정

본책 78쪽

08 (1) $f(x)=x^3-3x+5$에서

$f'(x)=3x^2-3$

> 삼차 이상인 함수 $f(x)$의 극대와 극소를 판정할 때에는 함수의 증감표를 이용한다.

(2) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

(3)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	3	↗

(4) 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 7, $x=1$에서 극솟값 3을 갖는다.

답 풀이 참조

09 $f(x)=2x^3+6x^2-9$에서

$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-1	↘	-9	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 -1, $x=0$에서 극솟값 -9를 갖는다.

답 극댓값: -1, 극솟값: -9

10 $f(x)=x^3+3x^2-9x-5$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	22	↘	-10	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 22, $x=1$에서 극솟값 -10을 갖는다.

답 극댓값: 22, 극솟값: -10

11 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-10$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-17	↗	10	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 10, $x=-1$에서 극솟값 -17을 갖는다.

답 극댓값: 10, 극솟값: -17

12 $f(x)=x^4-4x^2+2$에서

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2, $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$에서 극솟값 -2를 갖는다.

답 극댓값: 2, 극솟값: -2

13 $f(x)=-x^4+4x^3-4x^2-7$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-7	↘	-8	↗	-7	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 극댓값 -7, $x=1$에서 극솟값 -8을 갖는다.

답 극댓값: -7, 극솟값: -8

베이직쎈 BOX

주어진 그래프는 $f(x)$의 그래프가 아니라 $f'(x)$의 그래프임에 주의한다.

주어진 그래프에서 $f'(2)=0$

$4x^3-8x$
$=4x(x^2-2)$
$=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$-4x^3+12x^2-8x$
$=-4x(x^2-3x+2)$
$=-4x(x-1)(x-2)$

개념 35 도함수의 그래프와 함수의 극대와 극소

본책 79쪽

14 $f'(-3)=0$이지만 $x=-3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=-3$에서 극값을 갖지 않는다.

답 ×

15 구간 $(-2, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소하고, 구간 $(-1, 1)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

답 ×

16 $f'(2)$가 존재하므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

답 ○

17 구간 $(3, 4)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

답 ○

18 $f'(4)=0$이고 $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이다.

답 ×

19 구간 $(-4, 5)$에서 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖고, $x=-1$, $x=4$에서 극솟값을 가지므로 극값을 갖는 x의 값은 -1, 2, 4의 3개이다.

답 ○

20 $f'(a)=0$, $f'(c)=0$이고 $x=a$, $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=a$, $x=c$에서 극댓값을 갖는다.

또 $f'(b)=0$, $f'(e)=0$이고 $x=b$, $x=e$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=b$, $x=e$에서 극솟값을 갖는다.

답 풀이 참조

21 $f'(c)=0$이고 $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=c$에서 극댓값을 갖는다.

또 $f'(a)=0$, $f'(g)=0$이고 $x=a$, $x=g$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=a$, $x=g$에서 극솟값을 갖는다.

답 풀이 참조

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 80쪽

01 $f(x)=x^3-12x+4$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-12	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 20, $x=2$에서 극솟값 -12를 가지므로

$M=20$, $m=-12$

$\therefore M+m=8$

답 ④

베이직쎈 BOX

02 $f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2-8$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2+24x$

$=-12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-3	↘	-8	↗	24	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 -3, $x=2$에서 극댓값 24를 가지므로 모든 극댓값의 합은

$-3+24=21$ 답 ②

함수의 극댓값은 여러 개 존재할 수 있다.

03 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x-1$에서

$f'(x)=x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{15}{4}$	↗	3	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{15}{4}$를 가지므로 $a=-1$, $b=-\frac{15}{4}$

$\therefore 4ab=15$ 답 15

04 $f(x)=-x^3+3x^2-3$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 1, $x=0$에서 극솟값 -3을 가지므로

$A(2, 1)$, $B(0, -3)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(0-2)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{5}$

답 $2\sqrt{5}$

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

05 $f(x)=x^3+3x^2+ax+b$에서

$f'(x)=3x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -13을 가지므로

$f(2)=-13$에서 $8+12+2a+b=-13$

$\therefore 2a+b=-33$ …… ㉠

$f'(2)=0$에서 $12+12+a=0$ $\therefore a=-24$

$a=-24$를 ㉠에 대입하면

$-48+b=-33$ $\therefore b=15$

$\therefore a+b=-9$ 답 ⑤

미분가능한 함수 $f(x)$가
① $x=a$에서 극값을 갖는다. ➡ $f'(a)=0$
② $x=a$에서 극값 β를 갖는다. ➡ $f(a)=\beta$, $f'(a)=0$

06 $f(x)=-2x^3+ax^2+bx-10$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값을 갖고 $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-1)=0$에서 $-6-2a+b=0$

$\therefore 2a-b=-6$ …… ㉠

$f'(2)=0$에서 $-24+4a+b=0$

$\therefore 4a+b=24$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=12$

따라서 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-10$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(-1)=2+3-12-10=-17$ 답 -17

07 $f(x)=2x^3-3ax^2-12a^2x+1$에서

$f'(x)=6x^2-6ax-12a^2=6(x+a)(x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=2a$

$a>0$이므로 $-a<0$, $2a>0$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$7a^3+1$	↘	$-20a^3+1$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극댓값 $7a^3+1$, $x=2a$에서 극솟값 $-20a^3+1$을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 합이 -102이므로

$7a^3+1-20a^3+1=-102$, $13a^3=104$

$a^3=8$ $\therefore a=2$ 답 ②

08 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{k}{4}$에서

$f'(x)=3x^2+3x=3x(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2}+\frac{k}{4}$	↘	$\frac{k}{4}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{1}{2}+\frac{k}{4}$, $x=0$에서 극솟값 $\frac{k}{4}$를 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로

$\frac{1}{2}+\frac{k}{4}=-\frac{k}{4}$, $\frac{k}{2}=-\frac{1}{2}$

$\therefore k=-1$ 답 -1

09 $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$이고 $x=-1$, $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-1$, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 x의 값의 합은

$-1+3=2$ 답 2

10 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 4이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f'(0)=0$에서 $b=0$

$f'(4)=0$에서 $-48+8a+b=0$ $\therefore a=6$

베이직쎈 BOX

$f(x)$의 극솟값이 $f(0)$이므로 $f(0)=-11$에서

$c=-11$

따라서 $f(x)=-x^3+6x^2-11$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f(4)=-64+96-11=21$ 답 ②

11 ㄱ. $f'(-2)=0$, $f'(2)=0$이고 $x=-2$, $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $-2<x<0$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 구간 $(-2, 0)$에서 증가한다.

$\therefore f(-1)<f\left(-\frac{1}{2}\right)$

> $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$의 값은 구할 수 없지만 구간 $(-2, 0)$에서 함수 $f(x)$가 증가함을 이용하여 대소를 비교할 수 있다.

ㄷ. $f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. 이때 $f(0)=2$이므로 극댓값은 2이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

12 ① $f'(-3)=0$이고 $x=-3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖는다.

② 구간 $(-2, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

③ 구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

④ $f'(4)=0$이고 $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

⑤ 구간 $(-3, 4)$에서 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 극값을 가지므로 극값을 갖는 x의 값은 2개이다.

> $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고 $x=2$에서 극대이다.

답 ⑤

12 함수의 그래프

개념 36 함수의 그래프

본책 82쪽

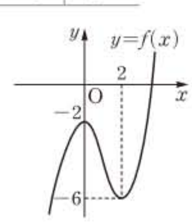
01 $f(x)=x^3-3x^2-2$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-2	↘	-6	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

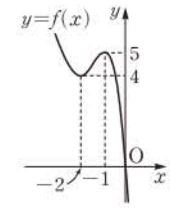
02 $f(x)=-2x^3-9x^2-12x$에서

$f'(x)=-6x^2-18x-12=-6(x+2)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	4	↗	5	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

03 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x-4$에서

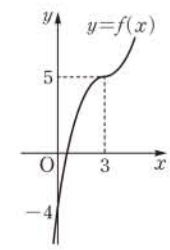
$f'(x)=x^2-6x+9=(x-3)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=3$

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

> $f(0)=-4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0, -4)$를 지난다.



답 풀이 참조

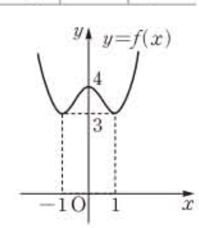
04 $f(x)=x^4-2x^2+4$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	3	↗	4	↘	3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

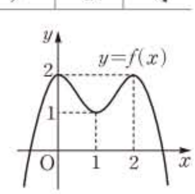
05 $f(x)=-x^4+4x^3-4x^2+2$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗	2	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

베이직쎈 BOX

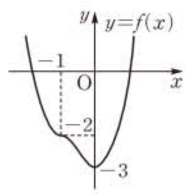
06 $f(x)=3x^4+8x^3+6x^2-3$에서

$f'(x)=12x^3+24x^2+12x=12x(x+1)^2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

개념 37 다항함수가 극값을 가질 조건

본책 83쪽

07 답 $a<-\sqrt{6}$ 또는 $a>\sqrt{6}$

서로 다른 두 실근, $>$, $>$, $a<-\sqrt{6}$ 또는 $a>\sqrt{6}$

08 $f(x)=x^3+2x^2-ax+2$에서

$f'(x)=3x^2+4x-a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4+3a>0$

$\therefore a>-\frac{4}{3}$ 답 $a>-\frac{4}{3}$

> 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
> ➡ 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.
> ➡ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때 $D>0$

09 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+9x-3$에서

$f'(x)=x^2-2ax+9$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9>0, \quad (a+3)(a-3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>3$

답 $a<-3$ 또는 $a>3$

10 $f(x)=2x^3+ax^2+ax+4$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-6a>0, \quad a(a-6)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>6$ 답 $a<0$ 또는 $a>6$

11 답 $-6\le a\le 6$

중근, $\le$, $\le$, $-6\le a\le 6$

12 $f(x)=x^3-6x^2+ax-1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=36-3a\le 0 \quad \therefore a\ge 12$ 답 $a\ge 12$

> 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
> ➡ 극댓값과 극솟값을 모두 갖지 않는다.
> ➡ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\le 0$

13 $f(x)=2x^3+ax^2+3x-8$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+3$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-18\le 0, \quad (a+3\sqrt{2})(a-3\sqrt{2})\le 0$

$\therefore -3\sqrt{2}\le a\le 3\sqrt{2}$ 답 $-3\sqrt{2}\le a\le 3\sqrt{2}$

14 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+ax-9$에서

$f'(x)=x^2+2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-a\le 0, \quad a(a-1)\le 0$

$\therefore 0\le a\le 1$ 답 $0\le a\le 1$

15 답 $a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$

서로 다른 세 실근, 서로 다른 두 실근, $>$, $<$, $a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$

16 $f(x)=x^4+2x^3-2ax^2+3$에서

$f'(x)=4x^3+6x^2-4ax=2x(2x^2+3x-2a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2+3x-2a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$\therefore a\ne 0$ ...... ㉠

이차방정식 $2x^2+3x-2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9+16a>0 \quad \therefore a>-\frac{9}{16}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$-\frac{9}{16}<a<0$ 또는 $a>0$

답 $-\frac{9}{16}<a<0$ 또는 $a>0$

> $2x^2+3x-2a=0$에서 $a=0$이면 $2x^2+3x=0$이므로
> $x(2x+3)=0$
> $\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=0$
> 따라서 $2x^2+3x-2a=0$이 $x=0$을 한 실근으로 가지므로 $f'(x)=0$은 $x=-\frac{3}{2}$과 중근 $x=0$을 갖는다.
> 즉 서로 다른 세 실근을 갖지 않는다.

17 $f(x)=3x^4+(a+1)x^3+\frac{3}{2}x^2+1$에서

$f'(x)=12x^3+3(a+1)x^2+3x$

$=3x\{4x^2+(a+1)x+1\}$

사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

베이직쎈 BOX

그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $4x^2+(a+1)x+1=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $4x^2+(a+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+1)^2-16>0,\quad a^2+2a-15>0$

$(a+5)(a-3)>0\quad \therefore a<-5$ 또는 $a>3$

답 $a<-5$ 또는 $a>3$

$x=0$일 때, 등식이 성립하지 않으므로 $4x^2+(a+1)x+1=0$은 $x=0$을 해로 갖지 않는다.

18 (1) $f(x)=x^4+\frac{2}{3}x^3-ax^2-1$에서

$f'(x)=4x^3+2x^2-2ax$

(2) 허근, 삼중근

(3) $f'(x)=2x(2x^2+x-a)$에서 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 이차방정식 $2x^2+x-a=0$이 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2+x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1+8a<0$

$\therefore a<-\frac{1}{8}$ …… ㉢

(4) $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 $f'(x)=0$이 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가지려면 이차방정식 $2x^2+x-a=0$이 $x=0$을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

$2x^2+x-a=0$이 $x=0$을 근으로 가지면

$-a=0\quad \therefore a=0$ …… ㉣

$2x^2+x-a=0$이 중근을 가지면 판별식을 D라 할 때

$D=1+8a=0$

$\therefore a=-\frac{1}{8}$ …… ㉤

㉣, ㉤에서 $a=-\frac{1}{8}$ 또는 $a=0$

(5) ㉢, ㉣, ㉤에서

$a\le-\frac{1}{8}$ 또는 $a=0$

답 풀이 참조

19 $f(x)=x^4+4x^3-(a-2)x^2-4$에서

$f'(x)=4x^3+12x^2-2(a-2)x$

$=2x\{2x^2+6x-(a-2)\}$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2+6x-(a-2)=0$이 두 허근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $2x^2+6x-(a-2)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9+2(a-2)<0\quad \therefore a<-\frac{5}{2}$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는 경우

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2+6x-(a-2)=0$이 $x=0$을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

$2x^2+6x-(a-2)=0$이 $x=0$을 근으로 가지면

$a-2=0\quad \therefore a=2$

$2x^2+6x-(a-2)=0$이 중근을 가지면 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=9+2(a-2)=0\quad \therefore a=-\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $a\le-\frac{5}{2}$ 또는 $a=2$

답 $a\le-\frac{5}{2}$ 또는 $a=2$

개념 38 함수의 최대와 최소

본책 85쪽

20 답 최댓값: 4, 최솟값: -36

0, 0, -36, 4, 0, 4, -2, -36

21 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$에서

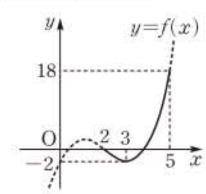
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because 2\le x\le5$)

주어진 구간에 해당하는 부분의 증감표를 만들어 함숫값을 비교한다.

x	2	…	3	…	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	18

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값 18, $x=3$에서 최솟값 -2를 갖는다.



답 최댓값: 18, 최솟값: -2

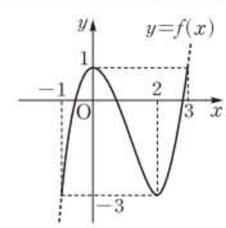
22 $f(x)=x^3-3x^2+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-1	…	0	…	2	…	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	1	↘	-3	↗	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=3$에서 최댓값 1, $x=-1$, $x=2$에서 최솟값 -3을 갖는다.



답 최댓값: 1, 최솟값: -3

23 $f(x)=-2x^3+6x-3$에서

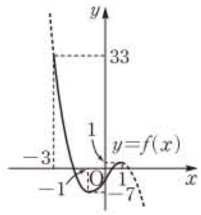
$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	-3	…	-1	…	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	33	↘	-7	↗	1

05 도함수의 활용 (2)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최댓값 33, $x=-1$에서 최솟값 -7을 갖는다.



답 최댓값: 33, 최솟값: -7

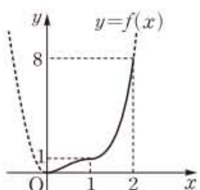
24 $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$에서

$$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↗	8

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 8, $x=0$에서 최솟값 0을 갖는다.



답 최댓값: 8, 최솟값: 0

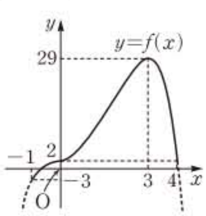
25 $f(x)=-x^4+4x^3+2$에서

$$f'(x)=-4x^3+12x^2=-4x^2(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-3	↗	2	↗	29	↘	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 29, $x=-1$에서 최솟값 -3을 갖는다.



답 최댓값: 29, 최솟값: -3

개념 39 함수의 최대와 최소의 활용

본책 86쪽

26 (1) 점 A의 좌표가 $(a,\ 3-a^2)$이므로

$\overline{AD}=3-a^2$,

$\overline{CD}=2a$

점 D의 좌표는 $(a,\ 0)$이므로 $\overline{OD}=a$
$y=3-x^2$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
$\overline{CD}=2\overline{OD}=2a$

(2) 함수 $y=3-x^2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$3-x^2=0$에서 $\quad x^2=3$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{3}$

이때 점 A는 제1사분면 위의 점이므로

$0<a<\sqrt{3}$

(3) $S(a)=2a(3-a^2)=-2a^3+6a$

(4) $S'(a)=-6a^2+6=-6(a+1)(a-1)$이므로

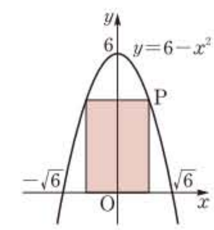
$S'(a)=0$에서 $\quad a=1\ (\because\ 0<a<\sqrt{3})$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	4	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=1$에서 극대이면서 최대이므로 □ABCD의 넓이의 최댓값은 4이다.

답 (1) $\overline{AD}=3-a^2$, $\overline{CD}=2a$ (2) $0<a<\sqrt{3}$
(3) $S(a)=-2a^3+6a$ (4) 4

27 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면 위에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 a라 하면



$\mathrm{P}(a,\ 6-a^2)\ (0<a<\sqrt{6})$

함수 $y=6-x^2$의 그래프와 x축의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 x좌표

직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(6-a^2)=-2a^3+12a$

이므로

$S'(a)=-6a^2+12=-6(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=\sqrt{2}\ (\because\ 0<a<\sqrt{6})$

a	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$8\sqrt{2}$	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=\sqrt{2}$에서 극대이면서 최대이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $8\sqrt{2}$이다.

답 $8\sqrt{2}$

28 (1) 상자의 밑면의 한 변의 길이는

정사각형

$12-2x$

(2) $x>0$, $12-2x>0$이므로

$0<x<6$

(3) $V(x)=x(12-2x)^2=4x^3-48x^2+144x$

상자는 밑면이 한 변의 길이가 $12-2x$인 정사각형이고 높이가 x인 직육면체이므로 부피는
$(12-2x)^2\cdot x$

(4) $V'(x)=12x^2-96x+144=12(x-2)(x-6)$이므로

$V'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because\ 0<x<6)$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	128	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은 128이다.

답 (1) $12-2x$ (2) $0<x<6$
(3) $V(x)=4x^3-48x^2+144x$ (4) 128

29 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면 상자의 밑면의 한 변의 길이는

$9-2x$

이때 $x>0$, $9-2x>0$이므로

$0<x<\dfrac{9}{2}$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(9-2x)^2=4x^3-36x^2+81x$

이므로

$V'(x)=12x^2-72x+81=3(2x-3)(2x-9)$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=\dfrac{3}{2}\left(\because\ 0<x<\dfrac{9}{2}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{9}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	54	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은 54이다. 답 54

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 87쪽

01 $f(x)=-x^4+6x^2-8x+5$에서

$f'(x)=-4x^3+12x-8$

$=-4(x+2)(x-1)^2$

베이직쎈 BOX

$-4x^3+12x-8$
$=-4(x^3-3x+2)$

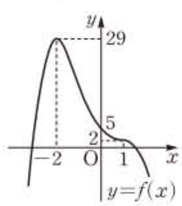
1	1	0	-3	2
		1	1	-2
	1	1	-2	0

$\therefore -4(x^3-3x+2)$
$=-4(x-1)\times(x^2+x-2)$
$=-4(x+2)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	29	↘	2	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ③

02 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 3이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이고, $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다. 답 ④

03 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2+8x-2$에서

$f'(x)=2x^2+2ax+8$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

> 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
> $\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-16>0,\quad (a+4)(a-4)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>4$ 답 ①

04 $f(x)=x^3+ax^2-2ax-3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-2a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+6a>0,\quad a(a+6)>0$

$\therefore a<-6$ 또는 $a>0$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 1

05 $f(x)=-x^3+6ax^2-12x+4$에서

$f'(x)=-3x^2+12ax-12$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=36a^2-36\le 0,\quad (a+1)(a-1)\le 0$

$\therefore -1\le a\le 1$

따라서 실수 a의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$1+(-1)=0$ 답 ③

06 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-8ax+3$에서

$f'(x)=x^2+2ax-8a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+8a\le 0,\quad a(a+8)\le 0$

$\therefore -8\le a\le 0$

따라서 정수 a는 -8, -7, -6, $\cdots$, 0의 9개이다. 답 9

07 $f(x)=x^3-3x^2+ax-2$에서

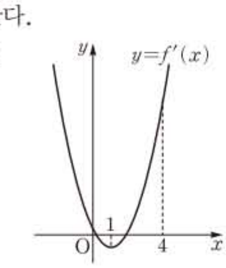
$f'(x)=3x^2-6x+a$

삼차함수 $f(x)$가 구간 $(0, 4)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 구간 $(0, 4)$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3a>0$

$\therefore a<3$



(ii) $f'(0)>0$에서 $a>0$

$f'(4)>0$에서

$24+a>0\quad \therefore a>-24$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이고 $0<1<4$이다.

이상에서 실수 a의 값의 범위는

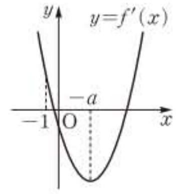
$0<a<3$ 답 ③

08 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(a+2)x-1$에서

$f'(x)=x^2+2ax+a+2$

삼차함수 $f(x)$가 $x>-1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>-1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면



$$\frac{D}{4}=a^2-a-2>0$$

$$(a+1)(a-2)>0$$

$\therefore$ $a<-1$ 또는 $a>2$

(ii) $f'(-1)>0$에서 $\quad 3-a>0$

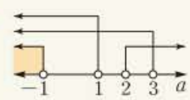
$\therefore$ $a<3$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-a$이고 $-1<-a$에서 $\quad a<1$

이상에서 실수 a의 값의 범위는 $\quad a<-1$

따라서 실수 a의 값이 될 수 있는 것은 ⑤ $-\frac{3}{2}$이다.

답 ⑤



09 $f(x)=2x^3+(a+3)x^2+ax+6$에서

$f'(x)=6x^2+2(a+3)x+a$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

$-2<\alpha<-1$, $\beta>-1$

이어야 하므로

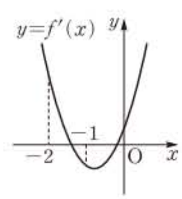
$f'(-2)>0$에서

$-3a+12>0 \quad \therefore a<4$

$f'(-1)<0$에서

$-a<0 \quad \therefore a>0$

$\therefore$ $0<a<4$



따라서 정수 a는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$

답 6

함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이다.

10 $f(x)=x^4+4x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=4x^3+12x^2+4ax=4x(x^2+3x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $x^2+3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$\therefore$ $a\neq0$ $\quad$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+3x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-4a>0 \quad \therefore a<\frac{9}{4}$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{4}$

따라서 정수 a의 최댓값은 2이다.

답 2

11 $f(x)=-3x^4+ax^3-6x^2+5$에서

$f'(x)=-12x^3+3ax^2-12x$

$=-3x(4x^2-ax+4)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $4x^2-ax+4=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $f(x)$는 항상 극솟값을 갖고, 음수이면 $f(x)$는 항상 극댓값을 갖는다.

이차방정식 $4x^2-ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-64>0$, $\quad (a+8)(a-8)>0$

$\therefore$ $a<-8$ 또는 $a>8$

답 ②

12 $f(x)=x^4+2(a-1)x^2-4ax$에서

$f'(x)=4x^3+4(a-1)x-4a$

$=4(x-1)(x^2+x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=1$이므로 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 두 허근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4a<0 \quad \therefore a>\frac{1}{4}$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는 경우

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=1$이므로 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

$x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 가지면

$2+a=0 \quad \therefore a=-2$

$x^2+x+a=0$이 중근을 가지면 판별식을 D라 할 때

$D=1-4a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $\quad a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

즉 a의 값이 될 수 없는 것은 ② $-\frac{1}{4}$이다.

답 ②

13 $f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ ($\because -3\leq x\leq 1$)

x	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최대이다.

답 0

14 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+2$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	9	↘	-18	↗	-7

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 9, $x=2$에서 최솟값 -18을 갖는다.

즉 $M=9$, $m=-18$이므로

$M+m=-9$

답 ①

15 $f(x)=-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x+1$에서

$f'(x)=-x^3-3x^2+4=-(x-1)(x+2)^2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ ($\because -1\leq x\leq 4$)

베이직쎈 BOX

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{9}{4}$	↗	$\frac{15}{4}$	↘	-111

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $\frac{15}{4}$를 갖는다.

즉 $a=1$, $b=\frac{15}{4}$이므로

$ab=\frac{15}{4}$ 답 ③

16 $f(x)=x^4-6x^2-8x+a$에서

$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a+3$	↘	$a-24$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $a-24$를 갖는다.

이때 최솟값이 -10이므로

$a-24=-10$ $\therefore a=14$ 답 ④

17 $f(x)=x^3+3x^2+a+3$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a+7$	↘	$a+3$	↗	$a+23$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $a+23$, $x=0$에서 최솟값 $a+3$을 갖는다.

$a+3<a+7<a+23$

이때 최댓값이 7이므로

$a+23=7$ $\therefore a=-16$

즉 $f(x)$의 최솟값은

$-16+3=-13$ 답 -13

18 $f(x)=-2x^3+3x^2+a$에서

$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	a	↗	$a+1$	↘	$a-27$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $a+1$, $x=3$에서 최솟값 $a-27$을 갖는다.

$a-27<a<a+1$

이때 최댓값과 최솟값의 합이 -16이므로

$(a+1)+(a-27)=-16$, $2a=10$

$\therefore a=5$ 답 5

19 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\le x\le 4$)

$a<0$이므로 $1<x<2$에서 $f'(x)>0$, $2<x<4$에서 $f'(x)<0$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-2a+b$	↗	$-4a+b$	↘	$16a+b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $-4a+b$, $x=4$에서 최솟값 $16a+b$를 갖는다.

$a<0$이므로 $16a<-2a<-4a$ $\therefore 16a+b<-2a+b<-4a+b$

이때 최댓값이 6, 최솟값이 -14이므로

$-4a+b=6$, $16a+b=-14$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

$\therefore b-a=3$ 답 ①

20 점 P의 좌표를 (t, t^2)이라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(t+3)^2+t^4}=\sqrt{t^4+t^2+6t+9}$

$f(t)=t^4+t^2+6t+9$라 하면

$f'(t)=4t^3+2t+6=2(t+1)(2t^2-2t+3)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ ($\because 2t^2-2t+3>0$)

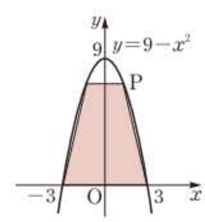
$2t^2-2t+3=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$

t	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	5	↗

따라서 $f(t)$는 $t=-1$에서 최솟값 5를 가지므로 $\overline{AP}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다. 답 $\sqrt{5}$

$\overline{AP}=\sqrt{f(t)}$

21 오른쪽 그림과 같이 사다리꼴의 꼭짓점 중 제1사분면 위에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 a라 하면



$P(a, 9-a^2)$ $(0<a<3)$

사다리꼴의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}(2a+6)(9-a^2)=-a^3-3a^2+9a+27$

이므로

사다리꼴의 윗변의 길이는 $2a$
아랫변의 길이는 6
높이는 $9-a^2$

$S'(a)=-3a^2-6a+9=-3(a+3)(a-1)$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because 0<a<3$)

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	32	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=1$에서 극대이면서 최대이므로 사다리꼴의 넓이의 최댓값은 32이다. 답 32

22 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 상자의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이는 각각

$(16-2x)$ cm, $(10-2x)$ cm

이때 $x>0$, $16-2x>0$, $10-2x>0$이므로

$0<x<5$

상자의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라 하면

$V(x)=(16-2x)(10-2x)x=4x^3-52x^2+160x$

이므로

$V'(x)=12x^2-104x+160=4(x-2)(3x-20)$

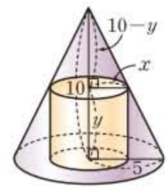
$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<5$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	5
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	144	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은 144 cm^{3}이다. 답 ③

05 도함수의 활용 (2)

23 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면



$5:10=x:(10-y)$

$10-y=2x$

$\therefore\ y=10-2x\ (0<x<5)$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(10-2x)=-2\pi x^3+10\pi x^2$

이므로

$V'(x)=-6\pi x^2+20\pi x=2\pi x(-3x+10)$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{10}{3}\ (\because\ 0<x<5)$

x	0	$\cdots$	$\frac{10}{3}$	$\cdots$	5
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	$\frac{1000}{27}\pi$	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=\frac{10}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은 $\frac{1000}{27}\pi$이다. 답 ④

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 91쪽

01 전략 어떤 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가하고, $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

풀이 ① 구간 $(-\infty,\ -2)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

② 구간 $(-2,\ -1)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

③ 구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소하고, 구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

⑤ 구간 $(3,\ 4)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가하고, 구간 $(4,\ \infty)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

답 ④

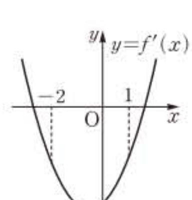
02 전략 주어진 조건을 만족시키도록 $y=f'(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)=x^3+kx^2-9x+8$에서

$f'(x)=3x^2+2kx-9$

함수 $f(x)$가 구간 $[-2,\ 1]$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$f'(-2)\le 0$이어야 하므로

$3-4k\le 0$

$\therefore\ k\ge\frac{3}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)\le 0$이어야 하므로

$2k-6\le 0\quad\therefore\ k\le 3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{3}{4}\le k\le 3$ 답 ③

03 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지면 $f(a)=b,\ f'(a)=0$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지므로

$f(a)=b,\ f'(a)=0$

$g(x)=3x^2f(x)$에서

$g'(x)=6xf(x)+3x^2f'(x)$

$\therefore\ g'(a)=6af(a)+3a^2f'(a)=6ab$ 답 ③

베이직쎈 BOX: 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $y=f(x)g(x)$에서 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

04 전략 함수 $f(x)$의 증감표를 만들어 극값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(x)=-x^3+6ax^2-9a^2x+2$에서

$f'(x)=-3x^2+12ax-9a^2=-3(x-a)(x-3a)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=a$ 또는 $x=3a$

베이직쎈 BOX: $a>0$이므로 $a<3a$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$-4a^3+2$	↗	2	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3a$에서 극댓값 2, $x=a$에서 극솟값 $-4a^3+2$를 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 차가 4이므로

$2-(-4a^3+2)=4,\quad a^3=1$

베이직쎈 BOX: $a>0$이므로 $-4a^3<0$ $\therefore\ -4a^3+2<2$

$\therefore\ a=1$ 답 ②

05 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 보고 x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 ㄱ. $f'(1)=0$이지만 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄴ. $f'(5)=0$이고 $x=5$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=5$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 구간 $(-5,\ 6)$에서 $f(x)$는 $x=-4$, $x=5$에서 극값을 가지므로 극값을 갖는 점은 2개이다.

베이직쎈 BOX: $f'(-4)=0$이고 $x=-4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-4$에서 극댓값을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

06 전략 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 점을 이용하여 함수 $f(x)$가 극대가 되는 점을 찾는다.

풀이 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표가 -1, 2이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f'(-1)=0$에서 $\quad 6-2a+b=0$

$\therefore\ 2a-b=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)=0$에서 $\quad 24+4a+b=0$

$\therefore\ 4a+b=-24$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

베이직쎈 BOX

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-12$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+c$이고 $f(x)$의 극댓값이 5이므로 $f(-1)=5$에서

$-2-3+12+c=5$ $\quad\therefore c=-2$

$\therefore a+b+c=-17$ 답 ①

07 전략 함수 $f(x)$의 증감표를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

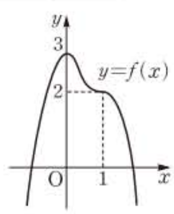
풀이 $f(x)=-3x^4+8x^3-6x^2+3$에서

$f'(x)=-12x^3+24x^2-12x=-12x(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	−
$f(x)$	↗	3	↘	2	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



③ $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3을 갖는다.

④ $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

⑤ $y=f(x)$의 치역은 $\{y|y\le 3\}$이다. 답 ④

08 전략 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=-3x^3+3ax^2+2ax$에서

$f'(x)=-9x^2+6ax+2a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9a^2+18a>0$, $\quad a(a+2)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>0$ 답 ②

09 전략 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4-4x^3+ax^2+7$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+2ax=2x(2x^2-6x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2-6x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$\therefore a\ne 0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $2x^2-6x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-2a>0$ $\quad\therefore a<\frac{9}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 4이다. 답 ④

$a>0$이므로
$-a<0<4a$
$\therefore -a+b<b<4a+b$

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $f(x)$는 항상 극솟값을 갖고, 음수이면 $f(x)$는 항상 극댓값을 갖는다.

$x=b$, $x=1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소가 바뀌므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 근이 $x=b$ 또는 $x=1$이다.

10 전략 주어진 구간에서 $f(x)$의 극값과 양 끝 점의 함숫값을 비교하여 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+3$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2-16x=4x(x+1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ ($\because -2\le x\le 1$)

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	19	↘	0	↗	3	↘	-8

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -8을 갖는다.

즉 $a=1$, $b=-8$이므로

$a+b=-7$ 답 ④

11 전략 주어진 구간에서 $f(x)$의 극값과 양 끝 점의 함숫값을 a, b에 대한 식으로 나타낸 후 대소를 비교한다.

풀이 $f(x)=2ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=6ax^2-6ax=6ax(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	b	↘	$-a+b$	↗	$4a+b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $4a+b$, $x=1$에서 최솟값 $-a+b$를 갖는다.

이때 최댓값이 11, 최솟값이 1이므로

$4a+b=11$, $-a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=3$

$\therefore ab=6$ 답 ③

12 전략 원기둥의 부피를 밑면의 반지름의 길이를 이용하여 나타낸다.

풀이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면 높이는 $12-r$

이때 $r>0$, $12-r>0$이므로 $\quad 0<r<12$

원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\pi r^2(12-r)=-\pi r^3+12\pi r^2$

이므로

$V'(r)=-3\pi r^2+24\pi r=-3\pi r(r-8)$

$V'(r)=0$에서 $\quad r=8$ ($\because 0<r<12$)

r	0	$\cdots$	8	$\cdots$	12
$V'(r)$		+	0	−	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(r)$는 $r=8$에서 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피가 최대일 때, 밑면의 반지름의 길이는 8이다.

답 ⑤

13 전략 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 b, 1임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^3+3x^2-ax-9$에서

$f'(x)=6x^2+6x-a$

함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $x\le b$ 또는 $x\ge 1$이므로 이차부등식 $f'(x)\ge 0$의 해가 $x\le b$ 또는 $x\ge 1$이다.

따라서 이차방정식 $f'(x)=0$, 즉 $6x^2+6x-a=0$의 두 근이 b, 1이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b+1=-1,\ b=-\dfrac{a}{6}$ $\quad\therefore a=12,\ b=-2$

$\therefore a+b=10$ 답 10

14 전략 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하려면 $g(x)$가 일대일 대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $g(x)$는 증가하거나 감소해야 한다.

베이직쎈 BOX: 역함수가 존재하는 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, 음수이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

풀이 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+5ax-2$에서

$f'(x)=x^2-2x+5a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-5a\le 0$ $\quad\therefore a\ge\dfrac{1}{5}$

따라서 정수 a의 최솟값은 1이다. 답 1

베쎈TIP
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응
→ 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소
→ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$

15 전략 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 $f(x)=-x^3+3x^2+4$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	4	↗	8	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 8, $x=0$에서 극솟값 4를 갖는다.

즉 $M=8,\ m=4$이므로

$M-m=4$ 답 4

16 전략 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 8을 가짐을 이용하여 $a,\ b$의 값을 구한 후 극솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-9x^2+ax+b$에서

$f'(x)=3x^2-18x+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 8을 가지므로

$f(1)=8$에서 $\quad 1-9+a+b=8$

$\therefore a+b=16$ ······ ㉠

$f'(1)=0$에서 $\quad 3-18+a=0$ $\quad\therefore a=15$

$a=15$를 ㉠에 대입하면

$15+b=16$ $\quad\therefore b=1$ ··· ❶

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+15x+1$이므로

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=5$ ··· ❷

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8	↘	-24	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극솟값 -24를 갖는다. ··· ❸

답 -24

단계	채점 기준	비율
❶	$a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	$f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸	$f(x)$의 극솟값을 구할 수 있다.	30 %

17 전략 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=4x^3+3ax^2+9x-2$에서

$f'(x)=12x^2+6ax+9$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다. ··· ❶

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=9a^2-108\le 0,\quad a^2-12\le 0$

$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})\le 0$

$\therefore -2\sqrt{3}\le a\le 2\sqrt{3}$ ··· ❷

따라서 실수 a의 최댓값은 $2\sqrt{3}$, 최솟값은 $-2\sqrt{3}$이므로 구하는 곱은

$2\sqrt{3}\cdot(-2\sqrt{3})=-12$ ··· ❸

답 -12

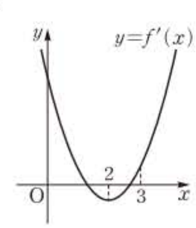
단계	채점 기준	비율
❶	이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 함을 알 수 있다.	40 %
❷	a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸	a의 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

18 전략 삼차함수 $f(x)$가 주어진 구간에서 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 주어진 구간에서 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-6x^2+ax+4$에서

$f'(x)=3x^2-12x+a$

삼차함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 3)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 구간 $(0,\ 3)$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=36-3a>0$

$\therefore a<12$

(ii) $f'(0)>0$에서 $\quad a>0$

$f'(3)>0$에서 $\quad -9+a>0$ $\quad\therefore a>9$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이고 $0<2<3$이다.

베이직쎈 BOX: $3x^2-12x+a$
$=3(x-2)^2+a-12$

이상에서 $\quad 9<a<12$

따라서 정수 a는 10, 11의 2개이다. 답 2

19 전략 주어진 구간에서 $f(x)$의 극값과 양 끝 점의 함숫값을 k에 대한 식으로 나타낸 후 대소를 비교한다.

풀이 $f(x)=-2x^3+12x^2+k$에서

$f'(x)=-6x^2+24x=-6x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -1\le x\le 3$) ⋯ ❶

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k+14$	↘	k	↗	$k+54$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $k+54$, $x=0$에서 최솟값 k를 갖는다. ⋯ ❷

베이직쎈 BOX: $k<k+14<k+54$

이때 최댓값이 최솟값의 4배이므로

$54+k=4k$, $3k=54$

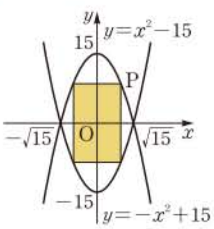
$\therefore k=18$ ⋯ ❸

답 18

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷	$f(x)$의 최댓값과 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸	k의 값을 구할 수 있다.	30 %

20 전략 제1사분면 위에 있는 직사각형의 꼭짓점의 x좌표를 a로 놓고 직사각형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면 위에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 a라 하면



$\mathrm{P}(a,\ -a^2+15)$ $(0<a<\sqrt{15})$

직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a\cdot 2(-a^2+15)$

$=-4a^3+60a$ ⋯ ❶

베이직쎈 BOX: 두 곡선 $y=x^2-15$, $y=-x^2+15$는 서로 x축에 대하여 대칭이므로 직사각형의 세로의 길이는 점 P에서 x축까지의 거리의 2배이다.

이므로

$S'(a)=-12a^2+60=-12(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})$

$S'(a)=0$에서 $a=\sqrt{5}$ ($\because 0<a<\sqrt{15}$) ⋯ ❷

a	0	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$	$\sqrt{15}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$40\sqrt{5}$	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=\sqrt{5}$에서 극대이면서 최대이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $40\sqrt{5}$이다. ⋯ ❸

답 $40\sqrt{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	직사각형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷	$S'(a)=0$인 a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸	직사각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

Ⅱ. 다항함수의 미분법

06 도함수의 활용 (3)

13 방정식과 부등식에의 활용

개념 40 방정식에의 활용

본책 94쪽

01 답 3 ◎ $x-3$, 3, 3, -1, 3

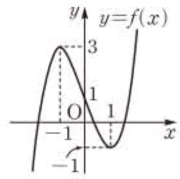
02 $f(x)=x^3-3x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



베이직쎈 BOX: $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만난다.

답 3

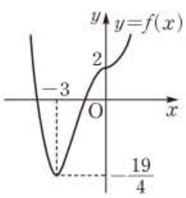
03 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3+2$로 놓으면

$f'(x)=x^3+3x^2=x^2(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{19}{4}$	↗	2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



답 2

04 $2x^3-3x^2+x=x+1$에서

$2x^3-3x^2-1=0$

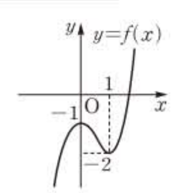
$f(x)=2x^3-3x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-1	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.



베이직쎈 BOX: 방정식 $f(x)=0$은 한 실근과 두 허근을 갖는다.

답 1

베이직쎈 BOX

05 $x^4+x^3-1=-3x^3-4x^2$에서

$x^4+4x^3+4x^2-1=0$

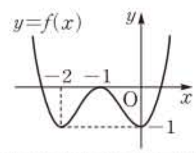
$f(x)=x^4+4x^3+4x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+12x^2+8x=4x(x+1)(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



> 방정식 $f(x)=0$은 $x=-1$을 중근으로 갖고 서로 다른 두 실근을 가지므로 서로 다른 세 실근을 갖는다.

답 3

06 $f(x)=x^3-3x^2+3$으로 놓으면

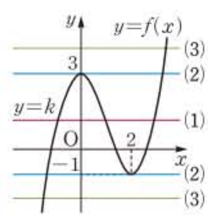
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

> 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-1<k<3$

(2) 주어진 방정식이 한 실근과 중근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나야 하므로

$k=-1$ 또는 $k=3$

> 주어진 방정식이 중근을 가질 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 접한다.

(3) 주어진 방정식이 한 실근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서만 만나야 하므로

$k<-1$ 또는 $k>3$

답 (1) $-1<k<3$ (2) -1, 3

(3) $k<-1$ 또는 $k>3$

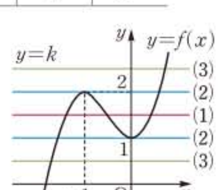
07 $f(x)=2x^3+3x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $1<k<2$

(2) 주어진 방정식이 한 실근과 중근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나야 하므로

$k=1$ 또는 $k=2$

(3) 주어진 방정식이 한 실근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서만 만나야 하므로

$k<1$ 또는 $k>2$

답 (1) $1<k<2$

(2) 1, 2

(3) $k<1$ 또는 $k>2$

개념 41 부등식에의 활용

본책 95쪽

08 답 $x-1$, 1, 1, 0, 0

09 $f(x)=2x^3-3x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	1	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이므로

$f(x)>0$, 즉 $2x^3-3x^2+2>0$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $2x^3-3x^2+2>0$이 성립한다.

답 풀이 참조

10 $f(x)=x^3+4x^2-3x-18$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+8x-3=(x+3)(3x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ ($\because x\le 0$)

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	0	↘	-18

$x\le 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은 0이므로

$f(x)\le 0$, 즉 $x^3+4x^2-3x-18\le 0$

따라서 $x\le 0$일 때, 부등식 $x^3+4x^2-3x-18\le 0$이 성립한다.

답 풀이 참조

11 $f(x)=x^3+2x^2-4x-9$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+4x-4=(x+2)(3x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because x<-1$)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	-1	↘	

$x<-1$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은 -1이므로

$f(x)<0$, 즉 $x^3+2x^2-4x-9<0$

따라서 $x<-1$일 때, 부등식 $x^3+2x^2-4x-9<0$이 성립한다.

답 풀이 참조

베이직쎈 BOX

12 $f(x)=2x^3-6x+7$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1\ (\because\ 0\le x\le 2)$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	↘	3	↗	11

$0\le x\le 2$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 3이므로

$f(x)>0$, 즉 $2x^3-6x+7>0$

따라서 $0\le x\le 2$일 때, 부등식 $2x^3-6x+7>0$이 성립한다.

답 풀이 참조

13 $f(x)=x^4-4x+3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4$

$=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1\ (\because\ x^2+x+1>0)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\ge 0$, 즉 $x^4-4x+3\ge 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4-4x+3\ge 0$이 성립한다.

답 풀이 참조

14 $f(x)=-3x^4+6x^2-4$로 놓으면

$f'(x)=-12x^3+12x$

$=-12x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↘	-4	↗	-1	↘

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$의 최댓값은 -1이므로

$f(x)<0$, 즉 $-3x^4+6x^2-4<0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $-3x^4+6x^2-4<0$이 성립한다.

답 풀이 참조

15 $2x^3-3x\ge 5x^2+x-12$에서

우변을 좌변으로 이항하여 $f(x)\ge 0$ 꼴로 만든다.

$2x^3-5x^2-4x+12\ge 0$

$f(x)=2x^3-5x^2-4x+12$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-10x-4$

$=2(3x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because\ x>1)$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

$x>1$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\ge 0$, 즉 $2x^3-5x^2-4x+12\ge 0$

따라서 $x>1$일 때, 부등식 $2x^3-3x\ge 5x^2+x-12$가 성립한다.

답 풀이 참조

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 96쪽

01 $x^3-3x+2-k=0$에서 $\quad x^3-3x+2=k$

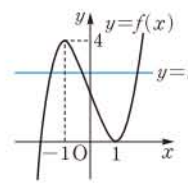
$f(x)=x^3-3x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0<k<4$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.



즉 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 3

02 $x^3-6x^2+9x-3-k=0$에서

$x^3-6x^2+9x-3=k$

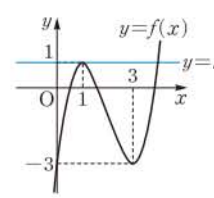
$f(x)=x^3-6x^2+9x-3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 두 실근만을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나야 하므로

삼차방정식의 근
(i) 서로 다른 세 실근
(ii) 한 실근과 중근
➡ 서로 다른 두 실근
(iii) 한 실근과 두 허근
(iv) 삼중근

$k=1\ (\because\ k>0)$

답 ①

03 $3x^4-4x^3-12x^2+12-k=0$에서

$3x^4-4x^3-12x^2+12=k$

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+12$로 놓으면

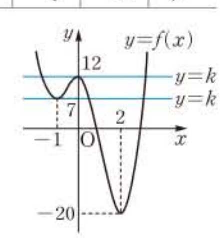
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	7	↗	12	↘	-20	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 세 실근만을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$k=7$ 또는 $k=12$

06 도함수의 활용 (3)

즉 모든 실수 k의 값의 합은

$7+12=19$

답 ⑤

04 $3x^4-8x^3-6x^2+24x-k=0$에서

$3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

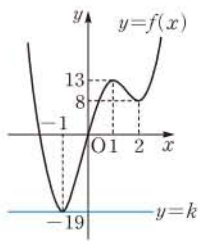
$=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-19	↗	13	↘	8	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 중근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서만 만나고 그 점에서 접해야 하므로

$k=-19$

답 -19

05 $f(x)=2x^3+3x^2-12x$로 놓으면

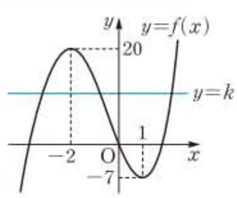
$f'(x)=6x^2+6x-12$

$=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고 두 개는 음수이어야 하므로

$0<k<20$

답 $0<k<20$

베이직쎈 BOX

주어진 방정식은

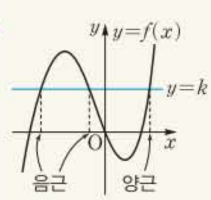
(i) $k>0$이면 양근 1개, 음근 1개, 허근 2개

(ii) $-5<k<0$이면 서로 다른 네 실근

(iii) $k=0$ 또는 $k=-5$이면 서로 다른 두 실근과 중근 (서로 다른 세 실근)

(iv) $k=-32$이면 중근과 두 허근

을 갖는다.



06 $x^3-\frac{3}{2}x^2+2+k=0$에서

$x^3-\frac{3}{2}x^2+2=-k$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3x=3x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	$\frac{3}{2}$	↗

$x^3-\frac{3}{2}x^2+2+k=0$에서

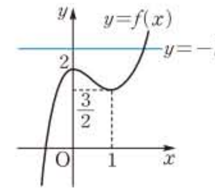
$-x^3+\frac{3}{2}x^2-2=k$

이므로

$f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2-2$

의 그래프와 직선 $y=k$를 이용할 수도 있다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 한 개의 양근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 한 점에서만 만나고, 교점의 x좌표가 양수이어야 하므로

$-k>2 \qquad \therefore k<-2$

즉 정수 k의 최댓값은 -3이다.

답 -3

07 $3x^4+5x^3=x^3+12x^2+k$에서

$3x^4+4x^3-12x^2=k$

$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2$으로 놓으면

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x$

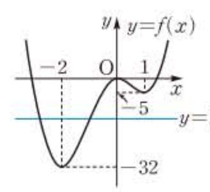
$=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-32	↗	0	↘	-5	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 음근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서만 만나고, 교점의 x좌표가 모두 음수이어야 하므로

$-32<k<-5$

즉 정수 k는 $-31, -30, -29, \cdots, -6$의 26개이다.

답 ②

08 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$2x^3-3x^2-9x=3x+k$, 즉

$2x^3-3x^2-12x=k \qquad \cdots\cdots ㉠$

가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$로 놓으면

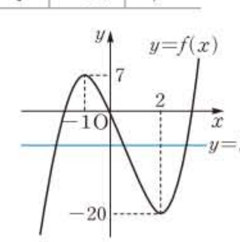
$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-20	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-20<k<7$

답 ②

09 주어진 곡선과 직선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식

$x^3+3x^2=9x+k$, 즉

$x^3+3x^2-9x=k$ ······ ㉠

가 오직 한 개의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x$로 놓으면

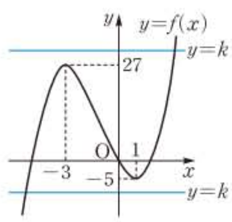
$f'(x)=3x^2+6x-9$

$=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 ㉠이 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나야 하므로

$k<-5$ 또는 $k>27$

즉 자연수 k의 최솟값은 28이다. 답 ③

10 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서만 만나려면 방정식

$2x^3-13x^2+25x=2x^2+x+k$, 즉

$2x^3-15x^2+24x=k$ ······ ㉠

가 서로 다른 두 실근만을 가져야 한다.

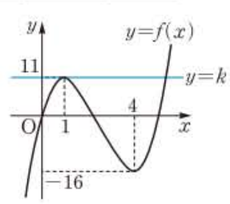
$f(x)=2x^3-15x^2+24x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	11	$\searrow$	-16	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근만을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나야 하므로

$k=11$ ($\because$ k는 자연수) 답 11

11 $x^4-8x^2\geq k$에서 $x^4-8x^2-k\geq 0$

$f(x)=x^4-8x^2-k$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-k-16$	$\nearrow$	$-k$	$\searrow$	$-k-16$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 최솟값 $-k-16$을 갖는다.

$-k-16<-k$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면 $-k-16\geq 0$이어야 하므로

$k\leq -16$ 답 $k\leq -16$

12 $f(x)=2x^3-3kx^2+8$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6kx=6x(x-k)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=k$

x	0	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	8	$\searrow$	$-k^3+8$	$\nearrow$

따라서 $x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 최솟값 $-k^3+8$을 갖는다.

$k>0$이므로 $k^3>0$
$\therefore -k^3+8<8$

$x\geq 0$일 때, $f(x)>0$이려면 $-k^3+8>0$이어야 하므로

$k^3-8<0$

$(k-2)(k^2+2k+4)<0$

$\therefore 0<k<2$ 답 ①

$(k-2)(k^2+2k+4)<0$에서
k^2+2k+4
$=(k+1)^2+3>0$
이므로 $k-2<0$
$\therefore k<2$
이때 $k>0$이므로
$0<k<2$

13 $f(x)\leq g(x)$에서

$2x^3+x^2-8x\leq -2x^2+4x-k$

$\therefore 2x^3+3x^2-12x+k\leq 0$

$h(x)=2x^3+3x^2-12x+k$로 놓으면

$h'(x)=6x^2+6x-12$

$=6(x+2)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because -3\leq x\leq 0$)

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$k+9$	$\nearrow$	$k+20$	$\searrow$	k

따라서 구간 $[-3, 0]$에서 함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $k+20$을 갖는다.

$k<k+9<k+20$

구간 $[-3, 0]$에서 $h(x)\leq 0$이려면 $k+20\leq 0$이어야 하므로

$k\leq -20$

즉 실수 k의 최댓값은 -20이다. 답 -20

14 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)<0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=-3x^4+k-(-4x^3+3)$

$=-3x^4+4x^3+k-3$

$\therefore h'(x)=-12x^3+12x^2$

$=-12x^2(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	$k-3$	$\nearrow$	$k-2$	$\searrow$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $k-2$를 갖는다.

모든 실수 x에 대하여 $h(x)<0$이려면 $k-2<0$이어야 하므로 $k<2$

즉 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ① 1이다. 답 ①

14 속도와 가속도

개념 42 속도와 가속도

본책 98쪽

01 답 $v=5$, $a=0$ 　 5, 5, 0, 0

02 $v=\dfrac{dx}{dt}=2t+12$, $a=\dfrac{dv}{dt}=2$이므로 $t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=2\cdot3+12=18$, $a=2$ 　 답 $v=18$, $a=2$

03 $v=\dfrac{dx}{dt}=-4t+7$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-4$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=-4\cdot1+7=3$, $a=-4$

답 $v=3$, $a=-4$

04 $v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-18$이므로 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=3\cdot2^2-18\cdot2=-24$, $a=6\cdot2-18=-6$

답 $v=-24$, $a=-6$

05 $v=\dfrac{dx}{dt}=-9t^2+8$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-18t$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=-9\cdot1^2+8=-1$, $a=-18$

답 $v=-1$, $a=-18$

06 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=2t-12$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$2t-12=0$ 　 $\therefore t=6$

따라서 $t=6$에서 점 P가 운동 방향을 바꾼다. 　 답 6

07 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=2t^2-5t-3$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$2t^2-5t-3=0$, 　 $(2t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

따라서 $t=3$에서 점 P가 운동 방향을 바꾼다. 　 답 3

08 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-6t^2+24$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$-6t^2+24=0$, 　 $t^2=4$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

따라서 $t=2$에서 점 P가 운동 방향을 바꾼다. 　 답 2

09 t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

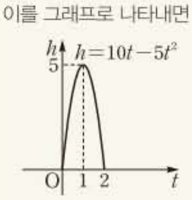
$v=\dfrac{dh}{dt}=10-10t$

물체가 최고 높이에 도달할 때 $v=0$이므로

$10-10t=0$ 　 $\therefore t=1$

베이직쎈 BOX

물체의 시각 t에서의 높이를 그래프로 나타내면



위로 던진 물체가 최고 높이에 도달하는 순간 정지하므로 그때의 속도는 0이다.

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 1초이다. 　 답 1초

10 물체가 1초 후에 최고 높이에 도달하므로 $t=1$에서의 지면으로부터의 높이는

$10\cdot1-5\cdot1^2=5$ (m) 　 답 5 m

11 물체가 지면에 떨어질 때 $h=0$이므로

$10t-5t^2=0$에서 　 $t(2-t)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

따라서 물체가 지면에 떨어질 때까지 걸린 시간은 2초이다. 　 답 2초

12 물체가 2초 후에 지면에 떨어지므로 $t=2$에서의 물체의 속도는

$v=10-10t$

$10-10\cdot2=-10$ (m/s) 　 답 -10 m/s

13 시각 t에서의 점 P의 속도는 $x'(t)$이고, $x'(a)=0$이므로 $x=a$에서의 점 P의 속도는 0이다. 　 답 ○

$t=a$에서의 그래프의 접선의 기울기가 0이므로 $x'(a)=0$

14 $a<t<b$에서 $x'(t)>0$이므로 점 P는 양의 방향으로 움직인다. 　 답 ○

15 $x'(b)>0$이므로 $t=b$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다. 　 답 ×

16 $0<t<d$에서 $t=c$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P는 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다. 　 답 ○

원점에서 점 P까지의 거리는 $|x(t)|$

17 $0<t<d$에서 점 P는 $t=b$일 때 원점을 한 번 지난다. 　 답 ×

$x(t)=0$

18 시각 t에서의 점 P의 가속도는 $v'(t)$이고, $v'(a)=0$이므로 $t=a$에서의 점 P의 가속도는 0이다.

답 ○

19 $v(a)>0$이므로 $t=a$에서 점 P는 양의 방향으로 움직이고, $v(c)<0$이므로 $t=c$에서 점 P는 음의 방향으로 움직인다. 따라서 $t=a$에서와 $t=c$에서의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다. 　 답 ×

20 $b<t<c$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다. 　 답 ○

21 $v(c)<0$이므로 $t=c$에서 점 P는 움직이고 있다. 　 답 ×

점 P는 $v(t)=0$인 t에서 정지해 있다.

22 $0<t<d$에서 점 P는 $t=b$일 때 운동 방향을 한 번 바꾼다. 　 답 ○

개념 43 시각에 대한 변화율

본책 100쪽

23 (1) $l=5t^2+6t+4$에서 　 $\dfrac{dl}{dt}=10t+6$

(2) $t=3$에서의 물체의 길이의 변화율은

$10\cdot 3+6=36$

답 (1) $10t+6$　(2) 36

24 (1) $S=(t-2)(2t+3)=2t^2-t-6$에서

$\frac{dS}{dt}=4t-1$

(2) $t=2$에서의 물체의 넓이의 변화율은

$4\cdot 2-1=7$

답 (1) $4t-1$　(2) 7

25 (1) $V=(2t+1)^3=8t^3+12t^2+6t+1$에서

$\frac{dV}{dt}=24t^2+24t+6$

(2) $t=1$에서의 물체의 부피의 변화율은

$24\cdot 1^2+24\cdot 1+6=54$

답 (1) $24t^2+24t+6$　(2) 54

26 t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(4+2t)$ cm이므로 정사각형의 대각선의 길이를 l cm라 하면

$l=\sqrt{2}(4+2t)=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}t$

$\therefore \frac{dl}{dt}=2\sqrt{2}$

따라서 정사각형의 대각선의 길이의 변화율은

$2\sqrt{2}$ cm/s

답 $2\sqrt{2}$ cm/s

27 (1) t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(2+3t)$ cm이므로 정삼각형의 넓이를 S cm^2라 하면

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(2+3t)^2$

$\therefore \frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\cdot(2+3t)\cdot 3$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}(2+3t)$

따라서 t초 후의 정삼각형의 넓이의 변화율은

$\frac{3\sqrt{3}}{2}(2+3t)$ cm^2/s

(2) 2초 후의 정삼각형의 넓이의 변화율은

$\frac{3\sqrt{3}}{2}(2+3\cdot 2)=12\sqrt{3}$ (cm^2/s)

답 (1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}(2+3t)$ cm^2/s　(2) $12\sqrt{3}$ cm^2/s

28 (1) t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(5+t)$ cm이므로 정육면체의 부피를 V cm^3라 하면

$V=(5+t)^3=t^3+15t^2+75t+125$

$\therefore \frac{dV}{dt}=3t^2+30t+75$

따라서 t초 후의 정육면체의 부피의 변화율은

$(3t^2+30t+75)$ cm^3/s

(2) 1초 후의 정육면체의 부피의 변화율은

$3\cdot 1^2+30\cdot 1+75=108$ (cm^3/s)

답 (1) $(3t^2+30t+75)$ cm^3/s　(2) 108 cm^3/s

베이직쎈 BOX

원점을 지날 때 ➡ 위치가 0이다.

곱의 미분법을 이용하면
$\frac{dS}{dt}$
$=(2t+3)+2(t-2)$
$=4t-1$

한 변의 길이가 a인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}a$

함수 $f(x)$가 미분가능할 때
$y=\{f(x)\}^2$
➡ $y'=2f(x)f'(x)$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 101쪽

01 점 P가 원점을 지날 때 $x=0$이므로

$t^3-6t^2+9t=0$,　$t(t-3)^2=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

따라서 점 P가 출발 후 다시 원점을 지나는 것은 $t=3$일 때이고, 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+9$

이므로 $t=3$에서의 점 P의 속도는

$3\cdot 3^2-12\cdot 3+9=0$

답 0

02 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-6t-8$

속도가 4일 때　$6t^2-6t-8=4$

$6t^2-6t-12=0$,　$(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=12t-6$

이므로 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$12\cdot 2-6=18$

답 ④

03 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2kt+3$,

$a=\frac{dv}{dt}=6t+2k$

$t=2$에서의 점 P의 가속도가 8이므로

$6\cdot 2+2k=8$,　$2k=-4$

$\therefore k=-2$

따라서 $v=3t^2-4t+3$이므로 $t=2$에서의 점 P의 속도는

$3\cdot 2^2-4\cdot 2+3=7$

답 ②

04 두 점 P, Q가 만날 때 두 점 P, Q의 위치는 같으므로

$t^2-2t+4=3t$,　$t^2-5t+4=0$

$(t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=4$

즉 $t=4$에서 두 점 P, Q가 두 번째로 만난다.

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-2$,

$v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=3$

이므로 $t=4$에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$v_P=2\cdot 4-2=6$, $v_Q=3$

답 6, 3

05 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-24t+45$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$3t^2-24t+45=0$,　$(t-3)(t-5)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=5$

베이직쎈 BOX

따라서 점 P가 첫 번째로 운동 방향을 바꾸는 것은 $t=3$일 때이고, 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-24$$

이므로 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$$6\cdot3-24=-6$$

답 -6

06 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-4,$$

$$v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=2t-10$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

두 점의 속도의 부호가 반대이다.

$$(2t-4)(2t-10)<0$$

$$(t-2)(t-5)<0$$

$$\therefore 2<t<5$$

답 ②

07 ㄱ. 점 P가 원점을 지날 때 $x=0$이므로

$$t^3-4t^2+4t=0, \qquad t(t-2)^2=0$$

$$\therefore t=2\ (\because t>0)$$

따라서 점 P가 출발 후 다시 원점에 도착하는 시각은 2이다.

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-8t+4$$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$$3t^2-8t+4=0$$

$$(3t-2)(t-2)=0$$

$$\therefore t=\frac{2}{3} \text{ 또는 } t=2$$

따라서 점 P는 $t=\frac{2}{3}$, $t=2$에서 운동 방향을 바꾸므로 두 번 바꾼다.

ㄷ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-8$$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$$6\cdot1-8=-2$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

08 (1) 제동을 건 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=32-8t$$

자동차가 정지할 때 $v=0$이므로

$$32-8t=0 \qquad \therefore t=4$$

따라서 제동을 건 후 자동차가 정지할 때까지 걸린 시간은 4초이다.

(2) 제동을 건 후 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는 4초 동안 움직인 거리와 같으므로

$$32\cdot4-4\cdot4^2=64\ (\text{m})$$

답 (1) 4초 (2) 64 m

09 제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=36-1.2t$$

열차가 정지할 때 $v=0$이므로

$$36-1.2t=0 \qquad \therefore t=30$$

따라서 열차가 30초 동안 움직인 거리는

$$36\times30-0.6\times30^2=540\ (\text{m})$$

답 ⑤

10 제동을 건 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=24-2at$$

이때 자동차에 제동을 건 지 3초 후에 정지하므로 $t=3$에서 $v=0$이다.

즉 $24-6a=0$이므로 $\qquad a=4$

답 ④

11 t초 후의 공의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=20-10t$$

공이 최고 높이에 도달할 때 $v=0$이므로

$$20-10t=0 \qquad \therefore t=2$$

따라서 2초 후의 지면으로부터의 높이는

$$20\cdot2-5\cdot2^2=20\ (\text{m})$$

답 ③

12 로켓이 지면에 떨어질 때 $h=0$이므로

$$15+22t-5t^2=0, \qquad (5t+3)(t-5)=0$$

$$\therefore t=5\ (\because t>0)$$

t초 후의 로켓의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=22-10t$$

이므로 $t=5$에서의 로켓의 속도는

$$22-10\cdot5=-28\ (\text{m/s})$$

답 -28 m/s

13 물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=30-10t$$

물체가 최고 높이에 도달할 때 $v=0$이므로

$$30-10t=0 \qquad \therefore t=3$$

따라서 물체의 3초 후의 지면으로부터의 높이는

$$30\cdot3-5\cdot3^2=45\ (\text{m})$$

이므로 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

(물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리)
=(물체가 지면에서 최고 높이까지 올라간 거리)
+(물체가 최고 높이에서 지면까지 떨어진 거리)
=2(물체가 도달하는 최고 높이)

$$2\cdot45=90\ (\text{m})$$

답 90 m

14 주어진 그래프에서 점 P가 원점을 지나는 시각은 $t=2$ 또는 $t=4$ 또는 $t=5$이고, 이 중에서 처음으로 원점을 지날 때는 $t=2$이므로 구하는 속도는 $x'(2)$의 값과 같다.

답 ③

15 ① $x'(1)=0$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도는 0이다.

② $x'(2)=0$이고 $t=2$의 좌우에서 $x'(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=2$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

③ $x'(4)>0$이므로 $t=4$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

④ $2<t<6$에서 점 P는 $t=3$일 때 원점을 한 번 지난다.

베이직쎈 BOX

⑤ $0<t<6$에서 $t=5$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P는 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

답 ④

16 ㄱ. $1<t<3$에서 $v'(t)=0$이므로 점 P의 가속도는 0으로 일정하다.

ㄴ. $v'(4)<0$이므로 $t=4$에서 점 P의 가속도는 0이 아니다.

ㄷ. $v(5)<0$이므로 $t=5$에서 점 P는 음의 방향으로 움직이고, $v(7)>0$이므로 $t=7$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다. 따라서 $t=5$에서와 $t=7$에서의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

ㄹ. $0<t<7$에서 점 P는 $t=4$, $t=6$일 때 운동 방향을 바꾸므로 두 번 바꾼다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

17 t초 후의 원의 반지름의 길이는 $(4+8t)$ cm이므로 원의 넓이를 S cm²라 하면

$$S=\pi(4+8t)^2$$

원의 넓이가 400π cm²일 때

$$\pi(4+8t)^2=400\pi, \qquad t^2+t-6=0$$

다음과 같이 풀 수도 있다.
$\pi(4+8t)^2=400\pi$
$16\pi(2t+1)^2=400\pi$
$(2t+1)^2=25$
$2t+1=\pm5$
$t=2$ ($\because t>0$)

$$(t+3)(t-2)=0$$

$$\therefore t=2 \ (\because t>0)$$

한편 넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt}=\pi\cdot2\cdot(4+8t)\cdot8=64\pi(1+2t)$$

이므로 $t=2$에서의 넓이의 변화율은

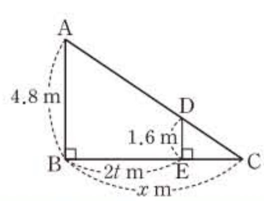
$$64\pi\cdot(1+2\cdot2)=320\pi \ (\text{cm}^2/\text{s})$$

답 320π cm²/s

18 (1) 초속 2 m로 걷고 있으므로 t초 후의 가로등 바로 밑에서부터 승규까지의 거리는

$2t$ m

(2) 오른쪽 그림에서



△ABC∽△DEC

(AA 닮음)이므로

△ABC와 △DEC에서
∠C는 공통,
∠ABC=∠DEC
이므로
△ABC∽△DEC
(AA 닮음)

$4.8:1.6$

$=x:(x-2t)$

$3(x-2t)=x$

$2x=6t \qquad \therefore x=3t$

(3) 그림자의 앞 끝까지의 거리 x m가 $x=3t$이므로 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도는

$$\frac{dx}{dt}=3$$

즉 3 m/s이다.

(4) 그림자의 길이를 l m라 하면

(그림자의 길이)$=\overline{EC}$

$$l=3t-2t=t$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt}=1$$

즉 1 m/s이다.

답 (1) $2t$ m (2) $x=3t$ (3) 3 m/s (4) 1 m/s

19 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $(5+t)$ cm, 높이는 $(10-t)$ cm이므로 원기둥의 부피를 V cm³라 하면

$10-t>0$이므로
$t<10$

$$V=\pi(5+t)^2(10-t) \ (0<t<10)$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dV}{dt}&=2\pi(5+t)(10-t)-\pi(5+t)^2\\&=\pi(5+t)\{2(10-t)-(5+t)\}\\&=\pi(5+t)(15-3t)\\&=3\pi(5+t)(5-t)\end{aligned}$$

$\frac{dV}{dt}=0$일 때

$$3\pi(5+t)(5-t)=0$$

$$\therefore t=5 \ (\because 0<t<10)$$

따라서 $t=5$에서의 원기둥의 부피는

$$\pi\cdot(5+5)^2\cdot(10-5)=500\pi \ (\text{cm}^3)$$

답 ④

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 104쪽

01 전략 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4+4x^3-8x^2$으로 놓으면

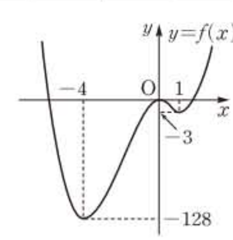
$$\begin{aligned}f'(x)&=4x^3+12x^2-16x\\&=4x(x+4)(x-1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$$x=-4 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-128	↗	0	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



답 ④

02 전략 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $x^3+3x^2-1-k=0$에서

$$x^3+3x^2-1=k$$

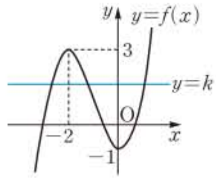
$f(x)=x^3+3x^2-1$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-1<k<3$

답 ③

03 전략 방정식 $f(x)=k$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표의 부호를 알아본다.

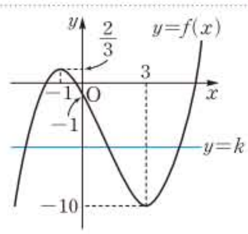
풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-1$로 놓으면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	-10	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



베이직쎈 BOX: $f(0)=-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ -1)$을 지난다.

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고, 한 개는 음수이어야 하므로

$-10<k<-1$

따라서 정수 k는 $-9,\ -8,\ -7,\ \cdots,\ -2$의 8개이다.

답 ③

04 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서만 만나려면 방정식

$x^3-2x^2-6x=x^2+18x+k$, 즉

$x^3-3x^2-24x=k$ …… ㉠

가 서로 다른 두 실근만을 가져야 한다.

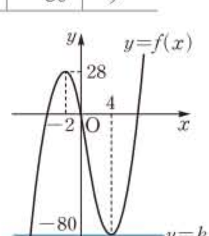
$f(x)=x^3-3x^2-24x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28	↘	-80	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근만을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나야 하므로

$k=-80$ ($\because k<0$)

답 ⑤

05 전략 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립하려면 그 구간에서 (함수 $f(x)$의 최솟값)≥ 0이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-x^2-8x-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x-8=(3x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\le x\le 3$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-k-8$	↘	$-k-12$	↗	$-k-6$

따라서 $1\le x\le 3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-k-12$를 갖는다.

베이직쎈 BOX: $-k-12<-k-8<-k-6$

$1\le x\le 3$일 때, $f(x)\ge 0$이려면 $-k-12\ge 0$이어야 하므로 $k\le -12$

즉 실수 k의 최댓값은 -12이다.

답 ②

06 전략 시각 t에서의 위치 x에 대하여 (속도)$=\frac{dx}{dt}$, (가속도)$=\frac{dv}{dt}$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+15$

이므로 $t=2$에서의 점 P의 속도는

$3\cdot 2^2-18\cdot 2+15=-9$

ㄴ. 점 P가 원점을 지날 때 $x=0$이므로

$t^3-9t^2+15t=0$, $t(t^2-9t+15)=0$

$\therefore t=\frac{9\pm\sqrt{21}}{2}$ ($\because t>0$)

베이직쎈 BOX: $t=\frac{9-\sqrt{21}}{2}=\frac{\sqrt{81}-\sqrt{21}}{2}>0$

따라서 출발 후 원점을 두 번 지난다.

ㄷ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$3t^2-18t+15=0$, $(t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

$t=1$에서의 점 P의 위치는

$1^3-9\cdot 1^2+15\cdot 1=7$

$t=5$에서의 점 P의 위치는

$5^3-9\cdot 5^2+15\cdot 5=-25$

따라서 점 P는 $x=-25$, $x=7$에서 운동 방향을 바꾼다.

ㄹ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=6t-18$

이므로 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$6\cdot 3-18=0$

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

07 전략 먼저 기차가 정지할 때까지 걸린 시간을 구한다.

풀이 제동을 건 지 t초 후의 기차의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=12-0.6t$

기차가 정지할 때 $v=0$이므로

$12-0.6t=0$ $\therefore t=20$

따라서 기차가 20초 동안 움직인 거리는

$12\times 20-0.3\times 20^2=120$ (m)

답 ③

베이직쎈 BOX

08 전략 로켓이 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 로켓의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=15-10t$$

로켓이 최고 높이에 도달할 때 $v=0$이므로

$$15-10t=0 \qquad \therefore t=\frac{3}{2}$$

따라서 $\frac{3}{2}$초 후의 이 로켓의 지면으로부터의 높이는

$$10+15\cdot\frac{3}{2}-5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=21.25\ (\text{m})$$

답 ①

09 전략 위치의 그래프에서 접선의 기울기가 속도임을 이용한다.

$x'(t)$

풀이 ① $x'(b)=0$이므로 $t=b$에서 점 P의 속도는 0이다.

② $x(c)=0$이므로 $t=c$에서 점 P는 원점을 지난다.

③ $d<t<e$에서 $x'(t)<0$이므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

④ $x'(d)=0$이므로 $t=d$에서의 점 P의 속도는 0이고 $b<t<d$에서 $x'(t)>0$이므로 $t=d$일 때 점 P의 속도는 최대가 아니다.

⑤ $0<t<e$에서 점 P는 $t=b$, $t=d$일 때 운동 방향을 바꾸므로 두 번 바꾼다.

운동 방향을 바꿀 때 $x'(t)=0$이고 $x'(b)=0$ $x'(d)=0$이다.

답 ④

10 전략 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $x^4-2x^2-k=0$에서

$$x^4-2x^2=k$$

$f(x)=x^4-2x^2$으로 놓으면

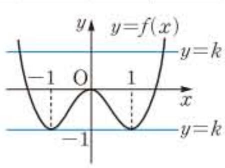
$$f'(x)=4x^3-4x$$
$$=4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 실근을 2개만 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서만 만나야 하므로

$$k=-1 \text{ 또는 } k>0$$

주어진 방정식은 $k=-1$일 때 중근 2개를 갖고, $k>0$일 때 서로 다른 두 실근과 두 허근을 갖는다.

따라서 정수 k의 최솟값은 -1이다. 답 -1

11 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 접하려면 방정식 $f(x)=g(x)$가 중근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 주어진 곡선과 직선이 접하려면 방정식

$x^3-3x+6=9x+k$, 즉

$x^3-12x+6=k$ ······ ㉠

가 중근을 가져야 한다. ···→ ❶

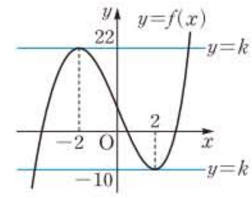
$f(x)=x^3-12x+6$으로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$ ···→ ❷

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	22	↘	-10	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 ㉠이 중근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나야 하므로

$$k=-10 \text{ 또는 } k=22$$ ···→ ❸

즉 구하는 모든 실수 k의 값의 곱은

$$-10\cdot22=-220$$ ···→ ❹

답 -220

단계	채점 기준	비율
❶	방정식이 중근을 가져야 함을 알 수 있다.	20%
❷	$f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20%
❸	곡선과 직선이 접하도록 하는 k의 값을 구할 수 있다.	50%
❹	k의 값의 곱을 구할 수 있다.	10%

12 전략 모든 실수에서 부등식 $f(x)<0$이 성립하려면 (함수 $f(x)$의 최댓값)<0이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^4-4x+a^2+a-9$로 놓으면

$$f'(x)=-4x^3-4$$
$$=-4(x+1)(x^2-x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because x^2-x+1>0$)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이면서 최대이므로 $f(x)$의 최댓값은

$$f(-1)=a^2+a-6$$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이려면

$$a^2+a-6<0, \qquad (a+3)(a-2)<0$$
$$\therefore -3<a<2$$

즉 정수 a는 -2, -1, 0, 1이므로 구하는 합은

$$-2+(-1)+0+1=-2$$

답 -2

13 전략 시각 t에서의 위치 x에 대하여 (속도)$=\frac{dx}{dt}$임을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$$v_P=\frac{dx_P}{dt}=t^2+3,\ v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=4t-1$$ ···→ ❶

이므로 $t^2+3=4t-1$에서

$$t^2-4t+4=0, \qquad (t-2)^2=0$$
$$\therefore t=2$$ ···→ ❷

06 도함수의 활용 (3)

따라서 $t=2$에서의 두 점 P, Q의 위치는

$$x_{\mathrm{P}}=\frac{1}{3}\cdot 2^3+3\cdot 2-\frac{2}{3}=8,$$
$$x_{\mathrm{Q}}=2\cdot 2^2-2-1=5$$

이므로 구하는 두 점 사이의 거리는

$8-5=3$ ⋯ ❸

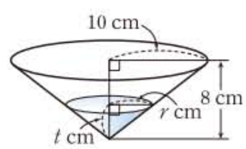
답 3

단계	채점 기준	비율
❶	두 점 P, Q의 속도를 구할 수 있다.	30 %
❷	두 점 P, Q의 속도가 같아질 때의 시각을 구할 수 있다.	40 %
❸	두 점 P, Q 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

14 전략 시각 t에서의 부피 V의 변화율은 $\frac{dV}{dt}$임을 이용한다.

풀이 (1) 매초 1 cm씩 수면의 높이가 올라가므로 t초 후의 수면의 높이는 t cm ⋯ ❶

(2) t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면 오른쪽 그림에서



$10:8=r:t$

$\therefore r=\frac{5}{4}t$ ⋯ ❷

(3) 물의 부피를 V cm³라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 t=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{5}{4}t\right)^2\cdot t$$
$$=\frac{25}{48}\pi t^3$$

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{25}{16}\pi t^2$ ⋯ ❸

따라서 4초 후의 물의 부피의 변화율은

$\frac{25}{16}\pi\cdot 4^2=25\pi\ (\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$ ⋯ ❹

답 (1) t cm (2) $\frac{5}{4}t$ cm (3) 25π cm³/s

단계	채점 기준	비율
❶	수면의 높이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	10 %
❷	수면의 반지름의 길이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸	물의 부피의 변화율을 구할 수 있다.	50 %
❹	4초 후의 물의 부피의 변화율을 구할 수 있다.	20 %

베이직쎈 BOX

밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$f(x)$를 적분한 후 미분하면 ➡ $f(x)$
$f(x)$를 미분한 후 적분하면 ➡ $f(x)+C$
(단, C는 적분상수)

Ⅲ. 다항함수의 적분법

07 부정적분

15 부정적분

개념 44 부정적분

본책 108쪽

01 답 $2x+C$ 　 2, $2x$

02 $(5x)'=5$이므로

$\int 5\,dx=5x+C$ 　 답 $5x+C$

03 $(-x^2)'=-2x$이므로

$\int(-2x)\,dx=-x^2+C$ 　 답 $-x^2+C$

04 $(x^3)'=3x^2$이므로

$\int 3x^2\,dx=x^3+C$ 　 답 x^3+C

05 $(x^4)'=4x^3$이므로

$\int 4x^3\,dx=x^4+C$ 　 답 x^4+C

06 답 $f(x)=3$ 　 3

07 $f(x)=(x^2+5x+C)'=2x+5$

답 $f(x)=2x+5$

08 $f(x)=(-2x^2+3x+C)'=-4x+3$

답 $f(x)=-4x+3$

09 $f(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-6x+C\right)'=x^2-6$

답 $f(x)=x^2-6$

10 $f(x)=(x^3+4x^2+C)'=3x^2+8x$

답 $f(x)=3x^2+8x$

개념 45 부정적분과 도함수의 관계

본책 109쪽

11 (1) $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\int(x^2+2x)\,dx=x^2+2x$

(2) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+2x)\right\}dx=x^2+2x+C$

답 (1) x^2+2x (2) x^2+2x+C

12 $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\int(-x^2+4)\,dx=-x^2+4$

답 $-x^2+4$

13 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)\,dx=f(x)$이므로

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int (x^3-9x^2+1)\,dx=x^3-9x^2+1$

답 x^3-9x^2+1

14 $\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^2+6x)\right\}dx=x^2+6x+C$

답 x^2+6x+C

15 $\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^3-5x^2+5x)\right\}dx=x^3-5x^2+5x+C$

답 x^3-5x^2+5x+C

16 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)\,dx=2x^2-5x+2$이므로

$f(x)=2x^2-5x+2$

$\therefore f(1)=2-5+2=-1$ 답 -1

17 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)\,dx=4x^3-3x^2+6x$이므로

$f(x)=4x^3-3x^2+6x$

$\therefore f(1)=4-3+6=7$ 답 7

18 답 12

$6x^2-7x$, 2, $6x^2-7x+2$, 12

19 $F(x)=\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^3+9x^2-8x)\right\}dx$

$=x^3+9x^2-8x+C$

$F(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $F(x)=x^3+9x^2-8x+2$이므로

$F(2)=8+36-16+2=30$ 답 30

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 110쪽

01 $f(x)=(-5x^2+2x+C)'=-10x+2$이므로

$f(2)=-20+2=-18$ 답 ④

02 $xf(x)=(2x^3+9x^2-3)'$

$=6x^2+18x=x(6x+18)$

이므로

$f(x)=6x+18$

$\therefore f(-1)=-6+18=12$ 답 12

03 $6x^2-4x+p=(qx^3+rx^2-8x+C)'$

$=3qx^2+2rx-8$

이므로

$6=3q,\ -4=2r,\ p=-8$

$\therefore p=-8,\ q=2,\ r=-2$

$\therefore p+q+r=-8$ 답 ①

베이직쎈 BOX

이차함수의 최대·최소

$y=ax^2+bx+c$ 꼴은 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 최대·최소를 구한다.

① $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다.

② $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

주어진 조건에서 $f(x)$의 최솟값이 2이다.

ax^2+bx+c
$=a'x^2+b'x+c'$
이 x에 대한 항등식이면
$a=a',\ b=b',\ c=c'$

04 $f(x)=F'(x)=(x^3+ax^2+bx)'=3x^2+2ax+b$

$f(0)=2$에서 $b=2$

따라서 $f(x)=3x^2+2ax+2$이므로

$f'(x)=6x+2a$

$f'(0)=-1$에서 $2a=-1$ $\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore ab=-\dfrac{1}{2}\cdot 2=-1$ 답 -1

베쎈TIP

$F(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이다.

$\Longleftrightarrow F'(x)=f(x)$

$\Longleftrightarrow$ 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$이다.

$\Longleftrightarrow \displaystyle\int f(x)dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)

05 $F(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int xf(x)\,dx=xf(x)$

$=x(2x^2-7x+4)$

$=2x^3-7x^2+4x$

이므로

$F(3)=54-63+12=3$ 답 ③

06 $g(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)\,dx=f(x)=x^3-2x$이므로

$g(2)=8-4=4$

$h(x)=\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=x^3-2x+C$

$h(1)=2$이므로 $1-2+C=2$

$\therefore C=3$

따라서 $h(x)=x^3-2x+3$이므로

$h(-1)=-1+2+3=4$

$\therefore g(2)+h(-1)=4+4=8$ 답 ②

07 $f(x)=\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^2+4x)\right\}dx=x^2+4x+C$

$=(x+2)^2+C-4$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 $C-4$를 가지므로

$C-4=2$ $\therefore C=6$

$\therefore f(x)=x^2+4x+6$

답 $f(x)=x^2+4x+6$

16 부정적분의 계산

개념 46 부정적분의 계산

본책 111쪽

01 $\displaystyle\int x^3\,dx=\dfrac{1}{3+1}x^{3+1}+C=\dfrac{1}{4}x^4+C$

답 $\dfrac{1}{4}x^4+C$

02 $\displaystyle\int x^{10}\,dx=\dfrac{1}{10+1}x^{10+1}+C=\dfrac{1}{11}x^{11}+C$

답 $\dfrac{1}{11}x^{11}+C$

03 $\int y^5\,dy=\frac{1}{5+1}y^{5+1}+C=\frac{1}{6}y^6+C$ 답 $\frac{1}{6}y^6+C$

04 $\int t^8\,dt=\frac{1}{8+1}t^{8+1}+C=\frac{1}{9}t^9+C$ 답 $\frac{1}{9}t^9+C$

05 $\int 4x\,dx=4\int x\,dx=4\cdot\frac{1}{2}x^2+C$
$=2x^2+C$ 답 $2x^2+C$

06 $\int 6x^2\,dx=6\int x^2\,dx=6\cdot\frac{1}{3}x^3+C$
$=2x^3+C$ 답 $2x^3+C$

07 $\int 7\,dx=7\int dx=7x+C$
답 $7x+C$

08 답 $2x$, x, 4, $\frac{1}{2}$, 4, 4

09 $\int(x^2-6x)\,dx=\int x^2\,dx-\int 6x\,dx$
$=\int x^2\,dx-6\int x\,dx$
$=\frac{1}{3}x^3-6\cdot\frac{1}{2}x^2+C$
$=\frac{1}{3}x^3-3x^2+C$
답 $\frac{1}{3}x^3-3x^2+C$

10 $\int(x^3+9x^2-6x)\,dx$
$=\int x^3\,dx+\int 9x^2\,dx-\int 6x\,dx$
$=\int x^3\,dx+9\int x^2\,dx-6\int x\,dx$
$=\frac{1}{4}x^4+9\cdot\frac{1}{3}x^3-6\cdot\frac{1}{2}x^2+C$
$=\frac{1}{4}x^4+3x^3-3x^2+C$
답 $\frac{1}{4}x^4+3x^3-3x^2+C$

11 $\int(2y^3-3y)\,dy=\int 2y^3\,dy-\int 3y\,dy$
$=2\int y^3\,dy-3\int y\,dy$
$=2\cdot\frac{1}{4}y^4-3\cdot\frac{1}{2}y^2+C$
$=\frac{1}{2}y^4-\frac{3}{2}y^2+C$
답 $\frac{1}{2}y^4-\frac{3}{2}y^2+C$

12 $\int(-3t^2+6t-1)\,dt$
$=\int(-3t^2)\,dt+\int 6t\,dt-\int dt$
$=-3\int t^2\,dt+6\int t\,dt-\int dt$
$=-3\cdot\frac{1}{3}t^3+6\cdot\frac{1}{2}t^2-t+C$
$=-t^3+3t^2-t+C$ 답 $-t^3+3t^2-t+C$

베이직쎈 BOX

$\int(x^2+x)\,dx$
$=\int x^2\,dx+\int x\,dx$
$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

$\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$
$=\int\{f(x)\pm g(x)\}\,dx$
(복호동순)

13 $\int x(x+1)\,dx=\int(x^2+x)\,dx$
$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$
답 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

14 $\int(3x+2)(x-6)\,dx=\int(3x^2-16x-12)\,dx$
$=x^3-8x^2-12x+C$
답 $x^3-8x^2-12x+C$

15 $\int(2x+1)^2\,dx=\int(4x^2+4x+1)\,dx$
$=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$
답 $\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$

16 $\int\frac{x^2-1}{x-1}\,dx=\int\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\,dx$
$=\int(x+1)\,dx$
$=\frac{1}{2}x^2+x+C$
답 $\frac{1}{2}x^2+x+C$

17 $\int\frac{x^3+8}{x+2}\,dx=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}\,dx$
$=\int(x^2-2x+4)\,dx$
$=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$
답 $\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$

18 답 $2x$, $3x$, $\frac{3}{2}$, 2

19 $\int(3x^2+1)\,dx+\int(2x-3)\,dx$
$=\int(3x^2+1+2x-3)\,dx$
$=\int(3x^2+2x-2)\,dx$
$=x^3+x^2-2x+C$ 답 x^3+x^2-2x+C

20 $\int(x^2+5x-4)\,dx-\int(x^2-3x)\,dx$
$=\int\{x^2+5x-4-(x^2-3x)\}\,dx$
$=\int(8x-4)\,dx$
$=4x^2-4x+C$ 답 $4x^2-4x+C$

21 $\int(4x^2-x-3)\,dx-\int(x^2+2x-2)\,dx$
$=\int\{4x^2-x-3-(x^2+2x-2)\}\,dx$
$=\int(3x^2-3x-1)\,dx$
$=x^3-\frac{3}{2}x^2-x+C$ 답 $x^3-\frac{3}{2}x^2-x+C$

베이직쎈 BOX

22 $\int(6x-1)\,dx-\int(2x+3)^2\,dx$

$=\int(6x-1)\,dx-\int(4x^2+12x+9)\,dx$

$=\int\{6x-1-(4x^2+12x+9)\}\,dx$

$=\int(-4x^2-6x-10)\,dx$

$=-\frac{4}{3}x^3-3x^2-10x+C$

답 $-\frac{4}{3}x^3-3x^2-10x+C$

23 $\int(x+1)^2\,dx+\int(x-1)^2\,dx$

$=\int(x^2+2x+1)\,dx+\int(x^2-2x+1)\,dx$

$=\int(x^2+2x+1+x^2-2x+1)\,dx$

$=\int(2x^2+2)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3+2x+C$ 　　답 $\frac{2}{3}x^3+2x+C$

24 $\int\frac{x^2}{x-3}\,dx-\int\frac{9}{x-3}\,dx$

$=\int\frac{x^2-9}{x-3}\,dx$

$=\int\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}\,dx$

$=\int(x+3)\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2+3x+C$ 　　답 $\frac{1}{2}x^2+3x+C$

개념 47 도함수가 주어질 때 함수 구하기 본책 113쪽

25 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(8x+3)\,dx$

$=4x^2+3x+C$

$f(0)=4$이므로 　$C=4$

$\therefore f(x)=4x^2+3x+4$

답 $f(x)=4x^2+3x+4$

도함수 $f'(x)$가 주어지면 $f(x)=\int f'(x)\,dx$임을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낼 수 있다.

26 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-2x^2+4x+1)\,dx$

$=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+x+C$

$f(-1)=1$이므로

$\frac{2}{3}+2-1+C=1$ 　$\therefore C=-\frac{2}{3}$

$\therefore f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+x-\frac{2}{3}$

답 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+x-\frac{2}{3}$

27 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x^3+9x^2-2x)\,dx$

$=x^4+3x^3-x^2+C$

$f(1)=5$이므로

$1+3-1+C=5$ 　$\therefore C=2$

$\therefore f(x)=x^4+3x^3-x^2+2$

답 $f(x)=x^4+3x^3-x^2+2$

28 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x+2)(3x-1)\,dx$

$=\int(3x^2+5x-2)\,dx$

$=x^3+\frac{5}{2}x^2-2x+C$

$f(0)=3$이므로 　$C=3$

$\therefore f(x)=x^3+\frac{5}{2}x^2-2x+3$

답 $f(x)=x^3+\frac{5}{2}x^2-2x+3$

29 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2+2x)\,dx$

$=x^3+x^2+C$

$f(0)=-2$이므로 　$C=-2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-2$이므로

$f(1)=1+1-2=0$ 　　답 0

30 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x^2-8x+5)\,dx$

$=2x^3-4x^2+5x+C$

$f(-1)=3$이므로

$-2-4-5+C=3$ 　$\therefore C=14$

따라서 $f(x)=2x^3-4x^2+5x+14$이므로

$f(1)=2-4+5+14=17$ 　　답 17

31 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x^2-x+7)\,dx$

$=-x^3-\frac{1}{2}x^2+7x+C$

$f(2)=5$이므로

$-8-2+14+C=5$ 　$\therefore C=1$

따라서 $f(x)=-x^3-\frac{1}{2}x^2+7x+1$이므로

$f(1)=-1-\frac{1}{2}+7+1=\frac{13}{2}$ 　　답 $\frac{13}{2}$

32 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x-1)(x^2+x+1)\,dx$

$=\int(x^3-1)\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4-x+C$

$f(-2)=1$이므로

$4+2+C=1$ 　$\therefore C=-5$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x-5$이므로

$f(1)=\frac{1}{4}-1-5=-\frac{23}{4}$ 　　답 $-\frac{23}{4}$

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 114쪽

베이직쎈 BOX

01 $f(x)=\int(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)\,dx$
$=x+x^2+x^3+x^4+x^5+C$

$f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=x+x^2+x^3+x^4+x^5+2$이므로
$f(1)=1+1+1+1+1+2=7$

답 ③

02 $f(x)=\int(x-1)(x+1)(x^2+1)\,dx$
$=\int(x^4-1)\,dx$
$=\frac{1}{5}x^5-x+C$

$(x-1)(x+1)(x^2+1)$
$=(x^2-1)(x^2+1)$
$=x^4-1$

$f(1)=\frac{1}{5}$이므로
$\frac{1}{5}-1+C=\frac{1}{5}$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x+1$이므로
$f(-1)=-\frac{1}{5}+1+1=\frac{9}{5}$

답 $\frac{9}{5}$

03 $\int\frac{2x^2}{x+2}\,dx-8\int\frac{1}{x+2}\,dx$
$=\int\frac{2x^2}{x+2}\,dx-\int\frac{8}{x+2}\,dx$
$=\int\frac{2x^2-8}{x+2}\,dx$
$=\int\frac{2(x+2)(x-2)}{x+2}\,dx$
$=\int(2x-4)\,dx$
$=x^2-4x+C$

$2x^2-8$
$=2(x^2-4)$
$=2(x+2)(x-2)$

답 ②

04 $f(x)=\int(1+\sqrt{x})^2dx+\int(1-\sqrt{x})^2dx$
$=\int(1+2\sqrt{x}+x)\,dx+\int(1-2\sqrt{x}+x)\,dx$
$=\int(1+2\sqrt{x}+x+1-2\sqrt{x}+x)\,dx$
$=\int(2x+2)\,dx$
$=x^2+2x+C$

$f(-1)=-5$이므로
$1-2+C=-5$ $\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=x^2+2x-4$이므로
$f(2)=4+4-4=4$

답 ⑤

05 $2\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx$
$=\int 2f(x)\,dx-\int g(x)\,dx$
$=\int\{2f(x)-g(x)\}\,dx$
$=\int(4x-9)\,dx$
$=2x^2-9x+C$

답 $2x^2-9x+C$

06 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx$
$=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}\,dx$
$=\int(x^2-1)\,dx$
$=\frac{1}{3}x^3-x+C$

$f(1)=-\frac{1}{3}$이므로
$\frac{1}{3}-1+C=-\frac{1}{3}$ $\therefore C=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{1}{3}$이므로
$f(2)=\frac{8}{3}-2+\frac{1}{3}=1$

답 ③

07 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2+ax-4)\,dx$
$=x^3+\frac{1}{2}ax^2-4x+C$

$f(0)=-3$이므로 $C=-3$

따라서 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}ax^2-4x-3$이므로 $f(-1)=2$에서
$-1+\frac{1}{2}a+4-3=2$
$\therefore a=4$

답 ⑤

08 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-6x^2+4x+3)\,dx$
$=-2x^3+2x^2+3x+C_1$

$f(1)=4$이므로
$-2+2+3+C_1=4$ $\therefore C_1=1$

따라서 $f(x)=-2x^3+2x^2+3x+1$이므로
$\int f(x)\,dx=\int(-2x^3+2x^2+3x+1)\,dx$
$=-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x+C$

답 ②

09 $f'(x)=x^2-3$이므로

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x^2-3)\,dx$
$=\frac{1}{3}x^3-3x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 1)$을 지나므로
$1=\frac{8}{3}-6+C$ $\therefore C=\frac{13}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x+\frac{13}{3}$이므로
$f(-1)=-\frac{1}{3}+3+\frac{13}{3}=7$

답 ④

10 답 (가) 9 (나) -2 (다) 10 (라) 12

베쎈TIP

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로
$$f(x)=\begin{cases}-2x^2+12 & (x>1)\\ x^3+9 & (x\le 1)\end{cases}$$
와 같이 등호를 아래 식의 x의 값의 범위에 포함하여 나타내도 관계없다.

베이직쎈 BOX

11 $f'(x)=\begin{cases} -3x^2+1 & (x>-1) \\ 2x-3 & (x<-1) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+x+C_1 & (x>-1) \\ x^2-3x+C_2 & (x<-1) \end{cases}$$

$f(2)=3$이므로

$-8+2+C_1=3 \qquad \therefore C_1=9$

또 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$$

$\lim_{x\to-1+}(-x^3+x+9)=\lim_{x\to-1-}(x^2-3x+C_2)$에서

$1-1+9=1+3+C_2 \qquad \therefore C_2=5$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -x^3+x+9 & (x\geq-1) \\ x^2-3x+5 & (x<-1) \end{cases}$이므로

$f(-2)=4+6+5=15$

답 15

> $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x>a) \\ h(x) & (x<a) \end{cases}$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a-} h(x)=f(a)$

12 (1) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 -1을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-6x)\,dx$$
$$=x^3-3x^2+C$$

이므로 $f(0)=-1$에서 $\qquad C=-1$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-1$

> $f(x)$의 극댓값은 $f(0)$이고 이 값이 -1이므로 $f(0)=-1$

(2) $f(x)$의 극솟값은

$f(2)=8-12-1=-5$

답 (1) $f(x)=x^3-3x^2-1$ (2) -5

13 $y=f'(x)$의 그래프가 두 점 $(0, 0)$, $(-2, 0)$을 지나므로

$f'(x)=ax(x+2)$ $(a<0)$

> 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이면 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$로 놓을 수 있다. (단, a는 상수)

> 주어진 $y=f'(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

라 하면 $f'(-1)=2$에서

$a\cdot(-1)\cdot1=2 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore f'(x)=-2x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=-2$에서 극솟값 $\frac{1}{3}$을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-2x^2-4x)\,dx$$
$$=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$$

> $f'(x)=-2x(x+2)$
> $=-2x^2-4x$

이므로 $f(-2)=\frac{1}{3}$에서

$\frac{16}{3}-8+C=\frac{1}{3} \qquad \therefore C=3$

즉 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+3$이므로 극댓값은

$f(0)=3$

답 ①

14 $y=f'(x)$의 그래프가 두 점 $(0, 0)$, $(3, 0)$을 지나므로

$f'(x)=ax(x-3)$ $(a>0)$

> 주어진 $y=f'(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

이라 하면 $f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 16, $x=3$에서 극솟값 7을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(ax^2-3ax)\,dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3-\frac{3}{2}ax^2+C$$

> $f'(x)=ax(x-3)$
> $=ax^2-3ax$

이므로 $f(0)=16$에서 $\qquad C=16$

$f(3)=7$에서

$9a-\frac{27}{2}a+16=7$

$-\frac{9}{2}a=-9 \qquad \therefore a=2$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+16$

답 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+16$

15 답 (가) $f(x)$ (나) $2x$ (다) $-3x+2$ (라) $-\frac{3}{2}x^2+2x$ (마) $-\frac{3}{2}x^2+2x+1$

16 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=6x^2+2x$

$xf'(x)=-6x^2-2x$

$\therefore f'(x)=-6x-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-6x-2)\,dx$
$=-3x^2-2x+C$

$f(1)=2$이므로

$-3-2+C=2 \qquad \therefore C=7$

따라서 $f(x)=-3x^2-2x+7$이므로

$f(2)=-12-4+7=-9$

답 ⑤

17 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f(x)=12x^3+12x^2-2x$

$xf(x)=12x^3+12x^2-2x$

$\therefore f(x)=12x^2+12x-2$
$=12\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-5$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 최솟값 -5를 갖는다.

답 -5

07 부정적분

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 117쪽

01 전략 부정적분의 정의를 이용한다.

풀이 $f(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C\right)'=x^2-x+1$이므로

$f(-1)=1+1+1=3$ 답 ⑤

02 전략 미분계수의 정의를 이용하여 구하는 값을 도함수 $f'(x)$를 사용하여 나타낸다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f(x)=\int(x^2+2x-4)\,dx$에서

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int(x^2+2x-4)dx=x^2+2x-4$

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=2(1+2-4)=-2$ 답 ③

03 전략 $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$임을 이용한다.

풀이 $\frac{d}{dx}\int(x^2-ax+2)\,dx=x^2-ax+2$이므로

$x^2-ax+2=bx^2+4x+c$

따라서 $1=b$, $-a=4$, $2=c$이므로

$a=-4$, $b=1$, $c=2$

$\therefore a+b+c=-1$ 답 ④

04 전략 $\int\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}dx=g(x)+C$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(-2x^2+3x)\right\}dx=-2x^2+3x+C$

$f(4)=-2$이므로

$-32+12+C=-2 \quad \therefore C=18$

따라서 $f(x)=-2x^2+3x+18$이므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $-2x^2+3x+18=0$에서 $2x^2-3x-18=0$의 모든 실근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{-18}{2}=-9$ 답 ①

05 전략 $\int g(x)\,dx\pm\int h(x)\,dx=\int\{g(x)\pm h(x)\}\,dx$ (복호동순)임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int\frac{x^3}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx$

$=\int\frac{x^3-1}{x-1}dx$

$=\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx$

$=\int(x^2+x+1)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

$f(1)=\frac{5}{6}$이므로

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+C=\frac{5}{6} \quad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-1$이므로

$f(3)=9+\frac{9}{2}+3-1=\frac{31}{2}$ 답 ②

06 전략 $f(x)=\int f'(x)\,dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x^3-3x^2+k)\,dx$

$=x^4-x^3+kx+C$

$f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=x^4-x^3+kx+2$이므로 $f(1)=4$에서

$1-1+k+2=4$

$\therefore k=2$ 답 ④

07 전략 먼저 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f'(x)=\frac{2}{3}x$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{2}{3}x\,dx$

$=\frac{1}{3}x^2+C$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(3, 1)$을 지나므로

$1=3+C \quad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2$이고 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(6, a)$를 지나므로

$a=12-2=10$ 답 ②

08 전략 먼저 극솟값을 갖는 x의 값을 찾는다.

풀이 $f'(x)=-x^2+6x-8=-(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 $-\frac{2}{3}$를 갖는다. 이때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-x^2+6x-8)\,dx$

$=-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x+C$

이므로 $f(2)=-\frac{2}{3}$에서

$-\frac{8}{3}+12-16+C=-\frac{2}{3} \quad \therefore C=6$

즉 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x+6$이므로

$f(3)=-9+27-24+6=0$ 답 ③

09 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+12x$

베이직쎈 BOX

$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

두 점 $(0, 0)$, $(3, 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{2}{3}x$

모든 실수 x에 대하여 성립하므로 x에 대한 항등식이다.

$2x^2-3x-18=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-18)>0$ 이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$xf'(x)=12x^3-12x$

$\therefore\ f'(x)=12x^2-12$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(12x^2-12)\,dx$

$=4x^3-12x+C$

$f(-1)=2$이므로

$-4+12+C=2$

$\therefore\ C=-6$

따라서 $f(x)=4x^3-12x-6$이므로

$f(1)=4-12-6=-14$ 답 ①

10 전략 $x^4f(x)+C$가 $g(x)$의 부정적분임을 이용한다.

풀이 $g(x)=\{x^4f(x)+C\}'=4x^3f(x)+x^4f'(x)$이므로

$g(2)=32f(2)+16f'(2)$

$=32\cdot1+16\cdot(-1)$

$=16$ 답 16

11 전략 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로 $F(x)=\int f(x)\,dx$임을 이용한다.

풀이 $F(x)=\int f(x)\,dx$

$=\int(2+4x+6x^2+8x^3)\,dx$

$=2x+2x^2+2x^3+2x^4+C$ ··· ❶

$F(-1)=-1$이므로

$-2+2-2+2+C=-1$

$\therefore\ C=-1$

따라서 $F(x)=2x+2x^2+2x^3+2x^4-1$이므로 ··· ❷

$F(-2)=-4+8-16+32-1=19$ ··· ❸

답 19

단계	채점 기준	비율
❶	$F(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷	$F(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸	$F(-2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

12 전략 주어진 두 등식을 더하고 빼서 $f(x)$, $g(x)$를 각각 구한다.

풀이 $f(x)+g(x)=\int(x^2+3x)\,dx$ ······ ㉠

$f(x)-g(x)=\int(x^2-4x)\,dx$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2f(x)=\int(x^2+3x)\,dx+\int(x^2-4x)\,dx$

$=\int(x^2+3x+x^2-4x)\,dx$

$=\int(2x^2-x)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C_1$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{C_1}{2}$

$f(0)=0$이므로 $C_1=0$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2$ ··· ❶

㉠−㉡을 하면

$2g(x)=\int(x^2+3x)\,dx-\int(x^2-4x)\,dx$

$=\int\{x^2+3x-(x^2-4x)\}\,dx$

$=\int 7x\,dx$

$=\frac{7}{2}x^2+C_2$

$\therefore\ g(x)=\frac{7}{4}x^2+\frac{C_2}{2}$

$g(0)=0$이므로 $C_2=0$

$\therefore\ g(x)=\frac{7}{4}x^2$ ··· ❷

$\therefore\ \frac{f(6)}{g(2)}=\frac{72-9}{7}=9$ ··· ❸

답 9

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷	$g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸	$\frac{f(6)}{g(2)}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

13 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=-2x+8$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-2x+8)\,dx$

$=-x^2+8x+C$

$=-(x-4)^2+C+16$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $C+16$을 가지므로

$C+16=6$ $\therefore\ C=-10$

베이직쎈 BOX: 주어진 조건에서 $f(x)$의 최댓값이 6이다.

즉 $f(x)=-x^2+8x-10$이므로

$f(1)=-1+8-10=-3$ 답 −3

14 전략 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases}3 & (x>2)\\ 2x-1 & (x<2)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}3x+C_1 & (x>2)\\ x^2-x+C_2 & (x<2)\end{cases}$

$f(3)=1$이므로

$9+C_1=1$ $\therefore\ C_1=-8$

또 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

베이직쎈 BOX: **미분가능성과 연속성**
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to2+}(3x-8)=\lim_{x\to2-}(x^2-x+C_2)$에서

$6-8=4-2+C_2$ $\therefore\ C_2=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}3x-8 & (x\ge2)\\ x^2-x-4 & (x<2)\end{cases}$이므로

$f(-1)=1+1-4=-2$ 답 −2

15 전략 $f'(x)$를 구한 후 극값을 갖는 x의 값을 찾는다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, -1)$이므로

$f'(x)=a(x-1)^2-1\ (a>0)$

이라 하면 $y=f'(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=a-1 \quad \therefore a=1$

$\therefore f'(x)=(x-1)^2-1=x^2-2x$
$=x(x-2)$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2를 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다. 이때 ⋯ ❷

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (x^2-2x)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2+C$$

이므로 $f(0)=2$에서 $C=2$

즉 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$이므로 극솟값은 ⋯ ❸

$$f(2)=\frac{8}{3}-4+2=\frac{2}{3}$$ ⋯ ❹

답 $\frac{2}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷	$f(x)$가 극대, 극소가 되는 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸	$f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❹	극솟값을 구할 수 있다.	10 %

베이직쎈 BOX

이차함수 $f(x)$의 꼭짓점의 좌표가 (p, q)이면 $f(x)=a(x-p)^2+q$로 놓을 수 있다. (단, a는 상수)

Ⅲ. 다항함수의 적분법

08 정적분

17 정적분

개념 48 정적분

본책 119쪽

01 $\int_0^1 3\,dx=\Big[3x\Big]_0^1=3-0=3$ 답 3

02 $\int_{-1}^3 (-2x)\,dx=\Big[-x^2\Big]_{-1}^3$
$=(-9)-(-1)=-8$ 답 −8

03 $\int_1^2 (4x-1)\,dx=\Big[2x^2-x\Big]_1^2$
$=(8-2)-(2-1)$
$=5$ 답 5

04 $\int_{-2}^1 (t+2)\,dt=\Big[\frac{1}{2}t^2+2t\Big]_{-2}^1$
$=\left(\frac{1}{2}+2\right)-(2-4)$
$=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

05 $\int_{-2}^0 x^2\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_{-2}^0=0-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$

06 $\int_1^4 (3x^2-5)\,dx=\Big[x^3-5x\Big]_1^4$
$=(64-20)-(1-5)$
$=48$ 답 48

07 $\int_1^3 (-x^2+4x-2)\,dx$
$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-2x\Big]_1^3$
$=(-9+18-6)-\left(-\frac{1}{3}+2-2\right)$
$=\frac{10}{3}$ 답 $\frac{10}{3}$

08 $\int_{-2}^{-1} (2t-6t^2)\,dt=\Big[t^2-2t^3\Big]_{-2}^{-1}$
$=(1+2)-(4+16)$
$=-17$ 답 −17

09 $\int_1^3 x^3\,dx=\Big[\frac{1}{4}x^4\Big]_1^3=\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=20$ 답 20

10 $\int_{-2}^1 (4x^3-6x^2-3)\,dx=\Big[x^4-2x^3-3x\Big]_{-2}^1$
$=(1-2-3)-(16+16+6)$
$=-42$ 답 −42

11 $\int_0^2 (y^3-2y+1)\,dy=\Big[\frac{1}{4}y^4-y^2+y\Big]_0^2$
$=4-4+2=2$ 답 2

베이직쎈 BOX

12 $\int_{2}^{-1} 1\,dx=\Big[x\Big]_{2}^{-1}=(-1)-2=-3$ 답 -3

13 $\int_{3}^{2}(8x-1)\,dx=\Big[4x^2-x\Big]_{3}^{2}$
$=(16-2)-(36-3)$
$=-19$ 답 -19

14 $\int_{1}^{1}f(x)\,dx=\int_{1}^{1}(-3x^2+2)\,dx$
$=\Big[-x^3+2x\Big]_{1}^{1}$
$=(-1+2)-(-1+2)=0$ 답 0

적분 구간의 위끝과 아래끝이 같으므로 정적분의 값은 0이다.

15 $\int_{0}^{1}f(x)\,dx=\int_{0}^{1}(-3x^2+2)\,dx$
$=\Big[-x^3+2x\Big]_{0}^{1}$
$=-1+2=1$ 답 1

16 $\int_{1}^{0}f(x)\,dx=\int_{1}^{0}(-3x^2+2)\,dx$
$=\Big[-x^3+2x\Big]_{1}^{0}$
$=-(-1+2)=-1$ 답 -1

$\int_{0}^{1}f(x)\,dx=-\int_{1}^{0}f(x)\,dx$임을 알 수 있다.

17 $\int_{1}^{2}(x-1)^2\,dx=\int_{1}^{2}(x^2-2x+1)\,dx$
$=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\Big]_{1}^{2}$
$=\left(\frac{8}{3}-4+2\right)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)$
$=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

18 $\int_{0}^{1}(x+3)(2x-1)\,dx=\int_{0}^{1}(2x^2+5x-3)\,dx$
$=\Big[\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-3x\Big]_{0}^{1}$
$=\frac{2}{3}+\frac{5}{2}-3$
$=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

19 $\int_{-1}^{2}(2y+1)(2y-1)\,dy=\int_{-1}^{2}(4y^2-1)\,dy$
$=\Big[\frac{4}{3}y^3-y\Big]_{-1}^{2}$
$=\left(\frac{32}{3}-2\right)-\left(-\frac{4}{3}+1\right)$
$=9$ 답 9

20 $\int_{-3}^{1}(t+1)(t^2-t+1)\,dt=\int_{-3}^{1}(t^3+1)\,dt$
$=\Big[\frac{1}{4}t^4+t\Big]_{-3}^{1}$
$=\left(\frac{1}{4}+1\right)-\left(\frac{81}{4}-3\right)$
$=-16$ 답 -16

분자를 인수분해한 후 약분한다.

21 $\int_{3}^{5}\frac{x^2-4}{x-2}\,dx=\int_{3}^{5}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}\,dx$
$=\int_{3}^{5}(x+2)\,dx=\Big[\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{3}^{5}$
$=\left(\frac{25}{2}+10\right)-\left(\frac{9}{2}+6\right)$
$=12$ 답 12

22 $\int_{-1}^{0}\frac{x^3-1}{x-1}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\,dx$
$=\int_{-1}^{0}(x^2+x+1)\,dx$
$=\Big[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-1}^{0}$
$=-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1\right)$
$=\frac{5}{6}$ 답 $\frac{5}{6}$

개념 49 정적분의 성질

본책 121쪽

23 답 2, 3, 2, 3, $\frac{1}{2}$, 2, 3, $\frac{7}{6}$

24 $\int_{1}^{3}(-6x^2+5x+1)\,dx$
$=-6\int_{1}^{3}x^2\,dx+5\int_{1}^{3}x\,dx+\int_{1}^{3}dx$
$=-6\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_{1}^{3}+5\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_{1}^{3}+\Big[x\Big]_{1}^{3}$
$=-6\left(9-\frac{1}{3}\right)+5\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)+(3-1)$
$=-52+20+2$
$=-30$ 답 -30

25 $\int_{-1}^{2}(3x^3+2x)\,dx=3\int_{-1}^{2}x^3\,dx+2\int_{-1}^{2}x\,dx$
$=3\Big[\frac{1}{4}x^4\Big]_{-1}^{2}+2\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{2}$
$=3\left(4-\frac{1}{4}\right)+2\left(2-\frac{1}{2}\right)$
$=\frac{45}{4}+3=\frac{57}{4}$ 답 $\frac{57}{4}$

26 답 $4x$, $2x^2$, 8, 6

적분 구간이 같은 정적분은 하나의 정적분으로 나타낸 후 피적분함수를 간단히 정리하여 계산한다.

27 $\int_{-1}^{2}(x^2+2x)\,dx+\int_{-1}^{2}(-x^2+1)\,dx$
$=\int_{-1}^{2}(x^2+2x-x^2+1)\,dx$
$=\int_{-1}^{2}(2x+1)\,dx$
$=\Big[x^2+x\Big]_{-1}^{2}$
$=(4+2)-(1-1)$
$=6$ 답 6

08 정적분

28 $\int_0^1 (3x^2+2)\,dx+\int_0^1 (2x-2)\,dx$
$=\int_0^1 (3x^2+2+2x-2)\,dx$
$=\int_0^1 (3x^2+2x)\,dx$
$=\Big[x^3+x^2\Big]_0^1$
$=1+1=2$ 답 2

29 $\int_{-1}^0 (x^2+3x+4)\,dx+\int_{-1}^0 (5x^2+x-1)\,dx$
$=\int_{-1}^0 (x^2+3x+4+5x^2+x-1)\,dx$
$=\int_{-1}^0 (6x^2+4x+3)\,dx$
$=\Big[2x^3+2x^2+3x\Big]_{-1}^0$
$=-(-2+2-3)=3$ 답 3

30 $\int_{-2}^1 (2x^3+6x)\,dx+\int_{-2}^1 (2x^3-3)\,dx$
$=\int_{-2}^1 (2x^3+6x+2x^3-3)\,dx$
$=\int_{-2}^1 (4x^3+6x-3)\,dx$
$=\Big[x^4+3x^2-3x\Big]_{-2}^1$
$=(1+3-3)-(16+12+6)$
$=-33$ 답 -33

31 $\int_{-3}^{-2} (5x+2)\,dx-\int_{-3}^{-2} (x-1)\,dx$
$=\int_{-3}^{-2} \{5x+2-(x-1)\}\,dx$
$=\int_{-3}^{-2} (4x+3)\,dx$
$=\Big[2x^2+3x\Big]_{-3}^{-2}$
$=(8-6)-(18-9)$
$=-7$ 답 -7

32 $\int_{-1}^2 (x^2+6x-1)\,dx-\int_{-1}^2 (x^2+1)\,dx$
$=\int_{-1}^2 \{x^2+6x-1-(x^2+1)\}\,dx$
$=\int_{-1}^2 (6x-2)\,dx$
$=\Big[3x^2-2x\Big]_{-1}^2$
$=(12-4)-(3+2)=3$ 답 3

33 $\int_0^4 (3x^2-x+1)\,dx-\int_0^4 (x+1)\,dx$
$=\int_0^4 \{3x^2-x+1-(x+1)\}\,dx$
$=\int_0^4 (3x^2-2x)\,dx$
$=\Big[x^3-x^2\Big]_0^4$
$=64-16=48$ 답 48

베이직쎈 BOX

한 정적분의 위끝과 다른 정적분의 아래끝이 같고, 피적분함수가 같은 정적분은 하나의 정적분으로 나타내어 계산한다.

34 $\int_1^3 (x+1)^2\,dx-\int_1^3 (x-1)^2\,dx$
$=\int_1^3 (x^2+2x+1)\,dx-\int_1^3 (x^2-2x+1)\,dx$
$=\int_1^3 \{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)\}\,dx$
$=\int_1^3 4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_1^3$
$=18-2=16$ 답 16

35 $\int_0^1 \frac{2x}{x+2}\,dx+\int_0^1 \frac{x^2}{x+2}\,dx=\int_0^1 \frac{2x+x^2}{x+2}\,dx$
$=\int_0^1 \frac{x(x+2)}{x+2}\,dx$
$=\int_0^1 x\,dx$
$=\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1$
$=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

36 $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2}{x-1}\,dx-\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x-1}\,dx$
$=\int_{-2}^{-1} \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$
$=\int_{-2}^{-1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\,dx$
$=\int_{-2}^{-1} (x+1)\,dx$
$=\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-2}^{-1}$
$=\left(\frac{1}{2}-1\right)-(2-2)=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

37 답 1, 1, 5, 10

38 $\int_{-1}^1 (3x^2-x)\,dx+\int_1^2 (3x^2-x)\,dx$
$=\int_{-1}^2 (3x^2-x)\,dx$
$=\Big[x^3-\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^2$
$=(8-2)-\left(-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}$ 답 $\frac{15}{2}$

39 $\int_0^1 (6x^2+2x+1)\,dx+\int_1^3 (6x^2+2x+1)\,dx$
$=\int_0^3 (6x^2+2x+1)\,dx$
$=\Big[2x^3+x^2+x\Big]_0^3$
$=54+9+3=66$ 답 66

40 $\int_{-2}^{-1} (4x^3-8x)\,dx+\int_{-1}^1 (4x^3-8x)\,dx$
$=\int_{-2}^1 (4x^3-8x)\,dx$
$=\Big[x^4-4x^2\Big]_{-2}^1$
$=(1-4)-(16-16)=-3$ 답 -3

41 $\int_0^1 (2x+9)\,dx - \int_3^1 (2x+9)\,dx$
$= \int_0^1 (2x+9)\,dx + \int_1^3 (2x+9)\,dx$
$= \int_0^3 (2x+9)\,dx$
$= \Big[x^2+9x\Big]_0^3$
$= 9+27=36$ 답 36

42 $\int_{-2}^0 (x^2-3)\,dx - \int_1^0 (x^2-3)\,dx$
$= \int_{-2}^0 (x^2-3)\,dx + \int_0^1 (x^2-3)\,dx$
$= \int_{-2}^1 (x^2-3)\,dx$
$= \Big[\frac{1}{3}x^3-3x\Big]_{-2}^1$
$= \left(\frac{1}{3}-3\right)-\left(-\frac{8}{3}+6\right)=-6$ 답 -6

개념 50 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분

본책 123쪽

43 답 $\frac{5}{2}$

0, 0, 0, 0, $2x+1$, 0, x^2+x, 0, $\frac{5}{2}$

44 $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$
$= \int_0^1 (4x-1)\,dx + \int_1^2 3x^2\,dx$
$= \Big[2x^2-x\Big]_0^1 + \Big[x^3\Big]_1^2$
$= (2-1)+(8-1)=8$ 답 8

45 $\int_{-3}^1 f(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^1 f(x)\,dx$
$= \int_{-3}^{-1} (-x^2)\,dx + \int_{-1}^1 (x^2+2x)\,dx$
$= \Big[-\frac{1}{3}x^3\Big]_{-3}^{-1} + \Big[\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_{-1}^1$
$= \left(\frac{1}{3}-9\right)+\left\{\left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right\}$
$= -8$ 답 -8

46 $|x| = \begin{cases} x & (x \ge 0) \\ -x & (x \le 0) \end{cases}$이므로
$\int_{-1}^3 |x|\,dx = \int_{-1}^0 (-x)\,dx + \int_0^3 x\,dx$
$= \Big[-\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^0 + \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^3$
$= -\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{2}=5$ 답 5

베이직쎈 BOX

$\int_3^1 (2x+9)\,dx$
$= -\int_1^3 (2x+9)\,dx$

$x+1=0$에서 $x=-1$
$x \ge -1$일 때,
$x+1 \ge 0$이므로
$|x+1| = x+1$
$x \le -1$일 때,
$x+1 \le 0$이므로
$|x+1| = -(x+1)$
$= -x-1$

$2x-4=0$에서 $x=2$

47 $|x+1| = \begin{cases} x+1 & (x \ge -1) \\ -x-1 & (x \le -1) \end{cases}$이므로
$\int_{-2}^1 |x+1|\,dx$
$= \int_{-2}^{-1} (-x-1)\,dx + \int_{-1}^1 (x+1)\,dx$
$= \Big[-\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{-2}^{-1} + \Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-1}^1$
$= \left\{\left(-\frac{1}{2}+1\right)-(-2+2)\right\}+\left\{\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}$
$= \frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

48 $|2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & (x \ge 2) \\ -2x+4 & (x \le 2) \end{cases}$이므로
$\int_0^3 |2x-4|\,dx$
$= \int_0^2 (-2x+4)\,dx + \int_2^3 (2x-4)\,dx$
$= \Big[-x^2+4x\Big]_0^2 + \Big[x^2-4x\Big]_2^3$
$= (-4+8)+\{(9-12)-(4-8)\}$
$= 5$ 답 5

49 $x^2+x=0$에서 $x(x+1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$
따라서
$|x^2+x| = \begin{cases} x^2+x & (x \le -1 \text{ 또는 } x \ge 0) \\ -x^2-x & (-1 \le x \le 0) \end{cases}$
이므로
$\int_{-2}^0 |x^2+x|\,dx$
$= \int_{-2}^{-1} (x^2+x)\,dx + \int_{-1}^0 (-x^2-x)\,dx$
$= \Big[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_{-2}^{-1} + \Big[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^0$
$= \left\{\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{8}{3}+2\right)\right\}+\left\{-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right\}$
$= 1$ 답 1

베쎈 TIP

x^2+x의 부호는 다음과 같은 방법으로 알 수 있다.

방법 ① $y=x^2+x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

(i) $x \le -1$ 또는 $x \ge 0$일 때
$y=x^2+x \ge 0$
(ii) $-1 \le x \le 0$일 때
$y=x^2+x \le 0$

방법 ② $x^2+x=x(x+1)$에서
(i) $x \le -1$일 때 $x+1 \le 0$이므로
$x(x+1) \ge 0$
(ii) $-1 \le x \le 0$일 때 $0 \le x+1 \le 1$이므로
$x(x+1) \le 0$
(iii) $x \ge 0$일 때 $x+1 \ge 1$이므로
$x(x+1) \ge 0$

08 정적분

개념 51 정적분 $\int_{-a}^{a} x^n\,dx$의 계산

본책 124쪽

50 $\int_{-3}^{3}(x^2-4)\,dx=2\int_{0}^{3}(x^2-4)\,dx$
$=2\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_0^3$
$=2(9-12)=-6$ 답 -6

51 $\int_{-2}^{2}(5x^4-6x^2+2)\,dx=2\int_{0}^{2}(5x^4-6x^2+2)\,dx$
$=2\left[x^5-2x^3+2x\right]_0^2$
$=2(32-16+4)$
$=40$ 답 40

52 답 0

53 답 x^2, x^3, 0, x^2, $\frac{1}{3}$, 0, $\frac{46}{15}$

54 $\int_{-4}^{4}(1+2x+3x^2+4x^3)\,dx$
$=\int_{-4}^{4}(1+3x^2)\,dx+\int_{-4}^{4}(2x+4x^3)\,dx$
$=2\int_{0}^{4}(1+3x^2)\,dx$
$=2\left[x+x^3\right]_0^4$
$=2(4+64)=136$ 답 136

55 $\int_{-2}^{2}(x^3+6x^2-6x+5)\,dx$
$=\int_{-2}^{2}(x^3-6x)\,dx+\int_{-2}^{2}(6x^2+5)\,dx$
$=2\int_{0}^{2}(6x^2+5)\,dx$
$=2\left[2x^3+5x\right]_0^2$
$=2(16+10)=52$ 답 52

56 $\int_{-3}^{0}(x^5+3x^2+2)\,dx+\int_{0}^{3}(x^5+3x^2+2)\,dx$
$=\int_{-3}^{3}(x^5+3x^2+2)\,dx$
$=\int_{-3}^{3}x^5\,dx+\int_{-3}^{3}(3x^2+2)\,dx$
$=2\int_{0}^{3}(3x^2+2)\,dx$
$=2\left[x^3+2x\right]_0^3$
$=2(27+6)=66$ 답 66

57 $\int_{-2}^{1}(5x^4+x^3-x)\,dx+\int_{1}^{2}(5x^4+x^3-x)\,dx$
$=\int_{-2}^{2}(5x^4+x^3-x)\,dx$
$=\int_{-2}^{2}5x^4\,dx+\int_{-2}^{2}(x^3-x)\,dx$
$=2\int_{0}^{2}5x^4\,dx$
$=2\left[x^5\right]_0^2=2\cdot 32=64$ 답 64

베이직쎈 BOX

$f(x)=x^2-4$는 짝수 차수의 항과 상수항의 합으로 이루어져 있으므로 우함수이다.

$f(x)=x^3+x$는 홀수 차수의 항의 합으로 이루어져 있으므로 기함수이다.

$\int_a^a f(x)\,dx=0$,
$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로
$f(x)=\int f'(x)\,dx$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 125쪽

01 $\int_{-1}^{2}4x(x+1)(x-1)\,dx=\int_{-1}^{2}(4x^3-4x)\,dx$
$=\left[x^4-2x^2\right]_{-1}^2$
$=(16-8)-(1-2)$
$=9$ 답 9

02 $\int_{0}^{1}x^2f(x)\,dx=\int_{0}^{1}x^2(x^2+4x-1)\,dx$
$=\int_{0}^{1}(x^4+4x^3-x^2)\,dx$
$=\left[\frac{1}{5}x^5+x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$
$=\frac{1}{5}+1-\frac{1}{3}$
$=\frac{13}{15}$ 답 ①

03 $\int_{-3}^{-3}x^6\,dx-\int_{2}^{0}(t-1)(t+3)\,dt$
$=0+\int_{0}^{2}(t-1)(t+3)\,dt$
$=\int_{0}^{2}(t^2+2t-3)\,dt$
$=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2-3t\right]_0^2$
$=\frac{8}{3}+4-6$
$=\frac{2}{3}$ 답 ⑤

04 $\int_{-1}^{0}(8x^3-3x^2+k)\,dx=\left[2x^4-x^3+kx\right]_{-1}^0$
$=-(2+1-k)$
$=k-3$
이므로 $k-3=5$
$\therefore k=8$ 답 8

05 $f'(x)=2x-1$이므로
$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x-1)\,dx$
$=x^2-x+C$
$f(1)=2$이므로
$1-1+C=2$ $\therefore C=2$
따라서 $f(x)=x^2-x+2$이므로
$\int_{1}^{2}f(x)\,dx=\int_{1}^{2}(x^2-x+2)\,dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2$
$=\left(\frac{8}{3}-2+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)$
$=\frac{17}{6}$ 답 ④

06 용수철이 0.1 m에서 0.3 m가 되려면 0.2 m만큼 늘여야 하므로 필요한 일의 양은

베이직쎈 BOX

$$W(0.2)=\int_0^{0.2} 400t\,dt=400\int_0^{0.2} t\,dt$$
$$=400\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{0.2}=400\times0.02$$
$$=8\ (\mathrm{J})$$
답 ②

07 $\int_0^3 (x^2+5x)\,dx-\int_3^0 (2x^2-x)\,dx$
$=\int_0^3 (x^2+5x)\,dx+\int_0^3 (2x^2-x)\,dx$
$=\int_0^3 (x^2+5x+2x^2-x)\,dx$
$=\int_0^3 (3x^2+4x)\,dx$
$=\left[x^3+2x^2\right]_0^3$
$=27+18=45$
답 ④

08 $\int_{-1}^2 (x+2)^3\,dx-\int_{-1}^2 (x-2)^3\,dx$
$=\int_{-1}^2 (x^3+6x^2+12x+8)\,dx$
$\quad-\int_{-1}^2 (x^3-6x^2+12x-8)\,dx$
$=\int_{-1}^2 \{x^3+6x^2+12x+8-(x^3-6x^2+12x-8)\}\,dx$
$=\int_{-1}^2 (12x^2+16)\,dx$
$=\left[4x^3+16x\right]_{-1}^2$
$=(32+32)-(-4-16)$
$=84$
답 84

09 $\int_0^1 \frac{x^3-1}{x+1}\,dx+\int_0^1 \frac{2}{y+1}\,dy$
$=\int_0^1 \frac{x^3-1}{x+1}\,dx+\int_0^1 \frac{2}{x+1}\,dx$

변수를 y 대신 x를 사용해도 정적분의 값은 변하지 않는다.

$=\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}\,dx$
$=\int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}\,dx$
$=\int_0^1 (x^2-x+1)\,dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1$
$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$
답 ③

10 $\int_{-2}^3 (4x-x^3)\,dx+\int_{-2}^3 (5x^3+k)\,dx$
$=\int_{-2}^3 (4x-x^3+5x^3+k)\,dx$
$=\int_{-2}^3 (4x^3+4x+k)\,dx$
$=\left[x^4+2x^2+kx\right]_{-2}^3$
$=(81+18+3k)-(16+8-2k)$
$=75+5k$
이므로 $75+5k=85$ $\therefore k=2$
답 2

11 $\int_1^2 (6x^2-10x+5)\,dx+\int_2^3 (6t^2-10t+5)\,dt$
$=\int_1^2 (6x^2-10x+5)\,dx+\int_2^3 (6x^2-10x+5)\,dx$
$=\int_1^3 (6x^2-10x+5)\,dx$
$=\left[2x^3-5x^2+5x\right]_1^3$
$=(54-45+15)-(2-5+5)$
$=22$
답 22

12 $\int_{-1}^0 (2x+1)^2\,dx+\int_0^1 (2x+1)^2\,dx+\int_1^2 (2x+1)^2\,dx$
$=\int_{-1}^2 (2x+1)^2\,dx$
$=\int_{-1}^2 (4x^2+4x+1)\,dx$
$=\left[\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\right]_{-1}^2$
$=\left(\frac{32}{3}+8+2\right)-\left(-\frac{4}{3}+2-1\right)$
$=21$
답 21

베쎈 TIP

$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx$
$=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx$
$=\int_a^d f(x)\,dx$

13 $\int_0^1 (8x^3-3)\,dx-\int_2^1 (8x^3-3)\,dx+\int_2^3 (8x^3-3)\,dx$
$=\int_0^1 (8x^3-3)\,dx+\int_1^2 (8x^3-3)\,dx+\int_2^3 (8x^3-3)\,dx$
$=\int_0^3 (8x^3-3)\,dx$
$=\left[2x^4-3x\right]_0^3$
$=162-9$
$=153$
답 ②

14 $\int_{-1}^4 f(x)\,dx=\int_{-1}^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$이므로
$5=3+\int_3^4 f(x)\,dx$
$\therefore \int_3^4 f(x)\,dx=2$
$\therefore \int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$
$=2+2$
$=4$
답 4

15 $\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$

$x=2$를 경계로 함수의 식이 다르므로 이 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.

$=\int_0^2 (-x+2)\,dx+\int_2^3 (2x-4)\,dx$
$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2+\left[x^2-4x\right]_2^3$
$=(-2+4)+\{(9-12)-(4-8)\}$
$=3$
답 ⑤

16 $\int_{-1}^{2} xf(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{0} xf(x)\,dx+\int_{0}^{2} xf(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{0} x\cdot(-x)\,dx+\int_{0}^{2} x(x^2-3x)\,dx$

$=\int_{-1}^{0} (-x^2)\,dx+\int_{0}^{2} (x^3-3x^2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{0}^{2}$

$=-\frac{1}{3}+(4-8)=-\frac{13}{3}$ 답 $-\frac{13}{3}$

17 (1) $x\ge1$일 때, $f(x)=1$

(2) $x\le1$일 때, $f(x)=x$

(3) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx=\int_{0}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{2} f(x)\,dx$

$=\int_{0}^{1} x\,dx+\int_{1}^{2} dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}+\left[x\right]_{1}^{2}$

$=\frac{1}{2}+(2-1)=\frac{3}{2}$

답 (1) $f(x)=1$ (2) $f(x)=x$ (3) $\frac{3}{2}$

18 $a>0$이므로

$\int_{-2}^{a} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{0} (3x^2+2x)\,dx+\int_{0}^{a} (-2x)\,dx$

$=\left[x^3+x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-x^2\right]_{0}^{a}$

$=-(-8+4)-a^2$

$=4-a^2$

따라서 $4-a^2=-5$이므로

$a^2=9$ $\therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 ③

19 $|x|=\begin{cases} x & (x\ge0) \\ -x & (x\le0) \end{cases}$이므로

$\int_{-1}^{2} |x|(x+2)\,dx$

$=\int_{-1}^{0} \{-x(x+2)\}\,dx+\int_{0}^{2} x(x+2)\,dx$

$=\int_{-1}^{0} (-x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2} (x^2+2x)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$

$=-\left(\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{8}{3}+4\right)=\frac{22}{3}$ 답 ⑤

20 $3x(2-x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서

$|3x(2-x)|=\begin{cases} 3x(2-x) & (0\le x\le2) \\ -3x(2-x) & (x\le0 \text{ 또는 } x\ge2) \end{cases}$

$=\begin{cases} 6x-3x^2 & (0\le x\le2) \\ -6x+3x^2 & (x\le0 \text{ 또는 } x\ge2) \end{cases}$

이므로

$\int_{1}^{3} |3x(2-x)|\,dx$

$=\int_{1}^{2} (6x-3x^2)\,dx+\int_{2}^{3} (-6x+3x^2)\,dx$

$=\left[3x^2-x^3\right]_{1}^{2}+\left[-3x^2+x^3\right]_{2}^{3}$

$=\{(12-8)-(3-1)\}+\{(-27+27)-(-12+8)\}$

$=6$ 답 6

21 $|x|+|x+2|=\begin{cases} x+x+2 & (x\ge0) \\ -x+x+2 & (-2\le x\le0) \\ -x-(x+2) & (x\le-2) \end{cases}$

$=\begin{cases} 2x+2 & (x\ge0) \\ 2 & (-2\le x\le0) \\ -2x-2 & (x\le-2) \end{cases}$

이므로

$\int_{-3}^{1} (|x|+|x+2|)\,dx$

$=\int_{-3}^{-2} (-2x-2)\,dx+\int_{-2}^{0} 2\,dx+\int_{0}^{1} (2x+2)\,dx$

$=\left[-x^2-2x\right]_{-3}^{-2}+\left[2x\right]_{-2}^{0}+\left[x^2+2x\right]_{0}^{1}$

$=\{(-4+4)-(-9+6)\}+\{-(-4)\}+(1+2)$

$=10$ 답 ④

22 $|x-3|=\begin{cases} x-3 & (x\ge3) \\ -x+3 & (x\le3) \end{cases}$이고 $a>3$이므로

$\int_{0}^{a} |x-3|\,dx$

$=\int_{0}^{3} (-x+3)\,dx+\int_{3}^{a} (x-3)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{0}^{3}+\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{3}^{a}$

$=\left(-\frac{9}{2}+9\right)+\left\{\left(\frac{1}{2}a^2-3a\right)-\left(\frac{9}{2}-9\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}a^2-3a+9$

따라서 $\frac{1}{2}a^2-3a+9=\frac{13}{2}$이므로

$a^2-6a+18=13,$ $a^2-6a+5=0$

$(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=5\ (\because a>3)$ 답 5

23 $\int_{-1}^{1} (x+2)(x^2-2x+4)\,dx$

$=\int_{-1}^{1} (x^3+8)\,dx$

$=\int_{-1}^{1} x^3\,dx+\int_{-1}^{1} 8\,dx$

$=2\int_{0}^{1} 8\,dx$

$=16\int_{0}^{1} dx$

$=16\left[x\right]_{0}^{1}$

$=16$ 답 ①

베이직쎈 BOX

$|x|=\begin{cases} x & (x\ge0) \\ -x & (x\le0) \end{cases}$,

$|x+2|=\begin{cases} x+2 & (x\ge-2) \\ -(x+2) & (x\le-2) \end{cases}$

원점과 점 (1, 1)을 지나는 직선의 방정식은 $y=x$

베이직쎈 BOX

24 $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{2} (5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)\,dx$

$=\int_{-2}^{2} (5x^4+3x^2+1)\,dx+\int_{-2}^{2} (4x^3+2x)\,dx$

$=2\int_{0}^{2} (5x^4+3x^2+1)\,dx$

$=2\Big[x^5+x^3+x\Big]_0^2$

$=2(32+8+2)=84$ 답 ④

25 $\int_{-a}^{a} (x^3+3x^2-7x)\,dx$

$=\int_{-a}^{a} (x^3-7x)\,dx+\int_{-a}^{a} 3x^2\,dx$

$=2\int_{0}^{a} 3x^2\,dx=2\Big[x^3\Big]_0^a$

$=2a^3$

이므로 $2a^3=16$, $a^3=8$

$\therefore a=2$ 답 2

26 $f(x)=f(-x)$, $g(x)=-g(-x)$이므로 $f(x)$는 우함수, $g(x)$는 기함수이다.

$\therefore \int_{-5}^{5} \{f(x)+g(x)\}\,dx$

$=\int_{-5}^{5} f(x)\,dx+\int_{-5}^{5} g(x)\,dx$

$=2\int_{0}^{5} f(x)\,dx$

$=2\cdot 7=14$ 답 ⑤

위끝과 아래끝의 절댓값은 같고, 부호는 다르므로 우함수와 기함수의 정적분을 이용한다.

$a^3=8$에서
$a^3-8=0$
$(a-2)(a^2+2a+4)=0$
이때 $a^2+2a+4=0$은 실근을 갖지 않으므로
$a=2$

$f(-x)=f(x)$
➡ $f(x)$는 우함수
$f(-x)=-f(x)$
➡ $f(x)$는 기함수

18 정적분으로 정의된 함수

개념 52 정적분으로 정의된 함수의 미분 본책 129쪽

01 답 $5x+1$

02 답 x^2+4x+1

03 답 $2x^3-7x^2-x+5$

04 $\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+2}(3t-2)\,dt=\{3(x+2)-2\}-(3x-2)$

$=6$ 답 6

05 $\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+1}(t^2+2t-3)\,dt$

$=\{(x+1)^2+2(x+1)-3\}-(x^2+2x-3)$

$=2x+3$ 답 $2x+3$

06 답 $f(x)=2x+4$ 2, 4

07 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x} f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(6x^2-6)$

$\therefore f(x)=12x$ 답 $f(x)=12x$

08 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_{2}^{x} f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(x^3+x-10)$

$\therefore f(x)=3x^2+1$ 답 $f(x)=3x^2+1$

09 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(x^4-x^3+2x^2+x)$

$\therefore f(x)=4x^3-3x^2+4x+1$

답 $f(x)=4x^3-3x^2+4x+1$

개념 53 정적분을 포함한 등식에서 함수 구하기 본책 130쪽

10 답 $f(x)=2x-4$ $2k$, $2k$, -4, $2x-4$

11 $\int_{2}^{4} f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면

$f(x)=-x+4+k$

$f(t)=-t+4+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\int_{2}^{4}(-t+4+k)\,dt$

$=\Big[-\frac{1}{2}t^2+(4+k)t\Big]_2^4$

$=\{-8+4(4+k)\}-\{-2+2(4+k)\}$

$=2k+2$

즉 ㉠에서 $2k+2=k$이므로 $k=-2$

$\therefore f(x)=-x+2$ 답 $f(x)=-x+2$

$k=-2$를 $f(x)=-x+4+k$에 대입하면
$f(x)=-x+4-2$
$=-x+2$

12 $\int_{0}^{3} f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면

$f(x)=x^2-4x+k$

$f(t)=t^2-4t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\int_{0}^{3}(t^2-4t+k)\,dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-2t^2+kt\Big]_0^3$

$=9-18+3k$

$=3k-9$

즉 ㉠에서 $3k-9=k$이므로 $k=\frac{9}{2}$

$\therefore f(x)=x^2-4x+\frac{9}{2}$

답 $f(x)=x^2-4x+\frac{9}{2}$

13 $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=-3x^2+2x+k$

$f(t)=-3t^2+2t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_{-1}^{1}(-3t^2+2t+k)\,dt=2\int_{0}^{1}(-3t^2+k)\,dt$$
$$=2\Big[-t^3+kt\Big]_0^1$$
$$=2(-1+k)$$
$$=2k-2$$

즉 ㉠에서 $2k-2=k$이므로 $k=2$

$\therefore f(x)=-3x^2+2x+2$

답 $f(x)=-3x^2+2x+2$

14 답 $f(x)=2x-1$ 2, a, 0, -1, $2x-1$

15 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2ax+1$

또 $x=-1$을 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=a-1-3$ $\therefore a=4$

$\therefore f(x)=8x+1$ 답 $f(x)=8x+1$

16 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+a$

또 $x=2$를 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=8+2a+2$ $\therefore a=-5$

$\therefore f(x)=3x^2-5$ 답 $f(x)=3x^2-5$

17 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2-2ax+5$

또 $x=1$을 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=2-a+5-4$ $\therefore a=3$

$\therefore f(x)=6x^2-6x+5$

답 $f(x)=6x^2-6x+5$

18 답 $f(x)=6x$ $xf(x)$, 3, 3, $6x$

19 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_{2}^{x} f(t)\,dt-\int_{2}^{x} tf(t)\,dt=-x^3+2x^2+4x-8$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{2}^{x} f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=-3x^2+4x+4$$

$$\therefore \int_{2}^{x} f(t)\,dt=-3x^2+4x+4$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-6x+4$ 답 $f(x)=-6x+4$

20 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_{-1}^{x} f(t)\,dt-\int_{-1}^{x} tf(t)\,dt=x^3+ax^2+3x+1$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2ax+3$$

$$\therefore \int_{-1}^{x} f(t)\,dt=3x^2+2ax+3$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+2a$

한편 $x=-1$을 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=-1+a-3+1$ $\therefore a=3$

$\therefore f(x)=6x+6$ 답 $f(x)=6x+6$

베이직쎈 BOX

$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt=3x^2+2ax+3$의 양변에 $x=-1$을 대입하여 a의 값을 구할 수도 있다.

21 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_{1}^{x} f(t)\,dt-\int_{1}^{x} tf(t)\,dt=ax^3-3x^2+1$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{1}^{x} f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3ax^2-6x$$

$$\therefore \int_{1}^{x} f(t)\,dt=3ax^2-6x$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6ax-6$

한편 $x=1$을 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=a-3+1$ $\therefore a=2$

$\therefore f(x)=12x-6$ 답 $f(x)=12x-6$

개념 54 정적분으로 정의된 함수의 극한

본책 132쪽

22 답 11 2, 2, 2, 2, 11

23 $f(t)=t^2+6t-4$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}(t^2+6t-4)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)$$
$$=1+6-4=3$$

답 3

$F(x)$의 $x=1$에서의 미분계수

24 $f(t)=t^3+2t-1$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x}(t^3+2t-1)\,dt$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}$$
$$=F'(-1)=f(-1)$$
$$=-1-2-1=-4$$

답 -4

25 답 -2 3, x, 3, 3, -2

26 $f(t)=8-t-t^2$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{2}^{x+2}(8-t-t^2)\,dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{2}^{x+2}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x+2)-F(2)}{x}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=8-2-4=2$$

답 2

$F(x)$의 $x=2$에서의 미분계수

베이직쎈 BOX

27 $f(t)=3t^3-t^2+t+3$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_1^{x+1}(3t^3-t^2+t+3)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_1^{x+1}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}$$
$$=F'(1)=f(1)$$
$$=3-1+1+3=6$$

답 6

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 133쪽

01 $\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=4x^3+6x+3k$

$f(t)=4t^3+6t+3k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^1(4t^3+6t+3k)\,dt=\Big[t^4+3t^2+3kt\Big]_0^1$$
$$=1+3+3k$$
$$=3k+4$$

즉 ㉠에서 $3k+4=k$이므로 $k=-2$

따라서 $f(x)=4x^3+6x-6$이므로

$f(1)=4+6-6=4$

답 ⑤

02 $\int_0^2 tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x-1+k$

$f(t)=3t-1+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^2 t(3t-1+k)\,dt$$
$$=\int_0^2\{3t^2+(k-1)t\}\,dt$$
$$=\Big[t^3+\frac{k-1}{2}t^2\Big]_0^2$$
$$=8+2(k-1)$$
$$=2k+6$$

즉 ㉠에서 $2k+6=k$이므로 $k=-6$

따라서 $f(x)=3x-7$이므로

$f(-1)=-3-7=-10$

답 ①

03 $\int_1^2 f'(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=-x^3+8x+k$

$\therefore f'(x)=-3x^2+8$

$f'(t)=-3t^2+8$이므로 ㉠에서

$$k=\int_1^2(-3t^2+8)\,dt$$
$$=\Big[-t^3+8t\Big]_1^2$$
$$=(-8+16)-(-1+8)$$
$$=1$$

$\therefore f(x)=-x^3+8x+1$

답 $f(x)=-x^3+8x+1$

04 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x+a$

또 $x=1$을 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=2+a-7$ $\therefore a=5$

$\int_1^1 f(t)\,dt=0$

따라서 $f(x)=4x+5$이므로

$b=f(2)=8+5=13$

$\therefore a+b=5+13=18$

답 ④

05 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-3$

또 $x=a$를 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=a^2-3a$, $a(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

$\therefore f(a)=f(3)=6-3=3$

답 3

06 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=-6x^2+6x+f(x)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,
$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)$
$+f(x)g'(x)$

$xf'(x)=-6x^2+6x$

$\therefore f'(x)=-6x+6$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-6x+6)\,dx$$
$$=-3x^2+6x+C \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $x=2$를 주어진 등식의 양변에 대입하면

$2f(2)=-16+12$ $\therefore f(2)=-2$

이때 ㉠에서

$f(2)=-12+12+C=C$

이므로 $C=-2$

$\therefore f(x)=-3x^2+6x-2$

답 $f(x)=-3x^2+6x-2$

07 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_{-1}^x f(t)\,dt-\int_{-1}^x tf(t)\,dt=x^3+2x^2+x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+4x+1$$
$$\therefore \int_{-1}^x f(t)\,dt=3x^2+4x+1$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+4$

$\therefore f(0)=4$

답 4

08 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_2^x f(t)\,dt-\int_2^x tf(t)\,dt=-x^3-ax^2+8x-12$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=-3x^2-2ax+8$$
$$\therefore \int_2^x f(t)\,dt=-3x^2-2ax+8$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-6x-2a$

한편 $x=2$를 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=-8-4a+16-12$ $\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-6x+2$이므로

$f(-1)=6+2=8$ 답 ③

09 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x tf'(t)\,dt=x^2$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t)\,dt+xf'(x)-xf'(x)=2x$$

$$\int_0^x f'(t)\,dt=2x$$

$$\Big[f(t)\Big]_0^x=2x$$

$$f(x)-f(0)=2x$$

$$\therefore f(x)=2x+f(0)$$

$$=2x-2$$

답 $f(x)=2x-2$

10 (1) $f(x)=\int_1^x (t^2-2t)\,dt$에서

$f'(x)=x^2-2x$

(2) $x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

(3)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값

$$f(0)=\int_1^0 (t^2-2t)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_1^0$$

$$=-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}$$

를 갖고, $x=2$에서 극솟값

$$f(2)=\int_1^2 (t^2-2t)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}-4\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{2}{3}$$

를 갖는다.

답 (1) $f'(x)=x^2-2x$ (2) 0, 2

(3) 극댓값: $\frac{2}{3}$, 극솟값: $-\frac{2}{3}$

11 $f(x)=\int_{-1}^x (-3t^2+4t+a)\,dt$에서

$f'(x)=-3x^2+4x+a$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$f'(2)=0$

즉 $-12+8+a=0$이므로 $a=4$

$$\therefore M=f(2)=\int_{-1}^2 (-3t^2+4t+4)\,dt$$

$$=\Big[-t^3+2t^2+4t\Big]_{-1}^2$$

$$=(-8+8+8)-(1+2-4)=9$$

답 4, 9

베이직쎈 BOX

다항함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 갖는다.
➡ $f'(a)=0$, $f(a)=b$

$f'(x)$
$=\frac{d}{dx}\int_1^x (t^2-2t)dt$
$=x^2-2x$

x축과 두 점 $(-2, 0)$, $(0, 0)$에서 만나는 아래로 볼록한 이차함수의 그래프의 식

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

12 $f(x)=\int_0^x (6t^2+at+b)\,dt$에서

$f'(x)=6x^2+ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -3을 가지므로

$f'(1)=0$, $f(1)=-3$

$f'(1)=6+a+b$이므로 $6+a+b=0$

$\therefore a+b=-6$ …… ㉠

$$f(1)=\int_0^1 (6t^2+at+b)\,dt$$

$$=\left[2t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^1$$

$$=2+\frac{1}{2}a+b$$

이므로 $2+\frac{1}{2}a+b=-3$

$\therefore a+2b=-10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=-4$

$\therefore ab=8$ 답 8

13 (1) $f(x)=ax(x+2)\ (a>0)$로 놓으면 이 그래프가 점 $(-1, -1)$을 지나므로

$-1=-a(-1+2)$ $\therefore a=1$

$\therefore f(x)=x(x+2)=x^2+2x$

(2) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$에서

$F'(x)=f(x)$

이므로 $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다.

이때 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(-2)=0$이고 $x=-2$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $F(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.

(3) 구하는 극댓값은

$$F(-2)=\int_0^{-2} (t^2+2t)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^{-2}$$

$$=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

답 (1) $f(x)=x^2+2x$ (2) -2 (3) $\frac{4}{3}$

베쎈 TIP

함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 주어지면 x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양 → 음 → $f(x)$는 그 점에서 극대

② 음 → 양 → $f(x)$는 그 점에서 극소

임을 이용한다.

14 $\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2+2x-k$

$f(t)=3t^2+2t-k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^1 (3t^2+2t-k)\,dt=\Big[t^3+t^2-kt\Big]_0^1$$

$$=1+1-k$$

$$=2-k$$

베이직쎈 BOX

즉 ㉠에서 $2-k=k$이므로 $\quad k=1$

따라서

$$f(x)=3x^2+2x-1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$$

이므로 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{3}$에서 최솟값 $-\frac{4}{3}$를 갖는다.

답 $-\frac{4}{3}$

15 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_2^x f(t)\,dt-\int_2^x tf(t)\,dt=-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=-x^3+3x^2-2x$$

$$\therefore \int_2^x f(t)\,dt=-x^3+3x^2-2x$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=-3x^2+6x-2=-3(x-1)^2+1$$

이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 1을 갖는다.

답 ①

16 $f(x)=\int_x^{x+2} t^2\,dt$에서

$$f'(x)=(x+2)^2-x^2=4x+4$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 4x+4=0 \quad \therefore x=-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$$f(-1)=\int_{-1}^{1} t^2\,dt$$
$$=2\int_0^1 t^2\,dt$$
$$=2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

답 ⑤

> $f(t)$가 연속함수이고 a가 실수일 때
> $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt$
> $=f(x+a)-f(x)$

> $f'(x)$가 x의 계수가 양수인 일차함수이므로 $f(x)$는 x^2의 계수가 양수인 이차함수이다. 따라서 $f(x)$는 $f'(x)=0$인 x의 값에서 최솟값을 갖는다.

17 $f(t)=(t+5)(3t-1)$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to-2}\frac{1}{x+2}\int_{-2}^{x}(t+5)(3t-1)\,dt$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{1}{x+2}\int_{-2}^{x} f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{F(x)-F(-2)}{x-(-2)}$$
$$=F'(-2)=f(-2)$$
$$=3\cdot(-7)=-21$$

답 ②

18 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=F'(1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{1}{2}(1-4+1)$$
$$=-1$$

답 -1

> $\int_a^b f(x)\,dx$
> $\pm\int_a^b g(x)\,dx$
> $=\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx$
> (복호동순)

> $\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

19 $f(t)=1-t-t^3$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+2h}(1-t-t^3)\,dt$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+2h} f(t)\,dt$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{h}$$
$$=2\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}$$
$$=2F'(1)=2f(1)$$
$$=2(1-1-1)=-2$$

답 -2

20 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f'(t)\,dt=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

$f(x)=\int_0^x (5t^2+3t+7)\,dt$에서

$$f'(x)=5x^2+3x+7$$

따라서 구하는 값은

$$f'(0)=7$$

답 ④

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 136쪽

01 전략 먼저 $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (ax-1)\,dx$

$$=\left[\frac{1}{2}ax^2-x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}a-1$$

이므로 $\quad \frac{1}{2}a-1=\frac{1}{2} \quad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=3x-1$이므로

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx=\int_0^1 (3x-1)^2\,dx$$
$$=\int_0^1 (9x^2-6x+1)\,dx$$
$$=\left[3x^3-3x^2+x\right]_0^1$$
$$=3-3+1=1$$

답 ④

02 전략 $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$임을 이용하여 두 정적분의 적분 구간이 같아지도록 변형한다.

풀이 $\int_1^k (5x+3)\,dx-\int_k^1 (2-9x)\,dx$

$$=\int_1^k (5x+3)\,dx+\int_1^k (2-9x)\,dx$$
$$=\int_1^k (5x+3+2-9x)\,dx$$
$$=\int_1^k (-4x+5)\,dx$$
$$=\left[-2x^2+5x\right]_1^k$$
$$=(-2k^2+5k)-(-2+5)$$
$$=-2k^2+5k-3$$

08 정적분

즉 $-2k^2+5k-3=0$이므로

$2k^2-5k+3=0,\quad (k-1)(2k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 합은 $\quad 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ 답 ③

03 전략 두 식의 곱으로 이루어진 피적분함수의 식을 전개하여 정리한다.

풀이 $\int_{-1}^{2}(x-1)(x^2+x+1)\,dx+\int_{2}^{3}(y^3-1)\,dy$

$=\int_{-1}^{2}(x^3-1)\,dx+\int_{2}^{3}(x^3-1)\,dx$

$=\int_{-1}^{3}(x^3-1)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x\right]_{-1}^{3}$

$=\left(\frac{81}{4}-3\right)-\left(\frac{1}{4}+1\right)=16$ 답 ④

04 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용하여 a의 값을 구한 후 구간을 나누어 적분한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

이때

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x^2+1)=1,$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(x+a)=a,$

$f(0)=1$

이므로 $\quad a=1$

$\therefore b=\int_{-2}^{1}f(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{0}(x+1)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2+1)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$

$=-(2-2)+\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4}{3}$

$\therefore a+b=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$ 답 ⑤

05 전략 두 정적분의 위끝과 아래끝의 절댓값이 같고 부호가 다르므로 피적분함수를 우함수와 기함수로 나누어 적분한다.

풀이 $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(5x^3+ax^2+bx)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(5x^3+bx)\,dx+\int_{-1}^{1}ax^2\,dx$

$=2\int_{0}^{1}ax^2\,dx$

$=2\left[\frac{1}{3}ax^3\right]_{0}^{1}$

$=\frac{2}{3}a$

이므로 $\quad \frac{2}{3}a=2\quad \therefore a=3$

베이직쎈 BOX

$2k^2-5k+3=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 모든 k의 값의 합을 $\frac{5}{2}$로 구할 수도 있다.

$\int_{a}^{c}f(x)\,dx+\int_{c}^{b}f(x)\,dx=\int_{a}^{b}f(x)\,dx$

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(2t^2-3)\,dt=2x^2-3$

$\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x(5x^3+3x^2+bx)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(5x^4+3x^3+bx^2)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(5x^4+bx^2)\,dx+\int_{-1}^{1}3x^3\,dx$

$=2\int_{0}^{1}(5x^4+bx^2)\,dx$

$=2\left[x^5+\frac{1}{3}bx^3\right]_{0}^{1}$

$=2+\frac{2}{3}b$

이므로 $\quad 2+\frac{2}{3}b=0\quad \therefore b=-3$

$\therefore a-b=3-(-3)=6$ 답 ⑤

06 전략 $\int_{a}^{a}f(x)\,dx=0,\ \frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(t)\,dt=f(x)$임을 이용한다.

풀이 $f(-1)=\int_{-1}^{-1}(2t^2-3)\,dt=0$

$f'(x)=2x^2-3$이므로

$f'(-1)=2-3=-1$

$\therefore f(-1)+f'(-1)=-1$ 답 ②

07 전략 $\int_{0}^{3}tf'(t)\,dt$가 상수임을 이용한다.

풀이 $\int_{0}^{3}tf'(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=x^2-8x+k$

$\therefore f'(x)=2x-8$

$f'(t)=2t-8$이므로 ㉠에서

$k=\int_{0}^{3}t(2t-8)\,dt$

$=\int_{0}^{3}(2t^2-8t)\,dt$

$=\left[\frac{2}{3}t^3-4t^2\right]_{0}^{3}$

$=18-36=-18$

따라서 $f(x)=x^2-8x-18$이므로

$f(2)=4-16-18=-30$ 답 ①

08 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하고, $\int_{a}^{a}f(x)\,dx=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2-2x$

$xf'(x)=-6x^2+2x$

$\therefore f'(x)=-6x+2$

또 $x=1$을 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=f(1)+2-1\quad \therefore f(1)=-1$

이때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-6x+2)\,dx$

$=-3x^2+2x+C$

이므로 $\quad f(1)=-3+2+C=C-1$

즉 $C-1=-1$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=-3x^2+2x$이므로

$f(-1)=-3-2=-5$ 답 ②

09 전략 $\frac{d}{dx}\int_c^x g(t)\,dt=g(x)$ (c는 실수)임을 이용하여 $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\int_3^x (t-1)(t-3)\,dt$에서

$f'(x)=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore a=f(1)=\int_3^1 (t-1)(t-3)\,dt$

$=\int_3^1 (t^2-4t+3)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_3^1$

$=\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-(9-18+9)$

$=\frac{4}{3}$

$b=f(3)=\int_3^3 (t-1)(t-3)\,dt=0$

$\therefore 3a+b=3\cdot\frac{4}{3}+0=4$ 답 ①

10 전략 $\lim_{x\to b}\frac{1}{x-b}\int_b^x f(t)\,dt=f(b)$임을 이용한다.

풀이 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^x f(t)\,dt=\lim_{x\to -1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}$

$=F'(-1)=f(-1)$

즉 $f(-1)=7$이므로

$1+1+a=7$ $\therefore a=5$ 답 ③

11 전략 부등식의 좌변의 정적분의 값을 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\int_{-3}^1 (3x^2+2x+k)\,dx$

$=\left[x^3+x^2+kx\right]_{-3}^1$

$=(1+1+k)-(-27+9-3k)$

$=4k+20$ ⋯ ❶

이므로 $4k+20>0$

$\therefore k>-5$ ⋯ ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 -4이다. ⋯ ❸

답 -4

단계	채점 기준	비율
❶	좌변의 정적분의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷	부등식을 풀 수 있다.	30 %
❸	정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

베이직쎈 BOX

정적분에서 변수를 다른 문자로 바꾸어도 그 값은 변하지 않으므로 적분 변수를 하나로 통일한다.

$\int_a^b f(x)\,dx$
$=F(b)-F(a)$
는 아래끝과 위끝의 대소에 관계없이 항상 성립한다.

12 전략 $\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$ (복호동순)임을 이용한다.

풀이 $\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx-\int_0^1 \frac{t^3-7}{t+2}\,dt+\int_0^1 \frac{2y^3}{y+2}\,dy$

$=\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx-\int_0^1 \frac{x^3-7}{x+2}\,dx+\int_0^1 \frac{2x^3}{x+2}\,dx$

$=\int_0^1 \frac{1-(x^3-7)+2x^3}{x+2}\,dx$

$=\int_0^1 \frac{x^3+8}{x+2}\,dx$

$=\int_0^1 \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}\,dx$

$=\int_0^1 (x^2-2x+4)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-1+4=\frac{10}{3}$ 답 $\frac{10}{3}$

13 전략 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

풀이 $x^2-1=0$에서 $x^2=1$

$\therefore x=\pm 1$

따라서

$$|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -(x^2-1) & (-1\le x\le 1)\end{cases}$$

이므로

$\int_{-2}^0 \frac{|x^2-1|}{x-1}\,dx$

$=\int_{-2}^{-1}\frac{x^2-1}{x-1}\,dx+\int_{-1}^0 \frac{-(x^2-1)}{x-1}\,dx$

$=\int_{-2}^{-1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\,dx+\int_{-1}^0 \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1}\,dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x+1)\,dx+\int_{-1}^0 (-x-1)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-1}^0$

$=\left\{\left(\frac{1}{2}-1\right)-(2-2)\right\}+\left\{-\left(-\frac{1}{2}+1\right)\right\}=-1$

답 -1

14 전략 주어진 등식의 좌변을 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=x^3-x^2$ ⋯ ❶

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2x$

$\therefore \int_0^x f(t)\,dt=3x^2-2x$ ⋯ ❷

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-2$ ⋯ ❸

따라서 $y=6x-2$의 그래프의 y절편은 -2이다. ⋯ ❹

답 -2

단계	채점 기준	비율
❶	등식의 좌변을 변형할 수 있다.	20 %
❷	변형한 식의 양변을 미분할 수 있다.	40 %
❸	$f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹	y절편을 구할 수 있다.	10 %

15 전략 $f'(x)$를 구하여 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 조건을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+at-2a)\,dt$에서

$f'(x)=x^2+ax-2a$ ⋯ ❶

$f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+ax-2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot1\cdot(-2a)>0$ ⋯ ❷

$a^2+8a>0$, $a(a+8)>0$

$\therefore a<-8$ 또는 $a>0$ ⋯ ❸

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. ⋯ ❹

답 1

베이직쎈 BOX: $f'(x)$가 이차함수이므로 $f(x)$가 삼차함수임을 알 수 있다.

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷	a에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	30 %
❸	a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹	자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

베쎈TIP

삼차함수가 극값을 가질 조건

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.

→ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

→ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이다.

16 전략 $\int_0^2 tf(t)\,dt$가 상수임을 이용한다.

풀이 $\int_0^2 tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

로 놓으면 $f(x)=-x^2+2k$

$f(t)=-t^2+2k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^2 t(-t^2+2k)\,dt=\int_0^2(-t^3+2kt)\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{4}t^4+kt^2\right]_0^2$$

$$=-4+4k$$

즉 ㉠에서 $-4+4k=k$이므로 $k=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=-x^2+\frac{8}{3}$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 $\frac{8}{3}$을 갖는다.

답 $\frac{8}{3}$

Ⅲ. 다항함수의 적분법

09 정적분의 활용

19 넓이

개념 55 곡선과 x축 사이의 넓이

본책 138쪽

01 답 $\frac{8}{3}$ ◎ 2, 2, 2, $\frac{8}{3}$

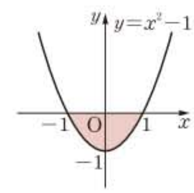
02 답 $\frac{7}{3}$ ◎ x^2, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{3}$

03 답 $\frac{9}{2}$ ◎ 0, 3, 3, $-x^2$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$

베이직쎈 BOX: 정적분을 이용하여 넓이를 구할 때에는 먼저 곡선의 개형을 그려 구하는 넓이가 어느 부분인지 확인한다.

04 곡선 $y=x^2-1$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-1=0$에서

$x^2=1$ $\therefore x=\pm1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}|x^2-1|\,dx$$

베이직쎈 BOX: 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $y\le0$이다.

$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx$$

베이직쎈 BOX: 우함수

$$=2\int_0^1(-x^2+1)\,dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$

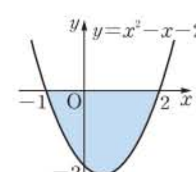
$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

05 곡선 $y=x^2-x-2$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-x-2=0$에서

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}|x^2-x-2|\,dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

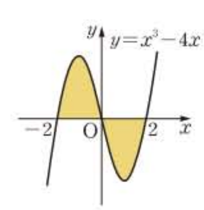
$$=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

06 곡선 $y=x^3-4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-4x=0$에서

$x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}|x^3-4x|\,dx$$

베이직쎈 BOX: 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 $y\ge0$, 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $y\le0$이다.

$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_0^2(-x^3+4x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2$$

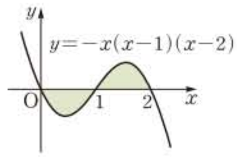
$$=4+4=8$$

답 8

베이직쎈 BOX

07 곡선

$y=-x(x-1)(x-2)$와 x축의 교점의 x좌표는



$-x(x-1)(x-2)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$

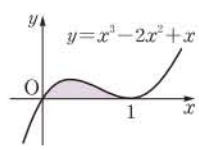
또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{2}|-x(x-1)(x-2)|\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}x(x-1)(x-2)\,dx+\int_{1}^{2}\{-x(x-1)(x-2)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)\,dx+\int_{1}^{2}(-x^3+3x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

08 곡선 $y=x^3-2x^2+x$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^3-2x^2+x=0$에서

$x(x-1)^2=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$

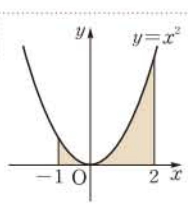
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}|x^3-2x^2+x|\,dx=\int_{0}^{1}(x^3-2x^2+x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{12}$$

답 $\frac{1}{12}$

09 구하는 넓이는

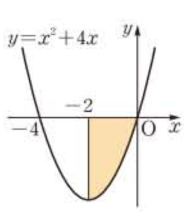
$$\int_{-1}^{2}|x^2|\,dx=\int_{-1}^{2}x^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$$
$$=3$$



답 3

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $y\geq0$이다.

10 곡선 $y=x^2+4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+4x=0$에서



$x(x+4)=0$

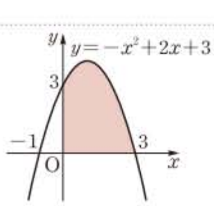
$\therefore$ $x=-4$ 또는 $x=0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}|x^2+4x|\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(-x^2-4x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{16}{3}$$

답 $\frac{16}{3}$

11 곡선 $y=-x^2+2x+3$과 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x+3=0$에서



$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$

$-x^2+2x+3=0$에서
$x^2-2x-3=0$
$\therefore$ $(x+1)(x-3)=0$

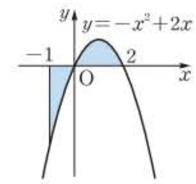
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{3}|-x^2+2x+3|\,dx=\int_{0}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_0^3$$
$$=9$$

답 9

12 답 2 　 0, 1, -1, 2, 1, 1, 1, x, 1, 1, 2

13 곡선 $y=-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=0$에서



$x(x-2)=0$

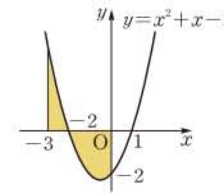
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}|-x^2+2x|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

14 곡선 $y=x^2+x-2$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^2+x-2=0$에서

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=1$

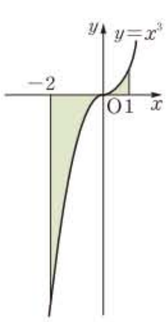
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^{0}|x^2+x-2|\,dx$$
$$=\int_{-3}^{-2}(x^2+x-2)\,dx+\int_{-2}^{0}(-x^2-x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-3}^{-2}+\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{0}$$
$$=\frac{11}{6}+\frac{10}{3}=\frac{31}{6}$$

답 $\frac{31}{6}$

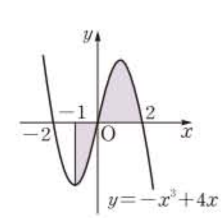
15 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}|x^3|\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(-x^3)\,dx+\int_{0}^{1}x^3\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$=4+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{17}{4}$$



답 $\frac{17}{4}$

16 곡선 $y=-x^3+4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^3+4x=0$에서



$x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=0$

또는 $x=2$

09 정적분의 활용

베이직쎈 BOX

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}|-x^3+4x|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{7}{4}+4=\frac{23}{4}$$

답 $\frac{23}{4}$

개념 56 두 곡선 사이의 넓이

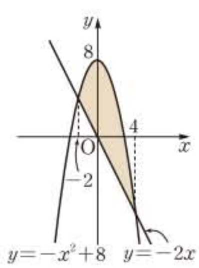
본책 140쪽

17 답 $\frac{9}{2}$ $3,\ x,\ 3,\ 3x,\ \frac{3}{2},\ 3,\ \frac{9}{2}$

18 답 $\frac{1}{3}$ $x^2+2x,\ 2x,\ x^2,\ \frac{1}{3}$

19 답 $\frac{32}{3}$ $1,\ -1,\ -1,\ x^2,\ 3x,\ -1,\ \frac{32}{3}$

20 곡선 $y=-x^2+8$과 직선 $y=-2x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+8=-2x$에서



$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

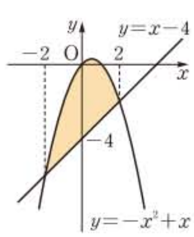
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{4}\{\underline{-x^2+8-(-2x)}\}\,dx=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^{4}$$
$$=36$$

답 36

닫힌구간 $[-2,\ 4]$에서 곡선 $y=-x^2+8$이 직선 $y=-2x$보다 위쪽에 있다.

21 곡선 $y=-x^2+x$와 직선 $y=x-4$의 교점의 x좌표는 $-x^2+x=x-4$에서 $x^2=4$



$\therefore x=\pm2$

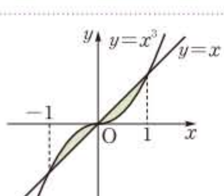
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}\{-x^2+x-(x-4)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-x^2+4)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{0}^{2}$$
$$=2\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$$

답 $\frac{32}{3}$

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 사이의 넓이를 구하는 경우에 $f(x)$와 $g(x)$의 대소 관계가 바뀔 때에는 $f(x)-g(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 구한다.

22 곡선 $y=x^3$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3=x$에서



$x^3-x=0$

$x(x+1)(x-1)=0$

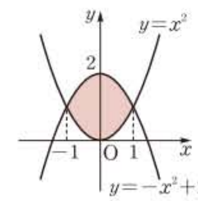
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

23 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+2$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2+2$에서



$x^2=1$

$\therefore x=\pm1$

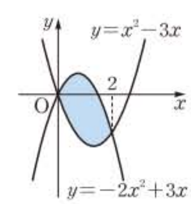
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}(-x^2+2-x^2)\,dx=\underline{\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)\,dx}$$
$$=4\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx$$
$$=4\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$$
$$=4\cdot\frac{2}{3}$$
$$=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

$$\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)\,dx$$
$$=2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx$$
$$=2\cdot2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx$$
$$=4\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx$$

24 두 곡선 $y=x^2-3x$, $y=-2x^2+3x$의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=-2x^2+3x$에서



$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

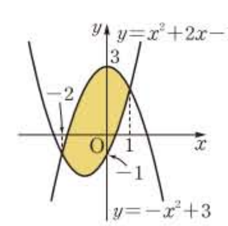
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{2}\{-2x^2+3x-(x^2-3x)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{2}(-3x^2+6x)\,dx$$
$$=\left[-x^3+3x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=4$$

답 4

25 두 곡선 $y=x^2+2x-1$, $y=-x^2+3$의 교점의 x좌표는 $x^2+2x-1=-x^2+3$에서



$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

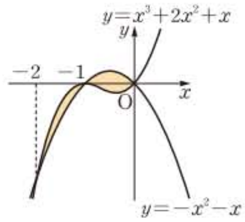
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{-x^2+3-(x^2+2x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$
$$=9$$

답 9

베이직쎈 BOX

26 두 곡선
$y=x^3+2x^2+x$,
$y=-x^2-x$의 교점의 x좌표는 $x^3+2x^2+x=-x^2-x$에서



$$x^3+3x^2+2x=0$$
$$x(x+2)(x+1)=0$$
$$\therefore\ x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{-1}\{x^3+2x^2+x-(-x^2-x)\}\,dx$$
$$+\int_{-1}^{0}\{-x^2-x-(x^3+2x^2+x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)\,dx+\int_{-1}^{0}(-x^3-3x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

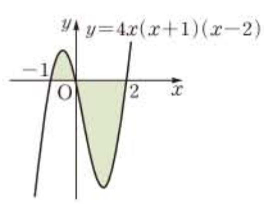
답 $\frac{1}{2}$

$x^3+3x^2+2x=0$에서
$x(x^2+3x+2)=0$
$\therefore x(x+2)(x+1)=0$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 141쪽

01 곡선
$y=4x(x+1)(x-2)$와 x축의 교점의 x좌표는
$4x(x+1)(x-2)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=0$
또는 $x=2$



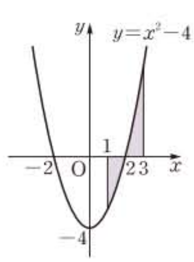
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}|4x(x+1)(x-2)|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}4x(x+1)(x-2)\,dx$$
$$+\int_{0}^{2}\{-4x(x+1)(x-2)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(4x^3-4x^2-8x)\,dx$$
$$+\int_{0}^{2}(-4x^3+4x^2+8x)\,dx$$
$$=\left[x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-x^4+\frac{4}{3}x^3+4x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{5}{3}+\frac{32}{3}=\frac{37}{3}$$

답 ④

02 곡선 $y=x^2-4$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4=0$에서

$$x^2=4$$
$$\therefore\ x=\pm 2$$

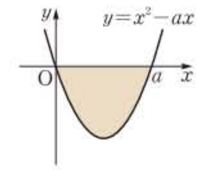


따라서 구하는 넓이는

$$\int_{1}^{3}|x^2-4|\,dx$$
$$=\int_{1}^{2}(-x^2+4)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{2}^{3}$$
$$=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}$$
$$=4$$

답 ①

03 곡선 $y=x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-ax=0$에서



$$x(x-a)=0$$
$$\therefore\ x=0 \text{ 또는 } x=a$$

$a>0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{a}|x^2-ax|\,dx=\int_{0}^{a}(-x^2+ax)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_{0}^{a}$$
$$=-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^3$$
$$=\frac{1}{6}a^3$$

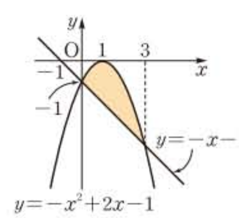
dx는 x에 대하여 적분한다는 뜻이므로 x 이외의 문자는 모두 상수로 취급한다.

따라서 $\frac{1}{6}a^3=\frac{9}{2}$이므로

$$a^3=27 \qquad \therefore\ a=3$$

답 3

04 곡선 $y=-x^2+2x-1$과 직선 $y=-x-1$의 교점의 x좌표는



$-x^2+2x-1=-x-1$에서

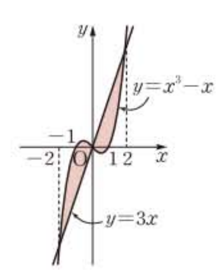
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)=0$$
$$\therefore\ x=0 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{3}\{-x^2+2x-1-(-x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=\frac{9}{2}$$

답 ③

05 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=3x$의 교점의 x좌표는
$x^3-x=3x$에서



$$x^3-4x=0$$
$$x(x+2)(x-2)=0$$
$$\therefore\ x=-2 \text{ 또는 } x=0$$
$$\text{또는 } x=2$$

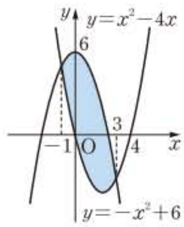
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}(x^3-x-3x)\,dx+\int_{0}^{2}\{3x-(x^3-x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=4+4$$
$$=8$$

답 8

06 두 곡선 $y=x^2-4x$,
$y=-x^2+6$의 교점의 x좌표는
$x^2-4x=-x^2+6$에서

$x^2-2x-3=0$
$(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$



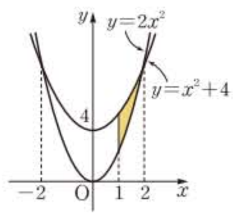
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{3}\{-x^2+6-(x^2-4x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}$$
$$=\frac{64}{3}$$

답 ④

07 두 곡선 $y=x^2+4$,
$y=2x^2$의 교점의 x좌표는
$x^2+4=2x^2$에서

$x^2=4 \quad \therefore x=\pm 2$



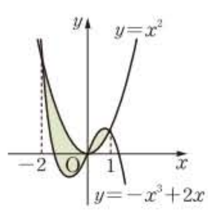
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{1}^{2}(x^2+4-2x^2)dx$$
$$=\int_{1}^{2}(-x^2+4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

08 두 곡선 $y=-x^3+2x$,
$y=x^2$의 교점의 x좌표는
$-x^3+2x=x^2$에서

$x^3+x^2-2x=0$
$x(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$
또는 $x=1$



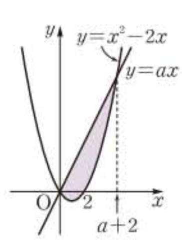
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\{x^2-(-x^3+2x)\}dx+\int_{0}^{1}(-x^3+2x-x^2)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}$$
$$=\frac{37}{12}$$

답 ⑤

09 (1) 곡선 $y=x^2-2x$와 직선
$y=ax$의 교점의 x좌표는
$x^2-2x=ax$에서

$x^2-(a+2)x=0$
$x\{x-(a+2)\}=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=a+2$



$a+2>2$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{a+2}\{ax-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_{0}^{a+2}\{-x^2+(a+2)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+2}{2}x^2\right]_{0}^{a+2}$$
$$=\frac{1}{6}(a+2)^3$$

(2) $\frac{1}{6}(a+2)^3=\frac{32}{3}$이므로

$(a+2)^3=64$
$a+2=4 \qquad \therefore a=2$

답 (1) $\frac{1}{6}(a+2)^3$ (2) 2

베이직쎈 BOX

도형 $f(x, y)=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
➡ y 대신 $-y$를 대입한다.
➡ $f(x, -y)=0$

도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 도형의 방정식
➡ x 대신 $x-p$를 대입, y 대신 $y-q$를 대입한다.
➡ $f(x-p, y-q)=0$

10 곡선 $y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식은

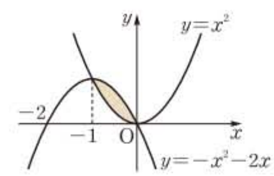
$y=-x^2$

이 곡선을 다시 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$y-1=-(x+1)^2$
$\therefore y=-x^2-2x$

두 곡선 $y=x^2$,
$y=-x^2-2x$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2-2x$에서

$x^2+x=0$
$x(x+1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}(-x^2-2x-x^2)dx=\int_{-1}^{0}(-2x^2-2x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

11 답 (가) $2x$ (나) 2 (다) $2x$ (라) x^2+1 (마) $\frac{1}{3}$

12 $y=x^2-4x+5$에서

$y'=2x-4$

곡선 위의 점 (3, 2)에서의 접선의 기울기는

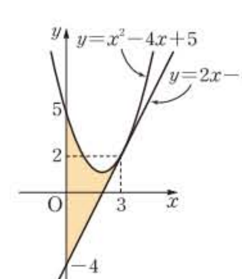
$2\cdot3-4=2$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x-3)$
$\therefore y=2x-4$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{3}\{x^2-4x+5-(2x-4)\}dx$$
$$=\int_{0}^{3}(x^2-6x+9)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_{0}^{3}$$
$$=9$$



답 9

베이직쎈 BOX

13 $y=-x^3-x^2+2$에서

$$y'=-3x^2-2x$$

곡선 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는

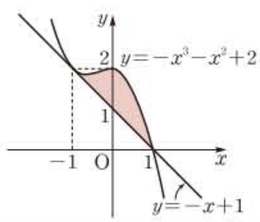
$$-3\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)=-1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-2=-1\cdot(x+1)$$

$$\therefore y=-x+1$$

곡선 $y=-x^3-x^2+2$와 직선 $y=-x+1$의 교점의 x좌표는



$-x^3-x^2+2=-x+1$에서

$$x^3+x^2-x-1=0$$

$$(x+1)^2(x-1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{-x^3-x^2+2-(-x+1)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^3-x^2+x+1)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 ②

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3+x^2-x-1$
$=(x-1)(x^2+2x+1)$
$=(x+1)^2(x-1)$

14 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_0^k(3x^2-6x)\,dx=0$$

$$\left[x^3-3x^2\right]_0^k=0$$

$$k^3-3k^2=0,\qquad k^2(k-3)=0$$

$$\therefore k=3\ (\because k>2)$$

답 3

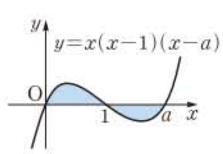
$f(x)=3x^2-6x$로 놓으면 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$-\int_0^2 f(x)\,dx=\int_2^k f(x)\,dx$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^k f(x)\,dx=0$$

$$\therefore \int_0^k f(x)\,dx=0$$

15 오른쪽 그림의 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로



$$\int_0^a x(x-1)(x-a)\,dx=0$$

$$\int_0^a\{x^3-(a+1)x^2+ax\}\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a=0$$

$$\frac{1}{4}a^4-\frac{a^3(a+1)}{3}+\frac{1}{2}a^3=0$$

$$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{6}a^3=0$$

$$a^4-2a^3=0,\qquad a^3(a-2)=0$$

$$\therefore a=2\ (\because a>1)$$

답 ③

16 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_0^2\{x^2(x-2)-ax(x-2)\}\,dx=0$$

$$\int_0^2\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_0^2=0$$

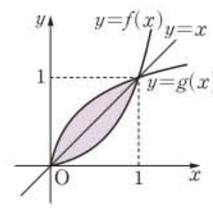
$$\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}=0$$

$$\therefore a=1$$

답 1

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

17 (1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$x^2=x$에서 $\qquad x^2-x=0$

$$x(x-1)=0\qquad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

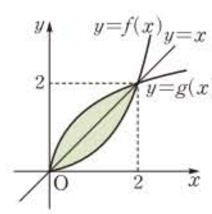
(2) $\displaystyle\int_0^1(x-x^2)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{6}$

(3) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$$2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

답 (1) 0, 1 (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{3}$

18 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$\frac{1}{2}x^2=x$에서 $\qquad x^2-2x=0$

$$x(x-2)=0\qquad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

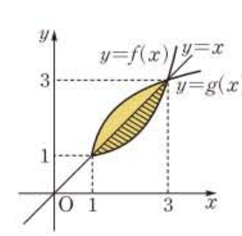
$$2\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\int_0^2(2x-x^2)\,dx$$

$$=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

19 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는



$$\int_1^3\{x-f(x)\}\,dx$$

$$=\int_1^3 x\,dx-\int_1^3 f(x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3-3$$

$$=4-3=1$$

$\displaystyle\int_a^b\{f(x)-g(x)\}\,dx$
$\displaystyle=\int_a^b f(x)\,dx$
$\displaystyle\quad-\int_a^b g(x)\,dx$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$$2\cdot1=2$$

답 2

09 정적분의 활용

베이직쎈 BOX

20 속도와 거리

개념 57 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리

본책 144쪽

01 답 9 　 0, 0, 3, 3, 9

02 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^4(6-2t)\,dt$$
$$=\Big[6t-t^2\Big]_0^4=8$$

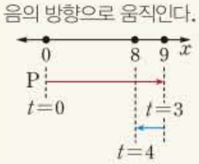
답 8

03 $0\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$, $3\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$이므로 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4|v(t)|\,dt=\int_0^3(6-2t)\,dt+\int_3^4(-6+2t)\,dt$$
$$=\Big[6t-t^2\Big]_0^3+\Big[-6t+t^2\Big]_3^4$$
$$=9+1=10$$

답 10

점 P는 $t=0$에서 $t=3$까지 양의 방향으로 움직이고, $t=3$에서 $t=4$까지 음의 방향으로 움직인다.



04 답 $-\frac{1}{3}$ 　 1, 1, 2, 1, 2, $-\frac{1}{3}$

05 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 v(t)\,dt=\int_1^3(t^2-2t)\,dt$$
$$=\Big[\frac{1}{3}t^3-t^2\Big]_1^3=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

06 $1\le t\le 2$에서 $v(t)\le 0$, $2\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$이므로 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^3|v(t)|\,dt=\int_1^2(-t^2+2t)\,dt+\int_2^3(t^2-2t)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+t^2\Big]_1^2+\Big[\frac{1}{3}t^3-t^2\Big]_2^3$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

답 2

07 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$10-2t=0$ 　 $\therefore t=5$

따라서 $t=5$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^5 v(t)\,dt=\int_0^5(10-2t)\,dt$$
$$=\Big[10t-t^2\Big]_0^5=25$$

답 25

08 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$t^2-1=0$, 　 $t^2=1$ 　 $\therefore t=1$ ($\because t>0$)

따라서 $t=1$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^1(t^2-1)\,dt$$
$$=\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1$$
$$=-\frac{1}{6}$$

답 $-\frac{1}{6}$

09 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$-t^2+6t-8=0$, 　 $(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

이때 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=2$이므로 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2(-t^2+6t-8)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-8t\Big]_0^2$$
$$=-\frac{20}{3}$$

답 $-\frac{20}{3}$

10 물체를 던진 지 1초 후의 지면으로부터의 높이는

$$0+\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^1(30-10t)\,dt$$
$$=\Big[30t-5t^2\Big]_0^1$$
$$=25\ (\mathrm{m})$$

답 25 m

11 물체가 최고 높이에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$30-10t=0$ 　 $\therefore t=3$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때의 지면으로부터의 높이는

$$0+\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^3(30-10t)\,dt$$
$$=\Big[30t-5t^2\Big]_0^3$$
$$=45\ (\mathrm{m})$$

답 45 m

12 $0\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$, $3\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$이므로 물체를 던진 후 4초 동안 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^4|v(t)|\,dt=\int_0^3(30-10t)\,dt+\int_3^4(-30+10t)\,dt$$
$$=\Big[30t-5t^2\Big]_0^3+\Big[-30t+5t^2\Big]_3^4$$
$$=45+5=50\ (\mathrm{m})$$

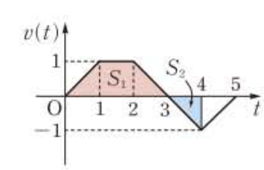
답 50 m

$$\int_0^4|v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^3 v(t)\,dt$$
$$+\int_3^4\{-v(t)\}\,dt$$

개념 58 그래프에서의 위치와 움직인 거리

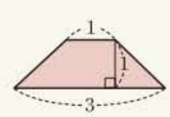
본책 145쪽

13 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은 오른쪽 그림에서

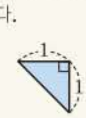


$$\int_0^4 v(t)\,dt$$
$$=S_1-S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$



S_1은 윗변의 길이가 1, 아랫변의 길이가 3, 높이가 1인 사다리꼴의 넓이와 같다.



S_2는 밑변의 길이가 1, 높이가 1인 삼각형의 넓이와 같다.

14 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)\,dt=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

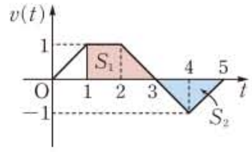
15 출발 후 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는 **13**의 그림에서

$$\int_0^4|v(t)|\,dt=S_1+S_2=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

베이직쎈 BOX

16 $t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는 오른쪽 그림에서



$$\int_1^5 |v(t)|dt=S_1+S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot1+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1$$
$$=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$$
답 $\frac{5}{2}$

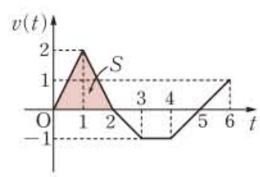
17 $v(3)=0$이고 $t=3$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 3이다. 답 3

18 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꿀 때까지 움직인 거리는 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리와 같으므로 구하는 거리는 **13**의 그림에서

$$\int_0^3 |v(t)|dt=S_1=2$$
답 2

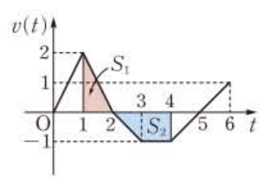
19 점 P는 $t=2$, $t=5$에서 운동 방향을 바꾸므로 2번 바꾼다. 답 ×

20 점 P는 $t=2$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 $t=2$에서의 점 P의 위치는 오른쪽 그림에서



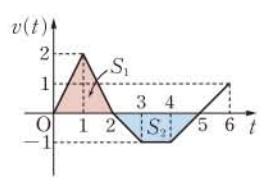
$$0+\int_0^2 v(t)dt=S$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$$
답 ○

21 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는 오른쪽 그림에서



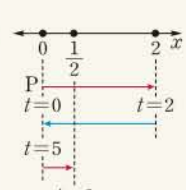
$$\int_1^4 |v(t)|dt$$
$$=S_1+S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2+\frac{1}{2}\cdot(2+1)\cdot1$$
$$=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$
답 ×

22 $t=5$에서의 점 P의 위치는 오른쪽 그림에서



$$0+\int_0^5 v(t)dt$$
$$=S_1-S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot(3+1)\cdot1$$
$$=2-2=0$$
따라서 점 P는 $t=5$에서 원점에 있다. 답 ○

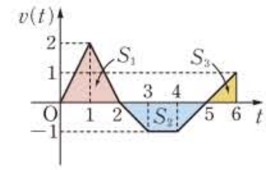
23 점 P는 출발 후 다음과 같이 이동한다.



(i) $t=2$까지 양의 방향으로 움직이고, $t=2$에서의 위치는 2이므로 원점에서 2만큼 떨어져 있다.

(ii) $t=2$에서 운동 방향을 바꾸어 음의 방향으로 움직이고, $t=5$에서 원점으로 돌아온다.

(iii) $t=5$에서 운동 방향을 바꾸어 양의 방향으로 움직이고, $t=6$에서의 위치는 오른쪽 그림에서



$$0+\int_0^6 v(t)dt$$
$$=S_1-S_2+S_3$$
$$=0+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}$$

$S_1-S_2=0$

이므로 원점에서 $\frac{1}{2}$만큼 떨어져 있다.

이상에서 $t=2$에서 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다. 답 ×

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 146쪽

01 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^2 v(t)dt=\int_1^2(3t^2-2t+1)dt$$
$$=\Big[t^3-t^2+t\Big]_1^2$$
$$=5$$
답 ①

02 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$2+\int_0^2 v(t)dt=2+\int_0^2(4t+a)dt$$
$$=2+\Big[2t^2+at\Big]_0^2$$
$$=2+8+2a$$
$$=2a+10$$

$t=0$에서의 위치

따라서 $2a+10=14$이므로 $a=2$ 답 2

03 $2\le t\le3$에서 $v(t)\ge0$, $3\le t\le4$에서 $v(t)\le0$이므로 $t=2$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_2^4 |v(t)|dt$$
$$=\int_2^3\{-(t-1)(t-3)\}dt+\int_3^4(t-1)(t-3)dt$$
$$=\int_2^3(-t^2+4t-3)dt+\int_3^4(t^2-4t+3)dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\Big]_2^3+\Big[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\Big]_3^4$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$
답 ②

04 점 P가 원점으로 되돌아오는 시각을 $t=a$ $(a>0)$라 하면 $\int_0^a v(t)dt=0$이므로

$$\int_0^a(12-2t)dt=0,\qquad \Big[12t-t^2\Big]_0^a=0$$
$$12a-a^2=0,\qquad a(a-12)=0$$
$$\therefore a=12\ (\because a>0)$$

베이직쎈 BOX

따라서 $t=12$에서 점 P가 원점으로 되돌아오므로 걸리는 시간은 12이다. 답 ⑤

05 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$1+\int_0^4 v(t)\,dt=1+\int_0^3 t\,dt+\int_3^4(-t^2+4t)\,dt$$
$$=1+\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^3+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_3^4$$
$$=1+\frac{9}{2}+\frac{5}{3}$$
$$=\frac{43}{6}$$

답 $\frac{43}{6}$

06 시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$$x_P(t)=0+\int_0^t v_P(t)\,dt$$
$$=\int_0^t(8t-1)\,dt$$
$$=\left[4t^2-t\right]_0^t$$
$$=4t^2-t$$
$$x_Q(t)=0+\int_0^t v_Q(t)\,dt$$
$$=\int_0^t(6t+3)\,dt$$
$$=\left[3t^2+3t\right]_0^t$$
$$=3t^2+3t$$

두 점 P, Q가 만나려면 $x_P(t)=x_Q(t)$이어야 하므로

$4t^2-t=3t^2+3t$, $\quad t^2-4t=0$

$t(t-4)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=4$

따라서 두 점 P, Q가 출발 후 다시 만나는 시각은 4이므로 구하는 위치는

$x_P(4)=4\cdot16-4=60$ 답 60

$x_Q(4)=3\cdot16+3\cdot4$
$=60$
으로 구할 수도 있다.

07 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$3-3t^2=0$, $\quad t^2=1$

$\therefore t=1\ (\because t>0)$

따라서 출발 후 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1|v(t)|\,dt=\int_0^1(3-3t^2)\,dt$$
$$=\left[3t-t^3\right]_0^1$$
$$=2$$

답 2

$0\le t\le1$에서
$v(t)\ge0$이므로
$|v(t)|=v(t)$

08 자동차가 정지할 때 $v(t)=0$이므로

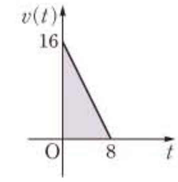
$16-2t=0 \qquad \therefore t=8$

따라서 자동차는 제동을 건 지 8초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^8|v(t)|\,dt=\int_0^8(16-2t)\,dt$$
$$=\left[16t-t^2\right]_0^8$$
$$=64\ (\text{m})$$

답 ③

다른 풀이 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 제동을 건 후 자동차가 정지할 때까지 달린 거리는



$$\int_0^8|v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\cdot8\cdot16$$
$$=64\ (\text{m})$$

09 열차가 정지할 때 $v(t)=0$이므로

$a-3t=0 \qquad \therefore t=\frac{a}{3}$

따라서 열차는 제동을 건 지 $\frac{a}{3}$초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^{\frac{a}{3}}|v(t)|\,dt=\int_0^{\frac{a}{3}}(a-3t)\,dt$$
$$=\left[at-\frac{3}{2}t^2\right]_0^{\frac{a}{3}}$$
$$=\frac{1}{6}a^2$$

즉 $\frac{1}{6}a^2=150$이므로 $\qquad a^2=900$

$\therefore a=30\ (\because a>0)$ 답 30

10 공이 최고 높이에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$18-6t=0 \qquad \therefore t=3$

따라서 공이 최고 높이에 도달할 때의 지면으로부터의 높이는

$$0+\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^3(18-6t)\,dt$$
$$=\left[18t-3t^2\right]_0^3$$
$$=27\ (\text{m})$$

답 ②

11 (1) 물체가 최고 높이에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$8-4t=0 \qquad \therefore t=2$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때의 지면으로부터의 높이는

$$10+\int_0^2 v(t)\,dt=10+\int_0^2(8-4t)\,dt$$
$$=10+\left[8t-2t^2\right]_0^2$$
$$=10+8=18\ (\text{m})$$

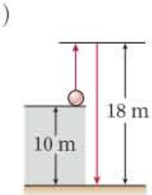
$t=0$일 때 물체의 지면으로부터의 높이

(2) 물체를 던진 후 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

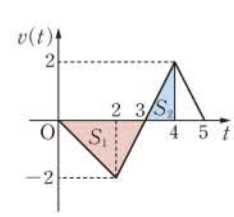
$8+18=26\ (\text{m})$

(최고 높이에 도달할 때까지 움직인 거리)
+(최고 높이에서 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리)

답 (1) 18 m (2) 26 m



12 $t=4$에서의 점 P의 위치는 오른쪽 그림에서

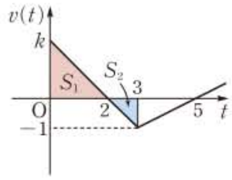


$$0+\int_0^4 v(t)\,dt$$
$$=-S_1+S_2$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot3\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2$$
$$=-3+1=-2$$

답 -2

베이직쎈 BOX

13 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 오른쪽 그림에서



$$\int_0^3 |v(t)|dt = S_1+S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot k+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$=k+\frac{1}{2}$$

이므로 $\quad k+\frac{1}{2}=\frac{7}{2} \qquad \therefore k=3$ 　　답 3

14 ㄱ. 운동 방향은 $t=2$, $t=4$에서 바뀌므로 2번 바뀐다.

ㄴ. $t=3$에서의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$$
$$=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$t=6$에서의 위치는

$$0+\int_0^6 v(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1$$
$$=\frac{3}{2}-2+1=\frac{1}{2}$$

따라서 $t=3$에서의 위치와 $t=6$에서의 위치가 같다.

ㄷ. $t=1$에서 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_1^3 |v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=\frac{3}{2}$$

$t=3$에서 $t=5$까지 움직인 거리는

$$\int_3^5 |v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{2}$$

따라서 $t=1$에서 $t=3$까지 움직인 거리와 $t=3$에서 $t=5$까지 움직인 거리가 같다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 　　답 ④

$\int_1^3 |v(t)|\,dt$
$=\int_1^2 v(t)\,dt$
$+\int_2^3 \{-v(t)\}\,dt$

$\int_3^5 |v(t)|\,dt$
$=\int_3^4 \{-v(t)\}\,dt$
$+\int_4^5 v(t)\,dt$

베쎈TIP

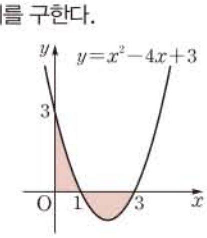
ㄷ. $t=1$에서 $t=3$까지 $v(t)$의 그래프와 $t=3$에서 $t=5$까지 $v(t)$의 그래프는 직선 $t=3$에 대하여 대칭이므로 $\int_1^3|v(t)|\,dt=\int_3^5|v(t)|\,dt$임을 알 수 있다.

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 148쪽

01 전략 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구하여 주어진 구간을 $y\ge 0$, $y\le 0$인 구간으로 나누어 넓이를 구한다.

풀이 곡선 $y=x^2-4x+3$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x+3=0$에서



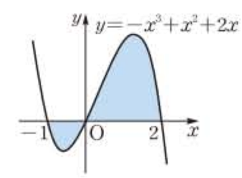
$$(x-1)(x-3)=0$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^3 |x^2-4x+3|\,dx$$
$$=\int_0^1 (x^2-4x+3)\,dx+\int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$
답 ⑤

02 전략 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구하여 $y\ge 0$, $y\le 0$인 구간으로 나누어 넓이를 구한다.

풀이 곡선 $y=-x^3+x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^3+x^2+2x=0$에서



$$x(x+1)(x-2)=0$$
$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$-x^3+x^2+2x=0$에서
$x^3-x^2-2x=0$
$x(x^2-x-2)=0$
$\therefore x(x+1)(x-2)=0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^2 |-x^3+x^2+2x|\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)\,dx+\int_0^2 (-x^3+x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$
답 ②

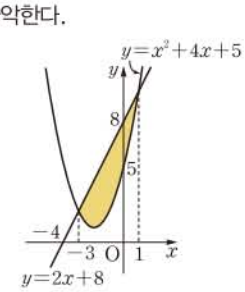
03 전략 $|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x\le 0)\end{cases}$임을 이용한다.

풀이 $y=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2+1 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^1 |x^2-1|\,dx=\int_{-1}^1 (-x^2+1)\,dx$$
$$=2\int_0^1 (-x^2+1)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$
답 ③

04 전략 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한 후 적분 구간에서 곡선과 직선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 곡선 $y=x^2+4x+5$와 직선 $y=2x+8$의 교점의 x좌표는 $x^2+4x+5=2x+8$에서



$$x^2+2x-3=0$$
$$(x+3)(x-1)=0$$
$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

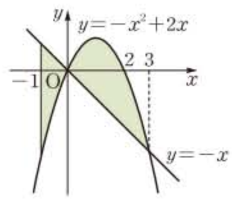
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^1 \{2x+8-(x^2+4x+5)\}\,dx$$
$$=\int_{-3}^1 (-x^2-2x+3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^1$$
$$=\frac{32}{3}$$
답 ④

09 정적분의 활용

05 전략 주어진 구간에서 곡선과 직선의 위치 관계를 파악한 후 구간을 나누어 넓이를 구한다.

풀이 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=-x$에서



$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

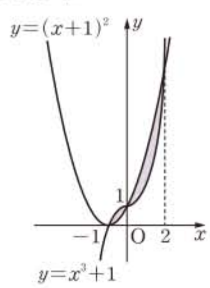
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{-x-(-x^2+2x)\}\,dx+\int_{0}^{3}\{-x^2+2x-(-x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2-3x)\,dx+\int_{0}^{3}(-x^2+3x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=\frac{11}{6}+\frac{9}{2}$$
$$=\frac{19}{3}$$

답 ①

06 전략 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하여 두 곡선의 위치 관계를 파악한 후 구간을 나누어 넓이를 구한다.

풀이 두 곡선 $y=x^3+1$, $y=(x+1)^2$의 교점의 x좌표는 $x^3+1=(x+1)^2$에서



$x^3+1=x^2+2x+1$

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{x^3+1-(x+1)^2\}\,dx+\int_{0}^{2}\{(x+1)^2-(x^3+1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}$$
$$=\frac{37}{12}$$

답 ⑤

07 전략 두 도형의 넓이가 같으면 $\int_{0}^{3}(-x^2+4-k)\,dx=0$임을 이용한다.

풀이 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{3}(-x^2+4-k)\,dx=0$$

베이직쎈 BOX: $\int_{0}^{3}\{k-(-x^2+4)\}dx=0$으로 계산하여 구할 수도 있다.

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+(4-k)x\right]_{0}^{3}=0$$

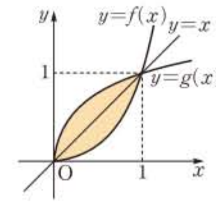
$-9+3(4-k)=0,\quad 3-3k=0$

$\therefore k=1$

답 ③

08 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$x^3=x$에서 $\quad x^3-x=0$

$x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ $(\because x\geq 0)$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$$2\int_{0}^{1}(x-x^3)\,dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$$
$$=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 ①

09 전략 A 지점을 통과한 지 x초 후의 물체의 위치를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 A 지점의 위치를 0이라 하면 A 지점을 통과한 지 x초 후의 물체의 위치는

베이직쎈 BOX: A 지점을 기준으로 하므로 그 위치를 0이라 한다.

$$0+\int_{0}^{x}v(t)\,dt=\int_{0}^{x}(4t+1)dt=\left[2t^2+t\right]_{0}^{x}$$
$$=2x^2+x$$

A 지점에서 21 m만큼 떨어진 지점의 위치는 21이므로

$2x^2+x=21,\quad 2x^2+x-21=0$

$(2x+7)(x-3)=0$

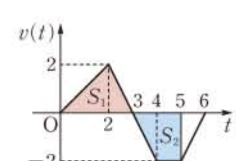
$\therefore x=3$ $(\because x>0)$

따라서 걸린 시간은 3초이다.

답 ④

10 전략 $v(t)$의 그래프와 t축 사이의 넓이가 점 P가 움직인 거리임을 이용한다.

풀이 점 P는 원점을 출발하여 $t=3$까지 양의 방향으로 움직이고, $t=3$에서 운동 방향을 바꾸어 음의 방향으로 움직인다. 이때 $t=5$에서의 점 P의 위치는



$$0+\int_{0}^{5}v(t)\,dt=S_1-S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot(2+1)\cdot 2$$
$$=3-3=0$$

따라서 점 P가 출발 후 다시 원점을 지날 때의 시각은 5이다.

답 ④

베쎈TIP

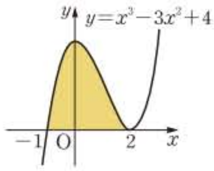
점 P는 출발 후 $t=3$까지 양의 방향으로 3만큼 움직이므로 $t=3$ 이후 음의 방향으로 3만큼 움직인 시각을 구하면 된다.

즉 $t=3$부터 $v(t)$의 그래프와 t축 사이의 넓이가 3이 되는 시각을 찾으면 된다.

베이직쎈 BOX

11 전략 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간에서 그래프가 x축보다 위쪽인지 아래쪽인지 확인한다.

풀이 곡선 $y=x^3-3x^2+4$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^3-3x^2+4=0$에서

$(x+1)(x-2)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3-3x^2+4$
$=(x+1)(x^2-4x+4)$
$=(x+1)(x-2)^2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}|x^3-3x^2+4|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{27}{4}$$

답 $\frac{27}{4}$

12 전략 먼저 두 곡선이 지나는 점의 좌표를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

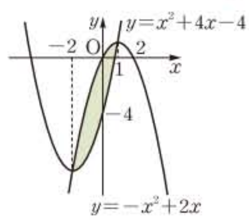
풀이 곡선 $y=x^2+4x-a$가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=1+4-a \qquad \therefore a=4$

곡선 $y=-x^2+bx$가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=-1+b \qquad \therefore b=2$ ··· ❶

즉 두 곡선 $y=x^2+4x-4$, $y=-x^2+2x$의 교점의 x좌표는



$x^2+4x-4=-x^2+2x$에서

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ ··· ❷

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{-x^2+2x-(x^2+4x-4)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$
$$=9$$ ··· ❸

답 9

단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	두 곡선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸	두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

13 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$임을 이용한다.

풀이 (1) $y=x^2$에서 $\quad y'=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 접선의 기울기는 $2t$이므로 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2$ ······ ㉠ ··· ❶

직선 ㉠이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

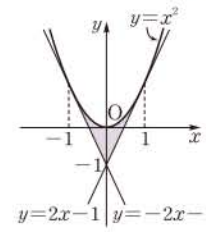
$-1=-t^2, \qquad t^2=1$

$\therefore t=\pm1$

$t=1$일 때, ㉠에서 $\quad y=2x-1$

$t=-1$일 때, ㉠에서 $\quad y=-2x-1$ ··· ❷

(2) 두 접선 $y=2x-1$, $y=-2x-1$의 접점의 x좌표는 각각 1, -1이므로 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{0}\{x^2-(-2x-1)\}\,dx$$
$$+\int_{0}^{1}\{x^2-(2x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$ ··· ❸

답 (1) $y=2x-1$, $y=-2x-1$
(2) $\frac{2}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	접선의 방정식을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷	두 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸	도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

베쎈 TIP

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x-1$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=-2x-1$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 같으므로 (2)의 답을 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\rightarrow 2\int_{0}^{1}\{x^2-(2x-1)\}\,dx=2\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{1}$$
$$=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

14 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 넓이가 같은 도형을 찾는다.

답 (가) $y=x$ (나) B (다) C (라) 1 (마) 2

15 전략 점 P가 출발한 점의 위치를 미지수로 놓고 $t=4$에서의 점 P의 위치에 대한 방정식을 세운다.

풀이 점 P가 출발한 점의 위치를 a라 하면

$$a+\int_{0}^{4}v(t)\,dt=10$$

이므로

$$a+\int_{0}^{4}(5-t)\,dt=10$$
$$a+\left[5t-\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{4}=10,$$
$$a+12=10$$
$$\therefore a=-2$$

따라서 점 P가 출발한 점의 위치는 -2이다.

답 -2

본책 149쪽

베이직쎈 BOX

16 전략 물체가 최고 높이에 도달할 때 (속도)$=0$임을 이용하여 그때의 시각을 구한다.

풀이 물체가 최고 높이에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$90-10t=0$

$\therefore t=9$ ⋯ ❶

$8t=0$이면
$t=0$
$t=0$은 최고 높이에 도달할 때가 아니다.

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때의 지면으로부터의 높이는

$$\begin{aligned}0+\int_0^9 v(t)\,dt&=\int_0^5 8t\,dt+\int_5^9 (90-10t)\,dt\\&=\Big[4t^2\Big]_0^5+\Big[90t-5t^2\Big]_5^9\\&=100+80\\&=180\ (\mathrm{m})\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 180 m

단계	채점 기준	비율
❶	물체가 최고 높이에 도달할 때의 시각을 구할 수 있다.	30 %
❷	물체가 최고 높이에 도달할 때의 지면으로부터의 높이를 구할 수 있다.	70 %

MEMO

MEMO