베이직 쎈 확률과 통계

정답 및 풀이

Ⅰ 순열과 조합

01 여러 가지 순열 2

02 중복조합과 이항정리 13

Ⅱ 확률

03 확률의 뜻과 활용 22

04 조건부확률 35

Ⅲ 통계

05 확률변수와 확률분포 47

06 이항분포와 정규분포 60

07 통계적 추정 75

I. 순열과 조합

01 여러 가지 순열

01 원순열

개념 01 원순열

본책 8쪽

01 $(5-1)!=4!=24$ 답 24

> $n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

02 $(6-1)!=5!=120$ 답 120

03 $(4-1)!=3!=6$ 답 6

> 원탁에 둘러앉는 전체 인원수는
> $2+2=4$

04 $(7-1)!=6!=720$ 답 720

05 답 8 　 4, 4, 3, 2, 2, 8

06 5명의 학생 중 4명을 택하는 경우의 수는

$_5C_4=5$

택한 4명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot6=30$ 답 30

> $_nC_r=\dfrac{_nP_r}{r!}$ (단, $0\le r\le n$)

07 6명의 학생 중 3명을 택하는 경우의 수는

$_6C_3=20$

택한 3명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\cdot2=40$ 답 40

08 답 12 　 4, 4, 6, 6, 12

09 남학생 2명을 한 사람으로 생각하면 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

남학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot2=48$ 답 48

10 대표 3명을 한 사람으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

대표끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot6=36$ 답 36

11 답 12 　 3, 2, 3, 6, 6, 12

12 여학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

여학생들 사이사이의 4개의 자리에 남학생 2명이 앉는 경우의 수는

$_4P_2=12$

> $_nP_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot12=72$ 답 72

13 2반 학생 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

2반 학생들 사이사이의 5개의 자리에 1반 학생 3명이 앉는 경우의 수는

$_5P_3=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot60=1440$ 답 1440

14 답 2 　 3, 2

> 주어진 영역을 서로 다른 3가지 색으로 칠할 때 회전하여 일치하는 것이 3가지씩 있으므로 원순열의 수로 생각한다.

15 4등분한 도형의 각 영역을 서로 다른 4가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수는 서로 다른 4개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$ 답 6

개념 02 다각형으로 배열하는 경우의 수

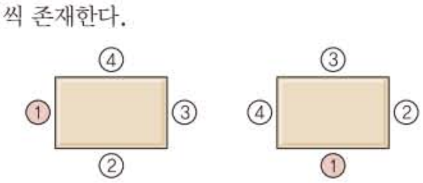
본책 10쪽

16 답 10080 　 8, 5040, 5040, 10080

17 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



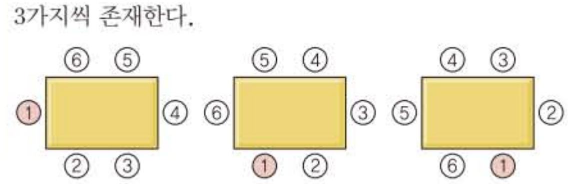
따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2=12$ 답 12

18 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



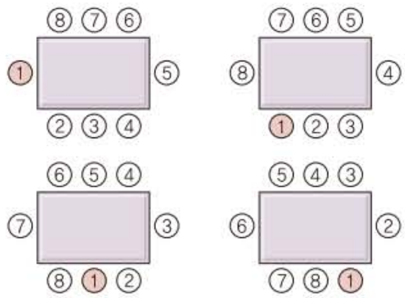
따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot 3=360$ 　　답 360

19 8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!=5040$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 4가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$5040\cdot 4=20160$ 　　답 20160

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 11쪽

01 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$ 　　답 ①

02 10명의 회원 중 4명을 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

택한 4명의 회원이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$210\cdot 6=1260$ 　　답 ⑤

03 서로 다른 n개의 화분을 원형으로 배열하는 경우의 수가 24이므로

$(n-1)!=24$

이때 $24=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!$이므로

$(n-1)!=4!$

$n-1=4$ 　　$\therefore n=5$ 　　답 5

04 안경 3개를 한 묶음으로 생각하면 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

안경끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot 6=144$ 　　답 ②

05 두 쌍의 부부를 각각 한 사람으로 생각하면 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$

두 쌍의 부부가 각각 부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot 2!=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$720\cdot 4=2880$ 　　답 2880

06 A, B, C 세 사람을 한 사람으로 생각하면 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

B와 C가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

> 베이직쎈 BOX: A의 양 옆에 B와 C가 앉으므로
> BAC 또는 CAB
> 의 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot 2=240$ 　　답 ③

07 부모를 제외한 나머지 가족 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

나머지 가족들 사이사이의 6개의 자리에 부모 2명이 앉는 경우의 수는

${}_6P_2=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot 30=3600$ 　　답 ④

08 만화책 6권을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

만화책들 사이사이의 6개의 자리에 소설책 3권을 배열하는 경우의 수는

${}_6P_3=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot 120=14400$ 　　답 14400

09 남자 회원 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

남자 회원들 사이사이의 3개의 자리에 여자 회원 3명이 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot 6=12$ 　　답 ②

> 여자 회원을 먼저 앉힌 후 그 사이사이의 자리에 남자 회원을 앉히는 경우의 수를 구해도 결과는 같다.

10 곰 인형 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

곰 인형들 사이사이의 4개의 자리에 토끼 인형 4개를 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 24=144$ 　　답 ⑤

11 남학생 대표의 자리가 결정되면 여학생 대표의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 구하는 경우의 수는 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.

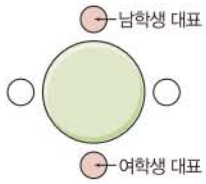
> 남학생 대표의 마주 보는 자리에 고정된 여학생 대표 1명을 제외한 3명

따라서 구하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$ 　　답 2

베이직쎈 BOX

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 남학생 대표와 여학생 대표가 마주 보고 원탁에 앉은 후 나머지 2개의 자리에 2명이 앉으면 되므로 구하는 경우의 수는



$2!=2$

12 케이크 1개의 자리가 결정되면 나머지 케이크 1개의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 구하는 경우의 수는 6개를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$ 답 ①

13 서로 다른 4가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$ 답 ⑤

14 서로 다른 6가지 색 중에서 5가지 색을 택하는 경우의 수는
${}_6C_5=6$
서로 다른 5가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot24=144$ 답 ④

15 빨간색과 노란색을 한 묶음으로 생각하면 서로 다른 5가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
빨간색과 노란색이 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\cdot2=48$ 답 48

16 가운데 영역을 칠하는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
나머지 3개의 영역을 서로 다른 3가지 색으로 칠하는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot2=8$ 답 ①

가운데 영역에 칠할 색을 택하는 경우의 수

가운데 영역에 칠한 색을 제외하면 남은 색은 3가지이다.

17 가운데 영역을 칠하는 경우의 수는
${}_5C_1=5$
나머지 4개의 영역을 서로 다른 4가지 색으로 칠하는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$5\cdot6=30$ 답 30

18 주어진 사각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는
${}_5C_1=5$
4개의 옆면을 서로 다른 4가지 색으로 칠하는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$

밑면에 칠할 색을 택하는 경우의 수

따라서 구하는 경우의 수는
$5\cdot6=30$ 답 30

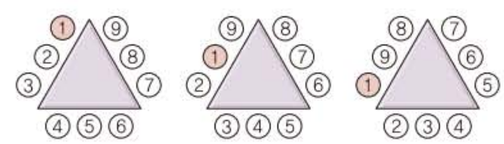
19 주어진 오각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는
${}_6C_1=6$
5개의 옆면을 서로 다른 5가지 색으로 칠하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot24=144$ 답 ③

20 (1) 두 밑면을 칠하는 경우의 수는 서로 다른 5가지 색 중에서 2가지 색을 택하여 두 밑면을 칠하는 경우의 수와 같으므로
${}_5P_2=20$

삼각뿔대의 두 밑면은 크기가 다르므로 순열을 이용한다.

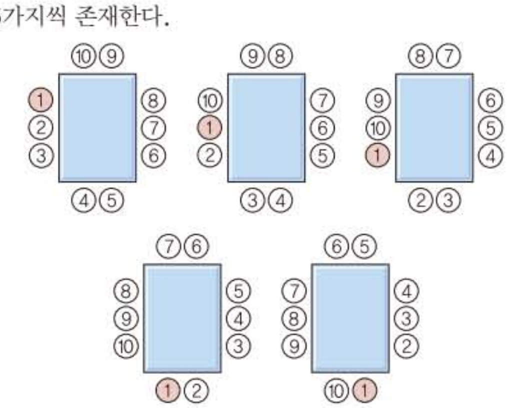
(2) 3개의 옆면을 서로 다른 3가지 색으로 칠하는 경우의 수는 $(3-1)!=2!=2$
(3) 주어진 삼각뿔대의 각 면을 칠하는 경우의 수는
$20\cdot2=40$
답 (1) 20 (2) 2 (3) 40

21 9명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(9-1)!=8!$
이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는
$8!\cdot3$ 답 ②

22 10명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(10-1)!=9!$
이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.

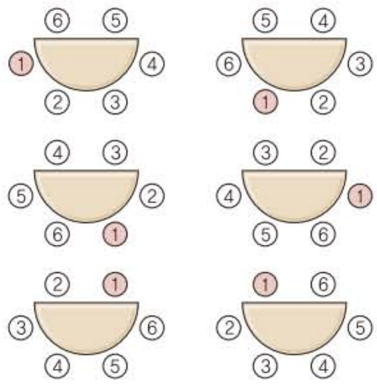


따라서 구하는 경우의 수는
$9!\cdot5$ 답 ③

23 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 반원 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 6가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot 6=720$ 답 720

02 중복순열

개념 03 중복순열

본책 15쪽

01 답 ${}_3\Pi_2$

02 답 ${}_2\Pi_4$

03 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2$ 답 ${}_5\Pi_2$

04 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_6$ 답 ${}_3\Pi_6$

05 ${}_6\Pi_2=6^2=36$ 답 36

06 ${}_4\Pi_4=4^4=256$ 답 256

07 ${}_2\Pi_5=2^5=32$ 답 32

08 ${}_5\Pi_3=5^3=125$ 답 125

09 ${}_n\Pi_2=64$에서

$n^2=8^2$ $\therefore n=8$ 답 8

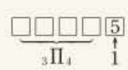
10 ${}_n\Pi_n=27$에서

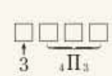
$n^n=3^3$ $\therefore n=3$ 답 3

베이직쎈 BOX

각 학생이 같은 종류의 공책을 택할 수 있으므로 중복순열을 이용한다.

6명이 주어진 반원 모양의 탁자에 앉을 때, 회전하여 일치하는 경우가 없으므로 구하는 경우의 수는 6명을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.





11 ${}_4\Pi_r=16$에서

$4^r=4^2$ $\therefore r=2$ 답 2

12 ${}_5\Pi_r=625$에서

$5^r=5^4$ $\therefore r=4$ 답 4

13 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$ 답 9

14 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$ 답 64

15 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$ 답 81

16 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$ 답 243

17 답 75 5, 2, 25, 25, 75

18 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

5의 1개

만의 자리의 숫자, 천의 자리의 숫자, 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$1\cdot 81=81$ 답 81

19 답 100 1, 2, 4, 5, 25, 25, 100

20 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3의 3개

백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\cdot 64=192$ 답 192

21 답 2, 2, 2, 9

베쎈 TIP

함수

두 집합 X, Y에 대하여

① X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 함수라 한다.

② X의 원소 중에서 대응하지 않고 남아 있는 원소가 있거나 X의 한 원소에 Y의 원소가 두 개 이상 대응하면 그 대응은 함수가 아니다.

22 구하는 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 X의 원소 a, b, c에 대응시키는 경우의 수와 같다.
따라서 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

답 8

X의 원소의 개수

23 구하는 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 X의 원소 a, b, c에 대응시키는 경우의 수와 같다.
따라서 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

답 64

자신감 UP! 기본&핵심유형

본책 17쪽

01 ${}_5P_2+{}_2\Pi_4=5\cdot 4+2^4=36$

답 ②

02 ${}_1\Pi_2+{}_3\Pi_2+{}_5\Pi_2+{}_7\Pi_2=1^2+3^2+5^2+7^2$
$=84$

답 84

03 ${}_4\Pi_r=1024$에서

$4^r=4^5 \quad \therefore r=5$

답 ③

$1024=2^{10}=4^5$

04 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

답 81

가위, 바위, 보의 3개

05 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_5=2^5=32$$

답 ①

06 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_5=3^5=243$$

답 243

07 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_6\Pi_3=6^3=216$$

답 216

과일을 바구니에 넣는 경우이므로 중복을 허용하여 택할 수 있는 것은 바구니이다.

08 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

답 ③

2층, 3층, 4층, 5층, 6층의 5개

09 두 기호를 합해서 4개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

답 ①

2개의 기호 •, −에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

10 전구 5개를 각각 켜거나 끄는 경우의 수는

$${}_2\Pi_5=2^5=32$$

이때 전구가 모두 꺼진 경우는 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는

$$32-1=31$$

답 ③

11 깃발을 합해서 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_2\Pi_2=2^2=4$

2개의 깃발에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

깃발을 합해서 3번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 신호의 개수는

$$4+8=12$$

답 12

12 두 기호를 합해서 n개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_n=2^n$$

$n=5$일 때, $2^5=32<50$

$n=6$일 때, $2^6=64>50$

따라서 n의 최솟값은 6이다.

답 6

13 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

5의 1개

천의 자리의 숫자, 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$$1\cdot 125=125$$

답 ③

14 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

3, 4의 2개

십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$2\cdot 16=32$$

답 32

15 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

(3을 반드시 포함하는 자연수의 개수)
=(전체 자연수의 개수)
−(3을 포함하지 않는 자연수의 개수)

3을 제외한 나머지 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$64-27=37$$

답 ⑤

16 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4, 5의 5개

십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_6\Pi_2=6^2=36$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$5\cdot 36=180$$

답 ④

17 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4의 4개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

$0,\ 2,\ 4$의 3개

백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$4\cdot3\cdot25=300$ 답 300

18 X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 X의 원소 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$_5\Pi_2=5^2=25$ 답 ②

19 함수 f의 개수는 Y의 원소 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 X의 원소 1, 3, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$a={}_4\Pi_3=4^3=64$

함수 f 중에서 일대일함수의 개수는 Y의 원소 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$의 4개에서 서로 다른 3개를 뽑아 X의 원소 1, 3, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$b={}_4\mathrm{P}_3=24$

$\therefore\ a-b=40$ 답 40

베이직쎈 BOX

일대일함수
➡ 함수 $f:X\longrightarrow Y$에서 정의역 X의 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$인 함수

베쎈 TIP

두 집합 $X,\ Y$의 원소의 개수가 각각 $m,\ n$일 때

① X에서 Y로의 함수의 개수
➡ $_n\Pi_m=n^m$

② X에서 Y로의 일대일함수의 개수
➡ $_n\mathrm{P}_m$ (단, $n\geq m$)

③ X에서 X로의 일대일대응의 개수
➡ $_m\mathrm{P}_m=m!$

20 $f(a)=0$이므로 Y의 원소 0, 1, 2의 3개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 X의 원소 $b,\ c,\ d$에 대응시키면 된다.

정의역의 원소 a는 함숫값이 고정되어 있으므로 나머지 정의역의 원소에 공역의 원소를 대응시키는 경우의 수를 구한다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$_3\Pi_3=3^3=27$ 답 27

21 $f(3)\neq a$이므로 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은

$b,\ c,\ d,\ e$의 4개

또 Y의 원소 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 X의 원소 2, 5에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$4\cdot{}_5\Pi_2=4\cdot5^2=100$ 답 ①

22 $f(b)\neq8$이므로

$f(b)=9$

따라서 $f(a)=8,\ f(b)=9$이므로 Y의 원소 8, 9의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 X의 원소 $c,\ d,\ e$에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$_2\Pi_3=2^3=8$ 답 ①

03 같은 것이 있는 순열

개념 04 같은 것이 있는 순열

본책 20쪽

01 답 4, 3, 4, 3, 4

02 5개의 숫자 중 1이 2개, 2가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\cdot2!}=30$ 답 30

03 6개의 숫자 중 1이 2개, 2가 2개, 3이 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot2!\cdot2!}=90$ 답 90

04 4개의 문자 중 c가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$ 답 12

05 5개의 문자 중 a가 3개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}=20$ 답 20

06 6개의 문자 중 a가 2개, b가 3개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot3!}=60$ 답 60

07 6개의 문자 중 h가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!}=360$ 답 360

08 7개의 문자 중 t가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!}=2520$ 답 2520

09 7개의 문자 중 g가 3개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{3!}=840$ 답 840

10 7개의 문자 중 s가 3개, c가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

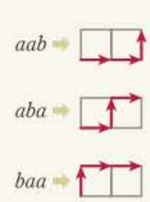
$\dfrac{7!}{3!\cdot2!}=420$ 답 420

11 8개의 문자 중 r가 2개, e가 3개, m이 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{2!\cdot3!\cdot2!}=1680$ 답 1680

개념 05 최단 거리로 가는 경우의 수

본책 21쪽



12 답 3 　2, 1, b, 2, 3

13 $\dfrac{(3+1)!}{3!}=\dfrac{4!}{3!}=4$ 답 4

베이직쎈 BOX

오른쪽으로 1칸 가는 것을 a, 위쪽으로 1칸 가는 것을 b라 하면 구하는 경우의 수는 a, a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

14 $\dfrac{(2+2)!}{2!\cdot 2!}=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ 답 6

15 $\dfrac{(3+2)!}{3!\cdot 2!}=\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=10$ 답 10

16 답 12 ◎ 3, 4, 2, 4, 12

17 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot 6=18$ 답 18

18 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}=15$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot 2=30$ 답 30

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우는 다음 그림과 같이 2가지이다.

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 22쪽

01 양 끝에 2개의 t를 나열하고, 2개의 t를 제외한 6개의 문자 i, n, e, r, e, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!}=360$ 답 ①

02 3개의 a를 한 문자 X로 생각하면 4개의 문자 X, b, n, n을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$ 답 ②

aaa의 자리를 바꾸는 것은 생각하지 않는다.

03 C와 D를 제외한 6개의 문자 A, A, B, B, B, B를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}=15$

이때 A, A, B, B, B, B의 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에 C와 D를 나열하는 경우의 수는

${}_7P_2=42$

A와 B를 ○라 하면
∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot 42=630$ 답 630

다른 풀이 8개의 문자 A, A, B, B, B, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{2!\cdot 4!}=840$

C와 D를 한 문자 X로 생각하면 7개의 문자 A, A, B, B, B, B, X를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\cdot 4!}=105$

이고, C와 D가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이므로 C와 D가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$105\cdot 2=210$

따라서 구하는 경우의 수는

$840-210=630$

04 5개의 숫자 중 3이 2개 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$ 답 60

05 (i) 맨 앞자리의 숫자가 1인 경우

5개의 숫자 0, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}=20$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

5개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$20+30=50$ 답 ④

다른 풀이 6개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 3!}=60$

이때 맨 앞자리의 숫자가 0인 경우의 수는 5개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$60-10=50$

06 (i) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

5개의 숫자 5, 5, 8, 8, 8을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

5개의 숫자 3, 5, 8, 8, 8을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}=20$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$10+20=30$ 답 30

07 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리, 천의 자리에 소수 2, 2, 3, 5를 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

나머지 자리에 4, 6, 6, 6을 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$12\cdot 4=48$ 답 ③

08 (i) 맨 앞자리의 숫자가 4인 경우

4개의 숫자 1, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 5인 경우

4개의 숫자 1, 3, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$24+12=36$ 답 36

09 a, d의 순서가 정해져 있으므로 구하는 경우의 수는 a, d를 모두 X로 생각하면 5개의 문자 X, b, c, X, e를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$ 답 ⑤

10 4개의 모음 e, a, u, e의 순서가 정해져 있으므로 구하는 경우의 수는 모음을 모두 X로 생각하면 8개의 문자 p, l, X, X, s, X, r, X를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{8!}{4!}=1680$ 답 ③

11 양 끝에 a, b를 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

a, b를 제외한 나머지 4개의 문자 중 c, d의 순서가 정해져 있으므로 c, d를 모두 X로 생각하면 4개의 문자 X, X, e, f를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot 12=24$ 답 24

12 1, 2, 3의 순서가 정해져 있으므로 구하는 경우의 수는 1, 2, 3을 모두 X로 생각하면 X, X, X, 4, 4, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\cdot 3!}=140$ 답 140

13 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\cdot 3!}=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot 20=60$ 답 ⑤

베이직쎈 BOX

A에서 P, Q를 모두 거쳐 B까지 최단 거리로 가려면 P, Q의 순서로 거쳐야 한다.

첫 번째 X는 a, 두 번째 X는 d로 바꾸면 된다.

첫 번째 X는 a, 두 번째 와 세 번째 X는 e, 네 번째 X는 u로 바꾸면 된다.

첫 번째 X는 c, 두 번째 X는 d로 바꾸면 된다.

첫 번째 X는 3, 두 번째 X는 2, 세 번째 X는 1로 바꾸면 된다.

14 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

P에서 Q까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 1

Q에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot 1\cdot 10=40$ 답 ③

15 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{8!}{5!\cdot 3!}=56$

A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}=3\cdot 10=30$

따라서 A에서 P를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$56-30=26$ 답 ①

16 (1) $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

(2) P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$

P에서 Q를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{3!}{2!}=3\cdot 3=9$

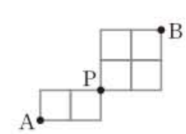
따라서 P에서 Q를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$15-9=6$

(3) (1), (2)에서 $6\cdot 6=36$

답 (1) 6 (2) 6 (3) 36

17 (1) 오른쪽 그림과 같이 P 지점을 잡으면 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는



$\frac{3!}{2!}=3$

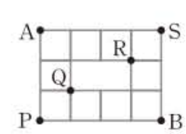
P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot 6=18$

(2) 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$1\cdot 1=1$

(ii) A → Q → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{4!}{3!}=3\cdot 4=12$

(iii) A → R → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{3!}{2!}=4\cdot3=12$$

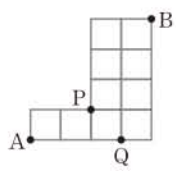
(iv) A → S → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$1\cdot1=1$$

이상에서 $1+12+12+1=26$

답 (1) 18 (2) 26

18 오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!}=3\cdot10=30$$

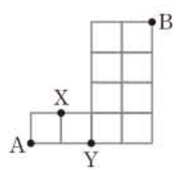
(ii) A → Q → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$1\cdot\frac{5!}{4!}=1\cdot5=5$$

(i), (ii)에서 $30+5=35$

답 35

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 두 지점 X, Y를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → X → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$2\cdot\left(1\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!}\right)=2\cdot10=20$$

(ii) A → Y → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$1\cdot\frac{6!}{2!\cdot4!}=1\cdot15=15$$

(i), (ii)에서 $20+15=35$

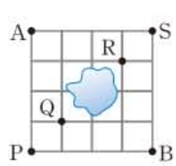
베쎈 TIP

도로망에서 중간 지점 P, Q를 잡을 때에는 다음에 주의한다.

① 두 지점 P, Q를 동시에 지나는 경우가 없도록 한다.

② 두 지점 P, Q를 모두 지나지 않는 경우가 없도록 한다.

19 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$1\cdot1=1$$

(ii) A → Q → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{4!}{3!}=4\cdot4=16$$

(iii) A → R → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{4!}{3!}=4\cdot4=16$$

(iv) A → S → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

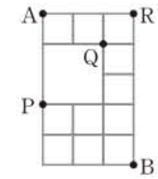
$$1\cdot1=1$$

이상에서 $1+16+16+1=34$

답 ⑤

베이직쎈 BOX

20 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$1\cdot\frac{5!}{3!\cdot2!}=1\cdot10=10$$

(ii) A → Q → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{5!}{4!}=3\cdot5=15$$

(iii) A → R → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$1\cdot1=1$$

이상에서 $10+15+1=26$

답 26

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 25쪽

01 전략 정팔각형 모양의 구절판을 회전하였을 때 모양이 일치하는 평면도형으로 생각할 수 있으므로 원순열의 수를 이용한다.

풀이 구하는 경우의 수는 서로 다른 8개를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$(8-1)!=7!$

답 ③

02 전략 먼저 각 부부를 한 사람으로 생각하여 원형으로 배열한다.

풀이 각 부부를 한 사람으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

부부끼리 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot16=96$

답 ⑤

03 전략 마주 보는 두 개 중 한 개의 위치가 결정되면 나머지 하나의 위치는 고정됨을 이용한다.

풀이 A의 우산의 자리가 결정되면 D의 우산의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같다.

D의 우산을 제외한 5개의 우산을 원형으로 배열한 후 A의 우산과 마주 보는 자리에 D의 우산을 꽂으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

답 ①

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 A, D의 우산을 마주 보게 꽂은 후 나머지 4개의 칸에 4개의 우산을 꽂으면 되므로 구하는 경우의 수는

$4!=24$

04 전략 3가지 색을 택하는 경우의 수는 조합의 수를, 택한 색을 칠하는 경우의 수는 원순열의 수를 이용한다.

풀이 서로 다른 5가지 색 중에서 3가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

택한 3가지 색을 각 날개에 칠하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot 2=20$ 답 ②

05 전략 밑면을 칠하는 경우의 수를 먼저 구한 후 나머지 색으로 옆면을 칠하는 경우의 수를 구한다.

풀이 주어진 사각뿔대의 두 밑면을 칠하는 경우의 수는

${}_6P_2=30$

4개의 옆면을 서로 다른 4가지 색으로 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

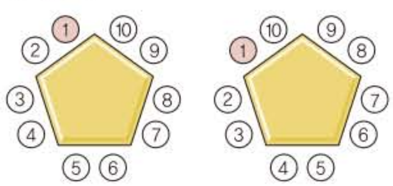
$30\cdot 6=180$ 답 ④

06 전략 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 정오각형 모양의 탁자에서의 서로 다른 경우의 수를 구한다.

풀이 10명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 정오각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$9!\cdot 2$ 답 ③

07 전략 5명의 등산가가 택하는 산은 서로 중복될 수 있으므로 중복순열의 수를 이용한다.

풀이 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$ 답 ④

08 전략 중복을 허용하여 택한 것을 나열하므로 중복순열의 수를 이용한다.

풀이 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_6\Pi_3=6^3=216$ 답 ②

09 전략 먼저 두 수의 곱이 6인 경우를 찾는다.

풀이 백의 자리의 숫자를 a, 일의 자리의 숫자를 b라 할 때, $ab=6$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$의 4개

천의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_6\Pi_2=6^2=36$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\cdot 36=144$ 답 ③

베이직쎈 BOX

10 전략 먼저 $f(1)+f(2)=2$를 만족시키는 경우의 수를 구한다.

풀이 $f(1)+f(2)=2$를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 순서쌍 $(f(1), f(2))$는

$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$의 3개

또 공역의 원소 0, 1, 2, 3, 4의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 정의역의 원소 0, 3, 4에 대응시키는 경우의 수는

정의역의 원소 중 1, 2를 제외한 나머지 0, 3, 4에 대응하는 값은 0, 1, 2, 3, 4 모두 가능하다.

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 함수의 개수는

$3\cdot 125=375$ 답 ⑤

11 전략 양 끝에 2개의 ㄴ을 나열한 후 남은 자음을 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수를 이용한다.

풀이 양 끝에 2개의 ㄴ을 나열하고, 2개의 ㄴ을 제외한 5개의 자음 ㄱ, ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$ 답 ②

12 전략 일의 자리의 숫자가 홀수이어야 하고, 맨 앞자리에는 0이 올 수 없음을 이용한다.

풀이 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

3의 1개

(i) 맨 앞자리의 숫자가 3인 경우

5개의 숫자 0, 3, 3, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 4인 경우

5개의 숫자 0, 3, 3, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}=20$

(i), (ii)에서 일의 자리를 제외한 나머지 여섯 자리에 숫자를 나열하는 경우의 수는

7개의 숫자 중 일의 자리에 오는 3을 제외한 6개의 숫자 0, 3, 3, 3, 4, 4를 맨 앞자리에 0이 오지 않도록 나열한다.

$30+20=50$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$1\cdot 50=50$ 답 ①

13 전략 정육면체의 가로, 세로, 높이의 방향으로 이동하는 것을 각각 a, b, c로 놓고 같은 것이 있는 순열의 수를 이용한다.

풀이 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 정육면체의 모서리를 3개, 2개, 1개 지나야 한다.

가로, 세로, 높이의 방향으로 정육면체의 모서리 1개를 지나는 것을 각각 a, b, c라 하면 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

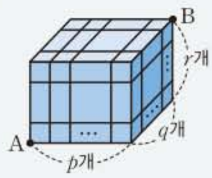
$\dfrac{6!}{3!\cdot 2!}=60$ 답 ③

베이직쎈 BOX

베쎈TIP

입체도형에서 최단 거리로 가는 경우의 수

오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체를 가로 방향으로 p개, 세로 방향으로 q개, 높이 방향으로 r개 쌓아 만든 직육면체가 있다.



이때 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$$

14 전략 먼저 선생님 2명과 학생 3명을 택하는 경우의 수를 구하고, 원탁에 둘러앉을 때 이웃하는 학생들을 한 사람으로 생각하여 경우의 수를 구한다.

풀이 선생님 5명과 학생 4명 중에서 선생님 2명과 학생 3명을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \cdot {}_4C_3 = 10 \cdot 4 = 40$$

학생 3명을 한 사람으로 생각하면 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(3-1)! = 2! = 2$$

학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$40 \cdot 2 \cdot 6 = 480$$

답 480

15 전략 가운데 영역을 칠하는 경우의 수를 먼저 구한 후 나머지 영역을 칠하는 경우의 수를 구한다.

풀이 가운데 영역을 칠하는 경우의 수는

$${}_7C_1 = 7 \quad \cdots ①$$

나머지 6개의 영역을 서로 다른 6가지 색으로 칠하는 경우의 수는

가운데 영역을 칠한 색을 제외한 나머지 6가지 색이다.

$$(6-1)! = 5! = 120 \quad \cdots ②$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$7 \cdot 120 = 840 \quad \cdots ③$$

답 840

단계	채점 기준	비율
①	가운데 영역을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
②	나머지 6개의 영역을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
③	주어진 도형의 각 영역을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

16 전략 정육면체의 마주 보는 두 면을 제외한 나머지 면을 칠하는 경우의 수는 원순열의 수를 이용한다.

풀이 정육면체의 한 밑면에 특정한 한 가지 색을 칠하면 마주 보는 밑면을 칠하는 경우의 수는

$${}_5C_1 = 5$$

옆면을 칠하는 경우의 수는 두 밑면에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$(4-1)! = 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

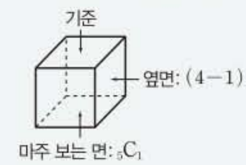
$$5 \cdot 6 = 30$$

답 30

베쎈TIP

정육면체는 각 면이 모두 합동인 정사각형이므로 밑면과 옆면이 합동이다. 따라서 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 볼 때, 다른 입체도형을 칠하는 방법으로 정육면체를 칠하면 밑면이 옆면으로 오도록 회전시킬 경우 일치하는 것이 생긴다.

따라서 정육면체의 각 면을 서로 다른 6가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법은 다음 그림과 같이 한 면을 기준으로 생각하고 나머지 면을 칠하는 방법으로 생각한다.



17 전략 두 깃발을 합해서 n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수를 n을 사용하여 나타낸다.

풀이 두 깃발을 합해서 n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_n = 2^n \quad \cdots ①$$

즉 $2^n = 128 = 2^7$이므로

$$n = 7 \quad \cdots ②$$

답 7

단계	채점 기준	비율
①	만들 수 있는 신호의 개수를 n을 사용하여 나타낼 수 있다.	70 %
②	n의 값을 구할 수 있다.	30 %

18 전략 천의 자리의 숫자가 1 또는 2인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 1□□□ 꼴인 경우

백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64 \quad \cdots ①$$

(ii) 20□□, 21□□, 22□□ 꼴인 경우

십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 각각

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16 \quad \cdots ②$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$64 + 3 \cdot 16 = 112 \quad \cdots ③$$

답 112

단계	채점 기준	비율
①	1□□□ 꼴인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
②	20□□, 21□□, 22□□ 꼴인 자연수의 개수를 각각 구할 수 있다.	40 %
③	2300보다 작은 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

19 전략 홀수를 짝수 번째 자리에, 짝수를 홀수 번째 자리에 나열하는 경우의 수를 각각 구한다.

풀이 홀수인 1, 3, 3, 7을 짝수 번째 자리에 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$ ··· ❶

짝수인 2, 2, 4, 4, 4를 홀수 번째 자리에 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot3!}=10$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot10=120$ ··· ❸

답 120

단계	채점 기준	비율
❶	홀수를 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷	짝수를 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸	홀수를 짝수 번째 자리에 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

20 전략 A와 B를 같은 문자로, C와 D를 같은 문자로 생각한다.

풀이 A와 B, C와 D의 순서가 정해져 있으므로 구하는 경우의 수는 A와 B를 X로, C와 D를 Y로 생각하면 6개의 문자

X, X, Y, Y, E, F

를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot2!}=180$

답 180

21 전략 P를 반드시 거쳐야 하므로 A에서 P로, P에서 B로 최단 거리로 가는 경우의 수를 각각 구한다.

풀이 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\cdot2!}=10$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot6=60$

답 60

베이직쎈 BOX

다음 그림에서 홀수는 짝수 번째 자리인 ○의 자리에, 짝수는 홀수 번째 자리인 ◆의 자리에 나열하면 된다.

◆○◆○◆○◆○◆

${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$ (단, $0\le r\le n$)

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

첫 번째 X는 B, 두 번째 X는 A로 바꾸고, 첫 번째 Y는 C, 두 번째 Y는 D로 바꾸면 된다.

I. 순열과 조합

02 중복조합과 이항정리

04 중복조합

개념 06 중복조합

본책 28쪽

01 답 ${}_3H_2$

02 답 ${}_2H_5$

03 답 ${}_5H_4$

04 답 ${}_4H_7$

05 답 2, 2, 10

06 ${}_8H_3={}_{8+3-1}C_3={}_{10}C_3=120$ 답 120

07 ${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$ 답 28

08 ${}_5H_5={}_{5+5-1}C_5={}_9C_5={}_9C_4=126$ 답 126

09 ${}_nH_6={}_6C_6$에서 ${}_{n-1}C_6={}_6C_6$

따라서 $n-1=6$이므로 $n=7$ 답 7

10 ${}_5H_r={}_8C_4$에서 ${}_{4+r}C_r={}_8C_4$

$\therefore r=4$ 답 4

11 답 3 $n+1$, $n+1$, $n+1$, $n+1$, 3, 3

12 ${}_nH_2={}_{n+1}C_2=\frac{(n+1)n}{2\cdot1}$이므로 ${}_nH_2=55$에서

$\frac{(n+1)n}{2\cdot1}=55$, $(n+1)n=11\cdot10$

$\therefore n=10$ 답 10

베쎈TIP

n의 값은 이차방정식 $n^2+n-110=0$을 풀어 구할 수도 있지만 n, $n+1$이 자연수이므로 곱이 110인 연속인 두 자연수가 10, 11임을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

13 ${}_nH_3={}_{n+2}C_3=\frac{(n+2)(n+1)n}{3\cdot2\cdot1}$이므로 ${}_nH_3=4$에서

$\frac{(n+2)(n+1)n}{3\cdot2\cdot1}=4$

$(n+2)(n+1)n=4\cdot3\cdot2$

$\therefore n=2$ 답 2

14 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$ 답 6

15 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6H_3={}_8C_3=56$ 답 56

16 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$ 답 165

17 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ 답 21

음료수를 학생들에게 나누어 주는 경우이므로 중복을 허용하여 택할 수 있는 것은 학생이다.

18 답 6 2, 3, 2, 3, 2, 4, 6

19 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$ 답 120

20 먼저 펜을 4개의 필통에 각각 1자루씩 넣고, 나머지 3자루의 펜을 4개의 필통에 넣으면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_3={}_6C_3=20$ 답 20

개념 07 순열, 중복순열, 조합, 중복조합의 비교

본책 30쪽

21 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_5P_3=60$ 답 60

22 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_3=125$ 답 125

23 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$_5C_3={}_5C_2=10$ 답 10

24 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_5H_3={}_7C_3=35$ 답 35

25 답 2, 2, 2, 3

26 답 2, 2, 2, 4, 2, 6

베이직쎈 BOX

27 구하는 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 서로 다른 3개를 뽑아 작은 수부터 차례대로 X의 원소 5, 6, 7에 대응시키는 경우의 수와 같다.
따라서 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$_4C_3={}_4C_1=4$ 답 4

28 구하는 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 5, 6, 7에 대응시키는 경우의 수와 같다.
따라서 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_3={}_6C_3=20$ 답 20

개념 08 방정식의 해의 개수

본책 31쪽

29 답 28 6, 3, 6, 8, 28

30 구하는 해의 개수는 x, y, z의 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$ 답 36

31 구하는 해의 개수는 x, y, z의 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$ 답 45

32 구하는 해의 개수는 x, y, z, w의 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$ 답 84

33 답 10 3, 3, 3, 3, 5, 10

34 x, y, z가 양의 정수이므로 $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$로 놓으면 a, b, c는 음이 아닌 정수이다.

$x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$

$x+y+z=7$에서

$(a+1)+(b+1)+(c+1)=7$

$\therefore a+b+c=4$ (단, a, b, c는 음이 아닌 정수) …… ㉠

따라서 구하는 해의 개수는 ㉠의 해의 개수와 같으므로

a, b, c의 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수

$_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$ 답 15

35 x, y, z가 양의 정수이므로 $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$로 놓으면 a, b, c는 음이 아닌 정수이다.
$x+y+z=8$에서

$(a+1)+(b+1)+(c+1)=8$

$\therefore a+b+c=5$ (단, a, b, c는 음이 아닌 정수) …… ㉠

따라서 구하는 해의 개수는 ㉠의 해의 개수와 같으므로

$_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ 답 21

36 x, y, z, w가 양의 정수이므로 $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$, $w-1=d$로 놓으면 a, b, c, d는 음이 아닌 정수이다.

$x+y+z+w=6$에서

$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=6$

$\therefore a+b+c+d=2$

(단, a, b, c, d는 음이 아닌 정수) …… ㉠

따라서 구하는 해의 개수는 ㉠의 해의 개수와 같으므로

$_4H_2={}_5C_2=10$ 답 10

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 32쪽

01 $_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$이므로

$_3P_2+{}_2H_5+{}_6C_1=6+6+6=18$ 답 ④

02 $_4H_6={}_nC_3$에서

$_9C_6={}_nC_3$, $\quad {}_9C_3={}_nC_3 \quad \therefore n=9$

$\therefore {}_{10}C_n={}_{10}C_9={}_{10}C_1=10$ 답 ①

03 $_3H_r={}_{2+r}C_r={}_{2+r}C_2=\dfrac{(2+r)(1+r)}{2\cdot 1}$이므로

$_3H_r=28$에서 $\dfrac{(2+r)(1+r)}{2\cdot 1}=28$

$(2+r)(1+r)=8\cdot 7$

$\therefore r=6$ 답 6

04 $_{9-r}H_r={}_{11-r}H_{r-2}$에서

$_8C_r={}_8C_{r-2}$

따라서 $r+(r-2)=8$이므로

$2r=10 \qquad \therefore r=5$ 답 5

05 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$ 답 ③

06 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ 답 21

07 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$ 답 ②

베이직쎈 BOX

곱의 법칙
두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수
➡ mn

빈 연필꽂이가 없다는 것은 각 연필꽂이에 연필이 한 자루 이상씩 꽂혀 있다는 의미이다.

$(2+r)-r=2$

$2+r=8$, $1+r=7$이므로 $r=6$

$8-2\cdot 3=2$

$(9-r)+r-1=8$,
$(11-r)+(r-2)-1=8$

같은 색의 구슬은 서로 구별하지 않으므로 3가지 색의 구슬 중에서 5개의 구슬을 중복하여 택하는 경우의 수를 구한다.

베쎈 TIP

무기명으로 투표하는 경우의 수
무기명 투표는 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 후보 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합으로 생각할 수 있다. 즉
무기명 투표 ➡ 중복조합, 기명 투표 ➡ 중복순열

08 야구공 5개를 서로 다른 두 상자 A, B에 넣는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

농구공 4개를 서로 다른 두 상자 A, B에 넣는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 5=30$ 답 ⑤

09 먼저 사탕을 3명의 학생에게 각각 1개씩 나누어 주고, 나머지 9개의 사탕을 3명의 학생에게 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$ 답 ①

10 먼저 연필을 5개의 연필꽂이에 각각 1자루씩 꽂고, 나머지 3자루의 연필을 5개의 연필꽂이에 꽂으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_5H_3={}_7C_3=35$ 답 35

11 먼저 흰 공, 파란 공, 검은 공을 각각 2개씩 꺼내고, 나머지 2개의 공을 꺼내면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_2={}_4C_2=6$ 답 ①

12 먼저 초콜릿 맛 우유를 2개 택하고, 나머지 7개의 우유를 택하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_2H_7={}_8C_7={}_8C_1=8$ 답 8

13 (1) 구하는 항의 개수는 a, b, c의 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

(2) 구하는 항의 개수는 a, b, c, d의 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

답 (1) 45 (2) 84

14 (1) 구하는 항의 개수는 a, b의 2개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{2}H_{6}={}_{7}C_{6}={}_{7}C_{1}=7$$

(2) 구하는 항의 개수는 c, d, e의 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}H_{3}={}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$$

(3) (1), (2)에서 $7\cdot 10=70$

답 (1) 7 (2) 10 (3) 70

15 구하는 순서쌍의 개수는 x, y, z의 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}H_{9}={}_{11}C_{9}={}_{11}C_{2}=55$$

답 ④

16 (1) 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 서로 다른 4개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}H_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_{3}=286$$

(2) x, y, z, w가 양의 정수이므로 $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$, $w-1=d$로 놓으면 $x+y+z+w=10$에서

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=10$$

$$\therefore a+b+c+d=6$$

(단, a, b, c, d는 음이 아닌 정수)

…… ㉠

따라서 양의 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 ㉠의 해의 개수와 같으므로

$${}_{4}H_{6}={}_{9}C_{6}={}_{9}C_{3}=84$$

답 (1) 286 (2) 84

17 x, y, z가 $x\ge 1$, $y\ge 2$, $z\ge 3$인 정수이므로 $x-1=a$, $y-2=b$, $z-3=c$로 놓으면 $x+y+z=11$에서

$$(a+1)+(b+2)+(c+3)=11$$

$\therefore a+b+c=5$ (단, a, b, c는 음이 아닌 정수)

…… ㉠

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 ㉠의 해의 개수와 같으므로

$${}_{3}H_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$$

답 ⑤

18 (1) x, y, z는 음이 아닌 정수이므로 $x+y+z$가 가질 수 있는 값은

0, 1, 2

(2) (i) $x+y+z=0$일 때,

순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_{3}H_{0}={}_{2}C_{0}=1$$

(ii) $x+y+z=1$일 때,

순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_{3}H_{1}={}_{3}C_{1}=3$$

(iii) $x+y+z=2$일 때,

순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_{3}H_{2}={}_{4}C_{2}=6$$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$1+3+6=10$$

답 (1) 0, 1, 2 (2) 10

19 1, 2, 3, …, 8의 8개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_{8}H_{2}={}_{9}C_{2}=36$$

답 ⑤

20 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_{6}H_{3}={}_{8}C_{3}=56$$

답 56

21 2, 4, 6, …, 14의 7개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_{7}H_{3}={}_{9}C_{3}=84$$

답 ③

22 (1) 구하는 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 서로 다른 4개를 뽑아 작은 수부터 차례대로 X의 원소 2, 3, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_{5}C_{4}={}_{5}C_{1}=5$$

(2) 구하는 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 2, 3, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_{5}H_{4}={}_{8}C_{4}=70$$

답 (1) 5 (2) 70

23 구하는 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 크거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_{5}H_{3}={}_{7}C_{3}=35$$

답 ③

24 구하는 함수의 개수는 Y의 원소 4, 5, 6, 7, 8, 9의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 5, 1, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_{6}H_{3}={}_{8}C_{3}=56$$

답 56

25 조건 (가)에서 $f(-1)=4$이므로 조건 (나)를 만족시키려면 Y의 원소 중 4 이상인 4, 6, 8의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 0, 1에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$${}_{3}H_{2}={}_{4}C_{2}=6$$

답 ①

베이직쎈 BOX

중복을 허용하여 2개를 택하면 $a\le b$를 만족시키는 a, b가 하나로 정해진다. 예를 들어 1, 2를 택하면 $a=1$, $b=2$로 정해지고, 2, 2를 택하면 $a=2$, $b=2$로 정해진다.

a, b, c는 짝수이므로 14보다 작거나 같은 짝수에서 택하면 된다.

$x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$, $w=d+1$

$x=a+1$, $y=b+2$, $z=c+3$

$x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$이므로 $x+y+z\ge 0$
이때 $x+y+z\le 2$이므로
$0\le x+y+z\le 2$

베이직쎈 BOX

05 이항정리

개념 09 이항정리

본책 36쪽

01 $(x+1)^6={}_6C_0x^6+{}_6C_1x^5+{}_6C_2x^4+{}_6C_3x^3+{}_6C_4x^2+{}_6C_5x+{}_6C_6$
$=x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$

답 $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$

02 $(a-b)^5={}_5C_0a^5+{}_5C_1a^4(-b)+{}_5C_2a^3(-b)^2+{}_5C_3a^2(-b)^3+{}_5C_4a(-b)^4+{}_5C_5(-b)^5$
$=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

답 $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

03 $(2x+y)^4={}_4C_0(2x)^4+{}_4C_1(2x)^3y+{}_4C_2(2x)^2y^2+{}_4C_3 2xy^3+{}_4C_4y^4$
$=16x^4+32x^3y+24x^2y^2+8xy^3+y^4$

답 $16x^4+32x^3y+24x^2y^2+8xy^3+y^4$

04 $(x-3y)^5={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4(-3y)+{}_5C_2x^3(-3y)^2+{}_5C_3x^2(-3y)^3+{}_5C_4x(-3y)^4+{}_5C_5(-3y)^5$
$=x^5-15x^4y+90x^3y^2-270x^2y^3+405xy^4-243y^5$

답 $x^5-15x^4y+90x^3y^2-270x^2y^3+405xy^4-243y^5$

05 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\cdot\frac{1}{x}+{}_4C_2x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2+{}_4C_3x\left(\frac{1}{x}\right)^3+{}_4C_4\left(\frac{1}{x}\right)^4$
$=x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$

답 $x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$

06 답 60 　 6, 6, 6, 2, 2, 2, 60

07 $(4x+y)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(4x)^{5-r}y^r={}_5C_r4^{5-r}x^{5-r}y^r$
x^2y^3항은 $r=3$일 때이므로 x^2y^3의 계수는
${}_5C_3\cdot4^2=10\cdot16=160$ 　 답 160

$r=3$을 ${}_5C_r4^{5-r}$에 대입한 값이다.

08 $(a-3b)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_ra^{4-r}(-3b)^r={}_4C_r(-3)^ra^{4-r}b^r$
a^3b항은 $r=1$일 때이므로 a^3b의 계수는
${}_4C_1\cdot(-3)=4\cdot(-3)=-12$ 　 답 -12

09 $\left(a+\frac{2}{a}\right)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_ra^{6-r}\left(\frac{2}{a}\right)^r={}_6C_r2^r\frac{a^{6-r}}{a^r}$
상수항은 $6-r=r$일 때이므로 　 $r=3$
따라서 상수항은
${}_6C_3\cdot2^3=20\cdot8=160$ 　 답 160

베쎈 TIP

상수항은 $\frac{a^{6-r}}{a^r}=1$일 때이고, 다음과 같은 거듭제곱의 나눗셈을 이용한다.
$a\neq0$이고, m, n이 자연수일 때,
① $m>n$이면 　 $a^m\div a^n=a^{m-n}$
② $m=n$이면 　 $a^m\div a^n=1$
③ $m<n$이면 　 $a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}$

10 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(2x)^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r2^{5-r}\frac{x^{5-r}}{x^r}$
x^3항은 $5-r-r=3$일 때이므로 　 $r=1$
따라서 x^3의 계수는
${}_5C_1\cdot2^4=5\cdot16=80$ 　 답 80

$\frac{x^{5-r}}{x^r}=x^3$에서 $5-r-r=3$

개념 10 이항계수의 성질

본책 37쪽

11 ${}_3C_0+{}_3C_1+{}_3C_2+{}_3C_3=2^3=8$ 　 답 8

$(1+1)^3=2^3$

12 ${}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=2^5=32$ 　 답 32

13 ${}_8C_0-{}_8C_1+{}_8C_2-\cdots+{}_8C_8=0$ 　 답 0

$(1-1)^8=0$

14 ${}_7C_0-{}_7C_1+{}_7C_2-\cdots-{}_7C_7=0$ 　 답 0

15 ${}_6C_0+{}_6C_2+{}_6C_4+{}_6C_6=2^{6-1}=2^5=32$ 　 답 32

16 ${}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9=2^{9-1}=2^8=256$ 　 답 256

17 답 6 　 n, 6, 6

18 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로
${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$
즉 $2^n-1=255$이므로
$2^n=256=2^8$
$\therefore n=8$ 　 답 8

${}_nC_0=1$

19 답 7 　 2^n, 2^n, 7

20 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로
${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$
즉 $30<2^n-1<40$이므로
$31<2^n<41$
이때 $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$이므로
$n=5$ 　 답 5

02 중복조합과 이항정리

개념 11 파스칼의 삼각형

본책 38쪽

21 답 $2,\ 3,\ 4,\ 6,\ x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

22 답 $3,\ 6,\ 4,\ 10,\ 10,\ 5,$
$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

23 $(x+4)^4=x^4+4\cdot x^3\cdot 4+6\cdot x^2\cdot 4^2+4\cdot x\cdot 4^3+4^4$
$=x^4+16x^3+96x^2+256x+256$
답 $x^4+16x^3+96x^2+256x+256$

24 $(2a+b)^5=(2a)^5+5\cdot(2a)^4b+10\cdot(2a)^3b^2$
$+10\cdot(2a)^2b^3+5\cdot 2ab^4+b^5$
$=32a^5+80a^4b+80a^3b^2+40a^2b^3$
$+10ab^4+b^5$
답 $32a^5+80a^4b+80a^3b^2+40a^2b^3+10ab^4+b^5$

25 답 ${}_4C_3$

26 답 ${}_6C_2$

27 답 ${}_8C_4$

28 ${}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2={}_3C_1+{}_3C_2={}_4C_2$ 답 ${}_4C_2$

29 ${}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4={}_6C_3+{}_6C_4={}_7C_4$ 답 ${}_7C_4$

30 ${}_6C_2+{}_6C_3+{}_7C_2={}_7C_3+{}_7C_2={}_8C_3$ 답 ${}_8C_3$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 39쪽

01 $(x+2y)^8$의 전개식의 일반항은
${}_8C_r\,x^{8-r}(2y)^r={}_8C_r\,2^rx^{8-r}y^r$
x^6y^2항은 $r=2$일 때이므로 x^6y^2의 계수는
${}_8C_2\cdot 2^2=28\cdot 4=112$ 답 ③

02 $\left(3x+\frac{1}{x^2}\right)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7C_r(3x)^{7-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r={}_7C_r\,3^{7-r}\frac{x^{7-r}}{x^{2r}}$
$\frac{1}{x^{11}}$항은 $2r-(7-r)=11$일 때이므로
$3r=18$ $\therefore r=6$
따라서 $\frac{1}{x^{11}}$의 계수는
${}_7C_6\cdot 3=7\cdot 3=21$ 답 21

03 $\left(\frac{a}{2}+b\right)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 $\frac{a}{2}$, b의 2개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$m={}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$
전개식의 일반항은
${}_5C_r\left(\frac{a}{2}\right)^{5-r}b^r={}_5C_r\left(\frac{1}{2}\right)^{5-r}a^{5-r}b^r$
a^2b^3항은 $r=3$일 때이므로 a^2b^3의 계수는
$n={}_5C_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2={}_5C_2\cdot\frac{1}{4}=10\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$
$\therefore mn=6\cdot\frac{5}{2}=15$ 답 ①

04 $(ax+1)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_r(ax)^{4-r}={}_4C_r\,a^{4-r}x^{4-r}$
x^3항은 $4-r=3$일 때이므로 $r=1$
이때 x^3의 계수가 256이므로
${}_4C_1a^3=256,\quad a^3=64\quad \therefore a=4$ 답 4

05 $(x+a)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r\,x^{5-r}a^r={}_5C_r\,a^rx^{5-r}$
x^3항은 $5-r=3$일 때이므로 $r=2$
즉 x^3의 계수는 ${}_5C_2a^2=10a^2$
x^4항은 $5-r=4$일 때이므로 $r=1$
즉 x^4의 계수는 ${}_5C_1a=5a$
따라서 $10a^2=4\cdot 5a$이므로
$a=2\ (\because a\neq 0)$ 답 ②

06 $(1-3x)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(-3x)^r={}_5C_r(-3)^rx^r$ …… ㉠
이때 $(1+x)(1-3x)^5$의 전개식에서 x^3항은 1과 ㉠의 x^3항이 곱해질 때, x와 ㉠의 x^2항이 곱해질 때 나타난다.
(i) ㉠에서 x^3항은 $r=3$일 때이므로 ㉠의 x^3항은
${}_5C_3\cdot(-3)^3x^3=-270x^3$
(ii) ㉠에서 x^2항은 $r=2$일 때이므로 ㉠의 x^2항은
${}_5C_2\cdot(-3)^2x^2=90x^2$
(i), (ii)에서 $(1+x)(1-3x)^5$의 전개식의 x^3항은
$1\cdot(-270x^3)+x\cdot 90x^2=-180x^3$
이므로 구하는 계수는 -180이다. 답 ②

07 $\left(x+\frac{3}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_r\,x^{4-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r={}_4C_r\,3^r\frac{x^{4-r}}{x^r}$ …… ㉠
이때 $(x^2-4)\left(x+\frac{3}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은 x^2과 ㉠의 $\frac{1}{x^2}$항이 곱해질 때, -4와 ㉠의 상수항이 곱해질 때 나타난다.
(i) ㉠에서 $\frac{1}{x^2}$항은 $r-(4-r)=2$, 즉 $r=3$일 때이므로
㉠의 $\frac{1}{x^2}$항은
${}_4C_3\cdot 3^3\frac{1}{x^2}=\frac{108}{x^2}$
(ii) ㉠에서 상수항은 $4-r=r$, 즉 $r=2$일 때이므로 ㉠의 상수항은
${}_4C_2\cdot 3^2=54$
(i), (ii)에서 $(x^2-4)\left(x+\frac{3}{x}\right)^4$의 전개식의 상수항은
$x^2\cdot\frac{108}{x^2}+(-4)\cdot 54=-108$ 답 -108

베이직쎈 BOX

${}_2C_0+{}_2C_1={}_3C_1$

$\frac{x^{7-r}}{x^{2r}}=\frac{1}{x^{11}}$에서
$2r-(7-r)=11$

$(x+y)^n$의 서로 다른 항의 개수
⇒ x, y의 2개에서 n개를 택하는 중복조합의 수
⇒ ${}_2H_n$

$64=4^3$

$(1+x)(1-3x)^5$
$=(1-3x)^5+x(1-3x)^5$

08 $(x+1)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r\, x^{6-r} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $(ax+2)(x+1)^6$의 전개식에서 x^4항은 ax와 ㉠의 x^3항이 곱해질 때, 2와 ㉠의 x^4항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^3항은 $6-r=3$, 즉 $r=3$일 때이므로 ㉠의 x^3항은

$${}_6C_3\, x^3=20x^3$$

(ii) ㉠에서 x^4항은 $6-r=4$, 즉 $r=2$일 때이므로 ㉠의 x^4항은

$${}_6C_2\, x^4=15x^4$$

(i), (ii)에서 $(ax+2)(x+1)^6$의 전개식의 x^4항은

$$ax\cdot 20x^3+2\cdot 15x^4=(20a+30)x^4$$

즉 $20a+30=90$이므로

$20a=60 \qquad \therefore a=3$ 답 3

09 $\dfrac{{}_{30}C_0+{}_{30}C_1+{}_{30}C_2+\cdots+{}_{30}C_{30}}{{}_{30}C_0+{}_{30}C_2+{}_{30}C_4+\cdots+{}_{30}C_{30}}=\dfrac{2^{30}}{2^{29}}=2$

답 2

10 ㄴ. ${}_{13}C_0-{}_{13}C_1+{}_{13}C_2-\cdots-{}_{13}C_{13}=0$

ㄷ. ${}_8C_0+{}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8={}_8C_1+{}_8C_3+{}_8C_5+{}_8C_7=2^7$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

11 ${}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{10}$

$={}_{21}C_{21}+{}_{21}C_{20}+{}_{21}C_{19}+\cdots+{}_{21}C_{11}$

이고 ${}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{21}=2^{21}$이므로

$${}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{10}=\frac{2^{21}}{2}=2^{20}$$

답 ④

12 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

즉 $2^n-1=511$이므로

$2^n=512=2^9$

$\therefore n=9$ 답 ③

13 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=7$, $n=15$를 대입하면

$8^{15}={}_{15}C_0+{}_{15}C_1\cdot 7+{}_{15}C_2\cdot 7^2+\cdots+{}_{15}C_{15}\cdot 7^{15}$

즉 $2^n=8^{15}=2^{45}$이므로 $\quad n=45$ 답 45

14 n이 홀수일 때, ${}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$이므로

$1000<2^{n-1}<2000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로

$n-1=10 \qquad \therefore n=11$ 답 ②

15 ${}_{n-1}C_2+{}_{n-1}C_3={}_nC_3$이므로 $\qquad {}_nC_3={}_nC_5$

$\therefore n=3+5=8$ 답 ④

베이직쎈 BOX

${}_{21}C_0={}_{21}C_{21}$,
${}_{21}C_1={}_{21}C_{20}$,
${}_{21}C_2={}_{21}C_{19}$,
⋮
${}_{21}C_{10}={}_{21}C_{11}$

$8^{15}=(2^3)^{15}=2^{45}$

${}_3C_3=1={}_4C_4$

${}_3C_0=1={}_4C_0$

${}_2C_2=1={}_3C_3$

16 ${}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4$

$=\boxed{{}_3C_1}+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4$

$=\boxed{{}_4C_2}+{}_4C_3+{}_5C_4$

$=\boxed{{}_5C_3}+{}_5C_4$

$=\boxed{{}_6C_4}$

$=\boxed{15}$

$\therefore$ (가) ${}_3C_1$ (나) ${}_4C_2$ (다) ${}_5C_3$ (라) ${}_6C_4$ (마) 15

답 ④

17 ${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3$

$={}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3$

$={}_6C_4+{}_6C_3$

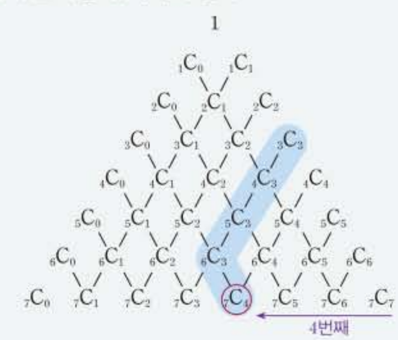
$={}_7C_4={}_7C_3=35$ 답 35

베쎈 TIP

파스칼의 삼각형에서 각 단계의 첫 번째 또는 마지막 수인 1에서 시작하여 대각선 방향으로 배열된 n개의 수를 더한 값은 그 다음 단계의 n 번째 수와 같다.

이를 파스칼의 삼각형에 표시하면 다음 그림과 같은 모양이 되고, '하키 스틱 패턴'이라 한다.

문제에서 구하는 수의 합은 다음 파스칼의 삼각형에서 ${}_3C_3=1$부터 왼쪽 아래의 대각선 방향으로 ${}_6C_3$까지의 이항계수 4개를 모두 더한 값과 같고, 이 값은 그 다음 단계의 4번째 수인 이항계수 ${}_7C_4$와 같다.



18 ${}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4+{}_8C_5+{}_9C_6$

$={}_4C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4+{}_8C_5+{}_9C_6$

$={}_5C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4+{}_8C_5+{}_9C_6$

$={}_6C_2+{}_6C_3+{}_7C_4+{}_8C_5+{}_9C_6$

$={}_7C_3+{}_7C_4+{}_8C_5+{}_9C_6$

$={}_8C_4+{}_8C_5+{}_9C_6$

$={}_9C_5+{}_9C_6$

$={}_{10}C_6={}_{10}C_4$ 답 ②

19 ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2$

$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2$

$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2$

$={}_5C_3+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2$

$={}_6C_3+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2$

$={}_7C_3+{}_7C_2+{}_8C_2$

$={}_8C_3+{}_8C_2$

$={}_9C_3$

$=84$ 답 84

20 ${}_{9}C_1+{}_{10}C_2+{}_{11}C_3$
$={}_{9}C_0-{}_{9}C_0+{}_{9}C_1+{}_{10}C_2+{}_{11}C_3$
$=({}_{9}C_0+{}_{9}C_1+{}_{10}C_2+{}_{11}C_3)-{}_{9}C_0$
$=({}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{11}C_3)-1$
$=({}_{11}C_2+{}_{11}C_3)-1$
$={}_{12}C_3-1$ 답 ③

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!
본책 42쪽

01 전략 5개의 음료 중에서 7개를 택할 때, 같은 음료를 택할 수 있으므로 중복조합의 수를 이용한다.

풀이 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{5}H_7={}_{11}C_7={}_{11}C_4=330$ 답 ⑤

02 전략 각 학생이 적어도 2권의 공책을 받아야 하므로 먼저 2권씩 나누어 준 후 중복조합의 수를 이용한다.

풀이 먼저 공책을 4명의 학생에게 각각 2권씩 나누어 주고, 나머지 공책 3권을 4명의 학생에게 나누어 주면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}H_3={}_{6}C_3=20$ 답 ③

03 전략 $(x+y+z)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 ${}_{3}H_n$임을 이용한다.

풀이 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 a, b, c의 3개에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2$

즉 ${}_{n+2}C_2=45$이므로

$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}=45$

$(n+2)(n+1)=10\cdot9$

$\therefore n=8$ 답 ④

04 전략 p가 홀수이면 $p=2k+1$ (k는 음이 아닌 정수)로 놓을 수 있다.

풀이 x, y, z가 음이 아닌 홀수이므로

$x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$

(a, b, c는 음이 아닌 정수)

로 놓으면 $x+y+z=17$에서

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)=17$

$2(a+b+c)=14$

$\therefore a+b+c=7$ (단, a, b, c는 음이 아닌 정수) …… ㉠

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 ㉠의 해의 개수와 같으므로

${}_{3}H_7={}_{9}C_7={}_{9}C_2=36$ 답 ②

베이직쎈 BOX

${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_{n}C_r$임을 이용하려면 ${}_{9}C_0$이 필요하다. 이때 같은 수를 더하고 빼므로 구하는 식의 값은 변하지 않는다.

중복을 허용하여 3개를 택하면 $a\le b\le c$를 만족시키는 a, b, c가 하나로 정해진다. 예를 들어 3, 4, 4를 택하면 $a=3$, $b=4$, $c=4$로 정해진다.

$11-2\cdot4=3$

n개의 $(a+b+c)$에서 각각 a 또는 b 또는 c를 하나씩 택하여 곱한 항을 모두 더한 것이다.

$n+1$, $n+2$가 자연수이므로 곱이 90인 연속인 두 자연수는 9, 10임을 이용하면 n의 값을 쉽게 구할 수 있다.

05 전략 a, b, c는 모두 3 이상 9 미만인 자연수임을 이용한다.

풀이 a, b, c는 모두 3 이상 9 미만인 자연수, 즉

3, 4, 5, 6, 7, 8

중 하나이다.
따라서 6개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_{6}H_3={}_{8}C_3=56$ 답 ①

06 전략 $(x+y)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_{n}C_r x^{n-r}y^r$임을 이용한다.

풀이 $\left(ax-\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_{6}C_r(ax)^{6-r}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r={}_{6}C_r a^{6-r}(-2)^r\dfrac{x^{6-r}}{x^r}$

x^2항은 $6-r-r=2$일 때이므로 $r=2$

이때 x^2의 계수가 960이므로

${}_{6}C_2a^4(-2)^2=960$

$60a^4=960$, $a^4=16$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 ④

07 전략 $(a+b)(c+d)^n$의 전개식의 일반항은 $a(c+d)^n+b(c+d)^n$으로 변형하여 생각한다.

풀이 $(3x+2y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_{5}C_r(3x)^{5-r}(2y)^r={}_{5}C_r3^{5-r}2^rx^{5-r}y^r$ …… ㉠

이때 $(x-y)(3x+2y)^5$의 전개식에서 x^2y^4항은 x와 ㉠의 xy^4항이 곱해질 때, $-y$와 ㉠의 x^2y^3항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 xy^4항은 $r=4$일 때이므로 ㉠의 xy^4항은

${}_{5}C_4\cdot3\cdot2^4\cdot xy^4=240xy^4$

(ii) ㉠에서 x^2y^3항은 $r=3$일 때이므로 ㉠의 x^2y^3항은

${}_{5}C_3\cdot3^2\cdot2^3\cdot x^2y^3=720x^2y^3$

(i), (ii)에서 $(x-y)(3x+2y)^5$의 전개식의 x^2y^4항은

$x\cdot240xy^4+(-y)\cdot720x^2y^3=-480x^2y^4$

이므로 구하는 계수는 -480이다. 답 ②

08 전략 $(1+x)^n$의 전개식을 이용한다.

풀이 $(1+x)^n={}_{n}C_0+{}_{n}C_1x+{}_{n}C_2x^2+\cdots+{}_{n}C_nx^n$의 양변에 $x=5$, $n=10$을 대입하면

$6^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\cdot5+{}_{10}C_2\cdot5^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot5^{10}$

$\therefore {}_{10}C_1\cdot5+{}_{10}C_2\cdot5^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot5^{10}=6^{10}-1$

답 ④

09 전략 ${}_{n}C_0+{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n=2^n$임을 이용한다.

풀이 ${}_{n}C_0+{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n=2^n$이므로

${}_{n}C_1+{}_{n}C_2+{}_{n}C_3+\cdots+{}_{n}C_n=2^n-1$

즉 $50<2^n-1<100$이므로 $51<2^n<101$

이때 $2^5=32$, $2^6=64$, $2^7=128$이므로

$n=6$ 답 ③

베이직쎈 BOX

10 전략 사과를 나누어 주는 경우의 수와 귤을 나누어 주는 경우의 수를 각각 구하여 곱한다.

풀이 사과 6개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28 \quad \cdots ❶$$

귤 4개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15 \quad \cdots ❷$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$28\cdot15=420 \quad \cdots ❸$$

답 420

단계	채점 기준	비율
❶	사과를 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷	귤을 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸	사과와 귤을 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

11 전략 'n개 이상'의 조건이 있으면 n개의 컵을 먼저 샀다고 생각한 후 나머지 컵을 사는 경우의 수를 구한다.

풀이 먼저 빨간색 컵을 2개, 파란색 컵을 3개 사고, 나머지 2개의 컵을 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2={}_5C_2=10$$

답 10

$7-2-3=2$

컵은 4가지 색이 있다.

12 전략 음이 아닌 정수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$가 가질 수 있는 값을 먼저 구한다.

풀이 $2<a+b+c+d\le4$에서

$$a+b+c+d=3 \text{ 또는 } a+b+c+d=4$$

a, b, c, d가 음이 아닌 정수이므로 $a+b+c+d$도 음이 아닌 정수이다.

(i) $a+b+c+d=3$일 때,

음이 아닌 정수인 해의 개수는

$${}_4H_3={}_6C_3=20 \quad \cdots ❶$$

(ii) $a+b+c+d=4$일 때,

음이 아닌 정수인 해의 개수는

$${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35 \quad \cdots ❷$$

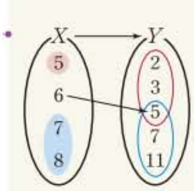
(i), (ii)에서 구하는 해의 개수는

$$20+35=55 \quad \cdots ❸$$

답 55

단계	채점 기준	비율
❶	$a+b+c+d=3$의 해의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷	$a+b+c+d=4$의 해의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸	$2<a+b+c+d\le4$의 해의 개수를 구할 수 있다.	20 %

13 전략 $f(6)$의 값이 정해져 있으므로 나머지 정의역의 원소 5, 7, 8에 공역의 원소를 대응시키는 경우의 수를 구한다.



풀이 조건 (가)에서 $f(6)=5$이므로 조건 (나)에 의하여

$$f(5)\le5\le f(7)\le f(8)$$

$f(5)\le5$에서 $f(5)$의 값이 될 수 있는 수는

2, 3, 5의 3개

$5\le f(7)\le f(8)$에서 $f(7)$, $f(8)$의 값이 될 수 있는 수는

5, 7, 11

이때 $f(7)$, $f(8)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

5, 7, 11의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 $f(7)$, $f(8)$로 정하면 된다.

$${}_3H_2={}_4C_2=6$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$3\cdot6=18$$

답 18

14 전략 x의 계수와 상수항을 k에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 조건을 이용하여 k에 대한 방정식을 세운다.

풀이 $(3x+k)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(3x)^{6-r}k^r={}_6C_r3^{6-r}k^rx^{6-r} \quad \cdots ❶$$

x항은 $6-r=1$일 때이므로

$$r=5$$

즉 x의 계수는

$${}_6C_5\cdot3k^5=18k^5 \quad \cdots ❷$$

상수항은 $6-r=0$일 때이므로

$$r=6$$

즉 상수항은

$${}_6C_6\cdot3^0k^6=k^6 \quad \cdots ❸$$

$a\ne0$일 때 $a^0=1$

따라서 $18k^5=k^6$이므로

$$k=18\ (\because k\ne0) \quad \cdots ❹$$

답 18

단계	채점 기준	비율
❶	$(3x+k)^6$의 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	20 %
❷	x의 계수를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸	상수항을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹	k의 값을 구할 수 있다.	20 %

15 전략 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$임을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 ${}_6C_1+{}_7C_2+{}_8C_3+{}_9C_4$

$$\begin{aligned}
&={}_6C_0-{}_6C_0+{}_6C_1+{}_7C_2+{}_8C_3+{}_9C_4\\
&=({}_6C_0+{}_6C_1+{}_7C_2+{}_8C_3+{}_9C_4)-{}_6C_0\\
&=({}_7C_1+{}_7C_2+{}_8C_3+{}_9C_4)-1\\
&=({}_8C_2+{}_8C_3+{}_9C_4)-1\\
&=({}_9C_3+{}_9C_4)-1\\
&={}_{10}C_4-1\\
&=210-1=209
\end{aligned}$$

답 209

Ⅱ. 확률

03 확률의 뜻과 활용

06 시행과 사건

개념 12 시행과 사건

본책 46쪽

01 답 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

02 답 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

03 답 $\{2, 3, 5\}$

04 답 $\{3, 6\}$

05 답 $\{1, 2, 4\}$

06 답 T, TT

07 답 {HH, TT}

08 답 {HH, HT, TH}

09 답 $\{13, 14, 31, 34, 41, 43\}$

10 답 $\{13, 31, 41, 43\}$

개념 13 합사건, 곱사건, 배반사건, 여사건

본책 47쪽

11 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$ 답 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

12 답 $\{2, 6\}$

13 답 $\{1, 3, 5\}$

14 답 $\{4, 5\}$

15 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{3, 6, 9\}$이므로
$A\cup B=\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$
답 $\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

16 답 $\{3, 9\}$

17 답 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

18 답 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$

19 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B=\{6, 12\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다. 답 ○

20 $A=\{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$A\cap B=\{3\}\neq\varnothing$
따라서 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.
답 ×

베이직쎈 BOX

- 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합
- (근원사건의 개수) =(표본공간의 원소의 개수)
- 적어도 한 개는 앞면이 나오는 사건 ➡ 앞면이 1개 또는 2개 나오는 사건
- 한 개의 동전을 던질 때 나오는 경우는 앞면, 뒷면의 2가지
- 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **드모르간의 법칙** 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$
- 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$
- 두 사건을 각각 집합으로 나타낸 후 두 집합의 교집합이 공집합인지 확인한다.

21 $A=\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다. 답 ○

22 $A\cap B=\{7\}$, $B\cap C=\{6\}$, $C\cap A=\varnothing$
따라서 두 사건이 서로 배반사건인 것은 C와 A뿐이다.
답 C와 A

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 48쪽

01 한 개의 동전을 던질 때 나오는 모든 경우는
앞면, 뒷면의 2가지
한 개의 주사위를 던질 때 나오는 모든 경우는
1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지
따라서 이 시행의 근원사건의 개수는
$2\cdot6\cdot6=72$ 답 ⑤

02 표본공간을 S라 하면
$S=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$
이므로
$A=\{4, 8, 12\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
③ $B^C=\{9, 10, 11, 12\}$이므로
$A\cup B^C=\{4, 8, 9, 10, 11, 12\}$
④ $A^C=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$이므로
$n(A^C)=9$
⑤ $A^C\cap B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$이므로
$n(A^C\cap B)=6$
답 ⑤

03 표본공간을 S라 하면
$n(S)=2\cdot2\cdot2=8$
이때 A^C는 뒷면이 하나도 나오지 않는 사건, 즉 모두 앞면이 나오는 사건이므로 $n(A^C)=1$
$\therefore n(A)=8-1=7$ 답 7

04 표본공간을 S라 하면
$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
이므로
$A=\{3, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$
이때 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이고,
$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$이므로
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{5, 7, 8\}$ 답 ③

05 $B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$
$=\{2\}\cup\{3, 4\}$
$=\{2, 3, 4\}$
이때 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로
$B^C=\{1, 5, 6\}$
따라서 B^C의 모든 원소의 합은
$1+5+6=12$ 답 ②

베이직쎈 BOX

06 $A=\{5, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{1, 3\}$

ㄱ. $A\cap B=\{5\}$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. $A\cap C=\varnothing$이므로 두 사건 A와 C는 서로 배반사건이다.

ㄷ. $B\cap C=\{3\}$이므로 $\quad A\cap(B\cap C)=\varnothing$

따라서 두 사건 A와 $B\cap C$는 서로 배반사건이다.

이상에서 사건 A와 서로 배반사건인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

07 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$

이므로 $\quad A=\{2, 8\}$, $B=\{3, 9\}$

③ $B^C=\{1, 2, 7, 8\}$이므로 $\quad A\subset B^C$

④ $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

답 ③

08 $A=\{5, 10, 15, 20\}$, $B=\{9, 18\}$, $C=\{1, 3, 5, 15\}$

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $A\cap C=\{5, 15\}$이므로 두 사건 A와 C는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $B\cap C=\varnothing$이므로 두 사건 B와 C는 서로 배반사건이다.

이상에서 서로 배반사건인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

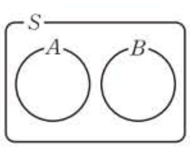
09 ㄱ. $A\cap B^C=\{2, 5\}$이므로 A와 B^C는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. $A^C\cap B=\varnothing$이므로 A^C와 B는 서로 배반사건이다.

ㄷ. $A^C\cap B^C=\{1, 4\}$이므로 A^C와 B^C는 서로 배반사건이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

10 표본공간 S의 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



③ [반례] $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1\}$, $B=\{2\}$이면 두 사건 A, B가 서로 배반사건이지만 $A\cup B\neq S$이다.

일반적으로 $(A\cup B)\subset S$

답 ③

11 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로

$A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{6, 9\}$

따라서 사건 C는 $(A\cup B)^C$, 즉 집합 $\{6, 9\}$의 부분집합이므로 $\quad \varnothing$, $\{6\}$, $\{9\}$, $\{6, 9\}$

답 $\varnothing$, $\{6\}$, $\{9\}$, $\{6, 9\}$

07 확률의 뜻과 기본 성질

개념 14 수학적 확률

본책 50쪽

01 (1) $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 $\quad n(S)=6$

(2) $A=\{3, 6\}$이므로 $\quad n(A)=2$

(3) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

답 (1) 6 (2) 2 (3) $\dfrac{1}{3}$

02 답 $\dfrac{3}{8}$

03 답 $\dfrac{5}{8}$

04 모든 경우의 수는 $\quad 2\cdot2=4$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 두 개 모두 뒷면이 나오는 경우는

TT의 1가지

따라서 구하는 확률은 $\quad \dfrac{1}{4}$ 답 $\dfrac{1}{4}$

05 모든 경우의 수는 $\quad 2\cdot2=4$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 서로 다른 면이 나오는 경우는

HT, TH의 2가지

따라서 구하는 확률은 $\quad \dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

06 모든 경우의 수는 $\quad 2\cdot2=4$

HH, HT, TH – 적어도 한 개는 앞면이 나오는 경우

TT – 모두 뒷면이 나오는 경우

두 개 모두 뒷면이 나오는 경우의 수는 1이므로 적어도 한 개는 앞면이 나오는 경우의 수는

$4-1=3$

따라서 구하는 확률은 $\quad \dfrac{3}{4}$ 답 $\dfrac{3}{4}$

07 모든 경우의 수는 $\quad 6\cdot6=36$

나온 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 두 눈의 수가 서로 같은 경우는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6가지

따라서 구하는 확률은 $\quad \dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ 답 $\dfrac{1}{6}$

08 모든 경우의 수는 $\quad 6\cdot6=36$

나온 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 두 눈의 수의 합이 5인 경우는

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4가지

따라서 구하는 확률은 $\quad \dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$ 답 $\dfrac{1}{9}$

09 모든 경우의 수는 $\quad 6\cdot6=36$

나온 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 두 눈의 수의 차가 3인 경우는

$(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$의 6가지

따라서 구하는 확률은 $\quad \dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ 답 $\dfrac{1}{6}$

베이직쎈 BOX

10 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$
나온 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 두 눈의 수의 곱이 4인 경우는
$(1, 4), (2, 2), (4, 1)$의 3가지
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ 답 $\frac{1}{12}$

11 (1) $4!=24$
(2) $3!=6$
(3) $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ 답 (1) 24 (2) 6 (3) $\frac{1}{4}$

A를 맨 앞에 놓고 나머지 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수

12 5명이 일렬로 서는 경우의 수는 $5!=120$
A가 맨 뒤에 서는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

13 5명이 일렬로 서는 경우의 수는 $5!=120$
A, B를 한 사람으로 생각하면 4명이 일렬로 서는 경우의 수는 $4!=24$
이때 A, B끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
즉 A와 B가 이웃하게 서는 경우의 수는
$24\cdot2=48$
따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

14 5명이 일렬로 서는 경우의 수는 $5!=120$
A, B를 제외한 C, D, E가 일렬로 서는 경우의 수는
$3!=6$
이고, C, D, E 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 A, B가 서는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
이므로 A와 B가 이웃하지 않게 서는 경우의 수는
$6\cdot12=72$
따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{120}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

15 5명이 일렬로 서는 경우의 수는 $5!=120$
A, B, C를 한 사람으로 생각하면 3명이 일렬로 서는 경우의 수는 $3!=6$
이때 B, C끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
즉 A의 양 옆에 B, C가 서는 경우의 수는
$6\cdot2=12$
따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$ 답 $\frac{1}{10}$

16 (1) ${}_5C_2=10$
(2) ${}_3C_2=3$
답 (1) 10 (2) 3 (3) $\frac{3}{10}$

17 6개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는
${}_6C_2=15$
2개 모두 흰 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$
따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

18 6개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는
${}_6C_2=15$
흰 공 1개, 파란 공 1개를 꺼내는 경우의 수는
${}_4C_1\cdot{}_2C_1=8$
따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{15}$ 답 $\frac{8}{15}$

개념 15 통계적 확률

본책 52쪽

19 $\frac{480}{800}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

20 $\frac{220}{400}=\frac{11}{20}$ 답 $\frac{11}{20}$

21 $\frac{80}{250}=\frac{8}{25}$ 답 $\frac{8}{25}$

22 $\frac{210}{400}=\frac{21}{40}$ 답 $\frac{21}{40}$

23 $\frac{80}{400}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

24 $\frac{120}{500}=\frac{6}{25}$ 답 $\frac{6}{25}$

25 $\frac{150}{500}=\frac{3}{10}$ 답 $\frac{3}{10}$

개념 16 확률의 기본 성질

본책 53쪽

2, 3, 5의 3가지

한 개의 주사위를 던지면 1, 2, 3, 4, 5, 6의 눈이 나오므로 자연수의 눈이 반드시 나온다.

한 개의 주사위를 던질 때 0의 눈은 절대로 나오지 않는다.

1, 2, 3, 6의 4가지

26 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

27 답 1　　28 답 0

29 답 $\frac{3}{5}$　　30 답 1

31 답 0　　32 답 $\frac{4}{7}$

33 답 1　　34 답 0

35 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로
$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

36 $A\cup B=\{1, 2, \cdots, 10\}$이므로
$P(A\cup B)=\frac{10}{10}=1$ 답 1

37 $A\cap B=\varnothing$이므로 $P(A\cap B)=0$ 답 0

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 54쪽

01 8의 약수가 적힌 카드를 꺼내는 경우는
1, 2, 4, 8의 4가지
따라서 구하는 확률은
$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

02 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$
첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 하고 $a<b$인 경우를 a, b의 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$,
$(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$,
$(3, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$의 15가지
따라서 구하는 확률은
$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$ 답 ④

03 집합 $\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합의 개수는
$2^5=32$
두 원소 d, e가 모두 포함되어 있는 부분집합의 개수는
$2^{5-2}=2^3=8$
따라서 구하는 확률은
$\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

04 정사면체를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$4\cdot4=16$
$\frac{a}{b}$가 자연수인 경우를 a, b의 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$,
$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$의 8가지
따라서 구하는 확률은
$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ 답 ①

05 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$
두 직선 $ax+y=1$, $4x+by=3$이 평행하려면
$\frac{a}{4}=\frac{1}{b}\neq\frac{1}{3}$이어야 하므로
$ab=4$, $b\neq3$
이를 만족시키는 경우를 a, b의 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$의 3가지
따라서 구하는 확률은
$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ 답 ①

06 6명이 일렬로 서는 경우의 수는
$6!=720$
선생님 2명을 한 사람으로 생각하면 5명이 일렬로 서는 경우의 수는
$5!=120$
이고, 선생님끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
이므로 선생님끼리 이웃하게 서는 경우의 수는
$120\cdot2=240$
따라서 구하는 확률은
$\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$ 답 ④

베이직쎈 BOX

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 36가지 중 두 눈의 수가 같은 경우는 6가지이므로 두 눈의 수가 다른 경우는 $36-6=30$(가지)이다.
이때
15가지는 $a<b$
15가지는 $a>b$

일의 자리의 숫자가 5인 세 자리 자연수

두 직선
$px+qy+r=0$,
$p'x+q'y+r'=0$
이 평행하다.
➡ $\frac{p}{p'}=\frac{q}{q'}\neq\frac{r}{r'}$

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수
➡ $(n-1)!$

07 7권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $7!$
시집 4권을 일렬로 꽂는 경우의 수는
$4!$
이고, 시집들 사이사이의 3개의 자리에 소설책을 꽂는 경우의 수는
$3!$
이므로 소설책과 시집을 교대로 꽂는 경우의 수는
$4!\cdot3!$
따라서 구하는 확률은
$\frac{4!\cdot3!}{7!}=\frac{1}{35}$ 답 $\frac{1}{35}$

베쎈TIP
$7!$, $4!$, $3!$을 각각 계산하여 확률을 구하는 것보다 $\frac{4!\cdot3!}{7!}=\frac{(4\cdot3\cdot2\cdot1)\cdot(3\cdot2\cdot1)}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$을 약분하여 확률을 구하는 것이 계산이 편리하다.

08 5개의 인형 중에서 3개의 인형을 골라 일렬로 진열하는 경우의 수는
${}_5P_3=60$
곰 인형을 제외한 4개의 인형 중에서 2개의 인형을 골라 곰 인형의 양 옆에 진열하는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
따라서 구하는 확률은
$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$ 답 ②

09 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는
${}_6P_3=120$
5의 배수인 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는 일의 자리에 오는 5를 제외한 5개의 숫자 중 백의 자리와 십의 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_5P_2=20$
따라서 구하는 확률은
$\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

10 (1) $4!=24$
(2) (i) 45□□ 꼴인 경우
$2!=2$
(ii) 5□□□ 꼴인 경우
$3!=6$
(i), (ii)에서 4500보다 큰 자연수의 개수는
$2+6=8$
(3) $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$
답 (1) 24 (2) 8 (3) $\frac{1}{3}$

11 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(7-1)!=6!=720$

03 확률의 뜻과 활용

남학생 2명을 한 사람으로 생각하면 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이고, 남학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이므로 남학생끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는

$120\cdot 2=240$

따라서 구하는 확률은 $\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$ 답 ③

12 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

선생님 1명과 여학생 2명을 한 사람으로 생각하면 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

이고, 여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이므로 선생님의 양 옆에 여학생이 앉는 경우의 수는

$2\cdot 2=4$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

13 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

중학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

이고, 중학생들 사이사이의 3개의 자리에 고등학생 3명이 앉는 경우의 수는

$3!=6$

이므로 중학생과 고등학생이 교대로 앉는 경우의 수는

$2\cdot 6=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$ 답 ①

14 5명의 가족이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

부모를 제외한 나머지 가족 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

이고, 나머지 가족들 사이사이의 3개의 자리에 부모 2명이 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

이므로 부모가 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는

$2\cdot 6=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

15 서로 다른 6가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

노란색과 파란색을 마주 보는 영역에 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$ 답 ⑤

16 두 사람이 각각 김밥을 한 줄씩 구매하는 경우의 수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

두 사람이 같은 종류의 김밥을 구매하는 경우의 수는

4

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

17 1부터 8까지의 자연수에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

${}_8\Pi_4=8^4$

짝수일 때, 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 4, 6, 8의 4개

이고, 천의 자리의 숫자, 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_8\Pi_3=8^3$

이므로 짝수인 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$4\cdot 8^3$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4\cdot 8^3}{8^4}=\frac{1}{2}$ 답 ②

18 X에서 Y로의 함수의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

X에서 Y로의 일대일대응의 개수는

${}_3P_3=3!=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$ 답 $\frac{2}{9}$

19 5개의 문자 a, p, p, l, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$

양 끝에 모음 a, e를 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

이고, 2개의 모음을 제외한 3개의 문자 p, p, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

이므로 양 끝에 모음이 오도록 나열하는 경우의 수는

$2\cdot 3=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$ 답 ①

20 4개의 문자 A, A, B, B와 3개의 숫자 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\cdot 2!}=1260$

3개의 숫자를 한 묶음으로 생각하면 5개의 문자와 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

베이직쎈 BOX

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수
➡ ${}_n\Pi_r=n^r$

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때, X에서 Y로의 함수의 개수
➡ ${}_n\Pi_m=n^m$

n개 중에서 같은 것이 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 경우의 수
➡ $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$
(단, $p+q+\cdots+r=n$)

노란색을 칠하는 영역이 결정되면 파란색을 칠하는 영역은 마주 보는 영역에 고정되므로 파란색을 제외한 나머지 5가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같다.

이고, 3개의 숫자끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

이므로 숫자끼리 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$30\cdot 6=180$

따라서 구하는 확률은

$\frac{180}{1260}=\frac{1}{7}$ 답 ③

21 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{10!}{6!\cdot 4!}=210$

오른쪽으로 6칸, 아래쪽으로 4칸 가야 한다.

A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

이고, P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{7!}{5!\cdot 2!}=21$

이므로 A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $3\cdot 21=63$

따라서 구하는 확률은

$\frac{63}{210}=\frac{3}{10}$ 답 $\frac{3}{10}$

22 8개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_5C_1\cdot{}_3C_1=15$

따라서 구하는 확률은

$\frac{15}{28}$ 답 $\frac{15}{28}$

23 7명의 학생 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

은정이는 포함되고 민욱이는 포함되지 않는 경우의 수는

은정이와 민욱이를 제외한 5명의 학생 중에서 2명의 대표를 뽑는 경우의 수

${}_5C_2=10$

따라서 구하는 확률은

$\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$ 답 ④

24 10개의 제비 중에서 2개의 제비를 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$

2개 모두 당첨 제비를 뽑는 경우의 수는

${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}$

2개 모두 당첨 제비일 확률이 $\frac{1}{15}$이므로

$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{45}=\frac{1}{15}$, $\frac{n(n-1)}{90}=\frac{1}{15}$

$n^2-n-6=0$, $(n+2)(n-3)=0$

$\therefore n=3$ ($\because 2\le n\le 10$) 답 3

25 6장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

짝수가 적힌 카드 2장을 뽑는 경우의 수는

(짝수)+(짝수)=(짝수)

${}_3C_2=3$

이고, 홀수가 적힌 카드 2장을 뽑는 경우의 수는

(홀수)+(홀수)=(짝수)

${}_3C_2=3$

이므로 뽑힌 카드에 적힌 두 수의 합이 짝수인 경우의 수는

$3+3=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$ 답 ⑤

26 (1) 만들 수 있는 삼각형의 개수는 8개의 점 중에서 임의로 3개의 점을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_3=56$

(2) 1개의 지름에 대하여 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는 6

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

8개의 점으로 만들 수 있는 지름의 개수는 4

따라서 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는

$6\cdot 4=24$

(3) $\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$ 답 (1) 56 (2) 24 (3) $\frac{3}{7}$

27 $\frac{850}{1000}=\frac{17}{20}$ 답 ④

28 $\frac{250}{400}=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

29 $\frac{28+10}{100}=\frac{19}{50}$ 답 ①

9점을 맞힌 횟수는 28, 10점을 맞힌 횟수는 10이므로 9점 이상을 맞힌 횟수는

$28+10=38$

30 상자에 들어 있는 빨간 구슬은 1개이므로 2개 모두 빨간 구슬을 꺼내는 사건은 공사건이다.

$\therefore p=0$

또 검은 구슬을 적어도 1개 꺼내는 사건은 전사건이므로

$q=1$ 답 $p=0$, $q=1$

31 ① 임의의 사건 A^C에 대하여 $0\le \mathrm{P}(A^C)\le 1$

② $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$이므로

$\mathrm{P}(S)+\mathrm{P}(\varnothing)=1$

③ $\varnothing\subset(A\cap B)\subset S$이므로

$0\le \mathrm{P}(A\cap B)\le 1$

$\mathrm{P}(\varnothing)\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(S)$

④ $\varnothing\subset(A\cup B)\subset S$이므로 $0\le\mathrm{P}(A\cup B)\le 1$

⑤ $A\cup A^C=S$이므로 $\mathrm{P}(A\cup A^C)=1$

답 ④

32 나온 두 눈의 수의 합이 1일 확률은 $p=0$

나온 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 두 눈의 수의 차가 4인 경우는

(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지

이고, 두 눈의 수의 차가 5인 경우는

(1, 6), (6, 1)의 2가지

이므로 나온 두 눈의 수의 차가 4 이상일 확률은

$q=\frac{4+2}{6\cdot 6}=\frac{1}{6}$

나온 두 눈의 수의 곱이 36 이하일 확률은 $r=1$

$\therefore p+q+r=0+\frac{1}{6}+1=\frac{7}{6}$ 답 ①

08 확률의 덧셈정리

개념 17 확률의 덧셈정리

본책 59쪽

01 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{12}=\frac{5}{6}$

답 $\frac{5}{6}$

02 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{5}+\frac{3}{7}-\frac{2}{35}=\frac{4}{7}$

답 $\frac{4}{7}$

03 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{30}$

답 $\frac{7}{30}$

04 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{15}$

답 $\frac{1}{15}$

05 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{7}{12}=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{5}{12}$

답 $\frac{5}{12}$

06 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{8}{9}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{2}-\frac{4}{9}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{5}{6}$

답 $\frac{5}{6}$

07 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

답 $\frac{5}{6}$

08 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8}$

답 $\frac{7}{8}$

09 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{9}{14}=\frac{3}{7}+\mathrm{P}(B)\qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{14}$

답 $\frac{3}{14}$

10 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{4}{5}=\mathrm{P}(A)+\frac{3}{10}\qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

베이직쎈 BOX

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$

임을 이용하여 답을 구할 수도 있다.

두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot 6=36$

두 사건 A, B가 서로 배반사건

➡ $A\cap B=\varnothing$

➡ $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

11 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(1) $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(2) $A\cap B=\{2, 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(3) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

답 (1) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{5}{6}$

12 (1) 나온 두 눈의 수의 합이 7인 사건을 A라 하면

$A=\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(2) 나온 두 눈의 수의 차가 3인 사건을 B라 하면

$B=\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(3) 나온 두 눈의 수의 합이 7이고, 차가 3인 사건은 $A\cap B$이므로

$A\cap B=\{(2, 5), (5, 2)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(4) 나온 두 눈의 수의 합이 7이거나 차가 3인 사건은 $A\cup B$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{5}{18}$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{18}$ (4) $\frac{5}{18}$

13 나온 두 눈의 수가 서로 같은 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 4인 사건을 B라 하면

$A=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$,

$B=\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$

이때 두 눈의 수가 서로 같고 합이 4인 사건은 $A\cap B$이므로 $A\cap B=\{(2, 2)\}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{36}$이고 두 눈의 수가 서로 같거나 합이 4인 사건은 $A\cup B$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{36}=\frac{2}{9}$

답 $\frac{2}{9}$

14 (1) 2의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 A라 하면

$A=\{2, 4, 6, \cdots, 20\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

베이직쎈 BOX

(2) 3의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

(3) 6의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건은 $A\cap B$이므로

$A\cap B=\{6, 12, 18\}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{20}$

(4) 2의 배수 또는 3의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건은 $A\cup B$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{3}{20}$ (4) $\frac{13}{20}$

15 3의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 A, 4의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$,

$B=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

이때 12의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건은 $A\cap B$이므로

3의 배수이면서 4의 배수

$A\cap B=\{12\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{20}$

따라서 3의 배수 또는 4의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건은 $A\cup B$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{3}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

16 (1) 10 이하인 수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A라 하면

$A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

(2) 23 이상인 수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$B=\{23, 24, 25, \cdots, 30\}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$

(3) 10 이하인 수 또는 23 이상인 수가 적힌 카드를 뽑는 사건은 $A\cup B$이고 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{4}{15}=\frac{3}{5}$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{4}{15}$ (3) $\frac{3}{5}$

17 5의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 8의 약수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$A=\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$,

$B=\{1, 2, 4, 8\}$

$A\cap B=\varnothing$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

5의 배수 또는 8의 약수가 적힌 카드를 뽑는 사건은 $A\cup B$이고 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

개념 18 여사건의 확률

본책 61쪽

18 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

19 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$ 답 $\frac{6}{7}$

20 답 $A\cup B$, $A\cup B$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$

21 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ 답 $\frac{5}{9}$

22 $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

23 $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

24 나온 두 눈의 수가 서로 다른 사건을 A라 하면 A^C는 나온 두 눈의 수가 서로 같은 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

나온 두 눈의 수가 서로 같은 경우는 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$ 이므로 그 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ 답 $\frac{5}{6}$

25 적어도 한 개는 파란 공을 꺼내는 사건을 A라 하면 A^C는 2개 모두 흰 공을 꺼내는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$ 답 $\frac{7}{10}$

26 적어도 한 명은 여학생을 뽑는 사건을 A라 하면 A^C는 2명 모두 남학생을 뽑는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$ 답 $\frac{14}{15}$

27 앞면이 3개 이하 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 모두 앞면이 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2\cdot2\cdot2\cdot2}=\frac{1}{16}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$ 답 $\frac{15}{16}$

베이직쎈 BOX

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 62쪽

01 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{11}{12}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{6}\qquad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

답 ②

02 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(S)=1$이므로 $\quad\mathrm{P}(A\cup B)=1$

따라서 $1=\mathrm{P}(A)+\frac{5}{8}$이므로 $\quad\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$

답 $\frac{3}{8}$

03 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{6}\mathrm{P}(A),\qquad \frac{7}{6}\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{9}{14}$

답 $\frac{9}{14}$

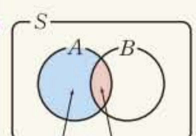
04 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$=0.3+0.15=0.45$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

$=1-0.45=0.55$

답 ②



$A\cap B$와 $A\cap B^C$는 서로 배반사건이다.

05 $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{2}{5}+\left(1-\frac{7}{10}\right)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

답 ④

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)$

$=1-\frac{7}{10}$

$=\frac{3}{10}$

06 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}$

$=1-\left\{\frac{3}{5}+\mathrm{P}(B)\right\}=\frac{2}{5}-\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=4\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$이므로

$\frac{3}{5}+\mathrm{P}(B)=4\left\{\frac{2}{5}-\mathrm{P}(B)\right\}$

$5\mathrm{P}(B)=1\qquad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

07 (1) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)\le\mathrm{P}(S)$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le\mathrm{P}(S)$

$\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)\le1\qquad\therefore \mathrm{P}(B)\le\frac{1}{2}$

또 $0\le\mathrm{P}(B)\le1$이므로

$0\le\mathrm{P}(B)\le\frac{1}{2}$

답 (1) $0\le\mathrm{P}(B)\le\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

08 2의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 A, 5의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5},$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$

10의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$

답 $\frac{3}{5}$

09 나온 두 눈의 수의 차가 0인 사건을 A, 두 눈의 수의 곱이 25 이상인 사건을 B라 하면

나온 두 눈의 수가 같은 사건

$A=\{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),$
$(6,\ 6)\},$

$B=\{(5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\},$

$A\cap B=\{(5,\ 5),\ (6,\ 6)\}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$

답 ④

10 4가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 A, 5가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_8\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{2}{9},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_8\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{2}{9},$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{36}$

4, 5가 적힌 카드를 모두 꺼내는 사건

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{1}{36}=\frac{5}{12}$

답 ⑤

11 개를 기르는 가구를 택하는 사건을 A, 고양이를 기르는 가구를 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6},$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{15}$

개와 고양이를 모두 기르는 가구를 택하는 사건

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{3}{10}$

답 $\frac{3}{10}$

12 농구 경기를 관람한 경험이 있는 학생을 택하는 사건을 A, 야구 경기를 관람한 경험이 있는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3},$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

농구 경기와 야구 경기를 모두 관람한 경험이 있는 학생을 택하는 사건

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{9}{10}$

답 ⑤

13 지하철을 이용하는 학생을 택하는 사건을 A, 버스를 이용하는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{45}{100}=\frac{9}{20},\ \mathrm{P}(B)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10},$$

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\frac{3}{5}=\frac{9}{20}+\frac{3}{10}-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{20}$$

답 $\frac{3}{20}$

14 나온 두 눈의 수의 합이 6인 사건을 A, 두 눈의 수의 차가 5인 사건을 B라 하면

$A=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$,
$B=\{(1,6),(6,1)\}$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{5}{36},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{36}+\frac{1}{18}=\frac{7}{36}$$

답 ④

15 A가 맨 앞에 오는 사건을 A, B가 맨 앞에 오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

16 2명 모두 여학생을 뽑는 사건을 A, 2명 모두 남학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{28}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{14}+\frac{3}{28}=\frac{13}{28}$$

답 ①

17 내일 비가 오지 않는 사건을 A라 하면 A^C는 내일 비가 오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=0.7$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-0.7=0.3$$

답 0.3

18 부모가 이웃하지 않게 서는 사건을 A라 하면 A^C는 부모가 이웃하게 서는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4!\cdot 2!}{5!}=\frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

답 ③

베이직쎈 BOX

두 수가 연속하는 경우는 1과 2, 2와 3, 3과 4, …, 11과 12의 11가지

지하철 또는 버스를 이용하는 학생을 택하는 사건

지하철과 버스를 모두 이용하는 학생을 택하는 사건

A _ _ _ _ : $4!$

B _ _ _ _ : $4!$

양 끝에 모두 남학생이 서는 사건

$$\frac{{}_{9-n}\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{(9-n)(8-n)}{2\cdot 1}}{\frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}}$$

19 카드에 적힌 두 수가 연속하지 않은 자연수인 사건을 A라 하면 A^C는 두 수가 연속하는 자연수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{11}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{11}{66}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

답 ②

20 역함수가 존재하지 않는 사건을 A라 하면 A^C는 역함수가 존재하는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{P}_4}{{}_4\Pi_4}=\frac{4!}{4^4}=\frac{3}{32}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{32}=\frac{29}{32}$$

답 $\frac{29}{32}$

베쎈 TIP

$n(X)=m$, $n(Y)=m$인 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수를 f라 할 때, 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일대응이어야 하고, 이때 일대일대응의 개수는 $m!$이다.

21 적어도 한 문제를 맞히는 사건을 A라 하면 A^C는 모두 맞히지 못하는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{{}_2\Pi_3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

답 $\frac{7}{8}$

22 적어도 한 쪽 끝에 여학생이 서는 사건을 A라 하면 A^C는 양 끝에 여학생이 서지 않는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{P}_2\cdot 4!}{6!}=\frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

답 ②

23 적어도 2명이 같은 요일을 택하는 사건을 A라 하면 A^C는 4명 모두 다른 요일을 택하는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{P}_4}{{}_5\Pi_4}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5^4}=\frac{24}{125}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{24}{125}=\frac{101}{125}$$

답 ④

24 적어도 한 개의 당첨 제비를 뽑는 사건을 A라 하면 A^C는 2개 모두 당첨 제비가 아닌 제비를 뽑는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{9-n}\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{(9-n)(8-n)}{72}$$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{12}$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

즉 $\frac{(9-n)(8-n)}{72}=\frac{7}{12}$이므로

$n^2-17n+30=0$, $(n-2)(n-15)=0$

$\therefore n=2\ (\because 1\le n\le 7)$

답 2

25 나온 두 눈의 수의 합이 4 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 두 눈의 수의 합이 4 미만인 사건이므로

$A^C=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$ 답 ⑤

26 불량품을 1개 이상 택하는 사건을 A라 하면 A^C는 불량품을 택하지 않는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{10\cdot9\cdot8}=\frac{7}{24}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$ 답 $\frac{17}{24}$

27 검은 공을 2개 이하 꺼내는 사건을 A라 하면 A^C는 검은 공을 3개 꺼내는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{11}\mathrm{C}_3}=\frac{4\cdot3\cdot2}{11\cdot10\cdot9}=\frac{4}{165}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{165}=\frac{161}{165}$ 답 ②

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 66쪽

01 전략 표본공간의 원소의 개수를 이용하여 먼저 n의 값을 구한다.

풀이 서로 다른 n개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 표본공간의 원소의 개수는 2^n이므로

$2^n=8=2^3$ $\therefore n=3$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 서로 다른 3개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 앞면이 2개 나오는 경우는

HHT, HTH, THH의 3가지

따라서 $a=3$이므로

$a-n=3-3=0$ 답 ②

02 전략 보기의 각 사건을 집합으로 나타내어 교집합이 공집합인 두 사건을 찾는다.

풀이 보기의 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ의 사건을 각각 A, B, C, D라 하면

$A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$,
$C=\{5, 6, 7, 8\}$, $D=\{3, 6\}$

이므로

$A\cap B=\{1\}$, $A\cap C=\{5, 7\}$, $A\cap D=\{3\}$,
$B\cap C=\{8\}$, $B\cap D=\varnothing$, $C\cap D=\{6\}$

따라서 서로 배반사건인 것은 B와 D이므로 서로 배반사건인 것끼리 짝 지어진 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

03 전략 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 5이어야 함을 이용한다.

풀이 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$5!=120$

5의 배수인 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$ 답 ②

04 전략 자연수를 만들 때, 중복 허용 여부에 따라 중복순열 또는 순열을 이용한다.

풀이 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

각 자리의 숫자가 서로 다른 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$

따라서 구하는 확률은

$\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$ 답 ②

05 전략 숫자 2가 3개 있으므로 같은 것이 있는 순열을 이용하고, 이웃하여 일렬로 나열할 때는 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각한다.

풀이 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!}=840$

문자 P, Q, R가 적힌 3장의 카드를 한 장의 카드로 생각하면 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

이고, 문자가 적힌 카드끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

이므로 문자가 적힌 카드끼리 이웃하는 경우의 수는

$20\cdot6=120$

따라서 구하는 확률은

$\frac{120}{840}=\frac{1}{7}$ 답 ①

06 전략 3병 모두 다른 곳에서 생산된 것이려면 3곳에서 생산된 원두를 각각 1병씩 택해야 한다.

풀이 12병 중에서 3병을 택하는 경우의 수는

${}_{12}\mathrm{C}_3=220$

3병 모두 다른 곳에서 생산된 것을 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1=4\cdot4\cdot4=64$

따라서 구하는 확률은 $\frac{64}{220}=\frac{16}{55}$ 답 ⑤

07 전략 조사한 전체 사람 수를 구한 후 통계적 확률을 이용한다.

풀이 조사한 전체 사람 수는

$52+140+105+72+31=400$

400명 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 그 사람이 '만족'으로 답했을 확률은

$\frac{140}{400}=\frac{7}{20}$ 답 ③

베이직쎈 BOX

- 나온 두 눈의 수의 합이 2인 경우
- 나온 두 눈의 수의 합이 3인 경우
- 일의 자리에 5를 나열하고 나머지 4개의 숫자를 나열하면 된다.
- 3개 모두 검은 공을 꺼내는 사건
- 3곳에서 생산된 원두를 각각 1병씩 택하는 경우의 수와 같다.

베이직쎈 BOX

08 전략 주어진 표본공간에서 절대로 일어나지 않는 사건을 찾는다.

풀이 표본공간을 S라 하면 $S=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

① $\{2,\ 3\}$이므로 그 확률은 $\frac{2}{5}$

② $\{1,\ 3\}$이므로 그 확률은 $\frac{2}{5}$

③ $x^2+2x=0$에서 $x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

이때 -2는 주어진 표본공간의 원소가 아니다.

따라서 주어진 사건은 $\{0\}$이므로 그 확률은 $\frac{1}{5}$

④ $x^2<3$에서 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

표본공간의 원소 중 위의 부등식을 만족시키는 것은 $0,\ 1$이다.

따라서 주어진 사건은 $\{0,\ 1\}$이므로 그 확률은 $\frac{2}{5}$

⑤ x가 자연수일 때 $5x$의 값은 $5,\ 10,\ 15,\ \cdots$

이 중 표본공간의 원소인 것은 없다.

따라서 주어진 사건은 $\varnothing$이므로 그 확률은 0

이상에서 확률이 0인 사건은 ⑤이다. 답 ⑤

09 전략 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

풀이 $S=A\cup B$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(S)=1$

이때 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

또 $3\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{2}\mathrm{P}(A)$

따라서 $1=\mathrm{P}(A)+\frac{3}{2}\mathrm{P}(A)$이므로

$\frac{5}{2}\mathrm{P}(A)=1 \quad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$ 답 ④

10 전략 4의 배수는 $4,\ 8$의 2개이므로 2개 중 1개는 반드시 꺼내고 나머지 1개는 꺼내지 않아야 함을 이용한다.

풀이 1부터 9까지의 자연수 중에서 4의 배수는

$4,\ 8$

4가 적힌 공을 꺼내고 8이 적힌 공을 꺼내지 않는 사건을 A, 4가 적힌 공을 꺼내지 않고 8이 적힌 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_7\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{7}{36},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_7\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{7}{36}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{36}+\frac{7}{36}=\frac{7}{18}$ 답 ②

4가 적힌 공을 먼저 꺼냈다고 생각한 후 8이 적힌 공을 제외한 나머지 7개의 공에서 1개의 공을 꺼내는 경우의 수

두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.

11 전략 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 P에서 Q까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!\cdot 3!}=35$

P에서 Q까지 최단 거리로 갈 때, A를 거치지 않는 사건을 A라 하면 A^C는 A를 거치는 사건이다.

P → A → Q로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$2\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}=2\cdot 10=20$

이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$ 답 ④

12 전략 만든 세 자리 자연수가 200 미만일 확률을 구한 후 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 200 이상인 세 자리 자연수를 만드는 사건을 A라 하면 A^C는 200 미만인 세 자리 자연수를 만드는 사건이므로

1□□ 꼴인 자연수이다.

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{P}_2}{{}_6\mathrm{P}_3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ 답 ③

13 전략 사건 A와 배반인 사건의 개수는 여사건 A^C의 부분집합의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 표본공간을 S라 하면

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

$A=\{2,\ 3,\ 5\}$이므로 사건 A와 배반인 사건은 $A^C=\{1,\ 4,\ 6\}$의 부분집합이다.

따라서 구하는 사건의 개수는

$2^3=8$ 답 8

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

14 전략 회전하여 일치하는 도형을 칠하는 경우의 수는 원순열의 수를 이용한다.

풀이 서로 다른 6가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$ ···➊

빨간색과 파란색을 한 가지 색으로 생각하면 5가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이고, 빨간색과 파란색이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이므로 빨간색과 파란색이 이웃하도록 칠하는 경우의 수는 $24\cdot 2=48$ ···➋

따라서 구하는 확률은

$\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$ ···➌

답 $\frac{2}{5}$

단계	채점 기준	비율
➊	모든 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
➋	빨간색과 파란색이 이웃하도록 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
➌	빨간색과 파란색이 이웃하도록 칠할 확률을 구할 수 있다.	30 %

15 전략 삼각형이 되려면 한 직선에서 2개의 점을, 다른 한 직선에서 1개의 점을 택해야 함을 이용한다.

풀이 7개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$_7C_3=35$ ⋯ ❶

3개의 점을 택하여 선분으로 연결할 때, 삼각형이 만들어지려면 한 직선에서 2개의 점을 택하고 다른 한 직선에서 1개의 점을 택해야 한다.

(i) 직선 l에서 2개의 점을 택하고 직선 m에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는

$_5C_2\cdot{}_2C_1=10\cdot2=20$

(ii) 직선 l에서 1개의 점을 택하고 직선 m에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

$_5C_1\cdot{}_2C_2=5\cdot1=5$

(i), (ii)에서 삼각형이 만들어지는 경우의 수는

$20+5=25$ ⋯ ❷

따라서 구하는 확률은

$\frac{25}{35}=\frac{5}{7}$ ⋯ ❸

답 $\frac{5}{7}$

단계	채점 기준	비율
❶	모든 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷	삼각형이 만들어지는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸	삼각형이 만들어질 확률을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 3개의 점을 택하여 선분으로 연결할 때, 삼각형이 만들어지는 사건을 A라 하면 A^C는 삼각형이 만들어지지 않는 사건이다.

직선 l에서 3개의 점을 택하는 경우 삼각형이 만들어지지 않으므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{_5C_3}{_7C_3}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

16 **전략** $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최소가 되는 경우는 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대인 경우이다.

풀이 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$\mathrm{P}(A\cap B)$가 최소가 되는 경우는 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대일 때이고 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대인 경우는

$A\cup B=S$, 즉 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(S)=1$

인 경우이다.

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 최솟값은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-1=\frac{5}{12}$$

답 $\frac{5}{12}$

17 **전략** $10=2\times5$이므로 10과 서로소이려면 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니어야 함을 이용한다.

풀이 $10=2\times5$이므로 10과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수이다.

2의 배수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 A, 5의 배수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌, 즉 10과 서로소인 수가 적힌 카드를 꺼내는 사건은

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

베이직쎈 BOX

10의 배수가 적힌 카드를 꺼내는 사건

최대공약수가 1인 두 자연수를 서로소라 한다.

18 **전략** (적어도 한 개의 떡에는 꿀이 들어 있을 확률)
$=1-$(2개의 떡에 모두 꿀이 들어 있지 않을 확률)

풀이 적어도 한 개의 떡에는 꿀이 들어 있는 사건을 A라 하면 A^C는 2개의 떡에 모두 꿀이 들어 있지 않은 사건이다.

꿀이 들어 있지 않은 떡의 개수는 $8-n$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{_{8-n}C_2}{_8C_2}=\frac{(8-n)(7-n)}{56}$ ⋯ ❶

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{11}{14}$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{11}{14}=\frac{3}{14}$$

즉 $\frac{(8-n)(7-n)}{56}=\frac{3}{14}$이므로 ⋯ ❷

$n^2-15n+44=0$

$(n-4)(n-11)=0$

$\therefore n=4$ ($\because 1\le n\le6$) ⋯ ❸

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	2개의 떡에 모두 꿀이 들어 있지 않을 확률을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷	n에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	30 %
❸	n의 값을 구할 수 있다.	40 %

19 **전략** (노란색 팔찌를 2개 이하 꺼낼 확률)
$=1-$(노란색 팔찌를 3개 꺼낼 확률)

풀이 노란색 팔찌를 2개 이하 꺼내는 사건을 A라 하면 A^C는 노란색 팔찌를 3개 꺼내는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{_4C_3}{_7C_3}=\frac{4}{35}$ ⋯ ❶

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$ ⋯ ❷

답 $\frac{31}{35}$

단계	채점 기준	비율
❶	노란색 팔찌를 3개 꺼낼 확률을 구할 수 있다.	50 %
❷	노란색 팔찌를 2개 이하 꺼낼 확률을 구할 수 있다.	50 %

Ⅱ. 확률

04 조건부확률

09 조건부확률

개념 19 조건부확률

본책 70쪽

01 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{8}$ 답 $\dfrac{3}{8}$

베이직쎈 BOX: $\dfrac{1}{4}\div\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{8}$

02 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

03 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.2}{0.6}=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

04 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0.2}{0.5}=\dfrac{2}{5}$ 답 $\dfrac{2}{5}$

05 (1) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\dfrac{13}{15}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{15}$

(2) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{5}$

답 (1) $\dfrac{1}{15}$ (2) $\dfrac{1}{5}$

06 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{8}+\mathrm{P}(B)-\dfrac{1}{8}$ $\therefore \mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}$ 답 $\dfrac{1}{4}$

07 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.6=\mathrm{P}(A)+0.3-0.15$ $\therefore \mathrm{P}(A)=0.45$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.15}{0.45}=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

08 답 B, 1, 0.4, $\dfrac{4}{7}$

09 $\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\dfrac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}$

$=\dfrac{\mathrm{P}(B)}{1-\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{1-\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

베이직쎈 BOX: $\mathrm{P}(B\cap A^C)$
$=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로
$\mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}(B)$
다음과 같이 벤다이어그램으로 확인할 수도 있다.

10 $\mathrm{P}(A|B^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\dfrac{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B^C)}$

$=\dfrac{\mathrm{P}(A)}{1-\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{3}{7}}{1-\frac{5}{14}}=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

11 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{3,\ 6\}$, $A\cap B=\{6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

12 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{3,\ 6\}$, $A\cap B=\{6\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

13 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $A\cap B=\{3,\ 5,\ 7\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{5}$ 답 $\dfrac{3}{5}$

14 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $A\cap B=\{3,\ 5,\ 7\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{3}{4}$ 답 $\dfrac{3}{4}$

15 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 5 이상의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{5,\ 6\}$, $A\cap B=\{6\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

16 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 홀수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$A=\{3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$, $A\cap B=\{3\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

04 조건부확률

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$ 답 $\frac{1}{2}$

17 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$,
$A\cap B=\{2, 3\}$
$\therefore P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$ 답 $\frac{1}{2}$

18 나온 두 눈의 수가 같은 사건을 A, 나온 두 눈의 수의 합이 10 이상인 사건을 B라 할 때, 나온 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$,
$B=\{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$,
$A\cap B=\{(5, 5), (6, 6)\}$
$\therefore P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}$$ 답 $\frac{1}{3}$

19 동전의 뒷면이 1개 나오는 사건을 A, 100원짜리 동전의 뒷면이 나오는 사건을 B라 하자. 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 100원짜리 동전, 50원짜리 동전을 차례대로 나타내면

$A=\{HT, TH\}$, $B=\{TH, TT\}$,
$A\cap B=\{TH\}$
$\therefore P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$ 답 $\frac{1}{2}$

20 8의 약수가 적힌 카드를 택하는 사건을 A, 짝수가 적힌 카드를 택하는 사건을 B라 하면

$A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$,
$A\cap B=\{2, 4, 8\}$
$\therefore P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $P(A\cap B)=\frac{3}{10}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$$ 답 $\frac{3}{4}$

베이직쎈 BOX

개념 20 확률의 곱셈정리

본책 72쪽

21 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$
$=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$ 답 $\frac{3}{10}$

22 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

23 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$이므로

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{9}$$ 답 $\frac{2}{9}$

24 $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=0.5\times0.6=0.3$이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.7}=\frac{3}{7}$$ 답 $\frac{3}{7}$

25 $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$
$=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

26 (1) $P(A)=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$

(2) 첫 번째에 흰 구슬을 꺼낸 후 주머니에 남은 구슬은 흰 구슬 1개, 검은 구슬 3개이므로

$P(B|A)=\frac{3}{1+3}=\frac{3}{4}$

첫 번째에 흰 구슬을 꺼냈을 때, 두 번째에 검은 구슬을 꺼낼 확률

(3) $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$

첫 번째에 흰 구슬을 꺼내고 두 번째에 검은 구슬을 꺼낼 확률

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{3}{10}$

27 첫 번째에 당첨 제비를 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 당첨 제비를 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{21}$$ 답 $\frac{1}{21}$

28 첫 번째에 당첨 제비를 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 당첨 제비를 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C|A)=\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{21}$$

첫 번째에만 당첨 제비를 꺼내는 사건

답 $\frac{5}{21}$

29 첫 번째에 당첨 제비를 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 당첨 제비를 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{5}{21}$$

두 번째에만 당첨 제비를 꺼내는 사건

답 $\frac{5}{21}$

베이직쎈 BOX

개념 21 $P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$ 를 이용한 확률 본책 73쪽

30 답 (1) $\frac{1}{28}$ $B|A$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{28}$

(2) $\frac{3}{14}$ $B|A^C$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{14}$

(3) $\frac{1}{4}$ $A^C\cap B$, $\frac{1}{28}$, $\frac{1}{4}$

31 첫 번째에 빨간 구슬을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 초록 구슬을 꺼내는 사건을 B라 하자.

(1) $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$

(2) $P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$

두 번 모두 초록 구슬을 꺼내는 사건

(3) $P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$
$=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

답 (1) $\frac{2}{7}$ (2) $\frac{1}{7}$ (3) $\frac{3}{7}$

32 첫 번째에 불량품을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 불량품을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$$
$$=P(A)P(B|A)+P(A^C)P(B|A^C)$$
$$=\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}+\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

첫 번째에 불량품을 꺼내지 않고, 두 번째에 불량품을 꺼내는 사건

33 첫 번째에 흰 구슬을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 흰 구슬을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$$
$$=P(A)P(B|A)+P(A^C)P(B|A^C)$$
$$=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{9}$$

답 $\frac{5}{9}$

첫 번째에 검은 구슬, 두 번째에 흰 구슬을 꺼내는 사건

34 답 (1) $\frac{3}{10}$ $A^C\cap B$, $B|A$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{10}$

(2) $\frac{2}{9}$ $A\cap B$, $\frac{1}{15}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{9}$

35 답 (1) $\frac{19}{30}$ $\frac{1}{2}$, $B\cap E$, $E|B$, 6, 4, $\frac{19}{30}$

(2) $\frac{9}{19}$ E, $\frac{3}{10}$, $\frac{19}{30}$, $\frac{9}{19}$

36 A가 빨간 구슬을 꺼내는 사건을 A, B가 빨간 구슬을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$$
$$=P(A)P(B|A)+P(A^C)P(B|A^C)$$
$$=\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}=\frac{5}{11}$$

A가 파란 구슬, B가 빨간 구슬을 꺼내는 사건

따라서 구하는 확률은

$$P(A^C|B)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{11}}{\frac{5}{11}}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

37 A 접시를 택하는 사건을 A, B 접시를 택하는 사건을 B, 꿀이 들어 있는 송편을 먹는 사건을 E라 하면

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$$
$$=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{13}{42}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{42}}=\frac{7}{13}$$

답 $\frac{7}{13}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형 본책 75쪽

01 $P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$이므로

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

02 $P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)$이므로

$$\frac{5}{12}=\frac{3}{4}-P(A\cap B)$$
$$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{3}$$
$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{9}$$

답 ④

03 $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=0.3$ 이므로

$$P(A\cup B)=0.7$$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$$0.7=0.45+0.3-P(A\cap B)$$
$$\therefore P(A\cap B)=0.05$$
$$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.05}{0.3}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

04 $P(A|B)=0.5$에서 $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0.5$

$$\therefore P(B)=2P(A\cap B)$$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$$0.7=0.55+2P(A\cap B)-P(A\cap B)$$
$$\therefore P(A\cap B)=0.15$$

답 0.15

05 $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$에서
$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

이때 $P(A|B)=\frac{5}{6}$에서

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{5}{6}$$
$$\therefore P(B)=\frac{6}{5}P(A\cap B)=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$

답 ④

06 $P(B|A^C)=\dfrac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}=\dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(A^C)}$

$=\dfrac{P(B)}{1-P(A)}$

$=\dfrac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{5}$ 답 ⑤

07 앞면이 한 번 나오는 사건을 A, 첫 번째에 앞면이 나오는 사건을 B라 할 때, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$A=\{HT,\ TH\}$, $B=\{HH,\ HT\}$,
$A\cap B=\{HT\}$

$\therefore P(A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$ 답 ④

08 피아노를 배운 적이 있는 학생을 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\dfrac{5}{8}$, $P(A\cap B)=\dfrac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{8}}=\dfrac{3}{10}$ 답 $\dfrac{3}{10}$

09 어린이를 택하는 사건을 A, 남자를 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=0.54$, $P(A\cap B)=0.3$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.3}{0.54}=\dfrac{5}{9}$ 답 $\dfrac{5}{9}$

10 나온 두 눈의 수의 곱이 20 이상인 사건을 A, 나온 두 눈의 수의 차가 2인 사건을 B라 할 때, 나온 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),$
$(6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$,
$B=\{(1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 5),\ (4,\ 2),$
$(4,\ 6),\ (5,\ 3),\ (6,\ 4)\}$,
$A\cap B=\{(4,\ 6),\ (6,\ 4)\}$

$\therefore P(A)=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$, $P(A\cap B)=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{1}{4}$ 답 $\dfrac{1}{4}$

베이직쎈 BOX

짝수가 적힌 검은색 카드를 꺼내는 사건

P 회사의 불량품이 1개, Q 회사의 불량품이 2개이므로 불량품의 전체 개수는
$1+2=3$

11 검은색 카드를 꺼내는 사건을 A, 짝수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면

$P(A)=\dfrac{5}{9}$, $P(A\cap B)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\dfrac{3}{5}$ 답 ⑤

다른 풀이 $P(B|A)$

$=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$

$=\dfrac{(\text{짝수가 적힌 검은색 카드를 꺼내는 경우의 수})}{(\text{검은색 카드를 꺼내는 경우의 수})}$

$=\dfrac{3}{5}$

12 불량품을 택하는 사건을 A, Q 회사의 제품을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\dfrac{1+2}{20}=\dfrac{3}{20}$, $P(A\cap B)=\dfrac{2}{20}=\dfrac{1}{10}$

$\therefore P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{20}}=\dfrac{2}{3}$

답 ②

13 등교할 때 자전거를 이용하는 학생을 택하는 사건을 A, 남학생을 택하는 사건을 B라 하자.

(1) $P(A)=\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$, $P(A\cap B)=\dfrac{24}{100}=\dfrac{6}{25}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{3}{5}$

(2) $P(B)=\dfrac{54}{100}=\dfrac{27}{50}$, $P(A\cap B)=\dfrac{24}{100}=\dfrac{6}{25}$

따라서 구하는 확률은

$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{6}{25}}{\frac{27}{50}}=\dfrac{4}{9}$

답 (1) $\dfrac{3}{5}$ (2) $\dfrac{4}{9}$

다른 풀이 (1) $n(A)=40$, $n(A\cap B)=24$이므로

$P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{24}{40}=\dfrac{3}{5}$

(2) $n(B)=54$, $n(A\cap B)=24$이므로

$P(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{24}{54}=\dfrac{4}{9}$

14 정기적으로 봉사 활동을 하고 있는 여학생 수는

$22-10=12$

이므로 전체 여학생 수는

$12+13=25$

여학생을 택하는 사건을 A, 정기적으로 봉사 활동을 하고 있는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\dfrac{25}{50}=\dfrac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\dfrac{12}{50}=\dfrac{6}{25}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{25}}{\frac{1}{2}}=\frac{12}{25}$$ 답 $\frac{12}{25}$

15 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	P 동호회	Q 동호회	합계
오른손	8	12	20
왼손	6	4	10
합계	14	16	30

왼손만 사용하는 회원을 택하는 사건을 A, Q 동호회 회원을 택하는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ P(A\cap B)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{5}$$ 답 ②

16 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
손목시계를 차고 있음	20	15	35
손목시계를 차고 있지 않음	60	25	85
합계	80	40	120

손목시계를 차고 있지 않은 학생을 택하는 사건을 A, 남학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{85}{120}=\frac{17}{24},\ P(A\cap B)=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{17}{24}}=\frac{12}{17}$$ 답 ④

17 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
P 영화	10	6	16
Q 영화	8	11	19
합계	18	17	35

P 영화를 관람한 학생을 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{16}{35},\ P(A\cap B)=\frac{6}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{35}}{\frac{16}{35}}=\frac{3}{8}$$ 답 $\frac{3}{8}$

18 은영이가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 주호가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)\underline{P(B|A)}$$
$$=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$$ 답 ②

베이직쎈 BOX
은영이가 당첨 제비를 뽑았을 때, 주호가 당첨 제비를 뽑을 확률

19 첫 번째에 남자 회원을 뽑는 사건을 A, 두 번째에 여자 회원을 뽑는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$
$$=\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}=\frac{9}{35}$$ 답 $\frac{9}{35}$

20 첫 번째에 파란 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$
$$=\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{8}{33}$$ 답 $\frac{8}{33}$

21 1부터 12까지의 자연수 중 12의 약수는

1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개

이므로 첫 번째에 12의 약수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 12의 약수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$
$$=\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{5}{22}$$ 답 ④

22 성훈이가 아침 식사로 빵을 먹는 사건을 A라 하면 $P(A)=\frac{1}{4}$이므로

$$P(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

아침 식사로 빵을 먹지 않았을 때 점심 식사로 빵을 먹지 않을 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 점심 식사로 빵을 먹는 사건을 B라 하면 $P(B^C|A^C)=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C|A^C)$$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$ 답 $\frac{3}{8}$

23 사격 선수가 총을 쏠 때 첫 번째 시도에서 명중시키는 사건을 A라 하면 $P(A)=\frac{3}{5}$이므로

$$P(A^C)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

첫 번째 시도에서 명중시키지 못했을 때 두 번째 시도에서 명중시키지 못할 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 두 번째 시도에서 명중시키는 사건을 B라 하면

$$P(B^C|A^C)=\frac{2}{3}$$

이 사격 선수가 두 번 모두 명중시키지 못할 확률은

$$P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C|A^C)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-P(A^C\cap B^C)=1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$$ 답 ⑤

구하는 확률이 '적어도 ~일 확률'이므로 여사건의 확률을 이용한다.

베이직쎈 BOX

24 일요일에 비가 오는 사건을 A, 희수가 우산을 가지고 외출하는 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{25},$$

$$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$$
$$=\frac{8}{25}+\frac{1}{5}=\frac{13}{25}$$

답 $\frac{13}{25}$

• 40 % ➡ $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

• $P(A^c)=1-P(A)$
$=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

25 A 상자를 택하는 사건을 A, B 상자를 택하는 사건을 B, 당첨 제비를 꺼내는 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{4},$$

$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=\frac{7}{20}$$

답 ④

• 두 개의 상자 중 임의로 한 개를 택할 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

• 두 사건 $A\cap E$와 $B\cap E$는 서로 배반사건이다.

26 독감 예방 주사를 맞는 사건을 A, 독감에 걸리는 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0.8\times0.2=0.16,$$
$$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=0.2\times0.6=0.12$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$$
$$=0.16+0.12=0.28$$

답 0.28

27 현우가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 지은이가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{12},$$

$$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

답 ③

28 A 주머니를 택하는 사건을 A, B 주머니를 택하는 사건을 B, 색이 서로 다른 두 구슬을 꺼내는 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{2}{7},$$

$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

• A 주머니를 택하여 꺼낸 두 구슬의 색이 서로 다를 확률

• B 주머니를 택하여 꺼낸 두 구슬의 색이 서로 다를 확률

$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$$
$$=\frac{2}{7}+\frac{3}{10}=\frac{41}{70}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{41}{70}}=\frac{20}{41}$$

답 $\frac{20}{41}$

29 A 기계에서 생산한 제품을 택하는 사건을 A, B 기계에서 생산한 제품을 택하는 사건을 B, 불량품을 택하는 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=0.4\times0.05=0.02,$$
$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=0.6\times0.02=0.012$$
$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$$
$$=0.02+0.012=0.032$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{0.012}{0.032}=\frac{3}{8}$$

답 ①

10 사건의 독립과 종속

개념 22 사건의 독립과 종속

본책 80쪽

01 $P(B|A)=P(B)=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

• 두 사건 A, B가 서로 독립이다.

02 $P(A|B)=P(A)=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

03 $P(B|A)=P(B)=0.6$ 답 0.6

04 $P(A|B)=P(A)=0.35$ 답 0.35

05 (1) $P(B|A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

• 꺼낸 공을 다시 넣으므로 주머니의 검은 공과 흰 공의 개수는 변하지 않는다.

(2) $P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$
$=\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

(3) $P(B|A)=P(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

답 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$ (3) 독립

06 (1) $P(B|A)=\frac{5}{9}$

• 꺼낸 공을 다시 넣지 않으므로 주머니의 검은 공과 흰 공의 개수가 변한다.

(2) $P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$
$=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{3}{5}$

(3) $P(B|A)\neq P(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

답 (1) $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{3}{5}$ (3) 종속

베이직쎈 BOX

개념 23 두 사건이 독립일 조건

본책 81쪽

07 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.2\times0.7=0.14$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.14$ 이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다. 답 독립

08 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.4\times0.55=0.22$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.2$ 이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다. 답 종속

09 (1) $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

(2) $A\cap B=\{2\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

(3) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

답 (1) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) 종속

10 답 B, B, B^C

11 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A)\}\\&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^C)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A^C, B는 서로 독립이다.

답 풀이 참조

12 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$
$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A^C, B^C는 서로 독립이다.

답 풀이 참조

13 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=0.3\times0.4=0.12$ 답 0.12

14 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\\&=0.3\times(1-0.4)=0.18\end{aligned}$$

답 0.18

15 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=(1-0.3)\times0.4\\&=0.28\end{aligned}$$

답 0.28

16 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\\&=(1-0.3)\times(1-0.4)\\&=0.42\end{aligned}$$

답 0.42

17 A 선수가 자유투를 성공하는 사건을 A, B 선수가 자유투를 성공하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$$

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$$

답 $\frac{8}{15}$

18 A 선수가 쏜 총이 과녁에 명중하는 사건을 A, B 선수가 쏜 총이 과녁에 명중하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=0.75,\ \mathrm{P}(B)=0.6$$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=0.75\times0.6=0.45\end{aligned}$$

답 0.45

개념 24 독립시행의 확률

본책 82쪽

19 답 $\frac{8}{81}$ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{81}$

20 주사위를 1번 던져서 짝수의 눈이 나올 확률은

2, 4, 6의 3가지

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

21 주사위를 1번 던져서 4 이하의 눈이 나올 확률은

1, 2, 3, 4의 4가지

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

답 $\frac{1}{81}$

22 A 제품을 택할 확률이 $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$이므로 구하는 확률은 ${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

답 $\frac{27}{64}$

23 A 제품을 택할 확률이 $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$이므로 구하는 확률은 ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{45}{512}$

답 $\frac{45}{512}$

24 $\frac{3}{16}$ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{3}{16}$

04 조건부확률

25 (ⅰ) 앞면이 0번 나올 확률은

$${}_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

(ⅱ) 앞면이 1번 나올 확률은

$${}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32}$$

(ⅲ) 앞면이 2번 나올 확률은

$${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{5}{16}=\frac{1}{2}$$ 답 $\frac{1}{2}$

26 (ⅰ) 10점 영역을 2번 맞힐 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{48}{125}$$

(ⅱ) 10점 영역을 3번 맞힐 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^0=\frac{64}{125}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{48}{125}+\frac{64}{125}=\frac{112}{125}$$ 답 $\frac{112}{125}$

27 (ⅰ) 10점 영역을 0번 맞힐 확률은

$${}_3C_0\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$$

(ⅱ) 10점 영역을 1번 맞힐 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{12}{125}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{125}+\frac{12}{125}=\frac{13}{125}$$ 답 $\frac{13}{125}$

베쎈TIP

화살을 3번 쏠 때, 10점 영역을
0번 또는 1번 또는 2번 또는 3번
맞힐 수 있으므로 2번 이상 맞히는 사건과 1번 이하 맞히는 사건은 서로 여사건이다. 이때 **26**, **27**에서 구한 두 확률의 합이 1임을 이용하여 여사건임을 확인할 수 있다.

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 83쪽

01 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $A\cap B=\{2, 4, 6\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

ㄴ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{10}$

ㄷ. $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{10}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

베이직쎈 BOX

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면
$\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

02 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$A=\{\mathrm{HH}\}$, $B=\{\mathrm{HH, HT}\}$, $C=\{\mathrm{HH, TT}\}$

(가) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$A\cap B=\{\mathrm{HH}\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

(나) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$A\cap C=\{\mathrm{HH}\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 A, C는 서로 종속이다.

(다) $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$B\cap C=\{\mathrm{HH}\}$에서 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

답 ④

03 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{3}{4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다. 답 독립

04 ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

ㄴ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$
$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(A|B)$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

05 ① $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^C)$

② $P(A|B)=P(A)$, $P(A|A\cap B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=1$

이므로 $P(A|B)\neq P(A|A\cap B)$

③ A, B가 서로 독립이면 A^C, B^C도 서로 독립이다.

④ $A\cap B=\varnothing$이므로 $P(A\cap B)=0$

$0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$이므로

$0<P(A)P(B)<1$

$\therefore P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

⑤ $A\cap B=\varnothing$이므로 $P(A\cap B)=0$

$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0$,

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0$

따라서 $P(A|B)=P(B|A)$이다.

답 ⑤

06 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A)=P(A|B)=\frac{1}{3}$,

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

07 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{3}{10}P(B)$

$P(A\cap B)=P(A)-\frac{1}{6}P(B)$에서

$\frac{3}{10}P(B)=\frac{3}{10}-\frac{1}{6}P(B)$

$\frac{7}{15}P(B)=\frac{3}{10}$

$\therefore P(B)=\frac{9}{14}$

답 ①

08 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}P(A)$

$P(A\cup B)=\frac{8}{9}$에서

$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{8}{9}$

$P(A)+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}P(A)=\frac{8}{9}$, $\frac{2}{3}P(A)=\frac{5}{9}$

$\therefore P(A)=\frac{5}{6}$

답 $\frac{5}{6}$

09 $P(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$이고, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

답 ③

베이직쎈 BOX

$P(A\cap(A\cap B))$
$=P(A\cap B)$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이면
$A\cap B=\varnothing$

5, 6의 2가지

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다.

중국어를 선택한 남학생인 사건

10 $P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $P(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이고, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$

답 ④

11 재호와 미주가 마라톤을 완주하는 사건을 각각 A, B라 하면

$P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{3}{5}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 재호와 미주가 모두 마라톤을 완주할 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{11}{15}$

답 $\frac{11}{15}$

12 첫 번째와 두 번째에 5 이상의 눈이 나오는 사건을 각각 A, B라 하면

$P(A)=P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

답 ④

13 두 주머니 A, B에서 빨간 구슬을 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면

$P(A)=\frac{3}{8}$, $P(B)=\frac{1}{5}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{40}$

답 ①

14 두 선수 A, B가 홈런을 치는 사건을 각각 A, B라 하면 $P(A)=0.4$, $P(B)=0.3$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

A 선수만 홈런을 칠 확률은

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)$

$=0.4\times(1-0.3)=0.28$

B 선수만 홈런을 칠 확률은

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)$

$=(1-0.4)\times 0.3=0.18$

두 사건 $A\cap B^C$와 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$0.28+0.18=0.46$

답 0.46

15 남학생을 택하는 사건을 A, 중국어를 선택한 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{220}{400}=\frac{11}{20}$, $P(B)=\frac{280}{400}=\frac{7}{10}$,

$P(A\cap B)=\frac{x}{400}$

이때 두 사건 A, B는 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$$\frac{x}{400}=\frac{11}{20}\cdot\frac{7}{10}\qquad\therefore x=154$$ 답 154

16 주어진 정사면체를 한 번 던질 때, 바닥에 닿는 면에 적힌 수가 짝수일 확률은 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
따라서 구하는 확률은

$${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$$ 답 ⑤

17 오지선다형 한 문제에 임의로 답을 적어 맞힐 확률은 $\frac{1}{5}$
따라서 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}$$ 답 $\frac{256}{625}$

18 두 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 두 주사위 모두 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
따라서 두 주사위 모두 홀수의 눈이 나오는 사건이 4번 일어날 확률은

$${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{135}{4^6}\qquad\therefore x=135$$ 답 ②

19 4번째 경기에서 예지가 상품을 받으려면 3번째 경기까지 예지가 2번 이기고 4번째 경기에서 예지가 이겨야 한다.
한 번의 경기에서 예지가 이길 확률은

$$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

3번째 경기까지 예지가 2번 이길 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$ 답 $\frac{2}{27}$

베이직쎈 BOX: 4번째 경기에서 예지가 이길 확률

20 (i) 자유투를 2번 성공할 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{54}{125}$$

베이직쎈 BOX: $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

(ii) 자유투를 3번 성공할 확률은

$${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^0=\frac{27}{125}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{54}{125}+\frac{27}{125}=\frac{81}{125}$$ 답 $\frac{81}{125}$

21 한 개의 공을 꺼낼 때, 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
(i) 흰 공을 0번 꺼낼 확률은

$${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

(ii) 흰 공을 1번 꺼낼 확률은

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{20}{27}$$ 답 $\frac{20}{27}$

22 (i) 5문제를 맞힐 확률은

$${}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{6\cdot3^5}{4^6}=\frac{2\cdot3^6}{4^6}$$

(ii) 6문제를 맞힐 확률은

$${}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{3^6}{4^6}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{2\cdot3^6}{4^6}+\frac{3^6}{4^6}=\frac{3\cdot3^6}{4^6}=\frac{3^7}{4^6}$$ 답 ④

23 스트라이크를 5번 칠 확률은

베이직쎈 BOX: 스트라이크를 4번 이하 치는 사건은 스트라이크를 5번 치는 사건의 여사건이다.

$${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{32}{243}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}$$ 답 $\frac{211}{243}$

24 한 명도 완치되지 못할 확률, 즉 0명이 완치될 확률은

베이직쎈 BOX: 적어도 한 명이 완치되는 사건은 0명이 완치되는 사건의 여사건이다.

$${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$$

베이직쎈 BOX: $60\,\% \Rightarrow \frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{16}{625}=\frac{609}{625}$$ 답 ④

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 87쪽

01 전략 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{12}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{7}$에서 $\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{2}{7}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{7}\mathrm{P}(A)=\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{12}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{12}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$ 답 ③

02 전략 일주일에 2회 이상 운동하는 사람을 택하는 사건을 A, 40대인 사람을 택하는 사건을 B라 하고 구하는 확률을 조건부확률로 나타낸다.

풀이 일주일에 2회 이상 운동하는 사람을 택하는 사건을 A, 40대인 사람을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=0.35,\ \mathrm{P}(A\cap B)=0.2$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.2}{0.35}=\frac{4}{7}$$ 답 ②

03 전략 구하는 확률을 조건부확률로 나타낸 후 주어진 표를 이용한다.

풀이 불고기 도시락을 선택한 학생을 택하는 사건을 A, P 반 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{26}{50}=\frac{13}{25},\ P(A\cap B)=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{25}}{\frac{13}{25}}=\frac{6}{13}$$ 답 ④

다른 풀이 $n(A)=26$, $n(A\cap B)=12$이므로

$$P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{12}{26}=\frac{6}{13}$$

04 전략 두 사건 A, B가 동시에 일어날 때, $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$임을 이용한다.

풀이 첫 번째에 크림이 들어 있는 과자를 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 초콜릿이 들어 있는 과자를 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{7}{15},\ P(B|A)=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{7}{15}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4}{15}$$ 답 ①

05 전략 두 번째 던진 고리가 막대에 걸리는 경우와 걸리지 않는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 두 번째 던진 고리가 막대에 걸리는 사건을 A, 세 번째 던진 고리가 막대에 걸리는 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{25},$$

- 두 번째, 세 번째 던진 고리가 모두 막대에 걸릴 확률

$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\left(1-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{25}$$

- 두 번째 던진 고리가 막대에 걸리지 않고, 세 번째 던진 고리가 막대에 걸릴 확률

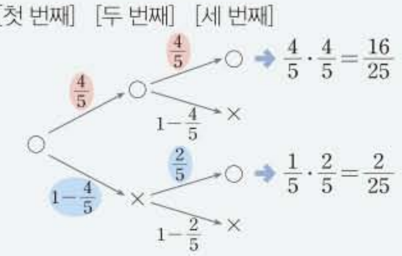
따라서 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=\frac{16}{25}+\frac{2}{25}=\frac{18}{25}$$ 답 ④

- 두 사건 $A\cap B$, $A^C\cap B$는 서로 배반사건이다.

베쎈TIP

던진 고리가 막대에 걸리는 것을 '○'로, 막대에 걸리지 않는 것을 '×'로 나타낼 때, 다음과 같이 수형도를 이용하여 확률을 생각해 볼 수 있다.



06 전략 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$임을 이용하여 $P(B)$를 구한 후 B의 원소의 개수를 구한다.

풀이 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}P(B)\qquad \therefore P(B)=\frac{1}{3}$$

이때 $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$이므로 $\frac{1}{3}=\frac{n(B)}{6}$

$$\therefore n(B)=2$$

따라서 $4\in B$, $2\notin B$, $6\notin B$이고 $n(B)=2$인 사건 B는 $\{1, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$의 3개 답 ③

07 전략 전구가 켜지려면 스위치 A 또는 B가 닫혀야 한다.

풀이 두 스위치 A, B가 닫히는 사건을 각각 A, B라 하면

$$P(A)=0.6,\ P(B)=0.2$$

이고, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.6\times0.2=0.12$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.2-0.12=0.68$$ 답 ⑤

08 전략 5번째 경기에서 A 팀이 우승하려면 4번째 경기까지 A 팀이 3번 이겨야 한다.

풀이 5번째 경기에서 A 팀이 우승하려면 4번째 경기까지 A 팀이 3번 이기고 5번째 경기에서 A 팀이 이겨야 한다. 한 번 경기를 할 때 A 팀이 이길 확률은 $\frac{1}{2}$

4번째 경기까지 A 팀이 3번 이길 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$ 답 ②

09 전략 북과 장구를 선택한 1학년, 2학년 학생 수를 표로 나타내 본다.

풀이 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	북	장구	합계
1학년	44	76	120
2학년	72	128	200
합계	116	204	320

북을 선택한 학생을 택하는 사건을 A, 1학년 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{116}{320}=\frac{29}{80},\ P(A\cap B)=\frac{44}{320}=\frac{11}{80}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{11}{80}}{\frac{29}{80}}=\frac{11}{29}$$ 답 $\frac{11}{29}$

베이직쎈 BOX

10 전략 첫 번째에 파란 구슬, 두 번째에 노란 구슬을 꺼낼 확률을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 첫 번째에 파란 구슬을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 노란 구슬을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{n+3},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{n+2}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{n+3}\cdot\frac{n}{n+2}$$
$$=\frac{3n}{(n+2)(n+3)} \quad \cdots ❶$$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$$\frac{3n}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{4},\qquad n^2-7n+6=0$$
$$(n-1)(n-6)=0$$
$$\therefore n=6\ (\because n>1) \quad \cdots ❷$$

답 6

단계	채점 기준	비율
❶	첫 번째에 파란 구슬, 두 번째에 노란 구슬을 꺼낼 확률을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷	n의 값을 구할 수 있다.	50 %

11 전략 흰 공을 A 주머니에서 꺼내는 경우와 B 주머니에서 꺼내는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 A 주머니에서 공을 꺼내는 사건을 A, B 주머니에서 공을 꺼내는 사건을 B, 흰 공을 꺼내는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{9},$$

한 개의 주사위를 던져서 3의 배수가 나올 확률

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$
$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$$
$$=\frac{2}{9}+\frac{1}{4}=\frac{17}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{17}{36}}=\frac{8}{17}$$

답 $\frac{8}{17}$

12 전략 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 두 사건 A와 B^C도 서로 독립임을 이용한다.

풀이 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 두 사건 A와 B^C도 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=0.3\times\mathrm{P}(A)$$

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)$
$=1-0.7=0.3$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=0.15$이므로

$$0.3\times\mathrm{P}(A)=0.15$$
$$\therefore \mathrm{P}(A)=0.5 \quad \cdots ❶$$

또 두 사건 A와 C는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)$에서

$$0.6=0.5+\mathrm{P}(C)$$
$$\therefore \mathrm{P}(C)=0.1 \quad \cdots ❷$$

답 0.1

단계	채점 기준	비율
❶	$\mathrm{P}(A)$를 구할 수 있다.	50 %
❷	$\mathrm{P}(C)$를 구할 수 있다.	50 %

13 전략 점 P가 3번 이동하여 점 C에 있는 경우를 생각해 본다.

풀이 동전을 3번 던져서 꼭짓점 A에서 출발한 점 P가 꼭짓점 C에 있는 경우는 앞면이 2번 나오는 경우이다.

따라서 구하는 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

베쎈 TIP

동전을 3번 던져서 나오는 각 경우에 따라 점 P의 위치는 다음과 같다.

① 앞면이 3번 또는 뒷면이 3번 나올 때 ➔ 꼭짓점 A

② 앞면이 2번, 뒷면이 1번 나올 때 ➔ 꼭짓점 C

③ 앞면이 1번, 뒷면이 2번 나올 때 ➔ 꼭짓점 B

14 전략 시행 횟수가 5번이므로 4번 미만 나올 확률은 여사건의 확률을 이용하는 것이 편리하다.

풀이 한 개의 공을 꺼낼 때, 4의 배수가 적힌 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \quad \cdots ❶$$

(i) 4의 배수가 적힌 공을 4번 꺼낼 확률은

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{15}{1024}$$

(ii) 4의 배수가 적힌 공을 5번 꺼낼 확률은

$${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{1024}$$

(i), (ii)에서 4의 배수가 적힌 공을 4번 이상 꺼낼 확률은

$$\frac{15}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{1}{64} \quad \cdots ❷$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64} \quad \cdots ❸$$

(4번 미만 꺼낼 확률)
$=1-$(4번 이상 꺼낼 확률)

답 $\frac{63}{64}$

단계	채점 기준	비율
❶	한 개의 공을 꺼낼 때 4의 배수가 적힌 공을 꺼낼 확률을 구할 수 있다.	20 %
❷	4의 배수가 적힌 공을 4번 이상 꺼낼 확률을 구할 수 있다.	50 %
❸	4의 배수가 적힌 공을 4번 미만 꺼낼 확률을 구할 수 있다.	30 %

베이직쎈 BOX

Ⅲ. 통계

05 확률변수와 확률분포

11 이산확률변수와 연속확률변수

개념 25 확률변수와 확률분포

본책 90쪽

01 답 0, 1, 2, 3

HTH, THT, TTH, TTT, 1, 2, 3

02 답 1, 2, 3, 4, 5, 6

03 답 0, 1, 2, 3, 4

04 답 0, 1, 2, 3, 4, 5

05 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 4의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$, 4의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{5}{6}$이므로

$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

$$P(X=0)={}_2C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36},$$

$$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{5}{18},$$

$$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{36}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

답 풀이 참조

06 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 홀수의 눈이 나오지 않을 확률, 즉 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$$P(X=0)={}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2},$$

$$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

답 풀이 참조

07 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\cdot{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{1\cdot6}{15}=\frac{2}{5},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{2\cdot4}{15}=\frac{8}{15},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\cdot{}_4C_0}{{}_6C_2}=\frac{1\cdot1}{15}=\frac{1}{15}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

답 풀이 참조

개념 26 이산확률변수와 확률질량함수

본책 91쪽

08 답

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

09 (1) X가 가질 수 있는 값은

0, 1, 2, 3

한 개의 동전을 한 번 던질 때 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 X의 확률질량함수는

뒷면이 나올 확률

앞면이 나올 확률

$$P(X=x)={}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$$

$$={}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^3\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

확률질량함수의 식에 $x=0$을 대입한 것이다.

(2) $P(X=0)={}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$,

$P(X=1)={}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$,

$P(X=2)={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$,

$P(X=3)={}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

답 (1) 3, $\frac{1}{2}$, 3, 3, $\frac{1}{2}$, 1, 3

(2) 풀이 참조

10 (1) X가 가질 수 있는 값은

0, 1, 2

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, 5의 약수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 X의 확률질량함수는

5의 약수는 1, 5의 2개이다.

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$P(X=x)={}_2C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}\ (x=0,\ 1,\ 2)$$

(2) $P(X=0)={}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$,

$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$,

$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{9}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

답 풀이 참조

11 (1) X가 가질 수 있는 값은

0, 1, 2

5개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2$

꺼낸 2개의 공 중에서 빨간 공이 x개 포함되는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_x \cdot {}_3\mathrm{C}_{2-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_2\mathrm{C}_x \cdot {}_3\mathrm{C}_{2-x}}{{}_5\mathrm{C}_2}$ $(x=0,\ 1,\ 2)$

(2) $\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0 \cdot {}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1\cdot 3}{10}=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2\cdot 3}{10}=\frac{3}{5}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1\cdot 1}{10}=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

답 풀이 참조

12 답 $\frac{1}{4}$

13 $\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

14 $\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

15 $\mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$ 답 $\frac{7}{8}$

다른 풀이 $\mathrm{P}(X\ge 2)=1-\mathrm{P}(X<2)$

$=1-\mathrm{P}(X=1)$

$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

16 $\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ 답 $\frac{7}{12}$

17 $\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

베이직쎈 BOX

$1\le X\le 3$을 만족시키는 X의 값은 1, 2, 3이다.

길이, 시간, 무게 등과 같이 어떤 범위에 속하는 모든 실수의 값을 가지는 확률변수는 연속확률변수이다.

18 $\mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$ 답 $\frac{7}{12}$

19 $X^2-2X=0$에서 $X(X-2)=0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=2$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-2X=0)=\mathrm{P}(X=0$ 또는 $X=2)$

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

20 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=1$ $\therefore a=\frac{2}{7}$ 답 $\frac{2}{7}$

21 확률의 총합은 1이므로

$\frac{2}{9}+a+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=1$ $\therefore a=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

22 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+3a+\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=1,$ $3a=\frac{1}{5}$

$\therefore a=\frac{1}{15}$ 답 $\frac{1}{15}$

23 답 $\frac{1}{6}$ 1, 2, 1, $3k$, 1, $6k$, $\frac{1}{6}$

24 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$
$=1$

$k+2k+3k+4k=1$

$10k=1$ $\therefore k=\frac{1}{10}$ 답 $\frac{1}{10}$

25 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$k+4k+9k+16k=1$

$30k=1$ $\therefore k=\frac{1}{30}$ 답 $\frac{1}{30}$

26 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$k+\frac{k}{2}+\frac{k}{4}=1$

$\frac{7}{4}k=1$ $\therefore k=\frac{4}{7}$ 답 $\frac{4}{7}$

개념 27 연속확률변수와 확률밀도함수

본책 93쪽

27 답 이 **28** 답 연

29 답 이 **30** 답 이

31 답 연 **32** 답 연

33 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$2\cdot2=4\neq1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다. 답 ×

베쎈TIP

함수 $f(x)$ $(\alpha\leq x\leq\beta)$가 확률밀도함수인지 판단할 때에는 $f(x)$가 다음을 모두 만족시키는지 확인한다.

① 모든 함숫값이 0 이상이다.

② $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이다.

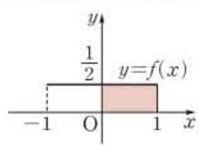
34 $1<x\leq2$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다. 답 ×

35 $0\leq x\leq2$에서 $f(x)\geq0$이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수이다. 답 ○

36 $\mathrm{P}(0\leq X\leq1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

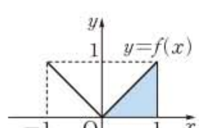


$\mathrm{P}(0\leq X\leq1)$은 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

$\mathrm{P}(0\leq X\leq1)=1\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

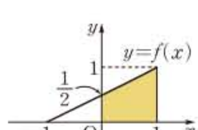
37 $\mathrm{P}(0\leq X\leq1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(0\leq X\leq1)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1$

$=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

38 $\mathrm{P}(0\leq X\leq1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



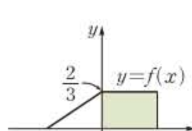
$\mathrm{P}(0\leq X\leq1)$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot1$

(사다리꼴의 넓이)
$=\frac{1}{2}$
×{(윗변의 길이)
+(아랫변의 길이)}
×(높이)

$=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

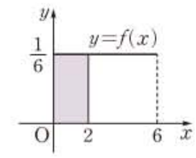
39 $\mathrm{P}(0\leq X\leq1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(0\leq X\leq1)=1\cdot\frac{2}{3}$

$=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

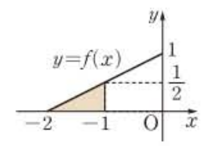
40 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $\mathrm{P}(0\leq X\leq2)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(0\leq X\leq2)=2\cdot\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

41 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $\mathrm{P}(-2\leq X\leq-1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

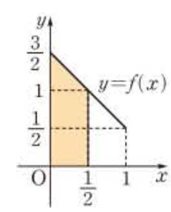


$\mathrm{P}(-2\leq X\leq-1)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}$

$f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)+1$
$=\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

42 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $\mathrm{P}\left(0\leq X\leq\frac{1}{2}\right)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}\left(0\leq X\leq\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

43 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$4\cdot k=1$ $\quad\therefore k=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

44 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot k=1,\quad 2k=1$

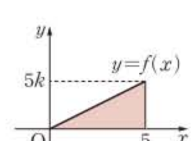
$\therefore k=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

45 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot k=1,\quad 3k=1$

$\therefore k=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

46 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

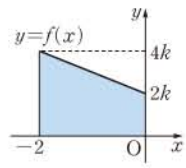


$\frac{1}{2}\cdot5\cdot5k=1$ $\quad\therefore k=\frac{2}{25}$ 답 $\frac{2}{25}$

베쎈TIP

확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 때 $f(x)$의 식에 미지수가 있으면 확률은 0 이상이므로 제1사분면과 제2사분면에서만 생각한다.

47 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

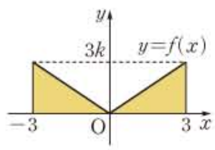


$$\frac{1}{2}\cdot(4k+2k)\cdot2=1, \quad 6k=1$$

$$\therefore k=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

48 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot3k\right)=1, \quad 9k=1$$

$$\therefore k=\frac{1}{9}$$

답 $\frac{1}{9}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 95쪽

01 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다. 답 ⑤

02 2장의 카드에 적힌 수를 a, b $(a<b)$라 하면 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수의 차는

$(1, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 7)$일 때, 2

$(1, 5)$, $(3, 7)$일 때, 4

$(1, 7)$일 때, 6

따라서 X가 가질 수 있는 값은 2, 4, 6의 3개이다.

답 ③

03 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 3개의 동전을 동시에 던져서 나오는 각각의 경우와 그때의 X의 값을 구하면 다음과 같다.

100원	100원	500원	X
H	H	H	700
H	H	T	200
H	T	H	600
H	T	T	100
T	H	H	600
T	H	T	100
T	T	H	500
T	T	T	0

따라서 X가 가질 수 있는 값은

0, 100, 200, 500, 600, 700

답 0, 100, 200, 500, 600, 700

04 답 (가) 1 (나) 2 (다) $\frac{1}{4}$ (라) $\frac{1}{2}$

베이직쎈 BOX

05 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_3C_3}{{}_6C_3}=\frac{1\cdot1}{20}=\frac{1}{20},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{3\cdot3}{20}=\frac{9}{20},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_3C_1}{{}_6C_3}=\frac{3\cdot3}{20}=\frac{9}{20},$$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_3C_0}{{}_6C_3}=\frac{1\cdot1}{20}=\frac{1}{20}$$

따라서 X의 확률분포를 그래프로 바르게 나타낸 것은 ③이다. 답 ③

06 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수에 대하여 4로 나누었을 때의 나머지는

1, 5일 때, 1

2, 6일 때, 2

3일 때, 3

4일 때, 0

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

답 풀이 참조

07 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

3의 배수는 3, 6의 2개이다.

$$P(X=x)={}_3C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} \ (x=0, 1, 2, 3)$$

답 풀이 참조

08 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2

10개의 공이 들어 있는 상자에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}C_2$

소수가 적힌 공을 x개 포함하여 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_x\cdot{}_6C_{2-x}$

1부터 10까지의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{{}_4C_x\cdot{}_6C_{2-x}}{{}_{10}C_2} \ (x=0, 1, 2)$$

$\therefore p=4, q=6, r=2$ 답 ①

09 확률의 총합은 1이므로 $c=1$

$\frac{1}{8}+a+b+\frac{1}{4}+\frac{5}{16}=1$에서 $a+b=\frac{5}{16}$

$$\therefore a+b+c=\frac{5}{16}+1=\frac{21}{16}$$

답 $\frac{21}{16}$

10 $P(2\le X\le3)=\frac{5}{12}$이므로

$$P(X=2)+P(X=3)=\frac{5}{12}$$

$b+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$　　$\therefore b=\frac{1}{12}$

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=1$　　$\therefore a=\frac{5}{12}$

$\therefore a-b=\frac{1}{3}$　　답 ④

11 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}+2a=1,$　　$\frac{5}{2}a=\frac{5}{8}$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

$X^2-2X-8=0$에서　$(X+2)(X-4)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

$\therefore P(X^2-2X-8=0)=P(X=-2$ 또는 $X=4)$

$=P(X=-2)+P(X=4)$

$=\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{4}$

$=\frac{5}{8}$　　답 $\frac{5}{8}$

12 $P(3\le X\le 4)=P(X=3)+P(X=4)$

$=\frac{3}{8}+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$　　답 ④

13 확률의 총합은 1이므로

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$

$\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}=1,$　　$\frac{9}{k}=1$

$\therefore k=9$　　답 ⑤

14 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$

$\left(k+\frac{1}{4}\right)+2k+\left(3k+\frac{1}{4}\right)+4k=1$

$10k=\frac{1}{2}$　　$\therefore k=\frac{1}{20}$

$\therefore P(X=1)=\frac{1}{20}+\frac{1}{4}=\frac{3}{10}$　　답 $\frac{3}{10}$

15 확률의 총합은 1이므로

$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=1)$
$+P(X=2)+P(X=3)$
$=1$

$2k+k+k+2k+3k=1$

$9k=1$　　$\therefore k=\frac{1}{9}$

$X^2\ge 4$에서　$X^2-4\ge 0$

$(X+2)(X-2)\ge 0$

$\therefore X\le -2$ 또는 $X\ge 2$

$\therefore P(X^2\ge 4)$

$=P(X\le -2$ 또는 $X\ge 2)$

$=P(X=-2)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{1}{9}\cdot 2+\frac{1}{9}\cdot 2+\frac{1}{9}\cdot 3$

$=\frac{7}{9}$　　답 $\frac{7}{9}$

베이직쎈 BOX

정사면체를 두 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$4\cdot 4=16$

이므로

$P(X=3)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4},$

$P(X=5)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

$k=\frac{1}{20}$이므로

$P(X=x)$

$=\begin{cases}\frac{1}{20}x+\frac{1}{4} & (x=1,\ 3)\\ \frac{1}{20}x & (x=2,\ 4)\end{cases}$

(적어도 한 개가 ●일 확률)
=1−(모두 ●가 아닐 확률)

16 바닥에 닿는 면에 적힌 두 수를 각각 a, b라 하면 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 두 수의 합이

3인 경우는

$(0,\ 3)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 0)$의 4가지

5인 경우는

$(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$의 2가지

이므로 그 확률은 각각

$P(X=3)=\frac{1}{4}$, $P(X=5)=\frac{1}{8}$

$\therefore P(X=3$ 또는 $X=5)=P(X=3)+P(X=5)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$　　답 ②

17 X의 확률질량함수는

$P(X=x)=\frac{{}_3C_x\cdot{}_5C_{2-x}}{{}_8C_2}$ $(x=0,\ 1,\ 2)$

이므로

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_5C_1}{{}_8C_2}=\frac{3\cdot 5}{28}=\frac{15}{28},$

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_5C_0}{{}_8C_2}=\frac{3\cdot 1}{28}=\frac{3}{28}$

$\therefore P(1\le X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{15}{28}+\frac{3}{28}=\frac{9}{14}$　　답 $\frac{9}{14}$

18 X의 확률질량함수는

$P(X=x)=\frac{{}_4C_x\cdot{}_3C_{3-x}}{{}_7C_3}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이므로

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_3C_1}{{}_7C_3}=\frac{6\cdot 3}{35}=\frac{18}{35},$

$P(X=3)=\frac{{}_4C_3\cdot{}_3C_0}{{}_7C_3}=\frac{4\cdot 1}{35}=\frac{4}{35}$

$\therefore P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=\frac{22}{35}$　　답 ②

19 (1) $P(X=x)=\frac{{}_4C_{3-x}\cdot{}_6C_x}{{}_{10}C_3}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

(2) 뽑힌 학생 중 적어도 1명이 여학생일 확률은 $P(X\ge 1)$이므로

$P(X\ge 1)=1-P(X=0)$

$=1-\frac{{}_4C_3\cdot{}_6C_0}{{}_{10}C_3}$

$=1-\frac{4\cdot 1}{120}=\frac{29}{30}$

답 풀이 참조

20 ①, ②, ④, ⑤ 이산확률변수

③ 연속확률변수　　답 ③

21 ㄱ, ㄴ, ㄹ. 연속확률변수

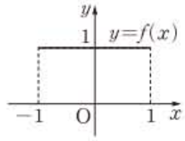
ㄷ. 이산확률변수

이상에서 연속확률변수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

05 확률변수와 확률분포

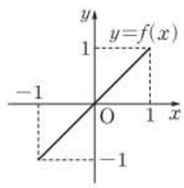
22 ① $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



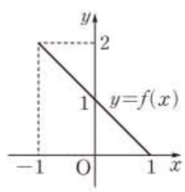
$2\cdot1=2\neq1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

② $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $-1\le x<0$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.



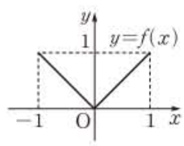
③ $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=-1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2\neq1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

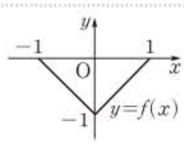
④ $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $-1\le x\le1$에서 $f(x)\ge0$이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\right)=1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수이다.

⑤ $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $-1<x<1$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.



답 ④

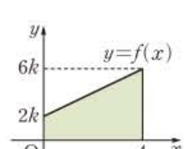
23 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot|2-(-1)|\cdot k=1$

$\therefore k=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

24 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

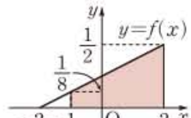


$\frac{1}{2}\cdot(2k+6k)\cdot4=1$

$16k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{16}$

답 ③

25 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $\mathrm{P}(-1\le X\le2)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(-1\le X\le2)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)\cdot3$

$=\frac{15}{16}$

답 $\frac{15}{16}$

베이직쎈 BOX

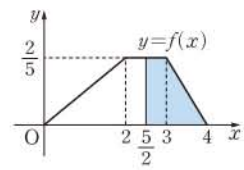
$f(-1)=\frac{1}{8}\cdot(-1+2)$
$=\frac{1}{8}$

26 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot(1+4)\cdot k=1$

$\frac{5}{2}k=1 \qquad \therefore k=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{5}{2}\right)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{5}{2}\right)$

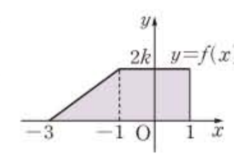
$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}$

$=\frac{2}{5}$

답 ③

$\left(3-\frac{5}{2}\right)+\left(4-\frac{5}{2}\right)$
$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$
$=2$

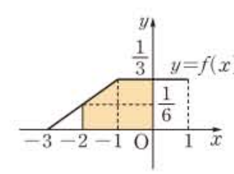
27 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot2k=1$

$6k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(-2\le X\le0)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(-2\le X\le0)$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\cdot1+1\cdot\frac{1}{3}$

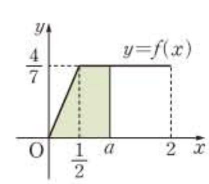
$=\frac{7}{12}$

답 $\frac{7}{12}$

$y=|x|-1$의 그래프는 $y=|x|$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

$f(-2)=\frac{1}{6}\cdot(-2+3)$
$=\frac{1}{6}$

28 $\mathrm{P}(0\le X\le a)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



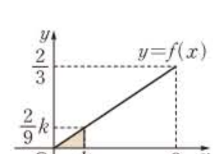
$\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)+a\right\}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

$\frac{4}{7}a-\frac{1}{7}=\frac{3}{7}, \qquad \frac{4}{7}a=\frac{4}{7}$

$\therefore a=1$

답 1

29 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $\mathrm{P}(X\le k)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\frac{1}{2}\cdot k\cdot\frac{2}{9}k=\frac{1}{16}$

$k^2=\frac{9}{16} \qquad \therefore k=\frac{3}{4}\ (\because 0\le k\le3)$

답 ④

베이직쎈 BOX

12 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차

개념 28 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차

본책 100쪽

01 답 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{6}$

02 답 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{17}{36}$

베쎈TIP
$V(X)$를 분산의 정의인 $E((X-m)^2)$을 이용하여 계산하면

$$V(X)=\left(-1-\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(0-\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$$

위와 같이 $X-m$의 값이 정수가 아니면 계산이 번거로우므로 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$을 이용하는 것이 계산이 편리하다.

03 답 17, 6

04 $E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{1}{4}=2$ 답 2

05 $E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{3}{8}+4^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{23}{4}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
$=\frac{23}{4}-2^2=\frac{7}{4}$ 답 $\frac{7}{4}$

06 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

07 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
$=5-2^2=1$ 답 1

08 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
$=20-4^2=4$
$\therefore \sigma(X)=\sqrt{4}=2$ 답 2

09 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로
$13=E(X^2)-7^2$
$\therefore E(X^2)=62$ 답 62

10 $\sigma(X)=2\sqrt{3}$이므로 $V(X)=12$
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로
$12=E(X^2)-10^2$
$\therefore E(X^2)=112$ 답 112

$V(X)=\{\sigma(X)\}^2$
$=(2\sqrt{3})^2$
$=12$

11 답

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

12 $E(X)=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{2}{5}=3$
답 3

13 $E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{3}{10}+4^2\cdot\frac{2}{5}=10$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
$=10-3^2=1$ 답 1

14 $\sigma(X)=\sqrt{1}=1$ 답 1

15 확률의 총합은 1이므로
$\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+a+\frac{1}{9}=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

16 $E(X)=0\cdot\frac{2}{9}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{9}=\frac{4}{3}$
답 $\frac{4}{3}$

17 $E(X^2)=0^2\cdot\frac{2}{9}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{3}$이므로
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
$=\frac{8}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$ 답 $\frac{8}{9}$

18 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

19 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)={}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,
$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$,
$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}$

짝수의 눈이 나올 확률

짝수의 눈이 나오지 않을 확률, 즉 홀수의 눈이 나올 확률

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

답 풀이 참조

20 $E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1$ 답 1

21 $E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$이므로
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
$=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

22 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

23 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\cdot{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1\cdot3}{21}=\frac{1}{7}$,
$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{4\cdot3}{21}=\frac{4}{7}$,
$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_3C_0}{{}_7C_2}=\frac{6\cdot1}{21}=\frac{2}{7}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

답 풀이 참조

24 $E(X)=0\cdot\frac{1}{7}+1\cdot\frac{4}{7}+2\cdot\frac{2}{7}=\frac{8}{7}$ 답 $\frac{8}{7}$

25 $E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{7}+1^2\cdot\frac{4}{7}+2^2\cdot\frac{2}{7}=\frac{12}{7}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{12}{7}-\left(\frac{8}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$ 답 $\frac{20}{49}$

26 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{20}{49}}=\frac{2\sqrt{5}}{7}$ 답 $\frac{2\sqrt{5}}{7}$

개념 29 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

본책 102쪽

27 $E(4X)=4E(X)=4\cdot10=40$

$V(4X)=4^2V(X)=16\cdot4=64$

$\sigma(4X)=|4|\sigma(X)=4\cdot2=8$

답 풀이 참조

28 $E(2X-5)=2E(X)-5=2\cdot10-5=15$

$V(2X-5)=2^2V(X)=4\cdot4=16$

$\sigma(2X-5)=|2|\sigma(X)=2\cdot2=4$

답 풀이 참조

29 $E\left(\frac{1}{2}X+2\right)=\frac{1}{2}E(X)+2=\frac{1}{2}\cdot10+2=7$

$V\left(\frac{1}{2}X+2\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2V(X)=\frac{1}{4}\cdot4=1$

$\sigma\left(\frac{1}{2}X+2\right)=\left|\frac{1}{2}\right|\sigma(X)=\frac{1}{2}\cdot2=1$

답 풀이 참조

30 $E(-X+6)=-E(X)+6=-10+6=-4$

$V(-X+6)=(-1)^2V(X)=1\cdot4=4$

$\sigma(-X+6)=|-1|\sigma(X)=1\cdot2=2$

답 풀이 참조

31 $E(6X+2)=6E(X)+2=6\cdot9+2=56$ 답 56

32 $V\left(\frac{1}{3}X-1\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2V(X)=\frac{1}{9}\cdot3=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

33 $\sigma(-2X)=|-2|\sigma(X)=2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

34 $E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$이므로

$E(10X-3)=10E(X)-3$

$=10\cdot\frac{4}{5}-3=5$ 답 5

베이직쎈 BOX

$V(X)=4$이므로 $\sigma(X)=\sqrt{4}=2$

$\sigma(2X-5)=\sqrt{V(2X-5)}=\sqrt{16}=4$로 구할 수도 있다.

확률질량함수가 주어지면 먼저 각 확률을 구하여 확률분포를 표로 나타낸 후 평균을 구하는 것이 편리하다.

$V(X)=3$이므로 $\sigma(X)=\sqrt{3}$

35 $E(X^2)=0^2\cdot\frac{3}{10}+1^2\cdot\frac{3}{5}+2^2\cdot\frac{1}{10}=1$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\therefore V(10X-3)=10^2V(X)$

$=100\cdot\frac{9}{25}=36$ 답 36

36 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$이므로

$\sigma(10X-3)=|10|\sigma(X)=10\cdot\frac{3}{5}=6$ 답 6

다른 풀이 $V(10X-3)=36$이므로

$\sigma(10X-3)=\sqrt{36}=6$

37 $E(X)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$이므로

$E(-3X+9)=-3E(X)+9$

$=-3\cdot\frac{4}{3}+9=5$ 답 5

38 $E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{6}=3$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=3-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$

$\therefore V(-3X+9)=(-3)^2V(X)$

$=9\cdot\frac{11}{9}=11$ 답 11

39 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{11}{9}}=\frac{\sqrt{11}}{3}$이므로

$\sigma(-3X+9)=|-3|\sigma(X)$

$=3\cdot\frac{\sqrt{11}}{3}=\sqrt{11}$ 답 $\sqrt{11}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 103쪽

01 $E(X)=1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{2}{9}=2$,

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{4}{9}+2^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{2}{9}=\frac{16}{3}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{16}{3}-2^2=\frac{4}{3}$ 답 ④

02 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	1

$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{7}+1\cdot\frac{3}{14}+2\cdot\frac{2}{7}+3\cdot\frac{5}{14}$

$=\frac{13}{7}$ 답 $\frac{13}{7}$

베이직쎈 BOX

03 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

$E(X)=-1\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

$E(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{8}+0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{15}}{4}$

04 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$

$k+\frac{1}{6}+k+\frac{1}{6}=1, \qquad 2k=\frac{2}{3}$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{3}$,

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{20}{3}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{20}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$ 답 ⑤

05 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{3}{5}+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{2}{5}$ ...... ㉠

$E(X)=\frac{9}{5}$이므로 $\quad 1\cdot a+2\cdot\frac{3}{5}+3\cdot b=\frac{9}{5}$

$\therefore a+3b=\frac{3}{5}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{3}{10},\ b=\frac{1}{10}$

답 $a=\frac{3}{10},\ b=\frac{1}{10}$

㉡−㉠을 하면

$2b=\frac{1}{5} \quad \therefore b=\frac{1}{10}$

$b=\frac{1}{10}$을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$

$\therefore a=\frac{3}{10}$

06 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)={}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$,

$P(X=1)={}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$,

$P(X=2)={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$,

$P(X=3)={}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

답 ①

07 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_2C_0}{{}_6C_2}=\frac{6\cdot1}{15}=\frac{2}{5}$,

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{4\cdot2}{15}=\frac{8}{15}$,

$P(X=2)=\frac{{}_4C_0\cdot{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1\cdot1}{15}=\frac{1}{15}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{8}{15}+2\cdot\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{2}{5}+1^2\cdot\frac{8}{15}+2^2\cdot\frac{1}{15}=\frac{4}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{4}{5}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{45}$ 답 $\frac{16}{45}$

08 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

1부터 9까지의 자연수 중에서 4의 약수는 1, 2, 4의 3개이다.

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_6C_3}{{}_9C_3}=\frac{1\cdot20}{84}=\frac{5}{21}$,

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_6C_2}{{}_9C_3}=\frac{3\cdot15}{84}=\frac{15}{28}$,

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_6C_1}{{}_9C_3}=\frac{3\cdot6}{84}=\frac{3}{14}$,

$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_6C_0}{{}_9C_3}=\frac{1\cdot1}{84}=\frac{1}{84}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{5}{21}+1\cdot\frac{15}{28}+2\cdot\frac{3}{14}+3\cdot\frac{1}{84}=1$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{5}{21}+1^2\cdot\frac{15}{28}+2^2\cdot\frac{3}{14}+3^2\cdot\frac{1}{84}=\frac{3}{2}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ②

09 X가 가질 수 있는 값은 오른쪽 표에서 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

차	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

$P(X=0)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$,

$P(X=1)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$,

$P(X=2)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$,

$P(X=3)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

05 확률변수와 확률분포

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{4}$,

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{5}{2}-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

답 $E(X)=\frac{5}{4}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{15}}{4}$

10 한 장의 행운권으로 받을 수 있는 상금을 X원이라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10000	50000	100000	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	1

$$\therefore E(X)=0\cdot\frac{3}{5}+10000\cdot\frac{1}{4}+50000\cdot\frac{1}{10}+100000\cdot\frac{1}{20}=12500$$

따라서 구하는 기댓값은 12500원이다. 답 12500원

11 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 동전을 3번 던져서 받을 수 있는 금액은

HHH일 때, 300원

HHT, HTH, THH일 때, 200원

HTT, THT, TTH일 때, 100원

TTT일 때, 0원

한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200, 300이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{1}{8}$, $P(X=100)=\frac{3}{8}$,

$P(X=200)=\frac{3}{8}$, $P(X=300)=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	300	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{3}{8}+200\cdot\frac{3}{8}+300\cdot\frac{1}{8}=150$$

따라서 구하는 기댓값은 150원이다. 답 ③

12 전체 추첨권을 a장이라 하고 한 장의 추첨권으로 받을 수 있는 상금을 X원이라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10000	100000	1000000	합계
$P(X=x)$	$\frac{a-111}{a}$	$\frac{100}{a}$	$\frac{10}{a}$	$\frac{1}{a}$	1

베이직쎈 BOX

$P(X=0)=\frac{120}{200}=\frac{3}{5}$,

$P(X=10000)=\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$,

$P(X=50000)=\frac{20}{200}=\frac{1}{10}$,

$P(X=100000)=\frac{10}{200}=\frac{1}{20}$

$E(X)=6000$이므로

$$0\cdot\frac{a-111}{a}+10000\cdot\frac{100}{a}+100000\cdot\frac{10}{a}+1000000\cdot\frac{1}{a}=6000$$

$$\frac{3000000}{a}=6000 \qquad \therefore a=500$$

따라서 전체 추첨권은 500장이다. 답 ③

13 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$3=E(X^2)-7^2 \qquad \therefore E(X^2)=52$

$$\therefore E(2X^2-4)=2E(X^2)-4=2\cdot52-4=100$$

답 ④

14 $E(Y)=66$, 즉 $E(aX+b)=66$이므로

$aE(X)+b=66$

$\therefore 30a+b=66 \quad \cdots\cdots ㉠$

$V(Y)=60$, 즉 $V(aX+b)=60$이므로

$a^2V(X)=60, \qquad 15a^2=60$

$a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$60+b=66 \qquad \therefore b=6$ 답 $a=2$, $b=6$

15 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	1

(1) $E(X)=1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{7}{12}=\frac{5}{2}$이므로

$$E(8X+1)=8E(X)+1=8\cdot\frac{5}{2}+1=21$$

(2) $E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{12}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{7}{12}=\frac{20}{3}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{20}{3}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{12}$$

$$\therefore V(-6X+5)=(-6)^2V(X)=36\cdot\frac{5}{12}=15$$

답 (1) 21 (2) 15

16 확률의 총합은 1이므로

$k+k+2k+3k=1, \qquad 7k=1$

$\therefore k=\frac{1}{7}$

$E(X)=-1\cdot\frac{1}{7}+0\cdot\frac{1}{7}+1\cdot\frac{2}{7}+2\cdot\frac{3}{7}=1$,

$E(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{7}+0^2\cdot\frac{1}{7}+1^2\cdot\frac{2}{7}+2^2\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{7}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{15}{7}-1^2=\frac{8}{7}$$

$$\therefore V(7X+5)=7^2V(X)=49\cdot\frac{8}{7}=56$$

답 56

베이직쎈 BOX

17 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_3\cdot{}_2C_0}{{}_6C_3}=\frac{4\cdot1}{20}=\frac{1}{5},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{6\cdot2}{20}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{4\cdot1}{20}=\frac{1}{5}$$

볼펜이 2자루뿐이므로 3은 확률변수 X가 가질 수 없는 값이다.

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 $E(X)=0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{5}=1$이므로

$$E(4X-2)=4E(X)-2=4\cdot1-2=2$$ 답 ③

18 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 -1, 0, 1이고, 그 확률은 각각

$$P(X=-1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{2\cdot2}{10}=\frac{2}{5},$$

두 수의 곱이 -1인 경우는 $-1\cdot1=-1$

$$P(X=0)=\frac{{}_1C_1\cdot{}_4C_1}{{}_5C_2}=\frac{1\cdot4}{10}=\frac{2}{5},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

두 수의 곱이 1인 경우는 $-1\cdot(-1)=1$ 또는 $1\cdot1=1$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$E(X)=-1\cdot\frac{2}{5}+0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{1}{5}=-\frac{1}{5}$,

$E(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{2}{5}+0^2\cdot\frac{2}{5}+1^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{3}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{14}{25}}=\frac{\sqrt{14}}{5}$이므로

$$\sigma(-5X+1)=|-5|\sigma(X)=5\cdot\frac{\sqrt{14}}{5}=\sqrt{14}$$

답 ④

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 106쪽

01 전략 각 바늘이 가리킬 수 있는 두 값을 모두 찾아 그 합을 구한다.

풀이 X가 가질 수 있는 값은 오른쪽 표에서

2, 3, 4, 5, 6

따라서 X가 가질 수 있는 값의 개수는 5이다. 답 ③

합	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

02 전략 확률의 총합은 1임을 이용하여 a의 값을 구한 후 $X>1$을 만족시키는 X의 값은 2 또는 3임을 이용한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$a+3a+a+4a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{9}$

$\therefore P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ 답 ④

03 전략 확률의 총합은 1임을 이용한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$

$\frac{1+k}{8}+\frac{2+k}{8}+\frac{3-2k}{8}+\frac{4-2k}{8}=1$

$\frac{10-2k}{8}=1,\quad 5-k=4$

$\therefore k=1$ 답 ②

04 전략 $X^2-3X+2=0$을 만족시키는 X의 값을 찾아 그 값을 갖는 확률을 구한다.

X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

풀이 $X^2-3X+2=0$에서 $\quad(X-1)(X-2)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=2$

$P(X=1)=\frac{{}_5C_1\cdot{}_3C_2}{{}_8C_3}=\frac{5\cdot3}{56}=\frac{15}{56}$,

$P(X=2)=\frac{{}_5C_2\cdot{}_3C_1}{{}_8C_3}=\frac{10\cdot3}{56}=\frac{15}{28}$이므로

$P(X^2-3X+2=0)=P(X=1$ 또는 $X=2)$

$=P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{15}{56}+\frac{15}{28}$

$=\frac{45}{56}$ 답 ①

05 전략 확률밀도함수의 성질을 이용하여 먼저 k의 값을 구한다.

풀이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot(k+3k)\cdot1+\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot3k=1$

(사다리꼴의 넓이)+(삼각형의 넓이)

$2k+3k=1\quad\therefore k=\frac{1}{5}$

$\therefore P(0\le X\le1)=2k=2\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ 답 ③

위에서 구한 사다리꼴의 넓이와 같다.

06 전략 확률의 총합은 1임을 이용하여 k의 값을 먼저 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}=1,\quad\frac{6}{k}=1\quad\therefore k=6$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$,

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{2}=6$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=6-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

답 ③

07 전략 한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 구한 후 $E(X)$를 구한다.

(기댓값)$=E(X)$

풀이 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 한 번의 게임에서 나오는 각각의 경우와 그때의 받는 금액은 다음과 같다.

100원	500원	500원	받는 금액(원)
H	H	H	1100
H	H	T	600
H	T	H	600
H	T	T	100
T	H	H	1000
T	H	T	500
T	T	H	500
T	T	T	0

한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은

0, 100, 500, 600, 1000, 1100

이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{1}{8},\ P(X=100)=\frac{1}{8},$$
$$P(X=500)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},\ P(X=600)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},$$
$$P(X=1000)=\frac{1}{8},\ P(X=1100)=\frac{1}{8}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	500	600	1000	1100	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{8}+500\cdot\frac{1}{4}+600\cdot\frac{1}{4}$$
$$+1000\cdot\frac{1}{8}+1100\cdot\frac{1}{8}$$
$$=550$$

따라서 구하는 기댓값은 550원이다.

답 ⑤

08 전략 먼저 $E(X)$, $V(X)$를 구한 후 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$임을 이용하여 $E(X^2)$을 구한다.

풀이 $E(Y)=15$, 즉 $E(4X-1)=15$이므로

$$4E(X)-1=15 \qquad \therefore E(X)=4$$

$V(Y)=64$, 즉 $V(4X-1)=64$이므로

$$4^2V(X)=64 \qquad \therefore V(X)=4$$

따라서 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$4=E(X^2)-4^2 \qquad \therefore E(X^2)=20$$

답 ④

09 전략 확률변수 X의 확률분포를 파악하여 $V(X)$를 먼저 구한다.

베이직쎈 BOX

1부터 7까지의 자연수 중에서 짝수는 2, 4, 6의 3개이다.

풀이 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{1\cdot6}{21}=\frac{2}{7},$$
$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_4C_1}{{}_7C_2}=\frac{3\cdot4}{21}=\frac{4}{7},$$
$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_4C_0}{{}_7C_2}=\frac{3\cdot1}{21}=\frac{1}{7}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{2}{7}+1\cdot\frac{4}{7}+2\cdot\frac{1}{7}=\frac{6}{7},$$
$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{2}{7}+1^2\cdot\frac{4}{7}+2^2\cdot\frac{1}{7}=\frac{8}{7}\text{이므로}$$
$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{8}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$$
$$\therefore V(-7X+1)=(-7)^2V(X)$$
$$=49\cdot\frac{20}{49}=20$$

답 ①

10 전략 $X^2-X\le0$을 만족시키는 X의 값을 찾아 그 값을 갖는 확률을 구한다.

풀이 $X^2-X\le0$에서

$$X(X-1)\le0 \qquad \therefore 0\le X\le1$$

이때 X는 음이 아닌 정수이므로

사과는 2개뿐이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

$X=0$ 또는 $X=1$ ··· ❶

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\cdot{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{1\cdot4}{20}=\frac{1}{5},$$
$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{2\cdot6}{20}=\frac{3}{5}\text{이므로} \quad \cdots ❷$$
$$P(X^2-X\le0)=P(X=0 \text{ 또는 } X=1)$$
$$=P(X=0)+P(X=1)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{4}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	$X^2-X\le0$을 만족시키는 X의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	$P(X=0)$, $P(X=1)$을 구할 수 있다.	40 %
❸	$P(X^2-X\le0)$을 구할 수 있다.	30 %

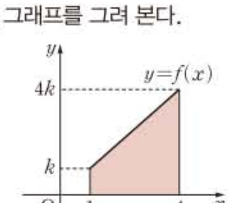
다른 풀이 $P(X=2)=\frac{{}_2C_2\cdot{}_4C_1}{{}_6C_3}=\frac{1\cdot4}{20}=\frac{1}{5}$이므로

$$P(X^2-X\le0)=P(X=0)+P(X=1)$$
$$=1-P(X=2)$$
$$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

$P(X=0)+P(X=1)$
$+P(X=2)$
$=1$
이므로
$P(X=0)+P(X=1)$
$=1-P(X=2)$

11 전략 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



베이직쎈 BOX

$\frac{1}{2}\cdot(k+4k)\cdot 3=1$

$\frac{15}{2}k=1 \qquad \therefore k=\frac{2}{15}$ 답 $\frac{2}{15}$

12 전략 확률의 총합은 1임을 이용하여 a에 대한 이차방정식을 세운다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$2a^2+2a+a^2=1, \qquad 3a^2+2a-1=0$

$(a+1)(3a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

이때 $2a\geq 0$에서 $a\geq 0$이므로

$a=\frac{1}{3}$ ➊

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\left\{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}+3\cdot\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=\frac{2}{9}+2+\frac{5}{9}=\frac{25}{9}$ ➋

답 $\frac{25}{9}$

0≤(확률)≤1이므로 $2a^2\geq 0,\ 2a\geq 0,\ a^2\geq 0$ 이때 a^2은 항상 0 이상이므로 $2a\geq 0$

단계	채점 기준	비율
➊	a의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋	X의 평균을 구할 수 있다.	50 %

13 전략 A와 B 사이에 설 수 있는 사람의 수는 0 또는 1 또는 2임을 이용한다.

풀이 X가 가질 수 있는 값은 $\quad 0,\ 1,\ 2$

(i) A와 B 사이에 아무도 서지 않는 경우

A, B를 한 사람으로 생각하면 3명이 일렬로 서는 경우의 수는 $\quad 3!=6$

A, B끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $\quad 2!=2$

따라서 A와 B 사이에 아무도 서지 않는 경우의 수는

$6\cdot 2=12$

A와 B가 이웃하여 서는 경우

(ii) A와 B 사이에 1명이 서는 경우

A와 B를 제외한 2명 중 A와 B 사이에 서는 1명을 택하는 경우의 수는 $\quad {}_2\mathrm{C}_1=2$

A, B와 그 사이에 서는 사람을 한 사람으로 생각하면 2명이 일렬로 서는 경우의 수는 $\quad 2!=2$

A, B끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $\quad 2!=2$

따라서 A와 B 사이에 1명이 서는 경우의 수는

$2\cdot 2\cdot 2=8$

(A ● B), ●

(iii) A와 B 사이에 2명이 서는 경우

A와 B를 제외한 2명이 A와 B 사이에 서는 경우의 수는 $\quad 2!=2$

A, B가 양 끝에서 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 A와 B 사이에 2명이 서는 경우의 수는

$2\cdot 2=4$

A와 B가 양 끝에 서는 경우

이상에서 전체 경우의 수는 $12+8+4=24$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{12}{24}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3},$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$

4명을 일렬로 세우는 경우의 수 $4!=24$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3},$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{6}=1$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$ 답 $\frac{5}{9}$

14 전략 확률의 총합은 1임과 주어진 $\mathrm{E}(X)$의 값을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+\frac{a}{9}+\frac{b}{9}=1 \qquad \therefore a+b=6$ ...... ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{3}$이므로

$-3\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{a}{9}+3\cdot\frac{b}{9}=\frac{1}{3}$

$\frac{b}{3}-1=\frac{1}{3} \qquad \therefore b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면

$a+4=6 \qquad \therefore a=2$ ➊

따라서 $\mathrm{E}(X^2)=(-3)^2\cdot\frac{1}{3}+0^2\cdot\frac{2}{9}+3^2\cdot\frac{4}{9}=7$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=7-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{62}{9}$ ➋

$\therefore \mathrm{V}(aX+b)=\mathrm{V}(2X+4)=2^2\mathrm{V}(X)$

$=4\cdot\frac{62}{9}=\frac{248}{9}$ ➌

답 $\frac{248}{9}$

단계	채점 기준	비율
➊	a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋	$\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	30 %
➌	$\mathrm{V}(aX+b)$를 구할 수 있다.	20 %

15 전략 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{E}(X)=m,\ \sigma(X)=\sigma$이므로

$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sigma}X-\frac{m}{\sigma}\right)$

$=\frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{m}{\sigma}$

$=\frac{m}{\sigma}-\frac{m}{\sigma}=0,$

$\frac{1}{\sigma}$, $\frac{m}{\sigma}$은 상수이다.

$\sigma(Z)=\sigma\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\sigma\left(\frac{1}{\sigma}X-\frac{m}{\sigma}\right)$

$=\left|\frac{1}{\sigma}\right|\sigma(X)$

$=\frac{1}{\sigma}\cdot\sigma=1$

$\sigma>0$이므로 $\frac{1}{\sigma}>0$

답 0, 1

05 확률변수와 확률분포

Ⅲ. 통계

06 이항분포와 정규분포

13 이항분포

개념 30 이항분포

본책 108쪽

01 한 명의 환자가 완치될 확률이 0.85이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(1000,\ 0.85)$를 따른다.

답 $\mathrm{B}(1000,\ 0.85)$

02 한 개의 동전을 던질 때, 뒷면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

답 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$

03 한 개의 주사위를 던질 때, 3 이상의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(14,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

답 $\mathrm{B}\left(14,\ \frac{2}{3}\right)$

3 이상의 눈이 나오는 경우는 3, 4, 5, 6의 4가지이므로 그 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

04 총을 한 번 쏠 때, 과녁을 명중시킬 확률이 $\frac{5}{8}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25,\ \frac{5}{8}\right)$를 따른다.

답 $\mathrm{B}\left(25,\ \frac{5}{8}\right)$

05 답 $\frac{8}{27}$ 　 $4,\ \frac{2}{3},\ 4,\ 4,\ \frac{2}{3},\ 2,\ \frac{8}{27}$

06 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_7\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{7-x}$$
$$={}_7\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^7\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$$
$$\therefore \mathrm{P}(X=2)={}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{21}{128}$$

답 $\frac{21}{128}$

베쎈 TIP

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 자연수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$　② $(a^x)^y=a^{xy}$

③ $a^x\div a^y=\begin{cases} a^{x-y} & (x>y) \\ 1 & (x=y) \\ \dfrac{1}{a^{y-x}} & (x<y)\end{cases}$

④ $(ab)^x=a^xb^x$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$

07 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$
$$\therefore \mathrm{P}(X=2)={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3$$
$$=10\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{64}=\frac{45}{512}$$

답 $\frac{45}{512}$

08 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x(0.6)^x(0.4)^{3-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$
$$\therefore \mathrm{P}(X=2)={}_3\mathrm{C}_2(0.6)^2(0.4)^1$$
$$=3\times0.36\times0.4=0.432$$

답 0.432

개념 31 이항분포에서의 평균, 분산, 표준편차

본책 109쪽

09 $\mathrm{E}(X)=18\cdot\frac{1}{3}=6$

$\mathrm{V}(X)=18\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=4$

$\sigma(X)=\sqrt{4}=2$

답 풀이 참조

10 $\mathrm{E}(X)=72\cdot\frac{1}{6}=12$

$\mathrm{V}(X)=72\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=10$

$\sigma(X)=\sqrt{10}$

답 풀이 참조

11 $\mathrm{E}(X)=64\cdot\frac{3}{4}=48$

$\mathrm{V}(X)=64\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=12$

$\sigma(X)=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

답 풀이 참조

12 $\mathrm{E}(X)=200\times0.8=160$

$\mathrm{V}(X)=200\times0.8\times0.2=32$

$\sigma(X)=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

답 풀이 참조

13 $\mathrm{E}(X)=8$에서 　 $32p=8$ 　 $\therefore p=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

14 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(32,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=32\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=6$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{6}$

답 $\sqrt{6}$

15 $\mathrm{V}(X)=20$에서

$n\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=20$ 　 $\therefore n=90$

답 90

16 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(90,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=90\cdot\frac{2}{3}=60$

답 60

17 $\mathrm{E}(X)=50\cdot\frac{2}{5}=20$이므로

$\mathrm{E}(3X+1)=3\mathrm{E}(X)+1=3\cdot20+1=61$

답 61

확률변수 X와 두 상수 a, b $(a\neq0)$에 대하여
① $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$
② $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$
③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

18 $\mathrm{V}(X)=50\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=12$이므로

$\mathrm{V}(2X-3)=2^2\mathrm{V}(X)=4\cdot12=48$

답 48

19 $\sigma(X)=\sqrt{50\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}}=2\sqrt{3}$이므로

$\sigma(-4X+5)=|-4|\sigma(X)=4\cdot2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

답 $8\sqrt{3}$

베이직쎈 BOX

20 답 60 　 0.6, 0.6, 0.6, 60

21 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.6)$을 따르므로
$\mathrm{V}(X)=100\times0.6\times0.4=24$ 　 답 24

22 한 번의 타석에서 안타를 칠 확률이 0.2이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(4,\ 0.2)$를 따른다.
$\therefore \mathrm{E}(X)=4\times0.2=0.8$ 　 답 0.8

23 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(4,\ 0.2)$를 따르므로
$\sigma(X)=\sqrt{4\times0.2\times0.8}=0.8$ 　 답 0.8

24 한 개의 동전을 던질 때, 뒷면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.
$\therefore \mathrm{E}(X)=200\cdot\frac{1}{2}=100$ 　 답 100

25 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로
$\mathrm{V}(X)=200\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=50$ 　 답 50

26 한 개의 주사위를 던질 때, 5의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(60,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.
$\therefore \mathrm{E}(X)=60\cdot\frac{1}{3}=20$ 　 답 20

5의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 5의 2가지이므로 그 확률은
$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

27 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(60,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로
$\sigma(X)=\sqrt{60\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{2\sqrt{30}}{3}$ 　 답 $\frac{2\sqrt{30}}{3}$

28 시행 횟수 n이 충분히 클 때, 상대도수 $\frac{X}{n}$는 수학적 확률에 가까워진다.
즉 p는 한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 수학적 확률이므로
$p=\frac{1}{2}$ 　 답 $\frac{1}{2}$

29 시행 횟수 n이 충분히 클 때, 상대도수 $\frac{X}{n}$는 수학적 확률에 가까워진다.
즉 p는 한 개의 주사위를 던질 때, 4 이하의 눈이 나올 수학적 확률이므로
$p=\frac{2}{3}$ 　 답 $\frac{2}{3}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 111쪽

01 한 개의 제품을 택할 때, 불량품을 택할 확률이 0.05이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(80,\ 0.05)$를 따른다. 　 답 ①

02 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 두 눈의 수의 곱이 홀수가 될 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.
따라서 $n=100$, $p=\frac{1}{4}$이므로 　 $np=25$ 　 답 25

두 수의 곱이 홀수가 되는 경우는
(홀수)×(홀수)
이므로 그 확률은
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

03 ㄱ. 한 개의 주사위를 던질 때, 4의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.
ㄴ. 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때, 모두 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.
ㄷ. 이벤트에 한 번 응모할 때 당첨될 확률이 $\frac{3}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \frac{3}{5}\right)$을 따른다.
이상에서 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 것은 ㄱ뿐이다.
답 ①

60 % ➡ $\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

04 확률변수 X의 확률질량함수가
$$\mathrm{P}(X=x)={}_{90}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{8}\right)^x\left(\frac{7}{8}\right)^{90-x}$$
$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 90)$
이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(90,\ \frac{1}{8}\right)$을 따른다.
$\therefore n=90,\ p=\frac{1}{8}$ 　 답 $n=90,\ p=\frac{1}{8}$

05 확률변수 X의 확률질량함수가
$$\mathrm{P}(X=x)={}_{24}\mathrm{C}_x\frac{3^x}{4^{24}}={}_{24}\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{24-x}$$
$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 24)$
이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(24,\ \frac{3}{4}\right)$을 따른다.
따라서 $n=24$, $p=\frac{3}{4}$이므로
$n(1-p)=24\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)=6$ 　 답 ①

$\frac{3^x}{4^{24}}=\frac{3^x}{4^x}\cdot\frac{1}{4^{24-x}}=\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{24-x}$

06 한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X의 확률질량함수는
$$\mathrm{P}(X=x)={}_{8}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{8-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$$
이고, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(8,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.
$\therefore a=\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3},\ n=8$ 　 답 ④

07 확률변수 X의 확률질량함수는
$$\mathrm{P}(X=x)={}_{5}\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{5-x}$$
$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

이므로

$P(X=3)={}_5C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$=10\cdot\frac{8}{125}\cdot\frac{9}{25}=\frac{144}{625}$ 답 ③

08 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

이므로

$P(X\le1)=P(X=0)+P(X=1)$

$={}_4C_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4+{}_4C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3$

$=\frac{81}{256}+\frac{27}{64}=\frac{189}{256}$ 답 $\frac{189}{256}$

09 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_6C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{6-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

이때 $P(X=1)=kP(X=2)$이므로

${}_6C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^5=k\cdot{}_6C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4$

$12=60k\qquad\therefore\ k=\frac{1}{5}$ 답 ③

10 한 개의 문항에 임의로 답할 때, 맞힐 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}$

$={}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$

이므로

$P(X=9)={}_{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{5}{512}$ 답 $\frac{5}{512}$

11 명중시키는 횟수를 X라 하면 한 번의 사격에서 명중시킬 확률이 $\frac{4}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

이므로 구하는 확률은

$P(X\ge3)=P(X=3)+P(X=4)$

$={}_4C_3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^0$

$=\left(\frac{4}{5}\right)^4+\left(\frac{4}{5}\right)^4=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4$ 답 ④

12 득점에 성공하는 횟수를 X라 하면 한 번의 서브에서 득점에 성공할 확률이 $\frac{3}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5,\ \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

베이직쎈 BOX

적어도 2번 득점에 성공할 확률
➡ 2번 이상 득점에 성공할 확률

$a\ne0$일 때
$a^0=1$

$V(X)=\{\sigma(X)\}^2$
$=5^2=25$

양변에 $\frac{1}{3^6}$이 공통으로 있으므로 3^6을 곱하여 약분한 후 계산하면 편리하다.

확률이 80 %이므로 0.8로 계산할 수도 있지만 보기가 분수 꼴로 주어졌으므로 $\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$임을 이용한다.

75 % ➡ $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$

이므로 구하는 확률은

$P(X\ge2)=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$

$=1-\left\{{}_5C_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^5+{}_5C_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^4\right\}$

$=1-\left(\frac{1}{1024}+\frac{15}{1024}\right)$

$=\frac{63}{64}$ 답 ⑤

13 $V(X)=32$에서

$n\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=32\qquad\therefore\ n=200$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(200,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=200\cdot\frac{1}{5}=40$ 답 ④

14 $E(X)=150$에서

$np=150$ ······ ㉠

$\sigma(X)=5$에서 $V(X)=25$이므로

$np(1-p)=25,\qquad 150(1-p)=25$ ($\because$ ㉠)

$1-p=\frac{1}{6}\qquad\therefore\ p=\frac{5}{6}$

$p=\frac{5}{6}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{5}{6}n=150\qquad\therefore\ n=180$

$\therefore\ n+12p=180+12\cdot\frac{5}{6}=190$ 답 190

15 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_3C_xp^x(1-p)^{3-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이때 $P(X=0)=\frac{1}{27}$이므로

${}_3C_0p^0(1-p)^3=\frac{1}{27},\qquad (1-p)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$1-p=\frac{1}{3}\qquad\therefore\ p=\frac{2}{3}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(3,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$E(X)=3\cdot\frac{2}{3}=2$ 답 2

16 $E(X)=20$에서

$100p=20\qquad\therefore\ p=\frac{1}{5}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$V(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$16=E(X^2)-20^2$

$\therefore\ E(X^2)=416$ 답 ④

17 확률변수 X는 이항분포 $B(500,\ 0.02)$를 따르므로

$E(X)=500\times0.02=10$ 답 ⑤

18 관람객이 20대일 확률이 $\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$이므로 확률변수 X_1은 이항분포 $B\left(400,\ \frac{7}{20}\right)$을 따른다.

베이직쎈 BOX

$\therefore \mathrm{E}(X_1)=400\cdot\frac{7}{20}=140$

관람객이 40대일 확률이 $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X_2는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore \sigma(X_2)=\sqrt{400\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}=5\sqrt{3}$

답 $\mathrm{E}(X_1)=140$, $\sigma(X_2)=5\sqrt{3}$

19 한 개의 주사위를 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(90, \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=90\cdot\frac{2}{3}=60$, $\mathrm{V}(X)=90\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=20$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$20=\mathrm{E}(X^2)-60^2$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=3620$ 답 3620

20 초록색 공을 꺼낸 횟수를 X라 하면 한 번의 시행에서 초록색 공을 꺼낼 확률이 $\frac{x}{20}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{x}{20}\right)$를 따른다.

공을 꺼내 색을 확인하고 다시 넣으므로 확률은 변하지 않는다.

$\mathrm{E}(X)=3$에서

$10\cdot\frac{x}{20}=3 \qquad \therefore x=6$ 답 ④

21 $\mathrm{E}(X)=6\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$, $\mathrm{V}(X)=6\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{8}$이므로

$\mathrm{E}(4X-2)=4\mathrm{E}(X)-2$

$=4\cdot\frac{9}{2}-2=16$,

$\mathrm{V}(4X-2)=4^2\mathrm{V}(X)$

$=16\cdot\frac{9}{8}=18$ 답 ④

22 $\mathrm{V}(-2X)=16$에서

$(-2)^2\mathrm{V}(X)=16 \qquad \therefore \mathrm{V}(X)=4$

이때 $\mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}n$이므로

$\frac{2}{9}n=4 \qquad \therefore n=18$ 답 18

23 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(300, \frac{1}{20}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=300\cdot\frac{1}{20}=15$

$\therefore \mathrm{E}\left(\frac{1}{5}X+3\right)=\frac{1}{5}\mathrm{E}(X)+3$

$=\frac{1}{5}\cdot15+3=6$ 답 6

24 서로 다른 4개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면이 3개 나올 확률이

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

1개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(64, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{64\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}=2\sqrt{3}$이므로

$\sigma(-3X+5)=|-3|\sigma(X)=3\cdot2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

답 ③

25 (1) 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_6\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{6-x}$

$(x=0, 1, 2, \cdots, 6)$

이때 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=3)$이므로

${}_6\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^4=\frac{1}{2}\cdot{}_6\mathrm{C}_3 p^3(1-p)^3$

$15(1-p)=\frac{1}{2}\cdot20p, \qquad 25p=15$

$\therefore p=\frac{3}{5}$

(2) 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(6, \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=6\cdot\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$

$\therefore \mathrm{E}(5X+2)=5\mathrm{E}(X)+2=5\cdot\frac{18}{5}+2=20$

답 (1) $\frac{3}{5}$ (2) 20

14 정규분포

개념 32 정규분포

본책 115쪽

01 답 $\mathrm{N}(24, 3^2)$

02 답 $\mathrm{N}(-5, 2^2)$

03 답 $\mathrm{N}(6, 1^2)$

$\mathrm{V}(X)=1$이므로 $\sigma(X)=1$

04 답 $\mathrm{N}(-2, 2^2)$

$\mathrm{V}(X)=4$이므로 $\sigma(X)=\sqrt{4}=2$

05 $\mathrm{E}(X)=5$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1$

$=2\cdot5+1=11$ 답 11

06 $\sigma(X)=2$이므로

$\sigma(Y)=\sigma(2X+1)=|2|\sigma(X)=2\cdot2=4$

답 4

07 $\mathrm{E}(X)=32$, $\sigma(X)=5$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X)=3\mathrm{E}(X)=3\cdot32=96$,

$\sigma(Y)=\sigma(3X)=|3|\sigma(X)=3\cdot5=15$

답 $\mathrm{E}(Y)=96$, $\sigma(Y)=15$

08 $\mathrm{E}(X)=10$, $\sigma(X)=3$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(-X+2)=-\mathrm{E}(X)+2$

$=-10+2=-8$,

$\sigma(Y)=\sigma(-X+2)=|-1|\sigma(X)=1\cdot3=3$

답 $\mathrm{E}(Y)=-8$, $\sigma(Y)=3$

개념 33 정규분포곡선의 성질

본책 116쪽

09 답 왼쪽, <

10 답 낮고, >

베이직쎈 BOX

- 평균의 대소
  ➡ 대칭축의 위치로 판단한다.
- 표준편차의 대소
  ➡ 곡선의 가운데 부분의 높이와 옆으로 퍼진 모양으로 판단한다.

11 곡선 A의 대칭축이 곡선 B의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로 $m_A<m_B$ 답 <

12 두 곡선 B, C의 대칭축이 같으므로

$m_B=m_C$ 답 =

13 두 곡선 A, B의 모양이 같으므로

$\sigma_A=\sigma_B$ 답 =

14 곡선 C가 곡선 A보다 가운데 부분의 높이는 낮고 옆으로 퍼진 모양이므로

$\sigma_A<\sigma_C$ 답 <

- $\sigma_A<\sigma_C$이므로 σ_A인 경우가 σ_C인 경우보다
  ➡ 자료가 평균 주위에 많이 몰려 있다.
  ➡ 자료가 고르게 분포되어 있다.

개념 34 정규분포곡선에서의 확률

본책 117쪽

15 답 8 대칭, 8

16 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, $\mathrm{P}(X\le7)=\mathrm{P}(X\ge13)$이므로

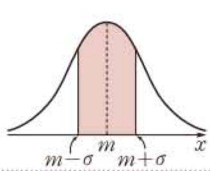
$m=\dfrac{7+13}{2}=10$ 답 10

17 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, $\mathrm{P}(X\le12)=\mathrm{P}(X\ge18)$이므로

$m=\dfrac{12+18}{2}=15$ 답 15

18 답 a $m,\ \sigma,\ a$

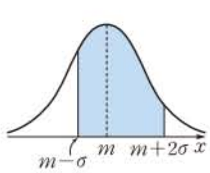
19 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로



$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)$
$\quad+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=2a$ 답 $2a$

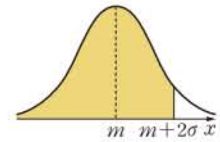
- $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)$
  $=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

20 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로



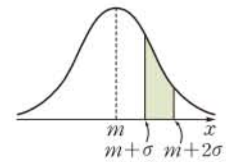
$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)$
$\quad+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$=a+b$ 답 $a+b$

21 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로



$\mathrm{P}(X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(X\le m)$
$\quad+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$=0.5+b$ 답 $0.5+b$

22 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로



$\mathrm{P}(m+\sigma\le X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$\quad-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=b-a$ 답 $b-a$

23 $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=0.68$에서

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.68$
$2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.68$
$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.34$ 답 0.34

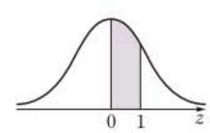
24 $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=0.68$에서

$\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.34$
$\therefore \mathrm{P}(X\ge m+\sigma)$
$\quad=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$\quad=0.5-0.34=0.16$ 답 0.16

개념 35 표준정규분포

본책 118쪽

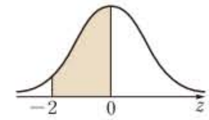
25 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)$을 확률변수 Z의 정규분포곡선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\mathrm{P}(0\le Z\le1)=\boxed{0.3413}$

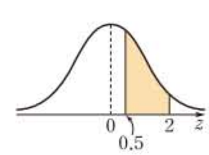
답 풀이 참조

26 $\mathrm{P}(-2\le Z\le0)$을 확률변수 Z의 정규분포곡선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



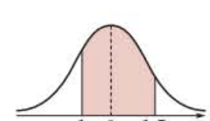
$\mathrm{P}(-2\le Z\le0)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le\boxed{2})=\boxed{0.4772}$ 답 풀이 참조

27 $\mathrm{P}(0.5\le Z\le2)$를 확률변수 Z의 정규분포곡선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



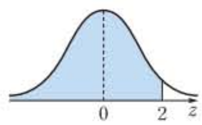
$\mathrm{P}(0.5\le Z\le2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le\boxed{0.5})$
$=\boxed{0.4772}-\boxed{0.1915}$
$=\boxed{0.2857}$ 답 풀이 참조

28 $\mathrm{P}(-1\le Z\le1.5)$를 확률변수 Z의 정규분포곡선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\mathrm{P}(-1\le Z\le 1.5)$
$=\mathrm{P}(\boxed{-1}\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le \boxed{1.5})$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=\boxed{0.3413}+0.4332$
$=\boxed{0.7745}$ 답 풀이 참조

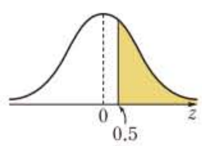
29 $\mathrm{P}(Z\le 2)$를 확률변수 Z의 정규분포곡선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\mathrm{P}(Z\le 2)$
$=\underline{\mathrm{P}(Z\le \boxed{0})}+\mathrm{P}(0\le Z\le \boxed{2})$
$=\boxed{0.5}+0.4772$
$=\boxed{0.9772}$ 답 풀이 참조

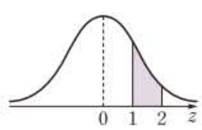
확률변수 Z의 정규분포곡선은 직선 $z=0$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(Z\ge 0)=\mathrm{P}(Z\le 0)$
$=0.5$

30 $\mathrm{P}(Z\ge 0.5)$를 확률변수 Z의 정규분포곡선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\mathrm{P}(Z\ge 0.5)$
$=\mathrm{P}(Z\ge \boxed{0})-\mathrm{P}(0\le Z\le \boxed{0.5})$
$=\boxed{0.5}-\boxed{0.1915}$
$=\boxed{0.3085}$ 답 풀이 참조

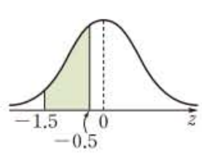
31 $\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$



$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.4772-0.3413$
$=0.1359$

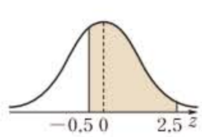
답 0.1359

32 $\mathrm{P}(-1.5\le Z\le -0.5)$



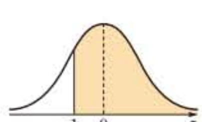
$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)$
$\quad-\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$\quad-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=0.4332-0.1915$
$=0.2417$ 답 0.2417

33 $\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 2.5)$



$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)$
$\quad+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$\quad+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$
$=0.1915+0.4938$
$=0.6853$ 답 0.6853

34 $\mathrm{P}(Z\ge -1)$



$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+0.5$
$=0.3413+0.5=0.8413$

답 0.8413

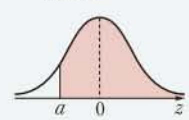
35 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로
$a=1.5$ 답 1.5

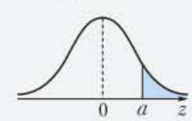
36 $\mathrm{P}(a\le Z\le 0)=0.3413$에서
$\mathrm{P}(0\le Z\le -a)=0.3413$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로
$-a=1 \quad \therefore a=-1$ 답 -1

37 $\mathrm{P}(-a\le Z\le a)=0.9544$에서
$\mathrm{P}(-a\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.9544$
$2\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.9544$
$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.4772$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로
$a=2$ 답 2

38 $\mathrm{P}(Z\ge a)=0.9332$에서
$\mathrm{P}(a\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.9332$
$\mathrm{P}(0\le Z\le -a)+0.5=0.9332$
$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le -a)=0.4332$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로
$-a=1.5 \quad \therefore a=-1.5$ 답 -1.5

베쎈 TIP
$\mathrm{P}(Z\ge 0)=\mathrm{P}(Z\le 0)=0.5$이므로 $\mathrm{P}(Z\ge a)$ 또는 $\mathrm{P}(Z\le a)$가 0.5보다 큰지 작은지에 따라 다음과 같이 a의 부호를 결정한다.
① $\mathrm{P}(Z\ge a)>0.5$이면 $a<0$
② $\mathrm{P}(Z\ge a)<0.5$이면 $a>0$





$\mathrm{P}(Z\le a)=0.9938$
>0.5
이므로 $a>0$

39 $\underline{\mathrm{P}(Z\le a)=0.9938}$에서
$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.9938$
$0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.9938$
$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.4938$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로
$a=2.5$ 답 2.5

$\mathrm{P}(Z\ge 2a)=0.0228$
<0.5
이므로 $2a>0$

40 $\underline{\mathrm{P}(Z\ge 2a)=0.0228}$에서
$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2a)=0.0228$
$0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2a)=0.0228$
$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le 2a)=0.4772$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로
$2a=2 \quad \therefore a=1$ 답 1

개념 36 정규분포의 표준화

본책 120쪽

41 답 5, 2

42 답 $Z=\dfrac{X-12}{5}$

$\sigma^2=9$이므로
$\sigma=3\ (\because \sigma>0)$

43 답 $Z=\dfrac{X+42}{3}$

베이직쎈 BOX

44 $Z=\dfrac{X-10}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(10\le X\le 14)=\mathrm{P}\left(\frac{10-10}{2}\le Z\le \frac{14-10}{2}\right)=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$

$\therefore\ a=0,\ b=2$ 　　 답 $a=0,\ b=2$

45 $Z=\dfrac{X-40}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(37\le X\le 49)=\mathrm{P}\left(\frac{37-40}{3}\le Z\le \frac{49-40}{3}\right)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 3)$$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$ 　　 답 $a=-1,\ b=3$

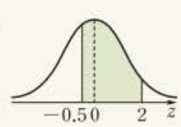
46 답 0.3413

20, 2, 20, 2, 20, 2, 0, 1, 0.3413

47 $Z=\dfrac{X-20}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(19\le X\le 24)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{19-20}{2}\le Z\le \frac{24-20}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.1915+0.4772=0.6687\end{aligned}$$

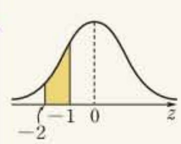
답 0.6687



48 $Z=\dfrac{X-20}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(16\le X\le 18)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{16-20}{2}\le Z\le \frac{18-20}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)-\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413=0.1359\end{aligned}$$

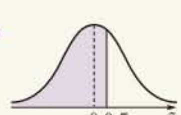
답 0.1359



49 $Z=\dfrac{X-20}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 21)&=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{21-20}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5+0.1915=0.6915\end{aligned}$$

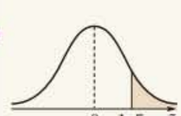
답 0.6915



50 $Z=\dfrac{X-20}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 23)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{23-20}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

답 0.0668



자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 121쪽

01 두 곡선 A, B의 대칭축이 같으므로

$m_{\mathrm{A}}=m_{\mathrm{B}}$

곡선 B가 곡선 A보다 가운데 부분의 높이는 낮고 옆으로 퍼진 모양이므로

$\sigma_{\mathrm{A}}<\sigma_{\mathrm{B}}$ 　　 답 ②

02 ㄴ. σ의 값이 일정할 때, m의 값이 작을수록 그래프의 대칭축은 왼쪽에 있다.

ㄹ. σ의 값이 클수록 그래프의 폭은 넓어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 　　 답 ②

03 ㄱ. 두 확률변수 X_{A}, X_{B}의 평균이 각각 m_{A}, m_{B}이므로

$\mathrm{P}(X_{\mathrm{A}}\ge m_{\mathrm{A}})=\mathrm{P}(X_{\mathrm{B}}\ge m_{\mathrm{B}})=0.5$

ㄴ. 곡선 A의 대칭축이 곡선 B의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로 　 $m_{\mathrm{A}}<m_{\mathrm{B}}$

즉 A 고등학교 학생들의 영어 점수의 평균이 B 고등학교 학생들의 영어 점수의 평균보다 낮다.

ㄷ. 곡선 B가 곡선 A보다 가운데 부분의 높이는 낮고 옆으로 퍼진 모양이므로 　 $\sigma_{\mathrm{A}}<\sigma_{\mathrm{B}}$

즉 A 고등학교 학생들의 영어 점수가 B 고등학교 학생들의 영어 점수보다 더 고르다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 　　 답 ㄱ

04 $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=0.6826$에서

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.6826$

$2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.6826$

$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.3413$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\le m+\sigma)&=\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

답 0.8413

05 $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=a$에서

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=a$

$2\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=a$

$\therefore\ \mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=\dfrac{a}{2}$

$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=b$에서

$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=b$

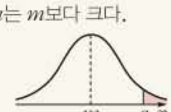
$2\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=b$

$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=\dfrac{b}{2}$

$$\begin{aligned}&\therefore\ \mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)\\&=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)\\&=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

답 ①

$\mathrm{P}(X\ge a)=0.0228<0.5$이므로 다음 그림과 같이 a는 m보다 크다.



06 $\mathrm{P}(X\ge a)=0.0228$에서

$\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le a)=0.0228$

$0.5-\mathrm{P}(m\le X\le a)=0.0228$

$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le a)=0.4772$

베이직쎈 BOX

이때 $P(m\le X\le m+2\sigma)=0.4772$이므로

$a=m+2\sigma=32+2\cdot3=38$ 답 ④

확률변수 X가 정규분포 $N(32,\ 3^2)$을 따르므로 $m=32,\ \sigma=3$

07 $P(|Z|\le1.5)=P(-1.5\le Z\le1.5)$

$=P(-1.5\le Z\le0)+P(0\le Z\le1.5)$

$=2P(0\le Z\le1.5)$

$=2\times0.4332=0.8664$ 답 ③

08 $P(Z\le a)=0.9938$에서

$P(Z\le0)+P(0\le Z\le a)=0.9938$

$0.5+P(0\le Z\le a)=0.9938$

$\therefore P(0\le Z\le a)=0.4938$

이때 $P(0\le Z\le2.5)=0.4938$이므로

$a=2.5$ 답 2.5

09 $P(Z\ge a)=0.1841$에서

$P(Z\ge0)-P(0\le Z\le a)=0.1841$

$0.5-P(0\le Z\le a)=0.1841$

$\therefore P(0\le Z\le a)=0.3159$

이때 $P(0\le Z\le0.9)=0.3159$이므로

$a=0.9$

$P(a\le Z\le b)=0.1033$에서 $P(0.9\le Z\le b)=0.1033$

$P(0\le Z\le b)-P(0\le Z\le0.9)=0.1033$

$P(0\le Z\le b)-0.3159=0.1033$

$\therefore P(0\le Z\le b)=0.4192$

이때 $P(0\le Z\le1.4)=0.4192$이므로

$b=1.4$

$\therefore a+b=0.9+1.4=2.3$ 답 2.3

$\underbrace{P(Z\ge a)=0.1841}_{<0.5}$ 이므로 $a>0$

$a>0$이므로 $b>0$

10 확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-m}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $\dfrac{X-m}{4}=\dfrac{X-15}{\sigma}$이므로

$m=15,\ \sigma=4$

$\therefore m+\sigma=19$ 답 ④

11 확률변수 X가 정규분포 $N(45,\ 5^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-45}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(45\le X\le k)=P(0\le Y\le2)$에서

$P\left(\dfrac{45-45}{5}\le Z\le\dfrac{k-45}{5}\right)=P(0\le Y\le2)$

$\therefore P\left(0\le Z\le\dfrac{k-45}{5}\right)=P(0\le Y\le2)$

따라서 $\dfrac{k-45}{5}=2$이므로

$k-45=10 \qquad \therefore k=55$ 답 ②

두 확률변수 $Y,\ Z$가 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $\dfrac{k-45}{5}=2$

12 두 확률변수 $X,\ Y$가 각각 정규분포 $N(9,\ 2^2)$, $N(12,\ 3^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-9}{2},\ Z_Y=\dfrac{Y-12}{3}$

로 놓으면 두 확률변수 $Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. 이때

$P(X\le3)=P\left(Z_X\le\dfrac{3-9}{2}\right)$

$=P(Z_X\le-3)=P(Z_X\ge3)$

이므로 $P(X\le3)=P(Y\ge k)$에서

$P(Z_X\ge3)=P\left(Z_Y\ge\dfrac{k-12}{3}\right)$

따라서 $3=\dfrac{k-12}{3}$이므로

$k-12=9 \qquad \therefore k=21$ 답 21

13 확률변수 X가 정규분포 $N(22,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-22}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

① $P(22\le X\le30)=P\left(\dfrac{22-22}{4}\le Z\le\dfrac{30-22}{4}\right)$

$=P(0\le Z\le2)$

$=0.4772$

② $P(14\le X\le22)=P\left(\dfrac{14-22}{4}\le Z\le\dfrac{22-22}{4}\right)$

$=P(-2\le Z\le0)=P(0\le Z\le2)$

$=0.4772$

③ $P(X\le30)=P\left(Z\le\dfrac{30-22}{4}\right)=P(Z\le2)$

$=P(Z\le0)+P(0\le Z\le2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

④ $P(X\le14)=P\left(Z\le\dfrac{14-22}{4}\right)=P(Z\le-2)$

$=P(Z\le0)-P(-2\le Z\le0)$

$=0.5-P(0\le Z\le2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

⑤ $P(X\ge14)=P\left(Z\ge\dfrac{14-22}{4}\right)=P(Z\ge-2)$

$=P(-2\le Z\le0)+P(Z\ge0)$

$=P(0\le Z\le2)+0.5$

$=0.4772+0.5=0.9772$ 답 ⑤

14 확률변수 X가 정규분포 $N(35,\ 2^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-35}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(X\le33)+P(36\le X\le38)$

$=P\left(Z\le\dfrac{33-35}{2}\right)+P\left(\dfrac{36-35}{2}\le Z\le\dfrac{38-35}{2}\right)$

$=P(Z\le-1)+P(0.5\le Z\le1.5)$

$=\{P(Z\le0)-P(-1\le Z\le0)\}$

$\quad+\{P(0\le Z\le1.5)-P(0\le Z\le0.5)\}$

$=(0.5-0.3413)+(0.4332-0.1915)$

$=0.1587+0.2417=0.4004$ 답 0.4004

$P(-1\le Z\le0)$
$=P(0\le Z\le1)$
$=0.3413$

15 확률변수 X가 정규분포 $N(16,\ 3^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-16}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\geq 16+k)=0.0062$에서

$P\left(Z\geq \frac{16+k-16}{3}\right)=0.0062$

$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq \frac{k}{3}\right)=0.0062$

$0.5-P\left(0\leq Z\leq \frac{k}{3}\right)=0.0062$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq \frac{k}{3}\right)=0.4938$

이때 $P(0\leq Z\leq 2.5)=0.4938$이므로

$\frac{k}{3}=2.5 \quad \therefore k=7.5$ 답 ②

16 음료 한 잔의 양을 X mL라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(250,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-250}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\leq 241)&=P\left(Z\leq \frac{241-250}{3}\right)\\&=P(Z\leq -3)\\&=P(Z\leq 0)-P(-3\leq Z\leq 0)\\&=0.5-P(0\leq Z\leq 3)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$

답 0.0013

17 사탕 한 봉지에 들어 있는 사탕의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(58,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-58}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(52\leq X\leq 67)$

$=P\left(\frac{52-58}{6}\leq Z\leq \frac{67-58}{6}\right)$

$=P(-1\leq Z\leq 1.5)$

$=P(-1\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1.5)$

$=P(0\leq Z\leq 1)+P(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.34+0.43$

$=0.77$

사탕 한 봉지에 들어 있는 사탕의 개수가 52 이상 67 이하일 확률

따라서 사탕의 개수가 52 이상 67 이하인 봉지는 전체의 77 %이다. 답 ④

18 노트북 한 대의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(990,\ 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-990}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$P(X\leq 960)+P(X\geq 1030)$

(노트북 한 대가 불량품일 확률)
=(노트북 한 대의 무게가 960 g 이하일 확률)
+(노트북 한 대의 무게가 1030 g 이상일 확률)

$=P\left(Z\leq \frac{960-990}{20}\right)+P\left(Z\geq \frac{1030-990}{20}\right)$

$=P(Z\leq -1.5)+P(Z\geq 2)$

$=\{P(Z\leq 0)-P(-1.5\leq Z\leq 0)\}$
$\quad+\{P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2)\}$

$P(-1.5\leq Z\leq 0)$
$=P(0\leq Z\leq 1.5)$
$=0.43$

$=(0.5-0.43)+(0.5-0.48)$

$=0.07+0.02$

$=0.09$ 답 0.09

19 달걀 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(52,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-52}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(46\leq X\leq 55)$

100개의 달걀 중 한 개를 택할 때, 택한 달걀의 무게가 46 g 이상 55 g 이하일 확률

$=P\left(\frac{46-52}{3}\leq Z\leq \frac{55-52}{3}\right)$

$=P(-2\leq Z\leq 1)$

$=P(-2\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1)$

$=P(0\leq Z\leq 2)+P(0\leq Z\leq 1)$

$=0.48+0.34=0.82$

따라서 무게가 46 g 이상 55 g 이하인 달걀의 개수는

$0.82\times 100=82$ 답 ③

20 휴대 전화 음성 통화량을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(127,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-127}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(X\geq 120)=P\left(Z\geq \frac{120-127}{10}\right)$

1000명의 학생 중 한 명을 택할 때, 택한 학생의 휴대 전화 음성 통화량이 2시간, 즉 120분 이상일 확률

$=P(Z\geq -0.7)$

$=P(-0.7\leq Z\leq 0)+P(Z\geq 0)$

$=P(0\leq Z\leq 0.7)+P(Z\geq 0)$

$=0.258+0.5=0.758$

따라서 휴대 전화 음성 통화량이 2시간 이상인 학생 수는

$0.758\times 1000=758$ 답 ④

21 양초 한 개의 길이를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(25,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-25}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X\leq 23)&=P\left(Z\leq \frac{23-25}{2}\right)\\&=P(Z\leq -1)\\&=P(Z\leq 0)-P(-1\leq Z\leq 0)\\&=0.5-P(0\leq Z\leq 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

따라서 불량품으로 판정받는 양초의 개수는

$0.16\times 200=32$ 답 32

22 수학 시험 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(75,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-75}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
상위 10 %에 속하는 학생의 최저 점수를 a점이라 하면

$P(X\geq a)=0.1$

$P\left(Z\geq \frac{a-75}{10}\right)=0.1$

$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq \frac{a-75}{10}\right)=0.1$

$0.5-P\left(0\leq Z\leq \frac{a-75}{10}\right)=0.1$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{a-75}{10}\right)=0.4$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.3)=0.4$이므로

$\dfrac{a-75}{10}=1.3 \qquad \therefore a=88$

따라서 상위 10 %에 속하는 학생의 최저 점수는 88점이다. 답 ③

23 (1) 응시한 150명 중 합격자는 30명이므로

$\mathrm{P}(X\ge a)=\dfrac{30}{150}=0.2$

(2) 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(86,\ 8^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-86}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge a)=0.2$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{a-86}{8}\right)=0.2$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{a-86}{8}\right)=0.2$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{a-86}{8}\right)=0.2$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{a-86}{8}\right)=0.3$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.84)=0.3$이므로

$\dfrac{a-86}{8}=0.84 \qquad \therefore a=92.72$

답 (1) 0.2 (2) 92.72

24 하프 마라톤 완주 기록을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(136,\ 25^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-136}{25}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

예선을 통과한 선수들의 완주 기록 중 가장 긴 시간을 a분이라 하면

$\mathrm{P}(X\le a)=0.25$

$\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{a-136}{25}\right)=0.25$

$\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}\left(\dfrac{a-136}{25}\le Z\le 0\right)=0.25$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{136-a}{25}\right)=0.25$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{136-a}{25}\right)=0.25$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.68)=0.25$이므로

$\dfrac{136-a}{25}=0.68 \qquad \therefore a=119$

따라서 예선을 통과한 선수들의 완주 기록 중 가장 긴 시간은 119분이다. 답 119분

베젠 TIP

시험 점수와 다르게 달리기 기록, 수영 기록 등은 숫자가 작을수록 상위 기록에 해당한다.
따라서 문제의 상황에 맞게 부등식을 세우는 것이 중요하다.

베이직쎈 BOX

800명 중 200명이 예선을 통과할 수 있으므로 예선을 통과할 확률은 $\dfrac{200}{800}=0.25$

한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률

15 이항분포와 정규분포의 관계

개념 37 이항분포와 정규분포의 관계

본책 125쪽

01 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=48\cdot\dfrac{1}{4}=12,\ \mathrm{V}(X)=48\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=9$

이때 48은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 3^2)$을 따른다. 답 $\mathrm{N}(12,\ 3^2)$

02 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(162,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=162\cdot\dfrac{1}{3}=54,\ \mathrm{V}(X)=162\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=36$

이때 162는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(54,\ 6^2)$을 따른다. 답 $\mathrm{N}(54,\ 6^2)$

03 답 0.4772

$\dfrac{2}{3}$, 48, $\dfrac{1}{3}$, 16, 48, 4, 48, 4, 0, 2, 0.4772

04 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-48}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(40\le X\le 52)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{40-48}{4}\le Z\le \dfrac{52-48}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772+0.3413=0.8185$ 답 0.8185

05 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-48}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\ge 60)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{60-48}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 3)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$

$=0.5-0.4987=0.0013$ 답 0.0013

06 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\cdot\dfrac{1}{2}=50,\ \mathrm{V}(X)=100\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=25$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(45\le X\le 50)&=\mathrm{P}\left(\frac{45-50}{5}\le Z\le \frac{50-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.3413\end{aligned}$$

답 0.3413

07 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50, 5^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(55\le X\le 65)&=\mathrm{P}\left(\frac{55-50}{5}\le Z\le \frac{65-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 3)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4987-0.3413=0.1574\end{aligned}$$

답 0.1574

08 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50, 5^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 40)&=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{40-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -2)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

답 0.0228

자신감 UP! 기본&핵심유형

본책 126쪽

01 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(180, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=180\cdot\frac{1}{6}=30,\ \mathrm{V}(X)=180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=25$$

이때 180은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(30, 5^2)$을 따른다.

답 ②

02 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(192, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=192\cdot\frac{3}{4}=144,\ \mathrm{V}(X)=192\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=36$$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(144, 6^2)$을 따른다.

$\therefore m=144,\ \sigma=6$

$Z_X=\frac{X-144}{6}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le 132)=\mathrm{P}(Z\le a)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_X\le \frac{132-144}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\le a)$$

$\therefore \mathrm{P}(Z_X\le -2)=\mathrm{P}(Z\le a)$

즉 $a=-2$이므로

$m+\sigma+a=144+6-2=148$

답 ④

03 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20,\ \mathrm{V}(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20, 4^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(22\le X\le 26)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{22-20}{4}\le Z\le \frac{26-20}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.4332-0.1915=0.2417\end{aligned}$$

답 0.2417

04 $\mathrm{V}(X)=100$에서

$n\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=100 \quad \therefore n=450$

즉 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=450\cdot\frac{2}{3}=300$$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300, 10^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 280)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{280-300}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+0.5\\&=0.4772+0.5=0.9772\end{aligned}$$

답 0.9772

05 불량품의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(10000, 0.1)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=10000\times 0.1=1000,$

$\mathrm{V}(X)=10000\times 0.1\times 0.9=900$

이때 10000은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(1000, 30^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-1000}{30}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 925)&=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{925-1000}{30}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 0)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.4938=0.0062\end{aligned}$$

답 ④

베이직쎈 BOX

두 확률변수 Z_X, Z가 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 $a=-2$

$10\ \% \Rightarrow \frac{10}{100}=0.1$

베이직쎈 BOX

06 2의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$E(X)=720\cdot\frac{1}{6}=120$,

$V(X)=720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=100$

이때 720은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(120, 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(105\le X\le 135)$
$=P\left(\frac{105-120}{10}\le Z\le\frac{135-120}{10}\right)$
$=P(-1.5\le Z\le 1.5)$
$=2P(0\le Z\le 1.5)$
$=2\times0.4332=0.8664$

답 ④

한 개의 주사위를 던질 때 2의 눈이 나올 확률

07 (1) $B(400, 0.1)$

(2) $E(X)=400\times0.1=40$, $V(X)=400\times0.1\times0.9=36$
이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(40, 6^2)$을 따른다.

(3) $Z=\frac{X-40}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
이 비행기를 타러 온 모든 고객이 비행기를 타려면 예약을 취소하는 고객이 $400-348=52$(명) 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$P(X\ge52)=P\left(Z\ge\frac{52-40}{6}\right)$
$=P(Z\ge2)$
$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

답 (1) $B(400, 0.1)$ (2) $N(40, 6^2)$ (3) 0.0228

08 응답한 조사 대상자의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(1200, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=1200\cdot\frac{1}{4}=300$,

$V(X)=1200\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=225$

이때 1200은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(300, 15^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-300}{15}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\ge a)=0.98$에서

$P\left(Z\ge\frac{a-300}{15}\right)=0.98$

$P\left(\frac{a-300}{15}\le Z\le 0\right)+P(Z\ge0)=0.98$

$P\left(0\le Z\le\frac{300-a}{15}\right)+0.5=0.98$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{300-a}{15}\right)=0.48$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$\frac{300-a}{15}=2 \qquad \therefore a=270$

답 ③

a명 이상이 응답할 확률이 98 %이므로 $P(X\ge a)=0.98$

$P\left(Z\ge\frac{a-300}{15}\right)=0.98>0.5$ 이므로 $\frac{a-300}{15}<0$

09 맞힌 문제의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

한 개의 오지선다형 문제를 맞힐 확률

$E(X)=400\cdot\frac{1}{5}=80$,

$V(X)=400\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=64$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-80}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(68\le X\le a)=0.91$에서

$P\left(\frac{68-80}{8}\le Z\le\frac{a-80}{8}\right)=0.91$

$P\left(-1.5\le Z\le\frac{a-80}{8}\right)=0.91$

$P(-1.5\le Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{a-80}{8}\right)=0.91$

$0.43+P\left(0\le Z\le\frac{a-80}{8}\right)=0.91$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-80}{8}\right)=0.48$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.48$이므로

$\frac{a-80}{8}=2 \qquad \therefore a=96$

답 96

$P\left(-1.5\le Z\le\frac{a-80}{8}\right)=0.91$이고 $P(-1.5\le Z\le0)=P(0\le Z\le1.5)=0.43$이므로 $\frac{a-80}{8}>0$

10 동전 한 개를 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(64, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=64\cdot\frac{1}{2}=32$,

$V(X)=64\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=16$

이때 64는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(32, 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z_X=\frac{X-32}{4}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(X\ge36)=P\left(Z_X\ge\frac{36-32}{4}\right)$
$=P(Z_X\ge1)$ …… ㉠

한편 동전 2개를 동시에 던질 때 모두 앞면이 나오는 횟수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(192, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(Y)=192\cdot\frac{1}{4}=48$,

$V(Y)=192\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=36$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $N(48, 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z_Y=\frac{Y-48}{6}$로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(Y\le a)=P\left(Z_Y\le\frac{a-48}{6}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\mathrm{P}(Z_X \ge 1)=\mathrm{P}\left(Z_Y \le \frac{a-48}{6}\right)$이므로

$$\mathrm{P}(Z_X \ge 1)=\mathrm{P}\left(Z_Y \ge \frac{48-a}{6}\right)$$

따라서 $1=\frac{48-a}{6}$이므로

$48-a=6 \qquad \therefore a=42$ 답 42

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 128쪽

01 전략 A 드라마를 시청하고 있는 가구 수는 이항분포를 따르고,
(5가구 이상일 확률)=(5가구일 확률)+(6가구일 확률)임을 이용한다.

풀이 A 드라마를 시청하고 있는 가구 수를 X라 하면 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{6-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge5)&=\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)\\&={}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{4}{5}\right)^1+{}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{5}\right)^6\left(\frac{4}{5}\right)^0\\&=\frac{24}{5^6}+\frac{1}{5^6}=\frac{1}{5^4}\end{aligned}$$

답 ③

02 전략 확률변수 X가 따르는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 구한 후 $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\sigma(X)=\sqrt{72\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=\sqrt{10}$$

답 ①

03 전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$임을 이용하여 p에 대한 방정식을 세운다.

풀이 $\mathrm{V}(X)=10$에서

$45p(1-p)=10, \qquad 9p(1-p)=2$

$9p^2-9p+2=0, \qquad (3p-1)(3p-2)=0$

$\therefore p=\frac{2}{3}\ \left(\because p>\frac{1}{2}\right)$ 답 ③

04 전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $\mathrm{E}(X)=np$, $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$이고 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$임을 이용하여 n에 대한 방정식을 세운다.

풀이 한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{E}(X)=\frac{n}{3},\ \mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\frac{2}{9}n=11-\left(\frac{n}{3}\right)^2, \qquad n^2+2n-99=0$

$(n+11)(n-9)=0 \qquad \therefore n=9\ (\because n>0)$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\frac{2}{9}\cdot9=2$이므로

베이직쎈 BOX

분산, 표준편차가 작을수록 변량들이 평균을 중심으로 가까이 모여 있으므로 자료가 더 고르다.

$20\ \% \Rightarrow \frac{20}{100}=\frac{1}{5}$

3의 배수는 3, 6이므로 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(nX+3)&=\mathrm{V}(9X+3)=9^2\mathrm{V}(X)\\&=81\cdot2=162\end{aligned}$$

답 ②

05 전략 정규분포곡선은 직선 $x=$(평균)에 대하여 대칭이고, 표준편차가 작을수록 가운데 부분의 높이가 높아지고 평균을 중심으로 모인 모양이 된다.

풀이 세 반 중 평균이 가장 낮은 반은 곡선의 대칭축이 가장 왼쪽에 있는 A 반이다.
점수가 가장 고른 반은 표준편차가 가장 작은 반이고, 세 반 중 표준편차가 가장 작은 반은 곡선의 가운데 부분의 높이가 가장 높고 평균을 중심으로 가장 많이 모인 모양인 B 반이다. 답 ①

06 전략 주어진 확률에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.3)$을 구하고 이를 이용할 수 있도록 구하는 확률의 식을 변형한다.

풀이 $\mathrm{P}(Z\ge1.3)=0.0968$에서

$\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1.3)=0.0968$

$0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.3)=0.0968$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le1.3)=0.4032$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(|Z|\le1.3)&=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le1.3)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le1.3)\\&=2\times0.4032\\&=0.8064\end{aligned}$$

답 ⑤

07 전략 두 확률변수 X, Y를 각각 표준화한 후 주어진 조건을 만족시키는 a의 값을 구한다.

풀이 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 3^2)$, $\mathrm{N}(17,\ 2^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-15}{3},\ Z_Y=\frac{Y-17}{2}$$

로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(6\le X\le a)=\mathrm{P}(11\le Y\le a)$에서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(\frac{6-15}{3}\le Z_X\le\frac{a-15}{3}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{11-17}{2}\le Z_Y\le\frac{a-17}{2}\right)\\&\therefore \mathrm{P}\left(-3\le Z_X\le\frac{a-15}{3}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-3\le Z_Y\le\frac{a-17}{2}\right)\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a-15}{3}=\frac{a-17}{2}$이므로

$2a-30=3a-51 \qquad \therefore a=21$ 답 ④

08 전략 확률변수 X를 확률변수 Z로 표준화한 후 주어진 확률을 Z에 대한 확률로 나타낸다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(k\le X\le25)=0.1498$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{k-20}{5}\le Z\le\frac{25-20}{5}\right)=0.1498$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{k-20}{5}\le Z\le 1\right)=0.1498$$

$$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-20}{5}\right)=0.1498$$

$$0.3413-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-20}{5}\right)=0.1498$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-20}{5}\right)=0.1915$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$$\frac{k-20}{5}=0.5\qquad \therefore\ k=22.5$$

답 ②

베이직쎈 BOX

$\mathrm{P}\left(\frac{k-20}{5}\le Z\le 1\right)$
$=0.1498$
이고
$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$
이므로
$\frac{k-20}{5}>0$

09 전략 목도리 한 개의 길이를 확률변수 X라 하고 X를 표준화하여 확률을 구한다.

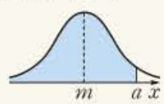
풀이 목도리 한 개의 길이를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(160,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-160}{15}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 130)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{130-160}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+0.5\\&=0.4772+0.5\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 ③

$\mathrm{P}(X\le a)=0.9332$
>0.5
이므로 다음 그림과 같이 a는 m보다 크다.



10 전략 확률변수 X는 이항분포를 따르고, 던진 횟수가 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포를 따른다.

풀이 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(144,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=144\cdot\frac{1}{2}=72,$$

$$\mathrm{V}(X)=144\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=36$$

이때 144는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-72}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le k)=0.7$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le \frac{k-72}{6}\right)=0.7$$

$$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-72}{6}\right)=0.7$$

$$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-72}{6}\right)=0.7$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-72}{6}\right)=0.2$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.2$이므로

$$\frac{k-72}{6}=0.5\qquad \therefore\ k=75$$

답 ③

$\mathrm{P}\left(Z\le \frac{k-72}{6}\right)$
$=0.7>0.5$
이므로 $\frac{k-72}{6}>0$

11 전략 꺼낸 것을 다시 넣고 반복하는 시행은 독립시행이므로 먼저 확률변수 X가 따르는 이항분포를 찾는다.

풀이 한 번의 시행에서 2개 모두 같은 맛 사탕이 나올 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{13}{28}$$

··· ❶

2개 모두 딸기 맛 사탕이 나오는 경우의 수와 2개 모두 사과 맛 사탕이 나오는 경우의 수의 합

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(56,\ \frac{13}{28}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=56\cdot\frac{13}{28}=26$$

··· ❷

답 26

단계	채점 기준	비율
❶	한 번의 시행에서 2개 모두 같은 맛 사탕이 나올 확률을 구할 수 있다.	40 %
❷	$\mathrm{E}(X)$를 구할 수 있다.	60 %

12 전략 확률변수 X가 정규분포를 따르고 $\mathrm{P}(X\le a)$가 0.5보다 크므로 a가 m보다 큼을 이용한다.

풀이 $\mathrm{P}(X\le a)=0.9332$에서

$$\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le a)=0.9332$$

$$0.5+\mathrm{P}(m\le X\le a)=0.9332$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le a)=0.4332$$

이때 $\mathrm{P}(m\le X\le m+1.5\sigma)=0.4332$이므로

$$\begin{aligned}a&=m+1.5\sigma\\&=22+1.5\times 4=28\end{aligned}$$

답 28

다른 풀이 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(22,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-22}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le a)=0.9332$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le \frac{a-22}{4}\right)=0.9332$$

$$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-22}{4}\right)=0.9332$$

$$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-22}{4}\right)=0.9332$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-22}{4}\right)=0.4332$$

이때 $\mathrm{P}(m\le X\le m+1.5\sigma)=0.4332$, 즉 $\mathrm{P}(22\le X\le 28)=0.4332$에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{a-22}{4}=1.5\qquad \therefore\ a=28$$

13 전략 먼저 일일 TV 시청 시간이 86분 이상 90분 이하일 확률을 구한다.

풀이 일일 TV 시청 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-70}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(86\le X\le 90)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{86-70}{8}\le Z\le \frac{90-70}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(2\le Z\le 2.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.49-0.48=0.01\end{aligned}$$

··· ❶

따라서 일일 TV 시청 시간이 86분 이상 90분 이하인 가구 수는

$$0.01\times 1000=10$$

··· ❷

답 10

단계	채점 기준	비율
❶	일일 TV 시청 시간이 86분 이상 90분 이하일 확률을 구할 수 있다.	70 %
❷	일일 TV 시청 시간이 86분 이상 90분 이하인 가구 수를 구할 수 있다.	30 %

14 전략 무게가 상위 10 %에 속하는 한라봉의 최저 무게를 a g이라 하고, 한라봉 한 개의 무게가 a g 이상일 확률이 0.1임을 이용한다.

풀이 한라봉 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(290,\ 30^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-290}{30}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

상위 10 %에 속하는 한라봉 한 개의 최저 무게를 a g이라 하면

$$\mathrm{P}(X\ge a)=0.1$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{a-290}{30}\right)=0.1$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-290}{30}\right)=0.1$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-290}{30}\right)=0.1$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-290}{30}\right)=0.4$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.3)=0.4$이므로

$$\frac{a-290}{30}=1.3 \qquad \therefore\ a=329$$

따라서 한라봉 특상품 한 개의 최저 무게는 329 g이다.

답 329 g

15 전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르고, 720은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포를 따른다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=720\cdot\frac{1}{6}=120,$$

$$\mathrm{V}(X)=720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=100$$

이때 720은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X\le 90)+\mathrm{P}(X\ge 135)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{90-120}{10}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{135-120}{10}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le -3)+\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$$
$$=\{\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(-3\le Z\le 0)\}$$
$$+\{\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\}$$
$$=(0.5-0.4987)+(0.5-0.4332)$$
$$=0.0013+0.0668=0.0681$$

답 0.0681

베이직쎈 BOX

$\mathrm{P}(Z\le -3)$
$+\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$
$=1-\mathrm{P}(-3\le Z\le 1.5)$
임을 이용할 수도 있다.

$\mathrm{P}(-3\le Z\le 0)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$
$=0.4987$

16 전략 하이패스 단말기를 이용한 차량의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포를 따르고, 조사한 차량의 수가 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포를 따른다.

풀이 하이패스 단말기를 이용한 차량의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=400\cdot\frac{4}{5}=320,$$

$$\mathrm{V}(X)=400\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=64 \quad \cdots ❶$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-320}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\ge 328)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{328-320}{8}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 1)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5-0.34$$
$$=0.16 \quad \cdots ❷$$

답 0.16

단계	채점 기준	비율
❶	하이패스 단말기를 이용한 차량의 수의 평균과 분산을 구할 수 있다.	40 %
❷	하이패스 단말기를 이용한 차량이 328대 이상일 확률을 구할 수 있다.	60 %

베이직쎈 BOX

Ⅲ. 통계

07 통계적 추정

16 모집단과 표본

개념 38 모집단과 표본

본책 130쪽

01 답 전수조사

02 답 표본조사

과일의 당도는 전수조사가 불가능하다.

03 답 표본조사

04 답 전수조사

05 답 표본조사

출구조사는 투표 당일에 투표를 마치고 나온 일부 유권자를 대상으로 어느 후보를 선택하였는지 조사하는 것이다.

06 답 25　　5, 2, 5, 2, 25

07 답 20　　5, 2, 5, 2, 20

08 구하는 경우의 수는 서로 다른 8장에서 3장을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_{8}\Pi_{3}=8^3=512$　　답 512

09 구하는 경우의 수는 서로 다른 8장에서 3장을 택하는 순열의 수와 같으므로

$_{8}P_{3}=8\cdot7\cdot6=336$　　답 336

개념 39 모평균과 표본평균

본책 131쪽

10 $\overline{X}=\frac{1}{2}(1+5)=3$,

$S^2=\frac{1}{2-1}\{(1-3)^2+(5-3)^2\}=8$,

$S=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

답 $\overline{X}=3,\ S^2=8,\ S=2\sqrt{2}$

표본이 1, 5이므로 표본의 크기는 2이다.

11 $\overline{X}=\frac{1}{2}(1+7)=4$,

$S^2=\frac{1}{2-1}\{(1-4)^2+(7-4)^2\}=18$,

$S=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

답 $\overline{X}=4,\ S^2=18,\ S=3\sqrt{2}$

12 $\overline{X}=\frac{1}{3}(3+5+7)=5$,

$S^2=\frac{1}{3-1}\{(3-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2\}=4$,

$S=\sqrt{4}=2$

답 $\overline{X}=5,\ S^2=4,\ S=2$

표본이 3, 5, 7이므로 표본의 크기는 3이다.

13 $\overline{X}=\frac{1}{3}(2+4+6)=4$,

$S^2=\frac{1}{3-1}\{(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2\}=4$,

$S=\sqrt{4}=2$

답 $\overline{X}=4,\ S^2=4,\ S=2$

14 $\overline{X}=\frac{1}{3}(4+6+10)=\frac{20}{3}$,

$S^2=\frac{1}{3-1}\left\{\left(4-\frac{20}{3}\right)^2+\left(6-\frac{20}{3}\right)^2+\left(10-\frac{20}{3}\right)^2\right\}$

$=\frac{28}{3}$,

$S=\sqrt{\frac{28}{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$

답 $\overline{X}=\frac{20}{3},\ S^2=\frac{28}{3},\ S=\frac{2\sqrt{21}}{3}$

15 $\overline{X}=\frac{1}{4}(4+6+8+10)=7$,

$S^2=\frac{1}{4-1}\{(4-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2\}$

$=\frac{20}{3}$,

$S=\sqrt{\frac{20}{3}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$

답 $\overline{X}=7,\ S^2=\frac{20}{3},\ S=\frac{2\sqrt{15}}{3}$

개념 40 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

본책 132쪽

16 (3) $E(\overline{X})=0\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{2}{9}+4\cdot\frac{1}{9}=2$,

$E(\overline{X}^2)=0^2\cdot\frac{1}{9}+1^2\cdot\frac{2}{9}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{2}{9}+4^2\cdot\frac{1}{9}$

$=\frac{16}{3}$

이므로

$V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$

$=\frac{16}{3}-2^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 (1) 0, 1, 2, 3, 4

2, 4, 2, 2, 4, 4, 4, 3, 2, 3

(2)

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(3) $E(\overline{X})=2,\ V(\overline{X})=\frac{4}{3},\ \sigma(\overline{X})=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

베이직쎈 BOX

17 (1) 표본이 (1, 1)일 때, $\overline{X}=\frac{1+1}{2}=1$

표본이 (1, 3), (3, 1)일 때,

$\overline{X}=\frac{1+3}{2}=2$

표본이 (1, 5), (5, 1), (3, 3)일 때,

$\overline{X}=\frac{1+5}{2}=\frac{3+3}{2}=3$

표본이 (3, 5), (5, 3)일 때,

$\overline{X}=\frac{3+5}{2}=4$

표본이 (5, 5)일 때, $\overline{X}=\frac{5+5}{2}=5$

따라서 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $\mathrm{E}(\overline{X})=1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{2}{9}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{2}{9}+5\cdot\frac{1}{9}=3$,

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=1^2\cdot\frac{1}{9}+2^2\cdot\frac{2}{9}+3^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{2}{9}+5^2\cdot\frac{1}{9}$

$=\frac{31}{3}$

이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=\frac{31}{3}-3^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 풀이 참조

18 $\mathrm{E}(\overline{X})=20$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{6^2}{9}=4$, $\sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{9}}=2$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=20$, $\mathrm{V}(\overline{X})=4$, $\sigma(\overline{X})=2$

19 $\mathrm{E}(\overline{X})=86$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{12^2}{16}=9$, $\sigma(\overline{X})=\frac{12}{\sqrt{16}}=3$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=86$, $\mathrm{V}(\overline{X})=9$, $\sigma(\overline{X})=3$

20 $\mathrm{E}(\overline{X})=140$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{10^2}{25}=4$, $\sigma(\overline{X})=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=140$, $\mathrm{V}(\overline{X})=4$, $\sigma(\overline{X})=2$

21 $m=36$, $\sigma=12$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=36$, $\sigma(\overline{X})=\frac{12}{\sqrt{4}}=6$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=36$, $\sigma(\overline{X})=6$

22 $m=52$, $\sigma=9$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=52$, $\sigma(\overline{X})=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=52$, $\sigma(\overline{X})=3$

23 $m=120$, $\sigma=15$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=120$, $\sigma(\overline{X})=\frac{15}{\sqrt{100}}=\frac{3}{2}$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=120$, $\sigma(\overline{X})=\frac{3}{2}$

모집단의 확률변수 X의 확률분포가 주어졌으므로 모평균 $\mathrm{E}(X)$, 모분산 $\mathrm{V}(X)$를 구한다.

24 $\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=1$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{5}{3}-1^2=\frac{2}{3}$

이때 표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=1$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{2}{3}}{16}=\frac{1}{24}$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=1$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{24}$

25 $\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{8}=3$,

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{3}{8}+4^2\cdot\frac{1}{4}+8^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{55}{4}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{55}{4}-3^2=\frac{19}{4}$

이때 표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=3$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{19}{4}}{16}=\frac{19}{64}$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=3$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{19}{64}$

모집단의 확률변수 X의 확률질량함수가 주어졌으므로 먼저 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸 후 모평균 $\mathrm{E}(X)$, 모표준편차 $\sigma(X)$를 구한다.

26 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{7}+2\cdot\frac{2}{7}+4\cdot\frac{4}{7}=3$,

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{7}+2^2\cdot\frac{2}{7}+4^2\cdot\frac{4}{7}=\frac{73}{7}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{73}{7}-3^2=\frac{10}{7}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\frac{10}{7}}=\frac{\sqrt{70}}{7}$

이때 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=3$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{70}}{7}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{70}}{14}$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=3$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{70}}{14}$

27 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

베이직쎈 BOX

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{2}{5}=2$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{10}+1^2\cdot\frac{1}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{2}{5}=5$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=5-2^2=1$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{1}=1$

이때 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ \sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ \sigma(\overline{X})=\frac{1}{2}$

28 (1) 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=1$

$\therefore\ a=\frac{2}{5}$

(2) $\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{2}{5}=3$,

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{5}+3^2\cdot\frac{1}{5}+5^2\cdot\frac{2}{5}=\frac{61}{5}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=\frac{61}{5}-3^2=\frac{16}{5}$

이때 표본의 크기가 9이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=3,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{16}{5}}{9}=\frac{16}{45}$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\mathrm{E}(\overline{X})=3,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{16}{45}$

29 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{2}{5}+a+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=1$

$\therefore\ a=\frac{3}{10}$

(2) $\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{1}{5}+6\cdot\frac{1}{10}=2$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}+4^2\cdot\frac{1}{5}+6^2\cdot\frac{1}{10}=8$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=8-2^2=4$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{4}=2$

이때 표본의 크기가 9이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ \sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$

답 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ \sigma(\overline{X})=\frac{2}{3}$

개념 41 표본평균의 분포

본책 134쪽

30 답 4, 4

31 답 100, $\frac{5}{2}$

100은 충분히 큰 수이므로 모집단이 정규분포를 따르지 않아도 표본평균은 근사적으로 정규분포를 따른다.

32 (3) $Z=\frac{\overline{X}-100}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 102)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{102-100}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.5+0.3413=0.8413$

답 (1) 100, 2 (2) 100, 2 (3) 0.8413

$\sigma(\overline{X})=\frac{16}{\sqrt{64}}=2$

33 $\mathrm{E}(\overline{X})=180,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{8^2}{4}=16$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-180}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(180\le\overline{X}\le 182)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{180-180}{4}\le Z\le\frac{182-180}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=0.1915$

답 0.1915

34 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-180}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(176\le\overline{X}\le 186)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{176-180}{4}\le Z\le\frac{186-180}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1.5)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.3413+0.4332=0.7745$

답 0.7745

35 $\mathrm{E}(\overline{X})=320,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{10^2}{25}=4$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-320}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 323)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{323-320}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.5-0.4332=0.0668$

답 0.0668

36 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-320}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(324\le\overline{X}\le 325)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{324-320}{2}\le Z\le\frac{325-320}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(2\le Z\le 2.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.4938-0.4772=0.0166$

답 0.0166

자신감 UP! 기본&핵심유형

본책 135쪽

01 ④ 의약품의 임상 시험에는 표본조사가 적합하다.

답 ④

베쎈TIP

전수조사	표본조사
• 조사 대상 전체를 조사한다. • 자료의 특성을 정확히 알 수 있다. • 많은 시간과 비용이 필요하다. • 인구 주택 총조사, 대학수학 능력 시험 결과 분석 등에 적합하다.	• 조사 대상 중 일부분을 뽑아 조사한다. • 자료의 특성을 근사적으로 알 수 있다. • 시간과 비용을 절약할 수 있다. • 생산 제품 품질 검사 등에 적합하다.

02 ㄱ, ㄴ, ㄹ. 표본조사가 적합하다.

ㄷ, ㅁ. 전수조사가 적합하다.

이상에서 표본조사로 적합한 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ②

03 $\mathrm{E}(\overline{X})=19$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=19$, $\sigma(\overline{X})=2\sqrt{3}$

04 ㄱ. $\overline{X}$는 추출된 표본에 따라 여러 가지 값을 가질 수 있는 확률변수이다.

ㄷ. $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{5^2}{100}=\dfrac{1}{4}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

05 $\mathrm{E}(\overline{X})=10$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{12^2}{9}=16$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$16=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-10^2 \qquad \therefore \mathrm{E}(\overline{X}^2)=116$

답 116

06 모표준편차가 8이므로

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{8}{\sqrt{16}}=2$

$\therefore \sigma\left(\dfrac{1}{4}\overline{X}-6\right)=\left|\dfrac{1}{4}\right|\sigma(\overline{X})=\dfrac{1}{4}\cdot 2=\dfrac{1}{2}$

답 ②

07 $\mathrm{E}(\overline{X})=32$이므로 $\quad m=32$

또 $\mathrm{V}(\overline{X})=25$에서 $\dfrac{10^2}{n}=25$이므로

$n=4$

답 $m=32$, $n=4$

08 $\mathrm{E}(X)=2\cdot\dfrac{1}{5}+3\cdot\dfrac{3}{5}+4\cdot\dfrac{1}{5}=3$,

베이직쎈 BOX

표본평균 $\overline{X}$는 확률변수이므로 평균, 분산, 표준편차를 구할 수 있다.

$2a=2\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$

확률변수 X와 두 상수 a, b $(a\neq 0)$에 대하여
① $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$
② $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$
③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\cdot\dfrac{1}{5}+3^2\cdot\dfrac{3}{5}+4^2\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{47}{5}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\dfrac{47}{5}-3^2=\dfrac{2}{5}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

이때 표본의 크기가 10이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=3$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{5}$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=3$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{1}{5}$

09 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

$\mathrm{E}(X)=-1\cdot\dfrac{1}{4}+1\cdot\dfrac{1}{4}+2\cdot\dfrac{1}{2}=1$,

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\cdot\dfrac{1}{4}+1^2\cdot\dfrac{1}{4}+2^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\dfrac{5}{2}-1^2=\dfrac{3}{2}$

이때 표본의 크기가 9이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\frac{3}{2}}{9}=\dfrac{1}{6}$

답 ⑤

10 확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}+a+2a=1, \qquad 3a=\dfrac{3}{8}$

$\therefore a=\dfrac{1}{8}$

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\dfrac{1}{8}+1\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{8}+3\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\dfrac{1}{8}+1^2\cdot\dfrac{1}{2}+2^2\cdot\dfrac{1}{8}+3^2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{4}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\dfrac{13}{4}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=1$

이때 표본의 크기가 6이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{1}{6}$

답 $\dfrac{1}{6}$

11 $\mathrm{E}(X)=-2\cdot\dfrac{1}{6}+(-1)\cdot\dfrac{1}{3}+0\cdot\dfrac{1}{3}+1\cdot\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{2}$,

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\cdot\dfrac{1}{6}+(-1)^2\cdot\dfrac{1}{3}+0^2\cdot\dfrac{1}{3}+1^2\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{6}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\dfrac{7}{6}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{11}{12}$

표본의 크기가 n일 때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{1}{12}$이므로

$\dfrac{\frac{11}{12}}{n}=\dfrac{1}{12} \qquad \therefore n=11$

답 ②

12 임의로 1장의 카드를 뽑을 때, 카드에 적힌 수를 X라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{1}{5}=3$이므로

$E(\overline{X})=3$ 답 ③

13 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 수를 X라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}=2$,

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{9}{2}-2^2=\frac{1}{2}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$V(\overline{X})=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

14 상자에서 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 수를 X라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{10}=2$,

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{10}=5$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=5-2^2=1$

$\therefore \sigma(X)=1$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

15 상자에서 임의로 1개의 구슬을 꺼낼 때, 구슬의 무게를 X g이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	5	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$,

$E(X^2)=2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}+5^2\cdot\frac{1}{4}+8^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{51}{2}$이므로

베이직쎈 BOX

표본평균 $\overline{X}$의 확률분포는 구하기 어렵거나 복잡하므로 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 이용한다.

$\frac{\sigma^2}{36}=\frac{4}{9}$에서

$\sigma^2=16$

$\therefore \sigma=4$ ($\because \sigma>0$)

$P(X=1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$,

$P(X=2)=\frac{3}{10}$,

$P(X=3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$,

$P(X=4)=\frac{1}{10}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{51}{2}-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$

표본의 크기가 n일 때 $V(\overline{X})=\frac{7}{4}$이므로

$\frac{\frac{21}{4}}{n}=\frac{7}{4}$ $\therefore n=3$ 답 3

16 모집단이 정규분포 $N(72,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(72,\ \frac{6^2}{4}\right)$, 즉 $N(72,\ 3^2)$을 따른다. 답 ②

17 모집단이 정규분포 $N(25,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(25,\ \frac{\sigma^2}{36}\right)$을 따른다.

따라서 $25=a$, $\frac{\sigma^2}{36}=\frac{4}{9}$이므로

$a=25$, $\sigma=4$ ($\because \sigma>0$) 답 $a=25$, $\sigma=4$

18 모집단이 정규분포 $N(90,\ 9^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(90,\ \frac{9^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $\frac{9^2}{n}=3^2$이므로 $n=9$ 답 ③

19 모집단이 정규분포 $N(30,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(30,\ \frac{12^2}{9}\right)$, 즉 $N(30,\ 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-30}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\le 24)=P\left(Z\le\frac{24-30}{4}\right)$

$=P(Z\le -1.5)$

$=P(Z\le 0)-P(-1.5\le Z\le 0)$

$=0.5-P(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$ 답 ②

20 모집단이 정규분포 $N(45,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(45,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(45,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-45}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(43\le\overline{X}\le 46)$

$=P\left(\frac{43-45}{2}\le Z\le\frac{46-45}{2}\right)$

$=P(-1\le Z\le 0.5)$

$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)$

$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 0.5)$

$=0.34+0.19=0.53$ 답 0.53

베이직쎈 BOX

21 모집단이 정규분포 $N(8,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(8,\ \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $N(8,\ 1^2)$을 따른다.

> 임의추출한 4명의 기내 수화물 무게의 평균은 표본평균 $\overline{X}$이다.

$Z=\overline{X}-8$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge 9)&=P(Z\ge 9-8)=P(Z\ge 1)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

답 0.16

22 키위 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(80,\ 15^2)$을 따른다.
이때 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80,\ \frac{15^2}{9}\right)$, 즉 $N(80,\ 5^2)$을 따른다.

> 키위 한 상자에는 9개의 키위가 들어 있으므로 표본의 크기는 9이다.

$Z=\frac{\overline{X}-80}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P\left(\overline{X}\le \frac{630}{9}\right)&=P(\overline{X}\le 70)\\&=P\left(Z\le \frac{70-80}{5}\right)\\&=P(Z\le -2)\\&=P(Z\le 0)-P(-2\le Z\le 0)\\&=0.5-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

> 키위 한 상자가 불량품으로 판정되려면 $9\overline{X}\le 630$, 즉 $\overline{X}\le 70$이어야 한다.

답 0.02

23 모집단이 정규분포 $N(120,\ 16^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(120,\ \frac{16^2}{4}\right)$, 즉 $N(120,\ 8^2)$을 따른다.
$Z=\frac{\overline{X}-120}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(116\le \overline{X}\le a)=0.62$에서

$$P\left(\frac{116-120}{8}\le Z\le \frac{a-120}{8}\right)=0.62$$

$$P\left(-0.5\le Z\le \frac{a-120}{8}\right)=0.62$$

> $P\left(-0.5\le Z\le \frac{a-120}{8}\right)=0.62$에서 $P(-0.5\le Z\le 0)=0.19$이므로 $\frac{a-120}{8}>0$

$$P(-0.5\le Z\le 0)+P\left(0\le Z\le \frac{a-120}{8}\right)=0.62$$

$$P(0\le Z\le 0.5)+P\left(0\le Z\le \frac{a-120}{8}\right)=0.62$$

$$0.19+P\left(0\le Z\le \frac{a-120}{8}\right)=0.62$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{a-120}{8}\right)=0.43$$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로

$\frac{a-120}{8}=1.5 \qquad \therefore a=132$

답 ③

24 모집단이 정규분포 $N(m,\ 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{20^2}{16}\right)$, 즉 $N(m,\ 5^2)$을 따른다.
$Z=\frac{\overline{X}-m}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\le 695)=0.9772$에서

$$P\left(Z\le \frac{695-m}{5}\right)=0.9772$$

> $P\left(Z\le \frac{695-m}{5}\right)=0.9772>0.5$이므로 $\frac{695-m}{5}>0$

$$P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le \frac{695-m}{5}\right)=0.9772$$

$$0.5+P\left(0\le Z\le \frac{695-m}{5}\right)=0.9772$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{695-m}{5}\right)=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{695-m}{5}=2 \qquad \therefore m=685$

답 ④

25 (1) 모집단이 정규분포 $N(200,\ 60^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(200,\ \frac{60^2}{n}\right)$을 따른다.
확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-200}{\frac{60}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le 170)&=P\left(Z\le \frac{170-200}{\frac{60}{\sqrt{n}}}\right)\\&=P\left(Z\le -\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore a=-\frac{\sqrt{n}}{2}$$

(2) $P\left(Z\le -\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.07$에서

$$P(Z\le 0)-P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le 0\right)=0.07$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.07$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.43$$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=1.5, \qquad \sqrt{n}=3 \qquad \therefore n=9$

답 (1) $a=-\frac{\sqrt{n}}{2}$ (2) 9

26 모집단이 정규분포 $N(40,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(40,\ \frac{10^2}{n}\right)$을 따른다.
확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-40}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(30\le \overline{X}\le 40)&=P\left(\frac{30-40}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\le Z\le \frac{40-40}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)\\&=P(-\sqrt{n}\le Z\le 0)\\&=P(0\le Z\le \sqrt{n})\end{aligned}$$

베이직쎈 BOX

따라서 $\sqrt{n}=3$이므로

$n=9$ 답 ④

27 모집단이 정규분포 $N(173,\ 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(173,\ \frac{8^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-173}{\frac{8}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(169\le\overline{X}\le177)=0.6826$에서

$$P\left(\frac{169-173}{\frac{8}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{177-173}{\frac{8}{\sqrt{n}}}\right)=0.6826$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.6826$$

$$2P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.6826$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=1,\quad \sqrt{n}=2$

$\therefore n=4$ 답 ①

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$
$$=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le0\right)$$
$$+P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$
$$=2P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

28 모집단이 정규분포 $N(m,\ 24^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{24^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{24}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(|\overline{X}-m|\le5)=0.98$에서

$$P(-5\le\overline{X}-m\le5)=0.98$$

$$P\left(\frac{-5}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{5}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right)=0.98$$

$$P\left(-\frac{5\sqrt{n}}{24}\le Z\le\frac{5\sqrt{n}}{24}\right)=0.98$$

$$2P\left(0\le Z\le\frac{5\sqrt{n}}{24}\right)=0.98$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{5\sqrt{n}}{24}\right)=0.49$$

이때 $P(0\le Z\le2.5)=0.49$이므로

$\frac{5\sqrt{n}}{24}=2.5,\quad \sqrt{n}=12$

$\therefore n=144$ 답 144

17 모평균의 추정

개념 42 모평균의 추정

본책 140쪽

01 답 (가) $\frac{\sigma^2}{n}$ (나) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (다) $1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

02 표본평균이 30, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 4이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$30-1.96\times\frac{10}{\sqrt{4}}\le m\le30+1.96\times\frac{10}{\sqrt{4}}$$
$$30-9.8\le m\le30+9.8$$
$$\therefore 20.2\le m\le39.8$$

답 $20.2\le m\le39.8$

03 표본평균이 42, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 25이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$42-1.96\times\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le42+1.96\times\frac{10}{\sqrt{25}}$$
$$42-3.92\le m\le42+3.92$$
$$\therefore 38.08\le m\le45.92$$

답 $38.08\le m\le45.92$

04 표본평균이 155, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$155-1.96\times\frac{10}{\sqrt{64}}\le m\le155+1.96\times\frac{10}{\sqrt{64}}$$
$$155-2.45\le m\le155+2.45$$
$$\therefore 152.55\le m\le157.45$$

답 $152.55\le m\le157.45$

05 표본평균이 110, 모표준편차가 21, 표본의 크기가 9이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$110-2.58\times\frac{21}{\sqrt{9}}\le m\le110+2.58\times\frac{21}{\sqrt{9}}$$
$$110-18.06\le m\le110+18.06$$
$$\therefore 91.94\le m\le128.06$$

답 $91.94\le m\le128.06$

06 표본평균이 80, 모표준편차가 21, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$80-2.58\times\frac{21}{\sqrt{36}}\le m\le80+2.58\times\frac{21}{\sqrt{36}}$$
$$80-9.03\le m\le80+9.03$$
$$\therefore 70.97\le m\le89.03$$

답 $70.97\le m\le89.03$

07 표본평균이 136, 모표준편차가 21, 표본의 크기가 196이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$136-2.58\times\frac{21}{\sqrt{196}}\le m\le136+2.58\times\frac{21}{\sqrt{196}}$$
$$136-3.87\le m\le136+3.87$$
$$\therefore 132.13\le m\le139.87$$

답 $132.13\le m\le139.87$

08 표본평균이 90, 모표준편차가 14, 표본의 크기가 49이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$90-1.96\times\frac{14}{\sqrt{49}}\le m\le90+1.96\times\frac{14}{\sqrt{49}}$$
$$90-3.92\le m\le90+3.92$$

$\therefore 86.08 \le m \le 93.92$

답 $86.08 \le m \le 93.92$

09 표본평균이 90, 모표준편차가 14, 표본의 크기가 49이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$90-2.58\times\frac{14}{\sqrt{49}} \le m \le 90+2.58\times\frac{14}{\sqrt{49}}$$

$$90-5.16 \le m \le 90+5.16$$

$$\therefore 84.84 \le m \le 95.16$$

답 $84.84 \le m \le 95.16$

10 표본평균이 64, 모표준편차가 3, 표본의 크기가 144이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$64-1.96\times\frac{3}{\sqrt{144}} \le m \le 64+1.96\times\frac{3}{\sqrt{144}}$$

$$64-0.49 \le m \le 64+0.49$$

$$\therefore 63.51 \le m \le 64.49$$

답 $63.51 \le m \le 64.49$

11 표본평균이 64, 모표준편차가 3, 표본의 크기가 144이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$64-2.58\times\frac{3}{\sqrt{144}} \le m \le 64+2.58\times\frac{3}{\sqrt{144}}$$

$$64-0.645 \le m \le 64+0.645$$

$$\therefore 63.355 \le m \le 64.645$$

답 $63.355 \le m \le 64.645$

12 표본의 크기 100은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 5를 이용할 수 있고, 표본평균이 40이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$40-1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}} \le m \le 40+1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$$40-0.98 \le m \le 40+0.98$$

$$\therefore 39.02 \le m \le 40.98$$

답 $39.02 \le m \le 40.98$

13 표본의 크기 100은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 5를 이용할 수 있고, 표본평균이 40이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$40-2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}} \le m \le 40+2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$$40-1.29 \le m \le 40+1.29$$

$$\therefore 38.71 \le m \le 41.29$$

답 $38.71 \le m \le 41.29$

개념 43 모평균에 대한 신뢰구간의 길이

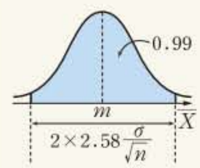
본책 142쪽

14 모표준편차가 20, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}=7.84$$

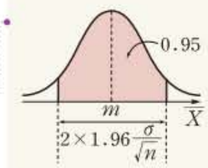
답 7.84

베이직쎈 BOX



표본의 크기 n이 충분히 크면 표본표준편차 S의 값 s는 모표준편차 σ와 큰 차이가 없음이 알려져 있다.
따라서 모표준편차를 모르는 경우 σ 대신 s를 이용하여 모평균에 대한 신뢰구간을 구할 수 있다.

문제에서
$P(|Z|\le2)=0.95$
가 주어졌으므로 2를 곱한다.



15 모표준편차가 20, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{20}{\sqrt{100}}=10.32$$

답 10.32

16 모표준편차가 27, 표본의 크기가 81이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\times\frac{27}{\sqrt{81}}=11.76$$

답 11.76

17 모표준편차가 27, 표본의 크기가 81이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{27}{\sqrt{81}}=15.48$$

답 15.48

18 모표준편차가 10, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\times\frac{10}{\sqrt{100}}=3.92$$

답 3.92

19 모표준편차가 10, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\times\frac{10}{\sqrt{400}}=1.96$$

답 1.96

베쎈 TIP

표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 길어짐을 **14**, **15**에서 확인할 수 있다.
또 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아짐을 **18**, **19**에서 확인할 수 있다.

20 모표준편차가 12, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{12}{\sqrt{64}}=7.74$$

답 7.74

21 모표준편차가 12, 표본의 크기가 144이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{12}{\sqrt{144}}=5.16$$

답 5.16

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 143쪽

01 표본평균이 70, 모표준편차가 8, 표본의 크기가 16이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$70-2\cdot\frac{8}{\sqrt{16}} \le m \le 70+2\cdot\frac{8}{\sqrt{16}}$$

$$70-4 \le m \le 70+4$$

$$\therefore 66 \le m \le 74$$

답 ③

베이직쎈 BOX

02 표본평균이 42, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 225이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$42-2.58\times\frac{10}{\sqrt{225}}\le m\le 42+2.58\times\frac{10}{\sqrt{225}}$$

$$42-1.72\le m\le 42+1.72$$

$\therefore k=1.72$ 답 ②

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)=0.495$에서 $\mathrm{P}(-2.58\le Z\le 2.58)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)=2\times 0.495=0.99$

03 표본평균이 4, 모표준편차가 1, 표본의 크기가 4이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$4-1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}\le m\le 4+1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$4-0.98\le m\le 4+0.98$$

$\therefore 3.02\le m\le 4.98$

답 $3.02\le m\le 4.98$

04 표본평균이 72, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 100이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$72-k\cdot\frac{12}{\sqrt{100}}\le m\le 72+k\cdot\frac{12}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore 72-\frac{6}{5}k\le m\le 72+\frac{6}{5}k$$

이 부등식이 $70.02\le m\le 73.98$과 같으므로

$$72-\frac{6}{5}k=70.02,\ 72+\frac{6}{5}k=73.98$$

$\frac{6}{5}k=72-70.02=73.98-72=1.98$

따라서 $\frac{6}{5}k=1.98$이므로 $k=1.65$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.65)=0.9$이므로

$\frac{\alpha}{100}=0.9$ $\therefore \alpha=90$ 답 90

05 표본의 크기 64는 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 40을 이용할 수 있고, 표본평균이 350이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$350-2\cdot\frac{40}{\sqrt{64}}\le m\le 350+2\cdot\frac{40}{\sqrt{64}}$$

$$350-10\le m\le 350+10$$

$\therefore 340\le m\le 360$

$\therefore a=340,\ b=360$ 답 ⑤

06 표본의 크기 100은 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 5를 이용할 수 있고, 표본평균이 122이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$122-2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}\le m\le 122+2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$$122-1.29\le m\le 122+1.29$$

$\therefore 120.71\le m\le 123.29$

답 $120.71\le m\le 123.29$

07 표본의 크기 144는 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10을 이용할 수 있고, 표본평균이 18이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$18-2.58\times\frac{10}{\sqrt{144}}\le m\le 18+2.58\times\frac{10}{\sqrt{144}}$$

$$18-2.15\le m\le 18+2.15$$

$\therefore 15.85\le m\le 20.15$ 답 ③

08 표본평균이 40, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$40-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\le m\le 40+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$$

이 부등식이 $39.02\le m\le 40.98$과 같으므로

$$40-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}=39.02,$$

$$40+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}=40.98$$

$1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}=40-39.02=40.98-40=0.98$

따라서 $1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}=0.98$이므로 $\sqrt{n}=4$

$\therefore n=16$ 답 ③

09 표본평균이 14, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$14-1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}\le m\le 14+1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}$$

이 부등식이 $10.08\le m\le 17.92$와 같으므로

$$14-1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}=10.08,$$

$$14+1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}=17.92$$

따라서 $1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}=3.92$이므로 $\sqrt{n}=3$

$\therefore n=9$ 답 9

10 표본평균이 185, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$185-2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le 185+2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}$$

이 부등식이 $183.71\le m\le 186.29$와 같으므로

$$185-2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}=183.71,$$

$$185+2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}=186.29$$

따라서 $2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}=1.29$이므로 $\sqrt{n}=20$

$\therefore n=400$ 답 400

11 모표준편차가 5, 표본의 크기가 225이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times 2.58\times\frac{5}{\sqrt{225}}=1.72$$ 답 1.72

표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{225}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{225}}$

이므로 신뢰구간의 길이는

$\left(\overline{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{225}}\right)-\left(\overline{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{225}}\right)=2\times 2.58\times\frac{5}{\sqrt{225}}$

12 모표준편차가 4, 표본의 크기가 16이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot 2\cdot\frac{4}{\sqrt{16}}=4$$ 답 ③

베이직쎈 BOX

13 모표준편차가 12, 표본의 크기가 36이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$a=2\times1.96\times\frac{12}{\sqrt{36}}=7.84$$

모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$b=2\times2.58\times\frac{12}{\sqrt{36}}=10.32$$

$\therefore b-a=2.48$ 답 ④

14 모표준편차가 9, 표본의 크기가 49이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot k\cdot\frac{9}{\sqrt{49}}=5.04 \qquad \therefore k=1.96$$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le1.96)=0.95$이므로

$$\frac{\alpha}{100}=0.95 \qquad \therefore \alpha=95$$

답 95

$\mathrm{P}(|Z|\le1.96)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le1.96)$
$=2\times0.475=0.95$

15 모표준편차가 3, 표본의 크기가 n이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 2가 되려면

$$2\cdot2\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}=2, \quad \sqrt{n}=6 \quad \therefore n=36$$

답 ②

16 모표준편차가 2, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이가 1 이하가 되려면

$$2\cdot3\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}\le1, \quad \sqrt{n}\ge12 \quad \therefore n\ge144$$

따라서 n의 최솟값은 144이다. 답 144

17 모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 36일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=\frac{2\sigma}{3}$$

표본의 크기가 n일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$$

즉 $\frac{2\sigma}{3}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$$\sqrt{n}=9 \qquad \therefore n=81$$

답 81

18 모표준편차를 σ, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 표본의 크기가 25일 때, 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$l=2\cdot k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}k\sigma$$

표본의 크기가 n일 때, 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$\frac{l}{2}=2\cdot k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}}k\sigma$$

즉 $\frac{2}{5}k\sigma=2\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}k\sigma$이므로

$$\sqrt{n}=10 \qquad \therefore n=100$$

답 ③

$l=2\cdot\frac{l}{2}$

19 표본평균의 값을 $\bar{x}$라 하면 모표준편차가 4, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-2\cdot\frac{4}{\sqrt{64}}\le m\le\bar{x}+2\cdot\frac{4}{\sqrt{64}}$$

$$-1\le m-\bar{x}\le1 \qquad \therefore |m-\bar{x}|\le1$$

따라서 모평균과 표본평균의 차의 최댓값은 1이다.

답 1

20 표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 50, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-2\cdot\frac{50}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+2\cdot\frac{50}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{100}{\sqrt{n}}\le m-\bar{x}\le\frac{100}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m-\bar{x}|\le\frac{100}{\sqrt{n}}$$

이때 $|m-\bar{x}|\le5$가 되어야 하므로

$$\frac{100}{\sqrt{n}}\le5, \quad \sqrt{n}\ge20 \quad \therefore n\ge400$$

따라서 n의 최솟값은 400이다. 답 400

21 표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 35, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-3\cdot\frac{35}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+3\cdot\frac{35}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{105}{\sqrt{n}}\le m-\bar{x}\le\frac{105}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m-\bar{x}|\le\frac{105}{\sqrt{n}}$$

모평균과 표본평균의 차가 15 이하가 되어야 하므로

$$\frac{105}{\sqrt{n}}\le15, \quad \sqrt{n}\ge7 \quad \therefore n\ge49$$

따라서 n의 최솟값은 49이다. 답 ③

22 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는 다음과 같다.

① $2\cdot2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=\sigma$ ② $2\cdot3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=\frac{3\sigma}{2}$

③ $2\cdot2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=\frac{2\sigma}{3}$ ④ $2\cdot3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=\sigma$

⑤ $2\cdot2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{64}}=\frac{\sigma}{2}$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ②이다. 답 ②

베쎈TIP

보기에서 표본의 크기가 같거나 신뢰도가 같으므로 이를 이용하여 신뢰구간의 길이를 비교할 수 있다.

①, ②와 ③, ④는 각각 표본의 크기가 같고 신뢰도가 다르다. 표본의 크기가 같을 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이가 길어지므로 ①보다 ②, ③보다 ④의 신뢰구간의 길이가 길다.

또 ①, ③, ⑤와 ②, ④는 각각 신뢰도가 같고 표본의 크기가 다르다. 신뢰도가 같을 때, 표본의 크기가 작아지면 신뢰구간의 길이가 길어지므로 ①, ③, ⑤ 중 ①의 신뢰구간의 길이가 가장 길고, ④보다 ②의 신뢰구간의 길이가 길다.

베이직쎈 BOX

23 표본의 크기를 n, $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

표본의 크기를 $4n$이라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}=2k\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}=k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 표본의 크기를 4배 하면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{2}$배가 된다. 답 $\frac{1}{2}$배

$k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\cdot 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

24 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 추정한 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)\quad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ. ㉠에서 n의 값이 일정할 때, k의 값이 작아지면 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값도 작아지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄴ. ㉠에서 k의 값이 일정할 때, n 대신 $9n$을 대입하면

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{9n}}=2k\frac{\sigma}{3\sqrt{n}}$$

따라서 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{3}$배가 된다.

ㄷ. ㉠에서 k의 값이 작아지고 n의 값이 커지면 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 작아지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 147쪽

01 전략 모평균이 m, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이면 $E(\overline{X})=m$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 모평균이 18이므로

$$E(\overline{X})=18$$

이때 $E(\overline{X})=\frac{n}{2}$이므로

$$\frac{n}{2}=18 \qquad \therefore n=36$$

모표준편차가 a, 표본의 크기가 36이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{a}{\sqrt{36}}=\frac{a}{6}$$

이때 $\sigma(\overline{X})=\frac{1}{3}$이므로

$$\frac{a}{6}=\frac{1}{3} \qquad \therefore a=2$$

답 ①

02 전략 먼저 주어진 모집단의 확률분포를 표로 나타낸다.

풀이 임의로 1개의 택배 상자를 택할 때, 택한 상자의 무게를 X kg이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}=3$,

$E(X^2)=2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{2}+4^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{19}{2}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{19}{2}-3^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 표본의 크기가 10이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

답 ④

03 전략 모집단이 정규분포를 따르지 않아도 표본의 크기가 충분히 크면 표본평균은 근사적으로 정규분포를 따름을 이용한다.

풀이 표본의 크기 150은 충분히 큰 수이므로 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $N\left(m,\ \frac{5^2}{150}\right)$, 즉 $N\left(m,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

따라서 $m=60$, $k=\frac{1}{6}$이므로

$$mk=10$$

답 ③

04 전략 먼저 표본평균이 따르는 정규분포를 구하고, 표준화하여 확률을 구한다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(900,\ 40^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(900,\ \frac{40^2}{64}\right)$, 즉 $N(900,\ 5^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-900}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(895\le\overline{X}\le905)\\&=P\left(\frac{895-900}{5}\le Z\le\frac{905-900}{5}\right)\\&=P(-1\le Z\le1)\\&=2P(0\le Z\le1)\\&=2\times0.3413=0.6826\end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}&P(-1\le Z\le1)\\&=P(-1\le Z\le0)\\&\quad+P(0\le Z\le1)\\&=2P(0\le Z\le1)\end{aligned}$$

05 전략 두 확률변수 X, $\overline{X}$를 각각 표준화한 후 주어진 등식을 만족시키는 k의 값을 구한다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $N(75,\ 12^2)$을 따르므로 $Z_1=\frac{X-75}{12}$로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

07 통계적 추정

베이직쎈 BOX

또 표본평균 $\overline{X}$가 정규분포 $\mathrm{N}\left(75,\ \dfrac{12^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(75,\ 2^2)$을 따르므로 $Z_2=\dfrac{\overline{X}-75}{2}$로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 105)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_1\ge \frac{105-75}{12}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge \frac{k-75}{2}\right)$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(Z_1\ge \frac{5}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge \frac{k-75}{2}\right)$$

두 확률변수 Z_1, Z_2가 모두 표준정규분포를 따르므로 $\dfrac{5}{2}=\dfrac{k-75}{2}$

따라서 $\dfrac{5}{2}=\dfrac{k-75}{2}$이므로 $\quad k-75=5$

$\therefore k=80$ 답 ⑤

06 전략 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이고 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$일 때, 모평균에 대한 신뢰도 $\alpha\ \%$의 신뢰구간은 $\overline{x}-k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

풀이 표본평균이 20, 모표준편차가 18, 표본의 크기가 81이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$20-2.58\times\frac{18}{\sqrt{81}}\le m\le 20+2.58\times\frac{18}{\sqrt{81}}$$

$$20-5.16\le m\le 20+5.16$$

$$\therefore 14.84\le m\le 25.16$$

따라서 $\alpha=14.84$, $\beta=25.16$이므로

$$5\alpha+10\beta=74.2+251.6$$
$$=325.8$$ 답 ④

07 전략 $\mathrm{P}(|Z|\le k_1)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z|\le k_2)=0.68$을 만족시키는 k_1, k_2의 값을 이용한다.

풀이 $\mathrm{P}(|Z|\le 2.0)=2\times 0.475=0.95$이므로 모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 n일 때, 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$l=2\cdot 2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$

또 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.0)=2\times 0.34=0.68$이므로 모평균에 대한 신뢰도 68 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot 1\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}l$$

$\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}l$

답 ④

08 전략 신뢰구간의 길이를 n을 사용하여 나타낸 후 주어진 조건을 만족시키도록 부등식을 세운다.

풀이 모표준편차가 4, 표본의 크기가 n이므로 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이가 6 이하가 되려면

$$2\cdot 3\cdot\frac{4}{\sqrt{n}}\le 6,\qquad \sqrt{n}\ge 4$$

$$\therefore n\ge 16$$

따라서 n의 최솟값은 16이다. 답 ③

09 전략 주어진 모표준편차와 $\sigma(\overline{X})\ge 0.1$임을 이용하여 n에 대한 부등식을 세운다.

풀이 모표준편차가 3, 표본의 크기가 n이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{3}{\sqrt{n}}$$

이때 $\sigma(\overline{X})\ge 0.1$이므로

$$\frac{3}{\sqrt{n}}\ge 0.1,\qquad \sqrt{n}\le 30$$

$$\therefore n\le 900$$

따라서 n의 최댓값은 900이다. 답 900

10 전략 확률의 총합은 1임을 이용하여 a의 값을 구한 후 $\mathrm{V}(X)$를 이용하여 $\mathrm{V}(\overline{X})$를 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+a+a=1,\qquad 2a=\frac{2}{9}$$

$$\therefore a=\frac{1}{9}$$ ⋯ ❶

따라서

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{9}=1,$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{4}{9}+2^2\cdot\frac{1}{9}+3^2\cdot\frac{1}{9}=\frac{17}{9}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{17}{9}-1^2=\frac{8}{9}$$ ⋯ ❷

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{8}{9}}{4}=\frac{2}{9}$$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{2}{9}$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷	$\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	40 %
❸	$\mathrm{V}(\overline{X})$를 구할 수 있다.	40 %

11 전략 크기가 9인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 표본의 합이 Y이므로 $Y=9\overline{X}$임을 이용한다.

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 9^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(15,\ \dfrac{9^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(15,\ 3^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-15}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $Y=9\overline{X}$이므로

$$\mathrm{P}(Y\ge 189)=\mathrm{P}(9\overline{X}\ge 189)$$
$$=\mathrm{P}(\overline{X}\ge 21)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{21-15}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.4772$$
$$=0.0228$$ 답 0.0228

베이직쎈 BOX

12 전략 $\overline{X}$를 표준화하여 주어진 확률을 Z의 확률로 나타낸 후 그 확률을 만족시키는 n의 값을 구한다.

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(45,\ \frac{10^2}{n}\right)$을 따른다. ⋯ ❶

$Z=\frac{\overline{X}-45}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(42\le\overline{X}\le48)=0.4514$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{42-45}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{48-45}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)=0.4514$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{3\sqrt{n}}{10}\le Z\le\frac{3\sqrt{n}}{10}\right)=0.4514$$

$$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3\sqrt{n}}{10}\right)=0.4514$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3\sqrt{n}}{10}\right)=0.2257$$ ⋯ ❷

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le0.6)=0.2257$이므로

$$\frac{3\sqrt{n}}{10}=0.6,\qquad \sqrt{n}=2$$

$$\therefore\ n=4$$ ⋯ ❸

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30 %
❷	$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3\sqrt{n}}{10}\right)=0.2257$임을 알 수 있다.	50 %
❸	n의 값을 구할 수 있다.	20 %

13 전략 주어진 신뢰구간의 길이를 이용하여 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값을 구한 후 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이고 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 39.2이므로

$$2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=39.2$$

$$\therefore\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=10$$ ⋯ ❶

또 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따른다. ⋯ ❷

$Z=\frac{\overline{X}-m}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le m+19.6)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{(m+19.6)-m}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le1.96)\\&=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.96)\\&=0.5+\frac{1}{2}\mathrm{P}(|Z|\le1.96)\\&=0.5+\frac{1}{2}\times0.95\\&=0.975\end{aligned}$$ ⋯ ❸

$\mathrm{P}(|Z|\le1.96)$
$=\mathrm{P}(-1.96\le Z\le1.96)$
$=\mathrm{P}(-1.96\le Z\le0)$
$\quad+\mathrm{P}(0\le Z\le1.96)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le1.96)$
이므로
$\mathrm{P}(0\le Z\le1.96)$
$=\frac{1}{2}\mathrm{P}(|Z|\le1.96)$

답 0.975

단계	채점 기준	비율
❶	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	$\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30 %
❸	$\mathrm{P}(\overline{X}\le m+19.6)$을 구할 수 있다.	40 %

14 전략 신뢰구간을 이용하여 모평균과 표본평균의 차에 대한 부등식을 세운다.

풀이 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ |m-\overline{x}|\le\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 모평균과 표본평균의 차의 최댓값은 $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$$\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{3}\sigma,\qquad \sqrt{n}=9$$

모표준편차의 $\frac{1}{3}$

$$\therefore\ n=81$$

답 81

07 통계적 추정

MEMO