Solution

Lecture Book

I 순열과 조합

II 확률

III 통계

Work Book

I 순열과 조합

II 확률

III 통계

빠른 정답 찾기 Lecture Book

01 여러 가지 순열

6쪽 Lecture 01 01 120 02 720 03 70 04 756
05 12 06 8, 7, 2, 2, 10080 07 360

7쪽 유형 Q+Q 01 ① 02 144 03 ③ 04 ④
05 3600 06 ② 07 840 08 12 09 ⑤ 10 40
11 240 12 ②

9쪽 Lecture 02 01 81 02 343 03 256 04 27
05 11 06 4 07 3 08 4 09 243 10 216
11 60 12 630 13 3360 14 35

10쪽 유형 Q+Q 01 ⑤ 02 50 03 ④ 04 351
05 32 06 ① 07 ③ 08 504 09 80 10 ⑤
11 720 12 7560 13 ② 14 108 15 ③ 16 3360
17 90 18 ⑤ 19 ① 20 66

13쪽 중단원 마무리 01 720 02 192 03 ② 04 180
05 ② 06 486 07 340 08 ③ 09 275 10 ⑤
11 20 12 ⑤ 13 450 14 5 15 ④ 16 40
17 ① 18 ⑤

02 중복조합과 이항정리

16쪽 Lecture 03 01 15 02 1 03 36 04 462
05 3 06 6 07 3 08 8 09 120 10 28
11 ㄱ 12 ㄷ 13 ㄴ 14 ㄹ

17쪽 유형 Q+Q 01 502 02 ② 03 ④ 04 ⑤
05 210 06 ③ 07 ⑤ 08 8 09 34 10 ②
11 ④ 12 280 13 ① 14 20 15 ⑤

21쪽 Lecture 04 01 $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$
02 $a^4-4a^3+6a^2-4a+1$
03 $32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5$
04 $x^6+6x^4+15x^2+20+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}$ 05 60 06 28
07 -720 08 6 09 256 10 0 11 512 12 256
13 5 14 7
15 2, 3, 6, 4, 10, 10, 5, $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$
16 $x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243$
17 $x^4-8x^3y+24x^2y^2-32xy^3+16y^4$ 18 ${}_5C_4$ 19 ${}_7C_4$ 20 ${}_9C_2$
21 ${}_6C_3$

22쪽 유형 Q+Q 01 ③ 02 8 03 ① 04 321
05 ③ 06 -1 07 136 08 ① 09 ③ 10 8
11 ③ 12 127 13 ② 14 ③

24쪽 중단원 마무리 01 9 02 ③ 03 285 04 28
05 ④ 06 ③ 07 84 08 115 09 ⑤ 10 ③
11 수요일 12 ④ 13 2 14 21 15 ② 16 ①
17 51 18 32

03 확률의 뜻과 활용

29쪽 Lecture 05 01 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
02 {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {10}, {11}, {12}
03 {2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12} 04 {3}
05 {1, 4, 6, 8, 9, 10, 12} 06 {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11}
07 A와 B, C와 A 08 $\frac{1}{8}$ 09 $\frac{3}{8}$ 10 $\frac{4}{5}$ 11 $\frac{1}{3}$
12 $\frac{2}{5}$ 13 $\frac{1}{2}$ 14 $\frac{3}{7}$ 15 1 16 0

30쪽 유형 Q+Q 01 ⑤ 02 ㄱ 03 4 04 ③
05 $\frac{7}{36}$ 06 ② 07 $\frac{1}{10}$ 08 ③ 09 ② 10 $\frac{1}{7}$
11 $\frac{1}{4}$ 12 ⑤ 13 ⑤ 14 $\frac{1}{4}$ 15 $\frac{15}{28}$ 16 ②
17 8 18 $\frac{8}{15}$ 19 ② 20 $1-\frac{\pi}{4}$ 21 ④ 22 ①

34쪽 Lecture 06 01 $\frac{7}{18}$ 02 $\frac{1}{4}$ 03 $\frac{5}{7}$ 04 $\frac{17}{30}$
05 $\frac{1}{9}$ 06 $\frac{5}{8}$ 07 $\frac{3}{7}$ 08 $\frac{4}{9}$ 09 $\frac{9}{10}$

35쪽 유형 Q+Q 01 $\frac{1}{12}$ 02 ③ 03 ③ 04 $\frac{3}{50}$

05 ① 06 $\frac{5}{7}$ 07 ④ 08 $\frac{2}{3}$ 09 ⑤ 10 ①

11 $\frac{51}{55}$

37쪽 중단원 마무리 01 ③ 02 64 03 ① 04 $\frac{1}{15}$

05 ② 06 $\frac{8}{27}$ 07 $\frac{1}{4}$ 08 $\frac{2}{7}$ 09 ⑤ 10 $\frac{7}{12}$

11 ⑤ 12 ② 13 $\frac{8}{15}$ 14 23 15 ⑤ 16 ①

17 ③

04 조건부확률

40쪽 Lecture 07 01 $\frac{5}{16}$ 02 $\frac{1}{2}$ 03 $\frac{1}{2}$ 04 $\frac{1}{6}$

05 $\frac{1}{3}$ 06 $\frac{2}{7}$ 07 $\frac{4}{7}$ 08 $\frac{4}{9}$ 09 $\frac{3}{8}$ 10 $\frac{1}{6}$

41쪽 유형 Q+Q 01 ⑤ 02 $\frac{5}{8}$ 03 $\frac{1}{9}$ 04 $\frac{3}{10}$

05 $\frac{7}{11}$ 06 ② 07 $\frac{12}{19}$ 08 ④ 09 $\frac{3}{5}$ 10 ③

11 $\frac{5}{11}$ 12 $\frac{16}{31}$

43쪽 Lecture 08 01 $\frac{3}{4}$ 02 $\frac{3}{5}$ 03 종속 04 0.08

05 0.2 06 0.32 07 0.6 08 $\frac{2}{3}$ 09 $\frac{4}{9}$ 10 $\frac{96}{625}$

44쪽 유형 Q+Q 01 ㄱ, ㄴ, ㄷ 02 ⑤ 03 16

04 ③ 05 $\frac{3}{10}$ 06 $\frac{13}{16}$ 07 ⑤ 08 $\frac{1}{2}$ 09 $\frac{624}{625}$

10 ⑤ 11 $\frac{21}{64}$ 12 ②

46쪽 중단원 마무리 01 $\frac{2}{3}$ 02 ⑤ 03 72 04 $\frac{1}{4}$

05 ④ 06 ③ 07 ⑤ 08 20 09 ㄱ, ㄴ, ㄷ

10 ② 11 8 12 252 13 $\frac{2}{5}$ 14 ① 15 $\frac{117}{125}$

16 ④ 17 ①

05 확률변수와 확률분포

53쪽 Lecture 09 01 0, 1, 2 02 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

03 0, 1, 2, 3

04 (1) 0, 1, 2 (2)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

05

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

06 (1) $P(X=x)=\frac{{}_3C_x \cdot {}_4C_{3-x}}{{}_7C_3}$ $(x=0, 1, 2, 3)$

(2)

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

07 $a=\frac{1}{8}$, $b=1$ 08 $\frac{3}{8}$ 09 $\frac{3}{4}$ 10 $\frac{7}{8}$

11 ㄱ, ㄷ, ㄹ 12 $\frac{1}{3}$ 13 $\frac{1}{4}$ 14 $\frac{1}{5}$ 15 $\frac{1}{18}$

16 (1) $f(x)=\frac{2}{9}x$ $(0\le x\le 3)$ (2) $\frac{8}{9}$ (3) $\frac{4}{9}$

54쪽 유형 Q+Q 01 $\frac{1}{30}$ 02 $\frac{13}{30}$ 03 $\frac{7}{16}$ 04 $\frac{22}{35}$

05 ㄱ, ㄹ 06 ② 07 $\frac{13}{32}$ 08 2

55쪽 Lecture 10

01 (1)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $E(X)=\frac{2}{3}$, $V(X)=\frac{4}{9}$, $\sigma(X)=\frac{2}{3}$

02 (1) 3 (2) 1 (3) 1 03 500원 04 1 05 $\frac{1}{2}$ 06 $6\sqrt{2}$

07 (1) 평균: $\frac{16}{9}$, 분산: $\frac{68}{81}$, 표준편차: $\frac{2\sqrt{17}}{9}$

(2) 평균: $\frac{4}{3}$, 분산: $\frac{68}{9}$, 표준편차: $\frac{2\sqrt{17}}{3}$

56쪽 유형 Q+Q 01 평균: $\frac{11}{8}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{95}}{8}$ 02 $\frac{5}{9}$

03 ④ 04 $\frac{8}{3}$ 05 ② 06 ③ 07 12 08 ③

09 $\frac{4}{5}$ 10 29 11 -9 12 9 13 ⑤ 14 ③

15 64

59쪽 **중단원 마무리** 01 ⑤ 02 $\frac{5}{6}$ 03 $\frac{2}{15}$ 04 4
05 $\frac{1}{36}$ 06 ② 07 ③ 08 5600원
09 평균: 30점, 표준편차: 5점 10 ⑤ 11 109 12 $2\sqrt{6}$
13 ③ 14 14 15 60

06 이항분포와 정규분포

62쪽 **Lecture 11** 01 이항분포를 따르지 않는다.
02 $\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{5}\right)$
03 (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 5)$ (2) $\frac{45}{512}$
04 $\frac{96}{625}$ 05 $\mathrm{E}(X)=30$, $\mathrm{V}(X)=20$, $\sigma(X)=2\sqrt{5}$
06 $\mathrm{E}(X)=60$, $\mathrm{V}(X)=36$, $\sigma(X)=6$
07 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{21}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

63쪽 **유형** 01 $\frac{11}{32}$ 02 $\frac{26}{27}$ 03 ④ 04 ③
05 108 06 $\mathrm{E}(X)=60$, $\mathrm{V}(X)=10$ 07 ① 08 180

65쪽 **Lecture 12** 01 $\mathrm{N}(1, 3^2)$ 02 $\mathrm{N}(-4, 2^2)$
03 ㄱ, ㄷ 04 $2a$ 05 $b-a$ 06 $a+0.5$ 07 $0.5-b$
08 0.0779 09 0.0548 10 0.5 11 1 12 $Z=\frac{X-18}{3}$
13 0.1574

66쪽 **유형** 01 ③ 02 ② 03 0.1525 04 ⑤
05 52 06 ④ 07 ④ 08 ㄱ, ㄴ 09 0.2417 10 ③
11 ① 12 0.65 13 ④ 14 11 % 15 55 16 477
17 64 18 389점 19 ① 20 600 21 ⑤

70쪽 **Lecture 13** 01 $\mathrm{N}(24, 4^2)$ 02 $\mathrm{N}(720, 12^2)$
03 0.4772 04 0.8185 05 0.1574 06 0.1587 07 0.4987
08 0.1359 09 0.0228 10 0.6826 11 0.9332

71쪽 **유형** 01 ⑤ 02 0.82 03 0.0228 04 ④
05 200 06 ②

72쪽 **중단원 마무리** 01 ① 02 73 03 16 04 18점
05 ③ 06 15 07 ㄷ 08 0.1587 09 ① 10 155
11 ⑤ 12 76.2점 13 ④ 14 A, B, C 15 0.02 16 ⑤
17 ③ 18 ⑤

07 통계적 추정

77쪽 **Lecture 14** 01 ㄱ, ㄴ 02 36 03 30 04 15
05 $\overline{X}=4$, $S^2=8$, $S=2\sqrt{2}$ 06 $\overline{X}=8$, $S^2=4$, $S=2$
07 $\frac{1}{3}$
08

$\overline{X}$	5	6	7	8	9	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

09 $\mathrm{E}(\overline{X})=7$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{3}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{2\sqrt{3}}{3}$
10 $\mathrm{E}(\overline{X})=30$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{4}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{1}{2}$ 11 $\mathrm{N}(300, 3^2)$
12 $Z=\frac{\overline{X}-300}{3}$ 13 0.1587 14 0.1525

78쪽 **유형** 01 147 02 ③
03 $\mathrm{E}(\overline{X})=2$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{10}$ 04 ② 05 ① 06 18
07 0.0228 08 ③ 09 9 10 4 11 ④ 12 ③

80쪽 **Lecture 15** 01 $6.08\le m\le 13.92$ 02 $34.02\le m\le 35.98$
03 $60.65\le m\le 99.35$ 04 $57.26\le m\le 72.74$ 05 $23.08\le m\le 30.92$
06 $21.84\le m\le 32.16$ 07 7.84 08 10.32

81쪽 **유형** 01 $56.04\le m\le 59.96$ 02 92
03 $38\le m\le 46$ 04 1 05 64 06 ⑤ 07 0.86
08 11.76 09 ① 10 256 11 ④ 12 ③ 13 ①
14 144 15 ⑤ 16 ②

84쪽 **중단원 마무리** 01 ① 02 ③ 03 26 04 ②
05 16 06 ③ 07 30 08 ② 09 12 10 100
11 ④ 12 92 13 ③ 14 49 15 ③ 16 ②

빠른 정답 찾기 **Work Book**

01 여러 가지 순열

W 2쪽	**01** ④	**02** 7	**03** ③	**04** 12	**05** ②
06 12	**07** 144	**08** ①	**09** 840	**10** ④	**11** 240
12 30	**13** ②	**14** 30	**15** ①	**16** ④	**17** 8640
18 125	**19** ③	**20** ⑤	**21** 255	**22** ③	**23** ②
24 32	**25** ⑤	**26** ③	**27** 259	**28** ②	**29** ④
30 62	**31** ③	**32** 48	**33** ②	**34** ④	**35** 24
36 735	**37** ①	**38** ③	**39** 110	**40** 1440	**41** ⑤
42 672	**43** ④	**44** 70	**45** ②	**46** 28	**47** ①
48 90					

W 10쪽 **도전!** 수능 기출

01 40 **02** 260 **03** ⑤ **04** 40

02 중복조합과 이항정리

W 11쪽	**01** 36	**02** ④	**03** ③	**04** 49	**05** ②
06 10	**07** ①	**08** 24	**09** ②	**10** ②	**11** ③
12 164	**13** ④	**14** 203	**15** 300	**16** ②	**17** 220
18 32	**19** ③	**20** ④	**21** 2	**22** ④	**23** ②
24 41	**25** 13	**26** -14	**27** ③	**28** ③	**29** 10
30 ③	**31** ⑤	**32** 20	**33** 10	**34** ④	**35** ④
36 ①	**37** 16	**38** 494	**39** ④		

W 17쪽 **도전!** 수능 기출

01 114 **02** 218 **03** ⑤ **04** ③

03 확률의 뜻과 활용

W 18쪽	**01** ③	**02** ④	**03** ㄴ, ㄷ	**04** ①	**05** 4
06 ②	**07** $\frac{1}{9}$	**08** ②	**09** $\frac{1}{6}$	**10** ⑤	**11** $\frac{1}{3}$
12 ④	**13** $\frac{2}{15}$	**14** $\frac{3}{5}$	**15** ①	**16** $\frac{1}{3}$	**17** ④
18 ③	**19** $\frac{2}{5}$	**20** ④	**21** 36회	**22** 625	**23** ⑤
24 $\frac{4}{9}$	**25** $\frac{3}{4}$	**26** $\frac{35}{36}$	**27** ①	**28** $\frac{2}{3}$	**29** ⑤
30 $\frac{1}{18}$	**31** ②	**32** $\frac{15}{7}$	**33** ③	**34** $\frac{1}{2}$	**35** ②
36 4	**37** $\frac{4}{5}$	**38** ⑤	**39** $\frac{13}{25}$	**40** ④	**41** ①
42 $\frac{25}{32}$					

W 25쪽 **도전!** 수능 기출

01 ④ **02** ① **03** ④ **04** 19

04 조건부확률

W 26쪽	**01** $\frac{2}{5}$	**02** $\frac{1}{2}$	**03** ③	**04** $\frac{3}{7}$	**05** ⑤
06 ②	**07** $\frac{9}{13}$	**08** ③	**09** $\frac{3}{10}$	**10** ④	**11** 21
12 ④	**13** 0.74	**14** ②	**15** $\frac{1}{6}$	**16** $\frac{20}{27}$	**17** $\frac{2}{3}$
18 ③	**19** ③	**20** 40	**21** ②	**22** 112	**23** ②
24 $\frac{3}{7}$	**25** $\frac{9}{16}$	**26** $\frac{1}{2}$	**27** ①	**28** $\frac{10}{81}$	**29** ③
30 $\frac{5}{16}$	**31** $\frac{81}{125}$	**32** ③			

W 31쪽 **도전!** 수능 기출

01 46 **02** ④ **03** ② **04** ①

05 확률변수와 확률분포

W 32쪽 01 $\frac{1}{2}$ 02 ③ 03 $\frac{26}{45}$ 04 $\frac{5}{8}$ 05 ⑤

06 ④ 07 3 08 $\frac{1}{2}$ 09 ⑤ 10 ③ 11 $\frac{1}{2}$

12 $\frac{21}{46}$ 13 $\frac{\sqrt{19}}{4}$ 14 $\frac{29}{36}$ 15 ④ 16 3 17 ②

18 $\frac{14}{25}$ 19 ④ 20 7 21 2000 22 ②

23 평균: 1170원, 표준편차: 70원 24 $\frac{\sqrt{17}}{2}$ 25 4

26 (1) $\frac{13}{2}$ (2) 23 27 ④ 28 ⑤ 29 ① 30 7

31 $27\sqrt{3}$ 32 161 33 π 34 ⑤

W 38쪽 **도전!** 수능 기출

01 ① 02 20 03 10

06 이항분포와 정규분포

W 39쪽 01 $\frac{112}{243}$ 02 ③ 03 $\frac{7}{16}$ 04 ④ 05 0.177

06 460 07 1 08 ② 09 ③ 10 6 11 ⑤

12 80 13 ① 14 70 15 ② 16 23 17 ④

18 ㄱ, ㄴ, ㄷ 19 ② 20 0.1815 21 29 22 $c<b<a$

23 13 24 ② 25 ③ 26 ② 27 0.0668 28 8

29 ④ 30 ⑤ 31 ③ 32 0.3753 33 0.02 34 186

35 15740 36 ② 37 46개 38 4.1 kg 39 16.6 40 174

41 65 42 ③ 43 0.0013 44 ① 45 0.0228 46 0.6915

47 ⑤ 48 81

W 47쪽 **도전!** 수능 기출

01 47 02 ① 03 ② 04 ⑤

07 통계적 추정

W 48쪽 01 ① 02 $\frac{1}{4}$ 03 ④ 04 $\frac{5}{4}$ 05 ①

06 22 07 $\frac{1}{3}$ 08 ㄴ 09 ③ 10 0.02 11 ②

12 0.96 13 0.0013 14 ① 15 11 16 ⑤ 17 5.8

18 ④ 19 $88.24 \le m \le 111.76$ 20 ④ 21 1182

22 $232.26 \le m \le 247.74$ 23 81 24 ③ 25 ⑤ 26 135

27 64 28 256 29 ② 30 96.8 31 ② 32 81

33 36 34 ③ 35 ①

W 54쪽 **도전!** 수능 기출

01 ③ 02 ③ 03 ③ 04 25

Lecture Book

I. 순열과 조합

01 여러 가지 순열

Lecture 01 원순열

6쪽

01 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$ 　　답 120

$n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

02 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$ 　　답 720

원탁에 둘러앉는 전체 인원수는 $3+2+2=7$

03 7명의 선수 중에서 3명을 택하는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

택한 3명의 선수가 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\cdot2=70$ 　　답 70

${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$ (단, $0\le r\le n$)

04 9개의 컵 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_9C_4=126$

택한 4개의 컵을 원형으로 놓는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$126\cdot6=756$ 　　답 756

05 남학생 2명을 한 사람으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

남학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

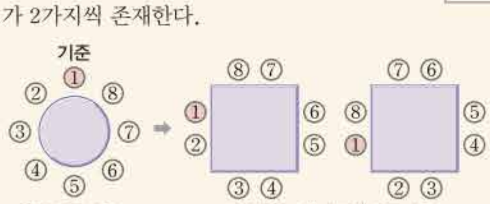
따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2=12$ 　　답 12

06 답 8, 7, 2, 2, 10080

쌤한마디

①을 기준으로 생각할 때, 8명이 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 정사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 ①이 앉는 자리에 따라 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



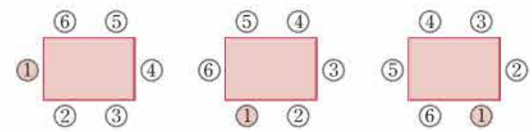
원탁에 둘러앉는 한 가지 경우 　 정사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 서로 다른 2가지 경우

회전하여 일치하지 않는 경우

07 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot3=360$ 　　답 360

표준+발전 유형 Q+Q

7쪽

01 서희와 정민이를 제외한 6명 중에서 4명을 택하는 경우의 수는 　${}_6C_4=15$

택한 4명과 서희와 정민이가 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 　$(6-1)!=5!=120$

$4+2=6$(명)

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot120=1800$ 　　답 ①

02 남학생 대표 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

남학생 대표들 사이사이의 4개의 자리에 여학생 대표 4명이 앉는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$ 　　답 144

여학생 대표를 먼저 앉힌 후 그 사이사이의 자리에 남학생 대표를 앉히는 경우의 수를 구해도 결과는 같다.

03 A의 자리가 결정되면 B의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 구하는 경우의 수는 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$ 　　답 ③

04 사육사 3명을 한 사람으로 생각하면 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

사육사끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot6=144$ 　　답 ④

05 학생 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

학생들 사이사이의 6개의 자리에 선생님 2명이 앉는 경우의 수는 　${}_6P_2=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot30=3600$ 　　답 3600

06 지석이, 형, 동생 세 사람을 한 사람으로 생각하면 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

형과 동생이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot 2=240$ 답 ②

07 가운데 영역을 칠하는 경우의 수는

${}_7C_1=7$

나머지 6개의 영역을 서로 다른 6가지 색으로 칠하는 경우의 수는

가운데 영역에 칠한 색을 제외하면 남은 색은 6가지이다.

$(6-1)!=5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$7\cdot 120=840$ 답 840

08 주황색과 파란색을 한 묶음으로 생각하면 서로 다른 4가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

주황색과 파란색의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 2=12$ 답 12

09 주어진 오각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는

${}_6C_1=6$

5개의 옆면을 서로 다른 5가지 색으로 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 24=144$ 답 ⑤

10 주어진 삼각뿔대의 두 밑면을 칠하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

삼각뿔대의 두 밑면은 크기가 다르므로 순열을 이용한다.

3개의 옆면을 서로 다른 3가지 색으로 칠하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

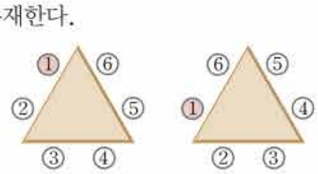
따라서 구하는 경우의 수는

$20\cdot 2=40$ 답 40

11 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



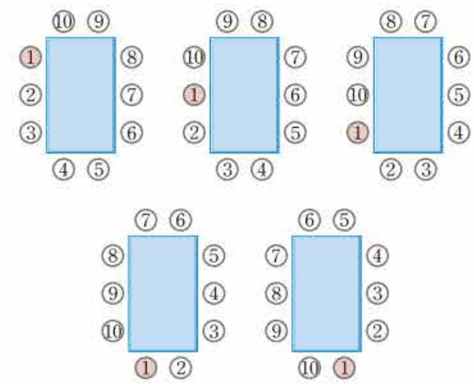
따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot 2=240$ 답 240

12 10명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$9!\cdot 5$ 답 ②

Lecture 02 여러 가지 순열

9쪽

01 ${}_9\Pi_2=9^2=81$ 답 81

02 ${}_7\Pi_3=7^3=343$ 답 343

03 ${}_2\Pi_8=2^8=256$ 답 256

04 ${}_3\Pi_3=3^3=27$ 답 27

05 ${}_n\Pi_2=121$에서

$n^2=11^2 \quad \therefore n=11$ 답 11

06 ${}_n\Pi_n=256$에서

$n^n=4^4 \quad \therefore n=4$ 답 4

07 ${}_5\Pi_r=125$에서

$5^r=5^3 \quad \therefore r=3$ 답 3

08 ${}_3\Pi_r=81$에서

$3^r=3^4 \quad \therefore r=4$ 답 4

09 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$ 답 243

10 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_6\Pi_3=6^3=216$ 답 216

11 6개의 문자 중에서 a가 3개, n이 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\cdot 2!}=60$ 답 60

12 7개의 문자 중에서 o가 2개, i가 2개, n이 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=630$ 답 630

13 8개의 문자 중에서 r가 2개, e가 3개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\cdot 3!}=3360$ 답 3360

14 오른쪽으로 1칸 가는 것을 a, 위쪽으로 1칸 가는 것을 b라 하면 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!\cdot 3!}=35$ 답 35

표준+발전 유형 Q+Q

10쪽

01 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_5=4^5=1024$ 답 ⑤

02 A가 스릴러 또는 로맨스를 택하는 경우의 수는 2이고, B, C가 영화 장르를 택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot 25=50$ 답 50

03 두 깃발을 합해서 6번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_6=2^6=64$ 답 ④

04 세 기호를 합해서 3개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$
세 기호를 합해서 4개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$
세 기호를 합해서 5개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_3\Pi_5=3^5=243$
따라서 구하는 신호의 개수는

$27+81+243=351$ 답 351

05 전체집합 U의 원소 1, 3, 5, 7, 9는 집합 A와 B 중 어느 하나의 원소이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

${}_2\Pi_5=2^5=32$ 답 32

Q BOX

서로 다른 2개의 집합에서 4개를 택하는 중복순열의 수

짝수이려면 일의 자리의 숫자가 짝수이어야 한다.

서로 다른 2개의 집합에서 5개를 택하는 중복순열의 수

06 $n(U)=7$, $n(A\cup B)=6$이므로

$n((A\cup B)^C)=7-6=1$

이때 $A\cap B=\{3, 6\}$이므로 3, 6을 제외한 1, 2, 4, 5, 7 중 하나는 집합 $(A\cup B)^C$의 원소이다.
즉 $(A\cup B)^C$의 원소를 택하는 경우의 수는 5이고, 그 각각의 경우에 대하여 나머지 4개는 집합 $A-B$와 $B-A$ 중 어느 하나의 원소이므로 그 경우의 수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$5\cdot 16=80$ 답 ①

07 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 4, 6의 3개

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$
따라서 구하는 짝수의 개수는

$3\cdot 125=375$ 답 ③

08 (i) 천의 자리의 숫자가 4 또는 5인 경우
백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_6\Pi_3=6^3=216$
즉 천의 자리의 숫자가 4 또는 5인 경우의 수는

$2\cdot 216=432$

(ii) 천의 자리의 숫자가 3인 경우
백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

4, 5의 2개

십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_6\Pi_2=6^2=36$

즉 천의 자리의 숫자가 3인 경우의 수는

$2\cdot 36=72$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$432+72=504$ 답 504

09 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 3, 5, 7의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 X의 원소 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$a={}_4\Pi_3=4^3=64$

$f(3)=3$인 함수의 개수는 Y의 원소 1, 3, 5, 7의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 X의 원소 2, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$b={}_4\Pi_2=4^2=16$

$\therefore a+b=80$ 답 80

쌤 한마디

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때
① X에서 Y로의 함수의 개수
　➡ ${}_n\Pi_m=n^m$
② X에서 Y로의 일대일함수의 개수
　➡ ${}_nP_m$ (단, $n\ge m$)
③ X에서 X로의 일대일대응의 개수
　➡ ${}_mP_m=m!$

10 $f(c)\neq 2$이므로 $f(c)$의 값이 될 수 있는 것은

1, 3, 4, 5의 4개

또 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 X의 원소 a, b, d에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$4\cdot{}_5\Pi_3=4\cdot 5^3=500$ 　답 ⑤

다른 풀이 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 X의 원소 a, b, c, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\Pi_4=5^4=625$

$f(c)=2$인 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 X의 원소 a, b, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 함수의 개수는 　$625-125=500$

11 g, y를 제외한 6개의 문자 e, o, m, e, t, r를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

양 끝에 g, y를 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$360\cdot 2=720$ 　답 720

12 모음 a, i, e를 한 문자 X로 생각하면 7개의 문자 X, h, p, p, n, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\cdot 2!}=1260$

모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$1260\cdot 6=7560$ 　답 7560

13 (i) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

6개의 숫자 2, 3, 3, 4, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는 　$\frac{6!}{2!\cdot 2!}=180$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

6개의 숫자 2, 3, 3, 3, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는 　$\frac{6!}{3!\cdot 2!}=60$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$180+60=240$ 　답 ②

14 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리, 천의 자리에 소수 2, 2, 3, 5를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

나머지 자리에 0, 1, 4, 4를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=9$

따라서 구하는 경우의 수는 　$12\cdot 9=108$ 　답 108

Q BOX

첫 번째 X는 h, 두 번째 X는 z로 바꾸면 된다.

첫 번째 X는 e, 두 번째와 세 번째 X는 o로 바꾸면 된다.

오른쪽으로 1칸 가는 것을 a, 위쪽으로 1칸 가는 것을 b라 하면 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

홀수이려면 일의 자리의 숫자가 홀수, 즉 3 또는 5이어야 한다.

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수

15 h, z의 순서가 정해져 있으므로 구하는 경우의 수는 h, z를 모두 X로 생각하면 7개의 문자 X, o, r, i, X, o, n을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 　$\frac{7!}{2!\cdot 2!}=1260$ 　답 ③

16 3개의 모음 o, o, e의 순서가 정해져 있으므로 구하는 경우의 수는 모음을 모두 X로 생각하면 8개의 문자 f, X, l, l, X, w, X, r를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{8!}{3!\cdot 2!}=3360$ 　답 3360

17 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$

따라서 구하는 경우의 수는 　$6\cdot 15=90$ 　답 90

18 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

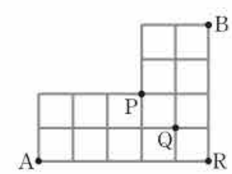
P에서 Q까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 　1

Q에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$

따라서 구하는 경우의 수는 　$3\cdot 1\cdot 10=30$ 　답 ⑤

19 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=10\cdot 6=60$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}\cdot\frac{4!}{3!}=5\cdot 4=20$

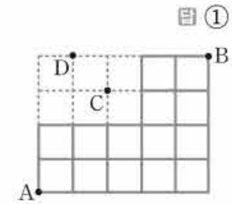
(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$1\cdot 1=1$

이상에서 구하는 경우의 수는

$60+20+1=81$ 　답 ①

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 두 지점 C, D를 잡으면 구하는 경우의 수는 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 C 또는 D를 거쳐 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로



$$\frac{9!}{5!\cdot4!}-\left(\frac{5!}{2!\cdot3!}\cdot\frac{4!}{3!}+\frac{5!}{4!}\cdot1\right)=126-(40+5)$$
$$=81$$

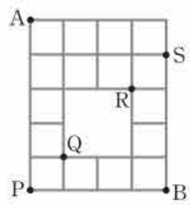
A → C → B로 가는 경우의 수

A → D → B로 가는 경우의 수

쌤한마디

도로망에서 중간 지점 P, Q를 잡아 경우의 수를 구할 때에는 다음 경우가 없도록 주의한다.
① 두 지점 P, Q를 모두 지나는 경우
② 두 지점 P, Q를 한군데도 지나지 않는 경우

20 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → B로 가는 경우의 수는 $1\cdot1=1$

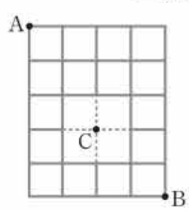
(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는
$$\frac{5!}{4!}\cdot\frac{4!}{3!}=5\cdot4=20$$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는
$$\frac{5!}{3!\cdot2!}\cdot\frac{4!}{3!}=10\cdot4=40$$

(iv) A → S → B로 가는 경우의 수는
$$\frac{5!}{4!}\cdot1=5\cdot1=5$$

이상에서 구하는 경우의 수는
$1+20+40+5=66$ 　답 66

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 지점 C를 잡으면 구하는 경우의 수는 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 C를 거쳐 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로



$$\frac{9!}{5!\cdot4!}-\frac{5!}{2!\cdot3!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot2!}=126-10\cdot6=66$$

중단원 마무리

13쪽

01 전략 A의 자리가 결정되면 H의 자리는 마주 보는 자리에 정해진다.

풀이 A의 자리가 결정되면 H의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 구하는 경우의 수는 7개를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$(7-1)!=6!=720$ 　답 720

02 전략 구하는 경우의 수는 A와 B가 이웃하는 경우의 수에서 A와 B, B와 C가 이웃하는 경우의 수를 뺀 것과 같음을 이용한다.

풀이 A와 B를 한 사람으로 생각하면 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 　$2!=2$
즉 A와 B가 이웃하는 경우의 수는 　$120\cdot2=240$
A와 B, B와 C가 이웃하는 경우는
ABC, CBA의 2가지
각각의 경우에 대하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 　$(5-1)!=4!=24$

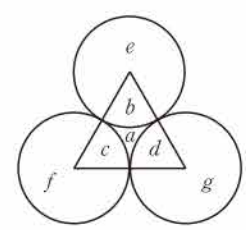
A, B, C 또는 C, B, A를 한 사람으로 생각한다.

즉 A와 B, B와 C가 이웃하는 경우의 수는
$2\cdot24=48$
따라서 구하는 경우의 수는
$240-48=192$ 　답 192

다른 풀이 A와 B를 한 사람으로 생각하고 C를 제외한 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 　$2!=2$
5명 사이사이의 자리 중 B의 옆자리를 제외한 4개의 자리에 C가 앉는 경우의 수는 　4
따라서 구하는 경우의 수는 　$24\cdot2\cdot4=192$

03 전략 정삼각형의 내부를 칠하는 경우의 수를 원순열을 이용하여 구한 후 정삼각형의 외부를 칠하는 경우의 수를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 7개의 영역을 각각 a, b, c, d, e, f, g라 하자.



영역 a에 색을 칠하는 경우의 수는 　7
세 영역 b, c, d에 색을 칠하는 경우의 수는 영역 a에 칠한 색을 제외한 6가지의 색 중에서 3가지를 택하여 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로 　${}_6C_3\cdot(3-1)!=20\cdot2=40$
세 영역 e, f, g에는 네 영역 a, b, c, d에 칠한 색을 제외한 3가지 색을 칠하면 되므로 그 경우의 수는
$3!=6$

세 영역 b, c, d에 칠할 색이 결정되었으므로 이제 회전하여 일치하는 경우는 없다.

따라서 구하는 경우의 수는
$7\cdot40\cdot6=1680$ 　답 ②

04 전략 밑면을 칠하는 경우의 수를 먼저 구한 후 나머지 색으로 옆면을 칠하는 경우의 수를 구한다.

풀이 주어진 사각뿔대의 두 밑면을 칠하는 경우의 수는
${}_6P_2=30$

사각뿔대의 두 밑면은 크기가 다르므로 순열을 이용한다.

4개의 옆면을 서로 다른 4가지 색으로 칠하는 경우의 수는 　$(4-1)!=3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 　$30\cdot6=180$ 　답 180

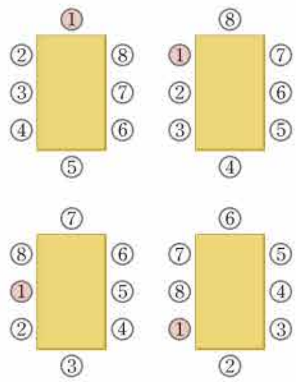
05 전략 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서의 서로 다른 경우의 수를 구한다.

풀이 9명 중에서 8명을 택하는 경우의 수는
${}_9C_8=9$

8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 4가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$9\cdot7!\cdot4=36\cdot7!$ 답 ②

06 전략 우유를 나누어 주는 경우의 수는 순열, 빵을 나누어 주는 경우의 수는 중복순열을 이용하여 구한다.

풀이 서로 다른 우유 3개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 $3!=6$ ···· ❶

서로 다른 빵 4개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$ ···· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot81=486$ ···· ❸

답 486

단계	채점 기준	비율
❶	우유를 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷	빵을 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸	우유와 빵을 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

07 전략 네 기호를 합해서 n개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_4\Pi_n$임을 이용한다.

풀이 네 기호를 합해서 1개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 4

네 기호를 합해서 2개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

네 기호를 합해서 3개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

네 기호를 합해서 4개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

따라서 구하는 신호의 개수는

$4+16+64+256=340$ 답 340

Q BOX

서로 다른 3개의 집합에서 5개를 택하는 중복순열의 수

08 전략 먼저 전체집합 U의 원소 중 $A\cap B$의 원소를 제외한 나머지 원소가 속할 수 있는 집합을 생각한다.

풀이 전체집합 U의 원소 중 $A\cap B$의 원소를 제외한 나머지 5개의 원소는 집합 $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)^C$ 중 어느 하나의 원소이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$ 답 ③

09 전략 3100보다 작은 네 자리 자연수는 1□□□, 2□□□, 30□□ 꼴임을 이용한다.

풀이 (i) 천의 자리의 숫자가 1 또는 2인 경우

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

즉 천의 자리의 숫자가 1 또는 2인 경우의 수는

$2\cdot125=250$ ···· ❶

(ii) 천의 자리의 숫자가 3인 경우

백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0의 1개

십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

즉 천의 자리의 숫자가 3인 경우의 수는

$1\cdot25=25$ ···· ❷

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$250+25=275$ ···· ❸

답 275

단계	채점 기준	비율
❶	천의 자리의 숫자가 1 또는 2인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷	천의 자리의 숫자가 3인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸	3100보다 작은 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

(짝수)×(짝수)=(짝수)
(짝수)×(홀수)=(짝수)
(홀수)×(짝수)=(짝수)
(홀수)×(홀수)=(홀수)

10 전략 치역의 모든 원소의 곱이 홀수이려면 치역의 원소는 모두 홀수이어야 한다.

풀이 치역의 모든 원소의 곱이 홀수이므로 치역의 원소는 모두 홀수이어야 한다.

따라서 Y의 원소 1, 3의 2개에서 중복을 허용하여 7개를 뽑아 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_2\Pi_7=2^7=128$ 답 ⑤

11 전략 B와 B 사이에 A, A 또는 A, C가 오는 경우의 수를 각각 구한다.

풀이 (i) B와 B 사이에 A, A가 오는 경우

B, A, A, B를 한 문자 X로 생각하면 4개의 문자 X, A, A, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ii) B와 B 사이에 A, C가 오는 경우

B, A, C, B를 한 문자 Y로 생각하면 4개의 문자 Y, A, A, A를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

A, C가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉 B와 B 사이에 A, C가 오는 경우의 수는

$4\cdot2=8$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+8=20$ 답 20

12 전략 1 또는 2를 더하여 7이 되는 경우를 먼저 구한다.

풀이 1 또는 2를 더하여 7이 되는 경우는

$1+1+1+1+1+1+1$ 또는

$1+1+1+1+1+2$ 또는

$1+1+1+2+2$ 또는 $1+2+2+2$

(i) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는 1

(ii) 1, 1, 1, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{5!}=6$

(iii) 1, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\cdot2!}=10$

(iv) 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+6+10+4=21$ 답 ⑤

13 전략 주어진 조건을 만족시키도록 홀수와 짝수를 택하는 방법을 생각한다.

풀이 조건 (가)에서 1, 3, 5는 각각 0번 또는 1번 선택하므로 선택할 수 있는 홀수의 개수는

0, 1, 2, 3

조건 (나)에서 2, 4, 6은 각각 0번 또는 2번 선택하므로 선택할 수 있는 짝수의 개수는

0, 2, 4, 6

따라서 선택할 수 있는 다섯 개의 숫자는

(홀수의 개수)+(짝수의 개수)=5 인 경우

홀수 1개, 짝수 4개 또는

홀수 3개, 짝수 2개

의 2가지 경우가 가능하다.

(i) 홀수 1개, 짝수 4개를 선택하는 경우

1, 3, 5 중 하나를 골라 한 번 선택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3C_1=3$

2, 4, 6 중 두 개를 골라 각각 두 번씩 선택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3C_2=3$

이때 선택한 다섯 개의 숫자 중에는 같은 짝수가 2개씩 있으므로 이것을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$

따라서 만들 수 있는 자연수의 개수는

$3\cdot3\cdot30=270$

(ii) 홀수 3개, 짝수 2개를 선택하는 경우

1, 3, 5를 모두 한 번씩 선택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3C_3=1$

2, 4, 6 중 하나를 골라 두 번 선택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3C_1=3$

이때 선택한 다섯 개의 숫자 중에는 같은 짝수가 2개 있으므로 이것을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 만들 수 있는 자연수의 개수는

$1\cdot3\cdot60=180$

(i), (ii)에서 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는

$270+180=450$ 답 450

14 전략 A, B의 순서가 정해져 있으므로 A, B를 모두 X로 생각한 후 n에 대한 식을 세운다.

풀이 A, B의 순서가 정해져 있으므로 A가 B보다 앞에 오도록 세우는 경우의 수는 A, B를 모두 X로 생각하면 n명의 학생 X, X, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{n-2}를 일렬로 세우는 경우의 수와 같다.

첫 번째 X는 A, 두 번째 X는 B로 바꾸면 된다.

즉 $\frac{n!}{2!}=60$이므로

$n!=120$, $\quad n!=5!$

$\therefore n=5$ 답 5

15 전략 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 각각 구하여 곱한다.

풀이 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\cdot2!}=15$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

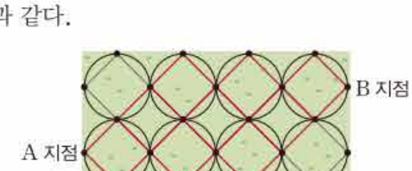
$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

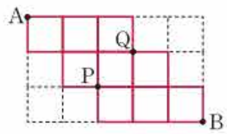
$15\cdot6=90$ 답 ④

16 전략 점을 연결하여 도로망을 만든 후 반드시 거쳐야 하는 지점을 잡는다.

풀이 주어진 산책로에서 접점을 교차점으로 생각하고 각 교차점을 직선으로 이으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 이동할 때 지날 수 있는 부분은 다음 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망에서 빨간색 부분과 같다.

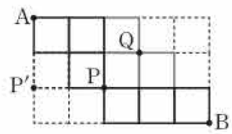


이 부분을 다음 그림과 같이 보기 쉽게 나타내면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 이동하기 위해서는 P 지점 또는 Q 지점을 반드시 지나야 한다.



(i) A → P → B로 가는 경우

A → P로 가는 경우의 수는



$\frac{4!}{2!\cdot 2!}-1$

$=6-1=5$

A → P′ → P로 가는 경우의 수

P → B로 가는 경우의 수는

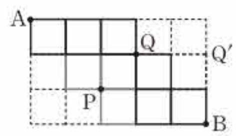
$\frac{4!}{3!}=4$

따라서 그 경우의 수는

$5\cdot 4=20$

(ii) A → Q → B로 가는 경우

A → Q로 가는 경우의 수는



$\frac{4!}{3!}=4$

Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}-1=6-1=5$

Q → Q′ → B로 가는 경우의 수

따라서 그 경우의 수는

$4\cdot 5=20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$20+20=40$ 답 40

17 **전략** **조건 (나)를 만족시키는 치역을 기준으로 경우를 나누어 함수의 개수를 구한다.**

풀이 조건 (가)에 의하여

$f(1)$의 값은 1 또는 2 또는 3 또는 4

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값은 각각

2 또는 3 또는 4

$f(5)$의 값은 3 또는 4

또 조건 (나)에 의하여 치역으로 가능한 경우는

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$

(i) 치역이 $\{1, 2, 3\}$인 경우

$f(1)=1$, $f(5)=3$이고 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값은 각각 2 또는 3이다. 이때 세 함숫값이 모두 3인 경우는 제외해야 하므로 함수의 개수는

치역이 $\{1, 3\}$이 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

${}_2\Pi_3-1=2^3-1=7$

(ii) 치역이 $\{1, 2, 4\}$인 경우

$f(1)=1$, $f(5)=4$이고 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값은 각각 2 또는 4이다. 이때 세 함숫값이 모두 4인 경우는 제외해야 하므로 함수의 개수는

치역이 $\{1, 4\}$가 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

${}_2\Pi_3-1=2^3-1=7$

(iii) 치역이 $\{1, 3, 4\}$인 경우

$f(1)=1$이고 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값은 각각 3 또는 4이다. 이때 네 함숫값이 모두 3 또는 4인 경우는 제외해야 하므로 함수의 개수는

치역이 $\{1, 3\}$ 또는 $\{1, 4\}$가 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$

(iv) 치역이 $\{2, 3, 4\}$인 경우

ⓐ $f(5)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값은 각각 2 또는 3 또는 4이고 치역이 $\{3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$인 경우는 제외해야 하므로 함수의 개수는

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=3$인 경우의 수

${}_3\Pi_4-\{1+({}_2\Pi_4-1)+({}_2\Pi_4-1)\}$

$=3^4-(1+15+15)$

$=81-31=50$

ⓑ $f(5)=4$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값은 각각 2 또는 3 또는 4이고 치역이 $\{4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$인 경우는 제외해야 하므로 함수의 개수는 ⓐ와 마찬가지로 50이다.

이상에서 구하는 함수의 개수는

$7+7+14+50\cdot 2=128$ 답 ①

18 **전략** **0, 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 그 합이 4인 경우를 구한다.**

풀이 나온 눈의 수가 1, 2, 3이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4, 5, 6이면 0점을 얻으므로 0, 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 그 수의 합이 4인 경우는 다음과 같다.

주사위를 한 번 던질 때, 얻을 수 있는 점수

$1+1+1+1$ 또는 $1+1+2+0$ 또는

$1+3+0+0$ 또는 $2+2+0+0$

(i) $1+1+1+1$인 경우

1이 4번 나와야 하므로 순서쌍의 개수는 1

(ii) $1+1+2+0$인 경우

1이 2번, 2가 1번 나오고 4, 5, 6 중 1번 나와야 하므로 순서쌍의 개수는

$3\cdot\frac{4!}{2!}=3\cdot 12=36$

(iii) $1+3+0+0$인 경우

1이 1번, 3이 1번 나오고 4, 5, 6 중 중복을 허용하여 2번 나와야 하므로 순서쌍의 개수는

${}_3\Pi_2\cdot\frac{4!}{2!}=3^2\cdot 12=108$

(iv) $2+2+0+0$인 경우

2가 2번 나오고 4, 5, 6 중 중복을 허용하여 2번 나와야 하므로 순서쌍의 개수는

${}_3\Pi_2\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=3^2\cdot 6=54$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+36+108+54=199$ 답 ⑤

02 중복조합과 이항정리

Lecture 03 중복조합

16쪽

01 ${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=15$ 답 15

02 ${}_8H_0={}_{8+0-1}C_0={}_7C_0=1$ 답 1

03 ${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7=36$ 답 36

04 ${}_6H_6={}_{6+6-1}C_6={}_{11}C_6=462$ 답 462

05 ${}_nH_3={}_5C_3$에서 ${}_{n+2}C_3={}_5C_3$

$n+3-1=n+2$

$n+2=5$ $\therefore n=3$ 답 3

06 ${}_4H_r={}_9C_6$에서 ${}_{3+r}C_r={}_9C_6$

$\therefore r=6$ 답 6

07 ${}_6H_r={}_8C_5$에서 ${}_{5+r}C_r={}_8C_5={}_8C_3$

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

$\therefore r=3$ 답 3

08 ${}_nH_2=36$에서 ${}_{n+1}C_2=36$

$\frac{(n+1)n}{2\cdot1}=36$, $(n+1)n=9\cdot8$

$\therefore n=8$ 답 8

09 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_7={}_{10}C_7=120$ 답 120

10 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_8C_6=28$ 답 28

11 답 ㄱ

12 답 ㄷ

13 답 ㄴ

14 답 ㄹ

표준+발전 유형 Q+Q

17쪽

01 무기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_2H_9={}_{10}C_9=10$

기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 9개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

15~18쪽

$b={}_2\Pi_9=2^9=512$

$\therefore b-a=502$ 답 502

쌤한마디

무기명으로 투표하는 경우의 수

무기명 투표는 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 후보 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합으로 생각할 수 있다. 즉

무기명 투표 ➡ 중복조합, 기명 투표 ➡ 중복순열

02 홀수인 3, 5에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우의 수는

${}_2H_2={}_3C_2=3$

짝수인 2, 4, 6에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 경우의 수는

${}_3H_5={}_7C_5=21$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot21=63$ 답 ②

03 먼저 빨간 구슬, 파란 구슬, 노란 구슬을 각각 1개씩 꺼내고, 나머지 4개의 구슬을 꺼내면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_6C_4=15$ 답 ④

04 먼저 연필을 연필꽂이 A에 2자루, 연필꽂이 B에 3자루를 꽂고, 나머지 5개의 연필을 꽂으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_8C_5=56$ 답 ⑤

05 먼저 세 사람에게 키위와 감을 각각 하나씩 나누어 주면 키위 3개, 감 5개가 남는다.

이때 키위 3개를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_5C_3=10$

감 5개를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5=21$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot21=210$ 답 210

06 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$m={}_3H_9={}_{11}C_9=55$

한편 x, y, z가 자연수일 때 $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$로 놓으면 a, b, c는 음이 아닌 정수이고

$x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$

$x+y+z=9$에서

$(a+1)+(b+1)+(c+1)=9$

$\therefore a+b+c=6$

따라서 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 앞의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

$n={}_3H_6={}_8C_6=28$

$\therefore m+n=83$ 답 ③

07 x, y, z, w가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z+w=0$ 또는 $x+y+z+w=1$ 또는 $x+y+z+w=2$

(i) $x+y+z+w=0$일 때,
순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는
${}_4H_0={}_3C_0=1$

(ii) $x+y+z+w=1$일 때,
순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는
${}_4H_1={}_4C_1=4$

(iii) $x+y+z+w=2$일 때,
순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는
${}_4H_2={}_5C_2=10$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+4+10=15$ 답 ⑤

08 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수가 45이므로

${}_3H_n=45$, ${}_{2+n}C_n={}_{2+n}C_2=45$

$\frac{(2+n)(1+n)}{2\cdot1}=45$

$(2+n)(1+n)=10\cdot9$

$\therefore n=8$ 답 8

09 조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_8={}_{10}C_8=45$

조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는 $(x-3)(y-3)=0$에서

$x=3$ 또는 $y=3$

(i) $x=3$인 경우
$3+y+z=8$에서 $y+z=5$
위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 y, z의 순서쌍 (y, z)의 개수는
${}_2H_5={}_6C_5=6$

(ii) $y=3$인 경우
$x+3+z=8$에서 $x+z=5$
위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, z의 순서쌍 (x, z)의 개수는
${}_2H_5={}_6C_5=6$

(iii) $x=3$, $y=3$인 경우
$3+3+z=8$에서 $z=2$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$45-(6+6-1)=34$ 답 34

Q BOX

$w\geq3$이면 $x+y+z$의 값은 음수가 되므로 x, y, z가 음이 아닌 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

중복을 허용하여 4개를 택하면 $a\leq b\leq c\leq d$를 만족시키는 a, b, c, d가 하나로 정해진다.
예를 들어 4, 5, 6, 7을 택하면 $a=4$, $b=5$, $c=6$, $d=7$로 정해지고, 4, 4, 4, 4를 택하면 $a=b=c=d=4$로 정해진다.

중복을 허용하지 않고 정의역의 원소의 개수만큼 공역의 원소를 택하면 함수가 결정된다.

중복을 허용하여 정의역의 원소의 개수만큼 공역의 원소를 택하면 함수가 결정된다.

10 조건 (가)에서 $x+y+z=9-4w$이고, 조건 (나)에 의하여

$9-4w\leq6$, $-4w\leq-3$

$\therefore w\geq\frac{3}{4}$

즉 주어진 조건을 만족시키는 경우는

$w=1$ 또는 $w=2$

(i) $w=1$인 경우
$x+y+z+4\cdot1=9$에서 $x+y+z=5$
위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
${}_3H_5={}_7C_5=21$

(ii) $w=2$인 경우
$x+y+z+4\cdot2=9$에서 $x+y+z=1$
위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
${}_3H_1={}_3C_1=3$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$21+3=24$ 답 ②

11 4, 5, 6, $\cdots$, 12의 9개에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c, d로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_9H_4={}_{12}C_4=495$ 답 ④

12 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 $|a|$, $|b|$, $|c|$로 정하면 되므로 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는

${}_5H_3={}_7C_3=35$

이때 각각의 $|a|$, $|b|$, $|c|$에 대하여 a, b, c는 각각 음의 정수 또는 양의 정수의 값을 가질 수 있으므로 구하는 순서쌍의 개수는

$35\cdot2\cdot2\cdot2=280$ 답 280

13 구하는 함수 f의 개수는 Y의 원소 6, 7, 8의 3개에서 중복을 허용하여 5개를 뽑아 크거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5=21$ 답 ①

쌤한마디

두 집합 $X=\{1, 2, 3, \cdots, r\}$, $Y=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서

① X의 원소 a, b에 대하여 $a<b$이면 $f(a)<f(b)$인 함수의 개수
→ ${}_nC_r$ (단, $r\leq n$)

② X의 원소 a, b에 대하여 $a<b$이면 $f(a)\leq f(b)$인 함수의 개수
→ ${}_nH_r$

14 조건 (가)에서 $f(2)=3$이므로 조건 (나)에 의하여

$f(1)\le 3\le f(3)\le f(4)$

$f(1)\le 3$에서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는

1, 3의 2개

$3\le f(3)\le f(4)$에서 $f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는

3, 5, 7, 9

즉 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2\cdot 10=20$ 답 20

15 $f(2)$, $f(4)$의 값은 Y의 원소 2, 3, 5, 7의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 2, 4에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

${}_4H_2={}_5C_2=10$

$f(6)$, $f(8)$의 값은 Y의 원소 2, 3, 5, 7의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 X의 원소 6, 8에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 함수의 개수는

$10\cdot 16=160$ 답 ⑤

Lecture 04 이항정리

21쪽

01 $(x+y)^5$

$={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4y+{}_5C_2x^3y^2+{}_5C_3x^2y^3+{}_5C_4xy^4+{}_5C_5y^5$

$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

답 $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

02 $(a-1)^4$

$={}_4C_0a^4+{}_4C_1a^3\cdot(-1)+{}_4C_2a^2\cdot(-1)^2+{}_4C_3a\cdot(-1)^3+{}_4C_4(-1)^4$

$=a^4-4a^3+6a^2-4a+1$

답 $a^4-4a^3+6a^2-4a+1$

03 $(2a-b)^5$

$={}_5C_0(2a)^5+{}_5C_1(2a)^4\cdot(-b)+{}_5C_2(2a)^3\cdot(-b)^2+{}_5C_3(2a)^2\cdot(-b)^3+{}_5C_4(2a)\cdot(-b)^4+{}_5C_5(-b)^5$

$=32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5$

답 $32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5$

04 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$

$={}_6C_0x^6+{}_6C_1x^5\cdot\frac{1}{x}+{}_6C_2x^4\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+{}_6C_3x^3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3+{}_6C_4x^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4+{}_6C_5x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^5+{}_6C_6\left(\frac{1}{x}\right)^6$

$=x^6+6x^4+15x^2+20+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}$

답 $x^6+6x^4+15x^2+20+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}$

05 $(x+2)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_rx^{6-r}2^r$

x^4항은 $r=2$일 때이므로 x^4의 계수는

${}_6C_2\cdot 2^2=15\cdot 4=60$ 답 60

Q BOX: $6-r=4$에서 $r=2$

Q BOX: ${}_6C_r2^r$에 $r=2$를 대입한 값이다.

06 $(a+4b)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_ra^{7-r}(4b)^r={}_7C_r4^ra^{7-r}b^r$

a^6b항은 $r=1$일 때이므로 a^6b의 계수는

${}_7C_1\cdot 4=7\cdot 4=28$ 답 28

07 $(3a-2b)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(3a)^{5-r}(-2b)^r={}_5C_r3^{5-r}(-2)^ra^{5-r}b^r$

a^2b^3항은 $r=3$일 때이므로 a^2b^3의 계수는

${}_5C_3\cdot 3^2\cdot(-2)^3=10\cdot 9\cdot(-8)=-720$

답 -720

08 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^{4-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r(-1)^r\frac{x^{4-r}}{x^r}$

상수항은 $4-r=r$, 즉 $r=2$일 때이므로

${}_4C_2\cdot(-1)^2=6$ 답 6

쌤한마디

08번에서 상수항은 $\frac{x^{4-r}}{x^r}=1$일 때이고, 다음과 같은 거듭제곱의 나눗셈을 이용한다.

$a\ne 0$이고, m, n이 자연수일 때

① $m>n$이면 $a^m\div a^n=a^{m-n}$

② $m=n$이면 $a^m\div a^n=1$

③ $m<n$이면 $a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}$

09 ${}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8=2^8=256$ 답 256

Q BOX: $(1+1)^8=2^8$

10 ${}_6C_0-{}_6C_1+{}_6C_2-{}_6C_3+{}_6C_4-{}_6C_5+{}_6C_6=0$ 답 0

Q BOX: $(1-1)^6=0$

11 ${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10-1}=512$

답 512

12 ${}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9=2^{9-1}=256$ 답 256

13 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$2^n=32=2^5$ $\quad\therefore n=5$ 답 5

14 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

즉 $2^n-1=127$이므로

$2^n=128=2^7$ $\quad\therefore n=7$ 답 7

15 답 2, 3, 6, 4, 10, 10, 5,

$x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$

16 오른쪽 파스칼의 삼각형에서

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
```

$(x+3)^5$

$=x^5+5\cdot x^4\cdot 3$

$+10\cdot x^3\cdot 3^2+10\cdot x^2\cdot 3^3$

$+5\cdot x\cdot 3^4+3^5$

$=x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243$

답 $x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243$

17 오른쪽 파스칼의 삼각형에서

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
```

$(x-2y)^4$

$=x^4+4\cdot x^3\cdot(-2y)$

$+6\cdot x^2\cdot(-2y)^2$

$+4\cdot x\cdot(-2y)^3+(-2y)^4$

$=x^4-8x^3y+24x^2y^2-32xy^3+16y^4$

답 $x^4-8x^3y+24x^2y^2-32xy^3+16y^4$

18 답 ${}_5C_4$

19 ${}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4={}_6C_3+{}_6C_4={}_7C_4$ 답 ${}_7C_4$

20 ${}_7C_2+{}_7C_1+{}_8C_1={}_8C_2+{}_8C_1={}_9C_2$ 답 ${}_9C_2$

21 ${}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3$

$={}_5C_2+{}_5C_3$

$={}_6C_3$ 답 ${}_6C_3$

표준+발전 유형 Q+Q

22쪽

01 $(x+ay)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\,x^{5-r}(ay)^r={}_5C_r\,a^r x^{5-r}y^r$

x^3y^2항은 $r=2$일 때이므로

${}_5C_2\,a^2=160,\quad a^2=16$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$ 답 ③

02 $(x^2+1)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(x^2)^{n-r}1^r={}_nC_r\,x^{2n-2r}$

x^4항은 $2n-2r=4$일 때이므로 $\quad r=n-2$

즉 ${}_nC_{n-2}={}_nC_2=28$이므로

$\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}=28,\quad n(n-1)=8\cdot 7$

$\therefore n=8$ 답 8

03 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=5$, $n=10$을 대입하면

$6^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\cdot 5+{}_{10}C_2\cdot 5^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot 5^{10}$

$\therefore {}_{10}C_1\cdot 5+{}_{10}C_2\cdot 5^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot 5^{10}=6^{10}-1$

답 ①

04 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=20$, $n=36$을 대입하면

21^{36}

$={}_{36}C_0+{}_{36}C_1\cdot 20+{}_{36}C_2\cdot 20^2+\cdots+{}_{36}C_{36}\cdot 20^{36}$

$=1+36\cdot 20+20^2({}_{36}C_2+{}_{36}C_3\cdot 20+\cdots+{}_{36}C_{36}\cdot 20^{34})$

$=721+20^2({}_{36}C_2+{}_{36}C_3\cdot 20+\cdots+{}_{36}C_{36}\cdot 20^{34})$

이때 $20^2({}_{36}C_2+{}_{36}C_3\cdot 20+\cdots+{}_{36}C_{36}\cdot 20^{34})$은 400으로 나누어떨어지므로 21^{36}을 400으로 나눈 나머지는 721을 400으로 나눈 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는 321이다. 답 321

Q BOX

$721=1\cdot 400+321$

05 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r\,x^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6C_r(-1)^r\dfrac{x^{6-r}}{x^r}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $(x^2+x)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항은 x^2과 ㉠의 $\dfrac{1}{x^2}$항이 곱해질 때, x와 ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항이 곱해질 때 나타난다.

Q BOX

$(x^2+x)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$

$=x^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$

$+x\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$

(i) ㉠에서 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $r-(6-r)=2$, 즉 $r=4$일 때이므로

${}_6C_4\cdot(-1)^4\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{15}{x^2}$

Q BOX

$r-(6-r)=2$에서

$r-6+r=2$

$2r=8\quad\therefore r=4$

(ii) ㉠에서 $\dfrac{1}{x}$항은 $r-(6-r)=1$, 즉 $r=\dfrac{7}{2}$일 때이지만 r는 $0\le r\le 6$인 정수이므로 ㉠에서 $\dfrac{1}{x}$항은 존재하지 않는다.

Q BOX

$r-(6-r)=1$에서

$r-6+r=1$

$2r=7\quad\therefore r=\dfrac{7}{2}$

(i), (ii)에서 $(x^2+x)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항은

$x^2\cdot\dfrac{15}{x^2}=15$ 답 ③

06 $(1+3x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(3x)^r={}_5C_r\,3^rx^r$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $(a+x)(1+3x)^5$의 전개식에서 x^4항은 a와 ㉠의 x^4항이 곱해질 때, x와 ㉠의 x^3항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^4항은 $r=4$일 때이므로

$${}_5C_4\cdot 3^4x^4=5\cdot 81\cdot x^4=405x^4$$

(ii) ㉠에서 x^3항은 $r=3$일 때이므로

$${}_5C_3\cdot 3^3x^3=10\cdot 27\cdot x^3=270x^3$$

(i), (ii)에서 $(a+x)(1+3x)^5$의 전개식에서 x^4항은

$$a\cdot 405x^4+x\cdot 270x^3=(405a+270)x^4$$

즉 $405a+270=-135$이므로

$a=-1$ 답 -1

07 $(2+x)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r\,2^{4-r}x^r$$

$(1-x)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_7C_s(-x)^s={}_7C_s(-1)^sx^s$$

즉 $(2+x)^4(1-x)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r\,2^{4-r}x^r\cdot{}_7C_s(-1)^sx^s$$
$$={}_4C_r\cdot{}_7C_s\,2^{4-r}(-1)^sx^{r+s}$$

$r+s=2$를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

따라서 구하는 x^2의 계수는

$${}_4C_0\cdot{}_7C_2\cdot 2^4\cdot(-1)^2+{}_4C_1\cdot{}_7C_1\cdot 2^3\cdot(-1)+{}_4C_2\cdot{}_7C_0\cdot 2^2$$
$$=336-224+24=136$$

답 136

08 $(1+x)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r\,x^r$$

$(a+x)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s\,a^{4-s}x^s$$

즉 $(1+x)^5(a+x)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r\,x^r\cdot{}_4C_s\,a^{4-s}x^s={}_5C_r\cdot{}_4C_s\,a^{4-s}x^{r+s}$$

$r+s=7$을 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$

이므로 x^7의 계수는

$${}_5C_3\cdot{}_4C_4+{}_5C_4\cdot{}_4C_3\cdot a+{}_5C_5\cdot{}_4C_2\cdot a^2$$
$$=6a^2+20a+10$$

따라서 $6a^2+20a+10=74$이므로

$3a^2+10a-32=0$, $(3a+16)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 자연수) 답 ①

09 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$$

즉 주어진 부등식은

$200<2^n-1<1000$ $\therefore 201<2^n<1001$

이때 $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n=8$ 또는 $n=9$

따라서 구하는 합은

$8+9=17$ 답 ③

10 $\dfrac{{}_{18}C_0+{}_{18}C_1+{}_{18}C_2+\cdots+{}_{18}C_{18}}{{}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+\cdots+{}_{11}C_{11}}=\dfrac{2^{18}}{2^{11-1}}=2^8$

$\therefore n=8$ 답 8

QBOX

${}_8C_0+{}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=2^{8-1}$ 이므로 ${}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=2^{8-1}-{}_8C_0$

$0\le r\le 4$, $0\le s\le 7$

$0\le r\le 5$, $0\le s\le 4$

11 먼저 서로 다른 종류의 마카롱 10개 중 r $(r=0, 1, 2, \cdots, 10)$개를 택하고, 나머지 $10-r$개는 같은 종류의 초콜릿을 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}$$
$$=1024$$

답 ③

12 원소의 개수가 n인 부분집합의 개수는

$${}_8C_n$$

따라서 원소의 개수가 짝수인 부분집합의 개수는

$${}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=2^{8-1}-{}_8C_0$$
$$=128-1$$
$$=127$$

답 127

13 ${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4$

$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4$

$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4$

$={}_4C_2+{}_4C_3+{}_5C_4$

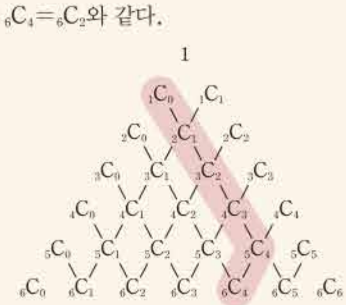
$={}_5C_3+{}_5C_4$

$={}_6C_4$

$={}_6C_2$ 답 ②

쌤 한마디

파스칼의 삼각형에서 각 단계의 첫 번째 또는 마지막 수인 1에서 시작하여 대각선 방향으로 배열된 n개의 수를 더한 값은 그 다음 단계의 첫 번째 또는 마지막 수로부터 n 번째 수와 같다.
이를 파스칼의 삼각형에 표시하면 다음 그림과 같은 모양이 되고, '하키 스틱 패턴'이라 한다.
13번 문제에서 구하는 수의 합은 다음 파스칼의 삼각형에서 ${}_1C_0=1$부터 오른쪽 아래의 대각선 방향으로 ${}_5C_4$까지의 이항계수 5개를 모두 더한 값과 같고, 이 값은 그 다음 단계의 첫 번째 수로부터 5번째 수인 이항계수 ${}_6C_4={}_6C_2$와 같다.



14 ${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3$

$={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3$

$={}_5C_4+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3$

$={}_6C_4+\cdots+{}_9C_3$

$\vdots$

$={}_9C_4+{}_9C_3$

$={}_{10}C_4$

$=210$ 답 ③

중단원 마무리

24쪽

01 전략 $(a+b+c+d)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_n$임을 이용한다.

풀이 $(a+b+c+d)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 a, b, c, d의 4개에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_n={}_{3+n}\mathrm{C}_n={}_{3+n}\mathrm{C}_3=\frac{(3+n)(2+n)(1+n)}{3\cdot2\cdot1}$$

즉 $\dfrac{(3+n)(2+n)(1+n)}{3\cdot2\cdot1}=220$이므로

$(3+n)(2+n)(1+n)=12\cdot11\cdot10$

$\therefore n=9$

답 9

n개의 $(a+b+c+d)$에서 각각 a 또는 b 또는 c 또는 d를 하나씩 택하여 곱한 항을 모두 더한 것이다.

02 전략 구하는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 세 수의 곱이 70 초과인 경우의 수를 뺀 것과 같음을 이용한다.

풀이 4개의 숫자 1, 2, 3, 6에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

세 수의 곱이 70 초과인 경우를 순서쌍으로 나타내면

$(6, 6, 6)$, $(6, 6, 3)$, $(6, 6, 2)$의 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$20-3=17$

답 ③

03 전략 학생 A에게 사탕 1개, 학생 B에게 초콜릿 1개를 먼저 나누어 준 후, 나머지 사탕과 초콜릿을 나누어 주는 경우를 생각한다.

풀이 규칙 (가), (나)에 의하여 학생 A는 사탕을 1개 이상, 학생 B는 초콜릿을 1개 이상 받아야 하므로 학생 A에게 사탕 1개, 학생 B에게 초콜릿 1개를 먼저 나누어 준 후, 남은 사탕 5개와 초콜릿 4개를 규칙 (다)를 만족시키도록 세 학생 A, B, C에게 나누어 주면 된다.

이때 규칙 (가), (나)를 만족시키는 경우의 수에서 규칙 (다)를 만족시키지 않는 경우, 즉 학생 C가 사탕과 초콜릿을 한 개도 받지 못하는 경우의 수를 빼면 된다.

규칙 (가), (나)를 만족시키는 경우의 수는 사탕 5개와 초콜릿 4개를 세 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수이므로

${}_3\mathrm{H}_5\cdot{}_3\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_5\cdot{}_6\mathrm{C}_4=21\cdot15=315$

학생 C가 사탕과 초콜릿을 한 개도 받지 못하는 경우의 수는 사탕 5개와 초콜릿 4개를 두 학생 A, B에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_5\cdot{}_2\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_5\cdot{}_5\mathrm{C}_4=6\cdot5=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$315-30=285$

답 285

04 전략 k가 홀수이면 $k=2t+1$ (t는 음이 아닌 정수)로 놓을 수 있다.

풀이 x, y, z가 홀수이므로 $x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$ (a, b, c는 음이 아닌 정수)로 놓으면

$x+y+z=15$에서

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)=15$

$2a+2b+2c=12$

$\therefore a+b+c=6$ ···· ❶

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$ ···· ❷

답 28

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 방정식을 변형할 수 있다.	50 %
❷	순서쌍의 개수를 구할 수 있다.	50 %

05 전략 1보다 큰 자연수 a, b, c의 곱이 2^n이므로 a, b, c는 모두 2의 거듭제곱 꼴임을 이용한다.

풀이 1보다 큰 자연수 a, b, c에 대하여 $abc=2^n$이므로

$a=2^x$, $b=2^y$, $c=2^z$ (x, y, z는 자연수)

이라 하면 $abc=2^n$에서

$2^x2^y2^z=2^n$, $\quad 2^{x+y+z}=2^n$

$\therefore x+y+z=n$

이때 x, y, z가 자연수이므로

$x-1=p$, $y-1=q$, $z-1=r$

로 놓으면 p, q, r는 음이 아닌 정수이고 $x+y+z=n$에서

$x=p+1$, $y=q+1$, $z=r+1$

$(p+1)+(q+1)+(r+1)=n$

$\therefore p+q+r=n-3$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{n-3}={}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3}={}_{n-1}\mathrm{C}_2$

즉 ${}_{n-1}\mathrm{C}_2=36$이므로

$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2\cdot1}=36$, $\quad (n-1)(n-2)=9\cdot8$

$\therefore n=10$

답 ④

06 전략 구하는 순서쌍의 개수는 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍의 개수에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍의 개수를 뺀 것과 같음을 이용한다.

풀이 조건 (가)의 방정식 $a+b+c=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7=36$ ······ ㉠

조건 (나)에서

$5^a\cdot25^b=5^a\cdot5^{2b}=5^{a+2b}$

이고, 5^{a+2b}이 125의 배수, 즉 5^3의 배수이어야 하므로

$a+2b\ge3$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 ㉠에서 $a+2b<3$인 경우, 즉 $a+2b=0$ 또는 $a+2b=1$ 또는 $a+2b=2$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 뺀 것과 같다.

(i) $a+2b=0$일 때,

순서쌍 (a, b, c)는 $\quad(0, 0, 7)$의 1개

(ii) $a+2b=1$일 때,

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는　$(1,\ 0,\ 6)$의 1개

(iii) $a+2b=2$일 때,

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는　$(2,\ 0,\ 5)$, $(0,\ 1,\ 6)$의 2개

이상에서 $a+2b<3$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$1+1+2=4$

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$36-4=32$　답 ③

07 전략 먼저 조건 (가)의 부등식에 $n=1$, 2를 각각 대입하여 x_1, x_2, x_3에 대한 부등식을 구한다.

풀이 조건 (가)의 부등식에서

$n=1$일 때,　$x_2-x_1\ge 2$

$\therefore x_2\ge x_1+2$　······ ㉠

$n=2$일 때,　$x_3-x_2\ge 2$

$\therefore x_3\ge x_2+2$　······ ㉡

㉠, ㉡에서

$x_3\ge x_2+2\ge (x_1+2)+2$

$\therefore x_1+4\le x_2+2\le x_3$

이때 x_1은 음이 아닌 정수이므로 $4\le x_1+4$이고, 조건 (나)에서 $x_3\le 10$이므로

$x_1\ge 0$

$4\le x_1+4\le x_2+2\le x_3\le 10$

$x_1+4=a$, $x_2+2=b$, $x_3=c$라 하면

$4\le a\le b\le c\le 10$

이므로 구하는 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는 위의 부등식을 만족시키는 정수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같다.

a, b, c의 값은 4, 5, 6, $\cdots$, 10의 7개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c로 정하면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_7\mathrm{H}_3={}_9\mathrm{C}_3=84$　답 84

08 전략 $f(1)$의 값에 따라 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구한다.

풀이 (i) $f(1)=1$인 경우

$f(f(1))=f(1)=1$

조건 (가)에서

$f(f(1))=f(1)=4$

이므로 모순이다.

$\therefore f(1)\ne 1$

(ii) $f(1)=2$인 경우

조건 (가)에 의하여

$f(f(1))=f(2)=4$

조건 (나)에 의하여 $f(3)$, $f(5)$의 값이 될 수 있는 수는　2, 3, 4, 5

즉 $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

$f(4)$의 값이 될 수 있는 수는

1, 2, 3, 4, 5의 5개

따라서 $f(1)=2$인 경우의 함수의 개수는

$10\cdot 5=50$

(iii) $f(1)=3$인 경우

조건 (가)에 의하여

$f(f(1))=f(3)=4$

조건 (나)에 의하여 $f(5)$의 값이 될 수 있는 수는

4, 5의 2개

$f(2)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 각각

1, 2, 3, 4, 5의 5개

따라서 $f(1)=3$인 경우의 함수의 개수는

$2\cdot 5\cdot 5=50$

(iv) $f(1)=4$인 경우

조건 (가)에 의하여

$f(f(1))=f(4)=4$

조건 (나)에 의하여 $f(3)$, $f(5)$의 값이 될 수 있는 수는　4, 5

즉 $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

$f(2)$의 값이 될 수 있는 수는

1, 2, 3, 4, 5의 5개

따라서 $f(1)=4$인 경우의 함수의 개수는

$3\cdot 5=15$

(v) $f(1)=5$인 경우

조건 (가)에 의하여

$f(f(1))=f(5)=4$

$f(1)>f(5)$

이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

이상에서 구하는 함수의 개수는

$50+50+15=115$　답 115

09 전략 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$임을 이용하여 계수가 무리수인 경우를 생각한다.

풀이 $(\sqrt{5}+\sqrt{2}x)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r(\sqrt{5})^{6-r}(\sqrt{2}x)^r={}_6\mathrm{C}_r(\sqrt{5})^{6-r}(\sqrt{2})^r x^r$

$0\le r\le 6$

계수가 무리수이려면 $6-r$, r가 모두 홀수이어야 하므로

6−r, r 중 적어도 하나는 홀수이어야 하는데 6−r, r 중 하나만 홀수인 경우는 없으므로 6−r, r가 모두 홀수이어야 한다.

$r=1$ 또는 $r=3$ 또는 $r=5$

$r=1$일 때,

${}_6\mathrm{C}_1\cdot(\sqrt{5})^5\cdot\sqrt{2}x=150\sqrt{10}x$

$r=3$일 때,

${}_6\mathrm{C}_3\cdot(\sqrt{5})^3\cdot(\sqrt{2})^3x^3=200\sqrt{10}x^3$

$r=5$일 때,

${}_6\mathrm{C}_5\cdot\sqrt{5}\cdot(\sqrt{2})^5x^5=24\sqrt{10}x^5$

따라서 구하는 계수의 합은

$150\sqrt{10}+200\sqrt{10}+24\sqrt{10}=374\sqrt{10}$　답 ⑤

10 전략 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$임을 이용하여 x^k, x^{k+1}의 계수를 각각 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $(x+2)^{19}$의 전개식의 일반항은

$${}_{19}C_r x^r 2^{19-r} = {}_{19}C_r 2^{19-r} x^r$$

x^k항은 $r=k$일 때이므로 x^k의 계수는

$${}_{19}C_k 2^{19-k}$$

x^{k+1}항은 $r=k+1$일 때이므로 x^{k+1}의 계수는

$${}_{19}C_{k+1} 2^{19-(k+1)} = {}_{19}C_{k+1} 2^{18-k}$$

이때 x^k의 계수가 x^{k+1}의 계수보다 커야 하므로

${}_{19}C_k 2^{19-k} > {}_{19}C_{k+1} 2^{18-k}$에서

$${}_{19}C_k \cdot 2 > {}_{19}C_{k+1}$$

$$\frac{19!}{k!(19-k)!} \cdot 2 > \frac{19!}{(k+1)!(18-k)!}$$

양변에 $\frac{k!(18-k)!}{19!}$을 곱한다.

$$\frac{2}{19-k} > \frac{1}{k+1}$$

$$2(k+1) > 19-k \ (\because 19-k>0,\ k+1>0)$$

$$3k > 17 \qquad \therefore k > \frac{17}{3}$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다. 답 ③

11 전략 $(1+x)^n$의 전개식을 이용하여 22^7을 7로 나눈 나머지를 구한다.

풀이 $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n$의 양변에 $x=21$, $n=7$을 대입하면

$$22^7 = {}_7C_0 + {}_7C_1 \cdot 21 + {}_7C_2 \cdot 21^2 + \cdots + {}_7C_7 \cdot 21^7$$
$$= 1 + 7 \cdot 21 + 7 \cdot {}_7C_2 \cdot 63 + \cdots + 7 \cdot {}_7C_7 \cdot 3^7 \cdot 7^6$$
$$= 1 + 7(21 + {}_7C_2 \cdot 63 + \cdots + {}_7C_7 \cdot 3^7 \cdot 7^6)$$

이때 $7(21 + {}_7C_2 \cdot 63 + \cdots + {}_7C_7 \cdot 3^7 \cdot 7^6)$은 7로 나누어떨어지므로 22^7을 7로 나눈 나머지는 1이다.

따라서 오늘로부터 22^7일 후는 수요일이다.

오늘로부터 1일 후와 같은 요일이다.

답 수요일

12 전략 $3x$, $-y$와 $(x+2y)^5$의 전개식에서 어떤 항이 곱해질 때 x^3y^3항이 나타나는지 생각한다.

풀이 $(x+2y)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r}(2y)^r = {}_5C_r 2^r x^{5-r} y^r \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(3x-y)(x+2y)^5$의 전개식에서 x^3y^3항은 $3x$와 ㉠의 x^2y^3항이 곱해질 때, $-y$와 ㉠의 x^3y^2항이 곱해질 때 나타난다.

$$(3x-y)(x+2y)^5 = 3x(x+2y)^5 - y(x+2y)^5$$

(i) ㉠에서 x^2y^3항은 $r=3$일 때이므로

$${}_5C_3 \cdot 2^3 x^2 y^3 = 80x^2y^3$$

(ii) ㉠에서 x^3y^2항은 $r=2$일 때이므로

$${}_5C_2 \cdot 2^2 x^3 y^2 = 40x^3y^2$$

(i), (ii)에서 $(3x-y)(x+2y)^5$의 전개식에서 x^3y^3항은

$$3x \cdot 80x^2y^3 - y \cdot 40x^3y^2 = 200x^3y^3$$

이므로 구하는 계수는 200이다. 답 ④

13 전략 $(a-x)^3(2+x)^6$의 전개식의 일반항은 $(a-x)^3$과 $(2+x)^6$의 전개식의 일반항을 곱하여 구한다.

풀이 $(a-x)^3$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r a^{3-r}(-x)^r = {}_3C_r a^{3-r}(-1)^r x^r$$

$(2+x)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_s 2^{6-s} x^s$$

즉 $(a-x)^3(2+x)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r a^{3-r}(-1)^r x^r \cdot {}_6C_s 2^{6-s} x^s$$
$$= {}_3C_r \cdot {}_6C_s a^{3-r}(-1)^r 2^{6-s} x^{r+s}$$

$r+s=1$을 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$0 \le r \le 3$, $0 \le s \le 6$

$$(0, 1), (1, 0)$$

이므로 x의 계수는

$${}_3C_0 \cdot {}_6C_1 \cdot a^3 \cdot 2^5 + {}_3C_1 \cdot {}_6C_0 \cdot a^2 \cdot (-1) \cdot 2^6$$
$$= 192a^3 - 192a^2$$

따라서 $192a^3 - 192a^2 = 768$이므로

$$a^3 - a^2 - 4 = 0, \qquad (a-2)(a^2+a+2) = 0$$

$$a^2+a+2 = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \ge \frac{7}{4}$$

$$\therefore a = 2 \ (\because a\text{는 실수})$$

답 2

14 전략 이항계수의 성질을 이용한다.

풀이 ${}_8C_0 + {}_8C_2 + {}_8C_4 + {}_8C_6 + {}_8C_8 = 2^{8-1} = 2^7$이므로

$a = 2^7$ ··· ❶

${}_{15}C_1 + {}_{15}C_3 + {}_{15}C_5 + \cdots + {}_{15}C_{15} = 2^{15-1} = 2^{14}$이므로

$b = 2^{14}$ ··· ❷

또 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$이므로

$$2^n = 2^7 \cdot 2^{14} = 2^{21}$$

$\therefore n = 21$ ··· ❸

답 21

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	n의 값을 구할 수 있다.	40 %

15 전략 $f(n)$을 조합의 수로 나타낸 후, 이항계수의 성질을 이용한다.

풀이 $f(n)$은 1부터 25까지의 자연수에서 n을 제외한 24개의 자연수 중에서 서로 다른 $(n-1)$개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$f(n) = {}_{24}C_{n-1}$$

$$\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(25)$$
$$= {}_{24}C_1 + {}_{24}C_2 + {}_{24}C_3 + \cdots + {}_{24}C_{24}$$
$$= {}_{24}C_1 + {}_{24}C_2 + {}_{24}C_3 + \cdots + {}_{24}C_{24} + {}_{24}C_0 - {}_{24}C_0$$
$$= ({}_{24}C_0 + {}_{24}C_1 + {}_{24}C_2 + {}_{24}C_3 + \cdots + {}_{24}C_{24}) - {}_{24}C_0$$
$$= 2^{24} - 1$$

$\therefore m = 24$ 답 ②

16 전략 ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$임을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 ${}_{16}C_5 + {}_{15}C_4 + {}_{14}C_3 + {}_{13}C_2 + {}_{12}C_1$

$$= {}_{16}C_5 + {}_{15}C_4 + {}_{14}C_3 + {}_{13}C_2 + {}_{12}C_1 + {}_{12}C_0 - {}_{12}C_0$$
$$= ({}_{16}C_5 + {}_{15}C_4 + {}_{14}C_3 + {}_{13}C_2 + {}_{12}C_1 + {}_{12}C_0) - {}_{12}C_0$$
$$= ({}_{16}C_5 + {}_{15}C_4 + {}_{14}C_3 + {}_{13}C_2 + {}_{13}C_1) - 1$$
$$= ({}_{16}C_5 + {}_{15}C_4 + {}_{14}C_3 + {}_{14}C_2) - 1$$
$$= ({}_{16}C_5 + {}_{15}C_4 + {}_{15}C_3) - 1$$
$$= ({}_{16}C_5 + {}_{16}C_4) - 1$$
$$= {}_{17}C_5 - 1$$

답 ①

17 전략 과일 4개를 택하는 경우를 구하고, 각 경우에 학생들에게 나누어 주는 경우를 생각한다.

풀이 세 종류의 과일이 각각 2개씩 있으므로 이 중에서 4개를 선택하려면 두 종류의 과일을 각각 2개씩 선택하거나 세 종류의 과일을 각각 1개, 1개, 2개 선택해야 한다.

선택한 사과, 배, 귤의 개수를 각각 a, b, c라 하면 가능한 순서쌍 (a, b, c)는

$(0, 2, 2)$, $(2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$,
$(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$ …… ㉠

(i) $(0, 2, 2)$ 또는 $(2, 0, 2)$ 또는 $(2, 2, 0)$인 경우
서로 다른 두 종류의 과일 2개씩을 각각 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_2 \cdot {}_2H_2 = {}_3C_2 \cdot {}_3C_2 = 3 \cdot 3 = 9$$

그런데 과일을 한 개도 받지 못하는 학생이 없어야 하므로 4개의 과일을 모두 한 학생에게 주는 2가지 경우는 제외해야 한다.
따라서 각 경우의 수는 $9-2=7$

(ii) $(1, 1, 2)$ 또는 $(1, 2, 1)$ 또는 $(2, 1, 1)$인 경우
서로 다른 세 종류의 과일 1개, 1개, 2개를 각각 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2H_2 = {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_3C_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

(i)과 마찬가지로 4개의 과일을 모두 한 학생에게 주는 2가지 경우는 제외해야 하므로 각 경우의 수는

$12-2=10$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3 \cdot 7 + 3 \cdot 10 = 51$ 답 51

다른 풀이 두 학생을 각각 P, Q라 하면 ㉠에서 각 경우에 학생 P가 받는 과일이 정해지면 학생 Q가 받는 과일도 정해진다. 학생 P가 받는 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z라 하자.

(i) $(0, 2, 2)$ 또는 $(2, 0, 2)$ 또는 $(2, 2, 0)$인 경우
$(0, 2, 2)$인 경우 순서쌍 (y, z)는
$(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$,
$(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$의 7가지
$(2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$인 경우도 마찬가지로 7가지이다.

(ii) $(1, 1, 2)$ 또는 $(1, 2, 1)$ 또는 $(2, 1, 1)$인 경우
$(1, 1, 2)$인 경우 순서쌍 (x, y, z)는
$(0, 0, 1)$, $(0, 0, 2)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$,
$(0, 1, 2)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$,
$(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$의 10가지
$(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$인 경우도 마찬가지로 10가지이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3 \cdot 7 + 3 \cdot 10 = 51$

18 전략 a, b, c가 모두 d의 배수이므로 d를 이용하여 나타낸 후, d의 값에 따른 순서쌍의 개수를 구한다.

풀이 조건 (나)에서 a, b, c는 모두 d의 배수이므로

$a=da'$, $b=db'$, $c=dc'$ (a', b', c'은 자연수)

이라 하면 조건 (가)의 $a+b+c+d=20$에서

$da'+db'+dc'+d=20$

$\therefore d(a'+b'+c'+1)=20$ …… ㉠

따라서 d는 20의 약수이고, $a'+b'+c'+1 \geq 4$이므로

$d \leq 5$

또 $d \geq 2$이므로

$d=2$ 또는 $d=4$ 또는 $d=5$

(i) $d=2$일 때,
㉠에서 $2(a'+b'+c'+1)=20$
$\therefore a'+b'+c'=9$ …… ㉡
이때 a', b', c'은 자연수이므로
$a''=a'-1$, $b''=b'-1$, $c''=c'-1$
로 놓으면 a'', b'', c''은 음이 아닌 정수이고 ㉡에서
$(a''+1)+(b''+1)+(c''+1)=9$
$\therefore a''+b''+c''=6$
즉 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', b'', c''의 순서쌍 (a'', b'', c'')의 개수와 같으므로
${}_3H_6 = {}_8C_6 = 28$

(ii) $d=4$일 때,
㉠에서 $4(a'+b'+c'+1)=20$
$\therefore a'+b'+c'=4$ …… ㉢
이때 a', b', c'은 자연수이므로
$a''=a'-1$, $b''=b'-1$, $c''=c'-1$
로 놓으면 a'', b'', c''은 음이 아닌 정수이고 ㉢에서
$(a''+1)+(b''+1)+(c''+1)=4$
$\therefore a''+b''+c''=1$
즉 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', b'', c''의 순서쌍 (a'', b'', c'')의 개수와 같으므로
${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$

(iii) $d=5$일 때,
㉠에서 $5(a'+b'+c'+1)=20$
$\therefore a'+b'+c'=3$
즉 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 자연수 a', b', c'의 순서쌍 (a', b', c')의 개수와 같다.
이때 순서쌍 (a', b', c')은 $(1, 1, 1)$의 1개이다.

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$28+3+1=32$ 답 32

Q BOX

a', b', c'은 자연수이므로
$a'+b'+c' \geq 3$

$a'=a''+1$, $b'=b''+1$, $c'=c''+1$

$(0, 0)$, $(2, 2)$는 제외해야 한다.

$(0, 0, 0)$, $(1, 1, 2)$는 제외해야 한다.

03 확률의 뜻과 활용

Lecture 05 확률의 뜻과 기본 성질 29쪽

01 답 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

02 답 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}, \{11\}, \{12\}$

03 $A=\{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$A\cup B=\{2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$
답 $\{2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$

04 답 $\{3\}$

05 답 $\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

06 답 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

07 $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\{4\}$, $C\cap A=\varnothing$
따라서 두 사건이 서로 배반사건인 것은 A와 B, C와 A이다. 답 A와 B, C와 A

08 모든 경우의 수는 $4\cdot4=16$
바닥에 닿는 면에 적힌 두 수를 순서쌍으로 나타내면 두 수의 합이 3인 경우는
$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2가지
따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

09 모든 경우의 수는 $4\cdot4=16$
바닥에 닿는 면에 적힌 두 수를 순서쌍으로 나타내면 두 수의 차가 1인 경우는
$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$의 6가지
따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

10 $\frac{480}{600}=\frac{4}{5}$ 답 $\frac{4}{5}$

11 $\frac{150}{450}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

12 $\frac{180}{450}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

13 주어진 수 중에서 홀수는 1, 3이므로 구하는 확률은
$\frac{(\text{홀수가 적힌 영역의 넓이})}{(\text{전체 과녁의 넓이})}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

Q BOX

$4+3=7$

임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합

$A^C\cap B=B-A$
$=\{9, 11, 13\}$
과 같이 구할 수도 있다.

$n(B^C)=n(S)-n(B)$
$=15-4=11$
과 같이 구할 수도 있다.

드모르간의 법칙
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$,
$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

두 집합의 교집합이 공집합인지 확인한다.

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수
➡ 2^n

$n(A^C)=n(S)-n(A)$
$=16-4=12$

14 답 $\frac{3}{7}$

15 답 1

16 답 0

표준+발전 유형 Q+Q 30쪽

01 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 15\}$이므로
$A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{9, 11, 13, 15\}$
① $A\cup B=\{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$
② $A\cap B=\{15\}$
③ $A^C=\{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
이므로 $A^C\cap B=\{9, 11, 13\}$
④ $B^C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14\}$
이므로 $n(B^C)=11$
⑤ $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이고 $A\cap B=\{15\}$이므로
$A^C\cup B^C=\{1, 2, 3, \cdots, 14\}$
$\therefore n(A^C\cup B^C)=14$ 답 ⑤

02 $A=\{2, 5, 7\}$, $B=\{6, 9\}$, $C=\{2, 4, 6\}$
ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.
ㄴ. $A\cap C=\{2\}$이므로 두 사건 A와 C는 서로 배반사건이 아니다.
ㄷ. $B\cap C=\{6\}$이므로 두 사건 B와 C는 서로 배반사건이 아니다.
이상에서 서로 배반사건인 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

03 사건 A와 배반인 사건은 사건 A^C의 부분집합이고 사건 B와 배반인 사건은 사건 B^C의 부분집합이다. 즉 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건은 사건 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.
이때 $A^C=\{4, 6, 9, 11\}$, $B^C=\{1, 6, 11\}$이므로
$A^C\cap B^C=\{6, 11\}$
따라서 구하는 사건의 개수는
$2^2=4$ 답 4

04 정사면체를 두 번 던질 때, 표본공간 S를 바닥에 닿는 면에 적힌 두 수의 순서쌍으로 나타내면
$S=\{(6, 6), (6, 7), (6, 8), (6, 9), \cdots, (9, 8), (9, 9)\}$
$\therefore n(S)=16$
이때 $A=\{(6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9)\}$이므로
$n(A)=4$ $\therefore n(A^C)=12$
따라서 사건 A와 배반인 사건의 개수는 사건 A^C의 부분집합의 개수와 같으므로
2^{12} 답 ③

05 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$

나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 눈의 수의 합이 5인 경우

$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$의 4가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 10인 경우

$(4, 6), (5, 5), (6, 4)$의 3가지

(i), (ii)에서 두 눈의 수의 합이 5의 배수인 경우의 수는

$4+3=7$

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{36}$ 답 $\frac{7}{36}$

06 $216=2^3\cdot3^3$이므로 216의 약수의 개수는

$(3+1)(3+1)=16$

216의 약수 중에서 90의 약수는 216과 90의 공약수와 같다.

$90=2\cdot3^2\cdot5$에서 216과 90의 최대공약수는

$2\cdot3^2$

이므로 216과 90의 공약수의 개수는

$(1+1)(2+1)=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ 답 ②

07 5명이 한 명씩 버스에 탑승하는 경우의 수는

$5!=120$

자녀 3명이 한 명씩 버스에 탑승하는 경우의 수는

$3!=6$

이고, 부부끼리 순서를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이므로 부부가 처음과 마지막에 탑승하는 경우의 수는

$6\cdot2=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$ 답 $\frac{1}{10}$

08 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

a와 e 사이에 들어가는 2개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

이고, a와 e를 포함한 4개의 문자를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

이며 a와 e가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이므로 a와 e 사이에 2개의 문자가 있도록 나열하는 경우의 수는

$12\cdot6\cdot2=144$

따라서 구하는 확률은

$\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$ 답 ③

Q BOX

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수
➡ $(n-1)!$

자연수 $N=p^a\times q^b$ (a, b는 자연수, p, q는 서로 다른 소수)의 약수의 개수는
$(a+1)(b+1)$

빨간색을 칠하는 영역이 결정되면 노란색을 칠하는 영역은 맞은편에 고정되므로 노란색을 제외한 나머지 7가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같다.

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수
➡ ${}_n\Pi_r=n^r$

6□□□ 꼴

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수
➡ ${}_nP_r$
$=n(n-1)\cdots(n-r+1)$
(단, $0<r\le n$)

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 경우의 수
➡ $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$
(단, $p+q+\cdots+r=n$)

09 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

가수 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

이고, 가수들 사이사이의 3개의 자리에 작곡가 3명이 앉는 경우의 수는

$3!=6$

이므로 가수와 작곡가가 교대로 앉는 경우의 수는

$2\cdot6=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$ 답 ②

10 서로 다른 8가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는

$(8-1)!=7!=5040$

빨간색을 칠한 영역의 맞은편에 노란색을 칠하는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$

따라서 구하는 확률은

$\frac{720}{5040}=\frac{1}{7}$ 답 $\frac{1}{7}$

쌤 한마디

빨간색을 칠한 영역의 맞은편에 노란색을 칠하는 경우의 수는 빨간색을 칠한 영역의 맞은편에 노란색을 칠하고 나머지 6가지 색을 6개의 영역에 칠하는 경우의 수와 같으므로

$6!=720$

임을 이용하여 구할 수도 있다.

11 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

이때 6000보다 크려면 천의 자리의 숫자가 6이어야 하므로 6000보다 큰 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 확률은

$\frac{64}{256}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

12 서로 다른 편지 3통을 각각 4개의 우체통에 임의로 넣는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

편지 3통을 모두 서로 다른 우체통에 넣는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$ 답 ⑤

13 7개의 문자 s, u, c, c, e, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\cdot3!}=420$

맨 앞에 s를 놓고, 나머지 문자 u, c, c, e, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!}=180$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{180}{420}=\frac{3}{7}$$

답 ⑤

14 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=7$을 만족시키는 함수 f의 개수는 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{3!}=4$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때, X에서 Y로의 함수의 개수

➡ ${}_n\Pi_m=n^m$

$1+2+2+2=7$

15 8개의 캔 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_8C_3=56$$

콜라 캔 3개 중에서 1개, 사이다 캔 5개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_1\cdot{}_5C_2=30$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$$

답 $\frac{15}{28}$

16 상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라 하면 뽑은 2개의 제비가 모두 당첨 제비일 확률이 $\frac{2}{21}$이므로

$$\frac{{}_nC_2}{{}_{15}C_2}=\frac{2}{21}, \qquad \frac{n(n-1)}{210}=\frac{2}{21}$$

$$n^2-n-20=0, \qquad (n+4)(n-5)=0$$

$$\therefore n=5\ (\because n\text{은 자연수})$$

따라서 상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수는 5이다.

답 ②

17 검은 구슬이 나올 확률이 $\frac{1}{7}$이므로

$$\frac{2}{4+2+n}=\frac{1}{7}, \qquad 6+n=14$$

$$\therefore n=8$$

답 8

18 양궁 선수가 9점을 맞힌 횟수는 89, 10점을 맞힌 횟수는 71이므로 9점 이상을 맞히는 경우의 수는

$$89+71=160$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{160}{300}=\frac{8}{15}$$

답 $\frac{8}{15}$

19 반지름의 길이가 6인 원의 넓이는

$$\pi\cdot 6^2=36\pi$$

색칠한 부분의 넓이는

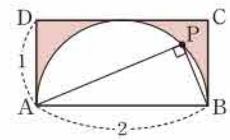
$$\pi\cdot 3^2-\pi\cdot 1^2=8\pi$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{8\pi}{36\pi}=\frac{2}{9}$$

답 ②

20 점 P가 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때 △PAB는 직각삼각형이 되므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 △PAB는 예각삼각형이 된다.



반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=\frac{2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2}{2}=1-\frac{\pi}{4}$$

답 $1-\frac{\pi}{4}$

21 ① 임의의 사건 A^C에 대하여

$$0\le \mathrm{P}(A^C)\le 1$$

② $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$이므로

$$\mathrm{P}(S)-\mathrm{P}(\varnothing)=1$$

③ $\varnothing\subset(A\cup B)\subset S$이므로

$$\mathrm{P}(\varnothing)\le \mathrm{P}(A\cup B)\le \mathrm{P}(S)$$

$$\therefore 0\le \mathrm{P}(A\cup B)\le 1$$

④ $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$, $0\le \mathrm{P}(B)\le 1$이므로

$$0\le \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le 2$$

⑤ $(A\cap B)\subset A$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)\le \mathrm{P}(A)$$

답 ④

22 ㄱ. $\mathrm{P}(A^C)=\frac{n(A^C)}{n(S)}=\frac{n(S)-n(A)}{n(S)}$

$$=1-\mathrm{P}(A)$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$$

ㄴ. [반례] $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면 $A\cup B=S$이지만

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\ne 1$$

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1\}$, $B=\{1, 2\}$이면 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$이므로 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$이지만 $A\cap B\ne\varnothing$이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

Lecture 06 확률의 덧셈정리

34쪽

01 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{2}{9}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{18}$$

답 $\frac{7}{18}$

02 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\frac{4}{5}=\frac{3}{10}+\frac{3}{4}-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

03 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$\frac{13}{14}=P(A)+\frac{1}{2}-\frac{2}{7}$

$\therefore P(A)=\frac{5}{7}$ 답 $\frac{5}{7}$

04 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{2}{5}=\frac{17}{30}$ 답 $\frac{17}{30}$

05 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\frac{7}{9}=\frac{2}{3}+P(B)$

$\therefore P(B)=\frac{1}{9}$ 답 $\frac{1}{9}$

06 $P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

07 $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$

$=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$ 답 $\frac{3}{7}$

08 $P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)=1-P(A\cap B)$

$=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ 답 $\frac{4}{9}$

09 공에 적힌 수가 8의 배수가 아닌 사건을 A라 하면 A^C는 공에 적힌 수가 8의 배수인 사건이므로

$P(A^C)=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은

$P(A^C)=1-P(A)$

$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$ 답 $\frac{9}{10}$

표준+발전 유형 Q+Q

35쪽

01 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$1=P(A)+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ $\therefore P(A)=\frac{11}{12}$

$\therefore P(A^C)=1-P(A)$

$=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$ 답 $\frac{1}{12}$

02 $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)$

$=1-P(A\cup B)=\frac{1}{5}$

이므로 $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\frac{4}{5}=\frac{3}{10}+P(B)$ $\therefore P(B)=\frac{1}{2}$ 답 ③

Q BOX

두 사건 A, B가 서로 배반사건
➡ $A\cap B=\varnothing$
➡ $P(A\cap B)=0$

8, 16, 24

$A\cap B$는 두 카드에 적힌 수의 합이 12 이상이면서 7의 배수인 사건이므로 (6, 8)의 1가지

버스 또는 지하철을 이용하는 학생을 택하는 사건

버스와 지하철을 모두 이용하는 학생을 택하는 사건

7개의 문자 m, o, r, n, i, n, g를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{2!}$이고, 2개의 n을 한 문자로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 6!이다.

03 두 주머니 A, B에서 각각 1장씩 카드를 꺼낼 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\cdot8=48$

두 카드에 적힌 수의 합이 12 이상인 사건을 A, 7의 배수인 사건을 B라 할 때, 두 카드에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(4, 8), (5, 7), (5, 8), (6, 6), (6, 7), (6, 8)\}$

$B=\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (6, 8)\}$

$\therefore P(A)=\frac{6}{48}=\frac{1}{8}$, $P(B)=\frac{7}{48}$,

$P(A\cap B)=\frac{1}{48}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{8}+\frac{7}{48}-\frac{1}{48}=\frac{1}{4}$ 답 ③

04 버스를 이용하는 학생을 택하는 사건을 A, 지하철을 이용하는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{56}{100}=\frac{14}{25}$, $P(B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$,

$P(A\cup B)=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

이므로 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=\frac{14}{25}+\frac{1}{5}-\frac{7}{10}=\frac{3}{50}$ 답 $\frac{3}{50}$

05 3명이 모두 의사인 사건을 A, 3명이 모두 판사인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$, $P(B)=\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{1}{35}+\frac{4}{35}=\frac{1}{7}$ 답 ①

06 같은 문자끼리 이웃하지 않는 사건을 A라 하면 A^C는 같은 문자끼리 이웃하는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{6!}{\frac{7!}{2!}}=\frac{2}{7}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)$

$=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$ 답 $\frac{5}{7}$

07 역함수가 존재하지 않는 사건을 A라 하면 A^C는 역함수가 존재하는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_4P_4}{{}_4\Pi_4}=\frac{4!}{4^4}=\frac{3}{32}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)$$
$$=1-\frac{3}{32}=\frac{29}{32}$$ 답 ④

쌤한마디

$n(X)=m$, $n(Y)=m$인 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수를 f라 할 때, 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일대응이어야 하고, 이때 일대일대응의 개수는 $m!$이다.

08 서연이와 민재 사이에 적어도 한 명의 학생을 세우는 사건을 A라 하면 A^C는 서연이와 민재를 이웃하게 세우는 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{5!\cdot 2!}{6!}=\frac{1}{3}$$

서연이와 민재를 한 명으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$ 답 $\frac{2}{3}$

09 적어도 1개의 불량품을 택하는 사건을 A라 하면 A^C는 4개 모두 불량품이 아닌 제품을 택하는 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_7C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{6}$$

3개의 불량품을 제외한 7개의 제품 중에서 임의로 4개의 제품을 동시에 택하는 경우의 수

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$ 답 ⑤

10 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

세 자리 자연수가 340 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 341 이상인 사건이고 341 이상인 자연수는 34□ 꼴 또는 4□□ 꼴이다.

(i) 34□ 꼴일 확률은

$$\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2의 2개이다.

(ii) 4□□ 꼴일 확률은

$$\frac{{}_3P_2}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서

$$P(A^C)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$ 답 ①

11 3송이의 꽃이 두 종류 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 3송이의 꽃이 모두 같은 종류인 사건이다.

5+3+3=11이므로 11송이의 꽃 중에서 임의로 3송이의 꽃을 동시에 택하는 경우의 수는 ${}_{11}C_3$

(i) 3송이 모두 장미일 확률은

$$\frac{{}_5C_3}{{}_{11}C_3}=\frac{2}{33}$$

(ii) 3송이 모두 백합일 확률은

$$\frac{{}_3C_3}{{}_{11}C_3}=\frac{1}{165}$$

(iii) 3송이 모두 튤립일 확률은

$$\frac{{}_3C_3}{{}_{11}C_3}=\frac{1}{165}$$

이상에서 $P(A^C)=\frac{2}{33}+\frac{1}{165}+\frac{1}{165}=\frac{4}{55}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)$$
$$=1-\frac{4}{55}=\frac{51}{55}$$ 답 $\frac{51}{55}$

중단원 마무리

37쪽

01 전략 교집합이 공집합인 두 사건은 배반사건임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $A\cap B^C=\{4, 10\}$이므로 A와 B^C는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. $A^C\cap B=\varnothing$이므로 A^C와 B는 서로 배반사건이다.

ㄷ. $A^C\cap B^C=\{8, 12\}$이므로 A^C와 B^C는 서로 배반사건이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

02 전략 사건 $A\cap B$와 배반인 사건의 개수는 여사건 $(A\cap B)^C$의 부분집합의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$이므로

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$

이때 사건 $A\cap B$와 배반인 사건은 사건 $(A\cap B)^C$의 부분집합이다.

$A\cap B=\{3, 5, 7\}$

따라서 $(A\cap B)^C=\{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$이므로 구하는 사건의 개수는

$2^6=64$ 답 64

03 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 중근을 가지려면 $D=0$임을 이용한다.

풀이 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot 6=36$

이차방정식 $x^2-ax+b=0$이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 하므로

$D=(-a)^2-4b=0$ $\therefore a^2=4b$

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근
② $D=0$ ➡ 중근
③ $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근

$a^2=4b$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(4, 4)$의 2가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$ 답 ①

04 전략 이웃하여 일렬로 나열할 때에는 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각한다.

풀이 6명이 일렬로 서는 경우의 수는

$6!=720$ ⋯ ❶

각 부부를 한 사람으로 생각하여 3명이 일렬로 서는 경우의 수는

$3!=6$

이고, 세 쌍의 부부가 부부끼리 서로 자리를 바꾸어 서는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!=8$

이므로 세 쌍의 부부가 부부끼리 서로 이웃하게 서는 경우의 수는

$6\cdot8=48$ ⋯ ❷

따라서 구하는 확률은

$\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{15}$

단계	채점 기준	비율
❶	6명이 일렬로 서는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷	세 쌍의 부부가 부부끼리 서로 이웃하게 서는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸	등산을 할 때, 부부끼리 서로 이웃하게 서게 될 확률을 구할 수 있다.	20 %

05 전략 4, 5가 적혀 있는 카드가 이웃하는 경우와 이웃하지 않는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 서로 다른 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!=5040$

4보다 큰 수에는 5가 포함되고 5보다 작은 수에는 4가 포함되므로 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 경우를 4, 5가 적혀 있는 카드가 이웃하는 경우와 이웃하지 않는 경우로 나누어 생각한다.

(i) 4, 5가 적혀 있는 카드가 이웃하는 경우

오른쪽 그림에서 4가 적혀 있는 카드의 왼쪽에는 6, 7이 적혀 있는 카드 중 1장의 카드가 올 수 있고 5가 적혀 있는 카드의 오른쪽에는 1, 2, 3이 적혀 있는 카드 중 1장의 카드가 올 수 있으므로 각각의 자리에 올 카드를 정하는 경우의 수는 $\square\boxed{4}\boxed{5}\blacksquare$

${}_2P_1\cdot{}_3P_1=2\cdot3=6$

$\square\boxed{4}\boxed{5}\blacksquare$를 한 장의 카드로 생각하여 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

4, 5가 적혀 있는 카드가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\blacksquare\boxed{5}\boxed{4}\square$

$2!=2$

따라서 4, 5가 적혀 있는 카드가 이웃하는 경우의 수는

$6\cdot24\cdot2=288$

(ii) 4, 5가 적혀 있는 카드가 이웃하지 않는 경우

오른쪽 그림에서 4가 적혀 있는 카드의 양옆에는 $\square\boxed{4}\square$, $\blacksquare\boxed{5}\blacksquare$

6, 7이 적혀 있는 카드가 올 수 있고, 5가 적혀 있는 카드의 양옆에는 1, 2, 3이 적혀 있는 카드 중 2장의 카드가 올 수 있으므로 각각의 자리에 올 카드를 정하는 경우의 수는

${}_2P_2\cdot{}_3P_2=2\cdot6=12$

$\square\boxed{4}\square$, $\blacksquare\boxed{5}\blacksquare$를 각각 한 장의 카드로 생각하여 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 4, 5가 적혀 있는 카드가 이웃하지 않는 경우의 수는

$12\cdot6=72$

(i), (ii)에서 조건 (가), (나)를 모두 만족시키도록 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$288+72=360$

따라서 구하는 확률은

$\frac{360}{5040}=\frac{1}{14}$

답 ②

06 전략 치역의 모든 원소의 곱이 홀수이려면 치역의 원소가 모두 홀수이어야 함을 이용한다.

풀이 집합 X에서 집합 X로의 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

함수 f의 치역의 모든 원소의 곱이 홀수이려면 치역의 원소가 모두 홀수이어야 한다. 즉 치역의 모든 원소의 곱이 홀수인 함수의 개수는 집합 X에서 집합 $\{1, 3\}$으로의 함수의 개수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{27}$

답 $\frac{8}{27}$

07 전략 순서가 정해진 문자는 같은 문자로 생각하여 나열한다.

풀이 8개의 문자 t, o, m, o, r, r, o, w를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{3!\cdot2!}$

o가 3개, r가 2개

w가 o보다 앞에 오려면 o, o, o, w를 모두 x로 생각하여 일렬로 나열한 다음 맨 앞의 x를 w로, 나머지 x를 o로 바꾸면 된다.

x, x, x, x를 포함하여 8개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{4!\cdot2!}$

x가 4개, r가 2개

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{8!}{4!\cdot2!}}{\frac{8!}{3!\cdot2!}}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

쌤한마디

경우의 수를 이용하여 확률을 구할 때, $\frac{8!}{3!\cdot 2!}$, $\frac{8!}{4!\cdot 2!}$과 같이 큰 수가 나오는 경우에는 이를 먼저 계산하는 것보다 모든 경우의 수와 주어진 사건의 경우의 수를 분수로 나타내어 약분하는 것이 더 간단하다.

08 **전략** n명의 학생 중에서 r명의 대표를 뽑는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{C}_r$임을 이용한다.

풀이 7명의 학생 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3=35$ ··· ❶

종수는 포함되고 소정이는 포함되지 않는 경우의 수는

종수와 소정이를 제외한 5명의 학생 중에서 2명의 대표를 뽑는 경우의 수

${}_5\mathrm{C}_2=10$ ··· ❷

따라서 구하는 확률은

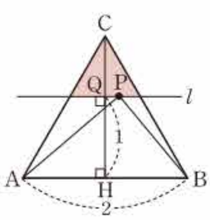
$\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$ ··· ❸

답 $\frac{2}{7}$

단계	채점 기준	비율
❶	7명의 학생 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷	종수는 포함되고 소정이는 포함되지 않는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸	대표를 뽑을 때, 종수는 포함되고 소정이는 포함되지 않을 확률을 구할 수 있다.	20 %

09 **전략** 기하적 확률을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{\mathrm{QH}}=1$을 만족시키는 $\overline{\mathrm{CH}}$ 위의 점을 Q라 하자. 점 Q를 지나고 $\overline{\mathrm{AB}}$에 평행한 직선 l 위의 점 P에 대하여



$\triangle$PAB의 넓이는 1이므로 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 $\triangle$PAB의 넓이가 1 이상이 된다.

이때 $\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{CQ}}=\sqrt{3}-1$이고 $\triangle$ABC와 색칠한 삼각형은 닮음이므로 넓이의 비는

$(\sqrt{3})^2:(\sqrt{3}-1)^2=3:(4-2\sqrt{3})$

따라서 $\triangle$PAB의 넓이가 1 이상일 확률은

$\frac{(\text{색칠한 삼각형의 넓이})}{(\triangle\mathrm{ABC}\text{의 넓이})}=\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$

즉 $p=\frac{4}{3}$, $q=-\frac{2}{3}$이므로

$p-q=2$

답 ⑤

10 **전략** 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

풀이 $A\cap B=\varnothing$이므로

두 사건 A, B가 서로 배반사건이다.

$A\cap B^C=A$, $A^C\cap B=B$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

또 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

답 $\frac{7}{12}$

11 **전략** 2개 이상의 수의 곱이 짝수이려면 짝수가 1개 이상이어야 함을 이용한다.

풀이 a가 짝수이려면 선택된 3개의 수에 짝수가 1개 이상 포함되어야 하고, b가 짝수이려면 선택되지 않은 4개의 수에도 짝수가 1개 이상 포함되어야 한다.

이때 1부터 7까지의 자연수 중에서 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 선택된 3개의 수에 짝수가 1개 또는 2개가 포함되는 경우로 나눌 수 있다.

선택된 3개의 수가 모두 짝수이면 선택되지 않은 4개의 수가 모두 홀수이다.

모든 경우의 수는 7개의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택하는 경우의 수이므로

${}_7\mathrm{C}_3$

(i) 선택된 3개의 수 중에서 짝수가 1개인 경우

3개의 짝수 중에서 1개, 4개의 홀수 중에서 2개를 선택하면 되므로 그 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35}$

(ii) 선택된 3개의 수 중에서 짝수가 2개인 경우

3개의 짝수 중에서 2개, 4개의 홀수 중에서 1개를 선택하면 되므로 그 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35}$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{18}{35}+\frac{12}{35}=\frac{6}{7}$

답 ⑤

다른 풀이 a와 b가 모두 짝수인 사건의 여사건은 a 또는 b가 홀수인 사건이다. 이때 a가 홀수이려면 선택된 3개의 수가 모두 홀수이어야 하고, b가 홀수이려면 선택되지 않은 4개의 수가 모두 홀수, 즉 선택된 3개의 수가 모두 짝수이어야 한다.

(i) 선택된 3개의 수가 모두 홀수인 경우

4개의 홀수 중에서 3개를 선택하면 되므로 그 확률은

$\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$

(ii) 선택된 3개의 수가 모두 짝수인 경우

3개의 짝수 중에서 3개를 선택하면 되므로 그 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$

a와 b가 모두 홀수인 경우는 존재하지 않으므로 (i), (ii)는 서로 배반사건이다.

따라서 a 또는 b가 홀수일 확률은

$$\frac{4}{35}+\frac{1}{35}=\frac{1}{7}$$

이므로 구하는 확률은

$$1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

쌤한마디

다른 풀이에서 a와 b가 모두 홀수인 경우가 존재하지 않는다는 것은 다음과 같이 표에서 확인할 수 있다.

선택된 수	선택되지 않은 수	a	b
짝수 0개, 홀수 3개	짝수 3개, 홀수 1개	홀수	짝수
짝수 1개, 홀수 2개	짝수 2개, 홀수 2개	짝수	짝수
짝수 2개, 홀수 1개	짝수 1개, 홀수 3개	짝수	짝수
짝수 3개, 홀수 0개	짝수 0개, 홀수 4개	짝수	홀수

12 **전략** 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는 원순열의 수를 이용하고 확률의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 7명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$$(7-1)!=6!$$

A가 B와 이웃하는 사건을 A, A가 C와 이웃하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5!\cdot 2}{6!}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{5!\cdot 2}{6!}=\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4!\cdot 2}{6!}=\frac{1}{15}$$

A가 B, C와 모두 이웃하는 경우

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$$

답 ②

13 **전략** 꺼낸 공에 적힌 수가 15와 서로소가 아닐 확률을 이용한다.

풀이 꺼낸 공에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 15의 배수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{80}{240}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{48}{240}=\frac{1}{5},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{16}{240}=\frac{1}{15}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

15와 서로소이려면 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아니어야 하므로 $A^C\cap B^C$

답 $\frac{8}{15}$

14 **전략** 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 보라색 구슬이 적어도 2개 포함되는 사건을 A라 하면 A^C는 보라색 구슬이 1개이거나 0개인 사건이다.

(i) 보라색 구슬이 1개일 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{20}{63}$$

(ii) 보라색 구슬이 0개일 확률은

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{5}{126}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{20}{63}+\frac{5}{126}=\frac{5}{14}$$

이므로 보라색 구슬이 적어도 2개 포함될 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$$

즉 $p=14$, $q=9$이므로

$$p+q=23$$

답 23

15 **전략** 두 점 사이의 거리가 1보다 작거나 같을 확률을 이용한다.

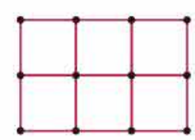
풀이 선택된 두 점 사이의 거리가 1보다 큰 사건을 A라 하면 A^C는 두 점 사이의 거리가 1보다 작거나 같은 사건이다. 그런데 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 점 (a, b)는 주어진 그림과 같이 12개뿐이므로 두 점 사이의 거리가 1보다 작은 경우는 없다.

즉 A^C는 두 점 사이의 거리가 1인 사건이다.

모든 경우의 수는 서로 다른 12개의 점 중에서 임의로 두 점을 선택하는 경우의 수이므로

$${}_{12}\mathrm{C}_2=66$$

임의의 두 점 사이의 거리가 1인 경우의 수는 오른쪽 그림과 같이 12개의 점 중 이웃하는 두 점을 연결하여 만들 수 있는 선분의 개수와 같으므로



$$3\cdot 3+2\cdot 4=17$$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{17}{66}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{17}{66}=\frac{49}{66}$$

답 ⑤

16 **전략** 집합 X의 서로 다른 세 원소를 각각 3으로 나누었을 때의 나머지의 합이 0, 3, 6이 아니어야 함을 이용한다.

풀이 원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는

$${}_{10}\mathrm{C}_4=210$$

1부터 10까지의 자연수 중 3으로 나누었을 때의 나머지가 각각 0, 1, 2인 수의 집합을 차례대로 P, Q, R라 하면

$$P=\{3, 6, 9\},\ Q=\{1, 4, 7, 10\},\ R=\{2, 5, 8\}$$

이때 집합 X의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아니려면 집합 X는 세 집합 P, Q, R 중 두 집합에서 각각 2개씩 택한 원소 4개를 원소로 가져야 한다.

(i) 두 집합 P, Q에서 각각 2개씩 원소를 택하는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2=18$$

(ii) 두 집합 Q, R에서 각각 2개씩 원소를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_3C_2 = 18$$

(iii) 두 집합 R, P에서 각각 2개씩 원소를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_3C_2 = 9$$

이상에서 집합 X의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아닌 경우의 수는

$$18+18+9=45$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$$

답 ①

참고 자연수를 3으로 나누었을 때의 나머지 0, 1, 2 중에서 중복을 허용하여 택한 4개 중에서 3개의 수의 합이 항상 0, 3, 6이 아닌 경우는

(0, 0, 1, 1), (1, 1, 2, 2), (2, 2, 0, 0)

17 전략 사건 A, B를 정하고 확률의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 발표 순서를 임의로 정할 때, 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 순서로 정해지는 사건을 A, 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 순서로 정해지는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\frac{7!}{2!}}{7!}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5P_2 \cdot 4! \cdot 2!}{7!}=\frac{4}{21},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_5P_2 \cdot 4!}{7!}=\frac{2}{21}$$

두 수학 동아리 A, B의 발표 순서가 이미 정해져 있으므로 두 동아리를 같은 것으로 보고 나열하는 경우의 수와 같다.

두 수학 동아리 사이에 발표할 2개의 과학 동아리를 택하여 발표 순서를 정하는 경우의 수

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{4}{21}-\frac{2}{21}=\frac{25}{42}$$

답 ③

Q BOX

04 조건부확률

Lecture 07 조건부확률

Ⓛ 40쪽

01 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{5}{16}$ 답 $\dfrac{5}{16}$

$\frac{1}{8}\div\frac{2}{5}=\frac{1}{8}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{16}$

02 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

03 $A=\{2, 4, 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

04 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$이므로

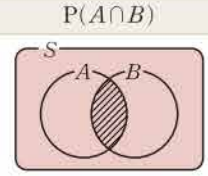
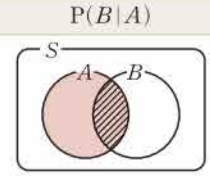
$A\cap B=\{2\}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$ 답 $\dfrac{1}{6}$

05 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

쌤한마디

$\mathrm{P}(A\cap B)$와 $\mathrm{P}(B|A)$의 비교

$\mathrm{P}(A\cap B)$	$\mathrm{P}(B\|A)$
	
표본공간 S에서 사건 $A\cap B$가 일어날 확률	사건 A를 표본공간으로 생각할 때 A에서 사건 $A\cap B$가 일어날 확률

06 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{7}$$

답 $\dfrac{2}{7}$

07 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{7}$ 답 $\dfrac{4}{7}$

08 답 $\dfrac{4}{9}$

09 첫 번째에 당첨 제비를 뽑으면 주머니에는 3개의 당첨 제비를 포함하여 8개의 제비가 들어 있으므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}$$

답 $\dfrac{3}{8}$

첫 번째에 당첨 제비를 뽑았을 때, 두 번째에도 당첨 제비를 뽑을 확률

10 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

Q BOX: 첫 번째, 두 번째 두 번 모두 당첨 제비를 뽑을 확률

표준+발전 유형 Q+Q

41쪽

01 $\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=0.3$에서

$\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\mathrm{P}((A\cup B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

즉 $1-\mathrm{P}(A\cup B)=0.3$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=0.7$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.7=0.5+0.4-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.2$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.2}{0.5}=0.4$

답 ⑤

02 $\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^c)}{\mathrm{P}(A^c)}=\frac{\mathrm{P}(B)}{1-\mathrm{P}(A)}$

$=\frac{\frac{5}{12}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}$

$=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

$\mathrm{P}(B\cap A^c)$
$=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로
$\mathrm{P}(B\cap A^c)=\mathrm{P}(B)$

쌤한마디

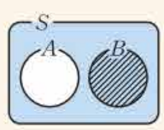
$\mathrm{P}(B\cap A^c)=\mathrm{P}(B)$임을 다음과 같이 확인할 수도 있다.

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$ $\quad\therefore B\subset A^c$

따라서 $B\cap A^c=B$이므로

$\mathrm{P}(B\cap A^c)=\mathrm{P}(B)$



03 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

ab가 짝수인 사건을 A, $a+b$가 4 이하인 사건을 B라 하자.

ab가 짝수이려면 a, b 중 적어도 하나는 짝수이어야 하므로

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{3\cdot3}{36}=\frac{3}{4}$

a, b가 모두 홀수일 확률

한편 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여

$B=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$

이므로 $\quad A\cap B=\{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{9}$ 답 $\frac{1}{9}$

04 꺼낸 2개 모두 검은 구슬이 아닌 사건을 A, 2개 모두 흰 구슬인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{5}{18}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{18}}=\frac{3}{10}$ 답 $\frac{3}{10}$

05 2학년 학생을 택하는 사건을 A, 안경을 착용한 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{22}{40}=\frac{11}{20}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{14}{40}=\frac{7}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{20}}{\frac{11}{20}}=\frac{7}{11}$ 답 $\frac{7}{11}$

쌤한마디

두 사건 A, B와 그 각각의 여사건 A^c, B^c가 일어나는 경우의 수를 표를 이용하여 아래와 같이 나타낼 때, 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 다음과 같이 구한다.

	A	A^c	합계
B	a	b	$a+b$
B^c	c	d	$c+d$
합계	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

$\mathrm{P}(A)=\frac{a+c}{a+b+c+d}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{a}{a+b+c+d}$

이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{a}{a+c}$

06 수채화를 선택한 남자 회원 수와 여자 회원 수를 각각 a, b라 하고, 유화와 수채화를 선택한 회원 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

	유화	수채화	합계
남자 회원	16	a	$16+a$
여자 회원	24	b	$24+b$
합계	40	$a+b$	72

위의 표에서 $40+(a+b)=72$이므로

$a+b=32$ …… ㉠

수채화를 선택한 회원을 뽑는 사건을 A, 여자 회원을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{a+b}{72}=\frac{32}{72}=\frac{4}{9}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{b}{72}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{b}{72}}{\frac{4}{9}}=\frac{b}{32}$

즉 $\frac{b}{32}=\frac{7}{16}$이므로 $\quad b=14$

$b=14$를 ㉠에 대입하면 $\quad a=18$

따라서 구하는 남자 회원 수는

$16+18=34$ 답 ②

07 첫 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{16}{20}=\frac{4}{5},\ P(B|A)=\frac{15}{19}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{19}=\frac{12}{19}$$ 답 $\frac{12}{19}$

08 준하가 필기시험에 합격하는 사건을 A라 하면 $P(A)=\frac{3}{5}$이므로

$$P(A^c)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

준하가 필기시험에 합격하지 못했을 때 실기시험에 합격하지 못할 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 실기시험에 합격하는 사건을 B라 하면

$$P(B^c|A^c)=\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c\cap B^c)=P(A^c)P(B^c|A^c)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$ 답 ④

09 갑이 딸기 맛 사탕을 꺼내는 사건을 A, 을이 포도 맛 사탕을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{4}{15},$$

$$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$$ 답 $\frac{3}{5}$

10 독감 예방 주사를 맞는 사건을 A, 독감에 걸리는 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0.7\times0.1=0.07,$$

$$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=0.3\times0.5=0.15$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=0.07+0.15=0.22$$ 답 ③

11 안경 쓴 학생을 택하는 사건을 A, 재검사 요청을 받은 학생을 택하는 사건을 B라 하면

Q BOX

$$P(A^c)=1-P(A)=1-\frac{40}{100}=\frac{60}{100}$$

전체 제품은 20개, 불량품은 4개이므로 불량품이 아닌 제품은
$20-4=16$(개)

첫 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼냈을 때, 두 번째에도 불량품이 아닌 제품을 꺼낼 확률

두 개의 주머니 중 임의로 한 개를 택하는 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

두 사건 A, B에 대하여
$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)$

갑이 포도 맛 사탕을 꺼내고 을이 포도 맛 사탕을 꺼내는 사건

두 사건 $A\cap B$와 $A^c\cap B$는 서로 배반사건이다.

$P(A^c)=1-P(A)=1-0.7=0.3$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{30},$$

$$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=\frac{60}{100}\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{25}$$

$$\therefore P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=\frac{1}{30}+\frac{1}{25}=\frac{11}{150}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{11}{150}}=\frac{5}{11}$$ 답 $\frac{5}{11}$

12 A 주머니를 택하는 사건을 A, B 주머니를 택하는 사건을 B, 색이 서로 다른 공을 꺼내는 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_5C_1}{{}_8C_2}=\frac{15}{56},$$

$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$$

$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=\frac{15}{56}+\frac{2}{7}=\frac{31}{56}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{31}{56}}=\frac{16}{31}$$ 답 $\frac{16}{31}$

Lecture 08 사건의 독립과 종속

43쪽

01 답 $\frac{3}{4}$

02 $P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$
$=P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)$
$=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

03 $P(B|A)\neq P(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다. 답 종속

04 $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.2\times0.4=0.08$ 답 0.08

05 $P(A|B)=P(A)=0.2$ 답 0.2

06 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B도 서로 독립이므로

$$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B)=(1-0.2)\times0.4=0.32$$ 답 0.32

07 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$P(B^C|A)=P(B^C)=1-0.4=0.6$ 답 0.6

08 $A=\{2, 3\}$이므로 $P(A)=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

09 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$ 답 $\frac{4}{9}$

10 총을 1번 쏴서 목표물을 맞힐 확률은

$\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_4C_1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{96}{625}$ 답 $\frac{96}{625}$

표준+발전 유형 Q+Q

44쪽

01 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고, 50원짜리 동전, 100원짜리 동전을 차례대로 나타내면

$A=\{HT, HH\}$, $B=\{HT, TT\}$,

$C=\{HT, TH\}$

ㄱ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$이므로

$P(A)P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$A\cap B=\{HT\}$에서 $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

ㄴ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{2}$이므로

$P(A)P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$A\cap C=\{HT\}$에서 $P(A\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap C)=P(A)P(C)$

따라서 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

ㄷ. $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{2}$이므로

$P(B)P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$B\cap C=\{HT\}$에서 $P(B\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$P(B\cap C)=P(B)P(C)$

따라서 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 서로 독립인 사건이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)$

Q BOX

두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$A\cap B=\varnothing$

$\therefore P(A\cap B)=0$

꺼낸 공을 다시 넣으므로 상자에 남아 있는 공의 개수는 변하지 않는다.

표본공간을 S라 하면

$S=\{HH, HT, TH, TT\}$

$n(B)$

$=n(A\cap B)$

$+n(A^C\cap B)$

$A^C=\{1, 4, 6, 8\}$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B도 각각 서로 독립이므로

$P(A|B^C)=P(A)$, $P(A^C|B)=P(A^C)$

이때 $P(A)=1-P(A^C)$이므로

$P(A|B^C)=1-P(A^C|B)$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$P(A\cap B)=0$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0$,

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0$

따라서 $P(B|A)=P(A|B)$이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 ㄴ. $1-P(A^C|B)=1-\frac{P(A^C\cap B)}{P(B)}$

$=1-\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$

$=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A|B)$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$P(A|B^C)=P(A|B)$

$\therefore P(A|B^C)=1-P(A^C|B)$

쌤 한마디

두 사건 A, B가 서로 독립일 때, 독립인 사건

두 사건 A, B가 서로 독립이면

① A와 B^C가 서로 독립

→ $P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)$

② A^C와 B가 서로 독립

→ $P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)$

③ A^C와 B^C가 서로 독립

→ $P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C)$

03 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

조건 (가)에서 $A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

$P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

조건 (나)에서 두 사건 A, B는 서로 독립이고 조건 (다)에서 $P(B)=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$\therefore n(A\cap B)=1$

한편 $P(B)=\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$이므로

$n(B)=2$

즉 사건 B는 $n(B)=2$이고, $n(A\cap B)=1$, $n(A^C\cap B)=1$을 만족시켜야 하므로 집합 A의 4개의 원소 중 집합 $A\cap B$의 원소 1개를 택하고, 집합 A^C의 4개의 원소 중 집합 $A^C\cap B$의 원소 1개를 택하면 된다.

따라서 구하는 사건 B의 개수는

${}_4C_1\cdot{}_4C_1=16$ 답 16

04 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

이때 $A=\{3, 4, 5, 6\}$이므로

$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

조건 ㈎에서 $P(A\cap B)=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$이므로

$n(A\cap B)=2$

조건 ㈏에서 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$\frac{1}{3}=\frac{2}{3}P(B)$ $\quad\therefore P(B)=\frac{1}{2}$

이때 $P(B)=\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$이므로

$n(B)=3$

즉 사건 B는 $n(B)=3$이고, $n(A\cap B)=2$, $n(A^C\cap B)=1$을 만족시켜야 하므로 집합 A의 4개의 원소 중 집합 $A\cap B$의 원소 2개를 택하고, 집합 A^C의 2개의 원소 중 집합 $A^C\cap B$의 원소 1개를 택하면 된다.

$A^C=\{1, 2\}$

따라서 구하는 사건 B의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_1=12$ 답 ③

05 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$P(A\cap B)=P(A)-P(B)$에서

$P(A)P(B)=P(A)-P(B)$

$\frac{3}{7}P(B)=\frac{3}{7}-P(B)$, $\quad\frac{10}{7}P(B)=\frac{3}{7}$

$\therefore P(B)=\frac{3}{10}$ 답 $\frac{3}{10}$

06 $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

두 사건 A^C, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B도 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$ 답 $\frac{13}{16}$

07 희옥이와 영재가 공연을 관람하는 사건을 각각 A, B라 하면

$P(A\cup B)=\frac{5}{6}$, $P(B)=\frac{2}{5}$

희옥이와 영재 중 적어도 한 명이 공연을 관람할 확률

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{2}{5}P(A)$

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{5}{6}=P(A)+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}P(A)$

$\frac{3}{5}P(A)=\frac{13}{30}$ $\quad\therefore P(A)=\frac{13}{18}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{13}{18}$이다. 답 ⑤

08 두 수의 합이 홀수이려면 두 수 중에서 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수이어야 한다. 두 상자 A, B에서 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이고, A^C, B^C는 두 상자 A, B에서 각각 짝수가 적힌 카드를 꺼내는 사건이므로

(i) A 상자에서 홀수, B 상자에서 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)$

$=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

(ii) A 상자에서 짝수, B 상자에서 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)$

$=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

(i), (ii)에서 두 사건 $A\cap B^C$와 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

09 한 번 이상 표적을 맞히는 사건을 A라 하면 표적을 한 번도 맞히지 못하는 사건은 A^C이므로

$P(A^C)={}_4C_0\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{1}{625}$

$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{625}=\frac{624}{625}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{624}{625}$이다. 답 $\frac{624}{625}$

10 한 번의 퀴즈 대결에서 송희가 이길 확률을 p라 하면 현규가 이길 확률은 $1-p$이다.

3번의 퀴즈 대결을 할 때, 송희가 모두 이길 확률이 $\frac{1}{27}$이므로

${}_3C_3p^3(1-p)^0=\frac{1}{27}$, $\quad p^3=\frac{1}{27}$ $\quad\therefore p=\frac{1}{3}$

즉 한 번의 퀴즈 대결에서 송희가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로

현규가 이길 확률은 $\quad 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 확률은

송희가 1번 이길 확률과 같음을 이용하여 ${}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3$과 같이 구할 수도 있다.

${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$ 답 ⑤

11 다섯 번째 경기에서 우승 팀이 결정되려면 우승 팀은 4번의 경기에서 3번 이기고 마지막 다섯 번째 경기에서도 이겨야 한다.

(i) A 팀이 우승할 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{256}$

(ii) B 팀이 우승할 확률은

A 팀이 B 팀을 이길 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 B 팀이 A 팀을 이길 확률은 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

${}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\frac{3}{4}=\frac{81}{256}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{256}+\frac{81}{256}=\frac{21}{64}$ 답 $\frac{21}{64}$

12 한 개의 주사위를 6번 던져서 짝수의 눈이 나온 횟수를 x라 하면 홀수의 눈이 나온 횟수는 $6-x$이므로

$2x+1\cdot(6-x)\geq 8 \qquad \therefore x\geq 2$

즉 짝수의 눈이 2번 이상 나올 때 점수의 합이 8점 이상이다. 짝수의 눈이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 짝수의 눈이 1번 이하로 나오는 사건이다.

(i) 짝수의 눈이 0번 나올 확률은

$${}_6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$$

(ii) 짝수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{32}$$

(i), (ii)에서

$$P(A^C)=\frac{1}{64}+\frac{3}{32}=\frac{7}{64}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{7}{64}=\frac{57}{64}$$

답 ②

중단원 마무리

46쪽

01 전략 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$임을 이용한다.

풀이 $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$$

이때 $P(A|B)=\frac{3}{10}$에서

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{3}{10}$$

$$\therefore P(B)=\frac{10}{3}P(A\cap B)=\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$에서 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

02 전략 택한 2명의 생일이 같은 달이면 2명 모두 11월생이거나 12월생임을 이용한다.

풀이 택한 2명의 생일이 11월인 사건을 A, 12월인 사건을 B, 택한 2명의 생일이 같은 달인 사건을 C라 하면

$$P(A)=\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\frac{10}{21},\ P(B)=\frac{{}_2C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{21},$$

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{10}{21}+\frac{1}{21}=\frac{11}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{\frac{10}{21}}{\frac{11}{21}}=\frac{10}{11}$$

답 ⑤

$A\subset C$이므로 $P(A\cap C)=P(A)$

03 전략 30대가 차지하는 비율을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운 후 주어진 확률에 대한 조건을 이용한다.

풀이 도서관 이용자 300명 중에서 30대가 차지하는 비율이 12 %이므로

$$(60-a)+b=300\cdot\frac{12}{100}$$

$\therefore a-b=24$ ...... ㉠

선택한 한 명이 남성인 사건을 A, 20대인 사건을 B, 30대인 사건을 C라 하면 $P(B|A)=P(C|A^C)$이므로

여성인 사건은 남성인 사건의 여사건이다.

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A^C\cap C)}{P(A^C)}$$

$$\frac{\frac{a}{300}}{\frac{200}{300}}=\frac{\frac{b}{300}}{\frac{100}{300}},\qquad \frac{a}{200}=\frac{b}{100}$$

$\therefore a=2b$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=48,\ b=24$

$\therefore a+b=72$

답 72

04 전략 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$임을 이용한다.

풀이 첫 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹는 사건을 A, 두 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ ···➊

$P(B|A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ ···➋

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$ ···➌

답 $\frac{1}{4}$

단계	채점 기준	비율
➊	첫 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹을 확률을 구할 수 있다.	30 %
➋	첫 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹었을 때, 두 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹을 확률을 구할 수 있다.	40 %
➌	첫 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹고 두 번째에는 깨가 들어 있는 송편을 먹을 확률을 구할 수 있다.	30 %

05 전략 $P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$임을 이용한다.

풀이 $P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

$$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{3}{5}$$

답 ④

06 전략 A 농장에서 수확된 감귤 상자에서 잘못 분류된 감귤을 꺼내는 경우와 B 농장에서 수확된 감귤 상자에서 잘못 분류된 감귤을 꺼내는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 A 농장에서 수확된 감귤 상자에서 감귤을 꺼내는 사건을 A, B 농장에서 수확된 감귤 상자에서 감귤을 꺼내는 사건을 B, 잘못 분류된 감귤을 꺼내는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{2}{100}=\frac{1}{125},$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{100}=\frac{3}{100}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{1}{125}+\frac{3}{100}=\frac{19}{500}$$

답 ③

QBOX

감귤 10상자 중 4상자는 A 농장에서 수확되었으므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}$

07 전략 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수인 경우와 소수가 아닌 경우로 나누어 생각한다.

풀이 동전의 앞면이 2번 나오는 사건을 A, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

사건 A가 일어날 확률을 사건 B가 일어나는 경우와 일어나지 않는 경우로 나누어 구하면 다음과 같다.

(i) 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수인 경우는

$(1, 2)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$

의 4가지이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}$$

이때 한 개의 동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나오는 경우는

(앞, 앞)

의 1가지이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

(ii) 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수가 아닌 경우는

$$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

이때 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나오는 경우는

(앞, 앞, 뒤), (앞, 뒤, 앞), (뒤, 앞, 앞)

의 3가지이므로

$$\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$$

따라서 구하는 확률은 ㉠에서

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{24}}=\frac{4}{7}$$

답 ⑤

참고 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

과 같이 독립시행의 확률을 이용하여 구할 수도 있다.

08 전략 두 상자에서 임의로 한 개씩 꺼낸 지우개의 색이 같으려면 꺼낸 지우개는 모두 흰색이거나 모두 검은색이어야 함을 이용한다.

풀이 꺼낸 지우개가 모두 흰색인 사건을 A, 모두 검은색인 사건을 B, 서로 같은 색인 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{n}{50}\cdot\frac{50-2n}{50},$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{50-n}{50}\cdot\frac{2n}{50}$$

이므로

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{n}{50}\cdot\frac{50-2n}{50}+\frac{50-n}{50}\cdot\frac{2n}{50}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{n}{50}\cdot\frac{50-2n}{50}}{\frac{n}{50}\cdot\frac{50-2n}{50}+\frac{50-n}{50}\cdot\frac{2n}{50}}=\frac{25-n}{75-2n}$$

꺼낸 지우개가 서로 같은 색일 때, 그 색이 흰색일 확률

즉 $\frac{25-n}{75-2n}=\frac{1}{7}$이므로

$175-7n=75-2n,\quad 5n=100$

$\therefore n=20$

답 20

09 전략 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$, 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $A_4=\{4, 8\}$, $A_6=\{6\}$이므로

$A_4\cap B_6=\varnothing$

따라서 A_4와 A_6은 서로 배반사건이다.

ㄴ. $A_3=\{3, 6, 9\}$, $A_6=\{6\}$이므로

$A_3\cap A_6=\{6\}$

$$\therefore \mathrm{P}(A_6|A_3)=\frac{\mathrm{P}(A_6\cap A_3)}{\mathrm{P}(A_3)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

ㄷ. $A_2=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A_5=\{5, 10\}$이므로

$\mathrm{P}(A_2)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A_5)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$에서

$$\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_5)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$$

또 $A_2\cap A_5=\{10\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A_2\cap A_5)=\frac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A_2\cap A_5)=\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_5)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

10 전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B, A^C와 B^C도 서로 독립임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(B|A^C)$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$
$=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$
$=\mathrm{P}(A)$

ㄷ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$
$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

11 전략 $\mathrm{P}(A)$를 구하여 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$가 성립하는 m의 값을 구한다.

풀이 두 사건 A, B가 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

가 성립해야 한다.

$A=\{1, 3, 5\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

사건 B는 m의 약수의 눈이 나오는 사건이고, 사건 $A\cap B$는 m의 약수이면서 홀수의 눈이 나오는 사건이므로 m의 값에 따라 $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구하여 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$가 성립하는지 확인하면 다음과 같다.

(i) $m=1$일 때,

1의 약수의 눈은 1이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

1의 약수 중 홀수의 눈은 1이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

(ii) $m=2$일 때,

2의 약수의 눈은 1, 2이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

2의 약수 중 홀수의 눈은 1이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

Q BOX

$\frac{1}{6}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$

$\frac{1}{6}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$

(iii) $m=3$일 때,

3의 약수의 눈은 1, 3이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

3의 약수 중 홀수의 눈은 1, 3이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

(iv) $m=4$일 때,

4의 약수의 눈은 1, 2, 4이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

4의 약수 중 홀수의 눈은 1이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

(v) $m=5$일 때,

5의 약수의 눈은 1, 5이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

5의 약수 중 홀수의 눈은 1, 5이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

(vi) $m=6$일 때,

6의 약수의 눈은 1, 2, 3, 6이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

6의 약수 중 홀수의 눈은 1, 3이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이상에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$가 성립하는 m의 값은 2, 6이다.

따라서 모든 m의 값의 합은 $\quad 2+6=8$ 답 8

다른 풀이 두 사건 A, B가 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$가 성립해야 하므로

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$임을 이용하여 m의 값에 따라 $\mathrm{P}(A|B)$의 값을 구하면 다음 표와 같다.

m	B	$n(B)$	$n(A\cap B)$	$\mathrm{P}(A\|B)$
1	$\{1\}$	1	1	1
2	$\{1, 2\}$	2	1	$\frac{1}{2}$
3	$\{1, 3\}$	2	2	1
4	$\{1, 2, 4\}$	3	1	$\frac{1}{3}$
5	$\{1, 5\}$	2	2	1
6	$\{1, 2, 3, 6\}$	4	2	$\frac{1}{2}$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$이므로 위의 표에서 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, 즉 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{2}$을 만족시키는 m의 값은 2, 6이다.

따라서 모든 m의 값의 합은 $\quad 2+6=8$

쌤한마디

$P(A)=\frac{1}{2}$이므로 두 사건 A, B가 서로 독립이면
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서
$$P(A\cap B)=\frac{1}{2}P(B)$$
이것의 의미는 사건 $A\cap B$가 일어날 확률이 사건 B가 일어날 확률의 $\frac{1}{2}$이므로 m의 약수 중 홀수의 개수가 m의 약수의 개수의 $\frac{1}{2}$이 되는 경우로 유추할 수 있다.

12 전략 두 사건 A, X가 서로 독립임을 이용하여 $P(X)$를 구한 후 사건 X의 개수를 구한다.

풀이 두 사건 A, X가 서로 독립이려면
$$P(A\cap X)=P(A)P(X) \quad \cdots\cdots ㉠$$
이어야 한다.
이때 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$, $A=\{4, 8, 12\}$이므로
$$P(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$
또 $n(A\cap X)=2$이므로
$$P(A\cap X)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$
따라서 ㉠에서 $\frac{1}{6}=\frac{1}{4}P(X)$이므로
$$P(X)=\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$$
즉 사건 X는 $n(X)=8$이고, $n(A\cap X)=2$, $n(A^C\cap X)=6$을 만족시켜야 하므로 집합 A의 3개의 원소 중 집합 $A\cap X$의 원소 2개를 택하고, 집합 A^C의 9개의 원소 중 집합 $A^C\cap X$의 원소 6개를 택하면 된다.
따라서 구하는 사건 X의 개수는
$${}_3C_2\cdot{}_9C_6=252$$
답 252

13 전략 두 사건 A, B가 서로 독립임을 이용하여 $P(B)$를 구한 후 두 사건 B, C가 서로 배반사건임을 이용한다.

풀이 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
이때 $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이므로
$$\frac{1}{9}=\frac{1}{3}P(B) \qquad \therefore P(B)=\frac{1}{3} \quad \cdots ❶$$
또 두 사건 B, C는 서로 배반사건이므로
$P(B\cup C)=P(B)+P(C)$에서
$$\frac{11}{15}=\frac{1}{3}+P(C) \qquad \therefore P(C)=\frac{2}{5} \quad \cdots ❷$$
답 $\frac{2}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	$P(B)$를 구할 수 있다.	50 %
❷	$P(C)$를 구할 수 있다.	50 %

Q BOX

일본어를 선택한 남학생을 택하는 사건

$60\ \% \Rightarrow \frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

모두 다른 것을 내는 경우의 수는 $3!$
모두 같은 것을 내는 경우의 수는 3

두 번째에 가위바위보를 한 학생이 3명인 사건은 두 번째에 가위바위보를 한 학생이 2명인 사건의 여사건이다.

14 전략 남학생을 택하는 사건을 A, 일본어를 선택한 학생을 택하는 사건을 B라 하고 주어진 표를 이용하여 각 확률을 구한다.

풀이 남학생을 택하는 사건을 A, 일본어를 선택한 학생을 택하는 사건을 B라 하면
$$P(A)=\frac{125}{200}=\frac{5}{8},\ P(B)=\frac{96}{200}=\frac{12}{25},$$
$$P(A\cap B)=\frac{x}{200}$$
이때 두 사건 A, B는 서로 독립이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서
$$\frac{x}{200}=\frac{5}{8}\cdot\frac{12}{25} \qquad \therefore x=60$$
답 ①

15 전략 적어도 한 번 서브를 성공시키는 사건의 여사건은 서브를 한 번도 성공시키지 못하는 사건임을 이용한다.

풀이 서브를 적어도 한 번 성공시키는 사건을 A라 하면 A^C는 서브를 한 번도 성공시키지 못하는 사건이므로
$$P(A^C)={}_3C_0\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$$
따라서 구하는 확률은
$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{8}{125}=\frac{117}{125}$$
답 $\frac{117}{125}$

16 전략 가위바위보를 2번 하여 A가 최종 승자로 정해지려면 첫 번째에 이긴 학생이 없는 경우와 첫 번째에 이긴 학생이 2명인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 가위바위보를 2번 하여 A가 최종 승자로 정해지는 사건을 X, 두 번째에 가위바위보를 한 학생이 2명인 사건을 Y라 하자.

(i) 첫 번째에 이긴 학생이 없는 경우
첫 번째에 모두 다른 것을 내거나 모두 같은 것을 낼 확률은
$$\frac{3!+3}{3^3}=\frac{1}{3}$$
두 번째에 세 학생 중 A만 이길 확률은
$$\frac{3}{3^3}=\frac{1}{9}$$
따라서 A가 최종 승자가 될 확률은
$$P(X\cap Y^C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$$

(ii) 첫 번째에 이긴 학생이 2명인 경우
첫 번째에 A를 포함하여 2명이 이길 확률은
$$\frac{3\cdot 2}{3^3}=\frac{2}{9}$$
두 번째에 두 학생 중 A가 이길 확률은
$$\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$$
따라서 A가 최종 승자가 될 확률은
$$P(X\cap Y)=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

(i), (ii)에서
$$P(X)=P(X\cap Y^C)+P(X\cap Y)$$
$$=\frac{1}{27}+\frac{2}{27}=\frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}$$ 답 ④

17 전략 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수에 따라 동전을 던지는 횟수가 달라지므로 경우를 나누어 생각한다.

풀이 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같은 사건을 A, 동전을 4번 던진 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나오는 눈의 수가 같을 확률은

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

눈의 수가 다를 확률은 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

(i) 주사위의 눈의 수가 같은 경우

한 개의 동전을 4번 던져서 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같으려면 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나오면 되므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}\cdot {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{16}$$

(ii) 주사위의 눈의 수가 다른 경우

한 개의 동전을 2번 던져서 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같으려면 앞면과 뒷면이 각각 1번씩 나오면 되므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{5}{6}\cdot {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{16}+\frac{5}{12}=\frac{23}{48}$$

따라서 구하는 확률은 ㉠에서

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{23}{48}}=\frac{3}{23}$$ 답 ①

Q BOX

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지

1, 3

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

동전을 2번 던진 사건은 동전을 4번 던진 사건의 여사건이다.

05 확률변수와 확률분포

Lecture 09 이산확률변수와 연속확률변수 L 53쪽

01 답 0, 1, 2

02 답 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

03 답 0, 1, 2, 3

04 (1) 0, 1, 2

(2) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3의 약수가 아닌 수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

답 풀이 참조

05 X가 가질 수 있는 값은

0, 1, 2, 3

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

$X=0$인 경우는 HHH의 1가지

$\therefore \mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$

$X=1$인 경우는 THH, HTH, HHT의 3가지

$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{8}$

$X=2$인 경우는 TTH, THT, HTT의 3가지

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8}$

$X=3$인 경우는 TTT의 1가지

$\therefore \mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

답 풀이 참조

06 (1) X가 가질 수 있는 값은

0, 1, 2, 3

7개의 사탕 중에서 3개의 사탕을 꺼내는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3$

꺼낸 3개의 사탕 중에 포도 맛 사탕이 x개 포함되는 경우의 수는 $\quad {}_3C_x \cdot {}_4C_{3-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{{}_3C_x \cdot {}_4C_{3-x}}{{}_7C_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

(2) $P(X=0)=\frac{{}_3C_0 \cdot {}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$,

확률질량함수의 식에 $x=0$을 대입한 것이다.

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1 \cdot {}_4C_2}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$,

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$,

$P(X=3)=\frac{{}_3C_3 \cdot {}_4C_0}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

답 풀이 참조

07 확률의 총합은 1이므로 $\quad b=1$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+a+\frac{1}{4}=1$이므로 $\quad a=\frac{1}{8}$

답 $a=\frac{1}{8}$, $b=1$

08 $P(X=1$ 또는 $X=2)=P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

09 $P(-1\le X\le 1)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

$-1\le X\le 1$을 만족시키는 X의 값은 -1, 0, 1이다.

다른 풀이 $P(-1\le X\le 1)=1-P(X=2)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

10 $P(X\ge 0)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

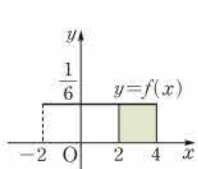
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$ 답 $\frac{7}{8}$

다른 풀이 $P(X\ge 0)=1-P(X=-1)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

11 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

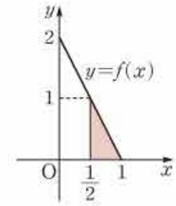
길이, 시간, 무게 등과 같이 어떤 범위에 속하는 모든 실수의 값을 가지는 확률변수는 연속확률변수이다.

12 $P(X\ge 2)$는 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$P(X\ge 2)=\frac{1}{6}\cdot(4-2)=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

13 $P\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

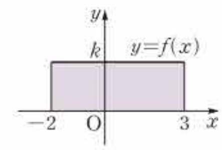


$P\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\cdot\frac{1}{2}+2=1$

14 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

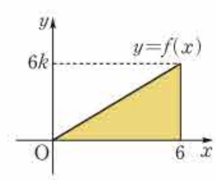


$5k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

쌤 한마디

확률은 0 이상이므로 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프는 제1사분면과 제2사분면에서만 생각한다.

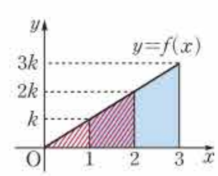
15 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6k=1$

$\therefore k=\frac{1}{18}$ 답 $\frac{1}{18}$

16 (1) $f(x)=kx$라 하면 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3k=1$

$\therefore k=\frac{2}{9} \qquad \therefore f(x)=\frac{2}{9}x\ (0\le x\le 3)$

(2) $P(1\le X\le 3)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$P(1\le X\le 3)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{3}\right)\cdot 2=\frac{8}{9}$

(사다리꼴의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times\{$(윗변의 길이)
$+$(아랫변의 길이)$\}$
$\times$(높이)

(3) $P(X<2)$는 위의 그림의 빗금 친 부분의 넓이와 같으므로

$P(X<2)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$

답 (1) $f(x)=\frac{2}{9}x\ (0\le x\le 3)$ (2) $\frac{8}{9}$ (3) $\frac{4}{9}$

표준+발전 **유형 Q+Q** 54쪽

01 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$
$=1$

$k\cdot1^2+k\cdot2^2+k\cdot3^2+k\cdot4^2=1,\quad 30k=1$

$\therefore\ k=\frac{1}{30}$ 답 $\frac{1}{30}$

02 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=10)=1$

$\frac{a}{2\cdot3}+\frac{a}{3\cdot4}+\cdots+\frac{a}{11\cdot12}=1$

$a\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}=1$

Q BOX: $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

$a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)=1,\quad \frac{5}{12}a=1$

$\therefore\ a=\frac{12}{5}$

따라서

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{12}{5(x+1)(x+2)}\ (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$

이므로

$\mathrm{P}(X=1\text{ 또는 }X=7)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=7)$

$=\frac{12}{5\cdot2\cdot3}+\frac{12}{5\cdot8\cdot9}$

$=\frac{13}{30}$ 답 $\frac{13}{30}$

03 정사면체를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$4\cdot4=16$

바닥에 놓인 면에 적힌 두 수를 a, b라 하면 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여

$X=4$인 경우는 $(2,\ 6)$, $(4,\ 4)$, $(6,\ 2)$의 3가지

Q BOX: $\frac{a+b}{2}=4\quad\therefore\ a+b=8$

$X=5$인 경우는

$(2,\ 8)$, $(4,\ 6)$, $(6,\ 4)$, $(8,\ 2)$의 4가지

이므로 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{16},\ \mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=4\text{ 또는 }X=5)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)$

$=\frac{3}{16}+\frac{1}{4}$

$=\frac{7}{16}$ 답 $\frac{7}{16}$

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

04 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$

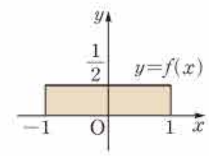
이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$\therefore\ \mathrm{P}(X\geq2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=\frac{22}{35}$ 답 $\frac{22}{35}$

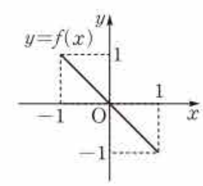
05 ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



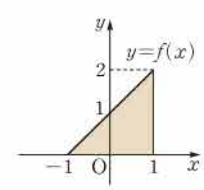
$2\cdot\frac{1}{2}=1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수이다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $0<x\leq1$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.



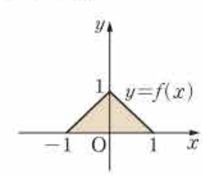
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2\neq1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

ㄹ. $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=1$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수이다.

이상에서 확률밀도함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

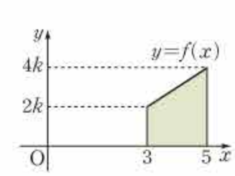
쌤 한마디

함수 $f(x)\ (a\leq x\leq b)$가 확률밀도함수인지 판단할 때에는 $f(x)$가 다음을 모두 만족시키는지 확인한다.

① 모든 함숫값이 0 이상이다.

② $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이다.

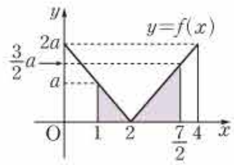
06 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=3$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot(2k+4k)\cdot2=1$

$6k=1\quad\therefore\ k=\frac{1}{6}$ 답 ②

07 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2a+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2a=1, \qquad 4a=1$$

$$\therefore a=\frac{1}{4}$$

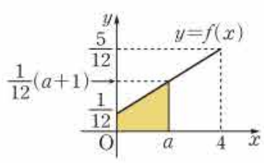
이때 $\mathrm{P}\left(1\le X\le \frac{7}{2}\right)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}\left(1\le X\le \frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot \frac{3}{2}\cdot \frac{3}{8}$$

$$=\frac{13}{32}$$

답 $\frac{13}{32}$

08 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $\mathrm{P}(X\le a)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로 $\mathrm{P}(X\le a)=\frac{1}{3}$에서



$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}(a+1)\right\}\cdot a=\frac{1}{3}$$

$$a^2+2a-8=0, \qquad (a+4)(a-2)=0$$

$$\therefore a=2\ (\because\ 0\le a\le 4)$$

답 2

Lecture 10 이산확률변수의 평균과 표준편차

55쪽

01 (1) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로

1, 5

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{3},$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{4}{9}+1^2\cdot\frac{4}{9}+2^2\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\frac{8}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

답 풀이 참조

QBOX

확률질량함수가 주어지면 먼저 각 확률을 구하여 확률분포를 표로 나타낸 후 평균을 구하는 것이 편리하다.

02 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

(1) $\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{2}{5}=3$

(2) $\mathrm{V}(X)=\underbrace{1^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{3}{10}+4^2\cdot\frac{2}{5}}_{\mathrm{E}(X^2)}-3^2=1$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

답 (1) 3 (2) 1 (3) 1

V(X)는 편차 $X-\mathrm{E}(X)$의 제곱의 평균이다.

다른 풀이 (2) $\mathrm{V}(X)=(1-3)^2\cdot\frac{1}{10}+(2-3)^2\cdot\frac{1}{5}$

$+(3-3)^2\cdot\frac{3}{10}+(4-3)^2\cdot\frac{2}{5}$

$=1$

03 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 500, 1000이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(X=500)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(X=1000)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	500	1000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{4}+500\cdot\frac{1}{2}+1000\cdot\frac{1}{4}=500$$

따라서 구하는 기댓값은 500원이다.

답 500원

04 $\mathrm{E}(-X+5)=-\mathrm{E}(X)+5=-4+5=1$

답 1

05 $\mathrm{V}\left(\frac{X-3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

06 $\sigma(-6X)=|-6|\sigma(X)=6\sqrt{2}$

답 $6\sqrt{2}$

V$(X)=2$이므로 $\sigma(X)=\sqrt{2}$

07 (1) $\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{4}{9}+3\cdot\frac{2}{9}=\frac{16}{9},$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{9}+1^2\cdot\frac{2}{9}+2^2\cdot\frac{4}{9}+3^2\cdot\frac{2}{9}=4$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=4-\left(\frac{16}{9}\right)^2=\frac{68}{81}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{68}{81}}=\frac{2\sqrt{17}}{9}$$

(2) $\mathrm{E}(3X-4)=3\mathrm{E}(X)-4=3\cdot\frac{16}{9}-4=\frac{4}{3}$

$\mathrm{V}(3X-4)=3^2\mathrm{V}(X)=9\cdot\frac{68}{81}=\frac{68}{9}$

$\sigma(3X-4)=|3|\sigma(X)=3\cdot\frac{2\sqrt{17}}{9}=\frac{2\sqrt{17}}{3}$

답 풀이 참조

$\sigma(3X-4)$
$=\sqrt{\mathrm{V}(3X-4)}$
$=\sqrt{\frac{68}{9}}=\frac{2\sqrt{17}}{3}$
로 구할 수도 있다.

표준+발전 유형 Q+Q 56쪽

01 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+a+\frac{1}{4}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$$

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{3}{8}+1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{8}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{3}{8}+1^2\cdot\frac{1}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{8}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{27}{8}-\left(\frac{11}{8}\right)^2=\frac{95}{64}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{95}{64}}=\frac{\sqrt{95}}{8}$$

따라서 X의 평균은 $\frac{11}{8}$, 표준편차는 $\frac{\sqrt{95}}{8}$이다.

답 평균: $\frac{11}{8}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{95}}{8}$

02 확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{1}{3}+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{3}$이므로 $\quad 1\cdot a+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot b=\frac{5}{3}$

$$\therefore a+3b=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{6}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

답 $\frac{5}{9}$

03 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35},$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{4}{35}+1\cdot\frac{18}{35}+2\cdot\frac{12}{35}+3\cdot\frac{1}{35}=\frac{9}{7},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{4}{35}+1^2\cdot\frac{18}{35}+2^2\cdot\frac{12}{35}+3^2\cdot\frac{1}{35}$$

$$=\frac{15}{7}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{15}{7}-\left(\frac{9}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{24}{49}}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

답 ④

Q BOX

1, 2, 3, 6

6의 약수의 눈이 나오지 않을 확률

㉡−㉠을 하면

$2b=\frac{1}{3} \quad \therefore b=\frac{1}{6}$

$b=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

04 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고 한 개의 주사위를 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X가 각 값을 가질 확률은

$$\mathrm{P}(X=0)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81},$$

$$\mathrm{P}(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81},$$

$$\mathrm{P}(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27},$$

$$\mathrm{P}(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81},$$

$$\mathrm{P}(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{16}{81}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)$

$$=0\cdot\frac{1}{81}+1\cdot\frac{8}{81}+2\cdot\frac{8}{27}+3\cdot\frac{32}{81}+4\cdot\frac{16}{81}$$

$$=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

05 뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수 중 큰 수가

$X=2$인 경우는 (1, 2)의 1가지,

$X=3$인 경우는 (1, 3), (2, 3)의 2가지,

$X=4$인 경우는 (1, 4), (2, 4), (3, 4)의 3가지

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6},$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{2}=\frac{10}{3},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{35}{3}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\frac{35}{3}-\left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$=\frac{5}{9}$$

답 ②

06 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고, 100원짜리 동전 2개와 50원짜리 동전 1개를 동시에 던져서 나오는 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

05 확률변수와 확률분포

100원	100원	50원	받는 금액(원)
H	H	H	250
H	H	T	200
H	T	H	150
H	T	T	100
T	H	H	150
T	H	T	100
T	T	H	50
T	T	T	0

게임을 한 번 해서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 50, 100, 150, 200, 250이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{1}{8}$, $P(X=50)=\frac{1}{8}$,

$P(X=100)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $P(X=150)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$,

$P(X=200)=\frac{1}{8}$, $P(X=250)=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	50	100	150	200	250	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+50\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{4}+150\cdot\frac{1}{4}+200\cdot\frac{1}{8}+250\cdot\frac{1}{8}=125$$

이므로 구하는 기댓값은 125원이다. 답 ③

07 게임을 한 번 해서 받을 수 있는 금액을 X원이라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-500	1000	합계
$P(X=x)$	$\frac{x}{3+x}$	$\frac{3}{3+x}$	1

이 게임을 한 번 해서 받을 수 있는 금액의 기댓값이 -200원이므로

$-500\cdot\frac{x}{3+x}+1000\cdot\frac{3}{3+x}=-200$

$-500x+3000=-200(3+x)$

양변에 $3+x$를 곱한다.

$300x=3600$ $\therefore x=12$ 답 12

08 $E(X)=-2$, $V(X)=1$이므로

$E(Y)=-1$에서 $E(aX+b)=-1$

$aE(X)+b=-1$

$\therefore -2a+b=-1$ ······ ㉠

$V(Y)=4$에서 $V(aX+b)=4$

$a^2V(X)=4$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$a=2$를 ㉠에 대입하여 정리하면 $b=3$

$-2\cdot2+b=-1$이므로 $b=3$

$\therefore a+b=5$ 답 ③

09 $E(Y)=\frac{2}{3}$에서 $E\left(\frac{1}{3}X-1\right)=\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}E(X)-1=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}E(X)=\frac{5}{3}$

$\therefore E(X)=5$

$Y=\frac{1}{3}X-1$에서 $X=3Y+3$ 이므로 $E(X)=E(3Y+3)=3E(Y)+3=3\cdot\frac{2}{3}+3=5$ 와 같이 구할 수도 있다.

또 $V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\frac{20}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$이므로

$V\left(\frac{1}{3}X-1\right)=\frac{16}{9}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^2V(X)=\frac{16}{9}$

$\therefore V(X)=16$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{16}=4$이므로

$\frac{\sigma(X)}{E(X)}=\frac{4}{5}$ 답 $\frac{4}{5}$

10 확률의 총합은 1이므로

$3a+a+2a=1$, $6a=1$ $\therefore a=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=(-1)\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$,

$E(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{2}+0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{5}{6}-\left(-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{29}{36}$

$\therefore V(6X-5)=6^2V(X)=36\cdot\frac{29}{36}=29$ 답 29

11 주어진 그래프에서

$P(X=-2)=\frac{1}{6}$, $P(X=0)=\frac{1}{3}$,

$P(X=2)=\frac{1}{6}$, $P(X=4)=\frac{1}{3}$

이므로

$E(X)=-2\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$,

$E(X^2)=(-2)^2\cdot\frac{1}{6}+0^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{20}{3}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{20}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{44}{9}$

$E(Y)=4$에서

$E(aX+b)=4$, $aE(X)+b=4$

$\therefore \frac{4}{3}a+b=4$ ······ ㉠

$V(Y)=11$에서

$V(aX+b)=11$, $a^2V(X)=11$

$\frac{44}{9}a^2=11$, $a^2=\frac{9}{4}$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$ ($\because a<0$)

$a=-\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $b=6$

$\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+b=4$이므로 $-2+b=4$ $\therefore b=6$

$\therefore ab=-9$ 답 -9

12 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_2C_0}{{}_5C_2}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{5},$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{3}{10}+1^2\cdot\frac{3}{5}+2^2\cdot\frac{1}{10}=1$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

$\therefore V(5X+4)=5^2V(X)=25\cdot\frac{9}{25}=9$ 답 9

13 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 동전을 세 번 던졌을 때 받을 수 있는 점수는

HHH일 때, $2\cdot3=6$

HHT, HTH, THH일 때, $2\cdot2+(-1)\cdot1=3$

HTT, THT, TTH일 때, $2\cdot1+(-1)\cdot2=0$

TTT일 때, $(-1)\cdot3=-3$

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 6, 3, 0, -3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=6)=\frac{1}{8},\ P(X=3)=\frac{3}{8},$$

$$P(X=0)=\frac{3}{8},\ P(X=-3)=\frac{1}{8}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	6	3	0	-3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=6\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{3}{8}+0\cdot\frac{3}{8}+(-3)\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2},$$

$$E(X^2)=6^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{3}{8}+0^2\cdot\frac{3}{8}+(-3)^2\cdot\frac{1}{8}=9$$

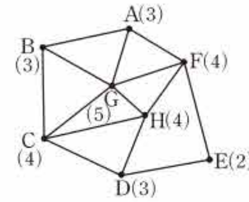
이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=9-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로

$\sigma(6X)=6\sigma(X)=6\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$ 답 ⑤

14 주어진 그림의 각 지점에 연결된 도로의 개수를 표시하면 오른쪽 그림과 같다.



확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$$P(X=2)=\frac{1}{8},\ P(X=3)=\frac{3}{8},$$

$$P(X=4)=\frac{3}{8},\ P(X=5)=\frac{1}{8}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{3}{8}+5\cdot\frac{1}{8}=\frac{7}{2},$$

$$E(X^2)=2^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{3}{8}+4^2\cdot\frac{3}{8}+5^2\cdot\frac{1}{8}=13$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=13-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

$\therefore V(2X-1)=2^2V(X)=4\cdot\frac{3}{4}=3$ 답 ③

15 세 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

${}_6C_3=20$

삼각형의 세 꼭짓점에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내고, 그때의 확률변수 X의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) 예각삼각형인 경우는

$X=5$ (1, 3, 5), (2, 4, 6)

의 2가지이고, 그때의 X의 값은 각각 5, 6이다.

(ii) 직각삼각형인 경우는

$X=1+4=5$ (1, 4, 2), (1, 4, 3), (1, 4, 5), (1, 4, 6),
(2, 5, 1), (2, 5, 3), (2, 5, 4), (2, 5, 6),
(3, 6, 1), (3, 6, 2), (3, 6, 4), (3, 6, 5)

의 12가지이고, 그때의 X의 값은 각각 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9이다.

(iii) 둔각삼각형인 경우는

$X=1+2=3$ (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5),
(4, 5, 6), (5, 6, 1), (6, 1, 2)

의 6가지이고, 그때의 X의 값은 각각 3, 5, 7, 9, 6, 3이다.

즉 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 5, 6, 7, 9이고, 그 확률은 각각

$$P(X=3)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10},\ P(X=5)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=6)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10},\ P(X=7)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4},$$

$$P(X=9)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	5	6	7	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=3\cdot\frac{1}{10}+5\cdot\frac{3}{10}+6\cdot\frac{1}{10}+7\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\frac{32}{5}$$

$\therefore \mathrm{E}(10X)=10\mathrm{E}(X)=10\cdot\frac{32}{5}=64$ 답 64

중단원 마무리

59쪽

01 전략 먼저 확률의 총합이 1임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$a+\left(a+\frac{1}{4}\right)+\left(a+\frac{1}{2}\right)=1$$

$3a=\frac{1}{4}$ $\therefore a=\frac{1}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$ 답 ⑤

$\mathrm{P}(X\le 2)$
$=1-\mathrm{P}(X=3)$
$=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$
와 같이 구할 수도 있다.

02 전략 먼저 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{6},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10},$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_6\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

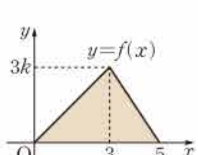
X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 1)=1-\mathrm{P}(X=0)$

$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ 답 $\frac{5}{6}$

03 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



$y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로 $\frac{1}{2}\cdot5\cdot3k=1$

$\frac{15}{2}k=1$ $\therefore k=\frac{2}{15}$ ⋯ ❷

답 $\frac{2}{15}$

단계	채점 기준	비율
❶	$y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷	k의 값을 구할 수 있다.	60 %

04 전략 함수 $f(x)$의 그래프의 대칭성을 이용한다.

풀이 $f(4+x)=f(4-x)$가 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\mathrm{P}(3\le X\le 4)=\mathrm{P}(4\le X\le 5)$이므로

$$\mathrm{P}(3\le X\le 5)=\mathrm{P}(3\le X\le 4)+\mathrm{P}(4\le X\le 5)$$
$$=2\mathrm{P}(3\le X\le 4)$$
$$=2\{\mathrm{P}(0\le X\le 4)-\mathrm{P}(0\le X\le 3)\}$$
$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

따라서 $a=5$, $b=1$이므로

$a-b=4$ 답 4

쌤 한마디

확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$, $x=8$로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로 $\mathrm{P}(0\le X\le 8)=1$

이때 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}(0\le X\le 4)=\mathrm{P}(4\le X\le 8)=\frac{1}{2}$

05 전략 주어진 확률분포를 이용하여 a, b, c에 대한 식을 세운다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$a+b+c=1$ ⋯⋯ ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{2}{3}$이므로 $0\cdot a+1\cdot b+2\cdot c=\frac{2}{3}$

$\therefore b+2c=\frac{2}{3}$ ⋯⋯ ㉡

$\mathrm{V}(X)=\frac{5}{9}$이므로 $0^2\cdot a+1^2\cdot b+2^2\cdot c-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$\therefore b+4c=1$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{1}{6}$

㉢−㉡을 하면
$2c=\frac{1}{3}$ $\therefore c=\frac{1}{6}$
$c=\frac{1}{6}$을 ㉡에 대입하면
$b+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
$\therefore b=\frac{1}{3}$

$b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore abc=\frac{1}{36}$ 답 $\frac{1}{36}$

06 전략 $\mathrm{P}(X=k)=p_k$라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

풀이 $\mathrm{P}(X=k)=p_k$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=k)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	1

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}$$
$$=\frac{1}{2}p_k+\frac{1}{10}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

이므로 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(Y=k)$	$\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_3+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_4+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(Y)$$
$$=1\cdot\left(\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}\right)$$
$$+\cdots+5\cdot\left(\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5)$$
$$+\frac{1}{10}(1+2+3+4+5)$$
$$=\frac{1}{2}(p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5)+\frac{3}{2}$$

이때 $\mathrm{E}(X)=4$에서 $p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5=4$이므로 $\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$ 답 ②

참고 $Y=\frac{1}{2}X+\frac{1}{10}$로 착각하여

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+\frac{1}{10}$$

과 같이 풀지 않도록 주의한다.

07 전략 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{24},$$
$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{5}{6}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3},$$
$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{8}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{8}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{24}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{5}{8}=\frac{19}{12}$$ 답 ③

08 전략 1장의 응모권으로 받을 수 있는 당첨금을 X원이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

풀이 1장의 응모권으로 받을 수 있는 당첨금을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 4000, 16000, 84000이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_7\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{7}{24},$$
$$\mathrm{P}(X=4000)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{21}{40},$$
$$\mathrm{P}(X=16000)=\frac{{}_7\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{7}{40},$$
$$\mathrm{P}(X=84000)=\frac{{}_7\mathrm{C}_0\cdot{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{120}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	4000	16000	84000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

1장의 응모권으로 받을 수 있는 당첨금의 기댓값

$$\therefore \mathrm{E}(X)$$
$$=0\cdot\frac{7}{24}+4000\cdot\frac{21}{40}+16000\cdot\frac{7}{40}+84000\cdot\frac{1}{120}$$
$$=5600$$

따라서 응모권 1장을 최소 5600원에 팔아야 한다.

답 5600원

09 전략 두 상수 a, b $(a\neq 0)$에 대하여 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{E}(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이므로

$$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}\left(\frac{5(X-m)}{\sigma}+30\right)$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{5(X-m)}{\sigma}+30\right)=\mathrm{E}\left(\frac{5}{\sigma}X-\frac{5m}{\sigma}+30\right)=\frac{5}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{5m}{\sigma}+30$$

$$=\frac{5}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{5m}{\sigma}+30$$
$$=\frac{5m}{\sigma}-\frac{5m}{\sigma}+30=30,$$
$$\sigma(T)=\sigma\left(\frac{5(X-m)}{\sigma}+30\right)=\left|\frac{5}{\sigma}\right|\sigma(X)$$
$$=\frac{5}{\sigma}\cdot\sigma=5$$

답 평균: 30점, 표준편차: 5점

10 전략 먼저 확률의 총합이 1임을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$$
$$+\mathrm{P}(X=5)=1$$
$$k+4k+9k+16k+25k=1$$
$$55k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{55}$$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{55}+2\cdot\frac{4}{55}+3\cdot\frac{9}{55}+4\cdot\frac{16}{55}+5\cdot\frac{25}{55}$$
$$=\frac{45}{11}$$
$$\therefore \mathrm{E}(11X-8)=11\mathrm{E}(X)-8$$
$$=11\cdot\frac{45}{11}-8=37$$ 답 ⑤

11 전략 Y를 X에 대한 식으로 나타낸 후 $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{V}(Y)$를 각각 구한다.

풀이 두 이산확률변수 X, Y에 대하여 X가 1, 2, 3, 4일 때의 확률이 각각 Y가 10, 19, 28, 37일 때의 확률과 같으므로

$10=9\cdot1+1$
$19=9\cdot2+1$
$28=9\cdot3+1$
$37=9\cdot4+1$

$$Y=9X+1$$
$$\therefore \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(9X+1)=9\mathrm{E}(X)+1$$
$$=9\cdot3+1=28$$

또 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=10-3^2=1$이므로

$$V(Y)=V(9X+1)=9^2V(X)=81\cdot1=81$$

$$\therefore E(Y)+V(Y)=109$$

답 109

12 전략 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸 후 $\sigma(X)$를 구한다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_4C_4}{{}_7C_4}=\frac{1}{35},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_4C_3}{{}_7C_4}=\frac{12}{35},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_4C_2}{{}_7C_4}=\frac{18}{35},$$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_4C_1}{{}_7C_4}=\frac{4}{35}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

…… ❶

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{35}+1\cdot\frac{12}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{4}{35}=\frac{12}{7},$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{35}+1^2\cdot\frac{12}{35}+2^2\cdot\frac{18}{35}+3^2\cdot\frac{4}{35}=\frac{24}{7}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=\frac{24}{7}-\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$이므로 …… ❷

$$\sigma(-7X)=|-7|\sigma(X)=7\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}=2\sqrt{6}$$ …… ❸

답 $2\sqrt{6}$

단계	채점 기준	비율
❶	X의 확률분포를 구할 수 있다.	40 %
❷	$\sigma(X)$를 구할 수 있다.	40 %
❸	$\sigma(-7X)$를 구할 수 있다.	20 %

13 전략 $3\le k\le18$인 자연수 k에 대하여 $a+b+c=k$일 확률과 $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$일 확률이 같음을 이용한다.

풀이 $3\le k\le18$인 자연수 k에 대하여 $a+b+c=k$일 확률 $P(X=k)$와 $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$, 즉

$$a+b+c=3\times7-k$$

일 확률 $P(X=3\times\boxed{7}-k)$는 서로 같다.

7−a, 7−b, 7−c는 각각 6 이하의 자연수이다.

$P(X=k)=P(X=3\times7-k)$에서

$$P(X=3)=P(X=18),$$

$$P(X=4)=P(X=17),$$

$$P(X=5)=P(X=16),$$

$$\vdots$$

$$P(X=10)=P(X=11)$$

이므로

$$E(X)=\sum_{k=3}^{18}\{k\times P(X=k)\}$$

$$=3\times P(X=3)+4\times P(X=4)$$

$$+5\times P(X=5)+\cdots+17\times P(X=17)$$

$$+18\times P(X=18)$$

$$=3\times P(X=3)+4\times P(X=4)$$

$$+5\times P(X=5)+\cdots+10\times(X=10)$$

$$+11\times P(X=10)+\cdots+16\times P(X=5)$$

$$+17\times P(X=4)+18\times P(X=3)$$

$$=(3+18)\times P(X=3)$$

$$+(4+17)\times P(X=4)$$

$$+(5+16)\times P(X=5)$$

$$+\cdots+(10+11)\times P(X=10)$$

$$=21\times\{P(X=3)+P(X=4)$$

$$+\cdots+P(X=10)\}$$

$$=\boxed{21}\times\sum_{k=3}^{10}P(X=k)$$

이때 $\sum_{k=3}^{18}P(X=k)=1$이고

$$P(X=3)+P(X=4)+\cdots+P(X=10)$$

$$=P(X=18)+P(X=17)+\cdots+P(X=11)$$

이므로

$$\sum_{k=3}^{10}P(X=k)=\sum_{k=11}^{18}P(X=k)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore E(X)=21\times\sum_{k=3}^{10}P(X=k)=\boxed{21}\times\boxed{\frac{1}{2}}=\frac{21}{2}$$

따라서 $p=7$, $q=21$, $r=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{p+q}{r}=\frac{7+21}{\frac{1}{2}}=56$$

답 ③

쌤한마디

$3\le k\le18$인 자연수 k에 대하여 $a+b+c=k$를 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)가

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \cdots, (a_n, b_n, c_n)$$

의 n개이면 $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)도

$$(7-a_1, 7-b_1, 7-c_1), (7-a_2, 7-b_2, 7-c_2), \cdots, (7-a_n, 7-b_n, 7-c_n)$$

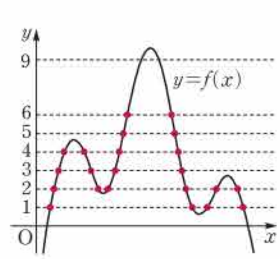
의 n개이다.

따라서 $a+b+c=k$일 확률과 $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$일 확률은 서로 같다.

14 전략 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸 후 $E(X)$를 구한다.

풀이 확률변수 X가 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 개수이므로 오른쪽 그림에서 a의 값에 따른 교점의 개수를 구하면 다음 표와 같다.

1≤a≤6



a	1	2	3	4	5	6
교점의 개수	4	6	4	4	2	2

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 4, 6이고, 그 확률은 각각

$$P(X=2)=\frac{1}{3},\ P(X=4)=\frac{1}{2},\ P(X=6)=\frac{1}{6}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 $E(X)=2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{3}$이므로

$p=3,\ q=11$

$\therefore\ p+q=14$ 답 14

15 전략 7개의 관광코스와 그 요금을 구한 후 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

풀이 P 지점에서 출발하여 A, B, C, D, E 5개의 지역을 모두 또는 일부를 방문하면서 Q 지점에 도착하는 관광코스는 P → A → ⋯ → E → Q이므로 관광지 A, E는 반드시 방문한다.
따라서 A에서 E까지 가는데 B, C, D를 모두 방문하거나 일부만 방문하는 경우를 구하면 된다.
한 관광지를 방문할 때마다 14000원씩 요금을 부가하므로 모든 관광코스와 그 요금은 다음과 같다.

(i) A, E를 포함하여 3군데를 방문하는 경우
A → B → E ➡ 14000·3=42000(원)

(ii) A, E를 포함하여 4군데를 방문하는 경우
A → B → D → E
A → C → B → E
A → C → D → E
➡ 14000·4=56000(원)

(iii) A, E를 포함하여 5군데를 방문하는 경우
A → B → C → D → E
A → C → B → D → E
A → C → D → B → E
➡ 14000·5=70000(원)

이상에서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 42000, 56000, 70000이고, 그 확률은 각각

$$P(X=42000)=\frac{1}{7},\ P(X=56000)=\frac{3}{7},$$

$$P(X=70000)=\frac{3}{7}$$

전체 경우의 수는 1+3+3=7

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	42000	56000	70000	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=42000\cdot\frac{1}{7}+56000\cdot\frac{3}{7}+70000\cdot\frac{3}{7}$$
$$=60000$$

$\therefore\ E\left(\frac{X}{1000}\right)=\frac{1}{1000}E(X)=60$ 답 60

06 이항분포와 정규분포

Lecture 11 이항분포

62쪽

01 2개의 구슬을 차례대로 꺼낼 때 꺼낸 구슬을 다시 넣지 않으므로 각 시행은 독립시행이 아니다.
따라서 X는 이항분포를 따르지 않는다.
답 이항분포를 따르지 않는다.

02 오지선다형 문제 1개에 임의로 답할 때 맞힐 확률은 $\frac{1}{5}$이므로 맞히는 문제의 개수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다. 답 $B\left(10,\ \frac{1}{5}\right)$

03 (1) $P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}$
$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$

(2) $P(X=2)={}_5C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{45}{512}$

답 풀이 참조

04 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{2}{5}\right)^{4-x}$$

60 % ➡ $\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$P(X=1)={}_4C_1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^3$$
$$=\frac{96}{625}$$

답 $\frac{96}{625}$

05 $E(X)=90\cdot\frac{1}{3}=30$

$V(X)=90\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=20$

$\sigma(X)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

답 $E(X)=30,\ V(X)=20,\ \sigma(X)=2\sqrt{5}$

06 $E(X)=150\cdot\frac{2}{5}=60$

$V(X)=150\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=36$

$\sigma(X)=\sqrt{36}=6$

답 $E(X)=60,\ V(X)=36,\ \sigma(X)=6$

07 (1) $E(X)=7$에서 $28p=7$ $\therefore\ p=\frac{1}{4}$

(2) 확률변수 X는 이항분포 $B\left(28,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$V(X)=28\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\frac{21}{4}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{21}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

표준+발전 유형 Q+Q 63쪽

01 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}$$
$$={}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^6\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$
$$\therefore \mathrm{P}(X<3)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$$
$$={}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$=\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64}$$
$$=\frac{11}{32}$$

답 $\frac{11}{32}$

02 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$$

$\mathrm{P}(X>4)=\frac{1}{243}$에서

$$\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{243},\quad {}_5\mathrm{C}_5p^5(1-p)^0=\frac{1}{243}$$
$$p^5=\left(\frac{1}{3}\right)^5\quad \therefore p=\frac{1}{3}$$

따라서 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 Y의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(Y=y)={}_3\mathrm{C}_y\left(\frac{1}{3}\right)^y\left(\frac{2}{3}\right)^{3-y}\ (y=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$
$$\therefore \mathrm{P}(Y\le 2)=1-\mathrm{P}(Y=3)$$
$$=1-{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0$$
$$=1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27}$$

답 $\frac{26}{27}$

03 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$0.25=\frac{1}{4}$

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}$$
$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$
$$\therefore \mathrm{P}(X>8)=\mathrm{P}(X=9)+\mathrm{P}(X=10)$$
$$={}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)^1+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0$$
$$=\frac{30}{4^{10}}+\frac{1}{4^{10}}=\frac{31}{2^{20}}$$

답 ④

04 싹이 튼 씨앗의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$80\ \% \Rightarrow \frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

$$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\ge 3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$$
$$={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^1+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^0$$
$$=\frac{256}{625}+\frac{256}{625}$$
$$=\frac{512}{625}$$

답 ③

05 $\mathrm{E}(X)=10$에서 $\quad 50p=10 \quad \therefore p=\frac{1}{5}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=50\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=8$$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=8+10^2=108$$

답 108

06 $\mathrm{P}(X=x)={}_{72}\mathrm{C}_x\frac{5^x}{6^{72}}$

$\frac{5^x}{6^{72}}=\frac{5^x}{6^x\cdot 6^{72-x}}=\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(\frac{1}{6}\right)^{72-x}$

$$={}_{72}\mathrm{C}_x\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(\frac{1}{6}\right)^{72-x}$$
$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 72)$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{5}{6}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=72\cdot\frac{5}{6}=60,\ \mathrm{V}(X)=72\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=10$$

답 $\mathrm{E}(X)=60,\ \mathrm{V}(X)=10$

07 3개의 동전을 동시에 한 번 던질 때 2개는 앞면, 1개는 뒷면이 나올 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(80,\ \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=80\cdot\frac{3}{8}=30$$

답 ①

08 한 번의 시행에서 당첨 제비가 나올 확률은

꺼낸 제비를 다시 넣으므로 각 시행은 독립시행이다.

$$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=45\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{36}{5}$$
$$\therefore \mathrm{V}(5X-7)=5^2\mathrm{V}(X)$$
$$=25\cdot\frac{36}{5}=180$$

답 180

Lecture 12 정규분포와 표준정규분포

65쪽

01 답 $\mathrm{N}(1,\ 3^2)$

02 답 $\mathrm{N}(-4,\ 2^2)$

03 ㄴ. σ의 값이 일정할 때, m의 값이 달라져도 곡선의 모양은 변하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

04 $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)$

$$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$$

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

$$=2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$$
$$=2a$$

답 $2a$

05 $P(m+\sigma \le X \le m+2\sigma)$
$=P(m \le X \le m+2\sigma)-P(m \le X \le m+\sigma)$
$=b-a$ 답 $b-a$

06 $P(X \ge m-\sigma)$
$=P(m-\sigma \le X \le m)+P(X \ge m)$
$=P(m \le X \le m+\sigma)+0.5$
$=a+0.5$ 답 $a+0.5$

07 $P(X \le m-2\sigma)$
$=P(X \le m)-P(m-2\sigma \le X \le m)$
$=0.5-P(m \le X \le m+2\sigma)$
$=0.5-b$ 답 $0.5-b$

08 $P(1 \le Z \le 1.4)=P(0 \le Z \le 1.4)-P(0 \le Z \le 1)$
$=0.4192-0.3413$
$=0.0779$ 답 0.0779

09 $P(Z \ge 1.6)=P(Z \ge 0)-P(0 \le Z \le 1.6)$
$=0.5-0.4452$
$=0.0548$ 답 0.0548

10 $P(Z \le a)=0.6915$에서
$P(Z \le 0)+P(0 \le Z \le a)=0.6915$
$0.5+P(0 \le Z \le a)=0.6915$
$\therefore P(0 \le Z \le a)=0.1915$
이때 $P(0 \le Z \le 0.5)=0.1915$이므로
$a=0.5$ 답 0.5

11 $P(-2a \le Z \le 2a)=0.9544$에서
$P(-2a \le Z \le 0)+P(0 \le Z \le 2a)=0.9544$
$2P(0 \le Z \le 2a)=0.9544$
$\therefore P(0 \le Z \le 2a)=0.4772$
이때 $P(0 \le Z \le 2)=0.4772$이므로
$2a=2 \quad \therefore a=1$ 답 1

12 답 $Z=\dfrac{X-18}{3}$

13 $P(9 \le X \le 15)=P\left(\dfrac{9-18}{3} \le Z \le \dfrac{15-18}{3}\right)$
$=P(-3 \le Z \le -1)$
$=P(1 \le Z \le 3)$
$=P(0 \le Z \le 3)-P(0 \le Z \le 1)$
$=0.4987-0.3413$
$=0.1574$ 답 0.1574

표준+발전 유형 Q+Q

66쪽

01 ③ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 작을수록 그래프의 폭이 좁아진다. 답 ③

Q BOX

상수 a에 대하여
$P(X \le a)+P(X \ge a)=1$

$P(x_1 \le X \le x_2)$
$=P(X \le x_2)-P(X \le x_1)$

$P(Z \le 0)=0.5$이고
$0.6915>0.5$이므로
$a>0$

$P(X \le m)=0.5$이고
$0.8413>0.5$이므로
$a>m$

$P(X \ge m)=0.5$이고
$0.2119<0.5$이므로
$a>m$

02 ㄱ. 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 $a \ne m$이면
$P(X \le a) \ne P(X \ge a)$
ㄴ. $P(X \le m)=P(X \ge m)=0.5$이므로
$P(X \le m)+P(X \ge m)=1$
ㄷ. $x_1<x_2$일 때,
$P(x_1 \le X \le x_2)=P(X \ge x_1)-P(X \ge x_2)$
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

03 $m=20$, $\sigma=4$이므로
$P(24 \le X \le 30)$
$=P(20+4 \le X \le 20+2.5 \times 4)$
$=P(m+\sigma \le X \le m+2.5\sigma)$
$=P(m \le X \le m+2.5\sigma)-P(m \le X \le m+\sigma)$
$=0.4938-0.3413=0.1525$ 답 0.1525

04 $P(X \ge m-\sigma)=0.6915$에서
$P(m-\sigma \le X \le m)+P(X \ge m)=0.6915$
$P(m \le X \le m+\sigma)+0.5=0.6915$
$\therefore P(m \le X \le m+\sigma)=0.1915$
$\therefore P(m-\sigma \le X \le m+\sigma)=2P(m \le X \le m+\sigma)$
$=2 \times 0.1915$
$=0.3830$ 답 ⑤

05 $P(X \le a)=0.8413$에서
$P(X \le m)+P(m \le X \le a)=0.8413$
$0.5+P(m \le X \le a)=0.8413$
$\therefore P(m \le X \le a)=0.3413$
이때 $P(m \le X \le m+\sigma)=0.3413$이므로
$a=m+\sigma=47+5=52$ 답 52

06 $P(X \ge a)=0.2119$에서
$P(X \ge m)-P(m \le X \le a)=0.2119$
$0.5-P(m \le X \le a)=0.2119$
$\therefore P(m \le X \le a)=0.2881$
이때 $P(m-0.8\sigma \le X \le m+0.8\sigma)=0.5762$에서
$2P(m \le X \le m+0.8\sigma)=0.5762$
$\therefore P(m \le X \le m+0.8\sigma)=0.2881$
$\therefore a=m+0.8\sigma=38+0.8 \times 5=42$ 답 ④

07 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(6,\ 2^2)$, $N(15,\ 3^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-6}{2}$, $Z_Y=\dfrac{Y-15}{3}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$P(4 \le X \le 10)=P(12 \le Y \le k)$에서
$P\left(\dfrac{4-6}{2} \le Z_X \le \dfrac{10-6}{2}\right)$
$=P\left(\dfrac{12-15}{3} \le Z_Y \le \dfrac{k-15}{3}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(-1 \le Z_X \le 2) = \mathrm{P}\left(-1 \le Z_Y \le \frac{k-15}{3}\right)$

따라서 $\frac{k-15}{3}=2$이므로 $k-15=6$

$\therefore k=21$

답 ④

08 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ a^2)$, $\mathrm{N}(0,\ b^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X}{a}$, $Z_Y=\frac{Y}{b}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{P}(X \ge a)=\mathrm{P}\left(Z_X \ge \frac{a}{a}\right)=\mathrm{P}(Z_X \ge 1)$,

$\mathrm{P}(Y \ge b)=\mathrm{P}\left(Z_Y \ge \frac{b}{b}\right)=\mathrm{P}(Z_Y \ge 1)$이므로

$\mathrm{P}(X \ge a)=\mathrm{P}(Y \ge b)$

ㄴ. $\mathrm{P}(-a \le X \le 0)=\mathrm{P}\left(\frac{-a}{a} \le Z_X \le \frac{0}{a}\right)$

$=\mathrm{P}(-1 \le Z_X \le 0)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z_X \le 1)$,

$\mathrm{P}(0 \le Y \le b)=\mathrm{P}\left(\frac{0}{b} \le Z_Y \le \frac{b}{b}\right)=\mathrm{P}(0 \le Z_Y \le 1)$

이므로

$\mathrm{P}(-a \le X \le 0)=\mathrm{P}(0 \le Y \le b)$

ㄷ. $\mathrm{P}(-1 \le X \le 1)=\mathrm{P}\left(\frac{-1}{a} \le Z_X \le \frac{1}{a}\right)$,

$\mathrm{P}(-3 \le Y \le 3)=\mathrm{P}\left(\frac{-3}{b} \le Z_Y \le \frac{3}{b}\right)$

$\mathrm{P}(-1 \le X \le 1)=\mathrm{P}(-3 \le Y \le 3)$에서

$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{a} \le Z_X \le \frac{1}{a}\right)=\mathrm{P}\left(-\frac{3}{b} \le Z_Y \le \frac{3}{b}\right)$

따라서 $\frac{1}{a}=\frac{3}{b}$이므로 $b=3a$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

09 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(27,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-27}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(|X-33| \le 3)$

$=\mathrm{P}(30 \le X \le 36)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{30-27}{6} \le Z \le \frac{36-27}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(0.5 \le Z \le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$

$=0.4332-0.1915=0.2417$

답 0.2417

$|X-33| \le 3$에서
$-3 \le X-33 \le 3$
$\therefore 30 \le X \le 36$

10 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(42,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-42}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $\mathrm{P}(36 \le X \le 48)=0.7698$이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{36-42}{5} \le Z \le \frac{48-42}{5}\right)=0.7698$

$\mathrm{P}(-1.2 \le Z \le 1.2)=0.7698$

$2\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.2)=0.7698$

$\therefore \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.2)=0.3849$

$\therefore \mathrm{P}(X>48)=\mathrm{P}\left(Z>\frac{48-42}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z>1.2)$

$=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.2)$

$=0.5-0.3849=0.1151$

답 ③

$\mathrm{E}(X)=42$이므로 표준화하지 않고 다음과 같이 확률을 구할 수도 있다.
$2\mathrm{P}(42 \le X \le 48)$
$=0.7698$
$\therefore \mathrm{P}(42 \le X \le 48)$
$=0.3849$
$\therefore \mathrm{P}(X>48)$
$=\mathrm{P}(X \ge 42)$
$-\mathrm{P}(42 \le X \le 48)$
$=0.5-0.3849$
$=0.1151$

11 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-32}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(a \le X \le 36)=0.8185$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{a-32}{4} \le Z \le \frac{36-32}{4}\right)=0.8185$

$\mathrm{P}\left(\frac{a-32}{4} \le Z \le 1\right)=0.8185$

$0.8185>0.5$이므로 $\frac{a-32}{4}<0$

$\mathrm{P}\left(\frac{a-32}{4} \le Z \le 0\right)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)=0.8185$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{32-a}{4}\right)+0.3413=0.8185$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{32-a}{4}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.4772$이므로

$\frac{32-a}{4}=2$, $32-a=8$ $\therefore a=24$

답 ①

12 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m-k\sigma \le X \le m+k\sigma)=0.4844$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{m-k\sigma-m}{\sigma} \le Z \le \frac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right)=0.4844$

$\mathrm{P}(-k \le Z \le k)=0.4844$

$2\mathrm{P}(0 \le Z \le k)=0.4844$

$\therefore \mathrm{P}(0 \le Z \le k)=0.2422$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.65)=0.2422$이므로

$k=0.65$

답 0.65

13 세탁하는 데 걸리는 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-32}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X \ge 36)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{36-32}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \ge 0.8)$

$=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.8)$

$=0.5-0.2881=0.2119$

답 ④

14 학생들의 수학 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-65}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\le 60)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{60-65}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -1.25)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(-1.25\le Z\le 0)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.25)$

$=0.5-0.39=0.11$

따라서 이 고등학교 2학년 학생 중 보충 수업을 받는 학생은 전체의 11 %이다. 답 11 %

Q BOX: $0.11\times 100=11\,(\%)$

15 계란 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(52,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-52}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(a\le X\le 64)=0.2857$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{a-52}{6}\le Z\le \frac{64-52}{6}\right)=0.2857$

$\mathrm{P}\left(\frac{a-52}{6}\le Z\le 2\right)=0.2857$

Q BOX: $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로 $0<\frac{a-52}{6}<2$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-52}{6}\right)=0.2857$

$0.4772-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-52}{6}\right)=0.2857$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-52}{6}\right)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$\frac{a-52}{6}=0.5,\qquad a-52=3$

$\therefore a=55$ 답 55

16 하루 인터넷 강의 수강 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(32\le X\le 44)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{32-40}{8}\le Z\le \frac{44-40}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0.5)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.34+0.19=0.53$

따라서 하루 인터넷 강의 수강 시간이 32분 이상 44분 이하인 학생 수는

$0.53\times 900=477$ 답 477

17 양초 한 개의 길이를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-24}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\le 22)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{22-24}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -1)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.34=0.16$

따라서 불량품으로 판정받은 양초의 개수는

$0.16\times 400=64$ 답 64

18 응시자들의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(330,\ 50^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-330}{50}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라 하면

$\mathrm{P}(X\ge a)=\frac{480}{4000}=0.12$

$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{a-330}{50}\right)=0.12$

Q BOX: $\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$이고 $0.12<0.5$이므로 $\frac{a-330}{50}>0$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-330}{50}\right)=0.12$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-330}{50}\right)=0.12$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-330}{50}\right)=0.38$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.18)=0.38$이므로

$\frac{a-330}{50}=1.18,\qquad a-330=59$

$\therefore a=389$

따라서 합격자의 최저 점수는 389점이다. 답 389점

19 학생들의 지능 지수를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(99,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-99}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

상위 20 %에 속하는 학생의 최저 지능 지수를 a라 하면

$\mathrm{P}(X\ge a)=0.2$

Q BOX: 20 % ➡ $\frac{20}{100}=0.2$

$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{a-99}{6}\right)=0.2$

Q BOX: $\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$이고 $0.2<0.5$이므로 $\frac{a-99}{6}>0$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-99}{6}\right)=0.2$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-99}{6}\right)=0.2$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-99}{6}\right)=0.3$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.85)=0.3$이므로

$\frac{a-99}{6}=0.85,\qquad a-99=5.1$

$\therefore a=104.1$

따라서 상위 20 %에 속하는 학생의 최저 지능 지수는 104.1이다. 답 ①

20 A 지역에서 스마트폰 가입자가 한 달 동안 사용한 데이터 용량을 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(480,\ 12^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-480}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한 달 동안 사용한 데이터 용량이 k 이상일 확률은

$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{k-480}{12}\right)$ ······ ㉠

B 지역에서 스마트폰 가입자가 한 달 동안 사용한 데이터 용량을 Y라 하면 확률변수 Y는 정규분포

$N(540,\ 6^2)$을 따르므로 $Z_Y=\dfrac{Y-540}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
한 달 동안 사용한 데이터 용량이 k 이상일 확률은

$$P(Y\ge k)=P\left(Z_Y\ge \frac{k-540}{6}\right) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이때 ㉠, ㉡이 같아야 하므로

$$\frac{k-480}{12}=\frac{k-540}{6},\quad k-480=2(k-540)$$

$$k-480=2k-1080 \quad \therefore k=600$$

답 600

두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

21 제품 A의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$P(X\ge 70)=0.07$에서

$$P\left(Z_X\ge \frac{70-m}{\sigma}\right)=0.07$$

$$P(Z_X\ge 0)-P\left(0\le Z_X\le \frac{70-m}{\sigma}\right)=0.07$$

$$0.5-P\left(0\le Z_X\le \frac{70-m}{\sigma}\right)=0.07$$

$$\therefore P\left(0\le Z_X\le \frac{70-m}{\sigma}\right)=0.43$$

$P(Z_X\ge 0)=0.5$이고 $0.07<0.5$이므로 $\dfrac{70-m}{\sigma}>0$

이때 $P(0\le Z\le 1.48)=0.43$이므로

$$\frac{70-m}{\sigma}=1.48$$

$$\therefore 70-1.48\sigma=m \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

제품 B의 무게를 Y g이라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $N(m+4,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_Y=\dfrac{Y-m-4}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$P(Y\ge 70)=0.14$에서

$$P\left(Z_Y\ge \frac{70-m-4}{\sigma}\right)=0.14$$

$$P(Z_Y\ge 0)-P\left(0\le Z_Y\le \frac{66-m}{\sigma}\right)=0.14$$

$$0.5-P\left(0\le Z_Y\le \frac{66-m}{\sigma}\right)=0.14$$

$$\therefore P\left(0\le Z_Y\le \frac{66-m}{\sigma}\right)=0.36$$

$P(Z_Y\ge 0)=0.5$이고 $0.14<0.5$이므로 $\dfrac{66-m}{\sigma}>0$

이때 $P(0\le Z\le 1.08)=0.36$이므로

$$\frac{66-m}{\sigma}=1.08$$

$$\therefore 66-1.08\sigma=m \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $70-1.48\sigma=66-1.08\sigma$

$0.4\sigma=4 \quad \therefore \sigma=10$

$\sigma=10$을 ㉠에 대입하면

$m=70-1.48\times 10=55.2$

$\therefore m+\sigma=65.2$

답 ⑤

Lecture 13 이항분포와 정규분포의 관계

70쪽

01 $E(X)=72\cdot\dfrac{1}{3}=24$, $V(X)=72\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=16$

이때 72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(24,\ 4^2)$을 따른다.

답 $N(24,\ 4^2)$

02 $E(X)=900\cdot\dfrac{4}{5}=720$, $V(X)=900\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{5}=144$

이때 900은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(720,\ 12^2)$을 따른다.

답 $N(720,\ 12^2)$

03 $E(X)=162\cdot\dfrac{2}{3}=108$, $V(X)=162\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=36$

이때 162는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(108,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-108}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&P(108\le X\le 120)\\&=P\left(\frac{108-108}{6}\le Z\le \frac{120-108}{6}\right)\\&=P(0\le Z\le 2)\\&=0.4772\end{aligned}$$

답 0.4772

04 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(108,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-108}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&P(96\le X\le 114)\\&=P\left(\frac{96-108}{6}\le Z\le \frac{114-108}{6}\right)\\&=P(-2\le Z\le 1)\\&=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)\\&=P(0\le Z\le 2)+P(0\le Z\le 1)\\&=0.4772+0.3413\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 0.8185

05 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(108,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-108}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&P(114\le X\le 126)\\&=P\left(\frac{114-108}{6}\le Z\le \frac{126-108}{6}\right)\\&=P(1\le Z\le 3)\\&=P(0\le Z\le 3)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.4987-0.3413\\&=0.1574\end{aligned}$$

답 0.1574

06 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(108,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-108}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 102)&=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{102-108}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1)=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 0.1587

07 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(196,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=196\cdot\frac{1}{2}=98,\ \mathrm{V}(X)=196\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=49$$

이때 196은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(98,\ 7^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-98}{7}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(77\le X\le 98)&=\mathrm{P}\left(\frac{77-98}{7}\le Z\le\frac{98-98}{7}\right)\\&=\mathrm{P}(-3\le Z\le 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)\\&=0.4987\end{aligned}$$

답 0.4987

08 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(98,\ 7^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-98}{7}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(84\le X\le 91)&=\mathrm{P}\left(\frac{84-98}{7}\le Z\le\frac{91-98}{7}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

답 0.1359

09 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(98,\ 7^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-98}{7}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 112)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{112-98}{7}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 0.0228

10 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=450\cdot\frac{1}{3}=150,\ \mathrm{V}(X)=450\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=100$$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따른다.

Q BOX

한 개의 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나올 확률

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 확률질량함수는
$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}$
(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$, $q=1-p$)

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률

따라서 $Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(140\le X\le 160)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{140-150}{10}\le Z\le\frac{160-150}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=2\times 0.3413\\&=0.6826\end{aligned}$$

답 0.6826

11 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 165)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{165-150}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5+0.4332\\&=0.9332\end{aligned}$$

답 0.9332

표준+발전 유형 Q+Q

71쪽

01 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ p)$를 따르고 $\mathrm{V}(X)=16$이므로

$$100p(1-p)=16,\qquad 25p^2-25p+4=0$$

$$(5p-1)(5p-4)=0\qquad \therefore\ p=\frac{1}{5}\ \left(\because\ 0<p<\frac{1}{2}\right)$$

즉 $\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{5}=20$이고 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 28)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{28-20}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 ⑤

02 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=150\cdot\frac{3}{5}=90,$$

$$\mathrm{V}(X)=150\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=36$$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-90}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(84\le X\le 102)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{84-90}{6}\le Z\le\frac{102-90}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.34+0.48=0.82$ 답 0.82

03 2 미만의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=180\cdot\frac{1}{6}=30,\ \mathrm{V}(X)=180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=25$

이때 180은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-30}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\ge 40)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{40-30}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$ 답 0.0228

04 재구매한 고객 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\cdot\frac{4}{5}=320,\ \mathrm{V}(X)=400\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=64$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-320}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(324\le X\le 332)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{324-320}{8}\le Z\le\frac{332-320}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.4332-0.1915=0.2417$ 답 ④

05 10점에 맞힌 화살의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(288,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=288\cdot\frac{2}{3}=192,\ \mathrm{V}(X)=288\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=64$

이때 288은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(192,\ 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-192}{8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\ge k)=0.16$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-192}{8}\right)=0.16$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-192}{8}\right)=0.16$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-192}{8}\right)=0.16$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-192}{8}\right)=0.34$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.34$이므로

$\frac{k-192}{8}=1,\qquad k-192=8$

$\therefore\ k=200$ 답 200

06 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.98)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=2500\times 0.98=2450,$

$\mathrm{V}(X)=2500\times 0.98\times 0.02=49$

이때 2500은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(2450,\ 7^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-2450}{7}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(|X-2450|\ge k)=0.04$에서

$\mathrm{P}(X-2450\le -k)+\mathrm{P}(X-2450\ge k)=0.04$

$\mathrm{P}(X\le 2450-k)+\mathrm{P}(X\ge 2450+k)=0.04$

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{2450-k-2450}{7}\right)$

$+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2450+k-2450}{7}\right)=0.04$

$\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{k}{7}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{7}\right)=0.04$

$2\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{7}\right)=0.04,\qquad \mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{7}\right)=0.02$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{7}\right)=0.02$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{7}\right)=0.02$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{7}\right)=0.48$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$\frac{k}{7}=2\qquad\therefore\ k=14$ 답 ②

Q BOX

불량이 아닌 제품일 확률은 98 %이다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 2 미만의 눈이 나올 확률

80 % ➡ $\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$이고 $0.02<0.5$이므로 $\frac{k}{7}>0$

$80-(k+1)=79-k$

${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

$\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$이고 $0.16<0.5$이므로 $\frac{k-192}{8}>0$

중단원 마무리

72쪽

01 전략 먼저 확률변수 X의 확률질량함수를 구한다.

풀이 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{80}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{80-x}$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 80)$

$\therefore\ \frac{\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(X=k+1)}=\frac{{}_{80}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{80-k}}{{}_{80}\mathrm{C}_{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{79-k}}$

$=\frac{\frac{80!}{k!(80-k)!}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{80!}{(k+1)!(79-k)!}\cdot\frac{1}{3}}$

$=2\cdot\frac{k+1}{80-k}$

즉 $\frac{2(k+1)}{80-k}=\frac{7}{10}$이므로 $\quad 20k+20=560-7k$

$27k=540 \quad \therefore k=20$

답 ①

02 전략 A 프로그램을 시청하고 있는 가구 수는 이항분포를 따름을 이용한다.

풀이 A 프로그램을 시청하는 가구 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(8,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_8\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{8-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$$

⋯ ❶

따라서 A 프로그램을 시청하는 가구가 7가구 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 7)&=\mathrm{P}(X=7)+\mathrm{P}(X=8)\\&={}_8\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{10}\right)^7\left(\frac{9}{10}\right)^1+{}_8\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{10}\right)^8\left(\frac{9}{10}\right)^0\\&=\frac{72}{10^8}+\frac{1}{10^8}=\frac{73}{10^8}\end{aligned}$$

⋯ ❷

$\therefore a=73$ ⋯ ❸

답 73

단계	채점 기준	비율
❶	X의 확률질량함수를 구할 수 있다.	40 %
❷	7가구 이상일 확률을 구할 수 있다.	50 %
❸	a의 값을 구할 수 있다.	10 %

03 전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $\mathrm{E}(X)=np$, $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{E}(X)=36\cdot\frac{2}{3}=24$, $\mathrm{V}(X)=36\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=8$

$\mathrm{E}(2X-a)=\mathrm{V}(2X-a)$에서

$2\mathrm{E}(X)-a=2^2\mathrm{V}(X)$

$2\cdot 24-a=4\cdot 8 \quad \therefore a=16$

답 16

04 전략 A가 점수를 얻는 횟수에 대한 확률변수는 이항분포를 따름을 이용한다.

풀이 두 사람 A와 B가 동시에 공을 한 개씩 꺼내는 경우의 수는

$8\cdot 7=56$

A가 꺼낸 공에 적힌 숫자가 B가 꺼낸 공에 적힌 숫자보다 큰 경우는

A가 4를 꺼낼 때, $2\cdot 6=12$(가지),

A가 3을 꺼낼 때, $2\cdot 4=8$(가지),

A가 2를 꺼낼 때, $2\cdot 2=4$(가지)

4가 적힌 흰 공 또는 검은 공을 꺼내는 경우의 수

1, 2, 3이 각각 하나씩 적힌 흰 공 또는 검은 공을 꺼내는 경우의 수

이므로 한 번의 시행에서 A가 점수를 얻을 확률은

$$\frac{12+8+4}{56}=\frac{3}{7}$$

21회의 시행에서 A가 점수를 얻는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(21,\ \frac{3}{7}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=21\cdot\frac{3}{7}=9$$

따라서 A가 얻는 점수의 합 $2X$에 대하여

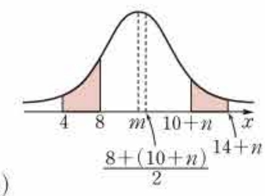
$\mathrm{E}(2X)=2\mathrm{E}(X)=2\cdot 9=18$

이므로 A가 얻는 점수의 합의 기댓값은 18점이다.

답 18점

05 전략 먼저 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용하여 n의 값의 범위를 구한다.

풀이 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고



$\mathrm{P}(4\leq X\leq 8)$

$>\mathrm{P}(10+n\leq X\leq 14+n)$

에서

$8-4=(14+n)-(10+n)$

이므로

$m<\frac{8+(10+n)}{2} \quad \therefore n>2m-18$

Q BOX: $m=\frac{8+(10+n)}{2}$이면 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로 주어진 조건을 만족시키려면 $m<\frac{8+(10+n)}{2}$이어야 한다.

이때 자연수 n의 최솟값이 7이므로

$6\leq 2m-18<7, \quad 24\leq 2m<25$

$\therefore 12\leq m<12.5$

따라서 m의 최솟값은 12이다.

답 ③

06 전략 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고 $\mathrm{P}(X\geq k)$가 0.5보다 크므로 k가 m보다 작음을 이용한다.

풀이 $\mathrm{P}(X\geq k)=0.6915$에서

$\mathrm{P}(k\leq X\leq m)+\mathrm{P}(X\geq m)=0.6915$

$\mathrm{P}(k\leq X\leq m)+0.5=0.6915$

$\therefore \mathrm{P}(k\leq X\leq m)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(m\leq X\leq m+0.5\sigma)=0.1915$에서

$\mathrm{P}(m-0.5\sigma\leq X\leq m)=0.1915$이므로

$k=m-0.5\sigma$

$=18-0.5\times 6=15$

답 15

다른 풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(18,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-18}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq k)=0.6915$에서

$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-18}{6}\right)=0.6915$

Q BOX: $\mathrm{P}(Z\geq 0)=0.5$이고 $0.6915>0.5$이므로 $\frac{k-18}{6}<0$

$\mathrm{P}\left(\frac{k-18}{6}\leq Z\leq 0\right)+\mathrm{P}(Z\geq 0)=0.6915$

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{18-k}{6}\right)+0.5=0.6915$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{18-k}{6}\right)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(m\leq X\leq m+0.5\sigma)=0.1915$에서

Q BOX: $Z=\frac{X-m}{\sigma}$이므로 $\mathrm{P}(m\leq X\leq m+0.5\sigma)$ $=\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\sigma}\leq Z\leq\frac{m+0.5\sigma-m}{\sigma}\right)$ $=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)$

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)=0.1915$이므로

$\frac{18-k}{6}=0.5 \quad \therefore k=15$

07 전략 두 확률변수 X, Y를 각각 표준화한 후 보기의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ (3\sigma)^2)$, $\mathrm{N}(3m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-m}{3\sigma},\ Z_Y=\frac{Y-3m}{\sigma}$$

으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{P}(X\ge 0)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge -\frac{m}{3\sigma}\right)$,

$\mathrm{P}(Y\ge 0)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge -\frac{3m}{\sigma}\right)$이고

$-\frac{3m}{\sigma}<-\frac{m}{3\sigma}<0$이므로

$-\frac{3m}{\sigma}<-\frac{m}{\sigma}<-\frac{m}{3\sigma}$

$\mathrm{P}\left(Z_X\ge -\frac{m}{3\sigma}\right)<\mathrm{P}\left(Z_Y\ge -\frac{3m}{\sigma}\right)$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 0)<\mathrm{P}(Y\ge 0)$

ㄴ. $\mathrm{P}(m\le X\le 3m)=\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{3\sigma}\le Z_X\le \frac{3m-m}{3\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le \frac{2m}{3\sigma}\right)$,

$\frac{1}{9}\mathrm{P}(m\le Y\le 3m)$

$=\frac{1}{9}\mathrm{P}\left(\frac{m-3m}{\sigma}\le Z_Y\le \frac{3m-3m}{\sigma}\right)$

$=\frac{1}{9}\mathrm{P}\left(-\frac{2m}{\sigma}\le Z_Y\le 0\right)$

$=\frac{1}{9}\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le \frac{2m}{\sigma}\right)$

이때 $\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le \frac{2m}{3\sigma}\right)=\frac{1}{9}\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le \frac{2m}{\sigma}\right)$인지 알 수 없으므로

$\mathrm{P}(m\le X\le 3m)=\frac{1}{9}\mathrm{P}(m\le Y\le 3m)$인지 알 수 없다.

ㄷ. $\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}(Y\ge b)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\le \frac{a-m}{3\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge \frac{b-3m}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z_X\le \frac{a-m}{3\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le -\frac{b-3m}{\sigma}\right)$

따라서 $\frac{a-m}{3\sigma}=-\frac{b-3m}{\sigma}$이므로

$a-m=-3b+9m\qquad \therefore\ a+3b=10m$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

08 전략 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$임을 이용한다. (단, a, b는 상수, $a\ne 0$)

풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(42,\ 8^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-42}{8}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 34)=0.8413$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{34-42}{8}\right)=0.8413$

$\therefore\ \mathrm{P}(Z_X\ge -1)=0.8413$ …… ㉠ ⋯ ❶

$Y=2X-5$에서

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-5)$

$=2\mathrm{E}(X)-5=2\cdot 42-5=79$,

$\sigma(Y)=\sigma(2X-5)$

$=2\sigma(X)=2\cdot 8=16$

즉 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(79,\ 16^2)$을 따르므로

$Z_Y=\frac{Y-79}{16}$로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ⋯ ❷

$\therefore\ \mathrm{P}(Y\le 63)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le \frac{63-79}{16}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_Y\le -1)$

$=1-\mathrm{P}(Z_Y\ge -1)$

$=1-0.8413\ (\because$ ㉠$)$

$=0.1587$ ⋯ ❸

답 0.1587

단계	채점 기준	비율
❶	X를 표준화하여 $\mathrm{P}(X\ge 34)=0.8413$을 Z_X에 대한 식으로 변형할 수 있다.	40 %
❷	Y를 표준화할 수 있다.	30 %
❸	$\mathrm{P}(Y\le 63)$을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 $Y=2X-5$이므로

$\mathrm{P}(Y\le 63)=\mathrm{P}(2X-5\le 63)=\mathrm{P}(X\le 34)$

$=1-\mathrm{P}(X\ge 34)$

$=1-0.8413=0.1587$

09 전략 표준편차가 일정한 확률변수의 정규분포곡선의 모양은 일치함을 이용한다.

풀이 $f(12)\le g(20)$이므로

$|m-20|\le 2,\qquad -2\le m-20\le 2$

$\therefore\ 18\le m\le 22$ …… ㉠

이때 $\mathrm{P}(21\le Y\le 24)$의 값이 최대가 되는 경우는 확률변수 Y의 평균 m이 $\frac{21+24}{2}=22.5$에 가장 가까울 때이므로 ㉠에서 $m=22$

확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(22,\ 2^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(21\le Y\le 24)$가 최대이다.

따라서 $Z=\frac{Y-22}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률의 최댓값은

$\mathrm{P}(21\le Y\le 24)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{21-22}{2}\le Z\le \frac{24-22}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

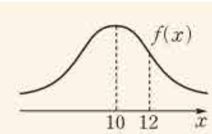
$=0.1915+0.3413$

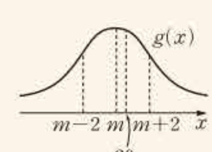
$=0.5328$

답 ①

쌤한마디

정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 2로 같으므로 두 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 모양은 일치한다.
따라서 $f(12)\le g(20)$을 만족시키려면 오른쪽 그림에서 $|m-20|\le 2$이어야 한다.





10 전략 확률변수 X를 표준화한 후 주어진 등식을 이용하여 m, σ에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le 3)=\mathrm{P}(3\le X\le 80)=0.3$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma}\le Z\le\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3-m}{\sigma}\right)=0.3$에서

$$\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma}\le Z\le 0\right)=0.3$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-3}{\sigma}\right)=0.3$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-3}{\sigma}\right)=0.2$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.52)=0.2$이므로

$$\frac{m-3}{\sigma}=0.52$$

$$\therefore m=3+0.52\sigma \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편 ㉠에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{80-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma}\le Z\le\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.3+0.3=0.6$$

이므로

$$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.6$$

$$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.6$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.1$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.25)=0.1$이므로

$$\frac{80-m}{\sigma}=0.25$$

$$\therefore m=80-0.25\sigma \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $m=55$, $\sigma=100$

$\therefore m+\sigma=155$

답 155

11 전략 확률변수 X를 정한 후 구하는 확률을 식으로 나타낸다.

풀이 파프리카 1개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(180, 20^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-180}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(190\le X\le 210)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{190-180}{20}\le Z\le\frac{210-180}{20}\right)\\&=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.4332-0.1915\\&=0.2417\end{aligned}$$

답 ⑤

Q BOX

$\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$이고 $0.2<0.5$이므로 $\frac{a-72}{5}>0$

$\mathrm{P}(Z\le 0)=0.5$이고 $0.3<0.5$이므로 $\frac{3-m}{\sigma}<0$

$\mathrm{P}(Z\le 0)=0.5$이고 $0.6>0.5$이므로 $\frac{80-m}{\sigma}>0$

두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

12 전략 300명 중 60등 이내에 들 확률은 $\frac{60}{300}$임을 이용한다.

풀이 학생들의 영어 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(72, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-72}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

60등인 학생의 영어 점수를 a점이라 하면

$$\mathrm{P}(X\ge a)=\frac{60}{300}=0.2$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-72}{5}\right)=0.2$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-72}{5}\right)=0.2$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-72}{5}\right)=0.2$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-72}{5}\right)=0.3$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.84)=0.30$이므로

$$\frac{a-72}{5}=0.84,\quad a-72=4.2\quad \therefore a=76.2$$

따라서 60등인 학생의 영어 점수는 76.2점이다.

답 76.2점

13 전략 두 제품 A, B의 중량을 각각 X g, Y g이라 하고 두 확률변수 X, Y를 각각 표준화한다.

풀이 A 제품 1개의 중량을 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(9, 0.4^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-9}{0.4}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}&\therefore \mathrm{P}(8.9\le X\le 9.4)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{8.9-9}{0.4}\le Z_X\le\frac{9.4-9}{0.4}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.25\le Z_X\le 1)\end{aligned}$$

B 제품 1개의 중량을 Y g이라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20, 1^2)$을 따르므로 $Z_Y=Y-20$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(19\le Y\le k)&=\mathrm{P}(19-20\le Z_Y\le k-20)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z_Y\le k-20)\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(8.9\le X\le 9.4)=\mathrm{P}(19\le Y\le k)$이므로

$$\mathrm{P}(-0.25\le Z_X\le 1)=\mathrm{P}(-1\le Z_Y\le k-20)$$

$$\therefore \mathrm{P}(-1\le Z_X\le 0.25)=\mathrm{P}(-1\le Z_Y\le k-20)$$

따라서 $k-20=0.25$이므로

$k=20.25$

답 ④

14 전략 세 확률변수 X_1, X_2, X_3을 정하고 각각 표준화한 후 확률을 비교한다.

풀이 1반, 2반, 3반 학생들의 1분 동안의 줄넘기 횟수를 각각 X_1, X_2, X_3이라 하면 세 확률변수 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(168, 5^2)$, $\mathrm{N}(165, 3^2)$, $\mathrm{N}(170, 8^2)$을 따르므로

$$Z_1=\frac{X_1-168}{5},\ Z_2=\frac{X_2-165}{3},\ Z_3=\frac{X_3-170}{8}$$

으로 놓으면 세 확률변수 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

1반, 2반, 3반 학생들이 각각 A, B, C보다 줄넘기 횟수가 많을 확률은

$$\mathrm{P}(X_1>176)=\mathrm{P}\left(Z_1>\frac{176-168}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z_1>\frac{8}{5}\right),$$

$$\mathrm{P}(X_2>168)=\mathrm{P}\left(Z_2>\frac{168-165}{3}\right)=\mathrm{P}(Z_2>1),$$

$$\mathrm{P}(X_3>175)=\mathrm{P}\left(Z_3>\frac{175-170}{8}\right)=\mathrm{P}\left(Z_3>\frac{5}{8}\right)$$

이때 $\mathrm{P}\left(Z_1>\frac{8}{5}\right)<\mathrm{P}(Z_2>1)<\mathrm{P}\left(Z_3>\frac{5}{8}\right)$이므로

$$\mathrm{P}(X_1>176)<\mathrm{P}(X_2>168)<\mathrm{P}(X_3>175)$$

따라서 각자 자기 반에서 상대적으로 줄넘기 횟수가 많은 학생부터 순서대로 나열하면 A, B, C이다.

답 A, B, C

15 전략 하이패스 단말기를 이용한 차량의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포를 따르고, 조사한 차량의 수가 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포를 따름을 이용한다.

풀이 하이패스 단말기를 이용한 차량의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1200,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=1200\cdot\frac{3}{4}=900,$$

$$\mathrm{V}(X)=1200\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=225$$

이때 1200은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(900,\ 15^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-900}{15}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge930)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{930-900}{15}\right)=\mathrm{P}(Z\ge2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

답 0.02

16 전략 확률변수 X가 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{5n}{6},\ \left(\frac{5\sqrt{n}}{6}\right)^2\right)$을 따름을 이용하여 X를 표준화한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(5n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=5n\cdot\frac{1}{6}=\frac{5n}{6},$$

$$\mathrm{V}(X)=5n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25n}{36}$$

이때 $5n$은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{5n}{6},\ \left(\frac{5\sqrt{n}}{6}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z_X=\dfrac{X-\frac{5n}{6}}{\frac{5\sqrt{n}}{6}}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{5}{6}\right|\le\frac{5}{n}\right)&=\mathrm{P}\left(\left|X-\frac{5n}{6}\right|\le5\right)\\&=\mathrm{P}\left(-5\le X-\frac{5n}{6}\le5\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{-5}{\frac{5\sqrt{n}}{6}}\le Z_X\le\frac{5}{\frac{5\sqrt{n}}{6}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{6}{\sqrt{n}}\le Z_X\le\frac{6}{\sqrt{n}}\right)\\&=2\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{6}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

이므로 $f(n)=2\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{6}{\sqrt{n}}\right)$

$f(n)=2\mathrm{P}(0\le Z\le1)$에서

$$2\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{6}{\sqrt{n}}\right)=2\mathrm{P}(0\le Z\le1)$$

즉 $\frac{6}{\sqrt{n}}=1$이므로

$\sqrt{n}=6$ $\quad\therefore n=36$

$f(36-m)=2\mathrm{P}(0\le Z\le2)$에서

$$2\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{6}{\sqrt{36-m}}\right)=2\mathrm{P}(0\le Z\le2)$$

즉 $\frac{6}{\sqrt{36-m}}=2$이므로

$\sqrt{36-m}=3,\qquad 36-m=9$

$\therefore m=27$

답 ⑤

17 전략 먼저 확률변수 Y를 정하고 X를 Y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 주어진 시행을 15번 반복할 때 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼 이동하는 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 Y라 하면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동하는 사건이 일어나는 횟수는 $15-Y$이므로 이동된 점 P의 좌표는

$(3Y,\ 15-Y)$

이때 주어진 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리가 확률변수 X이므로

$$\begin{aligned}X&=\frac{|3\cdot3Y+4(15-Y)|}{\sqrt{3^2+4^2}}\\&=\frac{|5Y+60|}{5}\\&=\frac{5Y+60}{5}\ (\because 0\le Y\le15)\\&=Y+12\end{aligned}$$

한 번의 시행에서 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼 이동하는 사건이 일어날 확률은 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하일 확률인 $\frac{1}{3}$이므로 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(Y)=15\cdot\frac{1}{3}=5$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\mathrm{E}(Y+12)=\mathrm{E}(Y)+12\\&=5+12=17\end{aligned}$$

답 ③

Q BOX

두 확률변수 Z_X, Z는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$75\ \% \Rightarrow \frac{75}{100}=\frac{3}{4}$

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$0\le Y\le15$에서
$0\le5Y\le75$
$\therefore 60\le5Y+60\le135$
$\therefore |5Y+60|=5Y+60$

$n>30$이므로 $\quad 5n>150$

18 전략 두 사건 A, B를 정하고 구하는 확률을 A, B로 나타낸다.

풀이 임의로 선택한 직원 1명의 출근 시간이 73분 이상인 사건을 A, 지하철을 이용한 사건을 B라 하면

$$P(B|A)=0.4,\ P(B|A^C)=0.2$$

출근 시간이 73분 미만인 사건

이때 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)\\&=P(A)P(B|A)+P(A^C)P(B|A^C)\\&=0.4P(A)+0.2P(A^C)\end{aligned}$$

직원들의 출근 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(66.4,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-66.4}{15}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X\ge73)&=P\left(Z\ge\frac{73-66.4}{15}\right)\\&=P(Z\ge0.44)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le0.44)\\&=0.5-0.17=0.33\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(X<73)&=1-P(X\ge73)\\&=1-0.33\\&=0.67\end{aligned}$$

따라서 $P(A)=0.33$, $P(A^C)=0.67$이므로 구하는 확률은

$$P(B)=0.4\times0.33+0.2\times0.67=0.266$$ 답 ⑤

07 통계적 추정

Lecture 14 표본평균의 분포

Ⓛ 77쪽

01 답 ㄱ, ㄴ

ㄷ, ㄹ은 전수조사가 적합하다.

02 6장의 카드에서 2장을 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_6\Pi_2=6^2=36$$ 답 36

03 6장의 카드에서 2장을 뽑는 순열의 수와 같으므로

$${}_6P_2=30$$ 답 30

04 6장의 카드에서 2장을 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_6C_2=15$$ 답 15

05 $\overline{X}=\frac{1}{2}(2+6)=4$

$S^2=\frac{1}{2-1}\{(2-4)^2+(6-4)^2\}=8$

$S=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 답 $\overline{X}=4$, $S^2=8$, $S=2\sqrt{2}$

06 $\overline{X}=\frac{1}{3}(6+8+10)=8$

$S^2=\frac{1}{3-1}\{(6-8)^2+(8-8)^2+(10-8)^2\}=4$

$S=\sqrt{4}=2$ 답 $\overline{X}=8$, $S^2=4$, $S=2$

07 모집단 {1, 3, 5}에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

$\overline{X}=3$인 경우는

크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 하면
$\frac{1}{2}(X_1+X_2)=3$
$\therefore X_1+X_2=6$

(1, 5), (3, 3), (5, 1)

의 3가지이므로

$$P(\overline{X}=3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$ 답 $\frac{1}{3}$

08 표본이 (5, 5)일 때, $\overline{X}=5$
표본이 (5, 7), (7, 5)일 때, $\overline{X}=6$
표본이 (5, 9), (7, 7), (9, 5)일 때, $\overline{X}=7$
표본이 (7, 9), (9, 7)일 때, $\overline{X}=8$
표본이 (9, 9)일 때, $\overline{X}=9$
따라서 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	5	6	7	8	9	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

답 풀이 참조

09 $E(\overline{X})=5\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{2}{9}+7\cdot\frac{1}{3}+8\cdot\frac{2}{9}+9\cdot\frac{1}{9}=7$

$V(\overline{X})=5^2\cdot\frac{1}{9}+6^2\cdot\frac{2}{9}+7^2\cdot\frac{1}{3}+8^2\cdot\frac{2}{9}+9^2\cdot\frac{1}{9}-7^2$

$=\frac{151}{3}-49=\frac{4}{3}$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 답 풀이 참조

다른 풀이 모평균은 $\frac{1}{3}(5+7+9)=7$

모분산은 $\frac{1}{3}\{(5-7)^2+(7-7)^2+(9-7)^2\}=\frac{8}{3}$

모표준편차는 $\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

표본의 크기가 2이므로

$E(\overline{X})=7,\ V(\overline{X})=\frac{\frac{8}{3}}{2}=\frac{4}{3},$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10 $E(\overline{X})=30,\ V(\overline{X})=\frac{2^2}{16}=\frac{1}{4},$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ 답 풀이 참조

11 $E(\overline{X})=300,\ V(\overline{X})=\frac{24^2}{64}=3^2$이므로

$N(300,\ 3^2)$ 답 $N(300,\ 3^2)$

12 $\overline{X}$는 정규분포 $N(300,\ 3^2)$을 따르므로

$Z=\frac{\overline{X}-300}{3}$ 답 $Z=\frac{\overline{X}-300}{3}$

13 $Z=\frac{\overline{X}-300}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\le 297)=P\left(Z\le\frac{297-300}{3}\right)$

$=P(Z\le -1)=P(Z\ge 1)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.3413$

$=0.1587$ 답 0.1587

14 $E(\overline{X})=180,\ V(\overline{X})=\frac{10^2}{25}=2^2$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(180,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-180}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(182\le\overline{X}\le 185)$

$=P\left(\frac{182-180}{2}\le Z\le\frac{185-180}{2}\right)$

$=P(1\le Z\le 2.5)$

$=P(0\le Z\le 2.5)-P(0\le Z\le 1)$

$=0.4938-0.3413$

$=0.1525$ 답 0.1525

Q BOX

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 임의 추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여
$E(\overline{X})=m,$
$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},$
$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$V(X)$
$=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

확률변수 X와 두 상수 $a,\ b\ (a\ne 0)$에 대하여
① $E(aX+b)$
$=aE(X)+b$
② $V(aX+b)$
$=a^2V(X)$
③ $\sigma(aX+b)$
$=|a|\sigma(X)$

표준+발전 유형 Q+Q

78쪽

01 $E(\overline{X})=12,\ V(\overline{X})=\frac{3^2}{3}=3$

이때 $V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$이므로

$E(\overline{X}^2)=V(\overline{X})+\{E(\overline{X})\}^2$

$=3+12^2=147$ 답 147

02 모평균이 k이므로 $E(\overline{X})=k$

$\therefore k=9$

모표준편차가 5, 표본의 크기가 n이므로

$V(\overline{X})=\frac{5^2}{n}$

따라서 $\frac{5^2}{n}=5$이므로 $n=5$

$\therefore k+n=14$ 답 ③

03 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=1 \quad \therefore a=\frac{2}{5}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{2}{5}=2$

$V(X)=1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{2}{5}-2^2$

$=\frac{24}{5}-4=\frac{4}{5}$

이때 표본의 크기가 8이므로

$E(\overline{X})=2,\ V(\overline{X})=\frac{\frac{4}{5}}{8}=\frac{1}{10}$

답 $E(\overline{X})=2,\ V(\overline{X})=\frac{1}{10}$

04 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=2\cdot\frac{1}{10}+4\cdot\frac{1}{5}+6\cdot\frac{3}{10}+8\cdot\frac{2}{5}=6$

$V(X)=2^2\cdot\frac{1}{10}+4^2\cdot\frac{1}{5}+6^2\cdot\frac{3}{10}+8^2\cdot\frac{2}{5}-6^2$

$=40-36=4$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{4}=2$

이때 표본의 크기가 36이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{36}}=\frac{1}{3}$

$\therefore \sigma(9\overline{X})=|9|\sigma(\overline{X})=9\cdot\frac{1}{3}=3$ 답 ②

05 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 공에 적힌 수를 X라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=3\cdot\frac{3}{7}+4\cdot\frac{1}{7}+5\cdot\frac{3}{7}=4$$

$$\mathrm{V}(X)=3^2\cdot\frac{3}{7}+4^2\cdot\frac{1}{7}+5^2\cdot\frac{3}{7}-4^2=\frac{118}{7}-16=\frac{6}{7}$$

이때 표본의 크기가 6이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{6}{7}}{6}=\frac{1}{7}$$

답 ①

06 임의로 과일 바구니 한 개를 택할 때 택한 과일 바구니의 무게를 X kg이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	1

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{2}$$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{1}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{5}{8}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{27}{4}-\frac{25}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 표본의 크기가 n이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$$

$$\therefore \sigma(12\overline{X}-1)=|12|\sigma(\overline{X})=12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

따라서 $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{n}}=2$이므로

$\sqrt{n}=3\sqrt{2}$ $\quad\therefore n=18$

답 18

07 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(25,\ 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(25,\ \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(25,\ 2^2)$을 따른다.

임의추출한 16명의 등교하는 데 걸리는 시간의 평균은 표본평균 $\overline{X}$이다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-25}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 29)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{29-25}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 0.0228

08 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{12^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

표본평균과 모평균의 차

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 10)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{|\overline{X}-m|}{4}\le\frac{10}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(|Z|\le 2.5)\\&=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 2.5)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=2\times 0.4938=0.9876\end{aligned}$$

답 ③

09 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(180,\ \frac{10^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-180}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 185)=0.0668$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{185-180}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)=0.0668$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$이고 $0.0668<0.5$이므로 $\frac{\sqrt{n}}{2}>0$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.4332$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=1.5,\quad \sqrt{n}=3\quad \therefore n=9$

답 9

쌤한마디

표준정규분포에서의 확률

① $\mathrm{P}(Z\le k)<0.5$이면 $\quad k<0$
→ $\mathrm{P}(Z\le k)=0.5-\mathrm{P}(k\le Z\le 0)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le -k)$

② $\mathrm{P}(Z\le k)>0.5$이면 $\quad k>0$
→ $\mathrm{P}(Z\le k)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le k)$

③ $\mathrm{P}(Z\ge k)<0.5$이면 $\quad k>0$
→ $\mathrm{P}(Z\ge k)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le k)$

④ $\mathrm{P}(Z\ge k)>0.5$이면 $\quad k<0$
→ $\mathrm{P}(Z\ge k)=0.5+\mathrm{P}(k\le Z\le 0)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le -k)$

10 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \frac{6^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-120}{\frac{6}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(114\le\overline{X}\le123)=0.8185$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{114-120}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{123-120}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right)=0.8185$$

$$\mathrm{P}\left(-\sqrt{n}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.8185$$

$$\mathrm{P}(-\sqrt{n}\le Z\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.8185$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le\sqrt{n})+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.8185$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이고 $0.3413+0.4772=0.8185$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{2}=1,\quad \sqrt{n}=2\quad \therefore\ n=4$$

답 4

11 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(48,\ \frac{20^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(48,\ 5^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-48}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le k)=0.05$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-48}{5}\right)=0.05$$

$\mathrm{P}(Z\le0)=0.5$이고 $0.05<0.5$이므로 $\dfrac{k-48}{5}<0$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{48-k}{5}\right)=0.05$$

$$\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{48-k}{5}\right)=0.05$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{48-k}{5}\right)=0.05$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{48-k}{5}\right)=0.45$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.6)=0.45$이므로

$$\frac{48-k}{5}=1.6,\quad 48-k=8$$

$$\therefore\ k=40$$

답 ④

12 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 18^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{18^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(|m-\overline{X}|\ge k)=0.07$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{|\overline{X}-m|}{3}\ge\frac{k}{3}\right)=0.07$$

$$\mathrm{P}\left(|Z|\ge\frac{k}{3}\right)=0.07$$

$$\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{k}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{3}\right)=0.07$$

$$2\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{3}\right)=0.07,\quad \mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{3}\right)=0.035$$

$\mathrm{P}(Z\ge0)=0.5$이고 $0.035<0.5$이므로 $\dfrac{k}{3}>0$

$$\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{3}\right)=0.035$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{3}\right)=0.035$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{3}\right)=0.465$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.81)=0.465$이므로

$$\frac{k}{3}=1.81\quad \therefore\ k=5.43$$

답 ③

Lecture 15 모평균의 추정

80쪽

01 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$10-1.96\times\frac{6}{\sqrt{9}}\le m\le10+1.96\times\frac{6}{\sqrt{9}}$$

$\therefore\ 6.08\le m\le13.92$ 답 $6.08\le m\le13.92$

02 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$35-1.96\times\frac{6}{\sqrt{144}}\le m\le35+1.96\times\frac{6}{\sqrt{144}}$$

$\therefore\ 34.02\le m\le35.98$ 답 $34.02\le m\le35.98$

03 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$80-2.58\times\frac{15}{\sqrt{4}}\le m\le80+2.58\times\frac{15}{\sqrt{4}}$$

$\therefore\ 60.65\le m\le99.35$ 답 $60.65\le m\le99.35$

04 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$65-2.58\times\frac{15}{\sqrt{25}}\le m\le65+2.58\times\frac{15}{\sqrt{25}}$$

$\therefore\ 57.26\le m\le72.74$ 답 $57.26\le m\le72.74$

05 표본의 크기 81은 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 18을 사용할 수 있다.
따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

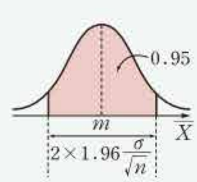
$$27-1.96\times\frac{18}{\sqrt{81}}\le m\le27+1.96\times\frac{18}{\sqrt{81}}$$

$\therefore\ 23.08\le m\le30.92$ 답 $23.08\le m\le30.92$

06 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$27-2.58\times\frac{18}{\sqrt{81}}\le m\le27+2.58\times\frac{18}{\sqrt{81}}$$

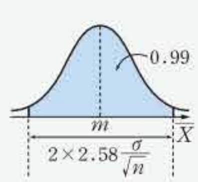
$\therefore\ 21.84\le m\le32.16$ 답 $21.84\le m\le32.16$



07 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\times\frac{22}{\sqrt{121}}=7.84$$

답 7.84



08 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{22}{\sqrt{121}}=10.32$$

답 10.32

쌤한마디

① 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 길어진다.
② 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

표준+발전 유형 Q+Q

81쪽

01 표본평균이 58, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$58-1.96\times\frac{10}{\sqrt{100}}\le m\le 58+1.96\times\frac{10}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 56.04\le m\le 59.96$ 　답 $56.04\le m\le 59.96$

02 표본평균이 5, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 25이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$5-k\cdot\frac{2}{\sqrt{25}}\le m\le 5+k\cdot\frac{2}{\sqrt{25}}$$

$\therefore 5-\frac{2}{5}k\le m\le 5+\frac{2}{5}k$

이것이 $4.3\le m\le 5.7$과 같으므로

$5-\frac{2}{5}k=4.3,\ 5+\frac{2}{5}k=5.7$

$\therefore k=1.75$

이때 주어진 표준정규분포표에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|Z|\le 1.75)&=\mathrm{P}(-1.75\le Z\le 1.75)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.75)\\&=2\times 0.46=0.92\end{aligned}$$

따라서 $\frac{\alpha}{100}=0.92$이므로 　$\alpha=92$ 　답 92

> $5-\frac{2}{5}k=4.3$에서
> $-\frac{2}{5}k=-0.7$
> $\therefore k=1.75$

03 표본의 크기 64는 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 16을 사용할 수 있다.
이때 표본평균이 42이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$42-2\cdot\frac{16}{\sqrt{64}}\le m\le 42+2\cdot\frac{16}{\sqrt{64}}$$

$\therefore 38\le m\le 46$ 　답 $38\le m\le 46$

04 표본의 크기 225는 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 5를 사용할 수 있다.
이때 표본평균이 15이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$15-2.58\times\frac{5}{\sqrt{225}}\le m\le 15+2.58\times\frac{5}{\sqrt{225}}$$

$\therefore 14.14\le m\le 15.86$

따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는 15의 1개이다.

답 1

05 표본평균이 11.6, 모표준편차가 4, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$11.6-2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le 11.6+2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}$$

이것이 $10.31\le m\le 12.89$와 같으므로

$11.6-2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}=10.31,$

$11.6+2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}=12.89$

따라서 $2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}=1.29$이므로

$\frac{4}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2},$ 　$\sqrt{n}=8$ 　$\therefore n=64$ 　답 64

06 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 20, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{20}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\times\frac{20}{\sqrt{n}}$$

이것이 $154.4\le m\le 165.6$과 같으므로

$\overline{x}-1.96\times\frac{20}{\sqrt{n}}=154.4$ 　…… ㉠

$\overline{x}+1.96\times\frac{20}{\sqrt{n}}=165.6$ 　…… ㉡

㉡−㉠을 하면 　$3.92\times\frac{20}{\sqrt{n}}=11.2$

$\sqrt{n}=7$ 　$\therefore n=49$ 　답 ⑤

> ㉠+㉡을 하면
> $2\overline{x}=320$ 　$\therefore \overline{x}=160$

07 모표준편차가 2, 표본의 크기가 144이므로 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\times\frac{2}{\sqrt{144}}=0.86$ 　답 0.86

08 모표준편차가 15, 표본의 크기가 25이고 $b-a$는 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times 1.96\times\frac{15}{\sqrt{25}}=11.76$ 　답 11.76

> a, b의 값을 직접 구하는 것보다 $b-a$가 신뢰구간의 길이임을 이용하는 것이 더 편리하다.

09 모표준편차가 9, 표본의 크기가 n이고 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이가 7.74 이하이므로

$2\times 2.58\times\frac{9}{\sqrt{n}}\le 7.74,$ 　$\sqrt{n}\ge 6$ 　$\therefore n\ge 36$

따라서 n의 최솟값은 36이다. 　답 ①

10 모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 16일 때, 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 3.92이므로

$2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=3.92$ 　$\therefore \sigma=4$

따라서 모표준편차가 4, 표본의 크기가 n일 때, 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 0.98이므로

$2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}=0.98$

$\sqrt{n}=16$ 　$\therefore n=256$ 　답 256

11 $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때 모표준편차가 15, 표본의 크기가 121, 신뢰구간의 길이가 3.6이므로

$2k\cdot\frac{15}{\sqrt{121}}=3.6 \qquad \therefore k=1.32$

따라서 $\mathrm{P}(-1.32\le Z\le 1.32)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$\alpha=100\mathrm{P}(-1.32\le Z\le 1.32)$
$=200\mathrm{P}(0\le Z\le 1.32)$
$=200\times 0.41=82$ 답 ④

12 $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때 모표준편차가 18, 표본의 크기가 81, 신뢰구간의 길이가 2.4이므로

$2k\cdot\frac{18}{\sqrt{81}}=2.4 \qquad \therefore k=0.6$

즉 $\mathrm{P}(-0.6\le Z\le 0.6)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$\alpha=100\mathrm{P}(-0.6\le Z\le 0.6)$
$=200\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)$
$=200\times 0.23=46$

$\mathrm{P}(-k'\le Z\le k')=\frac{2\alpha}{100}=\frac{92}{100}$라 하면

$2\mathrm{P}(0\le Z\le k')=0.92$이므로
$\mathrm{P}(0\le Z\le k')=0.46$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.8)=0.46$이므로 $k'=1.8$

따라서 모평균에 대한 신뢰도 2α %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.8\times\frac{18}{\sqrt{81}}=7.2$ 답 ③

13 표본평균 $\overline{x}$, 모표준편차가 13, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2\cdot\frac{13}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2\cdot\frac{13}{\sqrt{n}}$

$-\frac{26}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{26}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{x}|\le\frac{26}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 2 이하가 되려면

$\frac{26}{\sqrt{n}}\le 2, \qquad \sqrt{n}\ge 13 \qquad \therefore n\ge 169$

따라서 n의 최솟값은 169이다. 답 ①

14 모평균을 m, 표본평균을 $\overline{x}$, 모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$-\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{x}|\le\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$

Q BOX

$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)$
$=\mathrm{P}(|Z|\le k)$

예를들어 $k=3$, $n=900$일 때, 신뢰구간의 길이는
$2\cdot3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{900}}=\frac{\sigma}{5}$
$k=2$, $n=100$일 때, 신뢰구간의 길이는
$2\cdot2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{2}{5}\sigma$

$2\alpha=2\cdot46=92$

$l_1<l_2$, $l_5<l_3<l_1$이므로
$l_5<l_3<l_1<l_2$
또 $l_4<l_2$이므로 l_2의 값이 가장 크다.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때
① $\mathrm{E}(X)=np$
② $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$
③ $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 $\frac{1}{4}\sigma$ 이하가 되려면

$\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{\sigma}{4}, \qquad \sqrt{n}\ge 12 \qquad \therefore n\ge 144$

따라서 n의 최솟값은 144이다. 답 144

15 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 추정한 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\text{단, }\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

ㄱ. 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고 표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이가 반드시 짧아진다고 할 수 없다.
ㄴ. 신뢰도를 높이면 k의 값이 커지고 표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다.
ㄷ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

16 ①, ②, ⋯, ⑤의 신뢰구간의 길이를 각각 l_1, l_2, ⋯, l_5라 하자.

표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이가 길어지므로

$l_1<l_2$, $l_3<l_4$ ⋯⋯ ㉠

신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 작아지면 신뢰구간의 길이가 길어지므로

$l_5<l_3<l_1$, $l_4<l_2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 l_2의 값이 가장 크므로 ②의 신뢰구간의 길이가 가장 길다. 답 ②

참고 신뢰구간의 길이는 다음과 같다.

① $2\cdot2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{49}}=\frac{4}{7}\sigma$ ② $2\cdot3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{49}}=\frac{6}{7}\sigma$
③ $2\cdot2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{81}}=\frac{4}{9}\sigma$ ④ $2\cdot3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{81}}=\frac{2}{3}\sigma$
⑤ $2\cdot2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{121}}=\frac{4}{11}\sigma$

중단원 마무리

84쪽

01 전략 표본의 크기가 n일 때, $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{n}\mathrm{V}(X)$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(160, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=160\cdot\frac{1}{4}=40$, $\mathrm{V}(X)=160\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=30$

이때 표본의 크기가 6이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=40$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{30}{6}=5$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})\cdot\mathrm{V}(\overline{X})=40\cdot5=200$ 답 ①

02 전략 확률의 총합은 1임을 이용하여 a의 값을 먼저 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+a+\frac{1}{8}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{4}$$

$$\mathrm{V}(X)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{5}{4}\right)^2$$
$$=\frac{5}{2}-\frac{25}{16}=\frac{15}{16}$$

이때 표본의 크기가 5이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{15}{16}}{5}=\frac{3}{16}$$

$$\therefore \mathrm{V}(12\overline{X})=12^2\mathrm{V}(\overline{X})=144\cdot\frac{3}{16}=27$$ 답 ③

03 전략 확률변수 X를 정한 후 먼저 주어진 확률을 이용하여 n의 값을 구한다.

풀이 주머니에서 임의로 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하면 $\overline{X}$는 임의추출한 크기가 2인 표본의 표본평균이다.

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{49}$에서 $\overline{X}=1$인 경우는 2번의 시행에서 모두 1이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$$

꺼낸 공을 다시 넣는 복원추출이므로 첫 번째 시행과 두 번째 시행에서 1이 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 모두 $\frac{1}{n+1}$이다.

즉 $\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{49}$이므로

$(n+1)^2=49, \qquad n+1=\pm7$

$\therefore n=6\ (\because n>0)$ …… ㉠

따라서 주머니 속에 1이 적혀 있는 공 1개, 3이 적혀 있는 공 6개가 들어 있으므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	1

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{7}+3\cdot\frac{6}{7}=\frac{19}{7}$$

$$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})=\frac{19}{7}$$

즉 $p=7$, $q=19$이므로

$p+q=26$ 답 26

다른 풀이 시행을 2번 반복하여 얻은 두 수를 차례로 a, b라 하면 a, b의 순서쌍 (a, b)가

$\overline{X}=\frac{a+b}{2}$

(i) $(1, 1)$일 때, $\overline{X}=\frac{1+1}{2}=1$

(ii) $(1, 3)$, $(3, 1)$일 때, $\overline{X}=\frac{1+3}{2}=2$

(iii) $(3, 3)$일 때, $\overline{X}=\frac{3+3}{2}=3$

이상에서 표본평균 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

㉠에서 $n=6$이므로 한 번의 시행에서 1이 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{7}$, 3이 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 $\frac{6}{7}$이다.

따라서

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{49}$,

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{12}{49}$,

$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}=\frac{36}{49}$

이므로 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{36}{49}$	1

표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=1\cdot\frac{1}{49}+2\cdot\frac{12}{49}+3\cdot\frac{36}{49}=\frac{19}{7}$$

즉 $p=7$, $q=19$이므로

$p+q=26$

04 전략 두 모집단의 분포를 이용하여 표본평균의 분포를 각각 파악한 후 표본평균을 표준화하여 확률을 구한다.

풀이 정규분포 $\mathrm{N}(30, 6^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(30, \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(30, 2^2)$을 따른다.

또 정규분포 $\mathrm{N}(45, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 36인 표본의 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(45, \frac{\sigma^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(45, \left(\frac{\sigma}{6}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-30}{2}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-45}{\frac{\sigma}{6}}$로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\le33)+\mathrm{P}(\overline{Y}\le39)=1$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{33-30}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{39-45}{\frac{\sigma}{6}}\right)=1$$

$$\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le1.5)+\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le-\frac{36}{\sigma}\right)=1$$

$$\therefore \mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le1.5)+\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{36}{\sigma}\right)=1$$

따라서 $1.5=\frac{36}{\sigma}$이므로

$\sigma=24$

$$\therefore \mathrm{P}(\overline{Y}\ge41)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{41-45}{4}\right)$$

$\frac{\sigma}{6}=\frac{24}{6}=4$

$$=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\ge-1)$$
$$=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\le1)$$
$$=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\le0)+\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{Y}}\le1)$$
$$=0.5+0.3413$$
$$=0.8413$$ 답 ②

05 전략 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구한 후 주어진 부등식을 n을 이용하여 나타낸다.

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(160,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(160,\ \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다. ⋯ ❶

$Z=\dfrac{\overline{X}-160}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 166)\le 0.0228$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{166-160}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)\le 0.0228$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{\sqrt{n}}{2}\right)\le 0.0228$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)\le 0.0228$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)\le 0.0228$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.4772$$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$이고 $0.0228<0.5$이므로 $\dfrac{\sqrt{n}}{2}>0$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{2}\ge 2,\qquad \sqrt{n}\ge 4$$

$$\therefore\ n\ge 16$$

따라서 n의 최솟값은 16이다. ⋯ ❷

답 16

단계	채점 기준	비율
❶	표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30 %
❷	n의 최솟값을 구할 수 있다.	70 %

06 전략 표본평균 $\overline{X}$를 정한 후 주어진 확률을 이용하여 m의 값을 구한다.

풀이 임의추출한 36명의 일주일 근무 시간의 표본평균을 $\overline{X}$시간이라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{5^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 표본평균이 38시간 이상일 확률이 0.9332이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 38)=0.9332 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{5}{6}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 ㉠에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{38-m}{\frac{5}{6}}\right)=0.9332$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{228-6m}{5}\right)=0.9332$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{228-6m}{5}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.9332$$

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{6m-228}{5}\right)+0.5=0.9332$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{6m-228}{5}\right)=0.4332$$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$이고 $0.9332>0.5$이므로 $\dfrac{228-6m}{5}<0$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{6m-228}{5}=1.5,\qquad 6m-228=7.5$$

$$\therefore\ m=39.25$$

답 ③

쌤한마디

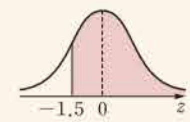
$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{228-6m}{5}\right)=0.9332$에서

$0.9332=0.5+0.4332$

이고 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로 오른쪽 그림에서

$\dfrac{228-6m}{5}=-1.5$

임을 이용하여 m의 값을 구할 수도 있다.



07 전략 확률변수 X가 따르는 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용하여 m의 값을 먼저 구한다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고 조건 (가)에서 $\mathrm{P}(9\le X\le 13)=\mathrm{P}(17\le X\le 21)$이므로

$$m=\frac{9+21}{2}=\frac{13+17}{2}=15$$

즉 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 2^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(15,\ \frac{2^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z_X=\dfrac{X-15}{2}$, $Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-15}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, $Z_{\overline{X}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ⋯ ❶

조건 (나)에서

$$\mathrm{P}(X\le 12)=\mathrm{P}\left(Z_X\le \frac{12-15}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_X\le -\frac{3}{2}\right),$$

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 16)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge \frac{16-15}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(Z_X\le -\frac{3}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{3}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

즉 $\dfrac{\sqrt{n}}{2}=\dfrac{3}{2}$에서 $\quad \sqrt{n}=3$

$$\therefore\ n=9 \qquad \cdots ❷$$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(15,\ \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$을 따른다. 이때

$$\mathrm{P}(17\le X\le 19)=\mathrm{P}\left(\frac{17-15}{2}\le Z_X\le \frac{19-15}{2}\right)=\mathrm{P}(1\le Z_X\le 2),$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{3}+c\le \overline{X}\le \frac{1}{3}+c\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{-\frac{1}{3}+c-15}{\frac{2}{3}}\le Z_{\overline{X}}\le \frac{\frac{1}{3}+c-15}{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(-23+\frac{3}{2}c\le Z_{\overline{X}}\le -22+\frac{3}{2}c\right)$$

에서

$$2-1=\left(-22+\frac{3}{2}c\right)-\left(-23+\frac{3}{2}c\right)=1$$

이므로 $P(17\le X\le 19)=P\left(-\frac{1}{3}+c\le \overline{X}\le \frac{1}{3}+c\right)$가 성립하려면 $-23+\frac{3}{2}c=-2$ 또는 $-23+\frac{3}{2}c=1$이어야 한다.

즉 $c=14$ 또는 $c=16$이므로 구하는 합은

$14+16=30$ ··· ❸

답 30

단계	채점 기준	비율
❶	표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구하고 X와 $\overline{X}$를 각각 표준화할 수 있다.	30 %
❷	n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	모든 자연수 c의 값의 합을 구할 수 있다.	40 %

08 전략 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구한 후 주어진 신뢰구간과 비교하여 a의 값을 구한다.

풀이 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 1.4, 표본의 크기가 49이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{1.4}{\sqrt{49}}\le m\le \overline{x}+1.96\times\frac{1.4}{\sqrt{49}}$$

$\therefore \overline{x}-0.392\le m\le \overline{x}+0.392$

이것이 $a\le m\le 7.992$와 같으므로

$\overline{x}-0.392=a$ ······ ㉠

$\overline{x}+0.392=7.992$ ······ ㉡

㉡−㉠을 하면

$0.784=7.992-a$ $\therefore a=7.208$ 답 ②

다른 풀이 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le m\le 7.992$이므로 신뢰구간의 길이는 $7.992-a$이다.
이때 모표준편차가 1.4, 표본의 크기가 49이므로

$$7.992-a=2\times1.96\times\frac{1.4}{\sqrt{49}}$$

$7.992-a=0.784$ $\therefore a=7.208$

09 전략 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하여 b를 σ에 대한 식으로 나타내고, 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여 d를 σ에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 16이므로 표본평균이 75일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$75-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le 75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$\therefore 75-0.49\sigma\le m\le 75+0.49\sigma$

이것이 $a\le m\le b$와 같으므로

$b=75+0.49\sigma$ ······ ㉠

또 표본평균이 77일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$77-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le 77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$\therefore 77-0.645\sigma\le m\le 77+0.645\sigma$

이것이 $c\le m\le d$와 같으므로

$d=77+0.645\sigma$ ······ ㉡

이때 $d-b=3.86$이므로 ㉠, ㉡에서

$77+0.645\sigma-(75+0.49\sigma)=3.86$

$2+0.155\sigma=3.86,\quad 0.155\sigma=1.86$

$\therefore \sigma=12$ 답 12

10 전략 $P(|Z|\le1.96)=0.95$에서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는 $2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 모표준편차를 σ라 하면

$$b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}},$$

$$d-c=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 $d-c=2(b-a)$이므로

$$2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$\sqrt{n}=10$ $\therefore n=100$ 답 100

11 전략 $P(|Z|\le2.58)=0.99$에서 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는 $2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 모표준편차가 27, 표본의 크기가 n이므로 신뢰도 99 %로 모평균을 추정할 때 신뢰구간의 길이가 15.48 이하가 되려면

$$2\times2.58\times\frac{27}{\sqrt{n}}\le15.48$$

$\sqrt{n}\ge9$ $\therefore n\ge81$

따라서 n의 최솟값은 81이다. 답 ④

12 전략 $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰도 α %의 신뢰구간을 k를 이용하여 나타낸 후 주어진 신뢰구간과 비교하여 k의 값을 구한다.

풀이 표본의 크기 64는 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 4를 사용할 수 있다.
표본평균이 78, 표본표준편차가 4, 표본의 크기가 64이므로 $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$78-k\cdot\frac{4}{\sqrt{64}}\le m\le 78+k\cdot\frac{4}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore 78-\frac{k}{2}\le m\le 78+\frac{k}{2}$$

이것이 $77.1\le m\le 78.9$와 같으므로

$$78-\frac{k}{2}=77.1,\ 78+\frac{k}{2}=78.9$$

$\therefore k=1.8$

$\therefore P(|Z|\le1.8)=2P(0\le Z\le1.8)$
$=2\times0.46=0.92$

따라서 $\frac{\alpha}{100}=0.92$이므로

$\alpha=92$ 답 92

Q BOX

$-22+\frac{3}{2}c=-1$ 또는 $-22+\frac{3}{2}c=2$임을 이용할 수도 있다.

$P(|Z|\le1.8)$
$=P(-1.8\le Z\le1.8)$
$=2P(0\le Z\le1.8)$

Ⓛ 07 통계적 추정

13 전략 먼저 l을 n, σ를 이용하여 나타낸 후 주어진 조건을 식으로 나타낸다.

풀이 신뢰도가 98.9 %이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=0.989$라 하면

$\frac{98.9}{100}=0.989$

$2\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.989$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.4945$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.54)=0.4945$이므로 $k=2.54$

따라서 모평균에 대한 신뢰도 98.9 %의 신뢰구간의 길이 l은 $l=2\times 2.54\times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\mathrm{P}(|Z|\le k')=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는 $\frac{l}{2}$이므로

$2\times k'\times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\underbrace{\frac{1}{2}\times 2\times 2.54\times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\frac{l}{2}}$

$\therefore k'=1.27$

$\mathrm{P}(|Z|\le 1.27)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$\alpha=100\mathrm{P}(-1.27\le Z\le 1.27)$

$=200\mathrm{P}(0\le Z\le 1.27)$

$=200\times 0.3980=79.6$ 답 ③

14 전략 표본의 크기가 n이고 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$일 때, 모평균과 표본평균의 차는 $k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 신뢰도가 96 %이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=0.96$이라 하면

$\frac{96}{100}=0.96$

$2\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.96$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.48$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.1)=0.48$이므로 $k=2.1$

따라서 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 n일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 96 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.1\times \frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.1\times \frac{10}{\sqrt{n}}$

$-\frac{21}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le \frac{21}{\sqrt{n}}$ $\therefore |m-\overline{x}|\le \frac{21}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 3 이하가 되려면

$\frac{21}{\sqrt{n}}\le 3,$ $\sqrt{n}\ge 7$ $\therefore n\ge 49$

따라서 n의 최솟값은 49이다. 답 49

15 전략 확률변수 X를 정하고 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구한 후 주어진 신뢰구간과 비교하여 c를 모표준편차에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 택시의 연간 주행거리를 X라 하고 확률변수 X의 표준편차를 σ라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\le m+c)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{m+c-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{c}{\sigma}\right)$ …… ㉠

택시의 연간 주행거리가 $m+c$ 이하일 확률

이때 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 16이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le \overline{x}+1.96\times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$\therefore \overline{x}-0.49\sigma\le m\le \overline{x}+0.49\sigma$

이것이 $\overline{x}-c\le m\le \overline{x}+c$와 같으므로

$c=0.49\sigma$

$c=0.49\sigma$를 ㉠에 대입하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}\left(Z\le \frac{c}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{0.49\sigma}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0.49)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.49)$

$=0.5+0.1879$

$=0.6879$ 답 ③

다른 풀이 ㉠이고 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $\overline{x}-c\le m\le \overline{x}+c$이므로 신뢰구간의 길이는

$\overline{x}+c-(\overline{x}-c)=2c$

이때 표본의 크기가 16이므로

$2c=2\times 1.96\times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$ $\therefore c=0.49\sigma$

$c=0.49\sigma$를 ㉠에 대입하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}\left(Z\le \frac{c}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{0.49\sigma}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0.49)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.49)$

$=0.5+0.1879=0.6879$

16 전략 먼저 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때의 신뢰구간을 이용하여 $\overline{x_1}$, a의 값을 구한다.

풀이 모표준편차가 5이므로 표본평균이 $\overline{x_1}$, 표본의 크기가 25일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times \frac{5}{\sqrt{25}}\le m\le \overline{x_1}+1.96\times \frac{5}{\sqrt{25}}$

$\therefore \overline{x_1}-1.96\le m\le \overline{x_1}+1.96$

이것이 $80-a\le m\le 80+a$와 같으므로

$\overline{x_1}=80,\ a=1.96$ …… ㉠

표본평균이 $\overline{x_2}$, 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-1.96\times \frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x_2}+1.96\times \frac{5}{\sqrt{n}}$

이것이 $\frac{15}{16}\overline{x_1}-\frac{5}{7}a\le m\le \frac{15}{16}\overline{x_1}+\frac{5}{7}a$와 같으므로

$\overline{x_2}=\frac{15}{16}\overline{x_1},\ 1.96\times \frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{5}{7}a$

위의 두 식에 ㉠을 대입하면

$\overline{x_2}=\frac{15}{16}\overline{x_1}=\frac{15}{16}\times 80=75,$

$1.96\times \frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{5}{7}\times 1.96$

이므로

$\sqrt{n}=7$ $\therefore n=49$

$\therefore n+\overline{x_2}=124$ 답 ②

Work Book

I. 순열과 조합

01 여러 가지 순열

W 2쪽

01 8명의 지원자 중에서 4명을 택하는 경우의 수는

$_8C_4=70$

택한 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$70\cdot6=420$ 답 ④

02 n명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수가 720이므로

$(n-1)!=720$

이때 $720=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=6!$이므로

$(n-1)!=6!,\quad n-1=6$

$\therefore n=7$ 답 7

03 10명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

회장의 자리가 결정되면 부회장의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 회장과 부회장이 마주 보고 앉는 경우의 수는 9명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.

$\therefore (9-1)!=8!$ 답 ③

04 서로 다른 오르골 3개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

오르골들 사이사이의 3개의 자리에 서로 다른 인형 3개를 배열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot6=12$ 답 12

05 각 부부를 한 사람으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

부부끼리 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot16=96$ 답 ②

06 A, E, F의 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

A, E, F의 사이사이의 3개의 자리에 B, C, D의 3명이 앉는 경우의 수는 $_3P_3=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot6=12$ 답 12

07 스노보드 선수 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!=6$

스노보드 선수들 사이사이의 4개의 자리에 스키 선수 3명이 앉는 경우의 수는

$_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$ 답 144

> Q BOX: 스키 선수 사이에 적어도 한 명의 스노보드 선수가 앉아야 하므로 스키 선수끼리 이웃하지 않게 앉는 경우를 생각한다.

08 가운데 영역을 칠하는 경우의 수는

$_5C_1=5$

나머지 4개의 영역을 서로 다른 4가지 색으로 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot6=30$ 답 ①

> 가운데 영역에 칠한 색을 제외하면 남은 색은 4가지이다.

09 서로 다른 7가지 색 중에서 6가지 색을 택하는 경우의 수는 $_7C_6=7$

서로 다른 6가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$7\cdot120=840$ 답 840

10 노란색과 보라색을 제외한 4가지 색을 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

> 이웃해도 되는 색을 먼저 칠한다.

색을 칠한 영역 사이사이의 4개의 영역에 노란색과 보라색을 칠하는 경우의 수는

$_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot12=72$ 답 ④

다른 풀이 노란색과 보라색을 한 가지 색으로 생각하여 5가지 색을 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

노란색과 보라색을 칠하는 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 노란색과 보라색을 이웃한 영역에 칠하는 경우의 수는 $24\cdot2=48$

즉 노란색과 보라색을 이웃하지 않은 영역에 칠하는 경우의 수는

$(6-1)!-48=120-48=72$

> 6가지 색을 칠하는 경우의 수

쌤 한마디

이웃하지 않는 경우의 순열의 수를 구할 때, 2개가 이웃하지 않는 경우에만

(전체 경우의 수)−(이웃하는 경우의 수)

를 이용하여 구한다.

예를 들어 3개가 이웃하지 않는 경우를 생각해 보면 3개가 이웃하는 경우의 수에는 3개 모두 이웃한 경우만 포함되므로 위의 방법으로 구하면 2개만 이웃한 경우는 제외되지 않는다.

11 서로 다른 6가지 색 중에서 작은 원에 칠할 3가지 색을 택하는 경우의 수는

$_6C_3=20$

서로 다른 3가지 색을 작은 원의 각 영역에 칠하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

나머지 영역을 칠하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\cdot2\cdot6=240$ 　　　　답 240

> 큰 원에 칠할 3가지 색을 먼저 택하여 경우의 수를 구해도 결과는 같다.

12 주어진 사각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는

$_5C_1=5$

4개의 옆면을 서로 다른 4가지 색으로 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot6=30$ 　　　　답 30

13 주어진 오각뿔대의 두 밑면을 칠하는 경우의 수는

$_7P_2=42$

5개의 옆면을 서로 다른 5가지 색으로 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!$

따라서 구하는 경우의 수는

$42\cdot4!$ 　　　　답 ②

14 정육면체의 한 밑면에 특정한 한 가지 색을 칠하면 마주 보는 밑면을 칠하는 경우의 수는

$_5C_1=5$

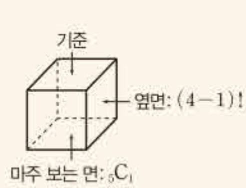
옆면을 칠하는 경우의 수는 두 밑면에 칠한 색을 제외한 4가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로 　$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot6=30$ 　　　　답 30

쌤 한마디

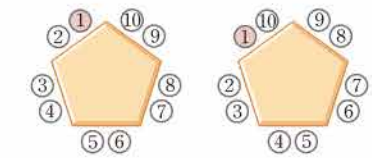
정육면체는 밑면과 옆면이 합동이므로 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 볼 때, 각뿔대와 같은 입체도형을 칠하는 방법으로 정육면체를 칠하면 밑면이 옆면으로 오도록 회전시킬 경우 일치하는 것이 생긴다. 따라서 정육면체의 각 면을 서로 다른 6가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법은 다음 그림과 같이 한 면을 기준으로 생각하고 나머지 면을 칠하는 방법으로 생각한다.



15 10명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 정오각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



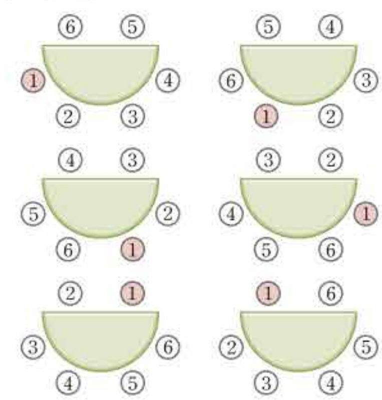
따라서 구하는 경우의 수는

$9!\cdot2$ 　　　　답 ①

16 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 반원 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 6가지씩 존재한다.



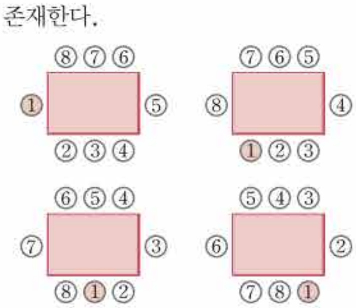
$\therefore a=5!\cdot6=6!$

> 6명이 주어진 반원 모양의 탁자에 둘러앉을 때, 회전하여 일치하는 경우가 없으므로 6명을 일렬로 나열하는 경우의 수 6!과 같다.

8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 4가지씩 존재한다.



$\therefore b=7!\cdot4$

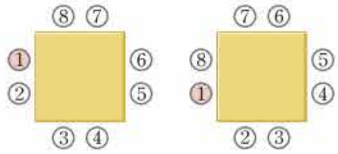
$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{7!\cdot4}{6!}=28$ 　　　　답 ④

17 8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

> $2+6=8$(명)

$(8-1)!=7!$

이때 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 정사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



즉 8명이 정사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$7!\cdot 2$

선생님 2명이 탁자의 같은 모서리에 앉는 경우의 수는

$2!\cdot 6!$

따라서 구하는 경우의 수는

$7!\cdot 2-2!\cdot 6!=2!\cdot 6!\cdot(7-1)$
$=8640$ 답 8640

한 모서리에 선생님 2명이 앉는 경우의 수는 $2!$이고 나머지 자리에 학생 6명이 앉는 경우의 수는 $6!$이다.
따라서 선생님 2명이 같은 모서리에 앉는 경우의 수는 $2!\cdot 6!$

18 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$ 답 125

쿠키를 상자에 넣는 경우이므로 중복을 허용하여 택할 수 있는 것은 상자이다.

19 6명 중에서 Z에게 투표하는 3명을 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

나머지 3명이 2명의 후보 X, Y 중에서 한 명에게 투표하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\cdot 8=160$ 답 ③

20 5명이 만족도를 1, 2, 3, 4로 표시하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_5=4^5=1024$

(i) 만족도를 4로 표시한 고객이 0명인 경우
5명이 만족도를 1 또는 2 또는 3으로 표시하는 것과 같으므로 그 경우의 수는
${}_3\Pi_5=3^5=243$

서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

(ii) 만족도를 4로 표시한 고객이 1명인 경우
5명 중 1명이 만족도를 4로 표시하고, 나머지 4명은 1 또는 2 또는 3으로 표시하는 것과 같으므로 그 경우의 수는
${}_5C_1\cdot{}_3\Pi_4=5\cdot 3^4=405$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$1024-(243+405)=376$ 답 ⑤

21 전구 8개를 각각 켜거나 끄는 경우의 수는

${}_2\Pi_8=2^8=256$

이때 전구가 모두 꺼진 경우는 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는

$256-1=255$ 답 255

22 깃발을 합해서 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_1=3^1=3$

깃발을 합해서 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

같은 방법으로 깃발을 합해서 3번, 4번, …, n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_3\Pi_3$, ${}_3\Pi_4$, …, ${}_3\Pi_n$이므로 1번 이상 n번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n$

$n=4$일 때,

$3^1+3^2+3^3+3^4=120<300$

$n=5$일 때,

$3^1+3^2+3^3+3^4+3^5=363>300$

따라서 n의 최솟값은 5이다. 답 ③

23 $n(U)=7$, $n(A\cap B)=2$이므로 전체집합 U의 원소 중에서 $A\cap B$의 원소를 택하는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

$A\cap B$의 원소를 제외한 나머지 5개의 원소는 집합 $A-B$와 $B-A$ 중 어느 하나의 원소이므로 그 경우의 수는

${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$21\cdot 32=672$ 답 ②

24 $A-B=\{-1, 0, 1\}$이므로

$3\le n(A\cup B)\le 5$

그런데 B는 공집합이 아니므로

$4\le n(A\cup B)\le 5$

$\therefore n(A\cup B)=4$ 또는 $n(A\cup B)=5$

(i) $n(A\cup B)=4$인 경우
집합 B의 원소를 택하는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
택한 원소는 $A\cap B$와 $B-A$ 중 어느 하나의 원소이므로 그 경우의 수는
${}_2\Pi_1=2^1=2$
따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는
$4\cdot 2=8$

집합 B의 원소는 1개이다.

(ii) $n(A\cup B)=5$인 경우
집합 B의 원소를 택하는 경우의 수는
${}_4C_2=6$
택한 원소는 $A\cap B$와 $B-A$ 중 어느 하나의 원소이므로 그 경우의 수는
${}_2\Pi_2=2^2=4$
따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는
$6\cdot 4=24$

집합 B의 원소는 2개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$8+24=32$ 답 32

25 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$_7\Pi_3=7^3=343$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6\cdot343=2058$ 답 ⑤

26 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 5의 2개

천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3, ⋯, 9의 9개

백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$_{10}\Pi_2=10^2=100$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2\cdot9\cdot100=1800$ 답 ③

27 한 자리 자연수의 개수는 6

두 자리 자연수의 개수는 $_6\Pi_2=6^2=36$

세 자리 자연수의 개수는 $_6\Pi_3=6^3=216$

따라서 1111보다 작은 자연수의 개수는

$6+36+216=258$

이므로 1111은 259번째 수이다. 답 259

28 3000보다 큰 네 자리 자연수의 개수는

$3\cdot{_5\Pi_3}=3\cdot5^3=375$

숫자 1끼리 이웃하는 자연수의 개수는 다음과 같다.

(i) 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자가 1인 경우

천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

3, 4, 5의 3개

즉 자연수의 개수는 3

(ii) 백의 자리, 십의 자리의 숫자만 1인 경우

천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

3, 4, 5의 3개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 3, 4, 5의 4개

즉 자연수의 개수는 $3\cdot4=12$

(iii) 십의 자리, 일의 자리의 숫자만 1인 경우

천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

3, 4, 5의 3개

백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 3, 4, 5의 4개

즉 자연수의 개수는 $3\cdot4=12$

이상에서 $3+12+12=27$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$375-27=348$ 답 ②

다른 풀이 (i) 숫자 1이 없는 경우

천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

3, 4, 5의 3개

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$_4\Pi_3=4^3=64$

즉 자연수의 개수는 $3\cdot64=192$

(ii) 숫자 1이 1개 있는 경우

천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

3, 4, 5의 3개

1이 오는 자리를 택하는 경우의 수는

$_3C_1=3$

나머지 두 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$_4\Pi_2=4^2=16$

즉 자연수의 개수는 $3\cdot3\cdot16=144$

(iii) 숫자 1이 2개 있는 경우

천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

3, 4, 5의 3개

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 3, 4, 5의 4개

즉 자연수의 개수는 $3\cdot4=12$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$192+144+12=348$

Q BOX

2, 3, 4, 5의 4개

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리 중 하나

5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

백의 자리와 일의 자리의 숫자가 1이어야 한다.

0, 1, 2, ⋯, 9의 10개

1111은 주어진 숫자로 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 가장 작은 수이다.

3000보다 큰 네 자리 자연수의 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

3, 4, 5의 3개

29 $f(3)\neq-1$이므로 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은

0, 1의 2개

또 $f(1)=0$이므로 Y의 원소 -1, 0, 1의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 X의 원소 2, 4에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$2\cdot{_3\Pi_2}=2\cdot3^2=18$ 답 ④

30 X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 a, b의 2개에서 중복을 허용하여 6개를 뽑아 X의 원소 0, 2, 4, 6, 8, 10에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$_2\Pi_6=2^6=64$

치역이 $\{a\}$인 함수의 개수는 1

치역이 $\{b\}$인 함수의 개수는 1

따라서 구하는 함수의 개수는

$64-(1+1)=62$ 답 62

31 조건 (가)에 의하여

$f(2)=2$ 또는 $f(2)=4$

(i) $f(2)=2$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

2

조건 (다)에 의하여 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 함수의 개수는 $2\cdot64=128$

(ii) $f(2)=4$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로 $\quad 4$

조건 (다)에 의하여 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 4, 5의 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_{2}\Pi_{3}=2^3=8$$

따라서 함수의 개수는 $\quad 4\cdot 8=32$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$128+32=160$ 답 ③

32 8개의 문자 중 모음이 4개, 자음이 4개 있으므로 모음은 짝수 번째에, 자음은 홀수 번째에 오도록 나열하면 된다.

모음 e, i, e, e를 짝수 번째에 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

자음 n, g, n, r를 홀수 번째에 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

따라서 구하는 경우의 수는 $\quad 4\cdot 12=48$ 답 48

33 7개의 문자 r, e, v, e, r, s, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!\cdot 3!}=420$$

(i) 양 끝에 r가 오는 경우

r, r를 제외한 5개의 문자 e, v, e, s, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

(ii) 양 끝에 e가 오는 경우

e, e를 제외한 5개의 문자 r, v, r, s, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!}=60$$

(i), (ii)에서 양 끝에 서로 같은 문자가 오도록 나열하는 경우의 수는 $\quad 20+60=80$

따라서 구하는 경우의 수는

$420-80=340$ 답 ②

Q BOX

양 끝에 서로 같은 문자가 오도록 나열하는 경우의 수를 이용한다.

34 (i) a끼리 이웃하는 경우

2개의 a를 한 문자 X로 생각하면 8개의 문자 X, s, s, i, s, t, n, t를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{3!\cdot 2!}=3360$$

(ii) t끼리 이웃하는 경우

2개의 t를 한 문자 Y로 생각하면 8개의 문자 Y, a, s, s, i, s, a, n을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{2!\cdot 3!}=3360$$

(iii) a끼리, t끼리 이웃하는 경우

2개의 a, 2개의 t를 각각 한 문자 X, Y로 생각하면 7개의 문자 X, Y, s, s, i, s, n을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3!}=840$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$3360+3360-840=5880$ 답 ④

C와 C 사이에는 1개 또는 3개의 문자가 올 수 있다.

35 (i) C와 C 사이에 1개의 문자 A가 오는 경우

C, A, C를 한 문자 X로 생각하면 4개의 문자 X, A, A, B를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(ii) C와 C 사이에 1개의 문자 B가 오는 경우

C, B, C를 한 문자 Y로 생각하면 4개의 문자 Y, A, A, A를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

(iii) C와 C 사이에 3개의 문자 A, A, A가 오는 경우

C, A, A, A, C를 한 문자 Z로 생각하면 2개의 문자 Z, B를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

(iv) C와 C 사이에 3개의 문자 A, A, B가 오는 경우

C, A, A, B, C를 한 문자 W로 생각하면 2개의 문자 W, A를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

C와 C 사이에 A, A, B를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\quad \frac{3!}{2!}=3$

즉 경우의 수는 $\quad 2\cdot 3=6$

이상에서 구하는 경우의 수는

$12+4+2+6=24$ 답 24

36 8개의 숫자 0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{2!\cdot 4!}=840$$

이때 맨 앞자리의 숫자가 0인 경우의 수는 7개의 숫자 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\quad \frac{7!}{2!\cdot 4!}=105$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$840-105=735$ 답 735

다른 풀이 (i) 맨 앞자리의 숫자가 1인 경우

7개의 숫자 0, 2, 2, 4, 4, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!\cdot 4!}=105$$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

7개의 숫자 0, 1, 2, 4, 4, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4!}=210$$

(iii) 맨 앞자리의 숫자가 4인 경우

7개의 숫자 0, 1, 2, 2, 4, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\cdot 3!}=420$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$105+210+420=735$

37 $a+b+c=11$을 만족시키는 세 수 a, b, c는

5, 5, 1 또는 5, 4, 2 또는 5, 3, 3 또는 4, 4, 3

(i) 5, 5, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

(ii) 5, 4, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

(iii) 5, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

(iv) 4, 4, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$3+6+3+3=15$ 답 ①

38 7개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3에서 4개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수일 때 그 수는 3의 배수가 된다.

$1+1+1+3=6$ 또는 $1+1+2+2=6$ 또는 $1+2+3+3=9$

(i) 1, 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ii) 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

(iii) 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

이상에서 구하는 3의 배수의 개수는

$4+6+12=22$ 답 ③

39 (i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수이어야 한다.

0, 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot 3!}=60$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는

1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수

$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$

이므로 일의 자리의 숫자가 0인 자연수의 개수는

$60-10=50$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

0, 0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는

0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수

$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

이므로 일의 자리의 숫자가 2인 자연수의 개수는

$90-30=60$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$50+60=110$ 답 110

40 4개의 모음 a, a, i, o를 먼저 나열한 후 6개의 자음 t, t, r, c, t, n을 나열하면 된다.

모음 a, a, i, o를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

자음 t, t, r, c, t, n을 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!}=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot 120=1440$ 답 1440

41 n, t와 a, e의 순서가 각각 정해져 있으므로 구하는 경우의 수는 n, t를 모두 X, a, e를 모두 Y로 생각하면 6개의 문자 X, Y, X, u, r, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

첫 번째 X는 n으로, 두 번째 X는 t로 바꾸면 된다.

첫 번째 Y는 a로, 두 번째 Y는 e로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!\cdot 2!}=180$ 답 ⑤

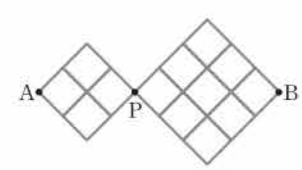
42 1, 3, 5, 7과 5, 6의 순서가 정해져 있으므로 1, 3, 5, 6, 7을 모두 X로 생각하면 8개의 숫자 X, 2, X, 4, X, X, X, 8을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{5!}=336$

5개의 X를 순서대로 1, 3, 5, 6, 7 또는 1, 3, 5, 7, 6으로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$336\cdot 2=672$ 답 672

43 오른쪽 그림과 같이 지점 P를 잡으면 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는



$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\cdot 3!}=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 20=120$ 답 ④

44 (i) A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$

(ii) P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$

P에서 Q를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot 2=8$$

즉 P에서 Q를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$15-8=7$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10\cdot 7=70$ 답 70

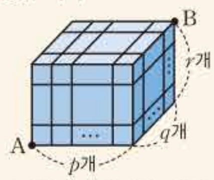
45 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 정육면체의 모서리를 3개, 3개, 4개 지나야 하므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 4!}=4200$ 답 ②

쌤한마디

입체도형에서 최단 거리로 가는 경우의 수

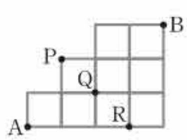
오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체를 가로 방향으로 p개, 세로 방향으로 q개, 높이 방향으로 r개 쌓아 만든 직육면체가 있다.



이때 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{(p+q+r)!}{p!\cdot q!\cdot r!}$$

46 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$$(2\cdot 1)\cdot\left(1\cdot\frac{3!}{2!}\right)=2\cdot 3=6$$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=3\cdot 6=18$$

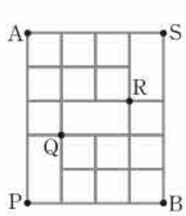
(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$$1\cdot\frac{4!}{3!}=1\cdot 4=4$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+18+4=28$ 답 28

47 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$$1\cdot 1=1$$

QBOX

Q에서 B까지 최단 거리로 가는 경우는 다음 그림과 같이 2가지이다.

$b=0$이면 $\dfrac{bc}{2}=0$

$b=2$이면 $\dfrac{bc}{2}=c$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}=4\cdot 10=40$$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{3!}=10\cdot 4=40$$

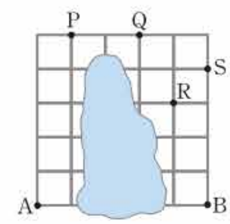
(iv) A → S → B로 가는 경우의 수는

$$1\cdot 1=1$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+40+40+1=82$ 답 ①

48 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → Q → R → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{5!}\cdot 1\cdot\frac{3!}{2!}\cdot\frac{4!}{3!}=6\cdot 1\cdot 3\cdot 4=72$$

(ii) A → P → Q → S → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{5!}\cdot 1\cdot\frac{3!}{2!}\cdot 1=6\cdot 1\cdot 3\cdot 1=18$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$72+18=90$ 답 90

도전! 수능 기출

10쪽

01 1st a가 될 수 있는 수를 구한다.

$\dfrac{bc}{a}$에서 분모 a는 0이 될 수 없으므로

$$a=1 \text{ 또는 } a=2 \text{ 또는 } a=3$$

이때 주머니에서 공을 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣으므로 a의 각 값에 대하여 b, c가 될 수 있는 수는 0, 1, 2, 3 중에서 중복하여 택할 수 있다.

2nd a의 값에 따른 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한다.

(i) $a=1$일 때,

$\dfrac{bc}{a}=\dfrac{bc}{1}=bc$이므로 b, c의 값에 관계없이 항상 정수이다.

즉 b, c의 값을 정하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3의 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$$_4\Pi_2=4^2=16$$

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 16

(ii) $a=2$일 때,

$\dfrac{bc}{a}=\dfrac{bc}{2}$가 정수이려면 b와 c 중 적어도 하나가 0 또는 2이어야 한다.

즉 b, c의 값을 정하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 b와 c가 모두 0, 2가 아닌 경우의 수를 뺀 것과 같다.

b, c의 값을 정하는 전체 경우의 수는 $\quad 16$

b와 c가 모두 0, 2가 아닌 경우의 수는 1, 3의 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

(ⅰ)에서와 같은 방법으로 구한다.

$${}_2\Pi_2=2^2=4$$

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$$16-4=12$$

(ⅲ) $a=3$일 때,

$\dfrac{bc}{a}=\dfrac{bc}{3}$가 정수이려면 b와 c 중 적어도 하나가 0 또는 3이어야 한다.

$b=0$이면 $\dfrac{bc}{3}=0$

$b=3$이면 $\dfrac{bc}{3}=c$

즉 b, c의 값을 정하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 b와 c가 모두 0, 3이 아닌 경우의 수를 뺀 것과 같다.

b, c의 값을 정하는 전체 경우의 수는 $\quad 16$

b와 c가 모두 0, 3이 아닌 경우의 수는 1, 2의 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2=2^2=4$$

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$$16-4=12$$

3rd 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$$16+12+12=40$$

답 40

02 **1st** $n(A)$의 값을 모두 구한다.

조건 (가), (다)에 의하여

$$n(A)=2 \text{ 또는 } n(A)=3$$

$n(A)=1$이면 함수 f는 상수함수이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

2nd $n(A)$의 값에 따른 함수 f의 개수를 구한다.

(ⅰ) $n(A)=2$인 경우

집합 A의 원소를 정하는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

$A=\{1, 2\}$일 때, 조건 (다)에 의하여

$$f(1)=2,\ f(2)=1$$

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값은 1, 2 중 하나이다.

따라서 $n(A)=2$인 경우의 함수 f의 개수는

$$10\cdot 8=80$$

(ⅱ) $n(A)=3$인 경우

집합 A의 원소를 정하는 경우의 수는

$${}_5C_3=10$$

$A=\{1, 2, 3\}$일 때, 조건 (다)에 의하여

$$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=1 \text{ 또는}$$
$$f(1)=3,\ f(2)=1,\ f(3)=2$$

$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

$f(4)$, $f(5)$의 값은 1, 2, 3 중 하나이다.

따라서 $n(A)=3$인 경우의 함수 f의 개수는

$$10\cdot 2\cdot 9=180$$

3rd 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$$80+180=260$$

답 260

03 **1st** 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

숫자 3, 3, 4, 4, 4가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$$

2nd 숫자 1, 2가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수를 구한다.

다음과 같이 □에 숫자 3, 4를 나열하고 ∨ 중 두 곳에 숫자 1, 2를 각각 나열할 수 있다고 하자.

∨□∨□∨□∨□∨□∨

6곳의 ∨에 1, 2를 각각 나열하는 경우의 수는

$${}_6P_2=30$$

1, 2 사이에 한 개의 □가 있도록 1, 2를 각각 나열하는 경우의 수는

$$5\cdot 2!=10$$

따라서 1, 2 사이에 두 개 이상의 □가 있도록 1, 2를 각각 나열하는 경우의 수는

$$30-10=20$$

3rd 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$10\cdot 20=200$$

답 ⑤

다른 풀이 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$$

3, 3, 4, 4, 4를

Ⓐ 3 Ⓑ 3 Ⓒ 4 Ⓓ 4 Ⓔ 4 Ⓕ

와 같이 일렬로 나열하는 한 가지 경우에 대하여 Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ, Ⓓ, Ⓔ, Ⓕ의 6개의 자리 중 1과 2 사이에 3 또는 4가 두 개 이상 있도록 1과 2가 놓일 두 자리를 택하는 경우는

Ⓐ와 Ⓒ, Ⓐ와 Ⓓ, Ⓐ와 Ⓔ, Ⓐ와 Ⓕ, Ⓑ와 Ⓓ,
Ⓑ와 Ⓔ, Ⓑ와 Ⓕ, Ⓒ와 Ⓔ, Ⓒ와 Ⓕ, Ⓓ와 Ⓕ

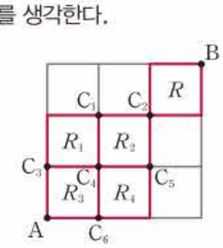
의 10가지이다.

이때 1, 2의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $\quad 2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $\quad 10\cdot 10\cdot 2=200$

04 **1st** 조건을 만족시키는 경로를 생각한다.

오른쪽 그림과 같이 4개의 정사각형을 각각 R_1, R_2, R_3, R_4라 하고 6개의 지점을 각각 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6이라 하자.



최단 거리로 A 지점에서 출발하여 B 지점을 지나 다시 A 지점까지 돌아올 때, 조건 (가)를 만족시키려면

$$A \to C_2 \to B \to C_2 \to A$$

로 가면서 $C_2 \to B \to C_2$로 갈 때 정사각형 R의 네 변을 모두 지나야 한다.

또 조건 (나)를 만족시키려면 $A \to C_2$, $C_2 \to A$로 갈 때 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4 중 네 변을 모두 지나는 정사각형이 없어야 한다.

2nd 전체 경우의 수를 구한다.

조건 (가)를 만족시키면서 $A \to C_2 \to B \to C_2 \to A$로 가는 전체 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot2!\cdot1\cdot\frac{4!}{2!\cdot2!}=6\cdot2\cdot1\cdot6$$
$$=72$$

$B \to C_2$로 갈 때에는 $C_2 \to B$로 갈 때 지나가지 않은 길로 가야 조건 (가)를 만족시킨다.

3rd 정사각형 R_1 또는 R_2 또는 R_3 또는 R_4의 네 변을 모두 지나는 경우의 수를 구한다.

(i) 정사각형 R_1의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \to C_3 \to C_1 \to C_2 \to B \to C_2 \to C_1 \to C_3 \to A$로 가는 경우의 수는

$1\cdot2!\cdot1\cdot2!\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=4$

(ii) 정사각형 R_2 또는 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \to C_4 \to C_2 \to B \to C_2 \to C_4 \to A$로 가는 경우 중에서

ⓘ 정사각형 R_2의 네 변을 모두 지나는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot1\cdot1\cdot2!=16$

ⓘⓘ 정사각형 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot1\cdot2!\cdot1=16$

ⓘⓘⓘ 정사각형 R_2와 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot1\cdot1\cdot1=8$

이상에서 정사각형 R_2 또는 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우의 수는

$16+16-8=24$

(iii) 정사각형 R_4의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \to C_6 \to C_5 \to C_2 \to B \to C_2 \to C_5 \to C_6 \to A$로 가는 경우의 수는

$1\cdot2!\cdot1\cdot2!\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=4$

이상에서 정사각형 R_1 또는 R_2 또는 R_3 또는 R_4의 네 변을 모두 지나는 경우의 수는

$4+24+4=32$

4th 경우의 수를 구한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$72-32=40$ 답 40

쌤 한마디

조건 (가)를 만족시키면서 최단 거리로 가는 경우 중 정사각형 R_2와 R_3이 아닌 2개 이상의 정사각형의 네 변을 모두 지나는 경우는 없다.

02 중복조합과 이항정리

11쪽

01 구하는 항의 개수는 a, b, c의 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7=36$ 답 36

02 (i) A를 0개 택하는 경우

A를 제외한 5개의 문자 B, C, D, E, F에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_5={}_9C_5=126$

(ii) A를 1개 택하는 경우

A를 제외한 5개의 문자 B, C, D, E, F에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_4={}_8C_4=70$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$126+70=196$ 답 ④

03 사과 주스 5병을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_8C_5=56$

오렌지 주스 3병을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4H_3={}_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$56\cdot20=1120$ 답 ③

04 노란 공, 흰 공, 검은 공 중에서 9개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_9={}_{11}C_9=55$

이때 흰 공을 7개 이상 택하는 경우의 수는 흰 공을 7개 택한 후 노란 공, 흰 공, 검은 공 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3H_2={}_4C_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$55-6=49$ 답 49

흰 공은 6개이므로 7개 이상 택하는 경우는 제외한다.

05 먼저 빵을 4명의 학생에게 각각 2개씩 나누어 주고, 나머지 8개의 빵을 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_8={}_{11}C_8=165$ 답 ②

06 서로 다른 3개에서 n개를 택하는 중복조합의 수가 28이므로

${}_3H_n=28$, ${}_{2+n}C_n={}_{2+n}C_2=28$

$\frac{(2+n)(1+n)}{2\cdot1}=28$, $(2+n)(1+n)=8\cdot7$

$\therefore n=6$

장미, 카네이션, 국화를 적어도 한 송이씩 포함하여 6송이를 택하는 경우는 먼저 각 종류의 꽃을 한 송이씩 택하고, 나머지 3송이를 택하면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_3={}_5C_3=10$ 답 10

쌤한마디

06번에서 n의 값은 이차방정식 $n^2+3n-54=0$을 풀어 구할 수도 있지만 $2+n$, $1+n$이 자연수이므로 곱이 56인 연속하는 두 자연수가 7, 8임을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

07 공책 7권을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 $_3H_7={}_9C_7=36$
3명의 학생이 각각 적어도 1권씩 받는 경우는 먼저 공책을 3명의 학생에게 각각 1권씩 나누어 주고, 나머지 4권의 공책을 나누어 주면 된다.
즉 그 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 $_3H_4={}_6C_4=15$
따라서 구하는 경우의 수는

$36-15=21$ 답 ①

08 먼저 조건 (가)에 의하여 음료수를 5명의 학생에게 각각 1개씩 나누어 주고, 나머지 4개의 음료수를 나누어 주면 된다.

(i) 나머지 4개의 음료수 중 A가 1개, B가 0개를 받는 경우
3개의 음료수를 3명의 학생 C, D, E에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는
$_3H_3={}_5C_3=10$

(ii) 나머지 4개의 음료수 중 A가 2개, B가 0개를 받는 경우
2개의 음료수를 3명의 학생 C, D, E에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는
$_3H_2={}_4C_2=6$

(iii) 나머지 4개의 음료수 중 A가 2개, B가 1개를 받는 경우
1개의 음료수를 3명의 학생 C, D, E에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는
$_3C_1=3$

(iv) 나머지 4개의 음료수 중 A가 3개를 받는 경우
1개의 음료수를 4명의 학생 B, C, D, E에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는
$_4C_1=4$

(v) 나머지 4개의 음료수를 A가 모두 받는 경우
남은 음료수가 없으므로 그 경우의 수는 1

이상에서 구하는 경우의 수는

$10+6+3+4+1=24$ 답 24

Q BOX

$x=a+1$, $y=b+2$, $z=c+3$

$x\ge1$, $y\ge1$, $z\ge1$

A가 B보다 더 많은 음료수를 받아야 하므로 A는 나머지 4개의 음료수 중에서 1개 이상을 받아야 한다.

d의 계수가 가장 크므로 d의 값에 따른 순서쌍의 개수를 구한다. 이때 $d\ge2$이면 $a+b+c$의 값은 음수이므로
$d<2$

09 x, y, z가 $x\ge1$, $y\ge2$, $z\ge3$인 정수이므로 $x-1=a$, $y-2=b$, $z-3=c$로 놓으면 a, b, c는 음이 아닌 정수이고 $x+y+z=13$에서

$(a+1)+(b+2)+(c+3)=13$

$\therefore a+b+c=7$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

$_3H_7={}_9C_7=36$ 답 ②

10 x, y, z가 자연수이므로 $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$로 놓으면 a, b, c는 음이 아닌 정수이고 $x+y+z<6$에서

$(a+1)+(b+1)+(c+1)<6$

$\therefore a+b+c<3$

$\therefore a+b+c=0$ 또는 $a+b+c=1$ 또는 $a+b+c=2$

(i) $a+b+c=0$일 때,
순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$_3H_0={}_2C_0=1$

(ii) $a+b+c=1$일 때,
순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$_3H_1={}_3C_1=3$

(iii) $a+b+c=2$일 때,
순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$_3H_2={}_4C_2=6$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+3+6=10$ 답 ②

11 x, y, z, w가 자연수이므로 $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$, $w-1=d$로 놓으면 a, b, c, d는 음이 아닌 정수이고 $x+y+z+6w=20$에서

$(a+1)+(b+1)+(c+1)+6(d+1)=20$

$\therefore a+b+c+6d=11$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같다.

(i) $d=0$일 때,
$a+b+c=11$
위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$_3H_{11}={}_{13}C_{11}=78$

(ii) $d=1$일 때,
$a+b+c+6=11$ $\therefore a+b+c=5$
위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$_3H_5={}_7C_5=21$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$78+21=99$ 답 ③

12 $x+y+z+w=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$${}_4H_9={}_{12}C_9=220$$

x, y, z, w가 모두 0이 아닌 경우, 즉 자연수인 경우 $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$, $w-1=d$로 놓으면 a, b, c, d는 음이 아닌 정수이고 $x+y+z+w=9$에서

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=9$$

$$\therefore a+b+c+d=5$$

즉 자연수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같으므로

$${}_4H_5={}_8C_5=56$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$220-56=164$$

답 164

13 조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3H_7={}_9C_7=36$$

조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는

$x+y=0$ 또는 $x+y=7$

(i) $x+y=0$인 경우

$0+z=7$에서 $z=7$

즉 $x+y=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(0, 0)$의 1개

(ii) $x+y=7$인 경우

$7+z=7$에서 $z=0$

즉 $x+y=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는

$${}_2H_7={}_8C_7=8$$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$36-(1+8)=27$$

답 ④

14 조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$${}_4H_{10}={}_{13}C_{10}=286$$

조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는

$x=2$ 또는 $x+y+z=8$

(i) $x=2$인 경우

$2+y+z+w=10$에서 $y+z+w=8$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 y, z, w의 순서쌍 (y, z, w)의 개수는

$${}_3H_8={}_{10}C_8=45$$

(ii) $x+y+z=8$인 경우

$8+w=10$에서 $w=2$

즉 $x+y+z=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3H_8={}_{10}C_8=45$$

(iii) $x=2$이고 $x+y+z=8$인 경우

$8+w=10$에서 $w=2$

또 $2+y+z=8$에서 $y+z=6$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 y, z의 순서쌍 (y, z)의 개수는

$${}_2H_6={}_7C_6=7$$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$286-(45+45-7)=203$$

답 203

15 $2\le a\le b\le 6$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 2, 3, 4, 5, 6의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b로 정하면 되므로 순서쌍의 개수는

Q BOX: 중복을 허용하여 2개를 택하면 $a\le b$를 만족시키는 a, b가 하나로 정해진다.
예를 들어 2, 3을 택하면 $a=2$, $b=3$으로 정해지고, 2, 2를 택하면 $a=2$, $b=2$로 정해진다.

$${}_5H_2={}_6C_2=15$$

$6\le c\le d\le e\le 9$를 만족시키는 c, d, e의 순서쌍 (c, d, e)는 6, 7, 8, 9의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 c, d, e로 정하면 되므로 순서쌍의 개수는

$${}_4H_3={}_6C_3=20$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$15\cdot 20=300$$

답 300

16 조건 (가)에 의하여 세 수 a, b, c는 모두 홀수이므로 1, 3, 5, $\cdots$, 13의 7개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c로 정하면 된다.

Q BOX: a, b, c는 홀수이므로 13보다 작거나 같은 홀수에서 택하면 된다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_7H_3={}_9C_3=84$$

답 ②

17 구하는 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, $\cdots$, 10의 10개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례대로 X의 원소 3, 5, 2에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_{10}H_3={}_{12}C_3=220$$

답 220

18 조건 (가)에서 $f(3)$의 값은 짝수이므로

$f(3)=2$ 또는 $f(3)=4$

(i) $f(3)=2$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(1)\ge f(2)\ge 2\ge f(4)$

$f(1)\ge f(2)\ge 2$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 3, 4, 5

이때 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4H_2={}_5C_2=10$

$2\ge f(4)$에서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는

1, 2의 2개

즉 $f(3)=2$인 경우의 함수의 개수는

$$10\cdot 2=20$$

(ii) $f(3)=4$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(1)\ge f(2)\ge 4\ge f(4)$

$f(1) \geq f(2) \geq 4$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 $\quad 4, 5$

이때 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 $\quad {}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$

$4 \geq f(4)$에서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는

$\quad 1, 2, 3, 4$의 4개

즉 $f(3)=4$인 경우의 함수의 개수는

$\quad 3 \cdot 4 = 12$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$\quad 20+12=32$ 답 32

19 조건 (가), (나)에 의하여

$\quad f(3)=2,\ f(4)=5$ 또는 $f(3)=3,\ f(4)=4$

(i) $f(3)=2,\ f(4)=5$인 경우

$f(1) \leq f(2) \leq 2$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 $\quad 1, 2$

이때 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 $\quad {}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$

$5 \leq f(5)$에서 $\quad f(5)=5$

즉 $f(3)=2,\ f(4)=5$인 경우의 함수의 개수는

$\quad 3 \cdot 1 = 3$

(ii) $f(3)=3,\ f(4)=4$인 경우

$f(1) \leq f(2) \leq 3$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 $\quad 1, 2, 3$

이때 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 $\quad {}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

$4 \leq f(5)$에서 $f(5)$의 값이 될 수 있는 수는

$\quad 4, 5$의 2개

즉 $f(3)=3,\ f(4)=4$인 경우의 함수의 개수는

$\quad 6 \cdot 2 = 12$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$\quad 3+12=15$ 답 ③

20 $(3-x)^7$의 전개식의 일반항은

$$ {}_7C_r 3^{7-r}(-x)^r = {}_7C_r 3^{7-r}(-1)^r x^r $$

x^5항은 $r=5$일 때이므로 x^5의 계수는

$$ a = {}_7C_5 \cdot 3^2 \cdot (-1)^5 = 21 \cdot 9 \cdot (-1) = -189 $$

$\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$$ {}_5C_r (x^3)^{5-r}\left(\frac{2}{x^2}\right)^r = {}_5C_r 2^r \frac{x^{15-3r}}{x^{2r}} $$

x^5항은 $15-3r-2r=5$, 즉 $r=2$일 때이므로 x^5의 계수는 $\quad b = {}_5C_2 \cdot 2^2 = 10 \cdot 4 = 40$

$\quad \therefore a+b=-149$ 답 ④

21 $(a+x)^8$의 전개식의 일반항은

$$ {}_8C_r a^{8-r} x^r $$

x^2항은 $r=2$일 때이므로 x^2의 계수는

$$ {}_8C_2 a^6 = 28a^6 $$

x^3항은 $r=3$일 때이므로 x^3의 계수는

$$ {}_8C_3 a^5 = 56a^5 $$

이때 x^2의 계수와 x^3의 계수가 같으므로

$\quad 28a^6 = 56a^5 \qquad \therefore a=2\ (\because a \neq 0)$ 답 2

22 $\left(x^2+\dfrac{1}{x^n}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$$ {}_6C_r (x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r = {}_6C_r \frac{x^{12-2r}}{x^{nr}} $$

상수항은 $12-2r=nr$일 때이므로

$\quad r(n+2)=12$

이를 만족시키는 r, n의 순서쌍 (r, n)은

r는 $0 \leq r \leq 6$인 정수, n은 자연수

$\quad (1, 10), (2, 4), (3, 2), (4, 1)$

따라서 n의 최댓값은 10이다. 답 ④

23 $(x+1)^n = {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1} + {}_nC_2 x^{n-2} + \cdots + {}_nC_n$의 양변에 $x=3$, $n=15$를 대입하면

$$ 4^{15} = {}_{15}C_0 \cdot 3^{15} + {}_{15}C_1 \cdot 3^{14} + {}_{15}C_2 \cdot 3^{13} + \cdots + {}_{15}C_{15} $$

$$ \therefore {}_{15}C_0 \cdot 3^{15} + {}_{15}C_1 \cdot 3^{14} + {}_{15}C_2 \cdot 3^{13} + \cdots + {}_{15}C_{15} = 2^{30} $$

답 ②

24 $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n$의 양변에 $x=40$, $n=17$을 대입하면

$$ \begin{aligned} & 41^{17} \\ &= {}_{17}C_0 + {}_{17}C_1 \cdot 40 + {}_{17}C_2 \cdot 40^2 + \cdots + {}_{17}C_{17} \cdot 40^{17} \\ &= 1 + 17 \cdot 40 + 40^2({}_{17}C_2 + {}_{17}C_3 \cdot 40 + \cdots + {}_{17}C_{17} \cdot 40^{15}) \\ &= 681 + 40^2({}_{17}C_2 + {}_{17}C_3 \cdot 40 + \cdots + {}_{17}C_{17} \cdot 40^{15}) \end{aligned} $$

이때 $40^2({}_{17}C_2 + {}_{17}C_3 \cdot 40 + \cdots + {}_{17}C_{17} \cdot 40^{15})$은 80으로 나누어떨어지므로 41^{17}을 80으로 나눈 나머지는 681을 80으로 나눈 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는 41이다. 답 41

$681 = 8 \cdot 80 + 41$

25 $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n$의 양변에 $x=10$, $n=13$을 대입하면

$$ \begin{aligned} & 11^{13} \\ &= {}_{13}C_0 + {}_{13}C_1 \cdot 10 + {}_{13}C_2 \cdot 10^2 + \cdots + {}_{13}C_{13} \cdot 10^{13} \\ &= 1 + 13 \cdot 10 + 78 \cdot 100 \\ &\quad + 10^3({}_{13}C_3 + {}_{13}C_4 \cdot 10 + \cdots + {}_{13}C_{13} \cdot 10^{10}) \\ &= 7931 + 10^3({}_{13}C_3 + {}_{13}C_4 \cdot 10 + \cdots + {}_{13}C_{13} \cdot 10^{10}) \end{aligned} $$

이때 $10^3({}_{13}C_3 + {}_{13}C_4 \cdot 10 + \cdots + {}_{13}C_{13} \cdot 10^{10})$은 백의 자리 이하의 숫자가 모두 0이므로 11^{13}의 백의 자리의 숫자는 9, 십의 자리의 숫자는 3, 일의 자리의 숫자는 1이다.

7931의 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자와 각각 같다.

따라서 $a=9$, $b=3$, $c=1$이므로

$\quad a+b+c=13$ 답 13

26 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

$$ {}_8C_r x^{8-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_8C_r \frac{x^{8-r}}{x^r} \qquad \cdots\cdots ㉠ $$

이때 $(1-x-x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식에서 x^2항은 1과 ㉠의 x^2항이 곱해질 때, $-x$와 ㉠의 x항이 곱해질 때, $-x^2$과 ㉠의 상수항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^2항은 $8-r-r=2$, 즉 $r=3$일 때이므로

$${}_8C_3x^2=56x^2$$

(ii) ㉠에서 x항은 $8-r-r=1$, 즉 $r=\frac{7}{2}$일 때이지만 r는 $0\le r\le 8$인 정수이므로 ㉠에서 x항은 존재하지 않는다.

(iii) ㉠에서 상수항은 $8-r=r$, 즉 $r=4$일 때이므로

$${}_8C_4=70$$

이상에서 $(1-x-x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식에서 x^2항은

$$1\cdot 56x^2-x^2\cdot 70=-14x^2$$

이므로 구하는 계수는 -14이다. 답 -14

$8-r-r=2$에서
$8-2r=2$
$-2r=-6\quad \therefore r=3$

27 $\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r={}_5C_r a^r\frac{x^{5-r}}{x^{2r}}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 x항은 x^2과 ㉠의 $\frac{1}{x}$항이 곱해질 때, $\frac{3}{x}$과 ㉠의 x^2항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 $\frac{1}{x}$항은 $2r-(5-r)=1$, 즉 $r=2$일 때이므로

$${}_5C_2\cdot a^2\frac{1}{x}=\frac{10a^2}{x}$$

(ii) ㉠에서 x^2항은 $5-r-2r=2$, 즉 $r=1$일 때이므로

$${}_5C_1\cdot ax^2=5ax^2$$

이상에서 $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 x항은

$$x^2\cdot\frac{10a^2}{x}+\frac{3}{x}\cdot 5ax^2=(10a^2+15a)x$$

따라서 $10a^2+15a=135$이므로

$$2a^2+3a-27=0,\qquad (2a+9)(a-3)=0$$

$\therefore a=3$ ($\because a$는 자연수) 답 ③

$2r-(5-r)=1$에서
$3r-5=1$
$3r=6\quad \therefore r=2$

$5-r-2r=2$에서
$5-3r=2$
$-3r=-3\quad \therefore r=1$

28 $\frac{(1-2x)^3(3+x)^4}{x}$의 전개식에서 x^4의 계수는 $(1-2x)^3(3+x)^4$의 전개식에서 x^5의 계수와 같다.

$(1-2x)^3$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r(-2x)^r={}_3C_r(-2)^rx^r$$

$(3+x)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s3^{4-s}x^s$$

즉 $(1-2x)^3(3+x)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r(-2)^rx^r\cdot{}_4C_s3^{4-s}x^s$$
$$={}_3C_r\cdot{}_4C_s(-2)^r3^{4-s}x^{r+s}$$

$r+s=5$를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$$(1, 4), (2, 3), (3, 2)$$

$0\le r\le 3,\ 0\le s\le 4$

따라서 $(1-2x)^3(3+x)^4$의 전개식에서 x^5의 계수는

$${}_3C_1\cdot{}_4C_4\cdot(-2)+{}_3C_2\cdot{}_4C_3\cdot(-2)^2\cdot 3$$
$$+{}_3C_3\cdot{}_4C_2\cdot(-2)^3\cdot 3^2$$
$$=-6+144-432=-294$$

즉 구하는 x^4의 계수는 -294이다. 답 ③

29 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_rx^r$$

$(1-x^2)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_s(-x^2)^s={}_6C_s(-1)^sx^{2s}$$

즉 $(1+x)^n(1-x^2)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_rx^r\cdot{}_6C_s(-1)^sx^{2s}={}_nC_r\cdot{}_6C_s(-1)^sx^{r+2s}$$

$r+2s=2$를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$$(0, 1), (2, 0)$$

$0\le r\le n,\ 0\le s\le 6$

이므로 x^2의 계수는

$${}_nC_0\cdot{}_6C_1\cdot(-1)+{}_nC_2\cdot{}_6C_0=-6+\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}$$

즉 $\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}-6=39$이므로

$$n(n-1)=10\cdot 9$$
$$\therefore n=10$$

답 10

30 $({}_8C_0)^2+({}_8C_1)^2+({}_8C_2)^2+\cdots+({}_8C_8)^2$

$$={}_8C_0\cdot{}_8C_0+{}_8C_1\cdot{}_8C_1+{}_8C_2\cdot{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8\cdot{}_8C_8$$
$$={}_8C_0\cdot{}_8C_8+{}_8C_1\cdot{}_8C_7+{}_8C_2\cdot{}_8C_6+\cdots+{}_8C_8\cdot{}_8C_0\qquad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $(1+x)^8(1+x)^8$의 전개식의 일반항은

$${}_8C_px^p\cdot{}_8C_qx^q={}_8C_p\cdot{}_8C_q\cdot x^{p+q}$$

이고 $p+q=8$을 만족시키는 p, q의 순서쌍 (p, q)는

$$(0, 8), (1, 7), (2, 6), \cdots, (8, 0)$$

$0\le p\le 8,\ 0\le q\le 8$

이므로 x^8의 계수는

$${}_8C_0\cdot{}_8C_8+{}_8C_1\cdot{}_8C_7+{}_8C_2\cdot{}_8C_6+\cdots+{}_8C_8\cdot{}_8C_0$$

따라서 ㉠은 $(1+x)^8(1+x)^8$, 즉 $(1+x)^{16}$의 전개식에서 x^8의 계수와 같다.

$(1+x)^{16}$의 전개식에서 x^8의 계수는 ${}_{16}C_8$이므로

$n=16,\ r=8\qquad \therefore n+r=24$ 답 ③

쌤 한마디

$(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수

$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$이므로 $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는

$${}_nC_0\cdot{}_nC_n+{}_nC_1\cdot{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\cdot{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_0$$

이때 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

$${}_nC_0\cdot{}_nC_n+{}_nC_1\cdot{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\cdot{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_0$$
$$={}_nC_0\cdot{}_nC_0+{}_nC_1\cdot{}_nC_1+{}_nC_2\cdot{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_n$$
$$=({}_nC_0)^2+({}_nC_1)^2+({}_nC_2)^2+\cdots+({}_nC_n)^2$$

31 ${}_{44}C_0-{}_{44}C_1+{}_{44}C_2-\cdots-{}_{44}C_{43}+{}_{44}C_{44}=0$이므로

$${}_{44}C_1-{}_{44}C_2+\cdots+{}_{44}C_{43}={}_{44}C_0+{}_{44}C_{44}$$
$$=1+1=2$$

답 ⑤

32 $_{21}C_{11}+{}_{21}C_{12}+{}_{21}C_{13}+\cdots+{}_{21}C_{21}$

$={}_{21}C_{10}+{}_{21}C_{9}+{}_{21}C_{8}+\cdots+{}_{21}C_{0}$

이고 $_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{21}=2^{21}$이므로

$$_{21}C_{11}+{}_{21}C_{12}+{}_{21}C_{13}+\cdots+{}_{21}C_{21}=\frac{2^{21}}{2}=2^{20}$$

$\therefore n=20$ 답 20

33 $_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$이므로

$_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}-{}_nC_0=2^{n-1}-1$

즉 $2^{n-1}-1=511$이므로

$2^{n-1}=512=2^9$

따라서 $n-1=9$이므로 $n=10$ 답 10

34 구하는 경우의 수는

$_{15}C_8+{}_{15}C_9+{}_{15}C_{10}+\cdots+{}_{15}C_{15}$

이때

$_{15}C_8+{}_{15}C_9+{}_{15}C_{10}+\cdots+{}_{15}C_{15}$

$={}_{15}C_7+{}_{15}C_6+{}_{15}C_5+\cdots+{}_{15}C_0$

이고 $_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{15}=2^{15}$이므로

$$_{15}C_8+{}_{15}C_9+{}_{15}C_{10}+\cdots+{}_{15}C_{15}=\frac{2^{15}}{2}=2^{14}$$

답 ④

35 주어진 조건을 만족시키려면 1을 제외한 나머지 11개의 원소 중에서 0개, 2개, 4개, ⋯, 10개를 택하면 된다.

이때 원소의 개수가 n인 부분집합의 개수는 $_{11}C_n$이므로 구하는 부분집합의 개수는

$_{11}C_0+{}_{11}C_2+{}_{11}C_4+\cdots+{}_{11}C_{10}=2^{11-1}=1024$

답 ④

36 $_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_2$

$_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$

$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_2$

$={}_5C_3+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_2$

$={}_6C_3+\cdots+{}_9C_2$

⋮

$={}_{10}C_3$

$={}_{10}C_7$ 답 ①

37 $_5C_0+{}_6C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_{15}C_{10}$

$_1C_0={}_2C_0=\cdots={}_nC_0=1$

$={}_6C_0+{}_6C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_{15}C_{10}$

$={}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_{15}C_{10}$

$={}_8C_2+\cdots+{}_{15}C_{10}$

⋮

$={}_{15}C_9+{}_{15}C_{10}$

$={}_{16}C_{10}={}_{16}C_6$

따라서 $_nC_6={}_{16}C_6$이므로

$n=16$ 답 16

38 $_8C_1+{}_9C_2+{}_{10}C_3+{}_{11}C_4$

$={}_8C_0-{}_8C_0+{}_8C_1+{}_9C_2+{}_{10}C_3+{}_{11}C_4$

$=({}_8C_0+{}_8C_1+{}_9C_2+{}_{10}C_3+{}_{11}C_4)-{}_8C_0$

$=({}_9C_1+{}_9C_2+{}_{10}C_3+{}_{11}C_4)-1$

$=({}_{10}C_2+{}_{10}C_3+{}_{11}C_4)-1$

$=({}_{11}C_3+{}_{11}C_4)-1$

$={}_{12}C_4-1$

$=495-1=494$ 답 494

39 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 $_nC_r\,x^r$

$5\le n\le 12$인 경우에 x^5항이 나오므로 주어진 식에서 x^5의 계수는 $(1+x)^5$, $(1+x)^6$, $(1+x)^7$, ⋯, $(1+x)^{12}$의 각각의 전개식에서 x^5의 계수의 합과 같다.

따라서 구하는 x^5의 계수는

$_5C_5+{}_6C_5+{}_7C_5+\cdots+{}_{12}C_5$

$_1C_1={}_2C_2=\cdots={}_nC_n=1$

$={}_6C_6+{}_6C_5+{}_7C_5+\cdots+{}_{12}C_5$

$={}_7C_6+{}_7C_5+\cdots+{}_{12}C_5$

$={}_8C_6+\cdots+{}_{12}C_5$

$={}_{12}C_6+{}_{12}C_5$

$={}_{13}C_6$ 답 ④

도전! 수능 기출

17쪽

01 1st 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하는 방법을 구한다.

세 가지 색의 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하는 방법은 다음 표와 같다.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)
검은색	0	0	0	0	1	1	1	1	1
파란색	1	2	3	4	0	1	2	3	4
빨간색	4	3	2	1	4	3	2	1	0

2nd 선택한 볼펜을 나누어 주는 경우의 수를 구한다.

(i) 파란색 볼펜 1자루, 빨간색 볼펜 4자루를 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_2H_1\cdot{}_2H_4={}_2C_1\cdot{}_5C_4=2\cdot5=10$

(ii) 파란색 볼펜 2자루, 빨간색 볼펜 3자루를 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_2H_2\cdot{}_2H_3={}_3C_2\cdot{}_4C_3=3\cdot4=12$

(iii) 파란색 볼펜 3자루, 빨간색 볼펜 2자루를 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_2H_3\cdot{}_2H_2={}_4C_3\cdot{}_3C_2=4\cdot3=12$

(iv) 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 1자루를 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_2H_4\cdot{}_2H_1={}_5C_4\cdot{}_2C_1=5\cdot2=10$

(v) 검은색 볼펜 1자루, 빨간색 볼펜 4자루를 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_2H_1\cdot{}_2H_4={}_2C_1\cdot{}_5C_4=2\cdot5=10$

(vi) 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 1자루, 빨간색 볼펜 3자루를 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_1\cdot{}_2H_1\cdot{}_2H_3={}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_4C_3=2\cdot2\cdot4=16$$

(vii) 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 2자루, 빨간색 볼펜 2자루를 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_1\cdot{}_2H_2\cdot{}_2H_2={}_2C_1\cdot{}_3C_2\cdot{}_3C_2=2\cdot3\cdot3=18$$

(viii) 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 3자루, 빨간색 볼펜 1자루를 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_1\cdot{}_2H_3\cdot{}_2H_1={}_2C_1\cdot{}_4C_3\cdot{}_2C_1=2\cdot4\cdot2=16$$

(ix) 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루를 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_1\cdot{}_2H_4={}_2C_1\cdot{}_5C_4=2\cdot5=10$$

3rd 경우의 수를 구한다.

이상에서 구하는 경우의 수는

$$10+12+12+10+10+16+18+16+10=114$$

답 114

02 **1st 4명의 학생이 받는 사인펜의 개수를 구한다.**

사인펜이 14개이므로 조건 (가), (다)에 의하여 4명의 학생 중 2명은 짝수 개, 2명은 홀수 개의 사인펜을 받거나 4명 모두 짝수 개의 사인펜을 받아야 한다.

2nd 2명은 짝수 개, 2명은 홀수 개의 사인펜을 받는 경우의 수를 구한다.

(i) 2명은 짝수 개, 2명은 홀수 개의 사인펜을 받는 경우

4명 중 짝수 개의 사인펜을 받을 2명을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

4명이 받는 사인펜의 개수를

$2a+2,\ 2b+2,\ 2c+1,\ 2d+1$

(a, b, c, d는 음이 아닌 정수)

이라 하면

$(2a+2)+(2b+2)+(2c+1)+(2d+1)=14$

$\therefore a+b+c+d=4$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_4H_4={}_7C_4=35$

이때 $(4, 0, 0, 0)$ 또는 $(0, 4, 0, 0)$인 경우에는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 2명은 짝수 개, 2명은 홀수 개의 사인펜을 받는 경우의 수는

$6\cdot(35-2)=198$

3rd 4명 모두 짝수 개의 사인펜을 받는 경우의 수를 구한다.

(ii) 4명 모두 짝수 개의 사인펜을 받는 경우

4명이 받는 사인펜의 개수를

$2a+2,\ 2b+2,\ 2c+2,\ 2d+2$

(a, b, c, d는 음이 아닌 정수)

라 하면

$(2a+2)+(2b+2)+(2c+2)+(2d+2)=14$

$\therefore a+b+c+d=3$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$

4th 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$198+20=218$

답 218

03 **1st 조건 (가)를 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한다.**

조건 (가)의 방정식 $a+b+c=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_3H_6={}_8C_6=28$

2nd 조건 (나)를 만족시키기 위한 조건을 구한다.

조건 (나)에서 세 점 $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$가 한 직선 위에 있지 않아야 하므로

$\dfrac{b-a}{2-1}\neq\dfrac{c-b}{3-2}$, $\quad b-a\neq c-b$

$\therefore 2b\neq a+c$

즉 $a+b+c=6$에서 $\quad 3b\neq6$

$\therefore b\neq2$

3rd 조건 (나)를 만족시키지 않는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한다.

구하는 순서쌍의 개수는 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍의 개수에서 $b=2$인 순서쌍의 개수를 빼면 된다.

$a+b+c=6$에서 $b=2$이면 $\quad a+c=4$

즉 $b=2$인 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $a+c=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c의 순서쌍 (a, c)의 개수와 같으므로

${}_2H_4={}_5C_4=5$

4th 주어진 조건을 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한다.

구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$28-5=23$

답 ⑤

04 **1st d가 될 수 있는 값을 구한다.**

조건 (가)의 $a+b+c-d=9$에서

$a+b+c=9+d$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 d는 음이 아닌 정수이고 조건 (나)에서 $d\le4$이므로

$d=0$ 또는 $d=1$ 또는 $d=2$ 또는

$d=3$ 또는 $d=4$

2nd d의 값에 따른 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구한다.

(i) $d=0$일 때,

㉠에서 $\quad a+b+c=9$

순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

${}_3H_9={}_{11}C_9=55$

Q BOX

$2a+2b+2c+2d+6$
$=14$
에서
$2a+2b+2c+2d=8$
$\therefore a+b+c+d=4$

한 학생이 받는 사인펜의 개수가 10이다.

$2a+2b+2c+2d+8$
$=14$
에서
$2a+2b+2c+2d=6$
$\therefore a+b+c+d=3$

두 점씩 이은 두 직선의 기울기가 같지 않아야 한다.

(ii) $d=1$일 때,

㉠에서 $a+b+c=10$ …… ㉡

이때 조건 (나)에 의하여 $c\geq1$이므로 $c_1=c-1$로 놓으면 c_1은 음이 아닌 정수이고 ㉡에서

$c=c_1+1$

$a+b+c_1+1=10$ $\quad\therefore a+b+c_1=9$

(i)과 마찬가지로 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9=55$

(iii) $d=2$일 때,

㉠에서 $a+b+c=11$ …… ㉢

이때 조건 (나)에 의하여 $c\geq2$이므로 $c_2=c-2$로 놓으면 c_2는 음이 아닌 정수이고 ㉢에서

$c=c_2+2$

$a+b+c_2+2=11$ $\quad\therefore a+b+c_2=9$

(i)과 마찬가지로 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9=55$

(iv) $d=3$일 때,

㉠에서 $a+b+c=12$ …… ㉣

이때 조건 (나)에 의하여 $c\geq3$이므로 $c_3=c-3$으로 놓으면 c_3은 음이 아닌 정수이고 ㉣에서

$c=c_3+3$

$a+b+c_3+3=12$ $\quad\therefore a+b+c_3=9$

(i)과 마찬가지로 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9=55$

(v) $d=4$일 때,

㉠에서 $a+b+c=13$ …… ㉤

이때 조건 (나)에 의하여 $c\geq4$이므로 $c_4=c-4$로 놓으면 c_4는 음이 아닌 정수이고 ㉤에서

$c=c_4+4$

$a+b+c_4+4=13$ $\quad\therefore a+b+c_4=9$

(i)과 마찬가지로 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9=55$

3rd 주어진 조건을 만족시키는 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$5\cdot55=275$

답 ③

다른 풀이 조건 (나)에서 $c\geq d$이므로 $c'=c-d$로 놓으면 c'은 음이 아닌 정수이고 조건 (가)는

$a+b+c'=9$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c'의 순서쌍 (a, b, c')의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9=55$

이때 $d\leq4$에서 각 c'의 값에 대하여 d가 될 수 있는 수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이고 c', d의 값이 정해지면 c의 값이 하나로 정해지므로 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$55\cdot5=275$

Q BOX

03 확률의 뜻과 활용

W 18쪽

01 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ의 사건을 각각 A, B, C, D라 하면

네 사건을 각각 집합으로 나타낸 후 두 사건이 나타내는 집합의 교집합이 공집합인지 확인한다.

$A=\{1, 3, 6, 7, 10\}$, $B=\{6, 10\}$,

$C=\{3, 7\}$, $D=\{1, 3, 6\}$

이므로

$A\cap B=\{6, 10\}$, $A\cap C=\{3, 7\}$,

$A\cap D=\{1, 3, 6\}$, $B\cap C=\varnothing$,

$B\cap D=\{6\}$, $C\cap D=\{3\}$

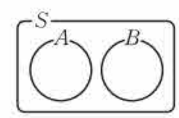
따라서 서로 배반사건인 것끼리 짝 지어진 것은 ③이다.

답 ③

02 ① 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$

②, ③ 오른쪽 벤다이어그램에서



$A^C\cap B=B$,

$B\subset A^C$

④ $C=A\cup B$이므로

$C\not\subset A$

⑤ $B^C\cup C=B^C\cup(A\cup B)=A\cup(B^C\cup B)$

$=A\cup S=S$

답 ④

03 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이므로

$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{4, 8\}$, $C=\{1, 2, 4, 8\}$

ㄱ. $A\cap C=\{2\}$이므로 A와 C는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\{4, 8\}$이므로

$(A\cap B)\cap(B\cap C)=\varnothing$

따라서 $A\cap B$와 $B\cap C$는 배반사건이다.

ㄷ. $B\cup C=\{1, 2, 4, 8\}$, $C^C=\{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$이므로

$(B\cup C)\cap C^C=\varnothing$

따라서 $B\cup C$와 C^C는 배반사건이다.

이상에서 배반사건인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

04 사건 A와 배반인 사건은 사건 A^C의 부분집합이고 사건 B와 배반인 사건은 사건 B^C의 부분집합이다. 즉 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건 C는 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

이때 $A^C=\{2, 4, 6, 8\}$, $B^C=\{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$이므로

$B=\{1, 4, 7\}$

$A^C\cap B^C=\{2, 6, 8\}$

따라서 구하는 사건 C의 개수는

$2^3=8$

답 ①

05 사건 A와 배반인 사건은 사건 A^C의 부분집합이고 사건 B^C와 배반인 사건은 사건 B의 부분집합이다. 즉 사건 A와 배반이고 B^C와도 배반인 사건 C는 $A^C\cap B$의 부분집합이다.

이때 $A^C=\{-1, 2\}$, $B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$이므로

$A^C\cap B=\{-1, 2\}$

따라서 구하는 사건 C의 개수는

$2^2=4$ 답 4

06 집합 S의 부분집합의 개수는

$2^8=256$

3을 반드시 원소로 갖고 5와 8을 원소로 갖지 않는 집합 S의 부분집합의 개수는

$2^{8-1-2}=2^5=32$

따라서 구하는 확률은

$\frac{32}{256}=\frac{1}{8}$ 답 ②

쌤한마디

특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① A의 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수
➡ 2^{n-k} (단, $k<n$)

② A의 특정한 원소 l개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수
➡ 2^{n-l} (단, $l<n$)

③ A의 원소 중에서 k개는 반드시 원소로 갖고, l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수
➡ 2^{n-k-l} (단, $k+l<n$)

07 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

두 직선 $ax-y=1$, $6x-by=5$가 평행하려면

$\frac{a}{6}=\frac{-1}{-b}\neq\frac{1}{5}$, 즉 $\frac{a}{6}=\frac{1}{b}\neq\frac{1}{5}$

이어야 하므로

$ab=6$, $b\neq5$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$의 4가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ 답 $\frac{1}{9}$

> 두 직선
> $px+qy+r=0$,
> $p'x+q'y+r'=0$
> 이 평행하다.
> ➡ $\frac{p}{p'}=\frac{q}{q'}\neq\frac{r}{r'}$

08 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

$i^a\cdot(-i)^b=i^a\cdot(-1)^b\cdot i^b=i^{a+b}\cdot(-1)^b$이므로 b가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각하면 다음과 같다.

Q BOX

> $i^{4k}=1$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$

> a, b는 주사위의 눈의 수이므로
> $2\leq a+b\leq12$

> $i^{4k-2}=-1$
> $(k=1, 2, 3, \cdots)$

(i) b가 홀수, 즉 1, 3, 5인 경우

$i^{a+b}\cdot(-1)^b=-i^{a+b}$이므로

$-i^{a+b}=-1$, 즉 $i^{a+b}=1$

$\therefore a+b=4$ 또는 $a+b=8$ 또는 $a+b=12$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$의 4가지

(ii) b가 짝수, 즉 2, 4, 6인 경우

$i^{a+b}\cdot(-1)^b=i^{a+b}$이므로

$i^{a+b}=-1$

$\therefore a+b=2$ 또는 $a+b=6$ 또는 $a+b=10$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 4)$, $(4, 2)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$의 4가지

(i), (ii)에서 $i^a\cdot(-i)^b$의 값이 -1이 되는 경우의 수는

$4+4=8$

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$ 답 ②

09 6개의 인형 중에서 3개의 인형을 택하여 일렬로 진열하는 경우의 수는

${}_6P_3=120$

고래 인형을 제외한 5개의 인형 중에서 2개의 인형을 택하여 고래 인형의 양옆에 진열하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

10 네 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

${}_5P_4=120$

4300보다 작은 자연수는 2□□□ 꼴 또는 3□□□ 꼴 또는 42□□ 꼴이다.

(i) 2□□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_4P_3=24$

(ii) 3□□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_4P_3=24$

(iii) 42□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_3P_2=6$

이상에서 4300보다 작은 자연수의 개수는

$24+24+6=54$

따라서 구하는 확률은

$\frac{54}{120}=\frac{9}{20}$ 답 ⑤

11 네 사람을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

앞에서 두 번째에 서 있는 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 커야 하므로 두 번째에는 키가 가장 큰 사람 또는 키가 두 번째로 큰 사람이 설 수 있다.

(ⅰ) 키가 가장 큰 사람이 두 번째에 서는 경우
나머지 3명을 일렬로 세우면 되므로 경우의 수는
$3!=6$
(ⅱ) 키가 두 번째로 큰 사람이 두 번째에 서는 경우
키가 가장 큰 사람을 네 번째에 세우고 나머지 2명을 일렬로 세우면 되므로 경우의 수는
$2!=2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 앞에서 두 번째에 서 있는 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 크도록 세우는 경우의 수는
$6+2=8$
따라서 구하는 확률은
$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

12 6명의 가족이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
부모를 제외한 나머지 가족 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
이고, 나머지 가족들 사이사이의 4개의 자리에 부모 2명이 앉는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
이므로 부모가 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는
$6\cdot12=72$
따라서 구하는 확률은
$\frac{72}{120}=\frac{3}{5}$ 답 ④

13 의자 6개에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 1개이다.
빈 의자 1개에 앉는 또 다른 학생이 있다고 생각하면 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(7-1)!=6!=720$
남학생 4명을 한 사람, 여학생 2명을 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
이고, 남학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$4!=24$
이며 여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
이므로 남학생은 남학생끼리, 여학생은 여학생끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는
$2\cdot24\cdot2=96$
따라서 구하는 확률은
$\frac{96}{720}=\frac{2}{15}$ 답 $\frac{2}{15}$

14 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는
$4\cdot{}_5\Pi_3=4\cdot5^3=500$
짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4 중 하나이어야 하므로 짝수의 개수는
$3\cdot4\cdot{}_5\Pi_2=3\cdot4\cdot5^2=300$
따라서 구하는 확률은
$\frac{300}{500}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

15 네 사람이 가위바위보를 한 번 할 때 나오는 모든 경우의 수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$
이기는 세 명을 정하는 경우는 지는 한 명을 정하는 경우와 같으므로 4가지이고, 이기는 세 명이 가위, 바위, 보 중에서 어느 하나를 냈을 때 나머지 한 명이 내는 것은 정해져 있으므로 세 명이 이기는 경우의 수는
$4\cdot3=12$
따라서 구하는 확률은
$\frac{12}{81}=\frac{4}{27}$ 답 ①

16 6개의 깃발을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{3!\cdot2!}=60$
노란색 깃발을 한 깃발로 생각하여 5개의 깃발을 일렬로 나열하는 경우의 수는
노란색 깃발끼리 이웃하는 경우의 수
$\frac{5!}{3!}=20$
따라서 구하는 확률은
$\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

17 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
오른쪽으로 5칸, 위쪽으로 3칸 가야 한다.
$\frac{8!}{5!\cdot3!}=56$
A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\frac{4!}{3!}=4$
이고, P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$
이므로 A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$4\cdot6=24$
따라서 구하는 확률은
$\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$ 답 ④

18 서로 다른 세 개의 주사위를 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6\cdot6\cdot6=216$
a, b, c는 1 이상 6 이하의 자연수이므로 $abc=6$을 만족시키는 a, b, c의 값은
1, 1, 6 또는 1, 2, 3
즉 $abc=6$을 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 1, 1, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수와 1,

2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수의 합과 같으므로

$\frac{3!}{2!}+3!=9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{216}=\frac{1}{24}$ 답 ③

19 5장의 카드 중에서 3장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 $_5C_3=10$

이때 세 수의 합이 홀수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) (홀수)+(홀수)+(홀수)인 경우

홀수가 적힌 3장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$_3C_3=1$

(ii) (홀수)+(짝수)+(짝수)인 경우

홀수가 적힌 3장의 카드 중에서 1장, 짝수가 적힌 2장의 카드 중에서 2장을 뽑는 경우의 수는

$_3C_1\cdot{}_2C_2=3$

(i), (ii)에서 세 수의 합이 홀수인 경우의 수는

$1+3=4$

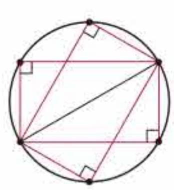
따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

20 6개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$_6C_3=20$

오른쪽 그림과 같이 1개의 지름에 대하여 4개의 직각삼각형을 만들 수 있고, 6개의 점으로 만들 수 있는 지름은 3개이므로 직각삼각형의 개수는



$4\cdot3=12$

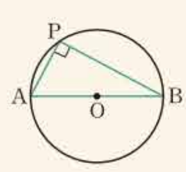
따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$ 답 ④

쌤한마디

원에 내접하는 직각삼각형

반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$이므로 원의 지름의 양 끝점과 원 위의 다른 한 점을 택하면 직각삼각형을 만들 수 있다.



21 사격 선수가 10점을 맞힐 확률은

$\frac{600}{1600}=\frac{3}{8}$

따라서 총을 96번 쏘아서 10점을 맞히는 횟수는

$\frac{3}{8}\times96=36$(회)

라고 할 수 있다. 답 36회

22 바닥에 닿는 면에 적힌 수가 3일 확률은

$1-(0.27+0.25+0.24)=0.24$

따라서 $\frac{150}{n}=0.24$이므로

$n=625$ 답 625

23 이번 시즌에 던진 3점 슛의 개수를 a라 하면 성공한 3점 슛의 개수가 $\frac{48}{3}=16$이므로

$\frac{16}{a}=\frac{50}{100}$ $\therefore a=32$

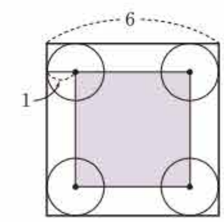
이번 시즌에 던진 2점 슛의 개수를 b라 하면 성공한 2점 슛의 개수가 $\frac{156}{2}=78$이므로

$\frac{78}{b}=\frac{65}{100}$ $\therefore b=120$

따라서 던진 3점 슛과 2점 슛의 개수의 차는

$120-32=88$ 답 ⑤

24 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 동전의 중심이 놓이면 동전이 종이의 테두리 안쪽에 완전히 놓인다.



이때 한 변의 길이가 6인 정사각형의 넓이는 $6^2=36$, 한 변의 길이가 4인 정사각형의 넓이는 $4^2=16$이므로 구하는 확률은

$\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$ 답 $\frac{4}{9}$

25 이차방정식 $3x^2-4kx+k=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $\frac{D}{4}\geq0$이어야 하므로

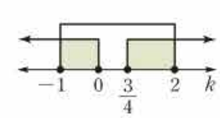
계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 실근을 가지려면 $b^2-4ac\geq0$

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-3k\geq0$

$4k^2-3k\geq0$, $k(4k-3)\geq0$

$\therefore k\leq0$ 또는 $k\geq\frac{3}{4}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 확률은



$\frac{\{0-(-1)\}+\left(2-\frac{3}{4}\right)}{2-(-1)}$

$=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

26 나오는 세 눈의 수의 합이 2일 확률은

나오는 세 눈의 수의 합의 최솟값은 3, 최댓값은 18이다.

$p=0$

나오는 세 눈의 수가 모두 같을 확률은

$q=\frac{6}{6\cdot6\cdot6}=\frac{1}{36}$

나오는 세 눈의 수의 곱이 216 이하일 확률은

나오는 세 눈의 수의 곱의 최솟값은 1, 최댓값은 216이다.

$r=1$

$\therefore p-q+r=0-\frac{1}{36}+1=\frac{35}{36}$ 답 $\frac{35}{36}$

27 ㄱ. $A \subset B$이면 $n(A) \le n(B)$이므로

$$\frac{n(A)}{n(S)} \le \frac{n(B)}{n(S)} \qquad \therefore \mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(B)$$

ㄴ. [반례] $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이면

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$이고 $\mathrm{P}(S)=1$이므로

$$\mathrm{P}(S) > \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3\}$이고 $A=\{1, 3\}$, $B=\{2, 3\}$이면 $\mathrm{P}(A \cup B)=1$이지만 A는 B의 여사건이 아니다.

Q BOX: $A \cup B=\{1, 2, 3\}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

28 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{5}{6}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{4}\mathrm{P}(A), \qquad \frac{5}{4}\mathrm{P}(A)=\frac{5}{6}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

29 $\mathrm{P}(A \cap B)=\frac{3}{4}\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}\mathrm{P}(B)=k\ (k \ne 0)$라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{3}k,\ \mathrm{P}(B)=\frac{5}{3}k$$

이때

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$$
$$=\frac{4}{3}k+\frac{5}{3}k-k=2k$$

이므로

$$\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A \cup B)}=\frac{k}{2k}=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

30 두 사건 B, $A \cap B^C$는 서로 배반사건이고 $A \cup B=B \cup (A \cap B^C)$이므로

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A \cap B^C)$$

$$\frac{5}{9}=\mathrm{P}(B)+\frac{1}{2} \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{18}$$

답 $\frac{1}{18}$

쌤한마디

30번과 같이 두 사건 B와 $A \cap B^C$가 서로 배반사건임이 겉으로 드러나지 않는 문제는 벤다이어그램을 떠올려 두 사건의 관계를 이해하도록 한다.
마찬가지로 두 사건 $A \cap B$와 $A \cap B^C$, 두 사건 A와 $A^C \cap B$는 서로 배반사건이므로 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A \cap B)+\mathrm{P}(A \cap B^C),$$
$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C \cap B)$$

31 두 사건 A^C와 B가 서로 배반사건이므로

$$A^C \cap B=\varnothing \qquad \therefore B \subset A$$

$$\therefore \mathrm{P}(A \cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{5}{12}=\frac{1}{3}$$

답 ②

32 $\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$에서

$$\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cup B)$$
$$=\frac{5}{8}+\frac{2}{3}-\mathrm{P}(A \cup B)$$
$$=\frac{31}{24}-\mathrm{P}(A \cup B)$$

이므로 $\mathrm{P}(A \cup B)$가 최소일 때 $\mathrm{P}(A \cap B)$가 최대이고 $\mathrm{P}(A \cup B)$가 최대일 때 $\mathrm{P}(A \cap B)$가 최소이다.
이때 $\mathrm{P}(A \cup B) \ge \mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A \cup B) \ge \mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A \cup B) \le 1$이므로

$$\mathrm{P}(A \cup B) \ge \frac{5}{8},\ \mathrm{P}(A \cup B) \ge \frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A \cup B) \le 1$$

즉 $\frac{2}{3} \le \mathrm{P}(A \cup B) \le 1$이므로

$$\frac{7}{24} \le \frac{31}{24}-\mathrm{P}(A \cup B) \le \frac{5}{8}$$

$$\therefore \frac{7}{24} \le \mathrm{P}(A \cap B) \le \frac{5}{8}$$

따라서 $M=\frac{5}{8}$, $m=\frac{7}{24}$이므로

$$\frac{M}{m}=\frac{5}{8} \cdot \frac{24}{7}=\frac{15}{7}$$

답 $\frac{15}{7}$

33 주형이가 뽑히는 사건을 A, 은빈이가 뽑히는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{4}{9},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{4}{9},$$

Q BOX: 주형이는 뽑혔다고 생각하고 주형이를 제외한 나머지 8명의 회원 중에서 대회에 참가할 3명을 뽑는 경우의 수

$$\mathrm{P}(A \cap B)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{1}{6}$$

Q BOX: 주형이와 은빈이가 모두 뽑히는 사건

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$$
$$=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}-\frac{1}{6}=\frac{13}{18}$$

답 ③

34 여섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \cdot 2!}=180$$

백의 자리의 숫자가 3인 사건을 A, 백의 자리의 숫자가 4인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\frac{5!}{2! \cdot 2!}}{180}=\frac{30}{180}=\frac{1}{6},$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{\frac{5!}{2!}}{180}=\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

35 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

$f(a)=1$인 사건을 A, $f(b)=2$인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\Pi_2}{64}=\frac{4^2}{64}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\Pi_2}{64}=\frac{4^2}{64}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(A \cap B)=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$$

Q BOX: $f(a)=1$, $f(b)=2$로 정한 후 $f(c)$의 값만 정하면 된다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$$

답 ②

36 같은 색의 바둑돌을 꺼내려면 두 개 모두 흰 바둑돌이거나 두 개 모두 검은 바둑돌이어야 한다. 두 개 모두 흰 바둑돌을 꺼내는 사건을 A, 두 개 모두 검은 바둑돌을 꺼내는 사건을 B라 하고 상자에 들어 있는 흰 바둑돌의 개수를 n이라 하면

검은 바둑돌의 개수는 $7-n$이다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{n(n-1)}{42},$$
$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_{7-n}\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{(7-n)(6-n)}{42}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$\frac{3}{7}=\frac{n(n-1)}{42}+\frac{(7-n)(6-n)}{42}$$
$$n^2-7n+12=0,\qquad (n-3)(n-4)=0$$
$$\therefore n=3 \text{ 또는 } n=4$$

그런데 흰 바둑돌이 검은 바둑돌보다 많으므로

$$n=4$$

따라서 구하는 흰 바둑돌의 개수는 4이다. 답 4

37 청소 당번으로 정해진 두 번호가 연속하지 않는 사건을 A라 하면 A^C는 두 번호가 연속하는 사건이므로

두 수가 연속하는 경우는 1과 2, 2와 3, 3과 4, …, 9와 10의 9가지

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{9}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

38 $f(x)=x^2-9x+14=(x-2)(x-7)$이므로

$$f(2)=0,\ f(7)=0$$

$f(a)f(b)=0$인 사건을 A라 하면 A^C는 $f(a)f(b)\neq0$인 사건이다.

$f(a)=0$ 또는 $f(b)=0$

$f(a)f(b)\neq0$이려면 $f(a)\neq0$이고 $f(b)\neq0$이므로

a는 2와 7을 제외한 1, 3, 4, 5, 6, 8 중 하나이다.

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{6\cdot6}{8\cdot8}=\frac{9}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

답 ⑤

39 적어도 2명이 같은 요일을 택하는 사건을 A라 하면 A^C는 3명 모두 다른 요일을 택하는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{P}_3}{{}_5\Pi_3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{5^3}=\frac{12}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{12}{25}=\frac{13}{25}$$

답 $\frac{13}{25}$

40 적어도 한 번 남자 아이돌이 연속하여 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 남자 아이돌이 연속하여 나오지 않는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{6!\cdot{}_7\mathrm{P}_5}{11!}=\frac{1}{22}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{22}=\frac{21}{22}$$

답 ④

41 빨간색 펜이 2개 이상 포함되는 사건을 A라 하면 A^C는 빨간색 펜이 0개 또는 1개가 포함되는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}+\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{5}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$$

답 ①

42 앞면이 나온 동전의 금액의 합이 1000원 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 앞면이 나온 동전의 금액의 합이 1000원 초과인 사건이다.

5개의 동전을 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$${}_2\Pi_5=2^5=32$$

앞면이 나온 동전의 금액의 합이 1000원 초과인 경우는 1050원 또는 1100원 또는 1150원 또는 1200원 또는 1250원이고, 그 경우의 수는 7이므로

1100원 또는 1150원인 경우의 수는 각각 2이다.

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{7}{32}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{7}{32}=\frac{25}{32}$$

답 $\frac{25}{32}$

도전! 수능 기출

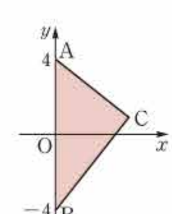
W 25쪽

01 1st 모든 경우의 수를 구한다.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$

2nd 삼각형 ABC의 넓이를 m, n에 대한 식으로 나타낸다.

두 점 A, B가 모두 y축 위의 점이므로 삼각형 ABC는 선분 AB를 밑변으로 하고 높이가 점 C와 y축 사이의 거리인 삼각형이다.



즉 밑변의 길이는

$$\overline{\mathrm{AB}}=4-(-4)=8$$

이고 높이는 점 C의 x좌표의 절댓값과 같으므로

m은 주사위의 눈의 수

$$\left|m\cos\frac{n\pi}{3}\right|=m\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|\quad(\because m>0)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot m\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|=4m\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|$$

3rd **삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작은 경우의 수를 구한다.**

삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작으려면

$$4m\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|<12$$

$$\therefore m\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|<3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$일 때, $\cos\frac{n\pi}{3}$의 값은 각각

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1$$

이므로 n의 값에 따라 부등식 ㉠을 만족시키는 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i) $n=1,\ 2,\ 4,\ 5$일 때, $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|=\frac{1}{2}$

즉 ㉠에서

$$m\cdot\frac{1}{2}<3 \qquad \therefore m<6$$

따라서 m의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 경우의 수는

$$4\cdot 5=20$$

(ii) $n=3,\ 6$일 때, $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|=1$

즉 ㉠에서

$$m\cdot 1<3 \qquad \therefore m<3$$

따라서 m의 값은 1, 2이므로 그 경우의 수는

$$2\cdot 2=4$$

(i), (ii)에서 삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작은 경우의 수는

$$20+4=24$$

4th **확률을 구한다.**

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

답 ④

02 **1st** **모든 경우의 수를 구한다.**

주머니에 1이 적혀 있는 공이 2개 있으므로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때 1이 적혀 있는 공을 1개 꺼내는 경우와 2개 꺼내는 경우로 나누어 생각해야 한다.

(i) 1이 적혀 있는 공을 1개 꺼내는 경우

1, 2, 3, 4가 적혀 있는 공을 꺼내어 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$4!=24$$

(ii) 1이 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우

1이 적혀 있는 공 2개와 2, 3, 4가 적혀 있는 공 중에서 2개를 꺼내어 일렬로 나열하면 된다.

이때 2, 3, 4가 적힌 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

이고, 꺼낸 2개의 공과 1이 적힌 2개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

이므로 1이 적힌 공 2개와 2, 3, 4가 적힌 공 중에서 2개를 꺼내어 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3\cdot 12=36$$

(i), (ii)에서 모든 경우의 수는

$$24+36=60$$

2nd **$a\le b\le c\le d$인 경우의 수를 구한다.**

$a\le b\le c\le d$인 경우를 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$로 나타내면

$(1,\ 2,\ 3,\ 4),\ (1,\ 1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 1,\ 2,\ 4),$
$(1,\ 1,\ 3,\ 4)$

의 4가지이다.

3rd **확률을 구한다.**

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$$

답 ①

쌤한마디

2nd에서 주머니에서 꺼낸 공을 나열하는 순서는 이미 정해져 있으므로 $a\le b\le c\le d$인 경우의 수는 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수와 동일하다. 즉 1st의 (i)에서 1가지 경우가 가능하고, (ii)에서 3가지 경우가 가능하므로 경우의 수를 $1+3=4$로 간단히 구할 수도 있다.

공을 4개 꺼내므로 1이 적혀 있는 공이 1개 이상 나온다.

$a\le b\le c\le d$인 경우의 각 확률을 구한다.

다른 풀이 주머니에서 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하는 것은 주머니에서 공을 1개씩 꺼낼 때 다시 넣지 않으면서 4번 꺼내는 것과 같으므로 다음과 같이 경우를 나누어 확률을 구할 수 있다.

(i) 1, 2, 3, 4가 적힌 공을 이 순서로 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{60}$$

(ii) 1, 1, 2, 3이 적힌 공을 이 순서로 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{60}$$

(iii) 1, 1, 2, 4가 적힌 공을 이 순서로 꺼낼 확률과 1, 1, 3, 4가 적힌 공을 이 순서로 꺼낼 확률도 (ii)와 같이 각각 $\frac{1}{60}$이다.

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{60}\cdot 4=\frac{1}{15}$$

03 **1st** **모든 함수 f의 개수를 구한다.**

집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수는

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

2nd **사건 X, Y를 정하여 $\mathrm{P}(X)$, $\mathrm{P}(Y)$를 구한다.**

$f(1)\ge 2$인 사건을 X, 함수 f의 치역이 B인 사건을 Y라 하자.

$f(1)\ge 2$인 함수 f의 개수는 A의 원소 1을 B의 원소 2 또는 3에 대응시키고 A의 나머지 3개의 원소를 B의 원소에 대응시키면 되므로

$$\mathrm{P}(X)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_3\Pi_3}{81}=\frac{2}{3}$$

치역이 B인 함수 f의 개수는 정의역 A의 원소 4개 중 같은 함숫값을 갖는 2개를 정한 후 이 2개의 원소를 한 묶음으로 생각하여 A의 원소를 B의 세 원소에 각각 대응시키면 되므로

$$\mathrm{P}(Y)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot 3!}{81}=\frac{4}{9}$$

3rd $\mathrm{P}(X\cap Y)$를 구한다.

(i) $f(1)=2$이고 치역이 B인 경우

1을 제외한 A의 3개의 원소 중 함숫값이 2인 원소가 존재하는 함수 f의 개수는

$3!=6$

1을 제외한 A의 3개의 원소 중 함숫값이 2인 원소가 존재하지 않는 함수 f는 A의 원소 2, 3, 4 중 같은 함숫값을 갖는 2개를 정한 후 이 2개의 원소를 한 묶음으로 생각하여 A의 원소를 B의 두 원소 1, 3에 각각 대응시키면 되므로 그 개수는

${}_3\mathrm{C}_2\cdot 2!=3\cdot 2=6$

따라서 $f(1)=2$이고 치역이 B인 함수 f의 개수는

$6+6=12$

(ii) $f(1)=3$이고 치역이 B인 경우

(i)과 같은 방법으로 구하면 함수 f의 개수는 12이다.

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{12+12}{81}=\frac{8}{27}$$

4th 확률을 구한다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\cup Y)&=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X\cap Y)\\&=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}\\&=\frac{22}{27}\end{aligned}$$

답 ④

04 **1st** 모든 경우의 수를 구한다.

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}=66$

2nd $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구한다.

$(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 A^C는 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$인 사건이다.

이때 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립하려면

$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$

$x=y$일 때, $x+y+z=10$을 만족시키는 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)는

$(0, 0, 10)$, $(1, 1, 8)$, $\cdots$, $(5, 5, 0)$

의 6개이고, $y=z$, $z=x$일 때의 순서쌍도 마찬가지로 각각 6개이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$6\cdot 3=18$

Q BOX

집합 A의 원소 2, 3, 4에 집합 B의 원소 1, 2, 3을 대응시키는 경우의 수

${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$

3rd 확률을 구하여 $p+q$의 값을 구한다.

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$$

즉 $p=11$, $q=8$이므로

$p+q=19$

답 19

다른 풀이 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$, 즉 $x\neq y$, $y\neq z$, $z\neq x$이므로 서로 다른 음이 아닌 세 정수 중에서 합이 10이 되는 경우의 수는

0, 1, 9 또는 0, 2, 8 또는 0, 3, 7 또는
0, 4, 6 또는 1, 2, 7 또는 1, 3, 6 또는
1, 4, 5 또는 2, 3, 5의 8가지

각각의 경우에서 x, y, z를 정하는 경우의 수는 $3!$이므로 $x+y+z=10$을 만족시키는 서로 다른 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$8\cdot 3!=48$

따라서 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$을 만족시킬 확률은

$$\frac{48}{{}_3\mathrm{H}_{10}}=\frac{8}{11}$$

즉 $p=11$, $q=8$이므로

$p+q=19$

04 조건부확률

W 26쪽

01 $\mathrm{P}(A^c \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$이므로

$\frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \mathrm{P}(A \cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

02 $\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(B^c) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$이므로

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$= \frac{2}{3} + \frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{8}{9}$

따라서

$\mathrm{P}(A^c \cap B^c) = \mathrm{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B)$

$= 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

이므로

$\mathrm{P}(A^c|B^c) = \dfrac{\mathrm{P}(A^c \cap B^c)}{\mathrm{P}(B^c)}$

$= \dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

03 $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$이므로

$2\mathrm{P}(B) = \frac{2}{7} + \mathrm{P}(B) - \frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$\frac{4}{3}\mathrm{P}(B) = \frac{2}{7}$ $\therefore \mathrm{P}(B) = \frac{3}{14}$ 답 ③

04 여자 고객을 택하는 사건을 A, 30대 고객을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A) = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\frac{9}{50}}{\frac{21}{50}} = \frac{3}{7}$ 답 $\frac{3}{7}$

05 검은색 카드를 꺼내는 사건을 A, 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A) = \frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

홀수가 적힌 검은색 카드는 5, 7의 2장

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5}$ 답 ⑤

06 모든 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 = 30$

종민이가 꺼낸 빨간 펜의 개수가 혜미가 꺼낸 빨간 펜의 개수보다 많은 사건을 A, 혜미가 꺼낸 펜이 모두 파란 펜인 사건을 B라 하자.

(i) 종민이가 빨간 펜을 2개 꺼내는 경우

빨간 펜 1개, 파란 펜 2개가 남으므로 종민이가 꺼낸 빨간 펜의 개수가 혜미가 꺼낸 빨간 펜의 개수보다 항상 많다.

0 또는 1

따라서 그 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 = 9$

(ii) 종민이가 빨간 펜 1개, 파란 펜 1개를 꺼내는 경우

혜미는 빨간 펜 1개를 반드시 꺼내므로 종민이가 꺼낸 빨간 펜의 개수가 혜미가 꺼낸 빨간 펜의 개수보다 많을 수 없다.

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_2\mathrm{C}_2}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

종민이가 빨간 펜 2개, 혜미가 파란 펜 2개를 꺼내는 사건

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$ 답 ②

07 A 반 학생을 뽑는 사건을 A, 찬성한 학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A) = \frac{26}{50} = \frac{13}{25}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\frac{9}{25}}{\frac{13}{25}} = \frac{9}{13}$ 답 $\frac{9}{13}$

08 여자를 택하는 사건을 A, B 놀이공원을 선호하는 사람을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{16+x}{48+x}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{x}{48+x}$

조사 대상 수는 $20+12+16+x$ $=48+x$

$\therefore \mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\frac{x}{48+x}}{\frac{16+x}{48+x}} = \dfrac{x}{16+x}$

즉 $\dfrac{x}{16+x} = \frac{7}{15}$이므로

$15x = 7(16+x)$, $8x = 112$

$\therefore x = 14$ 답 ③

09 버스와 지하철을 이용하는 학생 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

	남학생	여학생	합계
버스를 이용	65	115	180
지하철을 이용	50	70	120
버스와 지하철을 모두 이용	15	35	50

버스와 지하철을 모두 이용하는 학생을 택하는 사건을 A, 남학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{50}{250}=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{15}{250}=\frac{3}{50}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{50}}{\frac{1}{5}}=\frac{3}{10}$$ 답 $\frac{3}{10}$

10 첫 번째에 여자 회원을 뽑는 사건을 A, 두 번째에 남자 회원을 뽑는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{7}{15},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{15}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4}{15}$$ 답 ④

11 민균이가 주황색 공을 꺼내는 사건을 A, 다은이가 초록색 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{n+5},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{n+4}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{n+5}\cdot\frac{5}{n+4}=\frac{5n}{(n+5)(n+4)}$$

즉 $\frac{5n}{(n+5)(n+4)}=\frac{1}{6}$이므로

$(n+5)(n+4)=30n,\qquad n^2-21n+20=0$

$(n-1)(n-20)=0$

$\therefore n=1$ 또는 $n=20$

따라서 모든 n의 값의 합은

$1+20=21$ 답 21

12 다섯 번째에 작업이 끝나려면 네 번째까지 맞는 열쇠를 1개 발견하고 다섯 번째에 맞는 열쇠를 발견해야 한다.

네 번째까지 맞는 열쇠를 1개 발견하는 사건을 A, 다섯 번째에 맞는 열쇠를 발견하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_7\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{5}{9},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{9}$$ 답 ④

13 내일 비가 내리는 사건을 A, 내일 경기에서 이기는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.3\times0.6=0.18,$

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=0.7\times0.8=0.56$

> $\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)=1-0.3=0.7$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)=0.18+0.56=0.74$ 답 0.74

14 A 반 학생을 택하는 사건을 A, B 반 학생을 택하는 사건을 B, 수학 수업을 신청한 학생을 택하는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{25}{45}\cdot\frac{40}{100}=\frac{2}{9},$$

> A 반 학생 수는 25, B 반 학생 수는 20이므로 전체 학생 수는 $25+20=45$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{20}{45}\cdot\frac{15}{100}=\frac{1}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{2}{9}+\frac{1}{15}=\frac{13}{45}$$ 답 ②

15 노란 옷을 택하는 사건을 A, 로봇이 노란 옷으로 판별하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{12}(1-p)=\frac{1}{3}(1-p),$$

> 노란 옷을 노란 옷으로 판별할 확률

$$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{8}{12}p=\frac{2}{3}p$$

> 빨간 옷을 노란 옷으로 잘못 판별할 확률

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{1}{3}(1-p)+\frac{2}{3}p=\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}$$

즉 $\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}=\frac{7}{18}$이므로

$\frac{1}{3}p=\frac{1}{18}\qquad\therefore p=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

16 일반 고객을 택하는 사건을 A, 보험에 재가입한 고객을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{5}\cdot\frac{50}{100}=\frac{2}{5},$$

> 우대 고객과 일반 고객 수의 비는 2 : 8이므로 일반 고객을 택할 확률은 $\frac{8}{2+8}=\frac{4}{5}$

$$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{1}{5}\cdot\frac{70}{100}=\frac{7}{50}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{2}{5}+\frac{7}{50}=\frac{27}{50}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{27}{50}}=\frac{20}{27}$$ 답 $\frac{20}{27}$

17 희철이가 2개의 동전을 던져서 나온 앞면의 개수가 0인 사건을 A, 1인 사건을 B, 2인 사건을 C, 효린이가 동전을 던져서 나온 앞면의 개수가 1인 사건을 E라 하자.

희철이가 동전을 던져서 나온 앞면의 개수가 0이면 효린이가 동전을 던지는 횟수는 0이므로

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{4}\cdot0=0$$

희철이가 동전을 던져서 나온 앞면의 개수가 1이면 효린이가 동전을 던지는 횟수는 1이므로

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

희철이가 동전을 던져서 나온 앞면의 개수가 2이면 효린이가 동전을 던지는 횟수는 2이므로

$$P(C\cap E)=P(C)P(E|C)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)$$
$$=0+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

18 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$, $C=\{5, 10\}$

ㄱ. $B\cap C=\{5\}$이므로 두 사건 B와 C는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. $P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$이므로

$$P(A)P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

$A\cap B=\{2\}$이므로 $\quad P(A\cap B)=\frac{1}{10}$

$$\therefore P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

ㄷ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$이므로

$$P(A)P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$$

$A\cap C=\{10\}$이므로 $\quad P(A\cap C)=\frac{1}{10}$

$$\therefore P(A\cap C)=P(A)P(C)$$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

19 ① 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$$P(B|A)=P(B),\ P(B|A^C)=P(B)$$
$$\therefore P(B|A)=P(B|A^C)$$

② 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.

③ $A\cap B=\varnothing$이므로 $\quad P(A\cap B)=0$

$$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0$$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이면
$A\cap B=\varnothing$

④ $A\cap B=\varnothing$이므로 $\quad P(A\cap B)=0$

$0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$이므로

$$0<P(A)P(B)<1$$
$$\therefore P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

⑤ $P(A^C|B)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(B)}$

$$=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$=\frac{P(B)-P(A)P(B)}{P(B)}$$
$$=1-P(A)$$

답 ③

다른 풀이 ⑤ 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$$P(A^C|B)=P(A^C)=1-P(A)$$

참고 ② 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$\therefore P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$$
$$=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$
$$=(1-P(A))(1-P(B))$$
$$=P(A^C)P(B^C)$$

따라서 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.

20 $P(A)=\frac{k+45}{170}$, $P(B)=\frac{80}{170}=\frac{8}{17}$,

남학생이 80명, 여학생이 90명이므로 전체 학생 수는
$80+90=170$

$P(A\cap B)=\frac{k}{170}$

두 사건 A, B가 서로 독립이려면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

이어야 하므로 $\quad \frac{k}{170}=\frac{k+45}{170}\cdot\frac{8}{17}$

$$17k=8k+360,\qquad 9k=360$$
$$\therefore k=40$$

답 40

21 표본공간을 S라 하면

$$S=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

이때 $A=\{2, 5, 10\}$이므로 $\quad P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

또 $n(A\cap B)=1$이므로 $\quad P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}P(B)\qquad \therefore P(B)=\frac{1}{3}$$

이때 $P(B)=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$이므로 $\quad n(B)=2$

즉 사건 B는 $n(B)=2$이고, $n(A\cap B)=1$, $n(A^C\cap B)=1$을 만족시켜야 하므로 집합 A의 3개의 원소 중 집합 $A\cap B$의 원소 1개를 택하고, 집합 A^C의 3개의 원소 중 집합 $A^C\cap B$의 원소 1개를 택하면 된다.

$A^C=\{1, 4, 20\}$

따라서 구하는 사건 B의 개수는

$${}_3C_1\cdot{}_3C_1=9$$

답 ②

22 표본공간을 S라 하면

$$S=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$$

이때 $A=\{3, 6, 9, 12\}$이므로 $\quad P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

조건 (가)에서 두 사건 A, B는 서로 독립이고 조건 (나)에서 $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}P(B)\qquad \therefore P(B)=\frac{3}{4}$$

이때 $P(B)=\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$이므로 $\quad n(B)=9$

한편 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$이므로

$n(A\cap B)=3$

즉 사건 B는 $n(B)=9$이고, $n(A\cap B)=3$, $n(A^C\cap B)=6$을 만족시켜야 하므로 집합 A의 4개의 원소 중 집합 $A\cap B$의 원소 3개를 택하고, 집합 A^C의 8개의 원소 중 집합 $A^C\cap B$의 원소 6개를 택하면 된다.

$A^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

따라서 구하는 사건 B의 개수는

${}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_8\mathrm{C}_6=112$ 답 112

23 $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{15}$ 답 ②

24 두 사건 A, B^C가 서로 독립이면 두 사건 A, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A)=\frac{7}{3}k$, $\mathrm{P}(B)=k$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$1=\frac{7}{3}k+k-\frac{7}{3}k^2$, $\quad 7k^2-10k+3=0$

$(7k-3)(k-1)=0$

$\therefore k=\frac{3}{7}$ ($\because 0<k<1$) 답 $\frac{3}{7}$

25 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{16}$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$

$=\frac{17}{16}-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}$

따라서 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$가 최소일 때, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$는 최대이다.

이때 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a>0$, $b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\ge2\sqrt{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$

$=2\cdot\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}$

$\left(\text{단, 등호는 } \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\text{일 때 성립}\right)$

즉 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$의 최댓값은

$\frac{17}{16}-\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$ 답 $\frac{9}{16}$

26 두 상자 A, B에서 검은 구슬을 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

27 전구에 불이 켜지려면 두 스위치 A, B가 모두 닫히거나 스위치 C가 닫혀야 한다.

두 스위치 A, B가 모두 닫히는 사건을 A, 스위치 C가 닫히는 사건을 B라 하면 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)=0.5\times0.4=0.2$, $\mathrm{P}(B)=0.6$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.2\times0.6=0.12$

따라서 전구에 불이 켜질 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=0.2+0.6-0.12$

$=0.68$ 답 ①

28 경욱이가 이기는 경우를 ○, 지는 경우를 ×로 나타내자.

민영이가 지는 경우는 ○, 이기는 경우는 ×이다.

(i) 경욱이가 승자로 결정되는 경우

○×○○이어야 하므로 그 확률은

$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$

경욱이가 이길 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 질 확률은 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

(ii) 민영이가 승자로 결정되는 경우

×○××이어야 하므로 그 확률은

$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{81}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{8}{81}+\frac{2}{81}=\frac{10}{81}$ 답 $\frac{10}{81}$

29 5번의 시행에서 앞면이 뒷면보다 1번 더 많이 나오려면 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$ 답 ③

쌤한마디

주어진 조건을 식으로 나타내면 앞면과 뒷면이 나오는 횟수를 다음과 같이 연립방정식을 이용하여 구할 수 있다.

앞면이 나오는 횟수를 x, 뒷면이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=5$ …… ㉠

이때 앞면이 뒷면보다 1번 더 많이 나오므로

$x=y+1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=3$, $y=2$

따라서 조건을 만족시키려면 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나와야 한다.

30 앞면이 x번, 뒷면이 y번 나온다고 하면 동전을 6번 던지므로

$x+y=6$ ...... ㉠

시곗바늘이 도는 방향으로 움직이는 것을 +, 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 움직이는 것을 −라 하면 꼭짓점 A에서 출발한 점 P가 꼭짓점 B에 있을 때까지 움직인 위치의 변화량은 3이므로

$2x-y=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=3$

따라서 구하는 확률은 동전을 6번 던져서 앞면이 3번, 뒷면이 3번 나올 확률과 같으므로

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$ 답 $\frac{5}{16}$

31 윤석이가 한 문제를 맞힐 확률은 $\frac{3}{5}$

(i) 3문제 중 2문제를 맞힐 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{54}{125}$$

(ii) 3문제를 모두 맞힐 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^0=\frac{27}{125}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{54}{125}+\frac{27}{125}=\frac{81}{125}$$ 답 $\frac{81}{125}$

32 점 P가 색칠한 부분을 지나려면 점 (1, 2) 또는 점 (2, 2)를 지나야 한다.

이때 5 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

5, 6의 2가지

(i) 점 P가 점 (1, 2)를 지날 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

(ii) 점 P가 점 (2, 2)를 지날 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

(iii) 점 P가 두 점 (1, 2), (2, 2)를 모두 지날 확률은

점 (1, 2)에서 x축의 양의 방향으로 1만큼 움직여야 한다.

$${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{4}{27}=\frac{16}{27}$$ 답 ③

도전! 수능 기출

W 31쪽

01 1st 사건 A, B를 정하여 확률을 $P(B|A)$로 나타낸다.

꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있는 사건을 A, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개인 사건을 B라 하면 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개일 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$ ...... ㉠

2nd $P(A)$의 값을 구한다.

모든 경우의 수는

${}_8C_4=70$

꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있는 경우는 3이 적혀 있는 공 2개를 꺼내거나 4가 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우이다.

3이 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우의 수는 3이 적혀 있는 공을 제외한 6개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_2=15$

4가 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우의 수도 마찬가지로 15이고, 3이 적혀 있는 공 2개와 4가 적혀 있는 공 2개를 모두 꺼내는 경우의 수는 1이므로 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있는 경우의 수는

$15+15-1=29$

$\therefore P(A)=\frac{29}{70}$

3rd $P(A\cap B)$의 값을 구한다.

사건 $A\cap B$는 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있고 꺼낸 공 중 검은 공이 2개인 사건이다.

(i) 3이 적혀 있는 공 2개를 꺼내고 검은 공이 2개인 경우
3이 적혀 있는 공 2개를 꺼낸 후 남은 검은 공 3개와 흰 공 3개 중에서 각각 1개씩 꺼내면 되므로 그 경우의 수는

${}_3C_1\cdot{}_3C_1=9$

(ii) 4가 적혀 있는 공 2개를 꺼내고 검은 공이 2개인 경우
4가 적혀 있는 공 2개를 꺼낸 후 남은 검은 공 3개와 흰 공 3개 중에서 각각 1개씩 꺼내면 되므로 그 경우의 수는

${}_3C_1\cdot{}_3C_1=9$

검은 공이 2개이다.

(iii) 3이 적혀 있는 공 2개와 4가 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우의 수는

1

이상에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있고 꺼낸 공 중 검은 공이 2개인 경우의 수는

$9+9-1=17$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{17}{70}$

4th 확률을 구하여 $p+q$의 값을 구한다.

㉠에서

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{17}{70}}{\frac{29}{70}}=\frac{17}{29}$$

따라서 $p=29$, $q=17$이므로

$p+q=46$ 답 46

02 1st 사건 A, B를 정하여 p_1, p_2를 조건부확률로 나타낸다.

임의로 선택한 1명이 수학동아리에 가입한 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면

$$p_1=\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$p_2=\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

2nd 주어진 조건을 표로 나타낸다.

남학생의 60 %와 여학생의 50 %가 수학동아리에 가입하였으므로 남학생 수를 x, 여학생 수를 y라 하면 수학동아리에 가입한 남학생과 여학생 수는 각각

$x\times0.6=0.6x,\ y\times0.5=0.5y$

따라서 수학동아리 가입 여부에 대한 남학생과 여학생 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

	남학생	여학생	합계
가입	$0.6x$	$0.5y$	$0.6x+0.5y$
미가입	$0.4x$	$0.5y$	$0.4x+0.5y$
합계	x	y	320

3rd $p_1=2p_2$임을 이용하여 x, y에 대한 식을 구한다.

위의 표에서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{0.6x+0.5y}{320},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{0.6x}{320},$$
$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{0.5y}{320}$$

이므로 ㉠에서

$$p_1=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{0.6x}{320}}{\frac{0.6x+0.5y}{320}}=\frac{0.6x}{0.6x+0.5y},$$
$$p_2=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{0.5y}{320}}{\frac{0.6x+0.5y}{320}}=\frac{0.5y}{0.6x+0.5y}$$

$p_1=2p_2$이므로

$$\frac{0.6x}{0.6x+0.5y}=2\times\frac{0.5y}{0.6x+0.5y}$$
$$\therefore 0.6x=y \quad \cdots\cdots ㉡$$

4th 남학생 수를 구한다.

전체 학생 수가 320이므로 $x+y=320$

㉡을 $x+y=320$에 대입하면

$x+0.6x=320,\quad 1.6x=320$

$\therefore x=200$

즉 이 학교의 남학생 수는 200이다. 답 ④

03 1st 1회의 시행에서 2가 나올 확률을 구한다.

정사면체 모양의 상자를 3번 반복하여 던지므로 주어진 시행은 독립시행이다.

이 상자를 한 번 던져 2가 나올 확률은

$\frac{1}{4}$

2nd $i^{|m-n|}=-i$가 되도록 하는 m, n의 값을 구한다.

$i^{|m-n|}=-i$에서

$|m-n|=4k-1\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ⋯⋯ ㉠

이때 $0\le m\le3$, $0\le n\le3$이므로

$0\le|m-n|\le3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $|m-n|=3$

즉 $m-n=-3$ 또는 $m-n=3$이고, $m+n=3$이므로

$m=0,\ n=3$ 또는 $m=3,\ n=0$

3rd 주어진 사건의 확률을 구한다.

(i) $m=0$, $n=3$인 경우

상자를 3번 던져 2가 0번, 2가 아닌 숫자가 3번 나오는 경우이므로 그 확률은

$${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$

(ii) $m=3$, $n=0$인 경우

상자를 3번 던져 2가 3번, 2가 아닌 숫자가 0번 나오는 경우이므로 그 확률은

$${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{64}$$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{27}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{16}$$ 답 ②

04 1st 앞면이 3번 나올 때의 확률을 구한다.

(i) 앞면이 3번 나오는 경우

앞면이 3번 나올 확률은

$${}_7\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128}$$

조건 (나)를 만족시키려면 앞면이 3번 나오는 경우에서 앞면이 연속해서 나오지 않는 경우를 제외해야 한다. 이때 앞면이 연속해서 나오지 않으려면 뒷면 4개를 일렬로 나열하고 그 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 앞면 3개를 나열하면 되므로 그 확률은

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{64}$$

따라서 조건을 모두 만족시킬 확률은

$$\frac{35}{128}-\frac{5}{64}=\frac{25}{128}$$

2nd 앞면이 4번 나올 때의 확률을 구한다.

(ii) 앞면이 4번 나오는 경우

앞면이 4번 나올 확률은

$${}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{35}{128}$$

조건 (나)를 만족시키려면 앞면이 4번 나오는 경우에서 앞면이 연속해서 나오지 않는 경우를 제외해야 한다. 이때 앞면이 연속해서 나오지 않으려면 앞면, 뒷면, 앞면, 뒷면, 앞면, 뒷면, 앞면의 순서로 나오면 되므로 그 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{128}$$

따라서 조건을 모두 만족시킬 확률은

$$\frac{35}{128}-\frac{1}{128}=\frac{17}{64}$$

3rd 앞면이 5번 또는 6번 또는 7번 나올 때의 확률을 구한다.

(iii) 앞면이 5번 또는 6번 또는 7번 나오는 경우

앞면이 연속해서 나오는 경우가 항상 있으므로 그 확률은

Q BOX

여학생인 사건은 남학생인 사건의 여사건이다.

'앞, 앞, 앞, 뒤, 뒤, 뒤, 뒤'를 나열

∨뒤∨뒤∨뒤∨뒤∨

'앞, 앞, 앞, 앞, 뒤, 뒤, 뒤'를 나열

$0\le m\le3$, $0\le n\le3$에서 $-3\le m-n\le3$이므로 $0\le|m-n|\le3$

W 04 조건부확률

$$ {}_7C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_7C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_7C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^0 $$

$$ =\frac{21}{128}+\frac{7}{128}+\frac{1}{128}=\frac{29}{128} $$

4th 주어진 조건을 만족시킬 확률을 구한다.

이상에서 구하는 확률은

$$ \frac{25}{128}+\frac{17}{64}+\frac{29}{128}=\frac{11}{16} $$ 답 ①

다른 풀이 (i) 앞면이 3번 미만 나오는 경우

앞면이 0번 또는 1번 또는 2번 나올 확률은

$$ {}_7C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_7C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^5 $$

$$ =\frac{1}{128}+\frac{7}{128}+\frac{21}{128}=\frac{29}{128} $$

(ii) 앞면이 3번 나오면서 연속해서 나오지 않는 경우

뒷면 4개를 일렬로 나열하고 그 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 앞면 3개를 나열하면 되므로 그 확률은

$$ {}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{64} $$

(iii) 앞면이 4번 나오면서 연속해서 나오지 않는 경우

앞면, 뒷면, 앞면, 뒷면, 앞면, 뒷면, 앞면의 순서로 나오면 되므로 그 확률은

$$ \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{128} $$

이상에서 구하는 확률은

$$ 1-\left(\frac{29}{128}+\frac{5}{64}+\frac{1}{128}\right)=\frac{11}{16} $$

Q BOX

05 확률변수와 확률분포

W 32쪽

01 확률의 총합은 1이므로

$\frac{a}{2}+a^2+\frac{1}{2}=1,\quad 2a^2+a-1=0$

$(a+1)(2a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

이때 $0\le P(X=x)\le 1$이므로

$a=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

$a=-1$이면
$P(X=0)=-\frac{1}{2}<0$

02 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$
$+P(X=5)=1$

$\frac{k}{6}+\frac{k}{6}\cdot 2+\frac{k}{6}\cdot 3+k\left(1-\frac{4}{6}\right)+k\left(1-\frac{5}{6}\right)=1$

$\frac{3}{2}k=1\quad \therefore k=\frac{2}{3}$

따라서 $P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x & (x=1,\ 2,\ 3)\\ \frac{2}{3}\left(1-\frac{x}{6}\right) & (x=4,\ 5)\end{cases}$ 이므로

$P(X=3$ 또는 $X=4)=P(X=3)+P(X=4)$

$=\frac{1}{9}\cdot 3+\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{5}{9}$ 답 ③

03 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=9)=1$

$P(X=1)+2P(X=1)+\cdots+9P(X=1)=1$

$45P(X=1)=1\quad \therefore P(X=1)=\frac{1}{45}$

따라서 $P(X=k)=\frac{k}{45}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9)$이므로

$P(5\le X\le 8)$

$=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)$

$=\frac{5}{45}+\frac{6}{45}+\frac{7}{45}+\frac{8}{45}=\frac{26}{45}$ 답 $\frac{26}{45}$

$5\le X\le 8$을 만족시키는 X의 값은 5, 6, 7, 8이다.

04 확률의 총합은 1이므로

$a+b+3a+2b+3b=1$

$\therefore 4a+6b=1$ …… ㉠

$2P(X=1)=P(X=5)$에서

$2a=3b\quad \therefore a=\frac{3}{2}b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{8},\ b=\frac{1}{12}$

㉡을 ㉠에 대입하면
$4\cdot\frac{3}{2}b+6b=1$
$12b=1\quad \therefore b=\frac{1}{12}$
$b=\frac{1}{12}$을 ㉡에 대입하면
$a=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{8}$

$\therefore P(2\le X\le 4)$

$=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$=b+3a+2b=3a+3b$

$=3\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

05 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_5C_1}{{}_8C_2}=\frac{15}{28},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_5C_0}{{}_8C_2}=\frac{3}{28}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

$\therefore P(X\le1)=P(X=0)+P(X=1)$

$=\frac{5}{14}+\frac{15}{28}=\frac{25}{28}$ 답 ⑤

$P(X\le1)$
$=1-P(X=2)$
$=1-\frac{3}{28}=\frac{25}{28}$
와 같이 구할 수도 있다.

06 $X^2-5X+4<0$에서 $(X-1)(X-4)<0$

$\therefore 1<X<4$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이므로

$P(X^2-5X+4<0)$

$=P(1<X<4)$

$=P(X=2)+P(X=3)$ ...... ㉠

뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여

$X=2$인 경우는 (1, 3), (2, 4), (3, 5)의 3가지

$X=3$인 경우는 (1, 4), (2, 5)의 2가지

이므로 그 확률은 각각

$$P(X=2)=\frac{3}{10},\ P(X=3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

5장의 카드 중에서 임의로 2장의 카드를 동시에 뽑는 경우의 수는
${}_5C_2=10$

따라서 ㉠에서

$$P(X^2-5X+4<0)=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$$ 답 ④

참고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

07 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{30},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_7C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{2},$$

$$P(X=4)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_7C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{6}$$

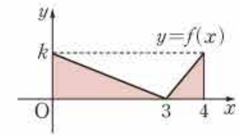
따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

이때 $P(X=3)+P(X=4)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$이므로

$P(X\ge3)=\frac{2}{3}$ $\therefore a=3$ 답 3

08 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot3\cdot k+\frac{1}{2}\cdot1\cdot k=1$ $\therefore k=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

09 ① $\frac{4}{3}<x\le2$에서 $f(x)<0$이다.

② $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니다.

넓이는 $\frac{\pi}{2}$이다.

③ $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니다.

넓이는 $\frac{3}{2}$이다.

④ $0\le x\le1$에서 $f(x)<0$이다.

⑤ $0\le x\le2$에서 $f(x)\ge0$이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=1$ 답 ⑤

10 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot6\cdot k=1$ $\therefore k=\frac{1}{3}$

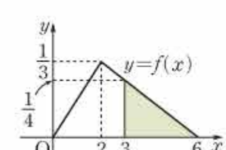
$2\le x\le6$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(2, \frac{1}{3}\right)$, $(6, 0)$을 지나는 직선이므로 그 직선의 방정식은

$$y=\frac{0-\frac{1}{3}}{6-2}(x-6),\quad y=-\frac{1}{12}x+\frac{1}{2}$$

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은
$y-y_1$
$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$
(단, $x_1\ne x_2$)

$\therefore f(x)=-\frac{1}{12}x+\frac{1}{2}\ (2\le x\le6)$

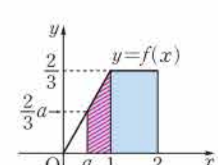
따라서 $f(3)=\frac{1}{4}$이고 $P(X\ge3)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$P(X\ge3)=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{8}$ 답 ③

11 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$P(1\le X\le2)=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$P(a\le X\le2)=\frac{11}{12}$에서

$0\le a<1$이고

$P(a\le X\le1)=P(a\le X\le2)-P(1\le X\le2)$

$=\frac{11}{12}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$

이때 $\mathrm{P}(a \le X \le 1)$은 앞의 그림의 빗금 친 부분의 넓이와 같으므로

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}\right)\cdot(1-a)=\frac{1}{4}$$

$$1-a^2=\frac{3}{4}, \qquad a^2=\frac{1}{4}$$

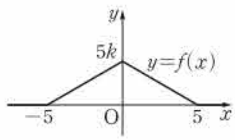
$$\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because 0\le a<1)$$

답 $\frac{1}{2}$

Q BOX

(사다리꼴의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times\{($윗변의 길이$)$
$+($아랫변의 길이$)\}$
$\times($높이$)$

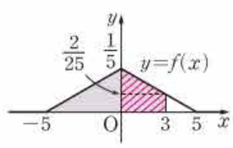
12 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{25}$$

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에서

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(X\le 3)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(X\le 3)\\&=1-\mathrm{P}(3\le X\le 5)\\&=1-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2}{25}=\frac{23}{25}\end{aligned}$$

또 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(0\le X\le 3)$은 위의 그림의 빗금 친 부분의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(0\le X\le 3)\\&=\mathrm{P}(0\le X\le 5)-\mathrm{P}(3\le X\le 5)\\&=\frac{1}{2}-\frac{2}{25}=\frac{21}{50}\end{aligned}$$

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(0\le X\le 5)$
$=\frac{1}{2}\mathrm{P}(-5\le X\le 5)$
$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{21}{50}}{\frac{23}{25}}=\frac{21}{46}$$

답 $\frac{21}{46}$

다른 풀이 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(X\le 3)$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{25}\right)\cdot 3\\&=\frac{1}{2}+\frac{21}{50}=\frac{23}{25}\end{aligned}$$

13 확률의 총합은 1이므로

$$k+\frac{1}{8}+k+\frac{1}{8}=1, \qquad 2k=\frac{3}{4}$$

$$\therefore k=\frac{3}{8}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{4},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{3}{8}+4^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{25}{4}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{25}{4}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{19}{16}\end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{19}{16}}=\frac{\sqrt{19}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{19}}{4}$

14 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2}+a+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{6}$이므로

$$0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot a+2\cdot b=\frac{5}{6}$$

$$\therefore a+2b=\frac{5}{6} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}$

㉡$-$㉠을 하면 $b=\frac{1}{3}$
$b=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면
$a+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$
$\therefore a=\frac{1}{6}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{3}{2}-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{29}{36}\end{aligned}$$

답 $\frac{29}{36}$

15 확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{1}{6}+b+\frac{1}{4}=1$$

$$\therefore a+b=\frac{7}{12} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=(-1)\cdot a+0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot b+2\cdot\frac{1}{4}\\&=-a+b+\frac{1}{2}=-a+\left(\frac{7}{12}-a\right)+\frac{1}{2}\ (\because ㉠)\\&=-2a+\frac{13}{12},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=(-1)^2\cdot a+0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot b+2^2\cdot\frac{1}{4}\\&=a+b+1=\frac{7}{12}+1\ (\because ㉠)\\&=\frac{19}{12}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{19}{12}-\left(-2a+\frac{13}{12}\right)^2\\&=-4\left(a-\frac{13}{24}\right)^2+\frac{19}{12}\ \left(0\le a\le\frac{7}{12}\right)\end{aligned}$$

$b=\frac{7}{12}-a\ge 0$에서
$a\le\frac{7}{12}$

따라서 $\mathrm{V}(X)$는 $a=\frac{13}{24}$일 때 최댓값 $\frac{19}{12}$를 갖는다.

답 ④

16 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{5},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5},$$

$$P(X=3)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5},$$
$$P(X=4)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5},$$
$$P(X=5)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{5}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{1}{5}=3$$

답 3

17 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_0}{2^4}=\frac{1}{16},\ P(X=1)=\frac{{}_4C_1}{2^4}=\frac{1}{4},$$
$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2}{2^4}=\frac{3}{8},\ P(X=3)=\frac{{}_4C_3}{2^4}=\frac{1}{4},$$
$$P(X=4)=\frac{{}_4C_4}{2^4}=\frac{1}{16}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{16}=2,$$
$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{16}+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{16}$$
$$=5$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{1}=1$$

답 ②

18 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 -1, 0, 1이고, 그 확률은 각각

$$P(X=-1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{2}{5},$$
$$P(X=0)=\frac{{}_1C_1\cdot{}_4C_1}{{}_5C_2}=\frac{2}{5},$$
$$P(X=1)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{5}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=-1\cdot\frac{2}{5}+0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{1}{5}=-\frac{1}{5},$$
$$E(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{2}{5}+0^2\cdot\frac{2}{5}+1^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

Q BOX

집합 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$에 대하여 집합 A의 부분집합의 개수는 2^n

자연수 n에 대하여 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

자연수 n에 대하여 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

공에 적힌 두 수가 모두 -1이거나 1일 때의 확률

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{3}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$$

답 $\frac{14}{25}$

19 게임을 한 번 해서 받을 수 있는 상금을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 700, 2100, 2450이고, 그 확률은 각각

$$P(X=700)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_3C_0}{{}_7C_2}=\frac{2}{7},$$
$$P(X=2100)=\frac{{}_4C_0\cdot{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7},$$
$$P(X=2450)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	700	2100	2450	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=700\cdot\frac{2}{7}+2100\cdot\frac{1}{7}+2450\cdot\frac{4}{7}=1900$$

이므로 구하는 기댓값은 1900원이다.

답 ④

20 전체 카드의 장수는

$$1+2+3+\cdots+10=55$$

한 장의 카드를 꺼낼 때 나오는 숫자를 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	$\cdots$	10	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{3}{55}$	$\cdots$	$\frac{10}{55}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{55}+2\cdot\frac{2}{55}+3\cdot\frac{3}{55}+\cdots+10\cdot\frac{10}{55}$$
$$=\frac{1}{55}(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$$
$$=\frac{1}{55}\cdot 385=7$$

이므로 구하는 기댓값은 7이다.

답 7

21 한 개의 제비를 뽑아서 받을 수 있는 상금을 X원이라 하자. 전체 제비의 개수를 n이라 할 때, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 10000, 50000이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{n-6}{n},$$
$$P(X=10000)=\frac{5}{n},$$
$$P(X=50000)=\frac{1}{n}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10000	50000	합계
$P(X=x)$	$\frac{n-6}{n}$	$\frac{5}{n}$	$\frac{1}{n}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{n-6}{n}+10000\cdot\frac{5}{n}+50000\cdot\frac{1}{n}=50$$

$\therefore n=2000$

즉 전체 제비의 개수는 2000이다. 답 2000

22 $\mathrm{E}(4X+3)=15$에서 $4\mathrm{E}(X)+3=15$

$4\mathrm{E}(X)=12 \quad \therefore \mathrm{E}(X)=3$

$\mathrm{V}(4X)=16$에서 $4^2\mathrm{V}(X)=16$

$\therefore \mathrm{V}(X)=1$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$1=\mathrm{E}(X^2)-3^2 \quad \therefore \mathrm{E}(X^2)=10$ 답 ②

23 $\mathrm{E}(X)=840$, $\sigma(X)=60$이므로

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{7}{6}X+190\right)=\frac{7}{6}\mathrm{E}(X)+190$$
$$=\frac{7}{6}\cdot840+190=1170$$
$$\sigma(Y)=\sigma\left(\frac{7}{6}X+190\right)=\frac{7}{6}\sigma(X)$$
$$=\frac{7}{6}\cdot60=70$$

따라서 확률변수 Y의 평균은 1170원, 표준편차는 70원이다.

답 평균: 1170원, 표준편차: 70원

24 $\mathrm{E}(X)=a$, $\mathrm{E}(X^2)=a+4$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=a+4-a^2$

$$\therefore \mathrm{V}(-X+3)=(-1)^2\mathrm{V}(X)=a+4-a^2$$
$$=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{4}$$

따라서 $\mathrm{V}(-X+3)$은 $a=\frac{1}{2}$일 때 최댓값이 $\frac{17}{4}$이므로 $\sigma(-X+3)$의 최댓값은

$$\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$ 답 $\frac{\sqrt{17}}{2}$

$\sigma(-X+3)$
$=\sqrt{\mathrm{V}(-X+3)}$
이므로 $\mathrm{V}(-X+3)$이 최대일 때 $\sigma(-X+3)$도 최대이다.

25 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$
$+\mathrm{P}(X=5)=1$

$$\frac{2}{5}k+\frac{3}{5}k+\frac{4}{5}k+k+\frac{6}{5}k=1$$

$4k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$

$$\therefore \mathrm{P}(X=x)=\frac{x+1}{20}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{3}{20}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{3}{10}$$
$$=\frac{7}{2}$$

이므로

$$\mathrm{E}(2X-3)=2\mathrm{E}(X)-3=2\cdot\frac{7}{2}-3=4$$ 답 4

26 (1) 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+a+2a=1$$

$3a=\frac{3}{8} \quad \therefore a=\frac{1}{8}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{8}+4^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{13}{2}$$

(2) $\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{13}{2}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{23}{16}$$

이때 $a=\frac{1}{8}$이므로

$$\mathrm{V}\left(\frac{1}{2a}X-a\right)=\mathrm{V}\left(4X-\frac{1}{8}\right)=4^2\mathrm{V}(X)$$
$$=16\cdot\frac{23}{16}=23$$

$a=\frac{1}{8}$이므로 $\frac{1}{a}=8$
$\therefore \frac{1}{2a}=4$

답 (1) $\frac{13}{2}$ (2) 23

27 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{6},$$
$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{3}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{35}{36}$$

$\mathrm{E}(Y)=7$, 즉 $\mathrm{E}(aX+b)=7$에서

$a\mathrm{E}(X)+b=7$

$\therefore \frac{5}{6}a+b=7$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(Y)=35$, 즉 $\mathrm{V}(aX+b)=35$에서

$a^2\mathrm{V}(X)=35$, $\frac{35}{36}a^2=35$

$a^2=36 \quad \therefore a=6\ (\because a>0)$

$a=6$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $b=2$

$\therefore a-b=4$ 답 ④

28 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_5\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{1}{21},$$
$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{5}{14},$$
$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{10}{21},$$
$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_0}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{5}{42}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{21}+1\cdot\frac{5}{14}+2\cdot\frac{10}{21}+3\cdot\frac{5}{42}=\frac{5}{3},$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{21}+1^2\cdot\frac{5}{14}+2^2\cdot\frac{10}{21}+3^2\cdot\frac{5}{42}=\frac{10}{3}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$\therefore V(3X+1)=3^2V(X)=9\cdot\frac{5}{9}=5$$ 답 ⑤

29 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

$X=0$이려면 $\frac{D}{4}=(a+b)(a-b)<0$이어야 하므로

$$a-b<0\ (\because a+b>0)\qquad \therefore a<b$$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)

의 15개이므로

$$P(X=0)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

$X=1$이려면 $\frac{D}{4}=(a+b)(a-b)=0$이어야 하므로

$$a-b=0\ (\because a+b>0)\qquad \therefore a=b$$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)

의 6개이므로

$$P(X=1)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$X=2$이려면 $\frac{D}{4}=(a+b)(a-b)>0$이어야 하므로

$$a-b>0\ (\because a+b>0)\qquad \therefore a>b$$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)

의 15개이므로

$$P(X=2)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{5}{12}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{5}{12}=1$$

$$\therefore E(4X-2)=4E(X)-2=4\cdot1-2=2$$ 답 ①

Q BOX

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이면 서로 다른 두 실근, $D=0$이면 중근, $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

a, b는 주사위의 눈의 수이므로
$a+b>0$

30 $X=1$이려면 맨 앞에 남학생 2명 중에서 1명을 세우고, 그 뒤에 나머지 4명을 세우면 되므로

$$P(X=1)=\frac{{}_2P_1\cdot4!}{5!}=\frac{2}{5}$$

$X=2$이려면 맨 앞에 여학생 3명 중에서 1명을, 그 뒤에 남학생 2명 중에서 1명을 세우고, 나머지 3명을 세우면 되므로

$$P(X=2)=\frac{{}_3P_1\cdot{}_2P_1\cdot3!}{5!}=\frac{3}{10}$$

$X=3$이려면 맨 앞과 그 뒤에 여학생 3명 중에서 2명을, 그 뒤에 남학생 2명 중에서 1명을 세우고, 나머지 2명을 세우면 되므로

$$P(X=3)=\frac{{}_3P_2\cdot{}_2P_1\cdot2!}{5!}=\frac{1}{5}$$

$X=4$이려면 여학생 3명을 세우고, 그 뒤에 남학생 2명을 세우면 되므로

$$P(X=4)=\frac{3!\cdot2!}{5!}=\frac{1}{10}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{10}=2,$$

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{10}=5$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=1$이므로

$$\sigma(7X+4)=7\sigma(X)=7$$ 답 7

31 정육각형의 한 변의 길이를 X라 하면 둘레의 길이는 $6X$이므로

$$E(6X)=24,\ V(6X)=(6\sqrt{2})^2=72$$

$$6E(X)=24,\ 6^2V(X)=72$$

$$\therefore E(X)=4,\ V(X)=2$$

이때 한 변의 길이가 X인 정육각형의 넓이는

$$6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot X^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}X^2$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=2+4^2=18$$

따라서 구하는 정육각형의 넓이의 평균은

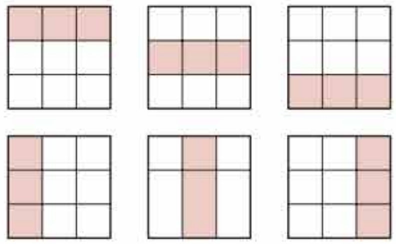
$$E\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}X^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}E(X^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot18=27\sqrt{3}$$ 답 $27\sqrt{3}$

한 변의 길이가 X인 정삼각형 6개의 넓이의 합과 같다.

32 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개 중에서 3개를 칠하는 모든 경우의 수는

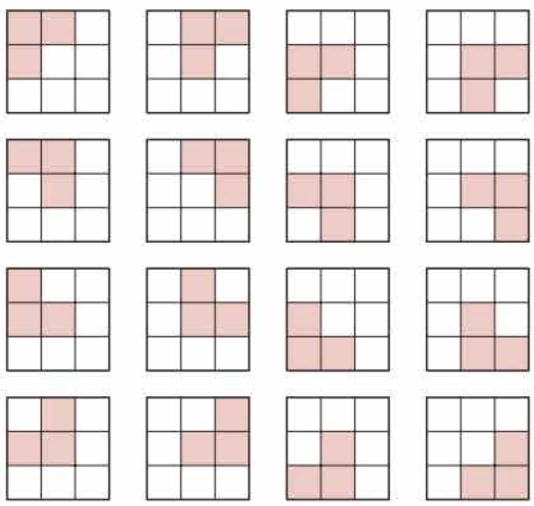
$${}_9C_3=84$$

[유형 1]인 경우는



의 6가지이므로 $\mathrm{P}(X=-7)=\frac{1}{14}$

[유형 2]인 경우는



의 16가지이므로 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{4}{21}$

[유형 3]인 경우의 수는

$84-(\underbrace{6+16}_{})=62$

[유형 1] 또는 [유형 2]인 경우의 수

이므로 $\mathrm{P}(X=7)=\frac{31}{42}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-7	0	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{31}{42}$	1

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=-7\cdot\frac{1}{14}+0\cdot\frac{4}{21}+7\cdot\frac{31}{42}=\frac{14}{3},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=(-7)^2\cdot\frac{1}{14}+0^2\cdot\frac{4}{21}+7^2\cdot\frac{31}{42}=\frac{119}{3}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{119}{3}-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{161}{9}$$
$$\therefore \mathrm{V}(3X-4)=3^2\mathrm{V}(X)$$
$$=9\cdot\frac{161}{9}=161$$

답 161

33 부채꼴 AOB의 넓이는

$\underline{\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}}$

반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$

6등분된 부채꼴 1개의 넓이는

$\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{24}$

(i) 점 P_1 또는 점 P_5를 택할 때,

X는 6등분된 부채꼴 5개의 넓이의 합에서 6등분된 부채꼴 1개의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$X=5\cdot\frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{6}$$

(ii) 점 P_2 또는 점 P_4를 택할 때,

X는 6등분된 부채꼴 4개의 넓이의 합에서 6등분된 부채꼴 2개의 넓이의 합을 뺀 값과 같으므로

$$X=4\cdot\frac{\pi}{24}-2\cdot\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$$

(iii) 점 P_3을 택할 때,

X는 6등분된 부채꼴 3개의 넓이의 합에서 6등분된 부채꼴 3개의 넓이의 합을 뺀 값과 같으므로

$\underline{X=0}$

(부채꼴 POA의 넓이)
=(부채꼴 POB의 넓이)

이상에서 X가 가질 수 있는 값은 0, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{6}$이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}\left(X=\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2}{5},$$
$$\mathrm{P}\left(X=\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{5}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{5}+\frac{\pi}{12}\cdot\frac{2}{5}+\frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{\pi}{10}$$
$$\therefore \mathrm{E}(10X)=10\mathrm{E}(X)=10\cdot\frac{\pi}{10}=\pi$$

답 π

쌤한마디

한 원에서 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하고

$$\overset{\frown}{\mathrm{AP_1}}=\overset{\frown}{\mathrm{P_1P_2}}=\overset{\frown}{\mathrm{P_2P_3}}=\overset{\frown}{\mathrm{P_3P_4}}=\overset{\frown}{\mathrm{P_4P_5}}=\overset{\frown}{\mathrm{P_5B}}$$

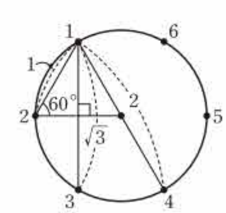
이므로

$$\angle\mathrm{AOP_1}=\angle\mathrm{P_1OP_2}=\angle\mathrm{P_2OP_3}=\angle\mathrm{P_3OP_4}$$
$$=\angle\mathrm{P_4OP_5}=\angle\mathrm{P_5OB}$$

임을 알 수 있다. 이때 부채꼴의 넓이는 중심각의 크기에 정비례하므로 6개의 부채꼴 $\mathrm{AOP_1}$, $\mathrm{P_1OP_2}$, $\mathrm{P_2OP_3}$, $\mathrm{P_3OP_4}$, $\mathrm{P_4OP_5}$, $\mathrm{P_5OB}$의 넓이는 모두 같다.

34 오른쪽 그림에서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, $\underline{1, \sqrt{3}}$, 2이다.

한 변의 길이가 1인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 1, 3에 해당하는 두 점 사이의 거리는 $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$



주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 순서대로 a, b라 하고, 이를 순서쌍 (a, b)로 나타내어 확률을 구하면 다음과 같다.

(i) $X=0$인 경우는

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)

의 6가지이므로 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6}$

(ii) $X=1$인 경우는

$(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 5)$, $(1, 6)$

의 12가지이므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}$

(iii) $X=\sqrt{3}$인 경우는

$(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 1)$, $(6, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$, $(6, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 6)$

의 12가지이므로 $\mathrm{P}(X=\sqrt{3})=\frac{1}{3}$

(iv) $X=2$인 경우는

$(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$

의 6가지이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{6}$

이상에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	$\sqrt{3}$	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{2+\sqrt{3}}{3},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{1}{3}+(\sqrt{3})^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{6}=2$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2-\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{11-4\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore \mathrm{V}(3X)=3^2\mathrm{V}(X)=9\cdot\frac{11-4\sqrt{3}}{9}=11-4\sqrt{3}$$

답 ⑤

도전! 수능 기출

Ⓦ 38쪽

01 1st (가)에 알맞은 식을 구한다.

자연수 k $(4\le k\le n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수 ${}_{k-1}\mathrm{C}_3$을 전체 경우의 수 ${}_n\mathrm{C}_4$로 나누는 것이므로

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\boxed{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}}{{}_n\mathrm{C}_4}$$

2nd (나)에 알맞은 식을 구한다.

자연수 r $(1\le r\le k)$에 대하여

$${}_k\mathrm{C}_r=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

이므로 $r=4$를 대입하면

$${}_k\mathrm{C}_4=\frac{k}{4}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_3$$

$$\therefore k\times\boxed{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}=4\times\boxed{{}_k\mathrm{C}_4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

3rd (다)에 알맞은 수를 구한다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=4}^{n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$
$$=\sum_{k=4}^{n}\left(k\times\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_4}\right)$$
$$=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}(k\times\boxed{{}_{k-1}\mathrm{C}_3})$$
$$=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}(4\times{}_k\mathrm{C}_4)\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\boxed{{}_k\mathrm{C}_4}$$

Q BOX: ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_r$

$\sum_{k=4}^{n}\boxed{{}_k\mathrm{C}_4}={}_{n+1}\mathrm{C}_5$이므로

$$\mathrm{E}(X)=\frac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}{}_k\mathrm{C}_4$$
$$=\frac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\times{}_{n+1}\mathrm{C}_5$$
$$=4\times\frac{\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5\times4\times3\times2\times1}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}}$$
$$=4\times\frac{n+1}{5}$$
$$=(n+1)\times\boxed{\frac{4}{5}}$$

4th $a\times f(6)\times g(5)$의 값을 구한다.

따라서 $f(k)={}_{k-1}\mathrm{C}_3$, $g(k)={}_k\mathrm{C}_4$, $a=\frac{4}{5}$이므로

$$a\times f(6)\times g(5)=\frac{4}{5}\times{}_5\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_4$$
$$=\frac{4}{5}\times10\times5=40$$

답 ①

참고 $\mathrm{P}(X=k)=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_4}$이고

$$\frac{k\times{}_{k-1}\mathrm{C}_3}{4}=\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4\times3\times2\times1}={}_k\mathrm{C}_4$$

이므로

$$k\times{}_{k-1}\mathrm{C}_3=4\times{}_k\mathrm{C}_4$$

임을 이용할 수 있다.

또 ${}_k\mathrm{C}_r=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$에서 k에 $k-1$, r에 3을 대입하면

$${}_{k-1}\mathrm{C}_3=\frac{k-1}{3}\times{}_{k-2}\mathrm{C}_2$$

이므로 양변에 k를 곱하면

$$k\times{}_{k-1}\mathrm{C}_3=k\times\frac{k-1}{3}\times{}_{k-2}\mathrm{C}_2$$
$$=4\times\frac{k(k-1)}{4\times3}\times\frac{(k-2)(k-3)}{2\times1}$$
$$=4\times\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4\times3\times2\times1}$$
$$=4\times{}_k\mathrm{C}_4$$

임을 이용할 수도 있다.

02 1st 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 구한다.

5개의 서랍 중 임의로 2개를 배정할 때, 서랍에 적혀 있는 자연수 중 작은 수로 가능한 것은 1, 2, 3, 4이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

2nd 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

5개의 서랍 중 임의로 2개를 배정하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_2=10$$

(i) $X=1$인 경우

1이 적혀 있는 서랍과 1보다 큰 자연수가 적혀 있는 서랍을 배정해야 하므로 4가지이다.

2, 3, 4, 5

$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{5}$

(ii) $X=2$인 경우

2가 적혀 있는 서랍과 2보다 큰 자연수가 적혀 있는 서랍을 배정해야 하므로 3가지이다.

3, 4, 5

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{10}$

(iii) $X=3$인 경우

3이 적혀 있는 서랍과 3보다 큰 자연수가 적혀 있는 서랍을 배정해야 하므로 2가지이다.

4, 5

$\therefore \mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{5}$

(iv) $X=4$인 경우

4가 적혀 있는 서랍과 4보다 큰 자연수가 적혀 있는 서랍을 배정해야 하므로 1가지이다.

5

$\therefore \mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{10}$

이상에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

3rd $\mathrm{E}(10X)$의 값을 구한다.

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{10}=2$이므로

$\mathrm{E}(10X)=10\mathrm{E}(X)=10\cdot 2=20$ 답 20

03 1st 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 구한다.

a, b의 값으로 가능한 것은 각각 1, 2, 3, 4이므로 X는 $a=1$, $b=4$일 때 최솟값 -3, $a=4$, $b=1$일 때 최댓값 3을 갖는다.

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3이다.

2nd 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

a, b의 값을 정하는 모든 경우의 수는

$4\cdot 4=16$

(i) $X=-3$인 경우는 $(1, 4)$의 1가지이므로

$\mathrm{P}(X=-3)=\frac{1}{16}$

(ii) $X=-2$인 경우는 $(1, 3)$, $(2, 4)$의 2가지이므로

$\mathrm{P}(X=-2)=\frac{1}{8}$

(iii) $X=-1$인 경우는 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=-1)=\frac{3}{16}$

(iv) $X=0$인 경우는 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$의 4가지이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}$

(v) $X=1$인 경우는 $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{16}$

(vi) $X=2$인 경우는 $(3, 1)$, $(4, 2)$의 2가지이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{8}$

(vii) $X=3$인 경우는 $(4, 1)$의 1가지이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{16}$

이상에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

3rd $\mathrm{V}(X)$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=-3\cdot\frac{1}{16}+(-2)\cdot\frac{1}{8}+(-1)\cdot\frac{3}{16}+0\cdot\frac{1}{4}\\&\quad+1\cdot\frac{3}{16}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{16}\\&=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=(-3)^2\cdot\frac{1}{16}+(-2)^2\cdot\frac{1}{8}+(-1)^2\cdot\frac{3}{16}\\&\quad+0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{3}{16}+2^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{1}{16}\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{5}{2}-0^2=\frac{5}{2}$

4th $\mathrm{V}(Y)$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y)&=\mathrm{V}(2X+1)=2^2\mathrm{V}(X)\\&=4\cdot\frac{5}{2}=10\end{aligned}$$

답 10

쌤한마디

$X=k$인 경우가 (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\cdots$, (a_n, b_n)의 n가지이면

$a_1-b_1=k$, $a_2-b_2=k$, $\cdots$, $a_n-b_n=k$

에서 각각

$b_1-a_1=-k$, $b_2-a_2=-k$, $\cdots$, $b_n-a_n=-k$

가 성립하므로 $X=-k$인 경우도 (b_1, a_1), (b_2, a_2), $\cdots$, (b_n, a_n)의 n가지이다.

따라서 $X=1$, 2, 3인 경우의 수를 직접 구하지 않고 각각이 $X=-1$, -2, -3인 경우의 수와 같음을 이용할 수도 있다.

06 이항분포와 정규분포

W 39쪽

01 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x}$$

$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$$

$$\therefore P(X\ge4)=P(X=4)+P(X=5)$$
$$={}_5C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0$$
$$=\frac{80}{243}+\frac{32}{243}$$
$$=\frac{112}{243}$$

답 $\frac{112}{243}$

02 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_6C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{6-x}$$

$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

$kP(X=2)=P(X=4)$에서

$$k\cdot{}_6C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^4={}_6C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$k\cdot\frac{15\cdot3^2}{4^6}=\frac{15\cdot3^4}{4^6}\qquad\therefore k=9$$

답 ③

03 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_7C_xp^x(1-p)^{7-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$$

이므로

$$P(X=7)={}_7C_7p^7(1-p)^0=p^7$$

확률변수 Y의 확률질량함수는

$$P(Y=y)={}_9C_y(2p)^y(1-2p)^{9-y}$$

$$(y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$$

이므로

$$P(Y=7)={}_9C_7(2p)^7(1-2p)^2$$
$$=36\cdot2^7\cdot p^7(1-2p)^2$$

$72P(X=7)=P(Y=7)$에서

$$72p^7=36\cdot2^7\cdot p^7(1-2p)^2,\qquad(1-2p)^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$1-2p=\frac{1}{8}$ 또는 $1-2p=-\frac{1}{8}$

$2p=\frac{7}{8}$ 또는 $2p=\frac{9}{8}$

$\therefore p=\frac{7}{16}$ 또는 $p=\frac{9}{16}$

그런데 $p<\frac{1}{2}$이므로 $\quad p=\frac{7}{16}$

답 $\frac{7}{16}$

04 맞힌 문제의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

> 확률이 80 %이므로 0.8로 계산할 수도 있지만 보기가 분수 꼴로 주어졌으므로 $\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$임을 이용한다.

$$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{10-x}$$

$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X\ge9)=P(X=9)+P(X=10)$$
$$={}_{10}C_9\left(\frac{4}{5}\right)^9\left(\frac{1}{5}\right)^1+{}_{10}C_{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^0$$
$$=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^9+\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^9$$
$$=\frac{14}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^9$$

답 ④

05 실제로 극장에 나타나는 사람 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B(20,\ 0.85)$를 따르므로

$$P(X=x)={}_{20}C_x0.85^x\times0.15^{20-x}$$

$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$$

좌석이 부족하려면 $X>18$이어야 하므로 구하는 확률은

$$P(X>18)=P(X=19)+P(X=20)$$
$$={}_{20}C_{19}0.85^{19}\times0.15^1+{}_{20}C_{20}0.85^{20}\times0.15^0$$
$$=20\times0.046\times0.15+0.039$$
$$=0.138+0.039$$
$$=0.177$$

답 0.177

06 $E(X)=300$에서

$np=300\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$\sigma(X)=10$에서 $V(X)=100$이므로

> $V(X)=\{\sigma(X)\}^2=10^2=100$

$np(1-p)=100,\qquad 300(1-p)=100\ (\because$ ㉠$)$

$1-p=\frac{1}{3}\qquad\therefore p=\frac{2}{3}$

$p=\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{3}n=300\qquad\therefore n=450$

$\therefore n+15p=450+15\cdot\frac{2}{3}=460$

답 460

07 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_4C_xp^x(1-p)^{4-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

이때 $P(X=4)=\frac{1}{256}$이므로

$${}_4C_4p^4(1-p)^0=\frac{1}{256},\qquad p^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$\therefore p=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$E(X)=4\cdot\frac{1}{4}=1$$

답 1

08 $\sigma(X)=\sqrt{80p(1-p)}=\sqrt{-80\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+20}$

$p=\frac{1}{2}$일 때 확률변수 X의 표준편차가 최대이므로 이때 X의 평균은

$$E(X)=80p=80\cdot\frac{1}{2}=40$$

답 ②

09 $V(X)=6$에서 $24p(1-p)=6$

$4p^2-4p+1=0$, $(2p-1)^2=0$

$\therefore p=\frac{1}{2}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(24, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$P(X=x)={}_{24}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{24-x}$$
$$={}_{24}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^{24}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 24)$$

$$\therefore \frac{P(X=2)}{P(X=3)}=\frac{{}_{24}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{24}}{{}_{24}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^{24}}$$
$$=\frac{{}_{24}C_2}{{}_{24}C_3}=\frac{3}{22}$$

답 ③

$\frac{{}_{24}C_2}{{}_{24}C_3}$
$=\frac{24\cdot23}{2\cdot1}\times\frac{3\cdot2\cdot1}{24\cdot23\cdot22}$
$=\frac{3}{22}$

10 $E(X)=\frac{1}{5}n$, $V(X)=n\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{25}n$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$\frac{4}{25}n=29-\left(\frac{1}{5}n\right)^2$, $\frac{4}{25}n=29-\frac{1}{25}n^2$

$n^2+4n-725=0$, $(n+29)(n-25)=0$

$\therefore n=25$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(25, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{25\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}=2$

$\therefore \sigma(1-3X)=|-3|\sigma(X)=3\cdot2=6$

답 6

$V(X)=\frac{4}{25}n$이므로
$\sigma(X)=\sqrt{\frac{4}{25}\cdot25}=2$로
계산할 수도 있다.

쌤한마디

확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X와 두 상수 a, b $(a\neq0)$에 대하여

① $E(aX+b)=aE(X)+b$
② $V(aX+b)=a^2V(X)$
③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

11 가위바위보를 한 번 할 때 A가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

이때 $E(X)=9$이므로

$\frac{1}{3}n=9$ $\therefore n=27$

따라서 $V(X)=27\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=6$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$
$=6+9^2=87$

답 ⑤

12 한 세트를 만들 때 볼트와 너트가 모두 합격품일 확률은

$$\left(1-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{100}\right)=\frac{171}{200}$$

볼트가 합격품일 확률

너트가 합격품일 확률

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(800, \frac{171}{200}\right)$을 따르므로

$E(X)=800\cdot\frac{171}{200}=684$

$\therefore E\left(\frac{1}{9}X+4\right)=\frac{1}{9}E(X)+4$
$=\frac{1}{9}\cdot684+4=80$

답 80

13 3개의 당첨 제비를 포함한 x개의 제비 중에서 한 개의 제비를 꺼낼 때 당첨 제비가 나올 확률은

$\frac{3}{x}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{3}{x}\right)$을 따르므로

$E(X)=n\cdot\frac{3}{x}=12$ ······ ㉠

$V(X)=n\cdot\frac{3}{x}\cdot\frac{x-3}{x}=9$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$12\cdot\frac{x-3}{x}=9$, $4x-12=3x$

$\therefore x=12$

$x=12$를 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{12}n=12$ $\therefore n=48$

$\therefore n+x=60$

답 ①

14 주사위를 30번 던질 때 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 6의 약수의 눈이 나오지 않는 횟수는 $30-Y$이므로

$X=4Y-(30-Y)=5Y-30$

한편 한 개의 주사위를 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(30, \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

6의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 3, 6이므로 그 확률은
$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

따라서 $E(Y)=30\cdot\frac{2}{3}=20$이므로

$E(X)=E(5Y-30)=5E(Y)-30$
$=5\cdot20-30=70$

답 70

15 ㄱ. $E(X_1)<a$이므로 $P(X_1\le a)>0.5$

$E(X_2)>a$이므로 $P(X_2\le a)<0.5$

$\therefore P(X_1\le a)>P(X_2\le a)$

ㄴ. 확률변수 X_1의 정규분포곡선의 대칭축이 확률변수 X_2의 정규분포곡선의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로

$E(X_1)<E(X_2)$

ㄷ. 확률변수 X_1의 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이가 확률변수 X_2의 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이보다 낮으므로

$\sigma(X_1)>\sigma(X_2)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

16 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 조건 (가)에서 $P(X\le10)=P(X\ge20)$이므로

$m=\frac{10+20}{2}=15$

조건 (나)에서 $V\left(\frac{1}{4}X\right)=4$이므로

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 V(X)=4 \qquad \therefore V(X)=64$

즉 $\sigma^2=64$이므로 $\qquad \sigma=8\ (\because \sigma>0)$

$\therefore m+\sigma=23$ 답 23

17 확률변수 X의 평균이 17이므로 X의 확률밀도함수는 $x=17$에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=17$에 대하여 대칭이다.

따라서 $P(a-1\le X\le a+5)$가 최대가 되려면

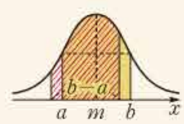
$\frac{(a-1)+(a+5)}{2}=17, \qquad 2a+4=34$

$\therefore a=15$ 답 ④

쌤한마디

정규분포곡선과 확률의 최댓값

확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 오른쪽 정규분포곡선에서 색칠한 부분과 빗금 친 부분은 가로의 길이가 $b-a$로 같지만 색칠한 부분의 넓이가 빗금 친 부분의 넓이보다 크다.



따라서 $b-a$가 일정할 때 $P(a\le X\le b)$가 최대가 되려면 $\frac{a+b}{2}=m$이어야 한다.

18 ㄱ. 확률변수 X의 평균이 5이므로 정규분포곡선은 직선 $x=5$에 대하여 대칭이다.

$\therefore f(1)=P(1\le X\le 4)$

$=P(6\le X\le 9)=f(6)$

ㄴ. $f(k)=P(k\le X\le k+3)$이 최대가 되려면

$\frac{k+(k+3)}{2}=5, \qquad 2k+3=10$

$\therefore k=\frac{7}{2}$

따라서 함수 $f(k)$는 $k=\frac{7}{2}$일 때 최댓값을 갖는다.

ㄷ. $f(a)=P(a\le X\le a+3)$,

$f(7-a)=P(7-a\le X\le 10-a)$이고

$\frac{a+(10-a)}{2}=5, \quad \frac{(a+3)+(7-a)}{2}=5$

이므로

$P(a\le X\le a+3)=P(7-a\le X\le 10-a)$

$\therefore f(a)=f(7-a)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

19 $P(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=a$에서

$2P(m\le X\le m+\sigma)=a$

$\therefore P(m\le X\le m+\sigma)=\frac{a}{2}$

$P(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=b$에서

$2P(m\le X\le m+2\sigma)=b$

$\therefore P(m\le X\le m+2\sigma)=\frac{b}{2}$

$\therefore P(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)$

$=P(m-\sigma\le X\le m)+P(m\le X\le m+2\sigma)$

$=P(m\le X\le m+\sigma)+P(m\le X\le m+2\sigma)$

$=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$

$=\frac{a+b}{2}$ 답 ②

Q BOX

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라 할 때,
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근
② $D=0$ ➡ 중근
③ $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근
을 근으로 갖는다.

$P(1\le X\le 4)$
$=P(5-4\le X\le 5-1)$
$=P(5+1\le X\le 5+4)$
$=P(6\le X\le 9)$

$P(m-\sigma\le X\le m+\sigma)$
$=P(m-\sigma\le X\le m)$
$\quad +P(m\le X\le m+\sigma)$
$=P(m\le X\le m+\sigma)$
$\quad +P(m\le X\le m+\sigma)$
$=2P(m\le X\le m+\sigma)$

20 이차방정식 $t^2-Xt+9=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$D=X^2-4\cdot 9\ge 0, \qquad (X+6)(X-6)\ge 0$

$\therefore X\le -6$ 또는 $X\ge 6$

이때 $m=2$, $\sigma=4$이므로 구하는 확률은

$P(X\le -6)+P(X\ge 6)$

$=P(X\le 2-2\cdot 4)+P(X\ge 2+4)$

$=P(X\le m-2\sigma)+P(X\ge m+\sigma)$

$=P(X\le m)-P(m-2\sigma\le X\le m)$

$\quad +P(X\ge m)-P(m\le X\le m+\sigma)$

$=0.5-P(m\le X\le m+2\sigma)$

$\quad +0.5-P(m\le X\le m+\sigma)$

$=1-0.4772-0.3413$

$=0.1815$ 답 0.1815

21 $P(X\ge a)=0.0668$에서

$P(X\ge m)-P(m\le X\le a)=0.0668$

$0.5-P(m\le X\le a)=0.0668$

$\therefore P(m\le X\le a)=0.4332$

이때 $P(m\le X\le m+1.5\sigma)=0.4332$이므로

$a=m+1.5\sigma=20+1.5\times 6=29$ 답 29

22 (가) $P(X\ge m-a)=0.86$에서

$P(m-a\le X\le m)+P(X\ge m)=0.86$

$P(m\le X\le m+a)+0.5=0.86$

$\therefore P(m\le X\le m+a)=0.36$

(나) $P(X\le m-b)=0.21$에서

$P(X\ge m+b)=0.21$

$P(X\ge m)-P(m\le X\le m+b)=0.21$

$0.5-P(m\le X\le m+b)=0.21$

$\therefore P(m\le X\le m+b)=0.29$

(다) $P(|X-m|\le c)=0.54$에서

$P(m-c\le X\le m+c)=0.54$

$2P(m\le X\le m+c)=0.54$

$\therefore P(m\le X\le m+c)=0.27$

이상에서 $0.27<0.29<0.36$이므로

$c<b<a$ 답 $c<b<a$

23 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(10,\ 3^2)$, $N(21,\ 8^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-10}{3}$, $Z_Y=\frac{Y-21}{8}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \geq k)=\mathrm{P}(Y \leq k)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_X \geq \frac{k-10}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y \leq \frac{k-21}{8}\right)$$

따라서 $\frac{k-10}{3}=-\frac{k-21}{8}$이므로

$$8(k-10)=-3(k-21)$$

$11k=143 \qquad \therefore k=13$ 　　답 13

24 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$, $\mathrm{N}(3,\ 1)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-m}{5}$, $Z_Y=Y-3$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(1 \leq X \leq 2m-1)=2\mathrm{P}(1 \leq Y \leq 3)$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{1-m}{5} \leq Z_X \leq \frac{2m-1-m}{5}\right)$$
$$=2\mathrm{P}(1-3 \leq Z_Y \leq 0)$$
$$\mathrm{P}\left(-\frac{m-1}{5} \leq Z_X \leq \frac{m-1}{5}\right)=2\mathrm{P}(-2 \leq Z_Y \leq 0)$$
$$2\mathrm{P}\left(0 \leq Z_X \leq \frac{m-1}{5}\right)=2\mathrm{P}(0 \leq Z_Y \leq 2)$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(0 \leq Z_X \leq \frac{m-1}{5}\right)=\mathrm{P}(0 \leq Z_Y \leq 2)$$

따라서 $\frac{m-1}{5}=2$이므로 　　$m-1=10$

$\therefore m=11$ 　　답 ②

25 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(64,\ 6^2)$, $\mathrm{N}(79,\ 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-64}{6}$, $Z_Y=\frac{Y-79}{4}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore a=\mathrm{P}(X \leq 70)=\mathrm{P}\left(Z_X \leq \frac{70-64}{6}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_X \leq 1)$$
$$=\mathrm{P}(Z_X \leq 0)+\mathrm{P}(0 \leq Z_X \leq 1)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0 \leq Z_X \leq 1),$$
$$b=\mathrm{P}(Y \geq 77)=\mathrm{P}\left(Z_Y \geq \frac{77-79}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_Y \geq -0.5)=\mathrm{P}(Z_Y \leq 0.5)$$
$$=\mathrm{P}(Z_Y \leq 0)+\mathrm{P}(0 \leq Z_Y \leq 0.5)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0 \leq Z_Y \leq 0.5),$$
$$c=\mathrm{P}(Z \leq 1.5)$$

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$=\mathrm{P}(Z \leq 0)+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$\therefore b<a<c$ 　　답 ③

26 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(22,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-22}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

① $\mathrm{P}(X \leq 20)=\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{20-22}{2}\right)$
$$=\mathrm{P}(Z \leq -1)=\mathrm{P}(Z \geq 1)$$
$$=\mathrm{P}(Z \geq 0)-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$$
$$=0.5-0.3413=0.1587$$

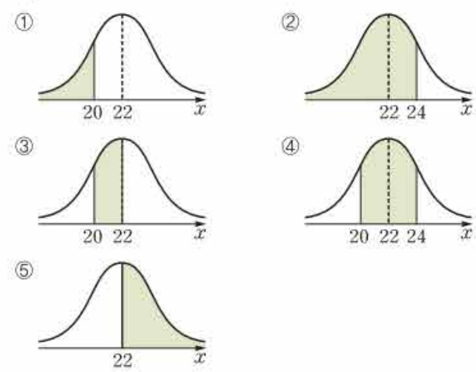
② $\mathrm{P}(X \leq 24)=\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{24-22}{2}\right)$
$$=\mathrm{P}(Z \leq 1)$$
$$=\mathrm{P}(Z \leq 0)+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$$
$$=0.5+0.3413=0.8413$$

③ $\mathrm{P}(20 \leq X \leq 22)=\mathrm{P}\left(\frac{20-22}{2} \leq Z \leq \frac{22-22}{2}\right)$
$$=\mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 0)$$
$$=\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)=0.3413$$

④ $\mathrm{P}(20 \leq X \leq 24)=\mathrm{P}\left(\frac{20-22}{2} \leq Z \leq \frac{24-22}{2}\right)$
$$=\mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 1)$$
$$=2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$$
$$=2 \times 0.3413=0.6826$$

⑤ $\mathrm{P}(X \geq 22)=\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{22-22}{2}\right)$
$$=\mathrm{P}(Z \geq 0)=0.5$$
답 ②

참고 다음 정규분포곡선에서 ②의 값이 가장 크다는 것을 알 수 있다.



27 $\mathrm{E}(X)=40$, $\sigma(X)=12$에서

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X+1)=3\mathrm{E}(X)+1=3 \cdot 40+1=121$,

$\sigma(Y)=\sigma(3X+1)=3\sigma(X)=3 \cdot 12=36$

이때 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 12^2)$을 따르므로 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(121,\ 36^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-121}{36}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(Y \leq 67)=\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{67-121}{36}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z \leq -1.5)=\mathrm{P}(Z \geq 1.5)$$
$$=\mathrm{P}(Z \geq 0)-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5)$$
$$=0.5-0.4332$$
$$=0.0668$$
답 0.0668

다른 풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$Y=3X+1$이므로 $Y \leq 67$에서
$3X+1 \leq 67$
$3X \leq 66$
$\therefore X \leq 22$

$$\therefore \mathrm{P}(Y \leq 67)=\mathrm{P}(X \leq 22)=\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{22-40}{12}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z \leq -1.5)=\mathrm{P}(Z \geq 1.5)$$
$$=\mathrm{P}(Z \geq 0)-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5)$$
$$=0.5-0.4332=0.0668$$

28 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-15}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq 15+k)=0.0228$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{15+k-15}{4}\right)=0.0228$$

$$\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{k}{4}\right)=0.0228$$

$$\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{k}{4}\right)=0.0228$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{k}{4}\right)=0.0228$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{k}{4}\right)=0.4772$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$\frac{k}{4}=2 \qquad \therefore\ k=8$ 답 8

$\mathrm{P}(Z\geq 0)=0.5$이고 $0.0228<0.5$이므로 $\frac{k}{4}>0$

29 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq 35)=0.0062$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{35-m}{3}\right)=0.0062$$

$$\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{35-m}{3}\right)=0.0062$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{35-m}{3}\right)=0.0062$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{35-m}{3}\right)=0.4938$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)=0.4938$이므로

$\frac{35-m}{3}=2.5, \qquad 35-m=7.5$

$\therefore\ m=27.5$ 답 ④

30 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m-5\leq X\leq m)-\mathrm{P}(X\geq m+5)=0.1826$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{m-5-m}{\sigma}\leq Z\leq \frac{m-m}{\sigma}\right)$$
$$-\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{m+5-m}{\sigma}\right)=0.1826$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{5}{\sigma}\leq Z\leq 0\right)-\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{5}{\sigma}\right)=0.1826$$

$$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{5}{\sigma}\right)-\left\{\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{5}{\sigma}\right)\right\}$$
$$=0.1826$$

$$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{5}{\sigma}\right)-\left\{0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{5}{\sigma}\right)\right\}=0.1826$$

$$2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{5}{\sigma}\right)=0.6826$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{5}{\sigma}\right)=0.3413$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)=0.3413$이므로

$\frac{5}{\sigma}=1 \qquad \therefore\ \sigma=5$ 답 ⑤

$\frac{5}{\sigma}>0$

$\mathrm{P}(m-5\leq X\leq m)$
$=\mathrm{P}(m\leq X\leq m+5)$

다른 풀이 $\mathrm{P}(m-5\leq X\leq m)-\mathrm{P}(X\geq m+5)=0.1826$에서

$\mathrm{P}(m\leq X\leq m+5)-\mathrm{P}(X\geq m+5)=0.1826$ …… ㉠

이때 $\mathrm{P}(X\geq m)=0.5$이므로

$\mathrm{P}(m\leq X\leq m+5)+\mathrm{P}(X\geq m+5)=0.5$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\mathrm{P}(m\leq X\leq m+5)=0.6826$

$\therefore\ \mathrm{P}(m\leq X\leq m+5)=0.3413$

$Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\sigma}\leq Z\leq \frac{m+5-m}{\sigma}\right)=0.3413$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{5}{\sigma}\right)=0.3413$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)=0.3413$이므로

$\frac{5}{\sigma}=1 \qquad \therefore\ \sigma=5$

31 빵 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(250,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-250}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(240\leq X\leq 270)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{240-250}{10}\leq Z\leq \frac{270-250}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 2)\\&=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 ③

32 온도계의 눈금을 X °C라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(21.5,\ 7^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-21.5}{7}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

자동 검사 장비의 기준 온도가 25 °C이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(|X-25|\geq 7)\\&=\mathrm{P}(X\leq 18)+\mathrm{P}(X\geq 32)\\&=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{18-21.5}{7}\right)+\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{32-21.5}{7}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\leq -0.5)+\mathrm{P}(Z\geq 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0.5)+\mathrm{P}(Z\geq 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)\\&\quad+\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)+0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)\\&=1-0.1915-0.4332\\&=0.3753\end{aligned}$$

답 0.3753

$X-25\leq -7$ 또는 $X-25\geq 7$
$\therefore\ X\leq 18$ 또는 $X\geq 32$

33 수학 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(57,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-57}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
점수가 53점 이상 61점 이하인 학생이 680명이므로

$$P(53\le X\le 61)=\frac{680}{1000}=0.68$$
$$P\left(\frac{53-57}{\sigma}\le Z\le\frac{61-57}{\sigma}\right)=0.68$$
$$P\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)=0.68$$
$$2P\left(0\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)=0.68$$
$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)=0.34$$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.34$이므로

$$\frac{4}{\sigma}=1 \qquad \therefore \sigma=4$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge 65)&=P\left(Z\ge\frac{65-57}{4}\right)\\&=P(Z\ge 2)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

답 0.02

34 물고기의 길이를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(12,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-12}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X\le 16.5)&=P\left(Z\le\frac{16.5-12}{3}\right)\\&=P(Z\le 1.5)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5+0.43=0.93\end{aligned}$$

따라서 길이가 16.5 cm 이하인 물고기의 수는

$0.93\times 200=186$

답 186

35 노트북 사용 기간을 X개월이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(54,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-54}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}&\therefore P(60\le X\le 72)\\&=P\left(\frac{60-54}{6}\le Z\le\frac{72-54}{6}\right)\\&=P(1\le Z\le 3)\\&=P(0\le Z\le 3)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.4987-0.3413\\&=0.1574\end{aligned}$$

$\therefore n=0.1574\times 100000=15740$

답 15740

노트북 사용 기간이 5년 이상 6년 이하, 즉 60개월 이상 72개월 이하일 확률

36 사원들의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$M=-0.5$에서 $\frac{m-70}{5\sigma}=-0.5$이므로

$m-70=-2.5\sigma \qquad \therefore 70-m=2.5\sigma$

$$\begin{aligned}\therefore P(X\ge 70)&=P\left(Z\ge\frac{70-m}{\sigma}\right)\\&=P\left(Z\ge\frac{2.5\sigma}{\sigma}\right)=P(Z\ge 2.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.49=0.01\end{aligned}$$

따라서 점수가 70점 이상인 사원 수는

$0.01\times 300=3$

답 ②

37 학생들의 윗몸 일으키기 기록을 X개라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(40,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
기록이 높은 쪽에서 6번째인 학생의 기록을 a개라 하면

$$P(X\ge a)=\frac{6}{50}=0.12$$
$$P\left(Z\ge\frac{a-40}{5}\right)=0.12$$
$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-40}{5}\right)=0.12$$
$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-40}{5}\right)=0.12$$
$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-40}{5}\right)=0.38$$

$P(Z\ge 0)=0.5$이고 $0.12<0.5$이므로 $\frac{a-40}{5}>0$

이때 $P(0\le Z\le 1.2)=0.38$이므로

$$\frac{a-40}{5}=1.2,\qquad a-40=6 \qquad \therefore a=46$$

따라서 기록이 높은 쪽에서 6번째인 학생의 기록은 46개이다.

답 46개

38 토끼들의 무게를 X kg이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(4.2,\ 0.4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-4.2}{0.4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
무게가 가벼운 쪽에서 24번째인 토끼의 무게를 a kg이라 하면

$$P(X\le a)=\frac{24}{60}=0.4$$
$$P\left(Z\le\frac{a-4.2}{0.4}\right)=0.4$$
$$P\left(Z\ge\frac{4.2-a}{0.4}\right)=0.4$$
$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{4.2-a}{0.4}\right)=0.4$$
$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{4.2-a}{0.4}\right)=0.4$$
$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{4.2-a}{0.4}\right)=0.1$$

$P(Z\ge 0)=0.5$이고 $0.4<0.5$이므로 $\frac{4.2-a}{0.4}>0$

이때 $P(0\le Z\le 0.25)=0.1$이므로

$$\frac{4.2-a}{0.4}=0.25,\qquad 4.2-a=0.1 \qquad \therefore a=4.1$$

따라서 무게가 가벼운 쪽에서 24번째인 토끼의 무게는 4.1 kg이다.

답 4.1 kg

Q BOX

39 두 공장 A, B에서 생산한 양초의 길이를 각각 X cm, Y cm라 하면 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(16,\ 0.3^2)$, $\mathrm{N}(18,\ 0.7^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-16}{0.3},\ Z_Y=\frac{Y-18}{0.7}$$

로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
A 공장에서 생산한 양초를 A 공장에서 생산한 양초로 판단할 확률은

$$\mathrm{P}(X<t)=\mathrm{P}\left(Z_X<\frac{t-16}{0.3}\right) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

B 공장에서 생산한 양초를 B 공장에서 생산한 양초로 판단할 확률은

$$\mathrm{P}(Y\ge t)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{t-18}{0.7}\right) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉠, ㉡이 같아야 하므로

$$\frac{t-16}{0.3}=-\frac{t-18}{0.7}, \qquad 7(t-16)=-3(t-18)$$

$$10t=166 \qquad \therefore t=16.6$$

답 16.6

40 A 반 학생들의 키를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(165.1,\ 10^2)$을 따르므로
$Z_X=\dfrac{X-165.1}{10}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
A 반에서 학생의 키가 178 cm 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge178)&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{178-165.1}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge1.29)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le1.29)\\&=0.5-0.4\\&=0.1\end{aligned}$$

B 반 학생들의 키를 Y cm라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(168.9,\ 6^2)$을 따르므로 $Z_Y=\dfrac{Y-168.9}{6}$로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때 B 반에서 키가 a cm 이상인 학생 수는 A 반에서 키가 178 cm 이상인 학생 수의 2배이고 두 반의 전체 학생 수가 같으므로 B 반에서 학생의 키가 a cm 이상일 확률도 A 반에서 학생의 키가 178 cm 이상일 확률의 2배이다.

전체 학생 수를 b라 하면 $b\cdot\mathrm{P}(Y\ge a)=2b\cdot\mathrm{P}(X\ge178)$ $\therefore \mathrm{P}(Y\ge a)=2\mathrm{P}(X\ge178)$

즉 $\mathrm{P}(Y\ge a)=2\mathrm{P}(X\ge178)$이므로

$$\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{a-168.9}{6}\right)=0.2$$

$$\mathrm{P}(Z_Y\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{a-168.9}{6}\right)=0.2$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{a-168.9}{6}\right)=0.2$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{a-168.9}{6}\right)=0.3$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le0.85)=0.3$이므로

$$\frac{a-168.9}{6}=0.85, \qquad a-168.9=5.1$$

$$\therefore a=174$$

답 174

41 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=150\cdot\frac{2}{5}=60,$$

$$\mathrm{V}(X)=150\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=36$$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 6^2)$을 따른다.

$$\therefore m=60,\ \sigma=6$$

$Z_X=\dfrac{X-60}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\ge54)=\mathrm{P}(Z\ge a)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{54-60}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\ge a)$$

$$\therefore \mathrm{P}(Z_X\ge-1)=\mathrm{P}(Z\ge a)$$

따라서 $a=-1$이므로

두 확률변수 Z_X, Z가 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $a=-1$

$$m+\sigma+a=60+6-1=65$$

답 65

42 $\mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$이므로

$$\frac{2}{9}n=16 \qquad \therefore n=72$$

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=72\cdot\frac{1}{3}=24,\ \mathrm{V}(X)=16$$

이때 72는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 4^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\dfrac{X-24}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\frac{13}{36}n=\frac{13}{36}\cdot72=26$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X\le\frac{13}{36}n\right)&=\mathrm{P}(X\le26)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{26-24}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\\&=0.5+0.1915\\&=0.6915\end{aligned}$$

답 ③

43 ${}_{432}\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{432-x}$은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{3}{4}$인 어떤 사건이 432번의 독립시행에서 x번 일어날 확률이다.
이 사건이 일어나는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(432,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=432\cdot\frac{3}{4}=324,$$

$$\mathrm{V}(X)=432\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=81$$

이때 432는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(324,\ 9^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\dfrac{X-324}{9}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$${}_{432}C_{432}\left(\frac{3}{4}\right)^{432}+{}_{432}C_{431}\left(\frac{3}{4}\right)^{431}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}$$
$$+\cdots+{}_{432}C_{351}\left(\frac{3}{4}\right)^{351}\left(\frac{1}{4}\right)^{81}$$
$$=P(X=432)+P(X=431)+\cdots+P(X=351)$$
$$=P(X\ge 351)$$
$$=P\left(Z\ge\frac{351-324}{9}\right)$$
$$=P(Z\ge 3)$$
$$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 3)$$
$$=0.5-0.4987$$
$$=0.0013$$

답 0.0013

44 서로 다른 동전 3개를 동시에 한 번 던질 때, 3개 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{8}$이므로 3개의 동전이 모두 앞면이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(448, \frac{1}{8}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=448\cdot\frac{1}{8}=56,$$
$$V(X)=448\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8}=49$$

이때 448은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(56, 7^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-56}{7}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(X\le 63)=P\left(Z\le\frac{63-56}{7}\right)$$
$$=P(Z\le 1)$$
$$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5+0.3413$$
$$=0.8413$$

답 ①

45 B 회사의 운동화를 택할 확률은 $\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$이므로 400명의 고객 중 B 회사의 운동화를 택하는 고객의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=400\cdot\frac{1}{5}=80,$$
$$V(X)=400\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=64$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-80}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(X\ge 96)=P\left(Z\ge\frac{96-80}{8}\right)$$
$$=P(Z\ge 2)$$
$$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.4772$$
$$=0.0228$$

답 0.0228

Q BOX

(2점을 잃을 확률)
$=1-$(5점을 얻을 확률)
이므로
(2점을 잃는 횟수)
$=288-$(5점을 얻는 횟수)
$=288-X$

$P(Z\ge 0)=0.5$이고
$0.0668<0.5$이므로
$\frac{k-720}{12}>0$

$n\ge 50$

46 5점을 얻는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(288, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$E(X)=288\cdot\frac{1}{3}=96,$$
$$V(X)=288\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=64$$

이때 288은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(96, 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-96}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

한편 288번의 시행 중에서 2점을 잃는 횟수는 $288-X$이므로 68점 이상을 얻기 위해서는

$$5X-2(288-X)\ge 68, \quad 7X\ge 644$$
$$\therefore X\ge 92$$

즉 구하는 확률은

$$P(X\ge 92)=P\left(Z\ge\frac{92-96}{8}\right)$$
$$=P(Z\ge -0.5)$$
$$=P(Z\le 0.5)$$
$$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.5+0.1915$$
$$=0.6915$$

답 0.6915

47 확률변수 X는 이항분포 $B\left(900, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$$E(X)=900\cdot\frac{4}{5}=720,\ V(X)=900\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=144$$

이때 900은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(720, 12^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-720}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\ge k)=0.0668$에서

$$P\left(Z\ge\frac{k-720}{12}\right)=0.0668$$
$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-720}{12}\right)=0.0668$$
$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-720}{12}\right)=0.0668$$
$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{k-720}{12}\right)=0.4332$$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{k-720}{12}=1.5, \quad k-720=18$$
$$\therefore k=738$$

답 ⑤

48 확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$$E(X)=n\cdot\frac{1}{10}=\frac{n}{10},$$
$$V(X)=n\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9n}{100}$$

이때 n은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{n}{10}, \left(\frac{3\sqrt{n}}{10}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-\dfrac{n}{10}}{\dfrac{3\sqrt{n}}{10}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}\left(\left|X-\dfrac{n}{10}\right|\le\dfrac{27}{10}\right)\ge0.6826$에서

$$\mathrm{P}\left(-\frac{27}{10}\le X-\frac{n}{10}\le\frac{27}{10}\right)\ge0.6826$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{-\frac{27}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}\le Z\le\frac{\frac{27}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}\right)\ge0.6826$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{9}{\sqrt{n}}\le Z\le\frac{9}{\sqrt{n}}\right)\ge0.6826$$

$$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{9}{\sqrt{n}}\right)\ge0.6826$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{9}{\sqrt{n}}\right)\ge0.3413$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$$\frac{9}{\sqrt{n}}\ge1,\qquad \sqrt{n}\le9$$

$$\therefore\ n\le81$$

n은 자연수이므로 n의 최댓값은 81이다. 답 81

도전! 수능 기출 W 47쪽

01 1st $\mathrm{P}(E)$의 값을 구하여 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구한다.

주어진 시행이 독립시행이므로 확률변수 X는 이항분포를 따른다.

두 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

$m^2+n^2\le25$를 만족시키는 $m,\ n$의 값은 다음과 같다.

(i) $m=1$인 경우

$1^2+n^2\le25$에서 $n^2\le24$이므로

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$

(ii) $m=2$인 경우

$2^2+n^2\le25$에서 $n^2\le21$이므로

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$

(iii) $m=3$인 경우

$3^2+n^2\le25$에서 $n^2\le16$이므로

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$

(iv) $m=4$인 경우

$4^2+n^2\le25$에서 $n^2\le9$이므로

$n=1,\ 2,\ 3$

(v) $m=5,\ 6$인 경우

$m^2\ge25$이므로 $m^2+n^2\le25$를 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 사건 E가 일어나는 경우의 수는

$4+4+4+3=15$

Q BOX

각 변을 $\dfrac{3\sqrt{n}}{10}$으로 나눈다.

$f(7)=\mathrm{P}(7\le X\le9)$의 값을 구하려면 확률변수 X를 표준화해야 하므로 먼저 $m,\ \sigma$의 값을 구해야 한다.

따라서 사건 E가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(12,\ \dfrac{5}{12}\right)$를 따른다.

2nd $\mathrm{V}(X)$의 값을 구하여 $p+q$의 값을 구한다.

$$\mathrm{V}(X)=12\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}=\frac{35}{12}$$

즉 $p=12,\ q=35$이므로 $p+q=47$ 답 47

02 1st m의 값을 구한다.

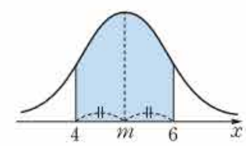
정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수는 $x=m$에서 최대이고, 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 곡선이다.

이때 $f(t)=\mathrm{P}(t\le X\le t+2)$에서

$(t+2)-t=2$

이므로 $f(t)$는 길이가 2인 구간에서의 X의 확률이다.

따라서 $f(t)$가 $t=4$에서 최댓값 $f(4)=\mathrm{P}(4\le X\le6)$을 가지려면 확률변수 X의 정규분포곡선은 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 m이 4와 6의 평균이어야 하므로

$$m=\frac{4+6}{2}=5$$

2nd σ의 값을 구한다.

$m=5$를 $f(m)=0.3413$에 대입하면 $f(5)=0.3413$

$\therefore\ \mathrm{P}(5\le X\le7)=0.3413$ …… ㉠

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-5}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 ㉠에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{5-5}{\sigma}\le Z\le\frac{7-5}{\sigma}\right)=0.3413$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)=0.3413$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$$\frac{2}{\sigma}=1\qquad\therefore\ \sigma=2$$

3rd $f(7)$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}f(7)&=\mathrm{P}(7\le X\le9)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{7-5}{2}\le Z\le\frac{9-5}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.4772-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

답 ①

03 1st Y를 Z로 표준화한 후 구하는 확률을 Z에 대한 식으로 나타낸다.

확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르므로

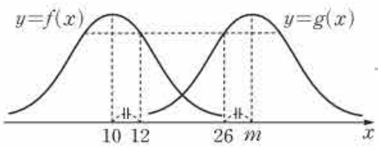
$Z=\dfrac{Y-m}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore$ $P(Y \le 20)=P\left(Z \le \dfrac{20-m}{4}\right)$ ······ ㉠

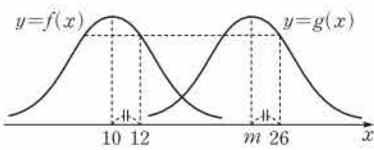
(2nd) m의 값을 구한다.

정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 4로 같으므로 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다.

또 X, Y의 평균이 각각 10, m이므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 각각 직선 $x=10$과 $x=m$에 대하여 대칭인 곡선이고 $f(12)=g(26)$에서 다음 그림과 같이 두 직선 $x=m$, $x=26$ 사이의 거리는 두 직선 $x=10$, $x=12$ 사이의 거리와 서로 같아야 한다.



$m \ge 26$인 경우



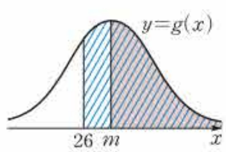
$m < 26$인 경우

즉 $|26-m|=2$에서

$12-10=2$

$m=24$ 또는 $m=28$

그런데 $P(Y \ge 26) \ge 0.5$이므로 오른쪽 그림에서



$m \ge 26$

$\therefore$ $m=28$

(3rd) $P(Y \le 20)$의 값을 구한다.

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned} P(Y \le 20) &= P\left(Z \le \frac{20-28}{4}\right) \\ &= P(Z \le -2) = P(Z \ge 2) \\ &= P(Z \ge 0) - P(0 \le Z \le 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르는 확률변수의 확률밀도함수를 $h(z)$라 하자.

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(10,\ 4^2)$, $N(m,\ 4^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-10}{4},\ Z_Y=\frac{Y-m}{4}$$

으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $f(12)=g(26)$이므로

$$h\left(\frac{12-10}{4}\right)=h\left(\frac{26-m}{4}\right)$$

$$h(0.5)=h\left(\frac{26-m}{4}\right)$$

$$0.5=\left|\frac{26-m}{4}\right|, \qquad \frac{26-m}{4}=\pm 0.5$$

$$26-m=\pm 2$$

$\therefore$ $m=24$ 또는 $m=28$

그런데 $P(Y \ge 26) \ge 0.5$이므로

$m=28$

Q BOX

$$\begin{aligned} \therefore\ P(Y \le 20) &= P\left(Z_Y \le \frac{20-28}{4}\right) \\ &= P(Z_Y \le -2) = P(Z_Y \ge 2) \\ &= P(Z_Y \ge 0) - P(0 \le Z_Y \le 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

04 (1st) 두 확률변수 X, Y를 정한 후 주어진 조건을 식으로 나타낸다.

두 제품 A, B의 무게를 각각 X, Y라 하면 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(m,\ 1)$, $N(2m,\ 2^2)$을 따른다.

$P(X \ge k)$

제품 A의 무게가 k 이상일 확률과 제품 B의 무게가 k 이하일 확률이 같으므로

$P(Y \le k)$

$P(X \ge k)=P(Y \le k)$ ······ ㉠

(2nd) X, Y를 각각 표준화하여 ㉠을 변형한다.

$Z_X=X-m$, $Z_Y=\dfrac{Y-2m}{2}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 ㉠에서

$$P(Z_X \ge k-m)=P\left(Z_Y \le \frac{k-2m}{2}\right)$$

$$\therefore\ P(Z_X \ge k-m)=P\left(Z_Y \ge -\frac{k-2m}{2}\right)$$

(3rd) $\dfrac{k}{m}$의 값을 구한다.

따라서 $k-m=-\dfrac{k-2m}{2}$이므로

$2(k-m)=-k+2m, \qquad 3k=4m$

$\therefore$ $\dfrac{k}{m}=\dfrac{4}{3}$

답 ⑤

07 통계적 추정 W 48쪽

01 $E(\overline{X})=28$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\frac{1}{2}$이므로

$V(X)=3$이므로 $\sigma(X)=\sqrt{3}$

$E(\overline{X})\cdot\sigma(\overline{X})=28\cdot\frac{1}{2}=14$ 답 ①

02 $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $\sigma(\overline{Y})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이고 $n_1=16n_2$이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{16n_2}}=\frac{\sigma}{4\sqrt{n_2}}=\frac{1}{4}\sigma(\overline{Y})$

$\therefore k=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

03 $\sigma(\overline{X})=\frac{1.5}{\sqrt{n}}$이므로 $\frac{1.5}{\sqrt{n}}\le 0.3$

$\sqrt{n}\ge 5$ $\therefore n\ge 25$

따라서 n의 최솟값은 25이다. 답 ④

04 확률의 총합은 1이므로

$\frac{5}{12}+\frac{1}{12}+a+\frac{1}{6}=1$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\cdot\frac{5}{12}+1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{4}$

$\therefore E(\overline{X})=E(X)=\frac{5}{4}$ 답 $\frac{5}{4}$

05 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	1	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=-1\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$

$V(X)=(-1)^2\cdot\frac{1}{5}+1^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{3}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2$

$=\frac{29}{5}-\frac{81}{25}=\frac{64}{25}$

이때 표본의 크기가 128이므로

$V(\overline{X})=\frac{\frac{64}{25}}{128}=\frac{1}{50}$ 답 ①

06 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{2}$

$V(X)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$=\frac{43}{6}-\frac{25}{4}=\frac{11}{12}$

이때 표본의 크기가 n이므로

$V(\overline{X})=\frac{\frac{11}{12}}{n}=\frac{11}{12n}$

$\therefore V(3\overline{X}+2)=3^2V(\overline{X})=9\cdot\frac{11}{12n}=\frac{33}{4n}$

따라서 $\frac{33}{4n}=\frac{3}{8}$이므로 $n=22$ 답 22

07 상자에서 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 수를 X라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$P(X=1)=\frac{1}{10}$, $P(X=2)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $P(X=3)=\frac{3}{10}$, $P(X=4)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{2}{5}=3$

$V(X)=1^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{3}{10}+4^2\cdot\frac{2}{5}-3^2$

$=10-9=1$

이때 표본의 크기가 3이므로

$V(\overline{X})=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

08 표본이 (2, 2)일 때, $\overline{X}=2$

표본이 (2, 4), (4, 2)일 때, $\overline{X}=3$

표본이 (2, 6), (4, 4), (6, 2)일 때, $\overline{X}=4$

표본이 (4, 6), (6, 4)일 때, $\overline{X}=5$

표본이 (6, 6)일 때, $\overline{X}=6$

따라서 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

ㄱ. $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

ㄴ. $P(\overline{X}\ge 4)=P(\overline{X}=4)+P(\overline{X}=5)+P(\overline{X}=6)$

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$

ㄷ. 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{2}{9}+4\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{2}{9}+6\cdot\frac{1}{9}$

$=4$

$V(\overline{X})$

$=2^2\cdot\frac{1}{9}+3^2\cdot\frac{2}{9}+4^2\cdot\frac{1}{3}+5^2\cdot\frac{2}{9}+6^2\cdot\frac{1}{9}-4^2$

$=\frac{52}{3}-16=\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{E(\overline{X})}{V(\overline{X})}=3$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

09 모집단이 정규분포 $N(75, 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(75, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(75, 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-75}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le 72)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{72-75}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le -1.5)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$$
$$=0.5-0.43$$
$$=0.07$$

답 ③

10 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(7,\ 3^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(7,\ \frac{3^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(7,\ 1^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\overline{X}-7$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 9)=\mathrm{P}(Z\ge 9-7)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.48$$
$$=0.02$$

답 0.02

임의추출한 9명의 기내 수화물 무게의 평균은 표본평균 $\overline{X}$이다.

11 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르는 확률변수를 X라 하면

$$\mathrm{E}(X)=720\cdot\frac{1}{6}=120,\ \mathrm{V}(X)=720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=100$$

이때 720은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(120,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-120}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(116\le\overline{X}\le 122)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{116-120}{2}\le Z\le\frac{122-120}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.4772+0.3413$$
$$=0.8185$$

답 ②

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때
① $\mathrm{E}(X)=np$
② $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$
③ $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

12 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{6^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{3}{4}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}\left(|\overline{X}-m|\le\frac{3}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{3}{4}}\right|\le 2\right)$$
$$=\mathrm{P}(|Z|\le 2)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=2\times 0.48=0.96$$

답 0.96

13 쿠키 4개의 평균 무게를 $\overline{X}$ g이라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \frac{4^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(100,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-100}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 한 상자가 중량 미달로 판정될 확률은

$$\mathrm{P}(4\overline{X}<376)=\mathrm{P}(\overline{X}<94)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z<\frac{94-100}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z<-3)=\mathrm{P}(Z>3)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$$
$$=0.5-0.4987$$
$$=0.0013$$

답 0.0013

한 상자 안에 들어 있는 쿠키의 무게의 합이 376 g 미만일 확률

14 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(34,\ 7^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(34,\ \left(\frac{7}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-34}{\frac{7}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(27\le\overline{X}\le 34)=\mathrm{P}\left(\frac{27-34}{\frac{7}{\sqrt{n}}}\le Z_{\overline{X}}\le\frac{34-34}{\frac{7}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-\sqrt{n}\le Z_{\overline{X}}\le 0)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le\sqrt{n})$$

$\mathrm{P}(27\le\overline{X}\le 34)=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$에서

$$\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le\sqrt{n})=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$

즉 $\sqrt{n}=2$이므로 $n=4$

답 ①

두 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, Z는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

15 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(18,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(18,\ \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-18}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(17\le\overline{X}\le 19)\ge 0.89$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{17-18}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{19-18}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)\ge 0.89$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.89$$

$$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.89$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.445$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.60)=0.445$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{2}\ge 1.6,\quad \sqrt{n}\ge 3.2\quad \therefore n\ge 10.24$$

따라서 n의 최솟값은 11이다. 답 11

n은 자연수이다.

16 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{12^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le 500)=0.0228$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{500-m}{3}\right)=0.0228$$

$$\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}\left(\frac{500-m}{3}\le Z\le 0\right)=0.0228$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-500}{3}\right)=0.0228$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-500}{3}\right)=0.4772$$

$\mathrm{P}(Z\le 0)=0.5$이고 $0.0228<0.5$이므로 $\frac{500-m}{3}<0$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$$\frac{m-500}{3}=2,\quad m-500=6$$

$$\therefore m=506$$

답 ⑤

17 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{10^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(|m-\overline{X}|\ge k)=0.246$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{|\overline{X}-m|}{5}\ge\frac{k}{5}\right)=0.246$$

$$\mathrm{P}\left(|Z|\ge\frac{k}{5}\right)=0.246$$

$$\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{k}{5}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{5}\right)=0.246$$

$$2\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{5}\right)=0.246,\quad \mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{5}\right)=0.123$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{5}\right)=0.123$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{5}\right)=0.123$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{5}\right)=0.377$$

$\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{k}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{5}\right)$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$이고 $0.123<0.5$이므로 $\frac{k}{5}>0$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.16)=0.377$이므로

$$\frac{k}{5}=1.16\quad \therefore k=5.8$$

답 5.8

18 표본평균이 87, 모표준편차가 15, 표본의 크기가 9이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$87-2.58\times\frac{15}{\sqrt{9}}\le m\le 87+2.58\times\frac{15}{\sqrt{9}}$$

$$\therefore 74.1\le m\le 99.9$$

따라서 $\alpha=74.1,\ \beta=99.9$이므로

$$2\beta-\alpha=125.7$$

답 ④

19 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이것이 $84.52\le m\le 115.48$과 같으므로

$$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=84.52 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=115.48 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡－㉠을 하면

$$5.16\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=30.96\quad \therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=6$$

㉠＋㉡을 하면

$$2\overline{x}=200\quad \therefore \overline{x}=100$$

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$100-1.96\times 6\le m\le 100+1.96\times 6$$

$$\therefore 88.24\le m\le 111.76$$

답 $88.24\le m\le 111.76$

남학생 15명과 여학생 10명의 휴대폰 사용 시간의 평균이 각각 주어졌으므로 표본평균, 즉 25명에 대한 평균을 구한다.

20 25명의 학생의 하루 휴대폰 사용 시간의 평균은

$$\frac{15\cdot 94+10\cdot 89}{25}=92(\text{분})$$

이때 모표준편차가 4, 표본의 크기가 25이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$92-2\cdot\frac{4}{\sqrt{25}}\le m\le 92+2\cdot\frac{4}{\sqrt{25}}$$

$$\therefore 90.4\le m\le 93.6$$

따라서 구하는 정수의 최댓값은 93이다. 답 ④

21 표본의 크기 49는 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 42를 사용할 수 있다.

이때 표본평균이 390이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$390-2\cdot\frac{42}{\sqrt{49}}\le m\le 390+2\cdot\frac{42}{\sqrt{49}}$$

$$\therefore 378\le m\le 402$$

따라서 $a=378,\ b=402$이므로

$$a+2b=1182$$

답 1182

4시간 ➡ $4\cdot 60=240$분

22 표본의 크기 100은 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 30을 사용할 수 있다.

이때 표본평균이 240이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$240-2.58\times\frac{30}{\sqrt{100}}\le m\le 240+2.58\times\frac{30}{\sqrt{100}}$$

$\therefore\ 232.26\le m\le 247.74$

답 $232.26\le m\le 247.74$

23 표본평균이 200, 모표준편차가 18, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$200-2.58\times\frac{18}{\sqrt{n}}\le m\le 200+2.58\times\frac{18}{\sqrt{n}}$$

이것이 $194.84\le m\le 205.16$과 같으므로

$$200-2.58\times\frac{18}{\sqrt{n}}=194.84,$$

$$200+2.58\times\frac{18}{\sqrt{n}}=205.16$$

따라서 $2.58\times\frac{18}{\sqrt{n}}=5.16$이므로

$\sqrt{n}=9 \qquad \therefore\ n=81$

답 81

24 표본의 크기 n은 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 12를 사용할 수 있다.

$n\ge 30$이므로 충분히 큰 표본으로 간주한다.

이때 표본평균이 115이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$115-2\cdot\frac{12}{\sqrt{n}}\le m\le 115+2\cdot\frac{12}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ 115-\frac{24}{\sqrt{n}}\le m\le 115+\frac{24}{\sqrt{n}}$$

이 구간에 속하는 자연수의 개수가 5이어야 하므로

구간에 속하는 자연수는 113, 114, 115, 116, 117이다.

$$112<115-\frac{24}{\sqrt{n}}\le 113,\ 117\le 115+\frac{24}{\sqrt{n}}<118$$

즉 $2\le\frac{24}{\sqrt{n}}<3$이므로 $\quad \frac{1}{12}\le\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{8}$

$8<\sqrt{n}\le 12 \qquad \therefore\ 64<n\le 144$

따라서 n은 65, 66, 67, $\cdots$, 144의 80개이다.

답 ③

25 모표준편차가 6, 표본의 크기가 81이므로 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times 2.58\times\frac{6}{\sqrt{81}}=3.44$$

답 ⑤

26 모표준편차가 3, 표본의 크기가 n^2+n이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이 l_n은

$$l_n=2\cdot 2\cdot\frac{3}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{12}{\sqrt{n(n+1)}}$$

따라서 $l_n{}^2=\frac{144}{n(n+1)}=144\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$이므로

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\ (\text{단, } A\neq B)$$

$$\begin{aligned}&l_1{}^2+l_2{}^2+l_3{}^2+\cdots+l_{15}{}^2\\&=144\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)\right\}\\&=144\left(1-\frac{1}{16}\right)\\&=144\cdot\frac{15}{16}=135\end{aligned}$$

답 135

27 모표준편차가 15이므로 표본의 크기가 144일 때 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot 3\cdot\frac{15}{\sqrt{144}}=\frac{15}{2}$$

표본의 크기가 n일 때 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot 2\cdot\frac{15}{\sqrt{n}}=\frac{60}{\sqrt{n}}$$

이때 두 신뢰구간의 길이가 같으므로

$$\frac{60}{\sqrt{n}}=\frac{15}{2},\qquad \sqrt{n}=8$$

$\therefore\ n=64$

답 64

28 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때 모표준편차가 2, 표본의 크기가 64, 신뢰구간의 길이가 1이므로

$$2k\cdot\frac{2}{\sqrt{64}}=1 \qquad \therefore\ k=2$$

또 표본의 크기를 n이라 하고 같은 신뢰도로 모평균을 추정할 때 신뢰구간의 길이가 $\frac{1}{2}$ 이하가 되려면

$$2\cdot 2\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{2},\qquad \sqrt{n}\ge 16$$

$\therefore\ n\ge 256$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 256이다.

답 256

29 $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때 모표준편차가 4, 표본의 크기가 100, 신뢰구간의 길이가 1.44이므로

$$2k\cdot\frac{4}{\sqrt{100}}=1.44 \qquad \therefore\ k=1.8$$

따라서 $\mathrm{P}(-1.8\le Z\le 1.8)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$$\begin{aligned}\alpha&=100\mathrm{P}(-1.8\le Z\le 1.8)\\&=200\mathrm{P}(0\le Z\le 1.8)\\&=200\times 0.46\\&=92\end{aligned}$$

답 ②

30 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$b-a=2\times 2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$d-c=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 $(b-a):(d-c)=6:5$에서 $d-c=\frac{5}{6}(b-a)$이므로

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{5}{6}\times 2\times 2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\therefore\ k=2.15$

따라서 $\mathrm{P}(-2.15 \le Z \le 2.15) = \frac{\alpha}{100}$이므로

$$\alpha = 100\mathrm{P}(-2.15 \le Z \le 2.15)$$
$$= 200\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.15)$$
$$= 200 \times 0.484 = 96.8$$

답 96.8

31 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 5, 표본의 크기가 225이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x} - 3 \cdot \frac{5}{\sqrt{225}} \le m \le \overline{x} + 3 \cdot \frac{5}{\sqrt{225}}$$

$$-1 \le m - \overline{x} \le 1 \qquad \therefore |m - \overline{x}| \le 1$$

따라서 모평균과 표본평균의 차의 최댓값은 1이다.

답 ②

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때의 모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차

➡ $|m - \overline{x}| \le k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\left(단, \mathrm{P}(|Z| \le k) = \frac{\alpha}{100}\right)$

32 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 9, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x} - 2 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 2 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{18}{\sqrt{n}} \le m - \overline{x} \le \frac{18}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \overline{x}| \le \frac{18}{\sqrt{n}}$$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 2 이하가 되려면

$$\frac{18}{\sqrt{n}} \le 2, \qquad \sqrt{n} \ge 9 \qquad \therefore n \ge 81$$

따라서 n의 최솟값은 81이다.

답 81

33 모평균을 m, 표본평균을 $\overline{x}$, 모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x} - 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le m - \overline{x} \le \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \overline{x}| \le \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 $\frac{1}{3}\sigma$ 이하가 되려면

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{3}\sigma, \qquad \sqrt{n} \ge 6 \qquad \therefore n \ge 36$$

따라서 n의 최솟값은 36이다.

답 36

34 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 추정한 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(단, \mathrm{P}(|Z| \le k) = \frac{\alpha}{100}\right)$$

이때 n 대신 $\frac{1}{9}n$을 대입하면 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{\frac{1}{9}n}} = 3 \cdot 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 표본의 크기가 $\frac{1}{9}$배가 되면 신뢰구간의 길이는 3배가 되므로 $\quad a = 3$

답 ③

신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 작아지면 신뢰구간의 길이는 길어진다.

35 ㄱ. 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(단, \mathrm{P}(|Z| \le k) = \frac{\alpha}{100}\right)$$

이때 n 대신 $4n$을 대입하면 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{2} \cdot 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 표본의 크기가 4배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{2}$배가 된다.

ㄴ. 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(단, \mathrm{P}(|Z| \le k) = \frac{\alpha}{100}\right)$$

신뢰도를 높이면 k의 값이 커지고 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이가 반드시 길어진다고 할 수 없다.

ㄷ. 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 포함한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

도전! 수능 기출

Ⓦ 54쪽

01 (1st) 확률변수 X와 표본평균 $\overline{X}$를 각각 표준화하여 $G(k)$, $H(k)$를 변형한다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, 30^2)$을 따르므로 크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{30^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m, 10^2)$을 따른다.

$Z_X = \frac{X - m}{30}$, $Z_{\overline{X}} = \frac{\overline{X} - m}{10}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, $Z_{\overline{X}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$G(k) = \mathrm{P}(X \le m + 30k)$$
$$= \mathrm{P}\left(Z_X \le \frac{m + 30k - m}{30}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z_X \le k)$$
$$H(k) = \mathrm{P}(\overline{X} \ge m - 30k)$$
$$= \mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}} \ge \frac{m - 30k - m}{10}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z_{\overline{X}} \ge -3k)$$

(2nd) ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $G(0) = \mathrm{P}(Z_X \le 0) = 0.5$,
$H(0) = \mathrm{P}(Z_{\overline{X}} \ge 0) = 0.5$이므로
$$G(0) = H(0)$$

3rd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $G(3)=\mathrm{P}(Z_X\le 3)$,

$H(1)=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge -3)=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le 3)$이므로

$G(3)=H(1)$

4th ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $G(1)=\mathrm{P}(Z_X\le 1)$, $H(-1)=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 3)$이므로

$$\begin{aligned}G(1)+H(-1)&=\mathrm{P}(Z_X\le 1)+\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 3)\\&<\mathrm{P}(Z_X\le 1)+\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 1)\\&=1\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

02 **1st** 확률변수 X가 따르는 정규분포를 구한다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 하면 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고

$\mathrm{P}(X\ge 3.4)=\frac{1}{2}$이므로 $m=3.4$

$Z_X=\frac{X-3.4}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le 3.9)+\mathrm{P}(Z\le -1)=1$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_X\le \frac{3.9-3.4}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\le -1)=1$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(Z_X\le \frac{0.5}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\ge 1)=1$$

두 확률변수 Z_X, Z는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

즉 $\frac{0.5}{\sigma}=1$이므로 $\sigma=0.5$

따라서 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3.4,\ 0.5^2)$을 따른다.

2nd 표본평균 $\overline{X}$를 표준화하여 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 3.55)$의 값을 구한다.

표본의 크기가 25인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(3.4,\ \frac{0.5^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(3.4,\ 0.1^2)$을 따르므로

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-3.4}{0.1}$로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\ge 3.55)&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge \frac{3.55-3.4}{0.1}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ③

03 **1st** 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구한다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 5^2)$을 따르므로 표본의 크기가 2500인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(60,\ \frac{5^2}{2500}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(60,\ 0.1^2)$을 따른다.

2nd 확률변수 Y가 근사적으로 따르는 정규분포를 구한다.

$Z_X=\frac{X-60}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 제품이 불량품으로 판정될 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 50)&=\mathrm{P}\left(Z_X\le \frac{50-60}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_X\le -2)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

임의로 제품 1개를 택하는 시행은 독립시행이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.02)$를 따른다.

따라서

$\mathrm{E}(Y)=2500\times 0.02=50$,

$\mathrm{V}(Y)=2500\times 0.02\times 0.98=49$

이고 2500은 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따른다.

3rd ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 표본평균 $\overline{X}$가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 0.1^2)$을 따르므로

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-60}{0.1}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\ge 60)&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge \frac{60-60}{0.1}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 0)\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

4th ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 확률변수 Y가 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따르므로 $Z_Y=\frac{Y-50}{7}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(Y\ge 57)&=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge \frac{57-50}{7}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\ge 1)\end{aligned}$$

한편 ㄱ에서 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-60}{0.1}$이 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 59.9)&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le \frac{59.9-60}{0.1}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le -1)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 1)\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(Y\ge 57)=\mathrm{P}(\overline{X}\le 59.9)$

두 확률변수 Z_Y, $Z_{\overline{X}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(Z_Y\ge 1)$
$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 1)$
$\therefore\ \mathrm{P}(Y\ge 57)$
$=\mathrm{P}(\overline{X}\le 59.9)$

5th ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $Z_X=\frac{X-60}{5}$이 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(60-k\le X\le 60+k)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{60-k-60}{5}\le Z_X\le \frac{60+k-60}{5}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{k}{5}\le Z_X\le \frac{k}{5}\right)\\&=2\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le \frac{k}{5}\right)\end{aligned}$$

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-60}{0.1}$이 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(60-k\le \overline{X}\le 60+k)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{60-k-60}{0.1}\le Z_{\overline{X}}\le \frac{60+k-60}{0.1}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-10k\le Z_{\overline{X}}\le 10k)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 10k)$$

이때 임의의 양수 k에 대하여 $\frac{k}{5}<10k$이므로

$$\underline{\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le \frac{k}{5}\right)<\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 10k)}$$
$$\therefore \mathrm{P}(60-k\le X\le 60+k)$$
$$<\mathrm{P}(60-k\le \overline{X}\le 60+k)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

두 확률변수 Z_X, $Z_{\overline{X}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

쌤한마디

ㄷ의 부등식

$$\mathrm{P}(60-k\le X\le 60+k)>\mathrm{P}(60-k\le \overline{X}\le 60+k)$$

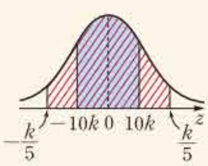
를 표준정규분포를 따르는 확률변수로 나타내면

$$\mathrm{P}\left(-\frac{k}{5}\le Z_X\le \frac{k}{5}\right)>\mathrm{P}(-10k\le Z_{\overline{X}}\le 10k)$$

이때 이 부등식이 성립하려면 오른쪽 그림과 같이

$$10k<\frac{k}{5}$$

이어야 한다.



그런데 이를 만족시키는 양수 k는 존재하지 않으므로 ㄷ의 부등식은 옳지 않다.

이와 같이 확률변수가 표준정규분포를 따를 때, 확률 사이의 대소 관계는 표준정규분포곡선을 이용하여 생각할 수도 있다.

04 (1st) **신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구한다.**

표본평균의 값이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 49이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}\le m\le \overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}$$
$$\therefore \overline{x}-0.28\sigma\le m\le \overline{x}+0.28\sigma$$

(2nd) **$\overline{x}$, σ의 값을 구한다.**

이것이 $1.73\le m\le 1.87$과 같으므로

$\overline{x}-0.28\sigma=1.73$ …… ㉠

$\overline{x}+0.28\sigma=1.87$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\overline{x}=3.6$ $\quad\therefore \overline{x}=1.8$

$\overline{x}=1.8$을 ㉡에 대입하면

$1.8+0.28\sigma=1.87,\quad 0.28\sigma=0.07$

$\therefore \sigma=0.25$

(3rd) **$180k$의 값을 구한다.**

따라서 $k=\frac{\sigma}{\overline{x}}=\frac{0.25}{1.8}=\frac{25}{180}$이므로

$180k=25$ 답 25

다른 풀이 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $1.73\le m\le 1.87$이므로 신뢰구간의 길이는

$1.87-1.73=0.14$

이때 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 49이므로

$0.14=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}},\quad 0.14=0.56\sigma$

$\therefore \sigma=0.25$

또 $\overline{x}$는 신뢰구간의 양 끝 값의 평균이므로

$\overline{x}=\frac{1.73+1.87}{2}=1.8$

따라서 $k=\frac{\sigma}{\overline{x}}=\frac{0.25}{1.8}=\frac{25}{180}$이므로

$180k=25$

W 07 통계적 추정

MEMO