만렙 PM

정답과 해설

확률과 통계

01 순열과 조합

핵심 유형

	유형01 ⑤	유형02 240	유형03 8
유형04 ⑤	유형05 ④	유형06 ④	유형07 180
유형08 ④	유형09 ①	유형10 40	유형11 20
유형12 ①	유형13 171	유형14 66	유형15 56

핵심 유형 완성하기

001 1440	002 ②	003 ②	004 12	
005 3600	006 ⑤	007 ②	008 ②	009 ⑤
010 ④	011 $\frac{1}{3}$	012 ③	013 30	014 120
015 48	016 ⑤	017 180	018 30	019 729
020 ②	021 243	022 50	023 512	024 ②
025 ③	026 ③	027 ③	028 249	029 ②
030 615	031 ③	032 ④	033 ⑤	034 ④
035 ②	036 30	037 ④	038 ①	039 ③
040 288	041 ③	042 ④	043 ②	044 36
045 150	046 30	047 60	048 ④	049 ①
050 ②	051 ①	052 1080	053 90	054 35
055 108	056 1260	057 236	058 548	059 26
060 34	061 74	062 28	063 ⑤	
064 1001	065 ②	066 247	067 22	068 126
069 460	070 10	071 ①	072 146	073 220
074 ⑤	075 105	076 ②	077 ④	078 144
079 70	080 ③	081 75	082 160	

핵심 유형 최종 점검하기

1 720	2 12	3 ③	4 24	5 ①
6 63	7 4	8 500	9 ③	10 6
11 12	12 ⑤	13 ⑤	14 ④	15 24
16 42	17 ①	18 ②	19 ①	20 460
21 ②				

핵심 유형 8~10쪽

유형01 탑 ⑤

선생님 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

선생님들 사이사이의 5개의 자리에서 4개를 택하여 4명의 학생을 앉히는 경우의 수는

${}_5P_4=120$

따라서 구하는 경우의 수는

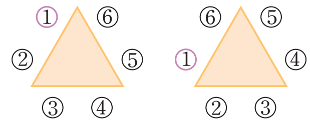
$24\times120=2880$

유형02 탑 240

6명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원형으로 배열하는 어느 한 가지 방법에 대하여 주어진 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$

유형03 탑 8

가운데 삼각형을 칠하는 경우의 수는 4이고, 나머지 3개의 삼각형을 칠하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times2=8$

유형04 탑 ⑤

구하는 경우의 수는 3개의 시설에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

유형05 탑 ④

홀수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 3, 5 ➡ 3가지

나머지 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$3\times125=375$

유형06 탑 ④

$f(1)=1$이므로 X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소는 1로 고정시키고, Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 2, 3에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

유형07 탑 180

p, u를 양 끝에 고정시키고 그 사이에 나머지 문자 r, r, e, e, s, s를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$

p, u끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$90\times2=180$

유형08 답 ④

짝수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2 또는 4이다.

(i) 일의 자리에 2가 오는 경우

나머지 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 2!}=180$

(ii) 일의 자리에 4가 오는 경우

나머지 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 3!}=60$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$180+60=240$

유형09 답 ①

b, d의 순서가 정해져 있으므로 b, d를 모두 B로 바꾸어 생각하여 a, B, c, c, B를 일렬로 배열한 후 다시 첫 번째 B를 b로, 두 번째 B를 d로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

유형10 답 **40**

지점 A에서 지점 P까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{3!\times 1!}=4$

지점 P에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는

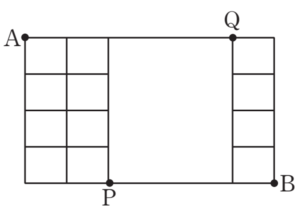
$\frac{5!}{2!\times 3!}=10$

따라서 구하는 최단 경로의 수는

$4\times 10=40$

유형11 답 **20**

다음 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로는



A → P → B 또는 A → Q → B

(i) A → P → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{6!}{2!\times 4!}\times 1=15$

(ii) A → Q → B로 가는 최단 경로의 수는

$1\times\frac{5!}{1!\times 4!}=5$

(i), (ii)에서 구하는 최단 경로의 수는

$15+5=20$

핵심 유형 완성하기 11~20쪽

001 답 **1440**

D, E, F, G, H의 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

D, E, F, G, H 사이사이의 5개의 자리에서 3개를 택하여 A, B, C를 앉히는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times 60=1440$

002 답 ②

초 8개 중에서 4개를 고르는 경우의 수는

${}_8C_4=70$

고른 초 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$70\times 6=420$

다른 풀이 초 8개 중에서 4개를 골라 일렬로 배열하는 경우의 수는 ${}_8P_4$이고, 이를 원형으로 배열하면 같은 것이 4가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{{}_8P_4}{4}=420$

003 답 ②

부모 2명을 1명으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

부모끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times 2=48$

004 답 **12**

2학년 학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

2학년 학생 사이사이의 3개의 자리에 3학년 학생 3명을 앉히는 경우의 수는

${}_3P_3=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times 6=12$

005 답 **3600**

쇠고기와 닭고기를 제외한 6가지 음식을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

6가지 음식 사이사이의 6개의 자리에서 2개를 택하여 쇠고기와 닭고기를 배열하는 경우의 수는

${}_6P_2=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times 30=3600$

다른 풀이 8가지 음식을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(8-1)!=7!=5040$

쇠고기와 닭고기를 하나로 생각하여 7가지 음식을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$

쇠고기와 닭고기끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉, 쇠고기와 닭고기가 이웃하도록 담는 경우의 수는

$720\times2=1440$

따라서 쇠고기와 닭고기가 이웃하지 않도록 담는 경우의 수는

$5040-1440=3600$

006 답 ⑤

연우의 자리가 결정되면 진우가 앉을 수 있는 자리는 고정된다.
즉, 구하는 경우의 수는 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같으므로

$(7-1)!=6!=720$

다른 풀이 연우와 진우가 마주 보고 원탁에 앉은 다음 나머지 6개의 자리에 친구 6명을 앉히면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_6P_6=6!=720$

007 답 ②

회장, 총무, 서기를 1명으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

총무와 서기끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

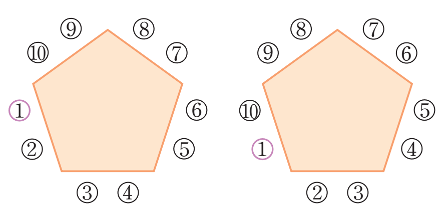
$24\times2=48$

008 답 ②

10명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원형으로 배열하는 어느 한 가지 방법에 대하여 주어진 정오각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

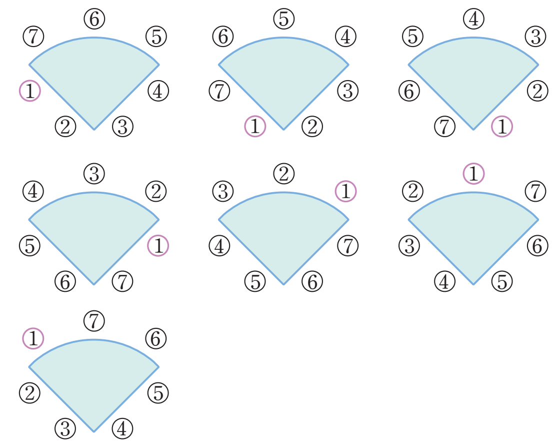
$2\times9!$

009 답 ⑤

7명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(7-1)!=6!$

이때 원형으로 배열하는 어느 한 가지 방법에 대하여 주어진 부채꼴 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 7가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

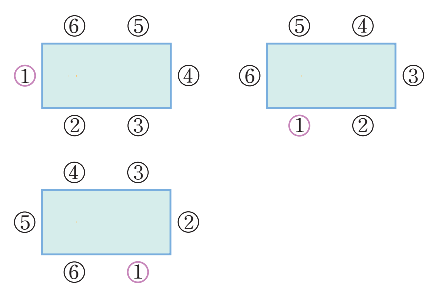
$6!\times7=5040$

010 답 ④

6명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원형으로 배열하는 어느 한 가지 방법에 대하여 주어진 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

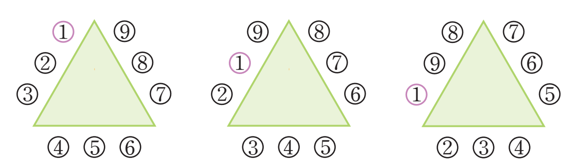
$120\times3=360$

011 답 $\frac{1}{3}$

9명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(9-1)!=8!$

이때 원형으로 배열하는 어느 한 가지 방법에 대하여 주어진 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 주어진 정삼각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$8!\times3=8!\times9\times\frac{1}{3}=9!\times\frac{1}{3}$ $\quad\therefore k=\frac{1}{3}$

012 답 ③

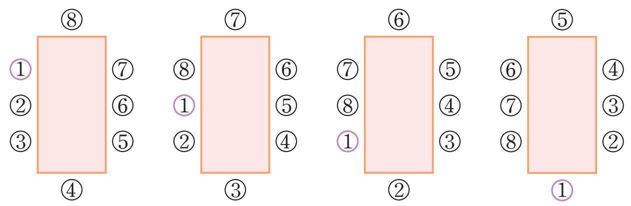
10명 중에서 8명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

8명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

이때 원형으로 배열하는 어느 한 가지 방법에 대하여 주어진 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 4가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$45\times7!\times4=180\times7!$

013 답 30

가운데 정사각형을 칠하는 경우의 수는 5이고, 나머지 4개의 반원을 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times6=30$

014 답 120

6개의 영역에 6가지 색을 칠하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

015 답 48

빨간색과 주황색을 하나로 생각하여 5가지 색을 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

빨간색과 주황색끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times2=48$

016 답 ⑤

주황, 초록, 파랑의 3가지 색을 칠하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

주황색, 초록색, 파란색 사이사이의 3개의 자리에서 2개를 택하여 빨간색과 노란색을 칠하는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6=12$

017 답 180

정사각뿔대의 두 밑면을 칠하는 경우의 수는

${}_6P_2=30$

두 밑면에 칠한 2가지 색을 제외한 4가지 색을 옆면에 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$30\times6=180$

018 답 30

정육면체의 한 밑면에 한 가지 색을 칠하면 다른 밑면을 칠하는 경우의 수는 5이고, 나머지 4가지 색을 옆면에 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times6=30$

019 답 729

구하는 경우의 수는 3명의 후보에서 중복을 허용하여 6명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_6=3^6=729$

020 답 ②

구하는 경우의 수는 2개의 모스 부호에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_8=2^8=256$

021 답 243

구하는 경우의 수는 3개의 깃발에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

022 답 50

A가 미국 또는 영국을 여행하는 경우의 수는 2이고, B, C가 여행하는 경우의 수는 5개의 나라에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times25=50$

023 답 512

마지막 자리에 올 수 있는 것은

a, b ➡ 2가지

나머지 자리를 정하는 경우의 수는 1, 3, a, b의 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_4=4^4=256$

따라서 구하는 암호의 개수는

$2\times256=512$

024 답 ②

주어진 경우의 수는 n개의 방에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_n\Pi_3=216$, $n^3=6^3$ $\quad\therefore n=6$ ($\because$ n은 자연수)

025 답 ③

구하는 신호의 개수는 3개의 기호에서 중복을 허용하여 2개 이상 4개 이하를 택하는 중복순열의 수와 같다.

(ⅰ) 3개의 기호에서 2개를 택하는 중복순열의 수는

$_3\Pi_2=3^2=9$

(ⅱ) 3개의 기호에서 3개를 택하는 중복순열의 수는

$_3\Pi_3=3^3=27$

(ⅲ) 3개의 기호에서 4개를 택하는 중복순열의 수는

$_3\Pi_4=3^4=81$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 신호의 개수는

$9+27+81=117$

026 답 ③

2의 배수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는

4, 6 ➡ 2가지

나머지 자리에는 3, 4, 5, 6, 7의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 2의 배수의 개수는

$2\times125=250$

027 답 ③

백의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, 3 ➡ 3가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\times16=48$

028 답 249

3000보다 큰 네 자리의 자연수는 천의 자리의 숫자가 3 또는 4인 수에서 3000을 제외한 수이다.

(ⅰ) 천의 자리에 3이 오는 경우

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$_5\Pi_3=5^3=125$

(ⅱ) 천의 자리에 4가 오는 경우

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$_5\Pi_3=5^3=125$

(ⅰ), (ⅱ)에서 3000보다 큰 자연수의 개수는

$125+125-1=249$

029 답 ②

(ⅰ) 0, 1, 2, 3, 4에서 택하여 자연수를 만드는 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, 3, 4 ➡ 4가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 세 자리의 자연수의 개수는

$4\times25=100$

(ⅱ) 3을 제외하고 0, 1, 2, 4에서 택하여 자연수를 만드는 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, 4 ➡ 3가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 4의 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 숫자 3을 포함하지 않는 세 자리의 자연수의 개수는

$3\times16=48$

(ⅰ), (ⅱ)에서 숫자 3을 적어도 한 개 포함하는 자연수의 개수는

$100-48=52$

030 답 615

4000 이상의 네 자리의 자연수는 천의 자리의 숫자가 4 또는 5 또는 6인 수이므로 그 개수는

$3\times{}_6\Pi_3=3\times6^3=648$

숫자 1끼리 이웃하는 4000 이상의 네 자리의 자연수는

(ⅰ) 백의 자리와 십의 자리에만 1이 오는 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 4, 5, 6의 3가지이고, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1을 제외한 5가지이므로 자연수의 개수는

$3\times5=15$

(ⅱ) 십의 자리와 일의 자리에만 1이 오는 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 4, 5, 6의 3가지이고, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1을 제외한 5가지이므로 자연수의 개수는

$3\times5=15$

(ⅲ) 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 1이 오는 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 4, 5, 6의 3가지이므로 자연수의 개수는 3

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 숫자 1끼리 이웃하는 4000 이상의 네 자리의 자연수의 개수는 $15+15+3=33$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$648-33=615$

031 답 ③

(ⅰ) 한 자리의 자연수의 개수는 5

(ⅱ) 두 자리의 자연수의 개수는

$5\times{}_6\Pi_1=5\times6=30$

(ⅲ) 세 자리의 자연수의 개수는

$5\times{}_6\Pi_2=5\times6^2=180$

(ⅳ) 네 자리의 자연수 중에서 3000 미만, 즉 천의 자리의 숫자가 1 또는 2인 자연수의 개수는

$2\times{}_6\Pi_3=2\times6^3=432$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 3000보다 작은 자연수의 개수는

$5+30+180+432=647$

따라서 3000은 648번째 수이다.

032 답 ④

$f(-1)=4$, $f(3)=6$이므로 X의 원소 -1과 3에 대응하는 Y의 원소는 각각 4와 6으로 고정시키고, Y의 원소 2, 4, 6의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 -3, 1에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

033 답 ⑤

Y의 원소 a, b, c의 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 X의 원소 10, 20, 30, 40에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

034 답 ④

$f(1)\neq 1$이므로 X의 원소 1에 대응할 수 있는 Y의 원소는 2, 3, 4, 5, 6의 5가지이다.

Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 2, 3에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$5\times{}_6\Pi_2=5\times 6^2=180$

035 답 ②

$f(1)=3$이므로 X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소는 3으로 고정되고, $f(3)\neq 1$이므로 X의 원소 3에 대응할 수 있는 Y의 원소는 2, 3의 2가지이다.

Y의 원소 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 2, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$2\times{}_3\Pi_2=2\times 3^2=18$

036 답 30

X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 X의 원소 a, b, c, d, e에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

이때 치역이 $\{1\}$인 함수의 개수는 1, 치역이 $\{2\}$인 함수의 개수는 1이므로 공역과 치역이 일치하는 함수의 개수는

$32-(1+1)=30$

037 답 ④

p, n을 양 끝에 고정시키고 그 사이에 나머지 문자 a, s, s, i, o를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$

p, n끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times 2=120$

038 답 ①

g, r, r, a, a, m, m을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\times 2!\times 2!}=630$

039 답 ③

모음 a, i, i를 한 문자 A로 생각하여 A, s, s, s, t, t, t, c를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{3!\times 3!}=1120$

모음 a, i, i끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$1120\times 3=3360$

040 답 288

1, 3, 5, 7번째에 각각 모음 E, E, A, U가 적힌 카드를 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

2, 4, 6, 8번째에 각각 자음 P, C, F, L이 적힌 카드를 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times 24=288$

041 답 ③

a, a, b, b, b, c를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times 3!}=60$

(ⅰ) 양 끝에 a가 오는 경우

나머지 문자 b, b, b, c를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

(ⅱ) 양 끝에 b가 오는 경우

나머지 문자 a, a, b, c를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 양 끝에 서로 같은 문자가 오도록 배열하는 경우의 수는

$4+12=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$60-16=44$

042 답 ④

b와 d를 제외한 a, a, c, c, c, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times 3!}=60$

a, a, c, c, c, e의 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에서 2개를 택하여 b와 d를 배열하는 경우의 수는

${}_7P_2=42$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times 42=2520$

다른 풀이 a, a, b, c, c, c, d, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times3!}=3360$

b와 d를 한 문자 B로 생각하여 a, a, B, c, c, c, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times3!}=420$

b, d끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉, b와 d가 이웃하도록 배열하는 경우의 수는

$420\times2=840$

따라서 b와 d가 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는

$3360-840=2520$

043 답 ②

(ⅰ) o끼리 이웃하는 경우

2개의 o를 한 문자 O로 생각하여 f, O, l, l, w를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(ⅱ) l끼리 이웃하는 경우

2개의 l을 한 문자 L로 생각하여 f, o, o, L, w를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(ⅲ) o끼리, l끼리 모두 이웃하는 경우

2개의 o, 2개의 l을 각각 한 문자 O, L로 생각하여 4개의 문자 f, O, L, w를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$60+60-24=96$

044 답 36

(ⅰ) 일의 자리에 1이 오는 경우

나머지 숫자 1, 2, 3, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

(ⅱ) 일의 자리에 3이 오는 경우

나머지 숫자 1, 1, 2, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 홀수의 개수는

$24+12=36$

045 답 150

(ⅰ) 맨 앞자리에 1이 오는 경우

나머지 숫자 0, 1, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(ⅱ) 맨 앞자리에 2가 오는 경우

나머지 숫자 0, 1, 1, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

(ⅲ) 맨 앞자리에 3이 오는 경우

나머지 숫자 0, 1, 1, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 자연수의 개수는

$60+30+60=150$

다른 풀이 0, 1, 1, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!}=180$

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 나머지 숫자 1, 1, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$180-30=150$

046 답 30

일의 자리, 십의 자리, 백의 자리에 홀수 1, 1, 3을 배열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

나머지 숫자 2, 2, 2, 4, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\times2!}=10$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\times10=30$

047 답 60

2, 4, 4, 8, 8, 8에서 5개를 택하는 경우는

2, 4, 4, 8, 8 또는 2, 4, 8, 8, 8 또는 4, 4, 8, 8, 8

(ⅰ) 2, 4, 4, 8, 8을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

(ⅱ) 2, 4, 8, 8, 8을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

(ⅲ) 4, 4, 8, 8, 8을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times3!}=10$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 자연수의 개수는

$30+20+10=60$

048 답 ④

3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

1, 1, 2, 2, 3, 3, 3에서 택한 4개의 숫자의 합이

6인 경우 ➡ 1, 1, 2, 2

9인 경우 ➡ 1, 2, 3, 3

(ⅰ) 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

(ii) 1, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$6+12=18$

049 답 ①

t, c의 순서가 정해져 있으므로 t, c를 모두 T로 바꾸어 생각하여 T, T, e, e, a, h, r를 일렬로 배열한 후 다시 첫 번째 T를 t로, 두 번째 T를 c로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times 2!}=1260$

050 답 ②

a, t, i, o, n의 순서가 정해져 있으므로 a, t, i, o, n을 모두 A로 바꾸어 생각하여 e, d, u, c, A, A, A, A, A를 일렬로 배열한 후 다시 첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째, 다섯 번째 A를 각각 a, t, i, o, n으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{9!}{5!}=3024$

051 답 ①

홀수 1, 3, 5의 순서가 정해져 있으므로 1, 3, 5를 모두 A로 바꾸어 생각하여 A, A, A, 2, 2, 4를 일렬로 배열한 후 다시 첫 번째, 두 번째, 세 번째 A를 각각 1, 3, 5로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times 2!}=60$

052 답 1080

모음 a, a, i를 한 문자로 생각하고, 자음 p, r, c, c, t, l을 다른 한 문자로 생각하여 모음이 자음보다 앞에 오도록 배열하는 경우의 수는 1

모음 a, a, i끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

자음 p, r, c, c, t, l끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

따라서 구하는 경우의 수는

$1\times 3\times 360=1080$

053 답 90

지점 A에서 지점 P까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{6!}{4!\times 2!}=15$

지점 P에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

따라서 구하는 최단 경로의 수는

$15\times 6=90$

054 답 35

지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{7!}{3!\times 4!}=35$

055 답 108

지점 A에서 지점 P까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

지점 P에서 지점 Q까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

지점 Q에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{3!}{2!\times 1!}=3$

따라서 구하는 최단 경로의 수는

$6\times 6\times 3=108$

056 답 1260

꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 경로로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 정육면체의 모서리를 3번, 2번, 4번 지나야 하므로 구하는 최단 경로의 수는

$\frac{9!}{3!\times 2!\times 4!}=1260$

057 답 236

(i) A → P → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{3!\times 1!}\times\frac{7!}{4!\times 3!}=4\times 35=140$

(ii) A → Q → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{8!}{5!\times 3!}\times\frac{3!}{2!\times 1!}=56\times 3=168$

(iii) A → P → Q → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{3!\times 1!}\times\frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{3!}{2!\times 1!}=4\times 6\times 3=72$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 최단 경로의 수는

$140+168-72=236$

058 답 548

꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 경로로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 정육면체의 모서리를 3번, 2번, 3번 지나야 하므로 A에서 B까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{8!}{3!\times 2!\times 3!}=560$

꼭짓점 A에서 모서리 PQ를 지나 꼭짓점 B까지 가는 최단 경로의 수는

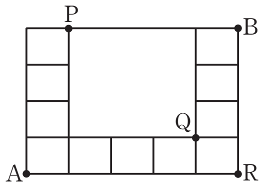
$\frac{4!}{3!\times 1!}\times 1\times\frac{3!}{1!\times 2!}=4\times 1\times 3=12$

따라서 구하는 최단 경로의 수는

$560-12=548$

059 답 26

다음 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로는



A → P → B 또는 A → Q → B 또는 A → R → B

(i) A → P → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{5!}{1!\times4!}\times1=5$

(ii) A → Q → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{5!}{4!\times1!}\times\frac{4!}{1!\times3!}=5\times4=20$

(iii) A → R → B로 가는 최단 경로의 수는

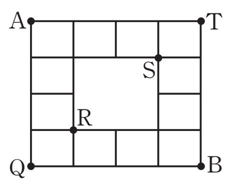
$1\times1=1$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 최단 경로의 수는

$5+20+1=26$

060 답 34

오른쪽 그림과 같이 네 지점 Q, R, S, T를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로는



A → Q → B 또는 A → R → B
또는 A → S → B 또는 A → T → B

(i) A → Q → B로 가는 최단 경로의 수는

$1\times1=1$

(ii) A → R → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{1!\times3!}\times\frac{4!}{3!\times1!}=4\times4=16$

(iii) A → S → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{3!\times1!}\times\frac{4!}{1!\times3!}=4\times4=16$

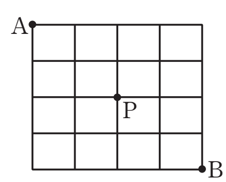
(iv) A → T → B로 가는 최단 경로의 수는

$1\times1=1$

(i)~(iv)에서 구하는 최단 경로의 수는

$1+16+16+1=34$

다른 풀이 지점 P를 생각하지 않고 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는



$\frac{8!}{4!\times4!}=70$

지점 A에서 지점 P를 거쳐 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는

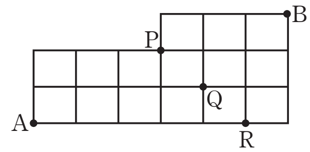
$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=6\times6=36$

따라서 구하는 최단 경로의 수는

$70-36=34$

061 답 74

다음 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로는



A → P → B 또는 A → Q → B 또는 A → R → B

(i) A → P → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{5!}{3!\times2!}\times\frac{4!}{3!\times1!}=10\times4=40$

(ii) A → Q → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{5!}{4!\times1!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=5\times6=30$

(iii) A → R → B로 가는 최단 경로의 수는

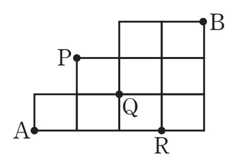
$1\times\frac{4!}{1!\times3!}=4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 최단 경로의 수는

$40+30+4=74$

062 답 28

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로는



A → P → B 또는 A → Q → B
또는 A → R → B

(i) A → P → B로 가는 최단 경로의 수는

$\left(\frac{2!}{1!\times1!}\times1\right)\times\left(1\times\frac{3!}{2!\times1!}\right)=2\times3=6$

(ii) A → Q → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{3!}{2!\times1!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=3\times6=18$

(iii) A → R → B로 가는 최단 경로의 수는

$1\times\frac{4!}{1!\times3!}=4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 최단 경로의 수는

$6+18+4=28$

핵심 유형 21쪽

유형12 답 ①

구하는 경우의 수는 3명의 학생에서 중복을 허용하여 9명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{9}={}_{11}C_{9}={}_{11}C_{2}=55$

유형13 답 171

먼저 3종류의 송편을 각각 1개씩 넣고, 나머지 17개의 송편을 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 3종류의 송편에서 중복을 허용하여 17개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{17}={}_{19}C_{17}={}_{19}C_2=171$

유형14 답 66

a의 값은 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

한편 x, y, z가 모두 자연수일 때, $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$이라고 하면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이다.

$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$을 방정식 $x+y+z=8$에 대입하여 정리하면

$X+Y+Z=5$

즉, b의 값은 방정식 $X+Y+Z=5$를 만족하는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로 3개의 문자 X, Y, Z에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수는

$b={}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

$\therefore$ $a+b=45+21=66$

유형15 답 56

Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 작은 수부터 순서대로 X의 원소 -1, 0, 1에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_6H_3={}_8C_3=56$

핵심 유형 완성하기 22~24쪽

063 답 ⑤

구하는 경우의 수는 4종류의 공에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

064 답 1001

구하는 자연수의 개수는 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_{10}={}_{14}C_{10}={}_{14}C_4=1001$

065 답 ②

구하는 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

066 답 247

a의 값은 2명의 후보에서 중복을 허용하여 8명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_2H_8={}_9C_8={}_9C_1=9$

b의 값은 2명의 후보에서 중복을 허용하여 8명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$b={}_2\Pi_8=2^8=256$

$\therefore$ $b-a=256-9=247$

067 답 22

3종류의 구슬에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수는

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

그런데 노란 구슬은 3개 이하로만 택할 수 있다. 이때 노란 구슬을 4개 이상 택하는 경우의 수는 먼저 노란 구슬을 4개 택한 후 3종류의 구슬에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_4C_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$28-6=22$

068 답 126

먼저 5종류의 과일을 각각 1개씩 사고, 나머지 5개의 과일을 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 5종류의 과일에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_5={}_9C_5={}_9C_4=126$

069 답 460

엽서 8장을 5명에게 나누어 주는 경우의 수는 5명에서 중복을 허용하여 8명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_8={}_{12}C_8={}_{12}C_4=495$

5명 모두 적어도 한 장의 엽서를 받도록 하려면 먼저 5명에게 엽서를 한 장씩 나누어 주고, 나머지 3장을 나누어 주면 된다.

나머지 3장을 나누어 주는 경우의 수는 5명에서 중복을 허용하여 3명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_7C_3=35$

따라서 엽서를 한 장도 받지 못하는 사람이 생기는 경우의 수는

$495-35=460$

070 답 10

3종류의 만두에서 중복을 허용하여 n개를 사는 경우의 수가 28이므로 ${}_3H_n=28$에서

${}_{n+2}C_n=28$, ${}_{n+2}C_2=28$

$\frac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=28$, $(n+2)(n+1)=8\times7$

$\therefore$ $n=6$ ($\because$ n은 자연수)

만두를 종류별로 적어도 한 개씩 포함하여 6개를 사려면 먼저 만두를 종류별로 각각 1개씩 사고, 나머지 3개의 만두를 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 3종류의 만두에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

071 답 ①

먼저 펜을 두 주머니 A, B에 각각 3개씩, 주머니 C에는 1개 넣고, 나머지 8개의 펜을 나누어 넣으면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 3개의 주머니에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_8={}_{10}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=45$

072 답 146

a의 값은 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$a={}_3\mathrm{H}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_2=91$
한편 x, y, z가 모두 자연수일 때, $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$이라고 하면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이다.
$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$을 방정식 $x+y+z=12$에 대입하여 정리하면
$X+Y+Z=9$
즉, b의 값은 방정식 $X+Y+Z=9$를 만족하는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로 3개의 문자 X, Y, Z에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수는
$b={}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=55$
$\therefore a+b=91+55=146$

073 답 220

구하는 순서쌍의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_9={}_{12}\mathrm{C}_9={}_{12}\mathrm{C}_3=220$

074 답 ⑤

x, y, z가 음이 아닌 정수이므로 $x+y+z<4$에서
$x+y+z=0$ 또는 $x+y+z=1$ 또는 $x+y+z=2$
또는 $x+y+z=3$
(i) 방정식 $x+y+z=0$을 만족하는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 0개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_0={}_2\mathrm{C}_0=1$
(ii) 방정식 $x+y+z=1$을 만족하는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$
(iii) 방정식 $x+y+z=2$를 만족하는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
(iv) 방정식 $x+y+z=3$을 만족하는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$
(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+3+6+10=20$

075 답 105

$A=a-1$, $B=b-2$, $C=c-3$이라고 하면 A, B, C는 음이 아닌 정수이다.
$a=A+1$, $b=B+2$, $c=C+3$을 방정식 $a+b+c=19$에 대입하여 정리하면
$A+B+C=13$
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $A+B+C=13$을 만족하는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수와 같으므로 3개의 문자 A, B, C에서 중복을 허용하여 13개를 택하는 중복조합의 수는
${}_3\mathrm{H}_{13}={}_{15}\mathrm{C}_{13}={}_{15}\mathrm{C}_2=105$

076 답 ②

방정식 $x+y+z=n$을 만족하는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_n=36$에서
${}_{n+2}\mathrm{C}_n=36$, ${}_{n+2}\mathrm{C}_2=36$
$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=36$, $(n+2)(n+1)=9\times8$
$\therefore n=7$ ($\because$ n은 자연수)

077 답 ④

$X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$, $W=w-1$이라고 하면 X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수이다.
$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$, $w=W+1$을 부등식 $6\le x+y+z+w\le8$에 대입하여 정리하면
$2\le X+Y+Z+W\le4$
구하는 순서쌍의 개수는 $2\le X+Y+Z+W\le4$를 만족하는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수와 같고 X, Y, Z, W가 음이 아닌 정수이므로
$X+Y+Z+W=2$ 또는 $X+Y+Z+W=3$
또는 $X+Y+Z+W=4$
(i) 방정식 $X+Y+Z+W=2$를 만족하는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수는 4개의 문자 X, Y, Z, W에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$
(ii) 방정식 $X+Y+Z+W=3$을 만족하는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수는 4개의 문자 X, Y, Z, W에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$
(iii) 방정식 $X+Y+Z+W=4$를 만족하는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수는 4개의 문자 X, Y, Z, W에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$10+20+35=65$

078 답 144

홀수 x, y, z, w에 대하여 $x=2X+1$, $y=2Y+1$, $z=2Z+1$, $w=2W+1$ (X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수)이라 하고 이를 방정식 $x+y+z+w=26$에 대입하면

$(2X+1)+(2Y+1)+(2Z+1)+(2W+1)=26$

$\therefore X+Y+Z+W=11$

a의 값은 방정식 $X+Y+Z+W=11$을 만족하는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수와 같으므로 4개의 문자 X, Y, Z, W에서 중복을 허용하여 11개를 택하는 중복조합의 수는

$a={}_4H_{11}={}_{14}C_{11}={}_{14}C_3=364$

한편 짝수 x, y, z, w에 대하여 $x=2X'+2$, $y=2Y'+2$, $z=2Z'+2$, $w=2W'+2$ (X', Y', Z', W'은 음이 아닌 정수)라 하고 이를 방정식 $x+y+z+w=26$에 대입하면

$(2X'+2)+(2Y'+2)+(2Z'+2)+(2W'+2)=26$

$\therefore X'+Y'+Z'+W'=9$

b의 값은 방정식 $X'+Y'+Z'+W'=9$를 만족하는 음이 아닌 정수 X', Y', Z', W'의 순서쌍 (X', Y', Z', W')의 개수와 같으므로 4개의 문자 X', Y', Z', W'에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수는

$b={}_4H_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$

$\therefore a-b=364-220=144$

079 답 70

Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 작은 수부터 순서대로 X의 원소 -3, -1, 1, 3에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_5H_4={}_8C_4=70$

080 답 ③

$a<b$이면 $f(a)\le f(b)$이므로

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$

Y의 원소 2, 4, 6, 8의 4개에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 작은 수부터 순서대로 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

081 답 75

Y의 원소 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작은 수부터 순서대로 X의 원소 1, 2에 대응시키고, Y의 원소 5개에서 1개를 택하여 X의 원소 3에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_5H_2\times{}_5C_1={}_6C_2\times5=15\times5=75$

082 답 160

(나)에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$

(가)에서 $f(2)$의 값이 짝수이므로

$f(2)=2$ 또는 $f(2)=4$ 또는 $f(2)=6$ 또는 $f(2)=8$

(i) $f(2)=2$일 때

$f(1)\le2\le f(3)\le f(4)$이므로 Y의 원소 1, 2의 2개에서 1개를 택하여 X의 원소 1에 대응시키고, Y의 원소 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 7개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작은 수부터 순서대로 X의 원소 3, 4에 대응시키면 된다.

이를 만족하는 함수의 개수는

${}_2C_1\times{}_7H_2=2\times{}_8C_2=2\times28=56$

(ii) $f(2)=4$일 때

$f(1)\le4\le f(3)\le f(4)$이므로 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 1개를 택하여 X의 원소 1에 대응시키고, Y의 원소 4, 5, 6, 7, 8의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작은 수부터 순서대로 X의 원소 3, 4에 대응시키면 된다.

이를 만족하는 함수의 개수는

${}_4C_1\times{}_5H_2=4\times{}_6C_2=4\times15=60$

(iii) $f(2)=6$일 때

$f(1)\le6\le f(3)\le f(4)$이므로 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 1개를 택하여 X의 원소 1에 대응시키고, Y의 원소 6, 7, 8의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작은 수부터 순서대로 X의 원소 3, 4에 대응시키면 된다.

이를 만족하는 함수의 개수는

${}_6C_1\times{}_3H_2=6\times{}_4C_2=6\times6=36$

(iv) $f(2)=8$일 때

$f(1)\le8\le f(3)\le f(4)$이므로 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 8개에서 1개를 택하여 X의 원소 1에 대응시키면 되고, $f(3)=f(4)=8$이다.

이를 만족하는 함수의 개수는

${}_8C_1\times1\times1=8$

(i)~(iv)에서 구하는 함수의 개수는

$56+60+36+8=160$

핵심 유형 최종 점검하기 25~27쪽

1 답 720

유형 01 원순열

남학생 4명을 1명으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

남학생끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 남학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는

$a=24\times24=576$

한편 남학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

남학생들 사이사이의 4개의 자리에 여학생 4명을 앉히는 경우의 수는

${}_4P_4=4!=24$

따라서 남학생과 여학생이 번갈아 앉는 경우의 수는

$b=6\times24=144$

$\therefore a+b=576+144=720$

2 답 12

유형 01 원순열

6이 적힌 카드의 양 옆에 각각 2, 4가 적힌 카드가 와야 한다.

2, 4, 6이 적힌 카드를 1장으로 생각하여 4장의 카드를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

2, 4가 적힌 카드끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2=12$

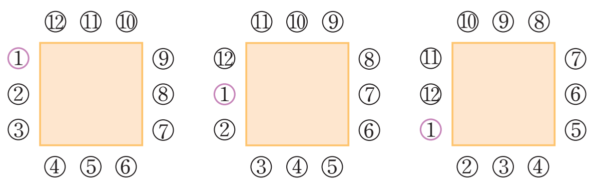
3 답 ③

유형 02 원순열 – 여러 가지 모양의 탁자에 둘러앉는 경우

12명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(12-1)!=11!$

이때 원형으로 배열하는 어느 한 가지 방법에 대하여 주어진 정사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$3\times11!$

4 답 24

유형 03 원순열 – 도형에 색칠하는 경우

빨간색을 칠하는 영역이 결정되면 파란색이 칠해지는 영역은 고정된다.

즉, 구하는 경우의 수는 5가지 색을 칠하는 경우의 수와 같으므로

$(5-1)!=4!=24$

5 답 ①

유형 03 원순열 – 도형에 색칠하는 경우

정사각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는 5이고, 나머지 4가지 색을 옆면에 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times6=30$

6 답 63

유형 04 중복순열

켜거나 끄는 것 2종류에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복순열의 수는

${}_2\Pi_6=2^6=64$

이때 모든 전구가 꺼진 경우 1가지는 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는

$64-1=63$

7 답 4

유형 04 중복순열

주어진 경우의 수는 n가지 놀이 기구에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_n\Pi_4=256$에서

$n^4=4^4$ $\quad\therefore n=4$ ($\because$ n은 자연수)

8 답 500

유형 05 중복순열 – 자연수의 개수

만의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 7인 경우를 순서쌍으로 나타내면

(2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) ➡ 4가지

나머지 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 자연수는 개수는

$4\times125=500$

9 답 ③

유형 05 중복순열 – 자연수의 개수

(i) 천의 자리에 3이 오는 경우

백의 자리에 4 또는 5가 오고, 나머지 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$2\times{}_5\Pi_2=2\times5^2=50$

(ii) 천의 자리에 4가 오는 경우

나머지 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

(iii) 천의 자리에 5가 오는 경우

나머지 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$50+125+125=300$

10 답 6

유형 06 중복순열 – 함수의 개수

X에서 Y로의 함수는 Y의 원소 a, b, c, d, e, f의 6개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 함수의 개수는

$m={}_6\Pi_2=6^2=36$

X에서 Y로의 일대일함수는 Y의 원소 a, b, c, d, e, f의 6개에서 서로 다른 2개를 택하여 X의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 일대일함수의 개수는

$n={}_6\mathrm{P}_2=30$

$\therefore m-n=36-30=6$

11 답 12

유형 07 같은 것이 있는 순열 – 문자의 배열

두 개의 m을 양 끝에 고정시키고 그 사이에 나머지 문자 u, u, s, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

12 답 ⑤

유형 07 같은 것이 있는 순열 – 문자의 배열

b와 c를 한 문자 B로 생각하여 a, a, B, d, d, d를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 3!}=60$

b, c끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times 2=120$

13 답 ⑤

유형 08 같은 것이 있는 순열 – 자연수의 개수

(i) 맨 앞자리에 1이 오고 일의 자리에 3이 오는 경우

나머지 숫자 0, 0, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(ii) 맨 앞자리에 2가 오고 일의 자리에 1이 오는 경우

나머지 숫자 0, 0, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(iii) 맨 앞자리에 2가 오고 일의 자리에 3이 오는 경우

나머지 숫자 0, 0, 1, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(iv) 맨 앞자리에 3이 오고 일의 자리에 1이 오는 경우

나머지 숫자 0, 0, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(v) 맨 앞자리에 3이 오고 일의 자리에 3이 오는 경우

나머지 숫자 0, 0, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(i)~(v)에서 구하는 홀수의 개수는

$30+30+60+30+30=180$

14 답 ④

유형 09 특정 순서가 정해진 순열

a와 b, d와 e의 순서가 각각 정해져 있으므로 a와 b를 모두 A로, d와 e를 모두 D로 바꾸어 생각하여 A, A, c, D, D, f를 일렬로 배열한 후 다시 첫 번째 A를 a로, 두 번째 A를 b로, 첫 번째 D를 d로, 두 번째 D를 e로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 2!}=180$

15 답 24

유형 10 최단 경로의 수

(i) 지점 A에서 지점 P까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

(ii) 지점 P에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{5!}{2!\times 3!}=10$

지점 P에서 지점 Q를 지나 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{2!}{1!\times 1!}\times\frac{3!}{1!\times 2!}=2\times 3=6$

따라서 지점 P에서 지점 Q를 지나지 않고 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는

$10-6=4$

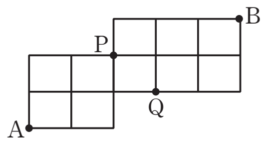
(i), (ii)에서 구하는 경로의 수는

$6\times 4=24$

16 답 42

유형 11 최단 경로의 수 – 장애물이 있는 경우

다음 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로는



A → P → B 또는 A → Q → B

(i) A → P → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{4!}{3!\times 1!}=6\times 4=24$

(ii) A → Q → B로 가는 최단 경로의 수는

$\left(\frac{3!}{2!\times 1!}\times 1\right)\times\frac{4!}{2!\times 2!}=3\times 6=18$

(i), (ii)에서 구하는 최단 경로의 수는

$24+18=42$

17 답 ①

유형 12 중복조합

구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

18 답 ②

유형 12 중복조합

주어진 다항식의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w에서 중복을 허용하여 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4H_n=120$에서

${}_{n+3}C_n=120$, ${}_{n+3}C_3=120$

$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\times 2\times 1}=120$

$(n+3)(n+2)(n+1)=10\times 9\times 8$

$\therefore\ n=7$ ($\because$ n은 자연수)

19 답 ①

유형 13 중복조합 – '적어도'의 조건이 있는 경우

먼저 3명에게 공책을 각각 2권씩 나누어 주고, 나머지 6권을 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 3명에서 중복을 허용하여 6명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

20 답 460

유형 14 중복조합 – 방정식, 부등식의 해의 개수

m의 값은 5개의 문자 a, b, c, d, e에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$m={}_5H_8={}_{12}C_8={}_{12}C_4=495$

한편 a, b, c, d, e가 모두 자연수일 때, $A=a-1$, $B=b-1$, $C=c-1$, $D=d-1$, $E=e-1$이라고 하면 A, B, C, D, E는 음이 아닌 정수이다.

$a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$, $d=D+1$, $e=E+1$을 방정식 $a+b+c+d+e=8$에 대입하여 정리하면

$A+B+C+D+E=3$

즉, n의 값은 방정식 $A+B+C+D+E=3$을 만족하는 음이 아닌 정수 A, B, C, D, E의 순서쌍 (A, B, C, D, E)의 개수와 같으므로 5개의 문자 A, B, C, D, E에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수는

$n={}_5H_3={}_7C_3=35$

$\therefore m-n=495-35=460$

21 답 ②

유형 15 중복조합 – 함수의 개수

(나)에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$

(가)에서 $f(1)=1$인 경우와 $f(3)=3$인 경우가 있다.

(i) $f(1)=1$인 경우

$1\le f(2)\le f(3)\le f(4)$이므로 Y의 원소 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 작은 수부터 순서대로 X의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

이를 만족하는 함수의 개수는 ${}_5H_3={}_7C_3=35$

(ii) $f(3)=3$인 경우

$f(1)\le f(2)\le 3\le f(4)$이므로 Y의 원소 1, 3의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작은 수부터 순서대로 X의 원소 1, 2에 대응시키고, Y의 원소 3, 5, 7, 9의 4개에서 1개를 택하여 X의 원소 4에 대응시키면 된다.

이를 만족하는 함수의 개수는 ${}_2H_2\times4={}_3C_2\times4=3\times4=12$

(iii) $f(1)=1$, $f(3)=3$인 경우

$1\le f(2)\le 3\le f(4)$이므로 Y의 원소 1, 3의 2개에서 1개를 택하여 X의 원소 2에 대응시키고, Y의 원소 3, 5, 7, 9의 4개에서 1개를 택하여 X의 원소 4에 대응시키면 된다.

이를 만족하는 함수의 개수는 $2\times4=8$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는

$35+12-8=39$

02 이항정리

핵심 유형

	유형01 ④	유형02 3	유형03 120
유형04 -12	유형05 ②	유형06 ③	

핵심 유형 완성하기

001 ④	002 ②	003 ①	004 ②	005 40
006 ③	007 2	008 25	009 $\frac{5}{2}$	010 42
011 160	012 ③	013 ④	014 ②	015 ③
016 -2016		017 ②	018 ③	019 251
020 ④	021 2	022 8	023 3	024 ④
025 10	026 ③			

핵심 유형 최종 점검하기

1 ③	2 $\frac{1}{4}$	3 ④	4 ③	5 ⑤
6 ④	7 304	8 ⑤	9 ③	10 494
11 ㄱ, ㄷ	12 5			

핵심 유형 30~31쪽

유형01 답 ④

$(x-1)^n=(-1+x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(-1)^{n-r}x^r$

$x^r=x^2$에서 $r=2$

x^2의 계수가 -36이므로

${}_nC_2(-1)^{n-2}=-36$

즉, ${}_nC_2=36$, $(-1)^{n-2}=-1$에서

$\frac{n(n-1)}{2\times1}=36$

$n(n-1)=9\times8$

$\therefore n=9$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 x^3의 계수는

${}_9C_3\times(-1)^6=84$

유형02 답 3

$\left(ax^2+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(ax^2)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r a^{4-r}\times\frac{x^{8-2r}}{x^r}$

$\frac{x^{8-2r}}{x^r}=x^2$에서 $r=2$

x^2의 계수가 54이므로

${}_4C_2 a^2=54$

$6a^2=54$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

유형03 답 120

$(2x-1)(x-3)^4=2x(x-3)^4-(x-3)^4$

$(x-3)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^{4-r}(-3)^r={}_4C_r(-3)^r x^{4-r}$ ...... ㉠

$(2x-1)(x-3)^4$의 전개식에서 x^3항은 $2x$와 ㉠의 x^2항이 곱해진 경우, -1과 ㉠의 x^3항이 곱해진 경우가 있다.

(i) $2x$와 ㉠의 x^2항이 곱해진 경우

$x^{4-r}=x^2$에서 $r=2$

㉠의 x^2항은

${}_4C_2\times(-3)^2\times x^2=6\times9\times x^2=54x^2$

$2x$와 ㉠의 x^2항을 곱하면

$2x\times54x^2=108x^3$

(ii) -1과 ㉠의 x^3항이 곱해진 경우

$x^{4-r}=x^3$에서 $r=1$

㉠의 x^3항은

${}_4C_1\times(-3)^1\times x^3=4\times(-3)\times x^3=-12x^3$

-1과 ㉠의 x^3항을 곱하면

$-1\times(-12x^3)=12x^3$

(i), (ii)에서 구하는 x^3의 계수는

$108+12=120$

유형04 답 −12

$(x+2)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r x^{3-r}2^r={}_3C_r 2^r x^{3-r}$

$(x-2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s x^{4-s}(-2)^s={}_4C_s(-2)^s x^{4-s}$

따라서 $(x+2)^3(x-2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r 2^r x^{3-r}\times{}_4C_s(-2)^s x^{4-s}={}_3C_r\times{}_4C_s 2^r(-2)^s x^{7-r-s}$

$x^{7-r-s}=x^5$에서 $r+s=2$

이때 r, s는 $0\le r\le3$, $0\le s\le4$인 정수이므로 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

따라서 x^5의 계수는

${}_3C_0\times{}_4C_2\times(-2)^2+{}_3C_1\times{}_4C_1\times2^1\times(-2)^1+{}_3C_2\times{}_4C_0\times2^2$

$=24+(-48)+12=-12$

유형05 답 ②

$$\begin{aligned}{}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3&={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3\\&={}_4C_2+{}_4C_3\\&={}_5C_3\\&={}_5C_2\end{aligned}$$

유형06 답 ③

${}_{30}C_0-{}_{30}C_1+{}_{30}C_2-{}_{30}C_3+{}_{30}C_4-\cdots-{}_{30}C_{29}+{}_{30}C_{30}=0$이므로

${}_{30}C_0-({}_{30}C_1-{}_{30}C_2+{}_{30}C_3-{}_{30}C_4+\cdots+{}_{30}C_{29})+{}_{30}C_{30}=0$

$$\begin{aligned}\therefore {}_{30}C_1-{}_{30}C_2+{}_{30}C_3-{}_{30}C_4+\cdots+{}_{30}C_{29}&={}_{30}C_0+{}_{30}C_{30}\\&=1+1=2\end{aligned}$$

핵심 유형 **완성**하기 32~35쪽

001 답 ④

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r x^r$

$x^r=x^3$에서 $r=3$

x^3의 계수가 56이므로

${}_nC_3=56$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=56$

$n(n-1)(n-2)=8\times7\times6$

$\therefore n=8$ ($\because n$은 자연수)

002 답 ②

$(2x-y)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(2x)^{6-r}(-y)^r={}_6C_r 2^{6-r}(-1)^r x^{6-r}y^r$

$x^{6-r}y^r=x^3y^3$에서 $r=3$

따라서 x^3y^3의 계수는

${}_6C_3\times2^3\times(-1)^3=20\times8\times(-1)=-160$

003 답 ①

$(x+ay)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r x^{7-r}(ay)^r={}_7C_r a^r x^{7-r}y^r$

$x^{7-r}y^r=x^4y^3$에서 $r=3$

x^4y^3의 계수가 280이므로

${}_7C_3 a^3=280$, $35a^3=280$

$a^3=8$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 실수)

004 답 ②

$(x+a)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_r x^{10-r}a^r={}_{10}C_r a^r x^{10-r}$

$x^{10-r}=x^7$에서 $r=3$

x^7의 계수는

${}_{10}C_3 a^3=120a^3$

한편 $x^{10-r}=x^8$에서 $r=2$

x^8의 계수는

${}_{10}C_2 a^2=45a^2$

이때 x^7의 계수가 x^8의 계수의 8배이므로

$120a^3=8\times45a^2$, $a^2(a-3)=0$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

005 답 40

$(x^2-2x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r(x^2)^{n-r}(-2x)^r={}_n\mathrm{C}_r(-2)^r x^{2n-r}$

서로 다른 항의 개수가 6이므로

r는 $0\le r\le5$인 정수, $n=5$

즉, $(x^2-2x)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5\mathrm{C}_r(-2)^r x^{10-r}$이므로

$x^{10-r}=x^8$에서 $r=2$

따라서 x^8의 계수는

${}_5\mathrm{C}_2\times(-2)^2=10\times4=40$

006 답 ③

$(1+\sqrt{2}x)^{15}$의 전개식의 일반항은

${}_{15}\mathrm{C}_r(\sqrt{2}x)^r={}_{15}\mathrm{C}_r(\sqrt{2})^r x^r$

항의 계수가 유리수이려면 r가 0 또는 2의 배수이어야 한다.

이때 $0\le r\le15$이므로 r의 값은 0, 2, 4, $\cdots$, 14의 8개이다.

따라서 계수가 유리수인 항의 개수는 8이다.

007 답 2

$\left(x^2-\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}\left(-\frac{a}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r(-a)^r\times\frac{x^{10-2r}}{x^r}$

$\frac{x^{10-2r}}{x^r}=x^4$에서 $r=2$

x^4의 계수가 40이므로

${}_5\mathrm{C}_2\times(-a)^2=40$

$10a^2=40$, $a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

008 답 25

$\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r(x^2)^{4-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r={}_4\mathrm{C}_r\times\frac{x^{8-2r}}{x^{3r}}$

$\frac{x^{8-2r}}{x^{3r}}=x^3$에서 $r=1$

x^3의 계수는

$a={}_4\mathrm{C}_1=4$

$\left(x^4-\frac{3}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7\mathrm{C}_s(x^4)^{7-s}\left(-\frac{3}{x}\right)^s={}_7\mathrm{C}_s(-3)^s\times\frac{x^{28-4s}}{x^s}$

$\frac{x^{28-4s}}{x^s}=x^3$에서 $s=5$

x^3의 계수는

$b={}_7\mathrm{C}_5\times(-3)^5={}_7\mathrm{C}_2\times(-3)^5=-21\times3^5$

$\therefore\ a-\frac{b}{3^5}=4+21=25$

009 답 $\frac{5}{2}$

$\left(ax+\frac{1}{x^2}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r(ax)^{6-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r a^{6-r}\times\frac{x^{6-r}}{x^{2r}}$

$\frac{x^{6-r}}{x^{2r}}=x^3$에서 $r=1$

x^3의 계수는

${}_6\mathrm{C}_1 a^5=6a^5$

한편 $\frac{x^{6-r}}{x^{2r}}=1$에서 $r=2$

상수항은

${}_6\mathrm{C}_2 a^4=15a^4$

x^3의 계수와 상수항이 서로 같으므로

$6a^5=15a^4$, $a^4(2a-5)=0$

$\therefore\ a=\frac{5}{2}\ (\because\ a>0)$

010 답 42

$\left(x^4+\frac{1}{x^3}\right)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r(x^4)^{n-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r={}_n\mathrm{C}_r\times\frac{x^{4n-4r}}{x^{3r}}$

$\frac{x^{4n-4r}}{x^{3r}}=1$에서 $4n-4r=3r$ $\qquad\therefore\ n=\frac{7}{4}r$

이때 n은 자연수이므로 r는 4의 배수이어야 한다.

즉, $r=4$일 때 n이 최소이므로 최솟값은

$m=\frac{7}{4}\times4=7$

이때의 상수항은

$k={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

$\therefore\ m+k=7+35=42$

011 답 160

$(1+x)(1+2x)^5=(1+2x)^5+x(1+2x)^5$

$(1+2x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(2x)^r={}_5\mathrm{C}_r 2^r x^r$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$(1+x)(1+2x)^5$의 전개식에서 x^4항은 ㉠의 x^4항인 경우, x와 ㉠의 x^3항이 곱해진 경우가 있다.

(i) ㉠의 x^4항인 경우

$x^r=x^4$에서 $r=4$

㉠의 x^4항은

${}_5\mathrm{C}_4\times2^4\times x^4=5\times16\times x^4=80x^4$

(ii) x와 ㉠의 x^3항이 곱해진 경우

$x^r=x^3$에서 $r=3$

㉠의 x^3항은

${}_5\mathrm{C}_3\times2^3\times x^3={}_5\mathrm{C}_2\times2^3\times x^3=10\times8\times x^3=80x^3$

x와 ㉠의 x^3항을 곱하면

$x\times80x^3=80x^4$

(i), (ii)에서 구하는 x^4의 계수는

$80+80=160$

012 답 ③

$(2x^3+3)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=2x^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+3\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r\times\frac{x^{5-r}}{x^r}$ …… ㉠

$(2x^3+3)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 상수항은 $2x^3$과 ㉠의 $\frac{1}{x^3}$항이 곱해진 경우, 3과 ㉠의 상수항이 곱해진 경우가 있다.

(ⅰ) $2x^3$과 ㉠의 $\frac{1}{x^3}$항이 곱해진 경우

$\frac{x^{5-r}}{x^r}=\frac{1}{x^3}$에서 $r=4$

㉠의 $\frac{1}{x^3}$항은

${}_5C_4\times\frac{1}{x^3}={}_5C_1\times\frac{1}{x^3}=\frac{5}{x^3}$

$2x^3$과 ㉠의 $\frac{1}{x^3}$항을 곱하면

$2x^3\times\frac{5}{x^3}=10$

(ⅱ) 3과 ㉠의 상수항이 곱해진 경우

$\frac{x^{5-r}}{x^r}=1$에서 $r=\frac{5}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le5$인 정수이므로 ㉠의 상수항은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 상수항은 10이다.

013 답 ④

$(x+a)(3x-1)^5=x(3x-1)^5+a(3x-1)^5$

$(3x-1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(3x)^{5-r}(-1)^r={}_5C_r(-1)^r3^{5-r}x^{5-r}$ …… ㉠

$(x+a)(3x-1)^5$의 전개식에서 x^5항은 x와 ㉠의 x^4항이 곱해진 경우, a와 ㉠의 x^5항이 곱해진 경우가 있다.

(ⅰ) x와 ㉠의 x^4항이 곱해진 경우

$x^{5-r}=x^4$에서 $r=1$

㉠의 x^4항은

${}_5C_1\times(-1)^1\times3^4\times x^4=5\times(-1)\times81\times x^4=-405x^4$

x와 ㉠의 x^4항을 곱하면

$x\times(-405x^4)=-405x^5$

(ⅱ) a와 ㉠의 x^5항이 곱해진 경우

$x^{5-r}=x^5$에서 $r=0$

㉠의 x^5항은

${}_5C_0\times3^5\times x^5=243x^5$

a와 ㉠의 x^5항을 곱하면

$a\times243x^5=243ax^5$

(ⅰ), (ⅱ)에서 x^5의 계수는

$-405+243a$

x^5의 계수가 81이므로

$-405+243a=81$, $243a=486$

$\therefore a=2$

014 답 ②

$(1+x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^r$

$(2-x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_s 2^{5-s}(-x)^s={}_5C_s(-1)^s2^{5-s}x^s$

따라서 $(1+x)^4(2-x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^r\times{}_5C_s(-1)^s2^{5-s}x^s={}_4C_r\times{}_5C_s(-1)^s2^{5-s}x^{r+s}$

$x^{r+s}=x^2$에서 $r+s=2$

이때 r, s는 $0\le r\le4$, $0\le s\le5$인 정수이므로 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

따라서 x^2의 계수는

${}_4C_0\times{}_5C_2\times(-1)^2\times2^3+{}_4C_1\times{}_5C_1\times(-1)^1\times2^4+{}_4C_2\times{}_5C_0\times2^5$

$=80+(-320)+192=-48$

015 답 ③

$(x-a)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r x^{3-r}(-a)^r={}_3C_r(-a)^rx^{3-r}$

$(x+2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s x^{4-s}2^s={}_4C_s2^sx^{4-s}$

따라서 $(x-a)^3(x+2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r(-a)^rx^{3-r}\times{}_4C_s2^sx^{4-s}={}_3C_r\times{}_4C_s(-a)^r2^sx^{7-r-s}$

$x^{7-r-s}=x$에서 $r+s=6$

이때 r, s는 $0\le r\le3$, $0\le s\le4$인 정수이므로 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $(2, 4)$, $(3, 3)$

x의 계수가 -64이므로

${}_3C_2\times{}_4C_4\times(-a)^2\times2^4+{}_3C_3\times{}_4C_3\times(-a)^3\times2^3=-64$

$3\times a^2\times16+4\times(-a^3)\times8=-64$

$32a^3-48a^2-64=0$, $2a^3-3a^2-4=0$

$(a-2)(2a^2+a+2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because$ a는 실수)

016 답 -2016

$\frac{(x-2)^4(3x^2+2)^3}{x}$의 전개식에서 x^4의 계수는

$(x-2)^4(3x^2+2)^3$의 전개식에서 x^5의 계수와 같다.

$(x-2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^{4-r}(-2)^r={}_4C_r(-2)^rx^{4-r}$

$(3x^2+2)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_s(3x^2)^{3-s}2^s={}_3C_s2^s3^{3-s}x^{6-2s}$

따라서 $(x-2)^4(3x^2+2)^3$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(-2)^rx^{4-r}\times{}_3C_s2^s3^{3-s}x^{6-2s}={}_4C_r\times{}_3C_s(-2)^r2^s3^{3-s}x^{10-r-2s}$

$x^{10-r-2s}=x^5$에서 $r+2s=5$

이때 r, s는 $0\le r\le4$, $0\le s\le3$인 정수이므로 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $(1, 2)$, $(3, 1)$

따라서 $(x-2)^4(3x^2+2)^3$의 전개식에서 x^5의 계수는

${}_4C_1\times{}_3C_2\times(-2)^1\times2^2\times3^1+{}_4C_3\times{}_3C_1\times(-2)^3\times2^1\times3^2$

$=4\times3\times(-2)\times4\times3+4\times3\times(-8)\times2\times9$

$=-288+(-1728)=-2016$

017 답 ②

${}_1C_1={}_2C_2$이므로

$${}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1={}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1$$
$$={}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1$$
$$={}_4C_2+{}_4C_1+{}_5C_1$$
$$={}_5C_2+{}_5C_1$$
$$={}_6C_2$$

018 답 ③

${}_1C_0={}_2C_0$이므로

$${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{10}C_9={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{10}C_9$$
$$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{10}C_9$$
$$={}_4C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{10}C_9$$
$$\vdots$$
$$={}_{10}C_8+{}_{10}C_9$$
$$={}_{11}C_9={}_{11}C_2$$

019 답 251

${}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5=A$라고 하면

$${}_5C_0+A={}_5C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5$$
$$={}_6C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5$$
$$={}_7C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5$$
$$={}_8C_3+{}_8C_4+{}_9C_5$$
$$={}_9C_4+{}_9C_5$$
$$={}_{10}C_5=252$$

$\therefore\ A=252-{}_5C_0$

$=252-1=251$

020 답 ④

$(x+y)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_n x^{7-n}y^n$

$x^{7-n}y^n$의 계수는

$f(n)={}_7C_n$

한편 색칠한 부분에 있는 수의 합은

${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_6C_5+{}_5C_5$ ...... ㉠

㉠의 ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4$에서 ${}_2C_0={}_3C_0$이므로

$${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4$$
$$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4$$
$$={}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4$$
$$={}_6C_3+{}_6C_4$$
$$={}_7C_4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 ${}_6C_5+{}_5C_5$에서 ${}_5C_5={}_6C_6$이므로

${}_6C_5+{}_5C_5={}_6C_5+{}_6C_6={}_7C_6$ ...... ㉢

따라서 ㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_6C_5+{}_5C_5={}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6$$
$$=f(4)+f(5)+f(6)$$

021 답 2

${}_{20}C_0-{}_{20}C_1+{}_{20}C_2-{}_{20}C_3+{}_{20}C_4-\cdots-{}_{20}C_{19}+{}_{20}C_{20}=0$이므로

${}_{20}C_0-({}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{19})+{}_{20}C_{20}=0$

$$\therefore\ {}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{19}={}_{20}C_0+{}_{20}C_{20}$$
$$=1+1=2$$

022 답 8

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n=255$에서

$2^n-1=255,\ 2^n=2^8 \qquad \therefore\ n=8$

023 답 3

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

따라서 주어진 부등식은

$100<2^n-1<1000 \qquad \therefore\ 101<2^n<1001$

이때 $2^6=64,\ 2^7=128,\ 2^8=256,\ 2^9=512,\ 2^{10}=1024$이므로 주어진 부등식을 만족하는 자연수 n은 7, 8, 9의 3개이다.

024 답 ④

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$이므로 이 식의 양변에 $x=2,\ n=30$을 대입하면

$3^{30}={}_{30}C_0+{}_{30}C_1\times2+{}_{30}C_2\times2^2+{}_{30}C_3\times2^3+\cdots+{}_{30}C_{30}\times2^{30}$

$$\therefore\ {}_{30}C_1\times2+{}_{30}C_2\times2^2+{}_{30}C_3\times2^3+\cdots+{}_{30}C_{30}\times2^{30}=3^{30}-{}_{30}C_0$$
$$=3^{30}-1$$

025 답 10

$(x-1)^n={}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}\times(-1)+\cdots+{}_nC_n(-1)^n$이므로 이 식의 양변에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{{}_nC_0}{2^n}-\frac{{}_nC_1}{2^{n-1}}+\frac{{}_nC_2}{2^{n-2}}-\frac{{}_nC_3}{2^{n-3}}+\cdots+(-1)^n{}_nC_n$$

$\therefore\ f(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$|f(n)|<\frac{1}{1000}$에서 $\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|<\frac{1}{1000},\ \frac{1}{2^n}<\frac{1}{1000}$

$\therefore\ 2^n>1000$

이때 $2^9=512,\ 2^{10}=1024$이므로 주어진 부등식을 만족하는 자연수 n의 최솟값은 10이다.

026 답 ③

$31^{50}=(1+30)^{50}$

$={}_{50}C_0+{}_{50}C_1\times30+{}_{50}C_2\times30^2+\cdots+{}_{50}C_{50}\times30^{50}$

$=1+1500+30^2({}_{50}C_2+{}_{50}C_3\times30+\cdots+{}_{50}C_{50}\times30^{48})$

이때 $30^2({}_{50}C_2+{}_{50}C_3\times30+\cdots+{}_{50}C_{50}\times30^{48})$은 900으로 나누어떨어지므로 31^{50}을 900으로 나누었을 때의 나머지는 1501을 900으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $1501=900\times1+601$이므로 31^{50}을 900으로 나누었을 때의 나머지는 601이다.

1 답 ③

유형 01 $(a+b)^n$의 전개식

$(3x-y)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(3x)^{6-r}(-y)^r={}_6C_r(-1)^r3^{6-r}x^{6-r}y^r$

$x^{6-r}y^r=x^2y^4$에서 $r=4$

x^2y^4의 계수는

${}_6C_4\times(-1)^4\times3^2=15\times1\times9=135$

2 답 $\frac{1}{4}$

유형 01 $(a+b)^n$의 전개식

$\left(\frac{x}{2}+a\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r\left(\frac{x}{2}\right)^{7-r}a^r={}_7C_r\left(\frac{1}{2}\right)^{7-r}a^rx^{7-r}$

$x^{7-r}=x^4$에서 $r=3$

x^4의 계수는

${}_7C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times a^3=35\times\frac{1}{16}\times a^3=\frac{35}{16}a^3$

한편 $x^{7-r}=x^3$에서 $r=4$

x^3의 계수는

${}_7C_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times a^4=35\times\frac{1}{8}\times a^4=\frac{35}{8}a^4$

이때 x^4의 계수가 x^3의 계수의 2배이므로

$\frac{35}{16}a^3=2\times\frac{35}{8}a^4$

$a^3=4a^4$, $a^3(4a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}$ ($\because a>0$)

3 답 ④

유형 01 $(a+b)^n$의 전개식

$(x^2+2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(x^2)^{n-r}2^r={}_nC_r2^rx^{2n-2r}$

$x^{2n-2r}=x^4$에서 $n-r=2$ $\quad\therefore r=n-2$

x^4의 계수는

${}_nC_{n-2}2^{n-2}={}_nC_2 2^{n-2}$

한편 $x^{2n-2r}=x^2$에서 $n-r=1$ $\quad\therefore r=n-1$

x^2의 계수는

${}_nC_{n-1}2^{n-1}={}_nC_1 2^{n-1}$

이때 x^4의 계수와 x^2의 계수가 같으므로

${}_nC_2 2^{n-2}={}_nC_1 2^{n-1}$

$\frac{n(n-1)}{2\times1}=2n$, $n^2-n=4n$

$n^2-5n=0$, $n(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n\ge2$)

즉, $(x^2+2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r2^rx^{10-2r}$

$x^{10-2r}=1$에서 $r=5$

따라서 상수항은

${}_5C_5\times2^5=32$

4 답 ③

유형 02 $\left(ax+\frac{b}{x}\right)^n$의 전개식

$\left(xy+\frac{a}{y^2}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(xy)^{6-r}\left(\frac{a}{y^2}\right)^r={}_6C_ra^r\times\frac{x^{6-r}y^{6-r}}{y^{2r}}$

$\frac{x^{6-r}y^{6-r}}{y^{2r}}=\frac{x^3}{y^3}$에서 $r=3$

$\frac{x^3}{y^3}$의 계수가 20이므로

${}_6C_3\times a^3=20$, $20a^3=20$

$a^3=1$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a$는 실수)

$\frac{x^{6-r}y^{6-r}}{y^{2r}}=x^4$에서 $r=2$

따라서 x^4의 계수는

${}_6C_2\times a^2=15\times1^2=15$

5 답 ⑤

유형 03 $(a+b)(c+d)^n$의 전개식

$(1-x^2)(1-2x)^6=(1-2x)^6-x^2(1-2x)^6$

$(1-2x)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(-2x)^r={}_6C_r(-2)^rx^r$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$(1-x^2)(1-2x)^6$의 전개식에서 x항은 ㉠의 x항과 같다.

$x^r=x$에서 $r=1$

㉠의 x항은

${}_6C_1\times(-2)^1\times x^1=6\times(-2)\times x=-12x$

$\therefore a=-12$

$(1-x^2)(1-2x)^6$의 전개식에서 x^7항은 $-x^2$과 ㉠의 x^5항을 곱한 것과 같다.

$x^r=x^5$에서 $r=5$

㉠의 x^5항은

${}_6C_5\times(-2)^5\times x^5=6\times(-32)\times x^5=-192x^5$

$-x^2$과 ㉠의 x^5항을 곱하면

$-x^2\times(-192x^5)=192x^7$

$\therefore b=192$

$\therefore a+b=-12+192=180$

6 답 ④

유형 03 $(a+b)(c+d)^n$의 전개식

$(x^2+x+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+x\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\times\frac{x^{4-r}}{x^r}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$(x^2+x+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^2항은 x^2과 ㉠의 상수항이 곱해진 경우, x와 ㉠의 x항이 곱해진 경우, ㉠의 x^2항인 경우가 있다.

(i) x^2과 ㉠의 상수항이 곱해진 경우

$\frac{x^{4-r}}{x^r}=1$에서 $r=2$

㉠의 상수항은 ${}_4C_2=6$

x^2과 ㉠의 상수항을 곱하면 $x^2\times6=6x^2$

(ii) x와 ㉠의 x항이 곱해진 경우

$\frac{x^{4-r}}{x^r}=x$에서 $r=\frac{3}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le 4$인 정수이므로 ㉠의 x항은 존재하지 않는다.

(iii) ㉠의 x^2항인 경우

$\frac{x^{4-r}}{x^r}=x^2$에서 $r=1$

㉠의 x^2항은

${}_4C_1\times x^2=4x^2$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 x^2의 계수는

$6+4=10$

7 답 304

유형 04 $(a+b)^m(c+d)^n$의 전개식

$(x+1)^3(x-3)^5$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합은 $x=1$을 대입한 값과 같으므로

$a=(1+1)^3(1-3)^5=2^3\times(-2)^5=-256$

$(x+1)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r x^{3-r}$

$(x-3)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_s x^{5-s}(-3)^s={}_5C_s(-3)^s x^{5-s}$

따라서 $(x+1)^3(x-3)^5$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r x^{3-r}\times{}_5C_s(-3)^s x^{5-s}={}_3C_r\times{}_5C_s(-3)^s x^{8-r-s}$

$x^{8-r-s}=x^6$에서 $r+s=2$

이때 r, s는 $0\le r\le 3$, $0\le s\le 5$인 정수이므로 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

따라서 x^6의 계수는

$b={}_3C_0\times{}_5C_2\times(-3)^2+{}_3C_1\times{}_5C_1\times(-3)^1+{}_3C_2\times{}_5C_0$

$=90+(-45)+3=48$

$\therefore b-a=48-(-256)=304$

8 답 ⑤

유형 04 $(a+b)^m(c+d)^n$의 전개식

$(ax-y)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r(ax)^{3-r}(-y)^r={}_3C_r(-1)^r a^{3-r}x^{3-r}y^r$

$(x+y)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s x^{4-s}y^s$

따라서 $(ax-y)^3(x+y)^4$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r(-1)^r a^{3-r}x^{3-r}y^r\times{}_4C_s x^{4-s}y^s={}_3C_r\times{}_4C_s(-1)^r a^{3-r}x^{7-r-s}y^{r+s}$

$x^{7-r-s}y^{r+s}=xy^6$에서 $r+s=6$

이때 r, s는 $0\le r\le 3$, $0\le s\le 4$인 정수이므로 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $(2, 4)$, $(3, 3)$

xy^6의 계수가 8이므로

${}_3C_2\times{}_4C_4\times(-1)^2\times a^1+{}_3C_3\times{}_4C_3\times(-1)^3=8$

$3\times1\times1\times a+1\times4\times(-1)=8$

$3a-4=8$

$\therefore a=4$

9 답 ③

유형 05 이항계수의 합

${}_3C_3={}_4C_4$이므로

$${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3$$
$$={}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3$$
$$={}_6C_4+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3$$
$$\vdots$$
$$={}_{10}C_4+{}_{10}C_3$$
$$={}_{11}C_4$$

10 답 494

유형 05 이항계수의 합

${}_3C_0={}_4C_0$이므로

$({}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_7)+({}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8)$

$=({}_4C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_7)+({}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8)-{}_3C_0$

$=({}_5C_1+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_7)+({}_4C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8)-{}_3C_0$

$=({}_6C_2+\cdots+{}_{10}C_7)+({}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_8)-{}_3C_0$

$\vdots$

$=({}_{10}C_6+{}_{10}C_7)+({}_{10}C_7+{}_{10}C_8)-{}_3C_0$

$={}_{11}C_7+{}_{11}C_8-{}_3C_0$

$={}_{12}C_8-1=495-1=494$

11 답 ㄱ, ㄷ

유형 06 이항계수의 성질

ㄱ. ${}_{100}C_0+{}_{100}C_1+{}_{100}C_2+{}_{100}C_3+\cdots+{}_{100}C_{99}+{}_{100}C_{100}=2^{100}$이고

${}_{100}C_{100}=1$이므로

$2^{100}-1={}_{100}C_0+{}_{100}C_1+{}_{100}C_2+{}_{100}C_3+\cdots+{}_{100}C_{99}$

ㄴ. ${}_6C_0-{}_6C_1+{}_6C_2-{}_6C_3+\cdots+{}_6C_6=0$

ㄷ. ${}_9C_0-{}_9C_1+{}_9C_2-{}_9C_3+\cdots-{}_9C_9=0$에서

${}_9C_0+{}_9C_2+{}_9C_4+{}_9C_6+{}_9C_8={}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9$

그런데 ${}_9C_0={}_9C_9$이므로

${}_9C_2+{}_9C_4+{}_9C_6+{}_9C_8={}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12 답 5

유형 06 이항계수의 성질

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

${}_{2n+1}C_1={}_{2n+1}C_{2n}$, ${}_{2n+1}C_3={}_{2n+1}C_{2n-2}$, $\cdots$, ${}_{2n+1}C_n={}_{2n+1}C_{n+1}$

주어진 부등식의 좌변에서

${}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2+\cdots+{}_{2n+1}C_n$

$={}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_{2n}+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_{2n-2}+\cdots+{}_{2n+1}C_{n+1}$

$={}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n-2}+{}_{2n+1}C_{2n}$

이때 ${}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_3+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n+1}=2^{2n+1}$,

${}_{2n+1}C_0-{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2-{}_{2n+1}C_3+\cdots-{}_{2n+1}C_{2n+1}=0$에서

$2({}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n})=2^{2n+1}$

$\therefore {}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}=2^{2n}$

즉, 주어진 부등식의 좌변이 2^{2n}이므로

$2^{2n}<1500$

이때 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로 자연수 n의 최댓값은 5이다.

03 확률의 뜻과 활용

핵심 유형

	유형01 ㄱ, ㄷ	유형02 ②	유형03 $\frac{1}{15}$
유형04 $\frac{1}{5}$	유형05 $\frac{1}{2}$	유형06 $\frac{1}{21}$	유형07 $\frac{3}{5}$
유형08 $\frac{65}{253}$	유형09 $\frac{1}{600}$	유형10 $\frac{3}{4}$	
유형11 ㄴ, ㄷ	유형12 $\frac{2}{3}$	유형13 $\frac{33}{100}$	유형14 $\frac{22}{35}$
유형15 $\frac{9}{20}$	유형16 ②		

핵심 유형 완성하기

001 ㄷ	002 ㄱ, ㄴ	003 ④	004 8	005 ④
006 ②	007 ④	008 $\frac{14}{25}$	009 29	010 $\frac{1}{21}$
011 $\frac{1}{5}$	012 ①	013 $\frac{11}{20}$	014 $\frac{1}{3}$	015 107
016 $\frac{1}{5}$	017 $\frac{1}{7}$	018 $\frac{3}{5}$	019 ③	020 $\frac{1}{4}$
021 14	022 $\frac{5}{32}$	023 ③	024 ④	025 $\frac{1}{7}$
026 $\frac{18}{35}$	027 $\frac{1}{9}$	028 ④	029 ④	030 $\frac{2}{5}$
031 $\frac{3}{14}$	032 $\frac{14}{45}$	033 $\frac{5}{28}$	034 $\frac{3}{7}$	035 $\frac{7}{15}$
036 ①	037 $\frac{10}{21}$	038 $\frac{5}{16}$	039 $\frac{7}{12}$	
040 $\frac{35}{216}$	041 $\frac{4}{25}$	042 $\frac{5}{12}$	043 ④	044 500
045 ②	046 $\frac{1}{8}\pi$	047 $\frac{1}{5}$	048 ⑤	049 6
050 ㄱ, ㄴ, ㄷ		051 ㄱ	052 $\frac{1}{2}$	053 $\frac{3}{8}$
054 ①	055 $\frac{11}{20}$	056 ②	057 ②	058 $\frac{13}{28}$
059 $\frac{1}{3}$	060 $\frac{13}{16}$	061 $\frac{4}{9}$	062 $\frac{1}{4}$	063 $\frac{1}{4}$
064 ①	065 ④	066 ④	067 ②	
068 $\frac{61}{125}$	069 $\frac{31}{32}$	070 $\frac{41}{55}$	071 $\frac{21}{32}$	072 $\frac{65}{84}$

핵심 유형 최종 점검하기

1 ⑤	2 ③	3 $\frac{5}{8}$	4 $\frac{1}{10}$	5 $\frac{24}{125}$
6 $\frac{1}{6}$	7 $\frac{11}{63}$	8 62	9 7	10 $\frac{1}{4}$
11 ③	12 ⑤	13 $\frac{3}{10}$	14 ⑤	15 $\frac{13}{30}$
16 $\frac{1}{7}$	17 6	18 ②	19 $\frac{9}{14}$	

핵심 유형 40~41쪽

유형01 답 ㄱ, ㄷ

$A=\{1, 2, 3\}$

ㄱ. $B=\{5\}$이므로 $A\cap B=\varnothing$
  따라서 A와 B는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $C=\{2, 4, 6\}$이므로 $A\cap C=\{2\}$
  따라서 A와 C는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $D=\{4, 5\}$이므로 $A\cap D=\varnothing$
  따라서 A와 D는 서로 배반사건이다.

따라서 보기 중 사건 A와 서로 배반사건인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

유형02 답 ②

2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
나오는 두 눈의 수를 a, b라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수의 곱이 홀수인 경우는
$(1, 1)$, $(1, 3)$, $(1, 5)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$, $(3, 5)$,
$(5, 1)$, $(5, 3)$, $(5, 5)$ ➡ 9가지
따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

유형03 답 $\frac{1}{15}$

answer에 있는 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$6!=720$
a와 r를 양 끝에 고정시키고 그 사이에 n, s, w, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$, a와 r끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 a와 r가 양 끝에 오는 경우의 수는 $24\times2=48$
따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

유형04 답 $\frac{1}{5}$

7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(7-1)!=6!=720$
여자 3명을 1명으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=24$, 여자끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $3!=6$이므로 여자 3명이 모두 이웃하도록 앉는 경우의 수는
$24\times6=144$
따라서 구하는 확률은 $\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

유형05 답 $\frac{1}{2}$

맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5의 3가지이므로 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는
$3\times{}_4\Pi_4=3\times4^4=768$
홀수이면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 5의 2가지이므로 홀수의 개수는
$3\times{}_4\Pi_3\times2=3\times4^3\times2=384$
따라서 구하는 확률은 $\frac{384}{768}=\frac{1}{2}$

유형06 답 $\frac{1}{21}$

7장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!}=2520$

$\boxed{\text{S}}$, $\boxed{\text{T}}$가 적힌 카드를 양 끝에 고정시키고 그 사이에 $\boxed{\text{W}}$, $\boxed{\text{E}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{I}}$, $\boxed{\text{E}}$가 적힌 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$, $\boxed{\text{S}}$, $\boxed{\text{T}}$가 적힌 카드끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$이므로 $\boxed{\text{S}}$, $\boxed{\text{T}}$가 적힌 카드가 양 끝에 오는 경우의 수는

$60\times2=120$

따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{2520}=\frac{1}{21}$

유형07 답 $\frac{3}{5}$

공 5개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

흰 공 3개 중에서 2개, 검은 공 2개 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_2C_1=3\times2=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

유형08 답 $\frac{65}{253}$

4명의 학생에게 음료수 20병을 나누어 주는 경우의 수는

${}_4H_{20}={}_{23}C_{20}={}_{23}C_3=1771$

모든 학생이 2병 이상 받으려면 먼저 모든 학생에게 2병씩 나누어 주고, 나머지 12병을 4명의 학생에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

${}_4H_{12}={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3=455$

따라서 구하는 확률은 $\frac{455}{1771}=\frac{65}{253}$

핵심 유형 완성하기 42~47쪽

001 답 ㄷ

표본공간은 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$A=\{1, 3\}$, $B=\{1\}$, $C=\{2, 3\}$

ㄱ. $A\cap B=\{1\}$이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. $A\cap C=\{3\}$이므로 A와 C는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $B\cap C=\varnothing$이므로 B와 C는 서로 배반사건이다.

따라서 보기 중 서로 배반사건인 것은 ㄷ이다.

002 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $A^C=\{3, 4, 6, 7\}$이므로 $n(A^C)=4$

ㄴ. $A\cap B=\{2\}$이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $A^C=\{3, 4, 6, 7\}$, $B^C=\{1, 5, 7\}$에서 $A^C\cap B^C=\{7\}$이므로 A^C과 B^C은 서로 배반사건이 아니다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

003 답 ④

바닥에 놓인 면에 적힌 두 수를 a, b라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 표본공간 S는

$S=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), \cdots, (4, 4)\}$

$\therefore n(S)=16$

이때 $A=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$이므로

$n(A)=4 \quad \therefore n(A^C)=12$

사건 A와 배반인 사건의 개수는 집합 A^C의 부분집합의 개수와 같으므로 2^{12}

004 답 8

사건 A와도 배반이고 사건 B^C과도 배반인 사건은 $A^C\cap(B^C)^C$, 즉 $A^C\cap B$의 부분집합이다.

$A^C=\{-3, -2, 2, 3\}$, $B=\{-3, 0, 2, 3\}$이므로

$A^C\cap B=\{-3, 2, 3\}$

따라서 사건 C의 개수는 집합 $\{-3, 2, 3\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^3=8$

005 답 ④

2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

나오는 두 눈의 수를 a, b라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$를 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 경우는

(i) $a+b$가 3인 경우

$(1, 2), (2, 1)$ ➡ 2가지

(ii) $a+b$가 7인 경우

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ ➡ 6가지

(iii) $a+b$가 11인 경우

$(5, 6), (6, 5)$ ➡ 2가지

(i), (ii), (iii)에서 두 눈의 수의 합을 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 경우의 수는

$2+6+2=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

006 답 ②

집합 A의 부분집합의 개수는

$2^6=64$

집합 A의 부분집합 중에서 두 원소 5, 7을 모두 포함하는 부분집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$

007 답 ④

$360=2^3\times3^2\times5$이므로 360의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(2+1)(1+1)=24$

짝수는 2를 소인수로 가지므로 360의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $2^2\times3^2\times5$의 양의 약수의 개수와 같다.

즉, 360의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는

$(2+1)(2+1)(1+1)=18$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$

008 답 $\frac{14}{25}$

나오는 모든 경우의 수는

$5\times5=25$

방정식 $ax^2+bx+1=0$의 판별식을 D라고 하면 이 방정식이 실근을 가질 조건은

$D=b^2-4a\geq0$

$\therefore$ $4a\leq b^2$

이 부등식을 만족하는 경우는

(i) $a=1$일 때, $b=3, 5, 7, 9$ ➡ 4가지

(ii) $a=3$일 때, $b=5, 7, 9$ ➡ 3가지

(iii) $a=5$일 때, $b=5, 7, 9$ ➡ 3가지

(iv) $a=7$일 때, $b=7, 9$ ➡ 2가지

(v) $a=9$일 때, $b=7, 9$ ➡ 2가지

(i)~(v)에서 주어진 이차방정식이 실근을 가지는 경우의 수는

$4+3+3+2+2=14$

따라서 구하는 확률은 $\frac{14}{25}$

009 답 29

2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

나오는 두 눈의 수를 a, b라고 할 때, 한 수가 다른 수의 약수가 되는 경우는

(i) $a=1$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ➡ 6가지

(ii) $a=2$일 때, $b=1, 2, 4, 6$ ➡ 4가지

(iii) $a=3$일 때, $b=1, 3, 6$ ➡ 3가지

(iv) $a=4$일 때, $b=1, 2, 4$ ➡ 3가지

(v) $a=5$일 때, $b=1, 5$ ➡ 2가지

(vi) $a=6$일 때, $b=1, 2, 3, 6$ ➡ 4가지

(i)~(vi)에서 한 수가 다른 수의 약수가 되는 경우의 수는

$6+4+3+3+2+4=22$

따라서 한 수가 다른 수의 약수가 될 확률은 $\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$이므로

$p=18$, $q=11$

$\therefore$ $p+q=29$

010 답 $\frac{1}{21}$

7명이 일렬로 서는 경우의 수는

$7!=5040$

남학생을 양 끝에 고정시키고 그 사이에 여학생이 일렬로 서는 경우의 수는 $5!=120$, 남학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 양 끝에 남학생이 서는 경우의 수는

$120\times2=240$

따라서 구하는 확률은 $\frac{240}{5040}=\frac{1}{21}$

011 답 $\frac{1}{5}$

만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$5!=120$

5의 배수이면 일의 자리에 올 수 있는 숫자가 5뿐이므로 5의 배수의 개수는

$1\times4!=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

012 답 ①

5명을 탑승하는 순서대로 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

부부를 한 명으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$, 부부끼리 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 부부가 연이어 탑승하는 경우의 수는

$24\times2=48$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

013 답 $\frac{11}{20}$

만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

${}_5P_4=120$

만들 수 있는 자연수가 3200보다 큰 경우는

(i) 천의 자리에 3이 오는 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 5의 3가지이고, 나머지 자리에는 3개의 숫자에서 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$3\times{}_3P_2=3\times6=18$

(ii) 천의 자리에 4가 오는 경우

나머지 자리에는 4개의 숫자에서 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_4P_3=24$

(iii) 천의 자리에 5가 오는 경우

나머지 자리에는 4개의 숫자에서 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_4P_3=24$

(i), (ii), (iii)에서 3200보다 큰 자연수의 개수는

$18+24+24=66$

따라서 구하는 확률은 $\frac{66}{120}=\frac{11}{20}$

014 답 $\frac{1}{3}$

4명이 일렬로 서는 경우의 수는 $4!=24$
키가 작은 학생부터 차례로 A, B, C, D라고 하면 앞에서 두 번째 자리에 서는 학생이 이웃한 두 학생보다 키가 큰 경우는
(i) 키가 가장 큰 D가 두 번째 자리에 서는 경우
나머지 자리에는 어느 학생이 서도 되므로 그 경우의 수는
$3!=6$
(ii) 키가 두 번째로 큰 C가 두 번째 자리에 서는 경우
D와 C는 이웃하여 설 수 없으므로 D는 네 번째 자리에만 설 수 있다.
나머지 두 자리에 A, B가 서는 경우의 수는
$2!=2$
(i), (ii)에서 앞에서 두 번째 학생이 이웃한 두 학생보다 키가 크도록 서는 경우의 수는
$6+2=8$
따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

015 답 107

8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(8-1)!=7!=5040$
각 부부를 1명씩으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!=6$, 각 부부끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2!\times2!\times2!\times2!=16$이므로 각 부부끼리 이웃하도록 앉는 경우의 수는
$6\times16=96$
따라서 부부끼리 이웃하도록 앉을 확률은 $\frac{96}{5040}=\frac{2}{105}$이므로
$p=105,\ q=2 \qquad \therefore\ p+q=107$

016 답 $\frac{1}{5}$

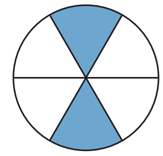
7개의 숫자를 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(7-1)!=6!=720$
홀수 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(4-1)!=3!=6$, 홀수 사이사이의 4개의 자리에서 3개를 택하여 짝수를 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$이므로 짝수끼리 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는
$6\times24=144$
따라서 구하는 확률은 $\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

017 답 $\frac{1}{7}$

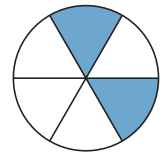
8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(8-1)!=7!=5040$
여학생 1명의 자리가 결정되면 다른 여학생의 자리는 고정되므로 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(7-1)!=6!=720$
따라서 구하는 확률은 $\frac{720}{5040}=\frac{1}{7}$

018 답 $\frac{3}{5}$

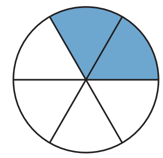
(i) 파란색끼리 마주 보도록 색을 칠하는 경우의 수는
$(4-1)!\times2=3!\times2=12$



(ii) 파란색과 파란색 사이를 한 칸 비우고 색을 칠하는 경우의 수는
$(4-1)!\times4=3!\times4=24$



(iii) 파란색끼리 이웃하도록 색을 칠하는 경우의 수는
$(4-1)!\times4=3!\times4=24$



(i), (ii), (iii)에서 모든 경우의 수는 $12+24+24=60$
(i), (ii)에서 파란색을 칠한 영역끼리 이웃하지 않는 경우의 수는
$12+24=36$
따라서 구하는 확률은 $\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$

019 답 ③

맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이므로 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는
$4\times{}_5\Pi_5=4\times5^5=12500$
짝수이면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4의 3가지이므로 짝수의 개수는
$4\times{}_5\Pi_4\times3=4\times5^4\times3=7500$
따라서 구하는 확률은 $\frac{7500}{12500}=\frac{3}{5}$

020 답 $\frac{1}{4}$

2개의 문자에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는
${}_2\Pi_4=2^4=16$
A를 양 끝에 고정시키고 그 사이에 2개의 문자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는
${}_2\Pi_2=2^2=4$
따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

021 답 14

만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$
만들 수 있는 자연수가 2200보다 큰 경우는
(i) 천의 자리에 2가 오는 경우
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3의 2가지이고, 나머지 자리에는 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는
$2\times{}_3\Pi_2=2\times3^2=18$

(ii) 천의 자리에 3이 오는 경우

나머지 자리에는 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

(i), (ii)에서 2200보다 큰 자연수의 개수는

$18+27=45$

따라서 네 자리의 자연수가 2200보다 클 확률은 $\frac{45}{81}=\frac{5}{9}$이므로

$p=9,\ q=5$

$\therefore\ p+q=14$

022 답 $\frac{5}{32}$

4명의 학생에서 중복을 허용하여 5명을 택하여 서로 다른 연필을 나누어 주는 경우의 수는

${}_4\Pi_5=4^5=1024$

연필 5자루 중에서 2자루를 택하여 A와 B에게 먼저 1자루씩 나누어 주고, 2명의 학생 C, D에서 중복을 허용하여 3명을 택하여 나머지 연필을 나누어 주는 경우의 수는

${}_5P_2\times{}_2\Pi_3=20\times2^3=160$

따라서 구하는 확률은 $\frac{160}{1024}=\frac{5}{32}$

023 답 ③

함수 f의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

치역의 모든 원소의 곱이 홀수인 함수의 개수는 치역의 원소가 모두 홀수인 함수, 즉 집합 X에서 집합 $\{3,\ 5\}$로의 함수의 개수와 같으므로

${}_2\Pi_4=2^4=16$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{256}=\frac{1}{16}$

024 답 ④

6개의 깃발을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times3!}=60$

노란색 깃발과 파란색 깃발을 양 끝에 고정시키고 그 사이에 빨간색 깃발 1개, 노란색 깃발 1개, 파란색 깃발 2개를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$, 양 끝의 노란색 깃발과 파란색 깃발끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 양 끝에 노란색 깃발과 파란색 깃발이 오는 경우의 수는

$12\times2=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$

025 답 $\frac{1}{7}$

brother에 있는 7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!}=2520$

자음을 한 문자 B로 생각하여 B, o, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!=6$, 자음 b, r, r, t, h끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$이므로 자음끼리 이웃하는 경우의 수는

$6\times60=360$

따라서 구하는 확률은 $\frac{360}{2520}=\frac{1}{7}$

026 답 $\frac{18}{35}$

지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{7!}{4!\times3!}=35$

지점 A에서 지점 P를 지나 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{3!}{2!\times1!}=6\times3=18$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{35}$

027 답 $\frac{1}{9}$

함수 f의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

$f(1)+f(2)+f(3)=8$인 경우의 수는 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

028 답 ④

만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는

${}_2\Pi_6=2^6=64$

여섯 자리의 자연수의 각 자리의 숫자를 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$라고 하면 3의 배수이려면 $a+b+c+d+e+f$가 3의 배수이어야 한다.

(i) $a+b+c+d+e+f=6$인 경우

$a=b=c=d=e=f=1$ ➡ 1가지

(ii) $a+b+c+d+e+f=9$인 경우

$1+1+1+2+2+2=9$이므로 3개의 숫자 1과 3개의 숫자 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times3!}=20$

(iii) $a+b+c+d+e+f=12$인 경우

$a=b=c=d=e=f=2$ ➡ 1가지

(i), (ii), (iii)에서 3의 배수의 개수는 $1+20+1=22$

따라서 구하는 확률은 $\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$

029 답 ④

공 7개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_7C_2=21$

흰 공 4개 중에서 1개, 검은 공 3개 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_3C_1=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

030 답 $\frac{2}{5}$

6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=15$

A와 B가 모두 뽑히는 경우의 수는 나머지 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

031 답 $\frac{3}{14}$

집합 A의 부분집합의 개수는 $2^3=8$이므로 8개의 부분집합 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

두 집합이 모두 집합 $\{b, c\}$의 부분집합인 경우의 수는 $\{b, c\}$의 부분집합 4개 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$

032 답 $\frac{14}{45}$

10명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_2=45$

같은 반의 학생을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2+{}_2C_2+{}_3C_2=10+1+3=14$

따라서 구하는 확률은 $\frac{14}{45}$

033 답 $\frac{5}{28}$

공 8개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_8C_3=56$

가장 작은 수가 3인 경우의 수는 3이 적힌 공을 꺼내고, 4, 5, 6, 7, 8이 적힌 공 5개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$1\times{}_5C_2=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$

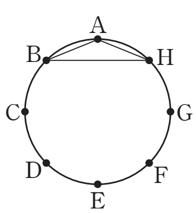
034 답 $\frac{3}{7}$

8개의 점 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

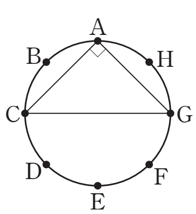
${}_8C_3=56$

이등변삼각형이 되는 경우를 모양에 따라 나누어 생각하면

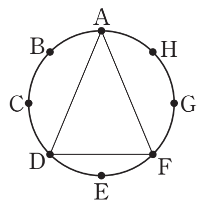
(ⅰ) 오른쪽 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하면서 ∠A가 둔각인 이등변삼각형 ABH와 합동인 삼각형은 나머지 점 B, …, 점 H에 대하여 존재하므로 한 내각이 둔각인 이등변삼각형의 개수는 8



(ⅱ) 오른쪽 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하면서 ∠A=90°인 이등변삼각형 ACG와 합동인 삼각형은 나머지 점 B, …, 점 H에 대하여 존재하므로 한 내각이 직각인 이등변삼각형의 개수는 8



(ⅲ) 오른쪽 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하면서 ∠A가 예각인 이등변삼각형 ADF와 합동인 삼각형은 나머지 점 B, …, 점 H에 대하여 존재하므로 세 내각이 모두 예각인 이등변삼각형의 개수는 8



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 이등변삼각형의 개수는

$8+8+8=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

035 답 $\frac{7}{15}$

3종류의 꽃에서 중복을 허용하여 8송이를 고르는 경우의 수는

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

3종류의 꽃이 모두 한 송이 이상씩 포함되려면 먼저 3종류의 꽃을 한 송이씩 고르고, 나머지 5송이를 고르면 되므로 그 경우의 수는

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 구하는 확률은 $\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$

036 답 ①

3종류의 과일에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 경우의 수는

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

사과를 2개만 택하려면 배와 귤 2종류에서 나머지 4개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{28}$

037 답 $\frac{10}{21}$

3개의 숫자에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 곱하는 경우의 수는

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

곱한 결과가 10의 배수이려면 2, 5는 반드시 뽑아야 하므로 3개의 숫자에서 나머지 3개를 택하는 경우의 수는

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{21}$

038 답 $\frac{5}{16}$

함수 f의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

$i<j$이면 $f(i)\le f(j)$에서

$f(1)\le f(2)\le f(3)$

B의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 작은 수부터 순서대로 A의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 조건을 만족하는 함수 f의 개수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$

039 답 $\frac{7}{12}$

방정식 $x+y+z=7$을 만족하는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

$x\geq2$인 경우는 먼저 x를 2개 택하고, 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 나머지 5개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 구하는 확률은 $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$

040 답 $\frac{35}{216}$

한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

(i) $a_1\leq a_2\leq a_3$인 경우

6개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

${}_6H_3={}_8C_3=56$

(ii) $a_1\leq a_2=a_3$인 경우

6개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

${}_6H_2={}_7C_2=21$

(i), (ii)에서 $a_1\leq a_2<a_3$인 경우의 수는

$56-21=35$

따라서 구하는 확률은 $\frac{35}{216}$

핵심 유형 48~49쪽

유형09 답 $\frac{1}{600}$

제품 A가 불량일 확률은

$a=\frac{20}{3000}=\frac{1}{150}$

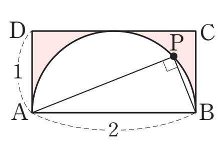
제품 B가 불량일 확률은

$b=\frac{30}{6000}=\frac{1}{200}$

$\therefore\ a-b=\frac{1}{150}-\frac{1}{200}=\frac{1}{600}$

유형10 답 $\frac{3}{4}$

오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원을 그리면 반원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 직각삼각형이므로 삼각형 PAB가 예각삼각형이려면 점 P가 색칠한 부분에 있어야 한다.



따라서 삼각형 PAB가 예각삼각형일 확률은

$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=\frac{2-\frac{1}{2}\pi}{2}=1-\frac{1}{4}\pi$

$\therefore\ p=1,\ q=-\frac{1}{4}\qquad \therefore\ p+q=\frac{3}{4}$

유형11 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. [반례] $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(B)=\frac{3}{4}$이면

$P(A)+P(B)=\frac{3}{2}$이므로 $P(A)+P(B)>1$

ㄴ. $P(S)=1$, $P(\varnothing)=0$이므로

$P(S)-P(\varnothing)=1$

ㄷ. $\varnothing\subset(A\cup B)\subset S$이므로

$0\leq P(A\cup B)\leq1$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

유형12 답 $\frac{2}{3}$

$A\cup B=S$에서 $P(A\cup B)=1$

A와 B가 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$1=\frac{1}{2}P(B)+P(B)$, $1=\frac{3}{2}P(B)$

$\therefore\ P(B)=\frac{2}{3}$

유형13 답 $\frac{33}{100}$

1부터 100까지의 자연수 중에서 4의 배수는 25개, 6의 배수는 16개이므로

$P(A)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{16}{100}=\frac{4}{25}$

4의 배수이면서 6의 배수인 수, 즉 12의 배수는 8개이므로

$P(A\cap B)=\frac{8}{100}=\frac{2}{25}$

$\therefore\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{4}{25}-\frac{2}{25}=\frac{33}{100}$

유형14 답 $\frac{22}{35}$

파란 공이 1개만 나오는 사건을 A, 하나도 나오지 않는 사건을 B라고 하자.

A는 파란 공 3개 중에서 1개, 빨간 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 사건이므로

$P(A)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_2}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$

B는 빨간 공 4개 중에서 3개를 꺼내는 사건이므로

$P(B)=\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$

A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=\frac{22}{35}$

유형15 답 $\dfrac{9}{20}$

뽑은 2개의 제비 중에서 적어도 1개가 당첨 제비인 사건을 A라고 하면 A^C은 당첨 제비가 아닌 제비만 2개 뽑는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_{12}\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}=\dfrac{66}{120}=\dfrac{11}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$\quad=1-\dfrac{11}{20}=\dfrac{9}{20}$

유형16 답 ②

5개의 동전 중에서 뒷면이 2개 이상 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 5개의 동전 중에서 뒷면이 0개 또는 1개 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{1+5}{2^5}=\dfrac{6}{32}=\dfrac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$\quad=1-\dfrac{3}{16}=\dfrac{13}{16}$

핵심 유형 **완성**하기 50~54쪽

041 답 $\dfrac{4}{25}$

A 공장에서 생산한 장난감이 불량품일 확률은

$a=\dfrac{5}{2000}=\dfrac{1}{400}$

B 공장에서 생산한 장난감이 불량품일 확률은

$b=\dfrac{2}{5000}=\dfrac{1}{2500}$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{\frac{1}{2500}}{\frac{1}{400}}=\dfrac{4}{25}$

042 답 $\dfrac{5}{12}$

720명의 학생 중에서 혈액형이 A형인 학생이 300명이므로 구하는 확률은

$\dfrac{300}{720}=\dfrac{5}{12}$

043 답 ④

3점 슛을 성공시킬 확률은

$\dfrac{400}{1800}=\dfrac{2}{9}$

따라서 54번의 슛을 던져서 3점 슛을 성공시키는 횟수는

$\dfrac{2}{9}\times 54=12$

044 답 500

바닥에 놓인 면에 적힌 수가 5일 확률을 a라고 하면

$0.26+0.28+a+0.22=1$

$\therefore a=0.24$

따라서 $\dfrac{120}{n}=0.24$이므로

$n=\dfrac{120}{0.24}=500$

045 답 ②

상자 안에 들어 있는 노란색 탁구공의 개수를 n이라고 하자.

2개가 모두 노란색 탁구공일 확률이 $\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$이므로

$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{5}$

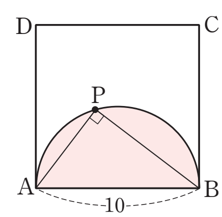
$\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{1}{105}=\dfrac{1}{5}$

$n(n-1)=7\times 6$

$\therefore n=7$ ($\because$ n은 자연수)

046 답 $\dfrac{1}{8}\pi$

오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원을 그리면 반원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 직각삼각형이므로 삼각형 PAB가 둔각삼각형이려면 점 P가 색칠한 부분에 있어야 한다.



따라서 구하는 확률은

$\dfrac{(\text{색칠한 반원의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=\dfrac{\frac{25}{2}\pi}{100}=\dfrac{1}{8}\pi$

047 답 $\dfrac{1}{5}$

반지름의 길이가 5인 원의 넓이는 25π

색칠한 부분의 넓이는 $9\pi-4\pi=5\pi$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{5\pi}{25\pi}=\dfrac{1}{5}$

048 답 ⑤

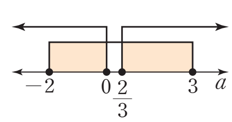
이차방정식 $x^2-6ax+6a=0$의 판별식을 D라고 할 때, 이 방정식이 실근을 가지려면

$\dfrac{D}{4}=9a^2-6a\geq 0$

$3a(3a-2)\geq 0$

$\therefore a\leq 0$ 또는 $a\geq\dfrac{2}{3}$

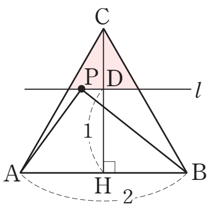
그런데 $-2\leq a\leq 3$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 확률은



$\dfrac{\{0-(-2)\}+\left(3-\frac{2}{3}\right)}{3-(-2)}=\dfrac{13}{15}$

049 답 6

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{\mathrm{HD}}=1$을 만족하는 선분 CH 위의 점을 D라고 하자. 점 D를 지나고 선분 AB에 평행한 직선 l 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이는 1이므로 삼각형 PAB의 넓이가 1 이상이려면 점 P가 색칠한 부분에 있어야 한다.



삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$

삼각형 ABC는 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{3}-1$

삼각형 ABC와 색칠한 삼각형은 닮음이고 닮음비가 $\sqrt{3}:(\sqrt{3}-1)$이므로 넓이의 비는 $(\sqrt{3})^2:(\sqrt{3}-1)^2$, 즉 $3:(4-2\sqrt{3})$이다.

따라서 삼각형 PAB의 넓이가 1보다 클 확률은

$\frac{(\text{색칠한 삼각형의 넓이})}{(\triangle\mathrm{ABC}\text{의 넓이})}=\frac{4-2\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$\therefore p=\frac{4}{3},\ q=-\frac{2}{3}$

$\therefore 3(p-q)=3\left\{\left(\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)\right\}=6$

050 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $0\le \mathrm{P}(A)\le 1,\ 0\le \mathrm{P}(B)\le 1$이므로
$-1\le \mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)\le 1$

ㄴ. $A\subset(A\cup B)$이므로
$\mathrm{P}(A)\le \mathrm{P}(A\cup B)$

ㄷ. $0\le \mathrm{P}(A)\le 1,\ 0\le \mathrm{P}(B)\le 1$이므로
$0\le \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\le 1$
이때 $\mathrm{P}(S)=1$이므로
$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\le \mathrm{P}(S)$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

051 답 ㄱ

ㄱ. A와 B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

ㄴ. [반례] $S=\{1,\ 2,\ 3\},\ A=\{1\},\ B=\{2\}$이면 A와 B는 서로 배반사건이지만
$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\ne 1$

ㄷ. [반례] $S=\{1,\ 2,\ 3\},\ A=\{1\},\ B=\{2\}$이면 $A\cup B=\{1,\ 2\}$이고 A와 B는 서로 배반사건이지만
$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(S)=1$
$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)\ne \mathrm{P}(S)$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

052 답 $\frac{1}{2}$

A와 B가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{2}{3}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{3}\mathrm{P}(A),\ \frac{4}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}\qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

053 답 $\frac{3}{8}$

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^c)=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

054 답 ①

$\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\cap B^c)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$
$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

이때 A와 B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{7}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\mathrm{P}((A\cup B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$
$=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

다른 풀이 A와 B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로
$A\cap B^c=A,\ A^c\cap B=B$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\mathrm{P}((A\cup B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$
$=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

055 답 $\frac{11}{20}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{31}{20}-\mathrm{P}(A\cap B)\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\mathrm{P}(A)\le \mathrm{P}(A\cup B),\ \mathrm{P}(B)\le \mathrm{P}(A\cup B),\ 0\le \mathrm{P}(A\cup B)\le 1$이므로

$\frac{4}{5}\le \mathrm{P}(A\cup B)\le 1$

㉠에서 $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최소이려면 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대이어야 하므로 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 최솟값은 $\mathrm{P}(A\cup B)=1$일 때 $\frac{11}{20}$이다.

056 답 ②

$\mathrm{P}(B)=\frac{6}{5}\mathrm{P}(A),\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}\mathrm{P}(A)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\frac{6}{5}\mathrm{P}(A)-\frac{2}{5}\mathrm{P}(A)=\frac{9}{5}\mathrm{P}(A)$

$\therefore \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cup B)}=\frac{\frac{2}{5}\mathrm{P}(A)}{\frac{9}{5}\mathrm{P}(A)}=\frac{2}{9}$

057 답 ②

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29\}$,

$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ 30\}$, $A\cap B=\{3\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{30}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{30}=\frac{19}{30}$

058 답 $\frac{13}{28}$

꺼낸 2개의 공 중에서 1개가 3이 적힌 공인 사건을 A, 4가 적힌 공인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1\times1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{1}{28}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{28}=\frac{13}{28}$

059 답 $\frac{1}{3}$

두 눈의 수의 합이 6의 배수인 사건을 A, 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 B라고 하자.

이때 나오는 두 눈의 수를 a, b라고 하면 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여

$A=\{(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1),\ (6,\ 6)\}$

$B=\{(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3),\ (3,\ 5),\ (5,\ 1),$
$(5,\ 3),\ (5,\ 5)\}$

$A\cap B=\{(1,\ 5),\ (3,\ 3),\ (5,\ 1)\}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{6}{6\times6}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{9}{6\times6}=\frac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{6\times6}=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

060 답 $\frac{13}{16}$

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4, 5의 4가지이므로 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 $4\times4!=96$

만든 자연수가 짝수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라고 하자.

짝수이면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4이고, 5의 배수이면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5이다.

(i) 일의 자리에 0이 오는 경우

나머지 자리에는 4개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 자연수의 개수는 $4!=24$

(ii) 일의 자리에 2가 오는 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 4, 5의 3가지이고, 나머지 자리에는 3개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 자연수의 개수는 $3\times3!=18$

(iii) 일의 자리에 4가 오는 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5의 3가지이고, 나머지 자리에는 3개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 자연수의 개수는 $3\times3!=18$

(iv) 일의 자리에 5가 오는 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4의 3가지이고, 나머지 자리에는 3개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 자연수의 개수는 $3\times3!=18$

(i), (ii), (iii)에서 짝수의 개수는

$24+18+18=60$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{60}{96}=\frac{5}{8}$

(i), (iv)에서 5의 배수의 개수는

$24+18=42$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{42}{96}=\frac{7}{16}$

$A\cap B$는 10의 배수, 즉 일의 자리에 0이 오는 경우이므로 (i)에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{24}{96}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{5}{8}+\frac{7}{16}-\frac{1}{4}=\frac{13}{16}$

061 답 $\frac{4}{9}$

꺼낸 2개의 공이 모두 흰색인 사건을 A, 모두 검은색인 사건을 B라고 하자.

A는 흰 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

B는 검은 공 5개 중에서 2개를 꺼내는 사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{5}{18}=\frac{4}{9}$

062 답 $\frac{1}{4}$

선생님 1명이 맨 앞에 서는 사건을 A, 맨 뒤에 서는 사건을 B라고 하자.

A는 학생 7명을 선생님 뒤에 일렬로 배열하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{7!}{8!}=\frac{1}{8}$

B는 학생 7명을 선생님 앞에 일렬로 배열하는 사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{7!}{8!}=\frac{1}{8}$

A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

063 답 $\frac{1}{4}$

두 눈의 수의 합이 5인 사건을 A, 8인 사건을 B라고 하자.
이때 나오는 두 눈의 수를 a, b라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여
$A=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$,
$B=\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6\times6}=\frac{1}{9}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6\times6}=\frac{5}{36}$
A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{9}+\frac{5}{36}=\frac{1}{4}$

064 답 ①

만들 수 있는 일곱 자리의 자연수의 개수는 $\frac{7!}{4!}=210$
만든 자연수의 십의 자리의 숫자가 2인 사건을 A, 3인 사건을 B라고 하자.
A는 십의 자리에 2가 오고 나머지 6개의 숫자를 일렬로 배열하는 사건이므로 그 경우의 수는
$\frac{6!}{4!}=30$ $\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}$
B는 십의 자리에 3이 오고 나머지 6개의 숫자를 일렬로 배열하는 사건이므로 그 경우의 수는
$\frac{6!}{3!}=120$ $\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{120}{210}=\frac{4}{7}$
A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}=\frac{5}{7}$

065 답 ④

15개의 공 중에서 3의 배수가 적힌 공은 3, 6, 9, 12, 15의 5개이므로 3의 배수가 아닌 수가 적힌 공은 10개이다.
꺼낸 2개의 공 중에서 적어도 1개가 3의 배수가 적힌 공인 사건을 A라고 하면 A^C은 2개 모두 3의 배수가 아닌 수가 적힌 공인 사건이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{45}{105}=\frac{3}{7}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

066 답 ④

나오는 두 눈의 수의 곱이 4의 배수가 아닌 사건을 A라고 하면 A^C은 곱이 4의 배수인 사건이다.
이때 나오는 두 눈의 수를 a, b라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 ab가 4의 배수인 경우는
$(1, 4), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3),$
$(4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 2), (6, 4), (6, 6)$ ➡ 15가지
$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

067 답 ②

6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
어린이 사이에 적어도 1명의 어른이 앉는 사건을 A라고 하면 A^C은 어린이끼리 이웃하도록 앉는 사건이다.
어린이를 한 명으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=24$, 어린이끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2!=2$이므로 어린이끼리 이웃하도록 앉는 경우의 수는
$24\times2=48$
$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

068 답 $\frac{61}{125}$

함숫값이 2인 원소가 집합 X에 적어도 1개 있는 함수인 사건을 A라고 하면 A^C은 함숫값이 2인 원소가 집합 X에 없는 함수인 사건이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\Pi_3}{{}_5\Pi_3}=\frac{64}{125}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{64}{125}=\frac{61}{125}$

069 답 $\frac{31}{32}$

앞면이 나온 동전의 개수와 뒷면이 나온 동전의 개수의 차가 4 이하인 사건을 A라고 하면 A^C은 앞면이 나온 동전의 개수와 뒷면이 나온 동전의 개수의 차가 5 이상인 사건이다.
이때 동전의 개수의 차는 5가 될 수 없으므로 A^C은 개수의 차가 6, 즉 모두 앞면만 나오거나 모두 뒷면만 나오는 사건이다.
$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{1+1}{2^6}=\frac{2}{64}=\frac{1}{32}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

070 답 $\frac{41}{55}$

남학생이 2명 이하로 뽑히는 사건을 A라고 하면 A^C은 남학생만 3명 뽑히는 사건이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{56}{220}=\frac{14}{55}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{14}{55}=\frac{41}{55}$

071 답 $\frac{21}{32}$

집합 X의 부분집합의 개수는
$2^6=64$
택한 부분집합의 원소의 개수가 3 이상인 사건을 A라고 하면 A^C은 부분집합의 원소의 개수가 2 이하인 사건이다.

A^C은 집합 X의 원소 6개 중에서 0개를 택하거나 1개를 택하거나 2개를 택하여 만든 부분집합인 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2}{64}=\frac{11}{32}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{11}{32}=\frac{21}{32}$

072 답 $\frac{65}{84}$

꺼낸 동전의 금액의 합이 200원 미만인 사건을 A라고 하면 A^C은 금액의 합이 200원 이상인 사건이다.

A^C은 100원짜리 동전 2개와 다른 동전 1개를 꺼내거나 100원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 2개를 꺼내는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_2C_2\times{}_7C_1+{}_2C_1\times{}_4C_2}{{}_9C_3}=\frac{19}{84}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{19}{84}=\frac{65}{84}$

핵심 유형 **최종 점검**하기 • 55~57쪽

1 답 ⑤

유형 01 시행과 사건

$A=\{2, 8, 10\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$, $C=\{3, 9\}$

① $n(A)=3$

② $A\cap B=\{2\}$이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

③ $A\cap C=\varnothing$이므로 A와 C는 서로 배반사건이다.

④ $B\cap C=\{3\}$이므로 B와 C는 서로 배반사건이 아니다.

⑤ $C^C=\{2, 5, 7, 8, 10\}$이므로 $A\subset C^C$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

2 답 ③

유형 02 수학적 확률

나오는 모든 경우의 수는

$5\times5=25$

공에 적힌 두 수를 a, b라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 ab가 5의 배수인 경우는

$(1, 5)$, $(2, 5)$, $(4, 5)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$, $(5, 7)$, $(7, 5)$ ➡ 9가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{25}$

3 답 $\frac{5}{8}$

유형 03 순열을 이용하는 확률

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이므로 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$4\times4!=96$

짝수이면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4이다.

(i) 일의 자리에 0이 오는 경우

나머지 자리에는 4개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 자연수의 개수는 $4!=24$

(ii) 일의 자리에 2가 오는 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 4의 3가지이고, 나머지 자리에는 3개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 자연수의 개수는 $3\times3!=18$

(iii) 일의 자리에 4가 오는 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3의 3가지이고, 나머지 자리에는 3개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 자연수의 개수는 $3\times3!=18$

(i), (ii), (iii)에서 짝수의 개수는

$24+18+18=60$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{96}=\frac{5}{8}$

4 답 $\frac{1}{10}$

유형 04 원순열을 이용하는 확률

6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

여자 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(3-1)!=2!=2$, 여자 사이사이의 3개의 자리에 남자 3명이 앉는 경우의 수는 ${}_3P_3=6$이므로 여자와 남자가 번갈아 앉는 경우의 수는

$2\times6=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

5 답 $\frac{24}{125}$

유형 05 중복순열을 이용하는 확률

5개의 숫자에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

각 자리의 숫자가 모두 다르려면 5개의 숫자 중에서 서로 다른 4개를 택하여 자연수를 만들어야 하므로 자연수의 개수는

${}_5P_4=120$

따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{625}=\frac{24}{125}$

6 답 $\frac{1}{6}$

유형 06 같은 것이 있는 순열을 이용하는 확률

destiny에 있는 7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$7!=5040$

t, s, y를 같은 문자 T로 생각하여 d, e, T, T, i, n, T를 일렬로 배열한 후 첫 번째 T를 y로, 두 번째 T를 t로, 세 번째 T를 s로 바꾸면 되므로 그 경우의 수는

$\frac{7!}{3!}=840$

따라서 구하는 확률은 $\frac{840}{5040}=\frac{1}{6}$

7 답 $\frac{11}{63}$

유형 07 조합을 이용하는 확률

9장의 카드 중에서 4장을 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_4=126$

꺼낸 카드에 적힌 수 중에서 가장 작은 수를 a, 가장 큰 수를 b라고 할 때, $a+b$가 9인 경우는 다음과 같다.

(i) $a=1$, $b=8$인 경우

나머지 2장은 2, 3, 4, 5, 6, 7이 적힌 카드 중에서 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

${}_6C_2=15$

(ii) $a=2$, $b=7$인 경우

나머지 2장은 3, 4, 5, 6이 적힌 카드 중에서 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

${}_4C_2=6$

(iii) $a=3$, $b=6$인 경우

나머지 2장은 4, 5가 적힌 카드 중에서 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

${}_2C_2=1$

(i), (ii), (iii)에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 9인 경우의 수는 $15+6+1=22$

따라서 구하는 확률은 $\frac{22}{126}=\frac{11}{63}$

8 답 62

유형 08 중복조합을 이용하는 확률

4명에게 같은 구슬 9개를 나누어 주는 경우의 수는

${}_4H_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$

A가 3개를 받으려면 먼저 A에게 3개를 나누어 주고 B, C, D의 3명에게 나머지 6개를 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

따라서 A가 3개를 받을 확률은 $\frac{28}{220}=\frac{7}{55}$이므로

$p=55$, $q=7$

$\therefore\ p+q=62$

9 답 7

유형 09 통계적 확률

서로 다른 색의 바둑돌이 나올 확률은 $\frac{7}{15}$

흰 바둑돌의 개수를 n이라고 하면 검은 바둑돌의 개수는 $10-n$이므로 서로 다른 색의 바둑돌이 나올 확률은

$\frac{{}_nC_1\times{}_{10-n}C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}$

$\frac{n(10-n)}{45}=\frac{7}{15}$, $n(10-n)=21$

$n^2-10n+21=0$, $(n-3)(n-7)=0$

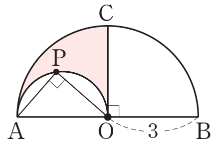
$\therefore\ n=3$ 또는 $n=7$

이때 흰 바둑돌이 검은 바둑돌보다 많이 들어 있으므로

$n=7$

10 답 $\frac{1}{4}$

유형 10 도형을 이용하는 확률



오른쪽 그림에서 삼각형 PAO가 직각삼각형이려면 선분 AO를 지름으로 하는 반원 위에 점 P가 있거나 $\angle$BOC$=90°$인 점 C를 잡을 때 선분 OC 위에 점 P가 있어야 한다.

따라서 삼각형 PAO가 예각삼각형이 되려면 점 P가 색칠한 부분에 있어야 하므로 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\overline{\text{AB}}\text{를 지름으로 하는 반원의 넓이})}=\frac{\frac{9}{4}\pi-\frac{9}{8}\pi}{\frac{9}{2}\pi}=\frac{1}{4}$$

11 답 ③

유형 11 확률의 기본 성질

ㄱ. $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$이므로

$\mathrm{P}(S)-1=\mathrm{P}(\varnothing)$

ㄴ. $\varnothing\subset(A\cap B)\subset S$이므로

$0\le\mathrm{P}(A\cap B)\le1$

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면

$A-B=\{1\}$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A-B)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A-B)>\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

12 답 ⑤

유형 12 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률의 계산

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}$에서 $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{5}{12}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

13 답 $\frac{3}{10}$

유형 12 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률의 계산

$\mathrm{P}(B)=2\times\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$이므로 $\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

A와 B^C이 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}((A\cup B^C)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B^C)$

$=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

다른 풀이 A와 B^C은 서로 배반사건이므로

$A\cap B^C=\varnothing$ $\quad\therefore\ A\subset B$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$

14 답 ⑤

유형 13 확률의 덧셈정리 – 배반사건이 아닌 경우

두 주머니에서 각각 1개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_1 \times {}_8C_1 = 48$

두 공에 적힌 수의 합이 12 이상인 사건을 A, 합이 6의 배수인 사건을 B라고 하자.

이때 공에 적힌 두 수를 a, b라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여

$A = \{(4, 8), (5, 7), (5, 8), (6, 6), (6, 7), (6, 8)\}$,

$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (4, 8), (5, 7), (6, 6)\}$,

$A \cap B = \{(4, 8), (5, 7), (6, 6)\}$이므로

$P(A) = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{16} = \frac{11}{48}$

15 답 $\frac{13}{30}$

유형 13 확률의 덧셈정리 – 배반사건이 아닌 경우

6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$

2개의 b가 이웃하는 사건을 A, 3개의 c가 모두 이웃하는 사건을 B라고 하자.

A는 2개의 b를 하나의 문자로 생각하여 일렬로 배열하는 사건이므로 그 경우의 수는

$\frac{5!}{3!} = 20 \qquad \therefore P(A) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

B는 3개의 c를 하나의 문자로 생각하여 일렬로 배열하는 사건이므로 그 경우의 수는

$\frac{4!}{2!} = 12 \qquad \therefore P(B) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

$A \cap B$는 2개의 b를 하나의 문자로, 3개의 c를 또 다른 하나의 문자로 생각하여 일렬로 배열하는 사건이므로 그 경우의 수는

$3! = 6 \qquad \therefore P(A \cap B) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{13}{30}$

16 답 $\frac{1}{7}$

유형 14 확률의 덧셈정리 – 배반사건인 경우

뽑힌 2명 모두 1학년 학생인 사건을 A, 2학년 학생인 사건을 B라고 하자.

A는 1학년 학생 2명을 모두 뽑는 사건이므로

$P(A) = \frac{{}_2C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{28}$

B는 2학년 학생 3명 중에서 2명을 뽑는 사건이므로

$P(B) = \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{28}$

A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{28} + \frac{3}{28} = \frac{1}{7}$

17 답 6

유형 15 여사건의 확률 – '아닌', '적어도'의 조건이 있는 경우

집합 X의 원소 중에서 정수의 개수를 k라고 하자.

택한 3개의 원소 중에서 적어도 1개는 정수인 사건을 A라고 하면 A^C은 모두 정수가 아닌 사건이므로

$P(A^C) = \frac{{}_{10-k}C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{{}_{10-k}C_3}{120}$

이때 $P(A) = \frac{29}{30}$이므로 $P(A^C) = 1 - \frac{29}{30} = \frac{1}{30}$에서

$\frac{{}_{10-k}C_3}{120} = \frac{1}{30}$, ${}_{10-k}C_3 = 4$

$\frac{(10-k)(9-k)(8-k)}{3 \times 2 \times 1} = 4$

$(10-k)(9-k)(8-k) = 4 \times 3 \times 2$

$\therefore k = 6$ ($\because$ k는 자연수)

18 답 ②

유형 15 여사건의 확률 – '아닌', '적어도'의 조건이 있는 경우

뽑힌 공에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라고 하면

$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

이때 $A \cap B$는 15의 배수인 사건이므로

$P(A \cap B) = \frac{1}{20}$

$$\begin{aligned}\therefore P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A^C \cap B^C) &= P((A \cup B)^C) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}\end{aligned}$$

19 답 $\frac{9}{14}$

유형 16 여사건의 확률 – '이상', '이하'의 조건이 있는 경우

같은 기호끼리는 구별하지 않으므로 기호 5종류에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 경우의 수는

${}_5H_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = 126$

기호가 3종류 이상인 사건을 A라고 하면 A^C은 기호가 2종류 이하인 사건이다.

이때 기호가 2종류 이하인 경우는 기호 5종류 중에서 2종류의 기호를 택하고, 그 기호 2종류에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 경우이고, 이때 5개 모두 1종류의 기호를 뽑는 경우가 각 기호마다 4번씩 중복되므로 $5 \times 3 = 15$(가지)를 빼면 그 경우의 수는

${}_5C_2 \times {}_2H_5 - 15 = {}_5C_2 \times {}_6C_5 - 15 = {}_5C_2 \times {}_6C_1 - 15 = 45$

$\therefore P(A^C) = \frac{45}{126} = \frac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(A^C) \\ &= 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}\end{aligned}$$

04 조건부확률

핵심 유형

	유형01 ③	유형02 $\frac{2}{5}$	유형03 $\frac{5}{14}$
유형04 ③	유형05 $\frac{5}{9}$	유형06 ⑤	유형07 ㄷ
유형08 $\frac{1}{6}$	유형09 $\frac{11}{12}$	유형10 $\frac{5}{16}$	유형11 $\frac{25}{27}$

핵심 유형 완성하기

001 $\frac{3}{10}$	002 $\frac{2}{3}$	003 $\frac{1}{2}$	004 $\frac{2}{5}$	005 ⑤
006 ③	007 $\frac{5}{6}$	008 $\frac{5}{12}$	009 2	010 $\frac{7}{8}$
011 $\frac{3}{7}$	012 ①	013 $\frac{1}{14}$	014 $\frac{1}{5}$	015 3, 4
016 $\frac{17}{30}$	017 $\frac{5}{8}$	018 $\frac{1}{8}$	019 ③	020 $\frac{21}{29}$
021 $\frac{7}{8}$	022 $\frac{1}{8}$	023 $\frac{14}{19}$	024 30	
025 ㄱ, ㄷ	026 ㄱ, ㄷ	027 ④	028 3	029 10
030 ㄱ, ㄴ, ㄷ		031 ㄴ, ㄷ	032 ②	
033 ㄴ, ㄷ	034 $\frac{2}{3}$	035 ③	036 ④	037 ②
038 $\frac{1}{9}$	039 $\frac{3}{4}$	040 $\frac{11}{15}$	041 $\frac{3}{4}$	042 ②
043 $\frac{1}{14}$	044 $\frac{4}{81}$	045 $\frac{5}{16}$	046 $\frac{80}{81}$	047 ①
048 2267	049 $\frac{3}{32}$	050 $\frac{512}{625}$	051 ⑤	052 $\frac{1}{4}$
053 $\frac{9}{28}$	054 $\frac{50}{243}$			

핵심 유형 최종 점검하기

1 $\frac{1}{2}$	2 $\frac{7}{20}$	3 $\frac{1}{6}$	4 $\frac{3}{10}$	5 4
6 $\frac{8}{17}$	7 ㄱ, ㄴ, ㄷ		8 ㄱ, ㄴ	9 $\frac{1}{5}$
10 $\frac{1}{2}$	11 $\frac{1}{18}$	12 $\frac{10}{27}$		

핵심 유형 60~62쪽

유형01 답 ③

$B\subset A$이면 $A\cap B=B$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$$

유형02 답 $\frac{2}{5}$

택한 2장의 카드가 모두 숫자가 적힌 카드인 사건을 A, 모두 숫자 1이 적힌 카드인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{5}$$

유형03 답 $\frac{5}{14}$

첫 번째로 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 두 번째로 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$

유형04 답 ③

이 야구팀이 낮에 열리는 경기를 하는 사건을 A, 경기에서 이기는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}=0.2$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{4}{5}=0.8$

$\mathrm{P}(B|A)=0.5$, $\mathrm{P}(B|A^C)=0.6$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.2\times0.5=0.1$,

$\quad \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=0.8\times0.6=0.48$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=0.1+0.48=0.58$

유형05 답 $\frac{5}{9}$

택한 한 명이 남학생인 사건을 A, 수시 모집에 응시하지 않은 학생인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{20}$,

$\quad \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{25}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{25}}=\frac{5}{9}$$

유형06 답 ⑤

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면

$A=\{(\mathrm{H, H, H}), (\mathrm{T, T, T})\}$

$B=\{(\mathrm{H, T, T}), (\mathrm{T, H, T}), (\mathrm{T, T, H}), (\mathrm{T, T, T})\}$

$A\cap B=\{(\mathrm{T, T, T})\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$

ㄴ. $P(A\cap B)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

ㄷ. $P(B)=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

유형07 답 ㄷ

ㄱ. [반례] 표본공간을 $S=\{1, 2, 3\}$이라 하고 $A=\{1\}$이라고 하면

$P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A^C)=\frac{2}{3}$, $P(A\cap A^C)=0$

$\therefore P(A\cap A^C)\neq P(A)P(A^C)$

따라서 두 사건 A, A^C은 서로 종속이다.

ㄴ. [반례] 표본공간을 $S=\{1, 2, 3\}$이라 하고 $A=\{1\}$, $B=\{2\}$라고 하면

$P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=0$

$\therefore P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A, B가 서로 배반이지만 A, B는 서로 종속이다.

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로

$$\begin{aligned}P(A\cap B^C)&=P(A)-P(A\cap B)\\&=P(A)-P(A)P(B)\\&=P(A)\{1-P(B)\}\\&=P(A)P(B^C)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

유형08 답 $\frac{1}{6}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$\frac{4}{9}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{3}P(B)$

$\frac{2}{3}P(B)=\frac{1}{9}$ $\quad\therefore P(B)=\frac{1}{6}$

유형09 답 $\frac{11}{12}$

갑과 을이 성공하는 사건을 각각 A, B라고 하면

$P(A)=\frac{3}{4}$, $P(B)=\frac{2}{3}$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{11}{12}\end{aligned}$$

유형10 답 $\frac{5}{16}$

동전을 6번 던질 때, 점 P가 다시 원점으로 돌아오려면 앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수가 같아야 한다.

따라서 앞면이 3번, 뒷면이 3번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_6C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

유형11 답 $\frac{25}{27}$

성공으로 판정되려면 심판 3명 중에서 2명 이상이 성공으로 판정해야 한다.

(i) 심판 3명 중에서 2명이 성공으로 판정할 확률은

${}_3C_2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{25}{72}$

(ii) 심판 3명 모두 성공으로 판정할 확률은

${}_3C_3\times\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\left(\frac{1}{6}\right)^0=\frac{125}{216}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{25}{72}+\frac{125}{216}=\frac{25}{27}$

핵심 유형 완성하기 63~71쪽

001 답 $\frac{3}{10}$

A, B가 서로 배반사건이므로 $A\cap B=\varnothing$

즉, $B\subset A^C$이므로 $B\cap A^C=B$

$\therefore P(B\cap A^C)=P(B)=\frac{1}{5}$

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$P(B|A^C)=\frac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$

002 답 $\frac{2}{3}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$0.5=0.4+0.3-P(A\cap B)$

$\therefore P(A\cap B)=0.2$

$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}$

003 답 $\frac{1}{2}$

$P(A^C|B)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$이므로

$\frac{1}{3}=\frac{\frac{3}{4}-P(A\cap B)}{\frac{3}{4}}$, $\frac{3}{4}-P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{2}$

004 답 $\frac{2}{5}$

$P(B)\{1-P(A|B)\}=\frac{1}{5}$에서

$P(B)\left\{1-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\right\}=\frac{1}{5}\quad\therefore P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$\frac{3}{5}=P(A)+\frac{1}{5}\quad\therefore P(A)=\frac{2}{5}$

005 답 ⑤

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3}$에서

$P(B)=3P(A\cap B)$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{3}$에서

$P(A)=\frac{3}{2}P(A\cap B)$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{3}{2}P(A\cap B)+3P(A\cap B)-P(A\cap B)$

$=\frac{7}{2}P(A\cap B)$

이때 $P(A)=\frac{3}{2}P(A\cap B)$에서 $P(A\cap B)=\frac{2}{3}P(A)$이므로

$P(A\cup B)=\frac{7}{2}P(A\cap B)=\frac{7}{2}\times\frac{2}{3}P(A)=\frac{7}{3}P(A)$

$\therefore k=\frac{7}{3}$

006 답 ③

택한 2개의 공이 모두 흰 공이 아닌 사건을 A, 모두 파란 공인 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$, $P(A\cap B)=\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{9}}=\frac{3}{10}$$

007 답 $\frac{5}{6}$

택한 한 명이 2학년 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$, $P(A\cap B)=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{6}$$

008 답 $\frac{5}{12}$

택한 한 명이 버스로 등교하는 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$, $P(A\cap B)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{12}$$

009 답 2

택한 한 명이 남자인 사건을 A, B 영화를 선호하는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{14+x}{38+x}$, $P(A\cap B)=\frac{x}{38+x}$

택한 한 명이 남자일 때, 그 사람이 B 영화를 선호할 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{x}{38+x}}{\frac{14+x}{38+x}}=\frac{x}{14+x}$$

즉, $\frac{x}{14+x}=\frac{1}{8}$에서 $8x=14+x$

$7x=14\quad\therefore x=2$

010 답 $\frac{7}{8}$

택한 초콜릿이 화이트 초콜릿인 사건을 A, 땅콩이 들어 있는 초콜릿인 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{3}{4}$, $P(A^c\cap B^c)=\frac{1}{6}$

이때 $P(A^c\cap B^c)=P((A\cup B)^c)=1-P(A\cup B)$이므로

$\frac{1}{6}=1-P(A\cup B)$

$\therefore P(A\cup B)=\frac{5}{6}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-P(A\cap B)$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{7}{12}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{7}{8}$$

011 답 $\frac{3}{7}$

첫 번째에 당첨권을 뽑지 못하는 사건을 A, 두 번째에 당첨권을 뽑지 못하는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$, $P(B|A)=\frac{9}{14}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{9}{14}=\frac{3}{7}$

012 답 ①

택한 한 명이 남자인 사건을 A, 40대인 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$, $P(B|A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$

013 답 $\frac{1}{14}$

첫 번째에 휴대 전화를 보유한 남학생이 뽑히는 사건을 A, 두 번째에 휴대 전화를 보유하지 않은 여학생이 뽑히는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{17}{35}$, $P(B|A)=\frac{5}{34}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{17}{35}\times\frac{5}{34}=\frac{1}{14}$

014 답 $\frac{1}{5}$

노란색 필통을 택하는 사건을 A, 빨간색 볼펜을 꺼내는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$, $P(B|A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

015 답 3, 4

첫 번째에 100원짜리 동전을 뒤집는 사건을 A, 두 번째에 500원짜리 동전을 뒤집는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{4}{n+4}$, $P(B|A)=\frac{n}{n+3}$

따라서 첫 번째는 100원짜리 동전을, 두 번째는 500원짜리 동전을 뒤집을 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{n+4}\times\frac{n}{n+3}$

즉, $\frac{4}{n+4}\times\frac{n}{n+3}=\frac{2}{7}$에서 $(n+3)(n+4)=14n$

$n^2-7n+12=0$, $(n-3)(n-4)=0$

$\therefore n=3$ 또는 $n=4$

016 답 $\frac{17}{30}$

A 주머니를 택하는 사건을 A, 흰 공이 나오는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(A^c)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P(B|A^c)=\frac{3}{5}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,

$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{2}{5}=\frac{17}{30}$

017 답 $\frac{5}{8}$

진아가 망고 푸딩을 꺼내 먹는 사건을 A, 지원이가 망고 푸딩을 꺼내는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{5}{8}$, $P(A^c)=\frac{3}{8}$

$P(B|A)=\frac{4}{7}$, $P(B|A^c)=\frac{5}{7}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$,

$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$

따라서 구하는 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=\frac{5}{14}+\frac{15}{56}=\frac{5}{8}$

018 답 $\frac{1}{8}$

택한 한 명이 암에 걸린 사람인 사건을 A, 암에 걸렸다고 진단받는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$, $P(A^c)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

$P(B|A)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$, $P(B|A^c)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{10}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{25}$,

$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{20}=\frac{9}{200}$

따라서 구하는 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=\frac{2}{25}+\frac{9}{200}=\frac{1}{8}$

019 답 ③

흰 옷을 택하는 사건을 A, 로봇이 흰 옷이라고 판별하는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $P(A^c)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$P(B|A)=1-p$, $P(B|A^c)=p$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}(1-p)$,

$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=\frac{3}{5}p$

따라서 로봇이 흰 옷이라고 판별할 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=\frac{2}{5}(1-p)+\frac{3}{5}p=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}p$

즉, $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}p=\frac{11}{25}$에서 $p=\frac{1}{5}$

020 답 $\frac{21}{29}$

택한 한 명이 중국어를 선택한 학생인 사건을 A, 안경을 쓴 학생인 사건을 B라고 하면

$P(A^c)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$, $P(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

$P(B|A^c)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$, $P(B|A)=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{50}$,

$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^c\cap B)}$$

$$=\frac{\frac{21}{50}}{\frac{21}{50}+\frac{4}{25}}=\frac{21}{29}$$

021 답 $\frac{7}{8}$

갑이 당첨 제비를 뽑지 못하는 사건을 A, 을이 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{7}{9}$, $\mathrm{P}(A^c)=\frac{2}{9}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{36}$,

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)}$$

$$=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{7}{36}+\frac{1}{36}}=\frac{7}{8}$$

022 답 $\frac{1}{8}$

택한 한 명이 우대 고객인 사건을 A, 보험에 재가입하지 않은 고객인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(A^c)=\frac{7}{10}$

$\mathrm{P}(B|A)=1-\frac{80}{100}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^c)=1-\frac{40}{100}=\frac{3}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{50}$,

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{7}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{21}{50}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)}$$

$$=\frac{\frac{3}{50}}{\frac{3}{50}+\frac{21}{50}}=\frac{1}{8}$$

023 답 $\frac{14}{19}$

갈색 주머니를 택하는 사건을 A, 딸기 맛 사탕 1개, 포도 맛 사탕 1개를 꺼내는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A^c)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{3\times4}{21}=\frac{4}{7}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4\times2}{15}=\frac{8}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{4}\times\frac{8}{15}=\frac{2}{5}$,

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{7}=\frac{1}{7}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)}$$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{7}}=\frac{14}{19}$$

024 답 30

꺼낸 볼펜이 모두 검은색인 사건을 A, 서로 같은 색인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n}{100}\times\frac{100-2n}{100}$, $\mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{100-n}{100}\times\frac{2n}{100}$

꺼낸 볼펜이 서로 같은 색일 때, 그 색이 검은색일 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)}$$

$$=\frac{\frac{n}{100}\times\frac{100-2n}{100}}{\frac{n}{100}\times\frac{100-2n}{100}+\frac{100-n}{100}\times\frac{2n}{100}}=\frac{100-2n}{300-4n}$$

즉, $\frac{100-2n}{300-4n}=\frac{2}{9}$에서

$900-18n=600-8n$, $10n=300$ $\quad\therefore n=30$

025 답 ㄱ, ㄷ

$\mathrm{P}(A)=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$

ㄱ. $A\cap B$는 10의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$

ㄴ. $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$

ㄷ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

026 답 ㄱ, ㄷ

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(D)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(E)=\frac{3}{4}$

ㄱ. $A\cap B=\{1\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

ㄴ. $A\cap C=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=0$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 A, C는 서로 종속이다.

ㄷ. $A\cap D=\{3\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap D)=\frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap D)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)$이므로 두 사건 A, D는 서로 독립이다.

ㄹ. $A\cap E=\{3\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap E)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E)$이므로 두 사건 A, E는 서로 종속이다.

따라서 보기 중 사건 A와 서로 독립인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

027 답 ④

$A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{3, 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

ㄱ. $A\cap B=\{2\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

ㄴ. $A\cap C=\{3\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

ㄷ. $B\cap C=\{6\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

따라서 보기 중 서로 독립인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

028 답 3

$S=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

따라서 $n(B)=4$이고, $\{3, 4\}\subset B$, $2\notin B$이어야 하므로 주어진 조건을 만족하는 사건 B는 $\{1, 3, 4, 6\}$, $\{1, 3, 4, 12\}$, $\{3, 4, 6, 12\}$의 3개이다.

029 답 10

$\mathrm{P}(A)=\frac{15+k}{40}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{k}{40}$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이려면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이어야 하므로

$\frac{k}{40}=\frac{15+k}{40}\times\frac{2}{5}$

$5k=2(15+k)$, $3k=30$ $\quad\therefore k=10$

030 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 사건 B가 일어나거나 일어나지 않는 것이 사건 A가 일어날 확률에 영향을 주지 않으므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 배반이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\mathrm{P}(A)$

031 답 ㄴ, ㄷ

두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

ㄱ. $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(B|A)$

ㄴ. $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C|B)&=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=1-\mathrm{P}(A)\end{aligned}$$

ㄷ. $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B^C|A^C)&=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{1-\mathrm{P}(A\cup B)}{\mathrm{P}(A^C)}\\&=\frac{1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}}{1-\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}}{1-\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{1-\mathrm{P}(A)-\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)}{1-\mathrm{P}(A)}\\&=1-\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(B^C|A^C)=\mathrm{P}(B)+\{1-\mathrm{P}(B)\}=1$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이 ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이고 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B^C|A^C)=\mathrm{P}(B^C)$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(B^C|A^C)&=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B^C)\\&=\mathrm{P}(B)+\{1-\mathrm{P}(B)\}=1\end{aligned}$$

032 답 ②

두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\boxed{(가)\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$

$A^C\cap B^C=(\boxed{(나)\ A\cup B})^C$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((\boxed{(나)\ A\cup B})^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\{\boxed{(다)\ \mathrm{P}(A)}+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}\\&=\{1-\boxed{(다)\ \mathrm{P}(A)}\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.

033 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$이면

$\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$ 또는 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

그런데 이는 $A=B$를 의미하지는 않는다.

ㄴ. $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^C)$에서

$\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$

$\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)}{1-\mathrm{P}(B)}$

$\mathrm{P}(A\cap B)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\mathrm{P}(B)\{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

034 답 $\frac{2}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

035 답 ③

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{5}$ $\quad\therefore$ $\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$

036 답 ④

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)-\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{7}{6}\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$ $\quad\therefore$ $\mathrm{P}(B)=\dfrac{4}{7}$

037 답 ②

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B와 두 사건 A, B^C도 각각 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(B^C)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A)\times\dfrac{5}{6}+\{1-\mathrm{P}(A)\}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{6}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{4}$

038 답 $\frac{1}{9}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{12}$에서

$\dfrac{1}{4}\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{12}$ $\quad\therefore$ $\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(B)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{P}(B^C\cap C^C)=\mathrm{P}((B\cup C)^C)=1-\mathrm{P}(B\cup C)=\dfrac{2}{9}$에서

$\mathrm{P}(B\cup C)=\dfrac{7}{9}$

두 사건 B, C가 서로 배반이면 $\mathrm{P}(B\cap C)=0$

$\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$이므로 $\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)=\dfrac{7}{9}$

㉠을 대입하면

$\dfrac{2}{3}+\mathrm{P}(C)=\dfrac{7}{9}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{9}$

039 답 $\frac{3}{4}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B와 두 사건 A^C, B^C도 각각 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}((A^C\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}((A^C\cap B^C)^C)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\dfrac{5}{6}$에서

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\dfrac{1}{6}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{6}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B^C)}=3$이므로

$\mathrm{P}(B)=3\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{4}$

다른 풀이 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\dfrac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A\cap B^C)=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A)+\{1-\mathrm{P}(B)\}-\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}$ ...... ㉠

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{6}$

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$

㉠을 대입하면

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\left\{\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}\right\}=\frac{5}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

040 답 $\frac{11}{15}$

A와 B가 그림을 완성하는 사건을 각각 A, B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{3}{5}+\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{15}\end{aligned}$$

041 답 $\frac{3}{4}$

A와 B가 예선을 통과하는 사건을 각각 A, B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{2}$

두 사건 A^C, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$ $\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

042 답 ②

두 수의 합이 홀수이려면 한 수는 홀수, 다른 한 수는 짝수이어야 한다.

두 정육면체 A, B의 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 홀수인 사건을 각각 A, B라고 하면 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A, B^C과 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다.

(ⅰ) 정육면체 A는 홀수, 정육면체 B는 짝수일 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

(ⅱ) 정육면체 A는 짝수, 정육면체 B는 홀수일 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

043 답 $\frac{1}{14}$

A와 B가 게임에 이기는 사건을 각각 A, B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{7}$, $\mathrm{P}(B)=p$, $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{3}{14}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$이므로

$\frac{3}{14}=\frac{2}{7}(1-p)$, $1-p=\frac{3}{4}$

$\therefore p=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{14}$

044 답 $\frac{4}{81}$

동규가 이기는 경우를 ○, 지는 경우를 ×로 나타내자.

(ⅰ) 동규가 승자로 결정되는 경우

×○×○○이어야 하므로 그 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{243}$

(ⅱ) 승규가 승자로 결정되는 경우

○×○××이어야 하므로 그 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{243}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{4}{243}+\frac{8}{243}=\frac{4}{81}$

045 답 $\frac{5}{16}$

A가 이기는 횟수를 a, 지는 횟수를 b라고 하면 가위바위보를 5번 하므로

$a+b=5$ ...... ㉠

위로 한 칸 가는 것을 $+1$, 아래로 한 칸 가는 것을 -1로 생각하면 가위바위보를 5번 하여 A가 밑에서 9번째 계단에 있을 때

$a\times1+b\times(-1)=-1$

$\therefore a-b=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$

가위바위보를 1번 하여 A가 이길 확률은 $\frac{1}{2}$이고, A가 2번 이기고 3번 져야 하므로 구하는 확률은

${}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

046 답 $\frac{80}{81}$

6의 약수의 눈이 1개 이상 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 6의 약수의 눈이 하나도 나오지 않는 사건이다.

한 개의 주사위를 던져 6의 약수의 눈이 나오지 않을 확률이 $\frac{1}{3}$이므로

$P(A^C)={}_4C_4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-\frac{1}{81}=\frac{80}{81}$

047 답 ①

한 개의 동전과 한 개의 주사위를 동시에 던져서 동전은 뒷면이 나오고 주사위는 4 이하의 눈이 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

${}_3C_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$

048 답 2267

5차전까지 A팀이 3승 2패로 앞설 확률은

${}_5C_3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$

7차전에서 B팀이 최종 우승하기 위해서는 6차전과 7차전을 모두 B팀이 이겨야 하므로 B팀이 최종 우승할 확률은

$\frac{80}{243}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{80}{2187}$

따라서 $p=2187$, $q=80$이므로 $p+q=2267$

049 답 $\frac{3}{32}$

(ⅰ) 4번째까지 서브를 성공한 횟수를 a, 실패한 횟수를 b라고 하면

$a+b=4$ …… ㉠

점수의 합이 0점이므로

$3a-b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

따라서 서브를 1번 성공하고 3번 실패할 확률은

${}_4C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

(ⅱ) 5번째부터 8번째까지 서브를 성공한 횟수를 c, 실패한 횟수를 d라고 하면

$c+d=4$ …… ㉢

점수의 합이 4점이므로

$3c-d=4$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $c=2$, $d=2$

따라서 서브를 2번 성공하고 2번 실패할 확률은

${}_4C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{32}$

050 답 $\frac{512}{625}$

(ⅰ) 4명 중에서 3명이 완치될 확률은

${}_4C_3\times\left(\frac{4}{5}\right)^3\times\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{256}{625}$

(ⅱ) 4명 모두 완치될 확률은

${}_4C_4\times\left(\frac{4}{5}\right)^4\times\left(\frac{1}{5}\right)^0=\frac{256}{625}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{256}{625}+\frac{256}{625}=\frac{512}{625}$

051 답 ⑤

적어도 2개는 앞면이 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 앞면이 나오지 않거나 1개만 나오는 사건이다.

(ⅰ) 앞면이 나오지 않을 확률은

${}_6C_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

(ⅱ) 앞면이 1개만 나올 확률은

${}_6C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{32}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $P(A^C)=\frac{1}{64}+\frac{3}{32}=\frac{7}{64}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-\frac{7}{64}=\frac{57}{64}$

052 답 $\frac{1}{4}$

(ⅰ) 예선 3문제를 모두 맞힐 확률은

${}_3C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$

(ⅱ) 예선 3문제 중 2문제를 맞히고, 추가 문제를 맞힐 확률은

${}_3C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

053 답 $\frac{9}{28}$

꺼낸 2장의 카드에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은

$\frac{{}_4C_2+{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{6+3}{21}=\frac{3}{7}$

(ⅰ) 카드에 적힌 숫자가 서로 같고 주사위를 2번 던져서 짝수의 눈이 2번 나올 확률은

$\frac{3}{7}\times{}_2C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{3}{28}$

(ⅱ) 카드에 적힌 숫자가 서로 다르고 주사위를 3번 던져서 짝수의 눈이 2번 나올 확률은

$\left(1-\frac{3}{7}\right)\times{}_3C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{14}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{28}+\frac{3}{14}=\frac{9}{28}$

054 답 $\frac{50}{243}$

주사위를 5번 던져서 5의 약수의 눈이 나오는 횟수를 a, 5의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수를 b라고 하면 점 P가 이동하는 점의 좌표는 $(a,\ b)$

이때 $a+b=5$이고 $a,\ b$는 $0\le a\le 5,\ 0\le b\le 5$인 정수이므로 $(a,\ b)$를 모두 구하면

$(0,\ 5),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (5,\ 0)$

이때 이 점 중에서 도형 $|x-3|+|y-1|=1$ 위의 점은 $(3,\ 2)$와 $(4,\ 1)$이다.

(i) 점 P가 점 $(3,\ 2)$로 이동하려면 5의 약수의 눈이 3번, 5의 약수가 아닌 눈이 2번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_5C_3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$$

(ii) 점 P가 점 $(4,\ 1)$로 이동하려면 5의 약수의 눈이 4번, 5의 약수가 아닌 눈이 1번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_5C_4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{10}{243}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{40}{243}+\frac{10}{243}=\frac{50}{243}$$

핵심 유형 최종 점검하기 72~73쪽

1 답 $\frac{1}{2}$

유형 01 조건부확률의 계산

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{3}$에서

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\qquad\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$$

$A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$이므로

$$\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

2 답 $\frac{7}{20}$

유형 02 조건부확률

택한 한 명이 남학생인 사건을 A, 피아노를 선호하는 학생인 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{50}=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(B)=\frac{36}{50}=\frac{18}{25},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{50}$$

이때 $\mathrm{P}_1=\mathrm{P}(B|A),\ \mathrm{P}_2=\mathrm{P}(A|B)$이므로

$$\mathrm{P}_1=\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{50}}{\frac{3}{10}}=\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{P}_2=\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{9}{50}}{\frac{18}{25}}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}_1-\mathrm{P}_2=\frac{3}{5}-\frac{1}{4}=\frac{7}{20}$$

3 답 $\frac{1}{6}$

유형 03 확률의 곱셈정리

택한 한 명이 1학년 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{6}$$

4 답 $\frac{3}{10}$

유형 04 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$를 이용한 확률

첫 번째에 파란 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 파란 공을 꺼내는 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(A^c)=\frac{7}{10}$$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{9},\ \mathrm{P}(B|A^c)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15},$$

$$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{1}{15}+\frac{7}{30}=\frac{3}{10}$$

5 답 4

유형 04 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$를 이용한 확률

공장 A에서 생산한 제품을 택하는 사건을 A, 제품이 불량품인 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(A^c)=\frac{2}{5}$$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{p}{100},\ \mathrm{P}(B|A^c)=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{p}{100}=\frac{3p}{500},$$

$$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{50}=\frac{1}{125}$$

제품이 불량품일 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{3p}{500}+\frac{1}{125}=\frac{3p+4}{500}$$

즉, $\frac{3p+4}{500}=\frac{4}{125}$에서 $3p+4=16\qquad\therefore\ p=4$

6 답 $\frac{8}{17}$

유형 05 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)}$를 이용한 확률

이 팀이 치르는 경기가 홈경기인 사건을 A, 이 팀이 승리하는 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(A^c)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5},\ \mathrm{P}(B|A^c)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{25},$$

$$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^C\cap B)}$$

$$=\frac{\frac{8}{25}}{\frac{8}{25}+\frac{9}{25}}=\frac{8}{17}$$

7 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 06 사건의 독립과 종속의 판정

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면 $A=\{(T, H), (T, T)\}$, $B=\{(H, T), (T, T)\}$, $C=\{(H, T), (T, H)\}$이므로

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$

ㄱ. $A\cap B=\{(T, T)\}$이므로 $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

따라서 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

ㄴ. $A\cap C=\{(T, H)\}$이므로 $P(A\cap C)=\frac{1}{4}$

따라서 $P(A\cap C)=P(A)P(C)$이므로 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

ㄷ. $B\cap C=\{(H, T)\}$이므로 $P(B\cap C)=\frac{1}{4}$

따라서 $P(B\cap C)=P(B)P(C)$이므로 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

따라서 보기 중 서로 독립인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8 답 ㄱ, ㄴ

유형 07 사건의 독립과 종속의 성질

ㄱ. $B\subset A$이면 $A\cap B=B$이므로

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$P(A\cap B)=0$

$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$P(A|B)=P(A)$

그런데 $P(A|A\cap B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=1$이므로

$P(A|B)\neq P(A|A\cap B)$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

9 답 $\frac{1}{5}$

유형 08 독립인 사건의 확률의 계산

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$P(A|B)=P(A)=\frac{3}{8}$이고

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$\frac{1}{2}=\frac{3}{8}+P(B)-\frac{3}{8}P(B)\qquad\therefore P(B)=\frac{1}{5}$

10 답 $\frac{1}{2}$

유형 09 독립인 사건의 확률

두 수의 합이 짝수이려면 두 수 모두 짝수이거나 두 수 모두 홀수이어야 한다.

두 상자 A, B에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수인 사건을 각각 A, B라고 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.

(i) 상자 A에서 짝수, 상자 B에서 짝수가 적힌 카드을 꺼낼 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$

(ii) 상자 A에서 홀수, 상자 B에서 홀수가 적힌 카드을 꺼낼 확률은

$P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C)$

$=\frac{5}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{12}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{12}+\frac{5}{12}=\frac{1}{2}$

11 답 $\frac{1}{18}$

유형 10 독립시행의 확률

앞면이 나온 동전이 3개일 확률은

${}_4C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

3의 약수의 눈이 나온 주사위가 2개일 확률은

${}_3C_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{18}$

12 답 $\frac{10}{27}$

유형 11 독립시행의 확률 – 합사건

주사위를 5번 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 a, 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 횟수를 b라고 하면

$a+b=5\qquad\therefore b=5-a\qquad\cdots\cdots$ ㉠

점 P가 점 A에 있으려면 $2a+b$가 3의 배수가 되어야 하므로

$2a+b=3k$ (단, k는 자연수)

㉠을 대입하면

$2a+5-a=3k\qquad\therefore a+5=3k$

이때 a는 $0\le a\le 5$인 정수이므로

$a=1$ 또는 $a=4$

(i) 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

${}_5C_1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$

(ii) 3의 배수의 눈이 4번 나올 확률은

${}_5C_4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{10}{243}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{80}{243}+\frac{10}{243}=\frac{10}{27}$

05 이산확률변수와 이항분포

핵심 유형

	유형01 $\frac{1}{4}$	유형02 $\frac{1}{4}$	유형03 $\frac{25}{28}$
유형04 $\frac{7}{6}$	유형05 $\frac{8}{15}$	유형06 ②	유형07 5
유형08 $\sqrt{15}$	유형09 20	유형10 $\frac{3}{16}$	유형11 $\frac{63}{64}$
유형12 541	유형13 11	유형14 98	

핵심 유형 완성하기

001 $\frac{1}{2}$	002 ②	003 ④	004 $\frac{1}{11}$	005 ①
006 ⑤	007 ④	008 ⑤	009 $\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$	
010 $\frac{22}{35}$	011 ④	012 ③	013 ⑤	014 2
015 $\frac{8}{7}$	016 ②	017 ①	018 ④	019 ④
020 ④	021 ②	022 $\frac{5}{9}$	023 $\frac{13}{2}$	024 ①
025 ①	026 ③	027 8625원		028 ③
029 6	030 ④	031 39200, 9600		032 ④
033 ③	034 $-\frac{7}{3}$	035 ①	036 20	037 ④
038 ②	039 7	040 ⑤	041 ①	042 ④
043 $\sqrt{26}$	044 ②	045 ③	046 2	047 $\frac{2}{9}$
048 ②	049 $\frac{15}{128}$	050 ③	051 ⑤	052 ⑤
053 ⑤	054 ①	055 평균: 6, 분산: $\frac{24}{5}$		056 ③
057 5	058 920	059 ②	060 92	061 12
062 28	063 ⑤	064 ③	065 ④	066 120
067 73	068 ④			

핵심 유형 최종 점검하기

1 ④	2 ②	3 ②	4 $\frac{9}{25}$	
5 200원	6 -22	7 60	8 $\frac{4}{25}$	9 ⑤
10 ①	11 2304	12 $\frac{495}{8}$	13 2	14 15

핵심 유형 76~78쪽

유형01 답 $\frac{1}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{3}{4}a+a^2+\frac{3}{4}=1$

$4a^2+3a-1=0$, $(a+1)(4a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{4}$

이때 $0\le \mathrm{P}(X=x)\le 1$이므로 $a=\frac{1}{4}$

유형02 답 $\frac{1}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$2k+k+3k+12k+6k=1$

$24k=1$

$\therefore k=\frac{1}{24}$

$\therefore \mathrm{P}(X\le 0)=\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)$

$=2k+k+3k=6k$

$=6\times\frac{1}{24}=\frac{1}{4}$

유형03 답 $\frac{25}{28}$

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{5}{14}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{15}{28}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{28}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{5}{14}+\frac{15}{28}=\frac{25}{28}$

유형04 답 $\frac{7}{6}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+a=1$

$\therefore a=\frac{5}{12}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{5}{12}=2$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{12}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{5}{12}=\frac{31}{6}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{31}{6}-2^2=\frac{7}{6}$

유형05 답 $\frac{8}{15}$

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\times{}_8C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{28}{45}$

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_8C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{16}{45}$

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_8C_0}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{45}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{28}{45}+1\times\frac{16}{45}+2\times\frac{1}{45}=\frac{2}{5}$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{28}{45}+1^2\times\frac{16}{45}+2^2\times\frac{1}{45}=\frac{4}{9}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{4}{9}-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{64}{225}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{64}{225}}=\frac{8}{15}$

유형06 답 ②

복권 1장으로 받을 수 있는 당첨금을 X만 원이라고 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	20	50	100	합계
$P(X=x)$	$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{13}{20}+20\times\frac{1}{5}+50\times\frac{1}{10}+100\times\frac{1}{20}=14$

즉, 구하는 기댓값은 14만 원이다.

유형07 답 5

$E(X)=1$이므로 $E(Y)=-1$에서

$E(aX+b)=-1,\ aE(X)+b=-1$

$\therefore\ a+b=-1$ …… ㉠

$V(X)=9$이므로 $V(Y)=36$에서

$V(aX+b)=36,\ a^2V(X)=36$

$9a^2=36,\ a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

이를 ㉠에 대입하면

$2+b=-1$

$\therefore\ b=-3$

$\therefore\ a-b=2-(-3)=5$

유형08 답 $\sqrt{15}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{3}{10}+a+\frac{3}{10}=1 \qquad \therefore\ a=\frac{2}{5}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}=1$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{3}{10}=\frac{8}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{8}{5}-1^2=\frac{3}{5}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

$\therefore\ \sigma(5X-1)=|5|\sigma(X)$

$=5\times\frac{\sqrt{15}}{5}=\sqrt{15}$

유형09 답 20

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_0}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{2}{7}+1^2\times\frac{4}{7}+2^2\times\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{8}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$

$\therefore\ V(Y)=V(7X+3)=7^2V(X)$

$=49\times\frac{20}{49}=20$

유형10 답 $\frac{3}{16}$

확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}={}_5C_x\left(\frac{1}{2}\right)^5\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

$\therefore\ P(X\geq4)=P(X=4)+P(X=5)$

$={}_5C_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5C_5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{16}$

유형11 답 $\frac{63}{64}$

확률변수 X는 이항분포 $B\left(3,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_3C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

$\therefore\ P(X\geq1)=1-P(X=0)$

$=1-{}_3C_0\times\left(\frac{3}{4}\right)^0\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{63}{64}$

유형12 답 541

$\mathrm{E}(X)=90$에서 $np=90$ …… ㉠

$\sigma(X)=5\sqrt{3}$에서 $\sqrt{np(1-p)}=5\sqrt{3}$

$\therefore np(1-p)=75$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$90(1-p)=75,\ 1-p=\frac{5}{6}$

$\therefore p=\frac{1}{6}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{6}n=90 \quad \therefore n=540$

$\therefore n+6p=540+6\times\frac{1}{6}=541$

유형13 답 11

한 번의 시행에서 5의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(9,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=9\times\frac{1}{3}=3,\ \mathrm{V}(X)=9\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=2$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=2+3^2=11$

유형14 답 98

한 번의 시행에서 불량품이 나올 확률이 $\frac{1}{50}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \frac{1}{50}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{V}(X)=50\times\frac{1}{50}\times\frac{49}{50}=\frac{49}{50}$이므로

$\mathrm{V}(10X+1)=10^2\mathrm{V}(X)=100\times\frac{49}{50}=98$

핵심 유형 완성하기 79~89쪽

001 답 $\frac{1}{2}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a=1$

$2a^2+3a-2=0,\ (a+2)(2a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

이때 $0\le \mathrm{P}(X=x)\le 1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

002 답 ②

확률의 총합은 1이므로 $c=1$이고

$a+\frac{1}{4}+b+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1 \quad \therefore a+b=\frac{1}{4}$

$\therefore a+b+c=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

003 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$4k+5k+6k+7k=1,\ 22k=1$

$\therefore k=\frac{1}{22}$

004 답 $\frac{1}{11}$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$

$\left(k+\frac{2}{11}\right)+\left(k+\frac{1}{11}\right)+k+\left(k+\frac{1}{11}\right)+\left(k+\frac{2}{11}\right)=1$

$5k+\frac{6}{11}=1,\ 5k=\frac{5}{11}$

$\therefore k=\frac{1}{11}$

005 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=99)=1$

$\frac{k}{2\times3}+\frac{k}{3\times4}+\frac{k}{4\times5}+\cdots+\frac{k}{101\times102}=1$

$k\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)\right\}=1$

$k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{102}\right)=1,\ \frac{25}{51}k=1$

$\therefore 25k=51$

006 답 ⑤

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+2a+\frac{1}{4}=1,\ 3a=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(0\le X<2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{1}{4}+2a=\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$

007 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{9}+a+\frac{2}{3}=1 \quad \therefore a=\frac{2}{9}$

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 5a)=\mathrm{P}\left(X\ge\frac{10}{9}\right)$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=a+\frac{2}{3}=\frac{2}{9}+\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$

008 답 ⑤

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$\frac{1}{4}k+k\left(1-\frac{1}{2}\right)+k\left(1-\frac{3}{4}\right)=1$

$\therefore k=1$

따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\begin{cases} \frac{1}{4}x & (x=1) \\ 1-\frac{1}{4}x & (x=2,\ 3) \end{cases}$$

$\therefore$ P($X=1$ 또는 $X=2$)$=P(X=1)+P(X=2)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

009 답 $\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=15)=1$

$$\frac{k}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{k}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{k}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{k}{\sqrt{15}+\sqrt{16}}=1$$

$$k\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})\}=1$$

$k(\sqrt{16}-\sqrt{1})=1,\ 3k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{1}{3(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}$$

$\therefore$ $P(X^2-9X+8=0)$=P($X=1$ 또는 $X=8$)

$$=P(X=1)+P(X=8)$$

$$=\frac{1}{3(\sqrt{1}+\sqrt{2})}+\frac{1}{3(\sqrt{8}+\sqrt{9})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{3}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

010 답 $\frac{22}{35}$

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이고 각 값을 가질 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_2}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_3C_1}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_3\times{}_3C_0}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$\therefore P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=\frac{22}{35}$

011 답 ④

확률변수 X가 가지는 값은 2, 3, 4, $\cdots$, 8이다.

바닥에 놓인 면에 적힌 두 수를 a, b라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여

(i) 두 수의 합이 5인 경우

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) ➡ 4가지

(ii) 두 수의 합이 6인 경우

(2, 4), (3, 3), (4, 2) ➡ 3가지

(iii) 두 수의 합이 7인 경우

(3, 4), (4, 3) ➡ 2가지

(i), (ii), (iii)에서

$$P(X=5)=\frac{4}{4\times4}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=6)=\frac{3}{4\times4}=\frac{3}{16}$$

$$P(X=7)=\frac{2}{4\times4}=\frac{1}{8}$$

$\therefore P(5\leq X\leq 7)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}=\frac{9}{16}$$

참고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

012 답 ③

확률변수 X가 가지는 값은 2, 4, 6이다.

뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여

(i) 두 수의 차가 4인 경우

(2, 6), (4, 8) ➡ 2가지

(ii) 두 수의 차가 6인 경우

(2, 8) ➡ 1가지

(i), (ii)에서

$$P(X=4)=\frac{2}{{}_4C_2}=\frac{1}{3},\ P(X=6)=\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore P(X>3)=P(X=4)+P(X=6)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

참고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

013 답 ⑤

$X^2-7X+12\leq 0$에서 $(X-3)(X-4)\leq 0 \qquad \therefore 3\leq X\leq 4$

이때 확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.

나오는 두 눈의 수를 a, b라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여

(i) 두 수 중에서 크지 않은 수가 3인 경우

(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3), (3, 6), (6, 3)

➡ 7가지

(ii) 두 수 중에서 크지 않은 수가 4인 경우

(4, 4), (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4) ➡ 5가지

(i), (ii)에서

$$P(X=3)=\frac{7}{6\times6}=\frac{7}{36},\ P(X=4)=\frac{5}{6\times6}=\frac{5}{36}$$

$\therefore P(X^2-7X+12\leq 0)=P(3\leq X\leq 4)=P(X=3)+P(X=4)$

$$=\frac{7}{36}+\frac{5}{36}=\frac{1}{3}$$

참고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	1

014 답 2

확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이고 각 값을 가질 확률은

$P(X=1)=\frac{{}_7C_1\times{}_3C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{30}$

$P(X=2)=\frac{{}_7C_2\times{}_3C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{3}{10}$

$P(X=3)=\frac{{}_7C_3\times{}_3C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{2}$

$P(X=4)=\frac{{}_7C_4\times{}_3C_0}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{6}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

이때 $P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{30}+\frac{3}{10}=\frac{1}{3}$이므로

$P(X\le 2)=\frac{1}{3}$ $\qquad\therefore k=2$

015 답 $\frac{8}{7}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}+a+\frac{1}{7}=1$ $\qquad\therefore a=\frac{1}{7}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{1}{7}+4\times\frac{1}{7}=2$,

$E(X^2)=1^2\times\frac{3}{7}+2^2\times\frac{2}{7}+3^2\times\frac{1}{7}+4^2\times\frac{1}{7}=\frac{36}{7}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{36}{7}-2^2=\frac{8}{7}$

016 답 ②

확률의 총합은 1이므로

$2a^2+2a+a^2=1$, $3a^2+2a-1=0$

$(a+1)(3a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

이때 $0\le P(X=x)\le 1$이므로 $a=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

017 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$

$k+4k+9k+16k=1$, $30k=1$

$\therefore k=\frac{1}{30}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{15}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{30}+2\times\frac{2}{15}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{8}{15}=\frac{10}{3}$,

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{30}+2^2\times\frac{2}{15}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{8}{15}=\frac{59}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{59}{5}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{31}{45}$

018 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$b+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$ $\qquad\therefore b=\frac{1}{4}$

$E(X)=1$에서

$-a\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{2}=1$

$\frac{1}{4}a=1$ $\qquad\therefore a=4$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X^2)=(-4)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{2}=12$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=12-1^2=11$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{11}$

019 답 ④

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{3}$

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_6C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{15}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_6C_0}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{15}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\frac{4}{5}$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{2}{15}=\frac{16}{15}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{16}{15}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{32}{75}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{32}{75}}=\frac{4\sqrt{6}}{15}$

020 답 ④

확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3이고 각 값을 가질 확률은

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_4}{{}_7C_5}=\frac{1}{7}$

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_3}{{}_7C_5}=\frac{4}{7}$

$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\times{}_4C_2}{{}_7C_5}=\frac{2}{7}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{7}+2\times\frac{4}{7}+3\times\frac{2}{7}=\frac{15}{7}$

021 답 ②

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) 나머지가 0인 경우는 4의 1가지

(ii) 나머지가 1인 경우는 1, 5의 2가지

(iii) 나머지가 2인 경우는 2, 6의 2가지

(iv) 나머지가 3인 경우는 3의 1가지

(i)~(iv)에서

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{6}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{19}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{11}{12}}=\frac{\sqrt{33}}{6}$

022 답 $\frac{5}{9}$

확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3이다.

뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, $b\,(a<b)$라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여

(i) 두 수 중에서 작은 수가 1인 경우

$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$ ➡ 3가지

(ii) 두 수 중에서 작은 수가 2인 경우

$(2, 3)$, $(2, 4)$ ➡ 2가지

(iii) 두 수 중에서 작은 수가 3인 경우

$(3, 4)$ ➡ 1가지

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$,

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

023 답 $\frac{13}{2}$

확률변수 X가 가지는 값은 4, 6, 8, 10이다.

(i) 두 수의 합이 4이려면 A에서 2, B에서 2가 나와야 하므로 그 확률은

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

(ii) 두 수의 합이 6이려면 A에서 2, B에서 4가 나오거나 A에서 4, B에서 2가 나와야 하므로 그 확률은

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{16}$

(iii) 두 수의 합이 8이려면 A에서 2, B에서 6이 나오거나 A에서 4, B에서 4가 나와야 하므로 그 확률은

$\mathrm{P}(X=8)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$

(iv) 두 수의 합이 10이려면 A에서 4, B에서 6이 나와야 하므로 그 확률은

$\mathrm{P}(X=10)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	4	6	8	10	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=4\times\frac{3}{16}+6\times\frac{7}{16}+8\times\frac{5}{16}+10\times\frac{1}{16}=\frac{13}{2}$

024 답 ①

0, 1, 2가 적힌 공이 각각 a개, b개, c개라고 하면 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{a}{6}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{b}{6}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{c}{6}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{a}{6}$	$\frac{b}{6}$	$\frac{c}{6}$	1

확률의 총합은 1이므로

$\frac{a}{6}+\frac{b}{6}+\frac{c}{6}=1 \qquad \therefore\ a+b+c=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{3}{2}$에서

$0\times\frac{a}{6}+1\times\frac{b}{6}+2\times\frac{c}{6}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore b+2c=9$ ...... ㉡

$\mathrm{V}(X)=\frac{7}{12}$에서

$\left(0^2\times\frac{a}{6}+1^2\times\frac{b}{6}+2^2\times\frac{c}{6}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{12}$

$\therefore b+4c=17$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $b=1$, $c=4$

이를 ㉠에 대입하면 $a+1+4=6$ $\quad\therefore a=1$

따라서 숫자 0이 적힌 공은 1개이다.

025 답 ①

행운권 1장으로 받을 수 있는 상금을 X원이라고 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	500	10000	100000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{389}{500}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{500}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{389}{500}+500\times\frac{1}{5}+10000\times\frac{1}{50}+100000\times\frac{1}{500}=500$

즉, 구하는 기댓값은 500원이다.

026 답 ③

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 할 때, 게임을 한 번 하여 나오는 모든 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

500원	100원	100원	받은 금액(원)
H	H	H	0
H	H	T	100
H	T	H	100
H	T	T	200
T	H	H	500
T	H	T	600
T	T	H	600
T	T	T	700

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 X원이라고 할 때, 확률변수 X가 가지는 값은 0, 100, 200, 500, 600, 700이고 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=100)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X=200)=\frac{1}{8}$,

$\mathrm{P}(X=500)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=600)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X=700)=\frac{1}{8}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	500	600	700	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+100\times\frac{1}{4}+200\times\frac{1}{8}+500\times\frac{1}{8}+600\times\frac{1}{4}+700\times\frac{1}{8}$

$=350$

즉, 구하는 기댓값은 350원이다.

027 답 8625원

복권 1장으로 받을 수 있는 당첨금을 X원이라고 할 때, 확률변수 X가 가지는 값은 0, 5000, 20000, 300000이고 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_{3}\mathrm{C}_{0}\times{}_{7}\mathrm{C}_{3}}{{}_{10}\mathrm{C}_{3}}=\frac{7}{24}$

$\mathrm{P}(X=5000)=\frac{{}_{3}\mathrm{C}_{1}\times{}_{7}\mathrm{C}_{2}}{{}_{10}\mathrm{C}_{3}}=\frac{21}{40}$

$\mathrm{P}(X=20000)=\frac{{}_{3}\mathrm{C}_{2}\times{}_{7}\mathrm{C}_{1}}{{}_{10}\mathrm{C}_{3}}=\frac{7}{40}$

$\mathrm{P}(X=300000)=\frac{{}_{3}\mathrm{C}_{3}\times{}_{7}\mathrm{C}_{0}}{{}_{10}\mathrm{C}_{3}}=\frac{1}{120}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	5000	20000	300000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{7}{24}+5000\times\frac{21}{40}+20000\times\frac{7}{40}+300000\times\frac{1}{120}$

$=8625$

즉, 구하는 최소 판매 금액은 8625원이다.

028 답 ③

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 X원이라고 할 때, 확률변수 X가 가지는 값은 4900, -2800이고 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=4900)=\frac{4}{4+a}$

$\mathrm{P}(X=-2800)=\frac{a}{4+a}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	4900	-2800	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{4+a}$	$\frac{a}{4+a}$	1

이때 $\mathrm{E}(X)=1600$이므로

$4900\times\frac{4}{4+a}+(-2800)\times\frac{a}{4+a}=1600$

$\frac{196-28a}{4+a}=16$, $196-28a=64+16a$

$44a=132$ $\quad\therefore a=3$

029 답 6

$\mathrm{E}(X)=2$이므로 $\mathrm{E}(Y)=8$에서

$\mathrm{E}(aX+b)=8$, $a\mathrm{E}(X)+b=8$

$\therefore 2a+b=8$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(X)=5$이므로 $\mathrm{V}(Y)=45$에서

$\mathrm{V}(aX+b)=45$, $a^2\mathrm{V}(X)=45$

$5a^2=45$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ $(\because a>0)$

이를 ㉠에 대입하면

$6+b=8$

$\therefore b=2$

$\therefore ab=3\times2=6$

030 답 ④

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=27-5^2=2$이므로

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2}$

$\therefore\ \sigma(Y)=\sigma(-3X+1)=|-3|\sigma(X)=3\sqrt{2}$

031 답 39200, 9600

$E(X)=30000,\ \sigma(X)=8000$에서

$E(Y)=E\left(\frac{6}{5}X+3200\right)=\frac{6}{5}E(X)+3200$

$=\frac{6}{5}\times 30000+3200=39200$

$\sigma(Y)=\sigma\left(\frac{6}{5}X+3200\right)=\left|\frac{6}{5}\right|\sigma(X)$

$=\frac{6}{5}\times 8000=9600$

032 답 ④

$E(2X+3)=13$에서

$2E(X)+3=13 \qquad \therefore\ E(X)=5$

$V(2X+3)=24$에서

$2^2V(X)=24 \qquad \therefore\ V(X)=6$

따라서 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$=6+5^2=31$

033 답 ③

$E(X)=a,\ E(X^2)=2a+3$에서

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2a+3-a^2$

$\therefore\ V(Y)=V(2X-1)=2^2V(X)$

$=4(2a+3-a^2)=-4a^2+8a+12$

$=-4(a-1)^2+16$

따라서 $V(Y)$는 $a=1$일 때 최댓값이 16이므로 $\sigma(Y)$의 최댓값은 $\sqrt{16}=4$

034 답 $-\frac{7}{3}$

$V(X)=\frac{4}{9}$에서

$V(Y)=V(3X+9)=3^2V(X)=9\times\frac{4}{9}=4$

$E(Y)=a$라고 하면 $E(Y^2)=4a$이므로

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=4a-a^2=4$

즉, $a^2-4a+4=0$에서

$(a-2)^2=0 \qquad \therefore\ a=2$

$E(Y)=2$이므로

$E(3X+9)=2,\ 3E(X)+9=2$

$\therefore\ E(X)=-\frac{7}{3}$

035 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$a+2a+a=1,\ 4a=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1,$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \sigma(4X-3)=|4|\sigma(X)=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

036 답 20

확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}=2,$

$E(X^2)=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{5}=\frac{24}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{24}{5}-2^2=\frac{4}{5}$

$\therefore\ V(5X+3)=5^2V(X)=25\times\frac{4}{5}=20$

037 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$3a+6a+a=1,\ 10a=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{10}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5},$

$E(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{18}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{18}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

$\therefore\ \sigma\left(\frac{1}{a}X+10a\right)=\sigma(10X+1)$

$=|10|\sigma(X)=10\times\frac{3}{5}=6$

038 답 ②

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{3}{20}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{3}{10}=\frac{7}{2}$

$\therefore\ E(2X+5)=2E(X)+5=2\times\frac{7}{2}+5=12$

039 답 7

확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{12}=1$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{5}{12}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{12}=2$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=2-1^2=1$

$E(X)=1$이므로 $E(Y)=-1$에서

$E(aX+b)=-1$, $aE(X)+b=-1$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉠

$V(X)=1$이므로 $V(Y)=16$에서

$V(aX+b)=16$, $a^2V(X)=16$

$a^2=16$ $\therefore a=-4$ ($\because a<0$)

이를 ㉠에 대입하면

$-4+b=-1$ $\therefore b=3$

$\therefore b-a=3-(-4)=7$

040 답 ⑤

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_5C_2}{{}_9C_2}=\frac{5}{18}$

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_5C_1}{{}_9C_2}=\frac{5}{9}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_5C_0}{{}_9C_2}=\frac{1}{6}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{5}{18}+1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{1}{6}=\frac{8}{9}$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{5}{18}+1^2\times\frac{5}{9}+2^2\times\frac{1}{6}=\frac{11}{9}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{11}{9}-\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{35}{81}$

$\therefore V(Y)=V(9X-28)=9^2V(X)=81\times\frac{35}{81}=35$

041 답 ①

확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 각 값을 가질 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

$\therefore E(2X-5)=2E(X)-5=2\times\frac{7}{2}-5=2$

042 답 ④

확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이다.

택한 두 수를 a, b $(a<b)$라고 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여

(i) 두 수의 차가 1인 경우

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) ➡ 4가지

(ii) 두 수의 차가 2인 경우

(1, 3), (2, 4), (3, 5) ➡ 3가지

(iii) 두 수의 차가 3인 경우

(1, 4), (2, 5) ➡ 2가지

(iv) 두 수의 차가 4인 경우

(1, 5) ➡ 1가지

(i)~(iv)에서

$P(X=1)=\frac{4}{{}_5C_2}=\frac{2}{5}$, $P(X=2)=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$,

$P(X=3)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{1}{5}$, $P(X=4)=\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}=2$,

$E(X^2)=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{10}=5$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=1$

$\therefore \sigma(6X-1)=|6|\sigma(X)=6\times1=6$

043 답 $\sqrt{26}$

확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 4, a이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	a	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{2}{5}+4\times\frac{1}{5}+a\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}a+\frac{9}{5}$

이때 $E(5X-3)=9$에서

$5E(X)-3=9$

$5\left(\frac{1}{5}a+\frac{9}{5}\right)-3=9$ $\therefore a=3$

$\therefore E(X)=\frac{1}{5}\times3+\frac{9}{5}=\frac{12}{5}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{2}{5}+4^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{5}=\frac{34}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{34}{5}-\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{26}{25}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{26}{25}}=\frac{\sqrt{26}}{5}$

$\therefore \sigma(5X-3)=|5|\sigma(X)=5\times\frac{\sqrt{26}}{5}=\sqrt{26}$

044 답 ②

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_2C_0}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}=\frac{9}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{9}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$E(X)=\frac{6}{5}$이므로 $E(Y)=5$에서

$E(aX+b)=5$, $aE(X)+b=5$

$\therefore \frac{6}{5}a+b=5$ …… ㉠

$V(X)=\frac{9}{25}$이므로 $V(Y)=9$에서

$V(aX+b)=9$, $a^2V(X)=9$

$\frac{9}{25}a^2=9$, $a^2=25$ $\therefore a=5$ ($\because a>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$6+b=5$ $\therefore b=-1$

$\therefore a+b=5+(-1)=4$

045 답 ③

확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_7C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{7-x}={}_7C_x\left(\frac{1}{2}\right)^7$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 7)$

$\therefore P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$={}_7C_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{29}{128}$

따라서 $p=128$, $q=29$이므로 $p+q=128+29=157$

046 답 2

확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}$ $(x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

이때 $P(X=1)=kP(X=3)$에서

${}_5C_1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=k\times{}_5C_3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\therefore k=2$

047 답 $\frac{2}{9}$

확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_3C_xp^x(1-p)^{3-x}$ $(x=0, 1, 2, 3)$

이때 $P(X=1)=\frac{4}{3}p$에서

${}_3C_1p^1(1-p)^2=\frac{4}{3}p$

$3(1-p)^2=\frac{4}{3}$, $9p^2-18p+5=0$

$(3p-1)(3p-5)=0$ $\therefore p=\frac{1}{3}$ ($\because 0<p<1$)

따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_3C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}$ $(x=0, 1, 2, 3)$

$\therefore P(X=2)={}_3C_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$

048 답 ②

확률변수 X는 이항분포 $B\left(20, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{20}C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{20-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 20)$

$\therefore P(X\geq1)=1-P(X=0)$

$=1-{}_{20}C_0\times\left(\frac{4}{5}\right)^0\times\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$

$=1-\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$

049 답 $\frac{15}{128}$

확률변수 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}={}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 10)$

$\therefore P(X=3)={}_{10}C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{15}{128}$

050 답 ③

확률변수 X는 이항분포 $B\left(3, \frac{3}{10}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_3C_x\left(\frac{3}{10}\right)^x\left(\frac{7}{10}\right)^{3-x}$ $(x=0, 1, 2, 3)$

$\therefore P(X\leq1)=P(X=0)+P(X=1)$

$={}_3C_0\times\left(\frac{3}{10}\right)^0\times\left(\frac{7}{10}\right)^3+{}_3C_1\times\left(\frac{3}{10}\right)^1\times\left(\frac{7}{10}\right)^2$

$=\frac{98}{125}$

051 답 ⑤

확률변수 X는 이항분포 $B\left(6, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_6C_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{6-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 6)$

$\therefore P(4<X\leq6)=P(X=5)+P(X=6)$

$={}_6C_5\times\left(\frac{1}{10}\right)^5\times\left(\frac{9}{10}\right)^1+{}_6C_6\times\left(\frac{1}{10}\right)^6\times\left(\frac{9}{10}\right)^0$

$=\frac{11}{2\times10^5}$

따라서 $a=2$, $b=11$이므로 $a+b=13$

052 답 ⑤

항공권을 구입하고 항공기에 탑승하는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(27,\ 0.9)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{27}\mathrm{C}_x\times0.9^x\times0.1^{27-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 27)$

이때 좌석이 부족하려면 탑승하는 사람의 수가 25명을 초과해야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X>25)&=\mathrm{P}(X=26)+\mathrm{P}(X=27)\\&={}_{27}\mathrm{C}_{26}\times0.9^{26}\times0.1^1+{}_{27}\mathrm{C}_{27}\times0.9^{27}\times0.1^0\\&=2.7\times0.9^{26}+0.9^{27}=3\times0.9^{27}+0.9^{27}\\&=4\times0.9^{27}=4\times0.0581=0.2324\end{aligned}$$

053 답 ⑤

$\mathrm{E}(X)=20$에서 $np=20$ …… ㉠

$\mathrm{V}(X)=\frac{50}{3}$에서 $np(1-p)=\frac{50}{3}$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$20(1-p)=\frac{50}{3}$, $1-p=\frac{5}{6}$ $\quad\therefore p=\frac{1}{6}$

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{6}n=20$ $\quad\therefore n=120$

$\therefore \frac{n}{p}=\frac{120}{\frac{1}{6}}=720$

054 답 ①

$\mathrm{V}(X)=24$에서 $100p(1-p)=24$

$25p^2-25p+6=0$, $(5p-2)(5p-3)=0$

$\therefore p=\frac{3}{5}$ $\left(\because p>\frac{1}{2}\right)$

055 답 평균: 6, 분산: $\frac{24}{5}$

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=30\times\frac{1}{5}=6$, $\mathrm{V}(X)=30\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{5}$

056 답 ③

$\mathrm{E}(X)=2$에서 $np=2$ …… ㉠

$\mathrm{V}(X)=\frac{4}{3}$에서 $np(1-p)=\frac{4}{3}$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$2(1-p)=\frac{4}{3}$, $1-p=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore p=\frac{1}{3}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}n=2$ $\quad\therefore n=6$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

$\therefore \mathrm{P}(X=4)={}_6\mathrm{C}_4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}$

057 답 5

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=10p(1-p)\\&=-10p^2+10p\\&=-10\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

따라서 $p=\frac{1}{2}$일 때 확률변수 X의 분산이 최대이다.

즉, 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X의 평균은

$\mathrm{E}(X)=10\times\frac{1}{2}=5$

058 답 920

한 번의 시행에서 3의 배수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(90,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=90\times\frac{1}{3}=30$, $\mathrm{V}(X)=90\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=20$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=20+30^2=920$

059 답 ②

한 번의 시행에서 불이 붙지 않는 성냥이 나올 확률이 $\frac{1}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{200\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

060 답 92

이용객의 나이가 10대 이하일 확률은 $\frac{3}{10}$이므로 확률변수 X_1은 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \frac{3}{10}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X_1)=200\times\frac{3}{10}=60$

이용객의 나이가 40~50대일 확률은 $\frac{1}{5}$이므로 확률변수 X_2는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{V}(X_2)=200\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=32$

$\therefore \mathrm{E}(X_1)+\mathrm{V}(X_2)=60+32=92$

061 답 12

한 번의 시행에서 썩은 사과가 나올 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=16$에서

$n\times\frac{1}{4}=16$

$\therefore n=64$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=64\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=12$

062 답 28

한 번의 시행에서 빨간 공이 나올 확률이 $\frac{a}{a+4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{a}{a+4}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=12$에서

$n\times\frac{a}{a+4}=12$ …… ㉠

$\mathrm{V}(X)=3$에서

$n\times\frac{a}{a+4}\times\left(1-\frac{a}{a+4}\right)=3$

$n\times\frac{a}{a+4}\times\frac{4}{a+4}=3$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$12\times\frac{4}{a+4}=3$

$\therefore a=12$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{4}n=12 \qquad \therefore n=16$

$\therefore a+n=12+16=28$

063 답 ⑤

한 번의 경기에서 승리할 확률이 $\frac{4}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50, \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(X)=50\times\frac{4}{5}=40$이므로

$\mathrm{E}(2X-4)=2\mathrm{E}(X)-4$

$\qquad=2\times40-4=76$

064 답 ③

$\mathrm{V}(X)=6\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$이므로

$\mathrm{V}(-3X+5)=(-3)^2\mathrm{V}(X)=9\times\frac{4}{3}=12$

065 답 ④

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}n$이므로

$\mathrm{E}(3X-2)=3\mathrm{E}(X)-2$

$\qquad=3\times\frac{1}{6}n-2=\frac{1}{2}n-2$

이때 $\mathrm{E}(3X-2)=5$에서

$\frac{1}{2}n-2=5,\ \frac{1}{2}n=7 \qquad \therefore n=14$

066 답 120

한 번의 시행에서 동전 2개가 모두 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(40, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{V}(X)=40\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{2}$이므로

$\mathrm{V}(4X+3)=4^2\mathrm{V}(X)=16\times\frac{15}{2}=120$

067 답 73

한 번의 시행에서 당첨 제비가 나올 확률이 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(X)=45\times\frac{1}{3}=15,\ \mathrm{V}(X)=45\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=10$이므로

$\mathrm{E}(2X+3)=2\mathrm{E}(X)+3$

$\qquad=2\times15+3=33$

$\mathrm{V}(2X+3)=2^2\mathrm{V}(X)$

$\qquad=4\times10=40$

$\therefore \mathrm{E}(2X+3)+\mathrm{V}(2X+3)=33+40=73$

068 답 ④

게임을 24번 할 때 동전의 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 Y라고 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $24-Y$이므로

$X=4Y-2(24-Y)=6Y-48$

한 번의 게임에서 동전의 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(24, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(Y)=24\times\frac{1}{2}=12$이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(6Y-48)=6\mathrm{E}(Y)-48=6\times12-48=24$

핵심 유형 **최종 점검**하기 • 90~91쪽

1 답 ④

유형 02 확률질량함수의 성질 – $\mathrm{P}(X=x_i \text{ 또는 } X=x_j)$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{2}\mathrm{P}(X=2)$에서

$a=\frac{3}{2}\times2b \qquad \therefore a=3b$ …… ㉠

확률의 총합은 1이므로

$a+2b+3b=1 \qquad \therefore a+5b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{8},\ b=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(X=1 \text{ 또는 } X=3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$\qquad=a+3b=\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

2 답 ②

유형 03 확률분포와 확률

$X^2-2X=0$에서 $X(X-2)=0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=2$

따라서 $\mathrm{P}(X=0),\ \mathrm{P}(X=2)$를 구하면

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{7}{24}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{7}{40}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X^2-2X=0)=\mathrm{P}(X=0$ 또는 $X=2)$

$$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)$$

$$=\frac{7}{24}+\frac{7}{40}=\frac{7}{15}$$

3 답 ②

유형 04 확률변수의 평균, 분산, 표준편차 – 확률분포가 주어진 경우

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{3}+b=1 \qquad \therefore\ a+b=\frac{2}{3}$ ...... ㉠

한편 $\mathrm{E}(X)=3$에서

$1\times a+3\times\frac{1}{3}+4\times b=3 \qquad \therefore\ a+4b=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{9},\ b=\frac{4}{9}$

$\therefore\ b-a=\frac{2}{9}$

4 답 $\frac{9}{25}$

유형 05 확률변수의 평균, 분산, 표준편차 – 확률분포가 주어지지 않은 경우

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}=\frac{9}{5}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

5 답 **200원**

유형 06 상금의 기댓값

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 X원이라고 할 때, 확률변수 X가 가지는 값은 150, 200, 250이고 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=150)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=200)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=250)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	150	200	250	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=150\times\frac{1}{5}+200\times\frac{3}{5}+250\times\frac{1}{5}=200$

즉, 구하는 기댓값은 200원이다.

6 답 **−22**

유형 07 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 – X의 평균, 분산이 주어진 경우

$\mathrm{E}(X)=24,\ \mathrm{E}(X^2)=676$에서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=676-24^2=100$

$\mathrm{E}(aX+b)=24$에서

$a\mathrm{E}(X)+b=24$

$\therefore\ 24a+b=24$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(aX+b)=400$에서

$a^2\mathrm{V}(X)=400,\ 100a^2=400$

$a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

이를 ㉠에 대입하면

$48+b=24$

$\therefore\ b=-24$

$\therefore\ a+b=2+(-24)=-22$

7 답 **60**

유형 07 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 – X의 평균, 분산이 주어진 경우

$\mathrm{E}(X)=m,\ \sigma(X)=\sigma$이므로

$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}\left(10\times\frac{X-m}{\sigma}+50\right)$

$=\frac{10}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{10m}{\sigma}+50$

$=\frac{10}{\sigma}\times m-\frac{10m}{\sigma}+50=50$

$\sigma(T)=\sigma\left(10\times\frac{X-m}{\sigma}+50\right)=\left|\frac{10}{\sigma}\right|\sigma(X)$

$=\frac{10}{\sigma}\times\sigma=10$

따라서 확률변수 T의 평균과 표준편차의 합은

$\mathrm{E}(T)+\sigma(T)=50+10=60$

8 답 $\frac{4}{25}$

유형 08 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 – 확률분포가 주어진 경우

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{10}+a+\frac{3}{10}+b=1$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{5}$ ...... ㉠

한편 $\mathrm{E}(X)=\frac{12}{5}$에서

$1\times\frac{1}{10}+2\times a+3\times\frac{3}{10}+4\times b=\frac{12}{5}$

$\therefore\ a+2b=\frac{7}{10}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{10}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{1}{10}=\frac{32}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{32}{5}-\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

$\therefore\ V(aX+b)=V\left(\frac{1}{2}X+\frac{1}{10}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2V(X)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{16}{25}=\frac{4}{25}$

9 답 ⑤

유형 09 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 – 확률분포가 주어지지 않은 경우

확률변수 X가 가지는 값은 1, 3, 5이고 각 값을 가질 확률은

$P(X=1)=\frac{1}{6}$, $P(X=3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(X=5)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{2}=\frac{11}{3}$,

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{1}{2}=\frac{47}{3}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{47}{3}-\left(\frac{11}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{20}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

$\therefore\ \sigma(3X-5)=|3|\sigma(X)$

$=3\times\frac{2\sqrt{5}}{3}=2\sqrt{5}$

10 답 ①

유형 11 이항분포에서의 확률 – 이항분포가 주어지지 않은 경우

확률변수 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{2}{5}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$\therefore\ P(X\geq3)=P(X=3)+P(X=4)$

$={}_4C_3\times\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^1+{}_4C_4\times\left(\frac{3}{5}\right)^4\times\left(\frac{2}{5}\right)^0$

$=\frac{297}{625}$

11 답 2304

유형 11 이항분포에서의 확률 – 이항분포가 주어지지 않은 경우

정답을 맞힌 문제 수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{5-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

이때 시험 점수가 20점 미만이려면 $X<2$이어야 하므로 불합격할 확률은

$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)$

$={}_5C_0\times\left(\frac{1}{5}\right)^0\times\left(\frac{4}{5}\right)^5+{}_5C_1\times\left(\frac{1}{5}\right)^1\times\left(\frac{4}{5}\right)^4$

$=\frac{2304}{5^5}$

따라서 $p=\frac{2304}{5^5}$이므로

$5^5p=5^5\times\frac{2304}{5^5}=2304$

12 답 $\frac{495}{8}$

유형 12 이항분포의 평균, 분산, 표준편차 – 이항분포가 주어진 경우

$E(X)=\frac{15}{2}$에서

$30p=\frac{15}{2}$ $\qquad\therefore\ p=\frac{1}{4}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(30,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$V(X)=30\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{45}{8}$

따라서 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$=\frac{45}{8}+\left(\frac{15}{2}\right)^2=\frac{495}{8}$

13 답 2

유형 13 이항분포의 평균, 분산, 표준편차 – 이항분포가 주어지지 않은 경우

주머니에 들어 있는 검은 구슬의 개수를 x라고 하면 한 번의 시행에서 검은 구슬이 나올 확률은 $\frac{x}{12}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(36,\ \frac{x}{12}\right)$를 따른다.

$E(X)=6$에서

$36\times\frac{x}{12}=6$ $\qquad\therefore\ x=2$

따라서 주머니에 들어 있는 검은 구슬의 개수는 2이다.

14 답 15

유형 14 이항분포의 평균, 분산, 표준편차 – 확률변수가 $aX+b$인 경우

한 번의 시행에서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore\ E(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n$, $V(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}n$

이때 $E(X^2)=60$이고 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$\frac{1}{4}n=60-\left(\frac{1}{2}n\right)^2$, $n^2+n-240=0$

$(n+16)(n-15)=0$

$\therefore\ n=15$ $(\because\ n>0)$

따라서 $V(X)=\frac{15}{4}$이므로

$V(2X+7)=2^2V(X)=4\times\frac{15}{4}=15$

06 연속확률변수와 정규분포

핵심 유형

	유형01 ⑤	유형02 ⑤	
유형03 ㄱ, ㄷ, ㄹ		유형04 ③	유형05 ⑤
유형06 ③	유형07 ④	유형08 ②	
유형09 국어, 영어, 수학		유형10 ②	유형11 328
유형12 ③	유형13 ③	유형14 ②	유형15 10

핵심 유형 완성하기

001 $\frac{1}{8}$	002 $\frac{1}{3}$	003 ⑤	004 ①	005 ⑤
006 ④	007 ⑤	008 2	009 $\frac{1}{4}$	010 $\sqrt{6}$
011 ㄱ	012 ④	013 ②	014 ㄷ	015 ④
016 0.1574		017 0.6826		018 ④
019 ⑤	020 ①	021 0.1587		022 ③
023 0.5	024 ④	025 4	026 ③	027 ②
028 $\frac{12}{5}$	029 ②	030 0.8185		
031 ㄱ, ㄴ, ㄷ		032 0.4004		
033 0.1359		034 0.4514		035 18
036 23	037 ⑤	038 1.25	039 0.0668	
040 2차 필기시험, 실기 시험, 1차 필기시험				041 ③
042 A, C, B		043 ㄷ	044 0.3085	
045 0.6687		046 ⑤	047 0.0668	
048 3	049 477	050 ④	051 2766명	
052 47점	053 410초	054 55 m	055 2점	
056 0.8351		057 51	058 0.9772	
059 0.0082		060 ③	061 0.84	
062 0.0668		063 0.9332		064 0.02
065 220	066 315	067 ②	068 0.9772	

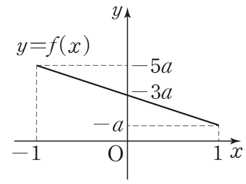
핵심 유형 최종 점검하기

1 $\frac{2}{3}$	2 ①	3 ①	4 ㄱ, ㄴ, ㄷ	
5 ③	6 ④	7 0.1587	8 ③	9 ④
10 ③	11 357	12 ③		

핵심 유형 94~96쪽

유형01 답 ⑤

$f(x)=a(2x-3)\ (-1\le x\le 1)$은 확률밀도함수이므로 $a<0$이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



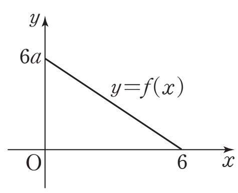
이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times\{-5a+(-a)\}\times 2=1$, $-6a=1$

$\therefore a=-\frac{1}{6}$

유형02 답 ⑤

$f(x)=a(6-x)\ (0\le x\le 6)$는 확률밀도함수이므로 $a>0$이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



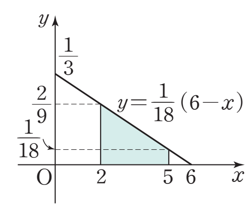
이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times 6\times 6a=1$, $18a=1$

$\therefore a=\frac{1}{18}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{18}(6-x)\ (0\le x\le 6)$

따라서 $P(2\le X\le 5)$는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{18}(6-x)$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=5$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$$P(2\le X\le 5)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{18}\right)\times 3$$
$$=\frac{5}{12}$$

유형03 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. 확률변수 X_1, X_2의 확률밀도함수의 그래프는 각각 직선 $x=x_1$, $x=x_2$에 대하여 대칭이므로
$E(X_1)=x_1$, $E(X_2)=x_2$
주어진 그래프에서 $x_1<x_2$이므로
$E(X_1)<E(X_2)$

ㄴ. 분산이 클수록 확률밀도함수의 그래프의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼지므로
$V(X_1)<V(X_2)$

ㄷ. $f(E(X_1))=f(x_1)$, $g(E(X_2))=g(x_2)$이므로
$f(E(X_1))>g(E(X_2))$

ㄹ. 확률변수 X_1, X_2의 확률밀도함수의 그래프는 각각 직선 $x=x_1$, $x=x_2$에 대하여 대칭이므로
$P(X_1\le x_1)=P(X_2\ge x_2)=0.5$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

유형04 답 ③

$m=60,\ \sigma=4$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(48\le X\le 64)&=\mathrm{P}(60-3\times4\le X\le 60+4)\\&=\mathrm{P}(m-3\sigma\le X\le m+\sigma)\\&=\mathrm{P}(m-3\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)\\&=\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)\\&=0.4987+0.3413=0.84\end{aligned}$$

유형05 답 ⑤

$\mathrm{P}(X\le a)=0.9772$에서

$\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le a)=0.9772$

$0.5+\mathrm{P}(m\le X\le a)=0.9772$

$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le a)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=0.4772$이므로

$a=m+2\sigma$

$m=40,\ \sigma=6$이므로

$a=40+2\times6=52$

유형06 답 ③

확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$, $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-20}{4}$, $Z_Y=\dfrac{Y-30}{5}$이라고 하면 확률변수 Z_X, Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(24\le X\le 32)=\mathrm{P}(35\le Y\le k)$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{24-20}{4}\le Z_X\le\dfrac{32-20}{4}\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{35-30}{5}\le Z_Y\le\dfrac{k-30}{5}\right)$

$\therefore\ \mathrm{P}(1\le Z_X\le 3)=\mathrm{P}\left(1\le Z_Y\le\dfrac{k-30}{5}\right)$

따라서 $3=\dfrac{k-30}{5}$이므로

$k-30=15\qquad\therefore\ k=45$

유형07 답 ④

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-40}{5}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(34\le X\le 43)&=\mathrm{P}\left(\frac{34-40}{5}\le Z\le\frac{43-40}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.2\le Z\le 0.6)\\&=\mathrm{P}(-1.2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)\\&=0.3849+0.2257=0.6106\end{aligned}$$

유형08 답 ②

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(21,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-21}{3}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(15\le X\le a)=0.9104$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{15-21}{3}\le Z\le\dfrac{a-21}{3}\right)=0.9104$

$\mathrm{P}\left(-2\le Z\le\dfrac{a-21}{3}\right)=0.9104$

$\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-21}{3}\right)=0.9104$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-21}{3}\right)=0.9104$

$0.4772+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-21}{3}\right)=0.9104$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-21}{3}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{a-21}{3}=1.5,\ a-21=4.5$

$\therefore\ a=25.5$

유형09 답 국어, 영어, 수학

이 학교 학생들의 국어, 영어, 수학 시험 성적을 각각 X_{A}점, X_{B}점, X_{C}점이라고 하면 확률변수 X_{A}, X_{B}, X_{C}는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(56,\ 8^2)$, $\mathrm{N}(58,\ 10^2)$, $\mathrm{N}(64,\ 14^2)$을 따르므로

$Z_{\mathrm{A}}=\dfrac{X_{\mathrm{A}}-56}{8}$, $Z_{\mathrm{B}}=\dfrac{X_{\mathrm{B}}-58}{10}$, $Z_{\mathrm{C}}=\dfrac{X_{\mathrm{C}}-64}{14}$

라고 하면 확률변수 Z_{A}, Z_{B}, Z_{C}는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

다른 학생보다 지형이의 국어, 영어, 수학 시험 성적이 높을 확률은 각각

$\mathrm{P}(X_{\mathrm{A}}<72)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{A}}<\dfrac{72-56}{8}\right)=\mathrm{P}(Z_{\mathrm{A}}<2)$

$\mathrm{P}(X_{\mathrm{B}}<75)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{B}}<\dfrac{75-58}{10}\right)=\mathrm{P}(Z_{\mathrm{B}}<1.7)$

$\mathrm{P}(X_{\mathrm{C}}<78)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{C}}<\dfrac{78-64}{14}\right)=\mathrm{P}(Z_{\mathrm{C}}<1)$

이때 $\mathrm{P}(Z_{\mathrm{A}}<2)>\mathrm{P}(Z_{\mathrm{B}}<1.7)>\mathrm{P}(Z_{\mathrm{C}}<1)$이므로

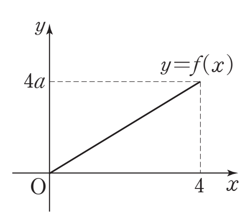
$\mathrm{P}(X_{\mathrm{A}}<72)>\mathrm{P}(X_{\mathrm{B}}<75)>\mathrm{P}(X_{\mathrm{C}}<78)$

따라서 지형이의 성적이 상대적으로 좋은 과목부터 순서대로 나열하면 국어, 영어, 수학이다.

핵심 유형 **완성**하기 97~103쪽

001 답 $\dfrac{1}{8}$

$f(x)=ax\ (0\le x\le 4)$는 확률밀도함수이므로 $a>0$이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\dfrac{1}{2}\times4\times4a=1,\ 8a=1$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{8}$

002 답 $\frac{1}{3}$

$y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times(1+5)\times k=1$, $3k=1$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

003 답 ⑤

① $0\le x<1$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

② $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$2\times1=2$

따라서 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

③ $0\le x\le2$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

④ $0<x<2$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

⑤ $0\le x\le2$에서 $f(x)\ge0$이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

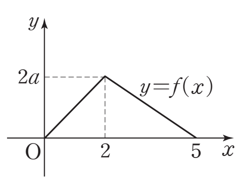
$\frac{1}{2}\times2\times1=1$

따라서 확률밀도함수의 그래프이다.

따라서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 ⑤이다.

004 답 ①

$f(x)$는 확률밀도함수이므로 $a>0$이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



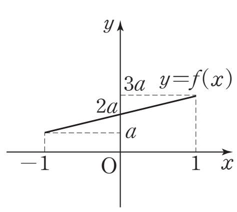
이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times5\times2a=1$, $5a=1$

$\therefore a=\frac{1}{5}$

005 답 ⑤

$f(x)=a(x+2)\ (-1\le x\le1)$는 확률밀도함수이므로 $a>0$이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



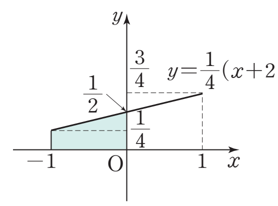
이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times(a+3a)\times2=1$, $4a=1$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}(x+2)\ (-1\le x\le1)$

따라서 $P(X\le0)$은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{4}(x+2)$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=0$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$P(X\le0)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times1$

$=\frac{3}{8}$

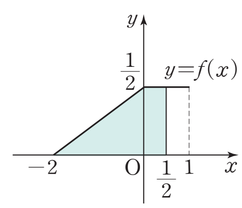
006 답 ④

$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times(1+3)\times k=1$, $2k=1$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

따라서 $P\left(X\le\frac{1}{2}\right)$은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$P\left(X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

007 답 ⑤

$y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times a\times\frac{4}{5}=1$, $\frac{2}{5}a=1$

$\therefore a=\frac{5}{2}$

한편 $P(0\le X\le b)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 $P(0\le X\le b)=\frac{4}{5}$에서

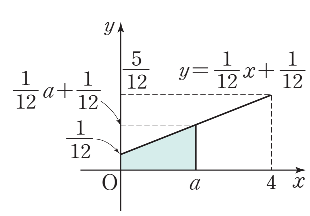
$\frac{1}{2}\times b\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$, $\frac{2}{5}b=\frac{4}{5}$

$\therefore b=2$

$\therefore ab=\frac{5}{2}\times2=5$

008 답 2

$P(X\le a)$는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{12}x+\frac{1}{12}$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$P(X\le a)=\frac{1}{3}$에서

$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{12}a+\frac{1}{12}\right)\right\}\times a=\frac{1}{3}$

$a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because 0\le a\le4)$

009 답 $\frac{1}{4}$

$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times1\times k+\frac{1}{2}\times4\times k=1$, $\frac{5}{2}k=1$

$\therefore\ k=\frac{2}{5}$

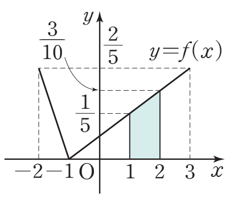
$-1\le x\le3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 0)$, $\left(3,\ \frac{2}{5}\right)$를 지나는 직선이므로

$y=\dfrac{\frac{2}{5}-0}{3-(-1)}(x+1)$

$\therefore\ y=\frac{1}{10}(x+1)\ (-1\le x\le3)$

$\therefore\ f(1)=\frac{1}{5}$, $f(2)=\frac{3}{10}$

따라서 $\mathrm{P}(1\le X\le2)$는 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(1\le X\le2)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)\times1=\frac{1}{4}$

010 답 $\sqrt{6}$

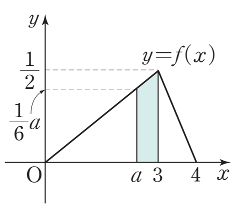
$0\le x\le3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0,\ 0)$, $\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나는 직선이므로

$y=\dfrac{\frac{1}{2}-0}{3-0}x$

$\therefore\ y=\frac{1}{6}x\ (0\le x\le3)$

$\therefore\ f(a)=\frac{1}{6}a$

$\mathrm{P}(a\le X\le3)$은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(a\le X\le3)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}\right)\times(3-a)$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{12}a^2$

한편 $\mathrm{P}(3\le X\le4)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(3\le X\le4)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(a\le X\le3)=\mathrm{P}(3\le X\le4)$에서

$\frac{3}{4}-\frac{1}{12}a^2=\frac{1}{4}$, $a^2=6$ $\quad\therefore\ a=\sqrt{6}\ (\because\ 0<a<3)$

011 답 ㄱ

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 $y=g(x)$의 그래프의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로

$\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_2)$

ㄴ. 분산이 클수록 확률밀도함수의 그래프의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼지므로

$\mathrm{V}(X_1)>\mathrm{V}(X_2)$

ㄷ. $\mathrm{E}(X_1)<a$이므로 $\mathrm{P}(X_1\ge a)<0.5$

$\mathrm{E}(X_2)>a$이므로 $\mathrm{P}(X_2\ge a)>0.5$

$\therefore\ \mathrm{P}(X_1\ge a)<\mathrm{P}(X_2\ge a)$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

012 답 ④

평균이 클수록 확률밀도함수의 그래프의 대칭축은 오른쪽에 있으므로 A의 대칭축보다 B의 대칭축이 오른쪽에 있다.

표준편차가 클수록 확률밀도함수의 그래프의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼지므로 A보다 B의 높이가 낮고 양쪽으로 넓게 퍼진다.

013 답 ②

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$\mathrm{P}(X\le7)=\mathrm{P}(X\ge11)$에서 $m=\frac{7+11}{2}=9$

한편 $\mathrm{V}\left(\frac{1}{3}X\right)=9$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{V}(X)=9$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=81$

즉, $\sigma^2=81$이므로 $\sigma=9\ (\because\ \sigma>0)$

$\therefore\ m+\sigma=9+9=18$

014 답 ㄷ

ㄱ. A, B의 확률밀도함수의 그래프의 대칭축이 같으므로 A 동아리 회원들과 B 동아리 회원들은 평균적으로 연습량이 같다.

ㄴ. B의 확률밀도함수의 그래프의 대칭축보다 C의 확률밀도함수의 그래프의 대칭축이 오른쪽에 있으므로 연습량이 많은 회원은 B 동아리보다 C 동아리에 더 많다.

ㄷ. B의 확률밀도함수의 그래프가 C의 확률밀도함수의 그래프보다 가운데 부분의 높이가 높고 좁게 모여 있으므로 B 동아리 회원들이 C 동아리 회원들보다 연습량이 더 고르다.

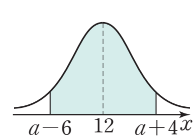
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

015 답 ④

확률변수 X의 확률밀도함수는 $x=12$에서 최댓값을 갖고, 그 그래프는 직선 $x=12$에 대하여 대칭이다.

$\mathrm{P}(a-6\le X\le a+4)$는 확률밀도함수의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a-6$, $x=a+4$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고, 이때 $(a+4)-(a-6)=10$으로 일정하다.

즉, $\mathrm{P}(a-6\le X\le a+4)$가 최대가 되려면 오른쪽 그림과 같이 $a-6$, $a+4$의 평균이 12이어야 하므로



$\frac{(a-6)+(a+4)}{2}=12$, $2a-2=24$

$\therefore\ a=13$

016 답 0.1574

$m=45$, $\sigma=3$이므로

$\mathrm{P}(36\le X\le 42)=\mathrm{P}(45-3\times3\le X\le 45-3)$
$=\mathrm{P}(m-3\sigma\le X\le m-\sigma)$
$=\mathrm{P}(m+\sigma\le X\le m+3\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=0.4987-0.3413=0.1574$

017 답 0.6826

$\mathrm{P}(X\le m-\sigma)=0.1587$에서
$\mathrm{P}(X\le m)-\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=0.1587$
$0.5-\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=0.1587$
$\therefore\ \mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=0.3413$
$\therefore\ \mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)$
$=2\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)$
$=2\times0.3413=0.6826$

018 답 ④

ㄱ. $\mathrm{P}(m+\sigma\le X\le m+3\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=0.4987-0.3413=0.1574$
ㄴ. $\mathrm{P}(X\le m-2\sigma)=\mathrm{P}(X\ge m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$=0.5-0.4772=0.0228$
ㄷ. $\mathrm{P}(X\le m+3\sigma)=\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)$
$=0.5+0.4987=0.9987$
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

019 답 ⑤

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=a$에서
$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=a$
$\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=a$
$2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=a$
$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=\frac{a}{2}$
한편 $\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=b$에서
$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=b$
$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)=b$
$2\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)=b$
$\therefore\ \mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)=\frac{b}{2}$
$\therefore\ \mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=\frac{b}{2}+\frac{a}{2}$
$=\frac{a+b}{2}$

020 답 ①

$m=2.5$, $\sigma=0.2$이므로
$\mathrm{P}(X\ge 3.1)=\mathrm{P}(X\ge 2.5+3\times0.2)$
$=\mathrm{P}(X\ge m+3\sigma)$
$=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)$
$=0.5-\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)$ …… ㉠
한편 주어진 그림에서
$\mathrm{P}(m-3\sigma\le X\le m+3\sigma)=0.9974$이므로
$\mathrm{P}(m-3\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)=0.9974$
$\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)=0.9974$
$2\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)=0.9974$
$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)=0.4987$
이를 ㉠에 대입하면
$\mathrm{P}(X\ge 3.1)=0.5-0.4987=0.0013$

021 답 0.1587

$m=5$, $\sigma=3$이므로
$\mathrm{P}(Y\ge 33)=\mathrm{P}(4X+1\ge 33)$
$=\mathrm{P}(X\ge 8)=\mathrm{P}(X\ge 5+3)$
$=\mathrm{P}(X\ge m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=0.5-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$ …… ㉠
한편 $\mathrm{P}(2\le X\le 8)=0.6826$에서
$\mathrm{P}(5-3\le X\le 5+3)=0.6826$
$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=0.6826$
$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.6826$
$\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.6826$
$2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.6826$
$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.3413$
이를 ㉠에 대입하면
$\mathrm{P}(Y\ge 33)=0.5-0.3413=0.1587$

022 답 ③

$\mathrm{P}(X\le a)=0.1587$에서
$\mathrm{P}(X\le m)-\mathrm{P}(a\le X\le m)=0.1587$
$0.5-\mathrm{P}(a\le X\le m)=0.1587$
$\therefore\ \mathrm{P}(a\le X\le m)=0.3413$
한편 $\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.3413$에서
$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=0.3413$이므로 $a=m-\sigma$
$m=15$, $\sigma=2$이므로 $a=15-2=13$

023 답 0.5

$\mathrm{P}(m-k\sigma\le X\le m+k\sigma)=0.383$에서
$\mathrm{P}(m-k\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+k\sigma)=0.383$
$\mathrm{P}(m\le X\le m+k\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+k\sigma)=0.383$
$2\mathrm{P}(m\le X\le m+k\sigma)=0.383$
$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+k\sigma)=0.1915$
이때 $\mathrm{P}(m\le X\le m+0.5\sigma)=0.1915$이므로
$k=0.5$

024 답 ④

$P(X \geq a)=0.0668$에서

$P(X \geq m)-P(m \leq X \leq a)=0.0668$

$0.5-P(m \leq X \leq a)=0.0668$

$\therefore P(m \leq X \leq a)=0.4332$

이때 $P(m \leq X \leq m+1.5\sigma)=0.4332$이므로

$a=m+1.5\sigma$

$m=48$, $\sigma=6$이므로

$a=48+1.5\times 6=57$

025 답 4

확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(7, 3^2)$, $N(0, 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-7}{3}$, $Z_Y=\frac{Y}{4}$라고 하면 확률변수 Z_X, Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X \geq 4k)=P(Y \geq 3k)$에서

$P\left(Z_X \geq \frac{4k-7}{3}\right)=P\left(Z_Y \geq \frac{3k}{4}\right)$

따라서 $\frac{4k-7}{3}=\frac{3k}{4}$이므로

$16k-28=9k$, $7k=28$ $\quad\therefore k=4$

026 답 ③

확률변수 X가 정규분포 $N(72, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-72}{\sigma}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 $\frac{X-72}{\sigma}=\frac{X-m}{4}$이므로

$m=72$, $\sigma=4$ $\quad\therefore m+\sigma=76$

027 답 ②

확률변수 X가 정규분포 $N(25, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-25}{4}$라고 하면 확률변수 Z, Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X \leq a)=P(Y \geq a)$에서

$P\left(Z \leq \frac{a-25}{4}\right)=P(Y \geq a)$

$\therefore P\left(Z \leq \frac{a-25}{4}\right)=P(Y \leq -a)$

따라서 $\frac{a-25}{4}=-a$이므로

$a-25=-4a$, $5a=25$ $\quad\therefore a=5$

028 답 $\frac{12}{5}$

확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(m, 3^2)$, $N(m-4, 2^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-m}{3}$, $Z_Y=\frac{Y-(m-4)}{2}$라고 하면 확률변수 Z_X, Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X \geq k)=P(Y \leq k)$에서

$P\left(Z_X \geq \frac{k-m}{3}\right)=P\left(Z_Y \leq \frac{k-(m-4)}{2}\right)$

$\therefore P\left(Z_X \geq \frac{k-m}{3}\right)=P\left(Z_Y \geq -\frac{k-(m-4)}{2}\right)$

따라서 $\frac{k-m}{3}=-\frac{k-(m-4)}{2}$이므로

$2k-2m=-3k+3m-12$

$5m-5k=12$

$\therefore m-k=\frac{12}{5}$

029 답 ②

확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(18, 6^2)$, $N(m, 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-18}{6}$, $Z_Y=\frac{Y-m}{4}$이라고 하면 확률변수 Z_X, Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$2P(18 \leq X \leq 24)=P(12 \leq Y \leq 2m-12)$에서

$2P\left(\frac{18-18}{6} \leq Z_X \leq \frac{24-18}{6}\right)=P\left(\frac{12-m}{4} \leq Z_Y \leq \frac{2m-12-m}{4}\right)$

$$\begin{aligned}2P(0 \leq Z_X \leq 1)&=P\left(-\frac{m-12}{4} \leq Z_Y \leq \frac{m-12}{4}\right)\\&=P\left(-\frac{m-12}{4} \leq Z_Y \leq 0\right)+P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-12}{4}\right)\\&=P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-12}{4}\right)+P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-12}{4}\right)\\&=2P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-12}{4}\right)\end{aligned}$$

$\therefore P(0 \leq Z_X \leq 1)=P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-12}{4}\right)$

따라서 $1=\frac{m-12}{4}$이므로

$m-12=4$ $\quad\therefore m=16$

030 답 0.8185

확률변수 X가 정규분포 $N(60, 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{10}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(50 \leq X \leq 80)&=P\left(\frac{50-60}{10} \leq Z \leq \frac{80-60}{10}\right)\\&=P(-1 \leq Z \leq 2)\\&=P(-1 \leq Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 2)\\&=P(0 \leq Z \leq 1)+P(0 \leq Z \leq 2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

031 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

확률변수 X가 정규분포 $N(32, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-32}{4}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

ㄱ. $$\begin{aligned}P(20 \leq X \leq 32)&=P\left(\frac{20-32}{4} \leq Z \leq \frac{32-32}{4}\right)\\&=P(-3 \leq Z \leq 0)\\&=P(0 \leq Z \leq 3)\\&=0.4987\end{aligned}$$

ㄴ. $$\begin{aligned}P(X \geq 20)&=P\left(Z \geq \frac{20-32}{4}\right)\\&=P(Z \geq -3)=P(Z \leq 3)\\&=P(Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 3)\\&=0.5+0.4987=0.9987\end{aligned}$$

ㄷ. $P(X\geq 44)=P\left(Z\geq \frac{44-32}{4}\right)$
$=P(Z\geq 3)$
$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 3)$
$=0.5-0.4987=0.0013$
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

032 답 0.4004

확률변수 X가 정규분포 $N(40,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{2}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$\therefore\ P(37\leq X\leq 39)+P(X\geq 42)$
$=P\left(\frac{37-40}{2}\leq Z\leq \frac{39-40}{2}\right)+P\left(Z\geq \frac{42-40}{2}\right)$
$=P(-1.5\leq Z\leq -0.5)+P(Z\geq 1)$
$=P(0.5\leq Z\leq 1.5)+\{P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1)\}$
$=\{P(0\leq Z\leq 1.5)-P(0\leq Z\leq 0.5)\}+0.5-P(0\leq Z\leq 1)$
$=0.4332-0.1915+0.5-0.3413$
$=0.4004$

033 답 0.1359

확률변수 X가 정규분포 $N(15,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-15}{3}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$Y=3X+4$이므로
$P(58\leq Y\leq 67)=P(58\leq 3X+4\leq 67)$
$=P(18\leq X\leq 21)$
$=P\left(\frac{18-15}{3}\leq Z\leq \frac{21-15}{3}\right)$
$=P(1\leq Z\leq 2)$
$=P(0\leq Z\leq 2)-P(0\leq Z\leq 1)$
$=0.4772-0.3413=0.1359$

034 답 0.4514

확률변수 X가 정규분포 $N(64,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-64}{10}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$P(X\leq 58)=0.2743$에서
$P\left(Z\leq \frac{58-64}{10}\right)=0.2743$
$P(Z\leq -0.6)=0.2743$
$P(Z\geq 0.6)=0.2743$
$P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 0.6)=0.2743$
$0.5-P(0\leq Z\leq 0.6)=0.2743$
$\therefore\ P(0\leq Z\leq 0.6)=0.2257$
$\therefore\ P(58\leq X\leq 70)=P\left(\frac{58-64}{10}\leq Z\leq \frac{70-64}{10}\right)$
$=P(-0.6\leq Z\leq 0.6)$
$=P(-0.6\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 0.6)$
$=P(0\leq Z\leq 0.6)+P(0\leq Z\leq 0.6)$
$=2P(0\leq Z\leq 0.6)$
$=2\times 0.2257=0.4514$

035 답 18

확률변수 X가 정규분포 $N(20,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{2}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$P(a\leq X\leq 23)=0.7745$에서
$P\left(\frac{a-20}{2}\leq Z\leq \frac{23-20}{2}\right)=0.7745$
$P\left(\frac{a-20}{2}\leq Z\leq 1.5\right)=0.7745$
$P\left(\frac{a-20}{2}\leq Z\leq 0\right)+P(0\leq Z\leq 1.5)=0.7745$
$P\left(0\leq Z\leq -\frac{a-20}{2}\right)+0.4332=0.7745$
$\therefore\ P\left(0\leq Z\leq -\frac{a-20}{2}\right)=0.3413$
이때 $P(0\leq Z\leq 1)=0.3413$이므로
$-\frac{a-20}{2}=1,\ a-20=-2$
$\therefore\ a=18$

036 답 23

확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{2}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$P(X\geq 27)=0.0228$에서
$P\left(Z\geq \frac{27-m}{2}\right)=0.0228$
$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq \frac{27-m}{2}\right)=0.0228$
$0.5-P\left(0\leq Z\leq \frac{27-m}{2}\right)=0.0228$
$\therefore\ P\left(0\leq Z\leq \frac{27-m}{2}\right)=0.4772$
이때 $P(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로
$\frac{27-m}{2}=2,\ 27-m=4$
$\therefore\ m=23$

037 답 ⑤

확률변수 X가 정규분포 $N(60,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{5}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$P(X\leq a)=0.975$에서
$P\left(Z\leq \frac{a-60}{5}\right)=0.975$
$P(Z\leq 0)+P\left(0\leq Z\leq \frac{a-60}{5}\right)=0.975$
$0.5+P\left(0\leq Z\leq \frac{a-60}{5}\right)=0.975$
$\therefore\ P\left(0\leq Z\leq \frac{a-60}{5}\right)=0.475$
이때 $P(|Z|\leq 1.96)=0.95$에서 $P(0\leq Z\leq 1.96)=0.475$이므로
$\frac{a-60}{5}=1.96,\ a-60=9.8$
$\therefore\ a=69.8$

038 답 1.25

확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(m-k\sigma \le X \le m+k\sigma)=0.7888$에서

$P\left(\frac{m-k\sigma-m}{\sigma} \le Z \le \frac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right)=0.7888$

$P(-k \le Z \le k)=0.7888$

$P(-k \le Z \le 0)+P(0 \le Z \le k)=0.7888$

$P(0 \le Z \le k)+P(0 \le Z \le k)=0.7888$

$2P(0 \le Z \le k)=0.7888$

$\therefore P(0 \le Z \le k)=0.3944$

이때 $P(0 \le Z \le 1.25)=0.3944$이므로

$k=1.25$

039 답 0.0668

확률변수 X가 정규분포 $N(24, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-24}{4}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X \le 24-k)=0.3085$에서

$P\left(Z \le \frac{24-k-24}{4}\right)=0.3085$

$P\left(Z \le -\frac{k}{4}\right)=0.3085$

$P\left(Z \ge \frac{k}{4}\right)=0.3085$

$P(Z \ge 0)-P\left(0 \le Z \le \frac{k}{4}\right)=0.3085$

$0.5-P\left(0 \le Z \le \frac{k}{4}\right)=0.3085$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{k}{4}\right)=0.1915$

이때 $P(0 \le Z \le 0.5)=0.1915$이므로

$\frac{k}{4}=0.5$

$\therefore k=2$

$\therefore P(X \ge 15k)=P(X \ge 30)$

$=P\left(Z \ge \frac{30-24}{4}\right)$

$=P(Z \ge 1.5)$

$=P(Z \ge 0)-P(0 \le Z \le 1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$

040 답 2차 필기시험, 실기 시험, 1차 필기시험

지원자들의 1차 필기시험, 2차 필기시험, 실기 시험 점수를 각각 X_A점, X_B점, X_C점이라고 하면 확률변수 X_A, X_B, X_C는 각각 정규분포 $N(60, 9^2)$, $N(55, 12^2)$, $N(64, 10^2)$을 따르므로

$Z_A=\frac{X_A-60}{9}$, $Z_B=\frac{X_B-55}{12}$, $Z_C=\frac{X_C-64}{10}$

라고 하면 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

다른 지원자보다 정연이의 1차 필기시험, 2차 필기시험, 실기 시험 점수가 높을 확률은 각각

$P(X_A<68)=P\left(Z_A<\frac{68-60}{9}\right)=P\left(Z_A<\frac{8}{9}\right)$

$P(X_B<67)=P\left(Z_B<\frac{67-55}{12}\right)=P(Z_B<1)$

$P(X_C<73)=P\left(Z_C<\frac{73-64}{10}\right)=P\left(Z_C<\frac{9}{10}\right)$

이때 $P(Z_B<1)>P\left(Z_C<\frac{9}{10}\right)>P\left(Z_A<\frac{8}{9}\right)$이므로

$P(X_B<67)>P(X_C<73)>P(X_A<68)$

따라서 정연이가 다른 지원자보다 상대적으로 높은 점수를 받은 시험부터 순서대로 나열하면 2차 필기시험, 실기 시험, 1차 필기시험이다.

041 답 ③

확률변수 X, Y, W가 각각 정규분포 $N(59, 4^2)$, $N(65, 5^2)$, $N(67, 6^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-59}{4}$, $Z_Y=\frac{Y-65}{5}$, $Z_W=\frac{W-67}{6}$

이라고 하면 확률변수 Z_X, Z_Y, Z_W는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$a=P(X \ge 65)=P\left(Z_X \ge \frac{65-59}{4}\right)=P(Z_X \ge 1.5)$

$b=P(Y \le 57)=P\left(Z_Y \le \frac{57-65}{5}\right)=P(Z_Y \le -1.6)$

$=P(Z_Y \ge 1.6)$

$c=P(W \ge 73)=P\left(Z_W \ge \frac{73-67}{6}\right)=P(Z_W \ge 1)$

이때 $P(Z_Y \ge 1.6)<P(Z_X \ge 1.5)<P(Z_W \ge 1)$이므로

$b<a<c$

042 답 A, C, B

1팀, 2팀, 3팀 직원들의 하루 스마트폰 사용 시간을 각각 X_1분, X_2분, X_3분이라고 하면 확률변수 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $N(68, 8^2)$, $N(72, 5^2)$, $N(70, 4^2)$을 따르므로

$Z_1=\frac{X_1-68}{8}$, $Z_2=\frac{X_2-72}{5}$, $Z_3=\frac{X_3-70}{4}$

이라고 하면 확률변수 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

각 팀 직원들의 하루 스마트폰 사용 시간이 64분보다 적을 확률은 각각

$P(X_1<64)=P\left(Z_1<\frac{64-68}{8}\right)=P(Z_1<-0.5)$

$P(X_2<64)=P\left(Z_2<\frac{64-72}{5}\right)=P(Z_2<-1.6)$

$P(X_3<64)=P\left(Z_3<\frac{64-70}{4}\right)=P(Z_3<-1.5)$

이때 $P(Z_1<-0.5)>P(Z_3<-1.5)>P(Z_2<-1.6)$이므로

$P(X_1<64)>P(X_3<64)>P(X_2<64)$

따라서 자기 팀에서 상대적으로 하루 스마트폰 사용 시간이 많은 직원부터 순서대로 나열하면 A, C, B이다.

043 답 ㄷ

보검이네 학교 학생들의 물리학, 화학, 생명과학, 지구과학 시험 점수를 각각 X_A점, X_B점, X_C점, X_D점이라고 하면 확률변수 X_A, X_B, X_C, X_D는 각각 정규분포 $N(44, 16^2)$, $N(42, 12^2)$, $N(52, 14^2)$, $N(68, 10^2)$을 따르므로

$Z_A=\frac{X_A-44}{16}$, $Z_B=\frac{X_B-42}{12}$, $Z_C=\frac{X_C-52}{14}$, $Z_D=\frac{X_D-68}{10}$

이라고 하면 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C, Z_D는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

다른 학생보다 보검이의 물리학, 화학, 생명과학, 지구과학 점수가 높을 확률은 각각

$$P(X_A<56)=P\left(Z_A<\frac{56-44}{16}\right)=P\left(Z_A<\frac{3}{4}\right)$$

$$P(X_B<54)=P\left(Z_B<\frac{54-42}{12}\right)=P(Z_B<1)$$

$$P(X_C<59)=P\left(Z_C<\frac{59-52}{14}\right)=P\left(Z_C<\frac{1}{2}\right)$$

$$P(X_D<74)=P\left(Z_D<\frac{74-68}{10}\right)=P\left(Z_D<\frac{3}{5}\right)$$

이때 $P(Z_B<1)>P\left(Z_A<\frac{3}{4}\right)>P\left(Z_D<\frac{3}{5}\right)>P\left(Z_C<\frac{1}{2}\right)$이므로

$P(X_B<54)>P(X_A<56)>P(X_D<74)>P(X_C<59)$

ㄱ. 물리학 성적이 지구과학 성적보다 상대적으로 높다.

ㄴ. 상대적으로 화학 성적이 가장 높고 생명과학 성적이 가장 낮다.

ㄷ. 화학 성적이 54점으로 가장 낮지만 물리학 성적보다 상대적으로 높다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

핵심 유형 104~105쪽

유형10 답 ②

제품의 무게를 Xg이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(20, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{5}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge30)&=P\left(Z\ge\frac{30-20}{5}\right)=P(Z\ge2)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

유형11 답 328

학생들의 확률과 통계 시험 점수를 X점이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(58, 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-58}{8}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

확률과 통계 시험 점수가 42점 이상 66점 이하일 확률은

$$\begin{aligned}P(42\le X\le66)&=P\left(\frac{42-58}{8}\le Z\le\frac{66-58}{8}\right)\\&=P(-2\le Z\le1)\\&=P(-2\le Z\le0)+P(0\le Z\le1)\\&=P(0\le Z\le2)+P(0\le Z\le1)\\&=0.48+0.34=0.82\end{aligned}$$

따라서 구하는 학생 수는

$400\times0.82=328$

유형12 답 ③

응시자의 시험 점수를 X점이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(60, 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{2}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라고 하면

$P(X\ge a)=\frac{21}{300}=0.07$

$P\left(Z\ge\frac{a-60}{2}\right)=0.07$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-60}{2}\right)=0.07$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-60}{2}\right)=0.07$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-60}{2}\right)=0.43$

이때 $P(0\le Z\le1.5)=0.43$이므로

$\frac{a-60}{2}=1.5$, $a-60=3$

$\therefore a=63$

따라서 합격자의 최저 점수는 63점이다.

유형13 답 ③

확률변수 X가 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$

$V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{4}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X\ge24)&=P\left(Z\ge\frac{24-20}{4}\right)\\&=P(Z\ge1)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

유형14 답 ②

한 번의 시행에서 주사위의 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=720\times\frac{1}{6}=120$, $V(X)=720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=100$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-120}{10}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 140)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{140-120}{10}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

유형15 답 10

한 번의 시행에서 문제를 맞힐 확률은 $\frac{1}{5}$이므로 맞힌 문제의 개수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=25\times\frac{1}{5}=5,$

$\mathrm{V}(X)=25\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=4$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-5}{2}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

문제를 a개 이상 맞힐 확률이 0.01이므로 $\mathrm{P}(X\ge a)=0.01$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-5}{2}\right)=0.01$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-5}{2}\right)=0.01$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-5}{2}\right)=0.01$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-5}{2}\right)=0.49$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.49$이므로

$\frac{a-5}{2}=2.5,\ a-5=5$

$\therefore\ a=10$

핵심 유형 **완성**하기 106~109쪽

044 답 0.3085

승용차 한 대를 세차하는 데 걸리는 시간을 X분이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{2}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\ge 21)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{21-20}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0.5)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=0.5-0.1915=0.3085$

045 답 0.6687

밥 한 공기의 열량을 X kcal라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-320}{8}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(304\le X\le 324)=\mathrm{P}\left(\frac{304-320}{8}\le Z\le\frac{324-320}{8}\right)$
$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0.5)$
$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=0.4772+0.1915=0.6687$

046 답 ⑤

과자 한 개의 무게를 X g이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(18,\ 0.3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-18}{0.3}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

과자 한 개의 무게가 18.75 g 이하일 확률은

$\mathrm{P}(X\le 18.75)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{18.75-18}{0.3}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le 2.5)$
$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$
$=0.5+0.49=0.99$

따라서 무게가 18.75 g 이하인 과자는 전체의 99 %이다.

047 답 0.0668

공원까지 가는 데 걸리는 시간을 X분이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(25,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-25}{4}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

집에서 공원까지 가는 데 걸리는 시간이 31분을 초과하면 약속 시간에 늦으므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X>31)=\mathrm{P}\left(Z>\frac{31-25}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(Z>1.5)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.5-0.4332=0.0668$

048 답 3

이 고등학교 2학년 학생의 키를 X cm라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(169,\ 6.5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-169}{6.5}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

학생의 키가 182 cm 이상일 확률은

$\mathrm{P}(X\ge 182)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{182-169}{6.5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.48=0.02$

따라서 구하는 학생 수는

$150\times 0.02=3$

049 답 477

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(62,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-62}{2}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
키위의 무게가 58 g 이상 66 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(58\le X\le 66)&=\mathrm{P}\left(\frac{58-62}{2}\le Z\le\frac{66-62}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=2\times 0.477=0.954\end{aligned}$$

따라서 정상 제품의 개수는
$500\times 0.954=477$

050 답 ④

세계지리 시험 성적을 X점이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-70}{8}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
시험 성적이 62점 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 62)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{62-70}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

따라서 재평가를 받아야 하는 학생 수는
$200\times 0.16=32$

051 답 2766명

이 지역 50대 주민의 최고 혈압을 X mmHg라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(143,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-143}{6}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
최고 혈압이 140 mmHg 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 140)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{140-143}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5+0.1915=0.6915\end{aligned}$$

따라서 최고 혈압이 고혈압의 범위에 속하는 50대 주민은
$4000\times 0.6915=2766$(명)

052 답 47점

학생들의 평가 점수를 X점이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{5}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
상위 8 %에 속하는 학생의 최저 점수를 a점이라고 하면

$\mathrm{P}(X\ge a)=0.08$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-40}{5}\right)=0.08$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-40}{5}\right)=0.08$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-40}{5}\right)=0.08$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-40}{5}\right)=0.42$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.4)=0.42$이므로

$\frac{a-40}{5}=1.4,\ a-40=7\qquad\therefore\ a=47$

따라서 A학점을 받은 학생의 최저 점수는 47점이다.

053 답 410초

학생들의 오래달리기 기록을 X초라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(480,\ 40^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-480}{40}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
메달을 받은 학생의 최저 기록을 a초라고 하면 기록이 a초보다 짧아야 메달을 받으므로

$\mathrm{P}(X\le a)=0.04$

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-480}{40}\right)=0.04,\ \mathrm{P}\left(Z\ge\frac{480-a}{40}\right)=0.04$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{480-a}{40}\right)=0.04$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{480-a}{40}\right)=0.04$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{480-a}{40}\right)=0.46$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.75)=0.46$이므로

$\frac{480-a}{40}=1.75,\ 480-a=70\qquad\therefore\ a=410$

따라서 메달을 받은 학생의 최저 기록은 410초이다.

054 답 55 m

선수들의 기록을 X m라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-45}{5}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
3등을 한 선수의 기록을 a m라고 하면

$\mathrm{P}(X\ge a)=\frac{3}{150}=0.02$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-45}{5}\right)=0.02$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-45}{5}\right)=0.02$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-45}{5}\right)=0.02$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-45}{5}\right)=0.48$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$\frac{a-45}{5}=2,\ a-45=10\qquad\therefore\ a=55$

따라서 3등을 한 선수의 기록은 55 m이다.

055 답 2점

응시자들의 점수를 X점이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(68,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-68}{10}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

1차 합격자의 최저 점수를 a점이라고 하면

$P(X\ge a)=\dfrac{30}{600}=0.05$

$P\left(Z\ge\dfrac{a-68}{10}\right)=0.05$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\dfrac{a-68}{10}\right)=0.05$

$0.5-P\left(0\le Z\le\dfrac{a-68}{10}\right)=0.05$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\dfrac{a-68}{10}\right)=0.45$

이때 $P(0\le Z\le1.64)=0.45$이므로

$\dfrac{a-68}{10}=1.64,\ a-68=16.4$

$\therefore\ a=84.4$

한편 2차 합격자의 최저 점수를 b점이라고 하면

$P(X\ge b)=\dfrac{30+15}{600}=0.075$

$P\left(Z\ge\dfrac{b-68}{10}\right)=0.075$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\dfrac{b-68}{10}\right)=0.075$

$0.5-P\left(0\le Z\le\dfrac{b-68}{10}\right)=0.075$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\dfrac{b-68}{10}\right)=0.425$

이때 $P(0\le Z\le1.44)=0.425$이므로

$\dfrac{b-68}{10}=1.44,\ b-68=14.4$

$\therefore\ b=82.4$

따라서 1차 합격자와 2차 합격자의 최저 점수의 차는

$a-b=84.4-82.4=2$(점)

056 답 0.8351

확률변수 X가 이항분포 $B\left(150,\ \dfrac{3}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=150\times\dfrac{3}{5}=90$

$V(X)=150\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=36$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(90,\ 6^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-90}{6}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ P(75\le X\le96)&=P\left(\frac{75-90}{6}\le Z\le\frac{96-90}{6}\right)\\&=P(-2.5\le Z\le1)\\&=P(-2.5\le Z\le0)+P(0\le Z\le1)\\&=P(0\le Z\le2.5)+P(0\le Z\le1)\\&=0.4938+0.3413\\&=0.8351\end{aligned}$$

057 답 51

확률변수 X가 이항분포 $B\left(64,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=64\times\dfrac{1}{2}=32$

$V(X)=64\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=16$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(32,\ 4^2)$을 따르므로

$a=32,\ b=16$

$Z=\dfrac{X-32}{4}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(32\le X\le44)&=P\left(\frac{32-32}{4}\le Z\le\frac{44-32}{4}\right)\\&=P(0\le Z\le3)\end{aligned}$$

따라서 $c=3$이므로 $a+b+c=32+16+3=51$

058 답 0.9772

확률변수 X가 이항분포 $B\left(400,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=400\times\dfrac{1}{5}=80$

$V(X)=400\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=64$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(80,\ 8^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-80}{8}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ P(X\le96)&=P\left(Z\le\frac{96-80}{8}\right)\\&=P(Z\le2)\\&=P(Z\le0)+P(0\le Z\le2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

059 답 0.0082

확률변수 X가 이항분포 $B(180,\ p)$를 따르므로 $V(X)=25$에서

$180p(1-p)=25,\ 36p^2-36p+5=0$

$(6p-1)(6p-5)=0$

$\therefore\ p=\dfrac{5}{6}\ (\because\ 0.5<p<1)$

확률변수 X가 이항분포 $B\left(180,\ \dfrac{5}{6}\right)$를 따르므로

$E(X)=180\times\dfrac{5}{6}=150$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(150,\ 5^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-150}{5}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ P\left(X\ge\frac{135}{p}\right)&=P\left(X\ge135\times\frac{6}{5}\right)\\&=P(X\ge162)\\&=P\left(Z\ge\frac{162-150}{5}\right)\\&=P(Z\ge2.4)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2.4)\\&=0.5-0.4918=0.0082\end{aligned}$$

060 답 ③

주어진 식의 값은 이항분포 $B\left(100, \frac{9}{10}\right)$를 따르는 확률변수 X에 대하여 $P(X \geq 93)$과 같다.
확률변수 X에 대하여

$E(X)=100\times\frac{9}{10}=90$

$V(X)=100\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=9$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(90, 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-90}{3}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 주어진 식의 값은

$$\begin{aligned}P(X\geq 93)&=P\left(Z\geq\frac{93-90}{3}\right)\\&=P(Z\geq 1)\\&=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

061 답 0.84

한 번의 시행에서 동전의 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 앞면이 나오는 횟수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore$ $E(X)=100\times\frac{1}{2}=50$,

$V(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(50, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-50}{5}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(45\leq X\leq 65)&=P\left(\frac{45-50}{5}\leq Z\leq\frac{65-50}{5}\right)\\&=P(-1\leq Z\leq 3)\\&=P(-1\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 3)\\&=P(0\leq Z\leq 1)+P(0\leq Z\leq 3)\\&=0.3413+0.4987=0.84\end{aligned}$$

062 답 0.0668

한 명이 재구매할 확률이 $\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$이므로 재구매하는 사람의 수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(150, \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore$ $E(X)=150\times\frac{3}{5}=90$,

$V(X)=150\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=36$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(90, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-90}{6}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq 99)&=P\left(Z\geq\frac{99-90}{6}\right)\\&=P(Z\geq 1.5)\\&=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

063 답 0.9332

초청장을 받은 한 명이 공연을 보러 올 확률은 $\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$이므로 공연을 보러 온 사람의 수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(400, \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

$\therefore$ $E(X)=400\times\frac{4}{5}=320$,

$V(X)=400\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=64$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(320, 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-320}{8}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\leq 332)&=P\left(Z\leq\frac{332-320}{8}\right)\\&=P(Z\leq 1.5)\\&=P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1.5)\\&=0.5+0.4332=0.9332\end{aligned}$$

064 답 0.02

10점을 얻은 횟수를 X라고 하면 2점을 잃은 횟수는 $1200-X$이므로 얻은 점수가 1560점 이상이 되려면

$10X-2(1200-X)\geq 1560$

$\therefore$ $X\geq 330$

확률변수 X는 이항분포 $B\left(1200, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=1200\times\frac{1}{4}=300$

$V(X)=1200\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=225$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(300, 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-300}{15}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq 330)&=P\left(Z\geq\frac{330-300}{15}\right)\\&=P(Z\geq 2)\\&=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

065 답 220

한 명이 찬성할 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 찬성한 사람의 수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore$ $\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{2}=200$,

$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=100$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-200}{10}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge a)=0.02$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-200}{10}\right)=0.02$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-200}{10}\right)=0.02$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-200}{10}\right)=0.02$

$\therefore$ $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-200}{10}\right)=0.48$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$\frac{a-200}{10}=2$, $a-200=20$

$\therefore$ $a=220$

066 답 315

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{2}{3}=300$

$\mathrm{V}(X)=450\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=100$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-300}{10}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(300\le X\le a)=0.43$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{300-300}{10}\le Z\le\frac{a-300}{10}\right)=0.43$

$\therefore$ $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-300}{10}\right)=0.43$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로

$\frac{a-300}{10}=1.5$, $a-300=15$

$\therefore$ $a=315$

067 답 ②

제품 한 개가 불량품일 확률은 $\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(2500,\ \frac{1}{50}\right)$을 따른다.

$\therefore$ $\mathrm{E}(X)=2500\times\frac{1}{50}=50$,

$\mathrm{V}(X)=2500\times\frac{1}{50}\times\frac{49}{50}=49$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-50}{7}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(|X-50|\ge k)=0.04$에서

$\mathrm{P}(X-50\le -k)+\mathrm{P}(X-50\ge k)=0.04$

$\mathrm{P}(X\le 50-k)+\mathrm{P}(X\ge 50+k)=0.04$

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{50-k-50}{7}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{50+k-50}{7}\right)=0.04$

$\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{k}{7}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{7}\right)=0.04$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{7}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{7}\right)=0.04$

$2\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{7}\right)=0.04$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k}{7}\right)=0.02$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{7}\right)=0.02$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{7}\right)=0.02$

$\therefore$ $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k}{7}\right)=0.48$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$\frac{k}{7}=2$ $\quad\therefore$ $k=14$

068 답 0.9772

입장한 관객 한 명이 어린이일 확률은 $\frac{1}{10}$이므로 입장한 어린이의 수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$\therefore$ $\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{10}=10$,

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=9$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-10}{3}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

어린이가 a명 이상일 확률이 0.1587이므로 $\mathrm{P}(X\ge a)=0.1587$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-10}{3}\right)=0.1587$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-10}{3}\right)=0.1587$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-10}{3}\right)=0.1587$

$\therefore$ $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-10}{3}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{a-10}{3}=1$, $a-10=3$

$\therefore$ $a=13$

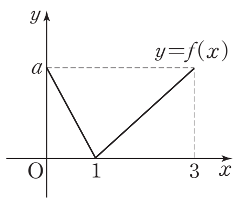
100명 중에서 어른의 수는 $100-X$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(100-X\ge 6a+6)&=\mathrm{P}(100-X\ge 6\times13+6)\\&=\mathrm{P}(X\le 16)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{16-10}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

1 답 $\frac{2}{3}$

유형 01 확률밀도함수

$f(x)$는 확률밀도함수이므로 $a>0$이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times1\times a+\frac{1}{2}\times2\times a=1$, $\frac{3}{2}a=1$

$\therefore a=\frac{2}{3}$

2 답 ①

유형 02 확률밀도함수를 이용하여 확률 구하기

$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

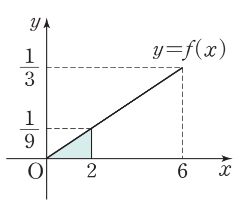
$\frac{1}{2}\times6\times p=1$, $3p=1$ $\qquad\therefore p=\frac{1}{3}$

$0\le x\le6$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0, 0)$, $\left(6, \frac{1}{3}\right)$을 지나는 직선이므로

$y=\frac{\frac{1}{3}}{6}x$ $\qquad\therefore f(x)=\frac{1}{18}x\ (0\le x\le6)$

$\therefore f(6p)=f(2)=\frac{1}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(0\le X\le2)$는 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(0\le X\le2)=\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$

3 답 ①

유형 03 정규분포의 확률밀도함수의 그래프의 성질

평균이 클수록 확률밀도함수의 그래프의 대칭축은 오른쪽에 위치하므로

$m_{\mathrm{A}}<m_{\mathrm{B}}$

표준편차가 클수록 확률밀도함수의 그래프의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼지므로

$\sigma_{\mathrm{A}}<\sigma_{\mathrm{B}}$

4 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 04 정규분포 – 확률 구하기

$m=15$, $\sigma=3$이므로

ㄱ. $\mathrm{P}(12\le X\le18)=\mathrm{P}(15-3\le X\le15+3)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=2\times0.3413=0.6826$

ㄴ. $\mathrm{P}(X\ge24)=\mathrm{P}(X\ge15+3\times3)$
$=\mathrm{P}(X\ge m+3\sigma)$
$=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)$
$=0.5-0.4987=0.0013$

ㄷ. $\mathrm{P}(X\le21)=\mathrm{P}(X\le15+2\times3)$
$=\mathrm{P}(X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$=0.5+0.4772=0.9772$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5 답 ③

유형 05 정규분포 – 미지수의 값 구하기

$\mathrm{P}(|X|\ge k)=0.0026$에서
$\mathrm{P}(X\le-k)+\mathrm{P}(X\ge k)=0.0026$
$\mathrm{P}(X\ge k)+\mathrm{P}(X\ge k)=0.0026$
$2\mathrm{P}(X\ge k)=0.0026$
$\mathrm{P}(X\ge k)=0.0013$
$\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le k)=0.0013$
$0.5-\mathrm{P}(m\le X\le k)=0.0013$
$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le k)=0.4987$
이때 $\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)=0.4987$이므로
$k=m+3\sigma$
$m=50$, $\sigma=3$이므로 $k=50+3\times3=59$

6 답 ④

유형 06 정규분포의 표준화

확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(0, 2^2)$, $\mathrm{N}(4, 3^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X}{2}$, $Z_Y=\frac{Y-4}{3}$라고 하면 확률변수 Z_X, Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X<a)=\mathrm{P}(Y<b+4)$에서
$\mathrm{P}\left(Z_X<\frac{a}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y<\frac{b+4-4}{3}\right)$
$\therefore \mathrm{P}\left(Z_X<\frac{a}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y<\frac{b}{3}\right)$
따라서 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$이므로 $3a=2b$

7 답 **0.1587**

유형 07 표준정규분포 – 확률 구하기

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{5}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$Y=3X+2$이므로

$\mathrm{P}(Y\le47)=\mathrm{P}(3X+2\le47)$
$=\mathrm{P}(X\le15)$
$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{15-20}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le-1)$
$=\mathrm{P}(Z\ge1)$
$=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=0.5-0.3413=0.1587$

8 답 ③

유형 08 표준정규분포 – 미지수의 값 구하기

확률변수 X가 정규분포 $N(60,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{2}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\ge k)=0.0228$에서

$P\left(Z\ge\frac{k-60}{2}\right)=0.0228$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-60}{2}\right)=0.0228$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-60}{2}\right)=0.0228$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{k-60}{2}\right)=0.4772$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{k-60}{2}=2,\ k-60=4$

$\therefore\ k=64$

9 답 ④

유형 10 정규분포의 활용 – 확률 구하기

학생들의 키를 X cm라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(171,\ 7^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-171}{7}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

키가 164 cm 이상 178 cm 이하일 확률은

$$\begin{aligned}P(164\le X\le178)&=P\left(\frac{164-171}{7}\le Z\le\frac{178-171}{7}\right)\\&=P(-1\le Z\le1)\\&=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le1)\\&=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le1)\\&=2P(0\le Z\le1)\\&=2\times0.34=0.68\end{aligned}$$

따라서 키가 164 cm 이상 178 cm 이하인 학생은 전체 학생의 68 %이다.

10 답 ③

유형 12 정규분포의 활용 – 최저 점수 구하기

사원들의 점수를 X점이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(55,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-55}{8}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

10등 이내에 들기 위한 최저 점수를 k점이라고 하면

$P(X\ge k)=\frac{10}{200}=0.05$

$P\left(Z\ge\frac{k-55}{8}\right)=0.05$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-55}{8}\right)=0.05$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-55}{8}\right)=0.05$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{k-55}{8}\right)=0.45$

이때 $P(0\le Z\le1.64)=0.45$이므로

$\frac{k-55}{8}=1.64,\ k-55=13.12$

$\therefore\ k=68.12$

따라서 10등 이내에 들기 위한 최저 점수는 68.12점이다.

11 답 357

유형 13 이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $B\left(600,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=600\times\frac{3}{5}=360$

$V(X)=600\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=144$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(360,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-360}{12}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\le k)=0.4$에서

$P\left(Z\le\frac{k-360}{12}\right)=0.4$

$P\left(Z\ge\frac{360-k}{12}\right)=0.4$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{360-k}{12}\right)=0.4$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{360-k}{12}\right)=0.4$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{360-k}{12}\right)=0.1$

이때 $P(0\le Z\le0.25)=0.1$이므로

$\frac{360-k}{12}=0.25,\ 360-k=3$

$\therefore\ k=357$

12 답 ③

유형 14 이항분포와 정규분포의 관계의 활용 – 확률 구하기

등록한 합격자의 수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(192,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=192\times\frac{3}{4}=144$

$V(X)=192\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=36$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(144,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-144}{6}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge138)&=P\left(Z\ge\frac{138-144}{6}\right)\\&=P(Z\ge-1)\\&=P(Z\le1)\\&=P(Z\le0)+P(0\le Z\le1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

07 통계적 추정

핵심 유형

	유형01 237	유형02 $\frac{13}{10}$	유형03 10
유형04 ④	유형05 0.0228		유형06 9
유형07 $3.402 \le m \le 3.598$		유형08 8.6	유형09 49
유형10 95	유형11 97	유형12 ㄱ, ㄷ	

핵심 유형 완성하기

001 102	002 ⑤	003 7	004 1600	005 $\frac{11}{3}$
006 ④	007 $\frac{1}{2}$	008 1	009 ③	
010 13000	011 ⑤	012 ②	013 $a=72$, $b=3$	
014 ②	015 0.8413		016 0.9544	
017 0.8185		018 ③	019 ②	
020 0.0062		021 36	022 ⑤	023 4
024 $81.08 \le m \le 88.92$		025 ⑤	026 ⑤	027 4
028 99	029 0.98	030 5.16	031 0.62	032 225
033 ⑤	034 196개	035 99	036 92	037 2.3
038 ⑤	039 9604	040 32개	041 ⑤	042 ①

핵심 유형 최종 점검하기

1 44	2 $\frac{1}{4}$	3 46	4 36	5 $\frac{81}{2}$
6 0.0668	7 ⑤	8 ③	9 ②	10 64
11 96	12 324	13 $\frac{1}{4}$		

핵심 유형 114~116쪽

유형01 답 **237**

모평균이 15, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 3이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=15$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{6^2}{3}=12$

따라서 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=12+15^2=237$$

유형02 답 $\frac{13}{10}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{2}{5}+\frac{1}{10}+a+\frac{1}{5}=1 \qquad \therefore a=\frac{3}{10}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}=\frac{13}{10}$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=\frac{13}{10}$

유형03 답 **10**

공 한 개를 임의로 택할 때, 공에 적힌 수를 X라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}=4$,

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+5^2\times\frac{1}{4}+7^2\times\frac{1}{4}=21$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=21-4^2=5$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=4$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{2}$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})\mathrm{V}(\overline{X})=4\times\frac{5}{2}=10$

유형04 답 ④

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(10, \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10, \frac{\sigma^2}{100}\right)$을 따른다.

이때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(a, \left(\frac{2}{5}\right)^2\right)$을 따르므로

$10=a$, $\frac{\sigma^2}{100}=\frac{4}{25}$

$\therefore a=10$, $\sigma^2=16 \qquad \therefore a+\sigma^2=26$

유형05 답 **0.0228**

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(50, 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50, \frac{5^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(50, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-50}{\frac{1}{2}}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 51)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{51-50}{\frac{1}{2}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

유형06 답 9

모집단이 정규분포 $N(640,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(640,\ \frac{12^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-640}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\le 634)=0.0668$에서

$$P\left(Z\le\frac{634-640}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)=0.0668$$

$$P\left(Z\le-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668,\ P\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$$

$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.4332$$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=1.5,\ \sqrt{n}=3\qquad\therefore\ n=9$

유형07 답 $3.402\le m\le 3.598$

표본의 크기가 100, 표본평균이 3.5, 모표준편차가 0.5이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$3.5-1.96\times\frac{0.5}{\sqrt{100}}\le m\le 3.5+1.96\times\frac{0.5}{\sqrt{100}}$$

$\therefore\ 3.402\le m\le 3.598$

유형08 답 8.6

표본의 크기가 9, 모표준편차가 5이므로 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2\times 2.58\times\frac{5}{\sqrt{9}}=8.6$$

유형09 답 49

표본의 크기가 n, 모표준편차가 6이므로 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이가 3.36 이하이려면

$$2\times 1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}\le 3.36$$

$\sqrt{n}\ge 7\qquad\therefore\ n\ge 49$

따라서 n의 최솟값은 49다.

유형10 답 95

표본의 크기가 100, 모표준편차가 15이므로 $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라고 하면 모평균을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times k\times\frac{15}{\sqrt{100}}=5.88\qquad\therefore\ k=1.96$

이때 $P(|Z|\le 1.96)=0.95$이므로

$\frac{\alpha}{100}=0.95\qquad\therefore\ \alpha=95$

유형11 답 97

표본의 크기가 n, 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 5이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$$

$-\frac{9.8}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{9.8}{\sqrt{n}}\qquad\therefore\ |m-\overline{x}|\le\frac{9.8}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|\le 1$이어야 하므로

$\frac{9.8}{\sqrt{n}}\le 1,\ \sqrt{n}\ge 9.8\qquad\therefore\ n\ge 96.04$

따라서 n의 최솟값은 97이다.

유형12 답 ㄱ, ㄷ

표본의 크기가 n, 모표준편차가 σ이므로 모평균을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$b-a=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

ㄱ. n의 값이 커지면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 $b-a$의 값은 작아진다.

ㄴ. α의 값이 작아지면 k의 값이 작아지므로 $b-a$의 값도 작아진다.

ㄷ. α의 값이 커지면 k의 값이 커지고, n의 값이 작아지면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 $b-a$의 값은 커진다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

핵심 유형 **완성하기** 117~123쪽

001 답 102

모평균이 10, 모표준편차가 4, 표본의 크기가 8이므로

$E(\overline{X})=10,\ V(\overline{X})=\frac{4^2}{8}=2$

따라서 $V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$에서

$E(\overline{X}^2)=V(\overline{X})+\{E(\overline{X})\}^2=2+10^2=102$

002 답 ⑤

모평균이 60, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 16이므로

$E(\overline{X})=60,\ \sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}\qquad\therefore\ E(\overline{X})\sigma(\overline{X})=60\times\frac{5}{4}=75$

003 답 7

모평균이 k, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 n이므로

$E(\overline{X})=k=11$

$V(\overline{X})=\frac{6^2}{n}=9\qquad\therefore\ n=4$

$\therefore\ k-n=11-4=7$

004 답 1600

모표준편차가 8, 표본의 크기가 n이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{8}{\sqrt{n}}$

이때 $\sigma(\overline{X})\ge 0.2$이어야 하므로

$\frac{8}{\sqrt{n}}\ge 0.2,\ \sqrt{n}\le 40\qquad\therefore\ n\le 1600$

따라서 n의 최댓값은 1600이다.

005 답 $\frac{11}{3}$

확률의 총합은 1이므로

$a+2a+3a=1$, $6a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{2}=\frac{11}{3}$

$\therefore E(\overline{X})=E(X)=\frac{11}{3}$

006 답 ④

확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}=2$,

$E(X^2)=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{10}=5$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$

표본의 크기가 n이므로 $V(\overline{X})=\frac{1}{n}$

이때 $V(\overline{X})=\frac{1}{8}$에서

$\frac{1}{n}=\frac{1}{8}$ $\quad\therefore n=8$

007 답 $\frac{1}{2}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{5}{12}+\frac{1}{4}+a+b=1$ $\quad\therefore a+b=\frac{1}{3}$ $\quad$ …… ㉠

확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{4}+2\times a+3\times b=2a+3b+\frac{1}{4}$

이때 $E(X)=E(\overline{X})=1$이므로

$2a+3b+\frac{1}{4}=1$ $\quad\therefore 2a+3b=\frac{3}{4}$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{12}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X^2)=0^2\times\frac{5}{12}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{12}=2$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-1^2=1$

이때 표본의 크기가 2이므로 $V(\overline{X})=\frac{1}{2}$

008 답 1

확률의 총합은 1이므로

$P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$

$\frac{-k+2}{10}+\frac{1}{5}+\frac{k+2}{10}+\frac{k+1}{5}=1$

$\frac{k+4}{5}=1$, $k+4=5$ $\quad\therefore k=1$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=-1\times\frac{1}{10}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{2}{5}=1$,

$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{10}+0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{2}{5}=2$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-1^2=1$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=1$

이때 표본의 크기가 9이므로 $\sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$

$\therefore \sigma(3\overline{X}+5)=|3|\sigma(\overline{X})=3\times\frac{1}{3}=1$

009 답 ③

공 한 개를 임의로 꺼낼 때, 공에 적힌 수를 X라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$,

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

이때 표본의 크기가 4이므로

$E(\overline{X})=\frac{5}{3}$, $V(\overline{X})=\frac{\frac{5}{9}}{4}=\frac{5}{36}$ $\quad\therefore \frac{E(\overline{X})}{V(\overline{X})}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{36}}=12$

010 답 13000

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 게임을 한 번 하여 나오는 모든 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

500원	100원	상금(원)
H	H	600
H	T	500
T	H	100
T	T	0

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 X원이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	500	600	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+100\times\frac{1}{4}+500\times\frac{1}{4}+600\times\frac{1}{4}=300$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+100^2\times\frac{1}{4}+500^2\times\frac{1}{4}+600^2\times\frac{1}{4}=155000$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=155000-300^2=65000$

이때 표본의 크기가 5이므로

$V(\overline{X})=\frac{65000}{5}=13000$

011 답 ⑤

구슬 한 개를 임의로 꺼낼 때, 구슬에 적힌 수를 X라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{2}{7}+5\times\frac{3}{7}+7\times\frac{2}{7}=5$,

$\mathrm{E}(X^2)=3^2\times\frac{2}{7}+5^2\times\frac{3}{7}+7^2\times\frac{2}{7}=\frac{191}{7}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{191}{7}-5^2=\frac{16}{7}$

표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{16}{7}}{n}=\frac{16}{7n}$

이때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{14}$에서

$\frac{16}{7n}=\frac{1}{14}\qquad\therefore n=32$

012 답 ②

과일 바구니 한 개를 임의로 택할 때, 과일 바구니의 무게를 X kg이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=2$,

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{2}-2^2=\frac{1}{2}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

표본의 크기가 n이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$

$\therefore \sigma(6\overline{X}-2)=|6|\sigma(\overline{X})=6\times\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$

이때 $\sigma(6\overline{X}-2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서

$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{n}=2\sqrt{6}\qquad\therefore n=24$

013 답 $a=72,\ b=3$

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(a,\ \frac{6^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(a,\ 3^2)$을 따른다.

이때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ b^2)$을 따르므로

$a=72,\ b=3\ (\because b>0)$

014 답 ②

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(140,\ 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(140,\ \frac{8^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(140,\ \left(\frac{8}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(140,\ 4^2)$을 따르므로

$\frac{8}{\sqrt{n}}=4$

$\sqrt{n}=2\qquad\therefore n=4$

015 답 0.8413

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(350,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(350,\ \frac{12^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(350,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-350}{2}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 348)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{348-350}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -1)\\&=\mathrm{P}(Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

016 답 0.9544

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(800,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(800,\ \frac{10^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(800,\ 1^2)$을 따른다.

$Z=\overline{X}-800$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(798\le\overline{X}\le 802)&=\mathrm{P}(798-800\le Z\le 802-800)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=2\times 0.4772=0.9544\end{aligned}$$

017 답 0.8185

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(260,\ 15^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(260,\ \frac{15^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(260,\ 3^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-260}{3}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(257\le\overline{X}\le 266)&=\mathrm{P}\left(\frac{257-260}{3}\le Z\le\frac{266-260}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

018 답 ③

모집단이 정규분포 $N(6,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(6,\ \frac{4^2}{64}\right)$, 즉 $N\left(6,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-6}{\frac{1}{2}}=2\overline{X}-12$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포

$N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\geq k)=0.994$에서

$P(Z\geq 2k-12)=0.994$

$P(Z\leq 12-2k)=0.994$

$P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 12-2k)=0.994$

$0.5+P(0\leq Z\leq 12-2k)=0.994$

$\therefore\ P(0\leq Z\leq 12-2k)=0.494$

이때 $P(0\leq Z\leq 2.51)=0.494$이므로

$12-2k=2.51,\ 2k=9.49 \qquad \therefore\ k=4.745$

019 답 ②

모집단이 정규분포 $N(180,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(180,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(180,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-180}{2}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$

을 따르므로 $P(|\overline{X}-180|\leq a)=0.8664$에서

$P(-a\leq \overline{X}-180\leq a)=0.8664$

$P(-a+180\leq \overline{X}\leq a+180)=0.8664$

$P\left(\frac{-a+180-180}{2}\leq Z\leq \frac{a+180-180}{2}\right)=0.8664$

$P\left(-\frac{a}{2}\leq Z\leq \frac{a}{2}\right)=0.8664$

$P\left(-\frac{a}{2}\leq Z\leq 0\right)+P\left(0\leq Z\leq \frac{a}{2}\right)=0.8664$

$2P\left(0\leq Z\leq \frac{a}{2}\right)=0.8664$

$\therefore\ P\left(0\leq Z\leq \frac{a}{2}\right)=0.4332$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{a}{2}=1.5 \qquad \therefore\ a=3$

020 답 0.0062

모집단이 정규분포 $N(500,\ 16^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(500,\ \frac{16^2}{4}\right)$, 즉 $N(500,\ 8^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-500}{8}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$

을 따르므로 한 조가 하루에 만드는 빵이 2080개 이상일 확률은

$$\begin{aligned}P(4\overline{X}\geq 2080)&=P(\overline{X}\geq 520)\\&=P\left(Z\geq \frac{520-500}{8}\right)\\&=P(Z\geq 2.5)\\&=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2.5)\\&=0.5-0.4938=0.0062\end{aligned}$$

021 답 36

모집단이 정규분포 $N(300,\ 33^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(300,\ \frac{33^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-300}{\frac{33}{\sqrt{n}}}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$

을 따르므로 $P(\overline{X}\geq 289)=0.9772$에서

$P\left(Z\geq \frac{289-300}{\frac{33}{\sqrt{n}}}\right)=0.9772$

$P\left(Z\geq -\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.9772$

$P\left(Z\leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.9772$

$P(Z\leq 0)+P\left(0\leq Z\leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.9772$

$0.5+P\left(0\leq Z\leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.9772$

$\therefore\ P\left(0\leq Z\leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.4772$

이때 $P(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{3}=2,\ \sqrt{n}=6$

$\therefore\ n=36$

022 답 ⑤

모집단이 정규분포 $N(150,\ 16^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(150,\ \frac{16^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-150}{\frac{16}{\sqrt{n}}}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$

을 따르므로 $P(\overline{X}\geq 152)=0.0668$에서

$P\left(Z\geq \frac{152-150}{\frac{16}{\sqrt{n}}}\right)=0.0668$

$P\left(Z\geq \frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.0668$

$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.0668$

$0.5-P\left(0\leq Z\leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.0668$

$\therefore\ P\left(0\leq Z\leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.4332$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{8}=1.5,\ \sqrt{n}=12$

$\therefore\ n=144$

023 답 4

모집단이 정규분포 $N(40,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(40,\ \frac{10^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-40}{\dfrac{10}{\sqrt{n}}}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(30\leq\overline{X}\leq50)\geq0.9544$에서

$$\mathrm{P}\left(\dfrac{30-40}{\dfrac{10}{\sqrt{n}}}\leq Z\leq\dfrac{50-40}{\dfrac{10}{\sqrt{n}}}\right)\geq0.9544$$

$\mathrm{P}(-\sqrt{n}\leq Z\leq\sqrt{n})\geq0.9544$

$\mathrm{P}(-\sqrt{n}\leq Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq\sqrt{n})\geq0.9544$

$2\mathrm{P}(0\leq Z\leq\sqrt{n})\geq0.9544$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\leq Z\leq\sqrt{n})\geq0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)=0.4772$이므로

$\sqrt{n}\geq2\qquad\therefore\ n\geq4$

따라서 n의 최솟값은 4이다.

024 답 $81.08\leq m\leq88.92$

표본의 크기가 49, 표본평균이 85, 모표준편차가 14이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$85-1.96\times\dfrac{14}{\sqrt{49}}\leq m\leq85+1.96\times\dfrac{14}{\sqrt{49}}$

$\therefore\ 81.08\leq m\leq88.92$

025 답 ⑤

표본의 크기가 16, 표본평균이 40, 모표준편차가 12이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$40-2.58\times\dfrac{12}{\sqrt{16}}\leq m\leq40+2.58\times\dfrac{12}{\sqrt{16}}$

$\therefore\ 32.26\leq m\leq47.74$

따라서 $\alpha=32.26,\ \beta=47.74$이므로

$100\alpha-50\beta=3226-2387=839$

026 답 ⑤

표본의 크기 144가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 12를 이용할 수 있고, 표본평균이 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$64-2.58\times\dfrac{12}{\sqrt{144}}\leq m\leq64+2.58\times\dfrac{12}{\sqrt{144}}$

$\therefore\ 61.42\leq m\leq66.58$

027 답 4

표본의 크기가 n, 표본평균이 1500, 모표준편차가 20이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$1500-1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}\leq m\leq1500+1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}$

이때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $1480.4\leq m\leq1519.6$이므로

$1500-1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}=1480.4,\ 1500+1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}=1519.6$

따라서 $1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}=19.6$이므로

$\sqrt{n}=2\qquad\therefore\ n=4$

028 답 99

표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 5를 이용할 수 있다.

$\mathrm{P}(|Z|\leq k)=\dfrac{\alpha}{100}$라고 하면 표본평균이 35이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$35-k\times\dfrac{5}{\sqrt{100}}\leq m\leq35+k\times\dfrac{5}{\sqrt{100}}$

$\therefore\ 35-\dfrac{k}{2}\leq m\leq35+\dfrac{k}{2}$

모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $33.71\leq m\leq36.29$이므로

$35-\dfrac{k}{2}=33.71,\ 35+\dfrac{k}{2}=36.29$

따라서 $\dfrac{k}{2}=1.29$이므로 $k=2.58$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq2.58)=0.495$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|Z|\leq2.58)&=\mathrm{P}(-2.58\leq Z\leq2.58)\\&=\mathrm{P}(-2.58\leq Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq2.58)\\&=2\mathrm{P}(0\leq Z\leq2.58)\\&=2\times0.495=0.99\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{\alpha}{100}=0.99$이므로 $\alpha=99$

029 답 0.98

표본의 크기가 144, 모표준편차가 3이므로 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\dfrac{3}{\sqrt{144}}=0.98$

030 답 5.16

표본의 크기가 16, 모표준편차가 4이므로 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\dfrac{4}{\sqrt{16}}=5.16$

031 답 0.62

표본의 크기가 400, 모표준편차가 10이므로 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$a=2\times1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{400}}=1.96$

한편 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$b=2\times2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{400}}=2.58$

$\therefore\ b-a=2.58-1.96=0.62$

032 답 225

표본의 크기가 n, 모표준편차가 25이므로 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이가 8.6 이하이려면

$2\times2.58\times\dfrac{25}{\sqrt{n}}\leq8.6,\ \sqrt{n}\geq15$

$\therefore\ n\geq225$

따라서 n의 최솟값은 225이다.

033 답 ⑤

모표준편차를 σ라고 하면 표본의 크기가 4일 때, 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이가 2.58이므로

$2\times2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{4}}=2.58 \qquad \therefore \sigma=1$

한편 표본의 크기가 n일 때, 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이가 0.645이므로

$2\times2.58\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0.645,\ \sqrt{n}=8 \qquad \therefore n=64$

034 답 196개

표본의 크기를 n이라고 하면 모표준편차가 5이므로 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이가 1.4 이하이려면

$2\times1.96\times\dfrac{5}{\sqrt{n}}\le1.4,\ \sqrt{n}\ge14 \qquad \therefore n\ge196$

따라서 n의 최솟값은 196이므로 적어도 196개의 바나나를 조사해야 한다.

035 답 99

표본의 크기가 25, 모표준편차가 25이므로 $P(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라고 하면 모평균을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times k\times\dfrac{25}{\sqrt{25}}=25.8 \qquad \therefore k=2.58$

이때 $P(|Z|\le2.58)=0.99$이므로

$\dfrac{\alpha}{100}=0.99 \qquad \therefore \alpha=99$

036 답 92

표본의 크기가 25, 모표준편차가 10이므로 $P(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라고 하면 모평균을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times k\times\dfrac{10}{\sqrt{25}}=7 \qquad \therefore k=1.75$

이때 $P(0\le Z\le1.75)=0.46$이므로

$$\begin{aligned}P(|Z|\le1.75)&=P(-1.75\le Z\le1.75)\\&=P(-1.75\le Z\le0)+P(0\le Z\le1.75)\\&=2P(0\le Z\le1.75)\\&=2\times0.46=0.92\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{\alpha}{100}=0.92$이므로 $\alpha=92$

037 답 2.3

표본의 크기가 100, 모표준편차가 5이므로 $P(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라고 하면 모평균을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times k\times\dfrac{5}{\sqrt{100}}=1.6 \qquad \therefore k=1.6$

이때 $P(0\le Z\le1.6)=0.45$이므로

$$\begin{aligned}P(|Z|\le1.6)&=P(-1.6\le Z\le1.6)\\&=P(-1.6\le Z\le0)+P(0\le Z\le1.6)\\&=2P(0\le Z\le1.6)\\&=2\times0.45=0.9\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{\alpha}{100}=0.9$이므로 $\alpha=90$

$\therefore \alpha+8=98$

이때 $P(0\le Z\le2.3)=0.49$이므로

$$\begin{aligned}P(|Z|\le2.3)&=P(-2.3\le Z\le2.3)\\&=P(-2.3\le Z\le0)+P(0\le Z\le2.3)\\&=2P(0\le Z\le2.3)\\&=2\times0.49=0.98\end{aligned}$$

따라서 모평균을 신뢰도 98 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times2.3\times\dfrac{5}{\sqrt{100}}=2.3$

038 답 ⑤

표본의 크기가 n, 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 10이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}$

$-\dfrac{25.8}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\dfrac{25.8}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{x}|\le\dfrac{25.8}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|\le6$이어야 하므로

$\dfrac{25.8}{\sqrt{n}}\le6,\ \sqrt{n}\ge4.3 \qquad \therefore n\ge18.49$

따라서 n의 최솟값은 19이다.

039 답 9604

모평균을 m, 표본평균을 $\overline{x}$, 모표준편차를 σ라고 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$-\dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{x}|\le\dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|\le\dfrac{\sigma}{50}$이어야 하므로

$\dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\le\dfrac{\sigma}{50},\ \sqrt{n}\ge98 \qquad \therefore n\ge9604$

따라서 n의 최솟값은 9604이다.

040 답 32개

표본의 크기를 n, 모평균을 m, 표본평균을 $\overline{x}$라고 하면 모표준편차가 20이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}$

$-\dfrac{39.2}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\dfrac{39.2}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{x}|\le\dfrac{39.2}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|\le7$이어야 하므로

$\dfrac{39.2}{\sqrt{n}}\le7,\ \sqrt{n}\ge5.6 \qquad \therefore n\ge31.36$

따라서 최소 32개를 조사해야 한다.

041 답 ⑤

표본의 크기를 n, 모표준편차를 σ라고 하면 모평균을 신뢰도 $\alpha\%$로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

ㄱ. 신뢰도가 낮아지면 k의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄴ. 표본의 크기가 작아지면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다.

ㄷ. 표본의 크기가 커지면 $\sqrt{n}$의 값이 커지고, 신뢰도가 낮아지면 k의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄹ. 신뢰도가 높아지면 k의 값이 커지고, 표본의 크기가 작아지면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

042 답 ①

처음 표본의 크기를 n이라고 하면 모표준편차가 σ이므로 모평균을 신뢰도 $\alpha\%$로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

이때 표본의 크기가 a배, 즉 an일 때 신뢰구간의 길이는 3배가 되므로

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{an}}=3\times2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\sqrt{a}=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{9}$

핵심 유형 **최종 점검**하기 • 124~125쪽

1 답 44

유형 01 표본평균의 평균, 분산, 표준편차 – 모평균, 모표준편차가 주어진 경우

모평균이 20, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=20=k$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{2^2}{n}=\frac{1}{6}$ $\quad\therefore n=24$

$\therefore k+n=20+24=44$

2 답 $\frac{1}{4}$

유형 02 표본평균의 평균, 분산, 표준편차 – 모집단의 확률분포가 주어진 경우

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{8}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$,

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{8}=\frac{29}{4}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{29}{4}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=1$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

이때 표본의 크기가 16이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{16}}=\frac{1}{4}$

3 답 46

유형 03 표본평균의 평균, 분산, 표준편차 – 모집단이 주어진 경우

카드 한 장을 임의로 꺼낼 때, 카드에 적힌 수를 X라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{5}{16}+7\times\frac{7}{16}=\frac{43}{8}$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=\frac{43}{8}$

$\therefore \mathrm{E}(8\overline{X}+3)=8\mathrm{E}(\overline{X})+3$

$=8\times\frac{43}{8}+3=46$

4 답 36

유형 04 표본평균의 분포

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ 3^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(72,\ \frac{3^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(72,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ b^2)$을 따르므로

$a=72,\ b=\frac{1}{2}\ (\because b>0)$

$\therefore ab=36$

5 답 $\frac{81}{2}$

유형 05 표본평균의 확률

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40,\ \frac{4^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(40,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-40}{\frac{1}{2}}=2\overline{X}-80$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)\le0.1587$에서

$\mathrm{P}(Z\ge2k-80)\le0.1587$

$\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2k-80)\le0.1587$

$0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2k-80)\le0.1587$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le2k-80)\ge0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$2k-80\ge1,\ 2k\ge81$

$\therefore k\ge\frac{81}{2}$

따라서 k의 최솟값은 $\frac{81}{2}$이다.

6 답 0.0668

유형 05 표본평균의 확률

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \frac{12^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(120,\ 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-120}{4}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 한 상자의 무게가 1026 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(9\overline{X}\le 1026)&=\mathrm{P}(\overline{X}\le 114)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{114-120}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1.5)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

7 답 ⑤

유형 06 표본평균의 확률 – 표본의 크기 구하기

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 24^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60,\ \frac{24^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-60}{\frac{24}{\sqrt{n}}}$이라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 66)=0.0228$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{66-60}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right)=0.0228$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.0228$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.0228$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.0228$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{4}=2,\ \sqrt{n}=8$

$\therefore\ n=64$

8 답 ③

유형 07 모평균의 추정

표본의 크기가 100, 표본평균이 120, 모표준편차가 20이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$120-1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 120+1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}$

$\therefore\ 116.08\le m\le 123.92$

따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123의 7개이다.

9 답 ②

유형 08 신뢰구간의 길이

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라고 하면 각각의 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

① $2\times k\times\frac{5}{\sqrt{25}}=2k$　　② $2\times k\times\frac{10}{\sqrt{25}}=4k$

③ $2\times k\times\frac{3}{\sqrt{36}}=k$　　④ $2\times k\times\frac{6}{\sqrt{36}}=2k$

⑤ $2\times k\times\frac{9}{\sqrt{36}}=3k$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ②이다.

10 답 64

유형 09 신뢰구간의 길이 – 표본의 크기 구하기

표본의 크기가 n, 모표준편차가 16이므로 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\times\frac{16}{\sqrt{n}}=10.32$

$\sqrt{n}=8\qquad\therefore\ n=64$

11 답 96

유형 10 신뢰구간의 길이 – 신뢰도 구하기

표본의 크기가 64, 모표준편차가 32이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라고 하면 모평균을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times k\times\frac{32}{\sqrt{64}}=16.4\qquad\therefore\ k=2.05$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.05)=0.48$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|Z|\le 2.05)&=\mathrm{P}(-2.05\le Z\le 2.05)\\&=\mathrm{P}(-2.05\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.05)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.05)\\&=2\times 0.48=0.96\end{aligned}$$

따라서 $\frac{\alpha}{100}=0.96$이므로

$\alpha=96$

12 답 324

유형 11 모평균과 표본평균의 차

모평균을 m, 표본평균을 $\overline{x}$라고 하면 표본의 크기가 n, 모표준편차가 300이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{300}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{300}{\sqrt{n}}$

$-\frac{774}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{774}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ |m-\overline{x}|\le\frac{774}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|\le 43$이어야 하므로

$\frac{774}{\sqrt{n}}\le 43,\ \sqrt{n}\ge 18$

$\therefore\ n\ge 324$

따라서 n의 최솟값은 324이다.

13 답 $\frac{1}{4}$

유형 12 신뢰구간의 성질

처음 표본의 크기를 n이라고 하면 모표준편차가 σ이므로 모평균을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \left(\text{단, }\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

이때 표본의 크기가 16배, 즉 $16n$일 때 신뢰구간의 길이는

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{16n}}=\frac{1}{4}\times 2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 표본의 크기가 16배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{4}$배가 된다.

$\therefore\ a=\frac{1}{4}$

MEMO

· MEMO ·