

미적분

I

수열의 극한

01 수열의 극한	2
02 급수	16

II

미분법

03 지수함수와 로그함수의 미분	29
04 삼각함수의 미분	39
05 여러 가지 미분법	52
06 도함수의 활용 (1)	65
07 도함수의 활용 (2)	83

III

적분법

08 여러 가지 적분법	101
09 정적분	115
10 정적분의 활용	129

• 정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

01

수열의 극한

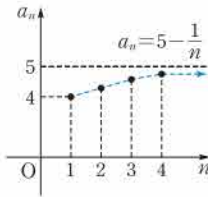
I. 수열의 극한

0001 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = 5 - \frac{1}{n}$

오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 5에 한없이 가까워지므로 이 수열은 5에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{1}{n}\right) = 5$$



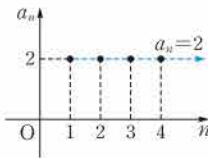
답 5

0002 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = 2$

오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 2이므로 이 수열은 2에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$$

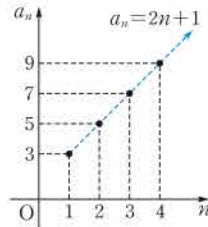


답 2

0003 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면 $a_n = 2n + 1$

오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

풀이 참조

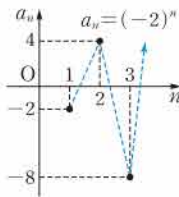


0004 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = (-2)^n$$

오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 진동한다. 즉 발산한다.

풀이 참조

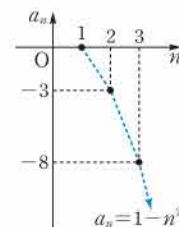


0005 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 - n^2$$

오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

음의 무한대로 발산

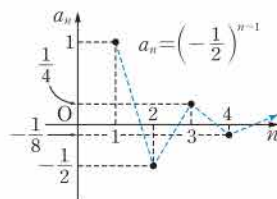


0006 주어진 수열의 일반항을 a_n

이라 하면 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$



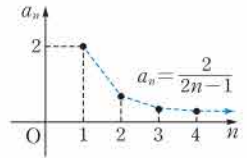
수렴, 0

0007 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = \frac{2}{2n-1}$

오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n-1} = 0$$



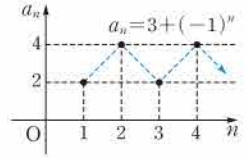
수렴, 0

0008 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = 3 + (-1)^n$

오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 진동한다.

발산 (진동)



$$0009 \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 + (-1) = 2$$

답 2

$$0010 \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 - (-1) = 4$$

답 4

$$0011 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \cdot (-1) = -3$$

답 -3

$$0012 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{3}{-1} = -3$$

답 -3

$$0013 \lim_{n \rightarrow \infty} (5a_n - b_n) = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5 \cdot 3 - (-1) = 16$$

답 16

$$0014 \lim_{n \rightarrow \infty} (-2a_n b_n) = -2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2 \cdot 3 \cdot (-1) = 6$$

답 6

$$0015 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n + 3}{3b_n} = \frac{4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{4 \cdot 3 + 3}{3 \cdot (-1)} = -5$$

답 -5

$$0016 \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 3) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = \alpha + 3$$

답 $\alpha + 3$

$$0017 \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - b_n) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2\alpha - \beta$$

답 $2\alpha - \beta$

$$0018 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha^2 \beta$$

답 $\alpha^2 \beta$

$$0019 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{5b_n} = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{5 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{2\alpha}{5\beta}$$

답 $\frac{2\alpha}{5\beta}$

$$0020 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 + 5 \cdot 0 = 1$$

답 1

$$0021 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 3 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

답 0

$$0022 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 + 2 \cdot 0 = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{4}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 3 - 4 \cdot 0 = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(3 - \frac{4}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{4}{n}\right) = 1 \cdot 3 = 3$$

답 3

$$\text{0023} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}{3 - \frac{5}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{5}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

$$\text{0024} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$$

답 수렴, $\frac{1}{3}$

$$\text{0025} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n-1)}{-2n^2+3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-1}{-2n^2+3n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n^2}}{-2 + \frac{3}{n}} = -2$$

답 수렴, -2

$$\text{0026} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{7 + \frac{1}{n}} = 0$$

답 수렴, 0

$$\text{0027} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0$$

답 수렴, 0

$$\text{0028} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n+1}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = \infty$$

답 발산

$$\text{0029} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3+4n}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = -\infty$$

답 발산

$$\text{0030} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2-7n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{7}{n}\right)$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{7}{n}\right) = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2-7n) = \infty$$

답 발산

$$\text{0031} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 - \frac{1}{2}n^3\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 - \frac{1}{2}n^3\right) = -\infty$$

답 발산

$$\text{0032} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

답 수렴, $\frac{1}{2}$

$$\text{0033} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-3n} - \sqrt{n^2+3n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2-3n} - \sqrt{n^2+3n})(\sqrt{n^2-3n} + \sqrt{n^2+3n})}{\sqrt{n^2-3n} + \sqrt{n^2+3n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n}{\sqrt{n^2-3n} + \sqrt{n^2+3n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6}{\sqrt{1-\frac{3}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}}}$$

$$= \frac{-6}{1+1} = -3$$

답 수렴, -3

$$\text{0034} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{2}$$

$$= \infty$$

답 발산

$$\text{0035} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n} + n}{(\sqrt{n^2+2n} - n)(\sqrt{n^2+2n} + n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n} + n}{2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1}{2}$$

$$= \frac{1+1}{2} = 1$$

답 수렴, 1

$$\text{0036} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3$$

즉 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = [3]$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = [3]$$

\therefore (가) 3 (나) 3

답 풀이 참조

$$\text{0037} \quad 4n^2-1 < (n^2+1)a_n < 4n^2+3 \text{에서 각 변을 } n^2+1 \text{로 나누면}$$

$$\frac{4n^2-1}{n^2+1} < a_n < \frac{4n^2+3}{n^2+1}$$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 4,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+3}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 4$$

에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+3}{n^2+1} = 4$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ 답 4

0038 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n\theta}{n} = 0$
 \therefore (가) 0 (나) 0 답 풀이 참조

0039 $-1 \leq \cos n\theta \leq 1$ 이므로 각 변을 n 으로 나누면
 $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n\theta}{n} \leq \frac{1}{n}$
 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n\theta}{n} = 0$ 답 0

0040 공비가 0.3이고, $-1 < 0.3 < 1$ 이므로 0에 수렴한다. 답 수렴

0041 공비가 $\sqrt{2}$ 이고, $\sqrt{2} > 1$ 이므로 발산한다. 답 발산

0042 공비가 $-\frac{4}{3}$ 이고, $-\frac{4}{3} < -1$ 이므로 발산한다. 답 발산

0043 공비가 $-\frac{1}{5}$ 이고, $-1 < -\frac{1}{5} < 1$ 이므로 0에 수렴한다. 답 수렴

0044 공비가 -2 이고, $-2 < -1$ 이므로 발산한다. 답 발산

0045 공비가 $\frac{2}{3}$ 이고, $-1 < \frac{2}{3} < 1$ 이므로 0에 수렴한다. 답 수렴

0046 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{5^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{25}\right)^n = 0$ 답 0

0047 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+0.8^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 0.8^n = 1+0=1$ 답 1

0048 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2$ 답 수렴, 2

0049 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n-1}{3^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n-1}{3 \cdot 9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{3} = \frac{1}{3}$
답 수렴, $\frac{1}{3}$

0050 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-7^n}{3^n+7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1} = -1$ 답 수렴, -1

0051 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n+7^n}{2^n+5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\left(\frac{7}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1} = \infty$ 답 발산

0052 공비가 $2r$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면
 $-1 < 2r \leq 1 \quad \therefore -\frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{2}$

0053 공비가 $-\frac{r}{3}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면
 $-1 < -\frac{r}{3} \leq 1 \quad \therefore -3 \leq r < 3$ 답 $-3 \leq r < 3$

0054 공비가 $\frac{r}{4}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면
 $-1 < \frac{r}{4} \leq 1 \quad \therefore -4 < r \leq 4$ 답 $-4 < r \leq 4$

0055 ①, ② n 의 값이 한없이 커지면 $8-2n$ 의 값과 $1-n^2$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

③ n 의 값이 한없이 커지면 $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

④ 홀수 번째 항 $-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \dots$ 은 0에 수렴하고, 짝수 번째 항 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$ 도 0에 수렴하므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

⑤ 발산(진동)한다. 답 ④

0056 ㄱ. n 의 값이 한없이 커지면 $6-5n$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

ㄴ. n 의 값이 한없이 커지면 $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄷ. n 의 값이 한없이 커지면 $\frac{n}{n+1}$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 1에 수렴한다.

ㄹ. n 의 값이 한없이 커지면 $\frac{n}{\sqrt{n+1}}$ 의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.
 이상에서 발산하는 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

0057 ㄱ. n 의 값이 한없이 커지면 $\frac{2}{n^2+1}$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄴ. 홀수 번째 항 $-1, -1, -1, \dots$ 은 -1 에 수렴하고, 짝수 번째 항 $1, 1, 1, \dots$ 은 1에 수렴하므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

ㄷ. 홀수 번째 항 $5-\frac{1}{2}, 5-\frac{1}{8}, 5-\frac{1}{32}, \dots$ 은 5에 수렴하고, 짝수 번째 항 $5+\frac{1}{4}, 5+\frac{1}{16}, 5+\frac{1}{64}, \dots$ 도 5에 수렴하므로 주어진 수열은 5에 수렴한다.

ㄹ. n 의 값이 한없이 커지면 $n-n^2$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다. 답 ㄱ: 0, ㄷ: 5

$$\begin{aligned} 0058 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + b_n}{a_n b_n - 1} &= \frac{3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 1} \\ &= \frac{3 \cdot 1 + (-2)}{1 \cdot (-2) - 1} = -\frac{1}{3} \end{aligned} \quad \text{답 } -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} 0059 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) &= 4 \text{에서} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n (a_n + 3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 3) \\ &= 3 \cdot (3 + 3) = 18 \end{aligned} \quad \text{답 } ①$$

$$\begin{aligned} 0060 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \\ &= 5 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 23 \end{aligned} \quad \text{답 } 23$$

$$\begin{aligned} 0061 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 3 \right) = -3, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 4 - \frac{1}{n(n+1)} \right\} = 4 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2)(b_n - 5) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 5) \\ &= (-3 + 2) \cdot (4 - 5) = 1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \cdots ① \\ \cdots ② \\ \text{답 } 1 \end{array}$$

채점 기준	비율
① $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2)(b_n - 5)$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

$$\begin{aligned} 0062 \quad \text{수열 } \{a_n\} \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \alpha \text{ (}\alpha \text{는 실수)라 하면} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_{n+1} + 1}{a_n - 1} &= 5 \text{에서} \quad \frac{3\alpha + 1}{\alpha - 1} = 5 \\ 3\alpha + 1 &= 5\alpha - 5, \quad 2\alpha = 6 \\ \therefore \alpha &= 3 \end{aligned} \quad \text{답 } 3$$

$$\begin{aligned} 0063 \quad \text{수열 } \{a_n\} \text{이 } 0 \text{이 아닌 실수에 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \alpha \text{ (}\alpha \neq 0\text{)} \\ \text{라 하면} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \alpha \\ \frac{4}{a_{n+1}} &= 4 - a_n \text{에서} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (4 - a_n) \text{이므로} \\ \frac{4}{\alpha} &= 4 - \alpha, \quad \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \\ (\alpha - 2)^2 &= 0 \quad \therefore \alpha = 2 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (4 - a_n) &= 4 - 2 = 2 \end{aligned} \quad \text{답 } ①$$

$$\begin{aligned} 0064 \quad ①, ②, ③, ④ \text{ [반례] 수열 } \{a_n\} \text{을} \\ 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \\ \text{이라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} &= 0 \text{이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} \text{는 발산(진동)} \\ \text{한다.} \\ \text{또 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n-1} = 1 \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} &\neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} \\ ⑤ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} &= \alpha \text{에서 } n \text{ 대신 } 2n \text{을 대입하면} \\ \lim_{2n \rightarrow \infty} a_{4n} &= \alpha \\ \text{이때 } 2n \rightarrow \infty \text{이면 } n &\rightarrow \infty \text{이므로} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n} = \alpha \end{aligned} \quad \text{답 } ⑤$$

$$\begin{aligned} 0065 \quad ① \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^2}{n^2 + 2n - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 4n + 1}{n^2 + 2n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 1}{(n-1)^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 - 3n^2 + 3n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = 1 \end{aligned}$$

$$③ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 3n - 1}}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}}{2 + \frac{1}{n}} = 1$$

$$④ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{9n^2 + 4} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{9 + \frac{4}{n^2}} + 1} = \frac{3}{4}$$

$$⑤ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = \frac{1}{2}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0066 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{na_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{3}{n} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \\ &= 4 \cdot 3 = 12 \end{aligned} \quad \text{답 } ③$$

$$\begin{aligned} 0067 \quad \text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여} \\ a_n + b_n &= 3n^2, \quad a_n b_n = n^2 - 1 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{a_n b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1 - \frac{1}{n^2}} = 3 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \cdots ① \\ \cdots ② \\ \text{답 } 3 \end{array}$$

채점 기준	비율
① $a_n + b_n, a_n b_n$ 을 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
② $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right)$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %

$$\begin{aligned} 0068 \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n &= \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{2n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{4n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \text{답 } ①$$

라벤 특강 자연수의 거듭제곱의 합

$$\begin{aligned} ① \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} & ② \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ ③ \sum_{k=1}^n k^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0069 \quad & 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n+1)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n (k+1)^2 = \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k + 1) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \\
 &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n}{6n^3} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{9}{n} + \frac{13}{n^2}}{6} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=3$ 이므로
 $a+b=4$

답 ②

$$\begin{aligned}
 0070 \quad & \log_2(4n+1) + \log_2(2n-1) - 2\log_2(n+2) \\
 &= \log_2 \frac{(4n+1)(2n-1)}{(n+2)^2} \\
 &= \log_2 \frac{8n^2 - 2n - 1}{n^2 + 4n + 4} \\
 \therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{8n^2 - 2n - 1}{n^2 + 4n + 4} \\
 &= \log_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}} \\
 &= \log_2 8 = 3
 \end{aligned}$$

답 3

라센 특강 로그의 성질

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ 일 때

① $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

④ $\log_a M^k = k \log_a M$ (단, k 는 실수)

$$\begin{aligned}
 0071 \quad & a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{n+2}{n+1} \\
 &= \frac{n+2}{2}
 \end{aligned}$$

→ ①

$$\begin{aligned}
 b_n &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 \\
 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}
 \end{aligned}$$

→ ②

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{(na_n)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4} \cdot \frac{4}{n^2(n+2)^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 4n + 4} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}} = 1
 \end{aligned}$$

→ ③

답 1

채점 기준	비율
① a_n 을 간단히 할 수 있다.	30 %
② b_n 을 간단히 할 수 있다.	20 %
③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{(na_n)^2}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

$$0072 \quad a \neq 0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 1}{n-2} = \infty \text{ (또는 } -\infty \text{) 이므로 } a=0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 1}{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+1}{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{1}{n}}{1 - \frac{2}{n}} = b$$

따라서 $b=4$ 이므로 $a+b=4$

답 ③

$$0073 \quad a=0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)(3n+1)}{an^2-1} = -\infty \text{ 이므로 } a \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)(3n+1)}{an^2-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 + 16n + 4}{an^2-1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 + \frac{16}{n} + \frac{4}{n^2}}{a - \frac{1}{n^2}} = \frac{12}{a}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{12}{a}=6$ 이므로 $a=2$

답 2

$$0074 \quad b \neq 0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - 3n - 1}{bn^3 + 2n^2 + 1} = 0 \text{ 이므로 } b=0$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - 3n - 1}{bn^3 + 2n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - 3n - 1}{2n^2 + 1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{a}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{2} = \frac{1}{4}$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5n + 1}{(an+b)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5n + 1}{\frac{1}{4}n^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{4}} = 8
 \end{aligned}$$

답 8

$$0075 \quad a \neq 0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^2 - 2n + 1}}{an^2 + 4n + 3} = 0 \text{ 이므로 } a=0 \text{ (} \because b \neq 0 \text{)}$$

→ ①

$$\begin{aligned}
 \therefore b &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^2 - 2n + 1}}{an^2 + 4n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^2 - 2n + 1}}{4n + 3} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}}{4 + \frac{3}{n}} = 1
 \end{aligned}$$

→ ②

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - 5n + 1}{\sqrt{bn^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n + 1}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = -5$$

→ ③

답 -5

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	20 %
② b의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2-5n+1}{\sqrt{bn^2+n}}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

0076 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n - \sqrt{9n^2 + 2n})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n - \sqrt{9n^2 + 2n})(3n + \sqrt{9n^2 + 2n})}{3n + \sqrt{9n^2 + 2n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{3n + \sqrt{9n^2 + 2n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{3 + \sqrt{9 + \frac{2}{n}}}$$

$$= \frac{-2}{3+3} = -\frac{1}{3}$$

답 ②

0077 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-2}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n} + \sqrt{n-2})}{(\sqrt{n} - \sqrt{n-2})(\sqrt{n} + \sqrt{n-2})(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2(\sqrt{n} + \sqrt{n-2})}{2(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})}$$

$$= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{n}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}$$

$$= -\frac{1+1}{1+1} = -1$$

답 ③

0078 $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$$

$$= 2n + 1$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2 - \frac{1}{n}}} = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0079 $1+2+3+\dots+(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$

... ①

... ②

\therefore (주어진 식)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n^2 + 3n + 2}{2}} - \sqrt{\frac{n^2 + n}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + n})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + n})(\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n})}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 2}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

... ③

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
① $1+2+3+\dots+(n+1)$ 을 간단히 할 수 있다.	20 %
② $1+2+3+\dots+n$ 을 간단히 할 수 있다.	20 %
③ 주어진 극한값을 구할 수 있다.	60 %

0080 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - n)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + an} - n)(\sqrt{n^2 + an} + n)}{\sqrt{n^2 + an} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{\sqrt{n^2 + an} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} + 1} = \frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2} = 6$ 이므로 $a = 12$

답 12

0081 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an}}{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2 + an} + n\sqrt{a}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{a + \frac{a}{n}} + \sqrt{a} \right)$$

$$= 2\sqrt{a}$$

따라서 $2\sqrt{a} = 10$ 이므로 $\sqrt{a} = 5 \therefore a = 25$

답 ④

0082 $a \leq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2 + 2n + 2} - (an + b)\} = \infty$ 이므로

$a > 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2 + 2n + 2} - (an + b)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n + 2} - (an + b))(\sqrt{n^2 + 2n + 2} + (an + b))}{\sqrt{n^2 + 2n + 2} + (an + b)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - a^2)n^2 + 2(1 - ab)n + 2 - b^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 2} + (an + b)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - a^2)n + 2(1 - ab) + \frac{2 - b^2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} + a + \frac{b}{n}}$$

이 식의 극한값이 3이므로

$$1-a^2=0, \frac{2(1-ab)}{1+a}=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-2$ ($\because a>0$)

$$\therefore a+b=-1$$

답 ③

0083 $k \geq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이므로 $k < 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(n+1)(n+3)} + kn\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{(n+1)(n+3)} + kn\} \{\sqrt{(n+1)(n+3)} - kn\}}{\sqrt{(n+1)(n+3)} - kn} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-k^2)n^2 + 4n + 3}{\sqrt{n^2 + 4n + 3} - kn} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-k^2)n + 4 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} - k} \end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로

$$1-k^2=0 \quad \therefore k=-1 \quad (\because k < 0)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{1-k} = \frac{4}{1-(-1)} = 2$$

답 2

0084 $\frac{2a_n-5}{5a_n+1} = b_n$ 으로 놓으면

$$2a_n-5=5a_nb_n+b_n, \quad (2-5b_n)a_n=b_n+5$$

$$\therefore a_n = \frac{b_n+5}{2-5b_n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n+5}{2-5b_n} = \frac{2+5}{2-5 \cdot 2} = -\frac{7}{8}$$

답 ②

0085 $(n+2)a_n = b_n$ 으로 놓으면 $a_n = \frac{b_n}{n+2}$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (3n+4)a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3n+4) \cdot \frac{b_n}{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{n+2} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \cdot 5 = 15 \end{aligned}$$

답 ④

0086 $a_n+1=c_n$ 으로 놓으면 $a_n=c_n-1$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 5$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n-1) = 5-1=4$$

$a_n+4b_n=d_n$ 으로 놓으면 $b_n = \frac{d_n-a_n}{4}$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 8$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n-a_n}{4} = \frac{8-4}{4} = 1 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(b_n-2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n-2) \\ &= 4 \cdot (1-2) = -4 \end{aligned}$$

답 -4

0087 $(n-1)a_n=c_n$ 으로 놓으면 $a_n = \frac{c_n}{n-1}$

답 ①

$(n^3-1)b_n=d_n$ 으로 놓으면

$$b_n = \frac{d_n}{n^3-1} = \frac{d_n}{(n-1)(n^2+n+1)} \quad \dots \textcircled{2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 \cdot \frac{d_n}{(n-1)(n^2+n+1)}}{\frac{c_n}{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+4n+1}{n^2+n+1} \cdot \frac{d_n}{c_n} \\ &= 4 \cdot \frac{3}{2} = 6 \end{aligned}$$

답 ⑤

답 6

채점 기준	비율
① a_n 을 c_n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
② b_n 을 d_n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 b_n}{a_n}$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %

0088 $\sqrt{25n^2-n} < (n+3)a_n < \sqrt{25n^2+4n}$ 에서

$$\frac{\sqrt{25n^2-n}}{n+3} < a_n < \frac{\sqrt{25n^2+4n}}{n+3}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25n^2-n}}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25n^2+4n}}{n+3} = 5$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$$

답 ④

0089 $3n-50 < a_n < 3n+70$ 에서

$$\frac{3n^2-50n}{n^2+2} < \frac{na_n}{n^2+2} < \frac{3n^2+70n}{n^2+2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-50n}{n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+70n}{n^2+2} = 3$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{n^2+2} = 3$$

답 ⑤

0090 $-1 \leq \sin n\theta \leq 1$ 이므로

$$-\frac{n^2}{n^3+2} \leq \frac{n^2 \sin n\theta}{n^3+2} \leq \frac{n^2}{n^3+2} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n^2}{n^3+2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3+2} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin n\theta}{n^3+2} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

답 0

채점 기준	비율
① $\frac{n^2 \sin n\theta}{n^3+2}$ 에 대한 부등식을 세울 수 있다.	50 %
② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin n\theta}{n^3+2}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0091 $\therefore -1 \leq \sin \frac{n\pi}{8} \leq 1$ 이므로 $-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{8} \leq \frac{1}{n}$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계

에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{8} = 0$$

$$\therefore -1 \leq \cos n\pi \leq 1 \text{ 이므로 } -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\pi \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\pi = 0$$

$$\therefore 0 < \tan \frac{\pi}{4n} \leq 1 \text{ 이므로 } 0 < \frac{1}{n} \tan \frac{\pi}{4n} \leq \frac{1}{n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tan \frac{\pi}{4n} = 0$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0092 ㄴ. [반례] $a_n = n$, $b_n = 2n$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$$

ㄷ. [반례] $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n}$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ 뿐이다.

답 ①

0093 ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(3a_n + b_n) - 3a_n\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + b_n) - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
 $= 0 - 3 \cdot 1 = -3$

ㄴ. [반례] $\{a_n\}: 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

$\{b_n\}: 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ 이지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ 이다.

ㄷ. $\frac{b_n}{a_n} = c_n$ 으로 놓으면 $b_n = a_n c_n$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_n c_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \\ &= 0 - 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0094 ㄱ. [반례] $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{n}$ 이면 $a_n < b_n$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)\} \\ &= \frac{1}{2} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \} \\ &= \frac{1}{2} (10 + 20) = 15 \end{aligned}$$

ㄷ. [반례] $a_n = n^2$, $b_n = n$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \infty$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ 뿐이다.

답 ②

0095 ㄱ. 공비가 -3 이고, $-3 < -1$ 이므로 발산한다.

ㄴ. 공비가 $\sqrt{2}-1$ 이고, $-1 < \sqrt{2}-1 < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

ㄷ. 공비가 $-\frac{4}{5}$ 이고, $-1 < -\frac{4}{5} < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

ㄹ. $\frac{3^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 에서 공비가 $\frac{3}{2}$ 이고, $\frac{3}{2} > 1$ 이므로 발산한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0096 ㄱ. 수열 $\{0.3^n\}$ 은 공비가 0.3 이고, $-1 < 0.3 < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 1에 수렴한다.

ㄴ. 주어진 수열은

$5, 3, 5, 3, 5, 3, \dots$

이므로 발산(진동)한다.

ㄷ. $2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 에서 공비가 $\frac{1}{2}$ 이고, $-1 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 수열 $\{2^{-n}\}$ 은 0에 수렴한다.

$5^{-n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ 에서 공비가 $\frac{1}{5}$ 이고, $-1 < \frac{1}{5} < 1$ 이므로 수열 $\{5^{-n}\}$ 은 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄹ. 수열 $\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right\}$ 은 공비가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 이고, $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ 이므로 발산한다.

따라서 주어진 수열은 발산한다.

이상에서 발산하는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

0097 ㄱ. 공비가 $-\frac{3}{2}$ 이고, $-\frac{3}{2} < -1$ 이므로 발산한다.

ㄴ. 수열 $\{1.5^n\}$ 은 공비가 1.5 이고, $1.5 > 1$ 이므로 발산한다.

따라서 주어진 수열은 발산한다.

ㄷ. $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 에서 공비가 $\frac{1}{4}$ 이고, $-1 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로 수열 $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ 은 0에 수렴한다.

$\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ 에서 공비가 $-\frac{1}{4}$ 이고, $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ 이므로 수열

$\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ 은 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄹ. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ 에서 공비가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고, $-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ 이므로 수열

$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}$ 은 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 -2 에 수렴한다.

답 ③

$$\begin{aligned} 0098 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} + 3^{n+2}}{(3^n + 1)(2^n + 1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot 6^n + 3^2 \cdot 3^n}{6^n + 3^n + 2^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n} \\ &= 6 \end{aligned}$$

답 6

0099 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^{2n}}{4^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n - 4^n}{4^n + 3^n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = -1$ ①
 $\therefore b = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{2n+1} - a^{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(-1)^{2n+1} - (-1)^{2n}\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (-2) = -2$ ②
 $\therefore ab = 2$ ③
답 2

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	50 %
② b의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0100 $a_n = 2 \cdot 2^{n+1} + 2^n - 1 = 2^{n+2} + 2^n - 1$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^{n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + 2^n - 1}{2^{n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 2^n + 2^n - 1}{2 \cdot 2^n + 1}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{5}{2}$ ③
답 5/2

0101 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (a 는 실수)라 하면
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 2^n \cdot a_n}{2^{n+1} - 3^n \cdot a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n + 2^n \cdot a_n}{2 \cdot 2^n - 3^n \cdot a_n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot a_n}{2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot a_n} = -\frac{3}{a}$
 따라서 $-\frac{3}{a} = 6$ 이므로 $a = -\frac{1}{2}$ ③
답 ③

0102 $a_n + b_n = 5^{n+1}$, $a_n - b_n = 2^{2n}$ 에서
 $a_n = \frac{5^{n+1} + 2^{2n}}{2}$, $b_n = \frac{5^{n+1} - 2^{2n}}{2}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^{n+1} - 2^{2n}}{2}}{\frac{5^{n+1} + 2^{2n}}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 4^n}{5^{n+1} + 4^n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 5^n - 4^n}{5 \cdot 5^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{5 + \left(\frac{4}{5}\right)^n}$
 $= 1$ ③
답 ③

0103 공비가 $\frac{x+1}{3}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면
 $-1 < \frac{x+1}{3} \leq 1$, $-3 < x+1 \leq 3$
 $\therefore -4 < x \leq 2$
 따라서 정수 x 는
 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$
 의 6개이다. ④
답 ④

0104 주어진 수열은 첫째항이 $(x-4)(2-x)$, 공비가 $2-x$ 인 등비수열이므로 주어진 수열이 수렴하려면
 $(x-4)(2-x) = 0$ 또는 $-1 < 2-x \leq 1$
 $(x-4)(2-x) = 0$ 에서 $x=4$ 또는 $x=2$ ①
 $-1 < 2-x \leq 1$ 에서 $-3 < -x \leq -1$
 $\therefore 1 \leq x < 3$ ②
 ①, ②에서 $1 \leq x < 3$ 또는 $x=4$ ③
 따라서 정수 x 는 1, 2, 4이므로 구하는 곱은
 $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$ ④
답 8

채점 기준	비율
① (첫째항)=0을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $-1 < (\text{공비}) \leq 1$ 을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
③ 주어진 수열이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
④ 모든 정수 x의 값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

0105 공비가 $\sqrt{2} \cos x$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면
 $-1 < \sqrt{2} \cos x \leq 1$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\therefore \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3}{4}\pi$ ($\because 0 < x < \pi$) ③
답 ③

0106 등비수열 $\{(-2x+5)^n\}$ 은 공비가 $-2x+5$ 이므로 이 수열이 수렴하려면
 $-1 < -2x+5 \leq 1$, $-6 < -2x \leq -4$
 $\therefore 2 \leq x < 3$ ①
 등비수열 $\{(\log_2 x - 2)^n\}$ 은 공비가 $\log_2 x - 2$ 이므로 이 수열이 수렴하려면
 $-1 < \log_2 x - 2 \leq 1$, $1 < \log_2 x \leq 3$
 $\therefore 2 < x \leq 8$ ②
 ①, ②에서 $2 < x < 3$
 따라서 $a=2$, $\beta=3$ 이므로 $a+\beta=5$ ②
답 ②

0107 등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하므로
 $-1 < r \leq 1$ ①
 ㄱ. 공비가 $-\frac{r}{2}$ 이고 ①에서 $-\frac{1}{2} \leq -\frac{r}{2} < \frac{1}{2}$
 따라서 수열 $\left\{\left(-\frac{r}{2}\right)^n\right\}$ 은 항상 수렴한다.
 ㄴ. 공비가 $\frac{r-1}{3}$ 이고 ①에서 $-2 < r-1 \leq 0$
 $\therefore -\frac{2}{3} < \frac{r-1}{3} \leq 0$
 따라서 수열 $\left\{\left(\frac{r-1}{3}\right)^n\right\}$ 은 항상 수렴한다.
 ㄷ. 공비가 r^2 이고 ①에서 $0 \leq r^2 \leq 1$
 따라서 수열 $\{r^{2n}\}$ 은 항상 수렴한다.
 이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 항상 수렴한다. ⑤
답 ⑤

0108 (i) $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로
 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 1}{r^n + 1} = -1$

(ii) $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \infty$ 이므로

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 1}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 + \frac{1}{r^n}} = 1$$

(i), (ii)에서 $a + b = 0$

답 ①

0109 (i) $r < -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 + \frac{1}{r^n}} = \infty$$

따라서 발산(진동)한다.

(ii) $-1 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{r^n + 1} = 0$$

(iii) $r = 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{r^n + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

(iv) $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 + \frac{1}{r^n}} = \infty$$

∴ $|r| > 1$ 이면 $r > 1$ 또는 $r < -1$ 이므로 발산한다.

∴ $-1 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 $r = \frac{1}{2}$ 이면 0에 수렴한다.

∴ 수렴하도록 하는 r 의 값의 범위는 $-1 < r \leq 1$ 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0110 (i) $|r| < 5$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - r^n}{5^n + r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{r}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{r}{5}\right)^n} = 1$$

→ ①

(ii) $r = 5$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 5^n}{5^n + 5^n} = 0$$

→ ②

(iii) $|r| > 5$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - r^n}{5^n + r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{r}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{r}\right)^n + 1} = -1$$

→ ③

이상에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - r^n}{5^n + r^n} = 1$ 을 만족시키는 r 의 값의 범위는

$$|r| < 5, \text{ 즉 } -5 < r < 5$$

이므로 정수 r 는

$$-4, -3, -2, \dots, 4$$

의 9개이다.

→ ④

답 9

채점 기준	비율
① $ r < 5$ 일 때, 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있다.	30 %
② $r = 5$ 일 때, 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있다.	20 %
③ $ r > 5$ 일 때, 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있다.	30 %
④ 극한값이 1이 되도록 하는 정수 r 의 개수를 구할 수 있다.	20 %

$$0111 \quad f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n-1} + 2 \cdot (-1) - 1}{(-1)^{2n} + 1} = \frac{-1 - 2 - 1}{1 + 1} = -2$$

$$f\left(\frac{3}{8}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^{2n-1} + 2 \cdot \frac{3}{8} - 1}{\left(\frac{3}{8}\right)^{2n} + 1} = -\frac{1}{4}$$

$$f(4) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{2n-1} + 2 \cdot 4 - 1}{4^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4} + \frac{7}{4^{2n}}}{1 + \frac{1}{4^{2n}}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(-1) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f(4) = -2 + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -2$$

→ 2

다른 풀이 (i) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n-1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + 2x - 1}{x^{2n} + 1} = 2x - 1$$

(ii) $x = 1$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + 2x - 1}{x^{2n} + 1} = \frac{1 + 2 - 1}{1 + 1} = 1$$

(iii) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x^{2n-1}| = \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + 2x - 1}{x^{2n} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^{2n-1}} - \frac{1}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(iv) $x = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n-1} = -1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + 2x - 1}{x^{2n} + 1} = \frac{-1 - 2 - 1}{1 + 1} = -2$$

이상에서

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & (|x| < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ \frac{1}{x} & (|x| > 1) \\ -2 & (x = -1) \end{cases}$$

$$\therefore f(-1) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f(4) = -2 + \left(2 \cdot \frac{3}{8} - 1\right) + \frac{1}{4} = -2$$

0112 (i) $0 < x < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + x^2 - 2}{x^n + 1} = x^2 - 2$$

→ ①

(ii) $x = 1$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + x^2 - 2}{x^n + 1} = \frac{1 + 1 - 2}{1 + 1} = 0$$

→ ②

(iii) $x > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = \infty$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + x^2 - 2}{x^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{2}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = x$$

→ ③

이상에서

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & (0 < x < 1) \\ 0 & (x = 1) \\ x & (x > 1) \end{cases}$$

→ ④

답 풀이 참조

채점 기준	비율
① $0 < x < 1$ 일 때, $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $x = 1$ 일 때, $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ $x > 1$ 일 때, $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
④ $x > 0$ 일 때, $f(x)$ 를 구할 수 있다.	10 %

0113 $P_n(n, \sqrt{n}), Q_n(n, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{OP_n} &= \sqrt{n^2 + (\sqrt{n})^2} = \sqrt{n^2 + n}, \overline{OQ_n} = n \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{OP_n} - \overline{OQ_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ④

0114 (1) $P_n(n, 2n^2), P_{n+1}(n+1, 2(n+1)^2)$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \overline{P_n P_{n+1}} = \sqrt{1^2 + \{2(n+1)^2 - 2n^2\}^2} \\ &= \sqrt{16n^2 + 16n + 5} \end{aligned}$$

→ ①

$$\begin{aligned} (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{16n^2 + 16n + 5}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{16 + \frac{16}{n} + \frac{5}{n^2}}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

→ ②

$$\text{답 (1) } a_n = \sqrt{16n^2 + 16n + 5} \quad (2) \frac{1}{4}$$

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	50 %
② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0115 $n \geq 2$ 일 때, 원 $x^2 + y^2 = n^2$ 과 x 축이 만나는 점의 좌표는 $(n, 0), (-n, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= n \quad (\because a_n > 0) \\ x = \sqrt{n} \text{ 을 } x^2 + y^2 = n^2 \text{에 대입하면} \\ n + y^2 &= n^2, \quad y^2 = n^2 - n \\ \therefore y &= \pm \sqrt{n^2 - n} \end{aligned}$$

따라서 원 $x^2 + y^2 = n^2$ 과 직선 $x = \sqrt{n}$ 의 교점의 좌표는

$(\sqrt{n}, \sqrt{n^2 - n}), (\sqrt{n}, -\sqrt{n^2 - n})$ 이므로

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n^2 - n} \quad (\because b_n > 0) \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n - b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \sqrt{n^2 - n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 - n}}{(n - \sqrt{n^2 - n})(n + \sqrt{n^2 - n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 - n}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{1} = 2 \end{aligned}$$

답 2

0116 두 직선의 교점의 x 좌표는

$$2x + 4^n = -\frac{1}{2}x + 3^n \text{에서} \quad \frac{5}{2}x = 3^n - 4^n$$

$$\therefore x = \frac{2}{5} \cdot 3^n - \frac{2}{5} \cdot 4^n$$

$x = \frac{2}{5}(3^n - 4^n)$ 을 $y = 2x + 4^n$ 에 대입하면

$$y = \frac{4}{5}(3^n - 4^n) + 4^n = \frac{4}{5} \cdot 3^n + \frac{1}{5} \cdot 4^n$$

따라서 $a_n = \frac{2}{5} \cdot 3^n - \frac{2}{5} \cdot 4^n, b_n = \frac{4}{5} \cdot 3^n + \frac{1}{5} \cdot 4^n$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{5} \cdot 3^n - \frac{2}{5} \cdot 4^n}{\frac{4}{5} \cdot 3^n + \frac{1}{5} \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{2}{5}}{\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{5}} \\ &= -2 \end{aligned}$$

답 ①

0117 $f(x) = x^2$ 으로 놓으면 $f'(x) = 2x$

$f'(n) = 2n$ 이므로 점 $P_n(n, n^2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - n^2 = 2n(x - n) \quad \therefore y = 2nx - n^2$$

따라서 $Q_n(0, -n^2)$ 이므로

$$l_n = \overline{P_n Q_n} = \sqrt{n^2 + (n^2 + n^2)^2} = \sqrt{4n^4 + n^2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^4 + n^2}}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}}{3} = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0118 **전략** n 의 값이 한없이 커질 때 그 값이 어떤 일정한 값에 가까워지는지 조사한다.

풀이 ㄱ. n 의 값이 한없이 커지면 $5 - 4n$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

ㄴ. n 의 값이 한없이 커지면 $\frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 2에 수렴한다.

ㄷ. n 의 값이 한없이 커지면 $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

다른풀이 ㄷ. $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ 에서 공비가 $-\frac{1}{3}$ 이고, $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ 이므로

로 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ 은 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.

0119 **전략** 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

$$\text{풀이 ① } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-4}{3n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{n}}{3 - \frac{5}{n}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{② } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{4n^2 - 5n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{4 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{③ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n}{n^3 + 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = 0$$

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{3}{n}} = 1$$

따라서 극한값이 가장 작은 것은 ③이다.

답 ③

0120 전략 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = a$ ($a \neq 0$ 인 실수)이면

(a_n 의 차수) = (b_n 의 차수)이고, a_n , b_n 의 최고차항의 계수의 비가 a 임을 이용한다.

풀이 $a \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - bn + 3}{\frac{1}{2}n + 2} = \infty$ (또는 $-\infty$)이므로

$$a=0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - bn + 3}{\frac{1}{2}n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-bn + 3}{\frac{1}{2}n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-b + \frac{3}{n}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{n}} = -2b$$

따라서 $-2b=3$ 이므로 $b=-\frac{3}{2}$

$$\therefore a+b=-\frac{3}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0121 전략 분자에만 근호가 있는 경우 분모를 1로 놓고 분자를 유리화한다.

풀이 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2019n} - n)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 2019n} - n)(\sqrt{n^2 - 2019n} + n)}{\sqrt{n^2 - 2019n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2019n}{\sqrt{n^2 - 2019n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2019}{\sqrt{1 - \frac{2019}{n}} + 1}$$

$$= -\frac{2019}{2}$$

답 ①

0122 전략 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

풀이 $a > 2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a^{n+1} - 3 \cdot 2^n}{a^n - 2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a - 3 \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^n}{1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^n} = 5a$$

따라서 $5a=15$ 이므로 $a=3$

답 3

0123 전략 $r=1$, $r>1$ 일 때로 경우를 나누어 극한값을 구한다.

풀이 (i) $r=1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 2}{r^{n+1} + 3} = \frac{1-2}{1+3} = -\frac{1}{4}$$

(ii) $r>1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 2}{r^{n+1} + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r} - \frac{2}{r^{n+1}}}{1 + \frac{3}{r^{n+1}}} = \frac{1}{r}$$

(i), (ii)에서 주어진 수열의 극한값은

$$r=1 \text{ 일 때 } -\frac{1}{4}, \quad r>1 \text{ 일 때 } \frac{1}{r}$$

답 풀이 참조

0124 전략 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)로 놓고 주어진 식을 α, β 로 나타낸다.

풀이 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 각각 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 5 \text{ 에서 } \alpha + \beta = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 3 \text{ 에서 } \alpha \beta = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{5^2 - 2 \cdot 3}{3} = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

답 ⑤

0125 전략 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 a_n 을 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2 + 2nx - 4n = 0$ 에서

$$x = -n \pm \sqrt{n^2 + 4n}$$

이때 a_n 이 양의 실근이므로

$$a_n = -n + \sqrt{n^2 + 4n} = \sqrt{n^2 + 4n} - n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 4n} - n)(\sqrt{n^2 + 4n} + n)}{\sqrt{n^2 + 4n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}$$

$$= 2$$

답 2

0126 전략 첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 $S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$ 임을 이용한다.

풀이 $S_n = \frac{n\{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 4\}}{2} = 2n^2 - n$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{2(n+1)^2 - (n+1)} - \sqrt{2n^2 - n}\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 3n + 1} - \sqrt{2n^2 - n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n^2 + 3n + 1} - \sqrt{2n^2 - n})(\sqrt{2n^2 + 3n + 1} + \sqrt{2n^2 - n})}{\sqrt{2n^2 + 3n + 1} + \sqrt{2n^2 - n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 1}{\sqrt{2n^2 + 3n + 1} + \sqrt{2n^2 - n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n}}{\sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 - \frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

0127 [전략] $(5n-3)a_n=b_n$ 으로 놓고, a_n 을 b_n 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $(5n-3)a_n=b_n$ 으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{5n-3}$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n=4$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} na_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{b_n}{5n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5n-3} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

답 ②

0128 [전략] 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 $n < a_n < n+1$ 에서 $\sum_{k=1}^n k < \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n (k+1)$

$$\frac{n(n+1)}{2} < \sum_{k=1}^n a_k < \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\frac{n^2+n}{2} < \sum_{k=1}^n a_k < \frac{n^2+3n}{2}$$

$$\frac{n^2+n}{2(3n^2+5)} < \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{3n^2+5} < \frac{n^2+3n}{2(3n^2+5)}$$

$$\therefore \frac{n^2+n}{6n^2+10} < \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{3n^2+5} < \frac{n^2+3n}{6n^2+10}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{6n^2+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n}{6n^2+10} = \frac{1}{6}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{3n^2+5} = \frac{1}{6}$$

답 ①

채점 기준	비율
① $\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{3n^2+5}$ 에 대한 부등식을 세울 수 있다.	50 %
② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{3n^2+5}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0129 [전략] 지수법칙을 이용하여 a_n 을 구한다.

풀이 $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}, \sqrt{3\sqrt{3}}=3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}},$
 $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}, \dots$ 에서
 $a_n=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n} = 3$$

답 ②

0130 [전략] $n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 임을 이용하여 a_n 을 구한다.

풀이 $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^n + 5^n) - (3^{n-1} + 5^{n-1}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 3^n + \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot 5^n = \frac{2}{3} \cdot 3^n + \frac{4}{5} \cdot 5^n\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} \cdot 3^n + \frac{4}{5} \cdot 5^n}{3^n + 5^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^n + \frac{4}{5}}{\left(\frac{3}{5} \right)^n + 1} = \frac{4}{5}$$

답 ④

0131 [전략] 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

풀이 $5 \odot 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5^n + 5 \cdot 2^n}{5^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 5 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5} \right)^n} = 2$

$$\begin{aligned}\therefore (5 \odot 2) \odot 3 &= 2 \odot 3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n}{2^n + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n + 2}{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1} = 2\end{aligned}$$

답 2

채점 기준	비율
① $5 \odot 2$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② $(5 \odot 2) \odot 3$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0132 [전략] 공비가 r 인 등비수열이 수렴하면 $-1 < r \leq 1$ 임을 이용한 다.

풀이 공비가 $\frac{x^2-3x-2}{2}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \frac{x^2-3x-2}{2} \leq 1$$

(i) $-1 < \frac{x^2-3x-2}{2}$, 즉 $x^2-3x > 0$ 에서

$$x(x-3) > 0 \quad \therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 3$$

(ii) $\frac{x^2-3x-2}{2} \leq 1$, 즉 $x^2-3x-4 \leq 0$ 에서

$$(x+1)(x-4) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 4$$

(i), (ii)에서 $-1 \leq x < 0$ 또는 $3 < x \leq 4$

따라서 정수 x 는 $-1, 4$ 이므로 구하는 합은

$$-1 + 4 = 3$$

답 ②

0133 [전략] $\frac{6}{k} < 1, \frac{6}{k} = 1, \frac{6}{k} > 1$ 인 경우로 나누어 a_k 를 구한다.

풀이 (i) $\frac{6}{k} > 1$, 즉 $k < 6$ 일 때,

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{6}{k} \right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k} \right)^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{k}}{1 + \frac{1}{\left(\frac{6}{k} \right)^n}} = \frac{6}{k}$$

(ii) $\frac{6}{k} = 1$, 즉 $k = 6$ 일 때,

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{6}{k} \right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k} \right)^n + 1} = \frac{1}{2}$$

(iii) $\frac{6}{k} < 1$, 즉 $k > 6$ 일 때,

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{6}{k} \right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k} \right)^n + 1} = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10} ka_k &= \sum_{k=1}^5 \left(k \cdot \frac{6}{k} \right) + 6 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{k=7}^{10} (k \cdot 0) \\ &= 5 \cdot 6 + 3 = 33\end{aligned}$$

답 33

0134 [전략] 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

[풀이] $a_n + a_{n+1} = n^2 + 3$ ㉠

$a_{n+1} + a_{n+2} = (n+1)^2 + 3$ ㉡

㉡-㉠을 하면

$$a_{n+2} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} - a_n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2$$

답 ⑤

0135 [전략] 주어진 식의 정수 부분을 구한 후 (소수 부분) = (주어진 식) - (정수 부분)임을 이용한다.

[풀이] $(2n+1)^2 < 4n^2 + 5n + 1 < (2n+2)^2$ 이므로

$$a_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 1} - (2n+1)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{4n^2 + 5n + 1} - (2n+1) \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ \{ \sqrt{4n^2 + 5n + 1} - (2n+1) \} \{ \sqrt{4n^2 + 5n + 1} + (2n+1) \} }{ \sqrt{4n^2 + 5n + 1} + (2n+1) }$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + 5n + 1} + 2n + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2 + \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

답 ②

답 1/4

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	30 %
② $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구할 수 있다.	70 %

0136 [전략] $a_n + b_n = c_n$ 으로 놓고, a_n 을 b_n 과 c_n 에 대한 식으로 나타낸다.

[풀이] $a_n + b_n = c_n$ 으로 놓으면 $a_n = c_n - b_n$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 5$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{a_n + 2b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(c_n - b_n) - b_n}{(c_n - b_n) + 2b_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - 2b_n}{c_n + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{c_n}{b_n} - 2}{\frac{c_n}{b_n} + 1}$$

$$= -2$$

답 -2

0137 [전략] 곡선 $y = ax^2 + bx + c$ 가 x 축과 만나면 $b^2 - 4ac \geq 0$ 이고, x 축과 만나지 않으면 $b^2 - 4ac < 0$ 임을 이용한다.

[풀이] 곡선 $y = x^2 - (n+1)x + a_n$ 이 x 축과 만나므로

$$(n+1)^2 - 4a_n \geq 0 \quad \therefore a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4} \quad \dots\dots ㉠$$

곡선 $y = x^2 - nx + a_n$ 이 x 축과 만나지 않으므로

$$n^2 - 4a_n < 0 \quad \therefore a_n > \frac{n^2}{4} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{n^2}{4} < a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4}$

$$\therefore \frac{1}{4} < \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2} = \frac{1}{4}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{4}$$

답 ⑤

0138 [전략] $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, ...를 차례대로 구한 다음 규칙을 찾는다.

[풀이] $f(x) = \frac{x}{2} + 1 = \frac{x+2}{2}$ 이므로

$$f^2(x) = f\left(\frac{x+2}{2}\right) = \frac{\frac{x+2}{2} + 2}{2} = \frac{x+2+2^2}{2^2}$$

$$f^3(x) = f\left(\frac{x+2+2^2}{2^2}\right) = \frac{\frac{x+2+2^2}{2^2} + 2}{2} = \frac{x+2+2^2+2^3}{2^3}$$

⋮

따라서 $f^n(x) = \frac{x+2+2^2+\dots+2^n}{2^n}$ 이므로

$$f^n(1) = \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{2^n} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2$$

답 2

[다른풀이] $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ 이므로

$$f(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = \frac{2^2-1}{2}$$

$$f^2(1) = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4} = \frac{2^3-1}{2^2}$$

$$f^3(1) = \frac{7}{8} + 1 = \frac{15}{8} = \frac{2^4-1}{2^3}$$

⋮

따라서 $f^n(1) = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2$$

0139 [전략] 먼저 l_n 을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

[풀이] 오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 $C(0, 1)$ 이라 하고

$A_n B_n$ 과 y 축의 교점을 M_n 이라 하

면 $\overline{CM_n} = 1 - \frac{1}{n}$ 이므로 직각삼각

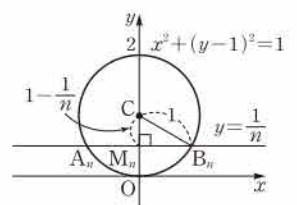
형 $CM_n B_n$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{M_n B_n} &= \sqrt{\overline{CB_n}^2 - \overline{CM_n}^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore l_n = 2\overline{M_n B_n} = 2\sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n(l_n)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(2\sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(8 - \frac{4}{n} \right) = 8$$

답 ④



02

급수

I. 수열의 극한

0140 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0141 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 5 - \left(\frac{1}{9} \right)^n \right\} = 5$ 답 5

0142 (1) $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 발산한다.

(3) $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

■ (1) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (2) 발산 (3) 발산

0143 (1) $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} = 1$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 1에 수렴한다.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

■ (1) $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n$ (2) 수렴 (3) 수렴, 1

0144 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

■ 발산

0145 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{2} \right)^n$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right]}{\frac{3}{2} - 1} = 3 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right]$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right] = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

■ 발산

0146 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{4}-\sqrt{2}) + (\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

$$+ \dots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

$$= \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{2}) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

■ 발산

0147 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{5} \right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right]$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right] = \frac{5}{3}$$

따라서 주어진 급수는 $\frac{5}{3}$ 에 수렴한다.

■ 수렴, $\frac{5}{3}$

0148 (1) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$

■ (1) $S_n = \frac{n}{n+1}$ (2) 1 (3) 1

0149 ■ (㉗) $\frac{n}{n+1}$ (㉘) 1

0150 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

■ 풀이 참조

0151 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

■ 풀이 참조

0152 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = (-1)^n$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 은 발산(진동)한다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

■ 풀이 참조

0153 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{n}{3n-1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0154 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3 + (-1) = 2$ 답 2

0155 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3 - (-1) = 4$ 답 4

0156 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3 + 2 \cdot (-1) = 1$ 답 1

0157 $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 5b_n) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) = 14$ 답 14

0158 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이고, $-1 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$
 답 수렴, $\frac{1}{2}$

0159 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{10}$ 이고, $-1 < -\frac{1}{10} < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1 - (-\frac{1}{10})} = \frac{10}{11}$$
 답 수렴, $\frac{10}{11}$

0160 공비가 $-\sqrt{2}$ 이고, $-\sqrt{2} < -1$ 이므로 주어진 등비급수는 발산한다. 답 발산

0161 첫째항이 1, 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고, $-1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$
 답 수렴, $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

0162 공비가 $\frac{4}{3}$ 이고, $\frac{4}{3} > 1$ 이므로 주어진 등비급수는 발산한다. 답 발산

0163 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$ 에서 첫째항이 2, 공비가 $\frac{2}{7}$ 이고, $-1 < \frac{2}{7} < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{2}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{14}{5}$$
 답 수렴, $\frac{14}{5}$

0164 공비가 $\frac{3}{\sqrt{2}}$ 이고, $\frac{3}{\sqrt{2}} > 1$ 이므로 주어진 등비급수는 발산한다. 답 발산

0165 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{2}-1$ 이고, $-1 < \sqrt{2}-1 < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1 - (\sqrt{2}-1)} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$
 답 수렴, $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

0166 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$
 답 $\frac{5}{6}$

0167 $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \left(\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n = \frac{-\frac{2}{5}}{1 - (-\frac{2}{5})}$

$$= -\frac{2}{7}$$
 답 $-\frac{2}{7}$

0168 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$= 3 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$
 답 $\frac{5}{2}$

0169 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= 1 + 3 = 4$$
 답 4

0170 공비가 $2x$ 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < 2x < 1 \quad \therefore -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$
 답 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

0171 공비가 $-\frac{x}{3}$ 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < -\frac{x}{3} < 1 \quad \therefore -3 < x < 3$$
 답 $-3 < x < 3$

0172 공비가 $1-x$ 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < 1-x < 1, \quad -2 < -x < 0 \quad \therefore 0 < x < 2$$
 답 $0 < x < 2$

0173 (1) $a_1 = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$, $a_3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

(2) 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이다.

- (3) 색칠한 모든 정삼각형의 넓이의 합은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비급수의 합과 같으므로

$$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

답 (1) $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{16}$, $a_3 = \frac{1}{64}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{3}$

0174 답 (가) $\frac{23}{100}$ (나) $\frac{1}{100}$ (다) $\frac{23}{100}$ (라) $\frac{1}{100}$ (마) $\frac{23}{99}$

0175 $0.\dot{1}5\dot{2} = 0.152 + 0.000152 + 0.000000152 + \dots$

$$\begin{aligned} &= \frac{152}{1000} + \frac{152}{1000^2} + \frac{152}{1000^3} + \dots \\ &= \frac{\frac{152}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{152}{999} \end{aligned}$$

답 $\frac{152}{999}$

0176 $0.1\dot{4} = 0.1 + 0.04 + 0.004 + 0.0004 + \dots$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \dots \\ &= \frac{1}{10} + \frac{\frac{4}{100}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{4}{90} = \frac{13}{90} \end{aligned}$$

답 $\frac{13}{90}$

0177 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3 + 2n + 3}{n(n+1)(2n+1)}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3 + 2n + 3}{2n^3 + 3n^2 + n} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ③

0178 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - 3) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 3$

$$= 4 - 3 = 1$$

답 1

0179 $S_n = \frac{n^2 + 1}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{n^2 + 1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n^2 + 2}{n^2 + n}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2}{n^2 + n} = 2$

답 2

- 0180 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

- 0181 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

답 ①

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

답 ②

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4}$$

답 ③

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	40 %
② S_n 을 구할 수 있다.	40 %
③ 주어진 급수의 합을 구할 수 있다.	20 %

- 0182 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2$$

답 ②

0183 $S_n = \frac{n\{2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 2\}}{2} = n^2 + 2n$ 이므로

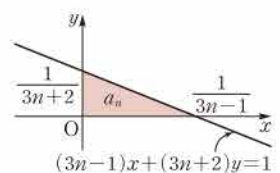
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 2k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{4}$

- 0184 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3n-1} \cdot \frac{1}{3n+2} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \end{aligned}$$

답 ①



이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) \quad \cdots ②$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{12} \quad \cdots ③$$

답 $\frac{1}{12}$

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	40 %
② S_n 을 구할 수 있다.	40 %
③ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합을 구할 수 있다.	20 %

0185 $\sum_{n=2}^{\infty} \log_2 \frac{n^2}{n^2-1}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \log_2 \frac{k \cdot k}{(k-1)(k+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \log_2 \left(\frac{k}{k-1} \cdot \frac{k}{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log_2 \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) + \log_2 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) + \log_2 \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \right.$$

$$\left. + \cdots + \log_2 \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{2n}{n+1}$$

$$= \log_2 2 = 1 \quad \text{답 ④}$$

0186 주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \log_3 a_k = \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \cdots + \log_3 a_n$$

$$= \log_3 (a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)$$

$$= \log_3 \frac{9n-1}{n+3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \log_3 a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9n-1}{n+3} = \log_3 9 = 2 \quad \text{답 2}$$

0187 $\sum_{n=1}^{\infty} \log_4 \left\{ 1 + \frac{1}{n(n+2)} \right\}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_4 \frac{k(k+2)+1}{k(k+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_4 \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_4 \left(\frac{k+1}{k} \cdot \frac{k+1}{k+2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log_4 \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) + \log_4 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) + \log_4 \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \right.$$

$$\left. + \cdots + \log_4 \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_4 \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_4 \frac{2n+2}{n+2}$$

$$= \log_4 2 = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

0188 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하자.

ㄱ. $S_1=1, S_2=0, S_3=1, S_4=0, S_5=1, S_6=0, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=0$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_1=1, S_2=-1, S_3=2, S_4=-2, S_5=3, S_6=-3, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=n, S_{2n}=-n$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=-\infty$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $S_1=2, S_2=\frac{3}{2}, S_3=2, S_4=\frac{7}{4}, S_5=2, S_6=\frac{11}{6}, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=2, S_{2n}=\frac{4n-1}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=2, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n}=2$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 2에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

0189 주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}, S_2=0, S_3=\frac{1}{3}, S_4=0, S_5=\frac{1}{4}, S_6=0, \dots$$

이므로

$$S_{2n-1}=\frac{1}{n+1}, S_{2n}=0 \quad \cdots ①$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}=0, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=0 \quad \cdots ②$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 0이다. 답 수렴, 0

채점 기준	비율
① S_{2n-1}, S_{2n} 을 구할 수 있다.	40 %
② $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ 주어진 급수가 수렴함을 알고, 그 합을 구할 수 있다.	30 %

0190 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하자.

① $S_n=0+0+\cdots+0=0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n=0$$

따라서 주어진 급수는 0에 수렴한다.

② $S_1=-1, S_2=-\frac{1}{2}, S_3=-1, S_4=-\frac{3}{4}, S_5=-1, S_6=-\frac{7}{8}, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=-1, S_{2n}=-1+\frac{1}{2^n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=-1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1+\frac{1}{2^n} \right)=-1$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 -1에 수렴한다.

③ $S_n=1+0+0+\cdots+0=1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n=1$$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

④ $S_1 = \frac{2}{3}, S_2 = 0, S_3 = \frac{3}{4}, S_4 = 0, S_5 = \frac{4}{5}, S_6 = 0, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1} = \frac{n+1}{n+2}, S_{2n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 0$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

⑤ $S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

따라서 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$ 에 수렴한다.

답 ④

0191 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n + 2n^2}{a_n^2 + n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n} + 2}{\frac{a_n^2}{n^2} + 1 - \frac{1}{n}} = 2$$

답 ⑤

0192 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n + 2}{2S_n + 5a_n} = \frac{2+2}{2 \cdot 2 + 5 \cdot 0} = 1$$

답 1

0193 주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2}\right) = 0$$

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{4n^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ③

0194 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a_n+1}{a_n-5}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n+1}{a_n-5} = 0$

→ ①

$$\frac{4a_n+1}{a_n-5} = b_n \text{으로 놓으면} \quad a_nb_n - 5b_n = 4a_n + 1$$

$$(b_n - 4)a_n = 5b_n + 1 \quad \therefore a_n = \frac{5b_n + 1}{b_n - 4}$$

→ ②

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5b_n + 1}{b_n - 4} = \frac{5 \cdot 0 + 1}{0 - 4} = -\frac{1}{4}$$

→ ③

답 $-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n+1}{a_n-5} = 0$ 임을 알 수 있다.	30 %
② a_n 을 b_n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0195 ① $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$, 즉 주어진 급수는 발산한다.

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$, 즉 주어진 급수는 발산한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \infty$

답 ④

0196 $\neg \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n-1}$ 은 발산한다.

$\neg \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

$\neg \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0197 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ 라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n) = 17$,

$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) = 19$ 에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 17, \quad 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 19$$

$$\therefore \alpha - 2\beta = 17, \quad 2\alpha - \beta = 19$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$\alpha = 7, \beta = -5$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha + \beta = 2$$

답 ⑤

0198 $3a_n - 2b_n = c_n$ 으로 놓으면 $2b_n = 3a_n - c_n$

$$\therefore b_n = \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{2}c_n$$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 8$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 18$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} a_n - \frac{1}{2} c_n \right) = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \\ &= \frac{3}{2} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 18 = 3\end{aligned}$$

답 3

0199 \neg . $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \beta$ 라 하면

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) \\ &= \alpha - \beta\end{aligned}$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 도 수렴한다.

\neg . $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

다. [반례] $\{a_n\}: 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

$\{b_n\}: -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 모두 발산하지만 $a_n + b_n = 0$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0, \text{ 즉 수렴한다.}$$

이상에서 옳은 것은 \neg , \neg 이다.

답 ②

$$\begin{aligned}0200 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} - 5^n}{10^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^n}{10 \cdot 10^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{10 \cdot 10^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} - \frac{1}{10} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{1}{30}\end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}0201 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin \frac{n\pi}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cos n\pi \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin \frac{n\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cos n\pi \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin \pi + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \sin \frac{3\pi}{2} + \dots \right\} \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{4} \cos \pi + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cos 2\pi + \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cos 3\pi + \dots \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \dots \right\} + \left\{ \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \right\} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}\end{aligned}$$

답 11/15

0202 $f(x) = x^n$ 이라 하면 나머지정리에 의하여

$$a_n = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

→ ①

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

→ ② 답 1/2

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	40 %
② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %

라세특강 나머지정리

다항식 $P(x)$ 를 일차식 $ax+b$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$\begin{aligned}0203 \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \frac{3}{4^6} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^5} + \dots \right) + \left(\frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^4} + \frac{3}{4^6} + \dots \right) \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4^2}} + \frac{\frac{3}{4^2}}{1 - \frac{1}{4^2}} \\ &= \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}\end{aligned}$$

답 7/15

0204 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($-1 < r < 1$)라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$ 에서

$$\frac{2}{1-r} = 3, \quad 1-r = \frac{2}{3} \quad \therefore r = \frac{1}{3}$$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 $a_1^2 = 4$, 공비가 $r^2 = \frac{1}{9}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{4}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{2}$$

답 ②

0205 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < \sin x < 1$ 이므로

$$1 + \sin x + \sin^2 x + \dots = \frac{1}{1 - \sin x}$$

따라서 $\frac{1}{1 - \sin x} = 2$ 이므로

$$1 - \sin x = \frac{1}{2} \quad \therefore \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

답 π/6

0206 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($-1 < r < 1$)라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -6$ 에서 $\frac{a}{1-r} = -6$ ㉠

수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 a^2 , 공비가 r^2 인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 72$ 에서

$$\frac{a^2}{1-r^2} = 72 \quad \therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)} = 72 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$-6 \cdot \frac{a}{1+r} = 72 \quad \therefore \frac{a}{1+r} = -12 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠ ÷ ㉢을 하면 $\frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{2}$

$$2+2r=1-r, \quad 3r=-1 \quad \therefore r=-\frac{1}{3} \quad \dots\dots ㉣$$

$r = -\frac{1}{3}$ 을 ㉠에 대입하면

$$\frac{3}{4}a = -6 \quad \therefore a = -8 \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $a_n = -8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이므로

$$a_5 = -8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = -\frac{8}{81} \quad \cdots \textcircled{3}$$

답 $-\frac{8}{81}$

채점 기준	비율
① 수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 구할 수 있다.	50 %
② 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 구할 수 있다.	30 %
③ a_5 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0207 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 r ($-1 < r < 1$)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \text{에서} \quad \frac{a_1}{1-r} = 2$$

$$\therefore a_1 = 2(1-r) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 8 \text{에서} \quad \frac{b_1}{1-r} = 8$$

$$\therefore b_1 = 8(1-r) \quad \cdots \textcircled{2}$$

㉠+㉡을 하면

$$a_1 + b_1 = 2(1-r) + 8(1-r) = 10(1-r)$$

따라서 $10(1-r) = 5$ 이므로 $1-r = \frac{1}{2}$

$$\therefore r = \frac{1}{2}$$

$r = \frac{1}{2}$ 을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$$a_1 = 1, b_1 = 4$$

따라서 수열 $\{a_n b_n\}$ 은 첫째항이 $a_1 b_1 = 1 \cdot 4 = 4$, 공비가 $r^2 = \frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{16}{3} \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

0208 공비가 $1-2x$ 이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$$-1 < 1-2x < 1, \quad -2 < -2x < 0$$

$$\therefore 0 < x < 1 \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

0209 공비가 $\sqrt{2} \cos \theta$ 이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$$-1 < \sqrt{2} \cos \theta < 1, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos \theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 < \theta < \pi) \quad \text{답 } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$$

0210 (i) $\frac{x}{2} = 0$, 즉 $x = 0$ 일 때,

주어진 급수는 0에 수렴한다.

(ii) $\frac{x}{2} \neq 0$, 즉 $x \neq 0$ 일 때,

공비가 $\frac{x-5}{2}$ 이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{x-5}{2} < 1, \quad -2 < x-5 < 2$$

$$\therefore 3 < x < 7$$

(i), (ii)에서 $x = 0$ 또는 $3 < x < 7$

따라서 정수 x 는 0, 4, 5, 6의 4개이다. 답 4

0211 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n$ 의 공비가 $\frac{x}{5}$ 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{x}{5} < 1 \quad \therefore -5 < x < 5 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (\log_2 x - 3)^n$ 의 공비가 $\log_2 x - 3$ 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1 < \log_2 x - 3 < 1, \quad 2 < \log_2 x < 4$$

$$\therefore 4 < x < 16 \quad \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서 구하는 x 의 값의 범위는 $4 < x < 5$ 답 $4 < x < 5$

채점 기준	비율
① $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n$ 이 수렴하도록 하는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
② $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_2 x - 3)^n$ 이 수렴하도록 하는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

0212 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$ 답 ㉠

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$ 은 공비가 r^2 인 등비급수이므로 ㉠에서

$$0 \leq r^2 < 1$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r+1}{2}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r+1}{2}$ 인 등비급수이므로 ㉠에서

$$0 < r+1 < 2 \quad \therefore 0 < \frac{r+1}{2} < 1$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{3} + 1\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r}{3} + 1$ 인 등비급수이므로 ㉠에서

$$-\frac{1}{3} < \frac{r}{3} < \frac{1}{3} \quad \therefore \frac{2}{3} < \frac{r}{3} + 1 < \frac{4}{3}$$

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

이상에서 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㉢

0213 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$ 답 ㉠

① $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}$ 은 공비가 r 인 등비급수이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1}$ 은 공비가 r^2 인 등비급수이므로 ㉠에서

$$0 \leq r^2 < 1$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 은 공비가 $-r$ 인 등비급수이므로 ㉠에서

$$-1 < -r < 1$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-3r}{2}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{1-3r}{2}$ 인 등비급수이므로 ㉠에서

$$-3 < -3r < 3, \quad -2 < 1-3r < 4$$

$$\therefore -1 < \frac{1-3r}{2} < 2$$

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$ 이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = \beta$ 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r^n - 2r^{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = \alpha - 2\beta$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

답 ④

0214 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ 이 수렴하므로 $-1 < a < 1$ ㉠

또 $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ 이 수렴하므로 $-1 < b < 1$ ㉡

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (ab)^n$ 은 공비가 ab 인 등비급수이므로 ㉠, ㉡에서
 $-1 < ab < 1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄴ. [반례] $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{a}{b}$ 인 등비급수이고, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ 이면

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{2} > 1$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n$ 은 발산한다.

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a+b)^n$ 은 공비가 $a+b$ 인 등비급수이고, ㉠, ㉡에서
 $-2 < a+b < 2$

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} (|a| - |b|)^n$ 은 공비가 $|a| - |b|$ 인 등비급수이고, ㉠, ㉡에서

$$0 \leq |a| < 1, 0 \leq |b| < 1$$

이므로 $-1 < |a| - |b| < 1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

0215 (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 3$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \end{aligned} \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $a_1 = 3$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned} \quad \text{답 ①}$$

0216 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{3}$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right] \\ &= -\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{2}{3} + 1\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $a_1 = \frac{1}{3}$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \dots \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5} \end{aligned} \quad \text{답 ①}$$

0217 $\log_2 (S_n + 2) = n + 1$ 에서 $S_n + 2 = 2^{n+1}$

$$\therefore S_n = 2^{n+1} - 2$$

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} - 2 - (2^n - 2) \\ &= 2^n \end{aligned} \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $a_1 = 2$ 는 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \quad \text{답 1}$$

0218 $x = \overline{OP_1} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_4P_5} + \overline{P_6P_7} + \dots$

$$\begin{aligned} &= 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

$y = \overline{P_1P_2} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_5P_6} + \overline{P_7P_8} + \dots$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \dots \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore x + y = \frac{9}{5} + \frac{6}{5} = 3 \quad \text{답 ③}$$

0219 점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \overline{P_1P_2} - \overline{P_3P_4} + \overline{P_5P_6} - \overline{P_7P_8} + \dots$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \overline{OP_1} - \overline{P_2P_3} + \overline{P_4P_5} - \overline{P_6P_7} + \cdots \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 이다. 답 $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

0220 $x = \overline{OP_1} \cos 45^\circ - \overline{P_1P_2} \cos 45^\circ + \overline{P_2P_3} \cos 45^\circ - \overline{P_3P_4} \cos 45^\circ + \cdots$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cdots \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$y = \overline{OP_1} \sin 45^\circ + \overline{P_1P_2} \sin 45^\circ + \overline{P_2P_3} \sin 45^\circ + \overline{P_3P_4} \sin 45^\circ + \cdots$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cdots \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$\therefore xy = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{3}$

→ ①

→ ②

→ ③

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
① x 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② y 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ xy 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0221 $\overline{PQ} = 1$ 이고 $\triangle POQ \sim \triangle P_1OQ_1$ 이므로

$$\overline{PQ} : \overline{P_1Q_1} = \overline{OP} : \overline{OP_1} = 3 : 2$$

$\therefore \overline{P_1Q_1} = \frac{2}{3} \overline{PQ} = \frac{2}{3}$

같은 방법으로 하면

$$\overline{P_2Q_2} = \frac{2}{3} \overline{P_1Q_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2, \overline{P_3Q_3} = \frac{2}{3} \overline{P_2Q_2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3, \dots$$

$$\therefore \overline{PQ} + \overline{P_1Q_1} + \overline{P_2Q_2} + \cdots = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

답 3

0222 $\overline{AA_1} = \frac{1}{2} \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ 이고 $\triangle AB_1A_1$ 은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{A_1B_1} = \sqrt{2} \overline{AA_1} = 2\sqrt{2} \quad \therefore l_1 = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$\overline{A_1A_2} = \frac{1}{2} \overline{A_1B_1} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ 이고 $\triangle A_1A_2D_2$ 는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{A_2D_2} = \sqrt{2} \overline{A_1A_2} = 2 \quad \therefore l_2 = 4 \cdot 2 = 8$$

$\overline{A_2A_3} = \frac{1}{2} \overline{A_2D_2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ 이고 $\triangle A_2B_3A_3$ 은 직각이등변삼각형이므로

$$\begin{aligned} \overline{A_3B_3} &= \sqrt{2} \overline{A_2A_3} = \sqrt{2} \quad \therefore l_3 = 4 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \\ &\vdots \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n &= 8\sqrt{2} + 8 + 4\sqrt{2} + \cdots \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{16}{\sqrt{2} - 1} = 16(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

답 $16(\sqrt{2} + 1)$

0223 $\angle P_2P_1O = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_1} \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$\angle P_2P_1P_3 = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{P_2P_3} = \overline{P_1P_2} \sin 60^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle P_3P_2P_4 = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{P_3P_4} = \overline{P_2P_3} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$\therefore \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \cdots = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cdots$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2 - \sqrt{3}} = 2(2 + \sqrt{3})$$

답 $2(2 + \sqrt{3})$

0224 $\angle OP_1P_2 = 45^\circ$ 이므로 $\overline{P_1P_2} = \overline{OP_1} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{OP_2} = \overline{P_1P_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 $\angle OP_2P_3 = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{P_2P_3} = \overline{OP_2} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$\overline{OP_3} = \overline{P_2P_3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ 이고 $\angle OP_3P_4 = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{P_3P_4} = \overline{OP_3} \cos 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$\therefore \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \cdots = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \cdots$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

답 ④

0225 정삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$ 이므로

$$S_1 = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}, S_2 = S_1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4},$$

$$S_3 = S_2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2, \dots$$

$$\therefore S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

0226 두 원 C_n 과 C_{n+1} 의 지름의 길이의 비가 2 : 1이므로 넓이의 비는 $2^2 : 1^2$

즉 $S_n : S_{n+1} = 4 : 1$ 이므로

$$S_1 = \pi, S_2 = S_1 \cdot \frac{1}{4} = \pi \cdot \frac{1}{4}, S_3 = S_2 \cdot \frac{1}{4} = \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2, \dots$$

$$\therefore S_n = \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\pi \quad \text{답 } \frac{4}{3}\pi$$

0227 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ → ①

정삼각형 R_2 의 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

정삼각형 R_3 의 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$ 이므로

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

⋮

$$\therefore S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad \text{→ ②}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{3} \quad \text{→ ③}$$

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
① S_1 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② S_n 을 구할 수 있다.	40 %
③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

0228 $S_1 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \pi - 2$

정사각형 $OA_2B_2C_2$ 의 한 변의 길이가 $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ 이므로

$$S_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = (\pi - 2) \cdot \frac{1}{4}$$

정사각형 $OA_3B_3C_3$ 의 한 변의 길이가 $1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$S_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = (\pi - 2) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

⋮

$$\therefore S_n = (\pi - 2) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\pi - 2) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{\pi - 2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(\pi - 2)$$

답 $\frac{4}{3}(\pi - 2)$

0229 추가 멈출 때까지 움직인 거리는

$$10 + 10 \cdot \frac{4}{5} + 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots$$

$$= \frac{10}{1 - \frac{4}{5}} = 50 \text{ (cm)}$$

답 50 cm

0230 한 번 튀어 오르고 내릴 때마다 공이 움직인 거리는

$$2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \text{ (m)}, 2 \cdot 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ (m)}, 2 \cdot 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ (m)}, \dots$$

따라서 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$$15 + 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots$$

$$= 15 + \frac{20}{1 - \frac{2}{3}} = 15 + 60 = 75 \text{ (m)}$$

답 ④

0231 $a_1 = 30 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \frac{30}{100} = \frac{54}{5}$,

$$a_2 = 30 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \frac{70}{100} \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \frac{30}{100} = a_1 \cdot \frac{21}{25} = \frac{54}{5} \cdot \frac{21}{25},$$

$$a_3 = 30 \cdot \left\{ \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \frac{70}{100} \right\}^2 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \frac{30}{100}$$

$$= a_2 \cdot \frac{21}{25} = \frac{54}{5} \cdot \left(\frac{21}{25}\right)^2,$$

⋮

$$\therefore a_n = \frac{54}{5} \cdot \left(\frac{21}{25}\right)^{n-1} \quad \text{→ ①}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{54}{5} \cdot \left(\frac{21}{25}\right)^{n-1} = \frac{\frac{54}{5}}{1 - \frac{21}{25}} = \frac{135}{2} \quad \text{→ ②}$$

답 $\frac{135}{2}$

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	70 %
② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0232 $0.\dot{2} = 0.2 + 0.02 + 0.002 + \dots = \frac{0.2}{1 - 0.1} = \frac{2}{9}$,

$$0.0\dot{5} = 0.05 + 0.005 + 0.0005 + \dots = \frac{0.05}{1 - 0.1} = \frac{1}{18}$$

이므로 공비를 r ($r > 0$)라 하면

$$\frac{2}{9}r^2 = \frac{1}{18}, \quad r^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r > 0)$$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{9}$$

답 ①

0233 $0.\dot{3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \dots = \frac{0.3}{1 - 0.1} = \frac{1}{3}$

$$0.2\dot{1} = 0.21 + 0.0021 + 0.000021 + \dots = \frac{0.21}{1 - 0.01} = \frac{7}{33}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{7}{33} \text{ 에서 } \frac{a_1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{7}{33}$$

$$\therefore a_1 = \frac{7}{33} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{99}$$

답 ③

0234 $1.1\dot{2} = 1.1 + 0.02 + 0.002 + 0.0002 + \dots$

$$= \frac{11}{10} + \frac{0.02}{1 - 0.1} = \frac{11}{10} + \frac{2}{90}$$

$$= \frac{101}{90}$$

→ ①

어떤 수를 x 로 놓으면 $1.1\dot{2}x - 1.12x = 6$ 이므로

$$\frac{101}{90}x - \frac{112}{100}x = 6, \quad \frac{1}{450}x = 6$$

$$\therefore x = 2700$$

따라서 어떤 수는 2700이다.

→ 2

답 2700

채점 기준	비율
① 1.12를 분수로 나타낼 수 있다.	40 %
② 어떤 수를 구할 수 있다.	60 %

0235 $\frac{1}{33} = 0.\dot{0}\dot{3}$ 이므로

$$a_1=0, a_2=3, a_3=0, a_4=3, \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + \frac{a_3}{5^3} + \frac{a_4}{5^4} + \frac{a_5}{5^5} + \frac{a_6}{5^6} + \dots \\ = \frac{3}{5^2} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^6} + \dots \\ = \frac{3}{25} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{8}$

0236 전략 $\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ ($A \neq B$)임을 이용한다.

풀이 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+3k+2}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

0237 전략 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 4}{1 - 2a_n} = \frac{1 - 4}{1 - 2 \cdot 1} = 3$$

답 ⑤

0238 전략 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)이면 상수 p, q 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (pa_n + qb_n) = p\alpha + q\beta$ 임을 이용한다.

풀이 $a_n - b_n = c_n$ 으로 놓으면 $b_n = a_n - c_n$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5, \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 8$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 5 - 8 = -3$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 2 \cdot 5 + (-3) = 7 \end{aligned}$$

답 ①

다른풀이 $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + a_n - c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - c_n)$

$$\begin{aligned} &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \\ &= 3 \cdot 5 - 8 = 7 \end{aligned}$$

0239 전략 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a$ (a 는 실수)이면 $\frac{a}{1-r} = a$ ($-1 < r < 1$)임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{2} = 4$ 에서

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{x^n + (-x)^n\} = 4$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1-x} + \frac{-x}{1-(-x)} \right\} = 4, \quad \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1+x} = 8$$

$$x(1+x) - x(1-x) = 8(1-x^2)$$

$$10x^2 = 8, \quad x^2 = \frac{4}{5} \quad \therefore x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\because x > 0) \quad \text{답 } \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

다른풀이 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{x + (-x)}{2} + \frac{x^2 + (-x)^2}{2} + \frac{x^3 + (-x)^3}{2} \\ &\quad + \frac{x^4 + (-x)^4}{2} + \dots \\ &= x^2 + x^4 + x^6 + \dots \\ &= \frac{x^2}{1-x^2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{x^2}{1-x^2} = 4$ 이므로 $x^2 = 4(1-x^2)$

$$5x^2 = 4, \quad x^2 = \frac{4}{5} \quad \therefore x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\because x > 0)$$

0240 전략 수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하면 $-1 < r \leq 1$, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하면 $-1 < r < 1$ 임을 이용한다.

풀이 $\{(5x-2)^n\}$ 의 공비가 $5x-2$ 이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1 < 5x-2 \leq 1, \quad 1 < 5x \leq 3$$

$$\therefore \frac{1}{5} < x \leq \frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (3x-2)^n$ 의 공비가 $3x-2$ 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1 < 3x-2 < 1, \quad 1 < 3x < 3$$

$$\therefore \frac{1}{3} < x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

①, ②에서 구하는 x 의 값의 범위는 $\frac{1}{3} < x \leq \frac{3}{5}$

→ ③

답 $\frac{1}{3} < x \leq \frac{3}{5}$

채점 기준	비율
① $\{(5x-2)^n\}$ 이 수렴하도록 하는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
② $\sum_{n=1}^{\infty} (3x-2)^n$ 이 수렴하도록 하는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

0241 전략 $a^m b^n$ (a, b 는 서로 다른 소수, m, n 은 자연수)의 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)$ 임을 이용한다.

풀이 $a_n = (n+1)\{(n+1)+1\} = (n+1)(n+2)$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ①

0242 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n + \beta_n$, $\alpha_n \beta_n$ 을 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2 + 2x - (n^2 + 2n) = 0$ 의 두 근이 α_n, β_n 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n &= -2, \alpha_n \beta_n = -n^2 - 2n = -n(n+2) \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2}$

0243 전략 제 n 항까지의 부분합 S_n 을 구한 다음 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 을 구한다.

풀이 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \log_2 \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} \\ &= \log_2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \log_2 \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} \right) \end{aligned}$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \log_2 \left(\frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+2}{k+1} \right) \\ &= \log_2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) + \log_2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right) + \log_2 \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \right) \\ &\quad + \cdots + \log_2 \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} \right) \\ &= \log_2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} \right) \\ &= \log_2 \frac{n+2}{2n+2} \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n+2}{2n+2} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

답 -1

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	30 %
② S_n 을 구할 수 있다.	40 %
③ 주어진 급수의 합을 구할 수 있다.	30 %

0244 전략 급수와 수열의 극한값 사이의 관계와 급수의 성질을 이용한다.

풀이 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ a_n - (a_n - b_n) \} = \alpha - 0 = \alpha$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \beta$$

$$\therefore \text{[반례]} a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n, b_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n \text{이면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq 1 \cdot \frac{1}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0245 전략 $-1 < r < 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ 임을 이용한다.

풀이 $a_1=2, a_2=7, a_3=2, a_4=7, a_5=2, a_6=7, \dots$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} &= \frac{2}{3} + \frac{7}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{7}{3^6} + \cdots \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^5} + \cdots \right) + \left(\frac{7}{3^2} + \frac{7}{3^4} + \frac{7}{3^6} + \cdots \right) \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} + \frac{\frac{7}{9}}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{7}{8} \\ &= \frac{13}{8} \end{aligned}$$

답 $\frac{13}{8}$

0246 전략 a_1, a_2, a_3, \dots 을 차례대로 구한 다음 규칙을 찾는다.

풀이 $a_1=2, a_2=4, a_3=2, a_4=4, a_5=2, a_6=4, \dots$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} &= \frac{2}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{4}{10^6} + \cdots \\ &= \left(\frac{2}{10} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^5} + \cdots \right) + \left(\frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^4} + \frac{4}{10^6} + \cdots \right) \\ &= \frac{\frac{2}{10}}{1 - \frac{1}{100}} + \frac{\frac{4}{100}}{1 - \frac{1}{100}} \\ &= \frac{20}{99} + \frac{4}{99} \\ &= \frac{8}{33} \end{aligned}$$

답 ④

0247 전략 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a$ (a 는 실수)이면 $\frac{a}{1-r} = a$ ($-1 < r < 1$)임을 이용한다.

풀이 $a=0$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = 0$ 이므로 $a \neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 의 공비가 r 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1 < r < 1$$

..... ㉠

또 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = 2$ 에서 $\frac{a}{1-r} = 2$ 이므로

$$a=2(1-r)$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } -1 < -r < 1$$

$$0 < 1-r < 2, \quad 0 < 2(1-r) < 4$$

$$\therefore 0 < a < 4$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

0248 [전략] 주어진 식을 이용하여 a_n, a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

$$\text{풀이 } a_n a_{n+1} + a_{n+1} = k a_n^2 + k a_n \text{에서}$$

$$a_{n+1}(a_n + 1) = k a_n(a_n + 1)$$

$$\therefore a_{n+1} = k a_n \quad (\because a_n > 0)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $a_1 = k$, 공비가 k 인 등비수열이다.

이때 $0 < k < 1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$ 에서

$$\frac{k}{1-k} = 5, \quad k = 5(1-k), \quad 6k = 5$$

$$\therefore k = \frac{5}{6}$$

답 ①

0249 [전략] 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하면 $-1 < r < 1$ 임을 이용한다.

$$\text{풀이 } \text{공비가 } \frac{\sqrt{3} \tan \pi x - 1}{2} \text{이므로 주어진 급수가 수렴하려면}$$

$$-1 < \frac{\sqrt{3} \tan \pi x - 1}{2} < 1, \quad -2 < \sqrt{3} \tan \pi x - 1 < 2$$

$$-1 < \sqrt{3} \tan \pi x < 3, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan \pi x < \sqrt{3}$$

$$\therefore -\frac{1}{6} < x < \frac{1}{3} \quad \left(\because -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \right)$$

따라서 x 의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

답 ①

0250 [전략] $a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$ 임을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

풀이 $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 25 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\} - 25 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right\}$$

$$= -25 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n + 25 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}$$

$$= 25 \cdot \left(-\frac{2}{5} + 1 \right) \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}$$

$$= 15 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 15 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^{2n} = 15 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{25} \right)^n$$

$$= 15 \cdot \frac{\frac{4}{25}}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{20}{7}$$

... ①

... ②

답 $\frac{20}{7}$

채점 기준	비율
① $n \geq 2$ 일 때, a_n 을 구할 수 있다.	50 %
② 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}$ 의 합을 구할 수 있다.	50 %

0251 [전략] n 번째와 $(n+1)$ 번째에 수거되어 재생산된 종이 상자의 양 사이의 관계를 구한다.

풀이 n 번째에 수거되어 재생산된 종이 상자의 양을 a_n kg이라 하면

$$a_1 = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{3}{8} a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{15}{4}$, 공비가 $\frac{3}{8}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{15}{4}}{1 - \frac{3}{8}} = 6$$

즉 재생산된 종이 상자는 총 6 kg이다.

답 6 kg

0252 [전략] 주어진 식을 이용하여 $\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}$ 을 a_{n+1}, a_{n+2} 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ 에서

$$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \\ &= \frac{1}{a_2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$a_1=1, a_2=2, a_3=3, \dots$ 이므로
 $a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < \dots$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

답 $\frac{1}{2}$

0253 [전략] a_n 과 b_n 을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x - 3y + 3 = 0$ 에서 $y = \frac{1}{3}x + 1$ 이므로 y 좌표가 자연수이려면 x 좌표가 3의 배수이어야 한다.

$x = 3n$ (n 은 자연수)으로 놓으면 $y = n + 1$ 이므로

$$a_n = 3n, \quad b_n = n + 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right.$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{3}$$

답 ①

0254 [전략] $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 임을 이용한다.

$$\text{풀이 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3}{n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^3 + 18}{2n^3 + 3n^2 + n}$$

$$= 6$$

조건 (나)에서 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - 3)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 3) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$$

따라서 조건 (㉠)에서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$$

답 ④

0255 전략 직선의 방정식과 이차함수의 식을 연립하여 풀어 점 P_n 의 좌표를 구한 후 점 P_n 의 y 좌표를 이용하여 $\overline{P_n H_n}$ 을 구한다.

풀이 점 P_n 의 x 좌표는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)=3x(x-1)$ 에서

$$(x-1)\left\{3x-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\because x\neq 1)$$

$x=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 을 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$ 에 대입하면

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 $P_n\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ 이므로

$$\overline{P_n H_n}=\left|\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_n H_n}=\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$$

답 ②

0256 전략 시행을 반복하여 규칙을 찾는다.

풀이 첫 번째 시행에서 색칠한 정사각형의 넓이는

$$\frac{1}{9}$$

두 번째 시행에서 색칠한 정사각형의 넓이의 합은

$$4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}$$

세 번째 시행에서 색칠한 정사각형의 넓이의 합은

$$4^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

⋮

따라서 색칠한 모든 정사각형의 넓이의 합은

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

03

지수함수와 로그함수의 미분

II. 미분법

0257 답 ∞

0258 답 0

0259 답 0

0260 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = \infty$ 답 ∞

0261 $\lim_{x \rightarrow 0} 2^x = 2^0 = 1$ 답 1

0262 $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0263 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{1+2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1}$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1} = 1$ 답 1

0264 $\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - 3^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3^x \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1\right\}$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1\right\} = -1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1\right\} = -\infty$ 답 $-\infty$

0265 답 $-\infty$

0266 답 ∞

0267 답 ∞

0268 답 $-\infty$

0269 $\lim_{x \rightarrow 1} \log_3 x = \log_3 1 = 0$ 답 0

0270 $\lim_{x \rightarrow 2} \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$ 답 -1

0271 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-\log x) = -\infty$ 답 $-\infty$

0272 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x+1}{x} = \log_2 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{x}\right) = \log_2 4 = 2$ 답 2

0273 답 e

0274 답 e

0275 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ 답 $\frac{1}{e}$

0276 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3 = e^3$ 답 e^3

0277 $\ln e^2 = 2 \ln e = 2$ 답 2

0278 $\ln \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0279 $\ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -\ln e = -1$ 답 -1

0280 $\frac{1}{\log_3 e} + \frac{1}{\log_2 e} = \ln 3 + \ln 2 = \ln 6$ 답 ln 6

라벨 특강 로그의 밑의 변환

$a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, N > 0$ 일 때

① $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$

② $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

0281 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$ 답 2

0282 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$ 답 3

0283 답 $\frac{1}{\ln 5}$ 0284 답 ln 2

0285 $y' = 5 \cdot (e^x)' = 5e^x$ 답 $y' = 5e^x$

0286 $y = e^2 \cdot e^x$ 이므로 $y' = e^2 \cdot (e^x)' = e^2 \cdot e^x = e^{x+2}$
답 $y' = e^{x+2}$

0287 $y = \frac{1}{e} \cdot e^x$ 이므로 $y' = \frac{1}{e} \cdot (e^x)' = \frac{1}{e} \cdot e^x = e^{x-1}$
답 $y' = e^{x-1}$

0288 $y' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)'$
 $= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x(x+2)e^x$ 답 $y' = x(x+2)e^x$

0289 답 $y' = \ln 6 \cdot 6^x$

0290 $y' = 2 \cdot (4^x)' = 2 \cdot 4^x \ln 4 = 2 \ln 4 \cdot 4^x$ 답 $y' = 2 \ln 4 \cdot 4^x$

0291 $y' = 3 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x \right]' = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^x \ln \frac{1}{2} = -3 \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^x$
답 $y' = -3 \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^x$

0292 $y' = (3^x)' \cdot (3x+1) + 3^x \cdot (3x+1)'$
 $= 3^x \ln 3 \cdot (3x+1) + 3^x \cdot 3$
 $= 3^x \{ (3x+1) \ln 3 + 3 \}$
답 $y' = 3^x \{ (3x+1) \ln 3 + 3 \}$

0293 $y' = \frac{3}{5} \cdot (\ln x)' = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{5x}$ 답 $y' = \frac{3}{5x}$

0294 $y = \ln 3 + \ln x$ 이므로 $y' = \frac{1}{x}$ 답 $y' = \frac{1}{x}$

0295 $y = 2 \ln x$ 이므로 $y' = \frac{2}{x}$ 답 $y' = \frac{2}{x}$

0296 $y' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$
 $= \ln x + 1$ 답 $y' = \ln x + 1$

0297 $y = \log 2 + \log x$ 이므로 $y' = \frac{1}{x \ln 10}$
답 $y' = \frac{1}{x \ln 10}$

0298 $y = \log_2 3 + \log_2 x$ 이므로 $y' = \frac{1}{x \ln 2}$
답 $y' = \frac{1}{x \ln 2}$

0299 $y' = x' \cdot \log_5 x + x \cdot (\log_5 x)' = 1 \cdot \log_5 x + x \cdot \frac{1}{x \ln 5}$
 $= \log_5 x + \frac{1}{\ln 5}$ 답 $y' = \log_5 x + \frac{1}{\ln 5}$

0300 $y' = (e^x)' \cdot \log_3 x + e^x \cdot (\log_3 x)'$
 $= e^x \cdot \log_3 x + e^x \cdot \frac{1}{x \ln 3}$
 $= e^x \left(\log_3 x + \frac{1}{x \ln 3} \right)$
답 $y' = e^x \left(\log_3 x + \frac{1}{x \ln 3} \right)$

0301 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} - 3^x}{2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^x - 1}{\left(\frac{2}{3} \right)^x + 1} = -1$ 답 -1

0302 $\lim_{x \rightarrow \infty} (4^x - 3^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 4^x \left(1 - \frac{3^x}{4^x} \right) \right\}^{\frac{1}{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} (4^x)^{\frac{1}{x}} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^x \right\}^{\frac{1}{x}}$
 $= 4 \cdot 1 = 4$ 답 ④

0303 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 4^{x+1} + 1}{4^x - 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4a + \left(\frac{1}{4} \right)^x}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^x} = 4a$... ①
 $4a = 12$ 에서 $a = 3$... ②
답 3

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 4^{x+1} + 1}{4^x - 2^x}$ 을 간단히 할 수 있다.	70 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0304 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow -\infty$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + 2^t} = \frac{1}{1 + 0} = 1$ 답 ⑤

0305 $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + 7^{-x}}{7^x - 7^{-x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7^{-t} + 7^t}{7^{-t} - 7^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{49}\right)^t + 1}{\left(\frac{1}{49}\right)^t - 1} = -1$$

답 -1

0306 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log_3 x - \log_3 \sqrt{3x^2 + x})$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{x}{\sqrt{3x^2 + x}} \\ &= \log_3 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{3x^2 + x}} \right) = \log_3 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3 + \frac{1}{x}}} \right) \\ &= \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②

0307 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_4 8^x - \log_4 (8^x + 4^x)\}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_4 \frac{8^x}{8^x + 4^x} \\ &= \log_4 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8^x}{8^x + 4^x} \right) \\ &= \log_4 \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x} \right\} \\ &= \log_4 1 = 0 \end{aligned}$$

답 0

0308 $\lim_{x \rightarrow 2} (\log_2 |x^2 - 4| - \log_2 |x - 2|)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right| = \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left| \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 |x+2| \\ &= \log_2 4 = 2 \end{aligned}$$

답 ②

0309 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_4 (2x+1) - \log_4 (3x^2-1) + \log_4 (3x+2)\}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_4 \frac{(2x+1)(3x+2)}{3x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_4 \frac{6x^2+7x+2}{3x^2-1} \\ &= \log_4 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+7x+2}{3x^2-1} \right) \\ &= \log_4 2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②

0310 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log(ax-1) - \log(x+1)\}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{ax-1}{x+1} \\ &= \log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax-1}{x+1} \right) = \log a \end{aligned}$$

$\log a = 3$ 에서 $a = 1000$

... ①

... ②

답 1000

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log(ax-1) - \log(x+1)\}$ 을 간단히 할 수 있다.	70 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0311 $4^x + 5^x = 5^x \left\{ \left(\frac{4}{5} \right)^x + 1 \right\}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log_2 (4^x + 5^x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left[5^x \left\{ \left(\frac{4}{5} \right)^x + 1 \right\} \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left[(5^x)^{\frac{1}{x}} \cdot \left\{ \left(\frac{4}{5} \right)^x + 1 \right\}^{\frac{1}{x}} \right] \\ &= \log_2 (5 \cdot 1) = \log_2 5 \end{aligned}$$

답 ⑤

0312 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^6 + \lim_{x \rightarrow 0} \{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\}^{-2} \\ &= e^6 + e^{-2} = e^6 + \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

답 $e^6 + \frac{1}{e^2}$

0313 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{x}{3}\right) \right\}^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}} \right\}^{\frac{1}{3}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

답 ②

0314 $x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}} &= \lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \{(t+1)^{\frac{1}{t}}\}^{-1} \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{e}$

0315 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} \right\}^{-5}$

$$= e^{-5} = \frac{1}{e^5}$$

답 $\frac{1}{e^5}$

0316 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}} \right\}^{6a} = e^{6a}$

$e^{6a} = e^{12}$ 에서 $6a = 12 \quad \therefore a = 2$

답 ③

$$\begin{aligned} 0317 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} \right\}^{-1}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} \\ &= \frac{e^{-1}}{e} = \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{e^2}$

0318 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{ab} = e^{ab}$

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+bx)^{\frac{a}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+bx)^{\frac{1}{bx}}\}^{ab} = e^{ab}$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}} \right\}^{ab} = e^{ab}$

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{b}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}} \right\}^{\frac{a}{b}} = e^{\frac{a}{b}}$

이상에서 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}}$ 과 값이 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

$$\begin{aligned}
 0319 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)+7x}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+3x)}{2x} + \frac{7}{2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot \frac{3}{2} + \frac{7}{2} \right] \\
 &= 1 \cdot \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5 \quad \text{답 5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0320 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{\ln(1+3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{6x} \cdot \frac{3x}{\ln(1+3x)} \cdot \frac{6}{3} \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \quad \text{답 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0321 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{2x}) + \ln(1-\sqrt{2x})}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{2x})(1-\sqrt{2x})}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-2x)}{-2x} \cdot (-2) \\
 &= 1 \cdot (-2) = -2 \quad \text{답 ②}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0322 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \ln(2x+1) - \ln 2x \} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{2x+1}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{답 ②}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0323 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{x^3+2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{ax} \cdot \frac{a}{x^2+2} \\
 &= 1 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \quad \dots ①
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{2} = 5 \text{에서} \quad a &= 10 \quad \dots ② \\
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x+1)}{ax} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x+1)}{10x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x+1)}{4x} \cdot \frac{2}{5} \\
 &= 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \quad \dots ③ \\
 &\quad \text{답 } \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{x^3+2x}$ 의 값을 a 로 나타낼 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x+1)}{ax}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

$$\begin{aligned}
 0324 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(3+x) - \log_2 3}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2 \frac{3+x}{3}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2 \left(1 + \frac{x}{3} \right)}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \ln 2} \quad \text{답 } \frac{1}{3 \ln 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0325 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1-3x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1-3x)}{-3x} \cdot (-3) \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \cdot (-3) = -\frac{3}{\ln 3} \quad \text{답 } -\frac{3}{\ln 3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0326 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_5(1+2x)}{\log_2(1-x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_5(1+2x)}{2x} \cdot \frac{-x}{\log_2(1-x)} \cdot (-2) \\
 &= \frac{1}{\ln 5} \cdot \ln 2 \cdot (-2) = -\frac{2 \ln 2}{\ln 5} \quad \text{답 ①}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0327 \quad x-2=t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 2 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(x-1)}{x-2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln 10} \quad \text{답 } \frac{1}{\ln 10}
 \end{aligned}$$

$$0328 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \frac{2}{x-1} = 1 \cdot (-2) = -2 \quad \text{답 ①}$$

$$\begin{aligned}
 0329 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{e^{5x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{5x}{e^{5x}-1} \cdot \frac{2}{5} \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{답 } \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0330 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-e^{-4x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x}-1) - (e^{-4x}-1)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x}-1}{x} - \frac{e^{-4x}-1}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{3x}-1}{3x} \cdot 3 - \frac{e^{-4x}-1}{-4x} \cdot (-4) \right\} \\
 &= 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) = 7 \quad \text{답 ②}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0331 \quad x-1=t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 1 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x-e}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t+1}-e}{t} = e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t} = e \cdot 1 = e \quad \text{답 } e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0332 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)}{e^{ax}-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \ln(1+3x)}{e^{ax}-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot 2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot 3 \right] \cdot \frac{ax}{e^{ax}-1} \cdot \frac{1}{a} \\
 &= (1+1 \cdot 2+1 \cdot 3) \cdot 1 \cdot \frac{1}{a} = \frac{6}{a} \quad \dots ①
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{6}{a} = \frac{1}{2} \text{에서} \quad a &= 12 \quad \dots ② \\
 &\quad \text{답 } 12
 \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)}{e^{ax}-1}$ 의 값을 a 로 나타낼 수 있다.	70 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %

$$\begin{aligned} 0333 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x - 1) - (2^x - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x - 1}{x} - \frac{2^x - 1}{x} \right) \\ &= \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

$$\begin{aligned} 0334 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{\log_3(1+x)\}(3^x - 1)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+x)}{x} \cdot \frac{3^x - 1}{x} \\ &= \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln 3 = 1 \end{aligned} \quad \text{답 1}$$

$$\begin{aligned} 0335 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 4^x + 8^x - 3}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1) + (4^x - 1) + (8^x - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 1}{x} + \frac{4^x - 1}{x} + \frac{8^x - 1}{x} \right) \\ &= \ln 2 + \ln 4 + \ln 8 = \ln 64 \\ \therefore a &= 64 \end{aligned} \quad \text{답 ⑤}$$

$$\begin{aligned} 0336 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5^{x-1} - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5^{x-1} - 1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} \\ x-1=t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 1 \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5^{x-1} - 1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5^t - 1}{t} \cdot \frac{1}{t+2} \\ &= \ln 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln 5 \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{1}{2} \ln 5$$

$$\begin{aligned} 0337 \quad x \rightarrow 0 \text{ 일 때 (분모)} &\rightarrow 0 \text{ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{ 이다.} \\ \text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} (ax + b) &= 0 \text{ 이므로 } b = 0 \\ b = 0 \text{ 을 주어진 식에 대입하면} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{e^{2x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^{2x} - 1} \cdot \frac{a}{2} \\ &= 1 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \text{ 에서 } a &= \frac{2}{3} \end{aligned} \quad \text{답 } a = \frac{2}{3}, b = 0$$

$$\begin{aligned} 0338 \quad x \rightarrow 0 \text{ 일 때 (분자)} &\rightarrow 0 \text{ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이다.} \\ \text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} \{\log_3(1+x) + a\} &= 0 \text{ 이므로 } a = 0 \\ a = 0 \text{ 을 주어진 식에 대입하면} \\ b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{\log_3(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\log_3(1+x)} \cdot (x+2) \\ &= \ln 3 \cdot 2 = 2 \ln 3 \end{aligned} \quad \text{답 } a = 0, b = 2 \ln 3$$

$$\begin{aligned} 0339 \quad x \rightarrow 0 \text{ 일 때 (분자)} &\rightarrow 0 \text{ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이다.} \\ \text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} (2^{x+1} - a) &= 0 \text{ 이므로 } 2 - a = 0 \quad \therefore a = 2 \quad \text{--- ①} \\ a = 2 \text{ 를 주어진 식에 대입하면} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{2^{x+1} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{2(2^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2^x - 1} \cdot \frac{\ln(1+bx)}{bx} \cdot \frac{b}{2} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \cdot 1 \cdot \frac{b}{2} = \frac{b}{2 \ln 2} \\ \frac{b}{2 \ln 2} &= \frac{2}{\ln 2} \text{ 에서 } b = 4 \quad \text{--- ②} \\ \therefore ab &= 8 \quad \text{--- ③} \end{aligned} \quad \text{답 8}$$

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0340 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b} - 3) = 0 \text{ 이므로 } \sqrt{b} - 3 = 0 \quad \therefore b = 9$$

$b = 9$ 를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+9} - 3}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{ax+9} - 3)(\sqrt{ax+9} + 3)}{(e^x - 1)(\sqrt{ax+9} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{(e^x - 1)(\sqrt{ax+9} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{a}{\sqrt{ax+9} + 3} \\ &= 1 \cdot \frac{a}{3+3} = \frac{a}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{6} = \frac{1}{3} \text{ 에서 } a &= 2 \\ \therefore b - a &= 7 \end{aligned} \quad \text{답 ⑤}$$

0341 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} \{a \ln(x+2) + b\} = 0 \text{ 이므로 } b = 0$$

$b = 0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{a \ln(x+2)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a \ln(x+2)}{(x+1)(x-1)}$$

이때 $x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a \ln(x+2)}{(x+1)(x-1)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \ln(t+1)}{t(t-2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} \cdot \frac{a}{t-2} \\ &= 1 \cdot \frac{a}{-2} = -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} &= 4 \text{ 에서 } a = -8 \\ \therefore a + b &= -8 \end{aligned} \quad \text{답 } -8$$

0342 점 P의 좌표를 $(t, \log_2(t+1))$ 이라 하면

$$\overline{OQ} = t, \overline{PQ} = \log_2(t+1)$$

이때 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t \rightarrow 0+$ 이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\log_2(t+1)}{t} = \frac{1}{\ln 2} \quad \text{답 } \frac{1}{\ln 2}$$

0343 점 P의 좌표가 t이므로 $P(t, \ln t)$

따라서 $S(t) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln t = \ln t$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S(t)}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\ln t}{t-1}$$

이때 $t-1=s$ 로 놓으면 $t \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\ln t}{t-1} = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\ln(s+1)}{s} = 1 \quad \text{답 ④}$$

0344 점 P의 좌표를 $(t, e^t - 1)$ 이라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (e^t - 1) = \frac{e^t - 1}{2}, S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t = t$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{e^t - 1}{2t}$$

이때 점 P가 점 O에 한없이 가까워지면 $t \rightarrow 0+$ 이므로 구하는 극한값은

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S_1}{S_2} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t - 1}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{답 1/2} \end{aligned}$$

0345 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\begin{aligned} \therefore a &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x - 1}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2} \quad \text{답 ④} \end{aligned}$$

0346 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이라면 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) \\ \therefore k &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x \cdot 2^x}{4^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{4^x - 1} \cdot 2^x \\ &= \frac{1}{\ln 4} \cdot 1 = \frac{1}{\ln 4} \quad \text{답 1/ln 4} \end{aligned}$$

0347 $x \neq 0$ 일 때, $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$ 이고 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) \\ \therefore f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \quad \text{답 2} \end{aligned}$$

0348 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(a+5x)}{x} &= b \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0+$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(a+5x) = 0$ 이므로 $\ln a = 0 \quad \therefore a = 1 \quad \dots\dots ①$

$a=1$ 을 ㉠에 대입하면

$$b = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+5x)}{5x} \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore a+b = 6 \quad \dots\dots ③ \quad \text{답 6}$$

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	50 %
② b의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ a+b의 값을 구할 수 있다.	10 %

0349 $f(x) = (x+2)e^{x+1} = e(x+2)e^x$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= e\{(x+2)' \cdot e^x + (x+2) \cdot (e^x)'\} \\ &= e\{1 \cdot e^x + (x+2) \cdot e^x\} = e(x+3)e^x \\ &= (x+3)e^{x+1} \\ \therefore f'(0) &= 3e \quad \text{답 ③} \end{aligned}$$

라센 **특강** $y = e^{x+p}, y = a^{x+p}$ (p 는 상수)의 도함수

상수 p 에 대하여

$$y = e^{x+p} \Rightarrow y = e^p \cdot e^x, \quad y = a^{x+p} \Rightarrow y = a^p \cdot a^x$$

으로 생각하여 미분한다.

0350 $y = 2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^x$ 이므로 $f(x) = 2^{x+3}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 2^3 \cdot (2^x)' = 2^3 \cdot 2^x \ln 2 = 8 \ln 2 \cdot 2^x \quad \dots\dots ①$$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 8 \ln 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 \ln 2 \quad \dots\dots ② \\ &= 4 \ln 2 \quad \text{답 4 ln 2} \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	60 %
② 접선의 기울기를 구할 수 있다.	40 %

0351 $f'(x) = a\{(x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)'\} = a(2xe^x + x^2 e^x)$

$$= ax(x+2)e^x$$

이므로 $f'(1) = 3ae$

$$3ae = \frac{1}{2}e \text{에서} \quad a = \frac{1}{6} \quad \text{답 ①}$$

0352 $f(1) = 0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 0}{h} = f'(1)$$

이때 $f'(x) = 3^x \ln 3 \cdot (x^2 - 1) + 3^x \cdot 2x = 3^x \{\ln 3 \cdot (x^2 - 1) + 2x\}$ 이므로

$$f'(1) = 3 \cdot 2 = 6 \quad \text{답 6}$$

0353 $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$

$$\text{이므로} \quad f'(e) = 2e + e = 3e \quad \text{답 3e}$$

0354 $f(x) = (\log_2 x)^2 + \frac{1}{2} \ln x = \log_2 x \cdot \log_2 x + \frac{1}{2} \ln x$ 이므로

$$f'(x) = (\log_2 x)' \cdot \log_2 x + \log_2 x \cdot (\log_2 x)' + \left(\frac{1}{2} \ln x\right)'$$

$$= \frac{1}{x \ln 2} \cdot \log_2 x + \log_2 x \cdot \frac{1}{x \ln 2} + \frac{1}{2x}$$

$$= \frac{2 \log_2 x}{x \ln 2} + \frac{1}{2x}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{1}{2} \quad \text{답 1/2}$$

0355 $f(x) = x \log_3 2x = x(\log_3 2 + \log_3 x)$ 이므로
 $f'(x) = x' \cdot (\log_3 2 + \log_3 x) + x \cdot (\log_3 2 + \log_3 x)'$
 $= \log_3 2 + \log_3 x + x \cdot \frac{1}{x \ln 3}$
 $= \log_3 2 + \log_3 x + \frac{1}{\ln 3}$
 $= \log_3 2 + \log_3 x + \log_3 e = \log_3 2ex$
 $\log_3 2ex = \log_3 ax$ 에서 $a = 2e$ 답 ②

라벨 **특강** $y = \ln px, y = \log_a px$ (p 는 상수)의 도함수

상수 p 에 대하여
 $y = \ln px \Rightarrow y = \ln p + \ln x$
 $y = \log_a px \Rightarrow y = \log_a p + \log_a x$
 로 생각하여 미분한다.

0356 $f'(x) = (e^x)' \cdot (\ln x + kx) + e^x \cdot (\ln x + kx)'$
 $= e^x (\ln x + kx) + e^x \left(\frac{1}{x} + k \right)$
 $= e^x \left(\ln x + kx + \frac{1}{x} + k \right)$
 이므로 $f'(1) = (2k+1)e$
 $(2k+1)e = 5e$ 에서 $2k+1=5 \quad \therefore k=2$ 답 ④

0357 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{f(x) - f(1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{f(x) - f(1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{f(x) - f(1)}{x-1}} \cdot (x+1)$
 $= \frac{1}{f'(1)} \cdot 2 = \frac{2}{f'(1)}$

이때 $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 3x^2 = \ln x + 3x^2 + 1$ 이므로
 $f'(1) = 4$
 $\therefore \frac{2}{f'(1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 답 ②

0358 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한 값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 2\} = 0$ 이므로 $f(1) = 2$
 $a \ln 1 + b = 2 \quad \therefore b = 2$... ①
 한편 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ 이고 $f'(x) = \frac{a}{x}$ 이므로
 $f'(1) = a = 3$... ②
 따라서 $f(x) = 3 \ln x + 2$ 이므로
 $f(e) = 3 \ln e + 2 = 3 + 2 = 5$... ③
답 5

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $f(e)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0359 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하려면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x \rightarrow 1+} \ln ax = \lim_{x \rightarrow 1-} (bx + 2) = f(1)$
 $\therefore \ln a = b + 2$ ①

또 $f'(1)$ 이 존재해야 하므로 $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 1) \\ b & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-} b \quad \therefore b = 1$
 $b = 1$ 을 ①에 대입하면 $\ln a = 3$
 $\therefore a = e^3$ 답 $a = e^3, b = 1$

0360 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하려면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x \rightarrow 1+} (ax^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1-} (e^{x-1} + b) = f(1)$
 $a + 1 = 1 + b \quad \therefore b = a$ ① ... ①

또 $f'(1)$ 이 존재해야 하므로 $f'(x) = \begin{cases} 2ax & (x > 1) \\ e^{x-1} & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 1+} 2ax = \lim_{x \rightarrow 1-} e^{x-1}$
 $2a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$
 $a = \frac{1}{2}$ 을 ①에 대입하면 $b = \frac{1}{2}$... ②
 $\therefore a + b = 1$... ③
답 1

채점 기준	비율
① a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0361 **전략** 로그의 성질을 이용하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_a f(x)\}$ 꼴로 변형한 후

$\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_a f(x)\} = \log_a \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right\}$ 임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_2 (x^2 + 1) + \log_{\frac{1}{2}} (2x^2 - 1)\}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_2 (x^2 + 1) - \log_2 (2x^2 - 1)\}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$ 답 ①

0362 **전략** $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{\frac{a}{2}} = e^{\frac{a}{2}}$
 $e^{\frac{a}{2}} = e^5$ 에서 $\frac{a}{2} = 5 \quad \therefore a = 10$ 답 10

0363 **전략** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{3x}\right) \left(1 + \frac{1}{4x}\right) \right\}^{12x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{12x} \cdot \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{12x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right\}^4 \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x} \right\}^3$
 $= e^4 \cdot e^3 = e^7$ 답 e^7

0364 **전략** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ 를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) - (2^x - 1)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2 - \frac{2^x - 1}{x} \right)$
 $= 2 - \ln 2$ **답** ③

0365 **전략** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$ 이다.

풀이 $f(x) = (x-3)e^x$ 으로 놓으면
 $f'(x) = e^x + (x-3)e^x = (x-2)e^x$
 따라서 구하는 접선의 기울기는
 $f'(0) = -2$ **답** -2

0366 **전략** 지수함수와 로그함수의 극한을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x}{2^x + 2^{-x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
 ㄴ. $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow -\infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-2^t}{1+2^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^t + 1} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-2^t}{1+2^t} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{3x^2-2}{x^2+3} = \log_3 3 = 1$

ㄹ. $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{1}{1-3^t} = \infty$$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ②

0367 **전략** ∞ 꼴의 지수함수를 포함한 함수의 극한값은 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 나누어서 구한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 5^x + b \cdot 3^{x-1}}{5^x - 3^{x+1}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x}{1 - 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x} = a$

이므로 $a=4$ **답** ①

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot 5^x + b \cdot 3^{x-1}}{5^x - 3^{x+1}} = \frac{a + \frac{1}{3}b}{1-3} = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}b \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}b = -2 \quad \therefore 3a + b = 12$$

이 식에 $a=4$ 를 대입하면 $12+b=12 \quad \therefore b=0$
 $\therefore a+b=4$ **답** ④

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0368 **전략** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right\}^n$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdots \frac{2n+1}{2n} \right)^n$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2}}$
 $= \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ **답** ②

0369 **전략** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ 을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{e^{2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} \cdot \frac{2x}{e^{2x}-1} \cdot \frac{a}{2}$
 $= 1 \cdot 1 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} = 4$ 에서 $a=8$ **답** 8

0370 **전략** $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ 을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - 1)f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot 3 \cdot xf(x)$
 $= 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$ **답** 9

0371 **전략** $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)의 역함수는 $y = a^x$ 임을 이용하여 $f(x)$ 의 역함수를 구한다.

풀이 $y = \log_2(x+3)$ 이라 하면
 $x+3 = 2^y \quad \therefore x = 2^y - 3$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 2^x - 3$
 즉 $g(x) = 2^x - 3$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x-2)}{g(x)+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(x+1)}{2^x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{2^x - 1}$
 $= \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{(\ln 2)^2}$ **답** ⑤

0372 [전략] $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하면 (분자) $\rightarrow 0$ 임을 이용한다.

[풀이] $x \rightarrow \frac{1}{3}$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (ax+9) = 0$ 이므로

$$\frac{1}{3}a + 9 = 0 \quad \therefore a = -27 \quad \dots ①$$

$a = -27$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{-27x+9}{\ln 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{-9(3x-1)}{\ln 3x}$$

이때 $3x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \frac{1}{3}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{-9(3x-1)}{\ln 3x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-9t}{\ln(1+t)} \\ &= -9 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = -9 \cdot 1 = -9 \end{aligned}$$

$$\therefore b = -9 \quad \dots ②$$

$$\therefore b - a = 18 \quad \dots ③$$

답 18

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $b-a$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0373 [전략] \overline{PQ} 의 길이를 t 에 대한 식으로 나타내고

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ 를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

[풀이] $P(t, 4^t)$, $Q(t, 2^t)$ 이므로 $\overline{PQ} = 4^t - 2^t$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{PQ}}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4^t - 2^t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(4^t - 1) - (2^t - 1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{4^t - 1}{t} - \frac{2^t - 1}{t} \right) \\ &= \ln 4 - \ln 2 = \ln \frac{4}{2} = \ln 2 \quad \dots ⑤ \end{aligned}$$

0374 [전략] 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ 이다.

[풀이] 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 3x + 2) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{ax} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{ax} - 1}{ax} \cdot \frac{a}{3} = 1 \cdot \frac{a}{3} = \frac{a}{3}$$

$$\text{이므로 } \frac{a}{3} = 2 \quad \therefore a = 6 \quad \dots ①$$

0375 [전략] 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한 후 $f'(a)=0$ 을 만족시키는 a 의 값을 구한다.

[풀이] $f(x) = (x^3 - 5x^2 + 9x - 7)e^x$ 이므로

$$f'(x) = (3x^2 - 10x + 9)e^x + (x^3 - 5x^2 + 9x - 7)e^x = (x^3 - 2x^2 - x + 2)e^x \quad \dots ①$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } (a^3 - 2a^2 - a + 2)e^a = 0$$

$$a^3 - 2a^2 - a + 2 = 0 \quad (\because e^a > 0)$$

$$(a+1)(a-1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 1 \text{ 또는 } a = 2 \quad \dots ②$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-1 + 1 + 2 = 2 \quad \dots ③$$

답 2

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② $f'(a)=0$ 을 만족시키는 a 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ 모든 실수 a 의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

[다른풀이] 삼차방정식 $a^3 - 2a^2 - a + 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계를 이용하면 모든 실수 a 의 값의 합은 $-\frac{-2}{1} = 2$

[라벤 특강] 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

0376 [전략] 미분계수의 정의를 이용하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h}$ 를 변형한다.

$$\begin{aligned} \text{[풀이]} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3) + f(3) - f(3-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(3+h) - f(3)}{h} + \frac{f(3) - f(3-h)}{-h} \right\} \\ &= f'(3) + f'(3) = 2f'(3) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} \text{이므로 } 2f'(3) = \frac{2}{3 \ln 3} \quad \dots ②$$

0377 [전략] $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

[풀이] $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (t+1)^{\frac{1}{t}} \right\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} = e$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1-x)^{-\frac{1}{x}} \right\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ㄷ. $-x=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $s \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s} \right)^{-s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{s} \right)^s \right\}^{-1} \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

이상에서 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ 과 값이 같은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0378 전략 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ 을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5^{x+2}-1}{\ln(x+3)}$ 에서 $x+2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5^{x+2}-1}{\ln(x+3)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\log_3(1+2x)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5^t-1}{\ln(1+t)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\log_3(1+2x)} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \frac{5^t-1}{t} + \ln 3 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 \cdot \ln 5 + \ln \sqrt{3} \\ &= \ln 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ④

0379 전략 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 (i) $x > 0$ 일 때,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{e^{2x}-1}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ 이고 } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(ii) $-1 < x < 0$ 일 때,

$$\frac{e^{2x}-1}{2x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 1 \text{ 이고 } \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$ 에서 $3x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{\frac{t}{3}} = 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \\ &= 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

답 ③

0380 전략 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ 을 이용하여 $f(n)$ 을 간단히 정리한다.

풀이 $f(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(1+kx)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+2x)}{x} + \dots + \frac{\ln(1+2nx)}{x} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot 2 + \frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot 3 \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{\ln(1+2nx)}{2nx} \cdot 2n \right\} \end{aligned}$$

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + 2n$$

$$= \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+3n}{f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+3n}{n(2n+1)} = \frac{4}{2} = 2$$

답 2

0381 전략 $f(x)$ 가 $x > 0$ 인 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$ 에서 연속이다.

풀이 조건 (4)에서 $x \neq 1$ 일 때, $f(x) = \frac{a \ln x + b - 2}{x - 1}$

함수 $f(x)$ 가 $x > 0$ 인 모든 실수에서 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 \quad (\because \textcircled{7})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a \ln x + b - 2}{x - 1} = 5 \quad \dots \textcircled{7}$$

⑦에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (a \ln x + b - 2) = 0$ 이므로

$$b - 2 = 0 \quad \therefore b = 2$$

$b=2$ 를 ⑦에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a \ln x}{x - 1} = 5$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a \ln x}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \ln(1+t)}{t} = a \cdot 1 = a$$

$$\therefore a = 5$$

따라서 $x > 0$ 에서 $f(x) = \begin{cases} \frac{5 \ln x}{x-1} & (x \neq 1) \\ 5 & (x = 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(2) = \frac{5 \ln 2}{2-1} = 5 \ln 2$$

답 $5 \ln 2$

04

삼각함수의 미분

II. 미분법

0382 $\overline{OP} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$ 이므로

(1) $\csc \theta = -\frac{13}{5}$ (2) $\sec \theta = \frac{13}{12}$

(3) $\cot \theta = -\frac{12}{5}$

풀이 참조

0383 $\csc \theta = \csc \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sin \frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

$\sec \theta = \sec \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\cos \frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$

$\cot \theta = \cot \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\tan \frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{-1} = -1$

풀이 참조

0384 $\csc \theta = \csc \frac{7}{6}\pi = \frac{1}{\sin \frac{7}{6}\pi} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

$\sec \theta = \sec \frac{7}{6}\pi = \frac{1}{\cos \frac{7}{6}\pi} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot \theta = \cot \frac{7}{6}\pi = \frac{1}{\tan \frac{7}{6}\pi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$

풀이 참조

0385 $\csc \theta = \csc 150^\circ = \frac{1}{\sin 150^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$\sec \theta = \sec 150^\circ = \frac{1}{\cos 150^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot \theta = \cot 150^\circ = \frac{1}{\tan 150^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$

풀이 참조

0386 $\csc \theta = \csc 300^\circ = \frac{1}{\sin 300^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec \theta = \sec 300^\circ = \frac{1}{\cos 300^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$\cot \theta = \cot 300^\circ = \frac{1}{\tan 300^\circ} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

풀이 참조

0387 $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ 이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \sec^2 \theta \quad \therefore \sec^2 \theta = \frac{5}{4}$

이때 θ 가 제3사분면의 각이므로 $\sec \theta < 0$

$\therefore \sec \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

0388 $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ 이므로

$\csc^2 \theta = 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = 1 + \frac{1}{(-3)^2} = \frac{10}{9}$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\csc \theta > 0$

$\therefore \csc \theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$

$\frac{\sqrt{10}}{3}$

0389 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서 $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ 이고

$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 이므로

$(1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = \cos^2 \theta \sec^2 \theta = 1$

1

0390 $\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ)$

$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

참고 $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$ 임을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수도 있다.

0391 $\cos 105^\circ = \cos (45^\circ + 60^\circ)$

$= \cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

0392 $\tan 75^\circ = \tan (30^\circ + 45^\circ)$

$= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$

$2 + \sqrt{3}$

0393 $\sin 10^\circ \cos 35^\circ + \cos 10^\circ \sin 35^\circ$

$= \sin (10^\circ + 35^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

0394 $\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ$

$= \cos (40^\circ + 20^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

0395 $\frac{\tan 80^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \tan 80^\circ \tan 20^\circ} = \tan (80^\circ - 20^\circ)$

$= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\sqrt{3}$

0396 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \alpha > 0$ 이므로

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

$\therefore \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

풀이 참조

0397 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(1, 1)$ 을 잡으면

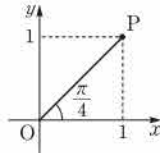
$$\overline{OP} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$



$$\sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

0398 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(\sqrt{3}, 1)$ 을 잡으면

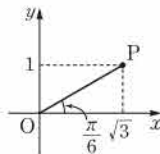
$$\overline{OP} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$$

$$= 2 \left(\sin \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \theta \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{6} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$$



$$2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$$

0399 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(1, -\sqrt{3})$ 을 잡으면

$$\overline{OP} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

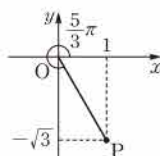
$$\therefore \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$$

$$= 2 \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{2} - \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \left\{ \sin \theta \cos \frac{5}{3}\pi - \cos \theta \left(-\sin \frac{5}{3}\pi \right) \right\}$$

$$= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{5}{3}\pi + \cos \theta \sin \frac{5}{3}\pi \right)$$

$$= 2 \sin \left(\theta + \frac{5}{3}\pi \right)$$



$$2 \sin \left(\theta + \frac{5}{3}\pi \right)$$

0400 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0401 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0402 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0403 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2$

답 2

0404 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2 \cdot 1 = 2$

답 2

0405 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\cos x} = -1$

답 -1

0406 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0407 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$

답 3

0408 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan x}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 5 \cdot 1 = 5$

답 5

0409 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

0410 답 $y' = \cos x$

0411 답 $y' = 1 - 3 \sin x$

0412 답 $y' = -\cos x + 2 \sin x$

0413 답 $y' = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{x}$

0414 $y = \sin^2 x = \sin x \sin x$ 이므로
 $y' = \cos x \sin x + \sin x \cos x$
 $= 2 \sin x \cos x$

답 $y' = 2 \sin x \cos x$

0415 $y' = \cos x + x(-\sin x)$
 $= \cos x - x \sin x$

답 $y' = \cos x - x \sin x$

0416 $y' = e^x \sin x + e^x \cos x$
 $= e^x (\sin x + \cos x)$

답 $y' = e^x (\sin x + \cos x)$

0417 $y' = \cos x \cos x + \sin x(-\sin x)$
 $= \cos^2 x - \sin^2 x$

답 $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$

0418 $\overline{OP} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ 이므로
 $\csc \theta = -\frac{5}{4}, \sec \theta = \frac{5}{3}$
 $\therefore \csc \theta + \sec \theta = \frac{5}{12}$

답 ⑤

0419 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$ 이므로

$$\csc^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} = 5, \cot^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = 4$$

$\therefore \csc^2 \theta + \cot^2 \theta = 9$

답 9

0420 점 P의 좌표를 $(a, -\sqrt{3}a)$ ($a < 0$)라 하면

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + (-\sqrt{3}a)^2} = -2a \quad (\because a < 0)$$

이므로

$$\csc \theta = \frac{-2a}{-\sqrt{3}a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sec \theta = \frac{-2a}{a} = -2,$$

$$\cot \theta = \frac{a}{-\sqrt{3}a} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \csc \theta \sec \theta + \cot \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (-2) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

→ 1

→ 2

답 $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$

채점 기준	비율
① $\csc \theta, \sec \theta, \cot \theta$ 의 값을 각각 구할 수 있다.	70 %
② $\csc \theta \sec \theta + \cot \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0421 (i) $\csc \theta \tan \theta < 0$ 일 때,

$\csc \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\sec \theta \cot \theta < 0$ 일 때,

$\sec \theta$ 와 $\cot \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제3사분면의 각이다.

답 ③

0422
$$\begin{aligned} & \frac{1+\sin \theta}{\csc \theta - \cot \theta} - \frac{1-\sin \theta}{\csc \theta + \cot \theta} \\ &= \frac{(1+\sin \theta)(\csc \theta + \cot \theta) - (1-\sin \theta)(\csc \theta - \cot \theta)}{(\csc \theta - \cot \theta)(\csc \theta + \cot \theta)} \\ &= \frac{2\cot \theta + 2}{\csc^2 \theta - \cot^2 \theta} \\ &= \frac{2\cot \theta + 2}{(1+\cot^2 \theta) - \cot^2 \theta} \\ &= 2\cot \theta + 2 \end{aligned}$$

답 $2\cot \theta + 2$

0423 ① $\cos \theta \sec \theta + \tan \theta \cot \theta = 1 + 1 = 2$

②
$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\tan \theta} + \frac{1}{1-\cot \theta} &= \frac{1}{1-\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} + \frac{1}{1-\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \\ &= \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \\ &= \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} + \frac{-\sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = 1 \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} \tan^2 \theta \cos^2 \theta + \cot^2 \theta \sin^2 \theta &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned} & (\csc \theta + 1)(\sec \theta + 1)(\csc \theta - 1)(\sec \theta - 1) \\ &= (\csc \theta + 1)(\csc \theta - 1)(\sec \theta + 1)(\sec \theta - 1) \\ &= (\csc^2 \theta - 1)(\sec^2 \theta - 1) \\ &= \cot^2 \theta \tan^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned} \csc \theta (\tan \theta - \sin \theta) &= \csc \theta \tan \theta - \csc \theta \sin \theta \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{\cos \theta} - 1 = \sec \theta - 1 \end{aligned}$$

답 ⑤

0424 $\csc \theta \sec \theta < 0$ 에서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\cos \theta \cot \theta > 0$ 에서 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이므로 θ 는 제2사분면의 각이다.

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{1+\tan^2 \theta} \sqrt{\csc^2 \theta - 1} &= \sqrt{\sec^2 \theta} \sqrt{\cot^2 \theta} \\ &= (-\sec \theta)(-\cot \theta) \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} = \csc \theta \end{aligned}$$

답 ④

0425 $\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\csc \theta = \frac{5}{4}$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} = \frac{4}{5}$$

답 ④

0426 $\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$

$$\sec^2 \theta = \tan^2 \theta + 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{13}{9}$$

$$\therefore \csc^2 \theta + \sec^2 \theta = \frac{169}{36}$$

답 $\frac{169}{36}$

0427 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$\therefore \csc \theta \sec \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{9}{4}$$

답 $-\frac{9}{4}$

0428 $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 2$$

$$1 - 2\sin \theta \cos \theta = 2 \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sec \theta - \csc \theta &= \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 0429 \quad & \sin 70^\circ \sin 100^\circ - \sin 20^\circ \sin 10^\circ \\
 &= \sin(90^\circ - 20^\circ) \sin(90^\circ + 10^\circ) - \sin 20^\circ \sin 10^\circ \\
 &= \cos 20^\circ \cos 10^\circ - \sin 20^\circ \sin 10^\circ \\
 &= \cos(20^\circ + 10^\circ) \\
 &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}
 0430 \quad & \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \\
 &= \frac{\sin(2\alpha - \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \\
 &= \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha
 \end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha} \\
 &= 2 \cos \alpha - 2 \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \\
 &= \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0431 \quad & \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} \text{ 이므로} \\
 & \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = 2, \quad \tan \alpha + 1 = 2 - 2 \tan \alpha \\
 & 3 \tan \alpha = 1 \quad \therefore \tan \alpha = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

답 ④

$$0432 \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \text{ 이므로}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

→ ①

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \text{ 이므로}$$

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \left(\because \frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$$

→ ②

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \\
 &= \frac{2\sqrt{10} - 2}{9}
 \end{aligned}$$

→ ③

답 $\frac{2\sqrt{10} - 2}{9}$

채점 기준	비율
① $\cos \alpha$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $\sin \beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $\sin(\alpha + \beta)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

$$0433 \quad \sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots ㉠$$

$\cos \alpha + \cos \beta = 1$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠ + ㉡ \text{을 하면} \quad 2 + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) = \frac{5}{4}$$

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = -\frac{3}{8}$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = -\frac{3}{8}$$

답 ②

0434 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{1}{3}, \quad \tan \alpha \tan \beta = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{5}$$

답 ①

0435 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = -\frac{3}{2}, \quad \tan \alpha \tan \beta = \frac{a}{2}$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}}{1 - \frac{a}{2}} = -\frac{3}{2-a} = -3$$

$$\therefore a = 1$$

답 1

0436 두 직선 $y = x + 1$, $y = 3x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = 1, \quad \tan \beta = 3$$

이므로

$$\tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{1 - 3}{1 + 1 \cdot 3} \right| = \frac{1}{2}$$

답 ②

$$0437 \quad x - y - 1 = 0 \text{에서} \quad y = x - 1$$

$$(2 - \sqrt{3})x - y + 3 = 0 \text{에서} \quad y = (2 - \sqrt{3})x + 3$$

두 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = 1, \quad \tan \beta = 2 - \sqrt{3}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{1 - (2 - \sqrt{3})}{1 + 1 \cdot (2 - \sqrt{3})} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이다.

답 $\frac{\pi}{6}$

$$0438 \quad ax - y - 3 = 0 \text{에서} \quad y = ax - 3$$

$$x - 2y + 2 = 0 \text{에서} \quad y = \frac{1}{2}x + 1$$

두 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = a, \quad \tan \beta = \frac{1}{2}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$|\tan(\alpha - \beta)| = \tan \frac{\pi}{4} \quad \dots ①$$

$$\left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = 1, \quad \frac{a - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}a} = \pm 1$$

$$a - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}a \text{ 또는 } a - \frac{1}{2} = -1 - \frac{1}{2}a$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{3} \quad \dots ②$$

따라서 모든 a 의 값의 곱은

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \quad \dots ③$$

답 -1

채점 기준	비율
① $\tan \alpha, \tan \beta$ 에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ 모든 a 의 값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

0439 $\angle ABC = \theta$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{2}{1} = 2, \quad \tan \beta = \frac{1}{3}, \quad \theta = \alpha - \beta$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} \quad \dots \frac{\pi}{4}$$

0440 점 P는 \overline{BC} 를 2:1로 내분하므로

$$\overline{BP} = 6, \quad \overline{CP} = 3$$

$\angle APB = \alpha$, $\angle DPC = \beta$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{2}{3}, \quad \tan \beta = \frac{4}{3}$$

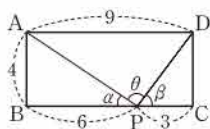
이므로

$$\tan \theta = \tan \{180^\circ - (\alpha + \beta)\} = -\tan(\alpha + \beta)$$

$$= -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= -\frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}} = -18$$

답 -18



0441 $\overline{PQ} = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{3}$ 이므로

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 3$$

$$2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 3$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}$$

답 ③

0442 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \therefore 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

답 ③

0443 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sin 2\theta - \cos 2\theta$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta - (1 - 2 \sin^2 \theta)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left[1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$$

$$= -\frac{4\sqrt{2} + 7}{9}$$

$$\dots -\frac{4\sqrt{2} + 7}{9}$$

0444 $y = \cos 2x + 4 \sin x - 1$

$$= (1 - 2 \sin^2 x) + 4 \sin x - 1$$

$$= -2 \sin^2 x + 4 \sin x$$

$$= -2(\sin x - 1)^2 + 2$$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 주어진 함수는 $\sin x = 1$ 일 때 최댓값 2, $\sin x = -1$ 일 때 최솟값 -6을 갖는다.

따라서 $M = 2$, $m = -6$ 이므로

$$M + m = -4$$

답 -4

$$0445 \quad \tan \theta + \cot \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{5}{2} \text{에서} \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{5} \quad \dots ①$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{5} \quad \dots ②$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{에서} \quad 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로} \quad \cos 2\theta > 0$$

$$\therefore \cos 2\theta = \sqrt{1 - \sin^2 2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \quad \dots ③$$

$$\dots \frac{3}{5}$$

채점 기준	비율
① $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $\sin 2\theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $\cos 2\theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0446 $y = \sqrt{3} \cos x - \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\right)$

$$= 2\left(\sin \frac{2}{3} \pi \cos x + \cos \frac{2}{3} \pi \sin x\right)$$

$$= 2 \sin\left(x + \frac{2}{3} \pi\right)$$

따라서 $y = \sqrt{3} \cos x - \sin x$ 의 그래프는 $y = 2 \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{2}{3}\pi$ 만큼 평행이동한 것이므로

$$a=2, b=-\frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore ab = -\frac{4}{3}\pi$$

답 ①

0447 $12 \sin \theta + 5 \cos \theta$

$$= 13 \left(\sin \theta \cdot \frac{12}{13} + \cos \theta \cdot \frac{5}{13} \right)$$

$$= 13 (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha)$$

$$= 13 \sin (\theta + \alpha) \quad \left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{5}{13}, \cos \alpha = \frac{12}{13} \right)$$

$$\therefore r = 13$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12} \text{ 이므로}$$

$$r \tan \alpha = 13 \cdot \frac{5}{12} = \frac{65}{12}$$

답 65/12

0448 $y = -\sin x + \cos x + 3$

$$= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) + 3$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4} \pi \sin x + \sin \frac{3}{4} \pi \cos x \right) + 3$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{3}{4} \pi \right) + 3$$

이때 $-1 \leq \sin \left(x + \frac{3}{4} \pi \right) \leq 1$ 이므로

$$-\sqrt{2} + 3 \leq \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{3}{4} \pi \right) + 3 \leq \sqrt{2} + 3$$

따라서 $M = \sqrt{2} + 3, m = -\sqrt{2} + 3$ 이므로

$$Mm = (\sqrt{2} + 3)(-\sqrt{2} + 3) = 7$$

답 7

0449 $y = 4 \sin x + 3 \cos x - 1$

$$= 5 \left(\sin x \cdot \frac{4}{5} + \cos x \cdot \frac{3}{5} \right) - 1$$

$$= 5 \sin (x + \alpha) - 1 \quad \left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5} \right)$$

ㄱ. 주기는 2π 이다.

ㄴ. 최댓값은 $5 - 1 = 4$ 이다.

ㄷ. 최솟값은 $-5 - 1 = -6$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

라벨

특강 삼각함수의 최대·최소와 주기

삼각함수	최댓값	최솟값	주기
$y = a \sin (bx + c) + d$	$ a + d$	$- a + d$	$\frac{2\pi}{ b }$
$y = a \cos (bx + c) + d$	$ a + d$	$- a + d$	$\frac{2\pi}{ b }$
$y = a \tan (bx + c) + d$	없다.	없다.	$\frac{\pi}{ b }$

0450 $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - \cos x + 1$

$$= 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) - \cos x + 1$$

$$= \sqrt{3} \sin x - \cos x - \cos x + 1$$

$$= \sqrt{3} \sin x - 2 \cos x + 1$$

$$= \sqrt{7} \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} - \cos x \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \right) + 1$$

$$= \sqrt{7} \sin (x + \alpha) + 1 \quad \left(\text{단, } \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{7}}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right)$$

이때 $-1 \leq \sin (x + \alpha) \leq 1$ 이므로

$$-\sqrt{7} + 1 \leq \sqrt{7} \sin (x + \alpha) + 1 \leq \sqrt{7} + 1$$

따라서 $M = \sqrt{7} + 1, m = -\sqrt{7} + 1$ 이므로

$$M - m = 2\sqrt{7}$$

답 $2\sqrt{7}$

0451 $y = a \sin x + \sqrt{3} a \cos x + 2$

$$= 2a \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) + 2$$

$$= 2a \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right) + 2$$

$$= 2a \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2$$

이때 $a > 0$ 이고 $-1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$ 이므로

$$-2a + 2 \leq 2a \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2 \leq 2a + 2$$

주어진 함수의 최댓값이 8이므로

$$2a + 2 = 8 \quad \therefore a = 3$$

답 3

0452 $\angle APB = 90^\circ$ 이므로 $\angle PAB = \theta$ 라 하면

$$\overline{AP} = 2 \cos \theta, \overline{PB} = 2 \sin \theta$$

→ ①

$$\therefore 3\overline{AP} + 4\overline{PB} = 6 \cos \theta + 8 \sin \theta$$

$$= 10 \left(\frac{3}{5} \cos \theta + \frac{4}{5} \sin \theta \right)$$

$$= 10 \sin (\theta + \alpha) \quad \left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5} \right)$$

→ ②

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\alpha < \theta + \alpha < \frac{\pi}{2} + \alpha$ 이므로 $3\overline{AP} + 4\overline{PB}$ 는

$\sin (\theta + \alpha) = 1$ 일 때 최대이며 최댓값은 10이다.

→ ③

답 10

채점 기준	비율
① $\overline{AP}, \overline{PB}$ 의 길이를 θ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② $3\overline{AP} + 4\overline{PB}$ 의 식을 삼각함수의 합성을 이용하여 변형할 수 있다.	40 %
③ $3\overline{AP} + 4\overline{PB}$ 의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0453 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos^2 x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3(1 - \sin^2 x)}{1 - \sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 - \sin x}$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)$$

$$= 3 \cdot (1 + 1) = 6$$

답 6

$$\begin{aligned} 0454 \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x + \sin 2x}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x + 2 \sin x \cos x}{1 - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x (1 + \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x}{1 - \cos x} = 0 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 0455 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 2 \sin^2 x) - 1}{2 \sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{\cos x} \right) = 0 \end{aligned}$$

답 0

$$\begin{aligned} 0456 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\{f(x)\}^2} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} \\ &= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 0457 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin(-x)}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin 4x}{3x} + \frac{\sin(-x)}{3x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4}{3} + \frac{\sin(-x)}{-x} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \right\} \\ &= 1 \cdot \frac{4}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \end{aligned}$$

답 ③

참고 $\sin(-x) = -\sin x$ 를 이용하여 극한값을 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned} 0458 \quad x^\circ &= \frac{\pi}{180} x \text{ [라디안]} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^\circ}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{180} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{180} x}{\frac{\pi}{180} x} \cdot \frac{\pi}{180} \\ &= 1 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} \end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{180}$

$$\begin{aligned} 0459 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 5x)}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 5x)}{\sin 5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{2} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0460 \quad f(g(x)) &= f(\sin x) = 3 \sin x \\ g(f(x)) &= g(3x) = \sin 3x \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(f(x))}{f(g(x))} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{x}{\sin x} \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

답 ②

답 1

채점 기준	비율
① $f(g(x))$ 와 $g(f(x))$ 를 구할 수 있다.	40 %
② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(f(x))}{f(g(x))}$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %

$$\begin{aligned} 0461 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x - \tan 3x}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 4x}{2x} - \frac{\tan 3x}{2x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 4x}{4x} \cdot 2 - \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{3}{2} \right) \\ &= 1 \cdot 2 - 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 0462 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1}{4} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 0463 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x + \tan 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{x}}{1 + \frac{\tan 3x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4}{1 + \frac{\tan 3x}{3x} \cdot 3} \\ &= \frac{1 \cdot 4}{1 + 1 \cdot 3} = 1 \end{aligned}$$

답 1

$$\begin{aligned} 0464 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)}{x \sin x (1 + \cos 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x \sin x (1 + \cos 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x \sin x (1 + \cos 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{9}{1 + \cos 3x} \\ &= 1^2 \cdot 1 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{9}{2}$

$$\begin{aligned} 0465 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x - 2 \cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(3 \cos x + 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2 (\cos x + 1)} \cdot (3 \cos x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2 (\cos x + 1)} \cdot (3 \cos x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2 (\cos x + 1)} \cdot (3 \cos x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{3 \cos x + 1}{\cos x + 1} \\ &= -1 \cdot 1^2 \cdot 2 = -2 \end{aligned}$$

답 -2

$$\begin{aligned}
 0466 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos kx)(1 + \cos kx)}{3x^2(1 + \cos kx)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 kx}{3x^2(1 + \cos kx)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 kx}{3x^2(1 + \cos kx)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin kx}{kx} \right)^2 \cdot \frac{k^2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \cos kx} \\
 &= 1^2 \cdot \frac{k^2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{k^2}{6}
 \end{aligned}$$

$$\frac{k^2}{6} = \frac{4}{3} \text{ 에서 } k^2 = 8$$

$$\therefore k = 2\sqrt{2} \quad (\because k > 0)$$

답 ②

$$0467 \quad x - \frac{\pi}{2} = t \text{ 로 놓으면 } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \tan x &= \lim_{t \rightarrow 0} t \tan \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \left(-\frac{1}{\tan t} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} \cdot (-1) = -1
 \end{aligned}$$

답 ②

$$0468 \quad x - \pi = t \text{ 로 놓으면 } x \rightarrow \pi \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi) \sin x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(t + \pi)}{t \sin(t + \pi)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{-t \sin t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{-1}{1 + \cos t} \\
 &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{2}$

$$0469 \quad x - 2 = t \text{ 로 놓으면 } x \rightarrow 2 \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \left(\cos \frac{\pi}{4} x \right)}{x - 2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left\{ \cos \frac{\pi}{4} (t + 2) \right\}}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{2} \right) \right\}}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left(-\sin \frac{\pi}{4} t \right)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left(-\sin \frac{\pi}{4} t \right)}{-\sin \frac{\pi}{4} t} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4} t}{\frac{\pi}{4} t} \cdot \left(-\frac{\pi}{4} \right) \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

답 $-\frac{\pi}{4}$

$$0470 \quad \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{3x + \pi} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)}{3 \left(x + \frac{\pi}{3} \right)}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = t \text{ 로 놓으면 } x \rightarrow -\frac{\pi}{3} \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)}{3 \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{2}{3} \\
 &= 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

답 ③

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
① $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ 를 $r \sin(x + \alpha)$ 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
② $x + \frac{\pi}{3} = t$ 로 치환할 수 있다.	30 %
③ $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{3x + \pi}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

$$0471 \quad \frac{1}{x} = t \text{ 로 놓으면 } x \rightarrow \infty \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin t}{t} = 2 \cdot 1 = 2$$

답 ③

$$0472 \quad x^\circ = \frac{\pi}{180} x \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\circ \tan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{180} x \tan \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} = t \text{ 로 놓으면 } x \rightarrow \infty \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{180} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\tan t}{t} = \frac{\pi}{180} \cdot 1 = \frac{\pi}{180}$$

답 ②

$$0473 \quad \frac{1}{x} = t \text{ 로 놓으면 } x \rightarrow \infty \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{2}{x} \cot \frac{4}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \sin 2t \cot 4t \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{4t}{\tan 4t} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

$$0474 \quad x \rightarrow 0 \text{ 일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + ax + b) = 0 \text{ 이므로 } b = 0$$

$$b = 0 \text{ 을 주어진 식의 좌변에 대입하면}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + a)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot (x + a) \\
 &= 1 \cdot a = a
 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 5$$

$$\therefore a + b = 5$$

답 ⑤

0475 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+b) = 0$ 이므로 $\ln b = 0 \quad \therefore b = 1$

$b=1$ 을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{x}{\ln(x+1)} \cdot a$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot a = a$$

$\therefore a = 2$

$\therefore ab = 2$

답 ④

0476 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b}-2) = 0$ 이므로

$\sqrt{b}-2=0 \quad \therefore b=4$

→ ①

$b=4$ 를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+b}-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+4}-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(\sqrt{ax+4}+2)}{ax}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{a} \cdot (\sqrt{ax+4}+2)$$

$$= 1 \cdot \frac{2}{a} \cdot 4 = \frac{8}{a}$$

$\frac{8}{a} = 2$ 에서 $a = 4$

→ ②

$\therefore a-b=0$

→ ③

답 0

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0477 $\triangle ABC \sim \triangle ACH$ 이므로

$\angle ACH = \angle ABC = \theta$

$\triangle CBH$ 에서 $\overline{CH} = \sin \theta$

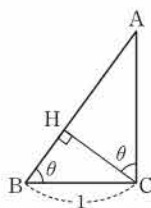
$\triangle ACH$ 에서

$\overline{AH} = \overline{CH} \tan \theta = \sin \theta \tan \theta$

$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{AH}}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin \theta \tan \theta}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\tan \theta}{\theta} = 1 \cdot 1 = 1$

답 1



0478 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

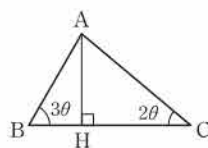
$\overline{AB} = \frac{\overline{AH}}{\sin 3\theta}, \overline{AC} = \frac{\overline{AH}}{\sin 2\theta}$

$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{\overline{AH}}{\sin 3\theta}}{\frac{\overline{AH}}{\sin 2\theta}} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$

$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \cdot \frac{3\theta}{\sin 3\theta} \cdot \frac{2}{3}$

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$



0479 오른쪽 그림에서 $\sin \theta = \frac{r}{1-r}$ 이므로

$(1-r) \sin \theta = r$

$(1+\sin \theta)r = \sin \theta$

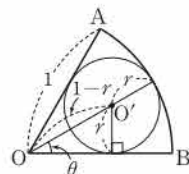
$\therefore r = \frac{\sin \theta}{1+\sin \theta}$

$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{r}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin \theta}{\theta(1+\sin \theta)}$

$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{1+\sin \theta}$

$= 1 \cdot 1 = 1$

답 ②



0480 $\overline{OA} = \overline{OP} = 3$ 이므로

$\angle OPA = \angle OAP = \theta$

$\triangle OAP$ 에서

$\angle POH = 2\theta$

→ ①

$\triangle OPH$ 에서

$\overline{OH} = \overline{OP} \cos 2\theta = 3 \cos 2\theta$

$\therefore \overline{BH} = \overline{OB} - \overline{OH} = 3 - 3 \cos 2\theta = 3(1 - \cos 2\theta)$

→ ②

$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{BH}}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{3(1 - \cos 2\theta)}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{3(1 - \cos 2\theta)(1 + \cos 2\theta)}{\theta^2(1 + \cos 2\theta)}$

$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{3(1 - \cos^2 2\theta)}{\theta^2(1 + \cos 2\theta)}$

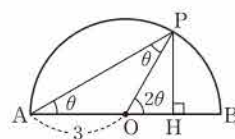
$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{3 \sin^2 2\theta}{\theta^2(1 + \cos 2\theta)}$

$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \right)^2 \cdot \frac{12}{1 + \cos 2\theta}$

$= 1^2 \cdot 6 = 6$

→ ③

답 6



채점 기준	비율
① $\angle POH$ 의 크기를 θ 로 나타낼 수 있다.	30 %
② \overline{BH} 의 길이를 θ 로 나타낼 수 있다.	30 %
③ $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{BH}}{\theta^2}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

0481 함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이라면

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin 2(x+1)}{x+1} = k$

$x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$k = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin 2(x+1)}{x+1}$

$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot 2$

$= 1 \cdot 2 = 2$

답 ②

0482 함수 $f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 연속이라면

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - a}{x} = b \quad \dots \dots \textcircled{1}$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - a) = 0 \text{이므로 } 1 - a = 0$$

$$\therefore a = 1$$

$a = 1$ 을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{\cos x + 1} \\ &= (-1) \cdot 1^2 \cdot 0 = 0 \\ \therefore a + b &= 1 \end{aligned}$$

→ ①

→ ②

→ ③

답 1

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $a + b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0483 함수 $f(x)$ 가 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 연속이려면 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} + b}{\sin x} = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax} + b) = 0 \text{이므로 } 1 + b = 0$$

$$\therefore b = -1$$

$b = -1$ 을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot a = 1 \cdot 1 \cdot a = a \\ \therefore a &= 2 \\ \therefore ab &= -2 \end{aligned}$$

→ -2

0484 $f(x) = x^2 \sin x$ 에서

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos \frac{\pi}{2} = \pi$$

→ ④

0485 $f(x) = e^x \cos x$ 에서

$$f'(x) = e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } e^x (\cos x - \sin x) = 0$$

$$e^x > 0 \text{이므로 } \cos x = \sin x$$

$$0 < x < 2\pi \text{이므로 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi$$

따라서 구하는 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

→ $\frac{3}{2}\pi$

0486 $f(x) = \cos^2 x = \cos x \cos x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \cos x + \cos x (-\sin x) \\ &= -2 \sin x \cos x = -\sin 2x \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f'(x)}{\pi - x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin 2x}{\pi - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{x - \pi}$$

$x - \pi = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin (2t + 2\pi)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot 2$$

$$= 1 \cdot 2 = 2$$

→ ④

$$\textbf{0487} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

이때 $f(x) = \sin x - \cos x$ 에서 $f'(x) = \cos x + \sin x$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

→ $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \textbf{0488} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi - 2h) - f(\pi)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi - 2h) - f(\pi)}{-2h} \cdot (-2) \\ &= -2f'(\pi) \end{aligned}$$

이때 $f(x) = \sin x \cos x$ 에서 $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ 이므로

$$-2f'(\pi) = -2(\cos^2 \pi - \sin^2 \pi) = -2$$

→ -2

0489 $f(0) = 1 \cdot (0 + 1 - 1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

→ ①

이때 $f(x) = e^x (\sin x + \cos x - 1)$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x (\sin x + \cos x - 1) + e^x (\cos x - \sin x) \\ &= e^x (2 \cos x - 1) \end{aligned}$$

→ ②

이므로

$$f'(0) = 1 \cdot (2 - 1) = 1$$

→ ③

→ 1

채점 기준	비율
① 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 변형할 수 있다.	40 %
② $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $f'(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0490 $f(x) = \cos x$ 에서 $f'(x) = -\sin x$

$$\neg, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

$$\neg, f(0) = 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) \\ &= -\sin 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\neg, f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x = -f(x)$$

이상에서 옳은 것은 \neg, \neg 이다.

→ ⑤

$$\begin{aligned}
 0491 \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(\pi+h)-f(\pi)\} - \{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h} \\
 &= f'(\pi) + f'(\pi) = 2f'(\pi)
 \end{aligned}$$

이때 $f(x) = x \cos x$ 에서 $f'(x) = \cos x - x \sin x$ 이므로
 $2f'(\pi) = 2(\cos \pi - \pi \sin \pi) = -2$

답 ①

0492 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하려면 $x=0$ 에서 연속이어야
 하므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} (ax+b) = \lim_{x \rightarrow 0-} \sin x = f(0)$
 $\therefore b=0$

또 $f'(0)$ 이 존재해야 하므로

$$f'(x) = \begin{cases} a & (0 < x < 1) \\ \cos x & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 0+} a = \lim_{x \rightarrow 0-} \cos x \quad \therefore a=1$

$$\therefore a-b=1$$

답 ④

0493 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하려면 $x=0$ 에서 연속이어야
 하므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} (2x^2+ax+b) = \lim_{x \rightarrow 0-} (\cos x - x) = f(0)$

$$\therefore b=1$$

또 $f'(0)$ 이 존재해야 하므로

$$f'(x) = \begin{cases} 4x+a & (x>0) \\ -\sin x-1 & (x<0) \end{cases}$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 0+} (4x+a) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-\sin x-1) \quad \therefore a=-1$

$$\therefore ab=-1$$

답 -1

0494 **전략** $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ 를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned}
 \text{풀이} \quad & \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} + \frac{1}{\sec \theta + \tan \theta} \\
 &= \frac{(\sec \theta + \tan \theta) + (\sec \theta - \tan \theta)}{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta} \\
 &= \frac{2 \sec \theta}{1} = 2 \sec \theta
 \end{aligned}$$

답 ④

0495 **전략** 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

$$\begin{aligned}
 \text{풀이} \quad & \sin 15^\circ \sin 30^\circ - \cos 15^\circ \cos 30^\circ \\
 &= -(\cos 15^\circ \cos 30^\circ - \sin 15^\circ \sin 30^\circ) \\
 &= -\cos(15^\circ + 30^\circ) \\
 &= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

답 ②

0496 **전략** 직선 $y=ax$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ
 라 하면 $\tan \theta = a$ 임을 이용한다.

풀이 두 직선 $y=2x$, $y=\frac{1}{3}x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의
 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = 2, \tan \beta = \frac{1}{3}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned}
 \tan \theta &= |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\
 &= \left| \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} \right| = 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

0497 **전략** 삼각함수 사이의 관계와 배각의 공식을 이용한다.

풀이 θ 가 제 1 사분면의 각이므로

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \cdot \frac{12}{5}}{1 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = -\frac{120}{119} \quad \text{답 } -\frac{120}{119}$$

0498 **전략** $x-2=t$ 로 놓고 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan x}{x} = 1$ 임을 이용한다.

$$\text{풀이} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\tan \pi x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{\tan \pi x}$$

$x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{\tan \pi x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t+4)}{\tan(\pi t + 2\pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t+4)}{\tan \pi t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi t}{\tan \pi t} \cdot \frac{t+4}{\pi} \\
 &= 1 \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{4}{\pi}$

0499 **전략** 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $f(x) = \cos x + 1$ 에서 $f(\pi) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x)}{x-\pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = f'(\pi) \quad \cdots ①$$

$f(x) = \cos x + 1$ 에서

$$f'(x) = -\sin x \quad \cdots ②$$

$$\therefore f'(\pi) = 0 \quad \cdots ③$$

답 0

채점 기준	비율
① 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 변형할 수 있다.	50 %
② $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ $f'(\pi)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0500 **전략** 삼각함수 사이의 관계를 이용한다.

풀이 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan \theta + \cot \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 8\end{aligned}\quad \text{답 ③}$$

0501 **전략** 삼각함수의 덧셈정리와 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용한다.

풀이 $\sin \alpha + \cos \beta = \frac{3}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{9}{4} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\cos \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠+㉡을 하면 $2 + 2(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = \frac{5}{2}$

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{4} \quad \text{답 ①}$$

0502 **전략** 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = 3a, \quad \tan \alpha \tan \beta = a^2 + 1$$

이때 $\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ 에서

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1, \quad \frac{3a}{1 - (a^2 + 1)} = 1$$

$$3a = -a^2, \quad a(a+3) = 0$$

$$\therefore a = -3 \quad (\because a \neq 0) \quad \text{답 -3}$$

0503 **전략** 직선 $y = ax$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\tan \theta = a$ 임을 이용한다.

풀이 직선 $y = mx$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면 $\tan \theta = m$

또 직선 $y = 2x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기가 2θ 이므로

$$\tan 2\theta = 2, \quad \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 2$$

$$\frac{2m}{1 - m^2} = 2, \quad m = 1 - m^2$$

$$m^2 + m - 1 = 0 \quad \therefore m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (\because m > 0)$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

0504 **전략** 배각의 공식을 이용하여 $\tan(\angle CAB)$ 의 값을 구한다.

풀이 $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $BD = x$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan(\angle CAB) = \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

이때 $\tan(\angle CAB) = \frac{BC}{AC} = \frac{x+3}{6}$ 이므로

$$\frac{x+3}{6} = \frac{4}{3} \quad \therefore x = 5 \quad \text{답 ④}$$

0505 **전략** 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 주어진 식을 정리한 후 삼각함수의 합성을 이용하여 식을 변형한다.

$$\text{풀이 } y = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 4 \cos x + 5$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) + 4 \cos x + 5$$

$$= 2 \sin x + 6 \cos x + 5$$

$$= 2\sqrt{10} \sin(x + \theta) + 5 \quad \left(\text{단, } \sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{10} \right)$$

이때 $-1 \leq \sin(x + \theta) \leq 1$ 이므로

$$-2\sqrt{10} + 5 \leq 2\sqrt{10} \sin(x + \theta) + 5 \leq 2\sqrt{10} + 5$$

따라서 $M = 2\sqrt{10} + 5$, $m = -2\sqrt{10} + 5$ 이므로

$$Mm = (2\sqrt{10} + 5)(-2\sqrt{10} + 5) = -15 \quad \text{답 ②}$$

0506 **전략** 배각의 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후 극한값을 구한다.

$$\text{풀이 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos 2x - 1}{1 - 2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2(1 - 2 \sin^2 x) - 1}{1 - 2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 4 \sin^2 x}{1 - 2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(1 + 2 \sin x)(1 - 2 \sin x)}{1 - 2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (1 + 2 \sin x)$$

$$= 1 + 1 = 2 \quad \text{답 ②}$$

0507 **전략** 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 변형한다.

$$\text{풀이 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

0508 **전략** 주어진 식을 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 을 이용할 수 있도록 변형한다.

$$\text{풀이 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x)}{k \sin f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^3 x + 3 \sin x}{k \sin(2x^3 + 3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (2 \sin^2 x + 3)}{k \sin(2x^3 + 3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x^3 + 3x}{\sin(2x^3 + 3x)} \cdot \frac{x}{2x^3 + 3x} \cdot \frac{2 \sin^2 x + 3}{k}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x^3 + 3x}{\sin(2x^3 + 3x)} \cdot \frac{1}{2x^2 + 3} \cdot \frac{2 \sin^2 x + 3}{k}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{k} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{3} \text{에서 } k = 3 \quad \text{답 ③}$$

0509 전략 $1 - \cos kx$ 꼴을 포함한 삼각함수의 극한은 분모, 분자에 각각 $1 + \cos kx$ 를 곱한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{x^2}{1 - \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{x^2 \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)}{\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{x^2 \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)}{1 - \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot 4 \cdot \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)$$

$$= 1 \cdot 1^2 \cdot 4 \cdot 2 = 8$$

답 8

다른풀이 $f(x) \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) = g(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{g(x)}{1 - \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{g(x) \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)}{\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot 4 \cdot g(x) \cdot \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)$$

$$= 1^2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$$

0510 전략 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이라면

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + a - 1}{x \cos x} = b \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (3 \sin x + a - 1) = 0$ 이므로

$$a - 1 = 0 \quad \therefore a = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{3}{\cos x} = 1 \cdot 3 = 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\therefore a + b = 4 \quad \dots \textcircled{4} \quad \text{답 4}$$

채점 기준	비율
① $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속일 조건을 알 수 있다.	30 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0511 전략 미분계수의 정의와 삼각함수의 극한을 이용한다.

풀이 $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \sin 2h}{1 - \cos h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin 2h}{1 - \cos h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin 2h (1 + \cos h)}{(1 - \cos h) (1 + \cos h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin 2h (1 + \cos h)}{1 - \cos^2 h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h \sin h \cos h (1 + \cos h)}{\sin^2 h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h \cos h (1 + \cos h)}{\sin h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{h}{\sin h} \cdot \cos h (1 + \cos h)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 4 \quad \text{답 ⑤}$$

0512 전략 \overline{BQ} 의 길이를 $\angle PBA$ 에 대한 삼각함수로 나타낸다.

풀이 $\angle PBA = \theta$ 라 하면

$$\angle QBA = 2\theta$$

$\triangle ABP$ 에서 $\angle APB = 90^\circ$ 이므로

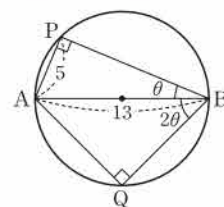
$$\sin \theta = \frac{5}{13}$$

$\triangle ABQ$ 에서 $\angle AQB = 90^\circ$ 이므로

$$\overline{BQ} = \overline{AB} \cos 2\theta = 13(1 - 2 \sin^2 \theta)$$

$$= 13 \left\{ 1 - 2 \cdot \left(\frac{5}{13} \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{119}{13} \quad \text{답 } \frac{119}{13}$$



0513 전략 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ 임을 이용하여 $f(n)$ 을 간단히 한다.

풀이 $f(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x + \tan 2x + \dots + \tan nx}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan x}{x} + \frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2 + \dots + \frac{\tan nx}{nx} \cdot n}$$

$$= \frac{1}{1 + 2 + \dots + n}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \quad \text{답 2}$$

0514 [전략] $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 임을 이용한다.

[풀이] $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (a + \cos x) = 0$ 이므로

$$a + 1 = 0 \quad \therefore a = -1$$

$a = -1$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x \sin x (\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \sin x (\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x \sin x (\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x (\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-1}{\cos x + 1} \\ &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \\ \therefore 2ab &= 1 \end{aligned}$$

답 ①

0515 [전략] 점 P와 점 Q의 좌표를 θ 를 이용하여 나타낸 후 삼각함수의 극한을 이용한다.

[풀이] $\overline{OP} = 1$ 이고 $\angle POB = \theta$ 이므로

$$P(\cos \theta, \sin \theta)$$

점 P와 점 Q의 y좌표가 같으므로 점 Q의 x좌표는

$$\ln(x+1) = \sin \theta \text{에서}$$

$$x+1 = e^{\sin \theta} \quad \therefore x = e^{\sin \theta} - 1$$

$$\therefore Q(e^{\sin \theta} - 1, \sin \theta)$$

따라서

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \overline{QP} \cdot \overline{HO} = \frac{1}{2} (\cos \theta - e^{\sin \theta} + 1) \sin \theta,$$

$$L(\theta) = \overline{HQ} = e^{\sin \theta} - 1$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{L(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \theta}{e^{\sin \theta} - 1} \cdot (\cos \theta - e^{\sin \theta} + 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉 } k = \frac{1}{2} \text{이므로 } 60k = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$$

답 30

0516 [전략] $x \rightarrow 0$ 일 때 $\tan x \rightarrow 0$ 임을 이용하여 주어진 식을 변형하고 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

[풀이] $x \rightarrow 0$ 일 때 $\tan x \rightarrow 0$ 이고 $f(0) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan x) - f(0)}{\tan x - 0} \cdot \frac{\tan x}{x} \\ &= f'(0) \cdot 1 = f'(0) \end{aligned}$$

이때 $f(x) = 2 \sin x + \cos x - 1$ 에서 $f'(x) = 2 \cos x - \sin x$ 이므로 $f'(0) = 2$

답 ③

05

여러 가지 미분법

II. 미분법

$$0517 \quad y' = -\frac{(3x+2)'}{(3x+2)^2} = -\frac{3}{(3x+2)^2} \quad \text{답 } y' = -\frac{3}{(3x+2)^2}$$

$$0518 \quad y' = -\frac{(x^3+x)'}{(x^3+x)^2} = -\frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2} \quad \text{답 } y' = -\frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}$$

$$0519 \quad y' = -\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \quad \text{답 } y' = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$0520 \quad y' = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2} \quad \text{답 } y' = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

$$\begin{aligned} 0521 \quad y' &= \frac{(x-2)'(4x+3) - (x-2)(4x+3)'}{(4x+3)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (4x+3) - (x-2) \cdot 4}{(4x+3)^2} = \frac{11}{(4x+3)^2} \\ \text{답 } y' &= \frac{11}{(4x+3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0522 \quad y' &= \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \\ \text{답 } y' &= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0523 \quad y' &= \frac{(2^x)'(x+3) - 2^x(x+3)'}{(x+3)^2} \\ &= \frac{2^x \ln 2 \cdot (x+3) - 2^x \cdot 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{2^x(x \ln 2 + 3 \ln 2 - 1)}{(x+3)^2} \\ \text{답 } y' &= \frac{2^x(x \ln 2 + 3 \ln 2 - 1)}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0524 \quad y' &= \frac{(\log_3 x)' \cdot x - \log_3 x \cdot x'}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x \ln 3} \cdot x - \log_3 x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\ln 3} - \log_3 x}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2 \ln 3} \\ \text{답 } y' &= \frac{1 - \ln x}{x^2 \ln 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0525 \quad y &= \frac{1}{x} = x^{-1} \text{이므로} \\ y' &= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\ \text{답 } y' &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$0526 \quad y' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4} \quad \text{답 } y' = -\frac{3}{x^4}$$

0527 $y = x^3 + \frac{1}{x^2} = x^3 + x^{-2}$ 이므로

$$y' = 2x - 2x^{-3} = 2x - \frac{2}{x^3} \quad \text{답 } y' = 2x - \frac{2}{x^3}$$

0528 $y = \frac{x^2 - x}{x^5} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} = x^{-3} - x^{-4}$ 이므로

$$y' = -3x^{-4} + 4x^{-5} = -\frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5} \quad \text{답 } y' = -\frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5}$$

0529 $y' = 2 \cos x + \sec^2 x$

0530 $y' = \sec x \tan x - \csc x \cot x$

0531 $y' = (x^2)' \cot x + x^2 (\cot x)'$
 $= 2x \cot x + x^2 (-\csc^2 x)$
 $= 2x \cot x - x^2 \csc^2 x$

답 $y' = 2x \cot x - x^2 \csc^2 x$

0532 $y' = \frac{(\sin x)'(1 + \cos x) - \sin x(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2}$
 $= \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$
 $= \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2}$
 $= \frac{1}{1 + \cos x} \quad \text{답 } y' = \frac{1}{1 + \cos x}$

0533 $y' = 4(5x - 2)^3 \cdot (5x - 2)'$
 $= 4(5x - 2)^3 \cdot 5$
 $= 20(5x - 2)^3 \quad \text{답 } y' = 20(5x - 2)^3$

0534 $y' = e^{4x} \cdot (4x)' = 4e^{4x} \quad \text{답 } y' = 4e^{4x}$

0535 $y' = 3^{3x+1} \cdot \ln 3 \cdot (3x+1)'$
 $= 3^{3x+2} \ln 3 \quad \text{답 } y' = 3^{3x+2} \ln 3$

0536 $y' = \cos 5x \cdot (5x)' = 5 \cos 5x \quad \text{답 } y' = 5 \cos 5x$

0537 $y' = -\sin(3x+2) \cdot (3x+2)'$
 $= -3 \sin(3x+2) \quad \text{답 } y' = -3 \sin(3x+2)$

0538 $y = \frac{1}{(2x+3)^4} = (2x+3)^{-4}$ 이므로
 $y' = -4(2x+3)^{-5} \cdot (2x+3)'$
 $= -4(2x+3)^{-5} \cdot 2$
 $= -\frac{8}{(2x+3)^5} \quad \text{답 } y' = -\frac{8}{(2x+3)^5}$

다른풀이 $y' = -\frac{\{(2x+3)^4\}'}{(2x+3)^8} = -\frac{4(2x+3)^3 \cdot (2x+3)'}{(2x+3)^8}$
 $= -\frac{4(2x+3)^3 \cdot 2}{(2x+3)^8} = -\frac{8}{(2x+3)^5}$

0539 $y = \left(x + \frac{2}{x}\right)^3 = (x + 2x^{-1})^3$ 이므로

$$y' = 3(x + 2x^{-1})^2 \cdot (x + 2x^{-1})'$$

 $= 3(x + 2x^{-1})^2 \cdot (1 - 2x^{-2})$
 $= 3\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \quad \text{답 } y' = 3\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$

0540 $y' = \frac{(x^3 + 2x + 1)'}{x^3 + 2x + 1} = \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 1}$

답 $y' = \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 1}$

0541 $y' = \frac{(5x+2)'}{(5x+2) \ln 2} = \frac{5}{(5x+2) \ln 2}$

답 $y' = \frac{5}{(5x+2) \ln 2}$

0542 $y' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

답 $y' = -\tan x$

0543 $y' = \frac{(e^x + 2)'}{e^x + 2} = \frac{e^x}{e^x + 2}$

답 $y' = \frac{e^x}{e^x + 2}$

0544 $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{답 } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

0545 $y = \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}$ 이므로

$$y' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} \quad \text{답 } y' = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

0546 $y' = \sqrt{3} x^{\frac{1}{3}-1}$

0547 $y' = e x^{-e-1} = \frac{e}{x^{e+1}}$

답 $y' = \frac{e}{x^{e+1}}$

0548 $y = \sqrt{x^2 + x + 1} = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$y' = \frac{1}{2} (x^2 + x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + x + 1)'$$

 $= \frac{1}{2} (x^2 + x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1)$
 $= \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \quad \text{답 } y' = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$

0549 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} = (x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$y' = -\frac{1}{2} (x^2 + 3)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^2 + 3)'$$

 $= -\frac{1}{2} (x^2 + 3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$
 $= -\frac{x}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}} \quad \text{답 } y' = -\frac{x}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}$

0550 $\frac{dx}{dt}=1, \frac{dy}{dt}=6t^2$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 6t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 6t^2$$

0551 $\frac{dx}{dt}=2t, \frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1-\frac{1}{t^2}}{2t} = \frac{t^2-1}{2t^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{t^2-1}{2t^3}$$

0552 $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t^2}, \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{(t+2)^2}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{(t+2)^2}}{-\frac{1}{t^2}} = \left(\frac{t}{t+2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{t}{t+2}\right)^2$$

0553 $\frac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}, \frac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}} = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$$

0554 $\frac{dx}{dt}=\cos t, \frac{dy}{dt}=-\sin t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\tan t$$

0555 $x^2+2y^2=3$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x+4y\frac{dy}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \quad (y \neq 0)$$

0556 $y^2-5x=0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}-5=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5}{2y} \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5}{2y} \quad (y \neq 0)$$

0557 $xy=10$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$y+x\frac{dy}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

0558 $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=1$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}+x\left(-\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2+y^2}{x^2y}}{\frac{x^2+y^2}{xy^2}} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

0559 $\sqrt{y^2+1}=x^2$ 의 양변을 제곱하면
 $y^2+1=x^4$

위의 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=4x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x^3}{y} \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x^3}{y} \quad (y \neq 0)$$

0560 $\ln|y|=x^2$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2xy$$

0561 (1) $g(-3)=a$ 라 하면 $f(a)=-3$ 이므로

$$a^3+2a=-3, \quad a^3+2a+3=0$$

$$(a+1)(a^2-a+3)=0$$

$$\text{그런데 } a^2-a+3>0 \text{이므로 } a=-1$$

따라서 $g(-3)=-1$ 이고 $f'(x)=3x^2+2$ 에서 $f'(-1)=5$ 이므로

$$g'(-3) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{5}$$

(2) $g(12)=a$ 라 하면 $f(a)=12$ 이므로

$$a^3+2a=12, \quad a^3+2a-12=0$$

$$(a-2)(a^2+2a+6)=0$$

$$\text{그런데 } a^2+2a+6>0 \text{이므로 } a=2$$

따라서 $g(12)=2$ 이고 $f'(x)=3x^2+2$ 에서 $f'(2)=14$ 이므로

$$g'(12) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{14}$$

$$\Rightarrow (1) \frac{1}{5} \quad (2) \frac{1}{14}$$

0562 (1) $g(-1)=a$ 라 하면 $f(a)=-1$ 이므로

$$\tan a = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{\pi}{4} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 $g(-1)=-\frac{\pi}{4}$ 이고 $f'(x)=\sec^2 x$ 에서 $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2$ 이므로

$$g'(-1) = \frac{1}{f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}$$

(2) $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=a$ 라 하면 $f(a)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$\tan a = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$ 이고 $f'(x)=\sec^2 x$ 에서 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{3}$ 이므로

$$g'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow (1) \frac{1}{2} \quad (2) \frac{3}{4}$$

0563 $y' = 4x^3 + 6x$ 이므로

$$y'' = 12x^2 + 6$$

답 $y'' = 12x^2 + 6$

0564 $y' = 3(5x-1)^2 \cdot (5x-1)' = 3(5x-1)^2 \cdot 5$
 $= 15(5x-1)^2$

이므로

$$y'' = 15 \cdot 2(5x-1) \cdot (5x-1)'$$

$$= 30(5x-1) \cdot 5$$

$$= 150(5x-1)$$

답 $y'' = 150(5x-1)$

0565 $y' = -\frac{(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$ 이므로

$$y'' = \frac{(-2x)'(x^2+3)^2 - (-2x) \cdot 2(x^2+3) \cdot (x^2+3)'}{(x^2+3)^4}$$

$$= \frac{-2(x^2+3)^2 + 4x(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$= \frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}$$

답 $y'' = \frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}$

0566 $y' = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4(x-2)\sqrt{x-2}}$$

답 $y'' = -\frac{1}{4(x-2)\sqrt{x-2}}$

0567 $y' = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}$ 이므로

$$y'' = 2e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x} \cdot 2 = 4e^{2x}$$

답 $y'' = 4e^{2x}$

0568 $y' = \frac{1}{x+1}$ 이므로

$$y'' = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

답 $y'' = -\frac{1}{(x+1)^2}$

0569 $y' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$ 이므로

$$y'' = -2\cos 2x \cdot (2x)' = -2\cos 2x \cdot 2 = -4\cos 2x$$

답 $y'' = -4\cos 2x$

0570 $y' = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = \cos x - x \sin x$ 이므로

$$y'' = -\sin x - (1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x)$$

$$= -2\sin x - x \cos x$$

답 $y'' = -2\sin x - x \cos x$

0571 $y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$ 이므로

$$y'' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$$

$$= 2e^x \cos x$$

답 $y'' = 2e^x \cos x$

0572 $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$ 이므로

$$f'(x) = -\frac{(x^2-3x)'}{(x^2-3x)^2} = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) = -\frac{2-3}{(1-3)^2} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

0573 $f(x) = \frac{1}{\sin x + 1}$ 이므로

$$f'(x) = -\frac{(\sin x + 1)'}{(\sin x + 1)^2} = -\frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

답 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

0574 $f(x) = \frac{1}{ke^x + 2x}$ 이므로

$$f'(x) = -\frac{(ke^x + 2x)'}{(ke^x + 2x)^2} = -\frac{ke^x + 2}{(ke^x + 2x)^2}$$

$f'(0) = -1$ 에서

$$-\frac{k+2}{k^2} = -1, \quad k^2 = k+2$$

$$k^2 - k - 2 = 0, \quad (k+1)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = 2 \quad (\because k > 0)$$

답 ②

0575 $f(-1) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1)$$

... ①

$f(x) = -\frac{4}{x^2+3}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{4(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

... ②

$$\therefore f'(-1) = \frac{8 \cdot (-1)}{(1+3)^2} = -\frac{1}{2}$$

... ③

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+1}{x+1} = f'(-1)$ 임을 알 수 있다.	40 %
② $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $f'(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0576 $f(x) = \frac{ax}{x^2-2x+b}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{a(x^2-2x+b)' - ax(2x-2)}{(x^2-2x+b)^2} = \frac{-ax^2+ab}{(x^2-2x+b)^2}$$

$f'(0) = 1$ 에서 $\frac{ab}{b^2} = 1, \quad \frac{a}{b} = 1 \quad (\because b \neq 0)$

$$\therefore a = b \quad \dots\dots ㉠$$

$f'(1) = 2$ 에서 $\frac{-a+ab}{(b-1)^2} = 2, \quad \frac{a}{b-1} = 2 \quad (\because b \neq 1)$

$$\therefore a = 2b - 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 2, \quad b = 2$$

$$\therefore a + b = 4$$

답 ③

0577 $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{\sin x(1+\cos x) - (1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)^2} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

답 ④

0578 $f(x) = \frac{x^2+4}{x+1}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+4)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+2x+1)-5}{(x+1)^2} = 1 - \frac{5}{(x+1)^2}$$

따라서 $a=1$, $b=5$ 이므로 $a+b=6$

답 6

0579 $g(x) = \frac{x-1}{f(x)}$ 이므로

$$g'(x) = \frac{f(x) - (x-1)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

$$\therefore g'(0) = \frac{f(0) + f'(0)}{\{f(0)\}^2} = \frac{1+2}{1^2} = 3$$

답 3

0580 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}$

$$= \frac{1}{2} f'(1)$$

$f(x) = \frac{e^x-1}{x+1}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - (e^x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{xe^x+1}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e+1}{(1+1)^2} = \frac{e+1}{8}$$

답 $\frac{e+1}{8}$

0581 $f(x) = \frac{x^3+4x^2-6}{x^2} = x+4-6x^{-2}$ 이므로

$$f'(x) = 1+12x^{-3} = 1 + \frac{12}{x^3}$$

$$\therefore f'(1)+f'(2) = 13 + \frac{5}{2} = \frac{31}{2}$$

답 $\frac{31}{2}$

0582 $y = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3} x^{-1}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} x^{-2} = -\frac{2}{3x^2}$$

따라서 $x=2$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$-\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

이므로 구하는 순간변화율은 $-\frac{1}{6}$ L/Pa이다.

답 ⑤

0583 $f(x) = x^{-1} + x^{-3} + x^{-5} + x^{-7} + x^{-9}$ 이므로

$$f'(x) = -x^{-2} - 3x^{-4} - 5x^{-6} - 7x^{-8} - 9x^{-10}$$

$$\therefore f'(1) = -1-3-5-7-9 = -25$$

답 -25

0584 $f(x) = \frac{x^2}{1+\sec x}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{2x(1+\sec x) - x^2 \sec x \tan x}{(1+\sec x)^2}$$

$$\therefore f'(2\pi) = \frac{2\cdot 2\pi \cdot (1+\sec 2\pi) - (2\pi)^2 \cdot \sec 2\pi \cdot \tan 2\pi}{(1+\sec 2\pi)^2}$$

$$= \frac{4\pi \cdot (1+1) - 4\pi^2 \cdot 1 \cdot 0}{(1+1)^2} = 2\pi$$

답 ⑤

0585 $f(x) = \sec x - \csc x$ 이므로

$$f'(x) = \sec x \tan x + \csc x \cot x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} + \csc \frac{\pi}{4} \cot \frac{\pi}{4}$$

$$= \sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 1 = 2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

0586 $f(0) = \frac{\sin 0}{1+\tan 0} = 0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f'(0)$$

... ①

$f(x) = \frac{\sin x}{1+\tan x}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{\cos x(1+\tan x) - \sin x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

... ②

$$\therefore f'(0) = \frac{\cos 0(1+\tan 0) - \sin 0 \cdot \sec^2 0}{(1+\tan 0)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot (1+0) - 0 \cdot 1^2}{(1+0)^2} = 1$$

... ③

답 1

채점 기준	비율
① $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = f'(0)$ 임을 알 수 있다.	40 %
② $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $f'(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0587 $f(x) = (3x^2+ax-1)^4$ 이므로

$$f'(x) = 4(3x^2+ax-1)^3 \cdot (3x^2+ax-1)'$$

$$= 4(3x^2+ax-1)^3(6x+a)$$

$f'(0) = -16$ 에서

$$4 \cdot (-1)^3 \cdot a = -16 \quad \therefore a = 4$$

답 ③

0588 $f(x) = e^{2x} + e^{x^2}$ 이므로

$$f'(x) = e^{2x} \cdot 2 + e^{x^2} \cdot 2x = 2(e^{2x} + xe^{x^2})$$

$$\therefore f'(0) + f'(1) = 2(1+0\cdot 1) + 2(e^2 + 1\cdot e)$$

$$= 2(e^2 + e + 1)$$

답 $2(e^2 + e + 1)$

0589 $h(x) = f(g(x)) = e^{\cos x}$ 이므로

$$h'(x) = e^{\cos x} (\cos x)' = -e^{\cos x} \sin x$$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{\cos \frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = -1$$

답 ③

0590 $y = (x \ln x)^3$ 이므로

$$y' = 3(x \ln x)^2 \cdot (x \ln x)' = 3(x \ln x)^2 \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$= 3(x \ln x)^2 (\ln x + 1)$$

따라서 $x=e$ 에서의 미분계수는

$$3(e \cdot 1)^2 (1+1) = 6e^2$$

답 ⑤

0591 (1) 모서리의 길이가 길어지기 시작한 지 t 초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(2+3t)$ cm이므로 정육면체의 부피를 V cm³라 하면

$$V=(2+3t)^3 \quad \cdots ①$$

(2) $V=(2+3t)^3$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt}=3(2+3t)^2 \cdot (2+3t)'=9(2+3t)^2 \quad \cdots ②$$

따라서 $t=2$ 일 때의 $\frac{dV}{dt}$ 의 값은

$$9(2+3 \cdot 2)^2=576$$

이므로 모서리의 길이가 길어지기 시작한 지 2초 후의 정육면체의 부피의 변화율은 576 cm³/s이다. ③

$$\text{답 (1) } (2+3t)^3 \text{ cm}^3 \quad (2) 576 \text{ cm}^3/\text{s}$$

채점 기준	비율
① V 를 구할 수 있다.	50 %
② $\frac{dV}{dt}$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ $t=2$ 일 때의 $\frac{dV}{dt}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0592 $h(x)=g(f(x))$ 에서 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$h'(-1)=28$ 이므로

$$g'(f(-1))f'(-1)=28$$

이때 $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ 이므로

$$f'(x)=\frac{3(x+2)-(3x-1) \cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

$$\therefore f(-1)=-4, f'(-1)=7$$

따라서 $g'(-4) \cdot 7=28$ 이므로 $g'(-4)=4$ ④

0593 $y=2^{f(x)}$ 이므로 $y'=2^{f(x)} \ln 2 \cdot f'(x)$

따라서 $x=2$ 에서의 미분계수는

$$2^{f(2)} \ln 2 \cdot f'(2)=2^{-1} \ln 2 \cdot 4=2 \ln 2 \quad \text{답 } 2 \ln 2$$

0594 $y=(f \circ g)(x)=f(g(x))$ 이므로

$$y'=f'(g(x))g'(x)$$

따라서 $x=-1$ 에서의 미분계수는

$$f'(g(-1))g'(-1)=f'(-1)g'(-1)=2 \cdot 3=6 \quad \text{답 } ③$$

0595 $F(x)=f(f(x))$ 로 놓으면

$$F(0)=f(f(0))=f(0)=0 \quad \cdots ①$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0) \quad \cdots ②$$

$F'(x)=\{f(f(x))\}'=f'(f(x))f'(x)$ 이므로

$$F'(0)=f'(f(0))f'(0)=f'(0)f'(0)=2 \cdot 2=4 \quad \cdots ③$$

④

채점 기준	비율
① $F(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x}=F'(0)$ 임을 알 수 있다.	40 %
③ $F'(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0596 $f(2x+1)=x^3-2x^2+1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(2x+1) \cdot 2=3x^2-4x$$

$$\therefore f'(2x+1)=\frac{3x^2-4x}{2}$$

$2x+1=3$ 에서 $x=1$ 이므로 위의 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(3)=\frac{3-4}{2}=-\frac{1}{2} \quad \text{답 } ④$$

0597 $f(x)=f(4x-1)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=4f'(4x-1)$$

위의 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(2)=4f'(7), \quad 8=4f'(7)$$

$$\therefore f'(7)=2 \quad \text{답 } ⑤$$

0598 $3x-2=1$ 에서 $x=1$ 이므로 $f(3x-2)=\sin \pi x+\cos \pi x$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=\sin \pi+\cos \pi=-1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1}=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$f(3x-2)=\sin \pi x+\cos \pi x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(3x-2) \cdot 3=\pi \cos \pi x-\pi \sin \pi x$$

$$\therefore f'(3x-2)=\frac{\pi(\cos \pi x-\sin \pi x)}{3}$$

위의 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1)=\frac{\pi(\cos \pi-\sin \pi)}{3}=-\frac{\pi}{3} \quad \text{답 } -\frac{\pi}{3}$$

0599 $f(x)=\ln(x^4-3x^3+10)$ 이므로

$$f'(x)=\frac{4x^3-9x^2}{x^4-3x^3+10}$$

$$\therefore f'(1)=\frac{4 \cdot 1-9 \cdot 1}{1-3 \cdot 1+10}=-\frac{5}{8} \quad \text{답 } -\frac{5}{8}$$

0600 $y=\ln |\ln x|$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{x \ln x} \quad \text{답 } ①$$

$$\text{0601 } y=\ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\frac{1}{2} \ln \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

$$=\frac{1}{2} \{\ln (1+\cos x)-\ln (1-\cos x)\}$$

$$\therefore y'=\frac{1}{2} \left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}-\frac{\sin x}{1-\cos x} \right)$$

$$=\frac{1}{2} \cdot \frac{-\sin x(1-\cos x)-\sin x(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

$$=\frac{1}{2} \cdot \frac{-2 \sin x}{1-\cos ^2 x}=-\frac{\sin x}{\sin ^2 x}=-\frac{1}{\sin x}$$

따라서 $x=\frac{\pi}{3}$ 에서의 미분계수는

$$-\frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2 \sqrt{3}}{3} \quad \text{답 } ①$$

$$\begin{aligned}
 0602 \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{-h} \\
 &= f'(1) + f'(1) = 2f'(1) \quad \cdots ①
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \log_2 \sqrt{x^2 + 2} = \frac{1}{2} \log_2 (x^2 + 2) \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + 2) \ln 2} = \frac{x}{(x^2 + 2) \ln 2} \quad \cdots ②$$

따라서 구하는 값은

$$2f'(1) = 2 \cdot \frac{1}{(1+2) \ln 2} = \frac{2}{3 \ln 2} \quad \cdots ③$$

답 $\frac{2}{3 \ln 2}$

채점 기준	비율
① $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 2f'(1)$ 임을 알 수 있다.	40 %
② $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $2f'(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0603 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = 2 \ln |x| + \ln |x-1| - 3 \ln |x-3|$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-3}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-3} \right)$$

$$f(2) = \frac{2^2 \cdot (2-1)}{(2-3)^3} = -4 \text{ 이므로}$$

$$f'(2) = -4 \cdot (1+1+3) = -20 \quad \text{답 } -20$$

0604 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = \ln |x+1| + 3 \ln |x+3| - 2 \ln |x+2| - 4 \ln |x+4|$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x+4}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f(x)} = 1+1-1-1=0 \quad \text{답 } ③$$

0605 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y = \sin x \ln x$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore y' = y \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

따라서 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서의 미분계수는

$$\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\sin \frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{2} \cdot \ln \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = 1 \quad \text{답 } ③$$

0606 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \ln x \cdot \ln x = (\ln x)^2$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x} = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}$$

$$\therefore f'(e) = e \cdot \frac{2}{e} = 2$$

답 2

0607 $f(x) = 3x^{\sqrt{3}}$ 이므로

$$f'(x) = 3\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$$

$$\therefore f'(3) = 3\sqrt{3} \cdot 3^{\sqrt{3}-1} = 3^{1+\frac{1}{2}+\sqrt{3}-1} = 3^{\frac{1}{2}+\sqrt{3}}$$

따라서 $k = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$ 이므로

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad \therefore a+b = \frac{3}{2}$$

답 ③

0608 $f(x) = \sqrt{x^3+1} = (x^3+1)^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x^3+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

$$\therefore f'(2) = \frac{3 \cdot 2^2}{2\sqrt{2^3+1}} = 2$$

답 2

0609 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^3+1}} = (2x^3+1)^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$f'(x) = -\frac{1}{2} (2x^3+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 6x^2$$

$$= -\frac{3x^2}{(2x^3+1)\sqrt{2x^3+1}}$$

$$= f(x) \cdot \left(-\frac{3x^2}{2x^3+1} \right)$$

따라서 $g(x) = -\frac{3x^2}{2x^3+1}$ 이므로

$$g(1) = -\frac{3}{2+1} = -1$$

답 -1

다른풀이 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^3+1}}, f'(x) = -\frac{3x^2}{(2x^3+1)\sqrt{2x^3+1}}$ 이므로

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}, f'(1) = -\frac{3}{3\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$f'(x) = f(x)g(x)$ 에서 $f'(1) = f(1)g(1)$ 이므로

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}g(1) \quad \therefore g(1) = -1$$

0610 $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{t^2}, \frac{dy}{dt} = \frac{2t \cdot t - (1+t^2) \cdot 1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{-\frac{2}{t^2}} = \frac{1-t^2}{2}$$

따라서 $t=2$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2^2}{2} = -\frac{3}{2}$

답 $-\frac{3}{2}$

0611 $\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta, \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

답 ②

0612 $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 2t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t$$

→ ①

이때 $2t = -1$ 에서 $t = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$a = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, b = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = \frac{9}{4}$$

→ ②

$$\therefore a + b = \frac{11}{4}$$

→ ③

답 $\frac{11}{4}$

채점 기준	비율
① $\frac{dy}{dx}$ 를 구할 수 있다.	50 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a + b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0613 $\frac{dx}{dt} = 10, \frac{dy}{dt} = -10t + 10$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-10t + 10}{10} = -t + 1$$

따라서 $t = \frac{3}{2}$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0614 $x^3 + ax - by^3 = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + a - 3by^2 \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + a}{3by^2} (y \neq 0)$$

$x = 1, y = 1$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 $\frac{2}{3}$ 이므로

$$\frac{3 + a}{3b} = \frac{2}{3}, \quad 9 + 3a = 6b$$

$$\therefore a - 2b = -3 \quad \dots\dots ㉠$$

또 주어진 곡선이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 + a - b = 0$$

$$\therefore a - b = -1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 2$

$$\therefore a + b = 3 \quad \text{답 ③}$$

0615 $(x+1)^2 - (y-1)^2 = 2$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2(x+1) - 2(y-1) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y-1} (y \neq 1) \quad \text{답 } \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y-1} (y \neq 1)$$

0616 $x + \sin x - xy = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$1 + \cos x - y - x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \cos x - y}{x} (x \neq 0)$$

위의 식에 $x = \pi, y = 1$ 을 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \cos \pi - 1}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \quad \text{답 } -\frac{1}{\pi}$$

0617 (1) $x^2 + y^2 = 5^2$, 즉 $x^2 + y^2 = 25$ → ①

(2) $x^2 + y^2 = 25$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} (y \neq 0) \quad \text{→ ②}$$

(3) $x = 3$ 일 때 $y = 4$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4} \quad \text{→ ③}$$

$$\text{답 (1) } x^2 + y^2 = 25 \quad (2) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} (y \neq 0) \quad (3) -\frac{3}{4}$$

채점 기준	비율
① x, y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
② $\frac{dy}{dx}$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $x = 3$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0618 $f(1) = 2$ 이므로 $g(2) = 1$

$$\therefore g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3} \quad \text{답 ①}$$

0619 $g(1) = a$ 라 하면 $f(a) = 1$ 이므로

$$a^2 + 2a + 1 = 1, \quad a(a^2 + 2) = 0$$

$$\therefore a = 0$$

$g(4) = b$ 라 하면 $f(b) = 4$ 이므로

$$b^3 + 2b + 1 = 4, \quad (b-1)(b^2 + b + 3) = 0$$

$$\therefore b = 1$$

즉 $g(1) = 0, g(4) = 1$ 이고 $f'(x) = 3x^2 + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} g'(1) + g'(4) &= \frac{1}{f'(g(1))} + \frac{1}{f'(g(4))} \\ &= \frac{1}{f'(0)} + \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{7}{10} \quad \text{답 } \frac{7}{10} \end{aligned}$$

0620 $f(e) = e + \ln e = e + 1$ 이므로

$$g(e+1) = e \quad \text{→ ①}$$

$$f(x) = x + \ln x \text{이므로 } f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{→ ②}$$

$$\begin{aligned} \therefore g'(e+1) &= \frac{1}{f'(g(e+1))} = \frac{1}{f'(e)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{e}} = \frac{e}{e+1} \quad \text{→ ③} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{e}{e+1}$$

채점 기준	비율
① $g(e+1)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ $g'(e+1)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

$$\begin{aligned}
 0621 \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-2h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1) + g(1) - g(1-2h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1) - g(1-2h)}{-2h} \cdot 2 \\
 &= g'(1) + 2g'(1) = 3g'(1) \\
 &g(1) = a \text{라 하면 } f(a) = 1 \text{이므로}
 \end{aligned}$$

$$\tan a = 1 \quad \therefore a = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 \leq a < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 $g(1) = \frac{\pi}{4}$ 이고 $f'(x) = \sec^2 x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 3g'(1) &= 3 \cdot \frac{1}{f'(g(1))} = 3 \cdot \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
 &= 3 \cdot \frac{1}{\sec^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 0622 \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = \frac{1}{2} \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극} \\
 & \text{한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.} \\
 & \text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 3\} = 0 \text{이므로 } f(1) = 3 \\
 & \therefore g(3) = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \text{이므로}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(1)} = 2$$

답 ⑤



특강 함수의 극한의 성질

두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$① \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a \text{ (} a \text{는 실수)이고 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{이면}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$② \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a \text{ (} a \text{는 0이 아닌 실수)이고 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{이면}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$0623 \quad x = \sqrt{y^2 + 2} \text{의 양변을 } y \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2\sqrt{y^2 + 2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\sqrt{y^2 + 2}}{y}$$

$$\text{따라서 } y = 4 \text{일 때의 } \frac{dy}{dx} \text{의 값은 } \frac{\sqrt{4^2 + 2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$$0624 \quad x = e^y + 2y \text{의 양변을 } y \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y + 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y + 2}$$

$$x = e^y + 2y \text{에서 } x = 1 \text{일 때 } y = 0$$

따라서 $x = 1$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{1}{e^0 + 2} = \frac{1}{3}$$

답 ①

$$0625 \quad x = \tan y + \sec y \text{의 양변을 } y \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y + \sec y \tan y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y + \sec y \tan y}$$

$$\text{따라서 } y = \frac{\pi}{4} \text{일 때의 } \frac{dy}{dx} \text{의 값은}$$

$$\frac{1}{(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

$$0626 \quad f(x) = \ln(x^2 + 2) \text{이므로}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-2x^2 + 4}{(x^2 + 2)^2}$$

$$\therefore f'(1) + f''(1) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

답 ③

$$0627 \quad f(x) = e^x \cos x \text{이므로}$$

$$f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x)$$

$$f''(x) = e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$$

$$\therefore \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{-2e^x \sin x}{e^x \cos x} = -2 \tan x$$

답 ②

$$0628 \quad f(x) = \ln x^{\ln x} = (\ln x)^2 \text{이므로}$$

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - 2 \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$\therefore f''(\sqrt{e}) = \frac{2 - 2 \ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{e}$$

답 $\frac{1}{e}$

$$0629 \quad f(x) = x e^{ax+b} \text{이므로}$$

$$f'(x) = e^{ax+b} + x e^{ax+b} \cdot a = (ax+1) e^{ax+b}$$

$$f''(x) = a e^{ax+b} + (ax+1) e^{ax+b} \cdot a = a(ax+2) e^{ax+b} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(0) = e \text{에서 } e^b = e \quad \therefore b = 1$$

$$f''(0) = 4e \text{에서 } 2ae = 4e \quad \therefore a = 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore ab = 2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

답 2

채점 기준	비율
① $f'(x), f''(x)$ 를 구할 수 있다.	50 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0630 $y=e^{ax} \sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} y' &= ae^{ax} \sin x + e^{ax} \cos x = e^{ax}(a \sin x + \cos x) \\ y'' &= ae^{ax}(a \sin x + \cos x) + e^{ax}(a \cos x - \sin x) \\ &= e^{ax}(a^2 \sin x + 2a \cos x - \sin x) \end{aligned}$$

$y'' - 4y' + 5y = 0$ 에서

$$\begin{aligned} e^{ax}(a^2 \sin x + 2a \cos x - \sin x) - 4e^{ax}(a \sin x + \cos x) + 5e^{ax} \sin x &= 0 \\ e^{ax}\{(a^2 - 4a + 4) \sin x + (2a - 4) \cos x\} &= 0 \\ e^{ax}(a - 2)\{(a - 2) \sin x + 2 \cos x\} &= 0 \end{aligned}$$

위의 등식이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$a = 2$$

답 ⑤

0631 전략 몫의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 $x=0$ 을 대입한다.

풀이 $f(x) = \frac{3x}{x^2 + x + 1}$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x^2 + x + 1) - 3x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{-3x^2 + 3}{(x^2 + x + 1)^2} \end{aligned}$$

$\therefore f'(0) = 3$

따라서 구하는 접선의 기울기는 3이다.

답 3

0632 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한 후 $x=0$ 을 대입한다.

풀이 $f(x) = \left(\frac{2x+a}{x+1}\right)^2$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \frac{2x+a}{x+1} \cdot \left(\frac{2x+a}{x+1}\right)' \\ &= 2 \cdot \frac{2x+a}{x+1} \cdot \frac{2(x+1) - (2x+a) \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2(2x+a)(2-a)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

$f'(0) = 2$ 에서

$$\frac{2a(2-a)}{1} = 2, \quad a(2-a) = 1$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0, \quad (a-1)^2 = 0$$

$\therefore a = 1$

답 ①

0633 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한 후 $x=\pi$ 를 대입한다.

풀이 $f(x) = (1 - \sin x)^3$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(1 - \sin x)^2 \cdot (-\cos x) \\ &= -3(1 - \sin x)^2 \cos x \end{aligned}$$

$\therefore f'(\pi) = -3 \cdot 1 \cdot (-1) = 3$

답 3

0634 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f(3x-1) = x^3 - 3x + 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분한다.

풀이 $f(3x-1) = x^3 - 3x + 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3f'(3x-1) = 3x^2 - 3$$

$$\therefore f'(3x-1) = x^2 - 1$$

$3x-1=2$ 에서 $x=1$ 이므로 위의 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(2) = 0$$

답 ③

0635 전략 두 함수 $x=f(t), y=g(t)$ 가 미분가능하고 $f'(t) \neq 0$ 이면

$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$ 임을 이용하여 접선의 기울기를 t 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\frac{dx}{dt} = 4t, \frac{dy}{dt} = 8$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{8}{4t} = \frac{2}{t} \quad (t \neq 0)$$

이때 $\frac{2}{t} = 2$ 에서 $t=1$ 이므로

$$a = 2 - 1 = 1, \quad b = 8 - 3 = 5$$

$$\therefore a + b = 6$$

답 ⑤

0636 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

풀이 $x + \frac{2x}{y} = 4$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{y} + 2x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) \frac{dy}{dx} &= 0, \quad \frac{2x}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2}{y} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{y+2}{y}}{\frac{2x}{y^2}} = \frac{y^2+2y}{2x} \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

한편 $x=2$ 를 $x + \frac{2x}{y} = 4$ 에 대입하면

$$2 + \frac{4}{y} = 4, \quad \frac{4}{y} = 2 \quad \therefore y = 2$$

따라서 점 $(2, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 2$$

답 ④

0637 전략 역함수의 미분법을 이용한다.

풀이 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ 이므로 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$f'(x) = \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

답 ④

0638 전략 곱의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 $f''(x)$ 를 구한 후 $x=\frac{\pi}{3}$ 를 대입한다.

풀이 $f(x) = (\cos x + 1) \sin x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (-\sin x) \cdot \sin x + (\cos x + 1) \cos x \\
 &= -\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x \quad \cdots ① \\
 f''(x) &= -2 \sin x \cos x + 2 \cos x \cdot (-\sin x) - \sin x \\
 &= -4 \sin x \cos x - \sin x \quad \cdots ② \\
 \therefore f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \cdots ③ \\
 &\quad \text{답 } -\frac{3\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② $f''(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0639 전략 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.

풀이 $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{2(x^2+2) - (2x-1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} \\
 &= \frac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) > 0 \text{에서 } \frac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2} > 0$$

이때 $(x^2+2)^2 > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 -2x^2+2x+4 > 0, \quad x^2-x-2 < 0 \\
 (x+1)(x-2) < 0 \quad \therefore -1 < x < 2
 \end{aligned}$$

따라서 $a = -1, b = 2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

답 5

0640 전략 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a$ (a 는 실수)이고 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 5$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한 값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-3\} = 0$ 이므로 $f(2) = 3$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$ 이므로

$$f'(2) = 5$$

이때 $g(x) = \frac{f(x)}{e^{x-2}}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{f'(x) \cdot e^{x-2} - f(x) \cdot e^{x-2}}{(e^{x-2})^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^{x-2}} \\
 \therefore g'(2) &= \frac{f'(2) - f(2)}{e^{2-2}} = \frac{5-3}{1} = 2 \quad \text{답 } ②
 \end{aligned}$$

0641 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한 후 $x=1$ 을 대입하여 a 의 값을 구한다.

풀이 $f(x) = (2x^2+a)^4$ 이므로

$$f'(x) = 4(2x^2+a)^3 \cdot 4x = 16x(2x^2+a)^3$$

이때 $f'(1) = 16$ 이므로

$$16(2+a)^3 = 16, \quad (a+2)^3 = 1 \quad \therefore a = -1$$

따라서 $f'(x) = 16x(2x^2-1)^3$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \\
 &= f'(-1) = -16
 \end{aligned}$$

답 ②

0642 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $h'(x)$ 를 구한 후 $x=0$ 을 대입한다.

풀이 $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 이므로

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

이때 $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}, g(x) = 2x^2-3x+2$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{2x(x+2) - (x^2-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} \\
 g'(x) &= 4x-3
 \end{aligned}$$

따라서 $g(0) = 2, f'(2) = \frac{13}{16}, g'(0) = -3$ 이므로

$$\begin{aligned}
 h'(0) &= f'(g(0))g'(0) = f'(2)g'(0) \\
 &= \frac{13}{16} \cdot (-3) = -\frac{39}{16}
 \end{aligned}$$

답 $-\frac{39}{16}$

채점 기준	비율
① $h'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $f'(x), g'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $h'(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0643 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $h'(x)$ 를 구하고, 일차함수의 $x=a$ 에서의 미분계수는 일차함수의 그래프의 기울기임을 이용한다.

풀이 주어진 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x+3 & (x < 2) \\ x-2 & (x \geq 2) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 2x & (x < 2) \\ -x+6 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$h(x) = f(g(x))$ 에서 $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 h'(3) &= f'(g(3))g'(3) = f'(3)g'(3) \\
 &= 1 \cdot (-1) = -1
 \end{aligned}$$

답 -1

0644 전략 함수 $y = f(ax+b)$ 의 도함수는 $y' = af'(ax+b)$ 임을 이용한다.

풀이 $f(3x-2) = x + \sqrt{x^2+5}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3f'(3x-2) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$\therefore f'(3x-2) = \frac{1}{3} + \frac{x}{3\sqrt{x^2+5}}$$

$3x-2=4$ 에서 $x=2$ 이므로

$$f'(4) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3\sqrt{4+5}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

답 $\frac{5}{9}$

0645 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분한다.

풀이 $f(\cos x) = \sin 2x + \tan x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f'(\cos x) \cdot (-\sin x) = 2\cos 2x + \sec^2 x$
 $\therefore f'(\cos x) = -\frac{2\cos 2x + \sec^2 x}{\sin x}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{2\cos \frac{2}{3}\pi + \sec^2 \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \\ &= -\frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ①

0646 전략 $f(x) = \ln(e^x + 1)$ 로 놓고 로그의 성질과 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

풀이 $f(x) = \ln(e^x + 1)$ 로 놓으면

$$f(0) = \ln(e^0 + 1) = \ln 2$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + 1}{2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + 1) - \ln 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ 이므로

$$f'(0) = \frac{e^0}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$$

답 ①

0647 전략 로그함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.

풀이 $f(x) = \log_2 |3x^2 + x|$ 에서

$$f'(x) = \frac{6x+1}{(3x^2+x)\ln 2}$$

따라서 $(n-1)f'(n) = \frac{(n-1)(6n+1)}{(3n^2+n)\ln 2} = \frac{6n^2-5n-1}{(3n^2+n)\ln 2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)f'(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2-5n-1}{(3n^2+n)\ln 2} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2-5n-1}{3n^2+n} \\ &= \frac{2}{\ln 2} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{\ln 2}$

0648 전략 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한 후 로그함수의 미분법을 이용한다.

풀이 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = 2\ln |x+1| + \ln |2x+1| - 2\ln |x-1|$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{2}{x+1} + \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{x-1} \\ \therefore \frac{f'(2)}{f(2)} &= \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - 2 = -\frac{14}{15} \end{aligned}$$

답 ①

0649 전략 $t = -2$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}$ 임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt} = 6t^2 + 2at$, $\frac{dy}{dt} = 2t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{6t^2 + 2at} = \frac{1}{3t+a} \quad (t \neq 0, t \neq -\frac{a}{3})$$

$t = -2$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{-6+a} = -\frac{1}{3} \quad \therefore a = 3$$

답 3

0650 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

풀이 $x \sin y + y \sin x = \frac{\pi}{6}$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\sin y + x \cos y \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} \sin x + y \cos x = 0$$

$$(\sin x + x \cos y) \frac{dy}{dx} = -(\sin y + y \cos x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin y + y \cos x}{\sin x + x \cos y} \quad (\sin x + x \cos y \neq 0)$$

따라서 점 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}} = -1$$

답 -1

0651 전략 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면

$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ 임을 이용한다. (단, $f'(g(x)) \neq 0$)

풀이 주어진 그래프에서 $f(d) = c$ 이므로 $g(c) = d$

$$\therefore g'(c) = \frac{1}{f'(g(c))} = \frac{1}{f'(d)}$$

답 ⑤

0652 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$, $f''(x)$ 를 구한다.

풀이 $f(x) = axe^{bx}$ 이므로

$$f'(x) = ae^{bx} + abxe^{bx} = a(bx+1)e^{bx}$$

$$f''(x) = abe^{bx} + ab(bx+1)e^{bx} = ab(bx+2)e^{bx}$$

$f'(0) = 2$ 에서 $a = 2$

$f''(0) = 4$ 에서 $2ab = 4 \quad \therefore b = 1$

$$\therefore a + b = 3$$

답 ①

답 ②

답 ③

답 3

채점 기준	비율
① $f'(x)$, $f''(x)$ 를 구할 수 있다.	50 %
② a , b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0653 전략 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한을 변형한다.

풀이 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = f''(a)$ 이므로 $f''(a) = 2$

이때 $f(x) = \frac{1}{x+3}$ 이므로

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{2}{(x+3)^3}$$

$f''(a)=2$ 에서

$$\frac{2}{(a+3)^3} = 2, \quad (a+3)^3 = 1$$

$$a+3=1 \quad \therefore a=-2$$

답 ①

0654 **전략** 몫의 미분법을 이용하여 $g'(x)$ 를 구한 후 $x=1$ 을 대입한다.

풀이 $g(x) = \frac{1}{f(x)+2x}$ 이므로

$$g'(x) = -\frac{f'(x)+2}{\{f(x)+2x\}^2}$$

$$\therefore g'(1) = -\frac{f'(1)+2}{\{f(1)+2\}^2} = -\frac{2+2}{2^2} = -1$$

답 ②

0655 **전략** 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.

풀이 $f(x) = \sum_{n=1}^{10} (3x+4)^n$
 $= (3x+4) + (3x+4)^2 + (3x+4)^3 + \cdots + (3x+4)^{10}$

이므로

$$f'(x) = 3 + 2(3x+4) \cdot 3 + 3(3x+4)^2 \cdot 3 + \cdots + 10(3x+4)^9 \cdot 3$$

$$= 3\{1 + 2(3x+4) + 3(3x+4)^2 + \cdots + 10(3x+4)^9\}$$

→ ①

$$\therefore f'(-1) = 3(1+2+3+\cdots+10)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^{10} k = 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 165$$

→ ②

답 165

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	60 %
② $f'(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

다른풀이 $f(x) = \sum_{n=1}^{10} (3x+4)^n$ 이므로

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{10} n(3x+4)^{n-1} \cdot 3$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{10} n(3x+4)^{n-1}$$

$$\therefore f'(-1) = 3 \sum_{n=1}^{10} n = 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 165$$

0656 **전략** 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 임을 이용한다.

풀이 $x \neq 2$ 일 때, $f(x) = \frac{e^{x-2}-1}{x-2}$ 이고 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2}-1}{x-2}$$

$g(x) = e^{x-2}$ 으로 놓으면 $g(2)=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2)$$

이때 $g'(x) = e^{x-2}$ 이므로

$$f(2) = g'(2) = 1$$

답 ①

0657 **전략** $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a$ (a 는 실수)이고 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 4$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한

값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-2\} = 0 \text{이므로} \quad f(2) = 2$$

$$\text{따라서} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) \text{이므로}$$

$$f'(2) = 4$$

→ ①

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-2}{x+1} = 3 \text{에서 } x \rightarrow -1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이}$$

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \{g(x)-2\} = 0 \text{이므로} \quad g(-1) = 2$$

$$\text{따라서} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = g'(-1) \text{이므로}$$

$$g'(-1) = 3$$

→ ②

$$\therefore h'(-1) = f'(g(-1))g'(-1)$$

$$= f'(2)g'(-1)$$

$$= 4 \cdot 3 = 12$$

→ ③

답 12

채점 기준	비율
① $f(2), f'(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $g(-1), g'(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $h'(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0658 **전략** $h(x) = g(f(x))$ 로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한을 변형한다.

풀이 $h(x) = g(f(x))$ 로 놓으면

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x)) - \sqrt{e}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

이때 $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$ 이고

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x, \quad g'(x) = e^x$$

이므로 구하는 극한값은

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{e} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= \sqrt{e} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{e}$$

답 ④

0659 **전략** 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(3)$ 에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+5h)-f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+5h)-f(3)}{5h} \cdot 5 = 5f'(3)$

한편 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{(t+1)^2}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t^2}{(t+1)^2}$$

이때 $\frac{t-1}{t} = 3$ 에서 $t-1=3t \quad \therefore t = -\frac{1}{2}$

$t = -\frac{1}{2}$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2} = 1$ 이므로 $f'(3) = 1$

따라서 주어진 식의 값은 $5f'(3) = 5$

답 5

0660 [전략] 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면

$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ 임을 이용한다. (단, $f'(g(x)) \neq 0$)

[풀이] $f(x) = \ln \left| \frac{2x-1}{x+2} \right| = \ln |2x-1| - \ln |x+2|$ 이므로

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{5}{(2x-1)(x+2)}$$

$$\therefore f'(0) = \frac{5}{(-1) \cdot 2} = -\frac{5}{2}$$

$g(0) = a$ 라 하면 $f(a) = 0$ 이므로

$$\ln \left| \frac{2a-1}{a+2} \right| = 0, \quad \left| \frac{2a-1}{a+2} \right| = 1$$

$$\frac{2a-1}{a+2} = \pm 1 \quad \therefore a = -\frac{1}{3} \left(\because -2 < a < \frac{1}{2} \right)$$

따라서 $g(0) = -\frac{1}{3}$ 이고 $f'\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{\left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \frac{5}{3}} = -\frac{9}{5}$ 이므로

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{5}{9}$$

$$\therefore f'(0)g'(0) = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{25}{18}$$

답 ①

0661 [전략] 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$, $f''(x)$ 를 구한 후 $x = \theta$ 를 대입한다.

[풀이] $f(x) = e^x \sin x$ 이므로

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$f''(x) = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x)$$

$$= 2e^x \cos x$$

$f'(\theta) - f''(\theta) = 0$ 에서

$$e^\theta (\sin \theta + \cos \theta) - 2e^\theta \cos \theta = 0$$

$$e^\theta \sin \theta - e^\theta \cos \theta = 0$$

$$e^\theta \sin \theta = e^\theta \cos \theta$$

..... ㉠

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $e^\theta \cos \theta \neq 0$ 이므로 ㉠의 양변을 $e^\theta \cos \theta$ 로 나누면

$$\tan \theta = 1 \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

06 도함수의 활용 (1)

II. 미분법

0662 $f(x) = \frac{1}{x-4}$ 로 놓으면

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-4)^2}$$

이므로

$$f'(5) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1 = -(x-5) \quad \therefore y = -x+6$$

답 $y = -x+6$

0663 $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

이므로

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) \quad \therefore y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

0664 $f(x) = e^{x+1}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^{x+1}$$

이므로

$$f'(1) = e^{1+1} = e^2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-e^2 = e^2(x-1) \quad \therefore y = e^2x$$

답 $y = e^2x$

0665 $f(x) = \ln 3x$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

이므로

$$f'(1) = 1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\ln 3 = x-1 \quad \therefore y = x+\ln 3-1$$

답 $y = x+\ln 3-1$

0666 $f(x) = \cos 2x$ 로 놓으면

$$f'(x) = -2 \sin 2x$$

이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2} = -\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{1}{2}$$

답 $y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{1}{2}$

0667 $f(x)=\ln x+2$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

이므로 $f'(1)=1$

따라서 점 (1, 2)에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-2=-(x-1) \quad \therefore y=-x+3 \quad \text{답 } y=-x+3$$

0668 $f(x)=\sqrt{2x+1}$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{2t+1})$ 이라 하면 $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2t+1}}$ 이므로

$$\frac{1}{\sqrt{2t+1}}=1, \quad \sqrt{2t+1}=1$$

$$2t+1=1 \quad \therefore t=0$$

따라서 접점의 좌표가 (0, 1)이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-1=x-0 \quad \therefore y=x+1 \quad \text{답 } y=x+1$$

0669 $f(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면 $f'(x)=-e^{-x}$

접점의 좌표를 (t, e^{-t}) 이라 하면 $f'(t)=-e^{-t}$ 이므로

$$-e^{-t}=-1 \quad \therefore t=0$$

따라서 접점의 좌표가 (0, 1)이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-1=-(x-0) \quad \therefore y=-x+1 \quad \text{답 } y=-x+1$$

0670 $f(x)=\ln x$ 로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라 하면 $f'(t)=\frac{1}{t}$ 이므로

$$\frac{1}{t}=e \quad \therefore t=\frac{1}{e}$$

따라서 접점의 좌표가 $(\frac{1}{e}, -1)$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y+1=e\left(x-\frac{1}{e}\right) \quad \therefore y=ex-2 \quad \text{답 } y=ex-2$$

0671 $f(x)=\sin x$ 로 놓으면 $f'(x)=\cos x$

접점의 좌표를 $(t, \sin t)$ 라 하면 $f'(t)=\cos t$ 이므로

$$\cos t=1 \quad \therefore t=0 \quad (\because -\pi < t < \pi)$$

따라서 접점의 좌표가 (0, 0)이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-0=x-0 \quad \therefore y=x \quad \text{답 } y=x$$

0672 $f(x)=e^{2x}$ 으로 놓으면 $f'(x)=2e^{2x}$

접점의 좌표를 (t, e^{2t}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2e^{2t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{2t}=2e^{2t}(x-t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 (0, 0)을 지나므로

$$-e^{2t}=2e^{2t} \cdot (-t), \quad -1=-2t$$

$$\therefore t=\frac{1}{2}$$

이것을 ①에 대입하면

$$y-e=2e\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y=2ex \quad \text{답 } y=2ex$$

0673 $f(x)=\sqrt{x+3}$ 으로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t+3})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+3}}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{t+3}=\frac{1}{2\sqrt{t+3}}(x-t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 (-7, 0)을 지나므로

$$-\sqrt{t+3}=\frac{1}{2\sqrt{t+3}}(-7-t)$$

$$-2(t+3)=-7-t \quad \therefore t=1$$

이것을 ①에 대입하면

$$y-2=\frac{1}{4}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$$

$$\text{답 } y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$$

0674 $f(x)=x \ln x$ 로 놓으면 $f'(x)=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(t, t \ln t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\ln t+1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-t \ln t=(\ln t+1)(x-t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 (0, -1)을 지나므로

$$-1-t \ln t=(\ln t+1) \cdot (-t)$$

$$-1=-t \quad \therefore t=1$$

이것을 ①에 대입하면

$$y-0=x-1 \quad \therefore y=x-1$$

$$\text{답 } y=x-1$$

0675 (1) $f(x)=e^x-x$ 에서 $f'(x)=e^x-1$

(2) $f'(x)=0$ 에서 $e^x-1=0, \quad e^x=1$

$$\therefore x=0$$

(3)	x	\dots	0	\dots
	$f'(x)$	$-$	0	$+$
	$f(x)$	\searrow	1	\nearrow

(4) 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0]$ 에서 감소하고, 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

답 풀이 참조

0676 $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$ 에서 $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간

$(-\infty, 0]$ 에서 증가하고, 구간

$[0, \infty)$ 에서 감소한다.

x	\dots	0	\dots
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow		\searrow

답 풀이 참조

0677 $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ 에서 $x \neq 1$ 이고

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0$ 에서 $\frac{1}{(x-1)^2}=1, \quad (x-1)^2=1$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	/		\		\		/

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[0, 1)$, $(1, 2]$ 에서 감소한다.

답 풀이 참조

0678 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ 에서

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$ 에서 감소하고, 구간 $[-1, \infty)$ 에서 증가한다.

x	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\		/

답 풀이 참조

0679 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ 에서

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}} = -\frac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0]$ 에서 증가하고, 구간 $[0, \infty)$ 에서 감소한다.

x	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	/		\

답 풀이 참조

0680 $f(x) = 2x + e^{-x}$ 에서

$$f'(x) = 2 - e^{-x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } e^{-x}=2, \quad -x=\ln 2$$

$$\therefore x = -\ln 2$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -\ln 2]$ 에서 감소하고, 구간 $[-\ln 2, \infty)$ 에서 증가한다.

x	...	$-\ln 2$...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\		/

답 풀이 참조

0681 $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ 에서 $x \neq 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 2x-1=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$$

x	...	0	...	$\frac{1}{2}$...
$f'(x)$	-		-	0	+
$f(x)$	\		\		/

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{2}]$ 에서 감소하고, 구간 $[\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 증가한다.

답 풀이 참조

0682 $f(x) = \ln x - x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1$$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		/		\

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, 1]$ 에서 증가하고, 구간 $[1, \infty)$ 에서 감소한다.

답 풀이 참조

0683 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \ln x=1$$

$$\therefore x=e$$

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		/		\

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, e]$ 에서 증가하고, 구간 $[e, \infty)$ 에서 감소한다.

답 풀이 참조

0684 $f(x) = x - 2\sin x$ 에서

$$f'(x) = 1 - 2\cos x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < x < \pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	π
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		\		/	

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{\pi}{3}]$ 에서 감소하고, 구간 $[\frac{\pi}{3}, \pi)$ 에서 증가한다.

답 풀이 참조

0685 $f(x) = \sin x - \cos x$ 에서

$$f'(x) = \cos x + \sin x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \cos x = -\sin x$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

x	0	...	$\frac{3}{4}\pi$...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/		\	

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{3}{4}\pi]$ 에서 증가하고, 구간 $[\frac{3}{4}\pi, \pi)$ 에서 감소한다.

답 풀이 참조

0686 $f(x) = \tan x - 4x$ 에서

$$f'(x) = \sec^2 x - 4$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \sec^2 x = 4, \quad \sec x = \pm 2$$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{3} \left(\because -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	\dots	$-\frac{\pi}{3}$	\dots	$\frac{\pi}{3}$	\dots	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/		\		/	

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 증가하고,
구간 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 에서 감소한다.

☞ 풀이 참조

0687 (1) $f(x) = x^2 e^x$ 에서

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x$$

$$(2) f'(x) = 0 \text{에서} \quad x(x+2)e^x = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

(3)

x	\dots	-2	\dots	0	\dots
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	$\frac{4}{e^2}$	\	0	/

(4) 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$, $x = 0$ 에서 극솟값 0을 갖는다.

☞ 풀이 참조

0688 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ 에서

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극솟값 $\sqrt{2}$ 를 갖는다.

☞ 극솟값: $\sqrt{2}$

x	\dots	0	\dots
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	$\sqrt{2}$	/

0689 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ 에서

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 4) - x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2}$$

$$= \frac{-(x+2)(x-2)}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

x	\dots	-2	\dots	2	\dots
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	$-\frac{1}{4}$	/	$\frac{1}{4}$	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극솟값 $-\frac{1}{4}$, $x = 2$ 에서 극댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

☞ 극댓값: $\frac{1}{4}$, 극솟값: $-\frac{1}{4}$

0690 $f(x) = e^{-x^2}$ 에서

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서

극댓값 1을 갖는다.

☞ 극댓값: 1

x	\dots	0	\dots
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	/	1	\

0691 $f(x) = x - 2\ln x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = 2$$

x	0	\dots	2	\dots
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$2 - 2\ln 2$	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극솟값 $2 - 2\ln 2$ 를 갖는다.

☞ 극솟값: $2 - 2\ln 2$

0692 $f(x) = x + 2\cos x$ 에서

$$f'(x) = 1 - 2\sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \left(\because 0 < x < \pi \right)$$

x	0	\dots	$\frac{\pi}{6}$	\dots	$\frac{5}{6}\pi$	\dots	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/	$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	\	$\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$	/	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극댓값 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$, $x = \frac{5}{6}\pi$ 에서 극솟값 $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$ 을 갖는다.

☞ 극댓값: $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$, 극솟값: $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$

0693 (1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 6x, \quad f''(x) = 6x + 6$$

$$(2) f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$3x^2 + 6x = 0, \quad 3x(x+2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

$$\therefore f''(-2) = -6 < 0, \quad f''(0) = 6 > 0$$

(3) 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극대이고 극댓값은 $f(-2) = 2$, $x = 0$ 에서 극소이고 극솟값은 $f(0) = -2$ 이다.

☞ 풀이 참조

0694 $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x+1)(x-1)$$

$$f''(x) = -12x^2 + 4$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

이때 $f''(-1) = -8 < 0$, $f''(0) = 4 > 0$, $f''(1) = -8 < 0$ 이므로
함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 또는 $x = 1$ 에서 극대이고 극댓값은

$f(-1) = f(1) = 2$, $x = 0$ 에서 극소이고 극솟값은 $f(0) = 1$ 이다.

☞ 극댓값: 2, 극솟값: 1

0695 $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$ 에서 $x \neq 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{-x^2 - (1-x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x-2}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{x^3 - (x-2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-2x^3 + 6x^2}{x^6} \\ = \frac{-2(x-3)}{x^4}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=2$

이때 $f''(2) = \frac{1}{8} > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이고 극솟값은 $f(2) = -\frac{1}{4}$ 이다. ▶ 극솟값: $-\frac{1}{4}$

0696 $f(x) = xe^{-2x}$ 에서

$$f'(x) = e^{-2x} + xe^{-2x} \cdot (-2) = (1-2x)e^{-2x}$$

$$f''(x) = -2e^{-2x} + (1-2x)e^{-2x} \cdot (-2) = 4(x-1)e^{-2x}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x = \frac{1}{2}$

이때 $f''(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{e} < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극대이고 극댓값은 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2e}$ 이다. ▶ 극댓값: $\frac{1}{2e}$

0697 $f(x) = \ln(x^2+3)$ 에서

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+3) - 2x \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$

이때 $f''(0) = \frac{2}{3} > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고 극솟값은 $f(0) = \ln 3$ 이다. ▶ 극솟값: $\ln 3$

0698 $f(x) = \sin x + \cos x$ 에서

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$f''(x) = -\sin x - \cos x$$

$f'(x)=0$ 에서 $\cos x = \sin x$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

이때 $f''(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극대이고 극댓값은 $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ 이다. ▶ 극댓값: $\sqrt{2}$

0699 $f(x) = x\sqrt{x}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기가 $f'(1) = \frac{3}{2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1 = \frac{3}{2}(x-1) \quad \therefore y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

따라서 $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$a-b=2$$

▶ ④

0700 $f(x) = (2x-3)^5$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 5(2x-3)^4 \cdot 2 = 10(2x-3)^4$$

점 (2, 1)에서의 접선의 기울기가 $f'(2) = 10$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1 = 10(x-2)$$

$$\therefore y = 10x - 19$$

따라서 직선 $y = 10x - 19$ 위의 점의 좌표는 ①이다. ▶ ①

0701 $f(x) = x - 2x \ln x$ 로 놓으면

$$f'(x) = -2 \ln x - 1$$

x 좌표가 1인 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = -1$$

이때 $f(1) = 1$ 이므로 점 (1, 1)에서의 접선의 방정식은

$$y-1 = -(x-1)$$

$$\therefore y = -x + 2$$

이 직선이 점 (5, k)를 지나므로

$$k = -5 + 2 = -3$$

▶ -3

0702 $f(x) = e^{\sin x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^{\sin x} \cos x$$

▶ ①

점 (0, 1)에서의 접선의 기울기가 $f'(0) = 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1 = x-0 \quad \therefore y = x+1$$

▶ ②

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = x+1 \quad \therefore x = -1$$

즉 구하는 x 절편은 -1이다. ▶ ③

▶ -1

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
③ x 절편을 구할 수 있다.	20 %

0703 $g(x) = \sin x$ 로 놓으면

$$g'(x) = \cos x$$

점 (t , $\sin t$)에서의 접선의 기울기가 $g'(t) = \cos t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \sin t = \cos t(x - t)$$

$$\therefore y = x \cos t - t \cos t + \sin t$$

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = x \cos t - t \cos t + \sin t$$

$$x \cos t = t \cos t - \sin t$$

$$\therefore x = t - \tan t \quad (\because \cos t \neq 0)$$

따라서 $f(t) = t - \tan t$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \tan t}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{\tan t}{t} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ = \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

▶ ③

0704 $f(x) = \frac{6}{x^2+2}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = -\frac{6 \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = -\frac{12x}{(x^2+2)^2}$$

점 (2, 1)에서의 접선의 기울기가 $f'(2) = -\frac{2}{3}$ 이므로 이 점에서
의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$ 이고, 직선의 방정식은

$$y-1 = \frac{3}{2}(x-2)$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x - 2$$

따라서 $a = \frac{3}{2}$, $b = -2$ 이므로 $ab = -3$ 답 -3

0705 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

점 $(\pi, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(\pi) = -\frac{1}{\pi}$ 이므로 이 점에서
의 접선과 수직인 직선의 기울기는 π 이다. 답 π

0706 $f(x) = xe^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

점 $(1, e)$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(1) = 2e$ 이므로 이 점에서
접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2e}$ 이고, 직선의 방정식은

$$y-e = -\frac{1}{2e}(x-1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2e}x + e + \frac{1}{2e}$$

따라서 구하는 y 절편은 $e + \frac{1}{2e}$ 이다. 답 ③

0707 $f(x) = \ln 4x$ 로 놓으면

$$f(1) = \ln 4 = 2\ln 2$$

$$\therefore a = 2\ln 2$$
 ... ①

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{이므로 } f'(1) = 1$$

점 $(1, 2\ln 2)$ 에서의 접선의 기울기가 1이므로 이 점에서
수직인 직선의 기울기는 -1 이고, 직선의 방정식은

$$y-2\ln 2 = -(x-1)$$

$$\therefore y = -x + 1 + 2\ln 2$$

이 직선이 점 $(3, b)$ 를 지나므로

$$b = -3 + 1 + 2\ln 2 = -2 + 2\ln 2$$
 ... ②

$$\therefore a-b = 2\ln 2 - (-2 + 2\ln 2) = 2$$
 ... ③

답 2

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0708 $\frac{dx}{dt} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \quad (t \neq 0)$$

$t = \ln 3$ 일 때

$$x = \frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3},$$

$$y = \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{5}{4}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{4}{3} = \frac{5}{4}\left(x - \frac{5}{3}\right) \quad \therefore y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}$$

따라서 $a = \frac{5}{4}$, $b = -\frac{3}{4}$ 이므로 $a+b = \frac{1}{2}$ 답 ②

0709 $\frac{dx}{dt} = 2t+2$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t+2} \quad (t \neq -1)$$
 ... ①

$t = 2$ 일 때

$$x = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8, y = 2^3 + 1 = 9, \frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot 2 + 2} = 2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-9 = 2(x-8) \quad \therefore y = 2x-7$$
 ... ②

이 직선이 점 $(a, 5)$ 를 지나므로

$$5 = 2a-7, \quad 2a = 12 \quad \therefore a = 6$$
 ... ③

답 6

채점 기준	비율
① $\frac{dy}{dx}$ 를 구할 수 있다.	40 %
② 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0710 $\frac{dx}{dt} = 3t^2$, $\frac{dy}{dt} = 2at$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2at}{3t^2} = \frac{2a}{3t} \quad (t \neq 0)$$

$t = 1$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{2a}{3} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{3}{4}$$

따라서 $t = 1$ 일 때 $x = 1$, $y = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{7}{4} = \frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$
 답 $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

0711 $\frac{dx}{d\theta} = 4 \cos 2\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = -4 \sin 2\theta$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-4 \sin 2\theta}{4 \cos 2\theta} = -\tan 2\theta \quad (\cos 2\theta \neq 0)$$

이때 $2\cos 2\theta=1$ 에서 $\cos 2\theta=\frac{1}{2}$

$0<2\theta<\pi$ 이므로 $2\theta=\frac{\pi}{3}$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 일 때 $\frac{dy}{dx}=-\tan \frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

즉 점 $(\sqrt{3}, 1)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고, 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3}) \quad \therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

따라서 구하는 y 절편은 0이다.

답 ③

0712 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

따라서 점 $(1, 16)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-4$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-16=-4(x-1) \quad \therefore y=-4x+20$$

이 직선이 점 $(3, a)$ 를 지나므로

$$a=-4\cdot 3+20=8$$

답 ③

0713 $x^3+y^2-4xy=0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2+2y\frac{dy}{dx}-4y-4x\frac{dy}{dx}=0$$

$$(4x-2y)\frac{dy}{dx}=3x^2-4y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-4y}{4x-2y} \quad (2x\neq y)$$

따라서 점 $(3, 9)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\cdot 3^2-4\cdot 9}{4\cdot 3-2\cdot 9}=\frac{3}{2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-9=\frac{3}{2}(x-3) \quad \therefore y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$0=\frac{3}{2}a+\frac{9}{2} \quad \therefore a=-3$$

답 -3

0714 $xy^2=8$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$y^2+x\cdot 2y\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2x} \quad (xy\neq 0)$$

따라서 점 $(2, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-2) \quad \therefore x+2y-6=0$$

이 직선과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

라세 특강

점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

특히 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

0715 $y^2=\ln(2-x^2)+xy+20$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2-x^2}+y+x\frac{dy}{dx}$$

$$(x-2y)\frac{dy}{dx}=\frac{2x-2y+x^2y}{2-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-2y+x^2y}{(2-x^2)(x-2y)} \quad (x\neq 2y)$$

따라서 점 $(1, 5)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-10+5}{1\cdot (-9)}=-\frac{1}{3}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-5=-\frac{1}{3}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$$

즉 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{14}{3}$ 이므로 $\frac{b}{a}=14$

답 ③

0716 $f(x)=e^{3x}$ 으로 놓으면 $f'(x)=3e^{3x}$

점점의 좌표를 (t, e^{3t}) 이라 하면 직선 $y=3x$ 에 평행한 직선의 기울기는 3이므로

$$f'(t)=3e^{3t}=3$$

$$\therefore t=0$$

따라서 점점의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=3(x-0) \quad \therefore y=3x+1$$

즉 구하는 x 절편은 $-\frac{1}{3}$ 이다.

답 $-\frac{1}{3}$

0717 $f(x)=\ln(x+2)$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x+2}$$

점점의 좌표를 $(t, \ln(t+2))$ 라 하면 직선 $y=-x+3$ 에 수직인 직선의 기울기는 1이므로

$$f'(t)=\frac{1}{t+2}=1 \quad \therefore t=-1$$

따라서 점점의 좌표는 $(-1, 0)$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-0=x+1 \quad \therefore y=x+1$$

답 $y=x+1$

0718 평행이동한 직선의 방정식은 $y=-2x+a$

$f(x)=\cos 2x$ 로 놓으면

$$f'(x)=-2\sin 2x$$

→ ①

점점의 좌표를 $(t, \cos 2t)$ 라 하면 접선의 기울기가 -2 이므로

$$f'(t)=-2\sin 2t=-2, \quad \sin 2t=1$$

$0<2t<\pi$ 이므로 $2t=\frac{\pi}{2} \quad \therefore t=\frac{\pi}{4}$

→ ②

따라서 접점의 좌표는 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-0=-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \quad \therefore y=-2x+\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore a=\frac{\pi}{2}$$

③

답 $\frac{\pi}{2}$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② 접점의 x 좌표를 구할 수 있다.	40 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0719 $f(x)=\frac{4}{x-2}$ 로 놓으면 $f'(x)=-\frac{4}{(x-2)^2}$

접점의 좌표를 $(t, \frac{4}{t-2})$ 라 하면 접선의 기울기가 -1 이므로

$$f'(t)=-\frac{4}{(t-2)^2}=-1$$

$$(t-2)^2=4, \quad t-2=\pm 2$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=4$$

따라서 접점의 좌표는 $(0, -2), (4, 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+2=-(x-0), \quad y-2=-(x-4)$$

$$\therefore y=-x-2, \quad y=-x+6$$

$$\therefore a+b=4$$

답 ④

0720 $f(x)=e^{2x-1}$ 으로 놓으면 $f'(x)=2e^{2x-1}$

접점의 좌표를 (t, e^{2t-1}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=2e^{2t-1} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-e^{2t-1}=2e^{2t-1}(x-t)$$

$$\therefore y=2e^{2t-1}x-2te^{2t-1}+e^{2t-1}$$

..... ㉠

이 직선이 점 $(\frac{1}{2}, 0)$ 을 지나므로

$$0=e^{2t-1}-2te^{2t-1}+e^{2t-1}, \quad 2e^{2t-1}-2te^{2t-1}=0$$

$$2e^{2t-1}(1-t)=0 \quad \therefore t=1 (\because e^{2t-1}>0)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$y=2ex-e$$

이 직선이 점 $(-1, a)$ 를 지나므로

$$a=-2e-e=-3e$$

답 ①

0721 $f(x)=\sqrt{x}+4$ 로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t}+4)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(\sqrt{t}+4)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$$

이 직선이 점 $(-4, 4)$ 를 지나므로

$$4-(\sqrt{t}+4)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(-4-t)$$

$$\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(t+4), \quad 2t=t+4 \quad \therefore t=4$$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

답 ①

0722 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{x^2+1-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{t+1}{t^2+1})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=\frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-\frac{t+1}{t^2+1}=\frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}x+\frac{2t^3+3t^2+1}{(t^2+1)^2} \quad \dots\dots ㉠$$

이 직선이 점 $(0, \frac{3}{2})$ 을 지나므로

$$\frac{3}{2}=\frac{2t^3+3t^2+1}{(t^2+1)^2}, \quad 3(t^4+2t^2+1)=4t^3+6t^2+2$$

$$3t^4-4t^3+1=0, \quad (t-1)^2(3t^2+2t+1)=0$$

$$\therefore t=1 (\because 3t^2+2t+1>0)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}, \quad \text{즉 } x+2y-3=0$$

따라서 직선 $x+2y-3=0$ 과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5} \quad \text{답 } \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

0723 $f(x)=\ln x^2+1$ 로 놓으면 $f'(x)=\frac{2}{x}$

..... ①

접점의 좌표를 $(t, \ln t^2+1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=\frac{2}{t} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(\ln t^2+1)=\frac{2}{t}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{2}{t}x+\ln t^2-1$$

이 직선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1=\ln t^2-1, \quad \ln t^2=2$$

$$t^2=e^2 \quad \therefore t=\pm e$$

..... ②

따라서 접선의 기울기는 $f'(e)=\frac{2}{e}, f'(-e)=-\frac{2}{e}$ 이므로 두 접

선의 기울기의 곱은 $\frac{2}{e} \cdot \left(-\frac{2}{e}\right)=-\frac{4}{e^2}$

..... ③

답 $-\frac{4}{e^2}$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② 두 접점의 x 좌표를 구할 수 있다.	50 %
③ 두 접선의 기울기의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0724 $f(x)=x+\frac{2}{x}$ 로 놓으면 $f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$

접점의 좌표를 $(t, t+\frac{2}{t})$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=1-\frac{2}{t^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-\left(t+\frac{2}{t}\right)=\left(1-\frac{2}{t^2}\right)(x-t)$$

$$\therefore y = \left(1 - \frac{2}{t^2}\right)x + \frac{4}{t}$$

이 직선이 점 $(2, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = 2\left(1 - \frac{2}{t^2}\right) + \frac{4}{t}$$

$$3t^2 + 4t - 4 = 0, \quad (t+2)(3t-2) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = \frac{2}{3}$$

따라서 점 $(2, -1)$ 에서 곡선 $y = x + \frac{2}{x}$ 에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다. 답 2

0725 $f(x) = (x+k)e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^x + (x+k)e^x = (x+k+1)e^x$$

접점의 좌표를 $(t, (t+k)e^t)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = (t+k+1)e^t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t+k)e^t = (t+k+1)e^t(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(t+k)e^t = (t+k+1)e^t \cdot (-t)$$

$$e^t(t^2 + kt - k) = 0$$

$$\therefore t^2 + kt - k = 0 \quad (\because e^t > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원점에서 곡선 $y = (x+k)e^x$ 에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 $\textcircled{1}$ 이 중근을 가져야 하므로 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = k^2 + 4k = 0, \quad k(k+4) = 0$$

$$\therefore k = -4 \quad (\because k \neq 0) \quad \text{답 ②}$$

0726 $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ 로 놓으면 $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+2)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{t^2+2}\right)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -\frac{2t}{(t^2+2)^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \frac{1}{t^2+2} = -\frac{2t}{(t^2+2)^2}(x-t)$$

$$\therefore y = -\frac{2t}{(t^2+2)^2}x + \frac{3t^2+2}{(t^2+2)^2}$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{3t^2 - 2at + 2}{(t^2+2)^2}$$

$$\therefore 3t^2 - 2at + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y = \frac{1}{x^2+2}$ 에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6 > 0, \quad (a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6}) > 0$$

$$\therefore a < -\sqrt{6} \text{ 또는 } a > \sqrt{6} \quad \text{답 } a < -\sqrt{6} \text{ 또는 } a > \sqrt{6}$$

0727 $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(2) = \frac{4}{\sqrt{8+1}} = \frac{4}{3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{4}{3}(x - 2) \quad \therefore y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

접선의 x 절편과 y 절편이 각각 $-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24} \quad \text{답 ②}$$

0728 $f(x) = x \ln x$ 로 놓으면

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

접점의 좌표를 $(t, t \ln t)$ 라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(t) = \ln t + 1 = 2$$

$$\ln t = 1 \quad \therefore t = e$$

따라서 점점의 좌표는 (e, e) 이므로 접선의 방정식은

$$y - e = 2(x - e) \quad \therefore y = 2x - e$$

접선의 x 절편과 y 절편이 각각 $\frac{e}{2}, -e$ 이므로

$$P\left(\frac{e}{2}, 0\right), Q(0, -e)$$

$$\therefore \triangle OPQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot e = \frac{e^2}{4} \quad \text{답 } \frac{e^2}{4}$$

0729 $x^2 + xy = 4$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + y + x \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x} \quad (x \neq 0)$$

점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cdot 1 + 3}{1} = -5$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 3 = -5(x - 1) \quad \therefore y = -5x + 8$$

접선의 x 절편과 y 절편이 각각 $\frac{8}{5}, 8$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot 8 = \frac{32}{5} \quad \text{답 } \frac{32}{5}$$

0730 $f(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면 $f'(x) = -e^{-x}$

접점의 좌표를 (t, e^{-t}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t) = -e^{-t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - e^{-t} = -e^{-t}(x - t)$$

$$\therefore y = -e^{-t}x + te^{-t} + e^{-t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -e^{-t} + te^{-t} + e^{-t}$$

$$te^{-t} = 0 \quad \therefore t = 0 \quad (\because e^{-t} > 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $y = -x + 1$

접선의 x 절편과 y 절편이 각각 1, 1이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \quad \text{답 ②}$$

0731 $f(x) = ax^2 + e^{x-1}, g(x) = \frac{b}{x}$ 로 놓으면

$$f'(x) = 2ax + e^{x-1}, g'(x) = -\frac{b}{x^2}$$

두 곡선이 $x=1$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$$f(1) = g(1) \text{에서} \quad a + 1 = b$$

$$\therefore a - b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(1) = g'(1) \text{에서} \quad 2a + 1 = -b$$

$$\therefore 2a + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -\frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$
 $\therefore a+b = -\frac{1}{3}$

답 -1/3

0732 $f(x)=ax^2, g(x)=\ln x$ 로 놓으면

$$f'(x)=2ax, g'(x)=\frac{1}{x}$$

두 곡선이 $x=b$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로
 $f(b)=g(b)$ 에서 $ab^2=\ln b$

..... ㉠

$$f'(b)=g'(b) \text{에서 } 2ab=\frac{1}{b} \quad \therefore ab^2=\frac{1}{2}$$

..... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{2}=\ln b \quad \therefore b=\sqrt{e}$

이것을 ㉡에 대입하면 $ae=\frac{1}{2} \quad \therefore a=\frac{1}{2e}$

$$\therefore \frac{b}{a}=\sqrt{e} \cdot 2e=2e\sqrt{e}$$

답 ⑤

0733 $f(x)=-\sin x, g(x)=\cos^2 x+a$ 로 놓으면

$$f'(x)=-\cos x, g'(x)=-2\cos x \sin x$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서 } -\sin t=\cos^2 t+a$$

$$-\sin t=1-\sin^2 t+a$$

..... ㉠

$$f'(t)=g'(t) \text{에서 } -\cos t=-2\cos t \sin t$$

$$\cos t(2\sin t-1)=0$$

$$\therefore \sin t=\frac{1}{2} \quad (\because \cos t \neq 0)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{4}+a \quad \therefore a=-\frac{5}{4}$$

답 -5/4

0734 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x)=\frac{x^2+1-x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\		/		\

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-1, 1]$ 에서 증가하므로

$$a=-1, \beta=1 \quad \therefore \beta-a=2$$

답 ②

0735 $f(x)=x-2\ln x$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=1-\frac{2}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 1-\frac{2}{x}=0 \quad \therefore x=2$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[2, \infty)$ 에서 증가하므로 실수 a 의 최솟값은 2이다.

x	0	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\		/

답 2

0736 $f(x)=(x^2-4)e^x$ 에서

$$f'(x)=2xe^x+(x^2-4)e^x=(x^2+2x-4)e^x$$

... ①

$$f'(x)=0 \text{에서 } x^2+2x-4=0 \quad (\because e^x>0)$$

$$\therefore x=-1 \pm \sqrt{5}$$

... ②

x	...	$-1-\sqrt{5}$...	$-1+\sqrt{5}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/		\		/

함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간은

$$[-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}]$$

... ③

따라서 이 구간에 속하는 모든 정수 x 의 값의 합은

$$-3+(-2)+(-1)+0+1=-5$$

... ④

답 -5

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
② $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ $f(x)$ 가 감소하는 구간을 구할 수 있다.	40 %
④ 정수 x 의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0737 $f(x)=x-2\sin x$ 에서 $f'(x)=1-2\cos x$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \cos x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore x=-\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{3} \quad (\because -\pi < x < \pi)$$

x	$-\pi$...	$-\frac{\pi}{3}$...	$\frac{\pi}{3}$...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/		\		/	

$$\therefore -\pi < x_1 < x_2 < -\frac{\pi}{3} \text{이면 } f(x_1) < f(x_2)$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{3} \text{ 이면 } f(x_1) > f(x_2)$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < x_1 < x_2 < \pi \text{ 이면 } f(x_1) < f(x_2)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

0738 $f(x)=(-x^2+ax-5)e^{-x}$ 에서

$$f'(x)=(-2x+a)e^{-x}-(-x^2+ax-5)e^{-x}$$

$$=e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a+5\}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $e^{-x} > 0$ 이므로 $x^2-(a+2)x+a+5 \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $x^2-(a+2)x+a+5=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=\{-(a+2)\}^2-4(a+5) \leq 0, \quad a^2-16 \leq 0$$

$$(a+4)(a-4) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq a \leq 4$$

답 ③

0739 $f(x)=ax-\cos x$ 에서

$$f'(x)=a+\sin x$$

... ①

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

... ②

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 에서

$$a-1 \leq a+\sin x \leq a+1$$

따라서 $a-1 \geq 0$ 이어야 하므로 $a \geq 1$

즉 a 의 최솟값은 1이다.

③
답 1

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $f(x)$ 가 주어진 구간에서 증가하기 위한 조건을 알 수 있다.	20 %
③ a 의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0740 $f(x) = \ln(x^2+1) - ax$ 에서

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - a = \frac{-ax^2+2x-a}{x^2+1}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $x^2+1 > 0$ 이므로 $-ax^2+2x-a \leq 0$, 즉 $ax^2-2x+a \geq 0$ 이어야 한다.

$a > 0$ 이고, 이차방정식 $ax^2-2x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - a^2 \leq 0, \quad a^2 - 1 \geq 0$$

$$(a+1)(a-1) \geq 0, \quad a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 1$$

$$\therefore a \geq 1$$

따라서 a 의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

답 ①

0741 $f(x) = ax + \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = a + \frac{1}{x}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(1, \infty)$ 에서 감소하려면 $x > 1$ 일 때 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

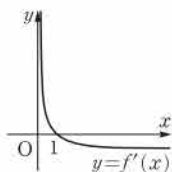
오른쪽 그림에서

$$f'(1) = a + 1 \leq 0$$

$$\therefore a \leq -1$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -1이다.

답 ③



0742 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 에서 $f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(3, \infty)$ 에서 증가하려면 $x > 3$ 일 때 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

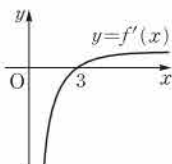
오른쪽 그림에서

$$f'(3) = 1 - \frac{a}{9} \geq 0$$

$$\therefore a \leq 9$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 9이다.

답 9



0743 $f(x) = (x^2+a)e^x$ 에서

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2+a)e^x = (x^2+2x+a)e^x$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-3, 1)$ 에서 감소하려면 $-3 < x < 1$ 일 때 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

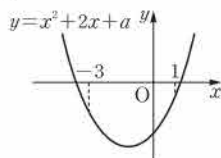
이때 $e^x > 0$ 이므로 $x^2+2x+a \leq 0$ 이어야 한다.

오른쪽 그림에서

$$9 - 6 + a \leq 0, \quad 1 + 2 + a \leq 0$$

$$\therefore a \leq -3$$

답 $a \leq -3$



0744 $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		\	/	/	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 1, $x=-1$ 에서 극솟값 -1을 가지므로

$$M=1, m=-1 \quad \therefore M+m=0$$

답 ③

0745 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ 에서

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 2$ ($\because x > 0$)

x	0	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	/	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값 4를 갖는다.

답 4

0746 $f(x) = \frac{x^2+7x+8}{x-1}$ 에서 $x \neq 1$ 이고

$$f'(x) = \frac{(2x+7)(x-1) - (x^2+7x+8)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x-15}{(x-1)^2} = \frac{(x+3)(x-5)}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 5$

x	...	-3	...	1	...	5	...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	/	극대	\		\	극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극대이고, $x=5$ 에서 극소이므로

$$a=-3, b=5 \quad \therefore 2a+b=-1$$

답 ③

0747 $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-1}}$ 에서 $x > 1$ 이고

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x-1} - (x+3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{x-5}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 5$

x	1	...	5	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	/	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=5$ 에서 극솟값 4를 갖는다.

답 4

0748 $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{9-x}$ 에서 $-1 \leq x \leq 9$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{9-x}} = \frac{\sqrt{9-x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x}}$$

①

$$f'(x)=0 \text{에서 } \sqrt{9-x}=\sqrt{x+1}$$

양변을 제곱하면 $9-x=x+1 \quad \therefore x=4$ → ②

x	-1	...	4	...	9
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\sqrt{10}$	/	$2\sqrt{5}$	\	$\sqrt{10}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극댓값 $2\sqrt{5}$ 를 가지므로

$$a=4, b=2\sqrt{5}$$
→ ③

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
→ ④

답 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $\frac{b}{a}$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0749 $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=0$$

$$x\sqrt{x}-2\sqrt{x}=0, \quad \sqrt{x}(x-2)=0$$

$$\therefore x=2 \quad (\because x>0)$$

x	0	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$2\sqrt{2}$	/

ㄱ. 정의역은 $\{x|x>0\}$ 이다.

ㄴ. $x=2$ 에서 극솟값 $2\sqrt{2}$ 를 갖는다.

ㄷ. 구간 $[2, \infty)$ 에서 증가한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0750 $f(x)=(x^2+3x+3)e^x$ 에서

$$f'(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+3)e^x$$

$$=(x^2+5x+6)e^x$$

$$=(x+3)(x+2)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=-2$$

x	...	-3	...	-2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	$\frac{3}{e^3}$	\	$\frac{1}{e^2}$	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극댓값 $\frac{3}{e^3}$, $x=-2$ 에서 극솟값 $\frac{1}{e^2}$ 을 가지므로

$$M=\frac{3}{e^3}, m=\frac{1}{e^2} \quad \therefore \frac{m}{M}=\frac{e}{3}$$
→ ③

0751 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$ 에서 $x \neq 0$ 이고

$$f'(x)=\frac{2xe^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{2xe^x(x^2-1)}{x^4}$$

$$= \frac{2e^x(x+1)(x-1)}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+
$f(x)$	\	극소	/		\	극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1, x=1$ 에서 극소이므로 극값을 갖는 x 의 값의 개수는 2이다. → 2

0752 $f(x)=e^x+e^{-x}$ 에서

$$f'(x)=e^x-e^{-x}=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } e^{2x}=1 \quad \therefore x=0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값 2를 갖는다. → ④

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	2	/

0753 $f(x)=-\frac{\ln x}{x}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=-\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \ln x=1 \quad \therefore x=e$$

x	0	...	e	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$-\frac{1}{e}$	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=e$ 에서 극솟값 $-\frac{1}{e}$ 을 가지므로

$$a=e, b=-\frac{1}{e} \quad \therefore ab=-1$$
→ -1

0754 $f(x)=3x-x\ln x$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=3-(\ln x+1)=2-\ln x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \ln x=2 \quad \therefore x=e^2$$

x	0	...	e^2	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		/	e^2	\

함수 $f(x)$ 는 $x=e^2$ 에서 극댓값 e^2 을 가지므로

$$A(e^2, e^2)$$
→ ③

따라서 직선 OA의 방정식은

$$y=\frac{e^2}{e^2}x \quad \therefore y=x$$
→ ④

답 $y=x$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
④ 직선 OA의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

0755 $f(x) = x^2 - 3x + \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$$

$$= \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

x	0	...	$\frac{1}{2}$...	1	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	$-\frac{5}{4} - \ln 2$	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극댓값 $-\frac{5}{4} - \ln 2$, $x = 1$ 에서 극솟값 -2를 갖는다.

답 ③

0756 $f(x) = x - \sin 2x$ 에서

$$f'(x) = 1 - 2\cos 2x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 2x = \frac{5}{3}\pi \quad (\because 0 < 2x < 2\pi)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{5}{6}\pi$...	π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{5}{6}\pi$ 에서 극댓값 $\frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$ 에서

극솟값 $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 가지므로

$$M = \frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}, m = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore M + m = \pi$$

답 ③

0757 $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ 에서

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$$

$$= 2e^x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos x = 0$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	$\frac{3}{2}\pi$...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	$e^{\frac{\pi}{2}}$	↘	$-e^{\frac{3}{2}\pi}$	↗	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극댓값 $e^{\frac{\pi}{2}}$, $x = \frac{3}{2}\pi$ 에서 극솟값 $-e^{\frac{3}{2}\pi}$ 을 가지므로 구하는 곱은

$$e^{\frac{\pi}{2}} \cdot (-e^{\frac{3}{2}\pi}) = -e^{2\pi}$$

답 -e^{2π}

0758 $\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = -\sin \theta$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{에서 } \sin \theta = 0$$

$$\therefore \theta = \pi \quad (\because 0 < \theta < 2\pi)$$

또 $0 < \theta < \pi$ 일 때 $\frac{dy}{dx} < 0$, $\pi < \theta < 2\pi$ 일 때 $\frac{dy}{dx} > 0$ 이므로 주어진

함수는 $\theta = \pi$ 에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 극솟값은 $\cos \pi = -1$

답 -1

0759 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+4}$ 에서

$$f'(x) = \frac{a(x^2+4) - (ax+b) \cdot 2x}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{-ax^2 - 2bx + 4a}{(x^2+4)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극댓값 1을 가지므로

$$f(1) = 1 \text{에서 } \frac{a+b}{5} = 1$$

$$\therefore a+b=5$$

..... ㉠

$$f'(1) = 0 \text{에서 } \frac{3a-2b}{25} = 0$$

$$\therefore 3a-2b=0$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2, b=3$$

$$\therefore b-a=1$$

답 ③

0760 $f(x) = ax + b \ln x$ 에서

$$f'(x) = a + \frac{b}{x}$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 3$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(3) = 0 \text{에서 } a + \frac{b}{3} = 0, \quad b = -3a$$

$$\therefore \frac{b}{a} = -3$$

답 ③

0761 $f(x) = (x+a)e^x$ 에서

$$f'(x) = e^x + (x+a)e^x = (x+a+1)e^x$$

..... ①

함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극솟값 m 을 가지므로

$$f'(1) = 0 \text{에서 } (1+a+1)e = 0$$

$$\therefore a = -2$$

..... ②

$$\therefore f(x) = (x-2)e^x$$

$$f(1) = m \text{에서 } m = (1-2)e = -e$$

..... ③

$$\therefore am = 2e$$

..... ④

답 2e

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ m 의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ am 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0762 $f(x)=x-k\cos x$ 에서

$$f'(x)=1+k\sin x$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x)\leq 0 \text{ 또는 } f'(x)\geq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$1+k\sin x\leq 0 \text{ 또는 } 1+k\sin x\geq 0$$

$$\therefore \sin x\leq -\frac{1}{k} \text{ 또는 } \sin x\geq -\frac{1}{k}$$

이때 $-1\leq \sin x\leq 1$ 이므로

$$-\frac{1}{k}\geq 1 \text{ 또는 } -\frac{1}{k}\leq -1$$

$$\therefore -1\leq k<0 \text{ 또는 } 0<k\leq 1$$

그런데 $k=0$ 일 때 $f'(x)=1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

따라서 구하는 k 의 값의 범위는 $-1\leq k\leq 1$ **답** $-1\leq k\leq 1$

0763 $f(x)=ax+\ln x$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=a+\frac{1}{x}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 $x>0$ 인 실수 x 에 대하여

$$f'(x)\geq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a+\frac{1}{x}\geq 0$$

그런데 $x>0$ 일 때 $\frac{1}{x}>0$ 이므로

$$a\geq 0$$

답 $a\geq 0$

0764 $f(x)=(x^3-9x+k)e^x$ 에서

$$f'(x)=(3x^2-9)e^x+(x^3-9x+k)e^x$$

$$=(x^3+3x^2-9x-9+k)e^x$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식

$$x^3+3x^2-9x-9+k=0 \text{ 이 2개 이상의 실근을 갖고, 실근의 좌우}$$

에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

즉 $g(x)=x^3+3x^2-9x-9+k$ 로 놓으면 삼차함수 $g(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 부호가 달라야 한다.

$$g'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1) \text{ 이므로}$$

$$g'(x)=0 \text{ 에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

$$g(-3)g(1)<0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$(k+18)(k-14)<0 \quad \therefore -18<k<14$$

따라서 정수 k 는 $-17, -16, -15, \dots, 12, 13$ 의 31개이다.

답 ①

0765 $f(x)=\frac{2x+k}{x^2-1}$ 에서

$$f'(x)=\frac{2(x^2-1)-(2x+k)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2(x^2+kx+1)}{(x^2-1)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2+kx+1=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+kx+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=k^2-4\leq 0, \quad (k+2)(k-2)\leq 0$$

$$\therefore -2\leq k\leq 2$$

따라서 $\alpha=-2, \beta=2$ 이므로 $\beta-\alpha=4$

답 ②

0766 $f(x)=(x^2+3x+a)e^{-x}$ 에서

$$f'(x)=(2x+3)e^{-x}-(x^2+3x+a)e^{-x}$$

$$=-(x^2+x+a-3)e^{-x}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $x^2+x+a-3=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+x+a-3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=1-4(a-3)>0, \quad -4a+13>0 \quad \therefore a<\frac{13}{4}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 3이다.

답 3

0767 $f(x)=2\ln x-x+\frac{a}{x}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{a}{x^2}=\frac{-x^2+2x-a}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$$-x^2+2x-a=0 \text{ 이 } x>0 \text{ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.}$$

(i) 이차방정식 $-x^2+2x-a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1-a>0 \quad \therefore a<1$$

(ii) (두 근의 합) $=2>0$

(iii) (두 근의 곱) $=a>0$

이상에서 $0<a<1$

답 $0<a<1$

0768 **전략** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$ 임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sqrt{3x^2-2}$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6x}{\sqrt{3x^2-2}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}}$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=3(x-1) \quad \therefore y=3x-2$$

따라서 $a=3, b=-2$ 이므로

$$a-b=5$$

답 ①

0769 **전략** 접점의 좌표를 (t, e^{2t+1}) 으로 놓고 접선의 기울기가 2임을 이용한다.

풀이 $f(x)=e^{2x+1}$ 으로 놓으면 $f'(x)=2e^{2x+1}$

접점의 좌표를 (t, e^{2t+1}) 이라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(t)=2e^{2t+1}=2, \quad e^{2t+1}=1$$

$$2t+1=0 \quad \therefore t=-\frac{1}{2}$$

따라서 접점의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, 1)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=2\left(x+\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y=2x+2$$

$$\therefore a=2$$

답 2

0770 **전략** 점 A의 좌표를 $(t, 3e^{t-1})$ 으로 놓고 점 A에서의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=3e^{x-1}$ 으로 놓으면 $f'(x)=3e^{x-1}$

점 A의 좌표를 $(t, 3e^{t-1})$ 이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3e^{t-1}$

이므로 접선의 방정식은

$$y-3e^{t-1}=3e^{t-1}(x-t)$$

$$\therefore y=3e^{t-1}x+3(1-t)e^{t-1}$$

이 직선이 원점 O를 지나므로

$$3(1-t)e^{t-1}=0 \quad \therefore t=1 (\because e^{t-1}>0)$$

따라서 A(1, 3)이므로

$$OA=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

답 ⑤

0771 전략 어떤 구간에서 $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다.

풀이 $f(x) = e^{x+1}(x^2 + 3x + 1)$ 에서
 $f'(x) = e^{x+1}(x^2 + 3x + 1) + e^{x+1}(2x + 3)$
 $= e^{x+1}(x^2 + 5x + 4)$
 $= e^{x+1}(x + 4)(x + 1)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -4$ 또는 $x = -1$

x	...	-4	...	-1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/		\		/

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-4, -1]$ 에서 감소하므로 $a = -4$, $b = -1$ 일 때 $b - a$ 의 값이 최대이다.

즉 구하는 최댓값은 $-1 - (-4) = 3$

답 ③

0772 전략 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값을 구하여 $f(x)$ 의 증감표를 만든다.

풀이 $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}$ 에서
 $f'(x) = \frac{3(x^2 + 4) - 3x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-3x^2 + 12}{(x^2 + 4)^2}$
 $= \frac{-3(x + 2)(x - 2)}{(x^2 + 4)^2}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 2$

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	$-\frac{3}{4}$	/	$\frac{3}{4}$	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극댓값 $\frac{3}{4}$, $x = -2$ 에서 극솟값

$-\frac{3}{4}$ 을 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은

$\frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) = 0$

→ ①

→ ②

→ ③

답 0

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $f'(x) = 0$ 인 x 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ 극댓값과 극솟값의 합을 구할 수 있다.	40 %

0773 전략 직선 $y = mx + n$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $\tan \theta = m$ 임을 이용한다.

풀이 $f(x) = 2 \sin x + 1$ 로 놓으면 $f'(x) = 2 \cos x$

$x = \frac{\pi}{6}$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

이므로 $x = \frac{\pi}{6}$ 인 점에서의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$\tan \theta = \sqrt{3} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

답 $\frac{\pi}{3}$

0774 전략 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 임을 이용한다.

풀이 $f(x) = e^x + 1$ 로 놓으면 $f'(x) = e^x$ → ①

점 $(1, e+1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = e$ 이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{e}$ 이고, 직선의 방정식은

$y - (e+1) = -\frac{1}{e}(x-1)$

$\therefore y = -\frac{1}{e}x + \frac{1}{e} + e + 1$ → ②

이 식에 $y = 0$ 을 대입하면

$0 = -\frac{1}{e}x + \frac{1}{e} + e + 1, \quad \frac{1}{e}x = \frac{1}{e} + e + 1$

$\therefore x = e^2 + e + 1$

따라서 구하는 x 절편은 $e^2 + e + 1$ 이다. → ③

답 $e^2 + e + 1$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② 점선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
③ x 절편을 구할 수 있다.	20 %

0775 전략 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 만족시키는 θ 의 값을 구한다.

풀이 $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = \cos \theta$ 이므로

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\cot \theta$

이때 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\because 0 < \theta < \pi$)

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 점선의 방정식은

$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$\therefore x + \sqrt{3}y - 2 = 0$

따라서 이 점선과 원점 사이의 거리는

$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = 1$

답 ①

0776 전략 평행한 두 직선의 기울기는 서로 같음을 이용한다.

풀이 두 점 $(0, 1)$, $(4, 3)$ 을 잇는 선분과 평행한 직선의 기울기는

$\frac{3-1}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$f(x) = \sqrt{x} + 1$ 로 놓으면 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$x = a$ 인 점에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{a} = 1 \quad \therefore a = 1$ → ①

0777 전략 점점의 좌표를 $\left(t, \frac{t-1}{t+1}\right)$ 로 놓고 점선의 방정식을 구한 후 점 $(2, 3)$ 의 좌표를 대입하여 t 의 값을 구한다.

풀이 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 로 놓으면

$f'(x) = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$ → ①

접점의 좌표를 $(t, \frac{t-1}{t+1})$ 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \frac{t-1}{t+1} = \frac{2}{(t+1)^2} (x-t)$$

$$\therefore y = \frac{2}{(t+1)^2} x + \frac{t^2-2t-1}{(t+1)^2}$$

이 직선이 점 (2, 3)을 지나므로

$$3 = \frac{4}{(t+1)^2} + \frac{t^2-2t-1}{(t+1)^2}, \quad 3(t+1)^2 = t^2 - 2t + 3$$

$$2t^2 + 8t = 0, \quad 2t(t+4) = 0$$

$$\therefore t = -4 \text{ 또는 } t = 0$$

따라서 접선의 기울기는 $f'(-4) = \frac{2}{9}$, $f'(0) = 2$ 이므로 구하는 기

$$\text{울기의 합은 } \frac{2}{9} + 2 = \frac{20}{9}$$

답 $\frac{20}{9}$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② 접점의 x 좌표를 구할 수 있다.	50 %
③ 두 접선의 기울기의 합을 구할 수 있다.	20 %

0778 [전략] 접점의 좌표를 $(t, (t-1)e^t)$ 으로 놓고 t 에 대한 방정식을 세워 오직 한 실근을 가질 조건을 구한다.

풀이 $f(x) = (x-1)e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

접점의 좌표를 $(t, (t-1)e^t)$ 이라 하면 접선의 기울기가 $f'(t) = te^t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t-1)e^t = te^t(x-t)$$

$$\therefore y = te^t x - t^2 e^t + te^t - e^t$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$0 = te^t a - t^2 e^t + te^t - e^t$$

$$e^t \{ t^2 - (a+1)t + 1 \} = 0$$

$$\therefore t^2 - (a+1)t + 1 = 0 \quad (\because e^t > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y = (x-1)e^x$ 에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 $\textcircled{1}$ 이 중근을 가져야 하므로 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a+1)^2 - 4 = 0, \quad a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$(a+3)(a-1) = 0 \quad \therefore a = -3 \quad (\because a < 0) \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

참고 $a = 10$ 이면 점 $(a, 0)$ 은 곡선 $y = (x-1)e^x$ 위의 점이 된다.

0779 [전략] 접선의 방정식을 구하여 x 축, y 축과의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x) = (x+1)e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

점 $(1, 2e)$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(1) = 3e$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 2e = 3e(x-1) \quad \therefore y = 3ex - e$$

접선의 x 절편과 y 절편이 각각 $\frac{1}{3}$, $-e$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot e = \frac{e}{6} \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0780 [전략] 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$ 임을 이용한다.

풀이 $f(x) = 2x^2 + a$, $g(x) = \ln 2x$ 로 놓으면 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 4x, \quad g'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

두 곡선이 $x=b$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$$f(b) = g(b) \text{에서}$$

$$2b^2 + a = \ln 2b$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$$f'(b) = g'(b) \text{에서}$$

$$4b = \frac{1}{b}, \quad b^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore b = \frac{1}{2} \quad (\because b > 0)$$

$b = \frac{1}{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2 \cdot \frac{1}{4} + a = \ln \left(2 \cdot \frac{1}{2} \right) \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore 4ab = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = -1 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0781 [전략] 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \text{임을 이용한다. (단, } f'(g(x)) \neq 0 \text{)}$$

풀이 $g(1) = a$ 라 하면 $f(a) = 1$ 이므로

$$\ln(a+1) = 1, \quad a+1 = e$$

$$\therefore a = e-1$$

즉 $g(1) = e-1$ 이고, $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ 이므로

$$g'(1) = \frac{1}{f'(e-1)} = e$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - (e-1) = e(x-1)$$

$$\therefore y = ex - 1 \quad \text{답 } y = ex - 1$$

0782 [전략] 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

풀이 $f(x) = (x^2 + ax + 1)e^{-2x}$ 에서

$$f'(x) = (2x+a)e^{-2x} + (x^2+ax+1)e^{-2x} \cdot (-2)$$

$$= \{-2x^2 - 2(a-1)x + a-2\}e^{-2x} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다. $\dots\dots \textcircled{2}$

이때 $e^{-2x} > 0$ 이므로 $-2x^2 - 2(a-1)x + a-2 \leq 0$, 즉

$$2x^2 + 2(a-1)x - a + 2 \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

이차방정식 $2x^2 + 2(a-1)x - a + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 2(-a+2) \leq 0$$

$$a^2 - 3 \leq 0, \quad (a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3}) \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{답 } -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소할 조건을 알 수 있다.	30 %
③ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0783 [전략] 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값 b 를 가지면 $f(a)=b$, $f'(a)=0$ 임을 이용한다.

[풀이] $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}=\frac{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{x}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=\sqrt{a}$ ($\because x>0$)

x	0	...	\sqrt{a}	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\sqrt{a}$ 에서 극솟값 0을 가지므로

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a})^2-a\ln\sqrt{a}=0, \quad \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\ln a=0$$

$$\frac{1}{2}a(1-\ln a)=0, \quad \ln a=1 \quad (\because a>0)$$

$$\therefore a=e$$

답 ④

0784 [전략] 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 임을 이용한다.

[풀이] $f(x)=(ax^2-9)e^x$ 에서

$$f'(x)=2axe^x+(ax^2-9)e^x \\ = (ax^2+2ax-9)e^x$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-3$ 에서 극댓값을 가지므로 $f'(-3)=0$ 에서

$$(3a-9)e^{-3}=0$$

$$\therefore a=3$$

$$\therefore f(x)=(3x^2-9)e^x,$$

$$f'(x)=(3x^2+6x-9)e^x=3(x+3)(x-1)e^x$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극댓값을 갖고, $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로 구하는 극솟값은

$$f(1)=-6e$$

답 ④

0785 [전략] $f'(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ 에서 $h(x)$ 가 이차식이고 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)>0$ 일 때, $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $h(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

[풀이] $f(x)=\frac{x^2+ax+3}{x+2}$ 에서

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x+2)-(x^2+ax+3)}{(x+2)^2} \\ = \frac{x^2+4x+2a-3}{(x+2)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식

$x^2+4x+2a-3=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식

$x^2+4x+2a-3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4-(2a-3)\leq 0 \quad \therefore a\geq \frac{7}{2}$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

답 $\frac{7}{2}$

0786 [전략] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ 임을 이용한다.

[풀이] $f(x)=\sqrt{x+1}$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

점 $P(a, \sqrt{a+1})$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a+1}}$ 이므로

접선의 방정식은

$$y-\sqrt{a+1}=\frac{1}{2\sqrt{a+1}}(x-a)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2\sqrt{a+1}}x+\frac{a+2}{2\sqrt{a+1}}$$

→ ①

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$0=\frac{1}{2\sqrt{a+1}}x+\frac{a+2}{2\sqrt{a+1}} \quad \therefore x=-a-2$$

$$\therefore Q(-a-2, 0)$$

→ ②

$$\therefore PQ=\sqrt{(-a-2-a)^2+(-\sqrt{a+1})^2}$$

$$=\sqrt{(2a+2)^2+a+1}$$

$$=\sqrt{4a^2+9a+5}$$

→ ③

$$\therefore \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{PQ}{a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4a^2+9a+5}}{a} = \sqrt{4}=2$$

→ ④

답 2

채점 기준	비율
① 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
② 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
③ PQ의 길이를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
④ $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{PQ}{a}$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0787 [전략] 구하는 최솟값은 기울기가 $\frac{1}{e}$ 인 곡선 $y=\ln x+1$ 의 접선의 접점과 직선 $y=\frac{1}{e}x+2$ 사이의 거리와 같다.

[풀이] 직선 $y=\frac{1}{e}x+2$ 와의 거리가 최소가 되는 곡선 $y=\ln x+1$

위의 점은 기울기가 $\frac{1}{e}$ 인 접선의 접점이다.

$$f(x)=\ln x+1 \text{로 놓으면} \quad f'(x)=\frac{1}{x}$$

접점의 좌표를 $(t, \ln t+1)$ 이라 하면 접선의 기울기가 $\frac{1}{e}$ 이므로

$$f'(t)=\frac{1}{t}=\frac{1}{e} \quad \therefore t=e$$

따라서 접점의 좌표는 $(e, 2)$ 이고 구하는 최솟값은 이 점과 직선

$y=\frac{1}{e}x+2$, 즉 $x-ey+2e=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|e-2e+2e|}{\sqrt{1^2+(-e)^2}}=\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}$$

답 ③

0788 [전략] 접선의 방정식을 구하여 x 축, y 축과의 교점의 좌표를 구한다.

$$\text{[풀이]} f(x)=\frac{2}{x-1} \text{로 놓으면} \quad f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$$

점 $(k, \frac{2}{k-1})$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(k)=-\frac{2}{(k-1)^2}$ 이므로

접선의 방정식은

$$y - \frac{2}{k-1} = -\frac{2}{(k-1)^2}(x-k)$$

$$\therefore y = -\frac{2}{(k-1)^2}x + \frac{4k-2}{(k-1)^2}$$

따라서 $P(2k-1, 0)$, $Q(0, \frac{4k-2}{(k-1)^2})$ 이므로 $\triangle OPQ$ 의 넓이 $S(k)$ 는

$$S(k) = \frac{1}{2} \cdot (2k-1) \cdot \frac{4k-2}{(k-1)^2} = \frac{4k^2-4k+1}{k^2-2k+1}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4k^2-4k+1}{k^2-2k+1} = 4 \quad \text{답 ②}$$

참고 $k \rightarrow \infty$ 이므로 두 점 P , Q 는 각각 x 축, y 축의 양의 부분에 있는 점으로 생각한다.

0789 전략 함수 $f(x)$ 와 그 역함수 $g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 $f(x) = e^{x+a}$ 에서 $f'(x) = e^{x+a}$

함수 $f(x)$ 와 그 역함수 $g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 접점은 직선 $y=x$ 위에 있다.
따라서 두 그래프의 접점의 좌표를 (t, t) 라 하면

$$f(t) = g(t) = t \text{에서}$$

$$e^{t+a} = t \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$e^{t+a} = \frac{1}{e^{t+a}} \left(\because g'(t) = \frac{1}{f'(t)} \right), \quad e^{2(t+a)} = 1$$

$$\therefore t = -a \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$1 = -a \quad \therefore a = -1 \quad \text{답 ②}$$

0790 전략 $f'(x)$ 를 구한 후 사잇값의 정리를 이용한다.

풀이 $f(x) = e^{-x}(\ln x - 2)$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = -e^{-x}(\ln x - 2) + e^{-x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \ln x + 2 \right)$$

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지므로 $f'(a) = 0$ 이다.

즉 $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x + 2$ 로 놓으면

$$g(a) = 0$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{1+x}{x^2} < 0 \quad (\because x > 0) \text{이므로 함수 } g(x) \text{는}$$

$x > 0$ 에서 연속이고 감소한다.

이때

$$g(1) = 1 - \ln 1 + 2 = 3 > 0,$$

$$g(e) = \frac{1}{e} - \ln e + 2 = \frac{1}{e} + 1 > 0,$$

$$g(e^2) = \frac{1}{e^2} - \ln e^2 + 2 = \frac{1}{e^2} > 0,$$

$$g(e^3) = \frac{1}{e^3} - \ln e^3 + 2 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c) = 0$ 인 실수 c 가 구간 (e^2, e^3) 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 a 가 속하는 구간은 (e^2, e^3) 이다. 답 ③

라벨 특강 사잇값의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

0791 전략 $f'(x) = 0$ 이 되는 x 의 값을 구하여 $f(x)$ 의 증감표를 만들고 극대, 극소가 되는 x 의 값을 확인한다.

풀이 $f(x) = \cos 2x$ 에서

$$f'(x) = -2 \sin 2x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \sin 2x = 0$$

$$2x = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, \dots \quad (\because 2x > 0)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \dots$$

x	0	\dots	$\frac{\pi}{2}$	\dots	π	\dots	$\frac{3\pi}{2}$	\dots	2π	\dots
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$		\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow

즉 함수 $f(x)$ 는 $x = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ 에서 극댓값을 갖고, $x = \frac{\pi}{2},$

$\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore \alpha_1 = \pi, \alpha_2 = 2\pi, \alpha_3 = 3\pi, \dots,$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta_2 = \frac{3\pi}{2}, \beta_3 = \frac{5\pi}{2}, \dots$$

따라서 $\alpha_5 = 5\pi, \beta_6 = \frac{11\pi}{2}$ 이므로

$$\cos \alpha_5 + \sin \beta_6 = \cos 5\pi + \sin \frac{11\pi}{2}$$

$$= -1 - 1 = -2 \quad \text{답 -2}$$

07

도함수의 활용 (2)

II. 미분법

0792 $f(x)=x^3-6x^2-2$ 로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-12x$$

$$f''(x)=6x-12=6(x-2)$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=2$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 2)$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로 위로 볼록하고, 구간 $(2, \infty)$ 에서 $f''(x)>0$ 이므로 아래로 볼록하다.

☞ 풀이 참조

0793 $f(x)=x^4+2x^3$ 으로 놓으면

$$f'(x)=4x^3+6x^2$$

$$f''(x)=12x^2+12x=12x(x+1)$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$ 또는 $(0, \infty)$ 에서 $f''(x)>0$ 이므로 아래로 볼록하고, 구간 $(-1, 0)$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로 위로 볼록하다.

☞ 풀이 참조

0794 $f(x)=x^2-e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x)=2x-e^x$$

$$f''(x)=2-e^x$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } e^x=2$$

$$\therefore x=\ln 2$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \ln 2)$ 에서 $f''(x)>0$ 이므로 아래로 볼록하고, 구간 $(\ln 2, \infty)$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로 위로 볼록하다.

☞ 풀이 참조

0795 $f(x)=x \ln x$ 로 놓으면 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\ln x+1$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 $f''(x)>0$ 이므로 아래로 볼록하다.

☞ 풀이 참조

0796 $f(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$f'(x)=\cos x$$

$$f''(x)=-\sin x$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로 위로 볼록하다.

☞ 풀이 참조

0797 $f(x)=x^3-8x+1$ 로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-8$$

$$f''(x)=6x$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=0$$

$$x<0 \text{일 때 } f''(x)<0, x>0 \text{일 때 } f''(x)>0$$

따라서 $x=0$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.

☞ $(0, 1)$

0798 $f(x)=-x^4+6x^3$ 으로 놓으면

$$f'(x)=-4x^3+18x^2$$

$$f''(x)=-12x^2+36x=-12x(x-3)$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$$x<0 \text{ 또는 } x>3 \text{일 때 } f''(x)<0,$$

$$0<x<3 \text{일 때 } f''(x)>0$$

따라서 $x=0, x=3$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 0), (3, 81)$ 이다.

☞ $(0, 0), (3, 81)$

0799 $f(x)=xe^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

$$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=2$$

$$x<2 \text{일 때 } f''(x)<0, x>2 \text{일 때 } f''(x)>0$$

따라서 $x=2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(2, \frac{2}{e^2})$ 이다.

☞ $(2, \frac{2}{e^2})$

0800 $f(x)=\ln(x^2+2)$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+2)-2x \cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

$$x<-\sqrt{2} \text{ 또는 } x>\sqrt{2} \text{일 때 } f''(x)<0,$$

$$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \text{일 때 } f''(x)>0$$

따라서 $x=-\sqrt{2}, x=\sqrt{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-\sqrt{2}, \ln 4), (\sqrt{2}, \ln 4)$ 이다.

☞ $(-\sqrt{2}, \ln 4), (\sqrt{2}, \ln 4)$

0801 $f(x)=x+\cos x$ 로 놓으면

$$f'(x)=1-\sin x$$

$$f''(x)=-\cos x$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=\frac{\pi}{2} (\because 0<x<\pi)$$

$$0<x<\frac{\pi}{2} \text{일 때 } f''(x)<0, \frac{\pi}{2}<x<\pi \text{일 때 } f''(x)>0$$

따라서 $x=\frac{\pi}{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 이다.

☞ $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

0802 ☞ (가) 1 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{2}$ (라) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (마) $y=0$

0803 $f(x)=x^4-2x^3$ 으로 놓으면

$$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$$

$$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$$

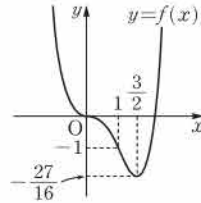
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

x	...	0	...	1	...	$\frac{3}{2}$...
$f'(x)$	-	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+	+	+
$f(x)$	↖	0	↘	-1	↖	$-\frac{27}{16}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

풀이 참조



0804 $f(x)=\sqrt{x}-2x$ 로 놓으면 $x \geq 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

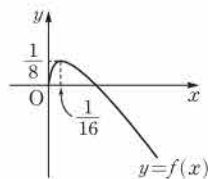
$$f'(x)=0 \text{에서 } x = \frac{1}{16}$$

$f''(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	0	...	$\frac{1}{16}$...
$f'(x)$		+	0	-
$f''(x)$		-	-	-
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{8}$	↘

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

풀이 참조



0805 $f(x)=xe^{2x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (2x+1)e^{2x}$$

$$f''(x) = 2e^{2x} + 2(2x+1)e^{2x} = 4(x+1)e^{2x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x = -\frac{1}{2}$$

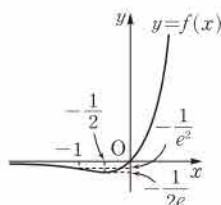
$$f''(x)=0 \text{에서 } x = -1$$

x	...	-1	...	$-\frac{1}{2}$...
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	↖	$-\frac{1}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

이때 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 점근선은 x 축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

풀이 참조



곡선 $y=f(x)$ 의 점근선

a, b 가 실수일 때, 곡선 $y=f(x)$ 의 점근선은 다음과 같이 함수의 극한값을 이용하여 구한다.

① $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ 또는 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ● 점근선은 직선 $y=b$

② $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$ 또는 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$

● 점근선은 직선 $x=a$

③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (mx+n)\} = 0$ 또는 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - (mx+n)\} = 0$

● 점근선은 직선 $y=mx+n$

0806 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 로 놓으면 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

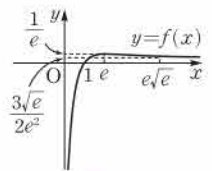
$$f'(x)=0 \text{에서 } x = e$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x = e\sqrt{e}$$

x	0	...	e	...	$e\sqrt{e}$...
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$		↖	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3\sqrt{e}}{2e^2}$	↗

이때 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 점근선은 x 축, y 축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

0807 $f(x) = x - \sin x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

$$f''(x) = \sin x$$

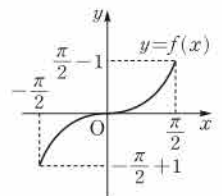
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \left(\because -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=0 \left(\because -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$...	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	+	
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}+1$	↖	0	↗	$\frac{\pi}{2}-1$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

풀이 참조



0808 $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	-2	...	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\frac{4}{5}$	\searrow	-1	\nearrow	1	\searrow	$\frac{4}{5}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 1, $x=-1$ 일 때 최솟값 -1을 갖는다.

☞ 최댓값: 1, 최솟값: -1

0809 $f(x) = x\sqrt{x+6}$ 에서

$$f'(x) = \sqrt{x+6} + \frac{x}{2\sqrt{x+6}} = \frac{3(x+4)}{2\sqrt{x+6}}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-4$

x	-6	...	-4	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	\searrow	$-4\sqrt{2}$	\nearrow	$4\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값 $4\sqrt{2}$, $x=-4$ 일 때 최솟값 $-4\sqrt{2}$ 를 갖는다.

☞ 최댓값: $4\sqrt{2}$, 최솟값: $-4\sqrt{2}$

0810 $f(x) = x^2e^x$ 에서

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	-4	...	-2	...	0	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{16}{e^4}$	\nearrow	$\frac{4}{e^2}$	\searrow	0	\nearrow	$9e^3$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값 $9e^3$, $x=0$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.

☞ 최댓값: $9e^3$, 최솟값: 0

0811 $f(x) = x - \ln x$ 에서 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

x	$\frac{1}{e^2}$...	1	...	e
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\frac{1}{e^2} + 2$	\searrow	1	\nearrow	$e-1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{e^2}$ 일 때 최댓값 $\frac{1}{e^2} + 2$, $x=1$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

☞ 최댓값: $\frac{1}{e^2} + 2$, 최솟값: 1

0812 $f(x) = x + 2\cos x$ 에서 $f'(x) = 1 - 2\sin x$

$f'(x)=0$ 에서 $\sin x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$ ($\because 0 \leq x \leq \pi$)

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{5}{6}\pi$...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	2	\nearrow	$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	\searrow	$\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$	\nearrow	$\pi - 2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{6}$ 일 때 최댓값 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$, $x=\frac{5}{6}\pi$ 일 때 최솟값 $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$ 을 갖는다.

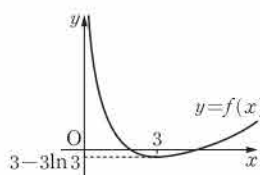
☞ 최댓값: $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$, 최솟값: $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$

0813 (1) $f(x) = x - 3\ln x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=3$

x	0	...	3	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\searrow	$3-3\ln 3$	\nearrow



이때 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 $y=f(x)$

의 그래프는 위의 그림과 같다.

(3) $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

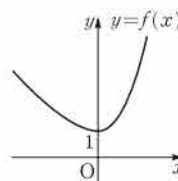
☞ 풀이 참조

0814 $f(x) = e^x - x$ 로 놓으면

$$f'(x) = e^x - 1$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	1	\nearrow



이때 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 만나지 않으므로 주어진 방정식은 실근을 갖지 않는다.

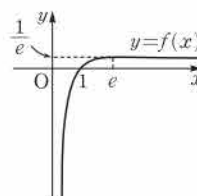
☞ 0

0815 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 로 놓으면 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ 에서 $\ln x = 1 \therefore x = e$

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow



이때 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

☞ 1

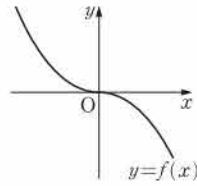
0816 $f(x)=\sin x-x$ 로 놓으면

$$f'(x)=\cos x-1$$

$f'(x)\leq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 구간에서 감소한다.

이때 $f(0)=0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다. ▶ 1



0817 $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ 로 놓으면 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

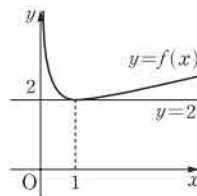
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1$$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	2	/

이때 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty$ 이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=2$ 와 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다. ▶ 1



0818 $f(x)=e^x+e^{-x}$ 로 놓으면

$$f'(x)=e^x-e^{-x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0$$

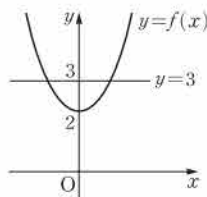
x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	2	/

이때 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty$ 이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=3$ 과

서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다. ▶ 2



0819 ▶ (가) $1-\frac{1}{x+1}$ (나) 0 (다) 0

0820 $f(x)=x-\cos x+1$ 로 놓으면

$$f'(x)=1+\sin x$$

$x>0$ 일 때 $f'(x)\geq 0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가한다.

$f(0)=0$ 이므로 $x>0$ 일 때

$$f(x)>0, \text{ 즉 } x-\cos x+1>0$$

따라서 $x>0$ 일 때 부등식 $x>\cos x-1$ 이 성립한다. ▶ 풀이 참조

0821 $f(x)=e^x-x-1$ 로 놓으면

$$f'(x)=e^x-1$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty \text{이다.}$$

즉 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 0이므로

$$f(x)\geq 0, \text{ 즉 } e^x-x-1\geq 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $e^x\geq x+1$ 이 성립한다. ▶ 풀이 참조

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	0	/

0822 점 P의 시각 t 에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$ 라 하면

$$v(t)=f'(t)=-e^{-t}, a(t)=f''(t)=e^{-t}$$

이므로 $t=1$ 에서의 점 P의 속도와 가속도는

$$v(1)=-\frac{1}{e}, a(1)=\frac{1}{e} \quad \text{▶ 속도: } -\frac{1}{e}, \text{ 가속도: } \frac{1}{e}$$

0823 점 P의 시각 t 에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$ 라 하면

$$v(t)=f'(t)=1+2\cos t, a(t)=f''(t)=-2\sin t$$

이므로 $t=\frac{\pi}{2}$ 에서의 점 P의 속도와 가속도는

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, a\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2 \quad \text{▶ 속도: 1, 가속도: -2}$$

0824 $\frac{dx}{dt}=4, \frac{dy}{dt}=2t+1$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$(4, 2t+1)$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 속도는 $(4, 7)$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \frac{d^2y}{dt^2}=2 \text{이므로 점 P의 시각 } t \text{에서의 가속도는}$$

$$(0, 2)$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 가속도는 $(0, 2)$

$$\text{▶ 속도: } (4, 7), \text{ 가속도: } (0, 2)$$

0825 $\frac{dx}{dt}=6t, \frac{dy}{dt}=4t+1$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$(6t, 4t+1)$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 속도는 $(18, 13)$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=6, \frac{d^2y}{dt^2}=4 \text{이므로 점 P의 시각 } t \text{에서의 가속도는}$$

$$(6, 4)$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 가속도는 $(6, 4)$

$$\text{▶ 속도: } (18, 13), \text{ 가속도: } (6, 4)$$

0826 $\frac{dx}{dt}=3t^2-6t, \frac{dy}{dt}=4t^3-8$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$(3t^2-6t, 4t^3-8)$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 속도는 $(9, 100)$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=6t-6, \frac{d^2y}{dt^2}=12t^2 \text{이므로 점 P의 시각 } t \text{에서의 가속도는}$$

$$(6t-6, 12t^2)$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 가속도는 $(12, 108)$

$$\text{▶ 속도: } (9, 100), \text{ 가속도: } (12, 108)$$

0827 $\frac{dx}{dt} = \cos t, \frac{dy}{dt} = -\sin t$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는
 $(\cos t, -\sin t)$

따라서 $t = \frac{\pi}{6}$ 에서의 점 P의 속도는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin t, \frac{d^2y}{dt^2} = -\cos t$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 가속도는
 $(-\sin t, -\cos t)$

따라서 $t = \frac{\pi}{6}$ 에서의 점 P의 가속도는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 [답] 속도: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 가속도: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

0828 $\frac{dx}{dt} = 1 + \cos t, \frac{dy}{dt} = 2t + \sin t$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는
 $(1 + \cos t, 2t + \sin t)$

따라서 $t = \frac{\pi}{6}$ 에서의 점 P의 속도는 $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\right)$
 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin t, \frac{d^2y}{dt^2} = 2 + \cos t$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 가속도는
 $(-\sin t, 2 + \cos t)$

따라서 $t = \frac{\pi}{6}$ 에서의 점 P의 가속도는 $\left(-\frac{1}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 [답] 속도: $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\right)$, 가속도: $\left(-\frac{1}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

0829 $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는
 $\left(1, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$
 따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 속도는 $(1, 1)$ 이므로 속력은
 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 가속도는
 $\left(0, -\frac{1}{2t\sqrt{t}}\right)$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 가속도는 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ 이므로 가속도의 크기는
 $\sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$
 [답] 속력: $\sqrt{2}$, 가속도의 크기: $\frac{1}{2}$

0830 $\frac{dx}{dt} = 1 + e^t, \frac{dy}{dt} = 1 - e^t$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는
 $(1 + e^t, 1 - e^t)$
 따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는 $(1 + e^2, 1 - e^2)$ 이므로 속력은
 $\sqrt{(1 + e^2)^2 + (1 - e^2)^2} = \sqrt{2 + 2e^4}$
 $\frac{d^2x}{dt^2} = e^t, \frac{d^2y}{dt^2} = -e^t$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 가속도는
 $(e^t, -e^t)$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도는 $(e^2, -e^2)$ 이므로 가속도의 크기는
 $\sqrt{(e^2)^2 + (-e^2)^2} = \sqrt{2}e^2$
 [답] 속력: $\sqrt{2 + 2e^4}$, 가속도의 크기: $\sqrt{2}e^2$

0831 $f(x) = 2x^2 + \ln x$ 로 놓으면 $x > 0$ 이고
 $f'(x) = 4x + \frac{1}{x}, f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$
 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록하려면 $f''(x) < 0$ 이어야 하므로
 $4 - \frac{1}{x^2} < 0, \quad 4x^2 - 1 < 0$
 $(2x+1)(2x-1) < 0, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
 $\therefore 0 < x < \frac{1}{2} (\because x > 0)$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록한 구간은 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 이다. [답] ①

0832 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ 로 놓으면
 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9, f''(x) = 6x + 6$
 곡선 $y=f(x)$ 가 아래로 볼록하려면 $f''(x) > 0$ 이어야 하므로
 $6x + 6 > 0 \quad \therefore x > -1$ [답] ①

0833 $f(x) = (x^2 + a)e^x$ 으로 놓으면
 $f'(x) = 2xe^x + (x^2 + a)e^x = (x^2 + 2x + a)e^x$
 $f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x + a)e^x$
 $= (x^2 + 4x + 2 + a)e^x$... ①
 곡선 $y=f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x) \geq 0$ 이어야 한다.
 이때 $e^x > 0$ 이므로 부등식 $x^2 + 4x + 2 + a \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 한다.
 따라서 방정식 $x^2 + 4x + 2 + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - (2 + a) \leq 0 \quad \therefore a \geq 2$$

... ② [답] $a \geq 2$

채점 기준	비율
① $f''(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %

0834 ㄱ. $f(x) = x^4 + x^2$ 으로 놓으면
 $f'(x) = 4x^3 + 2x, f''(x) = 12x^2 + 2$
 실수 전체의 집합에서 $f''(x) > 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.
 ㄴ. $f(x) = 1 + e^x$ 으로 놓으면
 $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x$
 실수 전체의 집합에서 $f''(x) > 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.
 ㄷ. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 로 놓으면
 $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$
 따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$ 또는 $(1, \infty)$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 위로 볼록하고, 구간 $(-1, 1)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 아래로 볼록하다.

르. $f(x)=x^2+\cos x$ 로 놓으면

$$f'(x)=2x-\sin x, f''(x)=2-\cos x$$

실수 전체의 집합에서 $f''(x)>0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

이상에서 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록한 곡선은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0835 $f(x)=(x^2+x)e^x$ 로 놓으면

$$f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x)e^x=(x^2+3x+1)e^x$$

$$f''(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+1)e^x$$

$$=(x^2+5x+4)e^x$$

$$=(x+4)(x+1)e^x$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=-4 \text{ 또는 } x=-1$$

$$x<-4 \text{ 또는 } x>-1 \text{ 일 때 } f''(x)>0,$$

$$-4<x<-1 \text{ 일 때 } f''(x)<0$$

즉 $x=-4, x=-1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 모든 변곡점의 x 좌표의 합은

$$-4+(-1)=-5$$

답 ①

0836 $f(x)=x^4-2x^3-3x$ 로 놓으면

$$f'(x)=4x^3-6x^2-3$$

$$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$$x<0 \text{ 또는 } x>1 \text{ 일 때 } f''(x)>0,$$

$$0<x<1 \text{ 일 때 } f''(x)<0$$

즉 $x=0, x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 $(0, 0), (1, -4)$ 이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$$\sqrt{1^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$$

답 ④

0837 $f(x)=\ln(x^2+4)$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+4}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+4)-2x \cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}=\frac{-2(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

$$x<-2 \text{ 또는 } x>2 \text{ 일 때 } f''(x)<0,$$

$$-2<x<2 \text{ 일 때 } f''(x)>0$$

즉 $x=-2, x=2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 $(-2, 3\ln 2), (2, 3\ln 2)$ 이다.

따라서 $\triangle OPQ$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot (2+2) \cdot 3\ln 2=6\ln 2$$

답 6ln2

0838 $f(x)=2\sin x-x$ 로 놓으면

$$f'(x)=2\cos x-1, f''(x)=-2\sin x$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=\pi (\because 0<x<2\pi)$$

$$0<x<\pi \text{ 일 때 } f''(x)<0,$$

$$\pi<x<2\pi \text{ 일 때 } f''(x)>0$$

즉 $x=\pi$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x 좌표는 π 이다. ②

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는

$$f'(\pi)=2\cos \pi-1=-3$$

..... ③

답 -3

채점 기준	비율
① $f'(x), f''(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② 변곡점의 x 좌표를 구할 수 있다.	40 %
③ 변곡점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %

0839 $f(x)=x^3+ax^2+bx-5$ 로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f''(x)=6x+2a$$

변곡점의 좌표가 $(-1, 6)$ 이므로

$$f(-1)=6 \text{에서 } -1+a-b-5=6$$

$$\therefore a-b=12$$

..... ㉠

$$f''(-1)=0 \text{에서 } -6+2a=0$$

$$\therefore a=3$$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하면 } 3-b=12 \quad \therefore b=-9$$

$$\therefore a+2b=-15$$

답 ②

0840 $f(x)=(\ln x)^2$ 으로 놓으면 $x>0$ 이고

$$f'(x)=2\ln x \cdot \frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x} \cdot x - 2\ln x}{x^2}=\frac{2-2\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } \ln x=1$$

$$ax=e \quad \therefore x=\frac{e}{a}$$

$$0<x<\frac{e}{a} \text{ 일 때 } f''(x)>0, x>\frac{e}{a} \text{ 일 때 } f''(x)<0$$

즉 $x=\frac{e}{a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$$\left(\frac{e}{a}, 1\right)$$

이때 변곡점이 직선 $2x+y=2$ 위에 있으므로

$$\frac{2e}{a}+1=2, \quad \frac{2e}{a}=1$$

$$\therefore a=2e$$

답 ⑤

0841 $f(x)=ax^2-5x+b\ln x$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=2ax-5+\frac{b}{x}, f''(x)=2a-\frac{b}{x^2}$$

$$x=1 \text{에서 극소이므로 } f'(1)=0$$

$$2a-5+b=0 \quad \therefore 2a+b=5$$

..... ㉠

$$\text{변곡점의 } x\text{좌표가 } \frac{1}{2} \text{ 이므로 } f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

$$2a-4b=0 \quad \therefore a-2b=0$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2, b=1$$

$$\therefore f(x)=2x^2-5x+\ln x,$$

$$f'(x)=4x-5+\frac{1}{x}=\frac{4x^2-5x+1}{x}$$

$$=\frac{(4x-1)(x-1)}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=\frac{1}{4} \text{ 또는 } x=1$$

x	0	...	$\frac{1}{4}$...	1	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{4}$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=2 \cdot \frac{1}{16}-5 \cdot \frac{1}{4}+\ln \frac{1}{4}=-\frac{9}{8}-\ln 4$$

$$\text{답 } -\frac{9}{8}-\ln 4$$

0842 $f(x)=(x^2+4x+a)e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x)=(2x+4)e^x+(x^2+4x+a)e^x \\ = (x^2+6x+4+a)e^x$$

$$f''(x)=(2x+6)e^x+(x^2+6x+4+a)e^x \\ = (x^2+8x+10+a)e^x$$

$e^x > 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이 2개이려면 방정식 $x^2+8x+10+a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 방정식 $x^2+8x+10+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=16-(10+a)>0$$

$$\therefore a < 6$$

$$\text{답 } a < 6$$

0843 $f(x)=(x-1)e^x$ 에서

$$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$$

$$f''(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=-1$$

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{e}$	↗	-1	↗

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로

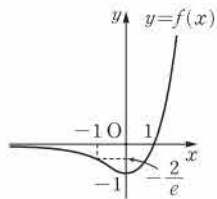
$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 극솟값 $f(0)=-1$ 을 갖는다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 의 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 위로 볼록하다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



답 ④

0844 $f(x)=x-\sin x$ 로 놓으면

$$f'(x)=1-\cos x, f''(x)=\sin x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \quad (\because -\pi < x < \pi)$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=0 \quad (\because -\pi < x < \pi)$$

x	$-\pi$...	0	...	π
$f'(x)$		+	0	+	
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↗	0	↗	

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x)=-x-\sin(-x)$$

$$=-x+\sin x$$

$$=-f(x)$$

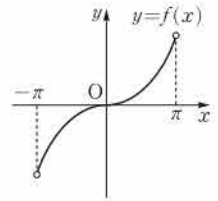
이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 원점에 대하여

대칭이다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(0, \pi)$ 에서 아래로 볼록하다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



답 ㄱ, ㄷ

0845 $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$ 에서 $x \neq 2$ 이고

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} \\ = \frac{8}{(x-2)^3}$$

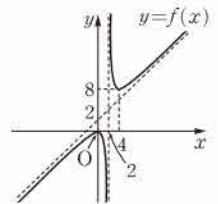
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=4$$

$f''(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	...	0	...	2	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	-	+	+	+
$f(x)$	↗	0	↘	↘	↗	8	↗

또 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ 이고

$$f(x)=\frac{x^2-4+4}{x-2} \\ = \frac{(x+2)(x-2)+4}{x-2} \\ = x+2+\frac{4}{x-2}$$



에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (x+2)\} = 0$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (x+2)\} = 0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같다.

ㄱ. $x=0$ 에서 극대이다.

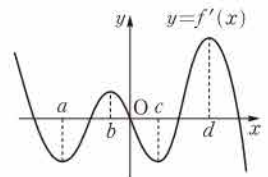
ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $(2, 4)$ 에서 감소한다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=x+2$ 이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0846 오른쪽 그림과 같이 a, b, c, d 를 정하고 $f''(x)$ 의 부호를 조사하면 다음과 같다.



x	...	a	...	b	...	c	...	d	...
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-

$x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 개수는 4이다.

답 4

0847 구간 (a, e) 에서 $f''(x)$ 의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	a	\dots	b	\dots	c	\dots	d	\dots	e
$f''(x)$		-	0	+	+	+	0	-	

곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$ 이어야 하므로 구하는 구간은 (a, b) 또는 (d, e) 이다. **답 ①**

0848 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

$f''(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$

x	\dots	-2	\dots	$-\frac{2}{3}$	\dots	0	\dots
$f'(x)$	-	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+	+	+
$f(x)$	\searrow	변곡점	\searrow	변곡점	\searrow	극소	\nearrow

ㄱ. 극댓값을 갖지 않는다.

ㄴ. $x=0$ 에서 극소이다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 는 $x=-2$, $x=-\frac{2}{3}$ 에서 변곡점을 가지므로 변곡점은 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답 ⑤**

0849 $f(x)=\frac{x-2}{x^2-x+2}$ 에서

$$f'(x)=\frac{x^2-x+2-(x-2)(2x-1)}{(x^2-x+2)^2}=\frac{-x(x-4)}{(x^2-x+2)^2}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	\dots	0	\dots	4	\dots
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	-1	\nearrow	$\frac{1}{7}$	\searrow

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값 $\frac{1}{7}$ 을 갖는다.

$$\therefore a=4, b=\frac{1}{7}$$

$$\therefore \frac{a}{b}=28$$

답 28

0850 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$ 에서 $0 \leq x \leq 8$ 이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{8-x}}=\frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}}$$

$f'(x)=0$ 에서 $\sqrt{8-x}=\sqrt{x}$
 $8-x=x \quad \therefore x=4$

x	0	\dots	4	\dots	8
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	\nearrow	4	\searrow	$2\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값 4를 갖는다.

답 4

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
② $f(x)$ 의 최댓값을 구할 수 있다.	60%

0851 $f(x)=x-5+\frac{4}{x+6}$ 에서

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x+6)^2}=\frac{(x+8)(x+4)}{(x+6)^2}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-4$ ($\because -5 \leq x \leq 0$)

x	-5	\dots	-4	\dots	0
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-6	\searrow	-7	\nearrow	$-\frac{13}{3}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값 $-\frac{13}{3}$, $x=-4$ 일 때 최솟값 -7 을 가지므로 구하는 함은

$$-\frac{13}{3}+(-7)=-\frac{34}{3}$$

답 ②

0852 $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ 에서 $-2 \leq x \leq 2$ 이고

$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}+x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	-2	\dots	$-\sqrt{2}$	\dots	$\sqrt{2}$	\dots	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	\searrow	-2	\nearrow	2	\searrow	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\sqrt{2}$ 일 때 최댓값 2, $x=-\sqrt{2}$ 일 때 최솟값 -2 를 가지므로

$$M=2, m=-2$$

$$\therefore M-m=4$$

답 4

0853 $f(x)=\ln(x^2+2x+3)$ 에서

$$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+3}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$

x	-3	\dots	-1	\dots	0
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\ln 6$	\searrow	$\ln 2$	\nearrow	$\ln 3$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 일 때 최댓값 $\ln 6$, $x=-1$ 일 때 최솟값 $\ln 2$ 를 가지므로

$$M=\ln 6, m=\ln 2$$

$$\therefore M-m=\ln \frac{6}{2}=\ln 3$$

답 ③

0854 $f(x)=xe^{-x}$ 에서

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때

최댓값 $\frac{1}{e}$ 을 갖는다.

답 $\frac{1}{e}$

x	\dots	1	\dots
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow

0855 $f(x)=(x^2-3)e^x$ 에서
 $f'(x)=2xe^x+(x^2-3)e^x$
 $= (x^2+2x-3)e^x = (x+3)(x-1)e^x$... ①
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	-4	...	-3	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{13}{e^4}$	↗	$\frac{6}{e^3}$	↘	$-2e$	↗	e^2

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최대이고, $x=1$ 일 때 최소이므로
 $a=2, b=1$... ②
 $\therefore a+b=3$... ③
답 3

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0856 $f(x)=x^2 \ln x$ 에서 $x>0$ 이고
 $f'(x)=2x \ln x + x$
 $= x(2 \ln x + 1)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ ($\because x>0$)

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{e}}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 일 때 최솟값 $-\frac{1}{2e}$ 을 갖는다.

답 ⑤

0857 $f(x)=x \cos x - \sin x$ 에서
 $f'(x)=\cos x - x \sin x - \cos x$
 $= -x \sin x$

$f'(x)=0$ 에서 $x \sin x=0$
 $\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0 \leq x \leq 2\pi$)

x	0	...	π	...	2π
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\pi$	↗	2π

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\pi$ 일 때 최솟값 $-\pi$ 를 갖는다. **답 $-\pi$**

0858 $f(x)=(1+\cos x) \sin x$ 에서
 $f'(x)=-\sin^2 x + (1+\cos x) \cos x$
 $= \cos^2 x - 1 + \cos x + \cos^2 x$
 $= 2\cos^2 x + \cos x - 1$
 $= (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$

$f'(x)=0$ 에서 $\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0 \leq x \leq 2\pi$)

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{3}$ 일 때 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x=\frac{5}{3}\pi$ 일 때 최솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 을 가지므로 구하는 곱은

$\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{27}{16}$

답 ②

0859 $f(x)=\cos^3 x - 6\sin^2 x + 1$
 $= \cos^3 x - 6(1-\cos^2 x) + 1$
 $= \cos^3 x + 6\cos^2 x - 5$

$\cos x=t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 $-1 \leq t \leq 1$ 이고, 주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$g(t)=t^3+6t^2-5$

$\therefore g'(t)=3t^2+12t=3t(t+4)$

$g'(t)=0$ 에서 $t=0$ ($\because -1 \leq t \leq 1$)

t	-1	...	0	...	1
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	0	↘	-5	↗	2

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최댓값 2, $t=0$ 일 때 최솟값 -5를 가지므로 구하는 합은 $2+(-5)=-3$ **답 -3**

0860 $3^x=t$ 로 놓으면 $t>0$ 이고, 주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$g(t)=t^3-t^2-t$

$\therefore g'(t)=3t^2-2t-1=(3t+1)(t-1)$

$g'(t)=0$ 에서 $t=1$ ($\because t>0$)

t	0	...	1	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		↘	-1	↗

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최솟값 -1을 갖는다. **답 ③**

0861 $\log_2 x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{2} \leq x \leq 16$ 에서

$-1 \leq t \leq 4$... ①

주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$g(t)=t^4-4t^3$

$\therefore g'(t)=4t^3-12t^2=4t^2(t-3)$... ②

$g'(t)=0$ 에서 $t=0$ 또는 $t=3$

t	-1	...	0	...	3	...	4
$g'(t)$		-	0	-	0	+	
$g(t)$	5	↘	0	↘	-27	↗	0

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=-1$ 일 때 최댓값 5, $t=3$ 일 때 최솟값 -27을 가지므로

$M=5, m=-27$... ③

$\therefore M-m=32$... ④

답 32

채점 기준	비율
① $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
② $g(t), g'(t)$ 를 구할 수 있다.	20 %
③ M, m 의 값을 구할 수 있다.	40 %
④ $M-m$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0862 $f(x) = x \ln x - x + a$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \ln x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$a-1$	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최솟값 $a-1$ 을 가지므로
 $a-1=2 \quad \therefore a=3$

답 ③

0863 $f(x) = xe^{kx}$ 에서

$$f'(x) = e^{kx} + kxe^{kx} = (kx+1)e^{kx}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\frac{1}{k}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{k}$ 일

때 최댓값 $-\frac{1}{ke}$ 을 가지므로

$$-\frac{1}{ke} = 1 \quad \therefore k = -\frac{1}{e}$$

x	...	$-\frac{1}{k}$...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	/	$-\frac{1}{ke}$	\

답 $-\frac{1}{e}$

0864 $f(x) = a(x+2\cos x)$ 에서

$$f'(x) = a(1-2\sin x)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$2a$	/	$\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)a$	\	$\frac{\pi}{2}a$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 일 때 최댓값 $\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)a$, $x = \frac{\pi}{2}$ 일 때

최솟값 $\frac{a}{2}\pi$ 를 가지므로

$$\frac{a}{2}\pi = \pi \quad \therefore a = 2$$

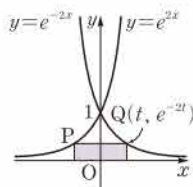
따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right) \cdot 2 = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

답 ⑤

0865 두 곡선 $y = e^{2x}$ 과 $y = e^{-2x}$ 은 y 축에 대하여 대칭이므로 제1사분면에 있는 직사각형의 꼭짓점을 $Q(t, e^{-2t})$ ($t > 0$), 직사각형의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = 2te^{-2t}$$



$$\begin{aligned} \therefore S'(t) &= 2e^{-2t} - 4te^{-2t} \\ &= 2(1-2t)e^{-2t} \end{aligned}$$

$$S'(t) = 0 \text{에서 } t = \frac{1}{2}$$

t	0	...	$\frac{1}{2}$...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		/	$\frac{1}{e}$	\

따라서 $S(t)$ 는 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{1}{e}$ 을 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{e}$ 이다.

답 $\frac{1}{e}$

0866 $P(a, a), Q(a, \sqrt{a-1})$ 이므로

$$PQ = a - \sqrt{a-1}$$

이때 $f(a) = a - \sqrt{a-1}$ 로 놓으면

$$f'(a) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{a-1}} = \frac{2\sqrt{a-1}-1}{2\sqrt{a-1}}$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } 2\sqrt{a-1}-1=0, \quad \sqrt{a-1} = \frac{1}{2}$$

$$a-1 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{5}{4}$$

a	1	...	$\frac{5}{4}$...
$f'(a)$		-	0	+
$f(a)$		\	$\frac{3}{4}$	/

따라서 $f(a)$ 는 $a = \frac{5}{4}$ 일 때 최솟값 $\frac{3}{4}$ 을 가지므로 PQ 의 길이의 최솟값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

답 ③

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
① PQ 의 길이를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② $f'(a)$ 를 구할 수 있다.	20 %
③ PQ 의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0867 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r ($0 < r < 6$)라 하면

$$6(2\pi - \theta) = 2\pi r, \quad 2\pi - \theta = \frac{r}{3}\pi$$

$$\therefore \theta = 2\pi - \frac{r}{3}\pi \quad \dots\dots ①$$

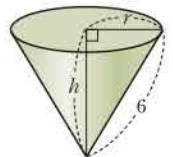
원뿔의 높이를 h 라 하면 $h = \sqrt{36-r^2}$ 이므로 원뿔의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{36-r^2}$$

$$\therefore V'(r) = \frac{1}{3}\pi \left(2r\sqrt{36-r^2} + r^2 \cdot \frac{-2r}{2\sqrt{36-r^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2r(36-r^2) - r^3}{\sqrt{36-r^2}}$$

$$= \frac{\pi r(24-r^2)}{\sqrt{36-r^2}}$$



$V'(r)=0$ 에서 $r=2\sqrt{6}$ ($\because 0 < r < 6$)

r	0	...	$2\sqrt{6}$...	6
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(r)$ 는 $r=2\sqrt{6}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 이것을 ㉠에 대입하면 구하는 θ 의 값은

$$\theta = 2\pi - \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \quad \text{답 } 2\pi - \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$$

0868 방정식 $(x+1)e^{-x}=k$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=(x+1)e^{-x}$ 과 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. $f(x)=(x+1)e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}=-xe^{-x}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$

x	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	1	↘

이때 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=-\infty$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

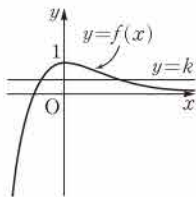
따라서 곡선 $y=f(x)$ 과 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$0 < k < 1$$

즉 $a=0$, $b=1$ 이므로

$$a+b=1$$

답 1



0869 방정식 $\frac{10}{x^2-4x+5}=k$ 가 적어도 하나의 실근을 가지려면

곡선 $y=\frac{10}{x^2-4x+5}$ 과 직선 $y=k$ 가 만나야 한다.

$f(x)=\frac{10}{x^2-4x+5}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=-\frac{10(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2}=-\frac{20(x-2)}{(x^2-4x+5)^2}$$

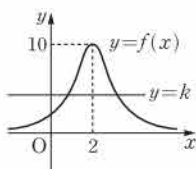
$f'(x)=0$ 에서 $x=2$

x	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	10	↘

이때 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$ 이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 과 직선 $y=k$ 가 만나려면 $0 < k \leq 10$ 이므로 정수 k 는 1, 2, 3, ..., 10의 10개이다.



답 10

0870 $\ln x - x + k = 0$ 에서 $\ln x - x = -k$ ㉠

$f(x)=\ln x - x$ 로 놓으면 $x > 0$ 이고

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	-1	↘

이때 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=-\infty$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

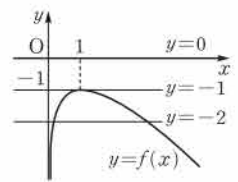
ㄱ. 곡선 $y=f(x)$ 과 직선 $y=0$ 은 만나지 않으므로 $k=0$ 일 때, 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 과 직선 $y=-1$ 은 한 점에서 만나므로 $k=1$ 일 때, 방정식 ㉠은 오직 한 개의 실근을 갖는다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 과 직선 $y=-2$ 은 서로 다른 두 점에서 만나므로 $k=2$ 일 때, 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤



0871 $x=1$ 을 주어진 방정식에 대입하면 성립하지 않으므로 $x=1$ 은 주어진 방정식의 해가 아니다.

즉 $x \neq 1$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 $(x-1)^2$ 으로 나누면

$$\frac{x^3}{(x-1)^2}=k$$

따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선

$y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ 과 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ 으로 놓으면 $x \neq 1$ 이고

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	...	0	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	+		-	0	+
$f(x)$	↗	0	↗		↘	$\frac{27}{4}$	↗

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty$,

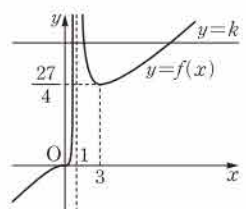
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=\infty$ 이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 과 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$$k > \frac{27}{4}$$

$$\text{답 } k > \frac{27}{4}$$



0872 방정식 $e^{2x}=kx$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^{2x}$ 과 직선 $y=kx$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=e^{2x}$, $g(x)=kx$ 로 놓으면

$$f'(x)=2e^{2x}, g'(x)=k$$

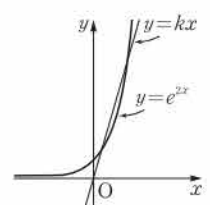
곡선 $y=f(x)$ 과 직선 $y=g(x)$ 가 접할 때, 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서 } e^{2t}=kt$$

..... ㉠

$$f'(t)=g'(t) \text{에서 } 2e^{2t}=k$$

..... ㉡



㉔을 ㉓에 대입하면

$$e^{2t} = 2e^{2t} \cdot t, \quad e^{2t}(2t-1)=0$$

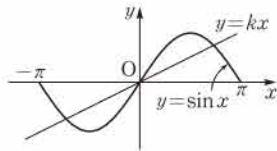
$$\therefore t = \frac{1}{2}$$

이것을 ㉔에 대입하면 $k=2e$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $k > 2e$ 답 ⑤

0873 $\sin x - kx = 0$ 에서 $\sin x = kx$

따라서 구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 방정식 $\sin x - kx = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 $-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 곡선 $y = \sin x$ 와 직선 $y = kx$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. → ①



$y = \sin x$ 에서 $y' = \cos x$ 이므로 곡선 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 0 = \cos 0 \cdot (x - 0) \quad \therefore y = x \quad \rightarrow ②$$

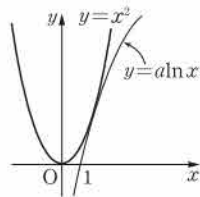
따라서 곡선 $y = \sin x$ 와 직선 $y = kx$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $0 < k < 1$ → ③

답 $0 < k < 1$

채점 기준	비율
① 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	20 %
② 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
③ k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0874 $a \ln x - x^2 = 0$ 에서 $a \ln x = x^2$

따라서 방정식 $a \ln x - x^2 = 0$ 이 오직 하나의 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y = a \ln x$, $y = x^2$ 이 접해야 한다. $f(x) = a \ln x$, $g(x) = x^2$ 으로 놓으면



$$f'(x) = \frac{a}{x}, \quad g'(x) = 2x$$

접점의 x 좌표를 $t(t > 0)$ 라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } a \ln t = t^2 \quad \dots\dots ㉑$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } \frac{a}{t} = 2t \quad \therefore a = 2t^2 \quad \dots\dots ㉒$$

㉔을 ㉑에 대입하면 $2t^2 \ln t = t^2$

$$\ln t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = \sqrt{e}$$

이것을 ㉒에 대입하면 $a = 2e$ 답 ④

0875 $f(x) = ax^2 + 4 \sin x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 2ax + 4 \cos x$$

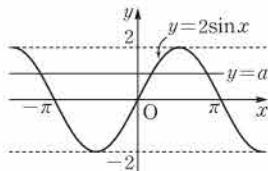
$$f''(x) = 2a - 4 \sin x$$

곡선 $y = f(x)$ 가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x) = 0$ 이 실근을 갖고 그 실근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$$f''(x) = 0 \text{에서 } 2a - 4 \sin x = 0$$

$$\therefore 2 \sin x = a$$

이 방정식이 실근을 가지려면 곡선 $y = 2 \sin x$ 와 직선 $y = a$ 가 만나야 하므로 오른쪽 그림에서



$$-2 \leq a \leq 2$$

이때 $a = -2$ 또는 $a = 2$ 이면

$$f''(x) = -4(1 + \sin x) \text{ 또는 } f''(x) = 4(1 - \sin x)$$

$$\therefore f''(x) \leq 0 \text{ 또는 } f''(x) \geq 0$$

즉 $f''(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

$$\therefore -2 < a < 2$$

따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다. 답 ③

참고 (i) $a = -2$ 일 때

$$f''(x) = -4(1 + \sin x) \text{이고 } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{에서}$$

$$0 \leq 1 + \sin x \leq 2 \quad \therefore -8 \leq -4(1 + \sin x) \leq 0$$

$$\therefore f''(x) \leq 0$$

(ii) $a = 2$ 일 때

$$f''(x) = 4(1 - \sin x) \text{이고 } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{에서}$$

$$0 \leq 1 - \sin x \leq 2 \quad \therefore 0 \leq 4(1 - \sin x) \leq 8$$

$$\therefore f''(x) \geq 0$$

0876 $f(x) = x^4 - 4x^3 + kx^2$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2kx$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 2k$$

곡선 $y = f(x)$ 가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x) = 0$ 이 실근을 갖지 않거나 실근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않아야 한다. $f''(x) = 0$ 에서

$$12x^2 - 24x + 2k = 0, \text{ 즉 } 6x^2 - 12x + k = 0$$

이차방정식 $6x^2 - 12x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 36 - 6k \leq 0 \quad \therefore k \geq 6$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 6이다. 답 ⑤

0877 $f(x) = e^x + e^{-x} + ax^2$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^x - e^{-x} + 2ax$$

$$f''(x) = e^x + e^{-x} + 2a$$

곡선 $y = f(x)$ 가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x) = 0$ 이 실근을 갖고 그 실근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

이때 $e^x > 0$, $e^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f''(x) = e^x + e^{-x} + 2a \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} + 2a$$

$$= 2a + 2 \text{ (단, 등호는 } x = 0 \text{일 때 성립)}$$

따라서 $2a + 2 < 0$ 이어야 하므로

$$a < -1$$

답 $a < -1$

0878 $f(x) = xe^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1$$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 최

솟값 $-\frac{1}{e}$ 을 가지므로 부등식

$$f(x) \geq k \text{가 항상 성립하려면}$$

$$k \leq -\frac{1}{e}$$

따라서 k 의 최댓값은 $-\frac{1}{e}$ 이다. 답 ③

x	\dots	-1	\dots
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	$-\frac{1}{e}$	\nearrow

0879 $x + \frac{1}{2x^2} + k \geq 0$ 에서 $x + \frac{1}{2x^2} \geq -k$

$f(x) = x + \frac{1}{2x^2}$ 로 놓으면 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$\frac{3}{2}$	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$ 을 가지므로 부등식

$f(x) \geq -k$ 가 항상 성립하려면

$-k \leq \frac{3}{2} \quad \therefore k \geq -\frac{3}{2}$

답 $k \geq -\frac{3}{2}$

0880 $f(x) = (\ln x)^2 - 4 \ln x$ 로 놓으면

$f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{4}{x} = \frac{2 \ln x - 4}{x}$

$f'(x) = 0$ 에서 $\ln x = 2 \quad \therefore x = e^2$

x	0	...	e^2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	-4	/

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=e^2$ 일 때 최솟값 -4 를 가지므로 부등식

$f(x) \geq k$ 가 항상 성립하려면

$k \leq -4$

따라서 k 의 최댓값은 -4 이다.

답 -4

0881 $x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\sqrt{x} \geq k \ln x$ 가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x}$ 가 곡선 $y = k \ln x$ 보다 위쪽에 있거나 두 곡선이 접해야 한다.

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = k \ln x$ 로 놓으면

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x) = \frac{k}{x}$

접점의 x 좌표를 $t (t > 0)$ 라 하면

$f(t) = g(t)$ 에서 $\sqrt{t} = k \ln t$ ㉠

$f'(t) = g'(t)$ 에서 $\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{k}{t}$

$\therefore k = \frac{\sqrt{t}}{2}$ ㉡

㉡를 ㉠에 대입하면 $\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{2} \ln t$

$\ln t = 2 \quad \therefore t = e^2$

이것을 ㉡에 대입하면 $k = \frac{e}{2}$

따라서 $0 < k \leq \frac{e}{2}$ 이므로 k 의 최댓값은 $\frac{e}{2}$ 이다.

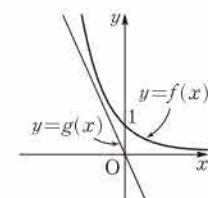
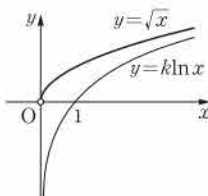
답 ③

0882 곡선 $y = f(x)$ 가 직선 $y = g(x)$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$f(x) = e^{-x}$, $g(x) = mx$ 에서

$f'(x) = -e^{-x}$, $g'(x) = m$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 가 접할 때,



접점의 x 좌표를 t 라 하면

$f(t) = g(t)$ 에서 $e^{-t} = mt$ ㉠

$f'(t) = g'(t)$ 에서 $-e^{-t} = m$ ㉡

㉡를 ㉠에 대입하면 $-m = mt$

$\therefore t = -1$ ㉢

이것을 ㉡에 대입하면 $m = -e$

따라서 구하는 m 의 값의 범위는

$-e < m \leq 0$ ㉣

답 $-e < m \leq 0$

채점 기준	비율
① 주어진 조건을 그림으로 나타낼 수 있다.	20 %
② 곡선과 직선의 접점의 x 좌표를 구할 수 있다.	40 %
③ m 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0883 $1 \leq x \leq 4$ 이므로 $ax \leq \ln x \leq bx$ 에서 $a \leq \frac{\ln x}{x} \leq b$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 로 놓으면 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0$ 에서 $\ln x = 1 \quad \therefore x = e$

x	1	...	e	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	/	$\frac{1}{e}$	\	$\frac{\ln 2}{2}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=e$ 일 때 최댓값 $\frac{1}{e}$, $x=1$ 일 때 최솟값 0을 가지므로 $1 \leq x \leq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$

즉 $a \leq 0$, $b \geq \frac{1}{e}$ 이므로 $b-a$ 의 최솟값은

$\frac{1}{e} - 0 = \frac{1}{e}$

답 ①

0884 점 P의 시간 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$v(t) = f'(t) = \frac{a}{2} \cos \frac{t}{2}$

$v(2\pi) = 2$ 이므로 $\frac{a}{2} \cos \pi = 2$

$-\frac{a}{2} = 2 \quad \therefore a = -4$

답 -4

0885 점 P의 시간 t 에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$v(t) = f'(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{t}}$

$a(t) = f''(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}}$

따라서 $t=4$ 에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v(4) = \frac{1}{2}$, $a(4) = \frac{1}{16}$

답 속도: $\frac{1}{2}$, 가속도: $\frac{1}{16}$

0886 점 P의 시간 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$v(t) = f'(t) = 1 - 2 \sin 2t$

운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $t=a$ 일 때 점 P의 속도가 0이라 하면

$$1 - 2\sin 2a = 0 \quad \therefore \sin 2a = \frac{1}{2}$$

$a > 0$ 이므로

$$2a = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \dots$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \dots$$

따라서 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $\frac{\pi}{12}$ 이다.

답 ①

0887 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$v(t) = f'(t) = p \cos t - q \sin t$$

$$a(t) = f''(t) = -p \sin t - q \cos t$$

$$v(\pi) = -6 \text{이므로} \quad p \cos \pi - q \sin \pi = -6$$

$$-p = -6 \quad \therefore p = 6$$

$$a(\pi) = 4 \text{이므로} \quad -p \sin \pi - q \cos \pi = 4$$

$$\therefore q = 4$$

따라서 $f(t) = 6 \sin t + 4 \cos t$ 이므로 $t = \frac{\pi}{4}$ 에서의 점 P의 위치는

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \cos \frac{\pi}{4} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

답 ③

0888 $\frac{dx}{dt} = 4$, $\frac{dy}{dt} = 4 - 4t$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$(4, 4 - 4t)$$

따라서 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{4^2 + (4 - 4t)^2} = 4\sqrt{t^2 - 2t + 2}$$

$t = a$ 일 때 점 P의 속력이 $4\sqrt{17}$ 이라 하면

$$4\sqrt{a^2 - 2a + 2} = 4\sqrt{17}, \quad a^2 - 2a + 2 = 17$$

$$a^2 - 2a - 15 = 0, \quad (a + 3)(a - 5) = 0$$

$$\therefore a = 5 \quad (\because a > 0)$$

따라서 구하는 시각은 5이다.

답 5

0889 $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 2t - 8$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$(2t, 2t - 8)$$

따라서 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(2t)^2 + (2t - 8)^2} = \sqrt{8(t - 2)^2 + 32}$$

이므로 $t = 2$ 일 때 최솟값 $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ 를 갖는다.

답 ②

0890 $\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{2}{t^2}$, $\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{1}{t^2}$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$\left(1 + \frac{2}{t^2}, 2 - \frac{1}{t^2}\right)$$

→ ①

따라서 $t = 1$ 에서의 점 P의 속도는 $(3, 1)$ 이므로 구하는 속력은

$$\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

→ ②

답 $\sqrt{10}$

채점 기준	비율
① 점 P의 시각 t 에서의 속도를 구할 수 있다.	50 %
② $t = 1$ 에서의 점 P의 속력을 구할 수 있다.	50 %

0891 $\frac{dx}{dt} = t - \frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt} = 2$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$\left(t - \frac{1}{t}, 2\right)$$

따라서 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2} = t + \frac{1}{t} \quad t > 0 \text{이므로 } t + \frac{1}{t} > 0$$

이때 $t > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$$

이고 등호는 $t = \frac{1}{t}$, 즉 $t = 1$ 일 때 성립하므로 구하는 속도는 $(0, 2)$

이다.

답 $(0, 2)$

0892 $\frac{dx}{dt} = 5\sqrt{2}$, $\frac{dy}{dt} = -10t + 5\sqrt{2}$ 이므로 시각 t 에서의 축구공의 속도는

$$(5\sqrt{2}, -10t + 5\sqrt{2})$$

축구공이 지면에 떨어질 때 $y = 0$ 이므로

$$-5t^2 + 5\sqrt{2}t = 0, \quad -5t(t - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore t = \sqrt{2} \quad (\because t > 0)$$

따라서 $t = \sqrt{2}$ 에서의 축구공의 속도는 $(5\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$ 이므로 구하는 속력은

$$\sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (-5\sqrt{2})^2} = 10 \text{ (m/s)}$$

답 ④

0893 $\frac{dx}{dt} = 6$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$(6, 3t^2 - 4)$$

점 P의 속력이 10이므로

$$\sqrt{6^2 + (3t^2 - 4)^2} = 10, \quad (3t^2 - 4)^2 = 64$$

$$3t^2 - 4 = \pm 8, \quad t^2 = 4 \quad (\because t^2 > 0)$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 6t$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 가속도는

$$(0, 6t)$$

따라서 $t = 2$ 에서의 가속도는 $(0, 12)$ 이므로 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{0^2 + 12^2} = 12$$

답 ②

0894 $\frac{dx}{dt} = 2\cos t$, $\frac{dy}{dt} = -8\cos t \sin t = -4\sin 2t$ 에서

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -8\cos 2t$$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 가속도는

$$(-2\sin t, -8\cos 2t)$$

→ ①

$x = 1$ 일 때 $2\sin t = 1$ 에서 $\sin t = \frac{1}{2}$ 이므로

$$t = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

→ ②

따라서 $t = \frac{\pi}{6}$ 에서의 가속도는 $(-1, -4)$ 이므로 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

→ ③

답 $\sqrt{17}$

채점 기준	비율
① 점 P의 시간 t 에서의 가속도를 구할 수 있다.	40 %
② 점 P의 위치가 (1, 3)일 때의 시각을 구할 수 있다.	30 %
③ 점 P의 위치가 (1, 3)일 때의 가속도의 크기를 구할 수 있다.	30 %

0895 [전략] 함수 $f(x)$ 에 대하여 어떤 구간에서 $f''(x) > 0$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 아래로 볼록하고, $f''(x) < 0$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 위로 볼록하다.

[풀이] $f(x) = 3x - 2\cos x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3 + 2\sin x, \quad f''(x) = 2\cos x$$

곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록하려면 $f''(x) < 0$ 이어야 하므로 $2\cos x < 0, \quad \cos x < 0$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록한 구간은 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ 이다.

답 ③

0896 [전략] $y=f(x)$ 의 그래프를 그릴 때에는 $f'(x)=0, f''(x)=0$ 이 되는 x 의 값을 구하고 그 값을 경계로 나눈 구간에서 $f'(x), f''(x)$ 의 부호를 조사한다.

[풀이] $f(x) = (3-x)e^x$ 에서

$$f'(x) = -e^x + (3-x)e^x = (2-x)e^x$$

$$f''(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$$

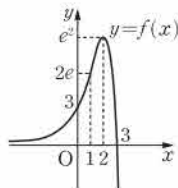
$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=2$$

$$f''(x)=0 \text{에서} \quad x=1$$

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-
$f(x)$	\nearrow	$2e$	\nearrow	e^2	\searrow

이때 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 ②



0897 [전략] 닫힌구간에서의 함수의 최대, 최소는 극값과 구간의 양 끝 점의 함수값을 구하여 비교한다.

[풀이] $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$ 에서

$$f'(x) = 2\sqrt{x+1} + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1)+x}{\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x = -\frac{2}{3}$$

x	-1	...	$-\frac{2}{3}$...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	\searrow	$-\frac{4\sqrt{3}}{9}$	\nearrow	$2\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최솟값 $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$ 을 갖는다.

답 $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$

0898 [전략] 방정식 $f(x)=k$ 의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

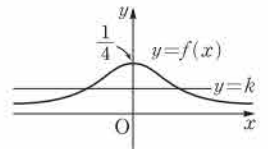
[풀이] 방정식 $\frac{1}{x^2+4} = k$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선

$y = \frac{1}{x^2+4}$ 과 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. ... ①

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4} \text{로 놓으면} \quad f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=0$$

x	\dots	0	\dots
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	$\frac{1}{4}$	\searrow



이때 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이

므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같다. ... ②

따라서 곡선 $y = \frac{1}{x^2+4}$ 과 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$0 < k < \frac{1}{4}$$

... ③

$$\text{답 } 0 < k < \frac{1}{4}$$

채점 기준	비율
① 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	30 %
② $y=f(x)$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
③ k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

0899 [전략] 점 P의 시간 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=f(t), y=g(t)$ 일 때, 시간 t 에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$ 임을 이용한다.

[풀이] $\frac{dx}{dt} = e^t, \frac{dy}{dt} = e^{-t}$ 이므로 점 P의 시간 t 에서의 속도는 (e^t, e^{-t})

따라서 $t = \ln 2$ 에서의 점 P의 속도는 $(2, \frac{1}{2})$ 이므로 구하는 속력은

$$\sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{17}}{2}$

0900 [전략] 곡선 $y=f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 위로 볼록하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x) \leq 0$ 이어야 한다.

[풀이] $f(x) = -x^4 + ax^3 + 3ax^2 + 5$ 로 놓으면

$$f'(x) = -4x^3 + 3ax^2 + 6ax$$

$$f''(x) = -12x^2 + 6ax + 6a$$

곡선 $y=f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 위로 볼록하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x) \leq 0$ 이어야 하므로 부등식 $-12x^2 + 6ax + 6a \leq 0$, 즉 $2x^2 - ax - a \geq 0$ 이 항상 성립해야 한다.

방정식 $2x^2 - ax - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 + 8a \leq 0, \quad a(a+8) \leq 0$$

$$\therefore -8 \leq a \leq 0$$

따라서 a 의 최솟값은 -8 이다.

답 -8

0901 [전략] 곡선 $y=f(x)$ 가 주어진 구간에서 위로 볼록하려면 주어진 구간에서 $f''(x) \leq 0$ 이어야 한다.

[풀이] $\neg, f(x) = \ln(x^2+4)$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+4) - 2x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-2(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$$

구간 $(2, \infty)$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록하다.

ㄴ. $f(x) = e^x \cos x$ 로 놓으면

$$f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x)$$

$$f''(x) = e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$$

구간 $(0, \pi)$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록하다.

ㄷ. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

구간 $(-1, 0)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 는 아래로 볼록하다.

이상에서 주어진 구간에서 위로 볼록한 곡선은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0902 전략 함수 $f(x)$ 의 변곡점을 구할 때에는 $f''(x)=0$ 인 x 의 값의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호를 조사한다.

풀이 $f(x) = 2xe^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2(x+1)e^x$$

$$f''(x) = 2e^x + 2(x+1)e^x = 2(x+2)e^x$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=-2$$

$$x < -2 \text{일 때 } f''(x) < 0, x > -2 \text{일 때 } f''(x) > 0$$

즉 $x=-2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-2, -\frac{4}{e^2})$ 이다.

→ ①

점 $(-2, -\frac{4}{e^2})$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(-2) = -\frac{2}{e^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y + \frac{4}{e^2} = -\frac{2}{e^2}(x+2)$$

$$\therefore y = -\frac{2}{e^2}x - \frac{8}{e^2}$$

→ ②

따라서 구하는 y 절편은 $-\frac{8}{e^2}$ 이다.

→ ③

답 $-\frac{8}{e^2}$

채점 기준	비율
① 변곡점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
② 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
③ y 절편을 구할 수 있다.	20 %

0903 전략 $f'(x)=0$, $f''(x)=0$ 이 되는 x 의 값을 구하고 그 값을 경계로 나눈 구간에서의 $f'(x)$, $f''(x)$ 의 부호를 조사하여 극대, 극소가 되는 점과 변곡점을 구한다.

풀이 $f'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=d$ 또는 $x=f$
 $f''(x)=0$ 에서 $x=b$ 또는 $x=0$ 또는 $x=c$ 또는 $x=e$

x	...	a	...	b	...	0	...	c
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	+	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↘	변곡점	↗	변곡점

x	...	d	...	e	...	f	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	↗	극대	↘	변곡점	↘	극소	↗

ㄱ. 구간 $[a, f]$ 에서 변곡점은 4개이다.

ㄴ. 구간 $[a, e]$ 에서 극대가 되는 x 는 d 의 1개이다.

ㄷ. 구간 $[a, e]$ 에서 $f(x)$ 는 $x=d$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(d)$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0904 전략 주어진 함수를 한 종류의 삼각함수로 나타낸 후 $\cos x=t$ 로 놓고 주어진 구간에서의 극값과 구간의 양 끝 점의 함숫값을 구하여 비교한다.

$$\text{풀이 } f(x) = 2\cos^3 x - 3\sin^2 x + 2$$

$$= 2\cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) + 2$$

$$= 2\cos^3 x + 3\cos^2 x - 1$$

$\cos x=t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 $-1 \leq t \leq 1$ 이고, 주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = 2t^3 + 3t^2 - 1$$

$$\therefore g'(t) = 6t^2 + 6t = 6t(t+1)$$

$$g'(t)=0 \text{에서 } t=-1 \text{ 또는 } t=0$$

t	-1	...	0	...	1
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	0	↘	-1	↗	4

따라서 $g(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최대이고, $t=0$ 일 때 최소이다.

이때 $\cos x=t$ 이므로 $\cos a=1$, $\cos b=0$ 에서

$$a=0, b=\frac{\pi}{2} (\because 0 \leq a \leq \pi, 0 \leq b \leq \pi)$$

$$\therefore a+b=\frac{\pi}{2}$$

답 ③

주의 a, b 는 함수 $f(x)$ 가 각각 최대, 최소일 때의 x 의 값이다. $a=1, b=0$ 으로 착각하지 않도록 주의한다.

0905 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 임을 이용한다.

풀이 $f(x) = 2e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = -2e^{-x}$$

이므로 점 $P(t, 2e^{-t})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 2e^{-t} = -2e^{-t}(x-t)$$

$$\therefore y = -2e^{-t}x + 2e^{-t}(t+1)$$

따라서 $A(0, 2e^{-t})$, $B(0, 2e^{-t}(t+1))$ 이므로

$$\overline{AB} = 2te^{-t}$$

$\triangle APB$ 의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot 2te^{-t} = t^2 e^{-t}$$

이므로

$$S'(t) = 2te^{-t} - t^2e^{-t} = t(2-t)e^{-t}$$

$$S'(t) = 0 \text{에서 } t = 2 (\because t > 0)$$

t	0	...	2	...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		↗	극대	↘

따라서 $S(t)$ 는 $t=2$ 일 때 극대이면서 최대이다.

답 ④

0906 전략 증감표를 만들어 극대, 극소와 변곡점을 찾아 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x) = 2\ln(5-x) + \frac{1}{4}x^2$ 에서 $x < 5$ 이고

$$f'(x) = \frac{-2}{5-x} + \frac{x}{2} = \frac{2}{x-5} + \frac{x}{2} = \frac{(x-1)(x-4)}{2(x-5)}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(x-5)^2} + \frac{1}{2} = \frac{(x-3)(x-7)}{2(x-5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } x = 3 (\because x < 5)$$

x	...	1	...	3	...	4	...	5
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-	
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-	
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	극대	↘	

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 개수는 1이다.

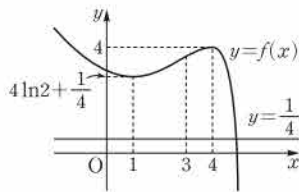
ㄷ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직

선 $y = \frac{1}{4}$ 은 오른쪽 그림과 같

으므로 방정식 $f(x) = \frac{1}{4}$ 의

실근의 개수는 1이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



답 ③

0907 전략 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $x^2 \ln x - 2x^2 + \frac{k}{2}x = 0$ 에서

$$x^2 \ln x - 2x^2 = -\frac{k}{2}x$$

$x > 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x \ln x - 2x = -\frac{k}{2}$$

따라서 방정식 $x^2 \ln x - 2x^2 + \frac{k}{2}x = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지

려면 곡선 $y=x \ln x - 2x$ 와 직선 $y = -\frac{k}{2}$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x) = x \ln x - 2x$ 로 놓으면

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 2 = \ln x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x = 1 \therefore x = e$$

x	0	...	e	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$-e$	↗

이때 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

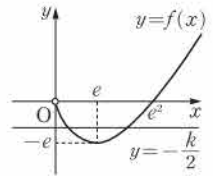
따라서 곡선 $y=x \ln x - 2x$ 와 직선

$y = -\frac{k}{2}$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$-e < -\frac{k}{2} < 0 \therefore 0 < k < 2e$$

$e=2.7$ 에서 $0 < k < 5.4$ 이므로 자연수 k 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5



0908 전략 $x > a$ 에서 $f'(x) > 0$ 일 때, 부등식 $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(a) \geq 0$ 이어야 함을 이용한다.

풀이 $x > 0$ 에서 $f(x) > g(x)$ 가 성립하려면

$$2\cos x > k - 2x^2, \text{ 즉 } 2\cos x + 2x^2 - k > 0$$

이어야 한다.

$h(x) = 2\cos x + 2x^2 - k$ 로 놓으면

$$h'(x) = -2\sin x + 4x, h''(x) = -2\cos x + 4$$

$x > 0$ 에서 $h''(x) > 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $h'(x)$ 는 증가하고 $h'(0) = 0$ 이므로

$$h'(x) > 0$$

$x > 0$ 에서 $h(x)$ 는 증가하고 $h(0) = 2 - k$ 이므로 $h(x) > 0$ 이려면

$$2 - k \geq 0 \therefore k \leq 2$$

따라서 k 의 최댓값은 2이다.

답 2

0909 전략 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 x 가 $x=f(t)$ 일 때, 시각 t 에서의 점 P의 속도 v 와 가속도 a 는 각각 $f'(t)$, $f''(t)$ 이다.

풀이 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$v(t) = x'(t) = 1 + \frac{20}{\pi^2} \cdot 2\pi \cdot \{-\sin(2\pi t)\}$$

$$= 1 - \frac{40}{\pi} \sin(2\pi t)$$

$$a(t) = x''(t) = -\frac{40}{\pi} \cdot 2\pi \cdot \cos(2\pi t)$$

$$= -80 \cos(2\pi t)$$

따라서 $t = \frac{1}{3}$ 에서의 가속도의 크기는

$$\left| a\left(\frac{1}{3}\right) \right| = \left| -80 \cos \frac{2}{3}\pi \right| = 40$$

답 40

0910 전략 $y = \log_a f(x)$ 에서 $a > 1$ 이면 $f(x)$ 가 최대일 때 y 의 값도 최대가 됨을 이용한다.

풀이 $x+y=3$ 에서 $y=3-x$

진수의 조건에서 $x+9 > 0$, $y > 0$ 이므로

$$x+9 > 0, 3-x > 0 \therefore -9 < x < 3$$

$f(x) = \log_2(x+9) + \log_4 y$ 로 놓으면

$$f(x) = \log_2(x+9) + \log_4(3-x)$$

$$= \log_4(x+9)^2 + \log_4(3-x)$$

$$= \log_4(x+9)^2(3-x)$$

$g(x) = (x+9)^2(3-x)$ 로 놓으면 밑이 1보다 크므로 $g(x)$ 가 최대일 때 $f(x)$ 도 최대가 된다.

$$g'(x) = 2(x+9)(3-x) - (x+9)^2 \\ = -3(x+9)(x+1)$$

$g'(x)=0$ 에서 $x=-1$ ($\because -9 < x < 3$)

x	-9	...	-1	...	3
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$		/	256	\	

따라서 $g(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최댓값 256을 가지므로 $f(x)$ 의 최댓값은 $\log_4 256 = \log_2 2^8 = \frac{8}{2} = 4$ 답 ④

0911 전략 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀐다.

풀이 $f(x) = \frac{x^3+kx}{x^2+2}$ 에서

$$f'(x) = \frac{(3x^2+k)(x^2+2) - (x^3+kx) \cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^4 + (6-k)x^2 + 2k}{(x^2+2)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$

$$\frac{1 + (6-k) + 2k}{9} = 0 \quad \therefore k = -7$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^3 - 7x}{x^2 + 2},$$

$$f'(x) = \frac{x^4 + 13x^2 - 14}{(x^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 14)(x + 1)(x - 1)}{(x^2 + 2)^2}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	2	\	-2	/	-1

따라서 구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최댓값 2, $x=1$ 일 때 최솟값 -2를 가지므로

$$M=2, m=-2$$

$$\therefore M^2 + m^2 = 8$$

채점 기준	비율
① k 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $f(x), f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ M, m 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $M^2 + m^2$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0912 전략 평행선과 엇각의 성질을 이용하여 크기가 같은 각을 찾고 \overline{QR} 의 길이를 θ 로 나타낸다.

풀이 $\overline{AO} \parallel \overline{PQ}$ 이므로

$$\angle QPS = \theta \text{ (엇각)}$$

$\overline{OA} = \overline{OP}$ 이므로

$$\angle OPA = \theta$$

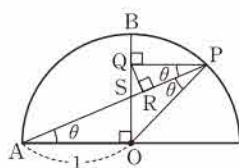
$$\therefore \angle OPQ = 2\theta$$

$$\triangle OPQ \text{에서 } \overline{PQ} = \overline{OP} \cos 2\theta = \cos 2\theta$$

$\triangle PQR$ 에서

$$\overline{QR} = \overline{PQ} \sin \theta = \cos 2\theta \sin \theta = (1 - 2\sin^2 \theta) \sin \theta$$

$$= -2\sin^3 \theta + \sin \theta$$



$\sin \theta = t$ 로 놓으면 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고,

$$f(t) = \overline{QR} = -2t^3 + t \text{라 하면}$$

$$f'(t) = -6t^2 + 1$$

$$f'(t)=0 \text{에서 } t = \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\because 0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

t	0	...	$\frac{\sqrt{6}}{6}$...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		/	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	\	

따라서 $f(t)$ 는 $t = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 일 때 최댓값 $\frac{\sqrt{6}}{9}$ 을 가지므로 \overline{QR} 의 길이의

최댓값은 $\frac{\sqrt{6}}{9}$ 이다. 답 $\frac{\sqrt{6}}{9}$

0913 전략 방정식 $f(x)=g(x)$ 가 a 보다 큰 서로 다른 두 실근을 가지려면 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 $x>a$ 인 부분에서 서로 다른 두 교점을 가져야 한다.

풀이 방정식 $\frac{kx}{x^2+2}=2$ 가 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야

하므로 곡선 $y = \frac{kx}{x^2+2}$ 와 직선 $y=2$ 가 $x>1$ 에서 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x) = \frac{kx}{x^2+2}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{k(x^2+2) - kx \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-kx^2 + 2k}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{-k(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	...	$-\sqrt{2}$...	$\sqrt{2}$...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	$-\frac{k\sqrt{2}}{4}$	/	$\frac{k\sqrt{2}}{4}$	\

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그

래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=2$ 가 $x>1$ 에서 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$f(1) < 2, \frac{k\sqrt{2}}{4} > 2$$

이어야 한다.

$$f(1) < 2 \text{에서 } \frac{k}{3} < 2 \quad \therefore k < 6$$

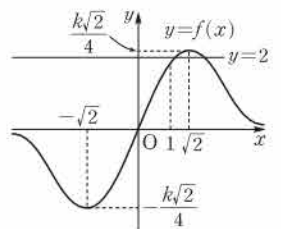
$$\frac{k\sqrt{2}}{4} > 2 \text{에서 } k > 4\sqrt{2}$$

$$\text{①, ②에서 } 4\sqrt{2} < k < 6$$

..... ①

..... ②

답 ③



0914 전략 $px \leq f(x) \leq qx$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 가 직선 $y=px$ 에 접하거나 그 위쪽에 있어야 하고, 직선 $y=qx$ 에 접하거나 그 아래쪽에 있어야 한다.

풀이 $f(x)=e^x+1$, $g(x)=ax+2$,
 $h(x)=bx+2$ 로 놓자.

주어진 부등식을 만족시키려면 오른쪽
 그림과 같이 $0 \leq x \leq 1$ 에서 곡선

$y=f(x)$ 가 직선 $y=g(x)$ 보다 위쪽에
 있거나 접해야 하고, 직선 $y=h(x)$ 보
 다 아래쪽에 있거나 $x=1$ 인 점에서 만
 나야 한다.

$f'(x)=e^x$ 에서 $f'(0)=1$

이때 $f(0)=2$ 이므로 $g(x) \leq f(x)$ 이라면 직선 $y=g(x)$ 의 기울기
 a 가 $a \leq 1$ 이어야 한다.

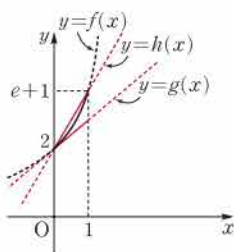
또 $h(1) \geq e+1$ 이어야 하므로

$$b+2 \geq e+1 \quad \therefore b \geq e-1$$

따라서 $M=1$, $m=e-1$ 이므로

$$M+m=e$$

답 ⑤



08

여러 가지 적분법

Ⅲ. 적분법

$$0915 \quad \int x^{\frac{5}{3}} dx = \frac{1}{\frac{5}{3}+1} x^{\frac{5}{3}+1} + C = \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} + C = \frac{3}{8} x^{\frac{2}{3}} \sqrt{x^2} + C$$

$$\text{답 } \frac{3}{8} x^{\frac{2}{3}} \sqrt{x^2} + C$$

$$0916 \quad \int x^{-5} dx = \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + C = -\frac{1}{4} x^{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$$

$$\text{답 } -\frac{1}{4x^4} + C$$

$$0917 \quad \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

$$\text{답 } \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

$$0918 \quad \int \sqrt[4]{x} dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4}+1} x^{\frac{1}{4}+1} + C$$

$$= \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{5} x \sqrt[4]{x} + C$$

$$\text{답 } \frac{4}{5} x \sqrt[4]{x} + C$$

$$0919 \quad \int \sqrt[5]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{5}} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{5}+1} x^{\frac{2}{5}+1} + C$$

$$= \frac{5}{7} x^{\frac{7}{5}} + C = \frac{5}{7} x \sqrt[5]{x^2} + C$$

$$\text{답 } \frac{5}{7} x \sqrt[5]{x^2} + C$$

$$0920 \quad \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C$$

$$= -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$\text{답 } -\frac{1}{x} + C$$

$$0921 \quad \int \frac{4}{x} dx = 4 \int \frac{1}{x} dx = 4 \ln|x| + C$$

$$\text{답 } 4 \ln|x| + C$$

$$0922 \quad \int x \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$$

$$\text{답 } \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$$

$$0923 \quad \int \left(x + \frac{1}{x^3}\right) dx = \int (x + x^{-3}) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^{-2} + C$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2x^2} + C$$

$$\text{답 } \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2x^2} + C$$

$$\begin{aligned}
 0924 \quad \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) dx &= \int \left(\frac{1}{x} - x^{-2} + x^{-4} \right) dx \\
 &= \ln|x| + x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-3} + C \\
 &= \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C \\
 &\quad \text{답 } \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0925 \quad \int \frac{5x-2}{x^2} dx &= \int \left(\frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int \left(\frac{5}{x} - 2x^{-2} \right) dx \\
 &= 5\ln|x| + 2x^{-1} + C \\
 &= 5\ln|x| + \frac{2}{x} + C \\
 &\quad \text{답 } 5\ln|x| + \frac{2}{x} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0926 \quad \int \frac{x^3+x^2-4}{x^3} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} \right) dx \\
 &= \int \left(1 + \frac{1}{x} - 4x^{-3} \right) dx \\
 &= x + \ln|x| + 2x^{-2} + C \\
 &= x + \ln|x| + \frac{2}{x^2} + C \\
 &\quad \text{답 } x + \ln|x| + \frac{2}{x^2} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0927 \quad \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx \\
 &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C \\
 &= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C \\
 &\quad \text{답 } \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0928 \quad \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx &= \int (3x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}) dx \\
 &= 6x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + C \\
 &= 6\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C \\
 &\quad \text{답 } 6\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0929 \quad \int \frac{2x^2-1}{\sqrt{x}} dx &= \int (2x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) dx \\
 &= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C \\
 &= \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C \\
 &\quad \text{답 } \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0930 \quad \int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx &= \int \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} dx \\
 &= \int (\sqrt{x}+1) dx = \int (x^{\frac{1}{2}}+1) dx \\
 &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x + C \\
 &\quad \text{답 } \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0931 \quad \int \sqrt{x}(x+1)^2 dx &= \int \sqrt{x}(x^2+2x+1) dx \\
 &= \int (x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) dx \\
 &= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\
 &= \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C \\
 &\quad \text{답 } \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0932 \quad \int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} dx &= \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x} dx \\
 &= \int \left(1 - 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= x - 4x^{\frac{1}{2}} + \ln|x| + C \\
 &= x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C \\
 &\quad \text{답 } x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0933 \quad \int \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x - \frac{1}{x} \right) dx &= \int \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx \\
 &= \int (x^2 - x^{-2}) dx \\
 &= \frac{1}{3}x^3 + x^{-1} + C \\
 &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x} + C \\
 &\quad \text{답 } \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x} + C
 \end{aligned}$$

$$0934 \quad \int 2e^x dx = 2 \int e^x dx = 2e^x + C \quad \text{답 } 2e^x + C$$

$$\begin{aligned}
 0935 \quad \int e^{x+3} dx &= \int e^x \cdot e^3 dx = e^3 \int e^x dx \\
 &= e^3 \cdot e^x + C = e^{x+3} + C \\
 &\quad \text{답 } e^{x+3} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0936 \quad \int 4^{x+2} dx &= \int 4^x \cdot 4^2 dx = 4^2 \int 4^x dx \\
 &= 4^2 \cdot \frac{4^x}{\ln 4} + C = \frac{4^{x+2}}{\ln 4} + C \\
 &\quad \text{답 } \frac{4^{x+2}}{\ln 4} + C
 \end{aligned}$$

$$0937 \quad \int 5^{2x} dx = \int 25^x dx = \frac{25^x}{\ln 25} + C \quad \text{답 } \frac{25^x}{\ln 25} + C$$

$$\begin{aligned}
 0938 \quad \int (2^x-1)^2 dx &= \int (4^x - 2 \cdot 2^x + 1) dx \\
 &= \int 4^x dx - 2 \int 2^x dx + \int 1 dx \\
 &= \frac{4^x}{\ln 4} - 2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + x + C \\
 &= \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + x + C \\
 &\quad \text{답 } \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0939 \quad \int \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}-e^x+1} dx &= \int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^{2x}-e^x+1} dx \\ &= \int (e^x+1) dx \\ &= e^x+x+C \quad \text{답 } e^x+x+C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0940 \quad \int (1-2\cos x) dx &= \int 1 dx - 2 \int \cos x dx \\ &= x - 2\sin x + C \quad \text{답 } x - 2\sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0941 \quad \int 5\sec^2 x dx &= 5 \int \sec^2 x dx = 5\tan x + C \\ &\quad \text{답 } 5\tan x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0942 \quad \int (2\sin x - \cos x) dx &= 2 \int \sin x dx - \int \cos x dx \\ &= -2\cos x - \sin x + C \\ &\quad \text{답 } -2\cos x - \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0943 \quad \int (\csc^2 x + 3x) dx &= -\cot x + \frac{3}{2}x^2 + C \\ &\quad \text{답 } -\cot x + \frac{3}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0944 \quad \int \sec x (\sec x + \tan x) dx &= \int (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx \\ &= \tan x + \sec x + C \\ &\quad \text{답 } \tan x + \sec x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0945 \quad \int \frac{\sin^3 x + 4}{\sin^2 x} dx &= \int \left(\sin x + \frac{4}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= \int (\sin x + 4\csc^2 x) dx \\ &= -\cos x - 4\cot x + C \\ &\quad \text{답 } -\cos x - 4\cot x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0946 \quad \tan^2 x &= \sec^2 x - 1 \text{ 이므로} \\ \int \tan^2 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C \\ \therefore \textcircled{7} \sec^2 x \quad \textcircled{4} \tan x \quad &\quad \text{답 풀이 참조} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0947 \quad \int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx &= \int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} dx \\ &= \int \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x} dx \\ &= \int (1+\cos x) dx \\ &= x + \sin x + C \quad \text{답 } x + \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0948 \quad \int \cos x \tan x dx &= \int \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int \sin x dx \\ &= -\cos x + C \quad \text{답 } -\cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0949 \quad \int \cot^2 x dx &= \int (\csc^2 x - 1) dx \\ &= -\cot x - x + C \quad \text{답 } -\cot x - x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0950 \quad 3x+1 &= t \text{로 놓으면 } x = \frac{t-1}{3}, \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \text{ 이므로} \\ \int (3x+1)^5 dx &= \int t^5 \cdot \frac{1}{3} dt \\ &= \frac{1}{3} \int t^5 dt = \frac{1}{18} t^6 + C \\ &= \frac{1}{18} (3x+1)^6 + C \\ \therefore \textcircled{7} \frac{t-1}{3} \quad \textcircled{4} \frac{1}{3} \quad \textcircled{2} \frac{1}{18} \quad &\quad \text{답 풀이 참조} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0951 \quad x+5 &= t \text{로 놓으면 } x = t-5, \frac{dx}{dt} = 1 \text{ 이므로} \\ \int (x+5)^4 dx &= \int t^4 dt \\ &= \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{5} (x+5)^5 + C \\ &\quad \text{답 } \frac{1}{5} (x+5)^5 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0952 \quad 3x+4 &= t \text{로 놓으면 } x = \frac{t-4}{3}, \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \text{ 이므로} \\ \int \frac{1}{(3x+4)^2} dx &= \int \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^{-2} dt \\ &= -\frac{1}{3t} + C = -\frac{1}{3(3x+4)} + C \\ &\quad \text{답 } -\frac{1}{3(3x+4)} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0953 \quad 2-4x &= t \text{로 놓으면 } x = \frac{2-t}{4}, \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4} \text{ 이므로} \\ \int \cos(2-4x) dx &= \int \cos t \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) dt \\ &= -\frac{1}{4} \sin t + C = -\frac{1}{4} \sin(2-4x) + C \\ &\quad \text{답 } -\frac{1}{4} \sin(2-4x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0954 \quad 5x-1 &= t \text{로 놓으면 } x = \frac{t+1}{5}, \frac{dx}{dt} = \frac{1}{5} \text{ 이므로} \\ \int e^{5x-1} dx &= \int e^t \cdot \frac{1}{5} dt \\ &= \frac{1}{5} e^t + C = \frac{1}{5} e^{5x-1} + C \\ &\quad \text{답 } \frac{1}{5} e^{5x-1} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0955 \quad x-1 &= t \text{로 놓으면 } x = t+1, \frac{dx}{dt} = 1 \text{ 이므로} \\ \int x\sqrt{x-1} dx &= \int (t+1)\sqrt{t} dt = \int (t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}) dt \\ &= \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5} t^2 \sqrt{t} + \frac{2}{3} t \sqrt{t} + C \\ &= \frac{2}{5} (x-1)^2 \sqrt{x-1} + \frac{2}{3} (x-1) \sqrt{x-1} + C \\ &\quad \text{답 } \frac{2}{5} (x-1)^2 \sqrt{x-1} + \frac{2}{3} (x-1) \sqrt{x-1} + C \end{aligned}$$

0956 $\sin x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \boxed{\cos x}$ 이므로

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \boxed{t^2} dt = \boxed{\frac{1}{3}} t^3 + C$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

\therefore (가) $\cos x$ (나) t^2 (다) $\frac{1}{3}$

정답 풀이 참조

0957 $x^2 - 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$ 이므로

$$\int 2x(x^2 - 1)^3 dx = \int t^3 dt$$

$$= \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} (x^2 - 1)^4 + C$$

정답 $\frac{1}{4} (x^2 - 1)^4 + C$

0958 $x^2 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$ 이므로

$$\int x e^x dx = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

정답 $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$

0959 $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

정답 $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$

0960 $(x^2 + 5x - 1)' = 2x + 5$ 이므로

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x-1} dx = \int \frac{(x^2+5x-1)'}{x^2+5x-1} dx$$

$$= \ln |x^2+5x-1| + C$$

정답 $\ln |x^2+5x-1| + C$

0961 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $(\cos x)' = -\sin x$ 이므로

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$= -\ln |\cos x| + C$$

정답 $-\ln |\cos x| + C$

0962 $\frac{x+4}{x+3} = 1 + \frac{1}{x+3}$ 이므로

$$\int \frac{x+4}{x+3} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x+3}\right) dx$$

$$= x + \ln |x+3| + C$$

정답 $x + \ln |x+3| + C$

0963 $\frac{x^2-3}{x+2} = x-2 + \frac{1}{x+2}$ 이므로

$$\int \frac{x^2-3}{x+2} dx = \int \left(x-2 + \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - 2x + \ln |x+2| + C$$

정답 $\frac{1}{2} x^2 - 2x + \ln |x+2| + C$

0964 $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ 이므로

$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \ln |x| - \ln |x+1| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$$

정답 $\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$

0965 $\frac{6}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}$ 이므로

$$\int \frac{6}{(x-3)(x+3)} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right) dx$$

$$= \ln |x-3| - \ln |x+3| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$$

정답 $\ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$

0966 (1) $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{(a+b)x - a + b}{x^2 - 1}$ 이므로

$$\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{(a+b)x - a + b}{x^2-1}$$

따라서 $a+b=3$, $-a+b=1$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면
 $a=1$, $b=2$

(2) $\int \frac{3x+1}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}\right) dx$

$$= \ln |x+1| + 2 \ln |x-1| + C$$

$$= \ln |(x+1)(x-1)^2| + C$$

정답 (1) $a=1$, $b=2$ (2) $\ln |(x+1)(x-1)^2| + C$

0967 $f(x) = x$, $g'(x) = \boxed{\cos x}$ 로 놓으면

$$f'(x) = 1, g(x) = \boxed{\sin x}$$

이므로

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \boxed{\sin x} dx$$

$$= \boxed{x \sin x + \cos x} + C$$

\therefore (가) $\cos x$ (나) $\sin x$ (다) $\sin x$ (라) $x \sin x + \cos x$

정답 풀이 참조

0968 $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 1, g(x) = e^x$$

$$\therefore \int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x - e^x + C$$

정답 $x e^x - e^x + C$

0969 $f(x)=\ln x, g'(x)=1$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int \ln x dx &= (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + C \quad \text{답 } x \ln x - x + C\end{aligned}$$

0970 $f(x)=x+2, g'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$f'(x)=1, g(x)=-\cos x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int (x+2) \sin x dx &= (x+2)(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= -(x+2) \cos x + \int \cos x dx \\ &= -(x+2) \cos x + \sin x + C \\ &\quad \text{답 } -(x+2) \cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

0971 $f(x)=\ln x, g'(x)=x$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned}\therefore \int x \ln x dx &= (\ln x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \\ &\quad \text{답 } \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0972 \quad f(x) &= \int \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) dx = \int \left(2 + \frac{1}{x} - 3x^{-2}\right) dx \\ &= 2x + \ln|x| + 3x^{-1} + C \\ &= 2x + \ln|x| + \frac{3}{x} + C\end{aligned}$$

$$f(1)=5 \text{이므로 } 2+3+C=5 \quad \therefore C=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=2x+\ln|x|+\frac{3}{x} \text{이므로}$$

$$f(e)=2e+\frac{3}{e}+1 \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned}0973 \quad \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x} dx &= \int \frac{x^3-1}{x} dx \\ &= \int \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \ln|x| + C \\ &\quad \text{답 } \frac{1}{3}x^3 - \ln|x| + C\end{aligned}$$

0974 $f(x)$ 를 미분하면 $x\sqrt{x}-1$ 이므로

$$f'(x)=x\sqrt{x}-1$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x\sqrt{x}-1) dx \\ &= \int (x^{\frac{3}{2}}-1) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x+C \\ &= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x+C \quad \text{답 } \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$f(0)=2 \text{이므로 } C=2$$

$$\therefore f(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x+2 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

$$\text{답 } f(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x+2$$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 의 부정적분을 구할 수 있다.	70 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %

$$0975 \quad f_n(x)=\int x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{\frac{1}{n}+1} x^{\frac{1}{n}+1} + C = \frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} + C$$

$$f_n(0)=0 \text{이므로 } C=0$$

$$\therefore f_n(x)=\frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}}$$

$$\therefore f_1(1)f_2(1)f_3(1)\cdots f_8(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{8}{9}=\frac{1}{9} \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned}0976 \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{x^2-e^{2x}}{x+e^x} dx \\ &= \int \frac{(x+e^x)(x-e^x)}{x+e^x} dx = \int (x-e^x) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - e^x + C\end{aligned}$$

$$f(0)=3 \text{이므로 } -1+C=3 \quad \therefore C=4$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{2}x^2-e^x+4 \text{이므로}$$

$$f(2)=2-e^2+4=6-e^2 \quad \text{답 } 6-e^2$$

$$\begin{aligned}0977 \quad \int (2^x+3^x)^2 dx &= \int (2^{2x}+2\cdot 2^x\cdot 3^x+3^{2x}) dx \\ &= \int (4^x+2\cdot 6^x+9^x) dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2\cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C \quad \text{답 } \textcircled{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0978 \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int 3^{2x} \ln 9 dx \\ &= \int 9^x \ln 9 dx = 9^x + C\end{aligned}$$

$$f(0)=1 \text{이므로 } 1+C=1 \quad \therefore C=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=9^x \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{8} \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

0979 조건 ⑦에서 $f'(x)=(e^x+e^{-x})^2=e^{2x}+e^{-2x}+2$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx = \int (e^{2x}+e^{-2x}+2) dx \\ &= \frac{e^{2x}}{\ln e^2} + \frac{e^{-2x}}{\ln e^{-2}} + 2x + C \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x + C\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $f(0)=0$ 이므로 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + C = 0 \quad \therefore C=0$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x \quad \text{답 ③}$$

$$\begin{aligned} 0980 \quad \int \frac{8^x-1}{2^x-1} dx &= \int \frac{2^{3x}-1}{2^x-1} dx \\ &= \int \frac{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}{2^x-1} dx \\ &= \int (4^x+2^x+1) dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^x}{\ln 2} + x + C \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{1}{\ln 4}, b = \frac{1}{\ln 2}, c = 1 \quad \dots ②$$

$$\therefore \frac{bc}{a} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2 \quad \dots ③$$

답 2

채점 기준	비율
① $\int \frac{8^x-1}{2^x-1} dx$ 를 구할 수 있다.	60 %
② a, b, c 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ $\frac{bc}{a}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

$$\begin{aligned} 0981 \quad f(x) &= \int (3-2\tan^2 x) dx = \int \{3-2(\sec^2 x-1)\} dx \\ &= \int (5-2\sec^2 x) dx = 5x - 2\tan x + C \end{aligned}$$

$$f(0) = -\frac{5}{4}\pi \text{이므로} \quad C = -\frac{5}{4}\pi$$

따라서 $f(x) = 5x - 2\tan x - \frac{5}{4}\pi$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}\pi - 2 - \frac{5}{4}\pi = -2 \quad \text{답 ①}$$

$$\begin{aligned} 0982 \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int (\sin^2 x + \cos^2 x + \cot^2 x) dx \\ &= \int (1 + \cot^2 x) dx = \int \csc^2 x dx \\ &= -\cot x + C \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{이므로} \quad -1 + C = 0 \quad \therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = -\cot x + 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = (-\sqrt{3}+1) - 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right) = -2$$

답 -2

$$\begin{aligned} 0983 \quad f(x) &= \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 \\ &= \sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= 1 + \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore F(x) &= \int f(x) dx = \int (1 + \sin x) dx \\ &= x - \cos x + C \end{aligned}$$

$$F(0) = 3 \text{이므로} \quad -1 + C = 3 \quad \therefore C = 4$$

$$\therefore F(x) = x - \cos x + 4 \quad \text{답 ③}$$

라세특 배각의 공식

$$\textcircled{1} \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\textcircled{2} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\textcircled{3} \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} 0984 \quad \int \frac{1}{1+\sin x} dx &= \int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx \\ &= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx \\ &= \tan x - \sec x + C \end{aligned}$$

$$\text{답 } \tan x - \sec x + C$$

$$0985 \quad \frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} = \cos x \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} \right] dx = \int \cos x dx$$

$$\therefore f(x) + g(x) = \sin x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{d}{dx} \{f(x) - g(x)\} = 2 - \sin x \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{f(x) - g(x)\} \right] dx = \int (2 - \sin x) dx$$

$$\therefore f(x) - g(x) = 2x + \cos x + C_2 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots ①$$

①, ②의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) + g(0) = C_1 \quad \therefore C_1 = 1$$

$$f(0) - g(0) = 1 + C_2, \quad 1 = 1 + C_2 \quad \therefore C_2 = 0$$

$$\therefore f(x) + g(x) = \sin x + 1,$$

$$f(x) - g(x) = 2x + \cos x$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x + 2x + 1}{2},$$

$$g(x) = \frac{\sin x - \cos x - 2x + 1}{2} \quad \dots ②$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(\pi) = \frac{\pi+2}{2} - (1-\pi) = \frac{3}{2}\pi \quad \dots ③$$

$$\text{답 } \frac{3}{2}\pi$$

채점 기준	비율
① $\frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\}, \frac{d}{dx} \{f(x) - g(x)\}$ 의 부정적분을 구할 수 있다.	40 %
② $f(x), g(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(\pi)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0986 $x^2+x+4=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$ 이므로

$$\int (2x+1)(x^2+x+4)^3 dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C$$

$$= \frac{1}{4}(x^2+x+4)^4 + C$$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=4$ 이므로 $ab=1$

답 ①

0987 $x^2-x+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-1$ 이므로

$$f(x) = \int (6x-3)(x^2-x+1)^4 dx$$

$$= 3 \int (2x-1)(x^2-x+1)^4 dx$$

$$= 3 \int t^4 dt = \frac{3}{5}t^5 + C$$

$$= \frac{3}{5}(x^2-x+1)^5 + C$$

$f(1)=1$ 이므로 $\frac{3}{5}+C=1 \quad \therefore C=\frac{2}{5}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{5}(x^2-x+1)^5+\frac{2}{5}$ 이므로

$f(0)=1$

답 1

0988 $f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x-7)^4 dx$

$2x-7=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$ 이므로

$$f(x) = \int (2x-7)^4 dx = \int t^4 \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{10}t^5 + C = \frac{1}{10}(2x-7)^5 + C$$

$f(3)=0$ 이므로 $-\frac{1}{10}+C=0 \quad \therefore C=\frac{1}{10}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{10}(2x-7)^5+\frac{1}{10}$

따라서 $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나누었을 때의 나머지는

$f(4)=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

0989 $ax+5=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=a$ 이므로

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (ax+5)^7 dx$$

$$= \int t^7 \cdot \frac{1}{a} dt = \frac{1}{8a}t^8 + C$$

$$= \frac{1}{8a}(ax+5)^8 + C$$

→ ①

$F(x)$ 의 최고차항의 계수가 16이므로

$\frac{1}{8a} \cdot a^8 = 16, \quad a^7 = 2^7$

$\therefore a=2$

→ ②

답 2

채점 기준	비율
① $f(x)$ 의 부정적분을 구할 수 있다.	50 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0990 $3x+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{3} dt$$

$$= \frac{1}{3} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C$$

$f(0)=1$ 이므로 $\frac{2}{3}+C=1 \quad \therefore C=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+\frac{1}{3}$ 이므로

$f(5)=3$

답 3

0991 $x^2-2x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-2$ 이므로

$$\int (x-1)\sqrt{x^2-2x} dx = \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}t\sqrt{t} + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x} + C$$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

답 ①

0992 $9-x^2=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2x$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\sqrt{t} + C = -\sqrt{9-x^2} + C$$

$f(\sqrt{5})=-1$ 이므로 $-2+C=-1 \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\sqrt{9-x^2}+1$ 이므로

$f(0)=-2$

답 -2

0993 $\sqrt{x+2}=t$ 로 놓으면 $x=t^2-2$, $\frac{dx}{dt}=2t$ 이므로

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx = \int \frac{t^2-2}{t} \cdot 2t dt = 2 \int (t^2-2) dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}t^3-2t\right) + C = \frac{2}{3}t^3-4t+C$$

$$= \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-4\sqrt{x+2}+C$$

$$= \frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x+2}+C$$

답 $\frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x+2}+C$

0994 $f'(x)=e^x(e^x+1)^3$ 이고 $e^x+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int e^x(e^x+1)^3 dx = \int t^3 dt$$

$$= \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}(e^x+1)^4 + C$$

$f(0)=4$ 이므로 $4+C=4 \quad \therefore C=0$

↳ 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, 4)$ 를 지난다.

따라서 $f(x) = \frac{1}{4}(e^x + 1)^4$ 이므로

$$f(\ln 3) = \frac{1}{4}(3+1)^4 = 64 \quad \text{답 ⑤}$$

0995 $\cos x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ 이므로

$$f(x) = \int e^{\cos x} \sin x dx = \int e^t \cdot (-1) dt$$

$$= -e^t + C = -e^{\cos x} + C$$

$$f(0) = -e \text{ 이므로 } -e + C = -e \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = -e^{\cos x}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

... ①

... ②

답 -1

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	70 %
② $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0996 $\neg, 2x-2=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2$ 이므로

$$\int e^{2x-2} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} e^t + C$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x-2} + C$$

$\sqcup, e^x+3=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = e^x$ 이므로

$$\int e^x \sqrt{e^x+3} dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} t \sqrt{t} + C$$

$$= \frac{2}{3} (e^x+3) \sqrt{e^x+3} + C$$

$\sqsubset, x^2+3=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$ 이므로

$$\int x \cdot 5^{x^2+3} dx = \int 5^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^t}{\ln 5} + C$$

$$= \frac{5^{x^2+3}}{2 \ln 5} + C$$

이상에서 \neg, \sqcup, \sqsubset 모두 옳다.

답 ⑤

0997 조건 (가)에서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{3h} \cdot 3 = 3f'(x)$$

이므로

$$3f'(x) = 3^{x+1} \sqrt{3^x+8} \quad \therefore f'(x) = 3^x \sqrt{3^x+8}$$

$3^x+8=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 3^x \ln 3$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 3^x \sqrt{3^x+8} dx = \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{\ln 3} dt$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3 \ln 3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3 \ln 3} t \sqrt{t} + C$$

$$= \frac{2}{3 \ln 3} (3^x+8) \sqrt{3^x+8} + C$$

$$\text{조건 (나)에서 } f(0) = \frac{18}{\ln 3} \text{ 이므로 } \frac{18}{\ln 3} + C = \frac{18}{\ln 3}$$

$$\therefore C = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{3 \ln 3} (3^x+8) \sqrt{3^x+8}$$

$$\text{답 } f(x) = \frac{2}{3 \ln 3} (3^x+8) \sqrt{3^x+8}$$

0998 $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \int \frac{1}{t^3} dt = \int t^{-3} dt$$

$$= -t^{-2} + C = -\frac{1}{t^2} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = 5 \text{ 이므로 } 1 + C = 5 \quad \therefore C = 4$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{\ln x} + 4$ 이므로

$$f(e) = 3$$

답 3

0999 $\ln x + 5 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\int \frac{1}{x \sqrt{\ln x + 5}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C$$

$$= 2\sqrt{\ln x + 5} + C$$

$$\therefore a = 2$$

답 2

1000 $xf'(x) = \ln 3x$ 에서

$$f'(x) = \frac{\ln 3x}{x}$$

$\ln 3x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\ln 3x}{x} dx = \int t dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} (\ln 3x)^2 + C$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \text{ 이므로 } C = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} (\ln 3x)^2$$

답 ②

$$1001 \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ 이므로

$$\int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int (1 - t^2) \cdot (-1) dt$$

$$= \int (t^2 - 1) dt = \frac{1}{3} t^3 - t + C$$

$$= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

따라서 $a = \frac{1}{3}, b = -1$ 이므로

$$a + b = -\frac{2}{3}$$

답 ②

1002 $1+\cos x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (1+\cos x)^2 \sin x dx \\ &= \int t^2 \cdot (-1) dt = -\int t^2 dt = -\frac{1}{3}t^3 + C \\ &= -\frac{1}{3}(1+\cos x)^3 + C \end{aligned}$$

$$f(0)=0 \text{이므로} \quad -\frac{8}{3} + C = 0 \quad \therefore C = \frac{8}{3}$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{3}(1+\cos x)^3 + \frac{8}{3}$ 이므로

$$f(\pi) = \frac{8}{3}$$

답 ③

1003 $\tan x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \tan x \sec^2 x dx \\ &= \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x + C \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1 \text{이므로} \quad \frac{1}{6} + C = 1 \quad \therefore C = \frac{5}{6}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{5}{6}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{4}{3} \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

답 4

1004 $x^2-2=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int 4x \cos(x^2-2) dx = \int \cos t \cdot 2 dt \\ &= 2 \sin t + C = 2 \sin(x^2-2) + C \end{aligned}$$

$$f(\sqrt{2})=1 \text{이므로} \quad C=1$$

$$\therefore f(x) = 2 \sin(x^2-2) + 1$$

이때 $-1 \leq \sin(x^2-2) \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq 2 \sin(x^2-2) + 1 \leq 3$$

$$\therefore M=3, m=-1$$

$$\therefore M+m=2$$

→ ①

→ ②

→ ③

답 2

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	70 %
② M, m 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ $M+m$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

1005 $(x^3+4x+1)'=3x^2+4$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx = \int \frac{(x^3+4x+1)'}{x^3+4x+1} dx \\ &= \ln|x^3+4x+1| + C \end{aligned}$$

$$f(0)=1 \text{이므로} \quad C=1$$

따라서 $f(x) = \ln|x^3+4x+1| + 1$ 이므로

$$f(1) = \ln 6 + 1$$

답 ①

1006 $(1+\cos x)'=-\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{-\sin x}{1+\cos x} dx = \int \frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x} dx \\ &= \ln(1+\cos x) + C \quad (\because 1+\cos x > 0) \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2 \text{이므로} \quad C=2$$

따라서 $f(x) = \ln(1+\cos x) + 2$ 이므로

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \ln \frac{1}{2} + 2 = 2 - \ln 2$$

답 ③

1007 $\frac{f'(x)}{f(x)}=5$ 에서 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 5 dx$

$$\ln f(x) = 5x + C \quad (\because f(x) > 0)$$

$$\therefore f(x) = e^{5x+C}$$

→ ①

$$f(0)=e^2 \text{이므로} \quad e^C=e^2 \quad \therefore C=2$$

$$\therefore f(x) = e^{5x+2}$$

→ ②

$$\text{답 } f(x) = e^{5x+2}$$

채점 기준	비율
① $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 의 부정적분을 구할 수 있다.	60 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %

1008 $\frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{x+2}{x+1} dx \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = x + \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

$$f(0)=3 \text{이므로} \quad C=3$$

$$\therefore f(x) = x + \ln|x+1| + 3$$

답 ③

1009 $\frac{2x^2-x+5}{x-1} = \frac{(x-1)(2x+1)+6}{x-1} = 2x+1 + \frac{6}{x-1}$

이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2-x+5}{x-1} dx &= \int \left(2x+1 + \frac{6}{x-1}\right) dx \\ &= x^2+x+6\ln|x-1| + C \end{aligned}$$

$$\text{답 } x^2+x+6\ln|x-1| + C$$

1010 $y = \frac{3-x}{1+x}$ 로 놓으면

$$y(1+x) = 3-x, \quad x(y+1) = 3-y$$

$$\therefore x = \frac{3-y}{y+1}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면} \quad y = \frac{3-x}{x+1}$$

$$\therefore g(x) = \frac{3-x}{x+1}$$

$$\text{이때 } \frac{3-x}{x+1} = -1 + \frac{4}{x+1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int \frac{3-x}{x+1} dx = \int \left(-1 + \frac{4}{x+1}\right) dx \\ &= -x + 4\ln|x+1| + C \end{aligned}$$

$$\text{답 } -x + 4\ln|x+1| + C$$

1011 $\frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{4}{x^2-4} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+2| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

$f(0)=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$ 이므로

$$f(4) = \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$$

답 ①

1012 $f(x) = \int \frac{3-x}{x^2+x-2} dx + \int \frac{x}{x^2+x-2} dx$

$$= \int \left(\frac{3-x}{x^2+x-2} + \frac{x}{x^2+x-2} \right) dx$$

$$= \int \frac{3}{x^2+x-2} dx$$

이때 $\frac{3}{x^2+x-2} = \frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{3}{x^2+x-2} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ 이므로 $C=1$

따라서 $f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + 1$ 이므로

$$f(2) = \ln \frac{1}{4} + 1 = 1 - 2\ln 2$$

답 ①

1013 $\frac{4x}{x^2-3x+2} = \frac{4x}{(x-1)(x-2)} = \frac{p}{x-1} + \frac{q}{x-2}$ 로 놓으면

$$\frac{4x}{(x-1)(x-2)} = \frac{(p+q)x - (2p+q)}{(x-1)(x-2)}$$

위의 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$p+q=4, 2p+q=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $p=-4, q=8$

$$\therefore \frac{4x}{x^2-3x+2} = \frac{-4}{x-1} + \frac{8}{x-2}$$
 이므로
$$\int \frac{4x}{x^2-3x+2} dx = \int \left(\frac{-4}{x-1} + \frac{8}{x-2} \right) dx$$

$$= -4\ln|x-1| + 8\ln|x-2| + C$$

따라서 $a=-4, b=8$ 이므로

$$a-b = -12$$

→ ①

→ ②

답 -12

채점 기준	비율
① $\frac{4x}{x^2-3x+2}$ 를 부분분수로 변형할 수 있다.	70 %
② $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

1014 $u(x)=x, v'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=-e^{-x}$$

$$\therefore f(x) = \int x e^{-x} dx$$

$$= x \cdot (-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx$$

$$= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$= -(x+1)e^{-x} + C$$

$f(0)=1$ 이므로 $-1+C=1 \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$ 이므로

$$f(-1) = 2$$

답 ③

1015 $u(x)=x, v'(x)=\sin 2x$ 로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\therefore \int x \sin 2x dx = x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}x \cos 2x + \int \frac{1}{2}\cos 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

따라서 $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{4}$ 이므로 $ab=-\frac{1}{8}$

답 ②

1016 $F(x)=xf(x)-x^2\ln x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x\ln x-x$$

$$xf'(x)=2x\ln x+x \quad \therefore f'(x)=2\ln x+1$$

$$\therefore f(x)=\int (2\ln x+1)dx=2\int \ln x dx+x \quad \cdots \cdots ㉑$$

$\int \ln x dx$ 에서 $u(x)=\ln x, v'(x)=1$ 로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x}, v(x)=x$$

$$\therefore \int \ln x dx = (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx$$

$$= x \ln x - x + C_1 \quad \cdots \cdots ㉒$$

㉑을 ㉒에 대입하면

$$f(x) = 2(x \ln x - x + C_1) + x$$

$$= 2x \ln x - x + C$$

$f(1)=e-1$ 이므로 $-1+C=e-1 \quad \therefore C=e$

따라서 $f(x)=2x \ln x - x + e$ 이므로

$$f(e)=2e$$

답 2e

1017 $f(x)=\cos x, g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x)=-\sin x, g(x)=e^x$$

$$\therefore \int e^x \cos x dx = \cos x \cdot e^x - \int (-\sin x) \cdot e^x dx$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \quad \cdots \cdots ㉑$$

$\int e^x \sin x dx$ 에서 $u(x)=\sin x, v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$u'(x)=\cos x, v(x)=e^x$$

$$\therefore \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \quad \cdots \cdots ㉒$$

㉑을 ㉒에 대입하면

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + (e^x \sin x - \int e^x \cos x dx)$$

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\therefore \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$$

$$\text{답 } \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$$

1018 $f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$f'(x)=2x, g(x)=-\cos x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int x^2 \sin x dx &= x^2 \cdot (-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x) dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \quad \dots\dots ㉑ \end{aligned}$$

$\int x \cos x dx$ 에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=\sin x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int x \cos x dx &= x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx \\ &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C_1 \quad \dots\dots ㉒ \end{aligned}$$

㉑을 ㉒에 대입하면

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C_1) \\ &= (2-x^2) \cos x + 2x \sin x + C \\ &\text{답 } (2-x^2) \cos x + 2x \sin x + C \end{aligned}$$

1019 $h(x)=(\ln x)^2$, $k'(x)=1$ 로 놓으면

$$h'(x)=\frac{2 \ln x}{x}, k(x)=x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int (\ln x)^2 dx &= (\ln x)^2 \cdot x - \int \frac{2 \ln x}{x} \cdot x dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \quad \dots\dots ㉑ \end{aligned}$$

$\int \ln x dx$ 에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$ 로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x}, v(x)=x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \ln x dx &= (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= x \ln x - x + C_1 \quad \dots\dots ㉒ \end{aligned}$$

㉑을 ㉒에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x + C_1) \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \end{aligned}$$

$$f(1)=2 \text{이므로 } 2+C=2 \quad \therefore C=0$$

따라서 $f(x)=x(\ln x)^2-2x \ln x+2x$ 이므로

$$f(e)=e \quad \text{답 } ②$$

1020 **전략** 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$ 임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=3e^x-4$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3e^x-4)dx=3e^x-4x+C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 원점을 지나므로

$$f(0)=3+C=0 \quad \therefore C=-3$$

따라서 $f(x)=3e^x-4x-3$ 이므로

$$f(1)=3e-4-3=3e-7 \quad \text{답 } 3e-7$$

1021 **전략** $x^2-2x+3=t$ 로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $x^2-2x+3=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int (x-1)(x^2-2x+3)^4 dx &= \int t^4 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{10} t^5 + C \\ &= \frac{1}{10} (x^2-2x+3)^5 + C \end{aligned}$$

따라서 $a=10$, $b=5$ 이므로 $a+b=15$ 답 15

1022 **전략** $11-3x=t$ 로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $11-3x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-3$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \sqrt[3]{11-3x} dx = \int \sqrt[3]{t} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) dt \\ &= -\frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{3}} dt = -\frac{1}{4} t^{\frac{4}{3}} + C \\ &= -\frac{1}{4} (11-3x)^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{11-3x} + C \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{11}{3}\right)=7 \text{이므로 } C=7$$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}(11-3x)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{11-3x}+7$ 이므로 ... ①

$$f(1)=-4+7=3 \quad \text{... ②}$$

답 3

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	70 %
② $f(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

1023 **전략** $\ln(x^3+1)=t$ 로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\ln(x^3+1)=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{3x^2}{x^3+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2}{x^3+1} \ln(x^3+1) dx &= \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C \\ &= \frac{1}{2} \{\ln(x^3+1)\}^2 + C \quad \text{답 } ② \end{aligned}$$

1024 **전략** $\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$ 임을 이용하여 피적분함수를 간단한 유리함수의 차로 나타내어 적분한다.

풀이 $\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{1}{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2-x-6} dx \\ &= \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{5} (\ln|x-3| - \ln|x+2|) + C \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \text{ 이므로 } C=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| \text{ 이므로}$$

$$f(-1)=\frac{1}{5} \ln 4=\frac{2}{5} \ln 2 \quad \text{답 ②}$$

1025 전라 $\frac{1}{x^p}$ (p 는 실수)은 x^{-p} 으로, $\sqrt[q]{x}$ (q 는 2 이상의 자연수)는 $x^{\frac{1}{q}}$ 으로 변형하여 부정적분을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } f(x) &= \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + 1 \right) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + x + C \end{aligned}$$

$$f(1)=\frac{2}{3} \text{ 이므로 } \frac{2}{3} + 2 + 1 + C = \frac{2}{3} \quad \therefore C = -3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + x - 3 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3 - 3 = 4\sqrt{3} \quad \text{답 ④}$$

1026 전라 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$ 임을 이용한다.

$$\text{풀이 } f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} & (x \leq 1) \\ \frac{1}{x} & (x > 1) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + C_1 & (x \leq 1) \\ \ln x + C_2 & (x > 1) \end{cases}$$

$$f(-1) = e + \frac{1}{e^2} \text{ 이므로 } \frac{1}{e^2} + C_1 = e + \frac{1}{e^2} \quad \therefore C_1 = e$$

또 함수 $f(x)$ 가 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (\ln x + C_2) = \lim_{x \rightarrow 1-} (e^{x-1} + e) = f(1) \quad \therefore C_2 = e + 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + e & (x \leq 1) \\ \ln x + e + 1 & (x > 1) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f(e) = 1 + e + 1 = e + 2 \quad \text{답 ⑤}$$

1027 전라 $x+2=t$ 로 놓고 $f'(x)$ 를 적분하기 쉬운 형태로 변형하여 $f(x)$ 를 구한다.

$$\text{풀이 } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x-4}{(x+2)^3} dx$$

$$x+2=t \text{로 놓으면 } x=t-2, \frac{dt}{dx}=1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x-4}{(x+2)^3} dx = \int \frac{t-6}{t^3} dt = \int (t^{-2} - 6t^{-3}) dt \\ &= -t^{-1} + 3t^{-2} + C \\ &= -\frac{1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2} + C \end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{3}{4} \text{ 이므로 } -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + C = \frac{3}{4} \quad \therefore C = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{1}{2}$$

이때 $f(1) = \frac{1}{2}$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점은 ③이다. 답 ③

1028 전라 $\ln x + 2 = t$ 로 놓고 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

$$\text{풀이 } \ln x + 2 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{5^{\ln x + 2}}{x} dx = \int 5^t dt \\ &= \frac{5^t}{\ln 5} + C = \frac{5^{\ln x + 2}}{\ln 5} + C \end{aligned}$$

$$f(1) = \frac{25}{\ln 5} \text{ 이므로 } \frac{25}{\ln 5} + C = \frac{25}{\ln 5} \quad \therefore C = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{5^{\ln x + 2}}{\ln 5}$$

$$\text{방정식 } f(x) = \frac{1}{\ln 5} \text{에서 } \frac{5^{\ln x + 2}}{\ln 5} = \frac{1}{\ln 5}$$

$$5^{\ln x + 2} = 1, \quad \ln x + 2 = 0, \quad \ln x = -2$$

$$\therefore x = \frac{1}{e^2} \quad \text{답 ①}$$

1029 전라 $x^2 + x = t$ 로 놓고 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

$$\text{풀이 } x^2 + x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x + 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (4x+2) \sin(x^2+x) dx = \int 2 \sin t dt \\ &= -2 \cos t + C = -2 \cos(x^2+x) + C \end{aligned}$$

$$f(0) = 1 \text{ 이므로 } -2 + C = 1 \quad \therefore C = 3$$

$$\therefore f(x) = -2 \cos(x^2+x) + 3$$

$$\text{따라서 } f(x) \text{의 최댓값은 } |-2| + 3 = 5 \quad \text{답 5}$$

1030 전라 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } f(x) &= \int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{\sin x \cdot \sin^2 x}{1 - \cos x} dx \\ &= \int \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)}{1 - \cos x} dx \\ &= \int \frac{\sin x (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x} dx \\ &= \int \sin x (1 + \cos x) dx \end{aligned}$$

$$1 + \cos x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = -\sin x \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \sin x (1 + \cos x) dx \\ &= \int (-t) dt = -\frac{1}{2} t^2 + C \\ &= -\frac{1}{2} (1 + \cos x)^2 + C \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \quad \therefore C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\frac{1}{2} (1 + \cos x)^2 + 1 \text{ 이므로}$$

$$f(\pi) = -\frac{1}{2} (1 - 1)^2 + 1 = 1$$

... ①

... ②

답 1

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	70 %
② $f(\pi)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

1031 **전략** $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ 임을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x dx$
 $= \int \sec^2 x (\tan^2 x + 1) dx$

$\tan x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \sec^2 x$ 이므로

$$\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x (\tan^2 x + 1) dx = \int (t^2 + 1) dt$$

$$= \frac{1}{3} t^3 + t + C = \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + C$$

따라서 $a=3, b=1$ 이므로 $a-b=2$

답 ④

1032 **전략** $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$ 임을 이용한다.

풀이 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + e^x} dx = \int \frac{e^{2x}}{e^x(e^x + 1)} dx = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

이때 $(e^x + 1)' = e^x$ 이므로

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + e^x} dx = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx$$

$$= \ln(e^x + 1) + C_1 \quad (\because e^x + 1 > 0)$$

한편 $(2^x + 1)' = 2^x \ln 2$ 이므로

$$\int \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} dx = \int \frac{(2^x + 1)'}{2^x + 1} dx$$

$$= \ln(2^x + 1) + C_2 \quad (\because 2^x + 1 > 0)$$

$$\therefore f(x) = \ln(e^x + 1) + \ln(2^x + 1) + C$$

$$f(0) = 2 \ln 2 \text{이므로} \quad \ln 2 + \ln 2 + C = 2 \ln 2 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \ln(e^x + 1) + \ln(2^x + 1)$ 이므로

$$f(1) = \ln(e + 1) + \ln 3 = \ln 3(e + 1) \quad \text{답 } \ln 3(e + 1)$$

1033 **전략** 치환적분법을 이용하여 $\{f(x)\}^2 f'(x)$ 와 $\frac{2x}{x^2+1}$ 의 부정적분을 각각 구한다.

풀이 조건 ㉠에서

$$\int \{f(x)\}^2 f'(x) dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$\int \{f(x)\}^2 f'(x) dx$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = f'(x)$ 이므로

$$\int \{f(x)\}^2 f'(x) dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C_1$$

$$= \frac{1}{3} \{f(x)\}^3 + C_1$$

$\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ 에서 $(x^2+1)' = 2x$ 이므로

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx$$

$$= \ln(x^2+1) + C_2 \quad (\because x^2+1 > 0)$$

$$\therefore \frac{1}{3} \{f(x)\}^3 + C_1 = \ln(x^2+1) + C_2 \text{이므로}$$

$$\{f(x)\}^3 = 3 \ln(x^2+1) + C$$

조건 ㉡에서 $f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

따라서 $\{f(x)\}^3 = 3 \ln(x^2+1)$ 이므로

$$\{f(1)\}^3 = 3 \ln 2$$

답 ②

1034 **전략** $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 임을 이용한다.

풀이 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이므로 조건 ㉠에서 $\{f(x)g(x)\}' = h(x)$

$$\therefore f(x)g(x) = \int h(x) dx$$

이때 $f(x) = x, h(x) = \ln x$ 이므로

$$xg(x) = \int \ln x dx$$

$u(x) = \ln x, v'(x) = 1$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x$$

$$\therefore xg(x) = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

위의 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(1) = -1 + C$$

조건 ㉡에서 $g(1) = -1$ 이므로 $-1 + C = -1 \quad \therefore C = 0$

$$\therefore xg(x) = x \ln x - x$$

따라서 $g(x) = \ln x - 1$ 이므로

$$g(e) = 0$$

답 ③

1035 **전략** $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=1$ 인 점에서 직선 $y=1$ 에 접하므로 $f'(1)=0, f(1)=1$ 이다.

풀이 조건 ㉠에서 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=1$ 인 점에서 직선 $y=1$ 에 접하므로

$$f'(1)=0, f(1)=1$$

한편 조건 ㉡에서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = f''(x)$ 이므로

$$f''(x) = \frac{x+1}{x^3}$$

$$\therefore f'(x) = \int f''(x) dx = \int \frac{x+1}{x^3} dx$$

$$= \int (x^{-2} + x^{-3}) dx = -x^{-1} - \frac{1}{2} x^{-2} + C_1$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C_1$$

$$f'(1)=0 \text{이므로} \quad -1 - \frac{1}{2} + C_1 = 0 \quad \therefore C_1 = \frac{3}{2}$$

따라서 $f'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2} \right) dx$$

$$= \int \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2} x^{-2} + \frac{3}{2} \right) dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2x} + \frac{3}{2}x + C$$

$$f(1)=1\text{이므로 } \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + C = 1 \quad \therefore C = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2x} + \frac{3}{2}x - 1 \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \ln 2 + \frac{3}{4} \quad \text{답 } \ln 2 + \frac{3}{4}$$

1036 **전략** $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 찾아 그 값의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } f'(x) &= \cos 2x - 3\sin x + 1 \\ &= (1 - 2\sin^2 x) - 3\sin x + 1 \\ &= -2\sin^2 x - 3\sin x + 2 \\ &= -(2\sin x - 1)(\sin x + 2) \end{aligned}$$

$$f'(x)=0\text{에서 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{5}{6}\pi$...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/	극대	\	극소	/	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극대이고, $x = \frac{5}{6}\pi$ 에서 극소이다.

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (\cos 2x - 3\sin x + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x + 3\cos x + x + C \end{aligned}$$

이고, $f(x)$ 가 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극댓값 $\frac{\pi}{6}$ 를 가지므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} + 3\cos \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + C &= \frac{\pi}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} + C &= \frac{\pi}{6} \quad \therefore C = -\frac{7\sqrt{3}}{4} \\ \therefore f(x) &= \frac{1}{2} \sin 2x + 3\cos x + x - \frac{7\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

따라서 구하는 극솟값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \frac{1}{2} \sin \frac{5}{3}\pi + 3\cos \frac{5}{6}\pi + \frac{5}{6}\pi - \frac{7\sqrt{3}}{4} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{6}\pi - \frac{7\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{5}{6}\pi - \frac{7\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{5}{6}\pi - \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

채점 기준	비율
① 극댓값과 극솟값을 갖는 x 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ 극솟값을 구할 수 있다.	20 %

1037 **전략** 도함수의 정의를 이용하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{h}$ 를 정리한 후 $f'(x)$ 를 구한다.

풀이 조건 ④에서

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x)+f(x)-f(x-2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} \cdot 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(x-2h)}{-2h} \cdot 2 \\ &= 2f'(x) + 2f'(x) = 4f'(x) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 4f'(x) = \frac{4(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$(\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \ln |\sin x + \cos x| + C$$

$$\text{조건 ④에서 } f(0) = 2 \text{이므로 } C = 2$$

$$\therefore f(x) = \ln |\sin x + \cos x| + 2$$

$$\text{답 } f(x) = \ln |\sin x + \cos x| + 2$$

1038 **전략** $\{xF(x)\}' = F(x) + xf(x)$ 임을 이용한다.

풀이 $\{xF(x)\}' = F(x) + xf(x)$ 이므로 조건 ④에서 $\{xF(x)\}' = (2x+2)e^x$

$$\therefore xF(x) = \int (2x+2)e^x dx$$

$$u(x) = 2x+2, v'(x) = e^x \text{으로 놓으면}$$

$$u'(x) = 2, v(x) = e^x$$

$$\therefore xF(x) = (2x+2)e^x - \int 2e^x dx$$

$$= (2x+2)e^x - 2e^x + C$$

$$= 2xe^x + C$$

위의 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$F(1) = 2e + C$$

$$\text{조건 ④에서 } F(1) = 2e \text{이므로 } 2e + C = 2e \quad \therefore C = 0$$

$$\therefore xF(x) = 2xe^x$$

따라서 $F(x) = 2e^x$ 이므로

$$F(3) = 2e^3$$

$$\text{답 } ④$$

1039 **전략** 부분적분법과 삼각부등식을 이용하여 x 의 값의 범위를 구한다.

풀이 $h(x) = \sin x, k'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$h'(x) = \cos x, k(x) = e^x$$

$$\therefore \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \quad \dots\dots ①$$

$$\int e^x \cos x dx \text{에서 } u(x) = \cos x, v'(x) = e^x \text{으로 놓으면}$$

$$u'(x) = -\sin x, v(x) = e^x$$

$$\therefore \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \quad \dots\dots ②$$

㉔을 ㉔에 대입하면

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right)$$

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\therefore f(x) = \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

$$f(0) = -\frac{1}{2} \text{ 이므로 } -\frac{1}{2} + C = -\frac{1}{2} \quad \therefore C = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

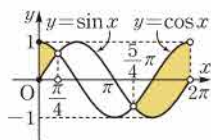
따라서 부등식 $f(x) < 0$ 에서

$$\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) < 0, \quad \sin x - \cos x < 0 \quad (\because e^x > 0)$$

$$\therefore \sin x < \cos x$$

오른쪽 그림에서 위의 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$$



답 ①

09 정적분

Ⅲ. 적분법

$$1040 \quad \int_0^9 \sqrt{x} dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^9 = 18 \quad \text{답 } 18$$

$$1041 \quad \int_1^7 \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_1^7 = \ln 7 \quad \text{답 } \ln 7$$

$$1042 \quad \int_{-1}^3 e^x dx = \left[e^x \right]_{-1}^3 = e^3 - \frac{1}{e} \quad \text{답 } e^3 - \frac{1}{e}$$

$$1043 \quad \int_4^5 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_4^5 = \frac{32}{\ln 2} - \frac{16}{\ln 2} = \frac{16}{\ln 2} \quad \text{답 } \frac{16}{\ln 2}$$

$$1044 \quad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

$$1045 \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x dx = \left[\tan x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - 1 \quad \text{답 } \sqrt{3} - 1$$

$$\begin{aligned} 1046 \quad \int_1^8 4 \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx &= 4 \int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} \right) dx \\ &= 4 \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_1^8 \\ &= 4 \left\{ (12 + 6) - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} \right) \right\} \\ &= 63 \quad \text{답 } 63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1047 \quad \int_1^2 (3^x - 2^x) dx &= \left[\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{2^x}{\ln 2} \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{9}{\ln 3} - \frac{4}{\ln 2} \right) - \left(\frac{3}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 2} \right) \\ &= \frac{6}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 2} \quad \text{답 } \frac{6}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1048 \quad \int_{-2}^4 (e^x + 1) dx + \int_{-2}^4 (e^x - 1) dx \\ &= \int_{-2}^4 2e^x dx = 2 \int_{-2}^4 e^x dx = 2 \left[e^x \right]_{-2}^4 \\ &= 2(e^4 - e^{-2}) = 2 \left(e^4 - \frac{1}{e^2} \right) \quad \text{답 } 2 \left(e^4 - \frac{1}{e^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1049 \quad \int_0^\pi (\cos x + x) dx + \int_\pi^{2\pi} (\cos x + x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos x + x) dx = \left[\sin x + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi^2 - 0 = 2\pi^2 \quad \text{답 } 2\pi^2 \end{aligned}$$

1050 $\sin x$ 는 기함수이므로

$$\int_{-3\pi}^{3\pi} \sin x dx = 0 \quad \text{답 } 0$$

1051 $\cos x$ 는 우함수이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx &= 2 \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx = 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{3}{2}\pi} \\ &= 2(-1-0) = -2 \quad \text{답 } -2 \end{aligned}$$

1052 $f(x+2)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x) dx &= \int_3^5 f(x) dx = \int_5^7 f(x) dx \\ &= \int_7^9 f(x) dx = \int_9^{11} f(x) dx = 5 \\ \therefore \int_1^{11} f(x) dx &= \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx \\ &\quad + \int_7^9 f(x) dx + \int_9^{11} f(x) dx \\ &= 5 \cdot 5 = 25 \quad \text{답 } 25 \end{aligned}$$

1053 $3x-1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$

또한 $x=0$ 일 때 $t=-1$, $x=1$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x-1)^5 dx &= \int_{-1}^2 t^5 \cdot \frac{1}{3} dt = \left[\frac{1}{18} t^6 \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{18} (64-1) = \frac{7}{2} \quad \text{답 } \frac{7}{2} \end{aligned}$$

1054 $5-x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=2$ 일 때 $t=3$, $x=4$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_2^4 \sqrt{5-x} dx &= \int_3^1 \sqrt{t} \cdot (-1) dt = \int_1^3 t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{2}{3} \cdot (3\sqrt{3}-1) \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} \quad \text{답 } 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

1055 $x^2+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

또한 $x=-1$ 일 때 $t=2$, $x=3$ 일 때 $t=10$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 x(x^2+1)^3 dx &= \int_2^{10} t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \left[\frac{1}{8} t^4 \right]_2^{10} \\ &= \frac{1}{8} (10000-16) = 1248 \quad \text{답 } 1248 \end{aligned}$$

1056 $2x+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

또한 $x=1$ 일 때 $t=3$, $x=2$ 일 때 $t=5$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{2x+1} dx &= \int_3^5 e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \left[e^t \right]_3^5 \\ &= \frac{1}{2} (e^5 - e^3) \quad \text{답 } \frac{1}{2} (e^5 - e^3) \end{aligned}$$

1057 $\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

또한 $x=e$ 일 때 $t=1$, $x=e^2$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \left[\ln |t| \right]_1^2 = \ln 2 \quad \text{답 } \ln 2$$

1058 $\sin x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

또한 $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^1 t^3 dt = \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

1059 $x^2+x+4=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$

또한 $x=-2$ 일 때 $t=6$, $x=0$ 일 때 $t=4$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx &= \int_6^4 \frac{1}{t} dt = \left[\ln |t| \right]_6^4 \\ &= \ln 4 - \ln 6 = \ln \frac{2}{3} \quad \text{답 } \ln \frac{2}{3} \end{aligned}$$

다른 풀이 $(x^2+x+4)'=2x+1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx &= \int_{-2}^0 \frac{(x^2+x+4)'}{x^2+x+4} dx \\ &= \left[\ln (x^2+x+4) \right]_{-2}^0 \\ &= \ln 4 - \ln 6 = \ln \frac{2}{3} \end{aligned}$$

1060 $x=\sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos \theta$

또한 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

이때 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ 에서 $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \textcircled{7} \cos \theta \quad \textcircled{8} 0 \quad \textcircled{9} \frac{\pi}{2} \quad \textcircled{10} \frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \quad \textcircled{11} \frac{\pi}{4}$$

답 풀이 참조

1061 $x=\tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2 \theta$

또한 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta \\ &= \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \quad \text{답 } \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

1062 $f(x)=x-1, g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x)=1, g(x)=e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^2 (x-1)e^x dx &= \left[(x-1)e^x \right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx \\ &= e^2 - (-1) - \left[e^x \right]_0^2 \\ &= e^2 + 1 - (e^2 - 1) \\ &= 2\end{aligned}$$

답 2

1063 $f(x)=\ln x, g'(x)=1$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^{e^2} \ln x dx &= \left[x \ln x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 1 dx \\ &= 2e^2 - \left[x \right]_1^{e^2} \\ &= 2e^2 - (e^2 - 1) \\ &= e^2 + 1\end{aligned}$$

답 $e^2 + 1$

1064 $f(x)=x, g'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$f'(x)=1, g(x)=-\cos x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\end{aligned}$$

답 1

1065 $f(x)=x+2, g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$$f'(x)=1, g(x)=\sin x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{\pi}^{2\pi} (x+2) \cos x dx &= \left[(x+2) \sin x \right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \\ &= \left[\cos x \right]_{\pi}^{2\pi} = 1 - (-1) = 2\end{aligned}$$

답 2

1066 답 $x \sin x$

1067 답 $\frac{2x+5}{x^2+2x-3}$

1068 $\frac{d}{dx} \int_x^{x+1} \ln t dt = \ln(x+1) - \ln x = \ln \frac{x+1}{x}$

답 $\ln \frac{x+1}{x}$

1069 $\frac{d}{dx} \int_{x-2}^x e^t dt = e^x - e^{x-2} = e^x \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$ 답 $e^x \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$

1070 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -2 \sin x$$

$$\text{답 } f(x) = -2 \sin x$$

1071 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = e^x - 3^x \ln 3$$

$$\text{답 } f(x) = e^x - 3^x \ln 3$$

1072 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{답 } f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

1073 $F'(t) = \cos t$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{\pi}^{x+\pi} \cos t dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{\pi}^{x+\pi} F'(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x+\pi) - F(\pi)}{x} \\ &= F'(\pi) = -1\end{aligned}$$

답 -1

1074 $F'(t) = t \ln t$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_e^{x+e} t \ln t dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_e^{x+e} F'(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x+e) - F(e)}{x} \\ &= F'(e) = e\end{aligned}$$

답 e

1075 $F'(t) = e^t$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x e^t dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x F'(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \\ &= F'(1) = e\end{aligned}$$

답 e

1076 $F'(t) = t^2 \sin t$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^x t^2 \sin t dt &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^x F'(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F(x) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \\ &= F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi^2}{4}$

1077 $\int_1^e \frac{3x^3 - 4x^2 + 1}{x} dx = \int_1^e \left(3x^2 - 4x + \frac{1}{x} \right) dx$

$$\begin{aligned}&= \left[x^3 - 2x^2 + \ln |x| \right]_1^e \\ &= (e^3 - 2e^2 + 1) - (1 - 2) \\ &= e^3 - 2e^2 + 2\end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}1078 \int_2^4 \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx &= \int_2^4 \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_2^4 \left(\sqrt{x} - 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int_2^4 \left(x^{\frac{1}{2}} - 2 + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x + 2x^{\frac{1}{2}} \right]_2^4 \\ &= \frac{4}{3} - \left(\frac{10}{3} \sqrt{2} - 4 \right) \\ &= \frac{16}{3} - \frac{10}{3} \sqrt{2}\end{aligned}$$

... 1

따라서 $a = \frac{16}{3}$, $b = -\frac{10}{3}$ 이므로

$$a+b=2$$

→ ②

→ ③

답 2

채점 기준	비율
① 정적분의 값을 구할 수 있다.	70 %
② a , b 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

$$\begin{aligned}
 1079 \quad \int_3^5 \frac{2}{x^2-1} dx &= \int_3^5 \frac{2}{(x-1)(x+1)} dx \\
 &= \int_3^5 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
 &= \left[\ln|x-1| - \ln|x+1| \right]_3^5 \\
 &= (\ln 4 - \ln 6) - (\ln 2 - \ln 4) = \ln \frac{4}{3} \\
 \therefore k &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 1080 \quad \int_0^2 f(x) dx - \int_4^2 f(y) dy - \int_1^4 f(z) dz \\
 = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^1 f(x) dx \\
 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt[3]{x^3} dx \\
 = \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} dx = \left[\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right]_0^1 = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

답 3/5

$$\begin{aligned}
 1081 \quad \int_0^3 \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx - \int_0^3 \frac{1}{e^x+1} dx &= \int_0^3 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx \\
 &= \int_0^3 \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1} dx \\
 &= \int_0^3 (e^x-1) dx \\
 &= \left[e^x - x \right]_0^3 \\
 &= (e^3-3) - 1 \\
 &= e^3-4
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 1082 \quad \int_{-1}^0 \sqrt{e^{2x}+6e^x+9} dx &= \int_{-1}^0 \sqrt{(e^x+3)^2} dx \\
 &= \int_{-1}^0 (e^x+3) dx = \left[e^x+3x \right]_{-1}^0 \\
 &= 1 - (e^{-1}-3) \\
 &= 4 - \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

답 4 - 1/e

$$\begin{aligned}
 1083 \quad \int_0^1 (2^x-1)(4^x+2^x+1) dx &= \int_0^1 \{(2^x)^3-1\} dx \\
 &= \int_0^1 (8^x-1) dx = \left[\frac{8^x}{\ln 8} - x \right]_0^1 \\
 &= \left(\frac{8}{\ln 8} - 1 \right) - \frac{1}{\ln 8} \\
 &= \frac{7}{3 \ln 2} - 1
 \end{aligned}$$

→ ①

따라서 $a=7$, $b=1$ 이므로

$$a+b=8$$

→ ②

→ ③

답 8

채점 기준	비율
① 정적분의 값을 구할 수 있다.	70 %
② a , b 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

$$\begin{aligned}
 1084 \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 1085 \quad \int_0^k \left(\frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\cot^2 x} \right) dx \\
 = \int_0^k \left(\frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\csc^2 x} \right) dx \\
 = \int_0^k (\cos^2 x + \sin^2 x) dx \\
 = \int_0^k 1 dx = \left[x \right]_0^k \\
 = k \\
 \therefore k &= 5
 \end{aligned}$$

→ ①

→ ②

답 5

채점 기준	비율
① $\int_0^k \left(\frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\cot^2 x} \right) dx$ 의 값을 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	80 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	20 %

$$\begin{aligned}
 1086 \quad \int_0^a \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx - \int_0^a \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx \\
 = \int_0^a \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx \\
 - \int_0^a \left(\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx \\
 = \int_0^a \left[\left(1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) - \left(1 - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) \right] dx \\
 = \int_0^a 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx \\
 = \int_0^a 2 \sin x dx = \left[-2 \cos x \right]_0^a \\
 = -2 \cos a - (-2) \\
 = -2 \cos a + 2
 \end{aligned}$$

따라서 $-2 \cos a + 2 = 1$ 이므로

$$\cos a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 1087 \quad \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_{-1}^0 (e^x - 1) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
 &= \left[e^x - x \right]_{-1}^0 + \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 1 - (e^{-1} + 1) - (-1) \\
 &= 1 - \frac{1}{e} \quad \text{답 } 1 - \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

1088 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서도 연속
이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sin x + a) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 + a = 0 \quad \therefore a = -1$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (x \geq \frac{\pi}{2}) \\ \cos x & (x \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - 1) dx \\
 &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\cos x - x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= 1 + (1 - \pi) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= 2 - \frac{\pi}{2} \quad \text{답 } 2 - \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1089 \quad |e^x - 1| &= \begin{cases} e^x - 1 & (x \geq 0) \\ -e^x + 1 & (x \leq 0) \end{cases} \text{이므로} \\
 \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx &= \int_{-1}^0 (-e^x + 1) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx \\
 &= \left[-e^x + x \right]_{-1}^0 + \left[e^x - x \right]_0^1 \\
 &= -1 - (-e^{-1} - 1) + (e - 1) - 1 \\
 &= \frac{1}{e} + e - 2 \quad \text{답 } \frac{1}{e} + e - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1090 \quad |\sin x| + k &= \begin{cases} \sin x + k & (0 \leq x \leq \pi) \\ -\sin x + k & (\pi \leq x \leq 2\pi) \end{cases} \text{이므로} \\
 \int_0^{2\pi} (|\sin x| + k) dx &= \int_0^{\pi} (\sin x + k) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x + k) dx \\
 &= \left[-\cos x + kx \right]_0^{\pi} + \left[\cos x + kx \right]_{\pi}^{2\pi} \\
 &= (1 + k\pi) - (-1) + (1 + 2k\pi) - (-1 + k\pi) \\
 &= 2k\pi + 4
 \end{aligned}$$

따라서 $2k\pi + 4 = 10$ 이므로

$$2k\pi = 6 \quad \therefore k = \frac{3}{\pi} \quad \text{답 } ③$$

1091 $(f \circ g)(x) = |\sin x - \cos x|$ 이므로

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -\sin x + \cos x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}) \\ \sin x - \cos x & (\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f \circ g)(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sin x + \cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx \\
 &= \left[\cos x + \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 1 - 1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= 2(\sqrt{2} - 1) \quad \text{답 } ③
 \end{aligned}$$

1092 x^3 은 우함수, $\sin 3x$ 는 기함수이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + \sin 3x) dx &= 2 \int_0^{\pi} x^2 dx \\
 &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^3 \quad \text{답 } ②
 \end{aligned}$$

1093 x 는 기함수, $\cos 2x$ 는 우함수이므로 $x \cos 2x$ 는 기함수이다.
또 $\sin x$ 는 기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \cos 2x + \sin x) dx = 0 \quad \text{답 } 0$$

라센 특강

우함수, 기함수의 곱

- ① (우함수) \times (우함수) = (우함수)
- ② (우함수) \times (기함수) = (기함수)
- ③ (기함수) \times (기함수) = (우함수)

1094 $f(x) = e^x + e^{-x}$ 에서

$$f(-x) = e^{-x} + e^x = f(x)$$

이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{-\ln 2}^5 f(x) dx + \int_5^{\ln 2} f(x) dx &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = 2 \int_0^{\ln 2} (e^x + e^{-x}) dx \\
 &= 2 \left[e^x - e^{-x} \right]_0^{\ln 2} = 2 \left(2 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

... ②

답 3

채점 기준	비율
① $f(x)$ 가 우함수임을 알 수 있다.	30 %
② $\int_{-\ln 2}^5 f(x) dx + \int_5^{\ln 2} f(x) dx$ 의 값을 구할 수 있다.	70 %

1095 $f(x) = |\cos x|$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 주기가 π 인 주기함수이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^{4\pi} |\cos x| dx &= 4 \int_0^{\pi} |\cos x| dx \\
 &= 4 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx \right\} \\
 &= 4 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4 \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= 4 + 4 = 8 \quad \text{답 } ④
 \end{aligned}$$

1096 $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 주기가 4π 인 주기함수이므로
 함수 $y = \sin ax$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$ 이다.

$$\int_a^{a+4\pi} \sin \frac{x}{2} dx = \int_0^{4\pi} \sin \frac{x}{2} dx = \left[-2 \cos \frac{x}{2} \right]_0^{4\pi} \\ = -2 - (-2) = 0 \quad \text{답 ①}$$

1097 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$
 $= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) dx$
 $= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_{-1}^1$
 $= \frac{1}{2} \{ (e - e^{-1}) - (e^{-1} - e) \}$
 $= e - \frac{1}{e} \quad \dots ①$

조건 ④에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+2)$ 이므로

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx = \int_3^5 f(x) dx = \int_5^7 f(x) dx = e - \frac{1}{e}$$

$$\therefore \int_{-1}^7 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx$$

$$= 4 \left(e - \frac{1}{e} \right) \quad \dots ②$$

답 ④ $4 \left(e - \frac{1}{e} \right)$

채점 기준	비율
① $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $\int_{-1}^7 f(x) dx$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %

1098 $x^2 + 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$

또한 $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{2} dt = \int_1^2 \frac{1}{2} t^{-2} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2} t^{-1} \right]_1^2 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \quad \text{답 ④}$$

1099 $x^2 + x - 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x + 1$

또한 $x=1$ 일 때 $t=1$, $x=3$ 일 때 $t=11$ 이므로

$$\int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx = \int_1^{11} \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_1^{11} = \ln 11$$

$$\therefore k=11 \quad \text{답 ④}$$

1100 $2x-1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2$

또한 $x=1$ 일 때 $t=1$, $x=k$ 일 때 $t=2k-1$ 이므로

$$\int_1^k \sqrt{2x-1} dx = \int_1^{2k-1} \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \int_1^{2k-1} \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \left[\frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{2k-1} = \frac{1}{3} (2k-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}$$

따라서 $\frac{1}{3} (2k-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$ 이므로

$$(2k-1)^{\frac{3}{2}} = 27, \quad 2k-1 = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 9$$

$$\therefore k=5 \quad \text{답 5}$$

1101 $1 + \ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

또한 $x=1$ 일 때 $t=1$, $x=e^2$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\int_1^{e^2} \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx = \int_1^3 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^3$$

$$= 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \quad \text{답 } \frac{26}{3}$$

1102 $e^x + 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = e^x$

또한 $x=-a$ 일 때 $t=e^{-a}+1$, $x=a$ 일 때 $t=e^a+1$ 이므로

$$\int_{-a}^a \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int_{e^{-a}+1}^{e^a+1} \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_{e^{-a}+1}^{e^a+1}$$

$$= \ln(e^a+1) - \ln(e^{-a}+1)$$

$$= \ln \frac{e^a+1}{e^{-a}+1} = \ln \frac{e^a(e^a+1)}{1+e^a}$$

$$= \ln e^a = a$$

$$\therefore a=7 \quad \text{답 ④}$$

다른 풀이 $(e^x+1)' = e^x$ 이므로

$$\int_{-a}^a \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int_{-a}^a \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx = [\ln(e^x+1)]_{-a}^a$$

$$= \ln(e^a+1) - \ln(e^{-a}+1)$$

$$= \ln \frac{e^a+1}{e^{-a}+1} = \ln \frac{e^a(e^a+1)}{1+e^a}$$

$$= \ln e^a = a$$

1103 $f(n) = \int_1^n \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ 에서 $1-\sqrt{x}=t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \dots ①$$

또한 $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=n$ 일 때 $t=1-\sqrt{n}$ 이므로

$$f(n) = \int_1^n \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{1-\sqrt{n}} e^t \cdot (-2) dt$$

$$= \int_{1-\sqrt{n}}^0 2e^t dt = [2e^t]_{1-\sqrt{n}}^0$$

$$= 2 - 2e^{1-\sqrt{n}} \quad \dots ②$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - 2e^{1-\sqrt{n}}) = 2 \quad \dots ③$$

답 2

채점 기준	비율
① $1-\sqrt{x}=t$ 로 치환하여 $\frac{dt}{dx}$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $f(n)$ 을 구할 수 있다.	50 %
③ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

라벨 특강 지수함수의 극한

지수함수 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)에서

① $a>1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

② $0<a<1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

$$\begin{aligned} 1104 \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cot^2 x) \cos x dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2 x \cos x dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \end{aligned}$$

$$\sin x = t \text{로 놓으면} \quad \frac{dt}{dx} = \cos x$$

또한 $x = \frac{\pi}{6}$ 일 때 $t = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$ 일 때 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^{-2} dt \\ &= \left[-\frac{1}{t} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} - (-2) \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$1105 \quad \cos x = t \text{로 놓으면} \quad \frac{dt}{dx} = -\sin x$$

또한 $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{3}$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f'(\cos x) \sin x dx &= \int_1^{\frac{1}{2}} f'(t) \cdot (-1) dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f'(t) dt = \left[f(t) \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} 1106 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin x}{1+\cos x} dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx \\ = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx \end{aligned}$$

$$1+\cos x = t \text{로 놓으면} \quad \frac{dt}{dx} = -\sin x$$

또한 $x=0$ 일 때 $t=2$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx &= 2 \int_2^1 \frac{1}{t} \cdot (-1) dt = 2 \int_1^2 \frac{1}{t} dt \\ &= 2 \left[\ln |t| \right]_1^2 = 2 \ln 2 \end{aligned}$$

$\therefore k=2$

답 2

$$1107 \quad x = \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면} \quad \frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$$

또한 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

답 ③

$$1108 \quad x = 2 \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면} \quad \frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$$

또한 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2 \theta} \cdot 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4\cos^2 \theta} \cdot 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

→ ①

이때 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ 에서 $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos^2 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \cdot \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos 2\theta + 2) d\theta \\ &= \left[\sin 2\theta + 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

→ ②

$$\text{답 } \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

채점 기준	비율
① 치환하여 피적분함수를 변형할 수 있다.	50 %
② $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

$$1109 \quad x = 5 \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면} \quad \frac{dx}{d\theta} = 5 \cos \theta$$

또한 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{5}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{5}{2}} \frac{x+1}{\sqrt{25-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{5 \sin \theta + 1}{\sqrt{25-25 \sin^2 \theta}} \cdot 5 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{5 \sin \theta + 1}{\sqrt{25 \cos^2 \theta}} \cdot 5 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (5 \sin \theta + 1) d\theta \\ &= \left[-5 \cos \theta + \theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{5}{2} \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} - (-5) \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{5}{2} \sqrt{3} + 5 \end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{1}{6}$, $b=-\frac{5}{2}$, $c=5$ 이므로

$$a+b+c = \frac{8}{3}$$

답 ⑤

$$1110 \quad x = 3 \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면} \quad \frac{dx}{d\theta} = 3 \sec^2 \theta$$

또한 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+9} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{9 \tan^2 \theta + 9} \cdot 3 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3 \sec^2 \theta}{9 \sec^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{3} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{18}\end{aligned}$$

답 ⑤

1111 $x = \sqrt{3} \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{3} \sec^2 \theta$
또한 $x = -3$ 일 때 $\theta = -\frac{\pi}{3}$, $x = 3$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 \frac{1}{3+x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3+3 \tan^2 \theta} \cdot \sqrt{3} \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \sec^2 \theta}{3 \sec^2 \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{3} d\theta \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \theta \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \pi - \left(-\frac{\sqrt{3}}{9} \pi \right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi\end{aligned}$$

따라서 $k = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 이므로 $27k^2 = 27 \cdot \frac{4}{27} = 4$

답 4

1112 $x = a \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = a \sec^2 \theta$

또한 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=a$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{a^2+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2+a^2 \tan^2 \theta} \cdot a \sec^2 \theta d\theta \quad \cdots \textcircled{1} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2(1+\tan^2 \theta)} \cdot a \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 \sec^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{a} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4a}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{\pi}{4a} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① 치환하여 피적분함수를 변형할 수 있다.	40 %
② $\int_0^a \frac{1}{a^2+x^2} dx$ 의 값을 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	10 %

1113 $f(x) = x+1$, $g'(x) = \sin \frac{x}{2}$ 로 놓으면

$$f'(x) = 1, g(x) = -2 \cos \frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^\pi (x+1) \sin \frac{x}{2} dx &= \left[(x+1) \cdot \left(-2 \cos \frac{x}{2} \right) \right]_0^\pi \\ &\quad - \int_0^\pi \left(-2 \cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= -(-2) + \left[4 \sin \frac{x}{2} \right]_0^\pi \\ &= 2+4 \\ &= 6\end{aligned}$$

답 6

1114 $f(x) = \cos x$, $g'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = -\sin x, g(x) = e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx &= \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^x \sin x) dx \\ &= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$ 에서 $u(x) = \sin x$, $v'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned}u'(x) &= \cos x, v(x) = e^x \\ \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx &= \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx &= -1 + \left(e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \right) \\ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx &= e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \\ \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx &= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ 이므로 $a+b=0$

답 0

1115 $f(t) = \int_0^1 (3tx - e^x)^2 dx$

$$\begin{aligned}&= \int_0^1 (9t^2 x^2 - 6txe^x + e^{2x}) dx \\ &= 9t^2 \int_0^1 x^2 dx - 6t \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 e^{2x} dx\end{aligned}$$

$\int_0^1 xe^x dx$ 에서 $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned}u'(x) &= 1, v(x) = e^x \\ \therefore \int_0^1 xe^x dx &= \left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - \left[e^x \right]_0^1 = e - (e-1) = 1\end{aligned}$$

또한

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}, \\ \int_0^1 e^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f(t) &= 3t^2 - 6t + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \\ &= 3(t-1)^2 + \frac{1}{2} e^2 - \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $f(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최솟값 $\frac{1}{2} e^2 - \frac{7}{2}$ 을 갖는다.

답 ③

1116 $\int_1^e f(t) dt = k$ (k 는 상수) ①

로 놓으면 $f(x) = \frac{1}{x} + k$

이것을 ①에 대입하면

$$\int_1^e \left(\frac{1}{t} + k \right) dt = k, \quad \left[\ln |t| + kt \right]_1^e = k$$

$$1+ek-k=k, \quad k(e-2)=-1$$

$$\therefore k=-\frac{1}{e-2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e-2} \quad \text{답 } f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e-2}$$

$$1117 \int_0^1 e^{-t} f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면 $f(x)=e^x+k$ → ①

이것을 ①에 대입하면

$$\int_0^1 e^{-t}(e^t+k)dt=k, \quad \int_0^1 (1+ke^{-t})dt=k$$

$$\left[t-ke^{-t}\right]_0^1=k, \quad 1-\frac{k}{e}-(-k)=k$$

$$\therefore k=e \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $f(x)=e^x+e$ 이므로

$$f(2)=e^2+e \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 e^2+e

채점 기준	비율
① 정적분을 k 로 놓고 $f(x)$ 를 k 를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $f(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

$$1118 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면 $f(x)=\cos x+2k$

이것을 ①에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t+2k) \sin t dt = k$$

이때

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t+2k) \sin t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t + 2k \sin t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + 2k \sin t \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2t - 2k \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} - 2k \right) \\ &= \frac{1}{2} + 2k \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{2} + 2k = k \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x)=\cos x-1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2} \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

$$1119 \int_e^x f(t) dt = x \ln x - x + k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=\ln x+x \cdot \frac{1}{x}-1=\ln x$$

$$\therefore f(e^2)=2$$

①의 양변에 $x=e$ 를 대입하면

$$0=e-e+k \quad \therefore k=0$$

$$\therefore k+f(e^2)=2 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

1120 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=(\sin x+\cos x)+x(\cos x-\sin x)$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2} \quad \text{답 } \sqrt{2}$$

$$1121 \int_{\ln 4}^x e^t f(t) dt = e^{2x} - ae^x + 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x f(x)=2e^{2x}-ae^x$$

$$\therefore f(x)=2e^x-a$$

①의 양변에 $x=\ln 4$ 를 대입하면

$$0=e^{2\ln 4}-ae^{\ln 4}+8, \quad 16-4a+8=0$$

$$\therefore a=6$$

따라서 $f(x)=2e^x-6$ 이므로

$$f(0)=-4 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

$$1122 \int_0^x (x-t)f(t)dt=e^{3x}+ax-1 \text{에서}$$

$$x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = e^{3x} + ax - 1$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 3e^{3x} + a$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt = 3e^{3x} + a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0=3+a \quad \therefore a=-3$$

또 ①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=9e^{3x}$$

$$\text{따라서 } f(\ln 2)=72 \text{이므로 } a+f(\ln 2)=69 \quad \text{답 } 69$$

$$1123 \int_0^x (x-t)f'(t)dt=\sin x \cos x - x \text{에서}$$

$$x \int_0^x f'(t)dt - \int_0^x tf'(t)dt = \frac{1}{2} \sin 2x - x$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t)dt + xf'(x) - xf'(x) = \cos 2x - 1$$

$$\int_0^x f'(t)dt = \cos 2x - 1, \quad \left[f(t)\right]_0^x = \cos 2x - 1$$

$$f(x)-f(0)=\cos 2x-1$$

$$f(0)=1 \text{이므로 } f(x)=\cos 2x \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

$$1124 \int_0^x f(t)dt=ex+\int_0^x (x-t)f(t)dt \text{에서}$$

$$\int_0^x f(t)dt=ex+x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=e+\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$$

$$\therefore f(x)=e+\int_0^x f(t)dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=f(x), \quad \frac{f'(x)}{f(x)}=1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 1 dx, \quad \ln f(x) = x + C \quad (\because f(x) > 0)$$

$$\therefore f(x) = e^{x+C}$$

또 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=e$

$$e^C = e \quad \therefore C=1$$

따라서 $f(x) = e^{x+1}$ 이므로

$$f(2) = e^3$$

답 e^3

1125 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (2\sin x - 1)\cos x$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad \sin x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = 0$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$			↘	↗	

따라서 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin t - 1)\cos t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin t \cos t - \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2t - \cos t) \, dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2t - \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{4}$

1126 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{5-x}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=5$$

x	0	...	5	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$ 는 $x=5$ 에서 극대이고 극댓값은

$$\begin{aligned} f(5) &= \int_1^5 \frac{5-t}{t} dt = \int_1^5 \left(\frac{5}{t} - 1 \right) dt \\ &= \left[5 \ln |t| - t \right]_1^5 = (5 \ln 5 - 5) - (-1) \\ &= 5 \ln 5 - 4 \end{aligned}$$

즉 $a=5$, $b=5 \ln 5 - 4$ 이므로

$$a+b = 5 \ln 5 + 1$$

답 ⑤

1127 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \sqrt{x}(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=0 \text{ 또는 } x=1$$

x	0	...	1	...	4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

$$f(0) = \int_0^0 \sqrt{t}(t-1) dt = 0$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^1 \sqrt{t}(t-1) dt = \int_0^1 (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) dt \\ &= \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= \int_0^4 \sqrt{t}(t-1) dt = \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \\ &= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} = \frac{112}{15} \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값 $\frac{112}{15}$, $x=1$ 일 때 최솟값 $-\frac{4}{15}$ 를 가지므로

$$M = \frac{112}{15}, \quad m = -\frac{4}{15}$$

$$\therefore M+m = \frac{36}{5}$$

답 $\frac{36}{5}$

1128 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (e^x - 2)(e^x + 2)$$

→ ①

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=\ln 2$$

→ ②

따라서 $f(x)$ 는 $x=\ln 2$ 에서 극소이면서 최솟이므로 구하는 최솟값은

x	...	$\ln 2$...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		↘	↗

$$\begin{aligned} &f(\ln 2) \\ &= \int_0^{\ln 2} (e^t - 2)(e^t + 2) dt \\ &= \int_0^{\ln 2} (e^{2t} - 4) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2t} - 4t \right]_0^{\ln 2} = (2 - 4 \ln 2) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} - 4 \ln 2 \end{aligned}$$

→ ③

$$\text{답 } \frac{3}{2} - 4 \ln 2$$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
② $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

1129 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \sin 2x(2 \cos 2x - 1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad \sin 2x=0 \text{ 또는 } \cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극대이면서 최대이고 최댓값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2t (2 \cos 2t - 1) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \sin 2t \cos 2t - \sin 2t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 4t - \sin 2t) dt = \left[-\frac{1}{4} \cos 4t + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} \\ \text{즉 } a &= \frac{\pi}{6}, b = \frac{1}{8} \text{ 이므로 } \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \pi \end{aligned}$$

1130 $F'(x) = f(x)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} \\ &= F'(1) = f(1) \\ &= \sin \pi + \cos \pi \\ &= -1 \end{aligned}$$

1131 $f(x) = \ln x + xe^x$, $F'(x) = f(x)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+2h} (\ln x + xe^x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+2h} f(x) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{2h} \cdot 2 \\ &= 2F'(1) = 2f(1) \\ &= 2e \end{aligned}$$

1132 $f(x) = x \sin x$, $F'(x) = f(x)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h} x \sin x dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h} f(x) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{-h} \\ &= F'\left(\frac{\pi}{2}\right) + F'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① $f(x) = x \sin x$, $F'(x) = f(x)$ 로 놓고 식을 간단히 할 수 있다.	80 %
② 주어진 식의 극한값을 구할 수 있다.	20 %

1133 $f(t) = t(3^t + \ln t)$, $F'(t) = f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{\sqrt{x}} t(3^t + \ln t) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{\sqrt{x}} f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(\sqrt{x}) - F(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(\sqrt{x}) - F(1)}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{2} F'(1) = \frac{1}{2} f(1) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

1134 $F'(x) = f(x)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{x - \frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{F(x) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \\ &= F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

1135 $f(t) = t^2 e^t$, $F'(t) = f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^3 - 8} \int_2^x t^2 e^t dt &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^3 - 8} \int_2^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x^3 - 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 4} \\ &= \frac{1}{12} F'(2) = \frac{1}{12} f(2) \\ &= \frac{1}{3} e^2 \end{aligned}$$

1136 전라 $k \int_a^b f(x) dx = \int_a^b k f(x) dx$ (k 는 상수),

$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad \int_1^2 \frac{3x^2 + x - 1}{x^2} dx - 3 \int_1^2 \frac{x^2 - x + 1}{x^2} dx &= \int_1^2 \frac{3x^2 + x - 1 - 3(x^2 - x + 1)}{x^2} dx \\ &= \int_1^2 \frac{4x - 4}{x^2} dx = 4 \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= 4 \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - x^{-2} \right) dx = 4 \left[\ln |x| + x^{-1} \right]_1^2 \\ &= 4 \left(\ln 2 + \frac{1}{2} - 1 \right) = 4 \ln 2 - 2 \end{aligned}$$

1137 전라 지수함수의 부정적분을 이용하여 정적분을 계산한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad \int_0^1 3^{2x} dx &= \int_0^1 9^x dx = \left[\frac{9^x}{\ln 9} \right]_0^1 \\ &= \frac{9}{\ln 9} - \frac{1}{\ln 9} = \frac{8}{\ln 9} \\ \therefore k &= 8 \end{aligned}$$

1138 전략 $f(x)$ 가 우함수이면 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ 이고, $f(x)$ 가 기함수이면 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ 임을 이용한다.

풀이 $\cos \pi x$ 는 우함수, $\sin \pi x$ 는 기함수이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos \pi x + \sin \pi x) dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi x dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi x \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{2}{\pi}$$

1139 전략 $3-x=t$ 로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $3-x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -1$

또한 $x=0$ 일 때 $t=3$, $x=2$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(3-x) dx &= \int_3^1 f(t) \cdot (-1) dt \\ &= \int_1^3 f(t) dt \\ &= \int_1^3 f(x) dx \end{aligned} \quad \text{답 } ②$$

1140 전략 $f(t)=(t-1)e^t$, $F'(t)=f(t)$ 로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 정리한다.

풀이 $f(t)=(t-1)e^t$, $F'(t)=f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (t-1)e^t dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\ &= F'(0) = f(0) = -1 \end{aligned} \quad \text{답 } ②$$

1141 전략 $|r| < 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$ 임을 이용한다.

풀이 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq \cos^2 x < 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\cos^2 x)^{n-1} \\ &= \frac{1}{1 - \cos^2 x} \quad \cdots ① \\ \therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 - \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2 x dx = \left[-\cot x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} - (-\sqrt{3}) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \cdots ② \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 간단히 정리할 수 있다.	50 %
② $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

1142 전략 구간에 따라 다르게 정의된 함수는 구간을 나누어 각각 정적분의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} (\sin x + \cos x) dx \\ &= \left[\tan x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \sqrt{2} \left[-\cos x + \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - (-1) + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2} \end{aligned} \quad \text{답 } ⑤$$

1143 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 경계로 적분 구간을 나누어 구한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } |2 \cos 2x - 1| &= \begin{cases} 2 \cos 2x - 1 & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}) \\ -2 \cos 2x + 1 & (\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases} \text{이므로} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} |2 \cos 2x - 1| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos 2x - 1) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (-2 \cos 2x + 1) dx \\ &= \left[\sin 2x - x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-\sin 2x + x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &= \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \end{aligned} \quad \text{답 } \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$$

1144 전략 함수 $y = \sin x$ 는 주기가 2π 인 주기함수임을 이용한다.

풀이 $f(x) = \sin x$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 주기가 2π 인 주기함수이므로

$$\begin{aligned} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x) dx &= \int_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} f(x) dx \\ &= \cdots = \int_{2\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_0^{-\pi} f(x) dx \quad \cdots ① \\ \therefore \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x dx &= \int_0^{-\pi} \sin x dx = \int_{-\pi}^0 (-\sin x) dx \\ &= \left[\cos x \right]_{-\pi}^0 = 1 - (-1) \\ &= 2 \quad \cdots ② \end{aligned} \quad \text{답 } 2$$

채점 기준	비율
① 주어진 정적분과 값이 같은 정적분을 찾을 수 있다.	50 %
② 주어진 정적분의 값을 구할 수 있다.	50 %

1145 전략 $f(x)$ 가 주기가 p 인 주기함수이면

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx \text{임을 이용한다.}$$

풀이 $f(x) = |\sin 2x|$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 주기함수이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |\sin 2x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin 2x| dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin 2x| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x| dx &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x| dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \\ &= 4 \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4 \left\{ \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} = 4\end{aligned}$$

답 ④

1146 전략 $x^2+3x+5=t$ 로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $x^2+3x+5=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+3$

또한 $x=-1$ 일 때 $t=3$, $x=1$ 일 때 $t=9$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{4x+6}{x^2+3x+5} dx &= \int_3^9 \frac{1}{t} \cdot 2 dt = \left[2 \ln |t| \right]_3^9 \\ &= 2 \ln 9 - 2 \ln 3 = 2 \ln 9 - \ln 9 \\ &= \ln 9\end{aligned}$$

$\therefore k=9$

→ ①

→ ②

→ ③

답 9

채점 기준	비율
① $x^2+3x+5=t$ 로 치환하고 적분 구간을 구할 수 있다.	30 %
② 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	10 %

1147 전략 먼저 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 피적분함수를 변형한다.

풀이 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x \cdot \cos x dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \cos x$

또한 $x = -\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t = -1$, $x = \pi$ 일 때 $t = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \sin^2 x) \cos x dx &= \int_{-1}^0 (1 - t^2) dt = \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^0 \\ &= - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 $p=3$, $q=2$ 이므로 $p+q=5$

답 5

1148 전략 $\sin x = t$ 로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\sin x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \cos x$

또한 $x = -\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t = -1$, $x = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t = 1$ 이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$t = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dt}{d\theta} = \sec^2 \theta$

또한 $t = -1$ 일 때 $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $t = 1$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta \\ &= \left[\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{2}$

1149 전략 부분적분법을 이용한다.

풀이 $f(x) = 1 - \ln x$, $g'(x) = x$ 로 놓으면

$$f'(x) = -\frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$\therefore \int_1^e x(1 - \ln x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 (1 - \ln x) \right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{2} x^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^e = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} (e^2 - 3)$$

답 ⑤

1150 전략 $\int_0^1 t f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓고 k 의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^1 t f(t) dt = k$ (k 는 상수)

..... ①

로 놓으면 $f(x) = e^{x^2} + k$

이것을 ①에 대입하면 $\int_0^1 t(e^{t^2} + k) dt = k$

$$t^2 = s \text{로 놓으면 } \frac{ds}{dt} = 2t$$

또한 $t=0$ 일 때 $s=0$, $t=1$ 일 때 $s=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 t(e^{t^2} + k) dt &= \int_0^1 (e^s + k) \cdot \frac{1}{2} ds = \frac{1}{2} \left[e^s + ks \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (e + k - 1)\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2} (e + k - 1) = k$ 이므로 $k = e - 1$

$$\therefore \int_0^1 x f(x) dx = e - 1$$

답 ④

1151 전략 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하여 $f'(x)$ 를 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{2-x}{e^x}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 2$

따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대

이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(2) = \int_0^2 \frac{2-t}{e^t} dt$$

$$= \int_0^2 (2-t) e^{-t} dt$$

$u(t) = 2-t$, $v'(t) = e^{-t}$ 으로 놓으면

$$u'(t) = -1, v(t) = -e^{-t}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(2) &= \int_0^2 (2-t) e^{-t} dt = \left[(2-t) \cdot (-e^{-t}) \right]_0^2 - \int_0^2 e^{-t} dt \\ &= -(-2) + \left[e^{-t} \right]_0^2 \\ &= 2 + (e^{-2} - 1) = 1 + \frac{1}{e^2}\end{aligned}$$

답 $1 + \frac{1}{e^2}$

1152 전략 분자와 분모에 각각 e^t 을 곱하여 피적분함수를 변형한다.

풀이 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}} dt = \int_0^x \frac{e^t}{e^t+1} dt$

$$(e^t + 1)' = e^t \circlearrowleft \text{므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{e^t}{e^t + 1} dt = \int_0^x \frac{(e^t + 1)'}{e^t + 1} dt \\ &= \left[\ln(e^t + 1) \right]_0^x = \ln(e^x + 1) - \ln 2 \\ &= \ln \frac{e^x + 1}{2} \end{aligned}$$

이때 $(f \circ f)(a) = \ln 5$ 에서 $f(a) = k$ 로 놓으면 $f(k) = \ln 5$ 이므로

$$\begin{aligned} \ln \frac{e^k + 1}{2} &= \ln 5, & \frac{e^k + 1}{2} &= 5 \\ e^k &= 9 & \therefore k &= \ln 9 \end{aligned}$$

따라서 $f(a) = \ln 9$ 이므로

$$\begin{aligned} \ln \frac{e^a + 1}{2} &= \ln 9, & \frac{e^a + 1}{2} &= 9 \\ e^a &= 17 & \therefore a &= \ln 17 \end{aligned}$$

답 ④

1153 **전략** $\overline{OH} = \overline{OP} \cos \theta$, $\overline{PH} = \overline{OP} \sin \theta$ 임을 이용한다.

풀이 직각삼각형 POH에서 $\overline{OH} = \overline{OP} \cos \theta$, $\overline{PH} = \overline{OP} \sin \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{\overline{OH}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{OP} \cos \theta}{\overline{OP} \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ \therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta) d\theta &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\sin \theta = t \text{로 놓으면} \quad \frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$$

또한 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때 $t = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta) d\theta &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t} dt \\ &= \left[\ln |t| \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{1}{2} \\ &= \ln \sqrt{3} = \frac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

답 ①

1154 **전략** 부분적분법과 치환적분법을 이용하여 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx$ 의 값을 구한다.

$$\text{풀이} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[f(x)g(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)g(x)dx \\ &= f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)g(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^3} dx \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^3} dx \end{aligned}$$

$$1 + \sin^2 x = t \text{로 놓으면} \quad \frac{dt}{dx} = 2 \sin x \cos x$$

또한 $x = 0$ 일 때 $t = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx &= - \int_1^2 \frac{2 \sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^3} dx \\ &= - \int_1^2 \frac{1}{t^3} dt = - \int_1^2 t^{-3} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^{-2} \right]_1^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

답 ③

1155 **전략** 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하여 $f'(x)$ 를 구한다.

$$\text{풀이} e^x f(x) = e^x \ln x + \int_1^x e^t f(t) dt \quad \dots\dots ⑦$$

⑦의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x f(x)$$

$$\therefore f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}$$

→ ①

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx = \int \ln x dx + \int \frac{1}{x} dx$$

$\int \ln x dx$ 에서 $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x$$

$$\therefore \int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + C_1$$

$$\therefore f(x) = x \ln x - x + \ln x + C$$

⑦의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $ef(1) = 0 \quad \therefore f(1) = 0$

$$-1 + C = 0 \quad \therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = x \ln x - x + \ln x + 1$ 이므로

$$f(e^2) = 2e^2 - e^2 + 2 + 1 = e^2 + 3$$

→ ②

→ ③

답 $e^2 + 3$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	50 %
③ $f(e^2)$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

1156 **전략** $f(x) = ax(x-3)$ ($a < 0$)이라 하고 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하여 $g'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구한다.

풀이 $f(x) = ax(x-3)$ ($a < 0$)이라 하면

$$g(x) = \int_0^x \{e^{at(t-3)} - 1\} dt$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = e^{ax(x-3)} - 1$$

$$g'(x) = 0 \text{에서} \quad e^{ax(x-3)} = 1$$

$$ax(x-3) = 0 \quad \therefore x = 3 \quad (\because x > 0)$$

x	0	...	3	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		↗	극대	↘

따라서 $g(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $g(3)$ 이다.

답 ⑤

10

정적분의 활용

III. 적분법

$$1157 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 \frac{1}{n}$$

이때 $f(x) = x^2$, $a=0$, $b=1$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, \quad x_k = a + k\Delta x = \frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore (가) \frac{1}{n} \quad (나) \frac{k}{n} \quad (다) 1$$

답 풀이 참조

$$1158 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\left(\frac{2}{n} \right)^3 + \left(\frac{4}{n} \right)^3 + \left(\frac{6}{n} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{2n}{n} \right)^3 \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} \right)^3 \frac{2}{n}$$

이때 $f(x) = x^3$, $a=0$, $b=2$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}, \quad x_k = a + k\Delta x = \frac{2k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} \right)^3 \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = 4$$

답 4

$$1159 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{k\pi}{n} \right) \frac{\pi}{n}$$

이때 $f(x) = \sin x$, $a=0$, $b=\pi$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{n}, \quad x_k = a + k\Delta x = \frac{k\pi}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{k\pi}{n} \right) \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_0^\pi f(x) dx$$

$$= \int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi = 2$$

$$\therefore (가) \frac{\pi}{n} \quad (나) \frac{k\pi}{n} \quad (다) \pi$$

답 풀이 참조

$$1160 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{3n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2+\frac{2}{n}} + \frac{1}{2+\frac{3}{n}} + \cdots + \frac{1}{2+\frac{n}{n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2+\frac{k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2+\frac{k}{n}} \right) \frac{1}{n}$$

이때 $f(x) = \frac{1}{2+x}$, $a=0$, $b=1$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, \quad x_k = a + k\Delta x = \frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2+\frac{k}{n}} \right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2+x} dx = \left[\ln |2+x| \right]_0^1$$

$$= \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

$$\text{답 } \ln \frac{3}{2}$$

1161 주어진 곡선은 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 $y \leq 0$ 이고, 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $y \geq 0$ 이다.

따라서 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-e^x + 1) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx$$

$$= \left[-e^x + x \right]_{-1}^0 + \left[e^x - x \right]_0^1$$

$$= \{-1 - (-e^{-1} - 1)\} + (e - 1 - 1)$$

$$= e + \frac{1}{e} - 2$$

$$\therefore (가) \leq (나) \geq (다) -e^x + 1 \quad (라) e^x - 1 \quad (마) e + \frac{1}{e} - 2$$

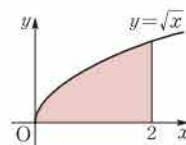
답 풀이 참조

1162 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \sqrt{x} dx = \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^2$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

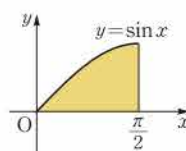


$$\text{답 } \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

1163 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1$$

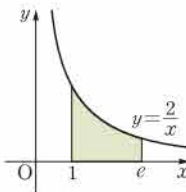


답 1

1164 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_1^e \frac{2}{x} dx = \left[2 \ln |x| \right]_1^e$$

$$= 2$$



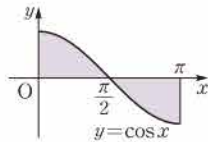
답 2

1165 곡선 $y = \cos x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $\cos x = 0$ 에서

$$x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |\cos x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$



답 2

1166 주어진 곡선은 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 $x \leq 0$ 이고, 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $x \geq 0$ 이다.

따라서 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 |e^y - 1| dy = \int_{-1}^0 (-e^y + 1) dy + \int_0^1 (e^y - 1) dy \\ &= \left[-e^y + y \right]_{-1}^0 + \left[e^y - y \right]_0^1 \\ &= \{-1 - (-e^{-1} - 1)\} + (e - 1 - 1) \\ &= e + \frac{1}{e} - 2 \end{aligned}$$

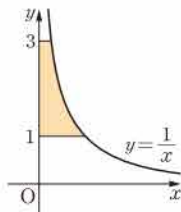
$$\therefore (가) \leq (나) \geq (다) - e^y + 1 \quad (라) e^y - 1 \quad (마) e + \frac{1}{e} - 2$$

답 풀이 참조

1167 $y = \frac{1}{x}$ 에서 $x = \frac{1}{y}$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3 \frac{1}{y} dy = \left[\ln |y| \right]_1^3 = \ln 3$$



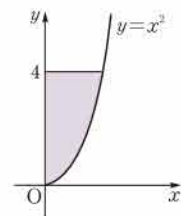
답 ln 3

1168 $y = x^2$ 에서 $x = \sqrt{y}$ ($\because x \geq 0$)

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^4 \sqrt{y} dy &= \int_0^4 y^{\frac{1}{2}} dy \\ &= \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

답 16/3

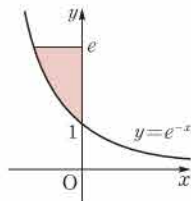


1169 $y = e^{-x}$ 에서 $-x = \ln y$

$$\therefore x = -\ln y$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_1^e |-\ln y| dy &= \int_1^e \ln y dy \\ &= \left[y \ln y \right]_1^e - \int_1^e 1 dy \\ &= e - \left[y \right]_1^e \\ &= e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$



답 1

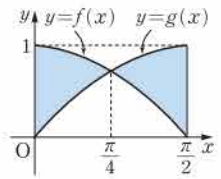
1170 (1) 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 교점의 x 좌표는 $\cos x = \sin x$ 에서

$$x = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \quad \therefore a = \frac{\pi}{4}$$

(2) 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\text{닫힌구간 } \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{에서 } f(x) \geq g(x)$$

$$\text{닫힌구간 } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \text{에서 } f(x) \leq g(x)$$



$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$$

$$= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2$$

답 풀이 참조

1171 곡선 $y = \frac{3}{x}$ 과 직선 $y = 4 - x$ 의 교

점의 x 좌표는 $\frac{3}{x} = 4 - x$ 에서

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

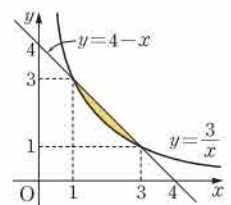
$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x}\right) dx &= \left[4x - \frac{1}{2}x^2 - 3\ln|x| \right]_1^3 \\ &= \left(\frac{15}{2} - 3\ln 3 \right) - \frac{7}{2} = 4 - 3\ln 3 \end{aligned}$$

답 4 - 3ln 3



1172 두 곡선 $y = x^2$, $y = 2\sqrt{2x}$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2 = 2\sqrt{2x}$ 에서

$$x^4 = 8x, \quad x(x^3 - 8) = 0$$

$$x(x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

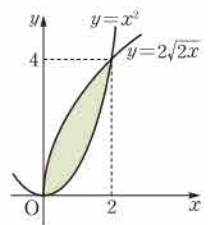
$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$$(\because x^2 + 2x + 4 > 0)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2\sqrt{2x} - x^2) dx &= \int_0^2 (2\sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - x^2) dx \\ &= \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

답 8/3

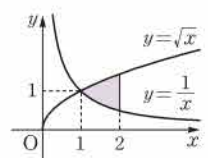


1173 두 곡선 $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ 의 교점의 x

좌표는 $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$ 에서

$$x = \frac{1}{x^2}, \quad x^3 = 1$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$



$$\therefore x=1 (\because x^2+x+1>0)$$

따라서 구하는 넓이는

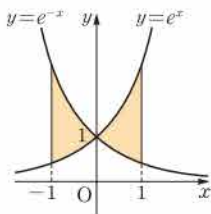
$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) dx &= \int_1^2 \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \ln|x| \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \ln 2 \right) - \frac{2}{3} \\ &= \frac{4\sqrt{2}-2}{3} - \ln 2 \end{aligned}$$

1174 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 의 교점의 x 좌표는 $e^x=e^{-x}$ 에서

$$x=-x \quad \therefore x=0$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 |e^x - e^{-x}| dx \\ &= \int_{-1}^0 (e^{-x} - e^x) dx + \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx \\ &= \left[-e^{-x} - e^x \right]_{-1}^0 + \left[e^x + e^{-x} \right]_0^1 \\ &= (-1-1) - (-e-e^{-1}) + (e+e^{-1}) - (1+1) \\ &= 2e + \frac{2}{e} - 4 \end{aligned}$$



1175 단면의 넓이가 $3x^2+5$ 이므로 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x) dx = \int_0^3 (3x^2+5) dx = \left[x^3+5x \right]_0^3 = 42$$

1176 단면의 넓이가 $2\sqrt{x}$ 이므로 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^3 S(x) dx &= \int_0^3 2\sqrt{x} dx = \int_0^3 2x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

1177 시각 $t=0$ 에서의 위치가 0이므로

$$(1) \int_0^t 2 \sin t dt = \left[-2 \cos t \right]_0^t = -2 \cos t + 2$$

$$(2) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |2 \sin t| dt = \left[-2 \cos t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{답 (1)} -2 \cos t + 2 \quad (2) \sqrt{3}$$

1178 $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=-2t$ 이므로

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = (2t)^2 + (-2t)^2 = 8t^2$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^1 \sqrt{8t^2} dt = \int_0^1 2\sqrt{2}t dt = \left[\sqrt{2}t^2 \right]_0^1 = \sqrt{2}$$

1179 $\frac{dx}{dt}=2t^{\frac{3}{2}}$, $\frac{dy}{dt}=t^3-1$ 이므로

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= (2t^{\frac{3}{2}})^2 + (t^3-1)^2 \\ &= t^6 + 2t^3 + 1 = (t^3+1)^2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^1 \sqrt{(t^3+1)^2} dt = \int_0^1 (t^3+1) dt = \left[\frac{1}{4}t^4+t \right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

$$\text{답 } \frac{5}{4}$$

1180 $\frac{dx}{dt}=2 \cos t$, $\frac{dy}{dt}=-2 \sin t$ 이므로

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 4$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^1 \sqrt{4} dt = \left[2t \right]_0^1 = 2$$

1181 $\frac{dx}{dt}=e^t \cos t$, $\frac{dy}{dt}=e^t \sin t$ 이므로

$$\frac{dy}{dt}=e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= e^{2t} (1 - 2 \sin t \cos t) + e^{2t} (1 + 2 \sin t \cos t) \\ &= 2e^{2t} \end{aligned}$$

따라서 구하는 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{2e^{2t}} dt &= \int_0^2 \sqrt{2} e^t dt = \left[\sqrt{2} e^t \right]_0^2 = \sqrt{2} (e^2 - 1) \\ &\text{답 } \sqrt{2} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

1182 $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$ 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^\pi \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^\pi 1 dt = \left[t \right]_0^\pi = \pi$$

1183 $y'=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}$ 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2} \right)^2} dx &= \int_1^3 \sqrt{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}} dx \\ &= \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2} \right)^2} dx \\ &= \int_1^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2x} \right]_1^3 \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

1184 $y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2} \right)^2} dx &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} \right)^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[e^x - e^{-x} \right]_{-1}^1 \\ &= e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

1185 $f(x)=\sin x$, $a=1$, $b=4$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{3}{n}, x_k = 1 + \frac{3k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(1 + \frac{3k}{n}\right) &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(1 + \frac{3k}{n}\right) \cdot \frac{3}{n} \\ &= \frac{1}{3} \int_1^4 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_1^4 \sin x dx \end{aligned}$$

$$\text{즉 } p = \frac{1}{3}, q = 1, r = 4 \text{ 이므로 } pqr = \frac{4}{3} \quad \text{답 ④}$$

$$1186 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k \sqrt{n^2 - k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{n} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, $a=0$, $b=1$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{1}{n}, x_k = \frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$$

$$1-x^2=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = -2x$$

또한 $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx &= \int_1^0 \sqrt{t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{3} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \textcircled{p} \frac{k}{n} \textcircled{q} \frac{1}{3} \quad \text{답 풀이 참조}$$

1187 $a=2$, $b=4$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{2}{n}, x_k = 2 + \frac{2k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(2 + \frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n} &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(2 + \frac{2k}{n}\right) \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 \cos \pi x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi x \right]_2^4 = 0 \quad \text{답 0} \end{aligned}$$

$$1188 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2 \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 \quad \cdots ①$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

이때 $f(x) = x^2$, $a=1$, $b=2$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{1}{n}, x_k = 1 + \frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} &= 2 \int_1^2 f(x) dx = 2 \int_1^2 x^2 dx \quad \cdots ② \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 = \frac{14}{3} \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{14}{3}$$

채점 기준	비율
① 주어진 급수를 Σ 를 이용하여 나타낼 수 있다.	20 %
② 주어진 급수를 정적분으로 나타낼 수 있다.	50 %
③ 답을 구할 수 있다.	30 %

$$1189 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

이때 $f(x) = e^x$, $a=0$, $b=1$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{1}{n}, x_k = \frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x dx \\ &= \left[e^x \right]_0^1 = e - 1 \quad \text{답 ②} \end{aligned}$$

1190 $\triangle ABC \sim \triangle AB_k C_k$ ($k=1, 2, 3, \dots, n-1$)이므로

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AC_k} : \overline{B_k C_k}, \quad 1 : 1 = \frac{k}{n} : \overline{B_k C_k}$$

$$\therefore \overline{B_k C_k} = \frac{k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{B_k C_k}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

1191 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D에서 \overline{AB} 와 평행한 직선을 그어 \overline{BC} 와 만나는 점을 E라 하고 $\overline{B_k C_k}$ ($k=1, 2, 3, \dots, n-1$)와 만나는 점을 E_k 라 하면

$$\overline{B_k E_k} = 2, \overline{EC} = 1$$

한편 $\triangle DEC \sim \triangle DE_k C_k$ 이므로

$$\overline{DE} : \overline{EC} = \overline{DE_k} : \overline{E_k C_k}$$

$$4 : 1 = \frac{4k}{n} : \overline{E_k C_k} \quad \therefore \overline{E_k C_k} = \frac{k}{n}$$

따라서 $\overline{B_k C_k} = \overline{B_k E_k} + \overline{E_k C_k} = 2 + \frac{k}{n}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{B_k C_k}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(2 + \frac{k}{n}\right)^2 \frac{2}{n}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(2 + \frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

$$= 2 \int_2^3 x^2 dx = 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_2^3$$

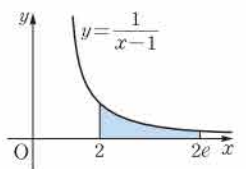
$$= 2 \left(9 - \frac{8}{3} \right) = \frac{38}{3} \quad \text{답 ⑤}$$

1192 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_2^{2e} \frac{1}{x-1} dx = \left[\ln |x-1| \right]_2^{2e}$$

$$= \ln(2e-1)$$

답 ③



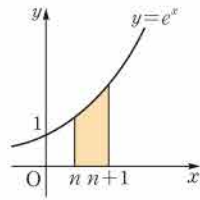
1193 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} S(n) &= \int_n^{n+1} e^x dx = [e^x]_n^{n+1} \\ &= e^{n+1} - e^n \\ &= e^n(e-1) \end{aligned}$$

따라서 $S(5) = e^5(e-1)$, $S(2) = e^2(e-1)$

이므로

$$\frac{S(5)}{S(2)} = e^3$$



②

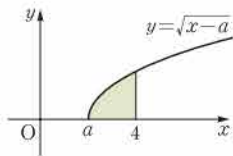
③

답 e^3

채점 기준	비율
① $S(n)$ 을 구할 수 있다.	60 %
② $S(5)$, $S(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ $\frac{S(5)}{S(2)}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

1194 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_a^4 \sqrt{x-a} dx &= \left[\frac{2}{3} (x-a)^{\frac{3}{2}} \right]_a^4 \\ &= \frac{2}{3} (4-a)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$



따라서 $\frac{2}{3} (4-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} (4-a)^{\frac{3}{2}} &= 2\sqrt{2}, \quad (4-a)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}, \quad 4-a=2 \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

④

1195 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (-\sin x) dx$

$$\begin{aligned} &= [-\cos x]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \\ &= 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

③

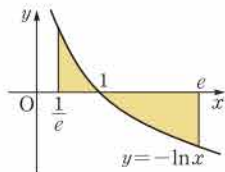
1196 $\int_{-1}^0 \left(-\frac{2x}{x^2+3}\right) dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+3} dx$

$$\begin{aligned} &= [-\ln(x^2+3)]_{-1}^0 + [\ln(x^2+3)]_0^1 \\ &= 2\ln 4 - 2\ln 3 \\ &= 2\ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

② $2\ln \frac{4}{3}$

1197 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{e}}^1 (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx \\ &= [-x \ln x]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 (-1) dx \\ &\quad + [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx \\ &= -\frac{1}{e} + \left[x\right]_{\frac{1}{e}}^1 + e - [x]_1^e \\ &= 2 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

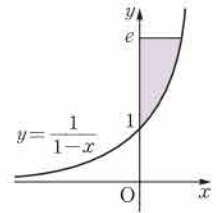


①

1198 $y = \frac{1}{1-x}$ 에서 $1-x = \frac{1}{y}$
 $\therefore x = 1 - \frac{1}{y}$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_1^e \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy &= \left[y - \ln|y|\right]_1^e \\ &= e - 2 \end{aligned}$$



①

1199 $y = \ln(x+1)$ 에서

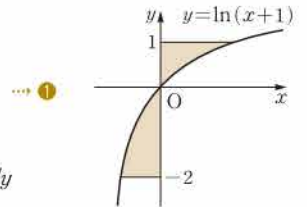
$$\begin{aligned} x+1 &= e^y \\ \therefore x &= e^y - 1 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^0 (-e^y + 1) dy + \int_0^1 (e^y - 1) dy \\ &= [-e^y + y]_{-2}^0 + [e^y - y]_0^1 \\ &= -1 - (-e^{-2} - 2) + (e - 1) - 1 \\ &= e + \frac{1}{e^2} - 1 \end{aligned}$$

②

답 $e + \frac{1}{e^2} - 1$



채점 기준	비율
① x 를 y 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② 도형의 넓이를 구할 수 있다.	70 %

1200 $y = (x+a)^2$ 에서

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= x+a \quad (\because x \geq -a) \\ \therefore x &= \sqrt{y} - a \end{aligned}$$

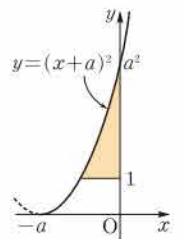
오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_1^{a^2} (-\sqrt{y} + a) dy \\ &= \left[-\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + ay\right]_1^{a^2} \\ &= \left(-\frac{2}{3} a^3 + a^3\right) - \left(-\frac{2}{3} + a\right) \\ &= \frac{1}{3} a^3 - a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{3} a^3 - a + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} a^3 - 3a - 2 &= 0, \quad (a+1)^2(a-2) = 0 \\ \therefore a &= 2 \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

③



1201 곡선 $y = xe^{2-x}$ 과 직선 $y = \frac{1}{e}x$ 의 교점의 x 좌표는

$$xe^{2-x} = \frac{1}{e}x \text{에서}$$

$$x(e^{2-x} - \frac{1}{e}) = 0, \quad x(e^{2-x} - e^{-1}) = 0$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \text{ 또는 } e^{2-x} = e^{-1} \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x = 3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 & \int_0^3 \left(x e^{2-x} - \frac{1}{e} x \right) dx \\
 &= \int_0^3 x e^{2-x} dx - \int_0^3 \frac{1}{e} x dx \\
 &= \left[x \cdot (-e^{2-x}) \right]_0^3 - \int_0^3 (-e^{2-x}) dx - \left[\frac{1}{2e} x^2 \right]_0^3 \\
 &= -3e^{-1} + \left[-e^{2-x} \right]_0^3 - \frac{9}{2e} \\
 &= e^2 - \frac{17}{2e}
 \end{aligned}$$

답 $e^2 - \frac{17}{2e}$

1202 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\cos 2x$ 의 교점의 x 좌표는 $\cos x = \cos 2x$ 에서

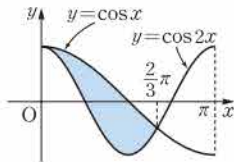
$$\begin{aligned}
 \cos x &= 2\cos^2 x - 1 \\
 2\cos^2 x - \cos x - 1 &= 0 \\
 (2\cos x + 1)(\cos x - 1) &= 0 \\
 \cos x &= -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\cos x - \cos 2x) dx &= \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

답 ④

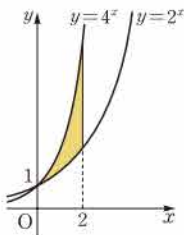


1203 두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x$ 의 교점의 x 좌표는 $4^x=2^x$ 에서 $2^{2x}=2^x$, $2x=x$
 $\therefore x=0$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 (4^x - 2^x) dx \\
 &= \left[\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^2 \\
 &= \left(\frac{16}{\ln 4} - \frac{4}{\ln 2} \right) - \left(\frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 2} \right) \\
 &= \frac{9}{2\ln 2} \\
 \therefore k &= 9
 \end{aligned}$$

답 ④



1204 곡선 $y=\frac{2}{x}$ 와 직선 $y=2x$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{2}{x}=2x$ 에서 $x^2-1=0$, $(x-1)(x+1)=0$
 $\therefore x=1$ ($\because x>0$)

곡선 $y=\frac{2}{x}$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x$ 에서 $x^2-4=0$, $(x-2)(x+2)=0$
 $\therefore x=2$ ($\because x>0$)

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left(2x - \frac{1}{2}x \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}x \right) dx \\
 &= \left[\frac{3}{4}x^2 \right]_0^1 + \left[2\ln|x| - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^2 \\
 &= \frac{3}{4} + (2\ln 2 - 1) - \left(-\frac{1}{4} \right) = 2\ln 2
 \end{aligned}$$

답 $2\ln 2$

1205 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{1}{x}=\sqrt{x}$ 에서

$$\frac{1}{x^2}=x, \quad x^3-1=0, \quad (x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=1 \quad (\because x^2+x+1>0)$$

→ ①

$$S_1 = \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x} \right) dx = \left[\ln|x| - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{4}}^1$$

$$= -\frac{2}{3} - \left(-\ln 4 - \frac{1}{12} \right) = \ln 4 - \frac{7}{12}$$

→ ②

$$S_2 = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \ln|x| \right]_1^4$$

$$= \left(\frac{16}{3} - \ln 4 \right) - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} - \ln 4$$

→ ③

$$\therefore S_2 - S_1 = \frac{21}{4} - 4\ln 2$$

→ ④

답 $\frac{21}{4} - 4\ln 2$

채점 기준	비율
① 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$ 의 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.	10 %
② S_1 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ S_2 의 값을 구할 수 있다.	40 %
④ $S_2 - S_1$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

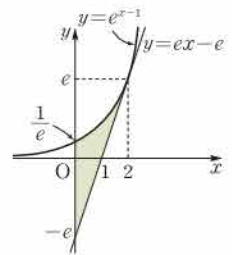
1206 $y=e^{x-1}$ 에서 $y'=e^{x-1}$ 이므로 곡선 위의 점 $(2, e)$ 에서의 접선의 기울기는 e 이고 접선의 방정식은

$$y-e=e(x-2) \quad \therefore y=ex-e$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 \{ e^{x-1} - (ex - e) \} dx \\
 &= \left[e^{x-1} - \frac{e}{2}x^2 + ex \right]_0^2 \\
 &= (e - 2e + 2e) - \frac{1}{e} \\
 &= e - \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

답 ②



1207 $y=-\sqrt{x}$ 에서 $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 이므로 곡선 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이고 접선의 방정식은

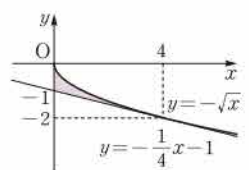
$$y-(-2)=-\frac{1}{4}(x-4) \quad \therefore y=-\frac{1}{4}x-1$$

→ ①

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}
 & \int_0^4 \left[-\sqrt{x} - \left(-\frac{1}{4}x - 1 \right) \right] dx \\
 &= \int_0^4 \left(-\sqrt{x} + \frac{1}{4}x + 1 \right) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}x^2 + x \right]_0^4 \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

→ ②



즉 $p=3, q=2$ 이므로
 $p+q=5$

→ ③
 답 5

채점 기준	비율
① 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
② 곡선과 접선 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %
③ $p+q$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

1208 (1) $y=\ln x$ 에서 $y'=\frac{1}{x}$ 이므로 접점의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라 하면 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$ 이고 접선의 방정식은

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t)$$

이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$-\ln t = \frac{1}{t}(0 - t), \quad \ln t = 1$$

$$\therefore t = e$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

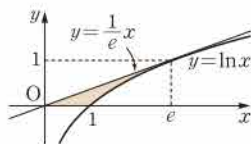
$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \quad \therefore y = \frac{1}{e}x$$

$$(2) \int_0^e \frac{1}{e}x dx - \int_1^e \ln x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2e}x^2 \right]_0^e - \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx \right)$$

$$= \frac{e}{2} - e + [x]_1^e$$

$$= \frac{e}{2} - e + e - 1 = \frac{e}{2} - 1$$



답 (1) $y = \frac{1}{e}x$ (2) $\frac{e}{2} - 1$

$$1209 \int_0^k (-x + 2\sqrt{x}) dx = 0 \text{이므로}$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^k = 0, \quad -\frac{1}{2}k^2 + \frac{4}{3}k\sqrt{k} = 0$$

$$k\sqrt{k} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{k} + \frac{4}{3} \right) = 0, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{k} + \frac{4}{3} = 0 \quad (\because k > 4)$$

$$\sqrt{k} = \frac{8}{3} \quad \therefore k = \frac{64}{9}$$

답 $\frac{64}{9}$

$$1210 \int_0^2 \left(\sin \frac{\pi}{4}x - k \right) dx = 0 \text{이므로}$$

$$\left[-\frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi}{4}x - kx \right]_0^2 = 0, \quad -2k - \left(-\frac{4}{\pi} \right) = 0$$

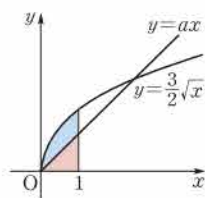
$$2k = \frac{4}{\pi} \quad \therefore k = \frac{2}{\pi}$$

답 $\frac{2}{\pi}$

$$1211 \text{ 곡선 } y = \frac{3}{2}\sqrt{x} \text{와 } x \text{축 및 직선}$$

$x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^1 \frac{3}{2}\sqrt{x} dx = \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 1$$



직선 $y=ax$ 와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_0^1 ax dx = \left[\frac{a}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{a}{2}$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ 이므로

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 1$$

답 1

1212 곡선 $y = \frac{1}{x+1}$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^3 \frac{1}{x+1} dx$$

$$= [\ln|x+1|]_0^3$$

$$= 2\ln 2$$

곡선 $y = \frac{1}{x+1}$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x=k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_0^k \frac{1}{x+1} dx = [\ln|x+1|]_0^k$$

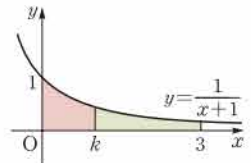
$$= \ln(k+1) \quad (\because k+1 > 0)$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ 이므로

$$\ln(k+1) = \ln 2$$

$$k+1 = 2 \quad \therefore k = 1$$

답 ④



$$1213 \text{ 곡선 } y=e^x \text{과 } x \text{축 및 두 직선}$$

$x=0, x=\ln 5$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^{\ln 5} e^x dx = [e^x]_0^{\ln 5}$$

$$= 5 - 1 = 4$$

곡선 $y=ae^{2x}$ 과 x 축 및 두 직선 $x=0, x=\ln 5$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_0^{\ln 5} ae^{2x} dx = \left[\frac{a}{2}e^{2x} \right]_0^{\ln 5}$$

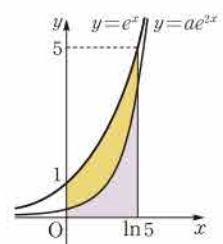
$$= \frac{25a}{2} - \frac{a}{2} = 12a$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ 이므로

$$12a = 2 \quad \therefore a = \frac{1}{6}$$

→ ⑤

답 $\frac{1}{6}$



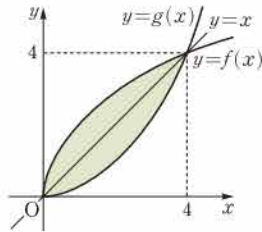
채점 기준	비율
① S_1 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② S_2 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

1214 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$\begin{aligned} &\text{즉 } 2\sqrt{x}=x \text{에서} \quad 4x=x^2 \\ &\quad x^2-4x=0, \quad x(x-4)=0 \\ &\quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=4 \end{aligned}$$

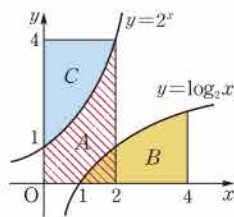
이때 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_0^4 (2\sqrt{x}-x)dx &= 2 \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 \\ &= 2 \left(\frac{32}{3} - 8 \right) = \frac{16}{3} \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$



1215 두 함수 $y=2^x$ 과 $y=\log_2 x$ 는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 따라서 오른쪽 그림에서 $B=C$ 이므로 $A+B=A+C=2 \cdot 4=8$

답 ①

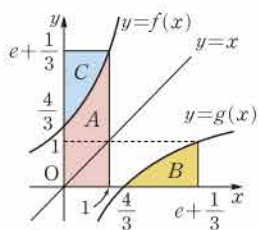


1216 함수 $f(x)=e^x + \frac{1}{3}$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림에서
(B의 넓이)=(C의 넓이)

이므로

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f(x)dx + \int_{\frac{4}{3}}^{e+\frac{1}{3}} g(x)dx \\ &= (A \text{의 넓이}) + (B \text{의 넓이}) \\ &= (A \text{의 넓이}) + (C \text{의 넓이}) \\ &= 1 \cdot \left(e + \frac{1}{3} \right) = e + \frac{1}{3} \end{aligned} \quad \text{답 } e + \frac{1}{3}$$



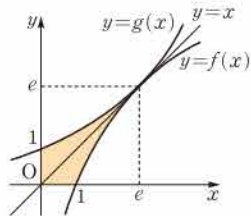
1217 (1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 $x=e$ 인 점에서 서로 접하므로 직선 $y=x$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=e$ 인 점에서의 접선이다.
 $\therefore f(e)=e, f'(e)=1$

$$f'(x)=\frac{1}{ax} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{a}=e, \frac{1}{ae}=1 \quad \therefore a=\frac{1}{e} \quad \text{답 ①}$$

(2) 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 및 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



이때 $f(x)=e \ln x$ 이고 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &2 \left(\int_0^e x dx - \int_1^e e \ln x dx \right) \\ &= 2 \left(\left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^e - \left[ex \ln x \right]_1^e + \int_1^e e dx \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}e^2 - e^2 + \left[ex \right]_1^e \right) \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2}e^2 + e^2 - e \right) = e^2 - 2e \end{aligned}$$

답 ②

$$\text{답 ① } \frac{1}{e} \quad \text{② } e^2 - 2e$$

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	30 %
② 도형의 넓이를 구할 수 있다.	70 %

다른 풀이 (1) $f(x)=\frac{1}{a} \ln x$ 의 역함수를 구하면 $y=\frac{1}{a} \ln x$ 에서

$$ay=\ln x, \quad x=e^{ay}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=e^{ax} \quad \therefore g(x)=e^{ax}$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 $x=e$ 인 점에서 접하므로

$$f(e)=g(e), f'(e)=g'(e) \text{에서} \quad a=\frac{1}{e}$$

(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=x$ 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_0^e (e^{\frac{1}{e}x} - x)dx &= 2 \left[e \cdot e^{\frac{1}{e}x} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^e = 2 \left(\left(e^2 - \frac{1}{2}e^2 \right) - e \right) \\ &= e^2 - 2e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1218 } \int_0^5 3(x+1)^2 dx &= 3 \int_0^5 (x^2 + 2x + 1) dx \\ &= 3 \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_0^5 \\ &= 3 \left(\frac{125}{3} + 25 + 5 \right) \\ &= 215 (\text{cm}^3) \end{aligned} \quad \text{답 } 215 \text{ cm}^3$$

1219 물의 깊이가 x 일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$\int_0^x S(x)dx = \ln(x+1) + x^2$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$S(x) = \frac{1}{x+1} + 2x$$

따라서 물의 깊이가 8일 때, 수면의 넓이는

$$S(8) = \frac{1}{9} + 16 = \frac{145}{9} \quad \text{답 ②}$$

1220 높이가 x 일 때, 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (\sqrt{25-4x})^2 = 25-4x$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^4 S(x)dx = \int_0^4 (25-4x)dx = \left[25x - 2x^2 \right]_0^4 = 68$$

답 68

1221 오른쪽 그림과 같이 곡선

$y = \sqrt{9-x^2}$ 위의 점 $P(x, \sqrt{9-x^2})$
($0 \leq x \leq 3$)에서 x 축에 내린 수선의 발을
 H 라 하면

$$PH = \sqrt{9-x^2}$$

이때 점 P 를 지나고 x 축에 수직인 평면으로
로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = PH^2 = 9-x^2$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x) dx = \int_0^3 (9-x^2) dx = \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = 18$$

답 18

1222 점 P 의 x 좌표를 x 라 하면 $PH = 3^x$ 이므로 PH 를 지름으로
하는 반원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} PH = \frac{1}{2} \cdot 3^x$$

이때 점 P 를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면
의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} PH \right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3^x \right)^2 = \frac{\pi}{8} \cdot 9^x \quad \dots ①$$

따라서 반원이 만드는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^2 S(x) dx &= \int_0^2 \frac{\pi}{8} \cdot 9^x dx = \frac{\pi}{8} \left[\frac{9^x}{\ln 9} \right]_0^2 \\ &= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{80}{\ln 9} = \frac{10}{2 \ln 3} \pi \\ &= \frac{5}{\ln 3} \pi \quad \dots ② \end{aligned}$$

$$\therefore k = 5$$

③

답 5

채점 기준	비율
① $S(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② 입체도형의 부피를 구할 수 있다.	50 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	10 %

1223 오른쪽 그림과 같이 \overline{AB} 의 중점을
원점, 직선 AB 를 x 축으로 정하고, x 축
위의 점 $P(x, 0)$ ($-1 \leq x \leq 1$)을 지나고
 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른
단면을 $\triangle PQR$ 라 하자. 이때

$$PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2} = \sqrt{1-x^2}$$

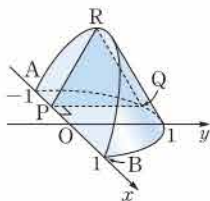
이므로 $\triangle PQR$ 의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} PQ^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (1-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 S(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{4} (1-x^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4} (1-x^2) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



1224 $0 \leq t \leq 1$ 일 때 $v(t) \leq 0$ 이므로 점 P 가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(t-1)e^t| dt &= \int_0^1 (1-t)e^t dt \\ &= \left[(1-t)e^t \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^t) dt \\ &= -1 + \left[e^t \right]_0^1 \\ &= -1 + (e-1) \\ &= e-2 \end{aligned}$$

답 ①

1225 $t=a$ ($0 < a \leq 5$)일 때, 점 P 의 위치는

$$\int_0^a \cos \pi t dt = \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^a = \frac{1}{\pi} \sin \pi a$$

점 P 가 원점을 지날 때,

$$\frac{1}{\pi} \sin \pi a = 0, \quad \sin \pi a = 0$$

$$\therefore a = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (\because 0 < a \leq 5)$$

따라서 점 P 는 원점을 5번 지난다.

답 5

1226 점 P 의 시각 t 에서의 위치를 x 라 하면

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t (\sin t - \sin 2t) dt \\ &= \left[-\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^t \\ &= -\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t - \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= -\cos t + \frac{1}{2} (2 \cos^2 t - 1) + \frac{1}{2} \\ &= \cos^2 t - \cos t = \left(\cos t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq \pi$ 에서 $-1 \leq \cos t \leq 1$ 이므로

$$-\frac{3}{2} \leq \cos t - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \left(\cos t - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\therefore -\frac{1}{4} \leq \left(\cos t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \leq 2$$

즉 $-\frac{1}{4} \leq x \leq 2$ 이므로 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 2이다.

답 2

다른풀이 $t=a$ ($0 \leq a \leq \pi$)에서 원점과 점 P 사이의 거리가 최대
하면 점 P 는 시각 $t=a$ 에서 운동 방향이 바뀌므로 $v(a)=0$ 에서

$$\sin a - \sin 2a = 0, \quad \sin a - 2 \sin a \cos a = 0$$

$$\sin a (1 - 2 \cos a) = 0, \quad \sin a = 0 \text{ 또는 } \cos a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } a = \pi \quad (\because 0 \leq a \leq \pi)$$

(i) $t=0$ 일 때, 점 P 의 위치는 0이다.

(ii) $t=\frac{\pi}{3}$ 일 때, 점 P 의 위치는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin t - \sin 2t) dt = \left[-\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{4}$$

(iii) $t=\pi$ 일 때, 점 P 의 위치는

$$\int_0^{\pi} (\sin t - \sin 2t) dt = \left[-\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\pi} = 2$$

이상에서 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 2이다.

1227 $\frac{dx}{dt} = -\pi \sin \pi t$, $\frac{dy}{dt} = \pi \cos \pi t$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \sqrt{(-\pi \sin \pi t)^2 + (\pi \cos \pi t)^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{\pi^2 (\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t)} dt \\ &= \int_0^2 \pi dt = \left[\pi t \right]_0^2 = 2\pi \end{aligned} \quad \text{답 ④}$$

1228 $\frac{dx}{dt} = 2t - 2$, $\frac{dy}{dt} = 4\sqrt{t}$
이때 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리가 8이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^a \sqrt{(2t-2)^2 + (4\sqrt{t})^2} dt = 8 \\ & \int_0^a \sqrt{(2t+2)^2} dt = 8, \quad \int_0^a (2t+2) dt = 8 \\ & \left[t^2 + 2t \right]_0^a = 8, \quad a^2 + 2a = 8 \\ & a^2 + 2a - 8 = 0, \quad (a+4)(a-2) = 0 \\ & \therefore a = 2 \quad (\because a > 0) \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

1229 $\frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t \sin t$, $\frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t) \quad \dots ①$$

점 P의 시각 t 에서의 속력은

$$\begin{aligned} & \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} \\ &= \sqrt{9\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= 3|\sin t \cos t| = \frac{3}{2} |\sin 2t| \end{aligned} \quad \dots ②$$

이때 출발 후 처음으로 점 P의 속력이 0이 되는 때는 $\frac{3}{2} |\sin 2t| = 0$,
즉 $|\sin 2t| = 0$ 에서

$$t = \frac{\pi}{2} \quad \dots ③$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=\frac{\pi}{2}$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} |\sin 2t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} \sin 2t dt \\ &= \left[-\frac{3}{4} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \dots ④$$

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
① 점 P의 시각 t 에서의 속도를 구할 수 있다.	20 %
② 점 P의 시각 t 에서의 속력을 구할 수 있다.	20 %
③ 점 P의 속력이 0일 때의 시각을 구할 수 있다.	30 %
④ 점 P의 속력이 0이 될 때까지 점 P가 움직인 거리를 구할 수 있다.	30 %

1230 $y' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2}$ 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2} \right)^2} dx = \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{e^x + 2 + e^{-x}}{4}} dx \\ &= \int_{-2}^2 \sqrt{\left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2} \right)^2} dx \\ &= \int_{-2}^2 \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2} dx \\ &= \left[e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right]_{-2}^2 \\ &= 2\left(e - \frac{1}{e}\right) \end{aligned} \quad \text{답 } 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

1231 $\frac{dx}{d\theta} = 2\sin \theta \cos \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = -2\cos \theta \sin \theta$ 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2\sin \theta \cos \theta)^2 + (-2\cos \theta \sin \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8\sin^2 \theta \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2} |\sin \theta \cos \theta| d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} |\sin 2\theta| d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \sin 2\theta d\theta \\ &= \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

1232 $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ 이므로

$$y' = \frac{1}{2}(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = x\sqrt{x^2 + 2}$$

따라서 주어진 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^a \sqrt{1 + (x\sqrt{x^2 + 2})^2} dx = \int_0^a \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} dx \\ &= \int_0^a \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \int_0^a (x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^a \\ &= \frac{a^3}{3} + a \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{a^3}{3} + a = 12 \text{에서 } a^3 + 3a - 36 = 0$$

$$(a-3)(a^2 + 3a + 12) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

답 3

1233 **전략** 각 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 구하여 넓이의 합을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 닫힌구간 $[0, 1]$ 을 n 등분 한 각 소구간의 오른쪽 끝 점의 x 좌표는 차례대로

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}$$

이고 색칠한 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left[\frac{1}{n} \right] \left(\frac{1}{n} \right)^3 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n} \right)^3 + \cdots + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) \\
 &= \frac{1}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \left[\frac{1}{4} \right]
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{4}$ 이다.

$$\therefore \textcircled{A} \frac{1}{n} \quad \textcircled{B} n^4 \quad \textcircled{C} \frac{1}{4}$$

답 풀이 참조

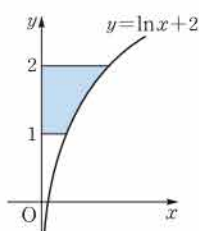
1234 전라 곡선 $x=g(y)$ 와 y 축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_c^d |g(y)| dy$ 이다.

풀이 $y=\ln x+2$ 에서
 $\ln x=y-2 \quad \therefore x=e^{y-2}$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 e^{y-2} dy &= \left[e^{y-2} \right]_1^2 \\
 &= 1 - \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

답 $1 - \frac{1}{e}$



1235 전라 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으면 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 임을 이용한다.

풀이 $\int_0^k (\sqrt{x}-4) dx = 0$ 이므로

$$\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 4x \right]_0^k = 0, \quad \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} - 4k = 0, \quad \frac{2}{3} k(\sqrt{k}-6) = 0$$

이때 $k > 16$ 이므로 $\sqrt{k}-6=0$

$$\therefore k=36$$

답 36

1236 전라 물의 깊이가 x 일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$, 물의 부피를 $V(x)$ 라 하면 $V(x) = \int_0^x S(x) dx$ 임을 이용한다.

풀이 물의 깊이가 x 일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$\int_0^x S(x) dx = x \ln(x+1)$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$S(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

따라서 물의 깊이가 e^2-1 일 때 수면의 넓이는

$$S(e^2-1) = 2 + \frac{e^2-1}{e^2} = 3 - \frac{1}{e^2}$$

답 $3 - \frac{1}{e^2}$

1237 전라 정적분과 급수의 관계를 이용한다.

$$\begin{aligned}
 \text{풀이} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{4n}{n+2k}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{1+\frac{2k}{n}}} \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} \cdot \frac{2}{n}
 \end{aligned}$$

이때 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $a=1$, $b=3$ 으로 놓으면

$$\Delta x = \frac{2}{n}, \quad x_k = 1 + \frac{2k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} \cdot \frac{2}{n} &= \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \left[2\sqrt{x} \right]_1^3 \\
 &= 2(\sqrt{3}-1)
 \end{aligned}$$

답 $2(\sqrt{3}-1)$

1238 전라 a_k 는 $k \sin x \geq 0$ 인 구간과 $k \sin x \leq 0$ 인 구간으로 나누어 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서

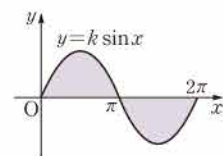
$$\begin{aligned}
 a_k &= \int_0^\pi k \sin x dx \\
 &\quad + \int_\pi^{2\pi} (-k \sin x) dx \\
 &= \left[-k \cos x \right]_0^\pi + \left[k \cos x \right]_\pi^{2\pi} \\
 &= k - (-k) + k - (-k) \\
 &= 4k
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} 4k = 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 220$$

... ①

... ②

답 220



채점 기준	비율
① a_k 를 구할 수 있다.	70 %
② $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

1239 전라 곡선과 y 축 사이의 넓이는 $x \geq 0$ 인 구간과 $x \leq 0$ 인 구간으로 나누어 구한다.

풀이 $y=(x+1)^2$ 에서
 $\sqrt{y}=x+1 \quad (\because x \geq -1)$
 $\therefore x=\sqrt{y}-1$

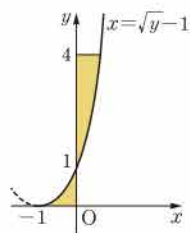
곡선 $x=\sqrt{y}-1$ 과 y 축의 교점의 y 좌표는
 $\sqrt{y}-1=0$ 에서

$$\sqrt{y}=1 \quad \therefore y=1$$

따라서 구하는 넓이는

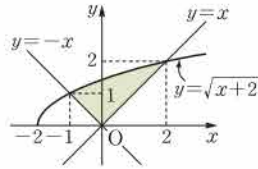
$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 (-\sqrt{y}+1) dy + \int_1^4 (\sqrt{y}-1) dy \\
 &= \int_0^1 (-y^{\frac{1}{2}}+1) dy + \int_1^4 (y^{\frac{1}{2}}-1) dy \\
 &= \left[-\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + y \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - y \right]_1^4 \\
 &= \left(-\frac{2}{3} + 1 \right) + \left(\left(\frac{16}{3} - 4 \right) - \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \right) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

답 ⑤



1240 전라 곡선과 직선의 교점의 x 좌표를 구하여 적분 구간을 정하고, 그 구간 안에서 곡선과 직선의 위치 관계를 파악하여 정적분의 값을 구한다.

풀이 곡선 $y=\sqrt{x+2}$ 와 직선 $y=-x$ 의 교점의 x 좌표는 $\sqrt{x+2}=-x$ 에서
 $x+2=x^2$, $x^2-x-2=0$
 $(x+1)(x-2)=0$
 $\therefore x=-1$ ($\because x<0$)



곡선 $y=\sqrt{x+2}$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $\sqrt{x+2}=x$ 에서
 $x+2=x^2$, $x^2-x-2=0$
 $(x+1)(x-2)=0$
 $\therefore x=2$ ($\because x>0$)

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{\sqrt{x+2} - (-x)\} dx + \int_0^2 (\sqrt{x+2} - x) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= \left\{ \frac{4\sqrt{2}}{3} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \right\} + \left\{ \left(\frac{16}{3} - 2 \right) - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right\} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

즉 $p=6$, $q=13$ 이므로

$$p+q=19$$

19

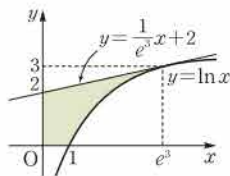
1241 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$ 임을 이용하여 접선의 방정식을 구한 후 접선과 곡선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 $y=\ln x$ 에서 $y'=\frac{1}{x}$ 이므로 곡선 위의 점 $(e^3, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{e^3}$ 이고 접선의 방정식은

$$y-3=\frac{1}{e^3}(x-e^3) \quad \therefore y=\frac{1}{e^3}x+2$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{e^3} \left(\frac{1}{e^3}x + 2 \right) dx - \int_1^{e^3} \ln x dx \\ &= \left[\frac{1}{2e^3}x^2 + 2x \right]_0^{e^3} - \left[x \ln x \right]_1^{e^3} + \int_1^{e^3} 1 dx \\ &= \left(\frac{e^3}{2} + 2e^3 \right) - 3e^3 + \left[x \right]_1^{e^3} \\ &= -\frac{e^3}{2} + e^3 - 1 = \frac{e^3}{2} - 1 \end{aligned}$$



2

$$\frac{e^3}{2} - 1$$

채점 기준	비율
① 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
② 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

1242 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 같으면 $\int_a^b \{f(x)-g(x)\} dx=0$ 임을 이용한다.

풀이 $\int_0^1 \{e^{2x} - (-2x+a)\} dx=0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2}e^{2x} + x^2 - ax \right]_0^1 = 0, \quad \frac{1}{2}e^2 + 1 - a - \frac{1}{2} = 0 \\ & \therefore a = \frac{e^2+1}{2} \end{aligned}$$

1

1243 전략 물의 깊이가 x 일 때 수면의 넓이가 $S(x)$ 이면 물의 부피는 $\int_0^x S(x) dx$ 임을 이용한다.

풀이 물의 깊이가 x 일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \pi(\sqrt{x+5})^2 = \pi(x+5)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^{10} S(x) dx = \int_0^{10} \pi(x+5) dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 + 5x \right]_0^{10} = 100\pi$$

100π

1244 전략 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 x 좌표가 x 인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 단면의 넓이가 $S(x)$ 인 입체도형의 부피는 $\int_a^b S(x) dx$ 이다.

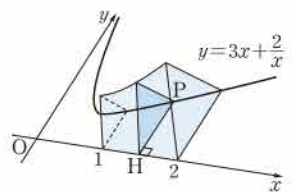
풀이 오른쪽 그림과 같이 곡선

$$y=3x+\frac{2}{x} \text{ 위의 점}$$

$$P\left(x, 3x+\frac{2}{x}\right) (1 \leq x \leq 2) \text{에서 } x$$

축에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{PH} = 3x + \frac{2}{x}$$



이때 점 P 를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{PH}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(3x + \frac{2}{x} \right)^2$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_1^2 S(x) dx &= \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(3x + \frac{2}{x} \right)^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_1^2 \left(9x^2 + 12 + \frac{4}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[3x^3 + 12x - \frac{4}{x} \right]_1^2 \\ &= \frac{35\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

1

1245 전략 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시간 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 일 때, 시간 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P 가 움직인 거리는 $\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$ 임을 이용한다.

풀이 $\therefore \frac{dx}{dt} = 1-2\sin t$, $\frac{dy}{dt} = \sqrt{3}\cos t$ 이므로 점 P 의 시간 t 에서

$$\text{의 속도는 } (1-2\sin t, \sqrt{3}\cos t)$$

따라서 $t=\frac{\pi}{2}$ 일 때, 점 P 의 속도는

$$\left(1-2\sin \frac{\pi}{2}, \sqrt{3}\cos \frac{\pi}{2} \right), \text{ 즉 } (-1, 0)$$

∴ 점 P 의 시간 t 에서의 속도의 크기는

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1-2\sin t)^2 + (\sqrt{3}\cos t)^2} \\ &= \sqrt{4\sin^2 t - 4\sin t + 1 + 3\cos^2 t} \\ &= \sqrt{3(\sin^2 t + \cos^2 t) + \sin^2 t - 4\sin t + 1} \\ &= \sqrt{\sin^2 t - 4\sin t + 4} \\ &= \sqrt{(\sin t - 2)^2} \\ &= |\sin t - 2| \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 $-1 \leq \sin t \leq 1$ 이므로

$$-3 \leq \sin t - 2 \leq -1 \quad \therefore 1 \leq |\sin t - 2| \leq 3$$

따라서 점 P의 속도의 크기의 최솟값은 1이다.

ㄷ. 점 P가 $t=\pi$ 에서 $t=2\pi$ 까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{(1-2\sin t)^2 + (\sqrt{3}\cos t)^2} dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} |\sin t - 2| dt = \int_{\pi}^{2\pi} (2 - \sin t) dt \\ &= \left[2t + \cos t \right]_{\pi}^{2\pi} = 4\pi + 1 - (2\pi - 1) \\ &= 2\pi + 2 \end{aligned}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

1246 전략 곡선 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$)의 길이는

$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ 임을 이용한다.

풀이 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln x$ 이므로 $y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_1^4 \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)^2} dx &= \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}} dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x| \right]_1^4 \\ &= 4 + \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{15}{4} + \ln 2 \end{aligned}$$

답 $\frac{15}{4} + \ln 2$

1247 전략 A_k 를 k 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x_k = 1 + \frac{k}{n}$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$)이므로

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2} \cdot x_k \cdot f(x_k) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{1 + \frac{k}{n}} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{1 + \frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 x e^x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x e^x \right]_1^2 - \int_1^2 e^x dx \\ &= \frac{1}{2} \left(2e^2 - e - \left[e^x \right]_1^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} e^2 \end{aligned}$$

답 ③

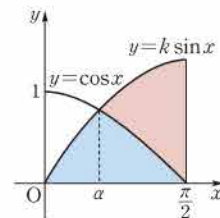
1248 전략 두 곡선의 교점의 x 좌표를 a ($0 < a < \frac{\pi}{2}$)라 하고 도형의 넓이를 이용하여 a 에 대한 방정식을 세운다.

풀이 두 곡선 $y=k \sin x$, $y=\cos x$ 의 교

점의 x 좌표를 a ($0 < a < \frac{\pi}{2}$)라 하면

$k \sin a = \cos a$ 에서

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{k}, \text{ 즉 } \tan a = \frac{1}{k} \quad \dots\dots ㉠$$



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 곡선 $y=k \sin x$ 와 x 축 및

직선 $x=\frac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \sin x dx \\ &= \left[-k \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = k \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 두 곡선 $y=k \sin x$, $y=\cos x$ 와 직선 $x=\frac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_a^{\frac{\pi}{2}} (k \sin x - \cos x) dx \\ &= \left[-k \cos x - \sin x \right]_a^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -1 - (-k \cos a - \sin a) \\ &= k \cos a + \sin a - 1 \end{aligned}$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2} S_1$ 이므로

$$\begin{aligned} k \cos a + \sin a - 1 &= \frac{k}{2} \\ \therefore k \cos a + \sin a &= \frac{k}{2} + 1 \end{aligned}$$

$\cos a \neq 0$ 이므로 양변을 $\cos a$ 로 나누면

$$\begin{aligned} k + \frac{\sin a}{\cos a} &= \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \frac{1}{\cos a} \\ \therefore k + \tan a &= \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \sec a \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉠에서 $\sec^2 a = \tan^2 a + 1 = \frac{1}{k^2} + 1$ 이므로

$$\sec a = \sqrt{\frac{1}{k^2} + 1} \quad (\because 0 < a < \frac{\pi}{2}) \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

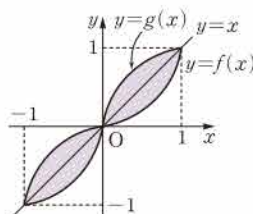
$$\begin{aligned} k + \frac{1}{k} &= \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \sqrt{\frac{1}{k^2} + 1} \\ \frac{k^2 + 1}{k} &= \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k}, \quad \sqrt{k^2 + 1} = \frac{k}{2} + 1 \\ k^2 + 1 &= \frac{k^2}{4} + k + 1, \quad 3k^2 - 4k = 0 \\ k(3k - 4) &= 0 \quad \therefore k = \frac{4}{3} \quad (\because k > 0) \end{aligned}$$

답 ③

1249 전략 함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 곡선

$y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



이때 곡선 $y=f(x)$ 는 원점에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 \left(x - \tan \frac{\pi}{4} x \right) dx &= 4 \int_0^1 \left(x - \frac{\sin \frac{\pi}{4} x}{\cos \frac{\pi}{4} x} \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left\{ x + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\left(\cos \frac{\pi}{4} x \right)'}{\cos \frac{\pi}{4} x} \right\} dx \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{\pi} \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} x \right| \right]_0^1 \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2 - \frac{8}{\pi} \ln 2 \end{aligned}$$

답 ③

1250 **전략** 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 x 좌표가 x 인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 단면의 넓이가 $S(x)$ 인 입체도형의 부피는

$$\int_a^b S(x) dx \text{이다.}$$

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P의 x 좌표를 x ($1 \leq x \leq e$)라 하면

$$\overline{PH} = a \ln x$$

이때 \overline{PH} 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \overline{PH}^2 = a^2 (\ln x)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

따라서 주어진 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_1^e S(x) dx &= \int_1^e a^2 (\ln x)^2 dx \\ &= a^2 \left[\left[x (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx \right] \\ &= a^2 \left\{ e - 2 \left(\left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e 1 dx \right) \right\} \\ &= a^2 \left\{ e - 2 \left(e - \left[x \right]_1^e \right) \right\} \\ &= a^2 (e - 2) \end{aligned}$$

$\cdots \textcircled{2}$

$$\text{즉 } a^2 (e - 2) = 4(e - 2) \text{이므로 } a^2 = 4$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

$\cdots \textcircled{3}$

답 2

채점 기준	비율
① $S(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② 주어진 입체도형의 부피를 구할 수 있다.	50 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	10 %

1251 **전략** 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 속도가 $v(t)$, 시간 $t=a$ 에서의 위치가 x_0 일 때 시간 t 에서의 점 P의 위치는

$$x_0 + \int_a^t v(t) dt \text{임을 이용한다.}$$

풀이 점 P의 시간 t 에서의 위치를 x_1 이라 하면

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^t \sin 2\pi t dt = \left[-\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi t \right]_0^t \\ &= -\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi t + \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

점 Q의 시간 t 에서의 위치를 x_2 라 하면

$$\begin{aligned} x_2 &= \int_0^t \cos \pi t dt = \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^t \\ &= \frac{1}{\pi} \sin \pi t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \text{에서 } -\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi t + \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \sin \pi t \\ -\cos 2\pi t + 1 &= 2 \sin \pi t, \quad -(1 - 2 \sin^2 \pi t) + 1 = 2 \sin \pi t \\ 2 \sin^2 \pi t - 2 \sin \pi t &= 0, \quad 2 \sin \pi t (\sin \pi t - 1) = 0 \\ \sin \pi t &= 0 \text{ 또는 } \sin \pi t = 1 \\ \therefore t &= 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots \end{aligned}$$

따라서 처음으로 다시 만나는 시각은 $t = \frac{1}{2}$ 이므로 구하는 두 점의 위치는

$$\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi}$$

답 ①

memo

memo