만렙 AM

정답과 해설

확률과 통계

01 순열과 조합

8~21쪽

001 답 **120**

$(6-1)!=5!=120$

002 답 **24**

$(5-1)!=4!=24$

003 답 **6**

4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$

004 답 **4, 2, 4, 2, 48**

005 답 **240**

두 사람 A, B를 1명으로 생각하면 6명이 원형으로 둘러서는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
두 사람 A, B가 자리를 바꾸어 서는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$120\times2=240$

006 답 **36**

어른 모두를 1명으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
어른 3명이 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times6=36$

007 답 **4, 24**

다른 풀이

여학생 2명이 마주 보고 원탁에 앉은 다음 나머지 자리에 남학생 4명이 앉으면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_4P_4=4!=24$

008 답 **2**

회장의 자리가 결정되면 부회장이 앉을 수 있는 자리는 고정된다. 즉, 구하는 경우의 수는 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같으므로
$(3-1)!=2!=2$

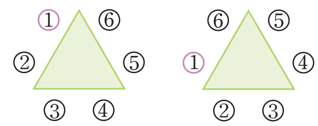
009 답 **720**

3이 적힌 구슬의 자리가 결정되면 4가 적힌 구슬이 놓일 수 있는 자리는 고정된다. 즉, 구하는 경우의 수는 7개를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로
$(7-1)!=6!=720$

010 답 **7, 7, 10080**

011 답 **240**

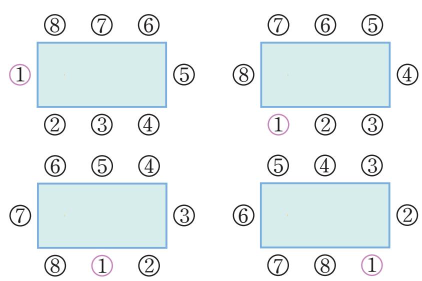
6명을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
이때 원형으로 배열하는 어느 한 가지 방법에 대하여 주어진 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는
$120\times2=240$

012 답 **20160**

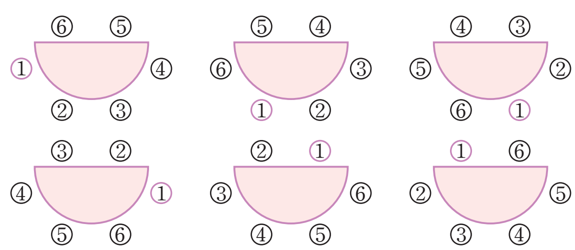
8명을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(8-1)!=7!=5040$
이때 원형으로 배열하는 어느 한 가지 방법에 대하여 주어진 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 4가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는
$5040\times4=20160$

013 답 **720**

6명을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
이때 원형으로 배열하는 어느 한 가지 방법에 대하여 주어진 반원 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 6가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는
$120\times6=720$

다른 풀이

주어진 반원 모양의 탁자에 6명이 둘러앉을 때, 회전하여 같아지는 경우가 없으므로 구하는 경우의 수는 6명을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다. $\therefore 6!=720$

014 답 **6**

4가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$

015 답 **120**

6가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$(6-1)!=5!=120$

016 답 **4, 2, 4, 2, 8**

017 답 **30**

먼저 가운데 정사각형을 칠하는 경우의 수는 5

나머지 4개의 삼각형을 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times6=30$

018 답 **840**

먼저 가운데 정육각형을 칠하는 경우의 수는 7

나머지 6개의 정육각형을 칠하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$7\times120=840$

019 답 **30**

먼저 정사각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는 5

밑면을 제외한 나머지 4개의 면을 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times6=30$

020 답 **25**

${}_5\Pi_2=5^2=25$

021 답 **64**

${}_4\Pi_3=4^3=64$

022 답 **256**

${}_4\Pi_4=4^4=256$

023 답 **32**

${}_2\Pi_5=2^5=32$

024 답 **81**

${}_3\Pi_4=3^4=81$

025 답 **6**

${}_n\Pi_3=216$에서

$n^3=216=6^3$ $\quad\therefore n=6$ ($\because$ n은 자연수)

026 답 **2**

${}_n\Pi_4=16$에서

$n^4=16=2^4$

$\therefore n=2$ ($\because$ n은 자연수)

027 답 **3**

${}_n\Pi_n=27$에서

$n^n=27=3^3$

$\therefore n=3$ ($\because$ n은 자연수)

028 답 **9**

${}_2\Pi_r=512$에서

$2^r=512=2^9$

$\therefore r=9$

029 답 **4**

${}_5\Pi_r=625$에서

$5^r=625=5^4$

$\therefore r=4$

030 답 **81**

구하는 경우의 수는 급식 메뉴 3개 중 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

031 답 **216**

구하는 경우의 수는 숙소 6개 중 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_6\Pi_3=6^3=216$

032 답 **256**

구하는 경우의 수는 ○, × 중 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_8=2^8=256$

033 답 **1024**

만들 수 있는 신호의 개수는 부호 •, − 중 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_{10}=2^{10}=1024$

034 답 **31**

전구 5개를 각각 켜거나 꺼서 만들 수 있는 신호의 개수는 켜거나 끄는 것, 즉 2종류 중 중복을 허용하여 5종류를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

이때 전구가 모두 꺼진 경우 1가지는 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는

$32-1=31$

035 답 **0, 3, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 192**

036 답 **48**

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외해야 하므로

1, 2, 3 ➡ 3가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\times16=48$

037 답 **96**

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외해야 하므로

1, 2, 3 ➡ 3가지

짝수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는

0, 2 ➡ 2가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$3\times2\times16=96$

038 답 **192**

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외해야 하므로

1, 2, 3 ➡ 3가지

5의 배수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는

0 ➡ 1가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$3\times1\times64=192$

039 답 **100**

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외해야 하므로

1, 2, 3, 4 ➡ 4가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\times25=100$

040 답 **500**

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외해야 하므로

1, 2, 3, 4 ➡ 4가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\times125=500$

041 답 **200**

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외해야 하므로

1, 2, 3, 4 ➡ 4가지

홀수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 3 ➡ 2가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 홀수의 개수는 $4\times2\times25=200$

042 답 **50**

세 자리의 자연수 중 300보다 작은 수는 백의 자리의 숫자가 1 또는 2인 수이다. 즉, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2 ➡ 2가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $2\times25=50$

043 답 **308**

0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_3=4\times5^3=500$

1을 제외한 0, 2, 3, 4의 4개의 숫자로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$3\times{}_4\Pi_3=3\times4^3=192$

따라서 숫자 1을 포함한 네 자리의 자연수의 개수는

$500-192=308$

044 답 **3, 3, 27**

045 답 **16**

Y의 원소 3, 4, 5, 6의 4개 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

046 답 **16**

Y의 원소 5, 6의 2개 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 X의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

047 답 **64**

Y의 원소 4, 5, 6, 7의 4개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

048 답 **60**

6개의 문자 중 a가 3개, b가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=60$

049 답 2520

8개의 문자 중 a가 2개, b가 2개, c가 2개, d가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times2!\times2!\times2!}=2520$

050 답 1260

7개의 문자 중 n이 2개, t가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times2!}=1260$

051 답 5040

8개의 문자 중 n이 2개, t가 2개, e가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times2!\times2!}=5040$

052 답 5, 3, 10

053 답 30

양 끝에 2개의 a를 고정시키고 그 사이에 나머지 문자 a, b, b, c, c를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

054 답 30

3개의 a를 한 문자 A로 생각하여 5개의 문자 A, b, b, c, c를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

055 답 60

2개의 b를 한 문자 B로 생각하여 6개의 문자 a, a, a, B, c, c를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=60$

056 답 90

맨 앞에 a를 고정시키고 나머지 문자 p, p, r, r, e, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$

057 답 180

맨 앞에 e를 고정시키고 나머지 문자 p, p, r, r, e, a를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!}=180$

058 답 30

양 끝에 2개의 p를 고정시키고 그 사이에 나머지 문자 r, r, e, e, a를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

059 답 180

2개의 r를 한 문자 R로 생각하여 6개의 문자 p, p, R, e, e, a를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!}=180$

060 답 90

a, e, e를 한 문자 A로 생각하여 다섯 개의 문자 A, p, p, r, r를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

a, e, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$30\times3=90$

061 답 5, 2, 2, 30, 4, 2, 2, 6, 30, 6, 24

다른 풀이

(i) 맨 앞자리에 1이 오는 경우

나머지 숫자 0, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ii) 맨 앞자리에 2가 오는 경우

나머지 숫자 0, 1, 1, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$12+12=24$

062 답 30

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

063 답 40

0, 0, 1, 2, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times3!}=60$

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 나머지 숫자 0, 1, 2, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!}=20$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$60-20=40$

064 답 150

0, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!}=180$

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 나머지 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$180-30=150$

065 답 30

5의 배수이므로 일의 자리에 0이 와야 한다.
나머지 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

066 답 78

(i) 일의 자리에 0이 오는 경우
나머지 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

(ii) 맨 앞자리에 1, 일의 자리에 2가 오는 경우
나머지 숫자 0, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$

(iii) 맨 앞자리에 2, 일의 자리에 2가 오는 경우
나머지 숫자 0, 1, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$

(iv) 맨 앞자리에 3, 일의 자리에 2가 오는 경우
나머지 숫자 0, 1, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$4!=24$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 짝수의 개수는 $30+12+12+24=78$

067 답 120

여섯 자리의 자연수 중 200000보다 큰 수는 맨 앞자리의 숫자가 2 또는 3인 수이다.

(i) 맨 앞자리에 2가 오는 경우
나머지 숫자 0, 1, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$

(ii) 맨 앞자리에 3이 오는 경우
나머지 숫자 0, 1, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는 $60+60=120$

068 답 4, 2, 12

069 답 60

숫자 1, 3의 순서가 정해져 있으므로 1, 3을 모두 A로 생각하여 A, 2, A, 4, 5를 일렬로 배열한 후 첫 번째 A는 3으로, 두 번째 A는 1로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$

070 답 120

숫자 2, 4, 6의 순서가 정해져 있으므로 2, 4, 6을 모두 A로 생각하여 1, A, 3, A, 5, A를 일렬로 배열한 후 첫 번째 A는 2로, 두 번째 A는 4로, 세 번째 A는 6으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!}=120$

071 답 180

A, B와 C, D의 순서가 정해져 있으므로 A, B를 모두 O로, C, D를 모두 X로 생각하여 O, O, X, X, E, F를 일렬로 배열한 후 첫 번째 O는 A로, 두 번째 O는 B로, 첫 번째 X는 C로, 두 번째 X는 D로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!}=180$

072 답 5

$\frac{(1+4)!}{1!\times4!}=\frac{5!}{4!}=5$

073 답 10

$\frac{(2+3)!}{2!\times3!}=\frac{5!}{2!\times3!}=10$

074 답 35

$\frac{(4+3)!}{4!\times3!}=\frac{7!}{4!\times3!}=35$

075 답 28

$\frac{(6+2)!}{6!\times2!}=\frac{8!}{6!\times2!}=28$

076 답 56

$\frac{(3+5)!}{3!\times5!}=\frac{8!}{3!\times5!}=56$

077 답 70

$\frac{(4+4)!}{4!\times4!}=\frac{8!}{4!\times4!}=70$

078 답 4, 2, 6, 3, 2, 3, 6, 3, 18

079 답 80

지점 A에서 지점 P까지 가는 최단 경로의 수는
$\frac{(3+3)!}{3!\times3!}=\frac{6!}{3!\times3!}=20$
지점 P에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는
$\frac{(3+1)!}{3!\times1!}=\frac{4!}{3!}=4$
따라서 구하는 최단 경로의 수는
$20\times4=80$

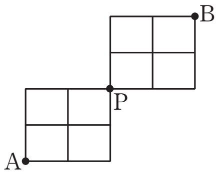
080 답 225

지점 A에서 지점 P까지 가는 최단 경로의 수는
$\frac{(4+2)!}{4!\times2!}=\frac{6!}{4!\times2!}=15$
지점 P에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는
$\frac{(2+4)!}{2!\times4!}=\frac{6!}{2!\times4!}=15$
따라서 구하는 최단 경로의 수는
$15\times15=225$

081 답 **3, 2, 2, 6, 3, 2, 1, 3, 6, 3, 9**

082 답 **36**

오른쪽 그림과 같이 지점 P를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로는 지점 P를 반드시 지난다.



지점 A에서 지점 P까지 가는 최단 경로의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

지점 P에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는

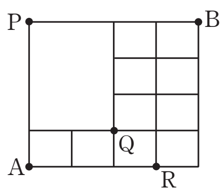
$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

따라서 구하는 최단 경로의 수는

$6\times 6=36$

083 답 **36**

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로는



A → P → B

또는 A → Q → B

또는 A → R → B

(ⅰ) A → P → B로 가는 최단 경로의 수는

$1\times 1=1$

(ⅱ) A → Q → B로 가는 최단 경로의 수는

$\frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{2!\times 3!}=30$

(ⅲ) A → R → B로 가는 최단 경로의 수는

$1\times\frac{5!}{4!}=5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 최단 경로의 수는

$1+30+5=36$

084 답 **15**

${}_5H_2={}_6C_2=\frac{6\times 5}{2\times 1}=15$

085 답 **20**

${}_4H_3={}_6C_3=\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=20$

086 답 **35**

${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35$

087 답 **6**

${}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

088 답 **15**

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times 5}{2\times 1}=15$

089 답 **10**

${}_4H_7={}_nC_3$에서 ${}_4H_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3$이므로

$n=10$

090 답 **7**

${}_2H_6={}_nC_1$에서 ${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1$이므로

$n=7$

091 답 **5**

${}_3H_r={}_7C_2$에서 ${}_3H_r={}_{2+r}C_r={}_{2+r}C_2$이므로

$2+r=7$

$\therefore r=5$

092 답 **11**

${}_nH_2=66$에서

${}_{n+1}C_2=66$

$\frac{(n+1)n}{2\times 1}=66$

$n^2+n-132=0$

$(n+12)(n-11)=0$

$\therefore n=11$ ($\because$ n은 자연수)

093 답 **2**

${}_nH_3=4$에서

${}_{n+2}C_3=4$

$\frac{(n+2)(n+1)n}{3\times 2\times 1}=4$

$(n+2)(n+1)n=4\times 3\times 2$

$\therefore n=2$ ($\because$ n은 자연수)

094 답 **20**

구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_3={}_6C_3=\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=20$

095 답 **5**

구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

096 답 **28**

구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\times 7}{2\times 1}=28$

097 답 **165**

구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=\frac{11\times 10\times 9}{3\times 2\times 1}=165$

098 답 210

구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{5}H_{6}={}_{10}C_{6}={}_{10}C_{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

099 답 7, 3, 7, 36

100 답 15

먼저 짜장면, 짬뽕, 볶음밥을 각각 1개씩 주문하고, 나머지 4개를 주문하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_{3}H_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

101 답 1001

먼저 5개의 꽃병에 꽃을 한 송이씩 꽂고, 남은 꽃 10송이를 5개의 꽃병에 나누어 꽂으면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_{5}H_{10}={}_{14}C_{10}={}_{14}C_{4}=\frac{14\times13\times12\times11}{4\times3\times2\times1}=1001$$

102 답 78

먼저 사탕을 4개, 젤리를 5개 사고, 나머지 11개를 사면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_{3}H_{11}={}_{13}C_{11}={}_{13}C_{2}=\frac{13\times12}{2\times1}=78$$

103 답 5, 3, 5, 21

104 답 15

서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}H_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

105 답 20

서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}H_{3}={}_{6}C_{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

106 답 144

서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 a, b에서 중복을 허용하여 3개를 택하고, 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{2}H_{3}\times{}_{3}H_{7}={}_{4}C_{3}\times{}_{9}C_{7}={}_{4}C_{1}\times{}_{9}C_{2}=4\times\frac{9\times8}{2\times1}=144$$

107 답 6, 3, 6, 28

108 답 220

음이 아닌 정수해의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}H_{9}={}_{12}C_{9}={}_{12}C_{3}=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$$

109 답 3, 3, 3, 3, 10

110 답 84

$X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$, $W=w-1$이라고 하면 X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수이다.

$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$, $w=W+1$을 방정식
$x+y+z+w=10$에 대입하여 정리하면
$X+Y+Z+W=6$
따라서 구하는 양의 정수해의 개수는 방정식
$X+Y+Z+W=6$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$${}_{4}H_{6}={}_{9}C_{6}={}_{9}C_{3}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

연산 유형 최종 점검하기

22~23쪽

1 720	**2** 12	**3** ③	**4** 840	**5** 729	**6** ④
7 128	**8** 27	**9** 12	**10** 21	**11** 240	**12** ③
13 17	**14** 28	**15** 36	**16** 66		

1 $(7-1)!=6!=720$

2 교장 선생님과 교감 선생님을 1명으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

교장 선생님과 교감 선생님이 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는

$2!=2$

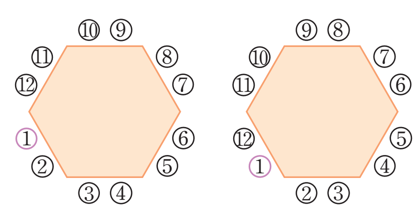
따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2=12$

3 12명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(12-1)!=11!$

이때 원형으로 배열하는 어느 한 가지 방법에 대하여 주어진 정육각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$2\times11!$

4 먼저 가운데 원을 칠하는 경우의 수는 7
나머지 6개의 영역을 칠하는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
따라서 구하는 경우의 수는
$7\times120=840$

5 ${}_{n}\Pi_{2}=36$에서
$n^2=36$ $\quad\therefore n=6$ ($\because$ n은 자연수)
$\therefore {}_{3}\Pi_{n}={}_{3}\Pi_{6}=3^6=729$

6 ${}_{3}\Pi_{5}=3^5=243$

7 첫 번째 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3의 2가지
나머지 자리에는 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는
${}_{4}\Pi_{3}=4^3=64$
따라서 구하는 비밀번호의 개수는
$2\times64=128$

8 X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소는 0으로 고정하고 Y의 원소 -1, 0, 1의 3개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는
${}_{3}\Pi_{3}=3^3=27$

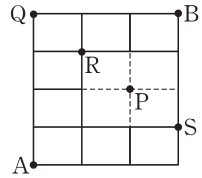
9 양 끝에 2개의 b를 고정시키고 그 사이에 나머지 문자 a, a, b, c를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!}=12$

10 (i) 일의 자리에 0이 오는 경우
나머지 숫자 1, 1, 3, 5를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!}=12$
(ii) 일의 자리에 5, 만의 자리에 1이 오는 경우
나머지 숫자 0, 1, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$3!=6$
(iii) 일의 자리에 5, 만의 자리에 3이 오는 경우
나머지 숫자 0, 1, 1을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\dfrac{3!}{2!}=3$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 5의 배수의 개수는
$12+6+3=21$

11 모음 모두를 한 문자 A로, 자음 모두를 한 문자 B로 생각할 때, 모음이 모두 자음보다 앞에 오도록 배열하는 경우는 AB의 1가지이다.
이때 모음 a, e, e, e끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{3!}=4$
자음 p, p, l, t, r끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{2!}=60$
따라서 구하는 경우의 수는 $1\times4\times60=240$

12 $\dfrac{6!}{2!\times4!}=15$

13 오른쪽 그림과 같이 세 지점 Q, R, S를 잡으면 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로는



A → Q → B 또는 A → R → B
또는 A → S → B
(i) A → Q → B로 가는 최단 경로의 수는
$1\times1=1$
(ii) A → R → B로 가는 최단 경로의 수는
$\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{3!}{2!}=12$
(iii) A → S → B로 가는 최단 경로의 수는
$\dfrac{4!}{3!}\times1=4$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 최단 경로의 수는
$1+12+4=17$

다른 풀이

지점 P의 장애물을 생각하지 않고 지점 A에서 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는
$\dfrac{7!}{3!\times4!}=35$
지점 A에서 지점 P를 거쳐 지점 B까지 가는 최단 경로의 수는
$\dfrac{4!}{2!\times2!}\times\dfrac{3!}{2!}=18$
따라서 지점 P를 지나지 않고 가는 최단 경로의 수는
$35-18=17$

14 먼저 3명의 학생에게 공을 각각 3개씩 나누어 주고, 남은 6개를 3명의 학생에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는
${}_{3}H_{6}={}_{8}C_{6}={}_{8}C_{2}=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

15 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{7}={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$

16 음이 아닌 정수해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$a={}_{3}H_{8}={}_{10}C_{8}={}_{10}C_{2}=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$
$X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$이라고 하면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이다.
$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$을 방정식 $x+y+z=8$에 대입하여 정리하면
$X+Y+Z=5$
따라서 양의 정수해의 개수는 방정식 $X+Y+Z=5$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
$b={}_{3}H_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$
$\therefore a+b=45+21=66$

02 이항정리

26~31쪽

001 답 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$(a+b)^3={}_3C_0a^3+{}_3C_1a^2b+{}_3C_2ab^2+{}_3C_3b^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

002 답 $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$$(a+b)^4={}_4C_0a^4+{}_4C_1a^3b+{}_4C_2a^2b^2+{}_4C_3ab^3+{}_4C_4b^4$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

003 답 $a^5-5a^4+10a^3-10a^2+5a-1$

$$(a-1)^5={}_5C_0a^5+{}_5C_1a^4\times(-1)+{}_5C_2a^3\times(-1)^2$$
$$+{}_5C_3a^2\times(-1)^3+{}_5C_4a\times(-1)^4+{}_5C_5\times(-1)^5$$
$$=a^5-5a^4+10a^3-10a^2+5a-1$$

004 답 $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$

$$(2a+b)^3={}_3C_0(2a)^3+{}_3C_1(2a)^2b+{}_3C_22ab^2+{}_3C_3b^3$$
$$=8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$$

005 답 $x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$$
$$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\times\frac{1}{x}+{}_4C_2x^2\times\left(\frac{1}{x}\right)^2+{}_4C_3x\times\left(\frac{1}{x}\right)^3+{}_4C_4\times\left(\frac{1}{x}\right)^4$$
$$=x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$$

006 답 $x^5-5x^3+10x-\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^5}$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^5={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4\times\left(-\frac{1}{x}\right)+{}_5C_2x^3\times\left(-\frac{1}{x}\right)^2$$
$$+{}_5C_3x^2\times\left(-\frac{1}{x}\right)^3+{}_5C_4x\times\left(-\frac{1}{x}\right)^4+{}_5C_5\times\left(-\frac{1}{x}\right)^5$$
$$=x^5-5x^3+10x-\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^5}$$

007 답 $8x^3+12x+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^3}$

$$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^3$$
$$={}_3C_0(2x)^3+{}_3C_1(2x)^2\times\frac{1}{x}+{}_3C_2\times2x\times\left(\frac{1}{x}\right)^2+{}_3C_3\times\left(\frac{1}{x}\right)^3$$
$$=8x^3+12x+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^3}$$

008 답 $x^4-12x^2+54-\frac{108}{x^2}+\frac{81}{x^4}$

$$\left(x-\frac{3}{x}\right)^4={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\times\left(-\frac{3}{x}\right)+{}_4C_2x^2\times\left(-\frac{3}{x}\right)^2$$
$$+{}_4C_3x\times\left(-\frac{3}{x}\right)^3+{}_4C_4\times\left(-\frac{3}{x}\right)^4$$
$$=x^4-12x^2+54-\frac{108}{x^2}+\frac{81}{x^4}$$

009 답 10

$(x+y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_rx^{5-r}y^r$

$x^{5-r}y^r=x^2y^3$에서 $r=3$

따라서 x^2y^3의 계수는 ${}_5C_3=10$

010 답 5

$(x+y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_rx^{5-r}y^r$

$x^{5-r}y^r=xy^4$에서 $r=4$

따라서 xy^4의 계수는 ${}_5C_4=5$

011 답 -8

$(x-2y)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^{4-r}\times(-2y)^r={}_4C_r\times(-2)^rx^{4-r}y^r$

$x^{4-r}y^r=x^3y$에서 $r=1$

따라서 x^3y의 계수는 ${}_4C_1\times(-2)=-8$

012 답 -32

$(x-2y)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^{4-r}\times(-2y)^r={}_4C_r\times(-2)^rx^{4-r}y^r$

$x^{4-r}y^r=xy^3$에서 $r=3$

따라서 xy^3의 계수는 ${}_4C_3\times(-2)^3=-32$

013 답 -6

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_rx^{6-r}\times\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\times(-1)^rx^{6-r}\times\frac{1}{x^r}$

$x^{6-r}\times\frac{1}{x^r}=x^4$에서 $r=1$

따라서 x^4의 계수는 ${}_6C_1\times(-1)=-6$

014 답 15

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_rx^{6-r}\times\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\times(-1)^rx^{6-r}\times\frac{1}{x^r}$

$x^{6-r}\times\frac{1}{x^r}=\frac{1}{x^2}$에서 $r=4$

따라서 $\frac{1}{x^2}$의 계수는 ${}_6C_4\times(-1)^4=15$

015 답 8

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^{4-r}\times\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_4C_r2^rx^{4-r}\times\frac{1}{x^r}$

$x^{4-r}\times\frac{1}{x^r}=x^2$에서 $r=1$

따라서 x^2의 계수는 ${}_4C_1\times2=8$

016 답 **24**

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^{4-r}\times\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_4C_r 2^r x^{4-r}\times\frac{1}{x^r}$

$x^{4-r}\times\frac{1}{x^r}=1$에서 $r=2$

따라서 상수항은 ${}_4C_2\times 2^2=24$

017 답 **2, 4−s, 2, 4−s, 2, 3, 2, 4, 64**

018 답 **−1**

$(1+x)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_r x^r$ …… ㉠

$(1-x)^2$의 전개식의 일반항은 ${}_2C_s\times(-1)^s x^s$ …… ㉡

$(1+x)^4(1-x)^2$의 전개식의 일반항은 ㉠×㉡이므로

${}_4C_r\times{}_2C_s\times(-1)^s x^{r+s}$

$r+s=2$를 만족하는 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

따라서 x^2의 계수는

$${}_4C_0\times{}_2C_2\times(-1)^2+{}_4C_1\times{}_2C_1\times(-1)+{}_4C_2\times{}_2C_0=1+(-8)+6=-1$$

019 답 **174**

$(1+2x)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3C_r 2^r x^r$ …… ㉠

$(2+x)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3C_s 2^{3-s} x^s$ …… ㉡

$(1+2x)^3(2+x)^3$의 전개식의 일반항은 ㉠×㉡이므로

${}_3C_r\times{}_3C_s 2^{r-s+3}x^{r+s}$

$r+s=2$를 만족하는 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

따라서 x^2의 계수는

${}_3C_0\times{}_3C_2\times 2+{}_3C_1\times{}_3C_1\times 2^3+{}_3C_2\times{}_3C_0\times 2^5=6+72+96=174$

020 답 **−567**

$(1-x)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_r\times(-1)^r x^r$ …… ㉠

$(3+x)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_s 3^{5-s}x^s$ …… ㉡

$(1-x)^4(3+x)^5$의 전개식의 일반항은 ㉠×㉡이므로

${}_4C_r\times{}_5C_s\times(-1)^r 3^{5-s}x^{r+s}$

$r+s=1$을 만족하는 순서쌍 (r, s)는

$(0, 1)$, $(1, 0)$

따라서 x의 계수는

${}_4C_0\times{}_5C_1\times 3^4+{}_4C_1\times{}_5C_0\times(-1)\times 3^5=405+(-972)=-567$

021 답 $\boldsymbol{x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4}$

022 답 $\boldsymbol{a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6}$

023 답 $\boldsymbol{a^5-15a^4+90a^3-270a^2+405a-243}$

$$\begin{aligned}(a-3)^5&=a^5+5a^4\times(-3)+10a^3\times(-3)^2+10a^2\times(-3)^3\\&\quad+5a\times(-3)^4+(-3)^5\\&=a^5-15a^4+90a^3-270a^2+405a-243\end{aligned}$$

024 답 ${}_5C_3$

025 답 ${}_7C_4$

026 답 ${}_9C_4$

027 답 ${}_9C_3$

${}_7C_2+{}_7C_3+{}_8C_2={}_8C_3+{}_8C_2={}_9C_3$

028 답 **8**

${}_3C_0+{}_3C_1+{}_3C_2+{}_3C_3=2^3=8$

029 답 **256**

${}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8=2^8=256$

030 답 **63**

${}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6=2^6$이므로

${}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5=2^6-1=63$

031 답 **2047**

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}$이므로

${}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}-1=2047$

032 답 **0**

033 답 **0**

034 답 **1, 1, 2^n, 10**

035 답 **8**

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로 주어진 등식은

$2^n=256$, $2^n=2^8$

$\therefore n=8$

036 답 **9**

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^n-1$

따라서 주어진 부등식은

$500<2^n-1<1000$

$\therefore 501<2^n<1001$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n=9$

037 답 **0, 2, 64**

038 답 **256**

${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+\cdots+{}_9C_9=2^9$ …… ㉠

${}_9C_0-{}_9C_1+{}_9C_2-\cdots-{}_9C_9=0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$2({}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9)=2^9$

$\therefore {}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9=256$

039 답 255

$_9C_0+_9C_1+_9C_2+\cdots+_9C_9=2^9$ ...... ㉠

$_9C_0-_9C_1+_9C_2-\cdots-_9C_9=0$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$2(_9C_0+_9C_2+_9C_4+_9C_6+_9C_8)=2^9$

$_9C_0+_9C_2+_9C_4+_9C_6+_9C_8=256$

$\therefore\ _9C_2+_9C_4+_9C_6+_9C_8=256-1=255$

040 답 2048

$_{12}C_0+_{12}C_1+_{12}C_2+\cdots+_{12}C_{12}=2^{12}$ ...... ㉠

$_{12}C_0-_{12}C_1+_{12}C_2-\cdots+_{12}C_{12}=0$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면

$2(_{12}C_1+_{12}C_3+_{12}C_5+_{12}C_7+_{12}C_9+_{12}C_{11})=2^{12}$

$\therefore\ _{12}C_1+_{12}C_3+_{12}C_5+_{12}C_7+_{12}C_9+_{12}C_{11}=2048$

연산 유형 최종 점검하기

32~33쪽

1 ③	**2** 3	**3** ⑤	**4** −3	**5** ④	**6** ⑤
7 ④	**8** ②	**9** 0	**10** 7	**11** ①	**12** ②

1 $(2x-y)^4$의 전개식의 일반항은

$_4C_r(2x)^{4-r}\times(-y)^r={}_4C_r2^{4-r}\times(-1)^rx^{4-r}y^r$

$x^{4-r}y^r=x^2y^2$에서 $r=2$

따라서 x^2y^2의 계수는 $_4C_2\times2^2\times(-1)^2=24$

2 $(x+ay)^5$의 전개식의 일반항은

$_5C_rx^{5-r}\times(ay)^r={}_5C_ra^rx^{5-r}y^r$

$x^{5-r}y^r=x^3y^2$에서 $r=2$

이때 x^3y^2의 계수가 90이므로

$_5C_2a^2=90,\ a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

3 $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$_5C_r(x^2)^{5-r}\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_5C_r\times(-1)^rx^{10-2r}\times\dfrac{1}{x^r}$

(i) $x^{10-2r}\times\dfrac{1}{x^r}=x^4$에서 $r=2$

따라서 x^4의 계수는 $_5C_2\times(-1)^2=10$

(ii) $x^{10-2r}\times\dfrac{1}{x^r}=x^7$에서 $r=1$

따라서 x^7의 계수는 $_5C_1\times(-1)=-5$

(i), (ii)에 의하여 x^4의 계수와 x^7의 계수의 합은

$10+(-5)=5$

4 $(x-1)^3$의 전개식의 일반항은

$_3C_rx^{3-r}\times(-1)^r$ ...... ㉠

$(x+1)^4$의 전개식의 일반항은

$_4C_sx^{4-s}$ ...... ㉡

$(x-1)^3(x+1)^4$의 전개식의 일반항은 ㉠×㉡이므로

$_3C_r\times{}_4C_s\times(-1)^rx^{7-(r+s)}$

$7-(r+s)=5$, 즉 $r+s=2$를 만족하는 순서쌍 $(r,\ s)$는

$(0,\ 2),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0)$

따라서 x^5의 계수는

$_3C_0\times{}_4C_2+{}_3C_1\times{}_4C_1\times(-1)+{}_3C_2\times{}_4C_0\times(-1)^2$

$=6+(-12)+3=-3$

5 $(2+x)^4$의 전개식의 일반항은

$_4C_r2^{4-r}x^r$ ...... ㉠

$(1-x)^2$의 전개식의 일반항은

$_2C_s\times(-1)^sx^s$ ...... ㉡

$(2+x)^4(1-x)^2$의 전개식의 일반항은 ㉠×㉡이므로

$_4C_r\times{}_2C_s\times2^{4-r}\times(-1)^sx^{r+s}$

$r+s=0$을 만족하는 순서쌍 $(r,\ s)$는 $(0,\ 0)$

$r+s=1$을 만족하는 순서쌍 $(r,\ s)$는 $(0,\ 1),\ (1,\ 0)$

따라서 상수항과 x의 계수의 합은

$_4C_0\times{}_2C_0\times2^4+{}_4C_0\times{}_2C_1\times2^4\times(-1)+{}_4C_1\times{}_2C_0\times2^3$

$=16+(-32)+32=16$

6 $_2C_1+{}_2C_2+{}_3C_1+{}_4C_1={}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1$

$={}_4C_2+{}_4C_1={}_5C_2$

7 $_2C_0={}_3C_0$이므로

$_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3$

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3$

$={}_5C_2+{}_5C_3={}_6C_3$

8 $_1C_0={}_2C_0$이므로

$_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4$

$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4$

$={}_4C_2+{}_4C_3+{}_5C_4$

$={}_5C_3+{}_5C_4={}_6C_4$

9 $_{16}C_0-{}_{16}C_1+{}_{16}C_2-{}_{16}C_3+\cdots+{}_{16}C_{16}=0$

10 $_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=128$에서

$2^n=128,\ 2^n=2^7$ $\therefore n=7$

11 $_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n$이므로

$_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^n-2$

따라서 주어진 등식은

$2^n-2=62,\ 2^n=2^6$ $\therefore n=6$

12 $_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

따라서 주어진 부등식은

$200<2^n-1<300$ $\therefore 201<2^n<301$

이때 $2^7=128,\ 2^8=256,\ 2^9=512$이므로

$n=8$

03 확률의 뜻과 활용

36~48쪽

001 답 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

002 답 $\{2, 4, 6\}$

003 답 $\{1, 2, 4\}$

004 답 $\{2, 3, 5\}$

005 답 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

006 답 $\{6\}$

007 답 $\{4, 8\}$

008 답 $\{2, 6\}$

009 답 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

$A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

010 답 $\{2\}$

011 답 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

012 답 $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

013 답 A와 C

$A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$, $C=\{4, 8, 12\}$

(i) $A\cap B=\{1\}$이므로 A와 B는 배반이 아니다.

(ii) $B\cap C=\{4, 8\}$이므로 B와 C는 배반이 아니다.

(iii) $A\cap C=\varnothing$이므로 A와 C는 배반이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 서로 배반인 두 사건은 A와 C이다.

014 답 $\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12\}$

015 답 $\{1, 2, 4, 8, 12\}$

016 답 $\{2, 4, 8\}$

$A^C=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$이므로

$A^C\cap B=\{2, 4, 8\}$

017 답 $\frac{1}{9}$

2개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

두 눈의 수의 합이 9인 경우는

$(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$ ➡ 4가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

018 답 $\frac{1}{6}$

두 눈의 수가 서로 같은 경우는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$ ➡ 6가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

019 답 $\frac{1}{6}$

(i) 두 눈의 수의 합이 2인 경우는

$(1, 1)$ ➡ 1가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 3인 경우는

$(1, 2)$, $(2, 1)$ ➡ 2가지

(iii) 두 눈의 수의 합이 4인 경우는

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ ➡ 3가지

(i), (ii), (iii)에 의하여 두 눈의 수의 합이 4 이하인 경우의 수는

$1+2+3=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

020 답 $\frac{5}{36}$

(i) 두 눈의 수의 곱이 8인 경우는

$(2, 4)$, $(4, 2)$ ➡ 2가지

(ii) 두 눈의 수의 곱이 16인 경우는

$(4, 4)$ ➡ 1가지

(iii) 두 눈의 수의 곱이 24인 경우는

$(4, 6)$, $(6, 4)$ ➡ 2가지

(i), (ii), (iii)에 의하여 두 눈의 수의 곱이 8의 배수인 경우의 수는

$2+1+2=5$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{36}$

021 답 6, 5, 5, 6, $\frac{1}{2}$

022 답 $\frac{1}{4}$

집합 A의 부분집합의 개수는

$2^6=64$

집합 A의 부분집합 중 a, b를 모두 포함하는 부분집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$

023 답 $\frac{1}{8}$

집합 A의 부분집합 중 d, e, f를 모두 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$

024 답 5, 4, 4, $\frac{2}{5}$

025 답 $\frac{1}{5}$

5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$5!=120$

자음 b, c, d를 한 문자로 보고, 모음 a, e를 다른 한 문자로 보아 2개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $2!=2$

이때 자음 b, c, d를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!=6$

모음 a, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $2!=2$

자음은 자음끼리, 모음은 모음끼리 이웃하는 경우의 수는

$2\times6\times2=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

026 답 $\frac{2}{7}$

8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

선생님들을 1명으로 생각하면 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(7-1)!=6!$, 선생님 2명이 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2!$이므로 선생님끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는

$6!\times2!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6!\times2!}{7!}=\frac{2}{7}$

027 답 $\frac{1}{7}$

선생님 한 명의 자리가 결정되면 다른 선생님이 앉을 수 있는 자리는 고정되므로 선생님끼리 마주 보고 앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6!}{7!}=\frac{1}{7}$

028 답 $\frac{1}{3}$

네 자리의 자연수의 개수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

짝수이려면 일의 자리의 숫자가 2이어야 하므로 짝수의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 확률은 $\frac{27}{81}=\frac{1}{3}$

029 답 $\frac{1}{3}$

3000보다 크려면 천의 자리의 숫자가 3이어야 하므로 3000보다 큰 수의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 확률은 $\frac{27}{81}=\frac{1}{3}$

030 답 $\frac{1}{21}$

7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times2!\times2!}=630$

양 끝에 2개의 o를 고정시키고 그 사이에 나머지 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{630}=\frac{1}{21}$

031 답 $\frac{2}{7}$

2개의 n을 한 문자 N으로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!}=180$

따라서 구하는 확률은 $\frac{180}{630}=\frac{2}{7}$

032 답 35, 10, $\frac{2}{7}$

033 답 $\frac{4}{7}$

7명 중 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

2학년 학생 중 1명, 1학년 학생 중 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_5C_2=2\times10=20$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$

034 답 $\frac{1}{84}$

공 9개 중 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

검은 공만 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_3C_3=1$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{84}$

035 답 $\frac{10}{21}$

공 9개 중 4개를 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_4=126$

흰 공을 3개, 검은 공을 1개 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_3\times{}_3C_1=20\times3=60$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{126}=\frac{10}{21}$

036 답 $\frac{1}{21}$

카드 9장 중 3장을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

짝수 2, 4, 6, 8이 적힌 카드 4장 중 3장을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_3=4$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$

037 답 $\frac{5}{42}$

세 수의 곱이 홀수이려면 세 수가 모두 홀수이어야 하므로 홀수 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 카드 5장 중 3장을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$

038 답 $\frac{1}{5}$

서로 다른 3종류에서 중복을 허용하여 4개를 구매하는 경우의 수는

${}_3H_4={}_6C_4=15$

지우개를 2개 구매하고 나머지 2종류 중 2개를 구매하는 경우의 수는

${}_2H_2={}_3C_2=3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

039 답 $\frac{5}{21}$

서로 다른 3종류에서 중복을 허용하여 5개를 구매하는 경우의 수는

${}_3H_5={}_7C_5=21$

가위를 1개 구매하고 나머지 2종류 중 4개를 구매하는 경우의 수는

${}_2H_4={}_5C_4=5$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{21}$

040 답 $\frac{1}{25}$

$\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$

041 답 $\frac{19}{24}$

$\frac{95}{120}=\frac{19}{24}$

042 답 $\frac{57}{100}$

$\frac{114}{200}=\frac{57}{100}$

043 답 $\frac{9}{100}$

044 답 $\frac{37}{100}$

8점 이상을 맞힌 횟수는

$16+12+9=37$

따라서 구하는 확률은 $\frac{37}{100}$

045 답 $\frac{3}{5}$

6점 이상을 맞힌 횟수는

$15+8+16+12+9=60$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

046 답 $\frac{1}{4}$

작은 정삼각형의 넓이를 1로 생각하면 구하는 확률은 $\frac{1}{4}$

047 답 $\frac{3}{8}$

작은 정사각형의 넓이를 1로 생각하면 구하는 확률은 $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

048 답 $\frac{2}{5}$

작은 정삼각형의 넓이를 1로 생각하면 구하는 확률은 $\frac{2}{5}$

049 답 $\frac{3}{4}$

두 원의 넓이는 작은 원부터 각각 9π, 36π이므로 색칠한 부분의 넓이는

$36\pi-9\pi=27\pi$

따라서 구하는 확률은

$\frac{27\pi}{36\pi}=\frac{3}{4}$

050 답 $\frac{2}{3}$

세 원의 넓이는 작은 원부터 각각 4π, 16π, 36π이므로 색칠한 부분의 넓이는

$4\pi+(36\pi-16\pi)=24\pi$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24\pi}{36\pi}=\frac{2}{3}$

051 답 $\frac{7}{24}$

반지름의 길이가 3인 원의 넓이는 9π

중심각의 크기가 각각 $45°$, $60°$인 부채꼴의 넓이는 각각 $\frac{9}{8}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$\frac{9}{8}\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{21}{8}\pi$

따라서 구하는 확률은

$\frac{\frac{21}{8}\pi}{9\pi}=\frac{7}{24}$

052 답 $\frac{1}{36}$

053 답 1

두 눈의 수가 모두 자연수인 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다.

054 답 0

두 눈의 수의 합이 1인 사건은 절대로 일어나지 않으므로 구하는 확률은 0이다.

055 답 1

두 눈의 수의 합이 12 이하인 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다.

056 답 0

두 눈의 수의 차가 6인 사건은 절대로 일어나지 않으므로 구하는 확률은 0이다.

057 답 $\frac{3}{5}$

$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

058 답 1

빨간 공 또는 노란 공이 나오는 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다.

059 답 0

파란 공이 나오는 사건은 절대로 일어나지 않으므로 구하는 확률은 0이다.

060 답 0

카드에 적힌 수가 동시에 짝수이고 홀수인 사건은 절대로 일어나지 않으므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

061 답 1

카드에 적힌 수가 짝수 또는 홀수인 사건은 반드시 일어나므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=1$

062 답 $\frac{7}{12}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

063 답 $\frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{5}{12}-\mathrm{P}(A\cap B)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$

064 답 $\frac{13}{18}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{8}{9}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{6}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{13}{18}$

065 답 $\frac{7}{10}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{4}{5}=\mathrm{P}(A)+\frac{3}{10}-\frac{1}{5}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{7}{10}$

066 답 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{17}{20}$

067 답 $\frac{9}{20}$

카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A라고 하면

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

카드에 적힌 수가 12의 약수인 사건을 B라고 하면

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$\therefore A\cap B=\{3, 6, 12\}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{20}$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}-\frac{3}{20}=\frac{9}{20}\end{aligned}$$

068 답 $\frac{3}{10}$

카드에 적힌 수가 10의 약수인 사건을 A라고 하면

$A=\{1, 2, 5, 10\}$

카드에 적힌 수가 15의 약수인 사건을 B라고 하면

$B=\{1, 3, 5, 15\}$

$\therefore A\cap B=\{1, 5\}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

069 답 $\frac{19}{15}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{15}$

070 답 $\frac{3}{8}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=\frac{5}{8}+\frac{3}{4}-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{11}{8}-\mathrm{P}(A\cup B)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(A\cap B)$가 최소이려면 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대이어야 한다.

$\mathrm{P}(A\cup B)\ge\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge\mathrm{P}(B)$, $0\le\mathrm{P}(A\cup B)\le1$이므로

$\frac{3}{4}\le\mathrm{P}(A\cup B)\le1$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 최솟값은 $\mathrm{P}(A\cup B)=1$일 때이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{11}{8}-1=\frac{3}{8}$

071 답 $\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{4}-\mathrm{P}(A\cup B)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(A\cap B)$가 최대이려면 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최소이어야 한다.

$\mathrm{P}(A\cup B)\ge \mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge \mathrm{P}(B)$, $0\le \mathrm{P}(A\cup B)\le 1$이므로

$\frac{3}{4}\le \mathrm{P}(A\cup B)\le 1$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 최댓값은 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$일 때이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

072 답 $\frac{5}{6}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

073 답 $\frac{3}{10}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{7}{10}=\frac{2}{5}+\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$

074 답 $\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$1=\mathrm{P}(A)+\frac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

075 답 $\frac{21}{50}$

카드에 적힌 수가 10 이하인 사건을 A, 40 이상인 사건을 B라고 하면 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{11}{50}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{5}+\frac{11}{50}=\frac{21}{50}$

076 답 $\frac{9}{50}$

카드에 적힌 수가 8의 약수인 사건을 A, 10의 배수인 사건을 B라고 하면 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{2}{25}+\frac{1}{10}=\frac{9}{50}$

077 답 $\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

078 답 $\frac{4}{7}$

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$에서

$\frac{3}{7}=1-\mathrm{P}(A)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{4}{7}$

079 답 $\frac{11}{15}$

$A=\{1, 3, 5, 15\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$

080 답 $\frac{3}{5}$

$B=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

081 답 $\frac{2}{3}$, $\frac{11}{12}$

082 답 $\frac{7}{10}$

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$에서

$\frac{4}{5}=1-\mathrm{P}(A)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{1}{2}=1-\mathrm{P}(B)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$

083 답 $\frac{5}{12}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

084 답 $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{8}$

085 답 $\frac{15}{16}$

적어도 1개는 뒷면이 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 4개 모두 앞면이 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2\times2\times2\times2}=\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

086 답 $\frac{44}{45}$

적어도 1개는 정상 제품이 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 2개 모두 불량품이 나오는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_2C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{45}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}$

087 답 $\frac{17}{45}$

적어도 1개는 불량품이 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 2개 모두 정상 제품이 나오는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_8C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{28}{45}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{28}{45}=\frac{17}{45}$

088 답 $\frac{7}{13}$

적어도 1개는 흰 바둑돌이 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 2개 모두 검은 바둑돌이 나오는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_9C_2}{{}_{13}C_2}=\frac{36}{78}=\frac{6}{13}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{6}{13}=\frac{7}{13}$

089 답 $\frac{141}{143}$

적어도 1개는 검은 바둑돌이 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 3개 모두 흰 바둑돌이 나오는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_4C_3}{{}_{13}C_3}=\frac{4}{286}=\frac{2}{143}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{143}=\frac{141}{143}$

090 답 $\frac{31}{35}$

적어도 1명은 남학생을 택하는 사건을 A라고 하면 A^C은 3명 모두 여학생을 택하는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$

091 답 $\frac{34}{35}$

적어도 1명은 여학생을 택하는 사건을 A라고 하면 A^C은 3명 모두 남학생을 택하는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$

092 답 $\frac{9}{10}$

카드에 적힌 수가 7의 배수인 사건을 A라고 하면

$A=\{7, 14\}$이므로

$P(A)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

093 답 $\frac{3}{5}$

카드에 적힌 수가 소수인 사건을 A라고 하면

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$이므로

$P(A)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

094 답 1, 6, $\frac{7}{64}$, $\frac{57}{64}$

095 답 $\frac{57}{64}$

4문제 이하로 맞히는 사건을 A라고 하면 A^C은 모두 맞히거나 5문제만 맞히는 사건이다.

(ⅰ) 모두 맞힐 확률은 $\frac{{}_6C_6}{{}_2\Pi_6}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$

(ⅱ) 5문제만 맞힐 확률은 $\frac{{}_6C_5}{{}_2\Pi_6}=\frac{6}{2^6}=\frac{3}{32}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $P(A^C)=\frac{1}{64}+\frac{3}{32}=\frac{7}{64}$이므로 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{7}{64}=\frac{57}{64}$

096 답 $\frac{5}{6}$

두 눈의 수가 서로 다른 사건을 A라고 하면 A^C은 두 눈의 수가 서로 같은 사건이므로

$P(A^C)=\frac{6}{6\times 6}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

097 답 $\frac{35}{36}$

두 눈의 수의 합이 3 이상인 사건을 A라고 하면 A^C은 두 눈의 수의 합이 2인 사건이므로

$P(A^C)=\frac{1}{6\times 6}=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$

098 답 $\frac{5}{6}$

두 눈의 수의 차가 3 이하인 사건을 A라고 하면 A^C은 두 눈의 수의 차가 4 또는 5인 사건이다.

(i) 두 눈의 수의 차가 4인 경우는

$(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)$ ➡ 4가지

두 눈의 수의 차가 4일 확률은

$\frac{4}{6\times6}=\frac{1}{9}$

(ii) 두 눈의 수의 차가 5인 경우는

$(1, 6), (6, 1)$ ➡ 2가지

두 눈의 수의 차가 5일 확률은

$\frac{2}{6\times6}=\frac{1}{18}$

(i), (ii)에 의하여 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{6}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

099 답 $\frac{5}{6}$

빨간 공이 2개 이상 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 모두 파란 공만 나오거나 빨간 공이 1개만 나오는 사건이다.

(i) 파란 공만 나올 확률은

$\frac{{}_4C_4}{{}_9C_4}=\frac{1}{126}$

(ii) 빨간 공이 1개, 파란 공이 3개 나올 확률은

$\frac{{}_5C_1\times{}_4C_3}{{}_9C_4}=\frac{5\times4}{126}=\frac{10}{63}$

(i), (ii)에 의하여 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{126}+\frac{10}{63}=\frac{1}{6}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

100 답 $\frac{125}{126}$

파란 공이 3개 이하 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 모두 파란 공만 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4C_4}{{}_9C_4}=\frac{1}{126}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{126}=\frac{125}{126}$

연산 유형 최종 점검하기

49~51쪽

1 ㄱ	**2** $\frac{2}{3}$	**3** ③	**4** $\frac{1}{5}$	**5** ④	**6** ②
7 $\frac{3}{7}$	**8** ②	**9** $\frac{32}{125}$	**10** $\frac{5}{8}$	**11** ㄱ, ㄷ	**12** $\frac{33}{100}$
13 0.8	**14** ③	**15** ①	**16** ②	**17** ④	**18** $\frac{9}{10}$

1 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{3, 6\}$

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로 배반이다.

ㄴ. $A\cap C=\{3\}$이므로 A와 C는 배반이 아니다.

ㄷ. $B\cap C=\{6\}$이므로 B와 C는 배반이 아니다.

따라서 보기 중 서로 배반사건인 것은 ㄱ이다.

2 지점 A에서 지점 B를 거쳐 지점 C로 가는 경우의 수는

$3\times2=6$

지점 A에서 지점 B를 거치지 않고 지점 C로 가는 경우의 수는 3

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{6+3}=\frac{2}{3}$

3 5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5!$

a를 맨 앞에 고정시키고 나머지 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$

4 5개의 영역에 서로 다른 5가지 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times(4-1)!=30$

가운데 있는 영역에 빨간색을 칠하고 나머지 영역에 남은 색을 칠하는 경우의 수는

$1\times(4-1)!=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

5 5명을 3개의 반에 배정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$

1반에 배정되는 학생 4명을 뽑고 나머지 학생 1명을 2반 또는 3반에 배정하는 경우의 수는

${}_5C_4\times2=10$

따라서 구하는 확률은

$\frac{10}{243}$

6 8개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times2!\times2!}=5040$

모음 a, a를 한 문자로 생각하여 7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times2!}=1260$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1260}{5040}=\frac{1}{4}$

7 카드 4장을 뽑는 경우의 수는
${}_{10}C_4=210$
♥가 그려진 카드와 ♣가 그려진 카드를 각각 2장씩 뽑는 경우의 수는
${}_6C_2\times{}_4C_2=15\times6=90$
따라서 구하는 확률은
$\frac{90}{210}=\frac{3}{7}$

8 $x+y+z=9$의 음이 아닌 정수해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_3H_9={}_{11}C_9=55$
$x+y+z=9$의 양의 정수해의 개수는 $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$이라고 할 때, $X+Y+Z=6$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
${}_3H_6={}_8C_6=28$
따라서 구하는 확률은
$\frac{28}{55}$

9 $\frac{128}{500}=\frac{32}{125}$

10 네 원의 넓이는 작은 원부터 각각 π, 4π, 9π, 16π이므로 색칠한 부분의 넓이는
$(4\pi-\pi)+(16\pi-9\pi)=10\pi$
따라서 구하는 확률은
$\frac{10\pi}{16\pi}=\frac{5}{8}$

11 ㄱ. $0\le P(A)\le1$
ㄴ. $0\le P(A\cup B)\le1$
ㄷ. $P(S)=1$, $P(\varnothing)=0$이므로
$P(S)+P(\varnothing)=1$
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12 수박을 좋아하는 학생을 택하는 사건을 A, 포도를 좋아하는 학생을 택하는 사건을 B라고 하면 구하는 확률은
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{25}{100}+\frac{20}{100}-\frac{12}{100}=\frac{33}{100}$$

13 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서
$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.7+0.55-P(A\cup B)=1.25-P(A\cup B)$$
$P(A\cup B)\ge P(A)$, $P(A\cup B)\ge P(B)$, $0\le P(A\cup B)\le1$이므로
$0.7\le P(A\cup B)\le1$
따라서 $P(A\cap B)$가 최대이려면 $P(A\cup B)$가 최소이어야 하므로
$P(A\cup B)=0.7$일 때
$M=1.25-0.7=0.55$
$P(A\cap B)$가 최소이려면 $P(A\cup B)$가 최대이어야 하므로
$P(A\cup B)=1$일 때
$m=1.25-1=0.25$
$\therefore\ M+m=0.55+0.25=0.8$

14 c가 맨 앞에 오는 사건을 A, c가 맨 뒤에 오는 사건을 B라고 하면 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.
이때 $P(A)=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}$이므로 구하는 확률은
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

15 $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$$
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로
$$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

16 적어도 1개는 당첨 제비가 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 당첨 제비가 나오지 않는 사건이므로
$P(A^C)=\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$

17 어린이 사이에 적어도 1명의 어른을 세우는 사건을 A라고 하면 A^C은 어린이끼리 이웃하는 사건이다.
어린이 2명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!$이고, 어린이끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로 어린이끼리 이웃하여 설 확률은
$P(A^C)=\frac{4!\times2!}{5!}=\frac{2}{5}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

18 자연수가 33000 이하인 사건을 A라고 하면 A^C은 자연수가 33112 이상인 사건이다.
다섯 개의 숫자로 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는
$\frac{5!}{2!\times2!}=30$
만의 자리와 천의 자리에 3을 놓고, 나머지 숫자 1, 1, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$이므로 33112 이상인 다섯 자리의 자연수일 확률은
$P(A^C)=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

04 조건부확률

54~63쪽

001 답 $\frac{5}{8}$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{8}$$

002 답 $\frac{1}{2}$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

003 답 $\frac{3}{8}$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}$$

004 답 $\frac{5}{8}$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}}=\frac{5}{8}$$

005 답 $\frac{1}{2}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{7}{8}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-P(A\cap B)$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{3}{8}$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$$

006 답 $\frac{3}{4}$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

007 답 $\frac{3}{19}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{14}{15}=P(A)+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}$

$\therefore P(A)=\frac{19}{30}$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{19}{30}}=\frac{3}{19}$$

008 답 $\frac{1}{4}$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{4}$$

009 답 $\frac{2}{3}$

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$A\cap B=\{2, 6\}$

따라서 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

010 답 $\frac{1}{2}$

$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이므로

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

011 답 $\frac{1}{6}$

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $B=\{4, 8, 12, 16, 20\}$이므로

$A\cap B=\{12\}$

따라서 $P(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{6}$$

012 답 $\frac{1}{5}$

$P(B)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$이므로

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{5}$$

013 답 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, A, $\frac{2}{3}$

014 답 $\frac{1}{3}$

2의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $A\cap B=\{2\}$

$\therefore P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

015 답 $\frac{1}{3}$

앞면이 한 개 나오는 사건을 A, 100원짜리 동전이 앞면이 나오는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$

016 답 $\frac{2}{5}$

두 눈의 수의 합이 6인 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

두 눈의 수의 합이 6인 사건을 A, 두 눈의 수가 모두 짝수인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{36}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{36}}=\frac{2}{5}$$

017 답 $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, A, $\frac{1}{2}$

018 답 $\frac{1}{3}$

글짓기 대회에 참가하지 않는 학생을 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{3}$$

019 답 $\frac{4}{13}$

여학생을 택하는 사건을 A, 글짓기 대회에 참가하지 않는 학생을 택하는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{13}{30}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{13}{30}}=\frac{4}{13}$$

020 답 $\frac{9}{25}$

1학년 학생을 택하는 사건을 A, 사회를 선호하는 학생을 택하는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{100}{180}=\frac{5}{9}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{36}{180}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{9}}=\frac{9}{25}$$

021 답 $\frac{9}{20}$

2학년 학생을 택하는 사건을 A, 과학을 선호하는 학생을 택하는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{80}{180}=\frac{4}{9}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{36}{180}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{20}$$

022 답 $\frac{16}{25}$

과학을 선호하는 학생을 택하는 사건을 A, 1학년 학생을 택하는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{100}{180}=\frac{5}{9}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{64}{180}=\frac{16}{45}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{16}{45}}{\frac{5}{9}}=\frac{16}{25}$$

023 답 $\frac{1}{16}$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$$

024 답 $\frac{3}{16}$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{16}$$

025 답 0.06

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.3\times0.2=0.06$$

026 답 0.15

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.06}{0.4}=0.15$$

027 답 5, 4, $\frac{1}{19}$

028 답 $\frac{21}{38}$

첫 번째에 검은 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 검은 공이 나오는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{14}{19}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{4}\times\frac{14}{19}=\frac{21}{38}$$

029 답 $\frac{15}{76}$

첫 번째에 검은 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 흰 공이 나오는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$, $P(B|A)=\frac{5}{19}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=\frac{3}{4}\times\frac{5}{19}=\frac{15}{76}$

030 답 $\frac{2}{15}$

진영이가 당첨되는 사건을 A, 경민이가 당첨되는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $P(B|A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$

031 답 $\frac{4}{15}$

진영이가 당첨되는 사건을 A, 경민이가 당첨되지 않는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $P(B|A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$

032 답 $\frac{1}{22}$

처음 먹은 송편에 밤이 들어 있는 사건을 A, 두 번째 먹은 송편에 밤이 들어 있는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=\frac{2}{11}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{2}{11}=\frac{1}{22}$

033 답 $\frac{9}{44}$

처음 먹은 송편에 밤이 들어 있는 사건을 A, 두 번째 먹은 송편에 깨가 들어 있는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=\frac{9}{11}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{9}{11}=\frac{9}{44}$

034 답 $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{35}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{6}{35}$, $\frac{1}{5}$

035 답 $\frac{4}{9}$

첫 번째에 노란 장미가 나오는 사건을 A, 두 번째에 노란 장미가 나오는 사건을 B라고 하자.

이때 사건 B가 일어나는 것은 첫 번째와 두 번째 모두 노란 장미가 나오거나, 첫 번째에 빨간 장미가 나오고 두 번째에 노란 장미가 나오는 경우이다.

(i) $P(A)=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$, $P(B|A)=\frac{7}{17}$

첫 번째와 두 번째 모두 노란 장미가 나올 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{9}\times\frac{7}{17}=\frac{28}{153}$

(ii) 첫 번째에 빨간 장미가 나오는 사건은 A^C이므로

$P(A^C)=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$, $P(B|A^C)=\frac{8}{17}$

첫 번째에 빨간 장미가 나오고 두 번째에 노란 장미가 나올 확률은

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{5}{9}\times\frac{8}{17}=\frac{40}{153}$

따라서 구하는 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=\frac{28}{153}+\frac{40}{153}=\frac{4}{9}$

036 답 $\frac{7}{12}$

갑이 자몽 음료를 꺼내는 사건을 A, 을이 자몽 음료를 꺼내는 사건을 B라고 하자.

이때 사건 B가 일어나는 것은 갑, 을 모두 자몽 음료를 꺼내거나, 갑이 포도 음료를 꺼내고 을이 자몽 음료를 꺼내는 경우이다.

(i) $P(A)=\frac{7}{12}$, $P(B|A)=\frac{6}{11}$

갑, 을 모두 자몽 음료를 꺼낼 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{7}{12}\times\frac{6}{11}=\frac{7}{22}$

(ii) 갑이 포도 음료를 꺼내는 사건은 A^C이므로

$P(A^C)=\frac{5}{12}$, $P(B|A^C)=\frac{7}{11}$

갑이 포도 음료를 꺼내고 을이 자몽 음료를 꺼낼 확률은

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{5}{12}\times\frac{7}{11}=\frac{35}{132}$

따라서 구하는 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=\frac{7}{22}+\frac{35}{132}=\frac{7}{12}$

037 답 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $=$, 독립

038 답 종속

$P(B)=\frac{1}{3}$, $P(C)=\frac{1}{3}$, $P(B\cap C)=0$이므로

$P(B\cap C)\neq P(B)P(C)$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

039 답 독립

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

040 답 종속

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{3, 6, 9\}$에서 $A\cap B=\{3, 9\}$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

041 답 종속

$B=\{3, 6, 9\}$, $C=\{1, 2, 5, 10\}$에서 $B\cap C=\varnothing$

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=0$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

042 답 독립

$A\cap C=\{1, 5\}$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

043 답 $\frac{2}{5}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$

044 답 $\frac{1}{2}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

045 답 $\frac{1}{5}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

046 답 $\frac{2}{5}$

두 사건 A, B^C이 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$

047 답 $\frac{1}{2}$

두 사건 A^C, B^C이 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B^C|A^C)=\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

048 답 $\frac{3}{10}$

두 사건 A^C, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$$
$$=\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

049 답 0.4

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=0.4$

050 답 0.3

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)=0.3$

051 답 0.12

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.4\times0.3=0.12$

052 답 0.28

두 사건 A, B^C이 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$$
$$=0.4\times(1-0.3)=0.28$$

053 답 0.18

두 사건 A^C, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$$
$$=(1-0.4)\times0.3=0.18$$

054 답 0.88

$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)=1-0.12=0.88$

055 답 $\frac{1}{4}$

주사위의 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 동전의 뒷면이 나오는 사건을 B라고 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

056 답 $\frac{1}{6}$

주사위의 5의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 동전의 앞면이 나오는 사건을 B라고 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

057 답 $\frac{1}{10}$

두 시험 A, B에 합격하는 사건을 각각 A, B라고 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{50}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{1}{10}$

058 답 $\frac{2}{5}$

두 시험 A, B에 합격하는 사건을 각각 A, B라고 하면 두 사건 A, B^C은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$$
$$=\frac{50}{100}\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=\frac{2}{5}$$

059 답 **0.48, 0.92, 0.08, 0.92**

060 답 $\frac{11}{12}$

두 식물 A, B가 일 년 후 생존하는 사건을 각각 A, B라고 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{11}{12}$$

다른 풀이

두 사건 A^C, B^C은 서로 독립이므로 두 식물 중 어느 한 식물도 일 년 후 생존하지 못할 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

061 답 $\frac{4}{5}$

두 선수 A, B가 자유투를 성공하는 사건을 각각 A, B라고 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$$

다른 풀이

두 사건 A^C, B^C은 서로 독립이므로 두 선수가 모두 자유투를 실패할 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

062 답 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

063 답 $\frac{8}{27}$

주사위를 1번 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 A라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

064 답 $\frac{8}{81}$

주사위를 1번 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$$

065 답 $\frac{9}{64}$

1발을 쏘아서 과녁의 10점에 맞히는 사건을 A라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$$

066 답 $\frac{27}{128}$

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$$

067 답 $\frac{135}{512}$

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{135}{512}$$

068 답 $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{16}{625}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{625}$, $\frac{16}{625}$, $\frac{1}{625}$, $\frac{17}{625}$

069 답 $\frac{13}{125}$

(i) 3문제 중에서 2문제를 맞힐 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{12}{125}$$

(ii) 3문제 모두 맞힐 확률은

$${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{125}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{12}{125}+\frac{1}{125}=\frac{13}{125}$$

070 답 $\frac{181}{3125}$

(i) 5문제 중에서 3문제를 맞힐 확률은

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{32}{625}$$

(ii) 5문제 중에서 4문제를 맞힐 확률은

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{4}{625}$$

(iii) 5문제 모두 맞힐 확률은

$${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{3125}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{32}{625}+\frac{4}{625}+\frac{1}{3125}=\frac{181}{3125}$$

071 답 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{8}$

072 답 $\frac{3}{8}$

(i) A가 우승자가 되는 경우

A가 세 번째까지는 2번 이기고 네 번째에서 이겨야 하므로

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(ii) B가 우승자가 되는 경우

B가 세 번째까지는 2번 이기고 네 번째에서 이겨야 하므로

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$$

073 답 $\frac{1}{4}$

(i) A가 우승자가 되는 경우

A가 네 번째까지는 3번 이기고 다섯 번째에서 이겨야 하므로

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

(ii) B가 우승자가 되는 경우

B가 네 번째까지는 3번 이기고 다섯 번째에서 이겨야 하므로

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

연산 유형 최종 점검하기

64~65쪽

1 ③	**2** $\frac{4}{9}$	**3** $\frac{2}{5}$	**4** $\frac{1}{5}$	**5** $\frac{39}{95}$	**6** ⑤
7 ㄱ, ㄴ	**8** ②	**9** $\frac{8}{25}$	**10** $\frac{12}{25}$	**11** $\frac{216}{625}$	**12** ②

1 $\mathrm{P}(B|A)-\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}-\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$$=\frac{0.1}{0.3}-\frac{0.1}{0.5}=\frac{2}{15}$$

2 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$A\subset B^C$

$\therefore A\cap B^C=A$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{1-\mathrm{P}(B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}$$

3 노란 공을 꺼내는 사건을 A, 3의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{9}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{9}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{2}{5}$$

4 A 전시회를 관람한 사람을 택하는 사건을 A, B 전시회를 관람한 사람을 택하는 사건을 B라고 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{16}{160}}{\frac{64+16}{160}}=\frac{1}{5}$$

5 첫 번째에 여학생을 뽑는 사건을 A, 두 번째에 여학생을 뽑는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{13}{20}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{12}{19}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$
$$=\frac{13}{20}\times\frac{12}{19}=\frac{39}{95}$$

6 경기를 하는 날에 비가 오는 사건을 A, 경기에 이기는 사건을 B라고 하자.

이때 사건 B가 일어나는 것은 비가 오고 경기에 이기거나, 비가 오지 않고 경기에 이기는 경우이다.

(i) 경기를 하는 날에 비가 오고 경기에 이기는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$
$$=0.4\times0.3=0.12$$

(ii) 경기를 하는 날에 비가 오지 않는 사건은 A^C이므로 경기를 하는 날에 비가 오지 않고 경기에 이기는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$$
$$=(1-0.4)\times0.7=0.42$$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=0.12+0.42=0.54$

7 ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(D)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap D)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap D)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)$

따라서 두 사건 A와 D는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=0$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

ㄹ. $P(C)=\frac{1}{4}$, $P(D)=\frac{1}{2}$, $P(C\cap D)=0$이므로

$P(C\cap D)\neq P(C)P(D)$

따라서 두 사건 C와 D는 서로 종속이다.

따라서 보기 중 서로 독립인 사건은 ㄱ, ㄴ이다.

8 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A)=P(A|B)=0.5$

$P(B)=P(B|A)=0.4$

두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)$$
$$=\{1-P(A)\}P(B)$$
$$=(1-0.5)\times 0.4=0.2$$

9 1번 문제를 맞히는 사건을 A, 2번 문제를 맞히는 사건을 B라고 하면 두 사건 A, B^C은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)$$
$$=P(A)\{1-P(B)\}$$
$$=\frac{80}{100}\times\left(1-\frac{60}{100}\right)=\frac{8}{25}$$

10 A 주머니에서 빨간 구슬이 나오는 사건을 A, B 주머니에서 빨간 구슬이 나오는 사건을 B라고 하면 두 사건 A, B^C 및 두 사건 A^C, B는 각각 서로 독립이다.

(i) A 주머니에서 빨간 구슬이 나오고, B 주머니에서 초록 구슬이 나올 확률은

$$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)$$
$$=\frac{4}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$$

(ii) A 주머니에서 초록 구슬이 나오고, B 주머니에서 빨간 구슬이 나올 확률은

$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)$$
$$=\frac{6}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=\frac{12}{25}$$

11 비가 오는 사건을 A라고 하면

$P(A)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$

각 시행은 독립이므로 구하는 확률은

$${}_4C_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$$

12 (i) 4번 중에서 3번을 성공할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

(ii) 4번 모두 성공할 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{1}{9}$$

05 이산확률변수와 이항분포

68~80쪽

001 답 HH, TH, TT

002 답 0, 1, 2

003 답 1, 2, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$

004 답 BB, RR

005 답 0, 1, 2

006 답 0, 1, 2, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{10}$

$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\times{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_3C_0}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

007 답 이산확률변수이다.

008 답 이산확률변수이다.

009 답 이산확률변수가 아니다.

010 답 이산확률변수가 아니다.

011 답 2, x, 2, x, 2, 2

012 답 0, 1, 2, $\frac{1}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{2}{5}$

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_2C_0}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$

013 답 0, 1, 2, 3, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이고 각 값을 가질 확률은

$P(X=0)={}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

$P(X=1)={}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

$P(X=2)={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$

$P(X=3)={}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$

014 답 $0,\ 1,\ 2,\ \frac{1}{10},\ \frac{3}{5},\ \frac{3}{10}$

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_2C_0}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

015 답 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \frac{4}{35},\ \frac{18}{35},\ \frac{12}{35},\ \frac{1}{35}$

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이고 각 값을 가질 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_2}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\times{}_4C_0}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$$

016 답 $1,\ \frac{1}{8}$

017 답 $\frac{1}{2}$

$P(X=1$ 또는 $X=2)=P(X=1)+P(X=2)$

$$=a+\frac{3}{8}=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

018 답 $\frac{5}{8}$

$$P(2\le X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$=\frac{3}{8}+2a=\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

019 답 $\frac{3}{4}$

$$P(X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$=a+\frac{3}{8}+2a=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

다른 풀이

$$P(X\le 3)=1-P(X>3)=1-P(X=4)$$
$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

020 답 $\frac{7}{8}$

$$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$
$$=\frac{3}{8}+2a+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$$

다른 풀이

$$P(X\ge 2)=1-P(X<2)=1-P(X=1)$$
$$=1-a=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

021 답 $\frac{1}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+a+b+\frac{1}{6}=1 \qquad \therefore a+b=\frac{1}{4}$$

022 답 $\frac{1}{2}$

$P(X=0$ 또는 $X=4)=P(X=0)+P(X=4)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

023 답 $\frac{1}{2}$

$$P(1\le X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$=\frac{1}{4}+a+b=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

다른 풀이

$$P(1\le X\le 3)=1-\{P(X<1)+P(X>3)\}$$
$$=1-P(X=0)-P(X=4)$$
$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

024 답 $\frac{7}{12}$

$$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

025 답 $\frac{5}{12}$

$$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$
$$=a+b+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

다른 풀이

$$P(X\ge 2)=1-P(X<2)$$
$$=1-P(X=0)-P(X=1)$$
$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

026 답 $2,\ 3,\ 2k,\ 3k,\ \frac{1}{10}$

027 답 $\frac{1}{9}$

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$2k+3k+4k=1,\ 9k=1$

$\therefore k=\frac{1}{9}$

028 답 $\frac{1}{14}$

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$k+4k+9k=1,\ 14k=1$

$\therefore k=\frac{1}{14}$

029 답 $\frac{6}{5}$

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=1$

$\frac{k}{1\times2}+\frac{k}{2\times3}+\frac{k}{3\times4}+\frac{k}{4\times5}+\frac{k}{5\times6}=1$

$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\right\}=1$

$k\left(1-\frac{1}{6}\right)=1,\ \frac{5}{6}k=1$

$\therefore k=\frac{6}{5}$

030 답 3, 1, $\frac{3}{7}$, 4, 0, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{2}$

031 답 $\frac{3}{7}$

$P(2<X<4)=P(X=3)=\frac{3}{7}$

032 답 $\frac{1}{3}$

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이고

$P(X=0)=\frac{{}_6C_0\times{}_4C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{30}$

$P(X=1)=\frac{{}_6C_1\times{}_4C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{3}{10}$

$\therefore P(X\le1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{30}+\frac{3}{10}=\frac{1}{3}$

033 답 $\frac{3}{10}$

$P(1\le X<2)=P(X=1)=\frac{3}{10}$

034 답 3, 3, 2, $\frac{3}{10}$, 3, $\frac{1}{5}$, 3, 3, $\frac{1}{2}$

035 답 $\frac{3}{5}$

$X^2-6X+8\le0$에서

$(X-2)(X-4)\le0\qquad\therefore 2\le X\le4$

이때 두 수의 차가 4인 경우는 (1, 5)의 1가지이므로

$P(X=4)=\frac{1}{10}$

$$\begin{aligned}\therefore P(X^2-6X+8\le0)&=P(2\le X\le4)\\&=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\&=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

036 답 $\frac{1}{4}$

$X^2-11X+30=0$에서

$(X-5)(X-6)=0\qquad\therefore X=5$ 또는 $X=6$

두 주사위에서 나온 눈의 수를 각각 a, b라고 하면 순서쌍 (a, b)는

(i) 두 수의 합이 5인 경우

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) ➡ 4가지

(ii) 두 수의 합이 6인 경우

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) ➡ 5가지

$\therefore P(X=5)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\ P(X=6)=\frac{5}{36}$

$$\begin{aligned}\therefore P(X^2-11X+30=0)&=P(X=5\text{ 또는 }X=6)\\&=P(X=5)+P(X=6)\\&=\frac{1}{9}+\frac{5}{36}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

037 답 $\frac{7}{36}$

$X^2-9X+18<0$에서

$(X-3)(X-6)<0\qquad\therefore 3<X<6$

이때 두 수의 합이 4인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이므로

$P(X=4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned}\therefore P(X^2-9X+18<0)&=P(3<X<6)\\&=P(X=4)+P(X=5)\\&=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{7}{36}\end{aligned}$$

038 답 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 2

039 답 X^2, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$

040 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

041 답 $\frac{4}{3}$

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$

042 답 $\frac{5}{9}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{7}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

043 답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

044 답 $\frac{5}{4}$

$E(X)=0\times\frac{3}{8}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{5}{4}$

045 답 $\frac{19}{16}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{3}{8}+1^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=\frac{11}{4}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{11}{4}-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{19}{16}$

046 답 $\frac{\sqrt{19}}{4}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{19}{16}}=\frac{\sqrt{19}}{4}$

047 답 3

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{9}+a+\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=1 \qquad \therefore a=\frac{2}{9}$

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{4}{9}=3$

048 답 $\frac{10}{9}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{9}+2^2\times\frac{2}{9}+3^2\times\frac{2}{9}+4^2\times\frac{4}{9}=\frac{91}{9}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{91}{9}-3^2=\frac{10}{9}$

049 답 $\frac{\sqrt{10}}{3}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

050 답 $\frac{5}{2}$

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=1 \qquad \therefore a=\frac{3}{10}$

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{10}=\frac{5}{2}$

051 답 $\frac{29}{20}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{3}{10}=\frac{77}{10}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{77}{10}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{29}{20}$

052 답 $\frac{\sqrt{145}}{10}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{29}{20}}=\frac{\sqrt{145}}{10}$

053 답 풀이 참고

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 주사위 1개를 던질 때 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 X가 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)={}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=1)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)={}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

054 답 1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

055 답 $\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

056 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

057 답 풀이 참고

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{5}{12}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_0}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{12}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	1

058 답 $\frac{2}{3}$

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$

059 답 $\frac{7}{18}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{5}{12}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{5}{6}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{18}$

060 답 $\frac{\sqrt{14}}{6}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{7}{18}}=\frac{\sqrt{14}}{6}$

061 답 풀이 참고

확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3이고 1에서 5까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5의 3개이므로 X가 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

062 답 $\frac{9}{5}$

$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$

063 답 $\frac{9}{25}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{18}{5}$

$\therefore\ V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{18}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

064 답 $\frac{3}{5}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

065 답 평균: 8, 분산: 36, 표준편차: 6

$E(Y)=E(2X)=2E(X)=2\times4=8$

$V(Y)=V(2X)=2^2V(X)=4\times9=36$

$\sigma(Y)=\sigma(2X)=|2|\sigma(X)=2\sqrt{V(X)}=2\times\sqrt{9}=6$

066 답 평균: −16, 분산: 144, 표준편차: 12

$E(Y)=E(-4X)=-4E(X)=-4\times4=-16$

$V(Y)=V(-4X)=(-4)^2V(X)=16\times9=144$

$\sigma(Y)=\sigma(-4X)=|-4|\sigma(X)=4\sqrt{V(X)}=4\times\sqrt{9}=12$

067 답 평균: 7, 분산: 81, 표준편차: 9

$E(Y)=E(3X-5)=3E(X)-5=3\times4-5=7$

$V(Y)=V(3X-5)=3^2V(X)=9\times9=81$

$\sigma(Y)=\sigma(3X-5)=|3|\sigma(X)=3\sqrt{V(X)}=3\times\sqrt{9}=9$

068 답 평균: −2, 분산: 9, 표준편차: 3

$E(Y)=E(-X+2)=-E(X)+2=-4+2=-2$

$V(Y)=V(-X+2)=(-1)^2V(X)=1\times9=9$

$\sigma(Y)=\sigma(-X+2)=|-1|\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{9}=3$

069 답 평균: 50, 분산: 100, 표준편차: 10

$E(Y)=E(5X)=5E(X)=5\times10=50$

$V(Y)=V(5X)=5^2V(X)=25\times4=100$

$\sigma(Y)=\sigma(5X)=|5|\sigma(X)=5\sqrt{V(X)}=5\times\sqrt{4}=10$

070 답 평균: $-\frac{10}{3}$, 분산: $\frac{4}{9}$, 표준편차: $\frac{2}{3}$

$E(Y)=E\left(-\frac{1}{3}X\right)=-\frac{1}{3}E(X)=-\frac{1}{3}\times10=-\frac{10}{3}$

$V(Y)=V\left(-\frac{1}{3}X\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^2V(X)=\frac{1}{9}\times4=\frac{4}{9}$

$\sigma(Y)=\sigma\left(-\frac{1}{3}X\right)=\left|-\frac{1}{3}\right|\sigma(X)=\frac{1}{3}\sqrt{V(X)}$

$=\frac{1}{3}\times\sqrt{4}=\frac{2}{3}$

071 답 평균: 27, 분산: 16, 표준편차: 4

$E(Y)=E(2X+7)=2E(X)+7=2\times10+7=27$

$V(Y)=V(2X+7)=2^2V(X)=4\times4=16$

$\sigma(Y)=\sigma(2X+7)=|2|\sigma(X)=2\sqrt{V(X)}=2\times\sqrt{4}=4$

072 답 평균: −6, 분산: 1, 표준편차: 1

$E(Y)=E\left(-\frac{1}{2}X-1\right)=-\frac{1}{2}E(X)-1=-\frac{1}{2}\times10-1=-6$

$V(Y)=V\left(-\frac{1}{2}X-1\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2V(X)=\frac{1}{4}\times4=1$

$\sigma(Y)=\sigma\left(-\frac{1}{2}X-1\right)=\left|-\frac{1}{2}\right|\sigma(X)=\frac{1}{2}\sqrt{V(X)}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{4}=1$

073 답 평균: $-\frac{3}{2}$, 분산: $\frac{3}{4}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=3$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 확률변수 Y에 대하여

$E(Y)=E(X-3)=E(X)-3=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

$V(Y)=V(X-3)=1^2V(X)=1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

$\sigma(Y)=\sigma(X-3)=|1|\sigma(X)=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

074 답 평균: $-\frac{1}{2}$, 분산: $\frac{3}{4}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$E(Y)=E(-X+1)=-E(X)+1=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$

$V(Y)=V(-X+1)=(-1)^2V(X)=1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

$\sigma(Y)=\sigma(-X+1)=|-1|\sigma(X)=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

075 답 평균: 4, 분산: 24, 표준편차: $2\sqrt{6}$

확률의 총합은 1이므로

$a+a+3a+5a=1,\ 10a=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{10}$

확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{2}=\frac{11}{5}$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{2}=\frac{29}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{29}{5}-\left(\frac{11}{5}\right)^2=\frac{24}{25}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

따라서 확률변수 Y에 대하여

$E(Y)=E(5X-7)=5E(X)-7=5\times\frac{11}{5}-7=4$

$V(Y)=V(5X-7)=5^2V(X)=25\times\frac{24}{25}=24$

$\sigma(Y)=\sigma(5X-7)=|5|\sigma(X)=5\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=2\sqrt{6}$

076 답 평균: $\frac{23}{5}$, 분산: $\frac{96}{25}$, 표준편차: $\frac{4\sqrt{6}}{5}$

$E(Y)=E(-2X+9)=-2E(X)+9$

$=-2\times\frac{11}{5}+9=\frac{23}{5}$

$V(Y)=V(-2X+9)=(-2)^2V(X)$

$=4\times\frac{24}{25}=\frac{96}{25}$

$\sigma(Y)=\sigma(-2X+9)=|-2|\sigma(X)$

$=2\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{4\sqrt{6}}{5}$

077 답 평균: 17, 분산: $\frac{140}{3}$, 표준편차: $\frac{2\sqrt{105}}{3}$

확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 각 값을 가질 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$,

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{35}{12}}=\frac{\sqrt{105}}{6}$

따라서 확률변수 Y에 대하여

$E(Y)=E(4X+3)=4E(X)+3=4\times\frac{7}{2}+3=17$

$V(Y)=V(4X+3)=4^2V(X)=16\times\frac{35}{12}=\frac{140}{3}$

$\sigma(Y)=\sigma(4X+3)=|4|\sigma(X)=4\times\frac{\sqrt{105}}{6}=\frac{2\sqrt{105}}{3}$

078 답 평균: 20, 분산: 105, 표준편차: $\sqrt{105}$

$E(Y)=E(6X-1)=6E(X)-1$

$=6\times\frac{7}{2}-1=20$

$V(Y)=V(6X-1)=6^2V(X)$

$=36\times\frac{35}{12}=105$

$\sigma(Y)=\sigma(6X-1)=|6|\sigma(X)$

$=6\times\frac{\sqrt{105}}{6}=\sqrt{105}$

079 답 평균: $\frac{18}{5}$, 분산: $\frac{81}{25}$, 표준편차: $\frac{9}{5}$

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_2C_0}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}=\frac{9}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{9}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

따라서 확률변수 Y에 대하여

$E(Y)=E(3X)=3E(X)=3\times\frac{6}{5}=\frac{18}{5}$

$V(Y)=V(3X)=3^2V(X)=9\times\frac{9}{25}=\frac{81}{25}$

$\sigma(Y)=\sigma(3X)=|3|\sigma(X)=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$

080 답 평균: -4, 분산: 9, 표준편차: 3

$E(Y)=E(-5X+2)=-5E(X)+2=-5\times\frac{6}{5}+2=-4$

$V(Y)=V(-5X+2)=(-5)^2V(X)=25\times\frac{9}{25}=9$

$\sigma(Y)=\sigma(-5X+2)=|-5|\sigma(X)=5\times\frac{3}{5}=3$

081 답 $B\left(5, \frac{1}{2}\right)$

한 번의 시행에서 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

082 답 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$

한 번의 시행에서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

083 답 이항분포를 따르지 않는다.

첫 번째 공을 꺼내는 시행과 두 번째 공을 꺼내는 시행은 서로 독립이 아니므로 확률변수 X는 이항분포를 따르지 않는다.

084 답 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$

한 번의 시행에서 명중할 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

085 답 $\mathrm{B}(8,\ 0.3)$

한 번의 시행에서 안타를 칠 확률은 0.3이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(8,\ 0.3)$을 따른다.

086 답 **이항분포를 따르지 않는다.**

제비 2개를 꺼내는 시행은 서로 독립이 아니므로 확률변수 X는 이항분포를 따르지 않는다.

087 답 $\frac{1}{2},\ 6,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 6,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{16}$

088 답 $\frac{3}{32}$

$$\mathrm{P}(X=5)={}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{6-5}=\frac{3}{32}$$

089 답 $\frac{135}{512}$

한 번의 시행에서 동전 2개 모두 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.
따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(X=2)={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{5-2}=\frac{135}{512}$$

090 답 $\frac{15}{1024}$

$$\mathrm{P}(X=4)={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^{5-4}=\frac{15}{1024}$$

091 답 **평균: 3, 분산: 2, 표준편차: $\sqrt{2}$**

$$\mathrm{E}(X)=9\times\frac{1}{3}=3$$

$$\mathrm{V}(X)=9\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=2$$

$$\sigma(X)=\sqrt{9\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=\sqrt{2}$$

092 답 **평균: 8, 분산: $\frac{24}{5}$, 표준편차: $\frac{2\sqrt{30}}{5}$**

$$\mathrm{E}(X)=20\times\frac{2}{5}=8$$

$$\mathrm{V}(X)=20\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{5}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{20\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}=\frac{2\sqrt{30}}{5}$$

093 답 **평균: 16, 분산: 12, 표준편차: $2\sqrt{3}$**

$$\mathrm{E}(X)=64\times\frac{1}{4}=16$$

$$\mathrm{V}(X)=64\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=12$$

$$\sigma(X)=\sqrt{64\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=2\sqrt{3}$$

094 답 **평균: 20, 분산: 16, 표준편차: 4**

$$\mathrm{E}(X)=100\times0.2=20$$
$$\mathrm{V}(X)=100\times0.2\times0.8=16$$
$$\sigma(X)=\sqrt{100\times0.2\times0.8}=4$$

095 답 **평균: 75, 분산: 30, 표준편차: $\sqrt{30}$**

$$\mathrm{E}(X)=125\times0.6=75$$
$$\mathrm{V}(X)=125\times0.6\times0.4=30$$
$$\sigma(X)=\sqrt{125\times0.6\times0.4}=\sqrt{30}$$

096 답 $\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 30,\ \frac{2}{3},\ 20,\ 920$

097 답 **10090**

한 번의 시행에서 발아할 확률은 $\frac{1}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1000,\ \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=1000\times\frac{1}{10}=100,$

$\quad\mathrm{V}(X)=1000\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=90$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서
$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=90+100^2=10090$

098 답 **3648**

한 번의 시행에서 불량품일 확률은 $\frac{1}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(300,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=300\times\frac{1}{5}=60,$

$\quad\mathrm{V}(X)=300\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=48$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서
$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=48+60^2=3648$

099 답 $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 18,\ 25$

100 답 **1050**

한 번의 시행에서 명중할 확률은 $\frac{7}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \frac{7}{10}\right)$을 따른다.

$\mathrm{V}(X)=200\times\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}=42$이므로
$\mathrm{V}(5X+4)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times42=1050$

101 답 12

한 번의 시행에서 불량인 펜이 나올 확률은 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=4$이므로

$\sigma(-3X+1)=|-3|\sigma(X)=3\times4=12$

연산 유형 최종 점검하기

81~83쪽

1 15	**2** ⑤	**3** ②	**4** ③	**5** $\frac{3}{8}$	**6** 1
7 ④	**8** ③	**9** $\frac{2\sqrt{21}}{15}$	**10** ⑤	**11** ②	**12** 100
13 -1	**14** ②	**15** $\frac{11}{243}$	**16** 96	**17** ⑤	**18** ①

1 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$0+1+2+3+4+5=15$

2 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{6}+b+\frac{1}{3}=1 \qquad \therefore a+b=\frac{1}{2}$

3 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$3k+4k+5k=1,\ 12k=1$

$\therefore k=\frac{1}{12}$

4 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이고

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_5\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1}{56}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{15}{56}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{15}{28}$

$\therefore \mathrm{P}(X\le2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{56}+\frac{15}{56}+\frac{15}{28}=\frac{23}{28}$

다른 풀이

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{5}{28}$이므로

$\mathrm{P}(X\le2)=1-\mathrm{P}(X>2)=1-\mathrm{P}(X=3)$

$=1-\frac{5}{28}=\frac{23}{28}$

5 $X^2-6X+8\le0$에서

$(X-2)(X-4)\le0 \qquad \therefore 2\le X\le4$

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이고 바닥에 놓인 면에 적힌 두 수를 a, b라고 하면 순서쌍 $(a,\ b)$는

(i) 두 수의 차가 2인 경우

(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2) ➡ 4가지

(ii) 두 수의 차가 3인 경우

(1, 4), (4, 1) ➡ 2가지

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-6X+8\le0)=\mathrm{P}(2\le X\le4)$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

6 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+a=1 \qquad \therefore a=\frac{2}{5}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{5}=2,$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{2}{5}=5$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-2^2=1$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{1}=1$

7 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$

$4k+k+k+4k=1,\ 10k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{10}$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=-2\times\frac{2}{5}+(-1)\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{5}=0,$

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{2}{5}+(-1)^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{17}{5}-0^2=\frac{17}{5}$

8 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{10}{21}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{10}{21}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{21}$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{10}{21}+1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{1}{21}=\frac{4}{7}$

9 7의 약수는 1, 7의 2개이므로 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 X가 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{7}{15}$, $\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{7}{15}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{15}$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{7}{15}+1\times\dfrac{7}{15}+2\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{3}{5}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\dfrac{7}{15}+1^2\times\dfrac{7}{15}+2^2\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{11}{15}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\dfrac{11}{15}-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{28}{75}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\dfrac{28}{75}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{15}$

10 $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(-2X+1)=-2\mathrm{E}(X)+1=-2\times8+1=-15$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(-2X+1)=(-2)^2\mathrm{V}(X)=4\times16=64$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)=-15+64=49$

11 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=10-3^2=1$이므로

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{1}=1$

$\therefore\ \sigma(7X+13)=|7|\sigma(X)=7\times1=7$

12 확률의 총합은 1이므로

$4a+3a+2a+a=1,\ 10a=1 \qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{10}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=-3\times\dfrac{2}{5}+(-1)\times\dfrac{3}{10}+1\times\dfrac{1}{5}+3\times\dfrac{1}{10}=-1$,

$\mathrm{E}(X^2)=(-3)^2\times\dfrac{2}{5}+(-1)^2\times\dfrac{3}{10}+1^2\times\dfrac{1}{5}+3^2\times\dfrac{1}{10}=5$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-(-1)^2=4$

$\therefore\ \mathrm{V}(5X-1)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times4=100$

13 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_0}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{3}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{6}$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{1}{6}=1$

$\therefore\ \mathrm{E}(3X-4)=3\mathrm{E}(X)-4=3\times1-4=-1$

14 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$이므로

$\mathrm{P}(X=0)={}_{10}\mathrm{C}_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10-0}=\dfrac{1}{1024}$

$\mathrm{P}(X=1)={}_{10}\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10-1}=\dfrac{5}{512}$

$\mathrm{P}(X=2)={}_{10}\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10-2}=\dfrac{45}{1024}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\dfrac{1}{1024}+\dfrac{5}{512}+\dfrac{45}{1024}=\dfrac{7}{128}$

15 한 번의 시행에서 싹이 날 확률은 $\dfrac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$이므로

$\mathrm{P}(X=4)={}_5\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-4}=\dfrac{10}{243}$

$\mathrm{P}(X=5)={}_5\mathrm{C}_5\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-5}=\dfrac{1}{243}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge4)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)$

$=\dfrac{10}{243}+\dfrac{1}{243}=\dfrac{11}{243}$

16 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=36\times\dfrac{1}{3}=12$

$\mathrm{V}(X)=36\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=8$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)\mathrm{V}(X)=12\times8=96$

17 한 번의 시행에서 앞면이 나올 확률은 $\dfrac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{1}{2}=50$,

$\mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=25$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=25+50^2=2525$

18 한 번의 시행에서 명중할 확률은 $\dfrac{9}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \dfrac{9}{10}\right)$를 따른다.

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{400\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{10}}=6$이므로

$\sigma\left(\dfrac{1}{2}X+1\right)=\left|\dfrac{1}{2}\right|\sigma(X)$

$=\dfrac{1}{2}\times6=3$

05

06 연속확률변수와 정규분포

86～97쪽

001 답 연속확률변수

002 답 이산확률변수

003 답 이산확률변수

004 답 연속확률변수

005 답 ×

$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이 아니므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

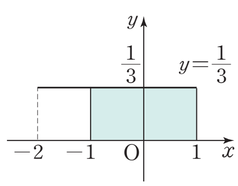
006 답 ×

$-1<x<1$에서 $g(x)<0$이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

007 답 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$

008 답 $\frac{2}{3}$

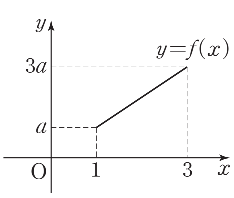
$\mathrm{P}(-1\le X\le 1)$은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{3}$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(-1\le X\le 1)=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

009 답 $\frac{3}{8}$

$f(x)=ax\,(1\le x\le 3)$는 확률밀도함수이므로 $a>0$이고 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

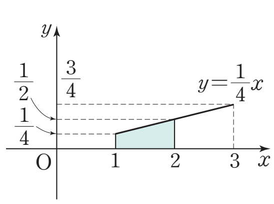


이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times(a+3a)\times 2=1$ $\qquad\therefore a=\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x\,(1\le x\le 3)$

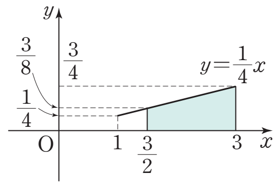
따라서 $\mathrm{P}(X\le 2)$는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{4}x$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(X\le 2)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{3}{8}$

010 답 $\frac{27}{32}$

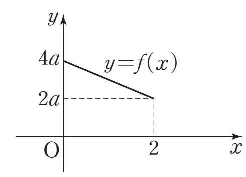
$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}\le X\le 3\right)$은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{4}x$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{2}$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}\le X\le 3\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{2}=\frac{27}{32}$

011 답 $\frac{7}{12}$

$f(x)=a(4-x)\,(0\le x\le 2)$는 확률밀도함수이므로 $a>0$이고 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

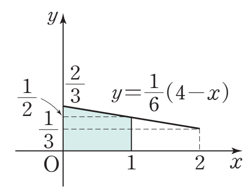


이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times(4a+2a)\times 2=1$ $\qquad\therefore a=\frac{1}{6}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{6}(4-x)\,(0\le x\le 2)$

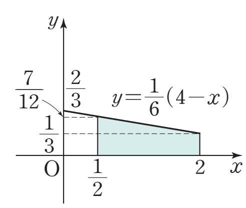
따라서 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{6}(4-x)$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{7}{12}$

012 답 $\frac{11}{16}$

$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{1}{2}\right)$은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{6}(4-x)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{1}{2}$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



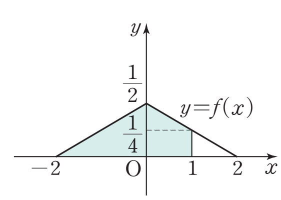
$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{2}=\frac{11}{16}$

013 답 $\frac{7}{8}$

$y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times 4\times a=1$ $\qquad\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}(X\le 1)$은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



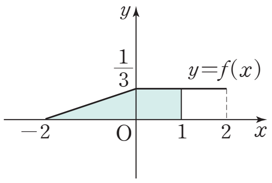
$\mathrm{P}(X\le 1)=1-\left(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{8}$

014 답 $\frac{2}{3}$

$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times(2+4)\times a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 $P(X\le1)$은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$P(X\le1)=1-\left(1\times\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

015 답 $\mathrm{N}(5,\ 2^2)$

평균이 5, 분산이 $4=2^2$이므로 $\mathrm{N}(5,\ 2^2)$

016 답 $\mathrm{N}(7,\ 3^2)$

평균이 7, 분산이 $9=3^2$이므로 $\mathrm{N}(7,\ 3^2)$

017 답 $\mathrm{N}(8,\ 1^2)$

평균이 8, 분산이 $1=1^2$이므로 $\mathrm{N}(8,\ 1^2)$

018 답 10, 3, 2, 32, 9, 32, 9

019 답 $\mathrm{N}(-7,\ 3^2)$

확률변수 Y에 대하여

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(-X+3)=-\mathrm{E}(X)+3=-10+3=-7$

$\sigma(Y)=\sigma(-X+3)=|-1|\sigma(X)=1\times3=3$

따라서 확률변수 Y가 따르는 정규분포는

$\mathrm{N}(-7,\ 3^2)$

020 답 $\mathrm{N}(16,\ 6^2)$

확률변수 Y에 대하여

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-4)=2\mathrm{E}(X)-4=2\times10-4=16$

$\sigma(Y)=\sigma(2X-4)=|2|\sigma(X)=2\times3=6$

따라서 확률변수 Y가 따르는 정규분포는

$\mathrm{N}(16,\ 6^2)$

021 답 $m_A=m_B<m_C$

두 곡선 A, B의 대칭축은 서로 같고, 곡선 C의 대칭축은 두 곡선 A, B의 대칭축보다 오른쪽에 있으므로

$m_A=m_B<m_C$

022 답 $\sigma_A=\sigma_C<\sigma_B$

두 곡선 A, C의 가운데 부분의 높이는 서로 같고, 곡선 B의 가운데 부분의 높이는 두 곡선 A, C의 가운데 부분의 높이보다 낮으므로

$\sigma_A=\sigma_C<\sigma_B$

023 답 ○

A학교의 확률밀도함수의 그래프의 대칭축이 B학교의 확률밀도함수의 그래프의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로 평균적으로 A학교의 학생들보다 B학교의 학생들의 수학 성적이 더 좋다.

024 답 ○

A학교의 확률밀도함수의 그래프가 B학교의 확률밀도함수의 그래프보다 가운데 부분의 높이가 더 낮으므로 평균적으로 A학교의 학생들보다 B학교의 학생들의 수학 성적이 더 고르다.

025 답 m, σ, 2σ, σ, 2σ, b

026 답 $2a$

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=2a$

027 답 $0.5+a$

$\mathrm{P}(X\le m+\sigma)=\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=0.5+a$

028 답 $0.5-b$

$\mathrm{P}(X\le m-2\sigma)=\mathrm{P}(X\ge m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$=0.5-b$

029 답 $2b-a$

$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m+\sigma\le X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=2\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=2b-a$

030 답 2, 0.3413

031 답 0.1587

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=0.6826$에서
$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.6826$
$\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.6826$
$2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.6826$
$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.3413$
$\therefore \mathrm{P}(X\ge m+\sigma)=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=0.5-0.3413$
$=0.1587$

032 답 **0.6915**

$P(X \geq m-0.5\sigma)=0.6915$에서

$P(X \leq m+0.5\sigma)=0.6915$

033 답 **0.383**

$P(X \geq m-0.5\sigma)=0.6915$에서

$P(m-0.5\sigma \leq X \leq m)+P(X \geq m)=0.6915$

$P(m-0.5\sigma \leq X \leq m)+0.5=0.6915$

$\therefore P(m-0.5\sigma \leq X \leq m)=0.1915$

$\therefore P(m-0.5\sigma \leq X \leq m+0.5\sigma)$

$=P(m-0.5\sigma \leq X \leq m)+P(m \leq X \leq m+0.5\sigma)$

$=P(m-0.5\sigma \leq X \leq m)+P(m-0.5\sigma \leq X \leq m)$

$=2P(m-0.5\sigma \leq X \leq m)$

$=2\times 0.1915$

$=0.383$

034 답 **2, 2, 0.4772, 0.8185**

035 답 **0.9319**

$P(-3 \leq Z \leq 1.5)=P(-3 \leq Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 1.5)$

$=P(0 \leq Z \leq 3)+P(0 \leq Z \leq 1.5)$

$=0.4987+0.4332=0.9319$

036 답 **0.2857**

$P(-2 \leq Z \leq -0.5)=P(0.5 \leq Z \leq 2)$

$=P(0 \leq Z \leq 2)-P(0 \leq Z \leq 0.5)$

$=0.4772-0.1915=0.2857$

037 답 **0.9772**

$P(Z \geq -2)=P(Z \leq 2)$

$=P(Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

038 답 **0.0668**

$P(Z \geq 1.5)=P(Z \geq 0)-P(0 \leq Z \leq 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

039 답 **0.9987**

$P(Z \leq 3)=P(Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 3)$

$=0.5+0.4987=0.9987$

040 답 **0.0062**

$P(Z \leq -2.5)=P(Z \geq 2.5)$

$=P(Z \geq 0)-P(0 \leq Z \leq 2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$

041 답 $\boldsymbol{Z=\frac{X-8}{2}}$

평균이 8, 표준편차가 2이므로

$Z=\frac{X-8}{2}$

042 답 $\boldsymbol{Z=\frac{X-25}{3}}$

평균이 25, 표준편차가 3이므로

$Z=\frac{X-25}{3}$

043 답 $\boldsymbol{Z=\frac{2X-1}{8}}$

평균이 $\frac{1}{2}$, 표준편차가 4이므로

$Z=\frac{X-\frac{1}{2}}{4}=\frac{2X-1}{8}$

044 답 $\boldsymbol{Z=3X-39}$

평균이 13, 표준편차가 $\frac{1}{3}$이므로

$Z=\frac{X-13}{\frac{1}{3}}=3X-39$

045 답 $\boldsymbol{Z=10X-500}$

평균이 50, 표준편차가 0.1이므로

$Z=\frac{X-50}{0.1}=10X-500$

046 답 **0.5, 0.5, 0.5, 0.1915, 0.2417**

047 답 **0.8185**

$Z=\frac{X-15}{2}$라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(13 \leq X \leq 19)=P\left(\frac{13-15}{2} \leq Z \leq \frac{19-15}{2}\right)$

$=P(-1 \leq Z \leq 2)$

$=P(-1 \leq Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 2)$

$=P(0 \leq Z \leq 1)+P(0 \leq Z \leq 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$

048 답 **0.9772**

$Z=\frac{X-15}{2}$라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(X \geq 11)=P\left(Z \geq \frac{11-15}{2}\right)$

$=P(Z \geq -2)$

$=P(Z \leq 2)$

$=P(Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

049 답 **0.84**

$Z=\frac{X-24}{3}$라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(15 \leq X \leq 27)=P\left(\frac{15-24}{3} \leq Z \leq \frac{27-24}{3}\right)$

$=P(-3 \leq Z \leq 1)$

$=P(-3 \leq Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 1)$

$=P(0 \leq Z \leq 3)+P(0 \leq Z \leq 1)$

$=0.4987+0.3413=0.84$

050 답 **0.0215**

$Z=\frac{X-24}{3}$라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(30\le X\le 33)&=P\left(\frac{30-24}{3}\le Z\le \frac{33-24}{3}\right)\\&=P(2\le Z\le 3)\\&=P(0\le Z\le 3)-P(0\le Z\le 2)\\&=0.4987-0.4772=0.0215\end{aligned}$$

051 답 **0.9319**

$Z=\frac{X-30}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(15\le X\le 60)&=P\left(\frac{15-30}{10}\le Z\le \frac{60-30}{10}\right)\\&=P(-1.5\le Z\le 3)\\&=P(-1.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 3)\\&=P(0\le Z\le 1.5)+P(0\le Z\le 3)\\&=0.4332+0.4987=0.9319\end{aligned}$$

052 답 **0.0062**

$Z=\frac{X-30}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\le 5)&=P\left(Z\le \frac{5-30}{10}\right)\\&=P(Z\le -2.5)=P(Z\ge 2.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.4938=0.0062\end{aligned}$$

053 답 ***a*, *a*, *a*, *a*, 3, 3, 50**

054 답 **38**

$Z=\frac{X-32}{4}$라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(34\le X\le a)=0.2417$에서

$P\left(\frac{34-32}{4}\le Z\le \frac{a-32}{4}\right)=0.2417$

$P\left(0.5\le Z\le \frac{a-32}{4}\right)=0.2417$

$P\left(0\le Z\le \frac{a-32}{4}\right)-P(0\le Z\le 0.5)=0.2417$

$P\left(0\le Z\le \frac{a-32}{4}\right)-0.1915=0.2417$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le \frac{a-32}{4}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{a-32}{4}=1.5,\ a-32=6\qquad \therefore\ a=38$

055 답 **115**

$Z=\frac{X-100}{6}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(X\le a)=0.9938$에서

$P\left(Z\le \frac{a-100}{6}\right)=0.9938$

$P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le \frac{a-100}{6}\right)=0.9938$

$0.5+P\left(0\le Z\le \frac{a-100}{6}\right)=0.9938$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le \frac{a-100}{6}\right)=0.4938$

이때 $P(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$\frac{a-100}{6}=2.5,\ a-100=15\qquad \therefore\ a=115$

056 답 **10, 10, 0.5, 0.5, 0.1915, 0.3085**

057 답 **0.0228**

$Z=\frac{X-100}{8}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge 116)&=P\left(Z\ge \frac{116-100}{8}\right)\\&=P(Z\ge 2)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

058 답 **0.6915**

$Z=\frac{X-12}{2}$라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le 13)&=P\left(Z\le \frac{13-12}{2}\right)\\&=P(Z\le 0.5)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5+0.1915=0.6915\end{aligned}$$

059 답 **0.8185**

$Z=\frac{X-200}{5}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(195\le X\le 210)&=P\left(\frac{195-200}{5}\le Z\le \frac{210-200}{5}\right)\\&=P(-1\le Z\le 2)\\&=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

060 답 **0.0668**

$Z=\frac{X-20}{4}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X>26)&=P\left(Z>\frac{26-20}{4}\right)\\&=P(Z>1.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

061 답 **84.13 %**

학생들의 제자리멀리뛰기 기록을 X cm라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(130, 20^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{X-130}{20}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\ge 110)&=P\left(Z\ge\frac{110-130}{20}\right)\\&=P(Z\ge -1)=P(Z\le 1)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

따라서 기록이 110 cm 이상인 학생은 전체의 84.13 %이다.

062 답 28.57 %

$$\begin{aligned}P(140\le X\le 170)&=P\left(\frac{140-130}{20}\le Z\le\frac{170-130}{20}\right)\\&=P(0.5\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 0.5)\\&=0.4772-0.1915=0.2857\end{aligned}$$

따라서 기록이 140 cm 이상 170 cm 이하인 학생은 전체의 28.57 %이다.

063 답 6.68 %

$$\begin{aligned}P(X\le 100)&=P\left(Z\le\frac{100-130}{20}\right)\\&=P(Z\le -1.5)=P(Z\ge 1.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

따라서 재평가를 받는 학생은 전체의 6.68 %이다.

064 답 1587

제품의 무게를 Xg이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(20, 5^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{X-20}{5}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\le 15)&=P\left(Z\le\frac{15-20}{5}\right)\\&=P(Z\le -1)=P(Z\ge 1)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

따라서 무게가 15 g 이하인 제품의 개수는

$10000\times 0.1587=1587$

065 답 13

$$\begin{aligned}P(X\ge 35)&=P\left(Z\ge\frac{35-20}{5}\right)\\&=P(Z\ge 3)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 3)\\&=0.5-0.4987=0.0013\end{aligned}$$

따라서 무게가 35 g 이상인 제품의 개수는

$10000\times 0.0013=13$

066 답 9544

$$\begin{aligned}P(10\le X\le 30)&=P\left(\frac{10-20}{5}\le Z\le\frac{30-20}{5}\right)\\&=P(-2\le Z\le 2)\\&=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 2)+P(0\le Z\le 2)\\&=2P(0\le Z\le 2)\\&=2\times 0.4772=0.9544\end{aligned}$$

따라서 정상 제품의 개수는

$10000\times 0.9544=9544$

067 답 $N(24, 4^2)$

확률변수 X가 이항분포 $B\left(72, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=72\times\frac{1}{3}=24$

$V(X)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(24, 4^2)$을 따른다.

068 답 $N(30, 5^2)$

확률변수 X가 이항분포 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$E(X)=180\times\frac{1}{6}=30$

$V(X)=180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=25$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(30, 5^2)$을 따른다.

069 답 $N(324, 9^2)$

확률변수 X가 이항분포 $B\left(432, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=432\times\frac{3}{4}=324$

$V(X)=432\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=81$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(324, 9^2)$을 따른다.

070 답 $N(240, 12^2)$

확률변수 X가 이항분포 $B\left(600, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$E(X)=600\times\frac{2}{5}=240$

$V(X)=600\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=144$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(240, 12^2)$을 따른다.

071 답 36, 9, 36, 36, 36, 3, 3, 3, 0.4987, 0.0013

072 답 0.6247

$$\begin{aligned}P(34.5\le X\le 40.5)&=P\left(\frac{34.5-36}{3}\le Z\le\frac{40.5-36}{3}\right)\\&=P(-0.5\le Z\le 1.5)\\&=P(-0.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.1915+0.4332=0.6247\end{aligned}$$

073 답 **64, 32, 16, 4, 4, 4, 2.5, 2.5, 2.5, 0.4938, 0.0062**

074 답 **0.9987**

소수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(900,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=900\times\frac{1}{2}=450$

$\mathrm{V}(X)=900\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=225$

이때 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(450,\ 15^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-450}{15}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 495)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{495-450}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 3)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)\\&=0.5+0.4987=0.9987\end{aligned}$$

075 답 **0.9544**

3의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=180\times\frac{1}{6}=30$

$\mathrm{V}(X)=180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=25$

이때 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-30}{5}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(20\le X\le 40)&=\mathrm{P}\left(\frac{20-30}{5}\le Z\le\frac{40-30}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=2\times 0.4772=0.9544\end{aligned}$$

076 답 **0.3085**

치료되는 환자의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(600,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=600\times\frac{3}{5}=360$

$\mathrm{V}(X)=600\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=144$

이때 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 12^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-360}{12}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 366)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{366-360}{12}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5-0.1915=0.3085\end{aligned}$$

077 답 **0.8413**

자유투를 성공하는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{4}{5}=80$

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=16$

이때 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-80}{4}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 76)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{76-80}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -1)=\mathrm{P}(Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

연산 유형 최종 점검하기

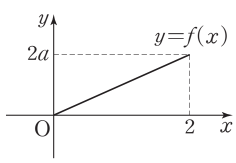
98~99쪽

1 1　**2** ②　**3** B, B　**4** ②　**5** 0.9544　**6** ⑤
7 0.8185　**8** ⑤　**9** 0.62 %　**10** 1234　**11** 0.8413
12 ②

1 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1,\ x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times 1\times a+\frac{1}{2}\times 1\times a=1\qquad\therefore\ a=1$

2 $f(x)=ax\,(0\le x\le 2)$는 확률밀도함수이므로 $a>0$이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

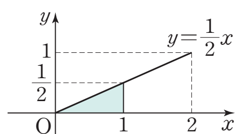


이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times 2\times 2a=1\qquad\therefore\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}x\,(0\le x\le 2)$

따라서 $\mathrm{P}(X\le 1)$은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(X\le 1)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

3 평균이 클수록 곡선의 대칭축은 오른쪽에 있고 분산이 클수록 곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지므로 평균과 분산 모두 B가 더 크다.

4 $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=a$에서

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=a$

$\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=a$

$2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=a \qquad \therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=\frac{a}{2}$

$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=b$에서

$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=b$

$\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=b$

$2\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=b \qquad \therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=\frac{b}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(m+\sigma\le X\le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

$=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}=\frac{b-a}{2}$

5 $\mathrm{P}(X\ge m+2\sigma)=0.0228$에서

$\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=0.0228$

$0.5-\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=0.0228$

$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=0.4772$

$\therefore \mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$

$=2\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$

$=2\times 0.4772=0.9544$

6 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{6}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $\frac{X-20}{\sigma}=\frac{X-m}{6}$이므로

$m=20,\ \sigma=6 \qquad \therefore m\sigma=120$

7 $Z=\frac{X-60}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(50\le X\le 80)=\mathrm{P}\left(\frac{50-60}{10}\le Z\le\frac{80-60}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$

8 $Z=\frac{X-12}{4}$라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le a)=0.9332$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-12}{4}\right)=0.9332$

$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-12}{4}\right)=0.9332$

$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-12}{4}\right)=0.9332$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-12}{4}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{a-12}{4}=1.5,\ a-12=6 \qquad \therefore a=18$

9 학생들의 몸무게를 X kg이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 12^2)$을 따른다. 이때 $Z=\frac{X-60}{12}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\ge 90)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{90-60}{12}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$

따라서 몸무게가 90 kg 이상인 학생은 전체의 0.62 %이다.

10 당근의 무게를 X g이라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 30^2)$을 따른다. 이때 $Z=\frac{X-200}{30}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le 185)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{185-200}{30}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$

따라서 폐기할 당근의 개수는

$4000\times 0.3085=1234$

11 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(162,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=162\times\frac{2}{3}=108$

$\mathrm{V}(X)=162\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=36$

이때 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(108,\ 6^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-108}{6}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\le 114)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{114-108}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5+0.3413=0.8413$

12 불량품의 개수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{10}=40$

$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=36$

이때 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-40}{6}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(46\le X\le 58)=\mathrm{P}\left(\frac{46-40}{6}\le Z\le\frac{58-40}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le 3)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4987-0.3413=0.1574$

07 통계적 추정

102~109쪽

001 답 **전수조사**

002 답 **표본조사**

003 답 **전수조사**

004 답 **표본조사**

005 답 **표본조사**

006 답 **49**

1장씩 2번 복원추출하는 경우의 수는 7장의 카드에서 2장을 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

${}_7\Pi_2=7^2=49$

007 답 **343**

1장씩 3번 복원추출하는 경우의 수는 7장의 카드에서 3장을 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

${}_7\Pi_3=7^3=343$

008 답 **42**

1장씩 2번 비복원추출하는 경우의 수는 7장의 카드에서 2장을 뽑는 순열의 수와 같으므로

${}_7P_2=7\times6=42$

009 답 **1, 3, 3, 1, 3, 1, 3, $\frac{2}{9}$**

010 답 **풀이 참고**

표본의 합이 같은 경우로 나누어 표본평균 $\overline{X}$를 구한다.

(i) 표본이 (1, 1)인 경우

$\overline{X}=1$

(ii) 표본이 (1, 2), (2, 1)인 경우

$\overline{X}=\frac{3}{2}$

(iii) 표본이 (2, 2)인 경우

$\overline{X}=2$

따라서 표본평균 $\overline{X}$가 가지는 값은 1, $\frac{3}{2}$, 2이므로 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	$\frac{3}{2}$	2	합계
$P(\overline{X}=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

011 답 **풀이 참고**

표본의 합이 같은 경우로 나누어 표본평균 $\overline{X}$를 구한다.

(i) 표본이 (0, 0)인 경우

$\overline{X}=0$

(ii) 표본이 (0, 2), (2, 0)인 경우

$\overline{X}=1$

(iii) 표본이 (0, 4), (2, 2), (4, 0)인 경우

$\overline{X}=2$

(iv) 표본이 (2, 4), (4, 2)인 경우

$\overline{X}=3$

(v) 표본이 (4, 4)인 경우

$\overline{X}=4$

따라서 표본평균 $\overline{X}$가 가지는 값은 0, 1, 2, 3, 4이므로 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	합계
$P(\overline{X}=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

012 답 **30, 6, 4, 6, 2**

013 답 **평균: 30, 분산: 1, 표준편차: 1**

표본의 크기가 36, 모평균이 30, 모표준편차가 6이므로

$E(\overline{X})=30$

$V(\overline{X})=\frac{6^2}{36}=1$

$\sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{36}}=1$

014 답 **평균: 30, 분산: $\frac{9}{25}$, 표준편차: $\frac{3}{5}$**

표본의 크기가 100, 모평균이 30, 모표준편차가 6이므로

$E(\overline{X})=30$

$V(\overline{X})=\frac{6^2}{100}=\frac{9}{25}$

$\sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{100}}=\frac{3}{5}$

015 답 **평균: 8, 분산: 1, 표준편차: 1**

표본의 크기가 25, 모평균이 8, 모표준편차가 5이므로

$E(\overline{X})=8$

$V(\overline{X})=\frac{5^2}{25}=1$

$\sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{25}}=1$

016 답 **평균: 17, 분산: $\frac{49}{25}$, 표준편차: $\frac{7}{5}$**

표본의 크기가 25, 모평균이 17, 모표준편차가 7이므로

$E(\overline{X})=17$

$V(\overline{X})=\frac{7^2}{25}=\frac{49}{25}$

$\sigma(\overline{X})=\frac{7}{\sqrt{25}}=\frac{7}{5}$

017 답 **평균: 121, 분산: $\frac{144}{25}$, 표준편차: $\frac{12}{5}$**

표본의 크기가 25, 모평균이 121, 모표준편차가 12이므로

$E(\overline{X})=121$

$V(\overline{X})=\frac{12^2}{25}=\frac{144}{25}$

$\sigma(\overline{X})=\frac{12}{\sqrt{25}}=\frac{12}{5}$

018 답 **$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, 4, $\frac{1}{6}$, 28, 12, 4, $\frac{4}{3}$**

019 답 **$E(\overline{X})=1$, $V(\overline{X})=\frac{1}{18}$**

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

이때 표본의 크기가 9이므로

$E(\overline{X})=1$

$V(\overline{X})=\frac{\frac{1}{2}}{9}=\frac{1}{18}$

020 답 **$E(\overline{X})=1$, $V(\overline{X})=\frac{5}{36}$**

확률의 총합은 1이므로

$2a+\frac{1}{8}+a+\frac{1}{8}=1$, $3a+\frac{1}{4}=1$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}=1$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{8}=\frac{9}{4}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{9}{4}-1^2=\frac{5}{4}$

이때 표본의 크기가 9이므로

$E(\overline{X})=1$

$V(\overline{X})=\frac{\frac{5}{4}}{9}=\frac{5}{36}$

021 답 **3, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{9}$**

022 답 **$E(\overline{X})=\frac{14}{3}$, $V(\overline{X})=\frac{4}{9}$**

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=2\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{2}=\frac{14}{3}$

$E(X^2)=2^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{3}+6^2\times\frac{1}{2}=24$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=24-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$

이때 표본의 크기가 5이므로

$E(\overline{X})=\frac{14}{3}$

$V(\overline{X})=\frac{\frac{20}{9}}{5}=\frac{4}{9}$

023 답 **$E(\overline{X})=\frac{18}{7}$, $V(\overline{X})=\frac{19}{245}$**

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{14}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{14}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{9}{14}=\frac{18}{7}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{14}+2^2\times\frac{2}{7}+3^2\times\frac{9}{14}=7$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=7-\left(\frac{18}{7}\right)^2=\frac{19}{49}$

이때 표본의 크기가 5이므로

$E(\overline{X})=\frac{18}{7}$

$V(\overline{X})=\frac{\frac{19}{49}}{5}=\frac{19}{245}$

024 답 **$\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{19}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$**

025 답 **$E(\overline{X})=\frac{7}{2}$, $V(\overline{X})=\frac{35}{24}$**

주사위를 1번 던져서 나온 눈의 수를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$E(\overline{X})=\frac{7}{2}$

$V(\overline{X})=\frac{\frac{35}{12}}{2}=\frac{35}{24}$

026 답 $E(\overline{X})=\frac{14}{3}$, $V(\overline{X})=\frac{28}{9}$

주머니에서 공 1개를 임의로 꺼낼 때, 공에 적힌 수를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+8\times\frac{1}{3}=\frac{14}{3}$$

$$E(X^2)=2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{3}+8^2\times\frac{1}{3}=28$$

$$\therefore\ V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=28-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{56}{9}$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$E(\overline{X})=\frac{14}{3}$$

$$V(\overline{X})=\frac{\frac{56}{9}}{2}=\frac{28}{9}$$

027 답 $E(\overline{X})=\frac{11}{6}$, $V(\overline{X})=\frac{29}{108}$

상자에서 카드 1장을 임의로 꺼낼 때, 카드에 적힌 수를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}=\frac{25}{6}$$

$$\therefore\ V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{25}{6}-\left(\frac{11}{6}\right)^2=\frac{29}{36}$$

이때 표본의 크기가 3이므로

$$E(\overline{X})=\frac{11}{6}$$

$$V(\overline{X})=\frac{\frac{29}{36}}{3}=\frac{29}{108}$$

028 답 0.6826

모집단이 정규분포 $N(200,\ 50^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(200,\ \frac{50^2}{100}\right)$, 즉 $N(200,\ 5^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-200}{5}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(195\le\overline{X}\le205)&=P\left(\frac{195-200}{5}\le Z\le\frac{205-200}{5}\right)\\&=P(-1\le Z\le1)\\&=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le1)\\&=2P(0\le Z\le1)\\&=2\times0.3413=0.6826\end{aligned}$$

029 답 0.0013

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le185)&=P\left(Z\le\frac{185-200}{5}\right)\\&=P(Z\le-3)\\&=P(Z\ge3)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le3)\\&=0.5-0.4987=0.0013\end{aligned}$$

030 답 0.2515

$$\begin{aligned}P(190\le\overline{X}\le197)&=P\left(\frac{190-200}{5}\le Z\le\frac{197-200}{5}\right)\\&=P(-2\le Z\le-0.6)\\&=P(0.6\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le2)-P(0\le Z\le0.6)\\&=0.4772-0.2257=0.2515\end{aligned}$$

031 답 0.8621

모집단이 정규분포 $N(1000,\ 30^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(1000,\ \frac{30^2}{9}\right)$, 즉 $N(1000,\ 10^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-1000}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(988\le\overline{X}\le1020)&=P\left(\frac{988-1000}{10}\le Z\le\frac{1020-1000}{10}\right)\\&=P(-1.2\le Z\le2)\\&=P(-1.2\le Z\le0)+P(0\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le1.2)+P(0\le Z\le2)\\&=0.3849+0.4772=0.8621\end{aligned}$$

032 답 0.9452

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le1016)&=P\left(Z\le\frac{1016-1000}{10}\right)\\&=P(Z\le1.6)\\&=P(Z\le0)+P(0\le Z\le1.6)\\&=0.5+0.4452=0.9452\end{aligned}$$

033 답 0.1151

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge1012)&=P\left(Z\ge\frac{1012-1000}{10}\right)\\&=P(Z\ge1.2)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.2)\\&=0.5-0.3849=0.1151\end{aligned}$$

034 답 $32.12\le m\le43.88$

표본의 크기가 4, 표본평균이 38, 모표준편차가 6이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$38-1.96\times\frac{6}{\sqrt{4}}\le m\le38+1.96\times\frac{6}{\sqrt{4}}$$

$\therefore\ 32.12\le m\le43.88$

035 답 **$47.06 \le m \le 52.94$**

표본의 크기가 16, 표본평균이 50, 모표준편차가 6이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$50-1.96\times\frac{6}{\sqrt{16}} \le m \le 50+1.96\times\frac{6}{\sqrt{16}}$

$\therefore\ 47.06 \le m \le 52.94$

036 답 **$86.53 \le m \le 89.47$**

표본의 크기가 64, 표본평균이 88, 모표준편차가 6이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$88-1.96\times\frac{6}{\sqrt{64}} \le m \le 88+1.96\times\frac{6}{\sqrt{64}}$

$\therefore\ 86.53 \le m \le 89.47$

037 답 **$33.68 \le m \le 54.32$**

표본의 크기가 9, 표본평균이 44, 모표준편차가 12이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$44-2.58\times\frac{12}{\sqrt{9}} \le m \le 44+2.58\times\frac{12}{\sqrt{9}}$

$\therefore\ 33.68 \le m \le 54.32$

038 답 **$104.84 \le m \le 115.16$**

표본의 크기가 36, 표본평균이 110, 모표준편차가 12이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$110-2.58\times\frac{12}{\sqrt{36}} \le m \le 110+2.58\times\frac{12}{\sqrt{36}}$

$\therefore\ 104.84 \le m \le 115.16$

039 답 **$237.42 \le m \le 242.58$**

표본의 크기가 144, 표본평균이 240, 모표준편차가 12이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$240-2.58\times\frac{12}{\sqrt{144}} \le m \le 240+2.58\times\frac{12}{\sqrt{144}}$

$\therefore\ 237.42 \le m \le 242.58$

040 답 **7.84**

표본의 크기가 25, 모표준편차가 10이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{10}{\sqrt{25}}=7.84$

041 답 **10.32**

표본의 크기가 25, 모표준편차가 10이므로 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{10}{\sqrt{25}}=10.32$

042 답 **11.76**

표본의 크기가 49, 모표준편차가 21이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{21}{\sqrt{49}}=11.76$

043 답 **15.48**

표본의 크기가 49, 모표준편차가 21이므로 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{21}{\sqrt{49}}=15.48$

044 답 **7, 7, 7, 7, 49**

045 답 **9**

표본의 크기가 n, 표본평균이 50, 모표준편차가 9이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$50-2.58\times\frac{9}{\sqrt{n}} \le m \le 50+2.58\times\frac{9}{\sqrt{n}}$

이를 $42.26 \le m \le 57.74$와 비교하면

$2.58\times\frac{9}{\sqrt{n}}=7.74,\ \sqrt{n}=3$

$\therefore\ n=9$

046 답 **97**

표본의 크기가 n, 모표준편차가 5이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

이때 신뢰구간의 길이가 2 이하이려면

$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}} \le 2$에서

$\sqrt{n} \ge 9.8$

$\therefore\ n \ge 96.04$

따라서 자연수 n의 최솟값은 97이다.

연산 유형 최종 점검하기

110~111쪽

1 ⑤	**2** ①	**3** ③	**4** $\frac{1}{12}$	**5** ③	**6** $\frac{38}{25}$
7 ④	**8** 0.8413	**9** 0.0013	**10** 24.92	**11** 1.29	**12** ③

1 모평균이 13이므로

$E(\overline{X})=13$

$\therefore\ E(3\overline{X}-9)=3E(\overline{X})-9=3\times13-9=30$

2 표본의 크기가 16, 모표준편차가 12이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{12}{\sqrt{16}}=3$

3 표본의 크기가 25, 모평균이 3, 모표준편차가 5이므로

$E(\overline{X})=3$, $V(\overline{X})=\frac{5^2}{25}=1$

따라서 $V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$에서

$E(\overline{X}^2)=V(\overline{X})+\{E(\overline{X})\}^2=1+3^2=10$

4 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+a+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{19}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$

이때 표본의 크기가 11이므로

$V(\overline{X})=\frac{\frac{11}{12}}{11}=\frac{1}{12}$

5 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{2}{5}=3$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{2}{5}=10$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=10-3^2=1$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1}=1$

이때 표본의 크기가 9이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$

6 상자에서 카드 1장을 임의로 꺼낼 때, 카드에 적힌 수를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{2}{5}+3^2\times\frac{1}{5}=\frac{19}{5}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{19}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$E(\overline{X})=\frac{9}{5}$, $V(\overline{X})=\frac{\frac{14}{25}}{2}=\frac{7}{25}$

$\therefore E(\overline{X})-V(\overline{X})=\frac{38}{25}$

7 모집단이 정규분포 $N(60, 18^2)$을 따르고 표본의 크기가 81이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60, \frac{18^2}{81}\right)$, 즉 $N(60, 2^2)$을 따른다.

따라서 $a=60$, $b=2$이므로 $a+b=62$

8 모집단이 정규분포 $N(15, 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(15, \frac{6^2}{4}\right)$, 즉 $N(15, 3^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-15}{3}$라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\geq 12)&=P\left(Z\geq\frac{12-15}{3}\right)\\&=P(Z\geq -1)=P(Z\leq 1)\\&=P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

9 이 과수원에서 수확하는 귤의 당도를 X브릭스라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(13, 2^2)$을 따른다. 이때 임의추출한 귤 4개의 당도의 평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(13, \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $N(13, 1)$을 따른다.

$Z=\overline{X}-13$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\leq 10)&=P(Z\leq 10-13)\\&=P(Z\leq -3)=P(Z\geq 3)\\&=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 3)\\&=0.5-0.4987=0.0013\end{aligned}$$

10 표본의 크기가 9, 표본평균이 7, 모표준편차가 6이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$7-1.96\times\frac{6}{\sqrt{9}}\leq m\leq 7+1.96\times\frac{6}{\sqrt{9}}$

$\therefore 3.08\leq m\leq 10.92$

따라서 $a=3.08$, $b=10.92$이므로

$a+2b=3.08+21.84=24.92$

11 표본의 크기가 64, 모표준편차가 2이므로 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\times\frac{2}{\sqrt{64}}=1.29$

12 표본의 크기가 n, 모표준편차가 10이므로 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$

이때 신뢰구간의 길이가 14 이하이려면

$2\times 1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\leq 14$에서

$\sqrt{n}\geq 2.8$

$\therefore n\geq 7.84$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다.

· MEMO ·