Solution

Lecture Book

Ⅰ 수열의 극한

Ⅱ 미분법

Ⅲ 적분법

Work Book

Ⅰ 수열의 극한

Ⅱ 미분법

Ⅲ 적분법

빠른 정답 찾기 **Lecture Book**

01 수열의 극한

6쪽 Lecture 01 **01** 수렴, 1 **02** 발산 **03** 수렴, 0 **04** 발산 **05** 7 **06** -10 **07** -30 **08** $-\frac{1}{2}$

7쪽 유형 Q+Q **01** ③ **02** ③ **03** 2 **04** 30 **05** $\frac{2}{3}$ **06** ②

8쪽 Lecture 02 **01** 수렴, $\frac{1}{2}$ **02** 수렴, 0 **03** 발산 **04** 발산 **05** 발산 **06** 수렴, $-\frac{1}{2}$ **07** 수렴, 1 **08** 2

9쪽 유형 Q+Q **01** ④ **02** ③ **03** 4 **04** ③ **05** 8 **06** $-2\sqrt{2}$ **07** ① **08** $-\frac{4}{3}$ **09** ④ **10** ③ **11** $\frac{1}{2}$ **12** 1 **13** $-\frac{5}{2}$ **14** 9 **15** 5 **16** ③ **17** ① **18** ㄷ

12쪽 Lecture 03 **01** 발산 **02** 수렴 **03** 수렴 **04** 발산 **05** 수렴, 0 **06** 수렴, 5 **07** 발산 **08** $-\frac{1}{3}<r\leq\frac{1}{3}$ **09** $-4<r\leq 6$ **10** $-2\leq r<2$

13쪽 유형 Q+Q **01** 15 **02** -2 **03** ③ **04** ① **05** 8 **06** ② **07** 0 **08** ㄱ, ㄴ **09** 4 **10** $\frac{10}{3}$ **11** 2 **12** ③

15쪽 중단원 마무리 **01** ③ **02** ④ **03** 2 **04** 5 **05** ① **06** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **07** 8 **08** $\frac{1}{4}$ **09** ④ **10** ⑤ **11** ① **12** 12 **13** 3 **14** ③ **15** 16 **16** ③ **17** ②

02 급수

19쪽 Lecture 04 **01** $-\frac{1}{2}$ **02** 2 **03** (1) $S_n=n(n+1)$ (2) 발산 **04** (1) $S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (2) 수렴, 1 **05** 발산 **06** 수렴, $2\sqrt{3}+3$ **07** 발산 **08** 수렴, 1 **09** 풀이 19쪽 **10** 풀이 19쪽 **11** 풀이 19쪽 **12** 1 **13** 5 **14** 5 **15** 13

20쪽 유형 Q+Q **01** $\frac{1}{4}$ **02** $\frac{3}{4}$ **03** -1 **04** ⑤ **05** ㄱ, ㄴ **06** ② **07** ③ **08** $-\frac{2}{5}$ **09** ③ **10** ⑤ **11** ④ **12** 13 **13** ② **14** ③ **15** -1

23쪽 Lecture 05 **01** 수렴, 4 **02** 발산 **03** $-2<x<2$ **04** $\frac{1}{3}<x<1$ **05** $\frac{1}{3}$ **06** $\frac{152}{999}$ **07** $\frac{23}{18}$

24쪽 유형 Q+Q **01** 268 **02** ③ **03** ④ **04** $\frac{49}{5}$ **05** 10 **06** ③ **07** $\frac{1}{16}$ **08** $\frac{5}{2}$ **09** $\frac{15}{13}$ **10** $\left(\frac{1}{15},\ \frac{4}{15}\right)$ **11** $10+5\sqrt{2}$ **12** $\frac{25}{4}\pi$ **13** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **14** $\frac{9}{4}$ **15** $\frac{9}{20}\pi$ **16** 6 **17** ③ **18** $\frac{7}{8}$

27쪽 중단원 마무리 **01** ① **02** ⑤ **03** -1 **04** ③ **05** ② **06** ㄱ **07** ④ **08** $\frac{3}{8}\pi$ **09** ② **10** $\frac{27}{8}$ **11** ④ **12** 5 **13** ③ **14** $\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$ **15** $32+16\sqrt{2}$ **16** ① **17** $\frac{33}{5}$ **18** ① **19** ①

03 지수함수와 로그함수의 미분

35쪽 Lecture 06 **01** 1 **02** $\frac{6}{7}$ **03** -4 **04** ∞ **05** 1 **06** $-\infty$ **07** 2 **08** -1 **09** $-\infty$ **10** ∞ **11** 1 **12** e **13** e^2 **14** $e^{\frac{1}{3}}$ **15** $\frac{1}{e^2}$ **16** $\frac{2}{3}$ **17** -2 **18** 4 **19** $\ln 6$ **20** $-\frac{1}{2}$ **21** $\frac{5}{3}$ **22** 1 **23** $\frac{5}{\ln 5}$ **24** $\frac{\ln 3}{3}$

36쪽 유형 Q+Q **01** ① **02** -4 **03** 3 **04** ① **05** ④ **06** ㄴ, ㄷ **07** e^{55} **08** ④ **09** 3 **10** -1 **11** ④ **12** ① **13** $\frac{\ln 3}{5}$ **14** $\frac{10}{3}$ **15** $\frac{7}{3}$ **16** $\frac{3-\ln 2}{2}$ **17** ⑤ **18** $-\frac{3}{5}$ **19** ②

39쪽 Lecture 07 **01** $y'=3e^x$ **02** $y'=e^{x+4}$ **03** $y'=(2x+3)e^x$ **04** $y'=-\ln 7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}$ **05** $y'=2^x(2x+x^2\ln 2)$ **06** $y'=\frac{1}{x}$ **07** $y'=\frac{3}{x}$ **08** $y'=\frac{2\ln x}{x}$ **09** $y'=\frac{1}{x\ln 5}$ **10** $y'=e^x\left(\log x+\frac{1}{x\ln 10}\right)$

40쪽 유형 Q+Q **01** 6 **02** ③ **03** ③ **04** $9e$ **05** $a=-1,\ b=-1$ **06** ②

41쪽 중단원 마무리 **01** $\frac{1}{6}$ **02** ④ **03** ④ **04** ①

05 $\frac{1}{\ln 5}$ **06** ③ **07** $(\ln 2)^2$ **08** ① **09** ② **10** ⑤

11 ② **12** $\ln 2-1$ **13** 50 **14** $7e^7$ **15** ③ **16** ④

04 삼각함수의 미분

45쪽 Lecture 08 **01** $\csc\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sec\theta=-2$, $\cot\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

02 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 1 **03** 2, $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $-\sqrt{3}$ **04** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

05 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ **06** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ **07** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

08 $-2-\sqrt{3}$ **09** $\frac{1}{2}$ **10** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **11** $\sqrt{3}$

12 $\frac{24}{25}$, $-\frac{7}{25}$, $-\frac{24}{7}$ **13** $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ **14** $2\sin\left(\theta+\frac{11}{6}\pi\right)$

46쪽 유형 Q+Q **01** $-\frac{25}{12}$ **02** ① **03** ② **04** ⑤

05 $-\frac{56}{65}$ **06** ③ **07** ③ **08** $4\sqrt{6}$ **09** $\frac{\pi}{4}$ **10** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11 ③ **12** $\frac{12}{5}$ **13** $-\frac{17}{25}$ **14** ③ **15** $\frac{7}{25}$ **16** $\frac{10\sqrt{2}}{23}$

17 ⑤ **18** 50

49쪽 Lecture 09 **01** 1 **02** 0 **03** 1 **04** 2

05 5 **06** 4 **07** $\frac{7}{2}$ **08** -3 **09** $y'=\cos x+\sqrt{3}\sin x$

10 $y'=-\sin x+\frac{1}{x}$ **11** $y'=\cos^2 x-\sin^2 x$

50쪽 유형 Q+Q **01** ② **02** 0 **03** $-\frac{1}{2}$ **04** ⑤

05 $\frac{3}{2}$ **06** ⑤ **07** $\frac{1}{4}$ **08** $\frac{9}{5}$ **09** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **10** ①

11 2 **12** ② **13** ① **14** 2 **15** $a=1$, $b=\sqrt{3}$

16 ④ **17** ② **18** 1 **19** $4e$ **20** ②

53쪽 중단원 마무리 **01** ④ **02** 32 **03** ④ **04** $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

05 ⑤ **06** 3π **07** $2\sqrt{13}$ **08** ⑤ **09** 2 **10** ②

11 ④ **12** -8 **13** ④ **14** 1 **15** $\frac{4}{\pi}$ **16** ①

17 15

05 여러 가지 미분법

57쪽 Lecture 10 **01** $y'=-\frac{1}{(x+4)^2}$ **02** $y'=\frac{13}{(3x+5)^2}$

03 $y'=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ **04** $y'=-\frac{x^2-2x+8}{e^x}$ **05** $y'=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

06 $y'=\frac{1}{1+\cos x}$ **07** $y'=\frac{7}{x^8}$ **08** $y'=-\frac{2}{x^3}+\frac{45}{x^6}$

09 $y'=\sec x(\sec x+\tan x)$ **10** $y'=\csc x(3\cot x-\csc x)$

11 $y'=\sin x(1+\sec^2 x)$ **12** $y'=-\frac{2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

13 $y'=12(3x-2)^3$ **14** $y'=(x-4)^2(5x^2-8x+3)$

15 $y'=\frac{(2x+1)(2x-21)}{(x-5)^2}$ **16** $y'=(2x-6)e^{x^2-6x}$

17 $y'=7^{3x^2-1}\cdot 6x\ln 7$ **18** $y'=-\cos(1+\cos x)\sin x$

19 $y'=\frac{2x+1}{x^2+x}$ **20** $y'=\frac{e^x}{e^x+3}$ **21** $y'=\cot x$

22 $y'=\frac{8}{(8x-1)\ln 5}$ **23** $y'=-\frac{5}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}$ **24** $y'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$

25 $y'=\frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+1}}$ **26** $y'=\frac{15x^2(5x-1)}{(6x-1)\sqrt{6x-1}}$

58쪽 유형 Q+Q **01** -2 **02** ① **03** 55 **04** $-e^3$

05 ④ **06** -14 **07** ③ **08** $\frac{1}{2}$ **09** $-\frac{4}{5}$ **10** -5

11 ② **12** 2 **13** 3 **14** $-\frac{5}{36}$ **15** ③ **16** ①

17 ④ **18** $\frac{15}{4}$ **19** 1

62쪽 Lecture 11 **01** $\frac{dy}{dx}=-2t$

02 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3t^2(t+6)^2}$ $(t\neq 0)$ **03** $\frac{dy}{dx}=20\sqrt{t}(5t+4)$

04 $\frac{dy}{dx}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$ **05** $\frac{dy}{dx}=-\tan\theta$ **06** $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

07 $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-4y}{4x-2y}$ $(2x\neq y)$ **08** $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin x}{\sin y}$ $(\sin y\neq 0)$

09 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ **10** $\frac{dy}{dx}=-4x^3y$ **11** $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5y^4}$

12 $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y^2+2}}{y}$ **13** $\frac{dy}{dx}=-\frac{(y^2-1)^2}{3(y^2+1)}$ **14** $\frac{1}{4}$

15 $y''=20x^3-12x$ **16** $y''=\frac{6x^2-4}{(x^2+2)^3}$ **17** $y''=25e^{-5x}$

18 $y''=2\cos x-x\sin x$ **19** $y''=e^x\left(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

63쪽 유형 Q+Q **01** $-\frac{1}{5}$ **02** $\frac{1}{2}$ **03** -5 **04** ③

05 ③ **06** 1 **07** $-\frac{1}{2}$ **08** 9

64쪽 중단원 마무리 **01** $-\frac{5}{\ln 5}$ **02** 36 **03** ② **04** ⑤

05 $-\frac{1}{2}$ **06** ⑤ **07** 5 **08** 18 **09** ③ **10** $\sqrt{2}$

11 $\sqrt{3}$ **12** ④ **13** ② **14** 3 **15** 5 **16** ④

17 ④

06 도함수의 활용 (1)

68쪽 Lecture 12 **01** $y=-3x+7$ **02** $y=2x$

03 $y=x+5$ **04** $y=x-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **05** $y=\frac{\sqrt{2}}{8}x+\frac{7\sqrt{2}}{8}$

06 $y=\frac{1}{2e}x$　07 $y=\frac{4}{5}x+\frac{6}{5}$　08 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

69쪽 유형 Q+Q　01 6　02 ①　03 $-e$　04 -6　05 ①　06 ①　07 ①　08 ②　09 $-\frac{3}{4}$　10 $-\frac{7}{4}$　11 $1-\frac{\pi}{4}$　12 ⑤　13 13　14 $3\pi+1$　15 ②　16 ④　17 ④　18 $-3\sqrt{5}$

72쪽 Lecture 13

01 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가하고, 구간 $[0, \infty)$에서 감소한다.

02 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가한다.

03 구간 $(0, 1]$에서 감소하고, 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다.

04 구간 $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right]$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right)$에서 감소한다.

05 구간 $(0, \pi]$, $[2\pi, 3\pi)$에서 감소하고, 구간 $[\pi, 2\pi]$에서 증가한다.

06 극솟값: 4　07 극댓값: $\frac{1}{2e}$

08 극댓값: $10e^{-3}$, 극솟값: $-6e^{5}$　09 극댓값: $\sqrt{2}$, 극솟값: $-\sqrt{2}$

10 극솟값: $\ln 6$

73쪽 유형 Q+Q　01 ①　02 ②　03 $a\ge\frac{1}{16}$　04 ③　05 -1　06 -3　07 $6\sqrt{2}$　08 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　09 ①　10 ⑤　11 ③　12 3　13 ②　14 -2π　15 3　16 ④　17 $k<-6$ 또는 $k>6$　18 ②

76쪽 중단원 마무리　01 20　02 ④　03 $\frac{\pi}{2}+1$　04 $4\sqrt{17}-2$　05 ⑤　06 ④　07 $\frac{1}{e^3}$　08 8　09 $\frac{e^3+e}{2}$　10 4　11 $\frac{1}{3}$　12 ③　13 ③　14 ①　15 ①　16 $-2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$　17 ②　18 ②

07 도함수의 활용 (2)

81쪽 Lecture 14

01 구간 $(-\infty, -2)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(-2, \infty)$에서 아래로 볼록하다.

02 구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $(-1, 1)$에서 위로 볼록하다.

03 구간 $(-\infty, 2)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(2, \infty)$에서 아래로 볼록하다.

04 구간 $(0, \infty)$에서 위로 볼록하다.

05 구간 $(0, \pi)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(\pi, 2\pi)$에서 아래로 볼록하다.

06 $\left(1, \frac{13}{3}\right)$　07 $(-1, 0)$　08 $\left(-1, -\frac{1}{e^2}\right)$

09 $(-\sqrt{3}, \ln 6)$, $(\sqrt{3}, \ln 6)$　10 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$

11 풀이 76쪽　12 풀이 76쪽　13 풀이 77쪽　14 풀이 77쪽　15 풀이 77쪽

16 최댓값: 32, 최솟값: 16　17 최댓값: 4, 최솟값: 0

18 최댓값: $4e^2$, 최솟값: 0　19 최댓값: 1, 최솟값: $-2e^3$

20 최댓값: 2π, 최솟값: $-\pi$

82쪽 유형 Q+Q　01 ①　02 ㄱ, ㄷ　03 ③　04 $-\frac{1}{4}$　05 2　06 ④　07 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$　08 $-\frac{1}{2}$　09 ④　10 ㄱ, ㄴ, ㄹ　11 ㄴ　12 ③　13 -1　14 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$　15 -7　16 $\frac{\sqrt{3}}{9}$　17 ②　18 -21　19 $\frac{2}{e}$　20 ②

85쪽 Lecture 15　01 1　02 2　03 2　04 1

05 $k<0$일 때 0, $k=0$일 때 1, $k>0$일 때 2

06 $k<-1$일 때 2, $k=-1$일 때 1, $k>-1$일 때 0

07 (가) $1-e^{-x}$　(나) 0　(다) 0　08 풀이 83쪽

09 풀이 83쪽

86쪽 유형 Q+Q　01 π　02 ④　03 $0<k<\frac{1}{e}$　04 $0\le a<2e$　05 3　06 ③　07 3　08 $-e\le a\le 0$

87쪽 Lecture 16　01 속도: $\frac{5}{2}$, 가속도: $\frac{1}{2}$

02 속도: $-\frac{2}{3}$, 가속도: $\frac{1}{9}$　03 속도: π, 가속도: -3

04 $\frac{\pi}{12}$　05 속도: $(-2, -8)$, 가속도: $(12, -2)$

06 속도: $(1+e^3, 1-e^3)$, 가속도: $(e^3, -e^3)$

07 속도: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 가속도: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

08 속력: 5, 가속도의 크기: $2\sqrt{13}$

88쪽 유형 Q+Q　01 1　02 ③　03 ④　04 $-\sqrt{3}$　05 6　06 2

89쪽 중단원 마무리　01 $a\ge 2$　02 8　03 ③　04 ⑤　05 $\frac{e}{2}$　06 e^2　07 ④　08 $\sqrt{2}$　09 $\frac{27}{2}$　10 ⑤　11 2　12 ⑤　13 ③　14 3　15 4　16 ③　17 ③

08 여러 가지 적분법

94쪽 Lecture 17　01 $7\ln|x|+C$　02 $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

03 $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x}+C$　04 $2\sqrt{x}+4\ln|x|+C$　05 $e^{x+3}+C$

06 $\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{2\cdot 3^x}{\ln 3}+x+C$　07 $-2\cos x+3\sin x+C$

08 $4\tan x-x+C$ 09 $\sec x-x+C$
10 $-\csc x-\cot x-x+C$

95쪽 유형 Q+Q 01 2 02 $f(x)=6\sqrt{x}+\frac{5}{x}-4$
03 e^4-10 04 ③ 05 $\frac{\pi}{2}-1$ 06 ②

96쪽 Lecture 18 01 $\frac{1}{4}(x+1)^4+C$
02 $-\frac{2}{3}(7-x)\sqrt{7-x}+C$ 03 $e^{x^3}+C$ 04 $\ln(x^2+5)+C$
05 $\ln|\tan x|+C$ 06 $\frac{1}{2}x^2-3x+3\ln|x+1|+C$
07 $\ln|(x+1)^2(x+3)|+C$ 08 $-x\cos x+\sin x+C$
09 $x\ln x-x+C$

97쪽 유형 Q+Q 01 -1 02 ④ 03 -2 04 ②
05 ④ 06 $x=\ln 17$ 07 9
08 $f(x)=\{\ln(x^2+1)\}^2-2$ 09 ① 10 $2\sqrt{2}+1$
11 ⑤ 12 $\ln\frac{9}{5}$ 13 $2\ln 3$ 14 $4x+11\ln|x-1|+C$
15 ④ 16 $-\frac{\ln 7}{2}$ 17 $\frac{3}{4}$ 18 ③ 19 ④ 20 $e+2$
21 12 22 ①

101쪽 중단원 마무리 01 ② 02 $\frac{3}{2}$ 03 -3 04 ②
05 12 06 ③ 07 -2 08 $\frac{1}{4}$ 09 ① 10 ①
11 $\frac{1}{e^2}$ 12 ③ 13 ③ 14 $\frac{e^8}{5}+1$ 15 ⑤ 16 ②
17 ④

09 정적분

104쪽 Lecture 19 01 $\frac{14}{3}$ 02 1 03 $\frac{8}{\ln 3}$ 04 1
05 $3e^2-3e$ 06 2π 07 $\sqrt{2}$ 08 $2\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$ 09 6

105쪽 유형 Q+Q 01 ③ 02 $\frac{3}{4}$ 03 $1-\ln 2$ 04 ④
05 ① 06 $\frac{\pi}{3}$ 07 ① 08 ② 09 2π 10 $\frac{15}{4\ln 2}$
11 ③ 12 $10\left(e-\frac{1}{e}\right)$

107쪽 Lecture 20 01 10 02 e^9-1 03 $\frac{1}{2}$ 04 $\frac{7}{24}$
05 $\frac{\pi}{4}$ 06 $\frac{\pi}{4}$ 07 e^2+1 08 1 09 $f(x)=2\cos x$
10 $f(x)=e^x-2^x\ln 2$ 11 2 12 $e+1$

108쪽 유형 Q+Q 01 $\frac{2}{5}$ 02 16 03 $\frac{1}{2}\ln 2$ 04 ④
05 ③ 06 $\frac{2}{3}-\frac{1}{e}$ 07 $\frac{1}{2}$ 08 ④ 09 ① 10 -4

11 -15 12 $2\ln 3$ 13 $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}\ln 3$ 14 ⑤ 15 $1+\ln 2$
16 1 17 ③ 18 e^5 19 $\frac{4}{15}$ 20 ② 21 $4+3\ln 3$
22 $8\ln 3-4$ 23 ② 24 6

112쪽 중단원 마무리 01 ⑤ 02 5 03 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 04 $\frac{2}{3\pi}$
05 $a+b$ 06 ② 07 27 08 ② 09 ③ 10 $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$
11 ② 12 ③ 13 $\ln\frac{3}{4}$ 14 325 15 ③ 16 ②
17 ⑤

10 정적분의 활용

116쪽 Lecture 21 01 (가) $\frac{1}{n}$ (나) $\frac{k}{n}$ (다) x^3 (라) $\frac{1}{4}$ 02 $\frac{1}{6}$
03 $\frac{15}{2}$ 04 $\frac{8}{3}$ 05 $\frac{2}{\pi}$

117쪽 유형 Q+Q 01 ② 02 $2\sqrt{2}-2$ 03 $\frac{1}{2}$ 04 ③

118쪽 Lecture 22 01 2 02 $e^2-\frac{1}{e}$ 03 1 04 $2+\ln 2$
05 6 06 $4-3\ln 3$ 07 $\frac{1}{3}$ 08 $2\sqrt{2}-2$
09 $\frac{38}{3}$

119쪽 유형 Q+Q 01 ① 02 $\frac{\pi}{2}$ 03 2
04 $e^2+\frac{1}{e}-3$ 05 ③ 06 ④ 07 $\ln 2$ 08 ②
09 $\frac{e}{2}-1$ 10 $e-\frac{1}{2}$ 11 ② 12 $\frac{1}{4}$ 13 $\frac{3\ln 2-1}{2}$
14 $\frac{9}{5}$ 15 ② 16 ③ 17 $2-\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ 18 $8\sqrt{2}$ 19 $\frac{15}{16}$

122쪽 Lecture 23 01 1 02 $-\frac{1}{2}$ 03 2 04 2
05 $\frac{4}{3}$ 06 3 07 30 08 8 09 $\frac{59}{24}$

123쪽 유형 Q+Q 01 $2e-2$ 02 $\frac{6}{\pi}$ 03 ④ 04 4
05 $e-\frac{1}{e}$ 06 ②

124쪽 중단원 마무리 01 $4\sqrt{5}-8$ 02 32 03 ③
04 $\frac{1}{2}$ 05 ② 06 ① 07 $\sqrt{3}-1$ 08 $\frac{9}{4}$ 09 ②
10 $1-\frac{2}{e}$ 11 $(e^{20}-1)$ cm^3 12 ③ 13 2 14 ②
15 78 16 ② 17 15

빠른 정답 찾기 **Work Book**

01 수열의 극한

W 2쪽	01 3	02 ①	03 ④	04 44	05 -27
06 ④	07 1	08 $2\sqrt{2}$	09 ④	10 ②	11 $\frac{1}{4}$
12 ①	13 0	14 ①	15 ①	16 2	17 ⑤
18 $\sqrt{3}$	19 2	20 ②	21 ③	22 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$	23 ④
24 $\frac{1}{2}$	25 ④	26 $-\frac{1}{3}$	27 -3	28 $\frac{3}{2}$	29 ③
30 $\frac{1}{2}$	31 ④	32 ㄱ, ㄴ, ㄷ		33 ①	34 ③
35 ④	36 $\frac{3}{2}$	37 5	38 ③	39 126	40 20
41 ③	42 $0<r<1$일 때 -1, $r=1$일 때 $-\frac{1}{3}$, $r>1$일 때 $\frac{1}{r}$				
43 5	44 ③	45 ③	46 $\frac{1}{2}$	47 3	48 ③

W 10쪽 **도전! 수능 기출**

01 ② 02 5 03 ③ 04 ①

02 급수

W 11쪽	01 ②	02 ①	03 $\frac{8}{15}$	04 ①	05 ④
06 -1	07 ③	08 ⑤	09 $\frac{4}{5}$	10 ④	11 20
12 ②	13 ㄱ	14 8	15 ②	16 ②	17 ②
18 1	19 ②	20 ④	21 $\frac{2\sqrt{11}}{7}$	22 ②	23 18
24 ③	25 -4	26 ④	27 $\frac{162}{65}$	28 ①	29 3
30 $\frac{32}{7}$	31 ①	32 $12+6\sqrt{3}$		33 10	34 ②
35 12π	36 9	37 $\frac{32}{9}\pi$	38 ③	39 $\frac{13}{35}$	

W 18쪽 **도전! 수능 기출**

01 ⑤ 02 ③ 03 ①

03 지수함수와 로그함수의 미분

W 19쪽	01 ②	02 ③	03 -1	04 ③	05 ④
06 $e^{\frac{1}{3}}$	07 5	08 4	09 ④	10 $\frac{1}{2\ln 3}$	11 ②
12 ②	13 220	14 ⑤	15 14	16 ④	17 3
18 2	19 $\frac{\ln 2}{4}$	20 1	21 $-\frac{e}{2}$	22 ⑤	23 ③
24 ⑤	25 $45+15\ln 5$		26 ②	27 $\frac{1}{\ln 2}$	28 ④
29 ①	30 $4\ln 2$	31 $\frac{1}{e}$			

W 24쪽 **도전! 수능 기출**

01 ② 02 ③ 03 ⑤ 04 ⑤

04 삼각함수의 미분

W 25쪽	01 ②	02 ⑤	03 $-\sqrt{15}$	04 ④	05 ②
06 $\sqrt{3}$	07 ③	08 $-\frac{17}{24}$	09 ①	10 -6	11 ②
12 -11	13 ④	14 $\frac{10}{3}$	15 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	16 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$	17 $2\sqrt{3}$ m
18 ⑤	19 ③	20 $\frac{27}{11}$	21 ②	22 $\frac{31}{32}$	23 $\frac{3}{2}\pi$
24 -1	25 ⑤	26 $\frac{1}{2}$	27 ⑤	28 ③	29 ⑤
30 ④	31 3	32 $\frac{3}{2}$	33 ③	34 ③	35 ⑤
36 ①	37 9	38 1	39 ④	40 ④	41 -2
42 2	43 -1	44 ⑤	45 $\frac{1}{3}$	46 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	47 ③
48 $\frac{7}{4}\ln 2-\frac{3}{4}$		49 ④			

W 33쪽 **도전! 수능 기출**

01 ④ 02 11 03 25 04 ③

05 여러 가지 미분법

W 34쪽	01 4	02 6	03 $\frac{1}{36}$	04 $\frac{52}{9}$	05 ③
06 $4+2\sqrt{2}$	07 ①	08 $-\frac{5}{3}$	09 ⑤	10 $-3e^{10}$	11 16
12 3	13 ④	14 ④	15 8	16 1	17 $\frac{1}{3\ln 3}$
18 11	19 -1	20 ⑤	21 ①	22 ③	23 4
24 ③	25 $\frac{8\sqrt{30}}{15}$	26 -36	27 ⑤	28 ④	29 3
30 11	31 $-e$	32 ②	33 ④	34 $\frac{1}{5}$	35 ③
36 $\frac{1}{8}$	37 0	38 $x=2e$	39 6	40 ①	

W 40쪽 **도전! 수능 기출**

01 ④ 02 ④ 03 ① 04 ③

06 도함수의 활용 (1)

W 41쪽 01 $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}$ 02 ⑤ 03 ① 04 1

05 $-\frac{\pi}{2}$ 06 ③ 07 ② 08 ④ 09 16 10 2

11 -6 12 ② 13 $-\frac{5}{4}$ 14 $y=\frac{1}{7}x$ 15 ④ 16 ③

17 -6 18 $6\sqrt{3}$ 19 ② 20 ⑤ 21 16 22 ④

23 1 24 -1 25 ④ 26 $\ln 3$ 27 ⑤ 28 ①

29 $\frac{1}{3}$ 30 ④ 31 $-\frac{1}{2}$ 32 $a\le 0$ 33 -6 34 4

35 0 36 ④ 37 $\pi-2$ 38 ② 39 ③ 40 $\frac{10}{e^4}$

41 ⑤ 42 $a\le 0$ 43 31 44 ② 45 ③

46 $0<a<\frac{49}{4}$

W 48쪽 **도전!** 수능 기출

01 10 02 ④ 03 64 04 ③

07 도함수의 활용 (2)

W 49쪽 01 ① 02 36 03 ⑤ 04 -3 05 ①

06 14 07 ⑤ 08 10 09 -1 10 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$

11 ㄷ 12 ③ 13 4 14 ④ 15 9 16 ③

17 $\frac{5}{2}$ 18 $\frac{9}{8}$ 19 -1 20 $\pi-3\sqrt{3}$ 21 ④ 22 ⑤

23 250 24 $2\sqrt{3}$ 25 $\frac{\sqrt{3}}{8}$ 26 ③ 27 28 28 ③

29 $0<k<\frac{4}{e^2}$ 30 -64 31 3 32 ④ 33 2

34 ③ 35 $k<-9$ 36 $a\ge 3$ 37 1 38 ⑤

39 $0<k<\frac{e}{2}$ 40 ⑤ 41 $\frac{4}{3}\pi$ 42 ③ 43 ②

44 20 m/s 45 2 46 (4, 0) 47 $\frac{5}{4}$

W 56쪽 **도전!** 수능 기출

01 ① 02 34 03 ④ 04 ⑤

08 여러 가지 적분법

W 57쪽 01 ④ 02 ④ 03 $\frac{1}{8}$ 04 $e^{x+2}+C$

05 ③ 06 $\frac{1}{e^2}$ 07 ② 08 -1 09 ② 10 $\frac{5}{2}$

11 ⑤ 12 $\frac{22}{5}$ 13 ② 14 54 15 $\frac{e}{3(1-e^3)}$

16 e^2 17 ② 18 ④ 19 ② 20 2 21 $\ln 2+1$

22 ② 23 ④ 24 $8\ln 2$ 25 e 26 ④ 27 $-\ln 2$

28 ① 29 $2\ln 3$ 30 ① 31 $\frac{1}{2}$ 32 ③

33 $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$ 34 6 35 ③ 36 $2e^2+\frac{3}{2}$

W 63쪽 **도전!** 수능 기출

01 ④ 02 ⑤ 03 ④ 04 72

09 정적분

W 64쪽 01 $5\ln 5-4$ 02 9 03 ③ 04 ①

05 $\frac{26}{3\ln 3}-1$ 06 $3\pi-4$ 07 $\frac{3}{2}-\frac{\pi}{6}$ 08 ③ 09 1

10 ③ 11 e^2+e-2 12 ④ 13 $\frac{15}{2}$ 14 ③

15 2 16 $3\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$ 17 ② 18 2 19 ③

20 $4(e-1)$ 21 ⑤ 22 $\frac{1}{2}$ 23 ① 24 ① 25 ④

26 ⑤ 27 $\frac{\pi}{2}$ 28 $\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}$ 29 ② 30 -3

31 3 32 $\frac{\pi}{4}$ 33 ② 34 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2-e}$ 35 ④

36 ⑤ 37 ② 38 ④ 39 e 40 ③ 41 $\frac{1}{2}$

42 $2-3\ln 3$ 43 $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$ 44 ② 45 $\frac{1}{8}$ 46 ④

47 ⑤ 48 8

W 72쪽 **도전!** 수능 기출

01 ④ 02 17 03 ① 04 ⑤

10 정적분의 활용

W 73쪽 01 2 02 ② 03 2 04 ② 05 $\frac{1}{2}e^2$

06 ④ 07 ⑤ 08 $\ln 3$ 09 2 10 $\sqrt{3}-1$ 11 2

12 ③ 13 $\frac{1}{2\ln 2}$ 14 $4\ln 2$ 15 ② 16 ① 17 $\frac{e}{2}-1$

18 ③ 19 $\frac{32}{9}$ 20 ④ 21 3 22 $\frac{3}{4}$ 23 ⑤

24 $e-1$ 25 ③ 26 ③ 27 3 28 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 29 $\frac{4}{3}\pi$

30 ③ 31 ② 32 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 33 ⑤ 34 (1) 1 (2) $\ln 2+\frac{3}{2}$

35 $2+\frac{1}{2}\ln 3$ 36 $\frac{3}{2}$ 37 ②

W 79쪽 **도전!** 수능 기출

01 ① 02 96 03 ② 04 ②

Lecture Book

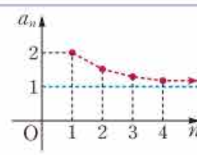
01 수열의 극한

Lecture 01 수열의 극한

6쪽

01 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=1+\frac{1}{n}$$



오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 1에 한없이 가까워지므로 이 수열은 1에 수렴한다.

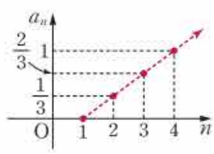
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

답 수렴, 1

> 수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산을 판정할 때에는 일반항 a_n에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하여 a_n의 값의 변화를 조사한다.

02 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{n-1}{3}$$



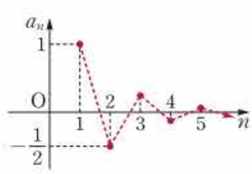
오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값도 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

답 발산

> $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$

03 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$



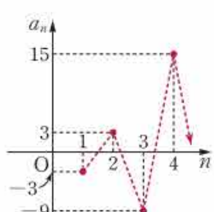
오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$$

답 수렴, 0

04 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=(-2)^n-1$$



오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 음수와 양수가 교대로 되면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 발산(진동)한다.

답 발산

05 $\lim_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$

$=3\cdot3+(-2)=7$

답 7

06 $\lim_{n\to\infty}(-a_n+4b_n+1)$

$=-\lim_{n\to\infty}a_n+4\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}1$

$=-3+4\cdot(-2)+1$

$=-10$

답 -10

> 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=c$ (c는 상수)이면
> $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c=c$

07 $\lim_{n\to\infty}5a_nb_n=5\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$

$=5\cdot3\cdot(-2)=-30$

답 -30

08 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-1}{2b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}1}{2\lim_{n\to\infty}b_n}$

$=\dfrac{3-1}{2\cdot(-2)}=-\dfrac{1}{2}$

답 $-\dfrac{1}{2}$

표준+발전 유형 Q+Q

7쪽

01 ① n의 값이 한없이 커지면 $3n-1$의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

② n의 값이 한없이 커지면 $(-1)^n$의 값은 -1과 1이 교대로 되므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

③ 홀수 번째 항 $-3, -1, -\frac{3}{5}, \cdots$은 0에 수렴하고, 짝수 번째 항 $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \cdots$도 0에 수렴하므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

④ n의 값이 한없이 커지면 $\left(-\frac{5}{4}\right)^n$의 값은 음수와 양수가 교대로 되면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

⑤ 주어진 수열에서 각 항의 분모를 유리화하면

$$\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{9}}{3}, \frac{\sqrt{12}}{3}, \cdots, \frac{\sqrt{3n}}{3}, \cdots$$

n의 값이 한없이 커지면 $\frac{\sqrt{3n}}{3}$의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

답 ③

> $\dfrac{n}{\sqrt{3n}}=\dfrac{n\sqrt{3n}}{\sqrt{3n}\sqrt{3n}}=\dfrac{n\sqrt{3n}}{3n}=\dfrac{\sqrt{3n}}{3}$

쌤한마디

수열 $\{a_n\}$에서 a_n의 값의 부호가 양과 음(또는 음과 양)이 교대로 나타날 때, 자연수 k에 대하여

$\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}a_{2k}=\alpha$ (α는 실수)

이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고 극한값은 α이다.

02 ㄱ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{n}{n^3+1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{n}{n^3+1}\right\}$은 0에 수렴한다.

ㄴ. n의 값이 한없이 커지면 $n+\frac{1}{n}$의 값도 한없이 커지므로 수열 $\left\{n+\frac{1}{n}\right\}$은 양의 무한대로 발산한다.

ㄷ. n의 값이 한없이 커지면 $2+\left(-\frac{1}{3}\right)^n$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{2+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$은 2에 수렴한다.

ㄹ. $\cos n\pi$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$-1, 1, -1, 1, \cdots$

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $\cos n\pi$의 값은 -1과 1이 교대로 되므로 수열 $\{\cos n\pi\}$는 발산(진동)한다.

이상에서 발산하는 수열은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

03 $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2b_n}{a_nb_n+3}=\frac{3\lim_{n\to\infty}a_n-2\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n+3}$

$=\frac{3\cdot(-4)-2\cdot3}{-4\cdot3+3}=2$ 답 2

04 $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2-a_nb_n+b_n{}^2)$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-3a_nb_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-3\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=6\cdot6-3\cdot2=30$ 답 30

05 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_{n+2}+1}{a_{n+1}-1}=-7$에서 $\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}=-7$

$2\alpha+1=-7\alpha+7$, $9\alpha=6$

$\therefore\ \alpha=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

06 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha\ge0$)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2-3a_{2n}-4)=0$에서 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$ $\therefore\ \alpha=4$ ($\because\ \alpha\ge0$)

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{4}=2$ 답 ②

Lecture 02 수열의 극한값의 계산

8쪽

01 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+6}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{6}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$ 답 수렴, $\frac{1}{2}$

02 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+4n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}=0$

답 수렴, 0

03 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+2n^2-1}{n^2+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{7}{n^2}}=\infty$

답 발산

04 $\lim_{n\to\infty}(n^2-4n+3)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\infty$

답 발산

Q BOX

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 극한값은 음이 아닌 실수이다.

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

➡ 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

$\infty-\infty$ 꼴의 극한

➡ 다항식은 최고차항으로 묶고, 무리식은 유리화한다.

05 $\lim_{n\to\infty}\left(2n-\frac{1}{7}n^2\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{7}\right)=-\infty$

답 발산

06 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n+5}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-n+5}-n)(\sqrt{n^2-n+5}+n)}{\sqrt{n^2-n+5}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n+5}{\sqrt{n^2-n+5}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+\frac{5}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}$

$=-\frac{1}{2}$ 답 수렴, $-\frac{1}{2}$

07 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2}$

$=1$ 답 수렴, 1

08 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{5}{n}}=2$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$ 답 2

표준+발전 유형 Q+Q

9쪽

01 ① $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{(1-2n)(n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{-2n^2-7n+4}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{-2-\frac{7}{n}+\frac{4}{n^2}}$

$=-1$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+6}{n^2(n-5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+6}{n^3-5n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{6}{n^3}}{1-\frac{5}{n}}=0$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}=2$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{9n+16}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{16}{n}}}=\frac{1}{3}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$

$=2$

답 ④

02 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{12n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{12}$

$=\frac{1}{6}$

답 ③

03 $\lim_{n\to\infty}\{\log_2(4n+1)+\log_2(4n-1)-2\log_2(n+2)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{(4n+1)(4n-1)}{(n+2)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{16n^2-1}{n^2+4n+4}$

$=\log_2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{16n^2-1}{n^2+4n+4}\right)$

$=\log_2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{16-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}\right)$

$=\log_2 16=4$

답 4

쌤 한마디

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ $(a_n>0,$ $\alpha>0)$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\log(\lim_{n\to\infty}a_n)=\log\alpha$

가 성립함을 이용하여 극한값을 구한다.

04 $\lim_{n\to\infty}(\log_3\sqrt{n^2+4n+5}-\log_3\sqrt{3n^2-n+2})$

$=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{\sqrt{n^2+4n+5}}{\sqrt{3n^2-n+2}}$

$=\log_3\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n+5}}{\sqrt{3n^2-n+2}}\right)$

$=\log_3\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\sqrt{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}\right)$

$=\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=\log_3 3^{-\frac{1}{2}}$

$=-\frac{1}{2}$

답 ③

Q BOX

$a>0$이면 양의 무한대로 발산하고, $a<0$이면 음의 무한대로 발산한다.

로그의 성질
$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때
① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$
② $\log_a MN$
$=\log_a M+\log_a N$
③ $\log_a\frac{M}{N}$
$=\log_a M-\log_a N$
④ $\log_a N^k=k\log_a N$
(단, k는 실수)

분자, 분모가 각각 $\infty-\infty$ 꼴이면서 모두 근호를 포함한 식이므로 분자, 분모를 각각 유리화한다.

05 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{2n-3}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로

$a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{2n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{2n-3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}}$

$=\frac{b}{2}$

따라서 $\frac{b}{2}=4$이므로 $b=8$

$\therefore a+b=8$

답 8

06 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2-3n+1}}{an^2+6n+5}=0$이고 $b\neq0$이므로

$a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2-3n+1}}{an^2+6n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2-3n+1}}{6n+5}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}{6+\frac{5}{n}}$

$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

따라서 $b=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-2n+1}{\sqrt{bn^2+4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n+1}{\sqrt{\frac{1}{2}n^2+4n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{4}{n}}}$

$=-2\sqrt{2}$

답 $-2\sqrt{2}$

07 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+100}-n}{n-\sqrt{n^2+99}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+100}-n)(\sqrt{n^2+100}+n)(n+\sqrt{n^2+99})}{(n-\sqrt{n^2+99})(n+\sqrt{n^2+99})(\sqrt{n^2+100}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{100(n+\sqrt{n^2+99})}{-99(\sqrt{n^2+100}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{100\left(1+\sqrt{1+\frac{99}{n^2}}\right)}{-99\left(\sqrt{1+\frac{100}{n^2}}+1\right)}$

$=-\frac{100}{99}$

답 ①

08 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=1$, $\alpha_n\beta_n=2n-\sqrt{4n^2+3n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-\sqrt{4n^2+3n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\sqrt{4n^2+3n}}{(2n-\sqrt{4n^2+3n})(2n+\sqrt{4n^2+3n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\sqrt{4n^2+3n}}{-3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\sqrt{4+\frac{3}{n}}}{-3}=-\frac{4}{3}$ 　답 $-\frac{4}{3}$

09 $a\le 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+5n+4}-(an+b)\}=\infty$이므로

$a>0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+5n+4}-(an+b)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+5n+4}-(an+b)\}\{\sqrt{n^2+5n+4}+(an+b)\}}{\sqrt{n^2+5n+4}+(an+b)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+(5-2ab)n+4-b^2}{\sqrt{n^2+5n+4}+an+b}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n+5-2ab+\frac{4-b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}+a+\frac{b}{n}}$

이 식의 극한값이 3이므로

$1-a^2=0$, $\frac{5-2ab}{1+a}=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

$\therefore a+b=\frac{1}{2}$ 　답 ④

10 $b\ge 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{an^2+2n}+bn}=0$이므로

$b<0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{an^2+2n}+bn}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an^2+2n}-bn}{(\sqrt{an^2+2n}+bn)(\sqrt{an^2+2n}-bn)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an^2+2n}-bn}{(a-b^2)n^2+2n}$

$a-b^2\ne 0$이면 극한값이 0이므로

$a-b^2=0$ 　$\therefore a=b^2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an^2+2n}-bn}{(a-b^2)n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{b^2n^2+2n}-bn}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{b^2+\frac{2}{n}}-b}{2}$

$=\frac{-b-b}{2}$ ($\because b<0$)

$=-b$

BOX

정수 n에 대하여 $n\le x<n+1$일 때
① x의 정수 부분은 n, 소수 부분은 $x-n$이다.
② x보다 크지 않은 최대의 정수는 n이다.

$1-a^2>0$이면 양의 무한대로 발산하고, $1-a^2<0$이면 음의 무한대로 발산한다.

$1-a^2=0$에서 $a^2=1$
$\therefore a=1$ ($\because a>0$)
$a=1$을 $\frac{5-2ab}{1+a}=3$에 대입하면
$\frac{5-2b}{2}=3$
$-2b=1$
$\therefore b=-\frac{1}{2}$

즉 $-b=5$이므로 　$b=-5$

따라서 $a=b^2=25$이므로

$a-b=30$ 　답 ③

11 $\sqrt{(n+2)^2}<\sqrt{n^2+4n+5}<\sqrt{(n+3)^2}$이므로

$n+2<\sqrt{n^2+4n+5}<n+3$

따라서 $a_n=\sqrt{n^2+4n+5}-(n+2)$이므로

$\lim_{n\to\infty} na_n$

$=\lim_{n\to\infty} n\{\sqrt{n^2+4n+5}-(n+2)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{\sqrt{n^2+4n+5}-(n+2)\}\{\sqrt{n^2+4n+5}+(n+2)\}}{\sqrt{n^2+4n+5}+(n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+4n+5}+n+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+1+\frac{2}{n}}$

$=\frac{1}{2}$ 　답 $\frac{1}{2}$

12 $\sqrt{(3n)^2}<\sqrt{9n^2+6n}<\sqrt{(3n+1)^2}$이므로

$3n<\sqrt{9n^2+6n}<3n+1$

따라서 $a_n=3n$이므로

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+6n}-a_n)$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+6n}-3n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{9n^2+6n}-3n)(\sqrt{9n^2+6n}+3n)}{\sqrt{9n^2+6n}+3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{9n^2+6n}+3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{9+\frac{6}{n}}+3}$

$=1$ 　답 1

13 $\frac{4a_n-3}{3a_n+1}=b_n$으로 놓으면

$4a_n-3=3a_nb_n+b_n$, 　$(4-3b_n)a_n=b_n+3$

$\therefore a_n=\frac{b_n+3}{4-3b_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=2$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+3}{4-3b_n}$

$=\frac{2+3}{4-3\cdot 2}=-\frac{5}{2}$ 　답 $-\frac{5}{2}$

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-3}{3a_n+1}=2$에서 　$\frac{4\alpha-3}{3\alpha+1}=2$

$4\alpha-3=6\alpha+2$, 　$2\alpha=-5$

$\therefore \alpha=-\frac{5}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=-\frac{5}{2}$

14 $(2n+1)a_n=c_n$으로 놓으면 $\quad a_n=\dfrac{c_n}{2n+1}$

$(8n^3+1)b_n=d_n$으로 놓으면 $\quad b_n=\dfrac{d_n}{8n^3+1}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=12$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)^2b_n}{a_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(3n-1)^2d_n}{8n^3+1}}{\dfrac{c_n}{2n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(9n^2-6n+1)(2n+1)}{(2n+1)(4n^2-2n+1)}\cdot\frac{d_n}{c_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-6n+1}{4n^2-2n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{c_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{4-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{c_n}$$
$$=\frac{9}{4}\cdot\frac{12}{3}=9$$

답 9

a^3+b^3
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

15 $\sqrt{25n^2-n}<(n+1)a_n<\sqrt{25n^2+9n}$에서

$$\frac{\sqrt{25n^2-n}}{n+1}<a_n<\frac{\sqrt{25n^2+9n}}{n+1}$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{25n^2-n}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{25n^2+9n}}{n+1}=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=5$$

답 5

모든 자연수 n에 대하여 $n+1>0$이므로 각 변을 $n+1$로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

16 $-1\le\cos n\theta\le1$이므로

$$-\frac{1}{n^2}\le\frac{\cos n\theta}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta-n^2}{2n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\cos n\theta}{n^2}-1}{2-\dfrac{1}{n}}=-\frac{1}{2}$$

답 ③

17 ㄱ. $a_n<b_n$에서 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$

ㄴ. [반례] $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=\dfrac{2}{n}$이면 $a_n<b_n$이지만

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

ㄷ. [반례] $a_n=n^2$, $b_n=\dfrac{1}{n}$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

이지만

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

18 ㄱ. [반례] $a_n=(-1)^n$이면

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=1,\ \lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=-1$$

$a_{2n}=(-1)^{2n}=1$,
$a_{2n-1}=(-1)^{2n-1}=-1$

따라서 두 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$이 모두 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

ㄴ. [반례] $a_n=n$, $b_n=-n$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$,

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\infty$이지만

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$$

따라서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 발산하지만 수열 $\{a_n+b_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

따라서 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

Lecture 03 등비수열의 수렴과 발산

12쪽

01 공비가 1.15이고, $1.15>1$이므로 발산한다.

답 발산

02 공비가 -0.7이고, $-1<-0.7<1$이므로 0에 수렴한다.

답 수렴

03 공비가 $\dfrac{4}{5}$이고 $-1<\dfrac{4}{5}<1$이므로 0에 수렴한다.

답 수렴

04 공비가 $-\dfrac{9}{2}$이고 $-\dfrac{9}{2}<-1$이므로 발산한다.

답 발산

05 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{3^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=0$

답 수렴, 0

06 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}}{5^n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}=5$

답 수렴, 5

07 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n}-5^n}{4^n+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{5}{4}\right)^n}{1+3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}=-\infty$

답 발산

08 첫째항과 공비가 모두 $3r$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<3r\le 1 \quad \therefore -\frac{1}{3}<r\le\frac{1}{3}$

답 $-\frac{1}{3}<r\le\frac{1}{3}$

09 첫째항과 공비가 모두 $\frac{r-1}{5}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{r-1}{5}\le 1, \quad -5<r-1\le 5$

$\therefore -4<r\le 6$

답 $-4<r\le 6$

10 공비가 $-\frac{r}{2}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<-\frac{r}{2}\le 1 \quad \therefore -2\le r<2$

답 $-2\le r<2$

표준+발전 유형 Q+Q

13쪽

01 $\lim_{n\to\infty}\frac{15^{n+1}+5^{n+2}}{(5^n+1)(3^n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{15^{n+1}+5^{n+2}}{15^n+5^n+3^n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{15+5^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{15}\right)^n}$

$=15$

답 15

02 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+2^n\cdot a_n}{2^{n+1}-4^n\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot a_n}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-a_n}=\frac{4}{-\alpha}$

따라서 $\frac{4}{-\alpha}=2$이므로 $\quad\alpha=-2$

답 -2

03 $n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=4^n+5^n-(4^{n-1}+5^{n-1})$

$=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot 4^n+\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot 5^n$

$=\frac{3}{4}\cdot 4^n+\frac{4}{5}\cdot 5^n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}\cdot 4^n+\frac{4}{5}\cdot 5^n}{4^n+5^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n+\frac{4}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}$

$=\frac{4}{5}$

답 ③

Q BOX

첫째항이 a, 공비가 r $(r\ne 0)$인 등비수열의 일반항 a_n은
$a_n=ar^{n-1}$

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$ 꼴로 바꾸어 푼다.

수열 $\left\{\frac{c^n+d^n}{a^n+b^n}\right\}$ (a, b, c, d는 실수)의 극한값은 $|a|>|b|$이면 a^n으로, $|a|<|b|$이면 b^n으로 분자, 분모를 각각 나눈 후 $|r|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용하여 구한다.

$1<\sqrt{2}<2$이므로
$-2<-\sqrt{2}<-1$
$\therefore 1<3-\sqrt{2}<2$

$1<\sqrt{2}<2$이므로
$4<3+\sqrt{2}<5$

04 $a_n=3\cdot 2^{n-1}$이므로 $\quad a_{n+1}=3\cdot 2^n$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3\cdot 2^n-3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_n+a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n-3}{3\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}+3}$

$=\frac{2}{3}$

답 ①

쌤 한마디

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

① $r\ne 1$일 때, $\quad S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

② $r=1$일 때, $\quad S_n=na$

05 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x^2-4x-6}{6}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-4x-6}{6}\le 1$

(i) $-1<\frac{x^2-4x-6}{6}$, 즉 $x^2-4x>0$에서

$x(x-4)>0 \quad \therefore x<0$ 또는 $x>4$

(ii) $\frac{x^2-4x-6}{6}\le 1$, 즉 $x^2-4x-12\le 0$에서

$(x+2)(x-6)\le 0 \quad \therefore -2\le x\le 6$

(i), (ii)에서

$-2\le x<0$ 또는 $4<x\le 6$

따라서 $M=6$, $m=-2$이므로

$M-m=8$

답 8

06 첫째항이 $(x+1)(x^2-6x+8)$, 공비가 x^2-6x+8이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$(x+1)(x^2-6x+8)=0$

또는 $-1<x^2-6x+8\le 1$

$\therefore x+1=0$ 또는 $-1<x^2-6x+8\le 1$

$x+1=0$에서 $\quad x=-1 \quad\cdots\cdots$ ㉠

$-1<x^2-6x+8\le 1$에서

(i) $-1<x^2-6x+8$, 즉 $x^2-6x+9>0$일 때,

$(x-3)^2>0 \quad \therefore x\ne 3$인 모든 실수

(ii) $x^2-6x+8\le 1$, 즉 $x^2-6x+7\le 0$일 때,

이차방정식 $x^2-6x+7=0$의 해가 $x=3\pm\sqrt{2}$이므로

$3-\sqrt{2}\le x\le 3+\sqrt{2}$

(i), (ii)에서

$3-\sqrt{2}\le x<3$ 또는 $3<x\le 3+\sqrt{2} \quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x는 -1, 2, 4이므로 구하는 합은

$-1+2+4=5$

답 ②

07 (i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=1$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로

$$b=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=-1$$

이상에서 $a-b+c=0$ 답 0

08 ㄱ. $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+r+1}{r^n+2}=\frac{r+1}{2}$$

ㄴ. $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+r+1}{r^n+2}=\frac{1+1+1}{1+2}=1$$

ㄷ. $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+r+1}{r^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{r^{n-1}}+\frac{1}{r^n}}{1+\frac{2}{r^n}}=1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

09 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+4x+3}{x^{2n}+1}=4x+3$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+4x+3}{x^{2n}+1}=\frac{1+4+3}{1+1}=4$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}|x^{2n-1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+4x+3}{x^{2n}+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^{2n-1}}+\frac{3}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+4x+3}{x^{2n}+1}=\frac{-1-4+3}{1+1}$$
$$=-1$$

이상에서 $f(x)=\begin{cases}4x+3 & (|x|<1)\\ 4 & (x=1)\\ \frac{1}{x} & (|x|>1)\\ -1 & (x=-1)\end{cases}$

$$\therefore f(-1)+f\left(-\frac{1}{2}\right)+(f\circ f)(4)$$
$$=-1+\left\{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\right\}+f\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$=-1+1+\left(4\cdot\frac{1}{4}+3\right)=4$$

답 4

$f(4)=\frac{1}{4}$

다른 풀이 $f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n-1}-4+3}{(-1)^{2n}+1}$

$$=\frac{-1-1}{1+1}=-1$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}+1}$$
$$=-2+3=1$$

$$f(4)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{2n-1}+4\cdot4+3}{4^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}+\frac{19}{4^{2n}}}{1+\frac{1}{4^{2n}}}=\frac{1}{4}$$

이므로

$$(f\circ f)(4)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}+4\cdot\frac{1}{4}+3}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}+1}$$
$$=1+3=4$$

$$\therefore f(-1)+f\left(-\frac{1}{2}\right)+(f\circ f)(4)$$
$$=-1+1+4=4$$

x가 양의 실수이므로 $0<x<1$, $x=1$, $x>1$인 경우로 나누어 $f(x)$의 식을 구한다.

10 (i) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-6x}{x^n+1}=-6x$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-6x}{x^n+1}=\frac{1-6}{1+1}=-\frac{5}{2}$$

(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-6x}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{6}{x^{n-1}}}{1+\frac{1}{x^n}}=x$$

이상에서 $f(x)=\begin{cases}-6x & (0<x<1)\\ -\frac{5}{2} & (x=1)\\ x & (x>1)\end{cases}$

$0<x<1$이면 $\frac{1}{x}>1$이므로 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$에서

$$-6x+\frac{1}{x}=1,\quad 6x^2+x-1=0$$
$$(2x+1)(3x-1)=0$$
$$\therefore x=\frac{1}{3}\ (\because 0<x<1)$$

$x=1$이면 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)+f(1)=-5$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$x>1$이면 $0<\frac{1}{x}<1$이므로 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$에서

$$x-\frac{6}{x}=1,\quad x^2-x-6=0$$
$$(x+2)(x-3)=0\qquad \therefore x=3\ (\because x>1)$$

따라서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$이므로 구하는 합은

$$\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

11 원 $x^2+y^2=n^2$과 x축이 만나는 점의 x좌표는 $\pm n$이므로 $a_n=n$ ($\because a_n>0$)

$y=\sqrt{n}$을 $x^2+y^2=n^2$에 대입하면

$x^2+n=n^2$, $x^2=n^2-n$

$\therefore x=\pm\sqrt{n^2-n}$

$\therefore b_n=\sqrt{n^2-n}$ ($\because b_n>0$)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-n}}{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1}=2$$

답 2

12 $P_n(n,\ 2^n)$, $Q_n(n,\ 3^n)$이므로 $\overline{P_nQ_n}=3^n-2^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}}{\overline{P_nQ_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n-2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=3$$

답 ③

중단원 마무리

15쪽

01 전략 n의 값이 한없이 커질 때 어떤 일정한 값에 가까워지지 않는 수열을 찾는다.

풀이 ① n의 값이 한없이 커지면 $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right\}$은 0에 수렴한다.

② n의 값이 한없이 커지면 $\frac{(-1)^n+1}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{(-1)^n+1}{n}\right\}$은 0에 수렴한다.

③ $\sin\frac{n\pi}{2}$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$를 차례대로 대입하면

$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \cdots$

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $\sin\frac{n\pi}{2}$의 값은 $1,\ 0,\ -1,\ 0$이 교대로 되므로 수열 $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$는 발산(진동)한다.

④ n의 값이 한없이 커지면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\}$은 0에 수렴한다.

⑤ n의 값이 한없이 커지면 $1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$은 1에 수렴한다.

답 ③

02 전략 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}(a_n^2-b_n^2)=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)(a_n-b_n)$
$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$
$=3\cdot9=27$

답 ④

03 전략 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 α로 나타내고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=\alpha$에서

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha+3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha+3$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3}{3a_{n+1}+1}=\frac{1}{8}$에서

$\frac{\alpha}{3(\alpha+3)+1}=\frac{1}{8}$, $\frac{\alpha}{3\alpha+10}=\frac{1}{8}$

$8\alpha=3\alpha+10$ $\therefore \alpha=2$

답 2

04 전략 $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$임을 이용하여 A_n과 B_n을 구한다.

풀이 $A_n=\sum_{k=1}^{6n}k=\frac{6n(6n+1)}{2}=3n(6n+1)$

$B_n=A_n-\sum_{k=1}^{2n}3k=3n(6n+1)-3\cdot\frac{2n(2n+1)}{2}$
$=3n(6n+1)-3n(2n+1)=12n^2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(6n+1)}{12n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{4n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{4}=\frac{3}{2}$$

따라서 $p=2,\ q=3$이므로 $p+q=5$

답 5

05 전략 먼저 로그의 성질을 이용하여 $a_1+a_2+\cdots+a_n$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_n=\log\frac{n+1}{n}$이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_n$
$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}$
$=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)$
$=\log(n+1)$

따라서 $10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}=10^{\log(n+1)}=n+1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

답 ①

Q BOX

제1사분면 위의 점의 x좌표는 양수이다.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

1부터 $6n$까지의 자연수 중에서 3의 배수의 총합

$0,\ 1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ \cdots$

공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=0$

06 전략 $a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$, $a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}$을 각각 n에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 무리식을 유리화하여 극한값을 구한다.

풀이 $a_{2k}=3\cdot 2k-2=6k-2$이므로

$$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}(6k-2)$$
$$=6\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2n$$
$$=3n^2+n$$

또 $a_{2k-1}=3(2k-1)-2=6k-5$이므로

$$a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(6k-5)$$
$$=6\cdot\frac{n(n+1)}{2}-5n$$
$$=3n^2-2n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3n^2+n}-\sqrt{3n^2-2n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{3n^2+n}-\sqrt{3n^2-2n})(\sqrt{3n^2+n}+\sqrt{3n^2-2n})}{\sqrt{3n^2+n}+\sqrt{3n^2-2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{3n^2+n}+\sqrt{3n^2-2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{3+\frac{1}{n}}+\sqrt{3-\frac{2}{n}}}$$
$$=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

07 전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나누고, $\infty-\infty$ 꼴의 극한은 무리식으로 주어진 경우 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

풀이 조건 (가)에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(an+1)(bn+1)}{n^2+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{abn^2+(a+b)n+1}{n^2+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{ab+\frac{a+b}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=ab$$

이므로 $ab=12$ …… ㉠ ⋯ ❶

조건 (나)에서

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n-b)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+an}-(n+b)\}\{\sqrt{n^2+an}+(n+b)\}}{\sqrt{n^2+an}+(n+b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2b)n-b^2}{\sqrt{n^2+an}+n+b}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-2b-\frac{b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1+\frac{b}{n}}=\frac{a-2b}{2}$$

이므로 $\frac{a-2b}{2}=-5$

$\therefore a=2b-10$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2b-10)b=12$, $b^2-5b-6=0$

$(b+1)(b-6)=0$ $\therefore b=6$ ($\because b>0$)

$b=6$을 ㉡에 대입하면 $a=2$ ⋯ ❸

$\therefore a+b=8$ ⋯ ❹

답 8

단계	채점 기준	비율
❶	조건 (가)에서 ab의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	조건 (나)에서 a, b에 대한 식을 구할 수 있다.	40 %
❸	a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

08 전략 정수 m에 대하여 $m\le A<m+1$일 때, A의 정수 부분은 m임을 이용한다.

풀이 $x^2-4nx+3n=0$에서 $x=2n\pm\sqrt{4n^2-3n}$

$\therefore a_n=2n+\sqrt{4n^2-3n}$

$\sqrt{(2n-1)^2}\le\sqrt{4n^2-3n}<\sqrt{(2n)^2}$이므로

$n=1$일 때, $\sqrt{(2n-1)^2}=1$, $\sqrt{4n^2-3n}=1$로 등호가 성립한다.

$2n-1\le\sqrt{4n^2-3n}<2n$

$\therefore 4n-1\le 2n+\sqrt{4n^2-3n}<4n$

따라서 $b_n=4n-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{2n+\sqrt{4n^2-3n}-(4n-1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{4n^2-3n}-(2n-1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{4n^2-3n}-(2n-1)\}\{\sqrt{4n^2-3n}+(2n-1)\}}{\sqrt{4n^2-3n}+(2n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{4n^2-3n}+2n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{4-\frac{3}{n}}+2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

09 전략 $n^2a_n=c_n$, $\frac{b_n}{n}=d_n$으로 놓고 a_n, b_n을 각각 c_n, d_n으로 나타낸다.

풀이 $n^2a_n=c_n$, $\frac{b_n}{n}=d_n$으로 놓으면

$a_n=\frac{c_n}{n^2}$, $b_n=nd_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}c_n=3$, $\lim_{n\to\infty}d_n=7$이므로

$$\lim_{n\to\infty}na_n(b_n-3n)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{c_n}{n^2}(nd_n-3n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}c_n(d_n-3)$$
$$=\lim_{n\to\infty}c_n\cdot\lim_{n\to\infty}(d_n-3)$$
$$=3(7-3)=12$$

답 ④

극한값을 구하려는 식을 n^2a_n, $\frac{b_n}{n}$을 포함한 식으로 변형한다.

다른 풀이
$$\lim_{n\to\infty}na_n(b_n-3n)=\lim_{n\to\infty}n^2a_n\left(\frac{b_n}{n}-3\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}n^2a_n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}-3\right)$$
$$=3(7-3)=12$$

10 전략 이차방정식의 판별식을 이용하여 a_n에 대한 부등식을 세운 후 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$이 x축과 만나므로 이차방정식 $x^2-(n+1)x+a_n=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=\{-(n+1)\}^2-4a_n\ge 0$$

$$\therefore a_n\le \frac{(n+1)^2}{4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

곡선 $y=x^2-nx+a_n$이 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-nx+a_n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(-n)^2-4a_n<0$$

$$\therefore a_n>\frac{n^2}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{n^2}{4}<a_n\le \frac{(n+1)^2}{4}$

$$\therefore \frac{1}{4}<\frac{a_n}{n^2}\le \frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{4}$$

답 ⑤

분자의 차수와 분모의 차수가 같으므로 극한값은 최고차항의 계수의 비, 즉 $\frac{1}{4}$이다.

쌤한마디

이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 다음과 같다.

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다.(접한다.)
③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

11 전략 수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 참인 명제를 찾고, 거짓인 명제는 반례를 찾는다.

풀이 ㄱ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n$이면

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}1=1$$

따라서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴하지만 수열 $\{b_n\}$은 발산한다.

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$

ㄴ. $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면

$$b_n=a_n-c_n$$

이때 수열 $\{a_n-b_n\}$이 0에 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0$$

따라서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{c_n\}$이 모두 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}a_n$$

ㄷ. [반례] $a_n=n-\frac{1}{n}$, $b_n=n+\frac{1}{n}$, $c_n=n$이면

$a_n<c_n<b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만

수열 $\{c_n\}$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

12 전략 $0<a<b$이므로 b^n으로 분자, 분모를 각각 나눈 후 $|r|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용한다.

풀이 $0<a<b$에서 $0<\frac{a}{b}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+3b^n}{a^n+b^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n+3}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}=\frac{3}{b}$$

따라서 $\frac{3}{b}=\frac{1}{4}$이므로

$$b=12$$

답 12

13 전략 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴할 조건은 $-1<r\le 1$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{(-2x+3)^n\}$의 첫째항과 공비가 모두 $-2x+3$이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1<-2x+3\le 1,\quad -4<-2x\le -2$$

$$\therefore 1\le x<2 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

등비수열 $\{(\log_3 x-1)^n\}$의 첫째항과 공비가 모두 $\log_3 x-1$이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1<\log_3 x-1\le 1,\quad 0<\log_3 x\le 2$$

$2=\log_3 3^2=\log_3 9$

$$\therefore 1<x\le 9 \quad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots ❷$$

㉠, ㉡에서 $1<x<2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$$\alpha+\beta=3 \quad \cdots ❸$$

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	등비수열 $\{(-2x+3)^n\}$이 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷	등비수열 $\{(\log_3 x-1)^n\}$이 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸	$\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

14 전략 $|r|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$, $|r|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$임을 이용한다.

풀이 ① $r<-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}r^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}$$

에서 주어진 수열은 발산(진동)한다.

② $-1<r<0$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-1}{r^n+1}=-1$$

③ $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-1}{r^n+1}=-1$$

④ $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-1}{r^n+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

⑤ $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} r^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=\infty$$

에서 주어진 수열은 발산한다.

답 ③

15 전략 두 점 P_n, P_{n+1}의 좌표를 구하여 L_n^2을 구한다.

풀이 $y=\sqrt{x}$에서 $x=4^n$일 때, $y=\sqrt{4^n}=2^n$

$x=4^{n+1}$일 때, $y=\sqrt{4^{n+1}}=2^{n+1}$

$\therefore P_n(4^n, 2^n)$, $P_{n+1}(4^{n+1}, 2^{n+1})$

$L_n=\overline{P_nP_{n+1}}$에서

$$\begin{aligned}L_n^2&=\overline{P_nP_{n+1}}^2\\&=(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2\\&=(3\cdot4^n)^2+(2^n)^2\\&=9\cdot16^n+4^n\end{aligned}$$

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2&=\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}^2}{L_n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot16^{n+1}+4^{n+1}}{9\cdot16^n+4^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot16+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9+\left(\frac{1}{4}\right)^n}\\&=16\end{aligned}$$

답 16

16 전략 먼저 두 조건 (가), (나)에서 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^n}$의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $4^n<a_n<4^n+1$이므로

$$1<\frac{a_n}{4^n}<1+\frac{1}{4^n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=1$$

조건 (나)에서

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$$

첫째항과 공비가 모두 2인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

이므로

$$2^{n+1}-2<b_n<2^{n+1}$$

$$\therefore 2-\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{b_n}{2^n}<2$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}2=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^n}=2$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+b_n}{2a_n+2^nb_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\frac{a_n}{4^n}+\frac{b_n}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}}{2\cdot\frac{a_n}{4^n}+\frac{b_n}{2^n}}\\&=\frac{4\cdot1+2\cdot0}{2\cdot1+2}=1\end{aligned}$$

답 ③

17 전략 $\left|\frac{x}{4}\right|<1$, $\frac{x}{4}=1$, $\left|\frac{x}{4}\right|>1$, $\frac{x}{4}=-1$인 경우로 나누어 $f(x)$의 식을 구한다.

풀이 (i) $\left|\frac{x}{4}\right|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}=0$

이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}=-\frac{1}{3}$$

즉 $\left|\frac{k}{4}\right|<1$이면 $f(k)=-\frac{1}{3}$을 만족시키므로

$$-1<\frac{k}{4}<1 \qquad \therefore -4<k<4$$

따라서 정수 k는

$-3, -2, -1, \cdots, 3$

(ii) $\frac{x}{4}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}=1$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}\\&=\frac{2-1}{1+3}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(iii) $\left|\frac{x}{4}\right|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}\right|=\infty$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{x}{4}-\frac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}}}{1+\frac{3}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}}}=\frac{x}{2}\end{aligned}$$

이때 $\left|\frac{k}{4}\right|>1$에서 $\left|\frac{k}{2}\right|>2$이므로 $f(k)=-\frac{1}{3}$을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$\left|\frac{k}{4}\right|>1$에서
$2\cdot\left|\frac{k}{4}\right|>2$
$\left|2\cdot\frac{k}{4}\right|>2$
$\therefore \left|\frac{k}{2}\right|>2$

(iv) $\frac{x}{4}=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}=-1$

이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}\\&=\frac{-2-1}{1+3}=-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

이상에서 정수 k는 $-3, -2, -1, \cdots, 3$의 7개이다.

답 ②

02 급수

Lecture 04 급수의 수렴과 발산

19쪽

01 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4-n}{2n-3} = -\frac{1}{2}$ 　답 $-\frac{1}{2}$

02 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \{2+(0.8)^n\} = 2$ 　답 2

03 (1) $S_n = 2+4+6+\cdots+2n$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

(2) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n(n+1) = \infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 (1) $S_n = n(n+1)$ (2) 발산

04 (1) $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

첫째항과 공비가 모두 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

(2) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 1$이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

답 (1) $S_n = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (2) 수렴, 1

05 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 　답 발산

06 주어진 급수는 첫째항과 공비가 모두 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 등비수열의 합이므로 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\left\{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}$$

$$= (2\sqrt{3}+3)\left\{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (2\sqrt{3}+3)\left\{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}$$

$$= 2\sqrt{3}+3$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $2\sqrt{3}+3$이다.

답 수렴, $2\sqrt{3}+3$

Q BOX

$\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$
$= \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$
$= 2\sqrt{3}+3$

$\frac{1}{AB}$
$= \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$
(단, $A\neq B$)

07 주어진 급수는 첫째항이 -2, 공차가 3인 등차수열의 합이므로 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \frac{n\{2\cdot(-2)+(n-1)\cdot 3\}}{2}$$

$$= \frac{3n^2-7n}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-7n}{2} = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 　답 발산

08 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

답 수렴, 1

09 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면 $a_n = 0.5$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0.5 = 0.5 \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

10 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면 $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1 \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

11 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면 $a_n = \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{2}{1+1} = 1 \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

12 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
$=3+(-2)=1$ 답 1

13 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
$=3-(-2)=5$ 답 5

14 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
$=3\cdot3+2\cdot(-2)=5$ 답 5

15 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(4a_n-\frac{b_n}{2}\right)=4\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
$=4\cdot3-\frac{1}{2}\cdot(-2)=13$ 답 13

표준+발전 유형 Q+Q
20쪽

01 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{4n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$(2n+1)^2-1$
$=4n^2+4n+1-1$
$=4n(n+1)$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}$$
답 $\frac{1}{4}$

02 $S_n=\frac{n\{2\cdot3+(n-1)\cdot2\}}{2}=n(n+2)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$
답 $\frac{3}{4}$

항이 건너뛰며 소거될 때, 앞에서 첫 번째, 세 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째, 세 번째가 남는다.

홀수 번째 항까지의 부분합 S_{2n-1}과 짝수 번째 항까지의 부분합 S_{2n}에 대하여
① $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\alpha$
➡ $\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$
(단, α는 실수)
② $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$
➡ $\lim_{n\to\infty}S_n$은 발산

03 $$\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_2\frac{1\cdot3}{2\cdot2}+\log_2\frac{2\cdot4}{3\cdot3}+\log_2\frac{3\cdot5}{4\cdot4}+\cdots+\log_2\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\left\{\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\cdots\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+2}{2(n+1)}$$
$$=\log_2\frac{1}{2}$$
$$=-1$$
답 -1

04 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{(k+2)^2}{k^2+4k+3}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{(k+2)(k+2)}{(k+1)(k+3)}$$
$$=\log\frac{3\cdot3}{2\cdot4}+\log\frac{4\cdot4}{3\cdot5}+\log\frac{5\cdot5}{4\cdot6}+\cdots+\log\frac{(n+2)(n+2)}{(n+1)(n+3)}$$
$$=\log\left\{\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\cdots\cdot\frac{(n+2)(n+2)}{(n+1)(n+3)}\right\}$$
$$=\log\frac{3(n+2)}{2(n+3)}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{3(n+2)}{2(n+3)}$$
$$=\log\frac{3}{2}$$
답 ⑤

05 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

ㄱ. $S_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$
$=1-\frac{1}{2n+1}$
$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$
따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄴ. $S_1=1,\ S_2=\frac{2}{3},\ S_3=1,\ S_4=\frac{4}{5},\ S_5=1,\ S_6=\frac{6}{7},$ …이므로

$$S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=\frac{2n}{2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=1$이므로 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄷ. $S_1=2,\ S_2=\frac{1}{2},\ S_3=2,\ S_4=\frac{2}{3},\ S_5=2,\ S_6=\frac{3}{4},$ …이므로

$$S_{2n-1}=2,\ S_{2n}=\frac{n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=2,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

이상에서 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

06 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

$$=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-\cdots$$

$$=-(a_1+a_3+a_5+\cdots)+(a_2+a_4+a_6+\cdots)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n}}{n+2}+\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{3}{2}$$

답 ②

07 주어진 급수의 제n항은 $\frac{a_n}{2n}+4$이고, 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2n}+4\right)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=-8$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{a_n}{n}+1}{\frac{a_n}{n}-3}$$

$$=\frac{2\cdot(-8)+1}{-8-3}$$

$$=\frac{15}{11}$$

따라서 $p=11,\ q=15$이므로

$p+q=26$

답 ③

Q BOX

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 수렴, 발산

① $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$

➡ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산

② $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

➡ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 부분합 S_n을 구한 후 $\lim_{n\to\infty}S_n$의 수렴, 발산 조사

(분자의 차수)<(분모의 차수)이므로 극한값이 0이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{n+1}$
$=-\lim_{n\to\infty}\log(n+1)$
$=-\infty$

08 주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+5a_n}{1+a_n}=0$$

$\frac{2+5a_n}{1+a_n}=b_n$으로 놓으면

$$b_n+a_nb_n=2+5a_n,\qquad (b_n-5)a_n=2-b_n$$

$$\therefore a_n=\frac{2-b_n}{b_n-5}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2-b_n}{b_n-5}=-\frac{2}{5}$$

답 $-\frac{2}{5}$

09 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=21$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_n=21$$

또 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}+21a_{2n+1}}{a_n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}+21a_{2n+1}}{a_n+3}$$

$$=\frac{21+21\cdot0}{0+3}=7$$

답 ③

10 ① 주어진 급수의 제n항은 $\frac{n^2}{n^2+1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\neq0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

② 주어진 급수의 제n항은 $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

③ 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+\cdots+\log\frac{n}{n+1}$$

$$=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=\log\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{n+1}=-\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

④ 주어진 급수의 제n항은 $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1\neq0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

⑤ 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\left(\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)+\left(\sqrt{\frac{1}{6}}-\sqrt{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\sqrt{\frac{1}{n+2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)+\left(\sqrt{\frac{1}{n+3}}-\sqrt{\frac{1}{n+1}}\right)$$

$$=-\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{n+2}}+\sqrt{\frac{1}{n+3}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{n+2}}+\sqrt{\frac{1}{n+3}}\right)=-\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$$

따라서 주어진 급수는 $-\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$에 수렴한다.

답 ⑤

11 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+1}{4n^2+2n}=\frac{3}{4}\neq0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-n+1}{4n^2+2n}$은 발산한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\frac{2}{1+1}=1\neq0$$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$은 발산한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}-4}{4^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{1}{2}\neq0$이므로

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}-4}{4^n+1}$는 발산한다.

ㄹ. 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서 주어진 급수는 $\frac{1}{4}$에 수렴한다.

이상에서 발산하는 급수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

Q BOX

$$\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

이므로

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

12 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n)=7$에서 $3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=7$

$\therefore 3\alpha+2\beta=7$ ⋯⋯ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)=-2$에서 $2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-2$

$\therefore 2\alpha+3\beta=-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=5$, $\beta=-4$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5-2\cdot(-4)=13$$

답 13

다른 풀이 $a_n-2b_n=p(3a_n+2b_n)+q(2a_n+3b_n)$ (p, q는 상수)으로 놓으면

$a_n-2b_n=(3p+2q)a_n+(2p+3q)b_n$

$\therefore 3p+2q=1$, $2p+3q=-2$

위의 두 식을 연립하면 풀면 $p=\frac{7}{5}$, $q=-\frac{8}{5}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{7}{5}(3a_n+2b_n)-\frac{8}{5}(2a_n+3b_n)\right\}$$

$$=\frac{7}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n)-\frac{8}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)$$

$$=\frac{7}{5}\cdot7-\frac{8}{5}\cdot(-2)=13$$

13 $b_n=a_n+\log_2\frac{n^2}{n^2-1}$으로 놓으면

$$a_n=b_n-\log_2\frac{n^2}{n^2-1}$$

이때 $\sum_{n=2}^{\infty}b_n=\frac{5}{3}$이고

$$\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\frac{n^2}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log_2\frac{k\cdot k}{(k-1)(k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_2\frac{2\cdot2}{1\cdot3}+\log_2\frac{3\cdot3}{2\cdot4}+\log_2\frac{4\cdot4}{3\cdot5}+\cdots+\log_2\frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\left\{\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\cdots\cdot\frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{2n}{n+1}$$

$$=\log_2 2=1$$

이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\left(b_n-\log_2\frac{n^2}{n^2-1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}b_n-\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\frac{n^2}{n^2-1}=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$$

답 ②

14 직선 $y=\dfrac{1}{n+1}(x-1)$과 이차함수 $y=2x(x-1)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$\dfrac{1}{n+1}(x-1)=2x(x-1)$에서

$$(x-1)\left(2x-\frac{1}{n+1}\right)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\frac{1}{2(n+1)}$$

따라서 점 P_n의 x좌표가 $\dfrac{1}{2(n+1)}$이므로 y좌표는

$$\frac{1}{n+1}\left\{\frac{1}{2(n+1)}-1\right\}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{-2n-1}{2(n+1)}$$
$$=-\frac{2n+1}{2(n+1)^2}$$

$$\therefore S_n=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)^2}=\frac{2n+1}{4(n+1)^2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(S_n-S_{n+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(S_k-S_{k+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{(S_1-S_2)+(S_2-S_3)+\cdots+(S_n-S_{n+1})\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(S_1-S_{n+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{16}-\frac{2n+3}{4(n+2)^2}\right\}$$
$$=\frac{3}{16}$$

답 ③

$S_1=\dfrac{2\cdot1+1}{4(1+1)^2}=\dfrac{3}{16}$

15 $a_n=1+(n-1)\cdot3=3n-2$이므로

$$y_n=\frac{a_n+1}{9a_n-3}=\frac{3n-2+1}{9(3n-2)-3}=\frac{3n-1}{27n-21}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_3\frac{y_{n+1}}{y_n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\log_3 y_{n+1}-\log_3 y_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\log_3 y_{k+1}-\log_3 y_k)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{(\log_3 y_2-\log_3 y_1)+(\log_3 y_3-\log_3 y_2)+\cdots+(\log_3 y_{n+1}-\log_3 y_n)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\log_3 y_{n+1}-\log_3 y_1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\log_3\frac{3n+2}{27n+6}-\log_3\frac{1}{3}\right)$$
$$=\log_3\frac{1}{9}-\log_3\frac{1}{3}$$
$$=-2-(-1)=-1$$

답 -1

$y_{n+1}=\dfrac{3(n+1)-1}{27(n+1)-21}=\dfrac{3n+2}{27n+6}$

Lecture 05 등비급수

L 23쪽

01 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{3}{4}$이고, $-1<\dfrac{3}{4}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$$

답 수렴, 4

$\sqrt{10}-2-1$
$=\sqrt{10}-3$
$=\sqrt{10}-\sqrt{9}>0$
$\therefore \sqrt{10}-2>1$

02 공비가 $\sqrt{10}-2$이고, $\sqrt{10}-2>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

답 발산

03 공비가 $-\dfrac{x}{2}$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1<-\frac{x}{2}<1$$
$$\therefore -2<x<2$$

답 $-2<x<2$

04 공비가 $3x-2$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1<3x-2<1,\qquad 1<3x<3$$
$$\therefore \frac{1}{3}<x<1$$

답 $\dfrac{1}{3}<x<1$

05 색칠한 정사각형의 넓이를 큰 순서대로 S_1, S_2, S_3, $\cdots$이라 하면

$$S_1=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$
$$S_2=S_1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16},$$
$$S_3=S_2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64},$$
$$\vdots$$
$$\therefore S_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

따라서 색칠한 정사각형의 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

답 $\dfrac{1}{3}$

첫째항이 $\dfrac{152}{1000}$, 공비가 $\dfrac{1}{1000}$인 등비급수

06 $0.\dot{1}5\dot{2}=0.152+0.000152+0.000000152+\cdots$

$$=\frac{152}{1000}+\frac{152}{1000^2}+\frac{152}{1000^3}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{152}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}$$
$$=\frac{152}{999}$$

답 $\dfrac{152}{999}$

첫째항이 $\dfrac{7}{100}$, 공비가 $\dfrac{1}{10}$인 등비급수

07 $1.2\dot{7}=1.2+0.07+0.007+0.0007+\cdots$

$$=1.2+\left(\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{7}{10000}+\cdots\right)$$
$$=1.2+\frac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{10}}$$
$$=\frac{12}{10}+\frac{7}{90}=\frac{23}{18}$$

답 $\dfrac{23}{18}$

표준+발전 유형 Q+Q   24쪽

01 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}-5^{n-1}}{10^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^{2n+1}}{10^{n-1}}-\frac{5^{n-1}}{10^{n-1}}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{27\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}27\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\frac{27}{1-\frac{9}{10}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$=270-2$

$=268$ 답 268

02 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$=3\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$ 답 ③

다른 풀이 $\{a_n\}$: 2, 4, 2, 4, 2, 4, …이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{2}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{2}{2^5}+\frac{4}{2^6}+\cdots$

$=(1+1)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)+\cdots$

$=2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)$

$=2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$

$=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

03 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$에서 $\frac{a}{1-r}=2$

$\therefore a=2(1-r)$ …… ㉠

수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 a^2, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=2$에서

$\frac{a^2}{1-r^2}=2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{4(1-r)^2}{1-r^2}=2$, $\frac{(1-r)^2}{(1+r)(1-r)}=\frac{1}{2}$

$\frac{1-r}{1+r}=\frac{1}{2}$, $2-2r=1+r$

$\therefore r=\frac{1}{3}$

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{4}{3}$

따라서 수열 $\{a_n^3\}$은 첫째항이 $a^3=\frac{64}{27}$, 공비가 $r^3=\frac{1}{27}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3=\frac{\frac{64}{27}}{1-\frac{1}{27}}=\frac{32}{13}$ 답 ④

> Q BOX
> $a_n=ar^{n-1}$에서
> $a_n^3=(ar^{n-1})^3$
> $=a^3(r^3)^{n-1}$

04 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$에서 $\frac{a_1}{1-r}=5$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$에서 $\frac{b_1}{1-r}=2$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $\frac{a_1-b_1}{1-r}=3$

이때 $a_1-b_1=1$이므로 $\frac{1}{1-r}=3$

$1-r=\frac{1}{3}$ $\therefore r=\frac{2}{3}$

$r=\frac{2}{3}$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$a_1=\frac{5}{3}$, $b_1=\frac{2}{3}$

따라서 수열 $\{(a_n+b_n)^2\}$은 첫째항이 $(a_1+b_1)^2=\left(\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{49}{9}$, 공비가 $r^2=\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2=\frac{\frac{49}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{49}{5}$ 답 $\frac{49}{5}$

> $a_n=a_1r^{n-1}$, $b_n=b_1r^{n-1}$에서
> $(a_n+b_n)^2$
> $=(a_1r^{n-1}+b_1r^{n-1})^2$
> $=(a_1+b_1)^2(r^2)^{n-1}$

05 주어진 급수의 첫째항이 $x+3$, 공비가 $\frac{x-3}{5}$이므로 급수가 수렴하려면

$x+3=0$ 또는 $-1<\frac{x-3}{5}<1$

$x+3=0$에서 $x=-3$

$-1<\frac{x-3}{5}<1$에서 $-5<x-3<5$

$\therefore -2<x<8$

따라서 정수 x는 -3, -1, 0, 1, …, 7의 10개이다.

답 10

> 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$이 수렴하려면
> $a=0$ 또는 $-1<r<1$

06 주어진 급수의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{\sqrt{2}\cos\pi x-1}{2}$이므로 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{\sqrt{2}\cos\pi x-1}{2}<1$

$-2<\sqrt{2}\cos\pi x-1<2$

$-1<\sqrt{2}\cos\pi x<3$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\pi x<\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\pi x\le1$

> $0<x\le2$일 때, $-1\le\cos\pi x\le1$이고
> $\frac{3\sqrt{2}}{2}>1$이므로
> $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\pi x\le1$

$0<x\le 2$에서 $0<\pi x\le 2\pi$이므로

$$0<\pi x<\frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi<\pi x\le 2\pi$$

$$\therefore 0<x<\frac{3}{4} \text{ 또는 } \frac{5}{4}<x\le 2$$

따라서 x의 값이 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

07 $\log_5(S_n+5)=n+1$에서 $S_n+5=5^{n+1}$

$$\therefore S_n=5^{n+1}-5$$

> 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
> $a_1=S_1$,
> $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge 2)$

(i) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=5^2-5=20$$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=5^{n+1}-5-(5^n-5)\\&=4\cdot 5^n \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=20$은 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$a_n=4\cdot 5^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{16}$$

답 $\frac{1}{16}$

08 $b_n=4^na_n$으로 놓고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=6^n-1$$

(i) $n=1$일 때,

$$b_1=S_1=6-1=5$$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$$\begin{aligned}b_n&=S_n-S_{n-1}\\&=6^n-1-(6^{n-1}-1)\\&=5\cdot 6^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $b_1=5$는 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$b_n=5\cdot 6^{n-1}$$

즉 $4^na_n=5\cdot 6^{n-1}$이므로

$$a_n=\frac{5\cdot 6^{n-1}}{4^n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 6^{n-1}}{4^n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

09 $\overline{\mathrm{OP_1}}=1$, $\overline{\mathrm{P_1P_2}}=\frac{2}{3}$, $\overline{\mathrm{P_2P_3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\overline{\mathrm{P_3P_4}}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $\cdots$이므로

> $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$x=\overline{\mathrm{OP_1}}-\overline{\mathrm{P_2P_3}}+\overline{\mathrm{P_4P_5}}-\overline{\mathrm{P_6P_7}}+\cdots$$

$$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$$

> 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{4}{9}$인 등비급수

$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{9}{13},$$

$$y=\overline{\mathrm{P_1P_2}}-\overline{\mathrm{P_3P_4}}+\overline{\mathrm{P_5P_6}}-\overline{\mathrm{P_7P_8}}+\cdots$$

$$=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5-\left(\frac{2}{3}\right)^7+\cdots$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{6}{13}$$

$$\therefore x+y=\frac{15}{13}$$

답 $\frac{15}{13}$

10 $n=1$은 홀수이므로 점 $\mathrm{P_1}$의 좌표는

$$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$$

$n=2$는 짝수이므로 점 $\mathrm{P_2}$의 좌표는

$$\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ \frac{1}{4}\right)$$

$n=3$은 홀수이므로 점 $\mathrm{P_3}$의 좌표는

$$\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ \frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3\right)$$

$n=4$는 짝수이므로 점 $\mathrm{P_4}$의 좌표는

$$\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^4,\ \frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3\right)$$

$n=5$는 홀수이므로 점 $\mathrm{P_5}$의 좌표는

$$\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^4,\ \frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^5\right)$$

$n=6$은 짝수이므로 점 $\mathrm{P_6}$의 좌표는

$$\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\left(\frac{1}{4}\right)^6,\ \frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^5\right)$$

$$\vdots$$

이때 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$x=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\left(\frac{1}{4}\right)^6+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{15},$$

$$y=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^5+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{4}{15}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{15},\ \frac{4}{15}\right)$이다.

답 $\left(\frac{1}{15},\ \frac{4}{15}\right)$

11 $\angle\mathrm{XOY}=45°$이므로

$$\overline{\mathrm{P_0P_1}}=10\sin 45°=10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$$

$\angle\mathrm{OP_0P_1}=45°$이므로

$$\overline{\mathrm{P_1P_2}}=\overline{\mathrm{P_0P_1}}\sin 45°=5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5$$

$\angle\mathrm{OP_1P_2}=45°$이므로

$$\overline{\mathrm{P_2P_3}}=\overline{\mathrm{P_1P_2}}\sin 45°=5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\angle OP_2P_3=45^\circ$이므로

$$\overline{P_3P_4}=\overline{P_2P_3}\sin 45^\circ=5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nP_{n+1}}=5+5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+5\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{5}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{10}{2-\sqrt{2}}$$

$$=10+5\sqrt{2}$$

답 $10+5\sqrt{2}$

12 $\overline{A_1A_2}=5$이므로 $\quad l_1=\pi\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\pi$

$\overline{A_nA_{n+1}}$을 $2:3$으로 내분하는 점이 A_{n+2}이므로

$$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}=\frac{3}{5}\overline{A_nA_{n+1}}$$

이때 $l_n=\pi\cdot\frac{\overline{A_nA_{n+1}}}{2}$이므로

$$l_{n+1}=\pi\cdot\frac{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}}{2}=\frac{3}{5}\cdot\pi\cdot\frac{\overline{A_nA_{n+1}}}{2}=\frac{3}{5}l_n$$

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{5}{2}\pi$, 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{5}{2}\pi}{1-\frac{3}{5}}=\frac{25}{4}\pi$$

답 $\frac{25}{4}\pi$

쌤 한마디

같은 과정이 한없이 반복되어 만들어지는 도형에서 길이나 넓이 등의 합을 구할 때, 다음과 같이 도형의 닮음비를 이용하면 공비 r를 쉽게 구할 수 있다.

- n 번째 얻은 도형과 $(n+1)$ 번째 얻은 도형의 닮음비가 $a:b\ (a>b)$일 때,

  ① 길이의 비는 $a:b$이므로 $\quad r=\frac{b}{a}$

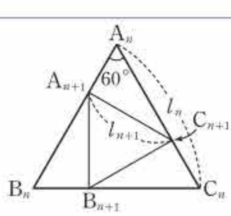
  ② 넓이의 비는 $a^2:b^2$이므로 $\quad r=\frac{b^2}{a^2}$

12번에서 $\overline{A_nA_{n+1}}$을 지름으로 하는 반원을 C_n이라 하면 두 반원 C_n, C_{n+1}의 닮음비는 $5:3$이므로

$$l_n:l_{n+1}=5:3 \qquad \therefore r=\frac{3}{5}$$

13 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이를 l_n이라 하면



$$\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{1}{3}l_n,$$

$$\overline{A_nC_{n+1}}=\frac{2}{3}l_n$$

$\triangle A_nA_{n+1}C_{n+1}$에서 코사인법칙에 의하여

$$l_{n+1}^{\ 2}=\left(\frac{1}{3}l_n\right)^2+\left(\frac{2}{3}l_n\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}l_n\cdot\frac{2}{3}l_n\cdot\cos 60^\circ$$

$$=\frac{1}{3}l_n^{\ 2}$$

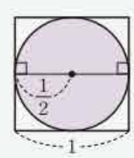
Q BOX

$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nP_{n+1}}$
$=\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\cdots$
이므로 첫째항이 $\overline{P_1P_2}$임에 주의한다.

$$\frac{10}{2-\sqrt{2}}=\frac{10(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{10(2+\sqrt{2})}{2}=10+5\sqrt{2}$$

$\overline{BP_n}=\frac{3}{2}a_n$이므로

$$\overline{BP_{n+1}}=\overline{BP_n}-\overline{P_nP_{n+1}}=\frac{3}{2}a_n-a_{n+1}$$



첫 번째 시행에서 만들어진 정사각형의 한 변의 길이가 1이므로 그에 내접하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}$이다.

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$(n+1)$ 번째 시행에서 새로 색칠한 원의 개수는 n 번째 시행에서 새로 색칠한 원의 개수의 4배이다.

이때 $S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}l_n^{\ 2}$이므로

$$S_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}l_{n+1}^{\ 2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}l_n^{\ 2}=\frac{1}{3}S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

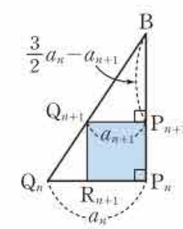
14 $\triangle ABC\backsim\triangle P_1BQ_1$ (AA 닮음)이므로

$$2:3=\overline{P_1Q_1}:\overline{BP_1},\qquad 2:3=\overline{P_1Q_1}:(3-\overline{P_1Q_1})$$

$$6-2\overline{P_1Q_1}=3\overline{P_1Q_1}\qquad \therefore \overline{P_1Q_1}=\frac{6}{5}$$

$$\therefore S_1=\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{P_nQ_n}=a_n$이라 하고 같은 방법으로 하면



$$2:3=a_{n+1}:\left(\frac{3}{2}a_n-a_{n+1}\right)$$

$$3a_n-2a_{n+1}=3a_{n+1}$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n$$

이때 $S_n=a_n^{\ 2}$이므로

$$S_{n+1}=a_{n+1}^{\ 2}=\left(\frac{3}{5}a_n\right)^2=\frac{9}{25}a_n^{\ 2}=\frac{9}{25}S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{36}{25}$, 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{36}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9}{4}$$

답 $\frac{9}{4}$

15 첫 번째 시행에서 색칠한 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}$이므로 이 원의 넓이는

$$\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}$$

n 번째 시행에서 새로 색칠한 한 원의 반지름의 길이를 a_n, 새로 색칠한 원의 넓이의 합을 S_n이라 하면 새로 색칠한 원의 개수는 4^{n-1}이므로

$$S_n=4^{n-1}\cdot\pi\cdot a_n^{\ 2}$$

이때 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$이므로

$$S_{n+1}=4^n\cdot\pi\cdot a_{n+1}^{\ 2}=4^n\cdot\pi\cdot\frac{1}{9}a_n^{\ 2}$$

$$=\frac{4}{9}\cdot 4^{n-1}\cdot\pi\cdot a_n^{\ 2}=\frac{4}{9}S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{4}$, 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이므로 구하는 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{20}\pi$$

답 $\frac{9}{20}\pi$

16 $S_1=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$

도형 T_n의 한 직각이등변삼각형의 넓이를 a_n이라 하면 도형 T_n의 직각이등변삼각형의 개수는 3^n이므로

$$S_n=3^n a_n$$

이때 $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$이므로

$$S_{n+1}=3^{n+1}a_{n+1}=\frac{3}{4}\cdot 3^n a_n=\frac{3}{4}S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{4}}=6$$

답 6

17 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이

$$0.0\dot{x}=0.0x+0.00x+0.000x+\cdots$$
$$=\frac{x}{100}+\frac{x}{1000}+\frac{x}{10000}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{x}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{x}{90}$$

공비가

$$0.\dot{x}=0.x+0.0x+0.00x+\cdots$$
$$=\frac{x}{10}+\frac{x}{100}+\frac{x}{1000}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{x}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{x}{9}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{x}{90}}{1-\frac{x}{9}}=\frac{x}{90-10x}$$

따라서 $\frac{x}{90-10x}=\frac{1}{8}$이므로

$$8x=90-10x,\qquad 18x=90$$
$$\therefore\ x=5$$

답 ③

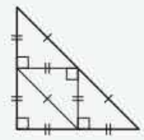
18 $\frac{4}{11}=0.\dot{3}\dot{6}$이므로 자연수 k에 대하여

$$a_{2k-1}=3,\ a_{2k}=6$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k-1}}{5^{2k-1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}}{5^{2k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{5^{2k-1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{5^{2k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{25}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{25}}+\frac{\frac{6}{25}}{1-\frac{1}{25}}$$
$$=\frac{5}{8}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{7}{8}$$

답 $\frac{7}{8}$

Q BOX



직각이등변삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 4개의 직각이등변삼각형은 모두 합동이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{k=1}^{\infty}b_{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}b_{2k}$

중단원 마무리

27쪽

01 전략 $a^m b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)의 모든 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)$임을 이용한다.

풀이 $a_n=(n+1)\{(n+1)+1\}=(n+1)(n+2)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ①

02 전략 먼저 조건 (가)를 이용하여 b_n을 a_n과 a_{n+1}에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 조건 (가)에서 $\log(a_n a_{n+1} b_n)=0$

$$\therefore\ a_n a_{n+1} b_n=1$$

이때 $0<a_n<a_{n+1}$이므로

$$b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+3n}\right)$$
$$=\frac{1}{3a_1}$$

따라서 $\frac{1}{3a_1}=\frac{1}{12}$이므로

$$a_1=4$$

답 ⑤

03 전략 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 제n항까지의 부분합 S_n에 대하여 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\alpha$ (α는 실수)이면 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha$이다.

풀이 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_{2n-1}=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k a_{k+1}-\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}a_k$

$=(-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n})$

$\quad-(a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1})$

$=-a_1-a_{2n},$

$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k a_{k+1}-\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}a_k$

$=(-a_2+a_3-a_4+\cdots-a_{2n}+a_{2n+1})$

$\quad-(a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots-a_{2n})$

$=-a_1+a_{2n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(-a_1-a_{2n})$

$=\lim_{n\to\infty}\left(-\log_2 2-\log_2\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

$=-1-\log_2 1=-1,$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}(-a_1+a_{2n+1})$

$=\lim_{n\to\infty}\left(-\log_2 2+\log_2\frac{2n+4}{2n+2}\right)$

$=-1+\log_2 1=-1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=-1$ 답 -1

04 전략 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$임을 이용한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=4+(n-1)\cdot d=nd+4-d$

이때 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{nd+4-d}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0$

$d-3=0 \qquad \therefore d=3$

따라서 $a_n=3n+1$이므로

$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)-\left(3+\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{2}$ 답 ③

05 전략 $\frac{2^n a_n-2^{n+1}}{2^n+1}=b_n$으로 놓고 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n a_n-2^{n+1}}{2^n+1}=0$

$\frac{2^n a_n-2^{n+1}}{2^n+1}=b_n$으로 놓으면

$2^n a_n-2^{n+1}=(2^n+1)b_n$

$\therefore a_n=\frac{(2^n+1)b_n+2^{n+1}}{2^n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n+1)b_n+2^{n+1}}{2^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)b_n+2\right\}$

$=1\cdot 0+2=2$ 답 ②

06 전략 급수와 수열의 극한값 사이의 관계와 급수의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(a_n+b_n)+\frac{5}{2}(a_n-b_n)\right\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)+\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$

$=\frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2}\beta$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)$도 수렴한다.

ㄴ. [반례] $a_n=0$, $b_n=1$이면

$a_nb_n=0$

따라서 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 모두 0으로 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty}b_n=1\neq 0$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다.

ㄷ. [반례] $a_n=1$, $b_n=2$이면

$a_nb_n=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}b_n$이 모두 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2\neq 0$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 발산한다.

ㄹ. [반례] $\{a_n\}$: $1, -1, 1, -1, 1, \cdots$

$\{b_n\}$: $-1, 1, -1, 1, -1, \cdots$

$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$이므로 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 모두 발산하지만 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

07 전략 반지름의 길이가 r인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 할 때, $d=r$이면 원과 직선은 접한다.

풀이 원의 접선의 방정식을 $y=-x+k$ $(k>0)$라 하면 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{\frac{1}{n(n+1)}}$

Q BOX

$3a_n-2b_n$
$=p(a_n+b_n)+q(a_n-b_n)$
(p, q는 상수)
으로 놓으면
$p+q=3$, $p-q=-2$
$\therefore p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{5}{2}$

$\frac{3n+7}{n+2}=\frac{3(n+2)+1}{n+2}$
$=3+\frac{1}{n+2}$

원점과 직선
$ax+by+c=0$ 사이의 거리는
$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\therefore k=\sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}\ (\because k>0)$$

따라서 접선의 방정식은 $y=-x+\sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}$이므로

$$a_n=\sqrt{\frac{2}{n(n+1)}},\ b_n=\sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\&=2\cdot1=2\end{aligned}$$

답 ④

08 전략 첫째항이 a, 공비가 $r\ (-1<r<1)$인 등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

풀이 $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$에서 $-\frac{1}{2}\le\sin x\le\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}\le-\sin x\le\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}\le2-\sin x\le\frac{5}{2}$

$$\therefore \frac{2}{5}\le\frac{1}{2-\sin x}\le\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\cos^2x\left(\frac{1}{2-\sin x}\right)^{n-1}\\&=\frac{\cos^2x}{1-\frac{1}{2-\sin x}}=\frac{1-\sin^2x}{\frac{1-\sin x}{2-\sin x}}\\&=\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\frac{1-\sin x}{2-\sin x}}\\&=(1+\sin x)(2-\sin x)\\&=-\sin^2x+\sin x+2\end{aligned}$$ ··· ❶

$\sin x=t$로 놓으면 $-\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}$이고

$$\begin{aligned}f(x)&=-t^2+t+2\\&=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$는 $t=\frac{1}{2}$, 즉 $x=\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 $\frac{9}{4}$를 가지므로

$a=\frac{\pi}{6}$, $M=\frac{9}{4}$ ··· ❷

$\therefore aM=\frac{3}{8}\pi$ ··· ❸

답 $\frac{3}{8}\pi$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 $\sin x$에 대한 함수로 변형할 수 있다.	60 %
❷	a, M의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	aM의 값을 구할 수 있다.	10 %

Q BOX

$t=\frac{1}{2}$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$

$\left(\because -\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{a^2}{1-r^2}\div\frac{a}{1+r}$

$=\frac{a^2}{(1+r)(1-r)}\cdot\frac{1+r}{a}$

$=\frac{a}{1-r}$

$a>0$, $r>0$에서

$a^2r^4>0$

$\therefore 8a^2r^4\ne0$

$0\le b^2<1$에서

$-1<b<1$

09 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r로 놓고 a, r에 대한 두 방정식을 세운다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$a_n=ar^{n-1}$$

이때

$$a_{2n-1}-a_{2n}=ar^{2n-2}-ar^{2n-1}=a(1-r)(r^2)^{n-1}$$

이므로 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$은 첫째항이 $a(1-r)$, 공비가 r^2인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$에서

$$\frac{a(1-r)}{1-r^2}=3,\quad \frac{a(1-r)}{(1+r)(1-r)}=3$$

$$\therefore \frac{a}{1+r}=3 \quad\cdots\cdots ㉠$$

한편 수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 a^2, 공비가 r^2인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=6$에서

$$\frac{a^2}{1-r^2}=6 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면 $\frac{a}{1-r}=2$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=2$$

답 ②

참고 두 등비수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$, $\{a_n^2\}$의 공비 r^2의 값의 범위가 $0\le r^2<1$, 즉 $-1<r<1$이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴한다.

10 전략 세 수 x, y, z가 이 순서대로 등비수열을 이루면 $y^2=xz$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 $r\ (r>0)$라 하면 $2a_2=2ar$, $3a_3=3ar^2$, $4a_6=4ar^5$이고, $2a_2$, $3a_3$, $4a_6$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(3ar^2)^2=2ar\cdot4ar^5,\quad 9a^2r^4=8a^2r^6$$

$$r^2=\frac{9}{8}\qquad \therefore r=\frac{3}{2\sqrt{2}}\ (\because r>0)$$

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a}$, 공비가 $\frac{1}{r}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{3}{a(3-2\sqrt{2})}$$

따라서 $\frac{3}{a(3-2\sqrt{2})}=3+2\sqrt{2}$이므로

$$a=\frac{3}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=3$$

$$\therefore a_3=ar^2=3\cdot\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{27}{8}$$

답 $\frac{27}{8}$

11 전략 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하면 $-1<r<1$임을 이용한다.

풀이 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b^{2n}$이 모두 수렴하므로

$$-1<a<1 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$-1<b<1 \quad\cdots\cdots ㉡$$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{a+b}{2}$인 등비급수이고 ㉠, ㉡에서

$$-2<a+b<2$$

$$\therefore\ -1<\frac{a+b}{2}<1$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(ab)^n$은 첫째항과 공비가 모두 ab인 등비급수이고 ㉠, ㉡에서

$$-1<ab<1$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄷ. [반례] $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$이면 $\quad \frac{b}{a}=\frac{3}{2}>1$

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n$의 공비가 $\frac{b}{a}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}(|a|-|b|)^n$은 첫째항과 공비가 모두 $|a|-|b|$인 등비급수이고 ㉠, ㉡에서

$$0\le|a|<1,\ 0\le|b|<1$$

$$\therefore\ -1<|a|-|b|<1$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

쌤한마디

부등식의 사칙계산

실수 x, y에 대하여 $a<x<b$, $c<y<d$일 때

① $a+c<x+y<b+d$

② $a-d<x-y<b-c$

③ a, b, c, d가 양수이면

$\quad ac<xy<bd$

④ a, b, c, d 중에 음수가 있으면 ac, ad, bc, bd 중에서

$\quad$(최솟값)$<xy<$(최댓값)

12 **전략** 수열 $\left\{\frac{c^n+d^n}{a^n+b^n}\right\}$ (a, b, c, d는 실수) 꼴의 극한값은 $|a|>|b|$이면 a^n, $|a|<|b|$이면 b^n으로 분자, 분모를 각각 나누어 구한다.

풀이 조건 ㈎에서 주어진 급수의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{r-2}{5}$이고 급수가 수렴하므로

$$-1<\frac{r-2}{5}<1, \qquad -5<r-2<5$$

$$\therefore\ -3<r<7$$

(i) $-3<r<3$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-3^{2n}+3^{n-1}}{r^{2n+1}+2^{n+5}+3^{2n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{r^2}{9}\right)^n-1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{r\cdot\left(\frac{r^2}{9}\right)^n+32\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n+3}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

Q BOX

$0\le r^2<9$이므로 분자, 분모를 각각 9^n으로 나눈다.

(ii) $r=3$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-3^{2n}+3^{n-1}}{r^{2n+1}+2^{n+5}+3^{2n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}}{2^{n+5}+2\cdot3^{2n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{32\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n+6}=0$$

따라서 조건 ㈏를 만족시키지 않는다.

(iii) $3<r<7$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-3^{2n}+3^{n-1}}{r^{2n+1}+2^{n+5}+3^{2n+1}}$$

$r^2>9$이므로 분자, 분모를 각각 r^{2n}으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{9}{r^2}\right)^n+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{r^2}\right)^n}{r+32\cdot\left(\frac{2}{r^2}\right)^n+3\cdot\left(\frac{9}{r^2}\right)^n}=\frac{1}{r}$$

이때 $\frac{1}{7}<\frac{1}{r}<\frac{1}{3}$이므로 조건 ㈏를 만족시키지 않는다.

이상에서 두 조건 ㈎, ㈏를 모두 만족시키는 r의 값의 범위는

$$-3<r<3$$

따라서 정수 r는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

답 5

13 **전략** $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)임을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $2a_n=5S_n-5$, 즉 $S_n=\frac{2a_n+5}{5}$에서

$$S_{n+1}=\frac{2a_{n+1}+5}{5}$$

이때 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)이므로

$$a_{n+1}=\frac{2a_{n+1}+5}{5}-\frac{2a_n+5}{5}$$

$$5a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n \qquad \therefore\ a_{n+1}=-\frac{2}{3}a_n$$

한편 $a_1=S_1$이므로 $2a_n=5S_n-5$의 양변에 $n=1$을 대입하면

$$2a_1=5a_1-5 \qquad \therefore\ a_1=\frac{5}{3}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=\frac{5}{3}$, 공비가 $-\frac{2}{3}$인 등비수열이므로 $a_1+a_4+a_7+a_{10}+\cdots$은 첫째항이 $a_1=\frac{5}{3}$, 공비가 $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{8}{27}$인 등비급수이다.

$$\therefore\ a_1+a_4+a_7+a_{10}+\cdots=\frac{\frac{5}{3}}{1-\left(-\frac{8}{27}\right)}=\frac{9}{7}$$

답 ③

14 **전략** 등비급수의 합을 이용하여 두 점 P_n, Q_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 구한다.

풀이 두 점 P_n, Q_n이 한없이 가까워지는 점을 각각 $\mathrm{P}(x_p,\ y_p)$, $\mathrm{Q}(x_q,\ y_q)$라 하자.

점 P_n은 제1사분면 위의 점이므로

$\quad x_p>0,\ y_p>0$

점 Q_n은 제2사분면 위의 점이므로

$\quad x_q<0,\ y_q>0$

$\overline{\mathrm{OP_1}}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP_1}}+\overline{\mathrm{P_1P_2}}+\overline{\mathrm{P_2P_3}}+\cdots$$
$$=\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\frac{4}{5}+\sqrt{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{1-\frac{4}{5}}=5\sqrt{5}$$

이때 직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라 하면

QBOX: $\mathrm{P_1}(2,\ 1)$, $\overline{\mathrm{OP_1}}=\sqrt{5}$이므로

$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$x_p=\overline{\mathrm{OP}}\cos\alpha=5\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=10,$$
$$y_p=\overline{\mathrm{OP}}\sin\alpha=5\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=5$$
$$\therefore \mathrm{P}(10,\ 5)$$

$\overline{\mathrm{OQ_1}}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OQ_1}}+\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}+\overline{\mathrm{Q_2Q_3}}+\cdots$$
$$=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{3}{4}}=4\sqrt{2}$$

이때 직선 OQ가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β라 하면

$\mathrm{Q_1}(-1,\ 1)$, $\overline{\mathrm{OQ_1}}=\sqrt{2}$이므로

$\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$x_q=\overline{\mathrm{OQ}}\cos\beta=4\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-4,$$
$$y_q=\overline{\mathrm{OQ}}\sin\beta=4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$
$$\therefore \mathrm{Q}(-4,\ 4)$$

따라서 점 M_n이 한없이 가까워지는 점을 M이라 하면 점 M은 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점이므로 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{10+(-4)}{2},\ \frac{5+4}{2}\right),\ 즉\ \left(3,\ \frac{9}{2}\right)$$

답 $\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$

15 전략 먼저 둘레의 길이가 l_n인 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하고 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $l_1=4\cdot 4=16$

둘레의 길이가 l_n인 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$$a_n : a_{n+1}=\sqrt{2} : 1 \qquad \therefore a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n$$

직각이등변삼각형의 세 변의 길이의 비는 $1 : 1 : \sqrt{2}$이므로

$a_n : a_{n+1}=\sqrt{2} : 1$

이때 $l_n=4a_n$이므로

$$l_{n+1}=4a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4a_n=\frac{\sqrt{2}}{2}l_n \quad \cdots ❶$$

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{16}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{32}{2-\sqrt{2}}=32+16\sqrt{2} \quad \cdots ❷$$

$$\frac{32}{2-\sqrt{2}}=\frac{32(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=16(2+\sqrt{2})=32+16\sqrt{2}$$

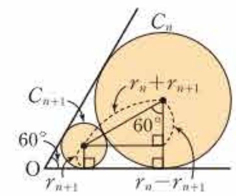
답 $32+16\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	l_n과 l_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷	$\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값을 구할 수 있다.	60 %

16 전략 먼저 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하고 r_n과 r_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $S_1=\pi\cdot 1^2=\pi$

원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 오른쪽 그림에서



$$\frac{r_n-r_{n+1}}{r_n+r_{n+1}}=\frac{1}{2}$$

$\cos 60°$

$$2r_n-2r_{n+1}=r_n+r_{n+1}$$
$$\therefore r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$$

이때 $S_n=\pi r_n^{\ 2}$이므로

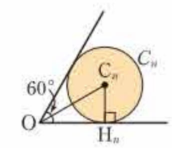
$$S_{n+1}=\pi r_{n+1}^{\ \ 2}=\frac{1}{9}\pi r_n^{\ 2}=\frac{1}{9}S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 π, 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\pi}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}\pi$$

답 ①

참고 오른쪽 그림과 같이 원 C_n의 중심을 C_n, 원 C_n과 $\overline{\mathrm{OY}}$의 접점을 H_n이라 하면



$$\angle \mathrm{C}_n\mathrm{OH}_n=\frac{1}{2}\cdot 60°=30°$$
$$\therefore \angle \mathrm{OC}_n\mathrm{H}_n=60°$$

17 전략 7^n을 10으로 나누었을 때의 나머지는 7^n의 일의 자리의 숫자와 같음을 이용하여 a_n을 구한다.

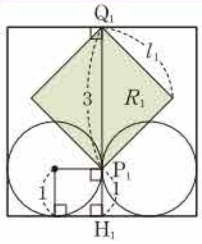
풀이 7^n을 10으로 나누었을 때의 나머지는 7^n의 일의 자리의 숫자와 같으므로

$$a_1=7,\ a_2=9,\ a_3=3,\ a_4=1,$$
$$a_5=7,\ a_6=9,\ a_7=3,\ a_8=1,\ \cdots$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$$
$$=\frac{7}{2}+\frac{9}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{7}{2^5}+\frac{9}{2^6}+\frac{3}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\frac{7}{2^9}+\frac{9}{2^{10}}+\frac{3}{2^{11}}+\frac{1}{2^{12}}+\cdots$$
$$=\frac{7}{2}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots\right)+\frac{9}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots\right)+\frac{3}{2^3}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots\right)+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots\right)$$
$$=\left(\frac{7}{2}+\frac{9}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots\right)$$
$$=\frac{7\cdot 2^3+9\cdot 2^2+3\cdot 2+1}{2^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^4}}$$
$$=\frac{99}{16}\cdot\frac{16}{15}$$
$$=\frac{33}{5}$$

답 $\frac{33}{5}$

18 전략 정사각형 R_n에 그려지는 원의 반지름의 길이가 $\frac{l_n}{4}$임을 이용하여 l_n과 l_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 P_1Q_1이 가장 큰 정사각형과 만나는 점을 H_1이라 하면 $\overline{P_1H_1}=1$이므로



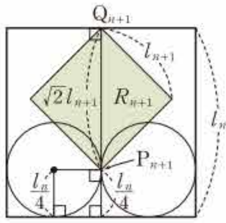
$$\overline{P_1Q_1}=4-1=3$$

정사각형 R_1의 한 변의 길이가 l_1이므로

$$l_1^2+l_1^2=3^2, \qquad l_1^2=\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ l_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ (\because\ l_1>0)$$

오른쪽 그림에서 정사각형 R_{n+1}의 한 변의 길이가 l_{n+1}이므로 대각선의 길이는 $\sqrt{2}l_{n+1}$이고, 정사각형 R_n에 그려지는 원의 반지름의 길이는 $\frac{l_n}{4}$이므로



$$\sqrt{2}l_{n+1}=l_n-\frac{l_n}{4}=\frac{3}{4}l_n$$

$$\therefore\ l_{n+1}=\frac{3\sqrt{2}}{8}l_n$$

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 공비가 $\frac{3\sqrt{2}}{8}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{3\sqrt{2}}{8}}=\frac{12\sqrt{2}}{8-3\sqrt{2}}=\frac{12(3+4\sqrt{2})}{23}$$

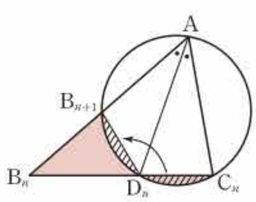
답 ①

참고 두 정사각형 R_n과 R_{n+1}은 닮음이고, 닮음비는 가장 큰 정사각형과 정사각형 R_1의 닮음비인 $4:\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 즉 $1:\frac{3\sqrt{2}}{8}$와 같으므로

$$l_{n+1}=\frac{3\sqrt{2}}{8}l_n$$

19 **전략** 먼저 넓이가 서로 같은 부분을 찾아 색칠한 부분과 넓이가 같은 도형을 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서
$\angle B_{n+1}AD_n=\angle D_nAC_n$
이므로



$$\widehat{B_{n+1}D_n}=\widehat{D_nC_n}$$

즉 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 그림 R_n에서 새로 색칠한 부분인 ◿◡의 넓이는 $\triangle B_{n+1}B_nD_n$의 넓이와 같다.

$\triangle AB_1C_1$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1C_1}^2=\overline{AB_1}^2+\overline{AC_1}^2-2\cdot\overline{AB_1}\cdot\overline{AC_1}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{2}=7$$

$$\therefore\ \overline{B_1C_1}=\sqrt{7}\ (\because\ \overline{B_1C_1}>0)$$

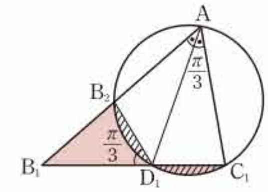
또 $\triangle AB_1C_1$에서 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{B_1D_1}:\overline{D_1C_1}=\overline{AB_1}:\overline{AC_1}=3:2$$

$$\therefore\ \overline{B_1D_1}=\frac{3}{5}\overline{B_1C_1}=\frac{3\sqrt{7}}{5},$$

$$\overline{D_1C_1}=\frac{2}{5}\overline{B_1C_1}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{B_2D_1}$을 그으면 $\square AB_2D_1C_1$이 원에 내접하므로



$$\angle B_1D_1B_2=\angle B_2AC_1=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\ S_1=\triangle B_2B_1D_1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\overline{B_1D_1}\cdot\overline{B_2D_1}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{21\sqrt{3}}{50}$$

한편 $\overline{B_nD_n}\,/\!/\,\overline{B_{n+1}D_{n+1}}$이므로 두 삼각형 AB_nD_n, $AB_{n+1}D_{n+1}$은 닮음이고, 닮음비는 두 삼각형 AB_1D_1, AB_2D_2의 닮음비와 같다.

이때 $\triangle B_2B_1D_1$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1B_2}^2=\overline{B_1D_1}^2+\overline{B_2D_1}^2-2\cdot\overline{B_1D_1}\cdot\overline{B_2D_1}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2-2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{49}{25}$$

$$\therefore\ \overline{B_1B_2}=\frac{7}{5}\ (\because\ \overline{B_1B_2}>0)$$

$$\therefore\ \overline{AB_2}=\overline{AB_1}-\overline{B_1B_2}=3-\frac{7}{5}=\frac{8}{5}$$

두 삼각형 AB_1D_1, AB_2D_2의 닮음비가 $3:\frac{8}{5}$, 즉 $1:\frac{8}{15}$이므로 그림 R_n에서 새로 색칠한 부분과 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 비는

$$1^2:\left(\frac{8}{15}\right)^2=1:\frac{64}{225}$$

$$\therefore\ S_n=S_1+\frac{64}{225}S_1+\left(\frac{64}{225}\right)^2S_1+\cdots+\left(\frac{64}{225}\right)^{n-1}S_1$$

$$=\sum_{k=1}^{n}S_1\cdot\left(\frac{64}{225}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{21\sqrt{3}}{50}\cdot\left(\frac{64}{225}\right)^{k-1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{21\sqrt{3}}{50}\cdot\left(\frac{64}{225}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\frac{64}{225}}=\frac{27\sqrt{3}}{46}$$

답 ①

QBOX

두 원의 공통인 접선

$\angle B_2AD_1=\angle D_1AC_1$이므로
$\overline{B_2D_1}=\overline{D_1C_1}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$

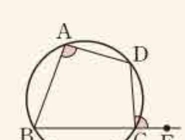
$\overline{AB_1}:\overline{AB_2}$

한 원에서 같은 크기의 원주각에 대한 호의 길이는 같다.

쌤한마디

원에 내접하는 사각형의 성질

원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃한 내각의 대각의 크기와 같다.



⊙ $\angle A=\angle DCE$

03 지수함수와 로그함수의 미분

Lecture 06 지수함수와 로그함수의 극한

35쪽

01 $\lim_{x\to0}3^x=3^0=1$ 답 1

02 $\lim_{x\to-1}\left(\frac{7}{6}\right)^x=\left(\frac{7}{6}\right)^{-1}=\frac{6}{7}$ 답 $\frac{6}{7}$

03 $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x-4\right\}=0-4=-4$ 답 -4

04 $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{2^{2x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=\infty$ 답 ∞

05 $\lim_{x\to\infty}\frac{8^x+3^x}{8^x-3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\left(\frac{3}{8}\right)^x}{1-\left(\frac{3}{8}\right)^x}=1$ 답 1

06 $\lim_{x\to\infty}(5^x-6^x)=\lim_{x\to\infty}6^x\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^x-1\right\}$

이때 $\lim_{x\to\infty}6^x=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^x-1\right\}=-1$이므로

$\lim_{x\to\infty}6^x\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^x-1\right\}=-\infty$ 답 $-\infty$

07 $\lim_{x\to4}\log_2 x=\log_2 4=2$ 답 2

08 $\lim_{x\to1}\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+1)=\log_{\frac{1}{3}}3=-1$ 답 -1

09 $\lim_{x\to0+}\log_3 27x=\lim_{x\to0+}(3+\log_3 x)=-\infty$ 답 $-\infty$

10 $x-2=t$로 놓으면 $x\to2+$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to2+}\log_{\frac{1}{5}}(x-2)=\lim_{t\to0+}\log_{\frac{1}{5}}t=\infty$ 답 ∞

11 $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(2x+3)-\log_2 x\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{2x+3}{x}$

$=\log_2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x}\right)$

$=\log_2 2=1$ 답 1

12 답 e

13 $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right\}^2=e^2$ 답 e^2

14 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right\}^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$ 답 $e^{\frac{1}{3}}$

15 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-2}$

$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ 답 $\frac{1}{e^2}$

Q BOX

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때, $a^{\log_a b}=b$

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$일 때, $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

$\lim_{x\to0}\frac{3x}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^{3x}-1}{3x}}=1$

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha\beta$

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}f(x)$가 존재하고 $f(x)>0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)>0$이면

$\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}=\log_a\{\lim_{x\to\infty}f(x)\}$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

16 $\ln\sqrt[3]{e^2}=\ln e^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

17 $\ln\frac{1}{e^2}=\ln e^{-2}=-2$ 답 -2

18 $e^{2\ln2}=e^{\ln4}=4$ 답 4

19 $\frac{1}{\log_2 e}+\frac{1}{\log_3 e}=\ln2+\ln3=\ln6$ 답 $\ln6$

20 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)}{-2x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

21 $\lim_{x\to0}\frac{5x}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{e^{3x}-1}\cdot\frac{5}{3}$

$=1\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$ 답 $\frac{5}{3}$

22 $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)-(e^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}-\frac{e^x-1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2-\frac{e^x-1}{x}\right)$

$=1\cdot2-1=1$ 답 1

다른 풀이 $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\lim_{x\to0}e^x\cdot\frac{e^x-1}{x}=1\cdot1=1$

23 $\lim_{x\to0}\frac{\log_5(1+x)^5}{x}=\lim_{x\to0}\frac{5\log_5(1+x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\log_5(1+x)}{x}\cdot5$

$=\frac{1}{\ln5}\cdot5=\frac{5}{\ln5}$ 답 $\frac{5}{\ln5}$

24 $\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}\cdot\frac{1}{3}$

$=\ln3\cdot\frac{1}{3}=\frac{\ln3}{3}$ 답 $\frac{\ln3}{3}$

표준+발전 유형 Q+Q

36쪽

01 $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-a\cdot3^{x+1}}{2^{x+1}+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-3a}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=-3a$

따라서 $-3a=15$이므로

$a=-5$ 답 ①

02 $-x=t$로 놓으면 $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-4x^3+1}{x^3+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{3^{-t}+4t^3+1}{-t^3+2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{3^t\cdot t^3}+4+\frac{1}{t^3}}{-1+\frac{2}{t^3}}$$
$$=-4$$

답 -4

03 $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(2x+1)-2\log_2(x-1)+\log_2(4x+3)\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{(2x+1)(4x+3)}{(x-1)^2}$$
$$=\log_2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+10x+3}{x^2-2x+1}\right)$$
$$=\log_2 8=3$$

답 3

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한에서 분자의 차수와 분모의 차수가 같으면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

04 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_3(16^x+5^x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_3(16^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_3\left[16^x\left\{1+\left(\frac{5}{16}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_3\left[(16^x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left\{1+\left(\frac{5}{16}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}\right]$$
$$=\log_3\left[\lim_{x\to\infty}16\left\{1+\left(\frac{5}{16}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}\right]$$
$$=\log_3(16\cdot1)$$
$$=\log_3 16=4\log_3 2$$

답 ①

05 $\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}+\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$

$$=\lim_{x\to0}\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\}^{-6}+\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^6$$
$$=e^{-6}+e^6=e^6+\frac{1}{e^6}$$
$$\therefore k=6$$

답 ④

06 ㄱ. $\lim_{x\to0}(x^2+2x+1)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\{(x+1)^2\}^{\frac{1}{x}}$
$$=\lim_{x\to0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^2$$
$$=e^2$$

ㄴ. $x+2=t$로 놓으면 $x \to -2$일 때 $t \to 0$이므로
$$\lim_{x\to-2}(x+3)^{\frac{1}{x+2}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

ㄹ. $-x=t$로 놓으면 $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^{-1}$$
$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

이상에서 극한값이 e인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

07 $\lim_{x\to0}\{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+10x)\}^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}(1+2x)^{\frac{1}{x}}(1+3x)^{\frac{1}{x}}\cdots(1+10x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^2\cdot\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^3$$
$$\cdots\cdot\{(1+10x)^{\frac{1}{10x}}\}^{10}$$
$$=e\cdot e^2\cdot e^3\cdot\cdots\cdot e^{10}$$
$$=e^{1+2+3+\cdots+10}=e^{55}$$

답 e^{55}

$1+2+3+\cdots+10$
$=\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\cdot11}{2}=55$

08 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{\log_2(1+3x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}\cdot\frac{3x}{\log_2(1+3x)}\cdot\frac{a}{3}$$
$$=1\cdot\ln2\cdot\frac{a}{3}=\frac{a}{3}\ln2$$

따라서 $\frac{a}{3}\ln2=\ln2\sqrt{2}=\frac{3}{2}\ln2$이므로

$$\frac{a}{3}=\frac{3}{2}\qquad\therefore a=\frac{9}{2}$$

답 ④

09 $\lim_{x\to\infty}x\{\ln(x+2)-\ln(x-1)\}$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{3}{x-1}\right)$$

$\frac{3}{x-1}=t$로 놓으면 $x \to \infty$일 때 $t \to 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{3}{x-1}\right)=\lim_{t\to0+}(t+3)\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}$$
$$=3\cdot1=3$$

답 3

$\frac{3}{x-1}=t$에서
$\frac{3}{t}=x-1$
$\therefore x=\frac{3}{t}+1=\frac{t+3}{t}$

10 $x-2=t$로 놓으면 $x \to 2$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{e^{x-2}-(x-1)^2}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-(t+1)^2}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-(t^2+2t+1)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{e^t-1}{t}-t-2\right)$$
$$=1-0-2$$
$$=-1$$

답 -1

11 $\lim_{x\to0}\frac{27^x-9^x-3^x+1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(9^x-1)(3^x-1)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{9^x-1}{x}\cdot\frac{3^x-1}{x}$$
$$=\ln9\cdot\ln3$$
$$=2(\ln3)^2$$

답 ④

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 실수)일 때
① $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$
② $\lim_{x\to a}f(x)=0$이고 $\alpha\neq0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

12 $x \to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+2}+b)=0$이므로 $\sqrt{2}+b=0$

$$\therefore b=-\sqrt{2}$$

$b=-\sqrt{2}$를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+2}-\sqrt{2}}{e^x-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{ax+2}-\sqrt{2})(\sqrt{ax+2}+\sqrt{2})}{(e^x-1)(\sqrt{ax+2}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{ax}{(e^x-1)(\sqrt{ax+2}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{a}{\sqrt{ax+2}+\sqrt{2}}$$
$$=1\cdot\frac{a}{2\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}$$

따라서 $\frac{a}{2\sqrt{2}}=3$이므로 $a=6\sqrt{2}$

$\therefore ab=-12$ 답 ①

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한에서 분자, 분모 중 무리식이 있으면 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

13 $x\to a$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to a}\ln(1+5x)=0$이므로 $\ln(1+5a)=0$

$\therefore a=0$

$a=0$을 주어진 등식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{\ln(1+5x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}\cdot\frac{5x}{\ln(1+5x)}\cdot\frac{1}{5}$$
$$=\ln3\cdot1\cdot\frac{1}{5}=\frac{\ln3}{5}$$

$\therefore a+b=\frac{\ln3}{5}$ 답 $\frac{\ln3}{5}$

14 $\frac{f(x)}{e^{2x}-1}=g(x)$라 하면 $f(x)=(e^{2x}-1)g(x)$이고 $\lim_{x\to0}g(x)=5$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+3x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)g(x)}{\ln(1+3x)}$$
$$=\lim_{x\to0}g(x)\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{3x}{\ln(1+3x)}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=5\cdot1\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$
답 $\frac{10}{3}$

15 $\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(3x)\}}{x}=7$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\ln\{1+f(3x)\}=0$이므로 $\lim_{x\to0}f(3x)=0$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(3x)\}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(3x)\}}{f(3x)}\cdot\frac{f(3x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x}$$

$3x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{\frac{t}{3}}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\cdot3$$

따라서 $\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\cdot3=7$이므로 $\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\frac{7}{3}$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\frac{7}{3}$ 답 $\frac{7}{3}$

쌤 한마디

15번에서 $\lim_{x\to0}\ln\{1+f(3x)\}=0$이면 $\lim_{x\to0}f(3x)=0$임은 다음과 같이 보일 수 있다.

$h(x)=\ln(1+x)$라 하면

$\ln\{1+f(3x)\}=h(f(3x))$

이때 $f(3x)=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to f(0)$이므로

$$\lim_{x\to0}\ln\{1+f(3x)\}=\lim_{x\to0}h(f(3x))=\lim_{t\to f(0)}h(t)=\ln\{1+f(0)\}$$

즉 $\ln\{1+f(0)\}=0$이므로 $f(0)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(3x)=f(0)=0$

16 $P(t,\ \ln(2t+2))(t>0)$라 하면

$S_1=\frac{1}{2}(3-\ln2)t$,

$S_2=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\{\ln(2t+2)-\ln2\}$

$=\ln(t+1)$

$\ln(2t+2)-\ln2$
$=\ln\frac{2t+2}{2}$
$=\ln(t+1)$

제1사분면 위의 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $t\to0+$이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{t\to0+}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to0+}\frac{(3-\ln2)t}{2\ln(t+1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{t}{\ln(t+1)}\cdot\frac{3-\ln2}{2}$$
$$=1\cdot\frac{3-\ln2}{2}=\frac{3-\ln2}{2}$$
답 $\frac{3-\ln2}{2}$

17 $P(t,\ 2^t)$, $Q\left(t,\ \left(\frac{1}{2}\right)^t\right)$, $H\left(0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^t\right)$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{PQ}}{\overline{QH}}=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{2^t-1}{t}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t-1}{t}\right\}$$
$$=\ln2-\ln\frac{1}{2}=2\ln2$$
답 ⑤

18 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{2e^{5x}+a}=b$ …… ㉠

$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\neq m)\\ k & (x=m)\end{cases}$
가 $x=m$에서 연속이면
$\lim_{x\to m}g(x)=k$
(단, k는 상수)

㉠에서 $x\to0$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(2e^{5x}+a)=0$이므로 $2+a=0$

$\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{2e^{5x}-2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{5x}{e^{5x}-1}\cdot\frac{3}{10}$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$$

$\therefore\ ab=-\frac{3}{5}$ 답 $-\frac{3}{5}$

19 $x\neq2$일 때,

$$f(x)=\frac{\log(3x-5)}{x-2} \quad\cdots\cdots ㉠$$

함수 $f(x)$가 $x>\frac{5}{3}$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{\log(3x-5)}{x-2}$$

$x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{\log(3x-5)}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{\log(1+3t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\log(1+3t)}{3t}\cdot3$$
$$=\frac{1}{\ln10}\cdot3=\frac{3}{\ln10}=\log e^3$$

한편 ㉠에서 $f(3)=\log4$이므로

$f(2)+f(3)=\log e^3+\log4=\log4e^3$ 답 ②

Lecture 07 지수함수와 로그함수의 미분 39쪽

01 답 $y'=3e^x$

02 $y=e^4\cdot e^x$이므로

$y'=e^4\cdot(e^x)'=e^4\cdot e^x=e^{x+4}$ 답 $y'=e^{x+4}$

03 $y'=(2x+1)'\cdot e^x+(2x+1)\cdot(e^x)'$

$=2e^x+(2x+1)e^x$

$=(2x+3)e^x$ 답 $y'=(2x+3)e^x$

04 $y=7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x$이므로

$$y'=7\cdot\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^x\right\}'=7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x\ln\frac{1}{7}=-\ln7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}$$

답 $y'=-\ln7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}$

05 $y'=(x^2)'\cdot2^x+x^2\cdot(2^x)'$

$=2x\cdot2^x+x^2\cdot2^x\ln2$

$=2^x(2x+x^2\ln2)$ 답 $y'=2^x(2x+x^2\ln2)$

06 $y=\ln6+\ln x$이므로 $y'=\frac{1}{x}$ 답 $y'=\frac{1}{x}$

Q BOX

$x=a$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x-a)f(x)=g(x)$를 만족시킬 때,
$f(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$

$x=t+2$를 $\log(3x-5)$에 대입하면
$\log(3x-5)$
$=\log\{3(t+2)-5\}$
$=\log(1+3t)$

$\frac{3}{\ln10}=3\log e=\log e^3$

$(e^{x+1}+3x)'$
$=(e\cdot e^x+3x)'$
$=e\cdot e^x+3$
$=e^{x+1}+3$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,
$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$4^2\ln4=16\ln2^2=32\ln2$

07 $y=3\ln x$이므로 $y'=\frac{3}{x}$ 답 $y'=\frac{3}{x}$

08 $y=\ln x\cdot\ln x$이므로

$y'=(\ln x)'\cdot\ln x+\ln x\cdot(\ln x)'$

$=\frac{1}{x}\cdot\ln x+\ln x\cdot\frac{1}{x}$

$=\frac{2\ln x}{x}$ 답 $y'=\frac{2\ln x}{x}$

09 $y=\log_5 x$이므로

$y'=\frac{1}{x\ln5}$ 답 $y'=\frac{1}{x\ln5}$

10 $y'=(e^x)'\cdot\log x+e^x\cdot(\log x)'$

$=e^x\log x+e^x\cdot\frac{1}{x\ln10}$

$=e^x\left(\log x+\frac{1}{x\ln10}\right)$

답 $y'=e^x\left(\log x+\frac{1}{x\ln10}\right)$

표준+발전 유형 Q+Q 40쪽

01 $f'(x)=(e^{x+1}+3)(x^2-3^x)$
$+(e^{x+1}+3x)(2x-3^x\ln3)$

$\therefore\ f'(-1)=(1+3)(1-3^{-1})$
$+(1-3)(-2-3^{-1}\ln3)$

$=4\cdot\frac{2}{3}-2\left(-2-\frac{\ln3}{3}\right)$

$=\frac{20}{3}+\frac{2}{3}\ln3$

따라서 $a=\frac{20}{3}$, $b=\frac{2}{3}$이므로

$a-b=6$ 답 6

02 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$

이때 $f'(x)=4^x\ln4-2^x\ln2$이므로

$2f'(2)=2(4^2\ln4-2^2\ln2)$

$=2(32\ln2-4\ln2)=56\ln2$ 답 ③

쌤 한마디

미분계수를 이용한 극한값의 계산

(ⅰ) 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(a)$를 사용한 식으로 변형한다.
(ⅱ) 도함수 $f'(x)$를 구한 후 $f'(a)$의 값을 구한다.
(ⅲ) (ⅰ)의 식에 $f'(a)$의 값을 대입한다.

03 $g(2)=\{f(2)+2\}\ln 2=4(\ln 2)^2$이므로

$$f(2)+2=4\ln 2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$g(x)=\{f(x)+x\}\ln x$에서

$$g'(x)=\{f'(x)+1\}\ln x+\{f(x)+x\}\cdot\frac{1}{x}$$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$g'(2)=\{f'(2)+1\}\ln 2+\{f(2)+2\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$5\ln 2=\{f'(2)+1\}\ln 2+4\ln 2\cdot\frac{1}{2}\ (\because ㉠)$$

$$\{f'(2)+1\}\ln 2=3\ln 2, \qquad f'(2)+1=3$$

$$\therefore f'(2)=2$$

답 ③

04 $f(x)=x^2\log_5 3x=x^2(\log_5 x+\log_5 3)$이라 하면

$$f'(x)=2x(\log_5 x+\log_5 3)+x^2\cdot\frac{1}{x\ln 5}$$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, \log_5 3)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=2\log_5 3+\frac{1}{\ln 5}=\log_5 9+\log_5 e=\log_5 9e$$

$$\therefore a=9e$$

답 $9e$

05 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$$

$$\therefore a=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f'(0)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases}(x+a+1)e^x & (x>0)\\ 2x & (x<0)\end{cases}$$

에서

$$\lim_{x\to 0+}(x+a+1)e^x=\lim_{x\to 0-}2x$$

$$a+1=0 \qquad \therefore a=-1$$

$$\therefore b=-1\ (\because ㉠)$$

답 $a=-1$, $b=-1$

06 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하고 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$$

$$\therefore 5b=a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\ln 5} & (0<x<1)\\ b\cdot 5^x\ln 5 & (x>1)\end{cases}$$

에서

$$\lim_{x\to 1+}b\cdot 5^x\ln 5=\lim_{x\to 1-}\frac{1}{x\ln 5}$$

$$5b\ln 5=\frac{1}{\ln 5} \qquad \therefore b=\frac{1}{5(\ln 5)^2}$$

$b=\dfrac{1}{5(\ln 5)^2}$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=\dfrac{1}{(\ln 5)^2}$

$$\therefore a+b=\frac{6}{5(\ln 5)^2}$$

답 ②

Q BOX

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

함수 $f(x)=\begin{cases}g(x) & (x>k)\\ h(x) & (x\le k)\end{cases}$ 가 $x=k$에서 미분가능하면

① 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 연속이다.

➡ $\lim\limits_{x\to k+}g(x)=\lim\limits_{x\to k-}h(x)=h(k)$

② $f'(k)$가 존재한다.

➡ $\lim\limits_{x\to k+}g'(x)=\lim\limits_{x\to k-}h'(x)$

$$\{(x+a)e^x\}'=1\cdot e^x+(x+a)e^x=(x+a+1)e^x$$

$$\log_{a^2}b=\frac{1}{2}\log_a b=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_b a}=\frac{1}{2\log_b a}$$

$5ax=t$에서 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{5x}{t}$

$$\therefore \frac{3x}{a}=3x\cdot\frac{5x}{t}=\frac{15x^2}{t}$$

중단원 마무리

41쪽

01 전략 $\dfrac{1}{x}=t$로 놓고 식을 변형한 후 $a>1$일 때 $\lim\limits_{t\to -\infty}a^t=0$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow -\infty$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{6+7^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to -\infty}\frac{1}{6+7^t}=\frac{1}{6}$$

답 $\dfrac{1}{6}$

02 전략 주어진 식을 밑이 2인 로그에 대한 식으로 나타낸 후 $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2 x=\infty$임을 이용한다.

풀이
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2 4x}{\log_8 x-\log_2\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\log_2 x}{\frac{1}{3}\log_2 x+\log_2 x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6+3\log_2 x}{4\log_2 x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2\log_2 x}+\frac{3}{4}\right)$$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2 x=\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2\log_2 x}+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=3$이므로

$$pq=12$$

답 ④

03 전략 주어진 식을 자연로그에 대한 식으로 나타낸 후 $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+}m^x=1\,(m>0)$임을 이용한다.

풀이
$$\lim_{x\to 0+}\frac{a^{2x}+\log_b x}{b^x-\log_a x}=\lim_{x\to 0+}\frac{a^{2x}+\frac{\ln x}{\ln b}}{b^x-\frac{\ln x}{\ln a}}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{a^{2x}}{\ln x}+\frac{1}{\ln b}}{\frac{b^x}{\ln x}-\frac{1}{\ln a}}$$

이때 $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty$이고 $\lim\limits_{x\to 0+}a^{2x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0+}b^x=1$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{a^{2x}}{\ln x}+\frac{1}{\ln b}}{\frac{b^x}{\ln x}-\frac{1}{\ln a}}=\frac{\frac{1}{\ln b}}{-\frac{1}{\ln a}}=-\frac{\ln a}{\ln b}$$
$$=-\log_b a$$

따라서 $-\log_b a=-3$이므로 $\quad \log_b a=3$

$$\therefore \log_{a^2}b=\frac{1}{2\log_b a}=\frac{1}{6}$$

답 ④

04 전략 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $5ax=t$로 놓으면 $a \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$f(x)=\lim_{a\to 0}(1+5ax)^{\frac{3x}{a}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{15x^2}{t}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{15x^2}=e^{15x^2}$$

즉 $\ln f(x)=\ln e^{15x^2}=15x^2$이므로 $15x^2\le 500$에서

$$x^2\le\frac{100}{3}=33.3\cdots$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. 답 ①

$5^2=25$, $6^2=36$

05 전략 $\lim_{x\to 0}\frac{\log_k(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln k}$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\log_9(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\log_9(1+3x)}\cdot\frac{a}{3}$

$=\ln 9\cdot\frac{a}{3}=\frac{2}{3}a\ln 3$

즉 $\frac{2}{3}a\ln 3=4\ln 3$이므로

$\frac{2}{3}a=4 \quad \therefore a=6$ ··· ❶

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\log_{25}(1+ax)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_{25}(1+6x)}{3x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\log_{25}(1+6x)}{6x}\cdot 2$

$=\frac{1}{\ln 25}\cdot 2$

$=\frac{1}{\ln 5}$ ··· ❷

답 $\frac{1}{\ln 5}$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	$\lim_{x\to 0}\frac{\log_{25}(1+ax)}{3x}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

2−a>0이면 $\lim_{t\to 0+}ct^{2-a}=0$
2−a<0이면 $\lim_{t\to 0+}ct^{2-a}=\infty$

06 전략 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)(1+3x)(1+5x)\cdots(1+19x)}{e^x-1}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1+3x)+\cdots+\ln(1+19x)}{e^x-1}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot 3+\cdots+\frac{\ln(1+19x)}{19x}\cdot 19\right\}\cdot\frac{x}{e^x-1}$

$=(1+3+5+\cdots+19)\cdot 1$

$=\frac{10(1+19)}{2}=100$ 답 ③

첫째항이 1, 제10항이 19인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

07 전략 $a^x=N$이면 $x=\log_a N$임을 이용하여 함수 $g(x)$를 구한다.

풀이 $y=2^x-1$이라 하면

$2^x=y+1 \quad \therefore x=\log_2(y+1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_2(x+1)$

따라서 $g(x)=\log_2(x+1)$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\log_2(x+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\log_2(x+1)}$

$=\ln 2\cdot\ln 2=(\ln 2)^2$ 답 $(\ln 2)^2$

08 전략 $t\to 0$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하면 (분자) → 0임을 이용한다.

풀이 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to\infty}x^a\ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(b+ct^2)}{t^a}=2$ ······ ㉠

㉠에서 $t\to 0+$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이다.

즉 $\lim_{t\to 0+}\ln(b+ct^2)=0$이므로

$\ln b=0 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+ct^2)}{t^a}=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+ct^2)}{ct^2}\cdot\frac{ct^2}{t^a}$

$=\lim_{t\to 0+}ct^{2-a}$

따라서 $\lim_{t\to 0+}ct^{2-a}=2$이므로

$2-a=0$, $c=2 \quad \therefore a=2$, $c=2$

$\therefore a+b+c=5$ 답 ①

09 전략 $\triangle AQB=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot f(t)=1$임을 이용하여 $f(t)$를 구한다.

풀이 $A(t, \ln t)$, $B(t, -\ln t)$이므로

$\overline{AB}=\ln t-(-\ln t)=2\ln t$

$\triangle AQB=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PQ}=1$에서

$\frac{1}{2}\cdot 2\ln t\cdot f(t)=1 \quad \therefore f(t)=\frac{1}{\ln t}$

$t-1=s$로 놓으면 $t\to 1+$일 때 $s\to 0+$이므로

$\lim_{t\to 1+}(t-1)f(t)=\lim_{t\to 1+}\frac{t-1}{\ln t}$

$=\lim_{s\to 0+}\frac{s}{\ln(1+s)}=1$ 답 ②

10 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 원점을 지남을 이용하여 $f(x)$, $g(x)$의 식을 구한 후 두 점 B, C의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=-e^x+a$이고 곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$0=-1+a \quad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=-e^x+1$

$k=-e^x+1$에서 $e^x=1-k$

$\therefore x=\ln(1-k)$

$\therefore B(\ln(1-k), k)$

$g(x)=\ln(x+2)+\ln b$이고 곡선 $y=g(x)$가 원점을 지나므로

$0=\ln 2+\ln b \quad \therefore \ln b=-\ln 2$

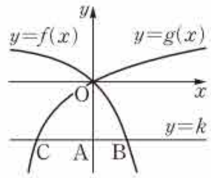
$\therefore g(x)=\ln(x+2)-\ln 2=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$

$k=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$에서 $1+\frac{x}{2}=e^k$

$\therefore x=2(e^k-1)$

$\therefore C(2(e^k-1), k)$

$k<0$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=k$는 오른쪽 그림과 같으므로



$\overline{AB}=\ln(1-k)$,

$\overline{AC}=-2(e^k-1)$

$$\therefore \lim_{k\to0-}\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\lim_{k\to0-}\frac{\ln(1-k)}{-2(e^k-1)}$$

$$=\lim_{k\to0-}\frac{\ln(1-k)}{-k}\cdot\frac{k}{e^k-1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

쌤한마디

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을

① x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식 ➡ $f(x-m, y-n)=0$

② x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
➡ $f(x, -y)=0$

③ y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
➡ $f(-x, y)=0$

④ 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
➡ $f(-x, -y)=0$

⑤ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
➡ $f(y, x)=0$

11 **전략** 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to0}h(x)=h(0)$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1, \infty)$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$$

이때 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(0)=b$, $g(0)=8$이므로
$f(0)g(0)=8b$

㉠에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $\qquad b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면 $\qquad \lim_{x\to0}\dfrac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=0$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(x+1)}\cdot(x+a)$$

$$=1\cdot a=a$$

이므로 $\qquad a=0$

따라서 $f(x)=x^2$이므로 $\qquad f(3)=9$

답 ②

12 **전략** 먼저 조건 (가)에서 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서

(i) $-\dfrac{1}{2}<x<0$일 때,

$$\frac{e^x-1}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{\ln(1+2x)}{2x}$$

$x<0$이므로 조건 (가)의 부등식의 각 변을 x로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

이때 $\lim_{x\to0-}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to0-}\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=1$$

(ii) $x>0$일 때,

$$\frac{\ln(1+2x)}{2x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{e^x-1}{x}$$

$x>0$이므로 조건 (가)의 부등식의 각 변을 x로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

이때 $\lim_{x\to0+}\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}=1$, $\lim_{x\to0+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=1$$

(i), (ii)에서 $\qquad \lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $\qquad f(0)=0$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=f'(0)=1$$

조건 (나)의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=0 \qquad \therefore g(0)=0$

조건 (나)의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+g'(x)e^x+g(x)e^x=2^x\ln2$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)+g'(0)+g(0)=\ln2$

$1+g'(0)+0=\ln2 \qquad \therefore g'(0)=\ln2-1$

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)g(x)+a}{x}=b$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\{f(x)g(x)+a\}=0$이므로

$f(0)g(0)+a=0 \qquad \therefore a=0$

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면 $h(0)=f(0)g(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)+a}{x}=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$

$$=h'(0)$$

이때 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=1\cdot0+0\cdot(\ln2-1)=0$

따라서 $b=0$이므로

$g'(a)+b=g'(0)=\ln2-1$

답 $\ln2-1$

쌤한마디

함수의 극한의 대소 관계

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

① $f(x)\le g(x)$이고 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재하면
➡ $\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$

② $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$ (L은 실수)이면
➡ $\lim_{x\to a}h(x)=L$

13 전략 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(e)g'(e)=-1$임을 이용한다.

풀이 $g(x)=f(x)\ln x^4=f(x)\cdot 4\ln x$에서

$$g'(x)=f'(x)\cdot 4\ln x+f(x)\cdot\frac{4}{x}$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ -e)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e,\ -4e)$에서의 접선이 서로 수직이므로

$$f'(e)g'(e)=-1$$

$$f'(e)\cdot\left\{f'(e)\cdot 4+f(e)\cdot\frac{4}{e}\right\}=-1$$

$$f'(e)\cdot\left\{4f'(e)+(-e)\cdot\frac{4}{e}\right\}=-1$$

$$4\{f'(e)\}^2-4f'(e)+1=0$$

$$\{2f'(e)-1\}^2=0 \qquad \therefore f'(e)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 100f'(e)=100\cdot\frac{1}{2}=50$$ 답 50

14 전략 주어진 등식에서 극한값이 존재함을 이용하여 $f(1)$의 값을 구하고, 미분계수의 정의를 이용하여 $f'(1)$의 값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)$$

즉 $\frac{1}{2}f'(1)=3$이므로 $\quad f'(1)=6$ ··· ❶

$f(x)=\ln\left(\frac{a}{x}\right)^x-b=-x\ln x+x\ln a-b$에서

$$f'(x)=-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}+\ln a$$
$$=-\ln x+\ln a-1$$

$f'(1)=\ln a-1=6$이므로

$\ln a=7 \qquad \therefore a=e^7$

한편 $f(1)=\ln a-b=0$이므로

$b=\ln a=7$ ··· ❷

$\therefore ab=7e^7$ ··· ❸

답 $7e^7$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(1)$, $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

15 전략 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

Q BOX

$e^{2x}=e^x\cdot e^x$이므로
$(e^{2x})'=e^x\cdot e^x+e^x\cdot e^x$
$=2e^{2x}$

$x_1<x<0$일 때,
$f(x)-f(x_1)$
$=3x-3x_1$ ··· ㉠
$x<x_1<0$일 때,
$f(x_1)-f(x)$
$=3x_1-3x$ ··· ㉡
㉠, ㉡에서
$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=3$

$\ln\left(\frac{a}{x}\right)^x-b$
$=x\ln\frac{a}{x}-b$
$=x(\ln a-\ln x)-b$
$=-x\ln x+x\ln a-b$

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1}{x}$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1}{x^3}\cdot x^2$$
$$=1\cdot0=0$$

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{f(x)}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{3^x-1}{x}$
$$=1\cdot1\cdot\ln3$$
$$=\ln3$$

ㄷ. [반례] $f(x)=|x|$이면 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이지만

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{e^x-1}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{e^{-x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{e^{-x}-1}{-x}\cdot(-1)$$
$$=1\cdot(-1)=-1$$

이므로 $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$이 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

16 전략 먼저 $x>0$일 때와 $x<0$일 때로 나누어 $f'(x)$를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $x>0$일 때, $f(x)=axe^{2x}+bx^2$이므로

$$f'(x)=ae^{2x}+ax\cdot2e^{2x}+2bx$$
$$=ae^{2x}+2axe^{2x}+2bx$$

한편 임의의 실수 $x_1\ (x_1<0)$에 대하여

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$
$$=\lim_{x\to x_1}3=3$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}ae^{2x}+2axe^{2x}+2bx & (x>0)\\ 3 & (x<0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

즉 $f'(0)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to0+}(ae^{2x}+2axe^{2x}+2bx)=3$$

$\therefore a=3$

또 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2e$이므로 조건 (가)에서

$$\frac{3}{2}e+\frac{1}{4}b=2e, \qquad \frac{1}{4}b=\frac{1}{2}e$$

$\therefore b=2e$

따라서 $x>0$일 때, $f'(x)=3e^{2x}+6xe^{2x}+4ex$이므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=3e+3e+2e=8e$$ 답 ④

04 삼각함수의 미분

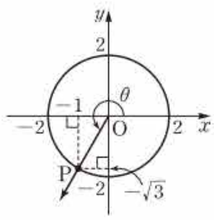
Lecture 08 삼각함수

45쪽

01 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}$

$=2$



이므로

$\csc\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\sec\theta=-2$,

$\cot\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\csc\theta=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sec\theta=-2$, $\cot\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

02 $\csc\theta=\csc 45^\circ=\dfrac{1}{\sin 45^\circ}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$

$\sec\theta=\sec 45^\circ=\dfrac{1}{\cos 45^\circ}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$

$\cot\theta=\cot 45^\circ=\dfrac{1}{\tan 45^\circ}=1$

답 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 1

① $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$
② $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$
③ $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

03 $\csc\theta=\csc\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{1}{\sin\frac{5}{6}\pi}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}$

$=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\sec\theta=\sec\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{1}{\cos\frac{5}{6}\pi}=\dfrac{1}{-\cos\frac{\pi}{6}}$

$=\dfrac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot\theta=\cot\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{1}{\tan\frac{5}{6}\pi}=\dfrac{1}{-\tan\frac{\pi}{6}}$

$=\dfrac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\sqrt{3}$

답 2, $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $-\sqrt{3}$

① $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$
② $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$
③ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

04 $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로

$\csc^2\theta=1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

$\therefore \sin^2\theta=\dfrac{1}{\csc^2\theta}=\dfrac{4}{5}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

답 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

05 $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)$

$=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

답 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$15^\circ=45^\circ-30^\circ$임을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수도 있다.

06 $\cos 15^\circ=\cos(60^\circ-45^\circ)$

$=\cos 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

답 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}$임을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수도 있다.

07 $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

답 $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

08 $\tan\dfrac{7}{12}\pi=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$

답 $-2-\sqrt{3}$

09 $\sin 80^\circ\cos 70^\circ+\cos 80^\circ\sin 70^\circ$

$=\sin(80^\circ+70^\circ)=\sin 150^\circ$

$=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

10 $\cos 65^\circ\cos 20^\circ+\sin 65^\circ\sin 20^\circ$

$=\cos(65^\circ-20^\circ)$

$=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11 $\dfrac{\tan 110^\circ-\tan 50^\circ}{1+\tan 110^\circ\tan 50^\circ}=\tan(110^\circ-50^\circ)$

$=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

12 $\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$에서 $\sin\alpha<0$이므로

$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$,

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$,

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{24}{7}$

답 $\frac{24}{25}$, $-\frac{7}{25}$, $-\frac{24}{7}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ 또는 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$임을 이용하여 구할 수도 있다.

$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$임을 이용하여 구할 수도 있다.

13 $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$이므로

$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

답 $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

참고 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\sin\theta\sin\frac{\pi}{4} + \cos\theta\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

14 $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$이므로

$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta$

$= 2\left\{\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$= 2\left(\sin\theta\cos\frac{11}{6}\pi + \cos\theta\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

$= 2\sin\left(\theta + \frac{11}{6}\pi\right)$ 답 $2\sin\left(\theta+\frac{11}{6}\pi\right)$

표준+발전 유형 Q&Q

46쪽

01 $P\left(a, -\frac{3}{4}a\right)$ $(a<0)$라 하면

$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + \left(-\frac{3}{4}a\right)^2} = -\frac{5}{4}a$

이므로

$\csc\theta = \frac{-\frac{5}{4}a}{-\frac{3}{4}a} = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{-\frac{5}{4}a}{a} = -\frac{5}{4}$

$\therefore \csc\theta\sec\theta = -\frac{25}{12}$ 답 $-\frac{25}{12}$

점 P는 제2사분면 위의 점이므로 x좌표는 음수이다.

02 $\tan\theta + \cot\theta = \frac{8}{3}$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{8}{3}$, $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{8}{3}$

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{8}{3}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$

$\therefore (\sin\theta+\cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + 2\cdot\frac{3}{8} = \frac{7}{4}$

이때 $\csc\theta<0$, $\sec\theta<0$에서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta + \cos\theta < 0$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = -\sqrt{\frac{7}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ 답 ①

$\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 부호는 각각 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 부호와 같다.

03 ㄱ. $\sin\theta\csc\theta + \tan\theta\cot\theta$

$= \sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta} + \tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}$

$= 1 + 1 = 2$

ㄴ. $(\sin\theta-\csc\theta)^2 + (\cos\theta-\sec\theta)^2 - (\tan\theta-\cot\theta)^2$

$= \sin^2\theta - 2 + \csc^2\theta + \cos^2\theta - 2 + \sec^2\theta$

$-(\tan^2\theta - 2 + \cot^2\theta)$

$= (\sin^2\theta+\cos^2\theta) + (\sec^2\theta - \tan^2\theta)$

$+ (\csc^2\theta - \cot^2\theta) - 2$

$= 1+1+1-2 = 1$

삼각함수 사이의 관계
① $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
② $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

ㄷ. $\frac{\sec\theta}{\cot\theta-\csc\theta} + \frac{\sec\theta}{\cot\theta+\csc\theta}$

$= \frac{\sec\theta(\cot\theta+\csc\theta)+\sec\theta(\cot\theta-\csc\theta)}{(\cot\theta-\csc\theta)(\cot\theta+\csc\theta)}$

$= \frac{2\sec\theta\cot\theta}{\cot^2\theta-\csc^2\theta}$

$= -2\sec\theta\cot\theta = -2\csc\theta$

$\sec\theta\cot\theta$
$= \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
$= \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

04 $6\sec^2\theta - 5\csc^2\theta = 6(\tan^2\theta+1) - 5(1+\cot^2\theta)$

$= 6(\tan^2\theta+1) - 5\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$

$= 6\tan^2\theta - \frac{5}{\tan^2\theta} + 1$

즉 $6\tan^2\theta - \frac{5}{\tan^2\theta} + 1 = 8$이므로

$6\tan^4\theta - 7\tan^2\theta - 5 = 0$

$(2\tan^2\theta+1)(3\tan^2\theta-5) = 0$

$\therefore \tan^2\theta = \frac{5}{3}$ ($\because \tan^2\theta \ge 0$) 답 ⑤

05 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서 $\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$이므로

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$,

$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$

$\therefore \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}$

$= -\frac{56}{65}$ 답 $-\frac{56}{65}$

06 $\cot 40° + \sec 20° \sin 20°$

$$= \frac{\cos 40°}{\sin 40°} + \frac{\sin 20°}{\cos 20°}$$
$$= \frac{\cos 40° \cos 20° + \sin 40° \sin 20°}{\sin 40° \cos 20°}$$
$$= \frac{\cos (40° - 20°)}{\sin 40° \cos 20°}$$
$$= \frac{\cos 20°}{\sin 40° \cos 20°}$$
$$= \frac{1}{\sin 40°} = \csc 40°$$

답 ③

07 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha + \tan\beta = 2, \ \tan\alpha\tan\beta = \frac{1}{4}$$

$\tan\alpha < \tan\beta$에서 $\tan\beta - \tan\alpha > 0$이므로

$$\tan\beta - \tan\alpha = \sqrt{(\tan\beta + \tan\alpha)^2 - 4\tan\beta\tan\alpha}$$
$$= \sqrt{2^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{3}$$
$$\therefore \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$$
$$\therefore \sec^2(\beta - \alpha) = \tan^2(\beta - \alpha) + 1$$
$$= \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}\right)^2 + 1 = \frac{73}{25}$$

답 ③

다른 풀이 이차방정식 $4x^2 - 8x + 1 = 0$의 해는

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$$

이때 $\tan\alpha < \tan\beta$이므로

$$\tan\alpha = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \ \tan\beta = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$
$$= \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{2+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$$
$$\therefore \sec^2(\beta - \alpha) = \tan^2(\beta - \alpha) + 1 = \frac{73}{25}$$

08 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha + \tan\beta = a, \ \tan\alpha\tan\beta = 3$$
$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{a}{1 - 3} = -\frac{a}{2}$$

이때 $\tan^2(\alpha + \beta) = \sec^2(\alpha + \beta) - 1 = 5^2 - 1 = 24$이므로

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 = 24, \quad a^2 = 96$$
$$\therefore a = 4\sqrt{6} \ (\because a > 0)$$

답 $4\sqrt{6}$

Q BOX

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$,

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$(a-b)^2$
$= (a+b)^2 - 4ab$

점 P의 x좌표

점 P의 y좌표

09 두 직선 $5x + 3y - 3 = 0$, $4x - y + 3 = 0$, 즉 $y = -\frac{5}{3}x + 1$, $y = 4x + 3$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$$\tan\alpha = -\frac{5}{3}, \ \tan\beta = 4$$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \right|$$
$$= \left| \frac{-\frac{5}{3} - 4}{1 + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 4} \right| = 1$$
$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

답 $\frac{\pi}{4}$

10 두 직선 $\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0$, $ax - y + a = 0$, 즉 $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$, $y = ax + a$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$$\tan\alpha = \sqrt{3}, \ \tan\beta = a$$

이때 $0 < a < \sqrt{3}$에서 $\alpha > \beta$이므로

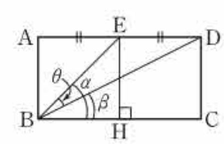
$$\theta = \alpha - \beta$$
$$\therefore \tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - a}{1 + \sqrt{3}a}$$

따라서 $\frac{\sqrt{3} - a}{1 + \sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$3\sqrt{3} - 3a = \sqrt{3} + 3a, \quad 6a = 2\sqrt{3}$$
$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11 오른쪽 그림과 같이 점 E에서 $\overline{\text{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\text{AB}} = a \ (a > 0)$, $\angle\text{EBH} = \alpha$, $\angle\text{DBC} = \beta$라 하면 $\overline{\text{BE}} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$이므로



$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\overline{\text{BD}} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a$이므로

$$\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \ \cos\beta = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$\therefore \sin\theta = \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{10}$$

답 ③

12 $\text{P}(t, 1 - t^2) \ (0 < t < 1)$이라 하면 직각삼각형 POH에서

$$\tan\alpha = \frac{\overline{\text{OH}}}{\overline{\text{PH}}} = \frac{t}{1 - t^2}$$

즉 $\frac{t}{1 - t^2} = \frac{2}{3}$이므로

$2t^2+3t-2=0$, $(t+2)(2t-1)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ ($\because 0<t<1$)

따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$이므로 직각삼각형 PHA에서

$$\tan\beta=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

> $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OH}}$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{12}{5}$$

답 $\frac{12}{5}$

13 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$$

$\therefore \sin 2\theta-\cos 2\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta-(2\cos^2\theta-1)$

$=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\left\{2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^2-1\right\}$

$=-\frac{17}{25}$

답 $-\frac{17}{25}$

> $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$
> $=1-2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2$
> $=-\frac{7}{25}$
> 과 같이 구할 수도 있다.

14 두 직선 $y=mx$, $y=2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ, 2θ라 하면

$\tan\theta=m$, $\tan 2\theta=2$

$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$이므로

$2=\frac{2m}{1-m^2}$, $m^2+m-1=0$

$\therefore m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ($\because 0<m<2$)

답 ③

> 직선 $y=mx$가 직선 $y=2x$와 x축의 양의 방향이 이루는 예각을 이등분하므로
> $0<m<2$

15 $\overline{\mathrm{AC}}=4a$, $\overline{\mathrm{BC}}=3a$ $(a>0)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4a)^2+(3a)^2}=5a$

이므로 $\angle\mathrm{BAD}=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{4a}{5a}=\frac{4}{5}$

$\triangle$ABD에서 $\angle\mathrm{BDC}=\theta+\theta=2\theta$이므로

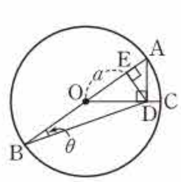
$\cos(\angle\mathrm{BDC})=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$

답 $\frac{7}{25}$

> 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

16 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 E라 하고 $\overline{\mathrm{OE}}=a$ $(a>0)$라 하면 직각삼각형 ODE에서



$\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{OE}}\tan(\angle\mathrm{EOD})=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

이므로

$\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$

한편 직각삼각형 AOD에서

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{OD}}\tan(\angle\mathrm{AOD})=\frac{\sqrt{6}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\frac{3}{2}a$

$\therefore \tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\overline{\mathrm{BE}}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{5}{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{5}$

> $\overline{\mathrm{AB}}$는 원 O의 지름이므로
> $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}}=\frac{3}{2}a$
> $\therefore \overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{OE}}$
> $=\frac{3}{2}a+a$
> $=\frac{5}{2}a$

$\therefore \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{5}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2}=\frac{10\sqrt{2}}{23}$

답 $\frac{10\sqrt{2}}{23}$

17 $f(x)=\sin x+2\cos x-1$

$=\sqrt{5}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\cos x\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-1$

$=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)-1$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

ㄱ, ㄴ. $y=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)-1$의 그래프는 $y=\sqrt{5}\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\alpha$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $f(x)$의 주기는 2π이다.

ㄷ. $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-\sqrt{5}\le\sqrt{5}\sin(x+\alpha)\le\sqrt{5}$

$-\sqrt{5}-1\le\sqrt{5}\sin(x+\alpha)-1\le\sqrt{5}-1$

$\therefore -\sqrt{5}-1\le f(x)\le\sqrt{5}-1$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{5}-1$이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

쌤한마디

$y=a\sin(bx+c)+d$의 그래프는 $y=a\sin bx$의 그래프를 평행이동한 것이고, 그래프를 평행이동하여도 함수의 주기는 변하지 않으므로 $y=a\sin(bx+c)+d$의 주기는 $y=a\sin bx$의 주기와 같다.

18 $\angle\mathrm{APB}=90°$이므로 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=10\cos\theta$, $\overline{\mathrm{PB}}=10\sin\theta$

$\therefore 3\overline{\mathrm{AP}}+4\overline{\mathrm{PB}}=30\cos\theta+40\sin\theta$

$=50\left(\cos\theta\cdot\frac{3}{5}+\sin\theta\cdot\frac{4}{5}\right)$

$=50\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\right)$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $2n\pi<\alpha<2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이므로

> $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$이므로 α는 제1사분면의 각이다.

$2n\pi<\theta+\alpha<2n\pi+\pi$

$0<\sin(\theta+\alpha)\le1$

$\therefore\ 0 < 50\sin(\theta+\alpha) \le 50$

따라서 구하는 최댓값은 50이다. 답 50

Lecture 09 삼각함수의 극한과 미분 49쪽

01 $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin 3x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ 답 1

02 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 3\cos 2x = 3\cos\frac{\pi}{2} = 0$ 답 0

03 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}$

$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} = 1$ 답 1

04 $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\pi} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

$= \lim_{x\to\pi} 2\sin\frac{x}{2}$

$= 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$ 답 2

05 $\lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{5x}\cdot5 = 1\cdot5 = 5$ 답 5

06 $\lim_{x\to0} \frac{8x}{\tan 2x} = \lim_{x\to0} \frac{2x}{\tan 2x}\cdot4 = 1\cdot4 = 4$ 답 4

07 $\lim_{x\to0} \frac{\tan 7x}{\sin 2x} = \lim_{x\to0} \frac{\tan 7x}{7x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{7}{2}$

$= 1\cdot1\cdot\frac{7}{2} = \frac{7}{2}$ 답 $\frac{7}{2}$

08 $\frac{\pi}{3} - x = t$로 놓으면 $x \to \frac{\pi}{3}$일 때 $t \to 0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{3x-\pi}{\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} = \lim_{t\to0} \frac{-3t}{\tan t}$

$= \lim_{t\to0} \frac{t}{\tan t}\cdot(-3)$

$= 1\cdot(-3) = -3$ 답 -3

09 답 $y' = \cos x + \sqrt{3}\sin x$

10 답 $y' = -\sin x + \frac{1}{x}$

11 $y' = (\sin x)'\cdot\cos x + \sin x\cdot(\cos x)'$

$= \cos x\cos x + \sin x(-\sin x)$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

답 $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$

Q BOX

$3x^3 - 5x^2 + x = t$로 놓으면 $x \to 0$일 때 $t \to 0$이므로

$\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x^3-5x^2+x)}{3x^3-5x^2+x}$

$= \lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1$

$\frac{\pi}{3} - x = t$에서

$\pi - 3x = 3t$

$\therefore\ 3x - \pi = -3t$

$1+2+3+\cdots+10$

$= \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10\cdot11}{2} = 55$

표준+발전 유형 Q+Q 50쪽

01 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2-\sec^2 x}{\sin x - \cos x}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2-(\tan^2 x+1)}{\sin x-\cos x}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan^2 x}{\sin x-\cos x}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x-\cos x}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x(\sin x-\cos x)}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x(\sin x-\cos x)}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x+\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -2\sqrt{2}$ 답 ②

02 $x \ne 0$일 때, $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$이므로

$-|\tan x| \le |\tan x|\sin\frac{1}{x} \le |\tan x|$

이때 $\lim_{x\to0}(-|\tan x|) = 0$, $\lim_{x\to0}|\tan x| = 0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to0} \tan x\sin\frac{1}{x} = 0$ 답 0

03 $\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x^3-5x^2+x)}{2x^3-2x}$

$= \lim_{x\to0} \frac{\sin(3x^3-5x^2+x)}{3x^3-5x^2+x}\cdot\frac{3x^3-5x^2+x}{2x^3-2x}$

$= \lim_{x\to0} \frac{\sin(3x^3-5x^2+x)}{3x^3-5x^2+x}\cdot\frac{3x^2-5x+1}{2x^2-2}$

$= 1\cdot\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

04 $\lim_{x\to0} \frac{x}{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin 10x}$

$= \lim_{x\to0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}+\cdots+\frac{\sin 10x}{x}}$

$= \lim_{x\to0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot2+\cdots+\frac{\sin 10x}{10x}\cdot10}$

$= \frac{1}{1+1\cdot2+1\cdot3+\cdots+1\cdot10} = \frac{1}{55}$ 답 ⑤

05 $\lim_{x\to0} \frac{\tan(\sin 3x)}{\tan 2x}$

$= \lim_{x\to0} \frac{\tan(\sin 3x)}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\tan 2x}\cdot\frac{3}{2}$

$= 1\cdot1\cdot1\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

06 $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\tan ax}=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{ax}{\tan ax}\cdot\frac{1}{a}$

$=\ln2\cdot1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\ln2$

따라서 $\frac{1}{a}\ln2=\frac{1}{3}\ln4$이므로

$\frac{1}{a}\ln2=\frac{2}{3}\ln2$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ 답 ⑤

07 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\ln(1+2x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\ln(1+2x)}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\ln(1+2x)}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot\frac{1}{2(1+\cos x)}$

$=1^2\cdot1\cdot\frac{1}{2\cdot2}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

08 $f(n)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos nx}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos nx)(1+\cos nx)}{x^2(1+\cos nx)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2nx}{x^2(1+\cos nx)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin nx}{nx}\right)^2\cdot\frac{n^2}{1+\cos nx}$

$=1^2\cdot\frac{n^2}{2}=\frac{n^2}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{\sqrt{f(k)f(k+1)}}$

$=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{\sqrt{\frac{k^2(k+1)^2}{4}}}$

$=\sum_{k=1}^{9}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$=2\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{9}{5}$ 답 $\frac{9}{5}$

09 $x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{4}$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{4t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\sqrt2}{2}\cos t+\frac{\sqrt2}{2}\sin t-\left(\frac{\sqrt2}{2}\cos t-\frac{\sqrt2}{2}\sin t\right)}{4t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt2\sin t}{4t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sqrt2}{4}$

$=1\cdot\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{4}$ 답 $\frac{\sqrt2}{4}$

Q BOX

$x-\frac{\pi}{4}=t$에서

$4x-\pi=4t$

10 $\frac{2}{x-3}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2}\sin\frac{2}{x-3}=\lim_{t\to0+}\frac{(1+2t)\sin t}{t}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}\cdot(1+2t)$

$=1\cdot1=1$ 답 ①

$\frac{2}{x-3}=t$에서

$x-3=\frac{2}{t}$

$x+1=\frac{2}{t}+4$

$\therefore \frac{x+1}{2}=\frac{1+2t}{t}$

11 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\sin(ax+b)=0$이므로

$\sin b=0\qquad\therefore b=0\ (\because 0\le b<\pi)$

$b=0$을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{x}{\tan x}\cdot a$

$=1\cdot1\cdot a=a$

따라서 $a=2$이므로 $\quad a+b=2$ 답 2

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 실수)일 때

① $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

② $\lim_{x\to a}f(x)=0$이고 $\alpha\neq0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

12 $x\to1$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(\sqrt{ax}-3)=0$이므로

$\sqrt a=3\qquad\therefore a=9$

$a=9$를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\sqrt{9x}-3}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{3\sqrt x-3}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{3(\sqrt x-1)(\sqrt x+1)}\cdot(\sqrt x+1)$

$=\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{x-1}\cdot\frac{\sqrt x+1}{3}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{x-1}\cdot\frac{\sqrt x+1}{3}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}\cdot\frac{\sqrt{t+1}+1}{3}$

$=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

따라서 $b=\frac{2}{3}$이므로

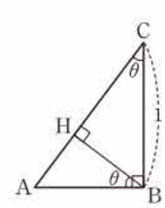
$ab=6$ 답 ②

13 직각삼각형 BCH에서

$\overline{\mathrm{BH}}=\sin\theta$

이고 오른쪽 그림에서

$\angle\mathrm{ABH}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{A}=\theta$



이므로 직각삼각형 ABH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}\tan\theta=\sin\theta\tan\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\tan\theta}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}$

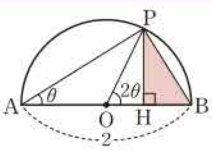
$=1\cdot1=1$ 답 ①

다른 풀이 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\dfrac{1}{\cos\theta}$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{CH}=\cos\theta$

$$\therefore \overline{AH}=\overline{AC}-\overline{CH}=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$$
$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2\cos\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$
$$=1^2\cdot1=1$$

14 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$를 그으면 $\angle POB=2\theta$이므로 직각삼각형 POH에서



$\overline{PH}=\overline{OP}\sin2\theta=\sin2\theta$,

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos2\theta=\cos2\theta$

$\overline{HB}=\overline{OB}-\overline{OH}=1-\cos2\theta$이므로

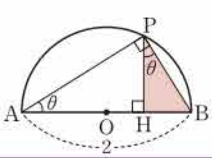
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PH}\cdot\overline{HB}=\frac{1}{2}\sin2\theta(1-\cos2\theta)$$
$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta(1-\cos2\theta)}{2\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta(1-\cos2\theta)(1+\cos2\theta)}{2\theta^3(1+\cos2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta\sin^22\theta}{2\theta^3(1+\cos2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^3\cdot\frac{4}{1+\cos2\theta}$$
$$=1^3\cdot\frac{4}{2}=2$$

답 2

$\overset{\frown}{BP}$에 대한 원주각의 크기가 θ이고 $\angle POB$는 $\overset{\frown}{BP}$에 대한 중심각이므로 $\angle POB=2\theta$

중심이 O이고 $\overline{AB}$가 지름이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OP}=\frac{1}{2}\overline{AB}=1$

다른 풀이 오른쪽 그림에서



$\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\angle BPH=\dfrac{\pi}{2}-\angle B=\theta$

반원에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

직각삼각형 PAB에서

$\overline{BP}=2\sin\theta$

직각삼각형 PHB에서

$\overline{PH}=\overline{BP}\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$,

$\overline{HB}=\overline{BP}\sin\theta=2\sin^2\theta$

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PH}\cdot\overline{HB}=\sin2\theta\sin^2\theta$$
$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta\sin^2\theta}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{2\theta}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot2$$
$$=1\cdot1^2\cdot2=2$$

15 함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$
$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\tan^2bx}=\frac{1}{6}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(a-\cos x)=0$이므로

$a-1=0\qquad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\tan^2bx}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\tan^2bx}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\tan^2bx}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{bx}{\tan bx}\right)^2\cdot\frac{1}{b^2(1+\cos x)}$$
$$=1^2\cdot1^2\cdot\frac{1}{2b^2}=\frac{1}{2b^2}$$

따라서 $\dfrac{1}{2b^2}=\dfrac{1}{6}$이므로

$b^2=3\qquad\therefore b=\sqrt{3}\ (\because b>0)$

답 $a=1,\ b=\sqrt{3}$

16 $x\neq1$일 때,

$$f(x)=\frac{\sin(x-1)\pi}{x-1}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)\pi}{x-1}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$f(1)=\lim_{t\to0}\frac{\sin t\pi}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t\pi}{t\pi}\cdot\pi$$
$$=1\cdot\pi=\pi$$

답 ④

17 $f(x)=\sin^2x=\sin x\sin x$이므로

$$f'(x)=\cos x\sin x+\sin x\cos x$$
$$=2\sin x\cos x$$
$$=\sin2x$$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}$에서 $\sin2x=\dfrac{1}{2}$

이때 $0<x<\pi$에서 $0<2x<2\pi$이므로

$2x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $2x=\dfrac{5}{6}\pi$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{12}$ 또는 $x=\dfrac{5}{12}\pi$

따라서 모든 x의 값의 합은

$$\frac{\pi}{12}+\frac{5}{12}\pi=\frac{\pi}{2}$$

답 ②

18 $f(x)=\sin x+\cos x$에서

$$f'(x)=\cos x-\sin x$$

이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)-f(a)\}\{f(x)+f(a)\}}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\{f(x)+f(a)\}$$
$$=f'(a)\cdot 2f(a)$$
$$=(\cos a-\sin a)\cdot 2(\sin a+\cos a)$$
$$=2(\cos^2 a-\sin^2 a)$$
$$=2\cos 2a$$
따라서 $2\cos 2a=2$이므로

$\cos 2a=1$ 답 1

19 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$$
$\therefore a=\dfrac{b}{e}$ ⋯⋯ ㉠

또 $f'(0)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}2\cos x-(2x+a)\sin x & (x>0)\\ be^{x-1} & (x<0)\end{cases}$$
에서

$$\lim_{x\to 0+}\{2\cos x-(2x+a)\sin x\}=\lim_{x\to 0-}be^{x-1}$$
$2=\dfrac{b}{e}$ $\therefore b=2e$

$b=2e$를 ㉠에 대입하면 $a=2$

$\therefore ab=4e$ 답 $4e$

20 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 미분가능하고 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$\therefore b=1$

또 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$가 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}-a\sin x+\cos x & \left(x>\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\sin x & \left(x<\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$
에서

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}(-a\sin x+\cos x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(-\sin x)$$
$-a=-1$ $\therefore a=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\cos x+\sin x & \left(x\ge\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \cos x+1 & \left(x<\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$이므로

$f(\pi)=\cos\pi+\sin\pi=-1+0=-1,$

$f(-\pi)=\cos(-\pi)+1=-1+1=0$

$\therefore f(\pi)-f(-\pi)=-1$ 답 ②

Q BOX

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$be^{x-1}=be^{-1}\cdot e^x$이므로

$(be^{x-1})'=be^{-1}\cdot(e^x)'$

$=be^{-1}\cdot e^x$

$=be^{x-1}$

$(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$이므로

$$\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}=\frac{1}{7-4\sqrt{3}}=\frac{7+4\sqrt{3}}{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$$

중단원 마무리

53쪽

01 전략 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구한 후 $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$임을 이용한다.

풀이 $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$$
$$\therefore \sec(\pi+\theta)=\frac{1}{\cos(\pi+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=\frac{5}{4}$$
답 ④

02 전략 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}$

$$=\frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}+\frac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}+\frac{2}{1-\cos^2\theta}$$
$$=\frac{2}{\cos^2\theta}+\frac{2}{\sin^2\theta}$$
$$=2\sec^2\theta+2\csc^2\theta$$
$$=2(\tan^2\theta+1)+2(\cot^2\theta+1)$$
$$=2\left\{\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}+1\right\}+2\{(2-\sqrt{3})^2+1\}$$
$$=2(8+4\sqrt{3})+2(8-4\sqrt{3})$$
$$=32$$
답 32

03 전략 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$임을 이용한다.

풀이 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle C=\angle B=\beta$

이때 $\alpha+\beta+\beta=\pi$이므로

$\pi-\beta=\alpha+\beta$

$\therefore \tan(\pi-\beta)=\tan(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{2}$

$\tan(\pi-\beta)=-\dfrac{3}{2}$에서

$-\tan\beta=-\dfrac{3}{2}$ $\therefore \tan\beta=\dfrac{3}{2}$

$\tan(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{2}$에서

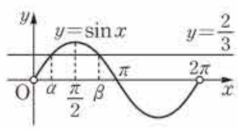
$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{3}{2}$$
$$\frac{\tan\alpha+\frac{3}{2}}{1-\tan\alpha\cdot\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}$$
$$2\tan\alpha+3=-3+\frac{9}{2}\tan\alpha$$
$$\frac{5}{2}\tan\alpha=6$$
$\therefore \tan\alpha=\dfrac{12}{5}$ 답 ④

04 전략 주어진 조건을 이용하여 $\cos\alpha$, $\cos\beta$의 값을 구한 후 $\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$임을 이용한다.

풀이 $\sin\alpha=\sin\beta=\dfrac{2}{3}$이므로

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{5}{9},\ \cos^2\beta=1-\sin^2\beta=\frac{5}{9}$$

이때 $0<\alpha<\beta<2\pi$이고 $\sin\alpha=\sin\beta=\dfrac{2}{3}$이므로 오른쪽 그림에서



$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\beta<\pi$$

즉 $\cos\alpha>0$, $\cos\beta<0$이므로

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3},\ \cos\beta=-\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \cdots❶$$

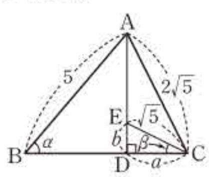
$$\begin{aligned}\therefore \sin(\beta-\alpha)&=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\\&=\frac{4\sqrt{5}}{9}\end{aligned} \quad \cdots❷$$

답 $\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\cos\alpha$, $\cos\beta$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷	$\sin(\beta-\alpha)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

05 전략 먼저 두 직각삼각형 EDC, ADC에서 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{CD}$, $\overline{DE}$의 길이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CD}=a$, $\overline{DE}=b\,(a>0,\ b>0)$라 하면 직각삼각형 EDC에서



$$a^2+b^2=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AE}:\overline{DE}=3:1$이므로

$$\overline{AE}=3\overline{DE}=3b$$

직각삼각형 ADC에서 $a^2+(4b)^2=(2\sqrt{5})^2$

$$\therefore a^2+16b^2=20 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\overline{AD}=3b+b=4b$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=1\ (\because a>0,\ b>0)$$

직각삼각형 ABD에서 $\overline{BD}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이므로

$\overline{AD}=4b=4$

$$\sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}$$

직각삼각형 EDC에서

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\\&=\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

답 ⑤

06 전략 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$임을 이용하여 주어진 삼각함수의 각을 x로 통일한다.

풀이
$$\begin{aligned}y&=4\sin x-\cos 2x+k\\&=4\sin x-(1-2\sin^2 x)+k\\&=2\sin^2 x+4\sin x+k-1\end{aligned}$$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x\le 2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고

$$y=2t^2+4t+k-1=2(t+1)^2+k-3$$

따라서 y는 $t=-1$에서 최솟값 $k-3$을 가지므로

$$k-3=-1 \qquad \therefore k=2$$

$t=-1$에서 $\sin x=-1$이므로

$$x=\frac{3}{2}\pi\ (\because 0\le x\le 2\pi)$$

따라서 $a=\dfrac{3}{2}\pi$이므로 $\quad ka=3\pi$

답 3π

쌤 한마디

각 x, $2x$의 삼각함수를 포함한 식의 최대·최소는 배각의 공식을 이용하여 삼각함수의 각을 x로 통일한 후 다음과 같은 방법으로 구한다.

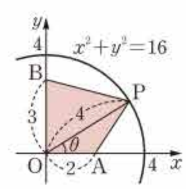
① $f(x)=a\sin^2 x+b\sin x+c$ 또는 $f(x)=a\cos^2 x+b\cos x+c$ 꼴인 경우
→ 이차함수의 최대·최소를 이용한다.

② $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 꼴인 경우
→ 삼각함수의 합성을 이용한다.

07 전략 $\square APBO=\triangle OAP+\triangle OPB$임을 이용하여 구하는 넓이를 $a\sin\theta+b\cos\theta$ 꼴로 나타낸 후 삼각함수의 합성을 이용한다.

두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이 S는
$S=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PO}$를 긋고 $\angle POA=\theta$라 하면



$$\begin{aligned}\triangle OAP&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\sin\theta\\&=4\sin\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle OPB&=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\&=6\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \square APBO&=\triangle OAP+\triangle OPB\\&=4\sin\theta+6\cos\theta\\&=2\sqrt{13}\left(\sin\theta\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}+\cos\theta\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\\&=2\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

$$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$이므로 α는 제1사분면의 각이다.

이때 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이고 $2n\pi<\alpha<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)이므로

$$2n\pi<\theta+\alpha<2n\pi+\pi,\qquad 0<\sin(\theta+\alpha)\le 1$$

$$\therefore 0<2\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)\le 2\sqrt{13}$$

따라서 $\square APBO$의 넓이의 최댓값은 $2\sqrt{13}$이다.

답 $2\sqrt{13}$

08 전략 먼저 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $A(t,\ 0)$, $B(t,\ 1-\tan^2 t)$, $C(t,\ \cos t-\sin t)$이므로

$\overline{AB}=1-\tan^2 t$, $\overline{AC}=\cos t-\sin t$

$$\therefore \lim_{t\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\lim_{t\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan^2 t}{\cos t-\sin t}$$
$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}{\cos t-\sin t}$$
$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\cos^2 t(\cos t-\sin t)}$$
$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{4}-}\frac{(\cos t+\sin t)(\cos t-\sin t)}{\cos^2 t(\cos t-\sin t)}$$
$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\cos t+\sin t}{\cos^2 t}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$$ 답 ⑤

Q BOX

$0<t<\frac{\pi}{4}$에서
$0<\tan t<1$이므로
$\overline{AB}=1-\tan^2 t$
$\cos t>\sin t$이므로
$\overline{AC}=\cos t-\sin t$

09 전략 $x=0$에서의 좌극한과 우극한을 각각 구하고, 그 값이 서로 같을 때의 a의 값을 구한다.

풀이 $$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0-}\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{2\sin x-\sin 2x}{ax\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{ax(1-\cos^2 x)}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{2\sin x(1-\cos x)}{ax(1+\cos x)(1-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{2\sin x}{ax(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2}{a(1+\cos x)}$$
$$=1\cdot\frac{2}{2a}=\frac{1}{a}$$

$\lim_{x\to 0}f(x)$가 존재하려면 $\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)$이어야 하므로

$\frac{1}{2}=\frac{1}{a}$ $\quad\therefore a=2$ 답 2

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 정의되지 않을 때에도 $\lim_{x\to 0-}f(x)$, $\lim_{x\to 0+}f(x)$의 값이 존재할 수 있다.

10 전략 $1-\cos\theta$ 꼴을 포함한 삼각함수의 극한은 분자, 분모에 각각 $1+\cos\theta$를 곱한다.

풀이 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\{1+\cos(x^2)\}}{\{1-\cos(x^2)\}\{1+\cos(x^2)\}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin^2(x^2)}\cdot\{1+\cos(x^2)\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(x^2)^2}\cdot\left\{\frac{x^2}{\sin(x^2)}\right\}^2\cdot\{1+\cos(x^2)\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}\cdot 1^2\cdot 2=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}$$

즉 $2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}=2$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}=1$$

따라서 $p=4$, $q=1$이므로 $\quad p+q=5$ 답 ②

쌤 한마디

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}=1$에서

(i) $0<p<4$일 때,
$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x^p}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x^4}\cdot x^{4-p}=1\cdot 0=0$$

(ii) $p>4$일 때,
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^p}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{p-4}$$
이때 $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{p-4}=\infty$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^p}$의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^p}=q\ (p>0,\ q>0)$를 만족시키는 p, q의 값은 $p=4$, $q=1$뿐이다.

11 전략 삼각함수의 합성을 이용하여 분자를 하나의 삼각함수로 나타낸다.

풀이 $$-\sin x+\sqrt{3}\cos x$$
$$=2\left\{\sin x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$
$$=2\left(\sin x\cdot\cos\frac{2}{3}\pi+\cos x\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$\therefore \lim_{x\to-\frac{2}{3}\pi}\frac{-\sin x+\sqrt{3}\cos x}{3x+2\pi}$$
$$=\lim_{x\to-\frac{2}{3}\pi}\frac{2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)}{3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)}$$

$x+\frac{2}{3}\pi=t$로 놓으면 $x\to-\frac{2}{3}\pi$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{2}{3}\pi}\frac{2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)}{3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$ 답 ④

12 전략 먼저 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$임을 이용하여 b의 값을 구한다.

풀이 $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin ax+bx}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}+b\right)$$
$$=0+b=b$$

$\therefore b=3$ ⋯ ❶

따라서 $f(x)=\sin ax+3x$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin ax+3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin ax}{ax}\cdot a+3}$$
$$=\frac{1}{a+3}$$

$-1\le\sin ax\le 1$이므로 $x>0$일 때,
$$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin ax}{x}\le\frac{1}{x}$$
이때 $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이므로
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin ax}{x}=0$$

즉 $\frac{1}{a+3}=3$이므로

$$a+3=\frac{1}{3} \qquad \therefore a=-\frac{8}{3} \qquad \cdots ❷$$

$$\therefore ab=-8 \qquad \cdots ❸$$

답 -8

단계	채점 기준	비율
❶	b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

13 전략 $\angle\mathrm{APO}$, $\angle\mathrm{POC}$, $\angle\mathrm{PCB}$의 크기를 θ에 대한 식으로 나타내어 $\overline{\mathrm{OC}}$의 길이를 구한다.

풀이 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OA}}$이므로

$$\angle\mathrm{APO}=\angle\mathrm{PAO}=\theta$$

QBOX: 점 O가 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이므로 반원의 중심이다.

$\triangle\mathrm{PAO}$에서

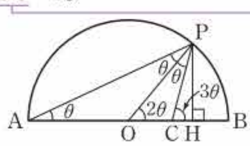
$$\angle\mathrm{POC}=\angle\mathrm{PAO}+\angle\mathrm{APO}=2\theta$$

$\triangle\mathrm{POC}$에서

$$\angle\mathrm{PCB}=\angle\mathrm{POC}+\angle\mathrm{OPC}=3\theta$$

QBOX: $\angle\mathrm{OPC}=\angle\mathrm{APO}=\theta$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 POH에서



$$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin 2\theta=\sin 2\theta,$$

$$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos 2\theta=\cos 2\theta$$

QBOX: $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=1$

직각삼각형 PCH에서

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\tan 3\theta}=\frac{\sin 2\theta}{\tan 3\theta}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{CH}}=\cos 2\theta-\frac{\sin 2\theta}{\tan 3\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\overline{\mathrm{OC}}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\cos 2\theta-\frac{\sin 2\theta}{\tan 3\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\cos 2\theta-\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\cdot\frac{3\theta}{\tan 3\theta}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

$$=1-1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

답 ④

다른 풀이 $\angle\mathrm{POC}=2\theta$, $\angle\mathrm{OPC}=\theta$이므로

$$\angle\mathrm{OCP}=\pi-(2\theta+\theta)=\pi-3\theta$$

$\triangle\mathrm{POC}$에서 사인법칙에 의하여

QBOX: 사인법칙
$\triangle\mathrm{ABC}$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\sin\theta}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{OC}}=\frac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\overline{\mathrm{OC}}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

14 전략 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서도 연속임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{1-\cos^2(x-2)}{x^2+ax+b}=k \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$이므로

$$4+2a+b=0 \qquad \therefore b=-2a-4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$b=-2a-4$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos^2(x-2)}{x^2+ax-2a-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin^2(x-2)}{(x-2)(x+a+2)}$$

$x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 2$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin^2(x-2)}{(x-2)(x+a+2)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t(t+a+4)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin t}{t+a+4}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t+a+4}$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t+a+4}=k \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢에서 $t\longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{t\to 0}(t+a+4)=0$이므로 $\quad a+4=0$

$$\therefore a=-4$$

$a=-4$를 ㉡에 대입하면 $\quad b=4$

또 $a=-4$를 ㉢에 대입하면

$$k=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

$$\therefore a+b+k=1$$

답 1

15 전략 미분계수의 정의를 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 $\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$$

$$=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$f(x)=\ln x^{\sin x}=\sin x\ln x$에서

$$f'(x)=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

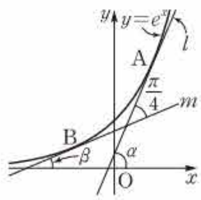
이므로

$$2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot\ln\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\right)=\frac{4}{\pi}$$

답 $\frac{4}{\pi}$

16 전략 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 (기울기)$=\tan\theta$임을 이용한다.

풀이 두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $t>0$이므로



$\frac{\pi}{4}=\alpha-\beta$ …… ㉠

이때 $y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로

곡선 위의 두 점 $\mathrm{A}(t,\ e^t)$, $\mathrm{B}(-t,\ e^{-t})$에서의 두 접선 l, m의 기울기는 각각 e^t, e^{-t}이다.

$\therefore \tan\alpha=e^t,\ \tan\beta=e^{-t}$

㉠에서 $\tan\frac{\pi}{4}=\tan(\alpha-\beta)$이므로

$$1=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},\qquad 1=\frac{e^t-e^{-t}}{1+e^t\cdot e^{-t}}$$

$e^t-e^{-t}=2$ …… ㉡

양변에 e^t을 곱하면 $(e^t)^2-2e^t-1=0$

$e^t>0$이므로 $e^t=1+\sqrt{2}$

$\therefore t=\ln(1+\sqrt{2})$

따라서 직선 AB의 기울기는

$$\frac{e^t-e^{-t}}{t-(-t)}=\frac{e^t-e^{-t}}{2t}$$

$$=\frac{2}{2\ln(1+\sqrt{2})}\ (\because ㉡)$$

$$=\frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$$

답 ①

17 **전략** $f(\theta)-g(\theta)=\triangle\mathrm{DMC}-\triangle\mathrm{HMC}$임을 이용하여 $f(\theta)-g(\theta)$를 θ에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(\theta)-g(\theta)$

$=(f(\theta)+\triangle\mathrm{EMC})-(g(\theta)+\triangle\mathrm{EMC})$

$=\triangle\mathrm{DMC}-\triangle\mathrm{HMC}$ …… ㉠

직각삼각형 BMH에서

$\overline{\mathrm{MH}}=\overline{\mathrm{BM}}\sin\theta=\sin\theta$

$\therefore \overline{\mathrm{MD}}=\overline{\mathrm{MH}}=\sin\theta$

$\angle\mathrm{AMB}=\frac{1}{2}(\pi-\theta)$이므로

$$\angle\mathrm{DMC}=\pi-\frac{1}{2}(\pi-\theta)=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \triangle\mathrm{DMC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{MD}}\cdot\overline{\mathrm{MC}}\cdot\sin(\angle\mathrm{DMC})=\frac{1}{2}\cdot\sin\theta\cdot1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}$$

한편 $\angle\mathrm{BMH}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\angle\mathrm{HMC}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}+\theta$$

$$\therefore \triangle\mathrm{HMC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{MH}}\cdot\overline{\mathrm{MC}}\cdot\sin(\angle\mathrm{HMC})=\frac{1}{2}\cdot\sin\theta\cdot1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

㉠에서

$$f(\theta)-g(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{2\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\theta\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\sin^2\theta-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{2\theta^3\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}\cdot\frac{1}{2\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2-\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\right\}\cdot\frac{1}{2\left(\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)}$$

$$=1\cdot\left(1^2-1^2\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2\cdot2}$$

$$=\frac{3}{16}$$

따라서 $a=\frac{3}{16}$이므로

$80a=15$

답 15

Q BOX

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

$(e^t)^2-2e^t-1=0$을 e^t에 대한 이차방정식으로 생각하고 근의 공식을 이용한다.

$\overline{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=1$

$\triangle\mathrm{ABM}$은 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BM}}=1$인 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{AMB}=\angle\mathrm{MAB}$

$\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\theta$

$=\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)-(1-\sin^2\theta)$

$=\sin^2\theta-\sin^2\frac{\theta}{2}$

L 55~57쪽

05 여러 가지 미분법

Lecture 10 여러 가지 미분법 (1)

L 57쪽

01 $y'=-\dfrac{(x+4)'}{(x+4)^2}=-\dfrac{1}{(x+4)^2}$

답 $y'=-\dfrac{1}{(x+4)^2}$

02 $y'=\dfrac{(2x-1)'(3x+5)-(2x-1)(3x+5)'}{(3x+5)^2}$

$=\dfrac{2(3x+5)-(2x-1)\cdot 3}{(3x+5)^2}=\dfrac{13}{(3x+5)^2}$

답 $y'=\dfrac{13}{(3x+5)^2}$

03 $y'=\dfrac{(x)'(x^2-1)-x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2-1-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$=-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ 답 $y'=-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

04 $y'=\dfrac{(x^2+8)'e^x-(x^2+8)(e^x)'}{(e^x)^2}$

$=\dfrac{2xe^x-(x^2+8)e^x}{e^{2x}}=-\dfrac{x^2-2x+8}{e^x}$

답 $y'=-\dfrac{x^2-2x+8}{e^x}$

05 $y'=\dfrac{(x)'\ln x-x(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

$=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ 답 $y'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

06 $y'=\dfrac{(\sin x)'(1+\cos x)-\sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{1}{1+\cos x}$ 답 $y'=\dfrac{1}{1+\cos x}$

07 $y=-\dfrac{1}{x^7}=-x^{-7}$이므로

$y'=7x^{-8}=\dfrac{7}{x^8}$ 답 $y'=\dfrac{7}{x^8}$

08 $y=\dfrac{x^3-9}{x^5}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{9}{x^5}=x^{-2}-9x^{-5}$이므로

$y'=-2x^{-3}+45x^{-6}=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{45}{x^6}$

답 $y'=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{45}{x^6}$

Q BOX

함수의 몫의 미분법을 이용하여 주어진 함수를 미분할 수도 있다.

$\cos x\tan x$
$=\cos x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}$
$=\sin x$

$y=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$
$=\dfrac{2}{1+\tan x}-1$
과 같이 변형한 후 이를 미분할 수도 있다.

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
① $y=e^{f(x)}$이면 $y'=e^{f(x)}f'(x)$
② $y=a^{f(x)}$이면 $y'=a^{f(x)}\ln a\cdot f'(x)$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

다른 풀이 $y'=\dfrac{(x^3-9)'x^5-(x^3-9)(x^5)'}{(x^5)^2}$

$=\dfrac{3x^2\cdot x^5-(x^3-9)\cdot 5x^4}{x^{10}}$

$=\dfrac{3x^3-5x^3+45}{x^6}$

$=\dfrac{-2x^3+45}{x^6}=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{45}{x^6}$

09 $y'=\sec^2 x+\sec x\tan x=\sec x(\sec x+\tan x)$

답 $y'=\sec x(\sec x+\tan x)$

10 $y'=-\csc^2 x+3\csc x\cot x$

$=\csc x(3\cot x-\csc x)$

답 $y'=\csc x(3\cot x-\csc x)$

11 $y'=(\sin x)'\tan x+\sin x(\tan x)'$

$=\cos x\tan x+\sin x\sec^2 x$

$=\sin x+\sin x\sec^2 x=\sin x(1+\sec^2 x)$

답 $y'=\sin x(1+\sec^2 x)$

12 $y'=\dfrac{(1-\tan x)'(1+\tan x)-(1-\tan x)(1+\tan x)'}{(1+\tan x)^2}$

$=\dfrac{-\sec^2 x(1+\tan x)-(1-\tan x)\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

$=-\dfrac{2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$ 답 $y'=-\dfrac{2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

13 $y'=4(3x-2)^3(3x-2)'=4(3x-2)^3\cdot 3$

$=12(3x-2)^3$ 답 $y'=12(3x-2)^3$

14 $y'=(x^2+1)'(x-4)^3+(x^2+1)\{(x-4)^3\}'$

$=2x(x-4)^3+(x^2+1)\cdot 3(x-4)^2(x-4)'$

$=2x(x-4)^3+3(x^2+1)(x-4)^2\cdot 1$

$=(x-4)^2\{2x(x-4)+3(x^2+1)\}$

$=(x-4)^2(5x^2-8x+3)$

답 $y'=(x-4)^2(5x^2-8x+3)$

15 $y'=\dfrac{\{(2x+1)^2\}'(x-5)-(2x+1)^2(x-5)'}{(x-5)^2}$

$=\dfrac{2(2x+1)(2x+1)'(x-5)-(2x+1)^2\cdot 1}{(x-5)^2}$

$=\dfrac{2(2x+1)\cdot 2\cdot(x-5)-(2x+1)^2}{(x-5)^2}$

$=\dfrac{(2x+1)\{4(x-5)-(2x+1)\}}{(x-5)^2}$

$=\dfrac{(2x+1)(2x-21)}{(x-5)^2}$

답 $y'=\dfrac{(2x+1)(2x-21)}{(x-5)^2}$

16 $y'=e^{x^2-6x}(x^2-6x)'=(2x-6)e^{x^2-6x}$

답 $y'=(2x-6)e^{x^2-6x}$

17 $y'=7^{3x^2-1}\cdot\ln 7\cdot(3x^2-1)'$

$=7^{3x^2-1}\cdot 6x\ln 7$ 답 $y'=7^{3x^2-1}\cdot 6x\ln 7$

18 $y'=\cos(1+\cos x)\cdot(1+\cos x)'$

$=-\cos(1+\cos x)\sin x$

답 $y'=-\cos(1+\cos x)\sin x$

19 $y'=\dfrac{(x^2+x)'}{x^2+x}=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$ 답 $y'=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$

20 $y'=\dfrac{(e^x+3)'}{e^x+3}=\dfrac{e^x}{e^x+3}$ 답 $y'=\dfrac{e^x}{e^x+3}$

21 $y'=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$ 답 $y'=\cot x$

22 $y'=\dfrac{(8x-1)'}{(8x-1)\ln 5}=\dfrac{8}{(8x-1)\ln 5}$

답 $y'=\dfrac{8}{(8x-1)\ln 5}$

23 $y=x^{-\frac{5}{3}}$이므로

$y'=-\dfrac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}}=-\dfrac{5}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}$

답 $y'=-\dfrac{5}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}$

24 답 $y'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$

25 $y=(4x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\dfrac{1}{2}(4x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}(4x^2+x+1)'$

$=\dfrac{1}{2}(4x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}(8x+1)$

$=\dfrac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+1}}$ 답 $y'=\dfrac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+1}}$

26 $y=5x^3(6x-1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$y'=(5x^3)'(6x-1)^{-\frac{1}{2}}+5x^3\{(6x-1)^{-\frac{1}{2}}\}'$

$=15x^2(6x-1)^{-\frac{1}{2}}$

$+5x^3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot(6x-1)^{-\frac{3}{2}}(6x-1)'$

$=15x^2(6x-1)^{-\frac{1}{2}}+5x^3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot(6x-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 6$

$=\dfrac{15x^2}{\sqrt{6x-1}}-\dfrac{15x^3}{(6x-1)\sqrt{6x-1}}$

$=\dfrac{15x^2(6x-1)-15x^3}{(6x-1)\sqrt{6x-1}}=\dfrac{15x^2(6x-1-x)}{(6x-1)\sqrt{6x-1}}$

$=\dfrac{15x^2(5x-1)}{(6x-1)\sqrt{6x-1}}$

답 $y'=\dfrac{15x^2(5x-1)}{(6x-1)\sqrt{6x-1}}$

Q BOX

$(\sqrt{6x-1})'$
$=\{(6x-1)^{\frac{1}{2}}\}'$
$=\dfrac{1}{2}(6x-1)^{-\frac{1}{2}}$
$\cdot(6x-1)'$
$=\dfrac{1}{2}(6x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 6$
$=\dfrac{3}{\sqrt{6x-1}}$

$y=\log_5|8x-1|$
$=\dfrac{\ln|8x-1|}{\ln 5}$
로 생각하여 미분한다.

$x^{-\frac{8}{3}}=\dfrac{1}{x^{\frac{8}{3}}}=\dfrac{1}{x^{2+\frac{2}{3}}}$
$=\dfrac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(a)$
$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
를 이용할 수 있도록 두 개씩 짝을 짓는다.

다른 풀이 $y'=\dfrac{(5x^3)'\sqrt{6x-1}-5x^3(\sqrt{6x-1})'}{(\sqrt{6x-1})^2}$

$=\dfrac{15x^2\sqrt{6x-1}-\dfrac{15x^3}{\sqrt{6x-1}}}{6x-1}$

$=\dfrac{15x^2(6x-1)-15x^3}{(6x-1)\sqrt{6x-1}}$

$=\dfrac{15x^2(5x-1)}{(6x-1)\sqrt{6x-1}}$

표준+발전 유형 Q+Q

58쪽

01 $f'(x)=\dfrac{(2ax+b)(x+2)-(ax^2+bx+4)\cdot 1}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{ax^2+4ax+2b-4}{(x+2)^2}$

$f'(0)=-\dfrac{7}{2}$에서 $\dfrac{2b-4}{4}=-\dfrac{7}{2}$

$b-2=-7$ $\quad\therefore b=-5$

$f'(1)=\dfrac{1}{9}$에서 $\dfrac{5a-14}{9}=\dfrac{1}{9}$

$5a-14=1$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore a+b=-2$ 답 -2

02 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\pi-h)-f(\pi+2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\pi-h)-f(\pi)-\{f(\pi+2h)-f(\pi)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}\cdot(-1)$

$-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}\cdot 2$

$=-f'(\pi)-2f'(\pi)=-3f'(\pi)$

이때 $f'(x)=\dfrac{-\cos x}{(1+\sin x)^2}$이므로

$-3f'(\pi)=-3\cdot\dfrac{-(-1)}{(1+0)^2}=-3$ 답 ①

03 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}-\cdots-\dfrac{10}{x^{10}}$

$=x^{-1}-2x^{-2}+3x^{-3}-\cdots-10x^{-10}$

이므로

$f'(x)=-x^{-2}+2^2x^{-3}-3^2x^{-4}+\cdots+10^2x^{-11}$

$\therefore f'(1)=-1+2^2-3^2+\cdots+10^2$

$=(2+1)(2-1)+(4+3)(4-3)$

$+\cdots+(10+9)(10-9)$

$=1+2+3+\cdots+10$

$=\sum\limits_{k=1}^{10}k=\dfrac{10\cdot 11}{2}=55$ 답 55

04 $f(x)=\dfrac{ae^x}{x^3}=ax^{-3}e^x$이므로

$f'(x)=-3ax^{-4}e^x+ax^{-3}e^x$
$=ax^{-4}e^x(-3+x)$

$f'(-3)=2e^{-3}$에서

$\dfrac{a}{81}e^{-3}\cdot(-6)=2e^{-3}\qquad\therefore a=-27$

따라서 $f(x)=-\dfrac{27e^x}{x^3}$이므로

$f(3)=-e^3$ 답 $-e^3$

05 $f(x)=\dfrac{\sec x-1}{\tan x}=\dfrac{\sec x}{\tan x}-\dfrac{1}{\tan x}$
$=\csc x-\cot x$

이므로

$f'(x)=-\csc x\cot x+\csc^2 x$
$=\csc x(\csc x-\cot x)$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{3}$ 답 ④

다른 풀이 $f'(x)=\dfrac{\sec x\tan^2 x-(\sec x-1)\sec^2 x}{\tan^2 x}$

$=\dfrac{\sec x(\tan^2 x-\sec^2 x+\sec x)}{\tan^2 x}$

$=\dfrac{\sec x(-1+\sec x)}{\tan^2 x}$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2\cdot(-1+2)}{(\sqrt{3})^2}=\dfrac{2}{3}$

참고 $f'(x)=\dfrac{\sec x(-1+\sec x)}{\tan^2 x}$

$=\dfrac{\sec x}{\tan x}\left(\dfrac{\sec x}{\tan x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$

$=\csc x(\csc x-\cot x)$

06 $f'(x)=-\csc x\cot x\cdot\cot x+\csc x\cdot(-\csc^2 x)$
$=-\csc x(\cot^2 x+\csc^2 x)$

따라서 구하는 기울기는

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\cdot\{(\sqrt{3})^2+2^2\}=-14$ 답 -14

07 $f'(x)=4(3x^2+ax-2)^3(6x+a)$

$f'(0)=32$에서 $\quad 4\cdot(-2)^3\cdot a=32$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=(3x^2-x-2)^4$이므로

$f(a)=f(-1)=(3+1-2)^4=16$ 답 ③

08 $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}(1+\cos 3x)-e^{2x}(-3\sin 3x)}{(1+\cos 3x)^2}$

$=\dfrac{e^{2x}(2+2\cos 3x+3\sin 3x)}{(1+\cos 3x)^2}$

$\therefore f'(0)-f(0)=\dfrac{1\cdot(2+2)}{(1+1)^2}-\dfrac{1}{1+1}$

$=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

Q BOX

함수 $y=f(ax+b)$에 대하여
$y'=af'(ax+b)$

$\dfrac{\sec x}{\tan x}=\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}$
$=\dfrac{1}{\sin x}=\csc x$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이고
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ (k는 실수)이면
$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

$\tan^2 x+1=\sec^2 x$이므로
$\tan^2 x-\sec^2 x=-1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

09 $f(5x-1)=x^3-4x^2+7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5f'(5x-1)=3x^2-8x$

$\therefore f'(5x-1)=\dfrac{3x^2-8x}{5}$

$5x-1=9$에서 $x=2$이므로 위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(9)=\dfrac{12-16}{5}=-\dfrac{4}{5}$ 답 $-\dfrac{4}{5}$

10 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)+2}{x+2}=-1$에서 $x\longrightarrow-2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to-2}\{f(x)+2\}=0$이므로 $\quad f(-2)=-2$

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)+2}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=f'(-2)$이므로

$f'(-2)=-1$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)+2}{x-2}=5$에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}\{g(x)+2\}=0$이므로 $\quad g(2)=-2$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$이므로

$g'(2)=5$

$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서 $y'=f'(g(x))g'(x)$이므로 $x=2$에서의 미분계수는

$f'(g(2))g'(2)=f'(-2)g'(2)$
$=-1\cdot5=-5$ 답 -5

11 $h(x)=f(g(x))$라 하면

$h(-1)=f(g(-1))=f(1)=4$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(g(x))-4}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)}$
$=h'(-1)$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$h'(-1)=f'(g(-1))g'(-1)$
$=f'(1)g'(-1)$
$=-1\cdot3=-3$ 답 ②

12 $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$=\dfrac{1}{2}\{\ln(1-\sin x)-\ln(1+\sin x)\}$

이므로

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-\cos x}{1-\sin x}-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

$=\dfrac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{2(1-\sin^2 x)}$

$=\dfrac{-2\cos x}{2\cos^2 x}=-\dfrac{1}{\cos x}$

따라서 $x=\frac{2}{3}\pi$에서의 미분계수는

$$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2$$ 답 2

13 $f'(x)=\frac{3x^2+a}{x^3+ax+6}$이므로 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=\frac{3+a}{-1-a+6}=\frac{3+a}{5-a}$$

따라서 $\frac{3+a}{5-a}=3$이므로

$3+a=15-3a \quad \therefore a=3$ 답 3

14 $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2(x-1)}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x+1)^3}{x^2(x-1)}\right|$$
$$=3\ln|x+1|-2\ln|x|-\ln|x-1|$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}$$
$$\therefore f'(x)=f(x)\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$f(-2)=\frac{(-1)^3}{(-2)^2\cdot(-3)}=\frac{1}{12}$이므로

$f'(-2)=\frac{1}{12}\left(-3+1+\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{36}$ 답 $-\frac{5}{36}$

다른 풀이 $f'(x)$

$$=\frac{3(x+1)^2\cdot x^2(x-1)-(x+1)^3(3x^2-2x)}{\{x^2(x-1)\}^2}$$
$$=\frac{x(x+1)^2\{3x(x-1)-(x+1)(3x-2)\}}{x^4(x-1)^2}$$
$$=\frac{(x+1)^2(-4x+2)}{x^3(x-1)^2}$$
$$\therefore f'(-2)=\frac{(-1)^2\cdot 10}{(-2)^3\cdot(-3)^2}=-\frac{5}{36}$$

쌤한마디

$y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴인 함수의 도함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한다.
→ $\ln|y|=\ln|f(x)|-\ln|g(x)|$

(ii) (i)의 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.
→ $\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}$

(iii) $y'=\square$ 꼴로 정리하여 도함수를 구한다.
→ $y'=y\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}\right\}$

15 $f(e)=e$이므로

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)$$

$f(x)=x^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln x^{\ln x}=(\ln x)^2$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$$
$$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\frac{2\ln x}{x}$$
$$\therefore f'(e)=e\cdot\frac{2}{e}=2$$ 답 ③

쌤한마디

$y=\{f(x)\}^{g(x)}\ (f(x)>0)$ 꼴인 함수의 도함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취한다.
→ $\ln y=g(x)\ln f(x)$

(ii) (i)의 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.
→ $\frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$

(iii) $y'=\square$ 꼴로 정리하여 도함수를 구한다.
→ $y'=y\left\{g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$

16 $f'(x)=6(2x-\sqrt{1+5x^2})^5\left(2-\frac{5x}{\sqrt{1+5x^2}}\right)$이므로

$$f'(1)=6(2-\sqrt{6})^5\left(2-\frac{5}{\sqrt{6}}\right),$$
$$f'(-1)=6(-2-\sqrt{6})^5\left(2+\frac{5}{\sqrt{6}}\right)$$
$$\therefore f'(1)f'(-1)$$
$$=36\{(2-\sqrt{6})(-2-\sqrt{6})\}^5\left(2-\frac{5}{\sqrt{6}}\right)\left(2+\frac{5}{\sqrt{6}}\right)$$
$$=36\cdot 2^5\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-192$$ 답 ①

17 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}=(1-\cos x)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(1-\cos x)^{-\frac{3}{2}}\cdot\sin x$$
$$=-\frac{\sin x}{2(1-\cos x)\sqrt{1-\cos x}}$$

이때 $x=a$가 방정식 $f'(x)=0$의 해이므로 $f'(a)=0$에서

$$-\frac{\sin a}{2(1-\cos a)\sqrt{1-\cos a}}=0, \quad \sin a=0$$
$$\therefore a=\pi\ (\because 0<a<2\pi)$$ 답 ④

18 A$(2, 0)$, B$(t, 3\sqrt{t})$, C$(t, 0)$이므로

$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot(t-2)\cdot 3\sqrt{t}$$
$$=\frac{3}{2}(t\sqrt{t}-2\sqrt{t})=\frac{3}{2}(t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}})$$

$f'(t)=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{9}{4}\sqrt{t}-\frac{3}{2\sqrt{t}}$이므로

$$f'(4)=\frac{9}{4}\cdot 2-\frac{3}{2\cdot 2}=\frac{15}{4}$$ 답 $\frac{15}{4}$

Q BOX

$(\sqrt{1+5x^2})'$
$=\{(1+5x^2)^{\frac{1}{2}}\}'$
$=\frac{1}{2}(1+5x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 10x$
$=\frac{5x}{\sqrt{1+5x^2}}$

$\{x^2(x-1)\}'=(x^3-x^2)'$
$=3x^2-2x$

$(2-\sqrt{6})(-2-\sqrt{6})$
$=(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)$
$=6-4=2$

점 B에서 x축에 내린 수선의 발이 C이므로 두 점 B, C의 x좌표가 같다.

19 $\angle\mathrm{OPQ}=\angle\mathrm{APO}=\angle\mathrm{PAO}=\theta$이므로

$\triangle\mathrm{PAO}$에서 $\quad\angle\mathrm{POQ}=2\theta$

$\triangle\mathrm{PAQ}$에서 $\quad\angle\mathrm{PQO}=\pi-3\theta$

따라서 $\triangle\mathrm{POQ}$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\sin(\angle\mathrm{PQO})}=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin(\angle\mathrm{POQ})}$$

$$\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin2\theta}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}$$

즉 $f(\theta)=\dfrac{\sin2\theta}{\sin3\theta}$이므로

$$f'(\theta)=\frac{2\cos2\theta\sin3\theta-\sin2\theta\cdot3\cos3\theta}{\sin^2 3\theta}$$

$$=\frac{2\cos2\theta\sin3\theta-3\sin2\theta\cos3\theta}{\sin^2 3\theta}$$

$$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-3\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot1-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot0}{1^2}=1$$

답 1

Lecture 11 여러 가지 미분법 (2)

62쪽

01 $\dfrac{dx}{dt}=-1,\ \dfrac{dy}{dt}=2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{-1}=-2t$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-2t$

다른 풀이 $x=-t+3$에서 $t=3-x$이므로

$y=(3-x)^2-2=x^2-6x+7$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=2x-6$

02 $\dfrac{dx}{dt}=3t^2,\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{(t+6)^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{(t+6)^2}}{3t^2}$$

$$=-\frac{1}{3t^2(t+6)^2}\ (t\neq0)$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{3t^2(t+6)^2}\ (t\neq0)$

03 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$,

$\dfrac{dy}{dt}=2(5t+4)\cdot5=10(5t+4)$이므로

Q BOX

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로 $\triangle\mathrm{OPA}$는 이등변삼각형이다.

$\angle\mathrm{PQO}$
$=\pi-\angle\mathrm{PAQ}-\angle\mathrm{APQ}$
$=\pi-\theta-2\theta$
$=\pi-3\theta$

$\sin(\pi-x)=\sin x$이므로
$\sin(\pi-3\theta)=\sin3\theta$

$4x-2y\neq0$에서
$4x\neq2y$
$\therefore\ 2x\neq y$

$x=-t+3$이므로
$\dfrac{dy}{dx}=2(-t+3)-6$
$=-2t$

$\dfrac{1}{x}\cdot y+x\cdot\dfrac{1}{y}=3$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{10(5t+4)}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=20\sqrt{t}\,(5t+4)$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=20\sqrt{t}\,(5t+4)$

04 $\dfrac{dx}{dt}=e^t-(-e^{-t})=e^t+e^{-t},\ \dfrac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$

05 $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-\tan\theta$

06 $xy=8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$y+x\dfrac{dy}{dx}=0\qquad\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

07 $x^3+y^2-4xy+7=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+2y\dfrac{dy}{dx}-4y-4x\dfrac{dy}{dx}=0$

$(4x-2y)\dfrac{dy}{dx}=3x^2-4y$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-4y}{4x-2y}\ (2x\neq y)$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-4y}{4x-2y}\ (2x\neq y)$

08 $\cos x+\cos y=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$-\sin x-\sin y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sin x}{\sin y}\ (\sin y\neq0)$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sin x}{\sin y}\ (\sin y\neq0)$

09 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$-\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}\right)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{1}{y}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y^2-x^2}{x^2y}}{\frac{y^2-x^2}{xy^2}}=\frac{y}{x}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$

10 $\ln|y|+x^4=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}+4x^3=0$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-4x^3y$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-4x^3y$

11 $x=y^5$의 양변을 y에 대하여 미분하면 $\dfrac{dx}{dy}=5y^4$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{5y^4}$ 답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{5y^4}$

12 $x=\sqrt{y^2+2}-6$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2+2}}=\dfrac{y}{\sqrt{y^2+2}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}$ 답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}$

13 $x=\dfrac{3y}{y^2-1}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{3(y^2-1)-3y\cdot 2y}{(y^2-1)^2}=-\dfrac{3(y^2+1)}{(y^2-1)^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\dfrac{(y^2-1)^2}{3(y^2+1)}$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{(y^2-1)^2}{3(y^2+1)}$

14 $g(\sqrt{3})=a$라 하면 $f(a)=\sqrt{3}$

$\tan a=\sqrt{3}$ $\therefore a=\dfrac{\pi}{3}$ $\left(\because 0<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $g(\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}$이고, $f'(x)=\sec^2 x$이므로

$g'(\sqrt{3})=\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$ 답 $\dfrac{1}{4}$

15 $y'=5x^4-6x^2+4$이므로

$y''=20x^3-12x$ 답 $y''=20x^3-12x$

16 $y'=-\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$이므로

$y''=-\dfrac{2(x^2+2)^2-2x\cdot 2(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+2)^4}$

$=-\dfrac{2x^2+4-8x^2}{(x^2+2)^3}$

$=\dfrac{6x^2-4}{(x^2+2)^3}$ 답 $y''=\dfrac{6x^2-4}{(x^2+2)^3}$

17 $y'=-5e^{-5x}$이므로

$y''=25e^{-5x}$ 답 $y''=25e^{-5x}$

18 $y'=\sin x+x\cos x$이므로

$y''=\cos x+\cos x+x(-\sin x)$

$=2\cos x-x\sin x$ 답 $y''=2\cos x-x\sin x$

19 $y'=e^x\ln x+e^x\cdot\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$이므로

$y''=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)+e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=e^x\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

답 $y''=e^x\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

Q BOX

$y=x^{\frac{1}{5}}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

$=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

과 같이 구할 수도 있다.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한에서 분자와 분모의 차수가 같으면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

$t>0$이므로

$\dfrac{1}{t}+1\neq 0$

$(\sin xy)'$

$=\cos xy\cdot(xy)'$

$\cos 2\pi=1$

표준+발전 유형 Q+Q

63쪽

01 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{5(3t^2+1)-(5t+2)\cdot 6t}{(3t^2+1)^2}=\dfrac{-15t^2-12t+5}{(3t^2+1)^2}$,

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-(3t^2+1)-(4-t)\cdot 6t}{(3t^2+1)^2}=\dfrac{3t^2-24t-1}{(3t^2+1)^2}$

이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{3t^2-24t-1}{(3t^2+1)^2}}{\frac{-15t^2-12t+5}{(3t^2+1)^2}}$

$=\dfrac{3t^2-24t-1}{-15t^2-12t+5}$ $(15t^2+12t-5\neq 0)$

$\therefore \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{3t^2-24t-1}{-15t^2-12t+5}$

$=\dfrac{3}{-15}=-\dfrac{1}{5}$ 답 $-\dfrac{1}{5}$

02 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}+1$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-3$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2-3}{\frac{1}{t}+1}=\dfrac{3t(t^2-1)}{t+1}$

$=\dfrac{3t(t+1)(t-1)}{t+1}=3t(t-1)$

$=3(t^2-t)=3\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}$는 $t>0$에서 $t=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값을 가지므로

$a=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

03 점 $(0,\ -1)$이 곡선 $x^3-y^3+axy+b=0$ 위의 점이므로

$1+b=0$ $\therefore b=-1$

$x^3-y^3+axy-1=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-3y^2\dfrac{dy}{dx}+ay+ax\dfrac{dy}{dx}=0$

$(3y^2-ax)\dfrac{dy}{dx}=3x^2+ay$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2+ay}{3y^2-ax}$ $(3y^2-ax\neq 0)$

점 $(0,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{4}{3}$이므로

$\dfrac{-a}{3}=\dfrac{4}{3}$ $\therefore a=-4$

$\therefore a+b=-5$ 답 -5

04 $\dfrac{\pi}{2}y=x+\sin xy$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=1+\cos xy\cdot\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)$

$x=\pi$, $y=2$를 위의 식에 대입하면

$\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=1+1\cdot\left(2+\pi\dfrac{dy}{dx}\right)$

$-\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=3$ $\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{6}{\pi}$ 답 ③

05 $g(-2)=a$라 하면 $f(a)=-2$이므로

$a^2-6a+6=-2$, $\quad a^2-6a+8=0$

$(a-2)(a-4)=0 \quad \therefore a=4\ (\because a>3)$

따라서 $g(-2)=4$이고, $f'(x)=2x-6$이므로

$$g'(-2)=\frac{1}{f'(4)}=\frac{1}{8-6}=\frac{1}{2}$$

답 ③

06 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x}=1$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+3\}=0$이므로 $\quad f(0)=-3$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$이므로

$f'(0)=1$

이때 $f(0)=-3$에서 $g(-3)=0$이므로

$$g'(-3)=\frac{1}{f'(0)}=1$$

답 1

07 $f'(x)=5e^{ax+b}+5axe^{ax+b}=5(1+ax)e^{ax+b}$이므로

$$\begin{aligned}f''(x)&=5ae^{ax+b}+5a(1+ax)e^{ax+b}\\&=5a(2+ax)e^{ax+b}\end{aligned}$$

$f'(0)=5e$에서 $\quad 5e^b=5e \quad \therefore b=1$

$f''(0)=-5e$에서 $\quad 10ae^b=-5e$

$10ae=-5e \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore ab=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

08 $y'=2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$이므로

$$\begin{aligned}y''&=2e^{2x}(2\cos x-\sin x)+e^{2x}(-2\sin x-\cos x)\\&=e^{2x}(3\cos x-4\sin x)\end{aligned}$$

$y''+ay'+by=0$에서

$$\begin{aligned}&e^{2x}(3\cos x-4\sin x)+ae^{2x}(2\cos x-\sin x)\\&+be^{2x}\cos x\\&=0\end{aligned}$$

$e^{2x}\{(3+2a+b)\cos x-(4+a)\sin x\}=0$

위의 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

x에 대한 항등식

$3+2a+b=0$, $4+a=0$

$\therefore a=-4$, $b=5$

$\therefore b-a=9$

답 9

중단원 마무리

Ⓛ 64쪽

01 전략 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 간단히 정리한 후 몫의 미분법을 이용한다.

풀이
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(1-4h)-f(1+h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1-4h)-f(1)-\{f(1+h)-f(1)\}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1-4h)-f(1)}{-4h}\cdot(-4)\\&\quad-\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=-4f'(1)-f'(1)=-5f'(1)\end{aligned}$$

이때

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x\ln5}\cdot x-\log_5 x\cdot1}{x^2}=\frac{1}{x^2\ln5}-\frac{\log_5 x}{x^2}$$

이므로

$$-5f'(1)=-5\cdot\frac{1}{\ln5}=-\frac{5}{\ln5}$$

답 $-\frac{5}{\ln5}$

02 전략 첫째항이 a이고 공비가 $r\ (-1<r<1)$인 등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

풀이 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$

첫째항과 공비가 모두 x인 등비급수

$$=\frac{x}{1-x}\ (\because 0<x<1) \quad \cdots ❶$$

이므로

$$g'(x)=\frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2} \quad \cdots ❷$$

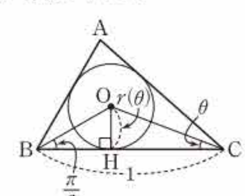
$$\therefore g'\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}=36 \quad \cdots ❸$$

답 36

단계	채점 기준	비율
❶	$g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷	$g'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸	$g'\left(\frac{5}{6}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

03 전략 △ABC의 내심에서 $\overline{BC}$에 수선을 긋고 내심과 두 꼭짓점 B, C를 각각 연결하여 두 직각삼각형을 만든 후 삼각형의 내심의 성질을 이용하여 $r(\theta)$를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 △ABC의 내심을 O, 점 O에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$를 그으면



삼각형에 내접하는 원을 내접원이라 하고, 내접원의 중심을 내심이라 한다.

$$\angle OBH=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6},\ \angle OCH=\frac{1}{2}\cdot2\theta=\theta$$

삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점(내심)에서 만난다.

직각삼각형 OBH에서 $\quad \overline{BH}=\frac{\overline{OH}}{\tan\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}r(\theta)$

직각삼각형 OHC에서 $\quad \overline{CH}=\frac{\overline{OH}}{\tan\theta}=\frac{r(\theta)}{\tan\theta}$

이때 $\overline{BH}+\overline{CH}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{3}r(\theta)+\frac{r(\theta)}{\tan\theta}=1$, $\quad \left(\sqrt{3}+\frac{1}{\tan\theta}\right)r(\theta)=1$

$$\therefore r(\theta)=\frac{\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$$

따라서 $h(\theta)=\frac{r(\theta)}{\tan\theta}=\frac{1}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$이므로

$$h'(\theta)=-\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{(1+\sqrt{3}\tan\theta)^2}$$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{4}{3}}{(1+1)^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$ 답 ②

04 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 이를 주어진 방정식에 대입한다.

풀이 $f'(x)=\sec x\tan x\cdot\tan x+\sec x\cdot\sec^2 x$

$=\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x)$

$x=\alpha$가 방정식 $3f(x)=f'(x)$의 해이므로

$3f(\alpha)=f'(\alpha)$

$3\sec\alpha\tan\alpha=\sec\alpha(\tan^2\alpha+\sec^2\alpha)$

$3\tan\alpha=2\tan^2\alpha+1$ ($\because \sec\alpha>0$)

$2\tan^2\alpha-3\tan\alpha+1=0$

$(2\tan\alpha-1)(\tan\alpha-1)=0$

$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{2}$ 또는 $\tan\alpha=1$

그런데 $-\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4}$에서 $-1<\tan\alpha<1$이므로

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha$이므로 $\tan^2\alpha+\sec^2\alpha$ $=2\tan^2\alpha+1$

05 전략 몫의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 $g'(x)$를 구한 후 $x=0$을 대입한다.

풀이 $g'(x)$

$$=\frac{f'(x)\cdot(e^{2x}+1)^3-f(x)\cdot3(e^{2x}+1)^2\cdot2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^6}$$

$$=\frac{(e^{2x}+1)f'(x)-6e^{2x}f(x)}{(e^{2x}+1)^4}$$

$$\therefore g'(0)=\frac{2f'(0)-6f(0)}{2^4}=\frac{f'(0)-3f(0)}{8}$$

$$=-\frac{1}{2}$$ 답 $-\frac{1}{2}$

$3f(0)-f'(0)=4$이므로 $f'(0)-3f(0)=-4$

06 전략 $\lim_{x\to a}q(x)=0$이고 $\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=k$ (k는 실수)이면 $\lim_{x\to a}p(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{g(x)+1\}=0$이므로

$g(1)=-1$ …… ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$이므로

$g'(1)=2$ …… ㉡

$\lim_{x\to1}\frac{h(x)-2}{x-1}=12$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{h(x)-2\}=0$이므로

$h(1)=2$ …… ㉢

$\lim_{x\to1}\frac{h(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$이므로

$h'(1)=12$ …… ㉣

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h(1)=f(g(1))=f(-1)$ ($\because$ ㉠)

이때 ㉢에 의하여

$f(-1)=2$

또 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=2f'(-1)$ ($\because$ ㉠, ㉡)

이때 ㉣에 의하여

$2f'(-1)=12$ $\therefore f'(-1)=6$

$\therefore f(-1)+f'(-1)=8$ 답 ⑤

07 전략 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$임을 이용한다.

풀이 $(f\circ g)(0)=1$에서

$f(g(0))=f(1)=1$ …… ㉠

$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$이고,

$g'(x)=(2x+1)e^{x^2+x}$이므로 $(f\circ g)'(0)=4$에서

$f'(g(0))g'(0)=4$

$\therefore f'(1)=4$ …… ㉡

$g(0)=e^0=1$

$g'(0)=1\cdot e^0=1$

$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=a+b$

$\therefore a+b=1$ ($\because$ ㉠) …… ㉣

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=a$ $\therefore a=4$ ($\because$ ㉡)

$a=4$를 ㉣에 대입하면 $b=-3$

따라서 $R(x)=4x-3$이므로

$R(2)=8-3=5$ 답 5

08 전략 $g(x)=\log_3 f(x)$라 하고 주어진 등식에서 $g(x)$에 대한 조건을 얻는다.

풀이 $g(x)=\log_3 f(x)$라 하면

$$\lim_{x\to3}\frac{\log_3 f(x)-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-1}{x-3}=\frac{6}{\ln3}$$

$x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}\{g(x)-1\}=0$이므로

$g(3)=1$ …… ㉠

$\lim_{x\to3}\frac{g(x)-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)$이므로

$g'(3)=\frac{6}{\ln3}$ …… ❶

$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)\ln3}$이므로 $g'(3)=\frac{f'(3)}{f(3)\ln3}$

따라서 $\frac{f'(3)}{f(3)\ln3}=\frac{6}{\ln3}$이므로

$a>0$, $a\neq1$이고, 함수 $f(x)$가 미분가능하며 $f(x)\neq0$일 때, $y=\log_a|f(x)|$이면 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$

$f'(3)=6f(3)$

$g(3)=\log_3 f(3)$에서 $\quad 1=\log_3 f(3)$ ($\because$ ㉠)

$\therefore f(3)=3$

$\therefore f'(3)=6\cdot 3=18$ ⋯ ❷

답 18

단계	채점 기준	비율
❶	$g(x)=\log_3 f(x)$라 하고 $g(3)$, $g'(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	$f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	60 %

09 전략 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한 후 로그함수의 미분법을 이용한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+2)^2}{(x+3)^3(x+4)^4}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^2}{(x+3)^3(x+4)^4}\right|$$
$$=\ln|x+1|+2\ln|x+2|$$
$$-3\ln|x+3|-4\ln|x+4|$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}-\frac{4}{x+4}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f(x)}=1+1-1-1=0$$

답 ③

10 전략 n이 실수일 때, $y=x^n\ (x>0)$이면 $y'=nx^{n-1}$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{3-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{3-x^2}}$, $g'(x)=-\csc^2 x$

이고 $h(x)=f(g(x))$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=f'\left(g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=f'(1)\cdot\left(-\csc^2\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-2)=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cot\frac{\pi}{4}=1$

11 전략 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한 후 그 값이 2가 되는 θ의 값을 찾는다.

풀이 $\dfrac{dx}{d\theta}=-\csc\theta\cot\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=-\csc^2\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\csc^2\theta}{-\csc\theta\cot\theta}=\frac{\csc\theta}{\cot\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$$

$\dfrac{\csc\theta}{\cot\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}$

$\dfrac{1}{\cos\theta}=2$에서 $\quad \cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\dfrac{5}{3}\pi$ ($\because 0<\theta<2\pi$)

$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$일 때, $x<0$, $y<0$이므로 $\quad \theta=\dfrac{\pi}{3}$

$x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $a=\csc\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $b=\cot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$a+b=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

12 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 $xy-y^3\ln x=2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$y+x\frac{dy}{dx}-3y^2\ln x\frac{dy}{dx}-\frac{y^3}{x}=0$$
$$(x-3y^2\ln x)\frac{dy}{dx}=\frac{y^3}{x}-y$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y^3-xy}{x(x-3y^2\ln x)}\ (x-3y^2\ln x\neq 0)$$

⋯⋯ ㉠

$x=1$을 $xy-y^3\ln x=2$에 대입하면

$y=2$

따라서 $x=1$, $y=2$를 ㉠에 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8-2}{1\cdot(1-0)}=6$$

답 ④

13 전략 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 $g(p)=q$이면 $g'(p)=\dfrac{1}{f'(q)}$임을 이용한다.

(단, $f'(q)\neq 0$)

풀이 $g(a)=b$라 하면 $f(b)=a$이므로

$\ln(e^b+5)=a \quad \therefore e^b+5=e^a$ ⋯⋯ ㉠

$f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+5}$이므로

$$f'(a)=\frac{e^a}{e^a+5},$$
$$g'(a)=\frac{1}{f'(b)}=\frac{e^b+5}{e^b}=\frac{e^a}{e^a-5}\ (\because ㉠)$$
$$\therefore \frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}=\frac{e^a+5}{e^a}+\frac{e^a-5}{e^a}$$
$$=2$$

답 ②

14 전략 먼저 $\dfrac{1}{n}=h$로 치환하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\dfrac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{g\left(1+\frac{1}{n}\right)-g\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{g(1+h)-g(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{g(1+h)-g(1)-\{g(1-2h)-g(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
$$+\lim_{h\to 0+}\frac{g(1-2h)-g(1)}{-2h}\cdot 2$$
$$=g'(1)+2g'(1)=3g'(1)$$

$g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$a^3+3a^2+4a+5=1$, $\quad a^3+3a^2+4a+4=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ & & -2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$(a+2)(a^2+a+2)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a^2+a+2>0$)

즉 $g(1)=-2$이고 $f'(x)=3x^2+6x+4$이므로

$$3g'(1)=\frac{3}{f'(-2)}=\frac{3}{12-12+4}=\frac{3}{4}$$

따라서 $p=\dfrac{3}{4}$이므로 $\quad 4p=3$

답 3

15 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$, $f''(x)$를 구한 후 부등식을 만족시킬 조건을 생각한다.

풀이 $f'(x)=(2x-3)e^x+(x^2-3x+a)e^x$
$=(x^2-x+a-3)e^x$

이므로

$f''(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x+a-3)e^x$
$=(x^2+x+a-4)e^x$

이때 $e^x>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\geq 0$이려면 $x^2+x+a-4\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+x+a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4(a-4)\leq 0$

$-4a\leq -17$ $\quad\therefore a\geq \frac{17}{4}$

따라서 정수 a의 최솟값은 5이다. 답 5

쌤한마디

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

① $ax^2+bx+c>0$이 성립한다. ⇨ $a>0$, $D<0$
② $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립한다. ⇨ $a>0$, $D\leq 0$
③ $ax^2+bx+c<0$이 성립한다. ⇨ $a<0$, $D<0$
④ $ax^2+bx+c\leq 0$이 성립한다. ⇨ $a<0$, $D\leq 0$

16 전략 $F(x)=x^3+2x^2-15x+5$라 하면 $F(f(t))=t$, $F(g(t))=t$이므로 합성함수의 미분법을 이용한다.

풀이 $h'(t)=f(t)-g(t)+t\{f'(t)-g'(t)\}$이므로

$h'(5)=f(5)-g(5)+5\{f'(5)-g'(5)\}$ ······ ㉠

곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=5$가 만나는 점의 x좌표는 $x^3+2x^2-15x+5=5$에서

$x(x^2+2x-15)=0$, $\quad x(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore f(5)=3$, $g(5)=-5$

$F(x)=x^3+2x^2-15x+5$라 하면

$F(f(t))=t$

양변을 t에 대하여 미분하면

$F'(f(t))f'(t)=1$

$\therefore f'(t)=\frac{1}{F'(f(t))}$

$F'(x)=3x^2+4x-15$이므로

$f'(5)=\frac{1}{F'(f(5))}=\frac{1}{F'(3)}$
$=\frac{1}{27+12-15}=\frac{1}{24}$

마찬가지로 $F(g(t))=t$에서

$g'(5)=\frac{1}{F'(g(5))}=\frac{1}{F'(-5)}$
$=\frac{1}{75-20-15}=\frac{1}{40}$

따라서 ㉠에서

$h'(5)=3-(-5)+5\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{40}\right)=\frac{97}{12}$ 답 ④

Q BOX

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
이므로
$(f^{-1})'(e)$
$=\frac{1}{f'(f^{-1}(e))}$

$f'(f^{-1}(e))=f'(1)=e$

주어진 곡선과 직선 $y=5$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표가 $(f(5), 5)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표가 $(g(5), 5)$이다.

점 $(f(t), t)$는 곡선 $y=F(x)$ 위의 점이다.

양변을 t에 대하여 미분하면
$F'(g(t))g'(t)=1$
$\therefore g'(t)=\frac{1}{F'(g(t))}$

17 전략 먼저 $h'(e)$의 값을 두 함수 f, g를 이용하여 나타낸 후 주어진 조건을 이용하여 필요한 값을 구한다.

풀이 $h'(x)=(f^{-1})'(x)g(x)+f^{-1}(x)g'(x)$이므로

$h'(e)=(f^{-1})'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)$
$=\frac{g(e)}{f'(f^{-1}(e))}+f^{-1}(e)g'(e)$ ··· ㉠

조건 (가)에서 $f(1)=e$이므로 $\quad f^{-1}(e)=1$

조건 (나)에서 $g(f(1))=f'(1)$이므로 조건 (가)에서

$g(e)=e$

$g(f(x))=f'(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=f''(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$, $\quad g'(e)\cdot e=f''(1)$

$\therefore g'(e)=\frac{f''(1)}{e}$ ······ ㉡

한편 $f(1)=e$이므로 $\quad (1+a+b)e=e$

$1+a+b=1$ $\quad\therefore b=-a$

즉 $f(x)=(x^2+ax-a)e^x$이므로

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax-a)e^x$
$=\{x^2+(a+2)x\}e^x$

$f'(1)=e$이므로 $\quad (a+3)e=e$

$a+3=1$ $\quad\therefore a=-2$

$\therefore f'(x)=x^2e^x$

$f''(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$이므로 ㉡에서

$g'(e)=\frac{f''(1)}{e}=\frac{3e}{e}=3$

따라서 ㉠에서

$h'(e)=\frac{e}{e}+1\cdot 3=4$ 답 ④

다른 풀이 $h(x)=f^{-1}(x)g(x)$에서

$h(f(x))=f^{-1}(f(x))g(f(x))$

$f^{-1}(f(x))=x$이고, 조건 (나)에서 $g(f(x))=f'(x)$이므로

$h(f(x))=xf'(x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$h'(f(x))f'(x)=f'(x)+xf''(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$h'(f(1))f'(1)=f'(1)+f''(1)$

이때 조건 (가)에 의하여 $f''(x)=x(x+2)e^x$이므로

$h'(e)\cdot e=e+3e$

$\therefore h'(e)=4$

06 도함수의 활용 (1)

Lecture 12 접선의 방정식

68쪽

01 $f(x)=\frac{1}{3x-5}$이라 하면

$f'(x)=-\frac{3}{(3x-5)^2}$

점 (2, 1)에서의 접선의 기울기가 $f'(2)=-3$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-3(x-2)$ $\quad\therefore y=-3x+7$

답 $y=-3x+7$

02 $f(x)=\ln(2x+1)$이라 하면 $\quad f'(x)=\frac{2}{2x+1}$

점 (0, 0)에서의 접선의 기울기가 $f'(0)=2$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=2x$

답 $y=2x$

03 $f(x)=e^{x+4}$이라 하면 $\quad f'(x)=e^{x+4}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{t+4})$이라 하면 $f'(t)=1$이므로

$e^{t+4}=1,\quad t+4=0\quad\therefore t=-4$

따라서 접점의 좌표가 $(-4,\ 1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=x+4\quad\therefore y=x+5$

답 $y=x+5$

04 $f(x)=-\sin 2x$라 하면 $\quad f'(x)=-2\cos 2x$

접점의 좌표를 $(t,\ -\sin 2t)$라 하면 $f'(t)=1$이므로

$-2\cos 2t=1\quad\therefore \cos 2t=-\frac{1}{2}$

$0\le t\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le 2t\le\pi$이므로

$2t=\frac{2}{3}\pi\quad\therefore t=\frac{\pi}{3}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{\pi}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+\frac{\sqrt{3}}{2}=x-\frac{\pi}{3}$

$\therefore y=x-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $y=x-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

05 $f(x)=\sqrt{x-1}$이라 하면 $\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t-1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{t-1}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(x-t)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(-7,\ 0)$을 지나므로

$-\sqrt{t-1}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(-7-t)$

$2t-2=7+t\quad\therefore t=9$

$t=9$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y-2\sqrt{2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}(x-9)$

$\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{8}x+\frac{7\sqrt{2}}{8}$

답 $y=\frac{\sqrt{2}}{8}x+\frac{7\sqrt{2}}{8}$

Q BOX

접점의 좌표가 주어지면
➡ 접선의 기울기를 구한다.

접선의 기울기가 주어지면
➡ 접점의 좌표를 구한다.

곡선 밖의 한 점의 좌표가 주어지면
➡ 접점의 좌표를 구한다.

06 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{\ln t}{t}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln t}{t^2}(x-t)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 (0, 0)을 지나므로

$-\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln t}{t^2}\cdot(-t)$

$\ln t=1-\ln t,\quad \ln t=\frac{1}{2}\quad\therefore t=\sqrt{e}$

$t=\sqrt{e}$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{2e}(x-\sqrt{e})\quad\therefore y=\frac{1}{2e}x$

답 $y=\frac{1}{2e}x$

07 $t=3$에 대응하는 점의 좌표는 $\left(\frac{8}{3},\ \frac{10}{3}\right)$

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{t^2},\ \frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$

$t=3$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가

$\frac{dy}{dx}=\frac{9-1}{9+1}=\frac{4}{5}$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{10}{3}=\frac{4}{5}\left(x-\frac{8}{3}\right)$

$\therefore y=\frac{4}{5}x+\frac{6}{5}$

답 $y=\frac{4}{5}x+\frac{6}{5}$

08 $x^2-6xy+y^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-6y-6x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$

$(6x-2y)\frac{dy}{dx}=2x-6y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x-3y}{3x-y}\ (3x-y\ne 0)$

점 (2, 0)에서의 접선의 기울기가

$\frac{dy}{dx}=\frac{2-0}{6-0}=\frac{1}{3}$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{3}(x-2)\quad\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

답 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

69쪽

01 $f(x)=\sqrt{3x^2-2}$라 하면

$$f'(x)=\frac{6x}{2\sqrt{3x^2-2}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}}$$

점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(-1)=-3$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=-3(x+1)\qquad \therefore\ y=-3x-2$$

따라서 $a=-3,\ b=-2$이므로

$$ab=6$$

답 6

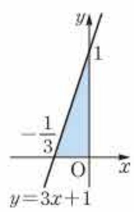
02 $f(x)=e^{2x}+\sin x$라 하면

$$f'(x)=2e^{2x}+\cos x$$

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(0)=2+1=3$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=3x\qquad \therefore\ y=3x+1$$

접선의 x절편과 y절편이 각각 $-\frac{1}{3},\ 1$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{6}$$

답 ①

03 직선 $x+y-4=0$, 즉 $y=-x+4$와 수직인 직선의 기울기는 1이다.

> 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 서로 수직이면
> $mm'=-1$

$f(x)=x\ln x-x$라 하면

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x$$

접점의 좌표를 $(t,\ t\ln t-t)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t)=1$에서

$$\ln t=1\qquad \therefore\ t=e$$

즉 접점의 좌표가 $(e,\ 0)$이므로 접선의 방정식은

> $e\ln e-e=e-e=0$

$$y=x-e$$

따라서 구하는 y절편은 $-e$이다.

답 $-e$

04 $f(x)=\frac{3}{x+1}$이라 하면

$$f'(x)=-\frac{3}{(x+1)^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{3}{t+1}\right)$이라 하면 접선의 기울기가 -3이므로 $f'(t)=-3$에서

> 주어진 두 직선의 기울기가 모두 -3이다.

$$-\frac{3}{(t+1)^2}=-3,\qquad (t+1)^2=1$$

$$t+1=\pm1\qquad \therefore\ t=-2\text{ 또는 }t=0$$

따라서 접점의 좌표가 $(-2,\ -3),\ (0,\ 3)$이므로 접선의 방정식은

$$y+3=-3(x+2),\ y-3=-3x$$

$$\therefore\ y=-3x-9,\ y=-3x+3$$

> $a=-9,\ b=3$
> 또는 $a=3,\ b=-9$

$$\therefore\ a+b=-9+3=-6$$

답 -6

다른 풀이 곡선 $y=\frac{3}{x+1}$에 접하고 기울기가 -3인 접선의 방정식을 $y=-3x+k$ (k는 상수)라 하면

$-3x+k=\frac{3}{x+1}$에서

$$(-3x+k)(x+1)=3$$

$$\therefore\ 3x^2+(3-k)x+3-k=0\qquad \cdots\cdots ㉠$$

곡선 $y=\frac{3}{x+1}$과 직선 $y=-3x+k$가 접하므로 이차방정식 ㉠은 중근을 갖는다.

따라서 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=(3-k)^2-4\cdot3\cdot(3-k)=0$$

> $3-k$를 공통인수로 가지므로
> $(3-k)^2-4\cdot3\cdot(3-k)$
> $=(3-k)(3-k-12)$
> $=(3-k)(-k-9)$
> $=(k+9)(k-3)$
> 과 같이 인수분해할 수도 있다.

$$k^2+6k-27=0,\qquad (k+9)(k-3)=0$$

$$\therefore\ k=-9\text{ 또는 }k=3$$

$$\therefore\ a+b=-9+3=-6$$

05 $f(x)=e^{-x-2}$이라 하면

$$f'(x)=-e^{-x-2}$$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{-t-2})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=-e^{-t-2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{-t-2}=-e^{-t-2}(x-t)\qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$$-e^{-t-2}=-e^{-t-2}(-1-t)$$

$$e^{-t-2}(t+2)=0$$

$$\therefore\ t=-2\ (\because\ e^{-t-2}>0)$$

$t=-2$를 ㉠에 대입하면

$$y-1=-(x+2)\qquad \therefore\ y=-x-1$$

이 직선이 점 $(5,\ a)$를 지나므로

$$a=-5-1=-6$$

답 ①

06 $f(x)=\ln x^2+4$라 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln t^2+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=\frac{2}{t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-(\ln t^2+4)=\frac{2}{t}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\ln t^2-4=-2,\qquad \ln t^2=-2$$

$$t^2=\frac{1}{e^2}\qquad \therefore\ t=\pm\frac{1}{e}$$

따라서 접선의 기울기는 $f'\left(-\frac{1}{e}\right)=-2e,\ f'\left(\frac{1}{e}\right)=2e$이므로 두 접선의 기울기의 곱은

$$-2e\cdot2e=-4e^2$$

답 ①

07 $f(x)=\frac{1}{x^2+6}$이라 하면

$$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+6)^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{t^2+6}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=-\frac{2t}{(t^2+6)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{t^2+6}=-\frac{2t}{(t^2+6)^2}(x-t)$$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$$-\frac{1}{t^2+6}=-\frac{2t}{(t^2+6)^2}(a-t)$$

$$\frac{3t^2-2at+6}{(t^2+6)^2}=0$$

$$\therefore\ 3t^2-2at+6=0\ (\because\ (t^2+6)^2>0)\quad \cdots\ ㉠$$

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=\dfrac{1}{x^2+6}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-3\cdot 6>0$$

$$(a+3\sqrt{2})(a-3\sqrt{2})>0$$

$$\therefore\ a<-3\sqrt{2}\ \text{또는}\ a>3\sqrt{2}$$

답 ①

08 $f(x)=(x+a)e^{x-1}$이라 하면

$$f'(x)=e^{x-1}+(x+a)e^{x-1}$$
$$=(x+a+1)e^{x-1}$$

접점의 좌표를 $(t,\ (t+a)e^{t-1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=(t+a+1)e^{t-1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t+a)e^{t-1}=(t+a+1)e^{t-1}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(t+a)e^{t-1}=(t+a+1)e^{t-1}\cdot(-t)$$

$$(t^2+at-a)e^{t-1}=0$$

$$\therefore\ t^2+at-a=0\ (\because\ e^{t-1}>0)\quad \cdots\cdots\ ㉠$$

원점에서 곡선 $y=(x+a)e^{x-1}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=a^2+4a=0,\qquad a(a+4)=0$$

$$\therefore\ a=-4\ (\because\ a\neq 0)$$

답 ②

09 $f(x)=\ln x+ax,\ g(x)=\dfrac{b}{x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{x}+a,\ g'(x)=-\frac{b}{x^2}$$

두 곡선이 $x=e^2$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(e^2)=g(e^2)$에서 $\qquad 2+ae^2=\dfrac{b}{e^2}$

$$\therefore\ 2e^2+ae^4=b\quad \cdots\cdots\ ㉠$$

$f'(e^2)=g'(e^2)$에서 $\qquad \dfrac{1}{e^2}+a=-\dfrac{b}{e^4}$

$$\therefore\ e^2+ae^4=-b\quad \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$3e^2+2ae^4=0\qquad \therefore\ a=-\frac{3}{2e^2}$$

㉠−㉡을 하면

$$e^2=2b\qquad \therefore\ b=\frac{e^2}{2}$$

$$\therefore\ ab=-\frac{3}{4}$$

답 $-\dfrac{3}{4}$

Q BOX

$\sin t=0$이면
$t=n\pi$ (n은 정수)
(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,
$\cos t=\cos 2k\pi$
$=1$
(ii) $n=2k+1$ (k는 정수) 일 때,
$\cos t$
$=\cos(2k+1)\pi$
$=-1$

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $f(a)=b$, 즉 $g(b)=a$이면
$g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$
(단, $f'(a)\neq 0$)

쌤한마디

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면
① $x=t$인 점에서 두 곡선이 만난다. ➡ $f(t)=g(t)$
② $x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같다. ➡ $f'(t)=g'(t)$

10 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\qquad \cos^2 t+a=\cos t$

$$\therefore\ a=\cos t-\cos^2 t\quad \cdots\cdots\ ㉠$$

$f'(x)=-2\cos x\sin x,\ g'(x)=-\sin x$이므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$$-2\cos t\sin t=-\sin t$$

$$\sin t(2\cos t-1)=0$$

$$\therefore\ \sin t=0\ \text{또는}\ \cos t=\frac{1}{2}$$

(i) $\sin t=0$일 때,

$\cos t=\pm 1$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$a=-2\ (\because\ a\neq 0)$$

(ii) $\cos t=\dfrac{1}{2}$일 때,

$\cos t=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\qquad a=\dfrac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a=\dfrac{1}{4}$이므로 구하는 합은

$$-2+\frac{1}{4}=-\frac{7}{4}$$

답 $-\dfrac{7}{4}$

11 $g(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$이므로

$$\tan k=-1$$

$$\therefore\ k=-\frac{\pi}{4}\ \left(\because\ -\frac{\pi}{2}<k<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\ g'(-1)=\frac{1}{f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

이때 $f'(x)=\sec^2 x$이므로 $\qquad f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=(\sqrt{2})^2=2$

$$\therefore\ g'(-1)=\frac{1}{2}$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(-1,\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은

$$y+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x+1)\qquad \therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$

답 $1-\dfrac{\pi}{4}$

12 $g(0)=k$라 하면 $f(k)=0$이므로

$$\ln(2k+5)=0,\qquad 2k+5=1$$

$$\therefore\ k=-2$$

$$\therefore\ g'(0)=\frac{1}{f'(-2)}$$

이때 $f'(x)=\frac{2}{2x+5}$이므로 $\quad f'(-2)=2$

$\therefore g'(0)=\frac{1}{2}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, -2)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은

$y+2=\frac{1}{2}x \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-2$

즉 구하는 x절편은 4이다. 답 ⑤

$y=0$을 $y=\frac{1}{2}x-2$에 대입하면

$0=\frac{1}{2}x-2 \quad \therefore x=4$

13 $t=2$에 대응하는 점의 좌표는 $\quad (0, 12)$

$\frac{dx}{dt}=3t^2-4t$, $\frac{dy}{dt}=2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{3t^2-4t}=\frac{2}{3t-4}\ (3t^2-4t\neq 0)$$

$t=2$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가

$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{6-4}=1$

이므로 접선의 방정식은

$y-12=x \qquad \therefore y=x+12$

따라서 $a=1$, $b=12$이므로 $\quad a+b=13$ 답 13

14 $\frac{dx}{d\theta}=\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=k+\cos\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{k+\cos\theta}{\sin\theta}\ (\sin\theta\neq 0)$$

$\theta=\frac{3}{2}\pi$일 때 $\frac{dy}{dx}=-2$이므로

$\frac{k}{-1}=-2 \qquad \therefore k=2$

$\theta=\frac{3}{2}\pi$에 대응하는 점의 좌표가

$\left(1-0,\ 2\cdot\frac{3}{2}\pi-1\right)$, 즉 $(1, 3\pi-1)$

이므로 직선 l의 방정식은

$y-(3\pi-1)=-2(x-1)$

$\therefore y=-2x+3\pi+1$

따라서 구하는 y절편은 $3\pi+1$이다. 답 $3\pi+1$

15 $x^3+y^2-5xy=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+2y\frac{dy}{dx}-5y-5x\frac{dy}{dx}=0$

$(5x-2y)\frac{dy}{dx}=3x^2-5y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-5y}{5x-2y}\ (5x-2y\neq 0)$

점 $(6, 18)$에서의 접선의 기울기가

$\frac{dy}{dx}=\frac{108-90}{30-36}=-3$

이므로 접선의 방정식은

$y-18=-3(x-6) \qquad \therefore y=-3x+36$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$0=-3a+36 \qquad \therefore a=12$

또 점 $(4, b)$를 지나므로

$b=-12+36=24$

$\therefore b-a=12$ 답 ②

16 $y^2=\ln(10-x^2)-xy-2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{10-x^2}-y-x\frac{dy}{dx}$

$(x+2y)\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-10y+x^2y}{10-x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-10y+x^2y}{(x+2y)(10-x^2)}\ (x+2y\neq 0)$

점 $(-3, 1)$에서의 접선의 기울기가

$\frac{dy}{dx}=\frac{6-10+9}{-1\cdot 1}=-5$

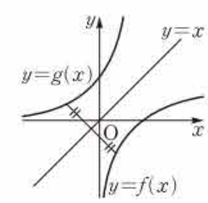
이므로 직선 l의 방정식은

$y-1=-5(x+3) \qquad \therefore 5x+y+14=0$

따라서 원점과 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|14|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{7\sqrt{26}}{13}$ 답 ④

17 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 사이의 최단 거리 $l(k)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점과 직선 $y=x$ 사이의 최단 거리의 2배이다.



이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점과 직선 $y=x$ 사이의 최단 거리는 곡선 $y=f(x)$의 접선 중 직선 $y=x$와 평행한 접선의 접점과 직선 $y=x$ 사이의 거리와 같다.

두 직선이 평행하면 기울기가 같으므로 접선의 기울기는 1이다.

$f(x)=\ln\frac{x}{k}=\ln x-\ln k$에서 $\qquad f'(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)=1$에서

$\frac{1}{x}=1 \qquad \therefore x=1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1, \ln\frac{1}{k}\right)$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

곡선 $y=f(x)$의 접선 중 직선 $y=x$와 평행한 접선의 접점

$\frac{\left|1-\ln\frac{1}{k}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1+\ln k}{\sqrt{2}}\ (\because k>1)$

$\therefore l(k)=2\cdot\frac{1+\ln k}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(1+\ln k)$

$l(k)\geq 5\sqrt{2}$에서 $\qquad \sqrt{2}(1+\ln k)\geq 5\sqrt{2}$

$\ln k\geq 4 \qquad \therefore k\geq e^4$

따라서 k의 최솟값은 e^4이다. 답 ④

18 $x^2+y^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) $(x_1>0, y_1>0)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $-\frac{x_1}{y_1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 A$(k, 0)$을 지나므로

$$-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(k-x_1), \qquad k-x_1=\frac{y_1^2}{x_1}$$

$$kx_1=x_1^2+y_1^2 \qquad \therefore x_1=\frac{4}{k}$$

한편 $x=0$을 ㉠에 대입하면

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}\cdot(-x_1)$$

$$\therefore y=\frac{x_1^2+y_1^2}{y_1}=\frac{4}{\sqrt{4-x_1^2}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{4-\frac{16}{k^2}}}=\frac{2k}{\sqrt{k^2-4}}$$

따라서 P$\left(0, \frac{2k}{\sqrt{k^2-4}}\right)$이므로

$$S(k)=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\frac{2k}{\sqrt{k^2-4}}=\frac{k^2}{\sqrt{k^2-4}}$$

$$\therefore S'(k)=\frac{2k\sqrt{k^2-4}-k^2\cdot\frac{2k}{2\sqrt{k^2-4}}}{(\sqrt{k^2-4})^2}$$

$$=\frac{k(k^2-8)}{(k^2-4)\sqrt{k^2-4}}$$

$$\therefore S'(\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}\cdot(-3)}{1\cdot1}=-3\sqrt{5}$$

답 $-3\sqrt{5}$

QBOX

점 (x_1, y_1)은 곡선 $x^2+y^2=4$ 위에 있으므로
$x_1^2+y_1^2=4$

$x_1^2+y_1^2=4$이므로
$y_1=\sqrt{4-x_1^2}$
$(\because y_1>0)$

$S(k)$를 구하기 위해 점 P의 y좌표를 k를 이용하여 나타낸다.

Lecture 13 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

72쪽

01 $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

따라서 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가하고, 구간 $[0, \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

도함수의 부호를 조사하여 함수의 증가와 감소를 표로 나타낸 것을 증감표라 하며 증감표에서 ↗는 함수의 증가, ↘는 함수의 감소를 나타낸다.

02 $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ $(\because e^x>0)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘		↗

따라서 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

03 $f(x)=x-\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \frac{1}{x}=1 \quad \therefore x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘		↗

따라서 $f(x)$는 구간 $(0, 1]$에서 감소하고, 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

04 $f'(x)=1+2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ $(\because 0<x<\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

따라서 $f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right]$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

05 $f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x\sin x=0$

$\therefore x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ $(\because 0<x<3\pi)$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$		↘		↗		↘	

따라서 $f(x)$는 구간 $(0, \pi]$, $[2\pi, 3\pi)$에서 감소하고, 구간 $[\pi, 2\pi]$에서 증가한다.

답 풀이 참조

06 $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x-1}}$에서 $x>1$이고

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x-1}-(x+3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{(\sqrt{x-1})^2}$$

$$=\frac{x-5}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=5$

x	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	4	↗

따라서 $f(x)$는 $x=5$에서 극솟값 4를 갖는다.

답 극솟값: 4

07 $f(x)=-x^2\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=-2x\ln x-x^2\cdot\frac{1}{x}=-x(2\ln x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2\ln x+1=0$

$\ln x=-\dfrac{1}{2} \qquad \therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$

따라서 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$에서 극댓값 $\dfrac{1}{2e}$을 갖는다.

답 극댓값: $\dfrac{1}{2e}$

08 $f'(x)=(2x-4)e^x+(x^2-4x-11)e^x$

$=(x^2-2x-15)e^x$

$=(x+3)(x-5)e^x$

이므로

$f''(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x-15)e^x$

$=(x^2-17)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=5$ ($\because e^x>0$)

이때 $f''(-3)=-8e^{-3}<0$, $f''(5)=8e^5>0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f(-3)=10e^{-3}$, 극솟값은 $f(5)=-6e^5$이다. 답 극댓값: $10e^{-3}$, 극솟값: $-6e^5$

09 $f'(x)=\cos x-\sin x$이므로

$f''(x)=-\sin x-\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\sin x$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

이때 $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}<0$, $f''\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)=\sqrt{2}>0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, 극솟값은 $f\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}$이다. 답 극댓값: $\sqrt{2}$, 극솟값: $-\sqrt{2}$

10 $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+6}$이므로

$f''(x)=\dfrac{2(x^2+6)-2x\cdot 2x}{(x^2+6)^2}=\dfrac{-2x^2+12}{(x^2+6)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

이때 $f''(0)=\dfrac{1}{3}>0$이므로 $f(x)$의 극솟값은 $f(0)=\ln 6$이다. 답 극솟값: $\ln 6$

표준+발전 유형 Q+Q

73쪽

01 $f'(x)=\dfrac{x^2+16-(x-3)\cdot 2x}{(x^2+16)^2}=\dfrac{-x^2+6x+16}{(x^2+16)^2}$

$=-\dfrac{(x+2)(x-8)}{(x^2+16)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=8$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	8	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

따라서 $f(x)$는 구간 $[-2, 8]$에서 증가하므로 구하는 x의 값의 범위는 $\quad -2\le x\le 8$ 답 ①

02 $f'(x)=(2ax+3)e^x+(ax^2+3x)e^x$

$=\{ax^2+(2a+3)x+3\}e^x$

$f'(x)=0$에서

$ax^2+(2a+3)x+3=0$ ($\because e^x>0$) $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 $[-3, b]$이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은 -3, b이다.

Q BOX: $x=-3$, $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -3, b이다. 즉 이차방정식 ㉠의 두 근은 -3, b이다.

$x=-3$을 ㉠에 대입하면

$9a-6a-9+3=0, \quad 3a=6$

$\therefore a=2$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3b=\dfrac{3}{2} \qquad \therefore b=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore ab=-1$ 답 ②

03 $f'(x)=4-\dfrac{2x}{x^2+a}=\dfrac{4x^2-2x+4a}{x^2+a}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$4x^2-2x+4a\ge 0$ ($\because x^2+a>0$)

x^2+a는 로그의 진수이므로 로그의 정의에 의하여 $x^2+a>0$

이차방정식 $4x^2-2x+4a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-4\cdot 4a\le 0$

$\therefore a\ge\dfrac{1}{16}$ 답 $a\ge\dfrac{1}{16}$

04 $f'(x)=a\cos x+\sin x-\sqrt{5}$

$=\sqrt{a^2+1}\sin(x+\alpha)-\sqrt{5}$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}},\ \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)$

삼각함수의 합성
$m\ne 0$, $n\ne 0$일 때,
$m\sin\theta+n\cos\theta=\sqrt{m^2+n^2}\sin(\theta+\alpha)$
$\left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$\sqrt{a^2+1}\sin(x+\alpha)-\sqrt{5}\le 0$

$\sqrt{a^2+1}\sin(x+\alpha)\le\sqrt{5}$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이므로 ㉠을 만족시키려면

$\sqrt{a^2+1}\le\sqrt{5}, \quad a^2+1\le 5$

$a^2-4\le 0, \quad (a+2)(a-2)\le 0$

$\therefore -2\le a\le 2$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

답 ③

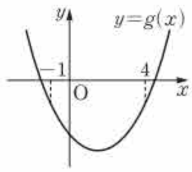
05 $f'(x)=\dfrac{(-2x-2)(x^2+4)-(-x^2-2x+a)\cdot 2x}{(x^2+4)^2}$

$=\dfrac{2\{x^2-(a+4)x-4\}}{(x^2+4)^2}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ 4)$에서 감소하려면 $-1<x<4$일 때 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$x^2-(a+4)x-4\le 0$ ($\because$ $(x^2+4)^2>0$)

이때 $g(x)=x^2-(a+4)x-4$라 하면 오른쪽 그림과 같이 $g(-1)\le 0$이어야 하므로



$1+a+4-4\le 0$

$\therefore\ a\le -1$ ...... ㉠

또 $g(4)\le 0$이어야 하므로

$16-4a-16-4\le 0$ $\quad\therefore\ a\ge -1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a의 값은 -1이다.

답 -1

06 $f'(x)=2e^{2x}+e^x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하려면 $x>0$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$2e^{2x}+e^x+a\ge 0$

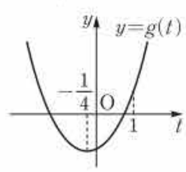
$e^x=t$로 놓으면 $x>0$에서 $t>1$이고

$2t^2+t+a\ge 0$

이때

$$g(t)=2t^2+t+a=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+a-\frac{1}{8}$$

이라 하면 오른쪽 그림과 같이 $g(1)\ge 0$이어야 하므로



$2+1+a\ge 0$ $\quad\therefore\ a\ge -3$

따라서 실수 a의 최솟값은 -3이다.

답 -3

07 $f'(x)=\dfrac{5(x^2+8)-5x\cdot 2x}{(x^2+8)^2}=\dfrac{-5(x^2-8)}{(x^2+8)^2}$

$=-\dfrac{5(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})}{(x^2+8)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=2\sqrt{2}$에서 극대이고 $x=-2\sqrt{2}$에서 극소이므로

$\alpha=2\sqrt{2},\ \beta=-2\sqrt{2}$

$\therefore\ \alpha-2\beta=6\sqrt{2}$

답 $6\sqrt{2}$

08 $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt{x}+\sqrt{4-x}}$에서 $0\le x\le 4$이고

$$f'(x)=-\frac{6\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}\right)}{(\sqrt{x}+\sqrt{4-x})^2}$$

$$=\frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{4-x})}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}(\sqrt{x}+\sqrt{4-x})^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad\sqrt{x}=\sqrt{4-x}$

양변을 제곱하면 $\quad x=4-x$ $\quad\therefore\ x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	↗	3

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$를 갖는다.

답 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

09 $f'(x)=(2x+4)e^{-x}-(x^2+4x+1)e^{-x}$

$=-(x^2+2x-3)e^{-x}$

$=-(x+3)(x-1)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$ ($\because$ $e^{-x}>0$)

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-2e^3$	↗	$\frac{6}{e}$	↘

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $\dfrac{6}{e}$, $x=-3$에서 극솟값 $-2e^3$을 가지므로 구하는 곱은

$\dfrac{6}{e}\cdot(-2e^3)=-12e^2$

답 ①

다른 풀이 $f'(x)=-(x^2+2x-3)e^{-x}$이므로

$f''(x)=(-2x-2)e^{-x}+(x^2+2x-3)e^{-x}$

$=(x^2-5)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$ ($\because$ $e^{-x}>0$)

이때 $f''(-3)=4e^3>0$, $f''(1)=-\dfrac{4}{e}<0$이므로

$f(x)$의 극댓값은 $f(1)=\dfrac{6}{e}$, 극솟값은 $f(-3)=-2e^3$이다.

따라서 구하는 곱은 $\quad\dfrac{6}{e}\cdot(-2e^3)=-12e^2$

Q BOX

지수함수는 이계도함수를 쉽게 구할 수 있으므로 이계도함수의 부호를 이용하여 극대와 극소를 판정할 수도 있다.

10 $f(x)=x(\ln x)^2$에서 $x>0$이고

$f'(x)=(\ln x)^2+x\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=(\ln x+2)\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\quad\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗

따라서 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e^2}$에서 극댓값 $\dfrac{4}{e^2}$를 가지므로

$a=\dfrac{1}{e^2},\ b=\dfrac{4}{e^2}$

$\therefore\ a+b=\dfrac{5}{e^2}$

답 ⑤

11 $f'(x)=-2\cos x\sin x+\sqrt{3}\sin x$

$=-\sin x(2\cos x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극솟값 $\frac{9}{4}$를 가지므로

$a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{9}{4}$ $\therefore ab=\frac{3}{8}\pi$ 답 ③

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3$
$=\frac{9}{4}$

12 $\frac{dx}{d\theta}=1+\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=-\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ $(1+\cos\theta\neq 0)$

$\frac{dy}{dx}=0$에서 $\sin\theta=0$

$\therefore \theta=0$ ($\because -\pi<\theta<\pi$)

또 $-\pi<\theta<0$일 때 $\frac{dy}{dx}>0$, $0<\theta<\pi$일 때 $\frac{dy}{dx}<0$이므로 주어진 함수는 $\theta=0$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구하는 극댓값은 3이다. 답 3

$\theta=0$일 때,
$y=2+\cos 0$
$=2+1=3$

13 $f'(x)=\sqrt{a-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a-x^2}}=\frac{a-2x^2}{\sqrt{a-x^2}}$

$f(x)$가 $x=\sqrt{3}$에서 극댓값 8을 가지므로

$f(\sqrt{3})=8$, $f'(\sqrt{3})=0$

$\sqrt{3}\sqrt{a-3}+b=8$, $\frac{a-6}{\sqrt{a-3}}=0$

$\therefore a=6$, $b=5$

따라서 $f(x)=x\sqrt{6-x^2}+5$에서 $-\sqrt{6}\le x\le\sqrt{6}$이고,

$f'(x)=\frac{6-2x^2}{\sqrt{6-x^2}}$이므로 $f'(x)=0$에서

$6-2x^2=0$, $x^2=3$

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	$-\sqrt{6}$	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$	8	$\searrow$	5

따라서 $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$에서 극솟값 2를 갖는다.

답 ②

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 p를 가지면
$f(a)=p$, $f'(a)=0$

$f(-\sqrt{3})$
$=-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+5=2$

14 $f'(x)=(2\pi x+a)\sec^2(\pi x^2+ax)$

$f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f'(1)=0$에서

$(2\pi+a)\sec^2(\pi+a)=0$

$2\pi+a=0$ ($\because \sec^2(\pi+a)\neq 0$)

$\therefore a=-2\pi$

따라서 $f(x)=\tan(\pi x^2-2\pi x)$이므로

$b=f(1)=\tan(\pi-2\pi)=\tan(-\pi)=0$

$\therefore a+b=-2\pi$ 답 -2π

$f(x)$의 정의역은 $\{x|x\neq\pm3$인 모든 실수$\}$이다.

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$이므로
$\sec\theta\le -1$
또는 $\sec\theta\ge 1$
$\therefore \sec^2\theta\neq 0$

15 $f'(x)=3+a\cos x$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$

이어야 한다.

이때 $-1\le\cos x\le 1$이므로

$-a\le a\cos x\le a$ ($\because a>0$)

$3-a\le 3+a\cos x\le 3+a$

$\therefore 3-a\le f'(x)\le 3+a$

따라서 $3+a\le 0$ 또는 $3-a\ge 0$이어야 하므로

$0<a\le 3$

즉 양수 a의 최댓값은 3이다. 답 3

16 $f'(x)=(3x^2-6x)e^x+(x^3-3x^2+a)e^x$
$=(x^3-6x+a)e^x$

이때 $e^x>0$이므로 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $x^3-6x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(x)=x^3-6x+a$라 하면

$g'(x)=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$g'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

따라서 삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $g(-\sqrt{2})g(\sqrt{2})<0$이어야 하므로

$(a+4\sqrt{2})(a-4\sqrt{2})<0$

$\therefore -4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$

답 ④

쌤한마디

삼차방정식의 근의 판별

삼차함수 $g(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $g(x)=0$의 근은

① (극댓값)×(극솟값)<0
$\Longleftrightarrow$ 서로 다른 세 실근

② (극댓값)×(극솟값)$=0$
$\Longleftrightarrow$ 한 실근과 중근(서로 다른 두 실근)

③ (극댓값)×(극솟값)>0
$\Longleftrightarrow$ 한 실근과 두 허근

17 $f'(x)=\frac{2(x^2-9)-(2x+k)\cdot 2x}{(x^2-9)^2}$
$=-\frac{2(x^2+kx+9)}{(x^2-9)^2}$

$f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $x^2+kx+9=0$이 $x\neq\pm3$인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$9-3k+9\neq 0$, $9+3k+9\neq 0$

$\therefore k\neq\pm 6$

이차방정식 $x^2+kx+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-36>0$, $(k+6)(k-6)>0$

$\therefore k<-6$ 또는 $k>6$

답 $k<-6$ 또는 $k>6$

18 $f'(x)=1-\dfrac{4x}{2x^2+a}=\dfrac{2x^2-4x+a}{2x^2+a}$

이때 $2x^2+a>0$이므로 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $2x^2-4x+a=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-2a\le 0 \qquad \therefore a\ge 2$$

따라서 a의 최솟값은 2이다. 답 ②

Q BOX

$2x^2+a$는 로그의 진수이므로 로그의 정의에 의하여
$2x^2+a>0$

중단원 마무리

76쪽

01 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이고, 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$라 하면

$a=f(-2)=2$

$f'(x)=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$이므로 점 $(-2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=1$

따라서 점 $(-2,\ 2)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 -1이므로 직선의 방정식은

$y-2=-(x+2) \qquad \therefore y=-x$

이 직선이 점 $(b,\ 4)$를 지나므로 $\quad b=-4$

$\therefore a^2+b^2=4+16=20$ 답 20

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-2,\ a)$를 지나므로
$a=f(-2)$

02 전략 방정식 $f(x)=0$을 풀어 점 P의 x좌표를 구한 후 점 P에서의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=0$에서

$\ln(\tan x)=0, \qquad \tan x=1$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}\ \left(\because 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$

$f'(x)=\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}$이므로 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{(\sqrt{2})^2}{1}=2$

따라서 접선의 방정식은

$y=2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) \qquad \therefore y=2x-\dfrac{\pi}{2}$

즉 구하는 y절편은 $-\dfrac{\pi}{2}$이다. 답 ④

03 전략 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이면 이 직선의 기울기는 $\tan\theta$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

접점의 좌표를 $(t,\ \sin t+\cos t)$라 하면 접선의 기울기가 $\tan 135°=-1$이므로 $f'(t)=-1$에서

$\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{3}{4}\pi\right)=-1$

$\sin\left(t+\dfrac{3}{4}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0<t<\pi$에서 $\dfrac{3}{4}\pi<t+\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{7}{4}\pi$이므로

$t+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{5}{4}\pi \qquad \therefore t=\dfrac{\pi}{2}$

즉 접점의 좌표가 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) \qquad \therefore y=-x+\dfrac{\pi}{2}+1$ ··· ❶

$\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{2}=1+0$
$=1$

$y=0$을 대입하면

$0=-x+\dfrac{\pi}{2}+1 \qquad \therefore x=\dfrac{\pi}{2}+1$

따라서 구하는 x절편은 $\dfrac{\pi}{2}+1$이다. ··· ❷

답 $\dfrac{\pi}{2}+1$

단계	채점 기준	비율
❶	접선의 방정식을 구할 수 있다.	70 %
❷	접선의 x절편을 구할 수 있다.	30 %

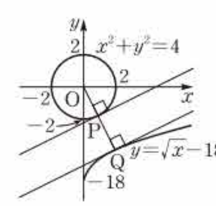
참고 $f'(x)=-\sin x+\cos x$에서 $\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$f'(x)=\sqrt{2}\left\{\sin x\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\cos x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{3}{4}\pi+\cos x\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

04 전략 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 최소가 될 조건을 생각해 본다.



풀이 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 최소가 되려면 $\overline{\mathrm{OQ}}$와 원 $x^2+y^2=4$가 만나는 점이 P이고, 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에서의 접선과 곡선 $y=\sqrt{x}-18$ 위의 점 Q에서의 접선이 평행해야 한다. 이때 점 P에서의 접선은 직선 OP와 수직이므로 점 Q에서의 접선은 직선 OQ와 수직이다.

원 $x^2+y^2=4$의 중심

$f(x)=\sqrt{x}-18$이라 하면 $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 최소일 때의 점 Q의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t}-18)$ $(t>0)$이라 하면 점 Q에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

직선 OQ의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{t}-18}{t}$이고 점 Q에서의 접선과 직선 OQ는 서로 수직이므로

$\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\dfrac{\sqrt{t}-18}{t}=-1, \qquad \sqrt{t}-18=-2t\sqrt{t}$

$2t\sqrt{t}+\sqrt{t}-18=0$

이때 $\sqrt{t}=X\,(X>0)$로 놓으면

$2X^3+X-18=0$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & 0 & 1 & -18 \\ & & 4 & 8 & 18 \\ \hline & 2 & 4 & 9 & 0 \end{array}$$

$(X-2)(2X^2+4X+9)=0$

$\therefore X=2\ (\because 2X^2+4X+9>0)$

즉 $\sqrt{t}=2$이므로 $\quad t=4$

따라서 Q$(4,\ -16)$이므로

$\overline{\text{OQ}}=\sqrt{4^2+(-16)^2}=4\sqrt{17}$

$\therefore\ \overline{\text{PQ}}=\overline{\text{OQ}}-\overline{\text{OP}}=4\sqrt{17}-2$ 　　답 $4\sqrt{17}-2$

원의 반지름의 길이

05 **전략** 접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{5t+a}{e^t}\right)$라 하고 구한 접선의 방정식에 $x=0,\ y=0$을 대입하여 t에 대한 방정식을 세운 후, 이 방정식이 실근을 갖지 않을 조건을 이용한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{5x+a}{e^x}=(5x+a)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=5e^{-x}-(5x+a)e^{-x}=-(5x+a-5)e^{-x}$

접점의 좌표를 $(t,\ (5t+a)e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=-(5t+a-5)e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-(5t+a)e^{-t}=-(5t+a-5)e^{-t}(x-t)$

이 직선이 원점을 지나면

$-(5t+a)e^{-t}=-(5t+a-5)e^{-t}\cdot(-t)$

$5t+a=-t(5t+a-5)\ (\because\ e^{-t}>0)$

$\therefore\ 5t^2+at+a=0$ 　　$\cdots\cdots$ ㉠

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 수 없으려면 이차방정식 ㉠이 실근을 갖지 않아야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-20a<0,\quad a(a-20)<0$

$\therefore\ 0<a<20$

따라서 정수 a의 최댓값은 19이다. 　　답 ⑤

06 **전략** 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t),\ f'(t)=g'(t)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^2,\ g(x)=\ln 2x+a$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=4x,\ g'(x)=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$

두 곡선이 $x=b$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(b)=g(b)$에서

$2b^2=\ln 2b+a$ 　　$\cdots\cdots$ ㉠

$f'(b)=g'(b)$에서

$4b=\dfrac{1}{b},\quad b^2=\dfrac{1}{4}\quad \therefore\ b=\dfrac{1}{2}\ (\because\ b>0)$

$b=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$2\cdot\dfrac{1}{4}=\ln\left(2\cdot\dfrac{1}{2}\right)+a\quad \therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=1$ 　　답 ④

07 **전략** 점 P의 x좌표를 t라 하고 t에 대한 방정식을 세운다.

풀이 $f(x)=ae^x-1,\ g(x)=x^2-7x+12$라 하고 점 P의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$ae^t-1=t^2-7t+12$

$\therefore\ ae^t=t^2-7t+13$ 　　$\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=ae^x,\ g'(x)=2x-7$이고 점 P에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(t)g'(t)=-1$에서

$ae^t(2t-7)=-1$ 　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(t^2-7t+13)(2t-7)=-1$

$2t^3-21t^2+75t-90=0$

$(t-3)(2t^2-15t+30)=0$

$\therefore\ t=3\ (\because\ 2t^2-15t+30>0)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -21 & 75 & -90 \\ & & 6 & -45 & 90 \\ \hline & 2 & -15 & 30 & 0 \end{array}$$

$t=3$을 ㉠에 대입하면

$ae^3=1\quad \therefore\ a=\dfrac{1}{e^3}$ 　　답 $\dfrac{1}{e^3}$

08 **전략** $t=\ln 4$에 대응하는 점의 좌표와 $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구하여 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $t=\ln 4$에 대응하는 점의 좌표는

$\left(4+\dfrac{1}{4},\ 4-\dfrac{1}{4}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{17}{4},\ \dfrac{15}{4}\right)$

$\dfrac{dx}{dt}=e^t-e^{-t},\ \dfrac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$이므로

$$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}\ (e^t-e^{-t}\neq 0)$$

$t=\ln 4$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{17}{4}}{\frac{15}{4}}=\dfrac{17}{15}$$

이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{15}{4}=\dfrac{17}{15}\left(x-\dfrac{17}{4}\right)$

$\therefore\ y=\dfrac{17}{15}x-\dfrac{16}{15}$

$$-\dfrac{17}{15}\cdot\dfrac{17}{4}+\dfrac{15}{4}=\dfrac{15^2-17^2}{4\cdot15}=\dfrac{(15+17)(15-17)}{4\cdot15}=\dfrac{32\cdot(-2)}{4\cdot15}=-\dfrac{16}{15}$$

이 직선이 점 $(k,\ 8)$을 지나므로

$8=\dfrac{17}{15}k-\dfrac{16}{15}\quad \therefore\ k=8$ 　　답 8

09 **전략** $e^y\ln x=2y+1$의 양변을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하고, 직선 l_1의 방정식을 구한다.

풀이 $e^y\ln x=2y+1$에서 $x>0$이고, 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^y\dfrac{dy}{dx}\cdot\ln x+e^y\cdot\dfrac{1}{x}=2\dfrac{dy}{dx}$

$(e^y\ln x-2)\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^y}{x}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^y}{x(e^y\ln x-2)}\ (e^y\ln x-2\neq 0)$ $\cdots$ ❶

점 P$(e,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{e(1\cdot1-2)}=\dfrac{1}{e}$

이므로 직선 l_1의 방정식은

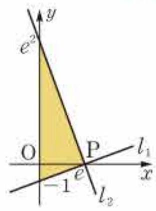
$y=\dfrac{1}{e}(x-e)\quad \therefore\ y=\dfrac{1}{e}x-1$

직선 l_2는 기울기가 $-e$이고 점 $\mathrm{P}(e,\ 0)$을 지나므로 그 방정식은

$$y=-e(x-e) \qquad \therefore\ y=-ex+e^2 \qquad \cdots ❷$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot e\cdot(e^2+1)=\frac{e^3+e}{2} \qquad \cdots ❸$$



답 $\dfrac{e^3+e}{2}$

Q BOX

두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이므로 직선 l_2의 기울기를 a라 하면

$\frac{1}{e}\cdot a=-1$

$\therefore\ a=-e$

단계	채점 기준	비율
❶	$\dfrac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	30 %
❷	두 직선 l_1, l_2의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸	두 직선 l_1, l_2와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

10 전략 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 어떤 구간에서 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

풀이 $f(x)=3x+\sqrt{20-x^2}$에서 $0<x\le 2\sqrt{5}$이고

$20-x^2\ge 0$에서 $x^2\le 20$ $\quad\therefore\ 0<x\le 2\sqrt{5}$ $\quad(\because\ x>0)$

$$f'(x)=3+\frac{-2x}{2\sqrt{20-x^2}}=\frac{3\sqrt{20-x^2}-x}{\sqrt{20-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 3\sqrt{20-x^2}=x$

양변을 제곱하면 $\quad 9(20-x^2)=x^2,\quad x^2=18$

$\therefore\ x=3\sqrt{2}\ (\because\ 0<x\le 2\sqrt{5})$

x	0	$\cdots$	$3\sqrt{2}$	$\cdots$	$2\sqrt{5}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

따라서 $f(x)$는 구간 $(0,\ 3\sqrt{2}]$에서 증가하므로 이 구간에 속하는 정수 x는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 4

$3\sqrt{2}=\sqrt{18}$이고 $\sqrt{16}<\sqrt{18}<\sqrt{25}$이므로 $4<3\sqrt{2}<5$

11 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 감소하려면 그 구간에서 $f'(x)\le 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $$f'(x)=\frac{-ke^{kx}(x+2)+e^{kx}}{(x+2)^2}=\frac{-(kx+2k-1)e^{kx}}{(x+2)^2}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(1,\ \infty)$에서 감소하려면 $x>1$일 때 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

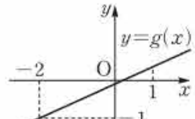
$-(kx+2k-1)\le 0\ (\because\ (x+2)^2>0,\ e^{kx}>0)$

$\therefore\ kx+2k-1\ge 0$

$g(x)=kx+2k-1$이라 하면 직선 $y=g(x)$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ -1)$을 지난다.

$g(x)=k(x+2)-1$

$x>1$일 때 $g(x)\ge 0$이려면 오른쪽 그림과 같이 $k>0$, $g(1)\ge 0$이어야 하므로



$k>0,\ 3k-1\ge 0$

$\therefore\ k\ge\frac{1}{3}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다. 답 $\frac{1}{3}$

12 전략 $f(x)$의 증감표를 만들어 $f(x)$의 증가·감소와 극대·극소를 확인한다.

풀이 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1\ (\because\ x>0)$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	2	↗

ㄱ. 정의역은 $\{x\mid x>0\}$이다.

ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 2를 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

13 전략 두 점 P, Q에서의 접선이 각각 두 점 R, S를 지남을 이용하여 $r(t)$, $s(t)$를 구한 후 $f(t)$를 구한다.

풀이 $h(x)=\ln x$라 하면 $\quad h'(x)=\frac{1}{x}$

점 $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$에서의 접선의 기울기가 $h'(t)=\frac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t) \qquad \therefore\ y=\frac{1}{t}x+\ln t-1$$

이 직선이 점 $\mathrm{R}(r(t),\ 0)$을 지나므로

$$0=\frac{1}{t}r(t)+\ln t-1 \qquad \therefore\ r(t)=t-t\ln t$$

점 $\mathrm{Q}(2t,\ \ln 2t)$에서의 접선의 기울기가 $h'(2t)=\frac{1}{2t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\ln 2t=\frac{1}{2t}(x-2t)$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2t}x+\ln 2t-1$$

이 직선이 점 $\mathrm{S}(s(t),\ 0)$을 지나므로

$$0=\frac{1}{2t}s(t)+\ln 2t-1 \qquad \therefore\ s(t)=2t-2t\ln 2t$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(t)&=t-t\ln t-(2t-2t\ln 2t)\\&=t-t\ln t-2t+2t(\ln 2+\ln t)\\&=(2\ln 2-1)t+t\ln t\end{aligned}$$

$f'(t)=2\ln 2-1+\ln t+t\cdot\frac{1}{t}=\ln t+2\ln 2$이므로

$f'(t)=0$에서

$$\ln t=-2\ln 2 \qquad \therefore\ t=\frac{1}{4}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(t)$		−	0	+
$f(t)$		↘	$-\frac{1}{4}$	↗

$f\left(\frac{1}{4}\right)=(2\ln 2-1)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2=-\frac{1}{4}$

따라서 $f(t)$는 $t=\frac{1}{4}$에서 극솟값 $-\frac{1}{4}$을 갖는다.

답 ③

14 전략 $f(x)$의 증감표를 만들어 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구한다.

풀이 $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	$e^{\frac{\pi}{2}}$	↘	$-e^{\frac{3}{2}\pi}$	↗	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값 $e^{\frac{\pi}{2}}$, $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극솟값 $-e^{\frac{3}{2}\pi}$을 가지므로

$M=e^{\frac{\pi}{2}}$, $m=-e^{\frac{3}{2}\pi}$

$\therefore Mm=-e^{2\pi}$ 답 ①

15 **전략** 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=p$에서 극값 q를 가지면 $f(p)=q$, $f'(p)=0$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=2ax+b+\frac{1}{x}$

$f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 $-\frac{5}{2}$를 가지므로

$f(1)=-\frac{5}{2}$, $f'(1)=0$

$a+b=-\frac{5}{2}$, $2a+b+1=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=-4$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-4x+\ln x$에서 $x>0$이고,

$f'(x)=3x-4+\frac{1}{x}$이므로 $f'(x)=0$에서

$3x^2-4x+1=0$, $(3x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗	$-\frac{7}{6}-\ln 3$	↘	$-\frac{5}{2}$	↗

$f\left(\frac{1}{3}\right)$
$=\frac{1}{6}-\frac{4}{3}+\ln\frac{1}{3}$
$=-\frac{7}{6}-\ln 3$

즉 $f(x)$는 $x=\frac{1}{3}$에서 극댓값 $-\frac{7}{6}-\ln 3$을 갖는다.

답 ①

16 **전략** 미분가능한 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 $f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+3)e^x$

$=\{x^2+(a+2)x+a+3\}e^x$

이때 $e^x>0$이므로 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2+(a+2)x+a+3=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+(a+2)x+a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2)^2-4(a+3)\le 0$

$a^2-8\le 0$, $(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})\le 0$

$\therefore -2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$ 답 $-2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$

17 **전략** 점 P의 x좌표를 a로 놓고 a와 t 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\mathrm{P}(a, t)$라 하면 $\sin a=t$ ⋯⋯ ㉠

$f'(x)=\cos x$이므로 점 $\mathrm{P}(a, \sin a)$에서의 접선의 기울기가 $f'(a)=\cos a$이고 접선의 방정식은

$y-\sin a=\cos a\cdot(x-a)$

이 직선의 x절편이 $g(t)$이므로

직선이 점 $(g(t), 0)$을 지난다.

$-\sin a=\cos a\cdot\{g(t)-a\}$

$-\frac{\sin a}{\cos a}=g(t)-a$ ($\because \cos a\neq 0$)

$0<a<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\cos a<1$

$\therefore g(t)=a-\tan a$

양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(t)=\frac{da}{dt}-\sec^2 a\cdot\frac{da}{dt}$ ⋯⋯ ㉡

한편 ㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\cos a\cdot\frac{da}{dt}=1$ $\therefore \frac{da}{dt}=\frac{1}{\cos a}$

이것을 ㉡에 대입하면

$\sin^2 a+\cos^2 a=1$에서 $\cos^2 a-1=-\sin^2 a$

$g'(t)=\frac{1}{\cos a}-\sec^2 a\cdot\frac{1}{\cos a}=\frac{\cos^2 a-1}{\cos^3 a}$

$=\frac{-\sin^2 a}{(1-\sin^2 a)\cos a}=\frac{-t^2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$

$\cos a=\sqrt{1-\sin^2 a}$
$=\sqrt{1-t^2}$

$\therefore g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{-\frac{8}{9}}{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}}=-24$ 답 ②

18 **전략** 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소임을 이용한다.

풀이 $g'(x)=3f'(x)-4\sin f(x)\cdot f'(x)$

$=f'(x)\{3-4\sin f(x)\}$

이때 $f'(x)=12\pi(x-1)$이므로

$g'(x)=12\pi(x-1)\{3-4\sin f(x)\}$

$g'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $\sin f(x)=\frac{3}{4}$

(i) $x=1$일 때,

$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌고, $x=1$일 때 $\sin f(x)=0$이므로 $x=1$의 좌우에서 $3-4\sin f(x)>0$이다.

$f(1)=0$이므로 $\sin f(1)=\sin 0=0$

즉 $x=1$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

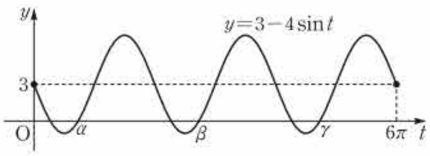
(ii) $1<x<2$일 때,

$f'(x)>0$이고, $f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 0에서 6π까지 증가한다.

즉 $f(x)=t$로 놓으면 x의 값이 1에서 2까지 증가할 때 t의 값은 0에서 6π까지 증가한다.

이때 $0\le t\le 6\pi$에서 함수 $y=3-4\sin t$의 그래프는

다음 그림과 같으므로 $t=\alpha$, $t=\beta$, $t=\gamma$의 좌우에서 $3-4\sin t$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.



즉 $f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$, $f(x)=\gamma$인 x의 좌우에서 $3-4\sin f(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고, 이때의 x는 세 수 α, β, γ에 대하여 각각 하나씩 존재한다.

따라서 $1<x<2$에서 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는 3이다.

(iii) $0<x<1$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여

$$f(1-x)=f(1+x)$$

가 성립한다.

이때

$$\begin{aligned} g(1-x)&=3f(1-x)+4\cos f(1-x)\\ &=3f(1+x)+4\cos f(1+x)\\ &=g(1+x) \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프도 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

따라서 (ii)와 같이 $0<x<1$에서 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는 3이다.

이상에서 구하는 x의 개수는

$1+3+3=7$ 답 ②

Q BOX

① $f''(x)>0$
➡ 함수 $f'(x)$가 증가
➡ 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기가 증가
➡ 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록
② $f''(x)<0$
➡ 함수 $f'(x)$가 감소
➡ 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기가 감소
➡ 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록

함수 $f(x)$가 구간 $[1, 2]$에서 증가하므로 $f(x)$는 일대일대응이다. 즉 $f(x)=\alpha$를 만족시키는 x의 값은 한 개뿐이다.

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

07 도함수의 활용 (2)

Lecture 14 함수의 그래프 81쪽

01 $f(x)=x^3+6x^2$이라 하면

$f'(x)=3x^2+12x$,

$f''(x)=6x+12=6(x+2)$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -2)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(-2, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다. 답 풀이 참조

02 $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3}$라 하면

$f'(x)=-\dfrac{4x}{(x^2+3)^2}$,

$f''(x)=\dfrac{-4(x^2+3)^2+4x\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$

$=\dfrac{12(x^2-1)}{(x^2+3)^3}=\dfrac{12(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $(-1, 1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

답 풀이 참조

03 $f(x)=xe^{-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$,

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $x=2$ ($\because e^{-x}>0$)

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 2)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(2, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다. 답 풀이 참조

04 $f(x)=\ln x-x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다. 답 풀이 참조

05 $f(x)=x+\sin x$라 하면

$f'(x)=1+\cos x$, $f''(x)=-\sin x$

$f''(x)=0$에서 $x=\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, \pi)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(\pi, 2\pi)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다. 답 풀이 참조

06 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+5$라 하면

$f'(x)=x^2-2x$,

$f''(x)=2x-2=2(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=1$

$x<1$일 때 $f''(x)<0$,

$x>1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(1,\ \frac{13}{3}\right)$이다. 답 $\left(1,\ \frac{13}{3}\right)$

Q BOX

$f(1)=\frac{1}{3}-1+5=\frac{13}{3}$

07 $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$이라 하면 $x\neq0$이고

$f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}$,

$f''(x)=2+\frac{2}{x^3}=\frac{2x^3+2}{x^3}$

$=\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^3}$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1\ (\because x^2-x+1>0)$

$x<-1$일 때 $f''(x)>0$,

$-1<x<0$일 때 $f''(x)<0$

따라서 $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이다. 답 $(-1,\ 0)$

08 $f(x)=xe^{2x}$이라 하면

$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=(1+2x)e^{2x}$,

$f''(x)=2e^{2x}+2(1+2x)e^{2x}=4(x+1)e^{2x}$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1\ (\because e^{2x}>0)$

$x<-1$일 때 $f''(x)<0$,

$x>-1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-1,\ -\frac{1}{e^2}\right)$이다. 답 $\left(-1,\ -\frac{1}{e^2}\right)$

09 $f(x)=\ln(x^2+3)$이라 하면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+3}$,

$f''(x)=\frac{2(x^2+3)-2x\cdot2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-2(x^2-3)}{(x^2+3)^2}$

$=-\frac{2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$x<-\sqrt{3}$ 또는 $x>\sqrt{3}$일 때 $f''(x)<0$,

$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-\sqrt{3},\ \ln6)$, $(\sqrt{3},\ \ln6)$이다. 답 $(-\sqrt{3},\ \ln6)$, $(\sqrt{3},\ \ln6)$

10 $f(x)=\cos2x$라 하면

$f'(x)=-2\sin2x$, $f''(x)=-4\cos2x$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi\ (\because 0<x<\pi)$

$0<x<\pi$, 즉 $0<2x<2\pi$이므로 방정식 $-4\cos2x=0$에서

$2x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $2x=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

$0<x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi<x<\pi$일 때 $f''(x)<0$,

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3}{4}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 0\right)$이다.

답 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 0\right)$

11 $f'(x)=-4x^3+24x^2-36x$

$=-4x(x-3)^2$,

$f''(x)=-12x^2+48x-36$

$=-12(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

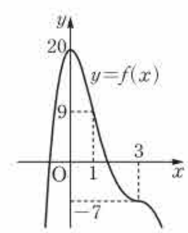
$f''(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	20	↘	9	↘	-7	↘

표에서 ↗, ↘은 위로 볼록이면서 각각 증가, 감소를 나타내고, ↗, ↘은 아래로 볼록이면서 각각 증가, 감소를 나타낸다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



12 $f'(x)=\frac{5(x^2+1)-5x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-5(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$=-\frac{5(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$,

$f''(x)=\frac{-10x(x^2+1)^2-(-5x^2+5)\cdot2(x^2+1)\cdot2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{10x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=\frac{10x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

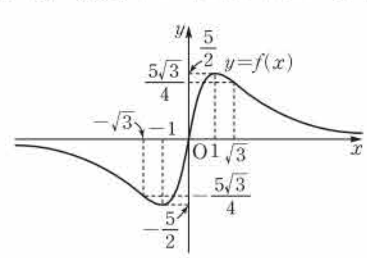
$f''(x)=0$에서

$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{5}{2}$	↗	0	↗	$\frac{5}{2}$	↘	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	↘

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

쌤한마디

a, b가 실수일 때, 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 다음과 같이 함수의 극한값을 이용하여 구한다.

① $\lim_{x\to a+} f(x)=\pm\infty$ 또는 $\lim_{x\to a-} f(x)=\pm\infty$
  ⇨ 점근선은 직선 $x=a$

② $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ 또는 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$
  ⇨ 점근선은 직선 $y=b$

③ $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(mx+n)\}=0$ 또는 $\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(mx+n)\}=0$
  ⇨ 점근선은 직선 $y=mx+n$

13 $f'(x)=2e^x+2xe^x=2(x+1)e^x$,

$f''(x)=2e^x+2(x+1)e^x=2(x+2)e^x$

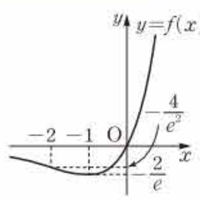
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because e^x>0$)

$f''(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because e^x>0$)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{4}{e^2}$	↘	$-\frac{2}{e}$	↗

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

14 $f(x)=x\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$,

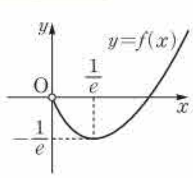
$f''(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{e}$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

또 $\lim_{x\to0+} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

참고 $\lim_{x\to0+} x\ln x$에서 $\frac{1}{x}=h$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $h\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+} x\ln x=\lim_{h\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to\infty}\frac{-\ln h}{h}=0$$

Q BOX

배각의 공식
① $\sin 2\alpha$
$=2\sin\alpha\cos\alpha$
② $\cos 2\alpha$
$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$
$=1-2\sin^2\alpha$
③ $\tan 2\alpha$
$=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

15 $f'(x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x$,

$f''(x)=-2\cos 2x$

$f'(x)=0$에서

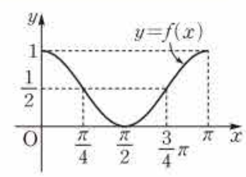
$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$f''(x)=0$에서

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

주어진 구간에 해당하는 부분의 증감표를 만들어 함숫값을 비교한다.

16 $f'(x)=\frac{(2x+2)(x-2)-(x^2+2x+17)}{(x-2)^2}$

$=\frac{x^2-4x-21}{(x-2)^2}=\frac{(x+3)(x-7)}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=7$ ($\because 3\le x\le10$)

x	3	$\cdots$	7	$\cdots$	10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	32	↘	16	↗	$\frac{137}{8}$

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 32, $x=7$에서 최솟값 16을 갖는다.

답 최댓값: 32, 최솟값: 16

17 $f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 4, $x=-4$ 또는 $x=4$에서 최솟값 0을 갖는다.

답 최댓값: 4, 최솟값: 0

18 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ ($\because e^x>0$)

x	-6	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{36}{e^6}$	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗	$4e^2$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $4e^2$, $x=0$에서 최솟값 0을 갖는다.

답 최댓값: $4e^2$, 최솟값: 0

19 $f'(x)=1-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}=-\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e^3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-2e^3$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 1, $x=e^3$에서 최솟값 $-2e^3$을 갖는다.

답 최댓값: 1, 최솟값: $-2e^3$

20 $f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π

따라서 $f(x)$는 $x=2\pi$에서 최댓값 2π, $x=\pi$에서 최솟값 $-\pi$를 갖는다.

답 최댓값: 2π, 최솟값: $-\pi$

표준+발전 유형 Q+Q

82쪽

01 $f(x)=x-\sin 2x$라 하면

$f'(x)=1-2\cos 2x$, $f''(x)=4\sin 2x$

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로

$4\sin 2x>0$, $\quad \sin 2x>0$

$\therefore 0<x<\frac{\pi}{2}$ $(\because 0<x<\pi)$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록한 구간은 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$이다.

답 ①

Q BOX

$0<x<\pi$, 즉 $0<2x<2\pi$이므로 부등식 $\sin 2x>0$에서

$0<2x<\pi$

$\therefore 0<x<\frac{\pi}{2}$

02 ㄱ. $f(x)=x^3-x$라 하면

$f'(x)=3x^2-1$, $f''(x)=6x$

구간 $(-\infty,\ 0)$에서 $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

ㄴ. $f(x)=1+e^x$이라 하면

$f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$

구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.

ㄷ. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

구간 $(0,\ 1)$에서 $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

이상에서 주어진 구간에서 위로 볼록한 곡선은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

03 $f(x)=\ln(x^2+5)^2=2\ln(x^2+5)$라 하면

$$f'(x)=\frac{4x}{x^2+5},$$

$$f''(x)=\frac{4(x^2+5)-4x\cdot 2x}{(x^2+5)^2}=\frac{-4(x^2-5)}{(x^2+5)^2}=-\frac{4(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{(x^2+5)^2}$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{5}$

$x=-\sqrt{5}$, $x=\sqrt{5}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는

$(-\sqrt{5},\ 2\ln 10)$, $(\sqrt{5},\ 2\ln 10)$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$\sqrt{5}-(-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$

답 ③

두 점의 y좌표가 같으므로 두 점 사이의 거리는 x좌표의 차와 같다.

04 $f(x)=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}$라 하면 $x\neq 0$이고

$$f'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3},$$

$$f''(x)=\frac{6}{x^3}-\frac{12}{x^4}=\frac{6(x-2)}{x^4}$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=2$

$x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x좌표는 2이다.

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

답 $-\frac{1}{4}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기

➡ $f'(a)$

05 $f'(x)=a\cos x-b\sin x+c$,

$f''(x)=-a\sin x-b\cos x$

$f(x)$가 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극소이므로 $f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=0$에서

$-\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b+c=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

변곡점의 좌표가 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$이므로

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$에서 $\quad a=0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$에서 $\quad a+\frac{\pi}{2}c=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore c=1$

$a=0$, $c=1$을 ㉠에 대입하면

$-\frac{1}{2}b+1=0 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+bc=0+2\cdot 1=2$

답 2

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

① $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 갖는다.

➡ $f(a)=b$, $f'(a)=0$

② 점 $(c,\ d)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

➡ $f(c)=d$, $f''(c)=0$

06 $f(x)=(\ln ax)^2$이라 하면 $x>0$이고

$$f'(x)=2\ln ax\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln ax}{x},$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$$

$f''(x)=0$에서　$\ln ax=1$

$ax=e$　$\therefore x=\dfrac{e}{a}$

$x=\dfrac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$\left(\dfrac{e}{a},\ 1\right)$

$f\left(\dfrac{e}{a}\right)=(\ln e)^2=1^2=1$

이때 변곡점이 직선 $y=6x-2$ 위에 있으므로

$1=\dfrac{6e}{a}-2$,　$\dfrac{6e}{a}=3$

$\therefore a=2e$　답 ④

07 $f(x)=ax^2+\cos x+x$라 하면

$f'(x)=2ax-\sin x+1$,

$f''(x)=2a-\cos x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서　$2a-\cos x=0$

$\therefore \cos x=2a$

이때 $-1\le\cos x\le1$이므로

$-1\le2a\le1$　$\therefore -\dfrac{1}{2}\le a\le\dfrac{1}{2}$

$a=-\dfrac{1}{2}$이면　$f''(x)=-1-\cos x\le0$

$a=\dfrac{1}{2}$이면　$f''(x)=1-\cos x\ge0$

즉 $a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$이면 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

따라서 a의 값의 범위는

$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$　답 $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$

다른 풀이 $f(x)=ax^2+\cos x+x$라 하면

$f'(x)=2ax-\sin x+1$,

$f''(x)=2a-\cos x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면

($f''(x)$의 최솟값)$<0<$($f''(x)$의 최댓값)

이어야 한다.

이때 $-1\le\cos x\le1$이므로

$-1\le-\cos x\le1$

$2a-1\le2a-\cos x\le2a+1$

$\therefore 2a-1\le f''(x)\le2a+1$

따라서 $2a-1<0$, $2a+1>0$이어야 하므로

$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$

쌤한마디

곡선 $y=f(x)$에서 $f''(a)=0$이지만 점 $(a,\ f(a))$가 변곡점이 아닌 경우도 있다. 따라서 $f''(x)=0$인 x의 값을 구한 후 그 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌는 것까지 확인해야 한다.

08 $f(x)=(ax^2-1)e^x$이라 하면

$f'(x)=2axe^x+(ax^2-1)e^x$

$=(ax^2+2ax-1)e^x$,

$f''(x)=(2ax+2a)e^x+(ax^2+2ax-1)e^x$

$=(ax^2+4ax+2a-1)e^x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

$f''(x)=0$에서

$ax^2+4ax+2a-1=0$ ($\because e^x>0$)　…… ㉠

(i) $a=0$일 때, 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

$a=0$이면 방정식 ㉠은 $-1=0$이므로 위의 등식을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a\ne0$일 때, 방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2a)^2-a(2a-1)\le0$

$2a^2+a\le0$,　$a(2a+1)\le0$

$\therefore -\dfrac{1}{2}\le a\le0$

그런데 $a\ne0$이므로　$-\dfrac{1}{2}\le a<0$

(i), (ii)에서 $-\dfrac{1}{2}\le a\le0$이므로 a의 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$이다.

답 $-\dfrac{1}{2}$

09 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$,

$f''(x)=-2e^{-x^2}-2x\cdot(-2xe^{-x^2})=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

$=2(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)e^{-x^2}$

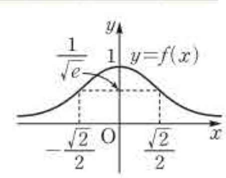
$f'(x)=0$에서　$x=0$ ($\because e^{-x^2}>0$)

$f''(x)=0$에서

$x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because e^{-x^2}>0$)

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	⤵	1	⤵	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	⤷

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=1$이다.

③ 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

정의역의 임의의 원소 x에 대하여
① $f(-x)=f(x)$
➡ $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭
② $f(-x)=-f(x)$
➡ $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭

④ 구간 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

⑤ 변곡점은 점 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$, 점 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$의 2개이다.

답 ④

10 $f'(x)=\dfrac{6x}{3x^2+1}$,

$$f''(x)=\frac{6(3x^2+1)-6x\cdot 6x}{(3x^2+1)^2}=\frac{-6(3x^2-1)}{(3x^2+1)^2}$$

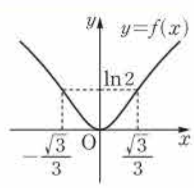
$$=-\frac{6(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}{(3x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\ln 2$	↘	0	↗	$\ln 2$	↗

또 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. $f(x)$의 극솟값은 $f(0)=0$이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프의 변곡점의 좌표는

$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \ln 2\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \ln 2\right)$이다.

ㄹ. $f(1)=\ln 4$, $f(2)=\ln 13$이므로 두 점 A, B는 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다.

구간 $(1, 2)$에서 $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

따라서 $\overline{\text{AB}}$는 $y=f(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

11 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

QBOX

함수 $f'(x)$의 도함수 $f''(x)$의 부호
➡ $y=f'(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기를 조사한다.

ㄱ. $f'(a)=0$, $f'(e)=0$이고 $x=a$, $x=e$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=a$, $x=e$에서 극소이다.

또 $f'(c)=0$이고 $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=c$에서 극대이다.

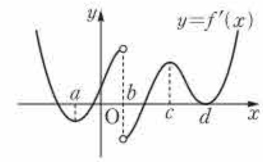
따라서 함수 $f(x)$는 서로 다른 세 점에서 극값을 갖는다.

ㄴ. 구간 (b, c)에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

ㄷ. $f''(b)=0$, $f''(d)=0$이고 $x=b$, $x=d$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점은 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

12 오른쪽 그림과 같이 a, b, c, d를 정하고 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$

$f''(a)=0$, $f''(c)=0$, $f''(d)=0$이고 $x=a$, $x=c$, $x=d$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점은 3개이다.

답 ③

13 $f(x)=x\sqrt{12-x^2}$에서 $-2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3}$이고

$12-x^2\ge 0$에서
$x^2\le 12$
$\therefore -2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3}$

$$f'(x)=\sqrt{12-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{12-x^2}}=\frac{12-2x^2}{\sqrt{12-x^2}}$$

$$=-\frac{2(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})}{\sqrt{12-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=\sqrt{6}$

x	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	$-\sqrt{6}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-6	↗	6	↘	0

따라서 $f(x)$는 $x=\sqrt{6}$에서 최댓값 6, $x=-\sqrt{6}$에서 최솟값 -6을 가지므로

$M=6$, $m=-6$

$\therefore \dfrac{M}{m}=-1$

답 -1

14
$$f'(x)=\sin x\sin x+(1-\cos x)\cos x$$
$$=\sin^2 x+\cos x-\cos^2 x$$
$$=1-\cos^2 x+\cos x-\cos^2 x$$
$$=-2\cos^2 x+\cos x+1$$
$$=-(2\cos x+1)(\cos x-1)$$

$f'(x)=0$에서

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

또는 $x=2\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

따라서 $f(x)$는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$에서 최솟값 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$을 갖는다.

답 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

15
$$f'(x)=\frac{a(x^2-x+2)-(ax+b)(2x-1)}{(x^2-x+2)^2}$$
$$=\frac{-ax^2-2bx+2a+b}{(x^2-x+2)^2}$$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 미분가능한 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극대이면서 최대이다.

$f'(4)=0$

$f'(4)=0$에서 $\dfrac{-16a-8b+2a+b}{196}=0$

$-14a-7b=0$ $\quad\therefore 2a+b=0$ ······ ㉠

$f(4)=1$에서 $\dfrac{4a+b}{14}=1$

$\therefore 4a+b=14$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=7$, $b=-14$

$\therefore a+b=-7$ 답 -7

16 $f'(x)=3ax^2e^{-x}-ax^3e^{-x}=ax^2(3-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=3$ ($\because e^{-x}>0$)

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-8ae^2$	↗	0	↗	$\dfrac{27a}{e^3}$

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $\dfrac{27a}{e^3}$, $x=-2$에서 최솟값 $-8ae^2$을 갖고, 최댓값과 최솟값의 곱이 $-\dfrac{8}{e}$이므로

$\dfrac{27a}{e^3}\cdot(-8ae^2)=-\dfrac{8}{e}$, $\quad 27a^2=1$

$a^2=\dfrac{1}{27}$ $\quad\therefore a=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ ($\because a>0$) 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

17 $f(x)=\sin^3x+3\cos^2x-5$

$=\sin^3x+3(1-\sin^2x)-5$

$=\sin^3x-3\sin^2x-2$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고, 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-3t^2-2$

$\therefore g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=0$ ($\because -1\le t\le 1$)

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-6	↗	-2	↘	-4

따라서 $g(t)$는 $t=0$에서 최댓값 -2, $t=-1$에서 최솟값 -6을 가지므로

$M=-2$, $m=-6$

$\therefore M-m=4$ 답 ②

18 $f(x)=2(\log_3x)^3+3(\log_3x)^2-\log_3x^{12}$

$=2(\log_3x)^3+3(\log_3x)^2-12\log_3x$

$\log_3x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{9}\le x\le 81$에서 $-2\le t\le 4$이고, 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$\log_3\dfrac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$, $\log_3 81=\log_3 3^4=4$이므로 $\dfrac{1}{9}\le x\le 81$에서 $-2\le \log_3x\le 4$ $\quad\therefore -2\le t\le 4$

$g(t)=2t^3+3t^2-12t$

$\therefore g'(t)=6t^2+6t-12=6(t+2)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=-2$ 또는 $t=1$

t	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	20	↘	-7	↗	128

따라서 $g(t)$는 $t=1$에서 최솟값 -7을 가지므로 $f(x)$는 $\log_3x=1$, 즉 $x=3$일 때 최솟값 -7을 갖는다.

즉 $a=3$, $b=-7$이므로

$ab=-21$ 답 -21

19 점 Q의 좌표를 $(t,\ e^{-t})$ $(t>0)$이라 하면 직사각형의 가로의 길이는 $2t$, 세로의 길이는 e^{-t}이다.

주어진 두 곡선은 y축에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}(-t,\ e^{-t})$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=t-(-t)=2t$

직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=2te^{-t}$

$\therefore S'(t)=2e^{-t}-2te^{-t}=2(1-t)e^{-t}$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=1$ ($\because e^{-t}>0$)

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	$\dfrac{2}{e}$	↘

따라서 $S(t)$는 $t=1$에서 최댓값 $\dfrac{2}{e}$를 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{2}{e}$이다. 답 $\dfrac{2}{e}$

20 점 P의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{2}{\sqrt{t^2+1}}\right)$ $(t>0)$라 하면

$l^2=t^2+\left(\dfrac{2}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2=t^2+\dfrac{4}{t^2+1}$

$f(t)=t^2+\dfrac{4}{t^2+1}$라 하면

$f'(t)=2t-\dfrac{8t}{(t^2+1)^2}=\dfrac{2t\{(t^2+1)^2-4\}}{(t^2+1)^2}$

$=\dfrac{2t(t^2+3)(t+1)(t-1)}{(t^2+1)^2}$

$(t^2+1)^2-4$
$=(t^2+1+2)(t^2+1-2)$
$=(t^2+3)(t^2-1)$
$=(t^2+3)(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=1$ ($\because t>0$)

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	3	↗

따라서 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 3을 가지므로 l^2의 최솟값은 3이다. 답 ②

Lecture 15 방정식과 부등식에의 활용

85쪽

01 $f(x)=\sqrt{x+2}-x-\dfrac{9}{4}$라 하면 $x\ge -2$이고

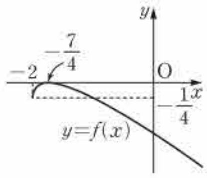
$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}-1=\dfrac{1-2\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2\sqrt{x+2}=1$

$\quad x+2=\frac{1}{4} \quad \therefore x=-\frac{7}{4}$

x	-2	$\cdots$	$-\frac{7}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 접하므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다. 답 1

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

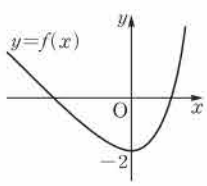
02 $f(x)=e^x-x-3$이라 하면

$\quad f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^x=1 \quad \therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

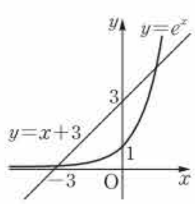
또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다. 답 2

다른 풀이 방정식 $e^x-x-3=0$, 즉 $e^x=x+3$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=e^x$, $y=x+3$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

두 함수 $y=e^x$, $y=x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.



방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

03 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-2$라 하면 $x>0$이고

$\quad f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$

또 $\lim_{x\to0+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

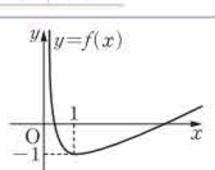
$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to0+} f(x)$

$=\lim_{t\to\infty}\left(\ln\frac{1}{t}+t-2\right)$

$=\lim_{t\to\infty}(t-\ln t-2)$

$=\infty$



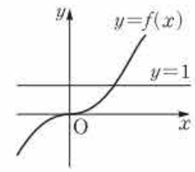
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다. 답 2

04 $f(x)=x-\sin x$라 하면

$\quad f'(x)=1-\cos x$

$f'(x)\geq0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 증가한다.

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다. 답 1

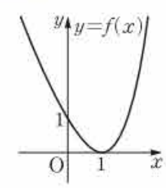
05 $f(x)=e^x-ex$라 하면

$\quad f'(x)=e^x-e$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^x=e \quad \therefore x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는

$\quad k<0$일 때 0, $k=0$일 때 1, $k>0$일 때 2

이다. 답 풀이 참조

06 $\ln x=x+k$에서 $\ln x-x=k$이므로

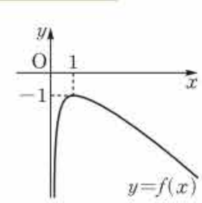
$f(x)=\ln x-x$라 하면 $x>0$이고

$\quad f'(x)=\frac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$

또 $\lim_{x\to0+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는

$\quad k<-1$일 때 2, $k=-1$일 때 1,

$\quad k>-1$일 때 0

이다. 답 풀이 참조

07 $f(x)=x-1+e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=\boxed{1-e^{-x}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\boxed{0}$

x	$\cdots$	$\boxed{0}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\boxed{0}$	↗

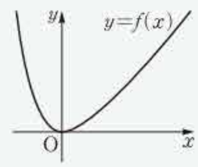
$f(x)$의 최솟값은 $\boxed{0}$이므로

$x-1+e^{-x}\geq 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x\geq 1-e^{-x}$이 성립한다.

$\therefore$ (가) $1-e^{-x}$ (나) 0 (다) 0

답 (가) $1-e^{-x}$ (나) 0 (다) 0



08 $f(x)=x-\ln(x+1)$이라 하면

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$

$x>0$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

그런데 $f(0)=0$이므로 $x>0$일 때

$f(x)>0$, 즉 $x-\ln(x+1)>0$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $x>\ln(x+1)$이 성립한다.

답 풀이 참조

쌤한마디

$x>a$에서 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 다음과 같이 증명할 수 있다.

① 함수 $f(x)$의 극값이 존재할 때

➡ $x>a$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0임을 보인다.

② 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않을 때

➡ $x>a$에서 함수 $f(x)$가 증가하고 $f(a)\geq 0$임을 보인다.

09 $f(x)=x-\cos x+1$이라 하면

$f'(x)=1+\sin x$

$x>0$일 때 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

$-1\leq \sin x\leq 1$이므로
$0\leq 1+\sin x\leq 2$
$\therefore 0\leq f'(x)\leq 2$

그런데 $f(0)=0$이므로 $x>0$일 때

$f(x)>0$, 즉 $x-\cos x+1>0$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $x>\cos x-1$이 성립한다.

답 풀이 참조

표준+발전 유형 Q+Q

86쪽

01 $x+\sin 2x-k=0$에서 $\quad x+\sin 2x=k$

위의 방정식이 $0\leq x\leq \pi$에서 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x+\sin 2x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x+\sin 2x$라 하면

$f'(x)=1+2\cos 2x$

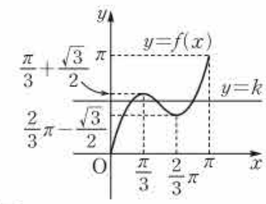
$f'(x)=0$에서 $\quad \cos 2x=-\dfrac{1}{2}$

$0\leq x\leq \pi$, 즉 $0\leq 2x\leq 2\pi$이므로 방정식 $\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$에서
$2x=\dfrac{2}{3}\pi$
또는 $2x=\dfrac{4}{3}\pi$
$\therefore x=\dfrac{\pi}{3}$
또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ ($\because 0\leq x\leq \pi$)

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↗	π

이때 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면



$\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<k<\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\alpha=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\alpha+\beta=\pi$

답 π

02 방정식 $e^x+e^{-x}=k$가 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=e^x+e^{-x}$과 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다.

$f(x)=e^x+e^{-x}$이라 하면

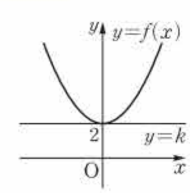
$f'(x)=e^x-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^x=e^{-x}$

$x=-x \quad \therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗

또 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

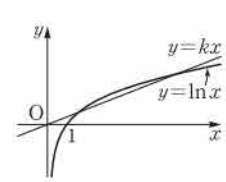


따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나려면

$k=2$

답 ④

03 방정식 $\ln x=kx$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



$f(x)=\ln x$, $g(x)=kx$라 하면

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=g(x)$의 기울기는 양수이면서 곡선과 직선이 접할 때의 기울기보다 작아야 한다.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=k$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad \ln t=kt \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad \dfrac{1}{t}=k \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad \ln t=1 \quad \therefore t=e$

$t=e$를 ㉡에 대입하면 $\quad k=\frac{1}{e}$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$0<k<\frac{1}{e}$ 답 $0<k<\frac{1}{e}$

다른 풀이 $\ln x=kx$에서 $x>0$이므로 $\quad \frac{\ln x}{x}=k$

위의 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

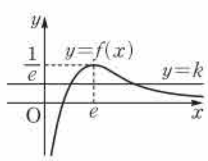
$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1 \quad \therefore x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

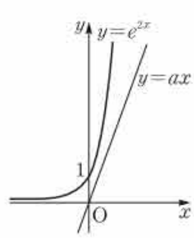
또 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$0<k<\frac{1}{e}$

04 방정식 $e^{2x}=ax$가 실근을 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^{2x}$과 직선 $y=ax$가 만나지 않아야 한다.



$f(x)=e^{2x}$, $g(x)=ax$라 하면

$f'(x)=2e^{2x}$, $g'(x)=a$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad e^{2t}=at \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 2e^{2t}=a \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad e^{2t}=2te^{2t}$

$e^{2t}(2t-1)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2}\ (\because e^{2t}>0)$

$t=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면 $\quad a=2e$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 만나지 않으려면

$0\le a<2e$ 답 $0\le a<2e$

$a<0$이면 곡선 $y=e^{2x}$과 직선 $y=ax$가 한 점에서 만난다.

05 $x\ln x-4x+3-k\le0$에서

$x\ln x-4x+3\le k$

$f(x)=x\ln x-4x+3$이라 하면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-4=\ln x-3$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=3 \quad \therefore x=e^3$

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e^3	$\cdots$	e^4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$3-\frac{5}{e}$	$\searrow$	$3-e^3$	$\nearrow$	3

따라서 $\frac{1}{e}\le x\le e^4$에서 $f(x)$의 최댓값은 3이므로 부등식 $f(x)\le k$가 성립하려면

$k\ge3$

즉 k의 최솟값은 3이다. 답 3

06 $\sin x>k-x^2$에서 $\quad \sin x+x^2>k$

$f(x)=\sin x+x^2$이라 하면

$f'(x)=\cos x+2x$, $f''(x)=-\sin x+2$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 함수 $f'(x)$는 증가하고,

$-1\le\sin x\le1$이므로
$-1\le-\sin x\le1$
$1\le-\sin x+2\le3$
$\therefore 1\le f''(x)\le3$

$f'(0)=1$이므로

$f'(x)>1$

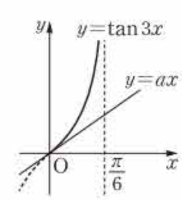
또 $x>0$에서 $f'(x)>1$, 즉 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가하고, $f(0)=0$이므로

$f(x)>0$

따라서 $x>0$에서 부등식 $f(x)>k$가 성립하려면

$k\le0$ 답 ③

07 $0<x<\frac{\pi}{6}$에서 부등식 $\tan 3x>ax$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\tan 3x$가 직선 $y=ax$보다 위쪽에 있어야 한다.



$f(x)=\tan 3x$라 하면

$f'(x)=3\sec^2 3x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=3$이므로 접선의 방정식은

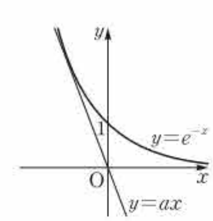
$y=3x$

따라서 주어진 부등식이 성립하려면

$a\le3$

이어야 하므로 a의 최댓값은 3이다. 답 3

08 부등식 $e^{-x}\ge ax$가 항상 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^{-x}$이 직선 $y=ax$보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접해야 한다.



$f(x)=e^{-x}$, $g(x)=ax$라 하면

$f'(x)=-e^{-x}$, $g'(x)=a$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^{-t}=at$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-e^{-t}=a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $e^{-t}=-te^{-t}$

$(t+1)e^{-t}=0 \quad \therefore t=-1\ (\because e^{-t}>0)$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면 $a=-e$

따라서 주어진 부등식이 항상 성립하려면

$-e\le a\le 0$

답 $-e\le a\le 0$

Lecture 16 속도와 가속도

87쪽

01 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$$v=f'(t)=3-\frac{2}{(t+1)^2},$$

$$a=f''(t)=\frac{2\cdot 2(t+1)}{(t+1)^4}=\frac{4}{(t+1)^3}$$

이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$$v=3-\frac{2}{4}=\frac{5}{2},\ a=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

답 속도: $\frac{5}{2}$, 가속도: $\frac{1}{2}$

$f'(t)=3-2(t+1)^{-2}$ 이므로 $f''(t)=4(t+1)^{-3}=\frac{4}{(t+1)^3}$ 와 같이 구할 수도 있다.

02 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$$v=f'(t)=-\frac{2t}{t^2+2},$$

$$a=f''(t)=\frac{-2(t^2+2)+2t\cdot 2t}{(t^2+2)^2}=\frac{2t^2-4}{(t^2+2)^2}$$

이므로 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$$v=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3},\ a=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

답 속도: $-\frac{2}{3}$, 가속도: $\frac{1}{9}$

03 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=f'(t)=2t+5\cos t,$

$a=f''(t)=2-5\sin t$

이므로 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=\pi,\ a=2-5=-3$

답 속도: π, 가속도: -3

04 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=f'(t)=-2\sin 2t+1$

$|v|=0$에서

$|-2\sin 2t+1|=0,\quad \sin 2t=\frac{1}{2}$

속도 v의 절댓값 $|v|$를 시각 t에서의 점 P의 속력이라 한다.

$0<t<\frac{\pi}{4}$에서 $0<2t<\frac{\pi}{2}$이므로

$2t=\frac{\pi}{6} \quad \therefore t=\frac{\pi}{12}$

따라서 점 P의 속력이 0이 되는 시각은 $\frac{\pi}{12}$이다.

답 $\frac{\pi}{12}$

05 $\frac{dx}{dt}=4t^3-6$, $\frac{dy}{dt}=6t^2-14t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(4t^3-6,\ 6t^2-14t)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$(-2,\ -8)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=12t^2$, $\frac{d^2y}{dt^2}=12t-14$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(12t^2,\ 12t-14)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$(12,\ -2)$

답 속도: $(-2,\ -8)$, 가속도: $(12,\ -2)$

06 $\frac{dx}{dt}=1+e^t$, $\frac{dy}{dt}=1-e^t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(1+e^t,\ 1-e^t)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 속도는

$(1+e^3,\ 1-e^3)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-e^t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(e^t,\ -e^t)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$(e^3,\ -e^3)$

답 속도: $(1+e^3,\ 1-e^3)$, 가속도: $(e^3,\ -e^3)$

07 $\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(-\sin t,\ \cos t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 속도는

$$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(-\cos t,\ -\sin t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 가속도는

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

답 속도: $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 가속도: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

08 $\dfrac{dx}{dt}=5-\dfrac{2}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=1+\dfrac{3}{t^2}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$\left(5-\frac{2}{t^2},\ 1+\frac{3}{t^2}\right)$$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는 $(3,\ 4)$이므로 속력은

$$\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{4}{t^3}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{6}{t^3}$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$$\left(\frac{4}{t^3},\ -\frac{6}{t^3}\right)$$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $(4,\ -6)$이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{4^2+(-6)^2}=2\sqrt{13}$$

답 속력: 5, 가속도의 크기: $2\sqrt{13}$

표준+발전 유형 Q+Q 88쪽

01 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$$v=f'(t)=7+\frac{k}{t}$$

$t=2$에서의 점 P의 속도가 5이므로

$$7+\frac{k}{2}=5 \qquad \therefore k=-4$$

따라서 점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$$a=f''(t)=\frac{4}{t^2}$$

이므로 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$$a=1$$

답 1

02 물체의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$$\begin{aligned} v=\frac{dh}{dt}&=-2te^t-t^2e^t+15e^t\\ &=-(t^2+2t-15)e^t\\ &=-(t+5)(t-3)e^t \end{aligned}$$

$v=0$에서 $\qquad t=3\ (\because t\geq 0)$

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$
v		$+$	0	$-$
h	51	↗	$36+6e^3$	↘

따라서 $t=3$일 때 물체가 최고 높이에 도달하므로 구하는 거리는

$$36+6e^3-51=3(2e^3-5)\,(\mathrm{m})$$

답 ③

03 $\dfrac{dx}{dt}=4-4t$, $\dfrac{dy}{dt}=4$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$(4-4t,\ 4)$$

Q BOX

$f'(t)=7-\dfrac{4}{t}$이므로

$f''(t)=\dfrac{4}{t^2}$

물체가 최고 높이에 도달할 때 물체는 정지하므로 이때의 속도는 0이다.

(물체의 최고 높이)
$-$(물체의 처음 위치)

$(t^2-4)^2=25$에서
$t^2-4=\pm5$
이때 $t^2-4\geq-4$이므로
$t^2-4=5$

따라서 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{(4-4t)^2+4^2}=4\sqrt{(t-1)^2+1}$$

이므로 점 P의 속력은 $t=1$일 때 최솟값 4를 갖는다.

답 ④

04 $\dfrac{dx}{dt}=a+\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=b\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$(a+\cos t,\ b\sin t)$$

$t=\dfrac{\pi}{3}$에서의 점 P의 속도가 $(1,\ -3)$이므로

$$a+\frac{1}{2}=1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}b=-3 \qquad \therefore a=\frac{1}{2},\ b=-2\sqrt{3}$$

$$\therefore ab=-\sqrt{3}$$

답 $-\sqrt{3}$

05 $\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{11}$, $\dfrac{dy}{dt}=t^2-4$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$(\sqrt{11},\ t^2-4)$$

점 P의 속력이 6이므로

$$\sqrt{(\sqrt{11})^2+(t^2-4)^2}=6$$

$$(t^2-4)^2=25, \qquad t^2-4=5$$

$$t^2=9 \qquad \therefore t=3\ (\because t\geq 0)$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=2t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$$(0,\ 2t)$$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는 $(0,\ 6)$이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{0^2+6^2}=6$$

답 6

06 $\dfrac{dx}{dt}=2at$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{a}{t}$에서

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2a,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{a}{t^2}$$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$$\left(2a,\ -\frac{a}{t^2}\right)$$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $(2a,\ -a)$이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{(2a)^2+(-a)^2}=\sqrt{5}a\ (\because a>0)$$

즉 $\sqrt{5}a=2\sqrt{5}$이므로 $\qquad a=2$

답 2

중단원 마무리

89쪽

01 전략 곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\geq 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=(x^2+a)e^x$이라 하면

$$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x$$
$$=(x^2+2x+a)e^x,$$
$$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+a)e^x$$
$$=(x^2+4x+2+a)e^x$$

곡선 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\geq 0$이어야 하므로

$$x^2+4x+2+a\geq 0\ (\because\ e^x>0)$$

이차방정식 $x^2+4x+2+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-(2+a)\leq 0$$

$\therefore\ a\geq 2$ 　　　　답 $a\geq 2$

02 전략 곡선 $y=f(x)$의 변곡점을 구할 때에는 $f''(x)=0$인 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌는지 조사한다.

풀이 $f(x)=\ln(x^2+2)$라 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+2},$$
$$f''(x)=\frac{2(x^2+2)-2x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$$
$$=-\frac{2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$$

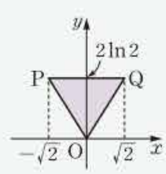
$f''(x)=0$에서 　$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점 P, Q의 좌표는

$(-\sqrt{2},\ 2\ln 2)$, $(\sqrt{2},\ 2\ln 2)$ 　　··· ❶

$f(-\sqrt{2})=\ln 4=\ln 2^2$
$=2\ln 2$

$\therefore\ \triangle\text{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\ln 2$
$=2\sqrt{2}\ln 2$ 　　··· ❷



따라서 $a=2\sqrt{2}$이므로

$a^2=8$ 　　··· ❸

답 8

단계	채점 기준	비율
❶	변곡점의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷	△OPQ의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❸	a^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

03 전략 함수 $f(x)$의 변곡점을 구한 후 함수의 극한의 성질을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^n\ln x$라 하면 $x>0$이고

$$f'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^n\cdot\frac{1}{x}=x^{n-1}(n\ln x+1),$$
$$f''(x)=(n-1)x^{n-2}(n\ln x+1)+x^{n-1}\cdot\frac{n}{x}$$
$$=x^{n-2}\{n(n-1)\ln x+2n-1\}$$

$f''(x)=0$에서

$$n(n-1)\ln x+2n-1=0\ (\because\ x>0)$$
$$\ln x=\frac{1-2n}{n(n-1)}\qquad\therefore\ x=e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}}$$

$x=e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

$$a_n=e^{\frac{1-2n}{n-1}}\cdot\frac{1-2n}{n(n-1)}$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1-2n}{n-1}}\cdot\frac{1-2n}{n(n-1)}=0$ 　　답 ③

$\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1-2n}{n-1}}=e^{-2}$,
$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n}{n(n-1)}=0$이므로
$\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1-2n}{n-1}}\cdot\frac{1-2n}{n(n-1)}$
$=e^{-2}\cdot 0=0$

04 전략 증감표를 만들어 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 유추한다.

풀이 $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$에서 $x\neq -2$이고

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2},$$
$$f''(x)=\frac{(2x+4)(x+2)^2-(x^2+4x)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4}$$
$$=\frac{8}{(x+2)^3}$$

$f'(x)=0$에서 　$x=-4$ 또는 $x=0$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	…	-4	…	-2	…	0	…
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f''(x)$	−	−	−		+	+	+
$f(x)$	↗	-8	↘		↘	0	↗

또 $\lim_{x\to -2+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to -2-}f(x)=-\infty$이고

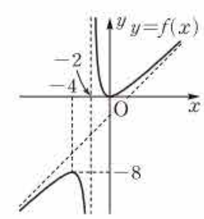
직선 $x=-2$는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.

$$f(x)=\frac{x^2-4+4}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)+4}{x+2}$$
$$=x-2+\frac{4}{x+2}$$

에서 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x-2)\}=0$,

$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(x-2)\}=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

직선 $y=x-2$는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.



ㄱ. $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다.

ㄴ. 구간 $(-4,\ -2)$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 　　답 ⑤

05 전략 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값은 구간 $(a,\ b)$에서의 극값, $f(a)$, $f(b)$ 중 가장 큰 값이다.

풀이 $f(x)=\frac{x^2}{e^{x-1}}=x^2e^{-x+1}$이므로

$$f'(x)=2xe^{-x+1}-x^2e^{-x+1}=x(2-x)e^{-x+1}$$

$f'(x)=0$에서 　$x=2\ (\because\ 1\leq x\leq 4)$

x	1	…	2	…	4
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1	↗	$\frac{4}{e}$	↘	$\frac{16}{e^3}$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $\frac{4}{e}$를 가지므로

$$a=2,\ M=\frac{4}{e}$$

$\therefore\ \frac{a}{M}=2\cdot\frac{e}{4}=\frac{e}{2}$ 　　답 $\frac{e}{2}$

06 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$임을 이용하여 먼저 k의 값을 구한다.

풀이 $f'(x)=k-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}=k-1-\ln x$

함수 $f(x)$가 $x=e^2$에서 극값을 가지므로

$k-1-2=0 \qquad \therefore k=3$

$\therefore f(x)=3x-x\ln x,\ f'(x)=2-\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\qquad \ln x=2 \qquad \therefore x=e^2$

> $f'(e^2)=0$

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$	e^3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↗	e^2	↘	0

따라서 $f(x)$는 $x=e^2$에서 최댓값 e^2, $x=e^3$에서 최솟값 0을 가지므로

$M=e^2,\ m=0$

$\therefore M+m=e^2$ 　　답 e^2

07 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=-2e^{-x}$

이므로 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$에서의 접선의 방정식은

$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$

$\therefore y=-2e^{-t}x+2e^{-t}(t+1)$

따라서 $\mathrm{A}(0,\ 2e^{-t})$, $\mathrm{B}(0,\ 2e^{-t}(t+1))$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2te^{-t}$

> 점 A의 y좌표는 점 P의 y좌표와 같다.

△APB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot 2te^{-t}=t^2e^{-t}$

$\therefore S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=t(2-t)e^{-t}$

$S'(t)=0$에서 $\qquad t=2\ (\because t>0)$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	극대	↘

따라서 $S(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이다. 　답 ④

08 전략 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $\overline{\mathrm{PQ}}$가 직선 $y=x$에 수직이므로 점 P와 점 Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

> 두 함수 $y=e^x$, $y=\ln x$는 서로 역함수 관계이다.

즉 점 P의 좌표를 $(t,\ e^t)$이라 하면 $\mathrm{Q}(e^t,\ t)$이므로

> 점 $(a,\ b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
> $(b,\ a)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(e^t-t)^2+(t-e^t)^2}$

$=\sqrt{2(e^t-t)^2}$

$=\sqrt{2}(e^t-t)\ (\because e^t>t)$

$f(t)=\sqrt{2}(e^t-t)$라 하면

$f'(t)=\sqrt{2}(e^t-1)$

$f'(t)=0$에서 $\qquad e^t=1 \qquad \therefore t=0$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$\sqrt{2}$	↗

따라서 $f(t)$는 $t=0$에서 최솟값 $\sqrt{2}$를 가지므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다. 　답 $\sqrt{2}$

다른 풀이 점 P와 점 Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 Q의 좌표를 $(k,\ \ln k)\ (k>0)$라 하면 $\mathrm{P}(\ln k,\ k)$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(k-\ln k)^2+(\ln k-k)^2}$

$=\sqrt{2(k-\ln k)^2}$

$=\sqrt{2}(k-\ln k)\ (\because k>\ln k)$

$g(k)=\sqrt{2}(k-\ln k)$라 하면

$g'(k)=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)$

$g'(k)=0$에서 $\qquad k=1$

k	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(k)$		$-$	0	$+$
$g(k)$		↘	$\sqrt{2}$	↗

따라서 $g(k)$는 $k=1$에서 최솟값 $\sqrt{2}$를 가지므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

09 전략 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $x=2$를 주어진 방정식에 대입하면 성립하지 않으므로 $x=2$는 주어진 방정식의 해가 아니다.

$x\neq 2$일 때, $x^3=k(x-2)^2$에서

$\frac{x^3}{(x-2)^2}=k$

위의 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. 　⋯ ❶

$f(x)=\frac{x^3}{(x-2)^2}$이라 하면 $x\neq 2$이고

$f'(x)=\frac{3x^2(x-2)^2-x^3\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$

$=\frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=6$

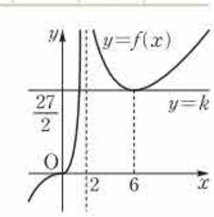
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗		↘	$\frac{27}{2}$	↗

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=\infty$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 　⋯ ❷



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$k=\frac{27}{2}$ 　⋯ ❸

답 $\frac{27}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	곡선 $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 함을 알 수 있다.	20 %
❷	$y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	50 %
❸	k의 값을 구할 수 있다.	30 %

10 **전략** 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 방정식 $\ln x=ax^3$의 실근의 개수는 두 곡선 $y=\ln x$, $y=ax^3$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\ln x$, $g(x)=ax^3$이라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g'(x)=3ax^2$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서

$$\ln t=at^3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(t)=g'(t)$에서

$$\frac{1}{t}=3at^2$$

$$\therefore a=\frac{1}{3t^3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $\ln t=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore t=e^{\frac{1}{3}}$

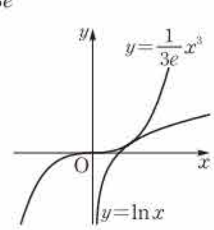
$t=e^{\frac{1}{3}}$을 ㉡에 대입하면 $a=\frac{1}{3e}$

따라서 $a>0$에서 방정식 $\ln x=ax^3$의 실근은

$0<a<\frac{1}{3e}$일 때 2개,

$a=\frac{1}{3e}$일 때 1개,

$a>\frac{1}{3e}$일 때 0개



이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

11 **전략** $y=f(x)$의 그래프가 오직 하나의 변곡점을 갖도록 하는 조건을 찾는다.

풀이 $f'(x)=3k\cos kx+12x^2$,

$f''(x)=-3k^2\sin kx+24x$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서

$$-3k^2\sin kx+24x=0$$

$$\therefore k^2\sin kx=8x$$

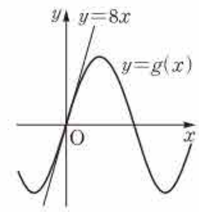
$g(x)=k^2\sin kx$라 하면 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=8x$는 모두 원점을 지나고 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f''(x)$도 원점을 지나고 원점에 대하여 대칭이다.

즉 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=0$에서 변곡점을 갖는다.

QBOX

k의 최댓값을 구하므로 $k>0$인 경우에서 생각한다.

이때 오직 하나의 변곡점을 가져야 하므로 $k>0$일 때, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=8x$는 오른쪽 그림과 같이 원점에서만 만나야 한다.



접선의 기울기가 직선 $y=8x$의 기울기보다 크면 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=8x$와 적어도 서로 다른 세 점에서 만난다.

즉 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기가 직선 $y=8x$의 기울기보다 작거나 같아야 한다.

$g'(x)=k^3\cos kx$이므로 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는

$$g'(0)=k^3$$

즉 $k^3\le 8$에서 $\quad (k-2)(k^2+2k+4)\le 0$

$$\therefore k\le 2\ (\because k^2+2k+4>0)$$

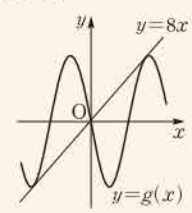
$$\therefore 0<k\le 2$$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다. 답 2

쌤한마디

$k=0$일 때, $f''(x)=24x$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=0$이고, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $x=0$에서 오직 하나의 변곡점을 갖는다.

한편 $k<0$일 때, 오직 하나의 변곡점을 가지려면 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=8x$가 원점에서만 만나거나 오른쪽 그림과 같이 접해야 한다. 즉 $k<0$일 때에도 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오직 하나의 변곡점을 갖도록 하는 k의 값이 존재한다.



그런데 문제에서 구하는 것이 k의 최댓값이므로 $k=0$일 때와 $k<0$일 때의 k의 값의 범위는 구하지 않아도 된다.

12 **전략** 주어진 부등식의 각 변을 x로 나누면 $\alpha\le\frac{\ln x}{x}\le\beta$이므로 주어진 x의 값의 범위에서 $\frac{\ln x}{x}$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$\frac{1}{e}\le x\le e^2$에서 $x>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

풀이 $\alpha x\le\ln x\le\beta x$에서

$$\alpha\le\frac{\ln x}{x}\le\beta \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1 \quad \therefore x=e$

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-e$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$

$\frac{1}{e}\le x\le e^2$에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{e}$, 최솟값은 $-e$이므로

$-e \le f(x) \le \frac{1}{e}$

따라서 부등식 ㉠이 성립하려면 $\alpha \le -e$, $\beta \ge \frac{1}{e}$이어야 하므로 $\beta-\alpha$의 최솟값은

$\frac{1}{e}-(-e)=\frac{e^2+1}{e}$ 답 ⑤

$\beta-\alpha$의 값은 β의 값이 가장 작고 α의 값이 가장 클 때 최소이다.

13 전략 평균값 정리를 이용하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$의 의미를 파악한다.

풀이 ㄱ. $f'(x)=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'(0)=1$

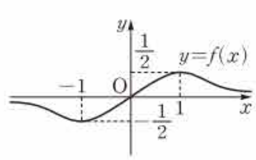
ㄴ. $f'(x)=0$에서 $-x^2+1=0$

$(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \ge -\frac{1}{2}$

ㄷ. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ …… ㉠

인 c가 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

한편

$f''(x)$

$=\frac{-2x(x^2+1)^2-(-x^2+1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

이고, 열린구간 $(0, 1)$에서 $f''(x)<0$이므로 함수 $f'(x)$는 이 구간에서 감소한다.

이때 $f'(0)=1$이므로 $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)<f'(0)=1$

따라서 ㉠에서

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)<1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

14 전략 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=3e^{3(t-1)}-a$, $\frac{dy}{dt}=ae^{t-1}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(3e^{3(t-1)}-a,\ ae^{t-1})$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는 $(3-a,\ a)$이고 속력은 3이므로

$\sqrt{(3-a)^2+a^2}=3$

$2a^2-6a+9=9$, $2a(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a\ne 0$) 답 3

15 전략 먼저 점 P의 시각 t에서의 속력을 구하고 속력이 최대일 때를 찾는다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=4\sin 4t$, $\frac{dy}{dt}=\cos 4t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(4\sin 4t,\ \cos 4t)$

따라서 점 P의 시각 t에서의 속력은

$\sqrt{(4\sin 4t)^2+(\cos 4t)^2}$

$=\sqrt{16\sin^2 4t+(1-\sin^2 4t)}$

$=\sqrt{15\sin^2 4t+1}$

이때 $-1\le \sin 4t\le 1$에서 $0\le \sin^2 4t\le 1$이므로 점 P의 속력은 $\sin^2 4t=1$일 때 최대이다.

$\frac{d^2x}{dt^2}=16\cos 4t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-4\sin 4t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(16\cos 4t,\ -4\sin 4t)$

따라서 점 P의 시각 t에서의 가속도의 크기는

$\sqrt{(16\cos 4t)^2+(-4\sin 4t)^2}$

$=\sqrt{256(1-\sin^2 4t)+16\sin^2 4t}$

$=\sqrt{-240\sin^2 4t+256}$

즉 $\sin^2 4t=1$일 때 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{-240+256}=4$ 답 4

16 전략 어떤 구간에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 이 구간에서 $f(x)$가 항상 증가하거나 감소해야 함을 이용한다.

풀이 $f'(x)=3ae^{3x}+be^x$, $f''(x)=9ae^{3x}+be^x$

조건 (가)에서 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이므로 $f''(x_1)$과 $f''(x_2)$의 부호가 서로 다르다.

즉 $x=\ln\frac{2}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=\ln\frac{2}{3}$에서 변곡점을 갖는다.

따라서 $f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)=0$이므로

$9a\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+b\cdot\frac{2}{3}=0$

$e^{3\ln\frac{2}{3}}=e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$\frac{8}{3}a+\frac{2}{3}b=0 \qquad \therefore b=-4a$

$f'(x)=3ae^{3x}-4ae^{x}=ae^{x}(3e^{2x}-4)$이므로 $f'(x)=0$에서

$3e^{2x}-4=0$ ($\because e^{x}>0$)

$e^{2x}=\frac{4}{3} \qquad \therefore x=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

조건 (나)에서 구간 $[k, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 이 구간에서 $f(x)$는 항상 증가하거나 감소해야 한다.

이때 구간 $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}, \infty\right)$에서 $f(x)$는 증가하므로

$k\ge\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} \qquad \therefore m=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

$f(x)=ae^{3x}-4ae^{x}$에서

$f(2m)=f\left(\ln\frac{4}{3}\right)=a\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{3}-4a\cdot\frac{4}{3}=-\frac{80}{27}a$

즉 $-\frac{80}{27}a=-\frac{80}{9}$이므로 $\qquad a=3$

따라서 $f(x)=3e^{3x}-12e^{x}$이므로

$f(0)=3-12=-9$ 답 ③

17 **전략** 점 $\mathrm{P}(t, 4)$에서 원에 그은 접선의 기울기를 m으로 놓고 접선의 방정식을 세운 후 원과 직선이 접할 때의 위치 관계를 이용하여 $f(t)$를 구한다.

풀이 점 $\mathrm{P}(t, 4)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-4=m(x-t) \qquad \therefore mx-y-mt+4=0$

이 직선과 원 $x^2+y^2=9$가 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-mt+4=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3과 같다.

즉 $\frac{|-mt+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$이므로

$|-mt+4|=3\sqrt{m^2+1}$

$(-mt+4)^2=9(m^2+1)$

$\therefore (t^2-9)m^2-8tm+7=0$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 접선의 기울기의 곱 $f(t)$는 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$f(t)=\frac{7}{t^2-9}$

ㄱ. $f(\sqrt{2})=\frac{7}{-7}=-1$

ㄴ. $f'(t)=-\frac{14t}{(t^2-9)^2}$,

$f''(t)=\frac{-14(t^2-9)^2+14t\cdot2(t^2-9)\cdot2t}{(t^2-9)^4}$

$=\frac{42(t^2+3)}{(t^2-9)^3}$

Q BOX

점 $(t, 4)$를 지나고 기울기가 m인 직선

이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}$

$=(-4t)^2-7(t^2-9)$

$=9t^2+63>0$

이므로 열린구간 $(-3, 3)$에서

$f''(t)<0$

ㄷ. $9f(x)=3^{x+2}-7$에서

$f(x)=3^{x}-\frac{7}{9}$

방정식 $f(x)=3^{x}-\frac{7}{9}$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=3^{x}-\frac{7}{9}$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

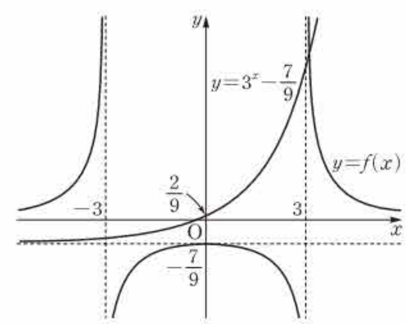
$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$+$		$-$	$-$	$-$		$+$
$f(x)$	↗		↗	$-\frac{7}{9}$	↘		↘

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$,

$\lim_{x\to-3+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-3-}f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to3+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to3-}f(x)=-\infty$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=3^{x}-\frac{7}{9}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=3^{x}-\frac{7}{9}$의 그래프는 한 점에서 만나므로 방정식 $9f(x)=3^{x+2}-7$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

Ⓛ 07 도함수의 활용 (2)

08 여러 가지 적분법

Lecture 17 여러 가지 함수의 부정적분

L 94쪽

01 $\int \frac{7}{x}dx=7\int \frac{1}{x}dx=7\ln|x|+C$

답 $7\ln|x|+C$

02 $\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$ 답 $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

03 $\int\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int(x^{\frac{2}{3}}-x^{-2})dx$

$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+x^{-1}+C$

$=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x}+C$

답 $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x}+C$

04 $\int\frac{\sqrt{x}+4}{x}dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}+\frac{4}{x}\right)dx$

$=2x^{\frac{1}{2}}+4\ln|x|+C$

$=2\sqrt{x}+4\ln|x|+C$

답 $2\sqrt{x}+4\ln|x|+C$

05 $\int e^{x+3}dx=\int e^x\cdot e^3dx=e^3\int e^xdx$

$=e^3\cdot e^x+C=e^{x+3}+C$ 답 $e^{x+3}+C$

06 $\int(3^x-1)^2dx=\int(9^x-2\cdot3^x+1)dx$

$=\int 9^xdx-2\int 3^xdx+\int 1dx$

$=\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{2\cdot3^x}{\ln 3}+x+C$

답 $\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{2\cdot3^x}{\ln 3}+x+C$

07 답 $-2\cos x+3\sin x+C$

08 $\int\frac{4-\cos^2x}{\cos^2x}dx=\int(4\sec^2x-1)dx$

$=4\tan x-x+C$

답 $4\tan x-x+C$

09 $\int\sec x(\tan x-\cos x)dx$

$=\int(\sec x\tan x-1)dx$

$=\sec x-x+C$ 답 $\sec x-x+C$

10 $\int\cot x(\csc x+\cot x)dx$

$=\int(\cot x\csc x+\cot^2x)dx$

$=\int(\csc x\cot x+\csc^2x-1)dx$

$=-\csc x-\cot x-x+C$

답 $-\csc x-\cot x-x+C$

Q BOX

$\int kf(x)dx$
$=k\int f(x)dx$
(단, k는 0이 아닌 실수)

$\int\{f(x)\pm g(x)\}dx$
$=\int f(x)dx$
$\pm\int g(x)dx$
(복호동순)

$(2x\sqrt{x})'=(2x^{\frac{3}{2}})'$
$=3x^{\frac{1}{2}}$
$=3\sqrt{x}$

표준+발전 유형 Q+Q

L 95쪽

01 $f(x)=\int\frac{(x+2)(x-1)}{x^2}dx$

$=\int\frac{x^2+x-2}{x^2}dx$

$=\int\left(1+\frac{1}{x}-2x^{-2}\right)dx$

$=x+\ln|x|+2x^{-1}+C$

$=x+\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

$f(e)=e+\frac{2}{e}$이므로

$e+1+\frac{2}{e}+C=e+\frac{2}{e}$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=x+\ln|x|+\frac{2}{x}-1$이므로

$f(1)=1+2-1=2$ 답 2

02 $F(x)=xf(x)+5\ln x-2x\sqrt{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+\frac{5}{x}-3\sqrt{x}$

$xf'(x)=3\sqrt{x}-\frac{5}{x}$ $\therefore f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}$

$\therefore f(x)=\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}\right)dx$

$=\int(3x^{-\frac{1}{2}}-5x^{-2})dx$

$=6x^{\frac{1}{2}}+5x^{-1}+C$

$=6\sqrt{x}+\frac{5}{x}+C$

$f(1)=7$이므로

$6+5+C=7$ $\therefore C=-4$

$\therefore f(x)=6\sqrt{x}+\frac{5}{x}-4$

답 $f(x)=6\sqrt{x}+\frac{5}{x}-4$

쌤 한마디

$F(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이다.
$\iff F'(x)=f(x)$
$\iff$ 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$이다.
$\iff \int f(x)dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)

03 $f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{e^{2x}-x^2}{e^x+x}dx$

$=\int \frac{(e^x+x)(e^x-x)}{e^x+x}dx$

$=\int (e^x-x)dx$

$=e^x-\frac{1}{2}x^2+C$

$f(0)=-1$이므로

$1+C=-1 \qquad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-2$이므로

$f(4)=e^4-8-2=e^4-10$ 답 e^4-10

> Q BOX
> 도함수 $f'(x)$가 주어지면 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낼 수 있다.

04 $\int \frac{8^x+1}{2^x+1}dx=\int \frac{2^{3x}+1}{2^x+1}dx$

$=\int \frac{(2^x+1)(4^x-2^x+1)}{2^x+1}dx$

$=\int (4^x-2^x+1)dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

따라서 $a=\frac{1}{\ln 4}$, $b=-\frac{1}{\ln 2}$, $c=1$이므로

$\frac{bc}{a}=-\frac{\ln 4}{\ln 2}=-2$ 답 ③

> a^3+b^3
> $=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

05 $f(x)=\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$

$=\int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx$

$=\int \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}dx$

$=\int (1+\cos x)dx$

$=x+\sin x+C$

$\therefore f\left(\frac{3}{2}\pi\right)-f(\pi)=\frac{3}{2}\pi-1+C-(\pi+C)$

$=\frac{\pi}{2}-1$ 답 $\frac{\pi}{2}-1$

> 삼각함수 사이의 관계
> ① $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
> ② $\tan^2 x+1=\sec^2 x$,
> $1+\cot^2 x=\csc^2 x$

06 ㄱ. $\int (\cos x-\cot^2 x)dx$

$=\int (\cos x+1-\csc^2 x)dx$

$=\sin x+x+\cot x+C$

ㄴ. $\int \frac{1}{1+\sin x}dx=\int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$

$=\int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx$

$=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$=\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$

$=\int (\sec^2 x-\sec x\tan x)dx$

$=\tan x-\sec x+C$

ㄷ. $\int \frac{1}{\cos 2x+1}dx=\int \frac{1}{(2\cos^2 x-1)+1}dx$

$=\int \frac{1}{2\cos^2 x}dx$

$=\frac{1}{2}\int \sec^2 x\,dx$

$=\frac{1}{2}\tan x+C$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

쌤 한마디

배각의 공식

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
$=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Lecture 18 치환적분법과 부분적분법

Ⓛ 96쪽

01 $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이므로

$\int (x+1)^3 dx=\int t^3 dt=\frac{1}{4}t^4+C$

$=\frac{1}{4}(x+1)^4+C$

답 $\frac{1}{4}(x+1)^4+C$

02 $7-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$이므로

$\int \sqrt{7-x}\,dx=\int \sqrt{t}\cdot(-1)dt=-\int t^{\frac{1}{2}}dt$

$=-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$=-\frac{2}{3}(7-x)\sqrt{7-x}+C$

답 $-\frac{2}{3}(7-x)\sqrt{7-x}+C$

03 $x^3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$이므로

$\int 3x^2e^{x^3}dx=\int e^{x^3}\cdot 3x^2 dx$

$=\int e^t dt=e^t+C$

$=e^{x^3}+C$ 답 $e^{x^3}+C$

04 $x^2+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$\int \frac{2x}{x^2+5}dx=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$

$=\ln(x^2+5)+C$ ($\because x^2+5>0$)

답 $\ln(x^2+5)+C$

05 $\tan x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\sec^2 x$이므로

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$$
$$=\ln|\tan x|+C$$

답 $\ln|\tan x|+C$

06 $\dfrac{x^2-2x}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x-3)+3}{x+1}=x-3+\dfrac{3}{x+1}$

이므로

$$\int \frac{x^2-2x}{x+1}dx=\int\left(x-3+\frac{3}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-3x+3\ln|x+1|+C$$

답 $\dfrac{1}{2}x^2-3x+3\ln|x+1|+C$

07 $\dfrac{3x+7}{x^2+4x+3}=\dfrac{3x+7}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+3}$

로 놓으면

$$\frac{3x+7}{(x+1)(x+3)}=\frac{(a+b)x+3a+b}{(x+1)(x+3)}$$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a+b=3$, $3a+b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

따라서 $\dfrac{3x+7}{x^2+4x+3}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+3}$이므로

$$\int \frac{3x+7}{x^2+4x+3}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=2\ln|x+1|+\ln|x+3|+C$$
$$=\ln|(x+1)^2(x+3)|+C$$

답 $\ln|(x+1)^2(x+3)|+C$

08 $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$

$$\therefore \int x\sin x\,dx$$
$$=x\cdot(-\cos x)-\int 1\cdot(-\cos x)dx$$
$$=-x\cos x+\int \cos x\,dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+C$$

답 $-x\cos x+\sin x+C$

09 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$

$$\therefore \int \ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=x\ln x-\int 1\,dx$$
$$=x\ln x-x+C$$

답 $x\ln x-x+C$

Q BOX

$$\begin{array}{r} x-3 \\ x+1\overline{)\,x^2-2x} \\ \underline{x^2+\ \ x} \\ -3x \\ \underline{-3x-3} \\ 3 \end{array}$$

$\displaystyle\int \frac{b}{x+a}dx$
$=b\ln|x+a|+C$
(단, a, b는 상수)

$\dfrac{px+q}{(x+m)(x+n)}$
$=\dfrac{a}{x+m}+\dfrac{b}{x+n}$
와 같이 변형한 후 항등식의 성질을 이용하여 상수 a, b의 값을 구한다.

$a>0$, $k>0$이고 x는 0이 아닌 정수일 때,
$a^x=k \Leftrightarrow a=k^{\frac{1}{x}}$

$2x-6=2(x-3)$이므로
$(x-3)dx=\dfrac{1}{2}dt$

쌤한마디

부분적분법을 이용할 때에는 미분한 결과가 간단해지는 함수를 $f(x)$, 상대적으로 적분하기 쉬운 함수를 $g'(x)$로 놓는다. 이때 로그함수, 다항함수, 삼각함수, 지수함수의 순서로 $f(x)$를 택한다.
특히 **09**번과 같이 $\ln h(x)$ 꼴을 적분할 때에는 상수 1이 곱해졌다고 생각하여 로그함수인 $\ln h(x)$를 $f(x)$, 다항함수인 1을 $g'(x)$로 놓는다.

표준+발전 유형 Q+Q

97쪽

01 $x^2-x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x-1$이므로

$$f(x)=\int(2x-1)(x^2-x-1)^5dx$$
$$=\int t^5dt=\frac{1}{6}t^6+C$$
$$=\frac{1}{6}(x^2-x-1)^6+C$$

$f(1)=-1$이므로

$\dfrac{1}{6}+C=-1\qquad \therefore C=-\dfrac{7}{6}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{6}(x^2-x-1)^6-\dfrac{7}{6}$이므로

$f(2)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{7}{6}=-1$

답 -1

02 $ax+5=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=a$이므로

$$f(x)=\int(ax+5)^6dx=\int t^6\cdot\frac{1}{a}dt$$
$$=\frac{1}{7a}t^7+C=\frac{1}{7a}(ax+5)^7+C$$

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 49이므로

$\dfrac{1}{7a}\cdot a^7=49,\qquad a^6=7^3$

$\therefore a=(7^3)^{\frac{1}{6}}=7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}\ (\because a>0)$

답 ④

03 $x^2-6x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x-6$이므로

$$\int(x-3)\sqrt{x^2-6x}\,dx$$
$$=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\int\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2-6x)\sqrt{x^2-6x}+C$$

따라서 $a=\dfrac{1}{3}$, $b=-6$이므로

$ab=-2$

답 -2

04 $x^2+4x+7=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+4$이므로

$$f(x)=\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}}dx$$
$$=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}dt=\int \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=t^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C$$
$$=\sqrt{x^2+4x+7}+C$$

$f(-1)=2$이므로

$2+C=2 \quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=\sqrt{x^2+4x+7}=\sqrt{(x+2)^2+3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 $\sqrt{3}$을 갖는다.

답 ②

05 $e^x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\frac{5}{2}\int e^x(e^x-1)^4dx=\frac{5}{2}\int t^4dt$$
$$=\frac{1}{2}t^5+C=\frac{1}{2}(e^x-1)^5+C$$

$f(0)=-1$이므로 $\quad C=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-1)^5-1$이므로

$f(\ln 3)=\frac{1}{2}\cdot 2^5-1=15$

답 ④

06 $e^x+8=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+8}}dx$$
$$=\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$$
$$=2\sqrt{e^x+8}+C$$

$f(0)=3$이므로

$2\cdot 3+C=3 \quad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=2\sqrt{e^x+8}-3$이므로 방정식 $f(x)=7$에서

$2\sqrt{e^x+8}-3=7, \quad \sqrt{e^x+8}=5$

$e^x=17 \quad \therefore x=\ln 17$

답 $x=\ln 17$

07 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int \frac{6}{x(\ln x)^2}dx=\int \frac{6}{t^2}dt$$
$$=\int 6t^{-2}dt=-6t^{-1}+C$$
$$=-\frac{6}{t}+C=-\frac{6}{\ln x}+C$$

$f(e^2)=0$이므로

$-3+C=0 \quad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=-\frac{6}{\ln x}+3$이므로

$f\left(\frac{1}{e}\right)=6+3=9$

답 9

Q BOX

$f(x)=\sqrt{(x+2)^2+3}$은 $(x+2)^2+3$의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

피적분함수가 $e^xf(e^x+a)$ (a는 상수) 꼴이면 $e^x+a=t$로 치환하여

$$\int e^xf(e^x+a)dx=\int f(t)dt$$

임을 이용한다.

피적분함수가 $\frac{f(\ln x)}{x}$ 꼴이면 $\ln x=t$로 치환하여

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}dx=\int f(t)dt$$

임을 이용한다.

$\frac{2x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4x}{x^2+1}$이므로

$$\frac{4x}{x^2+1}dx=2dt$$

08 $(x^2+1)f'(x)=4x\ln(x^2+1)$에서

$$f'(x)=\frac{4x\ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

$\ln(x^2+1)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}$이므로

$$f(x)=\int \frac{4x\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx$$
$$=\int 2t\,dt$$
$$=t^2+C$$
$$=\{\ln(x^2+1)\}^2+C$$

$f(0)=-2$이므로 $\quad C=-2$

$\therefore f(x)=\{\ln(x^2+1)\}^2-2$

답 $f(x)=\{\ln(x^2+1)\}^2-2$

09 $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$

$$=\int \frac{\cos^2 x\cdot\cos x}{1+\sin x}dx$$
$$=\int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{1+\sin x}dx$$
$$=\int \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)\cos x}{1+\sin x}dx$$
$$=\int (1-\sin x)\cos x\,dx$$

$1-\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\cos x$이므로

$$\int (1-\sin x)\cos x\,dx=\int t\cdot(-1)\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2+C$$

답 ①

쌤 한마디

09번은 치환적분법을 이용하지 않고 배각의 공식을 이용하여 다음과 같이 적분할 수도 있다.

$$\int (1-\sin x)\cos x\,dx$$
$$=\int (\cos x-\sin x\cos x)dx$$
$$=\int \left(\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$
$$=\sin x+\frac{1}{4}\cos 2x+C_1$$

이때 선택지에 $2x$의 삼각함수를 포함하는 식이 주어지지 않았으므로 다음과 같이 변형하면 답을 찾을 수 있다.

$$\sin x+\frac{1}{4}\cos 2x+C_1$$
$$=\sin x+\frac{1}{4}(1-2\sin^2 x)+C_1$$
$$=-\frac{1}{2}\sin^2 x+\sin x+\frac{1}{4}+C_1$$
$$=-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2+\frac{3}{4}+C_1$$
$$=-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2+C$$

하나의 적분상수 C로 나타낸다.

10 $f(x)=\int \tan x\sqrt{\sec x}\,dx=\int \frac{\sec x\tan x}{\sqrt{\sec x}}\,dx$

$\sec x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec x\tan x$이므로

$$\int \frac{\sec x\tan x}{\sqrt{\sec x}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$$
$$=2\sqrt{\sec x}+C$$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로 $f(0)=3$에서

$2+C=3 \quad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=2\sqrt{\sec x}+1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ k\right)$를 지나므로

$k=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}+1$ 　　답 $2\sqrt{2}+1$

11 $(x^3-x+1)'=3x^2-1$이므로

$$f(x)=\int \frac{3x^2-1}{x^3-x+1}\,dx=\int \frac{(x^3-x+1)'}{x^3-x+1}\,dx$$
$$=\ln|x^3-x+1|+C$$

$f(-1)=4$이므로 　$C=4$

따라서 $f(x)=\ln|x^3-x+1|+4$이므로

$f(2)=\ln 7+4$ 　　답 ⑤

12 $(e^x-e^{-x})f'(x)=e^x+e^{-x}$에서 $e^x-e^{-x}>0$이므로

$$f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

이때 $(e^x-e^{-x})'=e^x+e^{-x}$이므로

$$f(x)=\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx=\int \frac{(e^x-e^{-x})'}{e^x-e^{-x}}\,dx$$
$$=\ln(e^x-e^{-x})+C\ (\because e^x-e^{-x}>0)$$

$f(\ln 3)=0$이므로

$\ln\left(3-\frac{1}{3}\right)+C=0$

$\therefore C=-\ln\frac{8}{3}=\ln\frac{3}{8}$

따라서 $f(x)=\ln(e^x-e^{-x})+\ln\frac{3}{8}$이므로

$$f(\ln 5)=\ln\left(5-\frac{1}{5}\right)+\ln\frac{3}{8}$$
$$=\ln\left(\frac{24}{5}\cdot\frac{3}{8}\right)=\ln\frac{9}{5}$$
답 $\ln\frac{9}{5}$

13 $f(x)=\int \frac{2x^2-x-1}{x+1}\,dx$

$$=\int \frac{(2x-3)(x+1)+2}{x+1}\,dx$$
$$=\int\left(2x-3+\frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$=x^2-3x+2\ln|x+1|+C$$

$f(0)=2$이므로 　$C=2$

따라서 $f(x)=x^2-3x+2\ln|x+1|+2$이므로

$f(2)=4-6+2\ln 3+2=2\ln 3$ 　　답 $2\ln 3$

Q BOX

역함수 구하기

(i) $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$ 꼴로 나타낸다.

$$\frac{4x+7}{x-1}=\frac{4(x-1)+11}{x-1}$$
$$=4+\frac{11}{x-1}$$

$x>0$에서

$e^x>1,\ 0<e^{-x}<1$

이므로

$e^x>e^{-x}$

$\therefore e^x-e^{-x}>0$

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$
(단, $A\neq B$)

$(2x-1)'=2$, $(2x+1)'=2$이므로 각 분자가 2가 되도록 식을 변형한다.

14 $y=\frac{x+7}{x-4}$로 놓으면

$xy-4y=x+7,$ 　$(y-1)x=4y+7$

$x=\frac{4y+7}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 　$y=\frac{4x+7}{x-1}$

따라서 $g(x)=\frac{4x+7}{x-1}$이므로

$$\int g(x)\,dx=\int \frac{4x+7}{x-1}\,dx=\int\left(4+\frac{11}{x-1}\right)dx$$
$$=4x+11\ln|x-1|+C$$
답 $4x+11\ln|x-1|+C$

15 $\frac{x+1}{x^2+5x+6}=\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+3}$

로 놓으면

$$\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}=\frac{(a+b)x+3a+2b}{(x+2)(x+3)}$$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a+b=1,\ 3a+2b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=2$

따라서 $\frac{x+1}{x^2+5x+6}=-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}$이므로

$$\int \frac{x+1}{x^2+5x+6}\,dx$$
$$=\int\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}\right)dx$$
$$=-\ln|x+2|+2\ln|x+3|+C$$
$$=\ln\frac{(x+3)^2}{|x+2|}+C$$
답 ④

16 $f(x)=\int \frac{1}{4x^2-1}\,dx$

$$=\int \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}\,dx$$
$$=\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{2}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}(\ln|2x-1|-\ln|2x+1|)+C$$

$f(0)=0$이므로 　$C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(\ln|2x-1|-\ln|2x+1|)$이므로

$$\sum_{k=1}^{24} f(k)$$
$$=\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{4}(\ln|2k-1|-\ln|2k+1|)$$
$$=\frac{1}{4}\{(\ln 1-\ln 3)+(\ln 3-\ln 5)+(\ln 5-\ln 7)$$
$$+\cdots+(\ln 47-\ln 49)\}$$
$$=\frac{1}{4}(\ln 1-\ln 49)=\frac{1}{4}\cdot(-2\ln 7)$$
$$=-\frac{\ln 7}{2}$$
답 $-\frac{\ln 7}{2}$

17 $f(x)=x,\ g'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$\therefore \int x\cos 2x\,dx$

$=\frac{1}{2}x\sin 2x-\int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

따라서 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$이므로

$a+b=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

(다항함수)×(삼각함수) 꼴일 때에는 다항함수를 $f(x)$, 삼각함수를 $g'(x)$로 놓는다.

18 $u(x)=x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$

$\therefore f(x)=\int xe^x\,dx$

$=xe^x-\int e^x\,dx$

$=xe^x-e^x+C$

$=(x-1)e^x+C$

$f(0)=4$이므로

$-1+C=4 \quad \therefore C=5$

따라서 $f(x)=(x-1)e^x+5$이므로

$f(1)=5$ 답 ③

19 $g(x)=\sin x,\ h'(x)=e^x$으로 놓으면

$g'(x)=\cos x,\ h(x)=e^x$

$\therefore f(x)=\int e^x\sin x\,dx$

$=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$ …… ㉠

$\int e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x,\ v(x)=e^x$

$\therefore \int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$

$=e^x\cos x+f(x)+C_1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=e^x\sin x-\{e^x\cos x+f(x)+C_1\}$

$2f(x)=e^x(\sin x-\cos x)-C_1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+1$이므로

$f(0)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(0-1)+1=\frac{1}{2}$ 답 ④

부분적분법을 한 번 이용하여 부정적분을 구할 수 없을 때에는 부분적분법을 한 번 더 이용한다.

20 $g(x)=(\ln x)^2,\ h'(x)=1$로 놓으면

$g'(x)=\frac{2\ln x}{x},\ h(x)=x$

$\therefore f(x)=\int (\ln x)^2\,dx$

$=x(\ln x)^2-2\int \ln x\,dx$ …… ㉠

$\int \ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x,\ v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=x$

$\therefore \int \ln x\,dx=x\ln x-\int 1\,dx$

$=x\ln x-x+C_1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x+C_1)$

$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

$f(e)=2e$이므로

$e+C=2e \quad \therefore C=e$

따라서 $f(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+e$이므로

$f(1)=e+2$ 답 $e+2$

21 (ⅰ) $x>0$일 때,

$f(x)=\int 2^x\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C_1$

(ⅱ) $x<0$일 때,

$f(x)=\int (x^2+3)\,dx=\frac{1}{3}x^3+3x+C_2$

$f(-1)=\frac{2}{3}$이므로

$-\frac{1}{3}-3+C_2=\frac{2}{3} \quad \therefore C_2=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2^x}{\ln 2}+C_1 & (x>0)\\ \frac{1}{3}x^3+3x+4 & (x<0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$

$\frac{1}{\ln 2}+C_1=4 \quad \therefore C_1=4-\frac{1}{\ln 2}$

즉 $x>0$에서 $f(x)=\frac{2^x-1}{\ln 2}+4$이므로

$f(2)=\frac{3}{\ln 2}+4$

따라서 $a=3,\ b=4$이므로

$ab=12$ 답 12

구간에 따라 다르게 정의된 함수는 각 구간에서의 식을 각각 적분한다. 이때 적분상수는 C_1, C_2와 같이 서로 다른 문자를 사용해야 함에 주의한다.

22 (ⅰ) $x>0$일 때,

$x^5-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=5x^4$이므로

$f(x)=\int 5x^4(x^5-2)^3\,dx=\int t^3\,dt$

$=\frac{1}{4}t^4+C_1=\frac{1}{4}(x^5-2)^4+C_1$

(ⅱ) $x<0$일 때,

$1-x=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=-1$이므로

$$f(x)=\int 3\sqrt{1-x}\,dx=\int 3\sqrt{s}\cdot(-1)\,ds$$
$$=-\int 3s^{\frac{1}{2}}\,ds=-2s^{\frac{3}{2}}+C_2$$
$$=-2s\sqrt{s}+C_2$$
$$=2(x-1)\sqrt{1-x}+C_2$$

$f(-3)=-9$이므로

$2\cdot(-4)\cdot 2+C_2=-9 \quad \therefore C_2=7$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}(x^5-2)^4+C_1 & (x>0)\\ 2(x-1)\sqrt{1-x}+7 & (x<0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$$

$4+C_1=5 \quad \therefore C_1=1$

따라서 $x>0$에서 $f(x)=\frac{1}{4}(x^5-2)^4+1$이므로

$f(1)=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$ 답 ①

중단원 마무리

101쪽

01 전략 피적분함수를 x^n (n은 실수) 꼴로 나타낸 후 부정적분을 구한다.

풀이 $f(x)=\int \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

$$=\int \frac{1}{x}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\int \left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\int \left(\frac{1}{x}-2x^{-\frac{3}{2}}+x^{-2}\right)dx$$
$$=\ln x+4x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}+C$$
$$=\ln x+\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C$$

$f(4)=\ln 4$이므로

$\ln 4+2-\frac{1}{4}+C=\ln 4 \quad \therefore C=-\frac{7}{4}$

따라서 $f(x)=\ln x+\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}-\frac{7}{4}$이므로

$f(1)=4-1-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}$ 답 ②

02 전략 $a>0$, $a\neq 1$일 때, $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int 3^{x-1}\ln 3\,dx=\frac{\ln 3}{3}\int 3^x dx$

$$=\frac{\ln 3}{3}\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C=3^{x-1}+C$$

$f(2)=3$이므로

$3+C=3 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=3^{x-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$ 답 $\frac{3}{2}$

03 전략 삼각함수 사이의 관계와 배각의 공식을 이용하여 피적분함수를 적분하기 쉬운 형태로 변형한 후 적분한다.

풀이 $f(x)=\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

$$=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\int(1+\sin x)dx$$
$$=x-\cos x+C \quad \cdots ❶$$

$f(0)=2$이므로

$-1+C=2 \quad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=x-\cos x+3$이므로 ⋯ ❷

$f(\pi)=\pi+1+3=\pi+4$

즉 $a=1$, $b=4$이므로

$a-b=-3$ ⋯ ❸

답 -3

단계	채점 기준	비율
❶	부정적분 $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$를 구할 수 있다.	50 %
❷	$f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸	$a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

04 전략 $x+2=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이므로

$$f(x)=\int\frac{x-6}{(x+2)^3}dx=\int\frac{t-8}{t^3}dt$$
$$=\int(t^{-2}-8t^{-3})dt$$
$$=-t^{-1}+4t^{-2}+C$$
$$=-\frac{1}{t}+\frac{4}{t^2}+C$$
$$=-\frac{1}{x+2}+\frac{4}{(x+2)^2}+C$$

$f(-1)=1$이므로

$-1+4+C=1 \quad \therefore C=-2$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{x+2}+\frac{4}{(x+2)^2}-2$

이때 $f(0)=-\frac{1}{2}+1-2=-\frac{3}{2}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점은 ②이다. 답 ②

참고 $f(2)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-2=-2$이므로 점 $(2, -1)$, 점 $(2, 3)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이 아니다.

Q BOX

등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ ($a\neq 0$)은

① $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$

② $|r|\geq 1$일 때, 발산

p, q는 실수, r는 2 이상의 자연수일 때,

$\frac{1}{x^p}=x^{-p}$

$\sqrt[r]{x^q}=x^{\frac{q}{r}}$

Q BOX

05 전략 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$$f'(x)=6x\sqrt{x^2+1}$$

$x^2+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int 6x\sqrt{x^2+1}\,dx\\&=\int 3\sqrt{t}\,dt=\int 3t^{\frac{1}{2}}dt\\&=2t^{\frac{3}{2}}+C=2t\sqrt{t}+C\\&=2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C\end{aligned}$$

$f(0)=-2$이므로

$2+C=-2 \qquad \therefore C=-4$

따라서 $f(x)=2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-4$이므로

$f(\sqrt{3})=2\cdot4\cdot2-4=12$ 답 12

06 전략 먼저 $\ln x=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx=\int\cos t\,dt\\&=\sin t+C=\sin(\ln x)+C\end{aligned}$$

$f(e^{\pi})=0$이므로 $\qquad C=0$

$$\begin{aligned}f(e^{\pi})&=\sin(\ln e^{\pi})+C\\&=\sin\pi+C\\&=C\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=\sin(\ln x)$이므로 방정식 $f(x)=0$에서

$\sin(\ln x)=0$

이때 $x>1$에서 $\ln x>0$이므로 자연수 n에 대하여

$\ln x=n\pi \qquad \therefore x=e^{n\pi}$

따라서 $a_n=e^{n\pi}$이므로

$a_1a_5=e^{\pi}\cdot e^{5\pi}=e^{6\pi}$ 답 ③

07 전략 치환적분법을 이용할 수 있도록 피적분함수를 변형한 후 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\displaystyle\int\cot x\sqrt{\csc x}\,dx=\int\frac{\csc x\cot x}{\sqrt{\csc x}}dx$

$\csc x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-\csc x\cot x$이므로

$$\begin{aligned}\int\frac{\csc x\cot x}{\sqrt{\csc x}}dx&=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot(-1)dt\\&=-\int t^{-\frac{1}{2}}dt\\&=-2t^{\frac{1}{2}}+C\\&=-2\sqrt{t}+C\\&=-2\sqrt{\csc x}+C\end{aligned}$$

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\sqrt{2}$이므로

$-2\sqrt{2}+C=-2\sqrt{2} \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=-2\sqrt{\csc x}$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2$ 답 -2

08 전략 $f'(x)=0$인 x의 값을 찾아 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

풀이 $f(x)=\displaystyle\int(\sin2x+\cos x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sin2x+\cos x\\&=2\sin x\cos x+\cos x\\&=\cos x(2\sin x+1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad \cos x=0$ 또는 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{7}{6}\pi\ \left(\because 0<x<\dfrac{3}{2}\pi\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 극댓값을 갖고,

$x=\dfrac{7}{6}\pi$에서 극솟값을 갖는다. ··· ❶

한편

$$\begin{aligned}f(x)&=\int(\sin2x+\cos x)dx\\&=-\frac{1}{2}\cos2x+\sin x+C\end{aligned}$$

① $\displaystyle\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$

② $\displaystyle\int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+C$

이고 극댓값이 $\dfrac{5}{2}$이므로 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$에서

$\dfrac{1}{2}+1+C=\dfrac{5}{2} \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos2x+\sin x+1$ ··· ❷

따라서 $f(x)$의 극솟값은

$f\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{4}$ ··· ❸

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\cos\left(2\cdot\frac{7}{6}\pi\right)\\&=-\frac{1}{2}\cos\frac{7}{3}\pi\\&=-\frac{1}{2}\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\&=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{1}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	$f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸	$f(x)$의 극솟값을 구할 수 있다.	20 %

09 전략 $\displaystyle\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\ln|g(x)|+C$임을 이용한다.

풀이 $(x^2-x-1)'=2x-1$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{4x-2}{x^2-x-1}dx\\&=2\int\frac{(x^2-x-1)'}{x^2-x-1}dx\\&=2\ln|x^2-x-1|+C\end{aligned}$$

$f(3)=2\ln5$이므로

$2\ln5+C=2\ln5 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=2\ln|x^2-x-1|$이므로 방정식 $f(x)=0$에서

$2\ln|x^2-x-1|=0, \qquad |x^2-x-1|=1$

$x^2-x-1=\pm1$

(i) $x^2-x-1=1$일 때,

$x^2-x-2=0$이므로 $\quad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-x-1=-1$일 때,

$x^2-x=0$이므로 $\quad x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 자연수 x는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$ 답 ①

10 전략 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$임을 이용하여 주어진 등식을 $T(t)$에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $\int \frac{T'(t)}{T(t)-20}dt=\int \frac{\{T(t)-20\}'}{T(t)-20}dt$

$=\ln|T(t)-20|+C_1$

이므로 주어진 등식은

$\ln|T(t)-20|+C_1=kt+C$

$\therefore \ln|T(t)-20|=kt+C_2$

$T(0)=100$이므로 위의 식의 양변에 $t=0$을 대입하면

$\ln|100-20|=C_2 \quad \therefore C_2=\ln 80$

$T(3)=60$이므로 $\ln|T(t)-20|=kt+\ln 80$의 양변에 $t=3$을 대입하면

$\ln|60-20|=3k+\ln 80, \quad 3k=\ln 40-\ln 80$

$\therefore k=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}=-\frac{\ln 2}{3}$ 답 ①

11 전략 조건 (나)의 식의 양변을 $f(x)g(x)$로 나눈 후 양변을 적분하여 $f(x)$, $g(x)$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $f(x)>0$, $g(x)>0$이므로 조건 (나)의 식의 양변을 $f(x)g(x)$로 나누면

$\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}=1$

$\int\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}\right\}dx=\int 1dx$

$\ln f(x)-\ln g(x)=x+C$

$(\because f(x)>0,\ g(x)>0)$

$\ln\frac{f(x)}{g(x)}=x+C \quad \therefore \frac{f(x)}{g(x)}=e^{x+C}$

$f(3)=g(3)$에서 $\frac{f(3)}{g(3)}=1$이므로

$1=e^{3+C} \quad \therefore C=-3$

따라서 $\frac{f(x)}{g(x)}=e^{x-3}$이므로

$\frac{f(1)}{g(1)}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ 답 $\frac{1}{e^2}$

12 전략 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용하여 조건 (가)의 식을 정리한다.

풀이 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 조건 (가)에서

$\{f(x)g(x)\}'=h(x)$

$\therefore f(x)g(x)=\int h(x)dx$

이때 $f(x)=x$, $h(x)=\ln x$이므로

$xg(x)=\int \ln x\,dx$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$\therefore xg(x)=x\ln x-\int 1dx$

$=x\ln x-x+C$

조건 (나)에서 $g(1)=-1$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-1=-1+C \quad \therefore C=0$

$\therefore xg(x)=x\ln x-x$

$x>0$이므로 $\quad g(x)=\ln x-1$

$\therefore g(e)=0$ 답 ③

13 전략 부분적분법을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 $u(x)=x$, $v'(x)=\sec^2 x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\tan x$

$\therefore f(x)=\int x\sec^2 x\,dx=x\tan x-\int \tan x\,dx$

$=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$=x\tan x+\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$

$=x\tan x+\ln|\cos x|+C$

$f(0)=2$이므로 $\quad C=2$

$\therefore f(x)=x\tan x+\ln|\cos x|+2$

ㄱ. $f(-x)=-x\tan(-x)+\ln|\cos(-x)|+2$

$=x\tan x+\ln|\cos x|+2$

$=f(x)$

ㄴ. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{3}+\ln\frac{1}{2}+2=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2+2$

ㄷ. $f'(x)=x\sec^2 x$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=2$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

14 전략 부분적분법을 2번 이용하여 같은 꼴이 나타나게 한다.

풀이 $f'(x)=e^x\cos 2x$이므로 $g(x)=\cos 2x$, $h'(x)=e^x$으로 놓으면

$g'(x)=-2\sin 2x$, $h(x)=e^x$

Q BOX

$y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$\tan(-x)=-\tan x$

$y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$\cos(-x)=\cos x$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서

$\sec x\ge 1$

$\therefore \sec^2 x\ne 0$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

$\therefore f(x)=\int e^x \cos 2x\,dx$

$=e^x \cos 2x+2\int e^x \sin 2x\,dx$ ⋯ ㉠

$\int e^x \sin 2x\,dx$에서 $u(x)=\sin 2x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2\cos 2x$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int e^x \sin 2x\,dx=e^x \sin 2x-2\int e^x \cos 2x\,dx$

$=e^x \sin 2x-2f(x)+C_1$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=e^x \cos 2x+2\{e^x \sin 2x-2f(x)+C_1\}$

$5f(x)=e^x \cos 2x+2e^x \sin 2x+2C_1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{5}e^x(2\sin 2x+\cos 2x)+C$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(0,\ \frac{6}{5}\right)$을 지나므로 $f(0)=\frac{6}{5}$에서

$\frac{1}{5}+C=\frac{6}{5}$ $\qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}e^x(2\sin 2x+\cos 2x)+1$이므로

$f(\pi)=\frac{e^\pi}{5}+1$ 답 $\frac{e^\pi}{5}+1$

15 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & (x\le 1) \\ \frac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+C_1 & (x\le 1) \\ \ln x+C_2 & (x>1)\end{cases}$

$\int e^{ax+b}\,dx$
$=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$

$f(-1)=e+\frac{1}{e^2}$이므로

$\frac{1}{e^2}+C_1=e+\frac{1}{e^2}$ $\qquad \therefore C_1=e$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$

$\therefore C_2=e+1$

따라서 $x>1$에서 $f(x)=\ln x+e+1$이므로

$f(e)=1+e+1=e+2$ 답 ⑤

16 전략 조건 ㈎를 이용하여 $g'(x)$의 부정적분을 구한 후 조건 ㈏를 이용하여 $g(x)$를 구한다.

풀이 $x>0$에서

$f(x)=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int(2-3x^{-2})\,dx$

$=2x+3x^{-1}+C_1$

$=2x+\frac{3}{x}+C_1$

$f(1)=5$이므로 $\qquad C_1=0$

$\therefore f(x)=2x+\frac{3}{x}$

$x<0$에서 조건 ㈎에 의하여

$g'(x)=f'(-x)=2-\frac{3}{(-x)^2}=2-\frac{3}{x^2}$

이므로

$g(x)=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx=2x+\frac{3}{x}+C_2$

조건 ㈏에서 $f(2)+g(-2)=9$이므로

$\left(4+\frac{3}{2}\right)+\left(-4-\frac{3}{2}+C_2\right)=9$

$\therefore C_2=9$

따라서 $g(x)=2x+\frac{3}{x}+9$이므로

$g(-3)=-6-1+9=2$ 답 ②

17 전략 조건 ㈎의 식을 변형하여 $\{xF(x)\}'$의 부정적분을 구한다.

풀이 $F'(x)=f(x)$이므로 조건 ㈎에서

$\{xF(x)\}'=F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$

$\therefore xF(x)=\int\{xF(x)\}'\,dx$

$=\int(2x+2)e^x\,dx$

$u(x)=2x+2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$\therefore xF(x)=(2x+2)e^x-\int 2e^x\,dx$

$=(2x+2)e^x-2e^x+C$

$=2xe^x+C$

조건 ㈏에서 $F(1)=2e$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2e=2e+C$ $\qquad \therefore C=0$

$\therefore xF(x)=2xe^x$

$x>0$이므로 $\qquad F(x)=2e^x$

$\therefore F(3)=2e^3$ 답 ④

09 정적분

Lecture 19 정적분의 계산

104쪽

01 $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$ 답 $\frac{14}{3}$

02 $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx=\left[\ln|x|\right]_1^e=\ln e-\ln 1=1$ 답 1

03 $\int_0^2 3^x\,dx=\left[\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^2=\frac{9}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 3}=\frac{8}{\ln 3}$

답 $\frac{8}{\ln 3}$

04 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\,dx=\left[-\cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=0-(-1)=1$

답 1

05 $\int_1^2 (e^x-2)dx+2\int_1^2 (e^x+1)dx$

$=\int_1^2 \{e^x-2+2(e^x+1)\}dx$

$=\int_1^2 3e^x dx=\left[3e^x\right]_1^2=3e^2-3e$ 답 $3e^2-3e$

적분 구간이 같은 정적분은 하나의 정적분으로 나타낸 후 피적분함수를 간단히 정리하여 계산한다.

06 $\int_0^{\pi} (\sin x+1)dx+\int_{\pi}^{2\pi} (\sin y+1)dy$

$=\int_0^{\pi} (\sin x+1)dx+\int_{\pi}^{2\pi} (\sin x+1)dx$

$=\int_0^{2\pi} (\sin x+1)dx=\left[-\cos x+x\right]_0^{2\pi}$

$=(-1+2\pi)-(-1)=2\pi$ 답 2π

정적분에서 변수를 x 대신 다른 문자를 사용해도 그 값은 변하지 않는다.

피적분함수가 같고, 한 정적분의 위끝과 다른 정적분의 아래끝이 같은 정적분은 적분 구간을 하나로 나타내어 계산한다.

07 $\sin x$는 기함수, $\cos x$는 우함수이므로

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x+\cos x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$

$=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

$\sin(-x)=-\sin x$,
$\cos(-x)=\cos x$

08 $f(x)=e^x+e^{-x}$이라 하면

$f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$

따라서 e^x+e^{-x}은 우함수이므로

$\int_{-2}^2 (e^x+e^{-x})dx=2\int_0^2 (e^x+e^{-x})dx$

$=2\left[e^x-e^{-x}\right]_0^2$

$=2\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$ 답 $2\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$

09 $f(x+5)=f(x)$이므로

$\int_1^6 f(x)dx=\int_6^{11} f(x)dx=3$

$\therefore \int_1^{11} f(x)dx=\int_1^6 f(x)dx+\int_6^{11} f(x)dx$

$=3+3=6$ 답 6

표준+발전 유형 Q+Q

105쪽

01 $\int_1^3 \frac{2x+1}{x+1}dx=\int_1^3 \left(2-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\left[2x-\ln|x+1|\right]_1^3$

$=(6-\ln 4)-(2-\ln 2)$

$=4-\ln 2$ 답 ③

$\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2(x+1)-1}{x+1}$
$=2-\frac{1}{x+1}$

$\ln 4=\ln 2^2=2\ln 2$

02 $\int_0^2 f(x)dx-\int_5^2 f(y)dy-\int_1^5 f(z)dz$

$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx+\int_5^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx$

$=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

03 $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx+\int_{\ln 2}^0 \frac{1}{e^t+1}dt$

$=\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx-\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1}dx$

$=\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln 2} \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$

$=\int_0^{\ln 2} (e^x-1)dx=\left[e^x-x\right]_0^{\ln 2}$

$=(2-\ln 2)-1=1-\ln 2$ 답 $1-\ln 2$

04 $\int_{-1}^0 \sqrt{e^{2x}+6e^x+9}\,dx$

$=\int_{-1}^0 \sqrt{(e^x+3)^2}\,dx$

$=\int_{-1}^0 (e^x+3)dx$ ($\because e^x+3>0$)

$=\left[e^x+3x\right]_{-1}^0=1-(e^{-1}-3)=4-\frac{1}{e}$ 답 ④

05 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos 2x+1}{\sin x+1}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(1-2\sin^2 x)+1}{\sin x+1}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2-2\sin^2 x}{\sin x+1}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2(1+\sin x)(1-\sin x)}{\sin x+1}dx$

$=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1-\sin x)dx$

$=2\left[x+\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=2\left\{(\pi-1)-\frac{\pi}{2}\right\}=\pi-2$ 답 ①

06 $\int_0^a (1+\tan^2 x)dx=\int_0^a \sec^2 x\,dx=\Big[\tan x\Big]_0^a$

$=\tan a$

즉 $\tan a=\sqrt{3}$이므로

$a=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$ 답 $\frac{\pi}{3}$

07 $|2^x-1|=\begin{cases} 2^x-1 & (x\geq 0) \\ -2^x+1 & (x\leq 0)\end{cases}$이므로

$\int_{-1}^1 |2^x-1|dx$

$=\int_{-1}^0 (-2^x+1)dx+\int_0^1 (2^x-1)dx$

$=\left[-\frac{2^x}{\ln 2}+x\right]_{-1}^0+\left[\frac{2^x}{\ln 2}-x\right]_0^1$

$=-\frac{1}{\ln 2}-\left(-\frac{1}{2\ln 2}-1\right)+\left(\frac{2}{\ln 2}-1\right)-\frac{1}{\ln 2}$

$=\frac{1}{2\ln 2}$ 답 ①

Q BOX

$2^x-1=0$에서

$2^x=1$ $\therefore x=0$

따라서 $x\geq 0$일 때 $2^x-1\geq 0$이고, $x\leq 0$일 때 $2^x-1\leq 0$이다.

08 $|\sin x-\cos x|=\begin{cases} -\sin x+\cos x & \left(0\leq x\leq \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin x-\cos x & \left(\frac{\pi}{4}\leq x\leq \frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

이므로

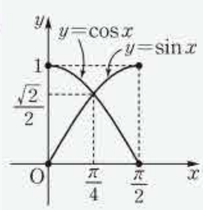
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x-\cos x|dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-\cos x)dx$

$=\Big[\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1+(-1)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=2\sqrt{2}-2$ 답 ②



09 x는 기함수, $\sin^2 x$는 우함수이므로 $x\sin^2 x$는 기함수이다. 또 $\cos x+1$은 우함수이므로

$\int_{-\pi}^{\pi} (-x\sin^2 x+\cos x+1)dx$

$=2\int_0^{\pi} (\cos x+1)dx$

$=2\Big[\sin x+x\Big]_0^{\pi}=2\pi$ 답 2π

쌤 한마디

① (우함수)×(우함수)=(우함수)
② (우함수)×(기함수)=(기함수)
③ (기함수)×(기함수)=(우함수)
④ (우함수)′=(기함수)
⑤ (기함수)′=(우함수)

10 $f(x)=4^x+4^{-x}$이라 하면

$f(-x)=4^{-x}+4^x=f(x)$

이므로 4^x+4^{-x}은 우함수이다.

또 $g(x)=3^x-3^{-x}$이라 하면

$g(-x)=3^{-x}-3^x=-(3^x-3^{-x})=-g(x)$

이므로 3^x-3^{-x}은 기함수이다.

$\therefore \int_{-1}^1 (4^x+3^x+4^{-x}-3^{-x})dx$

$=2\int_0^1 (4^x+4^{-x})dx=2\left[\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{4^{-x}}{\ln 4}\right]_0^1$

$=2\left(\frac{4}{\ln 4}-\frac{1}{4\ln 4}\right)=\frac{15}{4\ln 2}$ 답 $\frac{15}{4\ln 2}$

Q BOX

$\frac{4}{\ln 4}-\frac{1}{4\ln 4}$

$=\frac{15}{4\ln 4}=\frac{15}{8\ln 2}$

11 $y=|\sin x|$는 주기가 π인 주기함수이므로

$\int_0^{\pi} |\sin x|dx=\int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|dx=\int_{2\pi}^{3\pi} |\sin x|dx$

$=\int_{3\pi}^{4\pi} |\sin x|dx$

$\therefore \int_0^{4\pi} |\sin x|dx=4\int_0^{\pi} \sin x\,dx=4\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$

$=4\{1-(-1)\}=8$ 답 ③

쌤 한마디

삼각함수의 주기

① 함수 $y=a\sin bx+c$의 주기 ➡ $\frac{2\pi}{|b|}$

② 함수 $y=a\cos bx+c$의 주기 ➡ $\frac{2\pi}{|b|}$

③ 함수 $y=a\tan bx+c$의 주기 ➡ $\frac{\pi}{|b|}$

④ 함수 $y=|a\sin bx|+c$의 주기 ➡ $\frac{\pi}{|b|}$

⑤ 함수 $y=|a\cos bx|+c$의 주기 ➡ $\frac{\pi}{|b|}$

12 $f(x+2)=f(x)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx=\int_3^5 f(x)dx$

$=\int_5^7 f(x)dx=\int_7^9 f(x)dx$

또 $-1\leq x\leq 1$에서 $f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$\therefore \int_{-1}^9 f(x)dx=5\int_{-1}^1 f(x)dx=10\int_0^1 f(x)dx$

$=10\int_0^1 (e^x+e^{-x})dx$

$=10\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1$

$=10\left(e-\frac{1}{e}\right)$ 답 $10\left(e-\frac{1}{e}\right)$

Lecture 20 치환적분법과 부분적분법을 이용한 정적분 107쪽

01 $2x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \int_1^3 t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \left[\frac{1}{8}t^4\right]_1^3$$
$$= \frac{1}{8}(81-1) = 10$$
답 10

02 $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=3$일 때 $t=9$이므로

$$\int_0^3 2xe^{x^2}dx = \int_0^9 e^t dt = \left[e^t\right]_0^9 = e^9-1$$
답 e^9-1

03 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$
답 $\frac{1}{2}$

04 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin x\,dx = \int_1^{\frac{1}{2}} t^2\cdot(-1)dt$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{24}$$
답 $\frac{7}{24}$

05 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta+1)d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$
답 $\frac{\pi}{4}$

06 $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta$$
$$= \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$
답 $\frac{\pi}{4}$

Q BOX

(다항함수)×(로그함수) 꼴일 때에는 로그함수를 $f(x)$, 다항함수를 $g'(x)$로 놓는다.

(다항함수)×(지수함수) 꼴일 때에는 다항함수를 $f(x)$, 지수함수를 $g'(x)$로 놓는다.

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

$y=a^x\ (a>0,\ a\ne1)$이면 $y'=a^x\ln a$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta-1$에서 $2\cos^2\theta=\cos 2\theta+1$

$\therefore \cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta+1}{2}$

07 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$$\therefore \int_1^{e^2} \ln x\,dx = \left[x\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$= 2e^2 - \left[x\right]_1^{e^2} = 2e^2-(e^2-1)$$
$$= e^2+1$$
답 e^2+1

08 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \left[e^x\right]_0^1$$
$$= e-(e-1) = 1$$
답 1

09 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2\cos x$

답 $f(x)=2\cos x$

10 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x-2^x\ln 2$

답 $f(x)=e^x-2^x\ln 2$

11 $f(t)=\cos t+1$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(\cos t+1)dt = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$= F'(0)$$
$$= f(0) = 2$$
답 2

12 $f(t)=e^t+t$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(e^t+t)dt = \lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$= \lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$= F'(1)$$
$$= f(1) = e+1$$
답 $e+1$

표준+발전 유형 Q+Q

108쪽

01 $x^2+2x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+2$

$x=-1$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=5$이므로

$$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}dx = \int_1^5 \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$= \int_1^5 \frac{1}{2}t^{-2}dt$$
$$= \left[-\frac{1}{2}t^{-1}\right]_1^5$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-1\right)$$
$$= \frac{2}{5}$$
답 $\frac{2}{5}$

02 $x>1$에서 $\quad f'(x)=\dfrac{3x-2}{\sqrt{x-1}}$

$$\therefore f(5)-f(2)=\int_2^5 f'(x)dx=\int_2^5 \frac{3x-2}{\sqrt{x-1}}dx$$

$x-1=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=1$

$x=2$일 때 $t=1$, $x=5$일 때 $t=4$이므로

$$\int_2^5 \frac{3x-2}{\sqrt{x-1}}dx=\int_1^4 \frac{3(t+1)-2}{\sqrt{t}}dt=\int_1^4 \frac{3t+1}{\sqrt{t}}dt=\int_1^4 (3t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}})dt=\left[2t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^4=20-4=16$$

답 16

$\int_2^5 f'(x)dx$
$=\left[f(x)\right]_2^5$
$=f(5)-f(2)$

03 $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

$e^{2x}+1=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=2e^{2x}$

$x=\ln 2$일 때 $t=5$, $x=\ln 3$일 때 $t=10$이므로

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\int_5^{10}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\left[\frac{1}{2}\ln|t|\right]_5^{10}=\frac{1}{2}(\ln 10-\ln 5)=\frac{1}{2}\ln 2$$

답 $\frac{1}{2}\ln 2$

$e^{2\ln 2}+1=e^{\ln 4}+1$
$=4+1=5$

$e^{2\ln 3}+1=e^{\ln 9}+1$
$=9+1=10$

04 $1+\ln x=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=1$, $x=k$일 때 $t=1+\ln k$이므로

$$\int_1^k \frac{3}{x(1+\ln x)^2}dx=\int_1^{1+\ln k}\frac{3}{t^2}dt=\int_1^{1+\ln k}3t^{-2}dt=\left[-3t^{-1}\right]_1^{1+\ln k}=-\frac{3}{1+\ln k}+3$$

즉 $-\dfrac{3}{1+\ln k}+3=2$이므로

$\dfrac{3}{1+\ln k}=1, \quad \ln k=2 \quad \therefore k=e^2$ 답 ④

05 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=\cos x$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx=\int_0^1(1-t^2)^2dt=\int_0^1(1-2t^2+t^4)dt=\left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_0^1=\frac{8}{15}$$

답 ③

06 $\cos x=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=0$, $x=\pi$일 때 $t=-1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\cos x)\sin x\,dx=\int_0^{-1}f(t)\cdot(-1)dt=\int_{-1}^0(e^t-t^2)dt=\left[e^t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^0=1-\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{e}$$

답 $\frac{2}{3}-\frac{1}{e}$

07 $x=3\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}\cdot 3\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{3\cos\theta}{3\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}1\,d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

$3\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$에서
$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$
$\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\cos\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

08 $x=a\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=a\sec^2\theta$

$x=-a$일 때 $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$, $x=a$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\int_{-a}^{a}\frac{1}{x^2+a^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2\tan^2\theta+a^2}\cdot a\sec^2\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}d\theta=\left[\frac{1}{a}\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2a}$$

따라서 $\dfrac{\pi}{2a}=\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\quad a=2$ 답 ④

09 $f(x)=x-2$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$

09 정적분

$$\therefore \int_0^2 (x-2)e^{-x}dx$$
$$=\Big[-(x-2)e^{-x}\Big]_0^2+\int_0^2 e^{-x}dx$$
$$=-2+\Big[-e^{-x}\Big]_0^2=-2+\left(-\frac{1}{e^2}+1\right)$$
$$=-\frac{1}{e^2}-1$$
답 ①

10 $f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$

$$\therefore \int_0^\pi x^2\sin x\,dx$$
$$=\Big[-x^2\cos x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi 2x\cos x\,dx$$
$$=\pi^2+2\int_0^\pi x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^\pi x\cos x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$

$$\therefore \int_0^\pi x\cos x\,dx=\Big[x\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi \sin x\,dx$$
$$=-\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=-2$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^\pi x^2\sin x\,dx=\pi^2-4$$

따라서 $a=1$, $b=-4$이므로

$ab=-4$

답 -4

11 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이고, $f(x)$는 함수 $g(x)$의 역함수이므로

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))},\ f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$$
(단, $f'(g(x))\neq0$, $g'(f(x))\neq0$)

$$\therefore \int_1^4\left\{\frac{f(x)}{f'(g(x))}+\frac{g(x)}{g'(f(x))}\right\}dx$$
$$=\int_1^4\{f(x)g'(x)+f'(x)g(x)\}dx$$
$$=\int_1^4\{f(x)g(x)\}'dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_1^4$$
$$=f(4)g(4)-f(1)g(1)$$

이때 $f(1)=4$에서 $g(4)=1$이고 $g(1)=4$에서 $f(4)=1$이므로 구하는 값은

$1\cdot1-4\cdot4=-15$

답 -15

12 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}\ (단,\ f'(g(x))\neq0)$$

이때 $f'(x)=2f(x)+1$에서

$f'(g(x))=2f(g(x))+1=2x+1$

이므로 $x\neq-\frac{1}{2}$일 때,

$$g'(x)=\frac{1}{2x+1}\qquad \therefore 2g'(x)=\frac{2}{2x+1}$$

이때 $(2x+1)'=2$이므로

$$\int_0^4 2g'(x)\,dx=\int_0^4\frac{(2x+1)'}{2x+1}dx$$
$$=\Big[\ln|2x+1|\Big]_0^4$$
$$=\ln9=2\ln3$$
답 $2\ln3$

13 $\int_1^3 tf(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면

$$f(x)=\frac{1}{x^2}+k$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^3 t\left(\frac{1}{t^2}+k\right)dt=k,\qquad \int_1^3\left(\frac{1}{t}+kt\right)dt=k$$
$$\left[\ln|t|+\frac{k}{2}t^2\right]_1^3=k,\qquad \ln3+\frac{9}{2}k-\frac{k}{2}=k$$
$$\therefore k=-\frac{1}{3}\ln3$$
$$\therefore f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}\ln3$$

답 $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}\ln3$

14 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(t)\sin t\,dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면

$f(x)=\cos x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+k)\sin t\,dt=k$$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+k)\sin t\,dt$에서 $\cos t+k=\theta$로 놓으면

$$\frac{d\theta}{dt}=-\sin t$$

$t=0$일 때 $\theta=1+k$, $t=\frac{\pi}{3}$일 때 $\theta=\frac{1}{2}+k$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+k)\sin t\,dt=\int_{1+k}^{\frac{1}{2}+k}\theta\cdot(-1)d\theta$$
$$=\int_{\frac{1}{2}+k}^{1+k}\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_{\frac{1}{2}+k}^{1+k}$$
$$=\frac{1}{2}(1+k)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+k\right)^2$$
$$=\frac{3}{8}+\frac{k}{2}$$

즉 $\frac{3}{8}+\frac{k}{2}=k$이므로 $\quad\frac{k}{2}=\frac{3}{8}\quad\therefore k=\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=\cos x+\frac{3}{4}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{4}$$
답 ⑤

15 $f(x)=e^x-\int_0^x f'(t)e^t\,dt$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=e^x-f'(x)e^x$, $\quad(e^x+1)f'(x)=e^x$

$$\therefore f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

Q BOX

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$$
$=\ln|f(x)|+C$

정적분의 아래끝과 위끝이 모두 상수이면 정적분의 결과도 상수이다.

역함수의 미분법
미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때,
$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$
(단, $f'(g(x))\neq0$)

이때 $(e^x+1)'=e^x$이므로

$$f(x)=\int \frac{e^x}{e^x+1}dx=\int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx$$
$$=\ln(e^x+1)+C\ (\because e^x+1>0)$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=1$이므로

$\ln 2+C=1 \qquad \therefore C=1-\ln 2$

따라서 $f(x)=\ln(e^x+1)+1-\ln 2$이므로

$$f(\ln 3)=\ln 4+1-\ln 2$$
$$=1+\ln 2$$

답 $1+\ln 2$

16 $xf(x)=x^2\sin x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt$ ...... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2x\sin x+x^2\cos x+f(x)$

$xf'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$

따라서 $f'(x)=2\sin x+x\cos x$이므로

$$f(x)=\int(2\sin x+x\cos x)dx$$
$$=\int 2\sin x\,dx+\int x\cos x\,dx$$
$$=-2\cos x+x\sin x-\int\sin x\,dx$$
$$=-2\cos x+x\sin x+\cos x+C$$
$$=x\sin x-\cos x+C \quad \cdots\cdots ㉡$$

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$

㉠의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad \therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

㉡에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+C$이므로 $\qquad C=0$

따라서 $f(x)=x\sin x-\cos x$이므로

$f(\pi)=1$

답 1

17 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(x-t)f(t)dt=\cos x+ax+b$ ...... ㉠

에서

$x\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}tf(t)dt=\cos x+ax+b$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-\sin x+a$

$\therefore \int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt=-\sin x+a$ ...... ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-\cos x$

㉡의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$0=-1+a \qquad \therefore a=1$

㉠의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$0=\frac{\pi}{2}a+b \qquad \therefore b=-\frac{\pi}{2}a=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore f\left(\frac{b}{a}\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$

답 ③

18 $\int_0^x f(t)dt=ex+\int_0^x(x-t)f(t)dt$에서

$\int_0^x f(t)dt=ex+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e+\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=f(x)-e$ ...... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f'(x), \quad \frac{f'(x)}{f(x)}=1\ (\because f(x)>0)$

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 1\,dx, \quad \ln f(x)=x+C$

$\therefore f(x)=e^{x+C}$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=f(0)-e \qquad \therefore f(0)=e$

즉 $e^C=e$이므로 $\qquad C=1$

따라서 $f(x)=e^{x+1}$이므로 $\qquad f(4)=e^5$

답 e^5

19 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sqrt{x}(1-x)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=1\ (\because x>0)$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$$f(1)=\int_0^1\sqrt{t}(1-t)dt=\int_0^1\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{15}$$

즉 $a=1$, $b=\frac{4}{15}$이므로 $\qquad ab=\frac{4}{15}$

답 $\frac{4}{15}$

20 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(1+\cos x)\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\qquad \cos x=-1$ 또는 $\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi\ (\because -\pi<x<2\pi)$

x	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=\pi$에서 극대이므로

$M=f(\pi)=\int_0^{\pi}(1+\cos t)\sin t\,dt$

$(1+\cos t)\sin t$
$=\sin t+\sin t\cos t$
$=\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t$
임을 이용하여 M의 값을 구할 수도 있다.

$1+\cos t=s$로 놓으면 $\qquad \frac{ds}{dt}=-\sin t$

$t=0$일 때 $s=2$, $t=\pi$일 때 $s=0$이므로

$$M=\int_2^0 s\cdot(-1)ds=\int_0^2 s\,ds$$
$$=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^2=2$$

또 $m=f(0)=0$이므로

$M+m=2$

답 ②

21 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x+2+\frac{3}{x+2}-\left(x+\frac{3}{x}\right)$$

$$=2+\frac{3}{x+2}-\frac{3}{x}$$

$$=\frac{2x^2+4x-6}{x(x+2)}=\frac{2(x+3)(x-1)}{x(x+2)}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1\ (\because x>0)$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f(1)=\int_1^3\left(t+\frac{3}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+3\ln|t|\right]_1^3$$

$$=\left(\frac{9}{2}+3\ln 3\right)-\frac{1}{2}=4+3\ln 3$$

답 $4+3\ln 3$

22 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(3-e^x)(3+e^x)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^x=3\ (\because 3+e^x>0)$

$\therefore x=\ln 3$

x	$\cdots$	$\ln 3$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=\ln 3$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(\ln 3)=\int_0^{\ln 3}(3-e^t)(3+e^t)dt$$

$$=\int_0^{\ln 3}(9-e^{2t})dt$$

$$=\left[9t-\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln 3}$$

$$=\left(9\ln 3-\frac{9}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=9\ln 3-4$$

즉 $a=\ln 3$, $b=9\ln 3-4$이므로

$b-a=8\ln 3-4$

답 $8\ln 3-4$

23 $f(t)=t(2^t+\ln t)$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}t(2^t+\ln t)dt$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$$

답 ②

Q BOX

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+a}f(t)\,dt=f(x+a)-f(x)$$

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$ (단, $A\neq B$)

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$\sqrt{x}=s$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $s\to 1$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{s\to 1}\frac{F(s)-F(1)}{s-1}=F'(1)$$

첫째항이 1, 공비가 $\cos^2 x$인 등비급수

24 $f(t)=t\cos t+a$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}}(t\cos t+a)dt$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}}f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{F\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a}{3}$$

즉 $\frac{a}{3}=2$이므로 $\quad a=6$

답 6

중단원 마무리

112쪽

01 전략 부분분수를 이용하여 피적분함수를 변형한 후 정적분의 값을 구한다.

풀이
$$\int_1^4\frac{3}{x^2+5x+4}dx=\int_1^4\frac{3}{(x+1)(x+4)}dx$$

$$=\int_1^4\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)dx$$

$$=\Big[\ln|x+1|-\ln|x+4|\Big]_1^4$$

$$=(\ln 5-\ln 8)-(\ln 2-\ln 5)$$

$$=\ln\frac{25}{16}$$

따라서 $p=16$, $q=25$이므로

$p+q=41$

답 ⑤

02 전략 인수분해를 이용하여 피적분함수를 간단히 변형한 후 정적분의 값을 구한다.

풀이
$$\int_0^k\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx=\int_0^k\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$$

$$=\int_0^k(e^x-1)dx$$

$$=\Big[e^x-x\Big]_0^k$$

$$=e^k-k-1$$

즉 $e^k-k-1=e^5-6$이므로

$k=5$

답 5

03 전략 $|r|<1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}=\frac{1}{1-r}$임을 이용하여 $f(x)$를 간단히 나타낸 후 정적분의 값을 구한다.

풀이 $0<x\leq\frac{\pi}{2}$에서 $0\leq\cos^2 x<1$이므로

$$f(x)=1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\cos^2 x)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\cos^2 x}\quad\cdots\cdots ❶$$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\cos^2 x}dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x}dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2 x\,dx=\Big[-\cot x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{3}-(-\sqrt{3})$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$ ··· ❷

답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 간단히 나타낼 수 있다.	50 %
❷	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %

04 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

풀이 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sin x)=|\sin x|+k$

$|\sin x|+k=\begin{cases} \sin x+k & (0\le x\le \pi) \\ -\sin x+k & \left(\pi\le x\le \frac{3}{2}\pi\right)\end{cases}$이므로

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}(f\circ g)(x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}(|\sin x|+k)dx$$
$$=\int_0^{\pi}(\sin x+k)dx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(-\sin x+k)dx$$
$$=\Big[-\cos x+kx\Big]_0^{\pi}+\Big[\cos x+kx\Big]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$
$$=(1+k\pi)-(-1)+\frac{3}{2}k\pi-(-1+k\pi)$$
$$=\frac{3}{2}k\pi+3$$

즉 $\frac{3}{2}k\pi+3=4$이므로 $\frac{3}{2}k\pi=1$

$\therefore k=\frac{2}{3\pi}$

답 $\frac{2}{3\pi}$

05 전략 $f(-x)$와 $f(x)$의 관계를 확인하여 $f(x)$가 우함수인지 기함수인지 확인한다.

풀이 $f(x)=\cos(\sin x)$에서

$f(-x)=\cos\{\sin(-x)\}=\cos(-\sin x)$
$=\cos(\sin x)=f(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-3}^{1} f(x)dx=\int_{-3}^{0} f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=a+b$$

답 $a+b$

06 전략 $3x+1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $3x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$

$x=-1$일 때 $t=-2$, $x=1$일 때 $t=4$이므로

QBOX

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}x\right)=\cos\frac{\pi}{6}x$이므로 $\cos\frac{\pi}{6}x$는 우함수이다.

$f(x)$가 우함수
➡ $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭
➡ $\int_{-a}^{0} f(x)dx$
$=\int_0^a f(x)dx$

$$\int_{-1}^{1} f(3x+1)dx=\int_{-2}^{4} f(t)\cdot\frac{1}{3}dt$$
$$=\frac{1}{3}\int_{-2}^{4} f(x)dx=\frac{k}{3}$$

답 ②

07 전략 $\int_{-2}^{2}\{f(x)+f(-x)\}dx=\int_{-2}^{2}\cos\frac{\pi}{6}x\,dx$임을 이용한다.

풀이 $\int_{-2}^{2}\{f(x)+f(-x)\}dx$

$$=\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{-2}^{2} f(-x)dx$$

$\int_{-2}^{2} f(-x)dx$에서 $-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

$x=-2$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=-2$이므로

$$\int_{-2}^{2} f(-x)dx=\int_{2}^{-2} f(t)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_{-2}^{2} f(t)dt=\int_{-2}^{2} f(x)dx$$
$$\therefore \int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{-2}^{2} f(-x)dx$$
$$=\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{-2}^{2} f(x)dx$$
$$=2\int_{-2}^{2} f(x)dx=\frac{2k}{\pi}$$

한편

$$\int_{-2}^{2}\cos\frac{\pi}{6}x\,dx=2\int_0^2\cos\frac{\pi}{6}x\,dx$$
$$=2\Big[\frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi}{6}x\Big]_0^2$$
$$=2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\pi}=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$$

이므로 $\frac{2k}{\pi}=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$

$k=3\sqrt{3}$ $\quad\therefore k^2=27$

답 27

08 전략 치환적분법을 이용하여 좌변과 우변의 정적분의 값을 각각 구한다.

풀이 $\int_{e^2}^{e^3}\frac{a+\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=e^2$일 때 $t=2$, $x=e^3$일 때 $t=3$이므로

$$\int_{e^2}^{e^3}\frac{a+\ln x}{x}dx=\int_2^3(a+t)dt=\Big[at+\frac{1}{2}t^2\Big]_2^3$$
$$=\left(3a+\frac{9}{2}\right)-(2a+2)=a+\frac{5}{2}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x\,dx$에서 $\sin x=s$로 놓으면

$\frac{ds}{dx}=\cos x$

$x=0$일 때 $s=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $s=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x\,dx=\int_0^1(1+s)ds$$
$$=\Big[s+\frac{1}{2}s^2\Big]_0^1=\frac{3}{2}$$

L 09 정적분

따라서 $a+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$이므로

$a=-1$ 답 ②

09 전략 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 $f(n)$을 구한다.

풀이 $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

$x=1$일 때 $t=1$, $x=n$일 때 $t=n^2$이므로

$$f(n)=\int_1^n x^3e^{x^2}dx=\int_1^{n^2} te^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_1^{n^2} te^t dt$$

$u(t)=t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=e^t$

$$\therefore \frac{1}{2}\int_1^{n^2} te^t dt=\frac{1}{2}\left(\left[te^t\right]_1^{n^2}-\int_1^{n^2} e^t dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(n^2e^{n^2}-e-\left[e^t\right]_1^{n^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(n^2e^{n^2}-e-e^{n^2}+e)$$
$$=\frac{e^{n^2}}{2}(n^2-1)$$

$$\therefore \frac{f(5)}{f(3)}=\frac{\frac{e^{25}}{2}\cdot 24}{\frac{e^9}{2}\cdot 8}=3e^{16}$$ 답 ③

10 전략 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$\frac{1}{g'(x)}=f'(g(x))$ (단, $g'(x)\neq 0$)

$$\therefore \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{g'(x)}dx=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f'(g(x))dx$$

$g(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=g'(x)$

$x=0$일 때 $t=g(0)$, 즉 $f(t)=0$이므로

$\sin t=0$ $\quad\therefore t=0\ \left(\because -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $t=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 즉 $f(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\therefore t=\frac{\pi}{4}\ \left(\because -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f'(g(x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(t)\cdot\frac{1}{g'(x)}dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{f'(t)\}^2dt$$

$f(x)=\sin x$에서 $f'(x)=\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{f'(t)\}^2dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$ 답 $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

다른 풀이 $f(g(x))=x$이므로 $\sin g(x)=x$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\cos g(x)\cdot g'(x)=1$ $\quad\therefore \frac{1}{g'(x)}=\cos g(x)$

$$\therefore \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{g'(x)}dx=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cos g(x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-\sin^2 g(x)}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

11 전략 $\int_1^e f'(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓고 k의 값을 구한다.

풀이 $\int_1^e f'(t)dt=k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

로 놓으면

$f(x)=\ln x+k$ $\quad\therefore f'(x)=\frac{1}{x}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_1^e\frac{1}{t}dt=k,\quad \left[\ln|t|\right]_1^e=k$

$\therefore k=1$

따라서 $f(x)=\ln x+1$이므로

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e(\ln x+1)dx$$

$u(x)=\ln x+1$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$$\therefore \int_1^e(\ln x+1)dx=\left[x(\ln x+1)\right]_1^e-\int_1^e 1\,dx$$
$$=2e-1-\left[x\right]_1^e$$
$$=2e-1-(e-1)$$
$$=e$$ 답 ②

12 전략 주어진 등식의 양변에 $t=1$을 대입하여 a의 값을 구한 후 주어진 등식의 양변을 t에 대하여 미분한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $t=1$을 대입하면

$0=a^2-a,\quad a(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because a\neq 0)$

$\int_0^{\ln t}f(x)dx=(t\ln t+1)^2-1$이므로 양변을 t에 대하여 미분하면

$f(\ln t)\cdot\frac{1}{t}=2(t\ln t+1)(\ln t+1)$

$\therefore f(\ln t)=2t(t\ln t+1)(\ln t+1)$

따라서 $\ln t=1$에서 $t=e$이므로

$f(1)=2e(e+1)\cdot 2=4e^2+4e$ 답 ③

Q BOX

$0\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$에서

$0\le g(x)\le\frac{\pi}{4}$

이므로

$\cos g(x)>0$

$\therefore \cos g(x)$

$=\sqrt{1-\sin^2 g(x)}$

$f(g(x))=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

$\therefore \frac{1}{g'(x)}=f'(g(x))$

(단, $g'(x)\neq 0$)

$\frac{1}{g'(x)}=f'(g(x))$

$=f'(t)$

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\int_0^{\ln t}f(x)dx$

$=F(\ln t)-F(0)$

이므로

$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{\ln t}f(x)dx\right\}$

$=\frac{d}{dt}\{F(\ln t)-F(0)\}$

$=F'(\ln t)\cdot\frac{1}{t}$

$=f(\ln t)\cdot\frac{1}{t}$

13 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 후 $f'(x)=0$인 x의 값을 찾아 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1} \quad \cdots ❶$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{1}{2}$ $\quad\cdots ❷$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이므로 극솟값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1}dt$$
$$=\left[\ln(t^2-t+1)\right]_0^{\frac{1}{2}} \quad (\because t^2-t+1>0)$$
$$=\ln\frac{3}{4} \quad \cdots ❸$$

답 $\ln\frac{3}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷	$f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	10 %
❸	$f(x)$의 극솟값을 구할 수 있다.	60 %

14 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 후 $f(x)$의 증감표를 만들어 최댓값을 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{n-\ln x}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad n-\ln x=0$

$\ln x=n \quad \therefore x=e^n$

x	0	$\cdots$	e^n	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=e^n$에서 극대이면서 최대이므로

$$g(n)=f(e^n)=\int_1^{e^n}\frac{n-\ln t}{t}dt$$

$n-\ln t=s$로 놓으면 $\quad \frac{ds}{dt}=-\frac{1}{t}$

$t=1$일 때 $s=n$, $t=e^n$일 때 $s=0$이므로

$$\int_1^{e^n}\frac{n-\ln t}{t}dt=\int_n^0 s\cdot(-1)ds$$
$$=\int_0^n s\,ds=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^n=\frac{1}{2}n^2$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{12}g(n)=\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{2}n^2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{12}n^2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{12\cdot13\cdot25}{6}$$
$$=325$$

답 325

Q BOX

$f(1)=\sqrt{3+1}-1$
$=2-1$
$=1$

㉠에서 $\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$을 소거하기 위해 같은 항이 나오도록 양변을 $2x^2$으로 나눈다.

15 전략 $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(t)=\sqrt{3^t+1}-t^4$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^x(\sqrt{3^t+1}-t^4)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{1}{3}F'(1)=\frac{1}{3}f(1)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{3}$$

답 ③

16 전략 주어진 등식에 x 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 x 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+x^2f(x)=x+x^2$$

양변을 $2x^2$으로 나누면

$$\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2} \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면

$$\frac{3}{2}f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}$$
$$\therefore f(x)=\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}$$
$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-1\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}\left[\ln|x|-\frac{2}{x}-x\right]_{\frac{1}{2}}^2$$
$$=\frac{1}{3}\left\{(\ln2-3)-\left(\ln\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{2\ln2}{3}+\frac{1}{2}$$

답 ②

참고 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여 주어진 등식을 만족시키므로 주어진 등식에 x 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면 $f(x)$와 $f\left(\frac{1}{x}\right)$에 대한 또 다른 등식을 얻을 수 있다.

다른 풀이1 ㉠에서

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{2x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x|-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^2-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\ln2+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx \quad\cdots\cdots ㉢$$

$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)dx$에서 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}$$

$x=\frac{1}{2}$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_{2}^{\frac{1}{2}} f(t)\cdot(-1)\,dt$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(t)dt$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉣을 ㉢에 대입하면

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx=\ln 2+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$$
$$\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx=\ln 2+\frac{3}{4}$$
$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx=\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$$

다른 풀이2 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\left\{2F(x)-F\left(\frac{1}{x}\right)\right\}'=2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$$

이므로 ㉠의 양변을 적분하면

$$2F(x)-F\left(\frac{1}{x}\right)=\ln|x|-\frac{1}{x}+C$$

$x=2$를 양변에 대입하면

$$2F(2)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}+C \quad \cdots\cdots ㉤$$

또 $x=\frac{1}{2}$을 양변에 대입하면

$$2F\left(\frac{1}{2}\right)-F(2)=\ln\frac{1}{2}-2+C \quad \cdots\cdots ㉥$$

㉤−㉥을 하면

$$3F(2)-3F\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln 2+\frac{3}{2}$$
$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_{\frac{1}{2}}^{2}=F(2)-F\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$$

17 전략 조건 (나)의 등식을 피적분함수에 변수 x가 포함되지 않도록 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 ㄱ. 조건 (나)의 등식에서

$$\ln f(x)+2x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt=0$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt+2xf(x)-2xf(x)$$
$$=0$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0$$
$$\therefore f'(x)=-2f(x)\int_0^x f(t)dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)에서 $f(x)>0$이므로 $x>0$에서

$$\int_0^x f(t)dt>0$$

따라서 $x>0$에서 $f'(x)<0$이므로 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. ㉠에서

$$f'(x)=2f(x)\int_x^0 f(t)dt$$

조건 (가)에서 $f(x)>0$이므로 $x<0$에서

$$\int_x^0 f(t)dt>0$$

따라서 $x<0$에서 $f'(x)>0$이므로 $x<0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉 함수 $f(x)$는 $x<0$에서 증가하고 $x>0$에서 감소하므로 $x=0$에서 최댓값 $f(0)$을 갖는다.

조건 (나)의 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$\ln f(0)=0$$
$$\therefore f(0)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

ㄷ. $F(x)=\int_0^x f(t)dt \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x) \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣을 ㉠에 대입하면

$$f'(x)=-2F'(x)F(x)=[-\{F(x)\}^2]'$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=-\{F(x)\}^2+C$$

이때 ㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면 $F(0)=0$이므로

$$f(0)=C \qquad \therefore C=1\ (\because ㉡)$$

따라서 $f(x)=-\{F(x)\}^2+1$이므로

$$f(x)+\{F(x)\}^2=1$$
$$\therefore f(1)+\{F(1)\}^2=1$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

쌤한마디

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 $f(x)>0$이므로 정적분 $\int_0^x f(t)dt$는 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=0$, $t=x$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.
따라서 $x>0$일 때 $\int_0^x f(t)dt>0$, $x<0$일 때 $\int_x^0 f(t)dt>0$이 성립한다.

Q BOX

$$\left\{-F\left(\frac{1}{x}\right)\right\}'$$
$$=-F'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$=-f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$$

모든 실수 x에 대하여 성립하는 등식이다.

114~117쪽

10 정적분의 활용

Lecture 21 정적분과 급수

116쪽

01 답 (가) $\frac{1}{n}$　(나) $\frac{k}{n}$　(다) x^3　(라) $\frac{1}{4}$

Q BOX

$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

02 $f(x)=x^5$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

$= \int_0^1 x^5 dx = \left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1$

$= \frac{1}{6}$　답 $\frac{1}{6}$

03 $f(x)=x$, $a=1$, $b=4$로 놓으면

$\Delta x = \frac{3}{n}$, $x_k = 1+\frac{3k}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

$= \int_1^4 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^4$

$= 8 - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$　답 $\frac{15}{2}$

다른 풀이 $f(x)=1+x$, $a=0$, $b=3$으로 놓으면

$\Delta x = \frac{3}{n}$, $x_k = \frac{3k}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

$= \int_0^3 (1+x)dx$

$= \left[x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{15}{2}$

무엇을 적분변수로 정하느냐에 따라 여러 가지 정적분으로 나타낼 수 있으나 그 값은 모두 같다.

04 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\{\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{4}{n}\right)^2+\left(\frac{6}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^2\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n}$

$f(x)=x^2$, $a=0$, $b=2$로 놓으면

$\Delta x = \frac{2}{n}$, $x_k = \frac{2k}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

$= \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$= \frac{8}{3}$　답 $\frac{8}{3}$

05 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$

$f(x)=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$로 놓으면

$\Delta x = \frac{\pi}{n}$, $x_k = \frac{k\pi}{n}$

$\therefore \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi}$

$= \frac{2}{\pi}$　답 $\frac{2}{\pi}$

표준+발전 유형 Q+Q

117쪽

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}$의 값을 구할 때에는 ( ) 안의 k의 계수인 $\frac{p}{n}$가 ( ) 밖에 곱해져 있도록 식을 변형한 후 정적분과 급수의 관계를 이용한다.

01 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$

$= \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$

$= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{\ln x}{x}dx$

$\ln x = t$로 놓으면　$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=3$일 때 $t=\ln 3$이므로

$\frac{1}{2}\int_1^3\frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ln 3} t\,dt$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\ln 3} = \frac{(\ln 3)^2}{4}$　답 ②

02 (주어진 식) $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$

$= \int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}dx$

$= \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = 2\sqrt{2}-2$　답 $2\sqrt{2}-2$

모두 직각이등변삼각형이다.

03 $\overline{AC}=\overline{BC}=1$이고 $\triangle AB_1C_1$, $\triangle AB_2C_2$, $\triangle AB_3C_3$, $\cdots$, $\triangle AB_kC_k$, $\cdots$는 모두 닮은 도형이므로

$\overline{B_1C_1} = \frac{1}{n}$, $\overline{B_2C_2} = \frac{2}{n}$, $\overline{B_3C_3} = \frac{3}{n}$, $\cdots$,

$\overline{B_kC_k} = \frac{k}{n}$, $\cdots$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^3 = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3$

$= 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$

$= 2\int_0^1 x^3 dx = 2\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}$　답 $\frac{1}{2}$

$\angle AMP_k$는 호 AP_k의 중심각이다.

두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이
➡ $\frac{1}{2}ab\sin\theta$

04 $\angle AMP_k = \frac{k\pi}{n}$이므로

$S(k) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin\frac{k\pi}{n} = 2\sin\frac{k\pi}{n}$

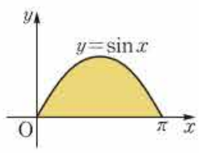
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\frac{4}{\pi}$$

답 ③

Lecture 22 넓이와 부피

118쪽

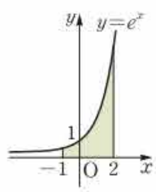
01 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=1-(-1)=2$$

답 2

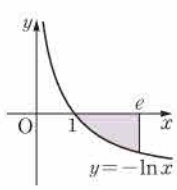
02 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{2}e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_{-1}^{2}=e^2-\frac{1}{e}$$

답 $e^2-\frac{1}{e}$

03 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



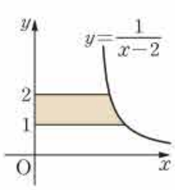
$$\int_1^e|-\ln x|\,dx$$
$$=\int_1^e\ln x\,dx$$
$$=\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e 1\,dx=e-\Big[x\Big]_1^e$$
$$=e-(e-1)=1$$

답 1

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

04 $y=\frac{1}{x-2}$에서 $\quad\frac{1}{y}=x-2$



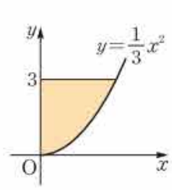
$\therefore x=2+\frac{1}{y}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_1^2\left(2+\frac{1}{y}\right)dy=\Big[2y+\ln|y|\Big]_1^2$$
$$=(4+\ln 2)-2$$
$$=2+\ln 2$$

답 $2+\ln 2$

05 $y=\frac{1}{3}x^2$에서 $\quad x^2=3y$



$\therefore x=\sqrt{3y}$ ($\because x\geq 0$)

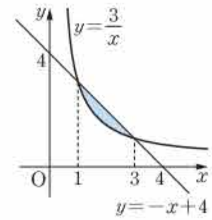
따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^3\sqrt{3y}\,dy=\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=6$$

답 6

$\int_0^3\sqrt{3y}\,dy$
$=\int_0^3\sqrt{3}\cdot y^{\frac{1}{2}}\,dy$
$=\left[\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$

06 곡선 $y=\frac{3}{x}$과 직선 $y=-x+4$의 교점의 x좌표는



$\frac{3}{x}=-x+4$에서

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

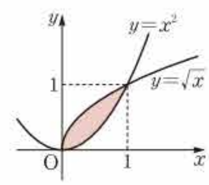
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_1^3\left(-x+4-\frac{3}{x}\right)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+4x-3\ln|x|\right]_1^3$$
$$=\left(\frac{15}{2}-3\ln 3\right)-\frac{7}{2}$$
$$=4-3\ln 3$$

답 $4-3\ln 3$

07 두 곡선 $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$의 교점의 x좌표는 $x^2=\sqrt{x}$에서



$x^4=x,\qquad x(x^3-1)=0$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$(\because x^2+x+1>0)$

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

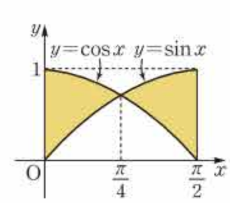
$$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

08 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 x좌표는 $\sin x=\cos x$에서

$$x=\frac{\pi}{4}\left(\because 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)$$
$$=2\sqrt{2}-2$$

답 $2\sqrt{2}-2$

09 단면의 넓이가 $\sqrt{x+3}$이므로 구하는 부피는

$$\int_1^6\sqrt{x+3}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_1^6$$
$$=18-\frac{16}{3}=\frac{38}{3}$$

답 $\frac{38}{3}$

표준+발전 유형 Q+Q

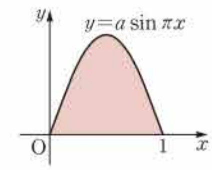
119쪽

01 $-1\le x\le 0$에서 $xe^x\le 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}(-xe^x)dx=\Big[-xe^x\Big]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}e^x\,dx$$
$$=-\frac{1}{e}+\Big[e^x\Big]_{-1}^{0}=-\frac{1}{e}+\left(1-\frac{1}{e}\right)$$
$$=1-\frac{2}{e}$$

답 ①

02 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

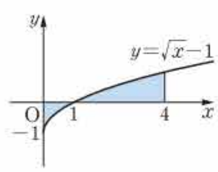


$$\int_0^1 a\sin\pi x\,dx$$
$$=\left[-\frac{a}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1$$
$$=\frac{a}{\pi}-\left(-\frac{a}{\pi}\right)$$
$$=\frac{2a}{\pi}$$

따라서 $\dfrac{2a}{\pi}=1$이므로　　$a=\dfrac{\pi}{2}$

답 $\dfrac{\pi}{2}$

03 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



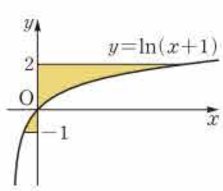
$$\int_0^1(-\sqrt{x}+1)dx$$
$$+\int_1^4(\sqrt{x}-1)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_1^4$$
$$=\frac{1}{3}+\left\{\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=2$$

답 2

04 $y=\ln(x+1)$에서

$x+1=e^y$

$\therefore\ x=e^y-1$



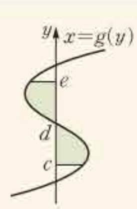
따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}(-e^y+1)dy+\int_0^2(e^y-1)dy$$
$$=\Big[-e^y+y\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^y-y\Big]_0^2$$
$$=\left\{-1-\left(-\frac{1}{e}-1\right)\right\}+(e^2-2-1)$$
$$=e^2+\frac{1}{e}-3$$

답 $e^2+\dfrac{1}{e}-3$

쌤한마디

곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=e$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 때, 오른쪽 그림과 같이 $g(y)$의 값이 양수인 경우와 음수인 경우가 모두 있을 때에는 $g(y)\ge 0$인 구간과 $g(y)\le 0$인 구간으로 나누어 각 부분의 넓이의 합을 구한다.



➡ $\displaystyle\int_c^d g(y)dy+\int_d^e\{-g(y)\}dy$

Q BOX

$f(x)=-x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면
$f'(x)=-1$,
$g(x)=e^x$

$0\le x\le 2\pi$에서
$\cos x\le 1$
$\therefore\ x\cos x\le x$

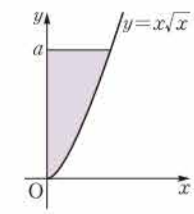
$f(x)=x$,
$g'(x)=\cos x$로 놓으면
$f'(x)=1$,
$g(x)=\sin x$

$y=\sqrt{2x-3}=(2x-3)^{\frac{1}{2}}$이므로
$y'=\dfrac{1}{2}(2x-3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2$
$=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

직선 $y=\dfrac{1}{3}x+1$과 x축 및 직선 $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 밑변의 길이가 $6-(-3)=9$, 높이가 3인 직각삼각형의 넓이와 같음을 이용하여 $\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 3=\dfrac{27}{2}$과 같이 구할 수도 있다.

05 $y=x\sqrt{x}$, 즉 $y=x^{\frac{3}{2}}$에서

$x=y^{\frac{2}{3}}$



따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^a y^{\frac{2}{3}}dy=\left[\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\right]_0^a=\frac{3}{5}a^{\frac{5}{3}}$$

즉 $\dfrac{3}{5}a^{\frac{5}{3}}=\dfrac{96}{5}$이므로　　$a^{\frac{5}{3}}=32$

$\therefore\ a=32^{\frac{3}{5}}=(2^5)^{\frac{3}{5}}=2^3=8$

답 ③

06 곡선 $y=x\cos x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x\cos x=x$에서

$x(\cos x-1)=0$,　　$x=0$ 또는 $\cos x=1$

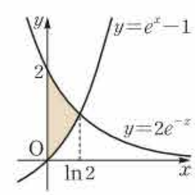
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2\pi$ ($\because\ 0\le x\le 2\pi$)

$0\le x\le 2\pi$에서 $x\ge x\cos x$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{2\pi}(x-x\cos x)dx$$
$$=\int_0^{2\pi}x\,dx-\int_0^{2\pi}x\cos x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2\pi}-\left(\Big[x\sin x\Big]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin x\,dx\right)$$
$$=2\pi^2+\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}=2\pi^2$$

답 ④

07 두 곡선 $y=e^x-1$, $y=2e^{-x}$의 교점의 x좌표는 $e^x-1=2e^{-x}$에서



$e^{2x}-e^x-2=0$

$(e^x+1)(e^x-2)=0$

$e^x=2$ ($\because\ e^x>0$)

$\therefore\ x=\ln 2$

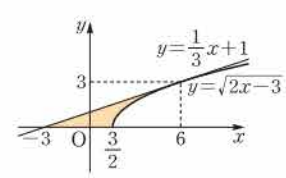
따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\ln 2}\{2e^{-x}-(e^x-1)\}dx=\Big[-2e^{-x}-e^x+x\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=-3+\ln 2-(-3)$$
$$=\ln 2$$

답 $\ln 2$

08 $y=\sqrt{2x-3}$에서

$y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$



이므로 곡선 위의 점 $(6,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{\sqrt{12-3}}=\dfrac{1}{3}$이고 접선의 방정식은

$y-3=\dfrac{1}{3}(x-6)$　　$\therefore\ y=\dfrac{1}{3}x+1$

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^{6}\left(\frac{1}{3}x+1\right)dx-\int_{\frac{3}{2}}^{6}\sqrt{2x-3}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^2+x\right]_{-3}^{6}-\left[\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{3}{2}}^{6}$$
$$=\left\{12-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}-9=\frac{9}{2}$$

답 ②

09 $y=\ln x$에서 $y'=\dfrac{1}{x}$이므로 곡선 위의 점 $(t,\ \ln t)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{t}$이고 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

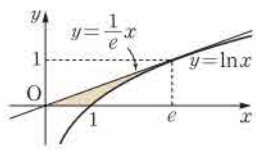
직선 ㉠이 원점을 지나므로

$$-\ln t=-1 \qquad \therefore\ t=e$$

$t=e$를 ㉠에 대입하면

$$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{e}x$$



따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^e \frac{1}{e}x\,dx-\int_1^e \ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^e-\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1\,dx\right)$$

$$=\frac{e}{2}-\left(e-\left[x\right]_1^e\right)$$

$$=\frac{e}{2}-(e-e+1)=\frac{e}{2}-1$$

답 $\dfrac{e}{2}-1$

10 $\displaystyle\int_0^1\{e^x-(-x+a)\}dx=0$이므로

$$\int_0^1(e^x+x-a)dx=0$$

$$\left[e^x+\frac{1}{2}x^2-ax\right]_0^1=0$$

$$e+\frac{1}{2}-a-1=0 \qquad \therefore\ a=e-\frac{1}{2}$$

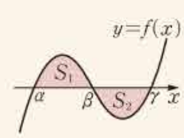
답 $e-\dfrac{1}{2}$

쌤한마디

두 도형의 넓이가 같을 조건

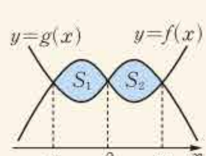
① 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx=0$$



② 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

$$\int_\alpha^\gamma\{f(x)-g(x)\}dx=0$$



11 $\displaystyle\int_a^e \frac{\ln x}{x}dx=0$에서 $\ln x=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$$

$x=a$일 때 $t=\ln a$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\ln a}^1 t\,dt=0, \qquad \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\ln a}^1=0$$

$$\frac{1}{2}\{1-(\ln a)^2\}=0, \qquad (\ln a)^2=1$$

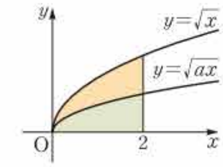
$$\ln a=-1\ (\because\ 0<a<1)$$

0<a<1이므로 $\ln a<0$

$$\therefore\ a=\frac{1}{e}$$

답 ②

12 오른쪽 그림에서 곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_0^2\sqrt{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

곡선 $y=\sqrt{ax}$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^2\sqrt{ax}\,dx=\left[\frac{2}{3a}(ax)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{4\sqrt{2a}}{3}$$

이때 $S_2=\dfrac{1}{2}S_1$이므로

$$\frac{4\sqrt{2a}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}, \qquad \sqrt{a}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{4}$$

답 $\dfrac{1}{4}$

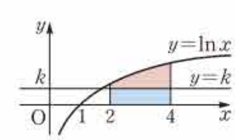
다른 풀이 $S_1=\displaystyle\int_0^2\sqrt{x}\,dx$이므로

$$S_2=\int_0^2\sqrt{ax}\,dx=\sqrt{a}\int_0^2\sqrt{x}\,dx=\sqrt{a}\,S_1$$

이때 $S_2=\dfrac{1}{2}S_1$이므로

$$\sqrt{a}=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ a=\frac{1}{4}$$

13 오른쪽 그림에서 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_2^4\ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_2^4-\int_2^4 1\,dx$$

$$=4\ln 4-2\ln 2-\left[x\right]_2^4=6\ln 2-2$$

$4\ln 4-2\ln 2$
$=8\ln 2-2\ln 2$
$=6\ln 2$

직선 $y=k$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

직사각형이다.

$$S_2=(4-2)k=2k$$

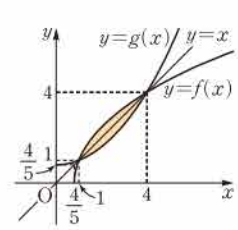
이때 $S_2=\dfrac{1}{2}S_1$이므로 $\qquad 2k=3\ln 2-1$

$$\therefore\ k=\frac{3\ln 2-1}{2}$$

답 $\dfrac{3\ln 2-1}{2}$

14 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉 $\sqrt{5x-4}=x$에서 $\qquad 5x-4=x^2$

$x^2-5x+4=0,\quad (x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_1^4 (\sqrt{5x-4}-x)dx$$

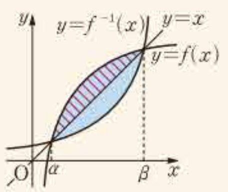
$$=2\Big[\frac{2}{15}(5x-4)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\Big]_1^4$$

$$=2\Big\{\frac{8}{15}-\Big(-\frac{11}{30}\Big)\Big\}=\frac{9}{5}$$

답 $\frac{9}{5}$

쌤한마디

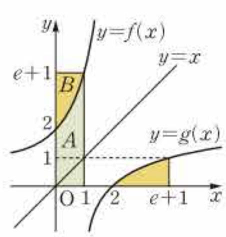
함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 α, β일 때, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는



$$S=\int_\alpha^\beta |f(x)-f^{-1}(x)|dx$$

$$=2\int_\alpha^\beta |f(x)-x|dx$$

15 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=e+1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 B라 하면



$$\int_0^1 f(x)dx+\int_2^{e+1} g(x)dx=A+B$$

$$=1\cdot(e+1)$$

$$=e+1$$

답 ②

$\int_2^{e+1} g(x)dx$는 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=e+1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 의미하고, 이 넓이는 B와 같다.

16 구하는 부피는

$$\int_0^4 (\sqrt{2x+1}+1)dx=\Big[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+x\Big]_0^4$$

$$=13-\frac{1}{3}=\frac{38}{3}$$

답 ③

17 수면의 넓이가 $\frac{5}{2}$일 때의 물의 깊이는

$3-\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{5}{2}$에서 $\quad\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{2}x=\frac{\pi}{3}$ ($\because$ $0\le x\le 2$) $\quad\therefore x=\frac{2}{3}$

$0\le x\le 2$에서 $0\le\frac{\pi}{2}x\le\pi$

따라서 구하는 물의 부피는

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\Big(3-\cos\frac{\pi}{2}x\Big)dx=\Big[3x-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\Big]_0^{\frac{2}{3}}$$

$$=2-\frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

답 $2-\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

18 점 $(x,\ 0)\Big(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3}{4}\pi\Big)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\{\sqrt{2\sin x}-(-\sqrt{2\sin x})\}^2$$

$$=(2\sqrt{2\sin x})^2=8\sin x$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} S(x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} 8\sin x\,dx$$

$$=\Big[-8\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$=4\sqrt{2}-(-4\sqrt{2})$$

$$=8\sqrt{2}$$

답 $8\sqrt{2}$

19 점 P의 x좌표를 x $(0\le x\le 2)$라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=2^x$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}$를 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\cdot 2^x$$

이때 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\Big(\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}\Big)^2=\frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{2}\cdot 2^x\Big)^2=\frac{\pi}{8}\cdot 4^x$$

따라서 반원이 만드는 입체도형의 부피는

$$\int_0^2 S(x)\,dx=\int_0^2\frac{\pi}{8}\cdot 4^x dx=\frac{\pi}{8}\Big[\frac{4^x}{\ln 4}\Big]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{15}{\ln 4}=\frac{15}{16\ln 2}\pi$$

$$\therefore k=\frac{15}{16}$$

답 $\frac{15}{16}$

Lecture 23 속도와 거리

122쪽

01 $t=0$에서의 위치가 0이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

답 1

02 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi}\sin t\,dt=\Big[-\cos t\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi}$

$$=-1-\Big(-\frac{1}{2}\Big)=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

03 $\int_0^\pi |\sin t|dt=\int_0^\pi \sin t\,dt=\Big[-\cos t\Big]_0^\pi$

$$=1-(-1)=2$$

답 2

04 $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{3}t$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^1\sqrt{(2t)^2+(2\sqrt{3}t)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{16t^2}\,dt$$

$$=\int_0^1 4t\,dt$$

$$=\Big[2t^2\Big]_0^1=2$$

답 2

05 $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=t^2-1$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^1\sqrt{(2t)^2+(t^2-1)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{t^4+2t^2+1}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{(t^2+1)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1(t^2+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

06 $\frac{dx}{dt}=3\cos t$, $\frac{dy}{dt}=3\sin t$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^1\sqrt{9\cos^2 t+9\sin^2 t}\,dt=\int_0^1 3\,dt$$
$$=\Big[3t\Big]_0^1=3$$

답 3

07 $\frac{dx}{dt}=2\sqrt{6}t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-2$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^3\sqrt{(2\sqrt{6}t)^2+(3t^2-2)^2}\,dt$$
$$=\int_1^3\sqrt{9t^4+12t^2+4}\,dt=\int_1^3\sqrt{(3t^2+2)^2}\,dt$$
$$=\int_1^3(3t^2+2)dt=\Big[t^3+2t\Big]_1^3$$
$$=33-3=30$$

답 30

08 $\frac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\,dt=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$=4-(-4)=8$$

답 8

09 $y'=x^2-\frac{1}{4x^2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^2\sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^2\sqrt{x^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^4}}\,dx$$
$$=\int_1^2\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4x}\right]_1^2$$
$$=\frac{61}{24}-\frac{1}{12}=\frac{59}{24}$$

답 $\frac{59}{24}$

QBOX

$f(t)=1-t$, $g'(t)=e^t$으로 놓으면
$f'(t)=-1$, $g(t)=e^t$

$\sqrt{9\cos^2 t+9\sin^2 t}$
$=\sqrt{9(\cos^2 t+\sin^2 t)}$
$=\sqrt{9}=3$

$(\cos t-\sqrt{3}\sin t)^2$
$+(-\sin t-\sqrt{3}\cos t)^2$
$=\cos^2 t+3\sin^2 t$
$-2\sqrt{3}\cos t\sin t$
$+\sin^2 t+3\cos^2 t$
$+2\sqrt{3}\cos t\sin t$
$=4(\cos^2 t+\sin^2 t)$

$\cos t=1-2\sin^2\frac{t}{2}$에서
$1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$
$\therefore 2-2\cos t$
$=4\sin^2\frac{t}{2}$

$y=\frac{4}{3}t\sqrt{t}=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}$이므로
$\frac{dy}{dt}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}$
$=2\sqrt{t}$

표준+발전 유형 Q+Q

123쪽

01 $\int_0^2|(t-1)e^t|dt$

$$=\int_0^1(1-t)e^t\,dt+\int_1^2(t-1)e^t\,dt$$
$$=\Big[(1-t)e^t\Big]_0^1+\int_0^1 e^t\,dt+\Big[(t-1)e^t\Big]_1^2-\int_1^2 e^t\,dt$$
$$=-1+\Big[e^t\Big]_0^1+e^2-\Big[e^t\Big]_1^2$$
$$=-1+e-1+e^2-(e^2-e)$$
$$=2e-2$$

답 $2e-2$

02 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $\quad\cos\frac{\pi}{2}t=0$

$\frac{\pi}{2}t=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \cdots$

$\therefore t=1,\ 3,\ 5,\ \cdots$

즉 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $\quad t=3$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^3\left|\cos\frac{\pi}{2}t\right|dt$$
$$=\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}t\,dt+\int_1^3\left(-\cos\frac{\pi}{2}t\right)dt$$
$$=\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t\right]_0^1+\left[-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t\right]_1^3$$
$$=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}=\frac{6}{\pi}$$

답 $\frac{6}{\pi}$

03 $\frac{dx}{dt}=\cos t-\sqrt{3}\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t-\sqrt{3}\cos t$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^\pi\sqrt{(\cos t-\sqrt{3}\sin t)^2+(-\sin t-\sqrt{3}\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{4(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$
$$=\int_0^\pi 2\,dt=\Big[2t\Big]_0^\pi=2\pi$$

답 ④

04 $\frac{dx}{dt}=t-1$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{t}$이므로 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^a\sqrt{(t-1)^2+(2\sqrt{t})^2}\,dt=\int_0^a\sqrt{t^2+2t+1}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{(t+1)^2}\,dt$$
$$=\int_0^a(t+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2}a^2+a$$

따라서 $\frac{1}{2}a^2+a=12$이어야 하므로

$a^2+2a-24=0,\qquad(a+6)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

답 4

05 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)}\,dt=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(e-\frac{1}{e}\right)-\left(\frac{1}{e}-e\right)\right\}$$
$$=e-\frac{1}{e}$$

답 $e-\frac{1}{e}$

06 $y'=e^x-\frac{1}{4}e^{-x}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(e^x-\frac{1}{4}e^{-x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^{2x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}e^{-2x}}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(e^x+\frac{1}{4}e^{-x}\right)^2}\,dx=\int_0^{\ln 2}\left(e^x+\frac{1}{4}e^{-x}\right)dx$$
$$=\left[e^x-\frac{1}{4}e^{-x}\right]_0^{\ln 2}=\frac{15}{8}-\frac{3}{4}=\frac{9}{8}$$

답 ②

중단원 마무리

124쪽

01 전략 정적분과 급수의 관계를 이용한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4n}{4n+k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{4+\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$

$$=\int_4^5\frac{2}{\sqrt{x}}dx$$
$$=\int_4^5 2x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$=\left[4x^{\frac{1}{2}}\right]_4^5$$
$$=4\sqrt{5}-8$$

답 $4\sqrt{5}-8$

02 전략 직각삼각형 OQ_kB에서 $\overline{OQ_k}$와 $\overline{BQ_k}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타내어 S_k를 구한다.

풀이 $\angle OBQ_k=\angle AOP_k=\frac{k\pi}{2n}$이고 $\overline{OB}=8$이므로 직각삼각형 OQ_kB에서

$$\overline{OQ_k}=8\sin\frac{k\pi}{2n},\ \overline{BQ_k}=8\cos\frac{k\pi}{2n}$$

따라서

$$S_k=\frac{1}{2}\cdot\overline{OQ_k}\cdot\overline{BQ_k}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 8\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot 8\cos\frac{k\pi}{2n}$$
$$=16\sin\frac{k\pi}{n}$$

QBOX

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$
(단, $A\neq B$)

$$\angle OBQ_k=\frac{\pi}{2}-\angle BOQ_k=\angle AOP_k$$

$$2\sin\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n}=\sin\frac{k\pi}{n}$$

이므로

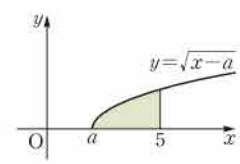
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}16\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\frac{16}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$
$$=\frac{16}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\frac{16}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\frac{16}{\pi}\cdot 2=\frac{32}{\pi}$$

$\therefore a=32$

답 32

03 전략 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b|f(x)|dx$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_a^5\sqrt{x-a}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}\right]_a^5$$
$$=\frac{2}{3}(5-a)^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $\frac{2}{3}(5-a)^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{3}$이므로

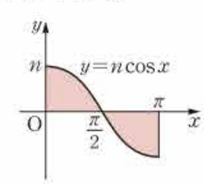
$(5-a)^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$, $\quad (5-a)^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}}$

$5-a=3 \qquad \therefore a=2$

답 ③

04 전략 $0\le x\le\pi$에서 $y=n\cos x$의 그래프를 그려 $n\cos x\ge 0$인 구간과 $n\cos x\le 0$인 구간을 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서



$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}n\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-n\cos x)dx$$
$$=\Big[n\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-n\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=n+n=2n \qquad \cdots ❶$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2} \qquad \cdots ❷$$

답 $\frac{1}{2}$

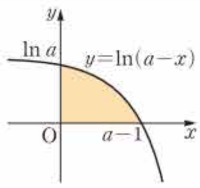
단계	채점 기준	비율
❶	a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)a_n}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

05 전략 $y=\ln(a-x)$의 그래프를 그려 적분 구간을 구한 후 x를 y에 대하여 나타낸 식을 적분하여 넓이를 구한다.

풀이 $y=\ln(a-x)$에서

$a-x=e^y$

$\therefore x=a-e^y$



오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$\int_0^{\ln a}(a-e^y)dy=\Big[ay-e^y\Big]_0^{\ln a}$

$=a\ln a-a+1$

따라서 $a\ln a-a+1=1$이므로

$a(\ln a-1)=0,\quad \ln a-1=0\ (\because a>1)$

$\ln a=1\quad \therefore a=e$　　답 ②

$y=\ln(a-x)$의 그래프는 $y=\ln x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

다른 풀이 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$\int_0^{a-1}\ln(a-x)dx$

$=\Big[x\ln(a-x)\Big]_0^{a-1}+\int_0^{a-1}\frac{x}{a-x}dx$

$=\int_0^{a-1}\left(\frac{a}{a-x}-1\right)dx$

$=\Big[-a\ln|a-x|-x\Big]_0^{a-1}$

$=-a+1+a\ln a$

따라서 $-a+1+a\ln a=1$이므로

$a(\ln a-1)=0\quad \therefore a=e\ (\because a>1)$

$f(x)=\ln(a-x)$, $g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=-\frac{1}{a-x}$, $g(x)=x$

06 전략 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.

풀이 곡선 $y=-\frac{2x}{2x^2+1}$와 직선 $y=-\frac{2}{3}x$의 교점의 x좌표는 $-\frac{2x}{2x^2+1}=-\frac{2}{3}x$에서

$2x^3+x=3x,\quad x^3-x=0$

$x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{0}\left\{-\frac{2x}{2x^2+1}-\left(-\frac{2}{3}x\right)\right\}dx$

$+\int_0^1\left\{-\frac{2}{3}x-\left(-\frac{2x}{2x^2+1}\right)\right\}dx$

$=\Big[-\frac{1}{2}\ln(2x^2+1)+\frac{1}{3}x^2\Big]_{-1}^{0}$

$+\Big[-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}\ln(2x^2+1)\Big]_0^1$

$=-\left(-\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln 3\right)$

$=\ln 3-\frac{2}{3}$　　답 ①

07 전략 $(A+B)-A=B$임을 이용하여 B를 구한다.

풀이 두 곡선 $y=\sqrt{3}\cos x$, $y=\sin x$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{3}\cos x=\sin x$에서

$\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{3}$, 즉 $\tan x=\sqrt{3}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}\ \left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

$B=(A+B)-A$에서

$A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sqrt{3}\cos x-\sin x)dx$

$=\Big[\sqrt{3}\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=1,$

$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3}\cos x\,dx=\Big[\sqrt{3}\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}$

이므로　$B=\sqrt{3}-1$

$\therefore AB=\sqrt{3}-1$　　답 $\sqrt{3}-1$

08 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으면 $\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_0^k(\sqrt{x}-1)dx=0$이므로　$\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\Big]_0^k=0$

$\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}-k=0,\quad k\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}-1\right)=0$

$\sqrt{k}=\frac{3}{2}\ (\because k>1)\quad \therefore k=\frac{9}{4}$　　답 $\frac{9}{4}$

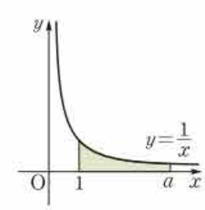
09 전략 $a>1$일 때와 $0<a<1$일 때로 나누어 생각한다.

풀이 $1\le x\le 2$에서 $\frac{1}{x}>0$이므로

$S=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^2=\ln 2$

(i) $a>1$일 때,

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 두 직선 $x=1$, $x=a$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$\int_1^a\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^a$

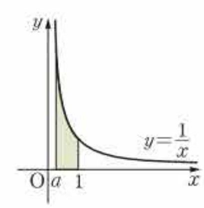
$=\ln a$

이 넓이가 $2S$이므로

$\ln a=2\ln 2=\ln 4\quad \therefore a=4$

(ii) $0<a<1$일 때,

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 두 직선 $x=1$, $x=a$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$\int_a^1\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_a^1$

$=-\ln a$

이 넓이가 $2S$이므로　$-\ln a=2\ln 2$

$\ln a=-2\ln 2=\ln\frac{1}{4}\quad \therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 모든 양수 a의 값의 합은

$$4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$

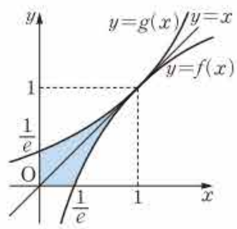
답 ②

10 전략 함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 $f(1)=1$이고, $f'(x)=\frac{1}{x}$에서 $f'(1)=1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y=x$$

또 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\left\{\frac{1}{2}\cdot1\cdot1-\int_{\frac{1}{e}}^{1}(\ln x+1)\,dx\right\}$$
$$=1-2\left(\Big[x(\ln x+1)\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}1\,dx\right)$$
$$=1-2\left(1-\Big[x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}\right)$$
$$=1-2\left\{1-\left(1-\frac{1}{e}\right)\right\}=1-\frac{2}{e}$$

답 $1-\frac{2}{e}$

$y=\ln x+1$이라 하면
$\ln x=y-1$
$\therefore x=e^{y-1}$
따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를
$\int_0^1(e^{y-1}-y)dy$
$=\left[e^{y-1}-\frac{1}{2}y^2\right]_0^1$
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$
과 같이 구할 수도 있다.

$u(x)=\ln x+1$, $v'(x)=1$로 놓으면
$u'(x)=\frac{1}{x}$,
$v(x)=x$

11 전략 단면의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸 후 적분 구간을 정하여 적분한다.

풀이 단면의 세로의 길이는 $2e^x$ cm이므로 단면의 넓이는

$$e^x\cdot2e^x=2e^{2x}\,(\mathrm{cm}^2)$$ ⋯ ❶

따라서 주어진 입체도형의 부피는

$$\int_0^{10}2e^{2x}\,dx=\Big[e^{2x}\Big]_0^{10}=e^{20}-1\,(\mathrm{cm}^3)$$ ⋯ ❷

답 $(e^{20}-1)\,\mathrm{cm}^3$

단계	채점 기준	비율
❶	단면의 넓이를 구할 수 있다.	40 %
❷	주어진 입체도형의 부피를 구할 수 있다.	60 %

12 전략 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때의 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피는 $\int_a^b S(x)dx$이다.

풀이 점 $(x,\ 0)\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

한 변의 길이가 $2\sqrt{x}\,e^{kx^2}$인 정삼각형이다.

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{x}\,e^{kx^2})^2=\sqrt{3}xe^{2kx^2}$$

따라서 입체도형의 부피는

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}}S(x)dx=\int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}}\sqrt{3}xe^{2kx^2}dx$$

$2kx^2=t$로 놓으면 $\quad\frac{dt}{dx}=4kx$

$x=\frac{1}{\sqrt{2k}}$일 때 $t=1$, $x=\frac{1}{\sqrt{k}}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}}\sqrt{3}xe^{2kx^2}dx=\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4k}e^t dt=\frac{\sqrt{3}}{4k}\Big[e^t\Big]_1^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4k}(e^2-e)$$

즉 $\frac{\sqrt{3}}{4k}(e^2-e)=\sqrt{3}(e^2-e)$이므로

$$k=\frac{1}{4}$$

답 ③

13 전략 원점과 점 P 사이의 거리는 점 P의 위치의 절댓값임을 이용한다.

풀이 $t=0$에서의 위치가 0이므로 점 P의 위치를 x라 하면

$$x=\int_0^t(\sin2t-\cos t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos2t-\sin t\right]_0^t$$
$$=-\frac{1}{2}\cos2t-\sin t-\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2t)-\sin t+\frac{1}{2}$$
$$=\sin^2t-\sin t=\left(\sin t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$-1\le\sin t\le1$이므로

$$-\frac{3}{2}\le\sin t-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2},\qquad 0\le\left(\sin t-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}$$
$$\therefore -\frac{1}{4}\le\left(\sin t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\le2$$

즉 $-\frac{1}{4}\le x\le2$에서 $0\le|x|\le2$이므로 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 2이다.

답 2

14 전략 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=-2\sqrt{2}\cos t\sin t=-\sqrt{2}\sin2t$,

$\frac{dy}{dt}=2\sqrt{2}\sin t\cos t=\sqrt{2}\sin2t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{(-\sqrt{2}\sin2t)^2+(\sqrt{2}\sin2t)^2}=\sqrt{4\sin^2 2t}$$
$$=2|\sin2t|$$

이때 점 P가 출발한 후 처음으로 속력이 0이 되는 때는 $t>0$에서 처음으로 $2|\sin2t|=0$, 즉 $|\sin2t|=0$일 때이므로

$$2t=\pi\qquad\therefore t=\frac{\pi}{2}$$

따라서 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2|\sin 2t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 2t\,dt$$

$$=\Big[-\cos 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2$$

답 ②

15 전략 곡선 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$의 길이는 $\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$이다.

풀이 $y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^6 \sqrt{1+\{x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\}^2}\,dx$$

$$=\int_0^6 \sqrt{1+x^2(x^2+2)}\,dx$$

$$=\int_0^6 \sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx$$

$$=\int_0^6 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx=\int_0^6 (x^2+1)\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_0^6=78$$

답 78

n이 실수일 때, $y=\{f(x)\}^n$이면 $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도는

① 속도

$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$, 즉 $(f'(t),\ g'(t))$

② 가속도

$\Rightarrow \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$, 즉 $(f''(t),\ g''(t))$

16 전략 곡선 $y=f(x)$와 직선 l을 좌표평면에 나타내어 주어진 두 부분의 넓이의 합이 직선 l과 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같음을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\cos x$이므로 점 $\mathrm{P}(a,\ \sin a)$에서의 접선의 기울기는 $\cos a$이고 접선의 방정식은

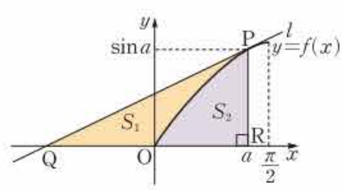
$$y-\sin a=\cos a\cdot(x-a)$$

$y=0$을 대입하면 $\quad -\sin a=(x-a)\cos a$

$$x-a=-\frac{\sin a}{\cos a}\ \left(\because\ 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\ x=a-\frac{\sin a}{\cos a}$$

$0<a<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos a>0$



위의 그림과 같이 직선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하면

$$\mathrm{Q}\left(a-\frac{\sin a}{\cos a},\ 0\right),\ \mathrm{R}(a,\ 0)$$

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면 $S_1+S_2=\triangle\mathrm{PQR}$이고 $S_1=S_2$이므로

$$S_2=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{PQR}$$

이때

$$S_2=\int_0^a \sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^a=-\cos a+1,$$

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\left\{a-\left(a-\frac{\sin a}{\cos a}\right)\right\}\cdot\sin a$$

$$=\frac{\sin^2 a}{2\cos a}=\frac{1-\cos^2 a}{2\cos a}$$

이므로 $\quad -\cos a+1=\frac{1-\cos^2 a}{4\cos a}$

$$-4\cos^2 a+4\cos a=1-\cos^2 a$$

$$3\cos^2 a-4\cos a+1=0$$

$$(3\cos a-1)(\cos a-1)=0$$

$$\therefore\ \cos a=\frac{1}{3}\ \left(\because\ 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$$

답 ②

17 전략 $s=\int_1^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$임과 $t=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$를 연립하여 $f'(t)$를 구한다.

풀이 점 $(0,\ f(1))$은 점 P의 $t=1$에서의 위치이고,

$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt}=f'(t)$이므로

$$s=\int_1^t \sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}\,dt \quad\cdots\cdots\ ㉠$$

$t=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$에서 $\quad 2t-s=\sqrt{s^2+4}$

양변을 제곱하면

$$4t^2-4ts+s^2=s^2+4,\qquad ts=t^2-1$$

$$\therefore\ s=t-\frac{1}{t}\ (\because\ t\ge 1) \quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\int_1^t \sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}\,dt=t-\frac{1}{t}$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\sqrt{\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2}=1+\frac{1}{t^2}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2=1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}$$

$$\therefore\ \{f'(t)\}^2=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2 \quad\cdots\cdots\ ㉢$$

점 P의 시각 t에서의 속도는 $\left(\frac{2}{t},\ f'(t)\right)$이고, $t=2$일 때 점 P의 속도가 $\left(1,\ \frac{3}{4}\right)$이므로

$$f'(2)=\frac{3}{4}$$

즉 ㉢에서 $\quad f'(t)=1-\frac{1}{t^2}$

$f'(t)=-1+\frac{1}{t^2}$이면 $f'(2)=-\frac{3}{4}$이므로 $f'(t)=1-\frac{1}{t^2}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2}{t^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=f''(t)=\frac{2}{t^3}$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$$\left(-\frac{2}{t^2},\ \frac{2}{t^3}\right)$$

따라서 $t=2$일 때 점 P의 가속도가 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$이므로

$$a=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ 60a=60\cdot\frac{1}{4}=15$$

답 15

Work Book

I. 수열의 극한

01 수열의 극한 Ⓦ 2쪽

01 수열 $\left\{\frac{5}{4n+1}\right\}$에서 n의 값이 한없이 커지면 $\frac{5}{4n+1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$\therefore a=0$

수열 $\left\{\frac{3n-(-1)^n}{n}\right\}$에서 $\frac{3n-(-1)^n}{n}=3-\frac{(-1)^n}{n}$이므로 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$3+1,\ 3-\frac{1}{2},\ 3+\frac{1}{3},\ 3-\frac{1}{4},\ \cdots$

홀수 번째 항은 3에 수렴하고, 짝수 번째 항도 3에 수렴한다.

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $\frac{3n-(-1)^n}{n}$의 값은 3에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{3n-(-1)^n}{n}\right\}$은 3에 수렴한다.

$\therefore b=3$

$\therefore a+b=3$ 답 3

쌤한마디

수열의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산은 일반항 a_n에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입한 후 그 값이 어떤 일정한 값에 가까워지는지 아닌지 조사하여 판정한다.

① 일정한 값에 가까워지면 ➡ 수렴

② 한없이 커지거나 한없이 작아지거나 진동하면 ➡ 발산

02 ㄱ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{6n+1}{n}$의 값은 6에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{6n+1}{n}\right\}$은 6에 수렴한다.

$\frac{6n+1}{n}=6+\frac{1}{n}$

ㄴ. $1+(-1)^n$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$0,\ 2,\ 0,\ 2,\ \cdots$

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $1+(-1)^n$의 값은 0과 2가 교대로 되므로 수열 $\{1+(-1)^n\}$은 발산(진동)한다.

ㄷ. $\sin\frac{2n-1}{2}\pi$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$

$\sin\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{3}{2}\pi,\ \sin\frac{5}{2}\pi,\ \sin\frac{7}{2}\pi,\ \cdots$

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $\sin\frac{2n-1}{2}\pi$의 값은 1과 -1이 교대로 되므로 수열 $\left\{\sin\frac{2n-1}{2}\pi\right\}$는 발산(진동)한다.

ㄹ. $\log\frac{1}{n^2}=-\log n^2$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$0,\ -\log 4,\ -\log 9,\ -\log 16,\ \cdots$

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $\log\frac{1}{n^2}$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\left\{\log\frac{1}{n^2}\right\}$은 음의 무한대로 발산한다.

이상에서 수렴하는 수열은 ㄱ뿐이다. 답 ①

03 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=3$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=4$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n(a_n-3)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n-3)$

$=4(4-3)=4$ 답 ④

04 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{1}{n^2}\right)=6$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{(n+2)(n+3)}+7\right\}=7$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n-2)(b_n+4)$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n-2)\cdot\lim_{n\to\infty}(b_n+4)$

$=(6-2)(7+4)=44$ 답 44

05 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}+\frac{b_n}{a_n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{a_nb_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n}{a_nb_n}$

$=\frac{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n}{\lim_{n\to\infty}a_nb_n}$

$=\frac{5\cdot5-2\cdot(-1)}{-1}=-27$ 답 -27

06 수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수에 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\ (\alpha\neq0)$라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\frac{1}{4a_{n+1}}=1-a_n$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(1-a_n)$이므로

$\frac{1}{4\alpha}=1-\alpha,\quad 4\alpha^2-4\alpha+1=0$

$(2\alpha-1)^2=0\quad \therefore \alpha=\frac{1}{2}$ 답 ④

07 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_{n+1}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{5+a_nb_{n+1}}{2a_{n+1}+b_n}=2$에서 $\frac{5+\alpha}{2\alpha+1}=2$

$5+\alpha=4\alpha+2,\quad 3\alpha=3$

$\therefore \alpha=1$ 답 1

08 이차방정식 $x^2-a_nx+a_{2n}+8=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-a_n)^2-4(a_{2n}+8)=0$

$\therefore a_n{}^2-4a_{2n}-32=0$ ······ ㉠

한편 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\alpha$

㉠에서 $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2-4a_{2n}-32)=0$이므로

$\alpha^2-4\alpha-32=0,\quad (\alpha+4)(\alpha-8)=0$

$\therefore \alpha=-4$ 또는 $\alpha=8$

이때 $a_n>0$이므로 $\quad \alpha=8$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

09 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\right.$
$\left.\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$ 답 ④

10 이차방정식 $x^2+4nx+1=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-4n$, $\alpha_n\beta_n=1$

$\therefore \alpha_n{}^2+\beta_n{}^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n$
$=(-4n)^2-2\cdot1=16n^2-2$

$f(2n)=4n^2+8n^2+1=12n^2+1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2}{f(2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{16n^2-2}{12n^2+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{16-\frac{2}{n^2}}{12+\frac{1}{n^2}}=\frac{4}{3}$ 답 ②

11 $a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$

$b_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$

$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n{}^3b_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n(n+1)^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

Q BOX

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라 할 때
① $D>0$
➡ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② $D=0$
➡ 중근을 갖는다.
③ $D<0$
➡ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

수열의 합과 일반항 사이의 관계
수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
$a_1=S_1$
$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge2)$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$,
$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$a>0$이면 양의 무한대로 발산하고, $a<0$이면 음의 무한대로 발산한다.

12 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\{\log_2(1+2+3+\cdots+n)-\log_{\sqrt{2}}(2n+1)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_2\frac{n(n+1)}{2}-\log_2(2n+1)^2\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n(n+1)}{2(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n^2+n}{8n^2+8n+2}$

$=\log_2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{8n^2+8n+2}\right)$

$=\log_2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{8+\frac{8}{n}+\frac{2}{n^2}}\right)$

$=\log_2\frac{1}{8}=-3$ 답 ①

13 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라 하면 $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=\log(n+1)(n+2)-\log n(n+1)$
$=\log\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=\log\frac{n+2}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+2}{n}=\log\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}\right)$

$=\log\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1}\right)$

$=\log1=0$ 답 0

14 $a\ne0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{an^2+bn-2}=0$이므로

$a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{an^2+bn-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{bn-2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{b-\frac{2}{n}}=\frac{3}{b}$

따라서 $\frac{3}{b}=\frac{1}{2}$이므로 $\quad b=6$

$\therefore a-b=-6$ 답 ①

15 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+an^2+bn}{a_n+4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{a_n}{n}+an+b}{\frac{a_n}{n}+4}$

$a\ne0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{a_n}{n}+an+b}{\frac{a_n}{n}+4}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로

$a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{a_n}{n}+an+b}{\frac{a_n}{n}+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{a_n}{n}+b}{\frac{a_n}{n}+4}$

$=\frac{4+b}{6}$

따라서 $\frac{4+b}{6}=1$이므로 $\quad b=2$

$\therefore a+b=2$ 답 ①

16 (i) $a=0$, $b=0$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2-5n+1}{an^2+2n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n+1}{2n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5+\frac{1}{n}}{2-\frac{6}{n}}=-\frac{5}{2}$$

(ii) $a\neq0$, $b=0$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2-5n+1}{an^2+2n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n+1}{an^2+2n-6}=0$$

(iii) $a=0$, $b\neq0$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2-5n+1}{an^2+2n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2-5n+1}{2n-6}=\infty\ (\text{또는 } -\infty)$$

이상에서 $a\neq0$, $b\neq0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2-5n+1}{an^2+2n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{b-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{a+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}}=\frac{b}{a}$$

따라서 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an+b}{bn-a}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{n}}{b-\frac{a}{n}}=\frac{a}{b}=2$$

답 2

17 ① $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

② $\lim_{n\to\infty}(3n-\sqrt{9n^2+n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-\sqrt{9n^2+n})(3n+\sqrt{9n^2+n})}{3n+\sqrt{9n^2+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{3n+\sqrt{9n^2+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{3+\sqrt{9+\frac{1}{n}}}=-\frac{1}{6}$$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2+5n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+5n}}{(n-\sqrt{n^2+5n})(n+\sqrt{n^2+5n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+5n}}{-5n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{5}{n}}}{-5}=-\frac{2}{5}$$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{4n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}{4}=\frac{1}{2}$$

Q BOX

분자, 분모가 각각 $\infty-\infty$ 꼴이면서 모두 근호를 포함한 식이므로 분자, 분모를 각각 유리화한다.

주어진 극한값과 다르다.

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+6}-\sqrt{n})(\sqrt{n+6}+\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})(\sqrt{n+6}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+6}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1}=2$$

따라서 극한값이 가장 큰 것은 ⑤이다. 답 ⑤

18 $S_n=\frac{n\{2\cdot3+(n-1)\cdot6\}}{2}=3n^2$이므로

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}+1}-\sqrt{S_n})$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3(n+1)^2+1}-\sqrt{3n^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3n^2+6n+4}-\sqrt{3n^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{3n^2+6n+4}-\sqrt{3n^2})(\sqrt{3n^2+6n+4}+\sqrt{3n^2})}{\sqrt{3n^2+6n+4}+\sqrt{3n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+4}{\sqrt{3n^2+6n+4}+\sqrt{3n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{4}{n}}{\sqrt{3+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

19 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}-2n}=\frac{1}{\sqrt{4n^2+2n}-2n}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+2n}-2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n}+2n}{(\sqrt{4n^2+2n}-2n)(\sqrt{4n^2+2n}+2n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n}+2n}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{2}{n}}+2}{2}=2$$

답 2

20 $b\le0$이면 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-bn)=\infty$이므로

$b>0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-bn)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-bn)(\sqrt{n^2+an}+bn)}{\sqrt{n^2+an}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b^2)n^2+an}{\sqrt{n^2+an}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b^2)n+a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+b}$$

이 식의 극한값이 4이므로 $1-b^2=0$, $\frac{a}{1+b}=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=8$, $b=1$ ($\because b>0$)

$\therefore a+b=9$ 답 ②

21 $\lim_{n\to\infty}\frac{an+3}{\sqrt{n^2+bn}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(an+3)(\sqrt{n^2+bn}+n)}{(\sqrt{n^2+bn}-n)(\sqrt{n^2+bn}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(an+3)(\sqrt{n^2+bn}+n)}{bn}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(an+3)\left(\sqrt{1+\frac{b}{n}}+1\right)}{b}$

이 식의 극한값이 2이므로

$a=0$, $\frac{6}{b}=2$ $\therefore a=0$, $b=3$

$\therefore a-b=-3$ 답 ③

$a>0$이면 양의 무한대로 발산하고, $a<0$이면 음의 무한대로 발산한다.

22 $k\geq0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $k<0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n$

$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n+3)(3n+1)}+kn\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{(n+3)(3n+1)}+kn\}\{\sqrt{(n+3)(3n+1)}-kn\}}{\sqrt{(n+3)(3n+1)}-kn}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3-k^2)n^2+10n+3}{\sqrt{3n^2+10n+3}-kn}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3-k^2)n+10+\frac{3}{n}}{\sqrt{3+\frac{10}{n}+\frac{3}{n^2}}-k}$

이때 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $3-k^2=0$

$k^2=3$ $\therefore k=-\sqrt{3}$ ($\because k<0$)

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{3}{n}}{\sqrt{3+\frac{10}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{3}}$

$=\frac{10}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

23 $\sqrt{(4n)^2}<\sqrt{16n^2+7n+1}<\sqrt{(4n+1)^2}$이므로

$4n<\sqrt{16n^2+7n+1}<4n+1$

따라서 $a_n=4n$이므로

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{16n^2+7n+1}-a_n)$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{16n^2+7n+1}-4n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{16n^2+7n+1}-4n)(\sqrt{16n^2+7n+1}+4n)}{\sqrt{16n^2+7n+1}+4n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{7n+1}{\sqrt{16n^2+7n+1}+4n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{1}{n}}{\sqrt{16+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}}+4}=\frac{7}{8}$ 답 ④

24 $\sqrt{(2n)^2}<\sqrt{4n^2+1}<\sqrt{(2n+1)^2}$이므로

$2n<\sqrt{4n^2+1}<2n+1$

따라서 $a_n=2n$, $b_n=\sqrt{4n^2+1}-2n$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=\lim_{n\to\infty}2n(\sqrt{4n^2+1}-2n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(\sqrt{4n^2+1}-2n)(\sqrt{4n^2+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

25 $(n+4)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{n+4}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}(3n+7)a_n=\lim_{n\to\infty}(3n+7)\cdot\frac{b_n}{n+4}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+7}{n+4}\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{7}{n}}{1+\frac{4}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$

$=3\cdot5=15$ 답 ④

26 $\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=6$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=5$

$3a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=3a_n-c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}c_n=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(3a_n-c_n)=3\cdot5-5=10$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}=\frac{5-10}{5+10}=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

27 $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_n-c_n$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=-3$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+b_n}{a_n-2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+(a_n-c_n)}{a_n-2(a_n-c_n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-c_n}{-a_n+2c_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{c_n}{a_n}}{-1+2\cdot\frac{c_n}{a_n}}$

$=-3$ 답 -3

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이고

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=-3$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$, 즉 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$이어야 한다.

$\lim_{n\to\infty}p_n=\infty$일 때, $\lim_{n\to\infty}p_nq_n$이 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty}q_n=0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+b_n}{a_n-2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{b_n}{a_n}}{1-2\cdot\frac{b_n}{a_n}}=\frac{2+1}{1-2}=-3$

28 $3n^2+5n-4<a_n<3n^2+5n+7$에서

$$\frac{3n^2+5n-4}{2n^2+6n+1}<\frac{a_n}{2n^2+6n+1}<\frac{3n^2+5n+7}{2n^2+6n+1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-4}{2n^2+6n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+7}{2n^2+6n+1}=\frac{3}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n^2+6n+1}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

Q BOX: 모든 자연수 n에 대하여 $2n^2+6n+1>0$이므로 각 변을 $2n^2+6n+1$로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

29 ㄱ. $-1\le\sin\frac{n\pi}{2}\le1$이므로

$$-\frac{1}{n}\le\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\le\frac{1}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=0$$

ㄴ. $-1\le\cos\frac{n\pi}{3}\le1$이므로

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}=0$$

ㄷ. $0<\tan\frac{\pi}{4n}\le1$이므로

$0<\frac{1}{n}\le1$에서 $0<\frac{\pi}{4n}\le\frac{\pi}{4}$이므로 $0<\tan\frac{\pi}{4n}\le1$

$$0<\frac{1}{n+1}\tan\frac{\pi}{4n}\le\frac{1}{n+1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\tan\frac{\pi}{4n}=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

30 $4n<a_n<4n+1$에서

$$\sum_{k=1}^{n}4k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(4k+1)$$

$$4\cdot\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$2n^2+2n<\sum_{k=1}^{n}a_k<2n^2+3n$$

$$\therefore\ \frac{2n^2+2n}{4n^2+5}<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{4n^2+5}<\frac{2n^2+3n}{4n^2+5}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n}{4n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{4n^2+5}=\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{4n^2+5}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

31 ㄱ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n\ne0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\ne0$이다.

ㄴ. $a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=c_n-a_n$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-a_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{a_n}-1\right)$$

$$=0-1=-1$$

ㄷ. [반례] $a_n=n^2$, $b_n=n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(n^2-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)=\infty$$

ㄹ. $-|a_n|\le a_n\le|a_n|$에서

$\lim_{n\to\infty}(-|a_n|)=\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

32 ㄱ. $a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=c_n-a_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}c_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}c_n-\lim_{n\to\infty}a_n=-\alpha$$

ㄴ. $\frac{b_n}{a_n}=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_nc_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}c_n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n-a_nc_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}c_n$$

$$=0-0\cdot1=0$$

ㄷ. $0\le|a_n|<|b_n|$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=0\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=0$$

ㄹ. $a_{n+1}=a_n^{\frac{1}{2}}$에서 $\log a_{n+1}=\frac{1}{2}\log a_n$

이때 $\log a_n=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

수열 $\{b_n\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot b_1$$

$$\therefore\ \log a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\log a_1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\log a_1=0$이므로

$$\log\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)=0\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

33 $\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+2}}{3^{n+1}-6^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6^2}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=-36$ 답 ①

34 $x^2-6x+7=0$에서 $x=3\pm\sqrt{2}$

$\alpha=3+\sqrt{2}$, $\beta=3-\sqrt{2}$라 하면 $0<\frac{\beta}{\alpha}<1$이므로

$0<\beta<\alpha$이므로 $0<\frac{\beta}{\alpha}<1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+\beta\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

$$=\alpha=3+\sqrt{2}$$

답 ③

참고 $\alpha=3-\sqrt{2}$, $\beta=3+\sqrt{2}$라 하면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+\beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+1}=\beta=3+\sqrt{2}$$

35 $5^{n+1}-2^n<(3^{n+1}+5^n)a_n<4^n+5^{n+1}$에서

$$\frac{5^{n+1}-2^n}{3^{n+1}+5^n}<a_n<\frac{4^n+5^{n+1}}{3^{n+1}+5^n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-2^n}{3^{n+1}+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}=5$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+5^{n+1}}{3^{n+1}+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n+5}{3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=5$ 답 ④

36 $a_n=4\cdot3^{n-1}$, $S_n=\frac{4(3^n-1)}{3-1}=2\cdot3^n-2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot3^n-2}{4\cdot3^{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

37 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(n+1)\cdot6^n-n\cdot6^{n-1}$
$=(5n+6)\cdot6^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+6)\cdot6^{n-1}}{n\cdot6^{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+6}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{6}{n}}{1}=5$$

답 5

38 $10^n=2^n\cdot5^n$이므로

$$f(n)=(1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+5+5^2+\cdots+5^n)$$
$$=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\cdot\frac{5^{n+1}-1}{5-1}$$
$$=\frac{10^{n+1}-5^{n+1}-2^{n+1}+1}{4}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{f(n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot10^n}{10^{n+1}-5^{n+1}-2^{n+1}+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{10-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{10}\right)^n}$$
$$=\frac{2}{5}$$

답 ③

39 첫째항과 공비가 모두 $\log_2 x-3$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\log_2 x-3\le1$, $2<\log_2 x\le4$

$\therefore 4<x\le16$

따라서 정수 x는 5, 6, 7, $\cdots$, 16이므로 구하는 합은

$5+6+7+\cdots+16=126$ 답 126

40 첫째항과 공비가 모두 $\frac{|x|}{5}-1$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면 $-1<\frac{|x|}{5}-1\le1$

$0<\frac{|x|}{5}\le2$ $\therefore 0<|x|\le10$

Q BOX

$1<1-\frac{r}{2}<\frac{3}{2}$에서
$0<-\frac{r}{2}<\frac{1}{2}$
$\therefore -1<r<0$

자연수 $N=a^mb^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)의 양의 약수의 합은
$(1+a+a^2+\cdots+a^m)$
$\times(1+b+b^2+\cdots+b^n)$

$5+6+7+\cdots+16$
$=\sum_{k=1}^{16}k-(1+2+3+4)$
$=\frac{16\cdot17}{2}-10$
$=136-10=126$

따라서 정수 x는 ±1, ±2, ±3, $\cdots$, ±10의 20개이다.

답 20

41 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로

$-1<r\le1$ ······ ㉠

ㄱ. 첫째항과 공비가 모두 $-r$이고 ㉠에서

$-1\le-r<1$

이때 $-r=-1$, 즉 $r=1$이면 수열 $\{(-r)^n\}$은 수렴하지 않는다.

ㄴ. 첫째항과 공비가 모두 $\frac{r-1}{2}$이고 ㉠에서

$-2<r-1\le0$ $\therefore -1<\frac{r-1}{2}\le0$

따라서 수열 $\left\{\left(\frac{r-1}{2}\right)^n\right\}$은 항상 수렴한다.

ㄷ. 첫째항과 공비가 모두 r^2이고 ㉠에서 $0\le r^2\le1$이므로 수열 $\{r^{2n}\}$은 항상 수렴한다.

ㄹ. 첫째항과 공비가 모두 $1-\frac{r}{2}$이고 ㉠에서

$-\frac{1}{2}\le-\frac{r}{2}<\frac{1}{2}$ $\therefore \frac{1}{2}\le1-\frac{r}{2}<\frac{3}{2}$

이때 $1<1-\frac{r}{2}<\frac{3}{2}$, 즉 $-1<r<0$이면 수열 $\left\{\left(1-\frac{r}{2}\right)^n\right\}$은 수렴하지 않는다.

이상에서 항상 수렴하는 수열은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

42 (i) $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-2}{r^{n+1}+2}=-1$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-2}{r^{n+1}+2}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$$

(iii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-2}{r^{n+1}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r}-\frac{2}{r^{n+1}}}{1+\frac{2}{r^{n+1}}}=\frac{1}{r}$$

답 $0<r<1$일 때 -1, $r=1$일 때 $-\frac{1}{3}$, $r>1$일 때 $\frac{1}{r}$

43 (i) $|r|<3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-r^n}{3^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{r}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{r}{3}\right)^n}=1$$

(ii) $r=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-r^n}{3^n+r^n}=0$

(iii) $|r|>3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-r^n}{3^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{r}\right)^n+1}=-1$$

이상에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-r^n}{3^n+r^n}=1$을 만족시키는 r의 값의 범위는 $|r|<3$이므로 정수 r는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다. 답 5

44 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=x$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}|x^{2n+1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n-1}}-x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}$$
$$=-x$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\frac{-1-(-1)}{1+1}=0$$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 ③이다. 답 ③

45 (i) $\frac{1}{2}\le x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2}{x^n+x}=\frac{2}{x}$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=1$이므로

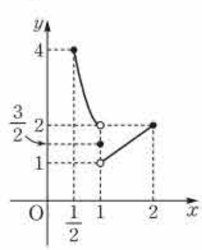
$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2}{x^n+x}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

(iii) $1<x\le 2$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=\infty$이므로

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2}{x^n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x^n}}{1+\frac{1}{x^{n-1}}}=x$$

이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\{y\,|\,1<y\le 4\}$ 답 ③



46 $\mathrm{P}_n(n, \sqrt{n+3})$, $\mathrm{Q}_n(n, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{n^2+(\sqrt{n+3})^2}=\sqrt{n^2+n+3}$, $\overline{\mathrm{OQ}_n}=n$

원점 $\mathrm{O}(0, 0)$과 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OP}_n}-\overline{\mathrm{OQ}_n})$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+3}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n+3}-n)(\sqrt{n^2+n+3}+n)}{\sqrt{n^2+n+3}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{\sqrt{n^2+n+3}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

47 직선 $x+y=3$, 즉 $y=-x+3$과 직선 $y=\frac{2n}{n+3}x$의 교점 P_n의 x좌표는 $-x+3=\frac{2n}{n+3}x$에서

Q BOX: $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$이므로 $n\to\infty$일 때 직선 $y=\frac{2n}{n+3}x$는 직선 $y=2x$에 한없이 가까워진다. 따라서 두 직선 $x+y=3$, $y=2x$의 교점의 좌표를 구하여 $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구할 수도 있다.

$$\frac{3n+3}{n+3}x=3 \qquad \therefore x=\frac{n+3}{n+1}$$

$x=\frac{n+3}{n+1}$을 $y=\frac{2n}{n+3}x$에 대입하면

$$y=\frac{2n}{n+3}\cdot\frac{n+3}{n+1}=\frac{2n}{n+1}$$

따라서 $\mathrm{P}_n\left(\frac{n+3}{n+1}, \frac{2n}{n+1}\right)$이고, $\mathrm{A}(3, 0)$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{2n}{n+1}=\frac{3n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{n}}=3$$

답 3

48 $a_1=\sqrt{2}$라 하고 a_1에서 네 개의 키를 순서대로 눌러 나오는 수를 a_2, a_2에서 네 개의 키를 순서대로 눌러 나오는 수를 a_3, $\cdots$이라 하면

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$$

양변을 제곱하면 $a_{n+1}{}^2=a_n+2$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\ (\alpha>0)$라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}{}^2=\lim_{n\to\infty}(a_n+2)$에서

$$\alpha^2=\alpha+2, \qquad \alpha^2-\alpha-2=0$$
$$(\alpha+1)(\alpha-2)=0 \qquad \therefore \alpha=2\ (\because \alpha>0)$$

답 ③

도전! 수능 기출

W 10쪽

01 1st 조건을 만족시키는 집합의 두 원소를 찾아 a_n을 구한다.

조건을 만족시키는 집합의 두 원소를 a, $b\ (1\le a<b\le 3n)$라 하면 $b-a>2n$이므로

$$b>2n+a$$

(i) $a=1$일 때,

$b>2n+a=2n+1$

$$b=2n+2,\ 2n+3,\ \cdots,\ 3n$$

이므로 조건을 만족시키는 집합은

$\{1, 2n+2\}$, $\{1, 2n+3\}$, $\cdots$, $\{1, 3n\}$

의 $(n-1)$개이다.

(ii) $a=2$일 때,

$b>2n+a=2n+2$

$$b=2n+3,\ 2n+4,\ \cdots,\ 3n$$

이므로 조건을 만족시키는 집합은

$\{2, 2n+3\}$, $\{2, 2n+4\}$, $\cdots$, $\{2, 3n\}$

의 $(n-2)$개이다.

⋮

(iii) $a=n-1$일 때,

$b>2n+a=2n+n-1$
$=3n-1$

$$b=3n$$

이므로 조건을 만족시키는 집합은

$\{n-1, 3n\}$

의 1개이다.

(iv) $n \le a < 3n$일 때,

조건을 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 조건을 만족시키는 모든 집합의 개수 a_n은

$$a_n=(n-1)+(n-2)+\cdots+1$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1} k=\frac{n(n-1)}{2}$$

(2nd) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} a_k$의 값을 구한다.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{n^3-n}{6}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n}{6n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{6}=\frac{1}{6}$$

답 ②

02 (1st) $f'(x)$를 구하여 a_n을 구한다.

$f(x)=x(x-n)(x-3n^2)=x^3-(3n^2+n)x^2+3n^3x$

에서

$$f'(x)=3x^2-2(3n^2+n)x+3n^3$$

$f'(x)=0$에서

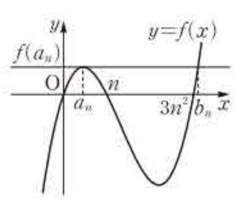
$$x=\frac{3n^2+n\pm\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$$

이때 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $x=\frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$에서 극대이다.

$$\therefore a_n=\frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$$

(2nd) $\frac{a_nb_n}{n^3}$을 a_n과 n에 대한 식으로 나타낸다.

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(a_n)$은 오른쪽 그림과 같이 $x=a_n$인 점에서 접하고, 접점이 아닌 교점의 x좌표가 b_n이므로



$$f(x)-f(a_n)=(x-a_n)^2(x-b_n)$$

$f(0)=0$이므로 위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$$-f(a_n)=(-a_n)^2\cdot(-b_n)$$
$$\therefore f(a_n)={a_n}^2b_n$$

즉 ${a_n}^3-(3n^2+n){a_n}^2+3n^3a_n={a_n}^2b_n$이므로 이 등식의 양변을 n^3a_n으로 나누면

$$\frac{a_nb_n}{n^3}=\frac{{a_n}^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$$

(3rd) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}$의 값을 구하여 $p+q$의 값을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{a_n}{n}\right)^2-\frac{3n^2+n}{n^2}\cdot\frac{a_n}{n}+3\right\}$$

Q BOX

$n \le a < 3n$에서
$3n \le 2n+a < 5n$
이므로 $3n \ge b > 2n+a$를 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

이차방정식의 근의 공식을 이용하여 $f'(x)=0$을 만족시키는 x를 n에 대한 식으로 나타낸다.

$f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$
$(a>0,\ \alpha<\beta)$이면
$f'(x)=0$에서
$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이다.

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^2-(9n^2-3n+1)}{3(3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{3+\frac{1}{n}+\sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{3}{2}$$

따라서 $p=2,\ q=3$이므로

$$p+q=5$$

답 5

03 (1st) x의 값의 범위를 나누어 $f(x)$를 구한다.

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}=2x$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$
$$=\frac{(a-2)+2}{3+1}=\frac{a}{4}$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}|x^{2n+1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x+\frac{2}{x^{2n-1}}}{3+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{a-2}{3}x$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1,\ \lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$
$$=\frac{-(a-2)-2}{3+1}=-\frac{a}{4}$$

이상에서

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (|x|<1) \\ \frac{a}{4} & (x=1) \\ \frac{a-2}{3}x & (|x|>1) \\ -\frac{a}{4} & (x=-1) \end{cases}$$

(2nd) 조건을 만족시키는 모든 a의 값의 합을 구한다.

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{5}{4}$를 만족시키는 a의 값을 구하면

(i) $\left|\frac{a}{4}\right|<1$, 즉 $|a|<4$일 때,

$$f\left(\frac{a}{4}\right)=2\cdot\frac{a}{4}=\frac{a}{2}$$이므로

$$\frac{a}{2}=\frac{5}{4} \qquad \therefore a=\frac{5}{2}$$

(ii) $\frac{a}{4}=1$, 즉 $a=4$일 때,

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{4}$이므로 $\quad \frac{a}{4}=\frac{5}{4} \qquad \therefore a=5$

이는 $a=4$를 만족시키지 않는다.

(iii) $\left|\frac{a}{4}\right|>1$, 즉 $|a|>4$일 때,

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a-2}{3}\cdot\frac{a}{4}=\frac{a^2-2a}{12}$이므로

$$\frac{a^2-2a}{12}=\frac{5}{4}, \qquad a^2-2a-15=0$$

$$(a+3)(a-5)=0 \qquad \therefore a=5\ (\because |a|>4)$$

(iv) $\frac{a}{4}=-1$, 즉 $a=-4$일 때,

$f\left(\frac{a}{4}\right)=-\frac{a}{4}$이므로 $\quad -\frac{a}{4}=\frac{5}{4} \qquad \therefore a=-5$

이는 $a=-4$를 만족시키지 않는다.

이상에서 $a=\frac{5}{2}$ 또는 $a=5$이므로 구하는 합은

$$\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2}$$

답 ③

04 1st 주어진 규칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{A_1A_{2n}}}$을 구한다.

$\mathrm{A}_n(x_n,\ y_n)$이라 하면 규칙 (나), (다)에 의하여

$$x_{2n}=x_{2n-1}+a,\ y_{2n}=y_{2n-1},$$
$$x_{2n+1}=x_{2n},\ y_{2n+1}=y_{2n}+a+1$$

이므로

$$x_{2n+2}=x_{2n+1}+a=x_{2n}+a,$$
$$y_{2n+2}=y_{2n+1}=y_{2n}+a+1$$

즉 두 수열 $\{x_{2n}\}$, $\{y_{2n}\}$은 공차가 각각 a, $a+1$인 등차수열이고, 규칙 (가)에 의하여

$$x_2=x_1+a=0+a=a,\ y_2=y_1=0$$

이므로

$$x_{2n}=a+(n-1)a=an,$$
$$y_{2n}=0+(n-1)(a+1)=(a+1)(n-1)$$
$$\therefore \overline{\mathrm{A_1A_{2n}}}=\sqrt{x_{2n}^2+y_{2n}^2}$$
$$=\sqrt{a^2n^2+(a+1)^2(n-1)^2}$$

2nd $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A_1A_{2n}}}}{n}=\frac{\sqrt{34}}{2}$를 만족시키는 양수 a의 값을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A_1A_{2n}}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a^2n^2+(a+1)^2(n-1)^2}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a^2+(a+1)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+(a+1)^2}$$
$$=\sqrt{2a^2+2a+1}$$

따라서 $\sqrt{2a^2+2a+1}=\frac{\sqrt{34}}{2}$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$$4a^2+4a-15=0, \qquad (2a+5)(2a-3)=0$$
$$\therefore a=\frac{3}{2}\ (\because a>0)$$

답 ①

QBOX

$2n-1$은 홀수이므로 점 A_{2n}은 점 A_{2n-1}을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점이다.

$2n$은 짝수이므로 점 A_{2n+1}은 점 A_{2n}을 y축의 방향으로 $a+1$만큼 평행이동한 점이다.

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=a+(n-1)d$

$a_1=3,\ a_2=5,$
$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$에서
$a_1<a_2<a_3<a_4<\cdots$
따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=0,$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+2}}=0$

02 급수

11쪽

01 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}k}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

답 ②

02 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=n+4,\ \alpha_n\beta_n=-2n^2$$

이므로

$$(\alpha_n-4)(4-\beta_n)=-\alpha_n\beta_n+4(\alpha_n+\beta_n)-16$$
$$=2n^2+4(n+4)-16$$
$$=2n^2+4n=2n(n+2)$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha_n-4)(4-\beta_n)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$$

답 ①

03 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$에서 $\quad a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$
$$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$$

답 $\frac{8}{15}$

04 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log a_k$$
$$=\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log_3 a_n$$
$$=\log(a_1a_2a_3\cdots a_n)$$
$$=\log\frac{n+3}{5n-2}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+3}{5n-2}$$
$$=\log\frac{1}{5}=\log 2-1$$

답 ①

쌤 한마디

상용로그를 포함한 문제에서

$$\log 2=\log\frac{10}{5}=\log 10-\log 5=1-\log 5,$$
$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-\log 2$$

임이 자주 이용되므로 알아두면 문제 해결에 도움이 될 수 있다.

05 $\sum_{n=1}^{\infty}(\log_{n+1}3-\log_{n+2}3)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\log_3(n+1)}-\frac{1}{\log_3(n+2)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\log_3(k+1)}-\frac{1}{\log_3(k+2)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{\log_3 2}-\frac{1}{\log_3 3}\right)+\left(\frac{1}{\log_3 3}-\frac{1}{\log_3 4}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{\log_3(n+1)}-\frac{1}{\log_3(n+2)}\right\}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\log_3 2}-\frac{1}{\log_3(n+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{\log_3 2}=\log_2 3$$

답 ④

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$일 때,
$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

06 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(x^2-\frac{2k}{n}x+\frac{k^2}{n^2}\right)$$
$$=nx^2-\frac{2x}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=nx^2-(n+1)x+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$
$$=n\left(x-\frac{n+1}{2n}\right)^2-\frac{(n+1)^2}{4n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

이므로

$$a_n=-\frac{(n+1)^2}{4n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$
$$=\frac{-3(n+1)^2+2(n+1)(2n+1)}{12n}$$
$$=\frac{(n+1)(n-1)}{12n}$$

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는
① $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.
② $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.

$-3(n+1)^2+2(n+1)(2n+1)$
$=(n+1)(-3n-3+4n+2)$
$=(n+1)(n-1)$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\log_2\frac{12a_n}{n}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log_2\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_2\frac{1\cdot3}{2\cdot2}+\log_2\frac{2\cdot4}{3\cdot3}+\log_2\frac{3\cdot5}{4\cdot4}+\cdots+\log_2\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\left\{\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+1}{2n}=\log_2\frac{1}{2}=-1$$

답 -1

07 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

① $S_n=0+0+\cdots+0=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=0$
따라서 주어진 급수는 0에 수렴한다.

② $S_n=1-0-0-\cdots-0=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=1$
따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

③ $S_1=1$, $S_2=-1$, $S_3=2$, $S_4=-2$, $S_5=3$, $S_6=-3$, $\cdots$이므로
$$S_{2n-1}=n,\ S_{2n}=-n$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}n=\infty,$$
$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty$$
따라서 주어진 급수는 발산한다.

④ $S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$
따라서 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$에 수렴한다.

⑤ $S_1=\frac{1}{2}$, $S_2=0$, $S_3=\frac{1}{3}$, $S_4=0$, $S_5=\frac{1}{4}$, $S_6=0$, $\cdots$이므로
$$S_{2n-1}=\frac{1}{n+1},\ S_{2n}=0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$$
따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$이므로 주어진 급수는 0에 수렴한다.

답 ③

08 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면
$S_1=a_1$, $S_2=a_1-a_2$, $S_3=a_1$, $S_4=a_1-a_3$, $S_5=a_1$, $S_6=a_1-a_4$, $\cdots$이므로
$$S_{2n-1}=a_1,\ S_{2n}=a_1-a_{n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=a_1,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})$$
이때 주어진 급수가 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이어야 하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1$,　$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=0$

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{2^n+3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-9}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=-9\neq0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{2n}{2n-1}=\log_3 1=0$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=0$

이상에서 주어진 급수가 수렴하도록 하는 수열인 것은 ㄴ, ㄷ이다.　답 ⑤

09 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-5)=0$　$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{2}$

따라서 $r=\frac{5}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{5r^n+3}{r^{n+2}-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n+3}{\left(\frac{5}{2}\right)^{n+2}-4}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

$=\frac{5}{\frac{25}{4}}=\frac{4}{5}$　답 $\frac{4}{5}$

10 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+6}{9n^2-3n-2}=0$　$\therefore a=0$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2+6}{9n^2-3n-2}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2-3n-2}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(3n-2)(3n+1)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=2\cdot1=2$

따라서 $b=2$이므로

$a^2+b^2=4$　답 ④

Q BOX

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

첫째항이 $1=\frac{2}{2}$이므로 각 항의 분모는 첫째항이 2이고 공차가 5인 등차수열을 이룬다.
따라서 주어진 급수의 제 n항의 분모는

$2+(n-1)\cdot5=5n-3$

$2a_n-5=b_n$으로 놓으면

$a_n=\frac{1}{2}b_n+\frac{5}{2}$

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}b_n+\frac{5}{2}\right)$

$=\frac{5}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+6}{9n^2-3n-2}=\frac{a}{9}$

이므로 $\frac{a}{9}=0$에서

$a=0$

11 $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=S$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

이고

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{1+1}{1+1}=1$

따라서 $3S_n+2S_{n+1}=1-a_n+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$에서

$\lim_{n\to\infty}(3S_n+2S_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\left(1-a_n+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)$

$3S+2S=1-0+1$,　$5S=2$

$\therefore 50S=20$　답 20

12 ㄱ. 주어진 급수의 제n항은 $\frac{n+1}{5n-3}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n-3}=\frac{1}{5}\neq0$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. 주어진 급수의 제n항은

$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}2k}=\frac{1}{n(n+1)}$

이므로 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄷ. 주어진 급수의 제n항은 $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$이므로 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

이상에서 수렴하는 급수인 것은 ㄴ뿐이다.　답 ②

13 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1\neq0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 발산한다.

ㄴ. [반례] $a_n=1-\frac{2}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$이면

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$
$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$
$$=\infty$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n=1$이지만 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty} a_n$$
$$=1-0=1\neq 0$$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

14 $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n}{b_n}=5$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\log a_n-\log b_n)=5$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n-\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=5$$
$$\therefore\ \alpha-\beta=5 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\log(a_n{}^3 b_n)=3$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3\log a_n+\log b_n)=3$$
$$3\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=3$$
$$\therefore\ 3\alpha+\beta=3 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=2$, $\beta=-3$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n}{b_n{}^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(\log a_n-2\log b_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n$$
$$=\alpha-2\beta$$
$$=2-2\cdot(-3)=8$$

답 8

15 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$$
$$=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$$
$$=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$$

따라서 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 모두 수렴한다.

ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1)=-a_1$$

Q BOX: $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1)=0-a_1=-a_1$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$도 수렴한다.

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=0$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n\neq 0$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

16 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+kb_n)=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n+b_n)=9$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n+k\sum_{n=1}^{\infty} b_n=3,\ k\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=9$$
$$\therefore\ \alpha+k\beta=3,\ k\alpha+\beta=9$$

위의 두 식을 변끼리 더하면

$$(k+1)\alpha+(k+1)\beta=12$$
$$(k+1)(\alpha+\beta)=12$$

Q BOX: k는 자연수이므로 $k+1>0$

$$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{12}{k+1}$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\alpha+\beta=\frac{12}{k+1}$$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$의 값이 정수이려면 $k+1$은 1이 아닌 12의 양의 약수이어야 하므로

Q BOX: k는 자연수이므로 $k+1$은 1보다 큰 자연수이다.

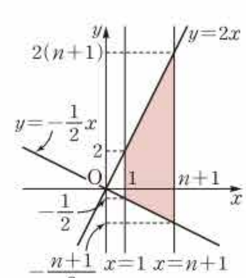
$$k+1=2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$$
$$\therefore\ k=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 11$$

따라서 자연수 k의 값의 합은

$$1+2+3+5+11=22$$

답 ②

17 네 직선 $x=1$, $x=n+1$, $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$로 둘러싸인 사각형은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로



$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{5}{2}(n+1)+\frac{5}{2}\right\}\cdot n$$
$$=\frac{5n(n+2)}{4}$$

Q BOX: 윗변의 길이가 $2-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$, 아랫변의 길이가 $2(n+1)-\left(-\frac{n+1}{2}\right)=\frac{5}{2}(n+1)$이고, 높이가 $n+1-1=n$인 사다리꼴의 넓이

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{50}{S_n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n(n+2)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty} 20\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 20\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty} 20\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty} 20\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=20\cdot\frac{3}{2}$

$=30$ 답 ②

18 원점에서 원 $(x-n)^2+(y-n+1)^2=\frac{1}{4}$에 그은 접선의 방정식을 $y=mx$라 하면 원의 중심 $(n, n-1)$과 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|mn-(n-1)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}$

$2|mn-n+1|=\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4(mn-n+1)^2=m^2+1$

$4(m^2n^2+n^2+1-2mn^2-2n+2mn)=m^2+1$

$\therefore (4n^2-1)m^2-(8n^2-8n)m+4n^2-8n+3=0$

이 m에 대한 이차방정식의 두 실근이 a_n, b_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=\frac{8n^2-8n}{4n^2-1}$, $a_nb_n=\frac{4n^2-8n+3}{4n^2-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)(b_n-1)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\{a_nb_n-(a_n+b_n)+1\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2-8n+3}{4n^2-1}-\frac{8n^2-8n}{4n^2-1}+1\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=1$ 답 1

Q BOX

$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2$
$+2ab+2bc+2ca$

19 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-\frac{3^n}{4^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$

$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{3}{1-\frac{3}{4}}$

$=1-12=-11$ 답 ②

20 $x^n=(-3)^{n+1}$에서

(i) $n=2k$ (k는 자연수)일 때,

$x^n=(-3)^{2k+1}=-3^{2k+1}<0$

이때 n은 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.

$\therefore a_{2k}=0$

(ii) $n=2k+1$ (k는 자연수)일 때,

$x^n=(-3)^{2k+2}=3^{2k+2}>0$

이때 n은 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$\therefore a_{2k+1}=1$

(i), (ii)에서

$a_n=\begin{cases}0 & (n=2k)\\ 1 & (n=2k+1)\end{cases}$ (k는 자연수)

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\frac{a_4}{5^4}+\frac{a_5}{5^5}+\cdots$

$=\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{5^7}+\cdots$

$=\frac{\frac{1}{125}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{1}{120}$ 답 ④

첫째항이 $\frac{1}{125}$, 공비가 $\frac{1}{25}$인 등비급수

쌤한마디

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 방정식 $x^n=a$의 실근은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

21 α, β가 이차방정식 $x^2+2x-10=0$의 해이고 $\alpha>\beta$이므로

$\alpha=-1+\sqrt{11}$, $\beta=-1-\sqrt{11}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}-\frac{1}{\beta^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^n$

$=\frac{\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha}}-\frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{1}{\beta}}$

$=\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{\beta-1}$

$=\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

이때

$\alpha+\beta=(-1+\sqrt{11})+(-1-\sqrt{11})=-2$,

$\alpha\beta=(-1+\sqrt{11})(-1-\sqrt{11})=-10$,

$\beta-\alpha=(-1-\sqrt{11})-(-1+\sqrt{11})=-2\sqrt{11}$

이므로

$\alpha>1$, $\beta<-1$이므로

$0<\frac{1}{\alpha}<1$,

$-1<\frac{1}{\beta}<0$

따라서 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^n$은 모두 수렴한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 구할 수도 있다.

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=\frac{-2\sqrt{11}}{-10-(-2)+1}$$
$$=\frac{2\sqrt{11}}{7}$$
답 $\frac{2\sqrt{11}}{7}$

22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(-x)^n}{2}=x^2+x^4+x^6+\cdots$

따라서 주어진 급수는 첫째항과 공비가 모두 x^2인 등비급수이고 그 합이 $\frac{2}{7}$이므로

$\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{2}{7}$, $\quad 7x^2=2-2x^2$

$9x^2=2$, $\quad x^2=\frac{2}{9}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ($\because x>0$) 답 ②

23 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$에서

$\frac{a}{1-r}=3$ …… ㉠

이때

$a_n+a_{n+1}=ar^{n-1}+ar^n=a(1+r)r^{n-1}$

이므로 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$은 첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 r인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=2$에서

$\frac{a(1+r)}{1-r}=2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3(1+r)=2$, $\quad 1+r=\frac{2}{3}$

$\therefore r=-\frac{1}{3}$

$r=-\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$a=3\left(1+\frac{1}{3}\right)=4$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 $a^2=16$, 공비가 $r^2=\frac{1}{9}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{16}{1-\frac{1}{9}}=18$ 답 18

다른 풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})-\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

$=2-3=-1$ …… ㉠

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}ra_n=r\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3r$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-1=3r$ $\quad \therefore r=-\frac{1}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$에서

$\frac{a_1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=3$ $\quad \therefore a_1=4$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 $a_1^2=16$, 공비가 $r^2=\frac{1}{9}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{16}{1-\frac{1}{9}}=18$

24 주어진 급수의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{\log_2 x^2-2}{4}$이므로 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{\log_2 x^2-2}{4}<1$, $\quad -2<\log_2 x^2<6$

$\log_2 2^{-2}<\log_2 x^2<\log_2 2^6$

$\therefore 2^{-2}<x^2<2^6$, 즉 $\frac{1}{4}<x^2<64$

따라서 정수 x는 ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ±6, ±7의 14개이다. 답 ③

25 주어진 급수의 첫째항이 x^2-x-2, 공비가 $\frac{2x-1}{3}$이므로 급수가 수렴하려면

$x^2-x-2=0$ 또는 $-1<\frac{2x-1}{3}<1$

(i) $x^2-x-2=0$, 즉 $x=-1$ 또는 $x=2$일 때,

$S=0$

(ii) $-1<\frac{2x-1}{3}<1$, 즉 $-1<x<2$일 때,

$S=\frac{x^2-x-2}{1-\frac{2x-1}{3}}=\frac{3(x^2-x-2)}{4-2x}$

$=\frac{3(x+1)(x-2)}{-2(x-2)}=-\frac{3(x+1)}{2}$

이때 $-1<x<2$이므로

$0<x+1<3$, $\quad -\frac{9}{2}<-\frac{3(x+1)}{2}<0$

$\therefore -\frac{9}{2}<S<0$

(i), (ii)에서 $\quad -\frac{9}{2}<S\le0$

따라서 정수 S의 최솟값은 -4이다. 답 -4

26 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로

$-1<r<1$ …… ㉠

① $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}r\cdot(r^2)^{n-1}$은 첫째항이 r, 공비가 r^2인 등비급수이고, ㉠에서 $\quad 0\le r^2<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{r-1}{2}$인 등비급수이고, ㉠에서

$-2<r-1<0$ $\quad \therefore -1<\frac{r-1}{2}<0$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r+1}{3}\right)^n$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{r+1}{3}$인 등비급수이고, ㉠에서

Q BOX

로그함수를 이용한 수의 대소 비교
① $a>1$일 때,
$x_1<x_2$이면
$\log_a x_1<\log_a x_2$
② $0<a<1$일 때,
$x_1<x_2$이면
$\log_a x_1>\log_a x_2$

$x^2-x-2=0$에서
$(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$-1<\frac{2x-1}{3}<1$에서
$-3<2x-1<3$
$-2<2x<4$
$\therefore -1<x<2$

$0<r+1<2 \qquad \therefore 0<\frac{r+1}{3}<\frac{2}{3}$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{5}-1\right)^n$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{r}{5}-1$인 등비급수이고, ㉠에서

$$-\frac{1}{5}<\frac{r}{5}<\frac{1}{5} \qquad \therefore -\frac{6}{5}<\frac{r}{5}-1<-\frac{4}{5}$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

$-\frac{6}{5}<\frac{r}{5}-1\le-1$, 즉 $-1<r\le 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{5}-1\right)^n$은 발산한다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 첫째항과 공비가 모두 $-r$인 등비급수이고, ㉠에서 $\quad -1<-r<1$

따라서 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$이 항상 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n-(-r)^n}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}r^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n\right\}$도 항상 수렴한다.

답 ④

27 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=9\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=9\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)=3$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=9\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}-9\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\\&=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=3$은 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$a_n=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

따라서 $a_2+a_6+a_{10}+a_{14}+\cdots$는 첫째항이

$a_2=3\cdot\frac{2}{3}=2$, 공비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$인 등비급수이므로

$$a_2+a_6+a_{10}+a_{14}+\cdots=\frac{2}{1-\frac{16}{81}}=\frac{162}{65}$$

수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로 $a_{k+4}=\left(\frac{2}{3}\right)^4a_k$에서 공비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^4$임을 알 수 있다.

답 $\frac{162}{65}$

28 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)\end{aligned}$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)(2\cdot5+n\cdot d)}{2}=\frac{(n+1)(10+nd)}{2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)(10+nd)}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)=\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{5}$$

답 ①

29 (i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=\frac{2}{2}=1$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n=S_n-S_{n-1}&=\frac{2n}{n+1}-\frac{2(n-1)}{n}\\&=\frac{2n^2-2(n^2-1)}{n(n+1)}\\&=\frac{2}{n(n+1)} \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=1$은 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$a_n=\frac{2}{n(n+1)}$$

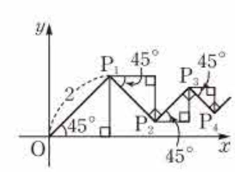
$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{n(n+1)}+\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.\\&\qquad+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=2\cdot\frac{3}{2}=3\end{aligned}$$

답 3

30 $\overline{OP_1}=2$, $\overline{P_1P_2}=2\cdot\frac{3}{4}$,

$\overline{P_2P_3}=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$,

$\overline{P_3P_4}=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $\cdots$이므로 오른쪽 그림에서



$$\begin{aligned}x&=\overline{OP_1}\cos45°+\overline{P_1P_2}\cos45°+\overline{P_2P_3}\cos45°\\&\qquad+\overline{P_3P_4}\cos45°+\cdots\\&=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\&\qquad+2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots\\&=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{3}{4}}=4\sqrt{2},\end{aligned}$$

첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비급수

$y=\overline{OP_1}\sin 45°-\overline{P_1P_2}\sin 45°+\overline{P_2P_3}\sin 45°$
$\quad-\overline{P_3P_4}\sin 45°+\cdots$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$-2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$$

첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $-\frac{3}{4}$인 등비급수

$$=\frac{\sqrt{2}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$\therefore\ xy=\frac{32}{7}$ 답 $\frac{32}{7}$

31 점 P_n이 한없이 가까워지는 점을 $P(x,\ y)$라 하면

원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 위의 점 $P(x,\ y)$에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기가 θ일 때,
$x=r\cos\theta$,
$y=r\sin\theta$

$\angle P_1OP=\angle P_1OP_2+\angle P_2OP_3+\angle P_3OP_4+\cdots$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{6}\pi$$

$\therefore\ x=5\cos\frac{5}{6}\pi=5\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$,

$y=5\sin\frac{5}{6}\pi=5\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이다.

답 ①

32 $l_1=3\cdot1=3$
$\triangle AB_nC_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}a_n$$

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는
$\frac{\sqrt{3}}{2}a$

이때 $l_n=3a_n$이므로

$$l_{n+1}=3a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot3a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}l_n$$

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{3}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{2-\sqrt{3}}$$

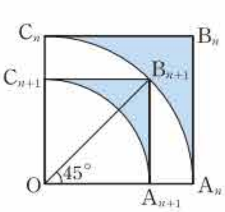
$$\frac{6}{2-\sqrt{3}}=\frac{6(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=12+6\sqrt{3}$$

$=12+6\sqrt{3}$ 답 $12+6\sqrt{3}$

33 $l_n=\overline{A_nB_n}+\overline{B_nC_n}+\overset{\frown}{A_nC_n}$이라 하면

$$l_n=\overline{OA_n}+\overline{OA_n}+\frac{1}{4}\cdot2\pi\cdot\overline{OA_n}=\frac{4+\pi}{2}\overline{OA_n}$$

$\therefore\ l_1=\frac{4+\pi}{2}\cdot2=4+\pi$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{OB_{n+1}}$을 그으면

$\overline{OA_{n+1}}=\overline{OB_{n+1}}\cos 45°$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OA_n}$

$\therefore\ l_{n+1}=\frac{4+\pi}{2}\overline{OA_{n+1}}$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4+\pi}{2}\overline{OA_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}l_n$

즉 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $4+\pi$, 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열이므로

$$l=\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{4+\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{8+2\pi}{2-\sqrt{2}}$$

따라서 $(2-\sqrt{2})l=8+2\pi$이므로
$a=8,\ b=2$
$\therefore\ a+b=10$ 답 10

34 $S_1=1^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2,\ S_2=1^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4,$
$S_3=1^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6,\ \cdots$이므로

$$S_n=1+\sum_{k=1}^{n}4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=1+\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{9}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$ 답 ②

35 $S_1=\pi\cdot3^2=9\pi$
원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$$r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n$$

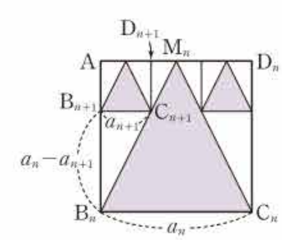
이때 $S_n=\pi\cdot{r_n}^2$이므로

$$S_{n+1}=\pi\cdot{r_{n+1}}^2=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot{r_n}^2=\frac{1}{4}S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 9π, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{9\pi}{1-\frac{1}{4}}=12\pi$$ 답 12π

36 그림 R_n에서 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하자. 오른쪽 그림과 같이 점 A를 한 꼭짓점으로 하고 한 변의 길이가 a_n인 정사각형을 $\square AB_nC_nD_n$이라 하고, $\overline{AD_n}$의 중점을 M_n이라 하면



$\triangle AB_nM_n\backsim\triangle B_{n+1}B_nC_{n+1}$ (AA 닮음)

이때 $\overline{AB_n}:\overline{AM_n}=2:1$이므로
$\overline{B_{n+1}B_n}:\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2:1$
$(a_n-a_{n+1}):a_{n+1}=2:1$
$a_n-a_{n+1}=2a_{n+1}\qquad\therefore\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$

a_1은 □ABCD의 한 변의 길이이고 □ABCD의 넓이는 14이므로
$a_1=\sqrt{14}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{14}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n=\sqrt{14}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

그림 R_n에서 새로 색칠한 삼각형의 개수는 2^{n-1}이므로 그림 R_n에서 새로 색칠한 삼각형의 넓이의 합은

$$2^{n-1}\cdot\frac{1}{2}a_n^{\ 2}=2^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 14\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$=7\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$$

Q BOX

$\triangle M_nB_nC_n$
$=\frac{1}{2}\square AB_nC_nD_n$
$=\frac{1}{2}a_n^{\ 2}$

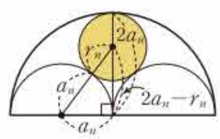
따라서 $S_n=\sum_{k=1}^{n}7\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}7\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{7}{1-\frac{2}{9}}=9$$

답 9

37 오른쪽 그림과 같이 그림 R_n에서 새로 그린 반원의 반지름의 길이를 a_n, 새로 색칠한 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면



$$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n \qquad \therefore\ a_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때 $(a_n+r_n)^2=a_n^{\ 2}+(2a_n-r_n)^2$이므로

$$2a_n^{\ 2}-3a_nr_n=0, \qquad a_n(2a_n-3r_n)=0$$

$a_n\neq 0$이므로 $\qquad 2a_n-3r_n=0$

$$\therefore\ r_n=\frac{2}{3}a_n=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

그림 R_n에서 새로 색칠한 원의 개수는 2^{n-1}이므로 그림 R_n에서 새로 색칠한 원의 넓이의 합은

$$2^{n-1}\cdot\pi r_n^{\ 2}=2^{n-1}\cdot\pi\cdot\frac{16}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{16}{9}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{16}{9}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{16}{9}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{\frac{16}{9}\pi}{1-\frac{1}{2}}=\frac{32}{9}\pi$$

답 $\frac{32}{9}\pi$

38 주어진 급수의 첫째항과 공비가 모두 $0.\dot{5}\times x$이므로 급수가 수렴하려면

$$-1<0.\dot{5}\times x<1$$

이때

$$0.\dot{5}\times x=x(0.5+0.05+0.005+\cdots)$$

$$=x\left(\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\cdots\right)$$

$$=x\cdot\frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{5}{9}x$$

이므로

$$-1<\frac{5}{9}x<1 \qquad \therefore\ -\frac{9}{5}<x<\frac{9}{5}$$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 ③

39 첫째항이

$$0.\dot{2}=0.2+0.02+0.002+\cdots$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{9}$$

이고 공비가 r인 등비급수의 합이

$$0.\dot{3}\dot{5}=0.35+0.0035+0.000035+\cdots$$

$$=\frac{35}{100}+\frac{35}{100^2}+\frac{35}{100^3}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{35}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{35}{99}$$

이므로

$$\frac{\frac{2}{9}}{1-r}=\frac{35}{99}, \qquad \frac{22}{35}=1-r$$

$$\therefore\ r=\frac{13}{35}$$

답 $\frac{13}{35}$

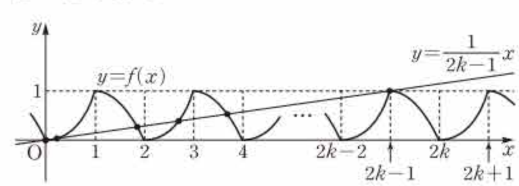
도전! 수능 기출

18쪽

01 (1st) $n=2k-1$, $n=2k$일 때로 나누어 a_n을 구한다.

(i) $n=2k-1$ (k는 자연수)일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2k-1}x$는 다음 그림과 같다.

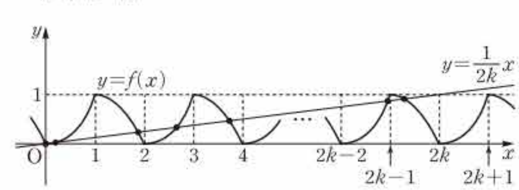


$$\therefore\ a_{2k-1}=2k$$

교점의 개수는
$x=0$에서 1
구간 $(0, 1]$에서 1
구간 $(1, 2]$에서 1
구간 $(2, 3]$에서 1
⋮
구간 $(2k-2, 2k-1]$에서 1
$\therefore\ a_{2k-1}=2k$

(ii) $n=2k$ (k는 자연수)일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2k}x$는 다음 그림과 같다.



$$\therefore\ a_{2k}=2k+1$$

교점의 개수는
$x=0$에서 1
구간 $(0, 1]$에서 1
구간 $(1, 2]$에서 1
구간 $(2, 3]$에서 1
⋮
구간 $(2k-1, 2k]$에서 1
$\therefore\ a_{2k}=2k+1$

(i), (ii)에서 $\qquad a_n=n+1$

2nd $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_n\times a_{n+2}}$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_n\times a_{n+2}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)(n+3)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.\\&\qquad+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

답 ⑤

02 1st $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값을 구한다.

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}<a_n<2^n$에서

첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$\frac{2^n-1}{2-1}<a_n<2^n$$

$$\therefore\ 1-\frac{1}{2^n}<\frac{a_n}{2^n}<1$$

이때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}1=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}=1 \quad\cdots\cdots ㉠$$

2nd $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$의 값을 구한다.

$\displaystyle\frac{3n-1}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}b_k<\frac{3n+1}{n}$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=3$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=3$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k$, 즉 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0 \quad\cdots\cdots ㉡$$

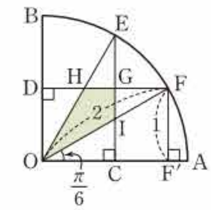
3rd $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{8^n-1}{4^{n-1}a_n+8^{n+1}b_n}$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{8^n-1}{4^{n-1}a_n+8^{n+1}b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{8^n}}{\frac{4^{n-1}a_n}{8^n}+8b_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{8^n}}{\frac{4^{n-1}}{4^n}\cdot\frac{a_n}{2^n}+8b_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{8^n}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{a_n}{2^n}+8b_n}\\&=\frac{1-0}{\frac{1}{4}\cdot1+8\cdot0}\ (\because ㉠, ㉡)\\&=4\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값을 이용할 수 있도록 변형한다.

답 ③

03 1st S_1의 값을 구한다.



오른쪽 그림과 같이 점 F에서 $\overline{\mathrm{OA}}$에 내린 수선의 발을 F′이라 하면 $\overline{\mathrm{FF'}}=1$, $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OA}}=2$이므로 직각삼각형 FOF′에서

$$\sin(\angle\mathrm{FOF'})=\frac{\overline{\mathrm{FF'}}}{\overline{\mathrm{OF}}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \angle\mathrm{FOF'}=\frac{\pi}{6}$$

직각삼각형 OCI에서

$$\overline{\mathrm{CI}}=\overline{\mathrm{OC}}\tan\frac{\pi}{6}=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}=1$

이때 $\triangle\mathrm{OCI}\equiv\triangle\mathrm{ODH}$ (ASA 합동)이므로

$$\begin{aligned}S_1&=\square\mathrm{OCGD}-\triangle\mathrm{OCI}-\triangle\mathrm{ODH}\\&=\square\mathrm{OCGD}-2\triangle\mathrm{OCI}\\&=1\cdot1-2\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\\&=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

2nd S_n을 S_1을 이용한 식으로 나타낸다.

그림 R_n에서 새로 그려진 부채꼴과 그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 부채꼴은 닮음이고, 닮음비는 두 부채꼴 AOB와 JCI의 닮음비인 $2:\frac{\sqrt{3}}{3}$, 즉 $1:\frac{\sqrt{3}}{6}$과 같다.

$\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{CI}}$

따라서 그림 R_n에서 새로 색칠한 사각형과 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한 사각형의 넓이의 비는

$$1^2:\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=1:\frac{1}{12}$$

이때 그림 R_n에서 새로 색칠한 사각형의 개수는 2^{n-1}이므로

$$\begin{aligned}S_n&=S_1+2\cdot\frac{1}{12}S_1+2^2\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2S_1\\&\qquad+\cdots+2^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}S_1\\&=S_1+\frac{1}{6}S_1+\left(\frac{1}{6}\right)^2S_1+\cdots+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}S_1\\&=\sum_{k=1}^{n}S_1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3-\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

3rd $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3-\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{2(3-\sqrt{3})}{5}$$

답 ①

03 지수함수와 로그함수의 미분 W 19쪽

01 ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{\sqrt{5}^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^x=0$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}(2^x-3^{x+1})=\lim_{x\to\infty}3^x\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-3\right\}$

이때 $\lim_{x\to\infty}3^x=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-3\right\}=-3$이므로

$\lim_{x\to\infty}3^x\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-3\right\}=-\infty$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\frac{4^x-4^{-x}}{4^x+4^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{4^{2x}}}{1+\frac{1}{4^{2x}}}=1$

ㄹ. $\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=\infty$이므로

$\lim_{x\to0+}3^{\frac{1}{x}}=\infty$, $\lim_{x\to0+}3^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=0$

$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{1+3^{-\frac{2}{x}}}=1$

$\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$이므로

$\lim_{x\to0-}3^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim_{x\to0-}3^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0-}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\infty$

$\therefore \lim_{x\to0-}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}}}=0$

따라서 $\lim_{x\to0+}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}}}\neq\lim_{x\to0-}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}}}$이므로 극한값은 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

> **지수함수의 극한값의 계산**
> ① $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 ➡ 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.
> ② $\infty-\infty$ 꼴 ➡ 밑이 가장 큰 항으로 묶는다.

02 $\lim_{x\to\infty}(27^x-10^x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to\infty}\left[27^x\left\{1-\left(\frac{10}{27}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{3x}}$

$=\lim_{x\to\infty}(3^{3x})^{\frac{1}{3x}}\cdot\left\{1-\left(\frac{10}{27}\right)^x\right\}^{\frac{1}{3x}}$

$=\lim_{x\to\infty}3\left\{1-\left(\frac{10}{27}\right)^x\right\}^{\frac{1}{3x}}$

$=3\cdot1=3$ 답 ③

03 $\frac{1}{x+1}=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-1+}\frac{2^{\frac{1}{x+1}}+3^a}{2^{\frac{1}{x+1}}+3^b}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^t+3^a}{2^t+3^b}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+3^a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t}{1+3^b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t}$

$=1$

또 $x\to-1-$일 때 $t\to-\infty$이므로

$\lim_{x\to-1-}\frac{2^{\frac{1}{x+1}}+3^a}{2^{\frac{1}{x+1}}+3^b}=\lim_{t\to-\infty}\frac{2^t+3^a}{2^t+3^b}$

$=\frac{3^a}{3^b}=3^{a-b}$

이때 $\lim_{x\to-1}\frac{2^{\frac{1}{x+1}}+3^a}{2^{\frac{1}{x+1}}+3^b}$의 값이 존재하려면 $1=3^{a-b}$이어야 하므로

$a-b=0$

따라서 $c=1$이므로

$a-b-c=0-1=-1$ 답 -1

04 $\lim_{x\to1}(\log_2|x^3-1|-\log_2|x^2+2x-3|)$

$=\lim_{x\to1}\log_2\left|\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}\right|$

$=\lim_{x\to1}\log_2\left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+3)(x-1)}\right|$

$=\log_2\left(\lim_{x\to1}\left|\frac{x^2+x+1}{x+3}\right|\right)$

$=\log_2\frac{3}{4}$ 답 ③

05 $\lim_{x\to\infty}(\log_3\sqrt{ax^2+7x}-\log_3x)$

$=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{\sqrt{ax^2+7x}}{x}$

$=\log_3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{ax^2+7x}}{x}\right)$

> $\frac{\sqrt{ax^2+7x}}{x}$
> $=\sqrt{\frac{ax^2+7x}{x^2}}$
> $=\sqrt{a+\frac{7}{x}}$

$=\log_3\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt{a+\frac{7}{x}}\right)$

$=\log_3\sqrt{a}=\frac{1}{2}\log_3a$

따라서 $\frac{1}{2}\log_3a=\frac{1}{4}$이므로

$\log_3a=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ 답 ④

06 $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3x}\right)\right\}^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x+3}{x+2}\cdot\cdots\cdot\frac{3x+1}{3x}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right\}^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$ 답 $e^{\frac{1}{3}}$

07 $\lim_{x\to0}\left\{(1+ax)\left(1+\frac{x}{b}\right)\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^a\cdot\left\{\left(1+\frac{x}{b}\right)^{\frac{b}{x}}\right\}^{\frac{1}{b}}$

$=e^a\cdot e^{\frac{1}{b}}=e^{a+\frac{1}{b}}$

따라서 $e^{a+\frac{1}{b}}=e^{\frac{7}{3}}$이므로

$a+\frac{1}{b}=\frac{7}{3}$

이때 a, b는 자연수이므로 $\quad a=2,\ b=3$

$\therefore\ a+b=5$ 답 5

Q BOX

$b=1$이면 $a=\frac{4}{3}$이므로

$b\geq 2$

$\therefore\ 0<\frac{1}{b}<1$

이때 $\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}$이므로

$a=2,\ b=3$

08
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^{x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{x}}\\&=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{x}}\\&=\frac{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{a}}{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right\}^{-a}}\\&=\frac{e^{a}}{e^{-a}}=e^{2a}\end{aligned}$$

따라서 $e^{2a}=e^{8}$이므로

$2a=8 \quad \therefore\ a=4$ 답 4

09 $x+5=t$로 놓으면 $x\longrightarrow -5$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -5}\frac{\ln\sqrt[3]{x+6}}{x+5}&=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\sqrt[3]{1+t}}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}\\&=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 ④

10 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\log_3\left(\frac{2+4x}{2+3x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to 0}\log_3\left(\frac{1+2x}{1+\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\log_3(1+2x)-\log_3\left(1+\frac{3}{2}x\right)\right\}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log_3(1+2x)}{x}-\frac{\log_3\left(1+\frac{3}{2}x\right)}{x}\right\}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log_3(1+2x)}{2x}\cdot 2-\frac{\log_3\left(1+\frac{3}{2}x\right)}{\frac{3}{2}x}\cdot\frac{3}{2}\right\}\\&=\frac{1}{\ln 3}\cdot 2-\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2\ln 3}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2\ln 3}$

11 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-1)\ln(1+2x)}{x^{3}+3x^{2}}$

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-1)\ln(1+2x)}{x^{2}(x+3)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{2a}{x+3}\\&=1\cdot 1\cdot\frac{2a}{3}=\frac{2}{3}a\end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{3}a=6$이므로 $\quad a=9$ 답 ②

12 $y=\ln(x+2)$라 하면

$x+2=e^{y} \quad \therefore\ x=e^{y}-2$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=e^{x}-2$

따라서 $g(x)=e^{x}-2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x-1)}{g(x)+1}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{e^{x}-1}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{e^{x}-1}\\&=1\cdot 1=1\end{aligned}$$

답 ②

13
$$\begin{aligned}f(n)&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^{x}-1}{x}+\frac{2^{2x}-1}{x}+\frac{2^{3x}-1}{x}+\cdots+\frac{2^{nx}-1}{x}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^{x}-1}{x}+\frac{2^{2x}-1}{2x}\cdot 2+\frac{2^{3x}-1}{3x}\cdot 3+\cdots+\frac{2^{nx}-1}{nx}\cdot n\right)\\&=(1+2+3+\cdots+n)\ln 2\\&=\frac{n(n+1)}{2}\ln 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{f(n)}&=e^{\frac{n(n+1)}{2}\ln 2}\\&=(e^{\ln 2})^{\frac{n(n+1)}{2}}\\&=2^{\frac{n(n+1)}{2}}\end{aligned}$$

따라서 $e^{f(n)}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$이므로

$$\begin{aligned}&e^{f(1)}\cdot e^{f(2)}\cdot e^{f(3)}\cdot\cdots\cdot e^{f(10)}\\&=2^{\frac{1\cdot 2}{2}}\cdot 2^{\frac{2\cdot 3}{2}}\cdot 2^{\frac{3\cdot 4}{2}}\cdot\cdots\cdot 2^{\frac{10\cdot 11}{2}}\\&=2^{\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\cdots+\frac{10\cdot 11}{2}}\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}&\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\cdots+\frac{10\cdot 11}{2}\\&=\sum_{k=1}^{10}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10}k^{2}+\sum_{k=1}^{10}k\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+\frac{10\cdot 11}{2}\right)=220\end{aligned}$$

이므로

$e^{f(1)}\cdot e^{f(2)}\cdot e^{f(3)}\cdot\cdots\cdot e^{f(10)}=2^{220}$

$\therefore\ a=220$ 답 220

14 $x\longrightarrow\frac{1}{3}$일 때 (분모)$\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow 0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{3}}(ax+b)=0$이므로

$\frac{a}{3}+b=0 \quad \therefore\ b=-\frac{a}{3}$

$$\begin{aligned}ax-\frac{a}{3}&=a\left(x-\frac{1}{3}\right)\\&=at\end{aligned}$$

$x-\frac{1}{3}=t$에서

$3x-1=3t$

$\therefore\ 3x=1+3t$

$x-\frac{1}{3}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\frac{1}{3}$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{ax-\frac{a}{3}}{\ln 3x}&=\lim_{t\to 0}\frac{at}{\ln(1+3t)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{3t}{\ln(1+3t)}\cdot\frac{a}{3}\\&=1\cdot\frac{a}{3}=\frac{a}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{3}=6$이므로 $\quad a=18,\ b=-6$

$\therefore\ a+b=12$ 답 ⑤

15 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면 조건 (가)에서 $x\to0$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(ax^2+bx+c)=0$이므로 $\quad c=0$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{ax^2+bx}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{3}{ax+b}$$
$$=1\cdot\frac{3}{b}=\frac{3}{b}$$

따라서 $\frac{3}{b}=1$이므로 $\quad b=3$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to\infty}f(x)\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}(ax^2+3x)\ln\left\{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right\}^{\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+3x}{x^2}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+3x}{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{3}{x}\right)\cdot\ln\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right\}$$
$$=a\cdot\ln e=a$$
$$\therefore a=2$$

따라서 $f(x)=2x^2+3x$이므로

$f(2)=8+6=14$ 답 14

16 $\frac{f(x)}{\ln(1+2x)}=g(x)$라 하면

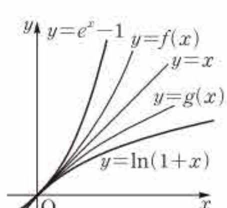
$f(x)=g(x)\ln(1+2x)$이고 $\lim_{x\to0}g(x)=2$이다.

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x^2-x}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t^2+t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{g(t)\ln(1+2t)}{t(t+1)}$$
$$=\lim_{t\to0}g(t)\cdot\frac{\ln(1+2t)}{2t}\cdot\frac{2}{t+1}$$
$$=2\cdot1\cdot2=4$$

답 ④

17 두 함수 $y=\ln(1+x)$와 $y=e^x-1$은 서로 역함수 관계이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.



따라서 $x>0$일 때, $\ln(1+x)\le g(x)\le e^x-1$이므로

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\le\frac{g(x)}{x}\le\frac{e^x-1}{x}$$

이때 $\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to0+}\frac{e^x-1}{x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{x}=1$$

Q BOX

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 α인 직선의 기울기는 $\tan\alpha$

$\triangle ACB=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

$x^2-x=x(x-1)$
$=(t+1)t$
$=t^2+t$

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기는
$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (단, $x_1\neq x_2$)

$y=f(x)$의 그래프가 $y=\ln(1+x)$와 $y=e^x-1$의 그래프의 사이에 있으므로 $y=g(x)$의 그래프도 그 사이에 있다.

$3x=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(3x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{g(3x)}{3x}\cdot3$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{t}\cdot3$$
$$=1\cdot3=3$$

답 3

18 $A\left(t,\ \frac{1}{4}(e^{2t}-1)\right)$ $(t>0)$이므로

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\frac{1}{4}(e^{2t}-1)}{t}=\frac{e^{2t}-1}{4t}$$

이때 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$$\tan\theta=\frac{4t}{e^{2t}-1}$$
$$\therefore \lim_{t\to0+}\tan\theta=\lim_{t\to0+}\frac{4t}{e^{2t}-1}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{2t}{e^{2t}-1}\cdot2$$
$$=1\cdot2=2$$

답 2

19 $t=\log_2 x$에서 $\quad x=2^t$

$\therefore A(2^t,\ t)$

$t=\log_4 x$에서 $\quad x=4^t$

$\therefore B(4^t,\ t)$

점 A를 지나고 x축에 수직인 직선의 방정식은 $x=2^t$이므로 $y=\log_4 2^t=\frac{t}{2}$에서

$$C\left(2^t,\ \frac{t}{2}\right)$$

따라서

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot(4^t-2^t)\cdot\left(t-\frac{t}{2}\right)=\frac{t(4^t-2^t)}{4}$$

이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{t(4^t-2^t)}{4t^2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(4^t-1)-(2^t-1)}{4t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{4}\left(\frac{4^t-1}{t}-\frac{2^t-1}{t}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot(\ln4-\ln2)=\frac{\ln2}{4}$$

답 $\frac{\ln2}{4}$

20 $P(t,\ \ln t)$ $(t>1)$라 하면 직선 AP의 기울기는 $\frac{\ln t}{t-1}$이므로 직선 MQ의 기울기는 $\frac{1-t}{\ln t}$이다.

또 $M\left(\frac{t+1}{2},\ \frac{\ln t}{2}\right)$이므로 직선 MQ의 방정식은

$$y=\frac{1-t}{\ln t}\left(x-\frac{t+1}{2}\right)+\frac{\ln t}{2}$$

$x=0$을 위의 식에 대입하면

$$y=\frac{1-t}{\ln t}\cdot\left(-\frac{t+1}{2}\right)+\frac{\ln t}{2}=\frac{t^2-1}{2\ln t}+\frac{\ln t}{2}$$
$$\therefore Q\left(0,\ \frac{t^2-1}{2\ln t}+\frac{\ln t}{2}\right)$$

제1사분면 위의 점 P가 점 A에 한없이 가까워지면 $t \to 1+$이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{t\to1+}\left(\frac{t^2-1}{2\ln t}+\frac{\ln t}{2}\right)$$

$t-1=s$로 놓으면 $t \to 1+$일 때 $s \to 0+$이므로

$$\lim_{t\to1+}\left(\frac{t^2-1}{2\ln t}+\frac{\ln t}{2}\right)$$

$$=\lim_{s\to0+}\left\{\frac{s^2+2s}{2\ln(1+s)}+\frac{\ln(1+s)}{2}\right\}$$

$$=\lim_{s\to0+}\left\{\frac{s(s+2)}{2\ln(1+s)}+\frac{\ln(1+s)}{2}\right\}$$

$$=\lim_{s\to0+}\left\{\frac{s}{\ln(1+s)}\cdot\frac{s+2}{2}+\frac{\ln(1+s)}{2}\right\}$$

$$=1\cdot1+\frac{\ln1}{2}=1$$

답 1

21 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$$

이때

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{e^{x+1}+ax-e}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\left(\frac{e^x-1}{x}\cdot e+a\right)$$

$$=1\cdot e+a=a+e,$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)=-a$$

이므로

$a+e=-a \qquad \therefore\ a=-\frac{e}{2}$

답 $-\frac{e}{2}$

22 $x\neq0$일 때, $\log_3(1+x)\neq0$이므로

$$f(x)=\frac{a^x-1}{\log_3(1+x)}$$

함수 $f(x)$가 $x>-1$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{\log_3(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\log_3(1+x)}$$

$$=\ln a\cdot\ln3$$

즉 $\ln a\cdot\ln3=(\ln3)^2$이므로

$\ln a=\ln3 \qquad \therefore\ a=3$

따라서 $x\neq0$일 때, $f(x)=\dfrac{3^x-1}{\log_3(1+x)}$이므로

$$f(a)=f(3)=\frac{27-1}{\log_3 4}$$

$$=\frac{13}{\log_3 2}=13\log_2 3$$

답 ⑤

23 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x^{2n-1})}{x^{20-n}}=\frac{(10-n)(14-n)}{3}$$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x^{2n-1})}{x^{20-n}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x^{2n-1})}{7x^{2n-1}}\cdot\frac{7x^{2n-1}}{x^{20-n}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x^{2n-1})}{7x^{2n-1}}\cdot7x^{3n-21}$$

(i) $3n-21<0$, 즉 $n<7$일 때,

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+7x^{2n-1})}{7x^{2n-1}}=1,\ \lim_{x\to0+}7x^{3n-21}=\infty\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+7x^{2n-1})}{x^{20-n}}=\infty$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{\ln(1+7x^{2n-1})}{7x^{2n-1}}=1,$$

$$\lim_{x\to0-}7x^{3n-21}=\infty\ (\text{또는 }-\infty)\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{\ln(1+7x^{2n-1})}{x^{20-n}}=\infty\ (\text{또는 }-\infty)$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(ii) $3n-21=0$, 즉 $n=7$일 때,

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x^{2n-1})}{x^{20-n}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x^{13})}{x^{13}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x^{13})}{7x^{13}}\cdot7$$

$$=1\cdot7=7,$$

$$\frac{(10-n)(14-n)}{3}=\frac{3\cdot7}{3}=7$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(iii) $3n-21>0$, 즉 $n>7$일 때,

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x^{2n-1})}{7x^{2n-1}}=1,\ \lim_{x\to0}7x^{3n-21}=0\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x^{2n-1})}{x^{20-n}}=1\cdot0=0$$

따라서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\dfrac{(10-n)(14-n)}{3}=0$이어야 하므로

$n=10$ 또는 $n=14$

이상에서 자연수 n은 7, 10, 14의 3개이다.

답 ③

24 $f(x)=e^b(ax+1)e^x$이므로

$$f'(x)=e^b\{ae^x+(ax+1)e^x\}$$

$$=(ax+a+1)e^{x+b}$$

이때 $f'(0)=0$이므로

$(a+1)e^b=0 \qquad \therefore\ a=-1\ (\because\ e^b>0)$

$\therefore\ f'(x)=-xe^{x+b}$

또 $f'(2)=-2e^3$이므로

$-2e^{2+b}=-2e^3, \qquad 2+b=3$

$\therefore\ b=1$

따라서 $f(x)=(-x+1)e^{x+1}$, $f'(x)=-xe^{x+1}$이므로

$$\frac{f'(3)}{f(3)}=\frac{-3e^4}{-2e^4}=\frac{3}{2}$$

답 ⑤

Q BOX

$t^2-1=(s+1)^2-1$
$=s^2+2s$

n이 홀수이면 양의 무한대로 발산하고, n이 짝수이면 음의 무한대로 발산한다.

함수 $f(x)=\begin{cases}g(x) & (x>k)\\ h(x) & (x\le k)\end{cases}$ 가 $x=k$에서 연속이면

$\lim_{x\to k+}g(x)=\lim_{x\to k-}h(x)$
$=h(k)$

25 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)$

$=3f'(1)$

이때 $f'(x)=3x^2\cdot5^x+x^3\cdot5^x\ln5$이므로

$3f'(1)=3(3\cdot5+1\cdot5\ln5)$

$=45+15\ln5$ 답 $45+15\ln5$

26 $f'(x)=(2x-a)e^x+(x^2-ax+10)e^x$

$=\{x^2+(2-a)x+10-a\}e^x$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\{t^2+(2-a)t+10-a\}e^t$

모든 실수 t에 대하여 $f'(t)>0$이려면

$t^2+(2-a)t+10-a>0$ ($\because e^t>0$)

이차방정식 $t^2+(2-a)t+10-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2-a)^2-4(10-a)<0$

$a^2-36<0$, $(a+6)(a-6)<0$

$\therefore -6<a<6$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$ 답 ②

27 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)\ln x-4\ln2\}=0$이므로

$f(2)\ln2-4\ln2=0$ $\therefore f(2)=4$

$g(x)=f(x)\ln x$라 하면 $g(2)=4\ln2$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)\ln x-4\ln2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=g'(2)=3$

이때 $g'(x)=f'(x)\ln x+\frac{f(x)}{x}$이므로

$g'(2)=f'(2)\ln2+\frac{f(2)}{2}$

$=f'(2)\ln2+2$

따라서 $f'(2)\ln2+2=3$이므로

$f'(2)=\frac{1}{\ln2}$ 답 $\frac{1}{\ln2}$

28 함수 $f(x)=\log_2 3x$는 닫힌구간 $[1, 9]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 9)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(9)-f(1)}{9-1}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(1, 9)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(9)=\log_2 27$, $f(1)=\log_2 3$이고

$f(x)=\log_2 3x=\log_2 3+\log_2 x$에서 $f'(x)=\frac{1}{x\ln2}$이므로

$\frac{\log_2 27-\log_2 3}{9-1}=\frac{1}{c\ln2}$, $\frac{2\log_2 3}{8}=\frac{1}{c\ln2}$

$\therefore c=\frac{4}{\log_2 3\cdot\ln2}=\frac{4}{\ln3}$ 답 ④

Q BOX

x^3-1
$=(x-1)(x^2+x+1)$

$\log_2 3\cdot\ln2$
$=\frac{\ln3}{\ln2}\cdot\ln2=\ln3$

$f(0)=0$

$f'(0)=3\ln2-\ln4$
$=3\ln2-2\ln2$
$=\ln2$

$e^{x-2}=e^x\cdot e^{-2}$이므로
$(e^{x-2})'=(e^x)'\cdot e^{-2}$
$=e^x\cdot e^{-2}$
$=e^{x-2}$

쌤 한마디

평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

29 $x=0$, $y=0$을 주어진 등식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+\ln2-0-\ln2$

$\therefore f(0)=0$

이때 -1보다 큰 임의의 두 실수 x, h에 대하여

$f(x+h)-f(x)$

$=f(x)+f(h)+e^h\ln(2x+2)-\ln(x+1)$
$\quad-e^h\ln2-f(x)$

$=f(h)+e^h\{\ln(2x+2)-\ln2\}-\ln(x+1)$

$=f(h)+e^h\ln(x+1)-\ln(x+1)$

$=f(h)+(e^h-1)\ln(x+1)$

이므로

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+(e^h-1)\ln(x+1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h}+\frac{e^h-1}{h}\cdot\ln(x+1)\right\}$

$=f'(0)+1\cdot\ln(x+1)$

$=f'(0)+\ln(x+1)$

이때 $f'(3)=3\ln2$이므로

$3\ln2=f'(0)+\ln4$

$\therefore f'(0)=\ln2$ 답 ①

30 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하려면 $x=2$에서 미분가능하고 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$

$\therefore a\ln2=1+b$ ⋯⋯ ㉠

또 $f'(2)$가 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{a}{x} & (x>2)\\ e^{x-2} & (x<2)\end{cases}$$

에서

$\lim_{x\to2+}\frac{a}{x}=\lim_{x\to2-}e^{x-2}$

$\frac{a}{2}=1$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$b=2\ln2-1$

$\therefore a+2b=4\ln2$ 답 $4\ln2$

31 함수 $g(x)$가 $x=b$에서 미분가능하면 $x=b$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to b+} g(x)=\lim_{x\to b-} g(x)=g(b)$$

$$be^b-a=a \qquad \therefore a=\frac{be^b}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $g'(b)$가 존재하므로

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>b) \\ 0 & (x<b) \end{cases}$$

에서

$$\lim_{x\to b+} f'(x)=\lim_{x\to b-} 0 \qquad \therefore f'(b)=0$$

이때 $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$이므로

$$e^b(1+b)=0 \qquad \therefore b=-1\ (\because e^b>0)$$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=-\frac{1}{2e}$

$$\therefore 2ab=\frac{1}{e}$$

답 $\frac{1}{e}$

$\lim_{x\to b+} g(x)$
$=\lim_{x\to b+}\{f(x)-a\}$
$=\lim_{x\to b+}(xe^x-a)$
$=be^b-a$

도전! 수능 기출

W 24쪽

01 1st $f(a)$를 구한다.

$e^{x-1}=a^x$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln e^{x-1}=\ln a^x, \qquad x-1=x\ln a$$

$$(1-\ln a)x=1 \qquad \therefore x=\frac{1}{1-\ln a}$$

$$\therefore f(a)=\frac{1}{1-\ln a}$$

2nd $\lim_{a\to e+}\frac{1}{(e-a)f(a)}$의 값을 구한다.

$$\lim_{a\to e+}\frac{1}{(e-a)f(a)}=\lim_{a\to e+}\frac{1}{(e-a)\cdot\frac{1}{1-\ln a}}$$

$$=\lim_{a\to e+}\frac{\ln a-1}{a-e}$$

$a-e=t$로 놓으면 $a\to e+$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{a\to e+}\frac{\ln a-1}{a-e}=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(e+t)-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{\frac{t}{e}}\cdot\frac{1}{e}$$

$$=1\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$$

답 ②

$\frac{\ln(e+t)-1}{t}$
$=\frac{\ln(e+t)-\ln e}{t}$
$=\frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{t}$

02 1st $\overline{PQ}$의 길이를 구한다.

$P(k,\ e^{\frac{k}{2}})$, $Q(k,\ e^{\frac{k}{2}+3t})$이므로

$$\overline{PQ}=e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}=e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)$$

2nd $\overline{QR}$의 길이를 구한다.

점 R는 직선 $y=e^{\frac{k}{2}+3t}$과 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$의 교점이므로 점 R의 x좌표는 $e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{k}{2}+3t}$에서

$$\frac{x}{2}=\frac{k}{2}+3t \qquad \therefore x=k+6t$$

$$\therefore \overline{QR}=(k+6t)-k=6t$$

3rd k의 값을 구한다.

$\overline{PQ}=\overline{QR}$에서

$$e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)=6t, \qquad e^{\frac{k}{2}}=\frac{6t}{e^{3t}-1}$$

$$\therefore k=2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$$

4th $\lim_{t\to 0+} f(t)$의 값을 구한다.

$f(t)=2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$이므로

$$\lim_{t\to 0+} f(t)=\lim_{t\to 0+} 2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$$

$$=2\lim_{t\to 0+}\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$$

$$=2\ln\left(\lim_{t\to 0+}\frac{3t}{e^{3t}-1}\cdot 2\right)$$

$$=2\ln(1\cdot 2)=\ln 4$$

답 ③

03 1st 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 함을 이용한다.

함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 1-}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1),$$

$$\text{즉 } \lim_{x\to 1+} g(f(x))=\lim_{x\to 1-} g(f(x))=g(f(1))$$

$f(x)=t$로 놓으면

(i) $x\to 1+$일 때, $t\to 1-$이므로

$$\lim_{x\to 1+} g(f(x))=\lim_{t\to 1-} g(t)=2^1+2^{-1}=\frac{5}{2}$$

(ii) $x\to 1-$일 때,

$a>0$이면 $t\to a-$이므로

$$\lim_{x\to 1-} g(f(x))=\lim_{t\to a-} g(t)=2^a+2^{-a}$$

$a<0$이면 $t\to a+$이므로

$$\lim_{x\to 1-} g(f(x))=\lim_{t\to a+} g(t)=2^a+2^{-a}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1-} g(f(x))=2^a+2^{-a}$$

이때 $g(f(1))=g(1)=2^1+2^{-1}=\frac{5}{2}$이므로 (i), (ii)에서

$$2^a+2^{-a}=\frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$a=0$이면
$\lim_{x\to 1-} g(f(x))=g(0)=2$
이므로 $x=1$에서 불연속이다.

$f(1)=-3\cdot 1+4=1$

2nd 모든 실수 a의 값의 곱을 구한다.

㉠에서 $2^a=k\ (k>0)$로 놓으면

$$k+\frac{1}{k}=\frac{5}{2}, \qquad 2k^2-5k+2=0$$

$$(2k-1)(k-2)=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}\text{ 또는 }k=2$$

즉 $2^a=\frac{1}{2}$ 또는 $2^a=2$이므로 $\quad a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$$-1\cdot 1=-1$$

답 ⑤

04 (1st) 점 P의 좌표를 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\ln x=\ln\frac{1}{x}$에서 $\quad x=\frac{1}{x}$

$x^2=1 \quad \therefore x=1\ (\because x>0)$

이때 $f(1)=\ln 1=0$이므로

$\mathrm{P}(1,\ 0)$

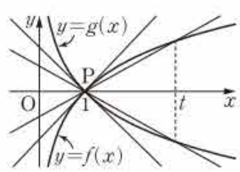
(2nd) 두 곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 각각 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g'(x)=-\frac{1}{x}$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 각각 $f'(1)=1$, $g'(1)=-1$이다.

이때 $f'(1)g'(1)=-1$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다.

(3rd) $\frac{f(t)}{t-1}$, $\frac{g(t)}{t-1}$의 기하적 의미를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $\frac{f(t)}{t-1}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선의 기울기이고, 점 P에서의 접선의 기울기가 1이므로



$$0<\frac{f(t)}{t-1}<1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\frac{g(t)}{t-1}$는 곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $(t,\ g(t))$를 지나는 직선의 기울기이고, 점 P에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$$-1<\frac{g(t)}{t-1}<0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$-1<\frac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}<0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

Q BOX

$\ln x$, $\ln\frac{1}{x}$의 진수의 조건에 의하여

$x>0$, $\frac{1}{x}>0$

$\therefore x>0$

점 P의 x좌표가 양수이다.

$g(x)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$이므로

$g'(x)=-\frac{1}{x}$

원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이

각 θ는 제4사분면의 각이다.

두 실수 a, b에 대하여

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

➡ $a>0$, $b<0$

또는 $a=0$, $b\neq0$

①, ④ ➡ y축

②, ③ ➡ 제4사분면

04 삼각함수의 미분

W 25쪽

01 $y=-3x$를 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(-3x)^2=10, \qquad x^2=1$

$\therefore x=\pm1$

이때 점 P는 제4사분면 위의 점이므로

$\mathrm{P}(1,\ -3)$

또 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{10}$이므로

$\csc\theta=-\frac{\sqrt{10}}{3}$, $\cot\theta=-\frac{1}{3}$

$\therefore \csc\theta-\cot\theta=\frac{-\sqrt{10}+1}{3}$ 답 ②

다른 풀이 $\tan\theta=-3$이므로

$\cot\theta=-\frac{1}{3}$

이때 점 P는 제4사분면 위의 점이므로

$\csc\theta<0$

$$\therefore \csc\theta=-\sqrt{1+\cot^2\theta}=-\sqrt{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$\therefore \csc\theta-\cot\theta=\frac{-\sqrt{10}+1}{3}$

02 $\frac{\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}=-\sqrt{\cot\theta}=-\sqrt{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$에서

$\cos\theta>0$, $\sin\theta<0$

또는 $\cos\theta=0$, $\sin\theta\neq0$

따라서 θ가 나타내는 동경은 제4사분면 또는 y축 위에 있으므로 θ의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

03 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\csc\theta+\sec\theta=-k \quad \cdots\cdots ㉠$

$\csc\theta\sec\theta=-5 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠에서 $\quad \frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=-k$

$\therefore \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-k \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡에서 $\quad \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-5$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{5}$

위의 식을 ㉢에 대입하여 정리하면

$\cos\theta+\sin\theta=\frac{k}{5}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=\frac{k^2}{25}$

$1+2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{k^2}{25}, \qquad k^2=15$

$\therefore k=-\sqrt{15}\ (\because k<0)$ 답 $-\sqrt{15}$

04 점 P의 x좌표는 $\overline{PQ}$의 길이와 같고, y좌표는 $\overline{OQ}$의 길이와 같으므로

$$\csc\theta=\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\frac{1}{\overline{OQ}},$$

$$\sec\theta=\frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}}=\frac{1}{\overline{PQ}}$$

직각삼각형 OPQ에서

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{OQ}\cdot\overline{PQ}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OP}\cdot\overline{QR}$$

$$\therefore \overline{OQ}\cdot\overline{PQ}=\overline{QR}$$

$$\therefore \csc\theta\sec\theta=\frac{1}{\overline{OQ}}\cdot\frac{1}{\overline{PQ}}=\frac{1}{\overline{QR}}$$

답 ④

05 ㄱ. $\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}+\dfrac{1}{\sec\theta+\tan\theta}$

$=\dfrac{\sec\theta+\tan\theta+\sec\theta-\tan\theta}{(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)}$

$=\dfrac{2\sec\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$

$=2\sec\theta$

ㄴ. $\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cot^2\theta}=\dfrac{1}{\sec^2\theta}+\dfrac{1}{\csc^2\theta}$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

ㄷ. $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\dfrac{\sin\theta}{1-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$=\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\cos\theta+\sin\theta$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

06 $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$에서

$1-\tan\theta=(3+2\sqrt{2})(1+\tan\theta)$

$1-\tan\theta=3+2\sqrt{2}+(3+2\sqrt{2})\tan\theta$

$(4+2\sqrt{2})\tan\theta=-2-2\sqrt{2}$

$\therefore \tan\theta=-\dfrac{2+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=-\sqrt{2}$이므로

$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+(-\sqrt{2})^2=3$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\csc\theta>0$이므로

$\csc\theta=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

07 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$이므로

$\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{6}{7}-\dfrac{3}{7}=\dfrac{3}{7}$ 답 ③

Q BOX

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$
$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$

$\sec^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=(\sqrt{5})^2$

$\dfrac{2+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$
$=\dfrac{2(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

08 $\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 각각 제곱하면

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{1}{3}$ ...... ㉠

$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\dfrac{1}{4}$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$2+2(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=\dfrac{7}{12}$

$2+2\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{7}{12}$

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{17}{24}$ 답 $-\dfrac{17}{24}$

09 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\tan\alpha<0$, $\tan\beta>0$이므로

$\tan\alpha=-\sqrt{\sec^2\alpha-1}=-\sqrt{(\sqrt{5})^2-1}=-2,$

$\tan\beta=\sqrt{\sec^2\beta-1}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}\right)^2-1}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{-2+\dfrac{3}{4}}{1-(-2)\cdot\dfrac{3}{4}}=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $p=2$, $q=1$이므로

$p+q=3$ 답 ①

10 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\cot\alpha+\cot\beta=2$ ...... ㉠

$\cot\alpha\cot\beta=\dfrac{2}{3}$ ...... ㉡

㉠에서 $\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}=2$

$\therefore \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}=2$ ...... ㉢

㉡에서 $\dfrac{1}{\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \tan\alpha\tan\beta=\dfrac{3}{2}$

위의 식을 ㉢에 대입하여 정리하면

$\tan\alpha+\tan\beta=3$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{3}{1-\dfrac{3}{2}}=-6$ 답 -6

11 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-\cos\theta$, $\tan\alpha\tan\beta=\sin\theta$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}$

즉 $\dfrac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{1}{2}$이므로 $1-\sin\theta=-2\cos\theta$

위의 식의 양변을 제곱하면

$1-2\sin\theta+\sin^2\theta=4\cos^2\theta$

$1-2\sin\theta+\sin^2\theta=4(1-\sin^2\theta)$

$5\sin^2\theta-2\sin\theta-3=0$

$(5\sin\theta+3)(\sin\theta-1)=0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ 또는 $\sin\theta=1$

이때 주어진 이차방정식이 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=\cos^2\theta-4\sin\theta\ge0$

$(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta\ge0$

$\therefore \sin^2\theta+4\sin\theta-1\le0$ ...... ㉠

(i) $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$일 때,

$\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2+4\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)-1=-\dfrac{76}{25}$

이므로 ㉠을 만족시킨다.

(ii) $\sin\theta=1$일 때,

$1^2+4\cdot1-1=4$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ 답 ②

12 두 직선 $ax-y+1=0$, $x-2y+2=0$, 즉 $y=ax+1$, $y=\dfrac{1}{2}x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=a$, $\tan\beta=\dfrac{1}{2}$

이때 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$가 되려면

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\dfrac{\pi}{3}$

$\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\sqrt{3}$

$\left|\dfrac{a-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}a}\right|=\sqrt{3}$, $\quad |2a-1|=\sqrt{3}|2+a|$

$2a-1=\pm\sqrt{3}(2+a)$

$\therefore a=8+5\sqrt{3}$ 또는 $a=8-5\sqrt{3}$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$(8+5\sqrt{3})(8-5\sqrt{3})=-11$ 답 -11

13 두 직선 $y=-2x$, $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=-2$, $\tan\beta=m$

이때 $\alpha-\beta=45°$이므로

$\tan(\alpha-\beta)=\tan45°$, $\quad \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=1$

$\dfrac{-2-m}{1-2m}=1$, $\quad -2-m=1-2m$

$\therefore m=3$

따라서 직선 $y=3x+n$이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$2=-3+n \quad \therefore n=5$

$\therefore m+n=8$ 답 ④

Q BOX

$\alpha=\dfrac{\pi}{2}+\bullet$, $\beta=\pi-\bullet$

$\therefore \alpha+\beta=\dfrac{3}{2}\pi$

코사인법칙
△ABC에서
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$2a-1=\sqrt{3}(2+a)$에서 $(2-\sqrt{3})a=1+2\sqrt{3}$이므로

$a=\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(1+2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$=8+5\sqrt{3}$

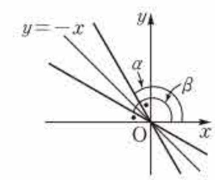
$2a-1=-\sqrt{3}(2+a)$에서 $(2+\sqrt{3})a=1-2\sqrt{3}$이므로

$a=\dfrac{1-2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(1-2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=8-5\sqrt{3}$

14 오른쪽 그림과 같이 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 조건 (가)에 의하여



$\alpha+\beta=\dfrac{3}{2}\pi$

$\tan\alpha=m\,(m<-1)$이라 하면

$\tan\beta=\tan\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{m}$

조건 (나)에 의하여 $\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{6}$이므로

$\tan(\beta-\alpha)=\tan\dfrac{\pi}{6}$

$\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\quad \dfrac{\frac{1}{m}-m}{1+\frac{1}{m}\cdot m}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\dfrac{1}{m}-m=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\dfrac{1}{m^2}-2+m^2=\dfrac{4}{3} \qquad \therefore m^2+\dfrac{1}{m^2}=\dfrac{10}{3}$

$\therefore \tan^2\alpha+\tan^2\beta=m^2+\dfrac{1}{m^2}=\dfrac{10}{3}$ 답 $\dfrac{10}{3}$

15 $\overline{BD}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-1^2}=3$, $\overline{CD}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$이므로

$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos B=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$,

$\sin C=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos C=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \cos(B+C)=\cos B\cos C-\sin B\sin C$

$=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

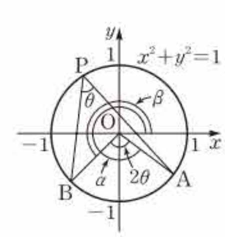
다른 풀이 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=5$이므로 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$

$=-\dfrac{10+5-25}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}$

$=\dfrac{10}{10\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

16 오른쪽 그림과 같이 동경 OA가 나타내는 각의 크기를 $\alpha\left(\dfrac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi\right)$, 동경 OB가 나타내는 각의 크기를 $\beta\left(\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$라 하면



$\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$,

$\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

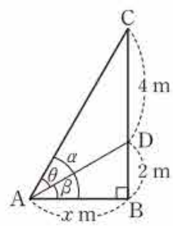
$\angle AOB=2\theta$이므로

$2\theta=\alpha-\beta$

$$\therefore \sin 2\theta=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

답 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

17 오른쪽 그림과 같이 $\angle CAB=\alpha$, $\angle DAB=\beta$라 하고 $\overline{AB}=x$ m$(x>0)$라 하면



$$\tan\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{6}{x},$$

$$\tan\beta=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{2}{x}$$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{6}{x}-\frac{2}{x}}{1+\frac{6}{x}\cdot\frac{2}{x}}=\frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{12}{x^2}}=\frac{4}{x+\frac{12}{x}}$$

즉 $x+\frac{12}{x}$의 값이 최소일 때 $\tan\theta$의 값이 최대이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta$의 값이 최대일 때 θ도 최대이다.

$x>0$, $\frac{12}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{12}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{12}{x}}=4\sqrt{3}$$

이때 등호는 $x=\frac{12}{x}$일 때 성립하므로

$x^2=12$ $\quad\therefore x=2\sqrt{3}$ ($\because x>0$)

따라서 θ가 최대일 때, 두 지점 A, B 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$ m이다.

답 $2\sqrt{3}$ m

18 $$\frac{1-\sin\theta-\cos 2\theta}{\sin 2\theta-\cos\theta}=\frac{1-\sin\theta-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}=\frac{2\sin^2\theta-\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}=\frac{\sin\theta(2\sin\theta-1)}{\cos\theta(2\sin\theta-1)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

답 ⑤

19 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$$

$1-\sin 2\theta=\frac{4}{9}$ $\quad\therefore \sin 2\theta=\frac{5}{9}$

$$\therefore \csc 2\theta=\frac{1}{\sin 2\theta}=\frac{9}{5}$$

답 ③

Q BOX

$\widehat{AB}$에 대한 원주각의 크기가 θ이고 $\angle AOB$는 $\widehat{AB}$에 대한 중심각이므로 $\angle AOB=2\theta$

$\angle ABC=\angle ABP+\angle PBC=2\theta+\theta=3\theta$

$\overline{AC}=\overline{CP}+\overline{AP}=a+3a=4a$

한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

반원에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 θ의 값이 증가하면 $\tan\theta$의 값도 증가한다.

$a>0$, $b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

20 $\overline{AP}=3a$, $\overline{CP}=a\,(a>0)$, $\angle PBC=\theta$, $\angle ABP=2\theta$라 하면 $\angle ABC=3\theta$이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{CP}}{\overline{BC}}=a,\ \tan 3\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=4a$$

$\tan 2\theta=\tan(3\theta-\theta)$에서

$$\tan 2\theta=\frac{\tan 3\theta-\tan\theta}{1+\tan 3\theta\tan\theta}=\frac{4a-a}{1+4a\cdot a}=\frac{3a}{1+4a^2}\quad\cdots\cdots ㉠$$

또 $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$에서

$$\tan 2\theta=\frac{2a}{1-a^2}\quad\cdots\cdots ㉡$$

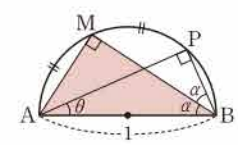
㉠, ㉡에서 $\frac{3a}{1+4a^2}=\frac{2a}{1-a^2}$

$3-3a^2=2+8a^2$ $\quad\therefore a^2=\frac{1}{11}$

$$\therefore \overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=1^2+(4a)^2=1+16a^2=1+\frac{16}{11}=\frac{27}{11}$$

답 $\frac{27}{11}$

21 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PB}$를 그으면 $\widehat{AM}=\widehat{MP}$이므로



$\angle ABM=\angle MBP=\alpha$

라 하면 직각삼각형 ABP에서

$$\theta+2\alpha=\frac{\pi}{2}$$

직각삼각형 ABM에서 $\overline{AM}=\sin\alpha$, $\overline{BM}=\cos\alpha$이므로

$$\triangle ABM=\frac{1}{2}\cdot\overline{AM}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}\sin 2\alpha=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{4}\cos\theta$$

답 ②

22 $$\sqrt{6}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

즉 $2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$이므로 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}$

$$\therefore \cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2=\frac{31}{32}$$

답 $\frac{31}{32}$

23 $2\sin x-2\cos x-\sqrt{6}=0$에서

$$\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\le x\le 2\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{7}{4}\pi$이므로

$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x-\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$

따라서 모든 실근의 합은

$\frac{7}{12}\pi+\frac{11}{12}\pi=\frac{3}{2}\pi$ 　답 $\frac{3}{2}\pi$

24 $f(x)=a\sin x+\sqrt{3}a\cos x+5$

$=2a\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+5$

$=2a\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)+5$

$=2a\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+5$

이때 $a>0$이고 $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$이므로

$-2a\le 2a\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 2a$

$-2a+5\le 2a\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+5\le 2a+5$

$\therefore -2a+5\le f(x)\le 2a+5$

$f(x)$의 최댓값이 11이므로

$2a+5=11$ 　$\therefore a=3$

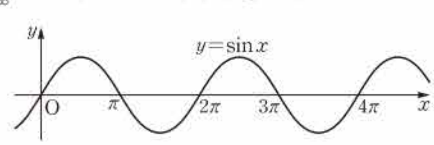
따라서 $f(x)$의 최솟값은

$-2\cdot 3+5=-1$ 　답 -1

25 ① $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x=\infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\tan x=-\infty$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$의 값은 존재하지 않는다.

② 함수 $y=\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $\lim_{x\to\infty}\sin x$의 값은 존재하지 않는다.

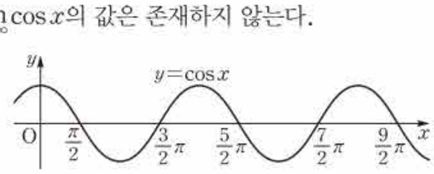


③ $\lim_{x\to 0-}\frac{\cos x}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x}{x}=\infty$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

④ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to\infty}\cos x$

함수 $y=\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $\lim_{x\to\infty}\cos x$의 값은 존재하지 않는다.



⑤ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{1+0}{1}=1$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ⑤이다. 　답 ⑤

Q BOX

$\lim_{x\to 0-}\cos x=1$,

$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$이므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{\cos x}{x}=-\infty$

또 $\lim_{x\to 0+}\cos x=1$,

$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$이므로

$\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x}{x}=\infty$

$\frac{\sin x}{\tan x}=\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}$

$=\cos x$

26 $\lim_{x\to 0}\frac{\csc x-\cot x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}$

$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ 　답 $\frac{1}{2}$

27 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sec\theta-1}{\sec 2\theta-1}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{1}{\cos\theta}-1}{\frac{1}{\cos 2\theta}-1}$

$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}}$

$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{1-(2\cos^2\theta-1)}{2\cos^2\theta-1}}$

$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{2(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{2\cos^2\theta-1}}$

$=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\cos^2\theta-1}{2\cos\theta(1+\cos\theta)}$

$=\frac{2\cdot 1^2-1}{2\cdot 1\cdot 2}=\frac{1}{4}$ 　답 ⑤

28 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{\sin 2x\sin 3x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3}$

$=1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ 　답 ③

29 $f(\theta)=2-\frac{4}{2+\sin\theta}=\frac{2\sin\theta}{2+\sin\theta}$이므로

$\lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin\theta}{\theta(2+\sin\theta)}$

$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{2}{2+\sin\theta}$

$=1\cdot\frac{2}{2}=1$ 　답 ⑤

30 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}+e^{\tan 2x}-2}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{x}+\frac{e^{\tan 2x}-1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}+\frac{e^{\tan 2x}-1}{\tan 2x}\cdot\frac{\tan 2x}{2x}\cdot 2\right)$

$=1\cdot 1+1\cdot 1\cdot 2=3$ 　답 ④

31 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{f(x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{\ln(1+2x)}{f(x)}\cdot\frac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot\frac{3}{2}$

$\displaystyle=1\cdot2\cdot1\cdot\frac{3}{2}=3$ 답 3

> $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{f(x)}$
> $\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{f(x)}{\ln(1+2x)}}$
> $\displaystyle=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

32 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-(2\cos^2 x-1)}{x^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(1+2\cos x)(1-\cos x)}{x^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(1+2\cos x)(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(1+2\cos x)\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1+2\cos x}{1+\cos x}$

$\displaystyle=1^2\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

33 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos ax}{x\log_3(x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x}{\log_3(x+1)}\cdot\frac{1-\cos ax}{x^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x}{\log_3(x+1)}\cdot\frac{(1-\cos ax)(1+\cos ax)}{x^2(1+\cos ax)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x}{\log_3(x+1)}\cdot\frac{\sin^2 ax}{x^2(1+\cos ax)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x}{\log_3(x+1)}\cdot\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2\cdot\frac{a^2}{1+\cos ax}$

$\displaystyle=\ln3\cdot1^2\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}\ln3$

따라서 $\frac{a^2}{2}\ln3=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln3$이므로

$a^2=1$　　$\therefore a=1\ (\because a>0)$ 답 ③

34 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^n}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x^n}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^n\cos x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^n\cos x(\cos x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^3 x}{x^n\cos x(\cos x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{x^{n-3}}\cdot\frac{-1}{\cos x(\cos x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}1^3\cdot\frac{1}{x^{n-3}}\cdot\frac{-1}{1\cdot2}$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{n-3}}$

> $(\cos x-1)(\cos x+1)$
> $=\cos^2 x-1$
> $=-\sin^2 x$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^n}$의 값이 존재하려면 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{n-3}}$의 값이 존재해야 하므로 자연수 n은 1, 2, 3의 3개이다. 답 ③

쌤한마디

(i) $n<3$일 때,

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{n-3}}=\lim_{x\to0}x^{3-n}=0$

(ii) $n=3$일 때,

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{n-3}}=1$

(iii) $n>3$일 때,

$\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^{n-3}}=\infty$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{n-3}}$의 값은 존재하지 않는다.

35 ㄱ. $x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{4}$일 때 $t\to0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\tan2x=\lim_{t\to0}2t\tan\left(\frac{\pi}{2}+2t\right)$

$\displaystyle=\lim_{t\to0}\frac{-2t}{\tan2t}=-1$

ㄴ. $1-\sqrt{x}=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t(t-2)}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{t-2}$

$\displaystyle=1\cdot\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

> $1-\sqrt{x}=t$에서
> $\sqrt{x}=1-t$
> $x=1-2t+t^2$
> $\therefore x-1=t^2-2t$
> $=t(t-2)$

ㄷ. $\frac{2}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{2}{x}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}\cdot2=1\cdot2=2$

ㄹ. $\sin\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\tan\left(\sin\frac{1}{x}\right)\csc\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\tan\left(\sin\frac{1}{x}\right)}{\sin\frac{1}{x}}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0+}\frac{\tan t}{t}=1$

> $x\to\infty$일 때 $\frac{1}{x}\to0+$이므로
> $\sin\frac{1}{x}\to0+$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

36 $x-3=t$로 놓으면 $x\to3$일 때 $t\to0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sin\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{x-3}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{2}t\right)\right\}}{t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\pi}{2}$

$\displaystyle=1\cdot1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ 답 ①

37 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)f(-x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 2x}\cdot\frac{1+\sin(-3x)}{1-\sin(-2x)}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 2x}\cdot\frac{1-\sin 3x}{1+\sin 2x}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 3x}{1-\sin^2 2x}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 2x}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ …… ㉠

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이고,

$\cos^2 3x=\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi+3t\right)=\sin^2 3t$,

$\cos^2 2x=\cos^2(\pi+2t)=\cos^2 2t$

이므로 ㉠에서

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)f(-x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 3t}{\cos^2 2t}\cdot\frac{1}{t^2}$

$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin 3t}{3t}\right)^2\cdot\frac{9}{\cos^2 2t}$

$=1^2\cdot\frac{9}{1}=9$ 답 9

38 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{ax+b}=2$에서 $x\to 0$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(ax+b)=0$이므로

$b=0$

$b=0$을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{a}=1\cdot\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$

따라서 $\frac{2}{a}=2$이므로 $a=1$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin(a-b)x}{\tan(a+b)x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}$

$=1\cdot 1=1$ 답 1

39 $x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to a}\ln(1+3x)=0$이므로

$\ln(1+3a)=0$, $1+3a=1$

$\therefore a=0$

$a=0$을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 3$

$=1\cdot 1\cdot 3=3$

$\therefore b=3$

$\therefore a^2+b^2=9$ 답 ④

Q BOX

$-\theta$의 삼각함수
① $\sin(-\theta)=-\sin\theta$
② $\cos(-\theta)=\cos\theta$
③ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

원 C의 반지름의 길이

$\overline{BK}=\overline{BC}-\overline{CK}$
$=1-r$

40 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)로 놓으면 주어진 등식은

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\pi-x)}{ax+b}=\frac{1}{3}$ …… ㉠

㉠에서 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$이므로

$\frac{a}{2}\pi+b=0$ $\therefore b=-\frac{a}{2}\pi$ …… ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\pi-x)}{ax-\frac{a}{2}\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\pi-x)}{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\pi-x)}{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{at}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{at}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{a}$

$=1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

즉 $\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$이므로 $a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=-\frac{3}{2}\pi$

따라서 $f(x)=3x-\frac{3}{2}\pi$이므로

$f(\pi)=3\pi-\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore k=\frac{3}{2}$ 답 ④

41 $\overline{OP}=\sqrt{t^2+\sin^2 t}$, $\overline{PR}=\overline{PQ}=\sin t$이므로

$\overline{OR}=\overline{OP}-\overline{PR}=\sqrt{t^2+\sin^2 t}-\sin t$

$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{\overline{OR}}{\overline{PQ}}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{t^2+\sin^2 t}-\sin t}{\sin t}$

$=\lim_{t\to 0+}\left(\sqrt{\frac{t^2+\sin^2 t}{\sin^2 t}}-1\right)$

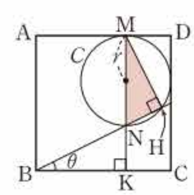
$=\lim_{t\to 0+}\left\{\sqrt{\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2+1}-1\right\}$

$=\sqrt{1^2+1}-1=\sqrt{2}-1$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$a-b=-2$ 답 -2

42 오른쪽 그림과 같이 직선 MN이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 K라 하고 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면



$\overline{NK}=1-2r$, $\overline{BK}=1-r$

이므로 직각삼각형 NBK에서

$\tan\theta=\frac{\overline{NK}}{\overline{BK}}=\frac{1-2r}{1-r}$

$(1-r)\tan\theta=1-2r$

$(2-\tan\theta)r=1-\tan\theta$

$\therefore\ r=\dfrac{1-\tan\theta}{2-\tan\theta}$ ...... ㉠

직각삼각형 MNH에서

$\angle\mathrm{HMN}=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{MNH}=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{BNK}=\theta$

$\angle\mathrm{MNH}=\angle\mathrm{BNK}$
(맞꼭지각)

이므로

$\overline{\mathrm{NH}}=2r\sin\theta,\ \overline{\mathrm{MH}}=2r\cos\theta$

$\therefore\ S(\theta)=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{NH}}\cdot\overline{\mathrm{MH}}=\dfrac{1}{2}\cdot 2r\sin\theta\cdot 2r\cos\theta$

$=r^2\sin 2\theta=\left(\dfrac{1-\tan\theta}{2-\tan\theta}\right)^2\sin 2\theta\ (\because ㉠)$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sqrt{S(\theta)}}{\frac{\pi}{4}-\theta}$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{(1-\tan\theta)\sqrt{\sin 2\theta}}{(2-\tan\theta)\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sqrt{\sin 2\theta}}{2-\tan\theta}\cdot\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sqrt{1}}{2-1}\cdot\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$

$\dfrac{\pi}{4}-\theta=t$로 놓으면 $\theta\longrightarrow\dfrac{\pi}{4}-$일 때 $t\longrightarrow 0+$이므로

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-t\right)$
$=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan t}$
$=\dfrac{1-\tan t}{1+\tan t}$

$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\lim_{t\to 0+}\frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0+}\frac{1-\frac{1-\tan t}{1+\tan t}}{t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0+}\frac{2\tan t}{t(1+\tan t)}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0+}\frac{\tan t}{t}\cdot\frac{2}{1+\tan t}$

$=1\cdot\dfrac{2}{1}=2$ 답 2

43 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\displaystyle f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\sin 2(x-1)}{x-1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$\displaystyle k=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-\sin 2t}{t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\ln(1+t)}{t}-\frac{\sin 2t}{2t}\cdot 2\right\}$

$=1-1\cdot 2=-1$ 답 -1

44 $x\neq 0$일 때, $(e^{2x}-1)^2\neq 0$이므로

$f(x)=\dfrac{a-2\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\displaystyle f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{a-2\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$ ... ㉠

㉠에서 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(a-2\cos\frac{\pi}{2}x\right)=0$이므로

$a-2=0\qquad\therefore\ a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$f(0)$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(e^{2x}-1)^2}\cdot\frac{\left(1-\cos\frac{\pi}{2}x\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(e^{2x}-1)^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}x}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{8\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}$

$=1^2\cdot 1^2\cdot\dfrac{\pi^2}{8\cdot 2}=\dfrac{\pi^2}{16}$

$\therefore\ af(0)=2\cdot\dfrac{\pi^2}{16}=\dfrac{\pi^2}{8}$ 답 ⑤

45 $f(x)=2\sin(x+\alpha)+\cos(x+\alpha)$

$=2(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha)$
$\quad+\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha$

$=\sin x(2\cos\alpha-\sin\alpha)$
$\quad+\cos x(2\sin\alpha+\cos\alpha)$

이므로

$f'(x)=\cos x(2\cos\alpha-\sin\alpha)$
$\quad-\sin x(2\sin\alpha+\cos\alpha)$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$에서

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2\cos\alpha-\sin\alpha)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0$

$2\cos\alpha-\sin\alpha-2\sin\alpha-\cos\alpha=0$

$\cos\alpha=3\sin\alpha,\qquad\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{3}$

$\cos\alpha=0$이면
$0=3\sin\alpha$
$\therefore\ \sin\alpha=0$
이때 $\cos\alpha=0,\ \sin\alpha=0$인 α는 존재하지 않으므로
$\cos\alpha\neq 0$

$\therefore\ \tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

46 $\displaystyle f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin(x+h)-\cos x\sin x}{h}$

$\displaystyle=\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$g(x)=\sin x$로 놓으면
$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$
$=g'(x)$
$=\cos x$

$=\cos x\cos x$

이므로

$f'(x)=-\sin x\cos x+\cos x(-\sin x)$

$=-2\sin x\cos x$

$\therefore\ f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

47 $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3\tan h+h^3\sin\frac{1}{h^2}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\tan h}{h}\cdot 3+h^2\sin\frac{1}{h^2}\right)$ …… ㉠

$h\neq 0$일 때, $-1\le\sin\frac{1}{h^2}\le 1$이고 $h^2>0$이므로

$-h^2\le h^2\sin\frac{1}{h^2}\le h^2$

이때 $\lim_{h\to 0}(-h^2)=0$, $\lim_{h\to 0}h^2=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{h\to 0}h^2\sin\frac{1}{h^2}=0$

$\therefore f'(0)=1\cdot 3+0=3$ ($\because$ ㉠) 답 ③

48 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=0$, $x=2$에서 미분가능하고 $x=0$, $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

$\therefore 4b+2c=\ln 2$ …… ㉠

또 $f'(x)=\begin{cases} a\cos x & (x<0) \\ 2bx+c & (0<x<2) \\ \frac{1}{x} & (x>2)\end{cases}$에서

$f'(0)$이 존재하므로

$\lim_{x\to 0-}a\cos x=\lim_{x\to 0+}(2bx+c)$

$\therefore a=c$ …… ㉡

$f'(2)$가 존재하므로

$\lim_{x\to 2-}(2bx+c)=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x}$

$\therefore 4b+c=\frac{1}{2}$ …… ㉢

㉠－㉢을 하면 $c=\ln 2-\frac{1}{2}$

$c=\ln 2-\frac{1}{2}$을 ㉢에 대입하면

$4b+\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $4b=1-\ln 2$

$\therefore b=\frac{1}{4}-\frac{\ln 2}{4}$

또 ㉡에서 $a=c=\ln 2-\frac{1}{2}$이므로

$a+b+c=\frac{7}{4}\ln 2-\frac{3}{4}$ 답 $\frac{7}{4}\ln 2-\frac{3}{4}$

49 $f(x)=\begin{cases} -ax+\sin x & (-\pi<x<0) \\ ax-\sin x & (0\le x<\pi)\end{cases}$

$-\pi<x<0$일 때, $\sin x<0$이므로 $f(x)=a\cdot(-x)-(-\sin x)=-ax+\sin x$
$0\le x<\pi$일 때, $\sin x\ge 0$이므로 $f(x)=ax-\sin x$

이때

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(-ax+\sin x)=0$,

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(ax-\sin x)=0$,

$f(0)=a\cdot 0-\sin 0=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $f'(0)$이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases} -a+\cos x & (-\pi<x<0) \\ a-\cos x & (0<x<\pi)\end{cases}$

에서

$\lim_{x\to 0-}(-a+\cos x)=\lim_{x\to 0+}(a-\cos x)$

$-a+1=a-1$ $\therefore a=1$

따라서 $f(x)=|x|-|\sin x|$이므로

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1$

$\therefore a+f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ 답 ④

도전! 수능 기출

W 33쪽

01 1st $\sin\alpha$, $\cos\alpha$의 값을 구한 후 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\sin(x+\alpha)$를 구한다.

$\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$에서 $\sec\alpha>0$이므로

$\sec\alpha=\sqrt{\tan^2\alpha+1}=\sqrt{\left(-\frac{5}{12}\right)^2+1}=\frac{13}{12}$

$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{12}{13}$

또 $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$에서 $\sin\alpha<0$이므로

$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$

$\therefore \sin(x+\alpha)=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha$

$=\frac{12}{13}\sin x-\frac{5}{13}\cos x$

2nd 주어진 부등식을 정리한다.

$\cos x\le\sin(x+\alpha)\le 2\cos x$에서

$\cos x\le\frac{12}{13}\sin x-\frac{5}{13}\cos x\le 2\cos x$

각 변을 $\cos x$로 나누면

$0\le x<\frac{\pi}{2}$일 때, $0<\cos x\le 1$이므로 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$1\le\frac{12}{13}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{5}{13}\le 2$

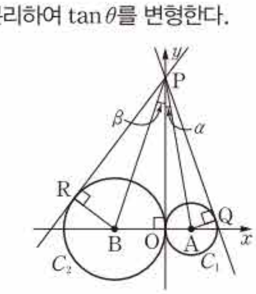
$\frac{18}{13}\le\frac{12}{13}\tan x\le\frac{31}{13}$ $\therefore \frac{3}{2}\le\tan x\le\frac{31}{12}$

3rd $\tan x$의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

$\tan x$의 최댓값은 $\frac{31}{12}$, 최솟값은 $\frac{3}{2}$이므로 구하는 합은

$\frac{31}{12}+\frac{3}{2}=\frac{49}{12}$ 답 ④

02 1st $\angle$RPQ를 적당히 분리하여 $\tan\theta$를 변형한다.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{BP}$, $\overline{BR}$를 그으면 $\overline{AQ}\perp\overline{PQ}$, $\overline{PO}\perp\overline{AB}$, $\overline{BR}\perp\overline{PR}$이므로

$\triangle$POA$\equiv\triangle$PQA (RHS 합동),

$\triangle$POB$\equiv\triangle$PRB (RHS 합동)

$\therefore\ \angle APO=\angle APQ,\ \angle BPO=\angle BPR$

$\angle APO=\alpha,\ \angle BPO=\beta$라 하면

$\theta=\angle RPQ=2(\alpha+\beta)$이므로

$$\tan\theta=\tan 2(\alpha+\beta)=\frac{4}{3}$$

2nd 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\tan(\alpha+\beta)$의 값을 구한다.

$\tan 2(\alpha+\beta)=\dfrac{2\tan(\alpha+\beta)}{1-\tan^2(\alpha+\beta)}$에서 $\tan(\alpha+\beta)=t$라 하면

$$\frac{2t}{1-t^2}=\frac{4}{3},\qquad 6t=4-4t^2$$

$$2t^2+3t-2=0,\qquad (t+2)(2t-1)=0$$

$$\therefore\ t=-2 \text{ 또는 } t=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=-2 \text{ 또는 } \tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$$

이때 $a>\sqrt{2}$에서 $0<\theta<\pi$이므로

$$0<2(\alpha+\beta)<\pi\qquad \therefore\ 0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$$

따라서 $\tan(\alpha+\beta)>0$이므로

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\qquad \cdots\cdots ㉠$$

3rd $(a-3)^2$의 값을 구한다.

직각삼각형 POA에서 $\tan\alpha=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{PO}}=\dfrac{1}{a}$

직각삼각형 POB에서 $\tan\beta=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{PO}}=\dfrac{2}{a}$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$이므로

$$\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{2}{a}}{1-\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{a}}\ (\because ㉠)$$

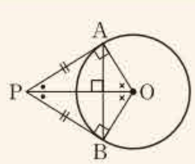
$$\frac{3a}{a^2-2}=\frac{1}{2}\qquad \therefore\ a^2-6a=2$$

$$\therefore\ (a-3)^2=a^2-6a+9=11$$

답 11

쌤 한마디

오른쪽 그림과 같이 원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때



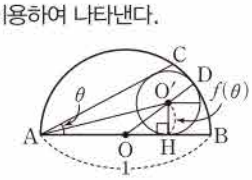
① $\overline{PA}\perp\overline{OA},\ \overline{PB}\perp\overline{OB}$
② $\overline{PO}\perp\overline{AB}$
③ $\triangle APO\equiv\triangle BPO$ (RHS 합동)
④ $\overline{PA}=\overline{PB}$
⑤ $\angle APO=\angle BPO,\ \angle POA=\angle POB$

$a=\sqrt{2}$이면 두 직선 PA, PB의 기울기의 곱이 $-\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-1$ 이므로 $\overline{PA}\perp\overline{PB}$이다.
$\therefore\ \theta=2\cdot\dfrac{\pi}{2}=\pi$
이때 a의 값이 증가하면 θ의 값은 감소하므로 $a>\sqrt{2}$에서 $0<\theta<\pi$

03

1st 반원의 중심과 원의 중심을 이용하여 만든 직각삼각형의 변의 길이를 $f(\theta)$를 이용하여 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$의 중점을 O라 하고, $\overset{\frown}{BC}$와 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$에 동시에 접하는 원의 중심을 O′, 원과 $\overset{\frown}{BC}$의 접점을 D, 점 O′에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{O'D}=\overline{O'H}=f(\theta),\ \angle O'AH=\frac{\theta}{2}$$

이므로 직각삼각형 O′AH에서

$$\overline{AH}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

또한 세 점 O, O′, D는 한 직선 위에 있으므로

$$\overline{OO'}=\overline{OD}-\overline{O'D}=\frac{1}{2}-f(\theta)$$

따라서 직각삼각형 O′OH에서

$$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}$$
$$=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2-\{f(\theta)\}^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}-f(\theta)}$$

점 O′에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면
$\triangle O'HA\equiv\triangle O'H'A$ (RHS합동)
$\therefore\ \angle O'AH=\angle O'AH'=\dfrac{\theta}{2}$

점 D에서의 접선은 반원과 원에 동시에 접하므로 $\overline{OD}$, $\overline{O'D}$와 각각 수직이다.
따라서 세 점 O, O′, D는 한 직선 위에 있다.

2nd $\overline{OH}=\overline{AH}-\overline{OA}$임을 이용하여 $f(\theta)$를 $\tan\frac{\theta}{2}$에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{OH}=\overline{AH}-\overline{OA}$이므로

$$\sqrt{\frac{1}{4}-f(\theta)}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\frac{1}{4}-f(\theta)=\frac{\{f(\theta)\}^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}}-\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{\{f(\theta)\}^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}}-\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}+f(\theta)=0$$

$$\frac{f(\theta)}{\tan^2\frac{\theta}{2}}\left\{f(\theta)-\tan\frac{\theta}{2}+\tan^2\frac{\theta}{2}\right\}=0$$

$$\therefore\ f(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$\left(\because\ f(\theta)>0,\ \tan^2\frac{\theta}{2}>0\right)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$에서 $0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{8}$이므로
$\tan\dfrac{\theta}{2}\neq 0$
$\therefore\ \tan^2\dfrac{\theta}{2}>0$

3rd 100α의 값을 구한다.

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$$
$$=1^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

따라서 $\alpha=\dfrac{1}{4}$이므로 $\quad 100\alpha=25$

답 25

04

1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $x<-\dfrac{\pi}{2}$에서 $g(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}-}g(x)=0$$

2nd 함수의 연속의 정의를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $a=2$이면 $f(x)=\sin^2 x+2\cos x$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}-}f(g(x))$$
$$=f(0)\ (\because ㄱ)$$
$$=\sin^2 0+2\cos 0=2$$

또 $g(x)=t$로 놓으면 $x \to -\frac{\pi}{2}+$일 때

$t \to -\frac{\pi}{2}+$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}f(g(x))$$
$$=\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}+}f(t)$$
$$=\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=1$$

$$\therefore \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}-}(f\circ g)(x)\neq\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}(f\circ g)(x)$$

따라서 $a=2$이면 합성함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=-\frac{\pi}{2}$에서 불연속이다.

3rd a에 대한 항등식을 세워 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 합성함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=\pi$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to\pi-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to\pi+}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(\pi),$$

즉 $\lim_{x\to\pi-}f(g(x))=\lim_{x\to\pi+}f(g(x))=f(g(\pi))$

$g(x)=s$로 놓으면

$x\to\pi-$일 때 $s\to\pi-$이므로

$$\lim_{x\to\pi-}f(g(x))=\lim_{s\to\pi-}f(s)=\sin^2\pi+a\cos\pi$$
$$=-a$$

$x\to\pi+$일 때

$b>0$이면 $s\to b\pi+$이므로

$$\lim_{x\to\pi+}f(g(x))=\lim_{s\to b\pi+}f(s)$$
$$=\sin^2 b\pi+a\cos b\pi$$

$b<0$이면 $s\to b\pi-$이므로

$$\lim_{x\to\pi+}f(g(x))=\lim_{s\to b\pi-}f(s)$$
$$=\sin^2 b\pi+a\cos b\pi$$

$$\therefore \lim_{x\to\pi+}f(g(x))=\sin^2 b\pi+a\cos b\pi$$

이때

$$f(g(\pi))=f(b\pi)=\sin^2 b\pi+a\cos b\pi$$

이므로

$$\sin^2 b\pi+a\cos b\pi=-a$$
$$\therefore 1-\cos^2 b\pi+a(\cos b\pi+1)=0$$

위의 등식은 a에 대한 항등식이므로

$$1-\cos^2 b\pi=0,\ \cos b\pi+1=0$$
$$\therefore \cos b\pi=-1$$

따라서 $b\pi=(2n-1)\pi$ (n은 정수)이므로

$$b=2n-1\ (n\text{은 정수})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

쌤한마디

다음은 모두 a에 대한 항등식을 나타낸다.
① a의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
② 모든 a에 대하여 성립하는 등식
③ 임의의 a에 대하여 성립하는 등식

QBOX

$b=0$이면
$\lim_{x\to\pi+}f(g(x))=f(0)=a$
이므로 $a=0$일 때만 $x=\pi$에서 연속이다.

$\cdots=\cos(-\pi)=\cos\pi=\cos 3\pi=\cos 5\pi=\cdots=-1$

05 여러 가지 미분법 Ⓦ 34쪽

01 $g'(x)=-\frac{-f(x)-xf'(x)}{\{5-xf(x)\}^2}=\frac{f(x)+xf'(x)}{\{5-xf(x)\}^2}$

이므로

$$g'(0)=\frac{f(0)+0\cdot f'(0)}{\{5-0\cdot f(0)\}^2}=\frac{100}{25}=4$$ 답 4

02 $f'(x)=\frac{2(x^2+4)-(2x-3)\cdot 2x}{(x^2+4)^2}$

$$=\frac{-2x^2+6x+8}{(x^2+4)^2}$$

$(x^2+4)^2>0$이므로 $f'(x)\geq 0$이려면

$-2x^2+6x+8\geq 0,\quad x^2-3x-4\leq 0$

$(x+1)(x-4)\leq 0\quad \therefore -1\leq x\leq 4$

따라서 부등식 $f'(x)\geq 0$을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3, 4의 6개이다. 답 6

> 두 정수 m, $n(m<n)$에 대하여 각 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 다음과 같다.
> ① $m\leq x\leq n$ ➡ $n-m+1$
> ② $m<x\leq n$ 또는 $m\leq x<n$ ➡ $n-m$
> ③ $m<x<n$ ➡ $n-m-1$

03 $f(x)=1-e^{-\ln x}-e^{-2\ln x}-\cdots-e^{-n\ln x}-\cdots$

$$=1-x^{-1}-x^{-2}-\cdots-x^{-n}-\cdots$$
$$=1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\cdots-\frac{1}{x^n}-\cdots$$
$$=1-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots\right)$$
$$=1-\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\ \left(\because 0<\frac{1}{x}<1\right)$$
$$=1-\frac{1}{x-1}$$

첫째항과 공비가 모두 $\frac{1}{x}$인 등비급수

$x>1$이므로 $0<\frac{1}{x}<1$

이므로

$$f'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$$
$$\therefore f'(7)=\frac{1}{36}$$ 답 $\frac{1}{36}$

04 $f(x)=\frac{x^5+3x^2-6x+9}{x^3}$

$$=x^2+3x^{-1}-6x^{-2}+9x^{-3}$$

이므로

$$f'(x)=2x-3x^{-2}+12x^{-3}-27x^{-4}$$
$$=2x-\frac{3}{x^2}+\frac{12}{x^3}-\frac{27}{x^4}$$
$$\therefore f'(3)=6-\frac{1}{3}+\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{52}{9}$$ 답 $\frac{52}{9}$

05 $f(x)=\frac{ax^4-4x^2-1}{x^2}=ax^2-4-x^{-2}$

이므로

$$f'(x)=2ax+2x^{-3}=2ax+\frac{2}{x^3}$$

점 $(2, f(2))$에서의 접선의 기울기가 $\frac{5}{4}$이므로

$f'(2)=\frac{5}{4}$

$$4a+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\qquad \therefore a=\frac{1}{4}$$ 답 ③

06 $\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\left\{f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{-h}$

$=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

이때 $f'(x)=\sec x\tan x+\csc^2 x$이므로

$2f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\{\sqrt{2}\cdot1+(\sqrt{2})^2\}=4+2\sqrt{2}$

답 $4+2\sqrt{2}$

07 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

$\therefore a+b=0$ …… ㉠

또 $f'(0)$이 존재하므로

$f'(x)=\begin{cases}ae^x-1 & (x>0)\\ \sec^2 x & (x<0)\end{cases}$

에서 $\lim_{x\to0+}(ae^x-1)=\lim_{x\to0-}\sec^2 x$

$a-1=1$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore ab=-4$

답 ①

쌤한마디

구간에 따라 다르게 정의된 함수의 미분가능성

미분가능한 두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 함수

$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\ge a)\\ h(x) & (x<a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

➡ $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)$,

즉 $\lim_{x\to a-}h(x)=g(a)$

② $x=a$에서 함수 $f(x)$의 미분계수가 존재한다.

➡ $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$,

즉 $g'(a)=h'(a)$

08 $f(1)=\left(-\frac{3}{1+2}\right)^5=-1$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)+1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=f'(1)$

이때

$f'(x)=5\left(-\frac{3x}{x^2+2}\right)^4\cdot\frac{-3(x^2+2)+3x\cdot2x}{(x^2+2)^2}$

$=5\left(-\frac{3x}{x^2+2}\right)^4\cdot\frac{3x^2-6}{(x^2+2)^2}$

이므로

$f'(1)=5\cdot\left(-\frac{3}{1+2}\right)^4\cdot\frac{3-6}{(1+2)^2}=-\frac{5}{3}$ 답 $-\frac{5}{3}$

Q BOX

$\pi\pm\theta$의 삼각함수

① $\sin(\pi\pm\theta)$

$=\mp\sin\theta$ (복호동순)

② $\cos(\pi\pm\theta)$

$=-\cos\theta$

③ $\tan(\pi\pm\theta)$

$=\pm\tan\theta$ (복호동순)

$f'(7)$의 값을 구해야 하므로 $g(x)=7$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

09 $f(x)=\sin^2(3x+\pi)=(-\sin 3x)^2=\sin^2 3x$이므로

$f'(x)=2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot3$

$=6\sin 3x\cos 3x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{9}\right)=6\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 답 ⑤

10 $f(2x+1)=e^{x^2+1}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(2x+1)=2xe^{x^2+1}$

$\therefore f'(2x+1)=xe^{x^2+1}$

$2x+1=-5$에서 $x=-3$이므로 위의 식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$f'(-5)=-3e^{10}$ 답 $-3e^{10}$

11 $F(x)=f(f(x))$라 하면

$F(0)=f(f(0))=f(0)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(f(x))}{x}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)$

$F'(x)=f'(f(x))f'(x)$이므로

$F'(0)=f'(f(0))f'(0)=f'(0)f'(0)$

$=4\cdot4=16$ 답 16

12 $f(g(x))=x^3+6x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=3x^2+12x$ …… ㉠

$g(x)=7$에서 $x^3-1=7$

$x^3=8$ $\therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$f'(g(2))g'(2)=36$

$\therefore f'(7)g'(2)=36$

이때 $g'(x)=3x^2$이므로 $g'(2)=12$

따라서 $f'(7)\cdot12=36$이므로 $f'(7)=3$ 답 3

13 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$h'(0)=63$이므로

$f'(g(0))g'(0)=63$ …… ㉠

$g(x)=e^{3x}+2$에서 $g'(x)=3e^{3x}$이므로

$g(0)=1+2=3$, $g'(0)=3$

따라서 ㉠에서 $f'(3)\cdot3=63$

$\therefore f'(3)=21$

이때 $f'(x)=8x+a$이므로

$f'(3)=24+a=21$ $\therefore a=-3$ 답 ④

14 두 점 $\mathrm{A}(2,-1)$, $\mathrm{B}(-1,3)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(2)=-1$, $f(-1)=3$

또 접선의 기울기가 각각 1, 6이므로

$f'(2)=1,\ f'(-1)=6$

$F(x)=f(f(x))$라 하면

$F(2)=f(f(2))=f(-1)=3$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(f(x))-3}{2x^2-5x+2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{(2x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{2x-1}$$
$$=\frac{1}{3}F'(2)$$

$F'(x)=f'(f(x))f'(x)$이므로

$$\frac{1}{3}F'(2)=\frac{1}{3}f'(f(2))f'(2)=\frac{1}{3}f'(-1)f'(2)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot6\cdot1=2$$

답 ④

15 $f'(x)=\dfrac{2\tan x\sec^2 x}{\tan^2 x}=\dfrac{2\sec^2 x}{\tan x}=\dfrac{\frac{2}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}$

$$=\frac{2}{\sin x\cos x}=\frac{4}{\sin 2x}$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{4}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$$

답 8

16 $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x}$이므로 $\quad f'(n)=\dfrac{2n-1}{n^2-n}$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f'(n)}{2n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

답 1

17 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$

이때 $f(x)=\log_3\sqrt{x^2+5}=\dfrac{1}{2}\log_3(x^2+5)$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+5)\ln3}=\frac{x}{(x^2+5)\ln3}$$
$$\therefore 2f'(1)=2\cdot\frac{1}{(1+5)\ln3}=\frac{1}{3\ln3}$$

답 $\dfrac{1}{3\ln3}$

Q BOX

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

$x>1$이므로 $\ln x>0$ $\therefore (\ln x)^x>0$

18 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}{n}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})$이라 하면

$f(0)=\ln n$이므로 ㉠은

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$
$$\therefore f'(0)=6$$

$f'(x)=\dfrac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}$이므로

$$f'(0)=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n+1}{2}$$

따라서 $\dfrac{n+1}{2}=6$이므로

$n+1=12 \qquad \therefore n=11$

답 11

19 $f(x)=\dfrac{(x-1)^5(x-4)^2}{x^6(x-2)^4(x-3)^3}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x-1)^5(x-4)^2}{x^6(x-2)^4(x-3)^3}\right|$$
$$=5\ln|x-1|+2\ln|x-4|-6\ln|x|-4\ln|x-2|-3\ln|x-3|$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{5}{x-1}+\frac{2}{x-4}-\frac{6}{x}-\frac{4}{x-2}-\frac{3}{x-3}$$
$$\therefore \frac{f'(6)}{f(6)}=1+1-1-1-1=-1$$

답 -1

20 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2\sqrt{(x+2)^3}}{x^2+3}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x+1)^2\sqrt{(x+2)^3}}{x^2+3}\right|$$
$$=2\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x+2|-\ln|x^2+3|$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2(x+2)}-\frac{2x}{x^2+3}$$
$$\therefore f'(x)=f(x)\left\{\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2(x+2)}-\frac{2x}{x^2+3}\right\}$$

$f(0)=\dfrac{1^2\cdot\sqrt{2^3}}{3}=\dfrac{2\sqrt2}{3}$이므로 $x=0$에서의 미분계수는

$$f'(0)=\frac{2\sqrt2}{3}\left(2+\frac{3}{4}\right)=\frac{11\sqrt2}{6}$$

답 ⑤

21 $f(x)=(\ln x)^x$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln(\ln x)^x=x\ln(\ln x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(\ln x)+x\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$=\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right\}$$

$f(e)=1^e=1$이므로

$f'(e)=1\cdot(\ln 1+1)=1$ 답 ①

22 $$f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot x-(\sqrt{x^2+1}+1)\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$$

분자, 분모에 각각 $\sqrt{x^2+1}$을 곱한다.

$$=-\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$=f(x)\cdot\left(-\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\right)$$

따라서 $g(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$이므로

$g(1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ③

다른 풀이 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}$, $f'(x)=-\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

이므로

$f(1)=\sqrt{2}+1$, $f'(1)=-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

$f'(x)=f(x)g(x)$에서 $f'(1)=f(1)g(1)$이므로

$$g(1)=\frac{f'(1)}{f(1)}=-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

23 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\cot x+a}}=(\cot x+a)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(\cot x+a)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-\csc^2 x)$$

$$=\frac{\csc^2 x}{2(\cot x+a)\sqrt{\cot x+a}}$$

$f'\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}$에서

$$\frac{(\sqrt{2})^2}{2(-1+a)\sqrt{-1+a}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$(a-1)\sqrt{a-1}=3\sqrt{3}$, $(a-1)^3=27$

$a-1=3$ $\therefore a=4$ 답 4

24 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ …… ㉠

$g(x)=1$에서 $(\sqrt{4x+1}-2)^5=1$

$f'(1)$의 값을 구해야 하므로 $g(x)=1$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

$\sqrt{4x+1}=3$, $4x+1=9$

$\therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$h'(2)=f'(g(2))g'(2)$

$\therefore f'(1)g'(2)=10$

이때

$$g'(x)=5(\sqrt{4x+1}-2)^4\cdot\frac{4}{2\sqrt{4x+1}}$$

$$=5(\sqrt{4x+1}-2)^4\cdot\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$$

이므로 $g'(2)=5\cdot(3-2)^4\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$

따라서 $f'(1)\cdot\frac{10}{3}=10$이므로

$f'(1)=3$ 답 ③

원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 수직이다.

25 $\overline{OP}=t$, $\overline{OQ}=\frac{1}{2t}$이고 △POQ는 $\angle PQO=90°$인 직각삼각형이므로

원 $x^2+y^2=\frac{1}{4t^2}$의 반지름의 길이

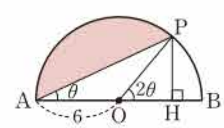
$$\overline{PQ}=\sqrt{t^2-\frac{1}{4t^2}}$$

따라서 $f(t)=t\sqrt{t^2-\frac{1}{4t^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{4t^4-1}$이므로

$$f'(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{16t^3}{2\sqrt{4t^4-1}}=\frac{4t^3}{\sqrt{4t^4-1}}$$

$$\therefore f'(\sqrt{2})=\frac{4\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{4\cdot 4-1}}=\frac{8\sqrt{30}}{15}$$ 답 $\frac{8\sqrt{30}}{15}$

26 오른쪽 그림과 같이 반원의 중심을 O라 하면



$\overline{OP}=6$, $\angle POB=2\theta$

$\overparen{PB}$에 대한 원주각의 크기가 θ이고 $\angle POB$는 $\overparen{PB}$에 대한 중심각이므로 $\angle POB=2\theta$

점 P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 POH에서

$\overline{PH}=\overline{OP}\sin 2\theta=6\sin 2\theta$

$\therefore S(\theta)=$(부채꼴 AOP의 넓이)$-$△AOP

$\angle AOP=\pi-2\theta$이므로 △AOP $=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\sin(\pi-2\theta)=18\sin 2\theta$ 와 같이 구할 수도 있다.

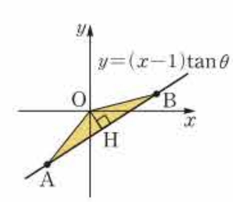
$$=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 2\theta$$

$$=18\pi-36\theta-18\sin 2\theta$$

따라서 $S'(\theta)=-36-36\cos 2\theta$이므로

$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-36-36\cos\frac{\pi}{2}=-36$ 답 -36

27 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 원점 O와 직선 $y=(x-1)\tan\theta$, 즉 $x\tan\theta-y-\tan\theta=0$ 사이의 거리는



$$\overline{OH}=\frac{|-\tan\theta|}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}=\frac{\tan\theta}{\sec\theta}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\sin\theta$$

$\frac{\tan\theta}{\sec\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta=\sin\theta$

$\overline{OA}=\overline{OB}=k$ $(k>0)$라 하면 직각삼각형 OAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{k^2-\sin^2\theta}$이므로

$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{k^2-\sin^2\theta}$

따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{k^2-\sin^2\theta}\cdot\sin\theta$$
$$=\sin\theta\cdot\sqrt{k^2-\sin^2\theta}$$

이므로

$$S'(\theta)$$
$$=\cos\theta\cdot\sqrt{k^2-\sin^2\theta}+\sin\theta\cdot\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{k^2-\sin^2\theta}}$$
$$=\cos\theta\cdot\sqrt{k^2-\sin^2\theta}-\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{k^2-\sin^2\theta}}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}S'(\theta)$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\cos\theta\cdot\sqrt{k^2-\sin^2\theta}-\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{k^2-\sin^2\theta}}\right)$$
$$=1\cdot\sqrt{k^2}-\frac{0^2\cdot 1}{\sqrt{k^2}}$$
$$=k\ (\because k>0)$$

즉 $k=3$이므로 $\overline{OA}=3$ 답 ⑤

28 $\frac{dx}{dt}=a-e^t$, $\frac{dy}{dt}=6t^2+\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2+\cos t}{a-e^t}\ (a-e^t\neq 0)$$

$t=0$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 $\frac{1}{3}$이므로

$$\frac{1}{a-1}=\frac{1}{3}\qquad \therefore a=4$$ 답 ④

29 $\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=1+\frac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\frac{1}{t^2}}{1-\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2+1}{t^2-1}\ (t^2-1\neq 0)$$

$t=a$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 $\frac{5}{4}$이므로

$$\frac{a^2+1}{a^2-1}=\frac{5}{4},\qquad 4a^2+4=5a^2-5$$
$$a^2=9\qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$$ 답 3

다른 풀이 $x^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2$, $y^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2$이므로

$$y^2=x^2-4$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=2x$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}=\frac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}=\frac{t^2+1}{t^2-1}\ (t^2-1\neq 0)$$

따라서 $\frac{a^2+1}{a^2-1}=\frac{5}{4}$이므로 $a=3\ (\because a>0)$

30 $\frac{dx}{dt}=e^t+2e^{2t}+3e^{3t}+\cdots+ne^{nt}$,

$\frac{dy}{dt}=e^t+3e^{3t}+5e^{5t}+\cdots+(2n-1)e^{(2n-1)t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$
$$=\frac{e^t+3e^{3t}+5e^{5t}+\cdots+(2n-1)e^{(2n-1)t}}{e^t+2e^{2t}+3e^{3t}+\cdots+ne^{nt}}$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^t+3e^{3t}+5e^{5t}+\cdots+(2n-1)e^{(2n-1)t}}{e^t+2e^{2t}+3e^{3t}+\cdots+ne^{nt}}$$
$$=\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$$
$$=\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2n}{n+1}$$

Q BOX

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$
$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$
$$=n^2+n-n$$
$$=n^2$$

따라서 $\frac{2n}{n+1}=\frac{11}{6}$이므로

$$12n=11n+11\qquad \therefore n=11$$ 답 11

31 $e^x\ln y=e$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^x\ln y+\frac{e^x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=0\qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-y\ln y$$

$x=1$일 때, $e\ln y=e$이므로

$$\ln y=1\qquad \therefore y=e$$

따라서 $x=1$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$-e\ln e=-e$$ 답 $-e$

32 점 $(a,\ b)$가 곡선 $4\sqrt{x}+\sqrt{y}=9$ 위의 점이므로

$$4\sqrt{a}+\sqrt{b}=9 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$4\sqrt{x}+\sqrt{y}=9$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{4}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$$-\frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-2$$
$$\therefore \sqrt{a}-2\sqrt{b}=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

Q BOX

㉠×2+㉡을 하면

$9\sqrt{a}=18$

$\sqrt{a}=2\quad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$8+\sqrt{b}=9$

$\sqrt{b}=1\quad \therefore b=1$

$$\therefore a+b=5$$ 답 ②

33 $2x^2-4xy+y^2-9=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$4x-4y-4x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$(4x-2y)\frac{dy}{dx}=4x-4y$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-2y}{2x-y}\ (2x-y\neq 0)$$

점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 A에서의 접선의 기울기가 $\frac{2}{3}$이므로

$$\frac{2x_1-2y_1}{2x_1-y_1}=\frac{2}{3},\qquad 3x_1-3y_1=2x_1-y_1$$
$$\therefore x_1=2y_1$$

점 $A(x_1, y_1)$이 곡선 $2x^2-4xy+y^2-9=0$ 위의 점이므로

$$2x_1^2-4x_1y_1+y_1^2-9=0$$

$x_1=2y_1$을 위의 식에 대입하면

$$8y_1^2-8y_1^2+y_1^2-9=0, \qquad y_1^2=9$$

$$\therefore x_1=\pm 6,\ y_1=\pm 3 \text{ (복호동순)}$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(6, 3)$, $(-6, -3)$이고 직선 m의 방정식을

$$y+3=\frac{2}{3}(x+6),\ \text{즉 } 2x-3y+3=0$$

이라 하면 두 직선 l, m 사이의 거리는 직선 l 위의 점 $A(6, 3)$과 직선 $2x-3y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|12-9+3|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$$

답 ④

점 B의 좌표가 $(-6, -3)$인 경우

평행한 두 직선 l, m 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 m 사이의 거리와 같다.

34 점 $\left(-2\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$$g(-2\pi)=-\frac{\pi}{2}$$

$f'(x)=4-\sin x$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(-2\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$g'(-2\pi)=\frac{1}{f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{4-(-1)}=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

35 $f(1)=1+5-5=1$이므로 $\qquad g(1)=1$

$F(x)=f(x)g(x)$라 하면

$$F(1)=f(1)g(1)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)$$

$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$$F'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=f'(1)+g'(1)$$

이때 $f'(x)=3x^2+5$이므로

$$f'(1)=3+5=8,\ g'(1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore F'(1)=8+\frac{1}{8}=\frac{65}{8}$$

답 ③

36 조건 (가)에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-7\}=0$이므로 $\qquad f(2)=7$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-7}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)\text{이므로}$$

$$f'(2)=8$$

한편 $g(-7)=a$라 하면 $\qquad f(a)=-7$

조건 (나)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로

$$f(-2)=-f(2)=-7 \qquad \therefore a=-2$$

또 $f(-x)=-f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-f'(-x)=-f'(x) \qquad \therefore f'(-x)=f'(x)$$

$$\therefore g'(-7)=\frac{1}{f'(-2)}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

참고 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이다. 따라서 $f(-2)=-7$에서 $f(a)=-7$을 만족시키는 a의 값은 -2뿐이다.

37 $f'(x)=2\ln(\cos x)+2x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}$

$$=2\ln(\cos x)-2x\tan x$$

이므로

$$f''(x)=2\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}-2\tan x-2x\sec^2 x$$

$$=-4\tan x-2x\sec^2 x$$

$$\therefore f''(0)=0$$

답 0

38 $f'(x)=2\ln(x-e)\cdot\frac{1}{x-e}=\frac{2\ln(x-e)}{x-e}$이므로

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x-e}\cdot(x-e)-2\ln(x-e)\cdot 1}{(x-e)^2}$$

$$=\frac{2-2\ln(x-e)}{(x-e)^2}$$

따라서 방정식 $\frac{2-2\ln(x-e)}{(x-e)^2}=0$에서

$$2-2\ln(x-e)=0, \qquad \ln(x-e)=1$$

$$x-e=e \qquad \therefore x=2e$$

답 $x=2e$

39 $f'(x)=3e^{3x}\sin x+e^{3x}\cos x=e^{3x}(3\sin x+\cos x)$

이므로

$$f'(0)=1\cdot(3\cdot 0+1)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)$$

이때

$$f''(x)$$

$$=3e^{3x}(3\sin x+\cos x)+e^{3x}(3\cos x-\sin x)$$

$$=e^{3x}(8\sin x+6\cos x)$$

이므로 $\qquad f''(0)=1\cdot(8\cdot 0+6\cdot 1)=6$

답 6

40 $\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=f''(a)$이므로

$$f''(a)=\frac{1}{4}$$

이때 $f'(x)=-\frac{1}{(x+7)^2}$이므로

$$f''(x)=\frac{2(x+7)}{(x+7)^4}=\frac{2}{(x+7)^3}$$

$f'(x)=-(x+7)^{-2}$이므로

$$f''(x)=2(x+7)^{-3}=\frac{2}{(x+7)^3}$$

와 같이 구할 수도 있다.

$f''(a)=\frac{1}{4}$에서

$$\frac{2}{(a+7)^3}=\frac{1}{4}, \qquad (a+7)^3=8$$

$$a+7=2 \qquad \therefore a=-5$$

답 ①

도전! 수능 기출

Ⓦ 40쪽

01 (1st) $g(\pi)$, $g'(\pi)$의 값을 함수 f를 이용하여 나타낸다.

$$g(\pi)=\frac{f(\pi)\cos\pi}{e^{\pi}}=-\frac{f(\pi)}{e^{\pi}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$g'(x)=\frac{\{f'(x)\cos x-f(x)\sin x\}e^{x}-f(x)\cos x\cdot e^{x}}{e^{2x}}$$

$$=\frac{f'(x)\cos x-(\sin x+\cos x)f(x)}{e^{x}}$$

이므로

$$g'(\pi)=\frac{f'(\pi)\cos\pi-(\sin\pi+\cos\pi)f(\pi)}{e^{\pi}}$$

$$=\frac{-f'(\pi)+f(\pi)}{e^{\pi}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

(2nd) $\dfrac{f'(\pi)}{f(\pi)}$의 값을 구한다.

$g'(\pi)=e^{\pi}g(\pi)$이므로 ㉠, ㉡에서

$$\frac{-f'(\pi)+f(\pi)}{e^{\pi}}=e^{\pi}\cdot\left\{-\frac{f(\pi)}{e^{\pi}}\right\}$$

$$(e^{\pi}+1)f(\pi)=f'(\pi)$$

$$\therefore \frac{f'(\pi)}{f(\pi)}=e^{\pi}+1$$

답 ④

02 (1st) $g'(2)$의 값을 함수 f를 이용하여 나타낸다.

$g'(x)=f(2x)+2xf'(2x)$이므로

$$g'(2)=f(4)+4f'(4) \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 l의 기울기

직선 l 위에 있으면서 x좌표가 4인 점의 y좌표

(2nd) 직선 l의 방정식을 구한다.

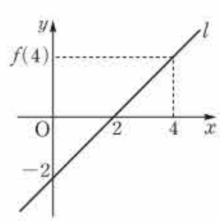
조건 ㈎에서 직선 l이 제2사분면을 지나지 않으므로

(기울기)≥ 0, (y절편)≤ 0

조건 ㈏에서 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형이 넓이가 2인 직각이등변삼각형이므로 (기울기)$\neq 0$이고

|(x절편)|=|(y절편)|=2

따라서 직선 l은 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(2, 0)$, $(0, -2)$를 지나는 직선이므로 직선 l의 방정식은



$$y-(-2)=\frac{-2-0}{0-2}x$$

$$\therefore y=x-2$$

(3rd) $g'(2)$의 값을 구한다.

직선 l이 점 $(4, 2)$를 지나므로 $\quad f(4)=2$

4−2=2

직선 l의 기울기가 1이므로 $\quad f'(4)=1$

따라서 ㉠에서

$$g'(2)=2+4\cdot1=6$$

답 ④

03 (1st) $\overline{\text{AQ}}=t$ m, $\overline{\text{BQ}}=s$ m로 놓고 $\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PB}}=20$(m)임을 이용하여 t, s에 대한 식을 세운다.

t초 후의 $\overline{\text{AQ}}$의 길이는 t m이므로 직각삼각형 PQA에서

$$\overline{\text{AP}}=\sqrt{t^2+9}\ (\text{m})$$

$\overline{\text{BQ}}=s$ m $(s>0)$라 하면 직각삼각형 PBQ에서

$$\overline{\text{PB}}=\sqrt{s^2+9}\ (\text{m})$$

이때 $\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PB}}=20$(m)이므로

$$\sqrt{t^2+9}+\sqrt{s^2+9}=20 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(2nd) $\overline{\text{AQ}}=4$ m일 때, s의 값을 구한다.

$t=4$를 ㉠에 대입하면

$$5+\sqrt{s^2+9}=20, \qquad \sqrt{s^2+9}=15$$

$$s^2+9=225, \qquad s^2=216$$

$$\therefore s=6\sqrt{6}\ (\because s>0)$$

(3rd) $\overline{\text{AQ}}=4$ m가 되는 순간, $\overline{\text{BQ}}$의 길이의 시각 t에 대한 변화율을 구한다.

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{2t}{2\sqrt{t^2+9}}+\frac{2s}{2\sqrt{s^2+9}}\cdot\frac{ds}{dt}=0$$

$$\therefore \frac{ds}{dt}=-\frac{t\sqrt{s^2+9}}{s\sqrt{t^2+9}}$$

$t=4$, $s=6\sqrt{6}$을 위의 식에 대입하면 구하는 변화율은

$$-\frac{4\cdot15}{6\sqrt{6}\cdot5}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

답 ①

다른 풀이 $\overline{\text{AP}}=\sqrt{t^2+9}$ (m)이므로 $\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PB}}=20$(m)에서

$$\overline{\text{BP}}=20-\sqrt{t^2+9}\ (\text{m})$$

$\overline{\text{BQ}}=s$ m $(s>0)$라 하면 직각삼각형 PBQ에서

$$s^2=400-40\sqrt{t^2+9}+t^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$t=4$일 때,

$$s^2=400-40\cdot5+16=216$$

$$\therefore s=6\sqrt{6}\ (\because s>0)$$

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$2s\frac{ds}{dt}=-\frac{80t}{2\sqrt{t^2+9}}+2t$$

$$\therefore \frac{ds}{dt}=-\frac{20t}{s\sqrt{t^2+9}}+\frac{t}{s}$$

$t=4$, $s=6\sqrt{6}$을 위의 식에 대입하면 구하는 변화율은

$$-\frac{20\cdot4}{6\sqrt{6}\cdot5}+\frac{4}{6\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

쌤 한마디

시각에 대한 변화율의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.

(i) t초 후의 길이(또는 넓이, 부피)에 대한 관계식을 구한다.

(ii) (i)에서 구한 식의 양변을 t에 대하여 미분한다.

(iii) 주어진 조건을 만족시키는 t의 값을 대입한다.

04 (1st) a의 값을 구한다.

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{g(x)}{x+2}=b$에서 $x \longrightarrow -2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to-2}g(x)=0$이므로 $\quad g(-2)=0$

$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로 $\quad f(0)=-2$

Ⓦ 05 여러 가지 미분법

이때 $f(0)=\ln\frac{1}{a}$이므로

$$\ln\frac{1}{a}=-2, \qquad \ln a=2$$

$$\therefore a=e^2$$

2nd b의 값을 구한다.

$$\lim_{x\to-2}\frac{g(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=g'(-2)=\frac{1}{f'(0)}$$

이므로

$$b=\frac{1}{f'(0)}$$

$f(x)=\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{e^2}\right)=\ln(\sec x+\tan x)-2$이므로

$$f'(x)=\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}$$

$$=\frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\sec x+\tan x}$$

$$=\sec x$$

$$\therefore b=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\sec 0}=1$$

3rd ab의 값을 구한다.

$a=e^2$, $b=1$이므로

$ab=e^2$ 답 ③

06 도함수의 활용 (1)

W 41쪽

01 $f'(x)=-\sqrt{3}\sin x+3\cos x$

점 $\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$에서의 접선의 기울기가

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-3=\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore y=\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+3$$

$y=0$을 대입하면

$$0=\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+3 \qquad \therefore x=\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}$$

즉 구하는 x절편은 $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}$이다. 답 $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}$

02 $f(x)=(4x-7)^5$이라 하면

$f'(x)=5(4x-7)^4\cdot 4=20(4x-7)^4$

점 (2, 1)에서의 접선의 기울기가 $f'(2)=20$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=20(x-2) \qquad \therefore y=20x-39$$

따라서 직선 $y=20x-39$ 위의 점인 것은 ⑤이다.

$21=20\cdot3-39$

답 ⑤

03 $f(x)=e^x$이라 하면 $\quad f'(x)=e^x$

점 $(\ln 3, 3)$에서의 접선의 기울기가 $f'(\ln 3)=3$이므로 접선의 방정식은

$f'(\ln 3)=e^{\ln 3}=3$

$$y-3=3(x-\ln 3)$$

$$\therefore y=3x-3\ln 3+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$g(x)=3\ln x+k$라 하면 $\quad g'(x)=\frac{3}{x}$

직선 ㉠과 곡선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(t, 3\ln t+k)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=\frac{3}{t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-(3\ln t+k)=\frac{3}{t}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{3}{t}x-3+3\ln t+k$$

이 직선이 ㉠과 일치하므로

$$3=\frac{3}{t}, \quad -3\ln 3+3=-3+3\ln t+k$$

$t=1$이므로
$-3\ln 3+3=-3+k$
$\therefore k=6-3\ln 3$
$=3(2-\ln 3)$

$$\therefore t=1, \ k=3(2-\ln 3)$$

답 ①

04 $f(x)=\ln x+6$이라 하면 $\quad f'(x)=\frac{1}{x}$

점 $\mathrm{P}(t, \ln t+6)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=\frac{1}{t}$$

즉 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-t$이므로 직선의 방정식은

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 서로 수직이면
$mm'=-1$

$y-(\ln t+6)=-t(x-t)$

$\therefore\ y=-tx+t^2+\ln t+6$

따라서 $\mathrm{Q}(0,\ t^2+\ln t+6)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-t)^2+(t^2+\ln t+6-\ln t-6)^2}$

$=\sqrt{t^2+t^4}$

$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{\sqrt{t^2+t^4}}=1$ 답 1

Q BOX

원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 분자, 분모의 차수가 같으면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

05 평행이동한 직선의 방정식은

$y=2x+1+k$ …… ㉠

$f(x)=\tan x$라 하면 $f'(x)=\sec^2 x$

접점의 좌표를 $(t,\ \tan t)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t)=2$에서

$\sec^2 t=2,\quad \cos^2 t=\frac{1}{2}$

이때 $0<t<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \therefore\ t=\frac{\pi}{4}$

$0<t<\frac{\pi}{2}$이면 $0<\cos t<1$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\quad \therefore\ y=2x+1-\frac{\pi}{2}$

이 직선이 ㉠과 일치하므로 $k=-\frac{\pi}{2}$ 답 $-\frac{\pi}{2}$

06 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 접점의 좌표를 $(t,\ 0)$이라 하면 $f(t)=0$에서

$e^{3t}+at=0$ …… ㉠

$f'(x)=3e^{3x}+a$이고, 점 $(t,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 0이므로 $f'(t)=0$에서

접선이 x축이므로 기울기가 0이다.

$3e^{3t}+a=0\quad \therefore\ a=-3e^{3t}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $e^{3t}-3e^{3t}\cdot t=0$

$e^{3t}(1-3t)=0\quad \therefore\ t=\frac{1}{3}\ (\because\ e^{3t}>0)$

$t=\frac{1}{3}$을 ㉡에 대입하면 $a=-3e$ 답 ③

07 $\triangle$OPQ의 밑변을 $\overline{\mathrm{OP}}$로 생각하면 높이는 점 Q와 직선 OP 사이의 거리와 같으므로 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{t})$에서의 접선이 직선 OP와 평행할 때 $\triangle$OPQ의 넓이가 최대가 된다.

$f(x)=\sqrt{x}$라 하면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(4,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}$에서

$\sqrt{t}=1\quad \therefore\ t=1$ 답 ②

08 $f(x)=x\ln x$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=\ln t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-t\ln t=(\ln t+1)(x-t)$

$\therefore\ y=(\ln t+1)x-t$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-t\quad \therefore\ t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$

따라서 원점과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ④

09 $f(x)=\frac{x}{x-1}$라 하면

$f'(x)=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{t}{t-1}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=-\frac{1}{(t-1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{t}{t-1}=-\frac{1}{(t-1)^2}(x-t)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{(t-1)^2}x+\frac{t^2}{(t-1)^2}$ …… ㉠

$\frac{t}{(t-1)^2}+\frac{t}{t-1}$
$=\frac{t+t(t-1)}{(t-1)^2}$
$=\frac{t+t^2-t}{(t-1)^2}=\frac{t^2}{(t-1)^2}$

직선 ㉠이 점 $(-2,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{2}{(t-1)^2}+\frac{t^2}{(t-1)^2}$

$2(t-1)^2=2+t^2$

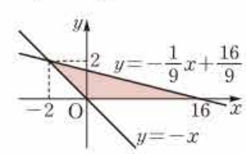
$t^2-4t=0,\quad t(t-4)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=4$

$t=0$을 ㉠에 대입하면 $y=-x$

$t=4$를 ㉠에 대입하면 $y=-\frac{1}{9}x+\frac{16}{9}$

두 접선의 x절편이 각각 0, 16이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 2=16$ 답 16

다른 풀이 점 $(-2,\ 2)$에서 곡선 $y=\frac{x}{x-1}$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-2=m(x+2)\quad \therefore\ y=mx+2m+2$

$mx+2m+2=\frac{x}{x-1}$에서

$mx^2+(m+1)x-2m-2=0$ …… ㉠

곡선 $y=\frac{x}{x-1}$와 직선 $y=mx+2m+2$가 접하므로 이차방정식 ㉠은 중근을 갖는다.

따라서 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(m+1)^2-4m(-2m-2)=0$

$9m^2+10m+1=0,\quad (m+1)(9m+1)=0$

$\therefore\ m=-1$ 또는 $m=-\frac{1}{9}$

따라서 두 접선의 방정식은

$y=-x,\ y=-\frac{1}{9}x+\frac{16}{9}$

이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 2=16$

10 $f(x)=x+\frac{1}{x}$이라 하면

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ t+\frac{1}{t}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=1-\frac{1}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(t+\frac{1}{t}\right)=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)(x-t)$

이 직선이 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$-2-\left(t+\frac{1}{t}\right)=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)(3-t)$

$5+\frac{2}{t}-\frac{3}{t^2}=0,\qquad 5t^2+2t-3=0$

$(t+1)(5t-3)=0\qquad \therefore\ t=-1$ 또는 $t=\frac{3}{5}$

따라서 접점의 개수가 2이므로 점 $(3,\ -2)$에서 곡선 $y=x+\frac{1}{x}$에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

답 2

참고 이차방정식 $5t^2+2t-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2+15=16>0$

이므로 t의 값을 구하지 않아도 서로 다른 접점의 개수가 2임을 알 수 있다.

11 $f(x)=xe^{x+1}$이라 하면

$f'(x)=e^{x+1}+xe^{x+1}=(x+1)e^{x+1}$

접점의 좌표를 $(t,\ te^{t+1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=(t+1)e^{t+1}$이므로 접선의 방정식은

$y-te^{t+1}=(t+1)e^{t+1}(x-t)$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나면

$-te^{t+1}=(t+1)e^{t+1}(a-t)$

$-t=(t+1)(a-t)\ (\because\ e^{t+1}>0)$

$\therefore\ t^2-at-a=0$ …… ㉠

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 수 없으려면 이차방정식 ㉠이 실근을 갖지 않아야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2+4a<0,\qquad a(a+4)<0$

$\therefore\ -4<a<0$

따라서 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1$이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)=-6$ 답 -6

12 $f(x)=e^{x-3},\ g(x)=\sqrt{2x+a}$라 하면

$f'(x)=e^{x-3},\ g'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+a}}$

두 곡선이 점 $(p,\ q)$에서 공통인 접선을 가지므로

$f(p)=g(p)$에서 $\quad e^{p-3}=\sqrt{2p+a}$ …… ㉠

$f'(p)=g'(p)$에서 $\quad e^{p-3}=\frac{1}{\sqrt{2p+a}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$e^{p-3}=\frac{1}{e^{p-3}},\qquad (e^{p-3})^2=1,\qquad e^{2p-6}=1$

$2p-6=0\qquad \therefore\ p=3$

$p=3$을 ㉠에 대입하면

$1=\sqrt{6+a}\qquad \therefore\ a=-5$

또 $q=f(3)=1$이므로

$q=g(3)=1$임을 이용하여 q의 값을 구할 수도 있다.

$a+p+q=-1$ 답 ②

13 $f(x)=\sin x+a,\ g(x)=-\cos^2 x$라 하면

$f'(x)=\cos x,\ g'(x)=2\cos x\sin x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad \sin t+a=-\cos^2 t$

$\therefore\ a=\sin^2 t-\sin t-1$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad \cos t=2\cos t\sin t$

$\cos t(2\sin t-1)=0$

$\therefore\ \sin t=\frac{1}{2}\ (\because\ \cos t\neq 0)$

$0<t<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\cos t<1$

$\sin t=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$a=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1=-\frac{5}{4}$ 답 $-\frac{5}{4}$

14 $g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$e^{7k-1}=1,\qquad 7k-1=0\qquad \therefore\ k=\frac{1}{7}$

$\therefore\ g'(1)=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{7}\right)}$

이때 $f'(x)=7e^{7x-1}$이므로 $\quad f'\left(\frac{1}{7}\right)=7$

$\therefore\ g'(1)=\frac{1}{7}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \frac{1}{7}\right)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{7}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{7}=\frac{1}{7}(x-1)\qquad \therefore\ y=\frac{1}{7}x$ 답 $y=\frac{1}{7}x$

다른 풀이 $y=e^{7x-1}$이라 하면 $\quad \ln y=7x-1$

$a>0,\ a\neq 1$일 때, 양수 N에 대하여 $a^x=N \iff x=\log_a N$

$x=\frac{1}{7}(\ln y+1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{7}(\ln x+1)$

즉 $g(x)=\frac{1}{7}(\ln x+1)$이므로 $\quad g'(x)=\frac{1}{7x}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \frac{1}{7}\right)$에서의 접선의 기울기가 $g'(1)=\frac{1}{7}$이므로 접선의 방정식은

$g(1)=\frac{1}{7}(0+1)=\frac{1}{7}$

$y-\frac{1}{7}=\frac{1}{7}(x-1)\qquad \therefore\ y=\frac{1}{7}x$

쌤한마디

일대일대응인 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식, 즉 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.

(ii) x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$ 꼴로 나타낸다.

15 $g(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$이므로

$k^3+2k-5=-2,\quad k^3+2k-3=0$

$(k-1)(k^2+k+3)=0$

$\therefore k=1\ (\because k^2+k+3>0)$

$\therefore g'(-2)=\dfrac{1}{f'(1)}$

이때 $f'(x)=3x^2+2$이므로 $\quad f'(1)=5$

$\therefore g'(-2)=\dfrac{1}{5}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{5}$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{5}(x+2)\qquad \therefore y=\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}$$

즉 구하는 y절편은 $\dfrac{7}{5}$이다. 답 ④

Q BOX

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ & & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

16 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 접점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

따라서 두 그래프의 접점의 좌표를 $(t,\ t)(t>0)$라 하면 $f(t)=g(t)=t$에서

$\ln t+a=t \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로 $f'(t)=g'(t)$에서

$\dfrac{1}{t}=t\left(\because g'(t)=\dfrac{1}{f'(t)}\right)$

$t^2=1 \qquad \therefore t=1\ (\because t>0)$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=1$ 답 ③

점 $(t,\ t)$는 함수 $f(x)=\ln x+a$의 그래프 위의 점이므로 $t>0$

다른 풀이 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 접해야 한다.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$에서 접점의 좌표를 $(t,\ \ln t+a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=\dfrac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-(\ln t+a)=\frac{1}{t}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{1}{t}x+\ln t+a-1$$

이 직선이 직선 $y=x$와 일치해야 하므로

$\dfrac{1}{t}=1,\ \ln t+a-1=0 \qquad \therefore t=1,\ a=1$

17 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2t\cdot t-(1-t^2)}{t^2}=-\dfrac{t^2+1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-\dfrac{1}{t^2}}{-\dfrac{t^2+1}{t^2}}=\frac{1}{t^2+1}$$

이때 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{3}$에서 $t=3$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{9+1}=\frac{1}{10}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{3}=\frac{1}{10}\left(x+\frac{8}{3}\right)\qquad \therefore y=\frac{1}{10}x+\frac{3}{5}$$

$y=0$을 대입하면 $\quad \dfrac{1}{10}x=-\dfrac{3}{5}\qquad \therefore x=-6$

즉 구하는 x절편은 -6이다. 답 -6

18 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$에 대응하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}b\right)$

$\dfrac{dx}{d\theta}=a\sec\theta\tan\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta}=b\sec^2\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{b\sec^2\theta}{a\sec\theta\tan\theta}$$

$$=\frac{b\sec\theta}{a\tan\theta}=\frac{b}{a}\csc\theta\ (\tan\theta\neq 0)$$

$$\frac{\sec\theta}{\tan\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b}{a}\cdot 2=\dfrac{2b}{a}$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{\sqrt{3}}{3}b=\frac{2b}{a}\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)$$

$$\therefore y=\frac{2b}{a}x-\sqrt{3}b$$

이 직선이 $y=-x-6$과 일치하므로

$\dfrac{2b}{a}=-1,\ -\sqrt{3}b=-6$

$\therefore a=-4\sqrt{3},\ b=2\sqrt{3}$

$\therefore b-a=6\sqrt{3}$ 답 $6\sqrt{3}$

19 $\dfrac{dx}{d\theta}=4\sin\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta}{4\sin\theta}=\frac{1}{4}\cot\theta$$

즉 점 $\mathrm{P}(-4\cos\theta,\ \sin\theta)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\sin\theta=\frac{1}{4}\cot\theta(x+4\cos\theta)$$

$$\therefore y=\frac{1}{4}x\cot\theta+\cot\theta\cos\theta+\sin\theta$$

$$=\frac{1}{4}x\cot\theta+\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{4}x\cot\theta+\csc\theta$$

따라서 $\mathrm{A}(-4\sec\theta,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ \csc\theta)$이므로

$0=\dfrac{1}{4}x\cot\theta+\csc\theta$에서

$x=-\dfrac{4\csc\theta}{\cot\theta}$

$=-\dfrac{4}{\sin\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=-4\sec\theta$

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot|-4\sec\theta|\cdot|\csc\theta|$$

$$=\frac{4}{|2\cos\theta\sin\theta|}=\frac{4}{|\sin 2\theta|}$$

이때 $0<|\sin 2\theta|\le 1$이므로

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, 즉 $0<2\theta<\pi$이므로

$0<\sin 2\theta\le 1$

$\therefore 0<|\sin 2\theta|\le 1$

$$\frac{1}{|\sin 2\theta|}\ge 1\qquad \therefore \frac{4}{|\sin 2\theta|}\ge 4$$

즉 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이의 최솟값은 4이다. 답 ②

20 $xy^3-2=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$y^3+3xy^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y^3}{3xy^2}=-\frac{y}{3x}$$

점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{6}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{6}(x-2) \qquad \therefore y=-\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$$

따라서 $a=-\frac{1}{6}$, $b=\frac{4}{3}$이므로

$$a+b=\frac{7}{6}$$

답 ⑤

21 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=9$에 $x=4$를 대입하면

$$2+\sqrt{y}=9 \qquad \therefore y=49$$

따라서 접점의 좌표는 $(4,\ 49)$이다.

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=9$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ (x\neq0)$$

점 $(4,\ 49)$에서의 접선의 기울기가

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}}=-\frac{7}{2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-49=-\frac{7}{2}(x-4) \qquad \therefore y=-\frac{7}{2}x+63$$

이 직선이 점 $(a,\ 7)$을 지나므로

$$7=-\frac{7}{2}a+63, \qquad \frac{7}{2}a=56$$

$$\therefore a=16$$

답 16

22 점 $(1,\ 2)$가 곡선 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=x^2+3$ 위의 점이므로

$$a+\frac{b}{2}=4$$

$$\therefore 2a+b=8 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=x^2+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\frac{a}{x^2}-\frac{b}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=2x$$

$$-\frac{b}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=2x+\frac{a}{x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{(2x^3+a)y^2}{bx^2}$$

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(2+a)\cdot4}{b}=-\frac{4a+8}{b}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-2=-\frac{4a+8}{b}(x-1)$$

이 직선이 원 $(x-2)^2+(y+8)^2=10$의 넓이를 이등분하면 원의 중심 $(2,\ -8)$을 지나므로

$$-10=-\frac{4a+8}{b}\cdot1, \qquad 10b=4a+8$$

$$\therefore 2a-5b=-4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

$$\therefore ab=6$$

답 ④

Q BOX

㉠−㉡을 하면
$6b=12 \quad \therefore b=2$
$b=2$를 ㉠에 대입하면
$2a+2=8$
$\therefore a=3$

23 $g(x)=\cos x$라 하면

$$g'(x)=-\sin x$$

점 $(t,\ \cos t)$에서의 접선의 기울기가 $g'(t)=-\sin t$이므로 접선의 방정식은

$$y-\cos t=-\sin t\cdot(x-t)$$

$$\therefore y=-x\sin t+t\sin t+\cos t$$

$y=0$을 대입하면

$$0=-x\sin t+t\sin t+\cos t$$

$$\therefore x=\frac{t\sin t+\cos t}{\sin t}\ (\because \sin t\neq0)$$

$$=t+\cot t$$

Q BOX: $0<t<\pi$이므로 $0<\sin t\leq1$

따라서 $f(t)=t+\cot t$이므로

$$\lim_{t\to0+}tf(t)=\lim_{t\to0+}(t^2+t\cot t)$$

$$=\lim_{t\to0+}\left(t^2+\frac{t}{\tan t}\right)$$

$$=0+1=1$$

답 1

24 $f(x)=xe^{-x}$이라 하면

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

점 P의 x좌표는 $xe^{-x}=ax$에서

$$x(e^{-x}-a)=0, \qquad e^{-x}=a\ (\because x>0)$$

$$\therefore x=-\ln a$$

즉 $\mathrm{P}(-\ln a,\ -a\ln a)$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는

Q BOX: $x=-\ln a$를 $y=ax$에 대입하면 $y=-a\ln a$

$$f'(-\ln a)=a(1+\ln a)$$

따라서 접선 l의 방정식은

$$y+a\ln a=a(1+\ln a)(x+\ln a)$$

$$\therefore y=a(1+\ln a)x+a(\ln a)^2$$

접선 l과 직선 $y=ax$ 및 y축으로 둘러싸인 도형은 세 점 $(0,\ 0)$, $(0,\ a(\ln a)^2)$, $\mathrm{P}(-\ln a,\ -a\ln a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형이므로

Q BOX: 접선 l과 y축이 만나는 점의 좌표

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot a(\ln a)^2\cdot(-\ln a)=-\frac{1}{2}a(\ln a)^3$$

$$\therefore S'(a)=-\frac{1}{2}(\ln a)^3-\frac{1}{2}a\cdot3(\ln a)^2\cdot\frac{1}{a}$$

$$=-\frac{1}{2}(\ln a)^3-\frac{3}{2}(\ln a)^2$$

$$\therefore S'\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{2}\cdot(-1)^3-\frac{3}{2}\cdot(-1)^2=-1$$

답 −1

25 $f'(x)=2x-\frac{8x}{x^2}=\frac{2(x^2-4)}{x}$

$$=\frac{2(x+2)(x-2)}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2\ (\because x<0)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		↗	

따라서 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$에서 감소하고, 구간 $[-2, 0)$에서 증가하므로

$a=-2$

답 ④

26 $f'(x)=2e^{2x}-18$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^{2x}=9 \quad \therefore x=\ln 3$

x	$\cdots$	$\ln 3$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

따라서 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \ln 3]$에서 감소하므로 a의 최댓값은 $\ln 3$이다.

답 $\ln 3$

Q BOX

$e^{2x}=9$에서

$2x=\ln 9=2\ln 3$

$\therefore x=\ln 3$

27 보기의 함수는 모두 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1)$인 x_1이 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

마찬가지로 $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(x_2)$인 x_2가 구간 (b, c)에 적어도 하나 존재한다.

$0<x_1<x_2<\pi$인 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)>f'(x_2)$를 항상 만족시키려면 $0<x<\pi$에서 $f'(x)$가 감소해야 한다.

ㄱ. $f'(x)=1-\cos x$이므로 $\qquad f''(x)=\sin x$

$0<x<\pi$에서 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가한다.

ㄴ. $f'(x)=1-e^x$이므로 $\qquad f''(x)=-e^x$

$0<x<\pi$에서 $f''(x)<0$이므로 $f'(x)$는 감소한다.

ㄷ. $f'(x)=\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{x^2+x}$이므로

$$f''(x)=-\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$$

$0<x<\pi$에서 $f''(x)<0$이므로 $f'(x)$는 감소한다.

이상에서 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

28 $f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+5)e^{-x}$

$=\{-x^2+(2-a)x+a-5\}e^{-x}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$-x^2+(2-a)x+a-5\le 0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x^2+(a-2)x-a+5\ge 0$

이차방정식 $x^2+(a-2)x-a+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-4(-a+5)\le 0$

$a^2-16\le 0, \qquad (a+4)(a-4)\le 0$

$\therefore -4\le a\le 4$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

답 ①

29 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때 $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+9}+k=\dfrac{kx^2+2x+9k}{x^2+9}$이므로

$kx^2+2x+9k\ge 0$ ($\because x^2+9>0$)

따라서 위의 부등식을 만족시키려면 $k>0$이어야 하고, 이차방정식 $kx^2+2x+9k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-9k^2\le 0, \qquad (3k+1)(3k-1)\ge 0$

$\therefore k\le -\dfrac{1}{3}$ 또는 $k\ge \dfrac{1}{3}$

이때 $k>0$이므로

$k\ge \dfrac{1}{3}$

따라서 k의 최솟값은 $\dfrac{1}{3}$이다.

답 $\dfrac{1}{3}$

30 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=6-a\sin ax\ge 0$

또는 $f'(x)=6-a\sin ax\le 0$

이어야 한다.

(i) $a<0$일 때,

$6+a\le 6-a\sin ax\le 6-a$이므로

$6+a\le f'(x)\le 6-a$

따라서 $6+a\ge 0$ 또는 $6-a\le 0$이어야 하므로

$-6\le a<0$

(ii) $a=0$일 때,

$f'(x)=6>0$

(iii) $a>0$일 때,

$6-a\le 6-a\sin ax\le 6+a$이므로

$6-a\le f'(x)\le 6+a$

따라서 $6-a\ge 0$ 또는 $6+a\le 0$이어야 하므로

$0<a\le 6$

이상에서 $-6\le a\le 6$이므로 정수 a는

$-6, -5, -4, \cdots, 6$

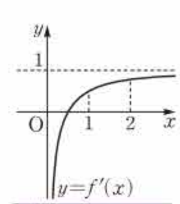
의 13개이다.

답 ④

삼각함수 $y=a\sin bx+c$의 최댓값은 $|a|+c$, 최솟값은 $-|a|+c$이다.

31 $f'(x)=1+a\cdot\dfrac{2x}{x^2}=1+\dfrac{2a}{x}$

함수 $f(x)$가 구간 $(1, 2)$에서 증가하려면 $1<x<2$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(1)=1+2a\ge 0$

$\therefore -\dfrac{1}{2}\le a<0$

따라서 음수 a의 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$이다.

답 $-\dfrac{1}{2}$

$a<0$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

W 06 도함수의 활용 (1)

32 $f'(x)=a+\cos x$

함수 $f(x)$가 구간 $\left(\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$에서 감소하려면

$\pi<x<\frac{3}{2}\pi$일 때 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$에서 $-1<\cos x<0$이므로

$$a-1<a+\cos x<a$$

즉 $a-1<f'(x)<a$이므로

$$a\le 0$$

답 $a\le 0$

33 $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+3}$에서 $x\ne -3$이고

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x+3)-(x^2+3x+1)}{(x+3)^2}$$
$$=\frac{x^2+6x+8}{(x+3)^2}=\frac{(x+4)(x+2)}{(x+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-4$ 또는 $x=-2$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-5	↘		↘	-1	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-4$에서 극댓값 -5, $x=-2$에서 극솟값 -1을 가지므로 구하는 합은

$$-5+(-1)=-6$$

답 -6

34 $f(x)=x+\sqrt{8-x^2}$에서 $0<x\le 2\sqrt{2}$이고

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}=\frac{\sqrt{8-x^2}-x}{\sqrt{8-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sqrt{8-x^2}=x$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$8-x^2=x^2,\qquad x^2=4$$

$\therefore\ x=2\ (\because\ 0<x\le 2\sqrt{2})$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	4	↘	$2\sqrt{2}$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 4를 갖는다. 답 4

35 $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x^2}$에서 $x\ne 0$이고

$$f'(x)=\frac{2xe^{x^2}\cdot x^2-e^{x^2}\cdot 2x}{x^4}=\frac{2xe^{x^2}(x^2-1)}{x^4}$$
$$=\frac{2e^{x^2}(x+1)(x-1)}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극소이므로 극값을 갖는 모든 x의 값의 합은

$$-1+1=0$$

답 0

Q BOX

36 $f(x)=2x^2-\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}=\frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{1}{2}\ (\because\ x>0)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$\frac{1}{2}+\ln 2$	↗

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}+\ln 2$

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극솟값 $\frac{1}{2}+\ln 2$를 가지므로

$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}+\ln 2$$

$\therefore\ b-a=\ln 2$

답 ④

37 $f'(x)=2-\sec^2 x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sec^2 x=2,\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}$

이때 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $\quad \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이므로
$0<\cos x\le 1$

$\therefore\ x=-\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$-\frac{\pi}{2}+1$	↗	$\frac{\pi}{2}-1$	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값 $\frac{\pi}{2}-1$, $x=-\frac{\pi}{4}$에서 극솟값 $-\frac{\pi}{2}+1$을 가지므로 구하는 차는

$$\frac{\pi}{2}-1-\left(-\frac{\pi}{2}+1\right)=\pi-2$$

답 $\pi-2$

다른 풀이 $f'(x)=2-\sec^2 x$이므로

삼각함수는 이계도함수를 쉽게 구할 수 있으므로 이계도함수의 부호를 이용하여 극대와 극소를 판정할 수도 있다.

$$f''(x)=-2\sec x\cdot\sec x\tan x=-2\sec^2 x\tan x$$

$f'(x)=0$에서

$$x=-\frac{\pi}{4}\ \text{또는}\ x=\frac{\pi}{4}\ \left(\because\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

이때 $f''\left(-\frac{\pi}{4}\right)=4>0$, $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4<0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-1$, 극솟값은 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}+1$이다.

따라서 구하는 차는 $\quad \pi-2$

38 $f'(x)=3\sin^2 x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$(\because\ 0<x<2\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘		↘	극소	↗	

따라서 $f(x)$는 $0<x<2\pi$에서 2개의 극값을 갖는다.

답 ②

39 $f'(x)=\dfrac{b(x^2+a)-bx\cdot 2x}{(x^2+a)^2}=\dfrac{-bx^2+ab}{(x^2+a)^2}$

$f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가지므로

$f(1)=1,\ f'(1)=0$

$\dfrac{b}{1+a}=1,\ \dfrac{-b+ab}{(1+a)^2}=0$

$\therefore\ b=a+1,\ b(a-1)=0$

이때 $b=0$이면 $f(x)=0$이므로 $\quad b\neq 0$

$b(a-1)=0$에서 $\quad a=1$

따라서 $b=1+1=2$이므로

$a+b=3$ 답 ③

$f(x)=0$이면 $f(1)=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

40 $f(3)=-6e^4$이므로

$(9+a)e^4=-6e^4,\qquad 9+a=-6$

$\therefore\ a=-15$

$f(x)=(x^2-15)e^{x+1}$에서

$f'(x)=2xe^{x+1}+(x^2-15)e^{x+1}$

$=(x^2+2x-15)e^{x+1}$

$=(x+5)(x-3)e^{x+1}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-5$ 또는 $x=3$ ($\because e^{x+1}>0$)

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{10}{e^4}$	$\searrow$	$-6e^4$	$\nearrow$

따라서 $f(x)$는 $x=-5$에서 극댓값 $\dfrac{10}{e^4}$을 갖는다.

답 $\dfrac{10}{e^4}$

41 $f'(x)=-a\sin x+b\cos x$

$f(x)$가 $x=\dfrac{7}{6}\pi$에서 극댓값 2를 가지므로

$f\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)=2,\ f'\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)=0$

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{1}{2}b=2,\ \dfrac{1}{2}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=0$

$\therefore\ \sqrt{3}a+b=-4,\ a-\sqrt{3}b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-\sqrt{3},\ b=-1$

$\therefore\ ab=\sqrt{3}$ 답 ⑤

42 $f(x)=ax-\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$

이어야 한다.

이때 $x>0$에서 $-\dfrac{1}{x}<0$이므로 $\quad a-\dfrac{1}{x}<a$

즉 $f'(x)<a$이므로

$a\le 0$ 답 $a\le 0$

43 $f'(x)=a+16\sin x+2\cos 2x$

$=a+16\sin x+2(1-2\sin^2 x)$

$=-4\sin^2 x+16\sin x+a+2$

$=-4(\sin x-2)^2+a+18$

$f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$-3\le\sin x-2\le -1,\qquad 1\le(\sin x-2)^2\le 9$

$-36\le -4(\sin x-2)^2\le -4$

$a-18\le -4(\sin x-2)^2+a+18\le a+14$

$\therefore\ a-18\le f'(x)\le a+14$

따라서 $a-18<0<a+14$이어야 하므로

$-14<a<18$

즉 정수 a는 $-13,\ -12,\ -11,\ \cdots,\ 17$의 31개이다.

$18-(-14)-1=31$

답 31

44 $f'(x)=\dfrac{(2x+k)(x-1)-(x^2+kx+3)}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x-k-3}{(x-1)^2}$

이때 $(x-1)^2>0$이므로 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2-2x-k-3=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-2x-k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(-k-3)\le 0\qquad \therefore\ k\le -4$

따라서 k의 최댓값은 -4이다. 답 ②

45 $f'(x)=(2x+5)e^{-x}-(x^2+5x+a)e^{-x}$

$=-(x^2+3x+a-5)e^{-x}$

이때 $e^{-x}>0$이므로 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $x^2+3x+a-5=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+3x+a-5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4(a-5)>0,\qquad -4a+29>0$

$\therefore\ a<\dfrac{29}{4}$

따라서 자연수 a는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$이므로 구하는 합은

$1+2+3+\cdots+7=28$ 답 ③

$1+2+3+\cdots+7$
$=\sum_{k=1}^{7}k=\dfrac{7\cdot 8}{2}=28$

46 $f(x)=7\ln x-x+\dfrac{a}{x}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\dfrac{7}{x}-1-\dfrac{a}{x^2}=-\dfrac{x^2-7x+a}{x^2}$

$f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $x^2-7x+a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-7x+a=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $D=(-7)^2-4a>0\qquad \therefore\ a<\dfrac{49}{4}$

(ii) $\alpha+\beta=7>0$

(iii) $\alpha\beta = a > 0$

이상에서 $\quad 0 < a < \frac{49}{4}$ $\quad$ 답 $0 < a < \frac{49}{4}$

쌤한마디

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D, 두 실근을 α, β라 하면

① 두 근이 모두 양수 $\Longleftrightarrow D \geq 0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음수 $\Longleftrightarrow D \geq 0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\Longleftrightarrow \alpha\beta<0$

도젠! 수능 기출

W 48쪽

01 (1st) $f(1)$의 값을 구하고 $f'(1)$을 k에 대한 식으로 나타낸다.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1} = k$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 1}\left\{f(x)-\frac{\pi}{6}\right\}=0$이므로 $\quad f(1)=\frac{\pi}{6}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$이므로

$\quad f'(1)=k$

(2nd) $h(x)=(g\circ f)(x)$라 하고 $h(1)$의 값을 구한다.

$h(x)=(g\circ f)(x)$라 하면 접점의 y좌표는

$$h(1)=(g\circ f)(1)=g(f(1))$$
$$=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

(3rd) 접선의 방정식을 구한다.

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$, $g'(x)=\cos x$이므로 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=g'\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot k=\frac{\sqrt{3}}{2}k$$

$g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}k(x-1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(4th) $30k^2$의 값을 구한다.

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$$-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}k\cdot(-1) \qquad \therefore k=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

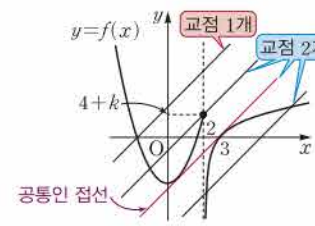
$$\therefore 30k^2=30\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=10$$

답 10

02 (1st) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+t$의 위치 관계를 파악한다.

함수 $g(t)$가 불연속인 t의 값이 한 개이려면 직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 바뀌는 t의 값이 한 개만 존재해야 한다.

이를 만족시키려면 다음 그림과 같이 직선 $y=x+t$가 두 곡선 $y=x^2+k$, $y=\ln(x-2)$에 동시에 접하도록 하는 실수 t의 값이 존재해야 한다.



(2nd) 곡선 $y=\ln(x-2)$와 직선 $y=x+t$가 접할 때의 t의 값을 구한다.

$h(x)=\ln(x-2)$라 하면

$$h'(x)=\frac{1}{x-2}$$

곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=x+t$가 접할 때, 접점의 좌표를 $(p,\ \ln(p-2))$라 하면 접선의 기울기가 1이므로 $h'(p)=1$에서

$$\frac{1}{p-2}=1 \qquad \therefore p=3$$

즉 접점의 좌표는 $(3,\ 0)$이므로

$$0=3+t \qquad \therefore t=-3$$

(3rd) k의 값을 구한다.

곡선 $y=x^2+k$와 직선 $y=x-3$이 접해야 하므로 이차방정식 $x^2+k=x-3$, 즉 $x^2-x+k+3=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4(k+3)=0$$
$$-4k-11=0 \qquad \therefore k=-\frac{11}{4}$$

답 ④

참고 직선 $y=x+t$가 점 $(2,\ 4+k)$를 지날 때 t의 값은

$\quad 4+k=2+t \qquad \therefore t=k+2$

따라서 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개일 때의 함수 $g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (t\leq k+2) \\ 1 & (t>k+2)\end{cases}$$

03 (1st) 두 곡선이 만나는 점의 x좌표를 p로 놓고 등식을 세운다.

$g(x)=t^3\ln(x-t)$, $h(x)=2e^{x-a}$이라 하자.

두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$가 오직 한 점에서 만나려면 두 곡선이 접해야 하므로 두 곡선이 접하는 점의 x좌표를 p $(p>t)$라 하면 $g(p)=h(p)$에서

함수 $y=g(x)$의 정의역은 $\{x \mid x>t\}$이다.

$$t^3\ln(p-t)=2e^{p-a} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$g'(x)=\dfrac{t^3}{x-t}$, $h'(x)=2e^{x-a}$이므로 $g'(p)=h'(p)$에서

$$\frac{t^3}{p-t}=2e^{p-a} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$t^3\ln(p-t)=\frac{t^3}{p-t}$$
$$\therefore \ln(p-t)=\frac{1}{p-t}\ (\because t>0) \qquad \cdots\cdots ㉢$$

(2nd) $f'(t)$를 p, t에 대한 식으로 나타낸다.

ⓛ에서 $\frac{t^3}{p-t}=\frac{2e^p}{e^a}$이므로

$$e^a=\frac{2e^p(p-t)}{t^3}$$

$$\therefore a=\ln\frac{2e^p(p-t)}{t^3}$$

$$=\ln 2+p+\ln(p-t)-3\ln t$$

따라서 $f(t)=\ln 2+p+\ln(p-t)-3\ln t$이므로 양변을 t에 대하여 미분하면

$$f'(t)=\frac{dp}{dt}+\frac{\frac{dp}{dt}-1}{p-t}-\frac{3}{t} \qquad \cdots\cdots ㉣$$

p는 t의 값에 따라 변하는 변수이므로 음함수의 미분법을 이용한다.

(3rd) $\frac{dp}{dt}$를 구한다.

㉢의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{\frac{dp}{dt}-1}{p-t}=-\frac{\frac{dp}{dt}-1}{(p-t)^2}$$

$$(p-t)\left(\frac{dp}{dt}-1\right)+\left(\frac{dp}{dt}-1\right)=0$$

$$\left(\frac{dp}{dt}-1\right)(p-t+1)=0$$

$$\therefore \frac{dp}{dt}=1\ (\because p>t,\ 즉\ p-t+1>1)$$

(4th) $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구한다.

$\frac{dp}{dt}=1$을 ㉣에 대입하면

$$f'(t)=1-\frac{3}{t}$$

$$\therefore \left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2=(1-9)^2=64$$

답 64

04 (1st) 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가짐을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $f'(x)=-\sin x+2\sin x+2x\cos x$

$=\sin x+2x\cos x$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지므로 $f'(\alpha)=0$에서

$$\sin\alpha+2\alpha\cos\alpha=0$$

$\cos\alpha\neq 0$이므로 양변을 $\cos\alpha$로 나누면

$\sin\alpha+2\alpha\cos\alpha=0$에서 $\cos\alpha=0$이면 $\sin\alpha=0$ 이때 $\sin\alpha=0$, $\cos\alpha=0$인 α의 값은 존재하지 않으므로 $\cos\alpha\neq 0$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+2\alpha=0$$

$$\therefore \tan\alpha=-2\alpha \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore \tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha=-2\alpha \qquad \cdots\cdots ㉡$$

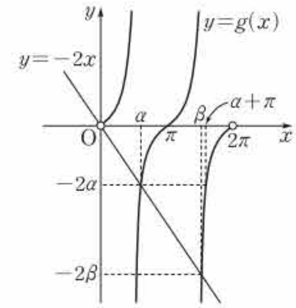
(2nd) 미분계수의 기하적 의미를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. ㄱ과 같은 방법으로 하면 $f'(\beta)=0$에서

$$\tan\beta=-2\beta \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉢에서 α, β는 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 방정식 $\tan x=-2x$의 실근이다.

즉 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-2x$는 다음 그림과 같고, 교점의 x좌표가 α, β이다.



이때 $g'(\alpha+\pi)$, $g'(\beta)$는 각각 $x=\alpha+\pi$, $x=\beta$인 점에서의 접선의 기울기이고 $\beta<\alpha+\pi<2\pi$이므로

$$g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$$

(3rd) 그래프를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. ㉡, ㉢에 의하여

$$\frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}=\frac{-2\alpha-(-2\beta)}{(\alpha+\pi)-\beta}$$

$$=\frac{\tan(\alpha+\pi)-\tan\beta}{(\alpha+\pi)-\beta}$$

이므로 $\frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}$는 두 점 $(\beta,\ \tan\beta)$, $(\alpha+\pi,\ \tan(\alpha+\pi))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (단, $x_1\neq x_2$)

또 $\sec^2\alpha=(\tan\alpha)'=\{\tan(\alpha+\pi)\}'$이므로 ㄴ과 같이 $g(x)=\tan x$라 하면

$$\sec^2\alpha=g'(\alpha+\pi)$$

즉 $\sec^2\alpha$는 $y=g(x)$의 그래프에서 $x=\alpha+\pi$인 점에서의 접선의 기울기와 같으므로

$$\frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}>\sec^2\alpha$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

07 도함수의 활용 (2)

Ⓦ 49쪽

Q BOX

01 $f(x)=8x^2+\ln x$라 하면 $x>0$이고

$$f'(x)=16x+\frac{1}{x},\ f''(x)=16-\frac{1}{x^2}$$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$$16-\frac{1}{x^2}<0,\qquad 16x^2-1<0$$

$$(4x+1)(4x-1)<0$$

$$\therefore\ 0<x<\frac{1}{4}\ (\because\ x>0)$$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$이다. 답 ①

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서
① $f''(x)>0$
➡ 곡선 $y=f(x)$가 이 구간에서 아래로 볼록
② $f''(x)<0$
➡ 곡선 $y=f(x)$가 이 구간에서 위로 볼록

02 $f(x)=x^4+ax^3+3ax^2-7$이라 하면

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+6ax,$$

$$f''(x)=12x^2+6ax+6a$$

곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\geq 0$이어야 하므로 부등식 $12x^2+6ax+6a\geq 0$이 항상 성립해야 한다.

방정식 $12x^2+6ax+6a=0$, 즉 $2x^2+ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=a^2-8a\leq 0,\qquad a(a-8)\leq 0$$

$$\therefore\ 0\leq a\leq 8$$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, ⋯, 8이므로 구하는 합은

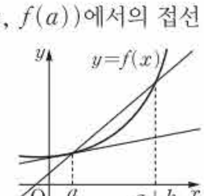
$$0+1+2+\cdots+8=36$$ 답 36

$$0+1+2+\cdots+8=\sum_{k=1}^{8}k=\frac{8\cdot 9}{2}=36$$

03 $f(a+h)-f(a)>f'(a)h$에서 $h>0$이므로

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>f'(a)$$

이때 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$의 값은 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+h$까지 변할 때의 평균변화율이고, $f'(a)$의 값은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이므로 주어진 부등식을 만족시키려면 곡선 $y=f(x)$가 오른쪽 그림과 같이 $x>0$에서 아래로 볼록해야 한다.



ㄱ. $f'(x)=4x^3+2x,$

$f''(x)=12x^2+2$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

ㄴ. $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1},$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$x>1$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>1$에서 위로 볼록하다.

ㄷ. $f'(x)=-\frac{3}{x^2},\ f''(x)=\frac{6}{x^3}$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

ㄹ. $f(x)=5^{-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^x$이므로

$$f'(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x\ln\frac{1}{5},$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\ln\frac{1}{5}\right)^2$$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

04 $f(x)=(x^2-x+2)e^x$이라 하면

$$f'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x+2)e^x=(x^2+x+1)e^x,$$

$$f''(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x=(x^2+3x+2)e^x=(x+2)(x+1)e^x$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=-1\ (\because\ e^x>0)$

$x=-2,\ x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 x좌표는 $-2,\ -1$이다.

따라서 모든 변곡점의 x좌표의 합은

$$-2+(-1)=-3$$ 답 -3

05 $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x,\ f''(x)=2\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{\pi}{2}\ (\because\ 0<x<\pi)$

$x=\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극값을 갖는다.

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1^2=1$$

$f''(x)=0$에서

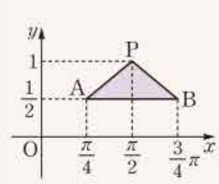
$$x=\frac{\pi}{4}\ \text{또는}\ x=\frac{3}{4}\pi\ (\because\ 0<x<\pi)$$

$x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{3}{4}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점 A, B의 좌표는

$$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3}{4}\pi,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}$$



답 ①

06 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b,$$

$$f''(x)=6x+2a$$

변곡점의 좌표가 $(-1,\ -5)$이므로

$f''(-1)=0$에서 $\quad -6+2a=0$

$$\therefore\ a=3$$

$f(-1)=-5$에서 $\quad -1+a-b+4=-5$

$\therefore b=11$

$\therefore a+b=14$ 답 14

07 $f(x)=ax^2+5x+b\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2ax+5+\dfrac{b}{x}$,

$f''(x)=2a-\dfrac{b}{x^2}$

$f(x)$가 $x=2$에서 극대이므로 $f'(2)=0$에서

$4a+5+\dfrac{b}{2}=0 \qquad \therefore 8a+b=-10$ …… ㉠

변곡점의 x좌표가 1이므로 $f''(1)=0$에서

$2a-b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=-2$

$\therefore f(x)=-x^2+5x-2\ln x$,

$f'(x)=-2x+5-\dfrac{2}{x}=\dfrac{-2x^2+5x-2}{x}$

$=-\dfrac{(2x-1)(x-2)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=2$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	$\frac{9}{4}+2\ln 2$	↗	극대	↘

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{2}-2\ln\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{4}+2\ln 2$

따라서 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}$에서 극솟값 $\dfrac{9}{4}+2\ln 2$를 갖는다. 답 ⑤

08 $f(x)=(x^2+3x+a)e^x$이라 하면

$f'(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+a)e^x$

$=(x^2+5x+a+3)e^x$,

$f''(x)=(2x+5)e^x+(x^2+5x+a+3)e^x$

$=(x^2+7x+a+8)e^x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 2개 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다.

$f''(x)=0$에서

$x^2+7x+a+8=0$ ($\because e^x>0$)

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=7^2-4(a+8)>0$

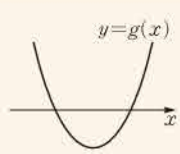
$4a<17 \qquad \therefore a<\dfrac{17}{4}$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$1+2+3+4=10$ 답 10

쌤한마디

$g(x)=x^2+7x+a+8$이라 하면 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 실근의 좌우에서 $g(x)$의 부호가 바뀐다.



09 $f(x)=e^x+e^{-x}+ax^2$이라 하면

$f'(x)=e^x-e^{-x}+2ax$,

$f''(x)=e^x+e^{-x}+2a$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

이때 $e^x>0$, $e^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$f''(x)=e^x+e^{-x}+2a\ge 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}+2a$

$=2a+2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

$e^x=e^{-x}$에서 $\quad x=-x \qquad \therefore x=0$

따라서 $2a+2\ge 0$이어야 하므로

$a\ge -1$

즉 정수 a의 최솟값은 -1이다. 답 -1

10 $f(x)=ax^2+\sin x+\cos x$라 하면

$f'(x)=2ax+\cos x-\sin x$,

$f''(x)=2a-\sin x-\cos x$

$=2a-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$이므로 $-\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\quad 2a-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$\therefore a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

이때 $-1\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1$이므로

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le a\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이면

$f''(x)=-\sqrt{2}\left\{1+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}\le 0$

$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이면

$f''(x)=\sqrt{2}\left\{1-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}\ge 0$

즉 $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이면 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

따라서 a의 값의 범위는

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11 $f(x)=x-\cos x$라 하면

$f'(x)=1+\sin x$, $f''(x)=\cos x$

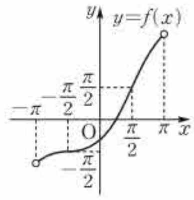
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\dfrac{\pi}{2}$ ($\because -\pi<x<\pi$)

$f''(x)=0$에서

$x=-\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{2}$ ($\because -\pi<x<\pi$)

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$-\frac{\pi}{2}$	⤴	$\frac{\pi}{2}$	↗	

따라서 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.

ㄴ. $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$이지만 $x=-\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=-\frac{\pi}{2}$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. 변곡점은 점 $\left(-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\right)$, 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$의 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

12 $f'(x)=\dfrac{-(x^2+4)+x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{x^2-4}{(x^2+4)^2}$

$=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$,

$f''(x)=\dfrac{2x(x^2+4)^2-(x^2-4)\cdot 2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4}$

$=\dfrac{-2x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}=-\dfrac{2x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})}{(x^2+4)^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$f''(x)=0$에서

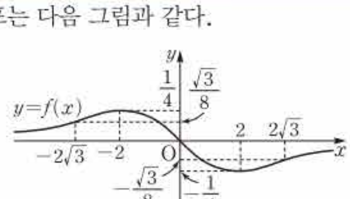
$x=-2\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	⤴	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	⤵	$-\frac{1}{4}$	⤴	$-\frac{\sqrt{3}}{8}$	↗

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

직선 $y=0$, 즉 x축은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이다.



① $f(x)$의 극댓값은 $f(-2)=\frac{1}{4}$이다.

③ 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-\frac{-x}{(-x)^2+4}=\frac{x}{x^2+4}=-f(x)$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

④ 구간 $(0,\ 2)$에서 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

⑤ 변곡점은 점 $\left(-2\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, 점 $(0,\ 0)$, 점 $\left(2\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$의 3개이다.

답 ③

13 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	0	$\cdots$	c	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

x	d	$\cdots$	e	$\cdots$	f	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

$f''(b)=0$, $f''(0)=0$, $f''(c)=0$, $f''(e)=0$이고 $x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점은 4개이다. 답 4

14 $f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

$f''(x)$의 값은 $y=f'(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기와 같으므로 방정식 $f''(x)=0$의 실근은 접선의 기울기가 0일 때의 x의 값이다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↗	변곡점	⤴	변곡점	↗	극대	↘

ㄱ. $f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

ㄴ. $f'(-3)=0$이지만 $x=-3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=-3$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. $f''(-3)=0$, $f''(-1)=0$이고 $x=-3$, $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점은 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

15 $f'(x)=\dfrac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because x>2$)

x	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	27	↗

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 27을 가지므로

$\alpha=3$, $m=27$

$\therefore \dfrac{m}{\alpha}=9$ 답 9

16 $f'(x)=2xe^{-2x}-2(x^2-6)e^{-2x}$

$=-2(x^2-x-6)e^{-2x}$

$=-2(x+2)(x-3)e^{-2x}$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because -1\le x\le 4$)

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-5e^2$	↗	$\frac{3}{e^6}$	↘	$\frac{10}{e^8}$

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $\frac{3}{e^6}$, $x=-1$에서 최솟값 $-5e^2$을 가지므로 구하는 곱은

$$\frac{3}{e^6}\cdot(-5e^2)=-\frac{15}{e^4}$$

답 ③

17 $f(x)=\log_4(x+4)+\log_2(2-x)$에서

$-4<x<2$이고

$x+4>0$에서 $x>-4$
$2-x>0$에서 $x<2$
$\therefore -4<x<2$

$$f'(x)=\frac{1}{(x+4)\ln 4}-\frac{1}{(2-x)\ln 2}$$

$$=\frac{1}{2(x+4)\ln 2}-\frac{1}{(2-x)\ln 2}$$

$$=\frac{(2-x)-2(x+4)}{2(x+4)(2-x)\ln 2}$$

$$=-\frac{3(x+2)}{2(x+4)(2-x)\ln 2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

x	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{5}{2}$	↘	

$f(-2)=\log_4 2+\log_2 4$
$=\log_{2^2}2+\log_2 2^2$
$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $\frac{5}{2}$를 갖는다.

답 $\frac{5}{2}$

18 $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{t^2+1}\right)(t\ge 0)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{t^2+1}=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}(x-t)$$

$$\therefore y=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}x+\frac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}$$

접선의 y절편을 $g(t)$라 하면

$$g(t)=\frac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}$$

$$\therefore g'(t)=\frac{6t(t^2+1)^2-(3t^2+1)\cdot 2(t^2+1)\cdot 2t}{(t^2+1)^4}$$

$$=\frac{-2t(3t^2-1)}{(t^2+1)^3}$$

$$=-\frac{2t(\sqrt{3}t+1)(\sqrt{3}t-1)}{(t^2+1)^3}$$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because t\ge 0$)

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$	1	↗	$\frac{9}{8}$	↘

따라서 $g(t)$는 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 최댓값 $\frac{9}{8}$를 가지므로 y절편의 최댓값은 $\frac{9}{8}$이다.

답 $\frac{9}{8}$

19 $f(x)=\ln x+\frac{e}{x}+a$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{e}{x^2}=\frac{x-e}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2+a$	↗

이때 $f(x)$는 $x=e$에서 최솟값 1을 가지므로

$2+a=1$ $\therefore a=-1$

답 -1

20 $f'(x)=a-2a\cos 2x=a(1-2\cos 2x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x=\frac{1}{2}$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$, 즉
$0\le 2x\le\pi$이므로 방정식
$\cos 2x=\frac{1}{2}$에서
$2x=\frac{\pi}{3}$ $\therefore x=\frac{\pi}{6}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{\pi}{6}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a$	↗	$\frac{\pi}{2}a$

이때 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최댓값 3π를 가지므로

$\frac{\pi}{2}a=3\pi$ $\therefore a=6$

따라서 $f(x)$의 최솟값은

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\pi-3\sqrt{3}$$

답 $\pi-3\sqrt{3}$

21 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-x}$에서 $0\le x\le a$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{a-x}}$$

$$=\frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x(a-x)}}$$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{a-x}=\sqrt{x}$

$a-x=x$ $\therefore x=\frac{a}{2}$

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{a}$	↗	$\sqrt{2a}$	↘	$\sqrt{a}$

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{a}{2}$에서 최댓값 $\sqrt{2a}$, $x=0$ 또는

$x=a$에서 최솟값 $\sqrt{a}$를 갖고, 최댓값과 최솟값의 곱이 $4\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{2a}\cdot\sqrt{a}=4\sqrt{2}$, $\quad \sqrt{2}a=4\sqrt{2}$

$\therefore a=4$

답 ④

22 $4^x=t$로 놓으면 $t>0$이고, 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-t^2-t$

$\therefore g'(t)=3t^2-2t-1=(3t+1)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=1\ (\because t>0)$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	-1	↗

따라서 $g(t)$는 $t=1$에서 최솟값 -1을 갖는다.

답 ⑤

23 $g(x)=3\sin x-4\cos x=5\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=-\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\right)$

$g(x)=5\cos(x-\beta)$ $\left(\cos\beta=-\frac{4}{5},\ \sin\beta=\frac{3}{5}\right)$ 로 놓을 수도 있다.

$g(x)=t$로 놓으면 $-5\le t\le 5$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3+3t^2+1$

$\therefore f'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=-2$ 또는 $t=0$

t	-5	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	5
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-49	↗	5	↘	1	↗	201

따라서 $f(t)$는 $t=5$에서 최댓값 201, $t=-5$에서 최솟값 -49를 가지므로 구하는 차는

$201-(-49)=250$

답 250

24 원점과 곡선 위의 점 $(2\sqrt{2}e^{-t},\ 2e^{2t})$ 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\sqrt{(2\sqrt{2}e^{-t})^2+(2e^{2t})^2}=\sqrt{8e^{-2t}+4e^{4t}}$

$\therefore f'(t)=\dfrac{-16e^{-2t}+16e^{4t}}{2\sqrt{8e^{-2t}+4e^{4t}}}=-\dfrac{8e^{-2t}(1-e^{6t})}{\sqrt{8e^{-2t}+4e^{4t}}}$

$f'(t)=0$에서 $\quad e^{6t}=1\ (\because e^{-2t}>0)\quad \therefore t=0$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$2\sqrt{3}$	↗

따라서 $f(t)$는 $t=0$에서 최솟값 $2\sqrt{3}$을 가지므로 구하는 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다.

답 $2\sqrt{3}$

25 $\overline{OP}=\overline{OA}=a$이므로 직각삼각형 POH에서

$\overline{PH}=a\sin\theta,\ \overline{OH}=a\cos\theta$

△PAH의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AH}\cdot\overline{PH}=\frac{1}{2}(a+a\cos\theta)\cdot a\sin\theta$

$=\frac{a^2}{2}(1+\cos\theta)\sin\theta$

$\therefore S'(\theta)=\frac{a^2}{2}\{-\sin\theta\cdot\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta\}$

$=\frac{a^2}{2}(-\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta)$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $-\sin^2\theta=\cos^2\theta-1$

$=\frac{a^2}{2}(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$

$=\frac{a^2}{2}(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$

$S'(\theta)=0$에서 $\quad \cos\theta=\frac{1}{2}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\cos\theta<1$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$	↘	

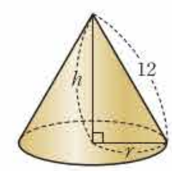
따라서 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$을 가지므로

$k=\frac{1}{3},\ l=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$\therefore kl=\frac{\sqrt{3}}{8}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{8}$

26 오른쪽 그림과 같이 잘라 낸 부채꼴로 만든 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 $r\ (0<r<12)$라 하면



잘라 낸 부채꼴의 호의 길이와 만든 원뿔의 밑면의 둘레의 길이가 같음을 이용한다.

$12\theta=2\pi r$

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면 $l=r\theta$

$\therefore \theta=\frac{\pi r}{6}\quad\cdots\cdots$ ㉠

원뿔의 높이를 h라 하면 $h=\sqrt{144-r^2}$이므로 원뿔의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{144-r^2}$

$\therefore V'(r)=\frac{1}{3}\pi\left(2r\sqrt{144-r^2}+r^2\cdot\dfrac{-2r}{2\sqrt{144-r^2}}\right)$

$=\frac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{2r(144-r^2)-r^3}{\sqrt{144-r^2}}$

$=\dfrac{-\pi r(r^2-96)}{\sqrt{144-r^2}}$

$=-\dfrac{\pi r(r+4\sqrt{6})(r-4\sqrt{6})}{\sqrt{144-r^2}}$

$V'(r)=0$에서 $\quad r=4\sqrt{6}\ (\because 0<r<12)$

r	0	$\cdots$	$4\sqrt{6}$	$\cdots$	12
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(r)$는 $r=4\sqrt{6}$에서 극대이면서 최대이므로 $r=4\sqrt{6}$을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{6}\cdot 4\sqrt{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

답 ③

27 $\ln x-x+9-k=0$에서

$\ln x-x+9=k$

위의 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선

$y=\ln x-x+9$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\ln x-x+9$라 하면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1$$

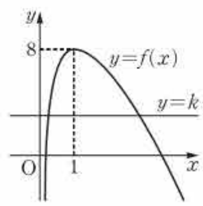
$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	8	↘

또 $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$k<8$$

즉 자연수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 7이므로 구하는 합은

$$1+2+3+\cdots+7=28$$

답 28

Q BOX

$\sum_{k=1}^{7} k=\frac{7\cdot 8}{2}=28$

28 방정식 $\frac{12}{x^2+4x+7}=k$가 적어도 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{12}{x^2+4x+7}$와 직선 $y=k$가 만나야 한다.

$f(x)=\frac{12}{x^2+4x+7}$라 하면

$$f'(x)=-\frac{12(2x+4)}{(x^2+4x+7)^2}=-\frac{24(x+2)}{(x^2+4x+7)^2}$$

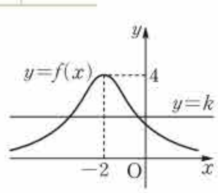
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	4	↘

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나려면

$$0<k\le 4$$

즉 정수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 ③

$k=1$, 2, 3이면 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖고, $k=4$이면 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

29 $ke^{-x}=x^2$에서 $e^{-x}>0$이므로

$$\frac{x^2}{e^{-x}}=k,\ \text{즉}\ x^2e^x=k$$

위의 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x^2e^x$과 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x^2e^x$이라 하면

$$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$$

$f'(x)=0$에서

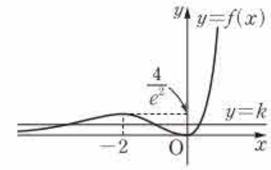
$$x=-2\ \text{또는}\ x=0\ (\because e^x>0)$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$$0<k<\frac{4}{e^2}$$

답 $0<k<\frac{4}{e^2}$

30 $f'(x)=8x-a\sin x$,

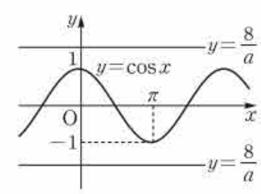
$f''(x)=8-a\cos x$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

(i) $a=0$일 때, $f''(x)=8>0$이므로 방정식 $f''(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.

(ii) $a\ne 0$일 때, $f''(x)=0$에서 $\quad \cos x=\frac{8}{a}$

위의 방정식이 실근을 갖지 않거나 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 곡선



$y=\cos x$와 직선 $y=\frac{8}{a}$이 만나지 않거나 접해야 하므로 $\quad \frac{8}{a}\le -1$ 또는 $\frac{8}{a}\ge 1$

$$\therefore\ -8\le a<0\ \text{또는}\ 0<a\le 8$$

$a=-8$이면

$f''(x)=8+8\cos x\ge 0$

$a=8$이면

$f''(x)=8-8\cos x\ge 0$

따라서 방정식 $f''(x)=0$의 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad -8\le a\le 8$

따라서 $\alpha=8$, $\beta=-8$이므로

$$\alpha\beta=-64$$

답 -64

31 $g(x)=\ln(2\sin x+4)$라 하면

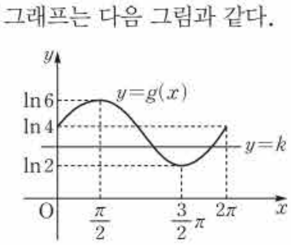
$$g'(x)=\frac{2\cos x}{2\sin x+4}=\frac{\cos x}{\sin x+2}$$

$g'(x)=0$에서 $\quad \cos x=0$

$$\therefore\ x=\frac{\pi}{2}\ \text{또는}\ x=\frac{3}{2}\pi\ (\because 0\le x\le 2\pi)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\ln 4$	↗	$\ln 6$	↘	$\ln 2$	↗	$\ln 4$

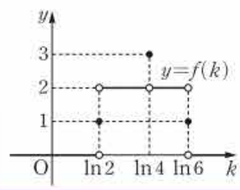
$y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $g(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로

$$f(k)=\begin{cases} 0 & (k<\ln 2 \text{ 또는 } k>\ln 6) \\ 1 & (k=\ln 2 \text{ 또는 } k=\ln 6) \\ 2 & (\ln 2<k<\ln 4 \text{ 또는 } \ln 4<k<\ln 6) \\ 3 & (k=\ln 4) \end{cases}$$

따라서 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(k)$가 불연속이 되는 k는



$\ln 2,\ \ln 4,\ \ln 6$

의 3개이다. 답 3

Q BOX: 직관적으로 함수 $f(k)$가 $k=a$에서 불연속이라는 것은 $k=a$에서 함수의 그래프가 끊어져 있는 것이다.

쌤 한마디

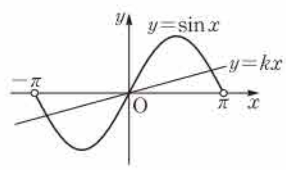
다음과 같이 함수 $f(x)$가 함수의 연속 조건 중 어느 한 가지라도 만족시키지 않으면 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

① $f(a)$가 정의되어 있지 않다.

② $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

32 $-\pi<x<\pi$에서 방정식 $\sin x=kx$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.



즉 직선 $y=kx$의 기울기는 양수이면서 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기보다 작아야 한다.

Q BOX: 직선 $y=kx$의 기울기가 양수가 아니거나 접선의 기울기보다 크거나 같으면 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$는 원점에서만 만난다.

$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$\cos 0=1$

$\therefore\ 0<k<1$ 답 ④

33 주어진 두 방정식이 모두 실근을 갖지 않으려면 직선 $y=kx$가 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$와 모두 만나지 않아야 한다.

(i) 직선 $y=kx$가 곡선 $y=e^x$과 접할 때,

$y=e^x$에서

$y'=e^x$

접점의 좌표를 $(t,\ e^t)$이라 하면 접선의 기울기는 e^t이므로 접선의 방정식은

$y-e^t=e^t(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-e^t=e^t\cdot(-t)$

$e^t(t-1)=0$

$\therefore\ t=1\ (\because\ e^t>0)$

따라서 접선의 방정식이 $y=ex$이므로

$k=e$

(ii) 직선 $y=kx$가 곡선 $y=\ln x$와 접할 때,

$y=\ln x$에서 $\qquad y'=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(s,\ \ln s)$라 하면 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{s}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln s=\dfrac{1}{s}(x-s)$

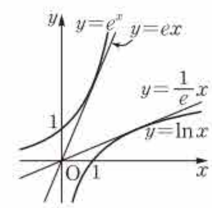
이 직선이 원점을 지나므로

$-\ln s=\dfrac{1}{s}\cdot(-s) \qquad \therefore\ s=e$

따라서 접선의 방정식이 $y=\dfrac{1}{e}x$이므로

$k=\dfrac{1}{e}$

(i), (ii)에서 직선 $y=kx$가 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$와 모두 만나지 않으려면



$\dfrac{1}{e}<k<e$

Q BOX: $e=2.7\cdots$이므로 $\dfrac{1}{e}<k<e$를 만족시키는 정수 k는 1, 2이다.

따라서 정수 k는 1, 2의 2개이다.

답 2

34 $8x+\dfrac{1}{2x^2}+a\ge 0$에서

$8x+\dfrac{1}{2x^2}\ge -a$

$f(x)=8x+\dfrac{1}{2x^2}$이라 하면

$$f'(x)=8-\frac{1}{x^3}=\frac{8x^3-1}{x^3}=\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=\dfrac{1}{2}\ (\because\ 4x^2+2x+1>0)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	6	↗

따라서 $x>0$에서 $f(x)$의 최솟값은 6이므로 부등식 $f(x)\ge -a$가 성립하려면

$-a\le 6 \qquad \therefore\ a\ge -6$

즉 a의 최솟값은 -6이다. 답 ③

35 $f(x)=(\ln x)^2-6\ln x$라 하면

$$f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{6}{x}=\frac{2(\ln x-3)}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad \ln x=3 \qquad \therefore\ x=e^3$

x	0	$\cdots$	e^3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	-9	↗

따라서 $x>0$에서 $f(x)$의 최솟값은 -9이므로 부등식 $f(x)>k$가 성립하려면

$k<-9$ 답 $k<-9$

36 $f(x)=\cos 2x-2\cos x$라 하면 $f(x)$는 주기가 2π인 주기함수이므로 $0\le x\le 2\pi$에서 부등식 $f(x)\le a$가 성립하도록 하는 a의 값의 범위를 구하면 된다.

이때

$$f'(x)=-2\sin 2x+2\sin x$$
$$=-4\sin x\cos x+2\sin x$$
$$=-2\sin x(2\cos x-1)$$

이므로 $f'(x)=0$에서

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$

또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because$ $0\le x\le 2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	3	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	-1

따라서 $0\le x\le 2\pi$에서 $f(x)$의 최댓값은 3이므로 부등식 $f(x)\le a$가 성립하려면

$a\ge 3$ 답 $a\ge 3$

> 함수 $y=\cos 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고, 함수 $y=-2\cos x$의 주기는 2π이므로 함수 $y=\cos 2x-2\cos x$는 주기가 2π인 주기함수이다.

37 $e^x-\frac{1}{2}x^2>x+a$에서

$e^x-\frac{1}{2}x^2-x>a$

$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x$라 하면

$f'(x)=e^x-x-1$, $f''(x)=e^x-1$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 함수 $f'(x)$는 증가하고, $f'(0)=0$이므로

$f'(x)>0$

또 $x>0$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가하고, $f(0)=1$이므로

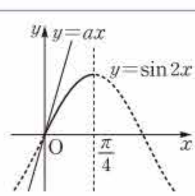
$f(x)>1$

따라서 $x>0$에서 부등식 $f(x)>a$가 성립하려면

$a\le 1$

이어야 하므로 a의 최댓값은 1이다. 답 1

38 $0<x<\frac{\pi}{4}$에서 부등식 $\sin 2x<ax$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sin 2x$가 직선 $y=ax$보다 아래쪽에 있어야 한다.



> 어떤 구간에서 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립하려면 그 구간에서 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.

$f(x)=\sin 2x$라 하면

$f'(x)=2\cos 2x$

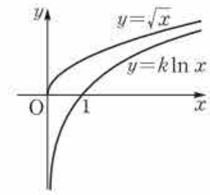
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$이므로 접선의 방정식은

$y=2x$

따라서 주어진 부등식이 성립하려면

$a\ge 2$ 답 ⑤

39 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x)=\frac{k}{x}$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 $t\,(t>0)$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\sqrt{t}=k\ln t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{k}{t}$

$\therefore$ $k=\frac{\sqrt{t}}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\sqrt{t}=\frac{\sqrt{t}}{2}\ln t$

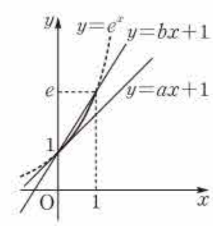
$\sqrt{t}(\ln t-2)=0$ $\therefore$ $t=e^2$ ($\because$ $t>0$)

$t=e^2$을 ㉡에 대입하면 $k=\frac{e}{2}$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으려면

$0<k<\frac{e}{2}$ 답 $0<k<\frac{e}{2}$

40 $0\le x\le 1$에서 주어진 부등식이 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^x$이 직선 $y=ax+1$보다 위쪽에 있거나 접해야 하고, 직선 $y=bx+1$보다 아래쪽에 있거나 $x=1$인 점에서 만나야 한다.



$f(x)=e^x$이라 하면 $f'(x)=e^x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1$이므로 접선의 방정식은

$y=x+1$

즉 부등식 $f(x)\ge ax+1$이 성립하려면 $a\le 1$

또 $f(1)=e$이므로 부등식 $f(x)\le bx+1$이 성립하려면

$b+1\ge e$ $\therefore$ $b\ge e-1$

따라서 $M=1$, $m=e-1$이므로

$M+m=e$ 답 ⑤

41 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=f'(t)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}=0$, $\cos\frac{t}{2}=-\frac{1}{2}$

$\frac{t}{2}=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \cdots$

$\therefore$ $t=\frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \frac{16}{3}\pi, \cdots$

따라서 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $\frac{4}{3}\pi$이다. 답 $\frac{4}{3}\pi$

42 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=f'(t)=2pt+\frac{q}{t}$,

$a=f''(t)=2p-\frac{q}{t^2}$

$t=3$에서의 점 P의 속도가 9이므로

$6p+\frac{q}{3}=9 \qquad \therefore 18p+q=27 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$t=3$에서의 점 P의 가속도가 1이므로

$2p-\frac{q}{9}=1 \qquad \therefore 18p-q=9 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=1,\ q=9$

$\therefore p+q=10$

답 ③

43 $\frac{dx}{dt}=2-\frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=1+\frac{2}{t^2}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$\left(2-\frac{1}{t^2},\ 1+\frac{2}{t^2}\right)$

점 P의 속력이 $\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{\left(2-\frac{1}{t^2}\right)^2+\left(1+\frac{2}{t^2}\right)^2}=\sqrt{10}$

$\sqrt{5+\frac{5}{t^4}}=\sqrt{10}, \qquad 5+\frac{5}{t^4}=10$

$\frac{1}{t^4}=1$

$\therefore t=1\ (\because t>0)$

따라서 구하는 시각은 1이다.

답 ②

44 $\frac{dx}{dt}=10\sqrt{2}$, $\frac{dy}{dt}=-10t+10\sqrt{2}$이므로 시각 t에서의 물 로켓의 속도는

$(10\sqrt{2},\ -10t+10\sqrt{2})$

물 로켓이 지면에 떨어질 때 $y=0$이므로

$-5t^2+10\sqrt{2}t=0, \qquad -5t(t-2\sqrt{2})=0$

$\therefore t=2\sqrt{2}\ (\because t>0)$

따라서 $t=2\sqrt{2}$에서의 물 로켓의 속도는

$(10\sqrt{2},\ -10\sqrt{2})$이므로 속력은

$\sqrt{(10\sqrt{2})^2+(-10\sqrt{2})^2}=20\ (\text{m/s})$

답 20 m/s

45 $\frac{dx}{dt}=1+\cos^2 t-\sin^2 t=2\cos^2 t$, $\frac{dy}{dt}=\sec^2 t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(2\cos^2 t,\ \sec^2 t)$

따라서 점 P의 시각 t에서의 속력은

$\sqrt{(2\cos^2 t)^2+(\sec^2 t)^2}$

$=\sqrt{4\cos^4 t+\sec^4 t}$

$=\sqrt{4\cos^4 t+\frac{1}{\cos^4 t}} \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 $0<t<\frac{\pi}{2}$에서 $4\cos^4 t>0$, $\frac{1}{\cos^4 t}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4\cos^4 t+\frac{1}{\cos^4 t}\ge 2\sqrt{4\cos^4 t\cdot\frac{1}{\cos^4 t}}$

$=2\cdot 2=4$

$\left(\text{단, 등호는 } 4\cos^4 t=\frac{1}{\cos^4 t}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 ㉠에서

$\sqrt{4\cos^4 t+\frac{1}{\cos^4 t}}\ge\sqrt{4}=2$

이므로 점 P의 속력의 최솟값은 2이다.

답 2

46 $\frac{dx}{dt}=1-2\cos 2t$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin 2t$에서

$\frac{d^2x}{dt^2}=4\sin 2t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-4\cos 2t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(4\sin 2t,\ -4\cos 2t)$

따라서 $t=\frac{5}{4}\pi$에서의 점 P의 가속도는

$(4,\ 0)$

답 $(4,\ 0)$

47 $\frac{1}{2}t^2-t=4$에서 $\qquad t^2-2t-8=0$

$(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=4\ (\because t\ge 0)$

즉 점 P의 위치가 $(4,\ 16)$일 때의 시각은 4이다.

$\frac{dx}{dt}=t-1$, $\frac{dy}{dt}=3\sqrt{t}$에서

$\frac{d^2x}{dt^2}=1$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{3}{2\sqrt{t}}$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$\left(1,\ \frac{3}{2\sqrt{t}}\right)$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는 $\left(1,\ \frac{3}{4}\right)$이므로 가속도의 크기는

$\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}$

답 $\frac{5}{4}$

Q BOX

$0<t<\frac{\pi}{2}$에서
$0<\cos t<1$, 즉
$0<\cos^4 t<1$이므로
$0<4\cos^4 t<4$,
$\frac{1}{\cos^4 t}>1$

$2t\sqrt{t}=16$임을 이용하여 t의 값을 구할 수도 있다.

$y=2t\sqrt{t}=2t^{\frac{3}{2}}$이므로
$\frac{dy}{dt}=2\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}$
$=3\sqrt{t}$

$-10\cdot 2\sqrt{2}+10\sqrt{2}$
$=-20\sqrt{2}+10\sqrt{2}$
$=-10\sqrt{2}$

도전! 수능 기출

W 56쪽

01 1st 두 조건 (가), (나)를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 조건 (나)에서

$$f(x)=-f(-x)$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq -1$이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 1$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=1$과 만나지 않는다. 이때 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 직선 $y=1$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 $y=-1$과도 만나지 않는다.

2nd 조건 (다)에서 $f'(x)$의 부호를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 두 조건 (나), (다)에서

$$\begin{aligned} f'(x)&=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\} \\ &=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\} \\ &=1-\{f(x)\}^2 \qquad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

한편 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

또 조건 (나)의 등식에 $x=0$을 대입하면

$$f(0)+f(0)=0$$

$$\therefore f(0)=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

즉 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지나고 조건 (가)에서 $f(x)\neq 1$, ㄱ에서 $f(x)\neq -1$이므로

$$-1<f(x)<1$$

따라서 ㉠에서 모든 실수 x에 대하여 $1-\{f(x)\}^2>0$, 즉 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

3rd 조건 (다)를 이용하여 $f''(x)$를 구한 후 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. ㉠에서 $f'(x)=1-\{f(x)\}^2$이므로

$$f''(x)=-2f(x)f'(x)$$

$f''(x)=0$에서

$$f(x)=0 \ (\because f'(x)>0)$$

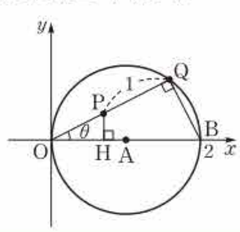
이때 ㉡에서 $f(0)=0$이고 $f(x)$는 증가하는 함수이므로 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 바뀐다.

즉 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 점 $(0,\ 0)$의 1개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

02 **1st** 점 P의 y좌표를 θ에 대한 함수로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원과 x축의 교점 중 원점이 아닌 점을 B라 하자.



$\overline{QB}$를 그으면 직각삼각형 QOB에서

$\overline{OB}$가 원의 지름이므로 $\angle OQB=\frac{\pi}{2}$

$$\overline{OQ}=\overline{OB}\cos\theta=2\cos\theta$$

$$\therefore \overline{OP}=2\cos\theta-1$$

또 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 P의 y좌표를 $f(\theta)$라 하면 직각삼각형 POH에서

$$\begin{aligned} f(\theta)&=\overline{PH}=\overline{OP}\sin\theta \\ &=(2\cos\theta-1)\sin\theta \end{aligned}$$

2nd 점 P의 y좌표가 최대가 되도록 하는 θ의 값을 조사한다.

$$\begin{aligned} f'(\theta)&=-2\sin^2\theta+(2\cos\theta-1)\cos\theta \\ &=-2\sin^2\theta+2\cos^2\theta-\cos\theta \\ &=-2(1-\cos^2\theta)+2\cos^2\theta-\cos\theta \\ &=4\cos^2\theta-\cos\theta-2 \end{aligned}$$

$f'(\theta)=0$에서

$$\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{1}{2}<\cos\theta<1$이므로

$$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$$

$\sqrt{25}<\sqrt{33}<\sqrt{36}$, 즉 $5<\sqrt{33}<6$이므로 $6<1+\sqrt{33}<7$ $\therefore \frac{3}{4}<\frac{1+\sqrt{33}}{8}<\frac{7}{8}$

$0<\theta<\frac{\pi}{3}$에서 $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$을 만족시키는 θ의 값을 θ_1이라 하면 $\theta=\theta_1$의 좌우에서 $f'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_1$에서 극대이면서 최대이다.

3rd $a+b$의 값을 구한다.

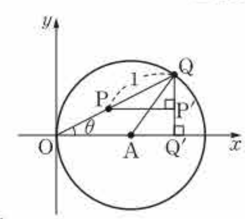
점 P의 y좌표가 최대가 될 때 $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$이므로

$$a=1,\ b=33$$

$$\therefore a+b=34$$

답 34

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 Q′, 점 P에서 $\overline{QQ'}$에 내린 수선의 발을 P′이라 하고, $\overline{QA}$를 그으면



$$\angle QAQ'=2\angle QOA=2\theta$$

직각삼각형 QAQ′에서

$$\overline{QQ'}=\overline{AQ}\sin 2\theta=\sin 2\theta$$

한편 $\overline{PP'}\,/\!/\,\overline{OQ'}$이므로

$$\angle QPP'=\theta$$

따라서 직각삼각형 QPP′에서

$$\overline{QP'}=\overline{PQ}\sin\theta=\sin\theta$$

점 P의 y좌표를 $f(\theta)$라 하면

$$f(\theta)=\overline{QQ'}-\overline{QP'}=\sin 2\theta-\sin\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(\theta)&=2\cos 2\theta-\cos\theta \\ &=2(2\cos^2\theta-1)-\cos\theta \\ &=4\cos^2\theta-\cos\theta-2 \end{aligned}$$

03 **1st** $f(x)$가 역함수를 갖도록 하는 조건을 찾는다.

$f(x)$가 역함수를 가지려면 $f(x)$는 항상 증가하거나 감소해야 하므로

$$f'(x)\geq 0 \text{ 또는 } f'(x)\leq 0$$

이때

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\} \\ &\quad +e^{x+1}(2x+n-2)+a \\ &=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a \end{aligned}$$

이므로 $e^{x+1}(x^2+nx+1)+a\geq 0$, 즉 $e^{x+1}(x^2+nx+1)\geq -a$가 항상 성립해야 한다.

2nd 1st의 부등식이 성립할 조건을 찾는다.

$h(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)$이라 하면

$$h'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+e^{x+1}(2x+n)$$
$$=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+n+1\}$$
$$=e^{x+1}(x+n+1)(x+1)$$

$h'(x)=0$에서

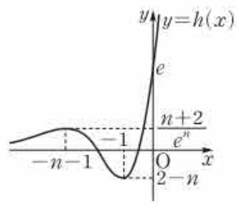
$x=-n-1$ 또는 $x=-1$ ($\because e^{x+1}>0$)

x	$\cdots$	$-n-1$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	$\frac{n+2}{e^n}$	↘	$2-n$	↗

또 $\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty$,

$\lim_{x\to-\infty}h(x)=0$이므로

$y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $h(x)$의 최솟값은 $2-n$이므로 부등식 $h(x)\geq -a$가 항상 성립하려면

$2-n\geq -a \qquad \therefore a\geq n-2$

3rd $g(n)$을 구하고 $1\leq g(n)\leq 8$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구한다.

a의 최솟값이 $n-2$이므로

$g(n)=n-2$

$1\leq g(n)\leq 8$에서 $\qquad 1\leq n-2\leq 8$

$\therefore 3\leq n\leq 10$

따라서 자연수 n은 3, 4, 5, $\cdots$, 10이므로 구하는 합은

$3+4+5+\cdots+10=\frac{8(3+10)}{2}=52$ 답 ④

첫째항이 3, 끝항이 10이고 항수가 8인 등차수열의 합

쌤한마디

$f'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$에서 모든 실수 x에 대하여 $e^{x+1}>0$이고 $y=x^2+nx+1$의 그래프는 아래로 볼록한 포물선 모양이므로 실수 전체의 집합에서 $f'(x)\leq 0$일 수 없다.
따라서 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 $f'(x)\geq 0$이 성립해야 한다.

04 1st t초 후의 점 Q의 좌표를 구한다.

점 P는 점 A에서 출발하여 호 AB를 따라 매초 1의 일정한 속력으로 움직이므로 t초 후 호 AP의 길이는 t이다.

이때 부채꼴 POA의 반지름의 길이가 1이므로 중심각의 크기는 t이다.

따라서 직선 OP의 방정식은 $\qquad y=(\tan t)x$

원점을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 t인 직선

또 직선 AB의 방정식은 $\qquad y=-x+1$

두 점 A(1, 0), B(0, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$x+y=1$

$\therefore y=-x+1$

점 Q는 두 직선 $y=(\tan t)x$와 $y=-x+1$의 교점이므로 점 Q의 x좌표는 $(\tan t)x=-x+1$에서

$(1+\tan t)x=1 \qquad \therefore x=\frac{1}{1+\tan t}$

$\therefore Q\left(\frac{1}{1+\tan t}, \frac{\tan t}{1+\tan t}\right)$

2nd t초 후의 점 Q의 속도를 구한다.

$x=\frac{1}{1+\tan t}$, $y=\frac{\tan t}{1+\tan t}$에서

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2},$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{\sec^2 t(1+\tan t)-\tan t\cdot\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}$$
$$=\frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}$$

이므로 t초 후 점 Q의 속도는

$$\left(-\frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}, \frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}\right) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

3rd 점 P의 x좌표가 $\frac{4}{5}$인 순간 점 Q의 속도를 구한다.

점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이고 점 P의 x좌표가 $\frac{4}{5}$이므로 $x=\frac{4}{5}$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면 점 P의 y좌표는

$\frac{16}{25}+y^2=1, \qquad y^2=\frac{9}{25}$

$\therefore y=\frac{3}{5}$ ($\because y>0$)

$\therefore P\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

즉 직선 OP의 기울기는 $\frac{3}{4}$이므로

$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

$\tan t=\frac{3}{4}$

$\therefore \sec^2 t=1+\tan^2 t=1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

따라서 점 P의 x좌표가 $\frac{4}{5}$인 순간 점 Q의 속도는 ㉠에서

$$\left(-\frac{\frac{25}{16}}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^2}, \frac{\frac{25}{16}}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^2}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{25}{49}, \frac{25}{49}\right)$$

4th $b-a$의 값을 구한다.

$a=-\frac{25}{49}$, $b=\frac{25}{49}$이므로

$b-a=\frac{50}{49}$ 답 ⑤

08 여러 가지 적분법 57쪽

01 $F(x)=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$

$=\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+1)dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x+C$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+x+C$

$F(1)=\frac{10}{3}$이므로

$\frac{2}{3}+2+1+C=\frac{10}{3}\qquad \therefore C=-\frac{1}{3}$

따라서 $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+x-\frac{1}{3}$이므로

$F(4)=\frac{16}{3}+4+4-\frac{1}{3}=13$ 답 ④

02 $f'(x)=\frac{2x-1}{x}=2-\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int\left(2-\frac{1}{x}\right)dx=2x-\ln|x|+C$

$y=f(x)$의 그래프가 점 (1, 3)을 지나므로 $f(1)=3$에서

$2+C=3\qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=2x-\ln|x|+1$이므로

$f(e)=2e-1+1=2e$ 답 ④

03 $f_n(x)=\int\sqrt[n]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{n}}dx=\frac{1}{\frac{1}{n}+1}x^{\frac{1}{n}+1}+C$

$=\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}+C$

$f_n(0)=0$이므로 $\quad C=0$

$\therefore f_n(x)=\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}$

$\therefore f_2(1)f_3(1)f_4(1)\cdots f_{15}(1)$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{15}{16}=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

04 $y=\ln x-2$로 놓으면

$y+2=\ln x,\qquad x=e^{y+2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=e^{x+2}$

따라서 $g(x)=e^{x+2}$이므로

$\int g(x)dx=\int e^{x+2}dx=e^2\int e^x dx$

$=e^2\cdot e^x+C=e^{x+2}+C$ 답 $e^{x+2}+C$

05 $f(x)=\int 5^x(5^x-2)dx=\int(25^x-2\cdot5^x)dx$

$=\frac{25^x}{\ln 25}-\frac{2\cdot5^x}{\ln 5}+C$

$=\frac{25^x}{2\ln 5}-\frac{2\cdot5^x}{\ln 5}+C$

$f(0)=-\frac{1}{\ln 5}$이므로

$\frac{1}{2\ln 5}-\frac{2}{\ln 5}+C=-\frac{1}{\ln 5}$

$\therefore C=\frac{1}{2\ln 5}$

따라서 $f(x)=\frac{25^x+1}{2\ln 5}-\frac{2\cdot5^x}{\ln 5}$이므로

$f(1)=\frac{13}{\ln 5}-\frac{10}{\ln 5}=\frac{3}{\ln 5}$ 답 ③

06 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로

$f(0)=0$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$이므로

$f'(0)=a$

$f'(x)=e^{x-1}+2a$에서 $f'(0)=\frac{1}{e}+2a$이므로

$\frac{1}{e}+2a=a\qquad \therefore a=-\frac{1}{e}$

즉 $f'(x)=e^{x-1}-\frac{2}{e}$이므로

$f(x)=\int\left(e^{x-1}-\frac{2}{e}\right)dx=e^{x-1}-\frac{2}{e}x+C$

$f(0)=0$이므로

$\frac{1}{e}+C=0\qquad \therefore C=-\frac{1}{e}$

따라서 $f(x)=e^{x-1}-\frac{2}{e}x-\frac{1}{e}$이므로

$a+f(-1)=-\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e}-\frac{1}{e}=\frac{1}{e^2}$ 답 $\frac{1}{e^2}$

07 $\int\frac{\cos x(\cos x-1)}{\sin^2 x}dx$

$=\int\frac{\cos^2 x-\cos x}{\sin^2 x}dx$

$=\int\left\{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2-\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right\}dx$

$=\int(\cot^2 x-\csc x\cot x)dx$

$=\int(\csc^2 x-1-\csc x\cot x)dx$

$=-\cot x-x+\csc x+C$

따라서 $a=1,\ b=-1,\ c=-1$이므로

$a+b+c=-1$ 답 ②

08 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2\sin x+1$에서

$f(x)+g(x)=\int(2\sin x+1)dx$

$=-2\cos x+x+C_1$

$f(\pi)+g(\pi)=\pi+2$이므로 $\quad C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=-2\cos x+x\quad\cdots\cdots$ ㉠

Q BOX

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이고 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=a$ (a는 실수)이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

$\int e^{x-1}dx=e^{-1}\int e^x dx$
$=e^{-1}\cdot e^x+C$
$=e^{x-1}+C$

삼각함수 사이의 관계
① $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
② $\tan^2 x+1=\sec^2 x$, $1+\cot^2 x=\csc^2 x$

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2\cos x-1$에서

$$f(x)-g(x)=\int(2\cos x-1)dx$$
$$=2\sin x-x+C_2$$

$f(\pi)-g(\pi)=-\pi$이므로 $\quad C_2=0$

$$\therefore f(x)-g(x)=2\sin x-x \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$f(x)=\sin x-\cos x,\ g(x)=-\sin x-\cos x+x$

이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)g(0)=1\cdot(-1)=-1$$ 답 -1

㉠+㉡을 하면
$2f(x)$
$=2\sin x-2\cos x$
$\therefore f(x)$
$=\sin x-\cos x$
㉠−㉡을 하면
$2g(x)$
$=-2\sin x-2\cos x$
$+2x$
$\therefore g(x)$
$=-\sin x-\cos x+x$

09 $2x-5=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2$이므로

$$f(x)=\int(2x-5)^3dx=\int t^3\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{8}t^4+C=\frac{1}{8}(2x-5)^4+C$$

$f(2)=\dfrac{1}{4}$이므로

$$\frac{1}{8}+C=\frac{1}{4} \qquad \therefore C=\frac{1}{8}$$
$$\therefore f(x)=\frac{1}{8}(2x-5)^4+\frac{1}{8}$$

따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$ 답 ②

나머지정리
다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$R=P(\alpha)$

10 $x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=1$이므로

$$f(x)=\int\frac{x-2}{(x+1)^4}dx=\int\frac{t-3}{t^4}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t^3}-\frac{3}{t^4}\right)dt=\int(t^{-3}-3t^{-4})dt$$
$$=-\frac{1}{2}t^{-2}+t^{-3}+C=-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{t^3}+C$$
$$=-\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+C$$

$f(0)=3$이므로

$$-\frac{1}{2}+1+C=3 \qquad \therefore C=\frac{5}{2}$$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{2(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}+\dfrac{5}{2}$이므로

$$f(1)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$ 답 $\dfrac{5}{2}$

11 $x^2+x+3=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x+1$이므로

$$f(x)=\int(2x+1)\sqrt{x^2+x+3}\,dx$$
$$=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(x^2+x+3)\sqrt{x^2+x+3}+C$$

$f(0)=2\sqrt{3}$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{2}{3}(x^2+x+3)\sqrt{x^2+x+3}$이므로

$$f(2)=\frac{2}{3}\cdot 9\cdot 3=18$$ 답 ⑤

12 $3x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3$이므로

$$f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{3x-1}}dx=\int\frac{t+1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{3}dt$$
$$=\int\frac{1}{9}\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$$
$$=\int\frac{1}{9}(t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}})dt$$
$$=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}\right)+C$$
$$=\frac{2}{27}\sqrt{t}(t+3)+C$$
$$=\frac{2}{27}\sqrt{3x-1}(3x+2)+C$$

$f(2)=\dfrac{16\sqrt{5}}{27}$이므로

$$\frac{2}{27}\cdot\sqrt{5}\cdot 8+C=\frac{16\sqrt{5}}{27} \qquad \therefore C=0$$

따라서 $f(x)=\dfrac{2}{27}\sqrt{3x-1}(3x+2)$이므로

$$f(1)=\frac{2}{27}\cdot\sqrt{2}\cdot 5=\frac{10\sqrt{2}}{27},$$
$$f(3)=\frac{2}{27}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 11=\frac{44\sqrt{2}}{27}$$
$$\therefore \frac{f(3)}{f(1)}=\frac{44\sqrt{2}}{27}\cdot\frac{27}{10\sqrt{2}}=\frac{22}{5}$$ 답 $\dfrac{22}{5}$

13 $x^2+2x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x+2$이므로

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)e^{x^2+2x}dx$$
$$=\int e^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}e^t+C$$
$$=\frac{1}{2}e^{x^2+2x}+C$$

$2x+2=2(x+1)$이므로
$(x+1)dx=\dfrac{1}{2}dt$

$F(-1)=\dfrac{1}{2e}$이므로 $\quad C=0$

따라서 $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2+2x}$이므로

$$F(0)=\frac{1}{2}$$ 답 ②

14 $e^x+4=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int 3e^x\sqrt{e^x+4}\,dx=\int 3\sqrt{t}\,dt$$
$$=\int 3t^{\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{3}{2}}+C=2t\sqrt{t}+C$$
$$=2(e^x+4)\sqrt{e^x+4}+C$$

$f(0)=10\sqrt{5}$이므로 $\quad C=0$

$$\therefore f(x)=2(e^x+4)\sqrt{e^x+4}$$

한편 $0\le x\le \ln 5$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\ln 5$에서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(\ln 5)=2\cdot 9\cdot 3=54$ 답 54

쌤 한마디

함수의 증가와 감소의 판정
함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여
① $f'(x)>0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 증가
② $f'(x)<0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 감소

15 $1-3x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-3$이므로

$$f(x)=\int e^{1-3x}\,dx=\int e^t\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{3}e^t+C=-\frac{1}{3}e^{1-3x}+C$$

$f(0)=-\dfrac{e}{3}$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{3}e^{1-3x}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{1-3n}\right)=\frac{-\frac{1}{3e^2}}{1-\frac{1}{e^3}}$$
$$=\frac{e}{3(1-e^3)}$$ 답 $\dfrac{e}{3(1-e^3)}$

첫째항이 $-\dfrac{1}{3e^2}$, 공비가 $\dfrac{1}{e^3}$인 등비급수

16 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{(\ln x)^3}{4x}dx=\int\frac{1}{4}t^3\,dt$$
$$=\frac{1}{16}t^4+C=\frac{1}{16}(\ln x)^4+C$$

$f(1)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{16}(\ln x)^4+2$이므로 $f(a)=3$에서

$\dfrac{1}{16}(\ln a)^4+2=3,\quad (\ln a)^4=16$

$\therefore \ln a=2$ 또는 $\ln a=-2$

이때 $a>1$이므로 $a=e^2$ 답 e^2

17 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로 조건 (가)에서

$$f(x)=\int\left(-\frac{3\ln x}{x}\right)dx=\int(-3t)\,dt$$
$$=-\frac{3}{2}t^2+C=-\frac{3}{2}(\ln x)^2+C$$

$f'(x)=0$에서 $-\dfrac{3\ln x}{x}=0 \quad \therefore x=1$

x	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 조건 (나)에서

$f(1)=1 \quad \therefore C=1$

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 구간 (a, b)에서의 함수 $f(x)$의 극값과 $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 $f(x)$의 최댓값, 가장 작은 값이 $f(x)$의 최솟값이다.

즉 $f(x)=-\dfrac{3}{2}(\ln x)^2+1$이므로

$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=-\dfrac{3}{2}\cdot 4+1=-5,$

$f(e)=-\dfrac{3}{2}+1=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e^2}$에서 최솟값 -5를 갖는다.

답 ②

18 $$\int(5-2\sin^2 x)dx=\int(1-2\sin^2 x+4)\,dx$$
$$=\int(\cos 2x+4)dx$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+C$$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=4$이므로

$ab=2$ 답 ④

쌤 한마디

① $\left(\dfrac{1}{a}\sin ax\right)'=\cos ax$이므로
$\displaystyle\int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+C$

② $\left(\dfrac{1}{a}\cos ax\right)'=-\sin ax$이므로
$\displaystyle\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$

19 $f'(x)=\sin^3 x$이므로

$$f(x)=\int\sin^3 x\,dx$$
$$=\int\sin^2 x\cdot\sin x\,dx$$
$$=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\int(1-t^2)\cdot(-1)\,dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3-t+C$$
$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서

$\dfrac{1}{3}-1+C=0 \quad \therefore C=\dfrac{2}{3}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+\dfrac{2}{3}$이므로

$f(\pi)=-\dfrac{1}{3}+1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$ 답 ②

20 $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi}\frac{f(x)}{x-2\pi}=a-4$에서 $x\longrightarrow 2\pi$일 때

(분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi}f(x)=0$이므로

$f(2\pi)=0$

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{f(x)}{x-2\pi}=\lim_{x\to 2\pi}\frac{f(x)-f(2\pi)}{x-2\pi}=f'(2\pi)$$이므로

$f'(2\pi)=a-4$

$f'(x)=a\cos\frac{x}{2}$에서 $f'(2\pi)=-a$이므로

$a-4=-a \qquad \therefore a=2$

즉 $f'(x)=2\cos\frac{x}{2}$이므로

$$f(x)=\int 2\cos\frac{x}{2}\,dx=4\sin\frac{x}{2}+C$$

$f(2\pi)=0$이므로 $\qquad C=0$

따라서 $f(x)=4\sin\frac{x}{2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\cdot\frac{1}{2}=2$ 답 2

21 $(\cos x+2)'=-\sin x$이므로

$$f(x)=\int\frac{-\sin x}{\cos x+2}dx$$
$$=\int\frac{(\cos x+2)'}{\cos x+2}dx$$
$$=\ln(\cos x+2)+C\ (\because \cos x+2>0)$$

$-1\le\cos x\le1$이므로 $\cos x+2>0$

$f(\pi)=1$이므로 $\qquad C=1$

따라서 $f(x)=\ln(\cos x+2)+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln 2+1$ 답 $\ln 2+1$

22 $\int\frac{3e^x}{e^x+5}dx$에서 $(e^x+5)'=e^x$이므로

$$\int\frac{3e^x}{e^x+5}dx=3\int\frac{(e^x+5)'}{e^x+5}dx$$
$$=3\ln(e^x+5)+C_1\ (\because e^x+5>0)$$

$\int\frac{5^x\ln 5}{5^x+1}dx$에서 $(5^x+1)'=5^x\ln 5$이므로

$$\int\frac{5^x\ln 5}{5^x+1}dx=\int\frac{(5^x+1)'}{5^x+1}dx$$
$$=\ln(5^x+1)+C_2\ (\because 5^x+1>0)$$

$\therefore f(x)=3\ln(e^x+5)-\ln(5^x+1)+C$

$f(0)=\ln 3$이므로

$3\ln 6-\ln 2+C=\ln 3 \qquad \therefore C=-2\ln 6$

$C=\ln 3+\ln 2-3\ln 6$
$=\ln 6-3\ln 6$
$=-2\ln 6$

따라서 $f(x)=3\ln(e^x+5)-\ln(5^x+1)-2\ln 6$이므로

$$f(1)=3\ln(e+5)-\ln 6-2\ln 6$$
$$=3\{\ln(e+5)-\ln 6\}$$
$$=3\ln\frac{e+5}{6}$$

$\therefore a=3$ 답 ②

23 $f'(x)=2f(x)$에서 $\frac{f'(x)}{f(x)}=2$이므로

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 2\,dx$$

$\ln f(x)=2x+C\ (\because f(x)>0)$

$\therefore f(x)=e^{2x+C}$

$f(1)=1$이므로

$e^{2+C}=1, \qquad 2+C=0$

$\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=e^{2x-2}$이므로

$f(3)=e^4$ 답 ④

24 조건 ㈎의 등식의 좌변에서 $f(x)=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int\{f(x)\}^3f'(x)dx=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+C_1$$
$$=\frac{1}{4}\{f(x)\}^4+C_1$$

조건 ㈎의 등식의 우변에서 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{(\ln x)'}{\ln x}dx$$
$$=\ln|\ln x|+C_2$$

즉 $\frac{1}{4}\{f(x)\}^4+C_1=\ln|\ln x|+C_2$이므로

$\{f(x)\}^4=4\ln|\ln x|+C$

조건 ㈏에서 $f(e)=0$이므로 $\qquad C=0$

따라서 $\{f(x)\}^4=4\ln|\ln x|$이므로

$\{f(e^4)\}^4=4\ln|\ln e^4|=8\ln 2$ 답 $8\ln 2$

25 $$f(x)=\int\frac{x+1}{x-1}dx=\int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$=x+2\ln|x-1|+C$$

$f(0)=-3$이므로 $\qquad C=-3$

따라서 $f(x)=x+2\ln|x-1|-3$이므로

$f(e+1)=e+1+2-3=e$ 답 e

26 $f'(x)=\frac{3x^2+5x-1}{x+2}$이므로

$$f(x)=\int\frac{3x^2+5x-1}{x+2}dx$$
$$=\int\frac{(3x-1)(x+2)+1}{x+2}dx$$
$$=\int\left(3x-1+\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{3}{2}x^2-x+\ln|x+2|+C$$

이때

$f(0)=\ln 2+C,$

$f(2)=6-2+\ln 4+C=4+2\ln 2+C$

이므로 구하는 직선의 기울기는

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (단, $x_1\ne x_2$)

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{4+2\ln 2+C-(\ln 2+C)}{2}$$
$$=\frac{4+\ln 2}{2}$$
$$=2+\frac{1}{2}\ln 2$$ 답 ④

27 $f(x)=\int \frac{x}{x^2-x-2}dx+\int \frac{3-x}{x^2-x-2}dx$

$=\int\left(\frac{x}{x^2-x-2}+\frac{3-x}{x^2-x-2}\right)dx$

$=\int \frac{3}{x^2-x-2}dx$

$=\int \frac{3}{(x-2)(x+1)}dx$

$=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\ln|x-2|-\ln|x+1|+C$

$=\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|$이므로

$f(5)=\ln\frac{3}{6}=-\ln 2$ 답 $-\ln 2$

28 $\frac{2x}{x^2-3x+2}=\frac{2x}{(x-1)(x-2)}=\frac{p}{x-1}+\frac{q}{x-2}$

로 놓으면

$\frac{2x}{(x-1)(x-2)}=\frac{(p+q)x-(2p+q)}{(x-1)(x-2)}$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$p+q=2,\ 2p+q=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad p=-2,\ q=4$

즉 $\frac{2x}{x^2-3x+2}=-\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x-2}$이므로

$\int \frac{2x}{x^2-3x+2}dx$

$=\int\left(-\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x-2}\right)dx$

$=-2\ln|x-1|+4\ln|x-2|+C$

따라서 $a=-2,\ b=4$이므로

$a-b=-6$ 답 ①

29 $f(x)=\int \frac{2}{\sin x}dx=\int \frac{2\sin x}{\sin^2 x}dx$

$=\int \frac{2\sin x}{1-\cos^2 x}dx$

$\cos x=t\ (-1<t<1)$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$\int \frac{2\sin x}{1-\cos^2 x}dx=\int \frac{2}{1-t^2}\cdot(-1)\,dt$

$=\int \frac{2}{(t-1)(t+1)}dt$

$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\ln|t-1|-\ln|t+1|+C$

$=\ln(1-t)-\ln(t+1)+C$

$=\ln\frac{1-t}{1+t}+C$

$=\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$

$0<x<\pi$에서
$-1<\cos x<1$
$\therefore -1<t<1$

$-1<t<1$에서
$-2<t-1<0,$
$0<t+1<2$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\ln 3$이므로

$\ln\frac{1}{3}+C=\ln 3 \quad \therefore C=2\ln 3$

따라서 $f(x)=\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+2\ln 3$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\ln 3$ 답 $2\ln 3$

다른 풀이 $f(x)=\int \frac{2}{\sin x}dx=\int \frac{2}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$

$=\int \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$

$=\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}dx$

$\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$이므로

$\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}dx=2\int \frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}dx$

$=2\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C\left(\because \tan\frac{x}{2}>0\right)$

$0<x<\pi$에서
$0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로
$\tan\frac{x}{2}>0$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\ln 3$이므로

$2\ln\frac{\sqrt{3}}{3}+C=\ln 3 \quad \therefore C=2\ln 3$

$2\ln\frac{\sqrt{3}}{3}=2\ln\frac{1}{\sqrt{3}}$
$=2\ln 3^{-\frac{1}{2}}$
$=-\ln 3$

따라서 $f(x)=2\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)+2\ln 3$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\ln 3$

30 $f(x)=\int (x+a)e^x dx$에서

$f'(x)=(x+a)e^x$

$f'(4)=0$이므로

$(4+a)e^4=0 \quad \therefore a=-4$

$\therefore f(x)=\int (x-4)e^x dx$

$u(x)=x-4,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

(다항함수)×(지수함수) 꼴일 때에는 다항함수를 $u(x)$, 지수함수를 $v'(x)$로 놓는다.

$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$

$\therefore \int (x-4)e^x dx=(x-4)e^x-\int e^x dx$

$=(x-4)e^x-e^x+C$

$=(x-5)e^x+C$

$f(0)=4$이므로

$-5+C=4 \quad \therefore C=9$

따라서 $f(x)=(x-5)e^x+9$이므로

$f(5)=9$ 답 ①

31 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$f(x)=\int \sin x\cdot\ln(\cos x)dx$

$=\int \ln t\cdot(-1)dt$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=-1$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=-t$

$\therefore \int \ln t \cdot (-1)dt$

$=-t\cdot \ln t+\int 1dt=-t\ln t+t+C$

$=-\cos x\cdot \ln(\cos x)+\cos x+C$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln 2$이므로

$-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}\ln 2 \quad \therefore C=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\cos x\cdot\ln(\cos x)+\cos x-\frac{1}{2}$이므로

$f(0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

32 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x\sin x-x^2\cos x$

$xf'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$

이때 $x>0$이므로 $f'(x)=2\sin x+x\cos x$

$\therefore f(x)=\int(2\sin x+x\cos x)dx$

$=\int 2\sin x dx+\int x\cos x dx$

$=-2\cos x+\int x\cos x dx$ …… ㉠

$\int x\cos x dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$

$\therefore \int x\cos x dx=x\sin x-\int \sin x dx$

$=x\sin x+\cos x+C$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-2\cos x+x\sin x+\cos x+C$

$=x\sin x-\cos x+C$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(2\pi, 1)$을 지나므로

$f(2\pi)=1$에서

$-1+C=1 \quad \therefore C=2$

$\therefore f(x)=x\sin x-\cos x+2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 점 (π, k)를 지나므로

$k=f(\pi)=1+2=3$ 답 ③

33 $f(x)=x^2$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=\sin x$

$\therefore \int x^2\cos x dx=x^2\sin x-2\int x\sin x dx$ …… ㉠

$\int x\sin x dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$\therefore \int x\sin x dx=-x\cos x+\int\cos x dx$

$=-x\cos x+\sin x+C_1$ …… ㉡

Q BOX

(다항함수)×(로그함수) 꼴일 때에는 로그함수를 $u(t)$, 다항함수를 $v'(t)$로 놓는다.

$-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\ln 2^{-1}$
$=\frac{1}{2}\ln 2$

(다항함수)×(삼각함수) 꼴일 때에는 다항함수를 $u(x)$, 삼각함수를 $v'(x)$로 놓는다.

구간에 따라 다르게 정의된 함수는 각 구간에서의 식을 각각 적분한다. 이때 적분상수는 C_1, C_2와 같이 서로 다른 문자를 사용해야 함에 주의한다.

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int x^2\cos x dx$

$=x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x+C_1)$

$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$

$=(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$

답 $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$

34 $g(x)=x^2-x+5$, $h'(x)=e^x$으로 놓으면

$g'(x)=2x-1$, $h(x)=e^x$

$\therefore \int(x^2-x+5)e^x dx$

$=(x^2-x+5)e^x-\int(2x-1)e^x dx$ …… ㉠

$\int(2x-1)e^x dx$에서 $u(x)=2x-1$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int(2x-1)e^x dx=(2x-1)e^x-\int 2e^x dx$

$=(2x-1)e^x-2e^x+C_1$

$=(2x-3)e^x+C_1$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int(x^2-x+5)e^x dx$

$=(x^2-x+5)e^x-\{(2x-3)e^x+C_1\}$

$=(x^2-3x+8)e^x+C$

따라서 $f(x)=x^2-3x+8$이므로

$f(1)=1-3+8=6$ 답 6

35 (i) $x>1$일 때,

$f(x)=\int(\sqrt{x}+k)dx=\int(x^{\frac{1}{2}}+k)dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+kx+C_1=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+kx+C_1$

$f(4)=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{16}{3}+4k+C_1=\frac{2}{3}$

$\therefore 4k+C_1=-\frac{14}{3}$ …… ㉠

(ii) $0<x<1$일 때,

$f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C_2$

$f\left(\frac{1}{e}\right)=0$이므로

$-1+C_2=0 \quad \therefore C_2=1$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x\sqrt{x}+kx+C_1 & (x>1)\\ \ln x+1 & (0<x<1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$

$\frac{2}{3}+k+C_1=1 \quad \therefore k+C_1=\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k=-\frac{5}{3}$, $C_1=2$

따라서 $x>1$에서 $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{5}{3}x+2$이므로

$f(9)=18-15+2=5$ 답 ③

36 (i) $x>0$일 때,

$u(x)=2x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$\therefore f(x)=\int 2xe^x\,dx=2xe^x-\int 2e^x\,dx$

$=2xe^x-2e^x+C_1$

$=2(x-1)e^x+C_1$

$f(1)=-3$이므로 $C_1=-3$

(ii) $x<0$일 때,

$f(x)=\int \sin x\,dx=-\cos x+C_2$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}2(x-1)e^x-3 & (x>0)\\ -\cos x+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$

$-5=-1+C_2$ $\therefore C_2=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}2(x-1)e^x-3 & (x\ge 0)\\ -\cos x-4 & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(2)-f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2e^2-3-\left(-\frac{1}{2}-4\right)$

$=2e^2+\frac{3}{2}$ 답 $2e^2+\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 등호를 아래의 x의 값의 범위에 포함하여 나타내도 상관없다.

도전! 수능 기출 Ⓦ 63쪽

01 1st 조건 ㈎의 등식의 양변을 각각 적분하여 등식을 세운다.

조건 ㈎의 등식의 좌변에서 $f(x)=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$\int 2\{f(x)\}^2f'(x)dx=\int 2t^2\,dt=\frac{2}{3}t^3+C_1$

$=\frac{2}{3}\{f(x)\}^3+C_1$

조건 ㈎의 등식의 우변에서 $f(2x+1)=s$로 놓으면

$\frac{ds}{dx}=2f'(2x+1)$이므로

$\int \{f(2x+1)\}^2f'(2x+1)dx$

$=\int s^2\cdot\frac{1}{2}ds=\frac{1}{6}s^3+C_2$

$=\frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3+C_2$

따라서 $\frac{2}{3}\{f(x)\}^3+C_1=\frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3+C_2$이므로

$4\{f(x)\}^3=\{f(2x+1)\}^3+C$ ...... ㉠

2nd C의 값을 구한다.

조건 ㈏에서 $f\left(-\frac{1}{8}\right)=1$이므로 $x=-\frac{1}{8}$을 ㉠의 양변에 대입하면

$4\cdot 1^3=\left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3+C$

$\therefore \left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3=4-C$

$x=\frac{3}{4}$을 ㉠의 양변에 대입하면

$4(4-C)=\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3+C$

$\therefore \left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3=16-5C$

$x=\frac{5}{2}$를 ㉠의 양변에 대입하면

$4(16-5C)=\{f(6)\}^3+C$

이때 조건 ㈏에서 $f(6)=2$이므로

$64-20C=8+C$ $\therefore C=\frac{8}{3}$

3rd $f(-1)$의 값을 구한다.

㉠에서 $4\{f(x)\}^3=\{f(2x+1)\}^3+\frac{8}{3}$이므로 $x=-1$을 양변에 대입하면

$4\{f(-1)\}^3=\{f(-1)\}^3+\frac{8}{3}$

$\{f(-1)\}^3=\frac{8}{9}$ $\therefore f(-1)=\frac{2}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

답 ④

02 1st $f(x)$와 $g(x)$가 역함수 관계임을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$의 양변에 x 대신 $g(x)$를 대입하면

$f'(g(x))=\frac{1-\{g(x)\}^2\{f(g(x))\}^3}{\{g(x)\}^3\{f(g(x))\}^2}$

$=\frac{1-x^3\{g(x)\}^2}{x^2\{g(x)\}^3}$ ...... ㉠

$g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$f'(g(x))=\frac{1}{g'(x)}$ $(g'(x)\neq 0)$

이 식을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{g'(x)}=\frac{1-x^3\{g(x)\}^2}{x^2\{g(x)\}^3}$

$\therefore g'(x)=\frac{x^2\{g(x)\}^3}{1-x^3\{g(x)\}^2}$ ...... ㉡

$f(1)=2$에서 $g(2)=1$이므로

$g'(2)=\frac{2^2\cdot\{g(2)\}^3}{1-2^3\cdot\{g(2)\}^2}=\frac{2^2\cdot 1^3}{1-2^3\cdot 1^2}=-\frac{4}{7}$

2nd $\int g'(x)dx=g(x)+C$임을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. ㉡에서

$g'(x)[1-x^3\{g(x)\}^2]=x^2\{g(x)\}^3$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=x$

$f(g(x))=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(g(x))g'(x)=1$
$\therefore f'(g(x))$
$=\frac{1}{g'(x)}$
$(g'(x)\neq 0)$

$y=f(g(x))$이면
$y'=f'(g(x))g'(x)$

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\iff f^{-1}(b)=a$

$$g'(x)-x^3\{g(x)\}^2g'(x)=x^2\{g(x)\}^3$$
$$g'(x)=x^3\{g(x)\}^2g'(x)+x^2\{g(x)\}^3$$
$$=\{xg(x)\}^2\{xg'(x)+g(x)\}$$
$$\therefore\ g(x)=\int g'(x)dx$$
$$=\int\{xg(x)\}^2\{xg'(x)+g(x)\}dx$$

$xg(x)=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=xg'(x)+g(x)$이므로

$$g(x)=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3+C$$

$g(2)=1$이므로

$$\frac{1}{3}\cdot8\cdot1+C=1\qquad\therefore\ C=-\frac{5}{3}$$
$$\therefore\ g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}\qquad\cdots\cdots ㉢$$

3rd 사잇값의 정리를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. ㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$g(1)=\frac{1}{3}\{g(1)\}^3-\frac{5}{3}$$
$$\therefore\ \{g(1)\}^3-3g(1)-5=0$$

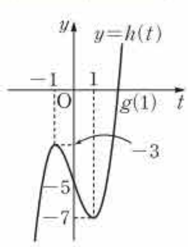
$h(t)=t^3-3t-5$라 하면 $g(1)$은 방정식 $h(t)=0$의 한 실근이다.

$h'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$이므로 $h'(t)=0$에서

$t=-1$ 또는 $t=1$

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$	↗	-3	↘	-7	↗

따라서 함수 $y=h(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



한편 함수 $h(t)$는 닫힌구간 $\left[2,\ \dfrac{5}{2}\right]$에서 연속이고

$$h(2)=8-6-5$$
$$=-3<0,$$
$$h\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{125}{8}-\frac{15}{2}-5=\frac{25}{8}>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(t)=0$은 구간 $\left(2,\ \dfrac{5}{2}\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

그런데 $y=h(t)$의 그래프에서 $h(t)=0$의 실근은 $g(1)$뿐이므로

$$2<g(1)<\frac{5}{2}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

03 **1st** 조건 (나)의 식을 $f(x)$, $f'(x)$에 대한 식으로 나타낸다.

$g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}\ \ (f'(x)\neq0)$$

이 식을 조건 (나)의 등식에 대입하면

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{1}{x^2+1}\qquad\therefore\ \frac{f'(x)}{f(x)}=x^2+1$$

2nd $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분을 구한다.

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int(x^2+1)dx$에서

$$\ln|f(x)|=\frac{1}{3}x^3+x+C$$

3rd $f(x)$를 구한다.

조건 (가)에서 $f(0)=1$이므로

$$\ln1=C\qquad\therefore\ C=0$$

따라서 $\ln|f(x)|=\dfrac{1}{3}x^3+x$이므로

$$|f(x)|=e^{\frac{1}{3}x^3+x}$$
$$\therefore\ f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x}\ \text{또는}\ f(x)=-e^{\frac{1}{3}x^3+x}$$

그런데 $f(0)=1$이므로 $f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x}$

4th $f(3)$의 값을 구한다.

$f(3)=e^{9+3}=e^{12}$ 답 ④

04 **1st** 조건 (나)의 식을 변형하여 $\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}'$의 부정적분을 구한다.

$x\neq0$일 때, $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}'$이므로 조건 (나)에서

$$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=xe^x$$

이때 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$$
$$\therefore\ \frac{f(x)}{x}=\int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx$$
$$=xe^x-e^x+C$$
$$=(x-1)e^x+C\qquad\cdots\cdots ㉠$$

2nd $f(x)$를 구한다.

조건 (가)에서 $f(1)=0$이므로 $x=1$을 ㉠의 양변에 대입하면

$$C=0$$

따라서 $\dfrac{f(x)}{x}=(x-1)e^x$이므로

$$f(x)=x(x-1)e^x$$

3rd $f(3)\times f(-3)$의 값을 구한다.

$f(3)\times f(-3)=6e^3\times12e^{-3}=72$ 답 72

Q BOX

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

사잇값의 정리
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

09 정적분

Ⓦ 64쪽

01 $\int_1^5 \frac{4x^2+x-1}{x^2}dx-4\int_1^5 \frac{x^2-x+1}{x^2}dx$

$=\int_1^5 \frac{4x^2+x-1-4(x^2-x+1)}{x^2}dx$

$=\int_1^5 \frac{5x-5}{x^2}dx=5\int_1^5\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=5\int_1^5\left(\frac{1}{x}-x^{-2}\right)dx=5\left[\ln|x|+\frac{1}{x}\right]_1^5$

$=5\left\{\left(\ln 5+\frac{1}{5}\right)-1\right\}$

$=5\ln 5-4$ 　　답 $5\ln 5-4$

QBOX

실수 n에 대하여
① $n\neq -1$일 때,
$\int x^n dx$
$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$
② $n=-1$일 때,
$\int x^{-1}dx$
$=\int \frac{1}{x}dx$
$=\ln|x|+C$

02 $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x}dx=\int_1^4 \frac{1+2\sqrt{x}+x}{x}dx$

$=\int_1^4\left(\frac{1}{x}+2x^{-\frac{1}{2}}+1\right)dx$

$=\left[\ln|x|+4x^{\frac{1}{2}}+x\right]_1^4$

$=(2\ln 2+12)-5$

$=2\ln 2+7$

따라서 $a=7$, $b=2$이므로

$a+b=9$ 　　답 9

03 $\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)dx$

$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx$

$+\cdots+\int_n^{n+1}f(x)dx$

$=\int_1^{n+1}f(x)dx=\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$

$=\int_1^{n+1}(x^{-\frac{1}{2}}+1)dx=\left[2x^{\frac{1}{2}}+x\right]_1^{n+1}$

$=(2\sqrt{n+1}+n+1)-3$

$=2\sqrt{n+1}+n-2$

즉 $2\sqrt{n+1}+n-2=12$이므로

$2\sqrt{n+1}=14-n$ 　　…… ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$4(n+1)=n^2-28n+196$

$n^2-32n+192=0$, 　$(n-8)(n-24)=0$

$\therefore n=8$ 또는 $n=24$

그런데 $n=24$이면 ㉠이 성립하지 않으므로

$n=8$ 　　답 ③

(좌변)$=2\sqrt{24+1}=10$
(우변)$=14-24=-10$
따라서 ㉠이 성립하지 않는다.

다른 풀이 $\int_k^{k+1}f(x)dx=\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$

$=\left[2x^{\frac{1}{2}}+x\right]_k^{k+1}$

$=(2\sqrt{k+1}+k+1)-(2\sqrt{k}+k)$

$=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})+1$

이므로

$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)dx$

$=\sum_{k=1}^{n}\{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})+1\}$

$=2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})+n$

$=2\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

$+n$

$=2(\sqrt{n+1}-1)+n=2\sqrt{n+1}+n-2$

04 $\int_0^{\ln 3}\frac{(e^x-1)^2}{e^x}dx=\int_0^{\ln 3}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{e^x}dx$

$=\int_0^{\ln 3}(e^x-2+e^{-x})dx$

$=\left[e^x-2x-e^{-x}\right]_0^{\ln 3}$

$=\frac{8}{3}-2\ln 3$

따라서 $a=\frac{8}{3}$, $b=-2$이므로

$\frac{a}{b}=-\frac{4}{3}$ 　　답 ①

05 $\int_0^1(3^x-1)(9^x+3^x+1)dx$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=a^3-b^3$

$=\int_0^1(27^x-1)dx=\left[\frac{27^x}{\ln 27}-x\right]_0^1$

$=\left(\frac{27}{\ln 27}-1\right)-\frac{1}{\ln 27}$

$=\frac{26}{3\ln 3}-1$ 　　답 $\frac{26}{3\ln 3}-1$

06 $\int_0^{\pi}(\cos x+1)^2dx+\int_0^{\pi}(\sin t-1)^2dt$

$=\int_0^{\pi}(\cos x+1)^2dx+\int_0^{\pi}(\sin x-1)^2dx$

$=\int_0^{\pi}(\cos^2 x+2\cos x+1+\sin^2 x-2\sin x+1)dx$

$=\int_0^{\pi}(2\cos x-2\sin x+3)dx$

$=\left[2\sin x+2\cos x+3x\right]_0^{\pi}$

$=(-2+3\pi)-2=3\pi-4$ 　　답 $3\pi-4$

07 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$

$0=1+k$ 　　$\therefore k=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\sin x & (x\geq 0)\\ \cos x-1 & (x\leq 0)\end{cases}$이므로

$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(\cos x-1)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$=\left[\sin x-x\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0}+\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-(-1)$

$=\frac{3}{2}-\frac{\pi}{6}$ 　　답 $\frac{3}{2}-\frac{\pi}{6}$

08 $\int_0^a (\sin x+\cos x)^2dx-\int_0^a(\sin x-\cos x)^2dx$

$=\int_0^a(\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x)dx$

$\quad-\int_0^a(\sin^2x-2\sin x\cos x+\cos^2x)dx$

$=\int_0^a 4\sin x\cos x\,dx$

$=\int_0^a 2\sin 2x\,dx=\Big[-\cos 2x\Big]_0^a$

$=-\cos 2a-(-1)$

$=-\cos 2a+1$

따라서 $-\cos 2a+1=\frac{1}{2}$이므로

$\cos 2a=\frac{1}{2}$

이때 $0<a<\frac{\pi}{2}$에서 $0<2a<\pi$이므로

$2a=\frac{\pi}{3}\qquad \therefore a=\frac{\pi}{6}$ 답 ③

$\int \sin kx\,dx$
$=-\frac{1}{k}\cos kx+C$

09 $\left|\frac{x}{x+2}\right|=\begin{cases}-\frac{x}{x+2} & (-2<x\le 0)\\ \frac{x}{x+2} & (x<-2 \text{ 또는 } x\ge 0)\end{cases}$ 이므로

$\int_{-1}^2\left|\frac{x}{x+2}\right|dx$

$=\int_{-1}^0\left(-\frac{x}{x+2}\right)dx+\int_0^2\frac{x}{x+2}\,dx$

$=\int_{-1}^0\left(-1+\frac{2}{x+2}\right)dx+\int_0^2\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx$

$=\Big[-x+2\ln|x+2|\Big]_{-1}^0+\Big[x-2\ln|x+2|\Big]_0^2$

$=2\ln 2-1+(2-2\ln 4)-(-2\ln 2)$

$=1$ 답 1

$-\frac{x}{x+2}=-\frac{x+2-2}{x+2}$
$=-1+\frac{2}{x+2}$

$2\ln 4=2\ln 2^2=4\ln 2$

10 $|e^x-3|=\begin{cases}e^x-3 & (x\ge \ln 3)\\ -e^x+3 & (x\le \ln 3)\end{cases}$이므로

$\int_0^{\ln 9}|e^x-3|dx$

$=\int_0^{\ln 3}(-e^x+3)dx+\int_{\ln 3}^{\ln 9}(e^x-3)dx$

$=\Big[-e^x+3x\Big]_0^{\ln 3}+\Big[e^x-3x\Big]_{\ln 3}^{\ln 9}$

$=(-3+3\ln 3)-(-1)+(9-3\ln 9)-(3-3\ln 3)$

$=4$ 답 ③

$e^x-3=0$에서
$e^x=3\quad\therefore x=\ln 3$
따라서 $x\ge\ln 3$일 때
$e^x-3\ge 0$이고, $x\le \ln 3$일 때 $e^x-3\le 0$이다.

$3\ln 9=3\ln 3^2=6\ln 3$

11 $f(x-1)=e^{|x-1|}=\begin{cases}e^{x-1} & (x\ge 1)\\ e^{-x+1} & (x\le 1)\end{cases}$이므로

$\int_0^3 f(x-1)dx=\int_0^1 e^{-x+1}dx+\int_1^3 e^{x-1}dx$

$=\Big[-e^{-x+1}\Big]_0^1+\Big[e^{x-1}\Big]_1^3$

$=-1-(-e)+e^2-1$

$=e^2+e-2$ 답 e^2+e-2

$\int e^{ax+b}dx$
$=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$

다른 풀이 $f(x)=\begin{cases}e^x & (x\ge 0)\\ e^{-x} & (x\le 0)\end{cases}$이고 $y=f(x-1)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$\int_0^3 f(x-1)dx=\int_{-1}^2 f(x)dx$

$=\int_{-1}^0 e^{-x}dx+\int_0^2 e^x dx$

$=\Big[-e^{-x}\Big]_{-1}^0+\Big[e^x\Big]_0^2$

$=e^2+e-2$

12 $k|\cos x|=\begin{cases}k\cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ -k\cos x & \left(\frac{\pi}{2}\le x\le \pi\right)\end{cases}$이므로

$a_k=\int_0^\pi k|\cos x|dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}k\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi(-k\cos x)dx$

$=\Big[k\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-k\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^\pi$

$=k-(-k)=2k$

$\therefore \sum_{k=1}^{11}a_k=\sum_{k=1}^{11}2k=2\cdot\frac{11\cdot 12}{2}=132$ 답 ④

13 $f(x)=e^x+e^{-x}$에서

$f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$\therefore \int_{-\ln 4}^3 f(x)dx+\int_3^{\ln 4}f(x)dx$

$=\int_{-\ln 4}^{\ln 4}f(x)dx=2\int_0^{\ln 4}(e^x+e^{-x})dx$

$=2\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^{\ln 4}=2\left(4-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{15}{2}$ 답 $\frac{15}{2}$

14 ㄱ. $f(-x)e^{(-x)^2}=-f(x)e^{x^2}$이므로 $f(x)e^{x^2}$은 기함수이다.

$\therefore \int_{-1}^1 f(x)e^{x^2}dx=0$

ㄴ. $\cos f(-x)=\cos\{-f(x)\}=\cos f(x)$이므로 $\cos f(x)$는 우함수이다.

$\therefore \int_{-\pi}^\pi \cos f(x)dx\ne 0$

ㄷ. $f(-x)\sin(-x)=-f(x)\cdot(-\sin x)=f(x)\sin x$ 이므로 $f(x)\sin x$는 우함수이다.

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx\ne 0$

ㄹ. $(2^{-x}+2^x)f(-x)=-(2^x+2^{-x})f(x)$이므로 $(2^x+2^{-x})f(x)$는 기함수이다.

$\therefore \int_{-2}^2(2^x+2^{-x})f(x)dx=0$

이상에서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

15 $y=|\cos x|$는 주기가 π인 주기함수이므로

$$\int_a^{a+\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi}|\cos x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=1-(-1)=2$$

답 2

$\cos x=0$에서
$x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\le x\le\pi$)
따라서 $x=\frac{\pi}{2}$를 경계로 적분 구간을 나눈다.

16 $f(x-2)=f(x+2)$, 즉 $f(x)=f(x+4)$에서
$f(x)$는 주기함수이므로

x 대신 $x+2$를 대입하면
$f(x+2-2)$
$=f(x+2+2)$
$\therefore f(x)=f(x+4)$

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_2^6 f(x)dx=\int_6^{10}f(x)dx$$

또 $-2\le x\le 2$에서 $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=f(x)$이므로
$f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^{10}f(x)dx=3\int_{-2}^{2}f(x)dx=6\int_0^2 f(x)dx$$
$$=6\int_0^2\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$
$$=3\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^2$$
$$=3\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$$

답 $3\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$

17 $5-2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2$
$x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^2\frac{1}{(5-2x)^3}dx=\int_3^1\frac{1}{t^3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=\int_1^3\frac{1}{2}t^{-3}dt=\Big[-\frac{1}{4}t^{-2}\Big]_1^3$$
$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}-1\right)=\frac{2}{9}$$

답 ②

18 $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$
$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1 6x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_1^2 3\sqrt{t}\,dt=\int_1^2 3t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\Big[2t^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2=4\sqrt{2}-2$$

따라서 $a=4$, $b=-2$이므로 $a+b=2$

답 2

19 $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$
$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^2\sqrt{x}f(x+1)dx=\int_1^3\sqrt{t-1}\,f(t)dt$$

$1\le x\le 3$에서
$f(x)=2$

$$=\int_1^3 2\sqrt{t-1}\,dt$$
$$=\int_1^3 2(t-1)^{\frac{1}{2}}dt$$

$\int(x+a)^n dx$
$=\frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}+C$

$$=\Big[\frac{4}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}\Big]_1^3$$
$$=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

답 ③

20 $\int_0^1(x+2)^2e^{x^2}dx-\int_0^1(x-2)^2e^{x^2}dx$

$$=\int_0^1 e^{x^2}\{(x^2+4x+4)-(x^2-4x+4)\}dx$$
$$=\int_0^1 8xe^{x^2}dx$$

$x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$
$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1 8xe^{x^2}dx=\int_0^1 4e^t dt=\Big[4e^t\Big]_0^1$$
$$=4(e-1)$$

답 $4(e-1)$

21 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$
$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^n$일 때 $t=n$이므로

$$a_n=\int_1^{e^n}\frac{\ln x}{x}dx=\int_0^n t\,dt=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^n=\frac{1}{2}n^2$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a_na_{n+1}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$$

a_na_{n+1}
$=\frac{1}{2}n^2\cdot\frac{1}{2}(n+1)^2$
$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
이므로
$\frac{1}{\sqrt{a_na_{n+1}}}$
$=\sqrt{\frac{4}{n^2(n+1)^2}}$
$=\frac{2}{n(n+1)}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2$$

답 ⑤

22 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\tan^3 x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\tan^3 x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x(1+\tan^2 x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\sec^2 x\,dx$$

$\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$
$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\sec^2 x\,dx=\int_0^1 t\,dt$$
$$=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

23 $\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}(1+\cot^2 x)\cos x\,dx=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}\csc^2 x\cos x\,dx$

$$=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

$x=\frac{3}{4}\pi$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{5}{6}\pi$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^2}dt=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}t^{-2}dt$$
$$=\Big[-t^{-1}\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}=-2+\sqrt{2}$$

따라서 $a=-2$, $b=1$이므로 $b-a=3$ 답 ①

24 직각삼각형 POH에서 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos\theta$, $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{OH}}}=\frac{\overline{\mathrm{OP}}\sin\theta}{\overline{\mathrm{OP}}\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\therefore \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta$$

$\cos\theta=t$로 놓으면 $\frac{dt}{d\theta}=-\sin\theta$

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}\cdot(-1)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{t}dt$$
$$=\Big[\ln|t|\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln\frac{1}{2}$$
$$=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2$$
답 ①

25 $x=3\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=3$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

Q BOX: $3\tan\theta=3$에서 $\tan\theta=1$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int_0^3\frac{8}{x^2+9}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{9\tan^2\theta+9}\cdot 3\sec^2\theta\, d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{24\sec^2\theta}{9\sec^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}d\theta$$
$$=\Big[\frac{8}{3}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{3}\pi$$

따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$이므로

$$\sin\alpha=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
답 ④

26 $x=4\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=4\cos\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=4$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16-16\sin^2\theta}\cdot 4\cos\theta\, d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\cos^2\theta\, d\theta$$

Q BOX: $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $2\cos^2\theta=\cos 2\theta+1$ $\therefore 16\cos^2\theta=8\cos 2\theta+8$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8\cos 2\theta+8)d\theta$$
$$=\Big[4\sin 2\theta+8\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=4\pi$$

따라서 반지름의 길이가 r인 원의 넓이가 4π이므로

$\pi r^2=4\pi$ $\therefore r=2$ ($\because r>0$) 답 ⑤

27 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x}{\cos^2 x+1}dx=\int_1^0\frac{2}{t^2+1}\cdot(-1)dt$$
$$=\int_0^1\frac{2}{t^2+1}dt$$

$t=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right)$로 놓으면 $\frac{dt}{d\theta}=\sec^2\theta$

Q BOX: $\cos x=t$에서 $-1\le t\le 1$이므로 $t=\tan\theta$에서 $-1\le\tan\theta\le 1$ $\therefore -\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

$t=0$일 때 $\theta=0$, $t=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1\frac{2}{t^2+1}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\tan^2\theta+1}\cdot\sec^2\theta\, d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\,d\theta$$
$$=\Big[2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}$$
답 $\frac{\pi}{2}$

28 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=2x+1$로 놓으면

Q BOX: (다항함수)×(로그함수) 꼴일 때에는 로그함수를 $f(x)$, 다항함수를 $g'(x)$로 놓는다.

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x^2+x$$
$$\therefore \int_1^e(2x+1)\ln x\, dx$$
$$=\Big[(x^2+x)\ln x\Big]_1^e-\int_1^e(x+1)dx$$
$$=e^2+e-\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_1^e$$
$$=e^2+e-\left(\frac{1}{2}e^2+e-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}$$
답 $\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}$

29 $f(x)=\sin x+\cos x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

Q BOX: (지수함수)×(삼각함수) 꼴일 때에는 삼각함수를 $f(x)$, 지수함수를 $g'(x)$로 놓는다.

$$f'(x)=\cos x-\sin x,\ g(x)=e^x$$
$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\sin x+\cos x)dx$$
$$=\Big[e^x(\sin x+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\cos x-\sin x)dx$$
$$=e^{\frac{\pi}{2}}-1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\cos x-\sin x)dx \quad\cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\cos x-\sin x)dx$에서 $u(x)=\cos x-\sin x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$$u'(x)=-\sin x-\cos x,\ v(x)=e^x$$
$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\cos x-\sin x)dx$$
$$=\Big[e^x(\cos x-\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(-\sin x-\cos x)dx$$
$$=-e^{\frac{\pi}{2}}-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\sin x+\cos x)dx \quad\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin x+\cos x)dx$$
$$=e^{\frac{\pi}{2}}-1+e^{\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin x+\cos x)dx$$
$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin x+\cos x)dx=e^{\frac{\pi}{2}}$$

답 ②

30 $\int_0^1 (e^x+ax)^2 dx$

$$=\int_0^1 (e^{2x}+2axe^x+a^2x^2)\,dx$$
$$=\int_0^1 (e^{2x}+a^2x^2)\,dx+2a\int_0^1 xe^x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{a^2}{3}x^3\right]_0^1+2a\int_0^1 xe^x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2+\frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}+2a\int_0^1 xe^x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^1 xe^x\,dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=1,\ g(x)=e^x$$
$$\therefore \int_0^1 xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-\left[e^x\right]_0^1$$
$$=e-(e-1)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 (e^x+ax)^2 dx=\frac{1}{2}e^2+\frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}+2a$$
$$=\frac{1}{3}(a+3)^2+\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{2}$$

따라서 $a=-3$일 때 주어진 정적분의 값이 최소이다.

답 -3

31 $f(x)$는 함수 $g(x)$의 역함수이므로

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}\ (단,\ g'(f(x))\neq 0)$$
$$\therefore \int_1^5 \frac{10}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx$$
$$=10\int_1^5 \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx$$

$f(x)=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=f'(x)$

$x=1$일 때 $t=f(1)$, $x=5$일 때 $t=f(5)$이다.

이때 $g(2)=1$에서 $f(1)=2$이고 $g(5)=5$에서 $f(5)=5$이므로

$$10\int_1^5 \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx=10\int_2^5 \frac{1}{t^2}dt=10\int_2^5 t^{-2}dt$$
$$=10\left[-t^{-1}\right]_2^5$$
$$=10\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=3$$

답 3

32 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}\ (단,\ f'(g(x))\neq 0)$$

$f'(x)=1+\{f(x)\}^2$에서

Q BOX

(다항함수)×(지수함수) 꼴일 때에는 다항함수를 $f(x)$, 지수함수를 $g'(x)$로 놓는다.

함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여
$f(a)=b$
$\Longleftrightarrow g(b)=a$

$$f'(g(x))=1+\{f(g(x))\}^2=1+x^2$$

이므로

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$
$$\therefore \int_0^1 g'(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta$$
$$=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

33 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt=k$ (k는 상수) $\quad \cdots\cdots ㉠$

로 놓으면

$$f(x)=\sin\pi x+k$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (\sin\pi t+k)dt=k$$
$$\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t+kt\right]_0^{\frac{1}{2}}=k, \qquad \frac{k}{2}+\frac{1}{\pi}=k$$
$$\therefore k=\frac{2}{\pi}$$

따라서 $f(x)=\sin\pi x+\frac{2}{\pi}$이므로

$$f(1)=\frac{2}{\pi}$$

답 ②

34 $\int_1^e f(t)dt=k$ (k는 상수) $\quad \cdots\cdots ㉠$

로 놓으면

$$f(x)=\ln x+k$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^e (\ln t+k)dt=k$$

$\int_1^e (\ln t+k)dt$에서 $u(t)=\ln t+k$, $v'(t)=1$로 놓으면

$$u'(t)=\frac{1}{t},\ v(t)=t$$
$$\therefore \int_1^e (\ln t+k)dt=\left[t\ln t+kt\right]_1^e-\int_1^e 1\,dt$$
$$=e+ke-k-\left[t\right]_1^e$$
$$=e+ke-k-(e-1)$$
$$=ke-k+1$$

즉 $ke-k+1=k$이므로

$$(2-e)k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2-e}$$
$$\therefore f(x)=\ln x+\frac{1}{2-e}$$

답 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2-e}$

09 정적분

35 $\int_1^x f(t)dt=x^3+a\sqrt{x}$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a \qquad \therefore a=-1$

따라서 $\int_1^x f(t)dt=x^3-\sqrt{x}$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\therefore f(1)=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ 답 ④

36 $\int_0^x f(t)dt=(x-1)\cos 2x+ax^2+b$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\cos 2x-2(x-1)\sin 2x+2ax$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\pi-1$이므로 $\quad -1+a\pi=2\pi-1$

$\therefore a=2$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-1+b \qquad \therefore b=1$

$\therefore a+b=3$ 답 ⑤

37 $\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^2e^x$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2xe^x-x^2e^x$

$xf'(x)=x(x+2)e^x$

$\therefore f'(x)=(x+2)e^x$

$u(x)=x+2,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$

$\therefore f(x)=\int (x+2)e^x dx$

$=(x+2)e^x-\int e^x dx$

$=(x+2)e^x-e^x+C$

$=(x+1)e^x+C$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=e$이므로

$2e+C=e \qquad \therefore C=-e$

따라서 $f(x)=(x+1)e^x-e$이므로

$f(0)=1-e$ 답 ②

38 $\int_0^x (x-t)f'(t)dt=\sin x\cos x-x$에서

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=\frac{1}{2}\sin 2x-x$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=\cos 2x-1$

$\int_0^x f'(t)dt=\cos 2x-1$

$\Big[f(t)\Big]_0^x=\cos 2x-1$

$f(x)-f(0)=\cos 2x-1$

$f(0)=1$이므로 $\quad f(x)=\cos 2x$ 답 ④

Q BOX

$\int_1^1 f(t)dt=0$

$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$이므로

$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'$

$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

정적분에서 변수가 t이므로 t 이외의 문자는 상수로 생각한다.

39 $\int_1^x (x+t)f(t)dt=e^x\ln x+e^x-e$에서

$x\int_1^x f(t)dt+\int_1^x tf(t)dt=e^x\ln x+e^x-e$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)+xf(x)=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}+e^x$

$\therefore \int_1^x f(t)dt+2xf(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}+1\right)$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)=2e \qquad \therefore f(1)=e$ 답 e

40 $\int_1^x (x-t)f(t)dt=x\ln x+a\cos\pi x+bx$ …… ㉠

에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x\ln x+a\cos\pi x+bx$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$

$=\ln x+1-a\pi\sin\pi x+b$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=\ln x-a\pi\sin\pi x+b+1$ …… ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{x}-a\pi^2\cos\pi x$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=b+1 \qquad \therefore b=-1$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-a+b \qquad \therefore a=b=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{x}+\pi^2\cos\pi x$이므로

$\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^4\left(\frac{1}{x}+\pi^2\cos\pi x\right)dx$

$=\Big[\ln|x|+\pi\sin\pi x\Big]_{\frac{1}{2}}^4$

$=\ln 4-\left(\ln\frac{1}{2}+\pi\right)$

$=3\ln 2-\pi$ 답 ③

41 $f(x)+\int_\pi^x f(t)e^{x-t}dt=\sin 2x$ …… ㉠

에서

$f(x)+e^x\int_\pi^x f(t)e^{-t}dt=\sin 2x$ …… ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+e^x\int_\pi^x f(t)e^{-t}dt+e^xf(x)e^{-x}=2\cos 2x$

$f'(x)+e^x\int_\pi^x f(t)e^{-t}dt+f(x)=2\cos 2x$

$f'(x)+\sin 2x=2\cos 2x\ (\because ㉡)$

$\therefore f'(x)=-\sin 2x+2\cos 2x$

$$\therefore f(x)=\int(-\sin 2x+2\cos 2x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin 2x+C$$

㉠의 양변에 $x=\pi$를 대입하면 $f(\pi)=0$이므로

$$\frac{1}{2}+C=0 \qquad \therefore C=-\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin 2x-\frac{1}{2}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

42 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{x-3}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3$

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 극솟값은

$$f(3)=\int_1^3 \frac{t-3}{t}dt=\int_1^3\left(1-\frac{3}{t}\right)dt$$
$$=\Big[t-3\ln|t|\Big]_1^3=(3-3\ln 3)-1$$
$$=2-3\ln 3$$

답 $2-3\ln 3$

43 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(x+1)(e^x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$

$e^x-1=0$에서 $\ e^x=1$
$\therefore x=0$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=0$에서 극소이므로

$$a=f(-1)=\int_1^{-1}(t+1)(e^t-1)dt$$

$u(t)=t+1$, $v'(t)=e^t-1$로 놓으면
$u'(t)=1$, $v(t)=e^t-t$

$$\therefore a=\Big[(t+1)(e^t-t)\Big]_1^{-1}-\int_1^{-1}(e^t-t)dt$$
$$=-2e+2-\left[e^t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^{-1}$$
$$=-2e+2-\left(\frac{1}{e}-e\right)=2-\frac{1}{e}-e$$

같은 방법으로 하면

$$b=f(0)=\int_1^0(t+1)(e^t-1)dt$$
$$=\Big[(t+1)(e^t-t)\Big]_1^0-\int_1^0(e^t-t)dt$$
$$=3-2e-\left[e^t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^0$$
$$=3-2e-\left(\frac{3}{2}-e\right)=\frac{3}{2}-e$$
$$\therefore a-b=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$$

답 $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$

44 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{x-1}{x^2-2x+3}$$

x^2-2x+3
$=(x-1)^2+2>0$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$(t^2-2t+3)'=2t-2$

$$f(1)=\int_0^1\frac{t-1}{t^2-2t+3}dt=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(t^2-2t+3)'}{t^2-2t+3}dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\ln(t^2-2t+3)\Big]_0^1\ (\because t^2-2t+3>0)$$
$$=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 3)=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$$

답 ②

45 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\sin 2x(2\cos 2x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin 2x=0$ 또는 $\cos 2x=\frac{1}{2}$

$$\therefore x=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서
$\sin 2x>0$이고,
$\cos 2x=\frac{1}{2}$에서
$2x=\frac{\pi}{3} \quad \therefore x=\frac{\pi}{6}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2t(2\cos 2t-1)dt$$

$2\cos 2t-1=s$로 놓으면 $\quad \frac{ds}{dt}=-4\sin 2t$

$t=0$일 때 $s=1$, $t=\frac{\pi}{6}$일 때 $s=0$이므로

$2\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)-1$
$=2\cos\frac{\pi}{3}-1$
$=2\cdot\frac{1}{2}-1$
$=0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2t(2\cos 2t-1)dt=\int_1^0 s\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)ds$$
$$=\int_0^1\frac{1}{4}s\,ds$$
$$=\left[\frac{1}{8}s^2\right]_0^1=\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

46 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2-\ln x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=2 \quad \therefore x=e^2$

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(e^2)=\int_1^{e^2}(2-\ln t)dt$$

$u(t)=2-\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=-\frac{1}{t}$, $v(t)=t$

$\therefore \int_1^{e^2}(2-\ln t)dt=\Big[t(2-\ln t)\Big]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}1\,dt$

$=-2+\Big[t\Big]_1^{e^2}=-2+(e^2-1)$

$=e^2-3$

즉 $a=e^2$, $b=e^2-3$이므로

$a-b=3$ 답 ④

47 $f(t)=e^t\ln t+3e^{2t}$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^{x^2}(e^t\ln t+3e^{2t})dt$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^{x^2}f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^3-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^3-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$x^2=s$로 놓으면 $x\to1$일 때 $s\to1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{s\to1}\frac{F(s)-F(1)}{s-1}$$

$$=F'(1)$$

$$=\frac{2}{3}F'(1)=\frac{2}{3}f(1)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot3e^2=2e^2$$

답 ⑤

48 $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+2h}f(t)dt$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left\{F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2h}\cdot2$$

$$+\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$$

$$=2F'\left(\frac{\pi}{2}\right)+F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=3f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2t(\sin t+2)dt$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin t\cos t(\sin t+2)dt$$

$\sin t=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=\cos t$

$t=0$일 때 $s=0$, $t=\frac{\pi}{2}$일 때 $s=1$이므로

$$3\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin t\cos t(\sin t+2)dt$$

$$=6\int_0^1 s(s+2)ds=6\int_0^1(s^2+2s)ds$$

$$=6\Big[\frac{1}{3}s^3+s^2\Big]_0^1=6\cdot\frac{4}{3}=8$$

답 8

Q BOX

도전! 수능 기출

W 72쪽

01 1st 주어진 식의 값이 최소일 때를 찾는다.

$$\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$$

$$\int_a^8 g(x)dx$$
$$=\int_0^8 g(x)dx+\int_a^0 g(x)dx$$
$$=\int_0^8 g(x)dx-\int_0^a g(x)dx$$

$$=\int_0^a f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx-\int_0^a g(x)dx$$

$$=\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^8 g(x)dx$$

이때 $\int_0^8 g(x)\,dx$는 상수이므로 주어진 식은

$\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx$의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

2nd $0\le x\le8$에서 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

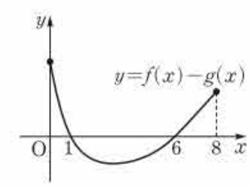
주어진 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프에서

$0\le x\le1$일 때 $f(x)\ge g(x)$,

$1\le x\le6$일 때 $f(x)\le g(x)$,

$6\le x\le8$일 때 $f(x)\ge g(x)$

이므로 $0\le x\le8$에서 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



3rd $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$의 최솟값을 구한다.

$\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx$의 값은 $a=6$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\int_0^6 f(x)dx+\int_6^8 g(x)dx$$

$6\le x\le8$일 때,

$$g(x)=\frac{4-(x-4)}{2}$$
$$=4-\frac{x}{2}$$

$$=\int_0^6\left(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}\right)dx+\int_6^8\left(4-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$\frac{5\cdot2x}{x^2+4}=\frac{5(x^2+4)'}{x^2+4}$$

$$=\Big[\frac{5}{2}x-5\ln(x^2+4)\Big]_0^6+\Big[4x-\frac{x^2}{4}\Big]_6^8$$

$(\because x^2+4>0)$

$$=\{(15-5\ln40)-(-5\ln4)\}+(16-15)$$

$$=16-5\ln10$$

답 ④

참고 $y=f(x)-g(x)$의 그래프에서 $\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx>0$, $\int_1^6\{f(x)-g(x)\}dx<0$, $\int_6^8\{f(x)-g(x)\}dx>0$이므로 $\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx$의 값은 $a=6$일 때 최소이다.

02 1st $g(t)$를 구한다.

$e^x=t$로 놓으면

$x=\ln t$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=e$, $x=2$일 때 $t=e^2$이므로

$$g(t)=\begin{cases}f(\ln t) & (1\le t<e)\\ g\left(\frac{t}{e}\right)+5 & (e\le t\le e^2)\end{cases}$$

2nd $\int_1^{e^2} g(x)dx$를 적분 구간을 나누어 나타낸다.

$$\int_1^{e^2} g(x)dx=\int_1^e g(x)dx+\int_e^{e^2} g(x)dx$$
$$=\int_1^e f(\ln x)dx+\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx$$
$$=ae+b+\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx \quad \cdots ㉠$$

3rd $\int_1^{e^2} g(x)dx$를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

$\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx$에서 $\frac{x}{e}=s$로 놓으면

$$\frac{ds}{dx}=\frac{1}{e}$$

$x=e$일 때 $s=1$, $x=e^2$일 때 $s=e$이므로

$$\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx=\int_1^e\{g(s)+5\}\cdot e\,ds$$
$$=e\int_1^e g(s)ds+5e\int_1^e 1\,ds$$
$$=e\int_1^e f(\ln s)ds+5e\Big[s\Big]_1^e$$
$$=e(ae+b)+5e(e-1)$$
$$=(a+5)e^2+(b-5)e$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^{e^2} g(x)dx=ae+b+(a+5)e^2+(b-5)e$$
$$=(a+5)e^2+(a+b-5)e+b$$

4th a^2+b^2의 값을 구한다.

$(a+5)e^2+(a+b-5)e+b=6e^2+4$이고 a, b가 정수이므로

$a+5=6$, $a+b-5=0$, $b=4$

$\therefore a=1,\ b=4 \quad \therefore a^2+b^2=17$

답 17

03 1st 부분적분법을 이용하여 $\int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\,dx$를 변형한다.

$\int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\,dx$에서 $u(x)=\sin 2\pi x$,

$v'(x)=f'(x)$로 놓으면

$u'(x)=2\pi\cos 2\pi x$, $v(x)=f(x)$

$$\therefore \int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\,dx$$
$$=\Big[f(x)\sin 2\pi x\Big]_0^1-2\pi\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$
$$=-2\pi\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

2nd $\int_{-1}^5 xf(x)dx$의 값을 구하여 $\int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx$의 값을 구한다.

$$\int_{-1}^5 f(x)(x+\cos 2\pi x)dx$$
$$=\int_{-1}^5 xf(x)dx+\int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=0,\ \int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx$$

이므로

$$\int_{-1}^5 xf(x)dx$$
$$=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_1^3 xf(x)dx+\int_3^5 xf(x)dx$$
$$=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_{-1}^1 (x+2)f(x+2)dx$$
$$+\int_{-1}^1 (x+4)f(x+4)dx$$
$$=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_{-1}^1 (x+2)f(x)dx$$
$$+\int_{-1}^1 (x+4)f(x)dx\ (\because (나))$$
$$=\int_{-1}^1 (3x+6)f(x)dx$$
$$=3\int_{-1}^1 xf(x)dx+6\int_{-1}^1 f(x)dx$$
$$=12\int_0^1 f(x)dx$$
$$=12\cdot 2=24$$

$\int_{-1}^5 xf(x)dx=24$를 ㉡에 대입하면

$$\frac{47}{2}=24+\int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$
$$\therefore \int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx=-\frac{1}{2}$$

3rd $\int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx$를 변형하여 $\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$의 값을 구한다.

조건 (나)에 의하여

$$f(x+2)\cos\{2\pi(x+2)\}=f(x)\cos 2\pi x$$

이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx=\int_1^3 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$
$$=\int_3^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

또 조건 (가)에 의하여

$$f(-x)\cos(-2\pi x)=f(x)\cos 2\pi x$$

이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx=2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$
$$\therefore \int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx=3\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$
$$=6\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

즉 $6\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx=-\frac{1}{2}$이므로

$$\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx=-\frac{1}{12}$$

4th $\int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\,dx$의 값을 구한다.

㉠에서

$$\int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\,dx=-2\pi\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{\pi}{6}$$

답 ①

04 1st $f(\sqrt{\pi})$의 부호를 조사하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

Q BOX

$x=t+2$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=1$

$x=1$일 때 $t=-1$,

$x=3$일 때 $t=1$이므로

$\int_1^3 xf(x)dx$

$=\int_{-1}^1 (t+2)f(t+2)dt$

$=\int_{-1}^1 (x+2)f(x+2)dx$

$\cos\{2\pi(x+2)\}$

$=\cos(2\pi x+4\pi)$

$=\cos 2\pi x$

$f(x)\cos 2\pi x$는 우함수이다.

x는 기함수이고 $f(x)$는 우함수이므로 $xf(x)$는 기함수이다.

ㄱ. $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)\,dt$ ...... ㉠

㉠에서

$$f(\sqrt{\pi})=e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\,dt \quad \cdots\cdots ㉡$$

$0\le t\le\sqrt{\pi}$에서 $0\le t^2\le\pi$이므로

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\,dt>0$$

또 $e^{-\sqrt{\pi}}>0$이므로 $f(\sqrt{\pi})>0$ ...... ㉢

2nd 평균값 정리를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}}=f'(a) \quad \cdots\cdots ㉣$$

를 만족시키는 a가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이고 ㉢에서 $f(\sqrt{\pi})>0$이므로 ㉣에서

$$f'(a)>0$$

즉 $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

3rd 사잇값의 정리를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=-e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)\,dt+e^{-x}\sin(x^2)$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(\sqrt{\pi})&=-e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)\,dt+e^{-\sqrt{\pi}}\sin\pi\\&=-e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)\,dt\\&=-f(\sqrt{\pi})<0\ (\because ㉡, ㉢)\end{aligned}$$

따라서 $f'(a)>0$을 만족시키는 $a\ (0<a<\sqrt{\pi})$에 대하여 함수 $f'(x)$가 닫힌구간 $[a, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고 $f'(a)>0$, $f'(\sqrt{\pi})<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f'(b)=0$인 b가 열린구간 $(a, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

Q BOX

평균값 정리
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[m, n]$에서 연속이고 열린구간 (m, n)에서 미분가능할 때,
$\dfrac{f(n)-f(m)}{n-m}=f'(c)$
인 c가 열린구간 (m, n)에 적어도 하나 존재한다.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2\\&=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\&=4\int_0^1 x^2\,dx\\&=4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

와 같이 구할 수도 있다.

10 정적분의 활용

W 73쪽

01 $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{2n}&=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\&=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\end{aligned}$$

답 2

02 $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\\&=\int_0^1 xf(x)dx\\&=\int_0^1(4x^3+3x^2+6x)dx\\&=\Big[x^4+x^3+3x^2\Big]_0^1=5\end{aligned}$$

답 ②

03 $$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+f\left(\frac{6}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{2n}{n}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}\\&=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2(e^x+a)dx\\&=\frac{1}{2}\Big[e^x+ax\Big]_0^2=\frac{e^2+2a-1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{e^2+2a-1}{2}=\dfrac{e^2+3}{2}$이므로

$2a-1=3$ $\quad\therefore a=2$

답 2

04 점 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}$이 x축 위의 구간 $[0, 2]$를 n 등분하므로 $A_k\left(\frac{2k}{n}, 0\right)$

따라서 $B_k\left(\frac{2k}{n}, \left(\frac{2k}{n}\right)^2\right)$이므로 $\overline{A_kB_k}=\left(\frac{2k}{n}\right)^2$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n}\\&=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 ②

05 $x_k=1+\dfrac{k}{n}$이므로

$$A_k=\frac{1}{2}\cdot x_k\cdot f(x_k)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{2}\int_1^2 xe^x\,dx\end{aligned}$$

$u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

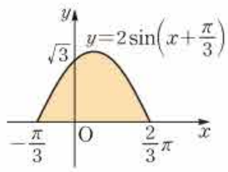
$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \frac{1}{2}\int_1^2 xe^x dx = \frac{1}{2}\left(\Big[xe^x\Big]_1^2 - \int_1^2 e^x dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2e^2 - e - \Big[e^x\Big]_1^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\{2e^2 - e - (e^2 - e)\}$$
$$= \frac{1}{2}e^2$$

답 $\frac{1}{2}e^2$

06 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$



이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx = \left[-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=2-(-2)=4$$

답 ④

$\sin x+\sqrt{3}\cos x$
$=2\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$
$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

07 $\int_{-1}^0\left(-\frac{4x}{x^2+2}\right)dx+\int_0^2\frac{4x}{x^2+2}dx$

$=\Big[-2\ln(x^2+2)\Big]_{-1}^0+\Big[2\ln(x^2+2)\Big]_0^2$

$=\{-2\ln 2-(-2\ln 3)\}+(2\ln 6-2\ln 2)$

$=2\ln\frac{9}{2}$

답 ⑤

$(x^2+2)'=2x$이므로
$\int_{-1}^0\left(-\frac{4x}{x^2+2}\right)dx$
$=\int_{-1}^0\left\{-\frac{2(x^2+2)'}{x^2+2}\right\}dx$
$=\Big[-2\ln(x^2+2)\Big]_{-1}^0$

08 $0\le x\le a$에서 $e^x+3e^{-x}>0$이므로 주어진 도형의 넓이는

$$\int_0^a(e^x+3e^{-x})dx=\Big[e^x-3e^{-x}\Big]_0^a=e^a-3e^{-a}+2$$

y축의 방정식은 $x=0$이다.

따라서 $e^a-3e^{-a}+2=4$이므로

$e^{2a}-2e^a-3=0,\quad (e^a+1)(e^a-3)=0$

$e^a=3\ (\because e^a>0)\quad \therefore a=\ln 3$

답 $\ln 3$

09 $2x=t$로 놓으면 $\quad\frac{dt}{dx}=2$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=4$일 때 $t=8$이므로

$$\int_0^4 f(2x)dx=\int_0^8 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^8 f(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^5 f(t)dt+\int_5^8 f(t)dt\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(7-3)=2$$

답 2

10 $S_1=\int_{\frac{1}{e}}^{e^k}\frac{\ln x+1}{x}dx,\ S_2=\int_{e^k}^{e}\frac{\ln x+1}{x}dx$

$\ln x+1=t$로 놓으면 $\quad\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=\frac{1}{e}$일 때 $t=0$, $x=e^k$일 때 $t=k+1$, $x=e$일 때 $t=2$이므로

$$S_1=\int_0^{k+1}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{k+1}=\frac{(k+1)^2}{2},$$
$$S_2=\int_{k+1}^2 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{k+1}^2=\frac{4-(k+1)^2}{2}$$

이때 $S_1:S_2=3:1$에서 $S_1=3S_2$이므로

$\frac{(k+1)^2}{2}=3\cdot\frac{4-(k+1)^2}{2},\qquad (k+1)^2=3$

$k+1=\sqrt{3}\ (\because -1<k<1)$

$\therefore k=\sqrt{3}-1$

답 $\sqrt{3}-1$

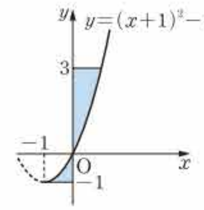
11 $y=(x+1)^2-1$에서

$y+1=(x+1)^2$

$\sqrt{y+1}=x+1$

$(\because x\ge-1)$

$\therefore x=\sqrt{y+1}-1$



따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

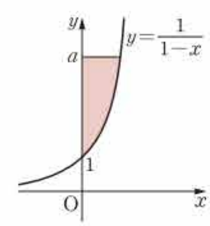
$$\int_{-1}^0(-\sqrt{y+1}+1)dy+\int_0^3(\sqrt{y+1}-1)dy$$
$$=\left[-\frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}+y\right]_{-1}^0+\left[\frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}-y\right]_0^3$$
$$=\left\{-\frac{2}{3}-(-1)\right\}+\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\right)=2$$

답 2

12 $y=\frac{1}{1-x}$에서

$1-x=\frac{1}{y}$

$\therefore x=1-\frac{1}{y}$



따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_1^a\left(1-\frac{1}{y}\right)dy=\Big[y-\ln|y|\Big]_1^a=a-\ln a-1$$

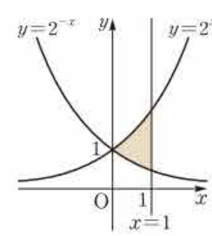
즉 $a-1-\ln a=3-2\ln 2$이므로

$a=4$

답 ③

$3-2\ln 2=3-\ln 4$

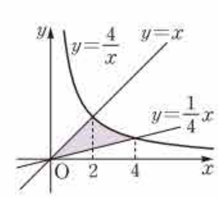
13 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^1(2^x-2^{-x})dx$$
$$=\left[\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^1$$
$$=\frac{5}{2\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}$$
$$=\frac{1}{2\ln 2}$$

답 $\frac{1}{2\ln 2}$

14 곡선 $y=\frac{4}{x}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $\frac{4}{x}=x$에서



$x^2=4$

$\therefore x=2\ (\because x>0)$

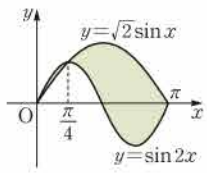
곡선 $y=\frac{4}{x}$와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 x좌표는

$\frac{4}{x}=\frac{1}{4}x$에서 $\quad x^2=16\quad \therefore x=4\ (\because x>0)$

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^2\left(x-\frac{1}{4}x\right)dx+\int_2^4\left(\frac{4}{x}-\frac{1}{4}x\right)dx$$
$$=\left[\frac{3}{8}x^2\right]_0^2+\left[4\ln|x|-\frac{1}{8}x^2\right]_2^4$$
$$=\frac{3}{2}+\left\{4\ln4-2-\left(4\ln2-\frac{1}{2}\right)\right\}=4\ln2$$ 답 $4\ln2$

15 두 곡선 $y=\sqrt{2}\sin x$, $y=\sin 2x$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{2}\sin x=\sin 2x$에서



$\sqrt{2}\sin x=2\sin x\cos x$

$\sin x(2\cos x-\sqrt{2})=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

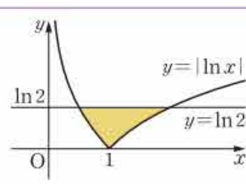
$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2x-\sqrt{2}\sin x)dx$$
$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sqrt{2}\sin x-\sin 2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\sqrt{2}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$+\left[-\sqrt{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$
$$=\left\{1-\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)\right\}+\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}-(-1)\right\}=3$$

답 ②

16 $0<x<1$에서 $y=|\ln x|=-\ln x$이므로



$x=e^{-y}$

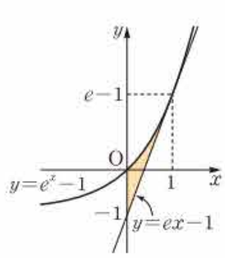
$x\ge1$에서 $y=|\ln x|=\ln x$이므로

$x=e^y$

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\ln2}(e^y-e^{-y})dy=\left[e^y+e^{-y}\right]_0^{\ln2}$$
$$=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$$ 답 ①

17 $y=e^x-1$에서 $y'=e^x$이므로 곡선 위의 점 $(1,\ e-1)$에서의 접선의 기울기는 e이고 접선의 방정식은



$y-(e-1)=e(x-1)$

$\therefore y=ex-1$

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{e^x-1-(ex-1)\}dx=\int_0^1(e^x-ex)dx$$
$$=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{e}{2}-1$$ 답 $\frac{e}{2}-1$

Q BOX

$f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\ne0)$가 미분가능할 때,

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\frac{1-\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\frac{1-\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$$

$\sin x=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{4}$

$|\ln x|=\ln2$에서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$이므로 구하는 넓이가 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}(\ln2-|\ln x|)dx$임을 이용할 수도 있다.

18 $y=\frac{\ln x}{x}$에서 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$이므로 곡선 위의 점 $\left(t,\ \frac{\ln t}{t}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1-\ln t}{t^2}$이고 접선의 방정식은

$$y-\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln t}{t^2}(x-t) \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$$-\frac{\ln t}{t}=-\frac{1-\ln t}{t},\qquad \ln t=1-\ln t$$

$$\ln t=\frac{1}{2}\qquad \therefore t=\sqrt{e}$$

$t=\sqrt{e}$를 ㉠에 대입하면

$$y-\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{2e}(x-\sqrt{e})\qquad \therefore y=\frac{1}{2e}x$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{e}}\frac{1}{2e}x\,dx-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4e}x^2\right]_0^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}dx$$
$$=\frac{1}{4}-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{e}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$$

이것을 ㉡에 대입하면 구하는 넓이는

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$ 답 ③

19 $\int_0^k(-x+\sqrt{2x})dx=0$이므로

$$\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^k=0$$
$$-\frac{1}{2}k^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}k\sqrt{k}=0$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{k}+\frac{2\sqrt{2}}{3}=0\ (\because k>2)$$
$$\sqrt{k}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\qquad \therefore k=\frac{32}{9}$$ 답 $\frac{32}{9}$

20 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x\cos^2 x-ax)dx=0$이므로

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}ax\,dx=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 x\,dx$에서 $\cos x=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=-\sin x$$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 x\,dx=\int_1^0 t^2\cdot(-1)dt=\int_0^1 t^2\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

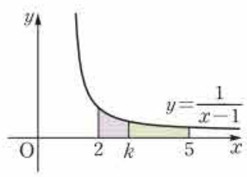
$$\frac{2}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} ax\,dx=0, \quad \frac{2}{3}-\left[\frac{1}{2}ax^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

$$\frac{2}{3}-\frac{\pi^2}{8}a=0, \quad \frac{\pi^2}{8}a=\frac{2}{3}$$

$$\therefore a=\frac{16}{3\pi^2}$$

답 ④

21 곡선 $y=\dfrac{1}{x-1}$과 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_2^5 \frac{1}{x-1}dx$$

$$=\Big[\ln|x-1|\Big]_2^5=2\ln 2$$

곡선 $y=\dfrac{1}{x-1}$과 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_2^k \frac{1}{x-1}dx=\Big[\ln|x-1|\Big]_2^k$$

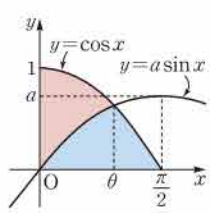
$$=\ln(k-1) \ (\because k-1>0)$$

이때 $S_2=\dfrac{1}{2}S_1$이므로 $\quad \ln(k-1)=\ln 2$

$k-1=2 \quad \therefore k=3$

답 3

22 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=\cos x$, $y=a\sin x$의 교점의 x좌표를 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\cos\theta=a\sin\theta$에서



$$a=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\cot\theta \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 곡선 $y=\cos x$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$0\le x\le\theta$에서 두 곡선 $y=\cos x$, $y=a\sin x$와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^{\theta}(\cos x-a\sin x)dx=\Big[\sin x+a\cos x\Big]_0^{\theta}$$

$$=\sin\theta+a\cos\theta-a$$

이때 $S_2=\dfrac{1}{2}S_1$이므로 $\quad \sin\theta+a\cos\theta-a=\dfrac{1}{2}$

$$\sin\theta+a\cos\theta=a+\frac{1}{2}$$

양변을 $\sin\theta$로 나누면

$$1+a\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\left(a+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$

$$1+a\cot\theta=\left(a+\frac{1}{2}\right)\csc\theta$$

$$1+a\cot\theta=\left(a+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+\cot^2\theta}$$

$2<k<5$에서
$1<k-1<4$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로
$\cos\theta>0$

$a>0$, $a\ne1$일 때, 지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계에 있다.

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로
$\sin\theta>0$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이고
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\csc\theta>0$
이므로
$\csc\theta=\sqrt{1+\cot^2\theta}$

$$1+a^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+a^2} \ (\because \text{㉠})$$

$$\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면 $\quad a^2+1=a^2+a+\dfrac{1}{4}$

$$\therefore a=\frac{3}{4}$$

답 $\dfrac{3}{4}$

다른 풀이 $a=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$를 $\sin\theta+a\cos\theta=a+\dfrac{1}{2}$에 대입하면

$$\sin\theta+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{1}{2}$$

양변에 $2\sin\theta$를 곱하면

$$2\sin^2\theta+2\cos^2\theta=2\cos\theta+\sin\theta$$

$$2-\sin\theta=2\cos\theta$$

양변을 제곱하면 $\quad 4-4\sin\theta+\sin^2\theta=4\cos^2\theta$

$$4-4\sin\theta+\sin^2\theta=4(1-\sin^2\theta)$$

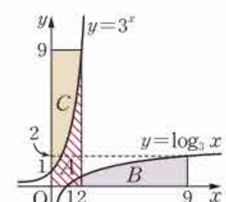
$$5\sin^2\theta-4\sin\theta=0, \quad \sin\theta(5\sin\theta-4)=0$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{4}{5}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

따라서 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$이므로

$$a=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{3}{4}$$

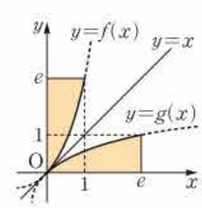
23 두 함수 $y=3^x$과 $y=\log_3 x$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 오른쪽 그림에서 $B=C$이므로



$$A+B=A+C=2\cdot9=18$$

답 ⑤

24 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 색칠한 두 부분의 넓이가 같다.



$$\therefore \int_1^e g(x)dx$$

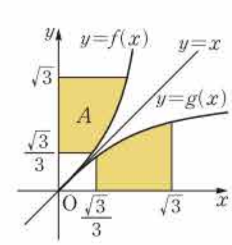
$$=1\cdot e-\int_0^1 f(x)dx=e-\int_0^1 xe^x dx$$

$$=e-\left(\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)$$

$$=e-\left(e-\Big[e^x\Big]_0^1\right)=e-1$$

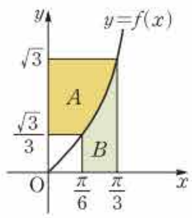
답 $e-1$

25 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 두 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $y=\sqrt{3}$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A라 하면



$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} g(x)dx=A$$

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 B라 하면 오른쪽 그림에서



$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} g(x)dx$$

$$=B+A=\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{18}\pi$$ 답 ③

26 물의 깊이가 x cm일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$ cm^2라 하면

$$S(x)=\pi\left(\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}x}\right)^2=\pi\sin\frac{\pi}{4}x$$

따라서 구하는 물의 부피는

$$\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 \pi\sin\frac{\pi}{4}x\,dx$$

$$=\left[-4\cos\frac{\pi}{4}x\right]_0^2=4\,(\text{cm}^3)$$ 답 ③

27 주어진 입체도형의 부피는 $\int_0^a x\ln(x^2+1)\,dx$

$x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=a$일 때 $t=a^2+1$이므로

$$\int_0^a x\ln(x^2+1)dx$$

$$=\int_1^{a^2+1}\ln t\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_1^{a^2+1}\ln t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\Big[t\ln t\Big]_1^{a^2+1}-\int_1^{a^2+1}1\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(a^2+1)\ln(a^2+1)-\Big[t\Big]_1^{a^2+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(a^2+1)\ln(a^2+1)-a^2\}$$

따라서 $\frac{1}{2}\{(a^2+1)\ln(a^2+1)-a^2\}=5\ln 10-\frac{9}{2}$이므로

$$(a^2+1)\ln(a^2+1)-a^2=10\ln 10-9$$

이때 a는 유리수이므로

$a^2=9$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$) 답 3

a가 유리수이면 a^2도 유리수이다.

28 점 P의 x좌표를 x $(0\le x\le 1)$라 하고 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\overline{\text{PH}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{x+1}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{(x+1)^2}$$

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{(x+1)^2}dx$$

$$=\left[-\frac{\sqrt{3}}{x+1}\right]_0^1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Q BOX

29 점 $(x, 0)$ $(0\le x\le 2)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

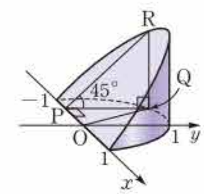
$$S(x)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x^2\sqrt{x}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}x^5$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2\frac{\pi}{8}x^5\,dx=\frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{32}{3}=\frac{4}{3}\pi$$ 답 $\frac{4}{3}\pi$

30 오른쪽 그림과 같이 입체도형을 밑면의 중심을 원점 O, 자른 평면과 밑면의 교선을 x축으로 하는 좌표평면 위에 놓고, x축 위의 점 P$(x, 0)$ $(-1\le x\le 1)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 △PQR라 하자.



이때 직각삼각형 POQ에서

$$\overline{\text{PQ}}=\sqrt{\overline{\text{OQ}}^2-\overline{\text{OP}}^2}=\sqrt{1-x^2}$$

또 △PQR는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{\text{RQ}}=\overline{\text{PQ}}=\sqrt{1-x^2}$$

△PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\text{PQ}}\cdot\overline{\text{RQ}}=\frac{1}{2}(1-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-1}^1 S(x)dx=\int_{-1}^1\frac{1}{2}(1-x^2)dx=\int_0^1(1-x^2)dx$$

$\frac{1}{2}(1-x^2)$은 우함수이다.

$$=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$ 답 ③

31 $t=0$에서의 위치가 0이므로 시각 t $(0<t\le 2\pi)$에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^t\sin\pi t\,dt=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^t=-\frac{1}{\pi}\cos\pi t+\frac{1}{\pi}$$

점 P가 원점을 지나려면

$$-\frac{1}{\pi}\cos\pi t+\frac{1}{\pi}=0,\qquad \cos\pi t=1$$

$\therefore t=2, 4, 6$ ($\because 0<t\le 2\pi$)

따라서 점 P는 원점을 3번 지난다. 답 ②

32 $t=0$에서의 두 점 P, Q의 위치가 0이므로 시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_1, x_2라 하면

$$x_1=\int_0^t 2\cos 2t\,dt=\Big[\sin 2t\Big]_0^t=\sin 2t,$$

$$x_2=\int_0^t\cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_0^t=\sin t$$

두 점 P, Q가 출발한 후 다시 만나려면

$\sin 2t=\sin t$, $2\sin t\cos t=\sin t$

$\sin t(2\cos t-1)=0$

$\sin t=0$ 또는 $\cos t=\frac{1}{2}$

$\sin t=0$에서 $t=\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$

$\cos t=\frac{1}{2}$에서 $t=\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \cdots$

$\therefore t=\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi, \cdots$

따라서 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 처음으로 다시 만나는 시각은 $t=\frac{\pi}{3}$이므로 구하는 점의 좌표는

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 　　　 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

QBOX

$t=\frac{\pi}{3}$를 $\sin 2t$에 대입하여

$\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

과 같이 구할 수도 있다.

33 $\frac{dx}{dt}=e^t-1$, $\frac{dy}{dt}=2e^{\frac{t}{2}}$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^3\sqrt{(e^t-1)^2+(2e^{\frac{t}{2}})^2}\,dt=\int_0^3\sqrt{e^{2t}+2e^t+1}\,dt$$
$$=\int_0^3\sqrt{(e^t+1)^2}\,dt$$
$$=\int_0^3(e^t+1)dt$$
$$=\Big[e^t+t\Big]_0^3$$
$$=(e^3+3)-1$$
$$=e^3+2$$

답 ⑤

34 (1) $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=t-\frac{1}{t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{2^2+\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}=\sqrt{t^2+2+\frac{1}{t^2}}=\sqrt{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$
$$=t+\frac{1}{t}\ (\because t>0)$$

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도의 크기, 즉 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

$t>0$, $\frac{1}{t}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t+\frac{1}{t}\ge 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$$

이때 등호는 $t=\frac{1}{t}$일 때 성립하므로 $t^2=1$, 즉 $t=1$일 때 점 P의 속력이 최소가 된다.

$t>0$이므로 $t=1$

$\therefore a=1$

(2) $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^2\left(t+\frac{1}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+\ln|t|\right]_1^2$$
$$=(2+\ln 2)-\frac{1}{2}=\ln 2+\frac{3}{2}$$

답 (1) 1 (2) $\ln 2+\frac{3}{2}$

35 $y'=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x$이므로

$(\ln\sqrt{x})'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}$

$$\int_1^3\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^3\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx=\int_1^3\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^3\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln|x|\right]_1^3$$
$$=\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\ln 3\right)-\frac{1}{4}=2+\frac{1}{2}\ln 3$$

답 $2+\frac{1}{2}\ln 3$

36 $\frac{dx}{dt}=3\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-3\cos^2 t\sin t$,

$\frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$이므로 구하는 곡선의 길이는

$0\le t\le\frac{\pi}{2}$에서 $\sin t\ge 0$, $\cos t\ge 0$이므로 $\sin t\cos t\ge 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3\sin t\cos t)^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin t\cos t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\sin 2t\,dt=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

37 $\frac{dx}{dt}=e^t\cos t+e^t\cdot(-\sin t)=e^t(\cos t-\sin t)$,

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$이므로

$0\le t\le a$에서 곡선의 길이는

$$\int_0^a\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^a e^t\sqrt{(1-2\cos t\sin t)+(1+2\sin t\cos t)}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{2}e^t dt=\Big[\sqrt{2}e^t\Big]_0^a=\sqrt{2}(e^a-1)$$

따라서 $\sqrt{2}(e^a-1)=2\sqrt{2}$이므로 $e^a=3$

$\therefore a=\ln 3$

답 ②

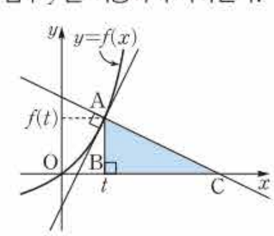
도전! 수능 기출

W 79쪽

01 (1st) △ABC의 넓이를 함수 f를 이용하여 나타낸다.

$f(x)$는 모든 실수 x에서 증가하고 $f(0)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 증가한다.



점 A$(t, f(t))$를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$$

$y=0$을 대입하면 $\quad -f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$

$x-t=f(t)f'(t)\quad\therefore x=f(t)f'(t)+t$

즉 C$(f(t)f'(t)+t, 0)$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AB}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\{f(t)f'(t)+t-t\}\cdot f(t)$$
$$=\frac{1}{2}\{f(t)\}^2f'(t)$$

(2nd) 주어진 △ABC의 넓이를 이용하여 $f(t)$를 구한다.

$\frac{1}{2}\{f(t)\}^2f'(t)=\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)$이므로

$$\{f(t)\}^2f'(t)=e^{3t}-2e^{2t}+e^t$$
$$\int\{f(t)\}^2f'(t)dt=\int(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)dt$$

$f(t)=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=f'(t)$이므로

$\int\{f(t)\}^2f'(t)dt$

$=\int s^2ds=\frac{1}{3}s^3+C_1$

$=\frac{1}{3}\{f(t)\}^3+C_1$

W 79쪽

$$\frac{1}{3}\{f(t)\}^3=\frac{1}{3}e^{3t}-e^{2t}+e^t+C$$

$f(0)=0$이므로 $\quad C=-\frac{1}{3}$

따라서 $\frac{1}{3}\{f(t)\}^3=\frac{1}{3}e^{3t}-e^{2t}+e^t-\frac{1}{3}$이므로

$$\{f(t)\}^3=e^{3t}-3e^{2t}+3e^t-1=(e^t-1)^3$$

$$\therefore f(t)=e^t-1$$

3rd 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$x>0$에서 $f(x)>0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (e^x-1)dx=\Big[e^x-x\Big]_0^1$$

$$=(e-1)-1=e-2$$

답 ①

02 1st $f(x)$의 최댓값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=\int_0^x (a-t)e^t dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(a-x)e^x$$

$g(x)$가 연속함수이고 p가 실수일 때, $\frac{d}{dx}\int_p^x g(t)dt=g(x)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=a\ (\because e^x>0)$

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(a)=\int_0^a (a-t)e^t dt$$

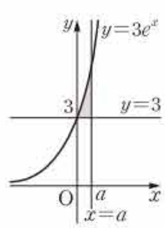
$$=\Big[(a-t)e^t\Big]_0^a+\int_0^a e^t dt$$

$$=-a+\Big[e^t\Big]_0^a=e^a-a-1$$

$$\therefore e^a-a-1=32$$

2nd 넓이를 구한다.

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^a (3e^x-3)dx=\Big[3e^x-3x\Big]_0^a$$

$$=3(e^a-a-1)$$

$$=3\cdot 32=96$$

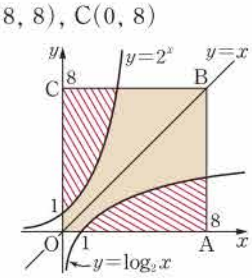
답 96

03 1st 곡선 $y=\log_2 x$와 x축 및 직선 $x=8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$n=3$일 때, $\quad$ A$(8,\ 0)$, B$(8,\ 8)$, C$(0,\ 8)$

두 함수 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같다.



이때 곡선 $y=\log_2 x$와 x축 및 직선 $x=8$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^8 \log_2 x\,dx=\frac{1}{\ln 2}\int_1^8 \ln x\,dx$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\left(\Big[x\ln x\Big]_1^8-\int_1^8 1\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\left(8\ln 8-\Big[x\Big]_1^8\right)$$

$$=\frac{1}{\ln 2}(24\ln 2-7)$$

$$=24-\frac{7}{\ln 2}$$

2nd 색칠된 부분의 넓이를 구한다.

구하는 넓이는

□OABC는 한 변의 길이가 8인 정사각형이다.

$$8^2-2\left(24-\frac{7}{\ln 2}\right)=16+\frac{14}{\ln 2}$$

답 ②

04 1st 점 P의 시각 t에서의 위치를 구한다.

점 P의 시각 t에서의 위치를 $(x,\ y)$라 하면 점 P의 시각 t에서의 속도가 $(2t,\ 2\pi\sin 2\pi t)$이므로

$\frac{dx}{dt}=2t,$ $\frac{dy}{dt}=2\pi\sin 2\pi t$

$$x=\int 2t\,dt=t^2+C_1,$$

$$y=\int 2\pi\sin 2\pi t\,dt=-\cos 2\pi t+C_2$$

이때 점 P의 시각 $t=0$에서의 위치가 $(0,\ -1)$이므로

$$C_1=0,\ C_2=0$$

따라서 점 P의 시각 t에서의 위치는

$$(t^2,\ -\cos 2\pi t)$$

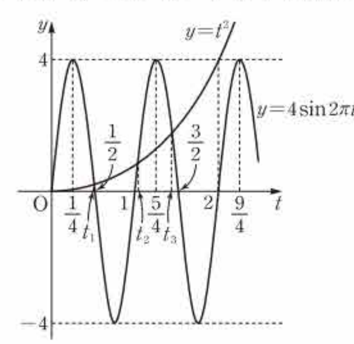
2nd 두 점 P, Q가 만나는 횟수를 구한다.

두 점 P, Q가 만나려면

$$t^2=4\sin 2\pi t,\ -\cos 2\pi t=|\cos 2\pi t|$$

(i) 방정식 $t^2=4\sin 2\pi t$의 실근은 두 함수 $y=t^2$, $y=4\sin 2\pi t$의 그래프의 교점의 t좌표와 같고, 두 함수 $y=t^2$, $y=4\sin 2\pi t$의 그래프는 다음 그림과 같이 $t>0$일 때, 서로 다른 세 점에서 만난다.

주기: $\frac{2\pi}{2\pi}=1$, 치역: $\{y\,|\,-4\le y\le 4\}$



이때 세 교점의 t좌표를 각각 $t_1,\ t_2,\ t_3$이라 하면

$$\frac{1}{4}<t_1<\frac{1}{2},\ 1<t_2<\frac{5}{4},\ \frac{5}{4}<t_3<\frac{3}{2}$$

(ii) 방정식 $-\cos 2\pi t=|\cos 2\pi t|$에서

$$\cos 2\pi t\le 0$$

$$\frac{\pi}{2}\le 2\pi t\le\frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } \frac{5}{2}\pi\le 2\pi t\le\frac{7}{2}\pi \text{ 또는 } \cdots$$

$$\therefore \frac{1}{4}\le t\le\frac{3}{4} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\le t\le\frac{7}{4} \text{ 또는 } \cdots$$

(i), (ii)에서 $t=t_1$, $t=t_3$일 때 두 점 P, Q의 좌표가 일치하므로 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 2이다.

답 ②