일품 수학 Ⅱ

최상위의 품격

정답 및 풀이

◆ 빠른 정답 찾기 ········· 2~4

◆ 자세한 풀이

Ⅰ 함수의 극한과 연속 ········· 5

Ⅱ 다항함수의 미분법 ········· 28

Ⅲ 다항함수의 적분법 ········· 66

Ⅰ. 함수의 극한과 연속

Ⅰ-1. 함수의 극한

본책 8~10쪽
01 2　02 -7　03 ④
04 24　05 ③　06 $\frac{\sqrt{2}}{8}$　07 ⑤　08 2
09 ④　10 ④　11 $\frac{5}{16}$　12 ②　13 ②
14 -1　15 5　16 ③　17 2

본책 11~13쪽
01 ④　02 ㄴ　03 6
04 $\frac{1}{4}$　05 1　06 ③　07 ⑤　08 4
09 3　10 14　11 ④　12 ②　13 $\frac{1}{4}$
14 $-\frac{9}{8}$　15 ②　16 30　17 ②　18 ①
19 8　20 3

본책 14쪽
01 -1　02 ④　03 46
04 ③　05 5　06 96

Ⅰ-2. 함수의 연속

본책 16~18쪽
01 ②　02 ②　03 ③
04 ③　05 $\frac{2}{3}$　06 ②　07 ②　08 ②
09 8　10 $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$　11 ③　12 3
13 ③

본책 19~21쪽
01 ①　02 ②　03 ②
04 ⑤　05 23　06 ②　07 19　08 12
09 8　10 ①　11 ⑤　12 4　13 1
14 ②　15 ②　16 ㄱ, ㄷ

본책 22쪽
01 ㄴ, ㄷ　02 ④　03 120
04 ③　05 ④

본책 23~27쪽
01 ③　02 ④　03 ①
04 ④　05 ②　06 ④　07 ③　08 ④
09 ①　10 ⑤　11 ④　12 ③　13 ①
14 ②　15 ③　16 ②　17 ⑤　18 $\frac{15}{8}$
19 3　20 14　21 48　22 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{4}$
23 1　24 $\frac{35}{4}$　25 2　26 $\frac{4}{21}$

본책 28쪽
01 ⑤　02 16　03 4
04 ①

Ⅱ. 다항함수의 미분법

Ⅱ-1. 미분계수와 도함수

본책 30~32쪽
01 ④　02 $\frac{15}{2}$　03 2
04 ②　05 ③　06 16　07 3　08 $\frac{4}{3}$
09 ⑤　10 ④　11 ②　12 16　13 ③
14 152　15 ④　16 3　17 ①　18 2

본책 33~35쪽
01 ③　02 $\frac{1}{3}$　03 3
04 ②　05 6　06 ②　07 9　08 ④
09 ②　10 15　11 50　12 ⑤　13 18
14 -2　15 ①　16 9　17 ①　18 $\frac{2}{3}$
19 ③　20 ①

본책 36쪽
01 -6　02 ⑤　03 34
04 -4　05 ④　06 ⑤

Ⅱ-2. 도함수의 활용 (1)

본책 38~39쪽

01 4 02 ② 03 16
04 ④ 05 -28 06 ④ 07 ⑤ 08 ⑤
09 ① 10 $\frac{1}{6}$ 11 ④

본책 40~43쪽

01 ② 02 2 03 ②
04 ① 05 8 06 ④ 07 ① 08 $\frac{4}{3}$
09 ③ 10 5 11 10 12 ② 13 ④
14 14 15 -2 16 ③ 17 ① 18 0
19 ① 20 $\frac{9}{4}$ 21 ① 22 7 23 8

본책 44쪽

01 ④ 02 ⑤ 03 18
04 ② 05 ③

Ⅱ-3. 도함수의 활용 (2)

본책 46~47쪽

01 7 02 ④ 03 ⑤
04 30 05 ④ 06 ② 07 ② 08 1
09 13 10 ③ 11 ②

본책 48~50쪽

01 ⑤ 02 20 03 ④
04 ④ 05 ⑤ 06 6 07 ④ 08 ⑤
09 -11 10 0 11 ④ 12 ③ 13 2
14 -9 15 $\frac{81}{32}$ 16 ③ 17 155 18 ①
19 95

본책 51쪽

01 70 02 2 03 ④
04 ⑤ 05 -4 06 30

Ⅱ-4. 도함수의 활용 (3)

본책 52~53쪽

01 27 02 ⑤ 03 ②
04 ③ 05 ③ 06 ⑤ 07 8 08 ③
09 ⑤ 10 ⑤ 11 $135\sqrt{3}$

본책 54~56쪽

01 ⑤ 02 0 03 ③
04 ② 05 ① 06 14 07 24 08 ④
09 4 10 40 11 ② 12 ③ 13 -96
14 4 15 ④ 16 ④

본책 57쪽

01 4 02 ④ 03 301
04 ④ 05 ㄱ, ㄷ 06 29

본책 58~62쪽

01 ③ 02 ⑤ 03 ④
04 ④ 05 ⑤ 06 ③ 07 ① 08 ④
09 ② 10 ① 11 ⑤ 12 ② 13 ③
14 ② 15 ④ 16 ⑤ 17 ④ 18 ⑤
19 ④ 20 ② 21 ⑤ 22 2 23 $\frac{1}{2}$
24 4 25 $y=6x-4$ 26 -16 27 3
28 19 29 432 30 11 31 32

본책 63쪽

01 $\frac{15}{2}$ 02 ① 03 ④
04 $\frac{5}{2}$

Ⅲ. 다항함수의 적분법

Ⅲ-1. 부정적분

본책 66~67쪽

01 -1 02 8 03 ⑤
04 16 05 ⑤ 06 $\frac{1}{2}x^2+5x+C$ 07 ①
08 1 09 ③ 10 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+x-3$
11 ② 12 ②

본책 68~70쪽

01 ② 02 -2 03 50
04 ④ 05 48 06 16 07 ④ 08 10
09 ③ 10 ⑤ 11 ④ 12 -4 13 ③
14 15 15 ⑤ 16 2 17 ① 18 7

본책 71쪽

01 $\frac{221}{220}$ 02 ③ 03 4
04 ② 05 140 06 16

Ⅲ-2. 정적분

본책 72~74쪽

01 ④ 02 ③ 03 ②
04 ② 05 -6 06 3 07 ⑤ 08 ⑤
09 $\frac{64}{3}$ 10 ① 11 ④ 12 ① 13 ④
14 12 15 ① 16 ④ 17 3

본책 75~77쪽

01 ③ 02 1 03 ①
04 $-\frac{40}{3}$ 05 ② 06 17 07 10 08 ②
09 ② 10 ② 11 ④ 12 14 13 1
14 ① 15 ⑤ 16 ④ 17 7 18 12

본책 78쪽

01 ③ 02 ⑤ 03 5
04 10 05 ① 06 8

Ⅲ-3. 정적분의 활용

본책 80~82쪽

01 $\frac{37}{12}$ 02 10 03 ②
04 ⑤ 05 7 06 27 07 $\frac{1}{2}$ 08 ③
09 3 10 ① 11 18 12 22 13 6
14 ④ 15 90 m 16 ⑤ 17 ③

본책 83~86쪽

01 ② 02 $\frac{27}{128}$ 03 ③
04 $\frac{27}{4}$ 05 64 06 3 07 $\frac{5}{8}\pi+\frac{1}{4}$
08 ② 09 ② 10 $\frac{5}{3}$ 11 $\frac{7}{6}$ 12 $\frac{64}{3}$
13 ④ 14 ⑤ 15 ① 16 360 17 ②
18 $\frac{3}{4}$ 19 ④ 20 ④

본책 87쪽

01 30 02 ④ 03 30
04 ② 05 ⑤ 06 3

본책 88~92쪽

01 ⑤ 02 ④ 03 ②
04 ③ 05 ⑤ 06 ⑤ 07 ① 08 ④
09 ④ 10 ③ 11 ① 12 ③ 13 ②
14 ④ 15 ④ 16 ② 17 ① 18 ④
19 ② 20 12 21 $f(x)=x^2+2$ 22 5
23 21 24 $\frac{17}{6}$ 25 $\frac{11}{3}$ 26 6 27 $\frac{25}{42}$
28 $\sqrt{6}$ 29 $\frac{27}{32}$ 30 $\frac{625}{2}$

본책 93쪽

01 ⑤ 02 12 03 ④
04 17

I 함수의 극한과 연속

I-1. 함수의 극한

개념&핵심 기출 본책 8~10쪽

01 $\lim_{x\to-1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=-1$, $f(0)=2$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to-1+}f(x)+f(0)=2$ 답 2

02 $\lim_{x\to2-}\frac{(x+a)f(x)}{x-2}-\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x+a)}{f(x)}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{(x+a)|x-2|}{x-2}-\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x+a)}{|x-2|}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{-(x+a)(x-2)}{x-2}-\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x+a)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-}\{-(x+a)\}-\lim_{x\to2+}(x+a)$

$=-(2+a)-(2+a)$

$=-4-2a$

이므로 $-4-2a=10$

$-2a=14$ $\therefore a=-7$ 답 -7

03 ㄱ. $\lim_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}g(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1-}g(x)$

$=1+(-1)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to1+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to1+}g(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1+}\{f(x)-2g(x)\}=\lim_{x\to1+}f(x)-2\lim_{x\to1+}g(x)$

$=-1-2\cdot1=-3$

ㄷ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{x\to1+}g(x)$

$=-1\cdot1=-1$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\lim_{x\to1-}g(x)$

$=1\cdot(-1)=-1$

따라서 $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=-1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

> $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$의 값은 $\lim_{x\to a+}f(x)g(x)$, $\lim_{x\to a-}f(x)g(x)$의 값을 각각 구하여 비교한다. 이때 두 값이 다르면 극한값은 존재하지 않는다.

04 $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)f(x)}{x+1}$

$=\frac{\lim_{x\to1}(x+1)f(x)}{\lim_{x\to1}(x+1)}$

$=\frac{4}{2}=2$

한편

$\lim_{x\to1}\{(x-1)f(x)+xf(x)\}$

$=\lim_{x\to1}(x-1)f(x)+\lim_{x\to1}xf(x)$

$=0\cdot2+1\cdot2=2$

이므로

$\lim_{x\to1}g(x)$

$=\lim_{x\to1}\left[\frac{g(x)}{(x-1)f(x)+xf(x)}\cdot\{(x-1)f(x)+xf(x)\}\right]$

$=6\cdot2=12$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)g(x)=2\cdot12=24$ 답 24

05 $\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2-4x-2}{x^3+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-2x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2x-2}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}$ 답 ③

06 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x+2}}{x-2}$

> 분자가 무리식이므로 분자, 분모에 각각 $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x+2}$를 곱하여 분자를 유리화한다.

$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x+2})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x+2})}{(x-2)(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x+2})}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x+2})}$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x+2}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{8}$

07 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-\sqrt{3x-2}}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-\sqrt{3x-2})(x+\sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2-4)(x+\sqrt{3x-2})}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x+\sqrt{3x-2}}{(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\frac{2+2}{1\cdot4}=1$ 답 ⑤

08 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)f(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)f(x)}$

> 분자, 분모에서 $x-1$이 약분된다.

$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{f(x)}$

$\frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{f(x)}=g(x)$라 하면 $\lim_{x\to1}g(x)=2$이고

$f(x)=\frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{g(x)}$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{g(x)}$

$=\frac{2\cdot2}{2}=2$ 답 2

09 $x=-t$로 놓으면 $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+2t}{\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2-1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}+2}{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}$$
$$=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

답 ④

> 일품 BOX: 분자, 분모를 각각 t로 나눈다.

10 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-2})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x+2)-(x^2-2x-2)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}$$
$$=\frac{4}{1+1}=2$$

답 ④

> 일품 BOX: 분모를 1로 보고, 분자, 분모에 각각 $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}$를 곱하여 분자를 유리화한다.

11 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{\sqrt{4+x}}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{4+x}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{x}{2(x+2)}+\frac{\sqrt{4+x}-2}{2\sqrt{4+x}}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{x}{2(x+2)}+\frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{2\sqrt{4+x}(\sqrt{4+x}+2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{x}{2(x+2)}+\frac{x}{2\sqrt{4+x}(\sqrt{4+x}+2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{2(x+2)}+\frac{1}{2\sqrt{4+x}(\sqrt{4+x}+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

답 $\frac{5}{16}$

12 $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2x+a}-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2}}=b$에서 $x\to-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(\sqrt{2x+a}-4)=0$이므로 $\sqrt{-4+a}-4=0$

$-4+a=16$ $\quad\therefore a=20$

$a=20$을 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2x+20}-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2}}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt{2x+20}-4)(\sqrt{2x+20}+4)(\sqrt{x+4}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{2})(\sqrt{x+4}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+20}+4)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(2x+4)(\sqrt{x+4}+\sqrt{2})}{(x+2)(\sqrt{2x+20}+4)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2(\sqrt{x+4}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+20}+4}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}}{4+4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore ab=10\sqrt{2}$

답 ②

13 $\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^3+ax+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax-a-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+x+a+1)$$
$$=a+3$$

즉 $a+3=2$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=0$

$\therefore a-b=-1$

답 ②

> 일품 BOX:
>
> | 1 | 1 | 0 | a | $-a-1$ |
> |---|---|---|---|---|
> | | | 1 | 1 | $a+1$ |
> | | 1 | 1 | $a+1$ | 0 |
>
> $\therefore x^3+ax-a-1$
> $=(x-1)(x^2+x+a+1)$

14 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+x+1}=1$에서 $f(x)$는 x^2의 계수가 2인 이차함수이다.

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=1$에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$f(x)=2(x-2)(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(x+a)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2x+2a}{x+1}=\frac{4+2a}{3}$$

즉 $\frac{4+2a}{3}=1$이므로 $2a=-1$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=2x^2-5x+2$이므로

$f(1)=-1$

답 -1

> 일품 BOX: 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
> $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c\ (c\neq0)$
> 이면 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같고, $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 계수의 비는 c이다.

> 일품 BOX: $f(x)=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$
> $=(x-2)(2x-1)$
> $=2x^2-5x+2$

15 $x>-\frac{1}{2}$에서 $x^2+2>0$, $2x+1>0$이므로

$$\frac{(2x+1)(ax-2)}{x^2+2}\le\frac{(2x+1)f(x)}{x^2+2}\le\frac{(2x+1)(ax+2)}{x^2+2}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)(ax-2)}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)(ax+2)}{x^2+2}=2a$$

이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)f(x)}{x^2+2}=2a$

따라서 $2a=10$이므로 $a=5$

답 5

> 일품 BOX: 주어진 부등식의 각 변에 $\frac{2x+1}{x^2+2}$을 곱하여도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

16 $(4x^2-x)-1<[4x^2-x]\le4x^2-x$이므로

$12x^2-3x-3<3[4x^2-x]\le12x^2-3x$

$$\frac{12x^2-3x-3}{2x^2+1}<\frac{3[4x^2-x]}{2x^2+1}\le\frac{12x^2-3x}{2x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-3x-3}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-3x}{2x^2+1}=6$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{3[4x^2-x]}{2x^2+1}=6$ 답 ③

17 $a>0$이고 $x>0$이므로

$\frac{x^2+4x}{ax}\le\frac{f(x)}{ax}\le\frac{3x^2+4x}{ax}$

$\frac{x}{a}+\frac{4}{a}\le\frac{f(x)}{ax}\le\frac{3x}{a}+\frac{4}{a}$

이때 $\lim_{x\to0+}\left(\frac{x}{a}+\frac{4}{a}\right)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{3x}{a}+\frac{4}{a}\right)=\frac{4}{a}$이므로

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{ax}=\frac{4}{a}$

따라서 $\frac{4}{a}=2$이므로 $a=2$ 답 2

1등급을 위한 고난도 문제

본책 11~13쪽

01 $-2<a<2$에서 $a=-1$, $a=0$, $a=1$을 제외하고는 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$

또

$\lim_{x\to-1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=-1$

$\lim_{x\to0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=0$

$\lim_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=2$

이므로

$A=\left\{a\,\middle|\,\lim_{x\to a+}f(x)+1=\lim_{x\to a-}f(x)\right\}=\{0,\ 1\}$

$B=\left\{a\,\middle|\,\lim_{x\to a+}f(x)<\lim_{x\to a-}f(x)\right\}=\{0,\ 1\}$

$f(x)<0$이면 $f(x)<\{f(x)\}^2$

$0<f(x)<1$이면 $f(x)>\{f(x)\}^2$

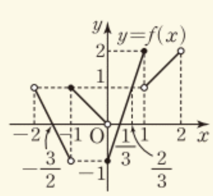
$f(x)>1$이면 $f(x)<\{f(x)\}^2$

이고 $\lim_{x\to0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to0-}\{f(x)\}^2=0$이므로

$C=\left\{a\,\middle|\,\lim_{x\to a+}f(x)<\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2\right\}$

$=\left\{a\,\middle|\,-\frac{3}{2}<a<-1 \text{ 또는 } 0\le a<\frac{1}{3} \text{ 또는 } \frac{2}{3}<a<2\right\}$

$\therefore A=B\subset C$ 답 ④



02 ㄱ. $x\to1+$일 때, $f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1+}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to1+}f(f(x))$

$=f(1)=-1$

$x\to1-$일 때, $f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to1-}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to1-}f(f(x))$

$=f(-1)=1$

따라서 $\lim_{x\to1+}(f\circ f)(x)\ne\lim_{x\to1-}(f\circ f)(x)$이므로 $x=1$에서 함수 $(f\circ f)(x)$의 극한값이 존재하지 않는다.

일품 BOX

$-x=s$로 놓으면 $x=-s$이므로 $x\to1+$일 때, $-s\to1+$ $\therefore s\to-1-$

ㄴ. $x\to1+$일 때, $-x\to-1-$이고 $f(-x)\to1-$이므로 $f(-x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to1+}(f\circ f)(-x)=\lim_{t\to1-}f(t)=-1$

$x\to1-$일 때, $-x\to-1+$이고 $f(-x)\to0-$이므로 $f(-x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to1-}(f\circ f)(-x)=\lim_{t\to0-}f(t)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1}(f\circ f)(-x)=-1$

$x-1=s$로 놓으면 $x=s+1$이므로 $x\to1+$일 때, $s+1\to1+$ $\therefore s\to0+$

ㄷ. $x\to1+$일 때, $x-1\to0+$이고 $f(x-1)=-1$이므로

$\lim_{x\to1+}(f\circ f)(x-1)=f(-1)=1$

$x\to1-$일 때, $x-1\to0-$이고 $f(x-1)\to-1+$이므로 $f(x-1)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to1-}(f\circ f)(x-1)=\lim_{t\to-1+}f(t)=0$

따라서 $\lim_{x\to1+}(f\circ f)(x-1)\ne\lim_{x\to1-}(f\circ f)(x-1)$이므로 $x=1$에서 함수 $(f\circ f)(x-1)$의 극한값이 존재하지 않는다.

이상에서 $x=1$에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

1등급 비밀노트

$\lim_{x\to a}g(f(x))$의 값을 구할 때에는 $x\to a$일 때 $f(x)\to b$인 것과 $f(x)=b$인 것을 구분하여 계산한다.

① $x\to a$일 때 $f(x)\to b$이면 $f(x)=t$로 놓고
$\lim_{x\to a}g(f(x))=\lim_{t\to b}g(t)$

② $x\to a$일 때 $f(x)=b$이면 $\lim_{x\to a}g(f(x))=g(b)$

03 $n<x<n+1$일 때, $[x]=n$

$\therefore \lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+x}{[x]}=\frac{n^2+n}{n}=n+1$

$n-1<x<n$일 때, $[x]=n-1$

$\therefore \lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+x}{[x]}=\frac{(n-1)^2+n}{n-1}=\frac{n^2-n+1}{n-1}$

$\lim_{x\to n}\frac{[x]^2+x}{[x]}$의 값이 존재하려면

$n+1=\frac{n^2-n+1}{n-1}$, $n^2-1=n^2-n+1$

$\therefore n=2$ ··· ❶

$\therefore \lim_{x\to n}\frac{x^2+nx-2n^2}{x-n}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x+4)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+4)$

$=2+4=6$ ··· ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ n의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ $\lim_{x\to n}\frac{x^2+nx-2n^2}{x-n}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

04 $\lim_{x\to-2}\frac{f(x+2)}{2x+4}=8$에서 $x+2=t$로 놓으면 $x\to-2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x+2)}{2x+4}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{2t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=8$$

$$\therefore \lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=16$$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2+ax)f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left\{(x+a)\cdot\frac{f(x)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}(x+a)\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$
$$=16a$$

이므로 $16a=4$

$$\therefore a=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

05 $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}=h(x)$라 하면

$$f(x)+g(x)=h(x)\{f(x)-g(x)\}$$

$\{h(x)-1\}f(x)=\{h(x)+1\}g(x)$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)-1}{h(x)+1}$$
$$=\frac{3-1}{3+1}$$
$$=\frac{1}{2} \quad \cdots ❶$$

$\lim_{x\to\infty}h(x)=3$에서 $x\to\infty$일 때 함수 $h(x)$가 수렴하므로 극한에 대한 성질을 이용할 수 있다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-2g(x)}{f(x)+2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}{1+2\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{3-2\cdot\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}$$
$$=1 \quad \cdots ❷$$

분자, 분모를 각각 $f(x)$로 나눈다.

답 1

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}$를 구할 수 있다.	60%
❷ $\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-2g(x)}{f(x)+2g(x)}$를 구할 수 있다.	40%

06 ㄱ. $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재한다고 가정하고

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$
$$=\alpha+\beta$$

즉 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$가 존재하므로 가정에 모순이다.

따라서 $\lim_{x\to a}g(x)$는 존재하지 않는다.

귀류법
어떤 명제의 결론을 부정한 후 모순이 생기는 것을 보임으로써 주어진 명제가 참임을 증명하는 방법이다.

ㄴ. $f(x)+2g(x)=h(x)$, $2f(x)+g(x)=k(x)$라 하고

$\lim_{x\to a}\{f(x)+2g(x)\}=\alpha$,

$\lim_{x\to a}\{2f(x)+g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$$\lim_{x\to a}h(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a}k(x)=\beta$$

$f(x)+2g(x)=h(x)$ $\cdots$ ㉠
$2f(x)+g(x)=k(x)$ $\cdots$ ㉡
$2\times$㉡$-$㉠을 하면
$3f(x)=2k(x)-h(x)$
$\therefore f(x)=\frac{2k(x)-h(x)}{3}$

이때 $f(x)=\frac{2k(x)-h(x)}{3}$이므로

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{2k(x)-h(x)}{3}=\frac{2\beta-\alpha}{3}$$

즉 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}x-1 & (x<0)\\ x+1 & (x\ge0)\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}3x-2 & (x<0)\\ x+2 & (x\ge0)\end{cases}$이면

$$2f(x)-g(x)=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x & (x\ge0)\end{cases}$$

이므로 $\lim_{x\to0}\{2f(x)-g(x)\}=0$이지만 $\lim_{x\to0}f(x)$와 $\lim_{x\to0}g(x)$는 존재하지 않는다.

$\lim_{x\to0+}f(x)=1$,
$\lim_{x\to0-}f(x)=-1$,
$\lim_{x\to0+}g(x)=2$,
$\lim_{x\to0-}g(x)=-2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

07 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{x\to1+}g(x)=0\cdot1=0$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\lim_{x\to1-}g(x)=0\cdot(-1)=0$

$$\therefore \lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$$

ㄴ. $x\to1+$일 때 $f(x)\to0+$, $g(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty$$

$x\to1-$일 때 $f(x)\to0-$, $g(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty$$

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}$는 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to1+}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=0^2+1^2=1$

$\lim_{x\to1-}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=0^2+(-1)^2=1$

$$\therefore \lim_{x\to1}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=1$$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

08 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5^2-2\alpha\beta=17$이므로

$\alpha\beta=4$

즉 $\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=4$이므로

$$f(x)=k(x^2-5x+4)=k(x-1)(x-4)\ (k\ne0)$$

로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{k(x-1)(x-4)}{x-1}$$
$$=k\lim_{x\to1}(x-4)$$
$$=-3k$$

즉 $-3k=6$이므로 $k=-2$

따라서 $f(x)=-2(x-1)(x-4)$이므로

$f(2)=4$

답 4

09 $\sqrt{x}=\sqrt{3x-2}$의 양변을 제곱하면

$x=3x-2$ $\quad\therefore x=1$ $\quad\therefore$ P$(1,\ 1)$

점 P의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.

A$(t,\ \sqrt{3t-2})$라 하면 B$(t,\ \sqrt{t})$, C$(t,\ 1)$이므로

$\overline{AC}=|\sqrt{3t-2}-1|$, $\overline{BC}=|\sqrt{t}-1|$

점 A가 점 P에 한없이 가까워질 때 $t\to1$이므로

$$\lim_{t\to1}\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$
$$=\lim_{t\to1}\left|\frac{\sqrt{3t-2}-1}{\sqrt{t}-1}\right|$$
$$=\lim_{t\to1}\left|\frac{(\sqrt{3t-2}-1)(\sqrt{3t-2}+1)(\sqrt{t}+1)}{(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)(\sqrt{3t-2}+1)}\right|$$
$$=\lim_{t\to1}\left|\frac{3(t-1)(\sqrt{t}+1)}{(t-1)(\sqrt{3t-2}+1)}\right|$$
$$=\lim_{t\to1}\left|\frac{3(\sqrt{t}+1)}{\sqrt{3t-2}+1}\right|=\left|\frac{3\cdot2}{1+1}\right|=3$$

답 3

1등급 비밀노트

길이 또는 넓이의 극한값을 구할 때에는 길이 또는 넓이를 미지수를 이용한 식으로 나타낸 다음 극한값을 구한다.
이때 대부분 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 분자와 분모를 인수분해하거나 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

10 $t=-s$로 놓으면 $t\to-\infty$일 때 $s\to\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{t\to-\infty}\frac{x^2-2t(x^2+2x-3)}{\sqrt{16t^2+100x^2}}$$
$$=\lim_{s\to\infty}\frac{x^2+2s(x^2+2x-3)}{\sqrt{16s^2+100x^2}}$$
$$=\lim_{s\to\infty}\frac{\frac{x^2}{s}+2(x^2+2x-3)}{\sqrt{16+\frac{100x^2}{s^2}}}$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+2x-3) \quad \cdots ❶$$

즉 $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2-2$이므로

$f(-5)=6,\ f(-1)=-2,\ f(5)=16$ $\cdots$ ❷

$-5\le x\le5$에서 함수 $f(x)$의 양 끝 점에서의 함숫값과 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점에서의 함숫값을 구한 후 그 값을 비교한다.

따라서 $-5\le x\le5$에서 $f(x)$의 최댓값은 16, 최솟값은 -2이므로 구하는 합은

$16+(-2)=14$ $\cdots$ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 간단히 할 수 있다.	60%
❷ $f(-5)$, $f(-1)$, $f(5)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10%

11 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$[1-4x]=(1-4x)-a=(1+4t)-a\ (0\le a<1)$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}+[1-4x]}{x}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4t^2+1}+(1+4t)-a}{-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}+\frac{1}{t}+4-\frac{a}{t}}{-1}=-6$$

답 ④

12 $\lim_{x\to\infty}\{x-f(x)\}=\lim_{x\to\infty}x\left\{1-\frac{f(x)}{x}\right\}=3$에서

$x\to\infty$일 때 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x\to\infty}\left\{1-\frac{f(x)}{x}\right\}=0 \qquad \therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

주어진 식을 $\{x-f(x)\}$와 $\frac{f(x)}{x}$에 대한 식으로 변형한다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{f(x)+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{f(x)}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{f(x)+1})(\sqrt{x}+\sqrt{f(x)+1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{f(x)})(\sqrt{x+1}+\sqrt{f(x)})}\cdot\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{f(x)})}{(\sqrt{x}+\sqrt{f(x)+1})}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{x-f(x)-1\}(\sqrt{x+1}+\sqrt{f(x)})}{\{x+1-f(x)\}(\sqrt{x}+\sqrt{f(x)+1})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{x-f(x)-1\}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{f(x)}{x}}\right)}{\{x-f(x)+1\}\left(1+\sqrt{\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}}\right)}$$

$\lim_{x\to\infty}\{x-f(x)\}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

$$=\frac{(3-1)(1+1)}{(3+1)(1+1)}=\frac{1}{2}$$

답 ②

13 점 P의 좌표를 $(t,\ 4t^2)\ (t>0)$이라 하면

$\mathrm{H}(0,\ 4t^2)$, $\mathrm{Q}(0,\ 2t^2)$

또

$\overline{PQ}=\sqrt{(t-0)^2+(4t^2-2t^2)^2}=\sqrt{4t^4+t^2}$

$\overline{HQ}=4t^2-2t^2=2t^2$

이므로 점 P의 x좌표의 값이 한없이 커질 때, $\overline{PQ}-\overline{HQ}$의 극한값은

분모를 1로 보고 분자, 분모에 각각 $\sqrt{4t^4+t^2}+2t^2$을 곱하여 분자를 유리화한다.

$$\lim_{t\to\infty}(\overline{PQ}-\overline{HQ})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^4+t^2}-2t^2)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{\sqrt{4t^4+t^2}+2t^2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}+2}$$
$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

14 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+ax+b}{x^2}=c$에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(\sqrt{x^2+x+1}+ax+b)=0$이므로

$1+b=0 \qquad \therefore b=-1$ $\cdots$ ❶

$b=-1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+ax-1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}+ax-1)\{\sqrt{x^2+x+1}-(ax-1)\}}{x^2\{\sqrt{x^2+x+1}-(ax-1)\}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x+1-(ax-1)^2}{x^2(\sqrt{x^2+x+1}-ax+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-a^2)x^2+(1+2a)x}{x^2(\sqrt{x^2+x+1}-ax+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-a^2)x+(1+2a)}{x(\sqrt{x^2+x+1}-ax+1)}=c \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\{(1-a^2)x+(1+2a)\}=0$이므로

$1+2a=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$ $\cdots$ ❷

$a=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{4}x}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}x+1}=\frac{3}{8}$$

$\therefore c=\frac{3}{8}$ ⋯ ❸

$\therefore a+b+c=-\frac{9}{8}$ ⋯ ❹

답 $-\frac{9}{8}$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

15 $\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{f(x)}-x\}=\lim_{x\to\infty}x\left\{\sqrt{\frac{f(x)}{x^2}}-1\right\}=1$에서

$x\to\infty$일 때 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{f(x)}{x^2}}-1\right\}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{f(x)}{x^2}}=1$$

따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{f(x)}-x\}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+b}-x)$$

분모를 1로 보고 분자, 분모에 각각 $\sqrt{x^2+ax+b}+x$를 곱하여 분자를 유리화한다.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+ax+b}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{a}{2}$$

즉 $\frac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x+b$이므로

$$f(3)-f(1)=(15+b)-(3+b)$$
$$=12$$

답 ②

16 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{f(x)-x^3}=\frac{1}{2}$에서 $x\to\infty$일 때 극한값이 존재하므로

$f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다. ⋯ ❶

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(x^3+2x^2+ax+b)=0$

$3+a+b=0$

$\therefore b=-a-3$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❷

즉 $f(x)=x^3+2x^2+ax-a-3$이므로

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & a & -a-3 \\ & & 1 & 3 & a+3 \\ \hline & 1 & 3 & a+3 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3+2x^2+ax-a-3$
$=(x-1)(x^2+3x+a+3)$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2+ax-a-3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+3x+a+3)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x^2+3x+a+3)$$

$$=7+a$$

즉 $7+a=1$이므로 $a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면 $b=3$ ⋯ ❸

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-6x+3$이므로

$f(3)=27+18-18+3=30$ ⋯ ❹

답 30

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 식을 세울 수 있다.	20 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

17 $f(x)=a(x+1)(x-2)$ $(a<0)$로 놓으면

주어진 그래프에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 2이다.

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a(x+1)(x-2)}{x-2}=3a$$

즉 $3a=-4$이므로 $a=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{4}{3}(x+1)(x-2)$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{-\frac{4}{3}(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=-\frac{4}{3}\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x-1}=-2$$

즉 $p=-2$이므로 $p^2=4$

답 ②

18 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 즉

$\lim_{x\to0}f(x)=0$ ⋯⋯ ㉠

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=3$에서 $x\to3$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 즉

$\lim_{x\to3}f(x)=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\lim_{x\to3}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to3}f(f(x))=\lim_{x\to0}f(x)=0$$

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to3$일 때 $t\to0$이므로 $\lim_{x\to3}f(f(x))=\lim_{t\to0}f(t)$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{\{(f\circ f)(x)-3\}f(x-3)}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{(f\circ f)(x)-3}{x+3}\cdot\frac{f(x-3)}{x-3}\right\}$$

$$=\frac{0-3}{3+3}\cdot\lim_{x\to3}\frac{f(x-3)}{x-3}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to3}\frac{f(x-3)}{x-3}$$

이때 $x-3=t$로 놓으면 $x\to3$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x-3)}{x-3}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=3$$

따라서 구하는 값은

$$-\frac{1}{2}\cdot3=-\frac{3}{2}$$

답 ①

19 함수 $y=\sqrt{x^2-4x}$의 그래프가 x의 값이 한없이 커질 때 직선 $y=ax+b$에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2-4x}-(ax+b)\}=0$이 성립한다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2-4x}-(ax+b)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-4x)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-4x}+(ax+b)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(4+2ab)x-b^2}{\sqrt{x^2-4x}+(ax+b)}$$
$$=0$$

0에 수렴하므로 (분자의 차수)<(분모의 차수)

위의 등식이 성립하려면

$1-a^2=0,\ 4+2ab=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0),\ b=-2$

$\therefore 10a+b=10+(-2)=8$

답 8

20 $-\sqrt{x^2-6x+11}\le-f(x)\le-\sqrt{x^2-6x+10}$이므로

$x-\sqrt{x^2-6x+11}\le x-f(x)\le x-\sqrt{x^2-6x+10}$

이때

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-6x+11})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-6x+11})(x+\sqrt{x^2-6x+11})}{x+\sqrt{x^2-6x+11}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-6x+11)}{x+\sqrt{x^2-6x+11}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-11}{x+\sqrt{x^2-6x+11}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{11}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{11}{x^2}}}$$
$$=\frac{6}{1+1}=3$$

이고 같은 방법으로

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-6x+10})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{10}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}}}$$
$$=\frac{6}{1+1}=3$$

즉

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-6x+11})$$
$$=\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-6x+10})$$
$$=3$$

이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\{x-f(x)\}=3$

답 3

일품 BOX

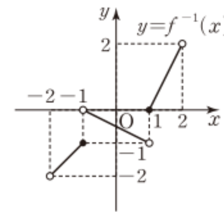
함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$t=\frac{0-(-2)}{2-(-5)}=\frac{2}{7}$

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 14쪽

01 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 값은

$$\lim_{x\to-1+}f^{-1}(x)+\lim_{x\to1-}f^{-1}(x)$$
$$=0+(-1)=-1$$

답 -1

02 주어진 그래프에서

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to0-}f(x)=-1$

$x=-t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0-$, $x\to0-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{t\to0-}f(-t)=1,$

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{t\to0+}f(-t)=-1$

즉 $\lim\limits_{x\to0+}f(-x)=-1,\ \lim\limits_{x\to0-}f(-x)=1$이다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0+}\{2f(x)+f(-x)\}=2\cdot1+(-1)=1,$

$\lim\limits_{x\to0-}\{2f(x)+f(-x)\}=2\cdot(-1)+1=-1$

따라서

$\lim\limits_{x\to0+}\{2f(x)+f(-x)\}$

$\ne\lim\limits_{x\to0-}\{2f(x)+f(-x)\}$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}\{2f(x)+f(-x)\}$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0+}\frac{f(-x)}{f(x)}=\frac{-1}{1}=-1,$

$\lim\limits_{x\to0-}\frac{f(-x)}{f(x)}=\frac{1}{-1}=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{f(-x)}{f(x)}=-1$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0+}\{f(x)-f(-x)\}f(x)=\{1-(-1)\}\cdot1=2,$

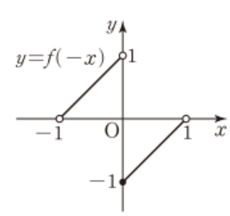
$\lim\limits_{x\to0-}\{f(x)-f(-x)\}f(x)=(-1-1)\cdot(-1)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\{f(x)-f(-x)\}f(x)=2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

참고 함수 $y=f(-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \lim\limits_{x\to0+}f(-x)=-1,$

$\lim\limits_{x\to0-}f(-x)=1$

03 $t<0$일 때 직선 l은 두 정사각형 R_1, R_2와 만나지 않으므로 $f(t)=0$

직선 l이 점 $(-1,\ -2)$를 지날 때, 즉 $t=0$일 때

$f(t)=1$

직선 l이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때, 즉 $t=\frac{2}{7}$일 때

$f(t)=3$

직선 l이 점 $(-1, 0)$을 지날 때, 즉 $t=\frac{1}{2}$일 때

$f(t)=3$

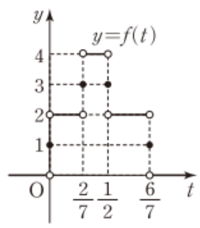
직선 l이 점 $(2, 4)$를 지날 때, 즉 $t=\frac{6}{7}$일 때

$f(t)=1$

$t>\frac{6}{7}$일 때 직선 l은 두 정사각형 R_1, R_2와 만나지 않으므로

$f(t)=0$

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



일품 BOX

$0<t<\frac{2}{7}$일 때 $f(t)=2$

$\frac{2}{7}<t<\frac{1}{2}$일 때 $f(t)=4$

$\frac{1}{2}<t<\frac{6}{7}$일 때 $f(t)=2$

이때 $\lim_{t\to a+} f(t) \neq \lim_{t\to a-} f(t)$를 만족시키는 실수 a는 극한값이 존재하지 않는 경우이므로

$a=0, \frac{2}{7}, \frac{1}{2}, \frac{6}{7}$

즉 $n=4$, $a_1=0$, $a_2=\frac{2}{7}$, $a_3=\frac{1}{2}$, $a_4=\frac{6}{7}$이므로

$$7n(a_1+a_2+\cdots+a_n)=7\cdot4\left(0+\frac{2}{7}+\frac{1}{2}+\frac{6}{7}\right)$$
$$=46$$

답 46

04 $n<x<n+1$일 때, $f(x)=[x]=n$이므로

$\lim_{x\to n+} (g\circ f)(x)=\lim_{x\to n+} g(f(x))=g(n)$

$n-1<x<n$일 때, $f(x)=[x]=n-1$이므로

$\lim_{x\to n-} (g\circ f)(x)=\lim_{x\to n-} g(f(x))=g(n-1)$

(i) $n=0$일 때,

$\lim_{x\to 0+} (g\circ f)(x)=g(0)=0$

$\lim_{x\to 0-} (g\circ f)(x)=g(-1)=[-1]=-1$

따라서 $\lim_{x\to 0+} (g\circ f)(x) \neq \lim_{x\to 0-} (g\circ f)(x)$이므로

$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)$는 존재하지 않는다.

(ii) $n=1$일 때,

$\lim_{x\to 1+} (g\circ f)(x)=g(1)=[1]=1$

$\lim_{x\to 1-} (g\circ f)(x)=g(0)=0$

따라서 $\lim_{x\to 1+} (g\circ f)(x) \neq \lim_{x\to 1-} (g\circ f)(x)$이므로

$\lim_{x\to 1}(g\circ f)(x)$는 존재하지 않는다.

(iii) $n=2$일 때,

$\lim_{x\to 2+} (g\circ f)(x)=g(2)=\left[\frac{1}{2}\right]=0$

$\lim_{x\to 2-} (g\circ f)(x)=g(1)=[1]=1$

따라서 $\lim_{x\to 2+} (g\circ f)(x) \neq \lim_{x\to 2-} (g\circ f)(x)$이므로

$\lim_{x\to 2}(g\circ f)(x)$는 존재하지 않는다.

(iv) $n\le-1$일 때,

$-1<\frac{1}{n-1}<0$,

$-1\le\frac{1}{n}<0$이므로

$\left[\frac{1}{n-1}\right]=\left[\frac{1}{n}\right]=-1$

$\lim_{x\to n+} (g\circ f)(x)=g(n)=\left[\frac{1}{n}\right]=-1$

$\lim_{x\to n-} (g\circ f)(x)=g(n-1)=\left[\frac{1}{n-1}\right]=-1$

$\therefore \lim_{x\to n}(g\circ f)(x)=-1$

(v) $n\ge3$일 때,

$0<\frac{1}{n-1}<1$,

$0<\frac{1}{n}<1$이므로

$\left[\frac{1}{n-1}\right]=\left[\frac{1}{n}\right]=0$

$\lim_{x\to n+} (g\circ f)(x)=g(n)=\left[\frac{1}{n}\right]=0$

$\lim_{x\to n-} (g\circ f)(x)=g(n-1)=\left[\frac{1}{n-1}\right]=0$

$\therefore \lim_{x\to n}(g\circ f)(x)=0$

이상에서 $\lim_{x\to n}(g\circ f)(x)$가 존재하지 않도록 하는 정수 n은 0, 1, 2의 3개이다.

답 ③

1등급 비밀노트

(i) $x<-1$이면 $-1<\frac{1}{x}<0$ $\therefore \left[\frac{1}{x}\right]=-1$

(ii) $-1<x<0$이면 $\frac{1}{x}<-1$ $\therefore \left[\frac{1}{x}\right]\le-2$

(iii) $0<x<1$이면 $\frac{1}{x}>1$ $\therefore \left[\frac{1}{x}\right]\ge1$

(iv) $x>1$이면 $0<\frac{1}{x}<1$ $\therefore \left[\frac{1}{x}\right]=0$

이상에서 $n=-1$ 또는 $n=0$ 또는 $n=1$일 때 $\lim_{x\to n} g(x)$는 존재하지 않는다. 따라서 $f(x)=-1$ 또는 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$일 때를 기준으로 $\lim_{x\to n}(g\circ f)(x)$를 조사한다.

05 $\overline{AP}^2=(2t+2)^2+(t+1)^2=5t^2+10t+5$

직선 PQ의 방정식은

직선 PQ는 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$과 수직이므로 기울기가 -2이고 점 $P(2t,\ t+1)$을 지난다.

$y-(t+1)=-2(x-2t)$, 즉 $y=-2x+5t+1$

따라서 $Q(0,\ 5t+1)$이므로

$\overline{AQ}^2=2^2+(5t+1)^2=25t^2+10t+5$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{25t^2+10t+5}{5t^2+10t+5}=5$$

답 5

06 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax+b}=\alpha$ ($\alpha\neq0$, α는 정수)라 하면

$x\to2$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$이므로 $4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax-2a-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+a+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x+a+2}$$
$$=\frac{4}{4+a}$$

이때 $\frac{4}{4+a}$가 정수이려면

$4+a=-4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4$

이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(-8,\ 12)$, $(-6,\ 8)$, $(-5,\ 6)$,

$(-3,\ 2)$, $(-2,\ 0)$, $(0,\ -4)$

따라서 ab의 최솟값 p는 $-8\cdot12=-96$이므로

$|p|=96$

답 96

I-2. 함수의 연속

개념&핵심 기출

본책 16~18쪽

01 ㄴ. $x=r$, $x=s$에서 좌극한과 우극한이 다르므로 극한값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to q} f(x) \neq f(q)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=q$에서 연속이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

02 ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0$이고 $f(0)=1$이므로

$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}(\sqrt{x}+1)=1$,

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}(-x+1)=1$이므로

$\lim_{x\to 0} g(x)=1$

이때 $g(0)=1$이므로 $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0+}[x]=0$,

$\lim_{x\to 0-} h(x)=\lim_{x\to 0-}[x]=-1$이므로

$\lim_{x\to 0+} h(x) \neq \lim_{x\to 0-} h(x)$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

이상에서 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄴ뿐이다. 답 ②

03 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+5x+a\neq 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+5x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=25-4a<0$

$\therefore a>\frac{25}{4}=6.25$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 7이다. 답 ③

04 ㄱ. 두 함수 $y=x$, $y=|x|$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(x)=x+|x|$도 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. 두 함수 $y=x$, $y=|x^2-2x|$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $g(x)=x|x^2-2x|$도 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0+} x=0$,

$\lim_{x\to 0-} h(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$이므로

$\lim_{x\to 0} h(x)=0$

그런데 $h(0)=1$이므로 $\lim_{x\to 0} h(x)\neq h(0)$

따라서 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

이상에서 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

일품 BOX

함수 $f(x)$가 연속함수이다.
$\Longleftrightarrow f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

$x=q$에서 좌극한과 우극한이 같으므로 극한값이 존재한다.

$\lim_{x\to 0} h(x)$의 값은 존재하지 않는다.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 유리함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에 대하여 연속이면
$g(x)\neq 0$

$x\to 1$일 때 $(x-1)^2\to 0+$이므로
$\lim_{x\to 1}[(x-1)^2]=0$

05 $x\neq 2$이면 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

함수 $f(x)$가 연속함수이므로

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

06 (i) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$a=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\{-(x+1)\}=-2$$

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$b=\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{|x|-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x|-1}{(|x|-1)(|x|+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$c=\lim_{x\to 1} h(x)=\lim_{x\to 1}[(x-1)^2]=0$$

이상에서 $a<c<b$ 답 ②

07 $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=a$이고

$$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0} g(f(x))=\lim_{x\to 0} g(x^2+1)=g(1)=2a+1$$

합성함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$에서

$2a+1=a \qquad \therefore a=-1$ 답 ②

08 ㄱ. $\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=(-1)\cdot 1=-1$,

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=-1$

이때 $f(1)g(1)=1\cdot 1=1$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)\neq f(1)g(1)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이 아니다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1+} f(g(x))=f(1)=1$,

$\lim_{x\to 1-} f(g(x))=f(-1)=1$이므로

$\lim_{x\to 1} f(g(x))=1$

이때 $f(g(1))=f(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1} f(g(x))=f(g(1))$$

따라서 $f(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to1+} g(f(x))=g(-1)=-1$,

$\lim_{x\to1-} g(f(x))=g(1)=1$이므로

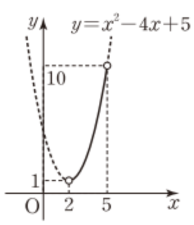
$$\lim_{x\to1+} g(f(x))\neq\lim_{x\to1-} g(f(x))$$

따라서 $g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이 아니다.

이상에서 $x=1$에서 연속인 함수는 ㄴ뿐이다. 답 ②

09 함수 $f(x)=[x^2-4x+5]$는 x^2-4x+5의 값이 정수인 점에서 불연속이다.

$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$이므로 구간 $(2,\ 5)$에서 함수 $y=x^2-4x+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $1<x^2-4x+5<10$이므로 $f(x)$는

$$x^2-4x+5=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9$$

인 점에서 불연속이다.

즉 불연속이 되는 점의 개수는 8이다. 답 8

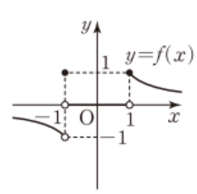
10 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x^2+ax+2}$가 불연속이 되는 점은 분모가 0이 될 때이다. 이때 불연속인 점이 1개이려면 이차방정식 $x^2+ax+2=0$이 오직 하나의 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

분모가 0이 되는 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않는다.

$$D=a^2-8=0,\qquad a^2=8$$

$\therefore\ a=-2\sqrt{2}$ 또는 $a=2\sqrt{2}$ 답 $-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}$

11 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $-1<x<1$에서 $f(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to0} f(x)=0$$

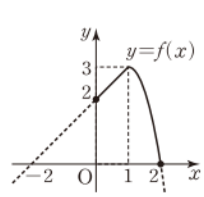
ㄴ. $\lim_{x\to-1-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to1+} f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to-1-} f(x)\lim_{x\to1+} f(x)=-1<0$$

ㄷ. $x=-1$, $x=1$에서 함수 $f(x)$는 불연속이므로 불연속인 점은 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

12 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.



함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=3$, 최솟값은 $f(2)=0$이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$$3+0=3$$

답 3

일품 BOX

함수 $h(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $h(a)h(b)<0$이면 방정식 $h(x)=0$은 a와 b 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

13 $h(x)=f(x)-x$로 놓으면 함수 $h(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$$h(0)=f(0)-0=-\frac{1}{3}<0,$$

$$h\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}<0,$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}<0,$$

$$h\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}>0,$$

$$h\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=\frac{1}{20}>0,$$

$$h(1)=f(1)-1=0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 구간 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 답 ③

1등급을 위한 고난도 문제

본책 19~21쪽

01 (i) $0<a<2$, $2<a<4$, $4<a<6$일 때,

함수 $f(x)$는 연속이므로 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$$\therefore\ \lim_{x\to a} f(x)-f(a)=0$$

(ii) $a=2$일 때,

$\lim_{x\to2} f(x)=0$, $f(2)=3$이므로

$$\lim_{x\to2} f(x)-f(2)=0-3=-3$$

(iii) $a=4$일 때,

$\lim_{x\to4} f(x)=4$, $f(4)=0$이므로

$$\lim_{x\to4} f(x)-f(4)=4-0=4$$

이상에서 $\lim_{x\to a} f(x)-f(a)$의 모든 값의 합은

$$0-3+4=1$$

답 ①

02 ㄱ. $\lim_{x\to0} f(x)=0$, $f(0)=1$이므로

$$\lim_{x\to0} f(x)\neq f(0)$$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

ㄴ. $\lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{|x+2|-2}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{(x+2)-2}{x}=1$

$x\to0$일 때, $x+2>0$이므로 $|x+2|=x+2$

이때 $g(0)=1$이므로 $\lim_{x\to0} g(x)=g(0)$

따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to0+} h(x)=\lim_{x\to0+}\dfrac{x^2-3|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\dfrac{x^2-3x}{x}$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{x(x-3)}{x}=\lim_{x\to0+}(x-3)=-3$$

$\lim_{x\to0-} h(x)=\lim_{x\to0-}\dfrac{x^2-3|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\dfrac{x^2+3x}{x}$

$$=\lim_{x\to0-}\frac{x(x+3)}{x}=\lim_{x\to0-}(x+3)=3$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0+} h(x)\neq\lim_{x\to0-} h(x)$$

따라서 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

이상에서 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄴ뿐이다. 답 ②

03 ㄱ. $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\{f(x)+f(-x)\}$$
$$=\lim_{x\to 0} f(x)+\lim_{x\to 0} f(-x)$$
$$=f(0)+f(0)$$

따라서 $f(x)+f(-x)$도 $x=0$에서 연속이다.

일품 BOX: $-x=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로 $\lim_{x\to 0} f(-x)=\lim_{t\to 0} f(t)=f(0)$

ㄴ. $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$이면 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 $f(x)\{f(x)-g(x)\}$도 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=x+1$, $g(x)=x$이면 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$이지만 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+1}{x}$은 $x=0$에서 정의되지 않으므로 연속이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

04 ㄱ. $x\to\infty$일 때 $1-\frac{1}{x}\to 1-$이고, $f\left(1-\frac{1}{x}\right)=t$로 놓으면 $t\to 1-$이므로

$$\lim_{x\to\infty} g\left(f\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{t\to 1-} g(t)=-1$$

ㄴ. $\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=0\cdot(-2)=0$,

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=0\cdot 0=0$이므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=0$$

이때 $f(0)g(0)=0\cdot(-2)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-1}{1}=-1$, $\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{-1}=-1$

이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=-1$$

이때 $\frac{f(1)}{g(1)}=\frac{-1}{1}=-1$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(1)}{g(1)}$$

따라서 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

05 $f(x+4)=f(x)$이므로

$f(-2)=f(2)$에서 $\quad 0=4+2a+b$

$\therefore 2a+b=-4$ …… ㉠ ⋯ ❶

일품 BOX: $f(-2)=f(-2+4)=f(2)$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$$

$1+a+b=6 \quad \therefore a+b=5$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9$, $b=14$ ⋯ ❸

$\therefore b-a=23$ ⋯ ❹

답 23

채점 기준	비율
❶ $f(x+4)=f(x)$를 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$가 $x=1$에서 연속임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	10 %
❹ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	10 %

06 $|x|>2$일 때, $|x^2-4|=x^2-4$이므로

$$f(x)=\frac{|x^2-4|}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x+2 & (|x|>2) \\ ax^2+bx & (|x|\le 2)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)=f(2)$$

$4=4a+2b \qquad \therefore 2a+b=2$ …… ㉠

일품 BOX: $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x+2)=4$

또 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2-} f(x)=f(-2)$$

$4a-2b=0 \qquad \therefore 2a-b=0$ …… ㉡

일품 BOX: $\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-}(x+2)=0$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore 10ab=10\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=5$ 답 ②

07 $\lim_{x\to -3+}[x]=-3$, $\lim_{x\to -3-}[x]=-4$이므로

$$\lim_{x\to -3+} f(x)=\lim_{x\to -3+}([x]^2+a[x])=9-3a$$
$$\lim_{x\to -3-} f(x)=\lim_{x\to -3-}([x]^2+a[x])=16-4a$$

일품 BOX: 정수 n에 대하여
① $f(x)\to n+$이면 $[f(x)]=n$
② $f(x)\to n-$이면 $[f(x)]=n-1$

$f(x)$가 $x=-3$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to -3+} f(x)=\lim_{x\to -3-} f(x)=f(-3)$$

$9-3a=16-4a=b \qquad \therefore a=7$, $b=-12$

$\therefore a-b=19$ 답 19

일품 BOX: $9-3a=16-4a$에서 $a=7$
$a=7$을 $9-3a=b$에 대입하면 $b=-12$

08 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

일품 BOX: 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 끊어져 있으면 $x=a$에서 $g(x)$의 연속성을 조사한다.

$$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}(x^2+ax+b)f(x)$$
$$=b\cdot(-1)=-b$$
$$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}(x^2+ax+b)f(x)$$
$$=b\cdot(-2)=-2b$$

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)$이므로

$-b=-2b \qquad \therefore b=0$

$\therefore g(x)=(x^2+ax)f(x)$

또 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2+ax)f(x)$$
$$=(1+a)\cdot 2=2a+2$$

$\lim_{x\to1-} g(x) = \lim_{x\to1-} (x^2+ax)f(x)$

$= (1+a)\cdot 0 = 0$

$\lim_{x\to1+} g(x) = \lim_{x\to1-} g(x)$이므로

$2a+2=0 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $g(x)=(x^2-x)f(x)$이므로

$g(-2)=6f(-2)=6\cdot2=12$ 답 12

09 $x+2=t$로 놓으면 $x=t-2$이고 $x\to0+$일 때 $t\to2+$이므로

$\lim_{x\to0+} f(x)f(x+2) = \lim_{x\to0+} f(x) \lim_{t\to2+} f(t)$

$= \lim_{x\to0+} (-x+a) \lim_{t\to2+} (-t+a)$

$=a(a-2)$

$x\to0-$일 때 $t\to2-$이므로

$\lim_{x\to0-} f(x)f(x+2) = \lim_{x\to0-} f(x) \lim_{t\to2-} f(t)$

$= \lim_{x\to0-} (-x+4) \lim_{t\to2-} (-t+a)$

$=4\cdot(-2+a)$

$=4a-8$

이때 $f(0)f(2)=4(-2+a)=4a-8$이므로

$f(x)f(x+2)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to0+} f(x)f(x+2) = \lim_{x\to0-} f(x)f(x+2) = f(0)f(2)$

$a(a-2)=4a-8, \quad a^2-6a+8=0$

$(a-2)(a-4)=0 \qquad \therefore a=2$ 또는 $a=4$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은

$2\cdot4=8$ 답 8

이차방정식
$a^2-6a+8=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 a의 값의 곱은
$\frac{8}{1}=8$

10 ㄱ. 임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=b$로 놓으면

$f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$f(a)=b$

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to b$이므로

$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{t\to b} g(t)$

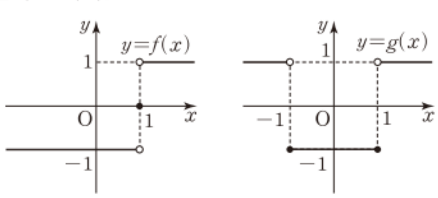
이때 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$\lim_{t\to b} g(t) = g(b) = g(f(a))$

즉 $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a))$이므로 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

따라서 $(g\circ f)(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. [반례] 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다고 하자.



$x\to1+$일 때 $f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1+} g(f(x)) = g(1) = -1$

$x\to1-$일 때 $f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to1-} g(f(x)) = g(-1) = -1$

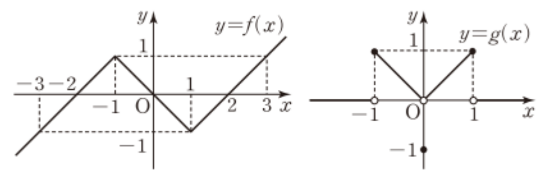
$\therefore \lim_{x\to1} g(f(x)) = -1$

이때 $g(f(1))=g(0)=-1$이므로

$\lim_{x\to1} g(f(x)) = g(f(1))$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이지만 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. [반례] 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다고 하자.



$f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

이때 $f(-1)=1$이므로 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to-1} g(f(x)) = \lim_{t\to1-} g(t) = 1$

이때 $g(f(-1))=g(1)=1$이므로

$\lim_{x\to-1} g(f(x)) = g(f(-1))$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

1등급 비밀노트

ㄷ에서 함수 $(g\circ f)(x)$의 $x=3$에서의 연속성을 알아보자.

$\lim_{x\to3+} g(f(x)) = \lim_{t\to1+} g(t) = 0$,

$\lim_{x\to3-} g(f(x)) = \lim_{t\to1-} g(t) = 1$

$\therefore \lim_{x\to3+} g(f(x)) \neq \lim_{x\to3-} g(f(x))$

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

즉 $f(k)=1$인 k에 대하여 $(g\circ f)(x)$는 연속일 수도 불연속일 수도 있다.

11 ㄱ. $\lim_{x\to-1+} f(x)g(x) = 1\cdot1 = 1$,

$\lim_{x\to-1-} f(x)g(x) = 0\cdot(-1) = 0$이므로

$\lim_{x\to-1+} f(x)g(x) \neq \lim_{x\to-1-} f(x)g(x)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to-1+} (f\circ f)(x) = \lim_{x\to-1+} f(f(x))$

$= \lim_{t\to1-} f(t) = 1$

$x\to-1-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to-1-} (f\circ f)(x) = \lim_{x\to-1-} f(f(x))$

$= \lim_{t\to0+} f(t) = 0$

$\therefore \lim_{x\to-1+} (f\circ f)(x) \neq \lim_{x\to-1-} (f\circ f)(x)$

따라서 $(f\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to-1+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to-1+}f(g(x))=f(1)=0$,

$\lim_{x\to-1-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to-1-}f(g(x))=f(-1)=0$

이므로

$$\lim_{x\to-1}(f\circ g)(x)=0$$

이때 $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(0)=1$이므로

$$\lim_{x\to-1}(f\circ g)(x)\neq(f\circ g)(-1)$$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 $x=-1$에서 불연속인 함수이다.

답 ⑤

$x\to-1+$일 때 $g(x)=1$, $x\to-1-$일 때 $g(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to-1+}f(g(x))=f(1)$, $\lim_{x\to-1-}f(g(x))=f(-1)$

12 함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$ ··· ❶

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to1}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to1}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=3$$ ··· ❷

$f(1)=k$에서 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(k)$이므로

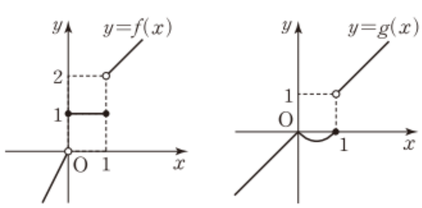
$g(k)=3$ $\quad\therefore k=4$ ··· ❸

답 4

$g(k)=3$이므로 $y=g(x)$의 그래프에서 y좌표가 3일 때의 x좌표를 찾는다.

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to1}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{x\to1}(g\circ f)(x)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

13 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서만 불연속이고 함수 $y=g(x)$는 $x=1$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$, $x=1$에서만 불연속일 수 있다.

$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=1\cdot0=0$, $\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=0\cdot0=0$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$

이때 $f(0)g(0)=1\cdot0=0$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

또 $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=2\cdot1=2$, $\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=1\cdot0=0$

이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)g(x)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

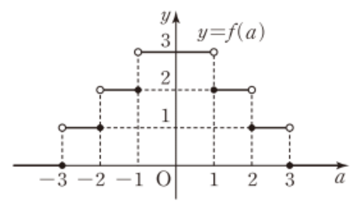
즉 함수 $f(x)g(x)$의 불연속인 점의 개수는 1이다. 답 1

14 $A=\{x\,|\,(x+2)(x-2)<0\}$
$=\{x\,|\,-2<x<2\}$
$=\{-1, 0, 1\}$

이므로 a의 값의 범위에 따른 집합 $A\cap B$의 원소의 개수 $f(a)$는 다음과 같다.

$a+2\le-1$, 즉 $a\le-3$이면 $\quad f(a)=0$
$-1<a+2\le0$, 즉 $-3<a\le-2$이면 $\quad f(a)=1$
$0<a+2\le1$, 즉 $-2<a\le-1$이면 $\quad f(a)=2$
$1<a+2\le2$, 즉 $-1<a\le0$이면 $\quad f(a)=3$
$2<a+2<3$, 즉 $0<a<1$이면 $\quad f(a)=3$
$3\le a+2<4$, 즉 $1\le a<2$이면 $\quad f(a)=2$
$4\le a+2<5$, 즉 $2\le a<3$이면 $\quad f(a)=1$
$a+2\ge5$, 즉 $a\ge3$이면 $\quad f(a)=0$

따라서 함수 $y=f(a)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{a\to-2+}f(a)=1$, $\lim_{a\to-2-}f(a)=2$이므로 $\lim_{a\to-2}f(a)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{a\to1+}f(a)=2$, $f(1)=2$이므로

$$\lim_{a\to1+}f(a)=f(1)$$

ㄷ. 함수 $f(a)$는 $a=-3$, $a=-2$, $a=-1$, $a=1$, $a=2$, $a=3$에서 불연속이다.

따라서 불연속인 점의 개수는 6이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

15 $x^3=4-2x$에서 $\quad x^3+2x-4=0$

$f(x)=x^3+2x-4$로 놓으면 $f(x)$는 연속함수이고

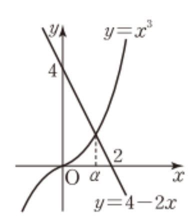
$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{23}{8}<0$,
$f(1)=-1<0$,
$f(\sqrt[3]{2})=2\sqrt[3]{2}-2>0$,
$f(\sqrt{2})=4\sqrt{2}-4>0$,
$f(\sqrt[3]{4})=2\sqrt[3]{4}>0$,
$f(2)=8>0$

따라서 $f(1)f(\sqrt[3]{2})<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1, \sqrt[3]{2})$이다.

답 ②

1등급 비밀노트

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=x^3$, $y=4-2x$의 그래프는 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 오직 하나의 실근을 갖는다.
이때 교점의 x좌표를 α라 하면
$0<\alpha<2$



16 $f(1+x)=f(1-x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

ㄱ. $f(3)=f(-1)$, $f(2)=f(0)$이므로

$$f(2)f(3)=f(0)f(-1)<0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(2, 3)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(-2)f(-1)$의 값의 부호를 알 수 없으므로 구간 $(-2, -1)$에서 실근의 존재 여부는 알 수 없다.

ㄷ. $f(-2)=f(4)$, $f(-3)=f(5)$이므로

$$f(-2)f(-3)=f(4)f(5)<0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-3, -2)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$는 연속함수이고

$$f(-3)f(-2)<0,\ f(-1)f(0)<0,$$
$$f(2)f(3)<0,\ f(4)f(5)<0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 $f(x)=0$을 만족시키는 x는 적어도 4개 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.　　　답 ㄱ, ㄷ

일품 BOX

함수 $f(x)$에서
$f(a+x)=f(a-x)$
➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 22쪽

01 ㄱ. [반례] $a=2$이면

$$g(x)=|2x-2|=\begin{cases}-2x+2 & (x<1)\\ 2x-2 & (x\ge 1)\end{cases}$$

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=1\cdot0=0$,

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=2\cdot0=0$이므로

$$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=0$$

이때 $f(1)g(1)=1\cdot0=0$이므로

$$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고, $g(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로 $(g\circ f)(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이려면 $(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때, $t\to1+$이므로

$$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{t\to1+} g(t)=g(1)$$

$g(x)$가 연속함수이므로
$\lim_{t\to a+} g(t)$
$=\lim_{t\to a-} g(t)=g(a)$

$x\to1-$일 때 $t\to2-$이므로

$$\lim_{x\to1-} g(f(x))=\lim_{t\to2-} g(t)=g(2)$$

$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{x\to1-} g(f(x))$에서

$$|2-a|=|4-a|$$

양변을 제곱하면

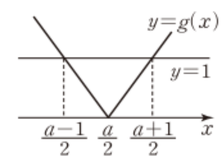
$$4-4a+a^2=16-8a+a^2$$
$$4a=12 \quad \therefore a=3$$

ㄷ. $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 $g(x)=1$을 만족시키는 x의 값에서 $(f\circ g)(x)$의 연속성을 확인한다.

$|2x-a|=1$에서

$$2x-a=-1 \text{ 또는 } 2x-a=1$$
$$\therefore x=\frac{a-1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{a+1}{2}$$

$g(x)=t$로 놓으면 오른쪽 그림에서



$$\lim_{x\to\frac{a-1}{2}+} (f\circ g)(x)=\lim_{x\to\frac{a-1}{2}+} f(g(x))=\lim_{t\to1-} f(t)=\lim_{t\to1-}(t+1)=2,$$

$$\lim_{x\to\frac{a-1}{2}-} (f\circ g)(x)=\lim_{x\to\frac{a-1}{2}-} f(g(x))=\lim_{t\to1+} f(t)=\lim_{t\to1+}(t^2-t+1)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{a-1}{2}+} (f\circ g)(x)\ne\lim_{x\to\frac{a-1}{2}-} (f\circ g)(x)$$

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=\frac{a-1}{2}$에서 불연속이다.

같은 방법으로 하면 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=\frac{a+1}{2}$에서 불연속이다.

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$가 불연속이 되는 점은 항상 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.　　　답 ㄴ, ㄷ

참고 ㄷ. $x\to\frac{a}{2}$일 때 $g(x)<1$이므로

$(f\circ g)(x)=g(x)+1=|2x-a|+1$

$\therefore \lim_{x\to\frac{a}{2}}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to\frac{a}{2}}(|2x-a|+1)=1$

이때 $f\left(g\left(\frac{a}{2}\right)\right)=f(0)=1$이므로

$\lim_{x\to\frac{a}{2}}(f\circ g)(x)=(f\circ g)\left(\frac{a}{2}\right)$

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=\frac{a}{2}$에서 항상 연속이다.

02 ㄱ. $-x=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때, $t\to-1-$이므로

$$\lim_{x\to1+} f(-x)=\lim_{t\to-1-} f(t)=1$$
$$\therefore \lim_{x\to1+}\{f(x)+f(-x)\}=(-1)+1=0$$

$x\to1-$일 때, $t\to-1+$이므로

$$\lim_{x\to1-} f(-x)=\lim_{t\to-1+} f(t)=-1$$
$$\therefore \lim_{x\to1-}\{f(x)+f(-x)\}=1+(-1)=0$$
$$\therefore \lim_{x\to1}\{f(x)+f(-x)\}=0$$

이때 $f(1)+f(-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\{f(x)+f(-x)\}=f(1)+f(-1)$$

따라서 $f(x)+f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1+} f(x)f(-x)=(-1)\cdot1=-1,$

$\lim_{x\to1-} f(x)f(-x)=1\cdot(-1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to1} f(x)f(-x)=-1$$

$\lim_{x\to1+} f(x)=-1,$ $\lim_{x\to1+} f(-x)=1$

$\lim_{x\to1-} f(x)=1,$ $\lim_{x\to1-} f(-x)=-1$

이때 $f(1)f(-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1} f(x)f(-x)\neq f(1)f(-1)$$

따라서 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $x\to1+$일 때, $f(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to1+} f(f(x))=f(-1)=0$$

$x\to1+$일 때, $f(-x)=1$이므로

$$\lim_{x\to1+} f(f(-x))=f(1)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to1+}\{(f\circ f)(x)+(f\circ f)(-x)\}=0$$

$f(x)=s$로 놓으면 $x\to1-$일 때, $s\to1-$이므로

$$\lim_{x\to1-} f(f(x))=\lim_{s\to1-} f(s)=1$$

$f(-x)=r$로 놓으면 $x\to1-$일 때, $r\to-1+$이므로

$$\lim_{x\to1-} f(f(-x))=\lim_{r\to-1+} f(r)=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to1-}\{(f\circ f)(x)+(f\circ f)(-x)\}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\{(f\circ f)(x)+(f\circ f)(-x)\}=0$$

이때

$$(f\circ f)(1)+(f\circ f)(-1)=f(0)+f(0)=0$$

이므로

$$\lim_{x\to1}\{(f\circ f)(x)+(f\circ f)(-x)\}$$
$$=(f\circ f)(1)+(f\circ f)(-1)$$

따라서 $(f\circ f)(x)+(f\circ f)(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 $x=1$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

03 $f(x)=[\log_3 x]+[\log_{\frac{1}{3}} x]$

$\quad=[\log_3 x]+[-\log_3 x]$

(i) $x=3^n$ (n은 정수)일 때

$\log_3 x=n$이므로

$$f(x)=[\log_3 x]+[-\log_3 x]$$
$$=n-n=0$$

(ii) $3^n<x<3^{n+1}$ (n은 정수)일 때

$n<\log_3 x<n+1$이므로

$$-n-1<-\log_3 x<-n$$

$$\therefore [\log_3 x]=n,\ [-\log_3 x]=-n-1$$

$$\therefore f(x)=[\log_3 x]+[-\log_3 x]$$
$$=n-n-1=-1$$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (x\neq3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ \cdots)\\ 0 & (x=3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ \cdots)\end{cases}$$

$3^4<100<3^5$

따라서 구간 $(1,\ 100)$에서 함수 $f(x)$는 $x=3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4$일 때 불연속이므로 구하는 합은

$$3+3^2+3^3+3^4=120$$

답 120

04 (i) $\lim_{x\to1+} f(x)g_1(x)=1\cdot(-1)=-1,$

$\lim_{x\to1-} f(x)g_1(x)=-1\cdot(-1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1+} f(x)g_1(x)\neq\lim_{x\to1-} f(x)g_1(x)$$

따라서 $f(x)g_1(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로

$$a_1=1$$

(ii) $\lim_{x\to1+} f(x)g_2(x)=1\cdot(-1)=-1,$

$\lim_{x\to1-} f(x)g_2(x)=-1\cdot1=-1$이므로

$$\lim_{x\to1} f(x)g_2(x)=-1$$

이때 $f(1)g_2(1)=1\cdot1=1$이므로

$$\lim_{x\to1} f(x)g_2(x)\neq f(1)g_2(1)$$

$\lim_{x\to-1+} f(x)g_2(x)=-1\cdot1=-1,$

$\lim_{x\to-1-} f(x)g_2(x)=-1\cdot(-1)=1$이므로

$$\lim_{x\to-1+} f(x)g_2(x)\neq\lim_{x\to-1-} f(x)g_2(x)$$

따라서 $f(x)g_2(x)$는 $x=-1,\ x=1$에서 불연속이므로

$$a_2=2$$

(iii) $\lim_{x\to1+} f(x)g_3(x)=1\cdot(-1)=-1,$

$\lim_{x\to1-} f(x)g_3(x)=-1\cdot(-1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1+} f(x)g_3(x)\neq\lim_{x\to1-} f(x)g_3(x)$$

$\lim_{x\to0+} f(x)g_3(x)=0\cdot1=0,$

$\lim_{x\to0-} f(x)g_3(x)=0\cdot1=0$이므로

$$\lim_{x\to0} f(x)g_3(x)=0$$

이때 $f(0)g_3(0)=0\cdot(-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to0} f(x)g_3(x)=f(0)g_3(0)$$

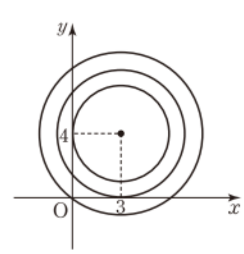
따라서 $f(x)g_3(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로

$$a_3=1$$

이상에서 $\quad a_1=a_3<a_2$

답 ③

05 오른쪽 그림에서



$r=3$일 때 y축과 접하므로

$$f(3)=1$$

$r=4$일 때 x축과 접하므로

$$f(4)=3$$

$r=5$일 때 원점을 지나므로

$\sqrt{3^2+4^2}=5$

$$f(5)=3$$

$$\therefore f(r)=\begin{cases}0 & (0<r<3)\\ 1 & (r=3)\\ 2 & (3<r<4)\\ 3 & (r=4 \text{ 또는 } r=5)\\ 4 & (4<r<5 \text{ 또는 } r>5)\end{cases}$$

따라서 함수 $f(r)$는 $r=3$, $r=4$, $r=5$에서 불연속이고 이차함수 $g(r)$는 연속함수이므로 함수 $f(r)g(r)$가 불연속인 점의 개수가 1이 되려면 이차함수 $g(r)$는 세 점 $(3, 0)$, $(4, 0)$, $(5, 0)$ 중 2개의 점을 지나야 한다.

(i) 두 점 $(3, 0)$, $(4, 0)$을 지날 때,

$$\begin{aligned} g(r)&=(r-3)(r-4)\\ &=r^2-7r+12\\ &=\left(r-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

따라서 $g(r)$의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.

(ii) 두 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$을 지날 때,

$$\begin{aligned} g(r)&=(r-3)(r-5)\\ &=r^2-8r+15\\ &=(r-4)^2-1 \end{aligned}$$

따라서 $g(r)$의 최솟값은 -1이다.

(iii) 두 점 $(4, 0)$, $(5, 0)$을 지날 때,

$$\begin{aligned} g(r)&=(r-4)(r-5)\\ &=r^2-9r+20\\ &=\left(r-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

따라서 $g(r)$의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.

이상에서 함수 $g(r)$의 최솟값이 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

일품 BOX

분모를 1로 보고, 분자, 분모에 각각 $\sqrt{(x-a)(x-b)}+x$를 곱하여 분자를 유리화한다.

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 23~27쪽

01 전략 유리화와 인수분해를 이용한다.

풀이
$$\begin{aligned} &\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+x^2}}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{\{1+x-(1+2x^2)\}(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+x^2})}{\{1-2x-(1+x^2)\}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{x(1-2x)(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+x^2})}{-x(2+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{(1-2x)(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+x^2})}{-(2+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})}\\ &=\frac{1\cdot2}{-2\cdot2}=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ③

02 전략 근호가 있는 식은 유리화를 하고, 근호가 없는 식은 통분하여 정리한다.

풀이
$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{(x-a)(x-b)}-x\}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{-(a+b)x+ab}{\sqrt{(x-a)(x-b)}+x}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{-(a+b)+\frac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)}+1}\\ &=-\frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

즉 $-\frac{a+b}{2}=3$이므로 $\quad a+b=-6$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\left(\frac{ab}{x+ab}-1\right)\right\}&=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{x+ab}\right)\\ &=\lim_{x\to0}\frac{-1}{x+ab}\\ &=-\frac{1}{ab} \end{aligned}$$

즉 $-\frac{1}{ab}=\frac{1}{4}$이므로 $\quad ab=-4$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2&=(a+b)^2-2ab\\ &=(-6)^2-2\cdot(-4)\\ &=44 \end{aligned}$$

답 ④

03 전략 $x\to a$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to a}\frac{bx+a}{x^2-a^2}=\frac{1}{6}$에서 $x\to a$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to a}(bx+a)=0$이므로 $\quad ba+a=0$

$\therefore a(b+1)=0$

이때 $a\neq0$이므로 $\quad b=-1$

$b=-1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}\frac{bx+a}{x^2-a^2}&=\lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{(x-a)(x+a)}\\ &=\lim_{x\to a}\frac{-1}{x+a}=-\frac{1}{2a} \end{aligned}$$

즉 $-\dfrac{1}{2a}=\dfrac{1}{6}$이므로 $\quad a=-3$

$\therefore ab=3$

답 ①

04

전략 $f(x)=x^2+ax+b$로 놓고 $x \to -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)→0이므로 (분자)→0임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{f(x)}+x}{x+1}=1$에서 $x \to -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)→0이므로 (분자)→0이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to-1}(\sqrt{f(x)}+x)=0$이므로

$f(-1)=1$

$f(-1)=1-a+b=1$에서 $a=b$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{f(x)}+x}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{f(x)}+x)(\sqrt{f(x)}-x)}{(x+1)(\sqrt{f(x)}-x)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-x^2}{(x+1)(\sqrt{f(x)}-x)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{ax+a}{(x+1)(\sqrt{f(x)}-x)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{a}{(\sqrt{f(x)}-x)}$$
$$=\frac{a}{1-(-1)}=\frac{a}{2}$$

분자, 분모에 각각 $\sqrt{f(x)}-x$를 곱하여 분자를 유리화한다.

즉 $\dfrac{a}{2}=1$이므로 $\quad a=2,\ b=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x+2$이므로

$f(3)=3^2+2\cdot3+2=17$

답 ④

05

전략 x가 유리수인 경우와 x가 무리수인 경우의 극한값을 각각 구한 후 그 값을 비교한다.

풀이 (i) x가 유리수일 때,

$|f(x)-f(1)|=|3x-3|=3|x-1|$

(ii) x가 무리수일 때,

$|f(x)-f(1)|=|-x+4-3|=|-x+1|$

$=\boxed{|x-1|}$

(i), (ii)에서 $\quad |f(x)-f(1)|\le\boxed{3|x-1|}$

$\displaystyle 0\le\lim_{x\to1}|f(x)-f(1)|\le\lim_{x\to1}3|x-1|$

실수 x에 대하여 $|x-1|\le3|x-1|$

이때 $\displaystyle\lim_{x\to1}3|x-1|=\boxed{0}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}|f(x)-f(1)|=0$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore$ (가) $|x-1|$ (나) $3|x-1|$ (다) 0

답 ②

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=\beta$일 때, $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\displaystyle\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

06

전략 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 $4x^2+x\le f(x)\le 4x^2+x+1$에서

$\sqrt{4x^2+x}-2x+1\le\sqrt{f(x)}-2x+1$

$\le\sqrt{4x^2+x+1}-2x+1$

이때

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x+1)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x-(2x-1)^2}{\sqrt{4x^2+x}+(2x-1)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-1}{\sqrt{4x^2+x}+2x-1}$$
$$=\frac{5}{2+2}=\frac{5}{4}$$

분자, 분모를 각각 x로 나눈 후 극한값을 계산한다.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-2x+1)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x+1-(2x-1)^2}{\sqrt{4x^2+x+1}+(2x-1)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x-1}$$
$$=\frac{5}{2+2}=\frac{5}{4}$$

이므로 $\quad\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{f(x)}-2x+1\}=\frac{5}{4}$

답 ④

07

전략 $f(x)=t$로 놓고 합성함수의 극한을 구한다.

풀이 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $t\to0+$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1-}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=-1$

$x\to1+$일 때 $t\to1-$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{t\to1-}g(t)=1$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to1-}g(f(x))+\lim_{x\to1+}g(f(x))$

$=-1+1=0$

답 ③

정수 n에 대하여

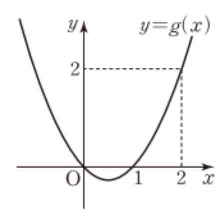
① $n<x<n+1$이면 $[x]=n$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to n+}[x]=n$

② $n-1<x<n$이면 $[x]=n-1$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to n-}[x]=n-1$

08

전략 $y=x^2-x$의 그래프를 그려서 생각한다.

풀이 $g(x)=x^2-x$로 놓으면 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x\to0-$일 때 $g(x)\to0+$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}[g(x)]=0$

$x\to1-$일 때 $g(x)\to0-$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}[g(x)]=-1$

$x\to2+$일 때 $g(x)\to2+$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}[g(x)]=2$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=1$

답 ④

09

전략 치환을 이용하여 좌극한과 우극한을 구한 후 그 값을 비교한다.

풀이 ㄱ. $x\to1+$일 때 $x+1\to2+$, $x-1\to0+$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x+1)f(x-1)$

$\displaystyle=\lim_{x\to1+}f(x+1)\lim_{x\to1+}f(x-1)$

$=0\cdot0=0$

$x \to 1-$일 때 $x+1 \to 2-$, $x-1 \to 0-$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x+1)f(x-1)$

$= \lim_{x\to 1-} f(x+1) \lim_{x\to 1-} f(x-1)$

$=1\cdot 0=0$

따라서 $\lim_{x\to 1} f(x+1)f(x-1)=0$이다.

ㄴ. $x \to -1$일 때 $\quad f(|x|)=f(-x)$

$x\to -1+$일 때 $-x \to 1-$, $-x+1 \to 2-$이므로

$\lim_{x\to -1+} \{f(|x|)+f(-x+1)\}$

$=\lim_{x\to -1+} f(-x)+\lim_{x\to -1+} f(-x+1)$

$=-1+1=0$

$x\to -1-$일 때 $-x \to 1+$, $-x+1 \to 2+$이므로

$\lim_{x\to -1-} \{f(|x|)+f(-x+1)\}$

$=\lim_{x\to -1-} f(-x)+\lim_{x\to -1-} f(-x+1)$

$=1+0=1$

따라서 $\lim_{x\to -1} \{f(|x|)+f(-x+1)\}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $x\to 2+$일 때 $x^2-1 \to 3+$이고 $f(x^2-1)=t$로 놓으면 $t\to 1+$이므로

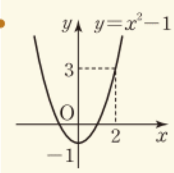
$\lim_{x\to 2+} f(f(x^2-1))=\lim_{t\to 1+} f(t)=1$

$x\to 2-$일 때 $x^2-1 \to 3-$이고 $t\to 1-$이므로

$\lim_{x\to 2-} f(f(x^2-1))=\lim_{t\to 1-} f(t)=-1$

따라서 $\lim_{x\to 2} f(f(x^2-1))$의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①



10 전략 함수가 연속일 조건을 이용한다.

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$일 때,
① $\lim_{x\to a} \{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$ (복호동순)
② $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to 0+} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 0+} g(x)$

$=1+0=1$

$\lim_{x\to 0-} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 0-} g(x)$

$=-1+2=1$

$\therefore \lim_{x\to 0} \{f(x)+g(x)\}=1$

이때 $f(0)+g(0)=1+0=1$이므로

$\lim_{x\to 0} \{f(x)+g(x)\}=f(0)+g(0)$

따라서 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1+} \{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to 1+} f(x)-\lim_{x\to 1+} g(x)$

$=-1-(-1)=0$

$\lim_{x\to 1-} \{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to 1-} f(x)-\lim_{x\to 1-} g(x)$

$=1-1=0$

$\therefore \lim_{x\to 1} \{f(x)-g(x)\}=0$

이때 $f(1)-g(1)=-1-(-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1} \{f(x)-g(x)\}=f(1)-g(1)$

따라서 $f(x)-g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)\lim_{x\to 1+} g(x)$

$=(-1)\cdot(-1)=1$

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)\lim_{x\to 1-} g(x)$

$=1\cdot 1=1$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)g(x)=1$

이때 $f(1)g(1)=(-1)\cdot(-1)=1$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

11 전략 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

$f(-1)=\lim_{x\to -1-} f(x)$에서 $\quad k=-4+a$

$\therefore a=k+4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(-1)=\lim_{x\to -1+} f(x)$에서

$k=\lim_{x\to -1+} \frac{2x^3+b}{x+1} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $x\to -1+$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to -1+} (2x^3+b)=0$이므로

$-2+b=0 \quad \therefore b=2$

$b=2$를 ㉡에 대입하면

$k=\lim_{x\to -1+} \frac{2x^3+2}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1+} \frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1+} 2(x^2-x+1)=6$

$k=6$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=10$

$\therefore abk=120$ 답 ④

12 전략 먼저 $x=2$에서의 좌극한과 우극한을 각각 구한다.

풀이 $\lim_{x\to 2+} [x]=2$, $\lim_{x\to 2+} [x-1]=1$이므로

$2<x<3$일 때
$1<x-1<2$
이므로
$\lim_{x\to 2+} [x-1]=1$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} ([x]^2-ax[x-1])$

$=4-2a$

$\lim_{x\to 2-} [x]=1$, $\lim_{x\to 2-} [x-1]=0$이므로

$1<x<2$일 때
$0<x-1<1$
이므로
$\lim_{x\to 2-} [x-1]=0$

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} ([x]^2-ax[x-1])$

$=1$

$f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)=f(2)$

이어야 하므로

$4-2a=1 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$ 답 ③

13 전략 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=f(1)g(1)$임을 이용한다.

풀이 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)\lim\limits_{x\to1+}g(x)$

$=1\cdot(b+1)=b+1$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)\lim\limits_{x\to1-}g(x)$

$=(-1)\cdot(1+a)=-a-1$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

이어야 하므로

$b+1=-a-1 \qquad \therefore a+b=-2$ 답 ①

14

전략 $g(x)=t$로 치환하여 합성함수의 극한을 구한다.

풀이 ㄱ. $x\to1+$일 때 $f(x)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(f(x))=f(-1)=0$

$x\to1-$일 때 $f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(f(x))=f(1)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(f(x))=0$

이때 $f(f(1))=f(0)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(f(x))\neq f(f(1))$

따라서 $f(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to-1-$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}g(g(x))=\lim\limits_{t\to-1-}g(t)=1$

$x\to1-$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}g(g(x))=\lim\limits_{t\to-1+}g(t)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}g(g(x))=1$

이때 $g(g(1))=g(1)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}g(g(x))=g(g(1))$

따라서 $g(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to-1-$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(g(x))=\lim\limits_{t\to-1-}f(t)=-1$

$x\to1-$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(g(x))=\lim\limits_{t\to-1+}f(t)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1+}f(g(x))\neq\lim\limits_{x\to1-}f(g(x))$

따라서 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 $x=1$에서 연속인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

1등급 비밀노트

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 합성함수 $g(f(x))$의 연속성을 확인할 때에는 좌극한과 우극한에 주의하면서 $f(x)=t$로 치환하여 생각한다.
$x\to a+$일 때 $f(x)\to b+$인 경우에 $f(x)=t$로 놓으면 $t\to b+$이므로

$\lim\limits_{x\to a+}g(f(x))=\lim\limits_{t\to b+}g(t)$

15

전략 판별식을 이용하여 함수 $f(a)$를 구한다.

풀이 x에 대한 이차방정식 $x^2+2x-a^2+5a+7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(-a^2+5a+7)=(a+1)(a-6)$

(i) $\frac{D}{4}<0$일 때, 즉 $-1<a<6$일 때,

$f(a)=0$

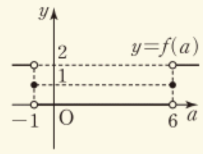
(ii) $\frac{D}{4}>0$일 때, 즉 $a<-1$ 또는 $a>6$일 때,

$f(a)=2$

(iii) $\frac{D}{4}=0$일 때, 즉 $a=-1$ 또는 $a=6$일 때,

$f(a)=1$

이상에서 $f(a)$는 $a=-1$ 또는 $a=6$에서 불연속이므로



$t=-1$ 또는 $t=6$

따라서 모든 t의 값의 합은

$-1+6=5$ 답 ③

16

전략 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

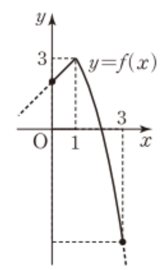
풀이 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$-1+b=1+a$

$\therefore a-b=-2$ …… ㉠

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$에서 최댓값 3을 가져야 한다.



즉 $f(1)=-1+b=3$에서

$b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하여 풀면

$a=2$

따라서 $f(0)=2$, $f(3)=-9+4=-5$이므로 최솟값은 -5이다. 답 ②

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 a와 b 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

17

전략 사잇값의 정리를 이용하여 $x=-1$, $x=1$에서의 함숫값의 부호가 바뀌는지를 살펴본다.

풀이 ㄱ. $g(x)=f(x)-x$로 놓으면 함수 $g(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$g(-1)=f(-1)-(-1)=1+1=2>0$

$g(1)=f(1)-1=-1-1=-2<0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)-x=0$은 구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $h(x)=(x^2+1)f(x)$로 놓으면 함수 $h(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$h(-1)=2f(-1)=2>0$

$h(1)=2f(1)=-2<0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $(x^2+1)f(x)=0$은 구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $k(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$로 놓으면 함수 $k(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$k(-1)=f(f(-1))=f(1)=-1<0$

$k(1)=f(f(1))=f(-1)=1>0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $(f \circ f)(x)=0$ 은 구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 답 ⑤

18 전략 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한에서 분자, 분모가 모두 다항식이면 분자, 분모를 각각 인수분해하여 약분한다.

풀이
$$\lim_{x\to5}\frac{x^3-125}{4x^2-100}=\lim_{x\to5}\frac{x^3-5^3}{4(x^2-5^2)}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x^2+5x+25)}{4(x+5)(x-5)}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{x^2+5x+25}{4(x+5)}$$
$$=\frac{15}{8}$$
답 $\frac{15}{8}$

19 전략 $x=-t$로 놓고 주어진 식을 t에 대한 식으로 바꾼 후 극한값을 구한다.

풀이 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로
$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{3x}+\sqrt{ax^2-bx}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(-t-\frac{1}{3t}+\sqrt{at^2+bt}\right) \quad \cdots ❶$$
$$=\lim_{t\to\infty}(-t+\sqrt{at^2+bt})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{at^2+bt}-t)(\sqrt{at^2+bt}+t)}{\sqrt{at^2+bt}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t^2+bt}{\sqrt{at^2+bt}+t} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{3t}=0$$

이때 $a\neq1$이면 극한값이 존재하지 않으므로
$a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면
$$\lim_{t\to\infty}\frac{bt}{\sqrt{t^2+bt}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b}{t}}+1}$$
$$=\frac{b}{2}$$
즉 $\frac{b}{2}=1$이므로 $b=2$ ⋯ ❷
$\therefore a+b=3$ ⋯ ❸
답 3

채점 기준	비율
❶ $x=-t$로 놓고 주어진 식을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1등급 비밀노트

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$와 자연수 n에 대하여 $f(x)$가 $2n$차함수일 때
$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}}=\alpha \ (\alpha\neq0,\ \alpha\text{는 상수})$$
이면 $g(x)$는 n차함수이다.

20 전략 방정식 $f(x)-(ax+b)=0$의 해가 -2, 3임을 이용하여 $f(x)$의 식을 구한다.

풀이 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 만나는 두 점의 x좌표가 -2, 3이므로
$$f(x)-(ax+b)=(x+2)(x-3)=x^2-x-6$$
$$\therefore f(x)=x^2+(a-1)x+b-6$$
한편 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=5$에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.
즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$
$f(0)=b-6=0$에서 $b=6$이므로
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+(a-1)x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\{x+(a-1)\}$$
$$=a-1=5$$
$\therefore a=6$
따라서 $f(x)=x^2+5x$이므로
$$f(2)=2^2+5\cdot2=14$$
답 14

$f(x)$, $g(x)$에 대하여
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$이고
$\lim_{x\to a}g(x)=0$이면
$\lim_{x\to a}f(x)=0$

21 전략 $x\to a$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이면 (분자)$\to0$임을 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.

풀이 주어진 조건에 의하여 $\lim_{x\to1}f(x)=0$, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$, $f(2)=0$
따라서
$$f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)\ (a,\ b\text{는 상수},\ a\neq0)$$
로 놓을 수 있다.
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x-2)(ax+b)=-a-b$$
이므로 $-a-b=1$ ⋯⋯ ㉠
$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x-1)(ax+b)=2a+b$$
이므로 $2a+b=2$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-4$

㉠+㉡을 하면
$a=3$
$a=3$을 ㉠에 대입하면
$-3-b=1$
$\therefore b=-4$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(3x-4)$이므로
$$f(4)=3\cdot2\cdot8=48$$
답 48

22 전략 $f(x)$는 이차 이하의 다항함수임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$이므로 $f(x)$는 이차 이하의 다항함수이다. ⋯ ❶
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-3$에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.
즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

따라서 $f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax^2+bx}{x}=\lim_{x\to0}(ax+b)=b$$

$\therefore b=-3$

한편 방정식 $ax^2-3x=x^2$의 한 근이 $x=1$이므로

$a-3=1$ $\qquad \therefore a=4$

따라서 $f(x)=4x^2-3x$이므로 ⋯ ❷

$f(x)=0$에서 $\qquad x(4x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{3}{4}$ ⋯ ❸

답 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 이차 이하의 다항함수임을 알 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❸ 방정식 $f(x)=0$의 해를 구할 수 있다.	20 %

23 전략 $g(x)=t$로 놓고 합성함수의 극한을 구한다.

풀이 $g(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to a+$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}(f\circ g)(x)&=\lim_{x\to0+}f(g(x))=\lim_{t\to a+}f(t)\\&=\lim_{t\to a+}(-2t+1)\\&=-2a+1\end{aligned}$$ ⋯ ❶

$x\to0-$일 때 $t\to-a-$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}(f\circ g)(x)&=\lim_{x\to0-}f(g(x))=\lim_{t\to-a-}f(t)\\&=\lim_{t\to-a-}(3t+2)\\&=-3a+2\end{aligned}$$ ⋯ ❷

$\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to0+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to0-}(f\circ g)(x)$이어야 하므로

$-2a+1=-3a+2$

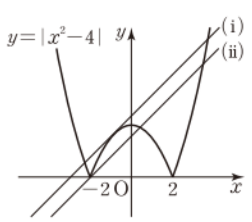
$\therefore a=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to0+}(f\circ g)(x)$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{x\to0-}(f\circ g)(x)$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

24 전략 두 함수 $y=|x^2-4|$, $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점과 함수 $g(x)$가 연속이 되도록 하는 $x=a$인 점의 관계를 생각한다.

풀이 함수 $y=|x^2-4|$의 그래프는 아래 그림과 같으므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 a의 개수가 3인 경우는 다음과 같다.



(i) 곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$-x^2+4=x+k$에서 $\qquad x^2+x+k-4=0$

이차방정식 $x^2+x+k-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4(k-4)=0$, $\qquad -4k+17=0$

$\therefore k=\frac{17}{4}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(-2, 0)$을 지날 때

$0=-2+k$이므로 $\qquad k=2$

(i), (ii)에서

$\alpha=\frac{17}{4}$, $\beta=2$

한편 곡선 $y=x^2-4$와 직선 $y=x+\frac{17}{4}$이 만나는 점의 x좌표의 합은 $x^2-x-\frac{33}{4}=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad -\frac{-1}{1}=1$

$x^2-4=x+\frac{17}{4}$에서
$x^2-x-\frac{33}{4}=0$

또 곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=x+\frac{17}{4}$이 만나는 점의 x좌표는 $x^2+x+\frac{1}{4}=0$에서 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$이므로

$-x^2+4=x+\frac{17}{4}$에서
$x^2+x+\frac{1}{4}=0$

$x=-\frac{1}{2}$

따라서 $k=\frac{17}{4}$일 때 모든 실수 a의 값의 합은

$m=1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=x+2$가 만나는 점의 x좌표의 합은 $x^2+x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{1}{1}=-1$

또 곡선 $y=x^2-4$와 직선 $y=x+2$가 만나는 점의 x좌표는 $x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$이므로

$x=3$ ($\because x>2$)

따라서 $k=2$일 때 모든 실수 a의 값의 합은

$n=-1+3=2$

$\therefore \alpha+\beta+m+n=\frac{35}{4}$

답 $\frac{35}{4}$

25 전략 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 불연속인 점에서 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 연속이 되도록 a의 값을 정한다.

풀이 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases}g(x-a) & (x<2)\\ g(-x+a) & (x\ge2)\end{cases}$이고

$x=2$에서 함수 $(g\circ f)(x)$가 연속이면 모든 실수 x에서 연속이다.

$$\begin{aligned}(g\circ f)(2)&=g(f(2))=g(-2+a)\\&=(-2+a)^2-2(-2+a)-3\\&=a^2-6a+5\end{aligned}$$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2+}g(f(x))&=g(-2+a)\\&=a^2-6a+5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2-}g(f(x))&=g(2-a)\\&=(2-a)^2-2(2-a)-3\\&=a^2-2a-3\end{aligned}$$ ⋯ ❷

즉 $a^2-6a+5=a^2-2a-3$에서

$4a=8 \quad \therefore a=2$ ⋯ ③

답 2

채점 기준	비율
① $(g \circ f)(2)$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
② $\lim_{x \to 2+} g(f(x))$, $\lim_{x \to 2-} g(f(x))$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
③ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

26

전략 먼저 분모의 최댓값과 최솟값을 구한다.

일품 BOX: 함수 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+3}$은 구간 $[-1, 3]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.

풀이 $f(x)=x^2-3x+3=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$이라 하면

$$f(-1)=7,\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4},\ f(3)=3$$

이므로

$$\frac{3}{4} \le f(x) \le 7 \qquad \therefore \frac{1}{7} \le \frac{1}{f(x)} \le \frac{4}{3}$$

즉 $\dfrac{1}{7} \le y \le \dfrac{4}{3}$이므로 $\quad M=\dfrac{4}{3},\ m=\dfrac{1}{7}$

$$\therefore Mm=\frac{4}{21}$$

답 $\dfrac{4}{21}$

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 28쪽

01

해결 단계

① 점 Q의 좌표를 구한다.
② 점 R의 좌표를 구한다.
③ 극한값을 구한다.

풀이 ① $y=a$를 $x^2+(y-3)^2=9$에 대입하면

$$x^2+(a-3)^2=9$$
$$x^2=9-(a-3)^2=6a-a^2$$
$$\therefore x=\sqrt{6a-a^2}\ (\because x>0)$$
$$\therefore \mathrm{Q}(\sqrt{6a-a^2},\ a)$$

② $y=a$를 $y=\dfrac{1}{16}x^2$에 대입하면

$$a=\frac{1}{16}x^2, \qquad x^2=16a \qquad \therefore x=4\sqrt{a}\ (\because x>0)$$
$$\therefore \mathrm{R}(4\sqrt{a},\ a)$$

③ 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $a \to 0+$이므로 구하는 값은

$$\lim_{a \to 0+}\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\lim_{a \to 0+}\frac{4\sqrt{a}-\sqrt{6a-a^2}}{4\sqrt{a}}$$

일품 BOX: 분자, 분모를 각각 $\sqrt{a}$로 나눈다.

$$=\lim_{a \to 0+}\frac{4-\sqrt{6-a}}{4}$$
$$=\frac{4-\sqrt{6}}{4}$$

답 ⑤

02

해결 단계

① 점 P를 지나고 직선 $y=2x-4$와 수직인 직선의 방정식을 구한다.
② 점 B, C의 좌표를 구하고 닮은 도형을 이용하여 넓이의 비를 구한다.
③ 극한값을 구한다.

풀이 ① 직선 $y=2x-4$의 기울기는 2이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(t,\ 2t-4)$를 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$$y-(2t-4)=-\frac{1}{2}(x-t)$$
$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}t-4$$

② $\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{5}{2}t-4\right)$, $\mathrm{B}(5t-8,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{CP}}:\overline{\mathrm{BP}}=m:n$이라 하면 점 P는 $\overline{\mathrm{CB}}$를 $m:n$으로 내분하는 점이므로

$$\frac{(5t-8)m}{m+n}=t,\quad \frac{\frac{1}{2}(5t-8)n}{m+n}=2t-4$$

즉 $\dfrac{2(5t-8)m}{m+n}-4=\dfrac{(5t-8)n}{2(m+n)}$이므로

$$4(5t-8)m-8(m+n)=(5t-8)n$$
$$4tm-8m=tn$$
$$\therefore \frac{n}{m}=\frac{4t-8}{t}$$

이때 두 삼각형 PAB, PCQ는 닮음비가 $n:m=4t-8:t$이므로 넓이의 비는

$$(4t-8)^2:t^2$$

③ $$\therefore \lim_{t \to \infty}\frac{S_1(t)}{S_2(t)}=\lim_{t \to \infty}\frac{(4t-8)^2}{t^2}$$
$$=\lim_{t \to \infty}\left(16-\frac{64}{t}+\frac{64}{t^2}\right)$$
$$=16$$

답 16

03

해결 단계

① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 불연속인 점과 $f(x)=-1$을 만족시키는 점에서 합성함수 $(g \circ f)(x)$가 연속인지를 판단한다.
② 두 함수 $f(x)$, $h(x)$가 불연속인 점과 $f(x)=0$을 만족시키는 점에서 합성함수 $(h \circ f)(x)$가 연속인지를 판단한다.
③ $a+b$의 값을 구한다.

일품 BOX: $f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 불연속이다. 또 $g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이고 $f(0)=-1$, $f(2)=-1$이므로 $x=0$, $x=1$, $x=2$에서 $(g \circ f)(x)$의 연속성을 확인한다.

풀이 ① (i) $f(x)=t$로 놓으면 $x \to 0+$일 때 $t \to -1+$, $x \to 0-$일 때 $t \to 1-$이므로

$$\lim_{x \to 0+}(g \circ f)(x)=\lim_{x \to 0+}g(f(x))$$
$$=\lim_{t \to -1+}g(t)=-1,$$
$$\lim_{x \to 0-}(g \circ f)(x)=\lim_{x \to 0-}g(f(x))$$
$$=\lim_{t \to 1-}g(t)=-1$$
$$\therefore \lim_{x \to 0}(g \circ f)(x)=-1$$

이때 $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(-1)=1$이므로

$\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)\ne(g\circ f)(0)$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

$x\to1$일 때 $t\to0-$이므로

$$\lim_{x\to1}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to1}g(f(x))=\lim_{t\to0-}g(t)=1$$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1)=-1$이므로

$\lim_{x\to1}(g\circ f)(x)\ne(g\circ f)(1)$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

$x\to2+$일 때 $t\to-1-$이고, $x\to2-$일 때 $t\to-1+$이므로

$$\lim_{x\to2+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to2+}g(f(x))=\lim_{t\to-1-}g(t)=-1,$$

$$\lim_{x\to2-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to2-}g(f(x))=\lim_{t\to-1+}g(t)=-1$$

$\therefore \lim_{x\to2}(g\circ f)(x)=-1$

이때 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(-1)=1$이므로

$\lim_{x\to2}(g\circ f)(x)\ne(g\circ f)(2)$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

$\therefore a=3$

❷ (ii) $f(x)=t$로 놓으면

$$\lim_{x\to0+}(h\circ f)(x)=\lim_{x\to0+}h(f(x))=\lim_{t\to-1+}h(t)=1,$$

$$\lim_{x\to0-}(h\circ f)(x)=\lim_{x\to0-}h(f(x))=\lim_{t\to1-}h(t)=1$$

$f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 불연속이다. 또 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 $f(-1)=0$이므로 $x=0$, $x=1$, $x=-1$에서 $(h\circ f)(x)$의 연속성을 확인한다.

$\therefore \lim_{x\to0}(h\circ f)(x)=1$

이때 $(h\circ f)(0)=h(f(0))=h(-1)=1$이므로

$\lim_{x\to0}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(0)$

따라서 $(h\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1}(h\circ f)(x)=\lim_{x\to1}h(f(x))=\lim_{t\to0-}h(t)=0$

이고,

$(h\circ f)(1)=h(f(1))=h(1)=1$

이므로

$\lim_{x\to1}(h\circ f)(x)\ne(h\circ f)(1)$

따라서 $(h\circ f)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

$x\to-1$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to-1}(h\circ f)(x)=\lim_{x\to-1}h(f(x))=\lim_{t\to0+}h(t)=-1,$$

$(h\circ f)(-1)=h(f(-1))=h(0)=-1$

이므로

$\lim_{x\to-1}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(-1)$

따라서 $(h\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$\therefore b=1$

❸ (i), (ii)에서 $a+b=4$ 답 4

1등급 비밀노트

$y=f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, $y=g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이면 $y=(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$가 불연속인 점은 다음 두 가지 경우의 x의 값에서만 확인하면 된다.
① $y=f(x)$가 불연속인 점의 x의 값
② $y=g(x)$가 불연속인 점의 x의 값을 함숫값으로 갖는 $f(x)$의 x의 값

04

해결 단계

❶ 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위한 조건을 구한다.
❷ $f(x)=ax+b$로 놓고 $f(0)$을 구한다.
❸ $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓고 $f(0)$을 구한다.
❹ 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 ❶ 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1+}g(x)=\lim_{x\to-1-}g(x),\ \lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1-}g(x)$$

즉 $f(-1)=1$, $f(1)=-1$이다.

❷ ㄱ. $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\ne0$)라 하면

$f(-1)=-a+b=1$, $f(1)=a+b=-1$

$\therefore a=-1, b=0$

즉 $f(x)=-x$이므로 $f(0)=0$

❸ ㄴ. $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\ne0$)라 하면

$f(-1)=a-b+c=1$, $f(1)=a+b+c=-1$

$\therefore b=-1, c=-a$

즉 $f(x)=ax^2-x-a$이므로 $f(0)=-a$

그런데 $a\ne0$이므로 $f(0)$은 0을 제외한 모든 실수 값을 갖는다.

❹ ㄷ. $x<-1$ 또는 $x>1$에서 방정식 $g(-x)g(x)=0$은 근을 갖지 않는다. 따라서 $-1\le x\le1$에서 방정식 $g(-x)g(x)=f(-x)f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 방정식 $f(-x)f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 세 실근이 $-\alpha$, 0, α ($\alpha>0$)의 꼴이어야 한다. 즉 삼차함수 $f(x)$의 식은 다음과 같다.

(i) $f(x)=a(x-\alpha)x(x+\alpha)=ax^3-a\alpha^2x$ ($a\ne0$인 상수)라 하면

$f(-1)=-a+a\alpha^2=1$, $f(1)=a-a\alpha^2=-1$

따라서 $\alpha^2=\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}>0$에서 $\frac{1}{a}>-1$이므로

$a<-1$ 또는 $a>0$

(ii) $f(x)=ax^2(x-\alpha)=ax^3-a\alpha x^2$ ($a\ne0$인 상수)이라 하면

$f(-1)=-a-a\alpha=1$, $f(1)=a-a\alpha=-1$

따라서 $a=-1$, $\alpha=0$이므로 모순이다.

(iii) $f(x)=ax^2(x+\alpha)$ ($a\ne0$인 상수)라 하고 같은 방법으로 하면 $a=-1$, $\alpha=0$이므로 모순이다.

따라서 $a<-1$ 또는 $a>0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

Ⅱ 다항함수의 미분법

Ⅱ-1. 미분계수와 도함수

개념 & 핵심 기출

본책 30~32쪽

01 함수 $f(x)=2x+3$에 대하여 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은 직선 $y=f(x)$의 기울기와 같으므로 2

함수 $g(x)=ax^2+1$에 대하여 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{g(4)-g(2)}{4-2}=\frac{(16a+1)-(4a+1)}{2}=6a$$

따라서 $6a=2$이므로 $a=\frac{1}{3}$

답 ④

> 일차함수 $y=ax+b$에서 x가 α에서 β까지 변할 때의 평균변화율은 항상 a이다.

02 x의 값이 n에서 $n+1$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=f(n+1)-f(n)=2^n$$

따라서 x의 값이 1에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}$$
$$=\frac{1}{4}\{(f(5)-f(4))+(f(4)-f(3))+(f(3)-f(2))+(f(2)-f(1))\}$$
$$=\frac{1}{4}(2^4+2^3+2^2+2)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 30=\frac{15}{2}$$

답 $\frac{15}{2}$

03 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{15-3}{2}=6$$

$x=c$에서의 순간변화율은

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(c+h)^2+2(c+h)\}-(c^2+2c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ch+h^2+2h}{h}$$
$$=2c+2$$

따라서 $2c+2=6$이므로 $c=2$

답 2

04 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{3h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=\frac{2}{3}f'(a)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 3=2$$

답 ②

05 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}$$
$$=f'(2)\cdot\frac{1}{4}=4\cdot\frac{1}{4}=1$$

$x^2=t$로 놓으면 $x\to 2$일 때, $t\to 4$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x^2)-f(4)\}(x+2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\lim_{x\to 2}(x+2)$$
$$=\lim_{t\to 4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}\cdot 4$$
$$=4f'(4)$$
$$=4\cdot 10=40$$

> 분자, 분모에 각각 $x+2$를 곱한다.

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}+\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x-2}$$
$$=1+40=41$$

답 ③

06 $\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $h\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=f'(1)$$

따라서 $f'(1)=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{2}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot 2+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot 2$$
$$=2f'(1)+2f'(1)=4f'(1)$$
$$=4\cdot 4=16$$

답 16

> 함수 $f(x)$가 $x=a$에서
> ① 연속이면
> ➡ $f(a)$, $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하고, 두 값이 같다.
> ② 미분가능하면
> ➡ $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$의 값이 존재한다.

07 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로 $x=3$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3-}f(x)=f(3)$이므로

$$\lim_{x\to 3+}(-x^2)=\lim_{x\to 3-}(ax+b)=-9$$

$3a+b=-9$ $\quad\therefore b=-3a-9$ ...... ㉠

$f(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{-(3+h)^2-(-9)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}(-h-6)=-6$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{a(3+h)-3a-9-(-9)}{h}=a$$

> $b=-3a-9$이므로 b 대신 $-3a-9$를 대입한다.

에서 $a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면 $b=18-9=9$

$\therefore a+b=3$

답 3

08 $x \neq 3$일 때, $\quad h(x)=\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$
함수 $h(x)$는 $x=3$에서 미분가능하므로 $x=3$에서 연속이다. 즉

$$h(3)=\lim_{x\to3}h(x)=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$$

한편 $f'(3)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 기울기이고 이는 직선 $y=g(x)$의 기울기와 같으므로

두 점 $(0, -2)$, $(3, 2)$를 지난다.

$$f'(3)=\frac{2-(-2)}{3-0}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore h(3)=\frac{4}{3}$$

답 $\dfrac{4}{3}$

09 ㄱ. $x=3$인 점에서의 접선의 기울기가 양수이므로
$f'(3)>0$

$f'(3)$은 $x=3$인 점에서의 접선의 기울기와 같다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=4$, $x=6$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=4$, $x=6$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점은 3개이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

10 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에서

$$f(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{11\text{개}}=11$$

$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+10x^9$이므로

$$f'(1)=1+2+3+\cdots+10=55$$

$$\therefore f'(1)-f(1)=55-11=44$$

답 ④

11 $f(-1)=4$에서 $\quad a-b=4 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$f'(x)=2ax+b$이므로 $f'(1)=-1$에서
$2a+b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1, b=-3$

㉠+㉡을 하면
$3a=3 \quad \therefore a=1$
$a=1$을 $a-b=4$에 대입하면
$1-b=4 \quad \therefore b=-3$

$\therefore ab=-3$

답 ②

12 $f(x)=x^{2n}-x^n$으로 놓으면 $f(1)=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^{2n}-x^n}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\\&=f'(1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(1)\end{aligned}$$

이때 $f'(x)=2nx^{2n-1}-nx^{n-1}$에서 $\quad f'(1)=n$
즉 $\dfrac{1}{2}n=8$이므로 $\quad n=16$

답 16

13 $(x^2+x-1)f(x)=g(x) \quad \cdots\cdots$ ㉠
양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad f(1)=g(1)=3$
두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에서 미분가능하므로 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$(2x+1)f(x)+(x^2+x-1)f'(x)=g'(x)$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$$3f(1)+f'(1)=g'(1)$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1)&=g'(1)-3f(1)\\&=6-3\cdot3=-3\end{aligned}$$

답 ③

14 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-6}{x-1}=10$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.
즉 $\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)-6\}=0$이므로 $\quad f(1)=6$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-6}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=10\text{에서}$$

$f'(1)=10$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)-8}{x-1}=12$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.
즉 $\displaystyle\lim_{x\to1}\{g(x)-8\}=0$이므로 $\quad g(1)=8$

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-8}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=12\text{에서}$$

$g'(1)=12$

$y=f(x)g(x)$에서 $\quad y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
따라서 $y=f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(1)g(1)+f(1)g'(1)&=10\cdot8+6\cdot12\\&=152\end{aligned}$$

답 152

15 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x) \quad \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면 $\quad f(2)=0$

$16+2a+b=0$
$\therefore 2a+b=-16 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)$

양변에 $x=2$를 대입하면 $\quad f'(2)=0$
이때 $f'(x)=4x^3+a$이므로

$f'(2)=32+a=0 \quad \therefore a=-32$

$a=-32$를 ㉡에 대입하면

$-64+b=-16 \quad \therefore b=48$
$\therefore a+b=16$

답 ④

16 $f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)\cdot f(0) \quad \therefore f(0)=1$ ($\because f(0)>0$)

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 $f(0)>0$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)\{f(h)-1\}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)\{f(h)-f(0)\}}{h}\\&=f(x)f'(0)\end{aligned}$$

Ⅱ 다항함수의 미분법

$\therefore \dfrac{f'(x)}{f(x)}=f'(0)=3$ 답 3

17 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy$의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

$f'(0)=1$에서

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$$

즉 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$이므로

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2)+f(h)-4h\}-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-4h}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-4\\&=1-4=-3\end{aligned}$$

답 ①

18 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy(x+y)$의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

$f'(0)=4$에서

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$$

즉 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=4$이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-x^2=-x^2+4\end{aligned}$$

따라서 $f'(a)=-a^2+4$이므로 $f'(a)=0$에서

$-a^2+4=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 2

1등급을 위한 고난도 문제

본책 33~35쪽

01 함수 $f(x)=x^2+2x-2$의 그래프와 직선 $y=ax$가 만나는 두 점의 x좌표가 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$이므로 x의 값이 α에서 β까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha)),\ (\beta,\ f(\beta))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

$\therefore a=3$

함수 $f(x)=x^2+2x-2$의 그래프와 직선 $y=3x$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2+2x-2=3x, \qquad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

즉 $\alpha=-1,\ \beta=2\ (\because \alpha<\beta)$이므로

$\alpha+\beta=1$

따라서 x의 값이 0에서 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-(-2)=3$$

답 ③

일품 BOX

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여

$f(a)=b$

$\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

02 $f(a)=-1,\ f(b)=5$이므로

$g(-1)=a,\ g(5)=b$ ··· ❶

$f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{5-(-1)}{b-a}=\frac{6}{b-a}$$

즉 $\dfrac{6}{b-a}=3$이므로 $\quad b-a=2$ ······ ㉠ ··· ❷

$g(x)$에서 x의 값이 -1에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{g(5)-g(-1)}{5-(-1)}=\frac{b-a}{6}=\frac{1}{3}\ (\because ㉠)$$ ··· ❸

답 $\dfrac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $g(-1)=a,\ g(5)=b$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $a,\ b$ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $g(x)$에서 x의 값이 -1에서 5까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %

03 조건 (나)에서 $x\to3$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to3}\{f(x)-9\}=0$이므로 $\quad f(3)=9$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=6\text{에서}$$

$f'(3)=6$

조건 (가)에서 $f(-3)=f(3)=9$이므로

$$\begin{aligned}f'(-3)&=\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}\\&=\lim_{x\to-3}\frac{f(-x)-f(3)}{x+3}\end{aligned}$$

$-x=t$로 놓으면 $x\to-3$일 때, $t\to3$이므로

$$\begin{aligned}f'(-3)&=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{-t+3}\\&=-\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}\\&=-f'(3)=-6\end{aligned}$$

$\therefore f(3)+f'(-3)=3$ 답 3

0이 아닌 상수 $p,\ q$에 대하여

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+qh)-f(a)}{ph}$

$=\dfrac{q}{p}f'(a)$

04
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-(1-2h)f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+2hf(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{2hf(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2+2f(1)\\&=2f'(1)+2f(1)\\&=2\cdot5+2\cdot(-2)=6\end{aligned}$$

답 ②

05 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)-g(h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{2h}-\lim_{h\to0}\dfrac{g(h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot\dfrac{3}{2}-\lim_{h\to0}\dfrac{g(h)-g(0)}{h}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{2}f'(a)-\dfrac{1}{2}g'(0)=3-\dfrac{1}{2}g'(0)$

즉 $3-\dfrac{1}{2}g'(0)=0$이므로

$g'(0)=6$

답 6

$g(0)=0$이므로 $\dfrac{g(h)}{2h}=\dfrac{g(h)-g(0)}{h}\cdot\dfrac{1}{2}$

06 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(2-h)+4}{h}=1$에서 $h\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{h\to0}\{f(2-h)+4\}=0$이므로 $f(2)=-4$

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(2-h)+4}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{-h}\cdot(-1)$

$=-f'(2)$

즉 $-f'(2)=1$이므로 $f'(2)=-1$

$\therefore \lim_{x\to2}\dfrac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{xf(2)-2f(2)+2f(2)-2f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{(x-2)f(2)-2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$

$=f(2)-2f'(2)$

$=-4-2\cdot(-1)=-2$

답 ②

07 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{h\to0+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\dfrac{ah+1-1}{h}=a$

$\lim_{h\to0-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\dfrac{h^2+4h+1-1}{h}$

$=\lim_{h\to0-}(h+4)=4$

에서 $a=4$ ⋯ ❶

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $x=0$에서도 미분가능하다.

또 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다. 즉 $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to2+}(-x^2+bx+c)=\lim_{x\to2-}(4x+1)$

$-4+2b+c=9$

$\therefore 2b+c=13$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❷

$f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{h\to0+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\dfrac{-(2+h)^2+b(2+h)+c-9}{h}$

$=\lim_{h\to0+}(-h+b-4)=b-4$

$\lim_{h\to0-}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\dfrac{4(2+h)+1-9}{h}=4$

에서 $b-4=4$ $\therefore b=8$

$b=8$을 ㉠에 대입하여 풀면 $c=-3$ ⋯ ❸

$f(2)=\lim_{x\to2-}f(x)$에서

$f(2)=\lim_{x\to2-}(4x+1)$

$=9$

분자를 전개하면

$-h^2-4h-4+2b$
$+bh+c-9$
$=-h^2+(b-4)h$
$+2b+c-13$
$=-h^2+(b-4)h$
$(\because ㉠)$

$\therefore a+b+c=9$ ⋯ ❹

답 9

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	20 %
❸ b, c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

08 ㄱ. $f'(1)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{|1+h|-1}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{h}{h}=1$

이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{h\to0+}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\dfrac{|h|}{h}=\lim_{h\to0+}\dfrac{h}{h}=1$,

$\lim_{h\to0-}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\dfrac{|h|}{h}=\lim_{h\to0-}\dfrac{-h}{h}=-1$

이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{h\to0+}\dfrac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\dfrac{|h^2+h|}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\dfrac{h^2+h}{h}$

$=\lim_{h\to0+}(h+1)=1$,

$\lim_{h\to0-}\dfrac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\dfrac{|h^2+h|}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\dfrac{-h^2-h}{h}$

$=\lim_{h\to0-}(-h-1)=-1$

이므로 $k(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

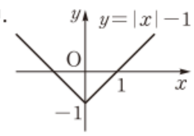
이상에서 $x=1$에서 미분가능하지 않은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

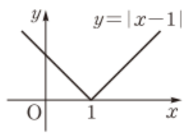
1등급 비밀노트

함수의 그래프를 그려서 함수의 연속과 미분가능 여부를 확인할 수 있다.

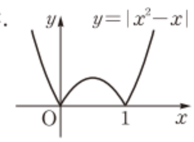
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



따라서 ㄱ은 $x=1$에서 미분가능하고, ㄴ, ㄷ은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

09 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 모든 실수 x에서 연속이다.

$f(x)$가 $x=-1$에서 연속이고, 조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^3+ax^2+bx)$$
$$=a-b-1$$
$$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}(x^3+ax^2+bx)$$
$$=a+b+1$$

즉 $a-b-1=a+b+1$이므로 $b=-1$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2-x$

조건 (나)에 의하여 $f(-1)=f(1)=a$이고, $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{x^3+ax^2-x-a}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+a)(x+1)(x-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}(x+a)(x-1)$$
$$=-2(a-1)$$

$x+2=t$로 놓으면 $x\to-1-$일 때, $t\to1-$이므로

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{f(t-2)-f(-1)}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{t^3+at^2-t-a}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{(t+a)(t+1)(t-1)}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to1-}(t+a)(t+1)$$
$$=2(a+1)$$

에서

$-2(a-1)=2(a+1)$ $\therefore a=0$

$\therefore a+b=-1$ 답 ②

일품 BOX

조건 (나)에 의하여 $f(1\pm a)=f(-1\pm a)$ (복호동순)

이므로 $\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)$, $\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)$

$f(x+2)=f(x)$에 $x=-1$을 대입하면 $f(1)=f(-1)$

조건 (나)에 의하여 $f(t-2)=f(t)$, $f(-1)=f(1)$

10 $\sqrt{x}=t$로 놓으면 $x\to4$일 때, $t\to2$이므로

$$\lim_{x\to4}\frac{f(\sqrt{x})-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{f(\sqrt{x})-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-2}{(t-2)(t+2)}$$

$t\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{t\to2}\{f(t)-2\}=0$이므로 $f(2)=2$

$\lim_{t\to2}\frac{f(t)-2}{(t-2)(t+2)}=\frac{1}{4}f'(2)=1$에서 $f'(2)=4$

$f(2)=8+4a+2b+2=2$이므로

$2a+b=-4$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$f'(2)=12+4a+b=4$

$\therefore 4a+b=-8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=0$

따라서 $f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(3)=27-12=15$ 답 15

11 x L의 샴푸를 생산할 때의 한계 생산 비용은

$f'(x)=-\frac{1}{6}x+a$ (원)

$f'(900)=100$에서 $-\frac{1}{6}\cdot900+a=100$

$\therefore a=250$

따라서 $f'(x)=-\frac{1}{6}x+250$이므로

$p=f'(1200)=-\frac{1}{6}\cdot1200+250=50$ 답 50

12 $f_n(x)=nx^n$에서

$f_n(1)=n$, $f_n'(x)=n^2x^{n-1}$

$$\therefore \lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{10}\frac{f_n(x)-n}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{10}\frac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f_1(x)-f_1(1)}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{f_2(x)-f_2(1)}{x-1}$$
$$+\cdots+\lim_{x\to1}\frac{f_{10}(x)-f_{10}(1)}{x-1}$$
$$=f_1'(1)+f_2'(1)+\cdots+f_{10}'(1)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}f_n'(1)=\sum_{n=1}^{10}n^2$$
$$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}=385$$ 답 ⑤

1등급 비밀노트

$x=a$에서 연속인 함수 $f_n(x)$ (n은 자연수)에 대하여

$$\lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=\lim_{x\to a}\{f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)\}$$
$$=\lim_{x\to a}f_1(x)+\lim_{x\to a}f_2(x)+\lim_{x\to a}f_3(x)$$
$$+\cdots+\lim_{x\to a}f_n(x)$$
$$=f_1(a)+f_2(a)+f_3(a)+\cdots+f_n(a)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}f_k(a)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to a}f_k(x)$$

13 $f'(x)=3x^2-2xf'(1)+6$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=3-2f'(1)+6$ $\therefore f'(1)=3$

따라서 $f'(x)=3x^2-6x+6$이므로

$f'(2)=12-12+6=6$

$\therefore f'(1)\cdot f'(2)=18$ 답 18

다른 풀이 $f'(1)=a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^3-ax^2+6x$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+6$

따라서 $f'(1)=9-2a$이므로 $a=9-2a$

$\therefore a=3$

$\therefore f'(x)=3x^2-6x+6$

14 $f(x)=x^2-4x$에서

$f'(x)=2x-4$ ⋯ ❶

이를 주어진 등식에 대입하면

$x(2x-4)+a(x^2-4x)-4x=0$

$(a+2)x^2-4(a+2)x=0$ ⋯ ❷

위의 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a+2=0 \quad \therefore a=-2$ ⋯ ❸

답 -2

$ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 등식을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

15 $f(x)=ax^n$에서 $\quad g(x)=f'(x)=anx^{n-1}$

$\therefore g'(x)=an(n-1)x^{n-2}$

$\{g(x)\}^2=\{g'(x)\}^3$에서

$(anx^{n-1})^2=\{an(n-1)x^{n-2}\}^3$

$\therefore a^2n^2x^{2(n-1)}=a^3n^3(n-1)^3x^{3(n-2)}$

이때 $a\neq0$이므로 $\quad an(n-1)^3x^{n-4}=1$

위의 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$n-4=0,\ an(n-1)^3=1$

$x^0=1$

$n=4$이므로

$$a=\frac{1}{n(n-1)^3}=\frac{1}{4\cdot3^3}=\frac{1}{108}$$

답 ①

16 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+ax+b$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

점 $(2, -3)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(2)=-3 \quad \therefore 2a+b=-3$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$

점 $(2, -3)$에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(2)=4 \quad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하여 풀면 $\quad b=-11$

따라서 $R(x)=4x-11$이므로 ⋯ ❷

$R(5)=20-11=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 $(x-2)^2$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $R(x)$를 구할 수 있다.	50%
❸ $R(5)$의 값을 구할 수 있다.	20%

17 방정식 $f(x)=1$의 세 실근이 0, 1, 2이므로

$f(x)-1=kx(x-1)(x-2)$ (k는 실수)

로 놓을 수 있다.

$f(x)=0$의 한 실근이 $x=a$이면 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.

즉 $f(x)=kx(x-1)(x-2)+1$에서

$f'(x)=k(x-1)(x-2)+kx(x-2)+kx(x-1)$

$=3kx^2-6kx+2k$

$f'(0)=2k=2$이므로 $\quad k=1$

따라서 $f'(x)=3x^2-6x+2$이므로

$f'(1)+f'(2)=-1+2=1$

답 ①

18 $\lim_{x\to1}\frac{f(x+2)-6}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x+2)-6\}=0$이므로 $\quad f(3)=6$

$x+2=t$로 놓으면 $x\to1$일 때, $t\to3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x+2)-6}{x-1}=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}=2$$

에서 $\quad f'(3)=2$

또 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x+4)g(x+4)-12}{x+1}=8$에서 $x\to-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}\{f(x+4)g(x+4)-12\}=0$이므로

$f(3)g(3)=12 \quad \therefore g(3)=2$ ($\because f(3)=6$)

$h(x)=f(x)g(x)$라 하고 $x+4=s$로 놓으면 $x\to-1$일 때, $s\to3$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x+4)g(x+4)-12}{x+1}$$

$$=\lim_{s\to3}\frac{f(s)g(s)-f(3)g(3)}{s-3}$$

$$=\lim_{s\to3}\frac{h(s)-h(3)}{s-3}=8$$

에서 $\quad h'(3)=8$

한편 $h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이므로 $\quad h'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)$

$8=2\cdot2+6g'(3) \quad \therefore g'(3)=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

19 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1$

ㄱ. $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$의 양변에 $y=-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x)-2x^2-1$

$1=f(x)+f(-x)-2x^2-1$

$\therefore f(x)+f(-x)=2x^2+2$

ㄴ. $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=3$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-1}{h}+2x\right\}$$

$=2x+3$

$\therefore f'(1)+f'(-1)=5+1=6$

ㄷ. $\lim_{h\to0} f(a+h)=\lim_{h\to0}\{f(a)+f(h)+2ah-1\}$

$=f(a)+f(0)-1$

$=f(a)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

함수 $f(x)$가 미분가능하면 연속이므로 $\lim_{h\to0} f(h)=f(0)=1$

20 조건 ㈎에서 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$g(0)=2f(0)g(0)=2g(0)$ ($\because f(0)=1$)

$\therefore g(0)=0$

$\therefore g'(0)=\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(0)g(h)+g(0)f(h)-g(0)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$

$f(0)=1$, $g(0)=0$이므로 $f(0)g(h)+g(0)f(h)-g(0)=g(h)$

즉 $\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}=-1$이고, 조건 ㈏에서 $f'(0)=g(0)=0$이므로

$g'(x)=\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)g(h)+g(x)f(h)-g(x)}{h}$

$=f(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}+g(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$

$=f(x)\cdot(-1)+g(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$=-f(x)+g(x)f'(0)$

$=-f(x)$ 답 ①

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 36쪽

01 x의 값이 1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{(4a+2b)-(a+b)}{2-1}$

$=3a+b$

즉 $3a+b=0$이므로 $b=-3a$

$f(x)=ax^2-3ax$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{f(1+h)-f(1)}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}}{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\cdot2}{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}}$

$=\frac{2f'(3)}{f'(1)}$

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$이면 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq0$)

이때 $f'(x)=2ax-3a$이므로

$f'(1)=-a$, $f'(3)=3a$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{2f'(3)}{f'(1)}=\frac{6a}{-a}=-6$ 답 -6

02 ㄱ. $h(x)=(x-2)f(x)$라 하자.

$\lim_{x\to2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+} f(x)=-2$

$\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-} f(x)=2$

이므로 함수 $(x-2)f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $k(x)=f(x)g(x)$라 하자.

$\lim_{x\to2+}\frac{k(x)-k(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)g(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{(2x-4)f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+} 2f(x)$

$=2\cdot(-2)=-4$

$\lim_{x\to2-}\frac{k(x)-k(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{f(x)g(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{(-2x+4)f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-}\{-2f(x)\}$

$=(-2)\cdot2=-4$

이므로 $k'(2)=-4$

즉 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

ㄷ. $l(x)=(x-2)f(x)+g(x)$라 하자.

$\lim_{x\to2+}\frac{l(x)-l(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)f(x)+g(x)-g(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)f(x)+g(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)f(x)+(2x-4)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)\{f(x)+2\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}\{f(x)+2\}$

$=-2+2=0$

$\lim_{x\to2-}\frac{l(x)-l(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)f(x)+g(x)-g(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)f(x)+g(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)f(x)-(2x-4)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)\{f(x)-2\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-}\{f(x)-2\}$

$=2-2=0$

이므로 $l'(2)=0$

즉 함수 $(x-2)f(x)+g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

이상에서 $x=2$에서 미분가능한 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

03 조건 (나)에서 $(x-1)f'(x)=x^3+3x^2-4x-2f(x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-2f(1)\quad \therefore f(1)=0$

$x\neq1$일 때, $\quad f'(x)=\dfrac{x^3+3x^2-4x-2f(x)}{x-1}$

조건 (가)에서 $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f'(1)$
$=\lim\limits_{x\to1}f'(x)$
$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x+4)(x-1)-2f(x)}{x-1}$
$=\lim\limits_{x\to1}x(x+4)-2\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\ (\because f(1)=0)$
$=5-2f'(1)$

즉 $f'(1)=5-2f'(1)$에서

$3f'(1)=5\qquad \therefore f'(1)=\dfrac{5}{3}$

따라서 $m=3$, $n=5$이므로

$m^2+n^2=9+25=34$ 답 34

> 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.
> ➡ $f(a)$와 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 각각 존재하고 $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 성립한다.

04 함수 $g(x)$가 다항함수이므로 $g'(x)$가 존재하고 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$가 성립한다.

> 다항함수는 연속함수이다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=0\quad \therefore g(0)=0$ …… ㉠

또 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$1=\lim\limits_{x\to1-}g(x)\quad \therefore g(1)=1$ …… ㉡

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능해야 하므로

$\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{g(h)-g(0)}{h}$
$=g'(0)\ (\because f(0)=g(0)=0)$

$\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{0-0}{h}=0$

에서 $\quad g'(0)=0$ …… ㉢

또 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능해야 하므로

$\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{1-1}{h}=0$

$\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}$
$=g'(1)\ (\because f(1)=g(1)=1)$

에서 $\quad g'(1)=0$ …… ㉣

㉠, ㉢에서 함수 $g(x)$는 x^2으로 나누어떨어지므로

$g_1(x)=x^2(ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓으면 ㉡에서

$a+b=1$ …… ㉤

$g_1'(x)=2x(ax+b)+x^2\cdot a=3ax^2+2bx$이므로 ㉣에서

$g_1'(1)=3a+2b=0$ …… ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=3$

따라서 $g_1(x)=x^2(-2x+3)$이므로

$g_1(2)=-4$ 답 -4

> $g_1(x)=ax^2$으로 놓으면 $g_1(1)=1$에서 $\quad a=1$
> 이때 $g_1'(x)=2x$이고, $g_1'(1)=2$가 되어 ㉣을 만족시키지 않는다.

1등급 비밀노트

$f(x)\neq0$인 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$, $f'(a)=0$이면 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.
따라서 $f(x)=(x-a)^2g(x)$ 꼴로 놓을 수 있다.

05 $g(x)=(2x^2-x)f(x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=f(1)$

$\therefore \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-g(1-h)}{2h}$
$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)+g(1)-g(1-h)}{h}$
$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}+\dfrac{g(1-h)-g(1)}{-h}\right\}$
$=\dfrac{1}{2}\{f'(1)+g'(1)\}$

즉 $\dfrac{1}{2}\{f'(1)+g'(1)\}=23$이므로

$f'(1)+g'(1)=46$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax$,

$g'(x)=(4x-1)f(x)+(2x^2-x)f'(x)$이므로

$f'(1)=2a+3$

$g'(1)=3f(1)+f'(1)=3(a+4)+2a+3$
$=5a+15$

$\therefore f'(1)+g'(1)=7a+18$

즉 $7a+18=46$이므로 $\quad 7a=28$

$\therefore a=4$ 답 ④

> 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 a이다.
> ➡ $x=a$가 방정식 $f(x)=k$의 해이다.

06 방정식 $f(x)=k$의 세 실근이 α, β, γ이므로

$f(x)-k=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

로 놓을 수 있다.

따라서 $f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+k$에서

$f'(x)=2(x-\beta)(x-\gamma)+2(x-\alpha)(x-\gamma)$
$+2(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore f'(\beta)=2(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)$

이때 $\beta-\alpha=\overline{AB}=3$, $\gamma-\beta=\overline{BC}=4$이므로

$f'(\beta)=2\cdot3\cdot(-4)=-24$ 답 ⑤

Ⅱ-2. 도함수의 활용 (1)

개념&핵심 기출

본책 38~39쪽

01 $f(x)=x^3-3x^2+2x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+2$

$f(2)=a$이고 점 $(2,\ a)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=2$

따라서 접선의 방정식은

$y-a=2(x-2)$, 즉 $y=2x-4+a$

이 직선이 원점을 지나므로

$-4+a=0 \qquad \therefore a=4$

답 4

02 점 $(1,\ 3)$이 곡선 $y=x^3+ax^2+b$ 위의 점이므로

$3=1+a+b \qquad \therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f(x)=x^3+ax^2+b$라 하면 $\qquad f'(x)=3x^2+2ax$

점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=2a+3$

따라서 접선의 방정식은

$y-3=(2a+3)(x-1)$, 즉 $y=(2a+3)x-2a$

이 직선의 y절편이 4이므로

$-2a=4 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $\qquad -2+b=2 \qquad \therefore b=4$

$\therefore ab=-8$

답 ②

03 $f(x)=-x^3+2x+3$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+2$

점 $\mathrm{P}(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $\qquad f'(1)=-1$

따라서 접선 l의 방정식은

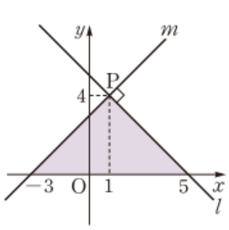
$y-4=-(x-1)$, 즉 $y=-x+5$

직선 m은 기울기가 1이고 점 $\mathrm{P}(1,\ 4)$를 지나므로 직선 m의 방정식은

$y-4=x-1$, 즉 $y=x+3$

따라서 두 직선 l, m은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4=16$



답 16

04 $f(x)=x^3-2x$라 하면 $\qquad f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $\tan 45°=1$이므로

$f'(a)=3a^2-2=1, \qquad a^2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 접점의 좌표가 $(-1,\ 1)$, $(1,\ -1)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=x+1 \qquad \therefore x-y+2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$y+1=x-1 \qquad \therefore x-y-2=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

두 직선 사이의 거리는 직선 ㉠ 위의 점 $(0,\ 2)$와 직선 ㉡ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

답 ④

05 $f(x)=x^3+3x^2-5x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-5$

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=3t^2+6t-5=4$

$3t^2+6t-9=0, \qquad 3(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

즉 접점의 좌표는 $(-3,\ a+15)$, $(1,\ a-1)$이고 접선의 방정식은 $y=4x-3$이므로

$a+15=-15,\ a-1=1$

$\therefore a=-30$ 또는 $a=2$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$-30+2=-28$

답 -28

06 $f(x)=x^3+ax^2+3x-2$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

접점의 x좌표를 t라 할 때, 직선 $y=-x+3$과 평행한 접선이 존재하지 않으려면 $f'(t)=-1$인 실수 t의 값이 존재하지 않아야 한다.

$f'(t)=3t^2+2at+3=-1$에서

$3t^2+2at+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-12<0$

$\therefore -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

따라서 정수 a의 값은 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 7개이다.

답 ④

07 $f(x)=-x^2+2x+3$이라 하면

$f'(x)=-2x+2$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+2a+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=-2a+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-a^2+2a+3)=(-2a+2)(x-a)$, 즉

$y=(-2a+2)x+a^2+3$

이 직선이 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$4=(-2a+2)\cdot 2+a^2+3$

$a^2-4a+3=0, \qquad (a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

따라서 접점의 좌표가 $(1,\ 4)$, $(3,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(3-1)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$

답 ⑤

08 $f(x)=x^3-6x^2+x-6$이라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+1$

일품 BOX

직선 $ax+by+c=0$과 점 $(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는

$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$가

① 평행하다 ➡ $a=c,\ b\neq d$

② 일치한다 ➡ $a=c,\ b=d$

③ 수직이다 ➡ $ac=-1$

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

접점의 좌표를 (t, t^3-6t^2+t-6)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-12t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-6t^2+t-6)=(3t^2-12t+1)(x-t)$, 즉

$y=(3t^2-12t+1)x-2t^3+6t^2-6$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-2t^3+6t^2-6,\quad t^3-3t^2+4=0$

$(t+1)(t-2)^2=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

$f'(-1)=16,\ f'(2)=-11$이므로 기울기가 양수인 접선 l의 방정식은 $t=-1$일 때이다.

$t=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=16x+2$

이때 직선 l이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$0=16a+2\quad \therefore a=-\frac{1}{8}$ 답 ⑤

09 $f(x)=x^3-3x+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-3$

접점의 좌표를 (a, a^3-3a+4)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-3a+4)=(3a^2-3)(x-a)$, 즉

$y=(3a^2-3)x-2a^3+4$

이 직선이 점 $(2, k)$를 지나므로

$k=(3a^2-3)\cdot 2-2a^3+4$

$\therefore 2a^3-6a^2+k+2=0$

따라서 세 접점의 x좌표의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{k+2}{2}=-3\quad \therefore k=4$ 답 ①

10 $f(x)=x^2-5x,\ g(x)=-x^3-3$이라 하면

$f'(x)=2x-5,\ g'(x)=-3x^2$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(t)=g(t)$에서 $\quad t^2-5t=-t^3-3$

$t^3+t^2-5t+3=0,\quad (t+3)(t-1)^2=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 2t-5=-3t^2$

$3t^2+2t-5=0,\quad (3t+5)(t-1)=0$

$\therefore t=-\frac{5}{3}$ 또는 $t=1$

따라서 $t=1$일 때, 점 $(1, -4)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(1)=g'(1)=-3$이므로 공통인 접선 l의 방정식은

$y-(-4)=-3(x-1)$, 즉 $y=-3x-1$

직선 l의 x절편은 $-\frac{1}{3}$, y절편은 -1이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

일품 BOX

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 6]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 6)$에서 미분가능하다.

삼차방정식
$ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 실근을 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$,
$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

$f(-x)=f(x)$

11 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-6x+2$에서

$f(0)=2,\ f(6)=72-36-36+2=2$

이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0, 6)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=x^2-2x-6$이므로

$f'(c)=c^2-2c-6=0\quad \therefore c=1\pm\sqrt{7}$

이때 $0<c<6$이므로 $\quad c=1+\sqrt{7}$ 답 ④

1등급을 위한 고난도 문제

본책 40~43쪽

01 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{\sqrt{x+2}-2}=12$에서 $x\to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$에서

$f(2)=3$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{\sqrt{x+2}-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{\sqrt{x+2}-2}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)-f(2)\}(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+2}+2)\\&=4f'(2)\end{aligned}$$

즉 $4f'(2)=12$이므로

$f'(2)=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$f(-2)=f(2)=3$

$$\begin{aligned}\therefore f'(-2)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}\\&=-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\\&=-f'(2)=-3\end{aligned}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=-3(x+2)$, 즉 $y=-3x-3$ 답 ②

1등급 비밀노트

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-x)=f(x)$가 성립하면

$$\begin{aligned}f'(-x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\\&=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\\&=-f'(x)\end{aligned}$$

02 $y=xf(x)$에서 $\quad y'=f(x)+xf'(x)$

Ⅱ 다항함수의 미분법

곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$, 즉 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$$f(1)+f'(1)=3+0=3$$

따라서 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$$y-3=3(x-1),\ 즉\ y=3x$$

이 접선이 점 $(a,\ 6)$을 지나므로

$$6=3a \qquad \therefore a=2$$

답 2

03 $f'(x)=3x^2-6x+4$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선 l_1과 점 $\mathrm{B}(a+2,\ f(a+2))$에서의 접선 l_2가 서로 평행하므로 두 접선 $l_1,\ l_2$의 기울기가 서로 같다.

즉 $f'(a)=f'(a+2)$이므로

$$3a^2-6a+4=3(a+2)^2-6(a+2)+4$$

$$12a=0 \qquad \therefore a=0$$

따라서 두 접점의 좌표는 $\mathrm{A}(0,\ -1)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$이다.

점 $\mathrm{A}(0,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=4$이므로 접선 l_1의 방정식은

$$y+1=4x,\ 즉\ y=4x-1$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$$

점 $\mathrm{B}(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 접선 l_2의 방정식은

$$y-3=4(x-2),\ 즉\ y=4x-5$$

$$\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=1$$

답 ②

04 $g(x)=x^3+3x^2$이라 하면 $\quad g'(x)=3x^2+6x$

점 $\mathrm{P}(t,\ t^3+3t^2)$에서의 접선의 기울기는

$$g'(t)=3t^2+6t$$

따라서 직선 l은 기울기가 $-\dfrac{1}{3t^2+6t}$이고 점 $\mathrm{P}(t,\ t^3+3t^2)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$$y-(t^3+3t^2)=-\frac{1}{3t^2+6t}(x-t),\ 즉$$

$$y=-\frac{1}{3t^2+6t}x+\frac{1}{3t+6}+t^3+3t^2$$

$x=0$일 때 $y=\dfrac{1}{3t+6}+t^3+3t^2$이므로

$$f(t)=\frac{1}{3t+6}+t^3+3t^2$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{3t+6}+t^3+3t^2\right)=\frac{1}{6}$$

답 ①

05 $f'(x)=3x^2,\ g'(x)=3x^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ a^3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2$이므로 접선의 방정식은

$$y-a^3=3a^2(x-a),\ 즉\ y=3a^2x-2a^3$$

일품 **BOX**

$a=b$이면 ㉡을 만족시키는 a가 존재하지 않는다.

$a=-b$를 ㉡에 대입하면

$-2(-b)^3=-2b^3+32$

$4b^3=32,\quad b^3=8$

$\therefore b=2$

이것을 $a=-b$에 대입하면 $\quad a=-2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(b,\ b^3+32)$에서의 접선의 기울기는 $g'(b)=3b^2$이므로 접선의 방정식은

$$y-(b^3+32)=3b^2(x-b),\ 즉\ y=3b^2x-2b^3+32$$

이때 두 접선이 일치하므로

$$3a^2=3b^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$-2a^3=-2b^3+32 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서

$$a=-b\ (\because a\neq b)$$

$a=-b$와 ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-2,\ b=2$$

$$\therefore a^2+b^2=4+4=8$$

답 8

06 $f(x)=-x^3-6x^2-9x+1$이라 하면

$$f'(x)=-3x^2-12x-9$$

$$=-3(x+2)^2+3$$

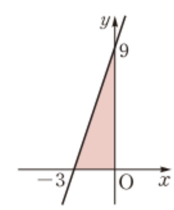
따라서 $x=-2$일 때 $f'(x)$는 최댓값 3을 가지므로 기울기가 최대인 접선의 접점의 좌표는 $(-2,\ f(-2))$, 즉 $(-2,\ 3)$이고 접선의 기울기는 3이다.

따라서 접선의 방정식은

$$y-3=3(x+2),\ 즉\ y=3x+9$$

이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 9=\frac{27}{2}$$



답 ④

07 구하는 최솟값은 곡선의 접선 중 기울기가 2인 접선의 접점과 직선 $y=2x-9$, 즉 $2x-y-9=0$ 사이의 거리의 최솟값과 같다.

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+2x$라 하면

$$f'(x)=x^3-4x+2$$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{1}{4}a^4-2a^2+2a\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$a^3-4a+2=2, \qquad a^3-4a=0$$

$$a(a+2)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-2\ 또는\ a=0\ 또는\ a=2$$

(i) $a=-2$일 때,

접점 $(-2,\ -8)$에서 직선 $2x-y-9=0$까지의 거리는

$$\frac{|-4+8-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

(ii) $a=0$일 때,

접점 $(0,\ 0)$에서 직선 $2x-y-9=0$까지의 거리는

$$\frac{|-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$$

(iii) $a=2$일 때,

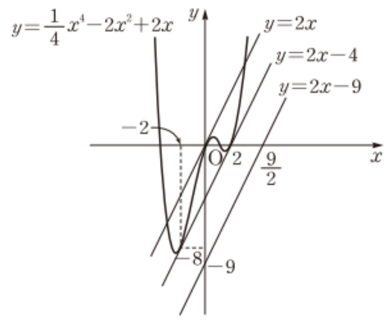
접점 $(2,\ 0)$에서 직선 $2x-y-9=0$까지의 거리는

$$\frac{|4-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

이상에서 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

답 ①

참고 곡선 $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+2x$의 그래프와 그 위의 세 점 $(-2, -8)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$에서의 접선, 직선 $y=2x-9$의 그래프는 다음과 같다.



1등급 비밀노트

곡선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값 구하기

(ⅰ) 곡선의 접선 중 주어진 직선과 평행한 접선의 접점의 좌표를 구한다.

(ⅱ) (ⅰ)에서 구한 접점과 주어진 직선 사이의 거리의 최솟값이 구하는 거리의 최솟값임을 이용한다.

08 △APB의 넓이가 최대일 때 □OAPB의 넓이도 최대이고, 점 P에서의 접선이 직선 AB에 평행할 때 △APB의 넓이가 최대가 된다. ⋯ ❶

직선 AB의 기울기는

$\frac{16-0}{0-2}=-8$ ⋯ ❷

$f(x)=x^3-6x^2+16$이라 하면

$f'(x)=3x^2-12x$

점 $P(a, a^3-6a^2+16)$에서의 접선의 기울기가 -8이어야 하므로

$f'(a)=3a^2-12a=-8$

$3a^2-12a+8=0$

$\therefore a=\frac{6-2\sqrt{3}}{3}=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $(\because 0<a<2)$ ⋯ ❸

따라서 $p=2$, $q=-\frac{2}{3}$이므로

$p+q=\frac{4}{3}$ ⋯ ❹

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ 점 P에서의 접선이 $\overline{AB}$에 평행할 때, □OAPB의 넓이가 최대임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\overline{AB}$의 기울기를 구할 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 △PQR의 넓이가 최대일 때 S_1+S_2의 값이 최소이고, 점 R에서의 접선이 직선 PQ에 평행할 때 △PQR의 넓이가 최대가 된다.

직선 PQ의 기울기는

$\frac{20-0}{3-1}=10$

$f(x)=x^3-12x^2+45x-34$라 하면

$f'(x)=3x^2-24x+45$

점 R에서의 접선의 기울기가 10이어야 하므로

$f'(t)=3t^2-24t+45=10$

$3t^2-24t+35=0$

$\therefore t=\frac{12-\sqrt{39}}{3}$ $(\because 1<t<3)$

답 ③

10 $f(x)=x^3-6x^2+10x$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+10$

기울기가 -2인 접선의 접점을 $(a, f(a))$라 하면

$f'(a)=3a^2-12a+10=-2$

$3(a-2)^2=0$ $\therefore a=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 4)$이다.

접점 $(2, 4)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점 $(2+m, 4+n)$이 직선 $y=-2x+3$ 위에 있으므로

$4+n=-2(2+m)+3$ $\therefore n=-2m-5$

$\therefore m^2+n^2=m^2+(-2m-5)^2$

$=5m^2+20m+25$

$=5(m+2)^2+5$

따라서 m^2+n^2은 $m=-2$, $n=-1$일 때 최솟값 5를 갖는다.

답 5

점 (x, y)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점은
$(x+m, y+n)$

$m=-2$를 $n=-2m-5$에 대입하면
$n=-2\cdot(-2)-5$
$=-1$

1등급 비밀노트

곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=ax+b$와 접한다.

➡ 기울기가 a인 접선을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $y=ax+b$와 일치한다.

➡ 곡선 $y=f(x)$와 기울기가 a인 접선의 접점을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $y=ax+b$ 위에 있다.

11 $f(x)=x^n$이라 하면 $f'(x)=nx^{n-1}$

접점의 좌표를 (a, a^n)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=na^{n-1}$이므로 접선의 방정식은

$y-a^n=na^{n-1}(x-a)$

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$-a^n=na^{n-1}(1-a)$, $a^{n-1}(n-na+a)=0$

$a>0$이므로

$n-na+a=0$ $\therefore a=\frac{n}{n-1}$

따라서 $g(n)=na^{n-1}=n\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$이므로

$\sum_{n=2}^{10}\log g(n)=\sum_{n=2}^{10}\log\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$

$=\sum_{n=2}^{10}\{n\log n-(n-1)\log(n-1)\}$

$=(2\log 2-0)+(3\log 3-2\log 2)$
$+\cdots+(10\log 10-9\log 9)$

$=10\log 10=10$

답 10

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

② $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

Ⅱ 다항함수의 미분법

12 $f(x)=-x^2+3$이라 하면 $\quad f'(x)=-2x$

점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $\quad f'(-1)=2$

$g(x)=x^3-ax+20$이라 하면

$$g'(x)=3x^2-a$$

접점의 좌표를 $(t,\ g(t))$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$g'(t)=3t^2-a=2$$

$$\therefore a+2=3t^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 두 점 $(-1, 2)$, $(t, t^3-at+20)$을 지나는 직선의 기울기가 접선의 기울기 2와 같으므로

$$\frac{t^3-at+20-2}{t-(-1)}=2$$

$$t^3-(a+2)t+16=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

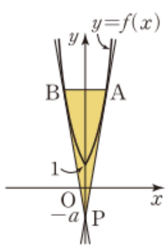
$\dfrac{t^3-at+20-2}{t-(-1)}=2$에서
$\dfrac{t^3-at+18}{t+1}=2$
$t^3-at+18=2t+2$
$\therefore t^3-(a+2)t+16=0$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$t^3-3t^3+16=0, \qquad t^3=8 \qquad \therefore t=2$$

$t=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad a=10$ 답 ②

13 $f(x)=(x+1)^2\ (x\geq 0)$에서



$$f'(x)=2(x+1)\ (x>0)$$

접점 A의 좌표를 $(t,\ (t+1)^2)\ (t>0)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2(t+1)$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t+1)^2=2(t+1)(x-t),\ 즉$$
$$y=2(t+1)x-t^2+1$$

이 접선이 점 $P(0, -a)$를 지나므로

$$-a=-t^2+1 \qquad \therefore t=\sqrt{a+1}\ (\because t>0)$$

따라서 접점 A의 좌표는

$$(\sqrt{a+1},\ (\sqrt{a+1}+1)^2),\ 즉$$
$$(\sqrt{a+1},\ a+2+2\sqrt{a+1})$$

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 접점 B의 좌표는

$$(-\sqrt{a+1},\ a+2+2\sqrt{a+1})$$

$$\therefore S(a)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a+1}\cdot\{(a+2+2\sqrt{a+1})+a\}$$
$$=2(a+1)(1+\sqrt{a+1})$$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{S(a)}{a\sqrt{a}}=\lim_{a\to\infty}\frac{2(a+1)(1+\sqrt{a+1})}{a\sqrt{a}}$$
$$=\lim_{a\to\infty}2\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{1+\frac{1}{a}}\right)$$
$$=2(1+0)(0+1)=2$$

답 ④

1등급 비밀노트

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 직선 PA와 직선 PB도 y축에 대하여 대칭이고 점 A와 점 B도 y축에 대하여 대칭이다.

14 $\dfrac{b}{a}$는 원점과 점 $P(a, b)$를 잇는 직선의 기울기이므로 $\dfrac{b}{a}$의 값이 최소인 경우는 직선 OP와 곡선 $y=x^2+2x+4$가 접할 때이다.

$f(x)=x^2+2x+4$라 하면

$$f'(x)=2x+2$$

접점 $P(a, b)$, 즉 (a, a^2+2a+4)에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a+2$이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^2+2a+4)=(2a+2)(x-a),\ 즉$$
$$y=(2a+2)x-a^2+4$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-a^2+4=0, \qquad a^2=4$$
$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

따라서 $a=2$, $b=2^2+2\cdot 2+4=12$이므로

$$a+b=14$$

답 14

15 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2$이라 하면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2}x$

점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\quad f'(2)=1$

따라서 직선 l의 방정식은

$$y-1=x-2,\ 즉\ y=x-1$$

점 P는 직선 l과 직선 $y=-2$의 교점이므로

$$P(-1, -2) \qquad \cdots ❶$$

점 P에서 곡선 $y=\dfrac{1}{4}x^2$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(a, \dfrac{1}{4}a^2\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=\dfrac{1}{2}a$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{2}a(x-a),\ 즉\ y=\frac{1}{2}ax-\frac{1}{4}a^2$$

이 직선이 점 $P(-1, -2)$를 지나므로

$$-2=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}a^2, \qquad a^2+2a-8=0$$
$$(a+4)(a-2)=0$$
$$\therefore a=-4\ 또는\ a=2$$

따라서 접점의 좌표는 $(-4, 4)$, $(2, 1)$이다. $\cdots$ ❷

이때 직선 m의 접점은 $(-4, 4)$이므로 구하는 기울기는

$$\frac{1}{2}\cdot(-4)=-2 \qquad \cdots ❸$$

답 -2

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 P에서 곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ 직선 m의 기울기를 구할 수 있다.	20 %

16 조건 (가)에 의하여 $f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)로 놓으면

$f(-x)=-f(x)$가 성립하므로 $f(x)$는 기함수이다.

$$f'(x)=3x^2+a$$

점 $(0, -16)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+at)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+a$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+at)=(3t^2+a)(x-t),\ 즉$$
$$y=(3t^2+a)x-2t^3$$

이 직선이 점 $(0,\ -16)$을 지나므로

$-2t^3=-16,\quad t^3=8\quad \therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 8+2a)$이고 이 점이 x축 위에 있으므로

$8+2a=0\quad \therefore a=-4$

따라서 $f(x)=x^3-4x$이므로

$f(3)=27-12=15$

답 ③

17 $f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+2)=(3t^2-6t)(x-t)$, 즉

$y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+2$

이 직선이 점 $(a,\ 2)$를 지나므로

$2=(3t^2-6t)a-2t^3+3t^2+2$

$2t^3-3(a+1)t^2+6at=0$

$t\{2t^2-3(a+1)t+6a\}=0$

접선이 오직 한 개 존재하려면 접점이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 방정식이 한 개의 실근을 가져야 한다.

이때 접선이 오직 한 개 존재하려면 이차방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=9(a+1)^2-48a<0,\quad 9a^2-30a+9<0$

$3a^2-10a+3<0,\quad (3a-1)(a-3)<0$

$\therefore \frac{1}{3}<a<3$

답 ①

1등급 비밀노트 »»

방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$이 $t=0$을 중근으로 가지면 접선이 오직 하나 존재하게 된다. 그러나 $-3(a+1)=0$, $6a=0$을 모두 만족시키는 a의 값이 존재하지 않으므로 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$이 허근을 갖는 경우만 생각한다.

18 $f(x)=-x^3+ax+3,\ g(x)=x^2+2$라 하면

$f'(x)=-3x^2+a,\ g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(t)=g(t),\ f'(t)=g'(t)$ ⋯ ❶

$f(t)=g(t)$에서

$-t^3+at+3=t^2+2$

$\therefore t^3+t^2-at-1=0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad -3t^2+a=2t$

$\therefore a=3t^2+2t$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3+t^2-3t^3-2t^2-1=0,\quad 2t^3+t^2+1=0$

$(t+1)(2t^2-t+1)=0$

$\therefore t=-1$ ($\because 2t^2-t+1>0$)

$2t^2-t+1=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면 $\quad a=1$ ⋯ ❸

따라서 $t=-1$일 때, 즉 점 $(-1,\ 3)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(-1)=g'(-1)=-2$이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-3=-2(x+1)$, 즉 $y=-2x+1$

$\therefore b=-2,\ c=1$ ⋯ ❹

$\therefore a+b+c=0$ ⋯ ❺

답 0

채점 기준	비율
❶ $f(t)=g(t),\ f'(t)=g'(t)$임을 알 수 있다.	20%
❷ $a,\ t$에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	20%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $b,\ c$의 값을 구할 수 있다.	30%
❺ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10%

19 $f(x)=x^3+ax$라 하면

$f'(x)=3x^2+a$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+at)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at)=(3t^2+a)(x-t)$, 즉

$y=(3t^2+a)x-2t^3$ ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠은 직선 $y=8x-16$과 일치하므로

$3t^2+a=8,\ -2t^3=-16$

$-2t^3=-16$에서 $t^3=8\quad \therefore t=2$
$3t^2+a=8$에서 $a=8-3t^2=8-3\cdot 2^2=-4$

$\therefore t=2,\ a=-4$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 이 점은 곡선 $y=2x^2+b$ 위의 점이므로

$t=2,\ a=-4$이므로 $t^3+at=2^3-4\cdot 2=0$

$0=8+b\quad \therefore b=-8$

즉 $y=x^3-4x,\ y=2x^2-8$이므로 $x^3-4x=2x^2-8$에서

$x^3-2x^2-4x+8=0,\quad (x+2)(x-2)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 두 곡선의 접점이 아닌 교점의 좌표는 $(-2,\ 0)$이므로

$m=-2,\ n=0$

$\therefore m+n=-2$

답 ①

20 $f(x)=x^3$이라 하면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-t^3=3t^2(x-t)$, 즉 $y=3t^2x-2t^3$

이 직선이 점 $\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$을 지나므로

$4t^2-2t^3=0,\quad 2t^2(2-t)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$) ⋯ ❶

따라서 공통인 접선의 방정식은

$y=12x-16$ ⋯ ❷

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=12x-16$이 접하므로 $ax^2=12x-16$, 즉 이차방정식 $ax^2-12x+16=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=6^2-16a=0\quad \therefore a=\frac{9}{4}$ ⋯ ❸

답 $\frac{9}{4}$

Ⅱ 다항함수의 미분법

채점 기준	비율
❶ 두 곡선의 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 공통인 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

다른 풀이 $g(x)=ax^2$이라 하면

$g'(x)=2ax$

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=12x-16$의 접점의 좌표를 $(s,\ as^2)$이라 하면

$as^2=12s-16,\ 2as=12$

$\therefore s=\frac{8}{3},\ a=\frac{9}{4}$

1등급 비밀노트

(1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다.
➡ $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$

(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 공통인 접선을 갖는다.
➡ 곡선 $y=f(x)$의 접선이 곡선 $y=g(x)$에 접한다.

21 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고, 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (나)에 의하여 $|f'(c)|\le 2$이므로

$$\left|\frac{f(3)-f(1)}{2}\right|\le 2,\qquad \left|\frac{1-f(1)}{2}\right|\le 2$$

$$|f(1)-1|\le 4,\qquad -4\le f(1)-1\le 4$$

$$\therefore -3\le f(1)\le 5$$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 -4이다.

답 ①

22 $f(x)=x^4+x^3+x-1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 $f(0)=-1$, $f(1)=2$이므로

$$f(0)f(1)=\boxed{-2}<0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

그 실근을 α라 하고 α가 아닌 다른 실근 β가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다고 가정하자. 즉 $\alpha\ne\beta$, $f(\beta)=0$인 β가 존재한다면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 열린구간 (α, β)에서 미분가능하며 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 (α, β)에서 적어도 하나 존재한다.

그런데 $x>0$에서 $f'(x)=\boxed{4x^3+3x^2+1}>0$이므로 모순이다.

따라서 열린구간 $(0, 1)$에서 방정식 $f(x)=0$은 $\boxed{1}$개의 실근을 갖는다.

이상에서 $a=-2$, $g(x)=4x^3+3x^2+1$, $b=1$이므로

$$a+g(1)+b=-2+8+1$$
$$=7$$

답 7

일품 BOX

점 (s, as^2)은 직선 $y=12x-16$ 위의 점이므로
$as^2=12s-16$
또 $g'(s)=12$이므로
$2as=12$

$2as=12$에서 $as=6$
이것을 $as^2=12s-16$에 대입하면 $6s=12s-16$
$\therefore s=\frac{8}{3}$
$as=6$에서 $a=\frac{9}{4}$

$f(0)=0$, $f(-2)=10$이므로
$0=f(2)+10-12$
$\therefore f(2)=2$

23 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때, $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\left\{f\left(\frac{1+x}{x}\right)-f\left(\frac{1-x}{x}\right)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left\{f\left(\frac{1}{x}+1\right)-f\left(\frac{1}{x}-1\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\{f(t+1)-f(t-1)\}$$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서 연속이고 열린구간 $(t-1,\ t+1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(t+1)-f(t-1)}{(t+1)-(t-1)}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(t-1, t+1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $t\to\infty$이면 $c\to\infty$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\{f(t+1)-f(t-1)\}$$
$$=2\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{f(t+1)-f(t-1)}{2}\right\}$$
$$=2\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{f(t+1)-f(t-1)}{(t+1)-(t-1)}\right\}$$
$$=2\lim_{c\to\infty}f'(c)$$
$$=2\cdot4=8$$

답 8

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 44쪽

01 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0\qquad\therefore f(0)=0$

㉠의 양변에 $x=2$, $y=-2$를 대입하면

$f(0)=f(2)+f(-2)-12\qquad\therefore f(2)=2$

한편 $f'(0)=-2$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=-2$$

$$\therefore f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+6h-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+6h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+6$$
$$=-2+6=4$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2=4(x-2)$, 즉 $y=4x-6$

답 ④

02 $f(x)=x^3$이라 하면 $\quad f'(x)=3x^2$

점 A_n의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하면 점 P_n의 좌표는 $(a_n,\ a_n^3)$이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a_n)=3a_n^2$이므로 접선의 방정식은

$y-a_n^3=3a_n^2(x-a_n)$, 즉 $y=3a_n^2x-2a_n^3$

이 직선의 x절편은 $\frac{2}{3}a_n$이므로

$$A_{n+1}\left(\frac{2}{3}a_n,\ 0\right)$$

즉 $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이다.

$$\therefore a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

따라서 삼각형 $A_nP_nA_{n+1}$의 넓이는

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\overline{A_nA_{n+1}}\cdot\overline{A_nP_n}=\frac{1}{2}\cdot(a_n-a_{n+1})\cdot a_n^3$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}a_n\cdot a_n^3=\frac{1}{6}a_n^4=\frac{1}{6}\left(\frac{16}{81}\right)^{n-1}$$

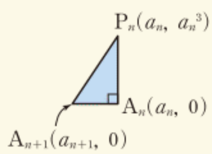
이때 $n=10$을 대입하면

$$S_{10}=\frac{1}{6}\left(\frac{16}{81}\right)^9=\frac{1}{2\cdot3}\left(\frac{2^4}{3^4}\right)^9=\frac{2^{35}}{3^{37}}$$

따라서 $m=35$, $n=37$이므로

$$m+n=72$$

답 ⑤



03 $f(x)=x^3+6x^2+3x$라 하면

$$f'(x)=3x^2+12x+3$$

$P(\alpha,\ f(\alpha))$, $Q(\beta,\ f(\beta))$라 하면 접선의 기울기가 m이므로 $f'(\alpha)=m$, $f'(\beta)=m$

따라서 이차방정식 $3x^2+12x+3=m$, 즉 $3x^2+12x+3-m=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=\frac{3-m}{3}$

직선 PQ가 x축과 평행하려면 $f(\alpha)=f(\beta)$이어야 하므로

$$\alpha^3+6\alpha^2+3\alpha=\beta^3+6\beta^2+3\beta$$

$$(\alpha-\beta)\{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+6(\alpha+\beta)+3\}=0$$

$\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+6(\alpha+\beta)+3=0$

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+6(\alpha+\beta)+3=0$$

$$16-\frac{3-m}{3}-24+3=0,\qquad 3-m=-15$$

$$\therefore m=18$$

답 18

직선 PQ가 x축과 평행하려면 직선 PQ의 기울기가 0이어야 하므로

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0$$

$$\therefore f(\alpha)=f(\beta)$$

$(\because \alpha\neq\beta)$

04 $f(x)=x^3-4x$라 하면 $f'(x)=3x^2-4$

원점에서의 접선 l의 기울기는 $f'(0)=-4$

따라서 원점을 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{4}x$$

곡선 $y=x^3-4x$와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 x좌표는

$$x^3-4x=\frac{1}{4}x,\qquad 4x^3-17x=0$$

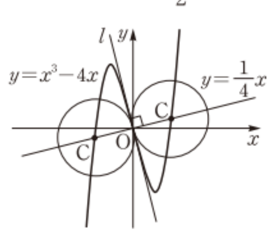
$$x(4x^2-17)=0\qquad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$$

즉 원의 중심을 C라 하면

$$C\left(\frac{\sqrt{17}}{2},\ \frac{\sqrt{17}}{8}\right)$$

또는

$$C\left(-\frac{\sqrt{17}}{2},\ -\frac{\sqrt{17}}{8}\right)$$



원점을 지나고 직선 l과 수직인 직선이 원의 중심을 지나므로 직선 l은 원점에서의 원의 접선이 된다.

따라서 반지름의 길이는 $\overline{OC}$이므로

$$\overline{OC}=\sqrt{\frac{17}{4}+\frac{17}{64}}=\frac{17}{8}$$

답 ②

05 $f(x)=x^4-3x^2+2x$라 하면

$$f'(x)=4x^3-6x+2$$

구하는 접선의 접점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha\neq\beta)$라 하자.

점 $(\alpha,\ \alpha^4-3\alpha^2+2\alpha)$에서의 접선의 기울기는

$f'(\alpha)=4\alpha^3-6\alpha+2$이므로 접선의 방정식은

$$y-(\alpha^4-3\alpha^2+2\alpha)=(4\alpha^3-6\alpha+2)(x-\alpha),\ \text{즉}$$

$$y=(4\alpha^3-6\alpha+2)x-3\alpha^4+3\alpha^2 \quad\cdots\cdots ㉠$$

점 $(\beta,\ \beta^4-3\beta^2+2\beta)$에서의 접선의 기울기는

$f'(\beta)=4\beta^3-6\beta+2$이므로 접선의 방정식은

$$y=(4\beta^3-6\beta+2)x-3\beta^4+3\beta^2$$

이때 두 접선이 일치하므로

$$4\alpha^3-6\alpha+2=4\beta^3-6\beta+2 \quad\cdots\cdots ㉡$$

$$-3\alpha^4+3\alpha^2=-3\beta^4+3\beta^2 \quad\cdots\cdots ㉢$$

㉡에서 $2(\alpha^3-\beta^3)=3(\alpha-\beta)$이므로

$$2(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=3(\alpha-\beta)$$

$$2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=3\ (\because \alpha\neq\beta) \quad\cdots\cdots ㉣$$

㉢에서 $\alpha^4-\beta^4=\alpha^2-\beta^2$이므로

$$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-1)=0\ (\because \alpha\neq\beta)$$

(i) $\alpha+\beta\neq0$일 때

$\alpha^2+\beta^2=1$이므로 ㉣에서

$$2+2\alpha\beta=3\qquad \therefore 2\alpha\beta=1$$

$\alpha^2+\beta^2-1=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2=0$에서

$\alpha-\beta=0$, 즉 $\alpha=\beta$이므로 모순이다.

(ii) $\alpha+\beta=0$일 때

$\beta=-\alpha$를 ㉣에 대입하면 $2\alpha^2=3$

$$\alpha^2=\frac{3}{2}\qquad \therefore \alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

이것을 $\beta=-\alpha$에 대입하면

$$\beta=\mp\frac{\sqrt{6}}{2}\ (\text{복호동순})$$

(i), (ii)에서 $\alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\beta=\mp\frac{\sqrt{6}}{2}$ (복호동순)

$\alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$y=2x-\frac{9}{4}$$

답 ③

(i) $\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때

$4\alpha^3-6\alpha+2$

$=4\cdot\frac{3\sqrt{6}}{4}-6\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}+2$

$=2$,

$-3\alpha^4+3\alpha^2$

$=-3\cdot\frac{9}{4}+3\cdot\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}$

(ii) $\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때

$4\alpha^3-6\alpha+2$

$=4\cdot\left(-\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)$

$-6\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+2$

$=2$,

$-3\alpha^4+3\alpha^2$

$=-3\cdot\frac{9}{4}+3\cdot\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}$

Ⅱ-3. 도함수의 활용 (2)

개념&핵심 기출

본책 46~47쪽

01 $f(x)=x^3+ax^2+3x-6$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9\le 0,\quad (a+3)(a-3)\le 0$

$\therefore -3\le a\le 3$

따라서 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 7개이다.

답 7

모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\ge 0$이 성립하려면
$a>0,\ b^2-4ac\le 0$

02 $f(x)=-x^3+2x^2+ax+3$에서

$f'(x)=-3x^2+4x+a$

함수 $f(x)$가 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 감소해야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2+3a\le 0\quad \therefore a\le -\frac{4}{3}$

따라서 a의 최댓값은 $-\frac{4}{3}$이다.

답 ④

모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\le 0$이 성립하려면
$a<0,\ b^2-4ac\le 0$

03 $f(x)=x^3-6x^2-15x+10$에서

$f'(x)=3x^2-12x-15$

$=3(x-5)(x+1)$

구간 $(a,\ \infty)$에 속하는 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 명제 '$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.'가 참이므로 그 구간에서 함수 $f(x)$는 일대일함수이다.

$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$가 구간 $(a,\ \infty)$에서 일대일함수이려면 이 구간에서 증가해야 한다. 이때

$f'(x)\ge 0$에서 $\quad x\le -1$ 또는 $x\ge 5$

이므로 $x>a$에서 $f'(x)\ge 0$이려면 $a\ge 5$이어야 한다.

따라서 a의 최솟값은 5이다.

답 ⑤

04 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f'(1)=0,\ f(1)=-2$

$3+2a+b=0,\ 1+a+b+3=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=-9$

즉 $f(x)=x^3+3x^2-9x+3$이므로

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

삼차 이상인 함수 $f(x)$의 극대와 극소를 판정할 때에는 함수의 증가와 감소를 표로 나타내어 본다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 가지므로 구하는 극댓값은

$f(-3)=-27+27+27+3=30$

답 30

05 $f(x)=3x^4-8x^3-18x^2+1$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2-36x$

$=12x(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=-1,\ x=3$에서 극솟값을 갖고, $x=0$에서 극댓값을 가지므로

$a+c=2,\ b=0$

따라서 $f(b)=f(0)=1,\ f\left(\frac{a+c}{2}\right)=f(1)=-22$이므로

$f(b)-f\left(\frac{a+c}{2}\right)=23$

답 ④

06 $f(x)=x^3+ax^2+(2a+9)x-2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+2a+9$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3(2a+9)>0,\quad (a+3)(a-9)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>9$

답 ②

07 $f(x)=x^4-4x^3+2ax^2+5$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+4ax$

$=4x(x^2-3x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

즉 이차방정식 $x^2-3x+a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$a\ne 0,\ D=(-3)^2-4a>0$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{4}$

따라서 자연수 a는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$

답 ②

참고 $a=0$이면 $\quad f'(x)=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 $a=0$이면 $f(x)$는 극댓값을 갖지 않는다.

08 $f(x)=-3x^4-8x^3+6(a+3)x^2-12ax+5$에서

$f'(x)=-12x^3-24x^2+12(a+3)x-12a$

$=-12(x-1)(x^2+3x-a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

$f'(x)=-12(x-1)g(x)$에 대하여 이차방정식 $g(x)=0$이
(i) 허근을 갖는 경우
➡ $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는다.
(ii) 중근을 갖는 경우
➡ $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 갖는다.
(iii) $x=1$을 근으로 갖는 경우
➡ $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 갖는다.

$g(x)=x^2+3x-a$라 할 때

(i) 방정식 $g(x)=0$이 허근을 갖는 경우
판별식을 D라 하면

$D=3^2+4a<0 \quad \therefore a<-\frac{9}{4}$

(ii) 방정식 $g(x)=0$이 중근을 갖는 경우
판별식을 D라 하면

$D=3^2+4a=0 \quad \therefore a=-\frac{9}{4}$

(iii) 방정식 $g(x)=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$g(1)=4-a=0$이므로 $\quad a=4$

이상에서 $\quad a=4$ 또는 $a\le-\frac{9}{4}$

따라서 자연수 a는 4의 1개이다.

답 1

09 $f(x)=3x^4-4x^3-1$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	↘	-1	↘	-2	↗	15

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 15를 갖고, $x=1$에서 최솟값 -2를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$15+(-2)=13$

답 13

10 $f(x)=x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 1\le x\le3)$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-2$	↘	$k-4$	↗	k

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 k를 갖고, $x=2$에서 최솟값 $k-4$를 갖는다.

즉 $M=k$, $m=k-4$이므로 $M+m=16$에서

$k+k-4=16 \quad \therefore k=10$

답 ③

11 점 P의 좌표는 $(a,\ -a^2+6a)$이므로

$\overline{PQ}=-a^2+6a$

$\overline{OQ}=a$이므로 $\quad \overline{QR}=6-2a$

곡선 $y=-x^2+6x$가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로
$\overline{QR}=2(3-a)$
$=6-2a$

따라서 직사각형 PQRS의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=(6-2a)(-a^2+6a)$

$=2a^3-18a^2+36a\ (0<a<3)$

$\therefore S'(a)=6a^2-36a+36=6(a^2-6a+6)$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=3-\sqrt{3}\ (\because 0<a<3)$

a	0	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=3-\sqrt{3}$에서 극대이면서 최대이다.

답 ②

1등급을 위한 고난도 문제

본책 48~50쪽

01 $f(x)=x^3+kx^2-15x+4$에서

$f'(x)=3x^2+2kx-15$

함수 $f(x)$가 구간 $(-3,\ 1)$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\le0$이어야 하므로

$f'(-3)\le0,\ f'(1)\le0$

$f'(-3)=27-6k-15\le0$에서 $\quad k\ge2$

$f'(1)=3+2k-15\le0$에서 $\quad k\le6$

$\therefore 2\le k\le6$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

답 ⑤

02 조건 (가)를 만족시키려면 $f(x)$는 일대일함수이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다.

$f(x)=ax^3+bx^2+ax+b\ (a\ne0)$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+a$

(i) $f(x)$가 증가하는 경우
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

조건 (나)에 의하여 $a>0$이면 $\quad a=1, 2$

$a>0,\ \frac{D}{4}=b^2-3a^2\le0$

$\therefore a>0,\ b^2\le3a^2$

$a=1$일 때, $b^2\le3$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $\quad$ 3개

$b=0, \pm1$

$a=2$일 때, $b^2\le12$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $\quad$ 7개

$b=0, \pm1, \pm2, \pm3$

즉 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$3+7=10$

(ii) $f(x)$가 감소하는 경우
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

조건 (나)에 의하여 $a<0$이면 $\quad a=-1, -2$

$a<0,\ \frac{D}{4}=b^2-3a^2\le0$

$\therefore a<0,\ b^2\le3a^2$

$a=-1,\ -2$일 때 (i)과 같이 b의 값이 결정되므로 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $\quad 10$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$10+10=20$

답 20

일품 BOX

03 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f'(x)=3x^2+2ax+3-a^2$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3(3-a^2)\leq 0$$

$$4a^2-9\leq 0, \qquad (2a+3)(2a-3)\leq 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2}\leq a\leq \frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)에서 $f(1)=6$이므로

$$f(1)=1+a+3-a^2+4=6$$

$$a^2-a-2=0, \qquad (a+1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-1\ (\because ㉠)$$

따라서 $f'(x)=3x^2-2x+2$이므로

$$f'(1)=3$$

답 ④

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\iff f^{-1}(b)=a$

1등급 비밀노트

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다. 따라서 함수 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다.
즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 또는 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

04 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -6을 가지므로

$$g'(2)=0, \ g(2)=-6$$

$g(x)=(x^2-3x)f(x)$에서

$$g'(x)=(2x-3)f(x)+(x^2-3x)f'(x)$$

$g(2)=-2f(2)=-6$이므로 $\qquad f(2)=3$

$g'(2)=0$이므로 $\qquad f(2)-2f'(2)=0$

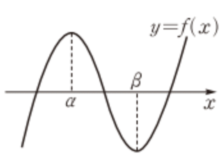
$$3-2f'(2)=0$$

$$\therefore f'(2)=\frac{3}{2}$$

답 ④

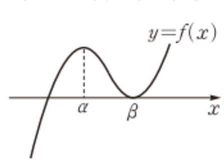
다항함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 갖는다.
➡ $f'(a)=0, \ f(a)=b$

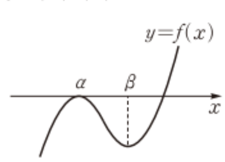
05 ㄱ. a, b, c가 서로 다른 실수이면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만난다.



$$\therefore f(\alpha)f(\beta)<0$$

ㄴ. $a=b$이면 $f(x)=(x-a)^2(x-c)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 두 가지 그림 중 하나이다.





$$\therefore f(\alpha)f(\beta)=0$$

ㄷ. $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$에서

$$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$$

$$=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca$$

$f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=\frac{ab+bc+ca}{3}$$

$$\therefore 3\alpha\beta=ab+bc+ca$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

06 $f(x)=x^{n+1}(x-1)^2=x^{n+3}-2x^{n+2}+x^{n+1}$이므로

$$f'(x)=(n+3)x^{n+2}-2(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^n$$

$$=x^n(x-1)\{(n+3)x-(n+1)\} \qquad \cdots ❶$$

$f'(x)=0$에서

$$x=\frac{n+1}{n+3} \text{ 또는 } x=1\ (\because x>0)$$

$n+1<n+3$이므로
$0<\frac{n+1}{n+3}<1$

x	0	$\cdots$	$\frac{n+1}{n+3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{n+1}{n+3}$에서 극댓값을 가지므로

$$a=\frac{n+1}{n+3} \qquad \cdots ❷$$

$\frac{2}{3}<a<\frac{4}{5}$에서 $\qquad \frac{2}{3}<\frac{n+1}{n+3}<\frac{4}{5}$

$$\frac{2}{3}<1-\frac{2}{n+3}<\frac{4}{5}, \qquad \frac{1}{10}<\frac{1}{n+3}<\frac{1}{6}$$

$$6<n+3<10 \qquad \therefore 3<n<7$$

따라서 자연수 n의 최댓값은 6이다. $\cdots ❸$

답 6

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ a를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ n의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

07 곡선 $y=f(x)$가 $x=a$에서 x축에 접하고 $f(0)=0$이므로 $f(x)=x(x-a)^2$으로 놓을 수 있다.

$$\therefore f'(x)=(x-a)^2+2x(x-a)$$

$$=(x-a)(3x-a)$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{a}{3}$에서 극솟값 -4를 가지므로

주어진 그래프에서 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가지므로 $x=\frac{a}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{a}{3}\left(\frac{a}{3}-a\right)^2=-4$$

$$\frac{4}{27}a^3=-4, \qquad a^3=-27$$

$$\therefore a=-3$$

따라서 $f(x)=x(x+3)^2=x^3+6x^2+9x$이므로

$$a=6, \ b=9$$

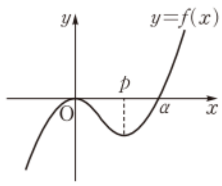
$$\therefore a+b=15$$

답 ④

08 $y=f'(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표가 0, p이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=p$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

ㄴ. $g(x)=\{f(x)\}^2$이라 하면

$$g'(x)=2f(x)f'(x)$$

$x<0$일 때 $f'(x)>0$, $f(x)<0$이므로 $g'(x)<0$이고, $0<x<p$일 때 $f'(x)<0$, $f(x)<0$이므로 $g'(x)>0$이다.

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 극소이다.

ㄷ. $h(x)=f(x)\{f(x)-p\}$라 하면

$$h'(x)=f'(x)\{f(x)-p\}+f(x)f'(x)$$
$$=f'(x)\{2f(x)-p\}$$

$y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 원점이 아닌 점의 x좌표를 $\alpha\ (0<p<\alpha)$라 하자.

$0<x<p$일 때 $f'(x)<0$, $f(x)<0$이므로 $h'(x)>0$이고, $p<x<\alpha$일 때 $f'(x)>0$, $f(x)<0$이므로 $h'(x)<0$이다.

따라서 함수 $f(x)\{f(x)-p\}$는 $x=p$에서 극대이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

09 조건 (가)에서 $f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$$f'(x)=3ax^2+b$$

조건 (나)에서 $f'(2)=0$, $f(2)=-16$이므로

$$12a+b=0,\ 8a+2b=-16$$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-12$

따라서 $f(x)=x^3-12x$이므로

$$f(1)=-11$$

답 -11

삼차함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이면 함수 $f(x)$가 기함수이므로

$f(x)=ax^3+bx$
(a, b는 상수, $a\neq0$)

로 놓을 수 있다.

10 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$에서

$$f'(x)=9x^2+2ax+b$$

조건 (가)에서 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$를 잇는 선분의 중점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=0,\quad \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=1$$

$$\therefore\ \beta=-\alpha,\ f(\alpha)+f(\beta)=2$$

따라서 이차방정식 $f'(x)=0$의 해는 α, $-\alpha$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{2a}{9}=0,\ \frac{b}{9}=-\alpha^2 \qquad \therefore\ a=0,\ b=-9\alpha^2$$

$f(x)=3x^3-9\alpha^2x+c$이므로 $f(\alpha)+f(-\alpha)=2$에서

$$2c=2 \qquad \therefore\ c=1$$

$f(\alpha)=-6\alpha^3+c$,
$f(-\alpha)=6\alpha^3+c$
$\therefore\ f(\alpha)+f(-\alpha)=2c$

조건 (나)에서 $|f(\alpha)-f(-\alpha)|=\frac{4}{9}$이므로

$$|12\alpha^3|=\frac{4}{9},\qquad 12\alpha^3=\pm\frac{4}{9},\qquad \alpha^3=\pm\frac{1}{27}$$

$$\therefore\ \alpha=\pm\frac{1}{3}$$

따라서 $b=-9\alpha^2=-1$이므로

$$a+b+c=0$$

답 0

11 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+2$에서

$$f'(x)=3x^2+6ax+b$$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=9a^2-3b\le0 \qquad \therefore\ b\ge3a^2$$

$a=1$일 때, $3\le b\le20$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 18개

$a=2$일 때, $12\le b\le20$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 9개

$a\ge3$일 때, $b\ge3a^2$을 만족시키는 20 이하의 자연수 b는 존재하지 않는다.

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$$18+9=27$$

답 ④

12 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+2x$에서

$$f'(x)=x^3+3ax^2+2bx+2$$

주어진 조건에서 방정식 $f'(x)=0$은 한 실근 -2와 중근 c를 가지므로

$$f'(x)=(x+2)(x-c)^2$$
$$=x^3+(2-2c)x^2+(c^2-4c)x+2c^2$$

따라서 $3a=2-2c,\ 2b=c^2-4c,\ 2=2c^2$이므로

$$a=0,\ b=-\frac{3}{2},\ c=1\ (\because\ c>0)$$

$$\therefore\ a+b+c=-\frac{1}{2}$$

답 ③

$2=2c^2$에서
$c=1\ (\because\ c>0)$
$3a=2-2=0$이므로
$a=0$
$2b=1-4=-3$이므로
$b=-\frac{3}{2}$

13 $f(x)=x^3+3(a-1)x^2-3(a-3)x$에서

$$f'(x)=3x^2+6(a-1)x-3(a-3) \quad \cdots\ ❶$$

$f(x)$가 $x\le0$에서 극값을 갖지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) $f(x)$가 모든 실수 x에서 극값을 갖지 않는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=9(a-1)^2+9(a-3)\le0$$

$$a^2-a-2\le0,\qquad (a+1)(a-2)\le0$$

$$\therefore\ -1\le a\le2 \quad \cdots\ ❷$$

(ii) $f(x)$가 $x>0$에서 극값을 모두 갖는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}>0$에서 $\quad a<-1$ 또는 $a>2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(두 근의 합)$=-2(a-1)>0$에서

$a<1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

(두 근의 곱)$=-(a-3)>0$에서

$a<3 \quad \cdots\cdots$ ㉢

이차방정식
$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면
① $b^2-4ac>0$
② $-\frac{b}{a}>0$
③ $\frac{c}{a}>0$

Ⅱ 다항함수의 미분법

㉠, ㉡, ㉢에서 $a<-1$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 $a\le 2$이므로 a의 최댓값은 2이다. ⋯ ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	10 %
❷ $f(x)$가 모든 실수 x에서 극값을 갖지 않을 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$가 $x>0$에서 극값을 모두 가질 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

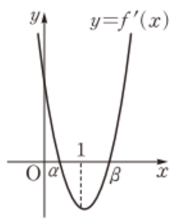
14 $f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a+6$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면

$0<\alpha<1,\ \beta>1$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(0)=a+6>0$

$\therefore a>-6$

$f'(1)=3a+9<0 \qquad \therefore a<-3$

따라서 $-6<a<-3$에서 정수 a는 $-5,\ -4$이므로 구하는 모든 정수 a의 값의 합은

$-5+(-4)=-9$

답 -9

15 $x(x-3)^2=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore$ A$(3,\ 0)$

점 P의 좌표를 $(t,\ t(t-3)^2)\ (0<t<3)$이라 하면 H$(t,\ 0)$이므로 △OPH의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}t\cdot t(t-3)^2=\frac{1}{2}t^2(t-3)^2$

$\therefore S'(t)=t(t-3)^2+t^2(t-3)=t(t-3)(2t-3)$

$S'(t)=0$에서 $\qquad t=\frac{3}{2}\ (\because 0<t<3)$

t	0	⋯	$\frac{3}{2}$	⋯	3
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	극대	↘	

$S(t)$는 $t=\frac{3}{2}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$S\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}-3\right)^2=\frac{81}{32}$

답 $\frac{81}{32}$

16 $f(x)=-ax^3+3x^2$에서

$f'(x)=-3ax^2+6x=-3x(ax-2)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=\frac{2}{a}$

(i) $\frac{2}{a}\ge 4$, 즉 $0<a\le\frac{1}{2}$일 때

x	0	⋯	4
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	0	↗	$48-64a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 0을 가지므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<\frac{2}{a}<4$, 즉 $a>\frac{1}{2}$일 때

x	0	⋯	$\frac{2}{a}$	⋯	4
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	극대	↘	$48-64a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최솟값 $48-64a$를 가지므로

$48-64a=-80 \qquad \therefore a=2$

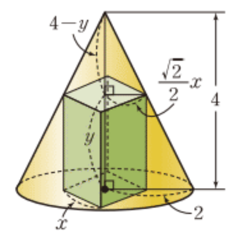
(i), (ii)에서 $\qquad a=2$

따라서 $f(x)=-2x^3+3x^2$이고 $f(x)$는 $x=\frac{2}{a}$, 즉 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(1)=1$

답 ③

17 오른쪽 그림과 같이 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x, 높이를 y라 하면 직육면체의 밑면은 정사각형이므로 대각선의 길이는 $\sqrt{2}x$이다.



삼각형의 닮음을 이용하여 직육면체의 높이 y를 밑면의 한 변의 길이 x에 대한 식으로 나타낸다.

$4:2=(4-y):\frac{\sqrt{2}}{2}x$에서

$y=-\sqrt{2}x+4$

원뿔에 내접하는 직육면체의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x^2y=x^2(-\sqrt{2}x+4)=-\sqrt{2}x^3+4x^2$

$\therefore V'(x)=-3\sqrt{2}x^2+8x=-3\sqrt{2}x\left(x-\frac{8}{3\sqrt{2}}\right)$

$V'(x)=0$에서 $\qquad x=\frac{4\sqrt{2}}{3}\ (\because 0<x<2\sqrt{2})$

$\frac{\sqrt{2}}{2}x<2$이므로 $0<x<2\sqrt{2}$

x	0	⋯	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$	⋯	$2\sqrt{2}$
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$V\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=-\sqrt{2}\cdot\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^3+4\cdot\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{128}{27}$

즉 $p=27,\ q=128$이므로

$p+q=155$

답 155

18 $g(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$이므로 $g(x)=t$로 놓으면 $t\ge -1$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=-t^3+3t$

이므로 $\qquad f'(t)=-3t^2+3=-3(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $\qquad t=-1$ 또는 $t=1$

t	-1	⋯	1	⋯
$f'(t)$		+	0	−
$f(t)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(t)\ (t\ge -1)$는 $t=1$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(1)=2$ 　　답 ①

19 구슬 1개당 판매 가격을 x원 인상하였을 때의 판매 이익은 $(15+x)$원이고, 일일 판매량은 $(600-x^2)$개이므로 일일 판매 이익을 $f(x)$원이라 하면

판매 이익은
(판매 금액)−(원가)
$=(85+x)-70$
$=15+x$ (원)

$f(x)=(15+x)(600-x^2)$

$=-x^3-15x^2+600x+9000$ 　　⋯ ❶

$\therefore\ f'(x)=-3x^2-30x+600$

$=-3(x+20)(x-10)$

$f'(x)=0$에서 　$x=10\ (\because x\ge 0)$

x	0	⋯	10	⋯
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=10$에서 극대이면서 최대이다. 　　⋯ ❷

따라서 구슬 1개당 판매 가격은

$a=85+10=95$ 　　⋯ ❸

답 95

채점 기준	비율
❶ 일일 판매 이익을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 일일 판매 이익이 최대일 때의 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 51쪽

01 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=-1$에서 $x\to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$이므로 　$f(2)=0$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면
$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$이므로

$f'(2)=-1$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(2)=-1$이므로 　$4a+b=-13$ 　　⋯⋯ ㉠

조건 (나)에서 $f'(1)=0$이므로

$2a+b=-3$ 　　⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5,\ b=7$

㉠−㉡을 하면
$2a=-10$
$\therefore a=-5$
$a=-5$를 ㉡에 대입하면
$-10+b=-3$
$\therefore b=7$

따라서 $f(x)=x^3-5x^2+7x+c$이고, $f(2)=0$이므로

$8-20+14+c=0$ 　　$\therefore c=-2$

$\therefore abc=70$ 　　답 70

02 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)$의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ 　　$\therefore f(0)=0$

$f'(0)=-2$이므로

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=-2$

$\therefore\ f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)+f(h)+2xh(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)+2xh(x+h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(h)}{h}+2x(x+h)\right\}$

$=-2+2x^2=2(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 　$x=-1$ 또는 $x=1$

x	⋯	−1	⋯	1	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 가지므로 　$\alpha=-1,\ \beta=1$

$\therefore \beta-\alpha=2$ 　　답 2

03 조건 (가)에서 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=f(0)$,

$\lim\limits_{x\to 0-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\{-f(x)\}=-f(0)$

즉 $f(0)=-f(0)$에서

$f(0)=0$ 　　⋯⋯ ㉠

또 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(h)}{h}=f'(0)$,

$\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{-f(h)}{h}=-f'(0)$

즉 $f'(0)=-f'(0)$에서

$f'(0)=0$ 　　⋯⋯ ㉡

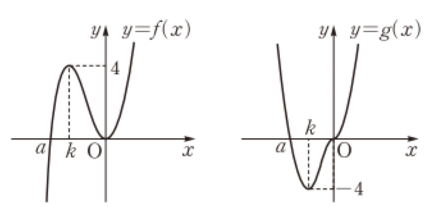
㉠, ㉡에서 $f(x)=x^2(x-a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

방정식 $f(x)=0$의 근과 방정식 $g(x)=0$의 근은 모두 같고 조건 (나)에서 $g(x)=0$의 모든 실근의 합은 음수이므로 $a<0$이다.

$g(x)=\begin{cases}-x^2(x-a) & (x<0)\\ x^2(x-a) & (x\ge 0)\end{cases}$
이므로 $g(x)=0$에서
$x=a$ 또는 $x=0$

따라서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

$x<0$인 구간에서
$g(x)=-f(x)$이므로
$y=f(x)$의 그래프와
$y=g(x)$의 그래프는 x축
에 대하여 대칭이다.



한편 $g(x)$가 $x=k$에서 극솟값 -4를 가지므로 $f(x)$는 $x=k$에서 극댓값 4를 가진다.

이때 $f'(x)=2x(x-a)+x^2=x(3x-2a)$이므로

$f'(x)=0$에서 　$x=\dfrac{2a}{3}$ 또는 $x=0$

$\therefore k=\dfrac{2a}{3}$

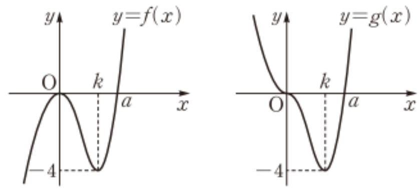
즉 $f\left(\frac{2a}{3}\right)=4$이므로

$\left(\frac{2a}{3}\right)^2\left(-\frac{a}{3}\right)=4$

$a^3=-27$　　∴ $a=-3$

∴ $k=\frac{2a}{3}=-2$　　답 ④

참고 방정식 $g(x)=0$의 모든 실근의 합이 양수, 즉 $a>0$일 때 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f\left(\frac{2a}{3}\right)=-4$,　　$\left(\frac{2a}{3}\right)^2\left(-\frac{a}{3}\right)=-4$

$a^3=27$　　∴ $a=3$

04 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $g(x)=x^2+dx+e$ (a, b, c, d, e는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$, $g'(x)=2x+d$

주어진 그래프에서 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 0, 2이므로

$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$

∴ $a=-3$, $b=0$

또 직선 $y=g'(x)$가 원점을 지나므로　　$g'(0)=0$

∴ $d=0$

∴ $f(x)=x^3-3x^2+c$, $g(x)=x^2+e$

ㄱ. $f'(x)=g'(x)$를 만족시키는 x의 값을 0, k $(k>2)$라 하면 $F'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로

$F'(0)=F'(k)=0$

이때 $x=0$의 좌우에서 함수 $F'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $F(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

또 $x=k$의 좌우에서 함수 $F'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $F(x)$는 $x=k$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $F(x)$는 극값을 갖는다.

ㄴ. $f'(x)=3x^2-6x$, $g'(x)=2x$이므로

$F'(x)=f'(x)-g'(x)=3x^2-8x$

∴ $F'(2)=12-16=-4$

ㄷ. $F(x)=f(x)-g(x)=x^3-4x^2+c-e$

$F(2)=0$이므로

$-8+c-e=0$

∴ $c-e=8$

따라서 $F(x)=x^3-4x^2+8$이므로 방정식 $x^3-4x^2+8=0$의 모든 실근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 -8이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.　　답 ⑤

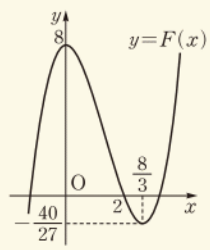
참고 ㄷ. $F(2)=0$이면 $F(x)=x^3-4x^2+8$이므로

$F'(x)=3x^2-8x=x(3x-8)$

$F'(x)=0$에서　　$x=0$ 또는 $x=\frac{8}{3}$

x	…	0	…	$\frac{8}{3}$	…
$F'(x)$	+	0	−	0	+
$F(x)$	↗	8	↘	$-\frac{40}{27}$	↗

따라서 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



05 (i) $x>0$일 때, $f(x)=x^3-12x+6$이므로

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서　　$x=2$ ($\because x>0$)

$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -10을 갖는다.

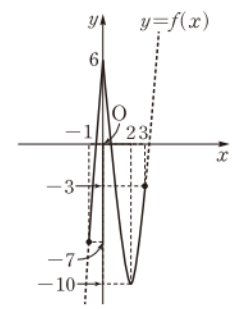
(ii) $x<0$일 때, $f(x)=x^3+12x+6$이므로

$f'(x)=3x^2+12$

$f'(x)>0$이므로 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 6을 갖는다.

또 $x=-1$일 때 $f(-1)=-7$이고, $x=3$일 때 $f(3)=-3$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 6, $x=2$에서 최솟값 -10을 가지므로

$M=6$, $m=-10$

∴ $M+m=-4$　　답 -4

참고

x	-1	…	0	…	2	…	3
$f'(x)$		+		−	0	+	
$f(x)$	-7	↗	6	↘	-10	↗	-3

06 점 P의 좌표를 $(x,\ x^2-x-2)$라 하면

$\overline{PA}^2=(x-8)^2+(x^2-x-5)^2$

$=x^4-2x^3-8x^2-6x+89$

$f(x)=x^4-2x^3-8x^2-6x+89$라 하면

$f'(x)=4x^3-6x^2-16x-6$

$=2(x+1)(2x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서　　$x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

x	…	-1	…	$-\frac{1}{2}$	…	3	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	90	↗	$\frac{1445}{16}$	↘	26	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이므로 $\overline{PA}^2$의 최솟값은 26이다.

따라서 원의 넓이의 최솟값은

$S=\pi\cdot\left(\frac{\overline{PA}}{2}\right)^2=\frac{\overline{PA}^2}{4}\pi=\frac{13}{2}\pi$

∴ $\frac{60S}{13\pi}=\frac{60}{13\pi}\cdot\frac{13}{2}\pi=30$　　답 30

$f(2)=2^3-12\cdot2+6$
$=-10$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하지 않을 때에도 $x=0$에서 극값을 가질 수 있다.

$f(0)=6$

미분가능한 함수 $F(x)$에 대하여 $F'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호가
① 양에서 음으로 바뀌면
➡ $F(x)$는 $x=a$에서 극대
② 음에서 양으로 바뀌면
➡ $F(x)$는 $x=a$에서 극소

$x<0$일 때,
$f'(x)>g'(x)$이므로
$F'(x)=f'(x)-g'(x)>0$
$0<x<k$일 때,
$f'(x)<g'(x)$이므로
$F'(x)=f'(x)-g'(x)<0$

$\overline{PA}^2$의 값이 최소일 때 $\overline{PA}$의 값이 최소이고, $\overline{PA}$의 값이 최소일 때 원의 넓이가 최소이다.

Ⅱ-4. 도함수의 활용 (3)

개념&핵심 기출

본책 52~53쪽

01 $3x^4-4x^3-12x^2-k=0$에서

$3x^4-4x^3-12x^2=k$

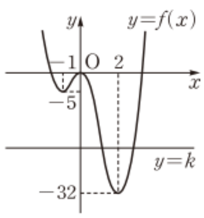
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-5	↗	0	↘	-32	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 양의 실근만을 갖기 위해서는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 모두 양수이어야 하므로

$-32\le k<-5$

따라서 정수 k의 개수는 27이다. 답 27

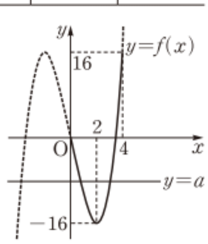
02 $f(x)=x^3-12x$라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 0\le x\le 4)$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-16	↗	16

따라서 $0\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 교점을 가져야 하므로

$-16\le a\le 16$

따라서 정수 a의 개수는 33이다. 답 ⑤

03 곡선 $y=x^3+a$와 직선 $y=3b^2x+c$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3+a=3b^2x+c$, 즉 $x^3-3b^2x+a=c$가 서로 다른 세 실근을 가지고 그때의 실수 c의 값의 범위가 $1<c<9$이다.

즉 $f(x)=x^3-3b^2x+a$라 하면 함수 $f(x)$의 극댓값은 9이고, 극솟값은 1이다.

(극솟값)$<c<$(극댓값)

이때 $f'(x)=3x^2-3b^2=3(x+b)(x-b)$이므로

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-b$ 또는 $x=b$

x	$\cdots$	$-b$	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$2b^3+a$	↘	$-2b^3+a$	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-b$에서 극댓값 $2b^3+a$를 갖고, $x=b$에서 극솟값 $-2b^3+a$를 가지므로

$2b^3+a=9,\ -2b^3+a=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=5,\ b^3=2$

$2b^3+a=9 \quad \cdots ㉠$
$-2b^3+a=1 \quad \cdots ㉡$
㉠+㉡을 하면
$2a=10 \quad \therefore a=5$
$a=5$를 ㉠에 대입하면
$2b^3+5=9$
$\therefore b^3=2$

$\therefore a+b^3=7$ 답 ②

04 $f(x)=nx^{n+1}+1-(n+1)x^n$이라 하면

$f'(x)=n(n+1)x^n-n(n+1)x^{n-1}$

$=n(n+1)\boxed{x^{n-1}(x-1)}$

따라서 $x>1$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 $\boxed{증가}$한다.

이때 $f(1)=n+1-(n+1)=\boxed{0}$이므로 $x>1$에서

$f(x)>0$

$\therefore nx^{n+1}+1>(n+1)x^n$

$\therefore$ (가) $x^{n-1}(x-1)$ (나) 증가 (다) 0 답 ③

05 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2a^2$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\dfrac{a}{3}\ (\because x\ge 0)$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$2a^2$	↘	$-\dfrac{5}{27}a^3+2a^2$	↗

따라서 $f(x)$는 $x=\dfrac{a}{3}$에서 극소이면서 최소이고, 최솟값 $-\dfrac{5}{27}a^3+2a^2$을 갖는다.

이때 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $f\left(\dfrac{a}{3}\right)\ge 0$이어야 하므로 $\quad -\dfrac{5}{27}a^3+2a^2\ge 0$

$a^2>0$이므로 $\quad -\dfrac{5}{27}a+2\ge 0 \quad \therefore a\le\dfrac{54}{5}$

따라서 자연수 a의 최댓값은 10이다. 답 ③

06 물체의 t초 후의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=-10t+30$

최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$-10t+30=0 \quad \therefore t=3$

$t=3$일 때 지면으로부터 높이는

$-5\cdot 3^2+30\cdot 3=45\,(\mathrm{m}) \quad \therefore a=45$

또 물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로 $h=0$에서

$-5t^2+30t=0, \quad -5t(t-6)=0$

$\therefore t=6\ (\because t>0)$

$t=6$일 때 지면에 떨어지는 순간의 속도는

$-10\cdot 6+30=-30\,(\mathrm{m/s}) \quad \therefore b=-30$

$\therefore a+b=15$ 답 ⑤

07 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-16t+16=(3t-4)(t-4)$$

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-16$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=4$

즉 $t=\frac{4}{3}$일 때 점 P는 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고 $t=4$일 때 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

따라서 $t=4$일 때 점 P의 가속도는

$6\cdot4-16=8$ 답 8

08 $f(t)=t^3+4t^2+4t$, $g(t)=t^2+13t$라 하자.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=f'(t)=3t^2+8t+4$, $v_Q=g'(t)=2t+13$

이때 $t\ge0$에서 $f'(t)>0$, $g'(t)>0$이므로

$v_P>0$, $v_Q>0$

ㄱ. 두 점 P, Q가 만나려면 $f(t)=g(t)$이어야 하므로

$t^3+4t^2+4t=t^2+13t$, $\quad t(t^2+3t-9)=0$

$\therefore t=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$ $(\because t>0)$

따라서 두 점 P, Q는 출발한 후 한 번 만난다.

ㄴ. $v_P-v_Q=3t^2+6t-9=3(t+3)(t-1)$

$0<t<1$에서 $v_P-v_Q<0$이므로 $\quad v_P<v_Q$

$\therefore |v_P|<|v_Q|$

따라서 $0<t<1$에서 점 Q의 속력이 점 P의 속력보다 크다.

ㄷ. ㄱ에서 $t=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$일 때 두 점 P, Q가 처음 만나고,

$t=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$일 때 $v_P>v_Q$이므로

$|v_P|>|v_Q|$

따라서 점 P의 속력이 점 Q의 속력보다 크다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

09 t초 후의 직사각형의 가로의 길이는 $(10+t)$ cm, 세로의 길이는 $(5+2t)$ cm이고, 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이가 서로 같을 때, 정사각형이 되므로

$10+t=5+2t \quad \therefore t=5$

직사각형의 넓이를 $S\text{ cm}^2$라 하면

$S=(10+t)(5+2t)=2t^2+25t+50$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=4t+25$$

따라서 $t=5$일 때의 직사각형의 넓이의 변화율은

$4\cdot5+25=45\ (\text{cm}^2/\text{s})$ 답 ⑤

10 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면

$r=5+0.2t$, $h=10+0.1at$

일품 BOX

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때
$y=f(x)g(x)$이면
$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

함수 $f(x)$가 미분가능할 때 $y=\{f(x)\}^2$이면
$y'=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)=2f(x)f'(x)$

△ABC에서 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ $(0°<\theta<90°)$일 때,
$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}>1$이고, $t>1$에서 $v_P-v_Q>0$이므로 $\quad v_P>v_Q$

방정식 $f(x)=a$ (a는 상수)의 실근의 개수
➡ 두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프의 교점의 개수

원기둥의 부피를 $V\text{ cm}^3$라 하면

$V=\pi r^2h=\pi(5+0.2t)^2(10+0.1at)$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt}=2\pi(5+0.2t)\cdot0.2\cdot(10+0.1at)+\pi(5+0.2t)^2\cdot0.1a$$
$$=0.1\pi(5+0.2t)(40+5a+0.6at)$$

$t=20$일 때 $\frac{dV}{dt}=189\pi$이므로

$0.9\pi(40+17a)=189\pi$

$40+17a=210 \quad \therefore a=10$ 답 ⑤

11 t초 후의 삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cdot\sin60°$$
$$=\frac{1}{2}(t^2+t)\cdot4t^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\sqrt{3}(t^4+t^3)$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{3}(4t^3+3t^2)$$

따라서 $t=3$일 때의 삼각형 OPQ의 넓이의 변화율은

$\sqrt{3}(4\cdot3^3+3\cdot3^2)=135\sqrt{3}$ 답 $135\sqrt{3}$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 54~56쪽

01 $x^3-2x^2-4x+k=0$에서

$x^3-2x^2-4x=-k$

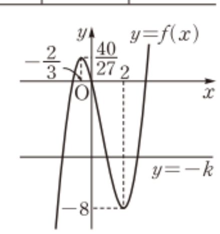
$f(x)=x^3-2x^2-4x$라 하면

$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{40}{27}$	↘	-8	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이어야 하므로

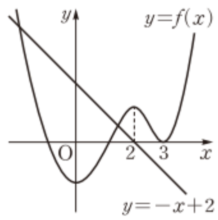
$-8<-k<0 \quad \therefore 0<k<8$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이다. 답 ⑤

02 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

이때 $f(0)<0$, $f(3)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶



방정식 $f(x)+x=2$, 즉 $f(x)=-x+2$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+2$의 교점의 x좌표와 같으므로 방정식 $f(x)+x=2$의 양근의 개수는 1, 음근의 개수는 1이다. ··· ❷

사차방정식 $f(x)+x=2$는 2개의 실근과 2개의 허근을 갖는다.

따라서 $a=1$, $b=1$이므로

$a-b=0$ ··· ❸

답 0

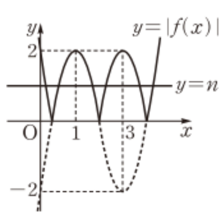
채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	50 %
❷ $f(x)+x=2$의 양근의 개수와 음근의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

03 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $|f(x)|=n$의 서로 다른 실근의 개수는 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점의 개수와 같으므로

$a_1=6,\ a_2=4,\ a_n=2\ (n\ge3)$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=6+4+2\cdot8=26$

답 ③

04 $f(x)=x^3+5$라 하면 $f'(x)=3x^2$

점 $(1,\ a)$에서 주어진 곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+5)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+5)=3t^2(x-t)$, 즉 $y=3t^2x-2t^3+5$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=3t^2-2t^3+5$

$\therefore 2t^3-3t^2+a-5=0$ ······ ㉠

점 $(1,\ a)$에서 곡선 $y=x^3+5$에 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

세 개의 접선을 그을 수 있다.
➡ 서로 다른 세 개의 접점이 존재한다.
➡ 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$g(t)=2t^3-3t^2+a-5$라 하면

$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	$a-5$	$\searrow$	$a-6$	$\nearrow$

삼차방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g(0)g(1)<0$, $(a-5)(a-6)<0$

함수 $g(t)$는 $t=0$에서 극댓값 $a-5$, $t=1$에서 극솟값 $a-6$을 갖는다.

$\therefore 5<a<6$

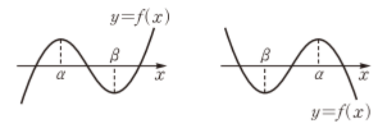
따라서 $\alpha=5$, $\beta=6$이므로

$\alpha+\beta=11$

답 ②

1등급 비밀노트

삼차함수 $f(x)$의 극댓값이 $f(\alpha)$, 극솟값이 $f(\beta)$일 때, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(\alpha)>0$, $f(\beta)<0$이어야 하므로

$f(\alpha)f(\beta)<0$

05 $f(x)=x^4-4x+a$라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$x>1$에서 $f'(x)\ \boxed{>}\ 0$

$x>1$에서 $x-1>0$, $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ 이므로 $f'(x)>0$

따라서 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>\boxed{f(1)}$이므로 $x>1$에서 부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하기 위한 필요충분조건은

$f(1)=a-3\ge0$ $\therefore \boxed{a\ge3}$

$\therefore$ (가) $>$ (나) $f(1)$ (다) $a\ge3$

답 ①

06 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\le g(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$의 최댓값을 M, $g(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, $M\le m$이어야 한다.

$f(x)=-x^4-2x^2+8x+5$에서

$f'(x)=-4x^3-4x+8=-4(x^3+x-2)$

$=-4(x-1)(x^2+x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ 이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	10	$\searrow$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $M=f(1)=10$

$g(x)=x^2+4x+a=(x+2)^2+a-4$에서 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 $a-4$를 갖는다.

$\therefore m=a-4$

$10\le a-4$에서 $a\ge14$

따라서 a의 최솟값은 14이다.

답 14

1등급 비밀노트

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
① 임의의 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le g(x)$가 성립한다.
➡ $F(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면 $F(x)\le 0$이어야 하므로 ($F(x)$의 최댓값)≤ 0임을 보인다.
② 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\le g(x_2)$가 성립한다.
➡ $f(x)$의 최댓값을 M, $g(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, $M\le m$임을 보인다.

07 $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$k+7$	↘	$k-20$	↗

$x>-3$에서 $f(x)>0$이려면 $\quad f(-3)\ge 0$

$f(-3)=k-45$이므로

$k-45\ge 0 \qquad \therefore k\ge 45$

따라서 정수 k의 최솟값은 45이므로 $\quad \alpha=45$ ⋯ ❶

$x>1$에서 $f(x)>0$이려면 $\quad f(2)>0$

$k-20>0 \qquad \therefore k>20$

따라서 정수 k의 최솟값은 21이므로 $\quad \beta=21$ ⋯ ❷

$\therefore \alpha-\beta=24$ ⋯ ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ α의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ β의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

08 $f(x)=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이므로 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하기 위해서는 $-1\le t\le 1$인 모든 실수 t에 대하여 부등식 $2t^3+3a-2\ge 0$이 성립해야 한다.

$g(t)=2t^3+3a-2$라 하면 $\quad g'(t)=6t^2$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=0$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$+$	
$g(t)$		↗	$3a-2$	↗	

따라서 $-1\le t\le 1$에서 $g(t)$는 증가하므로 최솟값은 $g(-1)$이다.

즉 $g(-1)=-2+3a-2\ge 0$이어야 하므로 $\quad a\ge \frac{4}{3}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{4}{3}$이다. 답 ④

09 조건 (가)에서 함수 $|f(x)-4|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(a)=4$를 만족시키는 a에 대하여

$f(x)=(x-a)^3+4$

로 놓을 수 있다.

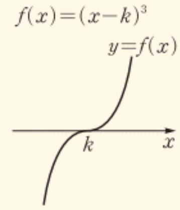
일품 BOX

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가
① 같은 방향으로 움직인다.
➡ (두 점의 속도의 곱) >0
② 반대 방향으로 움직인다.
➡ (두 점의 속도의 곱) <0

$f(-3)=k-45$, $f(2)=k-20$이므로 $f(2)>f(-3)$
따라서 $x\ge -3$일 때 $f(x)$는 $x=-3$에서 최솟값 $k-45$를 갖는다.

$x>1$일 때 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $k-20$이다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $f(k)=0$인 k에 대하여
$f(x)=(x-k)^3$



점 P의 속도를 v라 하면
$v=f'(t)$
이때 속력은 $|v|$이므로 $|f'(t)|$와 같다.

이때 $f'(x)=3(x-a)^2$이고 조건 (나)에 의하여 $x\ge -1$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)-f'(x)\ge 0$

$g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면

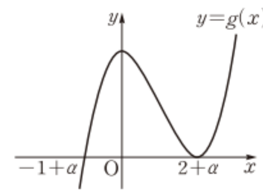
$g(x)=(x-a)^3-3(x-a)^2+4$

$x-a=t$라 하면 $t^3-3t^2+4=0$에서

$(t+1)(t-2)^2=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=2$

$\therefore x=-1+a$ 또는 $x=2+a$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



즉 $-1+a\le -1$이므로

$a\le 0$

따라서 $f(0)=-a^3+4\ge 4$

이므로 $f(0)$의 최솟값은 4이다. 답 4

10 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=4t-8$, $v_Q=t-6$ ⋯ ❶

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로 $\quad (4t-8)(t-6)<0$

$\therefore 2<t<6$ ⋯ ❷

한편 $2<t<6$에서 $v_P>0$, $v_Q<0$이므로 두 점 P, Q는 각각 일정한 방향으로 움직인다.

$t=2$일 때 점 P의 위치는 -8, $t=6$일 때 점 P의 위치는 24이므로 점 P가 움직인 거리는

$24-(-8)=32$

$t=2$일 때 점 Q의 위치는 -10, $t=6$일 때 점 Q의 위치는 -18이므로 점 Q가 움직인 거리는

$-10-(-18)=8$ ⋯ ❸

따라서 두 점 P, Q가 움직인 거리의 합은

$32+8=40$ ⋯ ❹

답 40

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 속도를 각각 구할 수 있다.	20 %
❷ 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직인 시각을 구할 수 있다.	40 %
❸ 반대 방향으로 움직이는 동안 두 점 P, Q가 움직인 거리를 각각 구할 수 있다.	30 %
❹ 반대 방향으로 움직이는 동안 두 점 P, Q가 움직인 거리의 합을 구할 수 있다.	10 %

11 $f'(t)=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$

점 P가 음의 방향으로 움직일 때, $f'(t)<0$이므로

$3(t-1)(t-5)<0 \qquad \therefore 1<t<5$

따라서 $1<t<5$에서 점 P의 속력 $|f'(t)|$는

$|f'(t)|=|3t^2-18t+15|$

$=-3t^2+18t-15$

$=-3(t-3)^2+12$

이므로 $t=3$일 때, 속력의 최댓값은 12이다. 답 ②

12 ㄱ. $3<t<4$에서 $|f'(t)|$가 감소하므로 점 P의 속력은 감소한다.

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=k(t-2)(t-4)$$
$$=k(t^2-6t+8)\ (k>0)$$

점 P의 시각 t에서의 가속도를 $v'(t)$라 하면

$$v'(t)=2k(t-3) \qquad \therefore v'(3)=0$$

따라서 $t=3$일 때, 점 P의 가속도는 0이다.

ㄷ. $f'(2)=f'(4)=0$이고 $t=2$, $t=4$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=2$, $t=4$에서 운동 방향을 바꾼다. 즉 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

13 점 P의 시각 t에서의 x좌표는

$$x=\frac{2}{3}t+\frac{2}{3} \qquad \cdots ❶$$

$f(x)=x^3$이라 하면 $\quad f'(x)=3x^2$

점 P에서 곡선 $y=x^3$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (a, a^3)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2$이므로 접선의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a)$, 즉

$$y=3a^2x-2a^3 \qquad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❷$$

이 직선이 점 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}t+\frac{2}{3},\ 0\right)$을 지나므로

$$3a^2\left(\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}\right)-2a^3=0, \qquad 2a^3-2a^2t-2a^2=0$$

$$2a^2(a-t-1)=0 \qquad \therefore a=t+1\ (\because a\neq 0)$$

$a=t+1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$y=3(t+1)^2x-2(t+1)^3$$

이 직선의 y절편은 $-2(t+1)^3$, 즉 $-2t^3-6t^2-6t-2$이므로 $\quad \mathrm{Q}(0,\ -2t^3-6t^2-6t-2) \qquad \cdots ❸$

점 Q가 y축 위를 움직이는 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=(-2t^3-6t^2-6t-2)'$$
$$=-6t^2-12t-6 \qquad \cdots ❹$$

따라서 $t=3$일 때의 점 Q의 속도는

$$v(3)=-96 \qquad \cdots ❺$$

답 -96

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 x좌표를 구할 수 있다.	10%
❷ 점 P에서 곡선 $y=x^3$에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ 점 Q의 좌표를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❹ 점 Q의 속도를 구할 수 있다.	20%
❺ 점 P가 출발한 지 3초 후의 점 Q의 속도를 구할 수 있다.	10%

1등급 비밀노트

① x축 위의 점 P의 시각 t에서의 좌표가 $(f(t),\ 0)$이면 점 P의 속도는 $f'(t)$이다.

② y축 위의 점 Q의 시각 t에서의 좌표가 $(0,\ g(t))$이면 점 Q의 속도는 $g'(t)$이다.

일품 BOX

$y=f'(t)$의 그래프는 이차함수의 그래프의 일부분이므로 $y=f'(t)$의 그래프는 직선 $t=3$에 대하여 대칭이다.

반지름의 길이가 r인 원의 넓이는
πr^2

14 t초 후의 두 선분 AP, PB의 길이는 각각

$2t$ cm, $(12-2t)$ cm

두 선분 AP, PB를 각각 지름으로 하는 두 원의 넓이는 각각 $\quad \pi t^2\ \mathrm{cm}^2$, $\pi(6-t)^2\ \mathrm{cm}^2$

$$\therefore S=36\pi-\{\pi t^2+\pi(6-t)^2\}$$
$$=\pi\{36-(2t^2-12t+36)\}$$
$$=\pi(12t-2t^2)(\mathrm{cm}^2)$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=\pi(12-4t)$$

$2\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PB}}$일 때, $2\cdot 2t=12-2t$에서

$t=2$

따라서 $t=2$일 때의 S의 변화율은

$\pi(12-8)=4\pi\ (\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

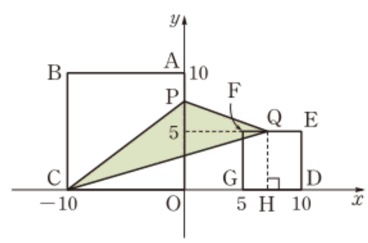
$\therefore k=4$ 답 4

15 점 P가 출발한 지 $t\ (5\le t\le 10)$초 후에 점 P는 변 OA 위에 있으므로 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(0,\ 2(t-5))$

또 점 Q가 출발한 지 $t\ (5\le t\le 10)$초 후에 점 Q는 변 EF 위에 있으므로 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(10-(t-5),\ 5)$, 즉 $\mathrm{Q}(15-t,\ 5)$



위의 그림과 같이 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 CPQ의 넓이는 삼각형 COP와 사다리꼴 POHQ의 넓이를 합한 후 삼각형 CHQ의 넓이를 뺀 것과 같으므로 삼각형 CPQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

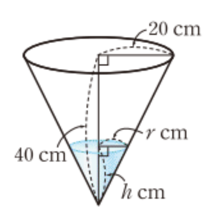
$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2(t-5)+\frac{1}{2}\{2(t-5)+5\}(15-t)$$
$$-\frac{1}{2}\cdot(25-t)\cdot 5$$
$$=10(t-5)+\frac{1}{2}(2t-5)(15-t)+\frac{5}{2}(t-25)$$
$$=-t^2+30t-150$$

$$\therefore S'(t)=-2t+30$$

따라서 $t=8$일 때의 삼각형 CPQ의 넓이의 변화율은

$S'(8)=-2\cdot 8+30=14$ 답 ④

16 물을 채우기 시작한 지 t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 수면의 높이를 h cm라 하면



$r:h=20:40$

$$\therefore r=\frac{1}{2}h$$

이때 $h=3t$이므로 $\qquad r=\frac{3}{2}t$

Ⅱ 다항함수의 미분법

물의 부피를 V라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{3}{2}t\right)^2\cdot 3t=\frac{9}{4}\pi t^3$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt}=\frac{27}{4}\pi t^2$$

수면의 높이가 30 cm일 때, $3t=30$에서 $t=10$

따라서 $t=10$일 때의 부피의 변화율은

$$\frac{27}{4}\pi\cdot 10^2=675\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$$

답 ④

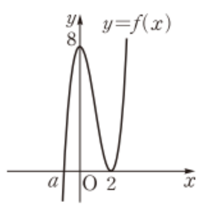
사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 57쪽

01 주어진 그래프에서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

$f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $f'(2)=0$이고 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

$f(0)=8$이고, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=k(x-a)(x-2)^2$

$(k>0,\ a<0)$이라 하면

$f(0)=8$이므로 $-4ak=8$

$\therefore ak=-2$ ...... ㉠

$f'(x)=k(x-2)^2+2k(x-a)(x-2)$이고, $f'(0)=0$이므로

$4k+4ak=0$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $4k-8=0$ $\therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면 $a=-1$

따라서 $f(x)=2(x+1)(x-2)^2$이므로

$f(1)=2\cdot 2\cdot 1=4$

답 4

02 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-b$에서

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx=x(4x^2+3ax+2b)$$

방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$를 가지므로 이차방정식 $4x^2+3ax+2b=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $4x^2+3ax+2b=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $\frac{b}{2}<0$이므로 두 근의 부호가 서로 다르다.

이때 $\alpha<\beta<\gamma$이므로 $\alpha<0,\ \beta=0,\ \gamma>0$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	$-b$	↘	극소	↗

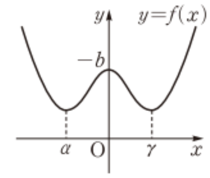
ㄱ. $f(\alpha)<-b,\ f(\gamma)<-b$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $-b$를 갖고, $x=\alpha$, $x=\gamma$에서 극솟값 $f(\alpha)$, $f(\gamma)$를 가지므로 $f(\alpha)<-b$, $f(\gamma)<-b$

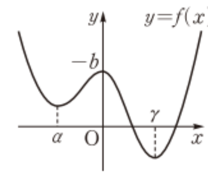
$f(\alpha)+f(\gamma)<-2b$

$\therefore \frac{f(\alpha)+f(\gamma)}{2}<-b$

ㄴ. [반례] $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으면 $f(\alpha)f(\gamma)>0$이지만 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.



ㄷ. $f(\alpha)>0$이고 $f(\gamma)<0$이면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 양의 실근과 두 허근을 갖는다.



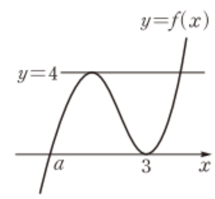
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

03 조건 ㈎에서 $g(3)=f(3)-|f'(3)|=f(3)$이므로

$f'(3)=0$

$f(3)=0$이고, 조건 ㈏에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같아야 하므로 삼차함수 $f(x)$는 극댓값이 4, 극솟값이 0이어야 한다.



$f(x)=(x-3)^2(x-a)\ (a<3)$

라 하면

$$f'(x)=2(x-3)(x-a)+(x-3)^2$$
$$=(x-3)(3x-2a-3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{2a+3}{3}$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	$\frac{2a+3}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=\frac{2a+3}{3}$에서 극댓값 4를 가지므로

$\left(\frac{2a-6}{3}\right)^2\left(\frac{-a+3}{3}\right)=4$

$(2a-6)^2(-a+3)=108$

$(a-3)^3=-27,\quad a-3=-3$

$\therefore a=0$

따라서 $f(x)=x(x-3)^2$, $f'(x)=3(x-3)(x-1)$이므로

$g(10)=f(10)-|f'(10)|$

$=10\cdot 7^2-|3\cdot 7\cdot 9|$

$=490-189=301$

답 301

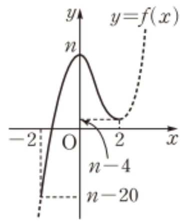
04 $f(x)=x^3-3x^2+n$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$n-20$	↗	n	↘	$n-4$

따라서 $-2\le x\le 2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$의 최댓값은 n, 최솟값은 $n-20$이다.



$|f(x)|<15$에서 $-15<f(x)<15$이므로

$-15<n-20,\ n<15$

따라서 $5<n<15$이므로 자연수 n의 값은 6, 7, 8, …, 14의 9개이다. 답 ④

05 ㄱ. $0<t<b$에서 $h(t)>0$이므로

$f(t)-g(t)>0\qquad \therefore f(t)>g(t)$

따라서 점 P가 점 Q보다 앞서 있으므로 점 Q는 점 P를 추월하지 못한다.

ㄴ. $b<t<c$에서 $h'(t)<0$이므로

$f'(t)<g'(t)$

$c<t<d$에서 $h'(t)>0$이므로

$f'(t)>g'(t)$

따라서 $c<t<d$에서 점 P의 속도가 점 Q의 속도보다 빠르다.

ㄷ. $a<t<b$에서 점 P가 일정한 속도로 움직이면 $f'(t)=k$ (k는 양수)로 놓을 수 있다.

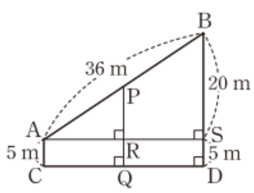
$\therefore h'(t)=f'(t)-g'(t)=k-g'(t)$

이때 $a<t<b$에서 $h'(t)$는 상수함수가 아니므로 $g'(t)$도 상수함수가 아니다.

즉 점 P의 속도가 일정하면 점 Q의 속도는 일정하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

06 오른쪽 그림에서 열차의 위치를 P라 하면



$\overline{AP}:\overline{PR}=\overline{AB}:\overline{BS}$

$(12t-t^2):\overline{PR}$

$=36:20$

$\therefore \overline{PR}=\frac{5}{9}(12t-t^2)$

출발한 지 t초 후의 열차의 지면으로부터의 높이를 h m라 하면

$h=\overline{PQ}=\overline{PR}+\overline{RQ}$

$=\frac{5}{9}(12t-t^2)+5$

$=-\frac{5}{9}t^2+\frac{20}{3}t+5$

양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{dh}{dt}=\frac{10}{9}(6-t)$

$t=4$일 때의 열차의 지면으로부터의 높이의 변화율은

$\frac{10}{9}\cdot 2=\frac{20}{9}$ (m/s)

따라서 $p=9,\ q=20$이므로

$p+q=29$ 답 29

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 58~62쪽

01 전략 함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$임을 이용한다.

풀이 $a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{0-1}{1}=-1$이므로

$|a_1|>\frac{1}{2}$

$a_2=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{1-1}{2}=0$이므로 $\quad |a_2|<\frac{1}{2}$

$n\ge 3$일 때,

$a_n=\frac{f(n)-f(0)}{n-0}=\frac{(n-3)-1}{n}=\frac{n-4}{n}$

$\left|\frac{n-4}{n}\right|<\frac{1}{2}$에서 $\quad -\frac{1}{2}<\frac{n-4}{n}<\frac{1}{2}$

$-n<2n-8<n\qquad \therefore \frac{8}{3}<n<8$

$-n<2n-8$에서
$n>\frac{8}{3}$
$2n-8<n$에서
$n<8$
$\therefore \frac{8}{3}<n<8$

그런데 $n\ge 3$이므로 $\quad 3\le n<8$

따라서 $|a_n|<\frac{1}{2}$을 만족시키는 자연수 n은 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다. 답 ③

02 전략 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

$=2f'(a)$

즉 $2f'(a)=6$이므로 $\quad f'(a)=3$

$f(x)=x^3+kx^2-6x+3$에서 $f'(x)=3x^2+2kx-6$이므로

$f'(a)=3a^2+2ka-6=3$

$\therefore 3a^2+2ka-9=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a의 값의 합은 $\quad -\frac{2k}{3}$

즉 $-\frac{2k}{3}=-3$이므로

$k=\frac{9}{2}$ 답 ⑤

03 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

풀이 점 $P(0,\ b)$에서 곡선 $y=f(x)$에 이르는 거리가 최소가 되는 점이 $Q(a,\ f(a))$이므로 선분 PQ와 곡선 위의 점 Q에서의 접선은 서로 수직이다.

선분 PQ의 기울기는 $\quad \frac{f(a)-b}{a}$

점 Q에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이므로

$\frac{f(a)-b}{a}\cdot f'(a)=-1$

$\therefore b=f(a)+\frac{a}{f'(a)}$

$b \to 0$일 때 $a \to 0$이므로

$$\lim_{b\to 0}\frac{a}{b}=\lim_{a\to 0}\frac{a}{f(a)+\frac{a}{f'(a)}}$$
$$=\lim_{a\to 0}\frac{1}{\frac{f(a)}{a}+\frac{1}{f'(a)}}$$
$$=\lim_{a\to 0}\frac{1}{\frac{a^2+3a}{a}+\frac{1}{2a+3}}$$
$$=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a+3+\frac{1}{2a+3}}$$
$$=\frac{1}{3+\frac{1}{3}}=\frac{3}{10}$$ 답 ④

$f'(x)=2x+3$이므로 $f'(a)=2a+3$

04 전략 미분법의 공식을 이용하여 $f_n'(x)$를 구한 후 $x=1$을 대입한다.

풀이 $f_n'(x)=\frac{n+1}{n}x^n$이므로 $\quad f_n'(1)=\frac{n+1}{n}$

$\therefore a_n=\frac{n+1}{n}$

$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_n$

$=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{n+1}{n}$

$=\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)$

$=\log_2(n+1)=5$

이므로 $\quad n+1=2^5=32$

$\therefore n=32-1=31$ 답 ④

로그의 성질
$a>0,\ a\neq1,\ M>0,$
$N>0$일 때,
$\log_a MN$
$=\log_a M+\log_a N$

05 전략 먼저 $f(x)$의 차수를 구한 후 주어진 조건을 만족시키는 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)$의 최고차항을 x^n이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 nx^{n-1}이므로 $f(x)f'(x)$의 최고차항은 nx^{2n-1}이다.
조건 (가)에서 양변의 최고차항을 비교하면 $nx^{2n-1}=2x^3$이므로 $\quad n=2$
따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 2인 일차함수이다.
한편 조건 (가)에서

$f(x)f'(x)=2x^3+2(k-1)x^2-2kx$
$=2x\{x^2+(k-1)x-k\}$
$=2x(x-1)(x+k)$

(i) $f(x)=x(x-1),\ f'(x)=2(x+k)$라 하면
$f(3)=6$
그런데 조건 (나)에서 $f(3)=3$이므로 모순이다.

(ii) $f(x)=x(x+k),\ f'(x)=2(x-1)$이라 하면 조건 (나)에서 $\quad f(3)=3(3+k)=3$
$\therefore k=-2,\ f(x)=x(x-2)=x^2-2x$
이때 $f'(x)=2x-2=2(x-1)$이므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $f(x)=(x-1)(x+k),\ f'(x)=2x$라 하면 조건 (나)에서 $\quad f(3)=2(3+k)=3$
$\therefore k=-\frac{3}{2},\ f(x)=(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$
이때 $f'(x)=2x-\frac{5}{2}$이므로 모순이다.

이상에서 $k=-2$이고 $f'(-2)=-6$이므로
$kf'(k)=-2f'(-2)=12$ 답 ⑤

06 전략 $f(x)$를 몫과 나머지를 이용하여 나타낸 후 곱의 미분법을 이용한다.

풀이 $g(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면
$f(x)=(x-1)^2(x^2+3x)+ax+b$
$f'(x)=2(x-1)(x^2+3x)+(x-1)^2(2x+3)+a$
$f(1)=-2,\ f'(0)=5$이므로 $\quad a+b=-2,\ 3+a=5$
두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=-4$
따라서 $g(x)=2x-4$이므로 $\quad g(2)=0$ 답 ③

$(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지 $g(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

07 전략 기울기가 $f'(a)$인 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(a)}$이다. (단, $f'(a)\neq0$)

풀이 $f(x)=x^2$이라 하면 $\quad f'(x)=2x$
점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\quad f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$
따라서 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은
$y-\frac{1}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$, 즉 $y=-x+\frac{3}{4}$
$g(x)=-x^4+3x+a$라 하면 $\quad g'(x)=-4x^3+3$
곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=-x+\frac{3}{4}$의 접점의 좌표를 $\left(t,\ -t+\frac{3}{4}\right)$이라 하면
$g'(t)=-4t^3+3=-1$
$t^3=1 \quad \therefore t=1$
접점의 좌표가 $\left(1,\ -\frac{1}{4}\right)$이므로
$2+a=-\frac{1}{4} \quad \therefore a=-\frac{9}{4}$ 답 ①

접선의 기울기가 1이므로 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

08 전략 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓고 접선의 기울기가 5임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+3x-1$이라 하면
$f'(x)=2x+3$
접점의 좌표를 $(a,\ a^2+3a-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 5이므로
$f'(a)=2a+3=5 \quad \therefore a=1$
따라서 접점의 좌표가 $(1,\ 3)$이므로 접선의 방정식은
$y-3=5(x-1)$, 즉 $y=5x-2$
$y=0$을 대입하면 $\quad 0=5x-2 \quad \therefore x=\frac{2}{5}$
따라서 직선의 x절편은 $\frac{2}{5}$이다. 답 ④

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선의 기울기는
$\tan\theta$

09 전략 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓고 접선의 방정식을 구한 후 이 접선과 주어진 곡선의 교점이 1개임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-3a^2+1)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-6a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-3a^2+1)=(3a^2-6a)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2-6a)x-2a^3+3a^2+1$

접선이 곡선과 접점 이외의 점에서는 만나지 않으므로 방정식 $x^3-3x^2+1=(3a^2-6a)x-2a^3+3a^2+1$이 하나의 실근을 가져야 한다.

$x^3-3x^2-(3a^2-6a)x+2a^3-3a^2=0$에서

$(x-a)^2(x+2a-3)=0$

$\therefore x=a$ 또는 $x=-2a+3$

즉 $-2a+3=a$이므로 $a=1$

따라서 접선의 방정식이 $y=-3x+2$이므로 접선의 y절편은 2이다.

$\therefore \mathrm{P}(0,\ 2)$

답 ②

10 전략 두 곡선의 접선의 방정식을 각각 구한 후 두 직선이 일치함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$

점 P의 좌표를 $(p,\ p^2)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(p)=2p$이므로 접선의 방정식은

$y-p^2=2p(x-p)$, 즉 $y=2px-p^2$ …… ㉠

한편 $g(x)=x^2-2ax+2a^2$이라 하면

$g'(x)=2x-2a$

점 Q의 좌표를 $(q,\ q^2-2aq+2a^2)$이라 하면 점 Q에서의 접선의 기울기는 $g'(q)=2q-2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(q^2-2aq+2a^2)=2(q-a)(x-q)$

$\therefore y=2(q-a)x+2a^2-q^2$ …… ㉡

이때 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$2p=2(q-a),\ -p^2=2a^2-q^2$

$\therefore p=\frac{1}{2}a,\ q=\frac{3}{2}a$

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{4}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{3}{2}a,\ \frac{5}{4}a^2\right)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$에서 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=2$

$\left(\frac{3}{2}a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{4}a^2-\frac{a^2}{4}\right)^2=2$

$a^4+a^2-2=0,\quad (a^2+2)(a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

답 ①

11 전략 평균값 정리를 이용한다.

풀이 평균값 정리에 의하여 임의의 실수 $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$에 대하여 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$인 c가 x_1과 x_2 사이에 적어도 하나 존재한다.

ㄱ. [반례] 두 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 4)$를 잇는 직선의 기울기는 2이다.

ㄴ. $f'(x)=1-3x^2\le1$이므로 임의의 실수 $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$에 대하여

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)\le1$, 즉 $m\le1$

ㄷ. $f'(x)=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2\le0$이므로 임의의 실수 $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$에 대하여

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)\le0$, 즉 $m\le0\le1$

이상에서 $m\le1$을 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

12 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체 집합에서 증가하면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3b\le0$

$\therefore a^2\le3b$ …… ㉠

따라서 부등식 ㉠을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$a=1$일 때, $b=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$의 9개

$a=2$일 때, $b=2,\ 3,\ \cdots,\ 9$의 8개

$a=3$일 때, $b=3,\ 4,\ \cdots,\ 9$의 7개

$a=4$일 때, $b=6,\ 7,\ 8,\ 9$의 4개

$a=5$일 때, $b=9$의 1개

이므로 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$9+8+7+4+1=29$

답 ②

13 전략 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=3$과 접하려면 $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값이 3임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-6x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

$y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=3$과 접하려면 $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값이 3이어야 한다.

(i) 극댓값이 3인 경우

$f(0)=3$에서 $k=3$

(ii) 극솟값이 3인 경우

$f(4)=3$에서 $64-96+k=3$

$\therefore k=35$

모든 실수 x에 대하여 $x^2\ge0$이므로 $1-3x^2\le1$

$p=q-a$이므로
$-(q-a)^2=2a^2-q^2$
$3a^2=2aq$
$\therefore q=\frac{3}{2}a\ (\because a\ne0)$
$\therefore p=\frac{3}{2}a-a=\frac{1}{2}a$

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 임의의 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 평균값 정리를 이용할 수 있다.

Ⅱ 다항함수의 미분법

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad k=3$ 또는 $k=35$

따라서 k의 값의 합은

$3+35=38$

답 ③

14

전략 함수 $f(x)$의 증감표를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 주어진 그래프에서 $f'(x)=0$의 해는

$x=a$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

답 ②

일품 BOX

$f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고, 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

참고 보기의 그래프가 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 없는 이유는 다음과 같다.

① $f'(a)$의 값이 존재하므로 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이어야 한다.

③ $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖지 않아야 한다.

④ $f'(0)$의 값이 존재하므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능해야 한다.

⑤ $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 가져야 한다.

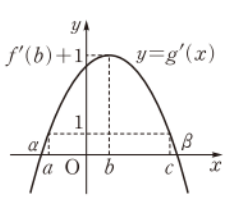
15

전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 각 함수의 증가와 감소를 조사한다.

풀이 ㄱ. $g(x)=f(x)+x$라 하면

$g'(x)=f'(x)+1$

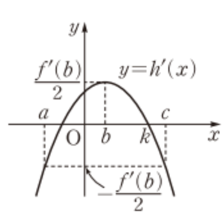
따라서 $y=g'(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha\ (a<\alpha)$에서 극소, $x=\beta\ (c<\beta)$에서 극대이므로 극값을 갖는다.



ㄴ. $h(x)=f(x)-\dfrac{f'(b)}{2}x$라 하면

$h'(x)=f'(x)-\dfrac{f'(b)}{2}$

따라서 $y=h'(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 극댓값을 가지면 $b<k<c$이다.



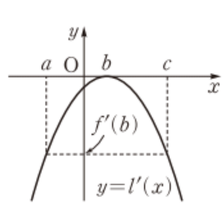
ㄷ. $l(x)=f(x)-f'(b)x$라 하면

$l'(x)=f'(x)-f'(b)$

따라서 $y=l'(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $l(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$l'(x)\le 0$

즉 $l(x)$는 극값을 갖지 않는다.



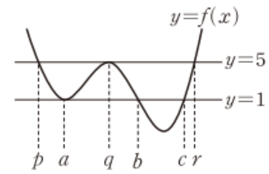
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

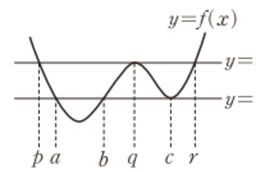
16

전략 주어진 조건을 만족시키도록 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

일품 BOX

최고차항의 계수가 양수인 사차식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=k$ (k는 상수)가 서로 다른 세 실근을 가지면 k는 함수 $f(x)$의 극값이다.

ㄱ. [그림 1], [그림 2]에서 $\quad f'(q)=0$

ㄴ. $f'(a)=0$, 즉 [그림 1]에서 $f'(b)<0$, $f'(r)>0$이므로

$f'(b)f'(r)<0$

ㄷ. $f'(c)=0$, 즉 [그림 2]에서 $\quad f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<f(a)=1$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

17

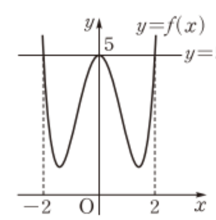
전략 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키면 $f(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있음을 이용한다.

풀이 $f(-x)=f(x)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$f(x)=x^4+ax^2+b$

(a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.



일품 BOX

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

① $f(-x)=f(x)$
➡ $f(x)$는 우함수

② $f(-x)=-f(x)$
➡ $f(x)$는 기함수

또 방정식 $f(x)=5$가 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

방정식 $f(x)=5$의 한 근이 -2이므로 나머지 두 근은 0, 2이다.

즉 $f(0)=5$, $f(2)=5$이므로

$b=5$, $16+4a+b=5 \qquad \therefore a=-4, b=5$

따라서 $f(x)=x^4-4x^2+5$이므로

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$에서 극솟값을 가지므로 구하는 극솟값은

$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^4-4(\sqrt{2})^2+5=1$

답 ④

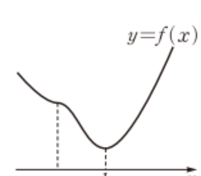
일품 BOX

$f(x)$가 우함수이므로 $f(\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})$

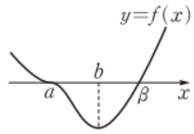
18

전략 주어진 조건을 만족시키는 사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 생각해 본다.

풀이 ㄱ. $f(b)>0$이면 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)>0$의 해는 모든 실수이다.

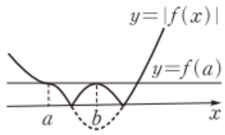


ㄴ. $f(a)=0$일 때 $f(x)=0$을 만족시키는 a가 아닌 값을 $\beta\ (b<\beta)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\le 0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $a\le x\le \beta$이다.



따라서 x의 최댓값은 β이다.

ㄷ. $f(a)>f(b)$이므로 $f(a)=-f(b)$가 성립하려면 $f(a)>0$, $f(b)<0$이고 $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}=0$이다.



즉 $y=|f(x)|$의 그래프는 위의 그림과 같다.
따라서 방정식 $|f(x)|=f(a)$는 서로 다른 세 실근을 가진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

19 전략 함수 $g(x)=f(x)-x$의 그래프를 그린 후 구간 $[-2, 3]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $x-k\le f(x)\le x+k$에서 $\quad -k\le f(x)-x\le k$

$g(x)=f(x)-x$라 하면

$g(x)=2x^3-3x^2-12x+1$

$\therefore g'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)$
$=6(x+1)(x-2)$

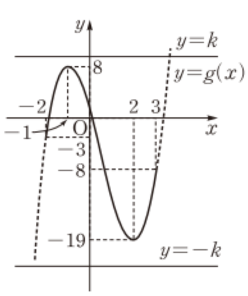
$g'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-3	↗	8	↘	-19	↗	-8

즉 $-2\le x\le 3$에서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 이 그래프가 두 직선 $y=k$, $y=-k$ 사이에 있도록 하려면

$k\ge 19$

따라서 k의 최솟값은 19이다. 답 ④



20 전략 시각 t에서의 위치가 $x(t)$일 때 속도는 $x'(t)$이다.

풀이 ㄱ. 주어진 그래프에서 $t=1$일 때의 접선의 기울기가 0이므로 $t=1$에서 점 P의 속력은 0이다.

ㄴ. 주어진 그래프에서

$0<t<1,\ 2<t<3,\ 5<t<6$

일 때, 접선의 기울기가 양수이므로 속도가 양수일 때 움직인 총시간은 3초이다.

ㄷ. $t=4$일 때의 접선의 기울기가 음수이므로 $t=4$일 때 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다.

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$의 그래프에서 $x'(a)=0$이면
➡ $t=a$에서 정지하거나 운동 방향을 바꾼다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

21 전략 시각 t에서의 부피를 $V(t)$라 할 때 부피의 변화율은 $V'(t)$임을 이용한다.

풀이 t초 후의 원기둥의 반지름의 길이는 $(1+t)$ cm이고 높이는 $(3+3t)$ cm이므로 원기둥의 부피를 $V(t)\ \text{cm}^3$라 하면

$V(t)=\pi(1+t)^2(3+3t)=3\pi(t+1)^3$

$\therefore V'(t)=9\pi(t+1)^2$

밑넓이가 $4\pi\ \text{cm}^2$일 때, $t=1$이므로 구하는 부피의 변화율은

$\pi(1+t)^2=4\pi$에서
$1+t=2\ (\because t>0)$
$\therefore t=1$

$V'(1)=36\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$ 답 ⑤

22 전략 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이고 $f'(1)$이 존재하도록 하는 a, b의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $f(1)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이므로

$1-4+b=a+3$

$\therefore b=a+6 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad$ ⋯➊

$f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-4x+b-(b-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x-3)$$
$$=-2$$

㉠에서 $b=a+6$이므로
$b-3=a+3$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{ax+3-(b-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{ax+3-(a+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)}{x-1}$$
$$=a$$

에서

$a=-2 \quad$ ⋯➋

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=4$

$\therefore a+b=2 \quad$ ⋯➌

답 2

채점 기준	비율
➊ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

23 전략 $y=f(x)g(x)h(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(2x-a)(2x-b)(2x-c)$에서

$f'(x)=2(2x-b)(2x-c)+2(2x-a)(2x-c)$
$+2(2x-a)(2x-b)$

Ⅱ 다항함수의 미분법

$$\therefore \frac{a^2}{f'\left(\frac{a}{2}\right)}+\frac{b^2}{f'\left(\frac{b}{2}\right)}+\frac{c^2}{f'\left(\frac{c}{2}\right)}$$

$$=\frac{a^2}{2(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{2(b-a)(b-c)}$$

$$+\frac{c^2}{2(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{2(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)}{2(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{a^2-a(b+c)+bc}{2(a-b)(a-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{2(a-b)(a-c)}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

24 전략 주어진 등식에 $x=0$, $y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1$

$\therefore f(0)=-1$ ⋯ ❶

$f'(0)=2$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}=2$$

$f'(3)=14$이므로

$$f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3)+f(h)+3kh+1-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}+3k$$

$=2+3k$ ⋯ ❷

즉 $2+3k=14$이므로

$k=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(3)$을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

25 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

풀이 점 $(1,\ 1)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=1$ ⋯⋯ ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(1)=2$ ⋯⋯ ㉡

$g(x)=(x^2+1)f(x)$라 하면

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$

㉠, ㉡에서

$g(1)=2f(1)=2\cdot1=2$,

$g'(1)=2f(1)+2f'(1)$

$=2\cdot1+2\cdot2=6$

따라서 $y=g(x)$ 위의 x좌표가 1인 점에서의 접선의 방정식은

$y-2=6(x-1)$, 즉 $y=6x-4$

답 $y=6x-4$

26 전략 곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 기울기의 최솟값은 $f'(x)$의 최솟값임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{4}{3}$라 하면

$f'(x)=x^2-4x$ ⋯ ❶

접점의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{3}a^3-2a^2+\frac{4}{3}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=a^2-4a=(a-2)^2-4$

이므로 접선의 기울기는 $a=2$일 때, 최솟값 -4를 갖는다. ⋯ ❷

즉 구하는 접선은 점 $(2,\ -4)$를 지나고 기울기가 -4이므로 직선의 방정식은

$y+4=-4(x-2)$, 즉 $y=-4x+4$ ⋯ ❸

따라서 $m=-4$, $n=4$이므로

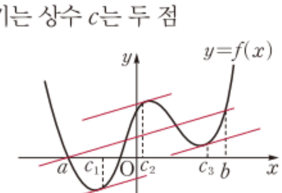
$mn=-16$ ⋯ ❹

답 -16

채점 기준	비율
❶ 도함수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 접선의 기울기의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 기울기가 최소인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❹ mn의 값을 구할 수 있다.	10 %

27 전략 평균값 정리의 기하적 의미를 생각한다.

풀이 주어진 등식을 만족시키는 상수 c는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 잇는 직선과 기울기가 같은 접선의 접점의 x좌표이다.



따라서 오른쪽 그림과 같이 상수 c의 값은 c_1, c_2, c_3의 3개이다.

답 3

28 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$가 극대, 극소가 되는 점을 찾는다.

풀이 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

(a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

일품 BOX

$f'\left(\frac{a}{2}\right)$

$=2(a-b)(a-c)$

$+2(a-a)(a-c)$

$+2(a-a)(a-b)$

$=2(a-b)(a-c)$

마찬가지로

$f'\left(\frac{b}{2}\right)$

$=2(b-a)(b-c)$

$f'\left(\frac{c}{2}\right)$

$=2(c-a)(c-b)$

$a=2$를 $\frac{1}{3}a^3-2a^2+\frac{4}{3}$에 대입하면

$\frac{1}{3}\cdot2^3-2\cdot2^2+\frac{4}{3}$

$=\frac{8}{3}-8+\frac{4}{3}$

$=-4$

평균값 정리는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 잇는 직선에 평행한 접선을 갖는 점이 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

▸▸ 본책 61~62쪽

조건 ㈎에서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, 조건 ㈏에서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값 3을 가지므로 $x=0$에서도 극솟값 3을 갖는다. 또한 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

$f'(x)=0$의 세 실근이 0, 2, 4이므로 ⋯ ❶

$$f'(x)=4x(x-2)(x-4)=4x^3-24x^2+32x$$

즉 $3a=-24$, $2b=32$, $c=0$이므로

$$a=-8,\ b=16,\ c=0$$

$f(4)=3$이고 $f(4)=f(0)$이므로 $f(0)=3$에서

$$d=3$$

$$\therefore\ f(x)=x^4-8x^3+16x^2+3 \quad ⋯ ❷$$

따라서 $f(x)$의 극댓값은

$$f(2)=16-64+64+3=19 \quad ⋯ ❸$$

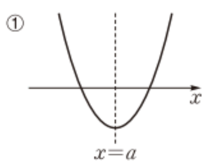
답 19

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 극댓값을 구할 수 있다.	20 %

1등급 비밀노트

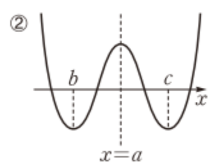
최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이면

①



$x=a$에서 극솟값만을 갖는다.

②

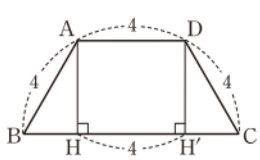


$x=a$에서 극댓값을 갖고, $x=b$와 $x=c$에서 극솟값을 갖는다.

29

전략 $\overline{BC}=2x\ (0<x<6)$라 하고 사다리꼴 ABCD의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A, D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면



$$\overline{HH'}=4,\ \overline{BH}=\overline{CH'}$$

$\overline{BC}=2x\ (0<x<6)$라 하면

> $\overline{BC}>0$이므로
> $x>0$ ⋯ ㉠
> $\overline{BH}<4$, $\overline{HH'}=4$, $\overline{H'C}<4$이므로
> $\overline{BC}<4+4+4$에서
> $2x<12$
> $\therefore x<6$ ⋯ ㉡
> ㉠, ㉡에서 $0<x<6$

$$\overline{BH}=\frac{1}{2}(2x-4)=x-2$$

$$\therefore\ \overline{AH}=\sqrt{4^2-(x-2)^2}=\sqrt{12+4x-x^2}$$

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}(2x+4)\sqrt{12+4x-x^2}$$
$$=(x+2)\sqrt{12+4x-x^2}$$

$$\therefore\ S^2=(x+2)^2(12+4x-x^2) \quad ⋯ ❶$$

$f(x)=(x+2)^2(12+4x-x^2)$이라 하면

$$f'(x)=2(x+2)(12+4x-x^2)+(x+2)^2(4-2x)$$
$$=-4(x+2)(x^2-2x-8)$$
$$=-4(x+2)^2(x-4)$$

$f'(x)=0$에서 $x=4\ (\because\ 0<x<6)$ ⋯ ❷

x	0	⋯	4	⋯	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

즉 $f(x)$는 $x=4$에서 극대이면서 최대이다.

따라서 S^2의 최댓값은 $f(4)=6^2\cdot12=432$ ⋯ ❸

답 432

채점 기준	비율
❶ $\overline{BC}=2x$라 할 때 S^2을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ S^2의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

30

전략 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 구한다.

풀이 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$$v_P=2t^3-12t^2+24t,\ v_Q=3t^2+a$$

$t>0$에서 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 2번 있으려면 $v_P=v_Q$를 만족시키는 양수 t의 값이 2개 존재해야 하므로 방정식

$$2t^3-12t^2+24t=3t^2+a,\ \text{즉}\ 2t^3-15t^2+24t=a$$

가 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

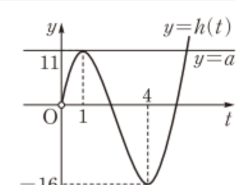
$h(t)=2t^3-15t^2+24t\ (t>0)$라 하면

$$h'(t)=6t^2-30t+24=6(t-1)(t-4)$$

$h'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=4$

t	0	⋯	1	⋯	4	⋯
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$		↗	11	↘	-16	↗

따라서 함수 $y=h(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 곡선 $y=h(t)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나려면



$$a=11\ (\because\ a>0)$$

답 11

31

전략 접선의 방정식을 구하여 접점의 x좌표를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y=x^3$에서 $y'=3x^2$

접점 Q의 좌표를 $(\alpha,\ \alpha^3)$이라 하면 점 Q에서의 접선의 방정식은

$$y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha),\ \text{즉}\ y=3\alpha^2x-2\alpha^3$$

이 직선이 점 $P\left(\frac{2}{3}t+1,\ 0\right)$을 지나므로

$$0=3\alpha^2\left(\frac{2}{3}t+1\right)-2\alpha^3$$

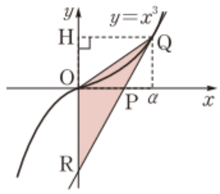
> $0=2\alpha^2t+3\alpha^2-2\alpha^3$이므로 $2\alpha^2t=2\alpha^3-3\alpha^2$
> $t=\alpha-\frac{3}{2}$
> $\therefore\ \alpha=t+\frac{3}{2}$

$$\therefore\ \alpha=t+\frac{3}{2} \qquad \therefore\ Q\left(t+\frac{3}{2},\ \left(t+\frac{3}{2}\right)^3\right)$$

또 이 직선의 y절편은 $-2\alpha^3$이므로

$$R\left(0,\ -2\left(t+\frac{3}{2}\right)^3\right)$$

오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하고 삼각형 OQR의 넓이를 $S(t)$라 하면



$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{OR}\cdot\overline{QH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\left(t+\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(t+\frac{3}{2}\right)=\left(t+\frac{3}{2}\right)^4$$
$$\therefore S'(t)=4\left(t+\frac{3}{2}\right)^3$$

따라서 $t=\frac{1}{2}$일 때, 삼각형 OQR의 넓이의 변화율은

$$S'\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot 2^3=32$$

답 32

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 63쪽

01

해결 단계

1. 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구한다.
2. 조건 (나)를 이용하여 $f(x)$의 최고차항이 될 수 있는 경우를 나눈다.
3. (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하면 (분자)$\to$0임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.
4. k의 값을 모두 구한다.

풀이 ❶ 조건 (가)에서 $x=1$을 대입하면 $f(1)=0$

> 일품 BOX: $0\le f(1)\le 0$이므로 $f(1)=0$

$x>1$일 때, $\frac{4(x-1)}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{x^4-1}{x-1}$이고

$$\lim_{x\to1+}\frac{4(x-1)}{x-1}=4$$
$$\lim_{x\to1+}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}=4$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4$$

또 $x<1$일 때, $\frac{4(x-1)}{x-1}\ge\frac{f(x)}{x-1}\ge\frac{x^4-1}{x-1}$에서

$$\lim_{x\to1-}\frac{4(x-1)}{x-1}=4$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}=4$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4$$
$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4 \quad\cdots\cdots ㉠$$

❷ 한편 $f(x)$의 최고차항을 x^n이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 nx^{n-1}이므로 $f(x)f'(x)$의 최고차항은 nx^{2n-1}이다.

조건 (나)에 의하여 $2n-1<7$ $\quad\therefore n<4$

(i) $f(x)$가 일차함수인 경우

$f(1)=0$이므로 $f(x)=x-1$이고 $f'(x)=1$이므로 ㉠에 모순이다.

(ii) $f(x)$가 이차함수인 경우

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f'(x)=2x+a$$

$f(1)=0$, $f'(1)=4$에서

$$1+a+b=0,\ 2+a=4$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=-3$$

$f(x)=x^2+2x-3$, $f'(x)=2x+2$에서

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)}{x}=-\infty$이므로 조건 (다)에 모순이다.

(iii) $f(x)$가 삼차함수인 경우

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$f(1)=0$, $f'(1)=4$에서

$$1+a+b+c=0,\ 3+2a+b=4$$

두 식을 연립하여 정리하면

$$a=2+c,\ b=-3-2c$$

> 일품 BOX: $1+a+b+c=0$에서
> $b=-a-c-1$
> $b=-a-c-1$을 $3+2a+b=4$에 대입하면 $a-c+2=4$
> $\therefore a=2+c$
> $a=2+c$를 $b=-a-c-1$에 대입하면
> $b=-3-2c$

❸ $f(x)=x^3+(2+c)x^2+(-3-2c)x+c$,

$f'(x)=3x^2+2(2+c)x+(-3-2c)$이므로 조건 (다)에 의하여 $x\to0$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)f'(x)=0$이므로

$$c(-3-2c)=0$$
$$\therefore c=0 \text{ 또는 } c=-\frac{3}{2}$$

❹ (i) $c=0$일 때,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(x^3+2x^2-3x)(3x^2+4x-3)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x^2+2x-3)(3x^2+4x-3)$$
$$=9$$

(ii) $c=-\frac{3}{2}$일 때,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\right)(3x^2+x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\right)(3x+1)$$
$$=-\frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 $k=9$ 또는 $k=-\frac{3}{2}$이므로 그 합은

$$9+\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{2}$$

답 $\frac{15}{2}$

02

해결 단계

1. 함수 $g(x)$의 미분가능성을 이용하여 a의 값을 구한다.
2. 함수 $g(x)$의 연속성을 이용하여 b의 값을 구한다.
3. $f(x)$의 극값을 구한 후 이를 이용하여 $y=g(x)$의 그래프를 그려 보고 $g(x)$의 극값을 모두 구한다.
4. $a+b+M$의 값을 구한다.

풀이 ❶ 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $g'(2)$의 값이 존재한다.

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<2) \\ f(x-a)+b & (x\ge 2) \end{cases}$에서 $g'(2)$의 값이 존재하므로

$$g'(2)=\lim_{h\to 0+}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$$

이때 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=f'(2-a)$,

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=f'(2)$

이므로 $f'(2-a)=f'(2)$

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-4$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12$

$f'(2)=6\cdot 2^2+6\cdot 2-12=24$이므로 $f'(x)=24$에서

$6x^2+6x-12=24,\quad x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0\quad \therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 $f'(-3)=f'(2)$이므로 $2-a=-3$ ($\because a\neq 0$)에서

$a=5$

❷ 또 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=f(-3)+b$

$f(2)=0,\ f(-3)=5$이므로

$5+b=0\quad \therefore b=-5$

❸ 한편 $f'(x)=0$에서 $6x^2+6x-12=0$

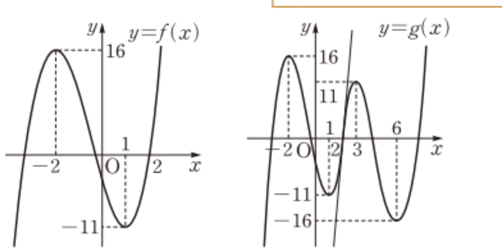
$6(x+2)(x-1)=0\quad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16	↘	-11	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 16을 갖고, $x=1$에서 극솟값 -11을 갖는다.

이때 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

$x\ge 2$에서 $g(x)=f(x-5)-5$이므로 $y=g(x)$ $(x\ge 2)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.



따라서 함수 $g(x)$는 $x=-2$, $x=3$에서 각각 극댓값 16, 11을 갖고, $x=1$, $x=6$에서 각각 극솟값 -11, -16을 갖는다.

❹ $\therefore M=16+11+(-11)+(-16)=0$

$\therefore a+b+M=5+(-5)+0=0$ 답 ①

03

해결 단계

❶ 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구한다.

❷ $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 부호에 따라 $g(x)$의 그래프의 개형을 그려서 미분가능하지 않은 점을 찾는다.

❸ 극값의 범위를 이용하여 n의 최솟값을 구한다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 경우
① $x=a$에서 불연속
② $x=a$에서 $y=f(x)$의 그래프가 꺾임

풀이 ❶ $f(x)=x^3-3x^2-9x+n$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

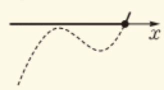
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

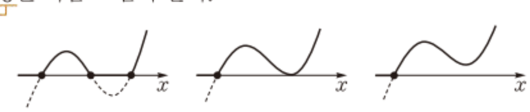
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$n+5$	↘	$n-27$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $n+5$를 갖고, $x=3$에서 극솟값 $n-27$을 갖는다.

❷ $g(x)=\begin{cases} 0 & (f(x)<0) \\ f(x) & (f(x)\ge 0) \end{cases}$이므로 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

$f(x)$의 극댓값이 $n+5>0$이므로 다음 그림과 같은 경우는 고려하지 않는다.





[그림 1] [그림 2] [그림 3]

❸ 이때 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점이 한 개이려면 [그림 2] 또는 [그림 3]과 같으므로 (극솟값)≥ 0이어야 한다.

즉 $f(3)=n-27\ge 0$이어야 하므로

$n\ge 27$

따라서 자연수 n의 최솟값은 27이다. 답 ④

04

해결 단계

❶ 상수 k의 값을 구한다.

❷ 점 P의 좌표를 $(t,\ 0)$이라 할 때, 사각형 OPQC의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

❸ $\overline{PQ}=\frac{\overline{OC}+\overline{AB}}{2}$를 만족시키는 순간의 t의 값을 구한다.

❹ 사각형 OPQC의 넓이의 변화율을 구한다.

풀이 ❶ 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=0$

$f'(x)=3x^2+2kx$에서

$f'(2)=12+4k=0\quad \therefore k=-3$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+5$

❷ 점 P의 좌표를 $(t,\ 0)$이라 하면

$Q(t,\ t^3-3t^2+5)$

따라서 □OPQC의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}t(t^3-3t^2+5+5)=\frac{1}{2}t^4-\frac{3}{2}t^3+5t$$

$$\therefore S'(t)=2t^3-\frac{9}{2}t^2+5$$

❸ 이때 $\overline{OC}=5$, $\overline{AB}=f(2)=1$이므로

$$\overline{PQ}=\frac{5+1}{2}=3$$

즉 $\overline{PQ}=f(t)=3$이므로

$t^3-3t^2+5=3,\quad t^3-3t^2+2=0$

$(t-1)(t^2-2t-2)=0\quad \therefore t=1$ ($\because 0<t<2$)

❹ 따라서 구하는 넓이의 변화율은

$$S'(1)=2-\frac{9}{2}+5=\frac{5}{2}$$ 답 $\frac{5}{2}$

Ⅲ 다항함수의 적분법

Ⅲ-1. 부정적분

개념&핵심 기출
본책 66~67쪽

01 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$F'(x)=G'(x)=f(x)$

$F(x)=G(x)+C$

$F'(x)=3x^2+2ax$, $G'(x)=3x^2-6x$이므로

$2a=-6 \qquad \therefore a=-3$

$F(2)=G(2)+3$이므로

$C=3$

즉 $F(x)=G(x)+3$이므로

$x^3-3x^2+5=x^3-3x^2+b+3$

$5=b+3 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b=-1$ 　　답 -1

> 일품 BOX: $F(2)-G(2)=3$에서 $F(2)=G(2)+3$

02 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int(x-1)f(x)dx=x^3+x-2$이므로

$(x-1)f(x)=x^3+x-2$

$=(x-1)(x^2+x+2)$

따라서 $f(x)=x^2+x+2$이므로

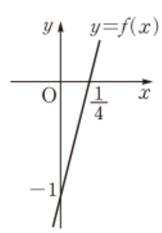
$f(2)=4+2+2=8$ 　　답 8

03 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-f(x)=3x^2-4x+1$

$\therefore f(x)=4x-1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다. 　　답 ⑤



04 $f(x)=\displaystyle\int(x+a)^2dx-\int(x-a)^2dx$

$=\displaystyle\int\{(x+a)^2-(x-a)^2\}dx$

$=\displaystyle\int 4ax\,dx$

$=2ax^2+C$

이므로 $f'(x)=4ax$

$f'(1)=8$이므로 $4a=8 \qquad \therefore a=2$

$f(1)=4$이므로 $2a+C=4 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=4x^2$이므로

$f(a)=f(2)=4\cdot 2^2=16$ 　　답 16

> 일품 BOX: $(x+a)^2-(x-a)^2$
> $=x^2+2ax+a^2$
> $\quad-(x^2-2ax+a^2)$
> $=4ax$

05 $f(x)=\displaystyle\int(x-2)(x^2+x+1)dx$

$\quad+\displaystyle\int(3x-2)(x^2+x+1)dx$

$=\displaystyle\int\{(x-2)(x^2+x+1)$

$\quad+(3x-2)(x^2+x+1)\}dx$

$=\displaystyle\int\{(x-2)+(3x-2)\}(x^2+x+1)dx$

$=\displaystyle\int 4(x-1)(x^2+x+1)dx$

$=\displaystyle\int(4x^3-4)dx$

$=x^4-4x+C$

$f(0)=3$이므로 $\qquad C=3$

따라서 $f(x)=x^4-4x+3$이므로

$f(-1)=1+4+3=8$ 　　답 ⑤

06 $\displaystyle\int\frac{x^2}{x-2}dx+\int\frac{3x-10}{x-2}dx$

$=\displaystyle\int\left(\frac{x^2}{x-2}+\frac{3x-10}{x-2}\right)dx$

$=\displaystyle\int\frac{x^2+3x-10}{x-2}dx$

$=\displaystyle\int\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}dx$

$=\displaystyle\int(x+5)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2+5x+C$ 　　답 $\dfrac{1}{2}x^2+5x+C$

07 $f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx=3x^2-2x+C_1$

$f(0)=3$이므로 $\qquad C_1=3$

$\therefore f(x)=3x^2-2x+3$

$\therefore F(x)=\displaystyle\int f(x)dx=\int(3x^2-2x+3)dx$

$=x^3-x^2+3x+C_2$

$F(1)=f(1)$이므로

$3+C_2=4 \qquad \therefore C_2=1$

따라서 $F(x)=x^3-x^2+3x+1$이므로

$F(2)=8-4+6+1=11$ 　　답 ①

08 $f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$

이때 $f'(x)=x^2-1=0$에서 $\qquad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, $x=1$에서 극소이므로

$f(-1)=\dfrac{2}{3}+C=\dfrac{7}{3} \qquad \therefore C=\dfrac{5}{3}$

즉 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{5}{3}$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$$f(1)=\frac{1}{3}-1+\frac{5}{3}=1$$

답 1

09 $f'(x)=ax(x-2)\ (a>0)$로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax(x-2)dx$$
$$=\int(ax^2-2ax)dx=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+C$$

주어진 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고, $x=2$에서 극소이므로

$$f(0)=5,\ f(2)=1$$

즉 $C=5$, $-\frac{4}{3}a+C=1$이므로 $a=3,\ C=5$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+5$이므로

$$f(1)=1-3+5=3$$

답 ③

$f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
또 $f'(2)=0$이고 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

10 $f(x+y)=f(x)+f(y)-3xy+3$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+3 \qquad \therefore f(0)=-3$$

$f'(0)=1$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3}{h}=1$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-3xh+3-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)+3}{h}-\frac{3xh}{h}\right\}$$
$$=-3x+1$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-3x+1)dx$$
$$=-\frac{3}{2}x^2+x+C$$

$f(0)=-3$이므로 $C=-3$

$$\therefore f(x)=-\frac{3}{2}x^2+x-3$$

답 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+x-3$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

11 $F(x)=xf(x)-2x^3+x^2+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$$
$$xf'(x)=6x^2-2x \qquad \therefore f'(x)=6x-2$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx$$
$$=3x^2-2x+C$$

$f(1)=3$이므로 $1+C=3 \qquad \therefore C=2$

즉 $f(x)=3x^2-2x+2$이므로

$$f(2)=12-4+2=10$$

답 ②

12 $xf(x)=\int\{2f'(x)+1-3x^2\}dx$

$$=2f(x)+x-x^3+C$$

이므로 양변에 $x=0$을 대입하면

$$2f(0)+C=0, \qquad -6+C=0 \qquad \therefore C=6$$

즉 $xf(x)=2f(x)+x-x^3+6$이므로

$$(x-2)f(x)=-x^3+x+6$$
$$=-(x-2)(x^2+2x+3)$$
$$\therefore f(x)=-x^2-2x-3$$
$$\therefore f(1)=-1-2-3=-6$$

답 ②

1등급을 위한 고난도 문제

본책 68~70쪽

01 $f(x)=\int(4x^2-3x+2)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=4x^2-3x+2$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}f'(2)$$
$$=\frac{1}{4}(16-6+2)$$
$$=3$$

답 ②

02 $f(x)=\int\frac{d}{dx}(x^2+2x)dx$

$$=x^2+2x+C=(x+1)^2+C-1$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=3$에 접하므로 꼭짓점 $(-1,\ C-1)$은 직선 $y=3$ 위에 있다. 즉

$$C-1=3 \qquad \therefore C=4$$
$$\therefore f(x)=x^2+2x+4 \qquad \cdots ❶$$

이때 $f(x)=4$에서 $x^2+2x+4=4$

$$x^2+2x=0, \qquad x(x+2)=0$$
$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

따라서 모든 실근의 합은

$$-2+0=-2 \qquad \cdots ❷$$

답 -2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실근의 합은 -2이다.

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷ 방정식 $f(x)=4$의 모든 실근의 합을 구할 수 있다.	30 %

03 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=\int\{g(x)\}^2dx+x\{g(x)\}^2$$

다시 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\{g(x)\}^2+\{g(x)\}^2+2xg(x)g'(x)$$
$$=2g(x)\{g(x)+xg'(x)\}$$

$g(0)=5$이므로

$$f'(0)=2\cdot5\cdot5=50$$

답 50

$x\{g(x)\}^2=x\cdot g(x)\cdot g(x)$이므로 x에 대하여 미분하면
$g(x)g(x)+xg'(x)g(x)+xg(x)g'(x)=\{g(x)\}^2+2xg(x)g'(x)$

04 ㄱ. $\int 0\,dx=C$이므로 $\quad \dfrac{d}{dx}\int 0\,dx=0$

ㄴ. [반례] $f(x)=x,\ g(x)=x+1$이면

$f'(x)=1,\ g'(x)=1$

이므로 $f'(x)=g'(x)$이지만 $f(x)\neq g(x)$이다.

ㄷ. $\int f(x)dx=\int g(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}\int g(x)dx$$

$\therefore\ f(x)=g(x)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

05 $f(x)=\dfrac{d}{dx}\int\{xf(x)+x^2-g(x)\}dx$

$=xf(x)+x^2-g(x)$

이므로

$(x-1)f(x)=g(x)-x^2$ …… ㉠

$\int\left\{\dfrac{d}{dx}g(x)\right\}dx=xf(x)+1$이므로

$g(x)+C=xf(x)+1$ …… ㉡

$x=0$을 ㉠에 대입하면

$-f(0)=g(0) \qquad \therefore\ g(0)=-(-1)=1$

$x=0$을 ㉡에 대입하면

$g(0)+C=1, \qquad 1+C=1 \qquad \therefore\ C=0$

즉 $g(x)=xf(x)+1$이므로 ㉠에서

$(x-1)f(x)=xf(x)+1-x^2$

$\therefore\ f(x)=x^2-1$

$g(x)=x(x^2-1)+1=x^3-x+1$

$\therefore\ f(g(2))=f(7)=48$ 답 48

06 $f(x)=\int(x^2+ax+2)dx+\int(2x^2+ax-2)dx$

$=\int\{(x^2+ax+2)+(2x^2+ax-2)\}dx$

$=\int(3x^2+2ax)dx=x^3+ax^2+C$

방정식 $x^3+ax^2+C=0$의 두 실근이 -2, 1이므로

$-8+4a+C=0$ …… ㉠

$1+a+C=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ C=-4$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-4$이므로

$f(2)=8+12-4=16$ 답 16

07 $f(x)=\int\left(x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\cdots+\dfrac{1}{10}x^{10}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\cdot3}x^3+\dfrac{1}{3\cdot4}x^4+\cdots+\dfrac{1}{10\cdot11}x^{11}+C$

$\therefore\ f(1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{10\cdot11}+C$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)+C$

$=1-\dfrac{1}{11}+C=\dfrac{10}{11}+C$

$A\neq B$일 때

$\dfrac{1}{AB}$

$=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$

$f(1)=2$이므로 $\quad \dfrac{10}{11}+C=2 \qquad \therefore\ C=\dfrac{12}{11}$

$\therefore\ f(0)=C=\dfrac{12}{11}$ 답 ④

08 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2+2x+1$에서

$f(x)g(x)=\int(3x^2+2x+1)dx$

$=x^3+x^2+x+C$ …… ㉠

$x=1$을 ㉠에 대입하면

$f(1)g(1)=3+C=0 \qquad \therefore\ C=-3$

$\therefore\ f(x)g(x)=x^3+x^2+x-3$

$=(x-1)(x^2+2x+3)$ … ❶

이때 $f(1)=6,\ g(1)=0$이고, $f(x),\ g(x)$는 상수함수가 아닌 다항함수이므로

$f(x)=x^2+2x+3,\ g(x)=x-1$ … ❷

$f(x)=x-1$,
$g(x)=x^2+2x+3$이면
$f(1)=0,\ g(1)=6$
이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ f(2)-g(2)=11-1=10$ … ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $f(x)g(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x),\ g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(2)-g(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

09 $f'(x)=\begin{cases}-4x+3 & (x<1)\\ 2x-3 & (x>1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}-2x^2+3x+C_1 & (x<1)\\ x^2-3x+C_2 & (x>1)\end{cases}$

$f(0)=1$이므로 $\quad C_1=1$

이때 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim\limits_{x\to1+}(x^2-3x+C_2)=\lim\limits_{x\to1-}(-2x^2+3x+1)$

$-2+C_2=2 \qquad \therefore\ C_2=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-2x^2+3x+1 & (x<1)\\ x^2-3x+4 & (x\geq1)\end{cases}$이므로

$f(4)=16-12+4=8$ 답 ③

10 $f'(x)=3x(x-a)=3x^2-3ax$에서

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-3ax)dx$

$=x^3-\dfrac{3}{2}ax^2+C$

한편 $f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=a$

(i) $a>0$일 때,

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고, $x=a$에서 극소이므로 $\quad f(0)=3,\ f(a)=-1$

$C=3, \quad -\dfrac{1}{2}a^3+C=-1$

$\therefore\ a=2,\ C=3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$이므로

$f(2)=8-12+3=-1$

(ii) $a<0$일 때,

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, $x=0$에서 극소이므로 $\quad f(a)=3,\ f(0)=-1$

$-\frac{1}{2}a^3+C=3,\ C=-1$

$\therefore a=-2,\ C=-1$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-1$이므로

$f(2)=8+12-1=19$

(i), (ii)에서

$f(2)=-1$ 또는 $f(2)=19$ 답 ⑤

참고 $a=0$이면 $f'(x)=3x^2$
따라서 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗

11 $f'(x)=x(x+2)(x-2)=x^3-4x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x^3-4x)dx$

$=\frac{1}{4}x^4-2x^2+C$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a\ (a\neq0)$인 점에서 x축에 접하므로

$f(-2)=f(2)=0$

$-4+C=0 \quad \therefore C=4$

다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 평행한 직선과 접하는 접점의 y좌표는 $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값이다.
이때 $a\neq0$이므로
$f(-2)=0$ 또는 $f(2)=0$
이고 $f(-2)=f(2)$이므로
$f(-2)=f(2)=0$

즉 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+4$이므로

$f(-1)=\frac{9}{4},\ f(0)=4,\ f(1)=\frac{9}{4}$

따라서 $M=4,\ m=\frac{9}{4}$이므로

$Mm=9$ 답 ④

12 (i) $x<0$일 때,

$f'(x)=-x+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x+1)dx$

$=-\frac{1}{2}x^2+x+C_1$

$f(-2)=0$이므로 $\quad -4+C_1=0 \quad \therefore C_1=4$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+4$

(ii) $x>0$일 때,

$f'(x)=a(x-2)^2-1\ (a<0)$로 놓으면

그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$인 이차함수는 $y=a(x-p)^2+q$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\{a(x-2)^2-1\}dx$

$=\int(ax^2-4ax+4a-1)dx$

$=\frac{a}{3}x^3-2ax^2+(4a-1)x+C_2$

$f(2)=0$이므로 $\quad \frac{8}{3}a-2+C_2=0$

$\therefore C_2=2-\frac{8}{3}a$

$\therefore f(x)=\frac{a}{3}x^3-2ax^2+(4a-1)x+2-\frac{8}{3}a$

이때 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{a}{3}x^3-2ax^2+(4a-1)x+2-\frac{8}{3}a\right\}$

$=\lim_{x\to0-}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+4\right)$

$2-\frac{8}{3}a=4 \quad \therefore a=-\frac{3}{4}$

따라서 $x>0$에서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+4$이므로

$f(4)=-16+24-16+4=-4$ 답 -4

13 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 3을 가지므로

$f'(-1)=0,\ f(-1)=3$

$f'(-x)=f'(x)$이므로 $\quad f'(1)=0$

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

$f'(-1)=0,\ f'(1)=0$이므로

$f'(x)=3(x+1)(x-1)=3x^2-3$

$\therefore f(x)=\int(3x^2-3)dx=x^3-3x+C$

$f(-1)=3$이므로

$2+C=3 \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=x^3-3x+1$이므로

$f(1)=1-3+1=-1$ 답 ③

14 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$ ⋯ ❶

$f'(0)=2$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=2$

$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+x^2+xh\right\}$

$=x^2+2$ ⋯ ❷

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(x^2+2)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+2x+C$

$f(0)=0$이므로

$C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x$이므로

$f(3)=9+6=15$ ⋯ ③

답 15

채점 기준	비율
① $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	10%
② $f'(x)$를 구할 수 있다.	50%
③ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	40%

15 주어진 등식의 양변을 Δx로 나누면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=(3x^2+4x+3)+(3x+2)\Delta x+(\Delta x)^2$$

$\therefore f'(x)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{3x^2+4x+3+(3x+2)\Delta x+(\Delta x)^2\}$$

$$=3x^2+4x+3$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=\int(3x^2+4x+3)dx$$

$$=x^3+2x^2+3x+C$$

$f(0)=-2$이므로 $\quad C=-2$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+3x-2$이므로

$f(2)=8+8+6-2=20$

답 ⑤

16 $xf(x)=\int\{f(x)+f'(x)+2x^2+ax+b\}dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=f(x)+f'(x)+2x^2+ax+b$$

$$(x-1)f'(x)=2x^2+ax+b$$

위의 식에 $x=1$을 대입하면

$0=2+a+b \quad \therefore b=-a-2$

따라서

$$(x-1)f'(x)=2x^2+ax-a-2$$
$$=(x-1)(2x+2+a)$$

이므로

$f'(x)=2x+2+a$

$f'(1)=1$이므로

$4+a=1 \quad \therefore a=-3$

따라서 $f'(x)=2x-1$이므로

$$f(x)=\int(2x-1)dx=x^2-x+C$$

$f(1)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=x^2-x$이므로

$f(2)=4-2=2$

답 2

17 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)=9x^2-4x+4$이므로

$$xf(x)=\int(9x^2-4x+4)dx$$
$$=3x^3-2x^2+4x+C_1$$

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $\quad C_1=0$

즉 $xf(x)=3x^3-2x^2+4x$이므로

$f(x)=3x^2-2x+4$

$F'(x)=f(x)=3x^2-2x+4$이므로

$$F(x)=\int(3x^2-2x+4)dx=x^3-x^2+4x+C_2$$

한편 $f'(x)=6x-2$이므로

$F(1)=f'(1)-1=4-1=3$

$F(1)=4+C_2=3$에서 $\quad C_2=-1$

따라서 $F(x)=x^3-x^2+4x-1$이므로

$F(2)=8-4+8-1=11$

답 ①

1등급 비밀노트

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $h(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이면

$h(x)=\{f(x)g(x)\}'$

$\therefore \int h(x)dx=f(x)g(x)+C$ (C는 적분상수)

18 $(x^3-1)'=3x^2$이므로

$$(x^3-1)f'(x)+3x^2f(x)$$
$$=(x^3-1)f'(x)+(x^3-1)'f(x)$$
$$=\{(x^3-1)f(x)\}'$$

따라서 $\{(x^3-1)f(x)\}'=2x-3$이므로

$$(x^3-1)f(x)=\int(2x-3)dx=x^2-3x+C$$

위의 식에 $x=1$을 대입하면 $\quad 0=-2+C$

$\therefore C=2$

따라서 $(x^3-1)f(x)=x^2-3x+2$이므로 $x\neq 1$일 때

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$$
$$=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{x-2}{x^2+x+1}$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\frac{x-2}{x^2+x+1}}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x^2+x+1)$$
$$=4+2+1=7$$

답 7

일품 BOX

a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$2x^2+ax-a-2$
$=2(x^2-1)+a(x-1)$
$=2(x+1)(x-1)+a(x-1)$
$=(x-1)(2x+2+a)$

곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$y=f(x)g(x)$

➡ $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 77쪽

01 $f_{n+1}(x)=\int f_n(x)dx$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f_n(x)=\{f_{n+1}(x)\}'$

$f_{10}(x)=x^{11}+x^9+1$이므로

$$f_9(x)=\{f_{10}(x)\}'=11x^{10}+9x^8$$
$$f_8(x)=\{f_9(x)\}'=11\cdot10x^9+9\cdot8x^7$$
$$\vdots$$
$$f_1(x)=\{f_2(x)\}'=11\cdot10\cdot\cdots\cdot3x^2+9\cdot8\cdot\cdots\cdot1$$
$$f(x)=\{f_1(x)\}'=11\cdot10\cdot\cdots\cdot3\cdot2x$$
$$\therefore \frac{f_1(2)}{f(2)}=\frac{11\cdot10\cdot\cdots\cdot3\cdot2^2+9\cdot8\cdot\cdots\cdot1}{11\cdot10\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot2}$$
$$=1+\frac{1}{11\cdot10\cdot2}=\frac{221}{220}$$

답 $\frac{221}{220}$

02 $g(x)=\int\{x+f(x)\}dx+\int\{x-f(x)\}dx$

$$=\int[\{x+f(x)\}+\{x-f(x)\}]dx$$
$$=\int 2x\,dx$$
$$=x^2+C_1$$

$g(2)=6$에서

$$4+C_1=6 \qquad \therefore C_1=2$$

즉 $g(x)=x^2+2$이므로

$$f(x)=\int xg(x)dx$$
$$=\int x(x^2+2)dx$$
$$=\int(x^3+2x)dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4+x^2+C_2$$

$f(2)=6$에서

$$8+C_2=6 \qquad \therefore C_2=-2$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^2-2$이므로

$$g(f(0))=g(-2)=6$$

답 ③

03 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$$f(x)g(x)=\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx$$
$$=\int(3x^2-4x-19)dx$$
$$=x^3-2x^2-19x+C$$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$$f(0)g(0)=C \qquad \therefore C=20$$
$$\therefore f(x)g(x)=x^3-2x^2-19x+20$$
$$=(x+4)(x-1)(x-5)$$

$f(0)=-4,\ g(0)=-5$이므로

$$f(x)=(x+4)(x-1),\ g(x)=x-5$$
$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{(f\circ g)(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-6)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)(x-5)}{x-6}=4$$

답 4

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$(f\circ g)(x)$
$=f(g(x))$
$=f(x-5)$
$=(x-5+4)(x-5-1)$
$=(x-1)(x-6)$

04 원 $(x-2t)^2+(y-t^2)^2=64$의 중심을 $\mathrm{Q}(2t,\ t^2)$이라 하면

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(4t)^2+(t^2-4)^2}$$
$$=\sqrt{(t^2+4)^2}$$
$$=t^2+4\ (\because t^2+4>0)$$

$t^2+4>8$이면 점 P는 원의 외부에 있으므로

$$f(t)=(t^2+4)-8=t^2-4$$

$t^2+4\le8$이면 점 P는 원의 경계선 또는 내부에 있으므로

$$f(t)=8-(t^2+4)=-t^2+4$$

따라서 $f(t)=\begin{cases}t^2-4 & (t<-2)\\ -t^2+4 & (-2\le t\le2)\\ t^2-4 & (t>2)\end{cases}$ 이므로

$$F(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}t^3-4t+C_1 & (t<-2)\\ -\frac{1}{3}t^3+4t+C_2 & (-2\le t\le2)\\ \frac{1}{3}t^3-4t+C_3 & (t>2)\end{cases}$$

$F(0)=2$이므로 $\qquad C_2=2$

함수 $F(t)$는 $t=-2$에서 연속이므로

$$\lim_{t\to-2+}\left(-\frac{1}{3}t^3+4t+2\right)=\lim_{t\to-2-}\left(\frac{1}{3}t^3-4t+C_1\right)$$
$$\frac{8}{3}-8+2=-\frac{8}{3}+8+C_1 \qquad \therefore C_1=-\frac{26}{3}$$

또 함수 $F(t)$는 $t=2$에서 연속이므로

$$\lim_{t\to2+}\left(\frac{1}{3}t^3-4t+C_3\right)=\lim_{t\to2-}\left(-\frac{1}{3}t^3+4t+2\right)$$
$$\frac{8}{3}-8+C_3=-\frac{8}{3}+8+2 \qquad \therefore C_3=\frac{38}{3}$$
$$\therefore F(-4)+F(4)$$
$$=\left(-\frac{64}{3}+16-\frac{26}{3}\right)+\left(\frac{64}{3}-16+\frac{38}{3}\right)$$
$$=4$$

답 ②

05 $F'(t)=3.6t^2-72t+270$이므로

$$F(t)=\int(3.6t^2-72t+270)dt$$
$$=1.2t^3-36t^2+270t+C$$

$F(0)=100$이므로 $\qquad C=100$

$$\therefore F(t)=1.2t^3-36t^2+270t+100$$

한편

$$F'(t)=3.6(t^2-20t+75)=3.6(t-5)(t-15)$$

이므로 $F'(t)=0$에서

$$t=5\ (\because 0\le t\le10)$$

t	0	$\cdots$	5	$\cdots$	10
$F'(t)$		+	0	−	
$F(t)$	100	↗	700	↘	400

따라서 $0\le t\le10$에서 함수 $F(t)$는 $t=5$에서 극대이면서 최대이다. 이때 최댓값은 700이므로

$$n=5,\ a=700$$
$$\therefore \frac{a}{n}=\frac{700}{5}=140$$

답 140

Ⅲ 다항함수의 적분법

06 $\int xf'(x)dx=x^4+2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf'(x)=4x^3+4x$

$\therefore\ f'(x)=4x^2+4$ ······ ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=4x^3+3x^2+5$이므로

$f'(x)+g'(x)=4x^3+3x^2+5$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$g'(x)=4x^3+3x^2+5-(4x^2+4)$
$=4x^3-x^2+1$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^2+4)dx$
$=\frac{4}{3}x^3+4x+C_1$

$g(x)=\int g'(x)dx=\int(4x^3-x^2+1)dx$
$=x^4-\frac{1}{3}x^3+x+C_2$

이때 $f(x)$를 $x-2$로 나누면 나누어떨어지므로

$f(2)=0$

즉 $\frac{56}{3}+C_1=0$이므로 $C_1=-\frac{56}{3}$

$g(x)$를 $x+1$로 나누면 나머지가 $\frac{4}{3}$이므로

$g(-1)=\frac{4}{3}$

즉 $\frac{1}{3}+C_2=\frac{4}{3}$이므로 $C_2=1$

따라서 $f(x)=\frac{4}{3}x^3+4x-\frac{56}{3}$,

$g(x)=x^4-\frac{1}{3}x^3+x+1$이므로 $g(x)-f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$g(1)-f(1)=\frac{8}{3}-\left(-\frac{40}{3}\right)=16$

답 16

일품 BOX

$\int_a^a f(x)dx=0$

다항식 $f(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.
$\Longleftrightarrow f(a)=0$

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$R=f(a)$

Ⅲ-2. 정적분

개념&핵심 기출

본책 72~74쪽

01 $\int_0^2 f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_0^2=f(2)-f(0)=5$이므로

$f(2)=f(0)+5=6$

$f(1)+f(2)=3$이므로

$f(1)=3-f(2)=-3$

$\therefore\ \int_1^2 f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_1^2=f(2)-f(1)=9$

답 ④

02 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+a$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+3 \qquad \therefore\ a=-3$

따라서 $f(x)=3x^2-3$이므로

$f(a)=f(-3)=27-3=24$

답 ③

03 $\int_0^5(4x^3+3x^2+1)dx-\int_2^5(4x^3+1)dx$

$=\int_0^2(4x^3+3x^2+1)dx+\int_2^5(4x^3+3x^2+1)dx$
$\quad-\int_2^5(4x^3+1)dx$

$=\int_0^2(4x^3+3x^2+1)dx$
$\quad+\int_2^5\{(4x^3+3x^2+1)-(4x^3+1)\}dx$

$=\int_0^2(4x^3+3x^2+1)dx+\int_2^5 3x^2dx$

$=\Big[x^4+x^3+x\Big]_0^2+\Big[x^3\Big]_2^5$

$=26+117=143$

답 ②

04 $\int_{-1}^2 xf(x)dx=\int_{-1}^0 x(6x-2)dx+\int_0^2(-2x)dx$

$=\int_{-1}^0(6x^2-2x)dx-\int_0^2 2xdx$

$=\Big[2x^3-x^2\Big]_{-1}^0-\Big[x^2\Big]_0^2$

$=3-4=-1$

답 ②

05 $|x-1|=\begin{cases}-x+1 & (x<1)\\ x-1 & (x\ge1)\end{cases}$이므로

$\int_{-2}^2|x-1|(3x+1)dx$

$=\int_{-2}^1(-x+1)(3x+1)dx+\int_1^2(x-1)(3x+1)dx$

$=\int_{-2}^1(-3x^2+2x+1)dx+\int_1^2(3x^2-2x-1)dx$

$=\Big[-x^3+x^2+x\Big]_{-2}^1+\Big[x^3-x^2-x\Big]_1^2$

$=-9+3=-6$

답 -6

06 $\displaystyle\int_{-a}^{a}(3x^2+5x-4)dx=2\int_{0}^{a}(3x^2-4)dx$

$\displaystyle=2\Big[x^3-4x\Big]_0^a$

$=2(a^3-4a)$

즉 $2(a^3-4a)=30$이므로

$a^3-4a-15=0$

$(a-3)(a^2+3a+5)=0$

$\therefore a=3$ ($\because$ a는 실수) 답 3

이차방정식 $a^2+3a+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=3^2-4\cdot5$
$=-11<0$
이므로 실근을 갖지 않는다.

07 $\displaystyle\int_{2}^{4}f(x)dx-\int_{3}^{4}f(x)dx-\int_{2}^{-3}f(x)dx$

$\displaystyle=\int_{2}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{3}f(x)dx+\int_{-3}^{2}f(x)dx$

$\displaystyle=\int_{-3}^{3}f(x)dx=\int_{-3}^{3}(2x^3+3x^2-6x+1)dx$

$\displaystyle=2\int_{0}^{3}(3x^2+1)dx$

$\displaystyle=2\Big[x^3+x\Big]_0^3$

$=2\cdot30=60$ 답 ⑤

08 $f(-x)=f(x)$에서 함수 $f(x)$는 우함수이므로 $xf(x)$는 기함수이다.

$g(x)=xf(x)$로 놓으면
$g(-x)=-xf(-x)$
$=-xf(x)$
$=-g(x)$

따라서 $\displaystyle\int_{-5}^{5}xf(x)dx=0$이므로

$\displaystyle\int_{-5}^{5}(x-1)f(x)dx$

$\displaystyle=\int_{-5}^{5}xf(x)dx-\int_{-5}^{5}f(x)dx$

$\displaystyle=-2\int_{0}^{5}f(x)dx$

$=-2\cdot(-3)=6$ 답 ⑤

1등급 비밀노트

$f(x)$가 우함수, $g(x)$가 기함수일 때, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq0)$는 기함수이고, $(g\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$는 우함수이다.

09 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=10x^4-3x^2+2xf(x)$

$x^2f'(x)=10x^4-3x^2$

$\therefore\ f'(x)=10x^2-3$

$\displaystyle\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx$

$\displaystyle=\int(10x^2-3)dx$

$=\dfrac{10}{3}x^3-3x+C$ ...... ㉠

한편 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\displaystyle f(1)=2-1+2\int_{1}^{1}tf(t)dt$

$\displaystyle\int_{1}^{1}tf(t)dt=0$

$\therefore\ f(1)=1$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\dfrac{10}{3}-3+C=1$ $\quad\therefore C=\dfrac{2}{3}$

따라서 $f(x)=\dfrac{10}{3}x^3-3x+\dfrac{2}{3}$이므로

$f(2)=\dfrac{80}{3}-6+\dfrac{2}{3}=\dfrac{64}{3}$ 답 $\dfrac{64}{3}$

10 $\displaystyle x\{f(x)-x^2\}=\int_{0}^{x}\{f(t)+3t^2+4t\}dt$에서

$\displaystyle xf(x)=x^3+\int_{0}^{x}\{f(t)+3t^2+4t\}dt$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3x^2+f(x)+3x^2+4x$

$xf'(x)=6x^2+4x$

$\therefore\ f'(x)=6x+4$

$\displaystyle\therefore\ f(x)=\int(6x+4)dx=3x^2+4x+C$

$f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=3x^2+4x$이므로

$f(1)=3+4=7$ 답 ①

11 $f(x)=a(x-1)(x-4)$ $(a>0)$로 놓으면

$\displaystyle g'(x)=\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+1}f(t)dt$

$=f(x+1)-f(x)$

$=ax(x-3)-a(x-1)(x-4)$

$=2a(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=2$

따라서 $g(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 $g(x)$의 최솟값은

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

$\displaystyle g(2)=\int_{2}^{3}f(t)dt=\int_{2}^{3}a(t-1)(t-4)dt$

$\displaystyle=a\int_{2}^{3}(t^2-5t+4)dt$

$\displaystyle=a\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\Big]_2^3$

$=-\dfrac{13}{6}a$

즉 $-\dfrac{13}{6}a=-26$이므로 $\quad a=12$

따라서 $f(x)=12(x-1)(x-4)$이므로

$f(3)=12\cdot2\cdot(-1)=-24$ 답 ④

12 $\displaystyle\int_{0}^{1}f(t)dt=a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=2x^3+4x+2a$이므로

$\displaystyle a=\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}(2t^3+4t+2a)dt$

$\displaystyle=\Big[\frac{1}{2}t^4+2t^2+2at\Big]_0^1$

$=\dfrac{5}{2}+2a$

즉 $a=-\dfrac{5}{2}$이므로 $\quad f(x)=2x^3+4x-5$

$\therefore\ f(2)=16+8-5=19$ 답 ①

Ⅲ 다항함수의 적분법

13 $\int_{-1}^{1} g(t)dt=a$, $\int_{-1}^{1} f(t)dt=b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^2+a$, $g(x)=x+b$

$\therefore a=\int_{-1}^{1}(t+b)dt=2\int_{0}^{1}bdt=2\Big[bt\Big]_{0}^{1}=2b$

$b=\int_{-1}^{1}(t^2+a)dt=2\int_{0}^{1}(t^2+a)dt$

$=2\Big[\frac{1}{3}t^3+at\Big]_{0}^{1}=\frac{2}{3}+2a$

즉 $a=2b$, $b=2a+\frac{2}{3}$이므로

$a=-\frac{4}{9}$, $b=-\frac{2}{9}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{4}{9}$, $g(x)=x-\frac{2}{9}$이므로

$f(1)+g(1)=\frac{5}{9}+\frac{7}{9}=\frac{4}{3}$ 답 ④

14 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1+a+b+1$

$\therefore a+b=-2$ …… ㉠

주어진 등식에서

$x\int_{-1}^{x} f(t)dt-\int_{-1}^{x} tf(t)dt$

$=(x+2)^3+a(x+2)^2+b(x+2)+1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^{x} f(t)dt+xf(x)-xf(x)$

$=3(x+2)^2+2a(x+2)+b$

$\therefore \int_{-1}^{x} f(t)dt$

$=3x^2+(12+2a)x+12+4a+b$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=3+2a+b$

$\therefore 2a+b=-3$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

$\therefore \int_{-1}^{x} f(t)dt=3x^2+10x+7$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+10$

$\therefore \int_{-1}^{ab} f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_{-1}^{1}$

$=f(1)-f(-1)$

$=16-4=12$ 답 12

15 $f(t)=t^2+2t+2$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x}(t^2+2t+2)dt$

$=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x} f(t)dt$

$=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$

$=F'(a)=f(a)$

일품 BOX

이차방정식 $a^2+2a-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-2)$

$=3>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

$a=2b$를 $b=2a+\frac{2}{3}$에 대입하면

$b=4b+\frac{2}{3}$

$-3b=\frac{2}{3}$

$\therefore b=-\frac{2}{9}$

$\therefore a=2b=-\frac{4}{9}$

㉠$-$㉢을 하면

$-a=1$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-1+b=-2$

$\therefore b=-1$

즉 $f(a)=a^2+2a+2=4$이므로

$a^2+2a-2=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 -2이다. 답 ①

16 $f(x)=\int_{0}^{x}(t-1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x-1$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{2}^{2+x} f'(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{f(2+x)-f(2)}{x}$

$=f'(2)$

$=2-1=1$ 답 ④

17 $xf(x)=x^2+\int_{-1}^{x} f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-f(-1)=1+\int_{-1}^{-1} f(t)dt$

$\therefore f(-1)=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2x+f(x)$

$xf'(x)=2x$

$\therefore f'(x)=2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 2dx=2x+C$

$f(-1)=-1$이므로 $-2+C=-1$

$\therefore C=1$

따라서 $f(x)=2x+1$이므로 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1}^{x+1} f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_{1}^{x+1}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}$

$=F'(1)=f(1)$

$=2+1=3$ 답 3

1등급을 위한 고난도 문제

본책 75~77쪽

01 $\int_{0}^{x}\{t^2+f(t)\}dt=x^2+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $b=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^2+f(x)=2x+a$

$\therefore f(x)=-x^2+2x+a$

$f(0)=3$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=-x^2+2x+3$이므로

$f(3)=-9+6+3=0$ 답 ③

02 $f(x)=\int_{0}^{x}(t^2+at+b)dt+\int_{1}^{x}(at+3)dt$에서

$f'(x)=(x^2+ax+b)+(ax+3)$

$=x^2+2ax+b+3$

$f'(0)=5$이므로 $b+3=5$ $\therefore b=2$

$f'(1)=4$이므로 $2a+b+4=4$

$2a+6=4$ $\therefore a=-1$

$\therefore a+b=1$

답 1

03 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$g'(0)=0,\ g'(2)=0$

$g'(x)=f(x)$이므로 $f(0)=0,\ f(2)=0$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$f(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$

따라서 $g(x)=\int_1^x (3t^2-6t)dt$이므로

$g(3)=\int_1^3 (3t^2-6t)dt=\Big[t^3-3t^2\Big]_1^3=2$

답 ①

04 $f(x)=\begin{cases} 3 & (x<0) \\ -x+3 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$f(x+1)=\begin{cases} 3 & (x<-1) \\ -x+2 & (x\ge -1)\end{cases}$

$\therefore \int_{-3}^{3} xf(x+1)dx$

$=\int_{-3}^{-1} 3xdx+\int_{-1}^{3} x(-x+2)dx$

$=\int_{-3}^{-1} 3xdx+\int_{-1}^{3} (-x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{-1}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-1}^{3}$

$=-12-\frac{4}{3}=-\frac{40}{3}$

답 $-\frac{40}{3}$

1등급 비밀노트

함수 $f(x)=\begin{cases} p(x) & (x<0) \\ q(x) & (x\ge 0)\end{cases}$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은

$f(x-m)=\begin{cases} p(x-m) & (x<m) \\ q(x-m) & (x\ge m)\end{cases}$

05 함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)=0$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 증가함수이므로

$x<3$이면 $f(x)<0$

$x>3$이면 $f(x)>0$

조건 (다)에서 $\int_{-1}^{6} f(x)dx=10$이므로

$\int_{-1}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{6} f(x)dx=10$ ······ ㉠

또 $\int_{-1}^{6} |f(x)|dx=14$이므로

$\int_{-1}^{3} \{-f(x)\}dx+\int_{3}^{6} f(x)dx=14$

일품 BOX

$\int_{-1}^{3} f(x)dx=A$,

$\int_{3}^{6} f(x)dx=B$라 하면

$A+B=10$ ··· ㉢

$-A+B=14$ ··· ㉣

㉢+㉣을 하면

$2B=24$ $\therefore B=12$

$B=12$를 ㉢에 대입하면

$A=-2$

$f(m-x)=f(m+x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$f(x)=\begin{cases} 3 & (x<0) \\ -x+3 & (x\ge 0)\end{cases}$의 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x+1)$

$=\begin{cases} 3 & (x+1<0) \\ -(x+1)+3 & (x+1\ge 0)\end{cases}$

$=\begin{cases} 3 & (x<-1) \\ -x+2 & (x\ge -1)\end{cases}$

$\int_{-2}^{2} (-4x^5-3x^4)dx$

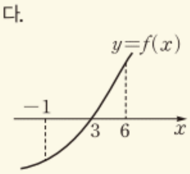
$=\int_{-2}^{2} (-4x^5)dx$

$+\int_{-2}^{2} (-3x^4)dx$

$=0+2\int_{0}^{2} (-3x^4)dx$

$=2\int_{0}^{2} (-3x^4)dx$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$-\int_{-1}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{6} f(x)dx=14$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\int_{-1}^{3} f(x)dx=-2,\ \int_{3}^{6} f(x)dx=12$

답 ②

06 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $f(2-x)=f(2+x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. ··· ❶

따라서 $\int_0^2 f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx=4$,

$\int_4^7 f(x)dx=\int_{-3}^{0} f(x)dx=9$이므로

$\int_0^7 f(x)dx$

$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$

$=4+4+9=17$ ··· ❷

답 17

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\int_0^7 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	70 %

07 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f(-x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-2}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{2} f(-x)dx$

$\therefore \int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$

$=\int_0^2 f(-x)dx+\int_0^2 f(x)dx$

$=\int_0^2 \{f(-x)+f(x)\}dx$

$=\int_0^2 (6x^4+5)dx$

$g(-x)=4x^5-3x^4$의 양변에 x 대신 $-x$를 대입하면

$g(x)=-4x^5-3x^4$

$\therefore \int_{-2}^{2} g(x)dx=\int_{-2}^{2} (-4x^5-3x^4)dx$

$=2\int_0^2 (-3x^4)dx$

$=\int_0^2 (-6x^4)dx$

$\therefore \int_{-2}^{2} \{f(x)+g(x)\}dx$

$=\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{-2}^{2} g(x)dx$

$=\int_0^2 (6x^4+5)dx+\int_0^2 (-6x^4)dx$

$=\int_0^2 5dx$

$=\Big[5x\Big]_0^2=10$

답 10

Ⅲ 다항함수의 적분법

다른 풀이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 $y=g(-x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-2}^{2} g(x)dx=\int_{-2}^{2} g(-x)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(4x^5-3x^4)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-3x^4)dx$$

08 $f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로 자연수 n에 대하여

$$f(x)=a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n-3}x^{2n-3}+\cdots+a_3x^3+a_1x$$
$$(a_{2n-1},\ a_{2n-3},\ \cdots,\ a_1\text{은 상수, } a_{2n-1}\neq 0)$$

로 놓으면

$$f'(x)=(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+(2n-3)a_{2n-3}x^{2n-4}+\cdots+3a_3x^2+a_1$$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$

$F(x)=2xf'(x)$라 하면

$F(-x)=-2xf'(-x)=-2xf'(x)=-F(x)$이므로

$$\int_{-3}^{3} 2xf'(x)dx=0$$

$$\therefore \int_{-3}^{3}(2x-3)f'(x)dx$$
$$=\int_{-3}^{3} 2xf'(x)dx-3\int_{-3}^{3} f'(x)dx$$
$$=-6\int_{0}^{3} f'(x)dx=-6\Big[f(x)\Big]_0^3$$
$$=-6\{f(3)-f(0)\}=-6f(3)$$

$f(-x)=-f(x)$에서 $f(0)=-f(0)$ $\therefore f(0)=0$

즉 $-6f(3)=24$이므로

$f(3)=-4$ 답 ②

09 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ ($p,\ q,\ r,\ s$는 상수, $p\neq 0$)라 하면

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx=\int_{-3}^{3}(px^3+qx^2+rx+s)dx$$
$$=2\int_{0}^{3}(qx^2+s)dx$$
$$=2\Big[\frac{q}{3}x^3+sx\Big]_0^3$$
$$=18q+6s$$

$\therefore 18q+6s$

$=3f(\alpha)+3f(\beta)$

$=3p(\alpha^3+\beta^3)+3q(\alpha^2+\beta^2)+3r(\alpha+\beta)+6s$

위의 식이 임의의 실수 $p,\ q,\ r,\ s$에 대하여 성립하므로

$\alpha^3+\beta^3=0,\ \alpha^2+\beta^2=6,\ \alpha+\beta=0$

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$이므로

$0=6+2\alpha\beta,\qquad \alpha\beta=-3$

$\therefore |\alpha\beta|=3$ 답 ②

10 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(2x+2)f(x)+(x^2+2x)f'(x)$

$=2(x+1)f(x)+6x^3+12x^2$

$(x^2+2x)f'(x)=6x(x^2+2x)$

$\therefore f'(x)=6x$

$\therefore f(x)=\int 6xdx=3x^2+C$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$3f(1)=\int_{-1}^{1}(6t^3+12t^2)dt+4$$
$$=2\int_{0}^{1} 12t^2dt+4$$
$$=2\Big[4t^3\Big]_0^1+4=12$$

이므로 $f(1)=4$

즉 $f(1)=3+C=4$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=3x^2+1$이므로

$f(2)=12+1=13$ 답 ②

11 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf'(x)+2f(x)=8x^2+9x-2$ ...... ㉠

다항함수 $f(x)$가 ㉠을 만족시키므로 $f(x)$는 이차함수이다.

즉 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq 0$)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

이때

$xf'(x)+2f(x)=x(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)$

$=4ax^2+3bx+2c$

$=8x^2+9x-2$

이므로 $4a=8,\ 3b=9,\ 2c=-2$

$\therefore a=2,\ b=3,\ c=-1$

따라서 $f(x)=2x^2+3x-1$이므로

$f(1)=2+3-1=4$ 답 ④

12 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)\int_{1}^{x} g(t)dt+f(x)g(x)$$
$$=f(x)g(x)-5x^4+15x^2-10$$
$$f'(x)\int_{1}^{x} g(t)dt=-5x^4+15x^2-10 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ ($a,\ b$는 상수, $a\neq 0$)로 놓으면 $f'(x)=a$

$f'(x)=a$를 ㉠에 대입하면

$$a\int_{1}^{x} g(t)dt=-5x^4+15x^2-10$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$ag(x)=-20x^3+30x$

$g(1)=-2$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$-2a=10\qquad \therefore a=-5$

즉 $g(x)=4x^3-6x,\ f(x)=-5x+b$이고,

$f(1)=-1$이므로 $b=4$

따라서 $f(x)=-5x+4$이므로

$f(2)+g(2)=-6+20=14$ 답 14

13 $\int_{-1}^{1} f(t)dt=a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=a+2x+3x^2+4x^3+\cdots+100x^{99}$

$\therefore a=\int_{-1}^{1}(a+2t+3t^2+4t^3+\cdots+100t^{99})dt$

$=2\int_{0}^{1}(a+3t^2+5t^4+\cdots+99t^{98})dt$

$=2\Big[at+t^3+t^5+\cdots+t^{99}\Big]_0^1=2a+98$

즉 $a=-98$이므로

$f(x)=-98+2x+3x^2+4x^3+\cdots+100x^{99}$ ··· ❶

$\therefore \int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^1(-98+2x+3x^2+4x^3+\cdots+100x^{99})dx$

$=\Big[-98x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{100}\Big]_0^1$

$=-98+99=1$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $\int_0^1 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %

두 상수 a, b에 대하여 $\int_a^b f(x)dx$를 포함한 등식
➡ $\int_a^b f(x)dx=k$ (k는 상수)로 놓는다.

14 $\int_2^x f(t)dt=xg(x)+ax-4$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_2^0 f(t)dt=-4$ $\therefore \int_0^2 f(t)dt=4$

$\therefore g(x)=\int_0^2 xf(t)dt+3$

$=x\int_0^2 f(t)dt+3=4x+3$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=2g(2)+2a-4$

$2\cdot 11+2a-4=0$ $\therefore a=-9$

답 ①

$g(x)=4x+3$이므로 $g(2)=8+3=11$

15 $\int_0^x (2t-x)f(t)dt=\frac{1}{2}x^4+ax^3$에서

$\int_0^x 2tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{2}x^4+ax^3$

양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)-\int_0^x f(t)dt-xf(x)=2x^3+3ax^2$

$xf(x)-\int_0^x f(t)dt=2x^3+3ax^2$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=6x^2+6ax$

$xf'(x)=6x^2+6ax$

$\therefore f'(x)=6x+6a$

$\therefore f(x)=\int(6x+6a)dx=3x^2+6ax+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$f(2)=0$이므로 $12+12a=0$ $\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=3x^2-6x$이므로

$f(a)=f(-1)=3-(-6)=9$

답 ⑤

16 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}\int_2^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_2^x$

$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot(x+1)\right\}$

$=3F'(2)=3f(2)$

$=3\int_0^2|t^2-4|dt=3\int_0^2(4-t^2)dt$

$=3\Big[4t-\frac{1}{3}t^3\Big]_0^2=3\cdot\frac{16}{3}=16$

답 ④

$0\le t\le 2$에서 $t^2-4\le 0$이므로 $|t^2-4|=4-t^2$

17 $F'(t)=(2t+1)f(t)$로 놓으면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x(2t+1)f(t)dt$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\Big[F(t)\Big]_1^x$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}$

$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{3}{2}f(1)$

즉 $\frac{3}{2}f(1)=6$이므로 $f(1)=4$

또 $G'(t)=(t-1)f(t+1)$로 놓으면

$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^x(t-1)f(t+1)dt$

$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\Big[G(t)\Big]_{-1}^x$

$=\lim_{x\to -1}\frac{G(x)-G(-1)}{x-(-1)}$

$=G'(-1)=-2f(0)$

즉 $-2f(0)=-2$이므로 $f(0)=1$

$f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)로 놓으면

$f(0)=b=1$, $f(1)=a+b=4$

$\therefore a=3, b=1$

따라서 $f(x)=3x+1$이므로

$f(2)=6+1=7$

답 7

18 주어진 등식의 좌변에서

$\int_2^x 3(xt^2-8)dt=\int_2^x(3xt^2-24)dt$

$=\Big[xt^3-24t\Big]_2^x$

$=x^4-32x+48$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^n}\int_2^x 3(xt^2-8)dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x^4-32x+48}{(x-2)^n}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x^2+4x+12)}{(x-2)^n}$ ··· ❶

즉 $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x^2+4x+12)}{(x-2)^n}=a$이고 $a\neq 0$이므로

$n=2$ ··· ②

$\therefore a=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x^2+4x+12)}{(x-2)^2}$

$=\lim_{x\to 2}(x^2+4x+12)$

$=24$ ··· ③

$\therefore \frac{a}{n}=\frac{24}{2}=12$ ··· ④

답 12

채점 기준	비율
① 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	50 %
② n의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ $\frac{a}{n}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1등급 비밀노트

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x^2+4x+12)}{(x-2)^n}$에서

(i) $n=1$이면

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x^2+4x+12)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x-2)(x^2+4x+12)$

$=0$

(ii) $n\geq 3$이면

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x^2+4x+12)}{(x-2)^n}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x+12}{(x-2)^{n-2}}$

➡ 발산

(i), (ii)에서 $n=2$

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 78쪽

01 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$와 $x=-2$에서 연속이어야 한다.

(i) $x=2$에서 연속일 때,

$\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to 2-}(-x^2+ax+b)=0$

$-4+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=4$ ······ ㉠

(ii) $x=-2$에서 연속일 때,

$\lim_{x\to -2+}f(x)=f(-2)$이므로

$\lim_{x\to -2+}(-x^2+ax+b)=8$

$-4-2a+b=8$

$\therefore 2a-b=-12$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=8$

일품 BOX

㉠+㉡을 하면

$4a=-8 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-4+b=4 \quad \therefore b=8$

$\therefore \int_{-2}^{3}f(x)dx$

$=\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx$

$=\int_{-2}^{2}(-x^2-2x+8)dx+\int_{2}^{3}x(x-2)dx$

$=2\int_{0}^{2}(-x^2+8)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+8x\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$

$=2\cdot\frac{40}{3}+\frac{4}{3}$

$=28$

답 ③

02 ㄱ. $F(-1)=\int_{1}^{-1}f(t)dt=-\int_{-1}^{1}f(t)dt$

$=-\int_{-1}^{1}3t(2-t)dt=\int_{-1}^{1}(3t^2-6t)dt$

$=2\int_{0}^{1}3t^2\,dt=2\left[t^3\right]_0^1=2$

ㄴ. $F(x)=\int_{1}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

$F'(x)=f(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$F(x)$	↘	극소	↗		↗

따라서 $F(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 극솟값은

$F(0)=\int_{1}^{0}f(t)dt=-\int_{0}^{1}(6t-3t^2)dt$

$=\int_{0}^{1}(3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_0^1$

$=-2<0$

따라서 $F(x)$의 극솟값은 음수이다.

ㄷ. $x<2$에서 $F'(x)=f(x)=6x-3x^2$이므로

$F(x)=\int(6x-3x^2)dx=3x^2-x^3+C$

ㄴ에서 $F(0)=-2$이므로

$C=-2$

따라서 $F(x)=-x^3+3x^2-2\ (x<2)$이므로

$\int_{-1}^{1}F(x)dx=\int_{-1}^{1}(-x^3+3x^2-2)dx$

$=2\int_{0}^{1}(3x^2-2)dx$

$=2\left[x^3-2x\right]_0^1$

$=-2$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

03 $f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로 $f(x)=ax^3+bx\ (a,\ b$는 상수, $a\neq 0)$로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+b$

$f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 8을 가지므로

$f'(-1)=0,\ f(-1)=8$

$3a+b=0,\ -a-b=8$

두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-12$

> $3a+b=0$ ⋯ ㉠
> $-a-b=8$ ⋯ ㉡
> ㉠+㉡을 하면
> $2a=8 \quad \therefore a=4$
> $a=4$를 ㉠에 대입하면
> $12+b=0$
> $\therefore b=-12$

따라서 $f(x)=4x^3-12x$이므로

$$\int_{-k}^{k} xf(x)dx=\int_{-k}^{k}(4x^4-12x^2)dx$$
$$=2\int_{0}^{k}(4x^4-12x^2)dx$$
$$=2\left[\frac{4}{5}x^5-4x^3\right]_0^k$$
$$=2\left(\frac{4}{5}k^5-4k^3\right)$$

즉 $2\left(\frac{4}{5}k^5-4k^3\right)=0$이므로

$k^3(k^2-5)=0$

$\therefore k^2=5\ (\because k\neq 0)$

답 5

04 $\int_{2}^{2+x} f(t)dt=\int_{2}^{2-x} f(t)dt$에서

$$\int_{0}^{x} f(t+2)dt=\int_{0}^{-x} f(t+2)dt$$
$$=-\int_{-x}^{0} f(t+2)dt$$

이므로

$$\int_{-x}^{0} f(t+2)dt+\int_{0}^{x} f(t+2)dt=0$$
$$\therefore \int_{-x}^{x} f(t+2)dt=0$$

$f(t+2)=g(t)$로 놓으면 $\int_{-x}^{x} g(t)dt=0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이고, $g(x)$는 삼차함수이므로 $g(x)=ax^3+bx$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)로 놓을 수 있다.

이때 $f(x)=g(x-2)$이므로

$f(x)=a(x-2)^3+b(x-2)$

$\therefore f'(x)=3a(x-2)^2+b$

$f'(2)=1$이므로 $\quad b=1$

$f'(1)=7$이므로 $\quad 3a+1=7$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(x-2)^3+(x-2)$이므로

$$\int_{0}^{2} f(x+2)dx=\int_{0}^{2}(2x^3+x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$
$$=10$$

> $f(x)$에 x 대신 $x+2$를 대입하면
> $f(x+2)=2x^3+x$

답 10

1등급 비밀노트

연속함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a+k}^{b+k} f(x-k)dx$$

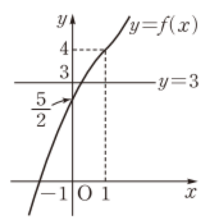
05 $f'(x)=|x-1|+1>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

또 $t<1$일 때 $|t-1|=-t+1$이므로

$$f(0)=\int_{-1}^{0}(|t-1|+1)dt$$
$$=\int_{-1}^{0}(-t+2)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{2}$$
$$f(1)=\int_{-1}^{1}(|t-1|+1)dt$$
$$=\int_{-1}^{1}(-t+2)dt$$
$$=2\int_{0}^{1}2dt$$
$$=2\Big[2t\Big]_0^1=4$$

즉 $f(0)=\frac{5}{2}$, $f(1)=4$이고, $f(-1)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

> $\int_{-1}^{-1}(|t-1|+1)dt=0$



따라서 방정식 $f(x)=3$은 한 개의 양의 실근을 갖는다.

답 ①

06 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_{2}^{x} f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\Big[F(t)\Big]_2^x$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$

즉 $\frac{1}{4}f(2)=3$이므로

$f(2)=12$

$f(2)=8+2a+b=12$이므로

$2a+b=4 \quad$ ⋯⋯ ㉠

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1}^{1+2x} f'(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[f(t)\Big]_1^{1+2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+2x)-f(1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+2x)-f(1)}{2x}\cdot 2$$
$$=2f'(1)$$

즉 $2f'(1)=-2$이므로

$f'(1)=-1$

이때 $f'(x)=3x^2+a$이므로

$f'(1)=3+a=-1$

$\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면

$-8+b=4 \quad \therefore b=12$

$\therefore a+b=8$

답 8

Ⅲ-3. 정적분의 활용

개념&핵심 기출

본책 80~82쪽

01 $x^3-2x^2-x+2=0$에서

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=x^3-2x^2-x+2$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{2}|x^3-2x^2-x+2|dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)dx-\int_{1}^{2}(x^3-2x^2-x+2)dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2$$

$$=2\cdot\frac{4}{3}-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{37}{12}$$

답 $\frac{37}{12}$

$\int_{-1}^{1}(x^3-x)dx=0$이므로 $\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)dx$ $=2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)dx$

02 $\int_{-1}^{0}f(x)dx=-15$, $\int_{0}^{1}f(x)dx=11$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$$

$$=-15+11=-4$$

이때 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=F(1)-F(-1)$이므로

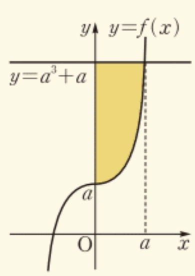
$F(1)-F(-1)=-4$, $\quad 6-F(-1)=-4$

$\therefore F(-1)=10$

답 10

$\int_{-1}^{1}f(x)dx$ $=\left[F(x)\right]_{-1}^{1}$ $=F(1)-F(-1)$

03 $f(x)=x^3+a$라 하면 $f(a)=a^3+a$이므로 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=a^3+a$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\quad a(a^3+a)-\int_0^a f(x)dx$



즉 $a^4+a^2-\int_0^a(x^3+a)dx=3$에서

$$a^4+a^2-\left[\frac{1}{4}x^4+ax\right]_0^a=3$$

$$a^4+a^2-\left(\frac{1}{4}a^4+a^2\right)=3$$

$\frac{3}{4}a^4=3$, $\quad a^4=4$, $\quad (a^2+2)(a^2-2)=0$

$a^2=2$ $\quad \therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$

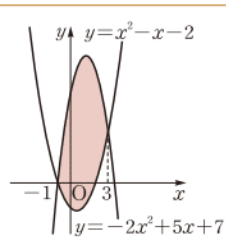
답 ②

04 $x^2-x-2=-2x^2+5x+7$에서

$3x^2-6x-9=0$, $\quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$x<-1$ 또는 $x>3$이면 x^2-x-2 $>-2x^2+5x+7$ $-1\le x\le 3$이면 x^2-x-2 $\le -2x^2+5x+7$

$$\int_{-1}^{3}\{(-2x^2+5x+7)-(x^2-x-2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-3x^2+6x+9)dx$$

$$=\left[-x^3+3x^2+9x\right]_{-1}^{3}$$

$$=27-(-5)=32$$

답 ⑤

다른 풀이 두 곡선 $y=x^2-x-2$와 $y=-2x^2+5x+7$의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{|1-(-2)|\{3-(-1)\}^3}{6}=32$$

1등급 비밀노트

① 포물선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a\neq 0,\ \alpha<\beta)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$$

② 두 포물선 $y=ax^2+bx+c$, $y=a'x^2+b'x+c'$의 교점의 x좌표를 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

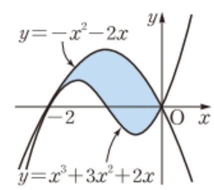
$$S=\frac{|a-a'|(\beta-\alpha)^3}{6}$$

05 $x^3+3x^2+2x=-x^2-2x$에서

$x^3+4x^2+4x=0$, $\quad x(x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^{0}\{-x^2-2x-(x^3+3x^2+2x)\}dx$$

$$=-\int_{-2}^{0}(x^3+4x^2+4x)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로 $\quad p+q=7$

답 7

06 $f(x-3)=(x-3)^2+(x-3)+2=x^2-5x+8$이므로

$x^2+x+2=x^2-5x+8$에서

$6x=6$ $\quad \therefore x=1$

곡선 $y=f(x-3)$은 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 $1\le x\le 4$에서

$f(x-3)\le f(x)$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^4\{(x^2+x+2)-(x^2-5x+8)\}dx$$

$$=\int_1^4(6x-6)dx=\left[3x^2-6x\right]_1^4$$

$$=24-(-3)=27$$

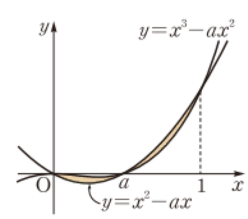
답 27

07 $x^3-ax^2=x^2-ax$에서

$x^3-(a+1)x^2+ax=0$, $\quad x(x-a)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=1$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가 같으므로



$$\int_0^1\{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+1)x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^1=0$$

$\frac{1}{6}a-\frac{1}{12}=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$ 　답 $\frac{1}{2}$

08 $A=B$이므로 $\quad \int_0^3 f'(x)dx=0$

즉 $\int_0^3 f'(x)dx=f(3)-f(0)=0$이므로

$f(3)=f(0)$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(3, 4)$에서의 접선은 x축에 평행하다.

$f(3)=f(0)=4$이므로 점 Q의 좌표는 $(0, 4)$이고 점 R의 좌표는 $(3, 0)$이다.

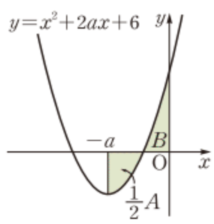
따라서 사각형 ORPQ는 직사각형이므로 구하는 도형의 넓이는 $\quad 3\cdot 4=12$ 　답 ③

$f'(3)=0$이고 $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

09 $A:B=2:1$에서 $\quad B=\frac{1}{2}A$

$y=x^2+2ax+6=(x+a)^2-a^2+6$

즉 포물선 $y=x^2+2ax+6$은 직선 $x=-a$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가 같다.



따라서 $\int_{-a}^{0}(x^2+2ax+6)dx=0$

이므로

$\left[\frac{1}{3}x^3+ax^2+6x\right]_{-a}^{0}=0, \qquad -\frac{2}{3}a^3+6a=0$

$a^3-9a=0, \qquad a(a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$ 　답 3

포물선 $y=x^2+2ax+6$의 축이 직선 $x=-a$이므로 주어진 포물선과 x축으로 둘러싸인 도형은 직선 $x=-a$에 의해 그 넓이가 이등분된다.

10 $f(x)=x^3-5x^2+x+9$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-10x+1 \qquad \therefore f'(3)=-2$

따라서 점 $(3, -6)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-6)=-2(x-3)$, 즉 $y=-2x$

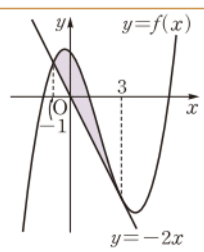
$x^3-5x^2+x+9=-2x$에서

$x^3-5x^2+3x+9=0, \qquad (x+1)(x-3)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-2x$의 교점의 x좌표

오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$\int_{-1}^{3}\{x^3-5x^2+x+9$
$\qquad -(-2x)\}dx$

$=\int_{-1}^{3}(x^3-5x^2+3x+9)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right]_{-1}^{3}$

$=\frac{63}{4}-\left(-\frac{67}{12}\right)=\frac{64}{3}$ 　답 ①

11 $f(x)=x^2-4x+9$로 놓으면 $\qquad f'(x)=2x-4$

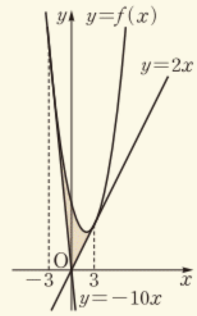
접점의 좌표를 (a, a^2-4a+9)라 하면 접선의 방정식은

$y-(a^2-4a+9)=(2a-4)(x-a)$

즉 $y=(2a-4)x-a^2+9$이고, 이 접선이 원점을 지나므로

$-a^2+9=0, \qquad a^2=9 \qquad \therefore a=-3$ 또는 $a=3$

따라서 두 접선의 방정식은 $y=-10x$, $y=2x$이므로 구하는 도형의 넓이는



$\int_{-3}^{0}\{(x^2-4x+9)-(-10x)\}dx$

$+\int_{0}^{3}\{(x^2-4x+9)-2x\}dx$

$=\int_{-3}^{0}(x^2+6x+9)dx+\int_{0}^{3}(x^2-6x+9)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_{0}^{3}$

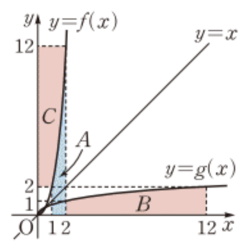
$=9+9=18$ 　답 18

12 함수 $f(x)=x^3+x^2$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$f(1)=2, \ f(2)=12$이므로

$g(2)=1, \ g(12)=2$

따라서 오른쪽 그림에서



$(B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$

이므로

$\int_1^2 f(x)dx+\int_2^{12} g(x)dx$

$=(A$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$

$=(A$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$

$=2\cdot 12-1\cdot 2=22$ 　답 22

13 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(t)=0+\int_0^t(3t^2-8t-12)dt$

$=\left[t^3-4t^2-12t\right]_0^t$

$=t^3-4t^2-12t$

점 P가 원점을 지날 때, $x(t)=0$이므로

$t^3-4t^2-12t=0, \qquad t(t+2)(t-6)=0$

$\therefore t=6\ (\because t>0)$ 　답 6

14 점 P가 시각 $t=b$에서 운동 방향을 바꾸려면 $v(b)=0$이어야 하므로

속도가 0인 순간
① 움직이던 물체가 정지하는 순간
② 움직이던 물체가 운동 방향을 바꾸는 순간
③ 물체를 위로 던졌을 때 최고 높이에 도달하는 순간

$20-ab=0 \qquad \therefore ab=20$

$t>b$에서 $v(t)<0$이므로 점 P가 시각 $t=b$에서 $t=b+3$까지 움직인 거리는

$\int_b^{b+3}|v(t)|dt=\int_b^{b+3}(at-20)dt$

$=\left[\frac{a}{2}t^2-20t\right]_b^{b+3}$

$=\frac{a}{2}(b+3)^2-20(b+3)-\frac{ab^2}{2}+20b$

$=3ab+\frac{9}{2}a-60=\frac{9}{2}a$

따라서 $\frac{9}{2}a=18$이므로 $\qquad a=4$ 　답 ④

15 열차가 멈추려면 $v(t)=0$이어야 하므로

$30-5t=0 \qquad \therefore t=6$

따라서 제동을 건 후 열차가 멈추기까지 이 열차가 움직인 거리는

$$\int_0^6 |30-5t|dt=\int_0^6 (30-5t)dt$$
$$=\left[30t-\frac{5}{2}t^2\right]_0^6$$
$$=180-90=90\,(\mathrm{m})$$

답 90 m

16 점 P가 $t=a$일 때 처음으로 원점을 지나므로

$-2+\int_0^a v(t)dt=0 \qquad \therefore \int_0^a v(t)dt=2$

$0<a<2$이므로 $\qquad \int_0^a v(t)dt=3a$

즉 $3a=2$이므로 $\qquad a=\frac{2}{3}$

또 점 P가 $t=b$일 때 두 번째로 원점을 지나므로

$-2+\int_0^{\frac{2}{3}} v(t)dt+\int_{\frac{2}{3}}^b v(t)dt=0$

$\therefore \int_{\frac{2}{3}}^b v(t)dt=0$

$4<b<6$이므로

$\int_{\frac{2}{3}}^b v(t)dt=\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot 3-(b-4)\cdot 3=16-3b$

즉 $16-3b=0$이므로 $\qquad b=\frac{16}{3}$

$\therefore 2a+b=\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=\frac{20}{3}$

답 ⑤

17 점 P의 시각 $t=0$에서의 위치가 원점이므로 점 P의 시각 $t=6$에서의 위치는

$\int_0^6 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot a=-a$

즉 $-a=-4$이므로 $\qquad a=4$

따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=7$까지 움직인 거리는

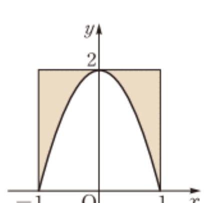
$$\int_0^7 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$$
$$=13$$

답 ③

1등급을 위한 고난도 문제

본책 83~86쪽

01 오른쪽 그림과 같이 옆면의 포물선을 좌표평면 위에 나타내면 포물선의 방정식을 $y=ax^2+2\ (a<0)$로 놓을 수 있다.



이때 포물선이 점 $(1, 0)$을 지나므로 $\qquad 0=a+2 \qquad \therefore a=-2$

일품 BOX

$\int_0^2 v(t)dt=2\cdot 3=6>2$ 이므로 a는 구간 $(0, 2)$에 존재한다.

$v(t)=\begin{cases} -2t+4 & (t<4) \\ 2t-12 & (t\geq 4) \end{cases}$ 이므로 $v(7)=2$ 따라서 $t=6$에서 $t=7$까지 움직인 거리는 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$

즉 포물선의 방정식이 $y=-2x^2+2$이므로 앞의 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$2\cdot 2-\int_{-1}^1(-2x^2+2)dx=4-2\int_0^1(-2x^2+2)dx$$
$$=4-2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$$
$$=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

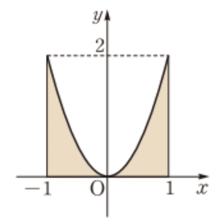
따라서 구하는 도형의 넓이는

$4\cdot\frac{4}{3}+2^2=\frac{28}{3}$

윗면의 넓이: 2^2

답 ②

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 옆면의 포물선을 좌표평면 위에 나타내면 포물선의 방정식을 $y=ax^2\ (a>0)$으로 놓을 수 있다. 이때 포물선이 점 $(1, 2)$를 지나므로 $\qquad a=2$



즉 포물선의 방정식이 $y=2x^2$이므로 위의 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^1 2x^2dx=2\int_0^1 2x^2dx=2\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

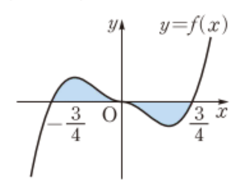
02 $f(-x)=4(-x)^3-3(-x)|-x|$
$\qquad =-4x^3+3x|x|=-f(x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$는 기함수이다.

$x\geq 0$일 때, $f(x)=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $x\geq 0$인 부분을 그린 후 $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 원점에 대하여 대칭이동하여 그린다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_0^{\frac{3}{4}}(-4x^3+3x^2)dx$$
$$=2\left[-x^4+x^3\right]_0^{\frac{3}{4}}$$
$$=2\left(-\frac{81}{256}+\frac{27}{64}\right)$$
$$=2\cdot\frac{27}{256}=\frac{27}{128}$$

답 $\frac{27}{128}$

다른 풀이 $f(x)=4x^3-3x|x|$에서

(i) $x\geq 0$일 때,

$f(x)=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$

$f(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

$$\therefore \int_0^{\frac{3}{4}}|4x^3-3x^2|dx=\int_0^{\frac{3}{4}}(-4x^3+3x^2)dx$$
$$=\left[-x^4+x^3\right]_0^{\frac{3}{4}}=\frac{27}{256}$$

$0\leq x\leq\frac{3}{4}$에서 $4x^3-3x^2\leq 0$

(ii) $x\leq 0$일 때,

$f(x)=4x^3+3x^2=x^2(4x+3)$

$f(x)=0$에서 $\qquad x=-\frac{3}{4}$ 또는 $x=0$

$$\therefore \int_{-\frac{3}{4}}^0|4x^3+3x^2|dx=\int_{-\frac{3}{4}}^0(4x^3+3x^2)dx$$
$$=\left[x^4+x^3\right]_{-\frac{3}{4}}^0=\frac{27}{256}$$

$-\frac{3}{4}\leq x\leq 0$에서 $4x^3+3x^2\geq 0$

(i), (ii)에서 구하는 도형의 넓이는 $\quad \dfrac{27}{256}+\dfrac{27}{256}=\dfrac{27}{128}$

03 $\displaystyle\int_{-1}^{0}|(x+1)(x-3)|dx=\int_{-1}^{0}|x^2-2x-3|dx$

$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{3}$$

또

$$\int_{0}^{3}|(x+1)(x-3)|dx=\int_{0}^{3}|x^2-2x-3|dx$$

$$=\int_{0}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{0}^{3}=9$$

$A<B$이므로 $\quad A=\dfrac{5}{3},\ B=9$

따라서 $A:B=\dfrac{5}{3}:9=1:\dfrac{27}{5}$이므로 $\quad k=\dfrac{27}{5}$

$\therefore 10k=10\cdot\dfrac{27}{5}=54$ 답 ③

04 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 이차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 3이다.

따라서 $f'(x)=3x(x-2)$이므로

$$f(x)=\int(3x^2-6x)dx=x^3-3x^2+C$$

주어진 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 0을 가지므로

$f'(2)=0$이고 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

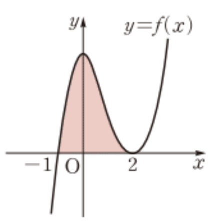
$f(2)=8-12+C=0 \qquad \therefore C=4$

즉 $f(x)=x^3-3x^2+4$이므로 방정식 $f(x)=0$에서

$x^3-3x^2+4=0, \qquad (x+1)(x-2)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 도형의 넓이는



$$\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=4-\left(-\frac{11}{4}\right)=\frac{27}{4}$$

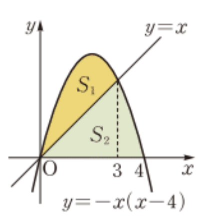
답 $\dfrac{27}{4}$

05 $-x(x-4)=x$에서

$x^2-3x=0, \qquad x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ ⋯ ❶

따라서 곡선 $y=-x(x-4)$와 직선 $y=x$가 오른쪽 그림과 같으므로



$$S_1=\int_0^3(-x^2+4x-x)dx$$

$$=\int_0^3(-x^2+3x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

한편 $S_1+S_2=\displaystyle\int_0^4(-x^2+4x)dx$이므로

$$S_2=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4-\frac{9}{2}$$

$$=\frac{32}{3}-\frac{9}{2}=\frac{37}{6}$$ ⋯ ❷

따라서 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{37}{6}}=\dfrac{27}{37}$이므로

$p=37,\ q=27$

$\therefore p+q=64$ ⋯ ❸

답 64

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=-x(x-4)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ S_1, S_2의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

06 두 곡선 $y=(n+2)x^{n+1}$, $y=(n+1)x^n$의 교점의 x좌표를 k라 하면

$(n+2)x^{n+1}=(n+1)x^n$ 에서 $\quad x=\dfrac{n+1}{n+2} \quad \therefore 0<k<1$

$$a=\int_0^k\{(n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}\}dx,$$

$$b=\int_k^2\{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^n\}dx$$

이므로

$$b-a=\int_k^2\{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^n\}dx$$

$$-\int_0^k\{(n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}\}dx$$

$$=\int_k^2\{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^n\}dx$$

$$+\int_0^k\{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^n\}dx$$

$$=\int_0^2\{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^n\}dx$$

$$=\left[x^{n+2}-x^{n+1}\right]_0^2=2^{n+2}-2^{n+1}$$

$$=4\cdot2^n-2\cdot2^n=2\cdot2^n$$

즉 $2\cdot2^n=16$이므로 $\quad 2^n=8 \quad \therefore n=3$ 답 3

07 $f'(x)=3x^2-3$이므로 $f'(x)=0$에서

$x^2=1 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$a<0$이므로 $\quad a=-1$

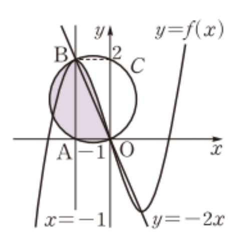
$\therefore f(a)=f(-1)=2 \qquad \therefore \mathrm{B}(-1,\ 2)$

이때 삼각형 OAB는 직각삼각형이므로 원 C의 반지름의 길이는

원 C는 삼각형 OAB의 외접원이므로 원 C의 지름의 길이는 직각삼각형 OAB의 빗변 OB의 길이와 같다.

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+2^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}$$



또 직선 OB의 방정식은

$$y=\frac{0-2}{0-(-1)}x=-2x$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\int_{-1}^{0}\{x^3-3x-(-2x)\}dx$$
$$=\frac{5}{8}\pi+\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx$$
$$=\frac{5}{8}\pi+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{5}{8}\pi+\frac{1}{4}$$

답 $\frac{5}{8}\pi+\frac{1}{4}$

08 $x^3-x=nx$에서

$x\{x^2-(n+1)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{n+1}$

따라서 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=nx$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S(n)=2\int_{0}^{\sqrt{n+1}}\{nx-(x^3-x)\}dx$$
$$=2\int_{0}^{\sqrt{n+1}}\{-x^3+(n+1)x\}dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{n+1}{2}x^2\right]_{0}^{\sqrt{n+1}}$$
$$=2\left\{-\frac{1}{4}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)^2$$

함수 $y=x^3-x$, $y=nx$의 그래프가 각각 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-\sqrt{n+1}}^{0}(x^3-x-nx)dx$$
$$=\int_{0}^{\sqrt{n+1}}\{nx-(x^3-x)\}dx$$

이므로

$$S(1)+S(2)+S(3)+S(4)+S(5)$$
$$=\frac{1}{2}(2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)=45$$

답 ②

09 $x^3-(k+2)x^2+2(k+1)x=2x$에서

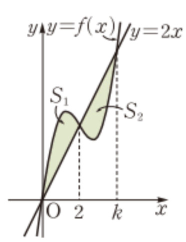
$x^3-(k+2)x^2+2kx=0,\quad x(x-2)(x-k)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=k$

$f(x)=x^3-(k+2)x^2+2(k+1)x$로 놓으면

(i) $k>2$일 때,

오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로

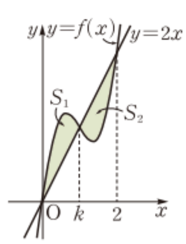


$$\int_{0}^{k}\{x^3-(k+2)x^2+2kx\}dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+2}{3}x^3+kx^2\right]_{0}^{k}=0$$

$k^3(k-4)=0\qquad\therefore k=4\ (\because k>2)$

(ii) $0<k<2$일 때,

오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로



$$\int_{0}^{2}\{x^3-(k+2)x^2+2kx\}dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+2}{3}x^3+kx^2\right]_{0}^{2}=0$$

$k-1=0\qquad\therefore k=1$

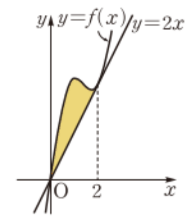
(i), (ii)에서 $\quad k=1$ 또는 $k=4$

따라서 구하는 k의 값의 합은

$1+4=5$

답 ②

참고 $k=2$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x$가 오른쪽 그림과 같으므로 두 그래프로 둘러싸인 도형은 하나만 존재한다.
따라서 $k>2$, $0<k<2$인 경우만 생각한다.

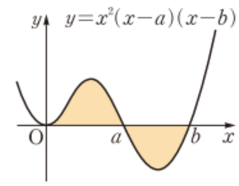


10 $x^2(x-a)(x-b)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=a$

또는 $x=b$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가 같으므로



$$\int_{0}^{b}x^2(x-a)(x-b)dx=0$$
$$\int_{0}^{b}\{x^4-(a+b)x^3+abx^2\}dx=0$$
$$\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}(a+b)x^4+\frac{1}{3}abx^3\right]_{0}^{b}=0$$
$$\frac{1}{5}b^5-\frac{1}{4}(a+b)b^4+\frac{1}{3}ab^4=0$$
$$\frac{1}{5}b-\frac{1}{4}(a+b)+\frac{1}{3}a=0\ (\because b>0)$$
$$\frac{1}{12}a-\frac{1}{20}b=0$$
$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

11 $A=B$이므로

$$\int_{0}^{2}\{a(x-2)^2-(-x^2+2x)\}dx=0$$
$$\int_{0}^{2}\{(a+1)x^2-(4a+2)x+4a\}dx=0$$
$$\left[\frac{a+1}{3}x^3-(2a+1)x^2+4ax\right]_{0}^{2}=0$$
$$\frac{8}{3}(a+1)-4(2a+1)+8a=0$$
$$\frac{8}{3}a-\frac{4}{3}=0\qquad\therefore a=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}(x-2)^2=-x^2+2x$에서 $\quad(x-2)^2=-2x^2+4x$

$3x^2-8x+4=0,\quad(3x-2)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

따라서 $k=\frac{2}{3}$이므로

$a+k=\frac{7}{6}$

답 $\frac{7}{6}$

12 $f(x)=-x^2+4x$로 놓으면

$f'(x)=-2x+4\qquad\therefore f'(4)=-4$

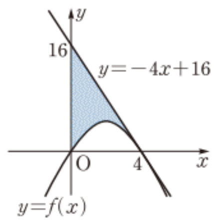
따라서 점 $(4, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=-4(x-4)$

$\therefore y=-4x+16$ ⋯ ❶

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^4 \{-4x+16-(-x^2+4x)\}dx$$
$$=\int_0^4 (x^2-8x+16)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+16x\right]_0^4$$
$$=\frac{64}{3}$$ ⋯ ❷

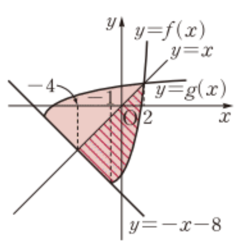


답 $\frac{64}{3}$

채점 기준	비율
❶ 점 (4, 0)에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

13 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선의 교점은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$x^2+2x-6=x$에서
$x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$
$\therefore x=2\ (\because x\geq-1)$



두 직선 $y=x$, $y=-x-8$의 교점의 x좌표는
$x=-x-8$에서 $x=-4$

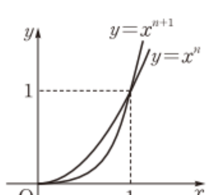
따라서 구하는 도형의 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배이므로

$$2\left[\int_{-4}^{-1}\{x-(-x-8)\}dx+\int_{-1}^{2}\{x-(x^2+2x-6)\}dx\right]$$
$$=2\left\{\int_{-4}^{-1}(2x+8)dx+\int_{-1}^{2}(-x^2-x+6)dx\right\}$$
$$=2\left(\left[x^2+8x\right]_{-4}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-1}^{2}\right)$$
$$=2\left(9+\frac{27}{2}\right)=45$$

답 ④

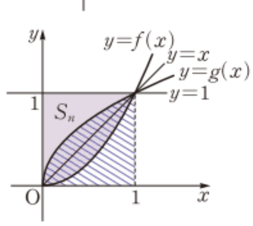
14 ㄱ. $0\leq x\leq1$이면
$x^n\geq x^{n+1}$

ㄴ. $y=x^n$과 $y=x^{n+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$S_n<S_{n+1}$



ㄷ. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$$S_n=\int_0^1 g(x)dx$$



이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

t=0에서의 위치가 $-a$이다.

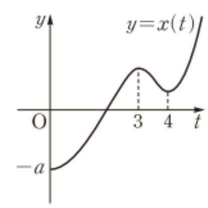
15 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$$x(t)=-a+\int_0^t 3t(t-3)(t-4)dt$$
$$=-a+\int_0^t (3t^3-21t^2+36t)dt$$
$$=-a+\left[\frac{3}{4}t^4-7t^3+18t^2\right]_0^t$$
$$=\frac{3}{4}t^4-7t^3+18t^2-a$$

$v(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=3$ 또는 $t=4$

t	0	⋯	3	⋯	4	⋯
$v(t)$	0	+	0	−	0	+
$x(t)$	$-a$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $0\leq t\leq4$에서 $x(t)=0$을 만족시키는 t가 한 개 존재하려면 $y=x(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $x(4)>0$이어야 하므로

$x(4)=\frac{3}{4}\cdot4^4-7\cdot4^3+18\cdot4^2-a=32-a$

$32-a>0 \quad \therefore a<32$

따라서 자연수 a의 최댓값은 31이다.

답 ①

16 점 P의 시각 $t=a$에서의 위치는

$$\int_0^a (4t-6)dt=\left[2t^2-6t\right]_0^a=2a^2-6a$$

$2a^2-6a=20$에서 $a^2-3a-10=0$
$(a+2)(a-5)=0 \quad \therefore a=5\ (\because a>0)$ ⋯ ❶

점 P의 시각 $t=10$에서의 위치는

$$x_1=\int_0^{10}(4t-6)dt=\left[2t^2-6t\right]_0^{10}=140$$

점 Q의 시각 $t=10$에서의 위치는

$$x_2=\int_0^{10}(3t^2-10t)dt=\left[t^3-5t^2\right]_0^{10}=500$$

$\therefore |x_1-x_2|=|140-500|=360$ ⋯ ❷

답 360

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lvert x_1-x_2\rvert$의 값을 구할 수 있다.	60 %

180 km/h
=180000 m/60·60 s
=50 m/s

17 달리는 열차의 속도는 50 m/s이고, 제동을 건 후 열차의 속도가 일정한 비율로 감소하므로 제동을 건 후 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s라 하면

$v(t)=50-kt$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

제동을 건 후 열차가 정지할 때까지 걸린 시간을 a초라 하면 $v(a)=0$에서

$$50-ka=0 \quad \therefore a=\frac{50}{k}$$

이때 제동을 건 후 열차는 125 m를 더 달린 후 정지하므로

$$\int_0^{\frac{50}{k}}(50-kt)dt=125,\quad \left[50t-\frac{k}{2}t^2\right]_0^{\frac{50}{k}}=125$$

Ⅲ 다항함수의 적분법

$\frac{1250}{k}=125 \qquad \therefore k=10$

따라서 열차가 정지할 때까지 걸린 시간은

$a=\frac{50}{10}=5$ 답 ②

18 점 P의 시각 $t=8$에서의 위치는

$$\int_0^8 f(t)dt=\int_0^2 (4-2t)dt+\int_2^8 (t^2-6t+8)dt$$
$$=\Big[4t-t^2\Big]_0^2+\Big[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\Big]_2^8$$
$$=4+36=40$$

점 Q의 시각 $t=8$에서의 위치는

$$\int_0^8 g(t)dt=\int_0^8 (at+2)dt=\Big[\frac{a}{2}t^2+2t\Big]_0^8$$
$$=32a+16$$

두 점 P, Q가 시각 $t=8$에서 만나므로

$40=32a+16 \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

19 ㄱ. $x(3)-x(2)$

$$=\Big\{0+\int_0^3 v(t)dt\Big\}-\Big\{0+\int_0^2 v(t)dt\Big\}$$

$t=0$에서의 위치가 0이다.

$$=\int_0^3 v(t)dt-\int_0^2 v(t)dt$$
$$=\int_0^3 v(t)dt+\int_2^0 v(t)dt$$
$$=\int_2^3 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

ㄴ. 점 P는 $v(t)=0$, 즉 $t=3$, $t=7$일 때 운동 방향을 바꾸므로 $0<t<10$에서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄷ. $x(t)=0+\int_0^t v(t)dt=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^t v(t)dt$

$\therefore x(t)=x(1)+\int_1^t v(t)dt$

즉 $\int_1^t v(t)dt=0$일 때, 점 P는 $x(1)$인 지점을 지난다.

$5<t<7$일 때, $v(t)=\frac{a}{2}t-\frac{7}{2}a$이므로

두 점 $(5, -a)$, $(7, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{0-(-a)}{7-5}(x-7)$$
$$=\frac{a}{2}(x-7)$$
$$=\frac{a}{2}x-\frac{7}{2}a$$

$$\int_1^t v(t)dt$$
$$=1\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a$$
$$-\frac{1}{2}(t-5)\Big(a-\frac{a}{2}t+\frac{7}{2}a\Big)$$
$$=\frac{a}{2}+\frac{a}{4}(t-5)(t-9)=\frac{a}{4}(t^2-14t+47)$$

$\frac{a}{4}(t^2-14t+47)=0$에서 $\qquad t^2-14t+47=0$

$\therefore t=7-\sqrt{2}\ (\because 5<t<7)$

즉 점 P는 $t=7-\sqrt{2}=5.\times\times\times$일 때 $x(1)$인 지점을 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

일품 BOX

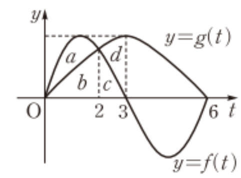
$f(3-t)+f(3+t)=0$이므로 $y=f(t)$의 그래프는 점 $(3, 0)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore \int_0^3 f(t)dt$
$=-\int_3^6 f(t)dt$

$g(3-t)=g(3+t)$이므로 $y=g(t)$의 그래프는 $t=3$에 대하여 대칭이다.

20 ㄱ. $\int_0^6 f(t)dt=0$이므로 점 P는 시각 $t=6$일 때 원점에 있다. 그런데 점 Q는 $0\le t\le 6$에서 운동 방향을 바꾸지 않으므로 $t=6$일 때, 점 Q가 점 P보다 원점에서 멀리 떨어져 있다.

ㄴ. $\int_0^6 |f(t)|dt=\int_0^6 g(t)dt$이므로 두 점 P, Q가 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리가 같다. 또 $y=f(t)$의 그래프는 점 $(3, 0)$에 대하여 대칭이고, $y=g(t)$의 그래프는 직선 $t=3$에 대하여 대칭이므로



$$\int_0^3 f(t)dt$$
$$=\int_0^3 g(t)dt$$

따라서 위의 그림과 같이 네 부분의 넓이를 각각 a, b, c, d라 하면

$a+b+c=b+c+d \qquad \therefore a=d$

$\therefore \int_0^2 \{f(t)-g(t)\}dt=\int_2^3 \{g(t)-f(t)\}dt$

ㄷ. $\int_0^2 f(t)dt>\int_2^3 g(t)dt$이면 ㄴ에서

$a+b>c+d \qquad \therefore b>c\ (\because a=d)$

이때 $\int_3^4 |f(t)|dt=\int_2^3 f(t)dt=c$,

$\int_4^6 g(t)dt=\int_0^2 g(t)dt=b$이므로

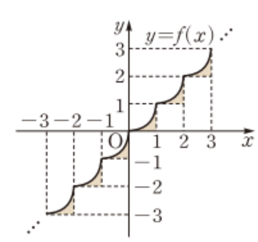
$\int_3^4 |f(t)|dt<\int_4^6 g(t)dt$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 87쪽

01 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$a_n=\int_n^{n+1} \{f(x)-n\}dx$$
$$=\int_0^1 x^2dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$

$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{3}n\ge 10$에서

$n\ge 30$

따라서 n의 최솟값은 30이다. 답 30

02 ㄱ. $A=\int_a^0 f(x)dx=10$이므로

$B=10+k,\ C=10+2k$

$\therefore \int_0^c f(x)dx = -B+C$

$= (-10-k)+(10+2k)$

$= k$

이때 $k \neq 10$이면 $\int_0^c f(x)dx \neq 10$

ㄴ. $A+B+C=(B-k)+B+(B+k)=3B$

즉 $3B=30$이므로 $B=10$

$\therefore \int_a^c f(x)dx = A-B+C$

$= (B-k)-B+(B+k)$

$= B = 10$

ㄷ. $\int_a^b f(x)dx = A-B = 10$이므로 $k=-10$

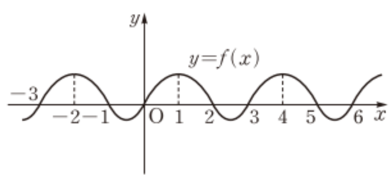
$\therefore \int_0^c f(x)dx = -B+C$

$= k$

$= -10$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

03 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\int_{-1}^0 |f(x)|dx = \int_{-1}^0 (-x^2-x)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 = \frac{1}{6}$

$\int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 (-x^2+2x)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

$\int_1^2 |f(x)|dx = \int_1^2 (-x^2+2x)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_1^2 = \frac{2}{3}$

구간 $[-a, a]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=-a$, $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 할 때,

$S(1) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

$S(2) = S(1) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$

$S(3) = S(2) + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 3$

$S(4) = 3 + S(1) = \frac{23}{6}$

$S(5) = 3 + S(2) = \frac{31}{6}$

$S(6) = 3 + S(3) = 6$

$S(7) = 6 + S(1) = \frac{41}{6}$

$S(8) = 6 + S(2) = \frac{49}{6}$

$S(9) = 6 + S(3) = 9$

$\vdots$

따라서 $S(a)=30$을 만족시키는 자연수 a의 값은 30이다.

$S(3)=3$, $S(6)=6$, $S(9)=9$, $\cdots$ 이므로 $S(30)=30$

답 30

04 $x^n = x^{n+1}$에서 $x^n(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

두 함수 $y=x^n$, $y=x^{n+1}$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이 S_n은

$S_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx$

$0<x<1$에서 $x^n > x^{n+1}$

$= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$

$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

$\therefore S_1 + S_2 + \cdots + S_n$

$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$

$+ \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

$S_1 + S_2 + \cdots + S_n < \frac{2}{5}$에서

$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} < \frac{2}{5}$, $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{10}$

$n+2 < 10$ $\therefore n < 8$

따라서 자연수 n의 최댓값은 7이다. 답 ②

05 $f(x) = x^3 - x + 3$에서

$f'(x) = 3x^2 - 1$

기울기가 2인 접선의 접점의 x좌표를 a라 하면

$f'(a) = 3a^2 - 1 = 2$에서 $a^2 = 1$

$\therefore a = -1$ 또는 $a = 1$

$f(-1) = -1+1+3 = 3$

$f(1) = 1-1+3 = 3$

점 $(-1, 3)$에서의 접선을 l_1, 점 $(1, 3)$에서의 접선을 l_2라 하면 두 접선의 방정식은

$l_1 : y-3 = 2(x+1)$, 즉 $y = 2x+5$

$l_2 : y-3 = 2(x-1)$, 즉 $y = 2x+1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 l_1의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3 - x + 3 = 2x + 5$에서 $x^3 - 3x - 2 = 0$

$(x+1)^2(x-2) = 0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore A = \int_{-1}^2 \{(2x+5) - (x^3 - x + 3)\}dx$

$= \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2)dx$

$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^2$

$= 6 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{4}$

곡선 $y=f(x)$와 직선 l_2의 교점의 x좌표를 구하면

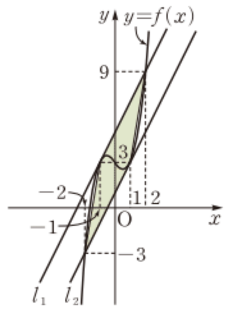
$x^3 - x + 3 = 2x + 1$에서 $x^3 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)^2(x+2) = 0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

Ⅲ 다항함수의 적분법

$$\therefore B=\int_{-2}^{1}\{(x^3-x+3)-(2x+1)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{3}{4}-(-6)=\frac{27}{4}$$

한편 두 직선 l_1, l_2는 곡선 $y=f(x)$와 각각 두 점에서 만나고, 이 점들을 꼭짓점으로 하는 도형은 평행사변형이다.



일품 BOX 네 점 $(-2, -3)$, $(-1, 3)$, $(2, 9)$, $(1, 3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형

직선 l_1이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 두 점 $(-1, 3)$, $(2, 9)$ 사이의 거리는 $\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

점 $(-1, 3)$과 직선 l_2: $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-3+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

일품 BOX 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\therefore S=3\sqrt{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}=12$$
$$\therefore A+B-S=\frac{27}{4}+\frac{27}{4}-12=\frac{3}{2}$$

답 ⑤

06 $v(t)=t^2-(a+2)t+2a=(t-2)(t-a)$이고 $v(0)=2a>0$이므로 점 p가 시각 $t=0$에서의 움직이는 방향과 반대 방향으로 움직인 시간은 $v(t)\le 0$일 때이다.

따라서 $(t-2)(t-a)\le 0$에서

$2\le t\le a$ ($\because a>2$)

점 P가 시각 $t=0$에서의 움직이는 방향과 반대 방향으로 움직인 총거리는

$$\int_2^a|t^2-(a+2)t+2a|dt$$
$$=\int_2^a\{-t^2+(a+2)t-2a\}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{a+2}{2}t^2-2at\right]_2^a$$
$$=\left(\frac{a^3}{6}-a^2\right)-\left(-2a+\frac{4}{3}\right)$$
$$=\frac{a^3}{6}-a^2+2a-\frac{4}{3}$$

즉 $\dfrac{a^3}{6}-a^2+2a-\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{6}$이므로

$a^3-6a^2+12a-9=0$, $\quad(a-3)(a^2-3a+3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a^2-3a+3>0$)

답 3

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 88~92쪽

01 전략 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$임을 이용하여 주어진 극한을 도함수 $f'(x)$를 사용하여 나타낸다.

풀이 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)-f(x-h)+f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot 2+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$
$$=2f'(x)+f'(x)$$
$$=3f'(x)$$

즉 $3f'(x)=6x^3+3x$이므로

$f'(x)=2x^3+x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x^3+x)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$$

이때 $f(1)=1$이므로 $\quad\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+C=1$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{1}{2}x^2$이므로

$f(2)=8+2=10$

답 ⑤

02 전략 다항함수 $F(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $F(\alpha)=0$임을 이용한다.

풀이 $F(x)=\displaystyle\int f(x)dx=\int(2x^3-3x^2+a)dx$

$$=\frac{1}{2}x^4-x^3+ax+C$$

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

이때 $F(x)$가 $f'(x)$로 나누어떨어지므로

$F(0)=0$, $F(1)=0$

$F(0)=0$에서 $\quad C=0$

$F(1)=0$에서 $\quad\dfrac{1}{2}-1+a=0$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$

따라서 $F(x)=\dfrac{1}{2}x^4-x^3+\dfrac{1}{2}x$이므로

$F(4)=128-64+2=66$

답 ④

03 전략 $x<1$인 구간과 $x\ge 1$인 구간으로 나누어 함수 $F(x)$를 구하고, 증감표를 이용하여 $F(x)$가 극대 또는 극소인 x의 값을 찾는다.

풀이 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases}2x & (x<1)\\ -2x+4 & (x\ge 1)\end{cases}$$

$$\therefore F(x)=\int f(x)dx$$
$$=\begin{cases}x^2+C_1 & (x<1)\\ -x^2+4x+C_2 & (x\ge 1)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $F(x)$는 $x=0$에서 극솟값 3을 가지므로

$$F(0)=C_1=3$$

또 함수 $F(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to1+}F(x)=\lim_{x\to1-}F(x)=F(1)$이므로

$$-1+4+C_2=1+3$$

$$\therefore C_2=1$$

따라서 $x\ge1$일 때, $F(x)=-x^2+4x+1$이고 $F(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$F(2)=-4+8+1=5$$

답 ②

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

04 전략 부정적분 $F(x)$를 구하고, 주어진 조건을 만족시키는 적분상수의 범위를 구한다.

풀이 $F(x)=\int(1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots+10^2x^9)dx$

$$=x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots+10x^{10}+C$$

$F(-1)=-1+2-3+4-\cdots+10+C=5+C$이므로

$$10\le5+C\le99$$

$$\therefore 5\le C\le94 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$F(1)=1+2+3+\cdots+10+C=55+C$이므로

$$10\le55+C\le99$$

$$\therefore -45\le C\le44 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad 5\le C\le44$

또 $F(0)=C$는 짝수이므로 구하는 함수 $F(x)$의 개수는 20이다.

답 ③

$$\frac{44-5+1}{2}=20$$

05 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하고, $f(x)$의 차수를 구한다.

풀이 $\int\{f(x)-g(x)\}dx=f(x)+g(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)-g(x)=f'(x)+g'(x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$g(x)=x^2+x-2$이므로 $\quad g'(x)=2x+1$

이때 $f(x)$가 일차함수이면 ㉠의 좌변은 이차식, 우변은 일차식이 되고, $f(x)$가 n차 $(n\ge3)$함수이면 ㉠의 좌변은 n차식, 우변은 $(n-1)$차식이 되므로 등식이 성립하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 이차함수이어야 하므로

$$f(x)=ax^2+bx+4\ (a,\ b\text{는 상수, } a\ne0)$$

로 놓으면 $\quad f'(x)=2ax+b$

㉠에서

$$ax^2+bx+4-(x^2+x-2)=2ax+b+2x+1$$

$$(a-1)x^2+(b-1)x+6=(2a+2)x+b+1$$

위의 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$$a-1=0,\ b-1=2a+2,\ 6=b+1$$

$$\therefore a=1,\ b=5$$

따라서 $f(x)=x^2+5x+4$이므로

$$f(1)=1+5+4=10$$

답 ⑤

① 모든 실수 x에 대하여
$ax^2+bx+c=0$
$\iff a=0,\ b=0,\ c=0$
② 모든 실수 x에 대하여
ax^2+bx+c
$=a'x^2+b'x+c'$
$\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$

06 전략 조건 (가)의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $g(0)$의 값을 구한다.

풀이 $F(x)=(x^2+1)\int g(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\quad F'(x)=2x\int g(x)dx+(x^2+1)g(x)$

$F'(0)=g(0)=2$이므로 $g(x)=x^2+ax+2$ (a는 상수)로 놓으면

$$F(x)=(x^2+1)\int(x^2+ax+2)dx$$

$$=(x^2+1)\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+2x+C\right)$$

$$=\frac{1}{3}x^5+\frac{a}{2}x^4+\frac{7}{3}x^3+\left(\frac{a}{2}+C\right)x^2+2x+C$$

조건 (나)에 의하여

$$\frac{a}{2}=0,\ \frac{a}{2}+C=0,\ C=0 \qquad \therefore a=0,\ C=0$$

따라서 $F(x)=\frac{1}{3}x^5+\frac{7}{3}x^3+2x$이므로

$$F(3)=81+63+6=150$$

답 ⑤

07 전략 $a\le x\le b$인 구간과 $b\le x\le c$인 구간으로 나누어 $\int_a^c|f'(x)|dx$의 값을 구한다.

풀이 $a\le x\le b$에서 $f'(x)\ge0$, $b\le x\le c$에서 $f'(x)\le0$이므로

$$\int_a^c|f'(x)|dx=\int_a^b f'(x)dx+\int_b^c\{-f'(x)\}dx$$

$$=\Big[f(x)\Big]_a^b-\Big[f(x)\Big]_b^c$$

$$=f(b)-f(a)-\{f(c)-f(b)\}$$

$$=2f(b)-\{f(a)+f(c)\}$$

$$=14-8=6$$

답 ①

08 전략 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 원점에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=\frac{1}{4}x$에서 $\quad x^3-\frac{9}{4}x=0$

$$x\left(x^2-\frac{9}{4}\right)=0 \qquad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=\pm\frac{3}{2}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 각각 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{0}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\frac{3}{2}}|f(x)-g(x)|dx$$

따라서

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}|f(x)-g(x)|dx=2\int_0^{\frac{3}{2}}|f(x)-g(x)|dx$$

이므로

$$\int_0^{\frac{3}{2}}|f(x)-g(x)|dx=\int_{\frac{3}{2}}^{a}|f(x)-g(x)|dx$$

$0\le x\le\frac{3}{2}$에서 $f(x)\le g(x)$, $\frac{3}{2}\le x\le a$에서 $f(x)\ge g(x)$이므로

$$-\int_0^{\frac{3}{2}}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{\frac{3}{2}}^a\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$\therefore \int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx=0$$

한편

$$\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^a\left\{(x^3-2x)-\frac{1}{4}x\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{8}x^2\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{4}a^4-\frac{9}{8}a^2$$

이므로 $\frac{1}{4}a^4-\frac{9}{8}a^2=0,\quad a^2\left(a^2-\frac{9}{2}\right)=0$

$$\therefore a=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ \left(\because a>\frac{3}{2}\right)$$

답 ④

일품 BOX

$\int_0^{\frac{3}{2}}\{f(x)-g(x)\}dx$
$+\int_{\frac{3}{2}}^a\{f(x)-g(x)\}dx$
$=0$
이므로
$\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx$
$=0$

09 전략 두 함수 $xg(x)$, $x^2h(x)$가 각각 우함수인지 기함수인지를 파악한다.

풀이 ㄱ. 함수 $y=f(-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로

$$\int_{-a}^a f(-x)dx=\int_{-a}^a f(x)dx=p$$

ㄴ. $G(x)=xg(x)$로 놓으면

$$G(-x)=-xg(-x)$$
$$=-x\{f(-x)+f(x)\}$$
$$=-x\{f(x)+f(-x)\}$$
$$=-xg(x)=-G(x)$$

따라서 $G(x)$, 즉 $xg(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-a}^a xg(x)dx=0$$

ㄷ. $H(x)=x^2h(x)$로 놓으면

$$H(-x)=(-x)^2h(-x)$$
$$=x^2\{f(-x)-f(x)\}$$
$$=-x^2\{f(x)-f(-x)\}$$
$$=-x^2h(x)=-H(x)$$

따라서 $H(x)$, 즉 $x^2h(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-a}^a x^2h(x)dx=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

$f(x)$가 우함수, 즉
$f(-x)=f(x)$이면
$\int_{-a}^a f(x)dx$
$=2\int_0^a f(x)dx$
$f(x)$가 기함수, 즉
$f(-x)=-f(x)$이면
$\int_{-a}^a f(x)dx=0$

10 전략 n이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 구분하여 정적분을 계산한다.

풀이 (ⅰ) n이 짝수일 때,

$$\int_{-1}^1 f_n(x)dx=\int_{-1}^1\{1+n^3x^{n-1}+(n+1)^3x^n\}dx$$
$$=2\int_0^1\{1+(n+1)^3x^n\}dx$$
$$=2\Big[x+(n+1)^2x^{n+1}\Big]_0^1$$
$$=2\{1+(n+1)^2\}$$

$2\{1+(n+1)^2\}\ge150$에서 $(n+1)^2\ge74$

n은 짝수이므로 $n\ge8$

따라서 짝수 n의 최솟값은 8이다.

(ⅱ) n이 홀수일 때,

$$\int_{-1}^1 f_n(x)dx=\int_{-1}^1\{1+n^3x^{n-1}+(n+1)^3x^n\}dx$$
$$=2\int_0^1(1+n^3x^{n-1})dx$$
$$=2\Big[x+n^2x^n\Big]_0^1$$
$$=2(1+n^2)$$

$2(1+n^2)\ge150$에서 $n^2\ge74$

n은 홀수이므로 $n\ge9$

따라서 홀수 n의 최솟값은 9이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 자연수 n의 최솟값은 8이다. 답 ③

11 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(1)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=(x^2+1)\int_1^x(2t+a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2x\int_1^x(2t+a)dt+(x^2+1)(2x+a)$$

$f'(1)=2$이므로

$4+2a=2\qquad\therefore a=-1$

$\therefore f'(0)=a=-1$ 답 ①

12 전략 $x>2$인 경우와 $x<2$인 경우로 구분하고 등식의 양변을 미분하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 (ⅰ) $x>2$일 때,

$$\int_2^x f(t)dt=(x-2)^2$$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=2(x-2)$

(ⅱ) $x<2$일 때,

$$\int_2^x f(t)dt=-(x-2)^2$$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=-2(x-2)$

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}2(x-2)=0$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}\{-2(x-2)\}=0$

$\therefore \lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)$

ㄷ. $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(-2x+4)dx=\Big[-x^2+4x\Big]_0^1=3$

$\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4(2x-4)dx=\Big[x^2-4x\Big]_3^4=3$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx\ne-\int_3^4 f(x)dx$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

13 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하고, $\int_1^1 f(t)dt=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_1^x (x-t)^2 f(t)dt = x^4+ax^3+bx^2+5x-2$에서

$$x^2\int_1^x f(t)dt - 2x\int_1^x tf(t)dt + \int_1^x t^2 f(t)dt$$
$$= x^4+ax^3+bx^2+5x-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$a+b+4=0 \qquad \therefore a+b=-4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x\int_1^x f(t)dt + x^2 f(x) - 2\int_1^x tf(t)dt - 2x^2 f(x) + x^2 f(x)$$
$$= 4x^3+3ax^2+2bx+5$$
$$2x\int_1^x f(t)dt - 2\int_1^x tf(t)dt = 4x^3+3ax^2+2bx+5 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$3a+2b+9=0 \qquad \therefore 3a+2b=-9 \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면

$$a=-1,\ b=-3$$

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2\int_1^x f(t)dt + 2xf(x) - 2xf(x) = 12x^2-6x-6$$
$$2\int_1^x f(t)dt = 12x^2-6x-6 \quad \cdots\cdots ㉤$$

㉤의 양변을 x에 대하여 미분하면

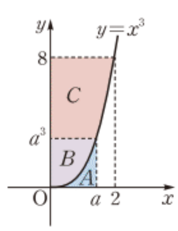
$$2f(x)=24x-6 \qquad \therefore f(x)=12x-3$$
$$\therefore f(a-b)=f(2)=24-3=21$$

답 ②

14

전략 그래프의 대칭성을 이용하여 곡선과 좌표축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 나누어진 도형의 넓이를 각각 A, B, C라 하면



$$S_1 = A = \int_0^a x^3 dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^a = \frac{1}{4}a^4$$

$y=x^3$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

또 $B = a\cdot a^3 - A = \frac{3}{4}a^4 = 3A$이므로

$$3S_1+S_2 = B+C = 2\cdot 8 - \int_0^2 x^3 dx$$
$$= 16 - \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 12$$

답 ④

15

전략 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하여 넓이를 정적분으로 나타낸다.

풀이 곡선 $y=x^3-(a+6)x^2+6ax$와 직선 $y=-5(x-a)$의 교점의 x좌표는 $x^3-(a+6)x^2+6ax=-5(x-a)$에서

$$x(x-a)(x-6)+5(x-a)=0$$
$$(x-a)(x^2-6x+5)=0$$
$$(x-1)(x-a)(x-5)=0$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=a \text{ 또는 } x=5$$

곡선 $y=x^3-(a+6)x^2+6ax$와 직선 $y=-5(x-a)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같고 $1<a<5$이므로

$$\int_1^5 \{x^3-(a+6)x^2+6ax+5(x-a)\}dx=0$$
$$\int_1^5 \{x^3-(a+6)x^2+(6a+5)x-5a\}dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+6}{3}x^3 + \frac{6a+5}{2}x^2 - 5ax\right]_1^5 = 0$$
$$\frac{32}{3}a - 32 = 0 \qquad \therefore a=3$$

답 ④

16

전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 두 함수의 그래프로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^4 \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$= \int_4^6 \{g(x)-f(x)\}dx$$

이므로

$$\int_0^4 \{f(x)-x\}dx$$
$$= \int_0^4 \{x-g(x)\}dx$$
$$= \int_4^6 \{g(x)-x\}dx$$
$$= \int_4^6 \{x-f(x)\}dx$$

$$\int_4^6 \{g(x)-x\}dx = \int_0^4 \{f(x)-x\}dx$$
$$= \int_0^4 f(x)dx - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$
$$= 9-8=1$$
$$\therefore \int_4^6 g(x)dx = \int_4^6 \{g(x)-x\}dx + \frac{1}{2}\cdot(4+6)\cdot 2$$
$$= 1+10=11$$

답 ②

17

전략 $F'(x)$를 구하고 증감표를 이용하여 $F(x)$의 극값을 구한다.

풀이 $F(x)=\int_a^x \{f(t)-g(t)\}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\quad F'(x)=f(x)-g(x)$

$F'(x)=f(x)-g(x)=0$에서

$$x=\alpha \text{ 또는 } x=\beta \text{ 또는 } x=0$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	0	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $F(x)$는 $x=\alpha$, $x=0$에서 극소, $x=\beta$에서 극대이고

$$F(\alpha)=\int_\alpha^\alpha \{f(t)-g(t)\}dt=0,$$
$$F(\beta)=\int_\alpha^\beta \{f(t)-g(t)\}dt=S_1>0,$$
$$F(0)=\int_\alpha^0 \{f(t)-g(t)\}dt=S_1-S_2<0$$
$$(\because S_1<S_2)$$

이므로 $y=F(x)$의 그래프의 개형은 ①과 같다.

답 ①

18

전략 $f(t)$, $g(t)$의 값의 부호를 파악하여 두 점 P, Q 사이의 거리가 최대인 시각을 구한다.

Ⅲ 다항함수의 적분법

풀이 $0<t<6$에서 $f(t)<0,\ g(t)>0$
$t>6$에서 $f(t)>0,\ g(t)<0$
즉 두 점 P, Q는 $0<t<6$에서 서로 반대 방향으로 움직이다가 시각 $t=6$에서 동시에 운동 방향을 바꾼다.
따라서 $0<t<b$에서 두 점 P, Q 사이의 거리는 시각 $t=6$일 때 최대이다.
점 P의 시각 $t=6$에서의 위치는
$$\int_0^6 (3t^2-18t)dt=\left[t^3-9t^2\right]_0^6=-108$$
점 Q의 시각 $t=6$에서의 위치는
$$\int_0^6 a(6-t)dt=a\left[6t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^6=18a$$
두 점 사이의 거리의 최댓값이 288이므로
$18a-(-108)=288 \quad \therefore a=10$
두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치는 각각
$$\int_0^t (3t^2-18t)dt=\left[t^3-9t^2\right]_0^t=t^3-9t^2$$
$$\int_0^t 10(6-t)dt=\left[60t-5t^2\right]_0^t=60t-5t^2$$
이므로 두 점 P, Q가 만나는 시각은
$t^3-9t^2=60t-5t^2$에서 $t^3-4t^2-60t=0$
$t(t+6)(t-10)=0$
$t>0$이므로 $t=10 \quad \therefore b=10$
$\therefore a+b=20$
답 ④

19 전략 점 P의 위치를 정적분으로 나타낸다.

풀이 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면
$x(2)=12,\ x(6)=4$
$x(6)=x(0)+\int_0^6 v(t)dt$에서 $\int_0^6 v(t)dt=0$이므로
$x(6)=x(0)=4$
$\therefore x(2)=x(0)+\int_0^2 v(t)dt=4+2a$
즉 $4+2a=12$이므로 $a=4$
$$\therefore x(7)=x(0)+\int_0^7 v(t)dt$$
$$=x(0)+\int_6^7 v(t)dt \left(\because \int_0^6 v(t)dt=0\right)$$
$$=4-\frac{1}{2}\cdot1\cdot4=2$$
답 ②

20 전략 부정적분을 이용하여 $f_n(x)$를 구한다.

풀이 $f_n(x)=\int(x^n+x^{n+1})dx$
$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\frac{1}{n+2}x^{n+2}+C$$
$f_n(0)=0$이므로 $C=0$
따라서 $f_n(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\frac{1}{n+2}x^{n+2}$이므로
$$f_n(1)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$$
이때 $f_{12}(1)=\frac{1}{13}+\frac{1}{14}>\frac{1}{14}+\frac{1}{14}=\frac{1}{7}$,
$f_{13}(1)=\frac{1}{14}+\frac{1}{15}<\frac{1}{14}+\frac{1}{14}=\frac{1}{7}$이므로
$f_{12}(1)>\frac{1}{7}>f_{13}(1)$
자연수 n에 대하여 $f_n(1)>f_{n+1}(1)$이므로 $f_n(1)>\frac{1}{7}$을 만족시키는 n의 최댓값은 12이다.
답 12

일품 BOX

$\int_0^6 v(t)dt$
$=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^6 v(t)dt$
$=\left(2a+\frac{1}{2}\cdot1\cdot a\right)$
$-\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot a+2a\right)$
$=0$
즉 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
① $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\ (\alpha\neq0)$
➡ $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같고, $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 계수의 비는 α이다.
② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$
➡ $\lim_{x\to a}f(x)=0$

21 전략 부정적분을 이용하여 $f(x)+g(x)$와 $f(x)g(x)$를 각각 구한다.

풀이 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1$에서
$$f(x)+g(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C_1$$
위의 식에 $x=0$을 대입하면
$f(0)+g(0)=C_1 \quad \therefore C_1=1$
$\therefore f(x)+g(x)=x^2+x+1$ ⋯ ❶
또 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-2x+2$에서
$$f(x)g(x)=\int(3x^2-2x+2)dx=x^3-x^2+2x+C_2$$
위의 식에 $x=0$을 대입하면
$f(0)g(0)=C_2 \quad \therefore C_2=-2$
$\therefore f(x)g(x)=x^3-x^2+2x-2$
$=(x-1)(x^2+2)$ ⋯ ❷
이때 $f(0)=2,\ g(0)=-1$이고 $f(x)+g(x)=x^2+x+1$이므로
$f(x)=x^2+2$ ⋯ ❸
답 $f(x)=x^2+2$

채점 기준	비율
❶ $f(x)+g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %

22 전략 주어진 조건에서 다항함수 $f'(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^2}=3$에서 $f'(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차함수이다.
또 $\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=-2$에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.
즉 $\lim_{x\to0}f'(x)=0$이므로 $f'(0)=0$
따라서 $f'(x)=3x(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면
$$\lim_{x\to0}\frac{3x(x+a)}{x}=\lim_{x\to0}3(x+a)=3a$$
이때 $3a=-2$이므로 $a=-\frac{2}{3}$
즉 $f'(x)=3x^2-2x$이므로
$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-2x)dx$$
$$=x^3-x^2+C$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$$f(0)=C=1$$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+1$이므로

$$f(2)=8-4+1=5$$

답 5

23 전략 먼저 $x<0$, $0<x<3$, $x>3$에서 $f'(x)$의 부호를 확인한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로

$x<0$에서 $\quad f'(x)>0$,

$0<x<3$에서 $\quad f'(x)<0$,

$x>3$에서 $\quad f'(x)>0$

$$\begin{aligned}\therefore \int_\alpha^\beta |f'(x)|dx &= \int_\alpha^0 f'(x)dx-\int_0^3 f'(x)dx+\int_3^\beta f'(x)dx\\ &=\Big[f(x)\Big]_\alpha^0-\Big[f(x)\Big]_0^3+\Big[f(x)\Big]_3^\beta\\ &=f(0)-f(\alpha)-f(3)+f(0)+f(\beta)-f(3)\\ &=-f(\alpha)+2f(0)-2f(3)+f(\beta)\\ &=8+2\cdot 3-2\cdot(-4)-1=21\end{aligned}$$

답 21

24 전략 부정적분을 이용하여 $f(x)$를 구한 후 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (x<0)\\ 3x^2+x & (x>0)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+C_1 & (x<0)\\ x^3+\dfrac{1}{2}x^2+C_2 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$$

$\therefore C_2=C_1$

$f(1)=\dfrac{5}{2}$이므로

$1+\dfrac{1}{2}+C_2=\dfrac{5}{2}\qquad \therefore C_2=1$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+1 & (x<0)\\ x^3+\dfrac{1}{2}x^2+1 & (x\geq 0)\end{cases}\quad \cdots ❶$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^1 f(x)dx &=\int_{-1}^0\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2+1\right)dx+\int_0^1\left(x^3+\frac{1}{2}x^2+1\right)dx\\ &=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^3+x\right]_0^1\\ &=\frac{17}{12}+\frac{17}{12}=\frac{17}{6}\quad \cdots ❷\end{aligned}$$

답 $\dfrac{17}{6}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $\int_{-1}^1 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %

$\int_{-1}^1(x^3+ax^2+bx)dx$
$=2\int_0^1 ax^2dx$

$\int_{-1}^1(x^2+ax+b)dx$
$=2\int_0^1(x^2+b)dx$

25 전략 $g(x)=px+q$ (p, q는 상수, $p\neq 0$)로 놓고 p, q에 대한 등식이 항상 성립하기 위한 조건을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수),
$g(x)=px+q$ (p, q는 상수, $p\neq 0$)로 놓으면

$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx=0$에서

$$\int_{-1}^1(x^2+ax+b)(px+q)dx=0$$

$$p\int_{-1}^1(x^3+ax^2+bx)dx+q\int_{-1}^1(x^2+ax+b)dx=0$$

이 등식이 임의의 실수 p, q에 대하여 성립해야 하므로

$$\int_{-1}^1(x^3+ax^2+bx)dx=0\quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_{-1}^1(x^2+ax+b)dx=0\quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $\quad \int_0^1 ax^2dx=\left[\dfrac{a}{3}x^3\right]_0^1=\dfrac{a}{3}=0$

$\therefore a=0$

㉡에서 $\quad \int_0^1(x^2+b)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}+bx\right]_0^1=\dfrac{1}{3}+b=0$

$\therefore b=-\dfrac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$이므로

$$f(2)=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$$

답 $\dfrac{11}{3}$

26 전략 $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓고 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=x-\int_0^1(3x-2)f(t)dt$

$$=x-3x\int_0^1 f(t)dt+2\int_0^1 f(t)dt$$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$f(x)=x-3kx+2k=(1-3k)x+2k$$

$$\begin{aligned}\therefore k&=\int_0^1\{(1-3k)t+2k\}dt\\ &=\left[\frac{1-3k}{2}t^2+2kt\right]_0^1\\ &=\frac{1-3k}{2}+2k=\frac{k+1}{2}\end{aligned}$$

즉 $k=\dfrac{k+1}{2}$에서 $\quad k=1$

따라서 $f(x)=-2x+2$이므로

$$f(-2)=4+2=6$$

답 6

27 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=\dfrac{1}{12}x^4+\dfrac{1}{3}x^3$에서

$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3+x^2$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=x^2+2x=x(x+2) \qquad \cdots ❶$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(4)}+\frac{1}{f(5)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right\}$$

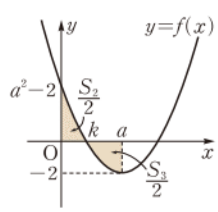
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)=\frac{25}{42} \qquad \cdots ❷$$

답 $\frac{25}{42}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(4)}+\frac{1}{f(5)}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

28 전략 두 함수 $y=f(|x|)$, $y=f(x)$의 그래프의 대칭성을 이용한다.

풀이 $f(k)=0$ $(0<k<a)$인 상수 k에 대하여 함수 $y=f(|x|)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로



$$\int_0^k f(x)dx=\frac{S_2}{2}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이므로 $\quad -\int_k^a f(x)dx=\frac{S_3}{2}$

이때 $S_2=S_3$이므로 $\quad \int_0^a f(x)dx=0$

$f(x)=x^2-2ax+a^2-2$이므로

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a (x^2-2ax+a^2-2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-2)x\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{3}a(a^2-6)$$

즉 $\frac{1}{3}a(a^2-6)=0$이므로

$$a(a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6})=0$$

$$\therefore a=\sqrt{6} \ (\because a>\sqrt{2})$$

답 $\sqrt{6}$

29 전략 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f'(x)=kx(x-1)$ $(k>0)$로 놓으면

$$\int_0^1 |kx(x-1)|dx=-k\int_0^1 (x^2-x)dx$$

$$=-k\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}k$$

즉 $\frac{1}{6}k=1$이므로 $\qquad k=6$

$f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(0)=f'(1)=0$

$$\therefore f'(x)=6x(x-1)=6x^2-6x$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-6x)dx$$

$$=2x^3-3x^2+C$$

$f(1)=0$이므로 $\qquad -1+C=0 \qquad \therefore C=1$

$$\therefore f(x)=2x^3-3x^2+1=(x-1)^2(2x+1)$$

$f(x)=0$에서 $\qquad x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x^3-3x^2+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-x^3+x\right]_{-\frac{1}{2}}^1$$

$$=\frac{1}{2}-\left(-\frac{11}{32}\right)=\frac{27}{32}$$

답 $\frac{27}{32}$

30 전략 먼저 시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 구한다.

풀이 시각 t에서 점 P의 위치를 $x_P(t)$라 하면

$$x_P(t)=0+\int_0^t (3t-6)dt$$

$t=0$일 때의 점 P의 위치는 0이다.

$$=\left[\frac{3}{2}t^2-6t\right]_0^t$$

$$=\frac{3}{2}t^2-6t$$

시각 t에서 점 Q의 위치를 $x_Q(t)$라 하면

$$x_Q(t)=300+\int_0^t (-t+4)dt$$

$t=0$일 때의 점 Q의 위치는 300이다.

$$=300+\left[-\frac{1}{2}t^2+4t\right]_0^t$$

$$=-\frac{1}{2}t^2+4t+300$$

두 점 P, Q가 만날 때, $x_P(t_1)=x_Q(t_1)$이므로

$$\frac{3}{2}{t_1}^2-6t_1=-\frac{1}{2}{t_1}^2+4t_1+300$$

$${t_1}^2-5t_1-150=0, \qquad (t_1+10)(t_1-15)=0$$

$$\therefore t_1=15 \ (\because t_1>0)$$

따라서 두 점 P, Q는 시각 $t=15$에서 만난다. $\cdots$ ❶

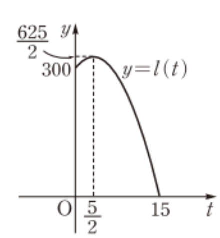
시각 t $(0\le t\le 15)$에서 선분 PQ의 길이를 $l(t)$라 하면

$$l(t)=\left|\left(\frac{3}{2}t^2-6t\right)-\left(-\frac{1}{2}t^2+4t+300\right)\right|$$

$$=|2t^2-10t-300|$$

$$=\left|2\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{625}{2}\right|$$

따라서 $0\le t\le 15$에서 $y=l(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 선분 PQ의 길이의 최댓값은 $\frac{625}{2}$이다. $\cdots$ ❷



답 $\frac{625}{2}$

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q가 만나는 시각을 구할 수 있다.	50 %
❷ 선분 PQ의 길이의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %

최상위로 가는 최고 수준 문제 본책 93쪽

01

해결 단계

❶ 모든 실수 x에 대하여 $F(x+4)=F(x)$임을 확인한다.
❷ 구간 $(0, 20)$에서 함수 $F(x)$의 모든 극댓값의 합을 구한다.
❸ 방정식 $F(x)=2$의 모든 실근의 합을 구한다.

풀이 ❶ ㄱ. $f(x)=\begin{cases} -3x^2+6x & (0\le x<2) \\ 3x^2-18x+24 & (2\le x<4) \end{cases}$

이므로

$$F(x)=\begin{cases} -x^3+3x^2+C_1 & (0\le x<2) \\ x^3-9x^2+24x+C_2 & (2\le x<4) \end{cases}$$

$F(1)=-1+3+C_1=2$에서 $\quad C_1=0$

함수 $F(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2+}(x^3-9x^2+24x+C_2)=\lim_{x\to 2-}(-x^3+3x^2)$$
$$=F(2)$$

$8-36+48+C_2=-8+12$

$\therefore C_2=-16$

$$\therefore F(x)=\begin{cases} -x^3+3x^2 & (0\le x<2) \\ x^3-9x^2+24x-16 & (2\le x<4) \end{cases}$$

$f(x)$는 곡선 $y=F(x)$ 위의 임의의 점 $(x, F(x))$에서의 접선의 기울기이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로 $0<x<4$일 때, 점 $(x, F(x))$에서의 접선의 기울기와 점 $(x+4, F(x+4))$에서의 접선의 기울기가 같다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $F(x+4)=F(x)$이다.

❷ ㄴ. ㄱ에서 함수

$F(x)=\begin{cases} -x^3+3x^2 & (0\le x<2) \\ x^3-9x^2+24x-16 & (2\le x<4) \end{cases}$은 모든 실수 x에서 연속이고, $F(x+4)=F(x)$이므로 $0<x<4$에서 함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$F'(x)$		+	0	−	
$F(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $F(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 극댓값은

$F(2)=8-36+48-16=4$

구간 $(0, 20)$에서 함수 $F(x)$가 극댓값을 갖는 x의 값은 2, 6, 10, 14, 18이므로 구하는 극댓값의 합은

$4\cdot 5=20$

❸ ㄷ. $0\le x<2$에서 방정식 $-x^3+3x^2=2$의 실근을 구하면

$x^3-3x^2+2=0, \quad (x-1)(x^2-2x-2)=0$

$x=1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=1\ (\because 0\le x<2)$

$2\le x<4$에서 방정식 $x^3-9x^2+24x-16=2$의 실근을 구하면

$x^3-9x^2+24x-18=0$

$(x-3)(x^2-6x+6)=0$

$x=3$ 또는 $x=3\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=3\ (\because 2\le x<4)$

따라서 $0\le x\le 20$에서 방정식 $F(x)=2$의 실근은

$x=1, 3, 5, 7, \cdots, 19$

따라서 구하는 합은

$1+3+5+\cdots+19=100$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

02

해결 단계

❶ $F(a)=F(c)$임을 안다.
❷ 함수 $y=F(x)$의 그래프를 그리고 $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$의 값을 구한다.
❸ $\int_a^c |f(x)|dx$의 값을 구한다.

풀이 ❶ $\int_a^b f(x)dx=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$\int_b^c f(x)dx=-k$$

이므로

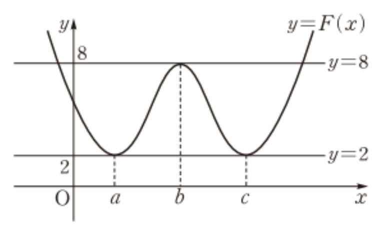
$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b$$
$$=F(b)-F(a)=k \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$\int_b^c f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_b^c$$
$$=F(c)-F(b)=-k \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면 $\quad F(c)-F(a)=0$

$\therefore F(a)=F(c)$

$F'(x)=f(x)$이고, $f(x)$가 삼차함수이므로 $F(x)$는 사차함수이다.

❷ 또 $y=F(x)$는 사차함수이고 $x=a$, $x=c$에서 극소, $x=b$에서 극대이며, 방정식 $F(x)=2$가 서로 다른 두 실근을 갖고 방정식 $F(x)=8$이 서로 다른 세 실근을 가지므로 $y=F(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore F(a)=F(c)=2, \ F(b)=8$

$k>8$일 때, $F(x)=k$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
$2<k<8$일 때, $F(x)=k$는 서로 다른 네 실근을 갖는다.

❸ $\therefore \int_a^c |f(x)|dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c \{-f(x)\}dx$
$$=F(b)-F(a)-F(c)+F(b)$$
$$=8-2-2+8$$
$$=12$$
답 12

03

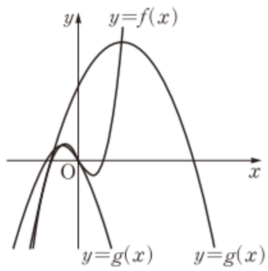
해결 단계

❶ 주어진 조건을 만족시키는 $y=g(x)$의 그래프를 그린다.
❷ 함수 $g(x)$를 구한다.
❸ 두 곡선 $y=p(x)$, $y=q(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

Ⅲ 다항함수의 적분법

▶▶ 본책 93쪽

풀이 ❶ 이차함수 $y=g(x)$의 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ f(a))$이고, 조건 ㈎에서 $f'(a)>0$이므로 $f(a)$는 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값이 될 수 없다.
따라서 조건 ㈎, ㈏를 만족시키는 함수 $g(x)$는 다음 그림과 같이 두 가지 경우가 있다.



❷ 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는
$x^3-2x=-(x-a)^2+a^3-2a$에서

$$x^3-2x=-x^2+2ax-a^2+a^3-2a$$
$$x^3+x^2-(2a+2)x-a^3+a^2+2a=0$$
$$(x-a)\{x^2+(a+1)x+a^2-a-2\}=0$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 점 $(a,\ f(a))$에서 접할 수 없으므로 $x=a$는 중근이 될 수 없다.
따라서 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a^2-a-2=0$은 a가 아닌 실근을 중근으로 갖는다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+1)^2-4(a^2-a-2)=0$$
$$-3a^2+6a+9=0, \qquad a^2-2a-3=0$$
$$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 $g(x)=-(x+1)^2+1=-x^2-2x$ 또는 $g(x)=-(x-3)^2+21=-x^2+6x+12$이다.

❸ $p(x)=-x^2-2x$, $q(x)=-x^2+6x+12$로 놓으면 두 곡선 $y=p(x)$, $y=q(x)$의 교점의 x좌표는
$-x^2-2x=-x^2+6x+12$에서

$$-8x=12 \qquad \therefore x=-\frac{3}{2}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\{(-x^2+6x+12)-(-x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}(8x+12)dx=\Big[4x^2+12x\Big]_{-\frac{3}{2}}^{0}=9$$

답 ④

> 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 $f(a)$는 극값이다.

04

해결 단계

❶ a의 값을 구한다.
❷ b의 값을 구한다.
❸ c의 값을 구한다.
❹ $8(a+b+c)$의 값을 구한다.

풀이 ❶ $x^2-6x=0$에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=6$$

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^6(-x^2+6x)dx=\Big[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\Big]_0^6=36$$

따라서 곡선 $y=g_1(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $36\cdot\frac{1}{2}=18$이므로

$$a\int_0^6(-x^2+6x)dx=36a=18 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

❷ 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g_1(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$36-18=18$$

이고 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g_2(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^6(-x^2+6x)dx-b\int_0^6(-x^2+6x)dx=36(1-b)$$

이므로 $\quad 18\cdot\frac{1}{2}=36(1-b)$

$$\frac{1}{4}=1-b \qquad \therefore b=\frac{3}{4}$$

❸ 또 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g_3(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^6(-x^2+6x)dx-c\int_0^6(-x^2+6x)dx=36(1-c)$$

이므로 $\quad 9\cdot\frac{1}{2}=36(1-c)$

$$\frac{1}{8}=1-c \qquad \therefore c=\frac{7}{8}$$

❹ $\therefore 8(a+b+c)=8\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}\right)=17$

답 17