정답 및 풀이

미적분

Ⅰ 수열의 극한

Ⅱ 미분법

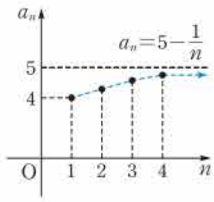
Ⅲ 적분법

• 정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

I. 수열의 극한

01 수열의 극한

0001 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=5-\frac{1}{n}$

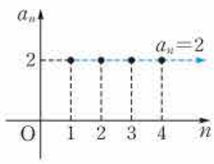


오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 5에 한없이 가까워지므로 이 수열은 5에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}\right)=5$

답 5

0002 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=2$

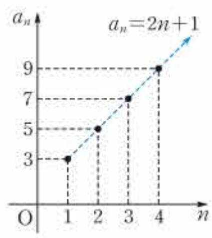


오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 2이므로 이 수열은 2에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}2=2$

답 2

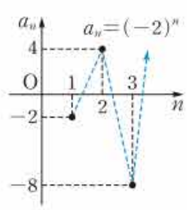
0003 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=2n+1$



오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

답 풀이 참조

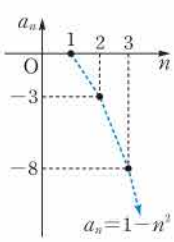
0004 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=(-2)^n$



오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 진동한다. 즉 발산한다.

답 풀이 참조

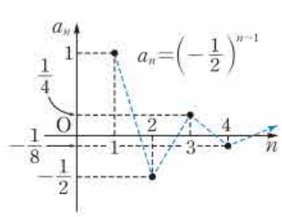
0005 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=1-n^2$



오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

답 음의 무한대로 발산

0006 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

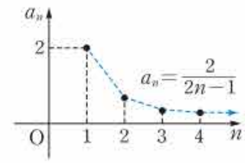


오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

답 수렴, 0

0007 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{2}{2n-1}$

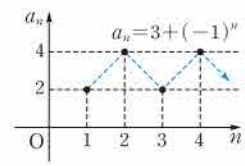


오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n-1}=0$

답 수렴, 0

0008 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=3+(-1)^n$



오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 진동한다.

답 발산(진동)

0009 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=3+(-1)=2$ 답 2

0010 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=3-(-1)=4$ 답 4

0011 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=3\cdot(-1)=-3$ 답 -3

0012 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{3}{-1}=-3$ 답 -3

0013 $\lim_{n\to\infty}(5a_n-b_n)=5\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n$

$=5\cdot3-(-1)=16$ 답 16

0014 $\lim_{n\to\infty}(-2a_nb_n)=-2\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n$

$=-2\cdot3\cdot(-1)=6$ 답 6

0015 $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+3}{3b_n}=\frac{4\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}3}{3\lim_{n\to\infty}b_n}$

$=\frac{4\cdot3+3}{3\cdot(-1)}=-5$ 답 -5

0016 $\lim_{n\to\infty}(a_n+3)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}3=\alpha+3$ 답 $\alpha+3$

0017 $\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=2\alpha-\beta$ 답 $2\alpha-\beta$

0018 $\lim_{n\to\infty}a_n^2b_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha^2\beta$ 답 $\alpha^2\beta$

0019 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{5b_n}=\frac{2\lim_{n\to\infty}a_n}{5\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{2\alpha}{5\beta}$ 답 $\frac{2\alpha}{5\beta}$

0020 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1+5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1+5\cdot0=1$ 답 1

0021 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

$=3\cdot0-0\cdot0=0$ 답 0

0022 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1+2\cdot0=1,$

$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{4}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}3-4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3-4\cdot0=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(3-\frac{4}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{4}{n}\right)$
$=1\cdot3=3$

답 3

0023 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{3-\frac{5}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n}\right)}$

$=\frac{\lim_{n\to\infty}1+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}3-5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$

$=\frac{1+2\cdot0+4\cdot0\cdot0}{3-5\cdot0}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0024 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$ 답 수렴, $\frac{1}{3}$

0025 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n-1)}{-2n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{-2n^2+3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{-2+\frac{3}{n}}=-2$

답 수렴, -2

0026 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{7+\frac{1}{n}}=0$ 답 수렴, 0

0027 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=0$ 답 수렴, 0

0028 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=\infty$ 답 발산

0029 $\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+4n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=-\infty$ 답 발산

0030 $\lim_{n\to\infty}(n^2-7n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{7}{n}\right)$

이때 $\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{7}{n}\right)=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(n^2-7n)=\infty$ 답 발산

0031 $\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\frac{1}{2}n^3\right)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)$

이때 $\lim_{n\to\infty}n^3=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\frac{1}{2}n^3\right)=-\infty$ 답 발산

0032 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ 답 수렴, $\frac{1}{2}$

0033 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+3n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+3n})(\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2+3n})}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2+3n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-6n}{\sqrt{n^2-3n}+\sqrt{n^2+3n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-6}{\sqrt{1-\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}$

$=\frac{-6}{1+1}=-3$ 답 수렴, -3

0034 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}$

$=\infty$ 답 발산

0035 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2}$

$=\frac{1+1}{2}=1$ 답 수렴, 1

0036 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=3$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)=3$

즉 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=\boxed{3}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{3}$

∴ (가) 3 (나) 3 답 풀이 참조

0037 $4n^2-1<(n^2+1)a_n<4n^2+3$에서 각 변을 n^2+1로 나누면

$\frac{4n^2-1}{n^2+1}<a_n<\frac{4n^2+3}{n^2+1}$

이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=4$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=4$$

에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3}{n^2+1}=4$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=4$ 답 4

0038 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\boxed{0}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\boxed{0}$

∴ (가) 0 (나) 0 답 풀이 참조

0039 $-1\le\cos n\theta\le1$이므로 각 변을 n으로 나누면

$$-\frac{1}{n}\le\frac{\cos n\theta}{n}\le\frac{1}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=0$ 답 0

0040 공비가 0.3이고, $-1<0.3<1$이므로 0에 수렴한다. 답 수렴

0041 공비가 $\sqrt{2}$이고, $\sqrt{2}>1$이므로 발산한다. 답 발산

0042 공비가 $-\frac{4}{3}$이고, $-\frac{4}{3}<-1$이므로 발산한다. 답 발산

0043 공비가 $-\frac{1}{5}$이고, $-1<-\frac{1}{5}<1$이므로 0에 수렴한다. 답 수렴

0044 공비가 -2이고, $-2<-1$이므로 발산한다. 답 발산

0045 공비가 $\frac{2}{3}$이고, $-1<\frac{2}{3}<1$이므로 0에 수렴한다. 답 수렴

0046 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{5^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{25}\right)^n=0$ 답 0

0047 $\lim_{n\to\infty}(1+0.8^n)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}0.8^n=1+0=1$ 답 1

0048 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2$ 답 수렴, 2

0049 $\lim_{n\to\infty}\frac{9^n-1}{3^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9^n-1}{3\cdot9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{3}=\frac{1}{3}$ 답 수렴, $\frac{1}{3}$

0050 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-7^n}{3^n+7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}=-1$ 답 수렴, -1

0051 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+7^n}{2^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{7}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}=\infty$ 답 발산

0052 공비가 $2r$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<2r\le1$ ∴ $-\frac{1}{2}<r\le\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}<r\le\frac{1}{2}$

0053 공비가 $-\frac{r}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<-\frac{r}{3}\le1$ ∴ $-3\le r<3$ 답 $-3\le r<3$

0054 공비가 $\frac{r}{4}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{r}{4}\le1$ ∴ $-4<r\le4$ 답 $-4<r\le4$

0055 ①, ② n의 값이 한없이 커지면 $8-2n$의 값과 $1-n^2$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

③ n의 값이 한없이 커지면 $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

④ 홀수 번째 항 $-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \cdots$은 0에 수렴하고, 짝수 번째 항 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots$도 0에 수렴하므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

⑤ 발산(진동)한다.

답 ④

0056 ㄱ. n의 값이 한없이 커지면 $6-5n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

ㄴ. n의 값이 한없이 커지면 $\left(\frac{4}{5}\right)^n$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄷ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{n}{n+1}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 1에 수렴한다.

ㄹ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{n}{\sqrt{n}+1}$의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

이상에서 발산하는 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

0057 ㄱ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{2}{n^2+1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄴ. 홀수 번째 항 $-1, -1, -1, \cdots$은 -1에 수렴하고, 짝수 번째 항 $1, 1, 1, \cdots$은 1에 수렴하므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

ㄷ. 홀수 번째 항 $5-\frac{1}{2}, 5-\frac{1}{8}, 5-\frac{1}{32}, \cdots$은 5에 수렴하고, 짝수 번째 항 $5+\frac{1}{4}, 5+\frac{1}{16}, 5+\frac{1}{64}, \cdots$도 5에 수렴하므로 주어진 수열은 5에 수렴한다.

ㄹ. n의 값이 한없이 커지면 $n-n^2$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

답 ㄱ: 0, ㄷ: 5

0058 $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+b_n}{a_nb_n-1}=\frac{3\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}1}$

$=\frac{3\cdot1+(-2)}{1\cdot(-2)-1}=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

0059 $\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=4$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n(a_n+3)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}(a_n+3)$

$=3\cdot(3+3)=18$ 답 ①

0060 $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=5\cdot5-2\cdot1=23$ 답 23

0061 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-3\right)=-3$,

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{4-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=4$ ⋯ ❶

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+2)(b_n-5)=\lim_{n\to\infty}(a_n+2)\lim_{n\to\infty}(b_n-5)$

$=(-3+2)\cdot(4-5)=1$ ⋯ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}b_n$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\lim_{n\to\infty}(a_n+2)(b_n-5)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0062 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+1}+1}{a_n-1}=5$에서 $\frac{3\alpha+1}{\alpha-1}=5$

$3\alpha+1=5\alpha-5$, $2\alpha=6$

$\therefore \alpha=3$ 답 3

0063 수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수에 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha\neq0$)라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\frac{4}{a_{n+1}}=4-a_n$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(4-a_n)$이므로

$\frac{4}{\alpha}=4-\alpha$, $\alpha^2-4\alpha+4=0$

$(\alpha-2)^2=0$ $\therefore \alpha=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(4-a_n)=4-2=2$ 답 ①

0064 ①, ②, ③, ④ [반례] 수열 $\{a_n\}$을

1, 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

이라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}a_{n+2}$는 발산(진동)한다.

또 $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{4n-1}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}a_{2n}$, $\lim_{n\to\infty}a_{4n-1}\neq\lim_{n\to\infty}a_{2n}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$에서 n 대신 $2n$을 대입하면

$\lim_{2n\to\infty}a_{4n}=\alpha$

이때 $2n\longrightarrow\infty$이면 $n\longrightarrow\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_{4n}=\alpha$ 답 ⑤

0065 ① $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n+1}{n^2+2n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=4$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{(n-1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^3-3n^2+3n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}=1$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+3n-1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}}=1$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{9n^2+4}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{9+\frac{4}{n^2}}+1}=\frac{3}{4}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=\frac{1}{2}$

답 ⑤

0066 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$

$=4\cdot3=12$ 답 ③

0067 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=3n^2$, $a_nb_n=n^2-1$ ⋯ ❶

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1-\frac{1}{n^2}}=3$ ⋯ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ a_n+b_n, a_nb_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0068 $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{4n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4}=\frac{1}{4}$ 답 ①

라쎈 특강 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ ② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

0069 $2^2+3^2+4^2+\cdots+(n+1)^2$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+1)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=\frac{2n^3+9n^2+13n}{6}$$

$\therefore$ (주어진 식) $=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+9n^2+13n}{6n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{9}{n}+\frac{13}{n^2}}{6}=\frac{1}{3}$$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로

$a+b=4$

답 ②

0070 $\log_2(4n+1)+\log_2(2n-1)-2\log_2(n+2)$

$$=\log_2\frac{(4n+1)(2n-1)}{(n+2)^2}$$
$$=\log_2\frac{8n^2-2n-1}{n^2+4n+4}$$

$\therefore$ (주어진 식) $=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{8n^2-2n-1}{n^2+4n+4}$

$$=\log_2\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}$$
$$=\log_2 8=3$$

답 3

라쎈 특강 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

0071 $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n+2}{n+1}$$
$$=\frac{n+2}{2}$$ ··· ❶

$b_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ ··· ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{(na_n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\cdot\frac{4}{n^2(n+2)^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}=1$$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a_n을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ b_n을 간단히 할 수 있다.	20 %
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{(na_n)^2}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0072 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{n-2}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로

$a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}=b$

따라서 $b=4$이므로 $a+b=4$

답 ③

0073 $a=0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)(3n+1)}{an^2-1}=-\infty$이므로 $a\neq0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)(3n+1)}{an^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+16n+4}{an^2-1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{16}{n}+\frac{4}{n^2}}{a-\frac{1}{n^2}}=\frac{12}{a}$$

따라서 $\frac{12}{a}=6$이므로 $a=2$

답 2

0074 $b\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-3n-1}{bn^3+2n^2+1}=0$이므로 $b=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2-3n-1}{bn^3+2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-3n-1}{2n^2+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=\frac{1}{4}$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+1}{(an+b)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+1}{\frac{1}{4}n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{4}}=8$$

답 8

0075 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2-2n+1}}{an^2+4n+3}=0$이므로

$a=0$ ($\because b\neq0$) ··· ❶

$\therefore b=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2-2n+1}}{an^2+4n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2-2n+1}}{4n+3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}{4+\frac{3}{n}}=1$$ ··· ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2-5n+1}{\sqrt{bn^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n+1}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=-5$

··· ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-5n+1}{\sqrt{bn^2+n}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0076 $\lim_{n\to\infty}(3n-\sqrt{9n^2+2n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-\sqrt{9n^2+2n})(3n+\sqrt{9n^2+2n})}{3n+\sqrt{9n^2+2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{3n+\sqrt{9n^2+2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{3+\sqrt{9+\frac{2}{n}}}$$

$$=\frac{-2}{3+3}=-\frac{1}{3}$$

답 ②

0077 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n-2})}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2(\sqrt{n}+\sqrt{n-2})}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$

$$=-\frac{1+1}{1+1}=-1$$

답 ③

0078 $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$

$$=2n+1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_n-2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0079 $1+2+3+\cdots+(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$=\frac{n^2+3n+2}{2}$$ ··· ❶

$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$ ··· ❷

∴ (주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n^2+3n+2}{2}}-\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+n})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n})}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ··· ❸

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $1+2+3+\cdots+(n+1)$을 간단히 할 수 있다.	20 %
❷ $1+2+3+\cdots+n$을 간단히 할 수 있다.	20 %
❸ 주어진 극한값을 구할 수 있다.	60 %

0080 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-n)(\sqrt{n^2+an}+n)}{\sqrt{n^2+an}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{n^2+an}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=6$이므로 $\quad a=12$

답 12

0081 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an^2+an}+n\sqrt{a}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a+\frac{a}{n}}+\sqrt{a}\right)$$

$$=2\sqrt{a}$$

따라서 $2\sqrt{a}=10$이므로 $\quad\sqrt{a}=5\quad\therefore a=25$

답 ④

0082 $a\leq 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+2n+2}-(an+b)\}=\infty$이므로

$a>0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+2n+2}-(an+b)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+2n+2}-(an+b)\}\{\sqrt{n^2+2n+2}+(an+b)\}}{\sqrt{n^2+2n+2}+(an+b)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+2(1-ab)n+2-b^2}{\sqrt{n^2+2n+2}+(an+b)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n+2(1-ab)+\frac{2-b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+a+\frac{b}{n}}$$

이 식의 극한값이 3이므로

$1-a^2=0$, $\dfrac{2(1-ab)}{1+a}=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-2\ (\because a>0)$

$\therefore a+b=-1$ 답 ③

0083 $k\ge0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$이므로 $\quad k<0$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{n\to\infty} a_n\\ &=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n+1)(n+3)}+kn\}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{(n+1)(n+3)}+kn\}\{\sqrt{(n+1)(n+3)}-kn\}}{\sqrt{(n+1)(n+3)}-kn}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-k^2)n^2+4n+3}{\sqrt{n^2+4n+3}-kn}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-k^2)n+4+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}-k}\end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$1-k^2=0 \quad \therefore k=-1\ (\because k<0)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{4}{1-k}=\dfrac{4}{1-(-1)}=2$ 답 2

0084 $\dfrac{2a_n-5}{5a_n+1}=b_n$으로 놓으면

$2a_n-5=5a_nb_n+b_n, \quad (2-5b_n)a_n=b_n+5$

$\therefore a_n=\dfrac{b_n+5}{2-5b_n}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=2$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n+5}{2-5b_n}=\dfrac{2+5}{2-5\cdot2}=-\dfrac{7}{8}$ 답 ②

0085 $(n+2)a_n=b_n$으로 놓으면 $\quad a_n=\dfrac{b_n}{n+2}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=5$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(3n+4)a_n&=\lim_{n\to\infty}(3n+4)\cdot\frac{b_n}{n+2}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n+2}\lim_{n\to\infty} b_n=3\cdot5=15\end{aligned}$$ 답 ④

0086 $a_n+1=c_n$으로 놓으면 $\quad a_n=c_n-1$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=5$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-1)=5-1=4$

$a_n+4b_n=d_n$으로 놓으면 $\quad b_n=\dfrac{d_n-a_n}{4}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=8$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{d_n-a_n}{4}=\dfrac{8-4}{4}=1$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty} a_n(b_n-2)&=\lim_{n\to\infty} a_n\lim_{n\to\infty}(b_n-2)\\ &=4\cdot(1-2)=-4\end{aligned}$$ 답 -4

0087 $(n-1)a_n=c_n$으로 놓으면 $\quad a_n=\dfrac{c_n}{n-1}$ ⋯ ❶

$(n^3-1)b_n=d_n$으로 놓으면

$b_n=\dfrac{d_n}{n^3-1}=\dfrac{d_n}{(n-1)(n^2+n+1)}$ ⋯ ❷

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=3$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2b_n}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2\cdot\frac{d_n}{(n-1)(n^2+n+1)}}{\frac{c_n}{n-1}}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{n^2+n+1}\cdot\frac{d_n}{c_n}\\ &=4\cdot\frac{3}{2}=6\end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a_n을 c_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ b_n을 d_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2b_n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0088 $\sqrt{25n^2-n}<(n+3)a_n<\sqrt{25n^2+4n}$에서

$\dfrac{\sqrt{25n^2-n}}{n+3}<a_n<\dfrac{\sqrt{25n^2+4n}}{n+3}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{25n^2-n}}{n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{25n^2+4n}}{n+3}=5$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$ 답 ④

0089 $3n-50<a_n<3n+70$에서

$\dfrac{3n^2-50n}{n^2+2}<\dfrac{na_n}{n^2+2}<\dfrac{3n^2+70n}{n^2+2}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-50n}{n^2+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+70n}{n^2+2}=3$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n}{n^2+2}=3$ 답 ⑤

0090 $-1\le\sin n\theta\le1$이므로

$-\dfrac{n^2}{n^3+2}\le\dfrac{n^2\sin n\theta}{n^3+2}\le\dfrac{n^2}{n^3+2}$ ⋯ ❶

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{n^2}{n^3+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^3+2}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\sin n\theta}{n^3+2}=0$ ⋯ ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{n^2\sin n\theta}{n^3+2}$에 대한 부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\sin n\theta}{n^3+2}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0091 ㄱ. $-1\le\sin\dfrac{n\pi}{8}\le1$이므로 $\quad -\dfrac{1}{n}\le\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{8}\le\dfrac{1}{n}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계

에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{8}=0$$

ㄴ. $-1\le\cos n\pi\le1$이므로 $\quad -\frac{1}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\pi\le\frac{1}{\sqrt{n}}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\pi=0$$

ㄷ. $0<\tan\frac{\pi}{4n}\le1$이므로 $\quad 0<\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}\le\frac{1}{n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{4n}=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0092 ㄴ. [반례] $a_n=n$, $b_n=2n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=\lim_{n\to\infty}2=2$$

ㄷ. [반례] $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{n}$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이지만

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0093 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(3a_n+b_n)-3a_n\}$

$$=\lim_{n\to\infty}(3a_n+b_n)-3\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=0-3\cdot1=-3$$

ㄴ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}0=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n\ne0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\ne0$이다.

ㄷ. $\frac{b_n}{a_n}=c_n$으로 놓으면 $\quad b_n=a_nc_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}c_n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n-a_nc_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}c_n$$
$$=0-0\cdot1=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0094 ㄱ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$이면 $a_n<b_n$이지만

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}$

$$=\frac{1}{2}\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}(10+20)=15$$

ㄷ. [반례] $a_n=n^2$, $b_n=n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(n^2-n)=\infty$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0095 ㄱ. 공비가 -3이고, $-3<-1$이므로 발산한다.

ㄴ. 공비가 $\sqrt{2}-1$이고, $-1<\sqrt{2}-1<1$이므로 0에 수렴한다.

ㄷ. 공비가 $-\frac{4}{5}$이고, $-1<-\frac{4}{5}<1$이므로 0에 수렴한다.

ㄹ. $\frac{3^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$에서 공비가 $\frac{3}{2}$이고, $\frac{3}{2}>1$이므로 발산한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0096 ㄱ. 수열 $\{0.3^n\}$은 공비가 0.3이고, $-1<0.3<1$이므로 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 1에 수렴한다.

ㄴ. 주어진 수열은

5, 3, 5, 3, 5, 3, ⋯

이므로 발산(진동)한다.

ㄷ. $2^{-n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$에서 공비가 $\frac{1}{2}$이고, $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 수열 $\{2^{-n}\}$은 0에 수렴한다.

$5^{-n}=\left(\frac{1}{5}\right)^n$에서 공비가 $\frac{1}{5}$이고, $-1<\frac{1}{5}<1$이므로 수열 $\{5^{-n}\}$은 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄹ. 수열 $\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이고, $\frac{2}{\sqrt{3}}>1$이므로 발산한다.

따라서 주어진 수열은 발산한다.

이상에서 발산하는 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

0097 ㄱ. 공비가 $-\frac{3}{2}$이고, $-\frac{3}{2}<-1$이므로 발산한다.

ㄴ. 수열 $\{1.5^n\}$은 공비가 1.5이고, $1.5>1$이므로 발산한다.

따라서 주어진 수열은 발산한다.

ㄷ. $\left(\frac{1}{4}\right)^n$에서 공비가 $\frac{1}{4}$이고, $-1<\frac{1}{4}<1$이므로 수열 $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$은 0에 수렴한다.

$\left(-\frac{1}{4}\right)^n$에서 공비가 $-\frac{1}{4}$이고, $-1<-\frac{1}{4}<1$이므로 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$은 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄹ. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$에서 공비가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이고, $-1<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$이므로 수열 $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}$은 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 -2에 수렴한다.

답 ③

0098 $\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}+3^{n+2}}{(3^n+1)(2^n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot6^n+3^2\cdot3^n}{6^n+3^n+2^n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$
$$=6$$

답 6

0099 $a=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{2n}}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot3^n-4^n}{4^n+3^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=-1 \quad \cdots ❶$$

$\therefore\ b=\lim_{n\to\infty}(a^{2n+1}-a^{2n})=\lim_{n\to\infty}\{(-1)^{2n+1}-(-1)^{2n}\}$

$$=\lim_{n\to\infty}(-2)=-2 \quad \cdots ❷$$

$\therefore\ ab=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0100 $a_n=2\cdot2^{n+1}+2^n-1=2^{n+2}+2^n-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}+2^n-1}{2^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2\cdot2^n+2^n-1}{2\cdot2^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

0101 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^n\cdot a_n}{2^{n+1}-3^n\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot3^n+2^n\cdot a_n}{2\cdot2^n-3^n\cdot a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot a_n}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-a_n}=-\frac{3}{\alpha}$$

따라서 $-\frac{3}{\alpha}=6$이므로 $\alpha=-\frac{1}{2}$

답 ③

0102 $a_n+b_n=5^{n+1}$, $a_n-b_n=2^{2n}$에서

$$a_n=\frac{5^{n+1}+2^{2n}}{2},\ b_n=\frac{5^{n+1}-2^{2n}}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^{n+1}-2^{2n}}{2}}{\frac{5^{n+1}+2^{2n}}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-4^n}{5^{n+1}+4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot5^n-4^n}{5\cdot5^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{5+\left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

$$=1$$

답 ③

0103 공비가 $\frac{x+1}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x+1}{3}\le1,\quad -3<x+1\le3$

$\therefore\ -4<x\le2$

따라서 정수 x는

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

의 6개이다.

답 ④

0104 주어진 수열은 첫째항이 $(x-4)(2-x)$, 공비가 $2-x$인 등비수열이므로 주어진 수열이 수렴하려면

$(x-4)(2-x)=0$ 또는 $-1<2-x\le1$

$(x-4)(2-x)=0$에서 $\quad x=4$ 또는 $x=2$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$-1<2-x\le1$에서 $\quad -3<-x\le-1$

$\therefore\ 1\le x<3$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $\quad 1\le x<3$ 또는 $x=4$ ⋯ ❸

따라서 정수 x는 1, 2, 4이므로 구하는 곱은

$1\cdot2\cdot4=8$ ⋯ ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ (첫째항)=0을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $-1<$(공비)≤1을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 수열이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 정수 x의 값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

0105 공비가 $\sqrt{2}\cos x$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\sqrt{2}\cos x\le1,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos x\le\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \frac{\pi}{4}\le x<\frac{3}{4}\pi\ (\because\ 0<x<\pi)$

답 ③

0106 등비수열 $\{(-2x+5)^n\}$은 공비가 $-2x+5$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<-2x+5\le1,\quad -6<-2x\le-4$

$\therefore\ 2\le x<3$ ⋯⋯ ㉠

등비수열 $\{(\log_2x-2)^n\}$은 공비가 $\log_2x-2$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\log_2x-2\le1,\quad 1<\log_2x\le3$

$\therefore\ 2<x\le8$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 2<x<3$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=3$이므로 $\quad \alpha+\beta=5$

답 ②

0107 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로

$-1<r\le1$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. 공비가 $-\frac{r}{2}$이고 ㉠에서 $\quad -\frac{1}{2}\le-\frac{r}{2}<\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\left\{\left(-\frac{r}{2}\right)^n\right\}$은 항상 수렴한다.

ㄴ. 공비가 $\frac{r-1}{3}$이고 ㉠에서 $\quad -2<r-1\le0$

$\therefore\ -\frac{2}{3}<\frac{r-1}{3}\le0$

따라서 수열 $\left\{\left(\frac{r-1}{3}\right)^n\right\}$은 항상 수렴한다.

ㄷ. 공비가 r^2이고 ㉠에서 $\quad 0\le r^2\le1$

따라서 수열 $\{r^{2n}\}$은 항상 수렴한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 항상 수렴한다.

답 ⑤

0108 (i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=-1$$

(ii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$b=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=1$$

(i), (ii)에서 $\quad a+b=0$

답 ①

0109 (i) $r<-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$, $\lim_{n\to\infty}r^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+\frac{1}{r^n}}$$

따라서 발산(진동)한다.

(ii) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}}{r^n+1}=0$$

(iii) $r=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}}{r^n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iv) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+\frac{1}{r^n}}=\infty$$

ㄱ. $|r|>1$이면 $r>1$ 또는 $r<-1$이므로 발산한다.

ㄴ. $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 $r=\frac{1}{2}$이면 0에 수렴한다.

ㄷ. 수렴하도록 하는 r의 값의 범위는 $\quad -1<r\le 1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0110 (i) $|r|<5$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-r^n}{5^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{r}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{r}{5}\right)^n}=1$$ ··· ❶

(ii) $r=5$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-5^n}{5^n+5^n}=0$$ ··· ❷

(iii) $|r|>5$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-r^n}{5^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{r}\right)^n+1}=-1$$ ··· ❸

이상에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-r^n}{5^n+r^n}=1$을 만족시키는 r의 값의 범위는

$|r|<5$, 즉 $-5<r<5$

이므로 정수 r는

$-4, -3, -2, \cdots, 4$

의 9개이다. ··· ❹

답 9

채점 기준	비율
❶ $\lvert r\rvert<5$일 때, 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $r=5$일 때, 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\lvert r\rvert>5$일 때, 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 극한값이 1이 되도록 하는 정수 r의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0111 $f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n-1}+2\cdot(-1)-1}{(-1)^{2n}+1}=\frac{-1-2-1}{1+1}=-2$

$$f\left(\frac{3}{8}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{8}\right)^{2n-1}+2\cdot\frac{3}{8}-1}{\left(\frac{3}{8}\right)^{2n}+1}=-\frac{1}{4}$$

$$f(4)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{2n-1}+2\cdot4-1}{4^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}+\frac{7}{4^{2n}}}{1+\frac{1}{4^{2n}}}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore f(-1)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f(4)=-2+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=-2$$

답 -2

다른풀이 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2x-1}{x^{2n}+1}=2x-1$$

(ii) $x=1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2x-1}{x^{2n}+1}=\frac{1+2-1}{1+1}=1$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$, $\lim_{n\to\infty}|x^{2n-1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2x-1}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^{2n-1}}-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2x-1}{x^{2n}+1}=\frac{-1-2-1}{1+1}=-2$$

이상에서

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & (|x|<1)\\ 1 & (x=1)\\ \frac{1}{x} & (|x|>1)\\ -2 & (x=-1)\end{cases}$$

$$\therefore f(-1)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f(4)=-2+\left(2\cdot\frac{3}{8}-1\right)+\frac{1}{4}=-2$$

0112 (i) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^2-2}{x^n+1}=x^2-2$$ ··· ❶

(ii) $x=1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^2-2}{x^n+1}=\frac{1+1-2}{1+1}=0$$ ··· ❷

(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^2-2}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x^{n-2}}-\frac{2}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=x$$

··· ❸

이상에서

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2 & (0<x<1)\\ 0 & (x=1)\\ x & (x>1)\end{cases}$$ ··· ❹

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $0<x<1$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $x=1$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $x>1$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $x>0$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	10 %

0113 $\mathrm{P}_n(n, \sqrt{n})$, $\mathrm{Q}_n(n, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{n^2+(\sqrt{n})^2}=\sqrt{n^2+n}$, $\overline{\mathrm{OQ}_n}=n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OP}_n}-\overline{\mathrm{OQ}_n})=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ④

0114 (1) $\mathrm{P}_n(n, 2n^2)$, $\mathrm{P}_{n+1}(n+1, 2(n+1)^2)$이므로

$$a_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\sqrt{1^2+\{2(n+1)^2-2n^2\}^2}$$
$$=\sqrt{16n^2+16n+5} \quad \cdots ❶$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{16n^2+16n+5}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{16+\frac{16}{n}+\frac{5}{n^2}}}=\frac{1}{4} \quad \cdots ❷$$

답 (1) $a_n=\sqrt{16n^2+16n+5}$ (2) $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0115 $n\geq 2$일 때, 원 $x^2+y^2=n^2$과 x축이 만나는 점의 좌표는 $(n, 0)$, $(-n, 0)$이므로

$a_n=n$ ($\because a_n>0$)

$x=\sqrt{n}$을 $x^2+y^2=n^2$에 대입하면

$n+y^2=n^2$, $\quad y^2=n^2-n$

$\therefore y=\pm\sqrt{n^2-n}$

따라서 원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $x=\sqrt{n}$의 교점의 좌표는 $(\sqrt{n}, \sqrt{n^2-n})$, $(\sqrt{n}, -\sqrt{n^2-n})$이므로

$b_n=\sqrt{n^2-n}$ ($\because b_n>0$)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-n}}{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1}=2$$

답 2

0116 두 직선의 교점의 x좌표는

$2x+4^n=-\frac{1}{2}x+3^n$에서 $\quad \frac{5}{2}x=3^n-4^n$

$\therefore x=\frac{2}{5}\cdot 3^n-\frac{2}{5}\cdot 4^n$

$x=\frac{2}{5}(3^n-4^n)$을 $y=2x+4^n$에 대입하면

$y=\frac{4}{5}(3^n-4^n)+4^n=\frac{4}{5}\cdot 3^n+\frac{1}{5}\cdot 4^n$

따라서 $a_n=\frac{2}{5}\cdot 3^n-\frac{2}{5}\cdot 4^n$, $b_n=\frac{4}{5}\cdot 3^n+\frac{1}{5}\cdot 4^n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{5}\cdot 3^n-\frac{2}{5}\cdot 4^n}{\frac{4}{5}\cdot 3^n+\frac{1}{5}\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{5}}$$
$$=-2$$

답 ①

0117 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$

$f'(n)=2n$이므로 점 $\mathrm{P}_n(n, n^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-n^2=2n(x-n)$ $\quad \therefore y=2nx-n^2$

따라서 $\mathrm{Q}_n(0, -n^2)$이므로

$l_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\sqrt{n^2+(n^2+n^2)^2}=\sqrt{4n^4+n^2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^4+n^2}}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{3}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0118 전략 n의 값이 한없이 커질 때 그 값이 어떤 일정한 값에 가까워지는지 조사한다.

풀이 ㄱ. n의 값이 한없이 커지면 $5-4n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

ㄴ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{2n^2-1}{n^2+3}$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 2에 수렴한다.

ㄷ. n의 값이 한없이 커지면 $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 1에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

다른풀이 ㄷ. $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$에서 공비가 $-\frac{1}{3}$이고, $-1<-\frac{1}{3}<1$이므로 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$은 0에 수렴한다.

따라서 주어진 수열은 1에 수렴한다.

0119 전략 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

풀이 ① $$\lim_{n\to\infty}\frac{n-4}{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{4}{n}}{3-\frac{5}{n}}=\frac{1}{3}$$

② $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{4n^2-5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{4-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

③ $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n}{n^3+4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=0$$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}}=\frac{1}{2}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{n}}=1$

따라서 극한값이 가장 작은 것은 ③이다. 답 ③

0120 전략 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\alpha$ ($\alpha\neq0$인 실수)이면 (a_n의 차수)$=$(b_n의 차수)이고, a_n, b_n의 최고차항의 계수의 비가 α임을 이용한다.

풀이 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-bn+3}{\frac{1}{2}n+2}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로

$a=0$ ⋯ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2-bn+3}{\frac{1}{2}n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-bn+3}{\frac{1}{2}n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-b+\frac{3}{n}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{n}}=-2b$$

따라서 $-2b=3$이므로 $b=-\frac{3}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=-\frac{3}{2}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0121 전략 분자에만 근호가 있는 경우 분모를 1로 놓고 분자를 유리화한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2019n}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-2019n}-n)(\sqrt{n^2-2019n}+n)}{\sqrt{n^2-2019n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2019n}{\sqrt{n^2-2019n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2019}{\sqrt{1-\frac{2019}{n}}+1}$$

$$=-\frac{2019}{2}$$

답 ①

0122 전략 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

풀이 $a>2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a^{n+1}-3\cdot2^n}{a^n-2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5a-3\cdot\left(\frac{2}{a}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{a}\right)^n}=5a$$

따라서 $5a=15$이므로 $a=3$ 답 3

0123 전략 $r=1$, $r>1$일 때로 경우를 나누어 극한값을 구한다.

풀이 (i) $r=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-2}{r^{n+1}+3}=\frac{1-2}{1+3}=-\frac{1}{4}$$

(ii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-2}{r^{n+1}+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r}-\frac{2}{r^{n+1}}}{1+\frac{3}{r^{n+1}}}=\frac{1}{r}$$

(i), (ii)에서 주어진 수열의 극한값은

$r=1$일 때 $-\frac{1}{4}$, $r>1$일 때 $\frac{1}{r}$ 답 풀이 참조

0124 전략 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 놓고 주어진 식을 α, β로 나타낸다.

풀이 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=5$에서 $\alpha+\beta=5$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=3$에서 $\alpha\beta=3$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{5^2-2\cdot3}{3}=\frac{19}{3}$$

답 ⑤

0125 전략 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 a_n을 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2nx-4n=0$에서

$x=-n\pm\sqrt{n^2+4n}$

이때 a_n이 양의 실근이므로

$a_n=-n+\sqrt{n^2+4n}=\sqrt{n^2+4n}-n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}$$

$$=2$$

답 2

0126 전략 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$임을 이용한다.

풀이 $S_n=\frac{n\{2\cdot1+(n-1)\cdot4\}}{2}=2n^2-n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{2(n+1)^2-(n+1)}-\sqrt{2n^2-n}\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+3n+1}-\sqrt{2n^2-n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n^2+3n+1}-\sqrt{2n^2-n})(\sqrt{2n^2+3n+1}+\sqrt{2n^2-n})}{\sqrt{2n^2+3n+1}+\sqrt{2n^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{\sqrt{2n^2+3n+1}+\sqrt{2n^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

0127 전략 $(5n-3)a_n=b_n$으로 놓고, a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $(5n-3)a_n=b_n$으로 놓으면 $\quad a_n=\dfrac{b_n}{5n-3}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{b_n}{5n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n-3}\lim_{n\to\infty} b_n$$
$$=\frac{1}{5}\cdot4=\frac{4}{5}$$

답 ②

0128 전략 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 $n<a_n<n+1$에서 $\quad \sum_{k=1}^{n} k<\sum_{k=1}^{n} a_k<\sum_{k=1}^{n}(k+1)$

$$\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n} a_k<\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$\frac{n^2+n}{2}<\sum_{k=1}^{n} a_k<\frac{n^2+3n}{2}$$
$$\frac{n^2+n}{2(3n^2+5)}<\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{3n^2+5}<\frac{n^2+3n}{2(3n^2+5)}$$
$$\therefore \frac{n^2+n}{6n^2+10}<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{3n^2+5}<\frac{n^2+3n}{6n^2+10} \quad \cdots ❶$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{6n^2+10}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n}{6n^2+10}=\dfrac{1}{6}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{3n^2+5}=\frac{1}{6} \quad \cdots ❷$$

답 $\dfrac{1}{6}$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{3n^2+5}$에 대한 부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{3n^2+5}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0129 전략 지수법칙을 이용하여 a_n을 구한다.

풀이 $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{3\sqrt{3}}=3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$,

$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}\cdot3^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$, …에서

$$a_n=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} 3^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=3$$

답 ②

0130 전략 $n\ge2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$임을 이용하여 a_n을 구한다.

풀이 $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n+5^n)-(3^{n-1}+5^{n-1})$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot3^n+\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot5^n=\frac{2}{3}\cdot3^n+\frac{4}{5}\cdot5^n$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\cdot3^n+\frac{4}{5}\cdot5^n}{3^n+5^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{4}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}=\frac{4}{5}$$

답 $\dfrac{4}{5}$

0131 전략 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

풀이 $$5◎2=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot5^n+5\cdot2^n}{5^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=2 \quad \cdots ❶$$

$$\therefore (5◎2)◎3=2◎3=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot2^n+2\cdot3^n}{2^n+3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=2 \quad \cdots ❷$$

답 2

채점 기준	비율
❶ 5◎2의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ (5◎2)◎3의 값을 구할 수 있다.	50 %

0132 전략 공비가 r인 등비수열이 수렴하면 $-1<r\le1$임을 이용한다.

풀이 공비가 $\dfrac{x^2-3x-2}{2}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1<\frac{x^2-3x-2}{2}\le1$$

(i) $-1<\dfrac{x^2-3x-2}{2}$, 즉 $x^2-3x>0$에서

$x(x-3)>0 \qquad \therefore x<0$ 또는 $x>3$

(ii) $\dfrac{x^2-3x-2}{2}\le1$, 즉 $x^2-3x-4\le0$에서

$(x+1)(x-4)\le0 \qquad \therefore -1\le x\le4$

(i), (ii)에서 $\quad -1\le x<0$ 또는 $3<x\le4$

따라서 정수 x는 -1, 4이므로 구하는 합은

$-1+4=3$

답 ②

0133 전략 $\dfrac{6}{k}<1$, $\dfrac{6}{k}=1$, $\dfrac{6}{k}>1$인 경우로 나누어 a_k를 구한다.

풀이 (i) $\dfrac{6}{k}>1$, 즉 $k<6$일 때,

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{k}}{1+\frac{1}{\left(\frac{6}{k}\right)^n}}=\frac{6}{k}$$

(ii) $\dfrac{6}{k}=1$, 즉 $k=6$일 때,

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $\dfrac{6}{k}<1$, 즉 $k>6$일 때,

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} ka_k=\sum_{k=1}^{5}\left(k\cdot\frac{6}{k}\right)+6\cdot\frac{1}{2}+\sum_{k=7}^{10}(k\cdot0)$$
$$=5\cdot6+3=33$$

답 33

0134 전략 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

풀이 $a_n+a_{n+1}=n^2+3$ ...... ㉠

$a_{n+1}+a_{n+2}=(n+1)^2+3$ ...... ㉡

㉡−㉠을 하면

$$a_{n+2}-a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2$$

답 ⑤

0135 전략 주어진 식의 정수 부분을 구한 후 (소수 부분)=(주어진 식)−(정수 부분)임을 이용한다.

풀이 $(2n+1)^2<4n^2+5n+1<(2n+2)^2$이므로

$$a_n=\sqrt{4n^2+5n+1}-(2n+1)$$ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{4n^2+5n+1}-(2n+1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{4n^2+5n+1}-(2n+1)\}\{\sqrt{4n^2+5n+1}+(2n+1)\}}{\sqrt{4n^2+5n+1}+(2n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+5n+1}+2n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{1}{4}$$ ❷

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	70 %

0136 전략 $a_n+b_n=c_n$으로 놓고, a_n을 b_n과 c_n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $\quad a_n=c_n-b_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=5$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(c_n-b_n)-b_n}{(c_n-b_n)+2b_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-2b_n}{c_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{c_n}{b_n}-2}{\frac{c_n}{b_n}+1}$$
$$=-2$$

답 −2

0137 전략 곡선 $y=ax^2+bx+c$가 x축과 만나면 $b^2-4ac\ge0$이고, x축과 만나지 않으면 $b^2-4ac<0$임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$이 x축과 만나므로

$$(n+1)^2-4a_n\ge0 \qquad \therefore a_n\le\frac{(n+1)^2}{4}$$ ...... ㉠

곡선 $y=x^2-nx+a_n$이 x축과 만나지 않으므로

$$n^2-4a_n<0 \qquad \therefore a_n>\frac{n^2}{4}$$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad \frac{n^2}{4}<a_n\le\frac{(n+1)^2}{4}$

$$\therefore \frac{1}{4}<\frac{a_n}{n^2}\le\frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2}=\frac{1}{4}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{4}$$

답 ⑤

0138 전략 $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, …를 차례대로 구한 다음 규칙을 찾는다.

풀이 $f(x)=\frac{x}{2}+1=\frac{x+2}{2}$이므로

$$f^2(x)=f\left(\frac{x+2}{2}\right)=\frac{\frac{x+2}{2}+2}{2}=\frac{x+2+2^2}{2^2}$$

$$f^3(x)=f\left(\frac{x+2+2^2}{2^2}\right)=\frac{\frac{x+2+2^2}{2^2}+2}{2}=\frac{x+2+2^2+2^3}{2^3}$$

⋮

따라서 $f^n(x)=\frac{x+2+2^2+\cdots+2^n}{2^n}$이므로

$$f^n(1)=\frac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{2^n}=\frac{\frac{2^{n+1}-1}{2-1}}{2^n}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}f^n(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right)=2$$

답 2

다른풀이 $f(x)=\frac{x}{2}+1$이므로

$$f(1)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}=\frac{2^2-1}{2}$$

$$f^2(1)=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}=\frac{2^3-1}{2^2}$$

$$f^3(1)=\frac{7}{8}+1=\frac{15}{8}=\frac{2^4-1}{2^3}$$

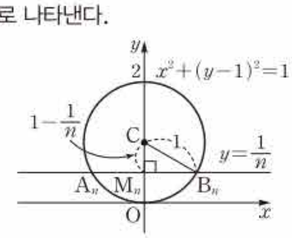
⋮

따라서 $f^n(1)=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}f^n(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right)=2$$

0139 전략 먼저 l_n을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C(0, 1)이라 하고 $\overline{A_nB_n}$과 y축의 교점을 M_n이라 하면 $\overline{CM_n}=1-\frac{1}{n}$이므로 직각삼각형 CM_nB_n에서



$$\overline{M_nB_n}=\sqrt{\overline{CB_n}^2-\overline{CM_n}^2}$$
$$=\sqrt{1^2-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

$$\therefore l_n=2\overline{M_nB_n}=2\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}n(l_n)^2=\lim_{n\to\infty}n\left(2\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{4}{n}\right)=8$$

답 ④

I. 수열의 극한

02 급수

0140 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0141 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left\{5-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\} = 5$ 답 5

0142 (1) $S_n = 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 발산한다.

(3) $1+2+3+\cdots+n+\cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 (1) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (2) 발산 (3) 발산

0143 (1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(2) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 1$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 1에 수렴한다.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

답 (1) $S_n = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (2) 수렴 (3) 수렴, 1

0144 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = 1+4+9+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0145 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}}{\frac{3}{2}-1} = 3\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 3\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\} = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0146 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$
$$+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$
$$= \sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2}) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0147 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\} = \frac{5}{3}$$

따라서 주어진 급수는 $\frac{5}{3}$에 수렴한다. 답 수렴, $\frac{5}{3}$

0148 (1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

(2) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$

답 (1) $S_n = \frac{n}{n+1}$ (2) 1 (3) 1

0149 답 (가) $\frac{n}{n+1}$ (나) 1

0150 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0151 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n = \sqrt{n^2+n}-n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$= \frac{1}{2}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0152 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n = (-1)^n$$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n$은 발산(진동)한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0153 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{n}{3n-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0154 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3+(-1)=2$ 답 2

0155 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3-(-1)=4$ 답 4

0156 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3+2\cdot(-1)=1$ 답 1

0157 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-5b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-5\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3\cdot3-5\cdot(-1)=14$

답 14

0158 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$이고, $-1<\frac{1}{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

답 수렴, $\frac{1}{2}$

0159 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{10}$이고, $-1<-\frac{1}{10}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)}=\frac{10}{11}$$

답 수렴, $\frac{10}{11}$

0160 공비가 $-\sqrt{2}$이고, $-\sqrt{2}<-1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다. 답 발산

0161 첫째항이 1, 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이고, $-1<\frac{\sqrt{3}}{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{3-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

답 수렴, $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

0162 공비가 $\frac{4}{3}$이고, $\frac{4}{3}>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

답 발산

0163 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{7^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$에서 첫째항이 2, 공비가 $\frac{2}{7}$이고, $-1<\frac{2}{7}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{2}{1-\frac{2}{7}}=\frac{14}{5}$$

답 수렴, $\frac{14}{5}$

0164 공비가 $\frac{3}{\sqrt{2}}$이고, $\frac{3}{\sqrt{2}}>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

답 발산

0165 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{2}-1$이고, $-1<\sqrt{2}-1<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

답 수렴, $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

0166 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$

0167 $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\left(\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n=\frac{-\frac{2}{5}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}$

$$=-\frac{2}{7}$$

답 $-\frac{2}{7}$

0168 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$=3\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=3\cdot1-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

0169 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=1+3=4$$

답 4

0170 공비가 $2x$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<2x<1$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

0171 공비가 $-\frac{x}{3}$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<-\frac{x}{3}<1$ $\quad\therefore -3<x<3$ 답 $-3<x<3$

0172 공비가 $1-x$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<1-x<1$, $\quad -2<-x<0$ $\quad\therefore 0<x<2$

답 $0<x<2$

0173 (1) $a_1=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$, $a_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$, $a_3=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$

(2) 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

(3) 색칠한 모든 정삼각형의 넓이의 합은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수의 합과 같으므로

$$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

답 (1) $a_1=\frac{1}{4}$, $a_2=\frac{1}{16}$, $a_3=\frac{1}{64}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{3}$

0174 답 (가) $\frac{23}{100}$ (나) $\frac{1}{100}$ (다) $\frac{23}{100}$ (라) $\frac{1}{100}$ (마) $\frac{23}{99}$

0175 $0.\dot{1}5\dot{2}=0.152+0.000152+0.000000152+\cdots$

$$=\frac{152}{1000}+\frac{152}{1000^2}+\frac{152}{1000^3}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{152}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{152}{999}$$

답 $\frac{152}{999}$

0176 $0.1\dot{4}=0.1+0.04+0.004+0.0004+\cdots$

$$=\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\cdots$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{\frac{4}{100}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{4}{90}=\frac{13}{90}$$

답 $\frac{13}{90}$

0177 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+2n+3}{n(n+1)(2n+1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+2n+3}{2n^3+3n^2+n}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

답 ③

0178 $\lim_{n\to\infty}(S_n-3)=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}3=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3$

$$=4-3=1$$

답 1

0179 $S_n=\frac{n^2+1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{n^2+1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2n^2+2}{n^2+n}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2}{n^2+n}=2$

답 2

0180 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

0181 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$ ··· ❶

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$ ··· ❷

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}$$ ··· ❸

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 급수의 합을 구할 수 있다.	20 %

0182 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

답 ②

0183 $S_n=\frac{n\{2\cdot 3+(n-1)\cdot 2\}}{2}=n^2+2n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+2k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

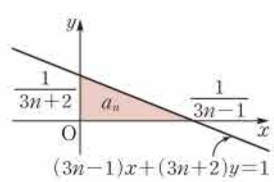
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0184 오른쪽 그림에서



$$a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3n-1}\cdot\frac{1}{3n+2}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$ ··· ❶

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$ ··· ❷

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{12}$$ ··· ❸

답 $\frac{1}{12}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합을 구할 수 있다.	20 %

0185 $\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\frac{n^2}{n^2-1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log_2\frac{k\cdot k}{(k-1)(k+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(\frac{k}{k-1}\cdot\frac{k}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)+\log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)+\log_2\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)+\cdots+\log_2\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{2n}{n+1}$$
$$=\log_2 2=1$$

답 ④

0186 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_3 a_k=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+\cdots+\log_3 a_n$$
$$=\log_3(a_1a_2a_3\cdots a_n)$$
$$=\log_3\frac{9n-1}{n+3}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_3 a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{9n-1}{n+3}=\log_3 9=2$$

답 2

0187 $\sum_{n=1}^{\infty}\log_4\left\{1+\frac{1}{n(n+2)}\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_4\frac{k(k+2)+1}{k(k+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_4\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_4\left(\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k+1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_4\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)+\log_4\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)+\log_4\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)+\cdots+\log_4\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_4\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_4\frac{2n+2}{n+2}$$
$$=\log_4 2=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0188 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

ㄱ. $S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ S_5=1,\ S_6=0,\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_1=1,\ S_2=-1,\ S_3=2,\ S_4=-2,\ S_5=3,\ S_6=-3,\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=n,\ S_{2n}=-n$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\infty$, $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=-\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $S_1=2,\ S_2=\frac{3}{2},\ S_3=2,\ S_4=\frac{7}{4},\ S_5=2,\ S_6=\frac{11}{6},\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=2,\ S_{2n}=\frac{4n-1}{2n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=2,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{2n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 2에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

0189 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1=\frac{1}{2},\ S_2=0,\ S_3=\frac{1}{3},\ S_4=0,\ S_5=\frac{1}{4},\ S_6=0,\ \cdots$

이므로

$S_{2n-1}=\frac{1}{n+1},\ S_{2n}=0$ ··· ❶

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$ ··· ❷

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 0이다. ··· ❸

답 수렴, 0

채점 기준	비율
❶ S_{2n-1}, S_{2n}을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}$, $\lim_{n\to\infty}S_{2n}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 급수가 수렴함을 알고, 그 합을 구할 수 있다.	30 %

0190 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

① $S_n=0+0+\cdots+0=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=0$

따라서 주어진 급수는 0에 수렴한다.

② $S_1=-1,\ S_2=-\frac{1}{2},\ S_3=-1,\ S_4=-\frac{3}{4},\ S_5=-1,\ S_6=-\frac{7}{8},$ $\cdots$이므로

$S_{2n-1}=-1,\ S_{2n}=-1+\frac{1}{2^n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=-1,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{1}{2^n}\right)=-1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 -1에 수렴한다.

③ $S_n=1+0+0+\cdots+0=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

④ $S_1=\frac{2}{3}$, $S_2=0$, $S_3=\frac{3}{4}$, $S_4=0$, $S_5=\frac{4}{5}$, $S_6=0$, …이므로

$S_{2n-1}=\frac{n+1}{n+2}$, $S_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$, $\lim_{n\to\infty} S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

⑤ $S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$에 수렴한다.

답 ④

0191 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{na_n+2n^2}{a_n^2+n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}+2}{\frac{a_n^2}{n^2}+1-\frac{1}{n}}=2$$

답 ⑤

0192 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty} S_n=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n+2}{2S_n+5a_n}=\frac{2+2}{2\cdot2+5\cdot0}=1$$

답 1

0193 주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2}\right)=0$$

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

답 ③

0194 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a_n+1}{a_n-5}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+1}{a_n-5}=0$ ··· ❶

$\frac{4a_n+1}{a_n-5}=b_n$으로 놓으면 $a_nb_n-5b_n=4a_n+1$

$(b_n-4)a_n=5b_n+1$ $\therefore a_n=\frac{5b_n+1}{b_n-4}$ ··· ❷

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5b_n+1}{b_n-4}=\frac{5\cdot0+1}{0-4}=-\frac{1}{4}$$ ··· ❸

답 $-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+1}{a_n-5}=0$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0195 ① $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$, 즉 주어진 급수는 발산한다.

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$, 즉 주어진 급수는 발산한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty$

답 ④

0196 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n-1}=\frac{1}{4}\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n-1}$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0197 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=17$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=19$에서

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n-2\sum_{n=1}^{\infty} b_n=17$, $2\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=19$

$\therefore \alpha-2\beta=17$, $2\alpha-\beta=19$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=7$, $\beta=-5$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\alpha+\beta=2$

답 ⑤

0198 $3a_n-2b_n=c_n$으로 놓으면 $2b_n=3a_n-c_n$

$\therefore b_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{1}{2}c_n$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=8$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n=18$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}a_n-\frac{1}{2}c_n\right)=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 8-\frac{1}{2}\cdot 18=3$$

답 3

0199 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$$

$$=\alpha-\beta$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=0$

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: $1, -1, 1, -1, 1, \cdots$

$\{b_n\}$: $-1, 1, -1, 1, -1, \cdots$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 모두 발산하지만 $a_n+b_n=0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=0$, 즉 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0200 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}-5^n}{10^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4^n}{10\cdot 10^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{10\cdot 10^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}-\frac{1}{10}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{10}\cdot 1=\frac{1}{30}$$

답 ③

0201 $$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)^n\cos n\pi\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\cos n\pi$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin\pi+\left(\frac{1}{2}\right)^3\sin\frac{3\pi}{2}+\cdots\right\}$$

$$+\left\{-\frac{1}{4}\cos\pi+\left(-\frac{1}{4}\right)^2\cos 2\pi+\left(-\frac{1}{4}\right)^3\cos 3\pi+\cdots\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5-\cdots\right\}+\left\{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{11}{15}$$

답 $\frac{11}{15}$

0202 $f(x)=x^n$이라 하면 나머지정리에 의하여

$a_n=f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ··· ❶

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$ ··· ❷

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	60 %

라쎈 특강 나머지정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$

0203 $$\frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^5}+\cdots\right)+\left(\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^4}+\frac{3}{4^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4^2}}+\frac{\frac{3}{4^2}}{1-\frac{1}{4^2}}$$

$$=\frac{4}{15}+\frac{3}{15}=\frac{7}{15}$$

답 $\frac{7}{15}$

0204 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(-1<r<1)$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3$에서

$\frac{2}{1-r}=3$, $\quad 1-r=\frac{2}{3}$ $\quad \therefore r=\frac{1}{3}$

따라서 수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 $a_1{}^2=4$, 공비가 $r^2=\frac{1}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2=\frac{4}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}$$

답 ②

0205 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin x<1$이므로

$$1+\sin x+\sin^2 x+\cdots=\frac{1}{1-\sin x}$$

따라서 $\frac{1}{1-\sin x}=2$이므로

$1-\sin x=\frac{1}{2}$ $\quad \therefore \sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

답 $\frac{\pi}{6}$

0206 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(-1<r<1)$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=-6$에서 $\quad \frac{a}{1-r}=-6$ ······ ㉠

수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 a^2, 공비가 r^2인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2=72$에서

$\frac{a^2}{1-r^2}=72$ $\quad \therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)}=72$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-6\cdot\frac{a}{1+r}=72$ $\quad \therefore \frac{a}{1+r}=-12$ ······ ㉢

㉠÷㉢을 하면 $\quad \frac{1+r}{1-r}=\frac{1}{2}$

$2+2r=1-r$, $\quad 3r=-1$ $\quad \therefore r=-\frac{1}{3}$ ··· ❶

$r=-\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{4}a=-6 \qquad \therefore a=-8$ ⋯ ❷

따라서 $a_n=-8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로

$a_5=-8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^4=-\frac{8}{81}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{8}{81}$

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$의 공비를 구할 수 있다.	50 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구할 수 있다.	30 %
❸ a_5의 값을 구할 수 있다.	20 %

0207 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 r $(-1<r<1)$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$에서 $\frac{a_1}{1-r}=2$

$\therefore a_1=2(1-r)$ ⋯⋯ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=8$에서 $\frac{b_1}{1-r}=8$

$\therefore b_1=8(1-r)$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$a_1+b_1=2(1-r)+8(1-r)=10(1-r)$

따라서 $10(1-r)=5$이므로 $1-r=\frac{1}{2}$

$\therefore r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$a_1=1,\ b_1=4$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 $a_1b_1=1\cdot4=4$, 공비가 $r^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}$ 답 ⑤

0208 공비가 $1-2x$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$-1<1-2x<1, \qquad -2<-2x<0$

$\therefore 0<x<1$ 답 ④

0209 공비가 $\sqrt{2}\cos\theta$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$-1<\sqrt{2}\cos\theta<1, \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi\ (\because 0<\theta<\pi)$ 답 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$

0210 (i) $\frac{x}{2}=0$, 즉 $x=0$일 때,

주어진 급수는 0에 수렴한다.

(ii) $\frac{x}{2}\neq0$, 즉 $x\neq0$일 때,

공비가 $\frac{x-5}{2}$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{x-5}{2}<1, \qquad -2<x-5<2$

$\therefore 3<x<7$

(i), (ii)에서 $x=0$ 또는 $3<x<7$

따라서 정수 x는 0, 4, 5, 6의 4개이다. 답 4

0211 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$의 공비가 $\frac{x}{5}$이므로 이 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{x}{5}<1 \qquad \therefore -5<x<5$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$\sum_{n=1}^{\infty}(\log_2 x-3)^n$의 공비가 $\log_2 x-3$이므로 이 급수가 수렴하려면

$-1<\log_2 x-3<1, \qquad 2<\log_2 x<4$

$\therefore 4<x<16$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 구하는 x의 값의 범위는 $4<x<5$ ⋯ ❸

답 $4<x<5$

채점 기준	비율
❶ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}(\log_2 x-3)^n$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

0212 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}$은 공비가 r^2인 등비급수이므로 ㉠에서

$0\le r^2<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r+1}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{r+1}{2}$인 등비급수이므로 ㉠에서

$0<r+1<2 \qquad \therefore 0<\frac{r+1}{2}<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{3}+1\right)^n$은 공비가 $\frac{r}{3}+1$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-\frac{1}{3}<\frac{r}{3}<\frac{1}{3} \qquad \therefore \frac{2}{3}<\frac{r}{3}+1<\frac{4}{3}$

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

이상에서 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0213 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$ ⋯⋯ ㉠

① $\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+2}$은 공비가 r인 등비급수이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n-1}$은 공비가 r^2인 등비급수이므로 ㉠에서

$0\le r^2<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 공비가 $-r$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-1<-r<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-3r}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{1-3r}{2}$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-3<-3r<3, \qquad -2<1-3r<4$

$\therefore -1<\frac{1-3r}{2}<2$

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}=\beta$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(r^n-2r^{2n})=\sum_{n=1}^{\infty} r^n-2\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}=\alpha-2\beta$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

답 ④

0214 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$이 수렴하므로 $\quad -1<a<1$ ······ ㉠

또 $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$이 수렴하므로 $\quad -1<b<1$ ······ ㉡

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(ab)^n$은 공비가 ab인 등비급수이므로 ㉠, ㉡에서

$-1<ab<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄴ. [반례] $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n$은 공비가 $\frac{a}{b}$인 등비급수이고, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$이면

$\frac{a}{b}=\frac{3}{2}>1$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n$은 발산한다.

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a+b)^n$은 공비가 $a+b$인 등비급수이고, ㉠, ㉡에서

$-2<a+b<2$

따라서 주어진 급수가 항상 수렴하는 것은 아니다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}(|a|-|b|)^n$은 공비가 $|a|-|b|$인 등비급수이고, ㉠, ㉡에서

$0\le|a|<1$, $0\le|b|<1$

이므로 $\quad -1<|a|-|b|<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

0215 (i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}\\&=2n+1\end{aligned}$$ ······ ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+1$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

답 ①

0216 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=\frac{1}{3}$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\\&=-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(-\frac{2}{3}+1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$ ······ ㉠

이때 $a_1=\frac{1}{3}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\\&=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

답 ①

0217 $\log_2(S_n+2)=n+1$에서 $\quad S_n+2=2^{n+1}$

$\therefore S_n=2^{n+1}-2$

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=2$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2-(2^n-2)\\&=2^n\end{aligned}$$ ······ ㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

답 1

0218 $x=\overline{\mathrm{OP_1}}+\overline{\mathrm{P_2P_3}}+\overline{\mathrm{P_4P_5}}+\overline{\mathrm{P_6P_7}}+\cdots$

$$\begin{aligned}&=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\\&=\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}\end{aligned}$$

$y=\overline{\mathrm{P_1P_2}}+\overline{\mathrm{P_3P_4}}+\overline{\mathrm{P_5P_6}}+\overline{\mathrm{P_7P_8}}+\cdots$

$$\begin{aligned}&=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^7+\cdots\\&=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

$\therefore x+y=\frac{9}{5}+\frac{6}{5}=3$

답 ③

0219 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\overline{\mathrm{P_1P_2}}-\overline{\mathrm{P_3P_4}}+\overline{\mathrm{P_5P_6}}-\overline{\mathrm{P_7P_8}}+\cdots$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5-\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\\&=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

02 급수

$$y=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$$
$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{5}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right)$이다. 답 $\left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right)$

0220 $x=\overline{OP_1}\cos 45°-\overline{P_1P_2}\cos 45°+\overline{P_2P_3}\cos 45°-\overline{P_3P_4}\cos 45°+\cdots$

$$=1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$ ··· ❶

$y=\overline{OP_1}\sin 45°+\overline{P_1P_2}\sin 45°+\overline{P_2P_3}\sin 45°+\overline{P_3P_4}\sin 45°+\cdots$

$$=1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$ ··· ❷

$$\therefore xy=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{2}{3}$$ ··· ❸

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ y의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ xy의 값을 구할 수 있다.	20 %

0221 $\overline{PQ}=1$이고 $\triangle POQ \backsim \triangle P_1OQ_1$이므로

$$\overline{PQ}:\overline{P_1Q_1}=\overline{OP}:\overline{OP_1}=3:2$$
$$\therefore\ \overline{P_1Q_1}=\frac{2}{3}\overline{PQ}=\frac{2}{3}$$

같은 방법으로 하면

$$\overline{P_2Q_2}=\frac{2}{3}\overline{P_1Q_1}=\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \overline{P_3Q_3}=\frac{2}{3}\overline{P_2Q_2}=\left(\frac{2}{3}\right)^3,\ \cdots$$
$$\therefore\ \overline{PQ}+\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\cdots=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$$

답 3

0222 $\overline{AA_1}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\cdot 4=2$이고 $\triangle AB_1A_1$은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{A_1B_1}=\sqrt{2}\,\overline{AA_1}=2\sqrt{2}\qquad\therefore\ l_1=4\cdot 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$

$\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}\overline{A_1B_1}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$이고 $\triangle A_1A_2D_2$는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{A_2D_2}=\sqrt{2}\,\overline{A_1A_2}=2\qquad\therefore\ l_2=4\cdot 2=8$$

$\overline{A_2A_3}=\frac{1}{2}\overline{A_2D_2}=\frac{1}{2}\cdot 2=1$이고 $\triangle A_2B_3A_3$은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{A_3B_3}=\sqrt{2}\,\overline{A_2A_3}=\sqrt{2}\qquad\therefore\ l_3=4\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$
$$\vdots$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} l_n=8\sqrt{2}+8+4\sqrt{2}+\cdots$$
$$=\frac{8\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{16}{\sqrt{2}-1}=16(\sqrt{2}+1)$$

답 $16(\sqrt{2}+1)$

0223 $\angle P_2P_1O=60°$이므로

$$\overline{P_1P_2}=\overline{OP_1}\cos 60°=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\angle P_2P_1P_3=60°$이므로

$$\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_2}\sin 60°=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle P_3P_2P_4=60°$이므로

$$\overline{P_3P_4}=\overline{P_2P_3}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$\therefore\ \overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2-\sqrt{3}}$$
$$=2(2+\sqrt{3})$$

답 $2(2+\sqrt{3})$

0224 $\angle OP_1P_2=45°$이므로 $\overline{P_1P_2}=\overline{OP_1}\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{OP_2}=\overline{P_1P_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이고 $\angle OP_2P_3=45°$이므로

$$\overline{P_2P_3}=\overline{OP_2}\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$\overline{OP_3}=\overline{P_2P_3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$이고 $\angle OP_3P_4=45°$이므로

$$\overline{P_3P_4}=\overline{OP_3}\cos 45°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$
$$\vdots$$
$$\therefore\ \overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\cdots$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$
$$=1+\sqrt{2}$$

답 ④

0225 정삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$이므로

$$S_1=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4},\ S_2=S_1\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4},$$
$$S_3=S_2\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ \cdots$$
$$\therefore\ S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

0226 두 원 C_n과 C_{n+1}의 지름의 길이의 비가 $2:1$이므로 넓이의 비는 $2^2:1^2$

즉 $S_n:S_{n+1}=4:1$이므로

$$S_1=\pi,\ S_2=S_1\cdot\frac{1}{4}=\pi\cdot\frac{1}{4},\ S_3=S_2\cdot\frac{1}{4}=\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ \cdots$$

$$\therefore S_n=\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\pi$$

답 $\frac{4}{3}\pi$

0227 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ··· ❶

정삼각형 R_2의 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{4}$$

정삼각형 R_3의 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$이므로

$$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\therefore S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$ ··· ❷

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$ ··· ❸

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ S_1의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0228 $S_1=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=\pi-2$

정사각형 $OA_2B_2C_2$의 한 변의 길이가 $2\cdot\frac{1}{2}=1$이므로

$$S_2=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot1^2-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=(\pi-2)\cdot\frac{1}{4}$$

정사각형 $OA_3B_3C_3$의 한 변의 길이가 $1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이므로

$$S_3=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=(\pi-2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\therefore S_n=(\pi-2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\pi-2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{\pi-2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}(\pi-2)$$

답 $\frac{4}{3}(\pi-2)$

0229 추가 멈출 때까지 움직인 거리는

$$10+10\cdot\frac{4}{5}+10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2+10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots$$

$$=\frac{10}{1-\frac{4}{5}}=50\,(\mathrm{cm})$$

답 50 cm

0230 한 번 튀어 오르고 내릴 때마다 공이 움직인 거리는

$$2\cdot15\cdot\frac{2}{3}(\mathrm{m}),\ 2\cdot15\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2(\mathrm{m}),\ 2\cdot15\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3(\mathrm{m}),\ \cdots$$

따라서 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$$15+2\cdot15\cdot\frac{2}{3}+2\cdot15\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\cdot15\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots$$

$$=15+\frac{20}{1-\frac{2}{3}}=15+60=75\,(\mathrm{m})$$

답 ④

0231 $a_1=30\cdot\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot\frac{30}{100}=\frac{54}{5}$,

$a_2=30\cdot\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot\frac{70}{100}\cdot\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot\frac{30}{100}=a_1\cdot\frac{21}{25}=\frac{54}{5}\cdot\frac{21}{25}$,

$a_3=30\cdot\left\{\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot\frac{70}{100}\right\}^2\cdot\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot\frac{30}{100}$

$=a_2\cdot\frac{21}{25}=\frac{54}{5}\cdot\left(\frac{21}{25}\right)^2$,

$$\vdots$$

$$\therefore a_n=\frac{54}{5}\cdot\left(\frac{21}{25}\right)^{n-1}$$ ··· ❶

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{54}{5}\cdot\left(\frac{21}{25}\right)^{n-1}=\frac{\frac{54}{5}}{1-\frac{21}{25}}=\frac{135}{2}$$ ··· ❷

답 $\frac{135}{2}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	70 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0232 $0.\dot{2}=0.2+0.02+0.002+\cdots=\frac{0.2}{1-0.1}=\frac{2}{9}$,

$0.0\dot{5}=0.05+0.005+0.0005+\cdots=\frac{0.05}{1-0.1}=\frac{1}{18}$

이므로 공비를 $r\,(r>0)$라 하면

$$\frac{2}{9}r^2=\frac{1}{18},\qquad r^2=\frac{1}{4}\qquad \therefore r=\frac{1}{2}\ (\because r>0)$$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{9}$$

답 ①

0233 $0.\dot{3}=0.3+0.03+0.003+\cdots=\frac{0.3}{1-0.1}=\frac{1}{3}$

$0.\dot{2}\dot{1}=0.21+0.0021+0.000021+\cdots=\frac{0.21}{1-0.01}=\frac{7}{33}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{7}{33}$에서 $\qquad \frac{a_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{7}{33}$

$$\therefore a_1=\frac{7}{33}\cdot\frac{2}{3}=\frac{14}{99}$$

답 ③

0234 $1.1\dot{2}=1.1+0.02+0.002+0.0002+\cdots$

$$=\frac{11}{10}+\frac{0.02}{1-0.1}=\frac{11}{10}+\frac{2}{90}$$

$$=\frac{101}{90}$$ ··· ❶

어떤 수를 x로 놓으면 $1.1\dot{2}x-1.12x=6$이므로

$\frac{101}{90}x-\frac{112}{100}x=6,\qquad \frac{1}{450}x=6$

$\therefore x=2700$

따라서 어떤 수는 2700이다. ⋯ ❷

답 2700

채점 기준	비율
❶ $1.1\dot{2}$를 분수로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 어떤 수를 구할 수 있다.	60 %

0235 $\frac{1}{33}=0.\dot{0}\dot{3}$이므로

$a_1=0,\ a_2=3,\ a_3=0,\ a_4=3,\ \cdots$

$\therefore \frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\frac{a_4}{5^4}+\frac{a_5}{5^5}+\frac{a_6}{5^6}+\cdots$

$=\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^4}+\frac{3}{5^6}+\cdots$

$=\frac{\frac{3}{25}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

0236 전략 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\ (A\neq B)$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0237 전략 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4}{1-2a_n}=\frac{1-4}{1-2\cdot1}=3$

답 ⑤

0238 전략 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ ($\alpha,\ \beta$는 실수)이면 상수 $p,\ q$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(pa_n+qb_n)=p\alpha+q\beta$임을 이용한다.

풀이 $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_n-c_n$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5,\ \sum_{n=1}^{\infty}c_n=8$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-c_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}c_n=5-8=-3$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=2\cdot5+(-3)=7$

답 ①

다른 풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+a_n-c_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-c_n)$

$=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

$=3\cdot5-8=7$

0239 전략 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\alpha$ (α는 실수)이면 $\frac{a}{1-r}=\alpha\ (-1<r<1)$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(-x)^n}{2}=4$에서

$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\{x^n+(-x)^n\}=4$

$\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1-x}+\frac{-x}{1-(-x)}\right\}=4,\qquad \frac{x}{1-x}-\frac{x}{1+x}=8$

$x(1+x)-x(1-x)=8(1-x^2)$

$10x^2=8,\qquad x^2=\frac{4}{5}\qquad \therefore x=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ (\because x>0)$

답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

다른 풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(-x)^n}{2}$

$=\frac{x+(-x)}{2}+\frac{x^2+(-x)^2}{2}+\frac{x^3+(-x)^3}{2}+\frac{x^4+(-x)^4}{2}+\cdots$

$=x^2+x^4+x^6+\cdots$

$=\frac{x^2}{1-x^2}$

따라서 $\frac{x^2}{1-x^2}=4$이므로 $x^2=4(1-x^2)$

$5x^2=4,\qquad x^2=\frac{4}{5}\qquad \therefore x=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ (\because x>0)$

0240 전략 수열 $\{r^n\}$이 수렴하면 $-1<r\le1$, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하면 $-1<r<1$임을 이용한다.

풀이 $\{(5x-2)^n\}$의 공비가 $5x-2$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<5x-2\le1,\qquad 1<5x\le3$

$\therefore \frac{1}{5}<x\le\frac{3}{5}$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$\sum_{n=1}^{\infty}(3x-2)^n$의 공비가 $3x-2$이므로 이 급수가 수렴하려면

$-1<3x-2<1,\qquad 1<3x<3$

$\therefore \frac{1}{3}<x<1$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 구하는 x의 값의 범위는 $\frac{1}{3}<x\le\frac{3}{5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{3}<x\le\frac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\{(5x-2)^n\}$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}(3x-2)^n$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

0241 전략 a^mb^n ($a,\ b$는 서로 다른 소수, $m,\ n$은 자연수)의 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)$임을 이용한다.

풀이 $a_n=(n+1)\{(n+1)+1\}=(n+1)(n+2)$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

답 ①

0242 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2x-(n^2+2n)=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=-2,\ \alpha_n\beta_n=-n^2-2n=-n(n+2)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

0243 전략 제n항까지의 부분합 S_n을 구한 다음 $\lim_{n\to\infty}S_n$을 구한다.

풀이 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\log_2\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$
$$=\log_2\left\{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\log_2\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right) \quad \cdots ❶$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log_2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\log_2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log_2\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_2\frac{n+2}{2n+2} \quad \cdots ❷$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+2}{2n+2}=\log_2\frac{1}{2}=-1 \quad \cdots ❸$$

답 -1

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 급수의 합을 구할 수 있다.	30 %

0244 전략 급수와 수열의 극한값 사이의 관계와 급수의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\alpha-0=\alpha$$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$

ㄷ. [반례] $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$이면

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\neq 1\cdot\frac{1}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0245 전략 $-1<r<1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

풀이 $a_1=2$, $a_2=7$, $a_3=2$, $a_4=7$, $a_5=2$, $a_6=7$, $\cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{2}{3}+\frac{7}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{7}{3^4}+\frac{2}{3^5}+\frac{7}{3^6}+\cdots$$
$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^5}+\cdots\right)+\left(\frac{7}{3^2}+\frac{7}{3^4}+\frac{7}{3^6}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{\frac{7}{9}}{1-\frac{1}{9}}$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{7}{8}$$
$$=\frac{13}{8}$$

답 $\frac{13}{8}$

0246 전략 a_1, a_2, a_3, $\cdots$을 차례대로 구한 다음 규칙을 찾는다.

풀이 $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=2$, $a_4=4$, $a_5=2$, $a_6=4$, $\cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{2}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\frac{2}{10^5}+\frac{4}{10^6}+\cdots$$
$$=\left(\frac{2}{10}+\frac{2}{10^3}+\frac{2}{10^5}+\cdots\right)+\left(\frac{4}{10^2}+\frac{4}{10^4}+\frac{4}{10^6}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{100}}+\frac{\frac{4}{100}}{1-\frac{1}{100}}$$
$$=\frac{20}{99}+\frac{4}{99}$$
$$=\frac{8}{33}$$

답 ④

0247 전략 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\alpha$ (α는 실수)이면 $\frac{a}{1-r}=\alpha$ $(-1<r<1)$임을 이용한다.

풀이 $a=0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=0$이므로 $\quad a\neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$의 공비가 r이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1<r<1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=2$에서 $\frac{a}{1-r}=2$이므로

$a=2(1-r)$

㉠에서 $\quad -1<-r<1$

$0<1-r<2, \quad 0<2(1-r)<4$

$\therefore 0<a<4$

따라서 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다. 답 3

0248 전략 주어진 식을 이용하여 a_n, a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $a_na_{n+1}+a_{n+1}=ka_n^2+ka_n$에서

$a_{n+1}(a_n+1)=ka_n(a_n+1)$

$\therefore a_{n+1}=ka_n \ (\because a_n>0)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=k$, 공비가 k인 등비수열이다.

이때 $0<k<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=5$에서

$\frac{k}{1-k}=5, \quad k=5(1-k), \quad 6k=5$

$\therefore k=\frac{5}{6}$ 답 ①

0249 전략 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하면 $-1<r<1$임을 이용한다.

풀이 공비가 $\frac{\sqrt{3}\tan \pi x-1}{2}$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{\sqrt{3}\tan \pi x-1}{2}<1, \quad -2<\sqrt{3}\tan \pi x-1<2$

$-1<\sqrt{3}\tan \pi x<3, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}<\tan \pi x<\sqrt{3}$

$\therefore -\frac{1}{6}<x<\frac{1}{3} \left(\because -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$

따라서 x의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

0250 전략 $a_n=S_n-S_{n-1} \ (n\geq 2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=25\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}-25\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=-25\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+25\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$
$$=25\cdot\left(-\frac{2}{5}+1\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$
$$=15\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty} 15\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2n}=15\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{25}\right)^n$$
$$=15\cdot\frac{\frac{4}{25}}{1-\frac{4}{25}}=\frac{20}{7} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{20}{7}$

채점 기준	비율
❶ $n\geq 2$일 때, a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}$의 합을 구할 수 있다.	50 %

0251 전략 n 번째와 $(n+1)$ 번째에 수거되어 재생산된 종이 상자의 양 사이의 관계를 구한다.

풀이 n 번째에 수거되어 재생산된 종이 상자의 양을 a_n kg이라 하면

$a_1=10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{4}, \ a_{n+1}=\frac{3}{8}a_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{15}{4}$, 공비가 $\frac{3}{8}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\frac{15}{4}}{1-\frac{3}{8}}=6$$

즉 재생산된 종이 상자는 총 6 kg이다. 답 6 kg

0252 전략 주어진 식을 이용하여 $\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}$을 a_{n+1}, a_{n+2}에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$에서

$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$
$$=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{2}$$

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $\cdots$이므로
$a_n<a_{n+1}<a_{n+2}<\cdots$
$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\infty$

답 $\frac{1}{2}$

0253 전략 a_n과 b_n을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x-3y+3=0$에서 $y=\frac{1}{3}x+1$이므로 y좌표가 자연수이려면 x좌표가 3의 배수이어야 한다.

$x=3n$ (n은 자연수)으로 놓으면 $y=n+1$이므로

$a_n=3n, \ b_n=n+1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

답 ①

0254 전략 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$임을 이용한다.

풀이
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^3+18}{2n^3+3n^2+n}$$
$$=6$$

조건 (나)에서 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-3)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(b_n-3)=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty} b_n=3$

따라서 조건 (가)에서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty} a_n=6$ 답 ④

0255 전략 직선의 방정식과 이차함수의 식을 연립하여 풀어 점 P_n의 좌표를 구한 후 점 P_n의 y좌표를 이용하여 $\overline{P_nH_n}$을 구한다.

풀이 점 P_n의 x좌표는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)=3x(x-1)$에서

$$(x-1)\left\{3x-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (\because x\neq1)$$

$x=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$을 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$에 대입하면

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 $P_n\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$이므로

$$\overline{P_nH_n}=\left|\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nH_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$$

답 ②

0256 전략 시행을 반복하여 규칙을 찾는다.

풀이 첫 번째 시행에서 색칠한 정사각형의 넓이는

$$\frac{1}{9}$$

두 번째 시행에서 색칠한 정사각형의 넓이의 합은

$$4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}$$

세 번째 시행에서 색칠한 정사각형의 넓이의 합은

$$4^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$$\vdots$$

따라서 색칠한 모든 정사각형의 넓이의 합은

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

03 지수함수와 로그함수의 미분

Ⅱ. 미분법

0257 답 ∞

0258 답 0

0259 답 0

0260 $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{2^{2x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=\infty$ 답 ∞

0261 $\lim_{x\to0}2^x=2^0=1$ 답 1

0262 $\lim_{x\to-1}\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0263 $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{1+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x+1}=1$ 답 1

0264 $\lim_{x\to\infty}(2^x-3^x)=\lim_{x\to\infty}3^x\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right\}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right\}=-1$이므로 $\lim_{x\to\infty}3^x\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right\}=-\infty$

답 $-\infty$

0265 답 $-\infty$

0266 답 ∞

0267 답 ∞

0268 답 $-\infty$

0269 $\lim_{x\to1}\log_3 x=\log_3 1=0$ 답 0

0270 $\lim_{x\to2}\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$ 답 -1

0271 $\lim_{x\to\infty}\log\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}(-\log x)=-\infty$ 답 $-\infty$

0272 $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x+1}{x}=\log_2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x}\right)=\log_2 4=2$ 답 2

0273 답 e

0274 답 e

0275 $\lim_{x\to0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$ 답 $\frac{1}{e}$

0276 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^3=e^3$ 답 e^3

0277 $\ln e^2=2\ln e=2$ 답 2

0278 $\ln\sqrt{e}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0279 $\ln\frac{1}{e}=\ln e^{-1}=-\ln e=-1$ 답 -1

0280 $\dfrac{1}{\log_3 e}+\dfrac{1}{\log_2 e}=\ln 3+\ln 2=\ln 6$ 답 $\ln 6$

라쎈 특강 로그의 밑의 변환

$a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1,\ N>0$일 때

① $\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

② $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

0281 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot 2=1\cdot 2=2$ 답 2

0282 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3=1\cdot 3=3$ 답 3

0283 답 $\dfrac{1}{\ln 5}$

0284 답 $\ln 2$

0285 $y'=5\cdot(e^x)'=5e^x$ 답 $y'=5e^x$

0286 $y=e^2\cdot e^x$이므로 $y'=e^2\cdot(e^x)'=e^2\cdot e^x=e^{x+2}$

답 $y'=e^{x+2}$

0287 $y=\dfrac{1}{e}\cdot e^x$이므로 $y'=\dfrac{1}{e}\cdot(e^x)'=\dfrac{1}{e}\cdot e^x=e^{x-1}$

답 $y'=e^{x-1}$

0288 $y'=(x^2)'\cdot e^x+x^2\cdot(e^x)'$

$=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=x(x+2)e^x$ 답 $y'=x(x+2)e^x$

0289 답 $y'=\ln 6\cdot 6^x$

0290 $y'=2\cdot(4^x)'=2\cdot 4^x\ln 4=2\ln 4\cdot 4^x$ 답 $y'=2\ln 4\cdot 4^x$

0291 $y'=3\cdot\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}'=3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\ln\dfrac{1}{2}=-3\ln 2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

답 $y'=-3\ln 2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

0292 $y'=(3^x)'\cdot(3x+1)+3^x\cdot(3x+1)'$

$=3^x\ln 3\cdot(3x+1)+3^x\cdot 3$

$=3^x\{(3x+1)\ln 3+3\}$

답 $y'=3^x\{(3x+1)\ln 3+3\}$

0293 $y'=\dfrac{3}{5}\cdot(\ln x)'=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{5x}$ 답 $y'=\dfrac{3}{5x}$

0294 $y=\ln 3+\ln x$이므로 $y'=\dfrac{1}{x}$ 답 $y'=\dfrac{1}{x}$

0295 $y=2\ln x$이므로 $y'=\dfrac{2}{x}$ 답 $y'=\dfrac{2}{x}$

0296 $y'=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}$

$=\ln x+1$ 답 $y'=\ln x+1$

0297 $y=\log 2+\log x$이므로 $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$

답 $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$

0298 $y=\log_2 3+\log_2 x$이므로 $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

답 $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

0299 $y'=x'\cdot\log_5 x+x\cdot(\log_5 x)'=1\cdot\log_5 x+x\cdot\dfrac{1}{x\ln 5}$

$=\log_5 x+\dfrac{1}{\ln 5}$ 답 $y'=\log_5 x+\dfrac{1}{\ln 5}$

0300 $y'=(e^x)'\cdot\log_3 x+e^x\cdot(\log_3 x)'$

$=e^x\cdot\log_3 x+e^x\cdot\dfrac{1}{x\ln 3}$

$=e^x\left(\log_3 x+\dfrac{1}{x\ln 3}\right)$

답 $y'=e^x\left(\log_3 x+\dfrac{1}{x\ln 3}\right)$

0301 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}-3^x}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=-1$ 답 -1

0302 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(4^x-3^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left\{4^x\left(1-\frac{3^x}{4^x}\right)\right\}^{\frac{1}{x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}(4^x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=4\cdot 1=4$ 답 ④

0303 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot 4^{x+1}+1}{4^x-2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4a+\left(\frac{1}{4}\right)^x}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}=4a$ ⋯ ❶

$4a=12$에서 $a=3$ ⋯ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot 4^{x+1}+1}{4^x-2^x}$을 간단히 할 수 있다.	70 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0304 $\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 0-$일 때 $t\longrightarrow -\infty$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{1+2^t}=\frac{1}{1+0}=1$ 답 ⑤

0305 $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7^x+7^{-x}}{7^x-7^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{7^{-t}+7^t}{7^{-t}-7^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{49}\right)^t+1}{\left(\frac{1}{49}\right)^t-1}=-1$$

답 -1

0306 $\lim_{x\to\infty}(\log_3 x-\log_3\sqrt{3x^2+x})$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{x}{\sqrt{3x^2+x}}$$

$$=\log_3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{3x^2+x}}\right)=\log_3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3+\frac{1}{x}}}\right)$$

$$=\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$$

답 ②

0307 $\lim_{x\to\infty}\{\log_4 8^x-\log_4(8^x+4^x)\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_4\frac{8^x}{8^x+4^x}$$

$$=\log_4\left(\lim_{x\to\infty}\frac{8^x}{8^x+4^x}\right)$$

$$=\log_4\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^x}\right\}$$

$$=\log_4 1=0$$

답 0

0308 $\lim_{x\to2}(\log_2|x^2-4|-\log_2|x-2|)$

$$=\lim_{x\to2}\log_2\left|\frac{x^2-4}{x-2}\right|=\lim_{x\to2}\log_2\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right|$$

$$=\lim_{x\to2}\log_2|x+2|$$

$$=\log_2 4=2$$

답 ②

0309 $\lim_{x\to\infty}\{\log_4(2x+1)-\log_4(3x^2-1)+\log_4(3x+2)\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_4\frac{(2x+1)(3x+2)}{3x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_4\frac{6x^2+7x+2}{3x^2-1}$$

$$=\log_4\left(\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+7x+2}{3x^2-1}\right)$$

$$=\log_4 2=\frac{1}{2}$$

답 ②

0310 $\lim_{x\to\infty}\{\log(ax-1)-\log(x+1)\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{ax-1}{x+1}$$

$$=\log\left(\lim_{x\to\infty}\frac{ax-1}{x+1}\right)=\log a$$ ··· ❶

$\log a=3$에서 $\quad a=1000$ ··· ❷

답 1000

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to\infty}\{\log(ax-1)-\log(x+1)\}$을 간단히 할 수 있다.	70 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0311 $4^x+5^x=5^x\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right\}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_2(4^x+5^x)=\lim_{x\to\infty}\log_2\left[5^x\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\left[(5^x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\log_2(5\cdot1)=\log_2 5$$

답 ⑤

0312 $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}+\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^6+\lim_{x\to0}\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\}^{-2}$$

$$=e^6+e^{-2}=e^6+\frac{1}{e^2}$$

답 $e^6+\frac{1}{e^2}$

0313 $\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\right\}^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{5}{6}}$$

답 ②

0314 $x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{1}{2-x}}=\lim_{t\to0}(t+1)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\{(t+1)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

답 $\frac{1}{e}$

0315 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-5}$

$$=e^{-5}=\frac{1}{e^5}$$

답 $\frac{1}{e^5}$

0316 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{6a}=e^{6a}$

$e^{6a}=e^{12}$에서 $\quad 6a=12\quad\therefore a=2$

답 ③

0317 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$=\frac{e^{-1}}{e}=\frac{1}{e^2}$$

답 $\frac{1}{e^2}$

0318 $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{ab}=e^{ab}$

ㄱ. $\lim_{x\to0}(1+bx)^{\frac{a}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+bx)^{\frac{1}{bx}}\}^{ab}=e^{ab}$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{ab}=e^{ab}$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{b}}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right\}^{\frac{a}{b}}=e^{\frac{a}{b}}$

이상에서 $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}$과 값이 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0319 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)+7x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{\ln(1+3x)}{2x}+\dfrac{7}{2}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}\right\}$

$=1\cdot\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}=5$ 답 5

0320 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+6x)}{\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+6x)}{6x}\cdot\dfrac{3x}{\ln(1+3x)}\cdot\dfrac{6}{3}$

$=1\cdot1\cdot2=2$ 답 2

0321 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(1+\sqrt{2x})+\ln(1-\sqrt{2x})}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(1+\sqrt{2x})(1-\sqrt{2x})}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(1-2x)}{-2x}\cdot(-2)$

$=1\cdot(-2)=-2$ 답 ②

0322 $\lim\limits_{x\to\infty}x\{\ln(2x+1)-\ln2x\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\dfrac{2x+1}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}2x\ln\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ 답 ②

0323 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(ax+1)}{x^3+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(ax+1)}{ax}\cdot\dfrac{a}{x^2+2}$

$=1\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$ ··· ❶

$\dfrac{a}{2}=5$에서 $a=10$ ··· ❷

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(4x+1)}{ax}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(4x+1)}{10x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(4x+1)}{4x}\cdot\dfrac{2}{5}$

$=1\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}$ ··· ❸

답 $\dfrac{2}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(ax+1)}{x^3+2x}$의 값을 a로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(4x+1)}{ax}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0324 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_2(3+x)-\log_2 3}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_2\dfrac{3+x}{3}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_2\left(1+\dfrac{x}{3}\right)}{\dfrac{x}{3}}\cdot\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{1}{\ln2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3\ln2}$ 답 $\dfrac{1}{3\ln2}$

0325 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_3(1-3x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_3(1-3x)}{-3x}\cdot(-3)$

$=\dfrac{1}{\ln3}\cdot(-3)=-\dfrac{3}{\ln3}$ 답 $-\dfrac{3}{\ln3}$

0326 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_5(1+2x)}{\log_2(1-x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_5(1+2x)}{2x}\cdot\dfrac{-x}{\log_2(1-x)}\cdot(-2)$

$=\dfrac{1}{\ln5}\cdot\ln2\cdot(-2)=-\dfrac{2\ln2}{\ln5}$ 답 ①

0327 $x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\log(x-1)}{x-2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\log(1+t)}{t}=\dfrac{1}{\ln10}$ 답 $\dfrac{1}{\ln10}$

0328 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\dfrac{2}{x-1}=1\cdot(-2)=-2$ 답 ①

0329 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{e^{5x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\dfrac{5x}{e^{5x}-1}\cdot\dfrac{2}{5}$

$=1\cdot1\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}$ 답 $\dfrac{2}{5}$

0330 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{-4x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{3x}-1)-(e^{-4x}-1)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}-\dfrac{e^{-4x}-1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3-\dfrac{e^{-4x}-1}{-4x}\cdot(-4)\right\}$

$=1\cdot3-1\cdot(-4)=7$ 답 ②

0331 $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{x-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{t+1}-e}{t}=e\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t}=e\cdot1=e$

답 e

0332 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)}{e^{ax}-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ln(1+3x)}{e^{ax}-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot2\right.$

$\left.+\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot3\right\}\cdot\dfrac{ax}{e^{ax}-1}\cdot\dfrac{1}{a}$

$=(1+1\cdot2+1\cdot3)\cdot1\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{6}{a}$ ··· ❶

$\dfrac{6}{a}=\dfrac{1}{2}$에서 $a=12$ ··· ❷

답 12

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)}{e^{ax}-1}$의 값을 a로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0333 $\lim_{x\to0}\frac{3^x-2^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(3^x-1)-(2^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{3^x-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}\right)$

$=\ln3-\ln2=\ln\frac{3}{2}$ 답 ③

0334 $\lim_{x\to0}\frac{\{\log_3(1+x)\}(3^x-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+x)}{x}\cdot\frac{3^x-1}{x}$

$=\frac{1}{\ln3}\cdot\ln3=1$ 답 1

0335 $\lim_{x\to0}\frac{2^x+4^x+8^x-3}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(2^x-1)+(4^x-1)+(8^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{4^x-1}{x}+\frac{8^x-1}{x}\right)$

$=\ln2+\ln4+\ln8=\ln64$

$\therefore a=64$ 답 ⑤

0336 $\lim_{x\to1}\frac{5^{x-1}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{5^{x-1}-1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{5^{x-1}-1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\lim_{t\to0}\frac{5^t-1}{t}\cdot\frac{1}{t+2}$

$=\ln5\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln5$ 답 $\frac{1}{2}\ln5$

0337 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{ax}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{a}{2}$

$=1\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2}=\frac{1}{3}$에서 $a=\frac{2}{3}$ 답 $a=\frac{2}{3}$, $b=0$

0338 $x\longrightarrow0$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\{\log_3(1+x)+a\}=0$이므로 $a=0$

$a=0$을 주어진 식에 대입하면

$b=\lim_{x\to0}\frac{x^2+2x}{\log_3(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\log_3(1+x)}\cdot(x+2)$

$=\ln3\cdot2=2\ln3$

답 $a=0$, $b=2\ln3$

0339 $x\longrightarrow0$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(2^{x+1}-a)=0$이므로 $2-a=0$ $\therefore a=2$ ⋯ ❶

$a=2$를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+bx)}{2^{x+1}-2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+bx)}{2(2^x-1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x}{2^x-1}\cdot\frac{\ln(1+bx)}{bx}\cdot\frac{b}{2}$

$=\frac{1}{\ln2}\cdot1\cdot\frac{b}{2}=\frac{b}{2\ln2}$

$\frac{b}{2\ln2}=\frac{2}{\ln2}$에서 $b=4$ ⋯ ❷

$\therefore ab=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0340 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-3)=0$이므로 $\sqrt{b}-3=0$ $\therefore b=9$

$b=9$를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+9}-3}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{ax+9}-3)(\sqrt{ax+9}+3)}{(e^x-1)(\sqrt{ax+9}+3)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{ax}{(e^x-1)(\sqrt{ax+9}+3)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{a}{\sqrt{ax+9}+3}$

$=1\cdot\frac{a}{3+3}=\frac{a}{6}$

$\frac{a}{6}=\frac{1}{3}$에서 $a=2$

$\therefore b-a=7$ 답 ⑤

0341 $x\longrightarrow-1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}\{a\ln(x+2)+b\}=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to-1}\frac{a\ln(x+2)}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{a\ln(x+2)}{(x+1)(x-1)}$

이때 $x+1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{a\ln(x+2)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{t\to0}\frac{a\ln(t+1)}{t(t-2)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}\cdot\frac{a}{t-2}$

$=1\cdot\frac{a}{-2}=-\frac{a}{2}$

$-\frac{a}{2}=4$에서 $a=-8$

$\therefore a+b=-8$ 답 -8

0342 점 P의 좌표를 $(t, \log_2(t+1))$이라 하면

$\overline{OQ}=t$, $\overline{PQ}=\log_2(t+1)$

이때 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\longrightarrow0+$이므로 구하는 극한값은

$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}=\lim_{t\to0+}\frac{\log_2(t+1)}{t}=\frac{1}{\ln2}$ 답 $\frac{1}{\ln2}$

0343 점 P의 x좌표가 t이므로 $\mathrm{P}(t, \ln t)$

따라서 $S(t)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \ln t=\ln t$이므로

$$\lim_{t\to 1+}\frac{S(t)}{t-1}=\lim_{t\to 1+}\frac{\ln t}{t-1}$$

이때 $t-1=s$로 놓으면 $t\longrightarrow 1+$일 때 $s\longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{t\to 1+}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{s\to 0+}\frac{\ln(s+1)}{s}=1$$

답 ④

0344 점 P의 좌표를 (t, e^t-1)이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(e^t-1)=\frac{e^t-1}{2},\ S_2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot t=t$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{e^t-1}{2t}$$

이때 점 P가 점 O에 한없이 가까워지면 $t\longrightarrow 0+$이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{t\to 0+}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to 0+}\frac{e^t-1}{2t}=\lim_{t\to 0+}\frac{e^t-1}{t}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0345 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$$\therefore a=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{4x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+1\right)$$

$$=\frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{2}$$

답 ④

0346 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$$

$$\therefore k=\lim_{x\to 0+}\frac{x\cdot 2^x}{4^x-1}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{4^x-1}\cdot 2^x$$

$$=\frac{1}{\ln 4}\cdot 1=\frac{1}{\ln 4}$$

답 $\frac{1}{\ln 4}$

0347 $x\neq 0$일 때, $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{x}$이고 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

$$\therefore f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2=1\cdot 2=2$$

답 2

0348 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(a+5x)}{x}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow 0+$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0+}\ln(a+5x)=0$이므로 $\ln a=0$ $\therefore a=1$ ··· ❶

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+5x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot 5=1\cdot 5=5 \quad \cdots ❷$$

$\therefore a+b=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0349 $f(x)=(x+2)e^{x+1}=e(x+2)e^x$이므로

$$f'(x)=e\{(x+2)'\cdot e^x+(x+2)\cdot(e^x)'\}$$
$$=e\{1\cdot e^x+(x+2)\cdot e^x\}=e(x+3)e^x$$
$$=(x+3)e^{x+1}$$

$\therefore f'(0)=3e$

답 ③

라쎈 특강 $y=e^{x+p}$, $y=a^{x+p}$ (p는 상수)의 도함수

상수 p에 대하여

$y=e^{x+p}$ ➡ $y=e^p\cdot e^x$, $y=a^{x+p}$ ➡ $y=a^p\cdot a^x$

으로 생각하여 미분한다.

0350 $y=2^{x+3}=2^3\cdot 2^x$이므로 $f(x)=2^{x+3}$으로 놓으면

$$f'(x)=2^3\cdot(2^x)'=2^3\cdot 2^x\ln 2=8\ln 2\cdot 2^x \quad \cdots ❶$$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$f'(-1)=8\ln 2\cdot\frac{1}{2}=4\ln 2 \quad \cdots ❷$$

답 $4\ln 2$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ 접선의 기울기를 구할 수 있다.	40 %

0351 $f'(x)=a\{(x^2)'\cdot e^x+x^2\cdot(e^x)'\}=a(2xe^x+x^2e^x)$
$=ax(x+2)e^x$

이므로 $f'(1)=3ae$

$3ae=\frac{1}{2}e$에서 $a=\frac{1}{6}$

답 ①

0352 $f(1)=0$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=3^x\ln 3\cdot(x^2-1)+3^x\cdot 2x=3^x\{\ln 3\cdot(x^2-1)+2x\}$이므로

$$f'(1)=3\cdot 2=6$$

답 6

0353 $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x$

이므로 $f'(e)=2e+e=3e$

답 $3e$

0354 $f(x)=(\log_2 x)^2+\frac{1}{2}\ln x=\log_2 x\cdot\log_2 x+\frac{1}{2}\ln x$이므로

$$f'(x)=(\log_2 x)'\cdot\log_2 x+\log_2 x\cdot(\log_2 x)'+\left(\frac{1}{2}\ln x\right)'$$
$$=\frac{1}{x\ln 2}\cdot\log_2 x+\log_2 x\cdot\frac{1}{x\ln 2}+\frac{1}{2x}$$
$$=\frac{2\log_2 x}{x\ln 2}+\frac{1}{2x}$$

$\therefore f'(1)=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0355 $f(x)=x\log_3 2x=x(\log_3 2+\log_3 x)$이므로

$$f'(x)=x'\cdot(\log_3 2+\log_3 x)+x\cdot(\log_3 2+\log_3 x)'$$
$$=\log_3 2+\log_3 x+x\cdot\frac{1}{x\ln 3}$$
$$=\log_3 2+\log_3 x+\frac{1}{\ln 3}$$
$$=\log_3 2+\log_3 x+\log_3 e=\log_3 2ex$$

$\log_3 2ex=\log_3 ax$에서 $a=2e$ 답 ②

라쎈 특강 $y=\ln px$, $y=\log_a px$ (p는 상수)의 도함수

상수 p에 대하여

$y=\ln px$ ➡ $y=\ln p+\ln x$

$y=\log_a px$ ➡ $y=\log_a p+\log_a x$

로 생각하여 미분한다.

0356 $f'(x)=(e^x)'\cdot(\ln x+kx)+e^x\cdot(\ln x+kx)'$

$$=e^x(\ln x+kx)+e^x\left(\frac{1}{x}+k\right)$$
$$=e^x\left(\ln x+kx+\frac{1}{x}+k\right)$$

이므로 $f'(1)=(2k+1)e$

$(2k+1)e=5e$에서 $2k+1=5$ $\therefore k=2$ 답 ④

0357 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{f(x)-f(1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}\cdot(x+1)$$
$$=\frac{1}{f'(1)}\cdot2=\frac{2}{f'(1)}$$

이때 $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+3x^2=\ln x+3x^2+1$이므로

$f'(1)=4$

$\therefore \frac{2}{f'(1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 답 ②

0358 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(1)=2$

$a\ln 1+b=2$ $\therefore b=2$ ··· ❶

한편 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이고 $f'(x)=\frac{a}{x}$이므로

$f'(1)=a=3$ ··· ❷

따라서 $f(x)=3\ln x+2$이므로

$f(e)=3\ln e+2=3+2=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(e)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0359 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}\ln ax=\lim_{x\to1-}(bx+2)=f(1)$

$\therefore \ln a=b+2$ ······ ㉠

또 $f'(1)$이 존재해야 하므로 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>1)\\ b & (x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-}b$ $\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $\ln a=3$

$\therefore a=e^3$ 답 $a=e^3$, $b=1$

0360 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}(ax^2+1)=\lim_{x\to1-}(e^{x-1}+b)=f(1)$

$a+1=1+b$ $\therefore b=a$ ······ ㉠ ··· ❶

또 $f'(1)$이 존재해야 하므로 $f'(x)=\begin{cases}2ax & (x>1)\\ e^{x-1} & (x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to1+}2ax=\lim_{x\to1-}e^{x-1}$

$2a=1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{1}{2}$ ··· ❷

$\therefore a+b=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0361 전략 로그의 성질을 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}$ 꼴로 변형한 후 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}=\log_a\left\{\lim_{x\to\infty}f(x)\right\}$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x^2+1)+\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-1)\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x^2+1)-\log_2(2x^2-1)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x^2+1}{2x^2-1}=\log_2\frac{1}{2}=-1$$

답 ①

0362 전략 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{\frac{a}{2}}=e^{\frac{a}{2}}$

$e^{\frac{a}{2}}=e^5$에서 $\frac{a}{2}=5$ $\therefore a=10$ 답 10

0363 전략 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x}\right)\left(1+\frac{1}{4x}\right)\right\}^{12x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{12x}\cdot\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{12x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right\}^4\cdot\left\{\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}\right\}^3$$
$$=e^4\cdot e^3=e^7$$

답 e^7

0364 전략 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)-(2^x-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2-\frac{2^x-1}{x}\right)$$
$$=2-\ln2$$
답 ③

0365 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

풀이 $f(x)=(x-3)e^x$으로 놓으면
$$f'(x)=e^x+(x-3)e^x=(x-2)e^x$$
따라서 구하는 접선의 기울기는
$$f'(0)=-2$$
답 -2

0366 전략 지수함수와 로그함수의 극한을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{2^x}{2^x+2^{-x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

ㄴ. $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0+$일 때 $t\longrightarrow\infty$, $x\longrightarrow0-$일 때 $t\longrightarrow-\infty$이므로
$$\lim_{x\to0+}\frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1-2^t}{1+2^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^t+1}=-1,$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1-2^t}{1+2^t}=1$$
$$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}\neq\lim_{x\to0-}\frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$$
즉 $\lim_{x\to0}\frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{3x^2-2}{x^2+3}=\log_3 3=1$

ㄹ. $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow0-$이므로
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to0-}\frac{1}{1-3^t}=\infty$$
이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ②

0367 전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 지수함수를 포함한 함수의 극한값은 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 나누어서 구한다.

풀이 $$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot5^x+b\cdot3^{x-1}}{5^x-3^{x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x}{1-3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x}=a$$
이므로 $a=4$ ··· ❶
$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{a\cdot5^x+b\cdot3^{x-1}}{5^x-3^{x+1}}=\frac{a+\frac{1}{3}b}{1-3}=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}b\text{이므로}$$
$$-\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}b=-2\qquad\therefore 3a+b=12$$
이 식에 $a=4$를 대입하면 $12+b=12$ $\therefore b=0$ ··· ❷
$\therefore a+b=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0368 전략 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $$\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$
답 ②

0369 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}\cdot\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{a}{2}$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$
$\frac{a}{2}=4$에서 $a=8$

답 8

0370 전략 $\lim_{x\to0}xf(x)=3$, $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $$\lim_{x\to0}(e^{3x}-1)f(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3\cdot xf(x)$$
$$=1\cdot3\cdot3=9$$
답 9

0371 전략 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$의 역함수는 $y=a^x$임을 이용하여 $f(x)$의 역함수를 구한다.

풀이 $y=\log_2(x+3)$이라 하면
$$x+3=2^y\qquad\therefore x=2^y-3$$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^x-3$
즉 $g(x)=2^x-3$이므로
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x-2)}{g(x)+2}=\lim_{x\to0}\frac{\log_2(x+1)}{2^x-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{2^x-1}$$
$$=\frac{1}{\ln2}\cdot\frac{1}{\ln2}=\frac{1}{(\ln2)^2}$$
답 ⑤

0372 전략 $x \longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow 0$임을 이용한다.

풀이 $x \longrightarrow \frac{1}{3}$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to\frac{1}{3}}(ax+9)=0$이므로

$\frac{1}{3}a+9=0 \quad \therefore a=-27$ ··· ❶

$a=-27$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{-27x+9}{\ln 3x}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{-9(3x-1)}{\ln 3x}$$

이때 $3x-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \frac{1}{3}$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{-9(3x-1)}{\ln 3x}=\lim_{t\to0}\frac{-9t}{\ln(1+t)}$$

$$=-9\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=-9\cdot1=-9$$

$\therefore b=-9$ ··· ❷

$\therefore b-a=18$ ··· ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0373 전략 $\overline{PQ}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타내고 $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $P(t,\ 4^t)$, $Q(t,\ 2^t)$이므로 $\quad \overline{PQ}=4^t-2^t$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{\overline{PQ}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{4^t-2^t}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{(4^t-1)-(2^t-1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{4^t-1}{t}-\frac{2^t-1}{t}\right)$$

$$=\ln4-\ln2=\ln\frac{4}{2}=\ln2$$

답 ⑤

0374 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$이다.

풀이 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$$

이때

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x^2+3x+2)=2,$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{e^{ax}-1}{3x}=\lim_{x\to0-}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot\frac{a}{3}=1\cdot\frac{a}{3}=\frac{a}{3}$$

이므로 $\quad \frac{a}{3}=2 \quad \therefore a=6$

답 ①

0375 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $f'(a)=0$을 만족시키는 a의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=(x^3-5x^2+9x-7)e^x$이므로

$$f'(x)=(3x^2-10x+9)e^x+(x^3-5x^2+9x-7)e^x$$
$$=(x^3-2x^2-x+2)e^x$$ ··· ❶

$f'(a)=0$에서 $\quad (a^3-2a^2-a+2)e^a=0$

$a^3-2a^2-a+2=0 \ (\because e^a>0)$

$(a+1)(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$ ··· ❷

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+1+2=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(a)=0$을 만족시키는 a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 실수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 삼차방정식 $a^3-2a^2-a+2=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하면 모든 실수 a의 값의 합은 $\quad -\frac{-2}{1}=2$

라쎈 특강 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

0376 전략 미분계수의 정의를 이용하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$를 변형한다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\right\}$$

$$=f'(3)+f'(3)=2f'(3)$$

이때 $f'(x)=\frac{1}{x\ln3}$이므로 $\quad 2f'(3)=\frac{2}{3\ln3}$

답 ②

0377 전략 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $x-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{t\to0}(t+1)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\{(t+1)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=e$

ㄴ. $\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1-x)^{-\frac{1}{x}}\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

ㄷ. $-x=s$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $s \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{-s}=\lim_{s\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right\}^{-1}$$
$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

이상에서 $\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$과 값이 같은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0378 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to-2}\frac{5^{x+2}-1}{\ln(x+3)}$에서 $x+2=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -2$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{5^{x+2}-1}{\ln(x+3)}+\lim_{x\to0}\frac{x}{\log_3(1+2x)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{5^t-1}{\ln(1+t)}+\lim_{x\to0}\frac{2x}{\log_3(1+2x)}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{5^t-1}{t}+\ln3\cdot\frac{1}{2}$$
$$=1\cdot\ln5+\ln\sqrt{3}$$
$$=\ln5\sqrt{3}$$

답 ④

0379 전략 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 (i) $x>0$일 때,

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{e^{2x}-1}{2x}$$

$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$이고 $\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=1$$

(ii) $-1<x<0$일 때,

$$\frac{e^{2x}-1}{2x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$\lim_{x\to0-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$이고 $\lim_{x\to0-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$

$\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x}$에서 $3x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{\frac{t}{3}}=3\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$$
$$=3\cdot1=3$$

답 ③

0380 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$을 이용하여 $f(n)$을 간단히 정리한다.

풀이
$$f(n)=\lim_{x\to0}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(1+kx)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{x}+\cdots+\frac{\ln(1+2nx)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot2+\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot3+\cdots+\frac{\ln(1+2nx)}{2nx}\cdot2n\right\}$$
$$=1+2+3+\cdots+2n$$
$$=\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{n(2n+1)}=\frac{4}{2}=2$$

답 2

0381 전략 $f(x)$가 $x>0$인 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

풀이 조건 (나)에서 $x\ne1$일 때, $f(x)=\frac{a\ln x+b-2}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x>0$인 모든 실수에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=5\ (\because (가))$$
$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{a\ln x+b-2}{x-1}=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(a\ln x+b-2)=0$이므로

$b-2=0$ $\quad\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\ln x}{x-1}=5$$

$x-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{a\ln x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{a\ln(1+t)}{t}=a\cdot1=a$$
$$\therefore a=5$$

따라서 $x>0$에서 $f(x)=\begin{cases}\frac{5\ln x}{x-1} & (x\ne1)\\ 5 & (x=1)\end{cases}$이므로

$$f(2)=\frac{5\ln2}{2-1}=5\ln2$$

답 $5\ln2$

04 삼각함수의 미분

Ⅱ. 미분법

0382 $\overline{OP}=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$이므로

(1) $\csc\theta=-\frac{13}{5}$ (2) $\sec\theta=\frac{13}{12}$

(3) $\cot\theta=-\frac{12}{5}$ 답 풀이 참조

0383 $\csc\theta=\csc\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$

$\sec\theta=\sec\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\cos\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}$

$\cot\theta=\cot\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\tan\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{-1}=-1$ 답 풀이 참조

0384 $\csc\theta=\csc\frac{7}{6}\pi=\frac{1}{\sin\frac{7}{6}\pi}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

$\sec\theta=\sec\frac{7}{6}\pi=\frac{1}{\cos\frac{7}{6}\pi}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot\theta=\cot\frac{7}{6}\pi=\frac{1}{\tan\frac{7}{6}\pi}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$ 답 풀이 참조

0385 $\csc\theta=\csc 150°=\frac{1}{\sin 150°}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\sec\theta=\sec 150°=\frac{1}{\cos 150°}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot\theta=\cot 150°=\frac{1}{\tan 150°}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\sqrt{3}$ 답 풀이 참조

0386 $\csc\theta=\csc 300°=\frac{1}{\sin 300°}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec\theta=\sec 300°=\frac{1}{\cos 300°}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\cot\theta=\cot 300°=\frac{1}{\tan 300°}=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 풀이 참조

0387 $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\sec^2\theta$ $\therefore \sec^2\theta=\frac{5}{4}$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sec\theta<0$

$\therefore \sec\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 답 $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

0388 $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로

$\csc^2\theta=1+\frac{1}{\tan^2\theta}=1+\frac{1}{(-3)^2}=\frac{10}{9}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\csc\theta>0$

$\therefore \csc\theta=\frac{\sqrt{10}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{10}}{3}$

0389 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$이고
$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)=\cos^2\theta\sec^2\theta=1$ 답 1

0390 $\sin 15°=\sin(45°-30°)$

$=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

답 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

참고 $15°=60°-45°$임을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수도 있다.

0391 $\cos 105°=\cos(45°+60°)$

$=\cos 45°\cos 60°-\sin 45°\sin 60°$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

답 $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

0392 $\tan 75°=\tan(30°+45°)$

$=\frac{\tan 30°+\tan 45°}{1-\tan 30°\tan 45°}$

$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$ 답 $2+\sqrt{3}$

0393 $\sin 10°\cos 35°+\cos 10°\sin 35°$

$=\sin(10°+35°)=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0394 $\cos 40°\cos 20°-\sin 40°\sin 20°$

$=\cos(40°+20°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0395 $\frac{\tan 80°-\tan 20°}{1+\tan 80°\tan 20°}=\tan(80°-20°)$

$=\tan 60°=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

0396 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

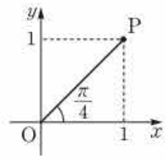
$\therefore \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{3}{4}$이므로

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{24}{7}$ 답 풀이 참조

0397 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 P(1, 1)을 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

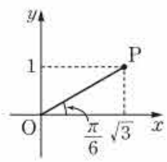
$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 답 $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

0398 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 P($\sqrt{3}$, 1)을 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

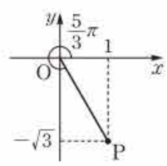
$\therefore\ \sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

$=2\left(\sin\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

$=2\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 답 $2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

0399 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 P(1, $-\sqrt{3}$)을 잡으면



$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

$\therefore\ \sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

$=2\left(\sin\theta\cdot\dfrac{1}{2}-\cos\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left\{\sin\theta\cos\dfrac{5}{3}\pi-\cos\theta\left(-\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)\right\}$

$=2\left(\sin\theta\cos\dfrac{5}{3}\pi+\cos\theta\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{3}\pi\right)$ 답 $2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{3}\pi\right)$

0400 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0401 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos 2x=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

0402 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{\tan x}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

0403 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x)=2$ 답 2

0404 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to0}2\cos x=2\cdot1=2$ 답 2

0405 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{\cos x}=-1$ 답 -1

0406 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}\cdot1=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

0407 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot3=1\cdot3=3$ 답 3

0408 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\tan x}{x}=5\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=5\cdot1=5$ 답 5

0409 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{2x}\cdot\dfrac{2}{3}=1\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

0410 답 $y'=\cos x$

0411 답 $y'=1-3\sin x$

0412 답 $y'=-\cos x+2\sin x$

0413 답 $y'=\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{x}$

0414 $y=\sin^2 x=\sin x\sin x$이므로

$y'=\cos x\sin x+\sin x\cos x$

$=2\sin x\cos x$ 답 $y'=2\sin x\cos x$

0415 $y'=\cos x+x(-\sin x)$

$=\cos x-x\sin x$ 답 $y'=\cos x-x\sin x$

0416 $y'=e^x\sin x+e^x\cos x$

$=e^x(\sin x+\cos x)$ 답 $y'=e^x(\sin x+\cos x)$

0417 $y'=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x$ 답 $y'=\cos^2 x-\sin^2 x$

0418 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$이므로

$\csc\theta=-\dfrac{5}{4}$, $\sec\theta=\dfrac{5}{3}$

$\therefore\ \csc\theta+\sec\theta=\dfrac{5}{12}$ 답 ⑤

0419 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}$ 이므로

$$\csc^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}=5,\ \cot^2\theta=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}}=4$$

$\therefore \csc^2\theta+\cot^2\theta=9$ 답 9

0420 점 P의 좌표를 $(a,\ -\sqrt{3}a)\ (a<0)$라 하면

$\overline{OP}=\sqrt{a^2+(-\sqrt{3}a)^2}=-2a\ (\because a<0)$

이므로

$$\csc\theta=\frac{-2a}{-\sqrt{3}a}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \sec\theta=\frac{-2a}{a}=-2,$$

$$\cot\theta=\frac{a}{-\sqrt{3}a}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$ ❶

$$\therefore \csc\theta\sec\theta+\cot\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot(-2)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{3}$$ ❷

답 $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 값을 각각 구할 수 있다.	70 %
❷ $\csc\theta\sec\theta+\cot\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0421 (ⅰ) $\csc\theta\tan\theta<0$일 때,

$\csc\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ⅱ) $\sec\theta\cot\theta<0$일 때,

$\sec\theta$와 $\cot\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 θ는 제3사분면의 각이다. 답 ③

0422 $$\frac{1+\sin\theta}{\csc\theta-\cot\theta}-\frac{1-\sin\theta}{\csc\theta+\cot\theta}$$

$$=\frac{(1+\sin\theta)(\csc\theta+\cot\theta)-(1-\sin\theta)(\csc\theta-\cot\theta)}{(\csc\theta-\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta)}$$

$$=\frac{2\cot\theta+2}{\csc^2\theta-\cot^2\theta}$$

$$=\frac{2\cot\theta+2}{(1+\cot^2\theta)-\cot^2\theta}$$

$=2\cot\theta+2$ 답 $2\cot\theta+2$

0423 ① $\cos\theta\sec\theta+\tan\theta\cot\theta=1+1=2$

② $$\frac{1}{1-\tan\theta}+\frac{1}{1-\cot\theta}=\frac{1}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{1}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\frac{-\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=1$$

③ $$\tan^2\theta\cos^2\theta+\cot^2\theta\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\sin^2\theta$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

④ $(\csc\theta+1)(\sec\theta+1)(\csc\theta-1)(\sec\theta-1)$

$=(\csc\theta+1)(\csc\theta-1)(\sec\theta+1)(\sec\theta-1)$

$=(\csc^2\theta-1)(\sec^2\theta-1)$

$=\cot^2\theta\tan^2\theta=1$

⑤ $\csc\theta(\tan\theta-\sin\theta)=\csc\theta\tan\theta-\csc\theta\sin\theta$

$$=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}-1=\sec\theta-1$$

답 ⑤

0424 $\csc\theta\sec\theta<0$에서 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta\cot\theta>0$에서 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이므로 θ는 제2사분면의 각이다.

$$\therefore \sqrt{1+\tan^2\theta}\sqrt{\csc^2\theta-1}=\sqrt{\sec^2\theta}\sqrt{\cot^2\theta}$$

$$=(-\sec\theta)(-\cot\theta)$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

답 ④

0425 $\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\csc\theta=\frac{5}{4}$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}=\frac{4}{5}$ 답 ④

0426 $\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$

$\sec^2\theta=\tan^2\theta+1=\left(\frac{2}{3}\right)^2+1=\frac{13}{9}$

$\therefore \csc^2\theta+\sec^2\theta=\frac{169}{36}$ 답 $\frac{169}{36}$

0427 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

$\therefore \csc\theta\sec\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{9}{4}$ 답 $-\frac{9}{4}$

0428 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

$1-2\sin\theta\cos\theta=2$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$$\therefore \sec\theta-\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$$

답 ②

0429 $\sin 70° \sin 100° - \sin 20° \sin 10°$

$= \sin(90° - 20°) \sin(90° + 10°) - \sin 20° \sin 10°$

$= \cos 20° \cos 10° - \sin 20° \sin 10°$

$= \cos(20° + 10°)$

$= \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0430 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$= \frac{\sin(2\alpha - \alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$= \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$

답 ④

다른풀이 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha}$

$= 2\cos\alpha - 2\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}$

$= \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$

0431 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan\alpha + 1}{1 - \tan\alpha}$이므로

$\frac{\tan\alpha + 1}{1 - \tan\alpha} = 2, \quad \tan\alpha + 1 = 2 - 2\tan\alpha$

$3\tan\alpha = 1 \quad \therefore \tan\alpha = \frac{1}{3}$

답 ④

0432 $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$이므로

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ ··· ❶

$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$이므로

$\sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\because \frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$ ··· ❷

$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= \frac{2\sqrt{10} - 2}{9}$ ··· ❸

답 $\frac{2\sqrt{10} - 2}{9}$

채점 기준	비율
❶ $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sin\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0433 $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \frac{1}{4}$ ······ ㉠

$\cos\alpha + \cos\beta = 1$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = 1$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면 $\quad 2 + 2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) = \frac{5}{4}$

$\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta = -\frac{3}{8}$

$\therefore \cos(\alpha - \beta) = -\frac{3}{8}$

답 ②

0434 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{1}{3}, \ \tan\alpha\tan\beta = -\frac{2}{3}$

$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{5}$

답 ①

0435 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha + \tan\beta = -\frac{3}{2}, \ \tan\alpha\tan\beta = \frac{a}{2}$

$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{-\frac{3}{2}}{1 - \frac{a}{2}} = -\frac{3}{2 - a} = -3$

$\therefore a = 1$

답 1

0436 두 직선 $y = x + 1$, $y = 3x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha = 1, \ \tan\beta = 3$

이므로

$\tan\theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left|\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}\right|$

$= \left|\frac{1 - 3}{1 + 1 \cdot 3}\right| = \frac{1}{2}$

답 ②

0437 $x - y - 1 = 0$에서 $\quad y = x - 1$

$(2 - \sqrt{3})x - y + 3 = 0$에서 $\quad y = (2 - \sqrt{3})x + 3$

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha = 1, \ \tan\beta = 2 - \sqrt{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left|\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}\right|$

$= \left|\frac{1 - (2 - \sqrt{3})}{1 + 1 \cdot (2 - \sqrt{3})}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

답 $\frac{\pi}{6}$

0438 $ax - y - 3 = 0$에서 $\quad y = ax - 3$

$x - 2y + 2 = 0$에서 $\quad y = \frac{1}{2}x + 1$

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha = a, \ \tan\beta = \frac{1}{2}$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4} \qquad \cdots ❶$$

$$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1, \qquad \frac{a-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}a}=\pm1$$

$$a-\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}a \text{ 또는 } a-\frac{1}{2}=-1-\frac{1}{2}a$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=-\frac{1}{3} \qquad \cdots ❷$$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$$3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1 \qquad \cdots ❸$$

답 -1

채점 기준	비율
❶ $\tan\alpha$, $\tan\beta$에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

0439 $\angle ABC=\theta$라 하면

$$\tan\alpha=\frac{2}{1}=2,\ \tan\beta=\frac{1}{3},\ \theta=\alpha-\beta$$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=1$$

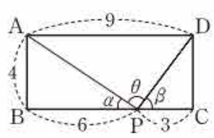
$$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

0440 점 P는 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하므로

$\overline{BP}=6$, $\overline{CP}=3$

$\angle APB=\alpha$, $\angle DPC=\beta$라 하면



$$\tan\alpha=\frac{2}{3},\ \tan\beta=\frac{4}{3}$$

이므로

$$\tan\theta=\tan\{180^\circ-(\alpha+\beta)\}=-\tan(\alpha+\beta)$$

$$=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=-\frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}}=-18$$

답 -18

0441 $\overline{PQ}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=\sqrt{3}$이므로

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=3$$

$$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=3$$

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$$

답 ③

0442 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2} \qquad \therefore 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$$

답 ③

0443 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sin2\theta-\cos2\theta$$

$$=2\sin\theta\cos\theta-(1-2\sin^2\theta)$$

$$=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\left\{1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}$$

$$=-\frac{4\sqrt{2}+7}{9}$$

답 $-\frac{4\sqrt{2}+7}{9}$

0444 $y=\cos2x+4\sin x-1$

$$=(1-2\sin^2x)+4\sin x-1$$

$$=-2\sin^2x+4\sin x$$

$$=-2(\sin x-1)^2+2$$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로 주어진 함수는 $\sin x=1$일 때 최댓값 2, $\sin x=-1$일 때 최솟값 -6을 갖는다.

따라서 $M=2$, $m=-6$이므로

$$M+m=-4$$

답 -4

0445 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{5}{2}\text{에서} \qquad \sin\theta\cos\theta=\frac{2}{5} \qquad \cdots ❶$$

$$\therefore \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{5} \qquad \cdots ❷$$

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $0<2\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos2\theta>0$

$$\therefore \cos2\theta=\sqrt{1-\sin^22\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5} \qquad \cdots ❸$$

답 $\frac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin2\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\cos2\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0446 $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$

$$=2\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos x+\cos\frac{2}{3}\pi\sin x\right)$$

$$=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

따라서 $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2}{3}\pi$만큼 평행이동한 것이므로

$a=2,\ b=-\frac{2}{3}\pi$

$\therefore ab=-\frac{4}{3}\pi$ 답 ①

0447 $12\sin\theta+5\cos\theta$

$=13\left(\sin\theta\cdot\frac{12}{13}+\cos\theta\cdot\frac{5}{13}\right)$

$=13(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$

$=13\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{5}{13},\ \cos\alpha=\frac{12}{13}\right)$

$\therefore r=13$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=\frac{5}{12}$이므로

$r\tan\alpha=13\cdot\frac{5}{12}=\frac{65}{12}$ 답 $\frac{65}{12}$

0448 $y=-\sin x+\cos x+3$

$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)+3$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi\sin x+\sin\frac{3}{4}\pi\cos x\right)+3$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)+3$

이때 $-1\le\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)\le1$이므로

$-\sqrt{2}+3\le\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)+3\le\sqrt{2}+3$

따라서 $M=\sqrt{2}+3,\ m=-\sqrt{2}+3$이므로

$Mm=(\sqrt{2}+3)(-\sqrt{2}+3)=7$ 답 7

0449 $y=4\sin x+3\cos x-1$

$=5\left(\sin x\cdot\frac{4}{5}+\cos x\cdot\frac{3}{5}\right)-1$

$=5\sin(x+\alpha)-1$ $\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\right)$

ㄱ. 주기는 2π이다.

ㄴ. 최댓값은 $5-1=4$이다.

ㄷ. 최솟값은 $-5-1=-6$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

라쎈 특강 삼각함수의 최대·최소와 주기

삼각함수	최댓값	최솟값	주기
$y=a\sin(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\cos(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\tan(bx+c)+d$	없다.	없다.	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$

0450 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos x+1$

$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)-\cos x+1$

$=\sqrt{3}\sin x-\cos x-\cos x+1$

$=\sqrt{3}\sin x-2\cos x+1$

$=\sqrt{7}\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}-\cos x\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\right)+1$

$=\sqrt{7}\sin(x+\alpha)+1$ $\left(\text{단, }\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{7}},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-\sqrt{7}+1\le\sqrt{7}\sin(x+\alpha)+1\le\sqrt{7}+1$

따라서 $M=\sqrt{7}+1,\ m=-\sqrt{7}+1$이므로

$M-m=2\sqrt{7}$ 답 $2\sqrt{7}$

0451 $y=a\sin x+\sqrt{3}a\cos x+2$

$=2a\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)+2$

$=2a\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)+2$

$=2a\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2$

이때 $a>0$이고 $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le1$이므로

$-2a+2\le2a\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\le2a+2$

주어진 함수의 최댓값이 8이므로

$2a+2=8\qquad\therefore a=3$ 답 3

0452 $\angle APB=90°$이므로 $\angle PAB=\theta$라 하면

$\overline{AP}=2\cos\theta,\ \overline{PB}=2\sin\theta$ ❶

$\therefore 3\overline{AP}+4\overline{PB}=6\cos\theta+8\sin\theta$

$=10\left(\frac{3}{5}\cos\theta+\frac{4}{5}\sin\theta\right)$

$=10\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\right)$ ❷

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\alpha<\theta+\alpha<\frac{\pi}{2}+\alpha$이므로 $3\overline{AP}+4\overline{PB}$는 $\sin(\theta+\alpha)=1$일 때 최대이며 최댓값은 10이다. ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}$, $\overline{PB}$의 길이를 θ에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $3\overline{AP}+4\overline{PB}$의 식을 삼각함수의 합성을 이용하여 변형할 수 있다.	40 %
❸ $3\overline{AP}+4\overline{PB}$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0453 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3(1-\sin^2x)}{1-\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x}$

$=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)$

$=3\cdot(1+1)=6$

답 6

0454 $\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x+\sin 2x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x+2\sin x\cos x}{1-\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x}{1-\cos x}=0$

답 ③

0455 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-2\sin^2 x)-1}{2\sin x\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=0$

답 0

0456 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\{f(x)\}^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}$

$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0457 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin(-x)}{3x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin 4x}{3x}+\frac{\sin(-x)}{3x}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4}{3}+\frac{\sin(-x)}{-x}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$

$=1\cdot\frac{4}{3}+1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=1$

답 ③

참고 $\sin(-x)=-\sin x$를 이용하여 극한값을 구할 수도 있다.

0458 $x^\circ=\frac{\pi}{180}x$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{\pi}{180}$

$=1\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}$

답 $\frac{\pi}{180}$

0459 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin 5x)}{\sin 2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin 5x)}{\sin 5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2}$

$=1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$

답 ⑤

0460 $f(g(x))=f(\sin x)=3\sin x$

$g(f(x))=g(3x)=\sin 3x$ ··· ❶

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{g(f(x))}{f(g(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{x}{\sin x}$

$=1\cdot 1=1$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $f(g(x))$와 $g(f(x))$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{x\to 0}\frac{g(f(x))}{f(g(x))}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0461 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x-\tan 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 4x}{2x}-\frac{\tan 3x}{2x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 4x}{4x}\cdot 2-\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}\right)$

$=1\cdot 2-1\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0462 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{4}$

$=1\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

답 ②

0463 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x+\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{x}}{1+\frac{\tan 3x}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4}{1+\frac{\tan 3x}{3x}\cdot 3}$

$=\frac{1\cdot 4}{1+1\cdot 3}=1$

답 1

0464 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x\sin x(1+\cos 3x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x\sin x(1+\cos 3x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x\sin x(1+\cos 3x)}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{9}{1+\cos 3x}$

$=1^2\cdot 1\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

0465 $\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x-2\cos x-1}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(3\cos x+1)}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}\cdot(3\cos x+1)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2(\cos x+1)}\cdot(3\cos x+1)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)}\cdot(3\cos x+1)$

$=\lim_{x\to 0}(-1)\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{3\cos x+1}{\cos x+1}$

$=-1\cdot 1^2\cdot 2=-2$

답 -2

0466 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos kx}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos kx)(1+\cos kx)}{3x^2(1+\cos kx)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 kx}{3x^2(1+\cos kx)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 kx}{3x^2(1+\cos kx)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin kx}{kx}\right)^2\cdot\frac{k^2}{3}\cdot\frac{1}{1+\cos kx}$$

$$=1^2\cdot\frac{k^2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{k^2}{6}$$

$\frac{k^2}{6}=\frac{4}{3}$에서 $k^2=8$

$\therefore\ k=2\sqrt{2}\ (\because\ k>0)$

답 ②

0467 $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{t\to0}t\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\lim_{t\to0}t\cdot\left(-\frac{1}{\tan t}\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}\cdot(-1)=-1$$

답 ②

0468 $x-\pi=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\pi$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{1+\cos(t+\pi)}{t\sin(t+\pi)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{-t\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{-t\sin t(1+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos^2 t}{-t\sin t(1+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{-t\sin t(1+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{-1}{1+\cos t}$$

$$=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0469 $x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin\left(\cos\frac{\pi}{4}x\right)}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\frac{\pi}{4}(t+2)\right\}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{4}t\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{4}t\right)}{-\sin\frac{\pi}{4}t}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}t}{\frac{\pi}{4}t}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=1\cdot1\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

답 $-\frac{\pi}{4}$

0470 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$이므로 ⋯ ❶

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{3x+\pi}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\frac{\pi}{3}$일 때 $t\longrightarrow0$이므로 ⋯ ❷

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin t}{3t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\sin x+\sqrt{3}\cos x$를 $r\sin(x+\alpha)$ 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $x+\frac{\pi}{3}=t$로 치환할 수 있다.	30 %
❸ $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{3x+\pi}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0471 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}2x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}2\cdot\frac{\sin t}{t}=2\cdot1=2$$

답 ③

0472 $x^\circ=\frac{\pi}{180}x$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x^\circ\tan\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\tan\frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\tan\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\tan t}{t}=\frac{\pi}{180}\cdot1=\frac{\pi}{180}$$

답 ②

0473 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}\cot\frac{4}{x}=\lim_{t\to0}\sin 2t\cot 4t$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{4t}{\tan 4t}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0474 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+a)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot(x+a)$$

$$=1\cdot a=a$$

$\therefore\ a=5$

$\therefore\ a+b=5$

답 ⑤

0475 $x \longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\ln(x+b)=0$이므로 $\quad \ln b=0 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)}\cdot a$$
$$=1\cdot1\cdot a=a$$

$\therefore a=2$

$\therefore ab=2$

답 ④

0476 $x \longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-2)=0$이므로

$\sqrt{b}-2=0 \quad \therefore b=4$ ··· ❶

$b=4$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+b}-2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+4}-2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x(\sqrt{ax+4}+2)}{ax}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{a}\cdot(\sqrt{ax+4}+2)$$
$$=1\cdot\frac{2}{a}\cdot4=\frac{8}{a}$$

$\frac{8}{a}=2$에서 $\quad a=4$ ··· ❷

$\therefore a-b=0$ ··· ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

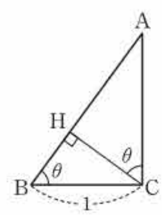
0477 $\triangle ABC \backsim \triangle ACH$이므로

$\angle ACH=\angle ABC=\theta$

$\triangle CBH$에서 $\quad \overline{CH}=\sin\theta$

$\triangle ACH$에서

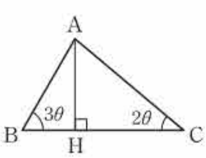
$\overline{AH}=\overline{CH}\tan\theta=\sin\theta\tan\theta$



$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\tan\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}=1\cdot1=1$$

답 1

0478 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

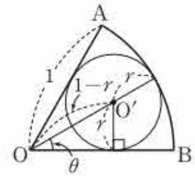


$\overline{AB}=\frac{\overline{AH}}{\sin3\theta}$, $\overline{AC}=\frac{\overline{AH}}{\sin2\theta}$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\overline{AH}}{\sin3\theta}}{\frac{\overline{AH}}{\sin2\theta}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{2\theta}\cdot\frac{3\theta}{\sin3\theta}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0479 오른쪽 그림에서 $\sin\theta=\frac{r}{1-r}$이므로



$(1-r)\sin\theta=r$

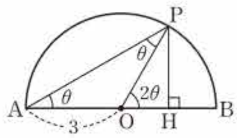
$(1+\sin\theta)r=\sin\theta$

$\therefore r=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{r}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta(1+\sin\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{1+\sin\theta}$$
$$=1\cdot1=1$$

답 ②

0480 $\overline{OA}=\overline{OP}=3$이므로



$\angle OPA=\angle OAP=\theta$

$\triangle OAP$에서

$\angle POH=2\theta$ ··· ❶

$\triangle OPH$에서

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos2\theta=3\cos2\theta$

$\therefore \overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=3-3\cos2\theta=3(1-\cos2\theta)$ ··· ❷

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{3(1-\cos2\theta)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{3(1-\cos2\theta)(1+\cos2\theta)}{\theta^2(1+\cos2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{3(1-\cos^2 2\theta)}{\theta^2(1+\cos2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{3\sin^2 2\theta}{\theta^2(1+\cos2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^2\cdot\frac{12}{1+\cos2\theta}$$
$$=1^2\cdot6=6$$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $\angle POH$의 크기를 θ로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\overline{BH}$의 길이를 θ로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0481 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1) \quad \therefore \lim_{x\to-1}\frac{\sin2(x+1)}{x+1}=k$

$x+1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$k=\lim_{x\to-1}\frac{\sin2(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin2t}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin2t}{2t}\cdot2$$
$$=1\cdot2=2$$

답 ②

0482 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0) \quad \therefore \lim_{x\to0}\frac{\cos x-a}{x}=b \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(\cos x-a)=0$이므로 $\quad 1-a=0$

$\therefore a=1$ ⋯ ❶

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}(-1)\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{\cos x+1}$$
$$=(-1)\cdot1^2\cdot0=0$$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0483 함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)\qquad \therefore \lim_{x\to0}\frac{e^{ax}+b}{\sin x}=2$ ⋯⋯ ㉠

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(e^{ax}+b)=0$이므로 $\quad 1+b=0$

$\therefore b=-1$

$b=-1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot a=1\cdot1\cdot a=a$$

$\therefore a=2$

$\therefore ab=-2$

답 -2

0484 $f(x)=x^2\sin x$에서

$f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\pi}{2}=\pi$

답 ④

0485 $f(x)=e^x\cos x$에서

$f'(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^x(\cos x-\sin x)=0$

$e^x>0$이므로 $\quad \cos x=\sin x$

$0<x<2\pi$이므로 $\quad x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

따라서 구하는 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

답 $\frac{3}{2}\pi$

0486 $f(x)=\cos^2 x=\cos x\cos x$에서

$f'(x)=-\sin x\cos x+\cos x(-\sin x)$
$=-2\sin x\cos x=-\sin 2x$

$$\therefore \lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{\pi-x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin 2x}{\pi-x}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{x-\pi}$$

$x-\pi=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\pi$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(2t+2\pi)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot2$$
$$=1\cdot2=2$$

답 ④

0487 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

이때 $f(x)=\sin x-\cos x$에서 $f'(x)=\cos x+\sin x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

0488 $\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-2h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-2h)-f(\pi)}{-2h}\cdot(-2)$

$=-2f'(\pi)$

이때 $f(x)=\sin x\cos x$에서 $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$이므로

$-2f'(\pi)=-2(\cos^2\pi-\sin^2\pi)=-2$

답 -2

0489 $f(0)=1\cdot(0+1-1)=0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ ⋯ ❶

이때 $f(x)=e^x(\sin x+\cos x-1)$에서

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x-1)+e^x(\cos x-\sin x)$
$=e^x(2\cos x-1)$ ⋯ ❷

이므로

$f'(0)=1\cdot(2-1)=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 변형할 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0490 $f(x)=\cos x$에서 $\quad f'(x)=-\sin x$

ㄱ. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

ㄴ. $f(0)=1$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$
$=-\sin 0=0$

ㄷ. $f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x=-f(x)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

0491 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{f(\pi+h)-f(\pi)\}-\{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$

$=f'(\pi)+f'(\pi)=2f'(\pi)$

이때 $f(x)=x\cos x$에서 $f'(x)=\cos x-x\sin x$이므로

$2f'(\pi)=2(\cos\pi-\pi\sin\pi)=-2$

답 ①

0492 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $\lim\limits_{x\to0+}(ax+b)=\lim\limits_{x\to0-}\sin x=f(0)$

$\therefore b=0$

또 $f'(0)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases} a & (0<x<1) \\ \cos x & (-1<x<0)\end{cases}$$

에서 $\lim\limits_{x\to0+}a=\lim\limits_{x\to0-}\cos x$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a-b=1$

답 ④

0493 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $\lim\limits_{x\to0+}(2x^2+ax+b)=\lim\limits_{x\to0-}(\cos x-x)=f(0)$

$\therefore b=1$

또 $f'(0)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases} 4x+a & (x>0) \\ -\sin x-1 & (x<0)\end{cases}$$

에서 $\lim\limits_{x\to0+}(4x+a)=\lim\limits_{x\to0-}(-\sin x-1)$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore ab=-1$

답 -1

0494 전략 $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}+\dfrac{1}{\sec\theta+\tan\theta}$

$=\dfrac{(\sec\theta+\tan\theta)+(\sec\theta-\tan\theta)}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$

$=\dfrac{2\sec\theta}{1}=2\sec\theta$

답 ④

0495 전략 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 $\sin15^\circ\sin30^\circ-\cos15^\circ\cos30^\circ$

$=-(\cos15^\circ\cos30^\circ-\sin15^\circ\sin30^\circ)$

$=-\cos(15^\circ+30^\circ)$

$=-\cos45^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

0496 전략 직선 $y=ax$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta=a$임을 이용한다.

풀이 두 직선 $y=2x$, $y=\dfrac{1}{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}\right|=1$

$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4}$

답 $\dfrac{\pi}{4}$

0497 전략 삼각함수 사이의 관계와 배각의 공식을 이용한다.

풀이 θ가 제1사분면의 각이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=\dfrac{5}{13}$

$\therefore\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\dfrac{12}{5}$

$\therefore\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot\frac{12}{5}}{1-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=-\dfrac{120}{119}$

답 $-\dfrac{120}{119}$

0498 전략 $x-2=t$로 놓고 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$임을 이용한다.

풀이 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\tan\pi x}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{\tan\pi x}$

$x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{\tan\pi x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t(t+4)}{\tan(\pi t+2\pi)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t(t+4)}{\tan\pi t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\pi t}{\tan\pi t}\cdot\dfrac{t+4}{\pi}$

$=1\cdot\dfrac{4}{\pi}=\dfrac{4}{\pi}$

답 $\dfrac{4}{\pi}$

0499 전략 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $f(x)=\cos x+1$에서 $f(\pi)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$ ··· ❶

$f(x)=\cos x+1$에서

$f'(x)=-\sin x$ ··· ❷

$\therefore f'(\pi)=0$ ··· ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 변형할 수 있다.	50 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f'(\pi)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0500 전략 삼각함수 사이의 관계를 이용한다.

풀이 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ $\quad\therefore\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{8}$

$$\therefore \tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=8$$

답 ③

0501 전략 삼각함수의 덧셈정리와 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용한다.

풀이 $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{3}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{9}{4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면 $\quad 2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\frac{5}{2}$

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$$
$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{4}$$

답 ①

0502 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha+\tan\beta=3a,\ \tan\alpha\tan\beta=a^2+1$$

이때 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$에서

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1, \qquad \frac{3a}{1-(a^2+1)}=1$$
$$3a=-a^2, \qquad a(a+3)=0$$
$$\therefore a=-3\ (\because a\neq 0)$$

답 -3

0503 전략 직선 $y=ax$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta=a$임을 이용한다.

풀이 직선 $y=mx$가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\quad \tan\theta=m$

또 직선 $y=2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기가 2θ이므로

$$\tan 2\theta=2, \qquad \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=2$$
$$\frac{2m}{1-m^2}=2, \qquad m=1-m^2$$
$$m^2+m-1=0 \qquad \therefore m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ (\because m>0)$$

답 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

0504 전략 배각의 공식을 이용하여 $\tan(\angle CAB)$의 값을 구한다.

풀이 $\angle BAD=\angle CAD=\alpha$, $\overline{BD}=x$라 하면

$$\tan\alpha=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore \tan(\angle CAB)=\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

이때 $\tan(\angle CAB)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{x+3}{6}$이므로

$$\frac{x+3}{6}=\frac{4}{3} \qquad \therefore x=5$$

답 ④

0505 전략 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 주어진 식을 정리한 후 삼각함수의 합성을 이용하여 식을 변형한다.

풀이 $y=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+4\cos x+5$

$$=2\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)+4\cos x+5$$
$$=2\sin x+6\cos x+5$$
$$=2\sqrt{10}\sin(x+\theta)+5\ \left(\text{단, } \sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

이때 $-1\le\sin(x+\theta)\le 1$이므로

$$-2\sqrt{10}+5\le 2\sqrt{10}\sin(x+\theta)+5\le 2\sqrt{10}+5$$

따라서 $M=2\sqrt{10}+5$, $m=-2\sqrt{10}+5$이므로

$$Mm=(2\sqrt{10}+5)(-2\sqrt{10}+5)=-15$$

답 ②

0506 전략 배각의 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후 극한값을 구한다.

풀이
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos 2x-1}{1-2\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2(1-2\sin^2 x)-1}{1-2\sin x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-4\sin^2 x}{1-2\sin x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(1+2\sin x)(1-2\sin x)}{1-2\sin x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(1+2\sin x)$$
$$=1+1=2$$

답 ②

0507 전략 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot 1=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0508 전략 주어진 식을 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$을 이용할 수 있도록 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{k\sin f(x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^3 x+3\sin x}{k\sin(2x^3+3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2\sin^2 x+3)}{k\sin(2x^3+3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x^3+3x}{\sin(2x^3+3x)}\cdot\frac{x}{2x^3+3x}\cdot\frac{2\sin^2 x+3}{k}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x^3+3x}{\sin(2x^3+3x)}\cdot\frac{1}{2x^2+3}\cdot\frac{2\sin^2 x+3}{k}$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{k}=\frac{1}{k}$$

$\frac{1}{k}=\frac{1}{3}$에서 $\qquad k=3$

답 ③

0509 전략 $1-\cos kx$ 꼴을 포함한 삼각함수의 극한은 분모, 분자에 각각 $1+\cos kx$를 곱한다.

풀이 $\lim\limits_{x\to0} x^2 f(x)$

$$=\lim_{x\to0} f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2}{1-\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0} f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0} f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{1-\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0} f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot4\cdot\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$=1\cdot1^2\cdot4\cdot2=8$$

답 8

다른 풀이 $f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)=g(x)$라 하면

$\lim\limits_{x\to0} g(x)=1$

$$\therefore \lim_{x\to0} x^2 f(x)=\lim_{x\to0} x^2\cdot\frac{g(x)}{1-\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0} x^2\cdot\frac{g(x)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot4\cdot g(x)\cdot\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$=1^2\cdot4\cdot1\cdot2=8$$

0510 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+a-1}{x\cos x}=b$ …… ㉠ ➊

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to0}(3\sin x+a-1)=0$이므로

$a-1=0$ $\quad\therefore a=1$ ➋

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$b=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{3}{\cos x}=1\cdot3=3$ ➌

$\therefore a+b=4$ ➍

답 4

채점 기준	비율
➊ $f(x)$가 $x=0$에서 연속일 조건을 알 수 있다.	30 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
➍ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0511 전략 미분계수의 정의와 삼각함수의 극한을 이용한다.

풀이 $f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2\sin2h}{1-\cos h}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h\sin2h}{1-\cos h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h\sin2h(1+\cos h)}{(1-\cos h)(1+\cos h)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h\sin2h(1+\cos h)}{1-\cos^2 h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2h\sin h\cos h(1+\cos h)}{\sin^2 h}$$

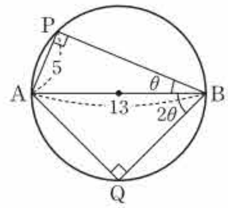
$$=\lim_{h\to0}\frac{2h\cos h(1+\cos h)}{\sin h}$$

$$=\lim_{h\to0}2\cdot\frac{h}{\sin h}\cdot\cos h(1+\cos h)$$

$$=2\cdot1\cdot1\cdot2=4$$

답 ⑤

0512 전략 $\overline{BQ}$의 길이를 $\angle PBA$에 대한 삼각함수로 나타낸다.



풀이 $\angle PBA=\theta$라 하면

$\angle QBA=2\theta$

$\triangle ABP$에서 $\angle APB=90°$이므로

$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$

$\triangle ABQ$에서 $\angle AQB=90°$이므로

$\overline{BQ}=\overline{AB}\cos2\theta=13(1-2\sin^2\theta)$

$$=13\left\{1-2\cdot\left(\frac{5}{13}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{119}{13}$$

답 $\dfrac{119}{13}$

0513 전략 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$임을 이용하여 $f(n)$을 간단히 한다.

풀이 $f(n)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x+\tan2x+\cdots+\tan nx}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\tan x}{x}+\frac{\tan2x}{2x}\cdot2+\cdots+\frac{\tan nx}{nx}\cdot n}$$

$$=\frac{1}{1+2+\cdots+n}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}$$

이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

답 2

04 삼각함수의 미분

0514 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=b$일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(a+\cos x)=0$이므로

$a+1=0\qquad \therefore a=-1$

$a=-1$을 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x\sin x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x\sin x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\sin x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{-1}{\cos x+1}$$
$$=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$\therefore 2ab=1$ 답 ①

0515 전략 점 P와 점 Q의 좌표를 θ를 이용하여 나타낸 후 삼각함수의 극한을 이용한다.

풀이 $\overline{OP}=1$이고 $\angle POB=\theta$이므로

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$

점 P와 점 Q의 y좌표가 같으므로 점 Q의 x좌표는

$\ln(x+1)=\sin\theta$에서

$x+1=e^{\sin\theta}\qquad \therefore x=e^{\sin\theta}-1$

$\therefore Q(e^{\sin\theta}-1,\ \sin\theta)$

따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{QP}\cdot\overline{HO}=\frac{1}{2}(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)\sin\theta,$$
$$L(\theta)=\overline{HQ}=e^{\sin\theta}-1$$

이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}\cdot(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$$

즉 $k=\frac{1}{2}$이므로 $\quad 60k=60\cdot\frac{1}{2}=30$ 답 30

0516 전략 $x\longrightarrow 0$일 때 $\tan x\longrightarrow 0$임을 이용하여 주어진 식을 변형하고 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

풀이 $x\longrightarrow 0$일 때 $\tan x\longrightarrow 0$이고 $f(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\tan x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\tan x)-f(0)}{\tan x-0}\cdot\frac{\tan x}{x}$$
$$=f'(0)\cdot 1=f'(0)$$

이때 $f(x)=2\sin x+\cos x-1$에서 $f'(x)=2\cos x-\sin x$이므로

$f'(0)=2$ 답 ③

05 여러 가지 미분법

Ⅱ. 미분법

0517 $y'=-\frac{(3x+2)'}{(3x+2)^2}=-\frac{3}{(3x+2)^2}$ 답 $y'=-\frac{3}{(3x+2)^2}$

0518 $y'=-\frac{(x^3+x)'}{(x^3+x)^2}=-\frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}$ 답 $y'=-\frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}$

0519 $y'=-\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ 답 $y'=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

0520 $y'=-\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}=-\frac{1}{x(\ln x)^2}$ 답 $y'=-\frac{1}{x(\ln x)^2}$

0521 $y'=\frac{(x-2)'(4x+3)-(x-2)(4x+3)'}{(4x+3)^2}$

$$=\frac{1\cdot(4x+3)-(x-2)\cdot 4}{(4x+3)^2}=\frac{11}{(4x+3)^2}$$

답 $y'=\frac{11}{(4x+3)^2}$

0522 $y'=\frac{x'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

답 $y'=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

0523 $y'=\frac{(2^x)'(x+3)-2^x(x+3)'}{(x+3)^2}$

$$=\frac{2^x\ln 2\cdot(x+3)-2^x\cdot 1}{(x+3)^2}$$
$$=\frac{2^x(x\ln 2+3\ln 2-1)}{(x+3)^2}$$

답 $y'=\frac{2^x(x\ln 2+3\ln 2-1)}{(x+3)^2}$

0524 $y'=\frac{(\log_3 x)'\cdot x-\log_3 x\cdot x'}{x^2}$

$$=\frac{\frac{1}{x\ln 3}\cdot x-\log_3 x\cdot 1}{x^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{\ln 3}-\frac{\ln x}{\ln 3}}{x^2}$$
$$=\frac{1-\ln x}{x^2\ln 3}$$

답 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2\ln 3}$

0525 $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$이므로

$y'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$ 답 $y'=-\frac{1}{x^2}$

0526 $y'=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$ 답 $y'=-\frac{3}{x^4}$

0527 $y=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+x^{-2}$이므로

$y'=2x-2x^{-3}=2x-\frac{2}{x^3}$ 답 $y'=2x-\frac{2}{x^3}$

0528 $y=\frac{x^2-x}{x^5}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}=x^{-3}-x^{-4}$이므로

$y'=-3x^{-4}+4x^{-5}=-\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^5}$ 답 $y'=-\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^5}$

0529 답 $y'=2\cos x+\sec^2 x$

0530 답 $y'=\sec x\tan x-\csc x\cot x$

0531 $y'=(x^2)'\cot x+x^2(\cot x)'$
$=2x\cot x+x^2(-\csc^2 x)$
$=2x\cot x-x^2\csc^2 x$

답 $y'=2x\cot x-x^2\csc^2 x$

0532 $y'=\frac{(\sin x)'(1+\cos x)-\sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$
$=\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$
$=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}$
$=\frac{1}{1+\cos x}$ 답 $y'=\frac{1}{1+\cos x}$

0533 $y'=4(5x-2)^3\cdot(5x-2)'$
$=4(5x-2)^3\cdot 5$
$=20(5x-2)^3$ 답 $y'=20(5x-2)^3$

0534 $y'=e^{4x}\cdot(4x)'=4e^{4x}$ 답 $y'=4e^{4x}$

0535 $y'=3^{3x+1}\cdot\ln 3\cdot(3x+1)'$
$=3^{3x+2}\ln 3$ 답 $y'=3^{3x+2}\ln 3$

0536 $y'=\cos 5x\cdot(5x)'=5\cos 5x$ 답 $y'=5\cos 5x$

0537 $y'=-\sin(3x+2)\cdot(3x+2)'$
$=-3\sin(3x+2)$ 답 $y'=-3\sin(3x+2)$

0538 $y=\frac{1}{(2x+3)^4}=(2x+3)^{-4}$이므로

$y'=-4(2x+3)^{-5}\cdot(2x+3)'$
$=-4(2x+3)^{-5}\cdot 2$
$=-\frac{8}{(2x+3)^5}$ 답 $y'=-\frac{8}{(2x+3)^5}$

다른풀이 $y'=-\frac{\{(2x+3)^4\}'}{(2x+3)^8}=-\frac{4(2x+3)^3\cdot(2x+3)'}{(2x+3)^8}$
$=-\frac{4(2x+3)^3\cdot 2}{(2x+3)^8}=-\frac{8}{(2x+3)^5}$

0539 $y=\left(x+\frac{2}{x}\right)^3=(x+2x^{-1})^3$이므로

$y'=3(x+2x^{-1})^2\cdot(x+2x^{-1})'$
$=3(x+2x^{-1})^2\cdot(1-2x^{-2})$
$=3\left(x+\frac{2}{x}\right)^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$ 답 $y'=3\left(x+\frac{2}{x}\right)^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$

0540 $y'=\frac{(x^3+2x+1)'}{x^3+2x+1}=\frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}$

답 $y'=\frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}$

0541 $y'=\frac{(5x+2)'}{(5x+2)\ln 2}=\frac{5}{(5x+2)\ln 2}$

답 $y'=\frac{5}{(5x+2)\ln 2}$

0542 $y'=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$ 답 $y'=-\tan x$

0543 $y'=\frac{(e^x+2)'}{e^x+2}=\frac{e^x}{e^x+2}$ 답 $y'=\frac{e^x}{e^x+2}$

0544 $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 답 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

0545 $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-\frac{3}{2}}$이므로

$y'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$ 답 $y'=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

0546 답 $y'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$

0547 $y'=ex^{-e-1}=\frac{e}{x^{e+1}}$ 답 $y'=\frac{e}{x^{e+1}}$

0548 $y=\sqrt{x^2+x+1}=(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+x+1)'$
$=\frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+1)$
$=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ 답 $y'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

0549 $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}=(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$y'=-\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^2+3)'$
$=-\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$
$=-\frac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$ 답 $y'=-\frac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

0550 $\dfrac{dx}{dt}=1$, $\dfrac{dy}{dt}=6t^2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=6t^2$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=6t^2$

0551 $\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{t^2}}{2t}=\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{2t}=\frac{t^2-1}{2t^3}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t^2-1}{2t^3}$

0552 $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{(t+2)^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{(t+2)^2}}{-\frac{1}{t^2}}=\left(\frac{t}{t+2}\right)^2$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{t}{t+2}\right)^2$

0553 $\dfrac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}$, $\dfrac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$

0554 $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=-\sin t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-\tan t$

0555 $x^2+2y^2=3$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2x+4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y}\ (y\neq0)$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{2y}\ (y\neq0)$

0556 $y^2-5x=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}-5=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{5}{2y}\ (y\neq0)$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5}{2y}\ (y\neq0)$

0557 $xy=10$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$y+x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}\ (x\neq0)$

0558 $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}+x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2y}}{\frac{x^2+y^2}{xy^2}}=\frac{y}{x}$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$

0559 $\sqrt{y^2+1}=x^2$의 양변을 제곱하면

$$y^2+1=x^4$$

위의 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=4x^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x^3}{y}\ (y\neq0)$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^3}{y}\ (y\neq0)$

0560 $\ln|y|=x^2$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=2x \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=2xy$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$

0561 (1) $g(-3)=a$라 하면 $f(a)=-3$이므로

$a^3+2a=-3,\qquad a^3+2a+3=0$

$(a+1)(a^2-a+3)=0$

그런데 $a^2-a+3>0$이므로 $\qquad a=-1$

따라서 $g(-3)=-1$이고 $f'(x)=3x^2+2$에서 $f'(-1)=5$이므로

$$g'(-3)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{5}$$

(2) $g(12)=a$라 하면 $f(a)=12$이므로

$a^3+2a=12,\qquad a^3+2a-12=0$

$(a-2)(a^2+2a+6)=0$

그런데 $a^2+2a+6>0$이므로 $\qquad a=2$

따라서 $g(12)=2$이고 $f'(x)=3x^2+2$에서 $f'(2)=14$이므로

$$g'(12)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{14}$$

답 (1) $\dfrac{1}{5}$ (2) $\dfrac{1}{14}$

0562 (1) $g(-1)=a$라 하면 $f(a)=-1$이므로

$\tan a=-1 \qquad \therefore a=-\dfrac{\pi}{4}\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $g(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$이고 $f'(x)=\sec^2x$에서 $f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=2$이므로

$$g'(-1)=\frac{1}{f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}$$

(2) $g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=a$라 하면 $f(a)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\tan a=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore a=\dfrac{\pi}{6}\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{\pi}{6}$이고 $f'(x)=\sec^2x$에서 $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{3}$이므로

$$g'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{3}{4}$$

답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{3}{4}$

0563 $y'=4x^3+6x$이므로
$y''=12x^2+6$ 답 $y''=12x^2+6$

0564 $y'=3(5x-1)^2\cdot(5x-1)'=3(5x-1)^2\cdot 5$
$=15(5x-1)^2$
이므로
$y''=15\cdot 2(5x-1)\cdot(5x-1)'$
$=30(5x-1)\cdot 5$
$=150(5x-1)$ 답 $y''=150(5x-1)$

0565 $y'=-\dfrac{(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$이므로
$y''=\dfrac{(-2x)'(x^2+3)^2-(-2x)\cdot 2(x^2+3)\cdot(x^2+3)'}{(x^2+3)^4}$
$=\dfrac{-2(x^2+3)^2+4x(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$
$=\dfrac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}$ 답 $y''=\dfrac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}$

0566 $y'=\dfrac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}}$이므로
$y''=\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)(x-2)^{-\frac{3}{2}}$
$=-\dfrac{1}{4(x-2)\sqrt{x-2}}$ 답 $y''=-\dfrac{1}{4(x-2)\sqrt{x-2}}$

0567 $y'=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}$이므로
$y''=2e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}\cdot 2=4e^{2x}$ 답 $y''=4e^{2x}$

0568 $y'=\dfrac{1}{x+1}$이므로
$y''=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ 답 $y''=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

0569 $y'=-\sin 2x\cdot(2x)'=-2\sin 2x$이므로
$y''=-2\cos 2x\cdot(2x)'=-2\cos 2x\cdot 2=-4\cos 2x$
답 $y''=-4\cos 2x$

0570 $y'=1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)=\cos x-x\sin x$이므로
$y''=-\sin x-(1\cdot\sin x+x\cdot\cos x)$
$=-2\sin x-x\cos x$
답 $y''=-2\sin x-x\cos x$

0571 $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$이므로
$y''=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$
$=2e^x\cos x$ 답 $y''=2e^x\cos x$

0572 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x}$이므로
$f'(x)=-\dfrac{(x^2-3x)'}{(x^2-3x)^2}=-\dfrac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$
$\therefore \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=-\dfrac{2-3}{(1-3)^2}=\dfrac{1}{4}$ 답 $\dfrac{1}{4}$

0573 $f(x)=\dfrac{1}{\sin x+1}$이므로
$f'(x)=-\dfrac{(\sin x+1)'}{(\sin x+1)^2}=-\dfrac{\cos x}{(\sin x+1)^2}$
$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ 답 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

0574 $f(x)=\dfrac{1}{ke^x+2x}$이므로
$f'(x)=-\dfrac{(ke^x+2x)'}{(ke^x+2x)^2}=-\dfrac{ke^x+2}{(ke^x+2x)^2}$
$f'(0)=-1$에서
$-\dfrac{k+2}{k^2}=-1,\quad k^2=k+2$
$k^2-k-2=0,\quad (k+1)(k-2)=0$
$\therefore k=2\ (\because k>0)$ 답 ②

0575 $f(-1)=-1$이므로
$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$ ··· ❶
$f(x)=-\dfrac{4}{x^2+3}$이므로
$f'(x)=\dfrac{4(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\dfrac{8x}{(x^2+3)^2}$ ··· ❷
$\therefore f'(-1)=\dfrac{8\cdot(-1)}{(1+3)^2}=-\dfrac{1}{2}$ ··· ❸
답 $-\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)+1}{x+1}=f'(-1)$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0576 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2-2x+b}$이므로
$f'(x)=\dfrac{a(x^2-2x+b)-ax(2x-2)}{(x^2-2x+b)^2}=\dfrac{-ax^2+ab}{(x^2-2x+b)^2}$
$f'(0)=1$에서 $\dfrac{ab}{b^2}=1,\quad \dfrac{a}{b}=1\ (\because b\neq 0)$
$\therefore a=b$ ······ ㉠
$f'(1)=2$에서 $\dfrac{-a+ab}{(b-1)^2}=2,\quad \dfrac{a}{b-1}=2\ (\because b\neq 1)$
$\therefore a=2b-2$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=2,\ b=2$
$\therefore a+b=4$ 답 ③

0577 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$이므로
$f'(x)=\dfrac{\sin x(1+\cos x)-(1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$
$=\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

답 ④

0578 $f(x)=\frac{x^2+4}{x+1}$이므로

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-(x^2+4)\cdot1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{(x^2+2x+1)-5}{(x+1)^2}=1-\frac{5}{(x+1)^2}$$

따라서 $a=1$, $b=5$이므로 $a+b=6$

답 6

0579 $g(x)=\frac{x-1}{f(x)}$이므로

$$g'(x)=\frac{f(x)-(x-1)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$
$$\therefore g'(0)=\frac{f(0)+f'(0)}{\{f(0)\}^2}=\frac{1+2}{1^2}=3$$

답 3

0580 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$
$$=\frac{1}{2}f'(1)$$

$f(x)=\frac{e^x-1}{x+1}$이므로

$$f'(x)=\frac{e^x(x+1)-(e^x-1)\cdot1}{(x+1)^2}=\frac{xe^x+1}{(x+1)^2}$$
$$\therefore \frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{e+1}{(1+1)^2}=\frac{e+1}{8}$$

답 $\frac{e+1}{8}$

0581 $f(x)=\frac{x^3+4x^2-6}{x^2}=x+4-6x^{-2}$이므로

$$f'(x)=1+12x^{-3}=1+\frac{12}{x^3}$$
$$\therefore f'(1)+f'(2)=13+\frac{5}{2}=\frac{31}{2}$$

답 $\frac{31}{2}$

0582 $y=\frac{2}{3x}=\frac{2}{3}x^{-1}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}x^{-2}=-\frac{2}{3x^2}$$

따라서 $x=2$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$-\frac{2}{12}=-\frac{1}{6}$$

이므로 구하는 순간변화율은 $-\frac{1}{6}$ L/Pa이다.

답 ⑤

0583 $f(x)=x^{-1}+x^{-3}+x^{-5}+x^{-7}+x^{-9}$이므로

$$f'(x)=-x^{-2}-3x^{-4}-5x^{-6}-7x^{-8}-9x^{-10}$$
$$\therefore f'(1)=-1-3-5-7-9=-25$$

답 -25

0584 $f(x)=\frac{x^2}{1+\sec x}$이므로

$$f'(x)=\frac{2x(1+\sec x)-x^2\sec x\tan x}{(1+\sec x)^2}$$

$$\therefore f'(2\pi)=\frac{2\cdot2\pi\cdot(1+\sec2\pi)-(2\pi)^2\cdot\sec2\pi\cdot\tan2\pi}{(1+\sec2\pi)^2}$$
$$=\frac{4\pi\cdot(1+1)-4\pi^2\cdot1\cdot0}{(1+1)^2}=2\pi$$

답 ⑤

0585 $f(x)=\sec x-\csc x$이므로

$$f'(x)=\sec x\tan x+\csc x\cot x$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4}+\csc\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{4}$$
$$=\sqrt{2}\cdot1+\sqrt{2}\cdot1=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

0586 $f(0)=\frac{\sin0}{1+\tan0}=0$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)$$ ··· ❶

$f(x)=\frac{\sin x}{1+\tan x}$이므로

$$f'(x)=\frac{\cos x(1+\tan x)-\sin x\sec^2x}{(1+\tan x)^2}$$ ··· ❷

$$\therefore f'(0)=\frac{\cos0(1+\tan0)-\sin0\cdot\sec^20}{(1+\tan0)^2}$$
$$=\frac{1\cdot(1+0)-0\cdot1^2}{(1+0)^2}=1$$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0587 $f(x)=(3x^2+ax-1)^4$이므로

$$f'(x)=4(3x^2+ax-1)^3\cdot(3x^2+ax-1)'$$
$$=4(3x^2+ax-1)^3(6x+a)$$

$f'(0)=-16$에서

$4\cdot(-1)^3\cdot a=-16 \qquad \therefore a=4$

답 ③

0588 $f(x)=e^{2x}+e^{x^2}$이므로

$$f'(x)=e^{2x}\cdot2+e^{x^2}\cdot2x=2(e^{2x}+xe^{x^2})$$
$$\therefore f'(0)+f'(1)=2(1+0\cdot1)+2(e^2+1\cdot e)$$
$$=2(e^2+e+1)$$

답 $2(e^2+e+1)$

0589 $h(x)=f(g(x))=e^{\cos x}$이므로

$$h'(x)=e^{\cos x}(\cos x)'=-e^{\cos x}\sin x$$
$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{\cos\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

답 ③

0590 $y=(x\ln x)^3$이므로

$$y'=3(x\ln x)^2\cdot(x\ln x)'=3(x\ln x)^2\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)$$
$$=3(x\ln x)^2(\ln x+1)$$

따라서 $x=e$에서의 미분계수는

$3(e\cdot1)^2(1+1)=6e^2$

답 ⑤

0591 (1) 모서리의 길이가 길어지기 시작한 지 t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(2+3t)$ cm이므로 정육면체의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=(2+3t)^3$ ⋯ ❶

(2) $V=(2+3t)^3$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dV}{dt}=3(2+3t)^2\cdot(2+3t)'=9(2+3t)^2$ ⋯ ❷

따라서 $t=2$일 때의 $\dfrac{dV}{dt}$의 값은

$9(2+3\cdot2)^2=576$

이므로 모서리의 길이가 길어지기 시작한 지 2초 후의 정육면체의 부피의 변화율은 576 cm^3/s이다. ⋯ ❸

답 (1) $(2+3t)^3$ cm^3 (2) 576 cm^3/s

채점 기준	비율
❶ V를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\dfrac{dV}{dt}$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $t=2$일 때의 $\dfrac{dV}{dt}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0592 $h(x)=g(f(x))$에서 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$h'(-1)=28$이므로

$g'(f(-1))f'(-1)=28$

이때 $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$이므로

$f'(x)=\dfrac{3(x+2)-(3x-1)\cdot1}{(x+2)^2}=\dfrac{7}{(x+2)^2}$

$\therefore f(-1)=-4,\ f'(-1)=7$

따라서 $g'(-4)\cdot7=28$이므로 $g'(-4)=4$ 답 ④

0593 $y=2^{f(x)}$이므로 $y'=2^{f(x)}\ln2\cdot f'(x)$

따라서 $x=2$에서의 미분계수는

$2^{f(2)}\ln2\cdot f'(2)=2^{-1}\ln2\cdot4=2\ln2$ 답 $2\ln2$

0594 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$이므로

$y'=f'(g(x))g'(x)$

따라서 $x=-1$에서의 미분계수는

$f'(g(-1))g'(-1)=f'(-1)g'(-1)$

$=2\cdot3=6$ 답 ③

0595 $F(x)=f(f(x))$로 놓으면

$F(0)=f(f(0))=f(0)=0$ ⋯ ❶

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)$ ⋯ ❷

$F'(x)=\{f(f(x))\}'=f'(f(x))f'(x)$이므로

$F'(0)=f'(f(0))f'(0)=f'(0)f'(0)=2\cdot2=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $F(0)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(f(x))}{x}=F'(0)$임을 알 수 있다.	40 %
❸ $F'(0)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0596 $f(2x+1)=x^3-2x^2+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(2x+1)\cdot2=3x^2-4x$

$\therefore f'(2x+1)=\dfrac{3x^2-4x}{2}$

$2x+1=3$에서 $x=1$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(3)=\dfrac{3-4}{2}=-\dfrac{1}{2}$ 답 ④

0597 $f(x)=f(4x-1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4f'(4x-1)$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=4f'(7)$, $8=4f'(7)$

$\therefore f'(7)=2$ 답 ⑤

0598 $3x-2=1$에서 $x=1$이므로 $f(3x-2)=\sin\pi x+\cos\pi x$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\sin\pi+\cos\pi=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$f(3x-2)=\sin\pi x+\cos\pi x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(3x-2)\cdot3=\pi\cos\pi x-\pi\sin\pi x$

$\therefore f'(3x-2)=\dfrac{\pi(\cos\pi x-\sin\pi x)}{3}$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=\dfrac{\pi(\cos\pi-\sin\pi)}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$ 답 $-\dfrac{\pi}{3}$

0599 $f(x)=\ln(x^4-3x^3+10)$이므로

$f'(x)=\dfrac{4x^3-9x^2}{x^4-3x^3+10}$

$\therefore f'(1)=\dfrac{4\cdot1-9\cdot1}{1-3\cdot1+10}=-\dfrac{5}{8}$ 답 $-\dfrac{5}{8}$

0600 $y=\ln|\ln x|$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{1}{x\ln x}$ 답 ①

0601 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$

$=\dfrac{1}{2}\{\ln(1+\cos x)-\ln(1-\cos x)\}$

$\therefore y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}-\dfrac{\sin x}{1-\cos x}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-\sin x(1-\cos x)-\sin x(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2\sin x}{1-\cos^2 x}=-\dfrac{\sin x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin x}$

따라서 $x=\dfrac{\pi}{3}$에서의 미분계수는

$-\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 답 ①

05 여러 가지 미분법

0602 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$ ⋯ ❶

$f(x)=\log_2\sqrt{x^2+2}=\frac{1}{2}\log_2(x^2+2)$이므로

$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+2)\ln 2}=\frac{x}{(x^2+2)\ln 2}$ ⋯ ❷

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=2\cdot\frac{1}{(1+2)\ln 2}=\frac{2}{3\ln 2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{2}{3\ln 2}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=2f'(1)$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $2f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0603 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=2\ln|x|+\ln|x-1|-3\ln|x-3|$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-3}$

$\therefore f'(x)=f(x)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-3}\right)$

$f(2)=\frac{2^2\cdot(2-1)}{(2-3)^3}=-4$이므로

$f'(2)=-4\cdot(1+1+3)=-20$

답 -20

0604 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln|x+1|+3\ln|x+3|-2\ln|x+2|-4\ln|x+4|$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x+2}-\frac{4}{x+4}$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f(x)}=1+1-1-1=0$

답 ③

0605 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=\sin x\ln x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{y'}{y}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$

$\therefore y'=y\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

$=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

따라서 $x=\frac{\pi}{2}$에서의 미분계수는

$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sin\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot\ln\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=1$

답 ③

0606 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x\cdot\ln x=(\ln x)^2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$

$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\frac{2\ln x}{x}=x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x}$

$\therefore f'(e)=e\cdot\frac{2}{e}=2$

답 2

0607 $f(x)=3x^{\sqrt{3}}$이므로

$f'(x)=3\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$

$\therefore f'(3)=3\sqrt{3}\cdot 3^{\sqrt{3}-1}=3^{1+\frac{1}{2}+\sqrt{3}-1}=3^{\frac{1}{2}+\sqrt{3}}$

따라서 $k=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$이므로

$a=\frac{1}{2}$, $b=1$ $\quad\therefore a+b=\frac{3}{2}$

답 ③

0608 $f(x)=\sqrt{x^3+1}=(x^3+1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)=\frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$

$\therefore f'(2)=\frac{3\cdot 2^2}{2\sqrt{2^3+1}}=2$

답 2

0609 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x^3+1}}=(2x^3+1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)=-\frac{1}{2}(2x^3+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 6x^2$

$=-\frac{3x^2}{(2x^3+1)\sqrt{2x^3+1}}$

$=f(x)\cdot\left(-\frac{3x^2}{2x^3+1}\right)$

따라서 $g(x)=-\frac{3x^2}{2x^3+1}$이므로

$g(1)=-\frac{3}{2+1}=-1$

답 -1

다른풀이 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x^3+1}}$, $f'(x)=-\frac{3x^2}{(2x^3+1)\sqrt{2x^3+1}}$이므로

$f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(1)=-\frac{3}{3\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f'(x)=f(x)g(x)$에서 $f'(1)=f(1)g(1)$이므로

$-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}g(1)$ $\quad\therefore g(1)=-1$

0610 $\frac{dx}{dt}=-\frac{2}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{2t\cdot t-(1+t^2)\cdot 1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{-\frac{2}{t^2}}=\frac{1-t^2}{2}$

따라서 $t=2$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2^2}{2}=-\frac{3}{2}$

답 $-\frac{3}{2}$

0611 $\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{dx}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{1-0}=1$$

답 ②

0612 $\dfrac{dx}{dt}=1$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{2t}{1}=2t \quad \cdots ❶$$

이때 $2t=-1$에서 $t=-\dfrac{1}{2}$이므로

$$a=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ b=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2=\frac{9}{4} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore a+b=\frac{11}{4} \quad \cdots ❸$$

답 $\dfrac{11}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0613 $\dfrac{dx}{dt}=10$, $\dfrac{dy}{dt}=-10t+10$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-10t+10}{10}=-t+1$$

따라서 $t=\dfrac{3}{2}$일 때 $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{2}+1=-\dfrac{1}{2}$

답 $-\dfrac{1}{2}$

0614 $x^3+ax-by^3=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2+a-3by^2\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+a}{3by^2}\ (y\neq0)$$

$x=1$, $y=1$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 $\dfrac{2}{3}$이므로

$$\frac{3+a}{3b}=\frac{2}{3}, \qquad 9+3a=6b$$

$\therefore a-2b=-3 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 주어진 곡선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1+a-b=0$

$\therefore a-b=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=3$

답 ③

0615 $(x+1)^2-(y-1)^2=2$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2(x+1)-2(y-1)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y-1}\ (y\neq1)$$

답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+1}{y-1}\ (y\neq1)$

0616 $x+\sin x-xy=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$1+\cos x-y-x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1+\cos x-y}{x}\ (x\neq0)$$

위의 식에 $x=\pi$, $y=1$을 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\cos\pi-1}{\pi}=-\frac{1}{\pi}$$

답 $-\dfrac{1}{\pi}$

0617 (1) $x^2+y^2=5^2$, 즉 $x^2+y^2=25$ $\quad \cdots ❶$

(2) $x^2+y^2=25$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ (y\neq0) \quad \cdots ❷$$

(3) $x=3$일 때 $y=4$이므로

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{4} \quad \cdots ❸$$

답 (1) $x^2+y^2=25$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}\ (y\neq0)$ (3) $-\dfrac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ x, y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $x=3$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0618 $f(1)=2$이므로 $\quad g(2)=1$

$$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$$

답 ①

0619 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$a^3+2a+1=1, \qquad a(a^2+2)=0$

$\therefore a=0$

$g(4)=b$라 하면 $f(b)=4$이므로

$b^3+2b+1=4, \qquad (b-1)(b^2+b+3)=0$

$\therefore b=1$

즉 $g(1)=0$, $g(4)=1$이고 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$$\begin{aligned} g'(1)+g'(4)&=\frac{1}{f'(g(1))}+\frac{1}{f'(g(4))}\\ &=\frac{1}{f'(0)}+\frac{1}{f'(1)}\\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\\ &=\frac{7}{10} \end{aligned}$$

답 $\dfrac{7}{10}$

0620 $f(e)=e+\ln e=e+1$이므로

$g(e+1)=e \quad \cdots ❶$

$f(x)=x+\ln x$이므로 $\quad f'(x)=1+\dfrac{1}{x} \quad \cdots ❷$

$$\begin{aligned} \therefore g'(e+1)&=\frac{1}{f'(g(e+1))}=\frac{1}{f'(e)}\\ &=\frac{1}{1+\dfrac{1}{e}}=\frac{e}{e+1} \quad \cdots ❸ \end{aligned}$$

답 $\dfrac{e}{e+1}$

채점 기준	비율
❶ $g(e+1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $g'(e+1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0621 $\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-2h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)+g(1)-g(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(1-2h)-g(1)}{-2h}\cdot2$$
$$=g'(1)+2g'(1)=3g'(1)$$

$g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$$\tan a=1 \qquad \therefore a=\frac{\pi}{4}\left(\because 0\le a<\frac{\pi}{2}\right)$$

따라서 $g(1)=\frac{\pi}{4}$이고 $f'(x)=\sec^2 x$이므로

$$3g'(1)=3\cdot\frac{1}{f'(g(1))}=3\cdot\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$=3\cdot\frac{1}{\sec^2\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}$$

답 ⑤

0622 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\frac{1}{2}$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}=0$이므로 $\quad f(1)=3$

$$\therefore g(3)=1$$

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$$f'(1)=\frac{1}{2}$$
$$\therefore g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(1)}=2$$

답 ⑤

라쎈 특강 함수의 극한의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면
$\lim_{x\to a}f(x)=0$

② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면
$\lim_{x\to a}g(x)=0$

0623 $x=\sqrt{y^2+2}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{2\sqrt{y^2+2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+2}}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{y^2+2}}{y}$$

따라서 $y=4$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\quad\frac{\sqrt{4^2+2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

0624 $x=e^y+2y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=e^y+2$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y+2}$$

$x=e^y+2y$에서 $x=1$일 때 $\quad y=0$

따라서 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{1}{e^0+2}=\frac{1}{3}$$

답 ①

0625 $x=\tan y+\sec y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\sec^2 y+\sec y\tan y$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sec^2 y+\sec y\tan y}$$

따라서 $y=\frac{\pi}{4}$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{1}{(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}\cdot1}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

0626 $f(x)=\ln(x^2+2)$이므로

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}$$
$$f''(x)=\frac{2(x^2+2)-2x\cdot2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$$
$$\therefore f'(1)+f''(1)=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$$

답 ③

0627 $f(x)=e^x\cos x$이므로

$$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$$
$$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$$
$$=-2e^x\sin x$$
$$\therefore \frac{f''(x)}{f(x)}=\frac{-2e^x\sin x}{e^x\cos x}=-2\tan x$$

답 ②

0628 $f(x)=\ln x^{\ln x}=(\ln x)^2$이므로

$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$$
$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln x\cdot1}{x^2}=\frac{2-2\ln x}{x^2}$$
$$\therefore f''(\sqrt{e})=\frac{2-2\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\frac{1}{e}$$

답 $\frac{1}{e}$

0629 $f(x)=xe^{ax+b}$이므로

$f'(x)=e^{ax+b}+xe^{ax+b}\cdot a=(ax+1)e^{ax+b}$

$f''(x)=ae^{ax+b}+(ax+1)e^{ax+b}\cdot a=a(ax+2)e^{ax+b}$ ⋯ ❶

$f'(0)=e$에서 $\quad e^b=e \quad \therefore b=1$

$f''(0)=4e$에서 $\quad 2ae=4e \quad \therefore a=2$ ⋯ ❷

$\therefore ab=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0630 $y=e^{ax}\sin x$이므로

$$y'=ae^{ax}\sin x+e^{ax}\cos x=e^{ax}(a\sin x+\cos x)$$
$$y''=ae^{ax}(a\sin x+\cos x)+e^{ax}(a\cos x-\sin x)$$
$$=e^{ax}(a^2\sin x+2a\cos x-\sin x)$$

$y''-4y'+5y=0$에서

$$e^{ax}(a^2\sin x+2a\cos x-\sin x)-4e^{ax}(a\sin x+\cos x)+5e^{ax}\sin x=0$$
$$e^{ax}\{(a^2-4a+4)\sin x+(2a-4)\cos x\}=0$$
$$e^{ax}(a-2)\{(a-2)\sin x+2\cos x\}=0$$

위의 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a=2$ 답 ⑤

0631 전략 몫의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 $x=0$을 대입한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+x+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{3(x^2+x+1)-3x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$=\frac{-3x^2+3}{(x^2+x+1)^2}$$

$\therefore f'(0)=3$

따라서 구하는 접선의 기울기는 3이다. 답 3

0632 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $x=0$을 대입한다.

풀이 $f(x)=\left(\dfrac{2x+a}{x+1}\right)^2$이므로

$$f'(x)=2\cdot\frac{2x+a}{x+1}\cdot\left(\frac{2x+a}{x+1}\right)'$$
$$=2\cdot\frac{2x+a}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)-(2x+a)\cdot 1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2(2x+a)(2-a)}{(x+1)^3}$$

$f'(0)=2$에서

$\dfrac{2a(2-a)}{1}=2,\quad a(2-a)=1$

$a^2-2a+1=0,\quad (a-1)^2=0$

$\therefore a=1$ 답 ①

0633 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $x=\pi$를 대입한다.

풀이 $f(x)=(1-\sin x)^3$이므로

$$f'(x)=3(1-\sin x)^2\cdot(-\cos x)$$
$$=-3(1-\sin x)^2\cos x$$

$\therefore f'(\pi)=-3\cdot 1\cdot(-1)=3$ 답 3

0634 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f(3x-1)=x^3-3x+1$의 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $f(3x-1)=x^3-3x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3f'(3x-1)=3x^2-3$

$\therefore f'(3x-1)=x^2-1$

$3x-1=2$에서 $x=1$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(2)=0$ 답 ③

0635 전략 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$임을 이용하여 접선의 기울기를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=4t$, $\dfrac{dy}{dt}=8$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{8}{4t}=\frac{2}{t}\ (t\neq 0)$$

이때 $\dfrac{2}{t}=2$에서 $t=1$이므로

$a=2-1=1$, $b=8-3=5$

$\therefore a+b=6$ 답 ⑤

0636 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 $x+\dfrac{2x}{y}=4$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$1+\frac{2}{y}+2x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}=0,\qquad \frac{2x}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=1+\frac{2}{y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y+2}{y}}{\frac{2x}{y^2}}=\frac{y^2+2y}{2x}\ (x\neq 0)$$

한편 $x=2$를 $x+\dfrac{2x}{y}=4$에 대입하면

$2+\dfrac{4}{y}=4,\quad \dfrac{4}{y}=2\quad \therefore y=2$

따라서 점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2^2+2\cdot 2}{2\cdot 2}=2$ 답 ④

0637 전략 역함수의 미분법을 이용한다.

풀이 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$

$f'(x)=\cos x$이므로

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ④

0638 전략 곱의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 $f''(x)$를 구한 후 $x=\dfrac{\pi}{3}$를 대입한다.

풀이 $f(x)=(\cos x+1)\sin x$이므로

$$f'(x)=(-\sin x)\cdot\sin x+(\cos x+1)\cos x$$
$$=-\sin^2x+\cos^2x+\cos x \quad \cdots ❶$$
$$f''(x)=-2\sin x\cos x+2\cos x\cdot(-\sin x)-\sin x$$
$$=-4\sin x\cos x-\sin x \quad \cdots ❷$$
$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f''(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0639 전략 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+2}$이므로

$$f'(x)=\frac{2(x^2+2)-(2x-1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x)>0$에서 $\frac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2}>0$

이때 $(x^2+2)^2>0$이므로

$-2x^2+2x+4>0,\quad x^2-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0 \quad \therefore -1<x<2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=5$

답 5

0640 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서 $x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $\quad f(2)=3$

따라서 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=5$

이때 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{x-2}}$이므로

$$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot e^{x-2}-f(x)\cdot e^{x-2}}{(e^{x-2})^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^{x-2}}$$
$$\therefore g'(2)=\frac{f'(2)-f(2)}{e^{2-2}}=\frac{5-3}{1}=2$$

답 ②

0641 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $x=1$을 대입하여 a의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=(2x^2+a)^4$이므로

$f'(x)=4(2x^2+a)^3\cdot 4x=16x(2x^2+a)^3$

이때 $f'(1)=16$이므로

$16(2+a)^3=16,\quad (a+2)^3=1 \quad \therefore a=-1$

따라서 $f'(x)=16x(2x^2-1)^3$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=f'(-1)=-16$$

답 ②

0642 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $h'(x)$를 구한 후 $x=0$을 대입한다.

풀이 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$이므로

$h'(x)=f'(g(x))g'(x) \quad \cdots ❶$

이때 $f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$, $g(x)=2x^2-3x+2$이므로

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2-1)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

$g'(x)=4x-3 \quad \cdots ❷$

따라서 $g(0)=2$, $f'(2)=\frac{13}{16}$, $g'(0)=-3$이므로

$$h'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(2)g'(0)$$
$$=\frac{13}{16}\cdot(-3)=-\frac{39}{16} \quad \cdots ❸$$

답 $-\frac{39}{16}$

채점 기준	비율
❶ $h'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)$, $g'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $h'(0)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0643 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $h'(x)$를 구하고, 일차함수의 $x=a$에서의 미분계수는 일차함수의 그래프의 기울기임을 이용한다.

풀이 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}x+3 & (x<2)\\ x-2 & (x\ge 2)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}2x & (x<2)\\ -x+6 & (x\ge 2)\end{cases}$$

$h(x)=f(g(x))$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$$h'(3)=f'(g(3))g'(3)=f'(3)g'(3)$$
$$=1\cdot(-1)=-1$$

답 -1

0644 전략 함수 $y=f(ax+b)$의 도함수는 $y'=af'(ax+b)$임을 이용한다.

풀이 $f(3x-2)=x+\sqrt{x^2+5}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3f'(3x-2)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$
$$\therefore f'(3x-2)=\frac{1}{3}+\frac{x}{3\sqrt{x^2+5}}$$

$3x-2=4$에서 $x=2$이므로

$$f'(4)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3\sqrt{4+5}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

답 $\frac{5}{9}$

0645 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $f(\cos x)=\sin 2x+\tan x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(\cos x)\cdot(-\sin x)=2\cos 2x+\sec^2 x$$

$$\therefore f'(\cos x)=-\frac{2\cos 2x+\sec^2 x}{\sin x}$$

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$이므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2\cos\frac{2}{3}\pi+\sec^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$=-\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=-2\sqrt{3}$$

답 ①

0646 전략 $f(x)=\ln(e^x+1)$로 놓고 로그의 성질과 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\ln(e^x+1)$로 놓으면

$$f(0)=\ln(e^0+1)=\ln 2$$

이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+1}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+1)-\ln 2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=f'(0)$$

이때 $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$이므로

$$f'(0)=\frac{e^0}{e^0+1}=\frac{1}{2}$$

답 ①

0647 전략 로그함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\log_2|3x^2+x|$에서

$$f'(x)=\frac{6x+1}{(3x^2+x)\ln 2}$$

따라서 $(n-1)f'(n)=\frac{(n-1)(6n+1)}{(3n^2+n)\ln 2}=\frac{6n^2-5n-1}{(3n^2+n)\ln 2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)f'(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-5n-1}{(3n^2+n)\ln 2}$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-5n-1}{3n^2+n}$$

$$=\frac{2}{\ln 2}$$

답 $\frac{2}{\ln 2}$

0648 전략 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한 후 로그함수의 미분법을 이용한다.

풀이 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=2\ln|x+1|+\ln|2x+1|-2\ln|x-1|$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+1}+\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{x-1}$$

$$\therefore \frac{f'(2)}{f(2)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2=-\frac{14}{15}$$

답 ①

0649 전략 $t=-2$일 때 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=6t^2+2at$, $\frac{dy}{dt}=2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{6t^2+2at}=\frac{1}{3t+a}\left(t\neq 0,\ t\neq-\frac{a}{3}\right)$$

$t=-2$일 때 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}$이므로

$$\frac{1}{-6+a}=-\frac{1}{3}\qquad \therefore a=3$$

답 3

0650 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 $x\sin y+y\sin x=\frac{\pi}{6}$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\sin y+x\cos y\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}\sin x+y\cos x=0$$

$$(\sin x+x\cos y)\frac{dy}{dx}=-(\sin y+y\cos x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sin y+y\cos x}{\sin x+x\cos y}\ (\sin x+x\cos y\neq 0)$$

따라서 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}=-1$$

답 -1

0651 전략 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$임을 이용한다. (단, $f'(g(x))\neq 0$)

풀이 주어진 그래프에서 $f(d)=c$이므로 $g(c)=d$

$$\therefore g'(c)=\frac{1}{f'(g(c))}=\frac{1}{f'(d)}$$

답 ⑤

0652 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$, $f''(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=axe^{bx}$이므로

$f'(x)=ae^{bx}+abxe^{bx}=a(bx+1)e^{bx}$

$f''(x)=abe^{bx}+ab(bx+1)e^{bx}=ab(bx+2)e^{bx}$ ··· ❶

$f'(0)=2$에서 $a=2$

$f''(0)=4$에서 $2ab=4$ $\therefore b=1$ ··· ❷

$\therefore a+b=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0653 전략 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한을 변형한다.

풀이 $\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=f''(a)$이므로 $f''(a)=2$

이때 $f(x)=\frac{1}{x+3}$이므로

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+3)^2}$$
$$f''(x)=\frac{2(x+3)}{(x+3)^4}=\frac{2}{(x+3)^3}$$
$f''(a)=2$에서
$$\frac{2}{(a+3)^3}=2,\quad (a+3)^3=1$$
$$a+3=1\quad \therefore a=-2$$
답 ①

0654 전략 몫의 미분법을 이용하여 $g'(x)$를 구한 후 $x=1$을 대입한다.

풀이 $g(x)=\frac{1}{f(x)+2x}$이므로
$$g'(x)=-\frac{f'(x)+2}{\{f(x)+2x\}^2}$$
$$\therefore g'(1)=-\frac{f'(1)+2}{\{f(1)+2\}^2}=-\frac{2+2}{2^2}=-1$$
답 ②

0655 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\sum_{n=1}^{10}(3x+4)^n$
$=(3x+4)+(3x+4)^2+(3x+4)^3+\cdots+(3x+4)^{10}$
이므로
$$f'(x)=3+2(3x+4)\cdot3+3(3x+4)^2\cdot3+\cdots+10(3x+4)^9\cdot3$$
$$=3\{1+2(3x+4)+3(3x+4)^2+\cdots+10(3x+4)^9\}$$ ⋯ ❶
$$\therefore f'(-1)=3(1+2+3+\cdots+10)$$
$$=3\sum_{k=1}^{10}k=3\cdot\frac{10\cdot11}{2}=165$$ ⋯ ❷

답 165

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

다른풀이 $f(x)=\sum_{n=1}^{10}(3x+4)^n$이므로
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{10}n(3x+4)^{n-1}\cdot3$$
$$=3\sum_{n=1}^{10}n(3x+4)^{n-1}$$
$$\therefore f'(-1)=3\sum_{n=1}^{10}n=3\cdot\frac{10\cdot11}{2}=165$$

0656 전략 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$임을 이용한다.

풀이 $x\neq2$일 때, $f(x)=\frac{e^{x-2}-1}{x-2}$이고 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로
$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{e^{x-2}-1}{x-2}$$
$g(x)=e^{x-2}$으로 놓으면 $g(2)=1$이므로
$$\lim_{x\to2}\frac{e^{x-2}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$
이때 $g'(x)=e^{x-2}$이므로
$$f(2)=g'(2)=1$$
답 ①

0657 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=4$에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.
즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(2)=2$
따라서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로
$$f'(2)=4$$ ⋯ ❶
$\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-2}{x+1}=3$에서 $x\longrightarrow-1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.
즉 $\lim_{x\to-1}\{g(x)-2\}=0$이므로 $g(-1)=2$
따라서 $\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=g'(-1)$이므로
$$g'(-1)=3$$ ⋯ ❷
$$\therefore h'(-1)=f'(g(-1))g'(-1)$$
$$=f'(2)g'(-1)$$
$$=4\cdot3=12$$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $f(2)$, $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(-1)$, $g'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $h'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0658 전략 $h(x)=g(f(x))$로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한을 변형한다.

풀이 $h(x)=g(f(x))$로 놓으면
$$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$$
$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
이때 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이고
$$f'(x)=2\sin x\cos x,\ g'(x)=e^x$$
이므로 구하는 극한값은
$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=g'\left(\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{e}\cdot2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=\sqrt{e}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\sqrt{e}$$
답 ④

0659 전략 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(3)$에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(3+5h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(3+5h)-f(3)}{5h}\cdot5=5f'(3)$

한편 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{(t+1)^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^2}{(t+1)^2}$$

이때 $\frac{t-1}{t}=3$에서 $\quad t-1=3t \quad \therefore t=-\frac{1}{2}$

$t=-\frac{1}{2}$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2}=1$이므로 $\quad f'(3)=1$

따라서 주어진 식의 값은 $\quad 5f'(3)=5$ 답 5

0660 전략 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$임을 이용한다. (단, $f'(g(x))\neq 0$)

풀이 $f(x)=\ln\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|=\ln|2x-1|-\ln|x+2|$이므로

$$f'(x)=\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{5}{(2x-1)(x+2)}$$

$$\therefore f'(0)=\frac{5}{(-1)\cdot 2}=-\frac{5}{2}$$

$g(0)=a$라 하면 $f(a)=0$이므로

$$\ln\left|\frac{2a-1}{a+2}\right|=0, \quad \left|\frac{2a-1}{a+2}\right|=1$$

$$\frac{2a-1}{a+2}=\pm 1 \quad \therefore a=-\frac{1}{3}\left(\because -2<a<\frac{1}{2}\right)$$

따라서 $g(0)=-\frac{1}{3}$이고 $f'\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{5}{3}}=-\frac{9}{5}$이므로

$$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{5}{9}$$

$$\therefore f'(0)g'(0)=\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)=\frac{25}{18}$$ 답 ①

0661 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$, $f''(x)$를 구한 후 $x=\theta$를 대입한다.

풀이 $f(x)=e^x\sin x$이므로

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$$
$$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$$
$$=2e^x\cos x$$

$f'(\theta)-f''(\theta)=0$에서

$$e^\theta(\sin\theta+\cos\theta)-2e^\theta\cos\theta=0$$
$$e^\theta\sin\theta-e^\theta\cos\theta=0$$
$$e^\theta\sin\theta=e^\theta\cos\theta \quad \cdots\cdots ㉠$$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $e^\theta\cos\theta\neq 0$이므로 ㉠의 양변을 $e^\theta\cos\theta$로 나누면

$\tan\theta=1 \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{4}$ 답 $\frac{\pi}{4}$

06 도함수의 활용 (1)

Ⅱ. 미분법

0662 $f(x)=\frac{1}{x-4}$로 놓으면

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-4)^2}$$

이므로

$$f'(5)=-\frac{1}{1^2}=-1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-(x-5) \quad \therefore y=-x+6$ 답 $y=-x+6$

0663 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

이므로

$$f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) \quad \therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$

0664 $f(x)=e^{x+1}$으로 놓으면

$$f'(x)=e^{x+1}$$

이므로

$$f'(1)=e^{1+1}=e^2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-e^2=e^2(x-1) \quad \therefore y=e^2x$ 답 $y=e^2x$

0665 $f(x)=\ln 3x$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{3}{3x}=\frac{1}{x}$$

이므로

$$f'(1)=1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\ln 3=x-1 \quad \therefore y=x+\ln 3-1$

답 $y=x+\ln 3-1$

0666 $f(x)=\cos 2x$로 놓으면

$$f'(x)=-2\sin 2x$$

이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore y=-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}$$

답 $y=-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}$

0667 $f(x)=\ln x+2$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$

이므로 $f'(1)=1$

따라서 점 $(1, 2)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-2=-(x-1)$ $\therefore y=-x+3$ 답 $y=-x+3$

0668 $f(x)=\sqrt{2x+1}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{2t+1})$이라 하면 $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2t+1}}$이므로

$\frac{1}{\sqrt{2t+1}}=1$, $\sqrt{2t+1}=1$

$2t+1=1$ $\therefore t=0$

따라서 접점의 좌표가 $(0, 1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=x-0$ $\therefore y=x+1$ 답 $y=x+1$

0669 $f(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $f'(x)=-e^{-x}$

접점의 좌표를 (t, e^{-t})이라 하면 $f'(t)=-e^{-t}$이므로

$-e^{-t}=-1$ $\therefore t=0$

따라서 접점의 좌표가 $(0, 1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-(x-0)$ $\therefore y=-x+1$ 답 $y=-x+1$

0670 $f(x)=\ln x$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t, \ln t)$라 하면 $f'(t)=\frac{1}{t}$이므로

$\frac{1}{t}=e$ $\therefore t=\frac{1}{e}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y+1=e\left(x-\frac{1}{e}\right)$ $\therefore y=ex-2$ 답 $y=ex-2$

0671 $f(x)=\sin x$로 놓으면 $f'(x)=\cos x$

접점의 좌표를 $(t, \sin t)$라 하면 $f'(t)=\cos t$이므로

$\cos t=1$ $\therefore t=0$ ($\because -\pi<t<\pi$)

따라서 접점의 좌표가 $(0, 0)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-0=x-0$ $\therefore y=x$ 답 $y=x$

0672 $f(x)=e^{2x}$으로 놓으면 $f'(x)=2e^{2x}$

접점의 좌표를 (t, e^{2t})이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2e^{2t}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{2t}=2e^{2t}(x-t)$ ...... ㉠

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$-e^{2t}=2e^{2t}\cdot(-t)$, $-1=-2t$

$\therefore t=\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$y-e=2e\left(x-\frac{1}{2}\right)$ $\therefore y=2ex$ 답 $y=2ex$

0673 $f(x)=\sqrt{x+3}$으로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t+3})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+3}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{t+3}=\frac{1}{2\sqrt{t+3}}(x-t)$ ...... ㉠

이 직선이 점 $(-7, 0)$을 지나므로

$-\sqrt{t+3}=\frac{1}{2\sqrt{t+3}}(-7-t)$

$-2(t+3)=-7-t$ $\therefore t=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$y-2=\frac{1}{4}(x-1)$ $\therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$

답 $y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$

0674 $f(x)=x\ln x$로 놓으면 $f'(x)=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(t, t\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\ln t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-t\ln t=(\ln t+1)(x-t)$ ...... ㉠

이 직선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1-t\ln t=(\ln t+1)\cdot(-t)$

$-1=-t$ $\therefore t=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$y-0=x-1$ $\therefore y=x-1$ 답 $y=x-1$

0675 (1) $f(x)=e^x-x$에서 $f'(x)=e^x-1$

(2) $f'(x)=0$에서 $e^x-1=0$, $e^x=1$

$\therefore x=0$

(3)

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

(4) 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소하고, 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

0676 $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$에서 $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가하고, 구간 $[0, \infty)$에서 감소한다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

답 풀이 참조

0677 $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$에서 $x\neq1$이고

$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{(x-1)^2}=1$, $(x-1)^2=1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[0, 1)$, $(1, 2]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0678 $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가한다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

답 풀이 참조

0679 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$에서

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}=-\frac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가하고, 구간 $[0, \infty)$에서 감소한다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

답 풀이 참조

0680 $f(x)=2x+e^{-x}$에서

$f'(x)=2-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^{-x}=2, \quad -x=\ln 2$

$\therefore x=-\ln 2$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -\ln 2]$에서 감소하고, 구간 $[-\ln 2, \infty)$에서 증가한다.

x	$\cdots$	$-\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

답 풀이 참조

0681 $f(x)=\frac{e^{2x}}{x}$에서 $x\neq 0$이고

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\cdot x-e^{2x}}{x^2}=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2x-1=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

0682 $f(x)=\ln x-x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 1]$에서 증가하고, 구간 $[1, \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0683 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1$

$\therefore x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, e]$에서 증가하고, 구간 $[e, \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0684 $f(x)=x-2\sin x$에서

$f'(x)=1-2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0<x<\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

0685 $f(x)=\sin x-\cos x$에서

$f'(x)=\cos x+\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\sin x$

$\therefore x=\frac{3}{4}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{3}{4}\pi\right]$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0686 $f(x)=\tan x-4x$에서

$f'(x)=\sec^2 x-4$

$f'(x)=0$에서 $\sec^2 x=4$, $\sec x=\pm 2$

$\therefore x=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0687 (1) $f(x)=x^2e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$

(2) $f'(x)=0$에서 $x(x+2)e^x=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

(3)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗

(4) 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.

답 풀이 참조

0688 $f(x)=\sqrt{x^2+2}$에서

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $\sqrt{2}$를 갖는다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\sqrt{2}$	↗

답 극솟값: $\sqrt{2}$

0689 $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$에서

$f'(x)=\frac{(x^2+4)-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$

$=\frac{-(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 $-\frac{1}{4}$, $x=2$에서 극댓값 $\frac{1}{4}$을 갖는다.

답 극댓값: $\frac{1}{4}$, 극솟값: $-\frac{1}{4}$

0690 $f(x)=e^{-x^2}$에서

$f'(x)=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 갖는다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘

답 극댓값: 1

0691 $f(x)=x-2\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=1-\frac{2}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2-2\ln 2$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 $2-2\ln 2$를 갖는다.

답 극솟값: $2-2\ln 2$

0692 $f(x)=x+2\cos x$에서

$f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극솟값 $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$을 갖는다.

답 극댓값: $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, 극솟값: $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

0693 (1) $f(x)=x^3+3x^2-2$에서

$f'(x)=3x^2+6x$, $f''(x)=6x+6$

(2) $f'(x)=0$에서

$3x^2+6x=0$, $3x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

$\therefore f''(-2)=-6<0$, $f''(0)=6>0$

(3) 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 극댓값은 $f(-2)=2$, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-2$이다.

답 풀이 참조

0694 $f(x)=-x^4+2x^2+1$에서

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f''(x)=-12x^2+4$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

이때 $f''(-1)=-8<0$, $f''(0)=4>0$, $f''(1)=-8<0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=f(1)=2$, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=1$이다.

답 극댓값: 2, 극솟값: 1

0695 $f(x)=\frac{1-x}{x^2}$에서 $x\neq0$이고

$$f'(x)=\frac{-x^2-(1-x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{x-2}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{x^3-(x-2)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{-2x^3+6x^2}{x^6}=\frac{-2(x-3)}{x^4}$$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

이때 $f''(2)=\frac{1}{8}>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=-\frac{1}{4}$이다.

답 극솟값: $-\frac{1}{4}$

0696 $f(x)=xe^{-2x}$에서

$$f'(x)=e^{-2x}+xe^{-2x}\cdot(-2)=(1-2x)e^{-2x}$$

$$f''(x)=-2e^{-2x}+(1-2x)e^{-2x}\cdot(-2)=4(x-1)e^{-2x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$

이때 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{e}<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e}$이다.

답 극댓값: $\frac{1}{2e}$

0697 $f(x)=\ln(x^2+3)$에서

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+3}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+3)-2x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

이때 $f''(0)=\frac{2}{3}>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=\ln 3$이다.

답 극솟값: $\ln 3$

0698 $f(x)=\sin x+\cos x$에서

$$f'(x)=\cos x-\sin x$$

$$f''(x)=-\sin x-\cos x$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x$

$$\therefore x=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

이때 $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$이다.

답 극댓값: $\sqrt{2}$

0699 $f(x)=x\sqrt{x}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=\frac{3}{2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{3}{2}(x-1)\qquad \therefore y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$$a-b=2$$

답 ④

0700 $f(x)=(2x-3)^5$으로 놓으면

$$f'(x)=5(2x-3)^4\cdot 2=10(2x-3)^4$$

점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(2)=10$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=10(x-2)$$

$$\therefore y=10x-19$$

따라서 직선 $y=10x-19$ 위의 점의 좌표는 ①이다.

답 ①

0701 $f(x)=x-2x\ln x$로 놓으면

$$f'(x)=-2\ln x-1$$

x좌표가 1인 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=-1$$

이때 $f(1)=1$이므로 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-1=-(x-1)$$

$$\therefore y=-x+2$$

이 직선이 점 $(5,\ k)$를 지나므로

$$k=-5+2=-3$$

답 -3

0702 $f(x)=e^{\sin x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{\sin x}\cos x$ ··· ❶

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(0)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-1=x-0\qquad \therefore y=x+1$ ··· ❷

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$0=x+1\qquad \therefore x=-1$$

즉 구하는 x절편은 -1이다. ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ x절편을 구할 수 있다.	20 %

0703 $g(x)=\sin x$로 놓으면

$$g'(x)=\cos x$$

점 $(t,\ \sin t)$에서의 접선의 기울기가 $g'(t)=\cos t$이므로 접선의 방정식은

$$y-\sin t=\cos t(x-t)$$

$$\therefore y=x\cos t-t\cos t+\sin t$$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$0=x\cos t-t\cos t+\sin t$$

$$x\cos t=t\cos t-\sin t$$

$$\therefore x=t-\tan t\ (\because \cos t\neq0)$$

따라서 $f(t)=t-\tan t$이므로

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{t-\tan t}{2t}=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{2}-\frac{\tan t}{t}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=0$$

답 ③

0704 $f(x)=\frac{6}{x^2+2}$으로 놓으면

$$f'(x)=-\frac{6\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=-\frac{12x}{(x^2+2)^2}$$

06 도함수의 활용 (1)

점 (2, 1)에서의 접선의 기울기가 $f'(2)=-\frac{2}{3}$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이고, 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{3}{2}(x-2)$$

$$\therefore y=\frac{3}{2}x-2$$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=-2$이므로 $ab=-3$ 답 -3

0705 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

점 $(\pi, 0)$에서의 접선의 기울기가 $f'(\pi)=-\frac{1}{\pi}$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 π이다. 답 π

0706 $f(x)=xe^x$으로 놓으면

$$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

점 $(1, e)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=2e$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2e}$이고, 직선의 방정식은

$$y-e=-\frac{1}{2e}(x-1)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2e}x+e+\frac{1}{2e}$$

따라서 구하는 y절편은 $e+\frac{1}{2e}$이다. 답 ③

0707 $f(x)=\ln 4x$로 놓으면

$f(1)=\ln 4=2\ln 2$

$\therefore a=2\ln 2$ ··· ❶

$f'(x)=\frac{1}{x}$이므로 $f'(1)=1$

점 $(1, 2\ln 2)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1이고, 직선의 방정식은

$y-2\ln 2=-(x-1)$

$\therefore y=-x+1+2\ln 2$

이 직선이 점 $(3, b)$를 지나므로

$b=-3+1+2\ln 2=-2+2\ln 2$ ··· ❷

$\therefore a-b=2\ln 2-(-2+2\ln 2)=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0708 $\frac{dx}{dt}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}\ (t\neq 0)$$

$t=\ln 3$일 때

$$x=\frac{e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}}{2}=\frac{3+\frac{1}{3}}{2}=\frac{5}{3},$$

$$y=\frac{e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}}{2}=\frac{3-\frac{1}{3}}{2}=\frac{4}{3},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{5}{4}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{4}{3}=\frac{5}{4}\left(x-\frac{5}{3}\right) \qquad \therefore y=\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}$$

따라서 $a=\frac{5}{4}$, $b=-\frac{3}{4}$이므로 $a+b=\frac{1}{2}$ 답 ②

0709 $\frac{dx}{dt}=2t+2$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{2t+2}\ (t\neq -1)$$ ··· ❶

$t=2$일 때

$x=2^2+2\cdot 2=8$, $y=2^3+1=9$, $\frac{dy}{dx}=\frac{3\cdot 2^2}{2\cdot 2+2}=2$

이므로 접선의 방정식은

$y-9=2(x-8)$ $\quad\therefore y=2x-7$ ··· ❷

이 직선이 점 $(a, 5)$를 지나므로

$5=2a-7$, $\quad 2a=12$ $\quad\therefore a=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0710 $\frac{dx}{dt}=3t^2$, $\frac{dy}{dt}=2at$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2at}{3t^2}=\frac{2a}{3t}\ (t\neq 0)$$

$t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{2a}{3}=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$$

따라서 $t=1$일 때 $x=1$, $y=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$$

답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$

0711 $\frac{dx}{d\theta}=4\cos 2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-4\sin 2\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-4\sin 2\theta}{4\cos 2\theta}=-\tan 2\theta\ (\cos 2\theta\neq 0)$$

이때 $2\cos 2\theta=1$에서 $\quad \cos 2\theta=\frac{1}{2}$

$0<2\theta<\pi$이므로 $\quad 2\theta=\frac{\pi}{3} \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{6}$

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $\quad \frac{dy}{dx}=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

즉 점 $(\sqrt{3},\ 1)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이고, 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3}) \qquad \therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

따라서 구하는 y절편은 0이다.

답 ③

0712 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

따라서 점 $(1,\ 16)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-4$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-16=-4(x-1) \qquad \therefore y=-4x+20$$

이 직선이 점 $(3,\ a)$를 지나므로

$$a=-4\cdot 3+20=8$$

답 ③

0713 $x^3+y^2-4xy=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2+2y\frac{dy}{dx}-4y-4x\frac{dy}{dx}=0$$

$$(4x-2y)\frac{dy}{dx}=3x^2-4y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-4y}{4x-2y}\ (2x\neq y)$$

따라서 점 $(3,\ 9)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\cdot 3^2-4\cdot 9}{4\cdot 3-2\cdot 9}=\frac{3}{2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-9=\frac{3}{2}(x-3) \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$$0=\frac{3}{2}a+\frac{9}{2} \qquad \therefore a=-3$$

답 -3

0714 $xy^2=8$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$y^2+x\cdot 2y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2x}\ (xy\neq 0)$$

따라서 점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-2) \qquad \therefore x+2y-6=0$$

이 직선과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

라쎈 특강 점과 직선 사이의 거리

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

특히 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

0715 $y^2=\ln(2-x^2)+xy+20$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2-x^2}+y+x\frac{dy}{dx}$$

$$(x-2y)\frac{dy}{dx}=\frac{2x-2y+x^2y}{2-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-2y+x^2y}{(2-x^2)(x-2y)}\ (x\neq 2y)$$

따라서 점 $(1,\ 5)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-10+5}{1\cdot(-9)}=\frac{1}{3}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-5=\frac{1}{3}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$$

즉 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{14}{3}$이므로 $\quad \frac{b}{a}=14$

답 ③

0716 $f(x)=e^{3x}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=3e^{3x}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{3t})$이라 하면 직선 $y=3x$에 평행한 직선의 기울기는 3이므로

$$f'(t)=3e^{3t}=3$$

$$\therefore t=0$$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=3(x-0) \qquad \therefore y=3x+1$$

즉 구하는 x절편은 $-\frac{1}{3}$이다.

답 $-\frac{1}{3}$

0717 $f(x)=\ln(x+2)$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x+2}$$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln(t+2))$라 하면 직선 $y=-x+3$에 수직인 직선의 기울기는 1이므로

$$f'(t)=\frac{1}{t+2}=1 \qquad \therefore t=-1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-0=x+1 \qquad \therefore y=x+1$$

답 $y=x+1$

0718 평행이동한 직선의 방정식은 $\quad y=-2x+a$

$f(x)=\cos 2x$로 놓으면

$$f'(x)=-2\sin 2x \qquad \cdots ❶$$

접점의 좌표를 $(t,\ \cos 2t)$라 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$$f'(t)=-2\sin 2t=-2, \qquad \sin 2t=1$$

$0<2t<\pi$이므로 $\quad 2t=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore t=\frac{\pi}{4} \qquad \cdots ❷$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-0=-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \quad \therefore y=-2x+\frac{\pi}{2}$

$\therefore a=\frac{\pi}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{\pi}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0719 $f(x)=\frac{4}{x-2}$로 놓으면 $\quad f'(x)=-\frac{4}{(x-2)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{4}{t-2}\right)$라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=-\frac{4}{(t-2)^2}=-1$

$(t-2)^2=4, \quad t-2=\pm2$

$\therefore t=0$ 또는 $t=4$

따라서 접점의 좌표는 $(0, -2)$, $(4, 2)$이므로 접선의 방정식은

$y+2=-(x-0)$, $y-2=-(x-4)$

$\therefore y=-x-2$, $y=-x+6$

$\therefore a+b=4$

답 ④

0720 $f(x)=e^{2x-1}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2e^{2x-1}$

접점의 좌표를 (t, e^{2t-1})이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2e^{2t-1}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{2t-1}=2e^{2t-1}(x-t)$

$\therefore y=2e^{2t-1}x-2te^{2t-1}+e^{2t-1}$ ⋯⋯ ㉠

이 직선이 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$을 지나므로

$0=e^{2t-1}-2te^{2t-1}+e^{2t-1}, \quad 2e^{2t-1}-2te^{2t-1}=0$

$2e^{2t-1}(1-t)=0 \quad \therefore t=1 \ (\because e^{2t-1}>0)$

이것을 ㉠에 대입하면

$y=2ex-e$

이 직선이 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=-2e-e=-3e$

답 ①

0721 $f(x)=\sqrt{x}+4$로 놓으면 $\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t}+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$이므로 접선의 방정식은

$y-(\sqrt{t}+4)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$

이 직선이 점 $(-4, 4)$를 지나므로

$4-(\sqrt{t}+4)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(-4-t)$

$\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(t+4), \quad 2t=t+4 \quad \therefore t=4$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

답 ①

0722 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{x^2+1-(x+1)\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{t+1}{t^2+1}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{t+1}{t^2+1}=\frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}(x-t)$

$\therefore y=\frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}x+\frac{2t^3+3t^2+1}{(t^2+1)^2}$ ⋯⋯ ㉠

이 직선이 점 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{3}{2}=\frac{2t^3+3t^2+1}{(t^2+1)^2}, \quad 3(t^4+2t^2+1)=4t^3+6t^2+2$

$3t^4-4t^3+1=0, \quad (t-1)^2(3t^2+2t+1)=0$

$\therefore t=1 \ (\because 3t^2+2t+1>0)$

이것을 ㉠에 대입하면

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, 즉 $x+2y-3=0$

따라서 직선 $x+2y-3=0$과 원점 사이의 거리는

$\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

0723 $f(x)=\ln x^2+1$로 놓으면 $\quad f'(x)=\frac{2}{x}$ ⋯ ❶

접점의 좌표를 $(t, \ln t^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{2}{t}$이므로 접선의 방정식은

$y-(\ln t^2+1)=\frac{2}{t}(x-t)$

$\therefore y=\frac{2}{t}x+\ln t^2-1$

이 직선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\ln t^2-1, \quad \ln t^2=2$

$t^2=e^2 \quad \therefore t=\pm e$ ⋯ ❷

따라서 접선의 기울기는 $f'(e)=\frac{2}{e}$, $f'(-e)=-\frac{2}{e}$이므로 두 접선의 기울기의 곱은 $\quad \frac{2}{e}\cdot\left(-\frac{2}{e}\right)=-\frac{4}{e^2}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{4}{e^2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ 두 접선의 기울기의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0724 $f(x)=x+\frac{2}{x}$로 놓으면 $\quad f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, t+\frac{2}{t}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=1-\frac{2}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(t+\frac{2}{t}\right)=\left(1-\frac{2}{t^2}\right)(x-t)$

$\therefore y=\left(1-\frac{2}{t^2}\right)x+\frac{4}{t}$

이 직선이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$-1=2\left(1-\frac{2}{t^2}\right)+\frac{4}{t}$

$3t^2+4t-4=0, \quad (t+2)(3t-2)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=\frac{2}{3}$

따라서 점 $(2,\ -1)$에서 곡선 $y=x+\frac{2}{x}$에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다. 답 2

0725 $f(x)=(x+k)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+(x+k)e^x=(x+k+1)e^x$

접점의 좌표를 $(t,\ (t+k)e^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(t+k+1)e^t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t+k)e^t=(t+k+1)e^t(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(t+k)e^t=(t+k+1)e^t\cdot(-t)$

$e^t(t^2+kt-k)=0$

$\therefore t^2+kt-k=0 \ (\because e^t>0)$ …… ㉠

원점에서 곡선 $y=(x+k)e^x$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=k^2+4k=0, \quad k(k+4)=0$

$\therefore k=-4 \ (\because k\neq0)$ 답 ②

0726 $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$로 놓으면 $\quad f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+2)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{t^2+2}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-\frac{2t}{(t^2+2)^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{t^2+2}=-\frac{2t}{(t^2+2)^2}(x-t)$

$\therefore y=-\frac{2t}{(t^2+2)^2}x+\frac{3t^2+2}{(t^2+2)^2}$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{3t^2-2at+2}{(t^2+2)^2}$

$\therefore 3t^2-2at+2=0$ …… ㉠

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=\frac{1}{x^2+2}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-6>0, \quad (a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6})>0$

$\therefore a<-\sqrt{6}$ 또는 $a>\sqrt{6}$ 답 $a<-\sqrt{6}$ 또는 $a>\sqrt{6}$

0727 $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4x}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 $f'(2)=\frac{4}{\sqrt{8+1}}=\frac{4}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-3=\frac{4}{3}(x-2) \qquad \therefore y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$

접선의 x절편과 y절편이 각각 $-\frac{1}{4},\ \frac{1}{3}$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$ 답 ②

0728 $f(x)=x\ln x$로 놓으면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t\ln t)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=\ln t+1=2$

$\ln t=1 \qquad \therefore t=e$

따라서 접점의 좌표는 $(e,\ e)$이므로 접선의 방정식은

$y-e=2(x-e) \qquad \therefore y=2x-e$

접선의 x절편과 y절편이 각각 $\frac{e}{2},\ -e$이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{e}{2},\ 0\right),\ \mathrm{Q}(0,\ -e)$

$\therefore \triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{2}\cdot e=\frac{e^2}{4}$ 답 $\frac{e^2}{4}$

0729 $x^2+xy=4$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x+y+x\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x}\ (x\neq0)$

점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\cdot1+3}{1}=-5$

이므로 접선의 방정식은

$y-3=-5(x-1) \qquad \therefore y=-5x+8$

접선의 x절편과 y절편이 각각 $\frac{8}{5}$, 8이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}\cdot8=\frac{32}{5}$ 답 $\frac{32}{5}$

0730 $f(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=-e^{-x}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{-t}=-e^{-t}(x-t)$

$\therefore y=-e^{-t}x+te^{-t}+e^{-t}$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=-e^{-t}+te^{-t}+e^{-t}$

$te^{-t}=0 \qquad \therefore t=0 \ (\because e^{-t}>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad y=-x+1$

접선의 x절편과 y절편이 각각 1, 1이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}$ 답 ②

0731 $f(x)=ax^2+e^{x-1},\ g(x)=\frac{b}{x}$로 놓으면

$f'(x)=2ax+e^{x-1},\ g'(x)=-\frac{b}{x^2}$

두 곡선이 $x=1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(1)=g(1)$에서 $\quad a+1=b$

$\therefore a-b=-1$ …… ㉠

$f'(1)=g'(1)$에서 $\quad 2a+1=-b$

$\therefore 2a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=-\frac{1}{3}$

답 $-\frac{1}{3}$

0732 $f(x)=ax^2$, $g(x)=\ln x$로 놓으면

$f'(x)=2ax$, $g'(x)=\frac{1}{x}$

두 곡선이 $x=b$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(b)=g(b)$에서 $ab^2=\ln b$ …… ㉠

$f'(b)=g'(b)$에서 $2ab=\frac{1}{b}$ $\therefore ab^2=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{2}=\ln b$ $\therefore b=\sqrt{e}$

이것을 ㉡에 대입하면 $ae=\frac{1}{2}$ $\therefore a=\frac{1}{2e}$

$\therefore \frac{b}{a}=\sqrt{e}\cdot 2e=2e\sqrt{e}$

답 ⑤

0733 $f(x)=-\sin x$, $g(x)=\cos^2 x+a$로 놓으면

$f'(x)=-\cos x$, $g'(x)=-2\cos x\sin x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $-\sin t=\cos^2 t+a$

$-\sin t=1-\sin^2 t+a$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-\cos t=-2\cos t\sin t$

$\cos t(2\sin t-1)=0$

$\therefore \sin t=\frac{1}{2}$ ($\because \cos t\neq 0$)

이것을 ㉠에 대입하면

$-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{4}+a$ $\therefore a=-\frac{5}{4}$

답 $-\frac{5}{4}$

0734 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 증가하므로

$\alpha=-1$, $\beta=1$ $\therefore \beta-\alpha=2$

답 ②

0735 $f(x)=x-2\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=1-\frac{2}{x}$

$f'(x)=0$에서 $1-\frac{2}{x}=0$ $\therefore x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[2, \infty)$에서 증가하므로 실수 a의 최솟값은 2이다.

답 2

0736 $f(x)=(x^2-4)e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+(x^2-4)e^x=(x^2+2x-4)e^x$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $x^2+2x-4=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$ ⋯ ❷

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{5}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

함수 $f(x)$가 감소하는 구간은

$[-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}]$ ⋯ ❸

따라서 이 구간에 속하는 모든 정수 x의 값의 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+1=-5$ ⋯ ❹

답 -5

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x)$가 감소하는 구간을 구할 수 있다.	40 %
❹ 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0737 $f(x)=x-2\sin x$에서 $f'(x)=1-2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ ($\because -\pi<x<\pi$)

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

ㄱ. $-\pi<x_1<x_2<-\frac{\pi}{3}$이면 $f(x_1)<f(x_2)$

ㄴ. $-\frac{\pi}{3}<x_1<x_2<\frac{\pi}{3}$이면 $f(x_1)>f(x_2)$

ㄷ. $\frac{\pi}{3}<x_1<x_2<\pi$이면 $f(x_1)<f(x_2)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

0738 $f(x)=(-x^2+ax-5)e^{-x}$에서

$f'(x)=(-2x+a)e^{-x}-(-x^2+ax-5)e^{-x}$

$=e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a+5\}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 $e^{-x}>0$이므로 $x^2-(a+2)x+a+5\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-(a+2)x+a+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+2)\}^2-4(a+5)\leq 0$, $a^2-16\leq 0$

$(a+4)(a-4)\leq 0$ $\therefore -4\leq a\leq 4$

답 ③

0739 $f(x)=ax-\cos x$에서

$f'(x)=a+\sin x$ ⋯ ❶

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다. ⋯ ❷

이때 $-1\leq \sin x\leq 1$에서

$a-1\leq a+\sin x\leq a+1$

따라서 $a-1\geq 0$이어야 하므로 $a\geq 1$

즉 a의 최솟값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$가 주어진 구간에서 증가하기 위한 조건을 알 수 있다.	20 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0740 $f(x)=\ln(x^2+1)-ax$에서

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-a=\frac{-ax^2+2x-a}{x^2+1}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $x^2+1>0$이므로 $-ax^2+2x-a\le 0$, 즉 $ax^2-2x+a\ge 0$이어야 한다.

$a>0$이고, 이차방정식 $ax^2-2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-a^2\le 0, \qquad a^2-1\ge 0$$

$$(a+1)(a-1)\ge 0, \qquad a\le -1 \text{ 또는 } a\ge 1$$

$$\therefore a\ge 1$$

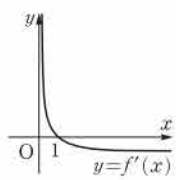
따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

답 ①

0741 $f(x)=ax+\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=a+\frac{1}{x}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(1, \infty)$에서 감소하려면 $x>1$일 때 $f'(x)\le 0$이어야 한다.



오른쪽 그림에서

$$f'(1)=a+1\le 0$$

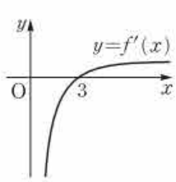
$$\therefore a\le -1$$

따라서 실수 a의 최댓값은 -1이다.

답 ③

0742 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$에서 $\qquad f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 구간 $(3, \infty)$에서 증가하려면 $x>3$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.



오른쪽 그림에서

$$f'(3)=1-\frac{a}{9}\ge 0$$

$$\therefore a\le 9$$

따라서 실수 a의 최댓값은 9이다.

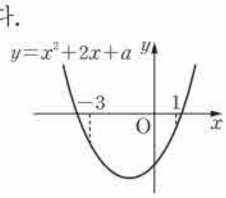
답 9

0743 $f(x)=(x^2+a)e^x$에서

$$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x=(x^2+2x+a)e^x$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-3, 1)$에서 감소하려면 $-3<x<1$일 때 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $e^x>0$이므로 $x^2+2x+a\le 0$이어야 한다.



오른쪽 그림에서

$$9-6+a\le 0,\ 1+2+a\le 0$$

$$\therefore a\le -3$$

답 $a\le -3$

0744 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 1, $x=-1$에서 극솟값 -1을 가지므로

$M=1,\ m=-1 \qquad \therefore M+m=0$

답 ③

0745 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$에서

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=2\ (\because x>0)$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 4를 갖는다.

답 4

0746 $f(x)=\dfrac{x^2+7x+8}{x-1}$에서 $x\ne 1$이고

$$f'(x)=\frac{(2x+7)(x-1)-(x^2+7x+8)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-15}{(x-1)^2}=\frac{(x+3)(x-5)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-3$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고, $x=5$에서 극소이므로

$a=-3,\ b=5 \qquad \therefore 2a+b=-1$

답 ③

0747 $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}$에서 $x>1$이고

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x-1}-(x+3)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\frac{x-5}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=5$

x	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극솟값 4를 갖는다.

답 4

0748 $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{9-x}$에서 $-1\le x\le 9$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{9-x}}=\frac{\sqrt{9-x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x}}$$ ⋯ ❶

06 도함수의 활용 (1)

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{9-x}=\sqrt{x+1}$

양변을 제곱하면 $9-x=x+1$ $\therefore x=4$ ⋯ ❷

x	-1	$\cdots$	4	$\cdots$	9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{10}$	↗	$2\sqrt{5}$	↘	$\sqrt{10}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값 $2\sqrt{5}$를 가지므로

$a=4,\ b=2\sqrt{5}$ ⋯ ❸

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ⋯ ❹

답 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\frac{b}{a}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0749 $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=0$

$x\sqrt{x}-2\sqrt{x}=0,\quad \sqrt{x}(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x>0)$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2\sqrt{2}$	↗

ㄱ. 정의역은 $\{x|x>0\}$이다.

ㄴ. $x=2$에서 극솟값 $2\sqrt{2}$를 갖는다.

ㄷ. 구간 $[2, \infty)$에서 증가한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0750 $f(x)=(x^2+3x+3)e^x$에서

$f'(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+3)e^x$

$=(x^2+5x+6)e^x$

$=(x+3)(x+2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-2$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{3}{e^3}$	↘	$\frac{1}{e^2}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 $\frac{3}{e^3}$, $x=-2$에서 극솟값 $\frac{1}{e^2}$을 가지므로

$M=\frac{3}{e^3},\ m=\frac{1}{e^2}$ $\therefore \frac{m}{M}=\frac{e}{3}$

답 $\frac{e}{3}$

0751 $f(x)=\frac{e^{x^2}}{x^2}$에서 $x\neq0$이고

$f'(x)=\frac{2xe^{x^2}\cdot x^2-e^{x^2}\cdot 2x}{x^4}=\frac{2xe^{x^2}(x^2-1)}{x^4}$

$=\frac{2e^{x^2}(x+1)(x-1)}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극소이므로 극값을 갖는 x의 값의 개수는 2이다.

답 2

0752 $f(x)=e^x+e^{-x}$에서

$f'(x)=e^x-e^{-x}=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $e^{2x}=1$ $\therefore x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 2를 갖는다.

답 ④

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗

0753 $f(x)=-\frac{\ln x}{x}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{\ln x-1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극솟값 $-\frac{1}{e}$을 가지므로

$a=e,\ b=-\frac{1}{e}$ $\therefore ab=-1$

답 -1

0754 $f(x)=3x-x\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=3-(\ln x+1)=2-\ln x$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $\ln x=2$ $\therefore x=e^2$ ⋯ ❷

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	e^2	↘

함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극댓값 e^2을 가지므로

$A(e^2, e^2)$ ⋯ ❸

따라서 직선 OA의 방정식은

$y=\frac{e^2}{e^2}x$ $\therefore y=x$ ⋯ ❹

답 $y=x$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❹ 직선 OA의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

0755 $f(x)=x^2-3x+\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$-\frac{5}{4}-\ln 2$	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극댓값 $-\frac{5}{4}-\ln 2$, $x=1$에서 극솟값 -2를 갖는다.

답 ③

0756 $f(x)=x-\sin 2x$에서

$$f'(x)=1-2\cos 2x$$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x=\frac{1}{2}$

$2x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $2x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0<2x<2\pi$)

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극댓값 $\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}$에서 극솟값 $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$을 가지므로

$$M=\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2},\ m=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore M+m=\pi$

답 ③

0757 $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$에서

$$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$e^{\frac{\pi}{2}}$	↘	$-e^{\frac{3}{2}\pi}$	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값 $e^{\frac{\pi}{2}}$, $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극솟값 $-e^{\frac{3}{2}\pi}$을 가지므로 구하는 곱은

$$e^{\frac{\pi}{2}}\cdot(-e^{\frac{3}{2}\pi})=-e^{2\pi}$$

답 $-e^{2\pi}$

0758 $\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$\frac{dy}{dx}=0$에서 $\sin\theta=0$

$\therefore \theta=\pi$ ($\because 0<\theta<2\pi$)

또 $0<\theta<\pi$일 때 $\frac{dy}{dx}<0$, $\pi<\theta<2\pi$일 때 $\frac{dy}{dx}>0$이므로 주어진 함수는 $\theta=\pi$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 극솟값은 $\cos\pi=-1$

답 -1

0759 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+4}$에서

$$f'(x)=\frac{a(x^2+4)-(ax+b)\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-ax^2-2bx+4a}{(x^2+4)^2}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가지므로

$f(1)=1$에서 $\frac{a+b}{5}=1$

$\therefore a+b=5$ ...... ㉠

$f'(1)=0$에서 $\frac{3a-2b}{25}=0$

$\therefore 3a-2b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$

$\therefore b-a=1$

답 ③

0760 $f(x)=ax+b\ln x$에서

$$f'(x)=a+\frac{b}{x}$$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$f'(3)=0$에서 $a+\frac{b}{3}=0$, $b=-3a$

$\therefore \frac{b}{a}=-3$

답 ③

0761 $f(x)=(x+a)e^x$에서

$f'(x)=e^x+(x+a)e^x=(x+a+1)e^x$ ⋯ ❶

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 m을 가지므로

$f'(1)=0$에서 $(1+a+1)e=0$

$\therefore a=-2$ ⋯ ❷

$\therefore f(x)=(x-2)e^x$

$f(1)=m$에서 $m=(1-2)e=-e$ ⋯ ❸

$\therefore am=2e$ ⋯ ❹

답 $2e$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ m의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ am의 값을 구할 수 있다.	20 %

0762 $f(x)=x-k\cos x$에서

$f'(x)=1+k\sin x$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$1+k\sin x\le 0$ 또는 $1+k\sin x\ge 0$

$\therefore \sin x\le -\frac{1}{k}$ 또는 $\sin x\ge -\frac{1}{k}$

이때 $-1\le \sin x\le 1$이므로

$-\frac{1}{k}\ge 1$ 또는 $-\frac{1}{k}\le -1$

$\therefore -1\le k<0$ 또는 $0<k\le 1$

그런데 $k=0$일 때 $f'(x)=1$이므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

따라서 구하는 k의 값의 범위는 $\quad -1\le k\le 1$ 답 $-1\le k\le 1$

0763 $f(x)=ax+\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=a+\frac{1}{x}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $x>0$인 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$a+\frac{1}{x}\ge 0$

그런데 $x>0$일 때 $\frac{1}{x}>0$이므로

$a\ge 0$ 답 $a\ge 0$

0764 $f(x)=(x^3-9x+k)e^x$에서

$f'(x)=(3x^2-9)e^x+(x^3-9x+k)e^x$

$=(x^3+3x^2-9x-9+k)e^x$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $x^3+3x^2-9x-9+k=0$이 2개 이상의 실근을 갖고, 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

즉 $g(x)=x^3+3x^2-9x-9+k$로 놓으면 삼차함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 부호가 달라야 한다.

$g'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$이므로

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

$g(-3)g(1)<0$이어야 하므로

$(k+18)(k-14)<0 \quad \therefore -18<k<14$

따라서 정수 k는 $-17, -16, -15, \cdots, 12, 13$의 31개이다.

답 ①

0765 $f(x)=\frac{2x+k}{x^2-1}$에서

$f'(x)=\frac{2(x^2-1)-(2x+k)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2(x^2+kx+1)}{(x^2-1)^2}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2+kx+1=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+kx+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\le 0, \quad (k+2)(k-2)\le 0$

$\therefore -2\le k\le 2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로 $\quad \beta-\alpha=4$ 답 ②

0766 $f(x)=(x^2+3x+a)e^{-x}$에서

$f'(x)=(2x+3)e^{-x}-(x^2+3x+a)e^{-x}$

$=-(x^2+x+a-3)e^{-x}$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $x^2+x+a-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+x+a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4(a-3)>0, \quad -4a+13>0 \quad \therefore a<\frac{13}{4}$

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다. 답 3

0767 $f(x)=2\ln x-x+\frac{a}{x}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{a}{x^2}=\frac{-x^2+2x-a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2+2x-a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $-x^2+2x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-a>0 \quad \therefore a<1$

(ii) (두 근의 합)$=2>0$

(iii) (두 근의 곱)$=a>0$

이상에서 $\quad 0<a<1$ 답 $0<a<1$

0768 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sqrt{3x^2-2}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6x}{\sqrt{3x^2-2}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}}$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-1=3(x-1) \quad \therefore y=3x-2$

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로

$a-b=5$ 답 ①

0769 전략 접점의 좌표를 (t, e^{2t+1})으로 놓고 접선의 기울기가 2임을 이용한다.

풀이 $f(x)=e^{2x+1}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2e^{2x+1}$

접점의 좌표를 (t, e^{2t+1})이라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2e^{2t+1}=2, \quad e^{2t+1}=1$

$2t+1=0 \quad \therefore t=-\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=2\left(x+\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y=2x+2$

$\therefore a=2$ 답 2

0770 전략 점 A의 좌표를 $(t, 3e^{t-1})$으로 놓고 점 A에서의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=3e^{x-1}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=3e^{x-1}$

점 A의 좌표를 $(t, 3e^{t-1})$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3e^{t-1}$이므로 접선의 방정식은

$y-3e^{t-1}=3e^{t-1}(x-t)$

$\therefore y=3e^{t-1}x+3(1-t)e^{t-1}$

이 직선이 원점 O를 지나므로

$3(1-t)e^{t-1}=0 \quad \therefore t=1 \ (\because e^{t-1}>0)$

따라서 A$(1, 3)$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ 답 ⑤

0771 전략 어떤 구간에서 $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

풀이 $f(x)=e^{x+1}(x^2+3x+1)$에서

$$f'(x)=e^{x+1}(x^2+3x+1)+e^{x+1}(2x+3)$$
$$=e^{x+1}(x^2+5x+4)$$
$$=e^{x+1}(x+4)(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-4, -1]$에서 감소하므로 $a=-4$, $b=-1$일 때 $b-a$의 값이 최대이다.

즉 구하는 최댓값은 $-1-(-4)=3$

답 ③

0772 전략 $f'(x)=0$인 x의 값을 구하여 $f(x)$의 증감표를 만든다.

풀이 $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+4}$에서

$$f'(x)=\frac{3(x^2+4)-3x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2}$$
$$=\frac{-3(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2} \quad \cdots ❶$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$ ⋯ ❷

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$\frac{3}{4}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $\dfrac{3}{4}$, $x=-2$에서 극솟값 $-\dfrac{3}{4}$을 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은

$$\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=0 \quad \cdots ❸$$

답 0

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 극댓값과 극솟값의 합을 구할 수 있다.	40 %

0773 전략 직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, $\tan\theta=m$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2\sin x+1$로 놓으면 $f'(x)=2\cos x$

$x=\dfrac{\pi}{6}$인 점에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

이므로 $x=\dfrac{\pi}{6}$인 점에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta=\sqrt{3} \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{3}$$

답 $\dfrac{\pi}{3}$

0774 전략 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

풀이 $f(x)=e^x+1$로 놓으면 $f'(x)=e^x$ ⋯ ❶

점 $(1, e+1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{e}$이고, 직선의 방정식은

$$y-(e+1)=-\frac{1}{e}(x-1)$$
$$\therefore y=-\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}+e+1 \quad \cdots ❷$$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$$0=-\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}+e+1, \qquad \frac{1}{e}x=\frac{1}{e}+e+1$$
$$\therefore x=e^2+e+1$$

따라서 구하는 x절편은 e^2+e+1이다. ⋯ ❸

답 e^2+e+1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 접선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❸ x절편을 구할 수 있다.	20 %

0775 전략 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$을 만족시키는 θ의 값을 구한다.

풀이 $\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta$$

이때 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ ($\because 0<\theta<\pi$)

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore x+\sqrt{3}y-2=0$$

따라서 이 접선과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=1$$

답 ①

0776 전략 평행한 두 직선의 기울기는 서로 같음을 이용한다.

풀이 두 점 $(0, 1)$, $(4, 3)$을 잇는 선분과 평행한 직선의 기울기는

$$\frac{3-1}{4-0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$f(x)=\sqrt{x}+1$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$x=a$인 점에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}, \qquad \sqrt{a}=1 \qquad \therefore a=1$$

답 ①

0777 전략 접점의 좌표를 $\left(t, \dfrac{t-1}{t+1}\right)$로 놓고 접선의 방정식을 구한 후 점 $(2, 3)$의 좌표를 대입하여 t의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2} \quad \cdots ❶$$

접점의 좌표를 $\left(t, \dfrac{t-1}{t+1}\right)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{2}{(t+1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{t-1}{t+1}=\frac{2}{(t+1)^2}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{2}{(t+1)^2}x+\frac{t^2-2t-1}{(t+1)^2}$$

이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로

$$3=\frac{4}{(t+1)^2}+\frac{t^2-2t-1}{(t+1)^2}, \quad 3(t+1)^2=t^2-2t+3$$

$$2t^2+8t=0, \quad 2t(t+4)=0$$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=0$ ⋯ ❷

따라서 접선의 기울기는 $f'(-4)=\dfrac{2}{9}$, $f'(0)=2$이므로 구하는 기울기의 합은 $\dfrac{2}{9}+2=\dfrac{20}{9}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{20}{9}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ 두 접선의 기울기의 합을 구할 수 있다.	20 %

0778 전략 접점의 좌표를 $(t, (t-1)e^t)$으로 놓고 t에 대한 방정식을 세워 오직 한 실근을 가질 조건을 구한다.

풀이 $f(x)=(x-1)e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$$

접점의 좌표를 $(t, (t-1)e^t)$이라 하면 접선의 기울기가 $f'(t)=te^t$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t-1)e^t=te^t(x-t)$$

$$\therefore y=te^tx-t^2e^t+te^t-e^t$$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$$0=te^ta-t^2e^t+te^t-e^t$$

$$e^t\{t^2-(a+1)t+1\}=0$$

$\therefore t^2-(a+1)t+1=0$ $(\because e^t>0)$ ⋯⋯ ㉠

점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=(x-1)e^x$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+1)^2-4=0, \quad a^2+2a-3=0$$

$(a+3)(a-1)=0 \quad \therefore a=-3$ $(\because a<0)$

답 ③

참고 $a=1$이면 점 $(a, 0)$은 곡선 $y=(x-1)e^x$ 위의 점이 된다.

0779 전략 접선의 방정식을 구하여 x축, y축과의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=(x+1)e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$$

점 $(1, 2e)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3e$이므로 접선의 방정식은

$$y-2e=3e(x-1) \quad \therefore y=3ex-e$$

접선의 x절편과 y절편이 각각 $\dfrac{1}{3}$, $-e$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot e=\frac{e}{6}$$

답 ②

0780 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^2+a$, $g(x)=\ln 2x$로 놓으면 $x>0$이고

$$f'(x)=4x, \ g'(x)=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$$

두 곡선이 $x=b$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(b)=g(b)$에서

$2b^2+a=\ln 2b$ ⋯⋯ ㉠

$f'(b)=g'(b)$에서

$$4b=\frac{1}{b}, \quad b^2=\frac{1}{4}$$

$\therefore b=\dfrac{1}{2}$ $(\because b>0)$

$b=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$2\cdot\frac{1}{4}+a=\ln\left(2\cdot\frac{1}{2}\right) \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore 4ab=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=-1$$

답 ②

0781 전략 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$임을 이용한다. (단, $f'(g(x))\neq 0$)

풀이 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$$\ln(a+1)=1, \quad a+1=e$$

$$\therefore a=e-1$$

즉 $g(1)=e-1$이고, $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{f'(e-1)}=e$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-(e-1)=e(x-1)$$

$$\therefore y=ex-1$$

답 $y=ex-1$

0782 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

풀이 $f(x)=(x^2+ax+1)e^{-2x}$에서

$$f'(x)=(2x+a)e^{-2x}+(x^2+ax+1)e^{-2x}\cdot(-2)$$

$=\{-2x^2-2(a-1)x+a-2\}e^{-2x}$ ⋯ ❶

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다. ⋯ ❷

이때 $e^{-2x}>0$이므로 $-2x^2-2(a-1)x+a-2\le 0$, 즉 $2x^2+2(a-1)x-a+2\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $2x^2+2(a-1)x-a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-2(-a+2)\le 0$$

$$a^2-3\le 0, \quad (a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})\le 0$$

$\therefore -\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$ ⋯ ❸

답 $-\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소할 조건을 알 수 있다.	30 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0783 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지면 $f(a)=b$, $f'(a)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}=\frac{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\sqrt{a}$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극솟값 0을 가지므로

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a})^2-a\ln\sqrt{a}=0, \qquad \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\ln a=0$$

$$\frac{1}{2}a(1-\ln a)=0, \qquad \ln a=1\ (\because a>0)$$

$\therefore a=e$

답 ④

0784 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(ax^2-9)e^x$에서

$$f'(x)=2axe^x+(ax^2-9)e^x$$
$$=(ax^2+2ax-9)e^x$$

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값을 가지므로 $f'(-3)=0$에서

$(3a-9)e^{-3}=0$

$\therefore a=3$

$\therefore f(x)=(3x^2-9)e^x$,

$f'(x)=(3x^2+6x-9)e^x=3(x+3)(x-1)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 가지므로 구하는 극솟값은

$f(1)=-6e$

답 ④

0785 전략 $f'(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$에서 $h(x)$가 이차식이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$일 때, $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $h(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

풀이 $f(x)=\frac{x^2+ax+3}{x+2}$에서

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x+2)-(x^2+ax+3)}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{x^2+4x+2a-3}{(x+2)^2}$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2+4x+2a-3=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+4x+2a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4-(2a-3)\le 0 \qquad \therefore a\ge\frac{7}{2}$$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

답 $\frac{7}{2}$

0786 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sqrt{x+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

점 $\mathrm{P}(a, \sqrt{a+1})$에서의 접선의 기울기가 $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a+1}}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{a+1}=\frac{1}{2\sqrt{a+1}}(x-a)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2\sqrt{a+1}}x+\frac{a+2}{2\sqrt{a+1}} \quad \cdots ❶$$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$0=\frac{1}{2\sqrt{a+1}}x+\frac{a+2}{2\sqrt{a+1}} \qquad \therefore x=-a-2$$

$\therefore \mathrm{Q}(-a-2, 0)$ $\cdots$ ❷

$$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-a-2-a)^2+(-\sqrt{a+1})^2}$$
$$=\sqrt{(2a+2)^2+a+1}$$
$$=\sqrt{4a^2+9a+5} \quad \cdots ❸$$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{4a^2+9a+5}}{a}=\sqrt{4}=2 \quad \cdots ❹$$

답 2

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❹ $\lim_{a\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{a}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0787 전략 구하는 최솟값은 기울기가 $\frac{1}{e}$인 곡선 $y=\ln x+1$의 접선의 접점과 직선 $y=\frac{1}{e}x+2$ 사이의 거리와 같다.

풀이 직선 $y=\frac{1}{e}x+2$와의 거리가 최소가 되는 곡선 $y=\ln x+1$ 위의 점은 기울기가 $\frac{1}{e}$인 접선의 접점이다.

$f(x)=\ln x+1$로 놓으면 $\quad f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t, \ln t+1)$이라 하면 접선의 기울기가 $\frac{1}{e}$이므로

$$f'(t)=\frac{1}{t}=\frac{1}{e} \qquad \therefore t=e$$

따라서 접점의 좌표는 $(e, 2)$이고 구하는 최솟값은 이 점과 직선 $y=\frac{1}{e}x+2$, 즉 $x-ey+2e=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|e-2e+2e|}{\sqrt{1^2+(-e)^2}}=\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}$$

답 ③

0788 전략 접선의 방정식을 구하여 x축, y축과의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{2}{x-1}$로 놓으면 $\quad f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$

점 $\left(k, \frac{2}{k-1}\right)$에서의 접선의 기울기가 $f'(k)=-\frac{2}{(k-1)^2}$이므로

접선의 방정식은

$$y-\frac{2}{k-1}=-\frac{2}{(k-1)^2}(x-k)$$

$$\therefore\ y=-\frac{2}{(k-1)^2}x+\frac{4k-2}{(k-1)^2}$$

따라서 $\mathrm{P}(2k-1,\ 0)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{4k-2}{(k-1)^2}\right)$이므로 $\triangle\mathrm{OPQ}$의 넓이 $S(k)$는

$$S(k)=\frac{1}{2}\cdot(2k-1)\cdot\frac{4k-2}{(k-1)^2}=\frac{4k^2-4k+1}{k^2-2k+1}$$

$$\therefore\ \lim_{k\to\infty}S(k)=\lim_{k\to\infty}\frac{4k^2-4k+1}{k^2-2k+1}=4$$

답 ②

참고 $k\to\infty$이므로 두 점 P, Q는 각각 x축, y축의 양의 부분에 있는 점으로 생각한다.

0789 전략 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 $f(x)=e^{x+a}$에서 $\quad f'(x)=e^{x+a}$

함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 접점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

따라서 두 그래프의 접점의 좌표를 $(t,\ t)$라 하면

$f(t)=g(t)=t$에서

$$e^{t+a}=t \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$f'(t)=g'(t)$에서

$$e^{t+a}=\frac{1}{e^{t+a}}\left(\because\ g'(t)=\frac{1}{f'(t)}\right),\qquad e^{2(t+a)}=1$$

$$\therefore\ t=-a \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$1=-a \qquad \therefore\ a=-1$$

답 ②

0790 전략 $f'(x)$를 구한 후 사잇값의 정리를 이용한다.

풀이 $f(x)=e^{-x}(\ln x-2)$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=-e^{-x}(\ln x-2)+e^{-x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\ln x+2\right)$$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$이다.

즉 $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x+2$로 놓으면

$$g(a)=0$$

$g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=-\frac{1+x}{x^2}<0$ ($\because\ x>0$)이므로 함수 $g(x)$는 $x>0$에서 연속이고 감소한다.

이때

$$g(1)=1-\ln 1+2=3>0,$$

$$g(e)=\frac{1}{e}-\ln e+2=\frac{1}{e}+1>0,$$

$$g(e^2)=\frac{1}{e^2}-\ln e^2+2=\frac{1}{e^2}>0,$$

$$g(e^3)=\frac{1}{e^3}-\ln e^3+2=\frac{1}{e^3}-1<0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=0$인 실수 c가 구간 $(e^2,\ e^3)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 a가 속하는 구간은 $(e^2,\ e^3)$이다.

답 ③

라쎈 특강 사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

0791 전략 $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하여 $f(x)$의 증감표를 만들고 극대, 극소가 되는 x의 값을 확인한다.

풀이 $f(x)=\cos 2x$에서

$$f'(x)=-2\sin 2x$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad \sin 2x=0$

$$2x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ 6\pi,\ \cdots\ (\because\ 2x>0)$$

$$\therefore\ x=\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ 3\pi,\ \cdots$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

즉 함수 $f(x)$는 $x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \cdots$에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore\ \alpha_1=\pi,\ \alpha_2=2\pi,\ \alpha_3=3\pi,\ \cdots,$$

$$\beta_1=\frac{\pi}{2},\ \beta_2=\frac{3}{2}\pi,\ \beta_3=\frac{5}{2}\pi,\ \cdots$$

따라서 $\alpha_5=5\pi$, $\beta_6=\frac{11}{2}\pi$이므로

$$\cos\alpha_5+\sin\beta_6=\cos 5\pi+\sin\frac{11}{2}\pi$$

$$=-1-1=-2$$

답 -2

07 도함수의 활용 (2)

Ⅱ. 미분법

0792 $f(x)=x^3-6x^2-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x$

$f''(x)=6x-12=6(x-2)$

$f''(x)=0$에서 $x=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 2)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(2, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 풀이 참조

0793 $f(x)=x^4+2x^3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+6x^2$

$f''(x)=12x^2+12x=12x(x+1)$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$ 또는 $(0, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $(-1, 0)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

답 풀이 참조

0794 $f(x)=x^2-e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x-e^x$

$f''(x)=2-e^x$

$f''(x)=0$에서 $e^x=2$

$\therefore x=\ln 2$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, \ln 2)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $(\ln 2, \infty)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

답 풀이 참조

0795 $f(x)=x\ln x$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x+1$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 풀이 참조

0796 $f(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

답 풀이 참조

0797 $f(x)=x^3-8x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-8$

$f''(x)=6x$

$f''(x)=0$에서 $x=0$

$x<0$일 때 $f''(x)<0$, $x>0$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 1)$이다.

답 $(0, 1)$

0798 $f(x)=-x^4+6x^3$으로 놓으면

$f'(x)=-4x^3+18x^2$

$f''(x)=-12x^2+36x=-12x(x-3)$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

$x<0$ 또는 $x>3$일 때 $f''(x)<0$,

$0<x<3$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=0$, $x=3$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$, $(3, 81)$이다.

답 $(0, 0)$, $(3, 81)$

0799 $f(x)=xe^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $x=2$

$x<2$일 때 $f''(x)<0$, $x>2$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$이다.

답 $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$

0800 $f(x)=\ln(x^2+2)$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2+2)-2x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$

$=\dfrac{-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$x<-\sqrt{2}$ 또는 $x>\sqrt{2}$일 때 $f''(x)<0$,

$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-\sqrt{2}, \ln 4)$, $(\sqrt{2}, \ln 4)$이다.

답 $(-\sqrt{2}, \ln 4)$, $(\sqrt{2}, \ln 4)$

0801 $f(x)=x+\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1-\sin x$

$f''(x)=-\cos x$

$f''(x)=0$에서 $x=\dfrac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때 $f''(x)<0$, $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=\dfrac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$이다.

답 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

0802 답 (가) 1 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\dfrac{1}{2}$ (라) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (마) $y=0$

0803 $f(x)=x^4-2x^3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$

$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

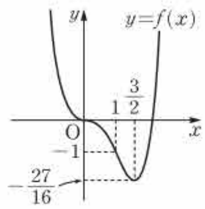
$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

07 도함수의 활용 (2)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	-1	↘	$-\frac{27}{16}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0804 $f(x)=\sqrt{x}-2x$로 놓으면 $x\geq0$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-2$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

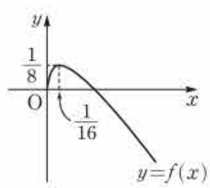
$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{1}{16}$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{8}$	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0805 $f(x)=xe^{2x}$으로 놓으면

$$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=(2x+1)e^{2x}$$

$$f''(x)=2e^{2x}+2(2x+1)e^{2x}=4(x+1)e^{2x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{1}{2}$

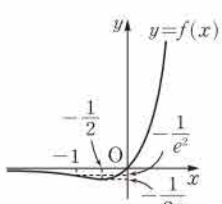
$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



라쎈 특강 곡선 $y=f(x)$의 점근선

a, b가 실수일 때, 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 다음과 같이 함수의 극한값을 이용하여 구한다.

① $\lim_{x\to\infty}f(x)=b$ 또는 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=b$ ➡ 점근선은 직선 $y=b$

② $\lim_{x\to a+}f(x)=\pm\infty$ 또는 $\lim_{x\to a-}f(x)=\pm\infty$
➡ 점근선은 직선 $x=a$

③ $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(mx+n)\}=0$ 또는 $\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(mx+n)\}=0$
➡ 점근선은 직선 $y=mx+n$

0806 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$로 놓으면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

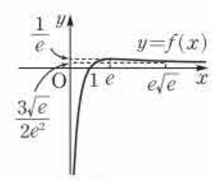
$f'(x)=0$에서 $\quad x=e$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=e\sqrt{e}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3\sqrt{e}}{2e^2}$	↘

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$이므로 점근선은 x축, y축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0807 $f(x)=x-\sin x$로 놓으면

$$f'(x)=1-\cos x$$

$$f''(x)=\sin x$$

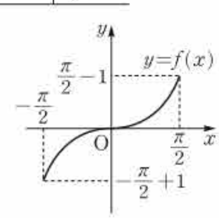
$f'(x)=0$에서 $\quad x=0\left(\because -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=0\left(\because -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}+1$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}-1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0808 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{4}{5}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{4}{5}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 1, $x=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -1

0809 $f(x)=x\sqrt{x+6}$에서

$$f'(x)=\sqrt{x+6}+\frac{x}{2\sqrt{x+6}}=\frac{3(x+4)}{2\sqrt{x+6}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$

x	-6	$\cdots$	-4	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-4\sqrt{2}$	↗	$4\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $4\sqrt{2}$, $x=-4$일 때 최솟값 $-4\sqrt{2}$를 갖는다.

답 최댓값: $4\sqrt{2}$, 최솟값: $-4\sqrt{2}$

0810 $f(x)=x^2e^x$에서

$$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{16}{e^4}$	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗	$9e^3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $9e^3$, $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

답 최댓값: $9e^3$, 최솟값: 0

0811 $f(x)=x-\ln x$에서 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e^2}+2$	↘	1	↗	$e-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e^2}$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{e^2}+2$, $x=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

답 최댓값: $\dfrac{1}{e^2}+2$, 최솟값: 1

0812 $f(x)=x+2\cos x$에서 $f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	↗	$\pi-2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 최댓값 $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, $x=\dfrac{5}{6}\pi$일 때 최솟값 $\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$을 갖는다.

답 최댓값: $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, 최솟값: $\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

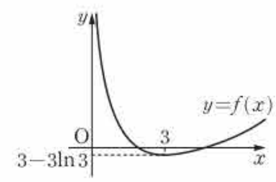
0813 (1) $f(x)=x-3\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=1-\frac{3}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=3$

(2)

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$3-3\ln 3$	↗



이때 $\lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

(3) $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

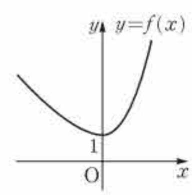
답 풀이 참조

0814 $f(x)=e^x-x$로 놓으면

$$f'(x)=e^x-1$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗



이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않으므로 주어진 방정식은 실근을 갖지 않는다.

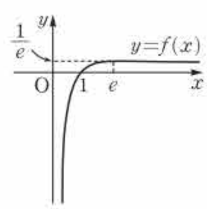
답 0

0815 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$로 놓으면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘



이때 $\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

답 1

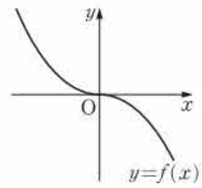
07 도함수의 활용 (2)

0816 $f(x)=\sin x-x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x-1$

$f'(x)\le 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 감소한다.

이때 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

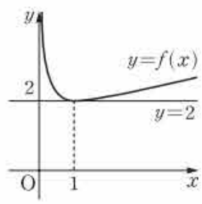
답 1

0817 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$로 놓으면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	2	↗



이때 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=2$와 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

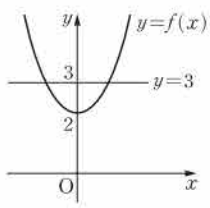
답 1

0818 $f(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^x-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗



이때 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=3$과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

답 2

0819 답 (가) $1-\dfrac{1}{x+1}$ (나) 0 (다) 0

0820 $f(x)=x-\cos x+1$로 놓으면

$f'(x)=1+\sin x$

$x>0$일 때 $f'(x)\ge 0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

$f(0)=0$이므로 $x>0$일 때

$f(x)>0$, 즉 $x-\cos x+1>0$

따라서 $x>0$일 때 부등식 $x>\cos x-1$이 성립한다.

답 풀이 참조

0821 $f(x)=e^x-x-1$로 놓으면

$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

또 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이다.

즉 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\ge 0$, 즉 $e^x-x-1\ge 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $e^x\ge x+1$이 성립한다.

답 풀이 참조

0822 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=-e^{-t}$, $a(t)=f''(t)=e^{-t}$

이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v(1)=-\dfrac{1}{e}$, $a(1)=\dfrac{1}{e}$

답 속도: $-\dfrac{1}{e}$, 가속도: $\dfrac{1}{e}$

0823 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=1+2\cos t$, $a(t)=f''(t)=-2\sin t$

이므로 $t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, $a\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2$

답 속도: 1, 가속도: -2

0824 $\dfrac{dx}{dt}=4$, $\dfrac{dy}{dt}=2t+1$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(4,\ 2t+1)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 속도는 $(4,\ 7)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=2$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(0,\ 2)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는 $(0,\ 2)$

답 속도: $(4,\ 7)$, 가속도: $(0,\ 2)$

0825 $\dfrac{dx}{dt}=6t$, $\dfrac{dy}{dt}=4t+1$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(6t,\ 4t+1)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 속도는 $(18,\ 13)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=6$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=4$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(6,\ 4)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는 $(6,\ 4)$

답 속도: $(18,\ 13)$, 가속도: $(6,\ 4)$

0826 $\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t$, $\dfrac{dy}{dt}=4t^3-8$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(3t^2-6t,\ 4t^3-8)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 속도는 $(9,\ 100)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=6t-6$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=12t^2$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(6t-6,\ 12t^2)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는 $(12,\ 108)$

답 속도: $(9,\ 100)$, 가속도: $(12,\ 108)$

0827 $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(\cos t,\ -\sin t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 속도는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(-\sin t,\ -\cos t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 가속도는 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

답 속도: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, 가속도: $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

0828 $\frac{dx}{dt}=1+\cos t$, $\frac{dy}{dt}=2t+\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(1+\cos t,\ 2t+\sin t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 속도는 $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\right)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2+\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(-\sin t,\ 2+\cos t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 가속도는 $\left(-\frac{1}{2},\ 2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

답 속도: $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\right)$, 가속도: $\left(-\frac{1}{2},\ 2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

0829 $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\sqrt{t}}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는 $(1,\ 1)$이므로 속력은

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$\left(0,\ -\frac{1}{2t\sqrt{t}}\right)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$이므로 가속도의 크기는 $\sqrt{0^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$

답 속력: $\sqrt{2}$, 가속도의 크기: $\frac{1}{2}$

0830 $\frac{dx}{dt}=1+e^t$, $\frac{dy}{dt}=1-e^t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(1+e^t,\ 1-e^t)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는 $(1+e^2,\ 1-e^2)$이므로 속력은

$\sqrt{(1+e^2)^2+(1-e^2)^2}=\sqrt{2+2e^4}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-e^t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(e^t,\ -e^t)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $(e^2,\ -e^2)$이므로 가속도의 크기는 $\sqrt{(e^2)^2+(-e^2)^2}=\sqrt{2}e^2$

답 속력: $\sqrt{2+2e^4}$, 가속도의 크기: $\sqrt{2}e^2$

0831 $f(x)=2x^2+\ln x$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=4x+\frac{1}{x}$, $f''(x)=4-\frac{1}{x^2}$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$4-\frac{1}{x^2}<0$, $\quad 4x^2-1<0$

$(2x+1)(2x-1)<0$, $\quad -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

$\therefore\ 0<x<\frac{1}{2}$ $(\because\ x>0)$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$이다. 답 ①

0832 $f(x)=x^3+3x^2-9x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x-9$, $f''(x)=6x+6$

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로

$6x+6>0 \quad \therefore\ x>-1$ 답 ①

0833 $f(x)=(x^2+a)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x=(x^2+2x+a)e^x$

$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+a)e^x$

$=(x^2+4x+2+a)e^x$ ··· ❶

곡선 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 $e^x>0$이므로 부등식 $x^2+4x+2+a\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.

따라서 방정식 $x^2+4x+2+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(2+a)\leq 0 \quad \therefore\ a\geq 2$ ··· ❷

답 $a\geq 2$

채점 기준	비율
❶ $f''(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %

0834 ㄱ. $f(x)=x^4+x^2$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+2x$, $f''(x)=12x^2+2$

실수 전체의 집합에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

ㄴ. $f(x)=1+e^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$

실수 전체의 집합에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

ㄷ. $f(x)=\ln(x^2+1)$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, $f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$ 또는 $(1,\ \infty)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(-1,\ 1)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

ㄹ. $f(x)=x^2+\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2x-\sin x$, $f''(x)=2-\cos x$

실수 전체의 집합에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

이상에서 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록한 곡선은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0835 $f(x)=(x^2+x)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x)e^x=(x^2+3x+1)e^x$

$f''(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+1)e^x$

$=(x^2+5x+4)e^x$

$=(x+4)(x+1)e^x$

$f''(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=-1$

$x<-4$ 또는 $x>-1$일 때 $f''(x)>0$,

$-4<x<-1$일 때 $f''(x)<0$

즉 $x=-4$, $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 모든 변곡점의 x좌표의 합은

$-4+(-1)=-5$

답 ①

0836 $f(x)=x^4-2x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-6x^2-3$

$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$x<0$ 또는 $x>1$일 때 $f''(x)>0$,

$0<x<1$일 때 $f''(x)<0$

즉 $x=0$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$, $(1, -4)$이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$

답 ④

0837 $f(x)=\ln(x^2+4)$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+4}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+4)-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}=\frac{-2(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$x<-2$ 또는 $x>2$일 때 $f''(x)<0$,

$-2<x<2$일 때 $f''(x)>0$

즉 $x=-2$, $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 $(-2, 3\ln 2)$, $(2, 3\ln 2)$이다.

따라서 △OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot(2+2)\cdot 3\ln 2=6\ln 2$

답 $6\ln 2$

0838 $f(x)=2\sin x-x$로 놓으면

$f'(x)=2\cos x-1$, $f''(x)=-2\sin x$ ⋯ ❶

$f''(x)=0$에서 $x=\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$0<x<\pi$일 때 $f''(x)<0$,

$\pi<x<2\pi$일 때 $f''(x)>0$

즉 $x=\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x좌표는 π이다. ⋯ ❷

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는

$f'(\pi)=2\cos\pi-1=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 변곡점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 변곡점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %

0839 $f(x)=x^3+ax^2+bx-5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f''(x)=6x+2a$

변곡점의 좌표가 $(-1, 6)$이므로

$f(-1)=6$에서 $-1+a-b-5=6$

$\therefore a-b=12$ ⋯⋯ ㉠

$f''(-1)=0$에서 $-6+2a=0$

$\therefore a=3$

이것을 ㉠에 대입하면 $3-b=12$ $\therefore b=-9$

$\therefore a+2b=-15$

답 ②

0840 $f(x)=(\ln ax)^2$으로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=2\ln ax\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln ax}{x}$

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2-2\ln ax}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $\ln ax=1$

$ax=e$ $\therefore x=\frac{e}{a}$

$0<x<\frac{e}{a}$일 때 $f''(x)>0$, $x>\frac{e}{a}$일 때 $f''(x)<0$

즉 $x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$\left(\frac{e}{a}, 1\right)$

이때 변곡점이 직선 $2x+y=2$ 위에 있으므로

$\frac{2e}{a}+1=2$, $\frac{2e}{a}=1$

$\therefore a=2e$

답 ⑤

0841 $f(x)=ax^2-5x+b\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2ax-5+\frac{b}{x}$, $f''(x)=2a-\frac{b}{x^2}$

$x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=0$

$2a-5+b=0$ $\therefore 2a+b=5$ ⋯⋯ ㉠

변곡점의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$2a-4b=0$ $\therefore a-2b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

$\therefore f(x)=2x^2-5x+\ln x$,

$f'(x)=4x-5+\frac{1}{x}=\frac{4x^2-5x+1}{x}$

$=\frac{(4x-1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{4}$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=2\cdot\frac{1}{16}-5\cdot\frac{1}{4}+\ln\frac{1}{4}=-\frac{9}{8}-\ln 4$$

답 $-\frac{9}{8}-\ln 4$

0842 $f(x)=(x^2+4x+a)e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=(2x+4)e^x+(x^2+4x+a)e^x$$
$$=(x^2+6x+4+a)e^x$$
$$f''(x)=(2x+6)e^x+(x^2+6x+4+a)e^x$$
$$=(x^2+8x+10+a)e^x$$

$e^x>0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 2개이려면 방정식 $x^2+8x+10+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
따라서 방정식 $x^2+8x+10+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=16-(10+a)>0$$
$$\therefore a<6$$

답 $a<6$

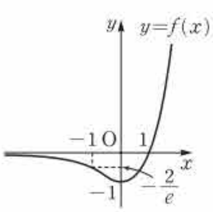
0843 $f(x)=(x-1)e^x$에서

$$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$$
$$f''(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$
$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{e}$	↘	-1	↗

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 극솟값 $f(0)=-1$을 갖는다.
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

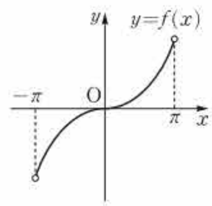
0844 $f(x)=x-\sin x$로 놓으면

$$f'(x)=1-\cos x,\ f''(x)=\sin x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0\ (\because -\pi<x<\pi)$
$f''(x)=0$에서 $\quad x=0\ (\because -\pi<x<\pi)$

x	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↗	

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-x-\sin(-x)$$
$$=-x+\sin x$$
$$=-f(x)$$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, \pi)$에서 아래로 볼록하다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0845 $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$에서 $x\neq 2$이고

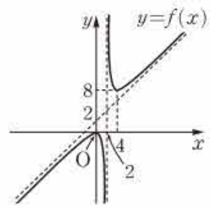
$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$
$$f''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$$
$$=\frac{8}{(x-2)^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=4$
$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	0	↘		↘	8	↗

또 $\lim_{x\to 2+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 2-}f(x)=-\infty$이고

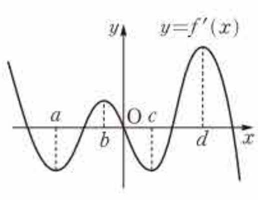
$$f(x)=\frac{x^2-4+4}{x-2}$$
$$=\frac{(x+2)(x-2)+4}{x-2}$$
$$=x+2+\frac{4}{x-2}$$



에서 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x+2)\}=0$,
$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(x+2)\}=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.
ㄱ. $x=0$에서 극대이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 구간 $(2, 4)$에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=x+2$이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0846 오른쪽 그림과 같이 a, b, c, d를 정하고 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 4이다.

답 4

0847 구간 (a, e)에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로 구하는 구간은 (a, b) 또는 (d, e)이다.

답 ①

0848 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	변곡점	↘	극소	↗

ㄱ. 극댓값을 갖지 않는다.

ㄴ. $x=0$에서 극소이다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 $x=-2$, $x=-\frac{2}{3}$에서 변곡점을 가지므로 변곡점은 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0849 $f(x)=\frac{x-2}{x^2-x+2}$에서

$$f'(x)=\frac{x^2-x+2-(x-2)(2x-1)}{(x^2-x+2)^2}=\frac{-x(x-4)}{(x^2-x+2)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	$\frac{1}{7}$	↘

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 $\frac{1}{7}$을 갖는다.

$\therefore a=4,\ b=\frac{1}{7}$

$\therefore \frac{a}{b}=28$

답 28

0850 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$에서 $0\le x\le 8$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{8-x}}=\frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}}$$ ❶

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{8-x}=\sqrt{x}$

$8-x=x \quad \therefore x=4$

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	↗	4	↘	$2\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 4를 갖는다. ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	60 %

0851 $f(x)=x-5+\frac{4}{x+6}$에서

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x+6)^2}=\frac{(x+8)(x+4)}{(x+6)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ ($\because -5\le x\le 0$)

x	-5	$\cdots$	-4	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	↘	-7	↗	$-\frac{13}{3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 $-\frac{13}{3}$, $x=-4$일 때 최솟값 -7을 가지므로 구하는 합은

$-\frac{13}{3}+(-7)=-\frac{34}{3}$

답 ②

0852 $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$에서 $-2\le x\le 2$이고

$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$일 때 최댓값 2, $x=-\sqrt{2}$일 때 최솟값 -2를 가지므로

$M=2,\ m=-2$

$\therefore M-m=4$

답 4

0853 $f(x)=\ln(x^2+2x+3)$에서

$$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+3}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln 6$	↘	$\ln 2$	↗	$\ln 3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$일 때 최댓값 $\ln 6$, $x=-1$일 때 최솟값 $\ln 2$를 가지므로

$M=\ln 6,\ m=\ln 2$

$\therefore M-m=\ln\frac{6}{2}=\ln 3$

답 ③

0854 $f(x)=xe^{-x}$에서

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $\frac{1}{e}$을 갖는다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘

답 $\frac{1}{e}$

0855 $f(x)=(x^2-3)e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+(x^2-3)e^x$

$=(x^2+2x-3)e^x=(x+3)(x-1)e^x$ ··· ❶

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{13}{e^4}$	↗	$\frac{6}{e^3}$	↘	$-2e$	↗	e^2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최대이고, $x=1$일 때 최소이므로

$a=2$, $b=1$ ··· ❷

$\therefore a+b=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0856 $f(x)=x^2\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2x\ln x+x$

$=x(2\ln x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{2e}$을 갖는다.

답 ⑤

0857 $f(x)=x\cos x-\sin x$에서

$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x$

$=-x\sin x$

$f'(x)=0$에서 $x\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\pi$	↗	2π

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$일 때 최솟값 $-\pi$를 갖는다. 답 $-\pi$

0858 $f(x)=(1+\cos x)\sin x$에서

$f'(x)=-\sin^2 x+(1+\cos x)\cos x$

$=\cos^2 x-1+\cos x+\cos^2 x$

$=2\cos^2 x+\cos x-1$

$=(\cos x+1)(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x=\frac{5}{3}\pi$일 때 최솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 가지므로 구하는 곱은

$\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=-\frac{27}{16}$ 답 ②

0859 $f(x)=\cos^3 x-6\sin^2 x+1$

$=\cos^3 x-6(1-\cos^2 x)+1$

$=\cos^3 x+6\cos^2 x-5$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+6t^2-5$

$\therefore g'(t)=3t^2+12t=3t(t+4)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ ($\because -1\le t\le 1$)

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	↘	-5	↗	2

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$일 때 최댓값 2, $t=0$일 때 최솟값 -5를 가지므로 구하는 합은 $2+(-5)=-3$ 답 -3

0860 $3^x=t$로 놓으면 $t>0$이고, 주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-t^2-t$

$\therefore g'(t)=3t^2-2t-1=(3t+1)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because t>0$)

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	-1	↗

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 -1을 갖는다. 답 ③

0861 $\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{2}\le x\le 16$에서

$-1\le t\le 4$ ··· ❶

주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^4-4t^3$

$\therefore g'(t)=4t^3-12t^2=4t^2(t-3)$ ··· ❷

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=3$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	5	↘	0	↘	-27	↗	0

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-1$일 때 최댓값 5, $t=3$일 때 최솟값 -27을 가지므로

$M=5$, $m=-27$ ··· ❸

$\therefore M-m=32$ ··· ❹

답 32

07 도함수의 활용 (2)

채점 기준	비율
❶ $\log_2 x=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $g(t)$, $g'(t)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ M, m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0862 $f(x)=x\ln x-x+a$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$a-1$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $a-1$을 가지므로

$a-1=2 \qquad \therefore a=3$

답 ③

0863 $f(x)=xe^{kx}$에서

$f'(x)=e^{kx}+kxe^{kx}=(kx+1)e^{kx}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\dfrac{1}{k}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{1}{k}$일 때 최댓값 $-\dfrac{1}{ke}$을 가지므로

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{k}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$-\dfrac{1}{ke}$	↘

$-\dfrac{1}{ke}=1 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{e}$

답 $-\dfrac{1}{e}$

0864 $f(x)=a(x+2\cos x)$에서

$f'(x)=a(1-2\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}\left(\because 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2a$	↗	$\left(\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)a$	↘	$\dfrac{\pi}{2}a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 최댓값 $\left(\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)a$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 최솟값 $\dfrac{a}{2}\pi$를 가지므로

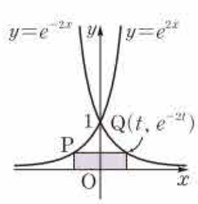
$\dfrac{a}{2}\pi=\pi \qquad \therefore a=2$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$\left(\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)\cdot 2=\dfrac{\pi}{3}+2\sqrt{3}$

답 ⑤

0865 두 곡선 $y=e^{2x}$과 $y=e^{-2x}$은 y축에 대하여 대칭이므로 제1사분면에 있는 직사각형의 꼭짓점을 $\mathrm{Q}(t,\ e^{-2t})\ (t>0)$, 직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면



$S(t)=2te^{-2t}$

$\therefore S'(t)=2e^{-2t}-4te^{-2t}$

$=2(1-2t)e^{-2t}$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=\dfrac{1}{2}$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

따라서 $S(t)$는 $t=\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{e}$을 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{1}{e}$이다.

답 $\dfrac{1}{e}$

0866 $\mathrm{P}(a,\ a)$, $\mathrm{Q}(a,\ \sqrt{a-1})$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=a-\sqrt{a-1}$ ··· ❶

이때 $f(a)=a-\sqrt{a-1}$로 놓으면

$f'(a)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{a-1}}=\dfrac{2\sqrt{a-1}-1}{2\sqrt{a-1}}$ ··· ❷

$f'(a)=0$에서 $\quad 2\sqrt{a-1}-1=0,\quad \sqrt{a-1}=\dfrac{1}{2}$

$a-1=\dfrac{1}{4} \qquad \therefore a=\dfrac{5}{4}$

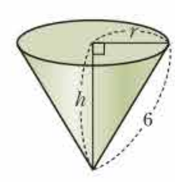
a	1	$\cdots$	$\dfrac{5}{4}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		↘	$\dfrac{3}{4}$	↗

따라서 $f(a)$는 $a=\dfrac{5}{4}$일 때 최솟값 $\dfrac{3}{4}$을 가지므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최솟값은 $\dfrac{3}{4}$이다. ··· ❸

답 $\dfrac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f'(a)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0867 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 $r\ (0<r<6)$라 하면



$6(2\pi-\theta)=2\pi r,\qquad 2\pi-\theta=\dfrac{r}{3}\pi$

$\therefore \theta=2\pi-\dfrac{r}{3}\pi \qquad \cdots\cdots ㉠$

원뿔의 높이를 h라 하면 $h=\sqrt{36-r^2}$이므로 원뿔의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{36-r^2}$

$\therefore V'(r)=\dfrac{1}{3}\pi\left(2r\sqrt{36-r^2}+r^2\cdot\dfrac{-2r}{2\sqrt{36-r^2}}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{2r(36-r^2)-r^3}{\sqrt{36-r^2}}$

$=\dfrac{\pi r(24-r^2)}{\sqrt{36-r^2}}$

$V'(r)=0$에서 $\quad r=2\sqrt{6}$ ($\because 0<r<6$)

r	0	$\cdots$	$2\sqrt{6}$	$\cdots$	6
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(r)$는 $r=2\sqrt{6}$일 때 극대이면서 최대이므로 이것을 ㉠에 대입하면 구하는 θ의 값은

$$\theta=2\pi-\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$$

답 $2\pi-\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

0868 방정식 $(x+1)e^{-x}=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=(x+1)e^{-x}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

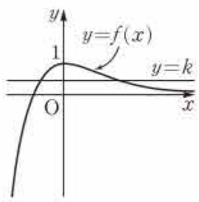
$f(x)=(x+1)e^{-x}$으로 놓으면

$$f'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}=-xe^{-x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$0<k<1$$

즉 $a=0$, $b=1$이므로

$$a+b=1$$

답 1

0869 방정식 $\frac{10}{x^2-4x+5}=k$가 적어도 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{10}{x^2-4x+5}$과 직선 $y=k$가 만나야 한다.

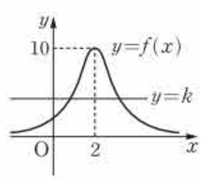
$f(x)=\frac{10}{x^2-4x+5}$으로 놓으면

$$f'(x)=-\frac{10(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2}=-\frac{20(x-2)}{(x^2-4x+5)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	10	↘

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나려면 $0<k\le 10$이므로 정수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 10의 10개이다.

답 10

0870 $\ln x-x+k=0$에서 $\quad \ln x-x=-k \quad \cdots\cdots$ ㉠

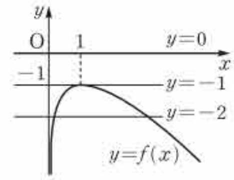
$f(x)=\ln x-x$로 놓으면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	-1	↘

이때 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=0$은 만나지 않으므로 $k=0$일 때, 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$은 한 점에서 만나므로 $k=1$일 때, 방정식 ㉠은 오직 한 개의 실근을 갖는다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-2$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 $k=2$일 때, 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0871 $x=1$을 주어진 방정식에 대입하면 성립하지 않으므로 $x=1$은 주어진 방정식의 해가 아니다.

즉 $x\ne1$이므로 주어진 방정식의 양변을 $(x-1)^2$으로 나누면

$$\frac{x^3}{(x-1)^2}=k$$

따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

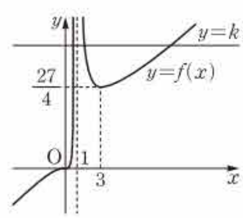
$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$으로 놓으면 $x\ne1$이고

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗		↘	$\frac{27}{4}$	↗

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to1}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

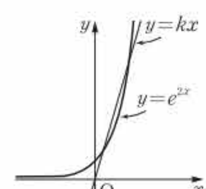


따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$$k>\frac{27}{4}$$

답 $k>\frac{27}{4}$

0872 방정식 $e^{2x}=kx$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^{2x}$과 직선 $y=kx$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



$f(x)=e^{2x}$, $g(x)=kx$로 놓으면

$$f'(x)=2e^{2x},\ g'(x)=k$$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때, 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad e^{2t}=kt \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 2e^{2t}=k \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$e^{2t}=2e^{2t}\cdot t$, $\quad e^{2t}(2t-1)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$

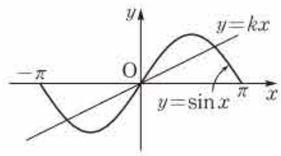
이것을 ㉡에 대입하면 $\quad k=2e$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\quad k>2e$

답 ⑤

0873 $\sin x-kx=0$에서 $\quad \sin x=kx$

따라서 구간 $[-\pi, \pi]$에서 방정식 $\sin x-kx=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 $-\pi\le x\le\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. ··· ❶



$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로 곡선 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=\cos 0\cdot(x-0)$ $\quad \therefore y=x$ ··· ❷

따라서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

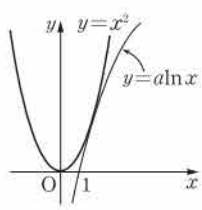
$0\le k<1$ ··· ❸

답 $0\le k<1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	20 %
❷ 점 $(0, 0)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0874 $a\ln x-x^2=0$에서 $\quad a\ln x=x^2$

따라서 방정식 $a\ln x-x^2=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=a\ln x$, $y=x^2$이 접해야 한다.



$f(x)=a\ln x$, $g(x)=x^2$으로 놓으면

$f'(x)=\frac{a}{x}$, $g'(x)=2x$

접점의 x좌표를 $t(t>0)$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad a\ln t=t^2$ ······ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad \frac{a}{t}=2t$ $\quad \therefore a=2t^2$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad 2t^2\ln t=t^2$

$\ln t=\frac{1}{2}$ $\quad \therefore t=\sqrt{e}$

이것을 ㉡에 대입하면 $\quad a=2e$

답 ④

0875 $f(x)=ax^2+4\sin x$로 놓으면

$f'(x)=2ax+4\cos x$

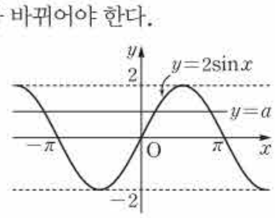
$f''(x)=2a-4\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고 그 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\quad 2a-4\sin x=0$

$\therefore 2\sin x=a$

이 방정식이 실근을 가지려면 곡선 $y=2\sin x$와 직선 $y=a$가 만나야 하므로 오른쪽 그림에서



$-2\le a\le 2$

이때 $a=-2$ 또는 $a=2$이면

$f''(x)=-4(1+\sin x)$ 또는 $f''(x)=4(1-\sin x)$

$\therefore f''(x)\le 0$ 또는 $f''(x)\ge 0$

즉 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

$\therefore -2<a<2$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다.

답 ③

참고 (i) $a=-2$일 때

$f''(x)=-4(1+\sin x)$이고 $-1\le\sin x\le 1$에서

$0\le 1+\sin x\le 2$ $\quad \therefore -8\le -4(1+\sin x)\le 0$

$\therefore f''(x)\le 0$

(ii) $a=2$일 때

$f''(x)=4(1-\sin x)$이고 $-1\le\sin x\le 1$에서

$0\le 1-\sin x\le 2$ $\quad \therefore 0\le 4(1-\sin x)\le 8$

$\therefore f''(x)\ge 0$

0876 $f(x)=x^4-4x^3+kx^2$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x^2+2kx$

$f''(x)=12x^2-24x+2k$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

$f''(x)=0$에서

$12x^2-24x+2k=0$, 즉 $6x^2-12x+k=0$

이차방정식 $6x^2-12x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=36-6k\le 0$ $\quad \therefore k\ge 6$

따라서 실수 k의 최솟값은 6이다.

답 ⑤

0877 $f(x)=e^x+e^{-x}+ax^2$으로 놓으면

$f'(x)=e^x-e^{-x}+2ax$

$f''(x)=e^x+e^{-x}+2a$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고 그 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

이때 $e^x>0$, $e^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$f''(x)=e^x+e^{-x}+2a\ge 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}+2a$

$=2a+2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

따라서 $2a+2<0$이어야 하므로

$a<-1$

답 $a<-1$

0878 $f(x)=xe^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 $-\frac{1}{e}$을 가지므로 부등식 $f(x)\ge k$가 항상 성립하려면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

$k\le -\frac{1}{e}$

따라서 k의 최댓값은 $-\frac{1}{e}$이다.

답 ③

0879 $x+\dfrac{1}{2x^2}+k\ge 0$에서 $\quad x+\dfrac{1}{2x^2}\ge -k$

$f(x)=x+\dfrac{1}{2x^2}$로 놓으면 $\quad f'(x)=1-\dfrac{1}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$\dfrac{3}{2}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $\dfrac{3}{2}$을 가지므로 부등식 $f(x)\ge -k$가 항상 성립하려면

$-k\le \dfrac{3}{2} \quad \therefore k\ge -\dfrac{3}{2}$

답 $k\ge -\dfrac{3}{2}$

0880 $f(x)=(\ln x)^2-4\ln x$로 놓으면

$f'(x)=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x}=\dfrac{2\ln x-4}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=2 \quad \therefore x=e^2$

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	-4	↗

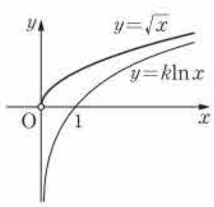
즉 함수 $f(x)$는 $x=e^2$일 때 최솟값 -4를 가지므로 부등식 $f(x)\ge k$가 항상 성립하려면

$k\le -4$

따라서 k의 최댓값은 -4이다.

답 -4

0881 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\sqrt{x}\ge k\ln x$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$가 곡선 $y=k\ln x$보다 위쪽에 있거나 두 곡선이 접해야 한다.



$f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=k\ln x$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x)=\dfrac{k}{x}$

접점의 x좌표를 $t\ (t>0)$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad \sqrt{t}=k\ln t \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{t}}=\dfrac{k}{t}$

$\therefore k=\dfrac{\sqrt{t}}{2} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad \sqrt{t}=\dfrac{\sqrt{t}}{2}\ln t$

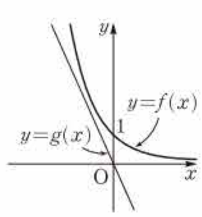
$\ln t=2 \quad \therefore t=e^2$

이것을 ㉡에 대입하면 $\quad k=\dfrac{e}{2}$

따라서 $0<k\le\dfrac{e}{2}$이므로 k의 최댓값은 $\dfrac{e}{2}$이다.

답 ③

0882 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다. ··· ❶



$f(x)=e^{-x}$, $g(x)=mx$에서

$f'(x)=-e^{-x}$, $g'(x)=m$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때, 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad e^{-t}=mt \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad -e^{-t}=m \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad -m=mt$

$\therefore t=-1$ ··· ❷

이것을 ㉡에 대입하면 $\quad m=-e$

따라서 구하는 m의 값의 범위는

$-e<m\le 0$ ··· ❸

답 $-e<m\le 0$

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 그림으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 곡선과 직선의 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0883 $1\le x\le 4$이므로 $ax\le \ln x\le bx$에서 $\quad a\le\dfrac{\ln x}{x}\le b$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$로 놓으면 $\quad f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1 \quad \therefore x=e$

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{\ln 2}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{e}$, $x=1$일 때 최솟값 0을 가지므로 $1\le x\le 4$인 모든 실수 x에 대하여

$0\le\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{1}{e}$

즉 $a\le 0$, $b\ge\dfrac{1}{e}$이므로 $b-a$의 최솟값은

$\dfrac{1}{e}-0=\dfrac{1}{e}$

답 ①

0884 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{t}{2}$

$v(2\pi)=2$이므로 $\quad \dfrac{a}{2}\cos\pi=2$

$-\dfrac{a}{2}=2 \quad \therefore a=-4$

답 -4

0885 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=1-\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$a(t)=f''(t)=\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v(4)=\dfrac{1}{2}$, $a(4)=\dfrac{1}{16}$

답 속도: $\dfrac{1}{2}$, 가속도: $\dfrac{1}{16}$

0886 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=1-2\sin 2t$

운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $t=a$일 때 점 P의 속도가 0이라 하면

$1-2\sin 2a=0 \qquad \therefore \sin 2a=\frac{1}{2}$

$a>0$이므로

$2a=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \cdots$

$\therefore a=\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi, \cdots$

따라서 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $\frac{\pi}{12}$이다.

답 ①

0887 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=p\cos t-q\sin t$

$a(t)=f''(t)=-p\sin t-q\cos t$

$v(\pi)=-6$이므로 $\quad p\cos\pi-q\sin\pi=-6$

$-p=-6 \qquad \therefore p=6$

$a(\pi)=4$이므로 $\quad -p\sin\pi-q\cos\pi=4$

$\therefore q=4$

따라서 $f(t)=6\sin t+4\cos t$이므로 $t=\frac{\pi}{4}$에서의 점 P의 위치는

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=6\sin\frac{\pi}{4}+4\cos\frac{\pi}{4}=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

답 ③

0888 $\frac{dx}{dt}=4$, $\frac{dy}{dt}=4-4t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(4, 4-4t)$

따라서 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{4^2+(4-4t)^2}=4\sqrt{t^2-2t+2}$

$t=a$일 때 점 P의 속력이 $4\sqrt{17}$이라 하면

$4\sqrt{a^2-2a+2}=4\sqrt{17}, \qquad a^2-2a+2=17$

$a^2-2a-15=0, \qquad (a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=5 \ (\because a>0)$

따라서 구하는 시각은 5이다.

답 5

0889 $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=2t-8$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(2t, 2t-8)$

따라서 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(2t)^2+(2t-8)^2}=\sqrt{8(t-2)^2+32}$

이므로 $t=2$일 때 최솟값 $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$를 갖는다.

답 ②

0890 $\frac{dx}{dt}=1+\frac{2}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=2-\frac{1}{t^2}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$\left(1+\frac{2}{t^2}, 2-\frac{1}{t^2}\right)$ ··· ❶

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는 $(3, 1)$이므로 구하는 속력은

$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ ··· ❷

답 $\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 속도를 구할 수 있다.	50 %
❷ $t=1$에서의 점 P의 속력을 구할 수 있다.	50 %

0891 $\frac{dx}{dt}=t-\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$\left(t-\frac{1}{t}, 2\right)$

따라서 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2^2}=\sqrt{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}=t+\frac{1}{t}$ $t>0$이므로 $t+\frac{1}{t}>0$

이때 $t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t+\frac{1}{t}\ge 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$

이고 등호는 $t=\frac{1}{t}$, 즉 $t=1$일 때 성립하므로 구하는 속도는 $(0, 2)$이다.

답 $(0, 2)$

0892 $\frac{dx}{dt}=5\sqrt{2}$, $\frac{dy}{dt}=-10t+5\sqrt{2}$이므로 시각 t에서의 축구공의 속도는

$(5\sqrt{2}, -10t+5\sqrt{2})$

축구공이 지면에 떨어질 때 $y=0$이므로

$-5t^2+5\sqrt{2}t=0, \qquad -5t(t-\sqrt{2})=0$

$\therefore t=\sqrt{2} \ (\because t>0)$

따라서 $t=\sqrt{2}$에서의 축구공의 속도는 $(5\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$이므로 구하는 속력은

$\sqrt{(5\sqrt{2})^2+(-5\sqrt{2})^2}=10 \text{ (m/s)}$

답 ④

0893 $\frac{dx}{dt}=6$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-4$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(6, 3t^2-4)$

점 P의 속력이 10이므로

$\sqrt{6^2+(3t^2-4)^2}=10, \qquad (3t^2-4)^2=64$

$3t^2-4=\pm 8, \qquad t^2=4 \ (\because t^2>0)$

$\therefore t=2 \ (\because t>0)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=6t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(0, 6t)$

따라서 $t=2$에서의 가속도는 $(0, 12)$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{0^2+12^2}=12$

답 ②

0894 $\frac{dx}{dt}=2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-8\cos t\sin t=-4\sin 2t$에서

$\frac{d^2x}{dt^2}=-2\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-8\cos 2t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(-2\sin t, -8\cos 2t)$ ··· ❶

$x=1$일 때 $2\sin t=1$에서 $\sin t=\frac{1}{2}$이므로

$t=\frac{\pi}{6}\left(\because 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$ ··· ❷

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 가속도는 $(-1, -4)$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$ ··· ❸

답 $\sqrt{17}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 가속도를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 P의 위치가 $(1, 3)$일 때의 시각을 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 P의 위치가 $(1, 3)$일 때의 가속도의 크기를 구할 수 있다.	30 %

0895 전략 함수 $f(x)$에 대하여 어떤 구간에서 $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하고, $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

풀이 $f(x)=3x-2\cos x$로 놓으면

$f'(x)=3+2\sin x$, $f''(x)=2\cos x$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$2\cos x<0$, $\quad \cos x<0$

$\therefore \frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$이다.

답 ③

0896 전략 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 때에는 $f'(x)=0$, $f''(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값을 경계로 나눈 구간에서 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 $f(x)=(3-x)e^x$에서

$f'(x)=-e^x+(3-x)e^x=(2-x)e^x$

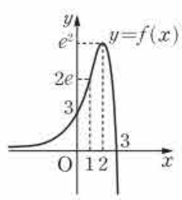
$f''(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	+	+	0	−
$f''(x)$	+	0	−	−	−
$f(x)$	⤴	$2e$	↗	e^2	↘

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ②

0897 전략 닫힌구간에서의 함수의 최대, 최소는 극값과 구간의 양 끝점의 함숫값을 구하여 비교한다.

풀이 $f(x)=2x\sqrt{x+1}$에서

$f'(x)=2\sqrt{x+1}+\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{2(x+1)+x}{\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{2}{3}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↗	$2\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2}{3}$일 때 최솟값 $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$을 갖는다.

답 $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$

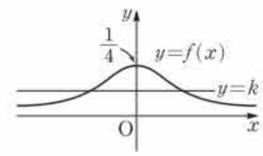
0898 전략 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 방정식 $\frac{1}{x^2+4}=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{1}{x^2+4}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. ⋯ ❶

$f(x)=\frac{1}{x^2+4}$로 놓으면 $\quad f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$\frac{1}{4}$	↘



이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다. ⋯ ❷

따라서 곡선 $y=\frac{1}{x^2+4}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$0<k<\frac{1}{4}$ ⋯ ❸

답 $0<k<\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

0899 전략 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=e^t$, $\frac{dy}{dt}=e^{-t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

(e^t, e^{-t})

따라서 $t=\ln 2$에서의 점 P의 속도는 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$이므로 구하는 속력은

$\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{17}}{2}$

0900 전략 곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 위로 볼록하려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\le 0$이어야 한다.

풀이 $f(x)=-x^4+ax^3+3ax^2+5$로 놓으면

$f'(x)=-4x^3+3ax^2+6ax$

$f''(x)=-12x^2+6ax+6a$

곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 위로 볼록하려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\le 0$이어야 하므로 부등식 $-12x^2+6ax+6a\le 0$, 즉 $2x^2-ax-a\ge 0$이 항상 성립해야 한다.

방정식 $2x^2-ax-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2+8a\le 0$, $\quad a(a+8)\le 0$

$\therefore -8\le a\le 0$

따라서 a의 최솟값은 -8이다.

답 -8

0901 전략 곡선 $y=f(x)$가 주어진 구간에서 위로 볼록하려면 주어진 구간에서 $f''(x)\le 0$이어야 한다.

풀이 ㄱ. $f(x)=\ln(x^2+4)$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+4}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+4)-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-2(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$$

구간 $(2, \infty)$에서 $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

ㄴ. $f(x)=e^x\cos x$로 놓으면

$$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$$

$$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$$
$$=-2e^x\sin x$$

구간 $(0, \pi)$에서 $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

ㄷ. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+1)^2-(-x^2+1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

구간 $(-1, 0)$에서 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.

이상에서 주어진 구간에서 위로 볼록한 곡선은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0902 전략 함수 $f(x)$의 변곡점을 구할 때에는 $f''(x)=0$인 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 $f(x)=2xe^x$으로 놓으면

$$f'(x)=2e^x+2xe^x=2(x+1)e^x$$
$$f''(x)=2e^x+2(x+1)e^x=2(x+2)e^x$$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$

$x<-2$일 때 $f''(x)<0$, $x>-2$일 때 $f''(x)>0$

즉 $x=-2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-2, -\frac{4}{e^2}\right)$이다. ··· ❶

점 $\left(-2, -\frac{4}{e^2}\right)$에서의 접선의 기울기가 $f'(-2)=-\frac{2}{e^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y+\frac{4}{e^2}=-\frac{2}{e^2}(x+2)$$

$$\therefore y=-\frac{2}{e^2}x-\frac{8}{e^2}$$ ··· ❷

따라서 구하는 y절편은 $-\frac{8}{e^2}$이다. ··· ❸

답 $-\frac{8}{e^2}$

채점 기준	비율
❶ 변곡점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ y절편을 구할 수 있다.	20 %

0903 전략 $f'(x)=0$, $f''(x)=0$이 되는 x의 값을 구하고 그 값을 경계로 나눈 구간에서의 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 조사하여 극대, 극소가 되는 점과 변곡점을 구한다.

풀이 $f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=d$ 또는 $x=f$

$f''(x)=0$에서 $x=b$ 또는 $x=0$ 또는 $x=c$ 또는 $x=e$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	0	$\cdots$	c
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	변곡점	↗	변곡점

x	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$	f	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	변곡점	↘	극소	↗

ㄱ. 구간 $[a, f]$에서 변곡점은 4개이다.

ㄴ. 구간 $[a, e]$에서 극대가 되는 x는 d의 1개이다.

ㄷ. 구간 $[a, e]$에서 $f(x)$는 $x=d$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(d)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0904 전략 주어진 함수를 한 종류의 삼각함수로 나타낸 후 $\cos x=t$로 놓고 주어진 구간에서의 극값과 구간의 양 끝 점의 함숫값을 구하여 비교한다.

풀이 $f(x)=2\cos^3 x-3\sin^2 x+2$

$$=2\cos^3 x-3(1-\cos^2 x)+2$$
$$=2\cos^3 x+3\cos^2 x-1$$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$$g(t)=2t^3+3t^2-1$$
$$\therefore g'(t)=6t^2+6t=6t(t+1)$$

$g'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=0$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	↘	-1	↗	4

따라서 $g(t)$는 $t=1$일 때 최대이고, $t=0$일 때 최소이다.

이때 $\cos x=t$이므로 $\cos a=1$, $\cos b=0$에서

$$a=0,\ b=\frac{\pi}{2}\ (\because 0\le a\le\pi,\ 0\le b\le\pi)$$

$$\therefore a+b=\frac{\pi}{2}$$

답 ③

주의 a, b는 함수 $f(x)$가 각각 최대, 최소일 때의 x의 값이다. $a=1$, $b=0$으로 착각하지 않도록 주의한다.

0905 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2e^{-x}$으로 놓으면

$$f'(x)=-2e^{-x}$$

이므로 점 $P(t, 2e^{-t})$에서의 접선의 방정식은

$$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$$
$$\therefore y=-2e^{-t}x+2e^{-t}(t+1)$$

따라서 $A(0, 2e^{-t})$, $B(0, 2e^{-t}(t+1))$이므로

$$\overline{AB}=2te^{-t}$$

$\triangle APB$의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot 2te^{-t}=t^2e^{-t}$$

이므로

$$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=t(2-t)e^{-t}$$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=2\ (\because t>0)$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	극대	↘

따라서 $S(t)$는 $t=2$일 때 극대이면서 최대이다. 답 ④

0906 전략 증감표를 만들어 극대, 극소와 변곡점을 찾아 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)=2\ln(5-x)+\frac{1}{4}x^2$에서 $x<5$이고

$$f'(x)=\frac{-2}{5-x}+\frac{x}{2}=\frac{2}{x-5}+\frac{x}{2}=\frac{(x-1)(x-4)}{2(x-5)}$$

$$f''(x)=\frac{-2}{(x-5)^2}+\frac{1}{2}=\frac{(x-3)(x-7)}{2(x-5)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=4$

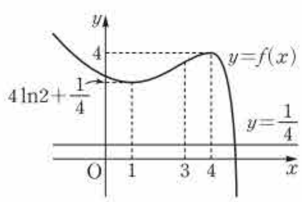
$f''(x)=0$에서 $\quad x=3\ (\because x<5)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	극대	↘	

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$은 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=\frac{1}{4}$의 실근의 개수는 1이다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0907 전략 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $x^2\ln x-2x^2+\frac{k}{2}x=0$에서

$$x^2\ln x-2x^2=-\frac{k}{2}x$$

$x>0$이므로 양변을 x로 나누면

$$x\ln x-2x=-\frac{k}{2}$$

따라서 방정식 $x^2\ln x-2x^2+\frac{k}{2}x=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=x\ln x-2x$와 직선 $y=-\frac{k}{2}$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

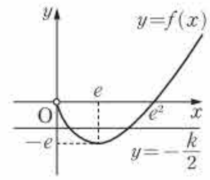
$f(x)=x\ln x-2x$로 놓으면

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-2=\ln x-1$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1 \quad \therefore x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-e$	↗

이때 $\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=x\ln x-2x$와 직선 $y=-\frac{k}{2}$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$-e<-\frac{k}{2}<0 \qquad \therefore 0<k<2e$$

$e=2.7$에서 $0<k<5.4$이므로 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5

0908 전략 $x>a$에서 $f'(x)>0$일 때, 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(a)\ge0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $x>0$에서 $f(x)>g(x)$가 성립하려면

$$2\cos x>k-2x^2,\ \text{즉}\ 2\cos x+2x^2-k>0$$

이어야 한다.

$h(x)=2\cos x+2x^2-k$로 놓으면

$$h'(x)=-2\sin x+4x,\ h''(x)=-2\cos x+4$$

$x>0$에서 $h''(x)>0$이므로 $x>0$에서 $h'(x)$는 증가하고 $h'(0)=0$이므로

$$h'(x)>0$$

$x>0$에서 $h(x)$는 증가하고 $h(0)=2-k$이므로 $h(x)>0$이려면

$$2-k\ge0 \qquad \therefore k\le2$$

따라서 k의 최댓값은 2이다. 답 2

0909 전략 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는 각각 $f'(t)$, $f''(t)$이다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$$v(t)=x'(t)=1+\frac{20}{\pi^2}\cdot2\pi\cdot\{-\sin(2\pi t)\}$$
$$=1-\frac{40}{\pi}\sin(2\pi t)$$
$$a(t)=x''(t)=-\frac{40}{\pi}\cdot2\pi\cdot\cos(2\pi t)$$
$$=-80\cos(2\pi t)$$

따라서 $t=\frac{1}{3}$에서의 가속도의 크기는

$$\left|a\left(\frac{1}{3}\right)\right|=\left|-80\cos\frac{2}{3}\pi\right|=40$$

답 40

0910 전략 $y=\log_a f(x)$에서 $a>1$이면 $f(x)$가 최대일 때 y의 값도 최대가 됨을 이용한다.

풀이 $x+y=3$에서 $\quad y=3-x$

진수의 조건에서 $x+9>0$, $y>0$이므로

$$x+9>0,\ 3-x>0 \qquad \therefore -9<x<3$$

$f(x)=\log_2(x+9)+\log_4 y$로 놓으면

$$f(x)=\log_2(x+9)+\log_4(3-x)$$
$$=\log_4(x+9)^2+\log_4(3-x)$$
$$=\log_4(x+9)^2(3-x)$$

$g(x)=(x+9)^2(3-x)$로 놓으면 밑이 1보다 크므로 $g(x)$가 최대일 때 $f(x)$도 최대가 된다.

$$g'(x)=2(x+9)(3-x)-(x+9)^2$$
$$=-3(x+9)(x+1)$$

07 도함수의 활용 (2)

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-1\ (\because -9<x<3)$

x	-9	$\cdots$	-1	$\cdots$	3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	256	↘	

따라서 $g(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 256을 가지므로 $f(x)$의 최댓값은 $\quad \log_4 256=\log_{2^2}2^8=\frac{8}{2}=4$

답 ④

0911 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.

풀이 $f(x)=\frac{x^3+kx}{x^2+2}$에서

$$f'(x)=\frac{(3x^2+k)(x^2+2)-(x^3+kx)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{x^4+(6-k)x^2+2k}{(x^2+2)^2}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $\quad f'(1)=0$

$$\frac{1+(6-k)+2k}{9}=0 \qquad \therefore k=-7$$ ··· ❶

$$\therefore f(x)=\frac{x^3-7x}{x^2+2},$$
$$f'(x)=\frac{x^4+13x^2-14}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{(x^2+14)(x+1)(x-1)}{(x^2+2)^2}$$ ··· ❷

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	-2	↗	-1

따라서 구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 2, $x=1$일 때 최솟값 -2를 가지므로

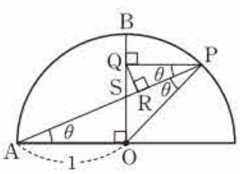
$M=2,\ m=-2$ ··· ❸

$\therefore M^2+m^2=8$ ··· ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x),\ f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $M,\ m$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ M^2+m^2의 값을 구할 수 있다.	10 %

0912 전략 평행선과 엇각의 성질을 이용하여 크기가 같은 각을 찾고 $\overline{QR}$의 길이를 θ로 나타낸다.



풀이 $\overline{AO}\,/\!/\,\overline{PQ}$이므로

$\angle QPS=\theta$ (엇각)

$\overline{OA}=\overline{OP}$이므로

$\angle OPA=\theta$

$\therefore \angle OPQ=2\theta$

$\triangle OPQ$에서 $\quad \overline{PQ}=\overline{OP}\cos 2\theta=\cos 2\theta$

$\triangle PQR$에서

$\overline{QR}=\overline{PQ}\sin\theta=\cos 2\theta\sin\theta=(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$\quad =-2\sin^3\theta+\sin\theta$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$이고,

$f(t)=\overline{QR}=-2t^3+t$라 하면

$\quad f'(t)=-6t^2+1$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\because 0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	↘	

따라서 $f(t)$는 $t=\frac{\sqrt{6}}{6}$일 때 최댓값 $\frac{\sqrt{6}}{9}$을 가지므로 $\overline{QR}$의 길이의 최댓값은 $\frac{\sqrt{6}}{9}$이다.

답 $\frac{\sqrt{6}}{9}$

0913 전략 방정식 $f(x)=g(x)$가 a보다 큰 서로 다른 두 실근을 가지려면 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프가 $x>a$인 부분에서 서로 다른 두 교점을 가져야 한다.

풀이 방정식 $\frac{kx}{x^2+2}=2$가 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 곡선 $y=\frac{kx}{x^2+2}$와 직선 $y=2$가 $x>1$에서 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

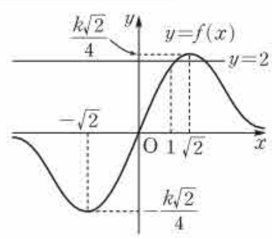
$f(x)=\frac{kx}{x^2+2}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{k(x^2+2)-kx\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-kx^2+2k}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{-k(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{k\sqrt{2}}{4}$	↗	$\frac{k\sqrt{2}}{4}$	↘

이때 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$가 $x>1$에서 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$f(1)<2,\ \frac{k\sqrt{2}}{4}>2$$

이어야 한다.

$f(1)<2$에서 $\quad \frac{k}{3}<2 \qquad \therefore k<6$ ······ ㉠

$\frac{k\sqrt{2}}{4}>2$에서 $\quad k>4\sqrt{2}$ ······ ㉡

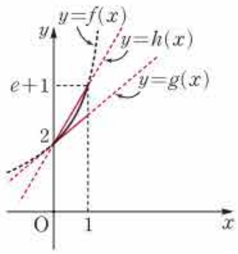
㉠, ㉡에서 $\quad 4\sqrt{2}<k<6$

답 ③

0914 전략 $px\le f(x)\le qx$이면 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=px$에 접하거나 그 위쪽에 있어야 하고, 직선 $y=qx$에 접하거나 그 아래쪽에 있어야 한다.

풀이 $f(x)=e^x+1$, $g(x)=ax+2$, $h(x)=bx+2$로 놓자.

주어진 부등식을 만족시키려면 오른쪽 그림과 같이 $0\le x\le 1$에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있거나 접해야 하고, 직선 $y=h(x)$보다 아래쪽에 있거나 $x=1$인 점에서 만나야 한다.



$f'(x)=e^x$에서 $\quad f'(0)=1$

이때 $f(0)=2$이므로 $g(x)\le f(x)$이려면 직선 $y=g(x)$의 기울기 a가 $a\le 1$이어야 한다.

또 $h(1)\ge e+1$이어야 하므로

$$b+2\ge e+1 \qquad \therefore b\ge e-1$$

따라서 $M=1$, $m=e-1$이므로

$$M+m=e$$

답 ⑤

08 여러 가지 적분법

Ⅲ. 적분법

0915 $\displaystyle\int x^{\frac{5}{3}}dx=\frac{1}{\frac{5}{3}+1}x^{\frac{5}{3}+1}+C=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C=\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}+C$

답 $\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}+C$

0916 $\displaystyle\int x^{-5}dx=\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}+C=-\frac{1}{4}x^{-4}+C=-\frac{1}{4x^4}+C$

답 $-\frac{1}{4x^4}+C$

0917 $\displaystyle\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$$

답 $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

0918 $\displaystyle\int\sqrt[4]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{4}}dx$

$$=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1}+C$$

$$=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C$$

답 $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C$

0919 $\displaystyle\int\sqrt[5]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{5}}dx$

$$=\frac{1}{\frac{2}{5}+1}x^{\frac{2}{5}+1}+C$$

$$=\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}+C=\frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2}+C$$

답 $\frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2}+C$

0920 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx$

$$=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$$

$$=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$$

답 $-\frac{1}{x}+C$

0921 $\displaystyle\int\frac{4}{x}dx=4\int\frac{1}{x}dx=4\ln|x|+C$

답 $4\ln|x|+C$

0922 $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx$

$$=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$$

답 $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

0923 $\displaystyle\int\left(x+\frac{1}{x^3}\right)dx=\int(x+x^{-3})dx$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^{-2}+C$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}+C$$

답 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}+C$

0924 $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}-x^{-2}+x^{-4}\right)dx$

$=\ln|x|+x^{-1}-\frac{1}{3}x^{-3}+C$

$=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$

답 $\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$

0925 $\int\frac{5x-2}{x^2}dx=\int\left(\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{5}{x}-2x^{-2}\right)dx$

$=5\ln|x|+2x^{-1}+C$

$=5\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

답 $5\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

0926 $\int\frac{x^3+x^2-4}{x^3}dx=\int\left(1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}\right)dx$

$=\int\left(1+\frac{1}{x}-4x^{-3}\right)dx$

$=x+\ln|x|+2x^{-2}+C$

$=x+\ln|x|+\frac{2}{x^2}+C$

답 $x+\ln|x|+\frac{2}{x^2}+C$

0927 $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

답 $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

0928 $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx=\int(3x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}})dx$

$=6x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}+C$

$=6\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

답 $6\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

0929 $\int\frac{2x^2-1}{\sqrt{x}}dx=\int(2x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$

답 $\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$

0930 $\int\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx=\int\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}dx$

$=\int(\sqrt{x}+1)dx=\int(x^{\frac{1}{2}}+1)dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

답 $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

0931 $\int\sqrt{x}(x+1)^2dx=\int\sqrt{x}(x^2+2x+1)dx$

$=\int(x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

답 $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

0932 $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx=\int\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx$

$=\int\left(1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$=x-4x^{\frac{1}{2}}+\ln|x|+C$

$=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

답 $x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

0933 $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int(x^2-x^{-2})dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^{-1}+C$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$

답 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$

0934 $\int 2e^x dx=2\int e^x dx=2e^x+C$

답 $2e^x+C$

0935 $\int e^{x+3}dx=\int e^x\cdot e^3dx=e^3\int e^x dx$

$=e^3\cdot e^x+C=e^{x+3}+C$

답 $e^{x+3}+C$

0936 $\int 4^{x+2}dx=\int 4^x\cdot 4^2dx=4^2\int 4^x dx$

$=4^2\cdot\frac{4^x}{\ln 4}+C=\frac{4^{x+2}}{\ln 4}+C$

답 $\frac{4^{x+2}}{\ln 4}+C$

0937 $\int 5^{2x}dx=\int 25^x dx=\frac{25^x}{\ln 25}+C$

답 $\frac{25^x}{\ln 25}+C$

0938 $\int(2^x-1)^2dx=\int(4^x-2\cdot 2^x+1)dx$

$=\int 4^x dx-2\int 2^x dx+\int 1dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}-2\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

$=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

답 $\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

0939 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}-e^x+1}dx=\int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^{2x}-e^x+1}dx$

$=\int (e^x+1)dx$

$=e^x+x+C$ 답 e^x+x+C

0940 $\int (1-2\cos x)dx=\int 1dx-2\int \cos x dx$

$=x-2\sin x+C$ 답 $x-2\sin x+C$

0941 $\int 5\sec^2 x dx=5\int \sec^2 x dx=5\tan x+C$

답 $5\tan x+C$

0942 $\int (2\sin x-\cos x)dx=2\int \sin x dx-\int \cos x dx$

$=-2\cos x-\sin x+C$

답 $-2\cos x-\sin x+C$

0943 $\int (\csc^2 x+3x)dx=-\cot x+\frac{3}{2}x^2+C$

답 $-\cot x+\frac{3}{2}x^2+C$

0944 $\int \sec x(\sec x+\tan x)dx=\int (\sec^2 x+\sec x\tan x)dx$

$=\tan x+\sec x+C$

답 $\tan x+\sec x+C$

0945 $\int \frac{\sin^3 x+4}{\sin^2 x}dx=\int \left(\sin x+\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$

$=\int (\sin x+4\csc^2 x)dx$

$=-\cos x-4\cot x+C$

답 $-\cos x-4\cot x+C$

0946 $\tan^2 x=\sec^2 x-1$이므로

$\int \tan^2 x dx=\int (\boxed{\sec^2 x}-1)dx=\boxed{\tan x}-x+C$

$\therefore$ (가) $\sec^2 x$ (나) $\tan x$ 답 풀이 참조

0947 $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx$

$=\int \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}dx$

$=\int (1+\cos x)dx$

$=x+\sin x+C$ 답 $x+\sin x+C$

0948 $\int \cos x\tan x dx=\int \cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$=\int \sin x dx$

$=-\cos x+C$ 답 $-\cos x+C$

0949 $\int \cot^2 x dx=\int (\csc^2 x-1)dx$

$=-\cot x-x+C$ 답 $-\cot x-x+C$

0950 $3x+1=t$로 놓으면 $x=\boxed{\frac{t-1}{3}}$, $\frac{dx}{dt}=\boxed{\frac{1}{3}}$이므로

$\int (3x+1)^5 dx=\int t^5\cdot\frac{1}{3}dt$

$=\frac{1}{3}\int t^5 dt=\boxed{\frac{1}{18}}t^6+C$

$=\frac{1}{18}(3x+1)^6+C$

$\therefore$ (가) $\frac{t-1}{3}$ (나) $\frac{1}{3}$ (다) $\frac{1}{18}$ 답 풀이 참조

0951 $x+5=t$로 놓으면 $x=t-5$, $\frac{dx}{dt}=1$이므로

$\int (x+5)^4 dx=\int t^4 dt$

$=\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{5}(x+5)^5+C$

답 $\frac{1}{5}(x+5)^5+C$

0952 $3x+4=t$로 놓으면 $x=\frac{t-4}{3}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$이므로

$\int \frac{1}{(3x+4)^2}dx=\int \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int t^{-2}dt$

$=-\frac{1}{3t}+C=-\frac{1}{3(3x+4)}+C$

답 $-\frac{1}{3(3x+4)}+C$

0953 $2-4x=t$로 놓으면 $x=\frac{2-t}{4}$, $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{4}$이므로

$\int \cos(2-4x)dx=\int \cos t\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)dt$

$=-\frac{1}{4}\sin t+C=-\frac{1}{4}\sin(2-4x)+C$

답 $-\frac{1}{4}\sin(2-4x)+C$

0954 $5x-1=t$로 놓으면 $x=\frac{t+1}{5}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{5}$이므로

$\int e^{5x-1}dx=\int e^t\cdot\frac{1}{5}dt$

$=\frac{1}{5}e^t+C=\frac{1}{5}e^{5x-1}+C$ 답 $\frac{1}{5}e^{5x-1}+C$

0955 $x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$, $\frac{dx}{dt}=1$이므로

$\int x\sqrt{x-1}dx=\int (t+1)\sqrt{t}dt=\int (t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})dt$

$=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}+\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$=\frac{2}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1}+\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+C$

답 $\frac{2}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1}+\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+C$

0956 $\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\boxed{\cos x}$이므로

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx=\int \boxed{t^2}\,dt=\boxed{\frac{1}{3}}t^3+C$$
$$=\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

$\therefore$ (가) $\cos x$ (나) t^2 (다) $\dfrac{1}{3}$

답 풀이 참조

0957 $x^2-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int 2x(x^2-1)^3\,dx=\int t^3\,dt$$
$$=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}(x^2-1)^4+C$$

답 $\dfrac{1}{4}(x^2-1)^4+C$

0958 $x^2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int xe^{x^2}\,dx=\int e^t\cdot\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

답 $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$

0959 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

답 $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$

0960 $(x^2+5x-1)'=2x+5$이므로

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x-1}\,dx=\int \frac{(x^2+5x-1)'}{x^2+5x-1}\,dx$$
$$=\ln|x^2+5x-1|+C$$

답 $\ln|x^2+5x-1|+C$

0961 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $(\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx$$
$$=-\ln|\cos x|+C$$

답 $-\ln|\cos x|+C$

0962 $\dfrac{x+4}{x+3}=1+\dfrac{1}{x+3}$이므로

$$\int \frac{x+4}{x+3}\,dx=\int\left(1+\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=x+\ln|x+3|+C$$

답 $x+\ln|x+3|+C$

0963 $\dfrac{x^2-3}{x+2}=x-2+\dfrac{1}{x+2}$이므로

$$\int \frac{x^2-3}{x+2}\,dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x+2|+C$$

답 $\dfrac{1}{2}x^2-2x+\ln|x+2|+C$

0964 $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$이므로

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$$

답 $\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+C$

0965 $\dfrac{6}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}$이므로

$$\int \frac{6}{(x-3)(x+3)}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\ln|x-3|-\ln|x+3|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$$

답 $\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|+C$

0966 (1) $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}=\dfrac{(a+b)x-a+b}{x^2-1}$이므로

$$\frac{3x+1}{x^2-1}=\frac{(a+b)x-a+b}{x^2-1}$$

따라서 $a+b=3$, $-a+b=1$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

(2) $$\int \frac{3x+1}{x^2-1}\,dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$=\ln|x+1|+2\ln|x-1|+C$$
$$=\ln|(x+1)(x-1)^2|+C$$

답 (1) $a=1$, $b=2$ (2) $\ln|(x+1)(x-1)^2|+C$

0967 $f(x)=x$, $g'(x)=\boxed{\cos x}$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\boxed{\sin x}$

이므로

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int \boxed{\sin x}\,dx$$
$$=\boxed{x\sin x+\cos x}+C$$

$\therefore$ (가) $\cos x$ (나) $\sin x$ (다) $\sin x$ (라) $x\sin x+\cos x$

답 풀이 참조

0968 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int xe^x\,dx=xe^x-\int 1\cdot e^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx$$
$$=xe^x-e^x+C$$

답 xe^x-e^x+C

0969 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$\therefore \int \ln x\,dx=(\ln x)\cdot x-\int \frac{1}{x}\cdot x\,dx=x\ln x-\int 1\,dx$

$=x\ln x-x+C$ 답 $x\ln x-x+C$

0970 $f(x)=x+2$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$

$\therefore \int (x+2)\sin x\,dx=(x+2)(-\cos x)-\int 1\cdot(-\cos x)\,dx$

$=-(x+2)\cos x+\int \cos x\,dx$

$=-(x+2)\cos x+\sin x+C$

답 $-(x+2)\cos x+\sin x+C$

0971 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$\therefore \int x\ln x\,dx=(\ln x)\cdot\frac{1}{2}x^2-\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int \frac{1}{2}x\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

답 $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

0972 $f(x)=\int\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int\left(2+\frac{1}{x}-3x^{-2}\right)dx$

$=2x+\ln|x|+3x^{-1}+C$

$=2x+\ln|x|+\frac{3}{x}+C$

$f(1)=5$이므로 $2+3+C=5$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=2x+\ln|x|+\frac{3}{x}$이므로

$f(e)=2e+\frac{3}{e}+1$ 답 ⑤

0973 $\int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}dx=\int \frac{x^3-1}{x}dx$

$=\int\left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\ln|x|+C$

답 $\frac{1}{3}x^3-\ln|x|+C$

0974 $f(x)$를 미분하면 $x\sqrt{x}-1$이므로

$f'(x)=x\sqrt{x}-1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(x\sqrt{x}-1)dx$

$=\int(x^{\frac{3}{2}}-1)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x+C$ ⋯ ❶

$f(0)=2$이므로 $C=2$

$\therefore f(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x+2$ ⋯ ❷

답 $f(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x+2$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	70 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %

0975 $f_n(x)=\int x^{\frac{1}{n}}dx=\frac{1}{\frac{1}{n}+1}x^{\frac{1}{n}+1}+C=\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}+C$

$f_n(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f_n(x)=\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}$

$\therefore f_1(1)f_2(1)f_3(1)\cdot\cdots\cdot f_8(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$

답 ⑤

0976 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x^2-e^{2x}}{x+e^x}dx$

$=\int\frac{(x+e^x)(x-e^x)}{x+e^x}dx=\int(x-e^x)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-e^x+C$

$f(0)=3$이므로 $-1+C=3$ $\therefore C=4$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-e^x+4$이므로

$f(2)=2-e^2+4=6-e^2$ 답 $6-e^2$

0977 $\int(2^x+3^x)^2dx=\int(2^{2x}+2\cdot2^x\cdot3^x+3^{2x})dx$

$=\int(4^x+2\cdot6^x+9^x)dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2\cdot6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$ 답 ④

0978 $f(x)=\int f'(x)dx=\int 3^{2x}\ln 9\,dx$

$=\int 9^x\ln 9\,dx=9^x+C$

$f(0)=1$이므로 $1+C=1$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=9^x$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n}=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{8}$ 답 ③

0979 조건 (가)에서 $f'(x)=(e^x+e^{-x})^2=e^{2x}+e^{-2x}+2$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(e^{2x}+e^{-2x}+2)dx$

$=\frac{e^{2x}}{\ln e^2}+\frac{e^{-2x}}{\ln e^{-2}}+2x+C$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x+C$

조건 ㈏에서 $f(0)=0$이므로 $\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+C=0 \quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x$ 답 ③

0980 $\int \frac{8^x-1}{2^x-1}dx=\int \frac{2^{3x}-1}{2^x-1}dx$

$=\int \frac{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}{2^x-1}dx$

$=\int (4^x+2^x+1)dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$ ⋯ ❶

$\therefore a=\frac{1}{\ln 4},\ b=\frac{1}{\ln 2},\ c=1$ ⋯ ❷

$\therefore \frac{bc}{a}=\frac{\ln 4}{\ln 2}=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $\int \frac{8^x-1}{2^x-1}dx$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $a,\ b,\ c$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\frac{bc}{a}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0981 $f(x)=\int (3-2\tan^2 x)dx=\int \{3-2(\sec^2 x-1)\}dx$

$=\int (5-2\sec^2 x)dx=5x-2\tan x+C$

$f(0)=-\frac{5}{4}\pi$이므로 $\quad C=-\frac{5}{4}\pi$

따라서 $f(x)=5x-2\tan x-\frac{5}{4}\pi$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{4}\pi-2-\frac{5}{4}\pi=-2$ 답 ①

0982 $f(x)=\int f'(x)dx=\int (\sin^2 x+\cos^2 x+\cot^2 x)dx$

$=\int (1+\cot^2 x)dx=\int \csc^2 x\,dx$

$=-\cot x+C$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$이므로 $\quad -1+C=0 \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\cot x+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)-3f\left(\frac{\pi}{3}\right)=(-\sqrt{3}+1)-3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)=-2$

답 -2

0983 $f(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$

$=\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$

$=1+\sin x$

$\therefore F(x)=\int f(x)dx=\int (1+\sin x)dx$

$=x-\cos x+C$

$F(0)=3$이므로 $\quad -1+C=3 \quad \therefore C=4$

$\therefore F(x)=x-\cos x+4$ 답 ③

라쎈 특강 배각의 공식

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

0984 $\int \frac{1}{1+\sin x}dx=\int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$

$=\int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$=\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

$=\int (\sec^2 x-\sec x\tan x)dx$

$=\tan x-\sec x+C$

답 $\tan x-\sec x+C$

0985 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\cos x$에서

$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int \cos x\,dx$

$\therefore f(x)+g(x)=\sin x+C_1$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2-\sin x$에서

$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int (2-\sin x)dx$

$\therefore f(x)-g(x)=2x+\cos x+C_2$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❶

㉠, ㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1 \quad \therefore C_1=1$

$f(0)-g(0)=1+C_2,\quad 1=1+C_2 \quad \therefore C_2=0$

$\therefore f(x)+g(x)=\sin x+1,$

$f(x)-g(x)=2x+\cos x$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$f(x)=\frac{\sin x+\cos x+2x+1}{2},$

$g(x)=\frac{\sin x-\cos x-2x+1}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g(\pi)=\frac{\pi+2}{2}-(1-\pi)=\frac{3}{2}\pi$ ⋯ ❸

답 $\frac{3}{2}\pi$

채점 기준	비율
❶ $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}$, $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}$의 부정적분을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g(\pi)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0986 $x^2+x+4=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$이므로

$$\int(2x+1)(x^2+x+4)^3dx=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{4}(x^2+x+4)^4+C$$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=4$이므로 $ab=1$

답 ①

0987 $x^2-x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-1$이므로

$$f(x)=\int(6x-3)(x^2-x+1)^4dx$$
$$=3\int(2x-1)(x^2-x+1)^4dx$$
$$=3\int t^4dt=\frac{3}{5}t^5+C$$
$$=\frac{3}{5}(x^2-x+1)^5+C$$

$f(1)=1$이므로 $\frac{3}{5}+C=1$ $\therefore C=\frac{2}{5}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{5}(x^2-x+1)^5+\frac{2}{5}$이므로

$f(0)=1$

답 1

0988 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-7)^4dx$

$2x-7=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이므로

$$f(x)=\int(2x-7)^4dx=\int t^4\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{10}t^5+C=\frac{1}{10}(2x-7)^5+C$$

$f(3)=0$이므로 $-\frac{1}{10}+C=0$ $\therefore C=\frac{1}{10}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{10}(2x-7)^5+\frac{1}{10}$

따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$f(4)=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

0989 $ax+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=a$이므로

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(ax+5)^7dx$$
$$=\int t^7\cdot\frac{1}{a}dt=\frac{1}{8a}t^8+C$$
$$=\frac{1}{8a}(ax+5)^8+C \quad \cdots ❶$$

$F(x)$의 최고차항의 계수가 16이므로

$\frac{1}{8a}\cdot a^8=16$, $a^7=2^7$

$\therefore a=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

0990 $3x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{3}dt$$
$$=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{t}+C=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C$$

$f(0)=1$이므로 $\frac{2}{3}+C=1$ $\therefore C=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+\frac{1}{3}$이므로

$f(5)=3$

답 3

0991 $x^2-2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-2$이므로

$$\int(x-1)\sqrt{x^2-2x}\,dx=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}+C$$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

답 ①

0992 $9-x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2x$이므로

$$f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{9-x^2}+C$$

$f(\sqrt{5})=-1$이므로 $-2+C=-1$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\sqrt{9-x^2}+1$이므로

$f(0)=-2$

답 -2

0993 $\sqrt{x+2}=t$로 놓으면 $x=t^2-2$, $\frac{dx}{dt}=2t$이므로

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx=\int\frac{t^2-2}{t}\cdot 2t\,dt=2\int(t^2-2)dt$$
$$=2\left(\frac{1}{3}t^3-2t\right)+C=\frac{2}{3}t^3-4t+C$$
$$=\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-4\sqrt{x+2}+C$$
$$=\frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x+2}+C$$

답 $\frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x+2}+C$

0994 $f'(x)=e^x(e^x+1)^3$이고 $e^x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int e^x(e^x+1)^3dx=\int t^3dt$$
$$=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}(e^x+1)^4+C$$

$f(0)=4$이므로 $4+C=4$ $\therefore C=0$

└ 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 4)$를 지난다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(e^x+1)^4$이므로

$f(\ln 3)=\frac{1}{4}(3+1)^4=64$ 답 ⑤

0995 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$f(x)=\int e^{\cos x}\sin x\,dx=\int e^t\cdot(-1)dt$

$=-e^t+C=-e^{\cos x}+C$

$f(0)=-e$이므로 $\quad -e+C=-e \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=-e^{\cos x}$이므로 ⋯ ❶

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ ⋯ ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0996 ㄱ. $2x-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이므로

$\int e^{2x-2}dx=\int e^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}e^t+C$

$=\frac{1}{2}e^{2x-2}+C$

ㄴ. $e^x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$\int e^x\sqrt{e^x+3}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$

$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$=\frac{2}{3}(e^x+3)\sqrt{e^x+3}+C$

ㄷ. $x^2+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$\int x\cdot 5^{x^2+3}dx=\int 5^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{5^t}{\ln 5}+C$

$=\frac{5^{x^2+3}}{2\ln 5}+C$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0997 조건 (가)에서

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\cdot 3=3f'(x)$

이므로

$3f'(x)=3^{x+1}\sqrt{3^x+8} \qquad \therefore f'(x)=3^x\sqrt{3^x+8}$

$3^x+8=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3^x\ln 3$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3^x\sqrt{3^x+8}\,dx=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{\ln 3}dt$

$=\frac{1}{\ln 3}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3\ln 3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3\ln 3}t\sqrt{t}+C$

$=\frac{2}{3\ln 3}(3^x+8)\sqrt{3^x+8}+C$

조건 (나)에서 $f(0)=\frac{18}{\ln 3}$이므로 $\quad \frac{18}{\ln 3}+C=\frac{18}{\ln 3}$

$\therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3\ln 3}(3^x+8)\sqrt{3^x+8}$

답 $f(x)=\frac{2}{3\ln 3}(3^x+8)\sqrt{3^x+8}$

0998 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt$

$=-t^{-1}+C=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\ln x}+C$

$f\left(\frac{1}{e}\right)=5$이므로 $\quad 1+C=5 \qquad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{\ln x}+4$이므로

$f(e)=3$ 답 3

0999 $\ln x+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x+5}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$

$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$

$=2\sqrt{\ln x+5}+C$

$\therefore a=2$ 답 2

1000 $xf'(x)=\ln 3x$에서

$f'(x)=\frac{\ln 3x}{x}$

$\ln 3x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{\ln 3x}{x}dx=\int t\,dt$

$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln 3x)^2+C$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=0$이므로 $\quad C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(\ln 3x)^2$ 답 ②

1001 $\int\sin^3 x\,dx=\int\sin^2 x\cdot\sin x\,dx$

$=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$\int\sin^3 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\int(1-t^2)\cdot(-1)dt$

$=\int(t^2-1)dt=\frac{1}{3}t^3-t+C$

$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=-1$이므로

$a+b=-\frac{2}{3}$ 답 ②

1002 $1+\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(1+\cos x)^2\sin x\,dx$$
$$=\int t^2\cdot(-1)\,dt=-\int t^2\,dt=-\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=-\frac{1}{3}(1+\cos x)^3+C$$

$f(0)=0$이므로 $-\frac{8}{3}+C=0 \quad \therefore C=\frac{8}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}(1+\cos x)^3+\frac{8}{3}$이므로

$f(\pi)=\frac{8}{3}$

답 ③

1003 $\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \tan x\sec^2 x\,dx$$
$$=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$이므로 $\frac{1}{6}+C=1 \quad \therefore C=\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{5}{6}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{4}{3} \quad \therefore a=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

1004 $x^2-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int 4x\cos(x^2-2)\,dx=\int \cos t\cdot 2\,dt$$
$$=2\sin t+C=2\sin(x^2-2)+C$$

$f(\sqrt{2})=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=2\sin(x^2-2)+1$ ··· ❶

이때 $-1\le\sin(x^2-2)\le 1$이므로

$-1\le 2\sin(x^2-2)+1\le 3$

$\therefore M=3,\ m=-1$ ··· ❷

$\therefore M+m=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1005 $(x^3+4x+1)'=3x^2+4$이므로

$$f(x)=\int\frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}dx=\int\frac{(x^3+4x+1)'}{x^3+4x+1}dx$$
$$=\ln|x^3+4x+1|+C$$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\ln|x^3+4x+1|+1$이므로

$f(1)=\ln 6+1$

답 ①

1006 $(1+\cos x)'=-\sin x$이므로

$$f(x)=\int\frac{-\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}dx$$
$$=\ln(1+\cos x)+C\ (\because\ 1+\cos x>0)$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=\ln(1+\cos x)+2$이므로

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\ln\frac{1}{2}+2=2-\ln 2$

답 ③

1007 $\frac{f'(x)}{f(x)}=5$에서 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 5\,dx$

$\ln f(x)=5x+C\ (\because f(x)>0)$

$\therefore f(x)=e^{5x+C}$ ··· ❶

$f(0)=e^2$이므로 $e^C=e^2 \quad \therefore C=2$

$\therefore f(x)=e^{5x+2}$ ··· ❷

답 $f(x)=e^{5x+2}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분을 구할 수 있다.	60 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %

1008 $\frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x+2}{x+1}dx$$
$$=\int\left(1+\frac{1}{x+1}\right)dx=x+\ln|x+1|+C$$

$f(0)=3$이므로 $C=3$

$\therefore f(x)=x+\ln|x+1|+3$

답 ③

1009 $\frac{2x^2-x+5}{x-1}=\frac{(x-1)(2x+1)+6}{x-1}=2x+1+\frac{6}{x-1}$

이므로

$$\int\frac{2x^2-x+5}{x-1}dx=\int\left(2x+1+\frac{6}{x-1}\right)dx$$
$$=x^2+x+6\ln|x-1|+C$$

답 $x^2+x+6\ln|x-1|+C$

1010 $y=\frac{3-x}{1+x}$로 놓으면

$y(1+x)=3-x, \quad x(y+1)=3-y$

$\therefore x=\frac{3-y}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{3-x}{x+1}$

$\therefore g(x)=\frac{3-x}{x+1}$

이때 $\frac{3-x}{x+1}=-1+\frac{4}{x+1}$이므로

$$\int g(x)dx=\int\frac{3-x}{x+1}dx=\int\left(-1+\frac{4}{x+1}\right)dx$$
$$=-x+4\ln|x+1|+C$$

답 $-x+4\ln|x+1|+C$

1011 $\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$이므로

$$f(x)=\int\frac{4}{x^2-4}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\ln|x-2|-\ln|x+2|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$$

$f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$이므로

$f(4)=\ln\frac{1}{3}=-\ln 3$

답 ①

1012 $f(x)=\int\frac{3-x}{x^2+x-2}dx+\int\frac{x}{x^2+x-2}dx$

$$=\int\left(\frac{3-x}{x^2+x-2}+\frac{x}{x^2+x-2}\right)dx$$
$$=\int\frac{3}{x^2+x-2}dx$$

이때 $\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{3}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}$이므로

$$f(x)=\int\frac{3}{x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\ln|x-1|-\ln|x+2|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+1$이므로

$f(2)=\ln\frac{1}{4}+1=1-2\ln 2$

답 ①

1013 $\frac{4x}{x^2-3x+2}=\frac{4x}{(x-1)(x-2)}=\frac{p}{x-1}+\frac{q}{x-2}$로 놓으면

$$\frac{4x}{(x-1)(x-2)}=\frac{(p+q)x-(2p+q)}{(x-1)(x-2)}$$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$p+q=4,\ 2p+q=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad p=-4,\ q=8$

즉 $\frac{4x}{x^2-3x+2}=\frac{-4}{x-1}+\frac{8}{x-2}$이므로 ⋯ ❶

$$\int\frac{4x}{x^2-3x+2}dx=\int\left(\frac{-4}{x-1}+\frac{8}{x-2}\right)dx$$
$$=-4\ln|x-1|+8\ln|x-2|+C$$

따라서 $a=-4,\ b=8$이므로

$a-b=-12$ ⋯ ❷

답 -12

채점 기준	비율
❶ $\frac{4x}{x^2-3x+2}$를 부분분수로 변형할 수 있다.	70 %
❷ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1014 $u(x)=x,\ v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=-e^{-x}$

$$\therefore f(x)=\int xe^{-x}dx$$
$$=x\cdot(-e^{-x})-\int 1\cdot(-e^{-x})dx$$
$$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$$
$$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$$
$$=-(x+1)e^{-x}+C$$

$f(0)=1$이므로 $\quad -1+C=1 \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=-(x+1)e^{-x}+2$이므로

$f(-1)=2$

답 ③

1015 $u(x)=x,\ v'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\therefore \int x\sin 2x\,dx=x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\int\frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

따라서 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$이므로 $\quad ab=-\frac{1}{8}$

답 ②

1016 $F(x)=xf(x)-x^2\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x\ln x-x$

$xf'(x)=2x\ln x+x \quad \therefore f'(x)=2\ln x+1$

$\therefore f(x)=\int(2\ln x+1)dx=2\int\ln x\,dx+x$ ⋯⋯ ㉠

$\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x,\ v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=x$

$$\therefore \int\ln x\,dx=(\ln x)\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=x\ln x-x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=2(x\ln x-x+C_1)+x$$
$$=2x\ln x-x+C$$

$f(1)=e-1$이므로 $\quad -1+C=e-1 \quad \therefore C=e$

따라서 $f(x)=2x\ln x-x+e$이므로

$f(e)=2e$

답 $2e$

1017 $f(x)=\cos x,\ g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x,\ g(x)=e^x$

$$\therefore \int e^x\cos x\,dx=\cos x\cdot e^x-\int(-\sin x)\cdot e^x\,dx$$
$$=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int e^x\sin x\,dx$에서 $u(x)=\sin x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x,\ v(x)=e^x$

$$\therefore \int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx\right)$$

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\therefore \int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$$

답 $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$

1018 $f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$

$$\therefore \int x^2 \sin x\,dx = x^2\cdot(-\cos x) - \int 2x\cdot(-\cos x)dx$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\int x\cos x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$

$$\therefore \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C_1 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x + C_1)$$

$$= (2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$$

답 $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$

1019 $h(x)=(\ln x)^2$, $k'(x)=1$로 놓으면

$h'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $k(x)=x$

$$\therefore f(x)=\int (\ln x)^2 dx = (\ln x)^2\cdot x - \int \frac{2\ln x}{x}\cdot x\,dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\int \ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$$\therefore \int \ln x\,dx = (\ln x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$

$$= x\ln x - x + C_1 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x) = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x + C_1)$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

$f(1)=2$이므로 $\quad 2+C=2 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$이므로

$f(e)=e$

답 ②

1020 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=3e^x-4$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx = \int (3e^x-4)dx = 3e^x-4x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$f(0)=3+C=0 \quad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=3e^x-4x-3$이므로

$f(1)=3e-4-3=3e-7$

답 $3e-7$

1021 전략 $x^2-2x+3=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $x^2-2x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-2$이므로

$$\int (x-1)(x^2-2x+3)^4 dx = \int t^4\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{10}t^5+C$$

$$= \frac{1}{10}(x^2-2x+3)^5+C$$

따라서 $a=10$, $b=5$이므로 $\quad a+b=15$

답 15

1022 전략 $11-3x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $11-3x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-3$이므로

$$f(x)=\int \sqrt[3]{11-3x}\,dx = \int \sqrt[3]{t}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}dt = -\frac{1}{4}t^{\frac{4}{3}}+C$$

$$= -\frac{1}{4}(11-3x)\sqrt[3]{11-3x}+C$$

$f\left(\frac{11}{3}\right)=7$이므로 $\quad C=7$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}(11-3x)\sqrt[3]{11-3x}+7$이므로 ··· ❶

$f(1)=-4+7=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1023 전략 $\ln(x^3+1)=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\ln(x^3+1)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{3x^2}{x^3+1}$이므로

$$\int \frac{3x^2}{x^3+1}\ln(x^3+1)dx = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2+C$$

$$= \frac{1}{2}\{\ln(x^3+1)\}^2+C$$

답 ②

1024 전략 $\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$임을 이용하여 피적분함수를 간단한 유리함수의 차로 나타내어 적분한다.

풀이 $\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{1}{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx = \int \frac{1}{x^2-x-6}dx$$

$$= \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{5}(\ln|x-3|-\ln|x+2|)+C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|$이므로

$f(-1)=\frac{1}{5}\ln 4=\frac{2}{5}\ln 2$ 답 ②

1025 전략 $\frac{1}{x^p}$(p는 실수)은 x^{-p}으로, $\sqrt[q]{x}$(q는 2 이상의 자연수)는 $x^{\frac{1}{q}}$으로 변형하여 부정적분을 구한다.

풀이 $f(x)=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx=\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+1)dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+x+C$

$f(1)=\frac{2}{3}$이므로 $\quad \frac{2}{3}+2+1+C=\frac{2}{3} \quad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+x-3$이므로

$f(3)=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3-3=4\sqrt{3}$ 답 ④

1026 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & (x\le 1) \\ \frac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+C_1 & (x\le 1) \\ \ln x+C_2 & (x>1)\end{cases}$

$f(-1)=e+\frac{1}{e^2}$이므로 $\quad \frac{1}{e^2}+C_1=e+\frac{1}{e^2} \quad \therefore C_1=e$

또 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to 1+}(\ln x+C_2)=\lim_{x\to 1-}(e^{x-1}+e)=f(1)$

$\therefore C_2=e+1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+e & (x\le 1) \\ \ln x+e+1 & (x>1)\end{cases}$이므로

$f(e)=1+e+1=e+2$ 답 ⑤

1027 전략 $x+2=t$로 놓고 $f'(x)$를 적분하기 쉬운 형태로 변형하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x-4}{(x+2)^3}dx$

$x+2=t$로 놓으면 $x=t-2$, $\frac{dt}{dx}=1$이므로

$f(x)=\int\frac{x-4}{(x+2)^3}dx=\int\frac{t-6}{t^3}dt=\int(t^{-2}-6t^{-3})dt$

$=-t^{-1}+3t^{-2}+C$

$=-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}+C$

$f(0)=\frac{3}{4}$이므로 $\quad -\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+C=\frac{3}{4} \quad \therefore C=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}+\frac{1}{2}$

이때 $f(1)=\frac{1}{2}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점은 ③이다. 답 ③

1028 전략 $\ln x+2=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $\ln x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int\frac{5^{\ln x+2}}{x}dx=\int 5^t dt$

$=\frac{5^t}{\ln 5}+C=\frac{5^{\ln x+2}}{\ln 5}+C$

$f(1)=\frac{25}{\ln 5}$이므로 $\quad \frac{25}{\ln 5}+C=\frac{25}{\ln 5} \quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{5^{\ln x+2}}{\ln 5}$

방정식 $f(x)=\frac{1}{\ln 5}$에서 $\quad \frac{5^{\ln x+2}}{\ln 5}=\frac{1}{\ln 5}$

$5^{\ln x+2}=1, \quad \ln x+2=0, \quad \ln x=-2$

$\therefore x=\frac{1}{e^2}$ 답 ①

1029 전략 $x^2+x=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $x^2+x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$이므로

$f(x)=\int(4x+2)\sin(x^2+x)dx=\int 2\sin t\,dt$

$=-2\cos t+C=-2\cos(x^2+x)+C$

$f(0)=1$이므로 $\quad -2+C=1 \quad \therefore C=3$

$\therefore f(x)=-2\cos(x^2+x)+3$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $\quad |-2|+3=5$ 답 5

1030 전략 $\sin^2x+\cos^2x=1$임을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $f(x)=\int\frac{\sin^3x}{1-\cos x}dx=\int\frac{\sin x\cdot\sin^2x}{1-\cos x}dx$

$=\int\frac{\sin x(1-\cos^2x)}{1-\cos x}dx$

$=\int\frac{\sin x(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}dx$

$=\int\sin x(1+\cos x)dx$

$1+\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$f(x)=\int\sin x(1+\cos x)dx$

$=\int(-t)dt=-\frac{1}{2}t^2+C$

$=-\frac{1}{2}(1+\cos x)^2+C$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$이므로 $\quad -\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2} \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(1+\cos x)^2+1$이므로 ··· ❶

$f(\pi)=-\frac{1}{2}(1-1)^2+1=1$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷ $f(\pi)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1031 전략 $\tan^2 x+1=\sec^2 x$임을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $\int \sec^4 x\,dx=\int \sec^2 x\cdot\sec^2 x\,dx$

$$=\int \sec^2 x(\tan^2 x+1)dx$$

$\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$이므로

$$\int \sec^4 x\,dx=\int \sec^2 x(\tan^2 x+1)dx=\int (t^2+1)dt$$

$$=\frac{1}{3}t^3+t+C=\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C$$

따라서 $a=3,\ b=1$이므로 $\quad a-b=2$

답 ④

1032 전략 $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\ln|g(x)|+C$임을 이용한다.

풀이 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+e^x}dx=\int \frac{e^{2x}}{e^x(e^x+1)}dx=\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

이때 $(e^x+1)'=e^x$이므로

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+e^x}dx=\int \frac{e^x}{e^x+1}dx=\int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx$$

$$=\ln(e^x+1)+C_1\ (\because e^x+1>0)$$

한편 $(2^x+1)'=2^x\ln 2$이므로

$$\int \frac{2^x\ln 2}{2^x+1}dx=\int \frac{(2^x+1)'}{2^x+1}dx$$

$$=\ln(2^x+1)+C_2\ (\because 2^x+1>0)$$

$\therefore\ f(x)=\ln(e^x+1)+\ln(2^x+1)+C$

$f(0)=2\ln 2$이므로 $\quad \ln 2+\ln 2+C=2\ln 2 \quad \therefore\ C=0$

따라서 $f(x)=\ln(e^x+1)+\ln(2^x+1)$이므로

$f(1)=\ln(e+1)+\ln 3=\ln 3(e+1)$

답 $\ln 3(e+1)$

1033 전략 치환적분법을 이용하여 $\{f(x)\}^2 f'(x)$와 $\frac{2x}{x^2+1}$의 부정적분을 각각 구한다.

풀이 조건 (가)에서

$$\int \{f(x)\}^2 f'(x)dx=\int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$\int \{f(x)\}^2 f'(x)dx$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int \{f(x)\}^2 f'(x)dx=\int t^2 dt=\frac{1}{3}t^3+C_1$$

$$=\frac{1}{3}\{f(x)\}^3+C_1$$

$\int \frac{2x}{x^2+1}dx$에서 $(x^2+1)'=2x$이므로

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx=\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$$

$$=\ln(x^2+1)+C_2\ (\because x^2+1>0)$$

즉 $\frac{1}{3}\{f(x)\}^3+C_1=\ln(x^2+1)+C_2$이므로

$\{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)+C$

조건 (나)에서 $f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $\{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)$이므로

$\{f(1)\}^3=3\ln 2$

답 ②

1034 전략 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용한다.

풀이 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 조건 (가)에서

$\{f(x)g(x)\}'=h(x)$

$\therefore\ f(x)g(x)=\int h(x)dx$

이때 $f(x)=x,\ h(x)=\ln x$이므로

$xg(x)=\int \ln x\,dx$

$u(x)=\ln x,\ v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=x$

$\therefore\ xg(x)=x\ln x-\int \frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$=x\ln x-x+C$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=-1+C$

조건 (나)에서 $g(1)=-1$이므로 $\quad -1+C=-1 \quad \therefore\ C=0$

$\therefore\ xg(x)=x\ln x-x$

따라서 $g(x)=\ln x-1$이므로

$g(e)=0$

답 ③

1035 전략 $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$인 점에서 직선 $y=1$에 접하므로 $f'(1)=0,\ f(1)=1$이다.

풀이 조건 (가)에서 $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$인 점에서 직선 $y=1$에 접하므로

$f'(1)=0,\ f(1)=1$

한편 조건 (나)에서 $\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=f''(x)$이므로

$f''(x)=\frac{x+1}{x^3}$

$\therefore\ f'(x)=\int f''(x)dx=\int \frac{x+1}{x^3}dx$

$$=\int (x^{-2}+x^{-3})dx=-x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2}+C_1$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C_1$$

$f'(1)=0$이므로 $\quad -1-\frac{1}{2}+C_1=0 \quad \therefore\ C_1=\frac{3}{2}$

따라서 $f'(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}\right)dx$$

$$=\int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x^{-2}+\frac{3}{2}\right)dx$$

$$=-\ln|x|+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}x+C$$

$f(1)=1$이므로 $\quad \frac{1}{2}+\frac{3}{2}+C=1 \quad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=-\ln|x|+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}x-1$이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\ln 2+\frac{3}{4}$$

답 $\ln 2+\frac{3}{4}$

1036 전략 $f'(x)=0$인 x의 값을 찾아 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

풀이 $f'(x)=\cos 2x-3\sin x+1$
$=(1-2\sin^2 x)-3\sin x+1$
$=-2\sin^2 x-3\sin x+2$
$=-(2\sin x-1)(\sin x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0\le x\le \pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극대이고, $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극소이다. ❶

이때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(\cos 2x-3\sin x+1)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2x+3\cos x+x+C$$

이고, $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값 $\frac{\pi}{6}$를 가지므로

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}+3\cos\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+C=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}+C=\frac{\pi}{6} \quad \therefore C=-\frac{7\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+3\cos x+x-\frac{7\sqrt{3}}{4}$$ ❷

따라서 구하는 극솟값은

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{5}{3}\pi+3\cos\frac{5}{6}\pi+\frac{5}{6}\pi-\frac{7\sqrt{3}}{4}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{6}\pi-\frac{7\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{5}{6}\pi-\frac{7\sqrt{3}}{2}$$ ❸

답 $\frac{5}{6}\pi-\frac{7\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
❶ 극댓값과 극솟값을 갖는 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 극솟값을 구할 수 있다.	20 %

1037 전략 도함수의 정의를 이용하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{h}$를 정리한 후 $f'(x)$를 구한다.

풀이 조건 (나)에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)+f(x)-f(x-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot 2+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}\cdot 2$$
$$=2f'(x)+2f'(x)=4f'(x)$$

이므로 $\quad 4f'(x)=\frac{4(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}$

$$\therefore f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$$

$(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\ln|\sin x+\cos x|+C$$

조건 (가)에서 $f(0)=2$이므로 $\quad C=2$

$\therefore f(x)=\ln|\sin x+\cos x|+2$

답 $f(x)=\ln|\sin x+\cos x|+2$

1038 전략 $\{xF(x)\}'=F(x)+xf(x)$임을 이용한다.

풀이 $\{xF(x)\}'=F(x)+xf(x)$이므로 조건 (가)에서

$\{xF(x)\}'=(2x+2)e^x$

$$\therefore xF(x)=\int(2x+2)e^x\,dx$$

$u(x)=2x+2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$$\therefore xF(x)=(2x+2)e^x-\int 2e^x dx$$
$$=(2x+2)e^x-2e^x+C$$
$$=2xe^x+C$$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$F(1)=2e+C$

조건 (나)에서 $F(1)=2e$이므로 $\quad 2e+C=2e \quad \therefore C=0$

$\therefore xF(x)=2xe^x$

따라서 $F(x)=2e^x$이므로

$F(3)=2e^3$

답 ④

1039 전략 부분적분법과 삼각부등식을 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.

풀이 $h(x)=\sin x$, $k'(x)=e^x$으로 놓으면

$h'(x)=\cos x$, $k(x)=e^x$

$$\therefore \int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx\right)$$

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\therefore f(x) = \int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

$f(0) = -\frac{1}{2}$이므로 $\quad -\frac{1}{2} + C = -\frac{1}{2} \qquad \therefore C = 0$

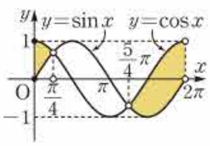
$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

따라서 부등식 $f(x) < 0$에서

$\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) < 0, \qquad \sin x - \cos x < 0 \ (\because e^x > 0)$

$\therefore \sin x < \cos x$

오른쪽 그림에서 위의 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는



$0 \le x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$

답 ①

09 정적분

Ⅲ. 적분법

1040 $\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = 18$ 답 18

1041 $\int_1^7 \frac{1}{x}dx = \Big[\ln|x|\Big]_1^7 = \ln 7$ 답 $\ln 7$

1042 $\int_{-1}^3 e^x dx = \Big[e^x\Big]_{-1}^3 = e^3 - \frac{1}{e}$ 답 $e^3 - \frac{1}{e}$

1043 $\int_4^5 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_4^5 = \frac{32}{\ln 2} - \frac{16}{\ln 2} = \frac{16}{\ln 2}$ 답 $\frac{16}{\ln 2}$

1044 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

1045 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx = \Big[\tan x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - 1$ 답 $\sqrt{3} - 1$

1046 $\int_1^8 4\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = 4\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})dx$

$$= 4\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_1^8$$

$$= 4\left\{(12+6) - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$= 63$$

답 63

1047 $\int_1^2 (3^x - 2^x)dx = \left[\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{2^x}{\ln 2}\right]_1^2$

$$= \left(\frac{9}{\ln 3} - \frac{4}{\ln 2}\right) - \left(\frac{3}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 2}\right)$$

$$= \frac{6}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 2}$$

답 $\frac{6}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 2}$

1048 $\int_{-2}^4 (e^x + 1)dx + \int_{-2}^4 (e^x - 1)dx$

$$= \int_{-2}^4 2e^x dx = 2\int_{-2}^4 e^x dx = 2\Big[e^x\Big]_{-2}^4$$

$$= 2(e^4 - e^{-2}) = 2\left(e^4 - \frac{1}{e^2}\right)$$

답 $2\left(e^4 - \frac{1}{e^2}\right)$

1049 $\int_0^{\pi} (\cos x + x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} (\cos x + x)dx$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos x + x)dx = \left[\sin x + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi^2 - 0 = 2\pi^2$$

답 $2\pi^2$

1050 $\sin x$는 기함수이므로

$$\int_{-3\pi}^{3\pi} \sin x\,dx=0$$

답 0

1051 $\cos x$는 우함수이므로

$$\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\,dx=2\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\,dx=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}$$
$$=2(-1-0)=-2$$

답 -2

1052 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_3^5 f(x)dx=\int_5^7 f(x)dx$$
$$=\int_7^9 f(x)dx=\int_9^{11} f(x)dx=5$$
$$\therefore \int_1^{11} f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx+\int_5^7 f(x)dx$$
$$+\int_7^9 f(x)dx+\int_9^{11} f(x)dx$$
$$=5\cdot5=25$$

답 25

1053 $3x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3$

또한 $x=0$일 때 $t=-1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1 (3x-1)^5dx=\int_{-1}^2 t^5\cdot\frac{1}{3}\,dt=\left[\frac{1}{18}t^6\right]_{-1}^2$$
$$=\frac{1}{18}(64-1)=\frac{7}{2}$$

답 $\dfrac{7}{2}$

1054 $5-x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=2$일 때 $t=3$, $x=4$일 때 $t=1$이므로

$$\int_2^4 \sqrt{5-x}\,dx=\int_3^1 \sqrt{t}\cdot(-1)dt=\int_1^3 t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^3=\frac{2}{3}\cdot(3\sqrt{3}-1)$$
$$=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$$

답 $2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}$

1055 $x^2+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$

또한 $x=-1$일 때 $t=2$, $x=3$일 때 $t=10$이므로

$$\int_{-1}^3 x(x^2+1)^3dx=\int_2^{10} t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\left[\frac{1}{8}t^4\right]_2^{10}$$
$$=\frac{1}{8}(10000-16)=1248$$

답 1248

1056 $2x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2$

또한 $x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_1^2 e^{2x+1}dx=\int_3^5 e^t\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\Big[e^t\Big]_3^5$$
$$=\frac{1}{2}(e^5-e^3)$$

답 $\dfrac{1}{2}(e^5-e^3)$

1057 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

또한 $x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx=\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt=\Big[\ln|t|\Big]_1^2=\ln 2$$

답 $\ln 2$

1058 $\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$

또한 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3x\cos x\,dx=\int_0^1 t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

답 $\dfrac{1}{4}$

1059 $x^2+x+4=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x+1$

또한 $x=-2$일 때 $t=6$, $x=0$일 때 $t=4$이므로

$$\int_{-2}^0 \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx=\int_6^4 \frac{1}{t}\,dt=\Big[\ln|t|\Big]_6^4$$
$$=\ln 4-\ln 6=\ln\frac{2}{3}$$

답 $\ln\dfrac{2}{3}$

다른풀이 $(x^2+x+4)'=2x+1$이므로

$$\int_{-2}^0 \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx=\int_{-2}^0 \frac{(x^2+x+4)'}{x^2+x+4}dx$$
$$=\Big[\ln(x^2+x+4)\Big]_{-2}^0$$
$$=\ln 4-\ln 6=\ln\frac{2}{3}$$

1060 $x=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=\boxed{\cos\theta}$

또한 $x=0$일 때 $\theta=\boxed{0}$, $x=1$일 때 $\theta=\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

이때 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}(\cos 2\theta+1)$이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta+1)d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\boxed{\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$\therefore$ (가) $\cos\theta$ (나) 0 (다) $\dfrac{\pi}{2}$ (라) $\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\theta$ (마) $\dfrac{\pi}{4}$

답 풀이 참조

1061 $x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

답 $\dfrac{\pi}{4}$

1062 $f(x)=x-1$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^2 (x-1)e^x\,dx=\Big[(x-1)e^x\Big]_0^2-\int_0^2 e^x\,dx$$
$$=e^2-(-1)-\Big[e^x\Big]_0^2$$
$$=e^2+1-(e^2-1)$$
$$=2$$

답 2

1063 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$$\therefore \int_1^{e^2} \ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^{e^2}-\int_1^{e^2} 1\,dx$$
$$=2e^2-\Big[x\Big]_1^{e^2}$$
$$=2e^2-(e^2-1)$$
$$=e^2+1$$

답 e^2+1

1064 $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\,dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

답 1

1065 $f(x)=x+2$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$

$$\therefore \int_\pi^{2\pi}(x+2)\cos x\,dx$$
$$=\Big[(x+2)\sin x\Big]_\pi^{2\pi}-\int_\pi^{2\pi}\sin x\,dx$$
$$=\Big[\cos x\Big]_\pi^{2\pi}=1-(-1)=2$$

답 2

1066 답 $x\sin x$

1067 답 $\dfrac{2x+5}{x^2+2x-3}$

1068 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+1}\ln t\,dt=\ln(x+1)-\ln x=\ln\frac{x+1}{x}$

답 $\ln\dfrac{x+1}{x}$

1069 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x-2}^{x} e^t\,dt=e^x-e^{x-2}=e^x\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$

답 $e^x\left(1-\dfrac{1}{e^2}\right)$

1070 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-2\sin x$

답 $f(x)=-2\sin x$

1071 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x-3^x\ln 3$

답 $f(x)=e^x-3^x\ln 3$

1072 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$

답 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$

1073 $F'(t)=\cos t$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_\pi^{x+\pi}\cos t\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_\pi^{x+\pi}F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+\pi)-F(\pi)}{x}$$
$$=F'(\pi)=-1$$

답 -1

1074 $F'(t)=t\ln t$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_e^{x+e}t\ln t\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_e^{x+e}F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+e)-F(e)}{x}$$
$$=F'(e)=e$$

답 e

1075 $F'(t)=e^t$이라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x e^t\,dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=e$$

답 e

1076 $F'(t)=t^2\sin t$라 하면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^x t^2\sin t\,dt=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^x F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{F(x)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$$
$$=F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

답 $\dfrac{\pi^2}{4}$

1077 $$\int_1^e\frac{3x^3-4x^2+1}{x}dx=\int_1^e\left(3x^2-4x+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\Big[x^3-2x^2+\ln|x|\Big]_1^e$$
$$=(e^3-2e^2+1)-(1-2)$$
$$=e^3-2e^2+2$$

답 ②

1078 $$\int_2^4\frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx=\int_2^4\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx$$
$$=\int_2^4\left(\sqrt{x}-2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=\int_2^4\left(x^{\frac{1}{2}}-2+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x+2x^{\frac{1}{2}}\right]_2^4$$
$$=\frac{4}{3}-\left(\frac{10}{3}\sqrt{2}-4\right)$$
$$=\frac{16}{3}-\frac{10}{3}\sqrt{2}$$

⋯ ❶

따라서 $a=\frac{16}{3}$, $b=-\frac{10}{3}$이므로 ⋯ ❷

$a+b=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 정적분의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1079 $\int_3^5 \frac{2}{x^2-1}dx=\int_3^5 \frac{2}{(x-1)(x+1)}dx$

$=\int_3^5 \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\Big[\ln|x-1|-\ln|x+1|\Big]_3^5$

$=(\ln 4-\ln 6)-(\ln 2-\ln 4)=\ln\frac{4}{3}$

$\therefore k=\frac{4}{3}$

답 ④

1080 $\int_0^2 f(x)dx-\int_4^2 f(y)dy-\int_1^4 f(z)dz$

$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}dx$

$=\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}dx=\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^1=\frac{3}{5}$

답 $\frac{3}{5}$

1081 $\int_0^3 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx-\int_0^3 \frac{1}{e^x+1}dx=\int_0^3 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$

$=\int_0^3 \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$

$=\int_0^3 (e^x-1)dx$

$=\Big[e^x-x\Big]_0^3$

$=(e^3-3)-1$

$=e^3-4$

답 ②

1082 $\int_{-1}^0 \sqrt{e^{2x}+6e^x+9}\,dx=\int_{-1}^0 \sqrt{(e^x+3)^2}\,dx$

$=\int_{-1}^0 (e^x+3)dx=\Big[e^x+3x\Big]_{-1}^0$

$=1-(e^{-1}-3)$

$=4-\frac{1}{e}$

답 $4-\frac{1}{e}$

1083 $\int_0^1 (2^x-1)(4^x+2^x+1)dx=\int_0^1 \{(2^x)^3-1\}dx$

$=\int_0^1 (8^x-1)dx=\left[\frac{8^x}{\ln 8}-x\right]_0^1$

$=\left(\frac{8}{\ln 8}-1\right)-\frac{1}{\ln 8}$

$=\frac{7}{3\ln 2}-1$ ⋯ ❶

따라서 $a=7$, $b=1$이므로 ⋯ ❷

$a+b=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 정적분의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1084 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x-1)dx$

$=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

답 ②

1085 $\int_0^k \left(\frac{1}{1+\tan^2 x}+\frac{1}{1+\cot^2 x}\right)dx$

$=\int_0^k \left(\frac{1}{\sec^2 x}+\frac{1}{\csc^2 x}\right)dx$

$=\int_0^k (\cos^2 x+\sin^2 x)dx$

$=\int_0^k 1\,dx=\Big[x\Big]_0^k$

$=k$ ⋯ ❶

$\therefore k=5$ ⋯ ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ $\int_0^k \left(\frac{1}{1+\tan^2 x}+\frac{1}{1+\cot^2 x}\right)dx$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	80 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

1086 $\int_0^a \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx-\int_0^a \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

$=\int_0^a \left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$-\int_0^a \left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int_0^a \left\{\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)-\left(1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\right\}dx$

$=\int_0^a 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

$=\int_0^a 2\sin x\,dx=\Big[-2\cos x\Big]_0^a$

$=-2\cos a-(-2)$

$=-2\cos a+2$

따라서 $-2\cos a+2=1$이므로

$\cos a=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

답 ⑤

1087 $\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (e^x-1)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

$$= \left[e^x - x\right]_{-1}^{0} + \left[-\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 1-(e^{-1}+1)-(-1)$$
$$= 1-\frac{1}{e}$$

답 $1-\frac{1}{e}$

1088 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=\frac{\pi}{2}$에서도 연속이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} (\sin x + a) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \cos x = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$1+a=0 \quad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \sin x - 1 & \left(x \ge \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos x & \left(x \le \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$이므로

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - 1)dx$$
$$= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\cos x - x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= 1+(1-\pi)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 2-\frac{\pi}{2}$$

답 $2-\frac{\pi}{2}$

1089 $|e^x-1| = \begin{cases} e^x-1 & (x\ge 0) \\ -e^x+1 & (x \le 0) \end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^{1} |e^x-1|dx = \int_{-1}^{0} (-e^x+1)dx + \int_0^1 (e^x-1)dx$$
$$= \left[-e^x+x\right]_{-1}^{0} + \left[e^x - x\right]_0^1$$
$$= -1-(-e^{-1}-1)+(e-1)-1$$
$$= \frac{1}{e}+e-2$$

답 $\frac{1}{e}+e-2$

1090 $|\sin x|+k = \begin{cases} \sin x + k & (0 \le x \le \pi) \\ -\sin x + k & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$이므로

$$\int_0^{2\pi} (|\sin x|+k)dx$$
$$= \int_0^{\pi} (\sin x + k)dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x + k)dx$$
$$= \left[-\cos x + kx\right]_0^{\pi} + \left[\cos x + kx\right]_{\pi}^{2\pi}$$
$$= (1+k\pi)-(-1)+(1+2k\pi)-(-1+k\pi)$$
$$= 2k\pi + 4$$

따라서 $2k\pi+4=10$이므로

$2k\pi = 6 \quad \therefore k=\frac{3}{\pi}$

답 ③

1091 $(f\circ g)(x) = |\sin x - \cos x|$이므로

$$(f\circ g)(x) = \begin{cases} -\sin x + \cos x & \left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin x - \cos x & \left(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f\circ g)(x)dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sin x + \cos x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)dx$$
$$= \left[\cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1-1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= 2(\sqrt{2}-1)$$

답 ③

1092 x^2은 우함수, $\sin 3x$는 기함수이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^2+\sin 3x)dx = 2\int_0^{\pi} x^2 dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^3$$

답 ②

1093 x는 기함수, $\cos 2x$는 우함수이므로 $x\cos 2x$는 기함수이다. 또 $\sin x$는 기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x\cos 2x + \sin x)dx = 0$$

답 0

라쎈 특강 우함수, 기함수의 곱

① (우함수) × (우함수) = (우함수)
② (우함수) × (기함수) = (기함수)
③ (기함수) × (기함수) = (우함수)

1094 $f(x)=e^x+e^{-x}$에서

$f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수이다. ··· ❶

$$\therefore \int_{-\ln 2}^{5} f(x)dx + \int_5^{\ln 2} f(x)dx$$
$$= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx = 2\int_0^{\ln 2} (e^x+e^{-x})dx$$
$$= 2\left[e^x - e^{-x}\right]_0^{\ln 2} = 2\left(2-\frac{1}{2}\right)$$
$$= 3$$

··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 우함수임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\int_{-\ln 2}^{5} f(x)dx + \int_5^{\ln 2} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	70 %

1095 $f(x)=|\cos x|$로 놓으면 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이므로

$$\int_0^{4\pi} |\cos x|dx = 4\int_0^{\pi} |\cos x|dx$$
$$= 4\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)dx\right\}$$
$$= 4\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= 4+4=8$$

답 ④

1096 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$로 놓으면 $f(x)$는 주기가 4π인 주기함수이므로

└ 함수 $y=\sin ax$의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$이다.

$$\int_a^{a+4\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx=\int_0^{4\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx=\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{4\pi}$$
$$=-2-(-2)=0$$

답 ①

1097 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(e^x+e^{-x})dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{1}{2}\{(e-e^{-1})-(e^{-1}-e)\}$$
$$=e-\frac{1}{e}$$ ⋯ ❶

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{5}f(x)dx=\int_{5}^{7}f(x)dx=e-\frac{1}{e}$$

$\therefore \int_{-1}^{7}f(x)dx$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{5}f(x)dx+\int_{5}^{7}f(x)dx$$
$$=4\left(e-\frac{1}{e}\right)$$ ⋯ ❷

답 $4\left(e-\frac{1}{e}\right)$

채점 기준	비율
❶ $\int_{-1}^{1}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_{-1}^{7}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60 %

1098 $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=\int_1^2\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}dt=\int_1^2\frac{1}{2}t^{-2}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^{-1}\right]_1^2=-\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

답 ④

1099 $x^2+x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$

또한 $x=1$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=11$이므로

$$\int_1^3\frac{2x+1}{x^2+x-1}dx=\int_1^{11}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_1^{11}=\ln 11$$

$\therefore k=11$

답 ④

1100 $2x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

또한 $x=1$일 때 $t=1$, $x=k$일 때 $t=2k-1$이므로

$$\int_1^k\sqrt{2x-1}\,dx=\int_1^{2k-1}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\int_1^{2k-1}\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{2k-1}=\frac{1}{3}(2k-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}$$

따라서 $\frac{1}{3}(2k-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$이므로

$(2k-1)^{\frac{3}{2}}=27,\quad 2k-1=(3^3)^{\frac{2}{3}}=9$

$\therefore k=5$

답 5

1101 $1+\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

또한 $x=1$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_1^{e^2}\frac{(1+\ln x)^2}{x}dx=\int_1^3 t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^3$$
$$=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

답 $\frac{26}{3}$

1102 $e^x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$

또한 $x=-a$일 때 $t=e^{-a}+1$, $x=a$일 때 $t=e^a+1$이므로

$$\int_{-a}^{a}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_{e^{-a}+1}^{e^a+1}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_{e^{-a}+1}^{e^a+1}$$
$$=\ln(e^a+1)-\ln(e^{-a}+1)$$
$$=\ln\frac{e^a+1}{e^{-a}+1}=\ln\frac{e^a(e^a+1)}{1+e^a}$$
$$=\ln e^a=a$$

$\therefore a=7$

답 ④

다른풀이 $(e^x+1)'=e^x$이므로

$$\int_{-a}^{a}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_{-a}^{a}\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=\Big[\ln(e^x+1)\Big]_{-a}^{a}$$
$$=\ln(e^a+1)-\ln(e^{-a}+1)$$
$$=\ln\frac{e^a+1}{e^{-a}+1}=\ln\frac{e^a(e^a+1)}{1+e^a}$$
$$=\ln e^a=a$$

1103 $f(n)=\int_1^n\frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$에서 $1-\sqrt{x}=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ ⋯ ❶

또한 $x=1$일 때 $t=0$, $x=n$일 때 $t=1-\sqrt{n}$이므로

$$f(n)=\int_1^n\frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{1-\sqrt{n}}e^t\cdot(-2)dt$$
$$=\int_{1-\sqrt{n}}^{0}2e^t dt=\Big[2e^t\Big]_{1-\sqrt{n}}^{0}$$
$$=2-2e^{1-\sqrt{n}}$$ ⋯ ❷

$$\therefore \lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}(2-2e^{1-\sqrt{n}})=2$$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $1-\sqrt{x}=t$로 치환하여 $\frac{dt}{dx}$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(n)$을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\lim_{n\to\infty}f(n)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

라쎈 특강 지수함수의 극한

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$에서

① $a>1$일 때,

$\lim_{x\to\infty}a^x=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}a^x=0$

② $0<a<1$일 때,

$\lim_{x\to\infty}a^x=0$, $\lim_{x\to-\infty}a^x=\infty$

1104 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cot^2 x)\cos x\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\csc^2 x\cos x\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

또한 $x=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{t^2}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}t^{-2}dt$$

$$=\left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}-(-2)$$

$$=-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2$$

답 ⑤

1105 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}f'(\cos x)\sin x\,dx=\int_1^{\frac{1}{2}}f'(t)\cdot(-1)dt$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 f'(t)dt=\Big[f(t)\Big]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{4}{5}$$

$$=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

1106 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$1+\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$

또한 $x=0$일 때 $t=2$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=2\int_2^1\frac{1}{t}\cdot(-1)dt=2\int_1^2\frac{1}{t}dt$$

$$=2\Big[\ln|t|\Big]_1^2=2\ln 2$$

$\therefore k=2$

답 2

1107 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}1\,d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

답 ③

1108 $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot2\cos\theta\,d\theta \quad \cdots ❶$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4\cos^2\theta}\cdot2\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2\theta\,d\theta$$

이때 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(\cos2\theta+1)$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\cdot\frac{1}{2}(\cos2\theta+1)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos2\theta+2)d\theta$$

$$=\Big[\sin2\theta+2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$

채점 기준	비율
❶ 치환하여 피적분함수를 변형할 수 있다.	50 %
❷ $\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %

1109 $x=5\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=5\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{5}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^{\frac{5}{2}}\frac{x+1}{\sqrt{25-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{5\sin\theta+1}{\sqrt{25-25\sin^2\theta}}\cdot5\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{5\sin\theta+1}{\sqrt{25\cos^2\theta}}\cdot5\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(5\sin\theta+1)d\theta$$

$$=\Big[-5\cos\theta+\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=-\frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}-(-5)$$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{5}{2}\sqrt{3}+5$$

따라서 $a=\frac{1}{6}$, $b=-\frac{5}{2}$, $c=5$이므로

$a+b+c=\frac{8}{3}$

답 ⑤

1110 $x=3\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+9}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{9\tan^2\theta+9}\cdot 3\sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\sec^2\theta}{9\sec^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3}d\theta$$
$$= \left[\frac{1}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{18}$$

답 ⑤

1111 $x=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\quad \frac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\sec^2\theta$

또한 $x=-3$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{3}$, $x=3$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\int_{-3}^{3} \frac{1}{3+x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3+3\tan^2\theta}\cdot\sqrt{3}\sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3\sec^2\theta}d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{3}d\theta$$
$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi - \left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\pi\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

따라서 $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$이므로 $\quad 27k^2=27\cdot\frac{4}{27}=4$

답 4

1112 $x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\quad \frac{dx}{d\theta}=a\sec^2\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=a$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^{a} \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2+a^2\tan^2\theta}\cdot a\sec^2\theta\, d\theta \quad \cdots ❶$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)}\cdot a\sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a}d\theta$$
$$= \left[\frac{1}{a}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4a} \quad \cdots ❷$$

따라서 $\frac{\pi}{4a}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\quad a=\frac{1}{2}$ $\quad \cdots ❸$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 치환하여 피적분함수를 변형할 수 있다.	40 %
❷ $\int_0^a \frac{1}{a^2+x^2}dx$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	10 %

1113 $f(x)=x+1$, $g'(x)=\sin\frac{x}{2}$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-2\cos\frac{x}{2}$

$$\therefore \int_0^{\pi}(x+1)\sin\frac{x}{2}dx = \left[(x+1)\cdot\left(-2\cos\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}$$
$$-\int_0^{\pi}\left(-2\cos\frac{x}{2}\right)dx$$
$$= -(-2)+\left[4\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$=2+4$$
$$=6$$

답 6

1114 $f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx = \left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-e^x\sin x)dx$$
$$= -1+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx$에서 $u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx = \left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$$
$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx = -1+\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx\right)$$
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx = e^{\frac{\pi}{2}}-1$$
$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로 $\quad a+b=0$

답 0

1115 $f(t)=\int_0^1(3tx-e^x)^2dx$

$$= \int_0^1(9t^2x^2-6txe^x+e^{2x})dx$$
$$= 9t^2\int_0^1 x^2dx - 6t\int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 e^{2x}dx$$

$\int_0^1 xe^x dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$
$$= e-\left[e^x\right]_0^1 = e-(e-1)=1$$

또한

$$\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$
$$\int_0^1 e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}$$

이므로

$$f(t)=3t^2-6t+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}$$
$$=3(t-1)^2+\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{2}$$

따라서 $f(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{2}$을 갖는다.

답 ③

1116 $\int_1^e f(t)dt=k$ (k는 상수) $\quad \cdots\cdots ㉠$

로 놓으면 $\quad f(x)=\frac{1}{x}+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^e\left(\frac{1}{t}+k\right)dt=k, \quad \left[\ln|t|+kt\right]_1^e=k$$

$1+ek-k=k,\qquad k(e-2)=-1$

$\therefore k=-\dfrac{1}{e-2}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e-2}$ 답 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e-2}$

1117 $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=e^x+k$ … ❶

이것을 ㉠에 대입하면

$\displaystyle\int_0^1 e^{-t}(e^t+k)dt=k,\qquad \int_0^1(1+ke^{-t})dt=k$

$\Big[t-ke^{-t}\Big]_0^1=k,\qquad 1-\dfrac{k}{e}-(-k)=k$

$\therefore k=e$ … ❷

따라서 $f(x)=e^x+e$이므로

$f(2)=e^2+e$ … ❸

답 e^2+e

채점 기준	비율
❶ 정적분을 k로 놓고 $f(x)$를 k를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1118 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=\cos x+2k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+2k)\sin t\,dt=k$

이때

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+2k)\sin t\,dt&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t+2k\sin t)dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+2k\sin t\right)dt\\&=\left[-\frac{1}{4}\cos 2t-2k\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}-2k\right)\\&=\frac{1}{2}+2k\end{aligned}$$

이므로 $\dfrac{1}{2}+2k=k\qquad \therefore k=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\cos x-1$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$ 답 ②

1119 $\displaystyle\int_e^x f(t)dt=x\ln x-x+k$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\ln x$

$\therefore f(e^2)=2$

㉠의 양변에 $x=e$를 대입하면

$0=e-e+k\qquad \therefore k=0$

$\therefore k+f(e^2)=2$ 답 ②

1120 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(\sin x+\cos x)+x(\cos x-\sin x)$

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

1121 $\displaystyle\int_{\ln 4}^x e^t f(t)dt=e^{2x}-ae^x+8$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x f(x)=2e^{2x}-ae^x$

$\therefore f(x)=2e^x-a$

㉠의 양변에 $x=\ln 4$를 대입하면

$0=e^{2\ln 4}-ae^{\ln 4}+8,\qquad 16-4a+8=0$

$\therefore a=6$

따라서 $f(x)=2e^x-6$이므로

$f(0)=-4$ 답 ①

1122 $\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)dt=e^{3x}+ax-1$에서

$\displaystyle x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=e^{3x}+ax-1$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3e^{3x}+a$

$\displaystyle\therefore \int_0^x f(t)dt=3e^{3x}+a$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=3+a\qquad \therefore a=-3$

또 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=9e^{3x}$

따라서 $f(\ln 2)=72$이므로 $a+f(\ln 2)=69$ 답 69

1123 $\displaystyle\int_0^x(x-t)f'(t)dt=\sin x\cos x-x$에서

$\displaystyle x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=\frac{1}{2}\sin 2x-x$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\displaystyle\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=\cos 2x-1$

$\displaystyle\int_0^x f'(t)dt=\cos 2x-1,\qquad \Big[f(t)\Big]_0^x=\cos 2x-1$

$f(x)-f(0)=\cos 2x-1$

$f(0)=1$이므로 $f(x)=\cos 2x$ 답 ④

1124 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=ex+\int_0^x(x-t)f(t)dt$에서

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=ex+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\displaystyle f(x)=e+\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$

$\displaystyle\therefore f(x)=e+\int_0^x f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=f(x),\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=1$$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 1\,dx,\quad \ln f(x)=x+C\ (\because f(x)>0)$$

$$\therefore f(x)=e^{x+C}$$

또 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=e$

$e^C=e\quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=e^{x+1}$이므로

$f(2)=e^3$

답 e^3

1125 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(2\sin x-1)\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극소이므로 극솟값은

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\sin t-1)\cos t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\sin t\cos t-\cos t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin 2t-\cos t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t-\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

1126 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{5-x}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=5$

x	0	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=5$에서 극대이고 극댓값은

$$f(5)=\int_1^5\frac{5-t}{t}dt=\int_1^5\left(\frac{5}{t}-1\right)dt$$
$$=\Big[5\ln|t|-t\Big]_1^5=(5\ln 5-5)-(-1)$$
$$=5\ln 5-4$$

즉 $a=5$, $b=5\ln 5-4$이므로

$a+b=5\ln 5+1$

답 ⑤

1127 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sqrt{x}(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

$$f(0)=\int_0^0\sqrt{t}(t-1)dt=0$$
$$f(1)=\int_0^1\sqrt{t}(t-1)dt=\int_0^1\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{5}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{15}$$
$$f(4)=\int_0^4\sqrt{t}(t-1)dt=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$
$$=\frac{64}{5}-\frac{16}{3}=\frac{112}{15}$$

따라서 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 $\frac{112}{15}$, $x=1$일 때 최솟값 $-\frac{4}{15}$를 가지므로

$M=\frac{112}{15},\ m=-\frac{4}{15}$

$\therefore M+m=\frac{36}{5}$

답 $\frac{36}{5}$

1128 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(e^x-2)(e^x+2)$ ❶

$f'(x)=0$에서 $x=\ln 2$ ❷

따라서 $f(x)$는 $x=\ln 2$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$f(\ln 2)$

$$=\int_0^{\ln 2}(e^t-2)(e^t+2)dt$$
$$=\int_0^{\ln 2}(e^{2t}-4)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2t}-4t\right]_0^{\ln 2}=(2-4\ln 2)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}-4\ln 2$$ ❸

답 $\frac{3}{2}-4\ln 2$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

1129 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sin 2x(2\cos 2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\sin 2x=0$ 또는 $\cos 2x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2t(2\cos 2t-1)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\sin 2t\cos 2t-\sin 2t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin 4t-\sin 2t)dt=\left[-\frac{1}{4}\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

즉 $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{1}{8}$이므로 $\quad \frac{a}{b}=\frac{4}{3}\pi$

답 $\frac{4}{3}\pi$

1130 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}f(t)dt=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$
$$=F'(1)=f(1)$$
$$=\sin\pi+\cos\pi$$
$$=-1$$

답 ②

1131 $f(x)=\ln x+xe^x$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+2h}(\ln x+xe^x)dx=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+2h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\cdot 2$$
$$=2F'(1)=2f(1)$$
$$=2e$$

답 ③

1132 $f(x)=x\sin x$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}x\sin x\,dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)+F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$$
$$=F'\left(\frac{\pi}{2}\right)+F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots ❶$$
$$=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi \quad \cdots ❷$$

답 π

채점 기준	비율
❶ $f(x)=x\sin x$, $F'(x)=f(x)$로 놓고 식을 간단히 할 수 있다.	80 %
❷ 주어진 식의 극한값을 구할 수 있다.	20 %

1133 $f(t)=t(3^t+\ln t)$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}t(3^t+\ln t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

1134 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{F(x)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$
$$=F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ③

1135 $f(t)=t^2e^t$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^3-8}\int_2^x t^2e^t dt=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^3-8}\int_2^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x^3-8}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+4}$$
$$=\frac{1}{12}F'(2)=\frac{1}{12}f(2)$$
$$=\frac{1}{3}e^2$$

답 ②

1136 전략 $k\int_a^b f(x)dx=\int_a^b kf(x)dx$ (k는 상수), $\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$임을 이용한다.

풀이
$$\int_1^2\frac{3x^2+x-1}{x^2}dx-3\int_1^2\frac{x^2-x+1}{x^2}dx$$
$$=\int_1^2\frac{3x^2+x-1-3(x^2-x+1)}{x^2}dx$$
$$=\int_1^2\frac{4x-4}{x^2}dx=4\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=4\int_1^2\left(\frac{1}{x}-x^{-2}\right)dx=4\Big[\ln|x|+x^{-1}\Big]_1^2$$
$$=4\left(\ln 2+\frac{1}{2}-1\right)=4\ln 2-2$$

답 $4\ln 2-2$

1137 전략 지수함수의 부정적분을 이용하여 정적분을 계산한다.

풀이
$$\int_0^1 3^{2x}dx=\int_0^1 9^x dx=\left[\frac{9^x}{\ln 9}\right]_0^1$$
$$=\frac{9}{\ln 9}-\frac{1}{\ln 9}=\frac{8}{\ln 9}$$
$$\therefore k=8$$

답 ④

1138 전략 $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$이고, $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\cos\pi x$는 우함수, $\sin\pi x$는 기함수이므로

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos\pi x+\sin\pi x)dx=2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \cos\pi x\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

답 $\frac{2}{\pi}$

1139 전략 $3-x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $3-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=0$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{0}^{2} f(3-x)dx=\int_{3}^{1} f(t)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_{1}^{3} f(t)dt$$
$$=\int_{1}^{3} f(x)dx$$

답 ②

1140 전략 $f(t)=(t-1)e^{t}$, $F'(t)=f(t)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 정리한다.

풀이 $f(t)=(t-1)e^{t}$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}(t-1)e^{t}dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)=-1$$

답 ②

1141 전략 $|r|<1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}=\frac{1}{1-r}$임을 이용한다.

풀이 $0<x\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le\cos^2x<1$이므로

$$f(x)=1+\cos^2x+\cos^4x+\cos^6x+\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\cos^2x)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{1-\cos^2x} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1-\cos^2x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2x}dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\csc^2x\,dx=\Big[-\cot x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}-(-\sqrt{3})$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 간단히 정리할 수 있다.	50 %
❷ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %

1142 전략 구간에 따라 다르게 정의된 함수는 구간을 나누어 각각 정적분의 값을 구한다.

풀이
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sqrt{2}(\sin x+\cos x)dx$$
$$=\Big[\tan x\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\sqrt{2}\Big[-\cos x+\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$
$$=1-(-1)+\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$$

답 ⑤

1143 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나누어 구한다.

풀이 $|2\cos2x-1|=\begin{cases}2\cos2x-1 & \left(0\le x\le\frac{\pi}{6}\right)\\ -2\cos2x+1 & \left(\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|2\cos2x-1|dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(2\cos2x-1)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(-2\cos2x+1)dx$$
$$=\Big[\sin2x-x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{6}}+\Big[-\sin2x+x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$$

답 $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$

1144 전략 함수 $y=\sin x$는 주기가 2π인 주기함수임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sin x$로 놓으면 $f(x)$는 주기가 2π인 주기함수이므로

$$\int_{2n\pi}^{(2n-1)\pi}f(x)dx=\int_{(2n-2)\pi}^{(2n-3)\pi}f(x)dx$$
$$=\cdots=\int_{2\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{0}^{-\pi}f(x)dx \quad \cdots ❶$$
$$\therefore \int_{2n\pi}^{(2n-1)\pi}\sin x\,dx=\int_{0}^{-\pi}\sin x\,dx=\int_{-\pi}^{0}(-\sin x)dx$$
$$=\Big[\cos x\Big]_{-\pi}^{0}=1-(-1)$$
$$=2 \quad \cdots ❷$$

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 정적분과 값이 같은 정적분을 찾을 수 있다.	50 %
❷ 주어진 정적분의 값을 구할 수 있다.	50 %

1145 전략 $f(x)$가 주기가 p인 주기함수이면 $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p}f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=|\sin2x|$로 놓으면 $f(x)$는 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 주기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|\sin2x|dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin2x|dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\sin2x|dx$$
$$=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin2x|dx$$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin 2x|dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$

$=4\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=4\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=4$ 답 ④

1146 전략 $x^2+3x+5=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $x^2+3x+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+3$

또한 $x=-1$일 때 $t=3$, $x=1$일 때 $t=9$이므로 ··· ❶

$\int_{-1}^{1}\frac{4x+6}{x^2+3x+5}dx=\int_3^9\frac{1}{t}\cdot 2dt=\Big[2\ln|t|\Big]_3^9$

$=2\ln 9-2\ln 3=2\ln 9-\ln 9$

$=\ln 9$ ··· ❷

$\therefore k=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $x^2+3x+5=t$로 치환하고 적분 구간을 구할 수 있다.	30 %
❷ 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	10 %

1147 전략 먼저 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 피적분함수를 변형한다.

풀이 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3 x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 x\cdot\cos x\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

또한 $x=-\frac{\pi}{2}$일 때 $t=-1$, $x=\pi$일 때 $t=0$이므로

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int_{-1}^{0}(1-t^2)dt=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{0}$

$=-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p+q=5$ 답 5

1148 전략 $\sin x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

또한 $x=-\frac{\pi}{2}$일 때 $t=-1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{t^2+1}dt$

$t=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dt}{d\theta}=\sec^2\theta$

또한 $t=-1$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{4}$, $t=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{t^2+1}dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta$

$=\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}$ 답 $\frac{\pi}{2}$

1149 전략 부분적분법을 이용한다.

풀이 $f(x)=1-\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=-\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$\therefore \int_1^e x(1-\ln x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2(1-\ln x)\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{2}x^2dx$

$=-\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(e^2-3)$ 답 ⑤

1150 전략 $\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓고 k의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $f(x)=e^{x^2}+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $\int_0^1 t(e^{t^2}+k)dt=k$

$t^2=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=2t$

또한 $t=0$일 때 $s=0$, $t=1$일 때 $s=1$이므로

$\int_0^1 t(e^{t^2}+k)dt=\int_0^1(e^s+k)\cdot\frac{1}{2}ds=\frac{1}{2}\Big[e^s+ks\Big]_0^1$

$=\frac{1}{2}(e+k-1)$

따라서 $\frac{1}{2}(e+k-1)=k$이므로 $k=e-1$

$\therefore \int_0^1 xf(x)dx=e-1$ 답 ④

1151 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{2-x}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	극대	↘

$f(2)=\int_0^2\frac{2-t}{e^t}dt$

$=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt$

$u(t)=2-t$, $v'(t)=e^{-t}$으로 놓으면

$u'(t)=-1$, $v(t)=-e^{-t}$

$\therefore f(2)=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=\Big[(2-t)\cdot(-e^{-t})\Big]_0^2-\int_0^2 e^{-t}dt$

$=-(-2)+\Big[e^{-t}\Big]_0^2$

$=2+(e^{-2}-1)=1+\frac{1}{e^2}$ 답 $1+\frac{1}{e^2}$

1152 전략 분자와 분모에 각각 e^t을 곱하여 피적분함수를 변형한다.

풀이 $f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+e^{-t}}dt=\int_0^x\frac{e^t}{e^t+1}dt$

$(e^t+1)'=e^t$이므로

$$f(x)=\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}dt=\int_0^x \frac{(e^t+1)'}{e^t+1}dt$$
$$=\Big[\ln(e^t+1)\Big]_0^x=\ln(e^x+1)-\ln 2$$
$$=\ln\frac{e^x+1}{2}$$

이때 $(f\circ f)(a)=\ln 5$에서 $f(a)=k$로 놓으면 $f(k)=\ln 5$이므로

$$\ln\frac{e^k+1}{2}=\ln 5,\qquad \frac{e^k+1}{2}=5$$
$$e^k=9\qquad \therefore k=\ln 9$$

따라서 $f(a)=\ln 9$이므로

$$\ln\frac{e^a+1}{2}=\ln 9,\qquad \frac{e^a+1}{2}=9$$
$$e^a=17\qquad \therefore a=\ln 17$$

답 ④

1153 전략 $\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta$, $\overline{PH}=\overline{OP}\sin\theta$임을 이용한다.

풀이 직각삼각형 POH에서 $\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta$, $\overline{PH}=\overline{OP}\sin\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{\overline{OH}}{\overline{PH}}=\frac{\overline{OP}\cos\theta}{\overline{OP}\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{d\theta}=\cos\theta$

또한 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t=\dfrac{1}{2}$, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{t}dt$$
$$=\Big[\ln|t|\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{1}{2}$$
$$=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$$

답 ①

1154 전략 부분적분법과 치환적분법을 이용하여 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx$의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx$

$$=\Big[f(x)g(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)g(x)dx$$
$$=f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)g(0)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^3}dx$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^3}dx$$

$1+\sin^2 x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2\sin x\cos x$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^3}dx$$
$$=-\int_1^2\frac{1}{t^3}dt=-\int_1^2 t^{-3}dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^{-2}\right]_1^2=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$$

답 ③

1155 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $e^x f(x)=e^x\ln x+\int_1^x e^t f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x f(x)$$
$$\therefore f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}$$ ··· ❶
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx=\int\ln x\,dx+\int\frac{1}{x}dx$$

$\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=x$$
$$\therefore \int\ln x\,dx=x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx=x\ln x-x+C_1$$
$$\therefore f(x)=x\ln x-x+\ln x+C$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $ef(1)=0$ $\therefore f(1)=0$

$-1+C=0$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=x\ln x-x+\ln x+1$이므로 ··· ❷

$f(e^2)=2e^2-e^2+2+1=e^2+3$ ··· ❸

답 e^2+3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(e^2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1156 전략 $f(x)=ax(x-3)\ (a<0)$이라 하고 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=ax(x-3)\ (a<0)$이라 하면

$$g(x)=\int_0^x\{e^{at(t-3)}-1\}dt$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=e^{ax(x-3)}-1$

$g'(x)=0$에서 $e^{ax(x-3)}=1$

$ax(x-3)=0$ $\therefore x=3\ (\because x>0)$

x	0	…	3	…
$g'(x)$		+	0	−
$g(x)$		↗	극대	↘

따라서 $g(x)$는 $x=3$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $g(3)$이다.

답 ⑤

Ⅲ. 적분법

10 정적분의 활용

1157 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

이때 $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\boxed{\frac{1}{n}},\ x_k=a+k\Delta x=\boxed{\frac{k}{n}}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^{\boxed{1}}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ (가) $\frac{1}{n}$ (나) $\frac{k}{n}$ (다) 1

답 풀이 참조

1158 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\{\left(\frac{2}{n}\right)^3+\left(\frac{4}{n}\right)^3+\left(\frac{6}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^3\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\frac{2}{n}$$

이때 $f(x)=x^3$, $a=0$, $b=2$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n},\ x_k=a+k\Delta x=\frac{2k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_0^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^2 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=4$$

답 4

1159 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}$$

이때 $f(x)=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\boxed{\frac{\pi}{n}},\ x_k=a+k\Delta x=\boxed{\frac{k\pi}{n}}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_0^{\pi}f(x)dx$$

$$=\int_0^{\boxed{\pi}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2$$

$\therefore$ (가) $\frac{\pi}{n}$ (나) $\frac{k\pi}{n}$ (다) π

답 풀이 참조

1160 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}+\frac{1}{2+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}$$

이때 $f(x)=\frac{1}{2+x}$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n},\ x_k=a+k\Delta x=\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2+x}dx=\Big[\ln|2+x|\Big]_0^1$$

$$=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

답 $\ln\frac{3}{2}$

1161 주어진 곡선은 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $y\boxed{\le}0$이고, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $y\boxed{\ge}0$이다.

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(\boxed{-e^x+1})dx+\int_0^1(\boxed{e^x-1})dx$$

$$=\Big[-e^x+x\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^x-x\Big]_0^1$$

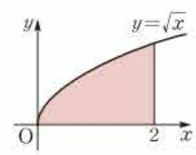
$$=\{-1-(-e^{-1}-1)\}+(e-1-1)$$

$$=\boxed{e+\frac{1}{e}-2}$$

$\therefore$ (가) $\le$ (나) $\ge$ (다) $-e^x+1$ (라) e^x-1 (마) $e+\frac{1}{e}-2$

답 풀이 참조

1162 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



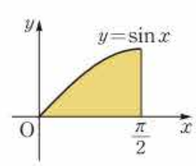
$$\int_0^2\sqrt{x}\,dx=\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

답 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

1163 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

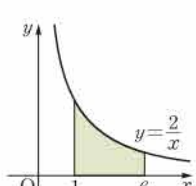


$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1$$

답 1

1164 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

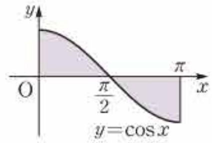


$$\int_1^e\frac{2}{x}dx=\Big[2\ln|x|\Big]_1^e$$

$$=2$$

답 2

1165 곡선 $y=\cos x$와 x축의 교점의 x좌표는 $\cos x=0$에서



$x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\le x\le\pi$)

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=1-(-1)=2$$

답 2

1166 주어진 곡선은 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $x\boxed{\le}0$이고, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $x\boxed{\ge}0$이다.

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{1}|e^y-1|dy=\int_{-1}^{0}(\boxed{-e^y+1})dy+\int_0^1(\boxed{e^y-1})dy$$
$$=\Big[-e^y+y\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^y-y\Big]_0^1$$
$$=\{-1-(-e^{-1}-1)\}+(e-1-1)$$
$$=\boxed{e+\frac{1}{e}-2}$$

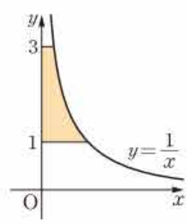
$\therefore$ (가) $\le$ (나) $\ge$ (다) $-e^y+1$ (라) e^y-1 (마) $e+\frac{1}{e}-2$

답 풀이 참조

1167 $y=\frac{1}{x}$에서 $x=\frac{1}{y}$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3\frac{1}{y}dy=\Big[\ln|y|\Big]_1^3=\ln 3$$



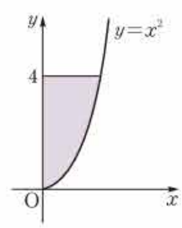
답 $\ln 3$

1168 $y=x^2$에서 $x=\sqrt{y}$ ($\because x\ge 0$)

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^4\sqrt{y}\,dy=\int_0^4 y^{\frac{1}{2}}dy$$
$$=\Big[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4=\frac{16}{3}$$

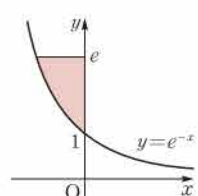
답 $\frac{16}{3}$



1169 $y=e^{-x}$에서 $-x=\ln y$

$\therefore x=-\ln y$

따라서 구하는 넓이는



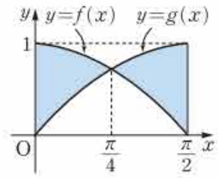
$$\int_1^e|-\ln y|dy=\int_1^e\ln y\,dy$$
$$=\Big[y\ln y\Big]_1^e-\int_1^e 1\,dy$$
$$=e-\Big[y\Big]_1^e$$
$$=e-(e-1)=1$$

답 1

1170 (1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $\cos x=\sin x$에서

$x=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore a=\frac{\pi}{4}$

(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 오른쪽 그림과 같으므로



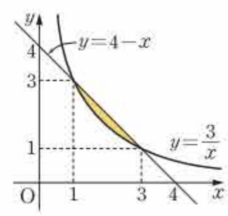
닫힌구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$에서 $f(x)\ge g(x)$

닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 $f(x)\le g(x)$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx$$
$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2$$

답 풀이 참조

1171 곡선 $y=\frac{3}{x}$과 직선 $y=4-x$의 교점의 x좌표는 $\frac{3}{x}=4-x$에서



$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

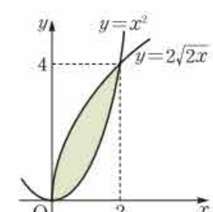
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3\left(4-x-\frac{3}{x}\right)dx=\Big[4x-\frac{1}{2}x^2-3\ln|x|\Big]_1^3$$
$$=\left(\frac{15}{2}-3\ln 3\right)-\frac{7}{2}=4-3\ln 3$$

답 $4-3\ln 3$

1172 두 곡선 $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$의 교점의 x좌표는 $x^2=2\sqrt{2x}$에서



$x^4=8x$, $x(x^3-8)=0$

$x(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

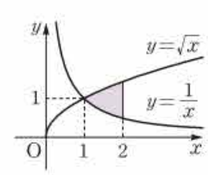
($\because x^2+2x+4>0$)

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2(2\sqrt{2x}-x^2)dx=\int_0^2(2\sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}-x^2)dx$$
$$=\Big[\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^2$$
$$=\frac{16}{3}-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

1173 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{x}=\frac{1}{x}$에서



$x=\frac{1}{x^2}$, $x^3=1$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

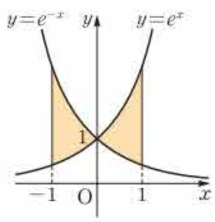
따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\ln|x|\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\ln 2\right)-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}-\ln 2$$

답 $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}-\ln 2$

1174 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$의 교점의 x좌표는 $e^x=e^{-x}$에서

$x=-x \qquad \therefore x=0$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^1|e^x-e^{-x}|dx$$
$$=\int_{-1}^0(e^{-x}-e^x)dx+\int_0^1(e^x-e^{-x})dx$$
$$=\left[-e^{-x}-e^x\right]_{-1}^0+\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1$$
$$=(-1-1)-(-e-e^{-1})+(e+e^{-1})-(1+1)$$
$$=2e+\frac{2}{e}-4$$

답 $2e+\frac{2}{e}-4$

1175 단면의 넓이가 $3x^2+5$이므로 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3(3x^2+5)dx=\left[x^3+5x\right]_0^3=42$$

답 42

1176 단면의 넓이가 $2\sqrt{x}$이므로 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3 2\sqrt{x}\,dx=\int_0^3 2x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=4\sqrt{3}$$

답 $4\sqrt{3}$

1177 시각 $t=0$에서의 위치가 0이므로

(1) $\int_0^t 2\sin t\,dt=\left[-2\cos t\right]_0^t=-2\cos t+2$

(2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}|2\sin t|dt=\left[-2\cos t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}$

답 (1) $-2\cos t+2$ (2) $\sqrt{3}$

1178 $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=-2t$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(2t)^2+(-2t)^2=8t^2$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^1\sqrt{8t^2}\,dt=\int_0^1 2\sqrt{2}t\,dt=\left[\sqrt{2}t^2\right]_0^1=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

1179 $\frac{dx}{dt}=2t^{\frac{3}{2}}$, $\frac{dy}{dt}=t^3-1$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(2t^{\frac{3}{2}})^2+(t^3-1)^2$$
$$=t^6+2t^3+1=(t^3+1)^2$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^1\sqrt{(t^3+1)^2}dt=\int_0^1(t^3+1)dt=\left[\frac{1}{4}t^4+t\right]_0^1=\frac{5}{4}$$

답 $\frac{5}{4}$

1180 $\frac{dx}{dt}=2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin t$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4\cos^2 t+4\sin^2 t=4$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^1\sqrt{4}\,dt=\left[2t\right]_0^1=2$$

답 2

1181 $\frac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$,

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=e^{2t}(1-2\sin t\cos t)+e^{2t}(1+2\sin t\cos t)$$
$$=2e^{2t}$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^2\sqrt{2e^{2t}}\,dt=\int_0^2\sqrt{2}e^t\,dt=\left[\sqrt{2}e^t\right]_0^2=\sqrt{2}(e^2-1)$$

답 $\sqrt{2}(e^2-1)$

1182 $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\int_0^{\pi}1\,dt=\left[t\right]_0^{\pi}=\pi$$

답 π

1183 $y'=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^3\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^3\sqrt{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}}\,dx$$
$$=\int_1^3\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^3\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2x}\right]_1^3$$
$$=\frac{14}{3}$$

답 $\frac{14}{3}$

1184 $y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_{-1}^1\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_{-1}^1\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$
$$=\int_{-1}^1\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_{-1}^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_{-1}^1$$
$$=e-\frac{1}{e}$$

답 $e-\frac{1}{e}$

1185 $f(x)=\sin x$, $a=1$, $b=4$로 놓으면

$\Delta x=\dfrac{3}{n}$, $x_k=1+\dfrac{3k}{n}$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(1+\frac{3k}{n}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(1+\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}$$
$$=\frac{1}{3}\int_1^4 f(x)\,dx=\frac{1}{3}\int_1^4 \sin x\,dx$$

즉 $p=\dfrac{1}{3}$, $q=1$, $r=4$이므로 $pqr=\dfrac{4}{3}$

답 ④

1186 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{n^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\boxed{\frac{k}{n}}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$\Delta x=\dfrac{1}{n}$, $x_k=\dfrac{k}{n}$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$1-x^2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-2x$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_1^0\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{3}}$$

$\therefore$ (가) $\dfrac{k}{n}$ (나) $\dfrac{1}{3}$

답 풀이 참조

1187 $a=2$, $b=4$로 놓으면

$\Delta x=\dfrac{2}{n}$, $x_k=2+\dfrac{2k}{n}$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\int_2^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_2^4\cos\pi x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_2^4=0$$

답 0

1188 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2$ ··· ❶

$\displaystyle=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$

이때 $f(x)=x^2$, $a=1$, $b=2$로 놓으면

$\Delta x=\dfrac{1}{n}$, $x_k=1+\dfrac{k}{n}$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$\displaystyle 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=2\int_1^2 f(x)dx=2\int_1^2 x^2dx$ ··· ❷

$\displaystyle=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{14}{3}$ ··· ❸

답 $\dfrac{14}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 급수를 Σ를 이용하여 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 주어진 급수를 정적분으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ 답을 구할 수 있다.	30 %

1189 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{3}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

이때 $f(x)=e^x$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$\Delta x=\dfrac{1}{n}$, $x_k=\dfrac{k}{n}$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 e^x dx$$
$$=\left[e^x\right]_0^1=e-1$$

답 ②

1190 $\triangle ABC \backsim \triangle AB_kC_k$ ($k=1, 2, 3, \cdots, n-1$)이므로

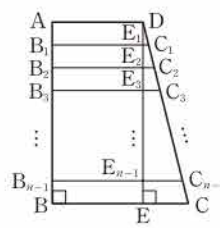
$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AC_k}:\overline{B_kC_k}$, $1:1=\dfrac{k}{n}:\overline{B_kC_k}$

$\therefore \overline{B_kC_k}=\dfrac{k}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 $\dfrac{1}{3}$

1191 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D에서 $\overline{AB}$와 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}$와 만나는 점을 E라 하고 $\overline{B_kC_k}$ ($k=1, 2, 3, \cdots, n-1$)와 만나는 점을 E_k라 하면



$\overline{B_kE_k}=2$, $\overline{EC}=1$

한편 $\triangle DEC \backsim \triangle DE_kC_k$이므로

$\overline{DE}:\overline{EC}=\overline{DE_k}:\overline{E_kC_k}$

$4:1=\dfrac{4k}{n}:\overline{E_kC_k}$ $\therefore \overline{E_kC_k}=\dfrac{k}{n}$

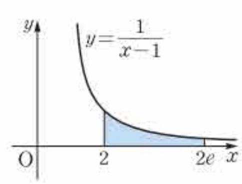
따라서 $\overline{B_kC_k}=\overline{B_kE_k}+\overline{E_kC_k}=2+\dfrac{k}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$
$$=2\int_2^3 x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3$$
$$=2\left(9-\frac{8}{3}\right)=\frac{38}{3}$$

답 ⑤

1192 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

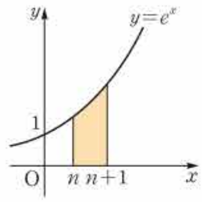
$$\int_2^{2e}\frac{1}{x-1}\,dx=\Big[\ln|x-1|\Big]_2^{2e}$$
$$=\ln(2e-1)$$



답 ③

1193 오른쪽 그림에서

$$S(n)=\int_{n}^{n+1}e^{x}dx=\Big[e^{x}\Big]_{n}^{n+1}$$
$$=e^{n+1}-e^{n}$$
$$=e^{n}(e-1) \quad \cdots ❶$$



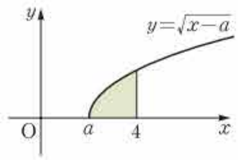
따라서 $S(5)=e^{5}(e-1)$, $S(2)=e^{2}(e-1)$ 이므로 ⋯ ❷

$$\frac{S(5)}{S(2)}=e^{3} \quad \cdots ❸$$

답 e^{3}

채점 기준	비율
❶ $S(n)$을 구할 수 있다.	60 %
❷ $S(5)$, $S(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\frac{S(5)}{S(2)}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1194 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{a}^{4}\sqrt{x-a}\,dx=\Big[\frac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}\Big]_{a}^{4}$$
$$=\frac{2}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $\frac{2}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$(4-a)^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$, $\quad (4-a)^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$, $\quad 4-a=2$

$\therefore a=2$

답 ④

1195 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(-\sin x)dx$

$$=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}+\Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$
$$=2+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

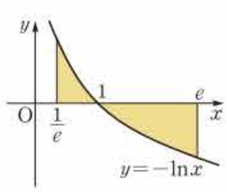
답 ③

1196 $\int_{-1}^{0}\left(-\frac{2x}{x^{2}+3}\right)dx+\int_{0}^{1}\frac{2x}{x^{2}+3}dx$

$$=\Big[-\ln(x^{2}+3)\Big]_{-1}^{0}+\Big[\ln(x^{2}+3)\Big]_{0}^{1}$$
$$=2\ln 4-2\ln 3$$
$$=2\ln\frac{4}{3}$$

답 $2\ln\frac{4}{3}$

1197 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

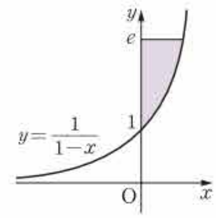


$$\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x)dx+\int_{1}^{e}\ln x\,dx$$
$$=\Big[-x\ln x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-1)dx$$
$$+\Big[x\ln x\Big]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}1\,dx$$
$$=-\frac{1}{e}+\Big[x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}+e-\Big[x\Big]_{1}^{e}$$
$$=2-\frac{2}{e}$$

답 ①

1198 $y=\frac{1}{1-x}$에서 $\quad 1-x=\frac{1}{y}$

$\therefore x=1-\frac{1}{y}$



따라서 구하는 넓이는

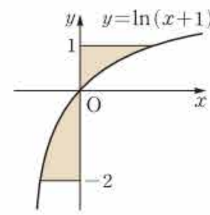
$$\int_{1}^{e}\left(1-\frac{1}{y}\right)dy=\Big[y-\ln|y|\Big]_{1}^{e}$$
$$=e-2$$

답 ①

1199 $y=\ln(x+1)$에서

$x+1=e^{y}$

$\therefore x=e^{y}-1 \quad \cdots ❶$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}(-e^{y}+1)dy+\int_{0}^{1}(e^{y}-1)dy$$
$$=\Big[-e^{y}+y\Big]_{-2}^{0}+\Big[e^{y}-y\Big]_{0}^{1}$$
$$=-1-(-e^{-2}-2)+(e-1)-1$$
$$=e+\frac{1}{e^{2}}-1 \quad \cdots ❷$$

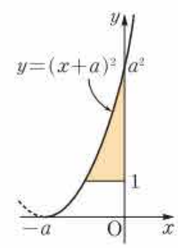
답 $e+\frac{1}{e^{2}}-1$

채점 기준	비율
❶ x를 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	70 %

1200 $y=(x+a)^{2}$에서

$\sqrt{y}=x+a \ (\because x\ge -a)$

$\therefore x=\sqrt{y}-a$



오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{1}^{a^{2}}(-\sqrt{y}+a)dy$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+ay\Big]_{1}^{a^{2}}$$
$$=\left(-\frac{2}{3}a^{3}+a^{3}\right)-\left(-\frac{2}{3}+a\right)$$
$$=\frac{1}{3}a^{3}-a+\frac{2}{3}$$

따라서 $\frac{1}{3}a^{3}-a+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ 이므로

$a^{3}-3a-2=0$, $\quad (a+1)^{2}(a-2)=0$

$\therefore a=2 \ (\because a>1)$

답 ③

1201 곡선 $y=xe^{2-x}$과 직선 $y=\frac{1}{e}x$의 교점의 x좌표는

$xe^{2-x}=\frac{1}{e}x$에서

$x\left(e^{2-x}-\frac{1}{e}\right)=0$, $\quad x(e^{2-x}-e^{-1})=0$

$x=0$ 또는 $e^{2-x}=e^{-1}$
$2-x=-1$이므로 $x=3$

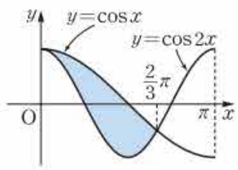
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^3\left(xe^{2-x}-\frac{1}{e}x\right)dx$$
$$=\int_0^3 xe^{2-x}dx-\int_0^3\frac{1}{e}x\,dx$$
$$=\Big[x\cdot(-e^{2-x})\Big]_0^3-\int_0^3(-e^{2-x})dx-\Big[\frac{1}{2e}x^2\Big]_0^3$$
$$=-3e^{-1}+\Big[-e^{2-x}\Big]_0^3-\frac{9}{2e}$$
$$=e^2-\frac{17}{2e}$$

답 $e^2-\dfrac{17}{2e}$

1202 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\cos 2x$의 교점의 x좌표는 $\cos x=\cos 2x$에서



$\cos x=2\cos^2 x-1$

$2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\cos x-\cos 2x)dx=\Big[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

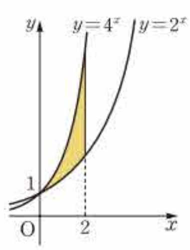
답 ④

1203 두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x$의 교점의 x좌표는 $4^x=2^x$에서

$2^{2x}=2^x$, $\quad 2x=x$

$\therefore x=0$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^2(4^x-2^x)dx$$
$$=\Big[\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}\Big]_0^2$$
$$=\left(\frac{16}{\ln 4}-\frac{4}{\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 2}\right)$$
$$=\frac{9}{2\ln 2}$$

$\therefore k=9$

답 ④

1204 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{2}{x}=2x$에서

$x^2-1=0$, $\quad (x-1)(x+1)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x>0$)

곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{2}x$에서

$x^2-4=0$, $\quad (x-2)(x+2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x>0$)

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\left(2x-\frac{1}{2}x\right)dx+\int_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2}x\right)dx$$
$$=\Big[\frac{3}{4}x^2\Big]_0^1+\Big[2\ln|x|-\frac{1}{4}x^2\Big]_1^2$$
$$=\frac{3}{4}+(2\ln 2-1)-\left(-\frac{1}{4}\right)=2\ln 2$$

답 $2\ln 2$

1205 두 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{1}{x}=\sqrt{x}$에서

$\dfrac{1}{x^2}=x$, $\quad x^3-1=0$, $\quad (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x^2+x+1>0$) ⋯ ❶

$$S_1=\int_{\frac{1}{4}}^1\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)dx=\Big[\ln|x|-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_{\frac{1}{4}}^1$$
$$=-\frac{2}{3}-\left(-\ln 4-\frac{1}{12}\right)=\ln 4-\frac{7}{12}$$ ⋯ ❷

$$S_2=\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\ln|x|\Big]_1^4$$
$$=\left(\frac{16}{3}-\ln 4\right)-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}-\ln 4$$ ⋯ ❸

$\therefore S_2-S_1=\dfrac{21}{4}-4\ln 2$ ⋯ ❹

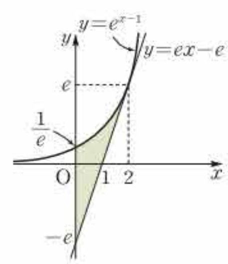
답 $\dfrac{21}{4}-4\ln 2$

채점 기준	비율
❶ 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	10 %
❷ S_1의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ S_2의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ S_2-S_1의 값을 구할 수 있다.	10 %

1206 $y=e^{x-1}$에서 $y'=e^{x-1}$이므로 곡선 위의 점 $(2,\ e)$에서의 접선의 기울기는 e이고 접선의 방정식은

$y-e=e(x-2)$ $\qquad \therefore y=ex-e$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



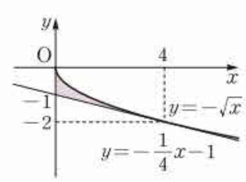
$$\int_0^2\{e^{x-1}-(ex-e)\}dx$$
$$=\Big[e^{x-1}-\frac{e}{2}x^2+ex\Big]_0^2$$
$$=(e-2e+2e)-\frac{1}{e}$$
$$=e-\frac{1}{e}$$

답 ②

1207 $y=-\sqrt{x}$에서 $y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 곡선 위의 점 $(4,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{1}{4}$이고 접선의 방정식은

$y-(-2)=-\dfrac{1}{4}(x-4)$ $\qquad \therefore y=-\dfrac{1}{4}x-1$ ⋯ ❶

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^4\Big\{-\sqrt{x}-\left(-\frac{1}{4}x-1\right)\Big\}dx$$
$$=\int_0^4\left(-\sqrt{x}+\frac{1}{4}x+1\right)dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{8}x^2+x\Big]_0^4$$
$$=\frac{2}{3}$$ ⋯ ❷

즉 $p=3$, $q=2$이므로

$p+q=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 곡선과 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1208 (1) $y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 접점의 좌표를 $(t,\ \ln t)$라 하면 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$이고 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

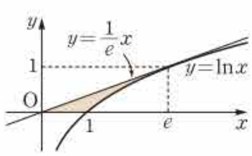
$$-\ln t=\frac{1}{t}(0-t),\qquad \ln t=1$$

$$\therefore t=e$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{e}(x-e)\qquad \therefore y=\frac{1}{e}x$$

(2) $\int_0^e \frac{1}{e}x\,dx-\int_1^e \ln x\,dx$



$=\left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^e-\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1\,dx\right)$

$=\frac{e}{2}-e+\left[x\right]_1^e$

$=\frac{e}{2}-e+e-1=\frac{e}{2}-1$

답 (1) $y=\frac{1}{e}x$ (2) $\frac{e}{2}-1$

1209 $\int_0^k(-x+2\sqrt{x})dx=0$이므로

$\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^k=0,\qquad -\frac{1}{2}k^2+\frac{4}{3}k\sqrt{k}=0$

$k\sqrt{k}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}+\frac{4}{3}\right)=0,\qquad -\frac{1}{2}\sqrt{k}+\frac{4}{3}=0\ (\because k>4)$

$\sqrt{k}=\frac{8}{3}\qquad \therefore k=\frac{64}{9}$

답 $\frac{64}{9}$

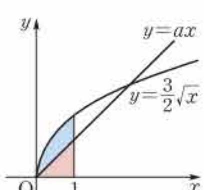
1210 $\int_0^2\left(\sin\frac{\pi}{4}x-k\right)dx=0$이므로

$\left[-\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}x-kx\right]_0^2=0,\qquad -2k-\left(-\frac{4}{\pi}\right)=0$

$2k=\frac{4}{\pi}\qquad \therefore k=\frac{2}{\pi}$

답 $\frac{2}{\pi}$

1211 곡선 $y=\frac{3}{2}\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_0^1\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx=\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=1$$

직선 $y=ax$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

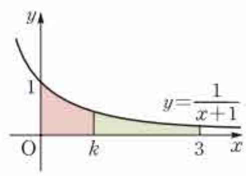
$$S_2=\int_0^1 ax\,dx=\left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=\frac{a}{2}$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\qquad \therefore a=1$

답 1

1212 곡선 $y=\frac{1}{x+1}$과 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_0^3\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\left[\ln|x+1|\right]_0^3$$

$$=2\ln 2$$

곡선 $y=\frac{1}{x+1}$과 x축, y축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^k\frac{1}{x+1}dx=\left[\ln|x+1|\right]_0^k$$

$$=\ln(k+1)\ (\because k+1>0)$$

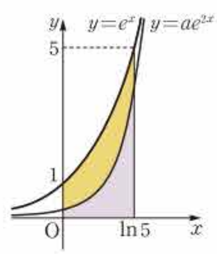
이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$\ln(k+1)=\ln 2$

$k+1=2\qquad \therefore k=1$

답 ④

1213 곡선 $y=e^x$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\ln 5$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_0^{\ln 5}e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^{\ln 5}$$

$=5-1=4$ ⋯ ❶

곡선 $y=ae^{2x}$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\ln 5$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^{\ln 5}ae^{2x}\,dx=\left[\frac{a}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 5}$$

$=\frac{25a}{2}-\frac{a}{2}=12a$ ⋯ ❷

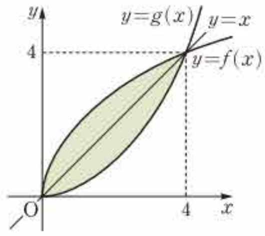
이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$12a=2\qquad \therefore a=\frac{1}{6}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{6}$

채점 기준	비율
❶ S_1의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ S_2를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1214 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



즉 $2\sqrt{x}=x$에서 $\quad 4x=x^2$

$x^2-4x=0, \quad x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^4 (2\sqrt{x}-x)dx=2\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

$$=2\left(\frac{32}{3}-8\right)=\frac{16}{3}$$

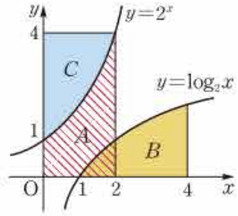
답 ②

1215 두 함수 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

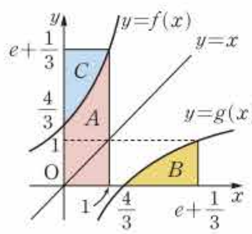
따라서 오른쪽 그림에서 $B=C$이므로

$A+B=A+C=2\cdot 4=8$

답 ①



1216 함수 $f(x)=e^x+\frac{1}{3}$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



따라서 오른쪽 그림에서

(B의 넓이)=(C의 넓이)

이므로

$$\int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{4}{3}}^{e+\frac{1}{3}} g(x)dx$$

=(A의 넓이)+(B의 넓이)

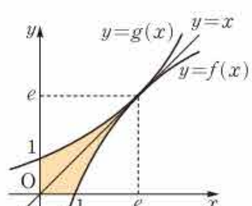
=(A의 넓이)+(C의 넓이)

$=1\cdot\left(e+\frac{1}{3}\right)=e+\frac{1}{3}$

답 $e+\frac{1}{3}$

1217 (1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=e$인 점에서 서로 접하므로 직선 $y=x$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=e$인 점에서의 접선이다.

$\therefore f(e)=e, f'(e)=1$



$f'(x)=\frac{1}{ax}$이므로

$\frac{1}{a}=e, \ \frac{1}{ae}=1 \quad \therefore a=\frac{1}{e}$ ⋯ ❶

(2) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

이때 $f(x)=e\ln x$이고 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 좌표는 $(1, 0)$이므로 구하는 넓이는

$$2\left(\int_0^e x\,dx-\int_1^e e\ln x\,dx\right)$$

$$=2\left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^e-\left[ex\ln x\right]_1^e+\int_1^e e\,dx\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}e^2-e^2+\left[ex\right]_1^e\right)$$

$$=2\left(-\frac{1}{2}e^2+e^2-e\right)=e^2-2e$$ ⋯ ❷

답 (1) $\frac{1}{e}$ (2) e^2-2e

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	70 %

다른풀이 (1) $f(x)=\frac{1}{a}\ln x$의 역함수를 구하면 $y=\frac{1}{a}\ln x$에서

$ay=\ln x, \quad x=e^{ay}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=e^{ax} \quad \therefore g(x)=e^{ax}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=e$인 점에서 접하므로

$f(e)=g(e)$, $f'(e)=g'(e)$에서 $\quad a=\frac{1}{e}$

(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^e \left(e^{\frac{1}{e}x}-x\right)dx=2\left[e\cdot e^{\frac{1}{e}x}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^e=2\left\{\left(e^2-\frac{1}{2}e^2\right)-e\right\}$$

$$=e^2-2e$$

1218 $\displaystyle\int_0^5 3(x+1)^2dx=3\int_0^5 (x^2+2x+1)dx$

$$=3\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^5$$

$$=3\left(\frac{125}{3}+25+5\right)$$

$$=215(\text{cm}^3)$$

답 215 cm^3

1219 물의 깊이가 x일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$\int_0^x S(x)dx=\ln(x+1)+x^2$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$S(x)=\frac{1}{x+1}+2x$$

따라서 물의 깊이가 8일 때, 수면의 넓이는

$$S(8)=\frac{1}{9}+16=\frac{145}{9}$$

답 ②

1220 높이가 x일 때, 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

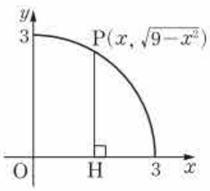
$S(x)=(\sqrt{25-4x})^2=25-4x$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^4 S(x)\,dx=\int_0^4 (25-4x)dx=\left[25x-2x^2\right]_0^4=68$$

답 68

1221 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{9-x^2}$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, \sqrt{9-x^2})$ $(0\leq x\leq 3)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{9-x^2}$$

이때 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\overline{\mathrm{PH}}^2=9-x^2$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3 (9-x^2)dx=\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=18$$

답 18

1222 점 P의 x좌표를 x라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=3^x$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}$를 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\cdot 3^x$$

이때 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}\right)^2=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3^x\right)^2=\frac{\pi}{8}\cdot 9^x \quad \cdots ❶$$

따라서 반원이 만드는 입체도형의 부피는

$$\int_0^2 S(x)\,dx=\int_0^2 \frac{\pi}{8}\cdot 9^x\,dx=\frac{\pi}{8}\left[\frac{9^x}{\ln 9}\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{80}{\ln 9}=\frac{10}{2\ln 3}\pi$$

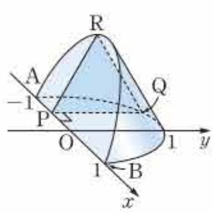
$$=\frac{5}{\ln 3}\pi \quad \cdots ❷$$

$$\therefore k=5 \quad \cdots ❸$$

답 5

채점 기준	비율
❶ $S(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 입체도형의 부피를 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	10 %

1223 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 원점, 직선 AB를 x축으로 정하고, x축 위의 점 $\mathrm{P}(x, 0)(-1\leq x\leq 1)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 $\triangle\mathrm{PQR}$라 하자. 이때



$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{1-x^2}$$

이므로 $\triangle\mathrm{PQR}$의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{PQ}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-1}^1 S(x)dx=\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)dx$$

$$=2\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

1224 $0\leq t\leq 1$일 때 $v(t)\leq 0$이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1 |(t-1)e^t|\,dt=\int_0^1 (1-t)e^t dt$$

$$=\Big[(1-t)e^t\Big]_0^1-\int_0^1 (-e^t)\,dt$$

$$=-1+\Big[e^t\Big]_0^1$$

$$=-1+(e-1)$$

$$=e-2$$

답 ①

1225 $t=a\,(0<a\leq 5)$일 때, 점 P의 위치는

$$\int_0^a \cos\pi t\,dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^a=\frac{1}{\pi}\sin\pi a$$

점 P가 원점을 지날 때,

$$\frac{1}{\pi}\sin\pi a=0, \qquad \sin\pi a=0$$

$$\therefore a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ (\because 0<a\leq 5)$$

따라서 점 P는 원점을 5번 지난다.

답 5

1226 점 P의 시각 t에서의 위치를 x라 하면

$$x=\int_0^t (\sin t-\sin 2t)dt$$

$$=\left[-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^t$$

$$=-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t-\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\cos t+\frac{1}{2}(2\cos^2 t-1)+\frac{1}{2}$$

$$=\cos^2 t-\cos t=\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$0\leq t\leq\pi$에서 $-1\leq\cos t\leq 1$이므로

$$-\frac{3}{2}\leq\cos t-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}, \qquad 0\leq\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{9}{4}$$

$$\therefore -\frac{1}{4}\leq\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\leq 2$$

즉 $-\frac{1}{4}\leq x\leq 2$이므로 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 2이다.

답 2

다른풀이 $t=a\ (0\leq a\leq\pi)$에서 원점과 점 P 사이의 거리가 최대라 하면 점 P는 시각 $t=a$에서 운동 방향이 바뀌므로 $v(a)=0$에서

$$\sin a-\sin 2a=0, \qquad \sin a-2\sin a\cos a=0$$

$$\sin a(1-2\cos a)=0, \qquad \sin a=0 \text{ 또는 } \cos a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } a=\pi\ (\because 0\leq a\leq\pi)$$

(i) $t=0$일 때, 점 P의 위치는 0이다.

(ii) $t=\frac{\pi}{3}$일 때, 점 P의 위치는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin t-\sin 2t)dt=\left[-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{4}$$

(iii) $t=\pi$일 때, 점 P의 위치는

$$\int_0^{\pi}(\sin t-\sin 2t)dt=\left[-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi}=2$$

이상에서 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 2이다.

1227 $\frac{dx}{dt}=-\pi\sin\pi t$, $\frac{dy}{dt}=\pi\cos\pi t$이므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2\sqrt{(-\pi\sin\pi t)^2+(\pi\cos\pi t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{\pi^2(\sin^2\pi t+\cos^2\pi t)}\,dt$$
$$=\int_0^2\pi\,dt=\Big[\pi t\Big]_0^2=2\pi$$

답 ④

1228 $\frac{dx}{dt}=2t-2$, $\frac{dy}{dt}=4\sqrt{t}$

이때 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 8이므로

$$\int_0^a\sqrt{(2t-2)^2+(4\sqrt{t})^2}\,dt=8$$
$$\int_0^a\sqrt{(2t+2)^2}\,dt=8,\qquad \int_0^a(2t+2)dt=8$$
$$\Big[t^2+2t\Big]_0^a=8,\qquad a^2+2a=8$$
$$a^2+2a-8=0,\qquad (a+4)(a-2)=0$$
$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

답 ②

1229 $\frac{dx}{dt}=-3\cos^2t\sin t$, $\frac{dy}{dt}=3\sin^2t\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(-3\cos^2t\sin t,\ 3\sin^2t\cos t)$ ··· ❶

점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{9\cos^4t\sin^2t+9\sin^4t\cos^2t}$$
$$=\sqrt{9\sin^2t\cos^2t(\cos^2t+\sin^2t)}$$
$$=3|\sin t\cos t|=\frac{3}{2}|\sin 2t|$$ ··· ❷

이때 출발 후 처음으로 점 P의 속력이 0이 되는 때는 $\frac{3}{2}|\sin 2t|=0$, 즉 $|\sin 2t|=0$에서

$t=\frac{\pi}{2}$ ··· ❸

따라서 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}|\sin 2t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\sin 2t\,dt$$
$$=\Big[-\frac{3}{4}\cos 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}$$ ··· ❹

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 속도를 구할 수 있다.	20 %
❷ 점 P의 시각 t에서의 속력을 구할 수 있다.	20 %
❸ 점 P의 속력이 0일 때의 시각을 구할 수 있다.	30 %
❹ 점 P의 속력이 0이 될 때까지 점 P가 움직인 거리를 구할 수 있다.	30 %

1230 $y'=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}=\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_{-2}^2\sqrt{1+\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2}\,dx=\int_{-2}^2\sqrt{\frac{e^x+2+e^{-x}}{4}}\,dx$$
$$=\int_{-2}^2\sqrt{\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_{-2}^2\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}\,dx$$
$$=\Big[e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\Big]_{-2}^2$$
$$=2\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

답 $2\left(e-\frac{1}{e}\right)$

1231 $\frac{dx}{d\theta}=2\sin\theta\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-2\cos\theta\sin\theta$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(2\sin\theta\cos\theta)^2+(-2\cos\theta\sin\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{8\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{2}\,|\sin\theta\cos\theta|\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,|\sin 2\theta|\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin 2\theta\,d\theta$$
$$=\Big[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}$$

답 ②

1232 $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$이므로

$$y'=\frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=x\sqrt{x^2+2}$$

따라서 주어진 곡선의 길이는

$$\int_0^a\sqrt{1+(x\sqrt{x^2+2})^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx$$
$$=\int_0^a\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx$$
$$=\int_0^a(x^2+1)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_0^a$$
$$=\frac{a^3}{3}+a$$

즉 $\frac{a^3}{3}+a=12$에서 $\quad a^3+3a-36=0$

$(a-3)(a^2+3a+12)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

답 3

1233 전략 각 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 구하여 넓이의 합을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 n 등분 한 각 소구간의 오른쪽 끝 점의 x좌표는 차례대로

$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots,\ \frac{n}{n}$

이고 색칠한 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\boxed{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^3$$
$$=\frac{1}{\boxed{n^4}}(1^3+2^3+\cdots+n^3)$$
$$=\frac{1}{n^4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\boxed{\frac{1}{4}}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{4}$이다.

$\therefore$ (가) $\frac{1}{n}$ (나) n^4 (다) $\frac{1}{4}$

답 풀이 참조

1234 전략 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_c^d |g(y)|dy$이다.

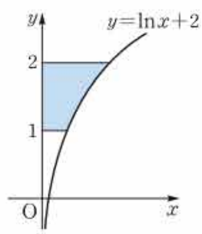
풀이 $y=\ln x+2$에서

$\ln x=y-2 \qquad \therefore x=e^{y-2}$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^2 e^{y-2}dy=\left[e^{y-2}\right]_1^2$$
$$=1-\frac{1}{e}$$

답 $1-\frac{1}{e}$



1235 전략 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으면 $\int_a^b f(x)dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_0^k(\sqrt{x}-4)dx=0$이므로

$$\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x\right]_0^k=0, \quad \frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}-4k=0, \quad \frac{2}{3}k(\sqrt{k}-6)=0$$

이때 $k>16$이므로 $\quad \sqrt{k}-6=0$

$\therefore k=36$

답 36

1236 전략 물의 깊이가 x일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$, 물의 부피를 $V(x)$라 하면 $V(x)=\int_0^x S(x)dx$임을 이용한다.

풀이 물의 깊이가 x일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$\int_0^x S(x)dx=x\ln(x+1)$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$S(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$$

따라서 물의 깊이가 e^2-1일 때 수면의 넓이는

$$S(e^2-1)=2+\frac{e^2-1}{e^2}=3-\frac{1}{e^2}$$

답 $3-\frac{1}{e^2}$

1237 전략 정적분과 급수의 관계를 이용한다.

풀이
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{4n}{n+2k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{1+\frac{2k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}}\cdot\frac{2}{n}$$

이때 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $a=1$, $b=3$으로 놓으면

$$\Delta x=\frac{2}{n}, \; x_k=1+\frac{2k}{n}$$

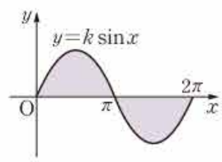
따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}}\cdot\frac{2}{n}=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$=\left[2\sqrt{x}\right]_1^3$$
$$=2(\sqrt{3}-1)$$

답 $2(\sqrt{3}-1)$

1238 전략 a_k는 $k\sin x\ge 0$인 구간과 $k\sin x\le 0$인 구간으로 나누어 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서



$$a_k=\int_0^\pi k\sin x\,dx$$
$$+\int_\pi^{2\pi}(-k\sin x)dx$$
$$=\left[-k\cos x\right]_0^\pi+\left[k\cos x\right]_\pi^{2\pi}$$
$$=k-(-k)+k-(-k)$$
$$=4k \quad \cdots ❶$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}4k=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=220 \quad \cdots ❷$$

답 220

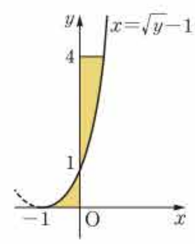
채점 기준	비율
❶ a_k를 구할 수 있다.	70 %
❷ $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1239 전략 곡선과 y축 사이의 넓이는 $x\ge 0$인 구간과 $x\le 0$인 구간으로 나누어 구한다.

풀이 $y=(x+1)^2$에서

$\sqrt{y}=x+1\;(\because x\ge -1)$

$\therefore x=\sqrt{y}-1$



곡선 $x=\sqrt{y}-1$과 y축의 교점의 y좌표는

$\sqrt{y}-1=0$에서

$\sqrt{y}=1 \qquad \therefore y=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1(-\sqrt{y}+1)dy+\int_1^4(\sqrt{y}-1)dy$$
$$=\int_0^1(-y^{\frac{1}{2}}+1)dy+\int_1^4(y^{\frac{1}{2}}-1)dy$$
$$=\left[-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+y\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-y\right]_1^4$$
$$=\left(-\frac{2}{3}+1\right)+\left\{\left(\frac{16}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)\right\}$$
$$=2$$

답 ⑤

1240 전략 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정하고, 그 구간 안에서 곡선과 직선의 위치 관계를 파악하여 정적분의 값을 구한다.

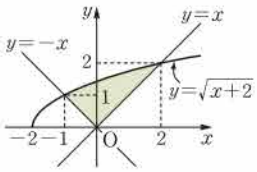
10 정적분의 활용

풀이 곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{x+2}=-x$에서

$x+2=x^2,\quad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1\ (\because x<0)$



곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{x+2}=x$에서

$x+2=x^2,\quad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x>0)$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{\sqrt{x+2}-(-x)\}dx+\int_{0}^{2}(\sqrt{x+2}-x)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\left\{\frac{4\sqrt{2}}{3}-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{16}{3}-2\right)-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right\}=\frac{13}{6}$$

즉 $p=6,\ q=13$이므로

$p+q=19$

답 19

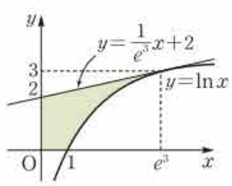
1241

전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용하여 접선의 방정식을 구한 후 접선과 곡선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 $y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 위의 점 $(e^3,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{e^3}$이고 접선의 방정식은

$y-3=\frac{1}{e^3}(x-e^3)\qquad \therefore y=\frac{1}{e^3}x+2$ ⋯ ❶

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_{0}^{e^3}\left(\frac{1}{e^3}x+2\right)dx-\int_{1}^{e^3}\ln x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2e^3}x^2+2x\right]_{0}^{e^3}-\left[x\ln x\right]_{1}^{e^3}+\int_{1}^{e^3}1dx$$
$$=\left(\frac{e^3}{2}+2e^3\right)-3e^3+\left[x\right]_{1}^{e^3}$$
$$=-\frac{e^3}{2}+e^3-1=\frac{e^3}{2}-1$$ ⋯ ❷

답 $\frac{e^3}{2}-1$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

1242

전략 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$와 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으면 $\int_{a}^{b}\{f(x)-g(x)\}dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_{0}^{1}\{e^{2x}-(-2x+a)\}dx=0$이므로

$\left[\frac{1}{2}e^{2x}+x^2-ax\right]_{0}^{1}=0,\qquad \frac{1}{2}e^2+1-a-\frac{1}{2}=0$

$\therefore a=\frac{e^2+1}{2}$

답 ①

1243

전략 물의 깊이가 x일 때 수면의 넓이가 $S(x)$이면 물의 부피는 $\int_{0}^{x}S(x)dx$임을 이용한다.

풀이 물의 깊이가 x일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\pi(\sqrt{x+5})^2=\pi(x+5)$

따라서 구하는 부피는

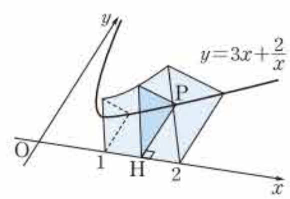
$$\int_{0}^{10}S(x)dx=\int_{0}^{10}\pi(x+5)dx=\pi\left[\frac{1}{2}x^2+5x\right]_{0}^{10}=100\pi$$

답 100π

1244

전략 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피는 $\int_{a}^{b}S(x)dx$이다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=3x+\frac{2}{x}$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(x,\ 3x+\frac{2}{x}\right)(1\le x\le 2)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{PH}}=3x+\frac{2}{x}$

이때 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{PH}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3x+\frac{2}{x}\right)^2$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{1}^{2}S(x)dx=\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3x+\frac{2}{x}\right)^2dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{1}^{2}\left(9x^2+12+\frac{4}{x^2}\right)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[3x^3+12x-\frac{4}{x}\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{35\sqrt{3}}{4}$$

답 ①

1245

전략 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=f(t),\ y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_{a}^{b}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\frac{dx}{dt}=1-2\sin t,\ \frac{dy}{dt}=\sqrt{3}\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $\quad(1-2\sin t,\ \sqrt{3}\cos t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{2}$일 때, 점 P의 속도는

$\left(1-2\sin\frac{\pi}{2},\ \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 0)$

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속도의 크기는

$$\sqrt{(1-2\sin t)^2+(\sqrt{3}\cos t)^2}$$
$$=\sqrt{4\sin^2 t-4\sin t+1+3\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{3(\sin^2 t+\cos^2 t)+\sin^2 t-4\sin t+1}$$
$$=\sqrt{\sin^2 t-4\sin t+4}$$
$$=\sqrt{(\sin t-2)^2}$$
$$=|\sin t-2|$$

$0\le t\le 2\pi$에서 $-1\le \sin t\le 1$이므로

$$-3\le \sin t-2\le -1 \qquad \therefore\ 1\le |\sin t-2|\le 3$$

따라서 점 P의 속도의 크기의 최솟값은 1이다.

ㄷ. 점 P가 $t=\pi$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리는

$$\int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{(1-2\sin t)^2+(\sqrt{3}\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_{\pi}^{2\pi}|\sin t-2|\,dt=\int_{\pi}^{2\pi}(2-\sin t)\,dt$$
$$=\Big[2t+\cos t\Big]_{\pi}^{2\pi}=4\pi+1-(2\pi-1)$$
$$=2\pi+2$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

1246 전략 곡선 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$의 길이는 $\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$임을 이용한다.

풀이 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x$이므로 $\quad y'=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^4\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_1^4\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx$$
$$=\int_1^4\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^4\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln|x|\right]_1^4$$
$$=4+\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{15}{4}+\ln 2$$

답 $\frac{15}{4}+\ln 2$

1247 전략 A_k를 k에 대한 식으로 나타낸다.

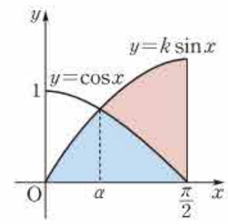
풀이 $x_k=1+\frac{k}{n}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$이므로

$$A_k=\frac{1}{2}\cdot x_k\cdot f(x_k)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^2 xe^x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\Big[xe^x\Big]_1^2-\int_1^2 e^x\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2e^2-e-\Big[e^x\Big]_1^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^2$$

답 ③

1248 전략 두 곡선의 교점의 x좌표를 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고 도형의 넓이를 이용하여 α에 대한 방정식을 세운다.

풀이 두 곡선 $y=k\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 x좌표를 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면



$k\sin\alpha=\cos\alpha$에서

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{k},\ \text{즉}\ \tan\alpha=\frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 곡선 $y=k\sin x$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}k\sin x\,dx$$
$$=\Big[-k\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=k$$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 두 곡선 $y=k\sin x$, $y=\cos x$와 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(k\sin x-\cos x)\,dx$$
$$=\Big[-k\cos x-\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-1-(-k\cos\alpha-\sin\alpha)$$
$$=k\cos\alpha+\sin\alpha-1$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$$k\cos\alpha+\sin\alpha-1=\frac{k}{2}$$
$$\therefore\ k\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{k}{2}+1$$

$\cos\alpha\ne 0$이므로 양변을 $\cos\alpha$로 나누면

$$k+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\left(\frac{k}{2}+1\right)\frac{1}{\cos\alpha}$$
$$\therefore\ k+\tan\alpha=\left(\frac{k}{2}+1\right)\sec\alpha \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $\sec^2\alpha=\tan^2\alpha+1=\frac{1}{k^2}+1$이므로

$$\sec\alpha=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}\ \left(\because\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right) \qquad \cdots\cdots ㉢$$

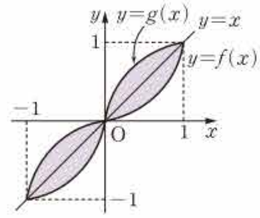
㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$$k+\frac{1}{k}=\left(\frac{k}{2}+1\right)\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}$$
$$\frac{k^2+1}{k}=\left(\frac{k}{2}+1\right)\frac{\sqrt{k^2+1}}{k},\qquad \sqrt{k^2+1}=\frac{k}{2}+1$$
$$k^2+1=\frac{k^2}{4}+k+1,\qquad 3k^2-4k=0$$
$$k(3k-4)=0 \qquad \therefore\ k=\frac{4}{3}\ (\because\ k>0)$$

답 ③

1249 전략 함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



이때 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$$4\int_0^1\left(x-\tan\frac{\pi}{4}x\right)dx=4\int_0^1\left(x-\frac{\sin\frac{\pi}{4}x}{\cos\frac{\pi}{4}x}\right)dx$$

$$=4\int_0^1\left\{x+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4}x\right)'}{\cos\frac{\pi}{4}x}\right\}dx$$

$$=4\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{\pi}\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}x\right|\right]_0^1$$

$$=4\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

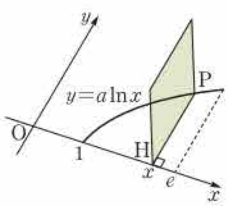
$$=2-\frac{8}{\pi}\ln 2$$

답 ③

1250 전략 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피는 $\int_a^b S(x)dx$이다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P의 x좌표를 $x\ (1\le x\le e)$라 하면

$$\overline{\mathrm{PH}}=a\ln x$$



이때 $\overline{\mathrm{PH}}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\overline{\mathrm{PH}}^2=a^2(\ln x)^2 \quad \cdots ❶$$

따라서 주어진 입체도형의 부피는

$$\int_1^e S(x)dx=\int_1^e a^2(\ln x)^2dx$$

$$=a^2\left\{\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e 2\ln x\,dx\right\}$$

$$=a^2\left\{e-2\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1\,dx\right)\right\}$$

$$=a^2\left\{e-2\left(e-\left[x\right]_1^e\right)\right\}$$

$$=a^2(e-2) \quad \cdots ❷$$

즉 $a^2(e-2)=4(e-2)$이므로 　　$a^2=4$

$$\therefore a=2\ (\because a>0) \quad \cdots ❸$$

답 2

채점 기준	비율
❶ $S(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 입체도형의 부피를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	10 %

1251 전략 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때 시각 t에서의 점 P의 위치는 $x_0+\int_a^t v(t)dt$임을 이용한다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 위치를 x_1이라 하면

$$x_1=\int_0^t \sin 2\pi t\,dt=\left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t\right]_0^t$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t+\frac{1}{2\pi}$$

점 Q의 시각 t에서의 위치를 x_2라 하면

$$x_2=\int_0^t \cos\pi t\,dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{\pi}\sin\pi t$$

$x_1=x_2$에서 　　$-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t+\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{\pi}\sin\pi t$

$-\cos 2\pi t+1=2\sin\pi t,$ 　　$-(1-2\sin^2\pi t)+1=2\sin\pi t$

$2\sin^2\pi t-2\sin\pi t=0,$ 　　$2\sin\pi t(\sin\pi t-1)=0$

$\sin\pi t=0$ 또는 $\sin\pi t=1$

$$\therefore t=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \cdots$$

따라서 처음으로 다시 만나는 시각은 $t=\frac{1}{2}$이므로 구하는 두 점의 위치는

$$\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\pi}$$

답 ①

memo

memo