Solution

Lecture Book

Ⅰ 집합과 명제

Ⅱ 함수

Ⅲ 순열과 조합

Work Book

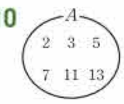
Ⅰ 집합과 명제

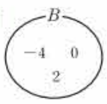
Ⅱ 함수

Ⅲ 순열과 조합

빠른 정답 찾기 Lecture Book

01 집합의 뜻과 표현

9쪽 Lecture 01 **01** 3 **02** $\not\in$ **03** $\in$ **04** $\in$
05 $\not\in$ **06** $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ **07** {r, i, g, h, t}
08 $\{x|x$는 6의 양의 배수$\}$ **09** $\{x|x$는 $-5\leq x\leq -1$인 정수$\}$
10 

11 

12 ㄴ, ㄹ **13** ㄱ, ㄷ
14 ㄹ **15** 5 **16** 8 **17** 5

10쪽 유형 Q+Q **01** ⑤ **02** ㄴ, ㄷ, ㄹ **03** ③
04 ⑤ **05** ④ **06** ⑤ **07** 4 **08** ④ **09** ②
10 8 **11** ③ **12** ㄱ, ㄴ

13쪽 Lecture 02 **01** $B\subset A$ **02** $B\subset A$ **03** $A\subset B$ **04** $\varnothing$
05 $\{x\}, \{y\}, \{z\}$ **06** $\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}$
07 $\{x, y, z\}$
08 $\varnothing$, $\{2\}, \{8\}, \{14\}, \{2, 8\}, \{2, 14\}, \{8, 14\}, \{2, 8, 14\}$
09 ㄱ, ㄴ, ㅁ **10** $A=B$ **11** $A=B$ **12** $A\neq B$
13 $a=10$, $b=-3$
14 $\varnothing$, $\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}$, $\{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{4, 5, 6\}$
15 32 **16** 31 **17** 16 **18** 8

14쪽 유형 Q+Q **01** ④ **02** ③ **03** ⑤
04 ㄱ, ㄴ, ㅁ **05** 2 **06** ② **07** ② **08** 14
09 ③ **10** ② **11** ④ **12** ② **13** ④ **14** 10
15 ② **16** 48 **17** 112 **18** 7 **19** 16

17쪽 중단원 마무리 **01** ③ **02** ③ **03** -3 **04** ②
05 3 **06** ④ **07** ③ **08** ⑤ **09** ④ **10** 48
11 135 **12** 49 **13** 24 **14** ② **15** 19 **16** 4
17 ③ **18** ⑤

02 집합의 연산

21쪽 Lecture 03 **01** $A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$, $A\cap B=\{a, b\}$
02 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20\}$, $A\cap B=\{1, 5\}$
03 $A\cup B=\{x|-2<x\leq 6\}$, $A\cap B=\{x|0\leq x<4\}$
04 $\{1, 2, 4, 8\}$ **05** ㄴ, ㄷ **06** $\{0, 1\}$ **07** $\{1, 3, 5, 6, 9\}$
08 $\{a, b, c, d, e\}$ **09** $\{1, 3, 5, 7\}$ **10** $\{3, 5, 6, 7, 8\}$
11 $\{6, 8\}$ **12** $\{1\}$ **13** $\{2, 7\}$ **14** ④

22쪽 유형 Q+Q **01** $\{2, 3, 6\}$ **02** ④ **03** ⑤
04 16 **05** ④ **06** 5 **07** ③ **08** 20 **09** ①
10 ④

24쪽 Lecture 04 **01** U **02** $\varnothing$ **03** A **04** A
05 $\{3, 7, 10\}$ **06** $\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ **07** $\{1, 4\}$
08 $\{1, 4\}$ **09** U **10** $\varnothing$ **11** 9 **12** 28 **13** 21
14 13 **15** 7 **16** 41

25쪽 유형 Q+Q **01** ④ **02** ㄴ, ㄹ **03** 16 **04** ⑤
05 ④ **06** 16 **07** ② **08** ⑤ **09** 5 **10** ④
11 7 **12** $\frac{1}{2}$ **13** ③ **14** ② **15** ③ **16** ②
17 10 **18** 34 **19** ② **20** 28 **21** 30

28쪽 중단원 마무리 **01** ② **02** $\{1, 8\}$ **03** 22 **04** ④
05 ① **06** 432 **07** ② **08** ㄱ, ㄴ **09** ① **10** 7
11 ⑤ **12** ④ **13** ⑤ **14** ② **15** 14 **16** ③
17 127

03 명제

33쪽 Lecture 05 **01** 참인 명제: ㄴ, 거짓인 명제: ㄷ
02 $\sqrt{9}$는 유리수이다. (참)
03 정사각형은 마름모가 아니다. (거짓) **04** $\{2, 3, 4\}$
05 $\{12\}$ **06** 참 **07** 거짓 **08** × **09** ○ **10** 거짓
11 참 **12** 어떤 자연수 x에 대하여 x^2은 짝수가 아니다. (참)
13 모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2\geq x$이다. (거짓)

34쪽 유형 Q+Q 01 ① 02 ㄱ, ㄹ 03 $-5\le x\le -2$
04 ⑤ 05 ② 06 ④ 07 ⑤ 08 ㄴ 09 ①
10 ③ 11 ③ 12 ⑤ 13 ② 14 3 15 ③
16 ⑤ 17 2

37쪽 Lecture 06 01 역: x가 4의 배수이면 x는 짝수이다. (참),
대우: x가 4의 배수가 아니면 x는 짝수가 아니다. (거짓)
02 역: $x^2=y^2$이면 $x=y$이다. (거짓), 대우: $x^2\ne y^2$이면 $x\ne y$이다.(참)
03 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참),
대우: $x\ne 0$ 또는 $y\ne 0$이면 $|x|+|y|\ne 0$이다. (참)
04 ㄱ, ㄷ 05 필요조건 06 충분조건
07 필요충분조건 08 ⑤

38쪽 유형 Q+Q 01 ④ 02 ㄷ 03 11 04 $3\le a\le 5$
05 ⑤ 06 ① 07 ④ 08 ② 09 ㄱ, ㄴ, ㄹ
10 ③ 11 ㄱ, ㄷ 12 6 13 0

40쪽 Lecture 07 01 $a\ne 0$ 또는 $b\ne 0$이면 $a^2+b^2\ne 0$이다., $\ne$, $\ne$,
대우 02 $<$, $<$, $<$ 03 $\frac{3}{4}b^2$, $\frac{3}{4}b^2$, 0, 0 04 12
05 $-4\le ax+by\le 4$

41쪽 유형 Q+Q 01 (가) $3k-2$ (나) $3k^2-4k+1$ (다) 1
02 풀이 28쪽 03 (가) 무리수 (나) 서로소 (다) 5
04 (가) 유리수 (나) 유리수 (다) 무리수 05 ③ 06 ⑤
07 풀이 28쪽 08 ② 09 ④ 10 ③ 11 ④
12 26 13 ⑤ 14 90 m^2 15 ④

44쪽 중단원 마무리 01 ④ 02 ⑤ 03 ③ 04 ②
05 ③ 06 12 07 ③ 08 ③ 09 -3 10 ⑤
11 ⑤ 12 ④ 13 17 14 ③ 15 ② 16 ③
17 1 18 144 19 ④ 20 60 21 256 22 28

04 함수

51쪽 Lecture 08 01 함수이다., 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{4, 5, 6\}$,
치역: $\{4, 5, 6\}$ 02 함수가 아니다. 03 함수가 아니다.
04 함수이다., 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{a, b, c\}$, 치역: $\{b\}$
05 정의역: 실수 전체의 집합, 치역: 실수 전체의 집합
06 정의역: $\{x|x\ne 0$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\ne 0$인 실수$\}$
07 정의역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y|y\le 6$인 실수$\}$
08 서로 같은 함수이다. 09 서로 같은 함수가 아니다. 10 ×
11 ○ 12 ㄷ, ㄹ 13 ㄷ, ㄹ 14 ㄷ 15 ㄱ
16 ㄱ, ㄴ, ㅁ 17 ㄱ, ㄴ, ㅁ 18 ㄴ 19 ㄷ

52쪽 유형 Q+Q 01 ② 02 ④ 03 12 04 ②
05 ⑤ 06 19 07 -2 08 ③ 09 -4
10 $\{-2\}$, $\{6\}$, $\{-2, 6\}$ 11 ⑤ 12 6 13 6
14 ③ 15 2 16 ① 17 ④ 18 60

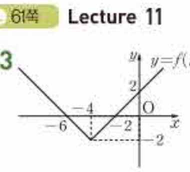
55쪽 Lecture 09 01 3 02 2 03 c 04 d
05 7 06 $(g\circ f)(x)=4x^2-20x+25$ 07 $(f\circ g)(x)=2x^2-5$
08 $(f\circ f)(x)=4x-15$ 09 $(g\circ g)(x)=x^4$ 10 풀이 37쪽
11 9 12 5

56쪽 유형 Q+Q 01 -24 02 ② 03 ② 04 ③
05 ① 06 $h(x)=-2x+4$ 07 ④ 08 5 09 9
10 1 11 ① 12 4

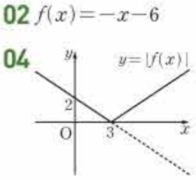
58쪽 Lecture 10 01 -8 02 3 03 $y=-\frac{1}{2}x+4$
04 $y=5x+10$ 05 -6 06 5 07 (4, 4)

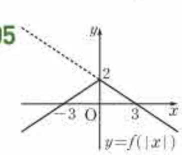
59쪽 유형 Q+Q 01 -10 02 ④ 03 ⑤ 04 8
05 6 06 ③ 07 -3 08 3 09 ③ 10 ②
11 ⑤ 12 ② 13 12 14 7

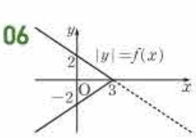
61쪽 Lecture 11 01 $f(x)=x+2$ 02 $f(x)=-x-6$

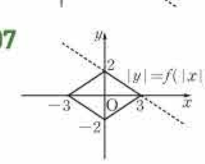
03 

, 치역: $\{y|y\ge -2\}$

04 

05 

06 

07 

62쪽 유형 Q+Q　01 ③　02 ④　03 ②　04 ㄴ, ㄷ

63쪽 중단원 마무리　01 ②　02 -4　03 7　04 7
05 4　06 ③　07 ④　08 -9　09 ①　10 6
11 175　12 ⑤　13 -2　14 ③　15 ②　16 $\sqrt{2}$
17 ④　18 40　19 ③

05 유리식과 유리함수

67쪽 Lecture 12　01 $\frac{2b^2y}{6abxy^2}$, $\frac{3x^2}{6abxy^2}$

02 $\frac{x(x+2)}{(x+5)(x+2)(x-2)}$, $\frac{(x-3)(x+5)}{(x+5)(x+2)(x-2)}$　03 $\frac{6x^2}{5y}$

04 $x-1$　05 $\frac{2x-3}{(x+4)(x-3)}$　06 $\frac{x-5}{x+4}$　07 $\frac{1}{x^2-x+1}$

08 $-\frac{1}{(x-2)(3x+1)}$　09 $-\frac{(x+2)(x-3)}{(x-4)(x-1)}$　10 $\frac{1}{4x+1}$

11 $\frac{5x-8}{(x-4)(x-2)}$　12 $\frac{3x-14}{(x+2)(x-2)}$　13 $\frac{2}{(x-1)(x+3)}$

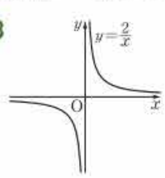
14 $\frac{3}{(x+1)(x+4)}$　15 $\frac{4}{x(x+4)}$　16 $\frac{1}{x-1}$

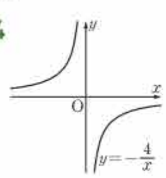
17 $\frac{x(x+1)}{x-3}$　18 7　19 $\frac{1}{3}$

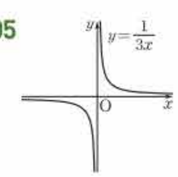
68쪽 유형 Q+Q　01 ②　02 $x=-\frac{5}{2}$　03 3
04 1　05 $8x-4$　06 ⑤　07 24　08 ③　09 -1
10 14　11 ③　12 ①　13 -3　14 ②　15 7
16 9　17 ②　18 ②

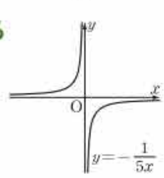
71쪽 Lecture 13　01 $\left\{x \,\middle|\, x\neq-\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$

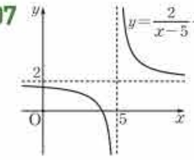
02 $\{x\,|\,x\neq-3,\ x\neq3\text{인 실수}\}$

03


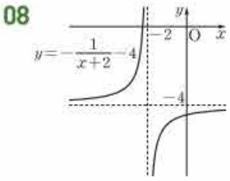
04


05


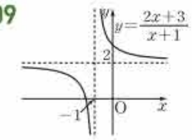
06


07


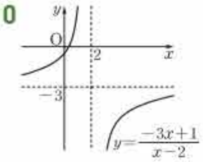
정의역: $\{x\,|\,x\neq5\text{인 실수}\}$,
치역: $\{y\,|\,y\neq2\text{인 실수}\}$

08


정의역: $\{x\,|\,x\neq-2\text{인 실수}\}$,
치역: $\{y\,|\,y\neq-4\text{인 실수}\}$

09


$x=-1$, $y=2$

10


$x=2$, $y=-3$

72쪽 유형 Q+Q　01 2　02 ②　03 ⑤
04 ㄱ, ㄴ, ㄹ　05 29　06 -18　07 ②　08 8
09 제1사분면　10 ①　11 ②　12 ㄱ, ㄴ　13 ⑤
14 ㄱ　15 2　16 7　17 ③　18 $a>0$　19 8
20 12　21 $\frac{7}{8}$　22 16　23 -1　24 -5　25 4
26 2

76쪽 중단원 마무리　01 7　02 33　03 -8　04 ①
05 6　06 ④　07 -5　08 ①　09 2　10 ③
11 ⑤　12 24　13 1　14 8　15 ⑤　16 ①
17 ⑤　18 ⑤

06 무리식과 무리함수

80쪽 Lecture 14　01 $x\geq3$　02 $-4\leq x<2$　03 $x-14$
04 $4x$　05 $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}$　06 $-2x+1+2\sqrt{x(x-1)}$
07 $\frac{x+5}{x-5}$　08 $\frac{2(x+\sqrt{x+1})}{x}$　09 $-\sqrt{x}+\sqrt{x+3}$
10 $-2(\sqrt{2}+1)$

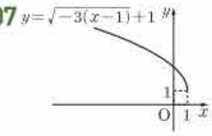
81쪽 유형 Q+Q　01 $x\leq-\frac{2}{3}$ 또는 $x\geq\frac{5}{2}$　02 24
03 ⑤　04 ③　05 ①　06 $144\sqrt{2}$

82쪽 Lecture 15 **01** $\{x|x\geq 3\}$ **02** $\{x|-4\leq x\leq 4\}$

03 $y=-\sqrt{-5x}$ **04** $y=\sqrt{5x}$ **05** $y=-\sqrt{5x}$

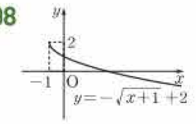
06 $a=-3$, $b=-7$

07



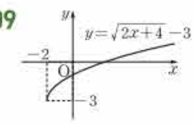
정의역: $\{x|x\leq 1\}$,
치역: $\{y|y\geq 1\}$

08



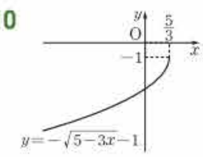
정의역: $\{x|x\geq -1\}$,
치역: $\{y|y\leq 2\}$

09



정의역: $\{x|x\geq -2\}$,
치역: $\{y|y\geq -3\}$

10



정의역: $\left\{x|x\leq \frac{5}{3}\right\}$,
치역: $\{y|y\leq -1\}$

83쪽 유형 Q+Q **01** ⑤

02 정의역: $\left\{x|x\leq \frac{5}{4}\right\}$, 치역: $\{y|y\geq -4\}$ **03** 3 **04** ④

05 ② **06** ㄴ **07** ⑤ **08** ㄱ, ㄴ **09** ② **10** 5

11 ③ **12** $\frac{1}{2}$ **13** $\frac{17}{2}$ **14** ② **15** ③ **16** ③

17 4 **18** 2

86쪽 중단원 마무리 **01** ② **02** 24 **03** -11 **04** $(-2, 0)$

05 2 **06** ② **07** ④ **08** 17 **09** $0<k<\frac{\sqrt{3}}{6}$

10 ⑤ **11** ② **12** ③ **13** ③ **14** ① **15** -2

16 ① **17** ④

07 순열과 조합

90쪽 Lecture 16 **01** 7 **02** 7 **03** 5 **04** 10

05 28 **06** 6 **07** 16 **08** 7

91쪽 유형 Q+Q **01** ② **02** 107 **03** 12 **04** ②

05 ② **06** ⑤ **07** 17 **08** ③ **09** 3 **10** ①

11 15 **12** ③ **13** 36 **14** ④ **15** ③ **16** ②

17 9

94쪽 Lecture 17 **01** 72 **02** 1 **03** 720 **04** 1

05 $n=4$ **06** $n=5$ **07** $r=4$ **08** $r=2$ **09** 5 **10** 60

11 56 **12** 24 **13** 120

95쪽 유형 Q+Q **01** ⑤ **02** 12 **03** 1440 **04** ②

05 ④ **06** 210 **07** 1200 **08** ③ **09** ③ **10** ③

11 ③ **12** ② **13** 59번째 **14** ③

97쪽 Lecture 18 **01** 84 **02** 252 **03** 1 **04** 1

05 $n=9$ **06** $r=2$ 또는 $r=11$ **07** $n=7$ **08** $r=5$ **09** 10

10 5 **11** 1260 **12** 378 **13** 280

98쪽 유형 Q+Q **01** (가) $(n-r)!$ (나) $n-r$ (다) $n!$

02 (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$ **03** 76 **04** 5 **05** ③

06 ⑤ **07** ② **08** ④ **09** 4800 **10** ⑤ **11** ①

12 ④ **13** ⑤ **14** 36 **15** ② **16** ④ **17** 90

18 ④ **19** ② **20** 105 **21** ③ **22** ④ **23** ②

24 30

102쪽 중단원 마무리 **01** ② **02** 135 **03** 64 **04** ③

05 144 **06** ④ **07** 576 **08** 60 **09** 10 **10** ④

11 ③ **12** 7명 **13** 60 **14** ② **15** ② **16** ②

17 ② **18** ③

빠른 정답 찾기 Work Book

01 집합의 뜻과 표현

W 2쪽 **01** ④ **02** ④ **03** ⑤ **04** ③ **05** ②

06 7 **07** ② **08** ③ **09** ⑤ **10** ③ **11** 2

12 ② **13** ⑤ **14** $X=\{-i, i, -1, 1\}$ **15** 6 **16** ③

17 ② **18** $\left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$, $\{0, 1, 2\}$ **19** ⑤ **20** ① **21** ②

22 ④ **23** ③ **24** 5 **25** 6 **26** 6 **27** ③

28 -10 **29** ② **30** $2+2i$ **31** ④ **32** 15 **33** ①

34 ② **35** 32 **36** ③ **37** 16 **38** ② **39** ④

40 9 **41** 5 **42** ③ **43** 15 **44** 4

W 9쪽 **도전! 수능 기출**

01 ⑤ **02** 20 **03** 10 **04** 15

02 집합의 연산

W 10쪽 **01** $\{1, 3, 4, 5, 7\}$ **02** ⑤ **03** ③ **04** ④

05 2 **06** ③ **07** ⑤ **08** 7 **09** ③

10 $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **11** ④ **12** $\{8, 10\}$ **13** ⑤ **14** 1

15 12 **16** 6 **17** ④ **18** ② **19** ④ **20** ③

21 8 **22** ④ **23** 15 **24** 16 **25** $\{0, 6, 9\}$

26 ③ **27** ⑤ **28** ⑤ **29** 24 **30** ④ **31** ④

32 66 **33** ⑤ **34** ② **35** 20 **36** ② **37** ⑤

38 ④ **39** ④ **40** 21 **41** ① **42** 17 **43** 37

44 ④ **45** 3 **46** ② **47** 30 **48** ④ **49** 28

50 2

W 18쪽 **도전! 수능 기출**

01 12 **02** 22 **03** 13 **04** ④

03 명제

W 19쪽 **01** ④ **02** ⑤ **03** ④ **04** ③ **05** ②

06 ㄱ, ㄴ, ㄷ **07** $\{5, 10, 20\}$ **08** ⑤ **09** ②

10 ③ **11** ㄱ, ㄴ, ㄷ **12** 14, 28, 42 **13** ③

14 $3\le a<4$ **15** ② **16** ㄱ, ㄹ **17** ④ **18** ③ **19** ①

20 -5 **21** ④ **22** 2 **23** $2<k<11$ **24** ④

25 ⑤ **26** 4 **27** -3 **28** 5 **29** ④ **30** ㄱ, ㄷ

31 ① **32** ④ **33** ③ **34** ㄱ, ㄴ, ㄷ **35** ④

36 ③ **37** ② **38** ② **39** ⑤ **40** 5 **41** ③

42 풀이 99쪽 **43** 풀이 99쪽

44 (가) 0 (나) 유리수 (다) 무리수 **45** 풀이 99쪽

46 풀이 99쪽 **47** 풀이 99쪽 **48** (가) $ay-bx$ (나) $\frac{x}{a}$

49 ⑤ **50** ④ **51** 2 **52** ② **53** $2\sqrt{7}$ **54** ④

55 6 **56** ③ **57** ① **58** $4+4\sqrt{5}$ **59** ② **60** ㄱ, ㄴ

61 ④ **62** ⑤ **63** 15

W 29쪽 **도전! 수능 기출**

01 ② **02** ③ **03** ② **04** ⑤

04 함수

W 30쪽 **01** ⑤ **02** ④ **03** 7 **04** 9 **05** 6

06 ② **07** 8 **08** ② **09** ④ **10** $\{0, 1\}$ **11** ③

12 12 **13** ② **14** ② **15** 12 **16** ④ **17** ②

18 $-3<a<3$ **19** ① **20** ③ **21** 18 **22** 11

23 14 **24** ④ **25** 5 **26** ① **27** 6 **28** ②

29 7 **30** 9 **31** ① **32** ② **33** -2 **34** ③

35 (1) $h(x)=\frac{1}{2}x+2$ (2) $k(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ **36** ③ **37** ③

38 4 **39** 12 **40** ④ **41** 7 **42** ① **43** 8

44 ② **45** $\frac{9}{4}$ **46** $-\frac{1}{4}$ **47** ① **48** $k<-2$ 또는 $k>2$

49 ③ **50** ② **51** ③ **52** ② **53** 2 **54** $\frac{9}{2}$

55 $(f\circ f\circ f^{-1})(x)=5x-18$ **56** ③ **57** 2 **58** 0

59 ① **60** ② **61** ④ **62** $2\sqrt{2}$ **63** ③ **64** ②

65 ③ **66** 4 **67** ② **68** ㄴ, ㄹ

W 41쪽 **도전! 수능 기출**

01 172 **02** 5 **03** ⑤ **04** ⑤

05 유리식과 유리함수

W 42쪽 **01** $-\frac{2bc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ **02** $\frac{x^2+x+6}{(x-2)(x-3)}$

03 ⑤ **04** -16 **05** 0 **06** $\frac{x+7}{x(x+2)(2x-1)}$ **07** ③

08 $-\frac{5}{(x+1)(x+6)}$ **09** ④ **10** 4 **11** ④ **12** ④

13 $96\sqrt{2}$ **14** ② **15** 0 **16** ③ **17** ④ **18** $\frac{3}{5}$

19 ④ **20** ⑤ **21** $\{y \mid -3 \le y \le 1\}$ **22** ③ **23** ②

24 17 **25** ③ **26** -20 **27** ② **28** ③ **29** ⑤

30 -1 **31** ④ **32** $\sqrt{2}$ **33** ③ **34** -1

35 $a<-4$ 또는 $-4<a\le 0$ **36** -7 **37** ④

38 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ **39** $a<-2$, $0<b<2$ **40** ① **41** ②

42 -1 **43** ④ **44** -1 **45** ③ **46** ① **47** ④

48 12 **49** -4 **50** 1 **51** -1 **52** ① **53** 2

54 $-\frac{5}{2}$ **55** ⑤ **56** $\frac{13}{14}$

W 51쪽 **도전! 수능 기출**

01 20 **02** 36 **03** ④ **04** ⑤

06 무리식과 무리함수

W 52쪽 **01** ② **02** $-4x+3$ **03** ③ **04** $\sqrt{5}+2$

05 ⑤ **06** $-\sqrt{3}$ **07** ④ **08** 52 **09** ② **10** ②

11 ③ **12** 8 **13** ⑤ **14** $p>9$ **15** 0 **16** -1

17 ⑤ **18** ① **19** ㄴ **20** ⑤ **21** 2 **22** 2

23 ① **24** 3 **25** $k\le\frac{3}{2}$ **26** ④ **27** ④ **28** 0

29 ④ **30** 16 **31** ② **32** 6 **33** -2 **34** ③

35 $\sqrt{3}$ **36** ①

W 58쪽 **도전! 수능 기출**

01 ⑤ **02** 10 **03** ② **04** ②

07 순열과 조합

W 59쪽 **01** 12 **02** ② **03** 40 **04** ③ **05** ⑤

06 ⑤ **07** 12 **08** 81 **09** ③ **10** ③ **11** 6

12 ① **13** 6 **14** 29 **15** ③ **16** 18 **17** 4

18 5 **19** ② **20** 420 **21** ① **22** 16 **23** ③

24 ④ **25** ② **26** 3 **27** 72 **28** ④ **29** 144

30 840 **31** ④ **32** ③ **33** 144 **34** ⑤ **35** 108

36 4송이 **37** ③ **38** ② **39** ② **40** 60 **41** ④

42 16번째 **43** ① **44** (가) $n-r$ (나) $r!$ **45** ⑤ **46** ⑤

47 144 **48** ⑤ **49** ⑤ **50** 240 **51** ⑤ **52** ②

53 8송이 **54** 3600 **55** ② **56** ③ **57** 140 **58** ③

59 525 **60** 11 **61** ③ **62** ② **63** ④ **64** 40

65 ⑤ **66** 30 **67** ④ **68** 40 **69** ① **70** 20

71 3360 **72** ④ **73** 360 **74** ③ **75** ⑤ **76** 315

77 315

W 71쪽 **도전! 수능 기출**

01 ② **02** ② **03** ①

Lecture Book

01 집합의 뜻과 표현

Lecture 01 집합과 원소

9쪽

01 집합인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ의 3개이다. 답 3

02 답 $\notin$

03 답 $\in$

04 답 $\in$

05 답 $\notin$

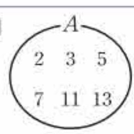
06 답 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

07 답 {r, i, g, h, t}

08 답 $\{x \mid x$는 6의 양의 배수$\}$

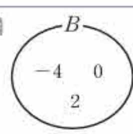
09 답 $\{x \mid x$는 $-5 \le x \le -1$인 정수$\}$

10 답



$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

11 답



$B=\{-4, 0, 2\}$

12 답 ㄴ, ㄹ

공집합은 유한집합이다.

13 답 ㄱ, ㄷ

14 답 ㄹ

15 답 5

16 30의 양의 약수는

$1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$

의 8개이므로

$n(A)=8$ 답 8

17 $x^2-5<0$, 즉 $x^2<5$를 만족시키는 정수 x는

$-2, -1, 0, 1, 2$

의 5개이므로

$n(A)=5$ 답 5

표준+발전 유형 Q+Q

10쪽

01 집합 A의 원소는 $4, 8, 12, 16, \cdots$

집합 B의 원소는 $1, 2, 4, 8, 16$

⑤ $20 \notin B$

답 ⑤

02 ㄱ. $\sqrt{4}=2$는 유리수이므로 $\sqrt{4} \in Q$

근호를 사용하여 나타낸 수 중 근호를 없앨 수 있는 수는 유리수이다.

ㄴ. $-\frac{3}{5}$은 유리수이므로 $-\frac{3}{5} \in Q$

ㄷ. $1+\sqrt{2}$는 무리수이므로 $1+\sqrt{2} \in R$

ㄹ. $i^3=-i$는 허수이므로 $i^3 \notin R$

실수 $\begin{cases} \text{유리수} \\ \text{무리수} \end{cases}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

03 ① $A=\{1, 3, 9\}$

② $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

③ $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

④ $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

⑤ $A=\{6, 12, 18\}$

답 ③

04 ①, ②, ③, ④ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7\}$

따라서 원소가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

답 ⑤

05 ① 무한집합

② $\{-1, -2, -3, \cdots\}$ ➡ 무한집합

③ $\{2, 5, 8, \cdots\}$ ➡ 무한집합

④ $\{1\}$ ➡ 유한집합

⑤ $\{52, 54, 56, \cdots\}$ ➡ 무한집합

답 ④

06 5의 양의 배수는 $5, 10, 15, \cdots$이므로 집합 A가 공집합이 되려면

$k \le 5$

$k=5$이면 $x<5$인 5의 양의 배수는 없으므로
$A=\varnothing$
$k=6$이면 $x<6$인 5의 양의 배수는 5이므로
$A=\{5\}$
따라서 $k \le 5$이다.

따라서 k의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$ 답 ⑤

07 $A=\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$이므로 $n(A)=7$

$B=\{9, 18, 27\}$이므로 $n(B)=3$

30 이하의 9의 양의 배수이다.

$x^2+1 \le 0$, 즉 $x^2 \le -1$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 $C=\varnothing$

$\therefore n(C)=0$

$\therefore n(A)-n(B)+n(C)=4$ 답 4

08 $x^2-11x+18<0$에서 $(x-2)(x-9)<0$

$\therefore 2<x<9$

따라서 $A=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로

$n(A)=6$

한편 $n(B)=k-1$이므로 $n(A)+n(B)=13$에서

$6+(k-1)=13$

$\therefore k=8$ 답 ④

09 $B=\{2, 3, 5, 7\}$

집합 A의 원소 a, 집합 B의 원소 b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	2	3	5	7
-1	-2	-3	-5	-7
0	0	0	0	0
1	2	3	5	7

$C=\{-7, -5, -3, -2, 0, 2, 3, 5, 7\}$

$\therefore n(C)=9$ 　답 ②

두 집합의 원소를 이용하여 새로운 집합을 구할 때에는 표를 이용하여 모든 원소를 빠짐없이 구한다.

10 집합 A의 원소 x, 집합 B의 원소 y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	2	5	8
0	2	5	8
1	3	6	9
2	4	7	10
a	$a+2$	$a+5$	$a+8$

$2, 3, 4, 5, 6, 7,$
$8, 9, 10, a+2, a+5, a+8$

이때 $n(X)=11$이 되려면 $a+2$, $a+5$, $a+8$ 중 하나만 $2, 3, 4, \cdots, 10$ 중 하나와 같아야 한다.

한편 a는 자연수이므로

$3\le a+2<a+5<a+8$

즉 $a+2$만 $3, 4, 5, \cdots, 10$ 중 하나와 같아야 하므로

$3\le a+2\le 10$, $a+5>10$

$\therefore 5<a\le 8$

따라서 자연수 a의 최댓값은 8이다. 　답 8

11 ① $2\in A$이므로 $2\cdot 2=4$에서 　$4\in A$

② $2\in A$, $5\in A$이므로 $2\cdot 5=10$에서 　$10\in A$

④ $4\in A$, $5\in A$이므로 $4\cdot 5=20$에서 　$20\in A$

⑤ $5\in A$이므로 $5\cdot 5=25$에서 　$25\in A$

답 ③

12 ㄱ. $3\in S$이므로 $3+4=7$에서 　$7\in S$

$7\in S$이므로 $7+4=11$에서 　$11\in S$

$11\in S$이므로 $11+4=15$에서 　$15\in S$

ㄴ. $x\in S$이므로 　$x+4\in S$

$x+4\in S$이므로 $(x+4)+4=x+8$에서

$x+8\in S$

ㄷ. ㄱ에서 $3\in S$이지만 $12\in S$인지 알 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 　답 ㄱ, ㄴ

Lecture 02 집합 사이의 포함 관계

L 13쪽

01 $B=\{0\}$이므로 　$B\subset A$ 　답 $B\subset A$

02 $A=\{2, 4, 6, \cdots\}$, $B=\{4, 8, 12, \cdots\}$이므로

$B\subset A$ 　답 $B\subset A$

03 모든 정삼각형은 이등변삼각형이므로

$A\subset B$ 　답 $A\subset B$

04 답 $\varnothing$

05 답 $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$

06 답 $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$

07 답 $\{x, y, z\}$

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합 구하기
➡ 부분집합의 원소가 0개, 1개, 2개, $\cdots$, n개인 경우로 나누어 구한다.

08 $A=\{2, 8, 14\}$이므로 A의 부분집합은

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{8\}$, $\{14\}$, $\{2, 8\}$, $\{2, 14\}$,
$\{8, 14\}$, $\{2, 8, 14\}$ 　답 풀이 참조

09 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

ㄷ. $\{9\}\not\subset A$ 　ㄹ. $\varnothing\subset A$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㅁ

공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

10 답 $A=B$

11 $x^2=9$에서 　$x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{-3, 3\}$

$|x|=3$에서 　$x=\pm 3$

$\therefore B=\{-3, 3\}$

$\therefore A=B$ 　답 $A=B$

12 $x^2-x-2=0$에서 　$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $A=\{-1, 2\}$이므로 　$A\neq B$ 　답 $A\neq B$

13 $a-1=9$, $2-b=5$이므로

$a=10$, $b=-3$ 　답 $a=10$, $b=-3$

14 $x^2-9x+14<0$에서 　$(x-2)(x-7)<0$

$\therefore 2<x<7$

따라서 $A=\{3, 4, 5, 6\}$이므로 구하는 진부분집합은

$\varnothing$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$,
$\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$, $\{4, 6\}$, $\{5, 6\}$,
$\{3, 4, 5\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{3, 5, 6\}$, $\{4, 5, 6\}$

답 풀이 참조

15 $2^5=32$ 　답 32

집합 A는 제외한다.

16 $2^5-1=31$ 　답 31

17 $2^{5-1}=2^4=16$ 　답 16

18 $2^{5-2}=2^3=8$ 　답 8

표준+발전 유형 Q+Q 14쪽

01 $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{0\}$, $C=\{0, 1\}$이므로

$B\subset C\subset A$ 답 ④

$|0|=0$, $|-1|=|1|=1$

02 주어진 벤다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $B\subset A$이다.

① $A\not\subset B$, $B\not\subset A$

② $A\subset B$

③ $A=\{5, 10, 15, \cdots\}$, $B=\{10, 20, 30, \cdots\}$이므로 $B\subset A$

④ $A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이므로 $A\subset B$

⑤ $x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 $A=\{0, 2\}$이고, $B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$이므로 $A\subset B$

답 ③

03 ⑤ $c\notin A$이므로 $\{a, b, c\}\not\subset A$

답 ⑤

x가 집합 X의 원소이면 $x\in X$, $\{x\}\subset X$

쌤 한마디

집합 $A=\{a, b, \{c\}\}$는 집합을 원소로 갖는 집합이다. 즉 집합 A의 원소는 a, b, $\{c\}$이므로

$a\in A$, $b\in A$, $\{c\}\in A$

이다.

04 ㄷ. $3\notin A$

ㄹ. $\{1, 3\}\in A$ 또는 $\{\{1, 3\}\}\subset A$

ㅂ. $\{3\}\notin A$이므로 $\{1, 2, \{3\}\}\not\subset A$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㅁ

05 $A\subset B$가 성립하려면 $1\in B$이어야 하므로

$3-a=1$ 또는 $a+4=1$

$\therefore a=2$ 또는 $a=-3$

(i) $a=2$일 때,

$A=\{1, 6\}$, $B=\{-3, 1, 6\}$이므로 $A\subset B$

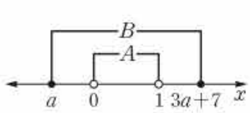
(ii) $a=-3$일 때,

$A=\{1, 11\}$, $B=\{-3, 1, 6\}$이므로 $A\not\subset B$

(i), (ii)에서 $a=2$ 답 2

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속한다.

06 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a\le 0$, $3a+7\ge 1$

$3a+7\ge 1$에서 $a\ge -2$이므로

$-2\le a\le 0$

따라서 실수 a의 최댓값은 0, 최솟값은 -2이므로 구하는 합은

$0+(-2)=-2$ 답 ②

07 $A=B$이므로 $4\in B$이어야 한다.

집합 A와 집합 B의 모든 원소가 같다.

$k^2-3k=4$에서 $k^2-3k-4=0$

$(k+1)(k-4)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

(i) $k=-1$일 때,

$A=\{-2, 3, 4\}$, $B=\{-2, 3, 4\}$이므로 $A=B$

(ii) $k=4$일 때,

$A=\{-7, 3, 4\}$, $B=\{-2, 3, 4\}$이므로 $A\ne B$

(i), (ii)에서 $k=-1$ 답 ②

08 $A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$

따라서 $6\in A$이므로 $x^2-4x-a=0$에 $x=6$을 대입하면

$36-24-a=0$ $\therefore a=12$

$x^2-4x-12=0$에서 $(x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

즉 $A=\{-2, 6\}$이므로 $b=-2$

$\therefore a-b=14$ 답 14

다른 풀이 $A=B$에서 이차방정식 $x^2-4x-a=0$의 두 근이 b, 6이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b+6=4$, $6b=-a$

$\therefore a=12$, $b=-2$

$\therefore a-b=14$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

09 $x^3-x^2-4x+4=0$에서

$x^2(x-1)-4(x-1)=0$

$(x^2-4)(x-1)=0$

$(x+2)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ & & 1 & 0 & -4 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$\therefore x^3-x^2-4x+4$
$=(x-1)(x-2)(x+2)$

따라서 $A=\{-2, 1, 2\}$이므로 부분집합의 개수는

$2^3=8$ $\therefore a=8$

또 진부분집합의 개수는

$2^3-1=7$ $\therefore b=7$

$\therefore a+b=15$ 답 ③

10 $n(A)=a$, $n(B)=b$라 하면

$2^a=128$, $2^b-1=15$

$2^a=128=2^7$에서 $a=7$

$2^b=16=2^4$에서 $b=4$

$\therefore n(A)-n(B)=3$ 답 ②

11 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$
A의 부분집합 중에서 3, 9를 반드시 원소로 갖고, 11을 원소로 갖지 않는 집합의 개수는
$2^{8-2-1}=2^5=32$ 답 ④

12 $A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21\}$
이때 $X\subset A$이고 $X\neq A$이므로 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.
또 집합 X는 6, 12, 18을 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는
$2^{7-3}-1=2^4-1=15$ 답 ②

$X=A$인 경우는 제외한다.

13 $x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=4$
$\therefore A=\{1,\ 4\}$
$x^2-4x-12<0$에서 $(x+2)(x-6)<0$
$\therefore -2<x<6$
$\therefore B=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 1, 4를 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{7-2}=2^5=32$ 답 ④

집합 A의 모든 원소

쌤한마디

두 집합 A, B에 대하여 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는 B의 부분집합 중에서 A의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.
즉 $A\subset B$를 만족시키는 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=a$, $n(B)=b$일 때, $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는
2^{b-a} (단, $a<b$)

14 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$
집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.
이때 집합 X의 개수는 64이므로
$2^{n-4}=64=2^6$, $n-4=6$
$\therefore n=10$ 답 10

6의 양의 약수

15 $A=\{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35\}$
집합 A의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖는 집합은 $\{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{7,\ 21,\ 35\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^5-2^3=24$ 답 ②

(전체 부분집합의 개수) $-$(짝수를 제외한 집합의 부분집합의 개수)

16 $A=\{2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37\}$
집합 A의 부분집합 중에서 5 또는 10을 원소로 갖는 집합은 $\{2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{2,\ 17,\ 26,\ 37\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^6-2^4=48$ 답 48

(전체 부분집합의 개수) $-$(5, 10을 제외한 집합의 부분집합의 개수)

다른 풀이 5 또는 10을 원소로 갖는 집합은 집합 $\{2,\ 17,\ 26,\ 37\}$의 부분집합에 5만 추가하거나 10만 추가하거나 5, 10을 모두 추가하면 된다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^4\cdot 3=48$

17 $m(B)\leq 3$을 만족시키려면 집합 B는 1, 2, 3 중 적어도 하나를 반드시 원소로 가져야 한다.
따라서 $m(B)\leq 3$을 만족시키는 집합 B는 집합 A의 부분집합 중에서 $\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합을 제외한 것과 같으므로 구하는 집합 B의 개수는
$2^7-2^4=112$ 답 112

다른 풀이 $m(B)\leq 3$을 만족시키는 집합은
$m(B)=1$ 또는 $m(B)=2$ 또는 $m(B)=3$
인 경우의 집합이다.

$m(B)\leq 3$에서 $m(B)=1$, $m(B)=2$, $m(B)=3$인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $m(B)=1$인 경우
집합 A의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는
$2^{7-1}=2^6=64$
(ii) $m(B)=2$인 경우
집합 A의 부분집합 중에서 1을 원소로 갖지 않고, 2를 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는
$2^{7-1-1}=2^5=32$
(iii) $m(B)=3$인 경우
집합 A의 부분집합 중에서 1, 2를 원소로 갖지 않고, 3을 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는
$2^{7-2-1}=2^4=16$
이상에서 집합 B의 개수는
$64+32+16=112$

18 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 A의 원소는 12의 양의 약수이어야 한다.
이때 12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이고, 조건 (나)에 의하여 1과 12, 2와 6, 3과 4는 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.
따라서 집합 A의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로
$2^3-1=7$ 답 7

1을 원소로 갖는 집합에는 12를, 2를 원소로 갖는 집합에는 6을, 3을 원소로 갖는 집합에는 4를 추가하면 된다.

참고 집합 A를 구하면 다음과 같다.
$\{1,\ 12\}$, $\{2,\ 6\}$, $\{3,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 6,\ 12\}$,
$\{1,\ 3,\ 4,\ 12\}$, $\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

19 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 A는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$의 부분집합이어야 한다.
이때 조건 (나)에 의하여 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.

$n(A)$가 홀수가 되려면 집합 A는 5를 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합의 개수와 같다.
따라서 구하는 집합 A의 개수는

$2^4=16$ 답 16

중단원 마무리

17쪽

01 전략 먼저 주어진 이차부등식의 해를 구한다.

풀이 $x^2-3x-18<0$에서 $(x+3)(x-6)<0$

$\therefore -3<x<6$

$\therefore A=\{x|-3<x<6\}$

따라서 $-3\notin A$, $-1\in A$, $5\in A$, $7\notin A$이므로 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

02 전략 집합 B의 원소 y가 $y=-2x+1$이고 $-1\le x\le 3$임을 이용하여 y의 값의 범위를 구한다.

풀이 $-1\le x\le 3$이므로 $-6\le -2x\le 2$

$\therefore -5\le -2x+1\le 3$

따라서 집합 B의 원소의 최댓값은 3, 최솟값은 -5이므로 $M=3$, $m=-5$

$\therefore M-m=8$ 답 ③

03 전략 먼저 주어진 등식을 $Ax=B$ 꼴로 정리한다.

풀이 $(a+1)(a+3)x=a^2+(x-1)a+7x$에서

$(a^2+4a+3)x=(a+7)x+a^2-a$

$(a^2+3a-4)x=a^2-a$

$\therefore (a+4)(a-1)x=a(a-1)$ ...... ㉠ ··· ❶

집합 S가 무한집합이 되려면 방정식 ㉠의 해가 무수히 많아야 하므로 $a=1$ $\therefore m=1$ ··· ❷

또 집합 S가 공집합이 되려면 방정식 ㉠의 해가 없어야 하므로 $a=-4$ $\therefore n=-4$ ··· ❸

$\therefore m+n=-3$ ··· ❹

답 -3

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 등식을 $Ax=B$ 꼴로 정리할 수 있다.	30 %
❷	m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹	$m+n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

04 전략 $n(A)$를 구한 후 두 집합 A, B의 원소의 개수가 같음을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+6x+13=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=3^2-13=-4<0$

이므로 이차방정식 $x^2+6x+13=0$은 실근을 갖지 않는다.

$\therefore n(A)=0$

Q BOX

집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합에 5를 추가하고 1을 원소로 갖는 집합에는 9를, 2를 원소로 갖는 집합에는 8을, 3을 원소로 갖는 집합에는 7을, 4를 원소로 갖는 집합에는 6을 추가하면 된다.

$B=\{y|-5\le y\le 3\}$

$a=1$이면 방정식 ㉠은 $0\cdot x=0$이므로 해는 무수히 많다.

$a=-4$이면 방정식 ㉠은 $0\cdot x=20$이므로 해는 없다.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① $\frac{D}{4}>0$
➡ 서로 다른 두 실근
② $\frac{D}{4}=0$ ➡ 중근
③ $\frac{D}{4}<0$
➡ 서로 다른 두 허근

이때 $n(A)=n(B)$가 되려면 $n(B)=0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2-4kx+10k=0$은 실근을 갖지 않아야 한다.
이차방정식 $x^2-4kx+10k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-2k)^2-10k<0$

$2k(2k-5)<0$ $\therefore 0<k<\frac{5}{2}$

따라서 정수 k는 1, 2의 2개이다. 답 ②

05 전략 집합 A를 원소나열법으로 나타낸 후 A의 원소를 이용하여 집합 B의 원소를 구한다.

풀이 $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $\cdots$이므로

$A=\{i, -1, -i, 1\}$

이때 집합 A의 원소 z에 대하여 z^2의 값은

$i^2=-1$, $(-1)^2=1$, $(-i)^2=-1$, $1^2=1$

중 하나이다.
즉 집합 A의 두 원소 z_1, z_2에 대하여 z_1^2, z_2^2의 값은 각각 -1 또는 1이므로 $z_1^2+z_2^2$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

z_1^2 \ z_2^2	-1	1
-1	-2	0
1	0	2

$\therefore B=\{-2, 0, 2\}$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 3이다. 답 3

참고 집합 A의 두 원소 z_1, z_2에 대하여 $z_1^2+z_2^2$의 값을 오른쪽 표를 이용하여 구할 수도 있다.

z_1 \ z_2	i	-1	$-i$	1
i	-2	0	-2	0
-1	0	2	0	2
$-i$	-2	0	-2	0
1	0	2	0	2

06 전략 6은 집합 A의 원소이므로 조건 (나)를 만족시키도록 집합 A의 원소를 차례대로 구해 본다.

풀이 조건 (가)에서 $6\in A$이므로 조건 (나)에 의하여
$6+6\in U$에서 $12\in A$
$12+6\in U$에서 $18\in A$
$18+6\in U$에서 $24\in A$
⋮
$90+6\in U$에서 $96\in A$
즉 집합 A는 6의 배수를 원소로 갖는다.
따라서 6의 배수를 원소로 가지면서 원소의 개수가 가장 적은 집합 A는

$A=\{6, 12, 18, 24, \cdots, 96\}$ 답 ④

07 전략 두 집합 Y, Z를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $x^2-7x+10=0$에서 $(x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5$

$\therefore Y=\{2, 5\}$

또 $Z=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

$Y\subset X\subset Z$ 답 ③

08 전략 k, k^2, k^3, $\cdots$의 일의 자리의 수를 구하여 집합 $A(k)$를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 ㄱ. $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $\cdots$이므로

$A(3)=\{1, 3, 7, 9\}$

$\therefore 1\in A(3)$

ㄴ. $6^1=6$, $6^2=36$, $\cdots$이므로

$A(6)=\{6\}$

이때 $6\notin A(3)$이므로 $A(6)\not\subset A(3)$

ㄷ. $n=2$일 때,

$A(3^2)=A(9)=\{1, 9\}$

$n=3$일 때,

$A(3^3)=A(27)=A(7)$

$=\{1, 3, 7, 9\}=A(3)$

따라서 $A(3^n)=A(3)$인 자연수 n이 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

$9^1=9$, $9^2=81$, $9^3=729$, $\cdots$이므로 $A(9)=\{1, 9\}$

$7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$, $7^4=2401$, $\cdots$이므로 $A(7)=\{1, 3, 7, 9\}$

09 전략 먼저 집합 $P(A)$의 원소를 모두 구한다.

풀이 집합 $P(A)$는 A의 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로 $P(A)$의 원소는

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$

$\therefore P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

①, ② $\varnothing$, $\{a\}$는 집합 $P(A)$의 원소이므로

$\varnothing\in P(A)$, $\{a\}\in P(A)$

③ 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로

$\varnothing\subset P(A)$

④ $\{b\}$는 집합 $P(A)$의 원소이므로

$\{b\}\in P(A)$또는 $\{\{b\}\}\subset P(A)$

⑤ $\{a, b\}$는 집합 $P(A)$의 원소이므로

$\{\{a, b\}\}\subset P(A)$

답 ④

10 전략 $A_n\subset A_{25}$를 만족시킬 때의 $\sqrt{n}$의 값의 범위를 구한다.

풀이 $A_{25}=\{x|x$는 $\sqrt{25}$ 이하의 홀수$\}$에서 $\sqrt{25}=5$이므로

$A_{25}=\{1, 3, 5\}$

$A_n=\{x|x$는 $\sqrt{n}$ 이하의 홀수$\}$에서 $A_n\subset A_{25}$를 만족시키려면 $\sqrt{n}<7$이어야 한다.

이때 n은 자연수이므로

$1\le\sqrt{n}<7$ $\quad\therefore 1\le n<49$

따라서 자연수 n의 최댓값은 48이다. 답 48

$\sqrt{n}\ge 7$이면 $7\in A_n$이므로 $A_n\not\subset A_{25}$이다.

11 전략 집합 B가 주어진 조건을 모두 만족시키려면 어떤 원소를 가져야 하는지 구한다.

풀이 $A=\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$ ⋯ ❶

조건 (나)에서 집합 B는 15를 반드시 원소로 갖고, 5, 10은 원소로 갖지 않아야 한다.

또 조건 (가)에서 집합 B는 20, 25, 30, 35, 40, 45 중에서 3개를 원소로 가져야 한다. ⋯ ❷

따라서 집합 B의 모든 원소의 합이 최대가 되려면

$B=\{15, 35, 40, 45\}$

이어야 하므로 구하는 최댓값은

$15+35+40+45=135$ ⋯ ❸

답 135

단계	채점 기준	비율
❶	집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷	$n(B)=4$이고 집합 B의 원소 중 최솟값이 15일 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸	집합 B의 모든 원소의 합의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

12 전략 두 집합 A, B의 모든 원소가 같음을 이용한다.

풀이 $x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$\therefore B=\{-3, 1\}$

$A=B$에서 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$은 -3, 1을 근으로 가져야 하고, 두 근 중 하나는 중근이어야 한다.

(ⅰ) -3을 중근으로 가질 때,

$x^3+ax^2+bx+c=(x+3)^2(x-1)$에서

$c=-9$

이므로 $c>0$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 1을 중근으로 가질 때,

$x^3+ax^2+bx+c=(x+3)(x-1)^2$에서

$c=3$

이므로 $c>0$을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$x^3+ax^2+bx+c=(x+3)(x-1)^2$

$=(x^2+2x-3)(x-1)$

따라서 $Q(x)=x-1$이므로

$Q(50)=50-1=49$ 답 49

13 전략 두 개의 짝수를 원소로 가지려면 나머지 한 개의 짝수는 원소로 갖지 않아야 함을 이용한다.

풀이 두 개의 짝수를 원소로 가지려면 짝수 중에서 2, 4 또는 2, 6 또는 4, 6만을 원소로 가져야 한다.

이때 집합 A의 부분집합 중에서 2, 4를 반드시 원소로 갖고, 6을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-2-1}=2^3=8$

짝수 중 2, 4만을 원소로 갖는 부분집합

마찬가지로 짝수 중에서 2, 6 또는 4, 6만을 원소로 갖는 집합 A의 부분집합의 개수도 각각 8이므로 구하는 부분집합의 개수는

$8\cdot 3=24$ 답 24

14 전략 집합 X가 6을 원소로 갖는 경우와 원소로 갖지 않는 경우로 나누어 집합 X의 개수를 구한다.

풀이 (ⅰ) 집합 X가 6을 원소로 갖는 경우

$6\in X$이면서 조건 (가)를 만족시키는 집합 X의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, 7\}$의 부분집합 중에서 공집합이 아닌 집합의 개수와 같으므로

$2^4-1=15$

(ii) 집합 X가 6을 원소로 갖지 않는 경우

$6 \notin X$이면서 조건 (나)를 만족시키려면 3과 4를 반드시 원소로 가져야 한다.

즉 집합 X의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, 7\}$의 부분집합 중에서 3, 4를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{4-2}=4$

(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$15+4=19$ 답 ②

15 **전략** 집합 A의 원소의 개수가 1, 2, 3일 때로 나누어 순서쌍 (A, B)의 개수를 구한다.

풀이 (i) 집합 A의 원소의 개수가 1일 때,

집합 B의 개수는 집합 X의 부분집합 중에서 집합 A의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{3-1}=2^2=4$

이때 원소의 개수가 1인 집합 A는 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$의 3가지이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3 \cdot 4=12$

(ii) 집합 A의 원소의 개수가 2일 때,

집합 B의 개수는 집합 X의 부분집합 중에서 집합 A의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{3-2}=2^1=2$

이때 원소의 개수가 2인 집합 A는 $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$의 3가지이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3 \cdot 2=6$

(iii) 집합 A의 원소의 개수가 3일 때,

$A=\{1, 2, 3\}$이므로 $B=\{1, 2, 3\}$

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는 1이다.

이상에서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$12+6+1=19$ 답 19

16 **전략** 집합 B는 4를 반드시 원소로 갖는 A의 부분집합임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에 의하여 $4 \in B$이고, 조건 (다)에 의하여

$\frac{20}{4}=5 \in B$

이므로 집합 B는 4, 5를 반드시 원소로 갖는다.

또 조건 (다)에 의하여 1과 20, 2와 10은 어느 하나가 집합 B의 원소이면 나머지 하나도 반드시 B의 원소이다.

따라서 집합 B의 개수는 집합 $\{1, 2\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^2=4$ 답 4

17 **전략** 특정한 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 이용하여 $f(n)$을 구한다.

풀이 $f(n)$은 n을 반드시 원소로 갖고 n보다 작은 자연수를 원소로 갖지 않는 집합 X의 부분집합의 개수이므로

$f(n)=2^{10-1-(n-1)}=2^{10-n}$ (단, $1 \le n < 10$)

Q BOX

집합 $\{1, 2\}$의 부분집합에 4, 5를 추가하고 1을 원소로 갖는 집합에는 20을, 2를 원소로 갖는 집합에는 10을 추가하면 된다.

$(n-1)$개

ㄱ. $f(8)=2^{10-8}=2^2=4$

ㄴ. $a=7$, $b=8$일 때, $7 \in X$, $8 \in X$이고 $7<8$이지만

$f(7)=2^{10-7}=2^3=8$,

$f(8)=2^{10-8}=2^2=4$

이므로 $f(7)>f(8)$

ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$

$=2^{10-1}+2^{10-3}+2^{10-5}+2^{10-7}+2^{10-9}$

$=2^9+2^7+2^5+2^3+2$

$=682$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

참고 $n=10$일 때, 10을 최소의 원소로 갖는 집합은 $\{10\}$뿐이므로 $f(10)=1$

18 **전략** 가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2}$, 1인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^4}$인 경우

집합 S의 부분집합 중에서 $\frac{1}{2^4}$을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1}=2^4=16$

(ii) 가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^3}$인 경우

집합 S의 부분집합 중에서 $\frac{1}{2^3}$을 반드시 원소로 갖고, $\frac{1}{2^4}$을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1-1}=2^3=8$

(iii) 가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^2}$인 경우

집합 S의 부분집합 중에서 $\frac{1}{2^2}$을 반드시 원소로 갖고, $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^3}$을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1-2}=2^2=4$

(iv) 가장 작은 원소가 $\frac{1}{2}$인 경우

집합 S의 부분집합 중에서 $\frac{1}{2}$을 반드시 원소로 갖고, $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^2}$을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1-3}=2^1=2$

(v) 가장 작은 원소가 1인 경우

$\{1\}$의 1개이다.

이상에서 집합 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{31}에서 최소인 원소를 뽑아 모두 더한 값은

$\frac{1}{2^4} \cdot 16+\frac{1}{2^3} \cdot 8+\frac{1}{2^2} \cdot 4+\frac{1}{2} \cdot 2+1 \cdot 1$

$=1+1+1+1+1$

$=5$ 답 ⑤

02 집합의 연산

Lecture 03 집합의 연산

21쪽

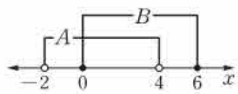
01 답 $A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$, $A\cap B=\{a, b\}$

02 $A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20\}$,
$A\cap B=\{1, 5\}$

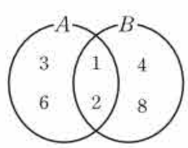
답 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20\}$,
$A\cap B=\{1, 5\}$

03 오른쪽 그림에서
$A\cup B=\{x|-2<x\le 6\}$,
$A\cap B=\{x|0\le x<4\}$



답 $A\cup B=\{x|-2<x\le 6\}$,
$A\cap B=\{x|0\le x<4\}$

04 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{1, 2, 4, 8\}$

답 $\{1, 2, 4, 8\}$

05 ㄱ. $A\cap B=\{c\}$

두 집합의 교집합이 공집합인지 아닌지 확인한다.

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

ㄷ. $A=\{-2, -1, 0, 1\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$

따라서 두 집합 A, B는 서로소이다.

ㄹ. $A\cap B=\{x|x$는 유리수$\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

이상에서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

06 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

결합법칙

$=\{-1, 0, 1\}\cap\{0, 1, 2, 3\}$
$=\{0, 1\}$ 답 $\{0, 1\}$

07 $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$

분배법칙

$=\{1, 3, 6, 9\}\cup\{1, 5\}$
$=\{1, 3, 5, 6, 9\}$

답 $\{1, 3, 5, 6, 9\}$

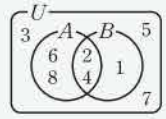
분배법칙

08 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$=\{a, b, c\}\cup\{a, c, d, e\}$
$=\{a, b, c, d, e\}$

답 $\{a, b, c, d, e\}$

Q BOX



19~22쪽

09 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $A=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$A^C=\{1, 3, 5, 7\}$ 답 $\{1, 3, 5, 7\}$

10 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로

$B^C=\{3, 5, 6, 7, 8\}$ 답 $\{3, 5, 6, 7, 8\}$

11 $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로

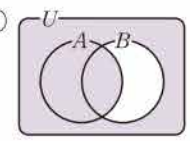
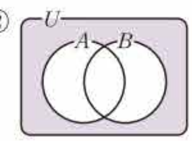
$A-B=\{6, 8\}$ 답 $\{6, 8\}$

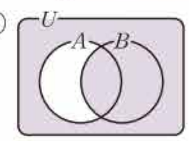
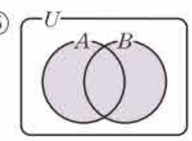
12 $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로

$B-A=\{1\}$ 답 $\{1\}$

13 $B-C=\{-1, 3, 8\}$이므로

$A-(B-C)=\{2, 7\}$ 답 $\{2, 7\}$

14 ①  ② 

③  ⑤ 

답 ④

표준 + 발전 유형 Q+Q

22쪽

01 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$, $C=\{2, 4, 6\}$이므로

$A\cap(B\cup C)=\{1, 2, 3, 6\}\cap\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$=\{2, 3, 6\}$ 답 $\{2, 3, 6\}$

02 집합 B는 a, c를 반드시 원소로 갖고, b, d를 원소로 갖지 않아야 하므로 B가 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

참고 ① $B=\{a, b\}$이면 $A\cap B=\{a, b\}$
② $B=\{c, d\}$이면 $A\cap B=\{c, d\}$
③ $B=\{a, c, d\}$이면 $A\cap B=\{a, c, d\}$
⑤ $B=\{b, c, e\}$이면 $A\cap B=\{b, c\}$

03 ① $A\cap B=\{2\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

② $A\cap B=\{5\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

③ $A=\{0, 1, 2, \cdots\}$, $B=\{1, 2, 3, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{1, 2, 3, \cdots\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

④ $A=\{2, 4, 6, \cdots\}$, $B=\{2, 3, 5, \cdots\}$이므로

양의 약수가 2개인 자연수는 소수이다.

$A\cap B=\{2\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

⑤ $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{8, 16, 24, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$

따라서 두 집합 A, B는 서로소이다. 답 ⑤

04 집합 B와 서로소인 집합은 집합 A의 부분집합 중에서 a와 t를 원소로 갖지 않는 집합이다.
따라서 구하는 집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ 답 16

> 원소가 n개인 집합의 부분집합 중에서
> ① 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수 ➡ 2^{n-k}
> ② 특정한 원소 l개를 원소로 갖지 않는 집합의 개수 ➡ 2^{n-l}
> (단, $k<n$, $l<n$)

05 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{1, 3, 7, 9\}$이므로

$A^C=\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

$\therefore A^C-B=\{4, 6, 8\}$ 답 ④

> 서로소
> ➡ 최대공약수가 1인 두 자연수

06 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 11\}$, $A=\{3, 5, 7, 9, 11\}$, $B=\{2, 5, 8, 11\}$이므로

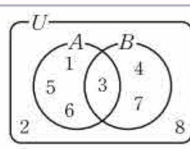
$A\cup B=\{2, 3, 5, 7, 8, 9, 11\}$,

$A\cap B=\{5, 11\}$

$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{2, 3, 7, 8, 9\}$

따라서 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$의 원소의 개수는 5이다. 답 5

07 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



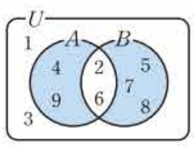
$A=\{1, 3, 5, 6\}$

답 ③

> 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내어 구하려는 집합을 찾는다.

08 $(A\cup B)-(A\cap B)$

$=\{4, 5, 7, 8, 9\}$



오른쪽 벤다이어그램에서 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$는 색칠한 부분과 같고 $B^C=\{1, 3, 4, 9\}$이므로

$A-B=\{4, 9\}$, $B-A=\{5, 7, 8\}$

따라서 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은

$5+7+8=20$ 답 20

09 $A\cap B=\{1, 5\}$에서 $5\in A$이므로

$a^2-a-1=5$, $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{-1, 1, 5\}$, $B=\{1, 5, 9\}$이므로

$A\cap B=\{1, 5\}$

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{-1, 1, 5\}$, $B=\{4, 5, 6\}$이므로

$A\cap B=\{5\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-2$ 답 ①

> 집합 A의 원소 중 3, 8을 제외한 원소는 모두 집합 B의 원소이다.

10 $A-B=\{3, 8\}$에서 $a+6\in B$

이때 $a+6\neq a+2$이므로

$a+6=a^2-4a+10$, $a^2-5a+4=0$

$(a-1)(a-4)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=4$

(i) $a=1$일 때,

$A=\{3, 7, 8\}$, $B=\{3, 7\}$이므로

$A-B=\{8\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=4$일 때,

$A=\{3, 8, 10\}$, $B=\{6, 10\}$이므로

$A-B=\{3, 8\}$

(i), (ii)에서 $B=\{6, 10\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$6+10=16$ 답 ④

Lecture 04 집합의 연산의 성질

24쪽

01 $(A\cap A)\cup U=A\cup U=U$ 답 U

02 $A\cap U^C=A\cap\varnothing=\varnothing$ 답 $\varnothing$

03 $(A\cup A^C)\cap A=U\cap A=A$ 답 A

04 $U-A^C=U\cap(A^C)^C=U\cap A=A$ 답 A

05 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이고

$A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{3, 7, 10\}$ 답 $\{3, 7, 10\}$

06 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이고 $A\cap B=\{1, 4\}$이므로

$A^C\cup B^C=\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

답 $\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

07 $A-B^C=A\cap(B^C)^C$

$=A\cap B$

$=\{1, 4\}$ 답 $\{1, 4\}$

08 $B-A^C=B\cap(A^C)^C$

$=B\cap A$

$=\{1, 4\}$ 답 $\{1, 4\}$

09 $A\cup(A\cap B)^C=A\cup(A^C\cup B^C)$

$=(A\cup A^C)\cup B^C$

$=U\cup B^C=U$ 답 U

10 $A-(A\cup B^C)=A\cap(A\cup B^C)^C$

$=A\cap(A^C\cap B)$

$=(A\cap A^C)\cap B$

$=\varnothing\cap B=\varnothing$ 답 $\varnothing$

11 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=22+30-43=9$ 답 9

12 $n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=50-22=28$ 답 28

13 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=30-9=21$ 답 21

다른 풀이 $n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$
$=43-22=21$

14 $n(A\cap B^C)=n(A-B)$
$=n(A)-n(A\cap B)$
$=22-9=13$ 답 13

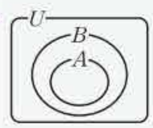
15 $n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=50-43=7$ 답 7

16 $n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$
$=50-9=41$ 답 41

표준+발전 유형 Q+Q

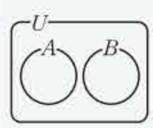
25쪽

01 $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$



③, ④ $A\subset B$이므로 $B^C\subset A^C$
$\therefore A^C\cap B^C=B^C$
⑤ $A\cup B=B$이므로
$A^C\cup B=A^C\cup(A\cup B)$
$=(A^C\cup A)\cup B$
$=U\cup B=U$ 답 ④

02 $A-B=A$이므로 $A\cap B=\varnothing$

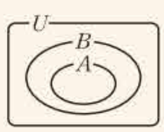


ㄱ. $B-A=B$ ㄷ. $B\subset A^C$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

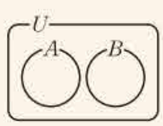
쌤한마디

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음은 모두 같은 표현이다.

① $A\subset B$
- $A\cap B=A$ ◉ $A\cup B=B$
- $A-B=\varnothing$ ◉ $A\cap B^C=\varnothing$
- $B^C\subset A^C$ ◉ $B^C-A^C=\varnothing$



② $A\cap B=\varnothing$
- $A-B=A$ ◉ $B-A=B$
- $A\subset B^C$ ◉ $B\subset A^C$



03 $A\cap X=X$에서 $X\subset A$
$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$
$\therefore (A-B)\subset X\subset A$

이때 $A-B=\{4, 5, 7\}$이므로 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중 4, 5, 7을 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{7-3}=2^4=16$ 답 16

04 U의 부분집합 X가
$\{1, 3, 5, 6\}\cup X=\{3, 4, 5, 9\}\cup X$
를 만족시키려면 집합 X는 두 집합 $\{1, 3, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5, 9\}$의 공통인 원소 3, 5를 제외한 나머지 원소 1, 4, 6, 9를 반드시 원소로 가져야 한다.

두 원소 3, 5는 모두 집합 A의 원소이면서 집합 B의 원소이다. 따라서 집합 X는 두 원소 3, 5를 원소로 가져도 되고 갖지 않아도 된다.

따라서 집합 X의 개수는
$2^{10-4}=2^6=64$ 답 ⑤

05 $(A\cup B)\cup(A^C\cup B^C)^C=(A\cup B)\cup(A\cap B)$
$=A\cup B$
$=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$

$(A\cap B)\subset(A\cup B)$

따라서 구하는 원소의 개수는 7이다. 답 ④

06 $U=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이고
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{3, 6\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 4, 8, 12, 24\}$
이때 $A=\{1, 2, 8, 12\}$이므로 집합 B는 집합 $\{1, 2, 4, 8, 12, 24\}$의 부분집합 중 4, 24를 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 구하는 집합 B의 개수는
$2^{6-2}=2^4=16$ 답 16

07 $(A-B)-(C-B)$
$=(A\cap B^C)\cap(C\cap B^C)^C$
$=(A\cap B^C)\cap(C^C\cup B)$
$=\{(A\cap B^C)\cap C^C\}\cup\{(A\cap B^C)\cap B\}$
$=\{A\cap(B^C\cap C^C)\}\cup\{A\cap(B^C\cap B)\}$
$=\{A\cap(B\cup C)^C\}\cup\varnothing$
$=A\cap(B\cup C)^C$
$=A-(B\cup C)$ 답 ②

$B^C\cap B=\varnothing$이므로
$A\cap(B^C\cap B)$
$=A\cap\varnothing=\varnothing$

08 $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap B^C$
$=\{(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\}\cap B^C$
$=\{A\cap(B^C\cup B)\}\cap B^C$
$=A\cap B^C$
$=A-B$

$B^C\cup B=U$이므로
$A\cap(B^C\cup B)$
$=A\cap U=A$

따라서 $A-B=A$이므로 $A\cap B=\varnothing$
① $A\cap B=\varnothing$ ② $A\cup B\neq B$
③ $B-A=B$ ④ $A\not\subset B$ 답 ⑤

09 $(A_4\cup A_5)\cap A_{10}=(A_4\cap A_{10})\cup(A_5\cap A_{10})$
$=A_{20}\cup A_{10}$
$=A_{10}$

$A_{20}\subset A_{10}$

전체집합 U의 원소 중 10의 배수는 10, 20, 30, 40, 50의 5개이므로 구하는 원소의 개수는 5이다. 답 5

쌤한마디

배수의 집합과 약수의 집합

① 자연수 k의 양의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면 $\quad A_m \subset A_n$

$\therefore A_m \cap A_n = A_m,\ A_m \cup A_n = A_n$

② 자연수 k의 양의 약수의 집합을 B_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면 $\quad B_n \subset B_m$

$\therefore B_m \cap B_n = B_n,\ B_m \cup B_n = B_m$

10 $P_{16} \cap P_{24} \cap P_{40} = (P_{16} \cap P_{24}) \cap P_{40}$

$= P_8 \cap P_{40}$

$= P_8 = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

따라서 집합 $P_{16} \cap P_{24} \cap P_{40}$에 속하는 원소가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

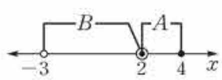
11 $x^2-6x+8 \le 0$에서 $\quad (x-2)(x-4) \le 0$

$\therefore 2 \le x \le 4$

$\therefore A = \{x \mid 2 \le x \le 4\}$

$A \cap B = \varnothing$,

$A \cup B = \{x \mid -3 < x \le 4\}$가



성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같아야 하므로

$B = \{x \mid -3 < x < 2\}$

$= \{x \mid (x+3)(x-2) < 0\}$

$= \{x \mid x^2+x-6 < 0\}$

따라서 $p=1$, $q=-6$이므로 $\quad p-q=7$ 답 7

각 부등식의 해의 집합을 수직선 위에 나타낸 후

$\cap$: 공통 범위,

$\cup$: 합친 범위

임을 이용한다.

12 $x^2-3x-4 < 0$에서 $\quad (x+1)(x-4) < 0$

$\therefore -1 < x < 4$

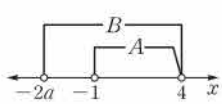
$\therefore A = \{x \mid -1 < x < 4\}$

$x^2+2(a-2)x-8a < 0$에서 $\quad (x+2a)(x-4) < 0$

$\therefore B = \{x \mid (x+2a)(x-4) < 0\}$

한편 $A \cap B = A$이므로 $\quad A \subset B$

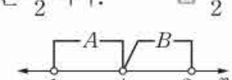
$A \subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-2a \le -1 \quad \therefore a \ge \frac{1}{2}$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다. 답 $\frac{1}{2}$

참고 $-2a > 4$인 경우는 오른쪽 그림과 같으므로 $A \not\subset B$이다.



13 ① $\varnothing \triangle U = (\varnothing \cup U) - (\varnothing \cap U) = U - \varnothing = U$

② $\varnothing \triangle A = (\varnothing \cup A) - (\varnothing \cap A) = A - \varnothing = A$

③ $A \triangle A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \varnothing$

④ $A \triangle A^C = (A \cup A^C) - (A \cap A^C) = U - \varnothing = U$

⑤ $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$= (B \cup A) - (B \cap A) = B \triangle A$

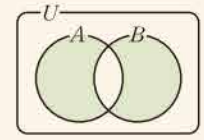
답 ③

쌤한마디

13번에서 정의한 연산

$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



이 연산은 집합의 연산에서 자주 출제되고, 다음과 같이 여러 가지 방법으로 표현될 수 있다.

$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$= (A-B) \cup (B-A)$

$= (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$

$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^C$

14 $A \circledcirc B = (A \cup B) \cap (A \cup B^C)$

$= A \cup (B \cap B^C)$

$= A \cup \varnothing = A$

$\therefore (A \circledcirc B) \circledcirc A = A \circledcirc A$

$= (A \cup A) \cap (A \cup A^C)$

$= A \cap U = A$ 답 ②

15 $n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C)$

$= n(U) - n(A \cup B)$

이므로

$8 = 40 - n(A \cup B) \quad \therefore n(A \cup B) = 32$

$\therefore n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 18 + 22 - 32$

$= 8$ 답 ③

16 두 집합 A, B가 서로소이므로

$A \cap B = \varnothing,\ A \cap B \cap C = \varnothing$

$\therefore n(A \cap B) = 0,\ n(A \cap B \cap C) = 0$

한편

$n(A \cap C) = n(A) + n(C) - n(A \cup C)$

$= 7 + 9 - 14 = 2,$

$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C)$

$= 10 + 9 - 16 = 3$

이므로

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

$- n(A \cap B) - n(B \cap C)$

$- n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

$= 7 + 10 + 9 - 0 - 3 - 2 + 0$

$= 21$ 답 ②

$B \subset A$일 때, $A \cap B = B$이므로

$n(A \cap B) = n(B)$

$n(A \cap B)$가 최소이려면 $n(A \cup B)$가 최대이어야 하므로 $A \cup B = U$이어야 한다.

17 $B \subset A$일 때 $n(A \cap B)$가 최대이므로

$M = n(A \cap B) = n(B) = 16$

$A \cup B = U$일 때 $n(A \cap B)$가 최소이므로

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$에서

$m = 20 + 16 - 30 = 6$

$\therefore M - m = 10$ 답 10

다른 풀이 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=20+16-n(A\cup B)$
$=36-n(A\cup B)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$A\subset(A\cup B)$이므로 $n(A)\le n(A\cup B)$

$(A\cup B)\subset U$이므로 $n(A\cup B)\le n(U)$

즉 $20\le n(A\cup B)\le 30$이므로

$-30\le -n(A\cup B)\le -20$

$\therefore 6\le 36-n(A\cup B)\le 16$

따라서 ㉠에서 $6\le n(A\cap B)\le 16$이므로

$M=16,\ m=6$ $\quad\therefore M-m=10$

18 $(A\cap B)\subset A, (A\cap B)\subset B$이므로

$n(A\cap B)\le n(A),\ n(A\cap B)\le n(B)$

이고 $n(A\cap B)\ge 8$이므로

$8\le n(A\cap B)\le 12$

$n(A)=12,\ n(B)=15$ 이므로 $n(A\cap B)\le 12$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

(i) $n(A\cap B)=8$일 때,

$n(A\cup B)=12+15-8=19$

(ii) $n(A\cap B)=12$일 때,

$n(A\cup B)=12+15-12=15$

(i), (ii)에서 $15\le n(A\cup B)\le 19$

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 19, 최솟값은 15이므로 구하는 합은

$19+15=34$ 답 34

19 학생 전체의 집합을 U, 수학을 신청한 학생의 집합을 A, 영어를 신청한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35,\ n(A)=19,\ n(B)=15,$

$n(A^C\cap B^C)=6$

수학과 영어 중 어느 과목도 신청하지 않은 학생의 집합

이때

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$

에서

$6=35-n(A\cup B)$ $\quad\therefore n(A\cup B)=29$

이때 수학과 영어를 모두 신청한 학생의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=19+15-29=5$

따라서 구하는 학생 수는 5이다. 답 ②

20 볼펜을 구매한 고객의 집합을 A, 책갈피를 구매한 고객의 집합을 B라 하면

$n(A)=24,\ n(B)=18,\ n(A\cap B)=7$

볼펜과 책갈피를 모두 구매한 고객의 집합

볼펜만 구매한 고객의 집합은 $A-B$, 책갈피만 구매한 고객의 집합은 $B-A$이므로 볼펜과 책갈피 중 하나만 구매한 고객의 집합은 $(A-B)\cup(B-A)$이다.

$\therefore n(A-B)+n(B-A)$
$=n(A)-n(A\cap B)+n(B)-n(A\cap B)$
$=(24-7)+(18-7)=28$

따라서 구하는 고객 수는 28이다. 답 28

21 동호회 회원 전체의 집합을 U, A 영화를 관람한 회원의 집합을 A, B 영화를 관람한 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=18,\ n(B)=34$

A 영화와 B 영화를 모두 관람한 회원의 집합은 $A\cap B$이고, $A\subset B$일 때 $n(A\cap B)$가 최대이므로 A 영화와 B 영화를 모두 관람한 회원 수의 최댓값은

$M=n(A\cap B)=n(A)=18$

한편 $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서 A 영화와 B 영화를 모두 관람한 회원 수의 최솟값은

$m=18+34-40=12$

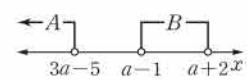
$\therefore M+m=30$ 답 30

중단원 마무리

L 28쪽

01 **전략** 주어진 조건을 만족시키도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타낸다.

풀이 두 집합 A, B가 서로소가 되도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$3a-5\le a-1$

$2a\le 4$ $\quad\therefore a\le 2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다. 답 ②

02 **전략** 먼저 집합 B^C를 이용하여 집합 B를 구한다.

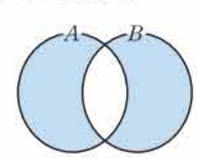
풀이 $B^C=\{1, 2, 5, 8\}$이므로 $B=\{3, 4, 6, 7\}$

따라서 $A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{1, 8\}$ 답 $\{1, 8\}$

03 **전략** 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 벤다이어그램에서 집합 $(A-B)\cup(B-A)$는 색칠한 부분과 같고



$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$,

$(A-B)\cup(B-A)=\{3, 5, 6, 10\}$이므로

$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$이므로 집합 $B-A$의 원소는 집합 $(A-B)\cup(B-A)$의 원소에서 집합 $A-B$의 원소를 제외한 것이다.

$A-B=\{6, 10\},\ B-A=\{3, 5\}$

$\therefore A\cap B=\{2, 4, 8\}$ ❶

$\therefore B=\{2, 3, 4, 5, 8\}$ ❷

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$2+3+4+5+8=22$ ❸

답 22

단계	채점 기준	비율
❶	집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	40 %
❷	집합 B를 구할 수 있다.	40 %
❸	집합 B의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

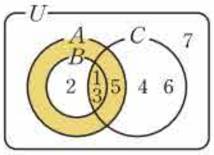
04 **전략** 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타낸다.

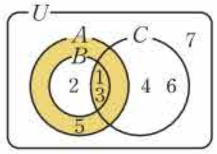
풀이 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 7\}$이고

$A\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로

$(A\cup C)^C=\{7\}$

주어진 조건을 만족시키는 집합 U, A, B, C를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 두 가지 중 하나이고, 집합 $A\cap(B^C\cup C)$는 색칠한 부분과 같다.





$\therefore A\cap(B^C\cup C)=\{1, 3, 5\}$ 답 ④

05 **전략** 두 집합의 원소의 개수를 이용하여 먼저 두 집합의 포함 관계를 구한다.

풀이 $n(A)=4$, $n(B)=3$이고 $n(A-B)=1$에서

$B\subset A$

따라서 $9\in A$이므로

$a^2+a-3=9, \quad a^2+a-12=0$

$(a+4)(a-3)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=3$

(i) $a=-4$일 때,

$A=\{1, 2, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 9\}$이므로

$A-B=\{7\}$

$\therefore n(A-B)=1$

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{1, 2, 7, 9\}$, $B=\{1, 9, 16\}$이므로

$A-B=\{2, 7\}$

$\therefore n(A-B)=2$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-4$ 답 ①

06 **전략** $A=\{4, 6, a, b\}$ (a, b는 자연수)로 놓고 주어진 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $A\cap B=\{4, 6\}$이므로

$A=\{4, 6, a, b\}$ (a, b는 자연수)라 하면 집합 A의 모든 원소의 합이 21이므로

$4+6+a+b=21$

$\therefore a+b=11$ ······ ㉠

한편 $B=\{x+k \mid x\in A\}$이므로

$B=\{4+k, 6+k, a+k, b+k\}$

조건 (나)에서 $A\cup B$의 모든 원소의 합이 40이고, B의 모든 원소의 합은 $21+4k$이므로

($A\cup B$의 모든 원소의 합)

$=$(A의 모든 원소의 합)$+$(B의 모든 원소의 합)

$-$($A\cap B$의 모든 원소의 합)

$4+6=10$

$40=21+(21+4k)-10$

$40=4k+32 \quad \therefore k=2$

$B=\{6, 8, a+2, b+2\}$에서 $A\cap B=\{4, 6\}$이므로 $a+2$, $b+2$ 중 어느 하나는 4이어야 한다.

(i) $a+2=4$이면 $a=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=9$

(ii) $b+2=4$이면 $b=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=9$

(i), (ii)에서 $A=\{2, 4, 6, 9\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 곱은

$2\cdot4\cdot6\cdot9=432$ 답 432

07 **전략** 조건제시법으로 나타내어진 두 집합의 원소를 구하고, 두 집합의 포함 관계를 생각한다.

풀이 ㄱ. 3 이하의 소수는 2, 3이므로

소수
➡ 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수

$A_3=\{2, 3\}$

4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로

$B_4=\{1, 2, 4\}$

$\therefore A_3\cap B_4=\{2\}$

ㄴ. $a\in A_n$이면 $a\le n$이고 a는 소수이다.

$a\le n<n+1$이고 a는 소수이므로 $a\in A_{n+1}$

$\therefore A_n\subset A_{n+1}$

ㄷ. $m=4$, $n=8$이면 $B_4=\{1, 2, 4\}$,

$B_8=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 $B_4\subset B_8$이지만 4는 8의 배수가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

08 **전략** 서로소인 두 집합의 교집합은 공집합임을 이용한다.

풀이 A, B^C가 서로소이므로

$A\cap B^C=\varnothing$

즉 $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$

$A\subset B$와 같은 표현
➡ $A\cap B=A$
➡ $A\cup B=B$
➡ $A-B=\varnothing$
➡ $A\cap B^C=\varnothing$

ㄴ. $A\cap B=A$이므로 $(A\cap B)^C=A^C$

ㄷ. $A\cup B=B$이므로 $(A\cup B)-A=B-A\ne\varnothing$

ㄹ. $A\subset B$이므로 $B^C\subset A^C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

09 **전략** 집합의 연산 법칙과 연산의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\{(A-B)\cup(A-B^C)\}\cup(B-A)$

$=\{(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\}\cup(B\cap A^C)$

$=\{A\cap(B^C\cup B)\}\cup(B\cap A^C)$

$=(A\cap U)\cup(B\cap A^C)$

$=A\cup(B\cap A^C)$

$=(A\cup B)\cap(A\cup A^C)$

$=(A\cup B)\cap U$

$=A\cup B$

이므로 $A\cup B=A$

$\therefore B\subset A$

따라서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ①이다. 답 ①

10 전략 각 부등식의 해의 집합을 구한 후 수직선 위에 나타낸다.

풀이 $x^2+x-2>0$에서 $(x+2)(x-1)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>1$

$\therefore A=\{x|x<-2$ 또는 $x>1\}$

$x^2-3x-4<0$에서 $(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$

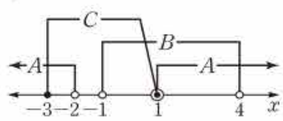
$\therefore B=\{x|-1<x<4\}$

$x^2+2x-3\le 0$에서 $(x+3)(x-1)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 1$

$\therefore C=\{x|-3\le x\le 1\}$ ⋯ ❶

세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$(A\cap B)\cup C$

$=\{x|1<x<4\}\cup\{x|-3\le x\le 1\}$

$=\{x|-3\le x<4\}$ ⋯ ❷

따라서 집합 $(A\cap B)\cup C$의 원소 중 정수는

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

의 7개이다. ⋯ ❸

답 7

단계	채점 기준	비율
❶	세 집합 A, B, C를 간단히 할 수 있다.	40 %
❷	집합 $(A\cap B)\cup C$를 구할 수 있다.	40 %
❸	집합 $(A\cap B)\cup C$의 원소 중 정수인 것의 개수를 구할 수 있다.	20 %

11 전략 집합의 연산 법칙과 연산의 성질을 이용하여 먼저 $A\star U$와 $B\star\varnothing$을 각각 간단히 한다.

풀이 $A\star U=(A\cap U)\cup(A\cup U)^C$

$=A\cup U^C$

$=A\cup\varnothing$

$=A$

$B\star\varnothing=(B\cap\varnothing)\cup(B\cup\varnothing)^C$

$=\varnothing\cup B^C$

$=B^C$

$\therefore (A\star U)\star(B\star\varnothing)=A\star B^C$

$=(A\cap B^C)\cup(A\cup B^C)^C$

$=(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$

$=(A-B)\cup(B-A)$

따라서 $(A\star U)\star(B\star\varnothing)$과 항상 같은 집합은 ⑤이다.

답 ⑤

12 전략 집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 ① $n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)$

$=17-12=5$

② $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=14+17-5=26$

③ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=14-5=9$

④ $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=28-26=2$

⑤ $n(A\cup B^C)=n(A)+n(B^C)-n(A\cap B^C)$

$=n(A)+n(U)-n(B)-n(A-B)$

$=14+28-17-9=16$

답 ④

13 전략 먼저 드모르간의 법칙을 이용하여 전체집합 U의 원소의 개수를 구한다.

풀이 $A\cup B^C=(A^C\cap B)^C=(B-A)^C$이므로 조건 ㈎에서

$n(A\cup B^C)=n((B-A)^C)=7$

또 조건 ㈎에서 $B-A=\{4, 7\}$이므로

$n(B-A)=2$

이때 $(B-A)\cup(B-A)^C=U$,

$(B-A)\cap(B-A)^C=\varnothing$이므로

$n(U)=n(B-A)+n((B-A)^C)=2+7=9$

$\therefore k=9$

QBOX: $P\cap Q=\varnothing$이면 $n(P\cup Q)=n(P)+n(Q)$

한편 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은 11이고 조건 ㈏에 의하여 집합 $A-B$의 모든 원소의 합도 11이어야 한다. 따라서 자연수 m은 4와 7 중 어느 수도 약수로 갖지 않고, 모든 약수의 합이 11 이상이어야 하므로 m이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.

QBOX: $m\le 9$

QBOX: 1, 2, 3, 5는 모든 약수의 합이 6 이하이고, 4, 7, 8은 4 또는 7을 약수로 가지므로 m이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.

(i) $m=6$일 때,

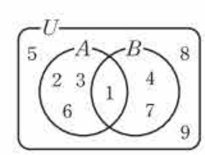
$A=\{1, 2, 3, 6\}$이고 $A-B=\{2, 3, 6\}$이면 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 11이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $m=9$일 때,

$A=\{1, 3, 9\}$이고 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 11인 경우가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $m=6$

따라서 집합 $B=\{1, 4, 7\}$이므로 세 집합 U, A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고



$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{5, 8, 9\}$

이므로 구하는 모든 원소의 합은

$5+8+9=22$

답 ⑤

14 전략 주어진 조건을 집합으로 나타낸 후 각 집합의 원소의 개수를 이용한다.

풀이 은행 A를 이용하는 고객의 집합을 A, 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 B라 하면

$n(A\cup B)=35+30=65$

QBOX: 조사에 참여한 전체 고객의 수

조건 ㈎에 의하여

$n(A)+n(B)=82$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=82-65=17$

따라서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 고객의 수는

$n(A\cup B)-n(A\cap B)=65-17=48$

이므로 조건 (나)에 의하여 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는

$\frac{1}{2}\cdot 48=24$

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30-24=6$ 답 ②

쌤 한마디

은행 A만 이용하는 고객의 수는

$n(A)-n(A\cap B)$

은행 B만 이용하는 고객의 수는

$n(B)-n(A\cap B)$

따라서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 고객의 수는

$\{n(A)-n(A\cap B)\}+\{n(B)-n(A\cap B)\}$

$=\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}-n(A\cap B)$

$=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

15 전략 주어진 조건을 집합으로 나타낸 후 각 집합의 원소의 개수를 이용한다.

풀이 동호회 회원 전체의 집합을 U, 축구를 좋아하는 회원의 집합을 A, 농구를 좋아하는 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=28,\ n(A)=16,\ n(B)=10$

축구와 농구 중 어느 것도 좋아하지 않는 회원 수는

$n(A^c\cap B^c)$

$=n((A\cup B)^c)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$

$=28-16-10+n(A\cap B)$

$=2+n(A\cap B)$ ...... ㉠

$B\subset A$일 때, 즉 $A\cap B=B$일 때 $n(A\cap B)$의 값이 최대이므로 $n(A\cap B)$의 최댓값은 10

따라서 ㉠에서 $M=2+10=12$

한편 $n(A)+n(B)=26,\ n(U)=28$이므로

$A\cap B=\varnothing$일 때 $n(A\cap B)$의 값이 최소이다.

즉 $n(A\cap B)$의 최솟값은 0

따라서 ㉠에서 $m=2+0=2$

$\therefore M+m=14$ 답 14

16 전략 ㄷ에서 $n(A\cap B)=2$가 되는 경우를 나누어 k의 값을 구한다.

풀이 ㄱ. $A\cap B=\{2,\ 5\}$이면 $2\in A,\ 5\in A$

2와 5가 k의 양의 약수이려면 k는 10의 양의 배수이면서 18 이하의 자연수이어야 하므로

$k=10$

ㄴ. $A\cap B=\{5,\ 6\}$이면 $5\in A,\ 6\in A$

5와 6이 k의 양의 약수이려면 k는 30의 양의 배수이면서 18 이하의 자연수이어야 하는데 이러한 k는 존재하지 않는다.

ㄷ. (i) $A\cap B=\{2,\ 5\}$일 때,

$k=10$이므로 $A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

이때 $A-B=\{1,\ 10\}$의 모든 원소의 합은

$1+10=11$

(ii) $A\cap B=\{2,\ 6\}$일 때,

2와 6이 k의 양의 약수이려면 k는 6의 양의 배수이면서 18 이하의 자연수이어야 하므로

$k=6$ 또는 $k=12$ 또는 $k=18$

ⓘ $k=6$일 때,

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로 $A-B=\{1,\ 3\}$의 모든 원소의 합은 $1+3=4$

ⓘⓘ $k=12$일 때,

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로

$A-B=\{1,\ 3,\ 4,\ 12\}$의 모든 원소의 합은

$1+3+4+12=20$

ⓘⓘⓘ $k=18$일 때,

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$이므로

$A-B=\{1,\ 3,\ 9,\ 18\}$의 모든 원소의 합은

$1+3+9+18=31$

(i), (ii)에서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 k의 값은 10, 18이므로 그 합은

$10+18=28$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

Q BOX

ㄴ에서 $A\cap B=\{5,\ 6\}$인 경우의 k의 값은 존재하지 않으므로

$A\cap B=\{2,\ 5\}$,

$A\cap B=\{2,\ 6\}$

인 경우에 대해서만 생각한다.

17 전략 자연수의 서로소의 뜻을 이용하여 집합 X의 원소가 되기 위한 조건을 찾는다.

풀이 조건 (나)에서 $X\cap B=\varnothing$이므로 집합 X의 모든 원소는 50과 서로소가 아니고, $50=2\cdot 5^2$이므로 집합 X의 모든 원소는 2 또는 5의 배수이다.

조건 (다)에서 $12=2^2\cdot 3$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 자연수이다.

즉 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는

5, 25, 35, 55, 65, 85, 95

이때 조건 (가)에서 $X\neq\varnothing$이므로 집합 X는 $\{5,\ 25,\ 35,\ 55,\ 65,\ 85,\ 95\}$의 공집합이 아닌 부분집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^7-1=127$ 답 127

03 명제

Lecture 05 명제와 조건

33쪽

01 답 참인 명제: ㄴ, 거짓인 명제: ㄷ

ㄱ은 x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

02 답 $\sqrt{9}$는 유리수이다. (참)

$\sqrt{9}=3$

03 답 정사각형은 마름모가 아니다. (거짓)

04 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 6, 12\}$

따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은

$P^C=\{2, 3, 4\}$ 답 $\{2, 3, 4\}$

05 $x^2-7x+6\le 0$에서 $(x-1)(x-6)\le 0$

$\therefore 1\le x\le 6$

즉 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 2, 3, 4, 6\}$

따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은

$P^C=\{12\}$ 답 $\{12\}$

06 두 조건 '6의 양의 약수', '12의 양의 약수'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 3, 6\}$,

$Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다. 답 참

07 [반례] $x=2$, $y=-3$이면 $x+y<0$이지만 $x>0$이므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

08 $P\subset Q$이므로 $P\cup Q=Q$ 답 ×

09 $P\subset Q$이므로 $P-Q=\varnothing$ 답 ○

10 [반례] $x=0$이면 $|x|=0$이므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

'모든'을 포함한 명제는 성립하지 않는 예가 하나만 있어도 거짓이다.

11 $x=1$이면 $x-1=0$이므로 주어진 명제는 참이다. 답 참

12 답 어떤 자연수 x에 대하여 x^2은 짝수가 아니다. (참)

13 주어진 명제의 부정은

'모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2\ge x$이다.'

[반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $x^2<x$이므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다. 답 풀이 참조

표준+발전 유형 Q+Q

34쪽

01 ① x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

② $2x<2x+1$에서 $0<1$이므로 참인 명제이다.

③ $x<5$이면 $x-2<3$이므로 거짓인 명제이다.

④ 두 자연수 a, b가 홀수이면 ab는 홀수이므로 거짓인 명제이다.

⑤ 참인 명제이다. 답 ①

02 ㄴ. 거짓인 명제이다.

ㄷ. 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

03 $x^2+4x-5\le 0$에서 $(x+5)(x-1)\le 0$

$\therefore -5\le x\le 1$

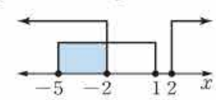
$x^2-4<0$에서 $(x+2)(x-2)<0$

$\therefore -2<x<2$

$\therefore$ 'p: $-5\le x\le 1$', 'q: $-2<x<2$'

한편 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'

'$\sim q$: $x\le -2$ 또는 $x\ge 2$'이므로 'p 그리고 $\sim q$'는 오른쪽 그림에서



$-5\le x\le -2$ 답 $-5\le x\le -2$

두 조건 p, $\sim q$를 수직선 위에 나타낸 후 공통부분을 찾는다.

04 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.

① $\sqrt{5}-2$는 유리수가 아니다. (참)

② 8은 3의 배수가 아니다. (참)

③ 1은 소수가 아니다. (참)

④ $(-1)^5-2=-1^5-2$ (참)

⑤ 마름모는 평행사변형이 아니다. (거짓) 답 ⑤

다른 풀이 명제가 참이면 그 부정은 거짓이다.

따라서 주어진 명제 ①, ②, ③, ④는 거짓, ⑤는 참이므로 명제의 부정이 거짓인 것은 ⑤이다.

명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다.

05 $x^2-9x+14=0$에서 $(x-2)(x-7)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=7$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

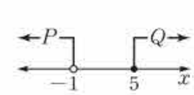
$P=\{2, 4, 6, 8\}$, $Q=\{2, 7\}$

조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C$이므로

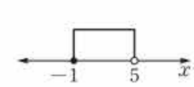
$P\cap Q^C=P-Q=\{4, 6, 8\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 3이다. 답 ②

06 두 진리집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



또 조건 '$-1\le x<5$'의 진리집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 집합은



$P^C\cap Q^C$ 답 ④

참고 ① $P\cap Q=\varnothing$ ② $P\cap Q^C=\{x\mid x<-1\}$
③ $P^C\cup Q=\{x\mid x\geq -1\}$ ⑤ $P^C\cup Q^C=\{x\mid x$는 실수$\}$

07 ② $3x+1=-5$에서 $x=-2$
따라서 $x=-2$이면
$x^2+x-2=(-2)^2+(-2)-2=0$
③ $x^2-4x=0$에서 $x(x-4)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=4$
즉 $x\geq 0$이다.
⑤ [반례] $x=\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$이면 x, y는 무리수이지만 $x+y=0$은 유리수이다. 답 ⑤

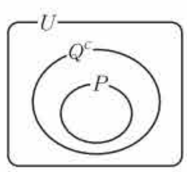
08 ㄱ. [반례] $x=1$, $y=2$, $z=0$이면 $xz=yz$이지만 $x\neq y$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
ㄷ. [반례] $x=-3$, $y=-2$, $z=1$이면 $x<y<z$이지만 $xy>yz$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
이상에서 명제 $p \longrightarrow q$가 참인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

부등식의 양변에 음수를 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.

09 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 거짓임을 보이려면 집합 Q의 원소 중에서 집합 P^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 원소는 집합
$Q-P^C=Q\cap(P^C)^C=Q\cap P$
의 원소인 b이다. 답 ①

10 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 거짓임을 보이려면 집합 P^C의 원소 중에서 집합 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 집합은
$P^C-Q^C=P^C\cap(Q^C)^C=P^C\cap Q$ 답 ③

11 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $P\subset Q^C$
따라서 두 집합 P, Q의 포함 관계는 오른쪽 그림과 같다.



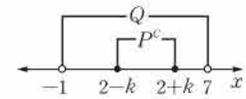
① $Q\not\subset P$ ② $Q\subset P^C$
③ $P\cap Q=\varnothing$ ④ $P\cup Q\neq U$
⑤ $Q-P=Q\cap P^C=Q$
답 ③

12 ①, ③ $P\subset R^C$, $Q\subset R^C$이므로 두 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $q \longrightarrow \sim r$는 모두 참이다.
② $Q\subset P$이므로 명제 $q \longrightarrow p$는 참이다.
④ $R\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 참이다.
⑤ $R^C\not\subset Q^C$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.
답 ⑤

13 $|x-2|>k$에서 $x-2<-k$ 또는 $x-2>k$
$\therefore x<2-k$ 또는 $x>2+k$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\mid x<2-k$ 또는 $x>2+k\}$,
$Q=\{x\mid -1<x<7\}$

$a>0$일 때
① $|x|<a$
➡ $-a<x<a$
② $|x|>a$
➡ $x<-a$ 또는 $x>a$

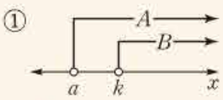
명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$
이때
$P^C=\{x\mid 2-k\leq x\leq 2+k\}$
이므로 오른쪽 그림에서



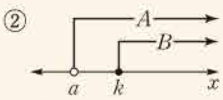
$-1<2-k$, $2+k<7$
$\therefore k<3$
따라서 자연수 k는 1, 2의 2개이다. 답 ②

쌤한마디

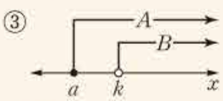
$B\subset A$가 되도록 하는 a의 값의 범위는 다음과 같다.

①


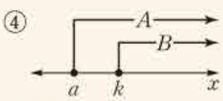
$a\leq k$

②


$a<k$

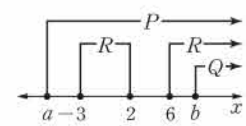
③


$a\leq k$

④


$a\leq k$

14 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면
$P=\{x\mid x\geq a\}$, $Q=\{x\mid x\geq b\}$,
$R=\{x\mid -3\leq x\leq 2$ 또는 $x\geq 6\}$



명제 $q \longrightarrow r$가 참이 되려면 $Q\subset R$이고, 명제 $r \longrightarrow p$가 참이 되려면 $R\subset P$이어야 하므로 위의 그림에서
$a\leq -3$, $b\geq 6$
따라서 a의 최댓값은 -3, b의 최솟값은 6이므로 구하는 합은
$-3+6=3$ 답 3

15 ㄱ. $\sqrt{x}<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.
ㄴ. $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1>0$이다.
ㄷ. $x=0$이면 $|x|+x=|0|+0=0$
ㄹ. [반례] $x=1$이면 $x^2+x=2$
이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

16 ① $-x$의 값은 2, 1, 0, -1, -2
따라서 모든 x에 대하여 $-x\in U$이다.
② $x=-2$이면 $-2+1\leq 0$
③ $8-2x$의 값은 12, 10, 8, 6, 4
따라서 모든 x에 대하여 $8-2x>3$이다.
④ $x=0$이면 $0^2<1$
⑤ [반례] $x=1$이면 $x(x-2)=-1<0$
답 ⑤

17 주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx+4\geq0$이다.'

이다.

이 명제가 참이므로 이차방정식 $x^2-2kx+4=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot4\leq0$$

$$k^2-4\leq0,\quad (k+2)(k-2)\leq0$$

$$\therefore\ -2\leq k\leq2$$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다. 답 2

쌤 한마디

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① 명제 '모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq0$이다.'가 참이려면

- 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$이 항상 성립한다.
- $a>0$, $D\leq0$

② 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq0$이다.'가 참이려면

- 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$이 해를 갖는다.
- $a>0$ 또는 $a<0$, $D\geq0$

Lecture 06 명제 사이의 관계

37쪽

01 답 역: x가 4의 배수이면 x는 짝수이다. (참)

대우: x가 4의 배수가 아니면 x는 짝수가 아니다. (거짓)

[반례] $x=2$이면 x는 4의 배수가 아니지만 짝수이다.

02 답 역: $x^2=y^2$이면 $x=y$이다. (거짓)

대우: $x^2\neq y^2$이면 $x\neq y$이다. (참)

[반례] $x=-1$, $y=1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\neq y$이다.

03 답 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)

대우: $x\neq0$ 또는 $y\neq0$이면 $|x|+|y|\neq0$이다. (참)

04 ㄱ. 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

ㄷ. 두 명제 $r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim p$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

05 $p \longrightarrow q$: x가 실수이면 x는 유리수이다. (거짓)

[반례] $x=\sqrt{2}$이면 x는 실수이지만 유리수는 아니다.

$q \longrightarrow p$: x가 유리수이면 x는 실수이다. (참)

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다. 답 필요조건

06 $p \longrightarrow q$: $|x|<2$이면 $-2\leq x\leq2$이다. (참)

$q \longrightarrow p$: $-2\leq x\leq2$이면 $|x|<2$이다. (거짓)

[반례] $x=2$이면 $-2\leq x\leq2$이지만 $|x|=2$이다.

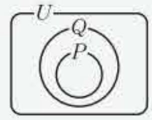
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

07 $p \longrightarrow q$: $3x-1\geq8$이면 $x\geq3$이다. (참)

$q \longrightarrow p$: $x\geq3$이면 $3x-1\geq8$이다. (참)

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다. 답 필요충분조건

08 p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$



① $P\cap Q=P$ ② $Q-P\neq\varnothing$

③ $Q^C\subset P^C$ ④ $P\cup Q\neq U$ 답 ⑤

표준+발전 유형 Q+Q

38쪽

01 ① 역: $x>1$이면 $x>2$이다. (거짓)

[반례] $x=\frac{3}{2}$이면 $x>1$이지만 $x<2$이다.

② 역: $x^2=1$이면 $x=1$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x\neq1$이다.

③ 역: $x<y$이면 $x^2<y^2$이다. (거짓)

[반례] $x=-3$, $y=-2$이면 $x<y$이지만 $x^2>y^2$이다.

④ 역: $x>0$이고 $y<0$이면 $xy<0$이다. (참)

⑤ 역: $x>0$ 또는 $y>0$이면 $x+y>0$이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=-3$이면 $x>0$이지만 $x+y<0$이다.

답 ④

02 ㄱ. 역: a, b가 모두 짝수이면 $a+b$는 짝수이다. (참)

대우: a 또는 b가 짝수가 아니면 $a+b$도 짝수가 아니다. (거짓)

[반례] $a=1$, $b=3$이면 a와 b 모두 짝수가 아니지만 $a+b$는 짝수이다.

ㄴ. 역: $|a|+|b|=0$이면 $ab=0$이다. (참)

대우: $|a|+|b|\neq0$이면 $ab\neq0$이다. (거짓)

[반례] $a=1$, $b=0$이면 $|a|+|b|\neq0$이지만 $ab=0$이다.

ㄷ. 역: $a^2+a-2\geq0$이면 $a<-2$ 또는 $a>1$이다. (거짓)

[반례] $a=1$이면 $a^2+a-2\geq0$이지만 $a=1$이다.

대우: $a^2+a-2<0$이면 $-2\leq a\leq1$이다. (참)

$a^2+a-2<0$에서
$(a+2)(a-1)<0$
$\therefore\ -2<a<1$

이상에서 역은 거짓이고, 대우는 참인 명제인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

03 주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$a\geq-2$이고 $b\geq k$이면 $a+b\geq9$이다.'

도 참이다.

$a\geq-2$, $b\geq k$에서 $a+b\geq-2+k$이므로

$$-2+k\geq9\qquad \therefore\ k\geq11$$

따라서 실수 k의 최솟값은 11이다. 답 11

04 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이어야 한다.

$\sim p$: $|x-a|<3$에서 $\quad -3<x-a<3$

$\therefore a-3<x<a+3$

$\sim q$: $|x-4|<2$에서 $\quad -2<x-4<2$

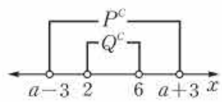
$\therefore 2<x<6$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x|a-3<x<a+3\}$,

$Q^C=\{x|2<x<6\}$

명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 $Q^C \subset P^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-3\leq 2$, $a+3\geq 6$

$\therefore 3\leq a\leq 5$ 　　답 $3\leq a\leq 5$

다른 풀이 p: $|x-a|\geq 3$에서

$x-a\leq -3$ 또는 $x-a\geq 3$

$\therefore x\leq a-3$ 또는 $x\geq a+3$

q: $|x-4|\geq 2$에서 $\quad x-4\leq -2$ 또는 $x-4\geq 2$

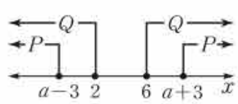
$\therefore x\leq 2$ 또는 $x\geq 6$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x\leq a-3$ 또는 $x\geq a+3\}$,

$Q=\{x|x\leq 2$ 또는 $x\geq 6\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-3\leq 2$, $a+3\geq 6$

$\therefore 3\leq a\leq 5$

05 ①, ③ 두 명제 $\sim p \longrightarrow q$, $p \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow p$, $r \longrightarrow \sim p$도 모두 참이다.

②, ④ 두 명제 $\sim q \longrightarrow p$, $p \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이고, 그 대우 $r \longrightarrow q$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $q \longrightarrow r$이다. 　　답 ⑤

06 세 조건 p, q, r를

'p: 독서를 좋아한다.',

'q: 그림 그리기를 좋아한다.',

'r: 음악 감상을 좋아한다.'

로 놓으면 ㈎, ㈏에서 두 명제 $p \longrightarrow q$, $r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $q \longrightarrow \sim r$도 모두 참이다.

또 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$도 참이고, 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 반드시 참인 명제는 ①이다. 　　답 ①

참고 각 보기를 세 조건 p, q, r로 나타내면 다음과 같다.

① $p \longrightarrow \sim r$ 　② $\sim p \longrightarrow r$ 　③ $q \longrightarrow \sim p$

④ $q \longrightarrow r$ 　⑤ $\sim r \longrightarrow q$

Q BOX

두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$의 참, 거짓을 각각 조사한다.

명제 $r \longrightarrow q$는 참이지만 그 역 $q \longrightarrow r$가 반드시 참인 것은 아니다.

07 ① $x^2-1=0$에서 $\quad (x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$x^3-x=0$에서 $\quad x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $x<y$의 양변에서 z를 빼면 $\quad x-z<y-z$

$x-z<y-z$의 양변에 z를 더하면 $\quad x<y$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

③ $|x|>3$에서 $\quad x<-3$ 또는 $x>3$

$x^2\geq 9$에서 $\quad x\leq -3$ 또는 $x\geq 3$

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

④ $x+y=0$에서 $\quad x=-y$

$x^2+y^2=0$에서 $\quad x=0$, $y=0$

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

⑤ $p \longrightarrow q$: x, y가 유리수이면 xy도 유리수이다. (참)

$q \longrightarrow p$: xy가 유리수이면 x, y는 유리수이다. (거짓)

[반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 xy는 유리수이지만 x, y는 유리수가 아니다.

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ④이다. 　　답 ④

08 ① $p \longrightarrow q$: $x<0$이면 $x+|x|=0$이다. (참)

$q \longrightarrow p$: $x+|x|=0$이면 $x<0$이다. (거짓)

[반례] $x=0$이면 $x+|x|=0$이지만 $x=0$이다.

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② p: $x>0$, $y>0 \Longleftrightarrow q$: $x+y>0$, $xy>0$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

③ $xy=|xy|$이면 $xy\geq 0$이므로

$x\geq 0$, $y\geq 0$ 또는 $x\leq 0$, $y\leq 0$

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

④ $p \longrightarrow q$: $x>y$이고 $y>z$이면 $x>z$이다. (참)

$q \longrightarrow p$: $x>z$이면 $x>y$이고 $y>z$이다. (거짓)

[반례] $x=2$, $y=-2$, $z=-1$이면 $x>z$이지만 $y<z$이다.

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

⑤ $(x-y)(y-z)=0$에서 $\quad x=y$ 또는 $y=z$

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ②이다.

답 ②

09 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로 $\quad p \Longrightarrow \sim r$

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $\quad q \Longrightarrow r$

ㄱ, ㄴ. 두 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 각각의 대우 $r \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow \sim q$도 모두 참이다.

ㄹ. 두 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $\sim r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$도 참이고, 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

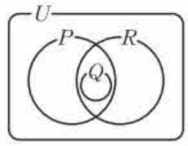
이상에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

10 p가 q이기 위한 필요조건이므로 $\quad Q \subset P$

q가 r이기 위한 충분조건이므로 $\quad Q \subset R$

오른쪽 벤다이어그램에서



① $P \not\subset R$

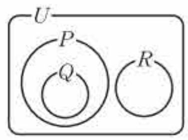
② $P - Q \neq \varnothing$

④ $Q \cup R = R$

⑤ $P \cap R^C \neq \varnothing$

답 ③

11 주어진 조건을 만족시키도록 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $Q \subset P$에서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $Q \subset R^C$에서 $q \Longrightarrow \sim r$이므로 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $R \subset P^C$에서 $r \Longrightarrow \sim p$이므로 r는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

12 $x^2+2x-8>0$에서 $\quad (x+4)(x-2)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>2$

$|x-6| \leq k$에서 $\quad -k \leq x-6 \leq k$

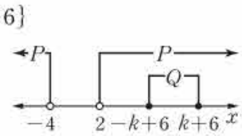
$\therefore -k+6 \leq x \leq k+6$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid x<-4$ 또는 $x>2\}$,

$Q=\{x \mid -k+6 \leq x \leq k+6\}$

p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k+6>2 \quad \therefore k<4$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$

답 6

13 p는 q이기 위한 충분조건이므로

$P \subset Q$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

r는 p이기 위한 필요조건이므로

$P \subset R$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

Q BOX

㉠에서 $2 \in Q$이어야 하므로

$-a=2$ 또는 $b-1=2$

$\therefore a=-2$ 또는 $b=3$

(i) $a=-2$일 때,

$Q=\{2, b-1\}$, $R=\{3, 3b-4\}$

㉡에서 $2 \in R$이어야 하므로

$3b-4=2 \quad \therefore b=2$

$Q=\{1, 2\}$, $R=\{2, 3\}$

(ii) $b=3$일 때,

$Q=\{-a, 2\}$, $R=\{1-a, 5\}$

㉡에서 $2 \in R$이어야 하므로

$1-a=2 \quad \therefore a=-1$

$Q=\{1, 2\}$, $R=\{2, 5\}$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최솟값은

$(-2)+2=0$

답 0

Lecture 07 여러 가지 증명법

40쪽

01 답 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$이면 $a^2+b^2 \neq 0$이다., $\neq$, $\neq$, 대우

02 답 $<$, $<$, $<$

03 답 $\frac{3}{4}b^2$, $\frac{3}{4}b^2$, 0, 0

04 $9x>0$, $\frac{4}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9x+\frac{4}{x} \geq 2\sqrt{9x \cdot \frac{4}{x}} = 2 \cdot 6 = 12$$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{2}{3}\text{일 때 성립}\right)$

$9x=\frac{4}{x}$에서 $\quad x^2=\frac{4}{9}$

$x>0$이므로 $\quad x=\frac{2}{3}$

따라서 $9x+\frac{4}{x}$의 최솟값은 12이다. 답 12

05 a, b, x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

이때 $a^2+b^2=8$, $x^2+y^2=2$이므로

$8 \cdot 2 \geq (ax+by)^2$, $\quad 16 \geq (ax+by)^2$

$\therefore -4 \leq ax+by \leq 4$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$

답 $-4 \leq ax+by \leq 4$

표준+발전 유형 Q+Q

41쪽

01 주어진 명제의 대우는

'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'

이다.

n이 3의 배수가 아니므로

$n=\boxed{3k-2}$ 또는 $n=3k-1$ (k는 자연수)

이라 하면

(i) $n=\boxed{3k-2}$일 때,

$n^2=(3k-2)^2$
$=9k^2-12k+4$
$=3(\boxed{3k^2-4k+1})+1$

(ii) $n=3k-1$일 때,

$n^2=(3k-1)^2$
$=9k^2-6k+1$
$=3(3k^2-2k)+\boxed{1}$

즉 n^2은 3으로 나누면 나머지가 1인 자연수가 되므로 n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

∴ (가) $3k-2$ (나) $3k^2-4k+1$ (다) 1

답 (가) $3k-2$ (나) $3k^2-4k+1$ (다) 1

02 (1) 주어진 명제의 대우는

'n이 짝수가 아니면 n^2도 짝수가 아니다.',

즉 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'

(2) $n=2k-1$ (k는 자연수)이라 하면

$n^2=(2k-1)^2$
$=4k^2-4k+1$
$=2(2k^2-2k)+1$

이때 $2k^2-2k$는 0 또는 자연수이므로 n^2도 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 답 풀이 참조

03 $\sqrt{5}$가 $\boxed{\text{무리수}}$가 아니라고 가정하면

$\sqrt{5}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 $\boxed{\text{서로소}}$인 자연수)

으로 나타낼 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$5m^2=n^2$ ...... ㉠

이때 n^2이 $\boxed{5}$의 배수이므로 n도 5의 배수이다.

$n=5k$ (k는 자연수)로 놓으면 ㉠에서

$5m^2=25k^2$ ∴ $m^2=5k^2$

따라서 m^2이 $\boxed{5}$의 배수이므로 m도 5의 배수이다.

이것은 m, n이 $\boxed{\text{서로소}}$라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{5}$는 무리수이다.

∴ (가) 무리수 (나) 서로소 (다) 5

답 (가) 무리수 (나) 서로소 (다) 5

04 $1+\sqrt{3}$이 무리수가 아니라고 가정하면

$1+\sqrt{3}=a$ (a는 유리수)

로 놓을 수 있다.

즉 $\sqrt{3}=a-1$이고 a, 1이 모두 $\boxed{\text{유리수}}$이므로 $a-1$은 $\boxed{\text{유리수}}$이다.

Q BOX

자연수 k에 대하여 모든 자연수는
$3k-2$, $3k-1$, $3k$
로 나타낼 수 있고 그중 3의 배수가 아닌 수는 $3k-2$, $3k-1$이다.

$A>B$ 꼴의 부등식의 증명
➡ $A-B>0$임을 보인다.

$k=1$일 때,
$2k^2-2k=0$
$k\ge2$일 때,
$2k^2-2k$는 자연수

그런데 이것은 $\sqrt{3}$이 $\boxed{\text{무리수}}$라는 사실에 모순이다.

따라서 $1+\sqrt{3}$은 무리수이다.

∴ (가) 유리수 (나) 유리수 (다) 무리수

답 (가) 유리수 (나) 유리수 (다) 무리수

05 (ii) $|a|\ge|b|$일 때,

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$
$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$
$=a^2-2ab+b^2-a^2+2|ab|-b^2$
$=2(\boxed{|ab|-ab})\ge0$ ($\because$ $|ab|\ge ab$)

∴ $|a-b|^2\ge(|a|-|b|)^2$

그런데 $|a-b|\ge0$, $|a|-|b|\ge0$이므로

$|a-b|\ge|a|-|b|$

이때 등호는 $|a|\ge|b|$, $\boxed{ab\ge0}$일 때 성립한다.

∴ (가) $|ab|-ab$ (나) $ab\ge0$ 답 ③

06 ㄱ. $(x^2+1)-x=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

이때 x가 실수이므로 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\ge0$

따라서 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로 $x^2+1>x$

ㄴ. $(x+3y)^2-6xy=x^2+6xy+9y^2-6xy$
$=x^2+9y^2$

이때 x, y가 실수이므로 $x^2\ge0$, $9y^2\ge0$에서

$x^2+9y^2\ge0$

∴ $(x+3y)^2\ge6xy$

(단, 등호는 $x=y=0$일 때 성립)

ㄷ. $(x^2+1)(y^2+1)-(xy+1)^2$
$=(x^2y^2+x^2+y^2+1)-(x^2y^2+2xy+1)$
$=x^2+y^2-2xy$
$=(x-y)^2$

이때 x, y가 실수이므로 $(x-y)^2\ge0$

∴ $(x^2+1)(y^2+1)\ge(xy+1)^2$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 절대부등식이다. 답 ⑤

07 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$
$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)$
$+(c^2-2ca+a^2)\}$
$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

a, b, c가 실수이므로

$(a-b)^2\ge0$, $(b-c)^2\ge0$, $(c-a)^2\ge0$

∴ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge0$

여기서 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$,

즉 $a=b=c$일 때 성립한다. 답 풀이 참조

08 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5x+2y\geq 2\sqrt{5x\cdot 2y}=2\sqrt{10xy}$

이때 $5x+2y=20$이므로

$20\geq 2\sqrt{10xy}$, $\quad 10\geq\sqrt{10xy}$

양변을 제곱하면 $\quad 100\geq 10xy$

$\therefore xy\leq 10$

이때 등호는 $5x=2y$일 때 성립하고 $5x+2y=20$이므로

$5x=10$, $2y=10$ $\quad \therefore x=2$, $y=5$

따라서 xy는 $x=2$, $y=5$일 때 최댓값 10을 가지므로

$k=10$, $\alpha=2$, $\beta=5$

$\therefore k+\alpha+\beta=17$

답 ②

09 $ab=8$에서 $a\neq 0$, $b\neq 0$이므로

$a^2>0$, $b^2>0$

즉 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+4b^2\geq 2\sqrt{a^2\cdot 4b^2}=4|ab|$

이때 $ab=8$이므로

$a^2+4b^2\geq 4\cdot 8=32$

(단, 등호는 $|a|=2|b|$일 때 성립)

$a^2=4b^2$에서 $\quad a^2=(2b)^2$

$\therefore |a|=2|b|$

따라서 구하는 최솟값은 32이다.

답 ④

10 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}(8x^2+x)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)&=16x+8+2+\frac{1}{x}\\&=10+16x+\frac{1}{x}\\&\geq 10+2\sqrt{16x\cdot\frac{1}{x}}\\&=10+2\cdot 4=18\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{1}{4}\text{일 때 성립}\right)$

$16x=\frac{1}{x}$에서 $\quad x^2=\frac{1}{16}$

$\therefore x=\frac{1}{4}$ ($\because x>0$)

따라서 구하는 최솟값은 18이다.

답 ③

11 $x>1$에서 $x-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}3x+\frac{3}{x-1}&=3(x-1)+\frac{3}{x-1}+3\\&\geq 2\sqrt{3(x-1)\cdot\frac{3}{x-1}}+3\\&=2\cdot 3+3=9\end{aligned}$$

이때 등호는 $3(x-1)=\frac{3}{x-1}$일 때 성립하므로

$(x-1)^2=1$, $\quad x-1=1$ ($\because x-1>0$)

$\therefore x=2$

따라서 $3x+\frac{3}{x-1}$은 $x=2$일 때 최솟값 9를 가지므로

$m=9$, $n=2$

$\therefore m+n=11$

답 ④

12 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(3^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(3x+2y)^2$

이때 $x^2+y^2=13$이므로

$13\cdot 13\geq(3x+2y)^2$, $\quad 13^2\geq(3x+2y)^2$

$\therefore -13\leq 3x+2y\leq 13$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{3}=\frac{y}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $3x+2y$의 최댓값은 13, 최솟값은 -13이므로 구하는 차는

$13-(-13)=26$

답 26

13 a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2+1^2\right\}(a^2+b^2)\geq\left(\frac{a}{4}+b\right)^2$

이때 $\frac{a}{4}+b=\sqrt{17}$이므로

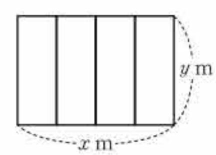
$\frac{17}{16}(a^2+b^2)\geq(\sqrt{17})^2$

$\therefore a^2+b^2\geq 16$ (단, 등호는 $4a=b$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 16이다.

답 ⑤

14 오른쪽 그림과 같이 가장 큰 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하면 줄 전체의 길이가 60 m이므로



$2x+5y=60$

또 구역 전체의 넓이는 $\quad xy$ m^2

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+5y\geq 2\sqrt{2x\cdot 5y}=2\sqrt{10xy}$

이때 $2x+5y=60$이므로

$60\geq 2\sqrt{10xy}$, $\quad \sqrt{10xy}\leq 30$

양변을 제곱하면 $\quad 10xy\leq 900$

$\therefore xy\leq 90$ (단, 등호는 $2x=5y$일 때 성립)

등호는 $2x=5y$일 때 성립하고 $2x+5y=60$이므로

$2x=30$, $5y=30$

$\therefore x=15$, $y=6$

따라서 $x=15$, $y=6$일 때 xy는 최댓값을 갖는다.

따라서 구역 전체의 넓이의 최댓값은 90 m^{2}이다.

답 90 m^2

15 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 직사각형의 대각선의 길이는 원의 지름의 길이와 같으므로

$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$

이때 직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$이고, x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(2^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(2x+2y)^2$

$8\cdot 8\geq(2x+2y)^2$

$\therefore (2x+2y)^2\leq 64$

$x>0$, $y>0$이므로

$0<2x+2y\leq 8$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}$에서 $\quad x=y$

따라서 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 8이다.

답 ④

중단원 마무리

44쪽

01 전략 참, 거짓을 판별할 수 없는 문장이나 식을 찾는다.

풀이 ① 모든 x의 값에 대하여 항상 성립하므로 참인 명제이다.

항등식은 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 명제이다.

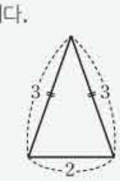
② $-x^2+4 \le -x^2-2$에서 $4 \le -2$이므로 거짓인 명제이다.

③ $x=2$이면 x는 소수이지만 $x+1=3$은 홀수이므로 거짓인 명제이다.

④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

⑤ 거짓인 명제이다.

다음 삼각형은 이등변삼각형이지만 정삼각형은 아니다.



답 ④

02 전략 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, $\sim p$의 진리집합은 P^C임을 이용한다.

풀이 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=0$에서

$f(x)=0$이고 $g(x)=0$ ······ ㉠

p: $f(x) \ne 0$에서 $\sim p$: $f(x)=0$이므로

$P^C=\{x \mid f(x)=0\}$

q: $g(x) \ne 0$에서 $\sim q$: $g(x)=0$이므로

$Q^C=\{x \mid g(x)=0\}$

따라서 ㉠의 진리집합은

$P^C \cap Q^C=(P \cup Q)^C$ 답 ⑤

03 전략 명제가 거짓임을 보일 때는 반례를 찾는다.

풀이 ㄱ. $a<b<0$이면 $|a|>|b|$이므로

$a^2>b^2$

음수끼리는 절댓값이 큰 수가 작다.

ㄴ. $a \ge 0$, $b \ge 0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

$a \ge 0$, $b<0$이면

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a}\sqrt{-b}i=\sqrt{-ab}i=\sqrt{ab}$

따라서 $a \ge 0$ 또는 $b \ge 0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.

마찬가지 방법으로 $a<0$, $b \ge 0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

ㄷ. [반례] $a=-2$, $b=1$이면

$|a|+|b|=3$, $|a+b|=1$

이므로 $|a|+|b|>|a+b|$이지만 $a<0$이다.

이상에서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

04 전략 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 p는 만족시키지만 q는 만족시키지 않는 예임을 이용한다.

풀이 명제 'p이면 $\sim q$이고 $\sim r$이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 집합 $Q^C \cap R^C$의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 구하는 집합은

$P-(Q^C \cap R^C)=P \cap (Q^C \cap R^C)^C$

$=P \cap (Q \cup R)$ 답 ②

05 전략 주어진 조건을 이용하여 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 파악한다.

풀이 ㄱ. $P \cap Q=P$이므로 $P \subset Q$

따라서 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

ㄴ. $R^C \cup Q=U$이므로 $(R^C \cup Q)^C=\varnothing$

이때 $(R^C \cup Q)^C=R \cap Q^C=R-Q=\varnothing$이므로

$R \subset Q$

따라서 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다.

ㄷ. [반례] $P \cap R \ne \varnothing$이면 $P \not\subset R^C$

따라서 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 거짓이다.

이상에서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

06 전략 '어떤'을 포함한 명제는 성립하는 예가 하나만 있어도 참임을 이용한다.

풀이 주어진 명제가 참이 되려면 집합 P는 적어도 하나의 3의 배수를 원소로 가져야 한다.

즉 집합 $\{1, 2, 3, 6\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{1, 2\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.

따라서 구하는 집합 P의 개수는

$2^4-2^2=16-4=12$ 답 12

(특정한 원소 k개 중에서 적어도 한 개를 원소로 갖는 부분집합의 개수)
=(전체 부분집합의 개수)
−(특정한 원소를 제외한 집합의 부분집합의 개수)

07 전략 진리집합 P의 조건에 따라 '모든'이나 '어떤'이 있는 명제의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄷ. $P=U$일 때만 '모든 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

쌤 한마디

'모든'이나 '어떤'이 있는 명제의 참, 거짓

공집합이 아닌 전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때

① $P=\varnothing$ ➡ '어떤 x에 대하여 p이다.' (거짓)
'모든 x에 대하여 p이다.' (거짓)

② $P=U$ ➡ '어떤 x에 대하여 p이다.' (참)
'모든 x에 대하여 p이다.' (참)

③ $P \ne \varnothing$ ➡ '어떤 x에 대하여 p이다.' (참)

④ $P \ne U$ ➡ '모든 x에 대하여 p이다.' (거짓)

08 전략 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용하여 대우의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ① 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

역: $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$이면 $x<y<0$이다. (거짓)

[반례] $x=2$, $y=3$이면 $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$이지만 $0<x<y$이다.

② 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

역: $x^2+y^2>0$이면 $xy<0$이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=2$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $xy>0$이다.

③ 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

역: $|x|+|y|=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (참)

④ [반례] $x=-3$, $y=\sqrt{3}$이면 $x+y\sqrt{3}=0$이지만 $x \ne 0$이고 $y \ne 0$이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

역: $x=0$이고 $y=0$이면 $x+y\sqrt{3}=0$이다. (참)

⑤ [반례] $A=\{1\}$, $B=\{1, 2\}$이면 $A-B=\varnothing$이지만 $A\neq B$이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

역: $A=B$이면 $A-B=\varnothing$이다. (참)

답 ③

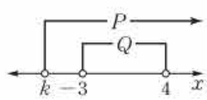
09 전략 명제가 참이 되려면 그 대우가 참이어야 함을 이용한다.

풀이 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 그 대우 $q \longrightarrow p$가 참이 되어야 한다. ⋯ ❶

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x>k\}$, $Q=\{x|-3<x<4\}$

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$k\leq -3$ ⋯ ❷

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 -3이다. ⋯ ❸

답 -3

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 명제의 대우가 참이어야 함을 알 수 있다.	30 %
❷	k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸	실수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

10 전략 명제가 참이면 그 대우도 참인 것과 삼단논법을 이용하여 필요한 참인 명제를 찾는다.

풀이 명제 $r \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

또 명제 $q \longrightarrow \sim s$가 참이므로 그 대우 $s \longrightarrow \sim q$도 참이다.

두 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $s \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이려면 명제 $\sim r \longrightarrow s$가 참이어야 한다.

또 명제 $\sim r \longrightarrow s$가 참이면 그 대우 $\sim s \longrightarrow r$도 참이다.

따라서 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 $\sim s \longrightarrow r$이다.

답 ⑤

11 전략 세 조건 p, q, r의 진리집합을 구한 후 진리집합의 포함 관계를 이용한다.

풀이 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

p: $|a|+|b|=0$에서 $a=0$, $b=0$

$\therefore P=\{(0, 0)\}$

q: $a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0$

$\therefore a=b$

$\therefore Q=\{(a, b)|a=b\}$

r: $|a+b|=|a-b|$에서 $|a+b|^2=|a-b|^2$이므로

$ab=0$ $\therefore a=0$ 또는 $b=0$

$\therefore R=\{(a, b)|a=0$ 또는 $b=0\}$

ㄱ. $P\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $P\subset R$에서 $R^C\subset P^C$이므로 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $Q\cap R=\{(0, 0)\}$이므로 $Q\cap R=P$

즉 q이고 r는 p이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

12 전략 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타낸다.

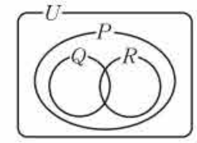
풀이 p는 'q 또는 r'이기 위한 필요조건이므로

$(Q\cup R)\subset P$

④ 오른쪽 벤다이어그램에서

$P\cap R=R$이므로

$(P\cap R)\not\subset Q$



답 ④

13 전략 세 조건 p, q, r의 진리집합을 구한 후 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

풀이 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.

p: $n\geq k$에서 $P=\{n|n\geq k$, n과 k는 자연수$\}$

q: $2n-4\geq 3$에서 $n\geq \frac{7}{2}$

n은 자연수이므로 $Q=\{4, 5, 6, 7, \cdots\}$

r: $n^2-19n\geq 20$에서 $n^2-19n-20\geq 0$

$(n+1)(n-20)\geq 0$ $\therefore n\leq -1$ 또는 $n\geq 20$

n은 자연수이므로 $R=\{20, 21, 22, 23, \cdots\}$

두 명제 $p \longrightarrow q$, $r \longrightarrow p$가 모두 참이므로

$P\subset Q$, $R\subset P$

$P\subset Q$이려면 $k\geq 4$ ⋯⋯ ㉠

$R\subset P$이려면 $1\leq k\leq 20$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $4\leq k\leq 20$

따라서 자연수 k의 개수는 4, 5, 6, ⋯, 20의 17이다.

$a<b$인 정수 a, b에 대하여
① $a<x<b$인 정수 x의 개수 ➡ $b-a-1$
② $a\leq x<b$ 또는 $a<x\leq b$인 정수 x의 개수 ➡ $b-a$
③ $a\leq x\leq b$인 정수 x의 개수 ➡ $b-a+1$

답 17

14 전략 귀류법을 이용한다.

풀이 $p^2(n^2-1)=q^2$에서 p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로 $p=1$이다.

따라서 $1^2\cdot(n^2-1)=q^2$이므로 $n^2=\boxed{q^2+1}$

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때, $n^2=(2k)^2+1=4k^2+1$이고

$(2k)^2<4k^2+1<(2k+1)^2$

$4k^2+4k+1$

이므로

$(2k)^2<n^2<\boxed{(2k+1)^2}$

$\therefore 2k<n<2k+1$

이때 위의 부등식을 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

$2k$, $2k+1$은 연속하는 두 자연수이므로 그 사이에 자연수가 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때, $n^2=(2k+1)^2+1=4k^2+4k+2$
이고
$$(2k+1)^2<4k^2+4k+2<(2k+2)^2$$
이므로
$$\boxed{(2k+1)^2}<n^2<(2k+2)^2$$
$$\therefore\ 2k+1<n<2k+2$$
이때 위의 부등식을 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.
이때 $f(q)=q^2+1$, $g(k)=(2k+1)^2$이므로
$$f(2)=2^2+1=5,\ g(3)=(2\cdot3+1)^2=49$$
$$\therefore\ f(2)+g(3)=54$$
답 ③

15 전략 $A-B$의 부호를 조사하여 대소 관계를 구한다.

풀이 $A-B=(x+y)^2-1-(x^2y^2+2xy)$
$=x^2+2xy+y^2-1-x^2y^2-2xy$
$=x^2+y^2-1-x^2y^2$
$=x^2(1-y^2)-(1-y^2)$
$=(x^2-1)(1-y^2)$
이때 $-1\le x\le1$, $-1\le y\le1$이므로
$x^2-1\le0$, $1-y^2\ge0$
$\therefore\ (x^2-1)(1-y^2)\le0$
즉 $A-B\le0$이므로 $A\le B$
(단, 등호는 $|x|=1$ 또는 $|y|=1$일 때 성립)
답 ②

16 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$x^2+5y^2\ge2\sqrt{x^2\cdot5y^2}=2\sqrt5\,|xy|$$
이때 $x^2+5y^2=10$이므로
$$10\ge2\sqrt5|xy|,\quad |xy|\le\sqrt5$$
$$\therefore\ -\sqrt5\le xy<0\text{ 또는 }0<xy\le\sqrt5$$
(단, 등호는 $x^2=5y^2$일 때 성립)
따라서 xy의 최댓값은 $\sqrt5$, 최솟값은 $-\sqrt5$이므로 구하는 곱은
$$\sqrt5\cdot(-\sqrt5)=-5$$
답 ③

17 전략 부등식의 좌변을 전개한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 주어진 부등식의 좌변을 전개하면
$(9x-4y)\left(\frac1x-\frac1y\right)$
$=9-\frac{9x}{y}-\frac{4y}{x}+4$
$=13-\left(\frac{9x}{y}+\frac{4y}{x}\right)$ ······ ㉠ ···· ❶
$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\frac{9x}{y}+\frac{4y}{x}\ge2\sqrt{\frac{9x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}$$
$$=2\cdot6=12$$
(단, 등호는 $3x=2y$일 때 성립)
······ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$$13-\left(\frac{9x}{y}+\frac{4y}{x}\right)\le13-12=1$$
이므로 $(9x-4y)\left(\frac1x-\frac1y\right)\le1$ ···· ❷
따라서 $(9x-4y)\left(\frac1x-\frac1y\right)\le k$가 항상 성립하려면 $k\ge1$이어야 하므로 실수 k의 최솟값은 1이다. ···· ❸
답 1

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 부등식의 좌변을 변형할 수 있다.	30 %
❷	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $(9x-4y)\left(\frac1x-\frac1y\right)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸	실수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

18 전략 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

풀이 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$$\left\{\left(\frac13\right)^2+\left(\frac14\right)^2\right\}(x^2+y^2)\ge\left(\frac x3+\frac y4\right)^2$$
이때 $x^2+y^2=a$이므로
$$\frac{25}{144}a\ge\left(\frac x3+\frac y4\right)^2$$
$$\therefore\ -\frac5{12}\sqrt a\le\frac x3+\frac y4\le\frac5{12}\sqrt a$$
(단, 등호는 $3x=4y$일 때 성립)
따라서 $\frac x3+\frac y4$의 최댓값은 $\frac5{12}\sqrt a$, 최솟값은 $-\frac5{12}\sqrt a$이고 그 차가 10이므로
$$\frac56\sqrt a=10,\quad \sqrt a=12\quad \therefore\ a=144$$
답 144

19 전략 닭장의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하고 x, y 사이의 관계식을 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 닭장의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 넓이가 900이므로
$$xy=900$$
울타리의 길이는 $2x+2y-5$이고, $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$2x+2y-5\ge2\sqrt{2x\cdot2y}-5$$
$$=4\sqrt{xy}-5$$
이때 $xy=900$이므로
$$2x+2y-5\ge4\cdot30-5=115$$
(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)
따라서 울타리의 길이의 최솟값은 115이다. 답 ④

Q BOX

$4k^2+8k+4$

$\frac{9x}{y}=\frac{4y}{x}$에서
$9x^2=4y^2\quad\therefore\ 3x=2y$
$(\because\ x>0,\ y>0)$

$-1\le x\le1$에서 $x^2\le1$
$\therefore\ x^2-1\le0$

$-1\le y\le1$에서 $y^2\le1$
$\therefore\ 1-y^2\ge0$

$x\ne0$, $y\ne0$이므로
$xy\ne0$

$2x=2y$에서 $x=y$이고
$xy=900$이므로
$x=30$, $y=30$

20 전략 대각선의 길이를 이용하여 식을 세운 후 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

풀이 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 직육면체의 대각선의 길이가 $5\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=5\sqrt{3}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=75$ ⋯ ❶

이때 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이고 a, b, c는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(4^2+4^2+4^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(4a+4b+4c)^2$

$a^2+b^2+c^2=75$이므로

$48\cdot75\ge(4a+4b+4c)^2$

$\therefore (4a+4b+4c)^2\le3600$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$0<4a+4b+4c\le60$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립) ⋯ ❷

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값은 60이다. ⋯ ❸

답 60

단계	채점 기준	비율
❶	$a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	코시-슈바르츠 부등식을 이용할 수 있다.	40 %
❸	직육면체의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

21 전략 주어진 두 명제가 참임을 이용하여 가능한 두 진리집합 Q, R를 찾고 순서쌍 (Q, R)의 개수를 구한다.

풀이 $x^2\le2x+8$에서 $x^2-2x-8\le0$

$(x+2)(x-4)\le0$ $\therefore -2\le x\le4$

이때 $P\subset U$이므로

$P=\{1, 2, 3, 4\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $P\subset Q$

즉 집합 Q는 집합 U의 부분집합 중에서 집합 P의 원소 1, 2, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 집합 Q의 개수는

$2^{8-4}=2^4=16$

또 명제 $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 $P^C\subset R$

이때 $P^C=\{5, 6, 7, 8\}$이고, 집합 R는 집합 U의 부분집합 중에서 집합 P^C의 원소 5, 6, 7, 8을 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 집합 R의 개수는

$2^{8-4}=2^4=16$

따라서 순서쌍 (Q, R)의 개수는

$16\cdot16=256$

답 256

22 전략 $\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$임을 이용하여 $\overline{PM}$과 $\overline{PN}$ 사이의 관계식을 구하고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

Q BOX

세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선의 길이
➡ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$\triangle ABC$에서 두 변의 길이 b, c와 그 끼인각 $\angle A$의 크기를 알 때, 넓이 S는
① $\angle A$가 예각인 경우
$S=\frac{1}{2}bc\sin A$
② $\angle A$가 둔각인 경우
$S=\frac{1}{2}bc\sin(180°-A)$

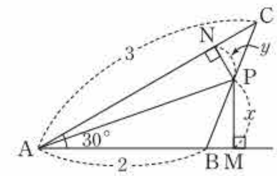
$\frac{a}{4}=\frac{b}{4}=\frac{c}{4}$에서
$a=b=c$

$\frac{6x}{y}=\frac{6y}{x}$에서 $x^2=y^2$
$\therefore x=y$
$(\because x>0, y>0)$

풀이 $\overline{PM}=x$, $\overline{PN}=y\ (x>0,\ y>0)$라 하면 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=3$이므로

$\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$ ⋯⋯ ㉠

다음 그림과 같이 $\overline{AP}$를 긋자.



$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$이므로

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin30°=\frac{1}{2}\cdot2\cdot x+\frac{1}{2}\cdot3\cdot y$

$\therefore 2x+3y=3$

이때 ㉠에 $2x+3y$를 곱하면

$(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=4+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}+9$

$=13+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}$ ⋯ ㉡

이고 $\frac{x}{y}>0$, $\frac{y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}\ge2\sqrt{\frac{6x}{y}\cdot\frac{6y}{x}}=12$

$2x+3y=3$이므로 ㉡에서

$3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)\ge13+12=25$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$\therefore \frac{2}{x}+\frac{3}{y}\ge\frac{25}{3}$

따라서 ㉠에서 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은 $\frac{25}{3}$이므로

$p=3$, $q=25$

$\therefore p+q=28$

답 28

L 03 명제

04 함수

Lecture 08 함수

51쪽

01 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
이때 정의역은 $\{1,\ 2,\ 3\}$, 공역은 $\{4,\ 5,\ 6\}$, 치역은 $\{4,\ 5,\ 6\}$이다. 답 풀이 참조

Q BOX

함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여
① 정의역: 집합 X
② 공역: 집합 Y
③ 치역: $\{f(x)|x\in X\}$

02 X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다. 답 함수가 아니다.

03 X의 원소 c에 대응하는 Y의 원소가 d, f의 2개이므로 함수가 아니다. 답 함수가 아니다.

04 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
이때 정의역은 $\{1,\ 2,\ 3\}$, 공역은 $\{a,\ b,\ c\}$, 치역은 $\{b\}$이다. 답 풀이 참조

05 답 정의역: 실수 전체의 집합,
치역: 실수 전체의 집합

06 답 정의역: $\{x|x\neq0$인 실수$\}$,
치역: $\{y|y\neq0$인 실수$\}$

07 답 정의역: 실수 전체의 집합,
치역: $\{y|y\le6$인 실수$\}$

08 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 정의역과 공역은 실수 전체의 집합이고 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=g(x)=\begin{cases} x & (x\ge0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$$

따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.
답 서로 같은 함수이다.

09 함수 f의 정의역은 실수 전체의 집합이고 함수 g의 정의역은 $\{x|x\neq-1$인 실수$\}$이다.
따라서 f와 g의 정의역이 같지 않으므로 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.
답 서로 같은 함수가 아니다.

(분모)$\neq0$에서
$x+1\neq0$, 즉 $x\neq-1$

10 답 ×　**11** 답 ○

그래프가 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 두 점에서 만나는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

12 답 ㄷ, ㄹ　**13** 답 ㄷ, ㄹ

14 답 ㄷ　**15** 답 ㄱ

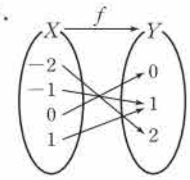
16 답 ㄱ, ㄴ, ㅁ　**17** 답 ㄱ, ㄴ, ㅁ

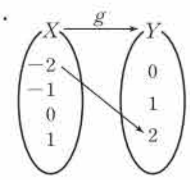
18 답 ㄴ　**19** 답 ㄷ

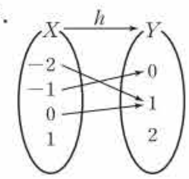
표준+발전 유형 Q+Q

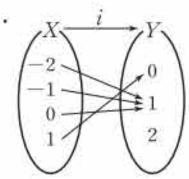
52쪽

01 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


이상에서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.
답 ②

02 ①, ②, ③ 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 그래프와 만나지 않거나 2개 이상의 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.
④ 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 그래프와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.
⑤ $x=1$에 대응하는 원소가 0, 1의 2개이므로 함수의 그래프가 아니다. 답 ④

03 $f(5)=5+2=7$

$$\begin{aligned} f(33)&=f(33-6)=f(27-6) \\ &=\cdots=f(9-6)=f(3)=3+2=5 \end{aligned}$$

$\therefore f(5)+f(33)=7+5=12$ 답 12

04 (i) x가 유리수일 때, $-x$도 유리수이므로

$$f(x)+f(-x)=x+2+(-x+2)=4$$

(ii) x가 무리수일 때, $-x$도 무리수이므로

$$f(x)+f(-x)=-x+2+\{-(-x)+2\}=4$$

(i), (ii)에서　$f(x)+f(-x)=4$ 답 ②

05 주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$$f(1+1)=f(1)f(1)=3\cdot3=9$$

$\therefore f(2)=9$

주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$$f(1+2)=f(1)f(2)=3\cdot9=27$$

$\therefore f(3)=27$

주어진 식의 양변에 $x=2$, $y=3$을 대입하면

$$f(2+3)=f(2)f(3)=9\cdot27=243$$

$\therefore f(5)=243$ 답 ⑤

06 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned} f(126)&=f(2\cdot3^2\cdot7) \\ &=f(2\cdot3^2)+f(7) \\ &=f(2)+\underline{f(3^2)}+f(7) \\ &=f(2)+2f(3)+f(7) \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3^2)&=f(3\cdot3) \\ &=f(3)+f(3) \\ &=2f(3) \end{aligned}$$

이때 조건 (가)에서

$f(2)=2+1=3,\ f(3)=3+1=4,$
$f(7)=7+1=8$

이므로 ㉠에서

$$f(126)=f(2)+2f(3)+f(7)=3+2\cdot4+8=19$$

답 19

07 (i) $a>0$일 때,

함수 $f(x)$는 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가한다.

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-3)=-3,\ f(2)=2$

$-3a+b=-3,\ 2a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

함수 $f(x)$는 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소한다.

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-3)=2,\ f(2)=-3$

$-3a+b=2,\ 2a+b=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-1$

이때 $ab\neq0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=-1,\ b=-1$

$\therefore a+b=-2$

답 -2

08 정의역이 $\{-1, 0, 1, 2\}$이므로

$f(-1)=a+3,\ f(0)=3,\ f(1)=a+3,$
$f(2)=4a+3$

따라서 치역은 $\{a+3, 3, 4a+3\}$이고, 치역의 모든 원소의 합이 29이므로

$(a+3)+3+(4a+3)=29$

$5a=20 \quad \therefore a=4$

답 ③

쌤 한마디

함수 $f(x)$의 치역의 원소 $a+3$, 3, $4a+3$ 중에서 같은 원소가 있으면 $a=0$이다. 이때 치역은 $\{3\}$이고, 치역의 모든 원소의 합이 29라는 조건에 모순이다. 따라서 $a+3$, 3, $4a+3$은 모두 다른 원소이다.

09 $f(-2)=g(-2)$에서

$-2a+b=-9 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=g(2)$에서

$2a+b=7 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-1$

$\therefore ab=-4$

답 -4

10 $x^2-3x=x+12$에서 $x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 구하는 집합 X는 집합 $\{-2, 6\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로

$\{-2\}, \{6\}, \{-2, 6\}$

답 $\{-2\}, \{6\}, \{-2, 6\}$

11 ① [반례] $f(x)=\frac{3}{4}$이라 하면 $x_1=1,\ x_2=2$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=\frac{3}{4},\ f(x_2)=\frac{3}{4}$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=\frac{3}{4}$은 일대일대응이 아니다.

② [반례] $f(x)=|-3x+2|$라 하면 $x_1=\frac{1}{3},\ x_2=1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=\left|-3\cdot\frac{1}{3}+2\right|=1,$

$f(x_2)=|-3\cdot1+2|=1$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=|-3x+2|$는 일대일대응이 아니다.

③ [반례] $f(x)=x+|x|$라 하면 $x_1=-1,\ x_2=-2$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=-1+|-1|=0,$

$f(x_2)=-2+|-2|=0$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=x+|x|$는 일대일대응이 아니다.

④ [반례] $f(x)=x^2-5x$라 하면 $x_1=1,\ x_2=4$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=1^2-5\cdot1=-4,$

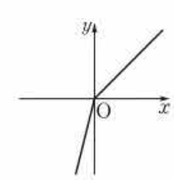
$f(x_2)=4^2-5\cdot4=-4$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=x^2-5x$는 일대일대응이 아니다.

답 ⑤

참고 ⑤ 함수 $y=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ 4x & (x<0)\end{cases}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 함수는 일대일대응이다.



12 ㄱ. 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

그런데 치역과 공역이 같지 않으므로 일대일대응이 아니다.

치역: $\{y|y>0\}$

ㄴ, ㄷ, ㅁ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 만나지 않거나 2개 이상의 점에서 만나므로 일대일함수가 아니다.

ㄹ, ㅂ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

이상에서 일대일함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄹ, ㅂ의 3개, 일대일대응의 그래프인 것은 ㄹ, ㅂ의 2개이다.

따라서 $a=3,\ b=2$이므로

$ab=6$

답 6

13 $a<0$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$f(-4)=12$, $f(1)=2$

$-4a+b=12$, $a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

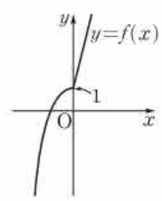
$a=-2$, $b=4$

$\therefore b-a=6$ 답 6

쌤한마디

함수 $f(x)=ax+b\,(a\neq0)$의 그래프는 직선이므로 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 항상 증가하거나 항상 감소하는 일대일함수이다. 따라서 치역과 공역이 서로 같으면 일대일대응이 되므로 정의역의 양 끝 값에서의 함숫값이 각각 공역의 양 끝 값이어야 한다.

14 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $x>0$에서 직선 $y=(a+1)x+a^2-8$의 기울기가 양수이어야 하므로

$a+1>0$

$\therefore a>-1$ ...... ㉠

또 직선 $y=(a+1)x+a^2-8$이 점 $(0,\ 1)$을 지나야 하므로

$a^2-8=1$, $\quad a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because$ ㉠) 답 ③

15 함수 f가 항등함수이므로

$f(-2)=-2$, $f(5)=5$

$f(5)+g(-3)=9$에서 $\quad 5+g(-3)=9$

$\therefore g(-3)=4$

이때 함수 g가 상수함수이므로 $\quad g(1)=4$

$\therefore f(-2)+g(1)=-2+4=2$ 답 2

16 함수 f가 항등함수가 되려면 $f(x)=x$이어야 하므로

$x^2+3x-15=x$, $\quad x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=3$

따라서 집합 X는 집합 $\{-5,\ 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^2-1=3$ 답 ①

17 X에서 X로의 일대일대응의 개수는

$4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

X에서 X로의 항등함수의 개수는 $\quad 1$

X에서 X로의 상수함수의 개수는 $\quad 4$

따라서 $p=24$, $q=1$, $r=4$이므로

$p+q+r=29$ 답 ④

Q BOX

쌤한마디

집합 X의 원소의 개수가 n, 집합 Y의 원소의 개수가 m일 때

① X에서 Y로의 함수의 개수 ➡ m^n

② X에서 Y로의 일대일함수의 개수

➡ $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$ (단, $m\geq n$)

③ X에서 X로의 일대일대응의 개수

➡ $n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$

④ X에서 Y로의 상수함수의 개수 ➡ m

18 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이고, 조건 (나)에서 $f(3)=9$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$의 값은 각각 서로 다르고 1, 3, 5, 7, 11 중 하나이어야 한다.

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 11 중 하나이므로 $\quad$ 5개

집합 Y의 원소 중에서 9를 제외한 나머지

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 11 중 $f(1)$의 값을 제외한 $\quad$ 4개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 11 중 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 $\quad$ 3개

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$5\cdot4\cdot3=60$ 답 60

Lecture 09 합성함수

55쪽

01 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(c)=3$ 답 3

f의 치역은 $\{a,\ c,\ d\}$이고 g의 정의역인 Y의 부분집합이므로 합성함수 $g\circ f$를 정의할 수 있다.

02 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(a)=2$ 답 2

03 $(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(4)=c$ 답 c

g의 치역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고 f의 정의역인 X의 부분집합이므로 합성함수 $f\circ g$를 정의할 수 있다.

04 $(f\circ g)(c)=f(g(c))=f(3)=d$ 답 d

05 $(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=4$

$(f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))=f(f(4))=f(2)=3$

$\therefore (f\circ f)(3)+(f\circ f\circ f)(1)=4+3=7$ 답 7

06 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-5)$

$=(2x-5)^2=4x^2-20x+25$

답 $(g\circ f)(x)=4x^2-20x+25$

07 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=2x^2-5$

답 $(f\circ g)(x)=2x^2-5$

참고 06번에서 $(g\circ f)(x)=4x^2-20x+25$이므로

$(g\circ f)(x)\neq(f\circ g)(x)$

함수의 합성에서 교환법칙이 성립하지 않는다.

08 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x-5)$

$=2(2x-5)-5=4x-15$

답 $(f\circ f)(x)=4x-15$

09 $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2)$
$=(x^2)^2=x^4$
답 $(g\circ g)(x)=x^4$

10 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-3)$
$=-3(2x-3)+5$
$=-6x+14$
이므로
$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))$
$=(f\circ g)(x^2)$
$=-6x^2+14$
$(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(x^2)=2x^2-3$이므로
$(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))$
$=f(2x^2-3)$
$=-3(2x^2-3)+5$
$=-6x^2+14$
따라서 $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ(g\circ h))(x)$가 성립한다. 답 풀이 참조

11 $((h\circ f)\circ g)(-3)=(h\circ(f\circ g))(-3)$
$=h((f\circ g)(-3))$
$=h(-3)=9$ 답 9

12 $(f\circ(g\circ h))(5)=((f\circ g)\circ h)(5)$
$=(f\circ g)(h(5))$
$=(f\circ g)(1)$
$=5$ 답 5

Q BOX

$ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식이면
$a=a'$, $b=b'$

$(f\circ g)(-3)$
$=(-3)^2+4\cdot(-3)$
$=-3$

$h(-3)=-(-3)+6$
$=9$

$h(5)=-5+6=1$

$(f\circ g)(1)$
$=1^2+4\cdot1=5$

결합법칙

03 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+2)$
$=b(ax+2)-c$
$=abx+2b-c$
따라서 $abx+2b-c=9x+1$이므로
$ab=9$, $2b-c=1$
또 $f(1)=5$이므로
$a+2=5$ $\quad\therefore a=3$
$a=3$을 $ab=9$에 대입하면
$3b=9$ $\quad\therefore b=3$
$b=3$을 $2b-c=1$에 대입하면
$6-c=1$ $\quad\therefore c=5$
$\therefore a+b+c=11$ 답 ②

04 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x+5)$
$=a(4x+5)-3$
$=4ax+5a-3$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-3)$
$=4(ax-3)+5$
$=4ax-7$
$f\circ g=g\circ f$가 성립하려면
$4ax+5a-3=4ax-7$
$5a-3=-7$, $\quad 5a=-4$
$\therefore a=-\frac{4}{5}$ 답 ③

05 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=4h(x)-2$이고
$(g\circ h)(x)=f(x)$이므로
$4h(x)-2=-2x^2+6$
$4h(x)=-2x^2+8$
$\therefore h(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$
$\therefore h(4)=-\frac{1}{2}\cdot4^2+2=-6$ 답 ①

다른 풀이 $(g\circ h)(x)=f(x)$의 양변에 $x=4$를 대입하면
$(g\circ h)(4)=f(4)$
$g(h(4))=-2\cdot4^2+6=-26$
$h(4)=a$라 하면 $\quad g(a)=-26$
$4a-2=-26$, $\quad 4a=-24$
$\therefore a=-6$
$\therefore h(4)=-6$

06 $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(-3x+1)$이고
$(h\circ f)(x)=g(x)$이므로
$h(-3x+1)=6x+2$
$-3x+1=t$로 놓으면
$3x=-t+1$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}$
따라서 $h(t)=6\cdot\left(-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\right)+2=-2t+4$이므로
$h(x)=-2x+4$ 답 $h(x)=-2x+4$

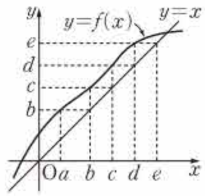
표준+발전 유형 Q+Q

56쪽

01 $g(1)=-1^2+3=2$이므로
$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)$
$=2^2+5=9$
$f(-3)=-4\cdot(-3)-6=6$이므로
$(g\circ f)(-3)=g(f(-3))=g(6)$
$=-6^2+3=-33$
$\therefore (f\circ g)(1)+(g\circ f)(-3)=9+(-33)=-24$
답 -24

02 $(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$
$=(h\circ g)(f(x))$
$=(h\circ g)(x^2-2x+1)$
$=12(x^2-2x+1)-8$
$=12x^2-24x+4$
따라서 $12a^2-24a+4=4$이므로
$12a^2-24a=0$, $\quad 12a(a-2)=0$
$\therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 ②

07 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 접선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같으므로

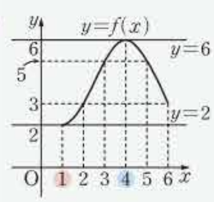


$(f\circ f\circ f)(a)$
$=f(f(f(a)))$
$=f(f(b))$
$=f(c)$
$=d$ 　　답 ④

쌤한마디

직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 같다. 따라서 함수의 그래프와 직선 $y=x$가 주어지면 직선 $y=x$를 이용하여 함수의 그래프 위의 점의 x좌표 또는 y좌표를 구할 수 있다.

08 $f(a)=b$라 하면 $(f\circ f)(a)=3$에서
$f(f(a))=f(b)=3$
주어진 그래프에서 $f(b)=3$을 만족시키는 b의 값은
$b=2$ 또는 $b=6$
이므로 $f(a)=2$ 또는 $f(a)=6$
(i) $f(a)=2$일 때, $a=1$
(ii) $f(a)=6$일 때, $a=4$
(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은
$1+4=5$ 　　답 5



09 $f^1(x)=f(x)=2x$에서
$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=2\cdot 2x=2^2x$
$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=2\cdot 2^2x=2^3x$
⋮
$\therefore f^k(x)=2^kx$
$f^k(2)=2^k\cdot 2=2^{k+1}$이므로
$2^{k+1}=1024=2^{10}$
$k+1=10$ 　$\therefore k=9$ 　　답 9

함수 f에 대하여
$f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n$
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
일 때, $f^n(a)$의 값
➡ $f^2,\ f^3,\ f^4,\ \cdots$를 직접 구하여 f^n을 추정한 다음 x 대신 a를 대입한다.

10 $f^1(3)=f(3)=2$에서
$f^2(3)=f(f(3))=f(2)=1$
$f^3(3)=f(f^2(3))=f(1)=4$
$f^4(3)=f(f^3(3))=f(4)=3$
$f^5(3)=f(f^4(3))=f(3)=2$
⋮
즉 $f^n(3)$의 값은 2, 1, 4, 3이 이 순서대로 반복된다.
이때 $70=4\cdot 17+2$이므로
$f^{70}(3)=f^2(3)=1$ 　　답 1

11 $f(x)=\begin{cases} x & (-1\le x<0) \\ x^2 & (0\le x\le 1)\end{cases}$에서

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases} f(x) & (-1\le f(x)<0) \\ \{f(x)\}^2 & (0\le f(x)\le 1)\end{cases}$$

(i) $-1\le x<0$일 때, $-1\le f(x)<0$이므로
$(f\circ f)(x)=x$
(ii) $0\le x\le 1$일 때, $0\le f(x)\le 1$이므로
$(f\circ f)(x)=(x^2)^2=x^4$
(i), (ii)에서 $(f\circ f)(x)=\begin{cases} x & (-1\le x<0) \\ x^4 & (0\le x\le 1)\end{cases}$이므로 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프의 개형은 ①이다. 　　답 ①

두 함수가 구간에 따라 다르게 정의된 경우에 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.
(i) 두 함수 f, g의 식의 경계가 되는 값을 기준으로 정의역을 나누어 $g\circ f$의 식을 구한다.
(ii) 각 구간을 나누어 그래프를 그린다.

12 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$$

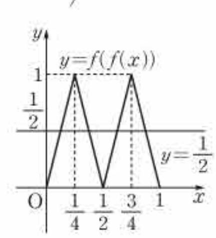
이므로

$$f(f(x))=\begin{cases} 2f(x) & \left(0\le f(x)<\frac{1}{2}\right) \\ -2f(x)+2 & \left(\frac{1}{2}\le f(x)\le 1\right)\end{cases}$$

(i) $0\le x<\frac{1}{4}$일 때, $0\le f(x)<\frac{1}{2}$이므로
$f(f(x))=f(2x)=2\cdot 2x$
$=4x$
(ii) $\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}$일 때, $\frac{1}{2}\le f(x)<1$이므로
$f(f(x))=f(2x)=-2\cdot 2x+2$
$=-4x+2$
(iii) $\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{4}$일 때, $\frac{1}{2}<f(x)\le 1$이므로
$f(f(x))=f(-2x+2)=-2(-2x+2)+2$
$=4x-2$
(iv) $\frac{3}{4}\le x\le 1$일 때, $0\le f(x)\le\frac{1}{2}$이므로
$f(f(x))=f(-2x+2)=2(-2x+2)$
$=-4x+4$
이상에서

$$f(f(x))=\begin{cases} 4x & \left(0\le x<\frac{1}{4}\right) \\ -4x+2 & \left(\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}\right) \\ 4x-2 & \left(\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{4}\right) \\ -4x+4 & \left(\frac{3}{4}\le x\le 1\right)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수와 같으므로 4이다. 　　답 4



다른 풀이 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$$

$f(f(x))=\frac{1}{2}$에서

$f(a)=\frac{1}{2}$인 a의 값을 찾은 후 $f(b)=a$인 b의 값을 찾는다.

$2f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $-2f(x)+2=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}$ 또는 $f(x)=\frac{3}{4}$

(i) $f(x)=\frac{1}{4}$일 때,

$2x=\frac{1}{4}$ 또는 $-2x+2=\frac{1}{4}$

$\therefore x=\frac{1}{8}$ 또는 $x=\frac{7}{8}$

(ii) $f(x)=\frac{3}{4}$일 때,

$2x=\frac{3}{4}$ 또는 $-2x+2=\frac{3}{4}$

$\therefore x=\frac{3}{8}$ 또는 $x=\frac{5}{8}$

(i), (ii)에서 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

Lecture 10 역함수

58쪽

01 $f^{-1}(a)=-2$에서 $f(-2)=a$이므로

$a=3\cdot(-2)-2=-8$ 답 -8

02 $f^{-1}(7)=a$에서 $f(a)=7$이므로

$3a-2=7,\quad 3a=9$

$\therefore a=3$ 답 3

03 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=-2x+8$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$2x=-y+8\quad \therefore x=-\frac{1}{2}y+4$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{1}{2}x+4$ 답 $y=-\frac{1}{2}x+4$

04 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=\frac{1}{5}x-2$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{5}x=y+2\quad \therefore x=5y+10$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=5x+10$ 답 $y=5x+10$

05 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(1)=(g^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(f(1))$

$=g^{-1}(-2)$

$g^{-1}(-2)=k$라 하면 $g(k)=-2$이므로

$k+4=-2\quad \therefore k=-6$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(1)=-6$ 답 -6

06 $(f\circ g^{-1})^{-1}(-2)=(g\circ f^{-1})(-2)=g(f^{-1}(-2))$

$f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$이므로

$-3k+1=-2,\quad -3k=-3$

$\therefore k=1$

$\therefore (f\circ g^{-1})^{-1}(-2)=g(1)=5$ 답 5

Q BOX

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점과 같다.

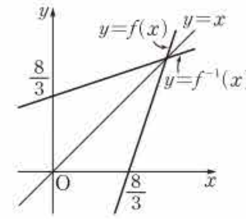
함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$y=f(x)$의 그래프의 기울기가 양수

두 함수 f, g의 역함수가 존재할 때,
$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

57~59쪽

07 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다. 즉 두 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로



$3x-8=x$에서

$2x=8\quad \therefore x=4$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(4,\ 4)$ 답 $(4,\ 4)$

표준+발전 유형 Q+Q

59쪽

01 $f^{-1}(9)=-2$에서 $f(-2)=9$이므로

$-2a+b=9$ …… ㉠

$f^{-1}(-7)=6$에서 $f(6)=-7$이므로

$6a+b=-7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=5$

$\therefore ab=-10$ 답 -10

02 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)라 하면 $f(0)=0$에서 $c=0$

$\therefore f(x)=ax^2+bx$

$f^{-1}(6)=2$에서 $f(2)=6$이므로

$4a+2b=6\quad \therefore 2a+b=3$ …… ㉠

$f^{-1}(-10)=-2$에서 $f(-2)=-10$이므로

$4a-2b=-10\quad \therefore 2a-b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2},\ b=4$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$이므로

$f(4)=-\frac{1}{2}\cdot4^2+4\cdot4=8$ 답 ④

03 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.
이때 $f(x)=4x+3$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로

$a=f(-3)=-12+3=-9,$

$b=f(2)=8+3=11$

$\therefore a+b=2$ 답 ⑤

04 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.
이때 $f(x)=x^2-4x-24=(x-2)^2-28$에서

$a\geq2,\ f(a)=a$

$f(a)=a$에서 $a^2-4a-24=a$

$a^2-5a-24=0,\quad (a+3)(a-8)=0$

$\therefore a=8\ (\because a\geq2)$ 답 8

05 $y=ax+9$라 하면

$ax=y-9 \qquad \therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{9}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{a}x-\frac{9}{a}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{9}{a}$이므로

$\frac{1}{a}=\frac{1}{3},\ -\frac{9}{a}=b$

$\therefore a=3,\ b=-3$

$\therefore a-b=6$ 답 6

06 $y=\frac{1}{a}x+1$이라 하면

$\frac{1}{a}x=y-1 \qquad \therefore x=ay-a$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=ax-a$

$\therefore f^{-1}(x)=ax-a$

$f=f^{-1}$에서 $\frac{1}{a}x+1=ax-a$이므로

$\frac{1}{a}=a,\ 1=-a$

$\therefore a=-1$ 답 ③

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\quad (f\circ f)(x)=x$

함수 f와 역함수 f^{-1}가 같으므로 $(f^{-1}\circ f)(x)=(f\circ f)(x)=x$임을 이용한다.

$f(x)=\frac{1}{a}x+1$에서

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}x+1\right)+1$

$=\left(\frac{1}{a}\right)^2x+\frac{1}{a}+1$

따라서 $\left(\frac{1}{a}\right)^2x+\frac{1}{a}+1=x$이므로

$\left(\frac{1}{a}\right)^2=1,\ \frac{1}{a}+1=0$

$\therefore a=-1$

07 $(f^{-1}\circ g)(a)=2$에서 $\quad f^{-1}(g(a))=2$

$\therefore f^{-1}(-4a+1)=2$

따라서 $f(2)=-4a+1$이므로

$13=-4a+1, \qquad 4a=-12$

$\therefore a=-3$ 답 -3

08 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{3}x+2\right)$

$=6\left(\frac{1}{3}x+2\right)+a$

$=2x+12+a$

따라서 $2x+12+a=2x+2$이므로

$12+a=2 \qquad \therefore a=-10$

$\therefore f(x)=6x-10$

$f^{-1}(8)=k$라 하면 $f(k)=8$이므로

$6k-10=8, \qquad 6k=18$

$\therefore k=3$

$\therefore (g\circ f^{-1})(8)=g(f^{-1}(8))=g(3)$

$=\frac{1}{3}\cdot 3+2=3$ 답 3

09 $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(-4)$

$=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(-4)$

$g\circ g^{-1}=I$ (I는 항등함수)

$=(f^{-1}\circ g)(-4)$

$=f^{-1}(g(-4))$

$=f^{-1}(10)$

$f^{-1}(10)=k$라 하면 $f(k)=10$이므로

$3k+1=10, \qquad 3k=9$

$\therefore k=3$

$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(-4)=3$ 답 ③

10 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(-x+5)$

$=3(-x+5)$

$=-3x+15$

$y=-3x+15$라 하면

$3x=-y+15 \qquad \therefore x=-\frac{1}{3}y+5$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{3}x+5$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+5$

$\therefore (g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)=(f\circ g)^{-1}(h(x))$

$=-\frac{1}{3}h(x)+5$

즉 $-\frac{1}{3}h(x)+5=f(x)$이므로

$-\frac{1}{3}h(3)+5=f(3)$

$-\frac{1}{3}h(3)+5=9$

$\frac{1}{3}h(3)=-4$

$\therefore h(3)=-12$ 답 ②

다른 풀이 $(g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)=f(x)$에서

$(g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)=f(x)$의 양변에 $(f\circ g)^{-1}$의 역함수, 즉 $(f\circ g)$를 합성하여 항등함수가 되도록 변형한다.

$((f\circ g)\circ(f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=((f\circ g)\circ f)(x)$

$\therefore h(x)=(f\circ g\circ f)(x)$

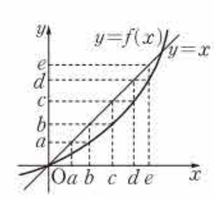
$\therefore h(3)=f(g(f(3)))$

$=f(g(9))$

$=f(-4)$

$=-12$

11 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(c)=k$라 하면 $f(k)=c$이므로

$k=d$

$f^{-1}(d)=l$이라 하면 $f(l)=d$이므로

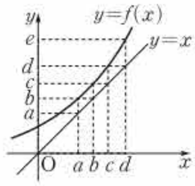
$l=e$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$=f^{-1}(d)$

$=e$ 답 ⑤

12 직선 $y=x$를 이용하여 x축과 접선이 만나는 점의 x좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(e)=k$라 하면 $f(k)=e$이므로 $\quad k=d$

$f^{-1}(d)=l$이라 하면 $f(l)=d$이므로 $\quad l=c$

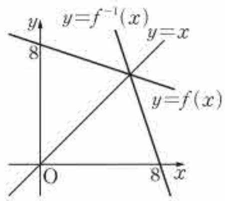
$f^{-1}(c)=m$이라 하면 $f(m)=c$이므로 $\quad m=b$

$\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(e)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(e)))$

$=f^{-1}(f^{-1}(d))$

$=f^{-1}(c)=b$ 답 ②

13 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다. 즉 두 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로



$-\frac{1}{3}x+8=x$에서

$-\frac{4}{3}x=-8 \quad \therefore x=6$

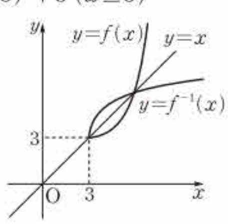
따라서 교점의 좌표는 $(6, 6)$이므로

$a=6, b=6$

$\therefore a+b=12$ 답 12

14 $f(x)=x^2-6x+12=(x-3)^2+3\ (x\ge 3)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다. 즉 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같으므로 $x^2-6x+12=x$에서



$x^2-7x+12=0, \quad (x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

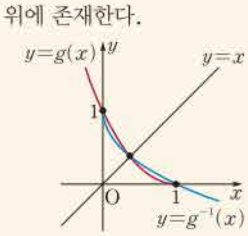
$X=\{x|x\ge 3\}$에서 정의되므로 3, 4 모두 근이 된다.

따라서 구하는 합은 $\quad 3+4=7$ 답 7

쌤 한마디

함수 $f(x)=x^2-6x+12\ (x\ge 3)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 모두 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

하지만 함수 $g(x)=(x-1)^2\ (x\le 1)$에 대하여 $y=g(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 밖에도 존재한다.



이처럼 어떤 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점이 반드시 직선 $y=x$ 위에만 존재하는 것은 아니므로 교점의 좌표를 구할 때에는 그래프를 그려서 교점의 위치를 확인해야 한다.

Lecture 11 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프 Ⓛ 61쪽

01 $x\ge -4$일 때, $x+4\ge 0$이므로

$f(x)=x+4-2=x+2$ 답 $f(x)=x+2$

$|x+4|=x+4$

02 $x<-4$일 때, $x+4<0$이므로

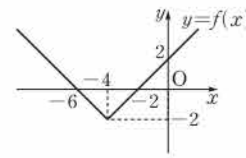
$f(x)=-(x+4)-2=-x-6$

$|x+4|=-(x+4)$

답 $f(x)=-x-6$

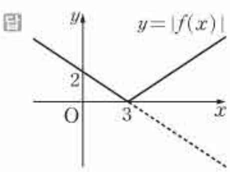
03 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\{y|y\ge -2\}$이다.

답 풀이 참조



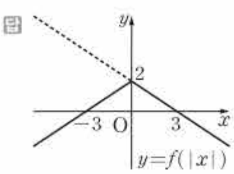
$f(x)=|x+4|-2$에서 절댓값 기호 안의 식인 $x+4$가 0이 되는 값, 즉 $x=-4$에서 그래프가 꺾인다.

04 답



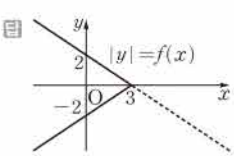
$y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

05 답



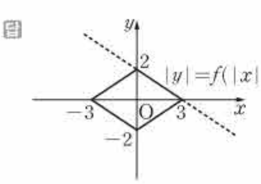
$x\ge 0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분을 없앤 다음 $x\ge 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.

06 답



$y\ge 0$인 부분만 남기고, $y<0$인 부분을 없앤 다음 $y\ge 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

07 답



$x\ge 0$, $y\ge 0$인 부분만 남긴 후 $x\ge 0$, $y\ge 0$인 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한다.

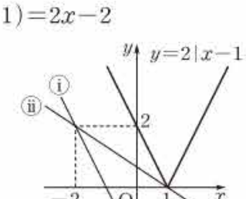
표준+발전 유형 Q+Q Ⓛ 62쪽

01 $y=2|x-1|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 1이므로

(i) $x<1$일 때, $\quad y=-2(x-1)=-2x+2$

(ii) $x\ge 1$일 때, $\quad y=2(x-1)=2x-2$

(i), (ii)에서 $y=2|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



한편 직선

$y=m(x+2)+2 \quad \cdots ㉠$

는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 2)$를 지난다.

ⓘ 직선 ㉠이 직선 $y=-2x+2$와 평행할 때,

$m=-2$

(ii) 직선 ㉠이 점 (1, 0)을 지날 때,

$0=3m+2, \qquad -3m=2$

$\therefore m=-\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 함수 $y=2|x-1|$의 그래프와 ㉠이 만나려면

$m<-2$ 또는 $m\geq-\frac{2}{3}$

따라서 m의 값이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

02 $y=|x+4|-|x-3|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 -4, 3이므로

(i) $x<-4$일 때,

$y=-(x+4)+x-3=-7$

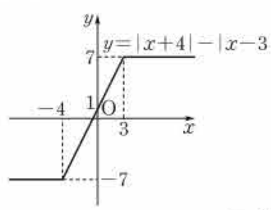
(ii) $-4\leq x<3$일 때,

$y=x+4+x-3=2x+1$

(iii) $x\geq3$일 때,

$y=x+4-(x-3)=7$

이상에서 $y=|x+4|-|x-3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$M=7,\ m=-7$

$\therefore M-m=14$ 답 ④

$y=|x-p|+|x-q|$의 그래프 (단, $p<q$)

➡ $x<p$, $p\leq x<q$, $x\geq q$일 때로 나누어 그래프를 그린다.

03 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 개형은 ②와 같다.

답 ②

04 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분을 없앤 다음 $x\geq0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ㄴ과 같다.

또 $|y|=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq0$, $y\geq0$인 부분만 남기고, $x\geq0$, $y\geq0$인 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 ㄷ과 같다.

따라서 구하는 그래프의 개형은 차례대로 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

중단원 마무리

63쪽

01 전략 k의 값의 범위를 나누어 생각한다.

풀이 (i) $0\leq k\leq5$일 때,

$3k=15$에서 $\qquad k=5$

(ii) $k>5$일 때,

$6+k=15$에서 $\qquad k=9$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 합은

$5+9=14$ 답 ②

02 전략 함수 f의 공역과 치역이 같으므로 $f(k)=k$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^2+12$의 공역과 치역이 같으므로

$f(k)=k$

즉 $-k^2+12=k$이므로

$k^2+k-12=0, \qquad (k+4)(k-3)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=3$

그런데 $k=3$이면 $x\leq3$에서 $f(x)$의 최댓값은 12이므로 치역은 $\{y|y\leq12\}$이고 공역은 $\{y|y\leq3\}$으로 공역과 치역이 같지 않다.

따라서 구하는 k의 값은 -4이다. 답 -4

03 전략 두 함수 f, g가 서로 같은 함수이면 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.

풀이 $f(x)=g(x)$에서

$x^3+3x-1=-4x^2+2x+5$

$x^3+4x^2+x-6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & 1 & 5 & 6 \\ \hline -2 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ & & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

$(x+3)(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ ···· ❶

따라서 집합 X는 집합 $\{-3, -2, 1\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 그 개수는

$2^3-1=7$ ···· ❷

답 7

단계	채점 기준	비율
❶	방정식 $f(x)=g(x)$의 해를 구할 수 있다.	60 %
❷	집합 X의 개수를 구할 수 있다.	40 %

04 전략 $x<-2$일 때와 $x\geq-2$일 때로 나누어 함수 $f(x)$를 구한 후 일대일대응이 되도록 하는 조건을 생각한다.

풀이 (i) $x<-2$일 때,

$f(x)=-a(x+2)-4x=-(a+4)x-2a$

(ii) $x\geq-2$일 때,

$f(x)=a(x+2)-4x=(a-4)x+2a$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} -(a+4)x-2a & (x<-2) \\ (a-4)x+2a & (x\geq-2) \end{cases}$$

함수 f가 일대일대응이 되려면 두 직선 $y=-(a+4)x-2a$, $y=(a-4)x+2a$의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다. 즉

$-(a+4)>0,\ a-4>0$

또는 $-(a+4)<0,\ a-4<0$

이때 $-(a+4)>0,\ a-4>0$을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

$-(a+4)>0$에서 $a+4<0 \quad \therefore a<-4$

$a-4>0$에서 $\quad a>4$

$-(a+4)<0,\ a-4<0$에서

$a+4>0,\ a<4 \qquad \therefore -4<a<4$

따라서 정수 a는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$의 7개이다.

답 7

05 전략 $f(-3)=-3$, $f(-2)=-2$, $f(4)=4$를 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

풀이 함수 f가 항등함수가 되려면

$f(-3)=-3,\ f(-2)=-2,\ f(4)=4$

이어야 한다.

$x\geq 0$일 때 $f(4)=4$를 만족시키고 $x<0$일 때 $f(x)=ax^2+bx-6$이므로 $f(-3)=-3$, $f(-2)=-2$에서

$9a-3b-6=-3,\ 4a-2b-6=-2$

$\therefore 3a-b=1,\ 2a-b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=-4$

$\therefore ab=4$ 답 4

06 **전략** $m=1, 2, 3, 4$인 경우로 나누어 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역을 구해 본다.

풀이 함수 $g(x)$는 자연수 x를 4로 나눈 나머지이므로 함수 $g(x)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다.

(i) $m=1$일 때,

$f(x)=x$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)$

따라서 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다.

(ii) $m=2$일 때,

$f(x)=2x$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)$

$=(2x$를 4로 나눈 나머지$)$

이때 $2x$는 2의 배수이고, 2의 배수를 4로 나눈 나머지는 0 또는 2이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0, 2\}$이다.

(iii) $m=3$일 때,

$f(x)=3x$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x)$

$=(3x$를 4로 나눈 나머지$)$

이때 $3x$는 3의 배수이고, 3의 배수를 4로 나눈 나머지는 0, 1, 2, 3이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다.

3, 6, 9, 12, 15, …를 각각 4로 나누었을 때 나머지는

3, 2, 1, 0, 3, …

(iv) $m=4$일 때,

$f(x)=4x$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4x)$

$=(4x$를 4로 나눈 나머지$)$

이때 $4x$는 4의 배수이고, 4의 배수를 4로 나눈 나머지는 항상 0이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0\}$이다.

이상에서 m이 4의 배수가 아닌 경우 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역의 원소의 개수는 2 이상이고, m이 4의 배수인 경우 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 항상 $\{0\}$이다.

따라서 치역의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값은 4이다. 답 ③

07 **전략** $f\circ g=g\circ f$의 양변을 미정계수를 포함한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(-3)=8$에서 $\quad -3a+2=8$

$-3a=6 \quad \therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2x+2,\ g(x)=bx+4$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+4)$

$=-2(bx+4)+2=-2bx-6$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-2x+2)$

$=b(-2x+2)+4=-2bx+2b+4$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$-6=2b+4,\quad -2b=10 \quad \therefore b=-5$

$\therefore a+b=-7$ 답 ④

08 **전략** 먼저 $(f\circ f)(x)$를 구한 후 인수정리를 이용한다.

풀이 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x^2+a)$

$=(x^2+a)^2+a=x^4+2ax^2+a^2+a$

$(f\circ f)(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로

$(f\circ f)(2)=16+8a+a^2+a=0$

$\therefore a^2+9a+16=0$

(판별식)>0이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 -9이다. 답 -9

쌤한마디

인수정리

다항식 $P(x)$에 대하여

① $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

② $P(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$이다.

09 **전략** 먼저 $(g\circ f)(x)$를 구한 후 a의 값의 범위를 나누어 생각한다.

풀이 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$$=\begin{cases} x^2-2ax+16 & (x<0) \\ x+16 & (x\geq 0) \end{cases}$$

$g(f(x))$
$=(x^2-2ax+8)+8$
$=x^2-2ax+16$

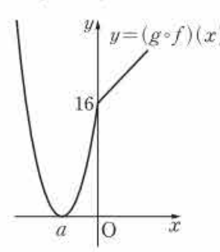
$g(f(x))=(x+8)+8$
$=x+16$

(i) $a<0$일 때, 함수

$y=x^2-2ax+16$

$=(x-a)^2+16-a^2$

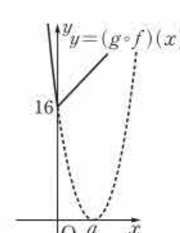
의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 음수이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y\geq 0\}$이려면 위의 그림과 같이 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 한다.



즉 $16-a^2=0$이므로 $\quad a^2=16$

$\therefore a=-4\ (\because a<0)$

(ii) $a>0$일 때, 함수 $y=x^2-2ax+16$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 양수이므로 오른쪽 그림과 같이 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y\geq 16\}$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.



(i), (ii)에서 $\quad a=-4$ 답 ①

10 전략 $(h\circ g\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))$임을 이용한다.

풀이 $(h\circ g\circ f)(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$
$=(h\circ g)(f(x))$

이므로

$-3f(x)-2=6x+10,\qquad -3f(x)=6x+12$

$\therefore f(x)=-2x-4$

$\therefore f(-5)=-2\cdot(-5)-4=6$ 답 6

다른 풀이 $(h\circ g\circ f)(-5)=(h\circ g)(f(-5))$에서

$-3f(-5)-2=6\cdot(-5)+10$

$-3f(-5)=-18\qquad \therefore f(-5)=6$

11 전략 주어진 그래프에서 $f(x)$의 식을 구한 후 자연수 n에 대하여 $f^n(1)$의 값의 규칙성을 찾는다.

풀이 $f(x)=\begin{cases}-2x+4 & (0\le x<2)\\ \frac{1}{2}x-1 & (2\le x\le 4)\end{cases}$ 이고 $f(1)=2$이므로

$f^2(1)=f(f(1))=f(2)=0$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(0)=4$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(4)=1$

$f^5(1)=f(f^4(1))=f(1)=2$

$\vdots$

즉 $f^n(1)$의 값은 2, 0, 4, 1이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore f(1)+f^2(1)+f^3(1)+\cdots+f^{100}(1)$

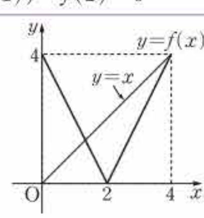
$=25\cdot(2+0+4+1)=175$ 답 175

12 전략 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같음을 이용한다.

풀이 ㄱ. $f(1)=2$이므로 $\qquad f(f(1))=f(2)=0$

$f(x)=|2x-4|$에서
$f(1)=|2\cdot1-4|$
$=2$

ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근의 개수는 2이다.



ㄷ. 주어진 그래프에서

$f(x)=\begin{cases}-2x+4 & (0\le x<2)\\ 2x-4 & (2\le x\le 4)\end{cases}$

이므로

$f(f(x))=\begin{cases}-2f(x)+4 & (0\le f(x)<2)\\ 2f(x)-4 & (2\le f(x)\le 4)\end{cases}$

(i) $0\le x<1$일 때, $2<f(x)\le 4$이므로

$-2x+4=2$에서
$x=1$

$f(f(x))=f(-2x+4)$
$=2(-2x+4)-4=-4x+4$

(ii) $1\le x<2$일 때, $0<f(x)\le 2$이므로

$f(f(x))=f(-2x+4)$
$=-2(-2x+4)+4=4x-4$

(iii) $2\le x<3$일 때, $0\le f(x)<2$이므로

$2x-4=2$에서
$x=3$

$f(f(x))=f(2x-4)$
$=-2(2x-4)+4=-4x+12$

(iv) $3\le x\le 4$일 때, $2\le f(x)\le 4$이므로

$f(f(x))=f(2x-4)$
$=2(2x-4)-4=4x-12$

(i)~(iv)에서

$f(f(x))=\begin{cases}-4x+4 & (0\le x<1)\\ 4x-4 & (1\le x<2)\\ -4x+12 & (2\le x<3)\\ 4x-12 & (3\le x\le 4)\end{cases}$

방정식 $f(f(x))=f(x)$에서

$0\le x<1$일 때, $\qquad -4x+4=-2x+4$

$-2x=0\qquad \therefore x=0$

$1\le x<2$일 때, $\qquad 4x-4=-2x+4$

$6x=8\qquad \therefore x=\frac{4}{3}$

$2\le x<3$일 때, $\qquad -4x+12=2x-4$

$-6x=-16\qquad \therefore x=\frac{8}{3}$

$3\le x\le 4$일 때, $\qquad 4x-12=2x-4$

$2x=8\qquad \therefore x=4$

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은

$0+\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+4=8$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

13 전략 $\frac{6-x}{4}=t$로 놓고 $f(x)$를 구한 후 $f^{-1}(10)$의 값을 구한다.

풀이 $\frac{6-x}{4}=t$로 놓으면 $\qquad 6-x=4t$

$\therefore x=-4t+6$

따라서 $f(t)=\frac{1}{2}(-4t+6)+3=-2t+6$이므로

$f(x)=-2x+6$ ··· ❶

$f^{-1}(10)=k$라 하면 $f(k)=10$이므로

$-2k+6=10,\qquad -2k=4$

$k=-2\qquad \therefore f^{-1}(10)=-2$ ··· ❷

답 -2

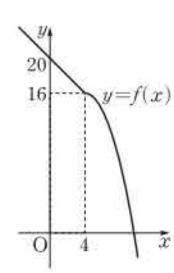
단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷	$f^{-1}(10)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

14 전략 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응임을 이용하여 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 함수 f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이다. 한편

$y=-ax^2+8ax+b$
$=-a(x-4)^2+16a+b$

이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $-a<0$이므로 $\qquad a>0$

또 $y=-ax^2+8ax+b$의 그래프가 점 $(4, 16)$을 지나야 하므로

$-16a+32a+b=16 \qquad \therefore 16a+b=16$

한편 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$16a+b \geq 2\sqrt{16ab}$

$16 \geq 8\sqrt{ab}, \qquad 2 \geq \sqrt{ab}$

$\therefore ab \leq 4 \left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{2},\ b=8\text{일 때 성립}\right)$

따라서 ab의 최댓값은 4이다. 답 ③

Q BOX

등호는 $16a=b$일 때 성립하고 $16a+b=16$이므로

$16a=8,\ b=8$

$\therefore a=\frac{1}{2},\ b=8$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=8$일 때 ab는 최댓값을 갖는다.

15 전략 $f \circ g$를 구하여 동류항의 계수를 비교한다.

풀이 $(f \circ g)^{-1}(4x-6)=x$에서

$(f \circ g)(x)=4x-6$

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x+c)$

$=a(x+c)+b=ax+ac+b$

이므로 $ax+ac+b=4x-6$에서

$a=4,\ ac+b=-6$

$\therefore a=4,\ 4c+b=-6$

$f^{-1}(-6)=-2$에서 $f(-2)=-6$이므로

$-2a+b=-6$

$a=4$를 위의 식에 대입하면

$-8+b=-6 \qquad \therefore b=2$

$b=2$를 $4c+b=-6$에 대입하면

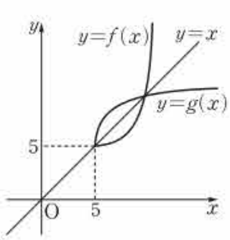
$4c+2=-6, \qquad 4c=-8$

$\therefore c=-2$

$\therefore abc=-16$ 답 ②

16 전략 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점임을 이용한다.

풀이 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로 $x^2-10x+30=x$에서



$x^2-11x+30=0$

$(x-5)(x-6)=0$

$\therefore x=5$ 또는 $x=6$ ···· ❶

따라서 두 교점의 좌표는 $(5, 5)$, $(6, 6)$이므로 구하는 거리는

$\sqrt{(6-5)^2+(6-5)^2}=\sqrt{2}$ ···· ❷

답 $\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	두 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	70 %
❷	두 교점 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

쌤한마디

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

① 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

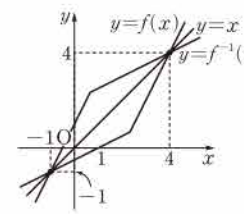
$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

② 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

17 전략 세 함수 $y=x$, $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 x의 값을 구한다.

풀이 세 함수 $y=x$, $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\{f(x)\}^2=f(x)f^{-1}(x)$에서

$f(x)\{f(x)-f^{-1}(x)\}=0$

$\therefore f(x)=0$ 또는 $f(x)=f^{-1}(x)$

(i) $f(x)=0$일 때,

$y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$x=1$

(ii) $f(x)=f^{-1}(x)$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는

$x=-1$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 모든 실수 x의 값의 합은

$1+(-1)+4=4$ 답 ④

18 전략 $a>4$일 때와 $a \leq 4$일 때로 나누어 $(f \circ g)(4)$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $(g \circ f)(1)=g(f(1))=g(1+a)=(1+a)^2$

$1+a>a$이므로 $g(x)=x^2$에 대입한다.

한편 $(f \circ g)(4)=f(g(4))$에서

(i) $a>4$일 때,

$g(4)=2 \cdot 4-6=2$이므로

$(f \circ g)(4)=f(g(4))=f(2)=2+a$

$\therefore (g \circ f)(1)+(f \circ g)(4)=(1+a)^2+2+a$

$=a^2+3a+3$

즉 $a^2+3a+3=57$에서

$a^2+3a-54=0, \qquad (a+9)(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>4)$

(ii) $a \leq 4$일 때,

$g(4)=4^2=16$이므로

$(f \circ g)(4)=f(g(4))=f(16)=16+a$

$\therefore (g \circ f)(1)+(f \circ g)(4)=(1+a)^2+16+a$

$=a^2+3a+17$

즉 $a^2+3a+17=57$에서

$a^2+3a-40=0, \qquad (a+8)(a-5)=0$

$\therefore a=-8\ (\because a \leq 4)$

L 04 함수

(ⅰ), (ⅱ)에서 a의 값은 -8, 6이므로

$S=-8+6=-2$

$\therefore 10S^2=10\cdot(-2)^2=40$ 답 40

19 전략 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이고

$f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=3+a,\ f(4)=4+a$

이므로

$f(3)=2,\ f(4)=3$ 또는 $f(3)=3,\ f(4)=2$

(ⅰ) $f(3)=2$, $f(4)=3$일 때,

$3+a=2$, $4+a=3$이므로 $a=-1$

(ⅱ) $f(3)=3$, $f(4)=2$일 때,

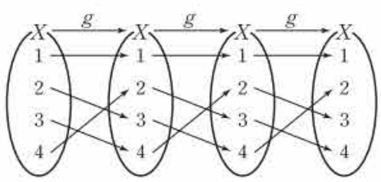
$3+a=3$, $4+a=2$를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

$3+a=3$에서 $a=0$

$4+a=2$에서 $a=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-1$

따라서 $g(1)=1$, $g(2)=3$, $g(3)=4$, $g(4)=2$이므로 g^1, g^2, g^3의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉 $g^3(x)=x$이므로

$g^{10}(2)=g^{3\cdot3+1}(2)=g^1(2)=3$,

$g^{11}(2)=g^{3\cdot3+2}(2)=g^2(2)=4$

$\therefore a+g^{10}(2)+g^{11}(2)=-1+3+4$

$=6$ 답 ③

Q BOX

05 유리식과 유리함수

Lecture 12 유리식

67쪽

다항식 A, B, C ($B\neq0$, $C\neq0$)에 대하여 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\times C}{B\times C}$

01 $\dfrac{b}{3axy}$, $\dfrac{x}{2aby^2}$에서 공통분모가 $6abxy^2$이 되도록 통분하면

$\dfrac{2b^2y}{6abxy^2}$, $\dfrac{3x^2}{6abxy^2}$ 답 $\dfrac{2b^2y}{6abxy^2}$, $\dfrac{3x^2}{6abxy^2}$

분자, 분모 중 인수분해되는 식은 인수분해한 다음 통분한다.

02 $\dfrac{x}{x^2+3x-10}=\dfrac{x}{(x+5)(x-2)}$,

$\dfrac{x-3}{x^2-4}=\dfrac{x-3}{(x+2)(x-2)}$에서 공통분모가 $(x+5)(x+2)(x-2)$가 되도록 통분하면

$\dfrac{x(x+2)}{(x+5)(x+2)(x-2)}$, $\dfrac{(x-3)(x+5)}{(x+5)(x+2)(x-2)}$

답 $\dfrac{x(x+2)}{(x+5)(x+2)(x-2)}$, $\dfrac{(x-3)(x+5)}{(x+5)(x+2)(x-2)}$

다항식 A, B, C ($B\neq0$, $C\neq0$)에 대하여 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\div C}{B\div C}$

03 답 $\dfrac{6x^2}{5y}$

04 $\dfrac{x^3+4x^2-5x}{x^2+5x}=\dfrac{x(x+5)(x-1)}{x(x+5)}=x-1$

답 $x-1$

05 $\dfrac{2}{x+4}+\dfrac{3}{x^2+x-12}=\dfrac{2}{x+4}+\dfrac{3}{(x+4)(x-3)}$

$=\dfrac{2(x-3)+3}{(x+4)(x-3)}$

$=\dfrac{2x-3}{(x+4)(x-3)}$

답 $\dfrac{2x-3}{(x+4)(x-3)}$

06 $\dfrac{x-3}{x+1}-\dfrac{5x-7}{x^2+5x+4}$

$=\dfrac{x-3}{x+1}-\dfrac{5x-7}{(x+1)(x+4)}$

$=\dfrac{(x-3)(x+4)-(5x-7)}{(x+1)(x+4)}$

$=\dfrac{x^2+x-12-5x+7}{(x+1)(x+4)}$

$=\dfrac{x^2-4x-5}{(x+1)(x+4)}$

$=\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x+1)(x+4)}=\dfrac{x-5}{x+4}$ 답 $\dfrac{x-5}{x+4}$

07 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3x}{x^2-x+1}-\dfrac{4x^2+x}{x^3+1}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3x}{x^2-x+1}-\dfrac{x(4x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{x^2-x+1+3x(x+1)-x(4x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{x^2-x+1+3x^2+3x-4x^2-x}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{1}{x^2-x+1}$ 답 $\dfrac{1}{x^2-x+1}$

08 $\dfrac{1-x}{2x^2-x-6}\times\dfrac{2x+3}{3x^2-2x-1}$

$=\dfrac{-(x-1)}{(2x+3)(x-2)}\times\dfrac{2x+3}{(3x+1)(x-1)}$

$=-\dfrac{1}{(x-2)(3x+1)}$ 답 $-\dfrac{1}{(x-2)(3x+1)}$

09 $\dfrac{x^2+7x+10}{3x^2-11x-4}\div\dfrac{-x^2-4x+5}{3x^2-8x-3}$

$=\dfrac{(x+2)(x+5)}{(3x+1)(x-4)}\div\dfrac{-(x+5)(x-1)}{(3x+1)(x-3)}$

$=-\dfrac{(x+2)(x+5)}{(3x+1)(x-4)}\times\dfrac{(3x+1)(x-3)}{(x+5)(x-1)}$

$=-\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-4)(x-1)}$ 답 $-\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-4)(x-1)}$

10 $\dfrac{x+5}{x^2-x-12}\times\dfrac{2x^2+9x+9}{4x^2-7x-2}\div\dfrac{2x^2+13x+15}{x^2-6x+8}$

$=\dfrac{x+5}{(x+3)(x-4)}\times\dfrac{(2x+3)(x+3)}{(4x+1)(x-2)}$

$\div\dfrac{(2x+3)(x+5)}{(x-2)(x-4)}$

$=\dfrac{x+5}{(x+3)(x-4)}\times\dfrac{(2x+3)(x+3)}{(4x+1)(x-2)}$

$\times\dfrac{(x-2)(x-4)}{(2x+3)(x+5)}$

$=\dfrac{1}{4x+1}$ 답 $\dfrac{1}{4x+1}$

11 $\dfrac{x+2}{x-4}-\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{(x-4)+6}{x-4}-\dfrac{(x-2)+1}{x-2}$

$=\left(1+\dfrac{6}{x-4}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)$

$=\dfrac{6}{x-4}-\dfrac{1}{x-2}$

$=\dfrac{6(x-2)-(x-4)}{(x-4)(x-2)}$

$=\dfrac{5x-8}{(x-4)(x-2)}$

답 $\dfrac{5x-8}{(x-4)(x-2)}$

12 $x^2+5x+11=x(x+2)+3(x+2)+5$

$=(x+2)(x+3)+5$

$x^2+x-4=x(x-2)+3(x-2)+2$

$=(x-2)(x+3)+2$

$\therefore\ \dfrac{x^2+5x+11}{x+2}-\dfrac{x^2+x-4}{x-2}$

$=\dfrac{(x+2)(x+3)+5}{x+2}-\dfrac{(x-2)(x+3)+2}{x-2}$

$=\left(x+3+\dfrac{5}{x+2}\right)-\left(x+3+\dfrac{2}{x-2}\right)$

$=\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{2}{x-2}$

$=\dfrac{5(x-2)-2(x+2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{3x-14}{(x+2)(x-2)}$ 답 $\dfrac{3x-14}{(x+2)(x-2)}$

Q BOX

$$\begin{array}{r}
x+3 \\
x+2\,\overline{)\,x^2+5x+11} \\
\underline{x^2+2x} \\
3x+11 \\
\underline{3x+\ \ 6} \\
5
\end{array}$$

따라서 $x^2+5x+11$을 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $x+3$, 나머지는 5이므로

$\dfrac{x^2+5x+11}{x+2}$

$=x+3+\dfrac{5}{x+2}$

와 같이 구할 수도 있다.

13 $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$

$=\dfrac{1}{x+1-(x-1)}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$+\dfrac{1}{x+3-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+3-(x-1)}{(x-1)(x+3)}$

$=\dfrac{2}{(x-1)(x+3)}$ 답 $\dfrac{2}{(x-1)(x+3)}$

14 $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$

$=\dfrac{1}{x+2-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$+\dfrac{1}{x+3-(x+2)}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$+\dfrac{1}{x+4-(x+3)}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+4}$

$=\dfrac{x+4-(x+1)}{(x+1)(x+4)}$

$=\dfrac{3}{(x+1)(x+4)}$ 답 $\dfrac{3}{(x+1)(x+4)}$

15 $\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}$

$=\dfrac{2}{x+2-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$+\dfrac{2}{x+4-(x+2)}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+4}$

$=\dfrac{(x+4)-x}{x(x+4)}$

$=\dfrac{4}{x(x+4)}$ 답 $\dfrac{4}{x(x+4)}$

16 $\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\dfrac{x}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}$ 답 $\dfrac{1}{x-1}$

17 $\dfrac{\frac{x^2+3x}{x-1}}{\frac{x^2-9}{x^2-1}}=\dfrac{\frac{x(x+3)}{x-1}}{\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-1)}}$

$=\dfrac{x(x+3)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+3)(x-3)}$

$=\dfrac{x(x+1)}{x-3}$ 답 $\dfrac{x(x+1)}{x-3}$

18 $x : y = 3 : 2$이므로

$x=3k,\ y=2k\ (k\neq 0)$

로 놓으면

$$\frac{x+2y}{x-y}=\frac{3k+4k}{3k-2k}=\frac{7k}{k}=7$$ 답 7

비례식에서는 비의 값이 일정하므로 일정한 비의 값을 비례상수 k로 놓고, 각 문자를 k에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 식에 대입하여 식의 값을 계산한다.

19 $x : y : z = 1 : 2 : 5$이므로

$x=k,\ y=2k,\ z=5k\ (k\neq 0)$

로 놓으면

$$\frac{xz+y^2}{2x^2+z^2}=\frac{5k^2+4k^2}{2k^2+25k^2}=\frac{9k^2}{27k^2}=\frac{1}{3}$$ 답 $\frac{1}{3}$

표준+발전 유형 Q+Q

68쪽

01 $\frac{x^2-1}{x^2-x+1}\times\frac{x^2-x-12}{x^2+4x+3}\div\frac{x-1}{x^3+1}$

$=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2-x+1}\times\frac{(x+3)(x-4)}{(x+1)(x+3)}\div\frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2-x+1}\times\frac{(x+3)(x-4)}{(x+1)(x+3)}\times\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x-1}$

$=(x+1)(x-4)$

$=x^2-3x-4$ 답 ②

02 $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}$

$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+3}\right)$

$=\frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)}+\frac{x+3-(x+4)}{(x+3)(x+4)}$

$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+3)(x+4)}$

$=\frac{(x+3)(x+4)-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

$=\frac{x^2+7x+12-(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

$=\frac{4x+10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

따라서 $f(x)=4x+10$이므로 방정식 $f(x)=0$의 해는

$x=-\frac{5}{2}$ 답 $x=-\frac{5}{2}$

분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같을 때, 분자의 차수가 분모의 차수보다 작아지도록 변형하면 계산이 편리하다.

간단한 식이 되도록 적당히 두 개씩 묶어서 계산한다.

03 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 x^3-1을 곱하여 정리하면

$3x+2=a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)$

$\therefore\ 3x+2=(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a-b+c=3$ 답 3

x에 대한 항등식
➡ 모든 x에 대하여 성립하는 등식
➡ 임의의 x에 대하여 성립하는 등식
➡ x의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식

쌤한마디

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다.
⇔ $a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이다.
⇔ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 $x,\ y$에 대한 항등식이다.
⇔ $a=b=c=0$

④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 $x,\ y$에 대한 항등식이다.
⇔ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

04 주어진 식의 양변에 $x(x+2)^2$을 곱하여 정리하면

$a(x+2)^2+bx(x+2)+cx=1$

$\therefore\ (a+b)x^2+(4a+2b+c)x+4a=1$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ 4a+2b+c=0,\ 4a=1$

$4a=1$에서 $a=\frac{1}{4}$

$a=\frac{1}{4}$을 $a+b=0$에 대입하면

$\frac{1}{4}+b=0 \qquad \therefore\ b=-\frac{1}{4}$

$a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{4}$을 $4a+2b+c=0$에 대입하면

$1-\frac{1}{2}+c=0 \qquad \therefore\ c=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ a-b-c=1$ 답 1

05 $\frac{x-2}{x-3}+\frac{2x+5}{x+2}-\frac{x+2}{x+1}-\frac{2x-3}{x-2}$

$=\frac{(x-3)+1}{x-3}+\frac{2(x+2)+1}{x+2}-\frac{(x+1)+1}{x+1}-\frac{2(x-2)+1}{x-2}$

$=\left(1+\frac{1}{x-3}\right)+\left(2+\frac{1}{x+2}\right)-\left(1+\frac{1}{x+1}\right)-\left(2+\frac{1}{x-2}\right)$

$=\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\right)$

$=\frac{x+1-(x-3)}{(x-3)(x+1)}+\frac{x-2-(x+2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{4}{(x-3)(x+1)}-\frac{4}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{4(x+2)(x-2)-4(x-3)(x+1)}{(x+2)(x+1)(x-2)(x-3)}$

$=\frac{4(x^2-4)-4(x^2-2x-3)}{(x+2)(x+1)(x-2)(x-3)}$

$=\frac{\boxed{8x-4}}{(x+2)(x+1)(x-2)(x-3)}$ 답 $8x-4$

06 $x^3=x(x^2+x+1)-(x^2+x+1)+1$

$=(x^2+x+1)(x-1)+1$

이므로 $\frac{x^3}{x^2+x+1}=x-1+\frac{1}{x^2+x+1}$

$x^3=x(x^2-x+1)+(x^2-x+1)-1$
$\quad =(x^2-x+1)(x+1)-1$

이므로 $\dfrac{x^3}{x^2-x+1}=x+1-\dfrac{1}{x^2-x+1}$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{x^3}{x^2+x+1}-\frac{x^3}{x^2-x+1}+2\\ &=\left(x-1+\frac{1}{x^2+x+1}\right)\\ &\quad-\left(x+1-\frac{1}{x^2-x+1}\right)+2\\ &=\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\\ &=\frac{x^2-x+1+(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}\\ &=\frac{2(x^2+1)}{x^4+x^2+1}\end{aligned}$$

답 ⑤

QBOX

(a^2+ab+b^2)
$\times(a^2-ab+b^2)$
$=a^4+a^2b^2+b^4$

07 $\dfrac{3}{x(x+3)}+\dfrac{4}{(x+3)(x+7)}+\dfrac{5}{(x+7)(x+12)}$

$$\begin{aligned}&=\frac{3}{x+3-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)\\ &\quad+\frac{4}{x+7-(x+3)}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+7}\right)\\ &\quad+\frac{5}{x+12-(x+7)}\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+12}\right)\\ &=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+12}\\ &=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+12}\\ &=\frac{x+12-x}{x(x+12)}\\ &=\frac{12}{x(x+12)}\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{12}{x(x+12)}=\dfrac{a}{x(x+b)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=12,\ b=12$

$\therefore\ a+b=24$

답 24

08 $f(x)=x^2-1$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)}&=\frac{1}{x^2-1}\\ &=\frac{1}{(x-1)(x+1)}\\ &=\frac{1}{x+1-(x-1)}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(4)}+\cdots+\frac{1}{f(10)}\\ &=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\\ &=\frac{36}{55}\end{aligned}$$

답 ③

09
$$\begin{aligned}1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}}&=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{x-1}{x}}}}\\ &=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{x-1}}}\\ &=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{-1}{x-1}}}\\ &=1-\frac{1}{1+x-1}\\ &=1-\frac{1}{x}\\ &=\frac{x-1}{x}\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{ax+b}{x}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1,\ b=-1$

$\therefore\ ab=-1$

답 -1

10
$$\begin{aligned}\cfrac{\cfrac{1}{n+1}-\cfrac{1}{n+6}}{\cfrac{1}{n+6}-\cfrac{1}{n+11}}&=\cfrac{\cfrac{n+6-(n+1)}{(n+1)(n+6)}}{\cfrac{n+11-(n+6)}{(n+6)(n+11)}}\\ &=\cfrac{\cfrac{5}{(n+1)(n+6)}}{\cfrac{5}{(n+6)(n+11)}}\\ &=\frac{5(n+6)(n+11)}{5(n+1)(n+6)}\\ &=\frac{n+11}{n+1}\\ &=\frac{(n+1)+10}{n+1}\\ &=1+\frac{10}{n+1}\end{aligned}$$

이것이 자연수가 되려면 $n+1$이 10의 양의 약수이어야 하므로 $n+1$이 될 수 있는 값은

1, 2, 5, 10

따라서 정수 n은 0, 1, 4, 9이므로 구하는 합은

$0+1+4+9=14$

답 14

11 $x^2-3x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x^2-3x+1=0$의 좌변에 $x=0$을 대입하면
$0^2-3\cdot0+1\neq0$
이므로 $x\neq0$

$x-3+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x+\dfrac{1}{x}=3$

$$\begin{aligned}\therefore\ &3x^2+4x-1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\\ &=3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\\ &=3\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\\ &=3\cdot(3^2-2)+4\cdot3-1=32\end{aligned}$$

답 ③

쌤한마디

$x^k \pm \frac{1}{x^k}$ 꼴의 유리식의 값을 구할 때에는 다음과 같은 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

① $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

② $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

③ $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

12 $ab\neq0$이므로 $a^2-4ab+b^2=0$의 양변을 ab로 나누면

$$\frac{a}{b}-4+\frac{b}{a}=0$$

$$\therefore \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4$$

$$\therefore \frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

$$=4^3-3\cdot4=52$$

답 ①

13 $a+b+c=0$에서 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$이므로

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$

$$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

$$=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

$$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}$$

$$=-3$$

답 -3

다른 풀이 $a+b+c=0$이므로

(주어진 식)

$$=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=a\cdot\frac{b+c}{bc}+b\cdot\frac{c+a}{ca}+c\cdot\frac{a+b}{ab}$$

$$=a\cdot\frac{-a}{bc}+b\cdot\frac{-b}{ca}+c\cdot\frac{-c}{ab}$$

$$=-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

이때

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

이므로

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=-\frac{3abc}{abc}=-3$$

Q BOX

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)$
$\times(a^2+b^2+c^2-ab$
$-bc-ca)$
$=0$
에서 $a^3+b^3+c^3=3abc$임을 이용한다.

14 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=0$에서 $\frac{a+b+c}{abc}=0$

$$\therefore a+b+c=0$$

이때

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

이므로

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$\therefore \frac{abc}{a^3+b^3+c^3}=\frac{abc}{3abc}=\frac{1}{3}$$

답 ②

15 $\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}=k$ $(k\neq0)$로 놓으면

$x+y=3k$, $y+z=4k$, $z+x=5k$ ...... ㉠

세 식을 변끼리 더하면

$$2(x+y+z)=12k$$

$\therefore x+y+z=6k$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$$x=2k,\ y=k,\ z=3k$$

$$\therefore \frac{x^2+y^2+z^2}{xy}=\frac{4k^2+k^2+9k^2}{2k^2}$$

$$=\frac{14k^2}{2k^2}=7$$

답 7

16 $3x=2y$이므로 $x=\frac{2}{3}y$

$3y=5z$이므로 $z=\frac{3}{5}y$

$$\therefore x:y:z=\frac{2}{3}y:y:\frac{3}{5}y=10:15:9$$

$x=10k$, $y=15k$, $z=9k$ $(k\neq0)$로 놓으면

$$\frac{3x+y-z}{x-y+z}=\frac{30k+15k-9k}{10k-15k+9k}$$

$$=\frac{36k}{4k}=9$$

답 9

다른 풀이 $x=\frac{2}{3}y$, $z=\frac{3}{5}y$이므로

$$\frac{3x+y-z}{x-y+z}=\frac{2y+y-\frac{3}{5}y}{\frac{2}{3}y-y+\frac{3}{5}y}$$

$$=\frac{\frac{12}{5}y}{\frac{4}{15}y}=9$$

17 $\begin{cases} x-y+z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y-2z=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$$3x-z=0 \qquad \therefore z=3x$$

$z=3x$를 ㉠에 대입하면

$$x-y+3x=0$$

$$\therefore y=4x$$

$$\therefore \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{4x^2+12x^2+3x^2}{x^2+16x^2+9x^2}$$

$$=\frac{19x^2}{26x^2}=\frac{19}{26}$$

답 ②

18 $x+\frac{1}{3y}=1$에서 $\quad x=1-\frac{1}{3y}=\frac{3y-1}{3y}$

$3y+\frac{2}{z}=1$에서 $\quad \frac{2}{z}=1-3y$

$\therefore z=\frac{2}{1-3y}$

$\therefore \frac{2}{x}+z=\frac{6y}{3y-1}+\frac{2}{1-3y}$

$=\frac{6y-2}{3y-1}=\frac{2(3y-1)}{3y-1}=2$ 답 ②

Lecture 13 유리함수

71쪽

01 $2x+1=0$에서 $\quad x=-\frac{1}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x \middle| x\neq -\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$ 답 $\left\{x \middle| x\neq -\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$

먼저 분모가 0이 되는 x의 값을 구한다.

02 $x^2-9=0$에서 $\quad x^2=9$

$\therefore x=\pm 3$

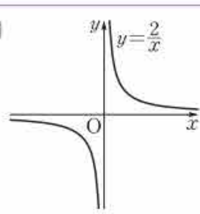
따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\neq -3,\ x\neq 3\text{인 실수}\}$

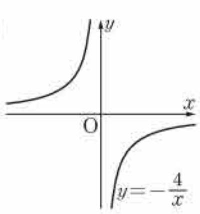
답 $\{x|x\neq -3,\ x\neq 3\text{인 실수}\}$

유리함수 $y=\frac{k}{x}\,(k\neq 0)$의 그래프는 k의 절댓값이 커질수록 원점으로부터 멀어진다.

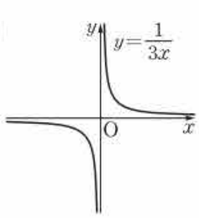
03 답



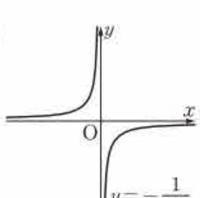
04 답



05 답



06 답

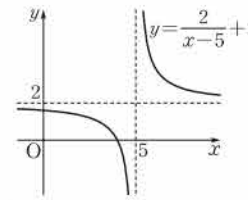


함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{k}{x-p}+q$

07 $y=\frac{2}{x-5}+2$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



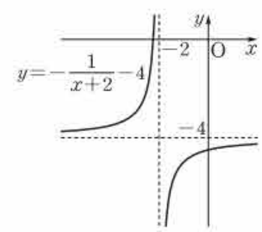
또 정의역은 $\{x|x\neq 5\text{인 실수}\}$,

치역은 $\{y|y\neq 2\text{인 실수}\}$이다.

답 풀이 참조

08 $y=-\frac{1}{x+2}-4$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



또 정의역은 $\{x|x\neq -2\text{인 실수}\}$,

치역은 $\{y|y\neq -4\text{인 실수}\}$이다.

답 풀이 참조

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$의 그래프는

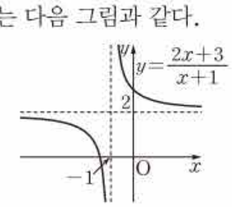
$y=\frac{k}{x-p}+q$

꼴로 변형하여 그린다.

09 $y=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}+2$

이므로 $y=\frac{2x+3}{x+1}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



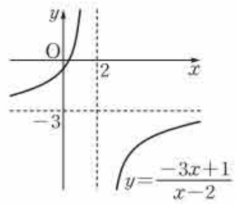
또 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=2$이다.

답 풀이 참조

10 $y=\frac{-3x+1}{x-2}=\frac{-3(x-2)-5}{x-2}=-\frac{5}{x-2}-3$

이므로 $y=\frac{-3x+1}{x-2}$의 그래프는 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



또 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-3$이다.

답 풀이 참조

표준+발전 **유형 Q+Q** 72쪽

01 $y=\frac{bx+1}{a-x}=\frac{-b(a-x)+ab+1}{a-x}=\frac{ab+1}{a-x}-b$

이므로

정의역은 $\{x \mid x\neq a$인 실수$\}$,

치역은 $\{y \mid y\neq -b$인 실수$\}$

따라서 $a=3$, $-b=-5$이므로

$a=3$, $b=5$

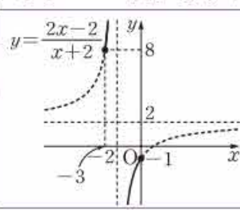
$\therefore b-a=2$

답 2

02 $y=\frac{2x-2}{x+2}=\frac{2(x+2)-6}{x+2}=-\frac{6}{x+2}+2$

이므로 $y=\frac{2x-2}{x+2}$의 그래프는 $y=-\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y\leq -1$ 또는 $y\geq 8$에서 $y=\frac{2x-2}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은



$\{x \mid -3\leq x<-2$ 또는 $-2<x\leq 0\}$

즉 정의역에 속하는 정수는 -3, -1, 0의 3개이다.

답 ②

$-1=\frac{2x-2}{x+2}$에서

$-x-2=2x-2$

$-3x=0 \quad \therefore x=0$

$8=\frac{2x-2}{x+2}$에서

$8x+16=2x-2$

$6x=-18$

$\therefore x=-3$

03 $y=\frac{bx+11}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+11}{x+a}=\frac{11-ab}{x+a}+b$

이므로 $y=\frac{bx+11}{x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{11-ab}{x-5+a}+b-2$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 일치하므로

$-5+a=0$, $11-ab=1$, $b-2=0$

$11-ab=1$에서 $\quad ab=10$

답 ⑤

$a=5$, $b=2$에서 $ab=10$임을 구할 수도 있다.

다른 풀이 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{1}{x+5}+2=\frac{1+2(x+5)}{x+5}=\frac{2x+11}{x+5}$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{bx+11}{x+a}$의 그래프와 일치해야 하므로

$a=5$, $b=2$

$\therefore ab=10$

04 ㄱ. $y=\frac{1}{3x+6}=\frac{1}{3(x+2)}$

따라서 $y=\frac{1}{3x+6}$의 그래프는 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{1-12x}{3x}=\frac{1}{3x}-4$

따라서 $y=\frac{1-12x}{3x}$의 그래프는 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{6x+5}{3x+3}=\frac{2(3x+3)-1}{3x+3}=-\frac{1}{3(x+1)}+2$

따라서 $y=\frac{6x+5}{3x+3}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\frac{x-2}{3-3x}=\frac{(x-1)-1}{-3(x-1)}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{3}$

따라서 $y=\frac{x-2}{3-3x}$의 그래프는 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동에 의하여 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

유리함수의 그래프의 점근선이 직선 $x=p$, $y=q$이면 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$

로 놓는다.

05 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=-2$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+3}-2\ (k\neq 0)$ ...... ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$3=\frac{k}{-1+3}-2$, $\quad \frac{k}{2}=5$

$\therefore k=10$

$k=10$을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{10}{x+3}-2=\frac{10-2(x+3)}{x+3}=\frac{-2x+4}{x+3}$

따라서 $a=-2$, $b=4$, $c=3$이므로

$a^2+b^2+c^2=4+16+9=29$

답 29

다른 풀이 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$

$=\frac{-ac+b}{x+c}+a$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-c$, $y=a$이므로

$a=-2$, $c=3$ ...... ㉠

또 그래프가 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로

$$3=\frac{-a+b}{-1+c}$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$3=\frac{2+b}{2},\qquad 2+b=6$$

$$\therefore\ b=4$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2=4+16+9=29$$

쌤 한마디

$c\neq0,\ ad-bc\neq0$일 때,

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}(cx+d)-\frac{ad}{c}+b}{cx+d}=\frac{-\frac{ad}{c}+b}{cx+d}+\frac{a}{c}$$

이므로 함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-\frac{d}{c}$, $y=\frac{a}{c}$이다.

$cx+d=0$에서
$x=-\frac{d}{c}$

06 $y=\frac{2x-5}{-x+4}=\frac{-2(-x+4)+3}{-x+4}=\frac{3}{-x+4}-2$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=4,\ y=-2$$

$$y=\frac{bx+1}{3x+a}=\frac{\frac{b}{3}(3x+a)-\frac{ab}{3}+1}{3x+a}=\frac{-\frac{ab}{3}+1}{3x+a}+\frac{b}{3}$$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-\frac{a}{3},\ y=\frac{b}{3}$$

따라서 $-\frac{a}{3}=4,\ \frac{b}{3}=-2$이므로

$$a=-12,\ b=-6$$

$\therefore\ a+b=-18$ 답 -18

07 $y=\frac{ax+2b}{x+c}$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 -3이므로

$-3=\frac{2b}{c}\qquad\therefore\ 2b=-3c$ …… ㉠

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\,(k\neq0)$의 그래프는 점근선의 교점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.

한편

$$y=\frac{ax+2b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+2b}{x+c}=\frac{-ac+2b}{x+c}+a$$

에서 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-c,\ y=a$$

이므로 그래프는 점 $(-c,\ a)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $-c=-2,\ a=-7$이므로

$$a=-7,\ c=2$$

$c=2$를 ㉠에 대입하면

$$2b=-6\qquad\therefore\ b=-3$$

$\therefore\ a+b+c=-8$ 답 ②

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 점 $(-2,\ -7)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

$$x=-2,\ y=-7$$

즉 주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+2}-7\ (k\neq0)$ …… ㉠

로 놓으면 ㉠의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 -3이므로

$$-3=\frac{k}{2}-7,\qquad \frac{k}{2}=4$$

$$\therefore\ k=8$$

$k=8$을 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{8}{x+2}-7=\frac{8-7(x+2)}{x+2}=\frac{-7x-6}{x+2}$$

따라서 $a=-7,\ 2b=-6,\ c=2$이므로

$$a=-7,\ b=-3,\ c=2$$

$$\therefore\ a+b+c=-8$$

08 $y=\frac{bx+3}{x-a}=\frac{b(x-a)+ab+3}{x-a}=\frac{ab+3}{x-a}+b$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=a,\ y=b$$

이때 주어진 함수의 그래프가 두 직선 $y=x+2$, $y=-x+6$에 대하여 대칭이므로 점 $(a,\ b)$는 두 직선 $y=x+2$, $y=-x+6$의 교점이다. 즉

$$b=a+2,\ b=-a+6$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=4$

$\therefore\ ab=8$ 답 8

쌤 한마디

유리함수의 그래프의 대칭성

유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 각각 대칭이다.

따라서 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 평행이동한 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는 점 $(p,\ q)$를 지나고 기울기가 ±1인 두 직선

$$y-q=x-p,\ y-q=-(x-p)$$

에 대하여 각각 대칭이다.

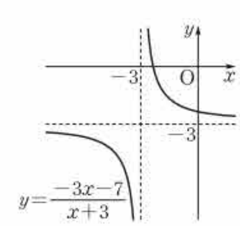
두 점근선의 교점

09 $y=\frac{-3x-7}{x+3}=\frac{-3(x+3)+2}{x+3}=\frac{2}{x+3}-3$

이므로 $y=\frac{-3x-7}{x+3}$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.

답 제1사분면

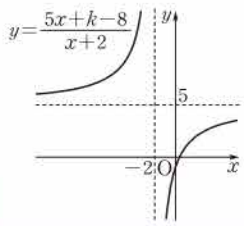


10 $y=\dfrac{5x+k-8}{x+2}=\dfrac{5(x+2)+k-18}{x+2}=\dfrac{k-18}{x+2}+5$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2,\ y=5$

$y=\dfrac{5x+k-8}{x+2}$의 그래프가 제4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $k-18<0$이어야 한다.



$\therefore\ k<18$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로

$\dfrac{k-8}{2}<0,\qquad k-8<0$

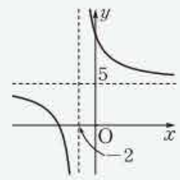
$\therefore\ k<8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<8$

따라서 자연수 k는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$의 7개이다.

답 ①

$k-18>0$이면 그래프는 다음 그림과 같이 제4사분면을 지나지 않는다.



또 $k=18$이면 $y=\dfrac{18-18}{x+2}+5$, 즉 $y=5$이므로 그래프는 제4사분면을 지나지 않는다.

11 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2,\ y=1$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+2}+1\ (k\neq0)$ $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=\dfrac{k}{2}+1,\qquad \dfrac{k}{2}=-3$

$\therefore\ k=-6$

$k=-6$을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-6}{x+2}+1=\dfrac{-6+(x+2)}{x+2}=\dfrac{x-4}{x+2}$

따라서 $a=1,\ b=-4,\ c=2$이므로

$abc=-8$

답 ②

12 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a,\ y=c$

이므로 주어진 그래프에서

$a<0,\ c<0$

또 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프가 제1사분면과 제3사분면을 지나므로

$b>0$

ㄱ. $a<0,\ c<0$이므로

$a+c<0$

ㄴ. 함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프가 원점을 지나므로

$-\dfrac{b}{a}+c=0,\qquad -b+ac=0$

$\therefore\ b=ac$

ㄷ. $\dfrac{b}{a}<0,\ \dfrac{c}{b}<0$이므로 $\quad\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프에서

① $k>0$
➡ 제1사분면, 제3사분면을 지난다.

② $k<0$
➡ 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

13 ①, ② $y=\dfrac{-4x+9}{x-3}=\dfrac{-4(x-3)-3}{x-3}$

$=-\dfrac{3}{x-3}-4$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3,\ y=-4$

이고 치역은 $\{y\,|\,y\neq-4$인 실수$\}$이다.

③ $y=\dfrac{-4x+9}{x-3}$에 $y=0$을 대입하면

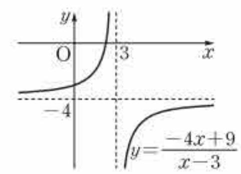
$0=\dfrac{-4x+9}{x-3},\qquad -4x+9=0$

$\therefore\ x=\dfrac{9}{4}$

따라서 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{9}{4},\ 0\right)$이다.

④, ⑤ $y=\dfrac{-4x+9}{x-3}$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.



답 ⑤

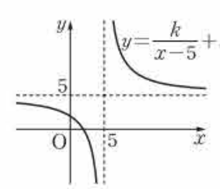
14 ㄱ. $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=5,\ y=5$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\neq5$인 실수$\}$이다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프는 점 $(5,\ 5)$를 지나고 기울기가 -1인 직선, 즉 $y=-x+10$에 대하여 대칭이다.

그래프는 점 $(5,\ 5)$를 지나고 기울기가 1인 직선, 즉 $y=x$에 대하여도 대칭이다.

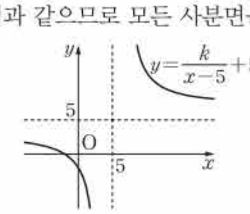
ㄷ. (i) $f(0)\geq0$일 때,

$f(0)=-\dfrac{k}{5}+5\geq0$, 즉 $0<k\leq25$이면 그래프는 다음 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



(ii) $f(0)<0$일 때,

$f(0)=-\dfrac{k}{5}+5<0$, 즉 $k>25$이면 그래프는 다음 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.



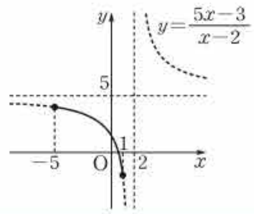
이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

15 $y=\dfrac{5x-3}{x-2}=\dfrac{5(x-2)+7}{x-2}=\dfrac{7}{x-2}+5$

이므로 $y=\frac{5x-3}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-5\le x\le 1$에서 $y=\frac{5x-3}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-5$일 때 최댓값 4,

$x=1$일 때 최솟값 -2

를 갖는다.

즉 $a=4$, $b=-2$이므로

$a+b=2$ 답 2

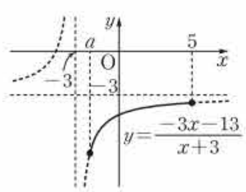
$\frac{-25-3}{-5-2}=4$

$\frac{5-3}{1-2}=-2$

16 $y=\frac{-3x-13}{x+3}=\frac{-3(x+3)-4}{x+3}=-\frac{4}{x+3}-3$

이므로 $y=\frac{-3x-13}{x+3}$의 그래프는 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a\le x\le 5$에서 $y=\frac{-3x-13}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=a$일 때 최솟값 $\frac{-3a-13}{a+3}$,

$x=5$일 때 최댓값 $-\frac{7}{2}$

을 갖는다.

$\frac{-15-13}{5+3}=-\frac{7}{2}$

즉 $\frac{-3a-13}{a+3}=-7$, $m=-\frac{7}{2}$이므로

$\frac{-3a-13}{a+3}=-7$에서

$-3a-13=-7a-21,\quad 4a=-8$

$\therefore a=-2$

$\therefore am=7$ 답 7

17 함수 $y=\frac{x-4}{x+2}$의 그래프와 직선 $y=kx+1$이 한 점에서 만나므로 $\frac{x-4}{x+2}=kx+1$에서

$x-4=(kx+1)(x+2)$

$\therefore kx^2+2kx+6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-6k=0$

$k(k-6)=0$

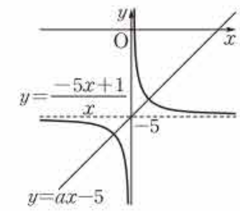
$\therefore k=6\ (\because k>0)$ 답 ③

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① $D>0$
➡ 서로 다른 두 실근
② $D=0$ ➡ 중근
③ $D<0$
➡ 서로 다른 두 허근

18 $A\cap B\ne\varnothing$이므로 $y=\frac{-5x+1}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax-5$가 만난다.

$y=\frac{-5x+1}{x}=\frac{1}{x}-5$이므로 $y=\frac{-5x+1}{x}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\frac{-5x+1}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax-5$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0, -5)$를 지나므로



$a>0$ 답 $a>0$

19 점 P의 좌표를 $\left(k, \frac{16}{k-2}+5\right)$ $(k>2)$라 하면

$Q(k, 5)$, $R\left(2, \frac{16}{k-2}+5\right)$

$\overline{PQ}=\left(\frac{16}{k-2}+5\right)-5=\frac{16}{k-2}$, $\overline{PR}=k-2$이고 $k>2$에서 $k-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PQ}+\overline{PR}&=\frac{16}{k-2}+k-2\\&\ge 2\sqrt{\frac{16}{k-2}\cdot(k-2)}\\&=2\cdot 4\\&=8\ (\text{단, 등호는 } k=6\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

$\frac{16}{k-2}=k-2$에서
$(k-2)^2=16$
$k-2=\pm 4$
$\therefore k=6\ (\because k>2)$

따라서 $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최솟값은 8이다. 답 8

쌤한마디

유리함수의 그래프의 활용 문제는 먼저 주어진 유리함수의 그래프 위의 한 점의 좌표를 문자를 이용하여 나타낸 후 도형의 길이 또는 넓이를 그 문자에 대한 식으로 나타낸다. 이때 도형의 길이 또는 넓이의 최솟값을 구하는 경우에 양수 조건이 있으면 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>0$, $b>0$일 때,
$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

20 점 P의 좌표를 $\left(t, \frac{3}{t-3}+1\right)$ $(t>3)$이라 하면

$A(t, 0)$, $B\left(0, \frac{3}{t-3}+1\right)$

직사각형 OAPB의 넓이는

$$\begin{aligned}t\cdot\left(\frac{3}{t-3}+1\right)&=\{(t-3)+3\}\cdot\left(\frac{3}{t-3}+1\right)\\&=t-3+\frac{9}{t-3}+6\end{aligned}$$

이때 $t>3$에서 $t-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}t-3+\frac{9}{t-3}+6&\ge 2\sqrt{(t-3)\cdot\frac{9}{t-3}}+6\\&=2\cdot 3+6\\&=12\ (\text{단, 등호는 } t=6\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

$t-3=\frac{9}{t-3}$에서
$(t-3)^2=9$
$t-3=\pm 3$
$\therefore t=6\ (\because t>3)$

따라서 직사각형 OAPB의 넓이의 최솟값은 12이다.

답 12

05 유리식과 유리함수

21 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

$=\dfrac{\dfrac{x-1}{x}-1}{\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{\dfrac{x-1-x}{x}}{\dfrac{x-1}{x}}=-\dfrac{1}{x-1}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(-\dfrac{1}{x-1}\right)$

$=\dfrac{-\dfrac{1}{x-1}-1}{-\dfrac{1}{x-1}}=\dfrac{\dfrac{1+(x-1)}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}}=x$

따라서 함수 $f^{3n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{2023}(x)=f^{3\cdot674+1}(x)=f^1(x)=\dfrac{x-1}{x}$

$\therefore f^{2023}(8)=\dfrac{7}{8}$ 답 $\dfrac{7}{8}$

다른 풀이 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$에서

$f^1(8)=f(8)=\dfrac{8-1}{8}=\dfrac{7}{8}$

$f^2(8)=f(f(8))=f\left(\dfrac{7}{8}\right)=\dfrac{\dfrac{7}{8}-1}{\dfrac{7}{8}}=-\dfrac{1}{7}$

$f^3(8)=f(f^2(8))=f\left(-\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{-\dfrac{1}{7}-1}{-\dfrac{1}{7}}=8$

$f^4(8)=f(f^3(8))=f(8)=\dfrac{8-1}{8}=\dfrac{7}{8}$

⋮

이므로 $f^n(8)$의 값은 $\dfrac{7}{8}$, $-\dfrac{1}{7}$, 8이 이 순서대로 반복된다.

이때 $2023=3\cdot674+1$이므로

$f^{2023}(8)=f^1(8)=\dfrac{7}{8}$

22 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$

$=\dfrac{\dfrac{x}{1+x}}{1+\dfrac{x}{1+x}}=\dfrac{\dfrac{x}{1+x}}{\dfrac{1+x+x}{1+x}}=\dfrac{x}{1+2x}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(\dfrac{x}{1+2x}\right)$

$=\dfrac{\dfrac{x}{1+2x}}{1+\dfrac{x}{1+2x}}=\dfrac{\dfrac{x}{1+2x}}{\dfrac{1+2x+x}{1+2x}}=\dfrac{x}{1+3x}$

⋮

따라서 $f^{15}(x)=\dfrac{x}{1+15x}$이므로

$a=1,\ b=0,\ c=15$

$\therefore a+b+c=16$ 답 16

23 $f(x)=\dfrac{x+4}{3x+a}$에서 $y=\dfrac{x+4}{3x+a}$로 놓으면

$y(3x+a)=x+4,\quad (3y-1)x=-ay+4$

$\therefore x=\dfrac{-ay+4}{3y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{-ax+4}{3x-1}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-ax+4}{3x-1}$

따라서 $f=f^{-1}$에서 $\dfrac{x+4}{3x+a}=\dfrac{-ax+4}{3x-1}$이므로

$a=-1$ 답 -1

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\quad (f\circ f)(x)=x$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{x+4}{3x+a}\right)$

$=\dfrac{\dfrac{x+4}{3x+a}+4}{3\cdot\dfrac{x+4}{3x+a}+a}$

$=\dfrac{x+4+4(3x+a)}{3(x+4)+a(3x+a)}$

$=\dfrac{13x+4a+4}{3(a+1)x+a^2+12}$

따라서 $\dfrac{13x+4a+4}{3(a+1)x+a^2+12}=x$이므로

$3(a+1)x^2+(a^2+12)x=13x+4a+4$

즉 $a+1=0$, $a^2+12=13$이므로

$a=-1$

24 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{-a+b}{-1-2}\qquad \therefore a-b=9$ …… ㉠

또 역함수의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나면 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3, -1)$을 지나므로

$-1=\dfrac{3a+b}{3-2}\qquad \therefore 3a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=-7$

$\therefore a+b=-5$ 답 -5

25 $(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(2)=(I\circ f^{-1})(2)=f^{-1}(2)$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $\quad f(k)=2$

$\dfrac{6k+2}{4k-3}=2,\qquad 6k+2=8k-6$

$-2k=-8\qquad \therefore k=4$ 답 4

26 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(a)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(a)$

$=(g^{-1}\circ f)(a)$

$=g^{-1}(f(a))$

즉 $g^{-1}(f(a))=-3$이므로

$g(-3)=f(a)$

$\dfrac{-4\cdot(-3)-5}{-2\cdot(-3)+1}=\dfrac{2a-1}{a+1}$

$\dfrac{2a-1}{a+1}=1,\qquad 2a-1=a+1$

$\therefore a=2$ 답 2

Q BOX

분자와 분모에 각각 $3x+a$를 곱한다.

동류항의 계수를 비교한다.

함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 (b, a)를 지난다.

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식, 즉 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.
(ii) x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$ 꼴로 나타낸다.

중단원 마무리

76쪽

01 전략 주어진 등식의 좌변의 두 분수식을 각각 분자를 분모로 나누어 (분자의 차수)<(분모의 차수)가 되도록 변형한다.

풀이 $\frac{6x-23}{x-4}-\frac{6x+19}{x+3}$

$=\frac{6(x-4)+1}{x-4}-\frac{6(x+3)+1}{x+3}$

$=\left(6+\frac{1}{x-4}\right)-\left(6+\frac{1}{x+3}\right)$

$=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3-(x-4)}{(x-4)(x+3)}$

$=\frac{7}{(x-4)(x+3)}$

$\therefore k=7$ 답 7

다른 풀이 $\frac{6x-23}{x-4}-\frac{6x+19}{x+3}$

$=\frac{(6x-23)(x+3)-(6x+19)(x-4)}{(x-4)(x+3)}$

$=\frac{(6x^2-5x-69)-(6x^2-5x-76)}{(x-4)(x+3)}$

$=\frac{7}{(x-4)(x+3)}$

$\therefore k=7$

02 전략 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ $(A\neq B)$임을 이용하여 $\frac{1}{f(x)}$을 구한다.

풀이 $f(x)=3x^2+3x=3x(x+1)$이므로

$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{3x(x+1)}$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$

$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(24)}$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{25}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{25}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{24}{25}=\frac{8}{25}$

따라서 $a=8$, $b=25$이므로

$a+b=33$ 답 33

03 전략 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 평행이동한다.

풀이 $y=\frac{5x-2}{x-3}=\frac{5(x-3)+13}{x-3}=\frac{13}{x-3}+5$

이므로 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{13}{x-p-3}+5+q$ ··· ❶

이 함수의 그래프가

$y=\frac{9x+4}{x-1}=\frac{9(x-1)+13}{x-1}=\frac{13}{x-1}+9$

의 그래프와 일치하므로

$-p-3=-1$, $5+q=9$

따라서 $p=-2$, $q=4$이므로

$pq=-8$ ··· ❷

답 -8

단계	채점 기준	비율
❶	평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷	pq의 값을 구할 수 있다.	60 %

04 전략 $y=\frac{bx}{ax+1}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 정의역과 치역을 구한다.

풀이 $y=\frac{bx}{ax+1}=\frac{\frac{b}{a}(ax+1)-\frac{b}{a}}{ax+1}$

$=-\frac{b}{a(ax+1)}+\frac{b}{a}$

따라서 함수 $f(x)$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\frac{1}{a}\text{인 실수}\right\}$, 치역은 $\left\{y\,\middle|\,y\neq\frac{b}{a}\text{인 실수}\right\}$이고 정의역과 치역이 같으므로

$-\frac{1}{a}=\frac{b}{a}$ $\therefore b=-1$

또 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{1}{a}$, $y=\frac{b}{a}$

두 점근선의 교점 $\left(-\frac{1}{a}, \frac{b}{a}\right)$, 즉 $\left(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}\right)$이 직선 $y=2x+3$ 위에 있으므로

$-\frac{1}{a}=-\frac{2}{a}+3$, $\frac{1}{a}=3$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=-\frac{2}{3}$ 답 ①

05 전략 두 함수의 그래프의 점근선의 방정식을 구한 후 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\frac{x+3}{x-k}=\frac{(x-k)+k+3}{x-k}=\frac{k+3}{x-k}+1$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

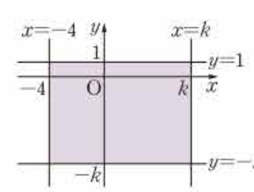
$x=k$, $y=1$

$y=\frac{-kx-6}{x+4}=\frac{-k(x+4)+4k-6}{x+4}=\frac{4k-6}{x+4}-k$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-4$, $y=-k$

따라서 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이가 70이므로



QBOX: $k>0$이므로 $-k<0$이다. 즉 직선 $y=-k$는 x축보다 아래쪽에 있다.

$(k+4)(1+k)=70$

$k^2+5k-66=0$

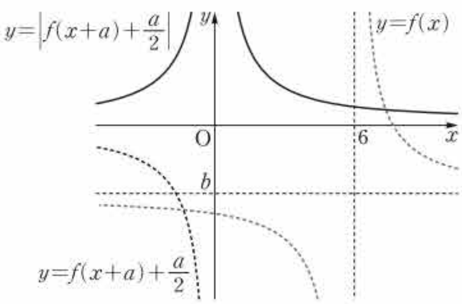
$(k+11)(k-6)=0$

$\therefore k=6$ ($\because k>0$) 답 6

06 전략 유리함수 $f(x)$에 대하여 $y=|f(x)|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 이 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$이다.

풀이 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $\frac{a}{2}$만큼 평행이동한 것이고, $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프는 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 다음 그림과 같이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.



이때 $f(x)=\frac{a}{x-6}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=6$, $y=b$이므로 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=6-a$, $y=b+\frac{a}{2}$

그래프가 평행이동한 만큼 점근선도 평행이동한다.

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로

$6-a=0$, $b+\frac{a}{2}=0$

$\therefore a=6,\ b=-3$

따라서 $f(x)=\frac{6}{x-6}-3$이므로

$f(b)=f(-3)=\frac{6}{-3-6}-3=-\frac{11}{3}$ 답 ④

07 전략 주어진 함수를 $y=\frac{a}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

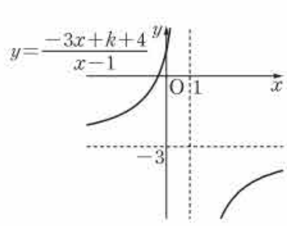
풀이 $y=\frac{-3x+k+4}{x-1}=\frac{-3(x-1)+k+1}{x-1}$

$=\frac{k+1}{x-1}-3$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

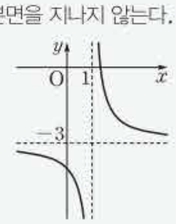
$x=1$, $y=-3$

$y=\frac{-3x+k+4}{x-1}$의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이



$k+1<0$이어야 한다.

$k+1>0$이면 그래프는 다음 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는다.



또 $k=-1$이면 $y=\frac{-1+1}{x-1}-3$, 즉 $y=-3$이므로 그래프는 제1사분면과 제2사분면을 지나지 않는다.

$\therefore k<-1$ ...... ㉠

또 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 커야 하므로

$-k-4>0$ $\quad\therefore k<-4$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad k<-4$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 -5이다. 답 -5

08 전략 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프의 성질을 이용한다.

풀이 $y=\frac{3x-2}{x+4}=\frac{3(x+4)-14}{x+4}=-\frac{14}{x+4}+3$

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-4$, $y=3$이므로 그래프는 점 $(-4, 3)$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $y=\frac{3x-2}{x+4}$의 그래프는 $y=-\frac{14}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

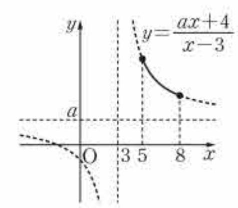
이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

09 전략 주어진 x의 값의 범위에서 함수의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\frac{ax+4}{x-3}=\frac{a(x-3)+3a+4}{x-3}=\frac{3a+4}{x-3}+a$

이므로 $y=\frac{ax+4}{x-3}$의 그래프는 $y=\frac{3a+4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $5\le x\le 8$에서 $y=\frac{ax+4}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=5$일 때 최댓값 $\frac{5a+4}{2}$를 갖는다.



즉 $\frac{5a+4}{2}=7$이므로

$5a+4=14,\qquad 5a=10$

$\therefore a=2$ 답 2

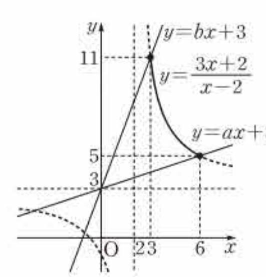
10 전략 좌표평면 위에 $y=\frac{3x+2}{x-2}$, $y=ax+3$, $y=bx+3$의 그래프를 그린 후 조건을 만족시키도록 그래프를 움직여 본다.

풀이 $y=\frac{3x+2}{x-2}=\frac{3(x-2)+8}{x-2}=\frac{8}{x-2}+3$

이므로 $y=\frac{3x+2}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3\le x\le 6$에서 $y=\frac{3x+2}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 두 직선 $y=ax+3$, $y=bx+3$은 a, b의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 3)$을 지난다.



(i) 직선 $y=ax+3$이 점 $(6,\ 5)$를 지날 때,

$5=6a+3$에서 $\quad a=\dfrac{1}{3}$

따라서 $ax+3\le\dfrac{3x+2}{x-2}$이려면 $\quad a\le\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{18+2}{6-2}=5$

(ii) 직선 $y=bx+3$이 점 $(3,\ 11)$을 지날 때,

$11=3b+3$에서 $\quad b=\dfrac{8}{3}$

따라서 $\dfrac{3x+2}{x-2}\le bx+3$이려면 $\quad b\ge\dfrac{8}{3}$

$\dfrac{9+2}{3-2}=11$

(i), (ii)에서 $a-b$의 최댓값은

$\dfrac{1}{3}-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{7}{3}$ 답 ③

11 전략 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하고 점 A가 그래프의 두 점근선의 교점임을 이용한다.

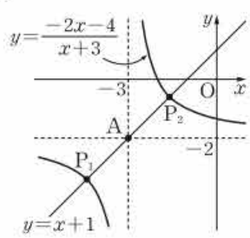
풀이 $y=\dfrac{-2x-4}{x+3}=\dfrac{-2(x+3)+2}{x+3}=\dfrac{2}{x+3}-2$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3,\ y=-2$

이므로 점 $A(-3,\ -2)$는 두 점근선의 교점이다.

원의 반지름인 $\overline{AP}$의 길이가 최소일 때 원의 넓이가 최소이고, 이때의 점 P는 다음 그림과 같이 P_1, P_2의 두 개가 존재한다.



한편 $y=\dfrac{-2x-4}{x+3}$의 그래프는 점 $A(-3,\ -2)$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭이다.

점 $(-3,\ -2)$를 지나고 기울기가 1인 직선

$\dfrac{-2x-4}{x+3}=x+1$에서

$-2x-4=(x+1)(x+3)$, $\quad x^2+6x+7=0$

$\therefore\ x=-3\pm\sqrt{2}$

즉 두 점 P_1, P_2의 좌표는 각각

$(-3-\sqrt{2},\ -2-\sqrt{2})$, $(-3+\sqrt{2},\ -2+\sqrt{2})$

이므로

$\overline{AP_1}=\overline{AP_2}=2$

$\overline{AP_1}^2$
$=(-3-\sqrt{2}+3)^2$
$\quad+(-2-\sqrt{2}+2)^2$
$=2+2=4$
이므로 $\overline{AP_1}=2$

따라서 구하는 원의 넓이의 최솟값은

$\pi\cdot2^2=4\pi$ 답 ⑤

12 전략 육각형 APBCQD의 넓이를 두 점 P, Q의 x좌표에 대한 식으로 나타낸 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 두 점 P, Q의 좌표를

$P\left(a,\ \dfrac{8}{a}\right)$, $Q\left(-b,\ -\dfrac{8}{b}\right)$ $(a>0,\ b>0)$

이라 하면

$A(a,\ 0)$, $B\left(0,\ \dfrac{8}{a}\right)$, $C(-b,\ 0)$, $D\left(0,\ -\dfrac{8}{b}\right)$

육각형 APBCQD의 넓이를 S라 하면

$S=\square OAPB+\square OCQD+\triangle OBC+\triangle ODA$

$=a\cdot\dfrac{8}{a}+b\cdot\dfrac{8}{b}+\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{8}{b}$

$=16+4\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)$ ❶

이때 $a>0$, $b>0$에서 $\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$S=16+4\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)$

$\ge16+4\cdot2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}$

$=16+4\cdot2$

$=24$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$에서 $\quad a^2=b^2$
$\therefore\ a=b$
$(\because\ a>0,\ b>0)$

따라서 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 24이다. ❷

답 24

단계	채점 기준	비율
❶	육각형 APBCQD의 넓이를 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷	육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

13 전략 먼저 $(f\circ f)(x)$를 구한다.

풀이 $(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}$

$=\dfrac{\dfrac{x+1+x-1}{x-1}}{\dfrac{x+1-(x-1)}{x-1}}=x$

$(f\circ f)(k)=\dfrac{1}{k}+1$에서 $\quad k=\dfrac{1}{k}+1$

$k^2=1+k$ $\quad\therefore\ k^2-k-1=0$

이차방정식 $k^2-k-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2+4>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 1이다. 답 1

14 전략 먼저 $f^2(x)$를 구한 후 규칙을 찾는다.

풀이 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}$

$=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-(x-1)}{x-1}}=x$

따라서 함수 $f^{2n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{2023}(x)=f^{2\cdot1011+1}(x)=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,

$f^{2024}(x)=f^{2\cdot1012}(x)=f^2(x)=x$

$\therefore\ f^{2023}(2)+f^{2024}(6)=2+6=8$ 답 8

$f^{2023}(2)=f(2)$
$=\dfrac{2}{2-1}=2$

다른 풀이 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$에서

$$f^1(2)=f(2)=\frac{2}{2-1}=2$$

$$f^2(2)=f(f(2))=f(2)=\frac{2}{2-1}=2$$

$$f^3(2)=f(f^2(2))=f(2)=\frac{2}{2-1}=2$$

$$\vdots$$

이므로 $f^n(2)$의 값은 2이다.

$$\therefore f^{2023}(2)=2$$

또

$$f^1(6)=f(6)=\frac{6}{6-1}=\frac{6}{5}$$

$$f^2(6)=f(f(6))=f\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{\frac{6}{5}}{\frac{6}{5}-1}=6$$

$$f^3(6)=f(f^2(6))=f(6)=\frac{6}{6-1}=\frac{6}{5}$$

$$\vdots$$

이므로 $f^n(6)$의 값은 $\dfrac{6}{5}$, 6이 이 순서대로 반복된다.

이때 $2024=2\cdot1012$이므로

$$f^{2024}(6)=f^2(6)=6$$

$$\therefore f^{2023}(2)+f^{2024}(6)=2+6=8$$

15 **전략** $f^{-1}(x)$를 구한 후 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+3}$에서 $y=\dfrac{2x+5}{x+3}$로 놓으면

$$y(x+3)=2x+5, \qquad (y-2)x=-3y+5$$

$$\therefore x=\frac{-3y+5}{y-2}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\dfrac{-3x+5}{x-2}$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-3x+5}{x-2}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{-3x+5}{x-2}=\frac{-3(x-2)-1}{x-2}$$

$$=-\frac{1}{x-2}-3$$

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-3$이므로 그래프는 점 $(2, -3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=2$, $q=-3$이므로

$$p-q=5$$

답 ⑤

다른 풀이 $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-1}{x+3}$

$$=-\frac{1}{x+3}+2$$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=2$이므로 그래프는 점 $(-3, 2)$에 대하여 대칭이다.

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2, -3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=2$, $q=-3$이므로

$$p-q=5$$

16 **전략** 조건 (가)를 만족시키는 그래프의 개형을 생각해 본다.

풀이 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 점의 개수와 직선 $y=-2$와 만나는 점의 개수의 합은 1이다.

Q BOX: 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=2$의 교점의 개수와 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=2$, $y=-2$의 각각의 교점의 개수의 합은 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 항상 1이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $y=2$ 또는 직선 $y=-2$이어야 한다.

(i) 점근선이 직선 $y=2$일 때,

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이고, 이를 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(ii) 점근선이 직선 $y=-2$일 때,

$f(x)=\dfrac{a}{x}+b$에서 $\qquad b=-2$

$f^{-1}(2)=m$이라 하면 $f(m)=2$이므로

$$\frac{a}{m}-2=2, \qquad \frac{a}{m}=4$$

$$\therefore m=\frac{a}{4}$$

$$\therefore f^{-1}(2)=\frac{a}{4}$$

$f(2)=\dfrac{a}{2}-2$이므로 조건 (나)에 의하여

$$\frac{a}{4}=\left(\frac{a}{2}-2\right)-1, \qquad \frac{a}{4}=3$$

$$\therefore a=12$$

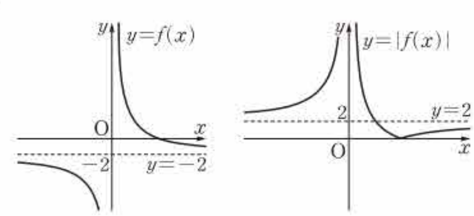
$$\therefore f(x)=\frac{12}{x}-2$$

(i), (ii)에서 $f(x)=\dfrac{12}{x}-2$이므로

$$f(8)=\frac{12}{8}-2=-\frac{1}{2}$$

답 ①

참고 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



17 **전략** 주어진 조건을 이용하여 S_1+S_2를 a에 대한 식으로 나타내고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 두 점 $\mathrm{A}(-1, -1)$, $\mathrm{B}\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$ $(a>1)$을 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{\frac{1}{a}-(-1)}{a-(-1)}=\frac{\frac{1}{a}+1}{a+1}=\frac{\frac{a+1}{a}}{a+1}=\frac{1}{a}$$

이므로 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{a}(x+1)-1$

$\therefore\ y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}-1$

이때 $\mathrm{P}(a-1,\ 0)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{1}{a}-1\right)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=a-1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=1-\frac{1}{a}$,

$\overline{\mathrm{PB'}}=a-(a-1)=1$, $\overline{\mathrm{BB'}}=\frac{1}{a}$

삼각형의 넓이 S_1, S_2는

$S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}$

$=\frac{1}{2}\cdot(a-1)\cdot\left(1-\frac{1}{a}\right)$

$=\frac{a^2-2a+1}{2a}$

$=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a}$,

$S_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PB'}}\cdot\overline{\mathrm{BB'}}$

$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{a}$

$=\frac{1}{2a}$

$\therefore\ S_1+S_2=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}$

$=\frac{a}{2}+\frac{1}{a}-1$

$\geq2\sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a}}-1$

$=\sqrt{2}-1$

(단, 등호는 $a=\sqrt{2}$일 때 성립)

따라서 S_1+S_2의 최솟값은 $\sqrt{2}-1$이다. 답 ⑤

$y=0$이면

$0=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}-1$

$\frac{1}{a}x=1-\frac{1}{a}$

$\therefore\ x=a-1$

$x=0$이면 $y=\frac{1}{a}-1$

$\frac{a}{2}>0$, $\frac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$\frac{a}{2}=\frac{1}{a}$에서 $a^2=2$

$\therefore\ a=\sqrt{2}\ (\because\ a>1)$

18 전략 **도형의 평행이동을 이용하여 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표를 구한다.**

풀이 $f(x)=\frac{2x+b}{x-a}=\frac{2(x-a)+2a+b}{x-a}=\frac{2a+b}{x-a}+2$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=2$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a,\ 2)$이다.

이때 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(2,\ a)$이다.

조건 ㈎에서 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a+4,\ -2)$이다.

점 $(2,\ a)$와 점 $(a+4,\ -2)$가 같으므로

$a=-2$

점 $(a,\ 2)$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점의 좌표

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{2a+b}{x}$의 그래프를 평행이동한 그래프와 일치하고 조건 ㈏에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동하면 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프와 일치하므로

$2a+b=3$, $\qquad -4+b=3$

$\therefore\ b=7$

$\therefore\ a+b=5$ 답 ⑤

다른 풀이 $y=\frac{2x+b}{x-a}$라 하면 $\quad y(x-a)=2x+b$

$(y-2)x=ay+b \qquad \therefore\ x=\frac{ay+b}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{ax+b}{x-2}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{ax+b}{x-2}$

함수 $y=\frac{2x+b}{x-a}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{2(x-4)+b}{x-4-a}-4$

$=\frac{2(x-4)+b-4(x-4-a)}{x-4-a}$

$=\frac{-2x+4a+8+b}{x-4-a}$

조건 ㈎에 의하여

$\frac{ax+b}{x-2}=\frac{-2x+4a+8+b}{x-4-a}$

이므로

$a=-2$, $b=4a+8+b$, $-2=-4-a$

한편

$f(x)=\frac{2x+b}{x+2}=\frac{2(x+2)+b-4}{x+2}=\frac{b-4}{x+2}+2$

이므로 조건 ㈏에 의하여

$b-4=3$

$\therefore\ b=7$

$\therefore\ a+b=5$

06 무리식과 무리함수

Lecture 14 무리식

80쪽

01 $x-3\ge0$, $x+5\ge0$이므로

$x\ge3$, $x\ge-5$

$\therefore x\ge3$ 답 $x\ge3$

02 $x+4\ge0$, $12-6x>0$이므로

$x\ge-4$, $x<2$

$\therefore -4\le x<2$ 답 $-4\le x<2$

03 $(\sqrt{x+2}+4)(\sqrt{x+2}-4)=(\sqrt{x+2})^2-4^2$

$=x+2-16$

$=x-14$

답 $x-14$

04 $(\sqrt{5x-1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1})$

$=(\sqrt{5x-1})^2-(\sqrt{x-1})^2$

$=5x-1-(x-1)$

$=4x$ 답 $4x$

05 $\dfrac{6}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}$

$=\dfrac{6(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})}$

$=\dfrac{6(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})}{x+3-(x-3)}$

$=\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}$ 답 $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}$

06 $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})^2}{x-1-x}$

$=-\{x-1-2\sqrt{x(x-1)}+x\}$

$=-2x+1+2\sqrt{x(x-1)}$

답 $-2x+1+2\sqrt{x(x-1)}$

07 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{5})+\sqrt{5}(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}+\sqrt{5})(\sqrt{x}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{x-\sqrt{5x}+\sqrt{5x}+5}{x-5}$

$=\dfrac{x+5}{x-5}$ 답 $\dfrac{x+5}{x-5}$

QBOX

각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 구한다.

주어진 무리식을 간단히 한 후 문자에 수를 대입하여 식의 값을 구한다.

$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}$을 분자, 분모에 각각 곱한다.

$\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$를 분자, 분모에 각각 곱한다.

$-5,\ -4,\ \cdots,\ 4,\ 5$의 11개

08 $\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}-1}-\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}+1}$

$=\dfrac{(x+1)(\sqrt{x+1}+1)-(x-1)(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\dfrac{x+\sqrt{x+1}+x+\sqrt{x+1}}{x+1-1}$

$=\dfrac{2(x+\sqrt{x+1})}{x}$ 답 $\dfrac{2(x+\sqrt{x+1})}{x}$

09 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$

$+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}$

$+\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{x+1-(x+2)}$

$+\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{x+2-(x+3)}$

$=-(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})$

$-(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3})$

$=-\sqrt{x}+\sqrt{x+3}$ 답 $-\sqrt{x}+\sqrt{x+3}$

10 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}-1-(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

$=-\dfrac{2}{x-1}$

$x=\sqrt{2}$를 $-\dfrac{2}{x-1}$에 대입하면

$-\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{-2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=-2(\sqrt{2}+1)$

답 $-2(\sqrt{2}+1)$

표준+발전 유형 Q+Q

81쪽

01 $6x^2-11x-10\ge0$이므로

$(3x+2)(2x-5)\ge0$

$\therefore x\le-\dfrac{2}{3}$ 또는 $x\ge\dfrac{5}{2}$

답 $x\le-\dfrac{2}{3}$ 또는 $x\ge\dfrac{5}{2}$

02 $n-x\ge0$이므로 $x\le n$ …… ㉠

$n+x\ge0$이므로 $x\ge-n$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{n-x}+\sqrt{n+x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는

$-n\le x\le n$

$n=5$일 때 x의 값의 범위는 $-5\le x\le5$이므로

$f(5)=11$

$n=6$일 때 x의 값의 범위는 $-6\le x\le 6$이므로

$f(6)=13$

$\therefore f(5)+f(6)=24$ 답 24

QBOX: $-6,\ -5,\ \cdots,\ 5,\ 6$의 13개

쌤한마디

$-n\le x\le n$을 만족시키는 정수 x는

$\underbrace{-n,\ -(n-1),\ \cdots,\ -1}_{n\text{개}},\ 0,\ \underbrace{1,\ \cdots,\ n-1,\ n}_{n\text{개}}$

의 $(2n+1)$개이므로 $f(n)=2n+1$

03 $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

$=\dfrac{x-2\sqrt{x}+1+x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$

$=\dfrac{2x+2}{x-1}$ ······㉠

이때

$x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}=2+\sqrt{3}$

이므로 ㉠에서

$\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{2(2+\sqrt{3})+2}{(2+\sqrt{3})-1}=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(6+2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{6-6\sqrt{3}+2\sqrt{3}-6}{1-3}$

$=\dfrac{-4\sqrt{3}}{-2}=2\sqrt{3}$ 답 ⑤

04 $\dfrac{\sqrt{5+2x}-\sqrt{5-2x}}{\sqrt{5+2x}+\sqrt{5-2x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{5+2x}-\sqrt{5-2x})^2}{(\sqrt{5+2x}+\sqrt{5-2x})(\sqrt{5+2x}-\sqrt{5-2x})}$

$=\dfrac{5+2x-2\sqrt{(5+2x)(5-2x)}+5-2x}{5+2x-(5-2x)}$

$=\dfrac{10-2\sqrt{25-4x^2}}{4x}$

$=\dfrac{5-\sqrt{25-4x^2}}{2x}$

QBOX: $x=\sqrt{6}$을 대입한다.

$=\dfrac{5-1}{2\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 답 ③

05 $x+y=4,\ x-y=2\sqrt{3},\ xy=1$이므로

QBOX: $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 꼴로 주어지면 $x+y$, $x-y$, xy의 값을 구한 후 이를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$

$=\dfrac{4-2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 답 ①

06 $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$,

$y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2}$이므로

$x+y=6,\ x-y=4\sqrt{2}$

80~82쪽

$\therefore x^3+x^2y-xy^2-y^3$

$=x^2(x+y)-y^2(x+y)$

$=(x^2-y^2)(x+y)$

$=(x-y)(x+y)^2$

$=4\sqrt{2}\cdot 6^2=144\sqrt{2}$ 답 $144\sqrt{2}$

Lecture 15 무리함수

82쪽

01 $3x-9\ge 0$에서 $x\ge 3$

QBOX: 무리함수의 정의역 ➡ 근호 안의 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\mid x\ge 3\}$ 답 $\{x\mid x\ge 3\}$

02 $16-x^2\ge 0$에서 $x^2-16\le 0$

$(x+4)(x-4)\le 0$ $\therefore -4\le x\le 4$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\mid -4\le x\le 4\}$ 답 $\{x\mid -4\le x\le 4\}$

03 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{-5x}$ $\therefore y=-\sqrt{-5x}$

답 $y=-\sqrt{-5x}$

04 x 대신 $-x$를 대입하면

$y=\sqrt{-5\cdot(-x)}$ $\therefore y=\sqrt{5x}$ 답 $y=\sqrt{5x}$

05 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{-5\cdot(-x)}$ $\therefore y=-\sqrt{5x}$

답 $y=-\sqrt{5x}$

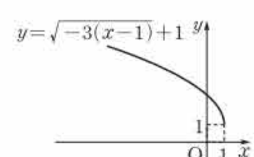
06 $y=\sqrt{4x+12}-7=\sqrt{4(x+3)}-7$

이므로 $y=\sqrt{4x+12}-7$의 그래프는 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore a=-3,\ b=-7$ 답 $a=-3,\ b=-7$

07 $y=\sqrt{-3(x-1)}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고



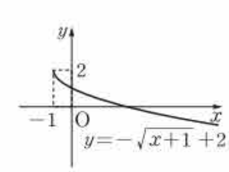
정의역은 $\{x\mid x\le 1\}$,

치역은 $\{y\mid y\ge 1\}$

이다. 답 풀이 참조

08 $y=-\sqrt{x+1}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고



정의역은 $\{x\mid x\ge -1\}$,

치역은 $\{y\mid y\le 2\}$

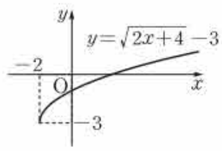
이다. 답 풀이 참조

09 $y=\sqrt{2x+4}-3=\sqrt{2(x+2)}-3$

이므로 $y=\sqrt{2x+4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

> 주어진 함수를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형하여 그래프를 그린다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고



정의역은 $\{x|x\geq-2\}$,

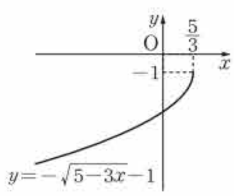
치역은 $\{y|y\geq-3\}$

이다. 답 풀이 참조

10 $y=-\sqrt{5-3x}-1=-\sqrt{-3\left(x-\frac{5}{3}\right)}-1$

이므로 $y=-\sqrt{5-3x}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{5}{3}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고



정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\leq\frac{5}{3}\right\}$,

치역은 $\{y|y\leq-1\}$

이다.

답 풀이 참조

표준+발전 유형 Q+Q

83쪽

01 $ax+3a\geq0$에서 $ax\geq-3a$

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\geq-3\}$이므로

$a>0$

주어진 함수의 치역이 $\{y|y\geq2\}$이므로 $b=2$

즉 $y=\sqrt{ax+3a}+2$의 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로

> y절편이 5이다.

$5=\sqrt{3a}+2$, $\sqrt{3a}=3$

$3a=9$ $\therefore a=3$

$\therefore a+b=5$ 답 ⑤

02 $y=\frac{5x+9}{x+4}=\frac{5(x+4)-11}{x+4}=-\frac{11}{x+4}+5$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-4$, $y=5$

$\therefore a=-4$, $b=5$

$f(x)=\sqrt{-4x+5}+c$에서 $f(1)=-3$이므로

$1+c=-3$ $\therefore c=-4$

따라서 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\leq\frac{5}{4}\right\}$이고,

> $-4x+5\geq0$에서
> $x\leq\frac{5}{4}$

치역은 $\{y|y\geq-4\}$이다.

> $\sqrt{-4x+5}\geq0$에서
> $\sqrt{-4x+5}-4\geq-4$

답 정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\leq\frac{5}{4}\right\}$, 치역: $\{y|y\geq-4\}$

03 $y=\sqrt{a(x-4)}-10$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-b-4)}-10+c$

이 함수의 그래프가

$y=\sqrt{18-6x}=\sqrt{-6(x-3)}$

의 그래프와 일치하므로

$a=-6$, $-b-4=-3$, $-10+c=0$

따라서 $a=-6$, $b=-1$, $c=10$이므로

$a+b+c=3$ 답 3

04 ① $y=\sqrt{3x+4}=\sqrt{3\left(x+\frac{4}{3}\right)}$

따라서 $y=\sqrt{3x+4}$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{4}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\sqrt{-3x}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

> x 대신 $-x$를 대입한다.

③ $y=\sqrt{3x-5}-3=\sqrt{3\left(x-\frac{5}{3}\right)}-3$

따라서 $y=\sqrt{3x-5}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{5}{3}$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=-\sqrt{9-3x}+1=-\sqrt{-3(x-3)}+1$

따라서 $y=-\sqrt{9-3x}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

> x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.

답 ④

쌤 한마디

도형의 대칭이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

① x축에 대하여 대칭이동
- y 대신 $-y$를 대입
- $f(x, -y)=0$

② y축에 대하여 대칭이동
- x 대신 $-x$를 대입
- $f(-x, y)=0$

③ 원점에 대하여 대칭이동
- x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입
- $f(-x, -y)=0$

④ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동
- x 대신 y, y 대신 x를 대입
- $f(y, x)=0$

05 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x+3)}+3$ ······ ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$1=-\sqrt{2a}+3,\qquad \sqrt{2a}=2$

$2a=4\qquad \therefore\ a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{2(x+3)}+3=-\sqrt{2x+6}+3$

따라서 $b=6,\ c=3$이므로

$a+b+c=11$ 답 ②

06 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x-p)}+q$

$=\sqrt{ax-ap}+q\ (p>0,\ q>0)$

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프와 같으므로

$-ap=b,\ q=c$

ㄱ, ㄴ. 주어진 함수의 그래프에서 $a<0,\ p>0,\ q>0$이므로

$b>0,\ c>0\qquad \therefore\ bc>0$

ㄷ. $x=-1$에서의 함숫값이 0보다 크므로

$\sqrt{-a+b}+c>0$

$\therefore\ \sqrt{-a+b}>-c$

$y=\sqrt{ax+b}+c$에 $x=-1$을 대입하면 $y=\sqrt{-a+b}+c$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

쌤한마디

무리함수의 그래프가 주어졌을 때, 함수의 식은 다음과 같이 놓을 수 있다.

① 정의역: $\{x|x\ge p\}$, 치역: $\{y|y\ge q\}$
 ➡ $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a>0)$

② 정의역: $\{x|x\ge p\}$, 치역: $\{y|y\le q\}$
 ➡ $y=-\sqrt{a(x-p)}+q\ (a>0)$

③ 정의역: $\{x|x\le p\}$, 치역: $\{y|y\ge q\}$
 ➡ $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a<0)$

④ 정의역: $\{x|x\le p\}$, 치역: $\{y|y\le q\}$
 ➡ $y=-\sqrt{a(x-p)}+q\ (a<0)$

07 ① $9-3x\ge 0$에서 $x\le 3$이므로 정의역은 $\{x|x\le 3\}$

② $\sqrt{9-3x}\ge 0$에서 $\sqrt{9-3x}-4\ge -4$이므로 치역은 $\{y|y\ge -4\}$

③ $x=-9,\ y=2$를 주어진 함수의 식에 대입하면

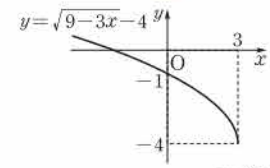
$2=\sqrt{9-3\cdot(-9)}-4$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(-9,\ 2)$를 지난다.

④ $y=\sqrt{9-3x}-4=\sqrt{-3(x-3)}-4$

따라서 $y=\sqrt{9-3x}-4$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\sqrt{9-3x}-4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



답 ⑤

08 ㄷ. $a>0,\ b<0$이면 정의역이 $\{x|x\le 0\}$, 치역이 $\{y|y\ge 0\}$이므로 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

제2사분면을 지난다.

ㄹ. 그래프는 $y=a\sqrt{-bx}$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

09 $y=-\sqrt{4x+k}+2=-\sqrt{4\left(x+\frac{k}{4}\right)}+2$

이므로 $y=-\sqrt{4x+k}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{k}{4}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 7$에서 $y=-\sqrt{4x+k}+2$는

$x=-1$일 때 최댓값 $-\sqrt{-4+k}+2$,

$x=7$일 때 최솟값 $-\sqrt{28+k}+2$

를 갖는다.

즉 $-\sqrt{28+k}+2=-4$이므로

$-\sqrt{28+k}=-6,\qquad 28+k=36$

$\therefore\ k=8$

따라서 구하는 최댓값은

$-\sqrt{-4+8}+2=0$ 답 ②

10 $y=\sqrt{-2x+b}-5=\sqrt{-2\left(x-\frac{b}{2}\right)}-5$

이므로 $y=\sqrt{-2x+b}-5$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{b}{2}$만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-5\le x\le a$에서 $y=\sqrt{-2x+b}-5$는

$x=-5$일 때 최댓값 $\sqrt{10+b}-5$,

$x=a$일 때 최솟값 $\sqrt{-2a+b}-5$

를 갖는다.

즉 $\sqrt{10+b}-5=-1,\ \sqrt{-2a+b}-5=-3$이므로

$\sqrt{10+b}-5=-1$에서

$\sqrt{10+b}=4,\qquad 10+b=16$

$\therefore\ b=6$

$b=6$을 $\sqrt{-2a+b}-5=-3$에 대입하면

$\sqrt{-2a+6}-5=-3$

$\sqrt{-2a+6}=2,\qquad -2a+6=4$

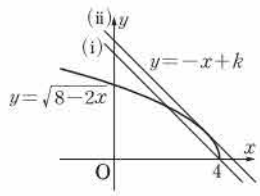
$-2a=-2\qquad \therefore\ a=1$

$\therefore\ b-a=5$ 답 5

11 $y=\sqrt{8-2x}=\sqrt{-2(x-4)}$

이므로 $y=\sqrt{8-2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(4, 0)$을 지날 때,

$0=-4+k \qquad \therefore k=4$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 $y=\sqrt{8-2x}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{8-2x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$8-2x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-2(k-1)x+k^2-8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-8)=0$

$-2k+9=0, \qquad -2k=-9$

$\therefore k=\frac{9}{2}$

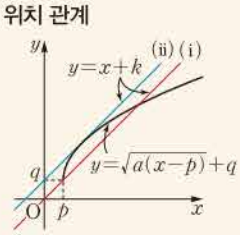
(i), (ii)에서 $y=\sqrt{8-2x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$4\le k<\frac{9}{2}$ 답 ③

쌤한마디

무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a>0)$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계는 오른쪽 그림에서



① 직선이 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때

⇨ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② 직선이 (ii)이거나 (i)의 아래쪽에 있을 때

⇨ 한 점에서 만난다.

③ 직선이 (ii)의 위쪽에 있을 때 ⇨ 만나지 않는다.

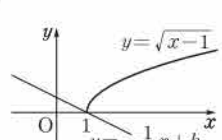
Q BOX

직선 $y=-x+k$는 직선 $y=-x$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=\sqrt{8-2x}$의 그래프를 그린 후 직선 $y=-x$를 y축의 방향으로 평행이동하면서 그래프와 직선의 위치 관계를 살펴본다.

12 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 y절편이 k이다.

이때 $A\cap B\ne\varnothing$이므로 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 만나야 한다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 점 $(1, 0)$을 지날 때 k의 값이 최소이므로



$0=-\frac{1}{2}+k \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

즉 k의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다. 답 $\frac{1}{2}$

13 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면

$B(a, 0)$, $C(0, b)$

이므로 직사각형 OBAC의 둘레의 길이는

$2(a+b)$

점 A는 $y=\sqrt{4-x}$의 그래프 위의 점이므로

$b=\sqrt{4-a}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$b^2=4-a \qquad \therefore a=4-b^2$

$$\begin{aligned}\therefore a+b&=(4-b^2)+b\\&=-b^2+b+4\\&=-\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{4}\end{aligned}$$

이때 점 A는 제1사분면 위의 점이므로

$0<b<2$

따라서 $0<b<2$에서 $a+b$의 최댓값은 $b=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{17}{4}$이므로 직사각형 OBAC의 둘레의 길이의 최댓값은

$2(a+b)=2\cdot\frac{17}{4}=\frac{17}{2}$ 답 $\frac{17}{2}$

14 삼각형 ABP의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행한 접선의 접점일 때 최대이다.

직선 AB의 방정식은

$y=\frac{5-0}{6-1}(x-1)$, 즉 $y=x-1$

이므로 직선 AB와 평행한 접선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 실수)라 하면

$\sqrt{5x-5}=x+k$

위의 식의 양변을 제곱하면

$5x-5=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-5)x+k^2+5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-5)^2-4(k^2+5)=0$

$-20k+5=0, \qquad -20k=-5$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

두 직선 $y=x-1$, $y=x+\frac{1}{4}$ 사이의 거리는 직선 $y=x-1$ 위의 점 $(1, 0)$과 직선 $y=x+\frac{1}{4}$, 즉 $4x-4y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|4+1|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(6-1)^2+5^2}=5\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{8}=\frac{25}{8}$ 답 ②

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리

⇨ $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

15 함수 $f(x)=-\sqrt{2x+1}+1$의 치역이 $\{y|y\le 1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le 1\}$이다.

$y=-\sqrt{2x+1}+1$로 놓으면

$\sqrt{2x+1}=1-y$

위의 식의 양변을 제곱하면 $\quad 2x+1=(1-y)^2$

$\therefore x=\frac{1}{2}(y-1)^2-\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}\ (x\le 1)$

이때 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}\ (x\le 1)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동하면 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프의 일부와 겹쳐진다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $m=-1$, $n=\frac{1}{2}$이므로

$a+m-n=-1$ 답 ③

> **Q BOX**
> 무리함수의 역함수
> ➡ x를 y에 대한 식으로 나타낸 후 x와 y를 서로 바꾼다. 이때 역함수의 정의역에 주의한다.

16 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(-4, 4)$를 지나므로

$4=\sqrt{-4a+b}$

$\therefore -4a+b=16$ ······ ㉠

또 역함수의 그래프가 점 $(5, -7)$을 지나면 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(-7, 5)$를 지나므로

$5=\sqrt{-7a+b}$

$\therefore -7a+b=25$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-3,\ b=4$

$\therefore ab=-12$ 답 ③

> 함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 (b, a)를 지난다.

17 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(14)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(14)$
$=(g^{-1}\circ f)(14)$
$=g^{-1}(f(14))$

> 함수 f의 역함수가 f^{-1}일 때
> ➡ $f^{-1}\circ f$, $f\circ f^{-1}$는 항등함수이다.

$f(14)=\frac{14+8}{14-3}=2$이므로

$g^{-1}(f(14))=g^{-1}(2)$

$g^{-1}(2)=k$라 하면 $g(k)=2$이므로

$\sqrt{4k-12}=2,\quad 4k-12=4$

$4k=16\quad \therefore k=4$

> 함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
> $f(a)=b$
> $\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

따라서 $g^{-1}(2)=4$이므로

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(14)=g^{-1}(f(14))$
$=g^{-1}(2)$
$=4$ 답 4

18 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=8$에서

$(f\circ f)^{-1}(a)=8$

$\therefore (f\circ f)(8)=a$

이때

$f(8)=-\sqrt{8+1}+1=-2$,

$f(-2)=\sqrt{-1+2}+1=2$

이므로

$a=(f\circ f)(8)=f(f(8))$
$=f(-2)=2$ 답 2

중단원 마무리

86쪽

01 전략 식의 값을 구할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$에서 $\quad 2x=\sqrt{5}-1$

$2x+1=\sqrt{5}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4x^2+4x+1=5,\quad 4x^2+4x-4=0$

$\therefore x^2+x=1$

$\therefore \frac{5x^3+3x^2-7x+4}{x^2+x}$

$=\frac{5x(x^2+x)-2(x^2+x)-5x+4}{x^2+x}$

$=\frac{5x\cdot 1-2\cdot 1-5x+4}{1}=2$ 답 ②

02 전략 분모의 유리화를 이용하여 주어진 식의 좌변을 간단히 한 후 자연수 n의 최댓값을 구한다.

풀이 $\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

$=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}$

$=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2n+1-(2n-1)}=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}$

이므로 주어진 부등식의 좌변을 간단히 하면

$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$
$+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$

즉 $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)\le 3$이므로

$\sqrt{2n+1}-1\le 6,\quad \sqrt{2n+1}\le 7$

$2n+1\le 49,\quad 2n\le 48$

$\therefore n\le 24$

따라서 구하는 자연수 n의 최댓값은 24이다. 답 24

03 전략 주어진 함수의 그래프가 점 $(8, 6)$을 지남을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 함수 $y=\sqrt{5x+k}+1$의 그래프가 점 $(8, 6)$을 지나므로

$\sqrt{40+k}+1=6,\quad \sqrt{40+k}=5$

$40+k=25\quad \therefore k=-15$ ··· ❶

즉 $y=\sqrt{5x-15}+1=\sqrt{5(x-3)}+1$이다.

$5(x-3)\ge 0$에서 $x\ge 3$이므로 정의역은

$\{x|x\ge 3\}$

$\sqrt{5(x-3)}\ge 0$에서 $\sqrt{5(x-3)}+1\ge 1$이므로 치역은

$\{y|y\ge 1\}$ ··· ❷

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$k+a+b=-11$ ··· ❸

답 -11

단계	채점 기준	비율
❶	k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	정의역, 치역을 구할 수 있다.	50 %
❸	$k+a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

04 **전략** 평행이동과 대칭이동한 그래프의 식을 구한 후 $y=0$일 때의 x의 값을 구한다.

풀이 $y=\sqrt{-2x-7}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.

$-y=\sqrt{2x-7}$ $\quad\therefore y=-\sqrt{2x-7}$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{2(x+6)-7}+1=-\sqrt{2x+5}+1$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$0=-\sqrt{2x+5}+1,\quad \sqrt{2x+5}=1$

$2x+5=1,\quad 2x=-4$

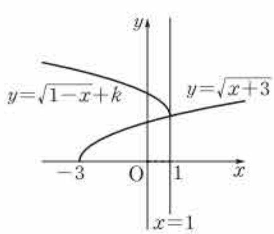
$\therefore x=-2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 0)$이다. 답 $(-2,\ 0)$

05 **전략** 두 함수의 그래프를 그리고 두 그래프가 만나도록 미지수가 있는 함수의 그래프를 움직여 본다.

풀이 $y=\sqrt{x+3}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이고, $y=\sqrt{1-x}+k$, 즉 $y=\sqrt{-(x-1)}+k$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 $y=\sqrt{x+3}$의 그래프와 직선 $x=1$의 교점을 지날 때, k의 값이 최대이다. 이때 교점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로 $\quad k=2$ 답 2



$\sqrt{1+3}=2$

06 **전략** 주어진 유리함수의 그래프를 이용하여 a, b, c의 부호를 구한 후 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형을 파악한다.

풀이 $y=\dfrac{bx+c}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab+c}{x+a}=\dfrac{-ab+c}{x+a}+b$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=b$

즉 $-a<0$, $b<0$이므로 $\quad a>0,\ b<0$

또 y절편은 $\dfrac{c}{a}$이므로 $\quad \dfrac{c}{a}<0 \quad \therefore c<0$

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$

이므로 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a>0$, $-\dfrac{b}{a}>0$, $c<0$이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형은 ②이다. 답 ②

07 **전략** 함수 $y=-\sqrt{6-x}+1$을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

풀이 ㄱ. $y=-\sqrt{6-x}+1=-\sqrt{-(x-6)}+1$

이므로 $y=-\sqrt{6-x}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

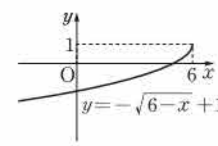
ㄴ. $6-x\geq0$에서 $x\leq6$이므로 정의역은

$\{x|x\leq6\}$

$-\sqrt{6-x}\leq0$에서 $-\sqrt{6-x}+1\leq1$이므로 치역은

$\{y|y\leq1\}$

ㄷ. $y=-\sqrt{6-x}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

08 **전략** 주어진 정의역에서 함수 $y=2\sqrt{x+1}+k$의 그래프를 그리고 최댓값, 최솟값을 구한다.

풀이 $y=2\sqrt{x+1}+k$의 그래프는 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\leq x\leq3$에서 $y=2\sqrt{x+1}+k$는

$x=3$일 때 최댓값 $2\sqrt{3+1}+k=4+k$,

$x=0$일 때 최솟값 $2\sqrt{0+1}+k=2+k$

를 갖는다.

즉 $M=4+k$, $m=2+k$이므로 $M+m=40$에서

$(4+k)+(2+k)=40$

$2k=34 \quad \therefore k=17$ 답 17

09 **전략** 함수 $y=\sqrt{|x-3|}$의 그래프를 그리고 직선 $y=kx$와 서로 다른 세 점에서 만나도록 직선 $y=kx$를 움직여 본다.

풀이 $n(A\cap B)=3$이므로 함수 $y=\sqrt{|x-3|}$의 그래프와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

이때

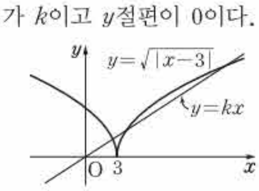
$$y=\sqrt{|x-3|}=\begin{cases}\sqrt{-(x-3)} & (x<3)\\ \sqrt{x-3} & (x\geq3)\end{cases}$$

$y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이고, 직선 $y=kx$는 기울기가 k이고 y절편이 0이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프와 직선 $y=kx$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



즉 $k>0$이어야 하고 $\sqrt{x-3}=kx$의 양변을 제곱하면

$x-3=k^2x^2$

$\therefore k^2x^2-x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot k^2\cdot 3=0$

$1-12k^2=0, \quad k^2=\dfrac{1}{12}$

$\therefore k=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\ (\because k>0)$

따라서 $n(A\cap B)=3$을 만족시키는 k의 값의 범위는

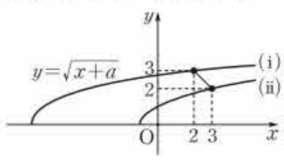
$0<k<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 답 $0<k<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Q BOX

$k\le 0$일 때 $y=\sqrt{|x-3|}$의 그래프와 직선 $y=kx$의 교점의 개수는 항상 1이다.

10 전략 조건을 만족시키도록 함수 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프를 움직여 본다.

풀이 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이다.



(i) $y=\sqrt{x+a}$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지날 때,

$3=\sqrt{2+a}, \quad 9=2+a \quad \therefore a=7$

(ii) $y=\sqrt{x+a}$의 그래프가 점 $(3, 2)$를 지날 때,

$2=\sqrt{3+a}, \quad 4=3+a \quad \therefore a=1$

(i), (ii)에서 $1\le a\le 7$이므로

$M=7,\ m=1$

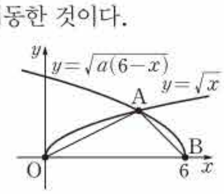
$\therefore M+m=8$ 답 ⑤

11 전략 $\mathrm{A}(p, q)\ (p>0, q>0)$라 하고 △AOB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot q$임을 이용한다.

풀이 $y=\sqrt{a(6-x)}=\sqrt{-a(x-6)}$

이므로 $y=\sqrt{a(6-x)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림과 같이 점 A의 좌표를 $(p, q)\ (p>0, q>0)$라 하면 $\overline{\mathrm{OB}}=6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 6이므로



$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot q=6 \quad \therefore q=2$

이때 점 A는 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 점이므로

$q=\sqrt{p}, \quad 2=\sqrt{p} \quad \therefore p=4$

$\therefore \mathrm{A}(4, 2)$

또 점 A는 $y=\sqrt{a(6-x)}$의 그래프 위의 점이므로

$2=\sqrt{2a}, \quad 2a=4 \quad \therefore a=2$ 답 ②

12 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 평행이동과 대칭이동에 의하여 서로 겹쳐짐을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

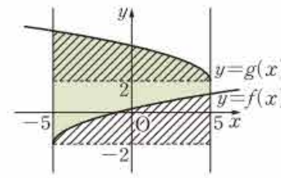
풀이 $y=\sqrt{x+5}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

또 $y=\sqrt{-x+5}+2=\sqrt{-(x-5)}+2$이므로

$y=\sqrt{-x+5}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

x 대신 $-x$를 대입한다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 구하는 넓이는 색칠한 부분의 넓이와 같다.



이때 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$10\cdot 4=40$ 답 ③

가로의 길이가 $5-(-5)=10$, 세로의 길이가 $2-(-2)=4$인 직사각형의 넓이

13 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $y=\sqrt{6x-2}+k$의 그래프와 이 함수의 역함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 두 교점은 $y=\sqrt{6x-2}+k$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{6x-2}+k=x$에서 $\quad \sqrt{6x-2}=x-k$

위의 식의 양변을 제곱하면

$6x-2=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-2(k+3)x+k^2+2=0$

두 교점의 좌표를 (α, α), (β, β)라 하면 이차방정식 $x^2-2(k+3)x+k^2+2=0$의 두 근은 α, β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(k+3),\ \alpha\beta=k^2+2$

이때 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{17}$이므로

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}$

$=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}$

$=\sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}$

$=\sqrt{2\{2^2(k+3)^2-4(k^2+2)\}}$

$=\sqrt{2(24k+28)}$

$=2\sqrt{12k+14}$

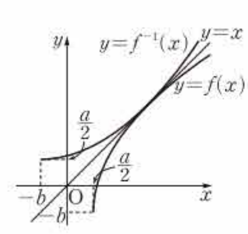
에서 $\quad 2\sqrt{12k+14}=2\sqrt{17}$

$\sqrt{12k+14}=\sqrt{17}, \quad 12k+14=17$

$12k=3 \quad \therefore k=\dfrac{1}{4}$ 답 ③

14 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 접함을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프가 한 점에서 만날 때, 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 접한다.



$\sqrt{2x-a}-b=x$에서 $\quad \sqrt{2x-a}=x+b$

양변을 제곱하면

$$2x-a=x^2+2bx+b^2$$

$$\therefore\ x^2+2(b-1)x+a+b^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(b-1)^2-(a+b^2)=0$$

$$-2b+1-a=0 \qquad \therefore\ a+2b=1$$

이때 a, b가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+2b \geq 2\sqrt{2ab}, \qquad 1 \geq 2\sqrt{2ab}$$

$$\frac{1}{2} \geq \sqrt{2ab}, \qquad \frac{1}{4} \geq 2ab$$

$$\therefore\ ab \leq \frac{1}{8}\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 ab의 최댓값은 $\frac{1}{8}$이다. 답 ①

등호는 $a=2b$일 때 성립하고 $a+2b=1$이므로

$$a=\frac{1}{2},\ 2b=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$일 때 ab는 최댓값을 갖는다.

15 전략 $(g\circ f^{-1})^{-1}=f\circ g^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $(g\circ f^{-1})^{-1}(a)=(f\circ g^{-1})(a)$

$$=f(g^{-1}(a))$$

즉 $f(g^{-1}(a))=\sqrt{5}$이므로

$$g^{-1}(a)=f^{-1}(\sqrt{5}) \quad \cdots\ ❶$$

$f^{-1}(\sqrt{5})=k$라 하면 $f(k)=\sqrt{5}$이므로

$$\sqrt{-3k+8}=\sqrt{5}, \qquad -3k+8=5$$

$$-3k=-3 \qquad \therefore\ k=1$$

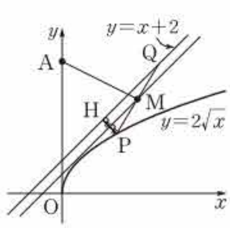
따라서 $g^{-1}(a)=1$이므로

$$a=g(1)=-\sqrt{8-4\cdot 1}=-2 \quad \cdots\ ❷$$

답 -2

단계	채점 기준	비율
❶	$g^{-1}(a)=f^{-1}(\sqrt{5})$임을 알 수 있다.	40 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	60 %

16 전략 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리가 최소일 때를 생각한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프 위의 임의의 점 P에서 직선 $y=x+2$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 PQ의 중점 M은 선분 PH의 수직이등분선 위에 있으므로 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은 점 A와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값과 같다.

점 P$(a,\ 2\sqrt{a})$라 할 때, 점 P와 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a-2\sqrt{a}+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|(\sqrt{a}-1)^2+1|}{\sqrt{2}}$$

이므로 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 최솟값은 $a=1$일 때 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 직선 $y=x+2$와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

이때 점 A$(0,\ 8)$과 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-8+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

이므로 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은

$$\frac{\sqrt{2}}{4}+3\sqrt{2}=\frac{13\sqrt{2}}{4}$$

답 ①

쌤한마디

선분 PQ의 중점 M이 선분 PH의 수직이등분선 위에 있음을 알아보자.

직선 $y=x+2$ 위의 한 점 Q′을 선택하고 선분 PQ′의 중점을 M′이라 하자.

(ⅰ) 점 Q′이 점 H와 같은 경우 점 M′은 선분 PH의 중점이다.

(ⅱ) 점 Q′이 점 H와 같지 않은 경우
점 M′에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 I라 하자.
이때 직각삼각형 PM′I와 직각삼각형 PQ′H는 닮은 도형이고 $\overline{PM'}=\overline{M'Q'}$이므로 $\overline{PI}=\overline{IH}$이다. 즉 점 M′은 선분 PH의 수직이등분선 위의 점이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 점 P가 고정되었을 때 직선 $y=x+2$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 PQ의 중점 M은 선분 PH의 수직이등분선 위의 점이다.

17 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계임을 이용한다.

풀이 $y=\sqrt{2x+3}$으로 놓으면

$$y^2=2x+3 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{2}$$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\ (x\geq 0)$$

함수 $y=\sqrt{2x+3}$의 치역이 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 0\}$이다.

따라서 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\sqrt{2x+3}=x$에서

$$2x+3=x^2, \qquad x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0 \qquad \therefore\ x=3\ (\because\ x\geq 0)$$

$$\therefore\ \text{A}(3,\ 3)$$

점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$$\text{C}\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ \overline{\text{BC}}=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

직선 l은 기울기가 -1이고 점 B를 지나므로 직선 l의 방정식은

$$y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)+2 \qquad \therefore\ 2x+2y-5=0$$

점 A$(3,\ 3)$과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|6+6-5|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{4}=\frac{21}{8}$$

답 ④

07 순열과 조합

Lecture 16 경우의 수

90쪽

01 $4+3=7$ 답 7

02 각 자리의 숫자의 합이 2인 두 자리 자연수는
11, 20의 2개
각 자리의 숫자의 합이 5인 두 자리 자연수는
14, 23, 32, 41, 50의 5개
따라서 구하는 자연수의 개수는
$2+5=7$ 답 7

03 홀수의 눈이 나오는 경우는
1, 3, 5의 3가지
6의 약수의 눈이 나오는 경우는
1, 2, 3, 6의 4가지
홀수이면서 6의 약수인 눈이 나오는 경우는
1, 3의 2가지
따라서 구하는 경우의 수는
$3+4-2=5$ 답 5

04 6의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우는
6, 12, 18, ⋯, 48의 8가지
15의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우는
15, 30, 45의 3가지
6과 15의 공배수가 적힌 공을 꺼내는 경우는
30의 1가지
따라서 구하는 경우의 수는
$8+3-1=10$ 답 10

6과 15의 최소공배수인 30의 배수

05 빵을 택하는 경우의 수는 4
음료수를 택하는 경우의 수는 7
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot7=28$ 답 28

06 첫 번째에 3의 배수의 눈이 나오는 경우는
3, 6의 2가지
두 번째에 소수의 눈이 나오는 경우는
2, 3, 5의 3가지
따라서 구하는 경우의 수는
$2\cdot3=6$ 답 6

07 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
2, 4, 6, 8의 4개
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
1, 2, 4, 8의 4개
따라서 구하는 자연수의 개수는
$4\cdot4=16$ 답 16

88~91쪽

08 (ⅰ) $A \to B \to C$로 가는 경우의 수는
$3\cdot2=6$
(ⅱ) $A \to C$로 가는 경우의 수는 1
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$6+1=7$ 답 7

표준+발전 유형 Q+Q

91쪽

01 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(ⅰ) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
(ⅱ) 눈의 수의 합이 8이 되는 경우
(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)
의 5가지
(ⅲ) 눈의 수의 합이 12가 되는 경우
(6, 6)의 1가지
이상에서 구하는 경우의 수는
$3+5+1=9$ 답 ②

서로 다른 주사위나 동전을 여러 개 던질 때 일어나는 사건의 경우의 수를 구할 때에는 순서쌍을 이용하면 편리하다.

02 3과 5로 모두 나누어떨어지지 않는 수는 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수이다.
1부터 200까지의 자연수 중에서
3으로 나누어떨어지는 수, 즉 3의 배수는
3, 6, 9, ⋯, 198의 66개
5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는
5, 10, 15, ⋯, 200의 40개
3과 5로 나누어떨어지는 수, 즉 15의 배수는
15, 30, 45, ⋯, 195의 13개
따라서 3 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수는
$66+40-13=93$
이므로 3과 5로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는
$200-93=107$ 답 107

자연수 a로 나누어떨어지는 자연수는 a의 배수이다.

03 (ⅰ) $x=1$일 때,
$2y+z=12$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
(1, 1, 10), (1, 2, 8), (1, 3, 6),
(1, 4, 4), (1, 5, 2)의 5개
(ⅱ) $x=2$일 때,
$2y+z=9$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
(2, 1, 7), (2, 2, 5), (2, 3, 3), (2, 4, 1)
의 4개
(ⅲ) $x=3$일 때,
$2y+z=6$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
(3, 1, 4), (3, 2, 2)의 2개
(ⅳ) $x=4$일 때,
$2y+z=3$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
(4, 1, 1)의 1개

계수의 절댓값이 가장 큰 x의 값을 기준으로 경우를 나누어 생각한다. 이때 x는 자연수이므로 x의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4이다.

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+4+2+1=12$ 답 12

04 (i) $y=0$일 때,

$2x+0<9$, 즉 $x<\frac{9}{2}$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 0)$의 5개

(ii) $y=1$일 때,

$2x+3<9$, 즉 $x<3$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$의 3개

(iii) $y=2$일 때,

$2x+6<9$, 즉 $x<\frac{3}{2}$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 2)$, $(1, 2)$의 2개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+3+2=10$ 답 ②

05 500보다 작은 자연수이므로 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4의 4개

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 3, 5, 7의 4개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 5의 2개

5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\cdot4\cdot2=32$ 답 ②

쌤한마디

배수의 판정

① 2의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수인 수

② 3의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 수

③ 4의 배수: 끝의 두 자리 수가 00이거나 4의 배수인 수

④ 5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5인 수

06 세 주사위의 눈의 수의 합이 짝수가 되는 경우는 세 개 모두 짝수의 눈이 나오거나 짝수의 눈이 한 개 나오는 경우이다.

(i) 세 개 모두 짝수의 눈이 나오는 경우의 수는

$3\cdot3\cdot3=27$

(ii) 짝수의 눈이 한 개, 홀수의 눈이 두 개 나오는 경우의 수는

$3\cdot3\cdot3\cdot3=81$

(짝, 홀, 홀), (홀, 짝, 홀), (홀, 홀, 짝)의 3가지 경우가 있다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$27+81=108$ 답 ⑤

07 $(a+b+c+d)(x+y)$에서 a, b, c, d에 곱해지는 항이 각각 x, y의 2개이므로 $m=4\cdot2=8$

$(2a-b+1)(x+y)^2=(2a-b+1)(x^2+2xy+y^2)$에서 $2a$, $-b$, 1에 곱해지는 항이 각각 x^2, $2xy$, y^2의 3개이므로 $n=3\cdot3=9$

$\therefore m+n=17$ 답 17

쌤한마디

전개식의 항의 개수

두 다항식 A, B의 각 항의 문자가 모두 다를 때, AB의 전개식의 항의 개수

➡ (A의 항의 개수)×(B의 항의 개수)

$N=x^p y^q z^r$ (x, y, z는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수) 꼴로 소인수분해되는 자연수 N의 양의 약수의 개수

➡ $(p+1)(q+1)(r+1)$

08 $63=3^2\cdot7$이므로 63의 양의 약수의 개수는

$(2+1)(1+1)=6$ $\therefore a=6$

$252=2^2\cdot3^2\cdot7$이므로 252의 양의 약수의 개수는

$(2+1)(2+1)(1+1)=18$ $\therefore b=18$

$\therefore b-a=12$ 답 ③

09 48을 소인수분해하면 $48=2^4\cdot3$

$48^n=(2^4\cdot3)^n=2^{4n}\cdot3^n$의 양의 약수의 개수는

$(4n+1)(n+1)$

따라서 $(4n+1)(n+1)=52$이므로

$4n^2+5n-51=0$

$(4n+17)(n-3)=0$

$\therefore n=3$ ($\because$ n은 자연수) 답 3

10 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$3\cdot3\cdot4-1=35$ 답 ①

11 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 2장을 5000원짜리 지폐 4장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50000원짜리 지폐 1장, 5000원짜리 지폐 7장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50000원의 2가지

5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 5000원, 10000원, ⋯, 35000원의 8가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$2\cdot8-1=15$ 답 15

12 (i) A → B → C로 가는 경우의 수는

$3\cdot2=6$

(ii) A → D → C로 가는 경우의 수는

$2\cdot2=4$

(iii) A → B → D → C로 가는 경우의 수는

$3\cdot2\cdot2=12$

(iv) A → D → B → C로 가는 경우의 수는

$2\cdot2\cdot2=8$

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+4+12+8=30$ 답 ③

13 (i) 매표소 → 정상 → 대피소 → 매표소로 가는 경우의 수는

$2\cdot3\cdot3=18$

(ii) 매표소 → 대피소 → 정상 → 매표소로 가는 경우의 수는

$3\cdot3\cdot2=18$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$18+18=36$ 답 36

14 A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3=540$ 답 ④

각 영역에 칠할 수 있는 색의 개수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

15 (i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

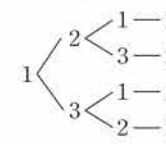
$36+48=84$ 답 ③

쌤한마디

A → B → C → D의 순서대로 색을 칠하면 A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
그런데 D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색이 같은지 다른지에 따라 달라지므로 A와 C에 같은 색을 칠할 때와 다른 색을 칠할 때로 경우를 나누어 구해야 한다.

Q BOX

16 천의 자리의 숫자가 1이면서 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 같은 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

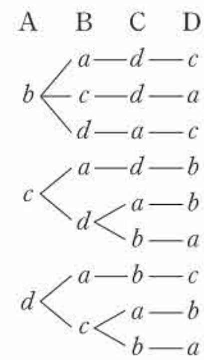


수형도
➡ 사건이 일어나는 모든 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타낸 것

천의 자리의 숫자가 2, 3인 경우도 각각 4가지이므로 구하는 경우의 수는

$4\cdot3=12$ 답 ②

17 4명의 학생 A, B, C, D의 보고서를 각각 a, b, c, d라 할 때, 자신의 것이 아닌 다른 학생의 보고서를 읽는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 9이다. 답 9



Lecture 17 순열

L 94쪽

01 ${}_9\mathrm{P}_2=9\cdot8=72$ 답 72

02 답 1

03 $6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ 답 720

04 답 1

05 ${}_n\mathrm{P}_3=n(n-1)(n-2)$이므로

$n(n-1)(n-2)=24=4\cdot3\cdot2$

$\therefore n=4$ 답 $n=4$

$n(n-1)(n-2)$는 연속하는 세 자연수의 곱이므로 24를 연속하는 세 자연수의 곱으로 나타낸다.

06 ${}_n\mathrm{P}_n=n!$이므로

$n!=120=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

$\therefore n=5$ 답 $n=5$

07 $840=7\cdot6\cdot5\cdot4$이므로

${}_7\mathrm{P}_4=840$ $\quad\therefore r=4$ 답 $r=4$

08 ${}_6\mathrm{P}_0=1$이므로

$r-2=0$ $\quad\therefore r=2$ 답 $r=2$

09 $3\cdot{}_n\mathrm{P}_2-{}_{n-1}\mathrm{P}_1=56$에서

$3n(n-1)-(n-1)=56$

$3n^2-4n-55=0$

$(3n+11)(n-5)=0$

$\therefore n=5\ (\because n\geq2)$ 답 5

${}_n\mathrm{P}_2$에서 $n\geq2$

10 구하는 세 자리 자연수의 개수는 5장의 카드 중에서 3장을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$ 답 60

11 구하는 경우의 수는 8명의 선수 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$_8P_2=8\cdot7=56$ 답 56

12 $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

13 구하는 경우의 수는 윤지를 제외한 나머지 5명을 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 답 120

표준+발전 유형 Q+Q

95쪽

01 $_7P_3=7\cdot6\cdot5=210$ 답 ⑤

02 $_nP_2=132$이므로

$n(n-1)=132=12\cdot11$

$\therefore n=12$ 답 12

03 1학년 학생 3명을 한 사람, 3학년 학생 2명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

1학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

3학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot6\cdot2=1440$ 답 1440

쌤한마디

이웃하는 순열의 수

이웃하는 것이 있는 순열의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

(ii) 이웃하는 것끼리 자리를 바꾸는 경우의 수를 구한다.

(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

04 3쌍의 부부를 각각 한 사람으로 생각하여 3명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$3!=6$

3쌍의 부부가 각각 부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot8=48$ 답 ②

Q BOX

3, 6, 5, 7

3개의 숫자를 ○라 하면
∨○∨○∨○∨

$n(n-1)=132$에서
$(n+11)(n-12)=0$
$\therefore n=12\ (\because n\ge2)$

의자가 모두 똑같으므로 빈 의자 6개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1이다.

짝수를 ●, 홀수를 ▲라 하면
(i) ● ▲ ● ▲ ●
(ii) ▲ ● ▲ ● ▲

선생님 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수

4명의 학생 중 3명을 택하여 일렬로 세우는 경우의 수

05 3, 6을 한 개의 숫자로 생각하여 1, 2, 4, 8을 제외한 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

3과 6의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

3개의 숫자 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 4개의 숫자 1, 2, 4, 8을 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2\cdot24=288$ 답 ④

쌤한마디

이웃하지 않는 순열의 수

이웃하지 않는 것이 있는 순열의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 이웃해도 상관없는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

(ii) (i)에서 나열한 것 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열하는 경우의 수를 구한다.

(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

06 3개의 의자에만 학생들이 앉으므로 빈 의자는 6개이다.

빈 의자들 사이사이 및 양 끝의 7개의 자리에 학생이 앉는 의자 3개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는

$_7P_3=210$ 답 210

07 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개, 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로

(i) 짝수, 홀수의 순서로 번갈아 나타나도록 만드는 경우의 수는

$_4P_3\cdot{}_5P_2=24\cdot20=480$

(ii) 홀수, 짝수의 순서로 번갈아 나타나도록 만드는 경우의 수는

$_5P_3\cdot{}_4P_2=60\cdot12=720$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$480+720=1200$ 답 1200

08 (i) 두 선생님 사이에 3명의 학생이 오도록 묶음을 만드는 경우의 수는

$2!\cdot{}_4P_3=48$

이 묶음과 나머지 1명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 경우의 수는

$48\cdot2=96$

(ii) 두 선생님 사이에 4명의 학생이 오도록 세우는 경우의 수는

$2!\cdot4!=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$96+48=144$ 답 ③

09 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!=5040$

자음끼리 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 모음 4개를 일렬로 나열하고 모음 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 자음 3개를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$4!\cdot{}_5P_3=1440$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-1440=3600$ 답 ③

QBOX

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)
−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

10 6명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$6!=720$

양 끝에 모두 남학생이 오도록 세우는 경우의 수는

${}_3P_2\cdot 4!=144$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-144=576$ 답 ③

11 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

0을 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4P_3=24$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 3, 7의 3개이다.

백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_3P_2=6$

따라서 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수는

$3\cdot 6=18$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$24+18=42$ 답 ③

12 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다. 이때 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

0, 1, 2 또는 0, 1, 5 또는 0, 2, 4 또는
0, 4, 5 또는 1, 2, 3 또는 1, 3, 5 또는
2, 3, 4 또는 3, 4, 5

(i) 0, 1, 2 또는 0, 1, 5 또는 0, 2, 4 또는 0, 4, 5로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 각각

$2\cdot 2!=4$

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 2개이고 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 오는 숫자를 제외한 2개이므로
$2\cdot 2!$

(ii) 1, 2, 3 또는 1, 3, 5 또는 2, 3, 4 또는 3, 4, 5로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 각각

$3!=6$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$4\cdot 4+4\cdot 6=40$ 답 ②

13 E로 시작하는 것의 개수는

$4!=24$

O로 시작하는 것의 개수는

$4!=24$

PE로 시작하는 것의 개수는

$3!=6$

POE로 시작하는 것의 개수는

$2!=2$

POR로 시작하는 것의 개수는

$2!=2$

따라서 EOPRW부터 POWER까지의 개수는

$24+24+6+2+2+1=59$

이므로 POWER는 59번째에 온다. 답 59번째

14 3450보다 작은 자연수는

1□□□, 2□□□, 30□□, 31□□, 32□□,
340□, 341□, 342□

꼴이다.

1□□□ 또는 2□□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_5P_3=60$

30□□ 또는 31□□ 또는 32□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_4P_2=12$

340□ 또는 341□ 또는 342□ 꼴인 자연수의 개수는

3

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2\cdot 60+3\cdot 12+3\cdot 3=165$ 답 ③

Lecture 18 조합

97쪽

01 ${}_9C_3=\dfrac{{}_9P_3}{3!}=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=84$ 답 84

02 ${}_{10}C_5=\dfrac{{}_{10}P_5}{5!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=252$ 답 252

03 답 1 **04** 답 1

05 ${}_nC_2=36$에서 $\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}=36$

$n(n-1)=72=9\cdot 8$

$\therefore n=9$ 답 $n=9$

06 ${}_{13}C_r=78$에서 $\dfrac{13!}{r!(13-r)!}=78$

$13!=78\cdot r!(13-r)!$

$2\cdot 11\cdot 10\cdot \cdots \cdot 2\cdot 1=r!(13-r)!$

$2!\cdot 11!=r!(13-r)!$

$\therefore r=2$ 또는 $r=11$ 답 $r=2$ 또는 $r=11$

07 $2=n-5$이므로 $n=7$ 답 $n=7$

08 ${}_8C_r={}_8C_{r-2}$에서

$r=r-2$ 또는 $8-r=r-2$

(i) $r=r-2$에서 $0\neq-2$이므로 r의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $8-r=r-2$에서 $\quad 2r=10$

$\therefore r=5$

(i), (ii)에서 $\quad r=5$ 　　답 $r=5$

09 ${}_nC_6={}_{n-1}C_3+{}_{n-1}C_4$에서 ${}_{n-1}C_3+{}_{n-1}C_4={}_nC_4$이므로

${}_nC_6={}_nC_4$

이때 $4=n-6$이므로 $\quad n=10$ 　　답 10

10 홀수 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 4장을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$ 　　답 5

11 서로 다른 종류의 꽃 9송이를 2송이, 3송이, 4송이의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_2\cdot{}_7C_3\cdot{}_4C_4=36\cdot35\cdot1=1260$ 　　답 1260

12 서로 다른 종류의 꽃 9송이를 2송이, 2송이, 5송이의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_2\cdot{}_7C_2\cdot{}_5C_5\cdot\dfrac{1}{2!}=36\cdot21\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=378$ 　　답 378

13 서로 다른 종류의 꽃 9송이를 3송이, 3송이, 3송이의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\dfrac{1}{3!}=84\cdot20\cdot1\cdot\dfrac{1}{6}=280$ 　　답 280

표준+발전 유형 Q+Q

98쪽

01 ${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(n-r)!}}$$

$$=\frac{(\boxed{n-r})(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{\{(n-r)+r\}(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{\boxed{n!}}{r!(n-r)!}$$

$$={}_nC_r$$

$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $n-r$ (다) $n!$

답 (가) $(n-r)!$ (나) $n-r$ (다) $n!$

Q BOX

${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$
(단, $1\le r<n$)

$(n-r)(n-r-1)!$
$=(n-r)!$,
$r(r-1)!=r!$

서로 다른 n개 중에서 r개를 뽑을 때
① 특정한 것 k개를 포함하여 뽑는 경우의 수
➡ ${}_{n-k}C_{r-k}$
② 특정한 것 k개를 제외하고 뽑는 경우의 수
➡ ${}_{n-k}C_r$

쌤한마디

${}_nC_r$는 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 경우의 수이므로 r개 중에 특정한 1개가 포함되지 않는 경우와 특정한 1개가 포함되는 경우로 나누어 다음과 같이 증명할 수도 있다.

(i) r개 중에 특정한 1개가 포함되지 않는 경우
특정한 1개를 제외한 $(n-1)$개 중에서 r개를 택하면 되므로 그 경우의 수는 $\quad {}_{n-1}C_r$

(ii) r개 중에 특정한 1개가 포함되는 경우
특정한 1개를 제외한 $(n-1)$개 중에서 $(r-1)$개를 택하면 되므로 그 경우의 수는 $\quad {}_{n-1}C_{r-1}$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여

${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

이 성립한다.

02 $n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!}$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(n-r)!}}$$

$$=\frac{\boxed{n!}}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$=\frac{r\cdot n!}{r(r-1)!(n-r)!}$$

$$=\frac{r\cdot n!}{\boxed{r!}(n-r)!}$$

$$=r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$=r\cdot{}_nC_r$$

$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$

답 (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$

03 1반 학생 8명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

2반 학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$56+20=76$ 　　답 76

04 공책 n권 중에서 2권을 택하는 경우의 수는

${}_nC_2$

지우개 7개 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_4={}_7C_3=35$

따라서 ${}_nC_2\cdot35=350$이므로 $\quad {}_nC_2=10$

$\dfrac{n(n-1)}{2}=10, \quad n(n-1)=20=5\cdot4$

$\therefore n=5$ 　　답 5

05 구하는 경우의 수는 어머니와 아버지를 제외한 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_2=15$ 　　답 ③

06 (i) 공통으로 신청하는 선택과목이 0개인 경우
희도가 9개의 선택과목 중에서 2개를 택하고, 성희가 남은 7개의 선택과목 중에서 2개를 택하면 되므로 경우의 수는

$_9C_2 \cdot {_7C_2} = 36 \cdot 21 = 756$

(ii) 공통으로 신청하는 선택과목이 1개인 경우
희도가 9개의 선택과목 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_9C_2 = 36$

성희가 희도가 택한 2개의 선택과목 중에서 1개를 택하고, 희도가 택하지 않은 7개의 선택과목 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$_2C_1 \cdot {_7C_1} = 2 \cdot 7 = 14$

따라서 희도와 성희가 공통으로 신청한 선택과목이 1개인 경우의 수는

$36 \cdot 14 = 504$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$756 + 504 = 1260$ 답 ⑤

07 11명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$_{11}C_4 = 330$

남자 직원만 4명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_4 = {_5C_1} = 5$

여자 직원만 4명을 뽑는 경우의 수는

$_6C_4 = {_6C_2} = 15$

따라서 구하는 경우의 수는

$330 - (5 + 15) = 310$ 답 ②

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)
−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

08 총 12권의 책 중에서 4권을 고르는 경우의 수는

$_{12}C_4 = 495$

만화책을 제외하고 4권을 고르는 경우의 수는

$_7C_4 = {_7C_3} = 35$

만화책을 1권만 고르고 나머지 중에서 3권을 고르는 경우의 수는

$_5C_1 \cdot {_7C_3} = 5 \cdot 35 = 175$

따라서 구하는 경우의 수는

$495 - (35 + 175) = 285$ 답 ④

09 1부터 9까지의 숫자 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이다.
홀수 5개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_5C_2 = 10$

짝수 4개 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_4C_3 = {_4C_1} = 4$

5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5! = 120$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$10 \cdot 4 \cdot 120 = 4800$ 답 4800

10 A, B를 제외한 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 $_7C_3 = 35$
A, B를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$이고, 이때 A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$이므로 A, B가 이웃하도록 세우는 경우의 수는

$24 \cdot 2 = 48$

따라서 구하는 경우의 수는

$35 \cdot 48 = 1680$ 답 ⑤

11 $f(4)$의 값이 될 수 있는 집합 Y의 원소는 8, 10의 2가지이다.
또 $f(1) < f(2) < 6$이므로 집합 Y의 원소 1, 2, 4 중에서 서로 다른 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 2, 1에 대응시키면 된다.
즉 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

$_3C_2 = {_3C_1} = 3$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2 \cdot 3 = 6$ 답 ①

12 $f(4) < f(3) < f(2)$를 만족시키려면 집합 X의 5개의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다.
즉 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$_5C_3 = {_5C_2} = 10$

정의역의 원소 1, 5에 대응하는 공역의 원소를 택하는 경우의 수는 각각 $_5C_1 = 5$
따라서 구하는 함수 f의 개수는

$10 \cdot 5 \cdot 5 = 250$ 답 ④

13 두 직선 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

$_6C_1 \cdot {_4C_1} = 6 \cdot 4 = 24$

한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 연결한 직선의 개수는 2

주어진 두 직선

따라서 구하는 직선의 개수는

$24 + 2 = 26$ 답 ⑤

다른 풀이 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_{10}C_2 = 45$

한 직선 위에 있는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 $_6C_2 = 15$
한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 $_4C_2 = 6$
주어진 두 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$45 - 15 - 6 + 2 = 26$

14 12개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_{12}C_2 = 66$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 $_4C_2 = 6$

이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 6개이므로 구하는 직선의 개수는

$66-6\cdot6+6=36$ 답 36

15 12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_{12}C_3=220$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 4개이다.

그런데 한 직선 위에 있는 4개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$220-4\cdot4=204$ 답 ②

16 직선 l 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

직선 m 위의 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

따라서 구하는 사각형의 개수는

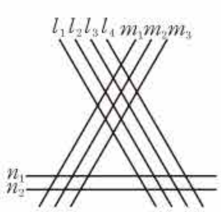
$10\cdot15=150$ 답 ④

17 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_6C_2=6\cdot15=90$ 답 90

m개의 평행한 직선과 n개의 평행한 직선이 만날 때, 이 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수
➡ ${}_mC_2\cdot{}_nC_2$

18 오른쪽 그림과 같은 평행한 직선을 l_i, m_j, n_k $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ j=1,\ 2,\ 3,\ k=1,\ 2)$라 하자.



(i) l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하고, m_1, m_2, m_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_3C_2={}_4C_2\cdot{}_3C_1=6\cdot3=18$

(ii) m_1, m_2, m_3 중에서 2개를 택하고, n_1, n_2 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2\cdot{}_2C_2={}_3C_1\cdot{}_2C_2=3\cdot1=3$

(iii) n_1, n_2 중에서 2개를 택하고, l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_2C_2\cdot{}_4C_2=1\cdot6=6$

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$18+3+6=27$ 답 ④

19 6개의 사탕을 똑같은 주머니 2개에 빈 주머니가 없도록 나누어 담을 때, 각 주머니에 담을 수 있는 사탕의 개수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

Q BOX

(i) 1개, 5개로 나누는 경우의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_5=6\cdot1=6$

(ii) 2개, 4개로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_4=15\cdot1=15$

(iii) 3개, 3개로 나누는 경우의 수는

나누는 개수가 같으므로 중복되는 경우가 2!가지씩 생긴다.

${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\dfrac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=10$

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+15+10=31$ 답 ②

20 10명을 5명, 5명으로 나누는 경우의 수는

${}_{10}C_5\cdot{}_5C_5\cdot\dfrac{1}{2!}=252\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=126$

학생 7명을 2명, 5명으로 나누는 경우의 수는

학생으로만 이루어진 조가 있도록 나누는 방법

${}_7C_2\cdot{}_5C_5=21\cdot1=21$

따라서 구하는 경우의 수는

$126-21=105$ 답 105

다른 풀이 각 조에 적어도 한 명의 선생님이 포함되려면 학생 4명과 선생님 1명, 학생 3명과 선생님 2명의 두 개의 조로 나눠야 한다.

학생 4명과 함께 한 조가 될 선생님 1명을 뽑으면 나머지 한 조가 자동으로 결정되므로 구하는 경우의 수는

${}_7C_4\cdot{}_3C_1={}_7C_3\cdot{}_3C_1=35\cdot3=105$

21 8장의 카드를 2장, 2장, 2장, 2장으로 나누는 경우의 수는

${}_8C_2\cdot{}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\dfrac{1}{4!}=28\cdot15\cdot6\cdot1\cdot\dfrac{1}{24}=105$

4개의 묶음을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$105\cdot24=2520$ 답 ③

22 6명의 학생을 2명, 2명, 1명, 1명의 4개의 조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_1C_1\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{1}{2!}$

$=15\cdot6\cdot2\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=45$

4개의 조를 4곳의 청소 구역에 배정하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$45\cdot24=1080$ 답 ④

대진표를 작성하는 경우의 수
➡ 대회에 참가한 팀을 몇 개의 조로 나누는 경우의 수로 생각한다.
➡ 분할하는 경우의 수를 이용한다.

23 구하는 경우의 수는 먼저 6개의 학급을 4개, 2개의 학급으로 나눈 후 4개의 학급을 다시 2개, 2개의 학급으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$({}_6C_4\cdot{}_2C_2)\cdot\left({}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\dfrac{1}{2!}\right)=({}_6C_2\cdot{}_2C_2)\cdot\left({}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\dfrac{1}{2!}\right)$

$=15\cdot1\cdot6\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=45$

답 ②

24 구하는 경우의 수는 먼저 5명을 3명, 2명의 2개의 조로 나눈 후 3명인 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 정하는 경우의 수와 같으므로

$({}_5C_3\cdot{}_2C_2)\cdot{}_3C_1=({}_5C_2\cdot{}_2C_2)\cdot{}_3C_1=10\cdot1\cdot3=30$

답 30

중단원 마무리

102쪽

01 전략 이차방정식의 판별식을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+2b=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 실근을 가지려면

$D=a^2-8b\ge0$

이어야 한다.

(i) $b=1$일 때, $a^2-8\ge0$, 즉 $a^2\ge8$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$의 4개

(ii) $b=2$일 때, $a^2-16\ge0$, 즉 $a^2\ge16$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(4, 2)$, $(5, 2)$, $(6, 2)$의 3개

(iii) $b=3$일 때, $a^2-24\ge0$, 즉 $a^2\ge24$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(5, 3)$, $(6, 3)$의 2개

(iv) $b=4$일 때, $a^2-32\ge0$, 즉 $a^2\ge32$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(6, 4)$의 1개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$4+3+2+1=10$

답 ②

02 전략 세 수의 합이 홀수가 되는 경우를 먼저 생각한다.

풀이 $abc+ab+c$의 값이 홀수이려면 abc, ab, c의 값은 모두 홀수이거나 한 개의 홀수, 두 개의 짝수이어야 한다.

(i) c가 홀수인 경우

ab, abc의 값은 모두 홀수이거나 짝수이어야 한다. ab, abc의 값이 모두 홀수이려면 a, b는 모두 홀수이어야 하고, ab, abc의 값이 모두 짝수이려면 a, b 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다. 따라서 c가 홀수일 때 $abc+ab+c$의 값이 홀수인 경우는 오른쪽과 같은 4가지이다. ··· ❶

a	b	c
홀	홀	홀
짝	홀	홀
홀	짝	홀
짝	짝	홀

(ii) c가 짝수인 경우

abc의 값은 짝수이므로 ab의 값은 홀수이어야 한다. 따라서 c가 짝수일 때 $abc+ab+c$의 값이 홀수이려면 a, b는 모두 홀수이어야 한다. ··· ❷

(i), (ii)에서 a, b, c의 홀수, 짝수를 정하는 경우의 수는 5가지이고 각각의 경우의 수는 모두 $3\cdot3\cdot3=27$이므로 구하는 경우의 수는

$5\cdot27=135$ ··· ❸

답 135

QBOX 1개의 주사위를 던졌을 때 짝수의 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6의 3가지이고, 홀수의 눈이 나오는 경우는 1, 3, 5의 3가지이다.

단계	채점 기준	비율
❶	c가 홀수일 때, $abc+ab+c$의 값이 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷	c가 짝수일 때, $abc+ab+c$의 값이 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸	$abc+ab+c$의 값이 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %

03 전략 $x>0$인 집합 X의 원소 x에 대하여 $f(x)=1$, $f(x)=2$, $f(x)=3$인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 $|f(x)+f(-x)|=1$에서

$f(x)+f(-x)=1$ 또는 $f(x)+f(-x)=-1$

$x>0$인 집합 X의 원소 x에 대하여

(i) $f(x)=1$일 때, $f(-x)=-2$

(ii) $f(x)=2$일 때, $f(-x)=-3$ 또는 $f(-x)=-1$

(iii) $f(x)=3$일 때, $f(-x)=-2$

이상에서 $f(x)$의 값에 따라 $f(-x)$의 값이 정해진다.

따라서 $f(1)$과 $f(-1)$, $f(2)$와 $f(-2)$, $f(3)$과 $f(-3)$의 값을 정하는 경우의 수가 각각 4이므로 구하는 함수 $f(x)$의 개수는

$4\cdot4\cdot4=64$

답 64

04 전략 1과 6, 2, 3, 5, 4가 적힌 정사각형에 색을 칠하는 경우의 수를 차례대로 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 1과 6이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지

QBOX 같은 색을 칠해야 한다.

2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외해야 하므로 3가지

3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외해야 하므로 2가지

5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외해야 하므로 2가지

4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1, 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외해야 하므로 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2=96$

답 ③

05 전략 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

풀이 1학년 학생 3명을 한 사람, 2학년 학생 2명을 한 사람, 3학년 학생 2명을 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

1학년 학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

2학년 학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

3학년 학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot6\cdot2\cdot2=144$

답 144

06 전략 양 끝에 홀수가 오는 경우의 수를 먼저 구한 후 나머지 숫자를 나열하는 경우의 수를 곱한다.

풀이 홀수 1, 3, 5, 7 중에서 두 개를 택하여 양 끝에 나열하는 경우의 수는

$_4P_2=12$

홀수 2개를 제외한 나머지 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot 120=1440$ 답 ④

07 전략 A와 B, C와 D가 앉는 경우의 수를 먼저 구한다.

풀이 조건 (가)에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 마부가 앉는 의자를 제외한 3개이고, A, B 두 사람이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 A와 B가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$3\cdot 2=6$

남은 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 경우의 수는

$_5P_2=20$

이때 C와 D가 이웃하여 앉을 수 있는 2인용 의자는 A와 B가 앉는 의자와 마부가 앉는 의자를 제외한 2개이고, C, D 두 사람이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 C와 D가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$2\cdot 2=4$

조건 (나)에서 C와 D가 이웃하여 앉지 않아야 하므로 그 경우의 수는

$20-4=16$

남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 16\cdot 6=576$ 답 576

08 전략 천의 자리에 올 수 있는 자연수는 1, 2이고, 일의 자리에 올 수 있는 수는 홀수임을 이용한다.

풀이 (i) 1□□□ 꼴인 홀수의 경우

일의 자리에 올 수 있는 숫자가 3, 5의 2가지이므로

$2\cdot {}_4P_2=2\cdot 12=24$ ··· ❶

(ii) 2□□□ 꼴인 홀수의 경우

일의 자리에 올 수 있는 숫자가 1, 3, 5의 3가지이므로

$3\cdot {}_4P_2=3\cdot 12=36$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$24+36=60$ ··· ❸

답 60

단계	채점 기준	비율
❶	1□□□ 꼴인 홀수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷	2□□□ 꼴인 홀수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸	3000보다 작은 홀수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

Q BOX

$_nC_r={}_nC_{n-r}$
(단, $0\le r\le n$)

치역의 원소의 개수가 4이려면 b_1, b_2 중에서 택한 1개의 원소가 자기 자신이 아닌 나머지 한 개에 대응되어야 한다.

09 전략 이차항의 계수가 3이고 중근 5를 가짐을 이용하여 이차방정식을 세운다.

풀이 이차항의 계수가 3이고, 중근 5를 갖는 이차방정식은

$3(x-5)^2=0 \qquad \therefore 3x^2-30x+75=0$

이때 $_nP_2=30$이므로

$_nP_2=n(n-1)=6\cdot 5 \qquad \therefore n=6$

또 $5{}_nC_{n-r}=75$에서 $_6C_{6-r}=15$이고 $_6C_{6-r}={}_6C_r$이므로

$_6C_r=15, \qquad \dfrac{6!}{r!(6-r)!}=15$

$6!=15r!(6-r)!, \qquad 4!\cdot 2!=r!(6-r)!$

$\therefore r=4\ (\because r>2)$

$\therefore n+r=10$ 답 10

10 전략 순서가 정해져 있으므로 조합을 이용한다.

풀이 $1<a<b<c<10$이므로 2, 3, 4, ⋯, 9의 8개 중에서 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 a, b, c로 정하면 된다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$_8C_3=56$ 답 ④

11 전략 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수를 구한 후 이 중에서 두 개의 집합을 택하는 경우의 수를 구한다.

풀이 주어진 집합의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 $_5C_2=10$

10개의 부분집합 중에서 서로 다른 두 개를 택하는 경우의 수는

$_{10}C_2=45$ 답 ③

12 전략 적어도 1명이 여학생인 경우의 수는 모든 경우의 수에서 대표 3명이 모두 남학생인 경우의 수를 뺀다.

풀이 12명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{12}C_3=220$

남학생을 n명이라 할 때 대표 3명이 모두 남학생인 경우의 수는 $_nC_3$

이때 적어도 1명이 여학생인 경우의 수가 185이므로

$220-{}_nC_3=185, \qquad {}_nC_3=35$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=35$

$n(n-1)(n-2)=7\cdot 6\cdot 5 \qquad \therefore n=7$

따라서 남학생은 7명이다. 답 7명

13 전략 먼저 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수를 구한다.

풀이 조건 (나)를 만족시키는 a의 값이 될 수 있는 집합 X의 세 원소를 a_1, a_2, a_3, 나머지 두 원소를 b_1, b_2라 하자.

X의 세 원소 a_1, a_2, a_3을 택하는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

b_1, b_2 중에서 1개를 택하여 조건 (가)를 만족시키도록 대응시키는 경우의 수는

$_2C_1\cdot 1=2$

나머지 1개의 원소를 a_1, a_2, a_3 중에서 1개에 대응시키는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$10\cdot 2\cdot 3=60$$

답 60

14 전략 만나는 2개의 선분은 두 직선 l, m에서 각각 2개의 점을 택하여 그을 수 있음을 이용한다.

풀이 직선 l 위의 5개의 점 중에서 2개의 점을 택하고, 직선 m 위의 4개의 점 중에서 2개의 점을 택하여 두 선분을 그을 때 두 선분이 만나는 경우는 한 가지뿐이므로 구하는 경우의 수는

$${}_5C_2\cdot{}_4C_2=10\cdot 6=60$$

답 ②

15 전략 한 직선 위의 세 개의 점을 택하는 경우에는 삼각형을 만들 수 없다.

풀이 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_3=84$$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 4개이다.

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$84-4=80$$

답 ②

16 전략 6개의 수를 2개씩 3묶음으로 나눈 후 그 합이 작은 것부터 차례대로 1열, 2열, 3열에 채운다.

풀이 $a_1<a_2<a_3$이려면 6개의 수를 2개, 2개, 2개로 나눈 후 그 합이 작은 것부터 차례대로 1열, 2열, 3열에 채우면 된다.

6개의 수를 2개씩 3묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot 6\cdot 1\cdot\frac{1}{6}=15$$

이때 각 열의 수끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2!\cdot 2!\cdot 2!=8$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15\cdot 8=120$$

답 ②

순서가 정해져 있으므로 3묶음으로 나누기만 하면 된다.

17 전략 다섯 개의 영역 A, B, C, D, E의 넓이를 각각 구한 후, 가장 넓은 영역인 E에 칠하는 색을 기준으로 조건을 만족시키는 경우를 구한다.

풀이 영역 A의 넓이는 $\pi\cdot 1^2=\pi$

영역 B의 넓이는 $\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2=3\pi$

영역 C의 넓이는 $\pi\cdot 3^2-\pi\cdot 2^2=5\pi$

영역 D의 넓이는 $\pi\cdot 4^2-\pi\cdot 3^2=7\pi$

영역 E의 넓이는 $\pi\cdot 5^2-\pi\cdot 4^2=9\pi$

이때 각 물감은 10통 이하만 사용할 수 있고 물감 1통으로는 영역 A의 넓이인 π만큼만 칠할 수 있으므로 한 가지 색의 물감으로는 10π만큼의 넓이까지 칠할 수 있다.

3가지 색을 빨강, 파랑, 노랑이라 하고 가장 넓은 영역인 E에 빨강을 칠하는 경우를 모두 구하면 다음과 같다.

영역 E (넓이: 9π)	영역 D (넓이: 7π)	영역 C (넓이: 5π)	영역 B (넓이: 3π)	영역 A (넓이: π)
빨강	파랑	노랑	파랑	빨강
빨강	파랑	노랑	파랑	노랑
빨강	노랑	파랑	노랑	빨강
빨강	노랑	파랑	노랑	파랑

마찬가지로 영역 E에 파랑, 노랑을 칠하는 경우도 각각 4가지씩이므로 구하는 문양의 개수는

$$4\cdot 3=12$$

답 ②

18 전략 먼저 5의 배수의 일의 자리의 숫자는 0 또는 5임을 이용하여 e의 값을 구한 후 c의 값에 따라 경우를 나누어 생각한다.

풀이 다섯 자리의 자연수 $abcde$가 5의 배수이고 e는 0이 아니므로 $e=5$

따라서 $c<d<5$이므로

$c=1$ 또는 $c=2$ 또는 $c=3$

(i) $c=1$일 때,

d의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4 중 1개이므로

$${}_3C_1=3$$

a, b의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 d의 값을 제외한 6개 중 2개이고 $a>b$에서 a, b의 값은 큰 수부터 차례대로 정하면 되므로

$${}_6C_2=15$$

따라서 자연수의 개수는

$$3\cdot 15=45$$

(ii) $c=2$일 때,

d의 값이 될 수 있는 것은 3, 4 중 1개이므로

$${}_2C_1=2$$

a, b의 값이 될 수 있는 것은 3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 d의 값을 제외한 5개 중 2개이고 $a>b$에서 a, b의 값은 큰 수부터 차례대로 정하면 되므로

$${}_5C_2=10$$

따라서 자연수의 개수는

$$2\cdot 10=20$$

(iii) $c=3$일 때,

d의 값이 될 수 있는 것은 4의 1개이다.

a, b의 값이 될 수 있는 것은 6, 7, 8, 9의 4개 중 2개이고 $a>b$에서 a, b의 값은 큰 수부터 차례대로 정하면 되므로

$${}_4C_2=6$$

따라서 자연수의 개수는

$$1\cdot 6=6$$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$$45+20+6=71$$

답 ③

Work Book

01 집합의 뜻과 표현

W 2쪽

01 $x^3-x=0$에서 $\quad x(x^2-1)=0$

$x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 집합 A의 원소는 $\quad -1,\ 0,\ 1$

④ $1\in A$ 답 ④

02 $x^2-3x-4>0$에서 $\quad (x+1)(x-4)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>4$

따라서 집합 A의 원소는 $x<-1$ 또는 $x>4$인 범위에 속한다.

$x^2-x-6<0$에서 $\quad (x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

따라서 집합 B의 원소는 $-2<x<3$인 범위에 속한다.

① $0\notin A$ ② $3\notin A$

③ $-2\notin B$ ⑤ $4\notin B$

답 ④

03 ⑤ $\{x|x$는 'cool'에 있는 알파벳$\}$

➡ $\{c,\ o,\ l\}$

답 ⑤

집합을 원소나열법으로 나타낼 때, 같은 원소는 중복하여 나열하지 않는다.

04 ① $10=2\times5$ ② $20=2^2\times5$

③ $30=2\times3\times5$ ④ $40=2^3\times5$

⑤ $50=2\times5^2$

답 ③

05 ㄱ. $300=3\cdot100$이므로

$300\in A_1$

ㄴ. $401=3\cdot133+2$이므로

$401\notin A_2,\ 401\in A_3$

ㄷ. $502=3\cdot167+1$이므로

$502\in A_2$

ㄹ. $603=3\cdot201$이므로

$603\notin A_3,\ 603\in A_1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

06 □보다 작은 7의 양의 배수가 7, 14, 21, 28, 35이므로 □ 안에 들어갈 수 있는 자연수는

36, 37, 38, ⋯, 42

의 7개이다. 답 7

□=35일 때, 즉 35보다 작은 7의 양의 배수는
7, 14, 21, 28
□=42일 때, 즉 42보다 작은 7의 양의 배수는
7, 14, 21, 28, 35

07 ㄱ. $\varnothing$ ➡ 유한집합

ㄴ. $\{2,\ 4,\ 6,\ 12\}$ ➡ 유한집합

ㄷ. $\{6,\ 12,\ 18,\ \cdots\}$ ➡ 무한집합

ㄹ. $1<x<2$를 만족시키는 유리수 x는 무수히 많다.

➡ 무한집합

공집합은 유한집합이다.

ㅁ. $\{-4,\ -3,\ -2,\ \cdots,\ 4\}$ ➡ 유한집합

이상에서 무한집합인 것은 ㄷ, ㄹ의 2개이다. 답 ②

08 ①, ② 원소가 1개 있으므로 공집합이 아니다.

③ $x^2<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 공집합이다.

④ $x^2-2x-3=0$에서 $\quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

x는 자연수이므로 $\quad \{3\}$

따라서 공집합이 아니다.

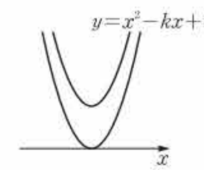
⑤ $\{0,\ 1\}$이므로 공집합이 아니다.

답 ③

09 집합 X가 유한집합이 되려면 함수 $y=x^2-kx+4$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점에서 만나거나 만나지 않아야 한다.

공집합이 되는 경우도 생각한다.

$n(X)=1$ 또는 $n(X)=0$



즉 이차방정식 $x^2-kx+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot4\le0$

$k^2-16\le0,\quad (k+4)(k-4)\le0$

$\therefore -4\le k\le4$

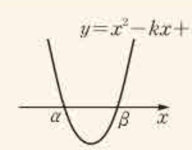
따라서 정수 k는 $-4,\ -3,\ -2,\ \cdots,\ 4$의 9개이다.

답 ⑤

쌤한마디

이차함수 $y=x^2-kx+4$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점 $(\alpha,\ 0),\ (\beta,\ 0)(\alpha<\beta)$에서 만나면 이차부등식 $x^2-kx+4\le0$의 해는 $\quad \alpha\le x\le\beta$

이때 $\alpha\le x\le\beta$를 만족시키는 실수 x는 무수히 많으므로 집합 X는 무한집합이 된다.



10 ② $n(\{-5\})=n(\{4\})=1$

③ $n(\{0,\ 1,\ 2\})=3,\ n(\{3\})=1$이므로

$n(\{0,\ 1,\ 2\})>n(\{3\})$

④ $n(\{1,\ 2,\ 3\})=3,\ n(\{1,\ 2\})=2$이므로

$n(\{1,\ 2,\ 3\})-n(\{1,\ 2\})=1$

⑤ $n(\{2\})=1,\ n(\{\varnothing\})=1$이므로

$n(\{2\})-n(\{\varnothing\})=0$

답 ③

쌤한마디

집합 $\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{0\}$의 원소의 개수는 다음과 같다.

① $\varnothing$ ○ 원소가 하나도 없다. ○ $n(\varnothing)=0$

② $\{\varnothing\}$ ○ 원소는 $\varnothing$의 1개이다. ○ $n(\{\varnothing\})=1$

③ $\{0\}$ ○ 원소는 0의 1개이다. ○ $n(\{0\})=1$

11 $A=\{2, 3, 5, 7\}$

$x^3-5x^2+6x=0$에서 $\quad x(x^2-5x+6)=0$

$\quad x(x-2)(x-3)=0$

$\quad \therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 $B=\{2, 3\}$이므로 $\quad n(B)=2$ 　답 2

12 $2x+y=10$을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 8)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$이므로

$\quad n(A)=4$

이때 $n(A)=n(B)$이므로 $\quad n(B)=4$

즉 k의 양의 약수의 개수가 4이어야 한다.

양의 약수의 개수가 4인 자연수는

$\quad 2^3, 3^3, 5^3, \cdots,$

$\quad 2\times3, 2\times5, 2\times7, \cdots$

이므로 구하는 k의 최솟값은 $2\times3=6$이다. 　답 ②

쌤한마디

자연수 N이 $N=a^m\times b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)으로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)$이다.

이때 $4=1\times4=2\times2$이므로 양의 약수의 개수가 4인 자연수는 (소수)^3 또는 (소수)$\times$(소수) 꼴이다.

① (소수)^3 꼴인 경우: $2^3, 3^3, 5^3, 7^3, \cdots$

② (소수)$\times$(소수) 꼴인 경우

: $2\times3, 2\times5, 2\times7, \cdots$

13 $\sqrt{10}$ 이하의 자연수는 1, 2, 3의 3개이므로

$\quad n(A_{10})=3$

$\sqrt{20}$ 이하의 자연수는 1, 2, 3, 4의 4개이므로

$\quad n(A_{20})=4$

$\quad \therefore n(A_k)=n(A_{10})+n(A_{20})=7$

즉 $\sqrt{k}$ 이하의 자연수의 개수가 7이려면

$\quad 7\le\sqrt{k}<8 \qquad \therefore 49\le k<64$

따라서 자연수 k는 49, 50, 51, $\cdots$, 63의 15개이다.

답 ⑤

14 집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	$-i$	i	1
$-i$	-1	1	$-i$
i	1	-1	i
1	$-i$	i	1

$\quad X=\{-i, i, -1, 1\}$

답 $X=\{-i, i, -1, 1\}$

Q BOX

두 집합의 원소를 이용하여 새로운 집합을 구할 때에는 표를 이용하여 모든 원소를 빠짐없이 구한다.

15 집합 A의 원소 a, 집합 B의 원소 b에 대하여 $a\ge b$일 때 $a-b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	3	6	9
2			
3	0		
5	2		
7	4	1	
11	8	5	2

$\quad X$

$\quad =\{0, 1, 2, 4, 5, 8\}$

따라서 집합 X의 원소의 개수는 6이다. 　답 6

16 $a<b<c$이므로 집합 B의 원소 중 최솟값은 $a+a=2a$, 최댓값은 $c+c=2c$이다.

즉 $2a=8$, $2c=20$이므로

$\quad a=4$, $c=10$

따라서 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

x \ y	4	b	10
4	8	$4+b$	14
b	$4+b$	$2b$	$10+b$
10	14	$10+b$	20

$4<b<10$이므로

$\quad 8<4+b<2b<10+b<20$,

$\quad 8<4+b<14<10+b<20$

이때 $n(B)=5$이므로 8, $4+b$, $2b$, 14, $10+b$, 20 중 2개가 같은 수이어야 한다.

따라서 $2b=14$이므로 $\quad b=7$

$\quad \therefore 3a+b-c=3\cdot4+7-10=9$ 　답 ③

Q BOX

$4<b<10$이므로 아래 표에서 집합 B의 원소는 위쪽에서 아래쪽으로, 왼쪽에서 오른쪽으로 갈수록 커지므로 원소 사이의 대소 관계를 다음과 같이 알 수 있다.

x \ y	4	b	10
4	8	$4+b$	14
b	$4+b$	$2b$	$10+b$
10	14	$10+b$	20

➡ $8<4+b<2b$

$\quad <10+b<20$,

$\quad 8<4+b<14$

$\quad <10+b<20$

쌤한마디

부등식의 성질을 이용하여 집합 B의 원소 사이의 대소 관계를 알아보면 다음과 같다.

$4<b<10$의 각 변에 4를 더하면

$\quad 8<b+4<14$

$4<b<10$의 각 변에 b를 더하면

$\quad 4+b<2b<10+b$

$4<b<10$의 각 변에 10을 더하면

$\quad 14<b+10<20$

$\quad \therefore 8<4+b<2b<10+b<20$,

$\quad\quad 8<4+b<14<10+b<20$

17 $3\in A$이므로 $\dfrac{1}{1-3}=-\dfrac{1}{2}$에서 $\quad -\dfrac{1}{2}\in A$

$-\dfrac{1}{2}\in A$이므로 $\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}$에서 $\quad \dfrac{2}{3}\in A$

$\dfrac{2}{3}\in A$이므로 $\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=3$에서 $\quad 3\in A$

따라서 집합 A는 $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}$, 3을 반드시 원소로 가지므로 $n(A)$의 최솟값은 3이다. 　답 ②

18 조건 (가), (나)에 의하여

$A=\{1, 2, x\}$ ($x\ne1$, $x\ne2$, x는 상수)로 놓으면

$\quad 2x\in A$

따라서 $2x=1$ 또는 $2x=2$ 또는 $2x=x$이어야 하므로

$\quad x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=0$

이때 $x\ne1$이므로 $\quad x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=0$

따라서 집합 A는 $\left\{\dfrac{1}{2}, 1, 2\right\}$ 또는 $\{0, 1, 2\}$이다.

답 $\left\{\dfrac{1}{2}, 1, 2\right\}$, $\{0, 1, 2\}$

Q BOX

$2\in A$, $x\in A$이므로

$\quad 2x\in A$

19 ① $B\subset A$

② $A\not\subset B$, $B\not\subset A$

③ $A=\{1, 2, 7, 14\}$, $B=\{1, 7\}$이므로 $\quad B\subset A$

④ $A=\{3, 6, 9, \cdots\}$, $B=\{9, 18, 27, \cdots\}$이므로

$\quad B\subset A$

⑤ $x^2-8x+12=0$에서 $\quad (x-2)(x-6)=0$

$\quad \therefore x=2$ 또는 $x=6$

$\quad \therefore A=\{2, 6\}$

또 $B=\{2, 4, 6\}$이므로 $\quad A\subset B$

$n=1$일 때, $\quad 2n=2$
$n=2$일 때, $\quad 2n=4$
$n=3$일 때, $\quad 2n=6$

답 ⑤

20 $x^3-7x^2+12x=0$에서 $\quad x(x^2-7x+12)=0$

$\quad x(x-3)(x-4)=0$

$\quad \therefore x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

$\quad \therefore A=\{0, 3, 4\}$

$x^2-3x-4\le 0$에서 $\quad (x+1)(x-4)\le 0$

$\quad \therefore -1\le x\le 4$

$\quad \therefore B=\{x\mid -1\le x\le 4\}$

$x^2-3x\le -x+15$에서 $\quad x^2-2x-15\le 0$

$\quad (x+3)(x-5)\le 0 \quad \therefore -3\le x\le 5$

$\quad \therefore C=\{x\mid -3\le x\le 5\}$

따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는

$\quad A\subset B\subset C$

답 ①

21 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $2x+y$, $x-y$의 값을 구하면 각각 [표 1], [표 2]와 같다.

x \ y	-1	0	1
-1	-3	-2	-1
0	-1	0	1
1	1	2	3

[표 1]

x \ y	-1	0	1
-1	0	-1	-2
0	1	0	-1
1	2	1	0

[표 2]

따라서 $B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$C=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$이므로

$\quad A\subset C\subset B$

답 ②

22 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{a, b, c, d\}$

④ $\{b, c\}\subset B$

답 ④

23 ①, ② $\varnothing\in A$이므로 $\quad \{\varnothing\}\subset A$

③ $\{1, 2\}\in A$이므로 $\quad \{\{1, 2\}\}\subset A$

④ $3\in A$, $4\in A$이므로 $\quad \{3, 4\}\subset A$

⑤ $\{1, 2\}\in A$, $4\in A$이므로 $\quad \{\{1, 2\}, 4\}\subset A$

답 ③

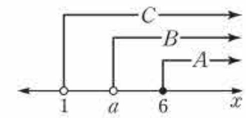
24 $2x+1>3$에서 $\quad 2x>2 \quad \therefore x>1$

$\quad \therefore C=\{x\mid x>1\}$

Q BOX

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속하고, 집합 B의 모든 원소가 집합 C에 속한다.

$A\subset B\subset C$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\quad 1\le a<6$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5

25 $B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

$A=\{k, 4k\}$에서 $A\subset B$가 성립하려면 $k\in B$이어야 한다.

$k=1$일 때, $\quad A=\{1, 4\} \quad \therefore A\subset B$

$k=2$일 때, $\quad A=\{2, 8\} \quad \therefore A\not\subset B$

$8\notin B$

$k=4$일 때, $\quad A=\{4, 16\} \quad \therefore A\not\subset B$

$16\notin B$

$k=5$일 때, $\quad A=\{5, 20\} \quad \therefore A\subset B$

$k=10$일 때, $\quad A=\{10, 40\} \quad \therefore A\not\subset B$

$40\notin B$

$k=20$일 때, $\quad A=\{20, 80\} \quad \therefore A\not\subset B$

$80\notin B$

따라서 $A\subset B$가 성립하도록 하는 자연수 k는 1, 5이므로 구하는 합은

$\quad 1+5=6$

답 6

26 $A\subset B$이므로 $3\in A$에서 $\quad 3\in B$

$\quad \therefore 6-a=3$ 또는 $b+5=3$

(i) $6-a=3$, 즉 $a=3$일 때,

$\quad A=\{3, 5\}$, $B=\{1, 3, b+5\}$

$\quad A\subset B$이려면 $\quad b+5=5 \quad \therefore b=0$

$\quad \therefore a+b=3$

(ii) $b+5=3$, 즉 $b=-2$일 때,

$\quad A=\{3, a+2\}$, $B=\{1, 6-a, 3\}$

$\quad A\subset B$이려면

$\quad a+2=1$ 또는 $a+2=6-a$

$\quad \therefore a=-1$ 또는 $a=2$

$\quad \therefore a+b=-3$ 또는 $a+b=0$

(i), (ii)에서 $M=3$, $m=-3$이므로

$\quad M-m=6$

답 6

27 ㄱ. $\{2, 3\}$

ㄴ. $\{1, 2, 3, 6\}$

ㄷ. $x^2+5x+6=0$에서 $\quad (x+2)(x+3)=0$

$\quad \therefore x=-2$ 또는 $x=-3$

$\quad \therefore \{-3, -2\}$

ㄹ. $\{2, 3\}$

이상에서 집합 A와 서로 같은 집합인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

28 $A=B$이므로

집합 A와 집합 B의 모든 원소가 같다.

$\quad a+2b=8$, $3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2$, $b=5$

$\quad \therefore ab=-10$

답 -10

29 $A=B$이므로
$a^2-2a=8$, $b^2+b=6$
$a^2-2a=8$에서 $a^2-2a-8=0$
$(a+2)(a-4)=0$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=4$
$b^2+b=6$에서 $b^2+b-6=0$
$(b+3)(b-2)=0$
$\therefore b=-3$ 또는 $b=2$
따라서 $a=-2$, $b=-3$일 때 $a+b$의 값은 최소이고, 그 값은 -5이다. 답 ②

30 $A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$
즉 $1+2i\in A$, $c\in A$이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $1+2i$, c이다.
계수가 실수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+2i$이면 다른 한 근은 $1-2i$이므로
$c=1-2i$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(1+2i)+(1-2i)=-a$ $\therefore a=-2$
$(1+2i)(1-2i)=b$ $\therefore b=5$
$\therefore a+b-c=2+2i$ 답 $2+2i$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

쌤한마디

이차방정식의 켤레근
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a, b, c가 실수일 때, $p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다.
(단, p, q는 실수이고, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$이다.)

31 ① 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는
$2^4=16$
② $x^2=16$에서 $x=\pm4$
즉 $\{-4, 4\}$에서 원소의 개수가 2이므로 부분집합의 개수는 $2^2=4$
③ $|x-2|\le1$에서 $-1\le x-2\le1$
$\therefore 1\le x\le3$
즉 $\{1, 2, 3\}$에서 원소의 개수가 3이므로 부분집합의 개수는 $2^3=8$
④ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서 원소의 개수가 6이므로 부분집합의 개수는 $2^6=64$
⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$에서 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는 $2^5=32$
답 ④

$a>0$일 때
① $|x|\le a$
➡ $-a\le x\le a$
② $|x|\ge a$
➡ $x\le -a$ 또는 $x\ge a$

32 $x^2-10x+9\le0$에서 $(x-1)(x-9)\le0$
$\therefore 1\le x\le9$
$\therefore A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
집합 A의 원소 중에서 짝수는 2, 4, 6, 8이므로 구하는 집합은 $\{2, 4, 6, 8\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로
$2^4-1=15$ 답 15

33 집합 A의 원소의 개수를 a라 하면 A의 진부분집합의 개수가 31이므로
$2^a-1=31$, $2^a=32=2^5$
$\therefore a=5$
즉 $A=\{2, 3, 5, 7, 11\}$이어야 하므로
$11\le k\le12$
따라서 자연수 k는 11, 12이므로 구하는 합은
$11+12=23$ 답 ①

34 4, 6을 반드시 원소로 갖고, 2를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
$2^{6-2-1}=2^3=8$ 답 ②

35 $x^2-2x-8\le0$에서 $(x+2)(x-4)\le0$
$\therefore -2\le x\le4$
$\therefore A=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
이때 집합 A의 원소 중에서 음수는 -2, -1이므로 구하는 부분집합의 개수는
$2^{7-2}=2^5=32$ 답 32

36 $A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$에서 $n(A)=k$
집합 A의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖고, 2, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수가 128이므로
$2^{k-1-2}=128=2^7$, $k-3=7$
$\therefore k=10$ 답 ③

37 $12=2^2\times3$이므로 12와 서로소인 자연수는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니어야 한다.
$\therefore A=\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
이때 집합 A의 부분집합 중 가장 큰 원소가 13인 집합은 13을 반드시 원소로 갖고, 17, 19를 원소로 갖지 않으므로 구하는 부분집합의 개수는
$2^{7-1-2}=2^4=16$ 답 16

38 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 3, 5\}$
집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 1, 3, 5, 9를 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{7-4}=2^3=8$ 답 ②

39 $x^2-10x+24=0$에서 $(x-4)(x-6)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=6$
$\therefore A=\{4, 6\}$

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$이므로 집합 X는 B의 부분집합 중에서 4, 6을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{10-2}=2^8=256$ 답 ④

집합 A의 모든 원소

40 $X \subset A$이고 $X \neq A$이므로 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.
따라서 집합 X의 개수는 A의 진부분집합 중에서 2, 4, 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{n-3}-1=63, \quad 2^{n-3}=64=2^6$

$n-3=6 \quad \therefore n=9$ 답 9

41 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
A의 진부분집합 중에서 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖고, 연속된 두 자연수는 원소로 갖지 않는 부분집합을 B라 하자.

(i) $2 \in B$, $4 \notin B$일 때,
$2 \in B$이고 연속된 두 자연수는 원소로 갖지 않아야 하므로 $1 \notin B$, $3 \notin B$
즉 집합 B는 $\{2\}$ 또는 $\{2, 5\}$

(ii) $2 \notin B$, $4 \in B$일 때,
$4 \in B$이고 연속된 두 자연수는 원소로 갖지 않아야 하므로 $3 \notin B$, $5 \notin B$
즉 집합 B는 $\{4\}$ 또는 $\{1, 4\}$

(iii) $2 \in B$, $4 \in B$일 때,
연속된 두 자연수는 원소로 갖지 않아야 하므로
$1 \notin B$, $3 \notin B$, $5 \notin B$
즉 집합 B는 $\{2, 4\}$

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$2+2+1=5$ 답 5

42 $M(B) \geq 5$를 만족시키려면 집합 B는 5, 6 중 적어도 하나를 반드시 원소로 가져야 한다.
따라서 $M(B) \geq 5$를 만족시키는 집합 B는 집합 A의 부분집합 중에서 $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합을 제외한 것과 같으므로 구하는 집합 B의 개수는

$2^6-2^4=48$ 답 ③

다른 풀이 $M(B) \geq 5$를 만족시키는 집합은
$M(B)=5$ 또는 $M(B)=6$
인 경우의 집합이다.

(i) $M(B)=5$인 경우
집합 A의 부분집합 중에서 5를 반드시 원소로 갖고, 6을 원소로 갖지 않아야 하므로 그 개수는
$2^{6-1-1}=2^4=16$

(ii) $M(B)=6$인 경우
집합 A의 부분집합 중에서 6을 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는
$2^{6-1}=2^5=32$

$M(B) \geq 5$에서 $M(B)=5$, $M(B)=6$인 경우로 나누어 생각한다.

(i), (ii)에서 구하는 집합 B의 개수는
$16+32=48$

43 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 A의 원소는 36의 양의 약수이어야 한다.
이때 36의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36이고, 조건 (나)에 의하여 1과 36, 2와 18, 3과 12, 4와 9는 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.
$n(A)$가 짝수가 되려면 집합 A는 6을 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같다.
따라서 구하는 집합 A의 개수는

$2^4-1=15$ 답 15

집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합에 1을 원소로 갖는 집합에는 36을, 2를 원소로 갖는 집합에는 18을, 3을 원소로 갖는 집합에는 12를, 4를 원소로 갖는 집합에는 9를 추가하면 된다.

44 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 B의 원소는 64의 양의 약수이어야 한다.
이때 64의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64이고, 조건 (나)에 의하여 1과 64, 2와 32, 4와 16은 어느 하나가 집합 B의 원소이면 나머지 하나도 반드시 B의 원소이다.
조건 (다)에 의하여 집합 B의 원소의 최솟값과 최댓값은 각각 2, 32이다. 즉 집합 B는 2를 반드시 원소로 갖고, 1을 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 B의 개수는 집합 $\{4, 8\}$의 부분집합의 개수와 같다.
따라서 구하는 집합 B의 개수는

$2^2=4$ 답 4

집합 $\{4, 8\}$의 부분집합에 2, 32를 추가하고 4를 원소로 갖는 집합에는 16을 추가하면 된다.

도전! 수능 기출

W 9쪽

01 1st $\{2, 3, 4\}$ 중 소수의 개수를 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
ㄱ. $S=\{2, 3, 4\}$의 원소 중에서 소수는 2, 3이므로 $N(S)=2$이다.

2nd 집합 S에 최대로 포함될 수 있는 소수를 모두 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
ㄴ. 집합 U의 원소 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로 $\{2, 3, 5, 7\} \subset S$이면 $N(S)$의 최댓값은 4이다.

3rd $N(S)=1$인 집합 S의 개수를 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.
ㄷ. $N(S)=1$인 집합 S는 소수 2, 3, 5, 7 중에서 하나만을 반드시 원소로 갖고, 나머지 3개는 원소로 갖지 않는 집합이다.
2를 원소로 갖고, 3, 5, 7을 원소를 갖지 않는 집합의 개수는
$2^{10-1-3}=2^6$

같은 방법으로 3, 5, 7의 경우에도 각각 2^6개이므로 $N(S)=1$인 집합 S의 개수는

$2^6\cdot4=2^8$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

Q BOX

$2^6\cdot4=2^6\cdot2^2$
$=2^{6+2}=2^8$

02 **1st** **집합 M이 되기 위한 조건을 생각한다.**

어떤 두 원소의 곱도 6의 배수가 아닌 수들로만 이루어진 집합을 X라 하면 X는 다음 조건을 만족시킨다.

(i) 6과 서로소인 수들은 모두 집합 X의 원소가 될 수 있다.

(ii) 2의 배수가 집합 X의 원소이면 3의 배수는 X의 원소가 될 수 없고, 3의 배수가 집합 X의 원소이면 2의 배수는 X의 원소가 될 수 없다.

2nd **2의 배수와 3의 배수의 개수를 비교하여 원소의 개수가 최대인 집합이 되는 집합을 구한다.**

집합 $\{1, 2, 3, 4, \cdots, 30\}$의 원소 중에서 2의 배수의 개수가 15, 3의 배수의 개수가 10이므로 집합 X의 원소의 개수가 최대이려면 2의 배수는 모두 집합 X의 원소이어야 한다.

따라서 집합 M은 $\{1, 2, 3, 4, \cdots, 30\}$의 원소 중 3의 배수를 제외한 나머지 원소의 집합이므로 집합 M의 원소의 개수는

$30-10=20$ 답 20

03 **1st** **집합 A에 반드시 속해야 하는 원소를 먼저 찾는다.**

$U=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29\}$

집합 A의 모든 원소의 합이 100이므로 집합 A에는 25 이상인 원소가 적어도 2개 속해야 한다.

집합 U에서 25 이상인 원소는 25, 26, 28, 29의 4개이다.

2nd **집합 A에 25 이상인 원소가 3개 속하는 경우의 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 값을 구한다.**

(i) 집합 A에 25 이상인 원소가 3개 속하는 경우

ⓘ 원소 25, 26, 29가 속하는 경우

$A=\{20, 25, 26, 29\}$이므로

$x_4-x_3+x_2-x_1=29-26+25-20=8$

ⓘⓘ 원소 26, 28, 29가 속하는 경우

$A=\{17, 26, 28, 29\}$이므로

$x_4-x_3+x_2-x_1=29-28+26-17=10$

ⓘⓘⓘ 25, 26, 28 또는 25, 28, 29가 속하는 경우

모든 원소의 합이 100이 되려면 나머지 한 원소는 3의 배수가 되어야 하므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 A가 존재하지 않는다.

$100-(25+26+28)$
$=21$

$100-(25+28+29)$
$=18$

3rd **집합 A에 25 이상인 원소가 2개 속하는 경우의 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 값을 구한다.**

(ii) 집합 A에 25 이상인 원소가 2개 속하는 경우

25보다 작은 U의 원소 중 가장 큰 두 원소의 합은

$22+23=45$

따라서 네 원소의 합이 100이 되려면 25 이상인 두 원소의 합이 55 이상이어야 한다.

ⓘ 원소 26, 29가 속하는 경우

$A=\{22, 23, 26, 29\}$이므로

$x_4-x_3+x_2-x_1=29-26+23-22=4$

ⓘⓘ 원소 28, 29가 속하는 경우

$A=\{20, 23, 28, 29\}$이므로

$x_4-x_3+x_2-x_1=29-28+23-20=4$

(i), (ii)에서 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 최댓값은 10이다.

답 10

다른 풀이 $x_1+x_2+x_3+x_4=100$에서

집합 A의 모든 원소의 합이 100임을 이용하여 $x_4-x_3+x_2-x_1$을 변형한 후 최댓값을 구한다.

$x_1+x_3=100-(x_2+x_4)$

$\therefore x_4-x_3+x_2-x_1$

$=x_4+x_2-(x_3+x_1)$

$=x_4+x_2-\{100-(x_2+x_4)\}$

$=2(x_2+x_4)-100$

이 값이 최대이려면 x_2+x_4의 값이 최대이어야 하므로

$x_4=29$

$x_2<x_3<x_4$에서 $x_3=28$, $x_2=26$

따라서 구하는 최댓값은

$2\cdot(26+29)-100=10$

04 **1st** **집합 U의 각 원소를 제곱한 수의 일의 자릿수가 같은 것을 찾는다.**

집합 U의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9를 제곱한 수의 일의 자릿수는 각각

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1

즉 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.

따라서 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4-1=15$ 답 15

참고 $5\in A$인 경우는 $m\in A$이면 $n\in A$ $(m\neq n)$인 조건을 만족시키지 않으므로

$5\notin A$

02 집합의 연산

W 10쪽

01 $B\cap C=\{5,\ 7\}$이므로

$A\cup(B\cap C)=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$

답 $\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$

02 $A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$, $C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

⑤ $A\cap B=\{1,\ 3,\ 5\}$이므로

$(A\cap B)\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

답 ⑤

03 집합 A는 b, c, e를 반드시 원소로 갖고, a, d를 원소로 갖지 않아야 한다.

이상에서 집합 A가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

04 ㄱ. $\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots\}$

ㄴ. $\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$

ㄷ. $x^2-x=0$에서 $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때 x는 자연수이어야 하므로 $\{1\}$

ㄹ. $x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

이때 x는 자연수이어야 하므로 $\{3\}$

ㅁ. $\{4,\ 8,\ 12,\ \cdots\}$

ㅂ. $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

이상에서 $\{3,\ 5,\ 7\}$과 서로소인 집합은 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ의 4개이다.

답 ④

집합 $\{3,\ 5,\ 7\}$과 교집합이 $\varnothing$인 집합

➡ 3, 5, 7 중 어느 것도 원소로 갖지 않는 집합

05 집합 A의 부분집합 중에서 집합 B와 서로소인 집합은 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중에서 집합 B의 원소를 갖지 않는 집합과 같다.

집합 B의 원소의 개수를 n이라 하면

$2^{5-n}=8=2^3$, $5-n=3$

$\therefore n=2$

답 2

06 두 집합 A, B가 서로소이므로

$A\cap B=\varnothing$

따라서 집합 A는 집합 B의 원소를 원소로 갖지 않아야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+kx-4\le 0$, 즉 $x^2-kx+4\ge 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-kx+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot 1\cdot 4\le 0$

$k^2-16\le 0$, $(k+4)(k-4)\le 0$

$\therefore -4\le k\le 4$

답 ③

QBOX

쌤한마디

이차부등식이 항상 성립할 조건

① 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면

$a>0$, $b^2-4ac<0$

② 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\ge 0$이 성립하려면

$a>0$, $b^2-4ac\le 0$

③ 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0$이 성립하려면

$a<0$, $b^2-4ac<0$

④ 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\le 0$이 성립하려면

$a<0$, $b^2-4ac\le 0$

07 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $A=\{3,\ 6,\ 9\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$이므로

$B-A=\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8\}$

$\therefore (B-A)^C=\{3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10\}$

답 ⑤

집합 B에서 집합 A의 원소를 제외한다.

전체집합에서 집합 $B-A$의 원소를 제외한다.

08 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 14\}$, $A=\{1,\ 2,\ 7,\ 14\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$, $C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$이므로

$A\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 14\}$

$\therefore (A\cup C)^C=\{4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$

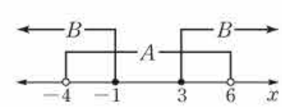
또 $B\cap C=\{2\}$이므로

$(A\cup C)^C\cup(B\cap C)=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 7이다.

답 7

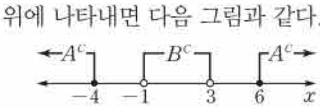
09 ㄴ. 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



$\therefore A-B=\{x\mid -1<x<3\}$

ㄷ. $A^C=\{x\mid x\le -4$ 또는 $x\ge 6\}$,

$B^C=\{x\mid -1<x<3\}$이므로 두 집합 A^C, B^C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



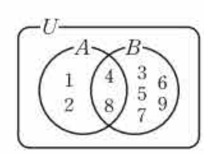
$\therefore A^C\cap B^C=\varnothing$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

집합의 연산을 할 때, 집합을 원소나열법으로 나타내기 어려운 경우에는 수직선을 이용한다.

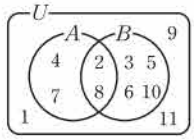
10 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $A\cap B=\{4,\ 8\}$이고 $A\cup B=U$이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

답 $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

11 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 11\}$이고 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

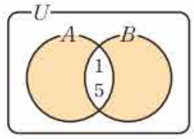


$A\cap B=\{2, 8\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$2+8=10$ 답 ④

12 $A\cap B=\{1, 5\}$, $A\cup B=U$이므로 이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분에 들어갈 원소는 6, 8, 10이다.



이때 $S(A)=2S(B)$에서 $S(A)>S(B)$이므로 6, 8, 10 중 집합 B에 속하는 원소는 한 개 이하이어야 한다.

(i) $6\in B$인 경우

$8\in A$, $10\in A$인 경우

$A=\{1, 5, 8, 10\}$, $B=\{1, 5, 6\}$이므로

$S(A)=24$, $S(B)=12$

$\therefore S(A)=2S(B)$

(ii) $8\in B$인 경우

$6\in A$, $10\in A$인 경우

$A=\{1, 5, 6, 10\}$, $B=\{1, 5, 8\}$이므로

$S(A)=22$, $S(B)=14$

$\therefore S(A)\neq 2S(B)$

(iii) $10\in B$인 경우

$6\in A$, $8\in A$인 경우

$A=\{1, 5, 6, 8\}$, $B=\{1, 5, 10\}$이므로

$S(A)=20$, $S(B)=16$

$\therefore S(A)\neq 2S(B)$

(iv) $6\in A$, $8\in A$, $10\in A$인 경우

$A=\{1, 5, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 5\}$이므로

$S(A)=30$, $S(B)=6$

$\therefore S(A)\neq 2S(B)$

이상에서 $A=\{1, 5, 8, 10\}$, $B=\{1, 5, 6\}$이므로

$A-B=\{8, 10\}$ 답 $\{8, 10\}$

다른 풀이 집합 $(A-B)\cup(B-A)$의 모든 원소의 합은 $6+8+10=24$이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합을 x라 하면 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은 $24-x$이다.

이때

$S(A)=x+1+5=x+6$,

$S(B)=(24-x)+1+5=30-x$

이므로 $S(A)=2S(B)$에서

$x+6=2(30-x)$, $x+6=60-2x$

$3x=54$ $\therefore x=18$

즉 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 18이므로

원소 6, 8, 10으로 합이 18이 되도록 만드는 경우는 $8+10$뿐이다.

$A-B=\{8, 10\}$

13 $B-A=\{8\}$에서 $2\in A$이므로 $k=2$

$\therefore A=\{1, 2, 6\}$, $B=\{2, 6, 8\}$

⑤ $A\cup B=\{1, 2, 6, 8\}$

답 ⑤

14 $A\cap B=\{-1\}$이므로 $-1\in A$

즉 $a^2-4a+2=-1$이므로 $a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

(i) $a=1$일 때,

$A=\{-1, 5\}$, $B=\{-1, 1\}$이므로

$A\cap B=\{-1\}$

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{-1, 5\}$, $B=\{1, 5\}$이므로

$A\cap B=\{5\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=1$ 답 1

15 $A\cup B=\{1, 4, 5, 7\}$이고 $A=\{1, 4, k+3\}$이므로

$k+3=5$ 또는 $k+3=7$

$\therefore k=2$ 또는 $k=4$

(i) $k=2$일 때,

$A=\{1, 4, 5\}$, $B=\{-7, 7\}$이므로

$A\cup B=\{-7, 1, 4, 5, 7\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=4$일 때,

$A=\{1, 4, 7\}$, $B=\{5, 7\}$이므로

$A\cup B=\{1, 4, 5, 7\}$

(i), (ii)에서 $k=4$

따라서 $A=\{1, 4, 7\}$이므로 구하는 모든 원소의 합은

$1+4+7=12$ 답 12

16 $n(A)=2$, $n(B)=2$이고

$(A-B)\cup(B-A)=\{4, 8\}$이므로 집합 $A\cap B$의 원소가 존재한다.

$A\cap B=\varnothing$이면 $n((A-B)\cup(B-A))=4$가 되어 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

이때 $a+1\neq a+6$, $a^2\neq a^2-1$이므로

$a+1=a^2-1$ 또는 $a^2=a+6$

$a+1=a^2-1$에서 $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

또 $a^2=a+6$에서 $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{-1, 4\}$, $B=\{3, 4\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{-1, 3\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-1$일 때,

$A=\{0, 1\}$, $B=\{0, 5\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{1, 5\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a=2$일 때,

$A=\{3, 4\}$, $B=\{3, 8\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{4, 8\}$

(iv) $a=3$일 때,

$A=\{4, 9\}$, $B=\{8, 9\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{4, 8\}$

이상에서 $a=2$ 또는 $a=3$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은

$2\cdot3=6$ 답 6

17 ① $A\subset(A\cup B)$이므로 $A\cap(A\cup B)=A$

③ $A\cup(A\cap A^C)=A\cup\varnothing=A$

④ $B\cap(B\cup B^C)=B\cap U=B$

⑤ $(A\cap B)-(A^C)^C=(A\cap B)-A=\varnothing$

답 ④

18 ㄱ. $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

ㄴ. $B\subset A$이고 $A\neq B$이므로 $A-B\neq\varnothing$

ㄷ. $B^C\not\subset A$

ㄹ. $A\cup(B-A)=A\cup\varnothing=A$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ②

19 $B^C\subset A^C$이므로 $A\subset B$

① $A\cap B=A$

② $(A\cup B)\cap A=B\cap A=A$

③ $A\cup(A-B)=A\cup\varnothing=A$

④ $A\cup(B\cap U)=A\cup B=B$

⑤ $(A\cap B)\cap(A\cup B)=A\cap B=A$ 답 ④

20 $(A-B)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$

이므로 $A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$

따라서 $A\subset B$, $B\subset A$이므로

$A=B$ 답 ③

21 $A\cap X=\varnothing$이므로 집합 X는 집합 U의 부분집합 중 b, e를 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$ 답 8

22 $A-X=\varnothing$이므로 $A\subset X$

$B-X=B$이므로 $B\cap X=\varnothing$

즉 집합 X는 집합 U의 부분집합 중 3, 5를 반드시 원소로 갖고, 1, 8, 9를 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{10-2-3}=2^5=32$ 답 ④

23 $(X-A)\subset(A-X)$이므로 $X\subset A$

$A=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 집합 X는 공집합이 아닌 집합 A의 부분집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^4-1=15$ 답 15

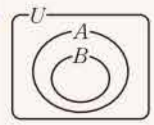
24 $B\cup X=X$이므로 $B\subset X$ …… ㉠

$A-B=\{2, 4, 7\}$이고 $(A-B)\cap X=\{2, 7\}$이므로

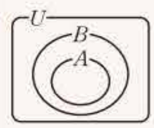
$2\in X$, $4\notin X$, $7\in X$ …… ㉡

Q BOX

드모르간의 법칙 이용



집합 B, 즉 $\{3, 4, 6, 8, 9\}$에서 집합 $A\cap C$의 원소를 제외한 집합이 $\{3, 6, 8\}$이므로 4, 9는 집합 $A\cap C$의 원소이다.



$(A\cap B)\cap B^C$
$=A\cap(B\cap B^C)$
$=A\cap\varnothing$
$=\varnothing$

전체집합 U, 즉 $\{2, 3, 4, 5, 8, 9\}$에서 집합 $A\cap B$를 제외한 집합이 $\{3, 4, 5\}$이므로 2, 8, 9는 집합 $A\cap B$의 원소이다.

$(B\cap A^C)\subset(B\cup A^C)$이므로

$(B\cap A^C)\cap(B\cup A^C)$
$=B\cap A^C$

㉠, ㉡에서 집합 X는 집합 U의 부분집합 중 1, 2, 6, 7을 반드시 원소로 갖고 4를 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{9-4-1}=2^4=16$ 답 16

25 $A=\{2, 3, 5, 8\}$, $B-A=\{7\}$이므로

$A\cup B=A\cup(B-A)=\{2, 3, 5, 7, 8\}$

$\therefore A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{0, 6, 9\}$

답 $\{0, 6, 9\}$

26 $B\cap(A^C\cup C^C)=B\cap(A\cap C)^C$

$=B-(A\cap C)$

이므로 $B-(A\cap C)=\{3, 6, 8\}$

이때 $B=\{3, 4, 6, 8, 9\}$이므로

$4\in(A\cap C)$, $9\in(A\cap C)$ 답 ③

27 $(B-A)-C=(B\cap A^C)\cap C^C$

$=B\cap(A^C\cap C^C)$

$=B\cap(A\cup C)^C$

$=B-(A\cup C)$ 답 ⑤

28 ㄱ. $A-(A-B)=A\cap(A\cap B^C)^C$

$=A\cap(A^C\cup B)$

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$

ㄴ. $(A\cap B)-(B\cap C)$

$=(A\cap B)\cap(B\cap C)^C$

$=(A\cap B)\cap(B^C\cup C^C)$

$=\{(A\cap B)\cap B^C\}\cup\{(A\cap B)\cap C^C\}$

$=\varnothing\cup\{(A\cap B)\cap C^C\}$

$=(A\cap B)\cap C^C$

$=(A\cap B)-C$

ㄷ. $(A-C)\cup(A\cap B)=(A\cap C^C)\cup(A\cap B)$

$=A\cap(C^C\cup B)$

$=A\cap(C\cap B^C)^C$

$=A-(C-B)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

29 조건 (가)에서

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{3, 4, 5\}$

이므로 $A\cap B=\{2, 8, 9\}$ …… ㉠

조건 (나)에서

$\{B\cap(A^C\cup B^C)\}\cap(A-B)^C$

$=\{(B\cap A^C)\cup(B\cap B^C)\}\cap(A\cap B^C)^C$

$=\{(B\cap A^C)\cup\varnothing\}\cap(A^C\cup B)$

$=(B\cap A^C)\cap(B\cup A^C)$

$=B\cap A^C$

$=B-A$

$\therefore B-A=\{5\}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $B=\{2,\ 5,\ 8,\ 9\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$2+5+8+9=24$ 답 24

30 $(A_3\cup A_9)\cap(A_5\cup A_{10})=A_3\cap A_5=A_{15}$ 답 ④

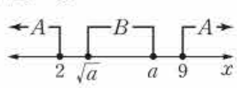
31 ㄴ. $A_4\cup A_8=A_8$
ㄷ. $A_k-A_9=\varnothing$이므로 $A_k\subset A_9$
즉 자연수 k는 1, 3, 9의 3개이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

32 집합 $A_{36}\cap A_{60}$은 36과 60의 양의 공약수의 집합, 즉 12의 양의 약수의 집합이므로
$A_{36}\cap A_{60}=A_{12}$
즉 $A_p\subset A_{12}$를 만족시키는 p는 12의 양의 약수이므로 자연수 p의 최댓값은 12이다.
또 집합 $B_{18}\cap B_{27}$은 18과 27의 양의 공배수의 집합, 즉 54의 양의 배수의 집합이므로
$B_{18}\cap B_{27}=B_{54}$
즉 $B_q\subset B_{54}$를 만족시키는 q는 54의 양의 배수이므로 자연수 q의 최솟값은 54이다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$12+54=66$ 답 66

33 $x^2+5x-36>0$에서 $(x+9)(x-4)>0$
$\therefore x<-9$ 또는 $x>4$
$A=\{x|x\ge-9\}$, $B=\{x|x\le4\}$이므로
$A^C=\{x|x<-9\}$, $B^C=\{x|x>4\}$
따라서 부등식 $x^2+5x-36>0$의 해의 집합은
$\{x|x<-9$ 또는 $x>4\}$
$=\{x|x<-9\}\cup\{x|x>4\}$
$=A^C\cup B^C$
$=(A\cap B)^C$ 답 ⑤

$x+9\ge0$에서 $x\ge-9$
$x-4\le0$에서 $x\le4$

34 $x^2-11x+18\ge0$에서 $(x-2)(x-9)\ge0$
$\therefore x\le2$ 또는 $x\ge9$
$\therefore A=\{x|x\le2$ 또는 $x\ge9\}$
$(x-\sqrt{a})(x-a)\le0$에서 $\sqrt{a}\le a$이므로
$\sqrt{a}\le x\le a$
$\therefore B=\{x|\sqrt{a}\le x\le a\}$
한편 $A-B=A$이므로 $A\cap B=\varnothing$
즉 $A\cap B=\varnothing$이 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같아야 하므로



$\sqrt{a}>2$, $a<9$
$\therefore 4<a<9$
따라서 자연수 a는 5, 6, 7, 8의 4개이다. 답 ②

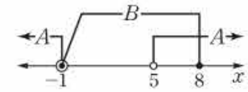
$\sqrt{a}\ge1$, $a\ge1$이므로
$(\sqrt{a})^2-a^2$
$=a(1-a)\le0$
$\therefore \sqrt{a}\le a$

$A☆B$
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$

$\sqrt{a}>2$에서 $a>4$

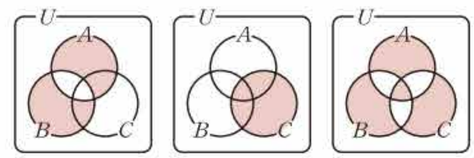
35 $x^2-7x-8\le0$에서 $(x+1)(x-8)\le0$
$\therefore -1\le x\le8$
$\therefore B=\{x|-1\le x\le8\}$

$A\cup B=U$,
$A\cap B=\{x|5<x\le8\}$이 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같아야 하므로



$A=\{x|x<-1$ 또는 $x>5\}$
$=\{x|(x+1)(x-5)>0\}$
$=\{x|x^2-4x-5>0\}$
따라서 $a=-4$, $b=-5$이므로
$ab=20$ 답 20

36 $A▼B=(A-B)\cup(B-A)$이므로 $(A▼B)▼C$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

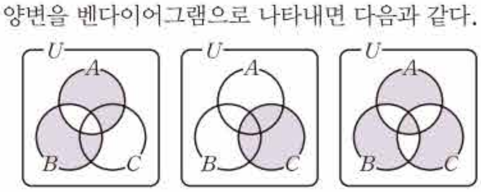


$A▼B$ ▼ C $=(A▼B)▼C$

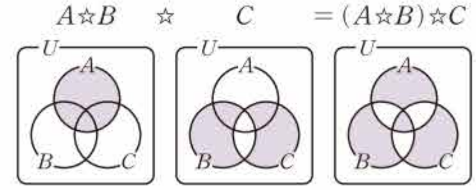
답 ②

37 $A◇B=(A\cup B)-(A-B)$
$=(A\cup B)\cap(A\cap B^C)^C$
$=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)$
$=(A\cap A^C)\cup B$
$=\varnothing\cup B=B$
이므로
$A◇(A◇B)=A◇B=B=\{5,\ 10,\ 15\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은
$5+10+15=30$ 답 ⑤

38 ㄱ. $A☆U=(A\cup U)\cap(A\cap U)^C$
$=U\cap A^C$
$=A^C$
ㄴ. $A^C☆B^C=(A^C\cup B^C)\cap(A^C\cap B^C)^C$
$=(A\cap B)^C\cap(A\cup B)$
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$
$=A☆B$
ㄷ. 양변을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$A☆B$ ☆ C $=(A☆B)☆C$



A ☆ $B☆C$ $=A☆(B☆C)$

$\therefore (A☆B)☆C=A☆(B☆C)$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

39 $B\subset A^{C}$이므로 $A\cap B=\varnothing$

$\therefore n(A\cap B)=0$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

$=18+12=30$ 답 ④

두 집합 A, B는 서로소이다.

40 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=19-7=12$

$n(B\cap A^{C})=n(B-A)$

$=n(B)-n(A\cap B)$

$=16-7=9$

$\therefore n(A-B)+n(B\cap A^{C})=12+9=21$ 답 21

다른 풀이 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=19+16-7=28$

$\therefore n(A-B)+n(B\cap A^{C})$

$=n(A-B)+n(B-A)$

$=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

$=28-7=21$

41 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=15+20-30=5$

$n((A\cup B)^{C})=n(U)-n(A\cup B)$

$=38-30=8$

색칠한 부분이 나타내는 집합은 $(A\cap B)\cup(A\cup B)^{C}$이므로 구하는 원소의 개수는

$n(A\cap B)+n((A\cup B)^{C})=5+8=13$ 답 ①

$(A\cap B)\cap(A\cup B)^{C}=\varnothing$이므로
$n((A\cap B)\cup(A\cup B)^{C})$
$=n(A\cap B)$
$+n((A\cup B)^{C})$

42 $A\subset B$이므로

$A\cap B=A$, $A\cap B\cap C=A\cap C$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)$,

$n(A\cap B\cap C)=n(A\cap C)$

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap C)$

$=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$

$=27+15-9=33$

이므로

$n(A^{C}\cap B^{C}\cap C^{C})=n((A\cup B\cup C)^{C})$

$=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

$=50-33=17$ 답 17

43 $A\cap B=\varnothing$일 때 $n(A\cup B)$가 최대이므로 최댓값은

$n(A)+n(B)=45+37=82$

$A\cap B=\varnothing$이면
$n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)$

$B\subset A$일 때 $n(A\cup B)$가 최소이므로 최솟값은

$n(A)=45$

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 차는

$82-45=37$ 답 37

44 $n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$이므로 $n(A\cup B)$가 최대일 때 $n(B-A)$가 최대이다.

$A\cup B=U$일 때 $n(A\cup B)$가 최대이므로 $n(B-A)$의 최댓값은

$50-29=21$ 답 ④

다른 풀이 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$이므로 $n(A\cap B)$가 최소일 때 $n(B-A)$가 최대이다.

$A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cap B)=29+34-50=13$

따라서 $n(B-A)$의 최댓값은

$34-13=21$

45 $A\cup B=U$일 때 $n(A)$가 최대이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$p-5=n(A)+p-10$

$\therefore n(A)=5$

$\therefore M=5$

$A\subset B$일 때 $n(A)$가 최소이므로

$n(A)=n(A\cap B)=p-5$

즉 $m(p)=p-5$이므로

$m(7)=7-5=2$

$\therefore M-m(7)=5-2=3$ 답 3

46 농구를 좋아하는 학생의 집합을 A, 야구를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(A)=20$, $n(B)=16$, $n(A\cap B)=9$

농구 또는 야구를 좋아하는 학생의 집합은 $A\cup B$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=20+16-9=27$

따라서 구하는 학생 수는 27이다. 답 ②

47 회원 전체의 집합을 U, 부산에 가 본 회원의 집합을 A, 제주도에 가 본 회원의 집합을 B라 하면 조건 (가), (나), (다)에서

$n(U)=60$, $n(A)=40$, $n(A-B)=18$,

$n(A^{C}\cap B^{C})=12$

이때 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cap B)=40-18=22$

또

$n(A^{C}\cap B^{C})=n((A\cup B)^{C})=n(U)-n(A\cup B)$

에서

$12=60-n(A\cup B)$

$\therefore n(A\cup B)=48$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$48=40+n(B)-22$

$\therefore n(B)=30$

따라서 제주도에 가 본 회원 수는 30이다. 답 30

48 율호네 학교 학생 전체의 집합을 U, 영어 학원에 다니는 학생의 집합을 A, 수학 학원에 다니는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=90,\ n(A)=43,\ n(B)=57$

영어 학원과 수학 학원에 모두 다니는 학생의 집합은 $A\cap B$이고, $A\subset B$일 때 $n(A\cap B)$가 최대이므로 영어 학원과 수학 학원에 모두 다니는 학생 수의 최댓값은

$M=n(A\cap B)=n(A)=43$

한편 $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서 영어 학원과 수학 학원에 모두 다니는 학생 수의 최솟값은

$m=43+57-90=10$

$\therefore M+m=53$

답 ④

49 고객 전체의 집합을 U, S 휴대폰을 구입해 본 고객의 집합을 A, P 휴대폰을 구입해 본 고객의 집합을 B라 하면

$n(U)=55,\ n(A)=36,\ n(B)=27$

S 휴대폰만 구입해 본 고객의 집합은 $A-B$이고

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ ...... ㉠

이므로 $n(A\cap B)$가 최소일 때 $n(A-B)$가 최대이다.

$A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cap B)=36+27-55=8$

따라서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 8이므로 ㉠에서 구하는 최댓값은

$36-8=28$

답 28

50 지성이네 반 학생 전체의 집합을 U, A 영화를 관람한 학생의 집합을 A, B 영화를 관람한 학생의 집합을 B, C 영화를 관람한 학생의 집합을 C라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=17,\ n(B)=21,$

$n(C)=14,\ n(A\cap B\cap C)=5$

이때 모든 학생이 적어도 한 편을 관람하였으므로

$n(A\cup B\cup C)=n(U)=40$

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$\quad -n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

에서

$40=17+21+14-n(A\cap B)$

$\qquad -n(B\cap C)-n(C\cap A)+5$

$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=17$

따라서 세 편 중 두 편만 관람한 학생 수는

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$

$-3\cdot n(A\cap B\cap C)$

$=17-3\cdot 5=2$

답 2

Q BOX

조건 (다)에서 $A\cap B=\{10,\ 13\}$이므로 $A\cap B$의 모든 원소의 합은 $10+13=23$

집합 X는 1을 반드시 원소로 갖고 3 또는 4를 원소로 가져야 한다.

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$에는 영화 세 편을 모두 관람한 학생 수, 즉 $n(A\cap B\cap C)$가 3번 더해지므로 $n(A\cap B\cap C)$를 3번 빼 주어야 한다.

도전! 수능 기출

W 18쪽

01 (1st) $A=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$로 놓고 집합 B를 구한 후 집합 B의 모든 원소의 합을 식으로 나타낸다.

$A=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$라 하면

$$B=\left\{\frac{x_1+a}{2},\ \frac{x_2+a}{2},\ \frac{x_3+a}{2},\ \frac{x_4+a}{2},\ \frac{x_5+a}{2}\right\}$$

조건 (가)에서 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=28$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+\frac{5}{2}a=\frac{1}{2}\cdot 28+\frac{5}{2}a$$

$$=14+\frac{5}{2}a$$

(2nd) 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합을 식으로 나타내고 조건 (나), (다)를 이용하여 상수 a의 값을 구한다.

집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합을 더한 값에서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합을 뺀 것과 같으므로

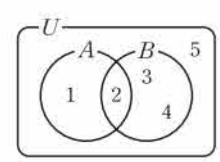
$$49=28+\left(14+\frac{5}{2}a\right)-23$$

$\frac{5}{2}a=30 \qquad \therefore a=12$

답 12

02 (1st) 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내고 집합 $A\cap B$를 구한다.

주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고



$A\cap B=\{2\}$

(2nd) $2\in X$인 경우의 집합 X의 개수를 구한다.

(i) $2\in X$인 경우

$X\cap A\neq\varnothing,\ X\cap B\neq\varnothing$이므로 집합 X의 개수는 집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1}=2^4=16$

(3rd) $2\notin X$인 경우의 집합 X의 개수를 구한다.

(ii) $2\notin X$인 경우

2를 제외한 집합 A의 원소는 1이고, 2를 제외한 집합 B의 원소는 3, 4이므로 $X\cap A\neq\varnothing,\ X\cap B\neq\varnothing$ 이려면

$1\in X,\ 3\in X,\ 4\notin X$

또는 $1\in X,\ 3\notin X,\ 4\in X$

또는 $1\in X,\ 3\in X,\ 4\in X$

이때 각 경우에서 집합 X는 집합 $(A\cup B)^C$의 원소인 5를 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있으므로 집합 X의 개수는 $\quad 3\cdot 2=6$

(4th) 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$16+6=22$

답 22

03 (1st) 주어진 조건을 집합의 연산 법칙을 이용하여 간단히 정리한다.

조건 (나)에서

$$A\cap(A^{C}\cup B)=(A\cap A^{C})\cup(A\cap B)$$
$$=\varnothing\cup(A\cap B)$$
$$=A\cap B$$

이므로 $\quad A\cap B\neq\varnothing$

$\therefore n(A\cap B)\geq 1$

2nd $n(A)$의 범위를 구한 후 조건 (가), (다)를 이용하여 $n(B-A)$의 최댓값을 구한다.

조건 (다)에서 $n(A-B)=11$이므로

$$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)$$
$$\geq 11+1=12$$

조건 (가)에서 $n(U)=25$이므로

$$n(U)\geq n(A)+n(B-A)$$
$$\therefore n(B-A)\leq n(U)-n(A)$$
$$\leq 25-12=13$$

따라서 $n(B-A)$의 최댓값은 13이다. 답 13

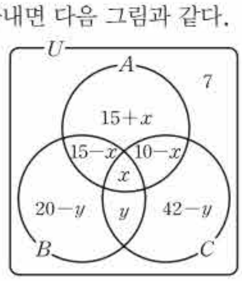
04 **1st** 각 집합의 원소의 개수를 벤다이어그램에 나타낸다.

학생 전체의 집합을 U, $n(A\cap B\cap C)=x$, $n((B\cap C)-A)=y$라 하면

$$n(A)=40,\ n(B)=35,\ n(C)=52,$$
$$n(A\cap B)=15,\ n(A\cap C)=10,$$
$$n(A^{C}\cap B^{C}\cap C^{C})=7$$

이므로 벤다이어그램에 각각의 영역에 해당하는 원소의 개수를 나타내면 다음 그림과 같다.

$A^{C}\cap B^{C}\cap C^{C}$
$=(A\cup B\cup C)^{C}$
$=U-(A\cup B\cup C)$



2nd $n(A\cup B\cup C)$를 이용하여 $n((B\cap C)-A)$를 구한다.

$$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n(A^{C}\cap B^{C}\cap C^{C})$$
$$=100-7=93$$

이고

$$n(A\cup B\cup C)$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$
$$-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=40+35+52-15-(x+y)-10+x$$
$$=102-y$$

이므로 $\quad 102-y=93$

$\therefore y=9$

3rd $n(A\cap B\cap C)$의 범위를 구하여 세 문제 중 두 문제 이상을 맞힌 학생 수의 최솟값을 구한다.

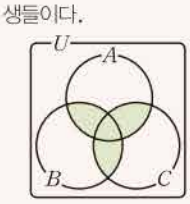
이때 x의 값의 범위는 $\quad 0\leq x\leq 10$

따라서 두 문제 이상을 맞힌 학생 수는

$$(15-x)+(10-x)+x+y=34-x$$

이므로 최솟값은 $x=10$일 때 24이다. 답 ④

다음 벤다이어그램에서 색칠한 부분에 속하는 학생들이다.



03 명제

W 19쪽

01 ㄱ. $50\div 6=8.3\cdots>8$이므로 참인 명제이다.

ㄴ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㄷ. 모든 x의 값에 대하여 항상 성립하므로 참인 명제이다.

항등식은 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 명제이다.

ㄹ. $x+5=x-2$에서 $5=-2$이므로 거짓인 명제이다.

이상에서 명제인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

02 ① x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

②, ③, ④ 참인 명제이다.

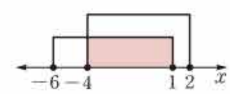
⑤ 가장 작은 소수는 2이므로 거짓인 명제이다.

답 ⑤

03 'p 또는 $\sim q$'의 부정은 $\quad$ '$\sim p$ 그리고 q'

'$\sim p$: $-6\leq x\leq 1$'이므로

'$\sim p$ 그리고 q'는 오른쪽 그림에서



두 조건 $\sim p$, q를 수직선 위에 나타낸 후 공통부분을 찾는다.

$$-4\leq x\leq 1$$

답 ④

04 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.

① 35는 7의 배수가 아니다. (거짓)

② $(-3)^3\neq -3^3$ (거짓)

③ $\sqrt{0.\dot{1}}$은 무리수가 아니다. (참)

$\sqrt{0.\dot{1}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$이므로 $\sqrt{0.\dot{1}}$은 유리수이다.

④ 10보다 작은 소수는 4개가 아니다. (거짓)

⑤ $\varnothing\not\subset\{a, b, c\}$ (거짓) 답 ③

다른 풀이 명제가 거짓이면 그 부정은 참이다.

주어진 명제 ①, ②, ④, ⑤는 참, ③은 거짓이므로 명제의 부정이 참인 것은 ③이다.

명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다.

05 답 ②

06 ㄴ. $a^2+b^2=0$에서 $a=0$이고 $b=0$이므로

$\sim p$: $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$

ㄷ. $(a-b)(b-c)(c-a)=0$에서

$a-b=0$ 또는 $b-c=0$ 또는 $c-a=0$

즉 $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$이므로

$\sim p$: $a\neq b$이고 $b\neq c$이고 $c\neq a$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 20 이하의 자연수 중 5의 배수는 5, 10, 15, 20이고 20의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이므로 조건 p의 진리집합은

$\{5, 10, 20\}$ 답 $\{5, 10, 20\}$

08 $U=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 4, 8\}$, $Q=\{8, 16\}$

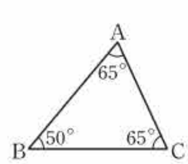
① 조건 'p이고 q'의 진리집합은 $P\cap Q=\{8\}$이므로
$n(P\cap Q)=1$
② 조건 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{1,\ 16\}$이므로
$n(P^C)=2$
③ 조건 $\sim q$의 진리집합은 $Q^C=\{1,\ 2,\ 4\}$이므로
$n(Q^C)=3$
④ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은
$P^C\cup Q=\{1,\ 8,\ 16\}$이므로
$n(P^C\cup Q)=3$
⑤ 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은
$P\cup Q^C=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이므로
$n(P\cup Q^C)=4$

답 ⑤

09 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$x^2-8x+15=0$에서 $(x-3)(x-5)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=5$
$\therefore P=\{3,\ 5\}$
$x^2-11x+24\le 0$에서 $(x-3)(x-8)\le 0$
$\therefore 3\le x\le 8$
$\therefore Q=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$
따라서 조건 '$\sim p$이고 q'의 진리집합은
$P^C\cap Q=Q-P=\{4,\ 6,\ 7,\ 8\}$
이므로 구하는 원소의 합은
$4+6+7+8=25$

답 ②

10 ① $4x+1=5$에서 $x=1$
따라서 $x=1$이면
$x^2-2x-3=1^2-2\cdot 1-3=-4\neq 0$
② [반례] $x=9$이면 x는 9의 양의 약수이지만 3의 양의 약수는 아니다.
④ [반례] $x=2$, $y=3$이면 x, y는 소수이지만 $xy=6$은 짝수이다.
⑤ [반례] 오른쪽 그림에서 △ABC는 이등변삼각형이지만 ∠B≠∠C이다.



답 ③

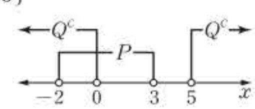
11 ㄱ. [반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2\neq 0$이다.
ㄴ. [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}$이면 x, y는 무리수이지만 $xy=4$는 유리수이다.
ㄷ. [반례] $x=1$, $y=0$이면 $x^2+y^2=1>0$이지만 $y=0$이다.
이상에서 거짓인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

12 두 조건 p, q를
'p: n은 7의 배수이다.', 'q: n은 홀수이다.'
라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49\}$,
$Q=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 49\}$
이때 명제 $p\longrightarrow q$가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 집합 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 반례는 집합 $P-Q$의 원소이다.
$P-Q=\{14,\ 28,\ 42\}$이므로 구하는 반례는 14, 28, 42이다.

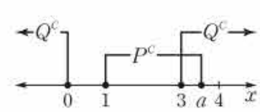
답 14, 28, 42

13 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\mid -2<x<3\}$, $Q=\{x\mid 0\le x\le 5\}$
명제 'p이면 q이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 집합 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 집합은 $P-Q$, 즉 $P\cap Q^C$이다.
이때
$Q^C=\{x\mid x<0$ 또는 $x>5\}$
이므로 오른쪽 그림에서
$P\cap Q^C$
$=\{x\mid -2<x<0\}$



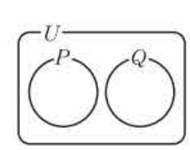
답 ③

14 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\mid x<1$ 또는 $x>a\}$, $Q=\{x\mid 0<x<3\}$
명제 $\sim p\longrightarrow q$가 거짓임을 보이려면 집합 P^C의 원소 중에서 집합 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 반례는 집합 P^C-Q, 즉 $P^C\cap Q^C$의 원소이다.
이때
$P^C=\{x\mid 1\le x\le a\}$,
$Q^C=\{x\mid x\le 0$ 또는 $x\ge 3\}$
이므로 집합 $P^C\cap Q^C$의 정수인 원소가 3뿐이려면 오른쪽 그림에서
$3\le a<4$



답 $3\le a<4$

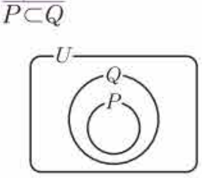
15 $P-Q=P$에서
$P\cap Q=\varnothing$
이므로 이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
② $P\subset Q^C$이므로 명제 $p\longrightarrow \sim q$는 참이다.



두 집합 P, Q는 서로소이다.

답 ②

16 명제 $p\longrightarrow q$가 참이므로 $P\subset Q$
이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
ㄴ. $P\cap Q=P$
ㄷ. $Q-P\neq\varnothing$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.



$A\subset B$와 같은 표현
➡ $A\cup B=B$
➡ $A\cap B=A$
➡ $A-B=\varnothing$
➡ $A\cap B^C=\varnothing$
➡ $B^C\subset A^C$
➡ $B^C-A^C=\varnothing$

답 ㄱ, ㄹ

17 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $\quad Q^C \subset P$

이때 $Q=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

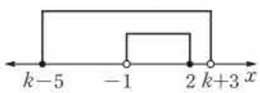
$Q^C=\{1, 4, 6, 8, 9\}$

따라서 집합 P는 집합 U의 부분집합 중에서 1, 4, 6, 8, 9를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 P의 개수는 $\quad 2^{9-5}=2^4=16$ 　　답 ④

18 주어진 명제가 참이 되려면

$\{x \mid -1<x\le 2\} \subset \{x \mid k-5\le x<k+3\}$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$k-5\le -1$,

$k+3>2$

$\therefore -1<k\le 4$ 　　답 ③

19 $|x-4|>5$에서 $\quad x-4<-5$ 또는 $x-4>5$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>9$

$|x-a|\ge 7$에서 $\quad x-a\le -7$ 또는 $x-a\ge 7$

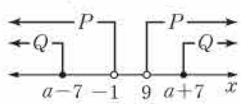
$\therefore x\le a-7$ 또는 $x\ge a+7$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid x<-1$ 또는 $x>9\}$,

$Q=\{x \mid x\le a-7$ 또는 $x\ge a+7\}$

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-7<-1$ 또는 $a+7>9$

$\therefore 2<a<6$

따라서 정수 a는 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$3+4+5=12$ 　　답 ①

$a>0$일 때
① $|x|<a$
➡ $-a<x<a$
② $|x|>a$
➡ $x<-a$ 또는 $x>a$

20 $x^2+7x-8<0$에서 $\quad (x+8)(x-1)<0$

$\therefore -8<x<1$

$4x+k>5x+3$에서 $\quad x<k-3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

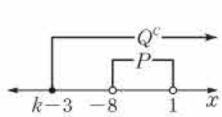
$P=\{x \mid -8<x<1\}$, $Q=\{x \mid x<k-3\}$

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $\quad P\subset Q^C$

이때

$Q^C=\{x \mid x\ge k-3\}$

이므로 오른쪽 그림에서



$k-3\le -8$

$\therefore k\le -5$

따라서 실수 k의 최댓값은 -5이다. 　　답 -5

21 ① $x=0$이면 $\quad |x|=|0|=0$

③ $x=2$이면 $\frac{1}{2}<2$이므로 $\quad \frac{1}{x}<x$

④ [반례] $x=1$이면 $\quad 1^2+2\cdot 1=3$

⑤ $x=\sqrt{2}$이면 $x^2=(\sqrt{2})^2=2$는 유리수이다.

답 ④

22 주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $x^2+6ax+36\le 0$이다.'

이다.

이차부등식 $x^2+6ax+36\le 0$이 실근을 갖는다.
➡ 이차방정식 $x^2+6ax+36=0$의 판별식을 D라 할 때, $\frac{D}{4}\ge 0$이어야 한다.

이 명제가 참이므로 이차방정식 $x^2+6ax+36=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(3a)^2-36\ge 0, \qquad 9a^2-36\ge 0$

$a^2-4\ge 0, \qquad (a+2)(a-2)\ge 0$

$\therefore a\le -2$ 또는 $a\ge 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다. 　　답 2

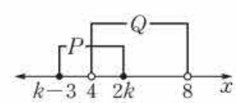
23 주어진 명제에서 두 조건 p, q를

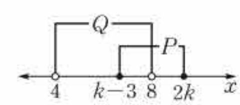
'p: $k-3\le x\le 2k$', 'q: $4<x<8$'

이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid k-3\le x\le 2k\}$, $Q=\{x \mid 4<x<8\}$

주어진 명제가 참이 되려면 $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 하므로 다음 그림과 같아야 한다.





즉 $2k>4$, $k-3<8$이어야 하므로

$2<k<11$ 　　답 $2<k<11$

24 명제 $q \longrightarrow \sim p$의 역은 $\quad \sim p \longrightarrow q$

따라서 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow p$도 항상 참이다. 　　답 ④

25 ① 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

역: $x-5=y-5$이면 $x=y$이다. (참)

② [반례] $x=0$이면 $-1<x<1$이지만 $x^2<1$이다.

즉 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

역: $x^2>1$이면 $-1<x<1$이다. (거짓)

[반례] $x=2$이면 $x^2>1$이지만 $x>1$이다.

③ [반례] $x=3$, $y=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이지만 $x+y\ne 0$이다.

즉 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

역: $x+y=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다. (거짓)

[반례] $x=3$, $y=-3$이면 $x+y=0$이지만 $x\ne 0$, $y\ne 0$이다.

④ [반례] $x=2$, $y=2$이면 $x+y$가 짝수이지만 xy는 짝수이다.

즉 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

역: xy가 홀수이면 $x+y$가 짝수이다. (참)

xy가 홀수이면 x, y는 모두 홀수이므로 $x+y$는 짝수이다.

⑤ 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

역: $|xy|=xy$이면 x, y가 모두 양수이다. (거짓)

[반례] $x=0$, $y=0$이면 $|xy|=xy$이지만 x, y가 양수가 아니다. 　　답 ⑤

26 $|x-a|<4$에서 $\quad -4<x-a<4$

$\therefore a-4<x<a+4$

$x^2-x-2\le 0$에서 $\quad(x+1)(x-2)\le 0$

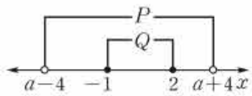
$\therefore\ -1\le x\le 2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|a-4<x<a+4\}$, $Q=\{x|-1\le x\le 2\}$

이때 명제 $p\longrightarrow q$의 역은 $q\longrightarrow p$이므로 $q\longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$a-4<-1$, $a+4>2$

$\therefore\ -2<a<3$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2의 4개이다. 답 4

27 주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$x=-2$이면 $x^2+5x-2k\le 0$이다.'

도 참이다.

$x=-2$를 $x^2+5x-2k\le 0$에 대입하면

$4-10-2k\le 0$, $\quad -2k\le 6$

$\therefore\ k\ge -3$

따라서 정수 k의 최솟값은 -3이다. 답 -3

28 명제 $\sim q\longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 그 대우 $p\longrightarrow q$도 참이어야 한다.

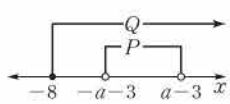
p: $|x+3|<a$에서 $\quad -a<x+3<a$

$\therefore\ -a-3<x<a-3$

이때 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-a-3<x<a-3\}$, $Q=\{x|x\ge -8\}$

명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-a-3\ge -8$

$\therefore\ a\le 5$

따라서 양수 a의 최댓값은 5이다. 답 5

29 ①, ② 세 명제 $p\longrightarrow \sim r$, $q\longrightarrow r$, $\sim s\longrightarrow r$가 모두 참이므로 각각의 대우 $r\longrightarrow \sim p$, $\sim r\longrightarrow \sim q$, $\sim r\longrightarrow s$도 모두 참이다.

③ 두 명제 $p\longrightarrow \sim r$, $\sim r\longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 명제 $p\longrightarrow \sim q$가 참이고, 그 대우 $q\longrightarrow \sim p$도 참이다.

⑤ 두 명제 $p\longrightarrow \sim r$, $\sim r\longrightarrow s$가 모두 참이므로 명제 $p\longrightarrow s$가 참이고, 그 대우 $\sim s\longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $q\longrightarrow s$이다. 답 ④

30 세 조건 p, q, r를

'p: 열목어가 사는 물이다.',

'q: 1급수 물이다.',

'r: 마실 수 있다.'

로 놓으면 두 명제 $p\longrightarrow q$, $q\longrightarrow r$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q\longrightarrow \sim p$, $\sim r\longrightarrow \sim q$도 모두 참이다.

또 두 명제 $p\longrightarrow q$, $q\longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $p\longrightarrow r$도 참이다.

ㄱ. $\sim q\longrightarrow \sim p$이므로 참이다.

ㄴ. $r\longrightarrow q$이므로 항상 참이라 할 수 없다.

ㄷ. $p\longrightarrow r$이므로 참이다.

이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

Q BOX

명제 $q\longrightarrow r$는 참이지만 그 역 $r\longrightarrow q$가 반드시 참인 것은 아니다.

31 ㄱ. 명제 $r\longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p\longrightarrow \sim r$도 참이다.

$\therefore\ P\subset R^C$

ㄴ. 명제 $\sim r\longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q\longrightarrow r$도 참이다.

따라서 $Q\subset R$이므로 $\quad Q\cup R=R$

ㄷ. 두 명제 $p\longrightarrow \sim r$, $\sim r\longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 명제 $p\longrightarrow \sim q$도 참이다.

따라서 $P\subset Q^C$이므로

$P-Q=P\cap Q^C=P$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

32 ㄱ. $x^2=x$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

$x^2=x$에서
$x^2-x=0$
$x(x-1)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

따라서 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $x^2=y^2$이면 $x=y$ 또는 $x=-y$이므로

$|x|=|y|$

또 $|x|=|y|$이면 $|x|^2=|y|^2$이므로 $\quad x^2=y^2$

따라서 $p\Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $x^2<9$에서 $\quad x^2-9<0$

$\therefore\ (x+3)(x-3)<0$

따라서 $p\Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

33 ① $A\cap B=A$에서 $\quad A\subset B$

$A-B=\varnothing$에서 $\quad A\subset B$

따라서 $p\Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

② $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

$A\subset B$이고 $B=U$이면 $A\cup B=U$이지만 $A\neq B^C$이다.

③ $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

④ $A-B=A$에서 $\quad A\cap B=\varnothing$

따라서 $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

⑤ $B-A^C=B$에서 $\quad B\cap(A^C)^C=B$

$B\cap A=B \quad \therefore\ B\subset A$

$A^C\subset B^C$에서 $\quad B\subset A$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ③이다. 답 ③

34 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow p$도 참이다.

따라서 두 명제 $q \longrightarrow p$, $p \longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $q \longrightarrow r$가 참이다.

ㄱ. $p \Longrightarrow r$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $q \Longrightarrow p$이므로 q는 p이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $q \Longrightarrow r$이므로 r는 q이기 위한 필요조건이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

35 ① $P \subset R$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.

② $Q \subset R$이므로 r는 q이기 위한 필요조건이다.

③ $Q \subset P^C$이므로 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

⑤ $R^C \subset P^C$이므로 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

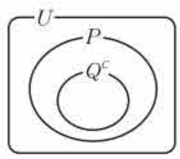
답 ④

36 p는 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로

$Q^C \subset P$

이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$P \cup Q = U$ 답 ③



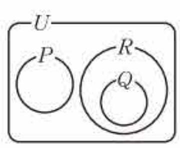
37 $(Q-R) \cup (R-P^C) = \varnothing$이므로

$Q-R=\varnothing$, $R-P^C=\varnothing$

$R-P^C = R \cap (P^C)^C$
$= R \cap P$

$\therefore Q \subset R$, $P \cap R = \varnothing$

이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $Q \subset R$이므로 q는 r이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $R \subset P^C$이므로 $\sim p$는 r이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $P \subset Q^C$이므로 p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

38 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 명제 $p \longrightarrow q$가 참이어야 하고, 이 명제의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이어야 한다.

'$3x-k=0$이면 $9x^2+3x-2=0$이다.'

$3x-k=0$에서 $x=\frac{k}{3}$이므로 이것을 $9x^2+3x-2=0$에 대입하면

$9\left(\frac{k}{3}\right)^2+3\cdot\frac{k}{3}-2=0$

$k^2+k-2=0$, $(k+2)(k-1)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=1$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+1=-1$ 답 ②

다른 풀이 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 명제 $p \longrightarrow q$가 참이어야 하고, 이 명제의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이어야 한다.

$3x-k=0$에서 $x=\frac{k}{3}$

$9x^2+3x-2=0$에서 $(3x+2)(3x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$, $Q^C=\left\{\frac{k}{3}\right\}$

즉 $Q^C \subset P^C$이어야 하므로

$\frac{k}{3}=-\frac{2}{3}$ 또는 $\frac{k}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=1$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+1=-1$

39 p가 q이기 위한 필요충분조건이므로 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $-3<x<5$이어야 한다.

해가 $-3<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식
➡ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$

$(x+3)(x-5)<0$ $\therefore x^2-2x-15<0$

따라서 $a=-2$, $b=-15$이므로

$ab=30$ 답 ⑤

40 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x \mid x \le a\}$, $Q=\{x \mid x \ge b\}$,

$R=\{x \mid 0<x<1$ 또는 $x \ge 5\}$

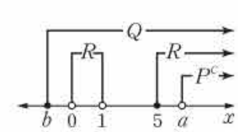
이때 r는 q이기 위한 충분조건이고 p는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로 두 명제 $r \longrightarrow q$, $\sim r \longrightarrow p$는 모두 참이다.

즉 $R \subset Q$, $R^C \subset P$이므로 $R \subset Q$, $P^C \subset R$

명제 $\sim r \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우 $\sim p \longrightarrow r$도 참임을 이용하여 $P^C \subset R$임을 알 수도 있다.

$\therefore P^C \subset R \subset Q$

$P^C=\{x \mid x>a\}$이므로 오른쪽 그림에서



$a \ge 5$, $b \le 0$

$\therefore a-b \ge 5$

$a \ge 5$, $-b \ge 0$이므로 $a-b \ge 5$

따라서 $a-b$의 최솟값은 5이다. 답 5

41 주어진 명제의 대우는

'$a+b$가 짝수가 아니면 a^2+b^2도 짝수가 아니다.',

즉 '$a+b$가 홀수이면 a^2+b^2도 홀수이다.'

$a+b$가 홀수이면 a가 홀수, b가 짝수이거나 a가 짝수, b가 홀수이다.

(i) a가 홀수, b가 짝수일 때,

a^2은 $\boxed{홀수}$, b^2은 $\boxed{짝수}$이므로 a^2+b^2은 홀수이다.

(ii) a가 짝수, b가 홀수일 때,

a^2은 $\boxed{짝수}$, b^2은 $\boxed{홀수}$이므로 a^2+b^2은 홀수이다.

(i), (ii)에서 a^2+b^2은 홀수이므로 주어진 명제의 대우는 참이다.

따라서 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (가) 홀수 (나) 짝수 답 ③

42 (1) $a=0$이고 $b=0$이면 $a^2+b^2\le 0$이다.

(2) $a=0$이고 $b=0$이면 $a^2+b^2=0$이므로 $a^2+b^2\le 0$을 만족시킨다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

43 주어진 명제의 대우는
'x가 무리수가 아니면 x^2도 무리수가 아니다.',
즉 'x가 유리수이면 x^2도 유리수이다.'
x가 유리수이면

$x=\pm\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)

으로 나타낼 수 있다.
이때 양변을 제곱하면

$x^2=\left(\pm\dfrac{n}{m}\right)^2=\dfrac{n^2}{m^2}$

이고, m, n이 서로소인 자연수이므로 m^2, n^2도 서로소인 자연수이다.
따라서 x^2도 유리수이다.
주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

44 $b\ne\boxed{0}$이라 가정하면 $a+b\sqrt{2}=0$에서

$\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}$

a, b가 유리수이므로 $-\dfrac{a}{b}$, 즉 $\sqrt{2}$가 $\boxed{\text{유리수}}$이다.
이때 $\sqrt{2}$가 $\boxed{\text{무리수}}$라는 사실에 모순이므로 $b=\boxed{0}$이다.
$a+b\sqrt{2}=0$에 $b=\boxed{0}$을 대입하면 $a=0$이다.
따라서 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{2}=0$이면 $a=b=0$이다.

$\therefore$ (가) 0 (나) 유리수 (다) 무리수

답 (가) 0 (나) 유리수 (다) 무리수

45 xy가 홀수라고 가정하면 x, y가 모두 홀수이므로
$x=2m-1$, $y=2n-1$ (m, n은 자연수)
로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=(2m-1)^2+(2n-1)^2\\&=4m^2-4m+1+4n^2-4n+1\\&=2(2m^2-2m+2n^2-2n+1)\end{aligned}$$

이고 $2m^2-2m+2n^2-2n+1$은 자연수이므로 x^2+y^2은 짝수이다.
즉 x^2+y^2이 홀수라는 가정에 모순이다.
따라서 주어진 명제는 참이다.

답 풀이 참조

46 m, n이 모두 홀수라고 가정하자.
이차방정식 $x^2+mx-n=0$의 정수인 해를 $x=k$라 하면

$k^2+km=n$

(i) k가 홀수일 때, k^2은 홀수이고 km은 두 홀수의 곱이므로 홀수이다.
따라서 k^2+km, 즉 n이 짝수이므로 가정에 모순이다.

(ii) k가 짝수일 때, k^2은 짝수이고 km은 짝수와 홀수의 곱이므로 짝수이다.
따라서 k^2+km, 즉 n이 짝수이므로 가정에 모순이다.

(i), (ii)에서 m, n 중 적어도 하나는 짝수이다.

답 풀이 참조

47 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\ge 0$

$\therefore \dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

이때 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

답 풀이 참조

$A>B$ 꼴의 부등식의 증명
➡ $A-B>0$임을 보인다.

48 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$

$=(\boxed{ay-bx})^2$

a, b, x, y가 실수이므로 $(\boxed{ay-bx})^2\ge 0$

$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$

이때 등호는 $ay-bx=0$, 즉 $\boxed{\dfrac{x}{a}}=\dfrac{y}{b}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $ay-bx$ (나) $\dfrac{x}{a}$

답 (가) $ay-bx$ (나) $\dfrac{x}{a}$

49 ㄱ. [반례] $x=-6$이면
$x^2+12x=-36$

$x^2+12x\le-36$인 경우가 존재하므로 절대부등식이 아니다.

ㄴ. $x^2+2xy+2y^2=(x^2+2xy+y^2)+y^2$
$=(x+y)^2+y^2$
x, y가 실수이므로 $(x+y)^2\ge 0$, $y^2\ge 0$에서
$(x+y)^2+y^2\ge 0$
$\therefore x^2+2xy+2y^2\ge 0$
(단, 등호는 $x=y=0$일 때 성립)

$x+y=0$, $y=0$에서
$x=y=0$

ㄷ. $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$
$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$
$=2(|ab|-ab)$
이때 $|ab|\ge ab$이므로 $2(|ab|-ab)\ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2\ge|a+b|^2$
그런데 $|a|+|b|\ge 0$, $|a+b|\ge 0$이므로
$|a|+|b|\ge|a+b|$
(단, 등호는 $ab\ge 0$일 때 성립)

$|ab|=ab$, 즉 $ab\ge 0$

이상에서 절대부등식인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

50 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2a+4b\ge 2\sqrt{2a\cdot 4b}=2\sqrt{8ab}$$

이때 $ab=8$이므로

$$2a+4b\ge 2\sqrt{8\cdot 8}=16 \text{ (단, 등호는 } a=2b\text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 16이다. 답 ④

$2a=4b$에서 $a=2b$

51 $a+b=6$이므로

$$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=\frac{3(a+b)}{ab}=\frac{18}{ab} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b\ge 2\sqrt{ab},\quad 6\ge 2\sqrt{ab}\quad \therefore \sqrt{ab}\le 3$$

양변을 제곱하면

$$ab\le 9 \text{ (단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립)}$$

따라서 ㉠에서

$$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=\frac{18}{ab}\ge\frac{18}{9}=2$$

이므로 구하는 최솟값은 2이다. 답 2

등호는 $a=b$일 때 성립하고 $a+b=6$이므로
$a=3$, $b=3$
따라서 $a=3$, $b=3$일 때 ab는 최댓값을 갖는다.

52 $x^2>0$, $9y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+9y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot 9y^2}=6|xy|$$

이때 $x^2+9y^2=24$이므로

$$6|xy|\le 24,\quad |xy|\le 4$$

$$\therefore -4\le xy<0 \text{ 또는 } 0<xy\le 4$$

(단, 등호는 $|x|=3|y|$일 때 성립)

따라서 $M=4$, $m=-4$이므로

$$M-m=8$$

답 ②

53 $x>0$, $y>0$이고, $5x+2y=14$이므로

$$(\sqrt{5x}+\sqrt{2y})^2=5x+2y+2\sqrt{5x}\sqrt{2y}$$
$$=14+2\sqrt{10xy} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5x+2y\ge 2\sqrt{5x\cdot 2y}=2\sqrt{10xy}$$
$$14\ge 2\sqrt{10xy} \text{ (단, 등호는 } 5x=2y\text{일 때 성립)} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$(\sqrt{5x}+\sqrt{2y})^2=14+2\sqrt{10xy}$$
$$\le 14+14=28$$
$$\therefore 0<\sqrt{5x}+\sqrt{2y}\le\sqrt{28}=2\sqrt{7}$$

따라서 구하는 최댓값은 $2\sqrt{7}$이다. 답 $2\sqrt{7}$

등호는 $5x=2y$일 때 성립하고 $5x+2y=14$이므로
$5x=7$, $2y=7$
$\therefore x=\frac{7}{5}$, $y=\frac{7}{2}$
따라서 $x=\frac{7}{5}$, $y=\frac{7}{2}$일 때 $2\sqrt{10xy}$는 최댓값을 갖는다.

54 $x>0$, $y>0$에서 $xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(y+\frac{9}{x}\right)=xy+9+4+\frac{36}{xy}$$
$$\ge 13+2\sqrt{xy\cdot\frac{36}{xy}}$$
$$=13+2\cdot 6=25$$

이때 등호는 $xy=\frac{36}{xy}$일 때 성립하므로

$$(xy)^2=36$$
$$\therefore xy=6\ (\because xy>0)$$

따라서 $\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(y+\frac{9}{x}\right)$는 $xy=6$일 때 최솟값 25를 가지므로

$$a=6,\ b=25$$
$$\therefore b-a=19$$

답 ④

55 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$$
$$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$
$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}$$
$$=2+2+2=6 \text{ (단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 6이다. 답 6

$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}=\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}=\frac{a}{c}$에서
$a^2=b^2=c^2$
$\therefore a=b=c$
$(\because a>0,\ b>0,\ c>0)$

56 $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(x+y+z)\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y+z}\right)$$
$$=\{x+(y+z)\}\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y+z}\right)$$
$$=2+\frac{2x}{y+z}+\frac{2(y+z)}{x}+2$$
$$\ge 4+2\sqrt{\frac{2x}{y+z}\cdot\frac{2(y+z)}{x}}$$
$$=4+2\cdot 2=8 \text{ (단, 등호는 } x=y+z\text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 8이다. 답 ③

$\frac{2x}{y+z}=\frac{2(y+z)}{x}$에서
$x^2=(y+z)^2$
$\therefore x=y+z$
$(\because x>0,\ y+z>0)$

57 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(7^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(7x+y)^2$$

이때 $7x+y=10$이므로

$$50(x^2+y^2)\ge 100$$
$$\therefore x^2+y^2\ge 2\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{7}=y\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 최솟값은 2이다. 답 ①

58 $x^2+y^2=4$이므로

$$x^2+y^2+2x+4y=2x+4y+4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(2^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(2x+4y)^2$$

이때 $x^2+y^2=4$이므로

$$(2x+4y)^2\le 80$$
$$\therefore -4\sqrt{5}\le 2x+4y\le 4\sqrt{5}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$$

$$\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$4-4\sqrt{5} \le 2x+4y+4 \le 4+4\sqrt{5}$

따라서 구하는 최댓값은 $4+4\sqrt{5}$이다. 답 $4+4\sqrt{5}$

59 x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$\{3^2+1^2+(-1)^2\}(x^2+y^2+z^2) \ge (3x+y-z)^2$

이때 $x^2+y^2+z^2=9$이므로

$(3x+y-z)^2 \le 99$

$\therefore -3\sqrt{11} \le 3x+y-z \le 3\sqrt{11}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3}=y=-z\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 $-3\sqrt{11}$이다. 답 ②

60 ㄱ. x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2) \ge (x+y)^2$

이때 $x+y=12$이므로

$2(x^2+y^2) \ge 144$

$\therefore x^2+y^2 \ge 72$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

ㄴ. $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y \ge 2\sqrt{xy}$

이때 $x+y=12$이므로

$12 \ge 2\sqrt{xy}$

$\therefore \sqrt{xy} \le 6$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

ㄷ. $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\} \ge (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

$2(x+y) \ge (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

이때 $x+y=12$이므로

$24 \ge (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

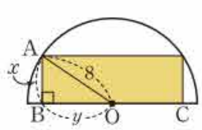
이때 $x>0$, $y>0$이므로

$0<\sqrt{x}+\sqrt{y} \le 2\sqrt{6}$

(단, 등호는 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$일 때 성립)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

61 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=x$, $\overline{BO}=y$라 하면 직사각형의 넓이는



$\overline{AB}\cdot\overline{BC}=x\cdot 2y=2xy$

직각삼각형 ABO에서

$x^2+y^2=8^2=64$

$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2 \ge 2\sqrt{x^2\cdot y^2}=2xy$

이때 $x^2+y^2=64$이므로

$2xy \le 64$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 64이다. 답 ④

62 상자의 밑면의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면 상자의 부피는

$4xy$ cm^3

또 끈의 길이는

$2x+2y+4\cdot 4=2x+2y+16$ (cm)

이고 80 cm인 끈으로 묶어야 하므로

$2x+2y+16=80$

$\therefore x+y=32$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y \ge 2\sqrt{xy}$, $32 \ge 2\sqrt{xy}$

$\therefore \sqrt{xy} \le 16$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $xy \le 256$

$\therefore 4xy \le 1024$

따라서 상자의 최대 부피는 1024 cm^{3}이다. 답 ⑤

63 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot b=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 10^2$

Q BOX

△ABC
=△PAB+△PAC
+△PBC

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이
➡ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$10a+5b=25\sqrt{3}$

$\therefore 2a+b=5\sqrt{3}$

a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(2^2+1^2)(a^2+b^2) \ge (2a+b)^2$

이때 $2a+b=5\sqrt{3}$이므로

$5(a^2+b^2) \ge (5\sqrt{3})^2$

$\therefore a^2+b^2 \ge 15$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{2}=b\text{일 때 성립}\right)$

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 15이다. 답 15

도전! 수능 기출

W 29쪽

01 1st 조건 p에 $a=0$을 대입하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $a=0$을 $a(x-1)(x-2)<0$에 대입하면

$0\cdot(x-1)(x-2)<0$

위의 부등식을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로

$P=\varnothing$

2nd $a>0$, $b=0$일 때 진리집합 P, Q를 구하고 두 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $a>0$일 때 $a(x-1)(x-2)<0$에서

$(x-1)(x-2)<0$

$\therefore 1<x<2$

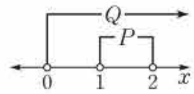
$\therefore P=\{x|1<x<2\}$

$b=0$일 때 $x>b$에서 $x>0$

$\therefore Q=\{x|x>0\}$

따라서 오른쪽 그림에서

$P\subset Q$



(3rd) $a<0$, $b=3$일 때 진리집합 P, Q를 구하고 두 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $a<0$일 때 $a(x-1)(x-2)<0$에서

$(x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

$\therefore P=\{x\mid x<1 \text{ 또는 } x>2\}$

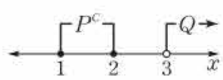
$b=3$일 때 $x>b$에서 $\quad x>3$

$\therefore Q=\{x\mid x>3\}$

한편 명제 '$\sim p$이면 q이다.'가 참이려면 $P^C\subset Q$이어야 한다.

이때 $P^C=\{x\mid 1\le x\le 2\}$이므로 오른쪽 그림에서

$P^C\not\subset Q$



따라서 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 거짓이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

02 (1st) 명제 $\sim p \longrightarrow r$가 참임을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 명제 $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로

$P^C\subset R$

(2nd) 세 진리집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. [반례] $U=\{1, 2, 3\}$, $P=\{1, 2\}$, $Q=\{2\}$, $R=\{1, 3\}$일 때, $P^C\subset R$, $R\subset Q^C$, $R^C\subset Q$이지만

$P\not\subset Q$

(3rd) 두 진리집합 P와 Q, Q와 R^C 사이의 포함 관계를 각각 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 두 명제 $\sim p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이고, 그 대우 $q \longrightarrow p$도 참이다.

따라서 $Q\subset P$이므로

$P\cap Q=Q$ ⋯⋯ ㉠

또 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

$\therefore Q\subset R^C$

명제 $\sim r \longrightarrow q$가 참이므로

$R^C\subset Q$

이때 $Q\subset R^C$, $R^C\subset Q$이므로

$Q=R^C$ ⋯⋯ ㉡

두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $B\subset A$일 때, $A=B$

㉠, ㉡에서 $\quad P\cap Q=R^C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

03 (1st) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, p가 q이기 위한 필요조건이면 $Q\subset P$이어야 함을 이용하여 k의 값 또는 범위를 구한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$이어야 한다.

이때 $(x-1)^2\le 0$에서 $x=1$이므로

$P=\{1\}$

$P=\{1\}$이므로 $Q\subset P$인 경우는 $Q=\varnothing$ 또는 $Q=\{1\}$인 경우뿐이다.

(i) $1\in Q$일 때,

$2x^2-(3k+7)x+2=0$이 $x=1$을 근으로 가지므로

$2-(3k+7)+2=0, \qquad -3k-3=0$

$-3k=3 \qquad \therefore k=-1$

(ii) $Q=\varnothing$일 때,

이차방정식 $2x^2-(3k+7)x+2=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3k+7)\}^2-4\cdot 2\cdot 2<0$

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근
② $D=0$ ➡ 중근
③ $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근

$3k^2+14k+11<0$

$(3k+11)(k+1)<0$

$\therefore -\dfrac{11}{3}<k<-1$

(2nd) 정수 k의 값의 합을 구한다.

(i), (ii)에서 정수 k는 -3, -2, -1이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)=-6$ 답 ②

참고 (i)에서 $k=-1$일 때,

$2x^2-4x+2=0, \quad 2(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

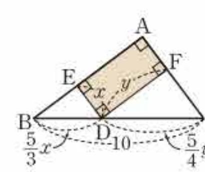
따라서 $Q=\{1\}$이므로 $Q\subset P$를 만족시킨다.

04 (1st) [그림 1]에서 직사각형의 두 변의 길이를 각각 x, y로 놓고 S_1, $\overline{BC}$의 길이를 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\overline{BC}^2=8^2+6^2=100$이므로 $\quad \overline{BC}=10$

오른쪽 그림과 같이 직사각형의 두 변의 길이를 각각 x, y라 하면

$S_1=xy$



이고, 닮음비에 의하여

$\triangle ABC\backsim\triangle EBD$이므로
$6:x=10:\overline{BD}$
$\therefore \overline{BD}=\dfrac{5}{3}x$
$\triangle ABC\backsim\triangle FDC$이므로
$8:y=10:\overline{DC}$
$\therefore \overline{DC}=\dfrac{5}{4}y$

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{5}{4}y=10$

$\therefore 4x+3y=24$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4x+3y\ge 2\sqrt{4x\cdot 3y}=4\sqrt{3xy}$

이때 $4x+3y=24$이므로

$24\ge 4\sqrt{3xy}, \qquad 6\ge\sqrt{3xy}$

양변을 제곱하면 $\qquad 3xy\le 36$

$\therefore xy\le 12$ (단, 등호는 $4x=3y$일 때 성립)

따라서 S_1의 최댓값은 12이다.

(2nd) 보기 ㄱ을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. ㄱ에서 등호는 $4x=3y$일 때 성립하고 $4x+3y=24$이므로

$4x=12, \ 3y=12$

$\therefore x=3, \ y=4$

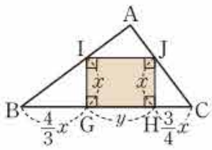
즉 $x=3$, $y=4$일 때 S_1이 최대이다.

따라서 S_1이 최대일 때 직사각형의 둘레의 길이는

$2(x+y)=2\cdot(3+4)=14$

3rd [그림 2]에서 직사각형의 두 변의 길이를 각각 x, y로 놓고 S_2, $\overline{BC}$의 길이를 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 두 변의 길이를 각각 x, y라 하면



$S_2=xy$

이고, 닮음비에 의하여

$\overline{BC}=\overline{BG}+\overline{GH}+\overline{HC}$

$=\frac{4}{3}x+y+\frac{3}{4}x=10$

$\therefore 25x+12y=120$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$25x+12y\geq 2\sqrt{25x\cdot 12y}$

$=10\sqrt{12xy}$

이때 $25x+12y=120$이므로

$120\geq 10\sqrt{12xy}$, $\sqrt{12xy}\leq 12$

양변을 제곱하면

$12xy\leq 144$

$\therefore xy\leq 12$ (단, 등호는 $25x=12y$일 때 성립)

따라서 S_2의 최댓값은 12이므로 S_1의 최댓값과 S_2의 최댓값은 같다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

Q BOX

$\triangle ABC \backsim \triangle GBI$이므로
$6 : x=8 : \overline{BG}$
$\therefore \overline{BG}=\frac{4}{3}x$
$\triangle ABC \backsim \triangle HJC$이므로
$8 : x=6 : \overline{HC}$
$\therefore \overline{HC}=\frac{3}{4}x$

등호는 $25x=12y$일 때 성립하고 $25x+12y=120$이므로
$25x=60$, $12y=60$
$\therefore x=\frac{12}{5}$, $y=5$
따라서 $x=\frac{12}{5}$, $y=5$일 때 xy는 최댓값을 갖는다.

04 함수

W 30쪽

01 ㄱ, ㄴ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 그래프와 만나지 않거나 2개 이상의 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.

ㄷ, ㄹ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 그래프와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

이상에서 함수의 그래프인 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

02 ① $0\leq x\leq 2$에서 $3\leq x+3\leq 5$

$\therefore 3\leq f(x)\leq 5$

② $0\leq x\leq 2$에서 $-2\leq -x\leq 0$

$3\leq -x+5\leq 5$ $\therefore 3\leq f(x)\leq 5$

③ $0\leq x\leq 2$에서 $0\leq |x-1|\leq 1$

$0\leq 2|x-1|\leq 2$ $\therefore 0\leq f(x)\leq 2$

$0\leq x\leq 2$에서
$-1\leq x-1\leq 1$
$0\leq |x-1|\leq 1$
$\therefore 0\leq 2|x-1|\leq 2$

④ $0\leq x\leq 2$에서 $0\leq x^2\leq 4$

$0\leq 2x^2\leq 8$ $\therefore 0\leq f(x)\leq 8$

⑤ $0\leq x\leq 2$에서 $1\leq x+1\leq 3$

$1\leq (x+1)^2\leq 9$

$-3\leq (x+1)^2-4\leq 5$

$\therefore -3\leq f(x)\leq 5$

따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ④이다.

답 ④

03 $12>1$이므로

$f(12)=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$

$2-\sqrt{3}<1$이므로

$f(2-\sqrt{3})=(2-\sqrt{3})^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$

$\therefore f(12)+f(2-\sqrt{3})=4\sqrt{3}+(7-4\sqrt{3})=7$ 답 7

04 $f(x)=(2^x$의 일의 자리의 숫자$)$이므로

$f(4)=6$, $f(5)=2$, $f(6)=4$, $f(7)=8$

$2^4=16$, $2^5=32$,
$2^6=64$, $2^7=128$

$f(5)=2$이므로 $a=2$

$f(7)=8$이므로 $b=7$

$\therefore a+b=9$ 답 9

05 주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1+1)=f(1)+f(1)$

$f(2)=2f(1)$, $4=2f(1)$

$\therefore f(1)=2$

주어진 식의 양변에 $x=-1$, $y=2$를 대입하면

$f(-1+2)=f(-1)+f(2)$

$f(1)=f(-1)+f(2)$, $2=f(-1)+4$

$\therefore f(-1)=-2$

주어진 식의 양변에 $x=2$, $y=2$를 대입하면

$f(2+2)=f(2)+f(2)$

$\therefore f(4)=4+4=8$

$\therefore f(-1)+f(4)=-2+8=6$ 답 6

06 ㄱ. 주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)f(1)$, $\{f(1)\}^2-f(1)=0$

$f(1)\{f(1)-1\}=0$

$\therefore f(1)=1$ ($\because$ $f(1)\neq 0$)

$f(x)\neq 0$이므로 $f(1)\neq 0$

ㄴ. 주어진 식의 양변에 $x=2$, $y=2$를 대입하면

$f(4)=f(2)f(2)=\{f(2)\}^2$

ㄷ. 주어진 식의 양변에 $y=\dfrac{1}{x}$을 대입하면

$f\left(x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $1=f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$f\left(x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=f(1)=1$

$\therefore f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$

ㄹ. $f(x^2)=f(x)f(x)=\{f(x)\}^2$

$f(x^3)=f(x)f(x^2)=f(x)\{f(x)\}^2=\{f(x)\}^3$

$f(x^4)=f(x)f(x^3)=f(x)\{f(x)\}^3=\{f(x)\}^4$

$\vdots$

$\therefore f(x^n)=f(x)f(x^{n-1})=f(x)\{f(x)\}^{n-1}$

$=\{f(x)\}^n$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

07 치역이 $\{2,\ 4,\ 6\}$이므로 정의역의 4개의 원소 중 3개는 2, 4, 6에 각각 하나씩 대응하고 나머지 1개는 2 또는 4 또는 6에 대응하면 된다.

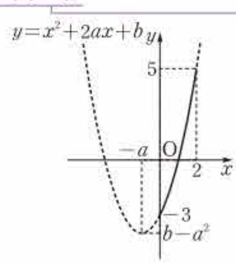
따라서 $f(1)+f(3)+f(5)$의 값이 최소이려면 1, 3, 5 중 2개가 2에 대응하고 나머지 하나는 4에 대응하고 7은 6에 대응하면 되므로 구하는 최솟값은

$2+2+4=8$ 답 8

08 $y=x^2+2ax+b=(x+a)^2+b-a^2$

그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-a,\ b-a^2)$이다.

이때 $a>0$에서 $-a<0$이므로 정의역이 $\{x\,|\,0\leq x\leq 2\}$인 함수의 치역이 $\{y\,|\,-3\leq y\leq 5\}$이려면 함수 $y=x^2+2ax+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $x=0$일 때 $y=-3$, $x=2$일 때 $y=5$이므로

$b=-3$, $4+4a+b=5$

$b=-3$을 $4+4a+b=5$, 즉 $4a+b=1$에 대입하면

$4a-3=1$, $4a=4$ $\therefore a=1$

$\therefore a+b=-2$ 답 ②

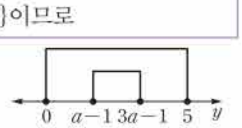
09 (i) $a>0$일 때,

치역은 $\{y\,|\,a-1\leq y\leq 3a-1\}$이므로

$1\leq x\leq 3$에서
$a\leq ax\leq 3a$
$a-1\leq ax-1\leq 3a-1$
$\therefore a-1\leq y\leq 3a-1$

$a-1\geq 0$, $3a-1\leq 5$

$\therefore 1\leq a\leq 2$



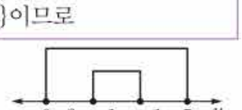
(ii) $a<0$일 때,

치역은 $\{y\,|\,3a-1\leq y\leq a-1\}$이므로

$1\leq x\leq 3$에서
$3a\leq ax\leq a$
$3a-1\leq ax-1\leq a-1$
$\therefore 3a-1\leq y\leq a-1$

$3a-1\geq 0$, $a-1\leq 5$

$\therefore \dfrac{1}{3}\leq a\leq 6$



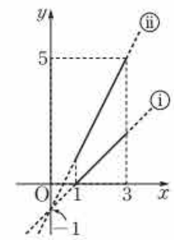
그런데 $a<0$이어야 하므로 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$1\leq a\leq 2$ 답 ④

참고 $y=ax-1$은 일차함수이므로 $a\neq 0$

다른 풀이 일차함수 $y=ax-1$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ -1)$을 지나는 직선이므로 정의역이 $\{x\,|\,1\leq x\leq 3\}$, 공역이 $\{y\,|\,0\leq y\leq 5\}$이려면 직선 $y=ax-1$의 기울기가 오른쪽 그림에서 직선 ⓘ의 기울기보다 크거나 같고 직선 ⓘⓘ의 기울기보다 작거나 같아야 한다.



직선 ⓘ의 방정식은 $y=x-1$, 직선 ⓘⓘ의 방정식은 $y=2x-1$이므로 구하는 a의 값의 범위는

직선 ⓘ은 두 점 $(0,\ -1)$, $(1,\ 0)$을 지나므로 기울기가 1이고 y절편이 -1이다.
$\therefore y=x-1$
직선 ⓘⓘ는 두 점 $(0,\ -1)$, $(3,\ 5)$를 지나므로 기울기가 2이고 y절편이 -1이다.
$\therefore y=2x-1$

$1\leq a\leq 2$

10 음이 아닌 정수 k에 대하여

(i) $x=3k+1$일 때,

$x^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1$

$=3(3k^2+2k)+1$

이므로 $f(x)=1$

(ii) $x=3k+2$일 때,

$x^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4$

$=3(3k^2+4k+1)+1$

이므로 $f(x)=1$

(iii) $x=3k+3$일 때,

$x^2=(3k+3)^2=9k^2+18k+9$

$=3(3k^2+6k+3)$

이므로 $f(x)=0$

이상에서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{0,\ 1\}$이다.

답 $\{0,\ 1\}$

11 ㄱ. $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$이므로 $f=g$

ㄴ. $f(-1)=g(-1)=1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$이므로 $f=g$

ㄷ. $f(1)=-1$, $g(1)=1$이므로 $f(1)\neq g(1)$

$\therefore f\neq g$

이상에서 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

12 $f(2)=g(2)$에서

$8-4a+2b=4a-2b$

$8a-4b=8$

$\therefore 2a-b=2$ …… ㉠

$f(4)=g(4)$에서

$64-16a+4b=16a-4b$

$32a-8b=64$

$\therefore 4a-b=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=4$

$\therefore ab=12$ 답 12

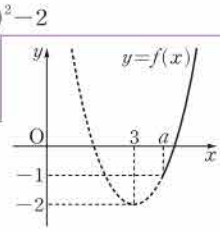
13 $f(1)=g(1)$에서 $\quad -1=a+b+c \quad \cdots\cdots$ ㉠
$f(2)=g(2)$에서 $\quad 0=2b+c \quad \cdots\cdots$ ㉡
$f(3)=g(3)$에서 $\quad 3=a+3b+c \quad \cdots\cdots$ ㉢
㉢−㉠을 하면 $\quad 2b=4 \quad \therefore b=2$
$b=2$를 ㉡에 대입하면
$4+c=0 \quad \therefore c=-4$
$b=2,\ c=-4$를 ㉠에 대입하면
$a+2-4=-1 \quad \therefore a=1$
$\therefore a+b-c=7$ 답 ②

14 ①, ③, ⑤ 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.
② 음수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.
그런데 치역과 공역이 같지 않으므로 일대일대응이 아니다.
④ 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.
답 ②

15 $f(2)=5$이고 함수 f가 일대일함수이므로
$f(4)\neq5,\ f(6)\neq5$
이때 $f(4)f(6)=20=2\cdot10$이므로
$f(4)=2,\ f(6)=10$ 또는 $f(4)=10,\ f(6)=2$
$\therefore f(4)+f(6)=12$ 답 12

16 $f(1)+f(2)=10$이고 함수 f가 일대일대응이므로
$f(1)=4,\ f(2)=6$ 또는 $f(1)=6,\ f(2)=4$
(i) $f(1)=4,\ f(2)=6$일 때,
$f(1)+f(3)=9$에서
$4+f(3)=9 \quad \therefore f(3)=5$
(ii) $f(1)=6,\ f(2)=4$일 때,
$f(1)+f(3)=9$에서
$6+f(3)=9 \quad \therefore f(3)=3$
이때 $3\notin Y$이므로 함수 f는 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 $\quad f(1)=4,\ f(2)=6,\ f(3)=5$
$\therefore 2f(3)-f(2)=2\cdot5-6=4$ 답 ④

17 $f(x)=x^2-6x+7=(x-3)^2-2$
이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $a\geq3,\ f(a)=-1$이므로
$a^2-6a+7=-1$
$a^2-6a+8=0$
$(a-2)(a-4)=0$
$\therefore a=4\ (\because a\geq3)$ 답 ②

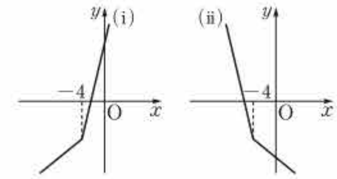
Q BOX

치역: $\{y|y<0\}$

$20=1\cdot20=2\cdot10=4\cdot5$에서 $1\notin Y$이고 $f(4)\neq5,\ f(6)\neq5$이므로 $f(4),\ f(6)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 10뿐이다.
$2\in Y$이므로 자연수 a의 값은 10이다.

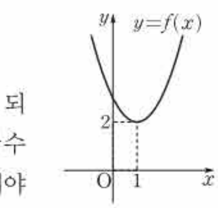
$a<3$이면 $x\geq a$에서 일대일대응이 아니므로 $a\geq3$이어야 한다.
또 치역과 공역이 같아야 하므로 $\quad f(a)=-1$

18 함수 f가 일대일대응이 되려면 (i) $x<-4$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가하면 $x\geq-4$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 증가해야 한다. 또 (ii) $x<-4$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 감소하면 $x\geq-4$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소해야 한다.



(i) $3-a>0,\ a+3>0$일 때,
$a<3,\ a>-3 \quad \therefore -3<a<3$
(ii) $3-a<0,\ a+3<0$일 때,
이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 a의 값의 범위는
$-3<a<3$ 답 $-3<a<3$

19 $f(x)=x^2-2x+3$
$=(x-1)^2+2$
이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 오른쪽 그림과 같은 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $a\geq1$이어야 한다.



$a\geq1$일 때 치역은 $\{y|y\geq f(a)\}$이므로
$b=f(a)$
$\therefore a-b=a-f(a)$
$=a-(a^2-2a+3)$
$=-a^2+3a-3$
$=-\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}$
따라서 $a\geq1$에서 $a-b$의 최댓값은 $a=\dfrac{3}{2}$일 때 $-\dfrac{3}{4}$이다. 답 ①

20 함수 f가 항등함수이므로
$f(-2)=-2,\ f(5)=5$
$f(-2)=-2$에서 $\quad 4-2a+b=-2$
$\therefore 2a-b=6 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$f(5)=5$에서 $\quad 25+5a+b=5$
$\therefore 5a+b=-20 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=-10$
$\therefore a-b=8$ 답 ③

21 함수 f는 항등함수이므로
$f(3)=3,\ f(6)=6$
이때 $f(6)=g(9)=h(3)$이므로
$f(6)=g(9)=h(3)=6$
함수 g는 상수함수이므로
$g(6)=g(9)=6$
함수 h는 일대일대응이고 $h(6)<h(9)$이므로

$h(6)=3,\ h(9)=9$

$\therefore f(3)+g(6)+h(9)=3+6+9=18$ 답 18

22 함수 f가 항등함수이므로 $f(x)=x$이어야 한다.

(i) $x<5$일 때,

$4x-9=x$에서 $3x=9$

$\therefore x=3$

(ii) $x\ge 5$일 때,

$x^2-6x-8=x$에서 $x^2-7x-8=0$

$(x+1)(x-8)=0$

$\therefore x=8\ (\because x\ge 5)$

(i), (ii)에서 $X=\{3,\ 8\}$이므로

$a=3,\ b=8$ 또는 $a=8,\ b=3$

$\therefore a+b=11$ 답 11

23 X에서 Y로의 함수의 개수는 $2^4=16$

정의역의 모든 원소가 공역의 원소 e에 대응하는 함수, 즉 치역이 $\{e\}$인 함수의 개수는 1

상수함수

정의역의 모든 원소가 공역의 원소 f에 대응하는 함수, 즉 치역이 $\{f\}$인 함수의 개수는 1

따라서 구하는 함수의 개수는

$16-(1+1)=14$ 답 14

24 (i) x가 홀수일 때,

$x+f(x)$가 짝수이려면 $f(x)$는 홀수이어야 하므로

$f(5)=5,\ f(15)=15$

또는 $f(5)=15,\ f(15)=5$

(ii) x가 짝수일 때,

$x+f(x)$가 짝수이려면 $f(x)$는 짝수이어야 하므로

$f(10)=10,\ f(20)=20$

또는 $f(10)=20,\ f(20)=10$

(i), (ii)에서 함수 f의 개수는

$2\cdot 2=4$ 답 ④

25 $f(x)+f(-x)=0$에서 $f(-x)=-f(x)$

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 중 하나이므로 5개

$f(0)=0$이므로 $f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 0의 1개

$f(0)=-f(0)$에서
$2f(0)=0$
$\therefore f(0)=0$

$f(-1)=-f(1)$에서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(-1)$의 값과 같으므로 1개

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$5\cdot 1\cdot 1=5$ 답 5

26 $g(-2)=2\cdot(-2)+5=1$이므로

$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f(1)$

$=1^2-3=-2$

$\therefore a=-2$

$(g\circ f)(b)=g(f(b))=g(b^2-3)$

$=2(b^2-3)+5=2b^2-1$

즉 $2b^2-1=17$이므로

$2b^2=18,\quad b^2=9$

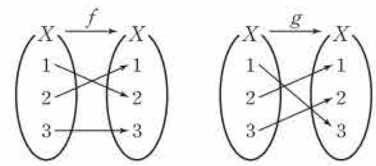
$\therefore b=3\ (\because b>0)$

$\therefore b-a=5$ 답 ①

27 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=1$

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(2)=1$

이때 $f(1)=g(3)=2$이고 두 함수 $f,\ g$는 각각 일대일 대응이므로 두 함수 $f,\ g$의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $f(3)=3,\ g(1)=3$이므로

$f(3)+g(1)=6$ 답 6

28 주어진 그림에서

$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4,\ f(4)=1$

$f\circ g=g\circ f$에서

$f(g(x))=g(f(x))$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$f(g(4))=g(f(4)),\quad f(2)=g(1)$

$\therefore g(1)=3$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(g(1))=g(f(1)),\quad f(3)=g(2)$

$\therefore g(2)=4$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(g(2))=g(f(2)),\quad f(4)=g(3)$

$\therefore g(3)=1$

$\therefore g(1)+g(3)=3+1=4$ 답 ②

29 함수 $f\circ f\circ f$의 치역이 $\{1,\ 3,\ 4\}$이고 $f(1)=1$, $f(2)=3$이므로 $f(a)=4$를 만족시키는 a가 존재해야 한다.

즉 $f(3)=4$ 또는 $f(4)=4$이다.

또 $2\not\in\{1,\ 3,\ 4\}$이므로 $f(b)=2$를 만족시키는 b가 존재하지 않아야 한다.

이때

$(f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))=f(f(1))$

$=f(1)=1$

$(f\circ f\circ f)(2)=f(f(f(2)))=f(f(3))$

(i) $f(3)=4,\ f(4)=1$일 때,

$(f\circ f\circ f)(2)=f(f(3))=f(4)=1$

$(f\circ f\circ f)(3)=f(f(f(3)))=f(f(4))=f(1)=1$

$(f\circ f\circ f)(4)=f(f(f(4)))=f(f(1))=f(1)=1$

따라서 $(f\circ f\circ f)(x)$의 치역은 $\{1\}$이다.

(ii) $f(3)=4,\ f(4)=3$일 때,

$(f\circ f\circ f)(2)=f(f(3))=f(4)=3$

$(f\circ f\circ f)(3)=f(f(f(3)))=f(f(4))=f(3)=4$

$(f\circ f\circ f)(4)=f(f(f(4)))=f(f(3))=f(4)=3$

따라서 $(f\circ f\circ f)(x)$의 치역은 $\{1, 3, 4\}$이다.

(iii) $f(3)=4$, $f(4)=4$일 때,

$(f\circ f\circ f)(2)=f(f(3))=f(4)=4$

$(f\circ f\circ f)(3)=f(f(f(3)))=f(f(4))=f(4)=4$

$(f\circ f\circ f)(4)=f(f(f(4)))=f(f(4))=f(4)=4$

따라서 $(f\circ f\circ f)(x)$의 치역은 $\{1, 4\}$이다.

(iv) $f(3)=1$, $f(4)=4$일 때,

$(f\circ f\circ f)(2)=f(f(3))=f(1)=1$

$(f\circ f\circ f)(3)=f(f(f(3)))=f(f(1))=f(1)=1$

$(f\circ f\circ f)(4)=f(f(f(4)))=f(f(4))=f(4)=4$

따라서 $(f\circ f\circ f)(x)$의 치역은 $\{1, 4\}$이다.

(v) $f(3)=3$, $f(4)=4$일 때,

$(f\circ f\circ f)(2)=f(f(3))=f(3)=3$

$(f\circ f\circ f)(3)=f(f(f(3)))=f(f(3))=f(3)=3$

$(f\circ f\circ f)(4)=f(f(f(4)))=f(f(4))=f(4)=4$

따라서 $(f\circ f\circ f)(x)$의 치역은 $\{1, 3, 4\}$이다.

이상에서 $f(3)=3$, $f(4)=4$ 또는 $f(3)=4$, $f(4)=3$이므로

$f(3)+f(4)=7$

답 7

30 $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2a-3)$

$=4(2a-3)+1=8a-11$

즉 $8a-11=5$이므로

$8a=16$ $\quad\therefore a=2$

따라서 $g(x)=2x-3$이므로

$g(6)=2\cdot6-3=9$

답 9

31 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

따라서 $a^2x+ab+b=16x-10$이므로

$a^2=16$, $ab+b=-10$

$a^2=16$에서 $\quad a=4$ ($\because a>0$)

$a=4$를 $ab+b=-10$에 대입하면

$4b+b=-10$, $\quad 5b=-10$

$\therefore b=-2$

따라서 $f(x)=4x-2$이므로

$f(3)=4\cdot3-2=10$

답 ①

32 $g(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))$

$=f(f(2x+a))=f(2(2x+a)+a)$

$=f(4x+3a)=2(4x+3a)+a$

$=8x+7a$

이때 $g(x)=8x+7a$에서 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가하므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 최솟값 1을 갖는다.

즉 $g(1)=1$이므로

$8\cdot1+7a=1$, $\quad 7a=-7$

$\therefore a=-1$

따라서 $g(x)=8x-7$이고 $x=b$에서 최댓값 25를 가지므로 $g(b)=25$에서

$8b-7=25$, $\quad 8b=32$

$\therefore b=4$

$\therefore ab=-4$

답 ②

33 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

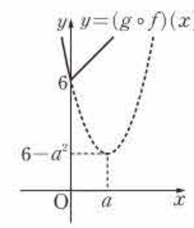
$$=\begin{cases} x^2-2ax+6 & (x<0) \\ x+6 & (x\ge0) \end{cases}$$

(i) $a>0$일 때, 함수

$y=x^2-2ax+6$

$=(x-a)^2+6-a^2$

의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 양수이므로 오른쪽 그림과 같고, 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y\ge6\}$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

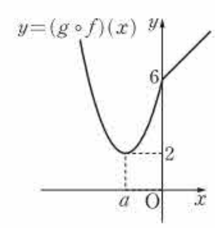


(ii) $a<0$일 때, 함수

$y=x^2-2ax+6$

$=(x-a)^2+6-a^2$

의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 음수이므로 오른쪽 그림과 같고, 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y\ge2\}$이려면 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 2이어야 한다.



즉 $6-a^2=2$이므로 $\quad a^2=4$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$)

(i), (ii)에서 $\quad a=-2$

답 -2

34 $(h\circ g\circ f)(x)=((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))$이므로

$-3x+10=-f(x)+6$

$\therefore f(x)=3x-4$

$\therefore f(-1)=3\cdot(-1)-4=-7$

답 ③

다른 풀이 $(h\circ g\circ f)(-1)=(h\circ g)(f(-1))$에서

$-3\cdot(-1)+10=-f(-1)+6$

$\therefore f(-1)=-7$

35 (1) $(f\circ h)(x)=f(h(x))=g(x)$이므로

$2h(x)-1=x+3$, $\quad 2h(x)=x+4$

$\therefore h(x)=\frac{1}{2}x+2$

(2) $(k\circ f)(x)=k(f(x))=g(x)$이므로

$k(2x-1)=x+3$

$2x-1=t$로 놓으면

$2x=t+1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

따라서 $k(t)=\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{2}t+\frac{7}{2}$이므로

$k(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

답 (1) $h(x)=\frac{1}{2}x+2$ (2) $k(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

Q BOX

$x<0$일 때,
$f(x)=x^2-2ax+4$이므로
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=(x^2-2ax+4)+2$
$=x^2-2ax+6$
$x\ge0$일 때,
$f(x)=x+4$이므로
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=(x+4)+2=x+6$

함수 $y=g(x)$의 그래프의 기울기가 양수

36 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$이고

$(g\circ f)(x)=\frac{x+2}{x-1}$이므로

$$g\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+2}{x-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{x+1}{x-1}=3$에서 $\quad x+1=3x-3$

$-2x=-4 \quad \therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$g(3)=\frac{2+2}{2-1}=4$

$\therefore (f\circ g)(3)=f(g(3))=f(4)$

$=\frac{4+1}{4-1}=\frac{5}{3}$

답 ③

37 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & (0\leq x<2)\\ x-1 & (2\leq x\leq 3)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}2x & (0\leq x<1)\\ -x+3 & (1\leq x\leq 3)\end{cases}$$

따라서 $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(1)=\frac{1}{2}$,

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}=1$이므로

$(f\circ g)(2)+(g\circ f)(1)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

답 ③

38 주어진 그래프에서 $f(3)=2$이므로

$(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))=2$에서

$f(f(a))=3$

$f(1)=3$이므로 $f(f(a))=3$에서

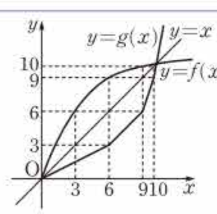
$f(a)=1$

$f(4)=1$이므로 $\quad a=4$

답 4

39 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.

직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 같다.



$(g\circ f)(6)=a$에서

$g(f(6))=g(9)=6$

$\therefore a=6$

또 $g(b)=k$라 하면

$(f\circ g)(b)=f(g(b))$

$=f(k)$

이므로 $f(k)=6$에서

$k=3$

즉 $g(b)=3$이므로 $\quad b=6$

$\therefore a+b=12$

답 12

40 $f^1(x)=f(x)=x+1$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=(x+1)+1=x+2$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=(x+2)+1=x+3$

$\vdots$

$f(2), f^2(2), f^3(2), \cdots$에서 규칙을 찾아 $f^{10}(2)$의 값을 추정한다.

$\therefore f^{10}(x)=x+10$

$\therefore f^{10}(2)=12$

답 ④

다른 풀이 $f^1(2)=f(2)=3$에서

$2+1$

$f^2(2)=(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(3)=4$

$3+1$

$f^3(2)=(f\circ f^2)(2)=f(f^2(2))=f(4)=5$

$4+1$

$\vdots$

$\therefore f^{10}(2)=f(11)=11+1=12$

41 $f^1(3)=f(3)=4$에서

$f^2(3)=(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(4)=2$

$f^3(3)=(f\circ f^2)(3)=f(f^2(3))=f(2)=3$

$f^4(3)=(f\circ f^3)(3)=f(f^3(3))=f(3)=4$

$\vdots$

즉 $f^n(3)$의 값은 4, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore f^{100}(3)=f^{3\cdot 33+1}(3)=f^1(3)=4$

$f^1(4)=f(4)=2$에서

$f^2(4)=(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(2)=3$

$f^3(4)=(f\circ f^2)(4)=f(f^2(4))=f(3)=4$

$f^4(4)=(f\circ f^3)(4)=f(f^3(4))=f(4)=2$

$\vdots$

즉 $f^n(4)$의 값은 2, 3, 4가 이 순서대로 반복된다.

$\therefore f^{200}(4)=f^{3\cdot 66+2}(4)=f^2(4)=3$

$\therefore f^{100}(3)+f^{200}(4)=4+3=7$

답 7

42 $f^1(x)=f(x)=-x+3$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=-(-x+3)+3=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=-x+3$

따라서 $f^3(x)=f(x)$, $f^4(x)=f^2(x)$, $\cdots$이므로

$$f^n(x)=\begin{cases}-x+3 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

$f^{2023}(x)=-x+3$이므로 $f^{2023}(a)=5$에서

$-a+3=5 \quad \therefore a=-2$

답 ①

43 $f^1(200)=f(200)=\frac{200}{2}=100$이므로

$f^2(200)=(f\circ f)(200)=f(f(200))$

$=f(100)=\frac{100}{2}=50$

$f^3(200)=(f\circ f^2)(200)=f(f^2(200))$

$=f(50)=\frac{50}{2}=25$

$f^4(200)=(f\circ f^3)(200)=f(f^3(200))$

$=f(25)=\frac{25+1}{2}=13$

$f^5(200)=(f\circ f^4)(200)=f(f^4(200))$

$=f(13)=\frac{13+1}{2}=7$

$$f^6(200)=(f\circ f^5)(200)=f(f^5(200))$$
$$=f(7)=\frac{7+1}{2}=4$$
$$f^7(200)=(f\circ f^6)(200)=f(f^6(200))$$
$$=f(4)=\frac{4}{2}=2$$
$$f^8(200)=(f\circ f^7)(200)=f(f^7(200))$$
$$=f(2)=\frac{2}{2}=1$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다. 답 8

44 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (0\le x<1)\\ 2x-2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

이므로

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-2f(x)+2 & (0\le f(x)<1)\\ 2f(x)-2 & (1\le f(x)\le 2)\end{cases}$$

Q BOX

$f(x)$는 $0\le x<1$, $1\le x\le 2$에서 함수가 다르게 정의되었으므로 $f(x)$의 식을 구한 후 $f(x)$의 값이 1, 2가 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 $(f\circ f)(x)$를 구한다.

(i) $0\le x<\frac{1}{2}$일 때, $1<f(x)\le 2$이므로

$$f(f(x))=f(-2x+2)=2(-2x+2)-2$$
$$=-4x+2$$

(ii) $\frac{1}{2}\le x<1$일 때, $0<f(x)\le 1$이므로

$$f(f(x))=f(-2x+2)=-2(-2x+2)+2$$
$$=4x-2$$

(iii) $1\le x<\frac{3}{2}$일 때, $0\le f(x)<1$이므로

$$f(f(x))=f(2x-2)=-2(2x-2)+2$$
$$=-4x+6$$

(iv) $\frac{3}{2}\le x\le 2$일 때, $1\le f(x)\le 2$이므로

$$f(f(x))=f(2x-2)=2(2x-2)-2$$
$$=4x-6$$

이상에서

$$f(f(x))=\begin{cases}-4x+2 & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right)\\ 4x-2 & \left(\frac{1}{2}\le x<1\right)\\ -4x+6 & \left(1\le x<\frac{3}{2}\right)\\ 4x-6 & \left(\frac{3}{2}\le x\le 2\right)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프의 개형은 ②이다.

답 ②

45 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & (0\le x<1)\\ 2x-2 & (1\le x\le 2)\end{cases},$$
$$g(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\ -x+3 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

이므로

$$g(f(x))=\begin{cases}2f(x) & (0\le f(x)<1)\\ -f(x)+3 & (1\le f(x)\le 2)\end{cases}$$

(i) $0\le x<1$일 때, $0<f(x)\le 1$이므로

$$g(f(x))=g(-x+1)=2(-x+1)$$
$$=-2x+2$$

(ii) $1\le x<\frac{3}{2}$일 때, $0\le f(x)<1$이므로

$$g(f(x))=g(2x-2)=2(2x-2)$$
$$=4x-4$$

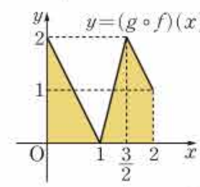
(iii) $\frac{3}{2}\le x\le 2$일 때, $1\le f(x)\le 2$이므로

$$g(f(x))=g(2x-2)=-(2x-2)+3$$
$$=-2x+5$$

이상에서

$$g(f(x))=\begin{cases}-2x+2 & (0\le x<1)\\ 4x-4 & \left(1\le x<\frac{3}{2}\right)\\ -2x+5 & \left(\frac{3}{2}\le x\le 2\right)\end{cases}$$

함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2$$
$$+\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$$

답 $\frac{9}{4}$

46 $\frac{1-2x}{4}=t$로 놓으면 $\quad 1-2x=4t$

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$$-2x=4t-1 \qquad \therefore x=-2t+\frac{1}{2}$$

따라서 $f(t)=8\cdot\left(-2t+\frac{1}{2}\right)=-16t+4$이므로

$$f(x)=-16x+4$$

$f^{-1}(8)=k$라 하면 $f(k)=8$이므로

$$-16k+4=8, \qquad -16k=4 \qquad \therefore k=-\frac{1}{4}$$
$$\therefore f^{-1}(8)=-\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

47 $x<3$일 때, $\quad f(x)=x-4<-1$

$x\ge 3$일 때, $\quad f(x)=3x-10\ge -1$

$f^{-1}(-5)=m$이라 하면 $f(m)=-5$이므로

$$m-4=-5 \qquad \therefore m=-1$$

$-5<-1$이므로 $f(x)=x-4$에 대입한다.

$f^{-1}(2)=n$이라 하면 $f(n)=2$이므로

$$3n-10=2, \qquad 3n=12 \qquad \therefore n=4$$

$2>-1$이므로 $f(x)=3x-10$에 대입한다.

$$\therefore f^{-1}(-5)+f^{-1}(2)=-1+4=3$$

답 ①

48 함수 f의 역함수가 존재하려면 f는 일대일대응이어야 한다.

$f(x)=2|x-1|+kx-1$에서

(i) $x\ge 1$일 때,

$$f(x)=2(x-1)+kx-1$$
$$=(k+2)x-3$$

(ii) $x<1$일 때,

$$f(x)=-2(x-1)+kx-1$$
$$=(k-2)x+1$$

(i), (ii)에서 함수 f가 일대일대응이려면 $x\geq1$일 때와 $x<1$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.
따라서 $(k+2)(k-2)>0$이므로

$k<-2$ 또는 $k>2$ 답 $k<-2$ 또는 $k>2$

49 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.
따라서 $2+a=2\cdot2+1$이므로 $a=3$
$x<2$일 때, $f(x)=x+3<5$
$x\geq2$일 때, $f(x)=2x+1\geq5$
$f^{-1}(9)=m$이라 하면 $f(m)=9$이므로

$2m+1=9$, $2m=8$

$\therefore m=4$

$f^{-1}(4)=n$이라 하면 $f(n)=4$이므로

$n+3=4$ $\therefore n=1$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(9)=f^{-1}(f^{-1}(9))$
$=f^{-1}(4)=1$ 답 ③

50 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-6)$
$=-(3x-6)+5=-3x+11$
$y=-3x+11$로 놓으면 $3x=-y+11$

$\therefore x=-\frac{1}{3}y+\frac{11}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$

$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$ 답 ②

51 $3x+5=t$로 놓으면 $3x=t-5$

$\therefore x=\frac{1}{3}t-\frac{5}{3}$

따라서 $f(t)=-6\cdot\left(\frac{1}{3}t-\frac{5}{3}\right)+2=-2t+12$이므로

$f(x)=-2x+12$

$y=-2x+12$로 놓으면 $2x=-y+12$

$\therefore x=-\frac{1}{2}y+6$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{2}x+6$

$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+6$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편은 12, y절편은 6이므로 구하는 합은

$12+6=18$ 답 ③

다른 풀이 $f(x)=-2x+12$에서 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은 6, y절편은 12이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편은 12, y절편은 6이다.
따라서 구하는 합은 $12+6=18$

52 $g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로

$2k-1=3$, $2k=4$ $\therefore k=2$

$\therefore (f\circ g^{-1})(3)=f(g^{-1}(3))=f(2)$
$=-4\cdot2+3=-5$ 답 ②

Q BOX

$-4>-8$이므로 $f(x)=x^2-8$에 대입한다.

$9>5$이므로 $f(x)=2x+1$에 대입한다.

$4<5$이므로 $f(x)=x+3$에 대입한다.

$ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$

$f\circ f^{-1}=I$ (I는 항등함수)

$g(-4)=-(-4)+3=7$

53 $(f^{-1}\circ g)(6)=f^{-1}(g(6))$
이때 $g(6)=6-10=-4$이므로

$(f^{-1}\circ g)(6)=f^{-1}(g(6))=f^{-1}(-4)$

한편
$x\geq0$일 때, $f(x)=x^2-8\geq-8$
$x<0$일 때, $f(x)=2x-8<-8$
이고, $f^{-1}(-4)=k$라 하면 $f(k)=-4$이므로

$k^2-8=-4$, $k^2=4$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=2$

그런데 $k\geq0$이므로 $k=2$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(6)=f^{-1}(-4)=2$ 답 2

54 $g^{-1}(8)=3$이므로 $g(3)=8$
즉 $g(3)=2\cdot3+b=8$에서 $b=2$

$\therefore g(x)=2x+2$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=a(2x+2)+1$이고
$(f\circ g)(x)=x+c$이므로

$a(2x+2)+1=x+c$

$\therefore 2ax+2a+1=x+c$

따라서 $2a=1$, $2a+1=c$이므로

$a=\frac{1}{2}$, $c=2$

$\therefore a+b+c=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

55 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면
$f(5)=7$이므로 $5a+b=7$ ······ ㉠
$f^{-1}(2)=4$에서 $f(4)=2$이므로

$4a+b=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-18$
따라서 $f(x)=5x-18$이므로

$(f\circ f\circ f^{-1})(x)=f(x)=5x-18$

답 $(f\circ f\circ f^{-1})(x)=5x-18$

56 $(g^{-1}\circ f)^{-1}(-4)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$
$=(f^{-1}\circ g)(-4)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$
$=f^{-1}(g(-4))+f^{-1}(g^{-1}(2))$
$=f^{-1}(7)+f^{-1}(g^{-1}(2))$
$f^{-1}(7)=a$라 하면 $f(a)=7$이므로

$2a^2-1=7$, $2a^2=8$

$a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a\geq0$)

$g^{-1}(2)=b$라 하면 $g(b)=2$이므로

$-b+3=2$ $\therefore b=1$

$f^{-1}(1)=c$라 하면 $f(c)=1$이므로

$2c^2-1=1$, $2c^2=2$

$c^2=1$ $\therefore c=1$ ($\because c\geq0$)

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(-4)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$
$=f^{-1}(7)+f^{-1}(g^{-1}(2))$
$=2+f^{-1}(1)$
$=2+1=3$ 답 ③

57 $f(1)=2$, $g(2)=1$이고, 두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하므로

$f^{-1}(2)=1$, $g^{-1}(1)=2$

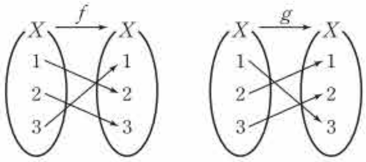
$(f\circ g^{-1})(1)=3$에서 $\quad f(g^{-1}(1))=3$

$\therefore f(2)=3$

$(g^{-1}\circ f)(1)=3$에서 $\quad g^{-1}(f(1))=3$

$g^{-1}(2)=3 \quad \therefore g(3)=2$

두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하므로 두 함수 f, g는 일대일대응이다. 즉 두 함수 f, g의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore f(3)+g^{-1}(3)=1+1=2$ 답 2

58 $f^{-1}(-1)=a$, $f^{-1}(2)=b$라 하면

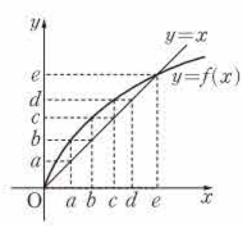
$f(a)=-1$, $f(b)=2$

함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a=-1$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=-1$

$\therefore f^{-1}(-1)+f^{-1}(2)=a+b=0$ 답 0

59 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$g(c)=k$라 하면 $f(k)=c$이므로

$k=b$

$g(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$이므로

$l=a$

$\therefore (g\circ g)(c)=g(g(c))=g(b)=a$ 답 ①

60 $f(0)=p$이므로 $\quad f^{-1}(p)=0$

또 $f(c)=s$이므로 $\quad f^{-1}(s)=c$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ f)^{-1}(s)&=(f^{-1}\circ f^{-1})(s)\\&=f^{-1}(f^{-1}(s))\\&=f^{-1}(c)\\&=q\end{aligned}$$

$\therefore f^{-1}(p)+(f\circ f)^{-1}(s)=q$ 답 ②

61 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(4, 2)$를 지나므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2, 4)$를 지난다.

함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 (b, a)를 지난다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(4, 2)$, $(2, 4)$를 지난다.

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$4a+b=2$, $2a+b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-1$, $b=6$

따라서 $f(x)=-x+6$이므로

$f(5)=1$ 답 ④

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\quad (f\circ f)(x)=x$

함수 f와 역함수 f^{-1}가 같으므로 $(f^{-1}\circ f)(x)=(f\circ f)(x)=x$임을 이용한다.

일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(4, 2)$를 지나므로

$f(x)=a(x-4)+2=ax-4a+2\ (a\neq0)$

라 하면

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))\\&=a(ax-4a+2)-4a+2\\&=a^2x-4a^2-2a+2\end{aligned}$$

따라서 $a^2x-4a^2-2a+2=x$이므로

$a^2=1$, $-4a^2-2a+2=0$

$a^2=1$에서 $\quad a=\pm1$ …… ㉠

$-4a^2-2a+2=0$에서 $\quad 2a^2+a-1=0$

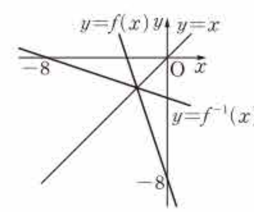
$(a+1)(2a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$이므로 $\quad f(x)=-x+6$

$\therefore f(5)=1$

62 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 점 P는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이므로 $-3x-8=x$에서

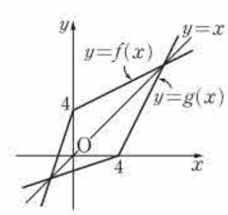
$-4x=8 \quad \therefore x=-2$

즉 $\mathrm{P}(-2, -2)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 사이의 거리
➡ $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

63 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

(i) $x\geq0$일 때,

$\dfrac{1}{2}x+4=x$에서 $\quad -\dfrac{1}{2}x=-4$

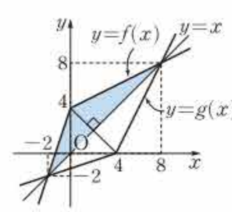
$\therefore x=8$

(ii) $x<0$일 때,

$3x+4=x$에서 $\quad 2x=-4$

$\therefore x=-2$

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.



$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형은 앞의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이는

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot4\cdot2+\frac{1}{2}\cdot4\cdot8\right)=40$$

답 ③

64 $y=|x-1|+|x+2|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 1, -2이므로

(i) $x<-2$일 때,

$y=-(x-1)-(x+2)=-2x-1$

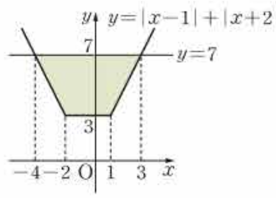
(ii) $-2\le x<1$일 때,

$y=-(x-1)+(x+2)=3$

(iii) $x\ge1$일 때,

$y=x-1+x+2=2x+1$

이상에서 $y=|x-1|+|x+2|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프와 직선 $y=7$의 교점의 x좌표는

$-2x-1=7$에서 $-2x=8$이므로 $x=-4$

$2x+1=7$에서 $2x=6$이므로 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\{1-(-2)\}+\{3-(-4)\}\right]\cdot4$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(3+7)\cdot4=20$$

답 ②

65 $y=|x+1|+|x-4|+|x-5|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 -1, 4, 5이므로

(i) $x<-1$일 때,

$y=-(x+1)-(x-4)-(x-5)$
$=-3x+8$

(ii) $-1\le x<4$일 때,

$y=x+1-(x-4)-(x-5)$
$=-x+10$

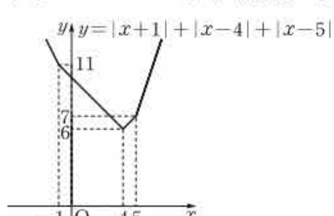
(iii) $4\le x<5$일 때,

$y=x+1+x-4-(x-5)$
$=x+2$

(iv) $x\ge5$일 때,

$y=x+1+x-4+x-5$
$=3x-8$

이상에서 $y=|x+1|+|x-4|+|x-5|$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $x=4$에서 최솟값 6을 갖는다.



따라서 $a=4$, $b=6$이므로

$a+b=10$

답 ③

QBOX

절댓값 기호를 포함한 함수의 최대·최소

➡ 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 값을 경계로 구간을 나누어 그래프를 그려서 구한다.

$y=x^2-4x$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

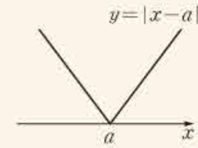
조건 (가)에서

$f(x)=\begin{cases}x-1 & (1\le x<2)\\ -x+3 & (2\le x\le3)\end{cases}$

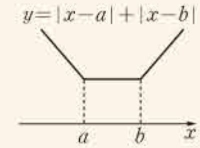
쌤한마디

절댓값 기호를 여러 개 포함한 함수의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다. (단, $a<b<c$)

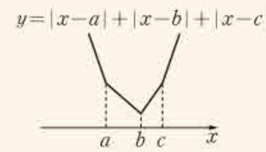
① 1개일 때



② 2개일 때



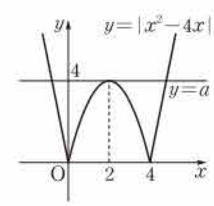
③ 3개일 때



즉 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 값에서 그래프가 꺾임을 알 수 있다.

따라서 $y=|x-a|$ 꼴의 함수는 $x=a$에서 최솟값 0을, $y=|x-a|+|x-b|$ 꼴의 함수는 $a\le x\le b$에서 최솟값 $b-a$를, $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 꼴의 함수는 $x=b$에서 최솟값 $(b-a)-(b-c)=c-a$를 갖는다.

66 $y=|x^2-4x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면



$a=4$

답 4

67 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분을 없앤 다음 $x\ge0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 개형은 ②와 같다.

답 ②

68 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ㄴ과 같다.

또 $|y|=f(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분만 남기고, $y<0$인 부분을 없앤 다음 $y\ge0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ㄹ과 같다.

따라서 구하는 그래프의 개형은 차례대로 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

도전! 수능 기출

W 41쪽

01 1st $1\le x\le3$인 구간의 함숫값을 이용하여 $f(2015)$의 값을 구할 수 있도록 조건 (나)를 이용하여 $f(2015)$를 변형한다.

조건 (나)에 의하여

$$f(2015)=f\left(3\cdot\frac{2015}{3}\right)$$
$$=3f\left(\frac{2015}{3}\right)$$
$$=3^2f\left(\frac{2015}{3^2}\right)$$
$$\vdots$$
$$=3^6f\left(\frac{2015}{3^6}\right)$$

2nd 조건 (가)를 이용하여 1st의 함숫값을 구한다.

이때 $2<\frac{2015}{3^6}<3$이므로 조건 (가)에 의하여

$$f\left(\frac{2015}{3^6}\right)=1-\left|\frac{2015}{3^6}-2\right|=3-\frac{2015}{3^6}$$
$$\therefore f(2015)=3^6f\left(\frac{2015}{3^6}\right)=3^6\left(3-\frac{2015}{3^6}\right)$$
$$=3^7-2015=172$$

답 172

02 1st $f(4)$, $g(4)$의 값을 이용하여 $h(4)$의 값을 구한다.

함수 $y=g(x)$의 그래프에서

$g(4)=3$

이때 $f(4)=2$이므로

$h(4)=g(4)=3$

2nd $h(x)$가 일대일대응임을 이용하여 나머지 함숫값을 구한다.

$f(3)<g(3)$이라 하면 $h(3)=g(3)=3$이므로 함수 $h(x)$가 일대일대응이라는 조건에 모순이다.

즉 $f(3)\ge g(3)=3$이므로 $f(3)=4$이어야 한다.

$\therefore h(3)=f(3)=4$

$g(1)=2$이므로 $h(1)=1$이라 하면 함수 $h(x)$의 정의에 모순이다.

$\therefore h(1)=g(1)=2$

이때 함수 $h(x)$가 일대일대응이므로

$h(2)=1$

따라서 $h(2)=1$, $g(2)=1$이므로

$f(2)=1$

$\therefore f(2)+h(3)=1+4=5$

답 5

03 1st $(f\circ g)(2)$의 값을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $g(2)=2^2-2=2$이므로

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)=2$

2nd $(g\circ f)(-x)$와 $(g\circ f)(x)$를 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 함수 $f(x)=\begin{cases}2 & (x>2)\\ x & (|x|\le 2)\\ -2 & (x<-2)\end{cases}$에서 x 대신 $-x$를 대입하면

$$f(-x)=\begin{cases}2 & (-x>2)\\ -x & (|-x|\le 2)\\ -2 & (-x<-2)\end{cases}$$

$$\therefore f(-x)=\begin{cases}-2 & (x>2)\\ -x & (|x|\le 2)\\ 2 & (x<-2)\end{cases}$$

함수 $(g\circ f)(-x)$, 즉 $g(f(-x))$를 구하면

(i) $x>2$일 때,

$g(f(-x))=g(-2)=2$

(ii) $|x|\le 2$일 때,

$g(f(-x))=g(-x)=x^2-2$

(iii) $x<-2$일 때,

$g(f(-x))=g(2)=2$

한편 $(g\circ f)(x)$, 즉 $g(f(x))$를 구하면

(i) $x>2$일 때,

$g(f(x))=g(2)=2$

(ii) $|x|\le 2$일 때,

$g(f(x))=g(x)=x^2-2$

(iii) $x<-2$일 때,

$g(f(x))=g(-2)=2$

$\therefore (g\circ f)(-x)=(g\circ f)(x)$

3rd $(f\circ g)(x)$를 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 함수 $(f\circ g)(x)$, 즉 $f(g(x))$를 구하면

(i) $x>2$일 때, $x^2-2>2$이므로

$f(g(x))=f(x^2-2)=2$

(ii) $|x|\le 2$일 때, $-2\le x^2-2\le 2$이므로

$f(g(x))=f(x^2-2)=x^2-2$

(iii) $x<-2$일 때, $x^2-2>2$이므로

$f(g(x))=f(x^2-2)=2$

$\therefore (f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ ($\because$ ㄴ)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

04 1st 역함수의 성질을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 함수 f가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

또 조건 (가)에서 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $(f\circ f)(x)=x$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$이다.

$\therefore f(3)=f^{-1}(3)$

2nd $f(x)=2x$를 만족시키는 원소 x를 찾고, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 조건 (나)에서 집합 X의 어떤 원소 x에 대하여 $f(x)=2x$이므로 집합 X의 원소 중 $f(x)=2x$를 만족시키는 원소 x가 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f(1)=2$와 $f(2)=4$ 중 적어도 하나는 성립하므로 $f(1)=3$이면 $f(2)=4$이다.

3rd $f(1)$과 $f(2)$의 값에 따라 경우를 나누어 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 조건 (나)에 의하여 $f(1)=2$와 $f(2)=4$ 중 적어도 하나는 성립하므로

$f(1)=2$이고 $f(2)\neq 4$일 때

$f(1)\neq 2$이고 $f(2)=4$일 때

$f(1)=2$이고 $f(2)=4$일 때

로 나눌 수 있다.

Q BOX

$\frac{2015}{3^6}=2.76\cdots$이므로

$2<\frac{2015}{3^6}<3$

$g(-2)=(-2)^2-2=2$

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여

$f=f^{-1}$

$\Longleftrightarrow (f\circ f)(x)=x$

집합 X의 두 원소 3, 4를 $f(x)=2x$에 대입하면

$f(3)=6$, $f(4)=8$

이지만 6, 8은 X의 원소가 아니므로 3, 4는 조건 (나)를 만족시키는 원소 x가 될 수 없다.

W 04 함수

(i) $f(1)=2$이고 $f(2)\neq4$일 때,

조건 (가)에 의하여 $(f\circ f)(1)=1$이므로

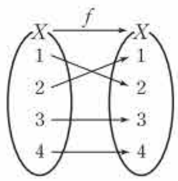
$f(f(1))=f(2)=1$

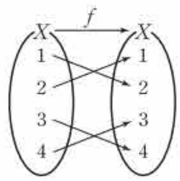
이때 조건 (가)에 의하여

$f(3)=3,\ f(4)=4$

또는 $f(3)=4,\ f(4)=3$

따라서 함수 f의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같고, 함수 f의 개수는 2이다.





(ii) $f(1)\neq2$이고 $f(2)=4$일 때,

조건 (가)에 의하여 $(f\circ f)(2)=2$이므로

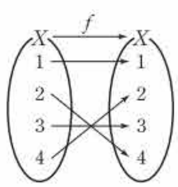
$f(f(2))=f(4)=2$

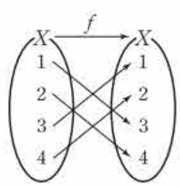
이때 조건 (가)에 의하여

$f(1)=1,\ f(3)=3$

또는 $f(1)=3,\ f(3)=1$

따라서 함수 f의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같고, 함수 f의 개수는 2이다.





(iii) $f(1)=2$이고 $f(2)=4$일 때,

$f(f(1))=f(2)=4$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 가능한 함수 f의 개수는 4이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

Q BOX

분자, 분모 중 인수분해되는 식은 인수분해한 다음 계산한다.

$f(f(1))=1$을 만족시키지 않는다.

05 유리식과 유리함수 W 42쪽

01 $\dfrac{a}{(a+b)(a+c)}-\dfrac{b}{(b+a)(b+c)}-\dfrac{c}{(c+a)(c+b)}$

$=\dfrac{a(b+c)-b(a+c)-c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$=\dfrac{ab+ac-ab-bc-ca-bc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$=-\dfrac{2bc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

답 $-\dfrac{2bc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

02 $(x^2◎2x)\times\{x^2◎(x+6)\}$

$=\dfrac{x^2+2x}{x^2-2x}\times\dfrac{x^2+x+6}{x^2-x-6}$

$=\dfrac{x(x+2)}{x(x-2)}\times\dfrac{x^2+x+6}{(x+2)(x-3)}$

$=\dfrac{x^2+x+6}{(x-2)(x-3)}$ 답 $\dfrac{x^2+x+6}{(x-2)(x-3)}$

03 $\left(\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a+b}{a-b}\right)\div\left(\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}\right)$

$=\dfrac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}\div\dfrac{(a-b)^2+(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}$

$=\dfrac{-4ab}{(a+b)(a-b)}\div\dfrac{2(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)}$

$=\dfrac{-4ab}{(a+b)(a-b)}\times\dfrac{(a+b)(a-b)}{2(a^2+b^2)}$

$=-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

$=-\dfrac{2\times(-1)}{4}=\dfrac{1}{2}$ 답 ⑤

04 $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{x-1-(x+1)}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{-2}{x^2-1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{-2(x^2+1)+2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}+\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{-4}{x^4-1}+\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{-4(x^4+1)+4(x^4-1)}{(x^4-1)(x^4+1)}$

$=-\dfrac{8}{x^8-1}$

따라서 $-\dfrac{8}{x^8-1}=\dfrac{k}{x^n-1}$이고, 이 식은 x에 대한 항등식이므로

$k=-8,\ n=8$

$\therefore\ k-n=-16$ 답 -16

05 주어진 식의 양변에 $x(x+1)(x+2)(x+3)$을 곱하여 정리하면

$$1=a_0(x+1)(x+2)(x+3)+a_1x(x+2)(x+3)$$
$$+a_2x(x+1)(x+3)+a_3x(x+1)(x+2)$$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 x^3의 계수를 비교하면

$$a_0+a_1+a_2+a_3=0$$

답 0

06 $\dfrac{2x^2+4x-1}{x^2+2x}-\dfrac{4x^2-2x-3}{2x^2-x}$

$=\dfrac{2(x^2+2x)-1}{x^2+2x}-\dfrac{2(2x^2-x)-3}{2x^2-x}$

$=\left\{2-\dfrac{1}{x(x+2)}\right\}-\left\{2-\dfrac{3}{x(2x-1)}\right\}$

$=-\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{3}{x(2x-1)}$

$=\dfrac{-(2x-1)+3(x+2)}{x(x+2)(2x-1)}$

$=\dfrac{x+7}{x(x+2)(2x-1)}$

답 $\dfrac{x+7}{x(x+2)(2x-1)}$

분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같을 때에는 분자를 분모로 나누어 분자의 차수를 분모의 차수보다 작게 한 다음 계산한다.

07 $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x-3}{x-1}-\dfrac{x-5}{x-3}+\dfrac{x-7}{x-5}$

$=\dfrac{(x+1)-2}{x+1}-\dfrac{(x-1)-2}{x-1}$

$\quad-\dfrac{(x-3)-2}{x-3}+\dfrac{(x-5)-2}{x-5}$

$=\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)-\left(1-\dfrac{2}{x-1}\right)$

$\quad-\left(1-\dfrac{2}{x-3}\right)+\left(1-\dfrac{2}{x-5}\right)$

$=\left(-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}\right)+\left(\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{2}{x-5}\right)$

$=\dfrac{-2(x-1)+2(x+1)}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{2(x-5)-2(x-3)}{(x-3)(x-5)}$

$=\dfrac{4}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{4}{(x-3)(x-5)}$

$=\dfrac{4(x-3)(x-5)-4(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)}$

$=\dfrac{4(x^2-8x+15)-4(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)}$

$=\dfrac{-32x+64}{(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)}$

따라서

$$\dfrac{-32x+64}{(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)}$$
$$=\dfrac{ax+b}{(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)}$$

이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$$a=-32,\ b=64$$
$$\therefore a+b=32$$

답 ③

$px+q=p'x+q'$이 x에 대한 항등식이면
$p=p',\ q=q'$

08 $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2+x-2}-\dfrac{4}{x^2+8x+12}$

$=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$

$\quad-\dfrac{4}{(x+2)(x+6)}$

$=\dfrac{2}{x+1-(x-1)}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$\quad-\dfrac{3}{x+2-(x-1)}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$\quad-\dfrac{4}{x+6-(x+2)}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+6}\right)$

$=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}$

$\quad-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+6}$

$=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{-(x+6)+(x+1)}{(x+1)(x+6)}$

$=-\dfrac{5}{(x+1)(x+6)}$

답 $-\dfrac{5}{(x+1)(x+6)}$

09 $f(n)$

$=\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$

$=\dfrac{1}{x+n+1-(x+n)}\left(\dfrac{1}{x+n}-\dfrac{1}{x+n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{x+n}-\dfrac{1}{x+n+1}$

이므로

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(8)$

$=\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)+\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$\quad+\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{x+8}-\dfrac{1}{x+9}\right)$

$=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+9}=\dfrac{x+9-(x+2)}{(x+2)(x+9)}$

$=\dfrac{7}{(x+2)(x+9)}$

따라서 $\dfrac{7}{(x+2)(x+9)}=\dfrac{c}{(x+a)(x+b)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$$a=2,\ b=9,\ c=7 \text{ 또는 } a=9,\ b=2,\ c=7$$
$$\therefore a+b+c=18$$

답 ④

10 $4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{x}}}=4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{\cfrac{4x-1}{x}}}$

$=4-\cfrac{1}{4-\cfrac{x}{4x-1}}$

$=4-\cfrac{1}{\cfrac{4(4x-1)-x}{4x-1}}$

$=4-\dfrac{4x-1}{15x-4}$

$=\dfrac{4(15x-4)-4x+1}{15x-4}$

$=\dfrac{56x-15}{15x-4}$

$\frac{56x-15}{15x-4}=x$에서 $\quad x(15x-4)=56x-15$

$$15x^2-4x=56x-15, \quad 15x^2-60x+15=0$$

$$\therefore x^2-4x+1=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 x의 값의 합은 4이다. 답 4

11 $x+y+4xy=-7$, $3x+3y-xy=5$에서

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$$a+4b=-7, \ 3a-b=5$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1, \ b=-2$

즉 $x+y=1$, $xy=-2$이므로 구하는 값은

$$\frac{1-\frac{x}{x+y}}{1-\frac{y}{x+y}}-\frac{1+\frac{y}{x-y}}{1-\frac{x}{x-y}}$$

$$=\frac{\frac{x+y-x}{x+y}}{\frac{x+y-y}{x+y}}-\frac{\frac{x-y+y}{x-y}}{\frac{x-y-x}{x-y}}$$

$$=\frac{\frac{y}{x+y}}{\frac{x}{x+y}}-\frac{\frac{x}{x-y}}{\frac{-y}{x-y}}$$

$$=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$$

$$=\frac{1^2-2\cdot(-2)}{-2}=-\frac{5}{2}$$

답 ④

12 $a^2-\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)$이므로

$$\frac{10}{3}\left(a-\frac{1}{a}\right)=\frac{80}{9} \quad \therefore a-\frac{1}{a}=\frac{8}{3}$$

$$\therefore a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{8}{3}\right)^3+3\cdot\frac{8}{3}=\frac{728}{27}$$

답 ④

13 $x>2$에서 $x\neq0$이므로 $x^2-4x+2=0$의 양변을 x로 나누면

$$x-4+\frac{2}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{2}{x}=4$$

한편 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2=\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-8$이므로

$$\left(x-\frac{2}{x}\right)^2=4^2-8=8$$

이때 $x>2$에서 $\frac{2}{x}<1$이므로 $\quad x-\frac{2}{x}>1$

$$\therefore x-\frac{2}{x}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore x^4-\frac{16}{x^4}=\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{4}{x^2}\right)$$

$$=\left\{\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4\right\}\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x-\frac{2}{x}\right)$$

$$=(4^2-4)\cdot4\cdot2\sqrt{2}$$

$$=96\sqrt{2}$$

답 $96\sqrt{2}$

Q BOX

$x=2\pm\sqrt{(-2)^2-1}$
$=2\pm\sqrt{3}$
이므로 모든 x의 값의 합은
$2+\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})=4$
와 같이 구할 수도 있다.

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-t-2=0$, 즉 $(t+1)(t-2)=0$의 두 근이므로 $x=-1$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=-1$임을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수도 있다.

a^3-b^3
$=(a-b)^3+3ab(a-b)$

14 $a+b+c=0$에서 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$이므로

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$$

$$=\frac{b+a}{b}\cdot\frac{c+b}{c}\cdot\frac{a+c}{a}$$

$$=\frac{-c}{b}\cdot\frac{-a}{c}\cdot\frac{-b}{a}$$

$$=-1$$

답 ②

15 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}$에서 $\quad \frac{a+c}{ac}=\frac{1}{b}$

$$ab+bc=ac \quad \therefore ab+bc-ac=0$$

$$\therefore \frac{a}{(a-b)(a+c)}-\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c+a)(c-b)}$$

$$=\frac{a(b-c)+b(c+a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c+a)}$$

$$=\frac{2(ab+bc-ca)}{(a-b)(b-c)(c+a)}$$

$$=0$$

답 0

16 $3x=4y$이므로 $\quad y=\frac{3}{4}x$

$2x=5z$이므로 $\quad z=\frac{2}{5}x$

$$\therefore x:y:z=x:\frac{3}{4}x:\frac{2}{5}x=20:15:8$$

$x=20k$, $y=15k$, $z=8k\ (k\neq0)$로 놓으면

$$\frac{x+2y-z}{x-y-z}=\frac{20k+30k-8k}{20k-15k-8k}$$

$$=\frac{42k}{-3k}=-14$$

답 ③

다른 풀이 $y=\frac{3}{4}x$, $z=\frac{2}{5}x$이므로

$$\frac{x+2y-z}{x-y-z}=\frac{x+\frac{3}{2}x-\frac{2}{5}x}{x-\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}x}$$

$$=\frac{\frac{21}{10}x}{-\frac{3}{20}x}=-14$$

17 주어진 식에서

$$2b+c=4ak, \ 4a+c=2bk, \ 4a+2b=ck$$

세 식을 변끼리 더하면

$$2(4a+2b+c)=(4a+2b+c)k \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $4a+2b+c\neq0$일 때,

㉠의 양변을 $4a+2b+c$로 나누면 $\quad k=2$

(ii) $4a+2b+c=0$일 때,

$2b+c=-4a$, $4a+c=-2b$, $4a+2b=-c$를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{-4a}{4a}=\frac{-2b}{2b}=\frac{-c}{c}=k$$

$$\therefore k=-1$$

(i), (ii)에서 모든 상수 k의 값의 합은

$2+(-1)=1$ 답 ④

18 남녀 합격자의 수를 각각 k, $2k$ $(k\neq0)$로 놓고, 불합격자의 수를 각각 $4l$, $3l$ $(l\neq0)$로 놓으면 남자 지원자 수는 $k+4l$, 여자 지원자 수는 $2k+3l$이므로

$(k+4l):(2k+3l)=2:3$

$3(k+4l)=2(2k+3l)$

$3k+12l=4k+6l$

$\therefore k=6l$

따라서 남자 지원자 수는 $k+4l=6l+4l=10l$, 합격자 수는 $k=6l$이므로 남자 지원자의 합격률은

$\dfrac{6l}{10l}=\dfrac{3}{5}$ 답 $\dfrac{3}{5}$

19 $x+\dfrac{4}{y}=1$에서 $\quad x=1-\dfrac{4}{y}=\dfrac{y-4}{y}$

$y+\dfrac{1}{2z}=4$에서 $\quad \dfrac{1}{2z}=4-y$

$2z=\dfrac{1}{4-y} \quad \therefore z=\dfrac{1}{2(4-y)}$

$\therefore xyz=\dfrac{y-4}{y}\cdot y\cdot\dfrac{1}{2(4-y)}=-\dfrac{1}{2}$ 답 ④

20 $\begin{cases} x-2y+z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y-z=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $\quad 2x-y=0 \quad \therefore y=2x$

$y=2x$를 ㉡에 대입하면 $\quad x+2x-z=0$

$\therefore z=3x$

$\therefore \dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\dfrac{x^3+8x^3+27x^3}{x\cdot2x\cdot3x}$

$=\dfrac{36x^3}{6x^3}=6$ 답 ⑤

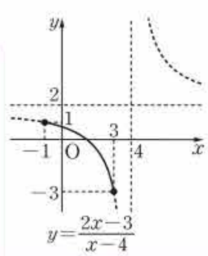
21 $y=\dfrac{2x-3}{x-4}=\dfrac{2(x-4)+5}{x-4}=\dfrac{5}{x-4}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x-3}{x-4}$의 그래프는 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le3$에서 함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\{y\,|\,-3\le y\le1\}$

답 $\{y\,|\,-3\le y\le1\}$



$y=\dfrac{2x-3}{x-4}$에 $x=-1$, $x=3$을 각각 대입하면

$y=\dfrac{2\cdot(-1)-3}{-1-4}=1$,

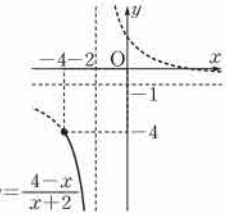
$y=\dfrac{2\cdot3-3}{3-4}=-3$

22 $y=\dfrac{4-x}{x+2}=\dfrac{-(x+2)+6}{x+2}=\dfrac{6}{x+2}-1$

이므로 $y=\dfrac{4-x}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y\le-4$에서 함수 $y=\dfrac{4-x}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

$\{x\,|\,-4\le x<-2\}$



$-4=\dfrac{4-x}{x+2}$에서

$-4x-8=4-x$

$-3x=12$

$\therefore x=-4$

즉 정의역에 속하는 모든 정수의 합은

$-4+(-3)=-7$ 답 ③

23 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\dfrac{2}{x-a}+b=\dfrac{-2+b(x-a)}{x-a}=\dfrac{bx-ab-2}{x-a}$

이 함수의 그래프가 $y=\dfrac{2x+c}{x+2}$의 그래프와 일치하므로

$-a=2,\ b=2,\ -ab-2=c$

$\therefore a=-2,\ b=2,\ c=2$

$\therefore a+b-c=-2$ 답 ②

24 $y=\dfrac{a-4x}{x-3}=\dfrac{-4(x-3)+a-12}{x-3}=\dfrac{a-12}{x-3}-4$

이 함수의 그래프를 평행이동하면 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프와 일치하므로

$a-12=5 \quad \therefore a=17$ 답 17

다른 풀이 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{5}{x-p}+q=\dfrac{5+q(x-p)}{x-p}=\dfrac{qx+5-pq}{x-p}$

이 함수의 그래프가 $y=\dfrac{a-4x}{x-3}$의 그래프와 일치하므로

$p=3,\ q=-4,\ a=5-pq$

$\therefore a=17$

25 ① $y=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+2$

따라서 $y=\dfrac{2x}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형했을 때 $k=7$인 것을 찾는다.

② $y=\dfrac{3-x}{x+2}=\dfrac{-(x+2)+5}{x+2}=\dfrac{5}{x+2}-1$

따라서 $y=\dfrac{3-x}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\dfrac{1-3x}{x+2}=\dfrac{-3(x+2)+7}{x+2}=\dfrac{7}{x+2}-3$

따라서 $y=\dfrac{1-3x}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=-\frac{3x}{x+3}=\frac{-3(x+3)+9}{x+3}=\frac{9}{x+3}-3$

따라서 $y=-\frac{3x}{x+3}$의 그래프는 $y=\frac{9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\frac{2x-2}{2x+5}=\frac{2x+5-7}{2x+5}=-\frac{7}{2x+5}+1$

$=-\frac{7}{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}+1$

따라서 $y=\frac{2x-2}{2x+5}$의 그래프는 $y=-\frac{7}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{5}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

답 ③

26 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=1$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+2}+1\ (k\neq 0)$ ⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 (2, 5)를 지나므로

$5=\frac{k}{2+2}+1$, $\quad \frac{k}{4}=4$

$\therefore k=16$

$k=16$을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{16}{x+2}+1=\frac{x+18}{x+2}$

따라서 $a=1$, $-b=18$, $c=2$이므로

$a=1$, $b=-18$, $c=2$

$\therefore ab-c=-20$ 답 -20

다른 풀이 $y=\frac{ax-b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac-b}{x+c}$

$=\frac{-ac-b}{x+c}+a$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-c$, $y=a$이므로

$-c=-2$, $a=1$

$\therefore a=1$, $c=2$ ⋯⋯ ㉠

또 그래프가 점 (2, 5)를 지나므로

$5=\frac{2a-b}{2+c}$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$5=\frac{2-b}{4}$, $\quad 2-b=20$

$\therefore b=-18$

$\therefore ab-c=-20$

27 $f(x)=\frac{-3x+k}{x+3}=\frac{-3(x+3)+9+k}{x+3}$

$=\frac{9+k}{x+3}-3$

이므로 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{9+k}{(x+3)+3}-3+2=\frac{9+k}{x+6}-1$

$\therefore g(x)=\frac{9+k}{x+6}-1$

따라서 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은

$x=-6$, $y=-1$

이므로 두 점근선의 교점의 좌표는

$(-6, -1)$

이 점이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$\frac{-3\cdot(-6)+k}{-6+3}=-1$

$18+k=3 \qquad \therefore k=-15$ 답 ②

Q BOX

유리함수의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=p$, $y=q$
➡ 두 점근선의 교점의 좌표는 (p, q)이다.

유리함수의 그래프의 점근선이 직선 $x=p$, $y=q$이면 함수의 식을
$y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$
로 놓는다.

28 $y=\frac{2x}{x+a}=\frac{2(x+a)-2a}{x+a}=\frac{-2a}{x+a}+2$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

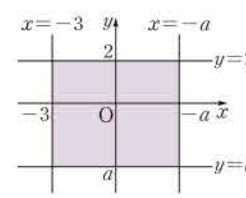
$x=-a$, $y=2$

$y=\frac{ax-2}{x+3}=\frac{a(x+3)-3a-2}{x+3}=\frac{-3a-2}{x+3}+a$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3$, $y=a$

따라서 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 도형의 넓이가 30이므로



$(-a+3)(2-a)=30$

$a^2-5a-24=0$

$(a+3)(a-8)=0$

$\therefore a=-3\ (\because a<0)$ 답 ③

29 $y=\frac{ax+1}{x-2}=\frac{a(x-2)+2a+1}{x-2}=\frac{2a+1}{x-2}+a$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=a$

이므로 그래프는 점 $(2, a)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $a=-5$, $b=2$이므로

$b-a=7$ 답 ⑤

30 $y=\frac{x+1}{2x-2}=\frac{\frac{1}{2}(2x-2)+2}{2x-2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

$a=1$, $b=\frac{1}{2}$

또 주어진 함수의 그래프가 직선 $y=-x+k$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=-x+k$는 점근선의 교점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$을 지난다.

즉 $\frac{1}{2}=-1+k$에서 　　$k=\frac{3}{2}$

$\therefore ab-k=-1$ 　　답 -1

31 $y=\frac{ax+9}{x-b}=\frac{a(x-b)+ab+9}{x-b}=\frac{ab+9}{x-b}+a$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=b,\ y=a$

이때 주어진 함수의 그래프가 두 직선 $y=x+4$, $y=-x-6$에 대하여 대칭이므로 점 $(b,\ a)$는 두 직선 $y=x+4$, $y=-x-6$의 교점이다. 즉

$a=b+4,\ a=-b-6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-5$

$\therefore a^2+b^2=26$ 　　답 ④

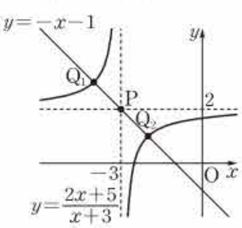
32 $y=\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2(x+3)-1}{x+3}=-\frac{1}{x+3}+2$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3,\ y=2$

이므로 점 P$(-3,\ 2)$는 두 점근선의 교점이다.

점 P가 두 점근선의 교점이므로 $\overline{PQ}$의 길이가 최소일 때의 점 Q는 오른쪽 그림과 같이 Q_1, Q_2로 두 개가 존재한다.



한편 함수 $y=\frac{2x+5}{x+3}$의 그래프는 점 P$(-3,\ 2)$에 대하여 대칭이므로 직선 $y-2=-(x+3)$, 즉 $y=-x-1$에 대하여 대칭이다.

점 $(-3,\ 2)$를 지나고 기울기가 -1인 직선

$\frac{2x+5}{x+3}=-x-1$에서

두 점 Q_1, Q_2는 곡선 $y=\frac{2x+5}{x+3}$와 직선 $y=-x-1$의 교점이다.

$2x+5=-(x+1)(x+3)$

$x^2+6x+8=0$

$(x+2)(x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-4$

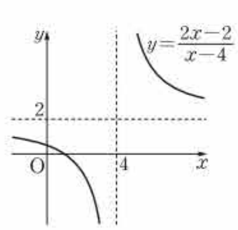
따라서 두 점 Q_1, Q_2의 좌표는 각각 $(-4,\ 3)$, $(-2,\ 1)$이고 $\overline{PQ_1}=\overline{PQ_2}$이므로 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은

$\sqrt{(-3+4)^2+(2-3)^2}=\sqrt{2}$ 　　답 $\sqrt{2}$

33 $y=\frac{2x-2}{x-4}=\frac{2(x-4)+6}{x-4}=\frac{6}{x-4}+2$

이므로 $y=\frac{2x-2}{x-4}$의 그래프는 $y=\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

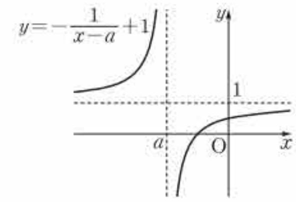
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지난다.



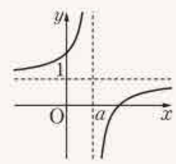
답 ③

34 $y=-\frac{1}{x-a}+1$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\frac{1}{x-a}+1$의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $a<0$이고 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로



$a\ge0$이면 다음 그림과 같이 제4사분면을 지난다.



$\frac{1}{a}+1\ge0$, 　　$\frac{1}{a}\ge-1$

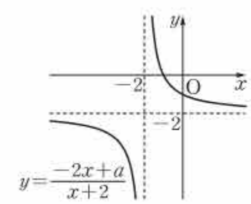
$1\le-a$ 　　$\therefore a\le-1$

$a<0$이므로 양변에 a를 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.

따라서 a의 최댓값은 -1이다. 　　답 -1

35 $y=\frac{-2x+a}{x+2}=\frac{-2(x+2)+4+a}{x+2}=\frac{4+a}{x+2}-2$

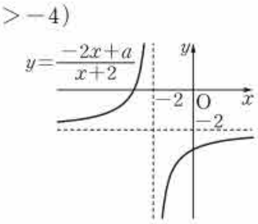
(i) $4+a>0$, 즉 $a>-4$일 때, 주어진 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작거나 같아야 하므로



$\frac{a}{2}\le0$ 　　$\therefore a\le0$

$\therefore -4<a\le0$ ($\because a>-4$)

(ii) $4+a<0$, 즉 $a<-4$일 때, 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



(i), (ii)에서 　　$a<-4$ 또는 $-4<a\le0$

답 $a<-4$ 또는 $-4<a\le0$

36 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-2}+1\ (k\ne0)$ 　　…… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=-\frac{k}{2}+1$, 　　$\frac{k}{2}=-2$

$\therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-4}{x-2}+1=\frac{-4+(x-2)}{x-2}=\frac{x-6}{x-2}$

따라서 $a=1,\ b=-6,\ c=-2$이므로

$a+b+c=-7$ 　　답 -7

37 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=-2$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-3}-2\ (k\neq0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(5,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{5-3}-2,\qquad \dfrac{k}{2}=2$

$\therefore\ k=4$

$k=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=\dfrac{4}{x-3}-2$

보기의 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형했을 때 $k=4$인 것을 찾는다.

ㄴ. $y=\dfrac{4}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x-3}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\dfrac{8-x}{x+4}=\dfrac{-(x+4)+12}{x+4}=\dfrac{12}{x+4}-1$

ㄹ. $y=\dfrac{2x}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+4}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}+2$

따라서 $y=\dfrac{2x}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x-3}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동에 의하여 주어진 함수의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

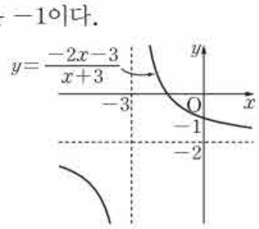
38 $y=\dfrac{-2x-3}{x+3}=\dfrac{-2(x+3)+3}{x+3}=\dfrac{3}{x+3}-2$

ㄱ. 치역은 $\{y\mid y\neq-2$인 실수$\}$이다.

ㄴ. 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=-2$이므로 그래프는 점 $(-3,\ -2)$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $y=\dfrac{-2x-3}{x+3}$에 $x=0$을 대입하면 $y=\dfrac{-3}{3}=-1$ 이므로 그래프의 y절편은 -1이다.

ㄹ. 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



ㅁ. $y=\dfrac{2x+7}{x+2}=\dfrac{2(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}+2$

따라서 $y=\dfrac{2x+7}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x+3}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ

39 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프는 제2사분면을 지나므로

$a<0$

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프는 k의 절댓값이 커질수록 원점으로부터 멀어진다.

이때 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프가 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$|a|>|-2|\qquad \therefore\ a<-2\ (\because\ a<0)$

$y=\dfrac{b}{x}$의 그래프는 제1사분면을 지나므로

$b>0$

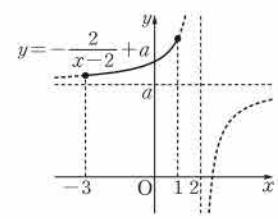
이때 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$|2|>|b|\qquad \therefore\ 0<b<2\ (\because\ b>0)$

답 $a<-2$, $0<b<2$

40 $y=-\dfrac{2}{x-2}+a$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\leq x\leq1$에서 $y=-\dfrac{2}{x-2}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$일 때 최댓값 $2+a$를 갖는다.



즉 $2+a=6$이므로 $\quad a=4$

답 ①

41 $y=\dfrac{3x+10}{x+2}=\dfrac{3(x+2)+4}{x+2}=\dfrac{4}{x+2}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x+10}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

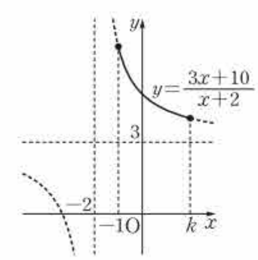
따라서 $-1\leq x\leq k$에서 $y=\dfrac{3x+10}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-1$일 때 최댓값 7,

$\dfrac{-3+10}{-1+2}=7$

$x=k$일 때 최솟값 $\dfrac{3k+10}{k+2}$

을 갖는다.



즉 $M=7$, $\dfrac{3k+10}{k+2}=4$이므로 $\dfrac{3k+10}{k+2}=4$에서

$3k+10=4k+8\qquad \therefore\ k=2$

$\therefore\ kM=14$

답 ②

42 조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-4$, $y=-2$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x+4}-2\ (k\neq0)$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $f(-2)=1$이므로

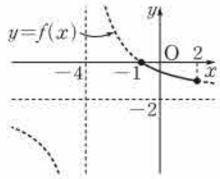
$1=\dfrac{k}{2}-2,\qquad \dfrac{k}{2}=3$

$\therefore\ k=6$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{6}{x+4}-2$

따라서 $-1\le x\le 2$에서

$y=\dfrac{6}{x+4}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는



$x=-1$에서 최댓값 0,

$x=2$에서 최솟값 -1

을 갖는다.

따라서 구하는 합은

$0+(-1)=-1$ 답 -1

Q BOX

$\dfrac{6}{-1+4}-2=0$

$\dfrac{6}{2+4}-2=-1$

43 함수 $y=\dfrac{2x}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=mx+2$가 한 점에서 만나므로 $\dfrac{2x}{x+1}=mx+2$에서

$2x=(mx+2)(x+1)$

$\therefore mx^2+mx+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=m^2-8m=0$

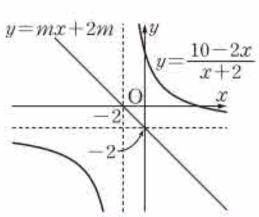
$m(m-8)=0$

$\therefore m=8\ (\because m>0)$ 답 ④

44 $y=\dfrac{10-2x}{x+2}=\dfrac{-2(x+2)+14}{x+2}=\dfrac{14}{x+2}-2$

이므로 $y=\dfrac{10-2x}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{14}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\dfrac{10-2x}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=mx+2m$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.



$y=mx+2m$
$=m(x+2)$

(i) $m=0$일 때,

함수 $y=\dfrac{10-2x}{x+2}$의 그래프와 직선 $y=0$, 즉 x축은 한 점에서 만난다.

(ii) $m\ne 0$일 때,

$\dfrac{10-2x}{x+2}=mx+2m$에서

$10-2x=(mx+2m)(x+2)$

$\therefore mx^2+2(2m+1)x+4m-10=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2m+1)^2-m(4m-10)<0$

$14m+1<0$

$14m<-1$

$\therefore m<-\dfrac{1}{14}$

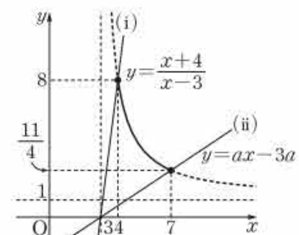
(i), (ii)에서 $m<-\dfrac{1}{14}$이므로 구하는 정수 m의 최댓값은 -1 답 -1

45 $y=\dfrac{x+4}{x-3}=\dfrac{x-3+7}{x-3}=\dfrac{7}{x-3}+1$

이므로 $y=\dfrac{x+4}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $4\le x\le 7$에서 $y=\dfrac{x+4}{x-3}$의 그래프는 다음 그림과 같고, 직선 $y=ax-3a$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 0)$을 지난다.

$y=ax-3a$
$=a(x-3)$



(i) 직선 $y=ax-3a$가 점 $(4,\ 8)$을 지날 때,

$8=4a-3a\quad \therefore a=8$

$\dfrac{4+4}{4-3}=8$

(ii) 직선 $y=ax-3a$가 점 $\left(7,\ \dfrac{11}{4}\right)$을 지날 때,

$\dfrac{7+4}{7-3}=\dfrac{11}{4}$

$\dfrac{11}{4}=7a-3a,\qquad 4a=\dfrac{11}{4}$

$\therefore a=\dfrac{11}{16}$

(i), (ii)에서 함수 $y=\dfrac{x+4}{x-3}\ (4\le x\le 7)$의 그래프와 직선 $y=ax-3a$가 만나려면

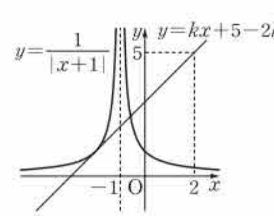
$\dfrac{11}{16}\le a\le 8$

따라서 $\alpha=\dfrac{11}{16}$, $\beta=8$이므로

$\alpha\beta=\dfrac{11}{2}$ 답 ③

46 $y=\dfrac{1}{|x+1|}=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & (x>-1)\\ -\dfrac{1}{x+1} & (x<-1)\end{cases}$

따라서 $y=\dfrac{1}{|x+1|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=kx+5-2k$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 5)$를 지난다.



$y=kx+5-2k$
$=k(x-2)+5$

(i) $k=0$일 때,

함수 $y=\dfrac{1}{|x+1|}$의 그래프와 직선 $y=5$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $k>0$일 때,

$k<0$일 때, 함수의 그래프와 직선은 항상 서로 다른 세 점에서 만난다.

함수 $y=\dfrac{1}{|x+1|}$의 그래프와 직선 $y=kx+5-2k$는 $x>-1$인 범위에서 항상 한 점에서 만나므로 서로 다른 두 점에서 만나려면 $x<-1$인 범위에서도 한 점에서 만나야 한다.

$-\frac{1}{x+1}=kx+5-2k$에서

$kx^2+5x-2kx+kx+5-2k=-1$

$\therefore kx^2+(5-k)x+6-2k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(5-k)^2-4k(6-2k)=0$

$9k^2-34k+25=0$

$(9k-25)(k-1)=0$

$\therefore k=\frac{25}{9}$ 또는 $k=1$

이때 직선 $y=kx+5-2k$의 y절편은 0보다 크므로

$k=1$

$5-2k>0$에서
$-2k>-5$
$\therefore k<\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$0+1=1$ 답 ①

47 점 P의 좌표를 $\left(k, \frac{10}{k}\right)$ $(k>0)$이라 하면

$Q(k, 0)$, $R\left(0, \frac{10}{k}\right)$

사각형 OQPR의 둘레의 길이는

$2\overline{PR}+2\overline{PQ}=2k+\frac{20}{k}$

이때 $k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2k+\frac{20}{k}\geq 2\sqrt{2k\cdot\frac{20}{k}}$

$=2\cdot 2\sqrt{10}$

$=4\sqrt{10}$ (단, 등호는 $k=\sqrt{10}$일 때 성립)

$2k=\frac{20}{k}$에서 $k^2=10$
$\therefore k=\sqrt{10}$ $(\because k>0)$

따라서 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{10}$이다. 답 ④

48 점 P의 좌표를 $\left(a, \frac{2}{a}\right)$ $(a>0)$라 하면 점 Q의 y좌표가 $\frac{2}{a}$이므로 $\frac{2}{a}=\frac{k}{x}$에서

$2x=ak$ $\quad\therefore x=\frac{ak}{2}$

$\therefore Q\left(\frac{ak}{2}, \frac{2}{a}\right)$

또 점 R의 x좌표가 a이므로 점 R의 좌표는

$\left(a, \frac{k}{a}\right)$

$\therefore \overline{PQ}=\frac{ak}{2}-a=a\left(\frac{k}{2}-1\right)$,

$\overline{PR}=\frac{k}{a}-\frac{2}{a}=\frac{k-2}{a}$

이때 삼각형 PQR의 넓이가 25이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{PR}=25$

$\frac{1}{2}\cdot a\left(\frac{k}{2}-1\right)\cdot\frac{k-2}{a}=25$

$\frac{(k-2)^2}{4}=25$, $\quad (k-2)^2=100$

$k-2=\pm 10$ $\quad\therefore k=12$ $(\because k>2)$ 답 12

49 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)$

$=\frac{3\cdot\frac{3x+2}{x-1}+2}{\frac{3x+2}{x-1}-1}$

$=\frac{\frac{9x+6+2(x-1)}{x-1}}{\frac{3x+2-(x-1)}{x-1}}$

$=\frac{\frac{11x+4}{x-1}}{\frac{2x+3}{x-1}}$

$=\frac{11x+4}{2x+3}$

이때 $(f\circ f)(k)=8$이므로

$\frac{11k+4}{2k+3}=8$, $\quad 11k+4=16k+24$

$-5k=20$ $\quad\therefore k=-4$ 답 -4

다른 풀이 $(f\circ f)(k)=f(f(k))=\frac{3f(k)+2}{f(k)-1}=8$에서

$3f(k)+2=8f(k)-8$

$-5f(k)=-10$ $\quad\therefore f(k)=2$

즉 $\frac{3k+2}{k-1}=2$이므로 $\quad 3k+2=2k-2$

$\therefore k=-4$

50 주어진 그래프에서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=3$이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

두 점근선의 교점인 (3, 3)을 지나고 기울기가 1인 직선

이때 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 주어진 그래프는 $y=f(x)$의 그래프이기도 하다.

즉

$f(x)=\frac{k}{x-3}+3$ $(k\neq 0)$ ...... ㉠

으로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 (1, 0)을 지나므로

$0=-\frac{k}{2}+3$, $\quad \frac{k}{2}=3$ $\quad\therefore k=6$

$k=6$을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\frac{6}{x-3}+3$

$f(x)=\frac{6}{x-3}+3$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{6}{x-3}+3\right)$

$=\frac{6}{\frac{6}{x-3}+3-3}+3=x$

따라서 함수 $f^{2n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{200}(x)=f^{2\cdot 100}(x)=f^2(x)$

$\therefore f^{200}(1)=f^2(1)=1$ 답 1

다른 풀이 주어진 그래프에서 $f^{-1}(1)=0$, $f^{-1}(0)=1$이므로

$f(0)=1$, $f(1)=0$

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(0)=1$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=0$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(0)=1$

$f^5(1)=(f\circ f^4)(1)=f(f^4(1))=f(1)=0$

$\vdots$

$\therefore f^n(1)=\begin{cases}0 & (n\text{은 홀수})\\ 1 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

$\therefore f^{200}(1)=1$

51 $f(x)=\dfrac{5x+b}{x+a}$에서 $y=\dfrac{5x+b}{x+a}$로 놓으면

$y(x+a)=5x+b,\qquad (y-5)x=-ay+b$

$\therefore x=\dfrac{-ay+b}{y-5}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\dfrac{-ax+b}{x-5}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-ax+b}{x-5}$

따라서 $\dfrac{-ax+b}{x-5}=\dfrac{2-2x}{x+c}$이므로

$a=2,\ b=2,\ c=-5$

$\therefore a+b+c=-1$ 답 -1

52 $y=\dfrac{2x-6}{x-4}$의 그래프와 $y=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$y=\dfrac{2x-6}{x-4}$에서 $\qquad y(x-4)=2x-6$

$(y-2)x=4y-6$

$\therefore x=\dfrac{4y-6}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\dfrac{4x-6}{x-2}$

따라서 $a=4,\ b=-6$이므로

$ab=-24$ 답 ①

53 두 직선 $y=x+2$, $y=-x-4$의 교점의 좌표는 $(-3,\ -1)$

$x+2=-x-4$에서
$2x=-6\quad \therefore x=-3$
$x=-3$을 $y=x+2$에 대입하면
$y=-1$

즉 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-3,\ -1)$에 대하여 대칭이므로 그 역함수의 그래프는 점 $(-1,\ -3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 점 $(-1,\ -3)$은 두 직선 $y=x+a$, $y=-x+b$의 교점이므로

$-3=-1+a,\ -3=1+b$

$\therefore a=-2,\ b=-4$

$\therefore a-b=2$ 답 2

54 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$에서 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$에서 $y=\dfrac{2x+1}{x+3}$로 놓으면

$(x+3)y=2x+1,\qquad (y-2)x=1-3y$

$\therefore x=\dfrac{1-3y}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\dfrac{1-3x}{x-2}$

따라서 $g(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$이므로

$g(3)=\dfrac{1-9}{3-2}=-8$

$g(-8)=\dfrac{1+24}{-8-2}=-\dfrac{5}{2}$

$(g\circ g)(3)=g(g(3))=g(-8)=-\dfrac{5}{2}$ 답 $-\dfrac{5}{2}$

55 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(-1)=(g^{-1}\circ f)(-1)$

$=g^{-1}(f(-1))$

$=g^{-1}(-1)$

$f(-1)=\dfrac{-1}{-2+3}=-1$

$g^{-1}(-1)=k$라 하면 $g(k)=-1$이므로

$-\dfrac{4k}{k-2}=-1,\qquad -4k=-k+2$

$-3k=2\qquad \therefore k=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(-1)=g^{-1}(-1)=-\dfrac{2}{3}$

답 ⑤

56 $(g\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ g^{-1})(-2)$

$=(g\circ f^{-1}\circ g\circ g^{-1})(-2)$

$=(g\circ f^{-1})(-2)$

$=g(f^{-1}(-2))$

$f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$이므로

$\dfrac{2k+1}{k+2}=-2,\qquad 2k+1=-2k-4$

$4k=-5\qquad \therefore k=-\dfrac{5}{4}$

따라서 $f^{-1}(-2)=-\dfrac{5}{4}$이므로

$(g\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ g^{-1})(-2)=g(f^{-1}(-2))$

$=g\left(-\dfrac{5}{4}\right)$

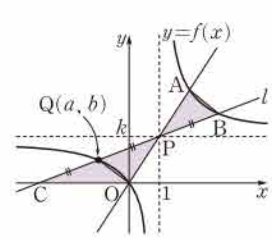
$=\dfrac{13}{14}$ 답 $\dfrac{13}{14}$

$g\left(-\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{-\frac{5}{4}-2}{-\frac{5}{2}-1}=\dfrac{13}{14}$

도전! 수능 기출

51쪽

01 1st 점 P가 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점임을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 직선 l과 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 Q$(a,\ b)$라 하면 점 P는 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점이므로 삼각형 APB와 삼각형 OPQ는 합동이다.

$y=f(x)$의 그래프는 점 P에 대하여 대칭이므로
$\overline{AP}=\overline{OP}$, $\overline{BP}=\overline{QP}$
또 $\angle APB=\angle OPQ$
(맞꼭지각)이므로
$\triangle APB\equiv\triangle OPQ$
(SAS 합동)

이때 $S_2=2S_1$이므로

$\overline{PB}=\overline{QP}=\overline{CQ}$

2nd 점 C의 좌표를 구한다.

$\overline{QP}=\overline{CQ}$에서 점 Q는 $\overline{CP}$의 중점이므로 점 C의 좌표를 $(c,\ 0)$이라 하면

$$a=\frac{c+1}{2},\ b=\frac{0+k}{2}$$

한편 점 Q는 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$$b=f(a)$$

즉 $\frac{k}{2}=\frac{k}{a-1}+k$이므로

$$-\frac{k}{2}=\frac{k}{a-1},\qquad a-1=-2$$

$$\therefore a=-1$$

$$\therefore Q\left(-1,\ \frac{k}{2}\right)$$

$a=\frac{c+1}{2}$에서 $\qquad -1=\frac{c+1}{2}$

$$c+1=-2 \qquad \therefore c=-3$$

$$\therefore C(-3,\ 0)$$

3rd $10k^2$의 값을 구한다.

직선 l은 두 점 $P(1,\ k)$, $C(-3,\ 0)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{k}{4}x+\frac{3}{4}k,\ 즉\ kx-4y+3k=0$$

원점과 직선 l 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+(-4)^2}}=1,\qquad |3k|=\sqrt{k^2+16}$$

$$9k^2=k^2+16,\qquad 8k^2=16$$

$$k^2=2 \qquad \therefore 10k^2=20$$

답 20

02 1st 주어진 도형의 방정식을 정리한 후 유리함수의 그래프의 성질을 이용한다.

$xy-2x-2y=k$에서 $\qquad (x-2)y=2x+k$

$$\therefore y=\frac{2x+k}{x-2}$$

$$y=\frac{2x+k}{x-2}=\frac{2(x-2)+4+k}{x-2}=\frac{4+k}{x-2}+2$$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=2,\ y=2$$

이므로 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 (2, 2)를 지나고 기울기가 1인 직선

2nd $\overline{OP}\times\overline{OQ}$의 값을 구한다.

이때 직선 $x+y=8$의 기울기가 -1이므로 이 직선과 함수 $y=\frac{2x+k}{x-2}$의 그래프의 두 교점 P, Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 Q의 좌표는 $(b,\ a)$이므로

$$ab=14$$

또 두 점 P, Q가 직선 $x+y=8$ 위의 점이므로

$$a+b=8$$

따라서 $\overline{OP}=\overline{OQ}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{OP}\times\overline{OQ}&=a^2+b^2\\&=(a+b)^2-2ab\\&=8^2-2\cdot14\\&=36\end{aligned}$$

답 36

다른 풀이 도형 $xy-2x-2y=k$와 직선 $x+y=8$의 두 교점 P, Q의 x좌표를 각각 a, b $(a<b)$라 하자.

$xy-2x-2y=k$에 $y=-x+8$을 대입하면

$$x(-x+8)-2x-2(-x+8)=k$$

$$\therefore x^2-8x+k+16=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 두 근이 a, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$ab=k+16$$

이때 $ab=14$이므로 $\qquad k+16=14$

$$\therefore k=-2$$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$$x^2-8x+14=0$$

$$\therefore x=4\pm\sqrt{2}$$

따라서 $P(4-\sqrt{2},\ 4+\sqrt{2})$, $Q(4+\sqrt{2},\ 4-\sqrt{2})$이므로

$$\overline{OP}\times\overline{OQ}=\overline{OP}^2=(4-\sqrt{2})^2+(4+\sqrt{2})^2=36$$

$\overline{OP}=\overline{OQ}$이므로 $\overline{OP}\times\overline{OQ}=\overline{OP}^2$

03 1st $a=1$일 때 유리함수 $y=f(x)$의 식과 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.

$a=1$일 때 $f(x)=\frac{2}{x-1}+2$이고, $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

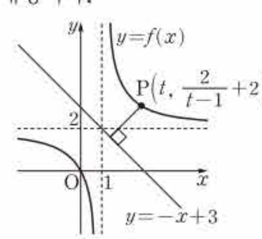
$$x=1,\ y=2$$

2nd $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P와 직선 $y=-x+3$ 사이의 거리의 최솟값을 구한다.

직선 $y=-x+3$은 기울기가 -1이고 두 점근선의 교점 (1, 2)를 지나므로 함수 $y=\frac{2}{x-1}+2$의 그래프는 직선 $y=-x+3$에 대하여 대칭이다.

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점을

$$P\left(t,\ \frac{2}{t-1}+2\right)\ (t>1)$$



함수 $y=\frac{2}{x-1}+2$의 그래프는 직선 $y=-x+3$에 대하여 대칭이므로 $x>1$인 경우만 생각해도 된다.

라 하면 점 P와 직선 $y=-x+3$, 즉 $x+y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|t+\frac{2}{t-1}+2-3\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|t-1+\frac{2}{t-1}\right|}{\sqrt{2}}$$

이때 $t>1$에서 $t-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}t-1+\frac{2}{t-1}&\geq2\sqrt{(t-1)\cdot\frac{2}{t-1}}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(단, 등호는 $t=1+\sqrt{2}$일 때 성립)

$t-1=\frac{2}{t-1}$에서 $(t-1)^2=2$, $t-1=\pm\sqrt{2}$, $\therefore t=1+\sqrt{2}$ $(\because t>1)$

따라서 구하는 거리의 최솟값은

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$$

답 ④

04 1st 세 점 A, B, P의 좌표를 구한다.

$y=\frac{k}{x-1}+3$에서

$y=0$이면 $x=1-\frac{k}{3}=\frac{3-k}{3}$이므로 $\qquad A\left(\frac{3-k}{3},\ 0\right)$

$x=0$이면 $y=3-k$이므로 $\quad$ $B(0,\ 3-k)$
두 점근선의 교점을 R라 하면 $\quad$ $R(1,\ 3)$
이때 선분 BP의 중점이 R이므로 $P(a,\ b)$라 하면

$\dfrac{0+a}{2}=1,\ \dfrac{3-k+b}{2}=3$

$\therefore a=2,\ b=3+k$

$\therefore P(2,\ 3+k)$

2nd ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $k=1$이면 $\quad$ $P(2,\ 4)$

3rd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 직선 AB의 기울기는

$$\frac{0-(3-k)}{\frac{3-k}{3}-0}=-3$$

직선 AP의 기울기는

$$\frac{0-(3+k)}{\frac{3-k}{3}-2}=\frac{-(3+k)}{\frac{3-k-6}{3}}=3$$

따라서 두 기울기의 합은

$-3+3=0$

4th ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $\square PBAQ$

$=\square PBOQ-\triangle OAB$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\{(3-k)+(3+k)\}\cdot 2-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3-k}{3}\cdot(3-k)$

$=6-\dfrac{(3-k)^2}{6}$

이때 삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{3}{2}$보다 작고, 사각형 PBAQ의 넓이가 자연수이므로 삼각형 OAB의 넓이는 1이어야 한다.

$\dfrac{(3-k)^2}{6}=1$에서 $\quad$ $(3-k)^2=6$

$3-k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore k=3-\sqrt{6}\ (\because 0<k<3)$

직선 BP의 기울기는 $\dfrac{(3+k)-(3-k)}{2-0}=k$이고

$0<k=3-\sqrt{6}<1$이므로 직선 BP의 기울기는 0과 1 사이의 값이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. $\quad$ 답 ⑤

Q BOX

(근호 안의 식의 값)≥ 0, (분모)$\neq 0$

$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$

$x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$을 대입한다.

점 A의 x좌표는 1보다 작고 점 B의 y좌표는 3보다 작으므로 $\triangle OAB$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 3=\dfrac{3}{2}$보다 작다.

$2<\sqrt{6}<3$이므로
$-3<-\sqrt{6}<-2$
$\therefore 0<3-\sqrt{6}<1$

06 무리식과 무리함수

W 52쪽

01 $12-3x\geq 0$이므로 $\quad$ $x\leq 4$
이때 $x-2\neq 0$이어야 하므로 $\quad$ $x\neq 2$

$\therefore x<2$ 또는 $2<x\leq 4$

따라서 자연수 x는 1, 3, 4이므로 구하는 합은

$1+3+4=8$ $\quad$ 답 ②

02 $x+2\geq 0,\ 1-x\geq 0$이므로

$x\geq -2,\ x\leq 1$

$\therefore\ -2\leq x\leq 1$

$-2\leq x\leq 1$일 때, $8-5x>0,\ x-5<0$이므로

$|8-5x|-\sqrt{x^2-10x+25}$
$=|8-5x|-\sqrt{(x-5)^2}$
$=8-5x-\{-(x-5)\}$
$=8-5x+x-5$
$=-4x+3$ $\quad$ 답 $-4x+3$

03 $\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}+\dfrac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}=\dfrac{(\sqrt{2-x})^2+(\sqrt{2+x})^2}{\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}}$
$=\dfrac{(2-x)+(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}$
$=\dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$
$=\dfrac{4}{\sqrt{4-\frac{7}{4}}}=\dfrac{8}{3}$

답 ③

04 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$
$=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$ $\quad$ ...... ㉠

이때

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(2\sqrt{5})^2-4\cdot 4=4$

이므로 $\quad$ $x-y=2\ (\because x>y)$

따라서 ㉠에서

$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{5}+2\cdot 2}{2}=\sqrt{5}+2$ $\quad$ 답 $\sqrt{5}+2$

05 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$
$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$
$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}$
$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$
$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$
$\quad+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
$=\sqrt{n+1}-1$

이때 $6<\sqrt{n+1}-1<8$이므로

$$7<\sqrt{n+1}<9, \qquad 49<n+1<81$$

$$\therefore\ 48<n<80$$

따라서 자연수 n의 최댓값은 79, 최솟값은 49이므로 구하는 합은

$$79+49=128$$ 답 ⑤

06 $y-x=-2\sqrt{3}$, $xy=4$이므로

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{y-x}{\sqrt{xy}}=\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$ 답 $-\sqrt{3}$

07 $x=\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}=\dfrac{2(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\sqrt{6}+2$,

$y=\dfrac{2}{\sqrt{6}+2}=\dfrac{2(\sqrt{6}-2)}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}=\sqrt{6}-2$이므로

$$x+y=2\sqrt{6},\ x-y=4$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\\&=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\\&=\frac{x-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+y}{x-y}\\&=\frac{x+y}{x-y}\\&=\frac{2\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$ 답 ④

08 $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}$,

$y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}$이므로

$$x+y=4,\ xy=1$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}&=\frac{x^3+y^3}{xy}\\&=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}\\&=\frac{4^3-3\cdot1\cdot4}{1}\\&=52\end{aligned}$$ 답 52

09 $x=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=3+2\sqrt{2}$,

$y=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=3-2\sqrt{2}$이므로

$$x+y=6,\ xy=1$$

이때

$$\begin{aligned}(\sqrt{3x}-\sqrt{3y})^2&=3x+3y-2\sqrt{9xy}\\&=3(x+y)-6\sqrt{xy}\\&=3\cdot6-6\cdot1=12\end{aligned}$$

이고 $x>y$에서 $\sqrt{3x}>\sqrt{3y}$이므로

$$\sqrt{3x}-\sqrt{3y}>0$$

$$\therefore\ \sqrt{3x}-\sqrt{3y}=2\sqrt{3}$$ 답 ②

Q BOX

10 $5x+a\ge0$에서 $\quad x\ge-\dfrac{a}{5}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\ge-\dfrac{a}{5}\right\}$이므로

$$-\frac{a}{5}=-1 \qquad \therefore\ a=5$$

또 함수 $y=-\sqrt{5x+5}+b$에서 $-\sqrt{5x+5}\le0$이므로 치역은

$$\{y\,|\,y\le b\} \qquad \therefore\ b=4$$

함수 $y=-\sqrt{5x+5}+4$의 그래프가 점 $(4,\ k)$를 지나므로

$$k=-5+4=-1$$ 답 ②

11 $y=\dfrac{ax-5}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab-5}{x+b}=\dfrac{-ab-5}{x+b}+a$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-b,\ y=a$$

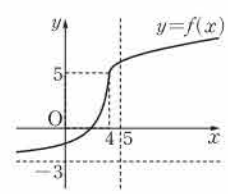
$$\therefore\ a=-3,\ b=-6$$

따라서 함수 $y=\sqrt{ax-3b}-1$, 즉 $y=\sqrt{-3x+18}-1$의 정의역은 $\{x\,|\,x\le6\}$이므로 정의역에 속하는 자연수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다. 답 ③

$-3x+18\ge0$에서 $x\le6$

12 $x<4$일 때,

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{-3x+7}{x-5}=\frac{-3(x-5)-8}{x-5}\\&=-\frac{8}{x-5}-3\end{aligned}$$



조건 ㈎에서 함수 $f(x)$는 일대일함수이고, 조건 ㈏에서 함수 $f(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y>-3\}$이므로 함수 $f(x)=\sqrt{x-4}+a\ (x\ge4)$의 그래프는 위의 그림과 같이 점 $(4,\ 5)$를 지나야 한다.

즉 $5=\sqrt{4-4}+a$이므로 $\quad a=5$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{-3x+7}{x-5} & (x<4)\\ \sqrt{x-4}+5 & (x\ge4)\end{cases}$$

$f(-3)=\dfrac{9+7}{-3-5}=-2$이므로 $f(p)-9=f(-3)$에서

$$f(p)=f(-3)+9=-2+9=7$$

즉 $\sqrt{p-4}+5=7$에서 $\quad \sqrt{p-4}=2$

$$p-4=4 \qquad \therefore\ p=8$$ 답 8

$f(p)=7\ge5$이므로 $p\ge4$이다. 따라서 $f(x)=\sqrt{x-4}+5$에 $x=p$를 대입한다.

13 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\sqrt{a(x-4)}-1=\sqrt{ax-4a}-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$$1=\sqrt{-2a}-1, \qquad \sqrt{-2a}=2$$

$$-2a=4 \qquad \therefore\ a=-2$$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$y=\sqrt{-2x+8}-1$$

따라서 $b=8$, $c=-1$이므로

$abc=16$ 답 ⑤

14 $y=-\sqrt{x-5}-1$의 그래프를 x축의 방향으로 $-p$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-\sqrt{x+p-5}-1+3=-\sqrt{x+p-5}+2$$

이 식에 $x=0$을 대입하면

$$y=-\sqrt{p-5}+2$$

이때 그래프의 y절편이 음수이므로

$$-\sqrt{p-5}+2<0, \qquad \sqrt{p-5}>2$$

$$p-5>4 \qquad \therefore p>9$$

답 $p>9$

15 $y=\sqrt{3x+1}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\sqrt{3(x+3)+1}-2-5=\sqrt{3x+10}-7$$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

x 대신 $-x$를 대입한다.

$$y=\sqrt{-3x+10}-7$$

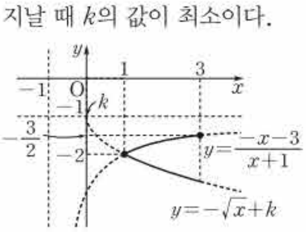
따라서 $a=-3$, $b=10$, $c=-7$이므로

$a+b+c=0$ 답 0

16 $y=\dfrac{-x-3}{x+1}=\dfrac{-(x+1)-2}{x+1}=-\dfrac{2}{x+1}-1$

이므로 $y=\dfrac{-x-3}{x+1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $1\le x\le 3$에서 $y=\dfrac{-x-3}{x+1}$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $y=-\sqrt{x}+k$의 그래프가 점 $(1, -2)$를 지날 때 k의 값이 최소이다.



즉 $-2=-1+k$에서 $\qquad k=-1$

따라서 k의 최솟값은 -1이다. 답 -1

17 $y=-\sqrt{-3x+5}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-\sqrt{-3(x-a)+5}+2+b$$

$$=-\sqrt{-3\left(x-a-\frac{5}{3}\right)}+2+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식은

$$y=-\sqrt{-3(x-3)}+5$$

이 식이 ㉠과 일치하므로

$$-a-\frac{5}{3}=-3, \ 2+b=5$$

따라서 $a=\dfrac{4}{3}$, $b=3$이므로

$ab=4$ 답 ⑤

18 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=2$이므로 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x-4}+2 \ (k\neq 0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$$0=\frac{k}{1-4}+2, \qquad \frac{k}{3}=2$$

$$\therefore k=6$$

$k=6$을 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{6}{x-4}+2=\frac{6+2(x-4)}{x-4}=\frac{2x-2}{x-4}$$

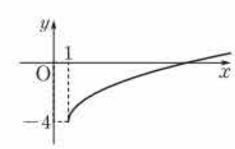
이므로 $\qquad a=2$, $b=-2$, $c=-4$

$y=\sqrt{ax+b}+c$에서

$$y=\sqrt{2x-2}-4=\sqrt{2(x-1)}-4$$

이므로 $y=\sqrt{2x-2}-4$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제4사분면을 지난다. 답 ①



19 ㄱ. $1-x\ge 0$에서 $x\le 1$이므로 정의역은

$\{x\,|\,x\le 1\}$

$\sqrt{1-x}\ge 0$에서 $\sqrt{1-x}+3\ge 3$이므로 치역은

$\{y\,|\,y\ge 3\}$

ㄴ. $y=\sqrt{1-x}+3=\sqrt{-(x-1)}+3$

이므로 $y=\sqrt{1-x}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐진다.

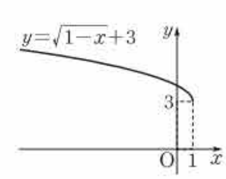
$y=\sqrt{1-(x+1)}+3-3$ 에서 $y=\sqrt{-x}$

ㄷ. $x=-3$, $y=1$을 주어진 함수의 식에 대입하면

$1\neq\sqrt{1+3}+3$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(-3, 1)$을 지나지 않는다.

ㄹ. $y=\sqrt{1-x}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지난다.



이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

20 ① $a(x+2)\ge 0$에서 $a>0$이므로 $\qquad x\ge -2$

따라서 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -2\}$이다.

② $-\sqrt{a(x+2)}\le 0$이므로 치역은 $\{y|y\le 0\}$이다.

③ $a<0$이면 정의역은 $\{x|x\le -2\}$, 치역은
$\{y|y\le 0\}$이므로 그래프는 제3사분면만을 지난다.

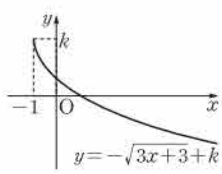
④ $y=-\sqrt{a(-x+2)}$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

답 ⑤

21 $y=-\sqrt{3x+3}+k=-\sqrt{3(x+1)}+k$

이므로 $y=-\sqrt{3x+3}+k$의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\sqrt{3x+3}+k$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로



$-\sqrt{3}+k\ge 0$

$\therefore k\ge\sqrt{3}$

따라서 정수 k의 최솟값은 2이다.

답 2

원점은 어느 사분면에도 속하지 않으므로 주어진 그래프가 원점을 지나는 경우에는 제3사분면을 지나지 않음에 주의한다.

22 $y=\sqrt{-3x+a}+1=\sqrt{-3\left(x-\frac{a}{3}\right)}+1$

이므로 $y=\sqrt{-3x+a}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{a}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\le x\le 1$에서 $y=\sqrt{-3x+a}+1$은

$x=-4$일 때 최댓값 $\sqrt{12+a}+1$,

$x=1$일 때 최솟값 $\sqrt{-3+a}+1$

을 갖는다.

즉 $\sqrt{12+a}+1=5$이므로

$\sqrt{12+a}=4,\qquad 12+a=16$

$\therefore a=4$

따라서 구하는 최솟값은

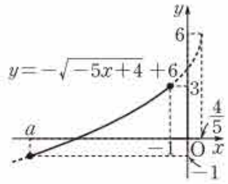
$\sqrt{-3+4}+1=2$

답 2

23 $y=-\sqrt{-5x+4}+6=-\sqrt{-5\left(x-\frac{4}{5}\right)}+6$

이므로 $y=-\sqrt{-5x+4}+6$의 그래프는 $y=-\sqrt{-5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{5}$만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a\le x\le -1$에서 $y=-\sqrt{-5x+4}+6$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때 최댓값 3,

$x=a$일 때 최솟값 $-\sqrt{-5a+4}+6$

을 갖는다.

즉 $b=3$, $-\sqrt{-5a+4}+6=-1$이므로

$-\sqrt{-5a+4}+6=-1$에서 $\qquad\sqrt{-5a+4}=7$

$-5a+4=49,\qquad -5a=45$

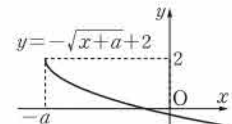
$\therefore a=-9$

$\therefore a+b=-6$

답 ①

24 $y=-\sqrt{x+a}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$y=-\sqrt{x+a}+2$의 그래프가 제3사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $a>0$이어야 하고, $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로



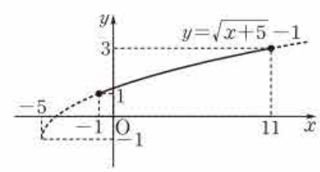
$-\sqrt{a}+2<0,\qquad \sqrt{a}>2$

$\therefore a>4$

따라서 $n=5$이므로 이것을 $y=\sqrt{x+n}-1$에 대입하면

$y=\sqrt{x+5}-1$

$n-6\le x\le n+6$, 즉 $-1\le x\le 11$에서 $y=\sqrt{x+5}-1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x=11$일 때 최댓값은 3이다.

답 3

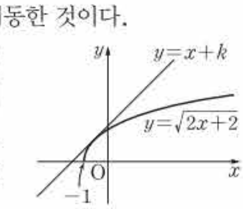
$\sqrt{11+5}-1=3$

25 $y=\sqrt{2x+2}=\sqrt{2(x+1)}$

이므로 $y=\sqrt{2x+2}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.

직선 $y=x+k$가 $y=\sqrt{2x+2}$의 그래프에 접할 때,



$\sqrt{2x+2}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x+2=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-2)=0$

$-2k+3=0,\qquad -2k=-3$

$\therefore k=\frac{3}{2}$

따라서 $y=\sqrt{2x+2}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$k\le\frac{3}{2}$

답 $k\le\frac{3}{2}$

26 함수 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 중 한 점의 x좌표가 -2이므로

직선 $y=x$ 위의 점이므로 y좌표도 -2이다.

$-\sqrt{-2a}=-2, \qquad -2a=4$

$\therefore a=-2$

따라서 $y=-\sqrt{-2x+b}$의 그래프가 직선 $y=x+1$에 접하므로 $-\sqrt{-2x+b}=x+1$의 양변을 제곱하면

$-2x+b=x^2+2x+1$

$\therefore x^2+4x+1-b=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(1-b)=0$

$3+b=0 \qquad \therefore b=-3$

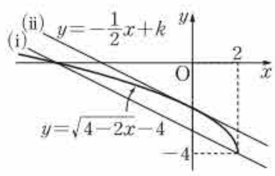
$\therefore a-b=1$

답 ④

27 $y=\sqrt{4-2x}-4=\sqrt{-2(x-2)}-4$

이므로 $y=\sqrt{4-2x}-4$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 점 $(2, -4)$를 지날 때,

$-4=-1+k \qquad \therefore k=-3$

(ii) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 $y=\sqrt{4-2x}-4$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{4-2x}-4=-\frac{1}{2}x+k$에서

$\sqrt{4-2x}=-\frac{1}{2}x+k+4$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4-2x=\frac{1}{4}x^2-(k+4)x+(k+4)^2$

$\therefore x^2-4(k+2)x+4k^2+32k+48=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(k+2)\}^2-(4k^2+32k+48)=0$

$-16k-32=0 \qquad \therefore k=-2$

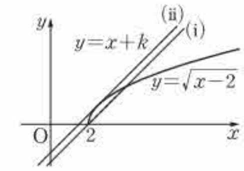
(i), (ii)에서 $y=\sqrt{4-2x}-4$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 한 점에서 만나려면

$k<-3$ 또는 $k=-2$

이므로 실수 k의 값이 아닌 것은 ④이다. 답 ④

28 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때,

$0=2+k \qquad \therefore k=-2$

(ii) 직선 $y=x+k$가 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{x-2}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x-2=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2+2)=0$

$-4k-7=0, \qquad -4k=7$

$\therefore k=-\frac{7}{4}$

(i), (ii)에서

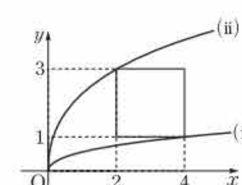
$$f(k)=\begin{cases} 0 & \left(k>-\frac{7}{4}\right) \\ 1 & \left(k=-\frac{7}{4} \text{ 또는 } k<-2\right) \\ 2 & \left(-2\le k<-\frac{7}{4}\right) \end{cases}$$

$\therefore f\left(-\frac{9}{4}\right)-f(-2)+f\left(-\frac{7}{4}\right)$

$=1-2+1=0$

답 0

29 네 점 $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(4, 3)$을 꼭짓점으로 하는 직사각형은 오른쪽 그림과 같다.



(i) $y=\sqrt{ax}$의 그래프가 점 $(4, 1)$을 지날 때,

$a>0$이므로 정의역은 $\{x|x\ge 0\}$이다.

$1=\sqrt{4a}, \qquad 1=4a$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

(ii) $y=\sqrt{ax}$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지날 때,

$3=\sqrt{2a}, \qquad 9=2a$

$\therefore a=\frac{9}{2}$

(i), (ii)에서 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 직사각형이 만나도록 하는 a의 값의 범위는

$\frac{1}{4}\le a\le \frac{9}{2}$

따라서 $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{9}{2}$이므로

$\frac{q}{p}=\frac{9}{2}\div\frac{1}{4}=18$

답 ④

30 점 B의 좌표가 $(a, 2\sqrt{a})$이므로 점 C의 y좌표가 $2\sqrt{a}$이다.

즉 $2\sqrt{a}=\sqrt{2x}$에서

$4a=2x \qquad \therefore x=2a$

따라서 점 C의 좌표가 $(2a,\ 2\sqrt{a})$이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{a},\ \overline{BC}=a$

$2a-a=a$

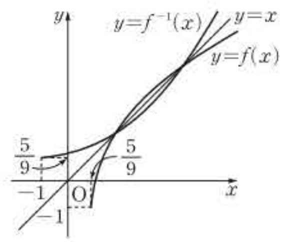
이때 사각형 ABCD가 정사각형이므로

$2\sqrt{a}=a,\qquad a^2-4a=0$

$a(a-4)=0\qquad \therefore a=4\ (\because a>0)$

따라서 사각형 ABCD는 한 변의 길이가 4인 정사각형이므로 구하는 넓이는 $\quad 4^2=16$ 답 16

31 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x),\ y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=\sqrt{9x-5}-1$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{9x-5}-1=x$에서 $\qquad \sqrt{9x-5}=x+1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$9x-5=x^2+2x+1,\qquad x^2-7x+6=0$

$(x-1)(x-6)=0\qquad \therefore x=1$ 또는 $x=6$

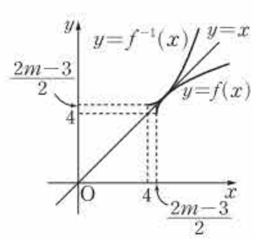
따라서 교점의 좌표가 $(1,\ 1),\ (6,\ 6)$이므로 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(6-1)^2+(6-1)^2}=5\sqrt{2}$ 답 ②

32 $y=\sqrt{2x+3}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{2(x-m)+3}+4$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x),\ y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같이 직선 $y=x$에 접한다.



$\sqrt{2(x-m)+3}+4=x$에서

$\sqrt{2(x-m)+3}=x-4$

위의 식의 양변을 제곱하면

$2(x-m)+3=x^2-8x+16$

$\therefore x^2-10x+2m+13=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-5)^2-(2m+13)=0$

$-2m+12=0\qquad \therefore m=6$ 답 6

33 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ 2)$, $(0,\ 3)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(2,\ 1),\ (3,\ 0)$을 지난다.

또 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역이 $\{x|x\le1\}$, 치역이 $\{y|y\ge2\}$이므로 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x|x\ge2\}$, 치역은 $\{y|y\le1\}$이다.

즉 $y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식이므로

$\frac{b}{a}=-2,\ c=1$

또 $y=-\sqrt{ax+b}+1$의 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{3a+b}+1,\qquad \sqrt{3a+b}=1$

$\therefore 3a+b=1$

$\frac{b}{a}=-2$에서 $b=-2a$를 위의 식에 대입하면

$3a-2a=1\qquad \therefore a=1$

$\therefore b=-2$

$\therefore abc=-2$ 답 -2

다른 풀이 $f^{-1}(x)=k(x-1)^2+2\ (k>0,\ x\le1)$라 하면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 2)$이고 아래로 볼록한 이차함수의 그래프 중 $x\le1$인 부분이다.

$3=k+2\qquad \therefore k=1$

$\therefore f^{-1}(x)=(x-1)^2+2\ (x\le1)$

$y=(x-1)^2+2$로 놓으면 $\quad y-2=(x-1)^2$

$x-1=\pm\sqrt{y-2}$

$x-1=-\sqrt{y-2}\ (\because x\le1)$

$\therefore x=-\sqrt{y-2}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=-\sqrt{x-2}+1$

$\therefore f(x)=-\sqrt{x-2}+1$

따라서 $a=1,\ b=-2,\ c=1$이므로

$abc=-2$

34 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(8)=k$라 하면 $\qquad f(k)=8$

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$2\sqrt{k+4}=8,\qquad \sqrt{k+4}=4$

$k+4=16\qquad \therefore k=12$

$g(12)=m$이라 하면 $\qquad f(m)=12$

$2\sqrt{m+4}=12,\qquad \sqrt{m+4}=6$

$m+4=36\qquad \therefore m=32$

$\therefore (g\circ g)(8)=g(g(8))=g(12)=32$ 답 ③

35 $f^{-1}(g(2x))=-x$에서

$g(2x)=f(-x)=\sqrt{-2x+4}$

$\therefore g(1)=\sqrt{-2\cdot\frac{1}{2}+4}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

$g(2x)=\sqrt{-2x+4}$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입한다.

36 $(g\circ f^{-1})(a)=g(f^{-1}(a))=0$에서

$f^{-1}(a)=g^{-1}(0)$

$g^{-1}(0)=k$라 하면 $\qquad g(k)=0$

$\sqrt{k+2}-2=0,\qquad \sqrt{k+2}=2$

$k+2=4 \qquad \therefore k=2$

즉 $f^{-1}(a)=2$이므로

$a=f(2)=\dfrac{-4-3}{2+2}=-\dfrac{7}{4}$ 답 ①

도전! 수능 기출

W 58쪽

01 **1st** 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

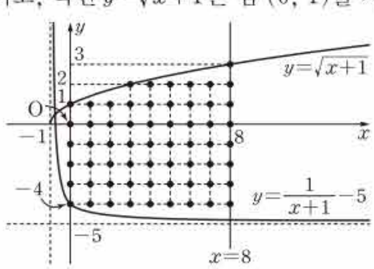
ㄱ. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-5$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=-5$이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=-5$와 만나지 않는다.

2nd $\sqrt{x+1}$이 정수가 되도록 하는 x의 값을 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $0\le x\le 8$일 때, 함수 $g(x)=\sqrt{x+1}$에서 $x=0$, 3, 8일 때만 함숫값이 각각 1, 2, 3으로 정수이다.
따라서 y좌표가 정수인 점의 개수는 3이다.

3rd 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 다음 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{1}{x+1}-5$는 점 $(0, -4)$를 지나고, 곡선 $y=\sqrt{x+1}$은 점 $(0, 1)$을 지난다.



$0\le x\le 8$에서 곡선 $y=\dfrac{1}{x+1}-5$는 $x=0$일 때만 y좌표가 정수이고 곡선 $y=\sqrt{x+1}$은 $x=0$, 3, 8일 때만 y좌표가 정수이다.

두 곡선 $y=\dfrac{1}{x+1}-5$, $y=\sqrt{x+1}$과 두 직선 $x=0$, $x=8$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$x=0$, 1, 2일 때 각각 6

$x=3$, 4, 5, 6, 7일 때 각각 7

$x=8$일 때 8

이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 점의 개수는

$3\cdot 6+5\cdot 7+1\cdot 8=61$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

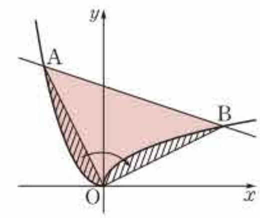
02 **1st** 두 직선 OA, OB와 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같음을 이용한다.

W 56~58쪽

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 함수 $y=x^2\ (x\le 0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하므로 점 A는 점 B로 이동한다.

Q BOX: 점 A$(-2, 4)$를 y축에 대하여 대칭이동하면 점 $(2, 4)$이고 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 점 $(4, 2)$이다.

즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 영역의 넓이는 서로 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이와 같다.



2nd 함수 $f(x)$의 그래프와 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

삼각형 AOB에서 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 높이는 원점과 직선 $x+3y-10=0$ 사이의 거리이다.

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{10}$이고, 높이는

$\dfrac{|-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$이므로 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=10$

답 10

03 **1st** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 관계를 파악한다.

함수 $y=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k\ (x\ge 0)$는 집합 $\{x|x\ge 0\}$에서 집합 $\left\{y\middle|y\ge\dfrac{1}{5}k\right\}$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k$로 놓으면

$\dfrac{1}{5}x^2=y-\dfrac{1}{5}k, \qquad x^2=5y-k$

$\therefore x=\sqrt{5y-k}\ (\because x\ge 0)$

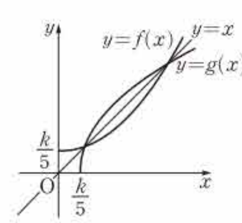
x와 y를 서로 바꾸면

$y=\sqrt{5x-k}$

즉 함수 $g(x)=\sqrt{5x-k}$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

2nd 정수 k의 개수를 구한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k=x$에서

$x^2-5x+k=0$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$k\ge 0$, $D=(-5)^2-4k>0$ (두 근의 곱)≥ 0

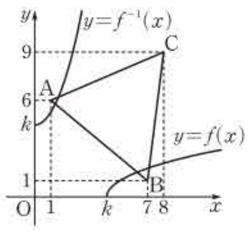
$\therefore 0\le k<\dfrac{25}{4}$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, ⋯, 6의 7개이다.

답 ②

04 (1st) 곡선 $y=f(x)$가 어떤 점을 지날 때 k의 값이 최대이면서 삼각형 ABC와 만나는지 파악한다.

$f(x)=\sqrt{x-k}$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k의 값은 $y=f(x)$의 그래프가 점 B(7, 1)을 지날 때 최대이다.



$1=\sqrt{7-k}$에서 $1=7-k$

$\therefore k=6$

즉 $k>6$이면 $y=f(x)$의 그래프와 삼각형 ABC는 만나지 않는다.

(2nd) 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 어떤 점을 지날 때 k의 값이 최대이면서 삼각형 ABC와 만나는지 파악한다.

$y=\sqrt{x-k}$에서 $y^2=x-k$

$\therefore x=y^2+k$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x^2+k$

따라서 함수 $f(x)$의 역함수는 $y=x^2+k$ $(x\geq0)$이고, 이 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k의 값은 $y=x^2+k$ $(x\geq0)$의 그래프가 점 A(1, 6)을 지날 때 최대이다.

$6=1+k$에서 $k=5$

즉 $k>5$이면 $y=x^2+k$ $(x\geq0)$의 그래프와 삼각형 ABC는 만나지 않는다.

(3rd) 실수 k의 최댓값을 구한다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 5이다. 답 ②

Q BOX

함수 $y=\sqrt{x-k}$의 치역은 $\{y\,|\,y\geq0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq0\}$이다.

'또는', '~이거나' ➡ 합의 법칙 이용

서로소 ➡ 최대공약수가 1인 두 자연수

원소의 개수가 n인 집합 A의 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수 ➡ 2^{n-k} (단, $k<n$)

07 순열과 조합

W 59쪽

01 꺼낸 공에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면

(ⅰ) 세 수의 곱이 4가 되는 경우는
(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1),
(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)의 6가지

(ⅱ) 세 수의 곱이 6이 되는 경우는
(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3),
(2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)의 6가지

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$6+6=12$ 답 12

02 바닥에 오는 면에 적힌 두 수를 순서쌍으로 나타내면

(ⅰ) 합이 13인 경우는
(5, 8), (6, 7), (7, 6), (8, 5)의 4가지

(ⅱ) 합이 14인 경우는
(6, 8), (7, 7), (8, 6)의 3가지

(ⅲ) 합이 15인 경우는
(7, 8), (8, 7)의 2가지

(ⅳ) 합이 16인 경우는
(8, 8)의 1가지

이상에서 구하는 경우의 수는

$4+3+2+1=10$ 답 ②

03 100을 소인수분해하면 $100=2^2\cdot5^2$이므로 100과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니어야 한다.

2의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는 50

5의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는 20

10의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는 10

2의 배수 또는 5의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는

$50+20-10=60$

따라서 100과 서로소인 수가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는

$100-60=40$ 답 40

04 집합 X의 부분집합 중에서 모든 원소의 곱이 10의 배수이려면 5를 반드시 원소로 갖고 2 또는 4를 원소로 가져야 한다.

2와 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

4와 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

2, 4, 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

따라서 구하는 집합의 개수는

$8+8-4=12$ 답 ③

05 (i) $c=0$일 때,

$a+2b=15$이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(15, 0, 0)$, $(13, 1, 0)$, $(11, 2, 0)$, $\cdots$,

$(1, 7, 0)$의 8개

(ii) $c=1$일 때,

$a+2b=11$이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(11, 0, 1)$, $(9, 1, 1)$, $(7, 2, 1)$, $\cdots$,

$(1, 5, 1)$의 6개

(iii) $c=2$일 때,

$a+2b=7$이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(7, 0, 2)$, $(5, 1, 2)$, $(3, 2, 2)$, $(1, 3, 2)$의 4개

(iv) $c=3$일 때,

$a+2b=3$이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(3, 0, 3)$, $(1, 1, 3)$의 2개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$8+6+4+2=20$ 답 ⑤

Q BOX

계수의 절댓값이 가장 큰 c의 값을 기준으로 경우를 나누어 생각한다. 이때 c는 음이 아닌 정수이므로 c의 값이 될 수 있는 것은 0, 1, 2, 3이다.

06 $|x-y|\le 1$에서

$-1\le x-y\le 1$

$\therefore x-y=-1$ 또는 $x-y=0$ 또는 $x-y=1$

(i) $x-y=-1$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$의 3개

(ii) $x-y=0$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$의 4개

(iii) $x-y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$의 3개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$3+4+3=10$ 답 ⑤

07 이차함수 $y=x^2+(a+b)x+ab+2$의 그래프가 x축과 만나려면 이차방정식 $x^2+(a+b)x+ab+2=0$이 실근을 가져야 한다.

이때 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+b)^2-4(ab+2)\ge 0$

$a^2+b^2-2ab-8\ge 0$

$\therefore (a-b)^2\ge 8$

(i) $(a-b)^2=9$, 즉 $a-b=\pm 3$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$의 6개

(ii) $(a-b)^2=16$, 즉 $a-b=\pm 4$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 5)$, $(2, 6)$, $(5, 1)$, $(6, 2)$의 4개

(iii) $(a-b)^2=25$, 즉 $a-b=\pm 5$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 6)$, $(6, 1)$의 2개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$6+4+2=12$ 답 12

쌤 한마디

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)

③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

08 집합 A의 각 원소에 대응되는 집합 B의 원소가 각각 a, b, c의 3개이므로 구하는 함수의 개수는

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$ 답 81

09 $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$

$a+b$의 값이 홀수이려면 a가 홀수, b가 짝수이거나 a가 짝수, b가 홀수이어야 한다.

(i) a가 홀수, b가 짝수일 때, 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3\cdot 2=6$

(ii) a가 짝수, b가 홀수일 때, 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1\cdot 2=2$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$6+2=8$ 답 ③

10 $(a+b)^3(c+d)=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(c+d)$에서 a^3, $3a^2b$, $3ab^2$, b^3에 곱해지는 항이 각각 c, d의 2개이므로 $(a+b)^3(c+d)$의 전개식의 항의 개수는

$4\cdot 2=8$

$(e+f)(x+y+z)$에서 e, f에 곱해지는 항이 각각 x, y, z의 3개이므로 $(e+f)(x+y+z)$의 전개식의 항의 개수는

$2\cdot 3=6$

따라서 구하는 항의 개수는

$8+6=14$ 답 ③

11 $180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$, $320=2^6\cdot 5$이므로 180과 320의 최대공약수는

$2^2\cdot 5$

따라서 180과 320의 양의 공약수의 개수는 $2^2\cdot 5$의 양의 약수의 개수와 같으므로 구하는 공약수의 개수는

$(2+1)(1+1)=6$ 답 6

12 600을 소인수분해하면 $600=2^3\cdot 3\cdot 5^2$

600의 양의 약수 중 홀수의 개수는 $3\cdot 5^2$의 양의 약수의 개수와 같으므로 구하는 약수의 개수는

$(1+1)(2+1)=6$ 답 ①

13 336을 소인수분해하면 $336=2^4\cdot 3\cdot 7$

336의 양의 약수 중 짝수의 개수는 $2^3\cdot 3\cdot 7$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$a=(3+1)(1+1)(1+1)=16$

336의 양의 약수 중 짝수인 수, 즉 2의 배수인 수는 소인수분해했을 때 2를 반드시 소인수로 갖는다. 따라서 $2^3\cdot 3\cdot 7$의 양의 약수에 각각 2를 곱한 것이 336의 양의 약수 중 짝수이다.

336의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는 $2^4 \cdot 7$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$b=(4+1)(1+1)=10$

$\therefore a-b=6$ 답 6

> **Q BOX**
> 336의 양의 약수 중 3의 배수인 수는 소인수분해 했을 때 3을 반드시 소인수로 갖는다.
> 따라서 $2^4 \cdot 7$의 양의 약수에 각각 3을 곱한 것이 336의 양의 약수 중 3의 배수이다.

14 50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개의 2가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$5 \cdot 3 \cdot 2-1=29$ 답 29

15 50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로

$p=4 \cdot 4 \cdot 3-1=47$

100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액과 50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 3개를 50원짜리 동전 6개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 9개, 500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, $\cdots$, 450원의 10가지

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로

$q=10 \cdot 3-1=29$

$\therefore p-q=18$ 답 ③

16 (i) A → C로 가는 경우의 수는 1

(ii) A → B → C로 가는 경우의 수는

$4 \cdot 2=8$

(iii) A → D → C로 가는 경우의 수는

$3 \cdot 3=9$

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+8+9=18$ 답 18

17 (i) P → Q → R로 가는 경우의 수는

$3 \cdot 3=9$

(ii) P → S → R로 가는 경우의 수는

$2 \cdot 2=4$

(iii) P → Q → S → R로 가는 경우의 수는

$3 \cdot n \cdot 2=6n$

(iv) P → S → Q → R로 가는 경우의 수는

$2 \cdot n \cdot 3=6n$

이상에서 P 지점에서 출발하여 R 지점으로 가는 경우의 수는

$9+4+6n+6n=12n+13$

즉 $12n+13=61$이므로

$12n=48 \qquad \therefore n=4$ 답 4

18 B에 칠할 수 있는 색은 n가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 $(n-1)$가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 $(n-1)$가지이므로

$n(n-1)(n-1)=80=5 \cdot 4 \cdot 4$

$\therefore n=5$ 답 5

19 D에 칠할 수 있는 색은 5가지, A에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 D, A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 D, A에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 D, B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3=540$ 답 ②

20 (i) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3=180$

(ii) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2=240$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$180+240=420$ 답 420

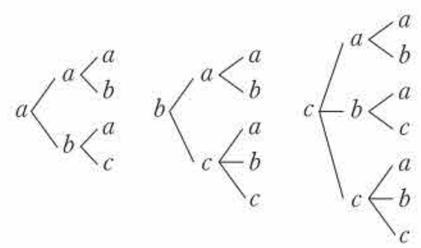
> 규칙성을 찾기 어려운 경우의 수를 구할 때에는 수형도를 이용하여 중복되지 않고 빠짐없이 모든 경우를 나열하여 구한다.

21 A, B, C, D의 휴대전화를 각각 a, b, c, d라 할 때, A의 사물함에는 b를 넣고, B, C, D의 사물함에는 자신의 휴대전화를 넣지 않는 경우를 수형도로 나타내면 위와 같다.

A	B	C	D
b	a	d	c
	c	d	a
	d	a	c

따라서 구하는 경우의 수는 3이다. 답 ①

22 주어진 조건에 의하여 a의 다음에는 a 또는 b, b의 다음에는 a 또는 c, c의 다음에는 a 또는 b 또는 c가 올 수 있다.
첫째 자리에 a, b, c가 오는 문자열의 경우를 각각 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 문자열의 개수는
$4+5+7=16$ 답 16

23 조각 케이크 3개를 일렬로 진열하는 경우의 수는
$3!=3\cdot2\cdot1=6$
샌드위치 3개를 일렬로 진열하는 경우의 수는
$3!=3\cdot2\cdot1=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot6=36$ 답 ③

24 n명 중에서 회장 1명과 부회장 1명을 뽑는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)$이므로
$n(n-1)=156=13\cdot12$
$\therefore n=13$ 답 ④

25 남학생 3명을 한 사람으로 생각하여 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$6!=720$
이때 남학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 남학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수는
$720\cdot6=4320$
즉 $10a=4320$이므로
$a=432$ 답 ②

26 소설책 n권을 한 권으로 생각하여 4권의 책을 일렬로 꽂는 경우의 수는
$4!=24$
소설책끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $n!$이므로
$24\cdot n!=144$,　　$n!=6=3\cdot2\cdot1$
$\therefore n=3$ 답 3

27 1학년 학생 2명을 한 사람으로 생각하여 4명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
이므로 1학년 학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수는
$24\cdot2=48$
같은 방법으로 하면 2학년 학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수는
$4!\cdot2!=24\cdot2=48$
1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명을 각각 한 사람으로 생각하여 3명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는
$3!=6$
1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!\cdot2!=2\cdot2=4$
이므로 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명이 동시에 이웃하게 세우는 경우의 수는
$6\cdot4=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$48+48-24=72$ 답 72

28 강아지 인형 4개를 일렬로 진열하는 경우의 수는
$4!=24$
강아지 인형 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 2개의 고양이 인형을 진열하는 경우의 수는

Q BOX: 강아지 인형을 ○라 하면
∨○∨○∨○∨○∨

${}_5\mathrm{P}_2=20$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\cdot20=480$ 답 ④

29 3개의 자음 c, r, g를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$3!=6$
자음 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 모음 o, u, a, e를 나열하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{P}_4=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot24=144$ 답 144

30 지훈, 성은, 지윤, 승민이가 앉는 4개의 의자를 제외하면 빈 의자는 6개이다.
빈 의자들 사이사이 및 양 끝의 7개의 자리에 사람이 앉는 의자 4개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_7\mathrm{P}_4=840$ 답 840

31 어른 3명 중에서 2명이 양 끝에 서는 경우의 수는
${}_3\mathrm{P}_2=6$
나머지 5명이 일렬로 서는 경우의 수는

어른 1명과 아이 4명

$5!=120$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\cdot120=720$ 답 ④

32 부모 중에서 운전석에 앉을 사람을 정하는 경우의 수는
${}_2\mathrm{P}_1=2$
나머지 3명의 자리를 정하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{P}_3=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\cdot24=48$ 답 ③

33 b와 t 사이에 2개의 문자가 오도록 묶음을 만드는 경우의 수는

$2!\cdot{}_4P_2=2\cdot12=24$

이 묶음과 나머지 2개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot6=144$ 답 144

b와 t가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수

b와 t를 제외한 나머지 4개의 문자 중에서 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

34 홀수 번째 자리에 e, a, i를 나열하는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

나머지 자리에 자음 h, l, n, g를 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot24=576$ 답 ⑤

35 5개의 병을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

양 끝에 모두 우유를 나열하는 경우의 수는

$2!\cdot3!=2\cdot6=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-12=108$ 답 108

우유 2병이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수

커피 3병을 일렬로 나열하는 경우의 수

36 6송이의 꽃을 일렬로 심는 경우의 수는

$6!=720$

노란색 꽃을 n송이라 하면 양 끝에 노란색 꽃을 심는 경우의 수는

${}_nP_2\cdot4!=24n(n-1)$

이때 적어도 한쪽 끝에 빨간색 꽃이 오도록 심는 경우의 수가 432이므로

$720-24n(n-1)=432$

$n(n-1)=12=4\cdot3$

$\therefore n=4$

따라서 노란색 꽃은 4송이이다. 답 4송이

37 6명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$6!=720$

소연이와 동호 사이에 학생이 없도록 세우는 경우의 수는 소연이와 동호를 이웃하게 세우는 경우의 수와 같다.

소연이와 동호를 한 사람으로 생각하여 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

소연이와 동호의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉 소연이와 동호를 이웃하게 세우는 경우의 수는

$120\cdot2=240$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-240=480$ 답 ③

38 (i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

백의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 4, 5의 4가지, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리의 숫자와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4가지이므로 그 경우의 수는

$4\cdot4=16$

(iii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 5의 4가지, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리의 숫자와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4가지이므로

$4\cdot4=16$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$20+16+16=52$ 답 ②

39 (i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5의 3가지, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1과 십의 자리에 오는 숫자를 제외한 3가지이므로 그 경우의 수는

$3\cdot3=9$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 5의 2가지, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 3과 십의 자리에 오는 숫자를 제외한 3가지이므로 그 경우의 수는

$2\cdot3=6$

(iii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면

$2\cdot3=6$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$9+6+6=21$ 답 ②

(ii)와 (iii)은 일의 자리의 숫자가 소수인 경우이므로 각각의 경우의 수가 같다.

40 4의 배수이려면 끝의 두 자리 수가 00이거나 4의 배수인 수이어야 한다.

(i) 십의 자리 또는 일의 자리의 숫자가 0인 경우

□□04, □□08, □□20,

□□40, □□60, □□80

꼴이고, 천의 자리와 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$6\cdot{}_3P_2=36$

(ii) 십의 자리와 일의 자리의 숫자가 0이 아닌 경우

□□24, □□28, □□48,

□□64, □□68, □□84

꼴이고, 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 제외한 2가지,

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 제외한 2가지이므로 그 경우의 수는

$6\cdot2\cdot2=24$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$36+24=60$ 답 60

41 340보다 큰 자연수는

34□, 35□, 4□□, 5□□

꼴이다.

34□ 꼴인 자연수의 개수는 $_3P_1=3$

35□ 꼴인 자연수의 개수는 $_3P_1=3$

4□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_4P_2=12$

5□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_4P_2=12$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3+3+12+12=30$ 답 ④

42 a□□□ 꼴의 개수는 $3!=6$

b□□□ 꼴의 개수는 $3!=6$

ca□□ 꼴의 개수는 $2!=2$

cb□□ 꼴은 $cbad$, $cbda$이므로 $abcd$부터 $cbda$까지의 개수는

$6+6+2+2=16$

따라서 $cbda$는 16번째에 온다. 답 16번째

43 4□□□□ 꼴의 자연수의 개수는 $4!=24$

3□□□□ 꼴의 자연수의 개수는 $4!=24$

24□□□ 꼴의 자연수의 개수는 $3!=6$

23□□□ 꼴의 자연수의 개수는 $3!=6$

따라서 43210부터 23014까지의 자연수의 개수는

$24+24+6+6=60$

21□□□ 꼴의 자연수를 큰 수부터 나열하면

21430, 21403, 21340, 21304, 21043, 21034

이므로 65번째에 오는 수는 21043이다. 답 ①

44 $$_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(\boxed{n-r})\}!}=\frac{n!}{(n-r)!\boxed{r!}}={}_nC_r$$

∴ (가) $n-r$ (나) $r!$ 답 (가) $n-r$ (나) $r!$

45 $$_nC_k\cdot{}_{n-k}C_{r-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\boxed{(n-k)!}}{(r-k)!(n-r)!}=\frac{n!}{k!(r-k)!\boxed{(n-r)!}}=\frac{n!}{r!\boxed{(n-r)!}}\cdot\frac{\boxed{r!}}{k!(r-k)!}={}_nC_r\cdot{}_rC_k$$

∴ (가) $(n-k)!$ (나) $(n-r)!$ (다) $r!$

따라서 $k=3$, $r=4$, $n=6$일 때,

$x=(6-3)!=3!=6$, $y=(6-4)!=2!=2$,

$z=4!=24$

이므로 $x+y+z=32$ 답 ⑤

Q BOX

(홀수)+(짝수)+(짝수)
(홀수)+(홀수)+(홀수)

46 세 수의 합이 홀수이려면 홀수가 적힌 카드 1장과 짝수가 적힌 카드 2장 또는 홀수가 적힌 카드 3장을 뽑아야 한다.

(i) 홀수가 적힌 카드 1장과 짝수가 적힌 카드 2장을 뽑는 경우의 수는

$_5C_1\cdot{}_5C_2=5\cdot10=50$

(ii) 홀수가 적힌 카드 3장을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$50+10=60$ 답 ⑤

짝수인 자연수를 4로 나누었을 때의 나머지는 0 또는 2이다.

47 50 이하의 짝수인 자연수 중에서 4로 나누었을 때의 나머지가 2인 자연수의 집합을 A, 나머지가 0인 자연수의 집합을 B라 하면

$A=\{2, 6, 10, \cdots, 50\}$,

$B=\{4, 8, 12, \cdots, 48\}$

$\therefore n(A)=13$, $n(B)=12$

이때 두 수의 합이 4의 배수이려면 두 수가 모두 집합 A의 원소이거나 두 수가 모두 집합 B의 원소이어야 한다.

(i) 두 수가 모두 집합 A의 원소인 경우의 수는

$_{13}C_2=78$

(ii) 두 수가 모두 집합 B의 원소인 경우의 수는

$_{12}C_2=66$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$78+66=144$ 답 144

48 재민이를 제외한 남학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$_4C_2=6$

혜진이와 다윤이를 제외한 여학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$_4C_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot6=36$ 답 ⑤

49 라면과 계란 중에서 한 가지를 택하는 경우의 수는

$_2C_1=2$

라면과 계란을 제외한 6가지의 재료 중에서 서로 다른 3가지 재료를 택하는 경우의 수는

$_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot20=40$ 답 ⑤

Ⓦ 07 순열과 조합

50 6켤레 중에서 짝이 맞는 1켤레를 택하는 경우의 수는

$_6C_1=6$

나머지 10짝 중에서 짝이 맞지 않는 2짝을 택하는 경우의 수는

$_{10}C_2-5=45-5=40$

10짝 중에서 짝이 맞는 2짝을 택하는 경우는 5가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 40=240$ 답 240

51 10 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수는

$_{10}C_3=120$

소수 2, 3, 5, 7을 제외한 6개의 자연수 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

1과 합성수

$_6C_3=20$

합성수 4, 6, 8, 9, 10을 제외한 5개의 자연수 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

1과 소수

$_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-(20+10)=90$ 답 ⑤

52 9명 중에서 5명을 뽑는 경우의 수는

$_9C_5={}_9C_4=126$

여학생만 5명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_5=1$

남학생 1명, 여학생 4명을 뽑는 경우의 수는

$_4C_1\cdot{}_5C_4={}_4C_1\cdot{}_5C_1=4\cdot 5=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$126-(1+20)=105$ 답 ②

53 12송이 중에서 3송이를 사는 경우의 수는

$_{12}C_3=220$

카네이션을 n송이라 할 때 10송이 중에서 카네이션만 3송이를 사는 경우의 수는

$_nC_3$

이때 장미를 적어도 한 송이 포함하여 사는 경우의 수가 164이므로

$220-{}_nC_3=164,\quad {}_nC_3=56$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=56$

$n(n-1)(n-2)=8\cdot 7\cdot 6$

$\therefore n=8$

따라서 카네이션은 8송이이다. 답 8송이

54 박물관 5개 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

공원 3개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

박물관과 공원을 방문하는 순서를 정하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot 3\cdot 120=3600$ 답 3600

55 체육 선생님 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$_4C_2=6$

음악 선생님 3명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

체육 선생님 2명을 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$이고, 이때 체육 선생님 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 체육 선생님끼리 이웃하게 세우는 경우의 수는

$6\cdot 2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 3\cdot 12=216$ 답 ②

56 (i) 0을 포함하지 않는 경우

1, 2, 3의 3개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

(ii) 0을 포함하는 경우

1, 3의 2개의 숫자 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$_2C_1=2$

1 또는 3 중 한 개와 0, 2의 세 개의 숫자

세 개의 숫자로 만들 수 있는 자연수의 개수는

$2\cdot 2!=4$

백의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수

이므로

$2\cdot 4=8$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+8=14$ 답 ③

다른 풀이 4를 제외한 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3\cdot 3\cdot 2=18$

2와 4를 제외한 0, 1, 3의 3개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\cdot 2\cdot 1=4$

따라서 2는 포함하고 4는 포함하지 않는 자연수의 개수는

$18-4=14$

57 일대일함수 f의 개수는 집합 Y의 6개의 원소 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$p={}_6P_3=120$

$a<b$이면 $f(a)>f(b)$를 만족시키려면 집합 Y의 6개의 원소 중에서 3개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

따라서 $a<b$이면 $f(a)>f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수는

$q={}_6C_3=20$

$\therefore p+q=140$ 답 140

58 모든 함수 f의 개수는

$3^5=243$

치역이 $\{1, 2\}$인 함수 f의 개수는

$2^5-2=30$

같은 방법으로 치역이 $\{1, 3\}$인 함수 f와 치역이 $\{2, 3\}$인 함수 f의 개수도 각각 30이다.

또 치역의 원소가 1개인 함수 f의 개수는 3

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$243-30\cdot 3-3=150$ 답 ③

59 $f(0)<f(-1)\le f(-2)$를 만족시키려면

$f(0)<f(-1)<f(-2)$

또는 $f(0)<f(-1)=f(-2)$

(i) $f(0)<f(-1)<f(-2)$인 경우

집합 Y의 6개의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 -2, -1, 0에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

${}_6C_3=20$

(ii) $f(0)<f(-1)=f(-2)$인 경우

집합 Y의 6개의 원소 중에서 서로 다른 2개를 택하여 큰 수를 정의역의 원소 -1과 -2에 대응시키고, 작은 수를 정의역의 원소 0에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

${}_6C_2=15$

(i), (ii)에서 $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$의 값을 정하는 경우의 수는

$20+15=35$

한편 $f(1)>f(2)$를 만족시키는 경우의 수는 집합 Y의 6개의 원소 중에서 서로 다른 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로

${}_6C_2=15$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$35\cdot 15=525$ 답 525

60 n개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 ${}_nC_2$이다.

따라서 ${}_nC_2=55$이므로

$$\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=55$$

$n(n-1)=110=11\cdot 10$

$\therefore n=11$ 답 11

61 두 선분 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

${}_4C_1\cdot{}_5C_1=4\cdot 5=20$

한 선분 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 연결한 직선의 개수는

2

따라서 구하는 직선의 개수는

$20+2=22$ 답 ③

Q BOX

$f(1)=f(2)=f(3)$
$=f(4)=f(5)=1$,
$f(1)=f(2)=f(3)$
$=f(4)=f(5)=2$
인 경우의 2가지

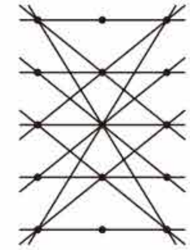
치역이 $\{1\}$인 함수,
치역이 $\{2\}$인 함수,
치역이 $\{3\}$인 함수

원의 중심과 정십각형의 두 꼭짓점을 연결한 경우

한 직선 위의 4개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없다.

62 15개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{15}C_2=105$



(i) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 13개이므로

$3\cdot 13=39$

(ii) 한 직선 위에 5개의 점이 있는 경우

5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

이고, 한 직선 위에 5개의 점이 있는 직선은 3개이므로

$10\cdot 3=30$

(i), (ii)에서 구하는 직선의 개수는

$105-39-30+13+3=52$ 답 ②

63 11개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_{11}C_3=165$

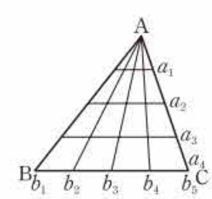
세 점이 일직선 위에 있을 때에는 삼각형이 만들어지지 않고, 이 경우의 수는 지름의 개수와 같으므로

5

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$165-5=160$ 답 ④

64 오른쪽 그림과 같이 각각의 선을 a_i, b_j ($i=1, 2, 3, 4$, $j=1, 2, 3, 4, 5$)라 하자.

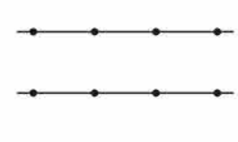


삼각형을 만들려면 a_1, a_2, a_3, a_4 중에서 한 개, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 중에서 두 개를 택해야 하므로 구하는 삼각형의 개수는

${}_4C_1\cdot{}_5C_2=4\cdot 10=40$ 답 40

65 12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_{12}C_3=220$



(i) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

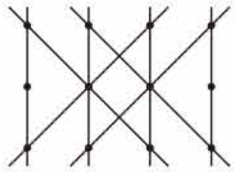
4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이므로

$4\cdot 3=12$

(ii) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우



3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_3C_3=1$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 8개이므로

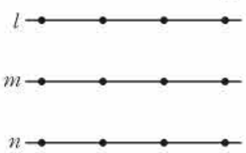
$1\cdot 8=8$

한 직선 위의 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없다.

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$220-12-8=200$ 답 ⑤

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 가로 방향의 네 점을 지나는 직선을 각각 l, m, n이라 하자.



두 직선 l과 m 위의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$_8C_3-2\cdot{}_4C_3={}_8C_3-2\cdot{}_4C_1=56-2\cdot 4=48$

같은 방법으로 하면 두 직선 l, n 위의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수와 두 직선 m, n 위의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수도 각각 48이다.

또 세 직선 l, m, n 위의 점 중에서 각각 한 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는

$_4C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_4C_1-8=4\cdot 4\cdot 4-8=56$

한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$48\cdot 3+56=200$

66 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

$_3C_2\cdot{}_5C_2=3\cdot 10=30$ 답 30

67 색칠한 도형의 경계를 포함한 위의 3개의 선분과 아래의 2개의 선분 중에서 각각 1개씩 택하는 경우의 수는

$_3C_1\cdot{}_2C_1=3\cdot 2=6$

색칠한 도형의 경계를 포함한 왼쪽의 2개의 선분과 오른쪽의 3개의 선분 중에서 각각 1개씩 택하는 경우의 수는

$_2C_1\cdot{}_3C_1=2\cdot 3=6$

따라서 구하는 직사각형의 개수는

$6\cdot 6=36$ 답 ④

68 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지므로 직사각형의 개수는

$_4C_2\cdot{}_5C_2=6\cdot 10=60$

이때 한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수가 각각 12, 6, 2이므로 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$60-(12+6+2)=40$ 답 40

Q BOX

몇 개의 묶음으로 나누는 것 ➡ 분할

69 여자 7명 중 1명이 남자 2명과 한 조를 이루면 되므로 여자 7명을 3명, 3명, 1명으로 나누면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$_7C_3\cdot{}_4C_3\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}={}_7C_3\cdot{}_4C_1\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}$$
$$=35\cdot 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=70$$ 답 ①

70 지성이와 지우를 제외한 6명을 3명, 3명으로 나눈 후 각 조에 지성이와 지우를 배정하면 된다.

6명을 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$$_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=10$$

각 조에 지성이와 지우를 배정하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot 2=20$ 답 20

다른 풀이 8명의 학생을 4명씩 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$$_8C_4\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=70\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=35$$

지성이와 지우를 한 조에 배정하고 6명의 학생을 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$_6C_2\cdot{}_4C_4=15\cdot 1=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$35-15=20$

71 여학생 4명을 2명, 1명, 1명으로 나누는 경우의 수는

$$_4C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=6$$

남학생 8명을 3명, 3명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$$_8C_3\cdot{}_5C_3\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=56\cdot 10\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=280$$

한 조가 4명이 되도록 여학생의 조와 남학생의 조를 짝짓는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 280\cdot 2=3360$ 답 3360

분할된 묶음을 나누어 주는 것 ➡ 분배

72 (i) 6개의 선물을 1개, 1개, 4개로 나누는 경우의 수는

$$_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot 5\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=15$$

(ii) 6개의 선물을 1개, 2개, 3개로 나누는 경우의 수는

$_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot 10\cdot 1=60$

(iii) 6개의 선물을 2개, 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$$_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot 6\cdot 1\cdot\frac{1}{6}=15$$

이상에서 6개의 선물을 3묶음으로 나누는 경우의 수는

$15+60+15=90$

3묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$90\cdot6=540$ 답 ④

73 사람이 내리는 3개의 층을 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

5명을 1명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

${}_5C_1\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=5\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$

3개의 조를 3개의 층에 분배하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot15\cdot6=360$ 답 360

74 각 승용차를 운전할 사람을 정하는 경우의 수는

$2!=2$

운전자를 제외한 6명을 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_4=15\cdot1=15$

운전자를 제외한 6명을 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$

따라서 6명을 두 개의 조로 나누는 경우의 수는

$15+10=25$

두 개의 조를 각 승용차 2대에 분배하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot25\cdot2=100$ 답 ③

75 구하는 경우의 수는 먼저 6개의 학급을 3개, 3개의 2개의 조로 나눈 후 각 조에서 부전승으로 올라가는 1개의 학급을 택하는 경우의 수와 같으므로

$\left({}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}\right)\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_1=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot3=90$

답 ⑤

76 구하는 경우의 수는 먼저 7명의 선수를 3명, 4명의 2개의 조로 나눈 후 3명에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하고 4명의 선수를 2명, 2명의 2개의 조로 나누는 경우의 수와 같으므로

$({}_7C_3\cdot{}_4C_4)\cdot{}_3C_1\cdot\left({}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\right)$

$=35\cdot1\cdot3\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=315$ 답 315

77 구하는 경우의 수는 먼저 8개의 팀을 4팀, 4팀의 2개의 조로 나눈 후 4개의 팀을 각각 2팀, 2팀의 2개의 조로 나누는 경우의 수와 같으므로

$\left({}_8C_4\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}\right)\cdot\left({}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\right)\cdot\left({}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\right)$

$=70\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=315$ 답 315

Q BOX

운전자를 제외하면 각 승용차에 4명까지 탈 수 있다.

도전! 수능 기출

Ⓦ 71쪽

01 1st 만들 수 있는 모든 문자열의 개수를 구한다.

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

2nd 조건을 만족시키지 않는 문자열의 개수를 구한다.

AB를 포함하는 문자열의 개수는 AB를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$5!=120$

마찬가지로 BC, CA를 포함하는 문자열의 개수도 각각 120이다.

이때 ABC를 포함하는 문자열의 개수는 ABC를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$4!=24$

마찬가지로 BCA, CAB를 포함하는 문자열의 개수도 각각 24이다.

3rd 만들 수 있는 모든 문자열에서 조건을 만족시키지 않는 문자열을 제외한다.

따라서 구하는 문자열의 개수는

$720-3\cdot120+3\cdot24=432$ 답 ②

02 1st 사각형의 네 꼭짓점이 각각 위치해야 하는 점을 조사한다.

주어진 삼각형을 포함하는 사각형의 네 꼭짓점은 다음과 같이 택하면 된다.

(i) 원점 (0, 0)

(ii) x축 위의 점 (4, 0), (8, 0) 중에서 한 점

(iii) y축 위의 점 (0, 4), (0, 8) 중에서 한 점

(iv) 제1사분면 위의 점 (4, 4), (4, 8), (8, 4), (8, 8) 중에서 한 점

2nd 1st의 조건을 만족시키는 사각형의 개수를 구한다.

조건을 만족시키는 사각형의 꼭짓점이 될 4개의 점을 택하는 경우의 수는

$1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_4C_1=1\cdot2\cdot2\cdot4=16$

그런데 네 점 (0, 0), (8, 0), (4, 4), (0, 8)을 택하는 경우는 사각형을 만들 수 없으므로 구하는 사각형의 개수는

$16-1=15$ 답 ②

03 1st 조합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구한다.

함수 f와 함수 $f\circ f$의 치역을 각각 A와 B라 하자.

$n(A)=6$이면 함수 f는 일대일대응이고, 함수 $f\circ f$도 일대일대응이므로 $n(B)=6$이다.

또한 $n(A)\le4$이면 $B\subset A$이므로 $n(B)\le4$이다.

그러므로 $n(A)=5$, 즉 $B=A$인 경우만 생각하면 된다.

(i) $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를 선택하는 경우의 수는 집합 X의 6개의 원소 중에서 5개를 택하면 되므로 $\boxed{{}_6\mathrm{C}_5=6}$이다.

(ii) (i)에서 선택한 집합 A에 대하여, X의 원소 중 A에 속하지 않은 원소를 k라 하자.

$n(A)=5$이므로 집합 A에서 $f(k)$를 선택하는 경우의 수는 k를 제외한 5개의 원소 중에서 하나를 택하면 되므로 $\boxed{{}_5\mathrm{C}_1=5}$이다.

(iii) (i)에서 선택한 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$와 (ii)에서 선택한 $f(k)$에 대하여, $f(k)\in A$이며 $A=B$이므로

$$A=\{f(a_1),\ f(a_2),\ f(a_3),\ f(a_4),\ f(a_5)\} \quad \cdots\cdots (*)$$

이다. $(*)$을 만족시키는 경우의 수는 집합 A에서 집합 A로의 일대일대응의 개수와 같으므로 $\boxed{5!=120}$이다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $6\times5\times120$이다.

$\therefore$ (가) ${}_6\mathrm{C}_5$ (나) ${}_5\mathrm{C}_1$ (다) $5!$

즉 $p=6$, $q=5$, $r=120$이므로

$p+q+r=131$ 답 ①

Q BOX

집합 X의 원소의 개수가 n일 때 X에서 X로의 일대일대응의 개수
➡ $n!$

ME
MO

MEMO