일품

최고 수준 문제해결서

정답 및 풀이

Ⅰ. 다항식

01 다항식의 연산

본책 8~10쪽
01 ② 02 $-8x^2-6x+5$
03 ⑤ 04 5 05 -20 06 ④ 07 ③
08 ⑤ 09 10 10 ③ 11 ④ 12 ④
13 ⑤ 14 3 15 ⑤ 16 $\frac{3}{2}$ 17 ②
18 20

본책 11~13쪽
01 12 02 ③ 03 25
04 ① 05 -19 06 -12 07 ⑤ 08 ②
09 ⑤ 10 640 11 ② 12 169 13 ④
14 0 15 ④ 16 $4\sqrt{13}$ 17 ③ 18 18
19 30 20 ④ 21 8 22 ③ 23 -3
24 ③

본책 14쪽
01 ① 02 429 03 ①
04 ③ 05 800

02 나머지정리와 인수분해

본책 16~18쪽
01 6 02 4 03 ①
04 ④ 05 -36 06 $\frac{21}{4}$ 07 ③ 08 28
09 ③ 10 ① 11 ② 12 ③ 13 5
14 ② 15 ② 16 ② 17 ② 18 7

본책 19~21쪽
01 5 02 -1 03 ⑤
04 18 05 $2x^2+x-3$ 06 ③ 07 18
08 $-3x+3$ 09 ⑤ 10 7 11 ⑤
12 ⑤ 13 36 14 ③ 15 ①
16 $a=c$인 이등변삼각형 17 ② 18 ⑤ 19 ④
20 ④ 21 24 22 26 23 ④

본책 22쪽
01 ① 02 3 03 29
04 ② 05 4 06 ③ 07 100

본책 23~26쪽
01 ③ 02 ⑤ 03 ④
04 ③ 05 ⑤ 06 ③ 07 ② 08 ④
09 ④ 10 ② 11 ⑤ 12 ③ 13 ③
14 ① 15 ④ 16 ② 17 ④ 18 -4
19 50 20 29 21 $\frac{55}{6}$ 22 6 23 16
24 18 25 15 26 -9 27 20 28 29
29 16

본책 27쪽
01 ① 02 $-x+1$ 03 5
04 ②

Ⅱ. 방정식

03 복소수

본책 30~32쪽
01 ⑤ 02 10 03 ④
04 2 05 ② 06 $-3+3i$ 07 ①
08 -1 09 ③ 10 $1-i$ 11 $3-6i$ 12 ⑤
13 -1024 14 ③ 15 50 16 ① 17 ①
18 ④

본책 33~35쪽
01 ⑤ 02 ③ 03 $\frac{1}{2}$
04 1 05 -3 06 ② 07 1 08 $\frac{6}{5}i$
09 ④ 10 10 11 ④ 12 ① 13 ②
14 $-1+i$ 15 ② 16 87 17 $-40i$ 18 3
19 75 20 $a<c<b$ 21 $-4\sqrt{2}$ 22 ④
23 ②

본책 36쪽
01 ④ 02 ④ 03 ⑤
04 12 05 115 06 6 07 ①

04 이차방정식

본책 38~40쪽
01 ③ 02 -1, 4 03 ③
04 4 05 서로 다른 두 허근 06 ⑤ 07 ⑤
08 12 09 ⑤ 10 $x^2+12x-13=0$ 11 ③
12 -3 13 ⑤ 14 $5\left(x+\frac{2-i}{5}\right)\left(x+\frac{2+i}{5}\right)$
15 $(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$ 16 ②
17 -2 18 ②

본책 41~43쪽

01 $x=1-\sqrt{10}$ 또는 $x=3$

02 ③ 03 $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$, $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$ 04 ④

05 $x=1-\sqrt{2}$ 06 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 07 15 08 ⑤

09 -1 10 정삼각형 11 -56 12 ①

13 ① 14 ① 15 ④ 16 7 17 24

18 ⑤ 19 ① 20 26 21 ⑤ 22 -26

23 ① 24 $\frac{1}{2}$

본책 44~45쪽 01 9 02 ③ 03 ②

04 ③ 05 13 06 3 07 ③ 08 24

09 ④ 10 13 11 23 12 ④ 13 8

14 2

05 이차방정식과 이차함수

본책 46~48쪽 01 ④ 02 ⑤ 03 $-\frac{3}{4}$

04 4 05 ③ 06 44 07 ③ 08 ⑤

09 ③ 10 $-\frac{5}{4}$ 11 8 12 4 13 ③

14 ② 15 10 16 20 17 ② 18 $\frac{625}{2}$

본책 49~51쪽 01 ② 02 $2\sqrt{6}$ 03 ④

04 ⑤ 05 3 06 0 07 2 08 ④

09 ④ 10 ③ 11 ③ 12 ① 13 3

14 -2 15 ⑤ 16 ② 17 47 18 24

19 ⑤ 20 800원 21 $\frac{23}{16}$

본책 52쪽 01 ③ 02 ③ 03 24

04 ⑤ 05 ③ 06 10

06 여러 가지 방정식

본책 54~56쪽 01 2 02 8 03 ①

04 ⑤ 05 -60 06 ⑤ 07 ① 08 ③

09 ⑤ 10 136 11 ⑤ 12 ② 13 12

14 9 15 ⑤ 16 2 17 2 18 12 m

본책 57~59쪽 01 $\frac{1}{4}$ 02 ① 03 $-\frac{10}{3}$

04 ② 05 24 06 12

07 $cx^3+bx^2+ax+1=0$ 08 $\frac{11}{2}$

09 $2x^3-5x^2-12x+7=0$ 10 ② 11 25

12 ④ 13 ⑤ 14 ② 15 11 16 20

17 $-\frac{55}{4}$ 18 ④ 19 30 20 ③ 21 104 cm^2

22 33π 23 9

본책 60쪽 01 63 02 ② 03 30

04 ① 05 ③ 06 16 07 ③

본책 61~64쪽 01 ③ 02 ① 03 ⑤

04 ② 05 ④ 06 ③ 07 ② 08 ②

09 ② 10 ④ 11 ③ 12 ⑤ 13 ④

14 ③ 15 ② 16 ④ 17 ⑤ 18 10

19 $\frac{2}{25}$ 20 10 21 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

22 $x^2-x-1=0$ 23 4 24 45 25 220

26 0 27 -12 28 14

본책 65쪽 01 937 02 -12 03 $\frac{5}{4}$

04 ④

Ⅲ. 부등식

07 일차부등식

본책 68~70쪽 01 ② 02 ⑤

03 $0<f(0)<10$ 04 $A>B$ 05 $A>B$ 06 ③

07 ③ 08 ⑤ 09 ③ 10 ⑤ 11 ④

12 10, 11 13 ③ 14 ③ 15 ② 16 ③

17 ② 18 ④

본책 71~74쪽 01 ⑤ 02 ⑤

03 풀이 74쪽 04 ① 05 풀이 74쪽

06 ④ 07 풀이 74쪽 08 ④ 09 ③

10 ④ 11 ⑤ 12 4 13 ③ 14 27

15 ② 16 ③ 17 $9\le x\le 11.5$ 18 ④

19 $\frac{9}{5}$ **20** ① **21** $-1<x<\frac{2}{3}$
22 $3<x<3.6$ **23** 3 **24** ① **25** ④
26 ② **27** 7

본책 75쪽 **01** 2 **02** ③ **03** ②
04 ③ **05** ②

08 이차부등식

본책 76~78쪽 **01** 5 **02** 6 **03** ④
04 9 **05** $-2<x<3$ **06** ② **07** ①
08 -1 **09** ② **10** ④ **11** ③ **12** 7
13 ③ **14** 14 **15** ② **16** -3 **17** ②
18 ①

본책 79~82쪽 **01** $-1<x<2$ **02** ⑤
03 3 **04** ⑤ **05** 10 **06** ① **07** ⑤
08 3 **09** ③ **10** 45 **11** ③ **12** 7
13 ③ **14** 1 **15** -1 **16** ① **17** ②
18 $\frac{1}{2}$ **19** $-2<x<3$ **20** 6 **21** ④
22 ③ **23** 4 **24** 1 **25** 18 **26** ④
27 ③ **28** ③ **29** ④ **30** ⑤
31 $a\le-\frac{13}{3}$ 또는 $a\ge1$

본책 83쪽 **01** 14 **02** ④ **03** ①
04 ① **05** 12 **06** 100 **07** 8

본책 84~87쪽 **01** ④ **02** ③ **03** ④
04 ① **05** ④ **06** ③ **07** ② **08** ③
09 ③ **10** ④ **11** ③ **12** ③ **13** ②
14 ③ **15** ⑤ **16** ② **17** 0 **18** $3<a\le4$
19 2 **20** 70개 **21** 2 **22** 10 **23** 3
24 $-1<a\le0$ **25** 5 **26** 3 **27** $\sqrt{13}$
28 -10

본책 88쪽 **01** ① **02** $\frac{11}{12}$ **03** ①
04 ⑤

Ⅳ. 도형의 방정식

09 평면좌표와 직선의 방정식

본책 90~93쪽 **01** 5 **02** ② **03** ④
04 ② **05** $\frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$ **06** ④ **07** $2\sqrt{6}$
08 5 **09** ⑤ **10** $\frac{7}{2}$ **11** $y=2x+3$
12 11 **13** 2 **14** ⑤ **15** ⑤ **16** ②
17 ② **18** 5 **19** $y=\sqrt{3}x-2$, $y=-\sqrt{3}x-2$
20 $(1, 1)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ **21** ④ **22** ④ **23** -11
24 ①

본책 94~97쪽 **01** ③ **02** 14 **03** 13
04 ② **05** 7 **06** $\frac{3}{2}$ **07** 3 **08** $\frac{40}{3}$
09 12 **10** $\frac{4}{3}$ **11** ③ **12** -4 **13** ②
14 ① **15** 91 **16** $\frac{6}{5}$ **17** 9 **18** ③
19 ③ **20** 11 **21** 10 **22** ③ **23** ②
24 5 **25** ③ **26** ① **27** 90 **28** ②
29 ①

본책 98~99쪽 **01** ④ **02** ③ **03** 25
04 90 **05** ③ **06** 123 **07** 1 **08** ④
09 ① **10** ② **11** $\frac{9}{4}$ **12** 4

10 원의 방정식

본책 100~102쪽 **01** ③ **02** ① **03** 26
04 12 **05** ⑤ **06** 15 **07** ① **08** ③
09 25 **10** $-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$
11 4 **12** ① **13** ④ **14** -1 **15** ③
16 ④ **17** $3\sqrt{3}$ **18** 3

본책 103~105쪽 **01** -7 **02** ④ **03** ③
04 38 **05** ④ **06** $(x+1)^2+(y-3)^2=9$
07 ④ **08** $4x+2y-1=0$ **09** ④ **10** 2
11 ④ **12** ④ **13** 6 **14** 5 **15** 52π

16 $\frac{21}{5}$ 17 ② 18 18 19 ④ 20 ①
21 54

본책 106쪽 01 ③ 02 ③ 03 256
04 6 05 ④ 06 320

⑪ 도형의 이동

본책 108~110쪽 01 $y=\frac{1}{2}x$ 02 ⑤ 03 ①
04 ③ 05 ② 06 12 07 5 08 ③
09 ③ 10 -2 11 ⑤ 12 ⑤ 13 -2
14 ⑤ 15 4 16 $\left(\frac{19}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ 17 ①
18 ①

본책 111~113쪽 01 ⑤ 02 18 03 ②
04 42 05 ④ 06 10 07 2 08 0
09 -1 10 ④ 11 $4\sqrt{10}$ 12 ⑤ 13 $3\sqrt{2}$
14 -3 15 -5 16 ③ 17 6 18 $-\frac{4}{3}$
19 5 20 ② 21 -1 22 8 23 ①

본책 114쪽 01 ② 02 32 03 20
04 16 05 ① 06 ④

본책 115~118쪽 01 ④ 02 ④ 03 ①
04 ② 05 ③ 06 ③ 07 ② 08 ④
09 ② 10 ③ 11 ⑤ 12 ② 13 ②
14 ③ 15 ③ 16 ③ 17 2 18 58
19 35 20 $\sqrt{3}$ 21 20
22 $x^2+(y+1)^2=4\,(x\neq0)$ 23 -1 24 232
25 4 26 25 27 4 28 18

본책 119쪽 01 ⑤ 02 45 03 6
04 ①

I 다항식

01 다항식의 연산

개념&핵심 기출 본책 8~10쪽

01 ㄱ. x^2항, x항, 상수항의 순서로 정리되어 있으므로 x에 대하여 내림차순으로 정리되어 있다.
ㄴ. x에 대한 다항식에서 a^2+3은 상수항이므로 x에 대하여 내림차순으로 정리하면 $ax+a^2+3$이다.
ㄷ. x항, 상수항의 순서로 정리되어 있으므로 x에 대하여 내림차순으로 정리되어 있다.
ㄹ. x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(y^2-2)x^2+3yx$이다.
이상에서 x에 대하여 내림차순으로 정리한 다항식은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

x에 대한 다항식에서 y^2+1은 상수항이다.

02 $5A-2(B+3A)$
$=5A-2B-6A$
$=-A-2B$
$=-(2x^2-4x+3)-2(3x^2+5x-4)$
$=-2x^2+4x-3-6x^2-10x+8$
$=-8x^2-6x+5$ 답 $-8x^2-6x+5$

먼저 구하는 식을 간단히 한 후 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 정리한다.

03 $A+B=-x^2+3xy-4y^2$ ...... ㉠
$3B-2A=7x^2-xy-2y^2$ ...... ㉡
㉠×3−㉡을 하면
$5A=-10x^2+10xy-10y^2$
$\therefore A=-2x^2+2xy-2y^2$
$X-2A=B$에서
$X=2A+B$
$=(A+B)+A$
$=(-x^2+3xy-4y^2)+(-2x^2+2xy-2y^2)$
$=-3x^2+5xy-6y^2$
따라서 다항식 X의 xy의 계수는 5이다. 답 ⑤

1등급 비밀노트
$A=-2x^2+2xy-2y^2$을 ㉠에 대입하여 B를 구한 후 $X=2A+B$에 A와 B를 대입하여 답을 구할 수도 있지만 위의 풀이처럼 $X=2A+B=(A+B)+A$임을 이용하면 계산 과정을 간단히 할 수 있다.

04 $(2x+ky^2)(x^2-xy^2+2y)$의 전개식에서 x^2y^2항은
$2x\cdot(-xy^2)+ky^2\cdot x^2=(k-2)x^2y^2$
이때 x^2y^2의 계수가 3이므로
$k-2=3 \quad \therefore k=5$ 답 5

필요한 항이 나오도록 각 다항식에서 하나씩 항을 선택하여 곱한다.

05 $(x+2)(x-4)(x-2)(x+4)$
$=(x+2)(x-2)(x-4)(x+4)$
$=(x^2-4)(x^2-16)$
$=x^4-20x^2+64$
따라서 x^2의 계수는 -20이다. 답 -20

06 $(a+b+c)(a-b-c)+(a+b-c)(a-b+c)$
$=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}$
$+\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$
$=a^2-(b+c)^2+a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-2bc-c^2+a^2-b^2+2bc-c^2$
$=2(a^2-b^2-c^2)$
이므로 $2(a^2-b^2-c^2)=0$에서 $a^2-b^2-c^2=0$
$\therefore a^2=b^2+c^2$
따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다. 답 ④

07 $(x+a)^3+(2x-3)^3$
$=(x^3+3x^2a+3xa^2+a^3)$
$+(8x^3-36x^2+54x-27)$
$=9x^3+(3a-36)x^2+(3a^2+54)x+a^3-27$
이때 x^2의 계수가 -42이므로
$3a-36=-42 \quad \therefore a=-2$
따라서 x의 계수는
$3a^2+54=3\cdot(-2)^2+54=66$ 답 ③

08 $(2x+1)^2(4x^2-2x+1)^2$
$=\{(2x+1)(4x^2-2x+1)\}^2$
$=\{(2x)^3+1^3\}^2$
$=(8x^3+1)^2$
$=64x^6+16x^3+1$
따라서 $a=64$, $b=16$, $n=3$이므로
$a+2b+n=99$ 답 ⑤

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a^3+b^3$

09 $(x+1)(y+1)(z+1)$
$=(1+x)(1+y)(1+z)$
$=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz$
$=1+1+3+5=10$ 답 10

1등급 비밀노트
곱셈 공식
$(x+a)(x+b)(x+c)$
$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$
를 이용하면 주어진 다항식을 쉽게 전개할 수 있다.
$(1+x)(1+y)(1+z)$
$=1^3+(x+y+z)\cdot 1^2+(xy+yz+zx)\cdot 1+xyz$
$=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz$

10 $a+b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

$ab=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

$\therefore (a+a^2+a^3)+(b+b^2+b^3)$
$=(a+b)+(a^2+b^2)+(a^3+b^3)$
$=(a+b)+\{(a+b)^2-2ab\}$
$\quad+\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}$
$=4+(4^2-2\cdot1)+(4^3-3\cdot1\cdot4)$
$=70$

답 ③

11 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$이므로

$56=2^3+3ab\cdot2,\quad 6ab=48$

$\therefore ab=8$

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=2^2+4\cdot8=36$이므로

$a+b=6$ ($\because a+b>0$)

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=6^3-3\cdot8\cdot6$
$=72$

답 ④

$a>0,\ b>0$이므로 $a+b>0$

12 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 직사각형의 대각선의 길이가 부채꼴의 반지름의 길이와 같으므로

$x^2+y^2=100$

또 직사각형의 둘레의 길이가 24 cm이므로

$2(x+y)=24 \qquad \therefore x+y=12$

이때 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$100=12^2-2xy \qquad \therefore xy=22$

따라서 직사각형의 넓이는 22 cm^2이다.

답 ④

(직사각형의 넓이)
=(가로의 길이)
×(세로의 길이)
$=xy$

13 $x\neq0$이므로 $x^2-4x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=4$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=4^3+3\cdot4=76$

답 ⑤

$x=0$을 $x^2-4x-1=0$에 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 $x\neq0$이다.

14 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$에서

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

이때 $x+y+z\neq0$이므로

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

$x-y=0,\ y-z=0,\ z-x=0$

$\therefore x=y=z$

$\therefore \frac{(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3}{(x+y)(y+z)(z+x)}$
$=\frac{(2x)^3+(2x)^3+(2x)^3}{2x\cdot2x\cdot2x}=3$

답 3

15 주어진 직육면체의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 $x,\ y,\ z$라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 68이므로

$4(x+y+z)=68$

$\therefore x+y+z=17$

대각선의 길이가 10이므로

$x^2+y^2+z^2=100$

따라서 직육면체의 겉넓이는

$2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)$
$=17^2-100$
$=189$

답 ⑤

다항식의 나눗셈을 할 때는 차수를 맞춰서 계산하고 해당 차수의 항이 없는 부분은 비워 둔다.

16

$$\begin{array}{r|l} & 3x\ -2 \\ \hline x^2+2 & 3x^3-2x^2\qquad +3 \\ & 3x^3\qquad +6x \\ \hline & \quad -2x^2-6x+3 \\ & \quad -2x^2\qquad -4 \\ \hline & \qquad\quad -6x+7 \end{array}$$

$\therefore Q(x)=3x-2,\ R(x)=-6x+7$

이때 $3x-2=-\frac{1}{2}(-6x+7)+\frac{3}{2}$이므로 구하는 나머지는 $\frac{3}{2}$이다.

답 $\frac{3}{2}$

$A=BQ+R$에서 R가 상수이거나 R의 차수가 B의 차수보다 작으면 A를 B로 나누었을 때의 몫은 Q, 나머지는 R이다.

17 주어진 등식에서 다항식 $2x^4+4x^3+3x^2+7x-1$을 $2x^2+5$로 나누었을 때의 몫이 $P(x)$, 나머지가 $ax+4$이다.

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x\ -1 \\ \hline 2x^2+5 & 2x^4+4x^3+3x^2+\ 7x-1 \\ & 2x^4\qquad +5x^2 \\ \hline & \quad 4x^3-2x^2+\ 7x \\ & \quad 4x^3\qquad +10x \\ \hline & \qquad -2x^2-\ 3x-1 \\ & \qquad -2x^2\qquad -5 \\ \hline & \qquad\qquad -3x+4 \end{array}$$

따라서 $P(x)=x^2+2x-1,\ a=-3$이므로

$P(a)=P(-3)$
$=(-3)^2+2\cdot(-3)-1$
$=2$

답 ②

18 다항식 x^3-4x+a를 x^2-3x+b로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x\ +3 \\ \hline x^2-3x+b & x^3\qquad\qquad -4x+a \\ & x^3-3x^2\qquad +bx \\ \hline & \quad 3x^2-(4+b)x+a \\ & \quad 3x^2-\qquad 9x+3b \\ \hline & \qquad (5-b)x+a-3b \end{array}$$

이때 나머지가 0이므로

$5-b=0,\ a-3b=0$

$\therefore a=15,\ b=5$

$\therefore a+b=20$

답 20

1등급을 위한 고난도 문제

본책 11~13쪽

01 다항식 $2a+x^3-3ax+6+3x^2+7x$를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+3x^2+(7-3a)x+2a+6$ ⋯ ❶

이때 x의 계수가 -2이므로

$7-3a=-2 \quad \therefore a=3$ ⋯ ❷

따라서 상수항은

$2a+6=2\cdot3+6=12$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 상수항을 구할 수 있다.	30 %

02 $2(A-B)-\{B-3(C-A)\}$

$=2A-2B-B+3C-3A$

$=-A-3B+3C$

$=-(-2x^2+5x-4)-3(3x^2-2x-1)$
$\quad+3(4x^2+x-3)$

$=2x^2-5x+4-9x^2+6x+3+12x^2+3x-9$

$=5x^2+4x-2$

답 ③

03 $A+2B$

$=(ax^2+bxy+ay^2)+2(x^2+2xy+3y^2)$

$=(a+2)x^2+(b+4)xy+(a+6)y^2$ ⋯⋯ ㉠

$2A-C=2(ax^2+bxy+ay^2)-(6x^2+xy-2y^2)$

$=(2a-6)x^2+(2b-1)xy+(2a+2)y^2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 항이 각각 두 개이려면 각 다항식에서 x^2, xy, y^2의 계수 중 하나씩만 0이어야 한다.

그런데 a, b는 정수이므로 ㉡에서 $2b-1\neq0$이다.

따라서 $2a-6=0$ 또는 $2a+2=0$이므로

$a=3$ 또는 $a=-1$

이고 ㉠에서 $a=3$, $a=-1$일 때 $a+2\neq0$, $a+6\neq0$이므로 $b+4=0$이어야 한다.

즉 $b=-4$이고, $ab<0$이므로 $\quad a=3$

$\therefore a^2+b^2=3^2+(-4)^2=25$

답 25

04 $(x^2+ax+6)(x^2+bx-2)$의 전개식에서

x^3항은 $\quad x^2\cdot bx+ax\cdot x^2=(a+b)x^3$

x^2항은 $\quad x^2\cdot(-2)+ax\cdot bx+6\cdot x^2=(ab+4)x^2$

이때 x^3의 계수와 x^2의 계수가 모두 0이므로

$a+b=0$, $ab+4=0$

$b=-a$를 $ab+4=0$에 대입하면

$-a^2+4=0$, $\quad a^2=4 \quad \therefore a=\pm2$

일품 BOX

$a=-2$, $a=2$를 각각 $b=-a$에 대입하여 b의 값을 구한다.

항은 다항식을 이루고 있는 각각의 단항식이다.

$b<0$, $ab<0$이므로 $a>0$

$\therefore a=-2,\ b=2$ 또는 $a=2,\ b=-2$

그런데 $a>b$이므로 $\quad a=2,\ b=-2$

따라서 주어진 다항식의 전개식에서 x항은

$ax\cdot(-2)+6\cdot bx=(-2a+6b)x$

이므로 x의 계수는

$-2a+6b=-2\cdot2+6\cdot(-2)=-16$

답 ①

05 $P(x)=(2x-3)(x^2+ax+a)$라 하면 다항식 $P(x)$의 x에 대한 모든 항의 계수와 상수항의 합은 $P(1)$의 값과 같으므로 $P(1)=15$에서

$-(2a+1)=15 \quad \therefore a=-8$ ⋯ ❶

따라서 $P(x)$의 전개식에서 x^2항은

$2x\cdot ax-3\cdot x^2=(2a-3)x^2$ ⋯ ❷

이므로 x^2의 계수는

$2a-3=2\cdot(-8)-3=-19$ ⋯ ❸

답 -19

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 전개식에서 x^2항을 구할 수 있다.	30 %
❸ x^2의 계수를 구할 수 있다.	20 %

1등급 비밀노트

x에 대한 n차 다항식 $P(x)$가
$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$
일 때, x에 대한 모든 항의 계수와 상수항의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$의 값은 $P(1)$의 값과 같다. 즉 $P(x)$에서 x 대신 1을 대입한 값과 같다.

06 $H(x)=P(x)-Q(x)$라 하면

$H(x)=-x^2-4ax+3a^2-(-2x^2+2bx-b^2)$

$=x^2-(4a+2b)x+3a^2+b^2$

$\therefore P(a+b)-Q(a+b)$

$=H(a+b)$

$=(a+b)^2-(4a+2b)(a+b)+3a^2+b^2$

$=a^2+2ab+b^2-(4a^2+6ab+2b^2)+3a^2+b^2$

$=-4ab=-4\cdot3=-12$

답 -12

07 $(x+x^2+x^3+x^5)^3$

$=\underbrace{(x+x^2+x^3+x^5)}_{㉠}\underbrace{(x+x^2+x^3+x^5)}_{㉡}\underbrace{(x+x^2+x^3+x^5)}_{㉢}$

$(x+x^2+x^3+x^5)^3$을 전개하기 위하여 다항식 ㉠, ㉡, ㉢에서 택한 항을 순서대로

x^a, x^b, x^c (a, b, c는 1 또는 2 또는 3 또는 5)

이라 하자.

ㄱ. x^{14}항이 나오는 경우는 $a+b+c=14$일 때이고, 이것을 만족시키는 a, b, c는 존재하지 않는다. 따라서 x^{14}의 계수는 0이다.

ㄴ. x^9항이 나오는 경우는 $a+b+c=9$일 때이고, 이것을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 3,\ 5),\ (1,\ 5,\ 3),\ (3,\ 1,\ 5),$
$(3,\ 5,\ 1),\ (5,\ 1,\ 3),\ (5,\ 3,\ 1),$
$(2,\ 2,\ 5),\ (2,\ 5,\ 2),\ (5,\ 2,\ 2),$
$(3,\ 3,\ 3)$

의 10개이다. 그런데 각 경우의 계수는 모두 1이므로 x^9의 계수는 10이다.

$1+3+5=9,$
$2+2+5=9,$
$3+3+3=9$

ㄷ. 모든 항의 계수의 합은 $(x+x^2+x^3+x^5)^3$에 $x=1$을 대입한 값과 같다.

따라서 구하는 합은 $4^3=64$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

08 (i) n이 홀수일 때,

(주어진 식)
$$=\left(-\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)$$
$$=-b\cdot b=-b^2$$

(ii) n이 짝수일 때,

(주어진 식)
$$=\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)\left(-\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)$$
$$=b\cdot(-b)=-b^2$$

(i), (ii)에서 주어진 식을 간단히 하면 $-b^2$이다. 답 ②

1등급 비밀노트

n이 자연수일 때, $(-a)^n\ (a>0)$ 꼴은 n이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 생각한다.

09 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{yz-zx-xy}{xyz}=\frac{1}{2}$이므로

$xyz=2(yz-zx-xy)$ ...... ㉠

$\therefore (x-2)(y+2)(z+2)$
$=(-2+x)(-2-y)(-2-z)$
$=(-2)^3+(x-y-z)\cdot(-2)^2$
$\quad+(-xy+yz-zx)\cdot(-2)+xyz$
$=xyz-2(yz-zx-xy)+4(x-y-z)-8$
$=4(x-y-z)-8\ (\because ㉠)$
$=4\cdot4-8=8$ 답 ⑤

10 $40^2=(32+8)^2=32^2+2\cdot32\cdot8+8^2$이므로

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$p=2\cdot32\cdot8=512$ ··· ❶

$40^2=(24+8+8)^2$
$=24^2+8^2+8^2+2(24\cdot8+8\cdot8+8\cdot24)$

$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2$
$\quad+2(ab+bc+ca)$

이므로

$q=2(24\cdot8+8\cdot8+8\cdot24)=896$ ··· ❷

$\therefore 3p-q=1536-896=640$ ··· ❸

답 640

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $3p-q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $32^2+8^2+512=24^2+8^2+8^2+q$에서

$32^2=(24+8)^2=24^2+2\cdot24\cdot8+8^2$이므로

$(24^2+2\cdot24\cdot8+8^2)+8^2+512$
$=24^2+8^2+8^2+q$
$\therefore q=2\cdot24\cdot8+512=896$

$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
$=a^4+a^2b^2+b^4$

11 $A=(1+x+x^2)(1-x+x^2)$
$\quad+(1-x)(1+x)(1+x^2)$
$=(1+x^2+x^4)+(1-x^2)(1+x^2)$
$=(1+x^2+x^4)+(1-x^4)=2+x^2$

이므로 $A^2=(2+x^2)^2=4+4x^2+x^4$

따라서 A^2의 전개식에서 x^2의 계수는 4이다. 답 ②

12 $A+2B=2x^2+5x+6$ ...... ㉠

$2A-B=-x^2-8$ ...... ㉡

㉠+㉡×2를 하면

$5A=5x-10\quad\therefore A=x-2$ ··· ❶

$A=x-2$를 ㉡에 대입하면

$2(x-2)-B=-x^2-8$
$\therefore B=x^2+2x+4$ ··· ❷

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=a^3-b^3$

$AB=(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$이므로

$(AB)^3=(x^3-8)^3$
$=x^9-24x^6+192x^3-512$ ··· ❸

따라서 $(AB)^3$의 전개식에서 상수항을 제외한 모든 항의 계수의 합은

$1+(-24)+192=169$ ··· ❹

답 169

채점 기준	비율
❶ A를 구할 수 있다.	30 %
❷ B를 구할 수 있다.	30 %
❸ $(AB)^3$을 전개할 수 있다.	20 %
❹ 상수항을 제외한 모든 항의 계수의 합을 구할 수 있다.	20 %

13 $(1-2x+3x^2-4x^3)^3=1+\cdots+ax^7+bx^8-64x^9$ 이고

$\{(x-2)(1-2x+3x^2-4x^3)\}^3$
$=(x-2)^3(1-2x+3x^2-4x^3)^3$
$=(x^3-6x^2+12x-8)(1-2x+3x^2-4x^3)^3$

이므로 $\{(x-2)(1-2x+3x^2-4x^3)\}^3$의 전개식에서 x^{10}항은

$x^3\cdot ax^7-6x^2\cdot bx^8+12x\cdot(-64x^9)$
$=(a-6b-768)x^{10}$

따라서 x^{10}의 계수는 $a-6b-768$이다. 답 ④

14 $x+\frac{1}{x}=1$의 양변에 x를 곱하면

$x^2+1=x \quad \therefore x^2-x+1=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\therefore P(n)=(1+x^2)^n+(1-x)^n=x^n+(-x^2)^n$

㉠의 양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^3+1=0 \quad \therefore x^3=-1$

따라서 $x^4=-x$, $x^5=-x^2$, $x^6=1$이므로 $P(n)$의 값은 다음과 같다.

$P(1)=x-x^2=1$

$P(2)=x^2+x^4=x^2-x=-1$

$P(3)=x^3-x^6=-1-1=-2$

$P(4)=x^4+x^8=x^4+x^6\cdot x^2=-x+x^2=-1$

$P(5)=x^5-x^{10}=x^5-x^6\cdot x^4=-x^2+x=1$

$P(6)=x^6+x^{12}=x^6+(x^6)^2=1+1=2$

$P(7)=x^7-x^{14}=x^6\cdot x-(x^6)^2\cdot x^2=x-x^2=1$

$\vdots$

즉 자연수 k에 대하여

$P(6k-5)+P(6k-4)+P(6k-3)$
$+P(6k-2)+P(6k-1)+P(6k)$
$=1-1-2-1+1+2=0$

이때 $2000=6\cdot 333+2$이므로

$P(1)+P(2)+P(3)+\cdots+P(2000)$
$=\{P(1)+P(2)+P(3)+\cdots+P(1998)\}$
$+P(1999)+P(2000)$
$=0+1-1=0$

답 0

1등급 비밀노트

$x^6=1$이므로 자연수 k에 대하여

$x=x^7=x^{13}=\cdots=x^{6k-5}$,
$x^2=x^8=x^{14}=\cdots=x^{6k-4}$,
$\vdots$
$1=x^6=x^{12}=\cdots=x^{6k}$

즉 x^n(n은 자연수)은 x, x^2, -1, $-x$, $-x^2$, 1이 차례대로 반복되므로 $P(n)=x^n+(-x^2)^n$에서

$P(1)=P(7)=P(13)=\cdots=P(6k-5)=1$,
$P(2)=P(8)=P(14)=\cdots=P(6k-4)=-1$,
$\vdots$
$P(6)=P(12)=\cdots=P(6k)=2$

따라서 $P(n)=x^n+(-x^2)^n$의 값은 1, -1, -2, -1, 1, 2가 차례대로 반복된다.

$x^2-x+1=0$에서
$x^2-x=-1$,
$1+x^2=x$,
$1-x=-x^2$

$x^3=-1$의 양변에 x, x^2, x^3을 각각 곱하면
$x^4=-x$,
$x^5=-x^2$,
$x^6=-x^3=1$

15 $ax+by=p$, $bx+ay=q$라 하면

$p+q=(ax+by)+(bx+ay)$
$=a(x+y)+b(x+y)$
$=(x+y)(a+b)=2\cdot 4=8$

$pq=(ax+by)(bx+ay)$
$=abx^2+(a^2+b^2)xy+aby^2$
$=ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$
$=\{(x+y)^2-2xy\}-\{(a+b)^2-2ab\}$
$=\{2^2-2\cdot(-1)\}-(4^2-2\cdot 1)=-8$

$\therefore (ax+by)^3+(bx+ay)^3$
$=p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)$
$=8^3-3\cdot(-8)\cdot 8=704$

답 ④

16 $\overline{AD}=a$, $\overline{DC}=b$, $\overline{CE}=c$라 하면 직사각형 ABCD의 넓이가 96이므로

$ab=96$ ···➊

$\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CE}=23$에서

$a+b+c=23 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\overline{AB}+\overline{BE}=17$에서

$b+(a-c)=17 \quad \cdots\cdots ㉡$

$\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{CE}$
$=a-c$

㉠+㉡을 하면

$2(a+b)=40$

$\therefore a+b=20$ ···➋

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab}$
$=\sqrt{20^2-2\cdot 96}=4\sqrt{13}$ ···➌

답 $4\sqrt{13}$

채점 기준	비율
➊ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %
➋ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌ 대각선 AC의 길이를 구할 수 있다.	30 %

17 $\frac{x^6+x^5+x^4+x^3-x^2+x-1}{x^3}$

$=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)+1 \cdots ㉠$

한편 $x\neq 0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0$

$\therefore x+\frac{1}{x}=3$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$
$=3^2-2=7$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$이므로

$x-\frac{1}{x}=-\sqrt{5}\ \left(\because x-\frac{1}{x}<0\right)$

$0<x<1$에서 $\frac{1}{x}>1$, 즉 $-\frac{1}{x}<-1$이므로
$x-\frac{1}{x}<0$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=(-\sqrt{5})^3+3\cdot(-\sqrt{5})$
$=-8\sqrt{5}$

따라서 ㉠에서

$\frac{x^6+x^5+x^4+x^3-x^2+x-1}{x^3}$
$=-8\sqrt{5}+7-\sqrt{5}+1$
$=8-9\sqrt{5}$

즉 $a=8$, $b=-9$이므로

$a-b=17$

답 ③

18 $x^4+y^4+z^4$

$=(x^2)^2+(y^2)^2+(z^2)^2$

$=(x^2+y^2+z^2)^2-2\{(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\}$ ⋯⋯ ㉠

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

$0=6+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-3$

따라서

$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2$

$=(xy+yz+zx)^2-2(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy)$

$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$=(-3)^2-0=9$

이므로 ㉠에서

$x^4+y^4+z^4=6^2-2\cdot 9=18$ 답 18

19 $a-b=3+\sqrt{3}$, $b-c=3-\sqrt{3}$에서

$c-a=-6$ ⋯ ❶

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ ⋯ ❷

$=\frac{1}{2}\{(3+\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2+(-6)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(9+6\sqrt{3}+3)+(9-6\sqrt{3}+3)+36\}$

$=30$ ⋯ ❸

답 30

$\begin{cases} a-b=3+\sqrt{3} & \cdots ㉠ \\ b-c=3-\sqrt{3} & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$a-c=6$

$\therefore c-a=-6$

채점 기준	비율
❶ $c-a$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$를 변형할 수 있다.	30%
❸ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값을 구할 수 있다.	40%

20 $P(x)=(x+2)(x^2+3x-1)-4$

$=x^3+5x^2+5x-6$

이므로 다항식 $P(x)$를 x^2+1로 나누면

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+5 \\ \hline
x^2+1 & x^3+5x^2+5x-6 \\
 & x^3\qquad\ +x \\ \hline
 & 5x^2+4x-6 \\
 & 5x^2\qquad +5 \\ \hline
 & 4x-11
\end{array}
$$

따라서 다항식 $P(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $4x-11$이다. 답 ④

21 $x^4+2x^3-8x-13$

$=P(x)(x^2+4x+12)+32x+35$

이므로

$x^4+2x^3-40x-48=P(x)(x^2+4x+12)$

다항식 $x^4+2x^3-40x-48$을 $x^2+4x+12$로 나누면

다항식 $x^4+2x^3-40x-48$은 $x^2+4x+12$로 나누어떨어진다.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x-4 \\ \hline
x^2+4x+12 & x^4+2x^3\qquad\qquad -40x-48 \\
 & x^4+4x^3+12x^2 \\ \hline
 & -2x^3-12x^2-40x \\
 & -2x^3-8x^2-24x \\ \hline
 & -4x^2-16x-48 \\
 & -4x^2-16x-48 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

따라서 $P(x)=x^2-2x-4$이므로

$a=-2,\ b=-4$ $\quad\therefore ab=8$ 답 8

22 $Q(x)=(x-2)\cdot x+4=x^2-2x+4$이므로

$x^4-x^2+5x-2=P(x)(x^2-2x+4)-5x+2$

$\therefore x^4-x^2+10x-4=P(x)(x^2-2x+4)$

다항식 $x^4-x^2+10x-4$를 x^2-2x+4로 나누면

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x-1 \\ \hline
x^2-2x+4 & x^4\qquad -x^2+10x-4 \\
 & x^4-2x^3+4x^2 \\ \hline
 & 2x^3-5x^2+10x \\
 & 2x^3-4x^2+8x \\ \hline
 & -x^2+2x-4 \\
 & -x^2+2x-4 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

따라서 $P(x)=x^2+2x-1$이므로

$P(x)-Q(x)=(x^2+2x-1)-(x^2-2x+4)$

$=4x-5$ 답 ③

23 다항식 $x^4+(a^2-a-1)x^2+(-a^2+b)x+b^3$을 x^2-x-a로 나누면

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+x+a^2 \\ \hline
x^2-x-a & x^4\qquad +(a^2-a-1)x^2+(-a^2+b)x+b^3 \\
 & x^4-x^3\qquad -ax^2 \\ \hline
 & x^3+\quad (a^2-1)x^2+(-a^2+b)x \\
 & x^3\qquad -x^2\qquad -ax \\ \hline
 & a^2x^2+(-a^2+a+b)x+b^3 \\
 & a^2x^2\qquad -a^2x-a^3 \\ \hline
 & (a+b)x+a^3+b^3
\end{array}
$$

⋯ ❶

이때 나머지가 $2x+26$이므로

$a+b=2,\ a^3+b^3=26$ ⋯ ❷

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서

$26=2^3-3ab\cdot 2$

$\therefore ab=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식을 x^2-x-a로 나눌 수 있다.	50%
❷ $a+b$, a^3+b^3의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	30%

24 다항식 $P(x)$를 $(2x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고

$$8x^2+a=2(2x-1)^2+8x+a-2$$

이므로

$$\begin{aligned}P(x)&=(2x-1)^3Q(x)+8x^2+a\\&=(2x-1)^2(2x-1)Q(x)\\&\quad+\{2(2x-1)^2+8x+a-2\}\\&=(2x-1)^2\{(2x-1)Q(x)+2\}\\&\quad+8x+a-2\end{aligned}$$

$P(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫은 $\{(2x-1)Q(x)+2\}$, 나머지는 $8x+a-2$이다.

이때 $P(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $bx+5$이므로

$8=b,\ a-2=5 \quad \therefore a=7,\ b=8$

$\therefore a+b=15$ 답 ③

다른 풀이 다항식 $P(x)$를 $(2x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(2x-1)^3Q(x)+8x^2+a$$

이때 $(2x-1)^3Q(x)$는 $(2x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 다항식 $P(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 다항식 $8x^2+a$를 $(2x-1)^2$, 즉 $4x^2-4x+1$로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 4x^2-4x+1\overline{)\,8x^2+a} \\ \underline{8x^2-8x+2} \\ 8x+a-2 \end{array}$$

이때 $P(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $bx+5$이므로 $8=b,\ a-2=5$

$\therefore a=7,\ b=8 \quad \therefore a+b=15$

사고력 강화를 위한 수능형 문제
본책 14쪽

01 $\overline{AM}=a,\ \overline{AB}=b$라 하면

$$\overline{AM}+\overline{MG}=a+\frac{2}{3}b=x+y+4$$

$\overline{BC}$의 중점을 N이라 하면 $\overline{MG}:\overline{GN}=2:1$이므로 $\overline{MG}=\frac{2}{3}\overline{MN}=\frac{2}{3}\overline{AB}$

$\therefore 3a+2b=3x+3y+12$ …… ㉠

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=b+2a+b=2x+3y+9$

$\therefore 2a+2b=2x+3y+9$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면 $a=x+3$

㉠에 $a=x+3$을 대입하면

$3(x+3)+2b=3x+3y+12$

$2b=3y+3 \quad \therefore b=\frac{3}{2}(y+1)$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle GBC&=\frac{1}{3}\triangle MBC=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=\frac{1}{3}ab\\&=\frac{1}{3}(x+3)\cdot\frac{3}{2}(y+1)\\&=\frac{1}{2}(x+3)(y+1)\end{aligned}$$

답 ①

02 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}&P(a,\ a,\ a)+P(b,\ b,\ b)+P(c,\ c,\ c)\\&=(a^2+a^2+a^2-5)+(b^2+b^2+b^2-5)+(c^2+c^2+c^2-5)\\&=3(a^2+b^2+c^2)-15=93\end{aligned}$$

이므로

$a^2+b^2+c^2=36$ …… ㉠

조건 (다)에서

$$\begin{aligned}&P(a,\ 1,\ 1)+P(1,\ b,\ 1)+P(1,\ 1,\ c)\\&=(a+1+a-5)+(b+b+1-5)+(1+c+c-5)\\&=2(a+b+c)-12=4\end{aligned}$$

이므로

$a+b+c=8$ …… ㉡

한편 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로 ㉠, ㉡에서

$8^2=36+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=14$ …… ㉢

이때

$P(ab,\ ab,\ ab)+P(bc,\ bc,\ bc)+P(ca,\ ca,\ ca)$

$=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-15$ …… ㉣

이고

$$\begin{aligned}&a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\\&=(ab+bc+ca)^2-2(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)\\&=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\\&=14^2-2\cdot3\cdot8\ (\because ㉡,\ ㉢)\\&=148\end{aligned}$$

이므로 ㉣에서

$P(ab,\ ab,\ ab)+P(bc,\ bc,\ bc)+P(ca,\ ca,\ ca)$

$=3\cdot148-15=429$ 답 429

03 세 정삼각형 OAB, OCD, OEF의 한 변의 길이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하면 세 정삼각형의 둘레의 길이의 합이 36이므로

$3a+3b+3c=36$

$\therefore a+b+c=12$

세 정삼각형의 넓이의 합이 $24\sqrt{3}$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=24\sqrt{3}$$

$\therefore a^2+b^2+c^2=96$

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$96=12^2-2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=24$

한편 $\angle BOC=\angle DOE=\angle FOA=60°$이므로 세 삼각형 OBC, ODE, OFA의 넓이의 합은

$\angle BOC,\ \angle FOE$는 맞꼭지각이므로 $\angle BOC=\angle FOE=60°$
같은 방법으로 $\angle DOE=60°,\ \angle FOA=60°$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}ab\sin 60°+\frac{1}{2}bc\sin 60°+\frac{1}{2}ca\sin 60°\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(ab+bc+ca)\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot24=6\sqrt{3}\end{aligned}$$

두 변의 길이가 $a,\ b$이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$ (단, $0°<\theta<90°$)

답 ①

04 ㄱ. $A=BQ+R$에서

$D(A)=D(B)+D(Q)$

이므로 $D(Q)=D(A)-D(B)=m-n$

ㄴ. $A=x^2+x+1$, $B=x^2+1$이면

$x^2+x+1=(x^2+1)\cdot 1+x$

이므로 $Q=1$, $R=x$이다.

즉 $m=n=2$이고 $D(Q)=0$이지만 $D(R)=1\neq 0$이다.

ㄷ. $m\geq n$인 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n=5$이므로

$m=4$, $n=1$ 또는 $m=3$, $n=2$

(i) $m=4$, $n=1$일 때,

$D(Q)=3$이고, $D(Q)+D(R)=3$이므로

$D(R)=0$

$\therefore m+D(R)=4$

(ii) $m=3$, $n=2$일 때,

$D(Q)=1$이고, $D(Q)+D(R)=3$이므로

$D(R)=2$

그런데 R는 상수이거나

(R의 차수)<(B의 차수)

이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m+D(R)=4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

ㄱ에서 $D(Q)=m-n$

$D(B)=2$이므로 $D(R)=0$ 또는 $D(R)=1$이어야 한다.

05 [그림 2]의 4개의 정육면체의 부피의 합은

$2x^3+2y^3=2(x^3+y^3)$ ...... ㉠

[그림 1]의 5개의 직사각형의 넓이의 합을 S_1이라 하면

$S_1=xy+2(x^2+y^2)$

한편 [그림 2]의 4개의 정육면체의 겉넓이의 합을 S_2라 하면

$S_2=2\cdot 6x^2+2\cdot 6y^2=12(x^2+y^2)$

이때 $S_2=\frac{36}{7}S_1$이므로 $7S_2=36S_1$에서

$7\cdot 12(x^2+y^2)=36\{xy+2(x^2+y^2)\}$

$7(x^2+y^2)=3xy+6(x^2+y^2)$

$\therefore x^2+y^2=3xy$ ...... ㉡

한편 [그림 2]의 4개의 정육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 240이므로

$2\cdot 12x+2\cdot 12y=240$, $24(x+y)=240$

$\therefore x+y=10$ ...... ㉢

㉡에서 $(x+y)^2-2xy=3xy$이므로

$(x+y)^2=5xy$, $10^2=5xy$ ($\because$ ㉢)

$\therefore xy=20$

따라서

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=10^3-3\cdot 20\cdot 10=400$

이므로 ㉠에서 구하는 합은

$2x^3+2y^3=2\cdot 400=800$ 답 800

정육면체의 모서리의 개수는 12이다.

02 나머지정리와 인수분해

개념&핵심 기출 본책 16~18쪽

01 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$ax^4+(-6a+b)x^2+9a-b+c=x^4-5x^2+12$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1$, $-6a+b=-5$, $9a-b+c=12$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=4$

$\therefore a+b+c=6$ 답 6

다른 풀이 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x^2=2$를 대입하면

$a+b+c=2^2-5\cdot 2+12=6$

1등급 비밀노트

주어진 등식은 차수가 짝수인 항과 상수항으로만 이루어진 항등식이므로 양변에 $x^2=2$를 대입하여 등식이 성립함을 이용할 수 있다.

02 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$6=2b$ $\therefore b=3$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4-9+6=-c$ $\therefore c=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$16-18+6=2a$ $\therefore a=2$

$\therefore a+b+c=4$ 답 4

03 x^3+2x^2+ax+b

$=(x+2)^2(x+c)+2$

$=(x^2+4x+4)(x+c)+2$

$=x^3+(c+4)x^2+(4c+4)x+4c+2$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$c+4=2$, $4c+4=a$, $4c+2=b$

$\therefore a=-4$, $b=-6$, $c=-2$

따라서 $P(x)=x^3+2x^2-4x-6$이므로

$P(c+3)=P(1)$

$=1+2-4-6=-7$ 답 ①

다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이거나 일차식이므로 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓는다.

04 $P(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

이때 나머지정리에 의하여 $P(-1)=3$, $P(3)=23$이므로 $-a+b=3$, $3a+b=23$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=8$

따라서 구하는 나머지는 $5x+8$이다. 답 ④

$P(-2)=0$, $P(5)=0$이므로 $P(x)$는 $x+2$, $x-5$로 각각 나누어떨어진다.

05 x^3의 계수가 1인 삼차식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=0$을 만족시키는 실수 a의 값이 -2와 5뿐이므로

$P(x)=(x+2)^2(x-5)$ 또는

$P(x)=(x+2)(x-5)^2$

그런데 $P(x)$의 상수항은 음수이므로

$P(x)=(x+2)^2(x-5)$

따라서 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(1)=3^2\cdot(-4)=-36$ 답 -36

06 주어진 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{c|cccc} -\frac{1}{2} & 4 & -3 & 1 & 2 \\ & & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{4} \\ \hline & 4 & -5 & \frac{7}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$4x^3-3x^2+x+2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(4x^2-5x+\frac{7}{2}\right)+\frac{1}{4}$

$=(2x+1)\left(2x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{4}$

따라서 $a=\frac{7}{2}$이고, 몫의 상수항은 $\frac{7}{4}$이므로 구하는 합은

$\frac{7}{2}+\frac{7}{4}=\frac{21}{4}$ 답 $\frac{21}{4}$

07 $(n+3)^3+3(n+3)^2+3(n+3)+1$

$=\{(n+3)+1\}^3=(n+4)^3$

이므로 $(n+4)^3\le1000$에서

$n+4\le10$ $\therefore n\le6$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5+6=21$ 답 ③

08 $27x^3-64y^6=(3x)^3-(4y^2)^3$

$=(3x-4y^2)(9x^2+12xy^2+16y^4)$

이므로 $27x^3-64y^6$의 인수 중에서 $9x^2+pxy^2+qy^4$이 될 수 있는 것은 $9x^2+12xy^2+16y^4$이다.

따라서 $p=12$, $q=16$이므로

$p+q=28$ 답 28

09 $51=a$라 하면

$\frac{51^4+51^2+1}{51^2+52}=\frac{a^4+a^2\cdot1^2+1^4}{a^2+a+1}$

$=\frac{(a^2+a+1)(a^2-a+1)}{a^2+a+1}$

$=a^2-a+1$

$=(a-1)^2+a$

$=50^2+51$

이므로 $k=51$ 답 ③

10 $x^2+5x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+4)(X+6)-24$

$=X^2+10X$

$=X(X+10)$

$=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$

$=x(x+5)(x^2+5x+10)$

일품 BOX

$P(1)=6$, $Q(1)=2$ 또는 $P(1)=2$, $Q(1)=6$ 이다.

$n+3=a$라 하면 주어진 식은

a^3+3a^2+3a+1

$=(a+1)^3$

$=\{(n+3)+1\}^3$

$a^4+a^2b^2+b^4$

$=(a^2+ab+b^2)$

$\times(a^2-ab+b^2)$

$$\begin{array}{lll} 1 & 2(y-1) & \to 2y-2 \\ 1 & -(3y-1) & \to -3y+1 \\ \hline & & -y-1 \end{array}$$

따라서 $a=5$, $b=5$, $c=10$이므로

$a+b+c=20$ 답 ①

11 $x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2$

$=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

따라서

$P(x)=x^2+2x+3$, $Q(x)=x^2-2x+3$ 또는

$P(x)=x^2-2x+3$, $Q(x)=x^2+2x+3$

이므로

$P(1)+Q(1)=8$ 답 ②

1등급 비밀노트

복이차식에서 완전제곱식 꼴을 만들 때, x^4항과 상수항을 기준으로 생각한다. 즉

$x^4+2x^2+9=\{(x^2)^2+\square x^2+3^2\}-\triangle x^2$

에서 $\square$는 $2\cdot3=6$이어야 하므로

$2=6-\triangle$ $\therefore \triangle=4$

따라서 주어진 식은 $(x^4+6x^2+9)-4x^2$으로 나타낼 수 있다.

12 $x^4-13x^2y^2+36y^4$

$=(x^4-12x^2y^2+36y^4)-x^2y^2$

$=(x^2-6y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+xy-6y^2)(x^2-xy-6y^2)$

$=(x+3y)(x-2y)(x+2y)(x-3y)$

따라서 구하는 네 일차식의 합은

$(x+3y)+(x-2y)+(x+2y)+(x-3y)=4x$

답 ③

다른 풀이 $x^2=X$, $y^2=Y$로 놓으면

$x^4-13x^2y^2+36y^4$

$=X^2-13XY+36Y^2$

$=(X-4Y)(X-9Y)$

$=(x^2-4y^2)(x^2-9y^2)$

$=(x+2y)(x-2y)(x+3y)(x-3y)$

13 $x^2-xy-6y^2-x+8y-2$

$=x^2-(y+1)x-6y^2+8y-2$

$=x^2-(y+1)x-2(y-1)(3y-1)$

$=(x+2y-2)(x-3y+1)$

따라서 $a=2$, $b=-3$이므로

$a-b=5$ 답 5

14 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$ 답 ②

15 $ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$
$=a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^2a+ca^2$
$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$
$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$
그런데 $a+b>0$, $b+c>0$이므로
$a-c=0 \quad \therefore a=c$
따라서 주어진 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다.
답 ②

삼각형의 세 변의 길이는 양수이므로
$a>0$, $b>0$, $c>0$
$\therefore a+b>0$, $b+c>0$

16 $P(-1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$
$=(x+1)(x-2)(x-3)$
즉 $P(-1)=P(2)=P(3)=0$이므로
$a=-1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$ …… ㉠
$Q(1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$Q(x)=(x-1)(x^2+x-6)$
$=(x-1)(x-2)(x+3)$
즉 $Q(1)=Q(2)=Q(-3)=0$이므로
$a\neq1$, $a\neq2$, $a\neq-3$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 a는 -1, 3이므로 구하는 합은
$-1+3=2$
답 ②

$P(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $P(a)=0$인 a는 $\pm(6$의 약수$)$ 중에서 찾는다.

17 $x-1$이 $P(x)=ax^4+bx^3+cx-a$의 인수이므로
$P(1)=a+b+c-a=0$
$\therefore c=-b$
$\therefore P(x)=ax^4+bx^3-bx-a$
$=a(x^4-1)+bx(x^2-1)$
$=a(x^2+1)(x+1)(x-1)$
$+bx(x+1)(x-1)$
$=(x+1)(x-1)(ax^2+bx+a)$
따라서 항상 $P(x)$의 인수인 것은 ②이다.
답 ②

x^4-1
$=(x^2+1)(x^2-1)$
$=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

18 $V(x)=x^3+x^2-8x-12$라 하자.
$V(-2)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $V(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -8 & -12 \\ & & -2 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$V(x)=(x+2)(x^2-x-6)$
$=(x+2)^2(x-3)$
이때 $V(x)=\{P(x)\}^2Q(x)$이므로
$P(x)=x+2$, $Q(x)=x-3$
$\therefore Q(10)=10-3=7$
답 7

1등급을 위한 고난도 문제
본책 19~21쪽

01 $\dfrac{x^2+ax+b}{3x^2+2bx+9}=k$ (k는 상수)라 하면
$x^2+ax+b=3kx^2+2bkx+9k$
위의 등식이 x에 대한 항등식이므로
$1=3k$, $a=2bk$, $b=9k$
$\therefore k=\dfrac{1}{3}$, $a=2$, $b=3$
$\therefore a+b=5$
답 5

02 주어진 등식의 양변에
$x=1$을 대입하면
$-1=a_{10}+a_9+a_8+a_7+\cdots+a_1+a_0$ …… ㉠
$x=-1$을 대입하면
$1=a_{10}-a_9+a_8-a_7+\cdots-a_1+a_0$ …… ㉡
㉠$-$㉡을 하면
$-2=2(a_9+a_7+a_5+a_3+a_1)$
$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-1$
답 -1

03 $(x-a)(x+b)(x-c)$
$=x^3+(-a+b-c)x^2+(-ab-bc+ca)x+abc$,
$(x+a)(x-b)(x+c)$
$=x^3+(a-b+c)x^2+(-ab-bc+ca)x-abc$
이므로
$-a+b-c=a-b+c$, $abc=-abc$
$\therefore b=a+c$, $abc=0$
ㄱ. $abc=0$이므로 a, b, c 중 적어도 하나는 0이다.
ㄴ. $a=0$이면 $b=c$이다.
ㄷ. a, b, c가 이 순서대로 연속하는 세 정수이면 $a=b-1$, $c=b+1$이므로 이것을 $b=a+c$에 대입하면
$b=b-1+b+1 \quad \therefore b=0$
따라서 $a=-1$, $c=1$이므로
$a+b+c=0$
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.
답 ⑤

04 $x-2y=-1$, 즉 $x=2y-1$이므로
$ax^2+bxy+cy^2$
$=a(2y-1)^2+b(2y-1)y+cy^2$
$=a(4y^2-4y+1)+b(2y^2-y)+cy^2$
$=(4a+2b+c)y^2+(-4a-b)y+a$ ··· ❶
$(4a+2b+c)y^2+(-4a-b)y+a=2$가 y에 대한 항등식이므로
$4a+2b+c=0$, $-4a-b=0$, $a=2$
$\therefore a=2$, $b=-8$, $c=8$ ··· ❷
$\therefore a-b+c=18$ ··· ❸
답 18

채점 기준	비율
❶ $ax^2+bxy+cy^2$을 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

05 $P(x)$를 x^3+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^3+1)Q(x)+ax^2+bx+c$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $P(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x-5$이므로 ㉠에서

$$P(x)=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)+a(x^2-x+1)+3x-5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 -2, 즉 $P(-1)=-2$이므로 ㉡에서

$3a-8=-2 \quad \therefore a=2$

따라서 구하는 나머지는

$2(x^2-x+1)+3x-5=2x^2+x-3$

답 $2x^2+x-3$

일품 BOX: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

1등급 비밀노트

㉠에서 $(x+1)(x^2-x+1)Q(x)$는 x^2-x+1로 나누어떨어지므로 ax^2+bx+c를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x-5$이어야 한다. 이때 ㉡에서

$P(x)=(x^2-x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}+3x-5$

이므로 $P(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫은 $(x+1)Q(x)+a$이다.

06 $P(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+2x-7$

ㄱ. $P(x)+5$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$P(1)+5=2\cdot1-7+5=0$
이므로 $P(x)+5$는 $x-1$로 나누어떨어진다.

ㄴ. $P(x-1)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
$P(-1-1)=P(-2)=2\cdot(-2)-7=-11$

ㄷ. $xP\left(\frac{1}{2}x\right)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는
$-4P\left(\frac{1}{2}\cdot(-4)\right)=-4P(-2)=44$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

일품 BOX: $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$이다.

07 $P(1)=P(2)=P(3)=k$ (k는 상수)라 하면

$P(1)-k=0$, $P(2)-k=0$, $P(3)-k=0$

즉 $G(x)=P(x)-k$라 하면

$G(1)=G(2)=G(3)=0$이고 $G(x)$의 x^3의 계수가 1이므로

일품 BOX: $P(x)$와 $G(x)$의 x^3의 계수는 같다.

$G(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+k$ ···➊

이때 $P(-1)=0$이므로

$-2\cdot(-3)\cdot(-4)+k=0$

$\therefore k=24$ ···➋

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+24$이므로

$P(0)=-1\cdot(-2)\cdot(-3)+24=18$ ···➌

답 18

채점 기준	비율
❶ $P(1)=P(2)=P(3)=k$로 놓고 $P(x)$를 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $P(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

08

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & a & b & c \\ & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & a+2 & b-2 & \boxed{1} \end{array}$$

$2(a+2)=-2$에서 $a=-3$

$2(b-2)=-4$에서 $b=0$

$c-4=1$에서 $c=5$

$\therefore ax^2+bx+c=-3x^2+5$

오른쪽 조립제법에서 $-3x^2+5$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $-3x+3$이다.

$$\begin{array}{c|ccc} -1 & -3 & 0 & 5 \\ & & 3 & -3 \\ \hline & -3 & 3 & \boxed{2} \end{array}$$

답 $-3x+3$

09 $p=a^3$, $q=b^3$, $r=a^2b$, $s=ab^2$, $t=2(a+b)^2$이므로 $p-q+r-s=t$에서

$a^3-b^3+a^2b-ab^2=2(a+b)^2$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)=2(a+b)^2$

$(a-b)(a^2+2ab+b^2)=2(a+b)^2$

$(a-b)(a+b)^2=2(a+b)^2$

이때 $a+b\neq0$이므로 $a-b=2$

답 ⑤

10 두 정육면체의 부피의 차가 7이므로

$a^3-b^3=7$

$\therefore (a-b)(a^2+ab+b^2)=7 \quad \cdots\cdots ㉠$ ···➊

일품 BOX: a, b는 양수이고 $a>b$이므로 $a^3>b^3$

두 정육면체의 한 면의 둘레의 길이의 차가 4이므로

$4a-4b=4$

$\therefore a-b=1 \quad \cdots\cdots ㉡$ ···➋

㉠에 ㉡을 대입하면

$a^2+ab+b^2=7$ ···➌

답 7

채점 기준	비율
❶ 부피의 차를 이용하여 a, b에 대한 식을 세우고, 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ 한 면의 둘레의 길이의 차를 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ a^2+ab+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

11 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$에서

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

$\therefore (x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

ㄱ. $x+y+z\neq0$이면

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$

ㄴ. $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$이면 $x-y\neq0$, $y-z\neq0$, $z-x\neq0$이므로

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\neq0$

$\therefore x+y+z=0$

ㄷ. 삼각형의 세 변의 길이가 x, y, z이면 $x+y+z>0$이므로

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

따라서 $x=y=z$이므로 정삼각형이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

> $x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$이므로
> $x=y=z$

12 $4-4x=X$로 놓으면

$4x^4+(4-4x-x^2)(4-4x+3x^2)$
$=4x^4+(X-x^2)(X+3x^2)$
$=4x^4+X^2+2x^2X-3x^4$
$=x^4+2Xx^2+X^2$
$=(x^2+X)^2=(x^2-4x+4)^2$
$=\{(x-2)^2\}^2=(x-2)^4$

따라서 $(x-2)^4$의 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

13 $(x+\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})(x+5\sqrt{3})(x+6\sqrt{3})+a$
$=(x+\sqrt{3})(x+6\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})(x+5\sqrt{3})+a$
$=(x^2+7\sqrt{3}x+18)(x^2+7\sqrt{3}x+30)+a$

$x^2+7\sqrt{3}x=X$로 놓으면

$(X+18)(X+30)+a$
$=X^2+48X+540+a$
$=(X+24)^2-36+a$
$=(x^2+7\sqrt{3}x+24)^2-36+a$ ······ ㉠

따라서 ㉠이 이차식의 제곱이 되려면

$-36+a=0$ $\therefore a=36$ 답 36

14 $x^4-x^2+16=(x^4+8x^2+16)-9x^2$
$=(x^2+4)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)$

즉 $Q(x)=x^2+3x+4$이므로

$Q(x^2)=x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2$
$=(x^2+2)^2-x^2$
$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

따라서 $Q(x^2)$의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

15 $(x+y)^2(x-y)^2-18(x^2+y^2)+81$
$=(x^2-y^2)^2-18(x^2+y^2)+81$
$=(x^2+y^2)^2-18(x^2+y^2)+81-4x^2y^2$
$=\{(x^2+y^2)-9\}^2-(2xy)^2$
$=(x^2+y^2+2xy-9)(x^2+y^2-2xy-9)$
$=\{(x+y)^2-3^2\}\{(x-y)^2-3^2\}$
$=(x+y+3)(x+y-3)(x-y+3)(x-y-3)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

다른 풀이 $x+y=a$, $x-y=b$라 하고 두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$이므로

$x^2+y^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

> x^2+y^2
> $=\frac{1}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2$
> $=\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)$
> $+\frac{1}{4}(a^2-2ab+b^2)$
> $=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$\therefore (x+y)^2(x-y)^2-18(x^2+y^2)+81$
$=a^2b^2-9(a^2+b^2)+81=a^2b^2-9a^2-9b^2+81$
$=a^2(b^2-9)-9(b^2-9)=(a^2-9)(b^2-9)$
$=(a+3)(a-3)(b+3)(b-3)$
$=(x+y+3)(x+y-3)(x-y+3)(x-y-3)$

16 $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+1}=\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{c^2+1}$의 양변을 제곱하면 $(a^2+b^2)(a^2+1)=(b^2+c^2)(c^2+1)$

$a^4+a^2+b^2a^2+b^2=b^2c^2+b^2+c^4+c^2$
$(a^2-c^2)b^2+a^2-c^2+a^4-c^4=0$
$(a^2-c^2)(b^2+1)+(a^2+c^2)(a^2-c^2)=0$
$(a^2-c^2)(a^2+b^2+c^2+1)=0$
$\therefore (a+c)(a-c)(a^2+b^2+c^2+1)=0$ ··· ❶

이때 $a+c>0$, $a^2+b^2+c^2+1>0$이므로

$a-c=0$ $\therefore a=c$

따라서 주어진 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다. ··· ❷

답 $a=c$인 이등변삼각형

채점 기준	비율
❶ 양변을 제곱한 후 인수분해할 수 있다.	60 %
❷ 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	40 %

17 $a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)$
$=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-c^2a-ca^2$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$
$=(a-b-c)a^2-(b^2+c^2)a+(b^2+c^2)(b+c)$
$=(a-b-c)a^2-(a-b-c)(b^2+c^2)$
$=(a^2-b^2-c^2)(a-b-c)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ②이다. 답 ②

18 $2x^2+7xy+6y^2+5x+7y-3$
$=2x^2+(7y+5)x+(6y^2+7y-3)$
$=2x^2+(7y+5)x+(2y+3)(3y-1)$
$=(x+\boxed{2y+3})(2x+\boxed{3y-1})$

> $$\begin{array}{lll} 1 & 2y+3 & \rightarrow 4y+6 \\ 2 & 3y-1 & \rightarrow 3y-1 \\ \hline & & 7y+5 \end{array}$$

앞의 식에 y 대신 yz를 대입하면

$$2x^2+7xyz+6y^2z^2+5x+7yz-3$$
$$=(x+\boxed{2yz+3})(2x+3yz-1)$$

따라서 $A=2y+3$, $B=3y-1$, $C=2yz+3$이므로

$$2A+3B-C=2(2y+3)+3(3y-1)-(2yz+3)$$
$$=13y-2yz$$

답 ⑤

19 $x^2+ax-y^2+by-3=x^2+ax-(y^2-by+3)$
에서 y^2-by+3은
$(y-1)(y-3)$ 또는 $(y+1)(y+3)$
으로 인수분해되어야 하므로
$b=4$ 또는 $b=-4$

(i) $b=4$일 때,
$x^2+ax-(y^2-4y+3)=x^2+ax-(y-1)(y-3)$
ⓘ (주어진 식)$=\{x-(y-1)\}\{x+(y-3)\}$
$=x^2-2x-(y-1)(y-3)$
$\therefore a=-2$
ⓘⓘ (주어진 식)$=\{x+(y-1)\}\{x-(y-3)\}$
$=x^2+2x-(y-1)(y-3)$
$\therefore a=2$

(ii) $b=-4$일 때,
$x^2+ax-(y^2+4y+3)=x^2+ax-(y+1)(y+3)$
ⓘ (주어진 식)$=\{x-(y+1)\}\{x+(y+3)\}$
$=x^2+2x-(y+1)(y+3)$
$\therefore a=2$
ⓘⓘ (주어진 식)$=\{x+(y+1)\}\{x-(y+3)\}$
$=x^2-2x-(y+1)(y+3)$
$\therefore a=-2$

(i), (ii)에서 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(-2, 4)$, $(2, 4)$, $(2, -4)$, $(-2, -4)$
이므로 $a+b$의 값이 될 수 있는 것은 2, 6, -2, -6
이다. 답 ④

> $(x^2+ax-3)-y^2+by$
> 에서 x^2+ax-3이
> $(x-1)(x+3)$ 또는
> $(x-3)(x+1)$
> 로 인수분해되는 경우로도
> 풀 수 있다.

> $-2+4=2$,
> $2+4=6$,
> $2-4=-2$,
> $-2-4=-6$

20 $P(x)=6x^4+5x^3+4x^2-2x-1$이라 하면

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+1-1-1=0,$$
$$P\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{27}-\frac{5}{27}+\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-1=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
\frac{1}{2} & 6 & 5 & 4 & -2 & -1 \\
 & & 3 & 4 & 4 & 1 \\
\hline
-\frac{1}{3} & 6 & 8 & 8 & 2 & 0 \\
 & & -2 & -2 & -2 & \\
\hline
 & 6 & 6 & 6 & 0 &
\end{array}$$

$$\therefore P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(6x^2+6x+6)$$
$$=(2x-1)(3x+1)(x^2+x+1)$$

답 ④

21 $P(1)=0$, $P(-3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 5 & -1 & -17 & 12 \\
 & & 1 & 6 & 5 & -12 \\
\hline
-3 & 1 & 6 & 5 & -12 & 0 \\
 & & -3 & -9 & 12 & \\
\hline
 & 1 & 3 & -4 & 0 &
\end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x-1)(x+3)(x^2+3x-4)$$
$$=(x-1)^2(x+3)(x+4) \quad \cdots ❶$$

따라서
$$P(21)=20^2\cdot24\cdot25=400\cdot24\cdot25=24\cdot10^4$$
이므로 $n=24$ $\cdots$ ❷

답 24

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 인수분해할 수 있다.	60 %
❷ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	40 %

22 $P(x)=2x^3+ax^2+(-2-2a)x-12$라 하면
$P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 2 & a & -2-2a & -12 \\
 & & 4 & 2a+8 & 12 \\
\hline
 & 2 & a+4 & 6 & 0
\end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x-2)\{2x^2+(a+4)x+6\}$$

이때
$$2x^2+(a+4)x+6=(2x+p)(x+q)$$
(p, q는 정수)
라 하면
$$2x^2+(a+4)x+6=2x^2+(p+2q)x+pq$$
$$\therefore a+4=p+2q,\ 6=pq$$

$6=pq$를 만족시키는 두 정수 p, q의 순서쌍 (p, q)는
$(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$,
$(-1, -6)$, $(-2, -3)$, $(-3, -2)$, $(-6, -1)$
따라서 $p+2q$의 값 중 가장 큰 값과 가장 작은 값은 각각 13, -13이고 $a=p+2q-4$이므로
$$M=13-4=9,\ m=-13-4=-17$$
$$\therefore M-m=26$$

답 26

> $p=1$, $q=6$일 때,
> $p+2q=1+12=13$
> $p=-1$, $q=-6$일 때,
> $p+2q=-1-12$
> $=-13$

23 $P(2x+1)=16P(x+1)$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $P(1)=16P(1)$
$\therefore P(1)=0$
따라서 사차식 $P(x)$를
$$P(x)=(x-1)^nQ(x)$$
($n=1$, 2, 3, 4, $Q(x)$는 다항식, $Q(1)\neq0$)
라 하면 ㉠에서

$$2^n x^n Q(2x+1)=16x^n Q(x+1)$$
$x\neq0$일 때도 등식이 성립하므로
$$2^n Q(2x+1)=16Q(x+1)$$
위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$$2^n Q(1)=16Q(1),\quad 2^n=16\ (\because Q(1)\neq0)$$
$$\therefore n=4$$
그런데 $P(x)=(x-1)^4Q(x)$에서 $P(x)$는 사차식이므로 $Q(x)$는 0이 아닌 상수이어야 한다.
따라서 $P(x)=a(x-1)^4\ (a\neq0)$이라 하면 조건 (가)에서
$$a\cdot2^4=32\quad \therefore a=2$$
즉 $P(x)=2(x-1)^4$이므로
$$P(4)=2\cdot3^4=162$$
답 ④

x에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x\neq0$일 때도 모두 등식이 성립해야 한다.

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 22쪽

01 $P(x)=ax^2+bx+1$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면
$$\{P(x)\}^2$$
$$=(ax^2+bx+1)^2$$
$$=a^2x^4+b^2x^2+1+2abx^3+2bx+2ax^2$$
$$=a^2x^4+2abx^3+(b^2+2a)x^2+2bx+1,$$
$$P(x^2)+2x^2=a(x^2)^2+bx^2+1+2x^2$$
$$=ax^4+(b+2)x^2+1$$
이때 $\{P(x)\}^2=P(x^2)+2x^2$이 x에 대한 항등식이므로
$$a^2=a,\ 2ab=0,\ b^2+2a=b+2,\ 2b=0$$
$$\therefore a=1,\ b=0$$
$$\therefore P(x)=x^2+1$$
따라서
$$\{P(x)\}^3=(x^2+1)^3=x^6+3x^4+3x^2+1$$
이므로 x^2의 계수는 3이다.
답 ①

$2b=0$에서 $b=0$
$b^2+2a=b+2$에서
$2a=2\quad\therefore a=1$
$a=1$, $b=0$일 때,
$a^2=a$, $2ab=0$
이므로 네 식을 모두 만족시킨다.

02 $\{P(x)\}^{2018}=\dfrac{1}{2^{2018}}(x-1)^{2018}$,
$P(x^2)=\dfrac{1}{2}(x^2-1)$이므로 $\{P(x)\}^{2018}$을 $P(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$$\frac{1}{2^{2018}}(x-1)^{2018}$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-1)Q(x)+ax+b$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b\quad\cdots\cdots ㉠$$
㉠의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면
$$0=a+b,\ 1=-a+b$$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

따라서 $R(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$이므로
$$R(-5)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$$
답 3

03 $P(x)=x^2-4x-3$이라 하면 $P(x)$를 $x-\alpha$와 $x-\beta$로 각각 나누었을 때의 나머지가 모두 1이므로
$$P(\alpha)=P(\beta)=1$$
$$\therefore P(\alpha)-1=0,\ P(\beta)-1=0$$
$G(x)=P(x)-1$이라 하면 $G(\alpha)=G(\beta)=0$이므로
$$G(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$\therefore P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)+1$$
$$=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+1$$
즉 $\alpha\beta+1=-3$이므로 $\quad \alpha\beta=-4$
따라서 $P(x)$를 $x-\alpha\beta$로 나누었을 때의 나머지는
$$P(\alpha\beta)=P(-4)=(-4)^2-4\cdot(-4)-3=29$$
답 29

$P(x)$의 x^2의 계수가 1이므로 $G(x)$의 x^2의 계수도 1이다.

04 $A(1)B(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $A(x)B(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -1 & -2 & 3 & -1 \\
 & & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline
1 & 1 & 0 & -2 & 1 & \boxed{0} \\
 & & 1 & 1 & -1 & \\ \hline
 & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$\therefore A(x)B(x)=x^4-x^3-2x^2+3x-1$$
$$=(x-1)^2(x^2+x-1)$$
이때 $A(x)+B(x)$는 삼차식이고 $m<n$이므로
$$A(x)=x-1,$$
$$B(x)=(x-1)(x^2+x-1)=x^3-2x+1$$
$\{A(x)\}^2=(x-1)^2=x^2-2x+1$이므로 $B(x)$를 $\{A(x)\}^2$으로 나누면

$$\begin{array}{r}
x+2 \\
x^2-2x+1\overline{)\,x^3-2x+1} \\
\underline{x^3-2x^2+x} \\
2x^2-3x+1 \\
\underline{2x^2-4x+2} \\
x-1
\end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 $x-1$이다.
답 ②

다른 풀이 $B(x)$를 $\{A(x)\}^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$$(x-1)(x^2+x-1)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$$
위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$$0=a+b\quad\therefore b=-a\quad\cdots\cdots ㉠$$
따라서
$$(x-1)(x^2+x-1)=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$$
이고 $x\neq1$일 때도 등식이 성립하므로
$$x^2+x-1=(x-1)Q(x)+a$$

앞의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a=1$

㉠에서 $b=-1$이므로 구하는 나머지는 $x-1$이다.

05 $4x(x+1)(x+2)(x+3)+a$

$=4\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+a$

$=4(x^2+3x)(x^2+3x+2)+a$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$4X(X+2)+a$

$=4X^2+8X+a$

$=4(X+1)^2+a-4$

$=4(x^2+3x+1)^2+a-4$

$=(2x^2+6x+2)^2+a-4$ ······ ㉠

따라서 ㉠이 이차식의 제곱이 되려면

$a-4=0$ $\quad\therefore a=4$ 답 4

06 ㄱ. $P(1)=-a-b$이고 $P(-1)=-a-b$이므로 $P(1)=0$이면 $P(-1)=0$이다.

즉 $x-1$이 $P(x)$의 인수이면 $x+1$도 $P(x)$의 인수이다.

ㄴ. $P(x)$가 x^2+1로 나누어떨어지면

$P(x)=(x^2+1)(ax^2-2a)=ax^4-ax^2-2a$

즉 $ax^4-bx^2-2a=ax^4-ax^2-2a$이므로

$a=b$

이때 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 $a+b\neq0$이다.

ㄷ. $P(n)=an^4-bn^2-2a=0$이라 하면

$a(n^4-2)-bn^2=0$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{n^4-2}{n^2}$

따라서 $a=n^2$, $b=n^4-2$이면 $P(n)=0$이므로 자연수 n에 대하여 $x-n$이 $P(x)$의 인수가 되도록 하는 두 정수 a, b가 항상 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

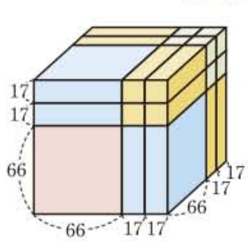
07 $66=x$, $17=y$라 하면 A, B, C, D의 부피는 각각 x^3, x^2y, xy^2, y^3이므로 A 1개, B 6개, C 12개, D 8개의 부피의 합은

$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=(x+2y)^3$

따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는

$x+2y=66+2\cdot17=100$ 답 100

참고 만들어지는 정육면체는 오른쪽 그림과 같다.



일품 BOX

세 변의 길이가 a, b, c이고 내접원의 반지름의 길이가 r인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}r(a+b+c)$

$x-a$가 $P(x)$의 인수이면 $P(a)=0$이다.

$x^2=X$라 할 때, $aX^2-bX-2a$가 $X+1$로 나누어떨어지면 $aX^2-bX-2a=(X+1)(aX-2a)$로 놓을 수 있다.

두 정수 a, b가 $a=kn^2$, $b=k(n^4-2)$ (k는 상수) 꼴이면 $P(n)=0$이다.

$27=6\cdot4+3$이므로 27을 6으로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

$48=11\cdot4+4$이므로 48을 11로 나누었을 때의 나머지는 4이다.

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 23~26쪽

01 전략 곱셈 공식을 이용하여 r의 값을 구한다.

풀이 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$=50+2\cdot47$

$=144$

$\therefore a+b+c=12$ ($\because a+b+c>0$)

이때 $a+b+c=12r$이므로

$12=12r$

$\therefore r=1$

따라서 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot12=6$ 답 ③

02 전략 곱셈 공식을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구하고, a, b, c 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$6^2=12+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=12$

이때 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca=12$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 $a+b+c=6$에서 $a=b=c=2$이므로

$a^3+b^3+c^3=3\cdot2^3=24$ 답 ⑤

1등급 비밀노트

① $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$
$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

② $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

03 전략 $n=1$, $n=2$인 경우는 n^4+2n^2+24를 n^2+2n+3으로 직접 나누어 구한 나머지보다 n^2+2n+3의 값이 작음에 주의한다.

풀이 $n=1$일 때,

$n^4+2n^2+24=27$, $n^2+2n+3=6$

이므로

$R(1)=\boxed{3}$

$n=2$일 때,

$n^4+2n^2+24=48$, $n^2+2n+3=11$

이므로

$R(2)=\boxed{4}$

한편 n^4+2n^2+24를 n^2+2n+3으로 나누면

$$\begin{array}{r}
n^2-2n+3 \\
n^2+2n+3\overline{)\,n^4 \qquad +2n^2 \qquad +24} \\
\underline{n^4+2n^3+3n^2 \qquad\qquad} \\
-2n^3-\ n^2 \qquad\quad \\
\underline{-2n^3-4n^2-6n \qquad} \\
3n^2+6n+24 \\
\underline{3n^2+6n+\ 9} \\
15
\end{array}$$

$\therefore n^4+2n^2+24$

$=(n^2+2n+3)(\boxed{n^2-2n+3})+15$

$n\geq3$일 때, $n^2+2n+3\geq18$이므로

$R(n)=15$

따라서 $a=3,\ b=4,\ P(n)=n^2-2n+3$이므로

$a+P(b)=3+P(4)=3+11=14$ 답 ④

04 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입한다.

풀이 $a+bP_1(x)+cP_2(x)+dP_3(x)$

$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$

$+d(x-1)(x-2)(x-3)$

이므로

$a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$

$+d(x-1)(x-2)(x-3)$

$=3x^3-5x^2+7$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로 $d=3$

좌변과 우변의 최고차항의 계수는 각각 d, 3이므로 $d=3$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a=5$

등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$a+b=11 \qquad \therefore b=6$

등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$a+2b+2c=43 \qquad \therefore c=13$

$\therefore a+b+c+d=27$ 답 ③

05 전략 $\{A(x)\}^n$을 몫과 나머지를 이용하여 x에 대한 항등식으로 나타낸다.

풀이 다항식 $\{A(x)\}^n$을 $B(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_n(x)$, 나머지를 $R_n(x)=a_nx+b_n$ (a_n, b_n은 상수)이라 하면

$\{A(x)\}^n=(x^2-x-2)Q_n(x)+a_nx+b_n$

$=(x+1)(x-2)Q_n(x)+a_nx+b_n$

이때 $A(-1)=-3,\ A(2)=0$이므로

주어진 $A(x)$에 $x=-1$, $x=2$를 대입하여 구한다.

$-a_n+b_n=(-3)^n,\ 2a_n+b_n=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a_n=-\frac{1}{3}\cdot(-3)^n,\ b_n=\frac{2}{3}\cdot(-3)^n$

따라서 $R_n(1)=a_n+b_n=\frac{1}{3}\cdot(-3)^n$이므로

$R_1(1)+R_2(1)+R_3(1)+R_4(1)$

$=\frac{1}{3}\{(-3)^1+(-3)^2+(-3)^3+(-3)^4\}$

$=20$ 답 ⑤

06 전략 주어진 두 등식을 이용하여 보기의 식을 $x+1$을 포함한 식으로 나타낸다.

풀이 $A(x)+B(x)=(x+1)Q_1(x)+1$ ······ ㉠

$A(x)-B(x)=(x+1)Q_2(x)+3$ ······ ㉡

ㄱ. ㉠+㉡을 하면

$2A(x)=(x+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+4$ ······ ㉢

$\therefore A(x)-2=\frac{1}{2}(x+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}$

따라서 $A(x)-2$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

ㄴ. ㉡+㉢을 하면

$3A(x)-B(x)$

$=(x+1)\{Q_1(x)+2Q_2(x)\}+7$

따라서 $3A(x)-B(x)$는 $x+1$로 나누어떨어지지 않는다.

$3A(x)-B(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 7이다.

ㄷ. ㉠×3−㉡을 하면

$2A(x)+4B(x)=(x+1)\{3Q_1(x)-Q_2(x)\}$

$\therefore A(x)+2B(x)$

$=\frac{1}{2}(x+1)\{3Q_1(x)-Q_2(x)\}$

따라서 $A(x)+2B(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

다른 풀이 $A(x)+B(x)=(x+1)Q_1(x)+1$에서

$A(-1)+B(-1)=1$ ······ ㉣

$A(x)-B(x)=(x+1)Q_2(x)+3$에서

$A(-1)-B(-1)=3$ ······ ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$A(-1)=2,\ B(-1)=-1$

ㄱ. $A(-1)-2=2-2=0$

따라서 $A(x)-2$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

ㄴ. $3A(-1)-B(-1)=6+1=7$

따라서 $3A(x)-B(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 7이다.

ㄷ. $A(-1)+2B(-1)=2-2=0$

따라서 $A(x)+2B(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

07 전략 $ax+b=0$을 만족시키는 x의 값을 $P(x)$에 대입한 값이 R임을 이용한다.

풀이 $P(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지가 R이므로

$R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$

$H(x)=\left(ax+\frac{1}{R}\right)P(x)$라 하면 $H(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $H\left(-\frac{b}{a}\right)$이므로

$H\left(-\frac{b}{a}\right)=\left(-b+\frac{1}{R}\right)P\left(-\frac{b}{a}\right)$

$=\left(-b+\frac{1}{R}\right)\cdot R=1-bR$ 답 ②

08 전략 나머지정리를 이용하여 R_1, R_2를 각각 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $R_1=P(-a)=-a^3+2a^2+3a-4$,
$R_2=P(a)=a^3+2a^2-3a-4$이므로
$$R_1+R_2=4a^2-8$$
$4a^2-8=12$에서
$$a^2=5$$
따라서 $P(x)$를 $x-a^2$으로 나누었을 때의 나머지는
$$P(a^2)=P(5)=5^3+2\cdot5^2-3\cdot5-4$$
$$=156$$
답 ④

09 전략 조건 (가)를 이용하여 차수가 가장 낮은 다항식 $P(x)$의 차수를 유추한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $P(x)-(x+10)$은 x^2-4와 x^2+x-2, 즉 $(x+2)(x-2)$와 $(x+2)(x-1)$로 각각 나누어떨어지므로 차수가 가장 낮은 다항식 $P(x)-(x+10)$을
$$P(x)-(x+10)=a(x+2)(x-1)(x-2)\quad(a\neq0)$$
라 하면
$$P(x)=a(x+2)(x-1)(x-2)+x+10$$
조건 (나)에 의하여 $P(-1)=15$이므로
$$6a+9=15\qquad\therefore a=1$$
$$\therefore P(x)=(x+2)(x-1)(x-2)+x+10$$
$$=x^3-x^2-3x+14$$
따라서 구하는 $P(x)$의 상수항은 14이다.
답 ④

$P(x)-(x+10)$은 $x+2$, $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로 3차 이상의 다항식이다.

10 전략 $P(x)$를 n차식이라 하고 주어진 등식의 좌변과 우변의 차수를 비교하여 n의 값을 구한다.

풀이 $P(x^2)$
$$=x^3P(x+3)+6x^2(x+3)(x-1)(x-3)\quad\cdots\cdots ㉠$$
최고차항의 계수가 1인 다항식 $P(x)$가 n차식이라 하면 ㉠의 좌변은 $2n$차식이고, ㉠의 우변은 $(n+3)$차식 또는 5차식이므로 ㉠이 x에 대한 항등식이려면
$$2n=n+3 \text{ 또는 } 2n=5$$
$$\therefore n=3 \text{ 또는 } n=\frac{5}{2}$$
그런데 n은 자연수이므로
$$n=3$$
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$$P(0)=0$$
㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$$P(9)=-27P(0)$$
$$\therefore P(9)=0\ (\because P(0)=0)$$
㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면
$$P(9)=27P(6)$$
$$\therefore P(6)=0\ (\because P(9)=0)$$

따라서 $P(x)$는 x, $x-9$, $x-6$을 인수로 갖고 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로
$$P(x)=x(x-6)(x-9)$$
즉 구하는 나머지는
$$P(-1)=-1\cdot(-7)\cdot(-10)=-70$$
답 ②

11 전략 $P(9)=2613$임을 이용하여 10보다 작은 자연수 a, b, c, d의 값을 구한다.

풀이 $P(9)=a\cdot10^3+b\cdot10^2+c\cdot10+d=2613$이고, a, b, c, d는 10보다 작은 자연수이므로
$$a=2,\ b=6,\ c=1,\ d=3$$
$$\therefore P(x)=2(x+1)^3+6(x+1)^2+(x+1)+3$$
$$=2x^3+12x^2+19x+12$$
오른쪽 조립제법에서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2+8x+3$이다.

-2	2	12	19	12
		-4	-16	-6
	2	8	3	6

답 ⑤

12 전략 a, b가 연속하는 두 자연수임을 이용하여 A를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 a, b는 연속하는 두 자연수이므로 $b=a+1$이라 하면
$$A=a^2+b^2+c^2=a^2+(a+1)^2+\{a(a+1)\}^2$$
$$=a^4+2a^3+3a^2+2a+1$$
$$=a^4+a^2+1+2a^3+2a+2a^2$$
$$=(a^2+a+1)^2$$
$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로
$$\sqrt{A}=a^2+a+1=a(a+1)+1$$
이때 연속하는 두 자연수의 곱 $a(a+1)$은 짝수이므로 $\sqrt{A}$는 항상 홀수이고 유리수이다.
답 ③

$c^2=(ab)^2$
$=\{a(a+1)\}^2$

참고 $b=a-1$이라 하면 $\sqrt{A}=a^2-a+1=a(a-1)+1$이므로 그 결과는 같다.

13 전략 주어진 식의 좌변에서 $16=x$로 놓고 좌변을 인수분해한다.

풀이 $16=x$라 하면
$$16^3+2\cdot16^2-2\cdot16+3=x^3+2x^2-2x+3$$
오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-3	1	2	-2	3
		-3	3	-3
	1	-1	1	0

$$x^3+2x^2-2x+3$$
$$=(x+3)(x^2-x+1)$$
$$\therefore 16^3+2\cdot16^2-2\cdot16+3=(16+3)(16^2-16+1)$$
$$=19\cdot241$$
따라서 $a=19$, $b=241$ 또는 $a=241$, $b=19$이므로
$$a+b=260$$
답 ③

$x=-3$일 때 이 식의 값이 0이므로 이 식은 $x+3$을 인수로 갖는다.

14 전략 나머지정리를 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타낸 후 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 인수분해한다.

풀이 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{10}(x^2+ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2)$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(4+2a+b)=0$

$\therefore b=-2a-4$ …… ㉠

이때

$x^{10}(x^2+ax+b)=x^{10}(x^2+ax-2a-4)$

$=x^{10}(x-2)(x+a+2)$

이므로

$x^{10}(x-2)(x+a+2)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2)$

$x\neq2$일 때도 등식이 성립하므로

$x^{10}(x+a+2)=(x-2)Q(x)+2^{10}$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(a+4)=2^{10}$

이므로 $a+4=1$ $\therefore a=-3$

따라서 ㉠에서

$b=-2\cdot(-3)-4=2$

$\therefore ab=-6$ 답 ①

x에 대한 항등식이므로 $x=2$, $x\neq2$일 때도 모두 등식이 성립해야 한다.

15 전략 인수정리를 이용하여 c를 b에 대한 식으로 나타낸 후 $ax^3+bx^2-4ax+c$를 인수분해한다.

풀이 $P(x)=ax^4+bx^3+cx-16a$라 하면 $P(x)$가 $x+2$를 인수로 가지므로 $P(-2)=0$

$16a-8b-2c-16a=0$

$\therefore c=-4b$

$\therefore ax^3+bx^2-4ax+c$

$=ax^3+bx^2-4ax-4b$

$=ax(x^2-4)+b(x^2-4)$

$=(x^2-4)(ax+b)$

$=(x+2)(x-2)(ax+b)$

따라서 항상 $ax^3+bx^2-4ax+c$의 인수인 것은 ④이다. 답 ④

16 전략 $24x^3+22x^2-x-3$의 값이 0이 되도록 하는 x의 값을 찾아 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

풀이 $P(x)=24x^3+22x^2-x-3$이라 하면

$P\left(-\frac{1}{2}\right)=-3+\frac{11}{2}+\frac{1}{2}-3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$-\frac{1}{2}$	24	22	-1	-3
		-12	-5	3
	24	10	-6	0

$\therefore P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(24x^2+10x-6)$

$=(2x+1)(12x^2+5x-3)$

$=(2x+1)(4x+3)(3x-1)$

$\therefore a+b+c+d+e+f$

$=2+1+4+3+3+1$

$=14$ 답 ②

$\pm\frac{(3의\ 약수)}{(24의\ 약수)}$ 중에서 찾는다.

$e=3$, $f=1$이고 $a=2$, $b=1$, $c=4$, $d=3$ 또는 $a=4$, $b=3$, $c=2$, $d=1$이다.

17 전략 $P(x)$의 식에 x 대신 $2x+1$을 대입하여 $P(2x+1)$의 식을 구한다.

풀이 $A(x)=x^3+3x^2-13x-15$라 하면 $A(-1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $A(x)$를 인수분해하면

-1	1	3	-13	-15
		-1	-2	15
	1	2	-15	0

$A(x)=(x+1)(x^2+2x-15)$

$=(x+1)(x+5)(x-3)$

다항식 $P(x)$를 $A(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x+1)(x+5)(x-3)Q(x)+x^2+1$

이므로

$P(2x+1)$

$=(2x+1+1)(2x+1+5)(2x+1-3)Q(2x+1)$
$+(2x+1)^2+1$

$=8(x+1)(x+3)(x-1)Q(2x+1)+4x^2+4x+2$

$=(x^2-1)\cdot8(x+3)Q(2x+1)+4(x^2-1)+4x+6$

따라서 다항식 $P(2x+1)$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $4x+6$이므로

$R(x)=4x+6$

$\therefore R(3)=4\cdot3+6=18$ 답 ④

다른 풀이 다항식 $P(2x+1)$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(2x+1)=(x^2-1)Q_1(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=-a+b$

이때 $P(-1)=2$이므로

$-a+b=2$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(3)=a+b$

이때 $P(3)=10$이므로

$a+b=10$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=6$

따라서 $R(x)=4x+6$이므로

$R(3)=4\cdot3+6=18$

$P(x)$
$=(x+1)(x+5)(x-3)$
$\times Q(x)+x^2+1$
의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$P(-1)=2$
양변에 $x=3$을 대입하면
$P(3)=10$

18 전략 $(P\ominus Q)\otimes P$를 전개한 후 $P=x+y$, $Q=x-y$를 대입한다.

풀이 $(P\ominus Q)\otimes P$

$=(P+2Q)\otimes P$

$=\{(P+2Q)+P\}(P+2Q)$

$=(2P+2Q)(P+2Q)$

$=2P^2+6PQ+4Q^2$ ··· ❶

$=2(x+y)^2+6(x+y)(x-y)+4(x-y)^2$

$=12x^2-4xy$ ··· ❷

따라서 xy의 계수는 -4이다. ··· ❸

답 -4

일품 BOX

채점 기준	비율
❶ $(P\ominus Q)\otimes P$를 P, Q에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $(P\ominus Q)\otimes P$를 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ xy의 계수를 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 $(P\ominus Q)\otimes P$

$$=(P+2Q)\otimes P$$
$$=(2P+2Q)(P+2Q)$$
$$=\{2(x+y)+2(x-y)\}\{x+y+2(x-y)\}$$
$$=4x(3x-y)$$
$$=12x^2-4xy$$

19 전략 세 정사각형 A, B, C의 넓이와 색칠한 부분의 넓이의 총합은 한 변의 길이가 10인 정사각형의 넓이와 같음을 이용한다.

풀이 세 정사각형 A, B, C의 한 변의 길이를 각각 a, b, c라 하면

$$a+b+c=10$$

세 정사각형 A, B, C의 넓이의 합이 색칠한 부분의 넓이와 같으므로 세 정사각형 A, B, C의 넓이의 합은 한 변의 길이가 10인 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

$$\therefore a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}\cdot 10^2=50$$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$$10^2=50+2(ab+bc+ca)$$
$$\therefore ab+bc+ca=25$$

$p=\sqrt{2}a$, $q=\sqrt{2}b$, $r=\sqrt{2}c$이므로

한 변의 길이가 a인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}a$이다.

$$pq+qr+rp=2ab+2bc+2ca$$
$$=2(ab+bc+ca)$$
$$=2\cdot 25$$
$$=50$$

답 50

20 전략 $2x^2+x+4$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $px+q$임을 이용한다.

풀이 $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x-1)^3Q(x)+2x^2+x+4$$
$$=(x-1)(x-1)^2Q(x)+2x^2+x+4 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

이때 $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $px+q$이므로 ㉠에서

$$P(x)=(x-1)(x-1)^2Q(x)+2(x-1)^2+px+q$$

즉 $2(x-1)^2+px+q=2x^2+x+4$이므로

$$2x^2+(p-4)x+q+2=2x^2+x+4$$
$$p-4=1,\ q+2=4$$
$$\therefore p=5,\ q=2 \quad \cdots ❷$$
$$\therefore p^2+q^2=5^2+2^2=29 \quad \cdots ❸$$

답 29

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 $P(x)$를 나타낼 수 있다.	30%
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ p^2+q^2의 값을 구할 수 있다.	10%

21 전략 주어진 등식을 변형하여 $P(1)=2P(2)=3P(3)$임을 이용한다.

풀이 $\frac{P(1)}{30}=\frac{P(2)}{15}=\frac{P(3)}{10}=\frac{1}{6}$의 각 변에 30을 곱하면

$$P(1)=2P(2)=3P(3)=5$$

이므로

$$P(1)-5=2P(2)-5=3P(3)-5=0$$

따라서 $A(x)=xP(x)-5$라 하면 $A(x)$는 삼차식이고

$$A(1)=A(2)=A(3)=0$$

이므로

$$A(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)\ (k\neq 0)$$

이라 할 수 있다.

$$\therefore xP(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+5$$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$0=-6k+5 \qquad \therefore k=\frac{5}{6}$$

따라서 $xP(x)=\frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+5$이고

$P(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지는 $P(6)$이므로 양변에 $x=6$을 대입하면

$$6P(6)=\frac{5}{6}\cdot 5\cdot 4\cdot 3+5=55$$
$$\therefore P(6)=\frac{55}{6}$$

답 $\frac{55}{6}$

1등급 비밀노트

n차 다항식 $P(x)$가 n개의 서로 다른 실수 a_1, a_2, $\cdots$, a_n에 대하여 $P(a_1)=P(a_2)=\cdots=P(a_n)=0$이면 $P(x)$는 $x-a_1$, $x-a_2$, $\cdots$, $x-a_n$으로 나누어떨어지므로

$$P(x)=k(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\ (k\neq 0)$$

22 전략 $3A(x)-B(x)$와 $B(x)$를 몫과 나머지를 이용하여 나타낸 후, 두 등식을 이용하여 $A(x)$를 구한다.

풀이 $3A(x)-B(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$R(x)$는 다항식 $3A(x)-B(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지이므로 일차 이하의 다항식이다.

$$3A(x)-B(x)=(x^2+1)Q_1(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$B(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$B(x)=(x^2+1)Q_2(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$3A(x)=(x^2+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+2ax+2b$$
$$\therefore A(x)=\frac{1}{3}(x^2+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+\frac{2}{3}ax+\frac{2}{3}b$$

즉 $A(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는

$\frac{2}{3}ax+\frac{2}{3}b$이므로

$$\frac{2}{3}a=2,\ \frac{2}{3}b=-6 \qquad \therefore a=3,\ b=-9$$

따라서 $R(x)=3x-9$이므로

$$R(5)=3\cdot5-9=6$$

답 6

23 전략 두 다항식을 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 나머지가 서로 같으므로 각 식에 $x=a$, $x=b$를 대입한 값이 각각 같음을 이용한다.

풀이 $A(x)=x^3+x^2-5x+1$,

$B(x)=x^3-x^2-3x+13$이라 하면 두 다항식 $A(x)$, $B(x)$를 각각 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 나머지가 서로 같으므로

$$A(a)=B(a),\ A(b)=B(b)$$

$A(a)=B(a)$에서

$$a^3+a^2-5a+1=a^3-a^2-3a+13$$

$$2a^2-2a-12=0, \quad a^2-a-6=0$$

$$(a+2)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=3$$

마찬가지로 $A(b)=B(b)$에서

$$b=-2 \text{ 또는 } b=3$$

그런데 $a\neq b$이므로

$$a=-2,\ b=3 \text{ 또는 } a=3,\ b=-2$$

다항식 $A(x)=x^3+x^2-5x+1$을 $(x+2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $px+q$(p, q는 상수)라 하면

$$A(x)=(x+2)(x-3)Q(x)+px+q \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$$7=-2p+q \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$A(-2)$
$=-8+4+10+1=7$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$$22=3p+q \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$A(3)$
$=27+9-15+1=22$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$p=3,\ q=13$$

따라서 $R(x)=3x+13$이므로

$$R(a+b)=R(1)=16$$

답 16

$a=-2$, $b=3$ 또는
$a=3$, $b=-2$일 때
$a+b=1$

참고 두 다항식 $A(x)$, $B(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면

$$A(x)=(x-a)(x-b)Q_1(x)+R(x)$$

$$B(x)=(x-a)(x-b)Q_2(x)+R(x)$$

$$\therefore A(a)=R(a)=B(a),\ A(b)=R(b)=B(b)$$

24 전략 $P(x)$를 $(x-1)(x-3)$, $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지를 이용하여 $R(x)$의 식을 세운다.

풀이 삼차식 $P(x)$를 $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 q $(q\neq0)$라 하면

$P(x)$가 삼차식이고 나누는 식이 삼차식이므로 몫은 0이 아닌 실수이다.

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdot q+R(x) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$P(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지가 $3x-3$이므로 ㉠에서 $R(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지는 $3x-3$이다.

즉 $R(x)=a(x-1)(x-3)+3x-3$ (a는 상수)이라 하면 ㉠에서

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdot q$$
$$+a(x-1)(x-3)+3x-3$$

이때 $P(x)$는 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$P(1)=0$, $P(2)=0$

$P(2)=0$에서

$$-a+6-3=0 \qquad \therefore a=3$$

따라서

$$R(x)=3(x-1)(x-3)+3x-3$$

이므로

$$R(4)=3\cdot3\cdot1+3\cdot4-3=18$$

답 18

25 전략 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$이므로 $P(1)$, $P(2)$의 값을 이용하여 $R(x)$를 구한다.

풀이 삼차식 $P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \qquad \cdots ❶$$

이때 $P(0)=3$, $P(x+1)=P(x)+3(x^2+x)$이므로

$$P(1)=P(0)+3(0+0)=3+0=3,$$
$$P(2)=P(1)+3(1+1)=3+6=9 \qquad \cdots ❷$$

$x=1$, $x=2$를 $P(x)$에 각각 대입하면

$$a+b=3,\ 2a+b=9$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=6,\ b=-3 \qquad \cdots ❸$$

따라서 $R(x)=6x-3$이므로

$$R(3)=6\cdot3-3=15 \qquad \cdots ❹$$

답 15

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용해서 $P(x)$를 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $P(1)$, $P(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $R(3)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

26 전략 주어진 식을 전개하여 x 또는 y에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $(x+3)^2+(2y-3)^2-4xy+k$

$$=x^2+6x+9+4y^2-12y+9-4xy+k$$
$$=x^2+2(3-2y)x+4y^2-12y+18+k$$

위의 식이 x, y에 대한 완전제곱식이 되려면

x^2+ax+b가 완전제곱식으로 인수분해되려면 $\left(\frac{a}{2}\right)^2=b$

$$(3-2y)^2=4y^2-12y+18+k,$$

즉 $4y^2-12y+9=4y^2-12y+18+k$

이어야 하므로 $\quad 9=18+k$

$$\therefore k=-9$$

답 -9

다른 풀이 $(x+3)^2+(2y-3)^2-4xy+k$

$=4y^2-4(x+3)y+x^2+6x+18+k$

위의 식이 x, y에 대한 완전제곱식이 되려면

$(x+3)^2=x^2+6x+18+k$

이어야 하므로

$9=18+k \qquad \therefore k=-9$

참고 주어진 식을 인수분해하면 $(x-2y+3)^2$이다.

27

전략 $12=x$로 놓고 주어진 등식의 좌변을 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $12=x$라 하면

$12\cdot13\cdot14\cdot15-8$
$=x(x+1)(x+2)(x+3)-8$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-8$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$12\cdot13\cdot14\cdot15-8$
$=X(X+2)-8$
$=X^2+2X-8$
$=(X+4)(X-2)$
$=(x^2+3x+4)(x^2+3x-2)$
$=(12^2+3\cdot12+4)(12^2+3\cdot12-2)$
$=(144+36+4)(144+36-2)$
$=184\cdot178$
$=(2^3\cdot23)\cdot(2\cdot89)$
$=2^4\cdot23\cdot89$

이때 $2^4\cdot23\cdot89$의 양의 약수의 개수는

$(4+1)(1+1)(1+1)=20$

이므로 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 20이다.

답 20

1등급 비밀노트

$2^4\cdot23\cdot89$의 양의 약수 중 1개를 a로 택하면 b가

$b=(2^4\cdot23\cdot89)\div a$

로 결정되므로 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 a를 택하는 경우의 수, 즉 $2^4\cdot23\cdot89$의 양의 약수의 개수와 같다.

자연수 N이
$N=p^aq^b\cdots r^c$
(p, q, $\cdots$, r는 서로 다른 소수)
으로 소인수분해되면 N의 양의 약수의 개수는
$(a+1)(b+1)\cdots(c+1)$

28

전략 주어진 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 세우고 이것을 만족시키는 자연수 a, b의 값을 찾는다.

풀이 $\overline{FC}=b-a$, $\overline{DH}=a-(b-a)=2a-b$이므로

두 정사각형 ABFE, IJHD의 넓이의 차는

$a^2-(2a-b)^2=(a+2a-b)(a-2a+b)$
$=(3a-b)(b-a)$

$\therefore (3a-b)(b-a)=35$

이때 $3a-b$, $b-a$는 정수이고

$0<b-a<3a-b$

이므로

$3a-b=35$, $b-a=1$ 또는
$3a-b=7$, $b-a=5$ ⋯ ❶

$a<\frac{3}{2}a<b$이므로
$0<b-a$
$b<2a$이므로
$2b<4a$
$2b-(a+b)$
$<4a-(a+b)$
$\therefore b-a<3a-b$

(i) $3a-b=35$, $b-a=1$일 때,
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=18$, $b=19$
그런데 $\frac{3}{2}a<b$를 만족시키지 않는다.

$\frac{3}{2}\cdot18>19$

(ii) $3a-b=7$, $b-a=5$일 때,
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=6$, $b=11$

(i), (ii)에서

$a=6$, $b=11$ ⋯ ❷

따라서 $\overline{GJ}=(b-a)-(2a-b)=2b-3a$이므로 두 사각형 GFCH, EGJI의 넓이의 합은

$(b-a)^2+(2b-3a)(2a-b)$
$=5^2+4\cdot1=29$ ⋯ ❸

답 29

채점 기준	비율
❶ $3a-b$, $b-a$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 두 사각형의 넓이의 합을 구할 수 있다.	20%

29

전략 먼저 $P(2)=0$임을 이용하여 $P(x)$를 인수분해한다.

풀이 $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -a-2 & 3a+5 & -2a-10 \\ & & 2 & -2a & 2a+10 \\ \hline & 1 & -a & a+5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-ax+a+5)$ ⋯ ❶

이때

$(x-2)(x^2-ax+a+5)$
$=(x-p)(x-q)(x-r)$

이고 p, q, r는 연속하는 세 자연수이므로 2를 포함한 연속하는 세 자연수는

$1, 2, 3$ 또는 $2, 3, 4$

$Q(x)=x^2-ax+a+5$라 하면

$Q(x)=(x-1)(x-3)$ 또는
$Q(x)=(x-3)(x-4)$

따라서 $Q(3)=0$이므로

$9-3a+a+5=0, \qquad -2a+14=0$

$\therefore a=7$ ⋯ ❷

$Q(x)=(x-1)(x-3)$
$=x^2-4x+3$
일 때는
$x^2-ax+a+5$
$=x^2-4x+3$
을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

$Q(x)=x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$이므로

$P(x)=(x-2)(x-3)(x-4)$

$\therefore a+p+q+r=7+2+3+4=16$ ⋯ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 인수분해할 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+p+q+r$의 값을 구할 수 있다.	30%

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 27쪽

01

해결 단계

❶ P_k를 10의 거듭제곱을 이용하여 나타낸다.
❷ P_n을 P_4로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 나타낸 후 정리하여 n의 값을 구한다.
❸ P_n을 P_5를 포함한 식으로 인수분해하여 r의 값을 구한다.
❹ $n+r$의 값을 구한다.

풀이 ❶ $P_1=9=10-1$,

$P_2=99=10^2-1$,

$P_3=999=10^3-1$,

⋮

$P_k=10^k-1$

❷ P_n을 P_4로 나누었을 때의 몫은 $10^{11}+10^7+10^3$이고 나머지는 P_3이므로

$$\begin{aligned}P_n&=P_4(10^{11}+10^7+10^3)+P_3\\&=(10^4-1)(10^{11}+10^7+10^3)+10^3-1\\&=10^3(10^4-1)(10^8+10^4+1)+10^3-1\\&=10^3(10^{12}-1)+10^3-1\\&=10^{15}-10^3+10^3-1\\&=10^{15}-1=P_{15}\end{aligned}$$

$\therefore n=15$

❸ $P_n=10^{15}-1$
$=(10^5-1)(10^{10}+10^5+1)$
$=P_5(10^{10}+10^5+1)$

에서 P_n은 P_5로 나누어떨어지므로 $r=0$

❹ $\therefore n+r=15$ 답 ①

> 일품 BOX
> $10^4=a$라 하면
> $(10^4-1)(10^8+10^4+1)$
> $=(a-1)(a^2+a+1)$
> $=a^3-1$
> $=(10^4)^3-1$
> $=10^{12}-1$

02

해결 단계

❶ $P(x)$를 x^2-1, x^3+1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 $P(x)$를 각각 나타낸다.
❷ ❶의 두 식에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하여 a, b에 대한 두 식을 구하고, 두 식을 연립하여 a, b의 값을 구한다.
❸ a, b의 값을 ❶의 식에 각각 대입한 두 식이 같음을 이용하여 항등식을 세운다.
❹ 조건 (다)를 이용하여 $A(x)$를 구한다.
❺ $A(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

풀이 ❶ 조건 (가)에서

$P(x)=(x^2-1)A(x)+ax+4$
$=(x+1)(x-1)A(x)+ax+4$ …… ㉠

조건 (나)에서

$P(x)=(x^3+1)B(x)+x^2+2x+b$
$=(x+1)(x^2-x+1)B(x)+x^2+2x+b$ …… ㉡

❷ ㉠, ㉡의 양변에 $x=-1$을 각각 대입하면

$P(-1)=-a+4$, $P(-1)=b-1$

이므로 $-a+4=b-1$

$\therefore a+b=5$ …… ㉢

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)=a+4$

한편 조건 (다)에서 나머지정리에 의하여 $B(1)=-1$이므로 ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=1+b$

즉 $a+4=1+b$이므로

$\therefore a-b=-3$ …… ㉣

> 일품 BOX
> $P(1)=2\cdot1\cdot B(1)$
> $+1+2+b$
> $=1+b$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=4$

❸ 따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$(x+1)(x-1)A(x)+x+4$
$=(x+1)(x^2-x+1)B(x)+x^2+2x+4$

$(x+1)(x-1)A(x)$
$=(x+1)(x^2-x+1)B(x)+x^2+x$

$(x+1)(x-1)A(x)$
$=(x+1)(x^2-x+1)B(x)+x(x+1)$

$x\neq-1$일 때도 등식이 성립해야 하므로

$(x-1)A(x)=(x^2-x+1)B(x)+x$

❹ 이때 $B(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$B(x)=(x-1)Q(x)-1$

이므로

$(x-1)A(x)$
$=(x^2-x+1)\{(x-1)Q(x)-1\}+x$
$=(x^2-x+1)(x-1)Q(x)-x^2+x-1+x$
$=(x^2-x+1)(x-1)Q(x)-(x^2-2x+1)$
$=(x^2-x+1)(x-1)Q(x)-(x-1)^2$

$x\neq1$일 때도 등식이 성립해야 하므로

$A(x)=(x^2-x+1)Q(x)-x+1$

❺ $A(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지는

$-x+1$ 답 $-x+1$

03

해결 단계

❶ 주어진 등식의 좌변을 인수분해한다.
❷ a, b, c가 자연수임을 이용하여 $a-b$, $a+b$가 모두 짝수이거나 모두 홀수임을 안다.
❸ 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한다.

풀이 ❶ $a^3-b^3+(a^2-b^2)c+a^2b-ab^2$
$=a^3-b^3+a^2c-b^2c+a^2b-ab^2$
$=a^3+a^2c+a^2b-b^3-b^2c-ab^2$
$=a^2(a+c+b)-b^2(b+c+a)$
$=(a^2-b^2)(a+b+c)$
$=(a+b)(a-b)(a+b+c)$

이므로

$(a+b)(a-b)(a+b+c)=120$

❷ 이때 $a+b>0$, $a+b+c>0$이므로 $a-b>0$

또 $a-b$, $a+b$, $a+b+c$는 모두 자연수이다.

> 일품 BOX
> 두 자연수 a, b에 대하여 $a-b>0$이므로 $a-b$는 양의 정수, 즉 자연수이다.

이때 $a-b=p$, $a+b=q$ (p, q는 자연수)라 하면

$$a=\frac{p+q}{2},\ b=\frac{q-p}{2}$$

이고 a, b는 자연수이므로 p, q는 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다. 즉 $a-b$, $a+b$는 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

❸ $120=2^3\cdot3\cdot5$이고 $a-b<a+b<a+b+c$이므로 이것을 만족시키는 $a-b$, $a+b$, $a+b+c$의 값은 다음과 같다.

$a-b$	$a+b$	$a+b+c$
1	3	40
	5	24
2	4	15
	6	10
3	5	8

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 5이다.

답 5

참고 각 경우의 순서쌍 (a, b, c)를 차례대로 구하면
$(2, 1, 37)$, $(3, 2, 19)$, $(3, 1, 11)$, $(4, 2, 4)$, $(4, 1, 3)$

04

해결 단계

❶ $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지를 이용하여 식을 변형한다.
❷ $P(1)=14$임을 이용하여 구한 a의 값을 ❶의 식에 대입하여 $P(x)$를 구한다.
❸ $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

풀이 ❶ $P(x)=x^{20}+x^{18}+x^{16}+ax^2+bx+c$

$$=x^{16}(x^4+x^2+1)+ax^2+bx+c$$
$$=x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)+ax^2+bx+c$$

이고, $x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)$은 x^2+x+1로 나누어떨어지므로 $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 ax^2+bx+c를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 그 나머지가 $2x+3$이므로

$$ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+2x+3$$
$$\therefore P(x)=x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)+a(x^2+x+1)+2x+3$$

❷ $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 14이므로 $P(1)=14$에서

$$3+3a+5=14 \qquad \therefore a=2$$
$$\therefore P(x)=x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)+2(x^2+x+1)+2x+3$$
$$=x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)+2x^2+4x+5$$

❸ 따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-1)=1\cdot1\cdot3+2-4+5=6$$

답 ②

일품 BOX

a, b가 자연수이므로 $p+q$, $q-p$는 2의 배수, 즉 짝수이어야 한다. 따라서 p, q는 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

두 복소수 $a+bi$, $c+di$ (a, b, c, d는 실수)가 서로 같을 조건
➡ $a=c$, $b=d$

복소수의 덧셈은 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

Ⅱ 방정식

03 복소수

개념 & 핵심 기출

본책 30~32쪽

01 $z=(i+1)a^2-(i+8)a-6i+15$
$$=(a^2-8a+15)+(a^2-a-6)i$$

z가 순허수이려면

$$a^2-8a+15=0,\ a^2-a-6\neq0$$

$a^2-8a+15=0$에서 $(a-3)(a-5)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=5$ …… ㉠

$a^2-a-6\neq0$에서 $(a+2)(a-3)\neq0$

$\therefore a\neq-2,\ a\neq3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=5$

답 ⑤

02 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$6x-2=2y,\ 4x+3=3y-4$$
$$\therefore 3x-y=1,\ 4x-3y=-7$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=5$

$\therefore xy=10$

답 10

03 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2+b^2=3,\ ab=1$$

이때 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=3+2\cdot1=5$이므로

$a+b=\sqrt{5}$ ($\because a>0,\ b>0$)

답 ④

04 $z_1=(1+5i)x^2-4x-5-4i$
$$=(x^2-4x-5)+(5x^2-4)i$$

$z_2=(1-4i)x^2+x+3=(x^2+x+3)-4x^2i$

$\therefore z_1+z_2=(2x^2-3x-2)+(x^2-4)i$

이때 z_1+z_2가 실수이므로 $x^2-4=0$에서

$(x+2)(x-2)=0 \qquad \therefore x=2$ ($\because x>0$)

답 2

05 $p=\alpha+\beta=(3-2i)+(-1+3i)=2+i$

$q=\beta-\alpha=(-1+3i)-(3-2i)=-4+5i$

$\therefore 2p-q=2(2+i)-(-4+5i)$
$$=4+2i+4-5i=8-3i$$

따라서 $2p-q$의 허수부분은 -3이다.

답 ②

다른 풀이 $p=\alpha+\beta$, $q=\beta-\alpha$이므로

$$2p-q=2(\alpha+\beta)-(\beta-\alpha)=3\alpha+\beta$$
$$=3(3-2i)+(-1+3i)=8-3i$$

06 $\beta=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.

$\alpha+\beta=(2-3i)+(a+bi)=(2+a)+(-3+b)i$

이때 조건 ㈎에서

$-3+b=0 \quad \therefore b=3$

$\alpha-\beta=(2-3i)-(a+bi)=(2-a)+(-3-b)i$

이때 조건 ㈏에서

$2-a=5 \quad \therefore a=-3$

$\therefore \beta=-3+3i$ 답 $-3+3i$

07 $(2x+i)(3+2i)=-8+yi$에서

$(6x-2)+(4x+3)i=-8+yi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$6x-2=-8,\ 4x+3=y$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=-1$

$\therefore x+y=-2$ 답 ①

08 $z=\dfrac{2-ai}{3-i}=\dfrac{(2-ai)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$=\dfrac{(6+a)+(2-3a)i}{10}$

$=\dfrac{6+a}{10}+\dfrac{2-3a}{10}i$

복소수 z의 실수부분과 허수부분이 같으므로

$\dfrac{6+a}{10}=\dfrac{2-3a}{10}, \quad 6+a=2-3a$

$\therefore a=-1$ 답 -1

09 $x^2=\left(\dfrac{i}{1+i}\right)^2=\dfrac{i^2}{(1+i)^2}=-\dfrac{1}{2i}$,

$y^2=\left(\dfrac{i}{1-i}\right)^2=\dfrac{i^2}{(1-i)^2}=\dfrac{-1}{-2i}=\dfrac{1}{2i}$

이므로 $x^2+y^2=-\dfrac{1}{2i}+\dfrac{1}{2i}=0$ 답 ③

다른 풀이 $x+y=\dfrac{i}{1+i}+\dfrac{i}{1-i}$

$=\dfrac{i(1-i)+i(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i}{2}=i$

$xy=\dfrac{i^2}{(1+i)(1-i)}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=i^2-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=-1+1=0$

10 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(1-i)\overline{z}+2iz=(1-i)(a-bi)+2i(a+bi)$

$=a-bi-ai-b+2ai-2b$

$=(a-3b)+(a-b)i$

따라서 $(a-3b)+(a-b)i=4+2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-3b=4,\ a-b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1$

$\therefore z=1-i$ 답 $1-i$

일품 BOX

복소수 z의 켤레복소수를 $\overline{z}$라 할 때, $\overline{(\overline{z})}=z$

복소수와 그 켤레복소수의 곱은 항상 실수이다.

$z_1\overline{z_2}=1$에서 $\dfrac{1}{z_1}=\overline{z_2}$

11 $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}=2+5i$이므로

$z_1-z_2=2-5i$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=3-4i$이므로

$z_1z_2=3+4i$

$\therefore (z_1-2)(z_2+2)=z_1z_2+2(z_1-z_2)-4$

$=(3+4i)+2(2-5i)-4$

$=3-6i$ 답 $3-6i$

12 ㄱ. $z_1=\overline{z_2}$이면 $z_1z_2=\overline{z_2}z_2$

따라서 z_1z_2는 실수이다.

ㄴ. $z_1+z_2=0$에서 $\overline{z_1+z_2}=\overline{0}$

$\therefore \overline{z_1}+\overline{z_2}=0$

ㄷ. $z_1\overline{z_2}=1$이면 $z_1=\dfrac{1}{\overline{z_2}}$이므로

$\overline{z_1}=\overline{\left(\dfrac{1}{\overline{z_2}}\right)}=\dfrac{1}{z_2}$

또 $z_1\overline{z_2}=1$이면 $\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_1}$이므로

$\overline{z_1}+\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{z_2}+\overline{z_2}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 $z_1=a+bi,\ z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하자.

ㄱ. $z_1=\overline{z_2}$에서 $a+bi=c-di$이므로

$a=c,\ b=-d$

$\therefore z_1z_2=(c-di)(c+di)=c^2+d^2$

따라서 z_1z_2는 실수이다.

ㄴ. $z_1+z_2=0$에서 $(a+bi)+(c+di)=0$

즉 $(a+c)+(b+d)i=0$에서

$a+c=0,\ b+d=0$

$\therefore \overline{z_1}+\overline{z_2}=(a-bi)+(c-di)$

$=(a+c)-(b+d)i=0$

ㄷ. $z_1\overline{z_2}=1$에서 $(a+bi)(c-di)=1$

즉 $(ac+bd)+(bc-ad)i=1$에서

$ac+bd=1,\ bc-ad=0$

이때

$\overline{z_1}z_2=(a-bi)(c+di)$

$=(ac+bd)+(ad-bc)i=1$

이므로 $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_2}$

$\therefore \overline{z_1}+\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{z_2}+\overline{z_2}$

13 $z=a^2(1-i)-a(6-i)+8+2i$

$=(a^2-6a+8)-(a^2-a-2)i$

z^2이 음의 실수이려면 z가 순허수이어야 하므로

$a^2-6a+8=0,\ a^2-a-2\neq0$

$a^2-6a+8=0$에서 $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$ ...... ㉠

$a^2-a-2\neq 0$에서 $(a+1)(a-2)\neq 0$

$\therefore a\neq -1,\ a\neq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=4$

따라서 $z=-(4^2-4-2)i=-10i$이므로

$$\left(\frac{z}{5}\right)^{10}=(-2i)^{10}=1024i^{10}=-1024$$

답 -1024

1등급 비밀노트

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여
① z^2이 실수 ➡ z가 실수 또는 순허수 ➡ $a=0$ 또는 $b=0$
② z^2이 음의 실수 ➡ z가 순허수 ➡ $a=0$, $b\neq 0$
③ z^2이 양의 실수 ➡ z가 0이 아닌 실수 ➡ $a\neq 0$, $b=0$

14 $z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로

$z^{36}=(z^2)^{18}=i^{18}=(i^4)^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$,

$\overline{z}^{36}=\overline{z^{36}}=\overline{-1}=-1$

$\therefore z^{36}+\overline{z}^{36}=-2$

답 ③

참고 자연수 n과 복소수 z에 대하여

$\overline{z}^n=\overline{z^n}$

가 성립한다. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

15 자연수 k에 대하여

(i) $n=2k$일 때,

$f(n)=f(2k)=i^{4k}-i^{2k}$
$=(i^4)^k-(i^2)^k=1-(-1)^k$

(ii) $n=2k-1$일 때,

$f(n)=f(2k-1)=i^{2k-1+1}$
$=(i^2)^k=(-1)^k$

(i), (ii)에서

$f(2k-1)+f(2k)=(-1)^k+\{1-(-1)^k\}=1$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$
$=\{f(1)+f(2)\}+\{f(3)+f(4)\}$
$+\cdots+\{f(99)+f(100)\}$
$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{50\text{개}}=50$

답 50

다른 풀이 $f(1)=i^2=-1$

$f(2)=i^4-i^2=1+1=2$

$f(3)=i^4=1$

$f(4)=i^8-i^4=1-1=0$

$f(5)=i^6=-1=f(1)$

$f(6)=i^{12}-i^6=1+1=2=f(2)$

⋮

따라서 $f(n)$의 값은 -1, 2, 1, 0이 이 순서대로 반복되므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$
$=(-1+2+1+0)\cdot 25=50$

일품 BOX

① $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
② $a>0$, $b<0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

$i^{10}=(i^4)^2\cdot i^2$
$=1\cdot(-1)=-1$

$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{1}{a}}$이므로
$a<0$

실수 x에 대하여
$\sqrt{x^2}=|x|$
$=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$

실수 A, B에 대하여
① $A-B>0$이면 $A>B$
② $A-B=0$이면 $A=B$
③ $A-B<0$이면 $A<B$

ㄴ에 의하여 $c^2+d^2\geq cd$

부등식의 양변에 같은 음수를 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.

16 ㄱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2}=\sqrt{5\cdot(-2)}=\sqrt{-10}$

ㄴ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=-\sqrt{(-3)\cdot(-3)}=-\sqrt{3^2}=-3$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}}=-\sqrt{\frac{2}{-6}}=-\sqrt{-\frac{1}{3}}$

ㄹ. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\frac{-10}{-2}}=\sqrt{5}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ①

17 $\frac{1}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{1}{a}}$이므로 $a<0$

$\therefore \sqrt{a^2}+(\sqrt{a})^2+\sqrt{-a}\sqrt{a}$
$=\sqrt{a^2}+a+\sqrt{a^2}i=|a|+a+|a|i$
$=-a+a-ai=-ai$

답 ①

18 양의 실수 a에 대하여 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$이므로

$\sqrt{-a_1}\sqrt{-a_2}\sqrt{-a_3}\cdots\sqrt{-a_{16}}$
$=\sqrt{a_1}i\times\sqrt{a_2}i\times\sqrt{a_3}i\times\cdots\times\sqrt{a_{16}}i$
$=\sqrt{a_1a_2a_3\cdots a_{16}}\cdot i^{16}$
$=\sqrt{16}\cdot(i^4)^4$
$=4\cdot 1=4$

답 ④

1등급을 위한 고난도 문제

본책 33~35쪽

01 ㄱ. b가 순허수이면 $b=ci$ ($c\neq 0$인 실수)로 놓을 수 있으므로

$a^2-b^2=a^2+c^2$, $a^2b^2=-a^2c^2$

$a^2-b^2-a^2b^2=a^2+c^2+a^2c^2>0$

$\therefore a^2-b^2>a^2b^2$

ㄴ. a, b가 실수이면

$a^2+b^2-ab=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$

$\therefore a^2+b^2\geq ab$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

ㄷ. a, b가 순허수이면 $a=ci$, $b=di$ ($c\neq 0$, $d\neq 0$인 실수)로 놓을 수 있으므로

$a^2+b^2=-c^2-d^2$, $ab=-cd$

이때 $c^2+d^2\geq cd$이고 $c\neq 0$, $d\neq 0$이므로

$-c^2-d^2<-cd$

$\therefore a^2+b^2<ab$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

02 $\langle 2x,\ 2y\rangle+\langle y,\ x\rangle$
$=(2y+2xi)+(x+yi)$
$=(x+2y)+(2x+y)i=4+5i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=4$, $2x+y=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=1$

$\therefore xy=2$

답 ③

03 $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하자.

$-\alpha+\beta=-(a+bi)+(c+di)$
$=(-a+c)+(-b+d)i$

이 복소수가 실수이려면

$-b+d=0 \quad \therefore b=d$ …… ㉠ ⋯ ❶

$(\alpha+\beta)+i=\{(a+bi)+(c+di)\}+i$
$=(a+c)+(b+d+1)i$

이 복소수가 실수이려면

$b+d+1=0$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{1}{2}$ ⋯ ❸

따라서

$\alpha-2\beta=(a+bi)-2(c+di)$
$=(a-2c)+(b-2d)i$

에서 $\alpha-2\beta$의 허수부분은

$b-2d=-\frac{1}{2}-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ ⋯ ❹

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $-\alpha+\beta$가 실수일 조건을 구할 수 있다.	30%
❷ $(\alpha+\beta)+i$가 실수일 조건을 구할 수 있다.	30%
❸ b, d의 값을 구할 수 있다.	10%
❹ $\alpha-2\beta$의 허수부분을 구할 수 있다.	30%

04 $z\hat{z}+1=(a+bi)(b+ai)+1=1+(a^2+b^2)i$,

$z+\hat{z}=(a+bi)+(b+ai)=a+b+(a+b)i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$1=a+b$, $a^2+b^2=a+b$

$\therefore a^2+b^2=1$ 답 1

다른 풀이 $z\hat{z}+1=z+\hat{z}$이므로

$z\hat{z}+1-z-\hat{z}=0$, $\quad z(\hat{z}-1)-(\hat{z}-1)=0$

$(\hat{z}-1)(z-1)=0$, $\quad \hat{z}-1=0$ 또는 $z-1=0$

$\therefore \hat{z}=1$ 또는 $z=1$

(i) $\hat{z}=1$일 때, $\quad a=0$, $b=1$

(ii) $z=1$일 때, $\quad a=1$, $b=0$

(i), (ii)에서 $\quad a^2+b^2=1$

참고 복소수 z, w, v에 대하여 다음이 성립한다.

① 교환법칙 $z+w=w+z$, $zw=wz$

② 결합법칙 $(z+w)+v=z+(w+v)$, $(zw)v=z(wv)$

③ 분배법칙 $z(w+v)=zw+zv$, $(z+w)v=zv+wv$

실수에서와 마찬가지로 두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$이다.

05 $i(x+3i)^2=i(x^2+6xi-9)=-6x+(x^2-9)i$

이 복소수가 자연수이려면 $-6x$는 자연수이고, $x^2-9=0$이어야 한다.

$x^2-9=0$에서 $\quad (x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

(i) $x=-3$일 때,

$-6x=18$이므로 $-6x$는 자연수이다.

(ii) $x=3$일 때,

$-6x=-18$이므로 $-6x$는 자연수가 아니다.

(i), (ii)에서 $\quad x=-3$ 답 -3

06 $f(a,\ b)=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}$
$=\frac{(a+bi)^2}{a^2+b^2}$

따라서 자연수 k에 대하여

$f(k,\ 2k)=\frac{(k+2ki)^2}{k^2+(2k)^2}=\frac{k^2(1+2i)^2}{5k^2}$
$=\frac{(1+2i)^2}{5}=\frac{-3+4i}{5}$

이므로

$f(1,\ 2)=f(2,\ 4)=f(3,\ 6)=\cdots=f(10,\ 20)$
$=\frac{-3+4i}{5}$

$\therefore$ (주어진 식)$=10\cdot\frac{-3+4i}{5}=-6+8i$ 답 ②

$z=p+qi$ (p, q는 실수)라 하면 $\bar{z}=-z$에서
$p-qi=-(p+qi)$
$\therefore p=0$

07 $z+\bar{z}=0$에서 $\bar{z}=-z$이므로 z의 실수부분은 0이다.

즉 $z=(a+i)(1+i)=(a-1)+(a+1)i$에서

$a-1=0 \quad \therefore a=1$ 답 1

다른 풀이 $\bar{z}=\overline{(a+i)(1+i)}=(a-i)(1-i)$이므로

$z+\bar{z}=(a+i)(1+i)+(a-i)(1-i)$
$=a+ai+i-1+a-ai-i-1$
$=2a-2$

따라서 $2a-2=0$이므로 $\quad a=1$

08 복소수 z의 허수부분이 양수이므로

$z=a+bi$ (a는 실수, $b>0$)라 하면

$\bar{z}=a-bi$ ⋯ ❶

$z+\bar{z}=6$, $z\bar{z}=10$에서

$2a=6$, $a^2+b^2=10$

$\therefore a=3$, $b=1$ ($\because b>0$) ⋯ ❷

따라서 $z=3+i$, $\bar{z}=3-i$이므로

$\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}=\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}}=\frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{z\bar{z}}$
$=\frac{6\{(3+i)-(3-i)\}}{10}=\frac{6}{5}i$ ⋯ ❸

답 $\frac{6}{5}i$

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$로 놓고 $\bar{z}$를 a, b로 나타낼 수 있다.	20%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}$의 값을 구할 수 있다.	40%

09 $\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=5$에서 $\frac{1}{\alpha}=\frac{\bar{\alpha}}{5}$, $\frac{1}{\beta}=\frac{\bar{\beta}}{5}$이므로

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)&=(\alpha+\beta)\left(\frac{\bar{\alpha}}{5}+\frac{\bar{\beta}}{5}\right)\\&=\frac{1}{5}(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\\&=\frac{1}{5}(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})\\&=\frac{1}{5}\cdot 10\\&=2\end{aligned}$$

답 ④

두 복소수 z_1, z_2에 대하여
$\bar{z_1}+\bar{z_2}=\overline{z_1+z_2}$

10 $z\bar{z}=a^2+b^2$이므로

$a^2+b^2=5$

a, b가 자연수이므로

$a^2=1$, $b^2=4$ 또는 $a^2=4$, $b^2=1$

$\therefore a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$ ··· ❶

$$\begin{aligned}&z\bar{z}+\omega\bar{\omega}+z\bar{\omega}+\bar{z}\omega\\&=z(\bar{z}+\bar{\omega})+\omega(\bar{z}+\bar{\omega})\\&=(z+\omega)(\bar{z}+\bar{\omega})\\&=(z+\omega)(\overline{z+\omega})\\&=\{(a+c)+(b+d)i\}\{(a+c)-(b+d)i\}\\&=(a+c)^2+(b+d)^2\end{aligned}$$

$z+\omega$
$=(a+bi)+(c+di)$
$=(a+c)+(b+d)i$

이므로 $(a+c)^2+(b+d)^2=25$

$a+c$, $b+d$가 자연수이므로

$(a+c)^2=9$, $(b+d)^2=16$

또는 $(a+c)^2=16$, $(b+d)^2=9$

$\therefore a+c=3$, $b+d=4$ 또는 $a+c=4$, $b+d=3$ ··· ❷

(i) $a=1$, $b=2$이면

$c=2$, $d=2$ 또는 $c=3$, $d=1$

(ii) $a=2$, $b=1$이면

$c=1$, $d=3$ 또는 $c=2$, $d=2$ ··· ❸

이때 $\omega\bar{\omega}=c^2+d^2$이므로 $\omega\bar{\omega}$의 값 중 가장 큰 값은 $c=3$, $d=1$ 또는 $c=1$, $d=3$일 때 10이다. ··· ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $a+c$, $b+d$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ c, d의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $\omega\bar{\omega}$의 값 중 가장 큰 값을 구할 수 있다.	20 %

11 $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}=-2$의 양변에 $z\bar{z}$를 곱하면

$z^2+\bar{z}^2=-2z\bar{z}$, $\quad z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2=0$

$(z+\bar{z})^2=0 \quad \therefore z=-\bar{z}$

$z\neq 0$에서 z는 순허수이므로 $z=bi\ (b\neq 0)$라 하자.

ㄱ. $z-\bar{z}=bi-(-bi)=2bi$이므로 허수이다.

ㄴ. $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{-bi}{bi}=-1$이므로 실수이다.

ㄷ. $(z+\bar{z})(z-\bar{z})=z^2-\bar{z}^2=(bi)^2-(-bi)^2=0$이므로 실수이다.

이상에서 실수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

12 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 조건 (가)에서

$(z-\bar{z})i=\{a+bi-(a-bi)\}i=-2b$

즉 $-2b=-2$이므로

$b=1$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}z+\frac{2}{z}&=a+i+\frac{2}{a+i}\\&=a+i+\frac{2(a-i)}{(a+i)(a-i)}\\&=a+i+\frac{2a-2i}{a^2+1}\\&=a+\frac{2a}{a^2+1}+\frac{a^2-1}{a^2+1}i\end{aligned}$$

이 복소수가 실수이려면

$a^2-1=0 \qquad \therefore a^2=1$

$$\begin{aligned}\therefore (z-i)(\overline{z-i})&=(z-i)(\bar{z}-\bar{i})=(z-i)(\bar{z}+i)\\&=z\bar{z}+(z-\bar{z})i+1\\&=(a^2+b^2)-2+1\\&=1\end{aligned}$$

답 ①

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)$
$=a^2+b^2$
$=1+1=2$

다른 풀이 $a^2=1$에서 $a=\pm1$이므로

$z=1+i$ 또는 $z=-1+i$

(i) $z=1+i$일 때,

$z-i=1$이므로 $\overline{z-i}=1$

$\therefore (z-i)(\overline{z-i})=1$

(ii) $z=-1+i$일 때,

$z-i=-1$이므로 $\overline{z-i}=-1$

$\therefore (z-i)(\overline{z-i})=1$

(i), (ii)에서 구하는 값은 1이다.

13 $\frac{1}{i}=-i$, $\frac{1}{i^2}=-1$, $\frac{1}{i^3}=i$, $\frac{1}{i^4}=1$, $\cdots$이므로

$\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

$$\begin{aligned}&\frac{1+i}{i}+\frac{1+2i}{i^2}+\frac{1+3i}{i^3}+\frac{1+4i}{i^4}\\&=-(1+i)i-(1+2i)+(1+3i)i+(1+4i)\\&=(-i+1)+(-1-2i)+(i-3)+(1+4i)\\&=-2+2i\end{aligned}$$

마찬가지 방법으로

$$\begin{aligned}&\frac{1+5i}{i^5}+\frac{1+6i}{i^6}+\frac{1+7i}{i^7}+\frac{1+8i}{i^8}\\&=\frac{1+5i}{i}+\frac{1+6i}{i^2}+\frac{1+7i}{i^3}+\frac{1+8i}{i^4}\\&=-(1+5i)i-(1+6i)+(1+7i)i+(1+8i)\\&=(-i+5)+(-1-6i)+(i-7)+(1+8i)\\&=-2+2i\end{aligned}$$

$\therefore$ (주어진 식)$=2\cdot(-2+2i)=-4+4i$

답 ②

14 $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$f(k)=i^k$ ··· ❶

$\therefore H(n)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$
$=i+i^2+i^3+\cdots+i^n$

$H(51)=i+i^2+i^3+\cdots+i^{51}$
$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)$
$+\cdots+i^{44}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{48}(i+i^2+i^3)$
$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)$
$+\cdots+(i-1-i+1)+(i-1-i)$
$=-1$

$H(52)=H(51)+i^{52}=-1+(i^4)^{13}=-1+1=0$

$H(53)=H(52)+i^{53}=0+(i^4)^{13}\cdot i=0+i=i$ ··· ❷

$\therefore H(51)+H(52)+H(53)=-1+i$ ··· ❸

답 $-1+i$

채점 기준	비율
❶ $f(k)=i^k$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $H(51)$, $H(52)$, $H(53)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $H(51)+H(52)+H(53)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1등급 비밀노트

i의 거듭제곱이 포함된 식의 값을 구할 때는 i의 거듭제곱의 값이 4개의 수가 반복되고, 그 4개의 수의 합이 0임을 이용한다.

15 $100i+99i^2+98i^3+97i^4$
$=100i-99-98i+97$
$=-2+2i$

마찬가지 방법으로

$96i^5+95i^6+94i^7+93i^8$
$=92i^9+91i^{10}+90i^{11}+89i^{12}$
$\vdots$
$=4i^{97}+3i^{98}+2i^{99}+i^{100}$
$=-2+2i$

$\therefore 100i+99i^2+98i^3+97i^4+\cdots+2i^{99}+i^{100}$
$=25\cdot(-2+2i)=-50+50i$

답 ②

16 m이 자연수일 때 $(-i)^m$의 값은 $-i$, -1, i, 1이 이 순서대로 반복되므로 조건 (가)에서 m은 $m=4k-3$ (k는 자연수) 꼴이다.

이때 m은 두 자리 자연수이므로

$m=13,\ 17,\ 21,\ \cdots,\ 97$ ··· ❶

또 $(2i)^n=2^n\cdot i^n=-2^n$에서 $\quad i^n=-1$

n이 자연수일 때 i^n의 값은 i, -1, $-i$, 1이 이 순서대로 반복되므로 조건 (나)에서 n은 $n=4l-2$ (l은 자연수) 꼴이다.

이때 n은 두 자리 자연수이므로

$n=10,\ 14,\ 18,\ \cdots,\ 98$ ··· ❷

m의 값은 가장 크고, n의 값은 가장 작을 때이다.

따라서 $m-n$의 값이 가장 클 때는 $m=97$, $n=10$일 때이므로 구하는 값은

$97-10=87$ ··· ❸

답 87

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m-n$의 값 중 가장 큰 값을 구할 수 있다.	20 %

17 $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n=\left(\dfrac{2i}{2}\right)^n=i^n$,

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n=\left(\dfrac{-2i}{2}\right)^n=(-i)^n$

이므로

$f(n)=n\{i^n-(-i)^n\}$

$n\{i^n-(-i)^n\}$
$=n\{i^n-(-1)^n\cdot i^n\}$

$=\begin{cases} 0 & (n\text{은 짝수}) \\ 2n\cdot i^n & (n\text{은 홀수}) \end{cases}$ ··· ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40)$
$=f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+\cdots+f(37)+f(39)$
$=2i+6i^3+10i^5+14i^7+\cdots+74i^{37}+78i^{39}$
$=(2i-6i)+(10i-14i)+\cdots+(74i-78i)$
$=10\cdot(-4i)=-40i$ ··· ❷

답 $-40i$

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

18 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여

$z^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,

$z^3=z^2\cdot z=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=1$

$\vdots$

이므로

$z^{99}=(z^3)^{33}=1,\ z^{100}=(z^3)^{33}\cdot z=z,$

$z^{198}=(z^3)^{66}=1,\ z^{200}=(z^3)^{66}\cdot z^2=z^2$

$\therefore P_{99}+P_{100}=\left|\dfrac{z^{99}+1}{z^{198}}\right|+\left|\dfrac{z^{100}+1}{z^{200}}\right|$

$=\left|\dfrac{1+1}{1}\right|+\left|\dfrac{z+1}{z^2}\right|$

$=2+\left|\dfrac{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1}{\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}}\right|$

$=2+\left|\dfrac{\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}}{\dfrac{-(1+\sqrt{3}i)}{2}}\right|$

$=2+1=3$

답 3

19 $z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$z^n+z^{2n}+z^{3n}=i^n+i^{2n}+i^{3n}$
$=i^n+(i^2)^n+(i^3)^n$
$=i^n+(-1)^n+(-i)^n$

자연수 k에 대하여

(i) $n=4k-3$일 때,
$i^n+(-1)^n+(-i)^n=i-1-i=-1$

(ii) $n=4k-2$일 때,
$i^n+(-1)^n+(-i)^n=-1+1-1=-1$

(iii) $n=4k-1$일 때,
$i^n+(-1)^n+(-i)^n=-i-1+i=-1$

(iv) $n=4k$일 때,
$i^n+(-1)^n+(-i)^n=1+1+1=3$

이상에서 $z^n+z^{2n}+z^{3n}=-1$을 성립하도록 하는 n은 4의 배수를 제외한 수이므로 100 이하의 자연수 n의 개수는

$100-25=75$ 답 75

100 이하의 4의 배수의 개수는 25이다.

20 조건 (가)에서

$a-1<0,\ b-1>0$
$\therefore a<1,\ b>1$

조건 (나)에서 $a+b=0,\ b-c-2=0$
$\therefore a=-b,\ c=b-2$

이때 $b>1$에서 $-b<-1,\ b-2>-1$이므로
$a<-1,\ c>-1$

따라서 $a<-1<c<b$이므로
$a<c<b$ 답 $a<c<b$

실수 a, b에 대하여
$|a|\ge0$, $|b|\ge0$이므로
$|a|+|b|=0$이면
$|a|=0$, $|b|=0$
$\therefore a=0,\ b=0$

$b-2<b$

21 $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}=\frac{a(1-i)+b(1+i)}{(1+i)(1-i)}$
$=\frac{(a+b)+(-a+b)i}{2}$ ···❶

이므로 주어진 등식은

$(a+b)+(-a+b)i=-12+4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=-12,\ -a+b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-8,\ b=-4$ ···❷

$\therefore \sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{-8}\sqrt{-4}=-\sqrt{(-8)\cdot(-4)}$
$=-4\sqrt{2}$ ···❸

답 $-4\sqrt{2}$

$a<0,\ b<0$이면
$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}$를 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sqrt{a}\sqrt{b}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

22 ㄱ. $a<0$이므로 $\sqrt{a^2}=-a$
$b>0$이므로 $\sqrt{b^2}=b$
$\therefore \sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=-ab$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $(\sqrt{x})^2=x$이므로
$(\sqrt{ab})^2=ab$

ㄷ. $a<0,\ b>0$이므로
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

$a>0,\ b<0$일 때,
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$
그 외의 경우에는
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (b\ne0)$

23 $-1<a<1$이므로

$a+1>0,\ a-1<0,\ 1-a>0,\ -a-1<0$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{a+1}\sqrt{1-a}i\cdot\sqrt{1-a}\sqrt{a+1}i$
$=(\sqrt{a+1})^2(\sqrt{1-a})^2\cdot i^2$
$=(a+1)(1-a)\cdot(-1)$
$=a^2-1$ 답 ②

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 36쪽

01 ㄱ. $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\alpha\bar{\alpha}=(a+bi)(a-bi)$
$=a^2+b^2\ge0$

마찬가지 방법으로 $\beta\bar{\beta}\ge0$이므로

$P=\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}\ge0$

ㄴ. $\alpha=1,\ \beta=-1$이면 $\bar{\alpha}=1,\ \bar{\beta}=-1$이므로

$Q=\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta$
$=1\cdot(-1)+1\cdot(-1)$
$=-2<0$

ㄷ. $P-Q=\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta)$
$=\alpha(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$
$=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$
$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})\ge0$
$\therefore P\ge Q$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

1등급 비밀노트

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 켤레복소수 $\bar{z}$는 $\bar{z}=a-bi$이므로

① $z+\bar{z}=2a$ (실수) ② $z\bar{z}=a^2+b^2$ (실수) ③ $z\bar{z}\ge0$

02 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=\left(i+\frac{1}{i}\right)+\left(i^2+\frac{2}{i^2}\right)+\left(i^3+\frac{3}{i^3}\right)+\cdots+\left(i^{100}+\frac{100}{i^{100}}\right)$

$=(i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{100})$

$+\left(\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}+\cdots+\frac{100}{i^{100}}\right)$

이때

$$\begin{aligned}&i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{100}\\&=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)\\&\quad+\cdots+i^{96}(i+i^2+i^3+i^4)\\&=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)\\&=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}+\cdots+\frac{100}{i^{100}}\\&=\left(\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}\right)+\left(\frac{5}{i^5}+\frac{6}{i^6}+\frac{7}{i^7}+\frac{8}{i^8}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{97}{i^{97}}+\frac{98}{i^{98}}+\frac{99}{i^{99}}+\frac{100}{i^{100}}\right)\\&=\left(\frac{1}{i}-2-\frac{3}{i}+4\right)+\left(\frac{5}{i}-6-\frac{7}{i}+8\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{97}{i}-98-\frac{99}{i}+100\right)\\&=\left(2-\frac{2}{i}\right)+\left(2-\frac{2}{i}\right)+\cdots+\left(2-\frac{2}{i}\right)\\&=25\left(2-\frac{2}{i}\right)=50-\frac{50}{i}\\&=50+50i\end{aligned}$$

이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)=50+50i$$

따라서 $x=50$, $y=50$이므로 $x+y=100$ 답 ④

03 ㄱ. $f(n)+g(n)=z^n+\bar{z}^n$이므로

$$\begin{aligned}\overline{f(n)+g(n)}&=\overline{z^n+\bar{z}^n}=\bar{z}^n+\overline{(\bar{z}^n)}\\&=\bar{z}^n+z^n\\&=g(n)+f(n)\end{aligned}$$

ㄴ. $f(2)=(1+i)^2=2i$,

$f(6)=(1+i)^6=\{(1+i)^2\}^3=(2i)^3=-8i$,

$f(10)=(1+i)^{10}=\{(1+i)^2\}^5=(2i)^5=32i$,

⋮

$g(2)=(1-i)^2=-2i$,

$g(6)=(1-i)^6=\{(1-i)^2\}^3=(-2i)^3=8i$,

$g(10)=(1-i)^{10}=\{(1-i)^2\}^5=(-2i)^5=-32i$,

⋮

$$\begin{aligned}\therefore f(2)+g(2)&=f(6)+g(6)\\&=f(10)+g(10)=\cdots=0\end{aligned}$$

따라서 $n=4k-2$ (k는 자연수)일 때,

$$f(n)+g(n)=0$$

ㄷ. $f(4)=(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=-4$,

$f(8)=(1+i)^8=\{(1+i)^4\}^2=(-4)^2=16$,

$f(12)=(1+i)^{12}=\{(1+i)^4\}^3=(-4)^3=-64$,

⋮

$g(4)=(1-i)^4=\{(1-i)^2\}^2=(-2i)^2=-4$,

$g(8)=(1-i)^8=\{(1-i)^4\}^2=(-4)^2=16$,

$g(12)=(1-i)^{12}=\{(1-i)^4\}^3=(-4)^3=-64$,

⋮

$\therefore f(4)=g(4)$, $f(8)=g(8)$,

$f(12)=g(12)$, $\cdots$

따라서 $n=4k$ (k는 자연수)일 때,

$$f(n)=g(n)$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

1등급 비밀노트

$1\pm i$의 곱셈

① $(1+i)^2=2i$ ② $(1-i)^2=-2i$

③ $(1+i)(1-i)=2$ ④ $(1+i)^4=(1-i)^4=-4$

04 $z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$,

$z^3=z^2\cdot z=-i\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$,

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$,

$z^5=z^4\cdot z=-1\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$,

$z^6=z^4\cdot z^2=-1\cdot(-i)=i$,

$z^7=z^4\cdot z^3=-1\cdot\frac{-1-i}{\sqrt{2}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$,

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$,

⋮

이므로

$$z^{77}=(z^8)^9\cdot z^5=z^5,\ z^{66}=(z^8)^8\cdot z^2=z^2$$

따라서 $z^{77}\cdot z^k=z^{66}$에서

$$z^5\cdot z^k=z^2$$

이때 $z^2=z^{10}=z^{18}=z^{26}=\cdots$이므로 100 이하의 자연수 k는 5, 13, 21, $\cdots$, 93의 12개이다. 답 12

$z^5\cdot z^k=z^{10}$일 때, $k=5$
$z^5\cdot z^k=z^{18}$일 때, $k=13$
⋮
$z^5\cdot z^k=z^{98}$일 때, $k=93$

05 $(1+i)^2=2i$, $(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=-4$

이므로 자연수 k에 대하여

$$(1+i)^{4k}=\{(1+i)^4\}^k=(-4)^k$$

이때 모든 자연수 n에 대하여 $-4^n<0$이므로

$(1+i)^m=-4^n$이 성립하려면 $\frac{m}{4}=n$, 즉 $m=4n$이고, n은 홀수이어야 한다.

따라서 $m+n$의 값 중 가장 큰 값은 $m=92$, $n=23$일 때 115이다. 답 115

$m=4k$ (k는 자연수)라 하면
$(1+i)^m=(1+i)^{4k}=(-4)^k$
이므로 $(-4)^k=-4^n$
$\therefore (-4)^{\frac{m}{4}}=-4^n$

06 자연수 m, n에 대하여 조건 (가)에서 $m<n$이므로 $n\geq 2$이고, $n=2k+1$ (k는 자연수) 꼴이면

$$\begin{aligned}(1+i)^n&=(1+i)^{2k+1}\\&=\{(1+i)^2\}^k\cdot(1+i)\\&=(2i)^k\cdot(1+i)\end{aligned}$$

이므로 조건 (나)에서 $(2i)^m\cdot(1+i)^n$이 실수가 되도록 하는 자연수 m이 존재하지 않는다.

즉 $n=2k$ 꼴이다.

따라서

$$\begin{aligned}&(-2)^l\cdot(2i)^m\cdot(1+i)^n\\&=(-2)^l\cdot(2i)^m\cdot(1+i)^{2k}\\&=(-2)^l\cdot(2i)^m\cdot(2i)^k\\&=(-2)^l\cdot(2i)^{m+k}\\&=(-1)^l\cdot 2^{l+m+k}\cdot i^{m+k}\end{aligned}$$

이므로 $(-2)^l\cdot(2i)^m\cdot(1+i)^n=32$가 성립하려면

$l+m+k=5$ …… ㉠

$(-1)^l\cdot i^{m+k}=1$ …… ㉡

자연수 l, m, k에 대하여

(i) $l=1$일 때, ㉠에서 $m+k=4$이므로

$(-1)^1\cdot i^4=-1$

따라서 ㉡을 만족시키지 않는다.

(ii) $l=2$일 때, ㉠에서 $m+k=3$이므로

$(-1)^2\cdot i^3=-i$

따라서 ㉡을 만족시키지 않는다.

(iii) $l=3$일 때, ㉠에서 $m+k=2$이므로

$(-1)^3\cdot i^2=1$

따라서 ㉡을 만족시킨다.

이때 $m+k=2$에서 $m=1$, $k=1$이므로

$l=3$, $m=1$, $n=2k=2$

한편 $l\geq 4$이면 ㉠을 만족시키는 자연수 m, k는 존재하지 않는다.

이상에서 $l=3$, $m=1$, $n=2$이므로

$lmn=6$ 답 6

07 $ab\neq 0$이고 $\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$이므로

$a<0$, $b<0$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned}&=\sqrt{a}\sqrt{-a}-\sqrt{a}\sqrt{b}-\sqrt{b}\sqrt{-a}+\sqrt{b}\sqrt{b}+\sqrt{a}\sqrt{-a}\\&\quad-\sqrt{a}\sqrt{-b}-\sqrt{-b}\sqrt{-a}+\sqrt{-b}\sqrt{-b}\\&=\sqrt{-a^2}+\sqrt{ab}-\sqrt{-ab}-\sqrt{b^2}+\sqrt{-a^2}\\&\quad-\sqrt{-ab}-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}\\&=2\sqrt{-a^2}-2\sqrt{-ab}\\&=2\sqrt{a^2}i-2\sqrt{ab}i\\&=2|a|i-2\sqrt{ab}i\\&=-2ai-2\sqrt{ab}i\\&=-2(a+\sqrt{ab})i\end{aligned}$$

답 ①

x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 x^2의 계수를 유리화한 후 풀면 계산이 간단해진다.

두 복소수 $a+bi$, $c+di$가 서로 같을 조건
➡ $a=c$, $b=d$
(단, a, b, c, d는 실수)

04 이차방정식

개념 & 핵심 기출

본책 38~40쪽

01 이차방정식 $x^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0$에서

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$\alpha<\beta$이므로 $\alpha=-\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{3}$

이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2-x-(2+\sqrt{2})=0$의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$x^2-(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$

$(x+1)(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$\gamma<\delta$이므로 $\gamma=-1$, $\delta=\sqrt{2}$

$\therefore \alpha<\gamma<\delta<\beta$ 답 ③

02 주어진 방정식의 실근을 α라 하면

$\alpha^2+4\alpha i-\alpha^2+3a-8i=0$

$(\alpha^2-a^2+3a)+(4\alpha-8)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\alpha^2-a^2+3a=0$ …… ㉠

$4\alpha-8=0$ …… ㉡

㉡에서 $\alpha=2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$ 답 -1, 4

03 방정식 $|x^2+(a^2-1)x+2a-5|=3$의 한 근이 1이므로 이 방정식에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$|a^2+2a-5|=3$

$\therefore a^2+2a-5=3$ 또는 $a^2+2a-5=-3$

(i) $a^2+2a-5=3$일 때,

$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

그런데 $a>0$이므로

$a=2$

(ii) $a^2+2a-5=-3$일 때,

$a^2+2a-2=0$ $\therefore a=-1\pm\sqrt{3}$

그런데 $a>0$이므로

$a=-1+\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 모든 양수 a의 값의 합은

$2+(-1+\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$ 답 ③

04 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\sqrt{k})^2-\{(a^2-3)k+(b^2-3b+2)\}=0$

$(4-a^2)k-(b^2-3b+2)=0$

$(2+a)(2-a)k-(b-1)(b-2)=0$

앞의 식이 모든 양수 k에 대하여 성립하므로
$(2+a)(2-a)=0$에서
$a=-2$ 또는 $a=2$
$(b-1)(b-2)=0$에서
$b=1$ 또는 $b=2$
따라서 $a+b$의 값 중 가장 큰 값은 $a=2$, $b=2$일 때
$2+2=4$이다. 답 4

05 삼각형 ABC는 둔각삼각형이므로
$b^2+c^2<a^2$ ($\because a>b>c$) …… ㉠
이때 이차방정식 $(a+b)x^2+2cx+a-b=0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)$$
$$=c^2-(a^2-b^2)$$
$$=c^2-a^2+b^2<0\ (\because ㉠)$$
따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

참고 $\triangle$ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 할 때
$$\begin{cases} \angle C<90^\circ \text{이면} & a^2+b^2>c^2 \\ \angle C=90^\circ \text{이면} & a^2+b^2=c^2 \\ \angle C>90^\circ \text{이면} & a^2+b^2<c^2 \end{cases}$$

06 $ab\neq0$이고 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$이므로
$a<0$, $b>0$
ㄱ. $a=-1$, $b=1$일 때, $x^2-x+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
ㄴ. $x^2+bx+a=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=b^2-4a>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $ax^2+ax+b=0$의 판별식을 D_3이라 하면
$D_3=a^2-4ab>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
이상에서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

07 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$
이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로
$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$$
$$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$$
$$=6+2\sqrt{4}=10$$
$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{10}$ ($\because \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>0$) 답 ⑤

이차방정식의 두 근의 차가 k이면 두 근을 α, $\alpha+k$로 놓는다.

이차방정식의 두 근의 비가 $m:n$이면 두 근을 $m\alpha$, $n\alpha$ ($\alpha\neq0$)로 놓는다.

$a<0$, $b>0$이므로
$b^2>0$, $-4a>0$
$\therefore b^2-4a>0$

$a<0$, $b>0$이므로
$a^2>0$, $-4ab>0$
$\therefore a^2-4ab>0$

$\alpha\beta>0$이므로
$\alpha>0$, $\beta>0$ 또는
$\alpha<0$, $\beta<0$
이때 $\alpha+\beta>0$이므로
$\alpha>0$, $\beta>0$

08 주어진 이차방정식의 두 근의 차가 2이므로 두 근을 α, $\alpha+2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+2)=m$ $\quad\therefore m=2\alpha+2$ …… ㉠
$\alpha(\alpha+2)=3m-1$ …… ㉡
㉡에 ㉠을 대입하면
$\alpha(\alpha+2)=3(2\alpha+2)-1$
$\alpha^2-4\alpha-5=0$
$(\alpha+1)(\alpha-5)=0$
$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=5$
(i) $\alpha=-1$일 때, $\quad m=0$
(ii) $\alpha=5$일 때, $\quad m=12$
(i), (ii)에서 양수 m의 값은 12이다. 답 12

다른 풀이 이차방정식 $x^2-mx+3m-1=0$의 두 근을 α, β라 하면
$|\alpha-\beta|=2$ …… ㉠
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=3m-1$ …… ㉡
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ㉠, ㉡에서
$4=m^2-4(3m-1)$, $\quad m^2-12m=0$
$m(m-12)=0$
$\therefore m=12$ ($\because m>0$)

09 주어진 이차방정식의 두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 α, 2α ($\alpha\neq0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+2\alpha=-3(k-1)$
$\therefore \alpha=-k+1$ …… ㉠
$\alpha\cdot2\alpha=k$ $\quad\therefore 2\alpha^2=k$ …… ㉡
㉠에 ㉡을 대입하여 정리하면
$2\alpha^2+\alpha-1=0$
$(\alpha+1)(2\alpha-1)=0$
$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=\dfrac{1}{2}$
(i) $\alpha=-1$일 때, $\quad k=2$
(ii) $\alpha=\dfrac{1}{2}$일 때, $\quad k=\dfrac{1}{2}$
(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은
$2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$ 답 ⑤

10 근과 계수의 관계에 의하여
$(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=-a$ $\quad\therefore a=-6$
$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=b$ $\quad\therefore b=7$
따라서 $a+b=1$, $a-b=-13$이므로 1, -13을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-1)(x+13)=0$
$\therefore x^2+12x-13=0$ 답 $x^2+12x-13=0$

11 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 1이므로

$1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2ax-b+1=0$의 한 근이 -1이므로

$1-2a-b+1=0$

$\therefore 2a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-4$

$\therefore a^2=9,\ \frac{b}{2}=-2$

따라서 9, -2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-9)(x+2)=0$

즉 $f(x)=(x-9)(x+2)$이므로

$f(-3)=(-12)\cdot(-1)=12$

답 ③

12 근의 공식을 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{a}$로 잘못 적용하여 풀었으므로

2로 나눈 식이 근의 공식을 바르게 적용한 식이다.

$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}=4,\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}=-2$

이때 바르게 푼 근은

$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=2,\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-1$

이므로 2, -1을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a(x-2)(x+1)=0$

$\therefore ax^2-ax-2a=0$

이 이차방정식이 $ax^2+bx+c=0$과 같으므로

$b=-a,\ c=-2a$

$\therefore \frac{b+c}{a}=\frac{-a-2a}{a}$

$=-3\ (\because a\neq0)$

답 -3

13 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근은

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot4}$

$=-1\pm\sqrt{3}i$

이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근은 $x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$이다.

따라서 x^2+2x+4를 복소수의 범위에서 인수분해하면

$\{x-(-1-\sqrt{3}i)\}\{x-(-1+\sqrt{3}i)\}$

$=(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{3}i)$

답 ⑤

다른 풀이 $x^2+2x+4=(x^2+2x+1)-(-3)$

$=(x+1)^2-(\sqrt{3}i)^2$

$=(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{3}i)$

14 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $2+i,\ 2-i$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+i)+(2-i)=-a\quad \therefore a=-4$

$(2+i)(2-i)=b\quad \therefore b=5$

따라서 이차방정식 $5x^2+4x+1=0$의 두 근은

$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-5\cdot1}}{5}=\frac{-2\pm i}{5}$

이므로 $5x^2+4x+1$을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$5\left(x-\frac{-2+i}{5}\right)\left(x-\frac{-2-i}{5}\right)$

$=5\left(x+\frac{2-i}{5}\right)\left(x+\frac{2+i}{5}\right)$

답 $5\left(x+\frac{2-i}{5}\right)\left(x+\frac{2+i}{5}\right)$

15 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이고, 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근은

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 x^3-1을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$(x-1)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

$=(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

답 $(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

16 이차방정식 $x^2-(p+q)x+p-q=0$의 한 근이 $4-\sqrt{10}$이고, $p,\ q$가 유리수이므로 다른 한 근은 $4+\sqrt{10}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(4-\sqrt{10})+(4+\sqrt{10})=p+q$

$(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})=p-q$

$\therefore p+q=8,\ p-q=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=7,\ q=1$

$\therefore pq=7$

답 ②

17 $\frac{2+i}{1+i}=\frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-i}{2}$에서 이차방정식 $2x^2+2ax+b=0$의 한 근이 $\frac{3-i}{2}$이고, $a,\ b$가 실수이므로 다른 한 근은 $\frac{3+i}{2}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{3-i}{2}+\frac{3+i}{2}=-a\quad \therefore a=-3$

$\frac{3-i}{2}\cdot\frac{3+i}{2}=\frac{b}{2}\quad \therefore b=5$

따라서 이차방정식 $x^2+cx+d=0$의 한 근이 $-3+\sqrt{5}$이고, $c,\ d$가 유리수이므로 다른 한 근은 $-3-\sqrt{5}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(-3+\sqrt{5})+(-3-\sqrt{5})=-c\quad \therefore c=6$

$(-3+\sqrt{5})(-3-\sqrt{5})=d\quad \therefore d=4$

$\therefore d-c=-2$

답 -2

18 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}i$이고, m, n이 실수이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{2}i$이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+\sqrt{2}i)+(-1-\sqrt{2}i)=-m \quad \therefore m=2$

$(-1+\sqrt{2}i)(-1-\sqrt{2}i)=n \quad \therefore n=3$

따라서 이차방정식 $x^2+2nx-m=0$은 $x^2+6x-2=0$이므로 이 이차방정식의 양의 근은

$x=-3+\sqrt{3^2-1\cdot(-2)}$

$=-3+\sqrt{11}$

즉 $a=-3$, $b=11$이므로

$a+b=8$

답 ②

1등급을 위한 고난도 문제

본책 41~43쪽

01 $(x-2)*(x+4)$

$=(x-2)(x+4)-(x-2)-(x+4)$

$=x^2+2x-8-x+2-x-4$

$=x^2-10$,

$x*3=3x-x-3=2x-3$

따라서 주어진 방정식은

$x^2-10+|2x-3|-2=0$

$\therefore x^2+|2x-3|-12=0$ ⋯ ❶

$|A|=\begin{cases} A\ (A\ge 0) \\ -A\ (A<0) \end{cases}$

(i) $2x-3<0$, 즉 $x<\frac{3}{2}$일 때,

$x^2-(2x-3)-12=0, \quad x^2-2x-9=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{10}$

그런데 $x<\frac{3}{2}$이므로

$x=1-\sqrt{10}$ ⋯ ❷

(ii) $2x-3\ge 0$, 즉 $x\ge\frac{3}{2}$일 때,

$x^2+(2x-3)-12=0, \quad x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=3$

그런데 $x\ge\frac{3}{2}$이므로

$x=3$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서

$x=1-\sqrt{10}$ 또는 $x=3$ ⋯ ❹

답 $x=1-\sqrt{10}$ 또는 $x=3$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ $x<\frac{3}{2}$일 때, x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $x\ge\frac{3}{2}$일 때, x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 방정식의 해를 구할 수 있다.	10 %

02 이차방정식 $3x^2-(2k+5)x+3=0$의 한 근이 α이므로

$3\alpha^2-(2k+5)\alpha+3=0$

$3\alpha^2-(2k+5)\alpha+3=0$에 $\alpha=0$을 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 $\alpha\neq0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$3\alpha-(2k+5)+\frac{3}{\alpha}=0$

$3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-(2k+5)=0$

이때 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=k^2$이므로

$3k^2-2k-5=0$

$(k+1)(3k-5)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{5}{3}$

그런데 $k>0$이므로

$k=\frac{5}{3}$

답 ③

1등급 비밀노트

x^2의 계수와 상수항이 같은 이차방정식에서 α가 한 근이면 $\frac{1}{\alpha}$도 근이다. 이 성질을 이용하면 $3x^2-(2k+5)x+3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{2k+5}{3}$이므로 $\frac{2k+5}{3}=k^2$을 만족시키는 양수 k를 구해도 된다.

03 $kx^2+(1-2k)x-2=0$에서

$(kx+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{k}$ 또는 $x=2$

$x^2-2(k+1)x+4k=0$에서

$(x-2k)(x-2)=0$

$\therefore x=2k$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{k}$, $\beta=2$, $\gamma=2k$이므로

$\beta-\alpha=\gamma-\beta$에서

$2+\frac{1}{k}=2k-2$

$2k^2-4k-1=0$

$\therefore k=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

답 $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$, $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$

04 $|x-3|^2+3|x-3|-10=0$에서

$|x-3|=t\ (t\ge0)$로 놓으면

$|x-3|\ge0$이므로 $t\ge0$

$t^2+3t-10=0$

$(t+5)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t\ge0)$

즉 $|x-3|=2$이므로

$x-3=\pm2$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

$\therefore |\alpha-\beta|=4$

답 ④

일품 BOX

05 (i) $-1<x<0$일 때, $0<x^2<1$이므로

$[x^2]=0,\ [x]=-1$

따라서 주어진 방정식은 $x^2=2x+1$이므로

$x^2-2x-1=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{2}$

그런데 $-1<x<0$이므로

$x=1-\sqrt{2}$ ··· ❶

(ii) $0\le x<1$일 때, $0\le x^2<1$이므로

$[x^2]=0,\ [x]=0$

따라서 주어진 방정식은 $0=2x+1$이므로

$x=-\dfrac{1}{2}$

그런데 $0\le x<1$이므로 해는 없다. ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 해는

$x=1-\sqrt{2}$ ··· ❸

답 $x=1-\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $-1<x<0$일 때, 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ $0\le x<1$일 때, 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 방정식의 해를 구할 수 있다.	20 %

06 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:r$이므로

$\overline{AB}=k,\ \overline{BC}=rk\ (k>0)$

라 하면 □ABEF는 한 변의 길이가 k인 정사각형이므로

$\overline{EC}=(r-1)k$

$\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}$
$=rk-k$
$=(r-1)k$

□ABCD와 □ECDF는 닮음이므로

$1:r=(r-1)k:k$

$r(r-1)k=k,\quad r^2-r-1=0\ (\because k>0)$

$\therefore r=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $r>1$이므로 $\quad r=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 답 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

참고 주어진 문제와 같이 직사각형에서 정사각형을 잘라내고 남은 직사각형이 원래의 직사각형과 닮음일 때, 두 변 AB, BC의 길이의 비를 황금비라 한다. 즉 황금비는 $1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다. 이때 이러한 직사각형 ABCD를 황금사각형이라 한다.

07 이차방정식 $x^2-2(a-k)x-a+15=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(a-k)\}^2-(-a+15)\ge 0$

$\therefore (a-k)^2+a-15\ge 0$ ······ ㉠

이때 $a,\ k$는 실수이므로 $\quad (a-k)^2\ge 0$

따라서 ㉠이 모든 실수 k에 대하여 성립하려면 $a-15\ge 0$, 즉 $a\ge 15$이어야 하므로 가장 작은 실수 a의 값은 15이다. 답 15

08 이차방정식 $x^2-ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4b>0$

$\therefore a^2>4b$

(i) $a=1$ 또는 $a=2$일 때, b의 값은 존재하지 않는다.

$1>4b$ 또는 $4>4b$

(ii) $a=3$일 때, $\quad b=1,\ 2$

$9>4b$

(iii) $a=4$일 때, $\quad b=1,\ 2,\ 3$

$16>4b$

(iv) $a=5$ 또는 $a=6$일 때, $\quad b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$25>4b$ 또는 $36>4b$

이상에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2+3+6+6=17$ 답 ⑤

09 $x^2+3xy+2y^2-x-3y+k-1$을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(3y-1)x+2y^2-3y+k-1$

$x^2+(3y-1)x+2y^2-3y+k-1=0$을 x에 대한 이차방정식으로 생각하면 근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{-(3y-1)\pm\sqrt{D}}{2}$

(단, $D=(3y-1)^2-4(2y^2-3y+k-1)$)

그런데 주어진 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 D가 완전제곱식이 되어야 하므로

$D=(3y-1)^2-4(2y^2-3y+k-1)$

$\quad=y^2+6y-4k+5$

에서 y에 대한 이차방정식 $D=0$의 판별식이 0이어야 한다.

따라서 $D=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\dfrac{D'}{4}=3^2-(-4k+5)=0$

$9+4k-5=0$

$\therefore k=-1$ 답 -1

1등급 비밀노트

$x,\ y$에 대한 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되기 위해서는 x 또는 y에 대한 이차식으로 정리했을 때, (이차식)$=0$의 근이 일차식이 되어야 하므로 (이차식)$=0$의 판별식 D가 완전제곱식이 되어야 한다. 따라서 $D=0$의 판별식 D'이 0이어야 한다.

10 주어진 이차방정식의 좌변을 전개하여 정리하면

$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$ ··· ❶

이 이차방정식이 오직 하나의 실근, 즉 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a=b=c$ ··· ❷

$a,\ b,\ c$는 실수이므로
$(a-b)^2=(b-c)^2$
$=(c-a)^2$
$=0$
$a-b=b-c=c-a$
$=0$
$\therefore a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다. ··· ❸

답 정삼각형

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 전개할 수 있다.	20 %
❷ a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	60 %
❸ 삼각형 ABC가 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	20 %

11 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 이차방정식의 두 근의 곱이 양수이므로 두 근의 부호는 서로 같다.
따라서 주어진 이차방정식의 두 근을 4α, α $(\alpha \neq 0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$4\alpha+\alpha=-(2k-1)$ ...... ㉠

$4\alpha \cdot \alpha=36$ ...... ㉡ ··· ❶

㉡에서 $\alpha^2=9$이므로

$\alpha=-3$ 또는 $\alpha=3$ ··· ❷

(i) $\alpha=-3$일 때, ㉠에서 $k=8$

(ii) $\alpha=3$일 때, ㉠에서 $k=-7$ ··· ❸

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$8\cdot(-7)=-56$ ··· ❹

답 -56

㉠에 $\alpha=-3$을 대입하면
$-15=-2k+1$
$\therefore k=8$

㉠에 $\alpha=3$을 대입하면
$15=-2k+1$
$\therefore k=-7$

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 실수 k의 값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

12 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$ ...... ㉠

$\alpha\beta=a$ ...... ㉡

이때 $|\alpha|+|\beta|=9$이므로 $\alpha<\beta$라 하면

$\alpha<0$, $\beta>0$

$\therefore -\alpha+\beta=9$ ...... ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=-3$, $\beta=6$

이것을 ㉡에 대입하면 $a=-18$

답 ①

$\alpha+\beta>0$이므로 α, β 중 적어도 하나는 양수이다.
이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이라 하면
$|\alpha|+|\beta|=\alpha+\beta=3$
이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $\alpha<\beta$일 때,
$\alpha<0$, $\beta>0$

다른 풀이 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=a$이고, $|\alpha|+|\beta|=9$이므로

$(|\alpha|+|\beta|)^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|$

$=9-2a+2|a|$

따라서 $9-2a+2|a|=81$이므로

$|a|-a=36$

그런데 $a\geq0$이면 $|a|-a=a-a=0$이므로 $a<0$

즉 $|a|-a=-a-a=-2a$이므로

$-2a=36$ $\therefore a=-18$

13 이차방정식 $x^2-x+p=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=p$

이차방정식 $x^2-qx-1=0$의 두 근이 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=1+\frac{1}{p}=q$ ...... ㉠

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}$

$=2+p+\frac{1}{p}=-1$ ...... ㉡

㉠에서 $\frac{1}{p}=q-1$, ㉡에서 $p+\frac{1}{p}=-3$이므로

$p+q-1=-3$

$\therefore p+q=-2$

답 ①

14 이차방정식 $(x-2)(x+3)=3x$의 두 근이 α, β이므로

$(\alpha-2)(\alpha+3)=3\alpha$, $(\beta-2)(\beta+3)=3\beta$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)=9\alpha\beta$

이때 $(x-2)(x+3)=3x$에서 $x^2-2x-6=0$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-6$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)$

$=9\alpha\beta=-54$

답 ①

다른 풀이 $(x-2)(x+3)=3x$에서

$x^2-2x-6=0$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-6$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)$

$=\{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\}\{\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9\}$

$=(-6-4+4)(-6+6+9)$

$=-54$

15 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2$

한편

$(\alpha^n-\beta^n)(\alpha+\beta)$

$=\alpha^{n+1}+\alpha^n\beta-\alpha\beta^n-\beta^{n+1}$

$=(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})+\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})$

이므로

$4f(n)=f(n+1)-2f(n-1)$ $(n\geq2)$

위의 식에 $n=9$를 대입하면

$4f(9)=f(10)-2f(8)$

$\therefore \frac{f(10)-2f(8)}{f(9)}=4$

답 ④

16 이차방정식 $x^2+x-n=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-n$ ⋯ ❶

$n>0$에서 $\alpha\beta=-n<0$이므로

$\alpha<0$, $\beta>0$ ⋯ ❷

이때 $n=-\alpha\beta=(\beta+1)\beta$이므로 n은 연속하는 두 자연수의 곱이다.

따라서 두 자리 자연수 n의 값이 될 수 있는 수는

$3\cdot4$, $4\cdot5$, $5\cdot6$, $\cdots$, $9\cdot10$

의 7개이다. ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ α, β의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❸ 자연수 n의 개수를 구할 수 있다.	50 %

17 조건 (나)에서

$6<\alpha+\beta<8$, $5<\alpha\beta<12$

이차방정식 $ax^2-bx+3c=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\dfrac{b}{a}$이므로

$6<\dfrac{b}{a}<8$ $\quad\therefore 6a<b<8a$ $(\because a>0)$

이때 조건 (가)에 의하여 $\quad a=1$, $b=7$

또 $\alpha\beta=\dfrac{3c}{a}=3c$이므로

$5<3c<12$ $\quad\therefore \dfrac{5}{3}<c<4$

이때 조건 (가)에 의하여 $\quad c=2$ 또는 $c=3$

(i) $c=2$일 때, 주어진 방정식은

$x^2-7x+6=0$, $\quad(x-1)(x-6)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=6$

이때 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $c=3$일 때, 주어진 방정식은

$x^2-7x+9=0$

$\therefore x=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$

(i), (ii)에서 $c=3$이므로

$a+2b+3c=1+2\cdot7+3\cdot3=24$ 답 24

18 이차방정식 $x^2+4x-8=0$의 두 근이 α, β이므로

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+4x-8$

이때 $f(\alpha)=2$, $f(\beta)=2$에서

$f(\alpha)-2=0$, $f(\beta)-2=0$

따라서 이차방정식 $f(x)-2=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)-2=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+4x-8$

$\therefore f(x)=x^2+4x-6$ 답 ⑤

일품 BOX

$\alpha=\beta$이면 $\alpha+\beta=-1$에서

$\alpha=\beta=-\dfrac{1}{2}$

이므로 정수인 조건을 만족시키지 않는다.

$\alpha+\beta=-1$에서

$\alpha=-\beta-1$

$\therefore -\alpha=\beta+1$

$0<a<x<b$,
$0<c<y<d$일 때
① $a+c<x+y<b+d$
② $ac<xy<bd$

$3<\sqrt{13}<4$에서

$-4<-\sqrt{13}<-3$

$3<7-\sqrt{13}<4$

$\therefore \dfrac{3}{2}<\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}<2$

또 $3<\sqrt{13}<4$에서

$10<7+\sqrt{13}<11$

$\therefore 5<\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}<\dfrac{11}{2}$

$x^2+2=0$에서

$x^2=-2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}i$

$x^2-3=0$에서

$x^2=3$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{3}$

19 이차방정식 $x^2+6x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=7$

$\therefore \alpha<0$, $\beta<0$

즉 $|\alpha|=-\alpha$, $|\beta|=-\beta$이므로 $|\alpha|$, $|\beta|$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $-\alpha$, $-\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식과 같다.

따라서

$|\alpha|+|\beta|=-\alpha-\beta$

$=-(\alpha+\beta)=6$,

$|\alpha||\beta|=(-\alpha)\cdot(-\beta)$

$=\alpha\beta=7$

이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-6x+7=0$이다.

답 ①

20 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$ ⋯ ❶

이때

$(\alpha-3)+(\beta-3)=\alpha+\beta-6$

$=-p-6$,

$(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$

$=q+3p+9$

이므로 $\alpha-3$, $\beta-3$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+(p+6)x+3p+q+9=0$ ⋯ ❷

이 이차방정식이 $x^2+qx+p=0$과 같으므로

$p+6=q$, $3p+q+9=p$

$\therefore p-q=-6$, $2p+q=-9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=-5$, $q=1$ ⋯ ❸

$\therefore p^2+q^2=26$ ⋯ ❹

답 26

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다.	20 %
❷ $\alpha-3$, $\beta-3$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❸ p, q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ p^2+q^2의 값을 구할 수 있다.	10 %

21 $x^2=X$로 놓으면

x^4-x^2-6

$=X^2-X-6$

$=(X+2)(X-3)$

$=(x^2+2)(x^2-3)$

$=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

따라서 x^4-x^2-6의 인수인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

22 이차방정식 $5x^2-2x+3=0$의 두 근은

$$x=\frac{1\pm\sqrt{14}i}{5} \quad \cdots ❶$$

따라서 $5x^2-2x+3$을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$$5\left(x-\frac{1+\sqrt{14}i}{5}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{14}i}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\{5x-(1+\sqrt{14}i)\}\{5x-(1-\sqrt{14}i)\} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore a^2+b^2=(1+\sqrt{14}i)^2+(1-\sqrt{14}i)^2$$

$$=-26 \quad \cdots ❸$$

답 -26

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $5x^2-2x+3=0$의 근을 구할 수 있다.	30 %
❷ 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해할 수 있다.	50 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

23 계수가 정수인 이차방정식 $x^2-px+q=0$이 서로 다른 두 허근 z_1, z_2를 가지므로

$z_1=a+bi$, $z_2=a-bi$ (a는 실수, $b\neq0$인 실수)

라 하자.

ㄱ. 근과 계수의 관계에 의하여

$$q=z_1z_2$$
$$=a^2+b^2>0$$

> a는 실수, $b\neq0$인 실수이므로
> $a^2\geq0$, $b^2>0$
> $\therefore a^2+b^2>0$

ㄴ. $z_1=2z_2$이면 $a+bi=2a-2bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=2a,\ b=-2b$$
$$\therefore a=b=0$$

그런데 $b\neq0$이어야 하므로 $z_1=2z_2$를 만족시키는 p, q는 존재하지 않는다.

ㄷ. $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$이면 $z_1z_2=1$이지만

$p=1$, $q=1$이므로

$$p+q\neq1$$

> $p=z_1+z_2$
> $=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
> $=1$
> $q=z_1z_2$
> $=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
> $=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

24 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 한 허근이 α이고, 계수가 실수이므로 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\overline{\alpha}=1,\ \alpha\overline{\alpha}=2$$

또 $z=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$에 대하여

$$\overline{z}=\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\alpha}+1}$$

> $\overline{z}=\overline{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)}=\frac{\overline{\alpha-1}}{\overline{\alpha+1}}$
> $=\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\alpha}+1}$

$$\therefore z\overline{z}=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\alpha}+1}$$
$$=\frac{\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})+1}{\alpha\overline{\alpha}+(\alpha+\overline{\alpha})+1}$$
$$=\frac{2-1+1}{2+1+1}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 44~45쪽

01 이차방정식 $x^2-abx+a+b+2=0$의 한 근이 1이므로

$$1-ab+a+b+2=0,\quad ab-a-b-3=0$$
$$a(b-1)-(b-1)=4$$
$$\therefore (a-1)(b-1)=4$$

이때 a, b는 서로 다른 자연수이므로

> $a-1=2$, $b-1=2$이면
> $a=b=3$
> 이므로 a, b가 서로 다른 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$a-1=1,\ b-1=4 \text{ 또는 } a-1=4,\ b-1=1$$
$$\therefore a=2,\ b=5 \text{ 또는 } a=5,\ b=2$$

따라서 $ab=10$, $a+b=7$이므로 주어진 방정식의 해는

$$x^2-10x+9=0,\quad (x-1)(x-9)=0$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=9$$

즉 구하는 나머지 한 근은 9이다. 답 9

02 가격을 x %만큼 인상한 김밥 한 줄의 가격은 $2000\left(1+\frac{x}{100}\right)$원이고, 이때 김밥의 하루 평균 판매량은 $500\left(1-\frac{2x}{100}\right)$줄이다.

하루 평균 판매액이 28 %만큼 감소하여

$$2000\cdot500\cdot\left(1-\frac{28}{100}\right)(\text{원})$$

이므로

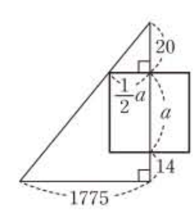
$$2000\left(1+\frac{x}{100}\right)\cdot500\left(1-\frac{2x}{100}\right)$$
$$=2000\cdot500\cdot\left(1-\frac{28}{100}\right)$$

> (가격)×(판매량)
> =(판매액)

$$(100+x)(100-2x)=7200$$
$$x^2+50x-1400=0,\quad (x+70)(x-20)=0$$
$$\therefore x=20\ (\because x>0)$$

답 ③

03 주어진 구장산술의 내용을 간단히 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$\frac{1}{2}a:1775=20:(a+34)$$
$$\frac{1}{2}a(a+34)=35500$$
$$a^2+34a-71000=0$$
$$(a+284)(a-250)=0$$
$$\therefore a=250\ (\because a>0)$$

답 ②

04 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$$
$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

ㄱ. $a=b=c$이면 $\frac{D}{4}=0$이므로 이차방정식은 중근을 갖는다.

ㄴ. $\frac{D}{4}\geq 0$이므로 이차방정식은 항상 실근을 갖는다.

ㄷ. $a+b+c=0$이면 주어진 이차방정식은

$$3x^2+ab+bc+ca=0$$

이므로 $\quad x=\pm\sqrt{\frac{-(ab+bc+ca)}{3}}$

이때

$$\begin{aligned} &ab+bc+ca\\ &=a(b+c)+bc\\ &=a(-a)+(-a-c)c\\ &=-a^2-ac-c^2\\ &=-(a^2+ac+c^2)\\ &=-\left\{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2\right\}<0 \end{aligned}$$

이므로

$$-(ab+bc+ca)>0$$

따라서 이차방정식은 부호가 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

$a+b+c=0$에서 $b+c=-a$, $b=-a-c$

a^2+ac+c^2
$=a^2+ac+\frac{c^2}{4}+\frac{3}{4}c^2$
$=\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2>0$

05 이차방정식 $ax^2-32x+16=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-16)^2-16a=16^2-16a\geq 0$$

$$\therefore a\leq 16$$

이때 이차방정식 $ax^2-32x+16=0$의 근이

$$x=\frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-16a}}{a}$$

이고 적어도 한 개는 정수이므로

$(-16)^2-16a=k^2$ (k는 정수) 꼴이어야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore k^2&=(-16)^2-16a\\ &=16(16-a)=4^2(16-a) \end{aligned}$$

따라서 $16-a$가 정수의 제곱 꼴이어야 하므로

$a=7$ 또는 $a=12$ 또는 $a=15$ 또는 $a=16$

$16-a=0$일 때, $a=16$
$16-a=1$일 때, $a=15$
$16-a=4$일 때, $a=12$
$16-a=9$일 때, $a=7$
$16-a\geq 16$이면 $a\leq 0$이므로 a는 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i) $a=7$일 때,

$$7x^2-32x+16=0$$
$$(7x-4)(x-4)=0$$

이므로 $x=4$의 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2-7x+7=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=(-7)^2-4\cdot 7b\geq 0$$

$$49-28b\geq 0 \qquad \therefore b\leq\frac{7}{4}$$

이를 만족시키는 자연수 b는 1뿐이므로

$$x^2-7x+7=0$$

그런데 이차방정식의 정수인 근은 존재하지 않는다.

(ii) $a=12$일 때,

$$12x^2-32x+16=0$$
$$4(3x-2)(x-2)=0$$

이므로 $x=2$의 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2-7x+12=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(-7)^2-4\cdot 12b\geq 0$$

$$49-48b\geq 0 \qquad \therefore b\leq\frac{49}{48}$$

이를 만족시키는 자연수 b는 1뿐이므로

$$x^2-7x+12=0, \qquad (x-3)(x-4)=0$$

이므로 $x=3$, $x=4$의 정수인 근이 존재한다.

(iii) $a=15$일 때,

$$15x^2-32x+16=0$$
$$(5x-4)(3x-4)=0$$

이므로 정수인 근이 존재하지 않는다.

(iv) $a=16$일 때,

$$16x^2-32x+16=0, \qquad 16(x-1)^2=0$$

이므로 $x=1$의 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2-7x+16=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_3이라 하면

$$D_3=(-7)^2-4\cdot 16b\geq 0$$

$$49-64b\geq 0 \qquad \therefore b\leq\frac{49}{64}$$

이를 만족시키는 자연수 b는 존재하지 않는다.

이상에서 $a=12$, $b=1$이므로

$$a+b=13$$

답 13

06 $g(x)=f(x)+x-3$이라 하면

$$\begin{aligned} g(\alpha)&=f(\alpha)+\alpha-3\\ &=\beta+\alpha-3\\ &=0\\ g(\beta)&=f(\beta)+\beta-3\\ &=\alpha+\beta-3\\ &=0 \end{aligned}$$

따라서 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)+x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 구하는 두 근의 합은

$$\alpha+\beta=3$$

답 3

07 이차방정식 $x^2+2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로

$$\alpha^2+2\alpha-2=0,\ \beta^2+2\beta-2=0$$

또 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-2$$

$$\begin{aligned} &\therefore (\alpha^3+2\alpha^2-\alpha-1)(\beta^3+2\beta^2-\beta-1)\\ &=\{\alpha(\alpha^2+2\alpha-2)+\alpha-1\}\\ &\quad\times\{\beta(\beta^2+2\beta-2)+\beta-1\}\\ &=(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\\ &=-2-(-2)+1=1 \end{aligned}$$

답 ③

08 이차방정식 $x^2-mx+2m-1=0$의 두 근을 k, $2k-1\left(k>\frac{1}{2}\right)$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$k+(2k-1)=m$

$\therefore m=3k-1$ ...... ㉠

$k(2k-1)=2m-1$

$\therefore 2k^2-k+1=2m$ ...... ㉡

㉡에 ㉠을 대입하여 정리하면

$2k^2-7k+3=0,\quad (2k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=3\left(\because k>\frac{1}{2}\right)$

따라서 이차방정식의 두 근은 3, $2\cdot3-1=5$이므로

$\alpha=3$

㉠에 $k=3$을 대입하면

$m=3\cdot3-1=8$

$\therefore \alpha m=3\cdot8=24$

답 24

두 근이 모두 양수이므로 $k>0,\ 2k-1>0$ $\therefore k>\frac{1}{2}$

09 조건 (가)에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{-1+\sqrt{2}i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{2}i}{2}=\frac{3}{4}$$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$$

조건 (나)에서 이차방정식 $dx^2+cx+a=0$의 두 근의 합은

$$\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}+\frac{-3-\sqrt{7}i}{2}=-3$$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{c}{d}=-3\qquad \therefore \frac{c}{d}=3$$

이때 이차방정식 $cx^2+ax+d=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{a}{c}=-\frac{4}{3},\ \alpha\beta=\frac{d}{c}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{9}$$

답 ④

10 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=p,\ \alpha\beta=q$

q는 소수이고, α, β는 자연수이므로

$\alpha=1,\ \beta=q$ 또는 $\alpha=q,\ \beta=1$

$\therefore p=\alpha+\beta=q+1$

즉 p와 q는 연속하는 두 자연수이면서 소수이므로

$p=3,\ q=2$

$\therefore p^2+q^2=3^2+2^2=13$

답 13

참고 연속하는 두 자연수 중 하나는 짝수이고, 2를 제외한 짝수는 합성수이므로 연속하는 두 자연수가 모두 소수인 경우는 2, 3뿐이다.

소수 q의 약수는 1과 q뿐이므로 q를 두 자연수의 곱으로 나타내는 경우는 $q=1\cdot q$ 이다.

11 이차방정식 $f(x+1)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha+1)=0,\ f(\beta+1)=0$

이때 이차방정식 $f(x-2)=0$의 두 근은

$x-2=\alpha+1$ 또는 $x-2=\beta+1$

$\therefore x=\alpha+3$ 또는 $x=\beta+3$

따라서 $f(x-2)=0$의 두 근의 곱은

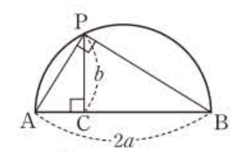
$$(\alpha+3)(\beta+3)=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9=5+3\cdot3+9=23$$

답 23

1등급 비밀노트

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β일 때, 방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근은 $ax+b=\alpha$, $ax+b=\beta$를 만족시키는 x의 값, 즉 $\frac{\alpha-b}{a}$, $\frac{\beta-b}{a}$이다.

12 오른쪽 그림에서



$\overline{AC}+\overline{BC}=2a$

$\triangle PAC$와 $\triangle BPC$에서

$\angle ACP=\angle PCB=90^\circ$,

$\angle APC=\angle PBC\ (\because \angle APB=90^\circ)$

이므로

$\triangle PAC\backsim\triangle BPC$ (AA 닮음)

이때 $\overline{PC}:\overline{AC}=\overline{BC}:\overline{PC}$이므로

$b:\overline{AC}=\overline{BC}:b$

$\therefore \overline{AC}\times\overline{BC}=b^2$

따라서 두 선분 AC, BC의 길이를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(\overline{AC}+\overline{BC})x+\overline{AC}\times\overline{BC}=0$

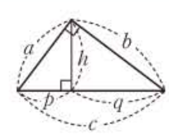
$\therefore x^2-2ax+b^2=0$

답 ④

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

1등급 비밀노트

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서



$ab=ch$,

$a^2=pc,\ b^2=qc$,

$h^2=pq$

가 성립한다.

13 조건 (가)에서 다항식 $f(x)$가 $x-1-i$를 인수로 가지므로 $\quad f(1+i)=0$

즉 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $1+i$이고, a, b, c가 실수이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.

$$\therefore f(x)=a(x-1-i)(x-1+i)=a(x^2-2x+2)=ax^2-2ax+2a$$

조건 (나)에서 방정식

$f(x)+1=0$, 즉 $ax^2-2ax+2a+1=0$

의 두 근의 곱이 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{2a+1}{a}=4,\qquad 2a+1=4a\qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

즉 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$이므로 $f(ax)-ax=0$에서

$$f\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}x=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}x=0$$

$$\therefore \frac{1}{8}x^2-x+1=0,\ 즉\ x^2-8x+8=0$$

따라서 위의 이차방정식의 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 8이다.

답 8

14 주어진 이차방정식의 한 허근이 α이고 α^2이 실수이므로 $\alpha=pi$ ($p\neq0$인 실수)라 하자. 이때 이차방정식의 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $-pi$이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$$pi+(-pi)=-\frac{k+1}{k}, \qquad 0=-\frac{k+1}{k}$$

$$\therefore k=-1$$

$$pi\cdot(-pi)=-\frac{2}{k}$$

$$\therefore p^2=2$$

따라서 $M=2$, $\alpha^2=(pi)^2=-2$이므로

$$\alpha^2+M^2=-2+2^2=2$$

답 2

다른 풀이 $\alpha=pi$ ($p\neq0$인 실수)라 하면 이차방정식 $kx^2+(k+1)x-2=0$의 한 허근이 α이므로

$$k\alpha^2+(k+1)\alpha-2=0$$

$$-kp^2+(k+1)pi-2=0$$

$$-(kp^2+2)+(k+1)pi=0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$kp^2+2=0,\ (k+1)p=0$$

$(k+1)p=0$에서 $p\neq0$이므로

$$k+1=0$$

$$\therefore k=-1$$

$kp^2+2=0$에 $k=-1$을 대입하면

$$p^2=2$$

$$\therefore \alpha^2=-p^2=-2$$

또 주어진 이차방정식은 $-x^2-2=0$, 즉 $x^2+2=0$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$M=2$$

$$\therefore \alpha^2+M^2=-2+2^2=2$$

일품 BOX

$y=ax^2+bx+c$
$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$
에서 그래프의 축의 방정식은
$x=-\frac{b}{2a}$

$\alpha=a+bi$
(a, b는 실수, $b\neq0$)이면
$\alpha^2=(a+bi)^2$
$=(a^2-b^2)+2abi$
이므로 α^2이 실수이려면
$2ab=0$
$\therefore a=0$ 또는 $b=0$
이때 $b\neq0$이므로
$a=0$
따라서 허수 α는 순허수이다.

05 이차방정식과 이차함수

개념&핵심 기출

본책 46~48쪽

01 이차함수 $y=x^2+2(a-2)x+a^2-8$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+2(a-2)x+a^2-8=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a^2-8)<0$$

$$-4a+12<0 \qquad \therefore a>3$$

따라서 정수 a의 값 중 가장 작은 값은 4이다. 답 ④

02 ㄱ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
또 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있으므로

$$-\frac{b}{2a}>0 \qquad \therefore b>0\ (\because a<0)$$

$$\therefore ab<0$$

ㄴ. $x=-2$를 $y=ax^2+bx+c$에 대입하면

$$y=4a-2b+c$$

이때 주어진 그래프에서 $x=-2$일 때 $y<0$이므로

$$4a-2b+c<0$$

ㄷ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=b^2-4ac>0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 ㄱ. 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 -1, 3이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{b}{a}=-1+3=2>0$$

따라서 $\frac{b}{a}<0$이므로 $\quad ab<0$

03 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, $\alpha+1$이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, $\alpha+1$이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(\alpha+1)=-a,\ 즉\ 2\alpha+1=-a \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha(\alpha+1)=b \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 이차함수 $y=2x^2-ax-2b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $\alpha-2$, α이므로 이차방정식 $2x^2-ax-2b=0$의 두 근이 $\alpha-2$, α이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha-2)+\alpha=\frac{a}{2},\ 즉\ 2\alpha-2=\frac{a}{2} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2},\ a=-2$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면 $\quad b=\frac{3}{4}$

$\therefore a+b+\alpha=-\frac{3}{4}$ 답 $-\frac{3}{4}$

04 이차함수 $y=x^2+ax+10$의 그래프와 직선 $y=-ax+b^2$이 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+ax+10=-ax+b^2$, 즉 $x^2+2ax-b^2+10=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=a^2-(-b^2+10)<0$

$\therefore a^2+b^2<10$

따라서 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)$

의 4개이다. 답 4

05 이차방정식 $x^2+a=bx$, 즉 $x^2-bx+a=0$의 한 근이 $2+\sqrt{2}$이고, a, b가 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$b=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4,$

$a=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2$

이므로 $\quad a+b=6$ 답 ③

06 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2$의 그래프와 직선 $y=4x-k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+2=4x-k$, 즉 $x^2-2(a+2)x+(a^2+2+k)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+2)\}^2-(a^2+2+k)>0$

$\therefore k<4a+2$

(i) $a=1$일 때, $k<6$이므로 $\quad f(1)=5$

(ii) $a=2$일 때, $k<10$이므로 $\quad f(2)=9$

(iii) $a=3$일 때, $k<14$이므로 $\quad f(3)=13$

(iv) $a=4$일 때, $k<18$이므로 $\quad f(4)=17$

이상에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=44$ 답 44

07 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 주어진 그래프에서 $-3,\ 0,\ 2$이다.

따라서 $a=3,\ b=-3+0+2=-1$이므로

$a-b=4$ 답 ③

판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-4\cdot(-1)$

$=5>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$(a-2)\alpha=\frac{-2b}{2}$에 $a=\frac{1}{2}$을 대입하여 b의 값을 구할 수도 있다.

이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β인 이차함수의 식은

$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$(a\neq0)$

$1^2+1^2=2,\ 1^2+2^2=5,$

$2^2+1^2=5,\ 2^2+2^2=8$

a가 자연수이므로 $k<4a+2$를 만족시키는 자연수 k의 개수는 $4a+1$이다.

따라서 $f(a)=4a+1$임을 이용할 수도 있다.

08 두 이차함수 $y=x^2+2x-3$, $y=-3x^2+4x-2$의 그래프의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+2x-3=-3x^2+4x-2$, 즉 $4x^2-2x-1=0$의 실근과 같다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 이차방정식의 두 실근의 합이 $\frac{1}{2}$이므로 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표의 합은 $\frac{1}{2}$이다. 답 ⑤

09 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이고 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, γ이고 x^2의 계수가 1이므로

$g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$

$\therefore 2g(x)=2(x-\alpha)(x-\gamma)$

$f(x)=2g(x)$에서 $2g(x)-f(x)=0$이므로

$2(x-\alpha)(x-\gamma)-(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$(x-\alpha)\{2(x-\gamma)-(x-\beta)\}=0$

$(x-\alpha)(x-2\gamma+\beta)=0$

$\therefore x=\alpha$ 또는 $x=2\gamma-\beta$

따라서 구하는 모든 근의 합은 $\alpha-\beta+2\gamma$이다. 답 ③

10 $y=ax^2+4x+a-2$

$=a\left(x^2+\frac{4}{a}x+\frac{4}{a^2}\right)-\frac{4}{a}+a-2$

$=a\left(x+\frac{2}{a}\right)^2-\frac{4}{a}+a-2$

이 함수가 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$a<0,\ -\frac{2}{a}=2$

$\therefore a=-1$

따라서 $y=x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$이므로 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $-\frac{5}{4}$를 갖는다. 답 $-\frac{5}{4}$

11 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $x=3$에서 최댓값 k를 가지므로

$y=a(x-3)^2+k$

이 함수의 그래프가 두 점 $(4,\ 5)$, $(5,\ 2)$를 지나므로

$5=a(4-3)^2+k \quad \therefore a+k=5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$2=a(5-3)^2+k \quad \therefore 4a+k=2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ k=6$

즉 주어진 이차함수는

$y=-(x-3)^2+6=-x^2+6x-3$

이므로 $\quad b=6,\ c=-3$

$\therefore a+b+c+k=8$ 답 8

12 $y=x^2-2ax+2a+3$

$=(x-a)^2-a^2+2a+3$

에서 $x=a$일 때 최솟값 $-a^2+2a+3$을 가지므로

$m=-a^2+2a+3$

$=-(a-1)^2+4$

따라서 m은 $a=1$일 때 최댓값 4를 갖는다. 답 4

13 $f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

이므로 $-1\le x\le a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 최댓값은 $f(-1)$, $f(a)$ 중 큰 값이다.

그런데 $f(-1)=6$이므로 $f(a)=11$이어야 한다.

즉 $a^2-2a+3=11$이므로

$a^2-2a-8=0, \qquad (a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>-1)$

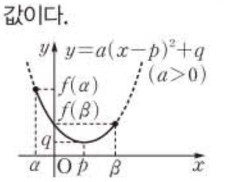
$\therefore f\left(\dfrac{a}{2}\right)=f(2)=3$ 답 ③

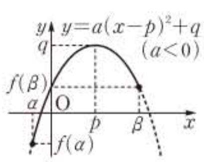
참고 x의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

① $\alpha\le p\le\beta$일 때,

(i) $a>0$이면 최솟값은 q이고, 최댓값은 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이다.

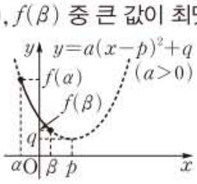
(ii) $a<0$이면 최댓값은 q이고, 최솟값은 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 작은 값이다.

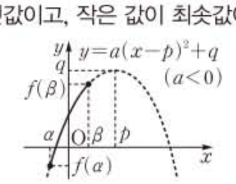




② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때,

$f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값이고, 작은 값이 최솟값이다.





14 $x+y^2=1$에서 $\qquad y^2=1-x \qquad \cdots\cdots$ ㉠

y는 실수이므로 $\qquad y^2=1-x\ge 0 \qquad \therefore x\le 1$

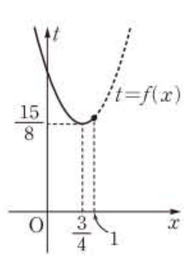
$2x^2+3y^2$에 ㉠을 대입하면

$2x^2+3y^2=2x^2+3(1-x)$

$=2x^2-3x+3$

$=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{15}{8}$

$f(x)=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{15}{8}$라 하면 $x\le 1$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=\dfrac{3}{4}$에서 최솟값 $\dfrac{15}{8}$를 갖는다.



즉 $2x^2+3y^2$의 최솟값은 $\dfrac{15}{8}$이다. 답 ②

15 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 교점의 x좌표가 -1, 3이므로

$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$

으로 놓을 수 있다.

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ -6)$을 지나므로

$-6=a\cdot 1\cdot(-3) \qquad \therefore a=2$

$\therefore f(x)=2(x+1)(x-3)$

$=2(x^2-2x-3)$

$=2(x-1)^2-8$

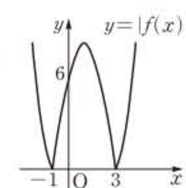
따라서 $0\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -8을 갖고, $x=4$일 때 최댓값 10을 가지므로

$-8\le f(x)\le 10$

$\therefore 0\le |f(x)|\le 10$

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 최댓값과 최솟값의 합은 10이다. 답 10

참고 $f(x)=2(x+1)(x-3)$일 때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



16 $y=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$

이므로 두 점 A, B와 두 점 C, D는 각각 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

$A(3-t,\ 0)$, $B(3+t,\ 0)$ $(0<t<3)$이라 하면

두 점 A, B가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B는 각각 점 $(3,\ 0)$에서 같은 거리 t만큼 떨어져 있다.

$C(3+t,\ -t^2+9)$, $D(3-t,\ -t^2+9)$

$\therefore \overline{AB}=\overline{CD}=2t,\ \overline{AD}=\overline{BC}=-t^2+9$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2\{2t+(-t^2+9)\}=-2t^2+4t+18$

$=-2(t-1)^2+20$

이므로 $0<t<3$에서 $t=1$일 때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다. 답 20

17 1인당 입장료를 $50x$원 인상하면 하루 입장객 수는 $200x$명 감소하므로 하루 입장료 수입은

$(600+50x)(4000-200x)$

$=-10000(x^2-8x-240)$

$=-10000(x-4)^2+2560000$

따라서 $x=4$일 때 입장료 수입이 최대가 되므로 1인당 입장료를 $50\cdot 4=200$(원) 인상해야 한다. 답 ②

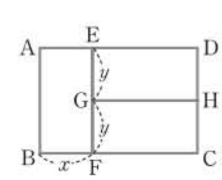
18 오른쪽 그림과 같이

$\overline{BF}=x,\ \overline{EG}=\overline{GF}=y$

$(x>0,\ y>0)$

□EGHD, □GFCH의 가로의 길이와 넓이가 같으므로 세로의 길이도 같다.

라 하면



$\square ABFE=x\cdot 2y=2xy$

$\square EGHD=\overline{ED}\cdot y$
두 직사각형의 넓이가 같으므로
$2xy=\overline{ED}\cdot y \qquad \therefore \overline{ED}=2x \ (\because y>0)$
한편 철망의 길이가 100이므로
$8x+6y=100 \qquad \therefore y=-\frac{4}{3}x+\frac{50}{3}$
전체 우리의 넓이는
$3x\cdot 2y=6x\left(-\frac{4}{3}x+\frac{50}{3}\right)=-8\left(x^2-\frac{25}{2}x\right)$
$=-8\left(x-\frac{25}{4}\right)^2+\frac{625}{2}$
이때 $0<8x<100$에서 $0<x<\frac{25}{2}$이므로 $x=\frac{25}{4}$일 때
전체 우리의 넓이의 최댓값은 $\frac{625}{2}$이다. 답 $\frac{625}{2}$

$\overline{AD}+\overline{BC}+\overline{GH}$
$+\overline{AB}+\overline{EF}+\overline{DC}$
$=3x\cdot 2+2x+2y\cdot 3$
$=8x+6y$

이므로 구하는 x좌표의 차는
$2+\sqrt{6}-(2-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$ ···➍
답 $2\sqrt{6}$

채점 기준	비율
➊ a의 값을 구할 수 있다.	30%
➋ b의 값을 구할 수 있다.	30%
➌ 이차방정식의 실근을 구할 수 있다.	30%
➍ x좌표의 차를 구할 수 있다.	10%

1등급을 위한 고난도 문제

본책 49~51쪽

01 $f(x)=a(x+5)(x-3)\ (a<0)$이라 하면
$f\left(\frac{x-2}{3}\right)=a\left(\frac{x-2}{3}+5\right)\left(\frac{x-2}{3}-3\right)$
$=\frac{a}{9}(x+13)(x-11)$
$f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$에서 $\qquad x=-13$ 또는 $x=11$
따라서 방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$의 두 근의 합은 -2이다.
답 ②

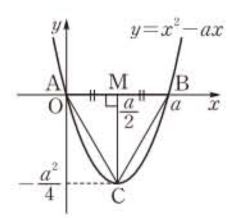
다른 풀이 방정식 $f(x)=0$의 근이 $x=\alpha$이면 방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$의 근은 $\frac{x-2}{3}=\alpha$에서 $x=3\alpha+2$이다.
이때 방정식 $f(x)=0$의 근이 $x=-5$ 또는 $x=3$이므로 방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$의 근은
$x=3\cdot(-5)+2$ 또는 $x=3\cdot 3+2$
$\therefore x=-13$ 또는 $x=11$
따라서 두 근의 합은 -2이다.

02 x^2의 계수가 1이므로
$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)
라 하면 조건 (가)에서 $f(-1)=f(5)$이므로
$1-a+b=25+5a+b$
$6a=-24 \qquad \therefore a=-4$ ···➊
조건 (나)에 의하여 이차방정식 $x^2-4x+b=0$의 두 실근의 곱이 -2이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$b=-2$ ···➋
따라서 이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 실근은
$x=2\pm\sqrt{(-2)^2-(-2)}=2\pm\sqrt{6}$ ···➌

03 $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$ $(\alpha<\beta)$이라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=2a$ ······ ㉠
이때 $\overline{AB}=2$이므로 $\qquad \beta-\alpha=2$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에 대입하면
$2^2=(-a)^2-4\cdot 2a$
$\therefore a^2-8a-4=0$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 8이다. 답 ④

판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-4)^2-(-4)$
$=20>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

04 $x^2-ax=0$에서 $\qquad x(x-a)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=a$
$A(0, 0)$, $B(a, 0)$이라 하면 이차함수 $y=x^2-ax$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$y=x^2-ax$
$=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$
에서 꼭짓점 C의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}\right)$
이때 △ABC는 한 변의 길이가 a인 정삼각형이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면
$\overline{MC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}, \qquad \frac{a^2}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$
$\frac{a}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (\because a\neq 0)$
$\therefore a=2\sqrt{3}$ 답 ⑤

05 이차함수 $y=x^2+ax-5$의 그래프와 직선 $y=x+b$의 교점의 x좌표가 -3, 2이므로 이차방정식 $x^2+ax-5=x+b$, 즉 $x^2+(a-1)x-5-b=0$의 두 근이 -3, 2이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$-3+2=-(a-1) \qquad \therefore a=2$
$-3\cdot 2=-5-b \qquad \therefore b=1$
$\therefore a+b=3$ 답 3

06 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2a-1$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 접하므로 이차방정식

$x^2-2ax+a^2+2a-1=mx+n$, 즉

$x^2-(2a+m)x+a^2+2a-n-1=0$

의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a+m)\}^2-4(a^2+2a-n-1)=0$

$4am+m^2-8a+4n+4=0$

$\therefore (4m-8)a+m^2+4n+4=0$

이 식이 a에 대한 항등식이므로

$4m-8=0,\ m^2+4n+4=0$

$\therefore m=2,\ n=-2$

$\therefore m+n=0$

답 0

다음은 모두 k에 대한 항등식을 나타낸다.
① k의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
② 모든 k에 대하여 성립하는 등식
③ 임의의 k에 대하여 성립하는 등식

07 이차함수 $y=x^2-4x$, 즉 $y=(x-2)^2-4$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y-2=(x+3-2)^2-4$

$\therefore y=(x+1)^2-2$ ···· ❶

두 점 P, Q의 x좌표는 이차방정식 $(x+1)^2-2=mx$, 즉 $x^2+(2-m)x-1=0$의 근이다. ···· ❷

이때 선분 PQ의 중점이 원점이므로 이차방정식 $x^2+(2-m)x-1=0$의 두 근의 합이 0이다. ···· ❸

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-(2-m)=0 \qquad \therefore m=2$ ···· ❹

답 2

이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식
➡ $y=a(x-p)^2+q$

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 이차함수의 식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 점 P, Q의 x좌표가 방정식의 근임을 알 수 있다.	30 %
❸ 방정식의 두 근의 합이 0임을 알 수 있다.	30 %
❹ m의 값을 구할 수 있다.	10 %

08 ㄱ. 이차함수 $y=x^2-ax+ad$의 그래프가 x축과 만나려면 이차방정식 $x^2-ax+ad=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-a)^2-4ad\ge 0,\qquad a(a-4d)\ge 0$

이때 $a>0$이므로 $\qquad a-4d\ge 0 \qquad \therefore a\ge 4d$

위의 부등식을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ d)$는 $(4,\ 1)$, $(5,\ 1)$, $(6,\ 1)$의 3개이다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2-ax+ad=dx+bc$, 즉 $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+d)\}^2-4(ad-bc)$

$=a^2-2ad+d^2+4bc$

$=(a-d)^2+4bc$

이때 $(a-d)^2\ge 0$, $4bc>0$이므로 $D>0$이다.

따라서 이차함수 $y=x^2-ax+ad$의 그래프와 직선 $y=dx+bc$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

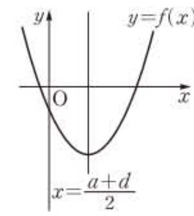
ㄷ. $f(x)=x^2-(a+d)x+ad-bc$라 하면

$$f(x)=\left(x-\frac{a+d}{2}\right)^2-\frac{(a+d)^2}{4}+ad-bc$$

이므로 이차함수 $y=f(x)$의 축의 방정식은

$$x=\frac{a+d}{2}>0$$

ㄴ에서 방정식 $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 이차방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 적어도 하나 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

09 두 이차함수의 그래프가 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+2ax-b=-2x^2-6$, 즉 $3x^2+2ax-(b-6)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=a^2+3(b-6)<0 \qquad \therefore b<-\frac{1}{3}a^2+6$$

위의 부등식을 만족시키는 음이 아닌 두 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

(i) $a=0$일 때,

$b<-\frac{1}{3}\cdot 0^2+6=6$

$(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ 2)$, $(0,\ 3)$, $(0,\ 4)$, $(0,\ 5)$의 6개

(ii) $a=1$일 때,

$b<-\frac{1}{3}\cdot 1^2+6=\frac{17}{3}$

$(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$의 6개

(iii) $a=2$일 때,

$b<-\frac{1}{3}\cdot 2^2+6=\frac{14}{3}$

$(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(2,\ 4)$의 5개

(iv) $a=3$일 때,

$b<-\frac{1}{3}\cdot 3^2+6=3$

$(3,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$의 3개

(v) $a=4$일 때,

$b<-\frac{1}{3}\cdot 4^2+6=\frac{2}{3}$

$(4,\ 0)$의 1개

이상에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$6+6+5+3+1=21$

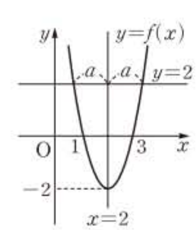
답 ④

10 $|f(x)|=2$에서 $\qquad f(x)=2$ 또는 $f(x)=-2$

(i) $f(x)=2$일 때,

오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때 두 교점은 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 두 교점의 x좌표를 각각 $2+a$, $2-a$라 하면 두 교점의 x좌표의 합은

$\frac{1+3}{2}=2$

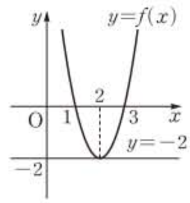


$(2+a)+(2-a)=4$

따라서 방정식 $f(x)=2$의 모든 실근의 합은 4이다.

(ii) $f(x)=-2$일 때,

오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2$는 접하고 접점의 x좌표는 2이므로 방정식 $f(x)=-2$의 실근은 $x=2$이다.



(i), (ii)에서 서로 다른 모든 실근의 합은

$4+2=6$

답 ③

다른 풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 1, 3이므로

$f(x)=a(x-1)(x-3)\ (a>0)$

이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, -2)$이므로

$-2=a\cdot 1\cdot(-1) \qquad \therefore a=2$

$\therefore f(x)=2(x-1)(x-3)=2x^2-8x+6$

(i) $f(x)=2$일 때,

$2x^2-8x+6=2, \qquad x^2-4x+2=0$

$\therefore x=2\pm\sqrt{2}$

(ii) $f(x)=-2$일 때,

$2x^2-8x+6=-2, \qquad x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$

(i), (ii)에서 서로 다른 모든 실근의 합은

$(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})+2=6$

주어진 함수의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

11 이차방정식 $x^2-2f(t)x+f(t)=0$이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=\{-f(t)\}^2-f(t)=0, \qquad f(t)\{f(t)-1\}=0$

$\therefore f(t)=0$ 또는 $f(t)=1$

(i) $f(t)=0$일 때,

함수 $y=f(t)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 4이므로 방정식 $f(t)=0$의 실근의 개수는 4이다.

(ii) $f(t)=1$일 때,

함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 3이므로 방정식 $f(t)=1$의 실근의 개수는 3이다.

(i), (ii)에서 실수 t의 개수는

$4+3=7$

답 ③

12 $y=-x^2+(2a+4)x+a-1$

$=-\{x^2-2(a+2)x+(a+2)^2\}$

$+(a+2)^2+a-1$

$=-\{x-(a+2)\}^2+a^2+5a+3$

에서

$p=a+2,\ q=a^2+5a+3$

$\therefore p+q=a^2+6a+5=(a+3)^2-4$

따라서 $p+q$는 $a=-3$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

답 ①

13 (i) $b=-a^2+\frac{1}{2}a+\frac{35}{16}=-\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}$

에서 이차함수 $b=-\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}$의 최댓값은 $\frac{9}{4}$이므로

$b\le\frac{9}{4}$

이때 위의 부등식을 만족시키는 자연수 b의 최댓값은 2이므로

$M_1=2$

(ii) $n=-m^2+\frac{1}{2}m+2=-\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{33}{16}$

에서 이차함수 $n=-\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{33}{16}$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, \frac{33}{16}\right)$이고, m은 자연수이므로 $m=1$일 때 실수 n의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다.

이차함수 $n=-m^2+\frac{1}{2}m+2$는 $m\ge\frac{1}{4}$인 범위에서 감소하므로 m의 값이 $m\ge\frac{1}{4}$인 자연수 중에서 가장 작은 수인 1일 때 n이 최대이다.

$\therefore M_2=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $\qquad M_1M_2=3$

답 3

14 $y=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$,

$y=x^2+bx+a=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+a$에서 두 이차함수의 최솟값은 각각 $-\frac{a^2}{4}+b,\ -\frac{b^2}{4}+a$이다. ··· ❶

최솟값이 같으므로

$-\frac{a^2}{4}+b=-\frac{b^2}{4}+a$

$a^2-b^2+4(a-b)=0$

$(a+b)(a-b)+4(a-b)=0$

$(a-b)(a+b+4)=0$

이때 $a\ne b$이므로 $\qquad a+b+4=0$

$\therefore a+b=-4 \qquad$ ······ ㉠ ··· ❷

두 이차함수의 그래프의 교점이 (p, q)이므로

$p^2+ap+b=p^2+bp+a$

$(a-b)p-(a-b)=0$

$(a-b)(p-1)=0$

이때 $a\ne b$이므로 $\qquad p-1=0 \qquad \therefore p=1$

$q=p^2+ap+b$에 $p=1$을 대입하면

$q=1+a+b$

$=1-4$ ($\because$ ㉠)

$=-3$ ··· ❸

$\therefore p+q=-2$ ··· ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ 두 이차함수의 최솟값을 각각 구할 수 있다.	30 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ p, q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

15 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$라 하면 조건 (가)에 의하여 $f(0)=c=1$

조건 (나)에 의하여

$$a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)=2x$$

$$\therefore 2ax+a+b=2x$$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$$2a=2,\ a+b=0$$

$$\therefore a=1,\ b=-1$$

$$\therefore f(x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

따라서 $-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 3을 갖고, $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$$3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$$

답 ⑤

16 (i) $a>0$일 때,

$0\le x\le 3$에서 $y=a(x-2)^2+4$는 $x=2$일 때 최솟값 4를 갖고, $x=0$일 때 최댓값 $4a+4$를 가지므로

$$4a+4=8 \qquad \therefore a=1$$

(ii) $a<0$일 때,

$0\le x\le 3$에서 $y=a(x-2)^2+4$는 $x=2$일 때 최댓값 4를 갖고, $x=0$일 때 최솟값 $4a+4$를 가지므로

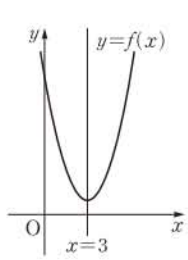
$$4a+4=-4 \qquad \therefore a=-2$$

(i), (ii)에서 $\alpha=1,\ \beta=-2$이므로

$$\alpha-\beta=3$$

답 ②

17 $f(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$



이므로 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

(i) $a=\frac{3}{2}$일 때,

주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값은

$$f(a)=f(a+3)$$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{13}{4}$

(ii) $a<\frac{3}{2}$일 때,

주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(a)$

(iii) $a>\frac{3}{2}$일 때,

주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값은

$$f(a+3)$$

이상에서 $k=\frac{3}{2}$이므로

$$g(a)=f(a)=a^2-6a+10,$$

$$h(a)=f(a+3)=a^2+1$$

$$\therefore g(-3)+h(3)$$

$$=\{(-3)^2-6\cdot(-3)+10\}+(3^2+1)=47$$

답 47

1등급 비밀노트

$f(a)$와 $f(a+3)$의 값이 같으면 그 값이 최댓값이고, $f(a)$와 $f(a+3)$의 값이 다르면 둘 중 큰 값이 최댓값이다.
따라서 $a\le x\le a+3$에 꼭짓점의 x좌표가 속하는지의 여부와 관계없이 $f(a)$와 $f(a+3)$의 값의 대소가 바뀌는 a의 값이 k의 값이다.

18 $x^2-4x+2=t$로 놓으면

$$t=(x-2)^2-2$$

이므로 $1\le x\le 4$에서 $x=4$일 때 최댓값 2를 갖고, $x=2$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

$$\therefore -2\le t\le 2 \quad \cdots ❶$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2+6t-1=(t+3)^2-10$$

이므로 $-2\le t\le 2$에서 $t=2$일 때 최댓값 15를 갖고, $t=-2$일 때 최솟값 -9를 갖는다. ⋯ ❷

따라서 $M=15,\ m=-9$이므로

$$M-m=24 \quad \cdots ❸$$

답 24

채점 기준	비율
❶ 공통부분을 t로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

19 $\overline{QR}=\overline{PS}=x\ (0<x<10)$, $\overline{PQ}=\overline{SR}=y\ (0<y<5)$라 하면

$\triangle APS \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

∠A는 공통, ∠APS=∠ABC

$$x:10=(5-y):5$$

두 삼각형 APS, ABC의 높이의 비

$$5x=50-10y$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+5$$

따라서 □PQRS의 넓이는

$$xy=x\left(-\frac{1}{2}x+5\right)$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-10x)$$

$$=-\frac{1}{2}(x-5)^2+\frac{25}{2}$$

이므로 $0<x<10$에서 $x=5$일 때 □PQRS의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{2}$이다. 답 ⑤

20 과자 한 개의 판매 가격을 $(1000+10k)$원이라 하면 과자의 하루 판매량은 $(500-20k)$개이므로 하루 판매 수익은

$$\begin{aligned}&(1000+10k)(500-20k)-\{350(500-20k)+3000\}\\&=200(100+k)(25-k)-1000(-7k+178)\\&=-200\{k^2+75k-2500+5(-7k+178)\}\\&=-200(k^2+40k-1610)\\&=-200(k+20)^2+402000\end{aligned}$$

따라서 $k=-20$일 때 하루 판매 수익이 최대이므로 이때의 과자 한 개의 판매 가격은

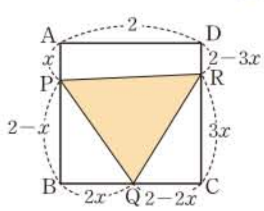
$1000+10\cdot(-20)=800$(원) 답 800원

$k<0$이므로 가격을 인하한 것이다.

21 $\overline{BQ}=2\overline{AP}$, $\overline{CR}=3\overline{AP}$이므로 $\overline{AP}=x$라 하면

$\overline{BQ}=2x$, $\overline{CR}=3x$ ··· ❶

오른쪽 그림에서 △PQR의 넓이는



$$\begin{aligned}&\square ABCD-\triangle PBQ\\&-\triangle CRQ-\square APRD\\&=4-\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(2-x)\\&\quad-\frac{1}{2}\cdot(2-2x)\cdot 3x-\frac{1}{2}\cdot\{x+(2-3x)\}\cdot 2\\&=4x^2-3x+2=4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{23}{16}\end{aligned}$$ ··· ❷

이므로 $0\le 3x\le 2$, 즉 $0\le x\le\frac{2}{3}$에서 $x=\frac{3}{8}$일 때

△PQR의 넓이의 최솟값은 $\frac{23}{16}$이다. ··· ❸

답 $\frac{23}{16}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$의 길이를 같은 문자로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 넓이에 대한 식을 세울 수 있다.	50 %
❸ 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 52쪽

01 이차방정식 $ax^2+4ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$ $\quad\therefore \beta=-\alpha-4$

이때 $-5<\alpha<-4$이므로

$4<-\alpha<5$ $\quad\therefore 0<-\alpha-4<1$

$\therefore 0<\beta<1$ 답 ③

다른 풀이 $y=ax^2+4ax+b=a(x+2)^2-4a+b$이므로 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식은

$x=-2$

따라서 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$은 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이므로 α의 값의 범위가 $-5<\alpha<-4$이면 β의 값의 범위는 $0<\beta<1$이다.

02 점 A의 좌표를 (a, k) $(a>0)$라 하면 점 A는 곡선 $y=2x^2-m$ 위의 점이므로

$k=2a^2-m$ ······ ㉠

또 $C(0, -m)$이고 △ABC의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot(k+m)=16$

$\therefore a(k+m)=16$ ······ ㉡

㉠에서 $k+m=2a^2$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$2a^3=16$, $\quad a^3=8$

이때 a는 실수이므로 $\quad a=2$ 답 ③

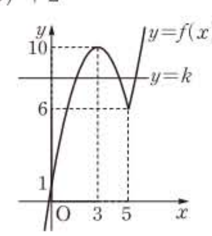
03 $x<5$일 때,

$f(x)=-x^2+6x+1=-(x-3)^2+10$

$x\ge 5$일 때,

$f(x)=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$6<k<10$

$k<6$ 또는 $k>10$일 때 한 점에서 만나고, $k=6$ 또는 $k=10$일 때 서로 다른 두 점에서 만난다.

즉 정수 k는 7, 8, 9이므로 모든 정수 k의 값의 합은

$7+8+9=24$ 답 24

04 이차방정식 $f(x)=mx+n$, 즉 $f(x)-mx-n=0$이 중근 α를 갖고, x^2의 계수가 1이므로

$f(x)-mx-n=(x-\alpha)^2$

$\therefore f(x)=(x-\alpha)^2+mx+n$

같은 방법으로 하면

$g(x)=(x-\beta)^2+mx+n$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같으므로

$(x-\alpha)^2+mx+n=(x-\beta)^2+mx+n$

$(x-\alpha)^2=(x-\beta)^2$

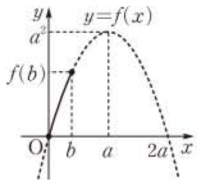
$-2\alpha x+\alpha^2=-2\beta x+\beta^2$

$2(\alpha-\beta)x=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$\therefore x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ $(\because \alpha\ne\beta)$ 답 ⑤

05 $f(x)=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2$이라 하면

(i) $b<a$인 경우



주어진 이차함수는 $0\le x\le b$에서 $x=b$일 때 최댓값 $f(b)$를 가지므로

$$-b^2+2ab=9$$

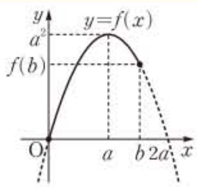
$$\therefore b(2a-b)=9$$

이때 a, b는 자연수이므로 순서쌍 (a, b)는

$(5, 1)$의 1개

> $b=1$일 때 $2a-1=9$에서 $a=5$
> $b=3$일 때 $2a-3=3$에서 $a=3$
> $b=9$일 때 $2a-9=1$에서 $a=5$
> 따라서 $0<b<a$인 경우는 $a=5$, $b=1$뿐이다.

(ii) $a\le b\le 2a$인 경우



주어진 이차함수는 $0\le x\le b$에서 $x=a$일 때 최댓값이 a^2이므로

$$a^2=9$$

$$\therefore a=3\ (\because a>0)$$

따라서 순서쌍 (a, b)는

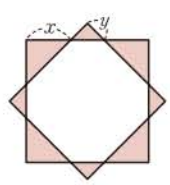
$(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$의 4개

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+4=5$

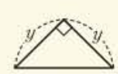
답 ③

06 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 색칠한 직각이등변삼각형의 짧은 변의 길이를 x, 다른 정사각형의 색칠한 직각이등변삼각형의 짧은 변의 길이를 y라 하면 8개의 교점이 생겨야 하므로



$$0<x<\frac{1}{2}$$

또 $1=x+\sqrt{2}y+x$에서

> 
>
> 위의 그림에서 빗변의 길이는
> $\sqrt{y^2+y^2}=\sqrt{2y^2}=\sqrt{2}y$

$$y=\frac{1-2x}{\sqrt{2}}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$4\cdot\frac{1}{2}x^2+4\cdot\frac{1}{2}y^2=2x^2+2\cdot\frac{(1-2x)^2}{2}$$

$$=6x^2-4x+1$$

$$=6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$$

이고, $0<x<\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{1}{3}$일 때 색칠한 부분의 넓이의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이므로

$$m=\frac{1}{3}$$

$$\therefore 30m=10$$

답 10

06 여러 가지 방정식

개념&핵심 기출

본책 54~56쪽

01 $P(x)=x^3-3x^2+x+5$라 하면

$$P(-1)=-1-3-1+5=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-3	1	5
		-1	4	-5
	1	-4	5	0

$$P(x)=(x+1)\times(x^2-4x+5)$$

즉 주어진 방정식은

$$(x+1)(x^2-4x+5)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2\pm i$$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=1$이므로

$$\alpha+\beta+\gamma=2$$

답 2

02 $x^2-3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2-X-20=0,\qquad (X+4)(X-5)=0$$

$$\therefore X=-4 \text{ 또는 } X=5$$

(i) $X=-4$일 때,

$x^2-3x=-4$이므로

$$x^2-3x+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=(-3)^2-4\cdot1\cdot4=-7<0$$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=5$일 때,

$x^2-3x=5$이므로

$$x^2-3x-5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-5)=29>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2-3x-5=0$의 근이고, 두 허근은 방정식 $x^2-3x+4=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=-5,\ b=3$$

$$\therefore b-a=8$$

답 8

03 $x\ne0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

> $x=0$이면 주어진 방정식은 $1=0$으로 모순이므로 $x\ne0$

$$x^2+3x+2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

> $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $\quad t^2+3t=0$

$$t(t+3)=0\qquad \therefore t=-3 \text{ 또는 } t=0$$

(i) $t=-3$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-3$이므로 $\quad x^2+3x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\cdot1\cdot1=5>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $t=0$일 때,

$x+\frac{1}{x}=0$이므로 $\quad x^2+1=0 \quad \therefore x=\pm i$

즉 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2+3x+1=0$의 근이고, 두 허근은 방정식 $x^2+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \gamma\delta=1$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma\delta=-2$ 답 ①

다른 풀이 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1=0$에서

$x^4+3x^3+x^2+x^2+3x+1=0$

$x^2(x^2+3x+1)+(x^2+3x+1)=0$

$(x^2+3x+1)(x^2+1)=0$

이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2+1=0$의 두 근이 $\gamma,\ \delta$이다.

04 삼차방정식 $x^3-x^2+5x-2=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5,\ \alpha\beta\gamma=2$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-1+5-2=3$ 답 ⑤

$\alpha+\beta+\gamma=1$에서
$\alpha+\beta=1-\gamma$,
$\beta+\gamma=1-\alpha$,
$\gamma+\alpha=1-\beta$

05 주어진 삼차방정식의 세 양의 실근의 비가 $1:2:3$이므로 세 근을 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha\ (\alpha>0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\cdot2\alpha+2\alpha\cdot3\alpha+3\alpha\cdot\alpha=44$

$2\alpha^2+6\alpha^2+3\alpha^2=44, \quad 11\alpha^2=44$

$\alpha^2=4 \quad \therefore \alpha=2\ (\because \alpha>0)$

따라서 세 실근은 2, 4, 6이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+4+6=-a \quad \therefore a=-12$

$2\cdot4\cdot6=-b \quad \therefore b=-48$

$\therefore a+b=-60$ 답 -60

06 삼차방정식 $x^3+x^2-1=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=1$

따라서

$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)$
$=-2,$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$=\alpha\beta+\gamma\alpha+\beta^2+\beta\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta+\gamma^2+\gamma\alpha+\gamma\alpha+\beta\gamma$
$+\alpha^2+\alpha\beta$

$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

$=(-1)^2=1,$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-1-\gamma)(-1-\alpha)(-1-\beta)$

$=-1-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=-1+1-1=-1$

$\alpha+\beta+\gamma=-1$에서
$\alpha+\beta=-1-\gamma$,
$\beta+\gamma=-1-\alpha$,
$\gamma+\alpha=-1-\beta$

이므로 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(-2)x^2+x-(-1)=0$

$\therefore x^3+2x^2+x+1=0$ 답 ⑤

1등급 비밀노트

$x^3+x^2-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
$x^3+x^2-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$(-1)^3+(-1)^2-1=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)$
이므로
$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-1-\gamma)(-1-\alpha)(-1-\beta)$
$=-1$

07 삼차방정식의 한 근이 $3+\sqrt{7}$이고, 계수가 모두 유리수이므로 $3-\sqrt{7}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(3+\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})=-p$

$\therefore \alpha+6=-p$ …… ㉠

$\alpha(3+\sqrt{7})+(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})\cdot\alpha=q$

$\therefore 6\alpha+2=q$ …… ㉡

$\alpha(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})=p$

$\therefore 2\alpha=p$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=-2,\ p=-4$

㉡에 $\alpha=-2$를 대입하면 $\quad q=-10$

$\therefore p+q=-14$ 답 ①

참고 주어진 방정식에 $x=3+\sqrt{7}$을 대입한 후 무리수가 서로 같을 조건을 이용하여 $p,\ q$의 값을 구할 수도 있다.

08 삼차방정식의 한 근이

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

이고, 계수가 모두 실수이므로 $-i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+i+(-i)=-a$

$\therefore \alpha=-a$ …… ㉠

Ⅱ 방정식

$ai+i\cdot(-i)+(-i)\cdot a=b$
$\therefore b=1$ …… ㉡
$ai\cdot(-i)=-2$
$\therefore a=-2$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $a=2,\ b=1$
$\therefore a+b=3$ 답 ③

09 사차방정식의 한 근이 $2-i$이고 계수가 모두 유리수, 즉 실수이므로 $2+i$도 근이다.
$2-i,\ 2+i$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-2+i)(x-2-i)=0$
$\therefore x^2-4x+5=0$
또 사차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고, 계수가 모두 유리수이므로 $2-\sqrt{3}$도 근이다.
$2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0$
$\therefore x^2-4x+1=0$
따라서
$x^4+ax^3+bx^2+cx+5$
$=(x^2-4x+5)(x^2-4x+1)$
$=x^4-8x^3+22x^2-24x+5$
이므로 $a=-8,\ b=22,\ c=-24$
$\therefore a+b+c=-10$ 답 ⑤

$x^2-4x=X$로 놓고 다음과 같이 전개한다.
$(X+5)(X+1)$
$=X^2+6X+5$
$=(x^2-4x)^2+6(x^2-4x)+5$
$=x^4-8x^3+16x^2+6x^2-24x+5$
$=x^4-8x^3+22x^2-24x+5$

10 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
방정식 $x^3-1=0$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로
$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$
$\therefore \omega-2\omega^2+3\omega^4-4\omega^5=\omega-2\omega^2+3\omega-4\omega^2$
$=4\omega-6\omega^2$
$=4\omega-6(-\omega-1)$
$=10\omega+6$
따라서 $a=10,\ b=6$이므로
$a^2+b^2=10^2+6^2=136$ 답 136

$\omega^2+\omega+1=0$에서
$\omega^2=-\omega-1$

11 $x^3=-1$, 즉 $x^3+1=0$에서
$(x+1)(x^2-x+1)=0$
방정식 $x^3=-1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$
$\therefore z\overline{z}=\dfrac{\omega}{1-\omega}\cdot\overline{\left(\dfrac{\omega}{1-\omega}\right)}=\dfrac{\omega}{1-\omega}\cdot\dfrac{\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}}$
$=\dfrac{\omega\overline{\omega}}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}=1$ 답 ⑤

12 $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$에서
$(x-1)(x^2+x+1)=0$
방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로
$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$
$\omega^2+\omega+1=0$의 양변을 ω로 나누어 정리하면
$\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1,$
$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)^2-2=-1,$
$\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}=1+1=2,$
$\omega^4+\dfrac{1}{\omega^4}=\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$
⋮
$\therefore \left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)+\left(\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}\right)+\left(\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}\right)+\cdots+\left(\omega^{10}+\dfrac{1}{\omega^{10}}\right)$
$=\{-1+(-1)+2\}\cdot3+(-1)$
$=-1$ 답 ②

13 $\begin{cases}x^2+4xy+y^2=16 & \cdots\cdots ㉠\\ x-y=2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
㉡에서 $y=x-2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면
$x^2+4x(x-2)+(x-2)^2=16$
$x^2-2x-2=0$
$\therefore x=1\pm\sqrt{3}$
$x=1+\sqrt{3}$일 때 $y=-1+\sqrt{3}$이고, $x=1-\sqrt{3}$일 때 $y=-1-\sqrt{3}$이므로
$x+y=\pm2\sqrt{3}$
$\therefore (x+y)^2=12$ 답 12

다른 풀이 $x^2+4xy+y^2=(x-y)^2+6xy$이므로 이 식에 $x-y=2$를 대입하면
$2^2+6xy=16 \quad \therefore xy=2$
$\therefore (x+y)^2=(x-y)^2+4xy$
$=2^2+4\cdot2=12$

14 $\begin{cases}x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-xy+y^2=9 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
㉠에서 $(x+y)(x-y)=0$
$\therefore y=-x$ 또는 $y=x$
(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면
$x^2-x(-x)+(-x)^2=9$
$3x^2=9,\quad x^2=3$
$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)
(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면
$x^2-x^2+x^2=9,\quad x^2=9$
$\therefore x=\pm3,\ y=\pm3$ (복호동순)

$x=\pm\sqrt{3}$을 $y=-x$에 각각 대입하면
$y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

$x=\pm3$을 $y=x$에 각각 대입하면
$y=\pm3$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\mp\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 3 \end{cases}$ (복호동순)

이므로 $2x+y$의 최댓값은 $2\cdot 3+3=9$ 답 9

$x=3$, $y=3$일 때 $2x+y$는 최댓값을 갖는다.

15 $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2y+xy^2=-12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $xy(x+y)=-12$ ⋯⋯ ㉢

㉢에 ㉠을 대입하면 $3xy=-12$ $\therefore xy=-4$

즉 $x+y=3$, $xy=-4$에서 x, y는 이차방정식

$t^2-3t-4=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-4)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

이므로 $|x-y|=5$ 답 ⑤

$x+y=u$, $xy=v$를 만족시키는 x, y는 $t^2-ut+v=0$의 두 근이다.

16 직육면체의 가로, 세로의 길이를 각각 a, b, 높이를 c라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 36이므로

$4(a+b+c)=36$ $\therefore a+b+c=9$

이 직육면체의 대각선의 길이가 $\sqrt{29}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{29}$ $\therefore a^2+b^2+c^2=29$

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$9^2=29+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=26$

이 직육면체의 부피가 24이므로 $abc=24$

즉 a, b, c를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$

$x^3-9x^2+26x-24=0$

2	1	−9	26	−24
		2	−14	24
	1	−7	12	0

$(x-2)(x^2-7x+12)=0$

$(x-2)(x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

따라서 직육면체의 모서리 중 길이가 가장 짧은 모서리의 길이는 2이다. 답 2

17 두 연못 O_1, O_2의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 두 연못의 중심 사이의 거리가 6이므로

$r_1+r_2=6$ ⋯⋯ ㉠

두 연못 O_1, O_2의 넓이의 합이 20π이므로

$\pi r_1^2+\pi r_2^2=20\pi$

$\therefore r_1^2+r_2^2=20$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $r_2=6-r_1$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$r_1^2+(6-r_1)^2=20$

$r_1^2-6r_1+8=0$

$(r_1-2)(r_1-4)=0$

$\therefore r_1=2$ 또는 $r_1=4$

따라서 $r_1=2$, $r_2=4$ 또는 $r_1=4$, $r_2=2$이므로 두 연못 O_1, O_2의 반지름의 길이의 차는

$4-2=2$ 답 2

다른 풀이 $(r_1+r_2)^2=r_1^2+2r_1r_2+r_2^2$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$6^2=20+2r_1r_2$ $\therefore r_1r_2=8$

즉 r_1, r_2는 이차방정식 $x^2-6x+8=0$의 두 근이므로

$(x-2)(x-4)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 연못의 반지름의 길이의 차는

$4-2=2$

18 꽃밭의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m ($x>y$)라 하면 정원의 가로, 세로의 길이는 각각 $(x+3)$ m, $(y+2)$ m이고, 정원의 둘레의 길이가 50 m이므로

$2\{(x+3)+(y+2)\}=50$

$\therefore x+y=20$ ⋯⋯ ㉠

또 꽃밭의 넓이가 96 m²이므로

$xy=96$ ⋯⋯ ㉡

즉 x, y는 이차방정식 $t^2-20t+96=0$의 두 근이므로

$(t-8)(t-12)=0$

$\therefore t=8$ 또는 $t=12$

따라서 $x=12$, $y=8$이므로 꽃밭의 가로의 길이는 12 m이다. 답 12 m

정원의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m로 놓고 풀 수도 있다. 이때 꽃밭의 가로, 세로의 길이는 각각 $(x-3)$ m, $(y-2)$ m이다.

1등급을 위한 고난도 문제

본책 57~59쪽

01 $P(x)=x^3+(a+1)x^2+2ax+a^2$이라 하면

$P(-a)=-a^3+(a+1)a^2-2a^2+a^2=0$

이므로 $P(x)=(x+a)(x^2+x+a)$로 인수분해된다.

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=0$이면 인수정리에 의하여 $P(x)=(x-a)Q(x)$로 인수분해된다.

이때 삼차방정식 $P(x)=0$이 중근을 갖는 경우는 다음 두 가지가 있다.

(i) 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=-a$를 근으로 갖는 경우

$(-a)^2+(-a)+a=0$

$a^2=0$ $\therefore a=0$

(ii) 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot a=0$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서

$a=0$ 또는 $a=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 합은 $\frac{1}{4}$이다. 답 $\frac{1}{4}$

02 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+2aX+2a-1=0$

$(X+2a-1)(X+1)=0$

$\therefore X=-2a+1$ 또는 $X=-1$

즉 $x^2=-2a+1$ 또는 $x^2=-1$이고, 방정식 $x^2=-1$은 서로 다른 두 허근을 가지므로 방정식 $x^2=-2a+1$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 $-2a+1>0$이어야 하므로

$a<\frac{1}{2}$ 답 ①

03 $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x=0$이면 주어진 방정식은 $9=0$으로 모순이므로 $x\neq0$

$9x^2+24x-2+\frac{24}{x}+\frac{9}{x^2}=0$

$9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+24\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$9\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+24\left(x+\frac{1}{x}\right)-20=0$ ····· ❶

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$9t^2+24t-20=0,\quad (3t+10)(3t-2)=0$

$\therefore t=-\frac{10}{3}$ 또는 $t=\frac{2}{3}$ ····· ❷

(i) $t=-\frac{10}{3}$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$이므로 $\quad 3x^2+10x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=5^2-3\cdot3=16>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $t=\frac{2}{3}$일 때,

$x+\frac{1}{x}=\frac{2}{3}$이므로 $\quad 3x^2-2x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-3\cdot3=-8<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 한 실근 α에 대하여

α는 실근이므로 (i)의 경우, 즉 $x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$을 만족시킨다.

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=-\frac{10}{3}$ ····· ❸

답 $-\frac{10}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 사차방정식을 $x+\frac{1}{x}$에 대한 식으로 정리할 수 있다.	30 %
❷ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

1등급 비밀노트

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\ (a\neq0)$과 같이 x에 대한 내림차순 또는 오름차순으로 정리하였을 때 가운데 항을 중심으로 계수가 서로 대칭인 방정식을 상반방정식이라 하며 다음과 같은 방법으로 푼다.

(1) 짝수차 상반방정식의 풀이

(i) 양변을 x^2으로 나눈다.

(ii) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$임을 이용하여 좌변을 정리한 후 $x+\frac{1}{x}=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 방정식으로 나타낸다.

(iii) t의 값을 구한 후 $t=x+\frac{1}{x}$을 대입하여 x의 값을 구한다.

(2) 홀수차 상반방정식의 풀이

(i) $x=-1$일 때 주어진 방정식이 성립하므로 $(x+1)f(x)=0$ 꼴로 변형한다.

(ii) $f(x)=0$은 짝수차 상반방정식이므로 (1)의 방법을 이용하여 푼다.

04 $x^4+3x^2+4=0$에서

$(x^4+4x^2+4)-x^2=0,\quad (x^2+2)^2-x^2=0$

$(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$ ······ ㉠

ㄱ. ㉠에서 $x^2+x+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$

이고, $x^2-x+2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$

이므로 α는 항상 허수이다.

ㄴ. ㉠에서 $x^2+x+2=0$의 한 근을 α라 하면

$\alpha^2+\alpha=-2$

ㄷ. ㉠에서 $x^2-x+2=0$의 한 근을 α라 하면

$\alpha^2-\alpha=-2$

또 $x^2+x+2=0$의 한 근을 α라 하면 $\alpha^2+\alpha+2=0$에서 $\alpha^2=-\alpha-2$이므로

$\alpha^2-\alpha=(-\alpha-2)-\alpha=-2\alpha-2$

이때 ㄱ에서 α는 허수이므로 $-2\alpha-2$도 허수이다.

따라서 $\alpha^2-\alpha=2$를 만족시키는 α는 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

05 삼차방정식 $x^3-12x+8=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-12,\ \alpha\beta\gamma=-8$

$\therefore p+q$

$=(\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2)+(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha)$

$=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$

$\alpha+\beta+\gamma=0$에서 $\alpha+\beta=-\gamma,$ $\beta+\gamma=-\alpha,$ $\gamma+\alpha=-\beta$

$=\alpha^2(-\alpha)+\beta^2(-\beta)+\gamma^2(-\gamma)$

$=-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)$

$=-\{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma\}$

$=-3\alpha\beta\gamma$

$=-3\cdot(-8)=24$ 답 24

06 $x^3+px^2+11x+q=0$의 세 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=-p$

$\therefore 3\alpha=-p$ …… ㉠

$(\alpha-1)\cdot\alpha+\alpha(\alpha+1)+(\alpha-1)(\alpha+1)=11$

$\alpha^2=4$ $\therefore \alpha=\pm2$ …… ㉡

$(\alpha-1)\cdot\alpha\cdot(\alpha+1)=-q$

$\therefore \alpha^3-\alpha=-q$ …… ㉢ ⋯ ❶

㉠, ㉢에 ㉡을 각각 대입하면

$p=\mp6$, $q=\mp6$ (복호동순) ⋯ ❷

$\therefore |p|+|q|=12$ ⋯ ❸

답 12

$\alpha=-2$이면 세 근은 -3, -2, -1
$\alpha=2$이면 세 근은 1, 2, 3

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	60 %
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\|p\|+\|q\|$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1등급 비밀노트

문제에서 연속하는 세 정수의 조건이 주어지면 세 수를
$\alpha-1$, α, $\alpha+1$
로 놓고 풀고, 연속하는 세 홀수 또는 짝수의 조건이 주어지면 세 수를
$\alpha-2$, α, $\alpha+2$
로 놓고 푼다.

07 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$

따라서

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{a}{c},$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{1}{c}$$

이므로 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-\left(-\frac{b}{c}\right)x^2+\frac{a}{c}x-\left(-\frac{1}{c}\right)=0$$

$$\therefore x^3+\frac{b}{c}x^2+\frac{a}{c}x+\frac{1}{c}=0$$

이때 상수항이 1이어야 하므로 양변에 c를 곱하면 구하는 방정식은

$cx^3+bx^2+ax+1=0$

답 $cx^3+bx^2+ax+1=0$

1등급 비밀노트

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(ad\neq0)$의 세 근이 α, β, γ이면 $dx^3+cx^2+bx+a=0$의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$이다.

08 $P(x)-Q(x)=x^3-8x^2+x+4a+2=0$의 한 근이 순허수이므로 한 근을 ki ($k\neq0$인 실수)라 하면 계수가 모두 실수이므로 $-ki$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+ki+(-ki)=8$

$\therefore \alpha=8$

또 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$8\cdot ki+ki\cdot(-ki)+(-ki)\cdot8=1$

$\therefore k^2=1$ …… ㉠

$8\cdot ki\cdot(-ki)=-4a-2$

$\therefore 8k^2=-4a-2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-4a-2=8$ $\therefore a=-\frac{5}{2}$

따라서 구하는 합은 $8+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{11}{2}$

답 $\frac{11}{2}$

$k^2=1$에서 $k=\pm1$이므로 두 허근은 i, $-i$이다.

09 조건 (나), (다)에서 구하는 삼차방정식의 한 근이 $1+2\sqrt{2}$이고, 계수가 모두 유리수이므로 $1-2\sqrt{2}$도 근이다. ⋯ ❶

즉 세 근이 $\frac{1}{2}$, $1+2\sqrt{2}$, $1-2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{1}{2}+(1+2\sqrt{2})+(1-2\sqrt{2})=\frac{5}{2},$$

$$\frac{1}{2}(1+2\sqrt{2})+(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})+(1-2\sqrt{2})\cdot\frac{1}{2}=-6,$$

$$\frac{1}{2}(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})=-\frac{7}{2}$$ ⋯ ❷

따라서 $\frac{1}{2}$, $1+2\sqrt{2}$, $1-2\sqrt{2}$를 근으로 하고 x^3의 계수가 2인 삼차방정식은

$$2\left(x^3-\frac{5}{2}x^2-6x+\frac{7}{2}\right)=0$$

$\therefore 2x^3-5x^2-12x+7=0$ ⋯ ❸

답 $2x^3-5x^2-12x+7=0$

채점 기준	비율
❶ 나머지 한 근을 구할 수 있다.	20 %
❷ 세 근의 합, 두 근끼리의 곱의 합, 세 근의 곱을 구할 수 있다.	50 %
❸ 삼차방정식을 구할 수 있다.	30 %

10 삼차방정식 $x^3+nx^2+n^2x-p=0$의 한 근이 $a+\sqrt{2}i$이고 계수가 모두 실수이므로 $a-\sqrt{2}i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(a+\sqrt{2}i)+(a-\sqrt{2}i)=-n$ …… ㉠

$\alpha(a+\sqrt{2}i)+(a+\sqrt{2}i)(a-\sqrt{2}i)+(a-\sqrt{2}i)\cdot\alpha=n^2$ …… ㉡

$\alpha(a+\sqrt{2}i)(a-\sqrt{2}i)=p$ …… ㉢

ⓒ에서 $\quad a(a^2+2)=p$

이때 p는 소수이고 a, a는 정수이므로

$a=1,\ a^2+2=p \quad \cdots\cdots$ ⓔ

㉠, ㉡에 $a=1$을 각각 대입하여 정리하면

$2a+1=-n,\ a^2+2a+2=n^2$

$n=-2a-1$이므로 이것을 $a^2+2a+2=n^2$에 대입하면

$a^2+2a+2=(-2a-1)^2$

$3a^2+2a-1=0, \quad (a+1)(3a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

그런데 a는 정수이므로 $\quad a=-1$

ⓔ에 $a=-1$을 대입하면 $\quad p=3$ 답 ②

㉠에서 $a=-2a-n$이고 a는 정수, n은 자연수이므로 a는 정수이다.

$a^2\ge0$이므로 $a^2+2\ge2$ 따라서 $a=p$, $a^2+2=1$인 경우는 성립하지 않는다.

11 $\alpha=p+qi$, $\beta=r+si$ (p, q, r, s는 실수)라 하면 조건 (가)에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=(p+qi)+(p-qi)=2p=4$

$\therefore p=2$

$\beta-\overline{\beta}=(r+si)-(r-si)=2si=4i$

$\therefore s=2$

조건 (나)에 의하여 $\beta=2\alpha$이므로

$r+2i=2(2+qi) \quad \therefore r+2i=4+2qi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $\quad r=4,\ q=1$

즉 $\alpha=2+i$, $\beta=4+2i$이고 주어진 사차방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\alpha}=2-i$, $\overline{\beta}=4-2i$도 근이다.

α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$를 네 근으로 하고 x^4의 계수가 1인 사차방정식은

$(x-2-i)(x-2+i)(x-4-2i)(x-4+2i)=0$

이므로

$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

$=(x-2-i)(x-2+i)(x-4-2i)(x-4+2i)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b+c+d$

$=(-1-i)(-1+i)(-3-2i)(-3+2i)$

$=(1-i^2)(9-4i^2)$

$=2\cdot13=26$

$\therefore a+b+c+d=25$ 답 25

12 사차방정식 $x^4+ax^2+b=0$의 한 근이 $p+qi$이고, 계수가 모두 실수이므로 $p-qi$도 근이다.

이때 주어진 방정식의 한 근을 α라 하면

$\alpha^4+a\alpha^2+b=(-\alpha)^4+a(-\alpha)^2+b=0$

이므로 $-\alpha$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 근은

$p+qi,\ p-qi,\ -p+qi,\ -p-qi$

이므로 모든 근의 곱은

$(p+qi)(p-qi)(-p+qi)(-p-qi)$

$=(p^2+q^2)(p^2+q^2)$

$=(p^2+q^2)^2$ 답 ④

$-(p-qi)=-p+qi$, $-(p+qi)=-p-qi$

13 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $\quad 2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$4\omega^2+4\omega+1=-3$

$4\omega^2+4\omega+4=0 \quad \therefore \omega^2+\omega+1=0$

양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \quad \therefore \omega^3-1=0$

ㄱ. $\omega^3=1$, $\omega^2=-\omega-1$이므로 주어진 방정식에 $x=\omega$를 대입하면

$\omega^4+a\omega^3-b\omega^2+a\omega+1=0$

$\omega+a-b(-\omega-1)+a\omega+1=0$

$(a+b+1)+(a+b+1)\omega=0$

$(a+b+1)(1+\omega)=0$

이때 $1+\omega\neq0$이므로 $\quad a+b+1=0$

$\therefore a+b=-1$

ㄴ. $\omega^2=-\omega-1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\overline{\omega}$

ω가 한 근이고 주어진 방정식의 계수가 모두 실수이므로 ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$, 즉 ω^2도 방정식의 한 근이다.

ㄷ. 다항식 $x^4+ax^3-bx^2+ax+1$은 x^2+x+1을 인수로 갖고 상수항이 1이므로

$x^4+ax^3-bx^2+ax+1$

$=(x^2+x+1)(x^2+cx+1)$ (c는 실수)

이라 하자.

이때 주어진 방정식이 중근인 실근을 갖기 위해서는 방정식 $x^2+cx+1=0$이 중근인 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=c^2-4=0$

$\therefore c=-2$ 또는 $c=2$

따라서 $c=-2$, $c=2$일 때 실수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 각각 1개씩이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 2이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

$c=-2$일 때 주어진 방정식은 $x^4-x^3-x+1=0$ 이므로 $a=-1,\ b=0$

또 $c=2$일 때 주어진 방정식은 $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$ 이므로 $a=3,\ b=-4$

14 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega^3-1=0 \quad \therefore \omega^3=1$

ㄱ. $x^2-x+1=0$에 $x=\omega^3$, 즉 $x=1$을 대입하면

$1^2-1+1\neq0$

ㄴ. $x^2-x+1=0$에 $x=-\omega^2$을 대입하면

$\omega^4+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$

ㄷ. $\omega^3=1$에서 $\quad \frac{1}{\omega}=\omega^2$

$x^2-x+1=0$에 $x=\omega^2$을 대입하면

$\omega^4-\omega^2+1=\omega-(-\omega-1)+1$

$=2\omega+2\neq0$

이상에서 근이 될 수 있는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

$\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2=-\omega-1$

15 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이 ω이므로

$$\omega^2-\omega+1=0$$
$$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$$
$$\omega^3+1=0 \qquad \therefore \omega^3=-1 \qquad \cdots ❶$$

한편 $\omega^n=\omega^{2n+1}$에서 $\omega^{2n+1}=\omega^n\cdot\omega^{n+1}$이므로

$$\omega^{n+1}=1 \qquad \cdots ❷$$

$\omega^3=-1$에서 $\omega^6=1$이므로 $n+1$은 6의 배수, 즉

$$n+1=6,\ 12,\ 18,\ \cdots$$

따라서 두 자리 자연수 n의 최솟값은 11이다. ⋯ ❸

$n+1=12$일 때이다.

답 11

채점 기준	비율
❶ ω^3의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ ω^{n+1}의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 자리 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

16 $x^3-1=0$에서 $\quad (x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$$
$$\therefore \omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1$$
$$=(\omega^4)^n+(-\omega^2)^{4n}+1$$
$$=\omega^n+(\omega^8)^n+1$$
$$=\omega^n+\omega^{2n}+1$$
$$=\omega^{2n}+\omega^n+1$$

$(-\omega^2)^{4n}=\{(-\omega^2)^4\}^n=(\omega^8)^n$

$\omega^8=(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega^2$

(i) $n=3k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k}+\omega^{3k}+1=3$$

(ii) $n=3k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$일 때,

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+2}+\omega^{3k+1}+1$$
$$=\omega^2+\omega+1=0$$

(iii) $n=3k+2$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$일 때,

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+4}+\omega^{3k+2}+1$$
$$=\omega^4+\omega^2+1$$
$$=\omega+\omega^2+1=0$$

이상에서 $\omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1=0$을 만족시키는 자연수 n은 $n=3k+1$ 또는 $n=3k+2$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 꼴이므로 30 이하의 자연수 n의 개수는

30−(30 이하의 3의 배수의 개수)
$=30-10=20$

답 20

17 주어진 두 연립방정식을 동시에 만족시키는 해가 존재하므로 그 해는 연립방정식

$$\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다. ⋯ ❶

㉡에서 $\quad (x+y)(x-y)=15$

$$5(x-y)=15$$
$$\therefore x-y=3 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$$x=4,\ y=1 \qquad \cdots ❷$$

$x^2+ay=1$, $bx-y=4$에 $x=4$, $y=1$을 대입하여 풀면

$$a=-15,\ b=\frac{5}{4} \qquad \cdots ❸$$
$$\therefore a+b=-\frac{55}{4} \qquad \cdots ❹$$

답 $-\frac{55}{4}$

채점 기준	비율
❶ 연립방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

18 $$\begin{cases} -x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=x+a$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$$2x^2+(x+a)^2=6$$
$$3x^2+2ax+a^2-6=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-6)=0$$
$$a^2=9$$
$$\therefore a=3\ (\because a>0)$$

답 ④

19 (i) $x\ge y$일 때,

$$<2x,\ 2y>=2x,\ <x,\ y>=x$$

이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x+y^2=2x & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y+5=x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $\quad y=5$

㉠에 $y=5$를 대입하면

$$x+25=2x \qquad \therefore x=25$$

(ii) $x<y$일 때,

$$<2x,\ 2y>=-2y,\ <x,\ y>=-y$$

이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x+y^2=-2y & \cdots\cdots ㉢ \\ x-y+5=-y & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉣에서 $\quad x=-5$

㉢에 $x=-5$를 대입하여 정리하면

$$y^2+2y-5=0$$
$$\therefore y=-1\pm\sqrt{6}$$

(i), (ii)에서 정수인 해는 $x=25$, $y=5$이므로

$$\alpha=25,\ \beta=5$$
$$\therefore \alpha+\beta=30$$

답 30

Ⅱ 방정식

20 $|x^2-xy-2y^2|+|x-y-1|=0$에서 x, y는 정수, 즉 실수이므로

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x-y-1=0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $(x-2y)(x+y)=0$이므로

$x=2y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=2y$일 때,

이것을 ㉡에 대입하면

$y-1=0 \quad \therefore y=1$

따라서 $x=2$, $y=1$이므로 $\quad xy=2$

(ii) $x=-y$일 때,

이것을 ㉡에 대입하면

$-2y-1=0 \quad \therefore y=-\frac{1}{2}$

따라서 $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$이므로 x, y가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad xy=2$

답 ③

21 직육면체 모양의 상자의 가로의 길이가 $(14-2a)$ cm, 세로의 길이가 $(10-2a)$ cm이므로

$a(14-2a)(10-2a)=96$ $(0<a<5)$ ··· ❶

$a>0$이고 $14-2a>0$, $10-2a>0$이므로 $0<a<5$

$a(a-7)(a-5)=24$

$a^3-12a^2+35a-24=0$

$(a-1)(a-3)(a-8)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$ $(\because 0<a<5)$ ··· ❷

따라서 $a=3$일 때 상자의 겉넓이는 최소가 되므로 겉넓이의 최솟값은

$140-4\cdot3^2=104$ (cm^2) ··· ❸

(겉넓이) $=14\cdot10-4a^2$ (cm^2)

답 104 cm^2

채점 기준	비율
❶ 부피를 이용하여 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 겉넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

22 반구의 반지름의 길이를 r라 하면 원뿔의 높이는 $r+1$이고, 아이스크림콘의 부피가 30π이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3+\frac{1}{3}\pi r^2(r+1)=30\pi$

$3r^3+r^2-90=0$

$(r-3)(3r^2+10r+30)=0$

이때 $3r^2+10r+30=0$은 실근을 갖지 않으므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=5^2-3\cdot30$

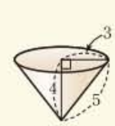
$=-65<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$r=3$

따라서 아이스크림콘의 겉넓이는

$\frac{1}{2}\cdot4\pi\cdot3^2+\pi\cdot3\cdot5=18\pi+15\pi$



원뿔의 밑면의 반지름의 길이가 3, 높이가 4이므로 모선의 길이는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$

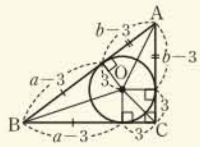
$=33\pi$

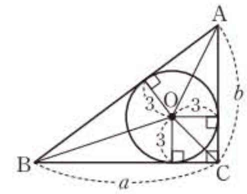
답 33π

23 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$라 하면

$\overline{AB}=(a-3)+(b-3)$

$=a+b-6$





직각삼각형 ABC의 둘레의 길이가 36이므로

$a+b+(a+b-6)=36$

$\therefore a+b=21 \quad \cdots\cdots$ ㉠

내접하는 원의 중심을 O라 하면 직각삼각형 ABC의 넓이는 세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot(a+b-6)\cdot3+\frac{1}{2}\cdot a\cdot3+\frac{1}{2}\cdot b\cdot3$

$\therefore ab=6(a+b-3)$

위의 식에 ㉠을 대입하면 $\quad ab=108$

즉 a, b는 이차방정식 $x^2-21x+108=0$의 두 근이므로

$(x-9)(x-12)=0 \quad \therefore x=9$ 또는 $x=12$

따라서 직각삼각형 ABC의 세 변 중 길이가 가장 짧은 변의 길이는 9이다.

직각삼각형 ABC의 세 변의 길이는 9, 12, 15이다.

답 9

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 60쪽

01 사차방정식 $2x^4+6x^3-x^2-6x-1=0$의 네 근이 α, β, γ, δ이므로

$2x^4+6x^3-x^2-6x-1$

$=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

양변에 $x=2$를 대입하면

$2(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta)$

$=2\cdot2^4+6\cdot2^3-2^2-6\cdot2-1=63$

답 63

02 방정식 $x^3-ax^2+bx-c=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=c$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$, $f(\gamma)=0$이므로

ㄱ. 방정식 $f(2x)=0$에서

$2x=\alpha$ 또는 $2x=\beta$ 또는 $2x=\gamma$

이므로 $\quad x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta}{2}$ 또는 $x=\frac{\gamma}{2}$

ㄴ. 방정식 $f\left(\frac{x}{2}\right)=0$에서

$\frac{x}{2}=\alpha$ 또는 $\frac{x}{2}=\beta$ 또는 $\frac{x}{2}=\gamma$

이므로 $\quad x=2\alpha$ 또는 $x=2\beta$ 또는 $x=2\gamma$

방정식 $f\left(\frac{x}{2}\right)=0$의 세 근의 합이 2이므로

$2(\alpha+\beta+\gamma)=2, \quad 2a=2 \quad \therefore a=1$

ㄷ. $a=1$이므로 $\quad f(1)=1-a+b-c=0$

$\therefore a-b+c=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

방정식 $f(2x-1)=0$에서

$$2x-1=\alpha \text{ 또는 } 2x-1=\beta \text{ 또는 } 2x-1=\gamma$$

이므로 $x=\dfrac{\alpha+1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\gamma+1}{2}$

따라서 방정식 $f(2x-1)=0$의 세 근의 곱은

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}{8}$$
$$=\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1}{8}$$
$$=\frac{c+b+a+1}{8}=\frac{b+1}{4}\ (\because ㉠)$$

$a-b+c=1$에서
$a+c=b+1$
$\therefore \dfrac{c+b+a+1}{8}$
$=\dfrac{2(b+1)}{8}$
$=\dfrac{b+1}{4}$

이므로 $\dfrac{b+1}{4}=0 \qquad \therefore b=-1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

03 $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=-9$에서

$$f(\alpha)+9=f(\beta)+9=f(\gamma)+9=0$$

이므로 α, β, γ는 삼차방정식 $f(x)+9=0$, 즉 $x^3-6x^2+3x+10=0$의 세 근이다.

이때 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$$
$$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=6^2-2\cdot3=30$$

답 30

04 $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$에서

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$$

따라서

$$f(1)=f(4)=f(7)=f(10)=f(13)$$
$$=\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega}{-\omega}=-1,$$

$f(3k+1)$ 꼴 $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$$f(2)=f(5)=f(8)=f(11)$$
$$=\frac{\omega^2}{1+\omega^4}=\frac{\omega^2}{1+\omega}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1,$$

$f(3k+2)$ 꼴 $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$$f(3)=f(6)=f(9)=f(12)$$
$$=\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$f(3k)$ 꼴 $(k=1,\ 2,\ \cdots)$

이므로

$$f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+f(5)-f(6)=0$$
$$\therefore (\text{주어진 식})=f(13)=-1$$

답 ①

참고 ω^n과 관련된 문제는 n을 3으로 나누었을 때의 나머지가 같은 자연수끼리 분류하여 생각한다.

05 $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$에서

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$$

ㄱ. $a_3=1+\omega+\omega^2=0$이므로 $a_n=0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 3이다.

$a_1=1\neq0$,
$a_2=1+\omega\neq0$

ㄴ. $a_6=(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3+\omega^4+\omega^5)=0$이므로 $a_n=0$을 만족시키는 짝수 n이 존재한다.

ㄷ. $a_{11}=a_9+\omega^9+\omega^{10}=1+\omega\ (\because a_9=0)$

$n=3k$ (k는 자연수) 꼴일 때,
$a_n=0$

이때 $a_{11}{}^2=(1+\omega)^2=(-\omega^2)^2=\omega^4=\omega$이므로 $a_{11}{}^2$은 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

방정식 $x^2+x+1=0$의 근은

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 $a_{11}{}^2$의 실수부분은 $-\dfrac{1}{2}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

06 주어진 사차방정식의 네 근이 $\pm\sqrt{7}$, $\pm\sqrt{3}$이고 x^4의 계수가 1이므로 사차방정식은

$$(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$$
$$(x^2-7)(x^2-3)=0$$
$$\therefore x^4-10x^2+21=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$(x+a)(x+b)(x-a)(x-b)+c=0$에서

$$(x^2-a^2)(x^2-b^2)+c=0$$
$$\therefore x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2+c=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{cases} a^2+b^2=10 & \cdots\cdots ㉢ \\ a^2b^2+c=21 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

이때 a, b는 자연수이므로 ㉢에서

$$a=1,\ b=3 \text{ 또는 } a=3,\ b=1$$

이것을 ㉣에 대입하면 $c=12$

$$\therefore a+b+c=16$$

답 16

07 저수지에 물이 가득 찼을 때의 물의 양을 1, A펌프만을 이용하여 저수지의 물을 모두 뺄 때 걸리는 시간을 a시간, B펌프만을 이용하여 저수지의 물을 모두 뺄 때 걸리는 시간을 b시간이라 하자.

A펌프를 이용하여 저수지의 물을 모두 빼면 B펌프를 이용하여 빼는 것보다 10시간이 덜 걸리므로

$$a=b-10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 A펌프, B펌프를 동시에 이용하여 저수지의 물을 12시간 동안 뺀 후 B펌프만을 이용하여 12시간 동안 빼면 저수지의 물을 모두 뺄 수 있으므로

$$12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+12\cdot\frac{1}{b}=1$$
$$\therefore 12b+24a=ab \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\dfrac{1}{a}$은 A펌프를 이용하여 한 시간 동안 빼는 물의 양이고, $\dfrac{1}{b}$은 B펌프를 이용하여 한 시간 동안 빼는 물의 양이다.

㉡에 ㉠을 대입하면

$$12b+24(b-10)=(b-10)b$$
$$b^2-46b+240=0$$
$$(b-6)(b-40)=0$$
$$\therefore b=40\ (\because b>10)$$

$a>0$, $b>0$이고 $a=b-10$이므로
$b-10>0$
$\therefore b>10$

답 ③

Ⅱ 방정식

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 61~64쪽

01 전략 주어진 복소수를 $a+bi$ 꼴로 나타낸 후, 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 $z=(2+i)x+(1-2i)y-2i$라 하면

$z=(2x+y)+(x-2y-2)i$

주어진 복소수를 직접 제곱하면 계산이 복잡하므로 주어진 복소수를 z로 놓는다.

$z^2=-9$에서 $\quad z=3i$ 또는 $z=-3i$

(i) $z=3i$일 때,

$(2x+y)+(x-2y-2)i=3i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=0,\ x-2y-2=3$

$\therefore x=1,\ y=-2$

(ii) $z=-3i$일 때,

$(2x+y)+(x-2y-2)i=-3i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=0,\ x-2y-2=-3$

$\therefore x=-\frac{1}{5},\ y=\frac{2}{5}$

그런데 이것은 $x,\ y$가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $x=1,\ y=-2$이므로

$x-y=3$ 답 ③

02 전략 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 각각 곱하여 복소수 a를 간단히 나타낸다.

풀이 $a=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$이므로

$2a-1=\sqrt{3}i$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4a^2-4a+1=-3 \quad \therefore a^2-a+1=0$

$\therefore \frac{a^3-a^2+a-3}{a^2-a+3}=\frac{a(a^2-a+1)-3}{a^2-a+3}$

$=-\frac{3}{2}$ 답 ①

$a^2-a+1=0$에서 $a^2-a=-1$

03 전략 복소수의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\alpha=1,\ \beta=i$이면

$\alpha^2+\beta^2=1+i^2=1+(-1)=0$

이지만 $\alpha\neq0,\ \beta\neq0$이다.

ㄴ. $\alpha\neq0$이면 $\beta=\frac{0}{\alpha}=0,\ \beta\neq0$이면 $\alpha=\frac{0}{\beta}=0$이므로

$\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$이다.

ㄷ. $\alpha=a+bi$ ($a,\ b$는 실수)라 하면

$\beta=\overline{\alpha}=a-bi$

$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=0$에서

$a^2+b^2=0$

이때 $a,\ b$는 실수이므로 $\quad a=b=0$

$\therefore \alpha=0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

04 전략 복소수가 실수이면 복소수의 허수부분이 0임을 이용한다.

풀이 $(2+i)z=(2+i)(a+bi)$

$=(2a-b)+(a+2b)i$

이므로

$\overline{(2+i)z}=(2a-b)-(a+2b)i$

$\overline{(2+i)z}$가 실수이므로

$a+2b=0 \quad \therefore b=-\frac{1}{2}a$

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 나타내는 도형은 ②와 같이 원점을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선이다. 답 ②

05 전략 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 $\sqrt{a}\sqrt{-b}=-\sqrt{-ab}$에서

$a<0,\ -b<0 \quad \therefore a<0,\ b>0$

$\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{d}}=-\sqrt{-\frac{c}{d}}$에서

$-c>0,\ d<0 \quad \therefore c<0,\ d<0$

따라서 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 음수인 것은 $a,\ c,\ d$의 3개이다. 답 ④

06 전략 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때, $D\geq0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-4x+a^2=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a^2\geq0 \quad \therefore a^2\leq4$

a는 정수이므로

$a^2=0$ 또는 $a^2=1$ 또는 $a^2=4$

(i) $a^2=0$, 즉 $a=0$일 때,

$x^2-4x=0, \quad x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

(ii) $a^2=1$, 즉 $a=\pm1$일 때,

$x^2-4x+1=0 \quad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

그런데 $x=2\pm\sqrt{3}$은 유리수가 아니다.

(iii) $a^2=4$, 즉 $a=\pm2$일 때,

$x^2-4x+4=0, \quad (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

이상에서 정수 a는 $-2,\ 0,\ 2$의 3개이다. 답 ③

07 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\frac{8}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=7$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8,\ \alpha\beta=a$

α는 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-8\alpha+a=0 \quad \therefore \alpha^2=8\alpha-a$

따라서

$$\frac{8}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{8\beta+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{8\beta+8\alpha-a}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{8(\alpha+\beta)-a}{\alpha\beta}=\frac{64-a}{a}$$

이므로 $\frac{64-a}{a}=7$

$64-a=7a \qquad \therefore a=8$

답 ②

08 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha^3+\beta^3$, $(\alpha-\beta)^2$을 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$

즉

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=-a^3+3ab=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=a^2-4b=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$이므로 $(\alpha-\beta)^2=|\alpha-\beta|^2=5$

㉡에서 $b=\frac{a^2-5}{4}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$-a^3+3a\cdot\frac{a^2-5}{4}=4, \qquad a^3+15a+16=0$$

$\therefore (a+1)(a^2-a+16)=0$

$a^2-a+16=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(-1)^2-4\cdot16=-63<0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때 a는 실수이므로 $\quad a=-1$

㉠에 $a=-1$을 대입하면

$1-3b=4 \qquad \therefore b=-1$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+(-1)^2=2$

답 ②

09 전략 계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 α이면 $\overline{\alpha}$도 근임을 이용한다.

풀이 계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 α이면 $\overline{\alpha}$도 근이므로 $\quad \overline{\alpha}=\beta,\ \overline{\beta}=\alpha$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=6$

$$\therefore \overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}=\beta\beta+\alpha\alpha=\alpha^2+\beta^2$$
$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=4^2-2\cdot6=4$$

답 ②

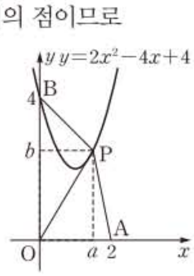
10 전략 두 삼각형 BOP, POA의 넓이를 각각 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차함수 $y=2x^2-4x+4$의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 4)$이므로

B$(0,\ 4)$

점 P$(a,\ b)$는 이차함수의 그래프 위의 점이므로

$b=2a^2-4a+4$



삼각형 BOP의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot|a|=2|a|$

삼각형 POA의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot|b|=b\ (\because b>0)$

이때 두 삼각형 BOP, POA의 넓이가 같으므로

$2|a|=b$, 즉 $2|a|=2a^2-4a+4$

$\therefore |a|=a^2-2a+2$

(i) $a\geq0$일 때,

$a=a^2-2a+2, \qquad a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=2$

$\therefore$ P$(1,\ 2)$ 또는 P$(2,\ 4)$

(ii) $a<0$일 때,

$-a=a^2-2a+2, \qquad a^2-a+2=0$

$a^2-a+2=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때 이차방정식을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 $a=2$, $b=4$일 때 6이다.

답 ④

11 전략 주어진 이차함수의 식을 $f(x)=(x-k)^2+l$ 꼴로 변형하여 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+4ax+2a^2+8a$
$\qquad =(x+2a)^2-2a^2+8a$

이므로 $f(x)$는 $x=-2a$일 때 최솟값 $-2a^2+8a$를 갖는다. 즉

$g(a)=-2a^2+8a=-2(a-2)^2+8$

이므로 $g(a)$는 $a=2$일 때 최댓값 8을 갖는다.

따라서 $p=2$, $q=8$이므로 $\qquad p+q=10$

답 ③

12 전략 주어진 식에 x 대신 $1-x$를 대입한 후 $f(x)$를 구한다.

풀이 $2f(x)+f(1-x)=3x^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠에 x 대신 $1-x$를 대입하면

$2f(1-x)+f(x)=3(1-x)^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$\times2-$㉡을 하면

$3f(x)=3x^2+6x-3$

$\therefore f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

따라서 $-4\leq x\leq1$에서 $f(x)$는 $x=-4$일 때 최댓값 7을 갖고, $x=-1$일 때 최솟값 -2를 가지므로 구하는 합은 $\qquad 7+(-2)=5$

답 ⑤

13 전략 방정식 $h(x)=0$의 한 근이 α이면 $h(\alpha)=0$이고 다항식 $h(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가짐을 이용한다.

풀이 두 방정식 $f(x)+g(x)=0$, $f(x)g(x)=0$이 모두 1을 근으로 가지므로

$f(1)+g(1)=0,\ f(1)g(1)=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$g(1)=-f(1)$이므로 $f(1)g(1)=0$에서 $-\{f(1)\}^2=0$ $\therefore f(1)=0$ $\therefore g(1)=-f(1)=0$

$f(1)=0,\ g(1)=0$

따라서 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$는 각각 $x-1$을 인수로 가지므로

$f(x)=(x-1)(x-p)$,

$g(x)=(x-1)(x-q)\ (p\neq q)$

$p=q$이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

로 놓으면

$f(x)+g(x)=(x-1)(2x-p-q)$

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-p)(x-q)$

이때 방정식 $f(x)+g(x)=0$의 한 근이 3이므로

$2(6-p-q)=0$

$\therefore p+q=6$ …… ㉠

또 방정식 $f(x)g(x)=0$의 한 근이 -1이므로

(i) $p=-1$일 때, ㉠에서 $q=7$

(ii) $q=-1$일 때, ㉠에서 $p=7$

(i), (ii)에서 $k=7$

답 ④

14 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 α, β, γ는 삼차방정식 $x^3-1=0$의 세 근이므로

$\alpha^3=\beta^3=\gamma^3=1$

이고 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=1$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^{1001}}+\frac{1}{\beta^{1001}}+\frac{1}{\gamma^{1001}}$$

$$=\frac{1}{(\alpha^3)^{333}\alpha^2}+\frac{1}{(\beta^3)^{333}\beta^2}+\frac{1}{(\gamma^3)^{333}\gamma^2}$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$$

$$=\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$

$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$

$=0$

답 ③

$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2$
$+2(ab+bc+ca)$

15 전략 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이면 방정식 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=0$의 한 근은 $2\alpha-1$임을 이용한다.

풀이 $x^3-1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

이므로 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이고 다른 한 근은 ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$ …… ㉠

한편 $(x+1)^3=8$에서 양변을 8로 나누면 $\left(\frac{x+1}{2}\right)^3=1$

이고, $x^3=1$의 세 근이 1, ω, $\overline{\omega}$이므로

$\frac{x+1}{2}=1$ 또는 $\frac{x+1}{2}=\omega$ 또는 $\frac{x+1}{2}=\overline{\omega}$

따라서 방정식 $\left(\frac{x+1}{2}\right)^3=1$의 세 근은

$x=1$ 또는 $x=2\omega-1$ 또는

$x=2\overline{\omega}-1$

$=2(-1-\omega)-1$ ($\because$ ㉠)

$=-2\omega-3$

$\therefore a+b+c+d=2+(-1)+(-2)+(-3)$

$=-4$

답 ②

방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이면 방정식 $f(ax+b)=0$의 한 근은 $ax+b=\alpha$에서 $x=\frac{\alpha-b}{a}$이다. (단, $a\neq0$)

16 전략 먼저 $xy+2x-y-2=0$을 인수분해하여 x, y의 값을 구한다.

풀이 $\begin{cases} x^2+y^2+3xy-2x-y+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+2x-y-2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $x(y+2)-(y+2)=0$

$(x-1)(y+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $y=-2$

(i) $x=1$일 때,

㉠에 $x=1$을 대입하면

$1+y^2+3y-2-y+2=0$

$y^2+2y+1=0$, $(y+1)^2=0$

$\therefore y=-1$

(ii) $y=-2$일 때,

㉠에 $y=-2$를 대입하면

$x^2+4-6x-2x+2+2=0$

$x^2-8x+8=0$ $\therefore x=4\pm2\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4\pm2\sqrt{2} \\ y=-2 \end{cases}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 $x=4+2\sqrt{2}$, $y=-2$일 때 $2+2\sqrt{2}$이다.

답 ④

17 전략 $|AB|=|A||B|$임을 이용하여 주어진 연립방정식을 푼다.

풀이 $|x^2-y^2|=8$에서 $|(x+y)(x-y)|=8$

$\therefore |x+y||x-y|=8$

이때 $|x+y|=2$이므로 $|x-y|=4$

$|x+y|=2$에서

$x+y=-2$ …… ㉠

또는 $x+y=2$ …… ㉡

$|x-y|=4$에서

$x-y=-4$ …… ㉢

또는 $x-y=4$ …… ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=1$

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-3$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=3$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-1$

따라서 $2x+y$의 최댓값은 $x=3$, $y=-1$일 때

$M=2\cdot3+(-1)=5$

이고, 최솟값은 $x=-3$, $y=1$일 때

$m=2\cdot(-3)+1=-5$

$\therefore M-m=10$

답 ⑤

18 전략 조건 (나)를 이용하여 복소수 z_n(n은 자연수)의 규칙을 찾는다.

풀이 조건 (나)에 의하여

$z_2=\frac{1}{1-z_1}$

$1-z_2=1-\dfrac{1}{1-z_1}=\dfrac{z_1}{z_1-1}$이므로

$$z_3=\frac{1}{1-z_2}=\frac{z_1-1}{z_1}=1-\frac{1}{z_1}$$

$1-z_3=1-\left(1-\dfrac{1}{z_1}\right)=\dfrac{1}{z_1}$이므로

$$z_4=\frac{1}{1-z_3}=z_1$$

$\vdots$

즉 $z_1=z_4=z_7=\cdots=z_{199}=3+4i$이므로

$$z_{200}=\frac{1}{1-z_{199}}=\frac{1}{1-(3+4i)}=\frac{1}{-2-4i}$$

$$=\frac{1}{-2(1+2i)}=\frac{1-2i}{-2(1+2i)(1-2i)}$$

$$=\frac{1-2i}{-2\cdot5}=-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i$$

따라서 $p=-\dfrac{1}{10}$, $q=\dfrac{1}{5}$이므로

$$100(p+q)=100\cdot\left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)=10$$

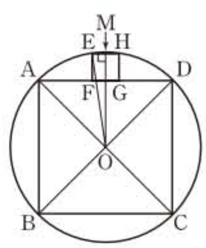
답 10

1등급 비밀노트

이와 같은 문제는 일반적으로 복소수 z_n에 대하여 z_1, z_2, z_3, $\cdots$의 값이 차례대로 반복되어 $z_k=z_1$이 되는 경우와 z_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있는 경우가 있다. 따라서 먼저 복소수 z_1, z_2, z_3, $\cdots$의 값을 차례대로 구하여 어떠한 규칙이 있는지 조사해 본다.

19 전략 원의 중심을 O, 선분 EH의 중점을 M이라 하면 삼각형 EOM이 직각삼각형임을 이용한다.

풀이 원의 중심을 O라 하고 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x라 하면 원의 반지름의 길이가 1이므로 직각삼각형 ABC에서



$$2^2=x^2+x^2$$
$$x^2=2$$
$$\therefore x=\sqrt{2}\ (\because x>0)$$

정사각형 EFGH의 한 변의 길이를 y라 하고 선분 EH의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 EOM에서

$$1^2=\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$\overline{OE}=1$, $\overline{EM}=\dfrac{1}{2}\overline{EH}=\dfrac{y}{2}$, $\overline{OM}=\overline{EF}+\dfrac{1}{2}\overline{AB}=y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$1=\frac{y^2}{4}+y^2+\sqrt{2}y+\frac{1}{2}$$

$$5y^2+4\sqrt{2}y-2=0$$

$$\therefore y=\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{(2\sqrt{2})^2-5\cdot(-2)}}{5}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{5}\ (\because y>0)$$

따라서 정사각형 EFGH의 넓이는

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2=\frac{2}{25}$$

답 $\dfrac{2}{25}$

20 전략 원 A의 지름의 길이는 두 원 B, C의 지름의 길이의 합과 같고, 원 B의 지름의 길이는 두 원 C, D의 지름의 길이의 합과 같음을 이용한다.

풀이 원 A, B, C, D의 반지름의 길이를 각각 a, b, c, d라 하면 주어진 조건에서

$a=b+c$, $b=c+d$,

$2(a+b)=16$, $\pi(a^2-d^2)=24\pi$ ⋯ ❶

b, c, d를 각각 a에 대한 식으로 나타내면

$b=8-a$, $c=2a-8$, $d=-3a+16$ ⋯ ❷

$2(a+b)=16$에서
$a+b=8$
$\therefore b=8-a$
$a=b+c$에서
$a=8-a+c$
$\therefore c=2a-8$
$b=c+d$에서
$8-a=2a-8+d$
$\therefore d=-3a+16$

이것을 $a^2-d^2=24$에 대입하면

$a^2-(-3a+16)^2=24$

$a^2-12a+35=0$, $(a-5)(a-7)=0$

$\therefore a=5$ 또는 $a=7$

그런데 $a=7$이면 $d=-3\cdot7+16=-5<0$이므로

a, b, c, d는 반지름의 길이이므로 모두 양수이다.

$a=5$ ⋯ ❸

따라서 원 A의 지름의 길이는 $2a=10$이다. ⋯ ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ b, c, d를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ 원 A의 지름의 길이를 구할 수 있다.	10 %

21 전략 이차방정식의 판별식 D에 대하여 $D=0$일 때, 이 이차방정식은 완전제곱식 꼴임을 이용한다.

풀이 주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(a+c)x^2-2bx+(a-c)$ ⋯ ❶

이 식이 완전제곱식이므로 이차방정식 $(a+c)x^2-2bx+(a-c)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-b)^2-(a+c)(a-c)=0$$

$b^2-a^2+c^2=0$ $\quad\therefore a^2=b^2+c^2$ ⋯ ❷

따라서 구하는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다. ⋯ ❸

답 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다.	20 %
❷ a^2, b^2, c^2 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❸ 어떤 삼각형인지 구할 수 있다.	30 %

참고 이차식 $f(x)$가 완전제곱식이다.
➡ 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 갖는다.
➡ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식이 0이다.

22 전략 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

풀이 $\alpha^3+\beta^3=(n+\sqrt{n^2+1})+(n-\sqrt{n^2+1})$

$=2n$

또 $\alpha^3\beta^3=(n+\sqrt{n^2+1})(n-\sqrt{n^2+1})=-1$이므로

$\alpha\beta=-1$ ($\because \alpha\beta$는 실수)

이때 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$이므로

$$2n=\left(\frac{n}{2}\right)^3-3\cdot(-1)\cdot\frac{n}{2}$$

$$2n=\frac{n^3}{8}+\frac{3}{2}n, \qquad n^3-4n=0$$

$$n(n+2)(n-2)=0$$

$\therefore\ n=2$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$이므로 α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-x-1=0$$

답 $x^2-x-1=0$

> 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
> $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

23

전략 각 이차함수를 $y=k(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=x^2-6x+4a+6=(x-3)^2+4a-3$이므로 $x=3$에서 최솟값은 $4a-3$이다.

$y=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2$이므로 $x=a$에서 최댓값은 a^2이다.

두 이차함수의 최솟값과 최댓값이 일치하므로

$$4a-3=a^2, \qquad a^2-4a+3=0$$

$$(a-1)(a-3)=0$$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=3$

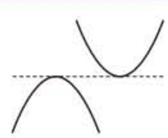
따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$$1+3=4$$

답 4

1등급 비밀노트

두 이차함수의 최댓값과 최솟값이 일치하는 경우를 두 함수의 꼭짓점이 일치하는 경우만 생각하여 $a=3$이라고 답을 하지 않도록 한다. 오른쪽 그림과 같이 두 함수의 꼭짓점이 일치하지 않아도 최댓값과 최솟값이 일치할 수 있다.



24

전략 $x_1=c-x_2$로 나타낸 후 함수 $f(x_1)+g(x_2)$를 x_2에 대한 이차함수로 나타낸다.

풀이 $x_1=c-x_2$이므로

$$f(x_1)+g(x_2)$$
$$=f(c-x_2)+g(x_2)$$
$$=(c-x_2)(15-c+x_2)+\frac{x_2(30-x_2)}{2}$$
$$=-\frac{3}{2}{x_2}^2+2cx_2+15c-c^2$$
$$=-\frac{3}{2}\left(x_2-\frac{2}{3}c\right)^2+15c-\frac{c^2}{3}$$

즉 $x_2=\frac{2}{3}c$일 때 함수 $f(x_1)+g(x_2)$의 최댓값은 $15c-\frac{c^2}{3}$이므로

$$15c-\frac{c^2}{3}=42, \qquad c^2-45c+126=0$$

$$(c-3)(c-42)=0$$

$\therefore\ c=3$ 또는 $c=42$

따라서 모든 c의 값의 합은

$$3+42=45$$

답 45

25

전략 $x^2-2x+2=t$로 치환하고 주어진 x의 값의 범위를 이용하여 t의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2-2x+2=t$로 놓으면

$$t=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

이므로 t는 $-1\le x\le 2$에서 $x=-1$일 때 최댓값 5를 갖고, $x=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

$\therefore\ 1\le t\le 5$ ⋯ ❶

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-4t-16=(t-2)^2-20$$

이므로 $1\le t\le 5$에서 $t=5$일 때 최댓값 -11을 갖고, $t=2$일 때 최솟값 -20을 갖는다. ⋯ ❷

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$$-11\cdot(-20)=220$$ ⋯ ❸

답 220

채점 기준	비율
❶ $x^2-2x+2=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

26

전략 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이 ω이면 $\omega^2-\omega+1=0$, $\omega^3=-1$이 성립함을 이용한다.

풀이 $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$$\omega-1=\omega^2,\ \omega^2+1=\omega,\ \omega^2-\omega=-1$$

$$\therefore\ f(n)=(\omega-1)^n+(\omega^2+1)^n+(\omega^2-\omega)^n$$
$$=\omega^{2n}+\omega^n+(-1)^n$$ ⋯ ❶

$\omega^2-\omega+1=0$의 양변에 $\omega+1$을 곱하면

$$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$$

$\therefore\ \omega^3+1=0$

즉 $\omega^3=-1$이므로

$$f(1)=\omega^2+\omega-1=2\omega-2$$

> $\omega^2-\omega+1=0$에서
> $\omega^2=\omega-1$

$$f(2)=\omega^4+\omega^2+1=-\omega+\omega^2+1=0$$
$$f(3)=\omega^6+\omega^3-1=1-1-1=-1$$
$$f(4)=\omega^8+\omega^4+1=\omega^2-\omega+1=0$$
$$f(5)=\omega^{10}+\omega^5-1=-\omega-\omega^2-1=-2\omega$$

> $\omega^2+1=\omega$이므로
> $-\omega^2-1=-\omega$

$$f(6)=\omega^{12}+\omega^6+1=1+1+1=3$$
$$f(7)=\omega^{14}+\omega^7-1=\omega^2+\omega-1=2\omega-2$$
$$f(8)=\omega^{16}+\omega^8+1=-\omega+\omega^2+1=0$$
$$\vdots$$

이므로 $f(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 값은 $2\omega-2$, 0, -1, 0, -2ω, 3이 차례대로 반복되어 나타난다. ⋯ ❷

따라서 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=0$이므로

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(30)=0$$ ⋯ ❸

> $f(1)+\cdots+f(6)$
> $=f(7)+\cdots+f(12)$
> $\vdots$
> $=f(25)+\cdots+f(30)$
> $=0$

답 0

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ $f(n)$의 값의 규칙을 찾을 수 있다.	50 %
❸ $f(1)+f(2)+\cdots+f(30)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

▸▸ 본책 64～65쪽

27 전략 인수분해를 이용하여 네 근을 구한 후 수직선 위에 네 점의 좌표를 나타내어 본다.

풀이 $4x^2+4ax+a^2-9=(2x+a+3)(2x+a-3)$

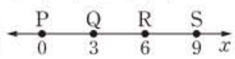
이므로 주어진 사차방정식의 네 실근은

$$x=0 \text{ 또는 } x=3 \text{ 또는 } x=\frac{-a-3}{2}$$

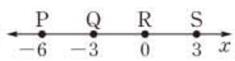
$$\text{또는 } x=\frac{-a+3}{2}$$

따라서 수직선 위에 네 실근을 좌표로 하는 네 점 P, Q, R, S가 일정한 간격으로 떨어져 있는 경우는 다음과 같이 네 가지이다.

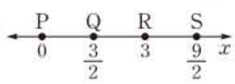
$3-0=3$, $\frac{-a+3}{2}-\frac{-a-3}{2}=3$ 이므로 좌표가 0, 3인 두 점과 $\frac{-a-3}{2}$, $\frac{-a+3}{2}$ 인 두 점 사이의 간격은 각각 3임을 이용한다.

(i) 

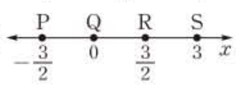
$\frac{-a-3}{2}=6$, $\frac{-a+3}{2}=9$에서 $\quad a=-15$

(ii) 

$\frac{-a-3}{2}=-6$, $\frac{-a+3}{2}=-3$에서 $\quad a=9$

(iii) 

$\frac{-a-3}{2}=\frac{3}{2}$, $\frac{-a+3}{2}=\frac{9}{2}$에서 $\quad a=-6$

(iv) 

$\frac{-a-3}{2}=-\frac{3}{2}$, $\frac{-a+3}{2}=\frac{3}{2}$에서 $\quad a=0$

이상에서 모든 실수 a의 값의 합은

$$-15+9+(-6)+0=-12$$

답 -12

28 전략 계수가 유리수인 방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$(p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)이면 $p-q\sqrt{m}$도 근임을 이용한다.

풀이 주어진 삼차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{3}$이고 계수가 모두 유리수이므로 $1-\sqrt{3}$도 근이다.

또 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 계수가 모두 유리수이므로 이 이차방정식이 $1-\sqrt{3}$을 근으로 가지면 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}$이다.

그런데 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 2이므로

$$\alpha\neq1-\sqrt{3}$$

$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2\neq2$

즉 삼차방정식의 세 근은 α, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$이다.

이때 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=-a$

$\therefore a=-2-\alpha \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\cdot\alpha=b$

$\therefore b=2\alpha-2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$\alpha(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-c$

$\therefore c=2\alpha \quad \cdots\cdots$ ㉢

α는 $x^2+ax+2=0$의 한 근이므로

$\alpha^2+a\alpha+2=0 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉣에 ㉠을 대입하면

$\alpha^2+\alpha(-2-\alpha)+2=0$

$-2\alpha+2=0 \qquad \therefore \alpha=1$

㉠, ㉡, ㉢에 $\alpha=1$을 각각 대입하면

$a=-3$, $b=0$, $c=2$

$\therefore a^2+b^2+c^2+\alpha^2=14$

답 14

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 65쪽

01

해결 단계

❶ 주어진 식을 간단히 한다.
❷ i와 $-i$의 거듭제곱의 값은 4개의 수가 반복됨을 이용하여 m의 값의 경우를 나누고, 각 경우마다 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.
❸ ❷의 개수를 모두 더하여 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

풀이 ❶ $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$,

$\frac{3-4i}{4+3i}=\frac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{-25i}{25}=-i$이므로

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m-\left(\frac{3-4i}{4+3i}\right)^n=i^m-(-i)^n \quad \cdots\cdots ㉠$$

❷ (i) $m=4k-3$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 13$)일 때,

$i^m=i$이므로 ㉠이 실수가 되려면

$(-i)^n=i$

이어야 한다.

$\therefore n=4t-1$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 12$)

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$13\cdot12=156$

(ii) $m=4k-2$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 13$)일 때,

$i^m=-1$이므로 ㉠이 실수가 되려면

$(-i)^n=-1$ 또는 $(-i)^n=1$

이어야 한다.

$n=4s-2$ ($s=1, 2, 3, \cdots, 13$) 또는 $n=4s$ ($s=1, 2, 3, \cdots, 12$)이므로 n이 짝수일 때이다.

$\therefore n=2t$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 25$)

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$13\cdot25=325$

(iii) $m=4k-1$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 12$)일 때,

$i^m=-i$이므로 ㉠이 실수가 되려면

$(-i)^n=-i$

이어야 한다.

$\therefore n=4t-3$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 13$)

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$12\cdot13=156$

(iv) $m=4k$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 12$)일 때,

$i^m=1$이므로 ㉠이 실수가 되려면

$(-i)^n=-1$ 또는 $(-i)^n=1$

이어야 한다.

$\therefore n=2t\ (t=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 25)$

따라서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$12\cdot25=300$

❸ 이상에서 구하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$156+325+156+300=937$ 답 937

02

해결 단계

❶ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$로 놓고 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세운다.
❷ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 자연수인 근을 n으로 놓고 대입하여 a에 대한 식을 세운다.
❸ a에 대한 이차방정식의 판별식을 이용하여 n의 값을 구한다.
❹ a, b의 값을 구한다.

풀이 ❶ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 연속하는 홀수인 자연수의 두 근을 α, $\alpha+2$ (α는 홀수)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=-a,\ \alpha(\alpha+2)=b$

$2\alpha+2=-a$에서 $\alpha=\dfrac{-a-2}{2}$이므로

$$b=\left(\frac{-a-2}{2}\right)\cdot\left(\frac{-a-2}{2}+2\right)$$

$$=\frac{a^2}{4}-1 \quad\cdots\cdots ㉠$$

❷ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 자연수인 근을 n이라 하면

$$n^2+bn+a=0, \qquad n^2+\left(\frac{a^2}{4}-1\right)n+a=0$$

$$\therefore \frac{n}{4}a^2+a+n^2-n=0 \quad\cdots\cdots ㉡$$

❸ a에 대한 이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$$D=1^2-4\cdot\frac{n}{4}(n^2-n)=-n^3+n^2+1$$

그런데 $n\ge2$이면 $D<0$이므로 실수 a는 존재하지 않는다.

$\therefore n=1$

❹ ㉡에 $n=1$을 대입하면

$$\frac{1}{4}a^2+a=0, \qquad a\left(\frac{1}{4}a+1\right)=0$$

$a<0$이므로 $\quad a=-4$

> 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, $\alpha+2$ (α는 홀수)이므로 근과 계수의 관계에 의하여
> $-a=\alpha+(\alpha+2)$
> $\therefore a=-(2\alpha+2)$
> 이때 $2\alpha+2>0$이므로
> $a<0$

㉠에 $a=-4$를 대입하면 $\quad b=3$

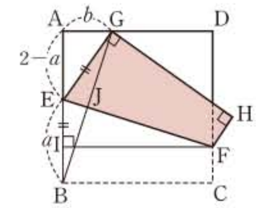
$\therefore ab=-12$ 답 -12

03

해결 단계

❶ 삼각형의 합동과 닮음을 이용하여 $\overline{\text{HF}}$를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 직각삼각형 AEG에서 피타고라스 정리를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.
❸ 사다리꼴 EFHG의 넓이를 b에 대한 이차함수로 나타내어 이 차함수가 최소일 때 b의 값을 구한다.
❹ $\dfrac{a}{b}$의 값을 구한다.

풀이 ❶ 오른쪽 그림과 같이 점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하고, 두 선분 BG, EF의 교점을 J라 하자.



이때 $\triangle$EBJ$\equiv\triangle$EGJ (SAS 합동)이므로

> $\overline{\text{EB}}=\overline{\text{EG}}$, $\overline{\text{EJ}}$는 공통, $\angle$BEJ$=\angle$GEJ

$\angle\text{EJB}=\angle\text{EJG}=90^\circ$

또 $\triangle$BJE$\backsim\triangle$BAG (AA 닮음)이므로

> $\angle\text{BJE}=\angle\text{BAG}=90^\circ$, $\angle$B는 공통

$\angle\text{BEJ}=\angle\text{BGA}$

따라서 $\triangle$FIE$\equiv\triangle$BAG (ASA 합동)이므로

> $\overline{\text{FI}}=\overline{\text{BA}}$, $\angle\text{FIE}=\angle\text{BAG}=90^\circ$, $\angle\text{FEI}=\angle\text{BGA}$

$\overline{\text{AG}}=\overline{\text{IE}}=b$

에서

$\overline{\text{CF}}=\overline{\text{BI}}=\overline{\text{BE}}-\overline{\text{EI}}=a-b$

$\therefore \overline{\text{HF}}=\overline{\text{CF}}=a-b$

❷ 한편 직각삼각형 AEG에서 피타고라스 정리에 의하여

> $\overline{\text{AE}}=\overline{\text{AB}}-\overline{\text{BE}}$
> $=2-a$,
> $\overline{\text{EG}}=\overline{\text{EB}}=a$

$(2-a)^2+b^2=a^2$

$$\therefore a=\frac{1}{4}b^2+1 \quad\cdots\cdots ㉠$$

❸ 사다리꼴 EFHG의 넓이는

> $\dfrac{1}{2}(\overline{\text{EG}}+\overline{\text{FH}})\cdot\overline{\text{GH}}$

$$\frac{1}{2}\{a+(a-b)\}\cdot2$$
$$=2a-b$$
$$=2\left(\frac{1}{4}b^2+1\right)-b\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{1}{2}b^2-b+2$$
$$=\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{3}{2}$$

이므로 $b=1$일 때 최솟값 $\dfrac{3}{2}$을 갖는다.

❹ ㉠에서 $b=1$일 때 $a=\dfrac{5}{4}$이므로

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{4}$$ 답 $\dfrac{5}{4}$

04

해결 단계

❶ 삼차방정식 $f(x)=0$의 켤레근의 성질을 이용하여 근을 파악한다.
❷ 조건 ㈏를 이용하여 실근을 구한다.
❸ 조건 ㈏를 이용하여 허근을 구한다.
❹ 실근과 허근을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 ❶ 조건 ㈎에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 한 허근을 β라 하면 계수가 실수이므로 다른 한 근은 β의 켤레복소수인 $\overline{\beta}$이고, 또 다른 한 근은 실수 γ이다.

❷ 조건 ㈏에서 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 γ이면 γ^3도 근이고 γ^3은 실수이므로

$$\gamma^3=\gamma, \qquad \gamma(\gamma+1)(\gamma-1)=0$$

$$\therefore \gamma=-1 \text{ 또는 } \gamma=0 \text{ 또는 } \gamma=1 \quad\cdots\cdots ㉠$$

❸ 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 β이면 β^3도 근이므로

$\beta^3=\overline{\beta}$ 또는 $\beta^3=\gamma$

(i) $\beta^3=\overline{\beta}$일 때, $\beta^4=\beta\overline{\beta}$이고 $\beta\overline{\beta}$는 0보다 큰 실수이므로

$\beta^4=k^2\ (k>0)$이라 하면

$\beta^2=-k$ 또는 $\beta^2=k$

이때 β는 허근이므로 $\beta^2=-k$

$\therefore \beta=\sqrt{k}i$ 또는 $\beta=-\sqrt{k}i$

따라서 $\beta^3=\overline{\beta}$에서

$(\sqrt{k}i)^3=-\sqrt{k}i$ 또는 $(-\sqrt{k}i)^3=\sqrt{k}i$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

$\therefore \beta=i$ 또는 $\beta=-i$

(ii) $\beta^3=\gamma$일 때, $\beta\neq0$이므로 ㉠에서

ⓘ $\gamma=1$이면 $\beta^3=1$이므로

$(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

β는 허근이므로 $\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

ⓘⓘ $\gamma=-1$이면 $\beta^3=-1$이므로

$(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

β는 허근이므로 $\beta=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

❹ $f(x)=(x-\gamma)(x-\beta)(x-\overline{\beta})$이므로

$f(x)=(x+1)(x-i)(x+i)$
$=x^3+x^2+x+1$

또는

$f(x)=x(x-i)(x+i)$
$=x^3+x$

또는

$f(x)=(x-1)(x-i)(x+i)$
$=x^3-x^2+x-1$

또는

$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$
$=x^3-1$

또는

$f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$
$=x^3+1$

따라서 $f(2)$의 값은 차례대로

15, 10, 5, 7, 9

이므로 $f(2)$의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

$\beta=p+qi\ (q\neq0)$일 때, $\overline{\beta}=p-qi$이므로
$\beta\overline{\beta}=p^2+q^2$
이때 $q\neq0$이므로
$\beta\overline{\beta}>0$

Ⅲ 부등식

07 일차부등식

개념&핵심 기출

본책 68~70쪽

01 ㄱ. $ab>0$이므로 $a<b$의 양변을 ab로 나누면

$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$

ㄴ. $|a|>|b|$이므로 $a^2>b^2$

$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면

$\dfrac{a}{b}>\dfrac{b}{a}$

ㄷ. $a=-2,\ b=-1,\ c=2,\ d=1$이면 $a<b<0$, $c>d>0$이지만 $\dfrac{a}{c}=-1,\ \dfrac{b}{d}=-1$이므로 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

02 ㄱ. $a=0.1,\ b=-1.1$이면 $0<a<1,\ b<-1$이지만 $a^2+b^2=0.01+1.21=1.22<2$이다.

ㄴ. $0<a<1$에서 $a^2<a$ …… ㉠

$b<-1$에서 $ab<-a$

$\therefore a<-ab$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2<-ab$

ㄷ. $0<a<1$에서 $\dfrac{1}{a}>1$

$b<-1$에서 $-1<\dfrac{1}{b}<0$

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이 ㄴ. $b<-1$에서 $-b>1$이므로

$a<-b$

$a>0$이므로 양변에 a를 곱하면

$a^2<-ab$

$a>0$이므로 부등식의 각 변에 a를 곱해도 부등식의 방향은 바뀌지 않는다.

$1<-b$이고 $a<1$이므로 $a<-b$

03 $1<f(1)<4$이므로

$1<a+b<4$ …… ㉠

$-2<f(2)<2$이므로

$-2<2a+b<2$ …… ㉡

㉠의 각 변에 2를 곱하면

$2<2a+2b<8$ …… ㉢

㉢$-$㉡을 하면 $2-2<b<8-(-2)$

$\therefore 0<b<10$

$f(0)=b$이므로

$0<f(0)<10$

답 $0<f(0)<10$

참고 부등식의 사칙계산

$a<x<b$, $c<y<d$일 때

① $\begin{array}{rl} & a<x<b \\ +) & c<y<d \\ \hline & a+c<x+y<b+d \end{array}$ ② $\begin{array}{rl} & a<x<b \\ -) & c<y<d \\ \hline & a-d<x-y<b-c \end{array}$

③ $\begin{array}{rl} & a<x<b \\ \times) & c<y<d \\ \hline & ac<xy<bd \end{array}$ ④ $\begin{array}{rl} & a<x<b \\ \div) & c<y<d \\ \hline & \frac{a}{d}<\frac{x}{y}<\frac{b}{c} \end{array}$

(단, ③, ④는 a, b, c, d가 양수일 때 성립한다.)

04 $A-B=(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)$

$=a^2(a-b)-b^2(a-b)$

$=(a-b)(a^2-b^2)$

$=(a-b)(a+b)(a-b)$

$=(a+b)(a-b)^2$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a+b>0$

또 $a\neq b$이므로 $(a-b)^2>0$

따라서 $A-B>0$이므로

$A>B$ 답 $A>B$

$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$-ab(a+b)$
$=(a+b)(a^2-2ab+b^2)$
$=(a+b)(a-b)^2$
과 같이 풀이할 수도 있다.

05 $A-B=(abc+1)-(a+bc)$

$=a(bc-1)-(bc-1)$

$=(a-1)(bc-1)$

그런데 $-1<a<1$이므로 $a-1<0$

또 $-1<b<1$, $-1<c<1$이므로

$-1<bc<1$

$\therefore bc-1<0$

따라서 $A-B>0$이므로

$A>B$ 답 $A>B$

$-1<b<1$, $-1<c<1$
에서
$0\le|b|<1$,
$0\le|c|<1$
이므로
$0\le|b||c|<1$
즉 $0\le|bc|<1$이므로
$-1<bc<1$

06 $\frac{A}{B}=\frac{2^{30}}{5^{12}}=\frac{(2^5)^6}{(5^2)^6}=\left(\frac{2^5}{5^2}\right)^6=\left(\frac{32}{25}\right)^6>1$

이므로 $A>B$

$\frac{A}{C}=\frac{2^{30}}{3^{20}}=\frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}}=\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{10}=\left(\frac{8}{9}\right)^{10}<1$

이므로 $A<C$

$\therefore B<A<C$ 답 ③

07 부등식 $ax>b$의 해가 $x>-1$이므로

$a>0$ $\therefore x>\frac{b}{a}$

주어진 부등식의 부등호의 방향과 해의 부등호의 방향이 같으므로 x의 계수는 양수이다.

따라서 $\frac{b}{a}=-1$이므로 $b=-a$

이것을 $(a-b)x<a^2+ab+b$에 대입하면

$\{a-(-a)\}x<a^2+a\cdot(-a)-a$

$2ax<-a$

$a>0$이므로 $x<-\frac{1}{2}$ 답 ③

08 $(a+b)x+a-2b>0$에서

$(a+b)x>-a+2b$

이 부등식의 해가 $x<\frac{2}{3}$이므로

$a+b<0$ $\therefore x<\frac{-a+2b}{a+b}$

주어진 부등식의 부등호의 방향과 해의 부등호의 방향이 다르므로 x의 계수는 음수이다.

따라서 $\frac{-a+2b}{a+b}=\frac{2}{3}$이므로

$2a+2b=-3a+6b$, $5a=4b$ $\therefore a=\frac{4}{5}b$

$a+b<0$에서

$a+b=\frac{4}{5}b+b=\frac{9}{5}b<0$ $\therefore b<0$

$a=\frac{4}{5}b$를 $(2a-b)x<a+b$에 대입하면

$\left(\frac{8}{5}b-b\right)x<\frac{4}{5}b+b$, $\frac{3}{5}bx<\frac{9}{5}b$

이때 $b<0$이므로 $x>3$ 답 ⑤

09 $(a-b)x+2a+3b>0$에서

$(a-b)x>-2a-3b$

이 부등식의 해가 모든 실수이므로

부등식 $ax>b$의 해가
① 없다. ➡ $a=0$, $b\ge0$
② 모든 실수이다.
➡ $a=0$, $b<0$

$a-b=0$, $-2a-3b<0$

$a-b=0$에서 $b=a$이므로

$-2a-3b=-2a-3a=-5a<0$

$\therefore a>0$

$b=a$를 $(a+2b)x>b-2a$에 대입하면 $3ax>-a$

이때 $a>0$이므로 $x>-\frac{1}{3}$ 답 ③

10 $2x+1<a-x$에서

$3x<a-1$ $\therefore x<\frac{a-1}{3}$

$x+4<3x+2a$에서

$-2x<2a-4$ $\therefore x>2-a$

주어진 연립부등식의 해가 $-2<x<b$이므로

$2-a=-2$, $\frac{a-1}{3}=b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

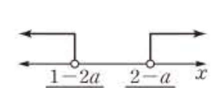
$\therefore a+b=5$ 답 ⑤

11 $2(x-1)+a>0$에서

$2x>2-a$ $\therefore x>\frac{2-a}{2}$

$6x+2a<1$에서 $x<\frac{1-2a}{6}$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$\frac{1-2a}{6}\le\frac{2-a}{2}$

$1-2a\le6-3a$ $\therefore a\le5$

따라서 자연수 a의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 $\quad 1+2+3+4+5=15$ 답 ④

12 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BQ}=x,\ \overline{PQ}=36-2x$

$\overline{PQ}<\overline{AP}+\overline{BQ}$에서

$36-2x<x+x,\qquad -4x<-36$

$\therefore x>9 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\overline{PS}=\overline{QR}=x$이므로 직사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$2\{(36-2x)+x\}=72-2x$

이고, 선분 AP를 한 변으로 하는 정사각형의 둘레의 길이는 $4x$이므로

$72-2x>4x,\qquad -6x>-72$

$\therefore x<12 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$9<x<12$

따라서 정수 x의 값은 10, 11이다. 답 10, 11

△ABC는 직각이등변삼각형이므로 $\angle A=45°$
△APS에서
$\angle ASP$
$=180°-90°-45°$
$=45°$
따라서 △APS도 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AP}=\overline{PS}=x$

13 $x-2<2x+3$에서 $\qquad -x<5$

$\therefore x>-5 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$2x+3<6-x$에서 $\qquad 3x<3$

$\therefore x<1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5<x<1$

따라서 정수 x는 $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0$의 5개이다.

답 ③

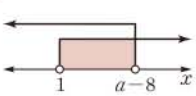
14 $6-x<x+4$에서

$-2x<-2 \qquad \therefore x>1$

$x+4<\dfrac{x+a}{2}$에서

$2x+8<x+a \qquad \therefore x<a-8$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$a-8>1 \qquad \therefore a>9$

따라서 정수 a의 최솟값은 10이다. 답 ③

15 $x+2<ax+b$에서

$(1-a)x<b-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$ax+b<x-a+3b$에서 $\qquad (a-1)x<-a+2b$

$(1-a)x>a-2b \qquad \cdots\cdots ㉡$

(i) $1-a>0$, 즉 $a<1$일 때,

㉠에서 $x<\dfrac{b-2}{1-a}$, ㉡에서 $x>\dfrac{a-2b}{1-a}$이고, 주어진 부등식의 해가 $-1<x<4$이므로

$\dfrac{a-2b}{1-a}=-1,\ \dfrac{b-2}{1-a}=4$

$a-2b=-1+a,\ b-2=4-4a$

$b=\dfrac{1}{2},\ 4a+b=6 \qquad \therefore a=\dfrac{11}{8},\ b=\dfrac{1}{2}$

그런데 $a<1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $1-a<0$, 즉 $a>1$일 때,

㉠에서 $x>\dfrac{b-2}{1-a}$, ㉡에서 $x<\dfrac{a-2b}{1-a}$이고, 주어진 부등식의 해가 $-1<x<4$이므로

$\dfrac{b-2}{1-a}=-1,\ \dfrac{a-2b}{1-a}=4$

$b-2=-1+a,\ a-2b=4-4a$

$a-b=-1,\ 5a-2b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\qquad a=2,\ b=3$

(i), (ii)에서 $a=2,\ b=3$이므로

$a+b=5$ 답 ②

$p>0$일 때,
① $|x|<p$이면
$-p<x<p$
② $|x|>p$이면
$x<-p$ 또는 $x>p$

16 $|ax+3|\le b$에서 $\qquad -b\le ax+3\le b$

$-b-3\le ax\le b-3$

이때 $a>0$이므로 $\qquad \dfrac{-b-3}{a}\le x\le \dfrac{b-3}{a}$

주어진 부등식의 해가 $-4\le x\le 1$이므로

$\dfrac{-b-3}{a}=-4,\ \dfrac{b-3}{a}=1$

$-b-3=-4a,\ b-3=a$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\qquad a=2,\ b=5$

$\therefore a+b=7$ 답 ③

17 $2|x-3|+|x-7|\le 8$에서

(i) $x<3$일 때,

$-2(x-3)-(x-7)\le 8$

$-3x\le -5 \qquad \therefore x\ge \dfrac{5}{3}$

그런데 $x<3$이므로 $\qquad \dfrac{5}{3}\le x<3$

(ii) $3\le x<7$일 때,

$2(x-3)-(x-7)\le 8 \qquad \therefore x\le 7$

그런데 $3\le x<7$이므로 $\qquad 3\le x<7$

(iii) $x\ge 7$일 때,

$2(x-3)+(x-7)\le 8$

$3x\le 21 \qquad \therefore x\le 7$

그런데 $x\ge 7$이므로 $\qquad x=7$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\dfrac{5}{3}\le x\le 7$이므로 정수 x는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다. 답 ②

18 $-3\le x\le 5$일 때, $x+3\ge 0,\ x-5\le 0$이므로 주어진 부등식은

$(x+3)-(x-5)>k \qquad \therefore k<8$

따라서 주어진 부등식이 항상 성립하기 위한 자연수 k의 최댓값은 7이다. 답 ④

1등급을 위한 고난도 문제

본책 71~74쪽

01 ㄱ. $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이면 $0<ab<1$이지만

$\frac{1}{a}=-2$이므로 $b>\frac{1}{a}$이다.

ㄴ. $b^2>0$이므로 $ab<1$의 양변을 b^2으로 나누면

$\frac{a}{b}<\frac{1}{b^2}$

ㄷ. $a^2>0$, $b^2>0$이므로 $0<ab<1$에서

$0<a^3b<a^2$, $0<ab^3<b^2$

$\therefore -b^2<a^3b-ab^3<a^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

02 ㄱ. $a=-2$, $b=2$이면 $\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이지만 $b>a$이다.

ㄴ. $a^2b^2>0$이므로 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$의 양변에 a^2b^2을 곱하면

$ab^2<a^2b$

ㄷ. $a>0$이면 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이므로 $b>0$

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$의 양변에 b를 곱하면 $\frac{b}{a}<1$

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$의 양변에 a를 곱하면 $1<\frac{a}{b}$

$\therefore \frac{b}{a}<\frac{a}{b}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

03 $b^2c+ac^2+ab^2+a^2c=2abc$에서

$a(b^2+c^2)+c(a^2+b^2-2ab)=0$

$\therefore a(b^2+c^2)+c(a-b)^2=0$ …… ㉠ ··· ❶

$a=b$이면 ㉠에서 $a(b^2+c^2)=0$이어야 하므로

$a=0$ 또는 $b^2+c^2=0$

그런데 이것은 a, b, c가 0이 아닌 실수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a\neq b$ ··· ❷

이때 ㉠에서 $a(b^2+c^2)=-c(a-b)^2$이므로

$-\frac{a}{c}=\frac{(a-b)^2}{b^2+c^2}>0$

따라서 $\frac{a}{c}<0$이므로

$ac<0$ ··· ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	20 %
❷ $a\neq b$임을 알 수 있다.	40 %
❸ $ac<0$임을 보일 수 있다.	40 %

일품 BOX

0이 아닌 실수 b에 대하여 $b^2>0$

a^2+ab+b^2
$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq0$
이때 등호는 $a=b=0$일 때 성립하는데 a, b는 서로 다른 두 실수이므로
$a^2+ab+b^2>0$

$a>b$의 양변에 b를 더하면
$a+b>2b$

04 $A-B=(ab+cd)-(ac+bd)$

$=a(b-c)-d(b-c)$

$=(a-d)(b-c)$

$a>d$, $b>c$에서 $a-d>0$, $b-c>0$이므로

$A-B>0$ $\therefore A>B$ …… ㉠

$B-C=(ac+bd)-(ad+bc)$

$=a(c-d)-b(c-d)$

$=(a-b)(c-d)$

$a>b$, $c>d$에서 $a-b>0$, $c-d>0$이므로

$B-C>0$ $\therefore B>C$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A>B>C$

답 ①

05 $a+b+c=0$에서 $b=-a-c$이므로

$b^2+\frac{1}{2}(a-c)^2-a^2-c^2$

$=(-a-c)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2-a^2-c^2$

$=\frac{1}{2}(a-c)^2+\{(a+c)^2-a^2-c^2\}$

$=\frac{1}{2}(a-c)^2+2ac$

$=\frac{1}{2}\{(a-c)^2+4ac\}$

$=\frac{1}{2}(a+c)^2\geq0$

(단, 등호는 $a+c=0$일 때 성립)

$\therefore b^2+\frac{1}{2}(a-c)^2\geq a^2+c^2$

답 풀이 참조

06 조건 (다)에서

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)>0$

이므로 $a-b>0$ $\therefore a>b$ …… ㉠

조건 (나)에서

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)<0$

이므로 $a+b<0$ ($\because$ ㉠)

㉠에서 $a+b>2b$이므로

$2b<0$ $\therefore b<0$ …… ㉡

조건 (가)에서 $ab<b$이고 $b<0$이므로 양변을 b로 나누면

$a>1$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $b<0<1<a$

$\therefore b<1<a$

답 ④

07 $a^2+b^2+1-(ab+a+b)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}\geq0$

본책 71~72쪽

$\therefore a^2+b^2+1 \ge ab+a+b$

(단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)

답 풀이 참조

참고 등호는 $a-b=0$, $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다.

08 $a(2x+a)>b(x+1)$에서

$(2a-b)x>b-a^2$

이 부등식이 해를 갖지 않으므로

$2a-b=0$, $b-a^2 \ge 0$

이때 $b-a^2 \ge 0$에서 $b \ge a^2$이고 주어진 조건에서 $b \le a^2$이므로 $b=a^2$ …… ㉠

이것을 $2a-b=0$에 대입하면

$2a-a^2=0$, $a(2-a)=0$

그런데 $a \ne 0$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$b=4$

$\therefore a+b=6$

답 ④

09 $|b| \le 3$에서 $-3 \le b \le 3$ …… ㉠

$a(a+1)x+b<2x+a$에서

$(a^2+a-2)x<a-b$

$(a+2)(a-1)x<a-b$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$(a+2)(a-1)=0$, $a-b>0$

$(a+2)(a-1)=0$에서

$a=-2$ 또는 $a=1$

(i) $a=-2$일 때,

$a-b>0$에서 $b<-2$이므로

$b=-3$ ($\because$ ㉠)

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(-2, -3)$의 1개이다.

(ii) $a=1$일 때,

$a-b>0$에서 $b<1$이므로

$b=-3, -2, -1, 0$ ($\because$ ㉠)

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(1, -3)$, $(1, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$의 4개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+4=5$

답 ③

10 주어진 부등식에서 $a+b+c=k$ $(k>0)$라 하면

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $k>0$

$$\frac{x-(b+c)}{a}+\frac{x-(c+a)}{b}+\frac{x-(a+b)}{c}>3$$

$$\frac{x-(k-a)}{a}+\frac{x-(k-b)}{b}+\frac{x-(k-c)}{c}>3$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)x-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)k+3>3$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(x-k)>0$$

이때 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>0$이므로 $x-k>0$

$a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $\frac{1}{a}>0$, $\frac{1}{b}>0$, $\frac{1}{c}>0$이므로 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>0$

$\therefore x>k$

주어진 부등식의 해가 $x>1$이므로

$k=1$

따라서 $a+b+c=1$에서 $b+c=1-a$이므로 부등식 $(b+c)x+2a>2$는

$(b+c)x>2(1-a)$, $(b+c)x>2(b+c)$

이때 $b+c>0$이므로 $x>2$

답 ④

다른 풀이 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $abc>0$

부등식 $\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}+\frac{x-a-b}{c}>3$의 양변에 abc를 곱한 후 정리하면

$bcx-bc(b+c)+cax-ca(c+a)$

$+abx-ab(a+b)>3abc$

$(ab+bc+ca)x$

$>3abc+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+3bc)a+bc(b+c)$

a에 대하여 내림차순으로 정리한다.

$=\{(b+c)a+bc\}\{a+(b+c)\}$

$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$

이때 $ab+bc+ca>0$이므로

$a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $ab>0$, $bc>0$, $ca>0$이므로 $ab+bc+ca>0$

$x>a+b+c$

주어진 부등식의 해가 $x>1$이므로

$a+b+c=1$ $\therefore b+c=1-a$

부등식 $(b+c)x+2a>2$에서

$(b+c)x>2(1-a)$, $(b+c)x>2(b+c)$

이때 $b+c>0$이므로 $x>2$

11 $a(x-a^2)>b(x-ab)$에서

$(a-b)x>a^3-ab^2$

$(a-b)x>a(a+b)(a-b)$ …… ㉠

ㄱ. $a=b$이면 $a-b=0$, $a(a+b)(a-b)=0$이므로 ㉠에서 $0\cdot x>0$

따라서 이 부등식의 해는 없다.

ㄴ. 부등식의 해가 $x>0$이므로 ㉠에서

$a-b>0$ $\therefore x>a(a+b)$

따라서 $a(a+b)=0$에서 $a>0$이므로

$a+b=0$

즉 $b=-a$이므로 $b<0$

ㄷ. 부등식의 해가 $x<a$이므로 ㉠에서

$a-b<0$ $\therefore x<a(a+b)$

따라서 $a(a+b)=a$에서 $a\ne 0$이므로

$a+b=1$ $\therefore b=1-a$

$a-b<0$에 $b=1-a$를 대입하면

$a-(1-a)<0$, $2a<1$

$\therefore a<\frac{1}{2}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

12 $3x-1\geq 2x+a$에서

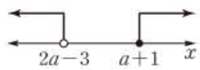
$x\geq a+1$

$4a-x>x+6$에서

$-2x>-4a+6$

$\therefore x<2a-3$ ⋯ ❶

주어진 연립부등식을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않으려면 오른쪽 그림에서



$2a-3\leq a+1 \qquad \therefore a\leq 4$ ⋯ ❷

따라서 a의 최댓값은 4이다. ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

13 부등식 $(a+b)x<a-b$의 해가 $x<\frac{1}{3}$이므로

$a+b>0 \qquad \therefore x<\frac{a-b}{a+b}$

따라서 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{1}{3}$이므로

$3a-3b=a+b, \qquad 2a=4b$

$\therefore a=2b$

이때 $a+b>0$에서 $2b+b=3b>0$이므로

$b>0$

$a=2b$를 $ax+2a+b>0$에 대입하면

$2bx+2\cdot 2b+b>0, \qquad 2bx>-5b$

이때 $b>0$이므로 $\quad x>-\frac{5}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$a=2b$를 $(a-b)x<2a-3b$에 대입하면

$(2b-b)x<2\cdot 2b-3b, \qquad bx<b$

이때 $b>0$이므로 $\quad x<1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{5}{2}<x<1$

따라서 정수 x는 $-2, -1, 0$의 3개이다.

답 ③

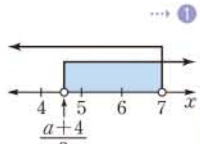
14 $-x+a<2x-4$에서

$-3x<-a-4 \qquad \therefore x>\frac{a+4}{3}$

$\frac{3x-1}{2}<x+3$에서

$3x-1<2x+6 \qquad \therefore x<7$ ⋯ ❶

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림에서



$4\leq\frac{a+4}{3}<5, \qquad 12\leq a+4<15$

$\therefore 8\leq a<11$ ⋯ ❷

일품 BOX

$\frac{a+4}{3}=4$이면 정수인 해는 5, 6의 2개이고, $\frac{a+4}{3}=5$이면 정수인 해는 6의 1개이다.

따라서 정수 a의 값은 8, 9, 10이므로 구하는 합은

$8+9+10=27$ ⋯ ❸

답 27

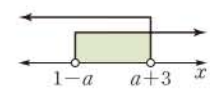
채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

15 $2x+a>x+1$에서 $\qquad x>1-a$

$3x-6<x+2a$에서

$2x<2a+6 \qquad \therefore x<a+3$

이때 주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$1-a<a+3$

$-2a<2 \qquad \therefore a>-1$ ⋯⋯ ㉠

또 주어진 연립부등식을 만족시키는 음수 x가 존재하지 않으므로

$1-a\geq 0 \qquad \therefore a\leq 1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<a\leq 1$

답 ②

16 이 동아리의 회원 수를 x라 하면 1인당 2000원씩 낸 총금액은 필요한 경비보다 1000원이 많으므로 필요한 경비는

활용 문제는 구하려는 것을 x로 놓고 식을 세운다.

$2000x-1000$(원)

1인당 1500원씩 낸 총금액은 필요한 경비보다 6000원 미만 적으므로

$(2000x-1000)-1500x<6000$

$500x<7000 \qquad \therefore x<14$ ⋯⋯ ㉠

1인당 2500원씩 낸 총금액은 필요한 경비보다 7500원 이상 많으므로

$2500x-(2000x-1000)\geq 7500$

$500x\geq 6500 \qquad \therefore x\geq 13$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\qquad 13\leq x<14$

따라서 동아리 회원 수는 13이다.

답 ③

17 2월 한 달 동안 외식비에서 x %, 나머지 항목에서 4 %를 줄인 금액은

$40\cdot\frac{x}{100}+160\cdot\frac{4}{100}$(만 원)

1월의 월 소비 총액이 200만 원이고, 외식비가 40만 원이므로 나머지 항목의 총액은 160만 원이다.

이고, 이것은 1월의 월 소비 총액의 5 % 이상을 줄인 금액이므로

$40\cdot\frac{x}{100}+160\cdot\frac{4}{100}\geq 200\cdot\frac{5}{100}$

$4x+64\geq 100$

$\therefore x\geq 9$ ⋯⋯ ㉠

2월 한 달 동안 외식비에서 4 %, 나머지 항목에서 x % 를 줄인 금액은

$$40\cdot\frac{4}{100}+160\cdot\frac{x}{100}(\text{만 원})$$

이고, 이것은 1월의 월 소비 총액의 10 % 이하를 줄인 금액이므로

$$40\cdot\frac{4}{100}+160\cdot\frac{x}{100}\le 200\cdot\frac{10}{100}$$

$16+16x\le 200$

$16x\le 184 \qquad \therefore x\le 11.5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$9\le x\le 11.5$ 답 $9\le x\le 11.5$

18 $x+1<2x+a$에서

$-x<a-1 \qquad \therefore x>1-a$

$2x+a<-x+b$에서

$3x<b-a \qquad \therefore x<\frac{b-a}{3}$

주어진 부등식의 해가 $3<x<4$이므로

$1-a=3,\ \frac{b-a}{3}=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=10$

$\therefore a+b=8$ 답 ④

19 $3x-1<x+a$에서

$2x<a+1 \qquad \therefore x<\frac{a+1}{2}$

$x+a<2x+3a$에서

$-x<2a \qquad \therefore x>-2a$ ··· ❶

주어진 부등식의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로

$\alpha=-2a,\ \beta=\frac{a+1}{2}$ ··· ❷

$\beta-\alpha=5$에서 $\quad \frac{a+1}{2}-(-2a)=5$

$\frac{5}{2}a=\frac{9}{2} \qquad \therefore a=\frac{9}{5}$ ··· ❸

답 $\frac{9}{5}$

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ α, β를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

20 $ax+2<x+1$에서

$(a-1)x<-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x+1<2x+b$에서

$-x<b-1 \qquad \therefore x>1-b \qquad \cdots\cdots$ ㉡

(ⅰ) $a-1<0$일 때,

㉠에서 $\quad x>-\frac{1}{a-1} \qquad \cdots\cdots$ ㉢

이때 ㉡, ㉢의 공통부분이 존재하므로 주어진 부등식은 해를 갖는다.

두 부등식의 부등호의 방향이 같으므로 공통부분이 항상 존재한다.

(ⅱ) $a-1=0$일 때,

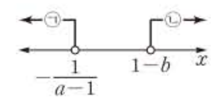
㉠에서 $0\cdot x<-1$이므로 해가 없다.

$\therefore (a-1)(b-1)=0$

(ⅲ) $a-1>0$일 때,

㉠에서 $\quad x<-\frac{1}{a-1}$

주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$-\frac{1}{a-1}\le 1-b$

$a-1>0$이므로 양변에 $a-1$을 곱하면

$-1\le(1-b)(a-1)$

$\therefore (a-1)(b-1)\le 1$

이상에서 $(a-1)(b-1)$의 최댓값은 1이다. 답 ①

21 부등식 $ax<2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이므로

$a<0 \qquad \therefore x>\frac{2a-b}{a}$

따라서 $\frac{2a-b}{a}=\frac{3}{2}$이므로

$4a-2b=3a \qquad \therefore a=2b$

또 $a<0$이므로 $\quad b<0$

$ax+b<bx$에서 $\quad (a-b)x<-b$

$(2b-b)x<-b, \qquad bx<-b$

이때 $b<0$이므로 $\quad x>-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$bx<2ax-a$에서 $\quad (b-2a)x<-a$

$(b-2\cdot 2b)x<-2b, \qquad -3bx<-2b$

이때 $b<0$이므로 $\quad x<\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$b<0$이므로 $-3b>0$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<x<\frac{2}{3}$ 답 $-1<x<\frac{2}{3}$

22 사각형 ABCD의 넓이는 $\quad 8\cdot 6=48$

삼각형 APM의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot x\cdot 4=2x$

삼각형 PBC의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot(6-x)\cdot 8=24-4x$

$\overline{PB}=\overline{AB}-\overline{AP}=6-x$

삼각형 CDM의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=12$

따라서 삼각형 MPC의 넓이는

$48-\{2x+(24-4x)+12\}=2x+12$

한편 두 삼각형 APM, PBC의 넓이의 합은

$2x+(24-4x)=24-2x$

일품 BOX

또 사각형 PBCQ의 넓이는

$(6-x)\cdot 8=48-8x$

이므로 주어진 조건에서

> $\triangle APM+\triangle PBC$
> $<\triangle MPC$
> $<\square PBCQ$

$24-2x<2x+12<48-8x$

$24-2x<2x+12$에서

$-4x<-12 \qquad \therefore x>3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$2x+12<48-8x$에서

$10x<36 \qquad \therefore x<3.6 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3<x<3.6$ 답 $3<x<3.6$

23 $\left|\dfrac{x}{n}-8\right|\le 2$에서 $\quad -2\le\dfrac{x}{n}-8\le 2$

$6\le\dfrac{x}{n}\le 10 \qquad \therefore 6n\le x\le 10n$

위의 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 13이므로

$10n-6n+1=13, \qquad 4n=12$

$\therefore n=3$ 답 3

1등급 비밀노트

부등식을 만족시키는 정수 A의 개수 (단, m, n은 정수)

① $m\le A\le n$ ➡ $n-m+1$

② $m<A\le n$ ➡ $n-m$

③ $m<A<n$ ➡ $n-m-1$

24 $|2x+1|<5$에서

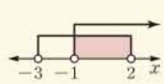
$-5<2x+1<5, \qquad -6<2x<4$

$\therefore -3<x<2$

$ax+2a-b<0$에서

$ax<-2a+b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

연립부등식의 해가 $-1<x<2$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x>-1$이어야 한다.



㉠에서 $\quad a<0 \qquad \therefore x>\dfrac{-2a+b}{a}$

따라서 $\dfrac{-2a+b}{a}=-1$이므로 $\qquad -2a+b=-a$

$\therefore a=b$

부등식 $(a+b)x+a-3b>0$에서

$2ax-2a>0, \qquad ax>a$

$a<0$이므로 $\qquad x<1$ 답 ①

25 $|x-3|\ge 2$에서

$x-3\le -2$ 또는 $x-3\ge 2$

$\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge 5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$||x|-1|\le 1$에서 $\qquad -1\le |x|-1\le 1$

$0\le |x|\le 2 \qquad \therefore -2\le x\le 2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\qquad -2\le x\le 1$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1의 4개이다.

답 ④

26 (i) $x<1$일 때,

> 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값 1, 2를 기준으로 범위를 나눈다.

$|x-1|+|x-2|=-(x-1)-(x-2)$
$=-2x+3$

$x<1$에서 $-2x>-2$이므로

$-2x+3>1$

(ii) $1\le x<2$일 때,

$|x-1|+|x-2|=(x-1)-(x-2)$
$=1$

(iii) $x\ge 2$일 때,

$|x-1|+|x-2|=(x-1)+(x-2)$
$=2x-3$

$x\ge 2$에서 $2x\ge 4$이므로

$2x-3\ge 1$

이상에서 $|x-1|+|x-2|\ge 1$이므로 부등식 $|x-1|+|x-2|<a$의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $\qquad a\le 1$ 답 ②

27 $f(n,\ n+4)$의 값은 부등식

$|x|+|x-n|<n+4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

를 만족시키는 정수 x의 개수와 같다.

(i) $x<0$일 때, ㉠에서

$-x-(x-n)<n+4$

$-2x<4 \qquad \therefore x>-2$

그런데 $x<0$이므로 $\qquad -2<x<0$ ··· ❶

(ii) $0\le x<n$일 때, ㉠에서

$x-(x-n)<n+4$

$\therefore n<n+4$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $0\le x<n$이므로 $\qquad 0\le x<n$ ··· ❷

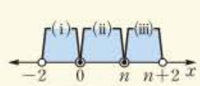
(iii) $x\ge n$일 때, ㉠에서

$x+(x-n)<n+4$

$2x<2n+4 \qquad \therefore x<n+2$

그런데 $x\ge n$이므로 $\qquad n\le x<n+2$ ··· ❸

이상에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<n+2$이므로



정수 x의 개수는

$(n+2)-(-2)-1=n+3$

$\therefore f(n,\ n+4)=n+3$ ··· ❹

따라서 $f(n,\ n+4)=10$에서

$n+3=10$

$\therefore n=7$ ··· ❺

답 7

채점 기준	비율
❶ $x<0$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❷ $0\le x<n$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ $x\ge n$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(n,\ n+4)$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	10 %
❺ n의 값을 구할 수 있다.	30 %

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 75쪽

01 a, b, c, d, e가 연속하는 5개의 정수이므로 조건 (가)에 의하여

$a=c-2$, $b=c-1$, $d=c+1$, $e=c+2$

라 하자.

조건 (나)에 의하여

$(c-2)+(c-1)<c+1$

$\therefore c<4$

조건 (다)에 의하여

$(c-2)^2+c^2=(c+2)^2$

$c^2-8c=0$, $\quad c(c-8)=0$

$\therefore c=0$ 또는 $c=8$

그런데 $c<4$이므로 $\quad c=0$

따라서 $a=-2$, $b=-1$, $d=1$, $e=2$이므로

$b^2+d^2=(-1)^2+1^2=2$ 답 2

1등급 비밀노트

문제에서 연속하는 정수 조건이 있을 때, 연속하는 세 정수는 $a-1$, a, $a+1$로 놓고, 연속하는 5개의 정수는 $a-2$, $a-1$, a, $a+1$, $a+2$로 놓으면 편리하다.

02 ㄱ. $a+b=1$에서

$a=1-b$

이때 $0<a<b$이므로

$0<1-b<b$

$0<1-b$에서 $\quad b<1$

$1-b<b$에서 $\quad b>\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}<b<1$

ㄴ. $(a^2+b^2)-b=a^2+b(b-1)$

$=a^2-ab$

$=a(a-b)<0$

$\therefore a^2+b^2<b$

$a+b=1$이므로 $b-1=-a$

$a>0$이고, $a<b$에서 $a-b<0$이므로 $a(a-b)<0$

ㄷ. $a+b=1$에서 $\quad b=1-a$

ㄱ에서 $\frac{1}{2}<b<1$이므로

$\frac{1}{2}<1-a<1$

$-\frac{1}{2}<-a<0 \qquad \therefore 0<a<\frac{1}{2}$

$\therefore 2a^2+b^2=2a^2+(1-a)^2$

$=3a^2-2a+1$

$=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

따라서 $0<a<\frac{1}{2}$에서 $2a^2+b^2$은 $a=\frac{1}{3}$일 때 최솟값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

다른 풀이 ㄱ. $a<b$의 양변에 b를 더하면

$a+b<2b$

$a+b=1$이므로

$1<2b \qquad \therefore b>\frac{1}{2}$

03 $c-a>a-b>b-c$에서

$c-a>a-b$ …… ㉠

$a-b>b-c$ …… ㉡

(i) a, b, c 중 가장 큰 수를 a라 하면

$c-a<0$, $a-b>0$

이므로 ㉠을 만족시키는 a, b, c가 존재하지 않는다.

$a>b$, $a>c$이므로 $c-a<0$, $a-b>0$

(ii) a, b, c 중 가장 큰 수를 b라 하면

$a-b<0$, $b-c>0$

이므로 ㉡을 만족시키는 a, b, c가 존재하지 않는다.

$b>a$, $b>c$이므로 $a-b<0$, $b-c>0$

(iii) a, b, c 중 가장 큰 수를 c라 하면

$c-a>0$, $b-c<0$

이므로 a, b, c의 값에 따라 주어진 부등식이 성립한다.

$c>a$, $c>b$이므로 $c-a>0$, $b-c<0$

이상에서 $a<c$, $b<c$이고, a, b의 대소는 비교할 수 없으므로 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

04 $|x-a|\le b$에서

$-b\le x-a\le b$

$\therefore a-b\le x\le a+b$

$ax+b<bx+2a$에서

$(a-b)x<2a-b$ …… ㉢

ㄱ. 부등식 ㉠의 해가 $0\le x\le 2$이면

$a-b=0$, $a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=1$

㉢에서 $0\cdot x<1$이므로 부등식 ㉡의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. 부등식 ㉠의 해가 $1\le x\le 3$이면

$a-b=1$, $a+b=3$

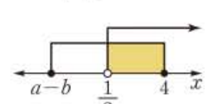
위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

㉢에서 $\quad x<3$

따라서 연립부등식의 해는 $1\le x<3$이다.

ㄷ. 연립부등식의 해가 $\frac{1}{2}<x\le 4$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 부등식 ㉢의 해가 $x>\frac{1}{2}$이어야 한다.



즉 ㉢에서 $\quad a-b<0$

$\therefore x>\frac{2a-b}{a-b}$

Ⅲ 부등식

따라서 $\frac{2a-b}{a-b}=\frac{1}{2}$이므로

$4a-2b=a-b$

$\therefore\ b=3a$

또 부등식 ㉠의 해가 $a-b\le x\le 4$이어야 하므로

$a+b=4$

$b=3a$를 위의 식에 대입하면

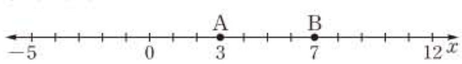
$4a=4 \quad \therefore\ a=1$

$\therefore\ a=1,\ b=3$

따라서 부등식 ㉠의 해는 $1-3\le x\le 1+3$, 즉 $-2\le x\le 4$이므로 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 7개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

05 다음과 같이 사무실을 원점으로 하고 10 m를 1로 하는 수직선을 그려 식당을 점 A(3), 오락실을 점 B(7), 숙소를 점 $P(x)(-5\le x\le 12,\ x\ne 0,\ x\ne 3,\ x\ne 7)$라 하자.



$\overline{AP}=|x-3|$, $\overline{BP}=|x-7|$이므로 조건을 만족시키는 숙소는

$\overline{AP}+\overline{BP}=|x-3|+|x-7|\le 8$

을 만족시키는 정수 x의 값을 좌표로 하는 점 $P(x)$인 지점에 있다.

(i) $-5\le x<0$ 또는 $0<x<3$일 때,

$-(x-3)-(x-7)\le 8$

$-2x\le -2 \quad \therefore\ x\ge 1$

그런데 $-5\le x<0$ 또는 $0<x<3$이므로

$1\le x<3$

(ii) $3<x<7$일 때,

$(x-3)-(x-7)\le 8$에서 $4\le 8$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $3<x<7$이므로

$3<x<7$

(iii) $7<x\le 12$일 때,

$(x-3)+(x-7)\le 8$

$2x\le 18 \quad \therefore\ x\le 9$

그런데 $7<x\le 12$이므로

$7<x\le 9$

이상에서 부등식 $|x-3|+|x-7|\le 8$의 해는

$1\le x<3$ 또는 $3<x<7$ 또는 $7<x\le 9$

따라서 조건을 만족시키는 숙소는 점 P(1), P(2), P(4), P(5), P(6), P(8), P(9)인 지점에 있으므로 7개이다. 답 ②

08 이차부등식

개념&핵심 기출

본책 76~78쪽

01 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 해는

$x=3\pm\sqrt{5}$

이므로 이차부등식 $x^2-6x+4\le 0$의 해는

$3-\sqrt{5}\le x\le 3+\sqrt{5}$

이때 $2<\sqrt{5}<3$이므로

$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$이므로 $2<\sqrt{5}<3$

$3-\sqrt{5}=0.\times\times\times,\ 3+\sqrt{5}=5.\times\times\times$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. 답 5

02 $x^2-(a+2)x+2a<0$에서

$(x-2)(x-a)<0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

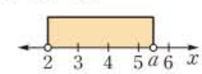
(i) $a<2$이면 부등식 ㉠의 해는 $a<x<2$

그런데 a는 자연수이므로 이 부등식을 만족시키는 정수 x는 없다.

(ii) $a=2$이면 부등식 ㉠은 $(x-2)^2<0$이므로 해는 없다.

(iii) $a>2$이면 부등식 ㉠의 해는 $2<x<a$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$5<a\le 6$

$a=5$이면 정수 x는 3, 4의 2개, $a=6$이면 정수 x는 3, 4, 5의 3개이다.

이때 a는 자연수이므로 $a=6$

이상에서 구하는 a의 값은 6이다. 답 6

1등급 비밀노트

마지막 단계에서 $5<a<6$, $5\le a<6$ 등과 같이 오답을 구하기 쉬운 문제이다. 이러한 유형의 문제는 등호를 포함시켰을 때 주어진 조건을 만족시키지 않으면 등호를 제외하고, 만족시키면 등호를 포함하는 방법으로 해결하는 것이 좋다.

03 ㄱ. $a>\frac{1}{3}$이면 주어진 부등식은

$a>\frac{1}{3}$이면 $\frac{1}{a}<3$

$(x-3)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0 \quad \therefore\ \frac{1}{a}<x<3$

ㄴ. $a=\frac{1}{3}$이면 주어진 부등식은

$(x-3)\left(\frac{1}{3}x-1\right)<0, \quad (x-3)^2<0$

따라서 해는 없다.

ㄷ. $a<0$이면 주어진 부등식은

$a<0$이면 $\frac{1}{a}<0$이므로 $\frac{1}{a}<3$

$(x-3)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0 \quad \therefore\ x<\frac{1}{a}$ 또는 $x>3$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

04 $2x^2-5x+2<0$에서 $(2x-1)(x-2)<0$

$\therefore\ \frac{1}{2}<x<2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=2$이므로 해가 $-\frac{\beta}{2}<x<-\frac{\alpha}{2}$, 즉 $-1<x<-\frac{1}{4}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)\left(x+\frac{1}{4}\right)<0 \qquad \therefore x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}<0$

양변에 4를 곱하면 $4x^2+5x+1<0$이므로

$a=4,\ b=5 \qquad \therefore a+b=9$　　답 9

05 해가 $x\le -2$ 또는 $x\ge 3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)\ge 0$

$\therefore x^2-x-6\ge 0$ …… ㉠

부등식 $ax^2+bx+c\le 0$과 부등식 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로 $\quad a<0$

따라서 ㉠의 양변에 a를 곱하면 $\quad ax^2-ax-6a\le 0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c\le 0$과 같으므로

$b=-a,\ c=-6a$

이것을 $bx^2+ax-c<0$에 대입하면

$-ax^2+ax+6a<0, \qquad x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0 \qquad \therefore -2<x<3$

답 $-2<x<3$

$a<0$에서 $-a>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

06 이차방정식 $x^2-4x+5k=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$ …… ㉠

$\alpha\beta=5k$ …… ㉡

또 두 근의 차가 6이므로

$\beta-\alpha=6$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad \alpha=-1,\ \beta=5$

이것을 ㉡에 대입하면

$-5=5k \qquad \therefore k=-1$

따라서 해가 $k+1\le x\le k+5$, 즉 $0\le x\le 4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$k=-1$이므로 $k+1=0,\ k+5=4$

$x(x-4)\le 0 \qquad \therefore x^2-4x\le 0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\le 0$과 같으므로

$a=-4,\ b=0 \qquad \therefore a+b=-4$　　답 ②

07 $x^2-2k(x+1)+15\ge 0$에서

$x^2-2kx-2k+15\ge 0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2-2kx-2k+15=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-2k+15)\le 0$

$k^2+2k-15\le 0, \qquad (k+5)(k-3)\le 0$

$\therefore -5\le k\le 3$　　답 ①

08 $kx^2-2kx+1<x^2+4x+5$에서

$(1-k)x^2+2(2+k)x+4>0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$1-k>0 \qquad \therefore k<1$ …… ㉠

이차방정식 $(1-k)x^2+2(2+k)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2+k)^2-4(1-k)<0$

$k^2+8k<0, \qquad k(k+8)<0$

$\therefore -8<k<0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad -8<k<0$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다.　　답 -1

09 이차부등식 $ax^2-(a-6)x+a-6>0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$ax^2-(a-6)x+a-6\le 0$

이 성립해야 하므로 $\quad a<0$ …… ㉠

이차방정식 $ax^2-(a-6)x+a-6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a-6)\}^2-4a(a-6)\le 0$

$-3a^2+12a+36\le 0, \qquad (a+2)(a-6)\ge 0$

$\therefore a\le -2$ 또는 $a\ge 6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad a\le -2$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다.　　답 ②

10 $x^2-x-6<0$에서 $\quad (x+2)(x-3)<0$

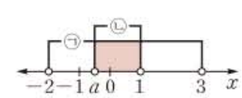
$\therefore -2<x<3$ …… ㉠

$x^2-(a+1)x+a<0$에서

$(x-a)(x-1)<0$ …… ㉡

(i) $a<1$일 때,

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 1개뿐이려면 오른쪽 그림에서



$-1\le a<0$

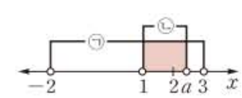
$a=0$이면 ㉡은 $0<x<1$이므로 정수인 해는 없다.

(ii) $a=1$일 때,

㉡에서 $(x-1)^2<0$이므로 해는 없다.

(iii) $a>1$일 때,

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 1개뿐이려면 오른쪽 그림에서



$a>2$

$a=2$이면 ㉡은 $1<x<2$이므로 정수인 해는 없다.

이상에서 $\quad -1\le a<0$ 또는 $a>2$　　답 ④

11 (i) 부등식 $x-a<x^2-a^2$에서

$x^2-x-a(a-1)>0$

$(x-a)(x+a-1)>0$

이때 a가 자연수이므로 $\quad x<1-a$ 또는 $x>a$

(ii) 부등식 $x^2-a^2\le x+a$에서

$x^2-x-a(a+1)\le 0$

$(x+a)(x-a-1)\le 0$

이때 a가 자연수이므로 $\quad -a\le x\le a+1$

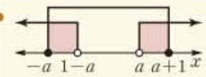
Ⅲ 부등식

(i), (ii)에서 $-a<1-a<a<a+1$이므로 주어진 부등식의 해는 $\quad -a\le x<1-a$ 또는 $a<x\le a+1$

이것이 $-3\le x<-2$ 또는 $b<x\le b+1$과 같으므로

$a=b=3 \qquad \therefore a+b=6$

답 ③



a, $a+1$은 자연수이므로 $-a\le x<1-a$는 $-3\le x<-2$와 같고 $a<x\le a+1$은 $b<x\le b+1$과 같다.

12 조건 (가)에서 가로, 세로의 길이는 양수이므로

$n-2>0, \ n>0$

$\therefore n>2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서

$2\{n(n-2)+2n+2(n-2)\}>88$

$n^2+2n-48>0, \qquad (n+8)(n-6)>0$

$\therefore n<-8$ 또는 $n>6 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad n>6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다.

답 7

13 이차방정식 $x^2-ax+a^2-3a=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식의 두 근이 모두 양수이려면

(i) $D=(-a)^2-4(a^2-3a)>0$

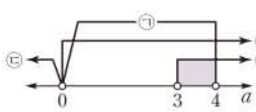
$3a^2-12a<0, \qquad 3a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $\alpha+\beta=a>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

(iii) $\alpha\beta=a^2-3a>0, \qquad a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3 \qquad \cdots\cdots$ ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$3<a<4$

답 ③

14 이차방정식 $x^2+2ax+6-a=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식의 두 근이 모두 음수이려면

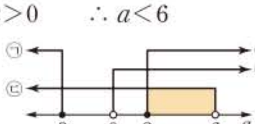
(i) $\dfrac{D}{4}=a^2-(6-a)\ge 0$

$a^2+a-6\ge 0, \qquad (a+3)(a-2)\ge 0$

$\therefore a\le -3$ 또는 $a\ge 2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $\alpha+\beta=-2a<0 \qquad \therefore a>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

(iii) $\alpha\beta=6-a>0 \qquad \therefore a<6 \qquad \cdots\cdots$ ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad 2\le a<6$

따라서 정수 a는 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 14이다.

답 14

15 이차방정식 $x^2+(2m-3)x+m^2-4m=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=m^2-4m<0, \qquad m(m-4)<0$

$\therefore 0<m<4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

음의 근의 절댓값이 양의 근보다 크려면

$\alpha+\beta=-(2m-3)<0, \qquad 2m-3>0$

$\therefore m>\dfrac{3}{2} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad \dfrac{3}{2}<m<4$

따라서 정수 m은 2, 3의 2개이다.

답 ②

16 $f(x)=x^2-2kx+2-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 근이 모두 1보다 작으므로 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(2-k)>0$에서

$k^2+k-2>0, \qquad (k+2)(k-1)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>1$

(ii) $f(1)=1-2k+2-k>0 \qquad \therefore k<1$

(iii) $-\dfrac{-2k}{2}=k<1$

이상에서 공통부분을 구하면 $\quad k<-2$

따라서 정수 k의 최댓값은 -3이다.

답 -3

17 $f(x)=x^2+(a^2-5)x+7a$라 하자.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으려면

$f(3)=9+3(a^2-5)+7a<0$

$3a^2+7a-6<0, \qquad (a+3)(3a-2)<0$

$\therefore -3<a<\dfrac{2}{3}$

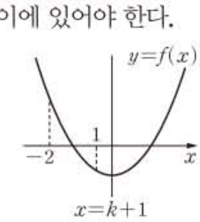
답 ②

18 $x^2+x-2=0$에서 $\qquad (x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

즉 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-2=0$의 서로 다른 두 근 중에서 한 근만이 -2와 1 사이에 있어야 한다.

$f(x)=x^2-2(k+1)x+k^2-2$라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은



$x=-\dfrac{-2(k+1)}{2}=k+1$

k는 자연수이므로 $k+1>1$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같아야 한다.

$f(-2)>0$에서 $\qquad 4+4k+4+k^2-2>0$

$k^2+4k+6>0, \qquad (k+2)^2+2>0$

$\therefore k$는 모든 실수 $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(1)<0$에서 $\qquad 1-2k-2+k^2-2<0$

$k^2-2k-3<0, \qquad (k+1)(k-3)<0$

$\therefore -1<k<3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad -1<k<3$

따라서 자연수 k는 1, 2이므로 구하는 합은 3이다.

답 ①

1등급을 위한 고난도 문제

본책 79~82쪽

01 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 -2, 1이므로

$ax^2+bx+c=a(x+2)(x-1)$
$=ax^2+ax-2a$
$\therefore b=a,\ c=-2a$

따라서 $ax^2-bx+c<0$, 즉 $ax^2-ax-2a<0$에서

$a(x^2-x-2)<0$, $\quad (x+1)(x-2)<0$

주어진 이차함수의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

$\therefore -1<x<2$

답 $-1<x<2$

02 $ax^2+2ax+3a>0$에서

$a(x^2+2x+3)>0$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. $a=0$이면 부등식 ㉠은
$0\cdot(x^2+2x+3)>0$
이므로 해는 없다.

ㄴ. $a>0$이면 부등식 ㉠은
$x^2+2x+3>0$, 즉 $(x+1)^2+2>0$
이므로 해는 모든 실수이다.

ㄷ. $a<0$이면 부등식 ㉠은
$x^2+2x+3<0$, 즉 $(x+1)^2+2<0$
이므로 해는 없다.

모든 실수 x에 대하여 $(x+1)^2+2>0$이므로 부등식 $(x+1)^2+2<0$을 만족시키는 해는 없다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

03 (i) $x<0$일 때,

$x^2-x-2\le0$, $\quad (x+1)(x-2)\le0$
$\therefore -1\le x\le2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -1\le x<0$ ⋯ ❶

(ii) $x\ge0$일 때,

$x^2+x-2\le0$, $\quad (x+2)(x-1)\le0$
$\therefore -2\le x\le1$

그런데 $x\ge0$이므로 $\quad 0\le x\le1$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$-1\le x\le1$
이므로 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $x<0$일 때, x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $x\ge0$일 때, x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $|x|^2=x^2$이므로 주어진 부등식은

$|x|^2+|x|-2\le0$
$(|x|+2)(|x|-1)\le0$
$\therefore -2\le|x|\le1$

그런데 $|x|\ge0$이므로

$0\le|x|\le1 \quad \therefore -1\le x\le1$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.

04 이차방정식 $x^2+ax+2a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(2a-4)=0$
$a^2-8a+16=0$, $\quad (a-4)^2=0$
$\therefore a=4$

즉 이차부등식 $(x+4)^2<2(x+4^2)$에서

$x^2+8x+16<2x+32$
$x^2+6x-16<0$, $\quad (x+8)(x-2)<0$
$\therefore -8<x<2$

따라서 정수 x는 -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1의 9개이다.

답 ⑤

05 $x^2-4nx+3n^2\le0$에서

$(x-n)(x-3n)\le0$

이때 n이 자연수이므로

$n\le x\le3n$

따라서 이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는
$3n-n+1=2n+1$이므로

$f(n)=2n+1$

$f(1)+f(3)+f(5)=f(m)$에서

$3+7+11=2m+1$
$2m=20 \quad \therefore m=10$

답 10

06 $x^2-(k^2+k+2)x+k^3+2k^2\le0$에서

$x^2-(k^2+k+2)x+k^2(k+2)\le0$
$(x-k^2)(x-k-2)\le0$

(i) $k^2>k+2$일 때,
$k^2-k-2>0$
$(k+1)(k-2)>0$
$\therefore k>2\ (\because k>0)$

이때 주어진 부등식의 해는
$k+2\le x\le k^2$
이고 부등식을 만족시키는 x의 최댓값이 3이므로
$k^2=3 \quad \therefore k=\pm\sqrt{3}$
그런데 $k>2$이므로 이것을 만족시키는 k는 존재하지 않는다.

(ii) $k^2=k+2$일 때,
$k^2-k-2=0$
$(k+1)(k-2)=0$
$\therefore k=2\ (\because k>0)$

이때 주어진 부등식은
$(x-4)^2\le0 \quad \therefore x=4$
그런데 이것은 x의 최댓값이 3이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k^2<k+2$일 때,
$k^2-k-2<0$, $\quad (k+1)(k-2)<0$
$\therefore 0<k<2\ (\because k>0)$

이때 주어진 부등식의 해는

$k^2 \le x \le k+2$

이 부등식을 만족시키는 x의 최댓값이 3이므로

$k+2=3 \qquad \therefore k=1$

이상에서 구하는 k의 값은 1이다. 답 ①

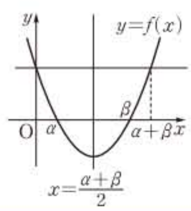
07 $f(x)=ax^2+bx+c$에서

$f(\alpha+\beta)=a(\alpha+\beta)^2+b(\alpha+\beta)+c$

이므로 주어진 부등식은

$f(x)<f(\alpha+\beta)$ …… ㉠

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$이므로



$f(\alpha+\beta)=f(0)$

따라서 ㉠에서 $f(x)<f(0)$이므로

주어진 부등식의 해는

$0<x<\alpha+\beta$ 답 ⑤

$y=f(x)$의 그래프는 축의 방정식 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$에 대하여 대칭이다.

08 액자틀의 넓이가 140 cm^2 이하가 되려면

$(8+2x)(5+2x)-5\cdot 8 \le 140$ ⋯ ❶

$4x^2+26x \le 140, \qquad 2x^2+13x-70 \le 0$

$(x+10)(2x-7) \le 0$

$\therefore -10 \le x \le \dfrac{7}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $\qquad 0<x\le\dfrac{7}{2}$ ⋯ ❷

x는 길이이므로 $x>0$

따라서 자연수 x의 최댓값은 3이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ x에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 x의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

09 이차부등식 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)>0$의 해가 $-3<x<0$이므로 $\qquad a+b<0$

해가 $-3<x<0$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x(x+3)<0 \qquad \therefore x^2+3x<0$

양변에 $a+b$를 곱하면

$(a+b)x^2+3(a+b)x>0$

이 부등식이 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)>0$과 같으므로

$b+c=3(a+b),\ c+a=0$ …… ㉠

$\therefore b=-2a,\ c=-a$

$c=-a$를 $b+c=3(a+b)$에 대입하면

$b-a=3a+3b$

$\therefore b=-2a$

이차부등식 $ax^2+bx+3c<0$, 즉 $ax^2-2ax-3a<0$에서 $a>0$이므로

$a+b<0$이고 $b=-2a$이므로

$a-2a<0$

$\therefore a>0$

$x^2-2x-3<0, \qquad (x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$ 답 ③

다른 풀이 ㉠에서

$a+b=k\ (k<0)$ …… ㉡

로 놓으면

$b+c=3k$ …… ㉢

$c+a=0$ …… ㉣

㉡+㉢+㉣을 하면 $\qquad 2(a+b+c)=4k$

$\therefore a+b+c=2k$ …… ㉤

㉤−㉡을 하면 $\qquad c=k$

㉤−㉢을 하면 $\qquad a=-k$

㉤−㉣을 하면 $\qquad b=2k$

이차부등식 $ax^2+bx+3c<0$, 즉 $-kx^2+2kx+3k<0$에서 $-k>0$이므로

$x^2-2x-3<0, \qquad (x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$

10 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $\dfrac{1}{10}<x<\dfrac{1}{5}$이므로 $\qquad a>0$ ⋯ ❶

해가 $\dfrac{1}{10}<x<\dfrac{1}{5}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\dfrac{1}{10}\right)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)<0 \qquad \therefore x^2-\dfrac{3}{10}x+\dfrac{1}{50}<0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-\dfrac{3}{10}ax+\dfrac{1}{50}a<0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로

$b=-\dfrac{3}{10}a,\ c=\dfrac{1}{50}a$ ⋯ ❷

이차부등식 $cx^2+bx+a\le 0$, 즉

$\dfrac{1}{50}ax^2-\dfrac{3}{10}ax+a\le 0$에서 $a>0$이므로

$x^2-15x+50\le 0, \qquad (x-5)(x-10)\le 0$

$\therefore 5\le x\le 10$ ⋯ ❸

따라서 정수 x는 5, 6, 7, 8, 9, 10이므로 구하는 합은 45이다. ⋯ ❹

답 45

채점 기준	비율
❶ a의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❷ b, c를 a로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 이차부등식 $cx^2+bx+a\le 0$의 해를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

11 해가 $x=1$뿐이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)^2\le 0$ …… ㉠

주어진 부등식과 부등식 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로 $\qquad a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$a(x-1)^2\ge 0, \qquad ax^2-2ax+a\ge 0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c\ge 0$과 같으므로

$b=-2a,\ c=a$

ㄱ. $ax^2+bx+c\le0$, 즉 $a(x-1)^2\le0$의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $-ax^2+bx-c\le0$, 즉 $-ax^2-2ax-a\le0$에서

$-a(x+1)^2\le0$

따라서 부등식의 해는 $x=-1$뿐이다.

ㄷ. $cx^2+2bx+4a\ge0$, 즉 $ax^2-4ax+4a\ge0$에서

$a(x-2)^2\ge0$

따라서 부등식의 해는 $x=2$뿐이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

$a<0$이므로 양변을 a로 나누면 $(x-1)^2\ge0$ 따라서 해는 모든 실수이다.

$-a>0$이므로 양변을 $-a$로 나누면 $(x+1)^2\le0$ $\therefore x=-1$

$a<0$이므로 양변을 a로 나누면 $(x-2)^2\le0$ $\therefore x=2$

12 해가 $\alpha\le x\le\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-\alpha)(x-\beta)\le0$

$\therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\le0$

이 부등식이 $x^2+ax+6\le0$과 같으므로

$a=-(\alpha+\beta),\ 6=\alpha\beta$ ······ ㉠

해가 $x\le\alpha+1$ 또는 $x\ge\beta+1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-\alpha-1)(x-\beta-1)\ge0$

$\therefore x^2-(\alpha+\beta+2)x+(\alpha+1)(\beta+1)\ge0$

이 부등식이 $x^2-7x+b\ge0$과 같으므로

$7=\alpha+\beta+2,\ b=(\alpha+1)(\beta+1)$ ······ ㉡

㉡에서 $\alpha+\beta=5$이므로 ㉠에서

$a=-(\alpha+\beta)=-5$

㉠에서 $\alpha\beta=6$이므로 ㉡에서

$b=(\alpha+1)(\beta+1)$
$=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$
$=6+5+1=12$

$\therefore a+b=7$ 답 7

13 주어진 그래프에서 이차부등식 $f(x)\le0$의 해는

$-1\le x\le2$

이때 $f\left(\frac{x+k}{2}\right)\le0$에서 $\frac{x+k}{2}=t$로 놓으면 $f(t)\le0$

이고, 부등식 $f(t)\le0$의 해는 $-1\le t\le2$이므로

$-1\le\frac{x+k}{2}\le2,\quad -2\le x+k\le4$

$\therefore -2-k\le x\le4-k$

따라서 $-2-k=-4,\ 4-k=2$이므로

$k=2$ 답 ③

이차부등식 $f(x)\le0$의 해
➡ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위

14 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $-2<x<1$이므로

$f(x)=a(x+2)(x-1)\ (a<0)$로 놓으면

$f(2x-1)=a(2x+1)(2x-2)$
$=2a(2x+1)(x-1)$

이때 $f(0)=-2a$이므로 $f(2x-1)\le f(0)$에서

$2a(2x+1)(x-1)\le-2a$

$2a\{(2x+1)(x-1)+1\}\le0$

$2a(2x^2-x)\le0,\quad x(2x-1)\ge0\ (\because a<0)$

$\therefore x\le0$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$

따라서 자연수 x의 최솟값은 1이다. 답 1

15 이차부등식 $x^2+(a-1)x-a+4\le0$의 해가 존재하지 않으므로 이차방정식 $x^2+(a-1)x-a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-4(-a+4)<0$

$a^2+2a-15<0,\quad (a+5)(a-3)<0$

$\therefore -5<a<3$ ··· ❶

$(x+2)a-3x<6$에서

$(a-3)x<-2(a-3)$

이때 $a-3<0$이므로 $\quad x>-2$ ··· ❷

따라서 정수 x의 최솟값은 -1이다. ··· ❸

답 -1

$-5<a<3$에서 $-8<a-3<0$

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❷ 부등식 $(x+2)a-3x<6$의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 x의 최솟값을 구할 수 있다.	10%

16 $a(x^2-2x+2)>-2x$에서

$ax^2-2(a-1)x+2a>0$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$a<0$ ······ ㉠

이차방정식 $ax^2-2(a-1)x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-2a^2\le0$

$-a^2-2a+1\le0,\quad a^2+2a-1\ge0$

$\therefore a\le-1-\sqrt{2}$ 또는 $a\ge-1+\sqrt{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$a\le-1-\sqrt{2}$ 답 ①

17 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$x^2+mx+am+b>0$

이 성립하므로 이차방정식 $x^2+mx+am+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=m^2-4(am+b)<0$

$\therefore m^2-4am-4b<0$

해가 $-2<m<4$이고 m^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(m+2)(m-4)<0,\quad m^2-2m-8<0$

이 부등식이 $m^2-4am-4b<0$과 같으므로

$4a=2,\ 4b=8 \quad \therefore a=\frac{1}{2},\ b=2$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\cdot2=1$ 답 ②

18 $|x|=t\ (t\geq 0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-2at+2a^2+a\geq 0$

$x^2=|x|^2=t^2$

$f(t)=t^2-2at+2a^2+a=(t-a)^2+a^2+a$라 하면

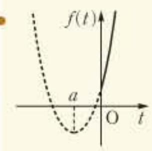
$t\geq 0$에서 $f(t)\geq 0$이어야 한다. ··· ❶

(i) $a<0$일 때, $f(0)\geq 0$이어야 하므로

$2a^2+a\geq 0, \qquad a(2a+1)\geq 0$

$\therefore a\leq -\frac{1}{2}$ 또는 $a\geq 0$

그런데 $a<0$이므로 $\qquad a\leq -\frac{1}{2}$

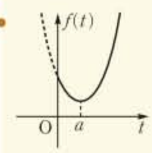


(ii) $a\geq 0$일 때, $f(a)\geq 0$이어야 하므로

$a^2+a\geq 0, \qquad a(a+1)\geq 0$

$\therefore a\leq -1$ 또는 $a\geq 0$

그런데 $a\geq 0$이므로 $\qquad a\geq 0$



(i), (ii)에서 a의 값의 범위는

$a\leq -\frac{1}{2}$ 또는 $a\geq 0$ ··· ❷

따라서 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=0$이므로

$\beta-\alpha=\frac{1}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{2}$

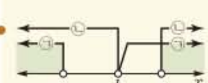
채점 기준	비율
❶ $\lvert x\rvert=t$로 놓고 주어진 부등식이 성립할 t에 대한 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

19 $a<b<c$이므로 부등식 $(x-a)(x-b)>0$의 해는 $\quad x<a$ 또는 $x>b$ ······ ㉠

부등식 $(x-b)(x-c)>0$의 해는

$x<b$ 또는 $x>c$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$x<a$ 또는 $x>c$

$\therefore a=-1,\ c=6$ ··· ❶

따라서 $x^2+ax-c<0$, 즉 $x^2-x-6<0$에서

$(x+2)(x-3)<0 \qquad \therefore -2<x<3$ ··· ❷

답 $-2<x<3$

채점 기준	비율
❶ a, c의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ 이차부등식 $x^2+ax-c<0$의 해를 구할 수 있다.	30 %

20 $x^2-5x-6>0$에서

$(x+1)(x-6)>0 \qquad \therefore x<-1$ 또는 $x>6$

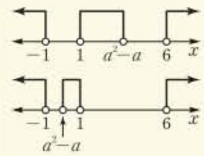
$x^2+a^2<(a^2-a+1)x+a$에서

$x^2-(a^2-a+1)x+(a^2-a)<0$

$(x-1)(x-a^2+a)<0$

$\therefore \begin{cases} a^2-a>1\text{일 때,} & 1<x<a^2-a \\ a^2-a=1\text{일 때,} & \text{해가 없다.} \\ a^2-a<1\text{일 때,} & a^2-a<x<1 \end{cases}$

이때 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면



$-1\leq a^2-a\leq 6$

$-1\leq a^2-a$에서 $\qquad a^2-a+1\geq 0$

$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq 0$

$\therefore a$는 모든 실수 ······ ㉠

$a^2-a\leq 6$에서 $\qquad a^2-a-6\leq 0$

$(a+2)(a-3)\leq 0$

$\therefore -2\leq a\leq 3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\qquad -2\leq a\leq 3$

따라서 정수 a는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 6개이다.

답 6

21 $|x-1|(x-2)\geq 0$에서 $|x-1|\geq 0$이므로

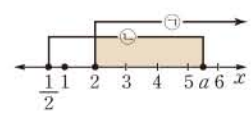
$x=1$ 또는 $x\geq 2$ ······ ㉠

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이므로 부등식 $(2x-1)(x-a)\leq 0$의 해는

$\frac{1}{2}\leq x\leq a$ ······ ㉡

이어야 하고 오른쪽 그림에서

$5\leq a<6$



답 ④

22 $f(x)g(x)\leq 0$에서

$f(x)\leq 0,\ g(x)\geq 0$ 또는 $f(x)\geq 0,\ g(x)\leq 0$

이때 $f(x)\leq g(x)$이므로 $\qquad f(x)\leq 0,\ g(x)\geq 0$

$f(x)\leq 0$에서 $\qquad -1\leq x\leq 2$ ······ ㉠

$g(x)\geq 0$에서 $\qquad -2\leq x\leq 1$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\qquad -1\leq x\leq 1$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이다. 답 ③

23 두 이차방정식

$x^2+(a-2)x+2-a=0,$ ······ ㉠

$x^2+(a+2)x+2a+1=0$ ······ ㉡

의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=(a-2)^2-4(2-a)=a^2-4$

$=(a+2)(a-2)$

$D_2=(a+2)^2-4(2a+1)=a^2-4a$

$=a(a-4)$

(i) ㉠은 실근, ㉡은 허근을 가질 때,

$D_1=(a+2)(a-2)\geq 0$에서

$a\leq -2$ 또는 $a\geq 2$ ······ ㉢

$D_2=a(a-4)<0$에서

$0<a<4$ ······ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $\qquad 2\leq a<4$

(ii) ㉠은 허근, ㉡은 실근을 가질 때,

$D_1=(a+2)(a-2)<0$에서

$-2<a<2$ …… ㉤

$D_2=a(a-4)\geq 0$에서

$a\leq 0$ 또는 $a\geq 4$ …… ㉥

㉤, ㉥의 공통부분을 구하면 $-2<a\leq 0$

(i), (ii)에서

$-2<a\leq 0$ 또는 $2\leq a<4$

따라서 정수 a는 -1, 0, 2, 3이므로 구하는 합은 4이다.

답 4

24 (i) $x+2a\leq x^2$, 즉 $x^2-x-2a\geq 0$에서

$x^2-x-2a=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2a$ …… ㉠

$0\leq x\leq 1$에서 ㉠은 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{4}-2a$를 갖고, 주어진 부등식이 항상 성립하므로

$-\frac{1}{4}-2a\geq 0$ $\therefore a\leq -\frac{1}{8}$ ··· ❶

$p\leq x\leq q$에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면 $p\leq x\leq q$에서 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0이어야 한다.

(ii) $x^2\leq 2x+3b$, 즉 $x^2-2x-3b\leq 0$에서

$x^2-2x-3b=(x-1)^2-1-3b$ …… ㉡

$0\leq x\leq 1$에서 ㉡은 $x=0$일 때 최댓값 $-3b$를 갖고, 주어진 부등식이 항상 성립하므로

$-3b\leq 0$ $\therefore b\geq 0$ ··· ❷

$p\leq x\leq q$에서 부등식 $f(x)\leq 0$이 항상 성립하려면 $p\leq x\leq q$에서 ($f(x)$의 최댓값)≤ 0이어야 한다.

(i), (ii)에서 $a\leq -\frac{1}{8}$, $b\geq 0$이므로

$b-8a\geq 1$

$a\leq -\frac{1}{8}$에서 $-8a\geq 1$이고 $b\geq 0$이므로 $b-8a\geq 1$

따라서 $b-8a$의 최솟값은 1이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-8a$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

25 A음료 한 잔의 가격을 $200x$원 인상하면 하루 판매량이 $4x$잔 줄어드므로 하루 판매액은

$(2000+200x)(100-4x)$ (원)

이고 하루 판매액이 24만 원 이상이려면

$(2000+200x)(100-4x)\geq 240000$

$x^2-15x+50\leq 0$, $(x-5)(x-10)\leq 0$

$\therefore 5\leq x\leq 10$ …… ㉠

A음료 한 잔의 가격을 $100x$원 인하하면 하루 판매량이 $10x$잔 늘어나므로 하루 판매액은

$(2000-100x)(100+10x)$ (원)

이고 하루 판매액이 22만 원 이상이려면

$(2000-100x)(100+10x)\geq 220000$

$x^2-10x+20\leq 0$

$\therefore 5-\sqrt{5}\leq x\leq 5+\sqrt{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$5\leq x\leq 5+\sqrt{5}$

$5+\sqrt{5}=7.\times\times\times$

따라서 자연수 x는 5, 6, 7이므로 구하는 합은 18이다.

답 18

26 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a-1)\}^2-4(a-3)$

$=a^2-6a+13=(a-3)^2+4>0$

이므로 모든 실수 a에 대하여 주어진 이차방정식은 실근을 갖는다.

ㄱ. $\alpha=-\beta$이면

$\alpha+\beta=a-1$에서 $0=a-1$ $\therefore a=1$

ㄴ. α와 β의 부호가 서로 다르면

$\alpha\beta=a-3<0$ $\therefore a<3$

ㄷ. (i) $\alpha>0$, $\beta>0$일 때,

$\alpha+\beta=a-1>0$

$\therefore a>1$ …… ㉠

$\alpha\beta=a-3>0$

$\therefore a>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a>3$

(ii) $\alpha<0$, $\beta<0$일 때,

$\alpha+\beta=a-1<0$

$\therefore a<1$ …… ㉢

$\alpha\beta=a-3>0$

$\therefore a>3$ …… ㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 a의 값은 없다.

(i), (ii)에서 $a>3$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

27 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k+3)\geq 0$

$k^2+k-2\geq 0$, $(k+2)(k-1)\geq 0$

$\therefore k\leq -2$ 또는 $k\geq 1$ …… ㉠

ㄱ. $\alpha>0$, $\beta>0$이면 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이므로

$\alpha+\beta=2(k+1)>0$에서 $k>-1$ …… ㉡

$\alpha\beta=k+3>0$에서 $k>-3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $k\geq 1$

ㄴ. $\alpha>0$, $\beta<0$이면 $\alpha\beta<0$이므로

$\alpha\beta=k+3<0$에서 $k<-3$ …… ㉣

㉠, ㉣의 공통부분을 구하면 $k<-3$

ㄷ. $\alpha<-\beta$, $\beta>0$이면 $\alpha<0$이므로

$\beta>0$에서 $-\beta<0$이므로 $\alpha<-\beta<0$

$\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta<0$

$\alpha+\beta=2(k+1)<0$에서 $k<-1$ …… ㉤

$\alpha\beta=k+3<0$에서 $k<-3$ …… ㉥

㉠, ㉤, ㉥의 공통부분을 구하면 $k<-3$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

28 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$$D_1=(-a)^2-4b=0 \qquad \therefore b=\frac{1}{4}a^2$$

이차방정식 $x^2-(a+3)x+a+6=0$의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D_2라 하면 이 이차방정식이 두 양의 실근을 가지므로

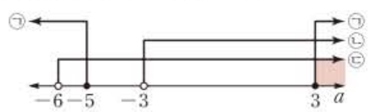
(i) $D_2=\{-(a+3)\}^2-4(a+6)\ge 0$에서

$a^2+2a-15\ge 0$, $\quad (a+5)(a-3)\ge 0$

$\therefore a\le -5$ 또는 $a\ge 3$ $\quad$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=a+3>0$에서 $\quad a>-3$ $\quad$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=a+6>0$에서 $\quad a>-6$ $\quad$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad a\ge 3$

$$a-b=a-\frac{1}{4}a^2=-\frac{1}{4}(a-2)^2+1$$

이므로 $a\ge 3$에서 $a-b$는 $a=3$일 때 최댓값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

$-\frac{1}{4}\cdot(3-2)^2+1=\frac{3}{4}$

답 ③

29 $f(x)=2(x-b)(x-c)-(x-a)^2$이라 하면

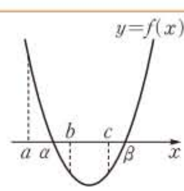
$f(a)=2(a-b)(a-c)>0$

$a<b<c$이므로
$a-b<0$, $a-c<0$
$\therefore (a-b)(a-c)>0$

$f(b)=-(b-a)^2<0$

$f(c)=-(c-a)^2<0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore a<\alpha<b<c<\beta$ $\quad$ 답 ④

30 $f(x)=x^2+4mx+m^2+3$이라 하고, 방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(2m)^2-(m^2+3)\ge 0$에서

$m^2-1\ge 0$, $\quad (m+1)(m-1)\ge 0$

$\therefore m\le -1$ 또는 $m\ge 1$

(ii) $f(-2)=4-8m+m^2+3\le 0$에서

$m^2-8m+7\le 0$, $\quad (m-1)(m-7)\le 0$

$\therefore 1\le m\le 7$

(iii) $f(0)=m^2+3>0$이므로 m은 모든 실수이다.

이상에서 $\quad 1\le m\le 7$

따라서 정수 m은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이다.

답 ⑤

31 이차방정식 $(a+1)x^2+4x-a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-(a+1)(-a+1)=a^2+3>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다. ⋯ ❶

$f(x)=(a+1)x^2+4x-a+1$이라 하자.

(i) $f(0)=0$일 때,

$f(0)=-a+1=0$이므로 $\quad a=1$

주어진 이차방정식은 $2x^2+4x=0$이므로

$x(x+2)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 $0\le x\le 2$에서 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(ii) $f(2)=0$일 때,

$f(2)=3a+13=0$이므로 $\quad a=-\frac{13}{3}$

주어진 이차방정식은 $-\frac{10}{3}x^2+4x+\frac{16}{3}=0$이므로

$5x^2-6x-8=0$

$(5x+4)(x-2)=0 \quad \therefore x=-\frac{4}{5}$ 또는 $x=2$

따라서 $0\le x\le 2$에서 오직 한 개의 실근을 갖는다. ⋯ ❷

(iii) $f(0)f(2)<0$일 때,

$(-a+1)(3a+13)<0$

$(a-1)(3a+13)>0$

$\therefore a<-\frac{13}{3}$ 또는 $a>1$ ⋯ ❸

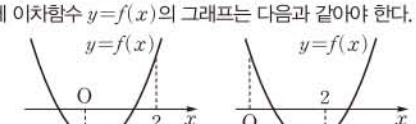
이상에서 $\quad a\le -\frac{13}{3}$ 또는 $a\ge 1$ ⋯ ❹

답 $a\le -\frac{13}{3}$ 또는 $a\ge 1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(0)=0$ 또는 $f(2)=0$일 때의 a의 값이 조건을 만족시키는지 알 수 있다.	30 %
❸ $f(0)f(2)<0$일 때 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

1등급 비밀노트

$f(0)\ne 0$, $f(2)\ne 0$일 때, 주어진 조건을 만족시키려면 $a+1>0$인 경우에 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



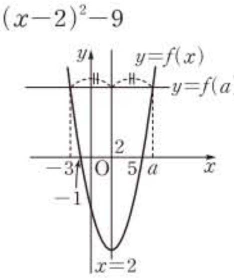
따라서 (iii)에서 두 수의 함숫값의 부호가 서로 다름을 이용하여 푼다.

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 83쪽

01 $f(x)=(x+1)(x-5)=(x-2)^2-9$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고 부등식 $f(x)<f(a)$의 해가 $-3<x<a$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(a)$가 만나는 두 점의 x좌표는 -3, a이다.



즉 $2-(-3)=a-2$에서 $\quad a=7$

직선 $x=2$로부터 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(a)$의 두 교점까지의 거리가 같다.

부등식 $f(x)<a$에서 $(x+1)(x-5)<7$

$x^2-4x-12<0$, $(x+2)(x-6)<0$

$\therefore -2<x<6$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 14이다. 답 14

02 세 지점 A, B, C를 B를 원점으로 하는 수직선 위에 놓고 1 km를 1로 생각하면

A(-10), B(0), C(20)

보관 창고의 좌표를 t라 하면 보관 창고는 B와 C 사이에 있으므로 $0<t<20$ …… ㉠

이때 하루에 드는 총 운송비는

$200(t+10)^2+100t^2+300(20-t)^2$ (원)

이므로 하루에 드는 총 운송비가 155000원 이하이려면

$200(t+10)^2+100t^2+300(20-t)^2\le 155000$

$3t^2-40t-75\le 0$, $(3t+5)(t-15)\le 0$

$\therefore -\dfrac{5}{3}\le t\le 15$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<t\le 15$

따라서 보관 창고는 B지점에서 최대 15 km 떨어진 지점까지 지을 수 있다. 답 ④

03 빗변이 아닌 두 변의 길이를 a, b $(a<b)$라 하면

조건 ㈎에 의하여

$a+b=11$ …… ㉠

조건 ㈏에 의하여 $\dfrac{1}{2}ab>14$

$\therefore ab>28$ …… ㉡

㉠에서 $b=11-a$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$a(11-a)>28$, $a^2-11a+28<0$

$(a-4)(a-7)<0$ $\therefore 4<a<7$

그런데 조건 ㈐에서 a는 자연수이므로 $a=5$

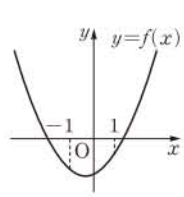
$a=6$이면 $b=5$이므로 $a>b$ $\therefore a\ne 6$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=6$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$ 답 ①

04 $f(x)=x^2+(t-2)x+2t$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(1)=1+t-2+2t\le 0$에서

$3t-1\le 0$ $\therefore t\le\dfrac{1}{3}$

(ii) $f(-1)=1-t+2+2t\le 0$에서

$t+3\le 0$ $\therefore t\le -3$

(i), (ii)에서 $t\le -3$이므로 실수 t의 최댓값은 -3이다.

답 ①

05 부등식 $x^2+2ax-3a^2\le 0$에서

$(x+3a)(x-a)\le 0$

$\therefore -3a\le x\le a$ …… ㉠

부등식 $x^2-2ax-3a^2<0$에서

$(x+a)(x-3a)<0$

$\therefore -a<x<3a$ …… ㉡

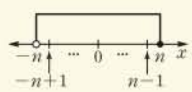
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-a<x\le a$ …… ㉢

(i) $a=n$ (n은 자연수)일 때,

㉢을 만족시키는 정수 x는

$-n+1$, $-n+2$, $\cdots$, -2, -1, 0, 1, 2, $\cdots$, $n-1$, n

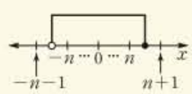


$\therefore f(a)=2n=2a$, $S(a)=n=a$

(ii) $n<a<n+1$ (n은 음이 아닌 정수)일 때,

㉢을 만족시키는 정수 x는

$-n$, $-n+1$, $-n+2$, $\cdots$, -2, -1, 0, 1, 2, $\cdots$, $n-1$, n



$\therefore f(a)=2n+1$, $S(a)=0$

$f(a)=24$이면 $24=2\cdot 12$이므로 (i)에 의하여 ($a=12$)

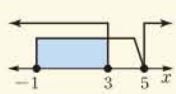
$p=12$

$f(a)=37$이면 $37=2\cdot 18+1$이므로 (ii)에 의하여 ($18<a<19$)

$q=0$

$\therefore p+q=12$ 답 12

06 주어진 연립부등식의 해가 $-1\le x\le 3$ 또는 $x=5$이려면



$x^2+ax+b=(x-3)(x-5)\ge 0$,

$x^2+cx+d=(x+1)(x-5)\le 0$

이어야 한다.

$x^2+ax+b=x^2-8x+15$에서 $a=-8$, $b=15$

$x^2+cx+d=x^2-4x-5$에서 $c=-4$, $d=-5$

$\therefore ad-bc=40-(-60)=100$ 답 100

07 $x^2-x-n-n^2\ge 0$에서

$(x+n)(x-n-1)\ge 0$

$\therefore x\le -n$ 또는 $x\ge n+1$ …… ㉠

n은 자연수이므로 $-n<n+1$

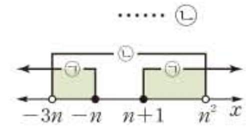
$x^2+n(3-n)x-3n^3<0$에서

$(x+3n)(x-n^2)<0$

$\therefore -3n<x<n^2$ …… ㉡

n은 자연수이므로 $-3n<n^2$

오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-3n<x\le -n$

또는 $n+1\le x<n^2$

$n\ne 1$이므로 $n\ge 2$에서 $n+1<n^2$

즉 정수 x의 개수는

$\{-n-(-3n)\}+\{n^2-(n+1)\}=n^2+n-1$

따라서 $n^2+n-1>55$에서

$n^2+n-56>0$, $(n+8)(n-7)>0$

$\therefore n>7$ ($\because n\ge 2$)

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 8이다. 답 8

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 84~87쪽

01 전략 부등식의 성질과 두 수의 차를 이용하여 두 수의 대소 관계를 조사한다.

풀이 ㄱ. $|a|>1$이면 $0<\dfrac{1}{|a|}<1$이다.

$|a|>1$의 양변을 $|a|$로 나누면 $\dfrac{1}{|a|}<1$

ㄴ. $ab>0$이므로 $b<a<0$에서

$$\frac{b}{ab}<\frac{a}{ab}<0 \qquad \therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$$

ㄷ. $\dfrac{a+1}{b+1}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b(a+1)-a(b+1)}{b(b+1)}=\dfrac{b-a}{b(b+1)}<0$

$0<b<a$에서 $b-a<0$

$$\therefore \frac{a+1}{b+1}<\frac{a}{b}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

02 전략 두 수의 차의 부호를 구하여 세 수 사이의 대소 관계를 조사한다.

풀이 $A-B$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

$\quad-(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

>0

서로 다른 세 양수 a, b, c에 대하여 $a+b+c>0$, $(a-b)^2>0$, $(b-c)^2>0$, $(c-a)^2>0$

$\therefore A>B$ ...... ㉠

$C-A$

$=3(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

$=2(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c)$

$=(a^3+b^3-a^2b-b^2a)+(b^3+c^3-b^2c-c^2b)$

$\quad+(c^3+a^3-c^2a-a^2c)$

$=\{a^2(a-b)-b^2(a-b)\}+\{b^2(b-c)-c^2(b-c)\}$

$\quad+\{c^2(c-a)-a^2(c-a)\}$

$=(a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a)$

>0

$\therefore C>A$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $B<A<C$ 답 ③

03 전략 먼저 부등식의 해가 주어진 해와 일치하기 위한 a, b의 조건을 찾는다.

풀이 $ax+x-b>0$에서 $(a+1)x>b$

이 부등식의 해가 $x<1$이므로

$$a+1<0 \qquad \therefore x<\frac{b}{a+1}$$

따라서 $\dfrac{b}{a+1}=1$이므로 $b=a+1$ ...... ㉠

$ax-bx-b<0$에서 $(a-b)x<b$

$\{a-(a+1)\}x<a+1, \quad -x<a+1$

$\therefore x>-a-1$

이때 a가 정수이므로 이 부등식을 만족시키는 정수 x의 최솟값은 $-a$

$-a=4$에서 $a=-4$

㉠에 $a=-4$를 대입하면 $b=-3$

$\therefore a+b=-7$ 답 ④

04 전략 두 연립부등식의 해를 각각 구하여 해가 같아지도록 하는 a, b의 값을 구한다.

풀이 $2x-5<x+1$에서 $x<6$

$10-x<x+a$에서

$$-2x<a-10 \qquad \therefore x>\frac{10-a}{2}$$

이때 연립부등식 $\begin{cases}2x-5<x+1\\10-x<x+a\end{cases}$의 해가 존재하므로

그 해는 $\dfrac{10-a}{2}<x<6$ ...... ㉠

$3x+b<2-x$에서

$$4x<2-b \qquad \therefore x<\frac{2-b}{4}$$

$x+3<2x+1$에서 $x>2$

이때 연립부등식 $\begin{cases}3x+b<2-x\\x+3<2x+1\end{cases}$의 해가 존재하므로

그 해는 $2<x<\dfrac{2-b}{4}$ ...... ㉡

두 연립부등식의 해가 서로 같으므로 ㉠, ㉡에서

$$\frac{10-a}{2}=2,\ 6=\frac{2-b}{4}$$

따라서 $a=6$, $b=-22$이므로

$a+b=-16$ 답 ①

05 전략 선분의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 조건을 이용하여 부등식을 세운다.

풀이 가로에 있는 선분의 길이의 합은

$\overline{AD}+\overline{EF}+\overline{BC}$

$2x\cdot3=6x$

$\overline{EB}=8-x$이므로 세로에 있는 선분의 길이의 합은

$8\cdot3+(8-x)=32-x$

$\overline{AE}+\overline{EB}=8$, $\overline{DF}+\overline{FC}=8$, $\overline{MN}+\overline{GI}=8$, $\overline{HJ}=8-x$

$6x+(32-x)\le62$이므로

$5x+32\le62 \qquad \therefore x\le6$ ...... ㉠

$\overline{BI}=\overline{JC}=\overline{EB}=8-x$이므로

$\overline{IJ}=2x-2(8-x)=4x-16$

직사각형 GIJH의 둘레의 길이는

$2\{(4x-16)+(8-x)\}=6x-16$

이므로 $6x-16>3x$에서 $x>\dfrac{16}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\dfrac{16}{3}<x\le6$ 답 ④

06 전략 $A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$로 바꾸어 푼다.

풀이 $2x+b<a(x-1)+b$에서

$(2-a)x<-a$ ...... ㉠

$a(x-1)+b<ax+4$에서

$ax-a+b<ax+4$

$\therefore 0\cdot x<a-b+4$ ...... ㉡

주어진 부등식의 해가 존재하므로

$a-b+4>0$ ...... ㉢

이고 부등식 ㉡의 해는 모든 실수이다.

주어진 부등식의 해가 $x>3$이므로 ㉠에서

$2-a<0 \qquad \therefore x>-\dfrac{a}{2-a}$

즉 $-\dfrac{a}{2-a}=3$이므로 $\quad -a=6-3a \qquad \therefore a=3$

㉢에 $a=3$을 대입하면 $\quad 3-b+4>0 \qquad \therefore b<7$

따라서 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6)$

의 6개이다. 답 ③

07 전략 $|x|<a\ (a>0)$이면 $-a<x<a$이다.

풀이 $a|x|-a^2<b|x|-b^2$에서

$(a-b)|x|<a^2-b^2$

$(a-b)|x|<(a+b)(a-b)$

$a>b>0$에서 $a-b>0$이므로 양변을 $a-b$로 나누면

$|x|<a+b$

$\therefore -a-b<x<a+b$ 답 ②

08 전략 $x<0$일 때와 $x\ge0$일 때로 나누어 부등식의 해를 구한다.

풀이 (i) $x<0$일 때, $\langle x\rangle=-2x$이므로 주어진 부등식은

$4x^2+2x-2\le0, \qquad 2x^2+x-1\le0$

$(x+1)(2x-1)\le0 \qquad \therefore -1\le x\le\dfrac{1}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $\qquad -1\le x<0$

(ii) $x\ge0$일 때, $\langle x\rangle=3x$이므로 주어진 부등식은

$9x^2-3x-2\le0, \qquad (3x+1)(3x-2)\le0$

$\therefore -\dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{2}{3}$

그런데 $x\ge0$이므로 $\qquad 0\le x\le\dfrac{2}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1\le x\le\dfrac{2}{3}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\dfrac{2}{3}$이므로 $\qquad \alpha+\beta=-\dfrac{1}{3}$ 답 ③

1등급 비밀노트

$\langle x\rangle^2-\langle x\rangle-2\le0$에서

$(\langle x\rangle+1)(\langle x\rangle-2)\le0$

$\therefore -1\le\langle x\rangle\le2$ ...... ㉠

따라서 $x<0$일 때와 $x\ge0$일 때로 나누어 부등식 ㉠의 해를 구해도 된다.

09 전략 주어진 부등식을 $f(x)>0$ 꼴로 변형한 후 $f(x)$를 인수분해한다.

풀이 부등식 ㉠에서

$(a^2-b^2)x^2-4(a^2-b^2)x+3(a^2-b^2)>0$

$(a^2-b^2)(x^2-4x+3)>0$ ...... ㉡

ㄱ. $|a|<|b|$이면 $a^2<b^2$이므로 $\qquad a^2-b^2<0$

㉡에서 부등식 ㉠의 해는 $\qquad x^2-4x+3<0$

$(x-1)(x-3)<0 \qquad \therefore 1<x<3$

ㄴ. $a=b$이면 ㉡에서

$a=b$이면 $a^2-b^2=0$

$0\cdot(x^2-4x+3)>0$

이므로 부등식 ㉠의 해는 없다.

ㄷ. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$에서 $a+b<0$, $b>0$이면

$a-b=a+b-2b<0$

$a+b<0$, $-2b<0$이므로 $a+b-2b<0$

이므로 $\qquad (a+b)(a-b)>0$

㉡에서 부등식 ㉠의 해는 $\qquad x^2-4x+3>0$

$(x-1)(x-3)>0 \qquad \therefore x<1$ 또는 $x>3$

따라서 자연수 x의 최솟값은 4이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

10 전략 주어진 조건을 이용하여 t에 대한 이차부등식을 세운다.

풀이 물체의 높이 h m가 165 m 이상이므로

$70t-5t^2\ge165, \qquad 5t^2-70t+165\le0$

$t^2-14t+33\le0, \qquad (t-3)(t-11)\le0$

$\therefore 3\le t\le11$

따라서 이 물체의 높이가 165 m 이상인 시간은 3초부터 11초까지인 8초 동안이다. 답 ④

11 전략 부등식의 해를 이용하여 이차부등식을 완성하고 a, b, c 사이의 관계를 찾는다.

풀이 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

해가 $p<x<q$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-p)(x-q)<0$

$(x-\alpha)(x-\beta)<0 \qquad \therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$

양변에 2를 곱하면 $\qquad 2x^2-2(\alpha+\beta)x+2\alpha\beta<0$

이 부등식이 $2x^2-4x+1<0$과 같으므로

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $\dfrac{1}{\beta}<x<\dfrac{1}{\alpha}$이므로

$a>0$

해가 $\dfrac{1}{\beta}<x<\dfrac{1}{\alpha}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(x-\dfrac{1}{\beta}\right)<0$

$\therefore x^2-\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)x+\dfrac{1}{\alpha\beta}<0$

양변에 a를 곱하면 $\qquad ax^2-a\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)x+\dfrac{a}{\alpha\beta}<0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로

$-a\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=b,\ \dfrac{a}{\alpha\beta}=c$

이때 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=4$이므로 　 $b=-4a$

$\frac{1}{\alpha\beta}=2$이므로 　 $c=2a$

따라서 부등식 $(a+b)x^2+(b+c)x+4c>0$에서

$(a-4a)x^2+(-4a+2a)x+4\cdot 2a>0$

$-3ax^2-2ax+8a>0$

$a>0$이므로

$3x^2+2x-8<0$, 　 $(x+2)(3x-4)<0$

$\therefore -2<x<\frac{4}{3}$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다. 　 답 ③

다른 풀이 이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 해가 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{a}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=4$ 　 $\therefore b=-4a$

$\frac{c}{a}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=2$ 　 $\therefore c=2a$

12 **전략** a의 값의 부호에 따라 부등식 $f(x)<0$이 해를 가질 조건을 구한다.

풀이 (ⅰ) $a<0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로 부등식 $f(x)<0$은 항상 해를 갖는다.

(ⅱ) $a>0$일 때,

이차방정식 $ax^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-3a>0$, 　 $3a<1$

$\therefore a<\frac{1}{3}$

그런데 $a>0$이므로 　 $0<a<\frac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a<0$ 또는 $0<a<\frac{1}{3}$이므로 정수 a의 최댓값은 -1이다. 　 답 ③

13 **전략** 먼저 주어진 부등식을 한 문자에 대한 내림차순으로 정리한다.

풀이 주어진 부등식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(2y+5)x+(4y^2+ay+b)>0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2(2y+5)x+(4y^2+ay+b)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+b)<0$

일품 BOX

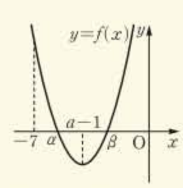
$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

$\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

부등식 $mx<n$이 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건은
$m=0$, $n>0$

b는 양수이므로
$1-b<1+b$

a, b는 양수이므로
$a+2\le 1-b$이면
$a+b\le -1$이 되어 모순이다.
$\therefore 1-b<a+2$



위의 그림에서
$-7<a-1$, $f(-7)>0$이면 두 근은 모두 -7보다 크다.

㉡에서 $-7<3a<-3$

㉡에서 $1<-a<\frac{7}{3}$

$4y^2+20y+25-4y^2-ay-b<0$

$\therefore (20-a)y<b-25$

이 부등식이 모든 실수 y에 대하여 성립해야 하므로

$20-a=0$, $b-25>0$ 　 $\therefore a=20$, $b>25$

따라서 b는 정수이므로 $a+b$의 최솟값은

$20+26=46$ 　 답 ②

14 **전략** 두 부등식의 해를 각각 구하여 수직선 위에 나타낸 후 공통부분이 존재하지 않도록 하는 a, b의 조건을 구한다.

풀이 $x^2-2ax+a^2-4<0$에서

$x^2-2ax+(a+2)(a-2)<0$

$(x-a+2)(x-a-2)<0$

$\therefore a-2<x<a+2$ 　 ...... ㉠

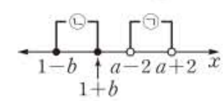
$x^2-2x+1-b^2\le 0$에서

$x^2-2x+(1+b)(1-b)\le 0$

$(x-1-b)(x-1+b)\le 0$

$\therefore 1-b\le x\le 1+b$ 　 ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않아야 하므로 오른쪽 그림에서



$1+b\le a-2$ 　 $\therefore a-b\ge 3$

따라서 $a-b$의 최솟값은 3이다. 　 답 ③

15 **전략** 이차방정식의 두 근이 모두 음수일 조건을 이용하여 먼저 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하고, 두 근을 α, β $(\alpha<\beta<0)$라 하자.

ㄱ. (ⅰ) $\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-(3a+7)>0$에서

$a^2-5a-6>0$, 　 $(a+1)(a-6)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>6$

(ⅱ) $\alpha+\beta=2(a-1)<0$에서 　 $a<1$

(ⅲ) $\alpha\beta=3a+7>0$에서 　 $a>-\frac{7}{3}$

이상에서 공통부분을 구하면

$-\frac{7}{3}<a<-1$ 　 ...... ㉡

ㄴ. $f(x)=x^2-2(a-1)x+3a+7$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=a-1$이고, ㉡에서

$-\frac{10}{3}<a-1<-2$이므로 　 $-7<a-1$

또 $f(-7)=49+14(a-1)+3a+7=17a+42$이고, ㉡에서 $\frac{7}{3}<17a+42<25$이므로

$f(-7)>0$

따라서 이차방정식 ㉠의 두 근은 모두 -7보다 크다.

ㄷ. 이차방정식 $x^2+ax+3a=0$의 두 근을 p, q라 하면 $pq=3a<0$이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

$p+q=-a>0$이므로 양의 근이 음의 근의 절댓값보다 크다.

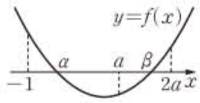
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 　 답 ⑤

16 전략 이차방정식 $f(x)=0$에 대하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 $f(-1)$, $f(a)$, $f(2a)$의 부호를 찾는다.

풀이 $f(x)=x^2-ax+a-1$이라 하면

$-1<\alpha<a<\beta<2a$

이므로 오른쪽 그림에서



$f(-1)>0$, $f(a)<0$,

$f(2a)>0$

$f(-1)>0$에서 $\quad f(-1)=1+a+a-1=2a>0$

$\therefore a>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(a)<0$에서 $\quad f(a)=a^2-a^2+a-1<0$

$\therefore a<1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$f(2a)>0$에서

$f(2a)=4a^2-2a^2+a-1=2a^2+a-1>0$

$(a+1)(2a-1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>\dfrac{1}{2} \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$\dfrac{1}{2}<a<1$

답 ②

17 전략 부등식 $|x+a|<b$를 풀어 먼저 a, b의 값을 구한다.

풀이 $|x+a|<b$에서

$-b<x+a<b \quad \therefore -a-b<x<-a+b$

이 부등식의 해가 $1<x<5$이므로

$-a-b=1$, $-a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-3$, $b=2$

$(2a+b)x>2x+a+c$에 $a=-3$, $b=2$를 대입하면

$-4x>2x-3+c$, $\quad -6x>-3+c$

$\therefore x<\dfrac{3-c}{6}$

이 부등식의 해가 $x<\dfrac{c}{3}$이므로

$\dfrac{3-c}{6}=\dfrac{c}{3}$, $\quad 3-c=2c \quad \therefore c=1$

$\therefore a+b+c=0$

답 0

18 전략 부등식을 정리한 후 a의 값의 범위를 나누어 주어진 조건을 만족시키는 경우를 찾는다.

풀이 주어진 부등식에서 $\quad -4<|x+2|-a<4$

$\therefore a-4<|x+2|<a+4$ ⋯ ❶

(i) $0<a<4$일 때,

$a-4<|x+2|$에서

x는 모든 실수 $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$|x+2|<a+4$에서

$-a-4<x+2<a+4$

$\therefore -a-6<x<a+2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-a-6<x<a+2$

정수 x의 최댓값이 5이려면

$5<a+2\le 6 \quad \therefore 3<a\le 4$

그런데 $0<a<4$이므로 $\quad 3<a<4$ ⋯ ❷

(ii) $a=4$일 때,

$0<|x+2|<8$에서

$-8<x+2<0$ 또는 $0<x+2<8$

$\therefore -10<x<-2$ 또는 $-2<x<6$

이때 정수 x의 최댓값은 5이므로 조건을 만족시킨다. ⋯ ❸

(iii) $a>4$일 때,

$a-4<|x+2|$에서

$x+2<-a+4$ 또는 $x+2>a-4$

$\therefore x<-a+2$ 또는 $x>a-6 \quad \cdots\cdots$ ㉢

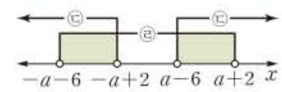
$|x+2|<a+4$에서

$-a-4<x+2<a+4$

$\therefore -a-6<x<a+2 \quad \cdots\cdots$ ㉣

$-a+2\ge a-6$이면 $a\le 4$이므로 모순이다. $\therefore -a+2<a-6$

오른쪽 그림에서 ㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는



$-a-6<x<-a+2$ 또는 $a-6<x<a+2$

$a>4$에서 $a+2>6$이므로 x의 값의 범위에 5보다 큰 정수가 적어도 하나 포함된다.

그런데 $a>4$이므로 정수 x의 최댓값은 5가 될 수 없다. ⋯ ❹

이상에서 구하는 a의 값의 범위는

$3<a\le 4$ ⋯ ❺

답 $3<a\le 4$

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 정리할 수 있다.	10 %
❷ $0<a<4$일 때 주어진 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ $a=4$일 때 주어진 조건을 만족시킴을 알 수 있다.	20 %
❹ $a>4$일 때 주어진 조건을 만족시키지 않음을 알 수 있다.	30 %
❺ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	10 %

19 전략 일차부등식의 해가 모든 실수일 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $(2a-b)x+3a-2b<0$, 즉 $(2a-b)x<-3a+2b$가 성립하려면

$2a-b=0$, $-3a+2b>0$

$\therefore b=2a$, $a>0$

$b=2a$를 $-3a+2b>0$에 대입하면 $-3a+2\cdot 2a>0 \quad \therefore a>0$

$b=2a$를 $(4a-3b)x^2+\dfrac{1}{2}bx+a+b>0$에 대입하면

$-2ax^2+ax+3a>0$

$-a<0$이므로 양변을 $-a$로 나누면

$2x^2-x-3<0$, $\quad (x+1)(2x-3)<0$

$\therefore -1<x<\dfrac{3}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1의 2개이다.

답 2

일품 BOX

20

전략 손해를 보지 않기 위한 할인율과 이윤 사이의 대소 관계를 이용하여 n에 대한 이차부등식을 세운다.

풀이 손해를 보지 않고 사탕을 판매하려면 할인율이 25 % 이하가 되어야 한다.

$\dfrac{(n-20)^2}{100}\le 25$ ⋯ ❶

$(n-20)^2\le 2500$, $\quad n^2-40n-2100\le 0$

$(n+30)(n-70)\le 0$

$\therefore -30\le n\le 70$

그런데 $n>20$이므로 $\quad 20<n\le 70$ ⋯ ❷

따라서 손해를 보지 않으려면 고객이 한 번에 구입하는 사탕 A는 최대 70개로 제한해야 한다. ⋯ ❸

답 70개

채점 기준	비율
❶ n에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 사탕 A를 최대 몇 개로 제한해야 하는지 구할 수 있다.	20 %

21

전략 주어진 이차부등식의 해가 $4\le x\le 7$을 포함하도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 부등식 $x^2-(3a^2+2)x+2a^4+a^2-3\le 0$에서

$x^2-(3a^2+2)x+(2a^2+3)(a^2-1)\le 0$

$\{x-(2a^2+3)\}\{x-(a^2-1)\}\le 0$

$\therefore a^2-1\le x\le 2a^2+3$ ⋯⋯ ㉠

$2a^2+3-(a^2-1)$
$=a^2+4>0$
$\therefore 2a^2+3>a^2-1$

따라서 $4\le x\le 7$인 모든 실수 x가 ㉠을 만족시키려면

$a^2-1\le 4$, $7\le 2a^2+3$

이어야 한다.

(i) $a^2-1\le 4$에서 $\quad a^2\le 5$

$\therefore -\sqrt{5}\le a\le \sqrt{5}$

(ii) $2a^2+3\ge 7$에서 $\quad a^2\ge 2$

$\therefore a\le -\sqrt{2}$ 또는 $a\ge \sqrt{2}$

(i), (ii)에서 공통부분을 구하면

$-\sqrt{5}\le a\le -\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{2}\le a\le \sqrt{5}$

이므로 정수 a는 -2, 2의 2개이다. 답 2

22

전략 먼저 이차부등식의 해가 모든 실수가 되도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2+(k-3)x+k>0$의 해가 모든 실수이려면 이차방정식 $x^2+(k-3)x+k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(k-3)^2-4k<0$

$k^2-10k+9<0$, $\quad (k-1)(k-9)<0$

$\therefore 1<k<9$

즉 $1\le a<b\le 9$이므로 a의 최솟값은 1이고, b의 최댓값은 9이다.

따라서 구하는 합은

$1+9=10$ 답 10

23

전략 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $px^2+qx+r>0$이 성립하려면 $p>0$, $q^2-4pr<0$임을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $(a-2)x^2+2(a-2)x+3>0$이 성립하므로

$a-2>0 \qquad \therefore a>2$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $(a-2)x^2+2(a-2)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a-2)^2-3(a-2)<0$

$a^2-7a+10<0$, $\quad (a-2)(a-5)<0$

$\therefore 2<a<5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 2<a<5$ ⋯ ❶

부등식 $2|a+1|+3|a-6|\le 17$에서 $a+1>0$, $a-6<0$이므로

$2<a<5$이므로
$3<a+1<6$,
$-4<a-6<-1$

$2(a+1)-3(a-6)\le 17$, $\quad -a\le -3$

$\therefore a\ge 3$

그런데 $2<a<5$이므로 $\quad 3\le a<5$ ⋯ ❷

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 3이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차부등식이 성립하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ 절댓값을 포함한 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

24

전략 두 부등식의 해를 각각 구한 후 a의 값의 범위를 나누어 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

풀이 $x^2-3x-10\le 0$에서 $\quad (x+2)(x-5)\le 0$

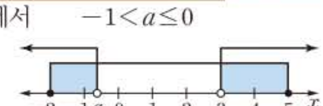
$\therefore -2\le x\le 5$

$x^2-(a+3)x+3a>0$에서

$(x-3)(x-a)>0$ ⋯⋯ ㉠

(i) $a<3$이면 ㉠의 해는 $x<a$ 또는 $x>3$이므로 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x가 4개이려면 다음 그림에서 $\quad -1<a\le 0$

정수 x는
-2, -1, 4, 5



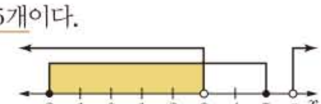
(ii) $a=3$이면 ㉠의 해는 $x\ne 3$인 모든 실수이므로 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x는 7개이다.

정수 x는
-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a>3$이면 ㉠의 해는 $x<3$ 또는 $x>a$이므로 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x는 다음 그림과 같이 최소 5개이다.

최소 5개에 포함되는 정수 x는
-2, -1, 0, 1, 2



따라서 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$-1<a\le 0$ 답 $-1<a\le 0$

25 전략 a를 포함하지 않은 두 부등식의 공통부분을 먼저 구하여 나머지 부등식의 해의 위치에 따른 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2+x-42<0$에서 $(x+7)(x-6)<0$

$\therefore -7<x<6$ …… ㉠

$x^2+3x-4\ge 0$에서 $(x+4)(x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -4$ 또는 $x\ge 1$ …… ㉡

$(a^2-8)-(2a-10)=a^2-2a+2=(a-1)^2+1>0$이므로 $a^2-8>2a-10$

즉 부등식 $(x-2a+10)(x-a^2+8)<0$의 해는

$2a-10<x<a^2-8$ …… ㉢ ❶

두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$-7<x\le -4$ 또는 $1\le x<6$

이므로 세 부등식 ㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 실수 x가 존재하지 않는 경우는 다음 세 가지 중의 하나이다.

(i) $a^2-8\le -7$일 때, $-1\le a\le 1$

(ii) $-4\le 2a-10<a^2-8\le 1$일 때,

$-4\le 2a-10$에서 $a\ge 3$ …… ㉣

$a^2-8\le 1$에서 $-3\le a\le 3$ …… ㉤

㉣, ㉤의 공통부분을 구하면 $a=3$

(iii) $6\le 2a-10$일 때, $a\ge 8$

이상에서 a의 값의 범위는

$-1\le a\le 1$ 또는 $a=3$ 또는 $a\ge 8$ ❷

따라서 10 이하의 자연수 a는 1, 3, 8, 9, 10의 5개이다. ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 세 부등식의 해를 각각 구할 수 있다.	30 %
❷ 세 부등식을 동시에 만족시키는 실수 x가 존재하지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ 10 이하의 자연수 a의 개수를 구할 수 있다.	10 %

26 전략 모든 실수에 대하여 부등식 $A\le B\le C$가 성립하면 모든 실수에 대하여 두 부등식 $A\le B$, $B\le C$가 동시에 성립해야 함을 이용한다.

풀이 (i) $-1\le (a-1)x+b$, 즉 $(a-1)x\ge -1-b$가 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a-1=0$, $-1-b\le 0$

$\therefore a=1$, $b\ge -1$

(ii) $(a-1)x+b\le x^2+2x+2$, 즉 $x^2+(3-a)x+2-b\ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2+(3-a)x+2-b=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(3-a)^2-4(2-b)\le 0$

위의 부등식에 $a=1$을 대입하여 정리하면

$4b-4\le 0$ $\therefore b\le 1$

(i), (ii)에서 $a=1$, $-1\le b\le 1$

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$

의 3개이다.

답 3

27 전략 부등식 $f(x)<y<g(x)$를 만족시키는 y가 항상 존재하기 위한 $f(x)$와 $g(x)$ 사이의 관계를 찾는다.

풀이 $f(x)=-x^2+2(a-1)x+2a-1$,

$g(x)=x^2-2(a-3)x+9$라 하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<y<g(x)$를 만족시키는 y가 존재해야 하므로 부등식 $g(x)-f(x)>0$이 항상 성립해야 한다.

즉 $2x^2-4(a-2)x-2a+10>0$에서

$x^2-2(a-2)x-a+5>0$ ❶

$g(x)-f(x)$
$=x^2-2(a-3)x+9-\{-x^2+2(a-1)x+2a-1\}$
$=2x^2-4(a-2)x-2a+10$

이차방정식 $x^2-2(a-2)x-a+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-(-a+5)<0$

$a^2-3a-1<0$

$\therefore \frac{3-\sqrt{13}}{2}<a<\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ❷

이차방정식 $a^2-3a-1=0$에서
$a=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot(-1)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

따라서 $m=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $n=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$이므로

$n-m=\sqrt{13}$ ❸

답 $\sqrt{13}$

채점 기준	비율
❶ 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하는 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $n-m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

28 전략 이차방정식의 판별식의 부호, 두 근의 합 또는 곱의 부호를 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 이차방정식

$x^2+2(a-2)x+a^2-3a-4=0$ …… ㉠

의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a^2-3a-4)=-a+8$,

$\alpha+\beta=-2(a-2)$,

$\alpha\beta=a^2-3a-4=(a+1)(a-4)$

(i) ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가질 때,

$\frac{D}{4}=-a+8>0$에서 $a<8$

$\alpha+\beta=-2(a-2)>0$에서 $a<2$

$\alpha\beta=(a+1)(a-4)>0$에서

$a<-1$ 또는 $a>4$

따라서 $a<-1$이므로 정수 a의 최댓값은 -2이다.

(ii) ㉠이 서로 다른 두 음의 실근을 가질 때,

$\frac{D}{4}=-a+8>0$에서 $a<8$

$\alpha+\beta=-2(a-2)<0$에서 $a>2$

Ⅲ 부등식

$\alpha\beta=(a+1)(a-4)>0$에서

$a<-1$ 또는 $a>4$

따라서 $4<a<8$이므로 정수 a의 최솟값은 5이다.

(i), (ii)에서 $M=-2$, $m=5$이므로

$Mm=-10$ 답 -10

최상위로 가는 최고 수준 문제 본책 88쪽

01

해결 단계

❶ 주어진 일차부등식의 해를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.
❷ ❶을 이용하여 연립부등식을 이루는 일차부등식의 해를 각각 구한다.
❸ ㄱ. $a=1$일 때, 연립부등식의 해를 구하여 $f(1)$의 값을 구한다.
❹ ㄴ. $f(a)=0$인 a의 값을 구한다.
❺ ㄷ. a가 정수일 때 $f(a)$를 구하여 보기의 부등식을 만족시키는 a의 개수를 구한다.
❻ 옳은 보기를 찾아 답을 구한다.

풀이 ❶ 일차부등식 $(2a-b)x>a-4$의 해가 $x<1$이므로 $2a-b<0$ $\therefore x<\frac{a-4}{2a-b}$

즉 $\frac{a-4}{2a-b}=1$이므로 $a-4=2a-b$

$\therefore b=a+4$ …… ㉠

❷ $(a+2)x+3a<b(x-1)+6$에 ㉠을 대입하면

$(a+2)x+3a<(a+4)(x-1)+6$

$ax+2x+3a<ax+4x-a-4+6$

$-2x<-4a+2$ $\therefore x>2a-1$ …… ㉡

$ax+2a+b>(b-3)x+4$에 ㉠을 대입하면

$ax+2a+a+4>(a+4-3)x+4$

$ax+3a+4>ax+x+4$

$\therefore x<3a$ …… ㉢

❸ ㄱ. $a=1$이면 ㉡에서 $x>1$, ㉢에서 $x<3$이므로 주어진 연립부등식의 해는 $1<x<3$

위의 부등식을 만족시키는 정수 x는 2의 한 개이므로 $f(1)=1$

❹ ㄴ. $a=0$이면 ㉡에서 $x>-1$, ㉢에서 $x<0$이므로 주어진 연립부등식의 해는 $-1<x<0$

위의 부등식을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않으므로 $f(0)=0$

따라서 $a=0$일 때 $f(a)=0$이지만 $a>-1$이다.

❺ ㄷ. 주어진 연립부등식의 해가 존재하려면 ㉡, ㉢에서

$2a-1<3a$, 즉 $a>-1$

이어야 한다. 이때 연립부등식의 해는

$2a-1<x<3a$이고, a가 정수이면

$f(a)=3a-(2a-1)-1=a$

즉 $1<f(a)<10-a$에서

$1<a<10-a$ $\therefore 1<a<5$

이때 $a=4$이면 ㉠에서 $b=8$이고, 부등식 $(2a-b)x>a-4$, 즉 $0\cdot x>0$은 해가 존재하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 a는 2, 3의 2개이다.

❻ 이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

1등급 비밀노트

ㄴ에서 $f(a)=0$인 경우를 연립부등식의 해가 없는 경우라고 생각하지 않도록 주의한다. 예를 들어 $a=0$이면 연립부등식의 해는 $-1<x<0$으로 존재하지만 부등식을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.

이차방정식
$2a^2-2a-1=0$에서
$a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-2\cdot(-1)}}{2}$
$=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$-0.3\times\times\times<a<1.3\times\times\times$

ㄴ이 성립하지 않는 예를 찾는다.

$a<10-a$에서
$2a<10$
$\therefore a<5$

02

해결 단계

❶ 이차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.
❷ 이차방정식 $f(x)=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 두 점 사이의 거리의 최댓값을 구한다.
❸ m, p의 값을 구하여 m^2+p^2의 값을 구한다.

풀이 ❶ 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-3a^2>0$, $2a^2-2a-1<0$

$\therefore \frac{1-\sqrt{3}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

❷ 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 이차방정식 $f(x)=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}(a+1)$, $\alpha\beta=\frac{a^2}{3}$

$\therefore (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\frac{4}{9}(a+1)^2-\frac{4}{3}a^2$

$=-\frac{8}{9}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{3}$

$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$에서 $a=\frac{1}{2}$일 때 두 점 A, B 사이의 거리의 최댓값은

$|\beta-\alpha|=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

❸ 따라서 $m=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $p=\frac{1}{2}$이므로

$m^2+p^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$ 답 $\frac{11}{12}$

03

해결 단계

❶ k의 값에 관계없이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이 항상 존재하는 것의 의미를 이해한다.
❷ 이차방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 가질 조건을 구한다.
❸ ❷에서 얻은 k에 대한 이차부등식이 항상 성립하도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.
❹ a의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

풀이 ❶ 실수 k의 값에 관계없이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이 항상 존재하므로 방정식 $f(x)=g(x)$는 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖는다.

❷ 이차방정식 $(x-1)(x-2)=k(x-a)$, 즉 $x^2-(k+3)x+2+ak=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=\{-(k+3)\}^2-4(2+ak)\geq 0$$

$$\therefore k^2+2(3-2a)k+1\geq 0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

❸ 부등식 ㉠이 모든 실수 k에 대하여 성립해야 하므로 k에 대한 이차방정식 $k^2+2(3-2a)k+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(3-2a)^2-1\leq 0$$

$$4a^2-12a+8\leq 0,\qquad a^2-3a+2\leq 0$$

$$(a-1)(a-2)\leq 0 \qquad \therefore 1\leq a\leq 2$$

❹ 따라서 실수 a의 최댓값은 2, 최솟값은 1이므로 구하는 합은 $\quad 2+1=3$

답 ①

04

해결 단계

❶ 주어진 이차방정식이 두 실근을 가질 때, 판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.
❷ $\frac{1}{2}\leq\frac{\beta}{\alpha}\leq 2$를 만족시키는 α, β에 대한 부등식을 구한다.
❸ 이차방정식의 근과 계수의 관계와 ❷에서 얻은 부등식을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.
❹ 정수 a의 값을 구한다.

풀이 ❶ 주어진 이차방정식이 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-a\geq 0$$

$$4-a\geq 0 \qquad \therefore a\leq 4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

❷ $\frac{1}{2}\leq\frac{\beta}{\alpha}\leq 2$이므로

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}-2\right)\leq 0$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-\frac{5}{2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}+1\leq 0$$

위의 식의 양변에 $2\alpha^2$을 곱하여 정리하면

$$2\alpha^2-5\alpha\beta+2\beta^2\leq 0$$

$$2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-5\alpha\beta\leq 0$$

$$\therefore 2(\alpha+\beta)^2-9\alpha\beta\leq 0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

❸ 이차방정식 $x^2-4x+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad \alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=a \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$2\cdot 4^2-9a\leq 0,\qquad 9a\geq 32$$

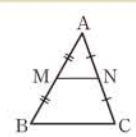
$$\therefore a\geq\frac{32}{9} \quad \cdots\cdots ㉣$$

❹ ㉠, ㉣에서 $\frac{32}{9}\leq a\leq 4$이므로 구하는 정수 a의 값은 4이다.

답 ⑤

일품 BOX

삼각형의 외심
① 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
② 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.



$\triangle ABC$에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면
$\overline{BC}\,/\!/\,\overline{MN}$,
$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

$a\leq X\leq b$이면 $(X-a)(X-b)\leq 0$

α는 실수이므로 $\alpha^2\geq 0$
이때 $a\neq 0$에서 $\alpha\neq 0$이므로 $\alpha^2>0$

x축 위의 점의 좌표는 $(m,\ 0)$ 꼴이고 y축 위의 점의 좌표는 $(0,\ n)$ 꼴이다.

Ⅳ 도형의 방정식

09 평면좌표와 직선의 방정식

개념 & 핵심 기출

본책 90~93쪽

01 $\triangle OAB$의 외심을 P라 하면

$$\overline{OP}=\overline{AP}=\overline{BP}$$

$\overline{OP}=\overline{AP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{AP}^2$이므로

$$2^2+(-1)^2=(2-1)^2+(-1-a)^2$$

$$a^2+2a-3=0,\qquad (a+3)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1\ (\because a>0)$$

$\overline{OP}=\overline{BP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$2^2+(-1)^2=(2-b)^2+(-1)^2$$

$$b^2-4b=0,\qquad b(b-4)=0$$

$$\therefore b=4\ (\because b>0)$$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

02 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$$b=a+2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$(a-2)^2+(b+3)^2=(a-4)^2+(b-1)^2$$

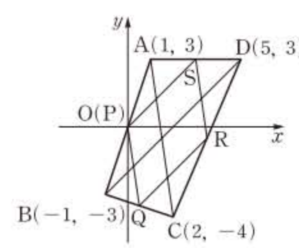
$$\therefore a+2b=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=1$

$$\therefore ab=-1$$

답 ②

03 오른쪽 그림의 두 삼각형 ABC, ACD에서



$$\overline{PQ}=\overline{SR}=\frac{1}{2}\overline{AC}$$

또 두 삼각형 ABD, BCD에서

$$\overline{PS}=\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{BD}$$

이때

$$\overline{AC}=\sqrt{(2-1)^2+(-4-3)^2}=5\sqrt{2},$$

$$\overline{BD}=\sqrt{(5+1)^2+(3+3)^2}=6\sqrt{2}$$

이므로 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{SR}+\overline{PS}=(\overline{PQ}+\overline{SR})+(\overline{PS}+\overline{QR})$$
$$=\overline{AC}+\overline{BD}$$
$$=11\sqrt{2}$$

답 ④

04 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot b+1\cdot(-6)}{2+1},\ \frac{2\cdot 3+1\cdot a}{2+1}\right)$$

$\therefore \left(\dfrac{2b-6}{3},\ \dfrac{6+a}{3}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로

$\dfrac{6+a}{3}=0 \qquad \therefore a=-6$

선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3\cdot b-2\cdot(-6)}{3-2},\ \dfrac{3\cdot 3-2\cdot a}{3-2}\right)$

$\therefore (3b+12,\ 9-2a)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$3b+12=0 \qquad \therefore b=-4$

$\therefore ab=24$ 답 ②

05 선분 AB를 $k:(1-k)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{k\cdot 2+(1-k)\cdot(-4)}{k+(1-k)},\ \dfrac{k\cdot(-5)+(1-k)\cdot 3}{k+(1-k)}\right)$

$\therefore (6k-4,\ -8k+3)$

이 점이 제3사분면 위에 있으려면

$6k-4<0,\ -8k+3<0$

$\therefore \dfrac{3}{8}<k<\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{3}{8}<k<\dfrac{2}{3}$

06 $3\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$

$a>0$이므로 점 C는 선분 AB를 4 : 3으로 외분하는 점이다.

즉 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{4\cdot 4-3\cdot(-2)}{4-3},\ \dfrac{4\cdot 3-3\cdot(-1)}{4-3}\right)$

$\therefore (22,\ 15)$

따라서 $a=22,\ b=15$이므로

$a+b=37$ 답 ④

다른 풀이 $a>0$이므로 점 B는 선분 AC를 1 : 3으로 내분하는 점이다.

따라서 $\dfrac{1\cdot a+3\cdot(-2)}{1+3}=4,\ \dfrac{1\cdot b+3\cdot(-1)}{1+3}=3$이므로

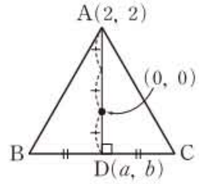
$a-6=16,\ b-3=12$

$\therefore a=22,\ b=15$

1등급 비밀노트

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$을 만족시키는 점 C는 선분 AB를 4 : 3으로 외분하는 점과 2 : 3으로 외분하는 점의 2개가 존재한다.
그런데 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{2\cdot 4-3\cdot(-2)}{2-3},\ \dfrac{2\cdot 3-3\cdot(-1)}{2-3}\right)$, 즉 $(-14,\ -9)$
이므로 $a>0$을 만족시키지 않는다.

07 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 D$(a,\ b)$라 하면 $\overline{AD}$를 2 : 1로 내분하는 점은 △ABC의 무게중심 (0, 0)과 일치한다.



즉 $\dfrac{2\cdot a+1\cdot 2}{2+1}=0,\ \dfrac{2\cdot b+1\cdot 2}{2+1}=0$이므로

$2a+2=0,\ 2b+2=0$

$\therefore a=-1,\ b=-1$

$\therefore$ D$(-1,\ -1)$

이때 $\overline{AD}$의 길이는 정삼각형 ABC의 높이이고

$\overline{AD}=\sqrt{(2+1)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$

이므로 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{2} \qquad \therefore a=2\sqrt{6}$

따라서 정삼각형의 한 변의 길이는 $2\sqrt{6}$이다. 답 $2\sqrt{6}$

다른 풀이 위의 그림에서 점 (0, 0)을 점 O라 하면

$\overline{AO}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{AD}=\dfrac{3}{2}\overline{AO}=3\sqrt{2}$

08 점 P가 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(p,\ p+3)$이라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(p-2)^2+(p+3-3)^2=(p+2)^2+(p+3+1)^2$

$2p^2-4p+4=2p^2+12p+20$

$16p=-16 \qquad \therefore p=-1$

$\therefore$ P$(-1,\ 2)$

따라서 점 G의 좌표는

$\left(\dfrac{2-2-1}{3},\ \dfrac{3-1+2}{3}\right)$, 즉 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

이므로 $a=-\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{4}{3}$

$\therefore a+4b=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{16}{3}=5$ 답 5

09 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{0+6}{2},\ \dfrac{1+ab}{2}\right) \qquad \therefore \left(3,\ \dfrac{1+ab}{2}\right)$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{2+7}{2}\right) \qquad \therefore \left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$

□ABCD가 평행사변형이므로

$3=\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{1+ab}{2}=\dfrac{9}{2}$

$\therefore a+b=6,\ ab=8$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=6^3-3\cdot 8\cdot 6$

$=72$ 답 ⑤

10 세 점이 한 직선 위에 있으려면 두 직선 AB, BC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{k-2}{3-(-3)}=\dfrac{k+1-k}{2k-3}$

$(k-2)(2k-3)=6$

일품 BOX

$\overline{AO}:\overline{OD}=2:1$이므로
$\overline{AD}:\overline{AO}=3:2$
$2\overline{AD}=3\overline{AO}$
$\therefore \overline{AD}=\dfrac{3}{2}\overline{AO}$

$ad=bc$이면
$a:b=c:d$

평행사변형의 두 대각선의 중점이 일치한다.

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.
➡ (직선 AB의 기울기)
=(직선 BC의 기울기)
=(직선 AC의 기울기)

$\therefore 2k^2-7k=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{7}{2}$이다. 답 $\frac{7}{2}$

$2k^2-7k=0$에서
$k(2k-7)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=\frac{7}{2}$

11 직선 l이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 P라 하면 $S=3S_1$이므로 점 P는 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.

즉 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot2+1\cdot(-7)}{2+1}, \frac{2\cdot2+1\cdot(-1)}{2+1}\right)$$

$\therefore (-1, 1)$

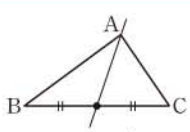
따라서 두 점 $A(1, 5)$, $P(-1, 1)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$$y-5=\frac{1-5}{-1-1}(x-1)$$

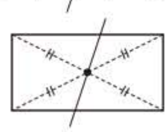
$\therefore y=2x+3$ 답 $y=2x+3$

1등급 비밀노트

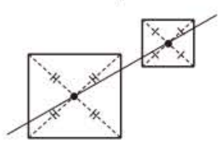
(1) 점 A를 지나는 직선이 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분한다.
➡ 직선이 변 BC의 중점을 지난다.



(2) 직선이 직사각형의 넓이를 이등분한다.
➡ 직선이 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.



(3) 직선이 두 직사각형의 넓이를 각각 이등분한다.
➡ 직선이 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지난다.



12 $3x+4y=k$ ⋯⋯ ㉠

$x-y=-1$ ⋯⋯ ㉡

$y=0$을 ㉠에 대입하면

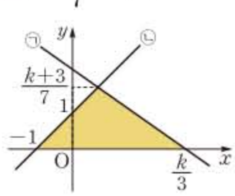
$3x=k \quad \therefore x=\frac{k}{3}$

즉 직선 ㉠의 x절편은 $\frac{k}{3}$이다.

㉠$-$㉡$\times3$을 하면 $\quad 7y=k+3 \quad \therefore y=\frac{k+3}{7}$

즉 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 y좌표는 $\frac{k+3}{7}$이다.

오른쪽 그림에서 두 직선 ㉠, ㉡과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{14}{3}$이므로



$$\frac{1}{2}\left(\frac{k}{3}+1\right)\cdot\frac{k+3}{7}=\frac{14}{3}$$

$$\frac{(k+3)^2}{42}=\frac{14}{3}$$

$(k+3)^2=14^2, \quad k+3=\pm14$

$\therefore k=-17$ 또는 $k=11$

그런데 $k>0$이므로 $\quad k=11$ 답 11

13 두 직선 $x-y-1=0$, $x+ay=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-y-1+k(x+ay)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(k+1)x+(ak-1)y-1=0$

이 직선이 직선 $2x+y-1=0$과 같으므로

$k+1=2, \ ak-1=1$

$k+1=2$에서 $\quad k=1$

$k=1$을 $ak-1=1$에 대입하면

$a-1=1$

$\therefore a=2$ 답 2

다른 풀이 $2x+y-1=0$, 즉 $2x+y=1$과 $x-y=1$을 연립하여 풀면

$x=\frac{2}{3}, \ y=-\frac{1}{3}$

따라서 두 직선 $2x+y-1=0$, $x-y=1$의 교점의 좌표가 $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$이고, 직선 $x+ay=0$이 이 점을 지나므로

$\frac{2}{3}+a\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=0 \qquad \therefore a=2$

14 두 직선 $2x-2y+3=0$, $2x+3y+a=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x-2y+3+k(2x+3y+a)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(2k+2)x+(3k-2)y+ak+3=0$

이 직선의 기울기는 $-\frac{2k+2}{3k-2}$이므로

$k=\frac{2}{3}$이면 y축에 평행한 직선이므로 기울기가 $-\frac{3}{2}$이 될 수 없다.
$\therefore k\neq\frac{2}{3}$

$$-\frac{2k+2}{3k-2}=-\frac{3}{2}$$

$2(2k+2)=3(3k-2)$

$\therefore k=2$

따라서 직선 l의 방정식은

$6x+4y+2a+3=0$

이 직선이 점 $(3, b)$를 지나므로

$18+4b+2a+3=0$

$\therefore 2a+4b=-21$ 답 ⑤

15 두 직선 $2x+3y+4=0$, $x-2y-6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+3y+4+k(x-2y-6)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면 이 직선이 점 $(1, -4)$를 지나므로

$-6+3k=0 \qquad \therefore k=2$

따라서 직선의 방정식은 $4x-y-8=0$이고, 이 직선과 x축, y축의 교점은 각각 $(2, 0)$, $(0, -8)$이므로 구하는 선분의 길이는

직선의 방정식에 $y=0$, $x=0$을 각각 대입한다.

$\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}$ 답 ⑤

참고 두 직선의 방정식 $2x+3y+4=0$, $x-2y-6=0$을 연립하여 풀면 $x=\frac{10}{7}$, $y=-\frac{16}{7}$이므로 두 점 $\left(\frac{10}{7}, -\frac{16}{7}\right)$, $(1, -4)$를 지나는 직선의 방정식을 구해도 된다.

16 직선 $2x+3y-6=0$의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이므로 두 점 $(-3, a)$, $(3, b)$를 지나는 직선의 기울기도 $-\frac{2}{3}$이다.

따라서 $\frac{b-a}{3+3}=-\frac{2}{3}$이므로

$b-a=-4$

$\therefore a-b=4$ 답 ②

17 두 점 $A(a, -2)$, $B(b, -3)$을 지나는 직선 AB가 직선 $x+y+1=0$과 수직이므로

$\frac{-3+2}{b-a}=1$

$\therefore a-b=1$ …… ㉠

또 두 점 A, B의 중점 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{-2-3}{2}\right)$이 직선 $x+y+1=0$ 위에 있으므로

$\frac{a+b}{2}+\frac{-5}{2}+1=0$

$\therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

$\therefore a-3b=-1$ 답 ②

선분 AB의 수직이등분선을 l이라 하면
① 직선 l과 직선 AB의 기울기의 곱은 -1이다.
② 직선 l은 선분 AB의 중점을 지난다.

18 직선 $x+ay+2=0$이 직선 $2x-by-3=0$과 수직이므로

$1\cdot2+a\cdot(-b)=0$

$\therefore ab=2$

직선 $x+ay+2=0$이 직선 $x-(b-3)y+4=0$과 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b-3)}\neq\frac{2}{4}$

$-b+3=a$ $\quad\therefore a+b=3$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=3^2-2\cdot2=5$ 답 5

19 연립방정식 $\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 3x+2y+4=0 \end{cases}$의 해는

$x=0$, $y=-2$

이므로 두 직선 $x-2y-4=0$, $3x+2y+4=0$의 교점의 좌표는 $\quad(0, -2)$

구하는 직선의 기울기를 m이라 하면 그 직선의 방정식은 $\quad y=mx-2$

원점과 직선 $y=mx-2$, 즉 $mx-y-2=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \qquad 2=\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4=m^2+1, \qquad m^2=3$

$\therefore m=\sqrt{3}$ 또는 $m=-\sqrt{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x-2$, $y=-\sqrt{3}x-2$

답 $y=\sqrt{3}x-2$, $y=-\sqrt{3}x-2$

20 점 P가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 (a, a)라 하자.

점 P에서 두 직선 $3x-y-1=0$, $x+3y-3=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|3a-a-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|a+3a-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}$

$|2a-1|=|4a-3|, \qquad 2a-1=\pm(4a-3)$

$\therefore a=1$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(1, 1)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$이다.

답 $(1, 1)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$y=3x-1$에서
$3x-y-1=0$
$y=-\frac{1}{3}x+1$에서
$\frac{1}{3}x+y-1=0$
$\therefore x+3y-3=0$

평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

21 직선 $x+y-2=0$ 위의 점 $(2, 0)$과 직선 $x+y+m=0$ 사이의 거리가 $5\sqrt{2}$이므로

$\frac{|2+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}$

$|m+2|=10, \qquad m+2=\pm10$

$\therefore m=-12$ 또는 $m=8$

그런데 $m>0$이므로 $\qquad m=8$ 답 ④

22 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x-4)^2+(y-5)^2=x^2+(y-3)^2$

$8x+4y-32=0 \qquad \therefore 2x+y-8=0$ 답 ④

23 점 B의 좌표를 (a, b), 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 $P(x, y)$는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$x=\frac{2\cdot a+1\cdot3}{2+1}=\frac{2a+3}{3}$

$y=\frac{2\cdot b+1\cdot1}{2+1}=\frac{2b+1}{3}$

$\therefore a=\frac{3x-3}{2}$, $b=\frac{3y-1}{2}$ …… ㉠

또 점 $B(a, b)$가 직선 $2x+y-5=0$ 위의 점이므로

$2a+b-5=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2\cdot\frac{3x-3}{2}+\frac{3y-1}{2}-5=0$$

$$\therefore\ 6x+3y-17=0$$

따라서 $p=6$, $q=-17$이므로

$p+q=-11$ 답 -11

24 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선 $2x+5y+3=0$, $5x-2y-3=0$에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|2x+5y+3|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{|5x-2y-3|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}$$

$$|2x+5y+3|=|5x-2y-3|$$

$$2x+5y+3=\pm(5x-2y-3)$$

$\therefore\ 3x-7y-6=0$ 또는 $7x+3y=0$

이때 원점을 지나지 않아야 하므로 구하는 직선의 방정식은

$3x-7y-6=0$ 답 ①

1등급을 위한 고난도 문제

본책 94~97쪽

01 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$$
$$=(x-3)^2+(y-4)^2+(x+4)^2+(y-2)^2+(x-7)^2+(y-3)^2$$
$$=3x^2-12x+3y^2-18y+103$$
$$=3(x-2)^2+3(y-3)^2+64$$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$은 $x=2$, $y=3$일 때 최솟값 64를 가지므로 구하는 점 P의 좌표는 $(2,\ 3)$이다.

답 ③

$(x-2)^2\geq 0$, $(y-3)^2\geq 0$ 이므로 주어진 식의 값이 최소인 경우는 $(x-2)^2=0$, $(y-3)^2=0$, 즉 $x=2$, $y=3$일 때이다.

02 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{a^2+(-1-3)^2}=\sqrt{a^2+16}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(-1-a)^2+1^2}=\sqrt{a^2+2a+2}$

(i) $\angle\mathrm{A}=90^\circ$인 경우

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이어야 하므로

$10+a^2+2a+2=a^2+16$, $\quad 2a=4$

$\therefore\ a=2$

(ii) $\angle\mathrm{B}=90^\circ$인 경우

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$이어야 하므로

$10+a^2+16=a^2+2a+2$, $\quad 2a=24$

$\therefore\ a=12$

(iii) $\angle\mathrm{C}=90^\circ$인 경우

$\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$이어야 하므로

$a^2+16+a^2+2a+2=10$

$\therefore\ a^2+a+4=0$

이때 이차방정식 $a^2+a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot4=-15<0$

이므로 $a^2+a+4=0$을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

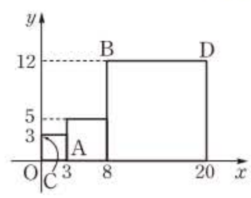
이상에서 $\quad a=2$ 또는 $a=12$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$2+12=14$ 답 14

03 가장 작은 정사각형의 한 꼭짓점 C의 y좌표가 3이므로 한 변의 길이는 3이다.

$\therefore\ \mathrm{A}(3,\ 0)$ ⋯ ❶



오른쪽 그림에서 가장 큰 정사각형의 한 꼭짓점 D의 y좌표가 12이므로 한 변의 길이는 12이다.

$\therefore\ \mathrm{B}(8,\ 12)$ ⋯ ❷

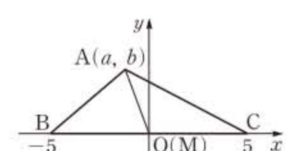
따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{(8-3)^2+12^2}=13$ ⋯ ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 점 A, B 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

04 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이다.



이때 1 km를 1로 생각하면

$\mathrm{B}(-5,\ 0)$, $\mathrm{C}(5,\ 0)$, $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{CA}}=7$

이므로 $\mathrm{A}(a,\ b)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}^2=25$에서

$(-5-a)^2+(-b)^2=25$

$\therefore\ a^2+10a+b^2=0$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{CA}}^2=49$에서

$(a-5)^2+b^2=49$

$\therefore\ a^2-10a+b^2=24$ ⋯⋯ ㉡

이때 입구 A에서 매점까지의 거리는

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{a^2+b^2}$

㉠+㉡을 하면

$2(a^2+b^2)=24$

$\therefore\ a^2+b^2=12$

따라서 구하는 거리는

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\ (\mathrm{km})$ 답 ②

1등급 비밀노트

$\triangle$ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

이 성립한다.

이 내용을 기억해 두면 위와 같은 문제를 쉽게 해결할 수 있다. 즉

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로

$5^2+7^2=2(\overline{AM}^2+5^2)$, $\quad \overline{AM}^2=12$

$\therefore \overline{AM}=2\sqrt{3}$

05 점 A◦D의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot a+2\cdot(-3)}{1+2},\ \frac{1\cdot b+2\cdot 1}{1+2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-6}{3},\ \frac{b+2}{3}\right)$$

점 A◦B의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot 3+2\cdot(-3)}{1+2},\ \frac{1\cdot 4+2\cdot 1}{1+2}\right)$$

$$\therefore (-1,\ 2)$$

점 (A◦B)◦C의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot 5+2\cdot(-1)}{1+2},\ \frac{1\cdot(-4)+2\cdot 2}{1+2}\right)$$

$$\therefore (1,\ 0)$$

이때 두 점 A◦D, (A◦B)◦C가 일치하므로

$$\frac{a-6}{3}=1,\ \frac{b+2}{3}=0$$

$$\therefore a=9,\ b=-2$$

$$\therefore a+b=7$$

답 7

점 A◦B는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이다.

06 비커 A의 소금물 200 g에 들어 있는 소금의 양은

$$200\cdot\frac{a}{100}=2a\ (\text{g})$$

이고, 비커 B의 소금물 300 g에 들어 있는 소금의 양은

$$300\cdot\frac{b}{100}=3b\ (\text{g})$$

이므로 비커 A의 소금물 200 g과 비커 B의 소금물 300 g을 섞었을 때의 소금물의 농도는

$$\frac{2a+3b}{200+300}\cdot 100=\frac{2a+3b}{5}\ (\%)$$

$$\therefore x=\frac{2a+3b}{5}$$

따라서 점 R는 선분 PQ를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$$\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

(소금의 양) $=$(소금물의 양)$\times\frac{(\text{농도})}{100}$

$\frac{2a+3b}{5}=\frac{3b+2a}{3+2}$

07 $\overline{AD}$가 $\angle$A의 이등분선이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$$

이때

$$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-5-7)^2}=13,$$

$$\overline{AC}=\sqrt{4^2+(4-7)^2}=5$$

이므로

$$\overline{BD}:\overline{DC}=13:5 \quad \cdots ❶$$

즉 점 D는 $\overline{BC}$를 13 : 5로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{13\cdot 4+5\cdot(-5)}{13+5},\ \frac{13\cdot 4+5\cdot(-5)}{13+5}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right) \quad \cdots ❷$$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이므로

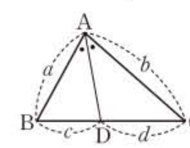
$$a+b=3 \quad \cdots ❸$$

답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{BD}:\overline{DC}$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $\triangle$ABC에서 $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 즉 $\angle$BAD$=\angle$CAD일 때,

$a:b=c:d$



08 $3x=5c-2a$에서

$$x=\frac{5c-2a}{3}=\frac{5c-2a}{5-2}$$

$3y=5d-2b$에서

$$y=\frac{5d-2b}{3}=\frac{5d-2b}{5-2}$$

따라서 점 P$(x,\ y)$는 선분 AB를 5 : 2로 외분하는 점이므로

$$\overline{AB}:\overline{BP}=3:2,\qquad 3\overline{BP}=2\overline{AB}$$

$$\therefore \overline{BP}=\frac{2}{3}\overline{AB}=\frac{2}{3}\cdot 20=\frac{40}{3}$$

답 $\frac{40}{3}$

09 $\triangle$AOB의 한 변의 길이를 x라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=6\sqrt{3},\qquad x^2=24$$

$$\therefore x=2\sqrt{6}\ (\because x>0)$$

원점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$AOB가 정삼각형이므로

$$\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{6}=3\sqrt{2}$$

한편 조건 (나)에 의하여 무게중심 G의 좌표를 $(k,\ k)$ $(k>0)$라 하면

$$\overline{OG}=\frac{2}{3}\overline{OH}=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

이므로

$$\sqrt{k^2+k^2}=2\sqrt{2},\qquad k^2=4$$

$$\therefore k=2\ (\because k>0)$$

이때 $\triangle$AOB의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{a+c}{3},\ \frac{b+d}{3}\right)$이므로

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

x는 길이이므로 양수이다.

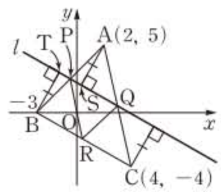
두 점 A, B가 제1사분면 위에 있으므로 $\triangle$AOB의 무게중심 G는 제1사분면 위에 있다.

$\dfrac{a+c}{3}=2,\ \dfrac{b+d}{3}=2$

$\therefore a+c=6,\ b+d=6$

$\therefore a+b+c+d=12$ 　　답 12

10 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하면 △APS≡△BPT (ASA 합동)이므로



$\overline{AP}=\overline{BP}$

같은 방법으로 하면 $\overline{AQ}=\overline{CQ}$ ⋯ ❶

따라서 세 점 P, Q, R는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{CA}$, $\overline{BC}$의 중점이므로

$P\left(\dfrac{2-3}{2},\ \dfrac{5+0}{2}\right),\ Q\left(\dfrac{4+2}{2},\ \dfrac{-4+5}{2}\right),$

$R\left(\dfrac{-3+4}{2},\ \dfrac{0-4}{2}\right)$

$\therefore P\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right),\ Q\left(3,\ \dfrac{1}{2}\right),\ R\left(\dfrac{1}{2},\ -2\right)$ ⋯ ❷

$x=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}+3+\dfrac{1}{2}\right)=1,\ y=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}-2\right)=\dfrac{1}{3}$

이므로

$x+y=\dfrac{4}{3}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{4}{3}$

> △APS, △BPT에서
> $\angle ASP=\angle BTP=90°$,
> $\angle PAS=\angle PBT$,
> $\overline{AS}=\overline{BT}$
> ∴ △APS≡△BPT
> (ASA 합동)

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점임을 알 수 있다.	40 %
❷ 세 점 P, Q, R의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1등급 비밀노트

△PRQ는 △ABC의 세 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이므로 △ABC의 무게중심과 △PRQ의 무게중심은 일치한다. 이것을 이용하면 세 점 P, Q, R의 좌표를 구하지 않고 세 점 A, B, C의 좌표를 이용하여 답을 구할 수 있다.

11 $xy-2x+y=5$에서

$x(y-2)+(y-2)=3$

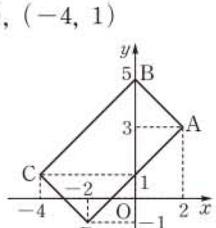
$\therefore (x+1)(y-2)=3$ ⋯⋯ ㉠

$x+1$	$y-2$
1	3
3	1
−1	−3
−3	−1

x, y는 정수이므로 ㉠을 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(0,\ 5),\ (2,\ 3),\ (-2,\ -1),\ (-4,\ 1)$

A(2, 3), B(0, 5), C(−4, 1), D(−2, −1)이라 하면 □ABCD는 오른쪽 그림과 같고,



$\overline{AB}=\sqrt{(-2)^2+(5-3)^2}$
$=2\sqrt{2}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(-4)^2+(1-5)^2}=4\sqrt{2}$,

$\overline{CD}=\sqrt{(-2+4)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$,

$\overline{DA}=\sqrt{(2+2)^2+(3+1)^2}=4\sqrt{2}$

이므로 □ABCD는 평행사변형이다.

따라서 두 대각선의 교점은 대각선 AC의 중점과 같으므로 그 좌표는

$\left(\dfrac{2-4}{2},\ \dfrac{3+1}{2}\right)$ 　$\therefore (-1,\ 2)$ 　　답 ③

> 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

12 직선 $3x+ay=b$는 선분 AC의 수직이등분선이다.

직선 AC의 기울기는 $\dfrac{-1-7}{7-1}=-\dfrac{4}{3}$

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{1+7}{2},\ \dfrac{7-1}{2}\right)$ 　$\therefore (4,\ 3)$

기울기가 $\dfrac{3}{4}$이고 점 (4, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{3}{4}(x-4)$ 　$\therefore 3x-4y=0$

이 직선이 직선 $3x+ay=b$와 같으므로

$a=-4,\ b=0$

$\therefore a+b=-4$ 　　답 −4

13 직선 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{10}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

A(6, 0), B(0, 10)

직선 l이 직선 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{10}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 이등분하므로 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는 (3, 5)이고, 직선 l이 원점을 지나므로 직선 l의 방정식은

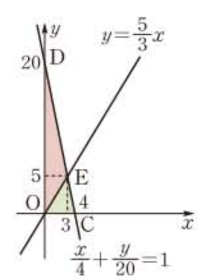
$y=\dfrac{5}{3}x$

한편 직선 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{20}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 C, D라 하면

C(4, 0), D(0, 20)

두 직선 $y=\dfrac{5}{3}x$, $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{20}=1$의 교점을 E라 하면

E(3, 5)



> $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{20}=1$이므로
> $5x+y=20$
> $y=\dfrac{5}{3}x$를 이 식에 대입하면
> $5x+\dfrac{5}{3}x=20$
> $\dfrac{20}{3}x=20$ 　$\therefore x=3$
> $\therefore y=\dfrac{5}{3}\cdot 3=5$

원점을 O라 하면

$\triangle OCE=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 5=10,$

$\triangle OED=\dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot 3=30$

이므로

$S:T=10:30=1:3$ 　　답 ②

Ⅳ 도형의 방정식

다른 풀이 점 E에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle DOC \backsim \triangle EHC$ (AA닮음)

이므로

$\overline{DC}:\overline{EC}=\overline{OC}:\overline{HC}$

$\overline{OC}=4$, $\overline{HC}=4-3=1$이므로

$\overline{DC}:\overline{EC}=4:1$

따라서 점 E는 선분 CD를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

$S:T=1:3$

14 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore y=-2x+4$

$P(a,\ -2a+4)$라 하면 직선 OP의 기울기는

$\frac{-2a+4}{a}$이므로 직선 OQ의 방정식은

$y=\frac{a}{2a-4}x$

직선 AC의 방정식은

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore y=x+4$

두 직선 $y=x+4$, $y=\frac{a}{2a-4}x$의 교점 Q의 y좌표는

$y=\frac{a}{2a-4}(y-4)$에서 $\qquad (2a-4)y=a(y-4)$

$y=x+4$에서
$x=y-4$

$\therefore y=\frac{4a}{4-a}$

삼각형 COQ의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left|\frac{4a}{4-a}\right|=2, \qquad \left|\frac{4a}{4-a}\right|=1$

$\frac{4a}{4-a}=\pm 1, \qquad 4a=\pm(4-a)$

$4a=4-a$에서 $\qquad a=\frac{4}{5}$

$4a=-(4-a)$에서 $\qquad a=-\frac{4}{3}$

따라서 구하는 점 P의 모든 x좌표의 합은

$\frac{4}{5}+\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{8}{15}$ 답 ①

참고 점 P의 x좌표가 0 또는 2이면 점 Q는 점 C 또는 점 A가 되므로 삼각형 COQ의 넓이가 2가 될 수 없다. 따라서 $a\neq 0$, $a\neq 2$이다.

15 $\triangle ABC$, $\triangle AOP$의 넓이가 같으므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\overline{OP}$

$\therefore \overline{OP}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ··· ❶

즉 직선 l의 x절편이 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, y절편이 3이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{3x}{8\sqrt{3}}+\frac{y}{3}=1 \qquad \therefore 3\sqrt{3}x+8y=24$ ··· ❷

따라서 $a=3\sqrt{3}$, $b=8$이므로

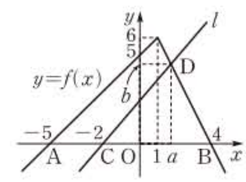
$a^2+b^2=(3\sqrt{3})^2+8^2=91$ ··· ❸

답 91

채점 기준	비율
❶ $\overline{OP}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

16 $A(-5,\ 0)$, $B(4,\ 0)$이므로 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot 4+2\cdot(-5)}{1+2},\ 0\right)$, 즉 $(-2,\ 0)$



오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l이 만나는 점을 $D(a,\ b)$ $(1<a<4)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6=27$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6=27$이고 직선 l이 점 $(1,\ 6)$을 지날 때 $\triangle DCB$의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6=18$이므로
$\frac{27}{2}<18$
이다.
$\therefore 1<a<4$

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot b=\frac{1}{2}\cdot 27 \qquad \therefore b=\frac{9}{2}$

점 $\left(a,\ \frac{9}{2}\right)$는 직선 $y=-2x+8$ 위의 점이므로

$\frac{9}{2}=-2a+8 \qquad \therefore a=\frac{7}{4}$

따라서 직선 l의 기울기는

두 점 C, D를 지나는 직선

$\frac{\frac{9}{2}-0}{\frac{7}{4}+2}=\frac{6}{5}$ 답 $\frac{6}{5}$

17 직선 $x+y+2+k(x-y-4)=0$ (k는 실수)은 k의 값에 관계없이 두 직선

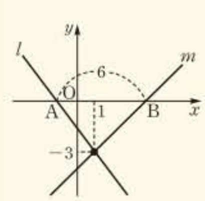
$x+y+2=0,\ x-y-4=0$

두 식을 연립하여 풀면
$x=1,\ y=-3$

의 교점 $(1,\ -3)$을 지난다.

따라서 점 $(1,\ -3)$은 두 직선 l, m의 교점이고, $\overline{AB}=6$이므로 두 직선 l, m 및 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=9$ 답 9



18 ㄱ. 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 항상 두 직선

$x+y+1=0,\ x-y-5=0$

의 교점 $(2,\ -3)$을 지난다.

ㄴ. $k=-1$일 때, 주어진 직선의 방정식은

$x+y+1-(x-y-5)=0$

$\therefore y=-3$

따라서 x축에 평행한 직선이다.

본책 95~97쪽

ㄷ. $x+y+1+k(x-y-5)=0$에서

$(k-1)y=(k+1)x+1-5k$

(ⅰ) $k=1$이면 $\quad x=2$

(ⅱ) $k\neq1$이면 $\quad y=\dfrac{k+1}{k-1}x+\dfrac{1-5k}{k-1}$

이때 기울기가 1이면 $\dfrac{k+1}{k-1}=1$에서

$k+1=k-1$

$\therefore 0\cdot k=-2$

위의 식을 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 기울기가 1인 직선은 나타낼 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

19 직선 AC의 기울기는

$\dfrac{0-6}{4-0}=-\dfrac{3}{2}$

이므로 직선 BH의 기울기는 $\dfrac{2}{3}$이다.

직선 BH의 방정식은

$y+1=\dfrac{2}{3}(x-1) \qquad \therefore y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$

$y=0$을 이 식에 대입하면

$0=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3} \qquad \therefore x=\dfrac{5}{2}$

따라서 선분 BH와 x축의 교점의 x좌표는 $\dfrac{5}{2}$이다.

답 ③

20 세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

> 두 직선 $2x+y-4=0$, $3x+y-8=0$의 기울기가 다르므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

(ⅰ) 두 직선 $2x+y-4=0$, $mx+2y+4=0$이 평행할 때,

$\dfrac{m}{2}=\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{4}{-4}$이므로 $\quad m=4$ ··· ❶

(ⅱ) 두 직선 $3x+y-8=0$, $mx+2y+4=0$이 평행할 때,

$\dfrac{m}{3}=\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{4}{-8}$이므로 $\quad m=6$ ··· ❷

(ⅲ) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

$2x+y-4=0$, $3x+y-8=0$을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=-4$

이므로 두 직선 $2x+y-4=0$, $3x+y-8=0$의 교점의 좌표는 $(4, -4)$이다.

따라서 직선 $mx+2y+4=0$이 점 $(4, -4)$를 지나므로

$4m+2\cdot(-4)+4=0$

$\therefore m=1$ ··· ❸

이상에서 모든 실수 m의 값의 합은

$4+6+1=11$ ··· ❹

답 11

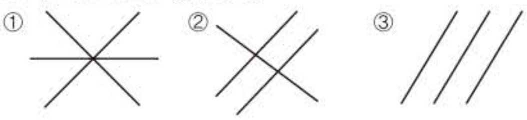
채점 기준	비율
❶ 두 직선 $2x+y-4=0$, $mx+2y+4=0$이 평행할 때의 m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 직선 $3x+y-8=0$, $mx+2y+4=0$이 평행할 때의 m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 세 직선이 한 점에서 만날 때의 m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건을 만족시키는 모든 실수 m의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

참고 **세 직선이 삼각형을 이루지 않을 조건**

① 세 직선이 한 점에서 만난다.

② 두 직선이 서로 평행하다.

③ 세 직선이 모두 평행하다.



> 직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ $(0^\circ\le\theta<90^\circ)$일 때, 직선의 기울기는 $\tan\theta$이다.

21 기울기가 $\tan 45^\circ=1$이고 점 $\mathrm{A}(-1, 1)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y-1=x+1 \qquad \therefore y=x+2$

직선 OA의 기울기가 -1이므로 $\triangle$AOB는 $\angle\mathrm{A}=90^\circ$인 직각삼각형이다.

> (직선 AB의 기울기)×(직선 OA의 기울기) $=1\cdot(-1)=-1$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{OA}}$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}$

이고, $\triangle$AOB의 넓이가 5이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}=5$

$\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}=5\sqrt{2}$

$\therefore (a+1)^2+(b-1)^2=50$ ······ ㉠

한편 점 $\mathrm{B}(a, b)$는 직선 l 위의 점이므로

$b=a+2$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(a+1)^2+(a+1)^2=50, \qquad (a+1)^2=25$

$a^2+2a-24=0, \qquad (a+6)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $\quad b=6$

$\therefore a+b=10$ 답 10

22 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BAO}+\angle\mathrm{CAO}$

$=\angle\mathrm{ACO}+\angle\mathrm{CAO}=90^\circ$

> $\triangle$AOC에서 $\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$이므로 $\angle\mathrm{ACO}+\angle\mathrm{CAO}=90^\circ$

따라서 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이고, 직선 l_1의 기울기가 $\dfrac{4}{3}$이므로 직선 l_2의 기울기는 $-\dfrac{3}{4}$이다.

이때 직선 l_2의 y절편이 4이므로 직선 l_2의 방정식은

$y=-\dfrac{3}{4}x+4$, 즉 $3x+4y-16=0$ 답 ③

23 $\overline{\mathrm{MN}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$이므로 구하는 거리는 점 N과 직선 BC 사이의 거리와 같다.

일품 BOX

점 N의 좌표는 $(1,\ 3)$이고, 직선 BC의 방정식은

$$y=\frac{0+3}{2+2}(x-2), \qquad y=\frac{3}{4}(x-2)$$

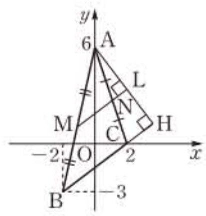
$$\therefore 3x-4y-6=0$$

따라서 두 직선 MN, BC 사이의 거리는

$$\frac{|3-12-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$$

답 ②

다른 풀이 점 A에서 변 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H, 두 직선 AH와 MN의 교점을 L이라 하면 구하는 거리는 $\overline{LH}$의 길이이다. $\overline{LH}=\frac{1}{2}\overline{AH}$이고, 직선 BC의 방정식은 $3x-4y-6=0$이므로



$$\overline{AH}=\frac{|0-24-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=6$$

$$\therefore \overline{LH}=\frac{1}{2}\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

24 점 $P(a,\ b)$가 두 직선 $3x+2y-5=0$과 $2x-3y+5=0$으로부터 같은 거리에 있으므로

$$\frac{|3a+2b-5|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|2a-3b+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$$

$$3a+2b-5=\pm(2a-3b+5)$$

$\therefore a+5b=10$ 또는 $5a-b=0$ ··· ❶

(i) $a+5b=10$일 때,

$$b=-\frac{a}{5}+2$$

조건 ㈎에서 a, b가 자연수이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(5,\ 1)$이고 조건 ㈏를 만족시킨다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(5,\ 1)$의 1개이다. ··· ❷

(ii) $5a-b=0$일 때,

$$b=5a$$

조건 ㈎에서 a, b가 자연수이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 5)$, $(2,\ 10)$, $(3,\ 15)$,

$(4,\ 20)$, $(5,\ 25)$, $\cdots$

그런데 조건 ㈏에서 $ab\le 100$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 5)$, $(2,\ 10)$, $(3,\ 15)$, $(4,\ 20)$의 4개이다. ··· ❸

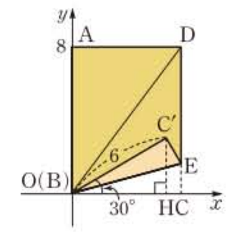
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+4=5$ ··· ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ a, b 사이의 두 관계식을 구할 수 있다.	30%
❷ $a+5b=10$일 때의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	30%
❸ $5a-b=0$일 때의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	30%
❹ 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	10%

25 오른쪽 그림과 같이 두 직선 BC, AB를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



$\angle EBC=\angle EBC'=15^\circ$이므로

$\angle C'BC=30^\circ$

점 C′에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle C'BH$에서 $\overline{BH}=3\sqrt{3}$, $\overline{C'H}=3$이므로 점 C′의 좌표는

$(3\sqrt{3},\ 3)$

직각삼각형 C′BH에서
$\overline{BH}=\overline{BC'}\cos 30^\circ$
$=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$,
$\overline{C'H}=\overline{BC'}\sin 30^\circ$
$=6\cdot\frac{1}{2}=3$

직선 BD의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x$, 즉 $4x-3y=0$이므로

점 $C'(3\sqrt{3},\ 3)$과 직선 BD 사이의 거리는

$$\frac{|12\sqrt{3}-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{12\sqrt{3}-9}{5}$$

따라서 $p=\frac{12}{5}$, $q=-\frac{9}{5}$이므로

$$p+q=\frac{3}{5}$$

답 ③

26 직선 $k(x+y)+4(x-1)=0$, 즉 $(k+4)x+ky-4=0$과 원점 사이의 거리는

$$f(k)=\frac{|-4|}{\sqrt{(k+4)^2+k^2}}=\frac{4}{\sqrt{2k^2+8k+16}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{2(k+2)^2+8}}$$

이므로 $2(k+2)^2+8$의 값이 최소일 때, $f(k)$의 값은 최대이다.

$k=-2$일 때
$2(k+2)^2+8$은 최솟값 8을 갖는다.

따라서 $f(k)$의 최댓값은 $\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$

답 ①

참고 x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수
$f(x)=a(x-m)^2+n$은
① $a>0$이면 $x=m$일 때, 최솟값 n을 갖는다.
② $a<0$이면 $x=m$일 때, 최댓값 n을 갖는다.

27 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면
$\overline{AP}^2+3\overline{BP}^2=4\overline{CP}^2$에서

$$\{(x+1)^2+(y-1)^2\}+3\{(x-1)^2+(y+3)^2\}$$
$$=4\{(x-5)^2+(y-3)^2\} \quad \cdots ❶$$
$$4x^2+4y^2-4x+16y+32$$
$$=4x^2+4y^2-40x-24y+136$$
$$36x+40y=104$$
$$\therefore 9x+10y=26 \quad \cdots ❷$$

따라서 $a=9$, $b=10$이므로

$ab=90$ ··· ❸

답 90

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식을 x, y에 대한 등식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

28 점 $P(a+b,\ a-b)$가 직선 $2x+y=1$ 위에 있으므로

$2(a+b)+(a-b)=1$

$\therefore 3a+b=1$ …… ㉠

$a-b=x,\ a+b=y$로 놓으면

$a=\dfrac{x+y}{2},\ b=\dfrac{y-x}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 점 Q의 자취의 방정식은

$3\cdot\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y-x}{2}=1$

$\therefore x+2y=1$ 답 ②

$\begin{cases} a-b=x & \cdots ㉡ \\ a+b=y & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉡+㉢을 하면

$2a=x+y$

$\therefore a=\dfrac{x+y}{2}$

㉢−㉡을 하면

$2b=y-x$

$\therefore b=\dfrac{y-x}{2}$

29 $\overline{BD}$ 위의 점을 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{BD}$는 $\angle ABC$를 이등분한다. 즉 점 P에서 두 직선 AB, BC 사이의 거리가 같으므로

$\dfrac{|3x-y+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|ax+by+3|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\dfrac{|3x-y+2|}{\sqrt{10}}=\dfrac{|ax+by+3|}{2\sqrt{10}}$

$2|3x-y+2|=|ax+by+3|$

$6x-2y+4=\pm(ax+by+3)$

$\therefore (6-a)x-(2+b)y+1=0$

또는 $(a+6)x+(b-2)y+7=0$

(i) 직선 $(6-a)x-(2+b)y+1=0$이 직선 $8x-8y+7=0$일 때,

$8x-8y+7=0$의 양변을 7로 나누면

$\dfrac{8}{7}x-\dfrac{8}{7}y+1=0$이므로

$6-a=\dfrac{8}{7},\ 2+b=\dfrac{8}{7}$

$\therefore a=\dfrac{34}{7},\ b=-\dfrac{6}{7}$

그런데 $a^2+b^2\neq 40$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 직선 $(a+6)x+(b-2)y+7=0$이 직선 $8x-8y+7=0$일 때,

$a+6=8,\ b-2=-8$

$\therefore a=2,\ b=-6$

(i), (ii)에서 $a=2,\ b=-6$이므로

$a+b=-4$ 답 ①

$a^2+b^2=2^2+(-6)^2=40$ 이므로 조건을 만족시킨다.

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 98~99쪽

01 출발한 지 t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각

$(-2+t,\ 0),\ (0,\ 3-2t)$

이므로 t초 후의 두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{(2-t)^2+(3-2t)^2}=\sqrt{5t^2-16t+13}$

$=\sqrt{5\left(t-\dfrac{8}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}}$

따라서 출발한 지 $\dfrac{8}{5}$초 후에 두 점 A, B 사이의 거리는 최소가 되므로 $a=\dfrac{8}{5}$ 답 ④

02 점 P는 선분 AC를 $3:4$로 내분하는 점이므로

$p=\dfrac{3c+4a}{3+4}$ $\therefore 7p=4a+3c$ …… ㉠

또 점 P는 선분 BC를 $3:4$로 외분하는 점이므로

$p=\dfrac{3c-4b}{3-4}$ $\therefore p=4b-3c$ …… ㉡

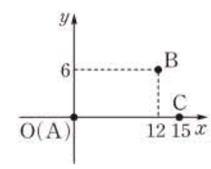
㉠+㉡을 하면 $8p=4a+4b$ $\therefore p=\dfrac{a+b}{2}$

점 Q는 선분 PC를 $3:2$로 외분하는 점이므로

$q=\dfrac{3c-2p}{3-2}=3c-2\cdot\dfrac{a+b}{2}=3c-a-b$

$\therefore q-3c=-a-b$ 답 ③

03 오른쪽 그림과 같이 직선 AC를 x축으로 하고 점 A를 지나고 직선 AC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 A는 원점이다.



이때 1 km를 1로 생각하면 $A(0,\ 0)$, $B(12,\ 6)$, $C(15,\ 0)$이고, 마을회관의 위치를 $P(p,\ q)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서

$p^2+q^2=(p-12)^2+(q-6)^2$

$\therefore 2p+q=15$ …… ㉠

또 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$에서

$p^2+q^2=(p-15)^2+q^2$

$30p=225$ $\therefore p=\dfrac{15}{2}$

$p=\dfrac{15}{2}$를 ㉠에 대입하면 $15+q=15$

$\therefore q=0$

$\therefore P\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$

노인정의 위치를 Q라 하면 점 Q는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{0+12+15}{3},\ \dfrac{0+6+0}{3}\right)$ $\therefore (9,\ 2)$

$\therefore 4l^2=4\overline{PQ}^2=4\left\{\left(9-\dfrac{15}{2}\right)^2+2^2\right\}$

$=25$ 답 25

04 점 G의 y좌표를 p라 하면 $\triangle GOB$의 넓이가 32이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot p=32,$ $\dfrac{1}{2}\cdot 8p=32$

$\therefore p=8$

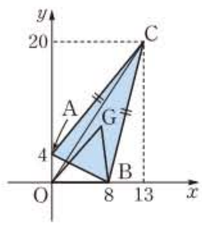
이때 점 G는 △ABC의 무게중심이므로

$$\frac{4+0+b}{3}=8 \qquad \therefore b=20$$

$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$$a^2+(20-4)^2=(a-8)^2+20^2$$
$$a^2+256=a^2-16a+464$$
$$16a=208 \qquad \therefore a=13$$

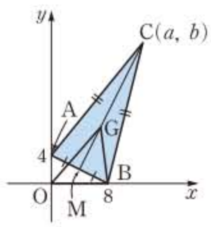
오른쪽 그림에서



$$\triangle CAB$$
$$=\triangle CAO+\triangle COB-\triangle AOB$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 13+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 20-\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4$$
$$=90$$

답 90

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 M이라 하면



$$M(4,\ 2)$$

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로

$$\overline{AB}\perp\overline{CM}$$

이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점과 밑변의 중점을 지나는 직선은 밑변의 수직이등분선과 같다.

이때 직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 CM의 기울기는 2이고, 점 M(4, 2)를 지나므로 직선 CM의 방정식은

$$y-2=2(x-4) \qquad \therefore y=2x-6$$

한편 점 G는 △ABC의 무게중심이므로 선분 CM을 2 : 1로 내분하는 점이다.

점 G의 y좌표를 p라 하면

$$p=\frac{2\cdot 2+1\cdot b}{2+1}=\frac{4+b}{3}$$

그런데 삼각형 GOB의 넓이가 32이므로

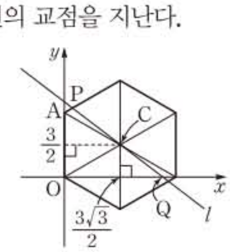
$$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot p=32, \qquad \frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{4+b}{3}=32$$
$$\frac{4+b}{3}=8 \qquad \therefore b=20$$

점 C(a, 20)은 직선 $y=2x-6$ 위의 점이므로

$$20=2a-6 \qquad \therefore a=13$$

05 직선 l이 정육각형의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 정육각형의 가장 긴 세 대각선의 교점을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 정육각형의 가장 긴 세 대각선의 교점을 C라 하면



$$C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

한 변의 길이가 3인 정삼각형의 높이는 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

즉 직선 l은 두 점 $P\left(0,\ \frac{7}{2}\right)$, $C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

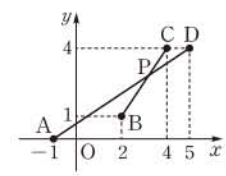
$$y-\frac{7}{2}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{7}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}-0}(x-0)$$
$$\therefore y=-\frac{4}{3\sqrt{3}}x+\frac{7}{2}$$

이 직선이 점 Q($\sqrt{3}a$, 0)을 지나므로

$$0=-\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}a+\frac{7}{2}$$
$$\frac{4}{3}a=\frac{7}{2} \qquad \therefore a=\frac{21}{8}$$

답 ③

06 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 값이 최소가 되려면 오른쪽 그림과 같이 점 P는 $\overline{AD}$ 위에 있고, 동시에 $\overline{BC}$ 위에 있어야 한다.



즉 $\overline{AD}$와 $\overline{BC}$의 교점이 P이어야 한다.

두 점 A, D를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{4-0}{5+1}(x+1) \qquad \therefore y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

두 점 B, C를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{4-1}{4-2}(x-2) \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x-2 \quad \cdots ㉡$$

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 x좌표는 $\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{3}{2}x-2$에서

$$4x+4=9x-12 \qquad \therefore x=\frac{16}{5}$$

이것을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{14}{5}$

$$\therefore a=\frac{16}{5},\ b=\frac{14}{5}$$

한편 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 최솟값은 $\overline{AD}+\overline{BC}$의 값이므로

$$k=\sqrt{(5+1)^2+4^2}+\sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2}$$
$$=3\sqrt{13}$$
$$\therefore a+b+k^2=\frac{16}{5}+\frac{14}{5}+(3\sqrt{13})^2$$
$$=6+117=123$$

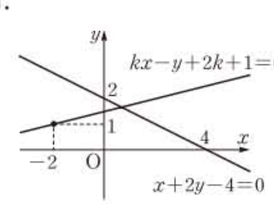
답 123

07 $kx-y+2k+1=0$에서

$$k(x+2)+(1-y)=0$$

이므로 직선 $kx-y+2k+1=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 1)$을 지난다.

또 직선 $x+2y-4=0$은 오른쪽 그림과 같으므로 두 직선이 제1사분면에서 만나려면 직선 $kx-y+2k+1=0$이 두 점 (0, 2), (4, 0)을 잇는 선분 사이를 지나야 한다.



(i) 직선 $kx-y+2k+1=0$이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때,

$$-2+2k+1=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 $kx-y+2k+1=0$이 점 $(4,\ 0)$을 지날 때,

$$4k+2k+1=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{6}$$

(i), (ii)에서 $-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$이므로

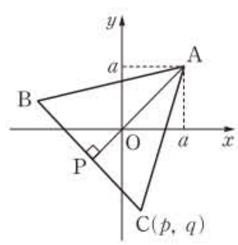
$$\alpha=-\frac{1}{6},\ \beta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 3(\alpha+\beta)=1$$

답 1

$k=-\frac{1}{6}$, $k=\frac{1}{2}$일 때는 두 직선의 교점이 각각 x축, y축 위에 있으므로 제1사분면에 포함되지 않는다.

08 점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 P라 하면



$$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4=2\sqrt{3}$$

△ABC의 무게중심이 원점이므로 오른쪽 그림에서

$$\overline{\mathrm{OA}}=\frac{2}{3}\,\overline{\mathrm{AP}}$$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$이므로

$$\sqrt{2}a=\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{3}, \qquad \sqrt{2}a=\frac{4\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

또 $2\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OA}}$이므로

$$\mathrm{P}\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$$

이때 두 직선 PA, PC는 서로 수직이므로 직선 PC의 기울기는 -1이다. 즉

$$\frac{q+\frac{a}{2}}{p+\frac{a}{2}}=-1, \qquad q+\frac{a}{2}=-p-\frac{a}{2}$$

$$\therefore p+q=-a$$

$$\therefore (p+q)^2=(-a)^2=\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{8}{3}$$

답 ④

$\overline{\mathrm{AP}}$는 $\overline{\mathrm{BC}}$의 수직이등분선이므로 점 O는 $\overline{\mathrm{AP}}$ 위에 있다.

$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}$
$=\sqrt{2}a\ (\because a>0)$

직선 PA의 방정식은 $y=x$

09 ㄱ. 직선 l의 방정식을 a에 대하여 정리하면

$$a(x+2y)+(6-3y)=0$$

이 직선이 a의 값에 관계없이 항상 두 직선

$$x+2y=0,\ 6-3y=0$$

의 교점을 지나므로 위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=-4,\ y=2$$

따라서 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-4,\ 2)$를 지난다.

ㄴ. 직선 $x+2y-1=0$과 직선 $l: ax+(2a-3)y+6=0$이 평행하려면

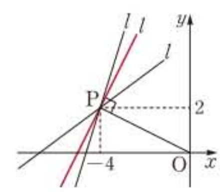
$$\frac{a}{1}=\frac{2a-3}{2}\neq\frac{6}{-1}$$

$\frac{a}{1}=\frac{2a-3}{2}$에서 $\qquad 2a=2a-3$

$$\therefore 0\cdot a=-3$$

이 식을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않으므로 직선 $x+2y-1=0$과 평행한 직선 l은 존재하지 않는다.

ㄷ. 점 $\mathrm{P}(-4,\ 2)$라 하면 직선 l은 점 P를 지나는 직선이다. 오른쪽 그림에서 원점 O와 직선 l 사이의 거리가 최대가 될 때는 직선 l이 직선 OP와 수직일 때이다.



즉 직선 OP의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 l의 기울기가 2일 때 원점 O와 직선 l사이의 거리가 최대이다.

$ax+(2a-3)y+6=0$에서

$$(2a-3)y=-ax-6$$

(i) $2a-3=0$, 즉 $a=\frac{3}{2}$이면 $\qquad x=-4$

이 직선의 방정식은 기울기가 2가 될 수 없다.

(ii) $2a-3\neq 0$, 즉 $a\neq\frac{3}{2}$이면 기울기가 2이어야 하므로 $\qquad -\frac{a}{2a-3}=2$

$$-a=4a-6 \qquad \therefore a=\frac{6}{5}$$

따라서 원점 O와 직선 l 사이의 거리는 $a=\frac{6}{5}$일 때 최대이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

참고 ㄷ에서 원점과 직선 l 사이의 거리는 $\frac{|6|}{\sqrt{a^2+(2a-3)^2}}$이므로 $a^2+(2a-3)^2$의 값이 최소일 때의 a의 값을 구해도 된다.

10 직선 $mx-y-3m+1=0$, 즉

$$y=m(x-3)+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 직선 ㉠이 사각형 ABCD와 만나려면 직선 ㉠이 선분 BD를 지나야 한다.

(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(-1,\ 3)$을 지날 때,

$$3=-4m+1 \qquad \therefore m=-\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{D}(1,\ 5)$를 지날 때,

$$5=-2m+1 \qquad \therefore m=-2$$

(i), (ii)에서 $\qquad -2\le m\le -\frac{1}{2}$

한편 직선 ㉠과 직선 $sx-y-5s+2=0$, 즉 $y=sx-5s+2$가 수직이므로

$$ms=-1 \qquad \therefore s=-\frac{1}{m}$$

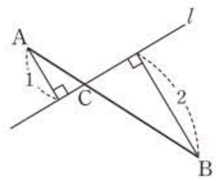
$-2\le m\le -\frac{1}{2}$에서

$$-2\le\frac{1}{m}\le-\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{2}\le-\frac{1}{m}\le2$$

$$\therefore \frac{1}{2}\le s\le2$$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=2$이므로 $\quad \alpha+\beta=\frac{5}{2}$ 답 ②

11 직선 l과 선분 AB의 교점을 C라 하면 두 점 A, B와 직선 l 사이의 거리가 각각 1, 2이므로



$$\overline{AC}:\overline{BC}=1:2$$

왼쪽 그림의 두 직각삼각형은 닮음이다.

즉 점 C는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$$C\left(\frac{1\cdot5+2\cdot2}{1+2},\ \frac{1\cdot(-4)+2\cdot2}{1+2}\right)\qquad\therefore C(3,\ 0)$$

따라서 직선 l은 점 C(3, 0)을 지나므로 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$$y=m(x-3)\qquad\therefore mx-y-3m=0$$

직선 l과 점 A(2, 2) 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|2m-2-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\qquad |-m-2|=\sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$m^2+4m+4=m^2+1,\qquad 4m=-3$$

$$\therefore m=-\frac{3}{4}$$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$이므로 y절편은 $\frac{9}{4}$이다. 답 $\frac{9}{4}$

12 원 C_1의 중심이 그리는 자취 l은 직선 $12x-5y+24=0$과 평행한 직선이고, 이 두 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같다.
원 C_2 위의 점 P에서 직선 l에 이르는 거리의 최솟값은 직선 l과 직선 $12x-5y-67=0$ 사이의 거리에서 원 C_2의 지름의 길이인 2를 뺀 값이다.
따라서 구하는 거리의 최솟값은 두 직선 $12x-5y+24=0$, $12x-5y-67=0$ 사이의 거리에서 3을 뺀 값과 같다.
직선 $12x-5y+24=0$ 위의 점 $(-2,\ 0)$과 직선 $12x-5y-67=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-24-67|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=7$$

이므로 구하는 거리의 최솟값은 $\quad 7-3=4$ 답 4

1등급 비밀노트

직선 l과 직선 $12x-5y+24=0$ 사이의 거리가 1임을 이용하여 직선 l의 방정식을 직접 구해 문제를 해결할 수도 있지만 위의 해설과 같은 원리를 이용하여 주어진 두 직선의 방정식만으로도 문제를 해결할 수 있다.

10 원의 방정식

개념 & 핵심 기출

본책 100~102쪽

01 원의 중심이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로 원의 중심을 $C(a,\ 2a)$라 하자.
$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$$(a+1)^2+(2a-3)^2=(a-4)^2+(2a+2)^2$$

$$5a^2-10a+10=5a^2+20,\qquad 10a=-10$$

$$\therefore a=-1$$

따라서 $C(-1,\ -2)$이고 원의 반지름의 길이는 $\overline{AC}$의 길이와 같으므로

$$\overline{AC}=\sqrt{(-1+1)^2+(-2-3)^2}=5$$ 답 ③

02 주어진 원의 방정식을 변형하면

$$\{x-(a+1)\}^2+(y+a)^2=-a^2+2a+3$$

이므로 반지름의 길이

$$\sqrt{-a^2+2a+3}=\sqrt{-(a-1)^2+4}$$

가 최대일 때 원의 넓이가 최대이다.
따라서 $a=1$일 때 원의 넓이가 최대이고, 이때 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -1)$이다. 답 ①

$(a+1,\ -a)$

03 직각삼각형의 외접원의 중심은 빗변의 중점이므로 외접원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{1+5}{2}\right),\ 즉\ (4,\ 3)$$

또 외접원의 반지름의 길이는 두 점 (2, 1), (4, 3) 사이의 거리이므로

$$\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 외접원의 방정식은

$$(x-4)^2+(y-3)^2=8$$

$$\therefore x^2+y^2-8x-6y+17=0\qquad\cdots ㉠$$

$(x-2)(x-6)+(y+a)(y+b)=0$에서

$$x^2+y^2-8x+(a+b)y+12+ab=0\qquad\cdots ㉡$$

즉 $a+b=-6$, $ab=5$이므로

$17=12+ab$에서 $ab=5$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$
$$=(-6)^2-2\cdot5$$
$$=26$$ 답 26

04 주어진 원이 점 (2, 0)에서 x축에 접하므로 원의 중심의 x좌표는 2이고, 원의 중심의 좌표를 $(2,\ a)$ $(a>0)$라 하면 원의 반지름의 길이는 a이다.
또 이 원이 직선 $x-2y+2=0$에 접하므로 원의 중심 $(2,\ a)$와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다. 즉

$$\frac{|2+(-2)\cdot a+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=a,\qquad |-2a+4|=\sqrt{5}a$$

$$4a^2-16a+16=5a^2,\qquad a^2+16a-16=0$$

$$\therefore a=-8+4\sqrt{5}\ (\because a>0)$$

① x축에 접하는 원에서
(반지름의 길이)
$=|(중심의\ y좌표)|$
② y축에 접하는 원에서
(반지름의 길이)
$=|(중심의\ x좌표)|$
③ x축, y축에 동시에 접하는 원에서
(반지름의 길이)
$=|(중심의\ x좌표)|$
$=|(중심의\ y좌표)|$

따라서 $m=-8$, $n=4$이므로

$|m|+|n|=8+4=12$ 답 12

05 x축, y축에 동시에 접하면서 점 $(-1,\ 2)$를 지나는 원의 중심은 제2사분면 위에 있으므로 주어진 원의 중심의 좌표를 $(-k,\ k)$ $(k>1)$라 하면 원의 방정식은

$(x+k)^2+(y-k)^2=k^2$

원의 반지름의 길이가 k이고 원의 반지름의 길이는 1보다 크므로 $k>1$

이 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$(-1+k)^2+(2-k)^2=k^2$

$k^2-6k+5=0$

$(k-1)(k-5)=0$

$\therefore k=5\ (\because k>1)$

따라서 주어진 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-5)^2=25$

즉 $x^2+y^2+10x-10y+25=0$이므로

$a=10,\ b=-10,\ c=25$

$\therefore a+b+c=25$ 답 ⑤

06 점 B의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{OB}:\overline{AB}=3:2$이므로

$2\overline{OB}=3\overline{AB}$, $\quad 4\overline{OB}^2=9\overline{AB}^2$

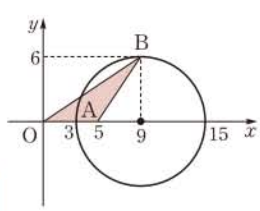
$4(x^2+y^2)=9\{(x-5)^2+y^2\}$

$5x^2+5y^2-90x+225=0$

$x^2+y^2-18x+45=0$

$\therefore (x-9)^2+y^2=36$

따라서 점 B는 중심이 점 $(9,\ 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원 위를 움직인다.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 밑변으로 하면 높이가 원의 반지름의 길이일 때 삼각형 OAB의 넓이가 최대이므로 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값은

삼각형 OAB의 밑변의 길이가 일정하므로 높이가 최대일 때, 넓이가 최대이다.

$\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6=15$ 답 15

다른 풀이 선분 OA를 $3:2$로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D라 하면

C$(3,\ 0)$, D$(15,\ 0)$

점 B의 자취는 두 점 C, D를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이므로 중심은 $\overline{CD}$의 중점인 점 $(9,\ 0)$이고 반지름의 길이는 6이다.

즉 점 B의 자취의 방정식은

$(x-9)^2+y^2=36$

07 $(x-4)^2+(y+2)^2=26$에서

$x^2+y^2-8x+4y-6=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-8x+4y-6)=0\ (k\neq-1)$ ······ ㉠

이라 하면 이 원이 점 $(5,\ 0)$을 지나므로

$21-21k=0$

$\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입한 후 정리하면

$2x^2+2y^2-8x+4y-10=0$

$x^2+y^2-4x+2y-5=0$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=10$

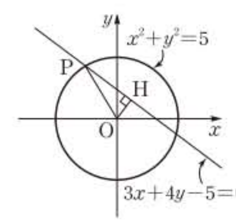
따라서 구하는 원의 넓이는 10π이다. 답 ①

반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원의 넓이는 10π이다.

08 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-5-(x^2+y^2-3x-4y)=0$

$\therefore 3x+4y-5=0$



오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=5$의 중심 O$(0,\ 0)$에서 직선 $3x+4y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 $x^2+y^2=5$와 직선 $3x+4y-5=0$의 한 교점을 P라 하자.

이때

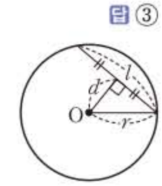
$\overline{OH}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

이므로 직각삼각형 POH에서

$\overline{PH}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

따라서 공통인 현의 길이는

$2\overline{PH}=2\cdot2=4$ 답 ③



참고 현의 길이는 원의 중심에서 현에 수선을 내려 직각삼각형을 만든 다음, 피타고라스 정리를 이용하여 구한다.
즉 반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 d만큼 떨어진 현의 길이를 l이라 하면

$l=2\sqrt{r^2-d^2}$

09 직선 l_1의 방정식은

$x^2+y^2-8-(x^2+y^2+4x-6y+12)=0$

$\therefore 2x-3y+10=0$ ······ ㉠

직선 l_2의 방정식은

$x^2+y^2-8-(x^2+y^2-6x-4y+12)=0$

$\therefore 3x+2y-10=0$ ······ ㉡

두 직선 l_1, l_2의 x절편은 각각 $-5,\ \dfrac{10}{3}$

$2x-3y+10=0$에 $y=0$을 대입하면
$2x+10=0$
$\therefore x=-5$
$3x+2y-10=0$에 $y=0$을 대입하면
$3x-10=0$
$\therefore x=\dfrac{10}{3}$

㉠$\times3-$㉡$\times2$를 하면

$-13y+50=0$

$\therefore y=\dfrac{50}{13}$

Ⅳ 도형의 방정식

즉 두 직선 l_1, l_2의 교점의 y좌표는 $\frac{50}{13}$이므로 두 직선 l_1, l_2와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10}{3}+5\right)\cdot\frac{50}{13}=\frac{25^2}{39}$$

$\therefore a=25$

답 25

10 (i) 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$과 원 $x^2+y^2=1$이 만나지 않으려면 원의 중심 (0, 0)과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 커야 하므로

$$\frac{|2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>1, \quad \sqrt{m^2+1}<2$$

$$m^2+1<4, \quad m^2<3$$

$$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$$

(ii) 직선 $mx-y+2=0$과 원 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$, 즉 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$가 만나지 않으려면 원의 중심 (3, 2)와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2보다 커야 하므로

$$\frac{|3m-2+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>2, \quad |3m|>2\sqrt{m^2+1}$$

$$9m^2>4m^2+4, \quad m^2>\frac{4}{5}$$

$$\therefore m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } m>\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(i), (ii)에서

$$-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$$

답 $-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$

다른 풀이 (i) $y=mx+2$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$x^2+(mx+2)^2=1$$

$$\therefore (1+m^2)x^2+4mx+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(2m)^2-(1+m^2)\cdot 3<0$$

$$m^2<3$$

$$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$$

(ii) $y=mx+2$를 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$에 대입하면

$$x^2+(mx+2)^2-6x-4(mx+2)+9=0$$

$$\therefore (1+m^2)x^2-6x+5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-(1+m^2)\cdot 5<0$$

$$m^2>\frac{4}{5}$$

$$\therefore m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } m>\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(i), (ii)에서

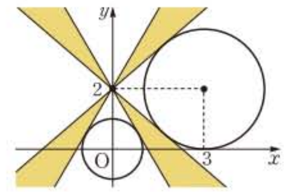
$$-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$$

일품 BOX

원의 방정식과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선의 위치 관계는
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

이차방정식 $4m^2+9m+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=9^2-4\cdot4\cdot4$
$=17>0$
이므로 이차방정식 $4m^2+9m+4=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

참고 직선 $y=mx+2$는 m의 값에 관계없이 항상 점 (0, 2)를 지나므로 직선이 두 원과 모두 만나지 않을 때는 오른쪽 그림에서 직선이 색칠한 부분에 있을 때이다.



11 $x^2+y^2-4x-2y=m$에서

$$(x-2)^2+(y-1)^2=m+5$$

이 원의 중심을 C라 하면 점 C(2, 1)과 직선 $x-y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{m+5}$이고 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

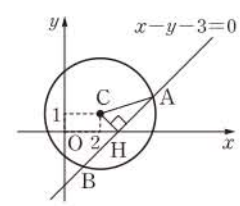
$$\sqrt{m+5}>\sqrt{2}, \quad m+5>2$$

$$\therefore m>-3$$

따라서 정수 m의 최솟값은 -2이므로

$$a=-2$$

한편 점 C에서 직선 $x-y-3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

직각삼각형 CHA에서

$$(\sqrt{m+5})^2=(\sqrt{2})^2+3^2$$

$$m+5=11 \quad \therefore m=6$$

즉 $\overline{AB}=6$을 만족시키는 m의 값은 6이므로

$$b=6$$

$$\therefore a+b=4$$

답 4

12 $x^2+y^2+2x=0$에서 $(x+1)^2+y^2=1$

$x^2+y^2-4x+6y+12=0$에서

$$(x-2)^2+(y+3)^2=1$$

원 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선은 이 원의 중심 (2, −3)을 지나므로 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면

$$y=m(x-2)-3$$

이 직선이 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접하므로 이 원의 중심 (−1, 0)과 직선 $y=m(x-2)-3$, 즉 $mx-y-2m-3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같다. 즉

$$\frac{|-m-2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$|3m+3|=\sqrt{m^2+1}, \quad 8m^2+18m+8=0$$

$$\therefore 4m^2+9m+4=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 직선의 기울기의 합은 $-\frac{9}{4}$이다.

답 ①

13 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=5 \qquad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{5}{b}$$

이 직선과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$이 수직이므로

$$-\frac{a}{b}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$$\therefore a=-2b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(-2b)^2+b^2=5, \qquad 5b^2=5$$

$$\therefore b^2=1$$

따라서 $a^2=4b^2=4$이므로

$$a^2b^2=4$$

답 ④

다른 풀이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$과 수직인 직선의 기울기는 2이고, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원의 접선의 방정식은

$$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1}$$

$$\therefore y=2x\pm5$$

이 직선이 점 $(a,\ b)$를 지나므로

$$b=2a\pm5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $(a,\ b)$는 원 위의 점이므로

$$a^2+b^2=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-2,\ b=1 \text{ 또는 } a=2,\ b=-1$$

$$\therefore a^2b^2=4\cdot1=4$$

14 접점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 접선의 방정식은

$$ax+by=5$$

이 직선이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$$3a-b=5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $(a,\ b)$는 원 위의 점이므로

$$a^2+b^2=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=-2 \text{ 또는 } a=2,\ b=1$$

따라서 접선의 방정식은 $x-2y=5$ 또는 $2x+y=5$이므로

$$m_1m_2=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$$

답 -1

15 직선 $y=3x-1$과 평행한 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 접선의 방정식은

$$y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1}$$

$$\therefore y=3x\pm10$$

두 원 O, O'의 반지름의 길이가 각각 5, 3이므로

$$\overline{OH}=\overline{OA}-\overline{HA}=\overline{OA}-\overline{O'B}=5-3=2$$

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 각각 1, 2이므로

$$\overline{C_1H}=\overline{C_1A}+\overline{AH}=\overline{C_1A}+\overline{BC_2}=1+2=3$$

$b=2a+5$를 ㉡에 대입하면

$$a^2+(2a+5)^2=5$$
$$a^2+4a+4=0$$
$$(a+2)^2=0$$
$$\therefore a=-2$$
$$\therefore b=2\cdot(-2)+5=1$$

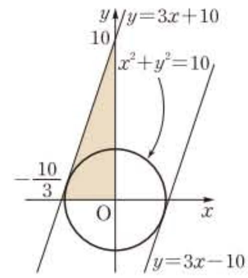
$b=2a-5$를 ㉡에 대입하면

$$a^2+(2a-5)^2=5$$
$$a^2-4a+4=0$$
$$(a-2)^2=0$$
$$\therefore a=2$$
$$\therefore b=2\cdot2-5=-1$$

그런데 직선 l은 제2사분면에서 원에 접하므로 직선 l의 방정식은

$$y=3x+10$$

따라서 직선 l이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(-\frac{10}{3},\ 0\right)$, $(0,\ 10)$이므로



직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot10=\frac{50}{3}$$

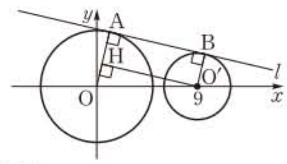
답 ③

16 두 원 O, O'의 중심의 좌표는 각각

$$O(0,\ 0),\ O'(9,\ 0)$$

$$\therefore \overline{OO'}=9$$

오른쪽 그림과 같이 점 O'에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH}=5-3=2$$

따라서 직각삼각형 $OO'H$에서

$$\overline{AB}=\overline{O'H}=\sqrt{9^2-2^2}=\sqrt{77}$$

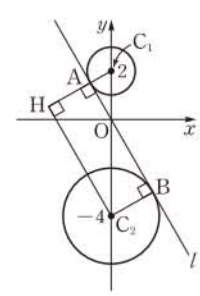
답 ④

17 두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각

$$C_1(0,\ 2),\ C_2(0,\ -4)$$

$$\therefore \overline{C_1C_2}=|2-(-4)|=6$$

오른쪽 그림과 같이 점 C_2에서 선분 C_1A의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{C_1H}=1+2=3$$

따라서 직각삼각형 C_1HC_2에서

$$\overline{AB}=\overline{HC_2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$$

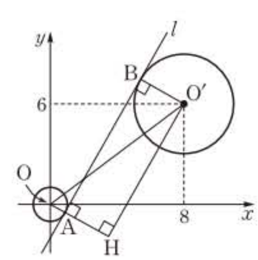
답 $3\sqrt{3}$

18 두 원 O, O'의 중심의 좌표는 각각

$$O(0,\ 0),\ O'(8,\ 6)$$

$$\therefore \overline{OO'}=\sqrt{8^2+6^2}=10$$

오른쪽 그림과 같이 점 O'에서 선분 OA의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH}=1+r,$$
$$\overline{HO'}=\overline{AB}=2\sqrt{21}$$

따라서 직각삼각형 OHO'에서

$$10^2=(1+r)^2+(2\sqrt{21})^2, \qquad (1+r)^2=16$$

$$1+r=\pm4$$

$$\therefore r=3\ (\because r>0)$$

답 3

1등급을 위한 고난도 문제

본책 103~105쪽

01 $x^2+y^2+4x-6y+k=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2=13-k\ (k<13)$

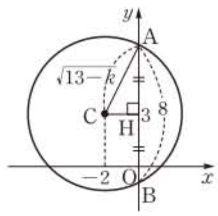
이 방정식이 원을 나타내려면

$13-k>0$

$\therefore k<13$

이므로 이 원은 중심이 점 $(-2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13-k}$이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하고 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4,\ \overline{CH}=2$

이므로 직각삼각형 ACH에서

$(\sqrt{13-k})^2=4^2+2^2$

$13-k=20$

$\therefore k=-7$ 답 -7

다른 풀이 $x=0$을 $x^2+y^2+4x-6y+k=0$에 대입하면

$y^2-6y+k=0$

이때 두 점 A, B는 y축 위의 점이므로 $A(0,\ \alpha)$, $B(0,\ \beta)$로 놓으면 이차방정식 $y^2-6y+k=0$의 두 근은 $\alpha,\ \beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=k$

이고, $\overline{AB}=|\alpha-\beta|=8$이므로

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$64=36-4k \qquad \therefore k=-7$

02 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$a^2+b^2=4$ …… ㉠

$\triangle ABP$의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{5+4+a}{3},\ \frac{0+6+b}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{9+a}{3},\ \frac{6+b}{3}\right)$

이므로 $\frac{9+a}{3}=x,\ \frac{6+b}{3}=y$로 놓으면

$a=3x-9,\ b=3y-6$

이것을 ㉠에 대입하면

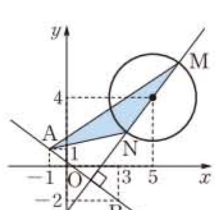
$(3x-9)^2+(3y-6)^2=4$

$9(x-3)^2+9(y-2)^2=4$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=\frac{4}{9}$

따라서 점 G가 나타내는 원의 중심의 좌표는 $(3,\ 2)$이다. 답 ④

03 오른쪽 그림과 같이 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$의 중심 $(5,\ 4)$를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점이 M, N이다.



직선 AB의 기울기는

$\frac{-2-1}{3+1}=-\frac{3}{4}$

이므로 직선 MN의 방정식은

$y-4=\frac{4}{3}(x-5) \qquad \therefore 4x-3y-8=0$

점 $A(-1,\ 1)$과 직선 $4x-3y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4-3-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$

이므로 삼각형 AMN의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 3=3r$

따라서 $3r=10$에서 $\quad r=\frac{10}{3}$ 답 ③

1등급 비밀노트

$\overline{AB}$의 길이는 정해져 있으므로 $\triangle ABP$의 넓이가 최대, 최소일 때는 점 P에서 직선 AB에 이르는 거리가 각각 최대, 최소일 때임을 이용하여 두 점 M, N의 위치를 찾는다.

04 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

(i) 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있을 때,

중심의 좌표를 $(a,\ a)$라 하면

$(a-1)^2+(a+2)^2=17$에서

$a^2+a-6=0, \qquad (a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=2$

(ii) 원의 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있을 때,

중심의 좌표를 $(a,\ -a)$라 하면

$(a-1)^2+(-a+2)^2=17$에서

$a^2-3a-6=0$

$\therefore a=\frac{3+\sqrt{33}}{2}$ 또는 $a=\frac{3-\sqrt{33}}{2}$

x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표가 $(k,\ k)$ 또는 $(k,\ -k)$일 때, 반지름의 길이는 $|k|$이다.

(i), (ii)에서 구하는 모든 원의 반지름의 길이의 합은

$|-3|+|2|+\left|\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right|+\left|\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right|$

$=3+2+\frac{3+\sqrt{33}}{2}+\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$

$=5+\sqrt{33}$

이므로 $\quad m=5,\ n=33$

$\therefore m+n=38$ 답 38

05 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

$\overline{AP}=2\overline{BP}, \qquad \overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

$(x+1)^2+y^2=4\{(x-2)^2+y^2\}$

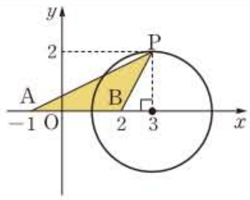
$x^2+y^2-6x+5=0$

$\therefore (x-3)^2+y^2=4$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

ㄱ. 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 2인 원이므로 그 둘레의 길이는 $2\pi\cdot 2=4\pi$

ㄴ. 오른쪽 그림에서 △PAB의 넓이의 최댓값은

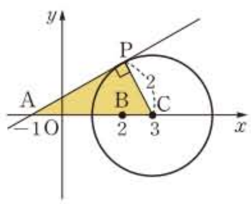


$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot 2$

$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2=3$

점 P가 (3, 2)일 때 △PAB의 넓이가 최대이다.

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때 ∠PAB의 크기가 최대이고, 원의 중심을 C라 하면 ∠APC=90°이므로



$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{PC}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

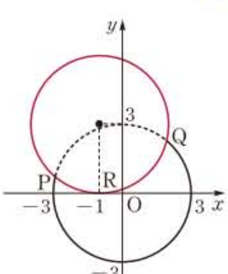
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

06

점 R는 두 점 $(-3,\ 0)$, $(3,\ 0)$을 잇는 선분을 1 : 2로 내분하므로 점 R의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot 3+2\cdot(-3)}{1+2},\ \frac{1\cdot 0+2\cdot 0}{1+2}\right)$, 즉 $(-1,\ 0)$ ··· ❶

이때 세 점 P, Q, R를 지나는 원은 주어진 원과 같은 호를 가지므로 주어진 원과 반지름의 길이가 같고 점 R에서 x축에 접한다. ··· ❷



따라서 구하는 원은 중심이 점 $(-1,\ 3)$, 반지름의 길이가 3인 원이므로 그 방정식은

$(x+1)^2+(y-3)^2=9$ ··· ❸

원의 반지름의 길이가 3이고 원이 x축에 접하므로 원의 중심의 y좌표는 3이다.

답 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$

채점 기준	비율
❶ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 세 점 P, Q, R를 지나는 원이 어떤 원인지 알 수 있다.	50 %
❸ 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

07

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+4x-8+k(x^2+y^2-4x-8)=0$ $(k\neq -1)$

이라 하면

$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(4-4k)x-8-8k=0$

이 원의 중심이 원점이려면 x의 계수가 0이어야 하므로

$4-4k=0$ $\quad\therefore k=1$

중심이 원점인 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$ 꼴이므로 x, y의 계수는 모두 0이다.

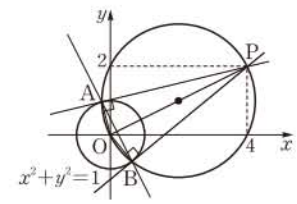
따라서 원의 방정식은

$2x^2+2y^2-16=0$, 즉 $x^2+y^2=8$

이므로 원의 넓이는 8π이다. 답 ④

08

오른쪽 그림과 같이 점 P(4, 2)에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 접점을 각각 A, B라 하면



$\angle OAP=\angle OBP$

$=90°$

이므로 위의 그림과 같이 두 점 A, B는 선분 OP를 지름으로 하는 원 위에 있다.

$\overline{OP}$를 지름으로 하는 원의 방정식은

$\overline{OP}$의 중점 $\left(\frac{4+0}{2},\ \frac{2+0}{2}\right)$, 즉 (2, 1)을 중심으로 하고 반지름의 길이가

$\frac{1}{2}\overline{OP}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2}$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}$

$=\sqrt{5}$

인 원이다.

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

$\therefore x^2+y^2-4x-2y=0$ ······ ㉠

따라서 $\overline{AB}$는 원 $x^2+y^2=1$과 원 ㉠의 공통인 현이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-1-(x^2+y^2-4x-2y)=0$

$\therefore 4x+2y-1=0$ 답 $4x+2y-1=0$

다른 풀이 한 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=1$

이 직선이 점 P(4, 2)를 지나므로 $4x_1+2y_1=1$

이때 또 다른 접점의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라 하면 $4x_2+2y_2=1$을 만족시키므로 두 접점을 지나는 직선의 방정식은 $4x+2y-1=0$

09

m이 0이 아닌 실수일 때, 이차방정식 $(x-y+2)+m(x^2+y^2-4)=0$이 나타내는 도형은 직선 $x-y+2=0$과 원 $x^2+y^2-4=0$의 교점을 지나는 원이다.

$x-y+2=0$에서 $y=x+2$이므로 이것을 $x^2+y^2-4=0$에 대입하면

$x^2+(x+2)^2-4=0,\quad x^2+2x=0$

$x(x+2)=0\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

즉 직선 $x-y+2=0$과 원 $x^2+y^2-4=0$의 교점의 좌표는 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$

주어진 이차방정식이 나타내는 도형은 두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원일 때, 그 넓이가 최소이다.

두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 중심이 점 $(-1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{1^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$이므로 이 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=2$

$\therefore x^2+y^2+2x-2y=0$ ··· ㉠

$(x-y+2)+m(x^2+y^2-4)=0$에서

$mx^2+my^2+x-y-4m+2=0$

$2mx^2+2my^2+2x-2y-8m+4=0$ ··· ㉡

㉠과 ㉡이 같으려면 $2m=1$, $-8m+4=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=2\pi$이므로

반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 넓이는 2π이다.

$$\frac{b}{a}=4\pi$$

답 ④

1등급 비밀노트

주어진 이차방정식을 정리하면

$$x^2+y^2+px+qy+r=0$$

의 꼴로 나타낼 수 있으므로 주어진 이차방정식이 나타내는 도형은 원이다.

또 $m\neq0$일 때, m의 값에 관계없이 $x-y+2=0$, $x^2+y^2-4=0$을 만족시키는 x, y의 값이 존재하므로 주어진 원은 위의 두 방정식을 연립하여 푼 해, 즉 직선 $x-y+2=0$과 원 $x^2+y^2-4=0$의 교점을 항상 지난다.

10 원 $x^2+y^2+ax-3ay+4=0$이 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+16=0$의 둘레의 길이를 이등분하므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+16=0$의 중심을 지나야 한다. ··· ❶

주어진 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+ax-3ay+4-(x^2+y^2+2ax-4ay+16)=0$$

$$-ax+ay-12=0$$

$$\therefore ax-ay+12=0 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad ··· ❷$$

$x^2+y^2+2ax-4ay+16=0$에서

$$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-16 \quad \cdots\cdots ㉡$$

즉 직선 ㉠이 원 ㉡의 중심 $(-a,\ 2a)$를 지나므로

$$a\cdot(-a)-a\cdot2a+12=0$$

$$a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0) \quad ··· ❸$$

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 원의 교점을 지나는 직선이 둘레의 길이가 이등분되는 원의 중심을 지나야 함을 알 수 있다.	20 %
❷ 주어진 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

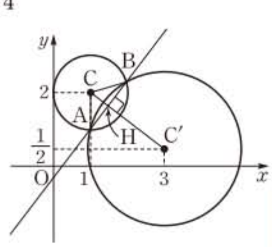
11 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1$$

$x^2+y^2-6x-y+k=0$에서

$$(x-3)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{37}{4}-k$$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심을 각각 C, C′, 두 원의 교점을 각각 A, B라 하고, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{4}{5}$$

원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 이등분하므로 $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{CH}=\sqrt{1^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

한편 두 원의 공통인 현, 즉 직선 AB의 방정식은

$$x^2+y^2-2x-4y+4-(x^2+y^2-6x-y+k)=0$$

$$\therefore 4x-3y+4-k=0$$

점 C(1, 2)에서 직선 AB에 이르는 거리는 $\overline{CH}$의 길이와 같으므로

$$\frac{|4-6+4-k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{3}{5}$$

$$|2-k|=3, \qquad 2-k=\pm3$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=5$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다.

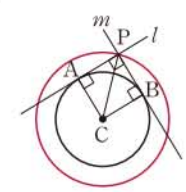
답 ④

12 $x^2+y^2+4x-8y-12=0$에서

$$(x+2)^2+(y-4)^2=32 \quad \cdots\cdots ㉠$$

원 ㉠의 중심을 C라 하면 C$(-2,\ 4)$

두 직선 l, m의 교점을 P라 하면 두 직선 l, m은 수직이므로 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 중심이 C이고 반지름이 $\overline{CP}$인 원이다.



두 직선 l, m과 원 ㉠의 접점을 각각 A, B라 하면 사각형 PACB는 정사각형이므로

$$\overline{CP}=\sqrt{2}\cdot\overline{AC}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}=8$$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는

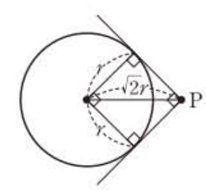
$$2\pi\cdot8=16\pi$$

답 ④

1등급 비밀노트

원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 두 접선이 수직일 때, 점 P의 자취

➡ 주어진 원과 중심의 좌표가 같고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}r$인 원이다.



13 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB}=\frac{3}{2}$이므로 $\qquad \overline{AH}=\frac{3}{4}$

즉 점 A의 y좌표가 $\frac{3}{4}$이므로 $x^2+y^2=1$에 $y=\frac{3}{4}$을 대입하면

$$x^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1, \qquad x^2=\frac{7}{16}$$

$$\therefore x=\frac{\sqrt{7}}{4}\ (\because x>0)$$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{7}}{4},\ \frac{3}{4}\right)$이고 원점과 점 A를 지나는 직선의 방정식은

점 B의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{7}}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$

$$y=\frac{3}{\sqrt{7}}x, \text{ 즉 } 3x-\sqrt{7}y=0$$

점 $(n+2,\ 0)$과 이 직선 사이의 거리는 원 O'의 반지름의 길이 n과 같으므로

$$\frac{|3(n+2)|}{\sqrt{3^2+(-\sqrt{7})^2}}=n, \qquad 3n+6=4n$$

$n+2>0$

$\therefore n=6$

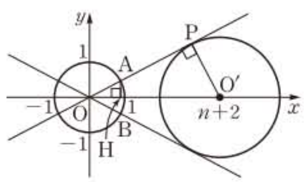
답 6

다른 풀이 다음 그림에서 $\triangle AOH \backsim \triangle O'OP$이므로

$\overline{OA}:\overline{OO'}=\overline{AH}:\overline{O'P}$

$$1:(n+2)=\frac{3}{4}:n$$

$$n=\frac{3}{4}(n+2) \qquad \therefore n=6$$



14 원 $x^2+(y+a)^2=20$의 중심의 좌표는 $(0,\ -a)$, 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.

(i) 점 $(0,\ -a)$와 직선 $x-2y-7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2a-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2a-7|}{\sqrt{5}}$$

이므로 원과 직선 $x-2y-7=0$이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|2a-7|}{\sqrt{5}}<2\sqrt{5}$$

$|2a-7|<10$

$-10<2a-7<10$

$\therefore -\frac{3}{2}<a<\frac{17}{2}$ ⋯ ❶

(ii) 점 $(0,\ -a)$와 직선 $2x-y-14=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a-14|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a-14|}{\sqrt{5}}$$

이므로 원과 직선 $2x-y-14=0$이 만나지 않으려면

$$\frac{|a-14|}{\sqrt{5}}>2\sqrt{5}$$

$|a-14|>10$

$a-14<-10$ 또는 $a-14>10$

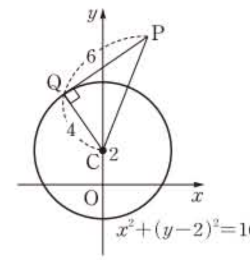
$\therefore a<4$ 또는 $a>24$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 $-\frac{3}{2}<a<4$이므로 조건을 만족시키는 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5개이다. ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 원과 직선 $x-2y-7=0$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 원과 직선 $2x-y-14=0$이 만나지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

15 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+(y-2)^2=16$의 중심을 C라 하고, 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 Q라 하자. 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 직각삼각형 PQC에서



$\overline{PC}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QC}^2$

$$x^2+(y-2)^2=6^2+4^2$$

$$\therefore x^2+(y-2)^2=52$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(0,\ 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{52}$인 원이므로 구하는 넓이는

52π

답 52π

16 원의 중심 $(0,\ 0)$과 접선 $4x+3y-15=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-15|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$$

이므로 원의 반지름의 길이는 3이고, 원의 방정식은 $x^2+y^2=9$이다. ⋯ ❶

원 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=9 \qquad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{9}{b}$$

이 방정식이 $4x+3y=15$, 즉 $y=-\frac{4}{3}x+5$와 같으므로

$$-\frac{a}{b}=-\frac{4}{3},\ \frac{9}{b}=5$$

$\therefore a=\frac{12}{5},\ b=\frac{9}{5}$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=\frac{21}{5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{21}{5}$

채점 기준	비율
❶ 중심이 원점이고 직선 $4x+3y=15$에 접하는 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

17 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $3x+y=10$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 기울기가 $\frac{1}{3}$인 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{3}x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}$$

$$\therefore y=\frac{1}{3}x\pm\frac{10}{3}$$

이때 이 직선이 원과 제2사분면에서 접해야 하므로

접선의 방정식이 $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$이면 원과 제4사분면에서 접한다.

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3} \qquad \therefore -\frac{x}{10}+\frac{3}{10}y=1$$

따라서 $a=-10$, $b=\frac{10}{3}$이므로

$$a+b=-\frac{20}{3}$$

답 ②

18 원 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=36$$

이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$\left(\frac{36}{a},\ 0\right),\ \left(0,\ \frac{36}{b}\right) \quad \cdots❶$$

$\overline{\mathrm{AB}}=12$이므로 $\sqrt{\left(-\frac{36}{a}\right)^2+\left(\frac{36}{b}\right)^2}=12$

$$\left(-\frac{36}{a}\right)^2+\left(\frac{36}{b}\right)^2=144,\qquad \frac{9}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$$

$$\therefore\ 9(a^2+b^2)=a^2b^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2=36$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=36 \quad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots❷$$

따라서 ㉡을 ㉠에 대입하면

$$9\cdot 36=a^2b^2,\qquad (ab)^2=(3\cdot 6)^2$$

$$\therefore\ ab=18\ (\because\ ab>0) \quad \cdots❸$$

답 18

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 a, b를 사용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b에 대한 두 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	30 %

19 두 원 O, O'의 중심을 각각 O, O′이라 하면

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{O'}(b,\ 0)$$

점 O와 직선 $2x+\sqrt{5}y+a=0$ 사이의 거리는 원 O의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$$\frac{|a|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}}=2,\qquad |a|=6$$

$$\therefore\ a=6\ (\because\ a>0)$$

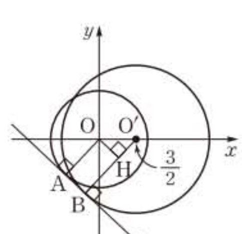
또 점 O′과 직선 $2x+\sqrt{5}y+6=0$ 사이의 거리는 원 O'의 반지름의 길이인 3과 같으므로

$$\frac{|2b+6|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}}=3,\qquad |2b+6|=9$$

$$\therefore\ b=\frac{3}{2}\ (\because\ b>0)$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{OO'}}=\frac{3}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 선분 O′B에 내린 수선의 발을 H라 하면



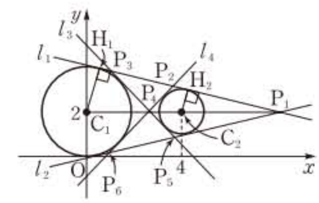
$$\overline{\mathrm{O'H}}=3-2=1$$

직각삼각형 OHO′에서

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

답 ④

20 다음 그림과 같이 두 원 C_1, C_2에 모두 접하는 직선은 l_1, l_2, l_3, l_4가 있다.



따라서 l_1, l_2, l_3, l_4 중 두 직선을 l, m이라 하면 두 직선 l, m의 교점은 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{P_4}$, $\mathrm{P_5}$, $\mathrm{P_6}$의 6개가 존재하고, 선분 OP의 길이가 최대일 때는 위의 그림에서 점 P가 접선 l_1, l_2의 교점인 $\mathrm{P_1}$일 때이다.

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$라 하고 두 점 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면 $\triangle\mathrm{C_1H_1P_1} \backsim \triangle\mathrm{C_2H_2P_1}$이고 그 닮음비는 2 : 1이다.

> 두 원에 동시에 접하는 두 직선 l_1, l_2의 교점이 $\mathrm{P_1}$이므로 점 $\mathrm{C_2}$는 $\overline{\mathrm{C_1P_1}}$ 위의 점이다.

$\overline{\mathrm{C_1P_1}}=2\overline{\mathrm{C_1C_2}}$이고 $\overline{\mathrm{C_1C_2}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{C_1P_1}}=8$

직각삼각형 $\mathrm{C_1OP_1}$에서

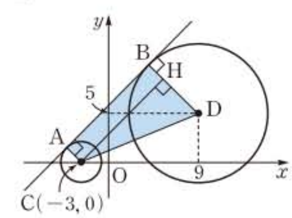
$$\overline{\mathrm{OP_1}}=\sqrt{8^2+2^2}=2\sqrt{17}$$

답 ①

21 두 원의 중심은 각각 $\mathrm{C}(-3,\ 0)$, $\mathrm{D}(9,\ 5)$이므로

$$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{(9+3)^2+5^2}=13$$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{\mathrm{DH}}=7-2=5$$

직각삼각형 CDH에서

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{13^2-5^2}=12$$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

> 사각형 ACDB는 사다리꼴이다.

$$\frac{1}{2}\cdot(7+2)\cdot 12=54$$

답 54

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 106쪽

01 원 C_1: $x^2+y^2=10$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은 (1, 3), (3, 1)의 2개이다.

(i) 점 P의 좌표가 (1, 3)일 때,

점 (1, 3)과 원 C_2의 중심 (11, 7) 사이의 거리는

$$\sqrt{(11-1)^2+(7-3)^2}=2\sqrt{29}$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$2\sqrt{29}-3\le \overline{\mathrm{PQ}}\le 2\sqrt{29}+3$$

> $25<29<\frac{121}{4}$에서
> $5<\sqrt{29}<\frac{11}{2}$
> $\therefore\ 10<2\sqrt{29}<11$

$$\therefore\ 7.\times\times\times\le \overline{\mathrm{PQ}}\le 13.\times\times\times$$

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는 자연수이므로 8, 9, 10, 11, 12, 13의 6개이고 점 Q는 각 길이마다 2개씩 있으므로 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$$6\cdot 2=12$$

(ii) 점 P의 좌표가 $(3,\ 1)$일 때,

점 $(3,\ 1)$과 원 C_2의 중심 $(11,\ 7)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(11-3)^2+(7-1)^2}=10$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$10-3\le\overline{PQ}\le 10+3$

$\therefore 7\le\overline{PQ}\le 13$

$\overline{PQ}$의 길이는 자연수이므로 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13의 7개이다.

이때 $\overline{PQ}$의 길이가 7, 13인 점 Q는 각각 1개이고, $\overline{PQ}$의 길이가 8, 9, 10, 11, 12인 점 Q는 각 길이마다 2개씩 있으므로 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$2+5\cdot 2=12$

점 P$(3,\ 1)$과 원 C_2의 중심 $(11,\ 7)$을 이은 직선이 원 C_2와 만나는 두 점이 각각 $\overline{PQ}$의 길이가 7, 13인 점 Q이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$12+12=24$

답 ③

02 $x^2+y^2+ax+by-2=0$에서

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2$$

이므로 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2}\right)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2}$이다.

ㄱ. $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2}\ge\sqrt{2}>1$

이므로 반지름의 길이가 1인 원은 존재하지 않는다.

실수 a, b에 대하여 $a^2\ge 0$, $b^2\ge 0$이므로 $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2\ge 2$

ㄴ. 원이 y축에 접하려면

$\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2}=\left|-\frac{a}{2}\right|$

$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2=\frac{a^2}{4}$

$\frac{b^2}{4}+2=0 \qquad \therefore b^2=-8$

이것을 만족시키는 실수 b는 존재하지 않으므로 원은 y축에 접하지 않는다.

ㄷ. 원과 x축의 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+ax-2=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

원과 x축의 교점의 x좌표는 원의 방정식에서 $y=0$일 때의 x의 값이다.

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=-2$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2+8\ge 8$

따라서 $|\alpha-\beta|\ge 2\sqrt{2}$이므로 원이 x축과 만나서 생기는 현의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

03 원 O: $x^2+y^2=a$의 중심 $O(0,\ 0)$과 두 직선 l_1: $2x+y-8=0$, l_2: $x-2y+6=0$ 사이의 거리는 각각

$$\frac{|-8|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}},\ \frac{|6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

이고 두 직선 l_1, l_2의 교점의 좌표는 $(2,\ 4)$이다.

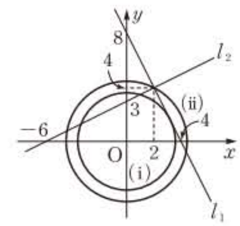
두 방정식 $2x+y-8=0$, $x-2y+6=0$을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=4$

(i) 원 O가 직선 l_1과 접할 때,

아래 그림과 같이 $a=\left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{64}{5}$일 때, 원 O는 직선 l_1과 한 점에서, 직선 l_2와 두 점에서 만난다.

(ii) 원 O가 점 $(2,\ 4)$를 지날 때,

아래 그림과 같이 $a=(\sqrt{2^2+4^2})^2=20$일 때, 원 O는 두 직선 l_1, l_2와 점 $(2,\ 4)$에서 동시에 만나고 각각 다른 한 점에서 또 만난다.



(i), (ii)에서 구하는 모든 양수 a의 값의 곱은

$\frac{64}{5}\cdot 20=256$

답 256

04 점 Q는 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$과 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 접점이므로

$x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2+4x-2\cdot\frac{3}{4}x+1=0$

$25x^2+40x+16=0, \qquad (5x+4)^2=0$

$\therefore x=-\frac{4}{5}$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$이므로

$x=-\frac{4}{5}$를 $y=\frac{3}{4}x$에 대입하면 $y=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{5}$

$\overline{PQ}=\sqrt{\left(-\frac{4}{5}-4\right)^2+\left(-\frac{3}{5}-3\right)^2}=6$

답 6

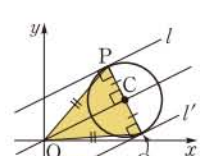
다른 풀이 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$의 중심을 C라 하면 $C(-2,\ 1)$이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(4+2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{10}$

이때 $\overline{CQ}=2$이므로 직각삼각형 CQP에서

$\overline{PQ}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=6$

05 원 C의 중심을 점 $C(a,\ b)$라 하면 평행한 두 직선 l, l'이 원 C의 접선이므로 선분 PQ는 원 C의 지름이고 점 C는 선분 PQ의 중점이다.



삼각형 POQ는 $\overline{OP}=\overline{OQ}$인 이등변삼각형이므로 직선 OC가 선분 PQ를 수직이등분한다.

이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점과 밑변의 중점을 지나는 직선은 밑변의 수직이등분선과 같다.

즉 직선 OC는 직선 l과 평행하고 원점을 지나므로 직선의 방정식은

$x-2y=0$

점 $C(a,\ b)$가 직선 $x-2y=0$ 위의 점이므로

$a-2b=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 원 C의 반지름의 길이는 원점 O와 직선 $x-2y+4\sqrt{5}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=4$$

삼각형 POQ의 넓이가 40이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot \overline{\mathrm{OC}}=40$$

$$\therefore \overline{\mathrm{OC}}=10$$

그런데 두 점 O, C 사이의 거리는 $\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$$\sqrt{a^2+b^2}=10$$

$$\therefore a^2+b^2=100 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠에서 $a=2b$이고 이것을 ㉡에 대입하면

$$(2b)^2+b^2=100, \qquad b^2=20$$

$$\therefore b=2\sqrt{5}\ (\because b>0)$$

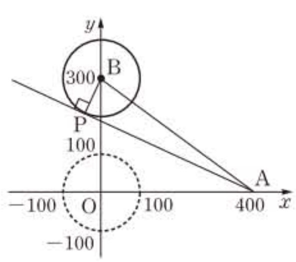
따라서 $a=4\sqrt{5}$이므로

$$a+b=6\sqrt{5}$$

답 ④

06 태풍의 눈의 처음 위치를 O라 하고 1시간 30분 후의 태풍의 눈의 위치를 B, 헬기의 처음 위치를 A라 하자.

오른쪽 그림과 같이 점 O를 원점으로 하고 두 직선 OA, OB를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡고, 1 km를 1로 생각하면



A(400, 0),
B(0, 300)

1시간 30분 후의 태풍의 영향권의 경계선을 나타내는 방정식은

$$x^2+(y-300)^2=100^2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

점 A에서 원 ㉠에 그은 접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{\mathrm{BP}}=100,\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{400^2+300^2}=500$$

직각삼각형 BPA에서

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{500^2-100^2}=200\sqrt{6}=200\times 2.4=480\ (\mathrm{km})$$

즉 헬기는 점 A의 위치에서 1시간 30분 동안 480 km를 이동하였으므로 헬기의 속력은 시속 $\frac{480}{1.5}$, 즉 320 km이다.

$$\therefore a=320$$

답 320

일품 BOX

$\overline{\mathrm{PQ}}$
$=2\overline{\mathrm{PC}}$
$=2\times$(원 C의 반지름의 길이)
$=2\cdot 4=8$

x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동했다고 하면
$1+m=2,\ 1+n=-3$
$\therefore m=1,\ n=-4$

태풍의 눈이 시속 200 km의 속력으로 1시간 30분 동안 이동한 거리는
$200\cdot\frac{3}{2}=300\ (\mathrm{km})$

태풍의 영향권은 반지름의 길이가 100 km인 원의 내부이다.

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이므로
$-2\cdot a=-1$
$\therefore a=\frac{1}{2}$

(속력)$=\frac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$

11 도형의 이동

개념&핵심 기출

본책 108~110쪽

01 점 (0, 2)를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(0+2,\ 2-1) \qquad \therefore (2,\ 1)$$

이때 원점을 지나는 직선 l의 방정식을 $y=mx$라 하면 이 직선이 점 (2, 1)을 지나므로

$$2m=1 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$$

따라서 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x$$

답 $y=\frac{1}{2}x$

02 점 (1, 1)을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면 점 $(2,\ -3)$으로 옮겨지므로 점 $(a,\ b)$를 이 평행이동에 의하여 옮긴 점의 좌표는 $(a+1,\ b-4)$이다.

따라서 $a+1=-3,\ b-4=6$이므로

$$a=-4,\ b=10$$

$$\therefore a+b=6$$

답 ⑤

03 △ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5+a}{3},\ \frac{3+b+7}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+4}{3},\ \frac{b+10}{3}\right)$$

이때 주어진 평행이동에 의하여 △ABC의 무게중심이 원점으로 옮겨지므로

$$\frac{a+4}{3}-2=0,\quad \frac{b+10}{3}-3=0$$

따라서 $a=2,\ b=-1$이므로

$$a+b=1$$

답 ①

04 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+1=a(x-2)+b$$

$$\therefore y=ax-2a+b-1 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

직선 ㉠이 직선 $y=-2x+1$과 y축 위에서 수직으로 만나므로 직선 ㉠의 기울기는 $\frac{1}{2}$이고, y절편은 1이다.

따라서 $a=\frac{1}{2},\ -2a+b-1=1$이므로

$$a=\frac{1}{2},\ b=3 \qquad \therefore ab=\frac{3}{2}$$

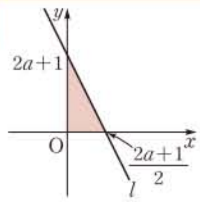
답 ③

05 직선 $2x+y-2=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선 l의 방정식은

$$2(x-a)+(y+1)-2=0$$

$$\therefore 2x+y-(2a+1)=0$$

직선 l의 x절편은 $\frac{2a+1}{2}$, y절편은 $2a+1$이므로 오른쪽 그림에서 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot\frac{2a+1}{2}\cdot(2a+1)$

$=\frac{(2a+1)^2}{4}$

따라서 $\frac{(2a+1)^2}{4}=25$이므로

$(2a+1)^2=100, \quad 2a+1=\pm10$

$\therefore a=\frac{9}{2}\ (\because a>0)$ 답 ②

구하는 a의 값은 양수이므로
$\frac{2a+1}{2}>0$,
$2a+1>0$

06 포물선 $y=x^2-2x$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-n=(x-m)^2-2(x-m)$

$\therefore y=x^2-2(m+1)x+m^2+2m+n$

이 포물선이 $y=x^2-10x+20$과 일치하므로

$2(m+1)=10$에서

$m+1=5 \qquad \therefore m=4$

$m^2+2m+n=20$에서

$4^2+2\cdot4+n=20$

$\therefore n=-4$

직선 $x-2y+a=0$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 직선 l의 방정식은

$(x-4)-2(y+4)+a=0$

$\therefore x-2y-12+a=0$

직선 l이 원점을 지나므로 $\qquad -12+a=0$

$\therefore a=12$ 답 12

다른 풀이 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$,
$y=x^2-10x+20=(x-5)^2-5$이므로 주어진 평행이동은 점 $(1,\ -1)$을 점 $(5,\ -5)$로 옮기는 평행이동, 즉 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

포물선의 평행이동은 포물선의 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

07 원 $x^2+y^2+10x-8y+25=0$에서

$(x+5)^2+(y-4)^2=16 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2+10y+c=0$에서

$x^2+(y+5)^2=25-c \qquad \cdots\cdots$ ㉡

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-5,\ 4)$, $(0,\ -5)$이므로 원 ㉠을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -9만큼 평행이동하면 원 ㉡과 겹쳐진다.

$\therefore a=5,\ b=-9$

또 원을 평행이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 ㉠, ㉡에서

$16=25-c \qquad \therefore c=9$

$\therefore a+b+c=5$ 답 5

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

08 원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=4$

이 원이 직선 $3x-4y-2=0$에 접하면 원의 중심 $(a,\ 0)$과 직선 $3x-4y-2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$\frac{|3a-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

$|3a-2|=10, \qquad 3a-2=\pm10$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$ 답 ③

원과 직선의 위치 관계
원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때
① 원과 직선이 두 점에서 만나면 ➡ $d<r$
② 원과 직선이 접하면 ➡ $d=r$
③ 원과 직선이 만나지 않으면 ➡ $d>r$

09 $x^2+y^2+6x-2y+a=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=10-a$

이 원을 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 $-2b$만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-b+3)^2+(y+2b-1)^2=10-a$

이므로 이 원은 중심이 점 $(b-3,\ -2b+1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10-a}$인 원이다.

이 원이 x축, y축에 동시에 접하고 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로

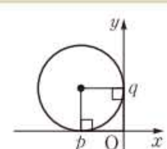
$-(b-3)=-2b+1 \qquad \therefore b=-2$

즉 평행이동한 원의 중심의 좌표는 $(-5,\ 5)$이므로 반지름의 길이는 5이다.

따라서 $\sqrt{10-a}=5$에서

$10-a=25 \qquad \therefore a=-15$

$\therefore b-a=13$ 답 ③



x축, y축에 동시에 접하고 원의 중심 $(p,\ q)$가 제2사분면 위에 있으면
$|p|=q \quad \therefore -p=q$

10 점 $(a-2,\ b+6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a-2,\ -b-6)$

이 점을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-b-6,\ a-2)$

점 $(-b-6,\ a-2)$가 제2사분면 위에 있으므로

$-b-6<0,\ a-2>0$

$\therefore a>2,\ b>-6$

따라서 두 정수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값은 $a=3$, $b=-5$일 때 $\quad 3+(-5)=-2$ 답 -2

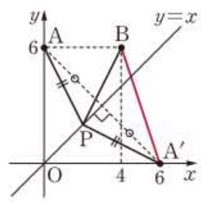
11 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때, 점 P_n의 좌표를 차례대로 구하면 다음과 같다.

$P_1(3,\ 2)$, $P_2(3,\ -2)$, $P_3(-3,\ 2)$,
$P_4(-3,\ -2)$, $P_5(3,\ 2)$, $P_6(3,\ -2)$,
$P_7(-3,\ 2)$, $P_8(-3,\ -2)$, $\cdots$

즉 점 P_n의 좌표는 $(3,\ 2)$, $(3,\ -2)$, $(-3,\ 2)$, $(-3,\ -2)$가 차례대로 반복됨을 알 수 있다.

따라서 $49=4\cdot12+1$에서 점 P_{49}는 점 P_1과 일치하므로 점 P_{49}의 좌표는 $(3,\ 2)$이다. 답 ⑤

12 오른쪽 그림과 같이 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $A'(6,\ 0)$이므로



$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$$
$$\ge\overline{A'B}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은

$\overline{A'B}=\sqrt{(4-6)^2+6^2}=2\sqrt{10}$ 답 ⑤

13 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면 $y=m(x+1)$

이 직선을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=m(x+1)+1$

이 직선을 다시 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=m(x+1)+1\qquad\therefore y=-m(x+1)-1$

이 직선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3=-2m-1\qquad\therefore m=-2$ 답 -2

14 직선 $(2k+1)x+(k+1)y-4=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$(2k+1)(-x)+(k+1)(-y)-4=0$

$\therefore (2k+1)x+(k+1)y+4=0$

k에 대하여 정리하면

$(2x+y)k+(x+y+4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y=0,\ x+y+4=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=4,\ y=-8$

따라서 이 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(4,\ -8)$을 지나므로 $a=4,\ b=-8$

$\therefore a-2b=4-2\cdot(-8)=20$ 답 ⑤

15 원 C_1의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$a=b$

즉 원 C_1: $x^2+y^2+ax+ay=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$이므로 원 C_1을 원점에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 방정식은

$\left(-x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(-y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$

$\therefore \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$

일품 BOX

원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 중심의 x좌표와 y좌표가 같다. 따라서 주어진 원의 방정식에서 x항과 y항의 계수가 서로 같다.

즉 두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$이고, 두 원의 중심 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)^2}=2\sqrt{2},\qquad \sqrt{2a^2}=2\sqrt{2}$

$a^2=4\qquad\therefore a=2\ (\because a>0)$

$\therefore a+b=2a=4$ 답 4

16 점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 직선 AB는 직선 $2x-y-2=0$, 즉 $y=2x-2$와 수직이므로

$\frac{2-b}{-1-a}=-\frac{1}{2}$

두 점 $A(a,\ b)$, $B(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기

$\therefore a+2b-3=0$ …… ㉠

또 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a-1}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$는 직선 $2x-y-2=0$ 위의 점이므로

$2\cdot\frac{a-1}{2}-\frac{b+2}{2}-2=0$

$\therefore 2a-b-8=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{19}{5},\ b=-\frac{2}{5}$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{19}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$이다.

답 $\left(\frac{19}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$

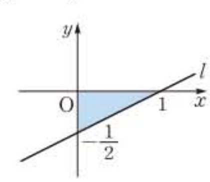
17 직선 AB의 기울기는 $\frac{-1-3}{4-2}=-2$이고 직선 AB와 직선 l은 서로 수직이므로 직선 l의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

또 직선 l은 선분 AB의 중점 $(3,\ 1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{3-1}{2}\right)$

$y-1=\frac{1}{2}(x-3)\qquad\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 답 ①

18 원 $(x+4)^2+(y-2)^2=1$의 중심 $C(-4,\ 2)$를 직선 $y=3x+4$에 대하여 대칭이동한 점을 $D(a,\ b)$라 하면 직선 CD는 직선 $y=3x+4$와 수직이므로

$\frac{b-2}{a+4}=-\frac{1}{3}$

$\therefore a+3b=2$ …… ㉠

또 선분 CD의 중점 $\left(\frac{a-4}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$는 직선 $y=3x+4$ 위의 점이므로

$\frac{b+2}{2}=3\cdot\frac{a-4}{2}+4$

$\therefore 3a-b=6$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=0$

따라서 원 $(x+4)^2+(y-2)^2=1$을 직선 $y=3x+4$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=1$

원을 직선에 대하여 대칭이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.

이고, 이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-2)^2+y^2=1$

$\therefore (x+2)^2+y^2=1$ 답 ①

1등급을 위한 고난도 문제 본책 111~113쪽

01 점 $(1, -1)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 점 $(-2, 3)$으로 옮겨진다.
이 평행이동에 의하여 점 $A(a, b)$가 점 $A'(2, 1)$로 옮겨지므로

$a-3=2,\ b+4=1$

$\therefore a=5,\ b=-3$

또 점 $B(2, 1)$이 점 $B'(c, d)$로 옮겨지므로

$2-3=c,\ 1+4=d$

$\therefore c=-1,\ d=5$

따라서 $A(5, -3)$, $B'(-1, 5)$이므로

$\overline{AB'}=\sqrt{(-1-5)^2+(5+3)^2}=10$ 답 ⑤

02 점 $(-3, 4)$를 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y-2)$에 의하여 이동한 점의 좌표는 $(-3+a, 2)$ ···· ❶

이 점을 다시 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-2, y+a)$에 의하여 이동한 점의 좌표는

$(-5+a, 2+a)$ ···· ❷

따라서 $-5+a=3$, $2+a=b$이므로

$a=8,\ b=10$ ···· ❸

$\therefore a+b=18$ ···· ❹

답 18

채점 기준	비율
❶ 점 $(-3, 4)$를 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ ❶에서 구한 점을 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

03 주어진 평행이동에 의하여 점 $A(3, 1)$이 옮겨지는 점 B의 좌표는

$(3+m,\ 1+n)$

이때 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(3+m-3)^2+(1+n-1)^2}=3\sqrt{2}$

$\therefore m^2+n^2=18$

또 점 B에서 직선 $x+y-4=0$에 이르는 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$\frac{|3+m+1+n-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore |m+n|=4$

따라서 $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$에서

$(m+n)^2=|m+n|^2$

$18=16-2mn$

$\therefore mn=-1$ 답 ②

04 점 P가 원점에서 출발하여 x축의 방향으로 a번, y축의 방향으로 b번 이동하였다고 하면 점 P의 좌표는 (a, b)이고, $n=a+b$이다.
점 $P(a, b)$가 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=8$ 위에 있으므로

$(a-6)^2+(b-8)^2=8$

이때 a, b는 자연수이므로

$(a-6)^2=4,\ (b-8)^2=4$

$a-6=\pm2,\ b-8=\pm2$

$\therefore a=8$ 또는 $a=4$, $b=10$ 또는 $b=6$

즉 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=8$ 위에 놓일 수 있는 점 P는 $(4, 6)$, $(4, 10)$, $(8, 6)$, $(8, 10)$이므로 서로 다른 n의 값은

$4+6=10,\ 4+10=14,$
$8+6=14,\ 8+10=18$

$10,\ 14,\ 18$

따라서 구하는 n의 값의 합은

$10+14+18=42$ 답 42

05 직선 $x+2y+4=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a-1$만큼 평행이동한 직선 m의 방정식은

$(x-a)+2(y-2a+1)+4=0$

$\therefore x+2y-5a+6=0$

직선 $x+2y+4=0$ 위의 점 $(-4, 0)$과 직선 m 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-4-5a+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=4\sqrt{5}$, $\quad |-5a+2|=20$

$-5a+2=\pm20$

$\therefore a=\frac{22}{5}\ (\because a>0)$ 답 ④

06 직선 $2x+3y-7=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-a)+3(y-b)-7=0$

$\therefore 2x+3y-2a-3b-7=0$ ···· ❶

이 직선이 마름모 PQRS의 넓이를 이등분하므로 마름모의 두 대각선의 교점 $(4,\ 3)$을 지난다. ⋯ ❷

> 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 두 대각선의 교점은 $\overline{\mathrm{PR}}$의 중점 $\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{3+3}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 3)$이다.

따라서 $8+9-2a-3b-7=0$이므로

$2a+3b=10$ ⋯ ❸

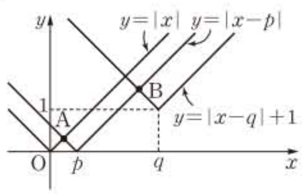
답 10

채점 기준	비율
❶ 직선 $2x+3y-7=0$을 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ ❶에서 구한 직선이 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ $2a+3b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 $y=|x|$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=|x-p|$이고, x축의 방향으로 q만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=|x-q|+1$이다.

> $y=|x|=\begin{cases} -x & (x<0) \\ x & (x\geq 0)\end{cases}$

이때 $0<p<q$이므로 두 교점 A, B가 존재하려면 $y=|x|$, $y=|x-p|$, $y=|x-q|+1$의 그래프는 위의 그림과 같아야 한다.



> $y=|x-p|=\begin{cases} -x+p & (x<p) \\ x-p & (x\geq p)\end{cases}$
>
> $y=|x-q|+1=\begin{cases} -x+q+1 & (x<q) \\ x-q+1 & (x\geq q)\end{cases}$

(i) 점 A는 두 직선 $y=x$, $y=-x+p$의 교점이므로 $x=-x+p$에서

$2x=p \quad \therefore x=\frac{p}{2}$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{p}{2},\ \frac{p}{2}\right)$

(ii) 점 B는 두 직선 $y=x-p$, $y=-x+q+1$의 교점이므로 $x-p=-x+q+1$에서

$2x=p+q+1 \quad \therefore x=\frac{p+q+1}{2}$

따라서 점 B의 좌표는

$\left(\frac{p+q+1}{2},\ \frac{-p+q+1}{2}\right)$

(i), (ii)에서 선분 AB의 중점의 좌표가

$\left(\frac{2p+q+1}{4},\ \frac{q+1}{4}\right)$이므로

> $\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}+\frac{p+q+1}{2}\right)=\frac{2p+q+1}{4}$,
>
> $\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}+\frac{-p+q+1}{2}\right)=\frac{q+1}{4}$

$\frac{2p+q+1}{4}=2,\ \frac{q+1}{4}=\frac{9}{8}$

$\therefore p=\frac{7}{4},\ q=\frac{7}{2}$

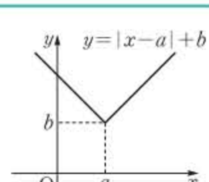
$\therefore \frac{q}{p}=\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{7}=2$

답 2

1등급 비밀노트

$y=|x-a|+b=\begin{cases} -x+a+b & (x<a) \\ x-a+b & (x\geq a)\end{cases}$

이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=a$인 점에서 꺾인 모양이고, $y=|x-a|+b$는 $x=a$일 때 최솟값 b를 갖는다.



08 $x^2+y^2+ax+by+1=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-1$

원의 중심 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2}\right)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$\left(-\frac{a}{2}+2,\ -\frac{b}{2}-3\right)$ ⋯ ❶

따라서 $-\frac{a}{2}+2=1$, $-\frac{b}{2}-3=-1$이므로

$a=2,\ b=-4$ ⋯ ❷

이때 원을 평행이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$r=\sqrt{\frac{2^2}{4}+\frac{(-4)^2}{4}-1}=2$ ⋯ ❸

$\therefore a+b+r=0$ ⋯ ❹

답 0

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ r의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b+r$의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 원 $x^2+(y-1)^2=4$의 중심 $(0,\ 1)$이 원 $(x-1)^2+y^2=4$의 중심 $(1,\ 0)$으로 옮겨지므로 주어진 평행이동은

$(x,\ y) \longrightarrow (x+1,\ y-1)$ ⋯ ❶

이 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-4=0$이 옮겨지는 직선의 방정식은

$(x-1)+2(y+1)-4=0$

$\therefore x+2y-3=0$ ⋯ ❷

따라서 $a=2$, $b=-3$이므로

$a+b=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 평행이동을 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 $x+2y-4=0$이 옮겨지는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

10 원 C_1의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=1$

원 C_2의 방정식은 $x^2+(y-2)^2=1$

두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표가 각각 $(2,\ 0)$, $(0,\ 2)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은

$2\sqrt{2}+1+1=2\sqrt{2}+2$

> 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이의 합

답 ④

11 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는

$(-a,\ -b)$

이때 두 점 $P(a,\ b)$, $Q(-a,\ -b)$는 모두 포물선 $y=x^2-3x-4$ 위의 점이므로

$b=a^2-3a-4,\ -b=a^2+3a-4$ ⋯ ❶

즉 $a^2-3a-4=-a^2-3a+4$이므로

$a^2=4 \qquad \therefore a=\pm 2$

따라서

$a=-2,\ b=6$ 또는 $a=2,\ b=-6$

$a=-2,\ a=2$를 $b=a^2-3a-4$에 각각 대입하여 b의 값을 구한다.

이므로

$P(-2,\ 6),\ Q(2,\ -6)$

또는 $P(2,\ -6),\ Q(-2,\ 6)$ ⋯ ❷

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-2-2)^2+(6+6)^2}$

$=4\sqrt{10}$ ⋯ ❸

답 $4\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 x좌표, y좌표 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 점 P, Q의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %

12 점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a,\ -b)$

이 점을 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(b,\ -a)$

이 점이 제2사분면 위의 점 $(c,\ d)$와 일치하므로

$b<0,\ -a>0,\ b=c,\ -a=d$

$\therefore a<0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$

ㄱ. a, b는 모두 음수이다.

ㄴ. $a<0$, $d>0$이므로 $ad<0$

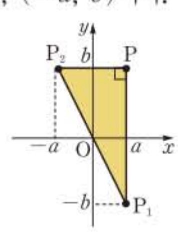
ㄷ. $a+c<0$, $bd<0$이므로 점 $(a+c,\ bd)$는 제3사분면 위의 점이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

13 점 $P(a,\ b)$를 x축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점 P_1, P_2의 좌표는 각각 $(a,\ -b)$, $(-a,\ b)$이다.

$\triangle PP_1P_2$는 오른쪽 그림과 같으므로



$\triangle PP_1P_2=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b$

$=2ab$

이때 $\triangle PP_1P_2$의 넓이가 8이므로

$2ab=8$

$\therefore ab=4$ ⋯⋯ ㉠

또 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$b=2a$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$a^2=2 \qquad \therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$

$a=\sqrt{2}$를 ㉡에 대입하면

$\therefore b=2\sqrt{2}$

$\therefore a+b=3\sqrt{2}$

답 $3\sqrt{2}$

14 직선 $y=ax$를 x축에 대하여 대칭이동하면

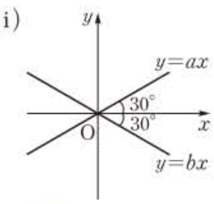
$-y=ax \qquad \therefore y=-ax$

이 직선이 직선 $y=bx$와 일치하므로

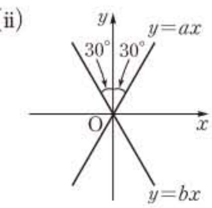
$-a=b$ ⋯⋯ ㉠

이때 두 직선 $y=ax$, $y=bx$가 이루는 예각의 크기가 $60°$인 경우는 다음의 두 가지가 있다.

(i)



(ii)



직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ $(0°\le\theta<90°)$일 때, 직선의 기울기는 $\tan\theta$이다.

(i) $a=\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 ㉠에서

$b=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore ab=-\dfrac{1}{3}$

(ii) $a=\tan 60°=\sqrt{3}$이므로 ㉠에서

$b=-\sqrt{3} \qquad \therefore ab=-3$

(i), (ii)에서 ab의 최솟값은 -3이다.

답 -3

15 함수 $y=x^2+2x+k$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=x^2+2x+k$

$\therefore y=x^2+2x+k+1$ ⋯ ❶

이 그래프를 다시 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=x^2+2x+k+1$

$\therefore y=-x^2-2x-k-1$

$\therefore f(x)=-x^2-2x-k-1$

$=-(x+1)^2-k$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $-k$를 가지므로

$-k=5 \qquad \therefore k=-5$ ⋯ ❸

답 -5

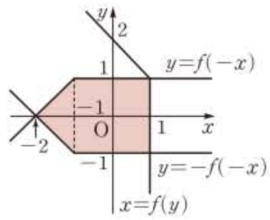
채점 기준	비율
❶ 함수 $y=x^2+2x+k$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ ❶에서 구한 그래프를 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

16 세 함수 $y=f(-x)$, $y=-f(-x)$, $x=f(y)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 각각 y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 세 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=5$$

답 ③



17 원 $x^2+y^2+2x-4y-5=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2+y^2-2x+4y-5=0$$

이 원을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2+y^2+4x-2y-5=0$$

$y=0$을 이 식에 대입하면

$$x^2+4x-5=0, \quad (x+5)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 이 원과 x축의 교점의 좌표는 $(-5,\ 0)$, $(1,\ 0)$이므로

$$\overline{AB}=|1-(-5)|=6$$

답 6

- x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.
- x 대신 y, y 대신 x를 대입한다.

18 직선 l의 방정식은

$$y+2=m(x-5)$$

$$\therefore y=mx-5m-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 l 위의 점 $(x,\ y)$를 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점을 $(x',\ y')$이라 하면

$$\frac{x+x'}{2}=2, \ \frac{y+y'}{2}=1$$

$$\therefore x=4-x', \ y=2-y'$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$2-y'=m(4-x')-5m-2$$

$$\therefore y'=mx'+m+4$$

따라서 점 $(x',\ y')$은 직선 $y=mx+m+4$ 위의 점이므로 직선 l을 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=mx+m+4$이다.

이 직선을 다시 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l'의 방정식은

$$-y=mx+m+4$$

$$\therefore y=-mx-m-4$$

(i) 직선 l'이 점 $A(5,\ -2)$를 지나려면

$$-2=-5m-m-4 \qquad \therefore m=-\frac{1}{3}$$

(ii) 두 직선 l, l'이 서로 수직이려면

$$m\cdot(-m)=-1$$

$$m^2=1 \qquad \therefore m=-1 \ (\because m<0)$$

(i), (ii)에서 $p=-\frac{1}{3}$, $q=-1$이므로

$$p+q=-\frac{4}{3}$$

답 $-\frac{4}{3}$

- 두 점 $(x,\ y)$, $(x',\ y')$이 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이므로 두 점을 잇는 선분의 중점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.

19 직선 $2x+y+1=0$ 위의 점 $P(x,\ y)$를 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',\ y')$이라 하면 직선 PP'은 직선 $x+y-3=0$, 즉 $y=-x+3$과 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x}=1$$

$$\therefore x-y=x'-y' \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 선분 PP'의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $x+y-3=0$ 위의 점이므로

$$\frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}-3=0$$

$$\therefore x+y=-x'-y'+6 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x=-y'+3, \ y=-x'+3$$

이것을 $2x+y+1=0$에 대입하면

$$2(-y'+3)+(-x'+3)+1=0$$

$$\therefore x'+2y'-10=0$$

이때 점 $P'(x',\ y')$은 직선 $x+2y-10=0$ 위의 점이므로 직선 $2x+y+1=0$을 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $x+2y-10=0$이다.

따라서 구하는 직선의 y절편은 5이다.

답 5

20 접는 선을 직선 l이라 하면 점 $A(1,\ 4)$를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점이 점 $(-1,\ 0)$이다.

이 직선 l의 방정식을 $y=mx+n$, 점 $(-1,\ 0)$을 B라 하면 직선 AB는 직선 $y=mx+n$과 수직이므로

$$\frac{0-4}{-1-1}\cdot m=-1, \qquad 2m=-1$$

$$\therefore m=-\frac{1}{2}$$

또 선분 AB의 중점 $\left(\frac{1-1}{2},\ \frac{4+0}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 2)$는 직선 $y=mx+n$ 위의 점이므로

$$n=2$$

따라서 직선 l의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x+2$$

한편 점 $P(0,\ -3)$을 직선 l에 대하여 대칭이동한 점 $(a,\ b)$를 Q라 하면 직선 PQ는 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$와 수직이므로

$$\frac{b+3}{a-0}=2, \qquad b+3=2a$$

$$\therefore 2a-b=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

선분 PQ의 중점 $\left(\frac{0+a}{2},\ \frac{-3+b}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{b-3}{2}\right)$은 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 위의 점이므로

$$\frac{b-3}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}+2$$

$\therefore a+2b=14$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=5$

$\therefore a+b=9$

답 ②

21 점 Q의 좌표를 $(b,\ c)$라 하면 직선 PQ는 직선 $x+y=2$, 즉 $y=-x+2$와 수직이므로

$$\frac{c-1}{b-a}=1$$

$\therefore a-b+c=1$ ...... ㉠

또 선분 PQ의 중점 $\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{1+c}{2}\right)$는 직선 $x+y=2$ 위의 점이므로

$$\frac{a+b}{2}+\frac{1+c}{2}=2$$

$\therefore a+b+c=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $b=1,\ c=2-a$

㉡−㉠을 하면

$2b=2$

$\therefore b=1$

㉠에 $b=1$을 대입하면

$a+c=2$

$\therefore c=2-a$

$\therefore \mathrm{Q}(1,\ 2-a)$ ···➊

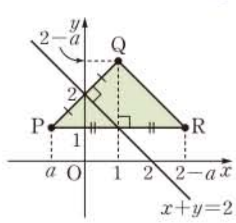
한편 점 R의 좌표를 $(d,\ e)$라 하면 선분 PR의 중점은 점 $(1,\ 1)$이므로

$$\frac{a+d}{2}=1,\ \frac{1+e}{2}=1$$

$\therefore d=2-a,\ e=1$

$\therefore \mathrm{R}(2-a,\ 1)$ ···➋

오른쪽 그림에서 $\triangle$PQR의 넓이는



$$\frac{1}{2}(2-a-a)(2-a-1)$$

$$=(a-1)^2$$

이므로 $(a-1)^2=4$

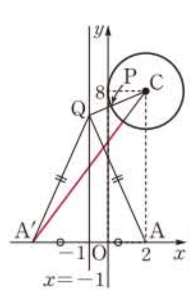
$a-1=\pm 2$

$\therefore a=-1\ (\because a<0)$ ···➌

답 −1

채점 기준	비율
➊ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
➋ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➌ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

22 오른쪽 그림과 같이 점 A를 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하고 원의 중심을 C라 하면



$\mathrm{A}'(-4,\ 0),\ \mathrm{C}(2,\ 8)$

점 A′의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$\frac{a+2}{2}=-1,\quad \frac{b+0}{2}=0$$

$\therefore a=-4,\ b=0$

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{QP}}$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$의 값이 최소일 때는 선분 A′C가 직선 $x=-1$과 만나는 점이 Q, 원과 만나는 점이 P일 때이다.

$$\therefore \overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}\ge\overline{\mathrm{A'C}}-2$$

원의 반지름의 길이

$$=\sqrt{(2+4)^2+8^2}-2$$

$$=10-2=8$$

따라서 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$의 최솟값은 8이다.

답 8

23 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2+y^2-r^2-(x^2+y^2-8x-6y)=0$$

$\therefore 8x+6y=r^2$

$x^2+y^2-8x-6y=0$에서

$$(x-4)^2+(y-3)^2=25$$

원 C_2의 중심 $(4,\ 3)$을 두 원의 공통인 현에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(4,\ 3)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선은 직선 $8x+6y=r^2$과 수직이므로

$$\frac{b-3}{a-4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-1 \qquad \therefore b=\frac{3}{4}a$$ ...... ㉠

또 두 점을 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{4+a}{2},\ \frac{3+b}{2}\right)$는 직선 $8x+6y=r^2$ 위의 점이므로

$$8\cdot\frac{4+a}{2}+6\cdot\frac{3+b}{2}=r^2$$

$\therefore 4a+3b+25=r^2$ ...... ㉡

한편 점 $(a,\ b)$가 원 C_1 위의 점이므로

$a^2+b^2=r^2$ ...... ㉢

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{25}{4}a+25=r^2$ ...... ㉣

㉠을 ㉢에 대입하면 $\frac{25}{16}a^2=r^2$ ...... ㉤

㉣, ㉤에서 $\frac{25}{16}a^2=\frac{25}{4}a+25$이므로

$a^2-4a-16=0 \qquad \therefore a=2\pm2\sqrt{5}$

이때 $r^2<25$이므로 ㉣에서 $a<0$

$0<r<5$이므로

$r^2<25$

$\therefore a=2-2\sqrt{5}$

이것을 ㉣에 대입하면

$$r^2=\frac{25}{4}(2-2\sqrt{5})+25=\frac{75}{2}-\frac{25\sqrt{5}}{2}$$

따라서 $p=\frac{75}{2},\ q=-\frac{25}{2}$이므로

$p+q=25$

답 ①

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 114쪽

01 점 P가 점 A$(7,\ 7)$에서 출발하여 이동한 점을 차례대로 나열하면

$(6,\ 7),\ (5,\ 7),\ (4,\ 7),\ (3,\ 7),\ (3,\ 6)$

따라서 점 B의 좌표는 $(3,\ 6)$이고, 점 P가 이동한 횟수는 5이다.

답 ②

02 점 A$(-4,\ 7)$을 x축의 방향으로 7만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 A$'(3,\ 9)$로 옮겨진다.
△ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{-4-1+2}{3},\ \frac{7+0+5}{3}\right) \qquad \therefore (-1,\ 4)$$

점 G$(-1,\ 4)$를 x축의 방향으로 7만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 G$'$과 일치하므로 점 G$'$의 좌표는

$$(-1+7,\ 4+2) \qquad \therefore (6,\ 6)$$

따라서 두 점 G$(-1,\ 4)$, G$'(6,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{6-4}{6-(-1)}(x+1),\ 즉\ 2x-7y+30=0$$

이므로 $\quad a=2,\ b=30$

$\therefore a+b=32$ 답 32

1등급 비밀노트

△ABC가 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+7,\ y+2)$에 의하여 △A$'B'C'$으로 옮겨질 때 △ABC의 무게중심도 같은 평행이동에 의하여 옮겨지므로 평행이동한 두 점 B$'$, C$'$의 좌표를 구하여 무게중심 G$'$의 좌표를 구할 필요 없이 점 G를 평행이동하여 점 G$'$의 좌표를 구하면 된다.

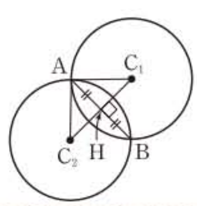
03 원 C_1의 방정식은 $\quad (x-3)^2+(y-7)^2=8$
원 C_1을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-y-3)^2+(-x-7)^2=8$$
$$\therefore (x+7)^2+(y+3)^2=8$$

이 원을 다시 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원 C_2의 방정식은

$$(x-a+7)^2+(y-a+3)^2=8$$

오른쪽 그림과 같이 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$라 하고 두 직선 AB, $\mathrm{C_1C_2}$의 교점을 H라 하면 직선 $\mathrm{C_1C_2}$는 선분 AB를 수직이등분한다.



$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6}$이므로 직각삼각형 $\mathrm{AHC_1}$에서

$$\overline{\mathrm{C_1H}}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2}$$

마찬가지로 직각삼각형 $\mathrm{AHC_2}$에서

$$\overline{\mathrm{C_2H}}=\sqrt{2}$$

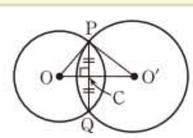
따라서 $\overline{\mathrm{C_1C_2}}=2\sqrt{2}$이고 $\mathrm{C_1}(3,\ 7)$, $\mathrm{C_2}(a-7,\ a-3)$이므로

$$\sqrt{(a-7-3)^2+(a-3-7)^2}=2\sqrt{2}$$
$$2(a-10)^2=8, \qquad a-10=\pm 2$$
$$\therefore a=8\ 또는\ a=12$$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$8+12=20$ 답 20

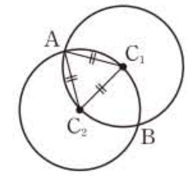
일품 BOX



두 원 O, O'의 두 교점을 각각 P, Q라 할 때,
$\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{OO'}}$
$\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{QC}}$

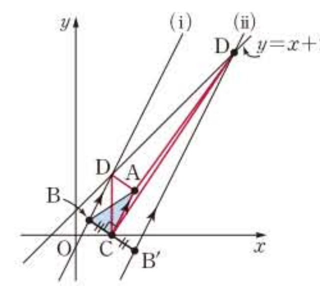
$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$

참고 $\overline{\mathrm{C_1C_2}}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{C_1C_2}}$의 길이가 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이와 같다. 즉 두 원 C_1, C_2는 오른쪽 그림과 같이 서로의 중심을 지난다.



04 두 삼각형 ABC, ADC의 넓이가 같으려면 삼각형 ABC에서 밑변을 변 AC라 할 때의 높이, 즉 점 B와 직선 AC 사이의 거리와 점 D와 직선 AC 사이의 거리가 같아야 하므로 점 D의 위치는 다음의 두 가지 경우이다.

(i) 점 D가 두 직선 AC, BD가 평행하도록 하는 직선 $y=x+2$ 위의 점인 경우
직선 AC의 기울기는 $\frac{0-4}{3-5}=2$이므로 점 B$(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은



$$y-1=2(x-1)$$
$$\therefore y=2x-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 직선 ㉠과 직선 $y=x+2$의 교점 D의 x좌표는 $2x-1=x+2$에서 $\quad x=3$

(ii) 점 B를 직선 AC에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면 점 D가 두 직선 AC, B$'$D가 평행하도록 하는 직선 $y=x+2$ 위의 점인 경우
점 B$(1,\ 1)$을 직선 AC에 대하여 대칭이동한 점을 B$'(a,\ b)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BB'}}$에서

$$\frac{b-1}{a-1}\cdot 2=-1$$
$$\therefore a+2b=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 직선 AC의 방정식은 $y=2(x-3)$, 즉 $y=2x-6$이고 두 점 B, B$'$의 중점은 직선 AC 위의 점이므로

$$\frac{1+b}{2}=2\cdot\frac{1+a}{2}-6$$
$$\therefore 2a-b=11 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=5,\ b=-1$
점 B$'(5,\ -1)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y-(-1)=2(x-5)$$
$$\therefore y=2x-11 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

따라서 직선 ㉣과 직선 $y=x+2$의 교점 D의 x좌표는 $2x-11=x+2$에서 $\quad x=13$

(i), (ii)에서 구하는 모든 점 D의 x좌표의 합은

$3+13=16$ 답 16

05 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\overline{OA}=\overline{OD}$, $\overline{OB}=\overline{OC}$

또 원점 O가 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{OC}=x$라 하면 $\overline{OA}=2x$

□ADCB의 넓이가 18이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot 2x=18$$

$x^2=4$ $\quad\therefore x=2\ (\because x>0)$

따라서 $A(-4,\ 0)$, $B(0,\ 2)$, $C(2,\ 0)$, $D(0,\ -4)$이므로 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$의 방정식은 각각

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1,\ \frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x+2,\ y=2x-4$$

따라서

$$a=\frac{1}{2},\ b=2,\ c=2,\ d=-4$$

이므로

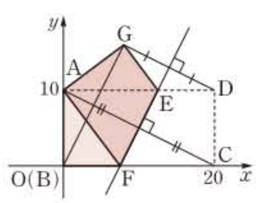
$$a+b+c+d=\frac{1}{2}$$

답 ①

> $\overline{OA}=\overline{OD}=2x$, $\overline{OB}=\overline{OC}=x$

> $\triangle ABC+\triangle ACD=\square ADCB$

06 오른쪽 그림과 같이 두 직선 BF, AB를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이고, 두 점 $A(0,\ 10)$, $C(20,\ 0)$은 직선 EF에 대하여 대칭이다.



직선 AC의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 직선 AC와 직선 EF는 서로 수직이므로 직선 EF의 기울기는 2이다.

또 선분 AC의 중점 $(10,\ 5)$는 직선 EF 위의 점이므로 직선 EF의 방정식은

$y-5=2(x-10)$ $\quad\therefore y=2x-15$

이때 $G(a,\ b)$라 하면 두 점 $D(20,\ 10)$, $G(a,\ b)$는 직선 $y=2x-15$에 대하여 대칭이므로 직선 DG의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

즉 $\frac{b-10}{a-20}=-\frac{1}{2}$이므로

$a+2b=40$ ...... ㉠

또 선분 DG의 중점 $\left(\frac{20+a}{2},\ \frac{10+b}{2}\right)$는 직선 $y=2x-15$ 위의 점이므로

$$\frac{10+b}{2}=2\cdot\frac{20+a}{2}-15$$

$\therefore 2a-b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=16$

따라서 $G(8,\ 16)$이므로

$\overline{BG}=\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}$

답 ④

> 두 점 $A(0,\ 10)$, $C(20,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{0-10}{20-0}=-\frac{1}{2}$

> $\left(\frac{0+20}{2},\ \frac{10+0}{2}\right)$

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 115~118쪽

01 전략 선분 PQ를 $3:4$로 내분하는 점의 좌표를 m, n에 대한 식으로 나타낸 후 그 좌표가 6과 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점과 외분하는 점이 각각 P, Q이므로

$$P\left(\frac{6m+2n}{m+n}\right),\ Q\left(\frac{6m-2n}{m-n}\right)$$

점 B가 $\overline{PQ}$를 $3:4$로 내분하므로

$$\frac{1}{3+4}\left(3\cdot\frac{6m-2n}{m-n}+4\cdot\frac{6m+2n}{m+n}\right)=6$$

$$\frac{9m-3n}{m-n}+\frac{12m+4n}{m+n}=21$$

$(9m-3n)(m+n)+(12m+4n)(m-n)$

$=21(m-n)(m+n)$

$7n^2-mn=0,\quad n(7n-m)=0$

$n>0$이므로 $7n-m=0$ $\quad\therefore 7n=m$

$\therefore m:n=7:1$

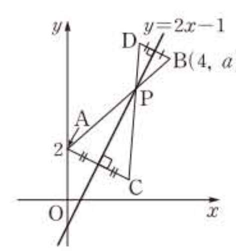
따라서 $m=7$, $n=1$이므로 $m+n=8$

답 ④

> 만일 $m=14$, $n=2$이면 m, n이 서로소라는 조건을 만족시키지 않는다.

02 전략 직선 l에 대하여 두 점 S, T가 대칭이면 직선 l이 $\overline{ST}$의 수직이등분선임을 이용한다.

풀이 두 삼각형 APC, BPD는 각각 $\overline{PA}=\overline{PC}$, $\overline{PB}=\overline{PD}$인 이등변삼각형이고 직선 $y=2x-1$이 이 두 삼각형의 밑변의 수직이등분선이므로 직선 $y=2x-1$은 점 P를 지난다.



이때 두 직선 AC, BD는 직선 $y=2x-1$과 각각 수직이므로 두 직선 AC, BD는 평행하다. 따라서 $\triangle APC\backsim\triangle BPD$이고 두 삼각형 APC, BPD의 넓이의 비가 $4:1$이므로 두 삼각형의 닮음비는 $2:1$이다.

$\therefore \overline{AP}:\overline{BP}=2:1$

즉 점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot 4+1\cdot 0}{2+1},\ \frac{2\cdot a+1\cdot 2}{2+1}\right)\quad\therefore \left(\frac{8}{3},\ \frac{2a+2}{3}\right)$$

이때 점 P는 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로

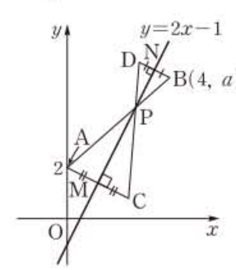
$$\frac{2a+2}{3}=2\cdot\frac{8}{3}-1\quad\therefore a=\frac{11}{2}$$

답 ④

> 직선 $y=2x-1$과 직선 AC의 교점을 M이라 하면 $\triangle APM\equiv\triangle CPM$ (SAS 합동) 이므로 $\overline{PA}=\overline{PC}$ 마찬가지 방법으로 $\overline{PB}=\overline{PD}$

> 이등변삼각형의 밑변의 수직이등분선은 이등변삼각형의 꼭지각을 지난다.

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=2x-1$과 두 직선 AC, BD의 교점을 각각 M, N이라 하면 $\triangle APM\backsim\triangle BPN$이고 두 삼각형 APM, BPN의 넓이의 비가 $4:1$이므로 두 삼각형의 닮음비는 $2:1$이다.



> 두 삼각형 APC, BPD의 넓이의 비가 $4:1$이고 $\triangle APM=\frac{1}{2}\triangle APC$, $\triangle BPN=\frac{1}{2}\triangle BPD$ 이므로 두 삼각형 APM, BPN의 넓이의 비도 $4:1$이다.

따라서 $\overline{AM}:\overline{BN}=2:1$이고, $\overline{AM}$, $\overline{BN}$의 길이는 각각 두 점 A, B와 직선 $y=2x-1$, 즉 $2x-y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-2-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}:\frac{|8-a-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2:1$$

$$\frac{2|7-a|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$|7-a|=\frac{3}{2}$$

그런데 $a<7$에서 $7-a>0$이므로

$$7-a=\frac{3}{2} \qquad \therefore a=\frac{11}{2}$$

03 전략 직선 l이 x축, y축과 만나는 두 점과 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$임을 이용한다.

풀이 직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 $A(a, 0)$, $B(0, b)$라 하자. 원점 O에 대하여 $\triangle OAB$의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$이므로

$$\frac{0+a+0}{3}=2, \ \frac{0+0+b}{3}=1$$

$$\therefore a=6, \ b=3$$

따라서 직선 l의 방정식이 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$, 즉

$y=-\frac{1}{2}x+3$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

답 ①

04 전략 점 A를 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식을 k를 사용하여 나타낸다.

풀이 $kx+y-2k+1=0$에서

$$y=-kx+2k-1$$

$x=0$일 때 $y=2k-1$이므로

$$A(0, 2k-1)$$

또 직선 l의 기울기는 $-k$이므로 점 A를 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{k}x+2k-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $y=0$일 때 $0=\frac{1}{k}x+2k-1$이므로 직선 ㉠의 x절편은

$$x=-k(2k-1)=-2k^2+k$$

$$=-2\left(k-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$$

따라서 $k=\frac{1}{4}$일 때 직선 ㉠의 x절편은 최댓값 $\frac{1}{8}$을 갖는다.

답 ②

05 전략 정삼각형의 넓이가 최소일 때는 한 변의 길이가 최소일 때임을 이용한다.

풀이 정삼각형 ABC의 넓이가 최소가 되기 위해서는 $\overline{AB}$의 길이가 최소가 되어야 한다.

그런데 두 직선 $y=x+3$, $y=x-1$은 평행하고 두 점 A, B는 각각 두 직선 위의 점이므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 두 직선 $y=x+3$, $y=x-1$ 사이의 거리와 같다.

직선 $y=x+3$ 위의 한 점 $(0, 3)$과 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

이므로 $\triangle ABC$의 넓이의 최솟값은

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$$

답 ③

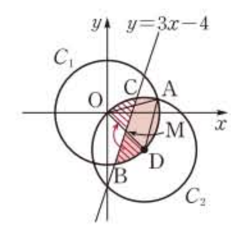
06 전략 직선 l이 두 원의 중심을 잇는 선분의 중점을 지남을 이용한다.

풀이 원 C_2의 중심을 D라 하고 선분 OD의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0-2}{2}\right) \qquad \therefore (1, -1)$$

직선 $y=3x-4$는 점 M을 지나므로 구하는 넓이는 오른쪽 그림에서 선분 OD와 두 호 AO, AD로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$y=3x-4$에 $x=1$, $y=-1$을 대입하면 등식이 성립하므로 직선 $y=3x-4$는 점 $(1, -1)$을 지난다.



이때 두 원 C_1, C_2는 서로의 중심을 지나므로 삼각형 AOD는 정삼각형이다.

따라서 구하는 넓이는

(부채꼴 AOD의 넓이)+(부채꼴 ADO의 넓이)$-\triangle AOD$

$$=2\left(\pi\cdot 8\cdot\frac{60}{360}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 8$$

$$=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$$

한 변의 길이가 a인 정삼각형에서
① 높이: $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
② 넓이: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

답 ③

07 전략 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$ 꼴로 변형한 후 반지름의 길이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x^2+y^2+2kx+2(k-1)y+k=0$에서

$$(x+k)^2+\{y+(k-1)\}^2=2k^2-3k+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원의 반지름의 길이는 0보다 커야 하므로

$$2k^2-3k+1>0$$

$$(2k-1)(k-1)>0$$

$$\therefore k<\frac{1}{2} \text{ 또는 } k>1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

원 ㉠이 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$보다 작은 원을 나타내려면

$$2k^2-3k+1<10$$

$$2k^2-3k-9<0$$

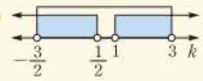
$$(2k+3)(k-3)<0$$

$$\therefore -\frac{3}{2}<k<3 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

따라서 ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 k의 값의 범위는

$$-\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2} \text{ 또는 } 1<k<3$$

이므로 구하는 정수 k는 -1, 0, 2의 3개이다. 답 ②



08 전략 실수 k의 값에 관계없이 $f(x)+k\cdot g(x)=0$이 성립하면 $f(x)=0$, $g(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+kx+2ky+3k-9=0$에서

$(x^2+y^2-9)+k(x+2y+3)=0$ …… ㉠

원 ㉠은 실수 k의 값에 관계없이 항상 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $x+2y+3=0$의 교점을 지난다.

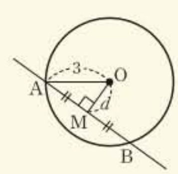
따라서 구하는 선분 AB의 길이는 직선 $x+2y+3=0$이 원 $x^2+y^2=9$에 의하여 잘린 선분의 길이와 같다.

원 $x^2+y^2=9$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

이고, 원의 반지름의 길이는 3이므로

$$\overline{AB}=2\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}=2\sqrt{\frac{36}{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$ 답 ④



$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-d^2}$

09 전략 $\angle TPT'=60°$일 때의 점 P의 자취를 그려 본다.

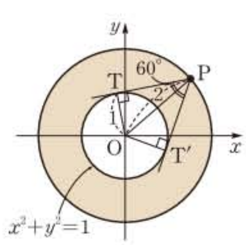
풀이 원 $x^2+y^2=1$의 중심을 O라 할 때, 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 $60°$이면 $\triangle PTO$는 $\angle T=90°$, $\angle OPT=30°$인 직각삼각형이다.

$\angle OPT=\angle OPT'$

이때 $\sin 30°=\frac{\overline{OT}}{\overline{OP}}$이므로

$\frac{1}{2}=\frac{1}{\overline{OP}}$ $\therefore \overline{OP}=2$

즉 $\angle TPT'=60°$일 때, 점 P는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있으므로 $\angle TPT'$의 크기가 $60°$ 이상일 때, 점 P가 존재하는 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$4\pi-\pi=3\pi$ 답 ②

10 전략 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$임을 이용한다.

풀이 기울기가 -3인 접선의 방정식은

$y=-3x\pm 2\sqrt{(-3)^2+1}$

$\therefore y=-3x\pm 2\sqrt{10}$

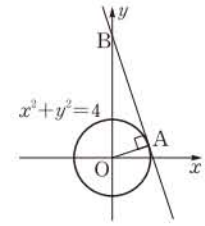
이때 제1사분면 위의 점 A를 지나는 접선의 방정식은

$y=-3x+2\sqrt{10}$

따라서 오른쪽 그림에서 $\overline{OA}=2$, $\overline{OB}=2\sqrt{10}$이므로 직각삼각형 OAB에서

$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}$

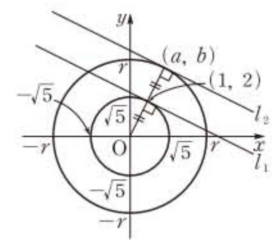
$=6$



답 ③

11 전략 원점을 중심으로 하는 두 원의 접선 l_1, l_2 사이의 거리가 $\sqrt{5}$임을 이용하여 r의 값을 구한다.

풀이 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 $(a,\ b)$는 제1사분면 위에 있고



$r=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

이다.

따라서 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=20$ …… ㉠

한편 두 직선 l_1, l_2의 방정식은 각각

$x+2y=5$, $ax+by=20$

이고, 두 직선이 평행하므로

$\frac{1}{a}=\frac{2}{b}\neq\frac{5}{20}$

$\therefore b=2a\ (a\neq 4)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2+4a^2=20$

$a^2=4$ $\therefore a=\pm 2$

그런데 점 $(a,\ b)$는 제1사분면 위의 점이므로

$a=2$, $b=4$ $\therefore a+b=6$ 답 ⑤

12 전략 공의 그림자가 나타내는 도형은 원임을 이용한다.

풀이 전등을 점 A, 공이 바닥과 닿은 점을 점 O라 하고, 공의 그림자인 원의 한 지름의 양 끝 점을 B, C라 하자.

빛이 수직으로 공의 중심을 지나므로 그림자는 원이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고 점 O를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 O는 원점이고, 점 A는 y축 위의 점이다. 1 m를 1로 생각하면 $A(0,\ 10)$이고 공의 중심의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 직선 AB의 방정식을

$y=mx+10\ (m>0)$

이라 하면 점 $(0,\ 1)$에서 직선 $y=mx+10$, 즉 $mx-y+10=0$까지의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 한다. 즉

$\frac{|-1+10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $\sqrt{m^2+1}=9$

$m^2+1=81$, $m^2=80$

$\therefore m=4\sqrt{5}\ (\because m>0)$

따라서 직선 AB의 방정식은 $y=4\sqrt{5}x+10$이므로 점 B의 x좌표는 $y=0$일 때,

$$0=4\sqrt{5}x+10 \qquad \therefore x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

공의 그림자는 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m인 원이므로 구하는 넓이는 $\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\pi(\mathrm{m}^2)$ 답 ②

1등급 비밀노트

좌표를 이용하여 활용 문제를 해결할 때는 먼저 도형의 한 변이 좌표축 위에 오도록 도형을 좌표평면 위에 놓은 후, 도형의 꼭짓점에 해당하는 점의 좌표를 구하거나 미지수를 사용하여 나타내면 쉽게 해결할 수 있다.

13 전략 원을 대칭이동한 후 평행이동한 도형의 방정식을 구하고, 그 원이 x축과 y축에 접할 때의 중심의 좌표의 조건을 이용한다.

풀이 원 $(x-a)^2+(y+3)^2=4$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-3)^2=4$$

이 원을 다시 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-2)^2=4$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 이 원이 x축과 y축에 모두 접하려면

$$|a|=2 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$$ 답 ②

14 전략 보기에 주어진 식이 원 $f(x, y)=0$을 어떻게 이동한 원의 방정식인지 알아본다.

풀이 주어진 원이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 이 원은 세 점 O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)을 지난다. 이때 $\angle AOB=90°$이므로 원 $f(x, y)=0$은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

일품 BOX: 지름의 양 끝 점과 원 위의 한 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 직각삼각형이다.

ㄱ. 주어진 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 원과 일치하므로

$$f(y, x)=0$$

ㄴ. 주어진 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 원과 일치하지 않으므로

$$f(-x, -y)\neq 0$$

ㄷ. 주어진 원을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 원과 일치하므로

$$f(1-y, 1-x)=0$$

일품 BOX: 원 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은 $f(x+1, y+1)=0$ 이 원을 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $f(-y+1, -x+1)=0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

15 전략 직선 AH가 $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$의 수직이등분선임을 이용한다.

풀이 선분 AC′이 삼각형 ABC의 무게중심을 지나므로 점 C′은 변 BC의 중점이다.

일품 BOX: 삼각형의 무게중심은 세 중선의 교점이다.

$$\therefore C'(0, 1)$$

점 H는 선분 CC′의 중점이므로 점 H의 좌표는

$$\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

직선 AH는 직선 CC′과 수직이고 직선 CC′의 기울기는 $\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$이므로 직선 AH의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=2(x-1) \qquad \therefore y=2x-\frac{3}{2}$$

점 A(3, a)가 직선 AH 위의 점이므로

$$a=2\cdot 3-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

한편 선분 BB′의 중점이 H이므로

$$\frac{-2+b}{2}=1,\ \frac{2+c}{2}=\frac{1}{2} \qquad \therefore b=4,\ c=-1$$

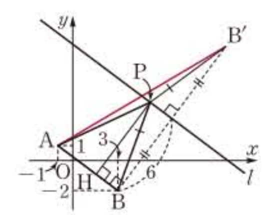
$$\therefore a+b+c=\frac{15}{2}$$ 답 ③

16 전략 $\overline{AB}$의 길이가 정해져 있으므로 점 P가 어느 직선 위에 있어야 하는지 생각해 본다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(-2-1)^2}=5$

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 △ABP의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\overline{PH}=15 \qquad \therefore \overline{PH}=6$$



따라서 오른쪽 그림과 같이 점 P는 직선 AB와 평행하고 직선 AB로부터의 거리가 6인 직선 l 위의 점이다. 점 B를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 △ABP의 둘레의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB}+\overline{AB'}$$

이므로 점 P가 선분 AB′과 직선 l의 교점일 때 최소이다.

이때 $\overline{BB'}=12$이므로 직각삼각형 ABB′에서

$$\overline{AB'}=\sqrt{5^2+12^2}=13$$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AB'}=13$$ 답 ③

17 전략 무게중심의 좌표를 $y=px$에 대입하면 등식이 성립함을 이용한다.

풀이 △ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{p-7}{3}, \frac{3-p^2}{3}\right)$$

이 점이 직선 $y=px$ 위에 있으므로

$$\frac{3-p^2}{3}=p\cdot\frac{p-7}{3}$$

$$3-p^2=p^2-7p, \qquad 2p^2-7p-3=0$$

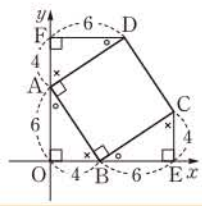
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=\frac{7}{2},\ b=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore a+b=2$$ 답 2

18 전략 □ABCD가 정사각형임을 이용하여 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 C, D에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면



$\triangle OAB \equiv \triangle EBC$
$\equiv \triangle FDA$

> $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{DA}$,
> $\angle OAB=\angle EBC$
> $=\angle FDA$,
> $\angle OBA=\angle ECB$
> $=\angle FAD$
> $\therefore \triangle OAB \equiv \triangle EBC$
> $\equiv \triangle FDA$
> (ASA 합동)

이므로

$\overline{OA}=\overline{EB}=\overline{FD}=6$, $\overline{OB}=\overline{EC}=\overline{FA}=4$

따라서 두 점 C, D의 좌표는

C$(10,\ 4)$, D$(6,\ 10)$

점 M은 $\overline{BC}$의 중점이므로

$\mathrm{M}\left(\dfrac{4+10}{2},\ \dfrac{0+4}{2}\right)$ $\quad \therefore$ M$(7,\ 2)$

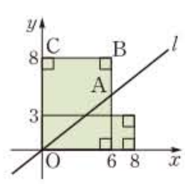
직선 DM의 방정식은

$y-2=\dfrac{2-10}{7-6}(x-7)$ $\quad \therefore y=-8x+58$

따라서 직선 DM의 y절편은 58이다. 답 58

19 전략 직선 l에 의하여 이등분된 부분 중 사다리꼴의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$6\cdot 8+2\cdot 3=54$

이므로 □OABC의 넓이는 27이다. ··· ❶

직선 l의 방정식은 $y=kx$이므로 점 A의 좌표는

$(6,\ 6k)$

□OABC의 넓이가 27이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\{8+(8-6k)\}\cdot 6=27$

> 두 점 A, B의 y좌표가 각각 $6k$, 8이므로
> $\overline{AB}=8-6k$

$16-6k=9$ $\quad \therefore k=\dfrac{7}{6}$ ··· ❷

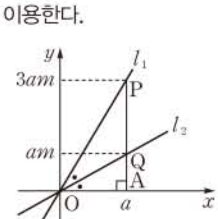
$\therefore 30k=30\cdot\dfrac{7}{6}=35$ ··· ❸

답 35

채점 기준	비율
❶ 색칠한 부분의 넓이를 이등분한 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $30k$의 값을 구할 수 있다.	20 %

20 전략 두 조건을 모두 만족시키는 두 직선 l_1, l_2를 그리고, 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용한다.

풀이 두 직선 l_1과 l_2를



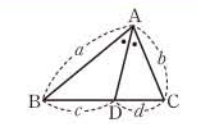
l_1: $y=3mx$,
l_2: $y=mx$ $(m>0)$

라 하고, x축 위의 원점이 아닌 한 점을 A$(a,\ 0)$ $(a>0)$이라 하자. 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 P, Q라 하면

P$(a,\ 3am)$, Q$(a,\ am)$ ··· ❶

조건 (나)에 의하여 $\angle POA=2\angle QOA$이므로 직선 OQ는 $\angle POA$의 이등분선이다.

즉 △OAP에서 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

> 
>
> △ABC에서
> $\angle BAD=\angle CAD$이면
> $a : b=c : d$

$\overline{OA} : \overline{OP}=\overline{AQ} : \overline{QP}$

$a : \sqrt{a^2+(3am)^2}=1 : 2$ ··· ❷

> $\overline{AQ} : \overline{QP}$
> $=am : (3am-am)$
> $=am : 2am$
> $=1 : 2$

$\sqrt{a^2+(3am)^2}=2a$

$a^2+9a^2m^2=4a^2$ $\quad \therefore m^2=\dfrac{1}{3}$ $(\because a\neq 0)$

$\therefore m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because m>0)$

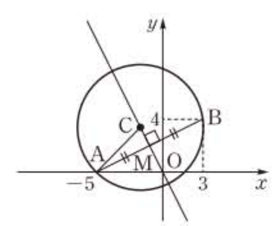
따라서 직선 l_1의 기울기는 $\quad 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$ ··· ❸

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 이용하여 x좌표가 같은 두 직선 l_1, l_2 위의 점을 잡을 수 있다.	30 %
❷ 조건 (나)를 이용하여 비례식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 직선 l_1의 기울기를 구할 수 있다.	30 %

21 전략 두 점을 지나는 원의 반지름의 길이가 최소일 때의 원의 중심의 위치를 생각해 본다.

풀이 두 점 A, B를 지나는 원을 C라 하고 그 중심을 C라 하자.



선분 AB는 원 C의 현이고, 점 C에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 C는 점 M을 지나고 선분 AB에 수직인 직선 위에 존재한다.

이때 $\overline{AM}\le\overline{AC}$이므로 $\overline{AM}=\overline{AC}$일 때, 즉 점 M이 원의 중심 C일 때, 원 C의 반지름의 길이가 최소이다.

> 원 C가 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원일 때

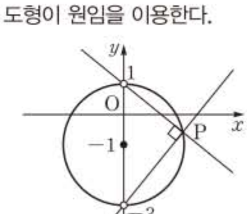
따라서 반지름의 길이의 최솟값 k는

$k=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(3+5)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

이므로 $\quad k^2=20$ 답 20

22 전략 두 직선의 y절편은 정해져 있고, 점 P는 수직인 두 직선의 교점이므로 점 P가 나타내는 도형이 원임을 이용한다.

풀이 주어진 두 직선의 기울기가 각각 m, $-\dfrac{1}{m}$이므로 두 직선은 서로 수직이다.



즉 점 P는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0,\ 1)$, $(0,\ -3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점이다.

> m의 값에 관계없이 직선 $y=mx+1$은 점 $(0,\ 1)$을, 직선 $y=-\dfrac{1}{m}x-3$은 점 $(0,\ -3)$을 항상 지난다.

IV 도형의 방정식

그런데 $m\neq0$이므로 $x=0$일 때에는 조건을 만족시키는 점 P가 존재하지 않는다.
따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이

$\left(0,\ \frac{1-3}{2}\right)$, 즉 $(0,\ -1)$

이고 반지름의 길이가 2인 원에서 $x=0$인 점이 빠진 도형이므로 그 방정식은

$x^2+(y+1)^2=4\ (x\neq0)$

답 $x^2+(y+1)^2=4\ (x\neq0)$

일품 BOX

$y=mx+1$,
$y=-\frac{1}{m}x-3$에서

$mx+1=-\frac{1}{m}x-3$

$\left(m+\frac{1}{m}\right)x=-4$

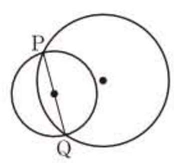
$\frac{m^2+1}{m}x=-4$

$\therefore x=-\frac{4m}{m^2+1}$

따라서 $m\neq0$이면 $x\neq0$이다.

23 전략 $\overline{PQ}$가 원 $x^2+y^2=5$의 지름일 때 $\overline{PQ}$의 길이가 최대임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 원의 공통인 현 PQ가 원 $x^2+y^2=5$의 지름일 때 선분 PQ의 길이가 최대이므로 직선 PQ가 원 $x^2+y^2=5$의 중심 $(0,\ 0)$을 지나야 한다. ··· ❶



직선 PQ의 방정식은

$(x-k)^2+(y+2)^2-10-(x^2+y^2-5)=0$

$\therefore -2kx+4y+k^2-1=0$ ······ ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ 0)$을 지나야 하므로

$k^2-1=0,\qquad k^2=1$

$\therefore k=\pm1$ ··· ❷

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$-1\cdot1=-1$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 직선 PQ가 원 $x^2+y^2=5$의 중심을 지남을 알 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 모두 구할 수 있다.	60 %
❸ 모든 실수 k의 값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

24 전략 두 직선 사이의 거리가 원의 지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 두 직선 $4x-3y+a=0$, $4x-3y+b=0$은 평행하고 한 원에 동시에 접하므로 두 직선 사이의 거리는 원의 지름의 길이와 같다.

직선 $4x-3y+a=0$ 위의 한 점 $\left(0,\ \frac{a}{3}\right)$와 직선 $4x-3y+b=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-a+b|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|a-b|}{5}$

원의 넓이가 4π이면 반지름의 길이가 2이므로

$\frac{|a-b|}{5}=2\cdot2$

$\therefore |a-b|=20$

$\therefore a^2+b^2=|a-b|^2+2ab$
$=20^2+2\cdot(-84)$
$=232$

답 232

25 전략 도형 $f(x+3,\ y-1)=0$을 도형 $f(x,\ y)=0$으로 옮기는 평행이동을 구한다.

풀이 도형 $f(x+3,\ y-1)=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 도형 $f(x,\ y)=0$으로 옮겨진다.
따라서 점 $(-1,\ 3)$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 점 $(a,\ b)$로 옮겨지므로

$-1+3=a,\ 3-1=b$

$\therefore a=2,\ b=2$

$\therefore a+b=4$

답 4

26 전략 직선 $y=mx$가 원 C의 넓이를 이등분하므로 직선 $y=mx$가 원 C의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 원 $x^2+(y-7)^2=9$의 중심의 좌표가 $(0,\ 7)$이므로 원 C의 중심의 좌표는

$(n,\ n+12)$

직선 $y=mx$가 원 C의 중심 $(n,\ n+12)$를 지나므로

$n+12=mn\qquad \therefore m=\frac{n+12}{n}$

$m=5$일 때, $5=\frac{n+12}{n}$에서 $\quad n=3$

$m=4$일 때, $4=\frac{n+12}{n}$에서 $\quad n=4$

$m=3$일 때, $3=\frac{n+12}{n}$에서 $\quad n=6$

$m=2$일 때, $2=\frac{n+12}{n}$에서 $\quad n=12$

$m=1$일 때, $1=\frac{n+12}{n}$를 만족시키는 n의 값은 없다.

$1=\frac{n+12}{n}$에서
$n=n+12$
$\therefore 0=12$
따라서 모순이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+4+6+12=25$

답 25

27 전략 두 포물선의 꼭짓점이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 포물선 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$의 꼭짓점을 A라 하면 $\quad$A$(1,\ -1)$
포물선 $y=-x^2+6x-4=-(x-3)^2+5$의 꼭짓점을 B라 하면 $\quad$B$(3,\ 5)$ ··· ❶
두 포물선이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이므로 포물선의 꼭짓점도 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.
따라서 선분 AB의 중점이 점 $(a,\ b)$이므로

$a=\frac{1+3}{2}=2,\ b=\frac{-1+5}{2}=2$ ··· ❷

$\therefore a+b=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 두 포물선의 꼭짓점의 좌표를 각각 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

28 전략 도형 $f(x, y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, y)=0$에 x 대신 $-x$를 대입한 식임을 이용한다.

풀이 두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 3)$을 지나는 직선 l의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이므로 직선 m의 방정식은

$$y=-\sqrt{3}x \qquad \cdots ❶$$

$\mathrm{P}(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0,\ a\neq\sqrt{3},\ b\neq3)$라 하면

$$\overline{\mathrm{PL}}=\frac{|\sqrt{3}a-b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{|\sqrt{3}a-b|}{2},$$

$$\overline{\mathrm{PM}}=\frac{|\sqrt{3}a+b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{|\sqrt{3}a+b|}{2},$$

$$\overline{\mathrm{PN}}=b$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PL}}^2+\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{PN}}^2$$

$$=\frac{3a^2-2\sqrt{3}ab+b^2}{4}+\frac{3a^2+2\sqrt{3}ab+b^2}{4}+b^2$$

$$=\frac{3}{2}(a^2+b^2) \qquad \cdots ❷$$

이때 $a^2+b^2=12$이므로

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2=12$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=12$

$$\overline{\mathrm{PL}}^2+\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{PN}}^2=\frac{3}{2}\cdot12=18 \qquad \cdots ❸$$

답 18

채점 기준	비율
❶ 두 직선 l, m의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{\mathrm{PL}}^2+\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{PN}}^2$의 값을 점 P의 좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $\overline{\mathrm{PL}}^2+\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{PN}}^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

최상위로 가는 최고 수준 문제

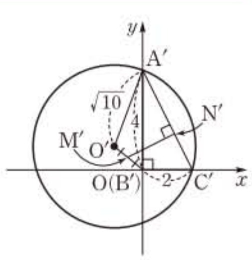
본책 119쪽

01

해결 단계

❶ 점 B를 원점으로 하는 새로운 좌표평면에 주어진 원을 놓았을 때, 두 점 A, C가 옮겨지는 두 점 A′, C′의 좌표를 구한다.
❷ 새로운 좌표평면에 놓인 원의 중심 O′의 좌표를 구한 후 $\overline{\mathrm{O'B'}}$의 길이를 구한다.
❸ 직선 A′C′의 방정식과 점 M′의 좌표를 이용하여 $\overline{\mathrm{M'N'}}$의 길이를 구한다.
❹ $\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{MN}}$의 값을 구한다.

풀이 ❶ 두 직선 BC, BA를 각각 x축, y축으로 하는 새로운 좌표평면을 잡았을 때, 오른쪽 그림과 같이 점 A, B, C, M, N, O가 옮겨지는 점을 각각 점 A′, B′, C′, M′, N′, O′이라 하면



$\mathrm{B'}(0,\ 0)$, $\mathrm{A'}(0,\ 4)$, $\mathrm{C'}(2,\ 0)$이다.

❷ 새로운 좌표평면에 놓인 원의 중심 O′의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=10 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원 ㉠이 점 $\mathrm{A'}(0,\ 4)$를 지나므로

$$a^2+b^2-8b+6=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 원 ㉠이 점 $\mathrm{C'}(2,\ 0)$을 지나므로

$$a^2+b^2-4a-6=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡$-$㉢을 하면 $\quad 4a-8b+12=0 \qquad \therefore\ a=2b-3$

이것을 ㉡에 대입하면

$$(2b-3)^2+b^2-8b+6=0$$

$$b^2-4b+3=0, \qquad (b-1)(b-3)=0$$

$$\therefore\ b=1\ 또는\ b=3$$

$b=1$이면 $\quad a=2\cdot1-3=-1$
$b=3$이면 $\quad a=2\cdot3-3=3$

두 점 A′, C′을 지나고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원은 중심이 점 $(-1,\ 1)$인 원과 중심이 점 $(3,\ 3)$인 원의 두 개이다.

그런데 점 $(a,\ b)$는 제2사분면 위의 점이므로

$$a=-1,\ b=1$$

즉 $\mathrm{O'}(-1,\ 1)$이므로 $\qquad \overline{\mathrm{O'B'}}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

❸ 선분 O′B′의 중점 M′의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이고, 직선 A′C′의 방정식은 $2x+y-4=0$이므로

x절편이 2, y절편이 4이므로
$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$
$\therefore\ 2x+y-4=0$

$$\overline{\mathrm{M'N'}}=\frac{\left|2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-4\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{9\sqrt{5}}{10}$$

❹ $\therefore\ \overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{MN}}=\overline{\mathrm{O'B'}}\times\overline{\mathrm{M'N'}}$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{9\sqrt{5}}{10}=\frac{9\sqrt{10}}{10}$$

답 ⑤

02

해결 단계

❶ 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구한다.
❷ 현 AB의 중점을 M이라 하고, $\overline{\mathrm{OM}}$, $\overline{\mathrm{AM}}$, $\overline{\mathrm{TO}}$의 길이를 구한다.
❸ 피타고라스 정리를 이용하여 a^2+4a의 값을 구한다.

풀이 ❶ $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$라 하면 두 점 A, B에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=5,\ x_2x+y_2y=5$$

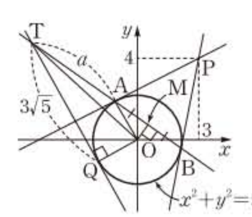
두 접선은 모두 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$를 지나므로

$$3x_1+4y_1=5,\ 3x_2+4y_2=5$$

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$3x+4y=5$$

❷ 오른쪽 그림과 같이 현 AB의 중점을 M이라 하면 원의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리는



$$\overline{\mathrm{OM}}=\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

이고, $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 AOM에서

$$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$$

또 직각삼각형 TQO에서

$$\overline{\mathrm{TO}}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}=5\sqrt{2}$$

❸ 직각삼각형 TOM에서

$$(5\sqrt{2})^2=(a+2)^2+1^2 \qquad \therefore\ a^2+4a=45$$

답 45

Ⅳ 도형의 방정식

03

해결 단계

❶ $\frac{b+d}{a+c}$의 값이 점 P와 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점 Q′을 지나는 직선의 기울기임을 안다.
❷ $\frac{b+d}{a+c}$의 값이 최대일 때와 최소일 때가 어떤 경우인지 생각해 본다.
❸ $\frac{b+d}{a+c}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

풀이 ❶ $x^2+y^2-6x-10y+30=0$에서

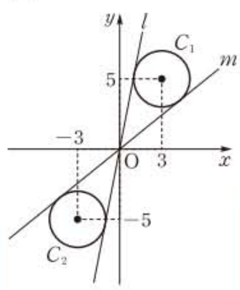
$(x-3)^2+(y-5)^2=4$

$\frac{b+d}{a+c}=\frac{b-(-d)}{a-(-c)}$이므로 Q′$(-c,\ -d)$라 하면

$\frac{b+d}{a+c}$의 값은 두 점 P, Q′을 지나는 직선의 기울기이다.

이때 점 Q′$(-c,\ -d)$는 점 Q$(c,\ d)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 Q′은 원 $(x+3)^2+(y+5)^2=4$ 위의 점이다.

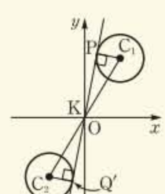
❷ C_1: $(x-3)^2+(y-5)^2=4$,
C_2: $(x+3)^2+(y+5)^2=4$
라 하면 오른쪽 그림에서



$\frac{b+d}{a+c}$의 최댓값과 최솟값은 각각 직선 l의 기울기와 직선 m의 기울기와 같다.

두 직선 l, m은 두 원 C_1, C_2에 동시에 접한다.

❸ 이때 두 직선 l, m은 원점을 지나므로 원 $(x-3)^2+(y-5)^2=4$에 접하는 직선의 방정식을 $y=kx$라 하면 원의 중심 (3, 5)와 직선 $kx-y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 2이다. 즉



두 직선 C_1C_2, PQ′의 교점을 K라 하면
$\triangle PKC_1 \equiv \triangle Q'KC_2$
이므로 $\overline{C_1K}=\overline{C_2K}$
따라서 직선 PQ′은 $\overline{C_1C_2}$의 중점을 지난다. 그런데 두 점 C_1, C_2는 원점에 대하여 대칭이므로 $\overline{C_1C_2}$의 중점은 원점이다. 즉 직선 PQ′은 원점을 지난다.

$$\frac{|3k-5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$$

$|3k-5|=2\sqrt{k^2+1}$

$(3k-5)^2=4(k^2+1)$

$\therefore 5k^2-30k+21=0$ …… ㉠

따라서 두 직선 l, m의 기울기는 각각 이차방정식 ㉠의 두 근 중 큰 값과 작은 값이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선 l, m의 기울기의 합은

$$-\frac{-30}{5}=6$$

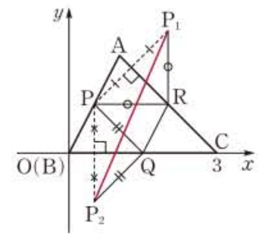
즉 $\frac{b+d}{a+c}$의 최댓값과 최솟값의 합은 6이다. 답 6

04

해결 단계

❶ 점 B를 원점으로 하는 좌표평면을 잡았을 때, 점 A의 좌표를 구한다.
❷ 점 P를 직선 AC, x축에 대하여 각각 대칭이동한 두 점의 좌표를 같은 문자를 사용하여 나타낸다.
❸ 삼각형 PQR의 둘레의 길이가 최소인 경우를 찾아 그 최솟값을 구한다.

풀이 ❶ 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



C(3, 0)이고, 점 A의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$라 하면

$\overline{AB}^2=5$에서 $\alpha^2+\beta^2=5$ …… ㉠

$\overline{AC}^2=8$에서 $(3-\alpha)^2+(-\beta)^2=8$

$\therefore \alpha^2+\beta^2-6\alpha=-1$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $6\alpha=6$ $\therefore \alpha=1$

㉠에 $\alpha=1$을 대입하여 풀면 $\beta=2$ $(\because \beta>0)$

$\therefore$ A(1, 2)

❷ 직선 AB의 방정식은 $y=2x$이므로 점 P를 P$(a,\ 2a)$ $(0<a<1)$라 하자.

직선 AC의 방정식은 $y=\frac{0-2}{3-1}(x-3)$, 즉 $y=-x+3$이므로 점 P를 직선 AC에 대하여 대칭이동한 점을 $P_1(c,\ d)$라 하면 $\overline{AC}\perp\overline{PP_1}$에서

$\frac{d-2a}{c-a}=1$, $d-2a=c-a$

$\therefore d-c=a$ …… ㉢

$\overline{PP_1}$의 중점 $\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{2a+d}{2}\right)$가 직선 AC 위의 점이므로

$\frac{2a+d}{2}=-\frac{a+c}{2}+3$

$2a+d=-a-c+6$

$\therefore d+c=-3a+6$ …… ㉣

㉢−㉣을 하면 $-2c=4a-6$

$\therefore c=-2a+3$

㉢+㉣을 하면 $2d=-2a+6$

$\therefore d=-a+3$

$\therefore P_1(-2a+3,\ -a+3)$

또 점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P_2라 하면

$P_2(a,\ -2a)$

❸ 이때 $\overline{RP}=\overline{RP_1}$, $\overline{QP}=\overline{QP_2}$이므로 삼각형 PQR의 둘레의 길이는 $\overline{RP_1}+\overline{RQ}+\overline{QP_2}$의 값과 같다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\overline{RP_1}+\overline{RQ}+\overline{QP_2}\\ &\ge\overline{P_1P_2}\\ &=\sqrt{(a+2a-3)^2+(-2a+a-3)^2}\\ &=\sqrt{(3a-3)^2+(-a-3)^2}\\ &=\sqrt{10a^2-12a+18}\\ &=\sqrt{10\left(a-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{72}{5}}\ (0<a<1)\end{aligned}$$

따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값은

$\sqrt{\frac{72}{5}}$, 즉 $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ 답 ①