쎈

# 정답 및 풀이

## 미적분 Ⅱ



정답을 확인하려 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

# 01 지수함수

**0001** 답 ㄴ, ㄷ

**0002** (1) $f(0)=2^0=1$

(2) $f(2)=2^2=4$

(3) $f\left(\frac{3}{2}\right)=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

(4) $f(-4)f(2)=2^{-4}\cdot 2^2=2^{-2}=\frac{1}{4}$

답 (1) 1 (2) 4 (3) $2\sqrt{2}$ (4) $\frac{1}{4}$

**0003** (1) $f(0)=\left(\frac{1}{5}\right)^0=1$

(2) $f(3)=\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$

(3) $f(-4)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}=5^4=625$

(4) $f(-1)f(2)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{5}$

답 (1) 1 (2) $\frac{1}{125}$ (3) 625 (4) $\frac{1}{5}$

**0004** ㄱ. $f(x)=a^x$은 일대일함수이므로 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다. 즉 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

ㄷ. $0<a<1$일 때, $x$의 값이 증가하면 $a^x$의 값은 감소한다.

ㄹ. 정의역은 실수 전체의 집합이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

**0005** $\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[3]{3^4}=3^{\frac{4}{3}}$이고, $\frac{3}{4}<\frac{4}{3}$이다.

이때 함수 $y=3^x$은 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로

$3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{3}}$ $\quad\therefore \sqrt[4]{3^3}<\sqrt[3]{3^4}$

답 $\sqrt[4]{3^3}<\sqrt[3]{3^4}$

**0006** $-1<2$이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^2<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

답 $\left(\frac{1}{3}\right)^2<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

**0007** $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$이고, $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$이다.

이때 함수 $y=2^x$은 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로

$2^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{2}}$ $\quad\therefore \sqrt[3]{2}<\sqrt{2}<\sqrt{8}$

답 $\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}<\sqrt{8}$

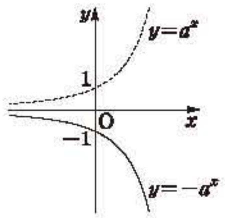
**0008** $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^3=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$이고, $-0.2<1<\frac{3}{2}$이다.

이때 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$은 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}<\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.2}$ $\quad\therefore \left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^3<\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.2}$

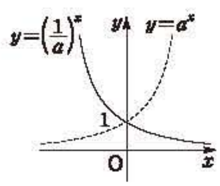
답 $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^3<\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.2}$

**0009** $y=-a^x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



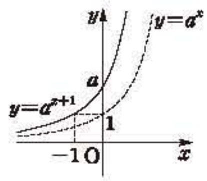

답 풀이 참조

**0010** $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



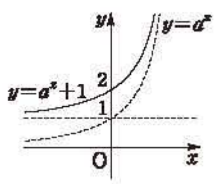

답 풀이 참조

**0011** $y=a^{x+1}$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



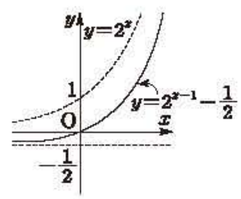

답 풀이 참조

**0012** $y=a^x+1$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**0013** $y=2^{x-1}-\frac{1}{2}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




따라서 치역은 $\left\{y\,\middle|\,y>-\frac{1}{2}\right\}$

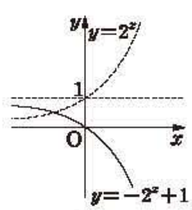
점근선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}$

답 풀이 참조

**0014** $y=-2^x+1$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

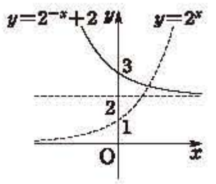
따라서 치역은 $\{y\,|\,y<1\}$

점근선의 방정식은 $y=1$




답 풀이 참조

**0015** $y=2^{-x}+2$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




따라서 치역은 $\{y|y>2\}$
점근선의 방정식은 $y=2$

답 풀이 참조

**0016** 함수 $y=5^x$에서 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로 $-1\le x\le 2$에서
$x=2$일 때 최대이고 최댓값은 $5^2=25$
$x=-1$일 때 최소이고 최솟값은 $5^{-1}=\frac{1}{5}$

답 최댓값: 25, 최솟값: $\frac{1}{5}$

**0017** 함수 $y=10^{-x}=\left(\frac{1}{10}\right)^x$에서 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로 $-3\le x\le 2$에서
$x=-3$일 때 최대이고 최댓값은 $10^3=1000$
$x=2$일 때 최소이고 최솟값은 $10^{-2}=\frac{1}{100}$

답 최댓값: 1000, 최솟값: $\frac{1}{100}$

**0018** 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$에서 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로 $-2\le x\le 2$에서
$x=-2$일 때 최대이고 최댓값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+1=10$
$x=2$일 때 최소이고 최솟값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^2+1=\frac{10}{9}$

답 최댓값: 10, 최솟값: $\frac{10}{9}$

**0019** 함수 $y=2^{x+2}-3$에서 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로 $1\le x\le 3$에서
$x=3$일 때 최대이고 최댓값은 $2^{3+2}-3=29$
$x=1$일 때 최소이고 최솟값은 $2^{1+2}-3=5$

답 최댓값: 29, 최솟값: 5

**0020** $8^x=128$에서 $2^{3x}=2^7$이므로
$3x=7$ $\quad\therefore x=\frac{7}{3}$

답 $x=\frac{7}{3}$

**0021** $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}=2\sqrt{2}$에서 $2^{x-1}=2^{\frac{3}{2}}$이므로
$x-1=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{5}{2}$

답 $x=\frac{5}{2}$

**0022** $\left(\frac{1}{9}\right)^x=81\cdot 3^x$에서 $3^{-2x}=3^{4+x}$이므로
$-2x=4+x,\quad 3x=-4\quad\therefore x=-\frac{4}{3}$

답 $x=-\frac{4}{3}$

**0023** $4^{2x}-4^x-12=0$에서 $\quad(4^x)^2-4^x-12=0$
$4^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은
$\boxed{t^2-t-12}=0,\quad (t+3)(t-4)=0$
$\therefore t=\boxed{4}\ (\because t>0)$
즉 $4^x=4$이므로 $\quad x=\boxed{1}$
$\therefore$ (가) $t^2-t-12$ (나) 4 (다) 1

답 풀이 참조

**0024** $3^{2x}-12\cdot 3^x+27=0$에서
$(3^x)^2-12\cdot 3^x+27=0$
$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은
$t^2-12t+27=0,\quad (t-3)(t-9)=0$
$\therefore t=3$ 또는 $t=9$
즉 $3^x=3$ 또는 $3^x=9$이므로
$x=1$ 또는 $x=2$

답 $x=1$ 또는 $x=2$

**0025** $\left(\frac{1}{9}\right)^x-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-27=0$에서
$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-27=0$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은
$t^2-6t-27=0,\quad (t+3)(t-9)=0$
$\therefore t=9\ (\because t>0)$
즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$이므로 $\quad\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
$\therefore x=-2$

답 $x=-2$

**0026** $5^{2x-4}=6^{2x-4}$에서 $5\neq 6$이므로
$2x-4=0\quad\therefore x=2$

답 $x=2$

**0027** $5^{2x-1}>25\sqrt{5}$에서 $\quad 5^{2x-1}>5^{\frac{5}{2}}$
밑이 1보다 크므로 $\quad 2x-1>\frac{5}{2}$
$2x>\frac{7}{2}\quad\therefore x>\frac{7}{4}$

답 $x>\frac{7}{4}$

**0028** $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}\le 2^{x-1}$에서 $\quad 2^{-3x-2}\le 2^{x-1}$
밑이 1보다 크므로 $\quad -3x-2\le x-1$
$-4x\le 1\quad\therefore x\ge-\frac{1}{4}$

답 $x\ge-\frac{1}{4}$

**0029** $2^{3-x}\ge(\sqrt{2})^{3x}$에서 $\quad 2^{3-x}\ge 2^{\frac{3}{2}x}$
밑이 1보다 크므로 $\quad 3-x\ge\frac{3}{2}x$
$-\frac{5}{2}x\ge-3\quad\therefore x\le\frac{6}{5}$

답 $x\le\frac{6}{5}$

**0030** $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2}<\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-3}$에서 $\quad\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2}<\left(\frac{3}{4}\right)^{-2x+3}$
밑이 1보다 작으므로 $\quad x^2>-2x+3$
$x^2+2x-3>0,\quad (x+3)(x-1)>0$
$\therefore x<-3$ 또는 $x>1$

답 $x<-3$ 또는 $x>1$

**0031** $\left(\frac{1}{9}\right)^x-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3\le0$에서 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3\le0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$\boxed{t^2-4t+3}\le0$, $(t-1)(t-3)\le0$

$\therefore \boxed{1}\le t\le\boxed{3}$

즉 $1\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le3$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^0\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로 $\boxed{-1}\le x\le\boxed{0}$

∴ (가) $t^2-4t+3$ (나) 1 (다) 3 (라) $-1$ (마) 0

답 풀이 참조

**0032** $5^{2x}-30\cdot5^x+125<0$에서 $(5^x)^2-30\cdot5^x+125<0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-30t+125<0$, $(t-5)(t-25)<0$

$\therefore 5<t<25$

즉 $5<5^x<5^2$이고 밑이 1보다 크므로

$1<x<2$

답 $1<x<2$

**0033** $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-8<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-8<0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2+2t-8<0$, $(t+4)(t-2)<0$

$\therefore -4<t<2$

이때 $t>0$이므로 $0<t<2$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$이고 밑이 1보다 작으므로

$x>-1$

답 $x>-1$

### 유형 01 지수함수의 함숫값 — 본책 12쪽

지수함수 $f(x)=a^x\ (a>0,\ a\ne1)$에서 $f(p)$의 값을 구할 때에는 $f(x)$에 $x$ 대신 $p$를 대입하고 지수법칙을 이용한다.

**0034** $f(1)+f(-1)=4$에서 $a+a^{-1}=4$이므로

$(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4=4^2-4=12$

$\therefore a-a^{-1}=2\sqrt{3}\ (\because a>a^{-1})$

$\therefore f(2)-f(-2)=a^2-a^{-2}=(a+a^{-1})(a-a^{-1})$

$=4\cdot2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

답 $8\sqrt{3}$

**0035** $f(p)=q$에서 $2^p=q$

$\therefore f\left(\frac{p}{2}\right)+f\left(-\frac{p}{2}\right)=2^{\frac{p}{2}}+2^{-\frac{p}{2}}=(2^p)^{\frac{1}{2}}+(2^p)^{-\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{q}+\frac{1}{\sqrt{q}}$

답 ④

**0036** $f(0)=a^n=5$, $f(2)=a^{2m+n}=20$이므로

$5a^{2m}=20$, $a^{2m}=4$ $\therefore a^m=2\ (\because a^m>0)$

$\therefore f(1)=a^{m+n}=a^m\cdot a^n=2\cdot5=10$

답 10

**0037** $g(a)=3$에서 $f(3)=a$이므로

$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{3-3}+5=1+5=6$

또 $g(9)=b$에서 $f(b)=9$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{b-3}+5=9$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{b-3}=4$, $2^{-b+3}=2^2$

$-b+3=2$ $\therefore b=1$

$\therefore a+b=7$

답 ③

SSEN 특강

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때

$g(a)=b \Longleftrightarrow f(b)=a$

### 유형 02 지수함수의 성질 — 본책 12쪽

지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\ne1)$에 대하여

① 정의역: 실수 전체의 집합

치역: 양의 실수 전체의 집합

② $a>1$일 때, $x$의 값이 증가 ➡ $y$의 값도 증가

$0<a<1$일 때, $x$의 값이 증가 ➡ $y$의 값은 감소

③ 그래프의 점근선: 직선 $y=0$ ($x$축)

**0038** $f(2)=a^2=\frac{1}{9}$에서 $a=\frac{1}{3}\ (\because a>0)$ $\therefore f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

ㄱ. $f(-4)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=3^4=81$

ㄹ. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서 밑이 1보다 작으므로 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

**0039** $a<b$일 때 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수는 $x$의 값이 증가할 때 $y$의 값도 증가하는 함수이다. 이때

$f(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^{-x}=\left(\frac{4}{5}\right)^x$, $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=3^x$

이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ③이다.

답 ③

**0040** $y=(a^2+a+1)^x$에서 $x$의 값이 증가할 때 $y$의 값은 감소하려면

$0<a^2+a+1<1$ ··· ❶

(i) $0<a^2+a+1$에서

$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

이므로 항상 성립한다.

(ii) $a^2+a+1<1$에서 $a^2+a<0$

$a(a+1)<0$ $\therefore -1<a<0$

(i), (ii)에서 $-1<a<0$ ··· ❷

답 $-1<a<0$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $a^2+a+1$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $a$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 70% |

## 유형 03 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 본책 13쪽

지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를
① $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동
➡ $y=a^{x-m}+n$
② $x$축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-a^x$
③ $y$축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=a^{-x}$
④ 원점에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-a^{-x}$

**0041** $y=4^{2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=4^{2(x-m)}$ $\quad\therefore y=4^{-2m}\cdot4^{2x}+n$

이 식이 $y=16\cdot4^{2x}+16$과 일치하므로

$4^{-2m}=16=4^2,\ n=16$

따라서 $m=-1,\ n=16$이므로 $\quad m+n=15$ 답 15

**0042** $y=3^{-x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$이므로

$b=-2$ ··· ❶

또 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=3^a-2,\quad 3^a=3$

$\therefore a=1$ ··· ❷

$\therefore ab=-2$ ··· ❸

답 $-2$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $b$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $ab$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0043** ㄱ. $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}=a^{-(x-3)}$이므로 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=a^{2x+4}=a^{2(x+2)}$이므로 $y=a^{2x+4}$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $a^k=\sqrt{3}$ ($k$는 상수)이라 하면

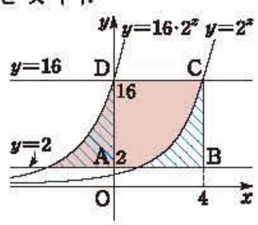
$y=\sqrt{3}\cdot a^x+1=a^{x+k}+1$

이므로 $y=\sqrt{3}\cdot a^x+1$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-k$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 $y=a^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

**0044** $y=16\cdot2^x=2^{x+4}$이므로 $y=16\cdot2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-4$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 같으므로 두 함수 $y=2^x$, $y=16\cdot2^x$의 그래프와 두 직선 $y=2$, $y=16$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.




즉 구하는 넓이는

$\overline{AD}\cdot\overline{CD}=14\cdot4=56$ 답 56

## 유형 04 지수함수의 그래프에서의 함숫값 본책 13쪽

지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 그래프가 점 $(m,\ n)$을 지난다.
➡ $n=a^m$

**0045** 그래프가 두 점 $(a,\ p)$, $(b,\ q)$를 지나므로

$p=3^a,\ q=3^b$

이때 $pq=27$이므로 $\quad 3^a\cdot3^b=27,\quad 3^{a+b}=3^3$

$\therefore a+b=3$ 답 ②

**0046** $a=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2},\ b=2^a=2^{\sqrt{2}}$이므로

$b^a=(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^2=4$ 답 ④

**0047** 점 P의 좌표를 $(a,\ 4^a)$이라 하면 $\overline{OP}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{a}{1+3},\ \frac{4^a}{1+3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{4},\ 4^{a-1}\right)$

이 점이 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프 위에 있으므로

$4^{a-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a}{4}},\quad 2^{2(a-1)}=2^{-\frac{a}{4}}$

$2(a-1)=-\frac{a}{4},\quad 8a-8=-a,\quad 9a=8$

$\therefore a=\frac{8}{9}$ 답 ④

**0048** 두 삼각형 ACB, ADC의 높이가 $\overline{AB}$로 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$\therefore \triangle ACB : \triangle ADC=\overline{BC}:\overline{CD}=2:1$

따라서 $\overline{BC}:\overline{BD}=2:3$이므로 두 점 C, D의 $x$좌표를 각각 $2b$, $3b$ $(b>0)$로 놓으면

$2^{2b}=a^{3b}=k,\quad 4^b=(a^3)^b$

$4=a^3\quad \therefore a=\sqrt[3]{4}$ 답 $\sqrt[3]{4}$

## 유형 05 지수함수를 이용한 수의 대소 비교 본책 14쪽

주어진 수의 밑을 같게 한 후 다음과 같은 지수함수의 성질을 이용한다.
① $a>1$일 때, $\quad m<n \Longleftrightarrow a^m<a^n$
② $0<a<1$일 때, $\quad m<n \Longleftrightarrow a^m>a^n$

**0049** $A=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$

$B=0.5^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$

$C=\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$

이때 $\frac{1}{3}<\frac{2}{3}<\frac{3}{2}$이고 밑이 1보다 크므로 $\quad 2^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore B<C<A$ 답 ③

**0050** $\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}=(2^3\cdot2^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{11}{12}}$

$\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{4}}=(2^{-6})^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$

$(2^{\frac{1}{3}}\cdot8^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{6}}=(2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{15}{2}})^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{47}{36}}$

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}}=(2^8)^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{2}}$ ··· ❶

이때 $\frac{1}{2}<\frac{11}{12}<\frac{47}{36}<\frac{3}{2}$이고 밑이 1보다 크므로

$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{11}{12}}<2^{\frac{47}{36}}<2^{\frac{3}{2}}$ ··· ❷

따라서 가장 큰 수는 $2^{\frac{3}{2}}$이고 가장 작은 수는 $2^{\frac{1}{2}}$이므로 구하는 곱은

$2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^2=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ 주어진 네 수의 밑을 같게 할 수 있다. | 50% |
| ❷ 주어진 네 수의 대소를 비교할 수 있다. | 30% |
| ❸ 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱을 구할 수 있다. | 20% |

**0051** $0<a<1$일 때 $y=a^x$은 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로 $0<a<1$에서

$a^1<a^a<a^0$ $\quad\therefore a<a^a<1$

마찬가지로 $0<a<1$이므로 $a<a^a<1$에서

$a^1<a^{a^a}<a^a$ $\quad\therefore a<a^{a^a}<a^a$

답 ②

## 유형 06 지수함수의 실생활에의 활용 (본책 14쪽)

지수로 표현된 관계식이 주어진 실생활 문제를 해결할 때에는 문자가 나타내는 것이 무엇인지 파악하고 문제의 조건을 주어진 관계식에 대입하여 식을 세운다.

**0052** 수면에서의 빛의 밝기가 $I_0$ cd일 때, 수심이 $x$ m인 곳에서의 빛의 밝기는 $\frac{1}{64}I_0$ cd이므로

$\frac{1}{64}I_0=I_0\cdot 4^{-0.2x}$, $\quad 4^{-0.2x}=\frac{1}{64}=4^{-3}$

$-0.2x=-3$ $\quad\therefore x=15$

따라서 수심은 15 m이다.

답 ③

**0053** 처음 $^{14}C$의 양이 1 kg, 즉 1000 g일 때 $x$년 후에 남아 있는 $^{14}C$의 양은 62.5 g이므로

$1000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=62.5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=\frac{62.5}{1000}=\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\frac{x}{5730}=4$ $\quad\therefore x=22920$

따라서 22920년 전의 유물이다.

답 22920

## 유형 07 지수함수의 최대·최소; $y=a^{px+q}+r$ 꼴 (본책 14쪽)

정의역이 $\{x|m\le x\le n\}$인 지수함수 $f(x)=a^{px+q}+r\,(p>0)$에 대하여

① $a>1$일 때 ➡ 최댓값: $f(n)$, 최솟값: $f(m)$

② $0<a<1$일 때 ➡ 최댓값: $f(m)$, 최솟값: $f(n)$

**0054** $y=2^{x+1}+k$에서 $x=1$일 때 최대이고 최댓값은

$2^{1+1}+k=k+4$

즉 $k+4=1$이므로 $\quad k=-3$

답 ①

**0055** $y=5^{-x}\cdot 3^x=\left(\frac{3}{5}\right)^x$이므로

$x=-3$일 때 최대이고 최댓값은

$M=\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}=\frac{125}{27}$

$x=1$일 때 최소이고 최솟값은

$m=\frac{3}{5}$

$\therefore Mm=\frac{25}{9}$

답 $\frac{25}{9}$

**0056** (i) $a>1$일 때,

최댓값은 $f(3)$, 최솟값은 $f(0)$이므로

$f(3)=8f(0)$, $\quad a^4=8a$

$a^3=8$ $\quad\therefore a=2$ ··· ❶

(ii) $0<a<1$일 때,

최댓값은 $f(0)$, 최솟값은 $f(3)$이므로

$f(0)=8f(3)$, $\quad a=8a^4$

$a^3=\frac{1}{8}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$ ··· ❷

(i), (ii)에서 모든 양수 $a$의 값의 합은

$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $a>1$일 때 $a$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $0<a<1$일 때 $a$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ 모든 양수 $a$의 값의 합을 구할 수 있다. | 20% |

**0057** $f(x)=|x-1|+2$로 놓으면 $-1\le x\le 2$에서

$-2\le x-1\le 1$, $\quad 0\le|x-1|\le 2$

$\therefore 2\le|x-1|+2\le 4$, 즉 $2\le f(x)\le 4$

(i) $a>1$일 때,

$y=a^{f(x)}$은 $f(x)=4$일 때 최댓값을 가지므로

$a^4=\frac{1}{4}$, $\quad a^2=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\because a>0)$

그런데 이것은 $a>1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<1$일 때,

$y=a^{f(x)}$은 $f(x)=2$일 때 최댓값을 가지므로

$a^2=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$이고, $f(x)=4$일 때 최소이므로 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^4=2^{-4}$

답 ②

## 유형 08 지수함수의 최대·최소; $y=a^{px^2+qx+r}$ 꼴 (본책 15쪽)

$f(x)=px^2+qx+r$로 놓고 주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한 후 $a$의 값의 범위에 따라 다음을 이용한다.
① $a>1$일 때
➡ $f(x)$가 최대일 때 $y$도 최대, $f(x)$가 최소일 때 $y$도 최소
② $0<a<1$일 때
➡ $f(x)$가 최대일 때 $y$는 최소, $f(x)$가 최소일 때 $y$는 최대

**0058** $f(x)=x^2-4x+1$로 놓으면
$f(x)=(x-2)^2-3$
$f(-1)=6$, $f(2)=-3$, $f(3)=-2$이므로 $-1\le x\le 3$에서
$-3\le f(x)\le 6$
$y=2^{x^2-4x+1}=2^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=2^{f(x)}$은 $f(x)=6$, 즉 $x=-1$일 때 최댓값 $2^6=64$를 갖는다.
따라서 $a=-1$, $b=64$이므로 $a+b=63$

답 ④

**0059** $f(x)=-x^2+4x-2$로 놓으면
$f(x)=-(x-2)^2+2$ $\therefore f(x)\le 2$
$y=a^{-x^2+4x-2}=a^{f(x)}$에서 $0<a<1$이므로 함수 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=2$일 때 최솟값 $\frac{1}{4}$을 갖는다.
즉 $a^2=\frac{1}{4}$이므로 $a=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

답 ④

**0060** $f(x)=x^2-8x+15$로 놓으면
$f(x)=(x-4)^2-1$
$f(2)=3$, $f(4)=-1$, $f(5)=0$이므로 $2\le x\le 5$에서
$-1\le f(x)\le 3$ ➡ ❶
$y=3^{x^2-8x+15}=3^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=3^{f(x)}$은
$f(x)=3$일 때 최대이고 최댓값은 $3^3=27$
$f(x)=-1$일 때 최소이고 최솟값은 $3^{-1}=\frac{1}{3}$ ➡ ❷
따라서 구하는 곱은 $27\cdot\frac{1}{3}=9$ ➡ ❸

답 9

채점 기준표

| | | |
|---|---|---|
| ❶ | $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ | $y=3^{f(x)}$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ | 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다. | 10% |

**0061** $f(x)=x^2-4x+b$로 놓으면
$f(x)=(x-2)^2+b-4$
$f(2)=b-4$, $f(3)=b-3$이므로 $2\le x\le 3$에서
$b-4\le f(x)\le b-3$
$y=a^{x^2-4x+b}=a^{f(x)}$에서 $0<a<1$이므로 함수 $y=a^{f(x)}$은
$f(x)=b-4$일 때 최댓값 81을 가지므로
$a^{b-4}=81$ ...... ㉠
$f(x)=b-3$일 때 최솟값 9를 가지므로
$a^{b-3}=9$ ...... ㉡
㉡÷㉠을 하면 $a^{b-3-(b-4)}=\frac{9}{81}$ $\therefore a=\frac{1}{9}$
$a=\frac{1}{9}$을 ㉡에 대입하면 $\left(\frac{1}{9}\right)^{b-3}=9$
$9^{-b+3}=9$, $-b+3=1$ $\therefore b=2$
$\therefore ab=\frac{2}{9}$

답 $\frac{2}{9}$

## 유형 09 지수함수의 최대·최소; $a^x$ 꼴이 반복되는 경우 (본책 16쪽)

함수 $y=pa^{2x}+qa^x+r$의 최대·최소는 $a^x=t\,(t>0)$로 치환하여 나타낸 $t$에 대한 이차함수 $y=pt^2+qt+r$의 최대·최소를 이용하여 구한다.

**0062** $y=4^x-2^{x+1}+3=(2^x)^2-2\cdot 2^x+3$
$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $-1\le x\le 2$에서 $\frac{1}{2}\le t\le 4$
이때 주어진 함수는
$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$
이므로 $t=4$, 즉 $x=2$일 때 최대이고 최댓값은 11
$t=1$, 즉 $x=0$일 때 최소이고 최솟값은 2
따라서 $a=2$, $b=11$, $c=0$, $d=2$이므로
$a+b+c-d=11$

답 ①

**0063** $y=1+2^{x-a}-4^x=1+2^{-a}\cdot 2^x-(2^x)^2$
$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 함수는
$y=-t^2+2^{-a}\cdot t+1=-(t-2^{-a-1})^2+2^{-2a-2}+1$
따라서 $t=2^{-a-1}$일 때 최댓값 $2^{-2a-2}+1$을 가지므로
$2^{-2a-2}+1=\frac{129}{128}$, $2^{-2a-2}=\frac{1}{128}=2^{-7}$
$-2a-2=-7$ $\therefore a=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

**0064** $y=3^{-2x}-2\cdot 3^{-x}-1=(3^{-x})^2-2\cdot 3^{-x}-1$
$3^{-x}=t\,(t>0)$로 놓으면 $-2\le x\le 3$에서 $\frac{1}{27}\le t\le 9$
이때 주어진 함수는
$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$
이므로 $t=9$일 때 최대이고 최댓값은 $M=62$
$t=1$일 때 최소이고 최솟값은 $m=-2$
$\therefore M+m=60$

답 60

## 유형 10 지수함수의 최대·최소 ; 산술평균과 기하평균의 관계 이용 (본책 16쪽)

함수 $y=a^x+a^{-x}\ (a>0,\ a\ne 1)$의 최대·최소
➡ 모든 실수 $x$에 대하여 $a^x>0$, $a^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a^x+a^{-x}\ge 2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}=2$ (등호는 $x=0$일 때 성립)
임을 이용한다.

**0065** $3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$t=3^x+3^{-x}\ge 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$$y=6t-(t^2-2)=-t^2+6t+2$$
$$=-(t-3)^2+11\ (t\ge2)$$

따라서 주어진 함수는 $t=3$일 때 최댓값 11을 갖는다. 답 ④

**0066** $4^x>0$, $4^{-x+4}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f(x)=4^x+4^{-x+4}\ge2\sqrt{4^x\cdot4^{-x+4}}$$
$$=2\sqrt{4^4}=2\cdot4^2=32$$

이때 등호는 $4^x=4^{-x+4}$일 때 성립하므로

$x=-x+4$ $\quad\therefore x=2$

따라서 $a=2$, $b=32$이므로 $\quad a+b=34$ 답 ②

**0067** $5^x+5^{-x}=t$로 놓으면 $5^x>0$, $5^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=5^x+5^{-x}\ge2\sqrt{5^x\cdot5^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립) ➊

이때 $25^x+25^{-x}=(5^x+5^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$$y=(t^2-2)+2t-3=t^2+2t-5$$
$$=(t+1)^2-6\ (t\ge2)$$ ➋

따라서 $t=2$일 때, 즉 $x=0$일 때 최솟값 3을 가지므로

$a=0$, $b=3$ $\quad\therefore a-b=-3$ ➌

답 $-3$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $t$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 30% |
| ➋ 주어진 함수를 $t$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ➌ $a-b$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**0068** $x+2y-4=0$에서 $x=4-2y$이므로

$$7^x+49^y=7^{4-2y}+7^{2y}$$

$7^{4-2y}>0$, $7^{2y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$7^{4-2y}+7^{2y}\ge2\sqrt{7^{4-2y}\cdot7^{2y}}$$
$$=2\sqrt{7^4}=2\cdot7^2=98$$

이때 등호는 $7^{4-2y}=7^{2y}$일 때 성립하므로

$4-2y=2y$ $\quad\therefore y=1$

$y=1$을 $x=4-2y$에 대입하면 $\quad x=2$

따라서 $7^x+49^y$은 $x=2$, $y=1$일 때 최솟값 98을 가지므로

$\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=98$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=101$ 답 ②

## 유형 11 지수방정식; 밑을 같게 할 수 있는 경우

본책 14쪽

방정식의 각 항의 밑을 같게 한 다음

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)\ (a>0,\ a\ne1)$

임을 이용한다.

**0069** $8^x-2^{x^2-4}=0$에서 $2^{3x}=2^{x^2-4}$이므로

$3x=x^2-4$, $\quad x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 실근의 합은

$-1+4=3$ 답 ③

**0070** $(2^x-8)(3^{2x}-9)=0$에서

$2^x=8$ 또는 $3^{2x}=9$

$2^x=8$에서 $\quad 2^x=2^3$ $\quad\therefore x=3$

$3^{2x}=9$에서 $\quad 9^x=9$ $\quad\therefore x=1$

따라서 주어진 방정식의 두 실근이 1, 3이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$ 답 10

**0071** $(3\sqrt3)^{x^2}=9^{x+1}$에서 $3^{\frac32x^2}=3^{2x+2}$이므로

$\frac32x^2=2x+2$, $\quad 3x^2-4x-4=0$

$(3x+2)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-\frac23$ 또는 $x=2$

그런데 $x$는 정수이므로 $\quad x=2$ 답 ⑤

**0072** $\dfrac{9^{x^2+1}}{3^{x+4}}=81$에서 $\dfrac{(3^2)^{x^2+1}}{3^{x+4}}=3^4$이므로

$3^{2x^2+2}=3^{x+8}$ ➊

따라서 $2x^2+2=x+8$이므로 $\quad 2x^2-x-6=0$

$(2x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac32$ 또는 $x=2$ ➋

따라서 모든 실근의 곱은 $\quad\left(-\frac32\right)\cdot2=-3$ ➌

답 $-3$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ 주어진 방정식을 $3^{f(x)}=3^{g(x)}$ 꼴로 변형할 수 있다. | 40% |
| ➋ $x$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ➌ 모든 실근의 곱을 구할 수 있다. | 10% |

## 유형 12 지수방정식; $a^x$ 꼴이 반복되는 경우

본책 17쪽

지수방정식 $pa^{2x}+qa^x+r=0$의 해는 $a^x=t\,(t>0)$로 치환하여 나타낸 $t$에 대한 이차방정식 $pt^2+qt+r=0$의 해를 이용하여 구한다.

**0073** $4^x+4^{2-x}=10$의 양변에 $4^x$을 곱하면

$(4^x)^2+4^2=10\cdot4^x$ $\quad\therefore (4^x)^2-10\cdot4^x+16=0$

$4^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-10t+16=0$, $\quad (t-2)(t-8)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=8$

즉 $4^x=2$ 또는 $4^x=8$이므로 $\quad 2^{2x}=2$ 또는 $2^{2x}=2^3$

$2x=1$ 또는 $2x=3$ $\quad\therefore x=\frac12$ 또는 $x=\frac32$

따라서 $\alpha=\frac12$, $\beta=\frac32$이므로 $\quad\beta-\alpha=1$ 답 ①

**0074** $2^x+2^{-x}=t\ (t\ge2)$로 놓으면

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 방정식은

$(t^2-2)+t-4=0$, $\quad t^2+t-6=0$

$(t+3)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=2\ (\because t\ge2)$

따라서 $2^x+2^{-x}=2$이므로 $\quad x=0$ 답 $x=0$

**0075** $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=3^{2x+1}$,
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3^x)=2\cdot 3^x+1$
$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$에서
$3^{2x+1}=2\cdot 3^x+1$ $\quad\therefore 3\cdot(3^x)^2-2\cdot 3^x-1=0$ ⋯➊
$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$3t^2-2t-1=0$, $\quad(3t+1)(t-1)=0$
$\therefore t=1\ (\because t>0)$ ⋯➋
즉 $3^x=1$이므로 $\quad x=0$ ⋯➌

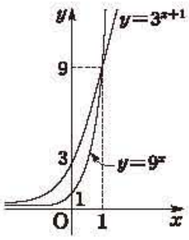
답 $x=0$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ➊ $x$에 대한 지수방정식을 세울 수 있다. | 40% |
| ➋ $t$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ➌ 방정식의 해를 구할 수 있다. | 20% |

**0076** $81^x-9^{x+2}+64=0$에서 $\quad(9^x)^2-81\cdot 9^x+64=0$
$9^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은
$t^2-81t+64=0$
이 방정식의 근은 $9^\alpha$, $9^\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$9^\alpha\cdot 9^\beta=64$, $\quad 3^{2(\alpha+\beta)}=8^2$
$\therefore 3^{\alpha+\beta}=8\ (\because 3^{\alpha+\beta}>0)$

답 ③

**0077** $9^x=3^{x+1}$에서 $\quad 3^{2x}=3^{x+1}$
$2x=x+1$ $\quad\therefore x=1$
따라서 두 함수 $y=9^x$, $y=3^{x+1}$의 그래프의 교점의 $x$좌표는 1이므로 주어진 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




A$(k,\ 9^k)$, B$(k,\ 3^{k+1})$이므로
(i) $k>1$인 경우
$\overline{AB}=9^k-3^{k+1}=54$이므로 $3^k=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-3t-54=0$, $\quad(t+6)(t-9)=0$
$\therefore t=9\ (\because t>0)$
즉 $3^k=9$이므로 $\quad k=2$
(ii) $k<1$인 경우
$\overline{AB}=3^{k+1}-9^k=54$이므로 $3^k=t\ (t>0)$로 놓으면
$3t-t^2=54$, $\quad t^2-3t+54=0$ ⋯⋯ ㉠
이때 $t$에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면
$D=(-3)^2-4\cdot 54=-207<0$
이므로 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않는다.
따라서 $\overline{AB}=54$를 만족시키는 상수 $k$가 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 $\quad k=2$

답 2

### 유형 13 지수방정식; 밑에 미지수가 있는 경우 본책 17쪽

① $\{h(x)\}^{f(x)}=\{g(x)\}^{f(x)}$ 꼴의 방정식
➡ $h(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=0$의 해를 구한다.
(단, $h(x)>0$, $g(x)>0$)
② $\{h(x)\}^{f(x)}=\{h(x)\}^{g(x)}$ 꼴의 방정식
➡ $h(x)=1$ 또는 $f(x)=g(x)$의 해를 구한다. (단, $h(x)>0$)

**0078** $x^x\cdot x^8=(x^x)^2$에서 $\quad x^{x+8}=x^{2x}$
(i) $x=1$일 때, 주어진 방정식은 $1^9=1^2$이므로 성립한다.
(ii) $x\neq 1$일 때, $x+8=2x$에서 $\quad x=8$
(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $\quad 1+8=9$

답 ④

**0079** (i) $x-5=0$, 즉 $x=5$일 때, 주어진 방정식은 $3^0=6^0=1$이므로 성립한다.
(ii) $x-5\neq 0$일 때, $x-2=6$이므로 $\quad x=8$
(i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $\quad 5\cdot 8=40$

답 40

**0080** $x^{x^2-8}=x^{2x+7}$에서
(i) $x=1$일 때, 주어진 방정식은 $1^{-7}=1^9$이므로 성립한다.
(i) $x\neq 1$일 때, $x^2-8=2x+7$에서 $\quad x^2-2x-15=0$
$(x+3)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=5\left(\because x>\frac{1}{2}\right)$
(i), (ii)에서 $\quad a=1+5=6$ ⋯➊
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{3-2x}=3^{3-2x}$에서
(iii) $3-2x=0$, 즉 $x=\frac{3}{2}$일 때, 주어진 방정식은 $1^0=3^0=1$이므로 성립한다.
(iv) $3-2x\neq 0$일 때, $x-\frac{1}{2}=3$이므로 $\quad x=\frac{7}{2}$
(iii), (iv)에서 $\quad b=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5$ ⋯➋
$\therefore ab=30$ ⋯➌

답 30

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ➊ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ➋ $b$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ➌ $ab$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

### 유형 14 지수방정식; 연립방정식 본책 18쪽

(i) $a^x=X$, $b^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 치환하여 $X$, $Y$에 대한 연립방정식을 푼다.
(ii) $a^x=X$, $b^y=Y$에서 $x$, $y$의 값을 구한다.

**0081** $\begin{cases}2^{x-1}+3^{y+1}=11\\2^{x+2}-3^{y-1}=15\end{cases}$에서 $\quad\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot 2^x+3\cdot 3^y=11\\4\cdot 2^x-\frac{1}{3}\cdot 3^y=15\end{cases}$
$2^x=X$, $3^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면
$\begin{cases}\frac{1}{2}X+3Y=11\\4X-\frac{1}{3}Y=15\end{cases}$
이 연립방정식을 풀면 $\quad X=4,\ Y=3$
즉 $2^x=4$, $3^y=3$이므로 $\quad x=2,\ y=1$
따라서 $\alpha=2$, $\beta=1$이므로 $\quad\alpha\beta=2$

답 ⑤

**0082** $\begin{cases}2^{x+1}+2^{y+1}=24\\2^{x+y-2}=8\end{cases}$에서 $\quad\begin{cases}2\cdot 2^x+2\cdot 2^y=24\\\frac{1}{4}\cdot 2^x\cdot 2^y=8\end{cases}$

$2^x=X$, $2^y=Y\,(X>0, Y>0)$로 놓으면

$$\begin{cases} 2X+2Y=24 \\ \frac{1}{4}XY=8 \end{cases},\ \text{즉} \begin{cases} X+Y=12 \\ XY=32 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ❶$$

이 연립방정식을 풀면

$X=4,\ Y=8$ 또는 $X=8,\ Y=4$ ⋯ ❷

즉 $2^x=4,\ 2^y=8$ 또는 $2^x=8,\ 2^y=4$이므로

$x=2,\ y=3$ 또는 $x=3,\ y=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=2^2+3^2=13$ ⋯ ❸

답 13

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 주어진 방정식을 $X$, $Y$에 대한 방정식으로 정리할 수 있다. | 40% |
| ❷ $X$, $Y$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

### 유형 15 지수방정식의 근의 조건 본책 18쪽

방정식 $pa^{2x}+qa^x+r=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이면 $a^x=t\,(t>0)$로 치환하여 나타낸 $t$에 대한 이차방정식 $pt^2+qt+r=0$의 두 근이 $a^\alpha$, $a^\beta$임을 이용한다.

**0083** $3^{2x}-3^{x+1}=a$에서 $\quad (3^x)^2-3\cdot3^x-a=0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-3t-a=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 할 때,

$D=(-3)^2-4\cdot(-a)>0$

$9+4a>0 \quad \therefore a>-\frac{9}{4}$

(ii) 이차방정식 ㉠의 $\quad$(두 근의 합)$=3>0$

(iii) 이차방정식 ㉠의 $\quad$(두 근의 곱)$=-a>0 \quad \therefore a<0$

이상에서 $-\frac{9}{4}<a<0$이므로 $\quad m=-\frac{9}{4},\ n=0$

$\therefore m+n=-\frac{9}{4}$

답 $-\frac{9}{4}$

**SSEN 특강**

**이차방정식의 실근의 부호**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D$라 할 때

① 두 근이 모두 양수 $\Longleftrightarrow D\ge0,\ -\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{a}>0$

② 두 근이 모두 음수 $\Longleftrightarrow D\ge0,\ -\frac{b}{a}<0,\ \frac{c}{a}>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\Longleftrightarrow \frac{c}{a}<0$

**0084** $4^{2x}+a\cdot4^{x+1}+44-4a=0$에서

$(4^x)^2+4a\cdot4^x+44-4a=0$

$4^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+4at+44-4a=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 $m$, $2m\,(m\ne0)$이라 하면 방정식 ㉠의 두 근은 $4^m$, $4^{2m}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4^m+4^{2m}=-4a,\ 4^m\cdot4^{2m}=44-4a$

$4^m=k\,(k>0)$로 놓으면

$k+k^2=-4a,\ k^3=44-4a$

따라서 $k^3=44+k+k^2$이므로 $\quad k^3-k^2-k-44=0$

$(k-4)(k^2+3k+11)=0 \quad \therefore k=4\ (\because k^2+3k+11>0)$

따라서 $k+k^2=-4a$에서 $\quad -4a=4+4^2=20$

$\therefore a=-5$

답 ①

**0085** $4^x+4^{-x}-2^{1+x}-2^{1-x}+k=0$에서

$4^x+4^{-x}-2(2^x+2^{-x})+k=0$

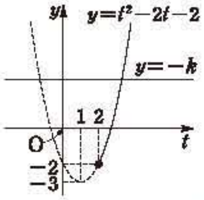
$2^x+2^{-x}=t\ (t\ge2)$로 놓으면

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 방정식은 $\quad (t^2-2)-2t+k=0$

$\therefore t^2-2t-2=-k$

위의 방정식의 실근은 함수 $y=t^2-2t-2=(t-1)^2-3\ (t\ge2)$의 그래프와 직선 $y=-k$의 교점의 $t$좌표와 같으므로 주어진 방정식이 적어도 하나의 실근을 가지려면 오른쪽 그림에서




$-k\ge-2$

$\therefore k\le2$

답 $k\le2$

### 유형 16 지수부등식; 밑을 같게 할 수 있는 경우 본책 19쪽

부등식의 각 항의 밑을 같게 한 후 다음을 이용한다.

① $a>1$일 때, $\quad a^{f(x)}>a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)>g(x)$

② $0<a<1$일 때, $\quad a^{f(x)}>a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)<g(x)$

**0086** $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x+1}<\left(\frac{1}{36}\right)^{3-2x}$에서 $\quad \left(\frac{1}{6}\right)^{2x+1}<\left(\frac{1}{6}\right)^{6-4x}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad 2x+1>6-4x$

$6x>5 \quad \therefore x>\frac{5}{6}$

답 ②

**0087** $3^{2x+1}>(\sqrt{27})^x$에서 $\quad 3^{2x+1}>3^{\frac{3}{2}x}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 2x+1>\frac{3}{2}x$

$\frac{1}{2}x>-1 \quad \therefore x>-2$ ⋯⋯ ㉠

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2+1}\ge\left(\frac{4}{3}\right)^{3x-5}$에서 $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2+1}\ge\left(\frac{3}{4}\right)^{-3x+5}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x^2+1\le-3x+5$

$x^2+3x-4\le0, \quad (x+4)(x-1)\le0$

$\therefore -4\le x\le1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $\quad -2<x\le1$

답 $-2<x\le1$

**0088** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}\le2^{x^2-1}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x+5\ge -x^2+1\ge 2x-2$

(i) $x+5\ge -x^2+1$에서 $\quad x^2+x+4\ge 0$

이때 $x^2+x+4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$이므로 이 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $-x^2+1\ge 2x-2$에서 $\quad x^2+2x-3\le 0$

$(x+3)(x-1)\le 0 \quad \therefore -3\le x\le 1$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $\quad -3\le x\le 1$ 답 $-3\le x\le 1$

**0089** $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2}>3^{ax}$에서 $\quad 3^{-2x^2}>3^{ax}$

밑이 1보다 크므로 $\quad -2x^2>ax$

$2x^2+ax<0, \quad x(2x+a)<0$

$\therefore -\frac{a}{2}<x<0$ ($\because a$는 자연수)

주어진 부등식을 만족시키는 정수 $x$의 개수가 4이므로

$-5\le -\frac{a}{2}<-4 \quad \therefore 8<a\le 10$

따라서 자연수 $a$는 9, 10이므로 구하는 합은

$9+10=19$ 답 ②

**0090** $10^{(x-2)^2}\le\sqrt{10^{5-x}}$에서 $\quad 10^{(x-2)^2}\le 10^{\frac{1}{2}(5-x)}$

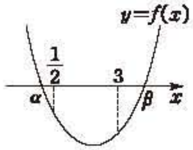
밑이 1보다 크므로 $\quad (x-2)^2\le\frac{1}{2}(5-x)$

$2(x^2-4x+4)\le 5-x, \quad 2x^2-7x+3\le 0$

$(2x-1)(x-3)\le 0 \quad \therefore \frac{1}{2}\le x\le 3$

$\therefore A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\le x\le 3\right\}$ ⇢ ❶

집합 $B$에서 $f(x)=x^2+ax+6$으로 놓고 이 차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다. ⇢ ❷




$f\left(\frac{1}{2}\right)\le 0$에서 $\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{2}a+6\le 0$

$\frac{1}{2}a\le -\frac{25}{4} \quad \therefore a\le -\frac{25}{2}$ …… ㉠

$f(3)\le 0$에서 $\quad 9+3a+6\le 0$

$3a\le -15 \quad \therefore a\le -5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A\subset B$를 만족시키는 $a$의 값의 범위는

$a\le -\frac{25}{2}$ ⇢ ❸

답 $a\le -\frac{25}{2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ 집합 $A$를 만족시키는 $x$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $A\subset B$를 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. | 30% |
| ❸ $a$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40% |

### 유형 17 지수부등식; $a^x$ 꼴이 반복되는 경우 본책 19쪽

지수부등식 $pa^{2x}+qa^x+r>0$의 해는 $a^x=t\ (t>0)$로 치환하여 나타낸 $t$에 대한 이차부등식 $pt^2+qt+r>0$의 해를 이용하여 구한다.

**0091** $3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9<0$에서

$3\cdot(3^x)^2-28\cdot 3^x+9<0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $\quad 3t^2-28t+9<0$

$(3t-1)(t-9)<0 \quad \therefore \frac{1}{3}<t<9$

즉 $3^{-1}<3^x<3^2$이고 밑이 1보다 크므로

$-1<x<2$

따라서 정수 $x$는 0, 1이므로 구하는 합은

$0+1=1$ 답 ③

**0092** $\left(\frac{1}{49}\right)^x-56\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x+343\le 0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^x\right\}^2-56\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x+343\le 0$

$\left(\frac{1}{7}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-56t+343\le 0$

$(t-7)(t-49)\le 0 \quad \therefore 7\le t\le 49$

즉 $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^x\le\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$이고 밑이 1보다 작으므로

$-2\le x\le -1$

따라서 $M=-1$, $m=-2$이므로

$M-m=1$ 답 1

### 유형 18 지수부등식; 밑에 미지수가 있는 경우 본책 19쪽

$x^{f(x)}>x^{g(x)}\,(x>0)$ 꼴의 부등식은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) $x=1$일 때, 주어진 부등식이 성립하지 않음을 보인다.

(ii) $0<x<1$일 때, $f(x)<g(x)$를 만족시키는 $x$의 값의 범위를 구한다.

(iii) $x>1$일 때, $f(x)>g(x)$를 만족시키는 $x$의 값의 범위를 구한다.

(iv) (ii), (iii)에서 구한 해의 합집합이 주어진 부등식의 해이다.

**0093** $x^{3x-2}>x^{x+4}$에서 $x=1$일 때 $1^1=1^5$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(i) $0<x<1$일 때, $3x-2<x+4$이므로 $\quad x<3$

그런데 $0<x<1$이므로 $\quad 0<x<1$

(ii) $x>1$일 때, $3x-2>x+4$이므로 $\quad x>3$

그런데 $x>1$이므로 $\quad x>3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<1$ 또는 $x>3$ 답 $0<x<1$ 또는 $x>3$

**0094** $x^{x^2-8}<x^{2x}$에서 $x=1$일 때 $1^{-7}=1^2$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(i) $0<x<1$일 때, $x^2-8>2x$이므로 $\quad x^2-2x-8>0$

$(x+2)(x-4)>0 \quad \therefore x<-2$ 또는 $x>4$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식을 만족시키는 $x$가 존재하지 않는다.

(ii) $x>1$일 때, $x^2-8<2x$이므로 $\quad x^2-2x-8<0$

$(x+2)(x-4)<0 \quad \therefore -2<x<4$

그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x<4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<4$이므로

$\alpha+\beta=1+4=5$ 답 ⑤

**0095** (i) $x^2-2x+1=1$이면 $1=1$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.

따라서 $x^2-2x+1\neq1$에서 $x^2-2x\neq0$, $x(x-2)\neq0$

$\therefore x\neq0,\ x\neq2$

(ii) $0<x^2-2x+1<1$일 때,

$0<(x-1)^2<1$에서 $-1<x-1<0$ 또는 $0<x-1<1$

$\therefore 0<x<1$ 또는 $1<x<2$ …… ㉠

$(x^2-2x+1)^{x-1}<(x^2-2x+1)^0$에서 밑이 1보다 작으므로

$x-1>0$ $\therefore x>1$

그런데 ㉠이므로 $1<x<2$

(iii) $x^2-2x+1>1$일 때,

$x(x-2)>0$에서 $x<0$ 또는 $x>2$ …… ㉡

$(x^2-2x+1)^{x-1}<(x^2-2x+1)^0$에서 밑이 1보다 크므로

$x-1<0$ $\therefore x<1$

그런데 ㉡이므로 $x<0$

이상에서 $S=\{x|x<0$ 또는 $1<x<2\}$이므로 집합 $S$의 원소가 아닌 것은 ④이다.

답 ④

## 유형 19 지수부등식이 항상 성립할 조건 (본책 20쪽)

모든 실수 $x$에 대하여 지수부등식 $pa^{2x}+qa^x+r>0$이 성립하면 $a^x=t\ (t>0)$로 치환하여 나타낸 $t$에 대한 부등식 $pt^2+qt+r>0$이 $t>0$에서 항상 성립한다.

**0096** $4^x-2^{x+2}+k\geq0$에서 $(2^x)^2-4\cdot2^x+k\geq0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-4t+k\geq0$

$\therefore (t-2)^2+k-4\geq0$

위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 $t$에 대하여 성립하려면

$k-4\geq0$ $\therefore k\geq4$

따라서 $k$의 최솟값은 4이다.

답 4

**0097** $9^x-2a\cdot3^x+9\geq0$에서 $(3^x)^2-2a\cdot3^x+9\geq0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-2at+9\geq0$

$\therefore (t-a)^2-a^2+9\geq0$ …… ㉠

부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 $t$에 대하여 성립하려면

(i) $a>0$일 때,

$-a^2+9\geq0$에서 $a^2-9\leq0$

$(a+3)(a-3)\leq0$ $\therefore -3\leq a\leq3$

그런데 $a>0$이므로 $0<a\leq3$

(ii) $a\leq0$일 때,

$t=0$이면 ㉠에서 $9\geq0$이므로 $t>0$인 모든 실수 $t$에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $a\leq3$이므로 $a$의 최댓값은 3이다.

답 ④

## 유형 20 지수방정식과 지수부등식의 실생활에의 활용 (본책 20쪽)

처음의 양을 $p$, 일정한 비율 $a$로 $x$시간 후 변화된 양을 $y$라 하면

➡ $y=pa^x$

**0098** 50마리의 박테리아가 4시간 후에 4050마리가 되므로

$50a^4=4050$, $a^4=81=3^4$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 한 마리의 박테리아가 $x$시간 후에 $3^x$마리가 되므로

$50\cdot3^x=36450$, $3^x=729=3^6$

$\therefore x=6$

즉 6시간 후에 36450마리가 된다.

답 6

**0099** 구매 후 $x$년이 지났을 때의 자동차의 중고 가격이 686만 원 이하가 되려면

$2000\times0.7^x\leq686$

$\therefore 0.7^x\leq\frac{686}{2000}=\frac{343}{1000}=0.7^3$

이때 밑이 1보다 작으므로 $x\geq3$

따라서 자동차의 중고 가격이 처음으로 686만 원 이하가 되는 것은 구매 후 3년이 지난 후이다.

답 3

**0100** 18년 후에 방사성 물질의 양이 처음의 $\frac{1}{2}$이 되므로 $18n$년 후에 방사성 물질의 양은 처음의 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$이 된다.

이때 $3.125\%=\frac{3125}{10^5}=\frac{5^5}{2^5\times5^5}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^5$ $\therefore n=5$

따라서 방사성 물질의 양이 처음의 3.125%로 줄어드는 데 걸리는 시간은 $18\cdot5=90$(년)

답 90

**0101** 두 비커 A, B에 들어 있는 소금물의 처음 농도를 $a\%$라 하자. 갑이 작업을 1회 시행했을 때 소금의 양은 $\frac{1}{8}$로 줄고 소금물의 양은 변하지 않으므로 소금물의 농도는 $\frac{1}{8}a\%$가 된다.

따라서 갑이 작업을 12회 시행한 후 비커 A의 소금물의 농도는

$\left(\frac{1}{8}\right)^{12}a(\%)$ ➡ ①

한편 을이 작업을 1회 시행했을 때 소금의 양은 $\frac{1}{4}$로 줄고 소금물의 양은 변하지 않으므로 소금물의 농도는 $\frac{1}{4}a\%$가 된다.

따라서 을이 작업을 $n$회 시행한 후 비커 B의 소금물의 농도는

$\left(\frac{1}{4}\right)^n a(\%)$ ➡ ②

두 소금물의 농도가 같으므로 $\left(\frac{1}{8}\right)^{12}a=\left(\frac{1}{4}\right)^n a$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{36}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$, $36=2n$ $\therefore n=18$ ➡ ③

답 18

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ① 비커 A의 소금물의 농도를 구할 수 있다. | 30% |
| ② 비커 B의 소금물의 농도를 구할 수 있다. | 30% |
| ③ $n$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**0102** 전략 1을 기준으로 $a$, $b$의 값의 범위를 나누어 생각한다.

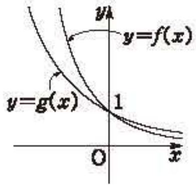
풀이 ㄱ. $g(-1)<1$에서 $\quad b^{-1}<b^0 \quad \therefore b>1$

$f(-1)>1$에서 $\quad a^{-1}>a^0 \quad \therefore 0<a<1$

$\therefore a<1<b$

ㄴ. $a<b<1$일 때, $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x>0$에서 $\quad f(x)<g(x)$

$\therefore f(a)<g(a)$




ㄷ. $ab=1$이면 $a=\frac{1}{b}$이므로 $\quad a<1<b$

$f(a)=a^a$, $g(-b)=b^{-b}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{a}}=a^{\frac{1}{a}}$이고 $0<a<1$에서

$a<\frac{1}{a}$이므로

$a^a>a^{\frac{1}{a}} \quad \therefore f(a)>g(-b)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

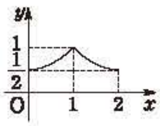
답 ⑤

**0103** 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

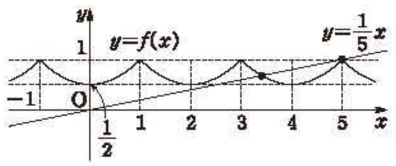
풀이 조건 (나)에서

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x-1} & (0\le x<1) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} & (1\le x<2) \end{cases}$$

따라서 $0\le x<2$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




이때 조건 (가)에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.




위의 그림에서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{5}x$는 두 점에서 만나므로 구하는 교점의 개수는 2이다.

답 2

**0104** 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(f(x))=x$이면 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수임을 이용한다.

풀이 두 점 $A(p, 2)$, $B(q, 3)$이 함수 $f(x)=a^x$의 그래프 위의 점이므로 $\quad a^p=2$, $a^q=3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(5k)=72$라 하면 $\quad g(f(5k))=g(72)=k$

$f(5k)=72$에서 $72=2^3\cdot3^2$이므로 $\quad a^{5k}=2^3\cdot3^2$

㉠에서 $2^3=a^{3p}$, $3^2=a^{2q}$이므로

$a^{5k}=a^{3p}\cdot a^{2q}=a^{3p+2q}$

즉 $5k=3p+2q$이므로 $\quad k=\frac{3p+2q}{5}$

따라서 $g(72)=\frac{3p+2q}{5}$이므로 $g(72)$의 값은 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점의 $x$좌표와 같다.

답 ④

**0105** 전략 $\overline{A_kB_{k+1}}$, $\overline{A_{k+1}B_{k+1}}$의 길이를 $k$에 대한 식으로 나타내어 $S(k)$를 구한다.

풀이 $A_k(k, 2^k)$, $B_{k+1}(k+1, 2^k)$, $A_{k+1}(k+1, 2^{k+1})$에서

$\overline{A_kB_{k+1}}=(k+1)-k=1$, $\overline{A_{k+1}B_{k+1}}=2^{k+1}-2^k=2^k$

$\therefore S(k)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2^k=2^{k-1}$

$\therefore S(1)S(2)S(3)\cdots S(10)=2^0\cdot2^1\cdot2^2\cdot\cdots\cdot2^9$
$=2^{1+2+\cdots+9}=2^{45}$

따라서 $f(a)=2^{45}$이므로 $\quad a=45$

답 45

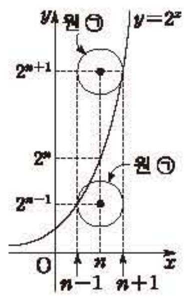
**0106** 전략 $a=1, 2, 3, \cdots, 10$일 때, $b$의 값의 범위를 구한다.

풀이 $a=n$($n$은 자연수)일 때,

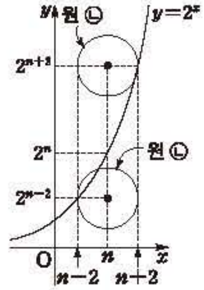
$(x-n)^2+(y-b)^2=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$(x-n)^2+(y-b)^2=4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

두 원 ㉠, ㉡이 곡선 $y=2^x$과 만나도록 하면 다음 그림과 같다.




[그림 1]




[그림 2]

(i) [그림 1]에서 $b=2^{n-1}$일 때 곡선 위의 점 $(n-1, 2^{n-1})$에서 곡선과 원 ㉠이 처음으로 만나고, $b=2^{n+1}$일 때 곡선 위의 점 $(n+1, 2^{n+1})$에서 곡선과 원 ㉠이 마지막으로 만나므로 원 ㉠이 곡선 $y=2^x$과 만나는 $b$의 값의 범위는

$2^{n-1}\le b\le 2^{n+1}$

따라서 원 ㉠이 곡선 $y=2^x$과 만나지 않을 때, $b$의 값의 범위는

$1\le b<2^{n-1}$ 또는 $2^{n+1}<b\le100$ (단, $b$는 자연수)

(ii) [그림 2]에서 $b=2^{n-2}$일 때 곡선 위의 점 $(n-2, 2^{n-2})$에서 곡선과 원 ㉡이 처음으로 만나고, $b=2^{n+2}$일 때 곡선 위의 점 $(n+2, 2^{n+2})$에서 곡선과 원 ㉡이 마지막으로 만나므로 원 ㉡이 곡선 $y=2^x$과 만나는 $b$의 값의 범위는

$2^{n-2}\le b\le 2^{n+2}$ (단, $b$는 자연수)

(i), (ii)에서 $a=n$($n$은 자연수)일 때 주어진 조건을 만족시키는 $b$의 값의 범위는

$2^{n-2}\le b<2^{n-1}$ 또는 $2^{n+1}<b\le 2^{n+2}$

따라서 조건 (가)에 의하여

$a=1$일 때, $\quad 2^2<b\le2^3$

$a=2$일 때, $\quad 2^0\le b<2^1$ 또는 $2^3<b\le2^4$

$a=3$일 때, $\quad 2^1\le b<2^2$ 또는 $2^4<b\le2^5$

$a=4$일 때, $\quad 2^2\le b<2^3$ 또는 $2^5<b\le2^6$

$a=5$일 때, $\quad 2^3\le b<2^4$ 또는 $2^6<b\le100$ ($\because 2^7=128$)

$a=6$일 때, $\quad 2^4\le b<2^5$

$a=7$일 때, $\quad 2^5\le b<2^6$

$a=8$일 때, $\quad 2^6\le b\le100$

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$$2^2+(2^0+2^3)+(2^1+2^4)+(2^2+2^5)+(2^3+36)+2^4+2^5+37$$
$$=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^5)+(2^2+2^3+2^4+2^5)+36+37$$
$$=\frac{2^6-1}{2-1}+\frac{2^2(2^4-1)}{2-1}+73$$
$$=63+60+73$$
$$=196$$

답 196

**SSEN 특강**

**등비수열의 합**

첫째항이 $a$, 공비가 $r$ $(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합은

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

참고 $2^m\le b<2^{m+1}$ 또는 $2^m<b\le2^{m+1}$을 만족시키는 자연수 $b$의 개수는 $2^{m+1}-2^m=2^m(2-1)=2^m$ (단, $m$은 자연수)

**0107** 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭임을 이용하여 $m$의 값을 구한다.

풀이 $y=a^x$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로 두 그래프를 $x$축의 방향으로 $m$만큼 평행이동한 $y=a^{x-m}$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-m}$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$\therefore m=3$

따라서 $f(x)=a^{x-3}$, $g(x)=a^{3-x}$이므로

$f(2)=a^{2-3}=\frac{1}{a}$, $g(2)=a$

즉 $\mathrm{P}\left(2,\ \frac{1}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(2,\ a)$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{3}{2}$이므로

$a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$, $\quad 2a^2-3a-2=0$

$(2a+1)(a-2)=0 \quad \therefore a=2\ (\because a>1)$

$\therefore am=6$

답 6

**0108** 전략 $x\le0$, $0<x\le2$, $x>2$인 경우로 나누어 함수 $y=2^{-f(x)}$의 식을 구한다.

풀이 (i) $x\le0$일 때, $f(x)=1$이므로

$y=2^{-f(x)}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

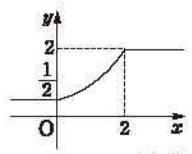
(ii) $0<x\le2$일 때, $f(x)=-x+1$이므로

$y=2^{-f(x)}=2^{x-1}$

(iii) $x>2$일 때, $f(x)=-1$이므로

$y=2^{-f(x)}=2$

이상에서 $y=2^{-f(x)}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 ①

**0109** 전략 $a>b>1$이고 $m>0$일 때, $a^m>b^m$임을 이용한다.

풀이 $\sqrt{2}<\sqrt{3}$이므로 $\quad (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}<(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$

$(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}<(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}=(\sqrt{6})^{\sqrt{3}}$

$\therefore b<c$ …… ㉠

한편

$$\frac{a}{b}=\frac{(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}}{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}}=(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

에서 $0<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<1$이고 $\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$이므로

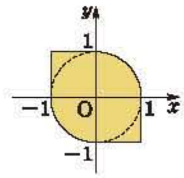
$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}<1 \quad \therefore a<b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a<b<c$

답 $a<b<c$

**0110** 전략 집합 $A\cup B$가 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.

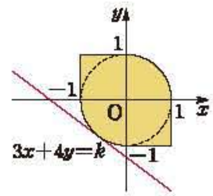
풀이 집합 $A\cup B$가 나타내는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.




$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+4y}$에서 밑이 1보다 작으므로 $3x+4y$가 최소일 때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+4y}$은 최댓값을 갖는다.

$3x+4y=k$ ($k$는 상수)로 놓으면 직선 $3x+4y-k=0$이 제3사분면에서 원 $x^2+y^2=1$과 접할 때 $k$의 값이 최소이다.

이때 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x+4y-k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같으므로




$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1, \quad |k|=5$

$\therefore k=-5$

$\therefore M_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=2^5=32$

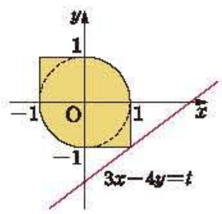
또 $2^{3x-4y}$에서 밑이 1보다 크므로 $3x-4y$가 최대일 때 $2^{3x-4y}$도 최댓값을 갖는다.

$3x-4y=t$ ($t$는 상수)로 놓으면 직선 $3x-4y=t$가 점 $(1,\ -1)$을 지날 때 $t$의 값이 최대이므로 $t$의 최댓값은

$3\cdot1-4\cdot(-1)=7$

$\therefore M_2=2^7=128$

$\therefore M_1+M_2=160$



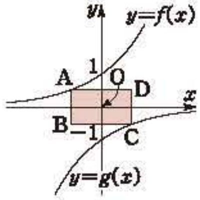

답 160

**0111** 전략 함수 $y=a^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-a^{-x}$임을 이용한다.

풀이 함수 $y=2^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-2^{-x}$이므로

$g(x)=-2^{-x}$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




□ABCD는 직사각형이고 $\beta-\alpha=2$, 즉 $\beta=\alpha+2$일 때

$\overline{AB}=f(\alpha)-g(\beta)=2^{\alpha}-(-2^{-\beta})$

$=2^{\alpha}+2^{-\beta}=2^{\alpha}+2^{-\alpha-2}$

이때 $2^{\alpha}>0$, $2^{-\alpha-2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^{\alpha}+2^{-\alpha-2}\ge 2\sqrt{2^{\alpha}\cdot 2^{-\alpha-2}}$

$=2\sqrt{2^{-2}}=2\cdot\frac{1}{2}=1$ (단, 등호는 $\alpha=-1$일 때 성립)

$\overline{AB}$의 길이의 최솟값이 1이므로

□ABCD$=\overline{AB}\cdot\overline{AD}\ge 1\cdot 2=2$

따라서 사각형 ABCD의 넓이의 최솟값은 2이다.

답 ②

**0112** 전략 좌변을 인수분해하여 자연수 $k$, $n$의 대소에 따라 부등식의 해를 구한다.

풀이 $4^k-(2^n+4^n)2^k+8^n\le 1$에서

$(2^k)^2-(2^n+2^{2n})2^k+2^{3n}\le 1$

$\therefore (2^k-2^n)(2^k-2^{2n})\le 1$

(i) $k<n$일 때,

$2^k-2^n<-1$, $2^k-2^{2n}<-1$이므로

$(2^k-2^n)(2^k-2^{2n})>1$

(ii) $n\le k\le 2n$일 때,

$2^k-2^n\ge 0$, $2^k-2^{2n}\le 0$이므로

$(2^k-2^n)(2^k-2^{2n})\le 0$

(iii) $k>2n$일 때,

$2^k-2^n>1$, $2^k-2^{2n}>1$이므로

$(2^k-2^n)(2^k-2^{2n})>1$

이상에서 $n\le k\le 2n$이므로 모든 자연수 $k$의 합 $a_n$은

$$a_n=\sum_{k=1}^{2n}k-\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{2n(2n+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}$$

$$=\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{63}$$

즉 $p=63$, $q=40$이므로

$p+q=103$

답 103

**0113** 전략 주어진 부등식의 각 항의 밑을 $\frac{1}{2}$로 통일한다.

풀이 $-2\le x\le 2$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\therefore \frac{1}{4}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 4$ ...... ㉠

(i) $a\cdot 2^{-x}\le 2^{-2x+1}$에서 $a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

양변을 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$으로 나누면 $a\le 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$, 즉 $\frac{a}{2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x$

㉠에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 최솟값이 $\frac{1}{4}$이므로 앞의 부등식이 성립하려면

$\frac{a}{2}\le\frac{1}{4}$ $\quad\therefore a\le\frac{1}{2}$

(ii) $2^{-2x+1}\le b\cdot 8^{-x}$에서 $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\le b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$

양변을 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$으로 나누면 $2\le b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$b\le 0$이면 부등식이 성립하지 않으므로 $b>0$

양변을 $b$로 나누면 $\frac{2}{b}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x$

㉠에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 최솟값이 $\frac{1}{4}$이므로 위의 부등식이 성립하려면

$\frac{2}{b}\le\frac{1}{4}$ $\quad\therefore b\ge 8$

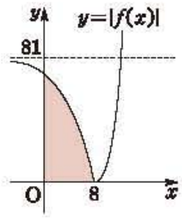
(i), (ii)에서 $b-a\ge 8-\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$

답 ②

**0114** 전략 $x$좌표가 0, 1, 2, ⋯, 8일 때의 $y$좌표가 정수인 점의 개수를 각각 구하여 합한다.

풀이 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x}-81=3^{x-4}-81$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 $-81$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 영역의 내부 및 경계는 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다. ❶




$x=0$일 때, $80<y<81$

따라서 $y$좌표가 정수인 점 $(x, y)$의 개수는 81이다.

$x=1, 2, 3, 4$일 때, $0<\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x}\le 1$이므로

$80\le y<81$

따라서 $y$좌표가 정수인 점 $(x, y)$의 개수는 각각 81이다.

또

$|f(5)|=|3-81|=78$, $|f(6)|=|3^2-81|=72$,

$|f(7)|=|3^3-81|=54$, $|f(8)|=|3^4-81|=0$

이므로 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$81\cdot 5+79+73+55+1=613$ ❷

답 613

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $y=\|f(x)\|$의 그래프와 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ 점의 개수를 구할 수 있다. | 70% |

**0115** 전략 주어진 식과 $f(1)$의 값을 이용하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{x}{3}\right)$, $f\left(\frac{x}{6}\right)$를 각각 구한다.

풀이 $f(x)$의 치역이 양의 실수 전체의 집합이므로 $f(x)>0$

$f(1)=64$이고 $f(ab)=\{f(b)\}^a$이므로

$f(x)=f(1\cdot x)=\{f(1)\}^x=64^x=2^{6x}$

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{6\cdot\frac{1}{2}}=2^3=8$, $f\left(\frac{x}{3}\right)=2^{6\cdot\frac{x}{3}}=2^{2x}$, $f\left(\frac{x}{6}\right)=2^{6\cdot\frac{x}{6}}=2^x$

이므로 주어진 방정식은

$8\cdot 2^{2x}-2^x=0$ ··· ➊

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$8t^2-t=0, \quad t(8t-1)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{8}\ (\because t>0)$

즉 $2^x=\frac{1}{8}$이므로 $\quad x=-3$ ··· ➋

답 $x=-3$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ 주어진 방정식을 밑이 2인 지수방정식으로 나타낼 수 있다. | 60% |
| ➋ 방정식의 해를 구할 수 있다. | 40% |

**0116** **전략** $[2^x]$, $[2^y]$의 값이 음이 아닌 정수임을 이용하여 $[2^x]+[2^y]=1$의 해를 구한다.

**풀이** $2^x>0$, $2^y>0$에서 $[2^x]$, $[2^y]$의 값은 음이 아닌 정수이므로

$[2^x]+[2^y]=1$에서

$[2^x]=0,\ [2^y]=1$ 또는 $[2^x]=1,\ [2^y]=0$

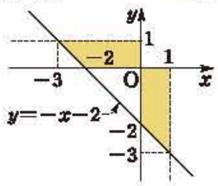
(i) $[2^x]=0,\ [2^y]=1$일 때,

$0<2^x<1,\ 1\le 2^y<2$이므로 $\quad x<0,\ 0\le y<1$

(ii) $[2^x]=1,\ [2^y]=0$일 때,

$1\le 2^x<2,\ 0<2^y<1$이므로 $\quad 0\le x<1,\ y<0$ ··· ➊

한편 $x+y+2\ge 0$이 나타내는 영역은 직선 $y=-x-2$의 윗부분(경계선 포함)이므로 집합 $A\cap B$가 나타내는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다. ··· ➋




따라서 구하는 넓이는

$2\cdot\frac{1}{2}\cdot(2+3)\cdot 1=5$ ··· ➌

답 5

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $[2^x]+[2^y]=1$의 해를 구할 수 있다. | 40% |
| ➋ $A\cap B$가 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있다. | 40% |
| ➌ $A\cap B$가 나타내는 영역의 넓이를 구할 수 있다. | 20% |

**0117** **전략** 점 $P_k$의 좌표를 이용하여 $\triangle OP_kQ_k$의 넓이를 $k$에 대한 식으로 나타낸다.

**풀이** 점 $P_k$는 곡선 $y=3^{x-2}$과 직선 $x=k$의 교점이므로

$P_k(k,\ 3^{k-2})$

$y=3^{x-2}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{P_kQ_k}=2$

$\therefore S_k=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3^{k-2}=3^{k-2}$ ··· ➊

$S_kS_{k+1}>S_{10}$에서

$3^{k-2}\cdot 3^{k-1}>3^{10-2}, \quad 3^{2k-3}>3^8$

밑이 1보다 크므로

$2k-3>8, \quad 2k>11 \quad \therefore k>\frac{11}{2}$ ··· ➋

따라서 자연수 $k$의 최솟값은 6이다. ··· ➌

답 6

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $S_k$를 $k$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ➋ $k$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 50% |
| ➌ 자연수 $k$의 최솟값을 구할 수 있다. | 10% |

**0118** **전략** 해가 $a<x<b$이고 $x^2$의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-a)(x-b)<0$임을 이용한다.

**풀이** $4^x+a\cdot 2^x+b<0$에서 $\quad (2^x)^2+a\cdot 2^x+b<0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $\quad t^2+at+b<0$ ······ ㉠

이때 $-1<x<0$에서 $2^{-1}<2^x<2^0$, 즉 $\frac{1}{2}<t<1$이고 이것은 ㉠의 해와 같으므로

$a=-\left(\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ ··· ➊

따라서 $\left(\frac{1}{4}\right)^x+3a\left(\frac{1}{2}\right)^x+4b<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+2<0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=s\,(s>0)$로 놓으면

$s^2-\frac{9}{2}s+2<0, \quad 2s^2-9s+4<0$

$(2s-1)(s-4)<0 \quad \therefore \frac{1}{2}<s<4$

즉 $\frac{1}{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$이고 밑이 1보다 작으므로

$-2<x<1$ ··· ➋

답 $-2<x<1$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ➋ 부등식의 해를 구할 수 있다. | 60% |

**0119** **전략** $2x$시간 후의 세균 수를 거듭제곱으로 나타낸 후 세균 수의 합을 이용하여 지수부등식을 세운다.

**풀이** 배양액 A에 있는 세균 수는 1시간마다 3배가 되므로 2시간마다 9배가 된다.

$2x$시간 후 배양액 A, B에 있는 세균 수는 각각

$10\cdot 9^x,\ 90\cdot 3^x$

이때 세균 수의 합이 1620마리 이상이 되려면

$10\cdot 9^x+90\cdot 3^x\ge 1620$

$\therefore (3^x)^2+9\cdot 3^x-162\ge 0$ ··· ➊

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $\quad t^2+9t-162\ge 0$

$(t+18)(t-9)\ge 0 \quad \therefore t\ge 9\ (\because t>0)$

즉 $3^x\ge 9$에서 $\quad x\ge 2$

따라서 최소 4시간이 지나야 한다. ··· ➋

답 4

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ 지수부등식을 세울 수 있다. | 40% |
| ➋ 최소 몇 시간이 지나야 하는지 구할 수 있다. | 60% |

Ⅰ 지수함수와 로그함수

# 02 로그함수

**0120** 답 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$

**0121** 답 $y=3^x$

**0122** (1) $f(1)=\log_2 1=0$

(2) $f(2)=\log_2 2=1$

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

(4) $f(\sqrt{2})=\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

답 (1) 0 (2) 1 (3) $-1$ (4) $\frac{1}{2}$

**0123** (1) $f(1)=\log_{\frac{1}{3}}1=0$

(2) $f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$

(3) $f(3)=\log_{\frac{1}{3}}3=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=-1$

(4) $f(\sqrt{3})=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$

답 (1) 0 (2) 1 (3) $-1$ (4) $-\frac{1}{2}$

**0124** ㄱ. 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.
ㄷ. $y=\log_3 x$의 그래프는 점 (3, 1)을 지난다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

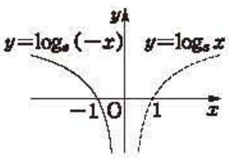
**0125** 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$ 답 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

**0126** $\log_4 25=\log_{2^2}5^2=\log_2 5$
이때 함수 $y=\log_2 x$는 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로

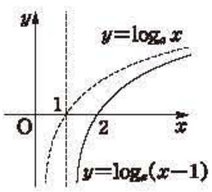
$\log_2 5<\log_2 12$ $\quad\therefore \log_4 25<\log_2 12$ 답 $\log_4 25<\log_2 12$

**0127** $y=\log_a(-x)$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



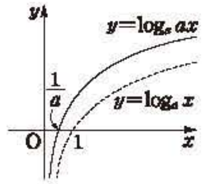

답 풀이 참조

**0128** $y=\log_a(x-1)$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

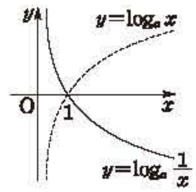
**0129** $y=\log_a ax=\log_a a+\log_a x$
$=1+\log_a x$
따라서 $y=\log_a ax$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

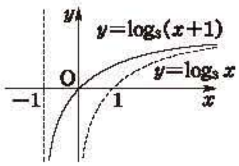
**0130** $y=\log_a\frac{1}{x}=\log_a x^{-1}=-\log_a x$

따라서 $y=\log_a\frac{1}{x}$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



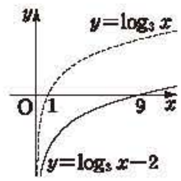

답 풀이 참조

**0131** $y=\log_3(x+1)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>-1\}$
점근선의 방정식은 $x=-1$



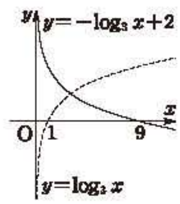

답 풀이 참조

**0132** $y=\log_3 x-2$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$
점근선의 방정식은 $x=0$

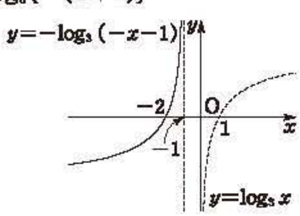



답 풀이 참조

**0133** $y=-\log_3 x+2$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$
점근선의 방정식은 $x=0$ 답 풀이 참조




**0134** $y=-\log_3(-x-1)=-\log_3\{-(x+1)\}$
에서 $y=-\log_3(-x-1)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x<-1\}$
점근선의 방정식은 $x=-1$




답 풀이 참조

**0135** 함수 $y=\log_2 x$에서 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로 $2\le x\le 128$에서
$x=128$일 때 최대이고 최댓값은 $\log_2 128=\log_2 2^7=7$
$x=2$일 때 최소이고 최솟값은 $\log_2 2=1$

답 최댓값: 7, 최솟값: 1

**0136** 함수 $y=\log x$에서 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로 $\frac{1}{10}\le x\le 1000$에서

$x=1000$일 때 최대이고 최댓값은 $\log 1000=\log 10^3=3$

$x=\frac{1}{10}$일 때 최소이고 최솟값은 $\log\frac{1}{10}=\log 10^{-1}=-1$

답 최댓값: 3, 최솟값: $-1$

**0137** 함수 $y=-\log_5(x-1)=\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$에서 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로 $6\le x\le 126$에서

$x=6$일 때 최대이고 최댓값은 $-\log_5 5=-1$

$x=126$일 때 최소이고 최솟값은 $-\log_5 125=-\log_5 5^3=-3$

답 최댓값: $-1$, 최솟값: $-3$

**0138** 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}3x+1$에서 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소하므로 $\frac{1}{3}\le x\le\frac{8}{3}$에서

$x=\frac{1}{3}$일 때 최대이고 최댓값은 $\log_{\frac{1}{2}}1+1=0+1=1$

$x=\frac{8}{3}$일 때 최소이고 최솟값은 $\log_{\frac{1}{2}}8+1=-3+1=-2$

답 최댓값: 1, 최솟값: $-2$

**0139** 진수의 조건에서

$2x-1>0 \quad \therefore x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_2(2x-1)=3$에서 $2x-1=2^3 \quad \therefore x=\frac{9}{2}$

$x=\frac{9}{2}$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=\frac{9}{2}$

**0140** 밑의 조건에서 $2x>0,\ 2x\ne 1$

$\therefore x>0,\ x\ne\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_{2x}16=2$에서 $16=(2x)^2, \quad 2x=\pm 4$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=2$ 답 $x=2$

**0141** 진수의 조건에서

$5x-1>0,\ 2x+3>0 \quad \therefore x>\frac{1}{5}$ …… ㉠

$\log_3(5x-1)=\log_3(2x+3)$에서

$5x-1=2x+3, \quad 3x=4 \quad \therefore x=\frac{4}{3}$

$x=\frac{4}{3}$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=\frac{4}{3}$

**0142** 진수의 조건에서

$2-x>0,\ 2x+5>0 \quad \therefore -\frac{5}{2}<x<2$ …… ㉠

$\log(2-x)=1-\log(2x+5)$에서

$\log(2-x)+\log(2x+5)=1$

$\therefore \log(2-x)(2x+5)=\log 10$

즉 $(2-x)(2x+5)=10$이므로

$-2x^2-x+10=10, \quad 2x^2+x=0$

$x(2x+1)=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=0$

$x=-\frac{1}{2}$, $x=0$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=0$

**0143** 진수의 조건에서

$x+1>0,\ 3x+7>0 \quad \therefore x>-1$ …… ㉠

$2\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=\log_{\frac{1}{3}}(3x+7)$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)^2=\log_{\frac{1}{3}}(3x+7)$

즉 $(x+1)^2=3x+7$이므로 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=3$ 답 $x=3$

**0144** 진수의 조건에서

$3x+1>0,\ x+5>0 \quad \therefore x>-\frac{1}{3}$ …… ㉠

$\log_2(3x+1)=\log_4(x+5)$에서

$\log_2(3x+1)=\frac{1}{2}\log_2(x+5)$

$2\log_2(3x+1)=\log_2(x+5)$

$\therefore \log_2(3x+1)^2=\log_2(x+5)$

즉 $(3x+1)^2=x+5$이므로 $9x^2+5x-4=0$

$(x+1)(9x-4)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{4}{9}$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=\frac{4}{9}$ 답 $x=\frac{4}{9}$

**0145** $(\log x)^2-\log x^4=0$에서 $(\log x)^2-4\log x=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-4t=0, \quad t(t-4)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=4$

따라서 $\log x=0$ 또는 $\log x=4$이므로

$x=1$ 또는 $x=10^4=10000$

답 $x=1$ 또는 $x=10000$

**0146** $\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$(t+1)(t-3)=5, \quad t^2-2t-8=0$

$(t+2)(t-4)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=4$

따라서 $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=4$이므로

$x=3^{-2}=\frac{1}{9}$ 또는 $x=3^4=81$

답 $x=\frac{1}{9}$ 또는 $x=81$

**0147** 진수의 조건에서

$2x+1>0,\ 5x-2>0 \quad \therefore x>\frac{2}{5}$ …… ㉠

$\log_2(2x+1)<\log_2(5x-2)$에서 밑이 1보다 크므로

$2x+1<5x-2, \quad 3x>3$

$\therefore x>1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>1$ 답 $x>1$

**0148** 진수의 조건에서

$x>0,\ 2-x>0 \quad \therefore 0<x<2$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}}(2-x)$에서 밑이 1보다 작으므로

$x \leq 2-x, \quad 2x \leq 2 \quad \therefore x \leq 1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0 < x \leq 1$ 답 $0 < x \leq 1$

**0149** 진수의 조건에서

$x+1>0,\ 2x+5>0 \quad \therefore x>-1$ …… ㉠

$2\log_3(x+1) \geq \log_3(2x+5)$에서

$\log_3(x+1)^2 \geq \log_3(2x+5)$

밑이 1보다 크므로 $(x+1)^2 \geq 2x+5$

$x^2-4 \geq 0, \quad (x+2)(x-2) \geq 0$

$\therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x \geq 2$ 답 $x \geq 2$

**0150** 진수의 조건에서

$12-2x>0,\ x-3>0 \quad \therefore 3<x<6$ …… ㉠

$\log_5(12-2x) \geq -\log_{\frac{1}{5}}(x-3)$에서

$\log_5(12-2x) \geq \log_5(x-3)$

밑이 1보다 크므로 $12-2x \geq x-3$

$3x \leq 15 \quad \therefore x \leq 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3 < x \leq 5$ 답 $3<x\leq 5$

**0151** 진수의 조건에서

$3x+1>0 \quad \therefore x>-\frac{1}{3}$ …… ㉠

$\log_4(3x+1)<\frac{1}{2}$에서 $\log_4(3x+1)<\log_4 2$

밑이 1보다 크므로

$3x+1<2 \quad \therefore x<\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$

답 $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$

**0152** 진수의 조건에서 $x^2>0$이므로 $x \neq 0$ …… ㉠

$\log_5 x^2<1$에서 $\log_5 x^2<\log_5 5$

밑이 1보다 크므로

$x^2<5 \quad \therefore -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-\sqrt{5}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{5}$

답 $-\sqrt{5}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{5}$

**0153** $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 진수는 항상 양수이다.

$\log_2(x^2+x+2)>2$에서 $\log_2(x^2+x+2)>\log_2 4$

밑이 1보다 크므로

$x^2+x+2>4, \quad x^2+x-2>0$

$(x+2)(x-1)>0 \quad \therefore x<-2$ 또는 $x>1$

답 $x<-2$ 또는 $x>1$

**0154** 진수의 조건에서

$x-2>0 \quad \therefore x>2$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geq 1$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geq \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

밑이 1보다 작으므로

$x-2 \leq \frac{1}{3} \quad \therefore x \leq \frac{7}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2<x\leq\frac{7}{3}$ 답 $2<x\leq\frac{7}{3}$

**0155** 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-t\leq 12, \quad t^2-t-12\leq 0$

$(t+3)(t-4)\leq 0 \quad \therefore -3\leq t\leq 4$

즉 $-3\leq \log x\leq 4$이므로

$\log\frac{1}{10^3}\leq \log x\leq \log 10^4$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{10^3}\leq x\leq 10^4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{10^3}\leq x\leq 10^4$ 답 $\frac{1}{10^3}\leq x\leq 10^4$

**0156** 진수의 조건에서

$x>0,\ x^3>0 \quad \therefore x>0$ …… ㉠

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^3>0$에서 $(\log_2 x)^2-3\log_2 x>0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-3t>0, \quad t(t-3)>0 \quad \therefore t<0$ 또는 $t>3$

즉 $\log_2 x<0$ 또는 $\log_2 x>3$이므로

$\log_2 x<\log_2 1$ 또는 $\log_2 x>\log_2 2^3$

밑이 1보다 크므로 $x<1$ 또는 $x>8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<1$ 또는 $x>8$ 답 $0<x<1$ 또는 $x>8$

### 유형 01 로그함수의 함숫값 본책 28쪽

로그함수 $f(x)=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$에서 $f(p)$의 값을 구할 때에는 $f(x)$에 $x$ 대신 $p$를 대입하고

$\log_a p=q \Longleftrightarrow a^q=p$

와 로그의 성질을 이용한다.

**0157** $f(9)=f(81)$에서

$\log_3 9+k\log_9 9=\log_3 81+k\log_{81} 9$

$\log_3 3^2+k=\log_3 3^4+k\log_{3^4} 3^2$

$2+k=4+\frac{k}{2}, \quad \frac{k}{2}=2 \quad \therefore k=4$ 답 ④

**0158** $f(-3)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}=(2^{-2})^{-3}=2^6$이므로

$(g\circ f)(-3)=g(f(-3))=g(2^6)=\log_2 2^6=6$ 답 ③

**0159** $f(2)=\log_a 4+1=5$이므로 $\log_a 4=4, \quad a^4=4$

$\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$ ➡ ❶

따라서 $f(x)=\log_{\sqrt{2}}(x+2)+1$이므로

$f(14)=\log_{\sqrt{2}}16+1=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^4+1=2\cdot4+1=9$ ➡ ②

답 9

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ② $f(14)$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**0160** 조건 (가)에서 $f(x)=\log_2 x+g(x)$이므로

$f(4)=\log_2 4+g(4)=2+g(4)$

조건 (나), (다)에 의하여 $f(4)$의 값은 정수이고 $0\le g(4)<1$이므로

$f(4)=2,\ g(4)=0$

또 $f(100)=\log_2 100+g(100)$이고, $2^6<100<2^7$에서

$\log_2 2^6<\log_2 100<\log_2 2^7$이므로 $6<\log_2 100<7$

이때 $0\le g(100)<1$이므로 $6<\log_2 100+g(100)<8$

따라서 정수 $f(100)$의 값은 7이므로

$f(4)+f(100)=9$

답 9

**0161** $f_2(x)=f_1(x^3)+f_1(x)=\log_2 x^3+\log_2 x$

$=3\log_2 x+\log_2 x=4\log_2 x$

$f_3(x)=f_2(x^3)+f_2(x)=4\log_2 x^3+4\log_2 x$

$=12\log_2 x+4\log_2 x=16\log_2 x$

$f_4(x)=f_3(x^3)+f_3(x)$

$=16\log_2 x^3+16\log_2 x$

$=48\log_2 x+16\log_2 x=64\log_2 x$ ➡ ①

$\therefore \log_4\{f_4(16)\}=\log_4(64\log_2 16)=\log_4(64\cdot4)$

$=\log_4 4^4=4$ ➡ ②

답 4

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① $f_4(x)$를 구할 수 있다. | 60% |
| ② $\log_4\{f_4(16)\}$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

## 유형 02 로그함수의 성질

본책 28쪽

로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\ne1)$에 대하여

① 정의역: 양의 실수 전체의 집합
　치역: 실수 전체의 집합

② $a>1$일 때, 　$x$의 값이 증가 ➡ $y$의 값도 증가
　$0<a<1$일 때, 　$x$의 값이 증가 ➡ $y$의 값은 감소

③ 그래프의 점근선: 직선 $x=0$($y$축)

**0162** ⑤ $y=\log_{\frac{1}{a}} x=-\log_a x$이므로 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 $x$축에 대하여 대칭이다.

답 ⑤

**0163** ㄱ. 일대일함수이므로 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.

ㄴ. 밑이 1보다 크므로 $x_1>x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

ㄷ. $y=-\log\frac{1}{x}=-\log x^{-1}=\log x$이고 정의역이 같으므로 두 함수의 그래프는 일치한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

**0164** $y=\log_a bx$의 그래프에서 $x$의 값이 증가할 때 $y$의 값도 증가하므로 $a>1$

또 $x=1$일 때 $y<0$이므로

$\log_a b<0$ 　$\therefore 0<b<1$

따라서 함수 $y=\log_b ax$는 $x$의 값이 증가할 때 $y$의 값은 감소하고, $x=1$일 때 $y=\log_b a<0$이므로 그래프의 개형은 ②와 같다.

답 ②

## 유형 03 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

본책 29쪽

로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\ne1)$의 그래프를

① $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동
　➡ $y=\log_a(x-m)+n$

② $x$축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-\log_a x$

③ $y$축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=\log_a(-x)$

④ 원점에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-\log_a(-x)$

⑤ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 ➡ $y=a^x$

**0165** 평행이동한 그래프의 식은 　$y=\log_3(x-a)+b$

이 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$이므로 　$a=-2$

또 이 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

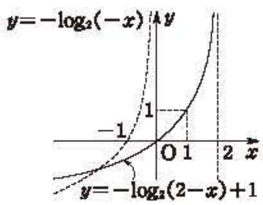
$0=\log_3(1+2)+b$ 　$\therefore b=-1$

$\therefore a+b=-3$

답 $-3$

**0166** $y=-\log_2(2-x)+1=-\log_2\{-(x-2)\}+1$의 그래프는 $y=-\log_2(-x)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=-\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y=-\log_2(2-x)+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




④ $x$의 값이 증가할 때 $y$의 값도 증가한다.

답 ④

**0167** $y=\log_5 10x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_5 10x-2$ 　$\therefore y=\log_5\frac{10}{25}x=\log_5\frac{2}{5}x$ ➡ ①

$y=\log_5\frac{2}{5}x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-\log_5\frac{2}{5}x$ 　$\therefore y=\log_5\frac{5}{2x}$ ➡ ②

$\therefore a=\frac{5}{2}$ ➡ ③

답 $\frac{5}{2}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다. | 50% |
| ② 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다. | 40% |
| ③ $a$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0168** ㄱ. $y=\log_{\frac{1}{10}}x=-\log x$의 그래프는 $y=\log x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=\log\frac{10}{x}=\log 10-\log x=1-\log x$의 그래프는 $y=\log x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

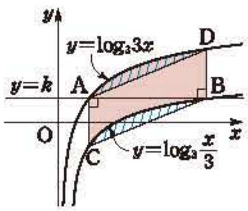
ㄷ. $y=\log x^2=2\log|x|$의 그래프는 $y=\log x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=\log_{\frac{1}{10}}(2-x)=-\log(2-x)=-\log\{-(x-2)\}$의 그래프는 $y=\log x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 $y=\log x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

**0169** $y=\log_3 3x=\log_3\left(9\cdot\frac{x}{3}\right)=2+\log_3\frac{x}{3}$이므로 $y=\log_3 3x$의 그래프는 $y=\log_3\frac{x}{3}$의 그래프를 $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
즉 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 ACBD의 넓이와 같다.
따라서 구하는 넓이는

$\overline{AC}\cdot\overline{AB}=2\cdot5=10$ 답 10




## 유형 04 로그함수의 그래프에서의 함숫값 본책 30쪽

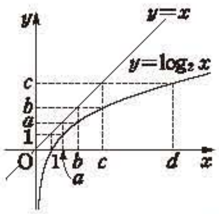
로그함수 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq1)$의 그래프가 점 $(m,\ n)$을 지난다.
➡ $n=\log_a m \Longleftrightarrow a^n=m$

**0170** $\log_2 c=b$, $\log_2 b=a$이므로

$a-b=\log_2 b-\log_2 c=\log_2\frac{b}{c}$

따라서 $2^{a-b}=\frac{b}{c}$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{a-b}=\frac{c}{b}$




답 ②

**다른 풀이** $\log_2 a=1$이므로 $a=2$
$\log_2 b=a=2$이므로 $b=4$
$\log_2 c=b=4$이므로 $c=16$
$\log_2 d=c=16$이므로 $d=2^{16}$
$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{a-b}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-4}=4=\frac{c}{b}$

**0171** $y=\log_2 x$에서 $y=2$이면 $x=2^2=4$ $\therefore A(4,\ 2)$
$y=\log_3 x$에서 $y=2$이면 $x=3^2=9$ $\therefore B(9,\ 2)$
$\therefore \overline{AB}=9-4=5$ 답 ③

**0172** 점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3이므로 $b=3$
즉 $3=\log_2 a$에서 $a=2^3=8$
따라서 $A(8,\ 3)$이므로 $D(11,\ 3)$ 답 $D(11,\ 3)$

**0173** $\overline{OP}=\log_{\sqrt{3}}p$, $\overline{OQ}=\log_3 q$이므로 $\overline{OP}:\overline{OQ}=3:2$에서
$\log_{\sqrt{3}}p:\log_3 q=3:2$, $2\log_3 p:\log_3 q=3:2$
$4\log_3 p=3\log_3 q$, $\log_3 p^4=\log_3 q^3$
$\therefore p^4=q^3$ 답 ⑤

**0174** $y=\log_{\frac{1}{8}}x=-\frac{1}{3}\log_2 x$에서
$x=\frac{1}{4}$일 때, $y=-\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\log_2 2^{-2}=\frac{2}{3}$이므로
$A\left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{3}\right)$
$x=2$일 때, $y=-\frac{1}{3}\log_2 2=-\frac{1}{3}$이므로 $C\left(2,\ -\frac{1}{3}\right)$ ···➊
$y=\log_{\sqrt{2}}x=2\log_2 x$에서
$x=\frac{1}{4}$일 때, $y=2\log_2\frac{1}{4}=2\log_2 2^{-2}=-4$이므로 $B\left(\frac{1}{4},\ -4\right)$
$x=2$일 때, $y=2\log_2 2=2$이므로 $D(2,\ 2)$ ···➋
이때 사각형 ABCD는 사다리꼴이므로 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{14}{3}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{7}{4}=\frac{49}{8}$ ···➌

답 $\frac{49}{8}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ 두 점 A, C의 좌표를 구할 수 있다. | 40% |
| ➋ 두 점 B, D의 좌표를 구할 수 있다. | 40% |
| ➌ □ABCD의 넓이를 구할 수 있다. | 20% |

## 유형 05 로그함수의 역함수 본책 30쪽

① $y=\log_a(x-p)+q\,(a>0,\ a\neq1)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $x$를 $y$에 대하여 푼다. ➡ $x=a^{y-q}+p$
(ii) $x$와 $y$를 바꾼다. ➡ $y=a^{x-q}+p$
② 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때
$f(p)=q \Longleftrightarrow g(q)=p$

**0175** $y=\log_4(x-2)+3$에서 $y-3=\log_4(x-2)$
$x-2=4^{y-3}$ $\therefore x=4^{y-3}+2$
$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=4^{x-3}+2=2^{2x-6}+2$
따라서 $a=2$, $b=-6$, $c=2$이므로
$a+b+c=-2$ 답 ②

**0176** $(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.
따라서 $g(2)=k$로 놓으면 $f(k)=2$이므로
$\log_2\sqrt{k+1}=2$, $\sqrt{k+1}=4$
$k+1=16$ $\therefore k=15$
$\therefore g(2)=15$ 답 ③

**다른 풀이** $y=\log_2\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}\log_2(x+1)$에서
$2y=\log_2(x+1)$, $x+1=2^{2y}$
$\therefore x=4^y-1$
따라서 $g(x)=4^x-1$이므로 $g(2)=4^2-1=15$

**0177** $f^{-1}(2)=a$로 놓으면 $f(a)=2$이므로

$\log_3(a^3+1)=2,\quad a^3+1=3^2$

$a^3=8 \quad \therefore a=2$ ··· ❶

즉 $f^{-1}(2)=2$이므로

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(2)&=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(2)))\\&=f^{-1}(f^{-1}(2))\\&=f^{-1}(2)=2\end{aligned}$$ ··· ❷

답 2

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $f^{-1}(2)$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(2)$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**0178** $g(x)$는 $y=\log_2 x$의 역함수이므로 $g(x)=2^x$

점 A는 $y=g(x)$의 그래프와 $y$축의 교점이므로 $\mathrm{A}(0, 1)$

점 B의 $y$좌표가 1이므로 $1=\log_2 x \quad \therefore x=2$

따라서 $\mathrm{B}(2, 1)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2$

점 C의 $x$좌표가 2이므로 $\mathrm{C}(2, 4)$

점 D의 $y$좌표가 4이므로 $4=\log_2 x \quad \therefore x=16$

따라서 $\mathrm{D}(16, 4)$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=16-2=14$

$\therefore \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{14}{2}=7$

답 7

**0179** $y=\log_5 x+2$에서 $y-2=\log_5 x$

$\therefore x=5^{y-2}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=5^{x-2}$

$\therefore g(x)=5^{x-2}$

① $g(a)+g(-a)=5^{a-2}+5^{-a-2}=5^{-2}(5^a+5^{-a})$

② $g(a)-g(-a)=5^{a-2}-5^{-a-2}=5^{-2}(5^a-5^{-a})$

③ $g(a)+g\left(\dfrac{1}{a}\right)=5^{a-2}+5^{\frac{1}{a}-2}=5^{-2}(5^a+5^{\frac{1}{a}})$

④ $g(a)g\left(\dfrac{1}{a}\right)=5^{a-2}\cdot 5^{\frac{1}{a}-2}=5^{a+\frac{1}{a}-4}$

⑤ $g(a)g(-a)=5^{a-2}\cdot 5^{-a-2}=5^{-4}$

따라서 $a$의 값에 관계없이 값이 일정한 것은 ⑤이다.

답 ⑤

**0180** 함수 $y=\log_a x+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\log_a x+b$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이때 두 교점의 $x$좌표가 1, 2이므로 $y=\log_a x+b$의 그래프는 두 점 (1, 1), (2, 2)를 지난다.

$1=\log_a 1+b$에서 $b=1$

$2=\log_a 2+1$에서 $1=\log_a 2 \quad \therefore a=2$

$\therefore ab=2$

답 2

## 유형 06 로그함수를 이용한 수의 대소 비교

본책 31쪽

주어진 수의 밑을 같게 한 후 다음과 같은 로그함수의 성질을 이용한다.

① $a>1$일 때, $m<n \Longleftrightarrow \log_a m<\log_a n$

② $0<a<1$일 때, $m<n \Longleftrightarrow \log_a m>\log_a n$

**0181** $A=2\log_5 3=\log_5 9$

$B=3=3\log_5 5=\log_5 125$

$C=\log_{25} 115=\log_{5^2} 115=\dfrac{1}{2}\log_5 115=\log_5\sqrt{115}$

이때 $9<\sqrt{115}<125$이고 밑이 1보다 크므로

$\log_5 9<\log_5\sqrt{115}<\log_5 125$

$\therefore A<C<B$

답 ②

**0182** $B=\log_3\dfrac{1}{12}=-\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{12}=\log_{\frac{1}{3}} 12$

$C=\log_{\frac{1}{9}} 100=\log_{(\frac{1}{3})^2} 100=\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 100=\log_{\frac{1}{3}} 10$

이때 $10<12<16$이고 밑이 1보다 작으므로

$\log_{\frac{1}{3}} 10>\log_{\frac{1}{3}} 12>\log_{\frac{1}{3}} 16$

$\therefore C>B>A$

답 $A$, $B$, $C$

**0183** $a<b<1$의 각 변에 밑이 $a$인 로그를 취하면

$\log_a 1<\log_a b<\log_a a \quad \therefore 0<\log_a b<1$ ······ ㉠

또 $a<b<1$의 각 변에 밑이 $b$인 로그를 취하면

$\log_b 1<\log_b b<\log_b a \quad \therefore 0<1<\log_b a$

$\log_a\dfrac{b}{a}=\log_a b-\log_a a=\log_a b-1$이고 ㉠에서

$-1<\log_a b-1<0 \quad \therefore -1<\log_a\dfrac{b}{a}<0$

$\log_a\dfrac{a}{b}=\log_a a-\log_a b=1-\log_a b$이고 ㉠에서

$-1<-\log_a b<0,\quad 0<1-\log_a b<1$

$\therefore 0<\log_a\dfrac{a}{b}<1$

따라서 가장 큰 값은 $\log_b a$, 가장 작은 값은 $\log_a\dfrac{b}{a}$이다.

답 ②

**0184** $1<x<4$의 각 변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 1<\log_2 x<\log_2 4 \quad \therefore 0<\log_2 x<2$

(i) $A-B=\log_2 x^2-(\log_2 x)^2=2\log_2 x-(\log_2 x)^2$
$=\log_2 x(2-\log_2 x)>0$
$\therefore A>B$

(ii) $0<\log_2 x\le 1$일 때,
$0<(\log_2 x)^2\le 1,\ \log_2(\log_2 x)\le 0$
$\therefore (\log_2 x)^2>\log_2(\log_2 x)$ ······ ㉠
$1<\log_2 x<2$일 때,
$1<(\log_2 x)^2<4,\ 0<\log_2(\log_2 x)<1$
$\therefore (\log_2 x)^2>\log_2(\log_2 x)$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $B>C$

(i), (ii)에서 $A>B>C$

답 ①

## 유형 07 로그함수의 실생활에의 활용

본책 32쪽

로그로 표현된 관계식이 주어진 실생활 문제를 해결할 때에는 문자가 나타내는 것이 무엇인지 파악하고 문제의 조건을 찾아 주어진 관계식에 대입하여 식을 세운다.

**0185** 리히터 규모가 $k(k>0)$일 때의 총 에너지의 크기를 $x$ erg라 하면

$\log x=11.8+1.5k \quad \therefore x=10^{11.8+1.5k}$

리히터 규모가 $k+1$일 때의 총 에너지의 크기를 $y$ erg라 하면

$\log y=11.8+1.5(k+1)=13.3+1.5k$

$\therefore y=10^{13.3+1.5k}$

따라서 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{10^{13.3+1.5k}}{10^{11.8+1.5k}}=10^{1.5}$이므로 리히터 규모가 1만큼 증가하면 총 에너지는 $10^{1.5}$배로 커진다.

답 $10^{1.5}$

**0186** $m=6$, $M=-4$일 때, 별이 지구로부터 $x$pc 떨어져 있다고 하면

$6-(-4)=-5+5\log x$, $\quad 5\log x=15$

$\log x=3 \quad \therefore x=10^3=1000$

따라서 주어진 별의 지구로부터의 거리는 1000pc이다.

답 ⑤

**0187** 초기 온도가 30°C이므로

$f(x)=30+k\log(8x+1)$

$f\left(\dfrac{9}{8}\right)=240$이므로

$30+k\log\left(8\cdot\dfrac{9}{8}+1\right)=240$, $\quad 30+k=240$

$\therefore k=210$

따라서 $f(x)=30+210\log(8x+1)$이므로 화재가 발생한 지 $a$분 후의 온도가 450°C이면

$30+210\log(8a+1)=450$, $\quad \log(8a+1)=2$

$8a+1=10^2=100 \quad \therefore a=\dfrac{99}{8}$

따라서 화재가 발생한 후 온도가 450°C가 되는 데 $\dfrac{99}{8}$분이 걸린다.

답 $\dfrac{99}{8}$

**유형 08 로그함수의 최대·최소; $y=\log_a f(x)$ 꼴** 본책 32쪽

주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한 후 $a$의 값의 범위에 따라 다음을 이용한다.

① $a>1$일 때
➡ $f(x)$가 최대일 때 $y$도 최대, $f(x)$가 최소일 때 $y$도 최소

② $0<a<1$일 때
➡ $f(x)$가 최대일 때 $y$는 최소, $f(x)$가 최소일 때 $y$는 최대

**0188** $f(x)=-x^2+2x+7$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+8$

$f(-1)=4$, $f(1)=8$, $f(2)=7$이므로 $-1\le x\le 2$에서

$4\le f(x)\le 8$

$y=\log_2 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=\log_2 f(x)$는

$f(x)=8$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad \log_2 8=3$

$f(x)=4$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad \log_2 4=2$

따라서 구하는 곱은 $\quad 3\cdot 2=6$

답 ③

**0189** $f(x)=x^2-3x+4$로 놓으면 $\quad f(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$

$f(-1)=8$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{7}{4}$, $f(4)=8$이므로 $-1\le x\le 4$에서

$\dfrac{7}{4}\le f(x)\le 8$ ➡ ❶

$y=\log_a f(x)$에서 $0<a<1$이므로 함수 $y=\log_a f(x)$는 $f(x)=8$일 때 최솟값 $-3$을 갖는다.

즉 $\log_a 8=-3$이므로

$a^{-3}=8 \quad \therefore a=\dfrac{1}{2}$ ➡ ❷

답 $\dfrac{1}{2}$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**0190** $x+y=8$에서 $\quad y=8-x\ (0<x<8)$

$\therefore \log_2 x+\log_2 y=\log_2 xy=\log_2 x(8-x)$

$=\log_2(-x^2+8x)$

$=\log_2\{-(x-4)^2+16\}$

밑이 1보다 크므로 주어진 식은 $-(x-4)^2+16$의 값이 최대일 때 최댓값을 갖는다.

$-(x-4)^2+16$은 $x=4$일 때 최댓값 16을 가지므로

$a=4$, $M=\log_2 16=4$

$\therefore a+M=8$

답 8

**다른 풀이** $\log_2 x+\log_2 y=\log_2 xy$에서 밑이 1보다 크므로 $\log_2 xy$의 값은 $xy$의 값이 최대일 때 최댓값을 갖는다.

$x>0$, $y>0$이므로 $\quad x+y\ge 2\sqrt{xy}$

즉 $8\ge 2\sqrt{xy}$이므로 $\quad xy\le 16$

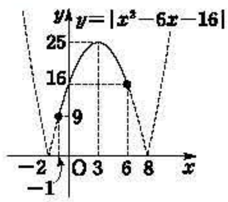
이때 등호는 $x=y=4$일 때 성립하므로 $\quad a=4$, $M=\log_2 16=4$

$\therefore a+M=8$

**0191** $f(x)=|x^2-6x-16|$으로 놓으면

$f(x)=|(x+2)(x-8)|=|(x-3)^2-25|$

따라서 $-1\le x\le 6$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$9\le f(x)\le 25$

$y=\log_5 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=\log_5 f(x)$는 $f(x)=25$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad \log_5 25=2$

답 ④

**유형 09 로그함수의 최대·최소; $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우** 본책 33쪽

함수 $y=p(\log_a x)^2+q\log_a x+r$의 최대·최소는 $\log_a x=t$로 치환하여 나타낸 $t$에 대한 이차함수 $y=pt^2+qt+r$의 최대·최소를 이용하여 구한다.

**0192** $\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 16$에서

$\log_2 1\le \log_2 x\le \log_2 16 \quad \therefore 0\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

이므로 $t=4$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad M=11$

$t=1$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad m=2$

$\therefore M-m=9$

답 ④

**0193** $y=(\log_3 x)^2+a\log_{\frac{1}{3}}x+b$에서

$y=(\log_3 x)^2-a\log_3 x+b$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $y=t^2-at+b$ ··· ❶

$x=\frac{1}{9}$, 즉 $t=\log_3\frac{1}{9}=-2$에서 최솟값 $-1$을 갖는 $t$에 대한 이차함수는

$y=(t+2)^2-1=t^2+4t+3$ ··· ❷

따라서 $a=-4$, $b=3$이므로

$ab=-12$ ··· ❸

답 $-12$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 주어진 함수를 $t$에 대한 이차함수로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ 주어진 조건을 만족시키는 $t$에 대한 이차함수를 세울 수 있다. | 50% |
| ❸ $ab$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**0194** $y=\log_5 25x\cdot\log_5\frac{x}{5}$

$=(\log_5 x+2)(\log_5 x-1)$

$=(\log_5 x)^2+\log_5 x-2$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{5}\le x\le 125$에서

$\log_5\frac{1}{5}\le\log_5 x\le\log_5 125$ $\quad\therefore -1\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+t-2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

이므로 $t=3$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad 10$

$t=-\frac{1}{2}$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad -\frac{9}{4}$

따라서 구하는 합은 $\quad 10+\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{31}{4}$

답 ①

**0195** $2^{\log x}=x^{\log 2}$이므로

$y=2^{\log x}\cdot x^{\log 2}-4(2^{\log x}+x^{\log 2})$

$=2^{\log x}\cdot 2^{\log x}-4(2^{\log x}+2^{\log x})$

$=(2^{\log x})^2-8\cdot 2^{\log x}$

$2^{\log x}=t$로 놓으면 $x>1$에서 $\quad t>1$

이때 주어진 함수는 $\quad y=t^2-8t=(t-4)^2-16$

따라서 $t=4$일 때 최솟값 $-16$을 가지므로 $2^{\log x}=4$에서

$2^{\log x}=2^2$, $\quad\log x=2\quad\therefore x=100$

즉 $a=100$, $b=-16$이므로

$a+b=84$

답 84

**유형 10 로그함수의 최대·최소; $y=x^{f(x)}$ 꼴** 본책 32쪽

$y=x^{f(x)}$ 꼴의 함수의 최대·최소는 양변에 로그를 취하여 구한다.

**0196** $y=x^{-4+\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 y=\log_2 x^{-4+\log_2 x}=(-4+\log_2 x)\log_2 x$

$=(\log_2 x)^2-4\log_2 x$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 8$에서

$\log_2 1\le\log_2 x\le\log_2 8\quad\therefore 0\le t\le 3$

이때 주어진 함수는 $\quad\log_2 y=t^2-4t=(t-2)^2-4$

따라서 $\log_2 y$는 $t=0$일 때 최댓값 0, $t=2$일 때 최솟값 $-4$를 가지므로

$\log_2 y=0$에서 $\quad y=1\quad\therefore M=1$

$\log_2 y=-4$에서 $\quad y=2^{-4}=\frac{1}{16}\quad\therefore m=\frac{1}{16}$

$\therefore Mm=\frac{1}{16}$

답 $\frac{1}{16}$

**0197** $y=\frac{x^2}{x^{\log x}}=x^{2-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y=\log x^{2-\log x}=(2-\log x)\log x$

$=-(\log x)^2+2\log x$

$\log x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$\log y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$

따라서 $\log y$는 $t=1$일 때 최댓값 1을 가지므로

$\log x=1$에서 $\quad x=10\quad\therefore a=10$

$\log y=1$에서 $\quad y=10\quad\therefore b=10$

$\therefore a+b=20$

답 20

**유형 11 로그함수의 최대·최소 ; 산술평균과 기하평균의 관계 이용** 본책 33쪽

$y=\log_a b+\log_b a$ ($\log_a b>0$, $\log_b a>0$) 꼴의 식의 최대·최소

➡ 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_a b+\log_b a\ge 2\sqrt{\log_a b\cdot\log_b a}=2$

임을 이용한다. (단, 등호는 $\log_a b=\log_b a$일 때 성립)

**0198** $y=\log_4 x+\log_x 256=\log_4 x+\frac{1}{\log_{256}x}$

$=\log_4 x+\frac{4}{\log_4 x}$

이때 $x>1$에서 $\log_4 x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_4 x+\frac{4}{\log_4 x}\ge 2\sqrt{\log_4 x\cdot\frac{4}{\log_4 x}}$

$=4$ (단, 등호는 $\log_4 x=2$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

답 ③

**0199** $\frac{1}{4}<x<25$에서 $\log 4x>0$, $\log\frac{25}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log 4x+\log\frac{25}{x}\ge 2\sqrt{\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}}$

이때 $\log 4x+\log\frac{25}{x}=\log\left(4x\cdot\frac{25}{x}\right)=\log 100=2$이므로

$2\ge 2\sqrt{\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}}$, $\quad\sqrt{\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}}\le 1$

$\therefore 0<\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}\le 1$

즉 $\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}$의 최댓값은 1이므로 $\quad b=1$ ··· ❶

한편 등호는 $\log 4x=\log\frac{25}{x}$, 즉 $4x=\frac{25}{x}$일 때 성립하므로

$x^2=\frac{25}{4}$ $\therefore x=\frac{5}{2}$ $\left(\because \frac{1}{4}<x<25\right)$

따라서 $a=\frac{5}{2}$이므로 ⋯ ❷

$a+b=\frac{7}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{7}{2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $b$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

### 유형 12 로그방정식; 밑을 같게 할 수 있는 경우 본책 34쪽

방정식의 각 항의 밑을 같게 한 다음

$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$

$(a>0,\ a\neq1,\ f(x)>0,\ g(x)>0)$

임을 이용한다.

**0200** 진수의 조건에서

$x>0,\ (x+2)^2>0$ $\therefore x>0$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2 x+\log_4 (x+2)^2=3$에서

$\log_2 x+\log_2 (x+2)=3$

$\therefore \log_2 (x^2+2x)=\log_2 8$

즉 $x^2+2x-8=0$이므로 $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

이때 ㉠에 의하여 $x=2$

답 $x=2$

**0201** 진수의 조건에서

$x+1>0,\ 2x+1>0$ $\therefore x>-\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2 (x+1)+\log_2 (2x+1)=1+\log_2 3$에서

$\log_2 (2x^2+3x+1)=\log_2 2+\log_2 3=\log_2 6$

즉 $2x^2+3x+1=6$이므로 $2x^2+3x-5=0$

$(2x+5)(x-1)=0$ $\therefore x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=1$

이때 ㉠에 의하여 $x=1$

답 $x=1$

**0202** 진수의 조건에서

$5x+5>0,\ 3x-1>0$ $\therefore x>\frac{1}{3}$ ⋯⋯ ㉠

$\log\sqrt{5x+5}=1-\frac{1}{2}\log(3x-1)$에서

$\frac{1}{2}\log(5x+5)+\frac{1}{2}\log(3x-1)=1$

$\log(5x+5)(3x-1)=2$

$\therefore \log(15x^2+10x-5)=\log 100$

즉 $15x^2+10x-5=100$이므로 $3x^2+2x-21=0$

$(x+3)(3x-7)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{7}{3}$

이때 ㉠에 의하여 $x=\frac{7}{3}$

따라서 $a=\frac{7}{3}$이므로 $3a=7$

답 ④

**0203** 밑과 진수의 조건에서

$x^2-4x+4>0,\ x^2-4x+4\neq1,\ 2-x>0$

$\therefore x<1$ 또는 $1<x<2$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

(i) $x^2-4x+4=9$일 때,

$x^2-4x-5=0,$ $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

이때 ㉠에 의하여 $x=-1$ ⋯ ❷

(ii) $2-x=1$일 때,

$x=1$

$x=1$은 ㉠을 만족시키지 않는다. ⋯ ❸

(i), (ii)에서 $x=-1$ ⋯ ❹

답 $x=-1$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ 밑과 진수의 조건을 이용하여 $x$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ 밑이 같을 때의 $x$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ 진수가 1일 때의 $x$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ❹ 해를 구할 수 있다. | 10% |

**0204** $\log_2\{\log_5(x^2+y^2)\}=1$에서

$\log_5(x^2+y^2)=2$ $\therefore x^2+y^2=25$ ⋯⋯ ㉠

$\log_{x^2} y^2=1$에서 $y^2=x^2$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2x^2=25,$ $x^2=\frac{25}{2}$ $\therefore x=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

㉡에서 $y^2=x^2=\frac{25}{2}$ $\therefore y=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 주어진 연립방정식의 해 $(x,\ y)$는

$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 또는 $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 또는

$\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 또는 $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

의 4개이다.

답 ④

**0205** $\log_2 x+\log_3 y=6$에서 $\frac{\log x}{\log 2}+\frac{\log y}{\log 3}=6$

$\log_3 x\cdot\log_2 y=8$에서

$\frac{\log x}{\log 3}\cdot\frac{\log y}{\log 2}=8,$ 즉 $\frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{\log y}{\log 3}=8$

$\frac{\log x}{\log 2}=X,$ $\frac{\log y}{\log 3}=Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} X+Y=6 \\ XY=8 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X=2,\ Y=4$ 또는 $X=4,\ Y=2$

이때 $x>y$이면 $X>Y$이므로 $X=4,\ Y=2$

즉 $\frac{\log x}{\log 2}=4,$ $\frac{\log y}{\log 3}=2$이므로

$\log x=4\log 2,\ \log y=2\log 3$

$\therefore x=2^4=16,\ y=3^2=9$

따라서 $\alpha=16,\ \beta=9$이므로 $\alpha+\beta=25$

답 ①

**유형 13, 14 로그방정식; $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우** 본책 34, 35쪽

(1) $\log_a x$ 꼴이 반복되는 로그방정식은 $\log_a x=t$로 치환하여 $t$에 대한 방정식을 푼다.

(2) 방정식 $p(\log_a x)^2+q\log_a x+r=0$의 두 근이 $\alpha, \beta$일 때, $\log_a x=t$로 치환하여 나타낸 $t$에 대한 이차방정식 $pt^2+qt+r=0$의 두 근이 $\log_a \alpha$, $\log_a \beta$임을 이용한다.

**0206** 밑의 조건에서 $x>0,\ x\neq1$

$\log_4 x^2+\log_x 4-3=0$에서

$2\log_4 x+\log_x 4-3=0$

$\log_4 x=t\ (t\neq0)$로 놓으면 $\log_x 4=\dfrac{1}{t}$이므로 주어진 방정식은

$2t+\dfrac{1}{t}-3=0,\quad 2t^2-3t+1=0$

$(2t-1)(t-1)=0 \quad \therefore t=\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=1$

즉 $\log_4 x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\log_4 x=1$이므로

$x=4^{\frac{1}{2}}=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 근의 곱은 $2\cdot4=8$

답 ④

**0207** $\log_{\frac{1}{3}} x^3+(\log_3 x)^2-10=0$에서

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x-10=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-3t-10=0$

$(t+2)(t-5)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=5$ ··· ❶

즉 $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=5$이므로

$x=3^{-2}$ 또는 $x=3^5$ ··· ❷

$\therefore \log_\alpha \beta+\log_\beta \alpha=\log_{3^{-2}} 3^5+\log_{3^5} 3^{-2}$

$=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{5}=-\dfrac{29}{10}$ ··· ❸

답 $-\dfrac{29}{10}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $t$에 대한 방정식의 해를 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $x$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ❸ $\log_\alpha \beta+\log_\beta \alpha$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**0208** $2^{\log x}=x^{\log 2}$이므로 주어진 방정식은

$(2^{\log x})^2-2^{\log x}-12=0$

$2^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-t-12=0,\quad (t+3)(t-4)=0$

$\therefore t=4\ (\because t>0)$

즉 $2^{\log x}=4=2^2$이므로 $\log x=2$

$\therefore x=10^2=100$

답 ⑤

**0209** $\log_3 \dfrac{x}{y}=(\log_3 x-\log_3 y)^2$에서

$\log_3 \dfrac{x}{y}=\left(\log_3 \dfrac{x}{y}\right)^2 \quad \therefore \log_3 \dfrac{x}{y}\left(\log_3 \dfrac{x}{y}-1\right)=0$

이때 $x\neq y$에서 $\log_3 \dfrac{x}{y}\neq0$이므로

$\log_3 \dfrac{x}{y}-1=0,\quad \dfrac{x}{y}=3$

$\therefore x=3y$

$x=3y$를 $x^2+y^2=40$에 대입하면 $9y^2+y^2=40$

$10y^2=40,\quad y^2=4$

$\therefore y=\pm2$

이때 진수의 조건에서 $x>0,\ y>0$이므로 $y=2$

$\therefore x=3\cdot2=6$

답 $x=6,\ y=2$

**0210** $(\log_3 9x)^2-3\log_3 9x^2=0$에서

$(2+\log_3 x)^2-3(2+2\log_3 x)=0$ ······ ㉠

$\log_3 x=t$로 놓으면 $(2+t)^2-3(2+2t)=0$

$\therefore t^2-2t-2=0$ ······ ㉡

방정식 ㉠의 두 근을 $\alpha, \beta$라 하면 방정식 ㉡의 두 근은 $\log_3 \alpha$, $\log_3 \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 \alpha+\log_3 \beta=2$

즉 $\log_3 \alpha\beta=2$이므로

$\alpha\beta=3^2=9$

답 ③

**0211** $\log \dfrac{x}{4}\cdot\log \dfrac{x}{3}=1$에서

$(\log x-\log 4)(\log x-\log 3)=1$

$(\log x)^2-(\log 3+\log 4)\log x+\log 4\cdot\log 3-1=0$

$\therefore (\log x)^2-\log 12\cdot\log x+\log 4\cdot\log 3-1=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-t\log 12+\log 4\cdot\log 3-1=0$

이 이차방정식의 두 근이 $\log \alpha$, $\log \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log \alpha+\log \beta=\log 12,\quad \log \alpha\beta=\log 12$

$\therefore \alpha\beta=12$

답 12

**0212** $\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-4t-6=0$

이 방정식의 두 근이 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=4,\ \log_2 \alpha\cdot\log_2 \beta=-6$

$\therefore (\log_\alpha 2)^2+(\log_\beta 2)^2$

$=\dfrac{1}{(\log_2 \alpha)^2}+\dfrac{1}{(\log_2 \beta)^2}$

$=\dfrac{(\log_2 \alpha)^2+(\log_2 \beta)^2}{(\log_2 \alpha)^2(\log_2 \beta)^2}$

$=\dfrac{(\log_2 \alpha+\log_2 \beta)^2-2\log_2 \alpha\cdot\log_2 \beta}{(\log_2 \alpha\cdot\log_2 \beta)^2}$

$=\dfrac{4^2-2\cdot(-6)}{(-6)^2}=\dfrac{7}{9}$

답 $\dfrac{7}{9}$

**0213** 주어진 방정식의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 $\alpha\beta=3$
$\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은
$t^2+kt-6=0$
이 방정식의 해는 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_3\alpha+\log_3\beta=-k$, $\log_3\alpha\beta=-k$
$\therefore k=-\log_3 3=-1$ 답 $-1$

**유형 15 양변에 로그를 취하는 방정식** 본책 35쪽

(1) $x^{\log_a f(x)}=g(x)$ 꼴: 양변에 밑이 $a$인 로그를 취한다.
⇨ $\log_a f(x)\cdot\log_a x=\log_a g(x)$
(2) $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ 꼴$(a\neq b)$: 양변에 밑이 $c$인 로그를 취한다.
⇨ $f(x)\log_c a=g(x)\log_c b$

**0214** $x^{\log x}=\dfrac{100}{x}$의 양변에 상용로그를 취하면
$\log x^{\log x}=\log\dfrac{100}{x}$, $(\log x)^2=\log 100-\log x$
$\therefore (\log x)^2+\log x-2=0$
$\log x=t$로 놓으면
$t^2+t-2=0$, $(t+2)(t-1)=0$
$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$
즉 $\log x=-2$ 또는 $\log x=1$이므로
$x=10^{-2}=\dfrac{1}{100}$ 또는 $x=10$
따라서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은
$\dfrac{1}{100}\cdot 10=\dfrac{1}{10}$ 답 $\dfrac{1}{10}$

**0215** $5^{2x}=2^{4-2x}$의 양변에 상용로그를 취하면
$2x\log 5=(4-2x)\log 2$, $2x(\log 5+\log 2)=4\log 2$
$2x\log 10=4\log 2$ $\therefore x=2\log 2=\log 4$ 답 ①

**0216** $x^{\log_2 x}-8x^2=0$, 즉 $x^{\log_2 x}=8x^2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면
$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 8x^2$, $(\log_2 x)^2=\log_2 8+\log_2 x^2$
$\therefore (\log_2 x)^2-2\log_2 x-3=0$
$\log_2 x=t$로 놓으면
$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$
즉 $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로
$x=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=2^3=8$
따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은
$\dfrac{1}{2}+8=\dfrac{17}{2}$ 답 ④

**0217** $(4x)^{\log 4}-(3x)^{\log 3}=0$, 즉 $(4x)^{\log 4}=(3x)^{\log 3}$의 양변에 상용로그를 취하면
$\log 4\cdot\log 4x=\log 3\cdot\log 3x$
$\log 4(\log 4+\log x)=\log 3(\log 3+\log x)$
$(\log 4)^2+\log 4\cdot\log x=(\log 3)^2+\log 3\cdot\log x$
$(\log 4-\log 3)\log x=(\log 3)^2-(\log 4)^2$
$\therefore \log x=\dfrac{-(\log 4+\log 3)(\log 4-\log 3)}{\log 4-\log 3}$
$=-(\log 4+\log 3)=-\log 12=\log\dfrac{1}{12}$
$\therefore x=\dfrac{1}{12}$ 답 $x=\dfrac{1}{12}$

**유형 16 로그부등식: 밑을 같게 할 수 있는 경우** 본책 36쪽

부등식의 각 항의 밑을 같게 한 후 다음을 이용한다.
① $a>1$일 때, $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)>g(x)>0$
② $0<a<1$일 때, $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Longleftrightarrow 0<f(x)<g(x)$

**0218** 진수의 조건에서
$x+3>0$, $1-x>0$ $\therefore -3<x<1$ …… ㉠
$\log_2(x+3)-\log_2(1-x)-1>0$에서
$\log_2(x+3)>\log_2(1-x)+1$
$\therefore \log_2(x+3)>\log_2 2(1-x)$
밑이 1보다 크므로 $x+3>2(1-x)$, $3x>-1$
$\therefore x>-\dfrac{1}{3}$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-\dfrac{1}{3}<x<1$
따라서 $\alpha=-\dfrac{1}{3}$, $\beta=1$이므로 $\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}$ 답 ②

**0219** 진수의 조건에서
$x+1>0$, $x+6>0$ $\therefore x>-1$ …… ㉠
$\log_{0.5}(x+1)+\log_{0.5}(x+6)>\log_{0.5}14$에서
$\log_{0.5}(x+1)(x+6)>\log_{0.5}14$
$\therefore \log_{0.5}(x^2+7x+6)>\log_{0.5}14$
밑이 1보다 작으므로 $x^2+7x+6<14$
$x^2+7x-8<0$, $(x+8)(x-1)<0$
$\therefore -8<x<1$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-1<x<1$ 답 ③

**0220** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3x-1}\geq\left(\dfrac{4}{3}\right)^{x-3}$에서 $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1-3x}\geq\left(\dfrac{4}{3}\right)^{x-3}$
밑이 1보다 크므로 $1-3x\geq x-3$
$4x\leq 4$ $\therefore x\leq 1$ …… ㉠ ⋯→ 1
$\log_2(x^2-2x+5)<3$에서 $x^2-2x+5=(x-1)^2+4>0$
즉 모든 실수 $x$가 진수의 조건을 만족시킨다.
$\log_2(x^2-2x+5)<\log_2 8$에서 밑이 1보다 크므로
$x^2-2x+5<8$, $x^2-2x-3<0$
$(x+1)(x-3)<0$ $\therefore -1<x<3$ …… ㉡ ⋯→ 2
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-1<x\leq 1$ ⋯→ 3
답 $-1<x\leq 1$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 지수부등식의 해를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ 로그부등식의 해를 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ 연립부등식의 해를 구할 수 있다. | 20% |

**0221** 조건 (가)의 진수의 조건에서

$2^x-13>0, \quad 2^x>13$

$\therefore x>\log_2 13$ ······ ㉠

$\log_3(2^x-13)<5$에서 $\quad \log_3(2^x-13)<\log_3 243$

밑이 1보다 크므로 $\quad 2^x-13<243$

$2^x<256, \quad 2^x<2^8 \quad \therefore x<8$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad \log_2 13<x<8$

조건 (나)의 진수의 조건에서

$x>0,\ x-3>0 \quad \therefore x>3$ ······ ㉢

$\log_2 x+\log_2(x-3)\ge 2$에서 $\quad \log_2 x(x-3)\ge\log_2 4$

밑이 1보다 크므로 $\quad x(x-3)\ge 4$

$x^2-3x-4\ge 0, \quad (x+1)(x-4)\ge 0$

$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 4$ ······ ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $\quad x\ge 4$

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 $x$의 값의 범위는 $4\le x<8$이므로 정수 $x$는 4, 5, 6, 7의 4개이다.

답 4

**0222** 진수의 조건에서

$x-1>0 \quad \therefore x>1$ ······ ㉠

$|\log_2(x-1)|<1$에서 $\quad -1<\log_2(x-1)<1$

$\therefore \log_2 2^{-1}<\log_2(x-1)<\log_2 2$

밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{2}<x-1<2 \quad \therefore \frac{3}{2}<x<3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad \frac{3}{2}<x<3$

이차부등식 $ax^2+bx+9<0$의 해가 $\frac{3}{2}<x<3$이므로 $\quad a>0$

해가 $\frac{3}{2}<x<3$이고 $x^2$의 계수가 $a(a>0)$인 이차부등식은

$a\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)<0 \quad \therefore a\left(x^2-\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}\right)<0$

즉 부등식 $ax^2-\frac{9}{2}ax+\frac{9}{2}a<0$이 $ax^2+bx+9<0$과 같으므로

$-\frac{9}{2}a=b,\ \frac{9}{2}a=9 \quad \therefore a=2,\ b=-9$

$\therefore a-b=11$

답 ④

**0223** $3^{x(x-2)}\le 3^{2x-3}$에서 밑이 1보다 크므로

$x(x-2)\le 2x-3, \quad x^2-4x+3\le 0$

$(x-1)(x-3)\le 0 \quad \therefore 1\le x\le 3$

$\therefore A=\{x\,|\,1\le x\le 3\}$

$\log_2(x^2+ax+b)\le\log_2 2x$에서 밑이 1보다 크므로

$x^2+ax+b\le 2x$

$\therefore x^2+(a-2)x+b\le 0$ ······ ㉠

부등식 ㉠의 해가 $1\le x\le 3$이어야 하므로

$a-2=-4,\ b=3 \quad \therefore a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

답 $-6$

**유형 17 로그부등식; 진수에 로그가 있는 경우** 본책 37쪽

> $\log_a(\log_b x)>k\ (a>0,\ a\ne 1,\ b>0,\ b\ne 1)$ 꼴의 부등식은 다음을 이용하여 푼다.
> ① 진수의 조건에서 $\quad \log_b x>0$
> ② $a>1$일 때, $\quad \log_b x>a^k$
> $\quad 0<a<1$일 때, $\quad \log_b x<a^k$

**0224** 진수의 조건에서

$x>0,\ \log_3 x>0 \quad \therefore x>1$ ······ ㉠

$\log_2(\log_3 x)\le 1$에서 $\quad \log_2(\log_3 x)\le\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $\quad \log_3 x\le 2 \quad \therefore x\le 9$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad 1<x\le 9$

답 ④

**0225** 진수의 조건에서

$x>0,\ \log_3 x>0,\ \log_4(\log_3 x)>0$

$\log_4(\log_3 x)>\log_4 1$에서 $\quad \log_3 x>1$

$\therefore x>3$ ······ ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}\{\log_4(\log_3 x)\}>0$에서 $\quad \log_{\frac{1}{2}}\{\log_4(\log_3 x)\}>\log_{\frac{1}{2}}1$

밑이 1보다 작으므로 $\quad \log_4(\log_3 x)<1$

밑이 1보다 크므로 $\quad \log_3 x<4$

$\therefore x<81$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad 3<x<81$

따라서 정수 $x$는 4, 5, 6, ⋯, 80의 77개이다.

답 77

**유형 18 로그부등식; $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우** 본책 37쪽

> 로그부등식 $p(\log_a x)^2+q\log_a x+r>0$의 해는 $\log_a x=t$로 치환하여 나타낸 $t$에 대한 이차부등식 $pt^2+qt+r>0$의 해를 이용하여 구한다.

**0226** 진수의 조건에서 $\quad x>0$ ······ ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}125x\cdot\log_5\frac{x}{5}\ge 0$에서

$(\log_{\frac{1}{5}}125+\log_{\frac{1}{5}}x)(\log_5 x-\log_5 5)\ge 0$

$\therefore (-3-\log_5 x)(\log_5 x-1)\ge 0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\quad (-3-t)(t-1)\ge 0$

$(t+3)(t-1)\le 0 \quad \therefore -3\le t\le 1$

즉 $-3\le\log_5 x\le 1$이므로 $\quad \log_5 5^{-3}\le\log_5 x\le\log_5 5$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{1}{125}\le x\le 5$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad \frac{1}{125}\le x\le 5$

따라서 $\alpha=\frac{1}{125},\ \beta=5$이므로 $\quad \alpha\beta=\frac{1}{25}$

답 $\frac{1}{25}$

**0227** 진수의 조건에서 $\quad x>0$ ······ ㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad t^2+t-2\ge 0$

$(t+2)(t-1)\ge 0 \quad \therefore t\le -2$ 또는 $t\ge 1$

즉 $\log_2 x\le -2$ 또는 $\log_2 x\ge 1$이므로

$\log_2 x\le\log_2 2^{-2}$ 또는 $\log_2 x\ge\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $x\le\frac{1}{4}$ 또는 $x\ge2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x\le\frac{1}{4}$ 또는 $x\ge2$

답 ④

**0228** $\log_{\frac{1}{4}}x=t$로 놓으면 $\frac{1}{16}<x<16$에서 밑이 1보다 작으므로

$\log_{\frac{1}{4}}16<\log_{\frac{1}{4}}x<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{16}$, 즉 $-2<\log_{\frac{1}{4}}x<2$

$\therefore -2<t<2$

이때 주어진 부등식은 $t^2+at+b<0$ ······ ㉠

해가 $-2<t<2$이고 $t^2$의 계수가 1인 이차부등식은

$(t+2)(t-2)<0$ $\therefore t^2-4<0$

이 부등식과 ㉠이 일치해야 하므로 $a=0$, $b=-4$

$\therefore a+b=-4$

답 ①

**0229** 진수의 조건에서 $x>0$ ······ ㉠

$[\log_3 x]=t$ ($t$는 정수)로 놓으면 $t^2-t-6<0$

$(t+2)(t-3)<0$ $\therefore -2<t<3$

이때 $t$는 정수이므로 $t=-1, 0, 1, 2$ → ❶

$[\log_3 x]=-1$일 때, $-1\le\log_3 x<0$ $\therefore \frac{1}{3}\le x<1$

$[\log_3 x]=0$일 때, $0\le\log_3 x<1$ $\therefore 1\le x<3$

$[\log_3 x]=1$일 때, $1\le\log_3 x<2$ $\therefore 3\le x<9$

$[\log_3 x]=2$일 때, $2\le\log_3 x<3$ $\therefore 9\le x<27$

$\therefore \frac{1}{3}\le x<27$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{3}\le x<27$ → ❷

답 $\frac{1}{3}\le x<27$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $t$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ 부등식의 해를 구할 수 있다. | 70% |

### 유형 19 양변에 로그를 취하는 부등식 (본책 37쪽)

(1) $x^{\log_a f(x)}>g(x)$ 꼴: 양변에 밑이 $a$인 로그를 취한다.
① $a>1$일 때 ➡ $\log_a f(x)\cdot\log_a x>\log_a g(x)$
② $0<a<1$일 때 ➡ $\log_a f(x)\cdot\log_a x<\log_a g(x)$

(2) $a^{f(x)}>b^{g(x)}$ 꼴 ($a\ne b$): 양변에 밑이 $c$인 로그를 취한다.
① $c>1$일 때 ➡ $f(x)\log_c a>g(x)\log_c b$
② $0<c<1$일 때 ➡ $f(x)\log_c a<g(x)\log_c b$

**0230** 진수의 조건에서 $x>0$ ······ ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}}x}>4x^3$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}}x^{\log_{\frac{1}{2}}x}<\log_{\frac{1}{2}}4x^3$

$(\log_{\frac{1}{2}}x)^2<\log_{\frac{1}{2}}4+3\log_{\frac{1}{2}}x$

$\therefore (\log_{\frac{1}{2}}x)^2-3\log_{\frac{1}{2}}x+2<0$

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 놓으면

$t^2-3t+2<0$, $(t-1)(t-2)<0$

$\therefore 1<t<2$

즉 $1<\log_{\frac{1}{2}}x<2$이므로 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로 $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha+\beta=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

**0231** 진수의 조건에서 $x>0$ ······ ㉠

$x^{\log x}<x$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}<\log x$ $\therefore (\log x)^2<\log x$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2<t$

$t^2-t<0$, $t(t-1)<0$ $\therefore 0<t<1$

즉 $0<\log x<1$이므로 $\log 1<\log x<\log 10$

밑이 1보다 크므로 $1<x<10$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<10$

따라서 정수 $x$는 $2, 3, 4, \cdots, 9$의 8개이다.

답 ①

**0232** $2^{2x+1}>5^{4-x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(2x+1)\log 2>(4-x)\log 5$

$\therefore (2\log 2+\log 5)x>4\log 5-\log 2$

이때 $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0.3=0.7$이므로

$(2\times0.3+0.7)x>4\times0.7-0.3$

$1.3x>2.5$ $\therefore x>\frac{2.5}{1.3}=1.9\times\times\times$

따라서 가장 작은 정수 $x$의 값은 2이다.

답 2

### 유형 20 로그방정식과 로그부등식의 활용; 판별식 (본책 38쪽)

(1) 로그를 포함한 이차방정식의 근에 대한 조건이 주어진 경우
➡ 이차방정식의 판별식을 이용하여 로그방정식 또는 로그부등식을 세운다.

(2) 로그방정식 또는 로그부등식의 근의 조건
➡ $\log_a x=t$로 치환하여 나타낸 $t$에 대한 이차방정식 또는 이차부등식의 근의 조건으로 바꾸어 생각한다.

**0233** 주어진 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(1+\log_3 a)^2-4(1+\log_3 a)<0$

$\therefore (\log_3 a)^2-2\log_3 a-3<0$

$\log_3 a=t$로 놓으면 $t^2-2t-3<0$

$(t+1)(t-3)<0$ $\therefore -1<t<3$

즉 $-1<\log_3 a<3$이므로 $\log_3 3^{-1}<\log_3 a<\log_3 3^3$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{3}<a<27$

답 ③

**0234** 주어진 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(\log a+1)^2-(\log a+3)=0$$

$$\therefore (\log a)^2+\log a-2=0$$

$\log a=t$로 놓으면

$$t^2+t-2=0, \quad (t+2)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=1$$

즉 $\log a=-2$ 또는 $\log a=1$이므로

$$a=10^{-2}=\frac{1}{100} \text{ 또는 } a=10$$

따라서 구하는 곱은 $\quad \frac{1}{100}\cdot 10=\frac{1}{10}$

답 $\frac{1}{10}$

**0235** $(\log x+\log 2)(\log x+\log 8)=-(\log k)^2$에서

$$(\log x)^2+(\log 2+\log 8)\log x+\log 2\cdot\log 8+(\log k)^2=0$$

$$\therefore (\log x)^2+4\log 2\cdot\log x+3(\log 2)^2+(\log k)^2=0$$

$\log x=t$로 놓으면 $\quad t^2+4t\log 2+3(\log 2)^2+(\log k)^2=0$

위의 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(2\log 2)^2-\{3(\log 2)^2+(\log k)^2\}>0$$

$$(\log k)^2-(\log 2)^2<0$$

$$(\log k+\log 2)(\log k-\log 2)<0$$

$$\therefore -\log 2<\log k<\log 2$$

즉 $\log 2^{-1}<\log k<\log 2$이고 밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{1}{2}<k<2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=2$이므로 $\quad \alpha\beta=1$

답 1

**0236** $(\log x)^2-\log x+k>0$에서 $\log x=t$로 놓으면

$$t^2-t+k>0$$

$x>0$에서 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 $t$에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-t+k=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$D=(-1)^2-4k<0 \qquad \therefore k>\frac{1}{4}$$

답 $k>\frac{1}{4}$

**0237** $x^{\log_3 x}\geq ax^4$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x}\geq\log_3 ax^4$$

$$\therefore (\log_3 x)^2\geq\log_3 a+4\log_3 x$$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad t^2\geq\log_3 a+4t$

$$\therefore t^2-4t-\log_3 a\geq 0 \qquad \cdots❶$$

$x>0$에서 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 $t$에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-4t-\log_3 a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-\log_3 a)\leq 0 \qquad \cdots❷$$

$$\therefore \log_3 a\leq -4, \text{ 즉 } \log_3 a\leq\log_3 3^{-4}$$

밑이 1보다 크므로 $\quad 0<a\leq\frac{1}{81}$

따라서 양수 $a$의 최댓값은 $\frac{1}{81}$이다. $\cdots❸$

답 $\frac{1}{81}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $t$에 대한 이차부등식을 세울 수 있다. | 30% |
| ❷ $D\leq 0$임을 이용하여 부등식을 세울 수 있다. | 40% |
| ❸ $a$의 최댓값을 구할 수 있다. | 30% |

**유형 21 로그를 포함한 부등식의 영역** 본책 38쪽

(i) 밑과 진수의 조건을 구한다.
(ii) 주어진 부등식을 만족시키는 $x$, $y$의 값의 범위를 구한다.
(iii) (i), (ii)에서 구한 범위의 공통부분을 좌표평면 위에 나타낸다.

**0238** 진수의 조건에서 $\quad y>0$

$\log_{\frac{1}{2}} x\geq\log_{\frac{1}{2}} y$에서 밑이 1보다 작으므로

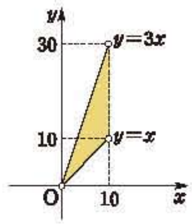
$$y\geq x \qquad \cdots㉠$$

$\log_3 x+1\geq\log_3 y$에서 $\quad \log_3 x+\log_3 3\geq\log_3 y$

$$\therefore \log_3 3x\geq\log_3 y$$

밑이 1보다 크므로 $\quad y\leq 3x \qquad \cdots㉡$

㉠은 직선 $y=x$의 윗부분(경계선 포함), ㉡은 직선 $y=3x$의 아랫부분(경계선 포함)을 나타내므로 $0<x<10$, $y>0$에서 주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.




따라서 구하는 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10=100$$

답 ④

**0239** 진수의 조건에서

$$1+y>0,\ 1-y>0 \qquad \therefore -1<y<1 \qquad \cdots㉠ \quad \cdots❶$$

$\log_x(1+y)+\log_x(1-y)<2$에서

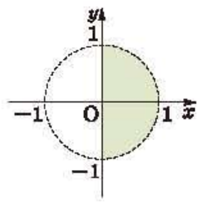
$$\log_x(1+y)(1-y)<2 \qquad \therefore \log_x(1-y^2)<\log_x x^2$$

이때 $0<x<1$이므로 $\quad 1-y^2>x^2$

$$\therefore x^2+y^2<1 \qquad \cdots㉡ \quad \cdots❷$$

$0<x<1$과 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 제외)과 같으므로 구하는 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{2} \qquad \cdots❸$$




답 $\frac{\pi}{2}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $y$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ 부등식의 해를 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ 영역의 넓이를 구할 수 있다. | 30% |

**0240** $[\log_2 x]$, $[\log_3 y]$는 정수이므로

(i) $[\log_2 x]=\pm1$, $[\log_3 y]=0$일 때,

$[\log_2 x]=-1$ 또는 $[\log_2 x]=1$이므로

$$-1\leq\log_2 x<0 \text{ 또는 } 1\leq\log_2 x<2,$$

$$\text{즉 } \log_2 2^{-1}\leq\log_2 x<\log_2 1 \text{ 또는 } \log_2 2\leq\log_2 x<\log_2 2^2$$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{1}{2}\leq x<1$ 또는 $2\leq x<4$

$[\log_3 y]=0$이므로 $\quad 0\le\log_3 y<1$, 즉 $\log_3 1\le\log_3 y<\log_3 3$
밑이 1보다 크므로 $\quad 1\le y<3$

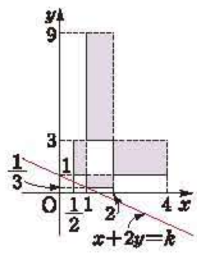
따라서 $1\le y<3$일 때, $\quad \frac{1}{2}\le x<1$ 또는 $2\le x<4$

(ii) $[\log_2 x]=0$, $[\log_3 y]=\pm1$일 때,
$[\log_2 x]=0$이므로 $\quad 0\le\log_2 x<1$, 즉 $\log_2 1\le\log_2 x<\log_2 2$
밑이 1보다 크므로 $\quad 1\le x<2$
$[\log_3 y]=-1$ 또는 $[\log_3 y]=1$이므로
$-1\le\log_3 y<0$ 또는 $1\le\log_3 y<2$,
즉 $\log_3 3^{-1}\le\log_3 y<\log_3 1$ 또는 $\log_3 3\le\log_3 y<\log_3 3^2$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{1}{3}\le y<1$ 또는 $3\le y<9$

따라서 $1\le x<2$일 때, $\quad \frac{1}{3}\le y<1$ 또는 $3\le y<9$

(i), (ii)를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




$x+2y=k$ ($k$는 상수)로 놓으면

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

직선 ㉠이 점 $\left(1, \frac{1}{3}\right)$을 지날 때 $k$의 값이 최소이므로 $x+2y$의 최솟값은

$$1+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

**유형 22 로그방정식과 로그부등식의 실생활에의 활용** 본책 39쪽

주어진 조건에 맞게 방정식 또는 부등식을 세운 다음 양변에 상용로그를 취하여 해를 구한다.

**0241** $n$년 후의 휴대전화의 가격은
$800000\times(1-0.15)^n=0.85^n\times800000$(원)
이므로 휴대전화의 가격이 8만 원 이하가 되려면
$0.85^n\times800000\le80000 \quad \therefore 0.85^n\le\frac{1}{10}$
양변에 상용로그를 취하면
$n\log0.85\le-1$
$n(\log8.5-1)\le-1, \quad n(0.9294-1)\le-1$
$-0.0706n\le-1 \quad \therefore n\ge14.\times\times\times$
따라서 15년 후인 2031년에 휴대전화의 가격이 처음으로 8만 원 이하가 된다.

답 ⑤

**0242** 필름을 한 장 붙이면 들어오는 빛의 양의 $\frac{64}{100}$가 필름을 통과하므로 필름을 $n$장 붙이면 들어오는 빛의 양의 $\left(\frac{64}{100}\right)^n$이 필름을 통과한다.

통과한 빛의 양이 $\frac{1}{8}$ 이하가 되도록 하려면

$\left(\frac{64}{100}\right)^n\le\frac{1}{8}$ ⋯ ❶

양변에 상용로그를 취하면 $\quad n\log\frac{64}{100}\le\log\frac{1}{8}$
$n(6\log2-2)\le-3\log2$
$n(6\times0.3-2)\le-3\times0.3$
$-0.2n\le-0.9 \quad \therefore n\ge4.5$ ⋯ ❷
따라서 필름을 최소한 5장 붙여야 한다. ⋯ ❸

답 5

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ 필름의 개수 $n$에 대한 부등식을 세울 수 있다. | 30% |
| ❷ $n$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ 필름의 최소 개수를 구할 수 있다. | 10% |

**0243** 사업을 시작할 때의 자본을 $K$원이라 하면 $n$년 후의 두 회사 A, B의 자본은 각각
$K(1+0.1)^n=K\times1.1^n$(원), $K(1+0.2)^n=K\times1.2^n$(원)
$n$년 후에 B회사의 자본이 A회사의 자본의 10배 이상이 된다고 하면
$K\times1.2^n\ge10\times K\times1.1^n \quad \therefore 1.2^n\ge10\times1.1^n$
양변에 상용로그를 취하면
$n\log1.2\ge\log10+n\log1.1$
$0.079n\ge1+0.041n, \quad 0.038n\ge1$
$\therefore n\ge26.\times\times\times$
따라서 사업을 시작한 지 27년 후에 B회사의 자본이 처음으로 A회사의 자본의 10배 이상이 된다.

답 ②

**0244** 여과기를 1개 설치하면 불순물의 $\frac{4}{5}$가 여과기를 통과하므로 $n$개 설치하면 불순물의 $\left(\frac{4}{5}\right)^n$이 여과기를 통과한다.

즉 $\left(\frac{4}{5}\right)^n=\frac{1}{10}$이므로 양변에 상용로그를 취하면

$n\log\frac{4}{5}=\log\frac{1}{10}$

이때 $\log\frac{4}{5}=\log\frac{8}{10}=3\log2-1=3\times0.3-1=-0.1$이므로

$n\times(-0.1)=-1 \quad \therefore n=\frac{1}{0.1}=10$

따라서 필요한 여과기의 개수는 10이다.

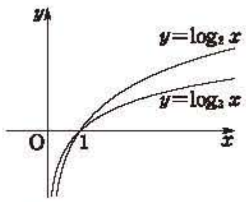
답 10

**0245** 과자의 봉지당 가격을 $a$, 무게를 $b$라 하면 가격 조정을 $n$번 시행한 후의 과자의 무게는 $0.8^n b$이므로 과자의 단위 무게당 가격은 $\frac{a}{0.8^n b}$이다.
과자의 단위 무게당 가격이 처음의 2배 이상이 되려면
$\frac{a}{0.8^n b}\ge2\times\frac{a}{b} \quad \therefore 0.8^n\le\frac{1}{2}$
양변에 상용로그를 취하면 $\quad n\log0.8\le-\log2$
이때 $\log0.8=3\log2-1=3\times0.3010-1=-0.097$이므로
$-0.097n\le-0.3010$
$\therefore n\ge3.\times\times\times$
따라서 가격 조정을 최소 4번 시행하면 과자의 단위 무게당 가격이 처음의 2배 이상이 된다.

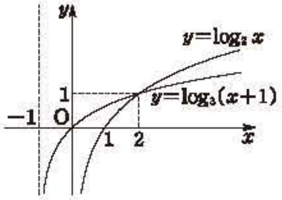
답 ③

**0246** 전략 지수함수, 로그함수의 그래프를 그려서 해결한다.

풀이 ㄱ. $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x>1$이면 $\log_2 x>\log_3 x$이다.




ㄴ. $y=\log_3(x+1)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이므로 $y=\log_2 x$, $y=\log_3(x+1)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

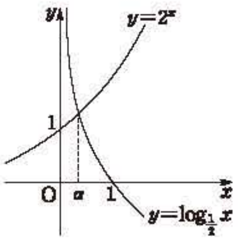



따라서 $0<x<2$이면

$\log_2 x<\log_3(x+1)$

ㄷ. $2^x+\log_2 x=0$에서 $\quad 2^x=\log_{\frac{1}{2}} x$

$y=2^x$의 그래프와 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




$0<x<a$일 때, $\quad 2^x<\log_{\frac{1}{2}} x$

$x>a$일 때, $\quad 2^x>\log_{\frac{1}{2}} x$

그런데 $x=\dfrac{1}{2}$일 때

$2^{\frac{1}{2}}>\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}$

이므로 $\quad a<\dfrac{1}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

**0247** 전략 점 P의 좌표를 $(a, a)$로 놓고 두 점 Q, R의 좌표를 $a$를 이용하여 나타낸다.

풀이 직선 $y=x$ 위의 점 P를 $P(a, a)$라 하자.

직선 $y=a$와 곡선 $y=\log_4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$의 교점 Q의 $x$좌표는

$\log_4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)=a$에서 $\quad x-\dfrac{1}{4}=4^a \quad \therefore x=4^a+\dfrac{1}{4}$

$\therefore Q\left(4^a+\dfrac{1}{4}, a\right)$

직선 $x=a$와 곡선 $y=2^x$의 교점 R의 좌표는 $(a, 2^a)$이고 $\triangle PQR$가 $\overline{PQ}=\overline{PR}$인 직각이등변삼각형이므로

$4^a+\dfrac{1}{4}-a=2^a-a \quad \therefore 4^a-2^a+\dfrac{1}{4}=0$

$2^a=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-t+\dfrac{1}{4}=0$

$\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2=0 \quad \therefore t=\dfrac{1}{2}$

즉 $2^a=\dfrac{1}{2}=2^{-1}$이므로 $\quad a=-1$

따라서 $P(-1, -1)$, $Q\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$, $R\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$이므로

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{PR}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{9}{8}$$

답 ③

**0248** 전략 먼저 두 점 O, A를 평행이동한 점의 좌표를 구한다.

풀이 원점 $O(0, 0)$과 점 $A(1, 0)$을 $x$축의 방향으로 5만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점을 각각 O′, A′이라 하면

$O'(5, 3)$, $A'(6, 3)$

$y=\log_2(x+a)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이므로 그래프가 점 O′을 지날 때 $a$의 값이 최대이고, 점 A′을 지날 때 $a$의 값이 최소이다.

그래프가 점 O′을 지날 때, $\log_2(5+a)=3$이므로

$5+a=2^3 \quad \therefore a=3$

그래프가 점 A′을 지날 때, $\log_2(6+a)=3$이므로

$6+a=2^3 \quad \therefore a=2$

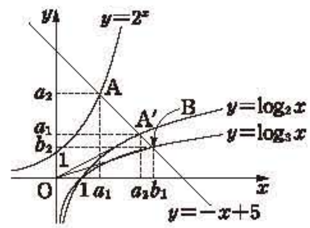
따라서 $a$의 최댓값은 3, 최솟값은 2이므로 구하는 합은

$3+2=5$

답 5

**0249** 전략 $y=2^x$의 역함수가 $y=\log_2 x$임을 이용한다.

풀이 $y=2^x$의 역함수가 $y=\log_2 x$이므로 곡선 $y=2^x$과 직선 $y=-x+5$가 만나는 점이 $A(a_1, a_2)$일 때 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=-x+5$가 만나는 점을 A′이라 하면 $\quad A'(a_2, a_1)$




ㄱ. 위의 그림에서 $\quad a_1>b_2$

ㄴ. 두 점 A, B는 직선 $y=-x+5$, 즉 $x+y=5$ 위의 점이므로

$a_1+a_2=b_1+b_2=5$

ㄷ. (직선 OA′의 기울기)>(직선 OB의 기울기)이므로

$\dfrac{a_1}{a_2}>\dfrac{b_2}{b_1}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

**0250** 전략 주어진 조건을 $a$, $b$, $c$에 대입하여 $k$의 값을 먼저 구한다.

풀이 $a=10$, $c=8$일 때 $b=4$이므로

$\log\dfrac{4}{10}=-1+k\log 8, \quad k\log 8=\log\dfrac{4}{10}+1=\log 4$

$3k\log 2=2\log 2, \quad 3k=2$

$\therefore k=\dfrac{2}{3}$

따라서 $a=20$, $c=27$일 때 염료 B의 질량을 $x$g이라 하면

$\log\dfrac{x}{20}=-1+\dfrac{2}{3}\log 27, \quad \log\dfrac{x}{20}=-1+\log 9$

$\log\dfrac{x}{20}=\log\dfrac{9}{10} \quad \therefore x=18$

따라서 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 18g이다.

답 ⑤

**0251** 전략 $\log_3 x=t$로 놓고 $\log_3\dfrac{x^3}{y}$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

**풀이** $\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 8$에서 $0\le t\le 3$이고

$$\log_2\frac{x^2}{y}=2\log_2 x-\log_2 y$$
$$=2\log_2 x-(\log_2 x)^2$$
$$=2t-t^2=-(t-1)^2+1$$

따라서 $\log_2\frac{x^2}{y}$은 $t=1$일 때 최댓값 1, $t=3$일 때 최솟값 $-3$을 갖는다.

즉 $-3\le\log_2\frac{x^2}{y}\le 1$이므로 $\quad\log_2 2^{-3}\le\log_2\frac{x^2}{y}\le\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $\quad\frac{1}{8}\le\frac{x^2}{y}\le 2$

따라서 구하는 합은 $\quad 2+\frac{1}{8}=\frac{17}{8}$

답 $\frac{17}{8}$

**0252** **전략** $\log_4 x=n+\alpha$($n$은 정수, $0\le\alpha<1$)로 놓는다.

**풀이** $\log_4 x=n+\alpha$ ($n$은 정수, $0\le\alpha<1$)로 놓으면

$\log_{\frac{1}{4}} x=-\log_4 x=-n-\alpha$

(i) $\alpha=0$일 때,

$\log_4 x=[\log_4 x]=n$, $\log_{\frac{1}{4}} x=[\log_{\frac{1}{4}} x]=-n$이므로 주어진 식을 만족시킨다.

따라서 $\log_4 x=n$에서 $\quad x=4^n$

이때 $1\le x\le 1000$이므로

$x=1,\ 4,\ 4^2,\ 4^3,\ 4^4$

(ii) $\alpha\ne 0$일 때,

$[\log_4 x]=n$, $[\log_{\frac{1}{4}} x]=-n-1$이므로 주어진 식에 대입하면

$(n+\alpha)-n=(-n-\alpha)-(-n-1)$

$2\alpha=1\quad\therefore\ \alpha=\frac{1}{2}$

따라서 $\log_4 x=n+\frac{1}{2}$이므로 $\quad x=4^{n+\frac{1}{2}}=2^{2n+1}$

이때 $1\le x\le 1000$이므로

$x=2,\ 2^3,\ 2^5,\ 2^7,\ 2^9$

(i), (ii)에서 주어진 식을 만족시키는 자연수 $x$는 10개이다.

답 ④

**0253** **전략** $a>1$일 때와 $0<a<1$일 때로 나누어 생각한다.

**풀이** 진수의 조건에서

$5-x>0,\ x+3>0\quad\therefore\ -3<x<5\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\log_a(5-x)<\log_a(x+3)+1$에서

$\log_a(5-x)<\log_a a(x+3)$

(i) $a>1$일 때,

$5-x<a(x+3),\quad (a+1)x>5-3a$

$\therefore\ x>\frac{5-3a}{a+1}$ ($\because a+1>0$) $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 ㉠, ㉡의 공통 범위가 $-1<x<5$이어야 하므로

$\frac{5-3a}{a+1}=-1,\quad 5-3a=-a-1$

$\therefore\ a=3$

(ii) $0<a<1$일 때,

$5-x>a(x+3),\quad (a+1)x<5-3a$

$\therefore\ x<\frac{5-3a}{a+1}$ ($\because a+1>0$) $\quad\cdots\cdots$ ㉢

이때 ㉠, ㉢의 공통 범위가 $-1<x<5$가 되도록 하는 $a$의 값은 존재하지 않는다.

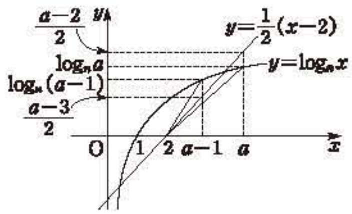
(i), (ii)에서 $\quad a=3$

답 3

**0254** **전략** 두 점 $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}$임을 이용한다.

**풀이** 점 $(2,\ 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x-2)$




조건 (나)를 만족시키는 가장 작은 자연수가 $a$이므로

$\frac{\log_n a}{a-2}\le\frac{1}{2}<\frac{\log_n(a-1)}{(a-1)-2}$ — 두 점 $(2,\ 0)$, $(a-1,\ \log_n(a-1))$을 지나는 직선의 기울기

$\frac{\log_n a}{a-2}\le\frac{1}{2}$에서 $\quad\log_n a\le\frac{a-2}{2}$ ($\because a-2\ge 1$) $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{2}<\frac{\log_n(a-1)}{a-3}$에서

$\log_n(a-1)>\frac{a-3}{2}$ ($\because a-3\ge 0$) $\quad\cdots\cdots$ ㉡

조건 (가)에 의하여 $a\ge 3$이므로 $n>3$인 자연수 $n$에 대하여

(i) $a=3$일 때

㉠에서 $\quad\log_n 3\le\frac{1}{2}\quad\therefore\ 3\le n^{\frac{1}{2}}$

양변을 제곱하면 $\quad n\ge 9$

㉡에서 $\log_n 2>0$은 $n>3$인 자연수 $n$에 대하여 항상 성립한다.

따라서 $n\ge 9$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $f(n)=3$이다.

(ii) $a=4$일 때

㉠에서 $\quad\log_n 4\le 1\quad\therefore\ 4\le n$

㉡에서 $\quad\log_n 3>\frac{1}{2}\quad\therefore\ n^{\frac{1}{2}}<3$

양변을 제곱하면 $\quad n<9$

따라서 $4\le n<9$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $f(n)=4$이다.

(i), (ii)에서 $\quad f(n)=\begin{cases}4 & (4\le n<9)\\ 3 & (n\ge 9)\end{cases}$

$$\therefore\ \sum_{n=4}^{30}f(n)=\sum_{n=4}^{8}f(n)+\sum_{n=9}^{30}f(n)$$
$$=4\cdot 5+3\cdot 22=86$$

답 86

**0255** **전략** 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $ax+by=r^2$임을 이용한다.

**풀이** 원 $x^2+y^2=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n$과 직선 $y=x$의 교점을 $(a,\ a)$ $(a>0)$

라 하면 $a^2+a^2=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n$에서

$$2a^2=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n, \quad a^2=\left(\frac{9}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{2}\right)^{2n}$$

$$\therefore a=\left(\frac{3}{2}\right)^n \ (\because a>0)$$

따라서 원 $x^2+y^2=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n$ 위의 점 $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n, \left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$에서의 접선의 방정식은 $\left(\frac{3}{2}\right)^n x+\left(\frac{3}{2}\right)^n y=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n$

$$\therefore x+y=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

따라서 접선과 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n$$

이고 넓이가 20 이상이므로 $2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n\ge20$에서 $\left(\frac{9}{4}\right)^n\ge10$

양변에 상용로그를 취하면 $\log\left(\frac{9}{4}\right)^n\ge1$

$$n(2\log3-2\log2)\ge1$$

이때 $2\log3-2\log2=2\times0.48-2\times0.30=0.36$이므로

$$n\ge\frac{1}{0.36}=2.7\times\times\times$$

따라서 자연수 $n$의 최솟값은 3이다.

답 3

**0256** 전략 $x^2$의 계수가 0일 때와 0이 아닐 때로 나누어 생각한다.

풀이 (i) $1-\log_3a=0$, 즉 $a=3$일 때,

주어진 부등식은 $1>0$

따라서 모든 실수 $x$에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $1-\log_3a\ne0$, 즉 $a\ne3$일 때,

모든 실수 $x$에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$1-\log_3a>0$에서 $\log_3a<1$

$\therefore a<3$ …… ㉠

이차방정식 $(1-\log_3a)x^2-2(1-\log_3a)x+\log_3a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(1-\log_3a)^2-(1-\log_3a)\log_3a<0$$

$$\therefore 2(\log_3a)^2-3\log_3a+1<0$$

$\log_3a=t$로 놓으면 $2t^2-3t+1<0$

$(2t-1)(t-1)<0$ $\therefore \frac{1}{2}<t<1$

즉 $\frac{1}{2}<\log_3a<1$이므로 $\sqrt{3}<a<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\sqrt{3}<a<3$

(i), (ii)에서 $\sqrt{3}<a\le3$

따라서 구하는 자연수 $a$의 합은

$2+3=5$

답 5

**0257** 전략 진수의 조건과 주어진 부등식을 동시에 만족시키는 실수 $x$, $y$에 대하여 점 $(x, y)$의 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.

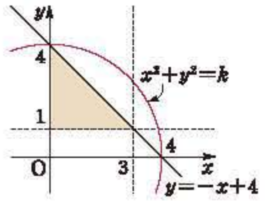
풀이 진수의 조건에서

$-x+3>0$, $y-1>0$ $\therefore x<3$, $y>1$ …… ㉠

$\log(-x+3)\ge\log(y-1)$에서 밑이 1보다 크므로

$-x+3\ge y-1$ $\therefore y\le-x+4$ …… ㉡

$x\ge0$과 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.




$x^2+y^2=k\,(k>0)$로 놓으면 $k$의 값은 원 $x^2+y^2=k$의 반지름의 길이가 4일 때 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은

$4^2=16$

답 ④

**0258** 전략 선수 A, B의 $n$년 후의 연봉을 각각 구하여 비교한다.

풀이 $n$년 후에 A의 연봉이 B의 연봉을 초과한다고 하면

$6\times1.28^n>8\times1.2^n$, 즉 $3\times1.28^n>4\times1.2^n$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log3+n\log1.28>2\log2+n\log1.2$$

$$n(\log1.28-\log1.2)>2\log2-\log3$$

$$n\log\frac{32}{30}>2\log2-\log3$$

$$n(5\log2-\log3-1)>2\log2-\log3$$

$$\therefore n>\frac{2\log2-\log3}{5\log2-\log3-1}=\frac{0.1249}{0.0279}=4.4\times\times\times$$

따라서 5년 후, 즉 2021년에 A의 연봉이 처음으로 B의 연봉을 초과한다.

답 ⑤

**0259** 전략 두 점 A, G가 함수 $y=\log_4x$의 그래프 위의 점임을 이용하여 두 점 A, G의 좌표를 구한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $\overline{BC}=3l$, $\overline{CE}=4l\ (l>0)$이라 하고 $\overline{AB}=k\,(k>0)$라 하자.

조건 (나)에서 □GCEF=4□ABCD이므로

$\overline{GC}\cdot\overline{CE}=4\overline{AB}\cdot\overline{BC}$, $(k+1)\cdot4l=4k\cdot3l$

$k+1=3k$ $\therefore k=\frac{1}{2}$ ⋯→ ❶

따라서 $A\left(a, \frac{1}{2}\right)$, $G\left(b, \frac{3}{2}\right)$이고 두 점 A, G는 $y=\log_4x$의 그래프 위에 있으므로

$\log_4a=\frac{1}{2}$, $\log_4b=\frac{3}{2}$

$\therefore a=4^{\frac{1}{2}}=2$, $b=4^{\frac{3}{2}}=8$ ⋯→ ❷

한편 $B(2, 0)$, $C(8, 0)$에서 $\overline{BC}=6$이므로 $\overline{CE}=8$

따라서 $E(16, 0)$이므로 $c=16$ ⋯→ ❸

$\therefore a+b+c=26$ ⋯→ ❹

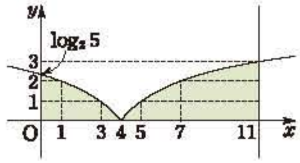
답 26

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $c$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0260** 전략 $f(x)$의 값이 정수일 때의 $x$의 값을 구하여 그릴 수 있는 정사각형의 개수의 최댓값을 구한다.

**풀이** 곡선 $y=f(x)$와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=11$로 둘러싸인 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다. ⋯ ❶




(i) $0\le x<4$일 때,

$2<\log_2 5<3$이고 $\log_2(-x+5)=2$에서

$-x+5=2^2 \quad \therefore x=1$

$\log_2(-x+5)=1$에서

$-x+5=2 \quad \therefore x=3$

즉 곡선 $y=\log_2(-x+5)$는 두 점 $(1, 2)$, $(3, 1)$을 지나므로 이 영역에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수의 최댓값은

$2\cdot 1+1\cdot 2=4$ ⋯ ❷

(ii) $4\le x\le 11$일 때,

$\log_2(x-3)=1$에서 $\quad x-3=2 \quad \therefore x=5$

$\log_2(x-3)=2$에서 $\quad x-3=2^2 \quad \therefore x=7$

$\log_2(x-3)=3$에서 $\quad x-3=2^3 \quad \therefore x=11$

즉 곡선 $y=\log_2(x-3)$은 세 점 $(5, 1)$, $(7, 2)$, $(11, 3)$을 지나므로 이 영역에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수의 최댓값은

$1\cdot 2+2\cdot 4=10$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 구하는 정사각형의 개수의 최댓값은

$4+10=14$ ⋯ ❹

답 14

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 주어진 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ $0\le x<4$일 때 정사각형의 개수의 최댓값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $4\le x\le 11$일 때 정사각형의 개수의 최댓값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❹ 정사각형의 개수의 최댓값을 구할 수 있다. | 10% |

**0261** **전략** 먼저 주어진 범위에서 $\log_3 x$의 값의 범위를 구한 후 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$임을 이용한다.

**풀이** $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=(2\log_3 x-1)^2-4(2\log_3 x-1)+a$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 9$에서 $0\le t\le 2$이고 ⋯ ❶

$(g\circ f)(x)=(2t-1)^2-4(2t-1)+a$

$=4t^2-12t+5+a$

$=4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-4+a$

이므로 $(g\circ f)(x)$는 $t=0$일 때 최댓값 $5+a$를 갖는다. ⋯ ❷

즉 $5+a=4$이므로 $\quad a=-1$ ⋯ ❸

답 $-1$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $t$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $(g\circ f)(x)$의 최댓값을 $a$로 나타낼 수 있다. | 50% |
| ❸ $a$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0262** **전략** 세 방정식을 모두 더한 식에서 각 방정식을 빼서 식을 간단히 한다.

**풀이** $\log_3 ab+\log_3 bc=4$ ⋯⋯ ㉠

$\log_3 bc+\log_3 ca=7$ ⋯⋯ ㉡

$\log_3 ca+\log_3 ab=1$ ⋯⋯ ㉢

에서 ㉠+㉡+㉢을 하면 $\quad 2(\log_3 ab+\log_3 bc+\log_3 ca)=12$

$\therefore \log_3 ab+\log_3 bc+\log_3 ca=6$ ⋯⋯ ㉣

㉣−㉠을 하면 $\quad \log_3 ca=2 \quad \therefore ca=3^2$

㉣−㉡을 하면 $\quad \log_3 ab=-1 \quad \therefore ab=3^{-1}$

㉣−㉢을 하면 $\quad \log_3 bc=5 \quad \therefore bc=3^5$ ⋯ ❶

따라서 $ca\cdot ab\cdot bc=3^2\cdot 3^{-1}\cdot 3^5$이므로

$(abc)^2=3^6 \quad \therefore abc=3^3=27$ ⋯ ❷

답 27

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $ca$, $ab$, $bc$의 값을 각각 구할 수 있다. | 80% |
| ❷ $abc$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**0263** **전략** $\log_x y$를 $t$로 치환하여 $t$에 대한 이차방정식의 해를 구한다.

**풀이** $2\log_x y-2\log_y x+3=0$에서

$2\log_x y-\frac{2}{\log_x y}+3=0$

$\log_x y=t$로 놓으면 $x>1$, $y>1$에서 $t>0$이고

$2t-\frac{2}{t}+3=0, \quad 2t^2+3t-2=0$

$(t+2)(2t-1)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2}\ (\because t>0)$ ⋯ ❶

즉 $\log_x y=\frac{1}{2}$이므로 $\quad y=\sqrt{x}$ ⋯ ❷

$y=\sqrt{x}$를 $4y^2-x^2$에 대입하면 $\quad 4x-x^2=-(x-2)^2+4$

따라서 $4y^2-x^2$은 $x=2$일 때 최댓값 4를 갖는다. ⋯ ❸

답 4

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $\log_x y=t$로 치환한 이차방정식의 해를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $x$, $y$ 사이의 관계식을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $4y^2-x^2$의 최댓값을 구할 수 있다. | 30% |

**0264** **전략** $\log_2 b$의 값의 범위를 구하여 $b$의 값이 될 수 있는 자연수를 모두 구한다.

**풀이** $|\log_2 a-\log_2 5|\ge 0$이므로 $\quad \log_2 b\le 2 \quad \therefore b\le 4$

이때 $b$가 자연수이므로 $\quad b=1, 2, 3, 4$ ⋯ ❶

(i) $b=1$일 때,

$|\log_2 a-\log_2 5|\le 2, \quad \left|\log_2 \frac{a}{5}\right|\le 2$

$\therefore -2\le \log_2 \frac{a}{5}\le 2$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{1}{4}\le \frac{a}{5}\le 4 \quad \therefore \frac{5}{4}\le a\le 20$

따라서 순서쌍 $(a, b)$는

$(2, 1)$, $(3, 1)$, $\cdots$, $(20, 1)$의 19개

(ii) $b=2$일 때,

$|\log_2 a-\log_2 5|+\log_2 2\le 2, \quad \left|\log_2 \frac{a}{5}\right|\le 1$

$\therefore -1\le \log_2 \frac{a}{5}\le 1$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{2}\le\frac{a}{5}\le 2$ $\quad\therefore \frac{5}{2}\le a\le 10$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 2),\ (4,\ 2),\ \cdots,\ (10,\ 2)$의 8개

(iii) $b=3$일 때,

$|\log_2 a-\log_2 5|+\log_2 3\le 2$

$\left|\log_2\frac{a}{5}\right|\le 2-\log_2 3,\quad \left|\log_2\frac{a}{5}\right|\le\log_2\frac{4}{3}$

$\therefore -\log_2\frac{4}{3}\le\log_2\frac{a}{5}\le\log_2\frac{4}{3}$

밑이 1보다 크므로 $\frac{3}{4}\le\frac{a}{5}\le\frac{4}{3}$ $\quad\therefore \frac{15}{4}\le a\le\frac{20}{3}$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(4,\ 3),\ (5,\ 3),\ (6,\ 3)$의 3개

(iv) $b=4$일 때,

$|\log_2 a-\log_2 5|+\log_2 4\le 2$

$\left|\log_2\frac{a}{5}\right|\le 0,\quad \log_2\frac{a}{5}=0$

$\therefore a=5$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(5,\ 4)$의 1개 ··· ❷

이상에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$19+8+3+1=31$ ··· ❸

답 31

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $b$의 값이 될 수 있는 자연수를 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ $b=1,\ 2,\ 3,\ 4$일 때 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다. | 20% |

**0265** 전략 $\log_5 x=X$, $\log_5 y=Y$로 놓고 색칠한 부분을 $X$, $Y$에 대한 연립부등식으로 나타내어 본다.

풀이 $\log_5 x=X$, $\log_5 y=Y$로 놓고 색칠한 부분을 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases}X\ge -1\\ 1\le Y\le 2\\ Y\ge X+1\end{cases}$ ··· ❶

$X\ge -1$에서 $\quad \log_5 x\ge -1$

$\therefore x\ge\frac{1}{5}$ ······ ㉠

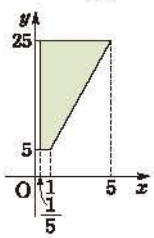
$1\le Y\le 2$에서 $\quad 1\le\log_5 y\le 2$

$\therefore 5\le y\le 25$ ······ ㉡

$Y\ge X+1$에서 $\quad \log_5 y\ge\log_5 x+1$

$\log_5 y\ge\log_5 5x$ $\quad\therefore y\ge 5x$ ······ ㉢

따라서 점 $(x,\ y)$가 나타내는 영역은 세 부등식 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다. ··· ❷




따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{24}{5}\right)\cdot 20=56$ ··· ❸

답 56

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $\log_5 x$, $\log_5 y$에 대한 연립부등식을 세울 수 있다. | 20% |
| ❷ 점 $(x,\ y)$가 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있다. | 60% |
| ❸ 점 $(x,\ y)$가 나타내는 영역의 넓이를 구할 수 있다. | 20% |



## 03 지수함수와 로그함수의 미분

**0266** $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=0$ 답 0

**0267** $\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x}{3\cdot 3^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^x=0$ 답 0

**0268** $\lim_{x\to\infty}(3^x-2^x)=\lim_{x\to\infty}3^x\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}=1$이므로 $\lim_{x\to\infty}3^x\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}=\infty$

답 $\infty$

**0269** $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{2x}+1}{3^{2x}-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9^x+1}{9^x-1}$

이때 $\lim_{x\to-\infty}9^x=0$이므로 $\lim_{x\to-\infty}\frac{9^x+1}{9^x-1}=-1$ 답 $-1$

**0270** $\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^x-5\right\}=1-5=-4$ 답 $-4$

**0271** $\lim_{x\to 2}\frac{3^x}{4^{x+1}-2^x}=\frac{3^2}{4^3-2^2}=\frac{9}{64-4}=\frac{3}{20}$ 답 $\frac{3}{20}$

**0272** $\lim_{x\to\infty}\log\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}(-\log x)=-\infty$ 답 $-\infty$

**0273** $\lim_{x\to 0+}\log_4 4x=\lim_{x\to 0+}(1+\log_4 x)=-\infty$ 답 $-\infty$

**0274** $\lim_{x\to\infty}\{\log_5(x+1)-\log_5 x\}=\lim_{x\to\infty}\left(\log_5\frac{x+1}{x}\right)$

$=\log_5\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}\right)$

$=\log_5 1=0$ 답 0

**0275** $x-1=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 1+}\log_{\frac{1}{3}}(x-1)=\lim_{t\to 0+}\log_{\frac{1}{3}}t=\infty$ 답 $\infty$

**0276** $\lim_{x\to 16}\log_2 x=\log_2 16=4$ 답 4

**0277** $\lim_{x\to 3+}\{\log(x^2-9)-\log(x-3)\}=\lim_{x\to 3+}\left(\log\frac{x^2-9}{x-3}\right)$

$=\lim_{x\to 3+}\{\log(x+3)\}$

$=\log\left\{\lim_{x\to 3+}(x+3)\right\}$

$=\log 6$ 답 $\log 6$

**0278** $\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$ 답 $\frac{1}{e}$

**0279** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}$ 답 $e^{\frac{3}{2}}$

**0280** 답 $e^2$

**0281** 답 $\frac{1}{e}$

**0282** 답 $\ln 10$

**0283** $e^{2x}=\frac{1}{4}$에서 $2x=\ln\frac{1}{4}$, $2x=-2\ln 2$

$\therefore x=-\ln 2$ 답 $-\ln 2$

**0284** $\ln e^3=3\ln e=3$ 답 $3$

**0285** $\ln\sqrt{e}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

**0286** $\ln\frac{1}{2e}=\ln(2e)^{-1}=-(\ln 2+\ln e)$

$=-\ln 2-1$ 답 $-\ln 2-1$

**0287** $\frac{1}{\log_5 e}+\frac{1}{\log_2 e}=\ln 5+\ln 2=\ln 10$ 답 $\ln 10$

**0288** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot 4$

$=1\cdot 4=4$ 답 $4$

**0289** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^5}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\ln(1+x)}{x}$

$=5\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=5\cdot 1=5$ 답 $5$

**0290** $\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(1-3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(1-3x)}{-3x}\cdot(-3)$

$=\frac{1}{\ln 3}\cdot(-3)=-\frac{3}{\ln 3}$ 답 $-\frac{3}{\ln 3}$

**0291** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}\cdot(-1)$

$=1\cdot(-1)=-1$ 답 $-1$

**0292** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(e^{2x}-1)}{2x}=1\cdot 1=1$

답 $1$

**0293** $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$

답 $\ln\sqrt{2}$

**0294** 답 $y'=-3e^x$

**0295** $y=e\cdot e^x$이므로 $y'=e\cdot(e^x)'=e\cdot e^x=e^{x+1}$

답 $y'=e^{x+1}$

**0296** $y'=1\cdot e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$ 답 $y'=(x+2)e^x$

**0297** $y'=3x^2\cdot e^x+x^3\cdot e^x=x^2(x+3)e^x$ 답 $y'=x^2(x+3)e^x$

**0298** 답 $y'=3\ln 2\cdot 2^x$

**0299** $y=5\cdot 5^{2x}=5\cdot 25^x$이므로

$y'=5\cdot 25^x\ln 25=10\ln 5\cdot 5^{2x}$ 답 $y'=10\ln 5\cdot 5^{2x}$

**0300** $y'=4\cdot 3^x+4x\cdot 3^x\ln 3=4\cdot 3^x(x\ln 3+1)$

답 $y'=4\cdot 3^x(x\ln 3+1)$

**0301** $y'=2^x\ln 2\cdot(x-1)+2^x\cdot 1=2^x\{(x-1)\ln 2+1\}$

답 $y'=2^x\{(x-1)\ln 2+1\}$

**0302** $y=\ln 2+\ln x$이므로 $y'=\frac{1}{x}$ 답 $y'=\frac{1}{x}$

**0303** $y=5\ln x$이므로 $y'=\frac{5}{x}$ 답 $y'=\frac{5}{x}$

**0304** $y=x(\ln 3+\ln x)$이므로

$y'=1\cdot(\ln 3+\ln x)+x\cdot\frac{1}{x}=\ln 3x+1$ 답 $y'=\ln 3x+1$

**0305** $y'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$ 답 $y'=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

**0306** 답 $y'=\frac{2}{x\ln 10}-1$

**0307** $y=\log_2 5+\log_2 x$이므로 $y'=\frac{1}{x\ln 2}$ 답 $y'=\frac{1}{x\ln 2}$

**0308** $y=x(\log_5 2+\log_5 x)$이므로

$y'=1\cdot(\log_5 2+\log_5 x)+x\cdot\frac{1}{x\ln 5}=\log_5 2x+\frac{1}{\ln 5}$

답 $y'=\log_5 2x+\frac{1}{\ln 5}$

**0309** $y=(\log_3 x)(\log_3 x)$이므로

$y'=\frac{1}{x\ln 3}\cdot\log_3 x+\log_3 x\cdot\frac{1}{x\ln 3}=\frac{2\log_3 x}{x\ln 3}$

답 $y'=\frac{2\log_3 x}{x\ln 3}$

### 유형 01 지수함수의 극한 본책 43쪽

(i) 주어진 식을 다음과 같이 변형한다.

① $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 ➡ 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 나눈다.

② $\infty-\infty$ 꼴 ➡ 밑이 가장 큰 항으로 묶는다.

(ii) $a>1$이면 $\lim_{x\to\infty}a^x=\infty$, $0<a<1$이면 $\lim_{x\to\infty}a^x=0$임을 이용한다.

**0310** $\lim_{x\to\infty}(4^x-3^x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to\infty}\left\{4^x\left(1-\frac{3^x}{4^x}\right)\right\}^{\frac{1}{2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}(4^x)^{\frac{1}{2x}}\cdot\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}(2^{2x})^{\frac{1}{2x}}\cdot\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2x}}$

$=2\cdot 1=2$ 답 ④

**0311** $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-2^x}{3^x+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=3$ 답 ③

**0312** $\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot 3^{x+1}+2}{3^{x-1}-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot 3^2+\frac{2}{3^{x-1}}}{1-\frac{4}{3^{x-1}}}=9a$ ··· ➊

따라서 $9a=18$이므로 $a=2$ ··· ➋

답 2

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다. | 60% |
| ➋ $a$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**0313** $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+4x^3-1}{1+2x^3}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^{-t}-4t^3-1}{1-2t^3}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{2^{-t}}{t^3}-4-\frac{1}{t^3}}{\frac{1}{t^3}-2}$$
$$=\frac{-4}{-2}=2$$

답 ⑤

**0314** ㄱ. $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{3^x-3^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{3^{-t}}{3^{-t}-3^t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^t}{\left(\frac{1}{9}\right)^t-1}=0$$

ㄴ. $\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}5^{\frac{1}{x}}=\infty,\ \lim_{x\to0+}5^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=0,$$
$$\lim_{x\to0-}5^{\frac{1}{x}}=0,\ \lim_{x\to0-}5^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0-}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\infty$$
$$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{5^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}-5^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{1-5^{-\frac{2}{x}}}=1,$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{5^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}-5^{-\frac{1}{x}}}=0$$

따라서 $\lim_{x\to0+}\frac{5^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}-5^{-\frac{1}{x}}}\neq\lim_{x\to0-}\frac{5^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}-5^{-\frac{1}{x}}}$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{5^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}-5^{-\frac{1}{x}}}$의 값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to0-$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to0-}\frac{1}{1-2^t}=\infty$$

ㄹ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{\sqrt{3^x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x=0$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

**0315** $\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}2^{\frac{1}{x}}=\infty,\ \lim_{x\to0-}2^{\frac{1}{x}}=0$$
$$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{2^{\frac{1}{x}}+2^b}{2^{\frac{1}{x}}+2^a}=\lim_{x\to0+}\frac{1+2^{b-\frac{1}{x}}}{1+2^{a-\frac{1}{x}}}=1,$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{2^{\frac{1}{x}}+2^b}{2^{\frac{1}{x}}+2^a}=\frac{2^b}{2^a}=2^{b-a}$$

이때 $\lim_{x\to0}\frac{2^{\frac{1}{x}}+2^b}{2^{\frac{1}{x}}+2^a}$의 값이 존재하려면

$c=1=2^{b-a}$ $\therefore b-a=0$

$\therefore a-b+c=-(b-a)+c=1$

답 1

**유형 02 로그함수의 극한** 본책 48쪽

(i) 주어진 식을 로그의 성질을 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}$ 꼴로 변형한다.

(ii) $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}=\log_a\left\{\lim_{x\to\infty}f(x)\right\}$임을 이용한다.

$\left(\text{단, } a>0,\ a\neq1,\ f(x)>0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)>0\right)$

**0316** $\lim_{x\to1}(\log_2|x^2-1|-\log_2|x^3-1|)$

$$=\lim_{x\to1}\left(\log_2\left|\frac{x^2-1}{x^3-1}\right|\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\log_2\left|\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right|\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left(\log_2\left|\frac{x+1}{x^2+x+1}\right|\right)$$
$$=\log_2\left(\lim_{x\to1}\left|\frac{x+1}{x^2+x+1}\right|\right)$$
$$=\log_2\frac{2}{3}=1-\log_2 3$$

답 ②

**SSEN 특강**

**로그의 성질**

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때,

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, $k$는 실수)

**0317** $\lim_{x\to\infty}(\log_5\sqrt{5x^2+x}-\log_5 x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\log_5\frac{\sqrt{5x^2+x}}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\log_5\sqrt{\frac{5x^2+x}{x^2}}\right)$$
$$=\log_5\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{5x^2+x}{x^2}}\right)=\log_5\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt{5+\frac{1}{x}}\right)$$
$$=\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

**0318** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_4(6^x+8^x)=\lim_{x\to\infty}\log_4(6^x+8^x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_4\left[8^x\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log_4\left[\lim_{x\to\infty}8\cdot\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\log_4(8\cdot1)=\frac{3}{2}$$

답 ③

**0319** $\lim_{x\to\infty}\{\log_3(ax-1)-\log_3(2x+1)\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\log_3\frac{ax-1}{2x+1}\right)=\log_3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{ax-1}{2x+1}\right)$$

$$=\log_3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{a-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)=\log_3\frac{a}{2}$$

따라서 $\log_3\frac{a}{2}=3$이므로 $\frac{a}{2}=3^3$ $\therefore a=54$

답 54

**유형 03** $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 꼴의 극한 본책 48쪽

① $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

② $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{ab}=e^{ab}$ (단, $a$, $b$는 0이 아닌 상수)

**0320** $\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}+\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^6+\lim_{x\to0}\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\}^{-6}$$

$$=e^6+\frac{1}{e^6}$$

$\therefore k=6$

답 ⑤

**0321** $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{1-x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{2}{t}}=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-2}$$

$$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

답 $\frac{1}{e^2}$

**0322** $\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)(1+ax)\right\}^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot(1+ax)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right\}^{\frac{1}{a}}\cdot\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{a}\right]$$

$=e^{\frac{1}{a}}\cdot e^{a}=e^{a+\frac{1}{a}}$ ··· ❶

따라서 $e^{a+\frac{1}{a}}=e^{\frac{5}{2}}$이므로 $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$ ··· ❷

$2a^2-5a+2=0$, $(2a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 자연수) ··· ❸

답 2

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다. | 50% |
| ❷ $a$에 대한 식을 세울 수 있다. | 20% |
| ❸ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**유형 04** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 꼴의 극한 본책 49쪽

① $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

② $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{ab}=e^{ab}$ (단, $a$, $b$는 0이 아닌 상수)

**0323** $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^{2n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=e$$

답 ③

**0324** $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{3x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{a}{t}\right)^{-3t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{t}\right)^{\frac{t}{a}}\right\}^{-3a}$$

$$=e^{-3a}$$

따라서 $e^{-3a}=e^{-6}$이므로 $-3a=-6$ $\therefore a=2$

답 2

**0325** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}}$$

$$=\frac{e}{e^{-1}}=e^2$$

답 ⑤

**0326** ㄱ. $x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-1}(x+2)^{\frac{1}{x+1}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=e$$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}=\frac{1}{e}$

이상에서 극한값이 $e$인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

**유형 05** $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ 꼴의 극한 본책 50쪽

① $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ ② $\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

**0327** $\lim_{x\to0}\frac{6x}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{\ln(1+3x)}\cdot2$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}\cdot2$$

$$=\frac{1}{1}\cdot2=2$$

답 ⑤

03 지수함수와 로그함수의 미분

**0328** $a=\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot\dfrac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot\dfrac{3}{2}$

$=1\cdot1\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$ ··· ❶

$e^x=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$b=\lim_{x\to\infty}e^x\ln(1+e^{-x})=\lim_{t\to\infty}t\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)=1$ ··· ❷

$\therefore a+b=\dfrac{5}{2}$ ··· ❸

답 $\dfrac{5}{2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $b$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0329** $y=e^{2x}-1$로 놓으면 $e^{2x}=y+1$

$2x=\ln(y+1)$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{2}\ln(y+1)$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{1}{2}\ln(x+1)$

따라서 $g(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x+1)$이므로

$\lim_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{2x}=\dfrac{1}{2}\cdot1=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

**0330** $\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{2+3x}{2+x}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+\frac{3}{2}x}{1+\frac{1}{2}x}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left\{\ln\left(1+\dfrac{3}{2}x\right)-\ln\left(1+\dfrac{1}{2}x\right)\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{2}x\right)}{x}-\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{2}x\right)}{\frac{3}{2}x}\cdot\dfrac{3}{2}-\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}x}\cdot\dfrac{1}{2}\right\}$

$=1\cdot\dfrac{3}{2}-1\cdot\dfrac{1}{2}=1$

답 ②

**0331** $\lim_{x\to\infty}x\{\ln(x+1)-\ln(x-1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}x\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

$=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)$ ······ ㉠

$\dfrac{2}{x-1}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로 ㉠은

$\lim_{t\to0}\dfrac{t+2}{t}\cdot\ln(1+t)=\lim_{t\to0}(t+2)\cdot\dfrac{\ln(1+t)}{t}$

$=2\cdot1=2$

답 2

**0332** $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{f(n)}=e^3$의 양변에 자연로그를 취하면

$f(n)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=3$ $\quad\therefore f(n)=\dfrac{3}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{3}{1}=3$

답 3

유형 06 $\lim_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$ 꼴의 극한 본책 ■쪽

$a>0$, $a\neq1$일 때

① $\lim_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$

② $\lim_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+bx)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+bx)}{bx}\cdot b=\dfrac{b}{\ln a}$

(단, $b$는 0이 아닌 상수)

**0333** $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}\dfrac{\log_2 x}{x-1}=\lim_{t\to0}\dfrac{\log_2(1+t)}{t}=\dfrac{1}{\ln2}$

답 ④

**0334** $\lim_{x\to0}\dfrac{\log_3(4+x)-\log_3 4}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\log_3\frac{4+x}{4}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\log_3\left(1+\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}\cdot\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{\ln3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4\ln3}$

답 $\dfrac{1}{4\ln3}$

**0335** $\lim_{x\to0}\dfrac{\log_7(1+3x)}{\log_5(1-x)}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\log_7(1+3x)}{3x}\cdot\dfrac{-x}{\log_5(1-x)}\cdot(-3)$

$=\dfrac{1}{\ln7}\cdot\ln5\cdot(-3)$

$=-\dfrac{3\ln5}{\ln7}$

답 $-\dfrac{3\ln5}{\ln7}$

유형 07 $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$ 꼴의 극한 본책 ■쪽

① $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

② $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a=a$ (단, $a$는 0이 아닌 상수)

**0336** $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\dfrac{3}{x+1}$

$=1\cdot\dfrac{3}{1}=3$

답 ③

**0337** $\lim_{x\to0} f(x)(e^x-1)=\lim_{x\to0} xf(x)\cdot\frac{e^x-1}{x}$

$=\lim_{x\to0} xf(x)\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$

$=5\cdot1=5$ 답 ⑤

**0338** $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot\frac{3}{2}$

$=1\cdot1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ 답 ④

**0339** $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-x^2}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-(t+1)^2}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-(t^2+2t+1)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\left(\frac{e^t-1}{t}-t-2\right)=1-2=-1$ 답 ②

**0340** $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)}{e^x-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ln(1+3x)+\ln(1+4x)}{e^x-1}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot2+\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot3+\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot4\right\}\cdot\frac{x}{e^x-1}$

$=(1+1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4)\cdot1=10$ 답 10

**0341** $\lim_{x\to1}\frac{x^n-e^{x-1}}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^n-1-(e^{x-1}-1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)-(e^{x-1}-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}{x+1}-\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로 $\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$

$=\frac{n}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$ ➊

즉 $\frac{n}{2}-\frac{1}{2}=6$이므로 $n-1=12$

$\therefore n=13$ ➋

답 13

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다. | 80% |
| ➋ $n$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

### 유형 08 $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$ 꼴의 극한 본책 00쪽

$a>0$, $a\neq1$일 때

① $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

② $\lim_{x\to0}\frac{a^{bx}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a^{bx}-1}{bx}\cdot b=b\ln a$ (단, $b$는 0이 아닌 상수)

**0342** $\lim_{x\to0}\frac{e^x-3^{-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-(3^{-x}-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}-\frac{3^{-x}-1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{3^{-x}-1}{-x}\right)$

$=1+\ln3$ 답 ⑤

**0343** $\lim_{x\to0}\frac{(4^x-1)\log_2(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}\cdot\frac{\log_2(1+x)}{x}$

$=\ln4\cdot\frac{1}{\ln2}=2\ln2\cdot\frac{1}{\ln2}$

$=2$ 답 2

**0344** $\lim_{x\to-1}\frac{2^{x+1}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{2^{x+1}-1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}$ …… ㉠

$x+1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로 ㉠은

$\lim_{t\to0}\frac{2^t-1}{t}\cdot\frac{1}{t-2}=\ln2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln2=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ②

**0345** $x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{5^{x-2}-1-\ln(3x-5)}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{5^t-1-\ln(3t+1)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{5^t-1}{t}-\frac{\ln(3t+1)}{3t}\cdot3\right\}$

$=\ln5-1\cdot3=\ln5-3$

답 $\ln5-3$

**0346** $\lim_{x\to0}\frac{(a+6)^x-a^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(a+6)^x-1-(a^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(a+6)^x-1}{x}-\frac{a^x-1}{x}\right\}$

$=\ln(a+6)-\ln a=\ln\frac{a+6}{a}$ ➊

따라서 $\ln\frac{a+6}{a}=2\ln2=\ln4$이므로

$\frac{a+6}{a}=4$, $a+6=4a$

$3a=6$ $\therefore a=2$ ➋

답 2

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다. | 50% |
| ➋ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

### 유형 09 지수·로그함수의 극한; 미정계수의 결정 본책 00쪽

$x\longrightarrow a$일 때

① (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

② (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

**0347** $x \to 0$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+b}-1)=0$이므로

$\sqrt{b}-1=0 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+1}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{ax+1}-1)(\sqrt{ax+1}+1)}{(e^x-1)(\sqrt{ax+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{(e^x-1)(\sqrt{ax+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{a}{\sqrt{ax+1}+1}$$
$$=1\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=2$이므로 $\quad a=4$

$\therefore a-b=3$

답 ⑤

**0348** $x \to 0$일 때 (분자) $\to$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(e^{ax+b}-1)=0$이므로 $\quad e^b=1$

$\therefore b=0$ ➊

$b=0$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+cx)}{e^{ax}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+cx)}{cx}\cdot\frac{ax}{e^{ax}-1}\cdot\frac{c}{a}$$
$$=\frac{c}{a}$$

따라서 $\frac{c}{a}=5$이므로 $\quad c=5a$ ➋

$\therefore \frac{b+c}{a}=\frac{5a}{a}=5$ ➌

답 5

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ➊ $b$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ➋ $c$를 $a$에 대하여 나타낼 수 있다. | 50% |
| ➌ $\frac{b+c}{a}$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**0349** $x \to 0$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(e^{2a+x}-b)=0$이므로 $\quad e^{2a}-b=0$

$\therefore e^{2a}=b$

$e^{2a}=b$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{be^x-b}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{b(e^x-1)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{b}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}=\frac{b}{2}$$

따라서 $\frac{b}{2}=e^2$이므로 $\quad b=2e^2$

답 ⑤

**0350** $x \to \frac{1}{2}$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(ax+b)=0$이므로 $\quad \frac{1}{2}a+b=0$

$\therefore a=-2b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{-2bx+b}{\ln 2x}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{-b(2x-1)}{\ln 2x} \quad\cdots\cdots ㉡$$

$x-\frac{1}{2}=t$로 놓으면 $x \to \frac{1}{2}$일 때 $t \to 0$이므로 ㉡은

$$\lim_{t\to 0}(-b)\cdot\frac{2t}{\ln(2t+1)}=-b$$

따라서 $-b=3$이므로 $\quad b=-3,\ a=6$ (∵ ㉠)

$\therefore a-b=9$

답 9

**0351** $x \to 0$일 때 (분자) $\to$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(ax^2+b)=0$이므로 $\quad b=0$

$b=0$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\ln(1+x)}{ax^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{a}$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

따라서 $\frac{1}{a}=6$이므로 $\quad a=\frac{1}{6}$

$\therefore 12a+b=2$

답 2

### 유형 10 지수·로그함수의 극한의 도형에의 활용 (본책 53쪽)

(i) 구하는 선분의 길이, 도형의 넓이, 점의 좌표를 지수·로그에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

**0352** $\mathrm{P}(t,\ e^t)\ (t>0)$이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}(e-1)t,\ S_2=\frac{3}{2}(e^t-1)$

$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{(e-1)t}{3(e^t-1)}$

이때 제1사분면 위의 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $t \to 0+$이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{t\to 0+}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to 0+}\frac{(e-1)t}{3(e^t-1)}=\lim_{t\to 0+}\frac{e-1}{3}\cdot\frac{t}{e^t-1}$$
$$=\frac{e-1}{3}\cdot 1=\frac{e-1}{3}$$

답 $\frac{e-1}{3}$

**0353** 점 A의 $x$좌표가 $t$이므로 $\quad \mathrm{A}(t,\ \ln(t+1))$

따라서 $S(t)=\frac{1}{2}\ln(t+1)$이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(t+1)}{t}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

**0354** $\mathrm{P}(a,\ 5^a),\ \mathrm{Q}(a,\ 2^a)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=5^a-2^a$

$\therefore \lim_{a\to0+}\frac{\overline{PQ}}{a}=\lim_{a\to0+}\frac{5^a-2^a}{a}$

$=\lim_{a\to0+}\frac{5^a-1-(2^a-1)}{a}$

$=\lim_{a\to0+}\left(\frac{5^a-1}{a}-\frac{2^a-1}{a}\right)$

$=\ln5-\ln2=\ln\frac{5}{2}$ 답 ③

**0355** R$(0, \ln3)$이고, P$(t, \ln(t+3))(t>0)$이라 하면 H$(t, \ln3)$이므로

$\overline{RH}=t$, $\overline{PH}=\ln(t+3)-\ln3$ ··· ❶

이때 제1사분면 위의 점 P가 점 R에 한없이 가까워지면 $t\to0+$이므로 구하는 극한값은

$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{PH}}{\overline{RH}}=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(t+3)-\ln3}{t}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{\ln\frac{t+3}{3}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{3}\right)}{\frac{t}{3}}\cdot\frac{1}{3}$

$=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ ··· ❷

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $\overline{RH}$, $\overline{PH}$의 길이를 $t$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ 극한값을 구할 수 있다. | 70% |

**유형 11 지수·로그함수의 연속과 미정계수** 본책 54쪽

$x\neq a$인 모든 실수 $x$에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\neq a)\\ k & (x=a)\end{cases}$ ($k$는 상수)

가 모든 실수 $x$에서 연속이면 ➡ $\lim_{x\to a}g(x)=k$

**0356** 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(a+3x)}{x}=b$ ······ ㉠

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\{\ln(a+3x)\}=0$이므로 $\ln a=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$b=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot3=1\cdot3=3$

$\therefore a+b=4$ 답 ④

**0357** 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{ax}=\lim_{x\to0-}\frac{2x^2+1}{x-1}=-1$

이때 $\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{ax}=\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$이므로

$\frac{2}{a}=-1$ $\therefore a=-2$ 답 $-2$

**0358** 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-a}{x^2}=b$ ······ ㉠

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(e^x+e^{-x}-a)=0$이므로 $2-a=0$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$b=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{x^2e^x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)^2}{x^2e^x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x}\cdot\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$

$=1\cdot1^2=1$

$\therefore a^2+b^2=2^2+1^2=5$ 답 ②

**0359** $x\neq0$일 때, $f(x)=\frac{3^x-1}{\ln(x+1)}$이고 함수 $f(x)$가 $x>-1$인 모든 실수 $x$에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{\ln(x+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)}=\ln3$ ··· ❶

한편 $f(x)=\frac{3^x-1}{\ln(x+1)}$에서 $f(2)=\frac{8}{\ln3}$이므로 ··· ❷

$f(0)f(2)=\ln3\cdot\frac{8}{\ln3}=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ❷ $f(2)$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $f(0)f(2)$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**유형 12 지수함수의 도함수** 본책 54쪽

① $y=e^x$이면 $y'=e^x$

② $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$이면 $y'=a^x\ln a$

**0360** $f'(x)=5^x\ln5\cdot(2x^3-1)+5^x\cdot6x^2$이므로

$f'(0)=1\cdot\ln5\cdot(-1)=-\ln5$ 답 ①

**0361** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이고 $f'(x)=2^x\ln2+3^x\ln3$이므로

$f'(1)=2\ln2+3\ln3=\ln2^2+\ln3^3$

$=\ln(2^2\cdot3^3)=\ln108$

$\therefore a=108$ 답 108

**0362** $f'(x)=e^x+(x-a)e^x=(x-a+1)e^x$이므로

$f'(2)=(2-a+1)e^2=(3-a)e^2$

즉 $(3-a)e^2=\frac{3}{2}e^2$이므로 $3-a=\frac{3}{2}$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

답 ③

**0363** $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$ ··· ❶

이때 $f(x)=2^{x+1}=2\cdot 2^x$에서

$f'(x)=2\cdot 2^x\cdot\ln 2=2^{x+1}\ln 2$ ··· ❷

이므로 $2f'(1)=2\cdot 2^2\cdot\ln 2=8\ln 2$ ··· ❸

답 $8\ln 2$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ 주어진 극한을 미분계수로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❷ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ 극한값을 구할 수 있다. | 20% |

SSEN 특강

**미분계수를 이용한 극한값의 계산**

(i) 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(a)$가 포함된 식으로 변형한다.

(ii) 도함수 $f'(x)$를 구한 후 $f'(a)$의 값을 구한다.

(iii) (i)의 식에 $f'(a)$의 값을 대입한다.

## 유형 13 로그함수의 도함수 본책 55쪽

① $y=\ln x$이면 $y'=\frac{1}{x}$

② $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$)이면 $y'=\frac{1}{x\ln a}$

**0364** $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$

$=2f'(1)$

이때 $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$이므로

$2f'(1)=2\cdot(0+1)=2$

답 2

**0365** $f'(x)=\frac{1}{x\ln 4}-\frac{1}{x\ln 2}=-\frac{1}{2x\ln 2}$이므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\ln 2}$

답 $-\frac{1}{\ln 2}$

**0366** $f(x)=x^2\log_5 3x=x^2(\log_5 3+\log_5 x)$이므로

$f'(x)=2x(\log_5 3+\log_5 x)+x^2\cdot\frac{1}{x\ln 5}$

$=2x(\log_5 3+\log_5 x)+\frac{x}{\ln 5}$

$=2x\log_5 3x+x\log_5 e$

따라서 $f'(1)=2\log_5 3+\log_5 e=\log_5 9e$이므로

$a=9e$

답 ⑤

**0367** $\lim_{h\to 0}\frac{f(e+2h)-f(e)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(e+2h)-f(e)}{2h}\cdot 2$

$=2f'(e)$

이때 $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}+2=2x\ln x+x+2$이므로

$2f'(e)=2(2e+e+2)=2(3e+2)$

답 ④

**0368** $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모)$\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=a-b\ln x$에서 $f(1)=a=0$ ··· ❶

한편 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$이고,

$f'(x)=-\frac{b}{x}$이므로

$-b=4$ $\therefore b=-4$ ··· ❷

따라서 $f'(x)=\frac{4}{x}$이므로 $f'(2)=2$

$\therefore a+f'(2)=2$ ··· ❸

답 2

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $b$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $a+f'(2)$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

## 유형 14 지수·로그함수의 도함수; 미분가능성 본책 55쪽

함수 $F(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq a)\\ g(x) & (x<a)\end{cases}$가 다음 조건을 모두 만족시키면 $x=a$에서 미분가능하다.

① 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

⇒ $f(a)=\lim_{x\to a-}g(x)$

② $F'(a)$가 존재한다.

⇒ $\lim_{x\to a+}f'(x)=\lim_{x\to a-}g'(x)$

**0369** $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}\ln ax=\lim_{x\to 1-}(bx^2+2)=f(1)$

$\therefore \ln a=b+2$ ······ ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>1)\\ 2bx & (x<1)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-}2bx$

$1=2b \quad \therefore b=\frac{1}{2}$

$b=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\ln a=\frac{5}{2} \quad \therefore a=e^{\frac{5}{2}}$

답 $a=e^{\frac{5}{2}}$, $b=\frac{1}{2}$

**0370** $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하다.

$f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(ax^3-1)=\lim_{x\to1-}(e^{x-1}+b)=f(1)$

$a-1=1+b \quad \therefore b=a-2$ ⋯⋯ ㉠ ⇢ ❶

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}3ax^2 & (x>1)\\ e^{x-1} & (x<1)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to1+}3ax^2=\lim_{x\to1-}e^{x-1}$

$3a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$

$a=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $b=-\frac{5}{3}$ ⇢ ❷

$\therefore ab=-\frac{5}{9}$ ⇢ ❸

답 $-\frac{5}{9}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $b$를 $a$에 대하여 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ $ab$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0371** $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(\ln x+ax^2)=\lim_{x\to1-}be^{x-1}=f(1)$

$\therefore a=b$ ⋯⋯ ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+2ax & (x>1)\\ be^{x-1} & (x<1)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to1+}\left(\frac{1}{x}+2ax\right)=\lim_{x\to1-}be^{x-1}$

$\therefore b=1+2a$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-1$

$\therefore a+b=-2$

답 ①

**0372** 전략 $a$, $b$가 1이 아닌 양수이면 $\log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}$임을 이용하여 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0+}\frac{a^x+\log_b x}{b^x+\log_a x}=\lim_{x\to0+}\frac{a^x+\frac{\ln x}{\ln b}}{b^x+\frac{\ln x}{\ln a}}$

이때 $\lim_{x\to0+}a^x=1$, $\lim_{x\to0+}b^x=1$이고, $\lim_{x\to0+}\ln x=-\infty$이므로 위의 식의 분모, 분자를 각각 $\ln x$로 나누면

$$\lim_{x\to0+}\frac{\frac{a^x}{\ln x}+\frac{1}{\ln b}}{\frac{b^x}{\ln x}+\frac{1}{\ln a}}=\frac{\frac{1}{\ln b}}{\frac{1}{\ln a}}=\frac{\ln a}{\ln b}$$
$$=\log_b a$$

따라서 $\log_b a=\frac{1}{4}$이므로

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}=4$

답 ⑤

**0373** 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$임을 이용하여 $a_n$을 구한다.

풀이 $\ln f_n(x)=\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+nx)$
$=\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ln(1+3x)$
$+\cdots+\ln(1+nx)$

이므로

$$\begin{aligned}a_n&=\lim_{x\to0}\frac{\ln f_n(x)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ln(1+3x)\\&\qquad+\cdots+\ln(1+nx)\}\\&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot2+\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot3\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\frac{\ln(1+nx)}{nx}\cdot n\right\}\\&=1+2+3+\cdots+n\\&=\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{10a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{10n(n+1)}{2n^2}=5$

답 5

**0374** 전략 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$임을 이용하여 $g(n)$을 구한다.

풀이 $g(n)=\lim_{x\to0}f(x)$

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}-n}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1+e^{2x}-1+e^{3x}-1+\cdots+e^{nx}-1}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1+e^{2x}-1+e^{3x}-1+\cdots+e^{nx}-1}{x}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2+\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3+\cdots+\frac{e^{nx}-1}{nx}\cdot n}\\&=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\\&=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} g(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2$$

답 2

**0375** 전략 로그의 정의를 이용하여 역함수 $g(x)$를 구한다.

풀이 $y=e^{2x+1}$에서 로그의 정의에 의하여

$2x+1=\ln y,\quad 2x=\ln y-1$

$\therefore x=\frac{\ln y-1}{2}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\frac{\ln x-1}{2}$이므로

$g(x)=\frac{\ln x-1}{2}$

이때 $f(g(x))=x$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(g(x))+g(ex+e)}{f(x)-e}=\lim_{x\to0+}\frac{x+\frac{\ln(ex+e)-1}{2}}{e^{2x+1}-e}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{x+\frac{\ln(x+1)+1-1}{2}}{e(e^{2x}-1)}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}}{2e\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}}$$
$$=\frac{1+\frac{1}{2}}{2e}=\frac{3}{4e}$$

답 ③

**0376** 전략 $x$의 값의 범위를 $-1<x<0$, $x>0$으로 나눈 후 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구한다.

풀이 (i) $-1<x<0$일 때,

주어진 부등식의 각 변을 $x$로 나누면

$$\frac{e^{2x}-1}{2x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{\ln(1+x)}{x}$$

이때 $\lim\limits_{x\to0-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$, $\lim\limits_{x\to0-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=1$$

(ii) $x>0$일 때,

주어진 부등식의 각 변을 $x$로 나누면

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{e^{2x}-1}{2x}$$

이때 $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=1$$

(i), (ii)에서 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$

$3x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{\frac{t}{3}}=\lim_{t\to0}\frac{3f(t)}{t}=3\cdot1=3$$

답 ③

SSEN 특강

**함수의 극한의 대소 관계**

$f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha$ ($\alpha$는 실수)이면 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=\alpha$

**0377** 전략 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$임을 이용한다.

풀이 $a>1$, $x>1$이므로 $\log_a x>0$

$$\therefore f(x)=\lim_{h\to0}\frac{(\log_a x)^h-1}{h}=\ln(\log_a x)$$

$$\therefore \lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}\frac{f(x^2)}{f(x)}=\lim_{x\to1+}\frac{\ln(\log_a x^2)}{\ln(\log_a x)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{\ln(2\log_a x)}{\ln(\log_a x)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{\ln2+\ln(\log_a x)}{\ln(\log_a x)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\left\{\frac{\ln2}{\ln(\log_a x)}+1\right\}$$

$\log_a x=s$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $s\to0+$이므로

$$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{s\to0+}\left(\frac{\ln2}{\ln s}+1\right)=1$$

답 ②

**0378** 전략 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot x$

$=1\cdot0=0$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{f(x)}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{3^x-1}{x}$

$=1\cdot1\cdot\ln3=\ln3$

ㄷ. [반례] $f(x)=|x|$이면 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$이지만

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{e^x-1}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{e^{-x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{e^{-x}-1}{-x}\cdot(-1)$$
$$=1\cdot(-1)=-1$$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$이 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

**0379** 전략 $t \to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하면 (분자)$\to 0$임을 이용한다.

풀이 $x=\dfrac{1}{t}$로 놓으면 $x \to \infty$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty} x^a \ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(b+ct^2)}{t^a}=2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$t \to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{t\to 0}\{\ln(b+ct^2)\}=0$이므로

$\ln b=0 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+ct^2)}{t^a}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+ct^2)}{ct^2}\cdot\frac{ct^2}{t^a}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{ct^2}{t^a}=\lim_{t\to 0}ct^{2-a}$$

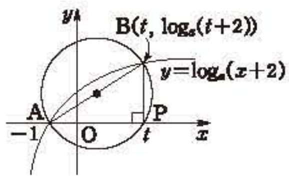
즉 $\lim_{t\to 0}ct^{2-a}=2$이므로 $2-a=0$, $c=2$

$\therefore a=2, c=2$

$\therefore a+b+c=5$ 답 ①

**0380** 전략 반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\triangle APB$는 $\angle APB=90°$인 직각삼각형이다.




따라서 $P(t, 0)$이므로

$\overline{AP}=t+1$,

$\overline{BP}=\log_a(t+2)$

$$\lim_{t\to -1+}\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}=\frac{2}{3}\text{에서}\quad \lim_{t\to -1+}\frac{\log_a(t+2)}{t+1}=\frac{2}{3} \quad\cdots\cdots \text{㉠}$$

$t+1=z$로 놓으면 $t \to -1+$일 때 $z \to 0+$이므로 ㉠은

$$\lim_{z\to 0+}\frac{\log_a(z+1)}{z}=\frac{2}{3},\quad \frac{1}{\ln a}=\frac{2}{3}$$

$\ln a=\dfrac{3}{2} \quad \therefore a=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$ 답 $e\sqrt{e}$

**0381** 전략 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}=\log_a\left\{\lim_{x\to\infty}f(x)\right\}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sum_{k=1}^{12}\{\ln(e^{2k}x^2+e^{-2k})-\ln(e^{-2k}x^2+e^{2k})\}$

$$=\sum_{k=1}^{12}\left(\ln\frac{e^{2k}x^2+e^{-2k}}{e^{-2k}x^2+e^{2k}}\right)$$

이므로

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{12}\left(\ln\frac{e^{2k}x^2+e^{-2k}}{e^{-2k}x^2+e^{2k}}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\left\{\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{e^{2k}x^2+e^{-2k}}{e^{-2k}x^2+e^{2k}}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\left\{\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2k}x^2+e^{-2k}}{e^{-2k}x^2+e^{2k}}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\left(\ln\frac{e^{2k}}{e^{-2k}}\right)=\sum_{k=1}^{12}(\ln e^{4k})$$
$$=\sum_{k=1}^{12}4k=4\cdot\frac{12\cdot 13}{2}=312 \quad \cdots\text{①}$$

$$\beta=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left\{\sum_{k=1}^{12}\left(\ln\frac{e^{2k}x^2+e^{-2k}}{e^{-2k}x^2+e^{2k}}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\left\{\lim_{x\to 0}\left(\ln\frac{e^{2k}x^2+e^{-2k}}{e^{-2k}x^2+e^{2k}}\right)\right\}=\sum_{k=1}^{12}\left\{\ln\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{2k}x^2+e^{-2k}}{e^{-2k}x^2+e^{2k}}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\left(\ln\frac{e^{-2k}}{e^{2k}}\right)=\sum_{k=1}^{12}(\ln e^{-4k})$$
$$=\sum_{k=1}^{12}(-4k)=-4\cdot\frac{12\cdot 13}{2}=-312 \quad \cdots\text{②}$$

$\therefore \alpha-\beta=624$ $\cdots$③

답 624

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ① $\alpha$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ② $\beta$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ③ $\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0382** 전략 $a_2$, $a_3$, $a_4$, $\cdots$를 차례대로 구하여 일반항 $a_n$을 추론하고, 로그함수의 극한을 이용한다.

풀이 $a_na_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n}$에서 $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{na_n}$이므로

$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=\frac{3}{2},\ a_3=1+\frac{1}{2a_2}=\frac{4}{3},\ a_4=1+\frac{1}{3a_3}=\frac{5}{4},\ \cdots$$

$\therefore a_n=\dfrac{n+1}{n}$ $\cdots$①

따라서

$$\ln\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{n}\ln a_{n+k}$$
$$=\ln\frac{1}{2}+\ln a_n+\ln a_{n+1}+\ln a_{n+2}+\cdots+\ln a_{2n}$$
$$=\ln\frac{1}{2}a_na_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{2n}$$
$$=\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)$$
$$=\ln\frac{2n+1}{2n} \quad \cdots\text{②}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\ln\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{n}\ln a_{n+k}\right)=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{2n+1}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$\dfrac{1}{2n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\frac{1}{2}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \cdots\text{③}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

03 지수함수와 로그함수의 미분

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $\ln\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{n}\ln a_{n+k}$를 간단히 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❸ 극한값을 구할 수 있다. | 30% |

**0383** 전략 두 점 P, Q의 좌표를 구하여 $S_1$, $S_2$를 $t$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\mathrm{P}(t,\ 2^t)$, $\mathrm{Q}(t,\ \log_2(1+t))$이므로

$$S_1=\frac{1}{2}t(2^t-1),\ S_2=\frac{1}{2}\log_2(1+t) \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{S_1}{tS_2}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}t(2^t-1)}{t\cdot\frac{1}{2}\log_2(1+t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{2^t-1}{\log_2(1+t)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2^t-1}{t}\cdot\frac{t}{\log_2(1+t)}$$

$$=\ln 2\cdot\frac{1}{\frac{1}{\ln 2}}=(\ln 2)^2 \quad \cdots ❷$$

답 $(\ln 2)^2$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $S_1$, $S_2$를 $t$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ $\lim_{t\to 0+}\frac{S_1}{tS_2}$의 값을 구할 수 있다. | 70% |

**0384** 전략 $k(x)=f(x)g(x)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $k(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(1+h)g(1+h)-f(1)g(1)\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=k'(1) \quad \cdots ❶$$

$k(x)=f(x)g(x)=(3-\ln x)e^{x-3}=(3-\ln x)\frac{e^x}{e^3}$이므로

$$k'(x)=-\frac{1}{x}\cdot\frac{e^x}{e^3}+(3-\ln x)\frac{e^x}{e^3} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=k'(1)=-\frac{1}{e^2}+\frac{3}{e^2}=\frac{2}{e^2} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{2}{e^2}$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ 구하는 극한을 미분계수를 이용하여 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ $k'(x)$를 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ 극한값을 구할 수 있다. | 20% |

다른 풀이 $f(1+h)g(1+h)-f(1)g(1)$

$$=\{3-\ln(1+h)\}e^{h-2}-3e^{-2}$$

$$=\frac{1}{e^2}\{3(e^h-1)-e^h\ln(1+h)\}$$

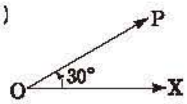
$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(1+h)g(1+h)-f(1)g(1)\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{e^2}\left\{\frac{3(e^h-1)}{h}-\frac{e^h\ln(1+h)}{h}\right\}=\frac{1}{e^2}(3-1)=\frac{2}{e^2}$$

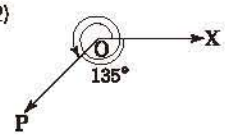


# 04 삼각함수

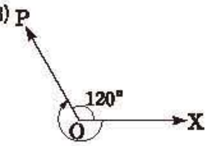
**0385** 답 (1)



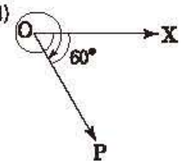
(2)



(3)



(4)



**0386** 답 (1) $\theta=360°\times n+135°$ ($n$은 정수)
(2) $\theta=360°\times n+(-45°)$ ($n$은 정수)

**0387** (1) $630°=360°\times 1+270°$이므로
$360°\times n+270°$

(2) $1140°=360°\times 3+60°$이므로
$360°\times n+60°$

(3) $-855°=360°\times(-3)+225°$이므로
$360°\times n+225°$

(4) $-1200°=360°\times(-4)+240°$이므로
$360°\times n+240°$

답 풀이 참조

**0388** (1) $650°=360°\times 1+290°$
따라서 $650°$는 제4 사분면의 각이다.

(2) $1280°=360°\times 3+200°$
따라서 $1280°$는 제3 사분면의 각이다.

(3) $-705°=360°\times(-2)+15°$
따라서 $-705°$는 제1 사분면의 각이다.

(4) $-945°=360°\times(-3)+135°$
따라서 $-945°$는 제2 사분면의 각이다.

답 (1) 제4 사분면 (2) 제3 사분면 (3) 제1 사분면 (4) 제2 사분면

**0389** $1°=\frac{\pi}{180}$라디안이므로

(1) $135°=135\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{3}{4}\pi$

(2) $300°=300\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5}{3}\pi$

(3) $-210°=(-210)\cdot\frac{\pi}{180}=-\frac{7}{6}\pi$

(4) $-150°=(-150)\cdot\frac{\pi}{180}=-\frac{5}{6}\pi$

답 (1) $\frac{3}{4}\pi$ (2) $\frac{5}{3}\pi$ (3) $-\frac{7}{6}\pi$ (4) $-\frac{5}{6}\pi$

**0390** 1라디안$=\frac{180°}{\pi}$이므로

(1) $\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{180°}{\pi}=120°$

(2) $\frac{6}{5}\pi=\frac{6}{5}\pi\cdot\frac{180°}{\pi}=216°$

(3) $-\frac{3}{5}\pi=\left(-\frac{3}{5}\pi\right)\cdot\frac{180°}{\pi}=-108°$

(4) $-\frac{5}{4}\pi=\left(-\frac{5}{4}\pi\right)\cdot\frac{180°}{\pi}=-225°$

답 (1) 120° (2) 216° (3) $-108°$ (4) $-225°$

**0391** (3) $\frac{7}{2}\pi=2\pi+\frac{3}{2}\pi$이므로 $2n\pi+\frac{3}{2}\pi$

(4) $-\frac{5}{4}\pi=-2\pi+\frac{3}{4}\pi$이므로 $2n\pi+\frac{3}{4}\pi$

답 (1) $2n\pi+\frac{1}{3}$ (2) $2n\pi+\frac{\pi}{3}$ (3) $2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (4) $2n\pi+\frac{3}{4}\pi$

**0392** $30°=30\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$이므로

$l=4\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$, $S=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

답 $l=\frac{2}{3}\pi$, $S=\frac{4}{3}\pi$

**0393** $r\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$이므로 $r=3$

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{3}{4}\pi=\frac{9}{8}\pi$

답 $r=3$, $S=\frac{9}{8}\pi$

**0394** $\frac{1}{2}r\cdot8=12$이므로 $r=3$

$3\theta=8$이므로 $\theta=\frac{8}{3}$

답 $r=3$, $\theta=\frac{8}{3}$

**0395** $\overline{OP}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$이므로

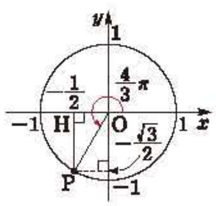
(1) $\sin\theta=\frac{12}{13}$ (2) $\csc\theta=\frac{13}{12}$

(3) $\cos\theta=-\frac{5}{13}$ (4) $\sec\theta=-\frac{13}{5}$

(5) $\tan\theta=-\frac{12}{5}$ (6) $\cot\theta=-\frac{5}{12}$

답 풀이 참조

**0396** (1) 오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

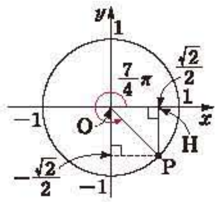



$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{3}$이므로

$P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

(2) 오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{7}{4}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하자.




$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{4}$이므로

$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

답 풀이 참조

**0397** $\theta=380°=360°\times1+20°$에서 $\theta$는 제1사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

답 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

**0398** $\theta=-\frac{17}{6}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{7}{6}\pi$에서 $\theta$는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

답 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

**0399** $\theta=-560°=360°\times(-2)+160°$에서 $\theta$는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

답 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

**0400** $\theta=\frac{18}{5}\pi=2\pi\times1+\frac{8}{5}\pi$에서 $\theta$는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

답 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

**0401** $\cos\theta<0$인 것은 제2사분면과 제3사분면이고, $\tan\theta>0$인 것은 제1사분면과 제3사분면이므로 $\theta$는 제3사분면의 각이다.

답 제3 사분면

**0402** $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

이므로 $\theta$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 제2 사분면 또는 제4 사분면

**0403** $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$ $\therefore \sin^2\theta=\frac{9}{25}$

이때 $\theta$가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$

답 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

**0404** $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$

$\tan\theta=\frac{1}{3}$에서 $\cot\theta=3$이므로

$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+3^2=10$

이때 $\theta$가 제3사분면의 각이므로 $\sec\theta<0$, $\csc\theta<0$

$\therefore \sec\theta=-\frac{\sqrt{10}}{3}$, $\csc\theta=-\sqrt{10}$

답 $\sec\theta=-\frac{\sqrt{10}}{3}$, $\csc\theta=-\sqrt{10}$

**0405** (1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

(2) $\csc\theta+\sec\theta=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{4}{9}}=-\frac{3}{4}$

답 (1) $-\frac{4}{9}$ (2) $-\frac{3}{4}$

**0406** (1) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{2}$

**0407** $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$이고

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)=\cos^2\theta\sec^2\theta=1$

답 1

**0408** $\frac{1}{\csc\theta-\cot\theta}+\frac{1}{\csc\theta+\cot\theta}$

$=\frac{\csc\theta+\cot\theta+\csc\theta-\cot\theta}{(\csc\theta-\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta)}$

$=\frac{2\csc\theta}{\underbrace{\csc^2\theta-\cot^2\theta}_{}}=2\csc\theta$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$에서 $\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$

답 $2\csc\theta$

**0409** $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\frac{\cos\theta-\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$

$=2\sec\theta$

답 $2\sec\theta$

**유형 01 동경의 위치** 본책 64쪽

$\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$ ($n$은 정수, $0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ$)이면 각 $\alpha^\circ$를 나타내는 동경과 각 $\theta$를 나타내는 동경은 일치한다.

**0410** ① $420^\circ=360^\circ\times1+60^\circ$ ➡ 제1사분면

② $870^\circ=360^\circ\times2+150^\circ$ ➡ 제2사분면

③ $1560^\circ=360^\circ\times4+120^\circ$ ➡ 제2사분면

④ $-750^\circ=360^\circ\times(-3)+330^\circ$ ➡ 제4사분면

⑤ $-1610^\circ=360^\circ\times(-5)+190^\circ$ ➡ 제3사분면

답 ⑤

**0411** ㄱ. $-970^\circ=360^\circ\times(-3)+110^\circ$

ㄴ. $-620^\circ=360^\circ\times(-2)+100^\circ$

ㄷ. $-170^\circ=360^\circ\times(-1)+190^\circ$

ㄹ. $460^\circ=360^\circ\times1+100^\circ$

ㅁ. $1180^\circ=360^\circ\times3+100^\circ$

이상에서 동경이 $100^\circ$를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

**0412** $131^\circ$를 나타내는 동경 OP가 주어진 조건을 만족시키며 회전한 후 나타내는 각의 크기를 $\theta$라 하면

$\theta=131^\circ-705^\circ+240^\circ=-334^\circ$

$-334^\circ=360^\circ\times(-1)+26^\circ$이므로 동경 OP는 제1사분면에 있다.

답 제1사분면

**유형 02 사분면의 일반각** 본책 64쪽

① $\alpha$가 제1사분면의 각 ➡ $360^\circ\times n<\alpha<360^\circ\times n+90^\circ$

② $\alpha$가 제2사분면의 각 ➡ $360^\circ\times n+90^\circ<\alpha<360^\circ\times n+180^\circ$

③ $\alpha$가 제3사분면의 각 ➡ $360^\circ\times n+180^\circ<\alpha<360^\circ\times n+270^\circ$

④ $\alpha$가 제4사분면의 각 ➡ $360^\circ\times n+270^\circ<\alpha<360^\circ\times n+360^\circ$

(단, $n$은 정수)

**0413** $\alpha$가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+90^\circ<\alpha<360^\circ\times n+180^\circ$ ($n$은 정수)

$\therefore 360^\circ\times\frac{n}{3}+30^\circ<\frac{\alpha}{3}<360^\circ\times\frac{n}{3}+60^\circ$

(i) $n=3k$ ($k$는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+30^\circ<\frac{\alpha}{3}<360^\circ\times k+60^\circ$

따라서 $\frac{\alpha}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ ($k$는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+150^\circ<\frac{\alpha}{3}<360^\circ\times k+180^\circ$

따라서 $\frac{\alpha}{3}$는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ ($k$는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+270^\circ<\frac{\alpha}{3}<360^\circ\times k+300^\circ$

따라서 $\frac{\alpha}{3}$는 제4사분면의 각이다.

이상에서 $\frac{\alpha}{3}$는 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 $\frac{\alpha}{3}$를 나타내는 동경은 제3사분면에 존재할 수 없다.

답 제3사분면

**0414** $2\theta$가 제3사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+180^\circ<2\theta<360^\circ\times n+270^\circ$ ($n$은 정수)

$\therefore 360^\circ\times\frac{n}{2}+90^\circ<\theta<360^\circ\times\frac{n}{2}+135^\circ$ ⋯ ❶

(i) $n=2k$ ($k$는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+90^\circ<\theta<360^\circ\times k+135^\circ$

따라서 $\theta$는 제2사분면의 각이다. ⋯ ❷

(ii) $n=2k+1$ ($k$는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+270^\circ<\theta<360^\circ\times k+315^\circ$

따라서 $\theta$는 제4사분면의 각이다. ⋯ ❸

(i), (ii)에서 $\theta$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. ⋯ ❹

답 제2사분면 또는 제4사분면

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $\theta$를 $n$에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ $n=2k$일 때 $\theta$가 어느 사분면의 각인지 말할 수 있다. | 30% |
| ❸ $n=2k+1$일 때 $\theta$가 어느 사분면의 각인지 말할 수 있다. | 30% |
| ❹ $\theta$가 어느 사분면의 각인지 말할 수 있다. | 10% |

**0415** $\theta$가 제1사분면의 각이므로

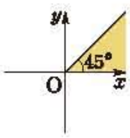
$360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+90^\circ$ ($n$은 정수)

$\therefore 360^\circ\times\frac{n}{2}<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times\frac{n}{2}+45^\circ$

(i) $n=2k$ ($k$는 정수)일 때,

$360^\circ\times k<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+45^\circ$

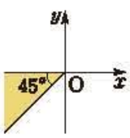
따라서 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 속하는 영역은 오른쪽 그림과 같다. (단, 경계선 제외)




(ii) $n=2k+1$ ($k$는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+180^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+225^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 속하는 영역은 오른쪽 그림과 같다. (단, 경계선 제외)




(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 속하는 모든 영역은 ③과 같다.

답 ③

**유형 03 육십분법과 호도법** 본책 64쪽

① 육십분법의 각을 호도법의 각으로 나타내려면

➡ (육십분법의 각)$\times\frac{\pi}{180}$

② 호도법의 각을 육십분법의 각으로 나타내려면

➡ (호도법의 각)$\times\frac{180^\circ}{\pi}$

**0416** ㄱ. $50^\circ=\frac{5}{18}\pi$ ㄹ. $240^\circ=\frac{4}{3}\pi$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

**0417** ④ $\frac{4}{5}\pi=\frac{4}{5}\pi\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=144^\circ$

답 ④

**0418** ① $-1120^\circ=360^\circ\times(-4)+320^\circ$ ➡ 제4사분면

② $-790^\circ=360^\circ\times(-3)+290^\circ$ ➡ 제4사분면

③ $693^\circ=360^\circ\times1+333^\circ$ ➡ 제4사분면

④ $-\frac{25}{3}\pi=2\pi\times(-5)+\frac{5}{3}\pi$ ➡ 제4사분면

⑤ $\frac{13}{4}\pi=2\pi\times1+\frac{5}{4}\pi$ ➡ 제3사분면

답 ⑤

**0419** ㄱ. $1=\frac{180^\circ}{\pi}$이므로 $2=\frac{360^\circ}{\pi}$

ㄴ. $-220^\circ=360^\circ\times(-1)+140^\circ$이므로 $-220^\circ$는 제2사분면의 각이다.

ㄷ. $\frac{21}{5}\pi=2\pi\times2+\frac{\pi}{5}$, $-\frac{19}{5}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{\pi}{5}$이므로 $\frac{\pi}{5}$, $\frac{21}{5}\pi$, $-\frac{19}{5}\pi$를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

**유형 04 두 동경의 위치 관계; 일치 또는 원점에 대하여 대칭** 본책 65쪽

두 각 $\alpha$, $\beta$를 나타내는 동경이

① 일치한다. ➡ $\alpha-\beta=2n\pi$ ($n$은 정수)

② 원점에 대하여 대칭이다. ➡ $\alpha-\beta=(2n+1)\pi$ ($n$은 정수)

**0420** 각 $\theta$를 나타내는 동경과 각 $6\theta$를 나타내는 동경이 일치하므로 $6\theta-\theta=2n\pi$ ($n$은 정수)

$5\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi$ ⋯⋯ ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{5}\pi<\pi$이므로 $0<n<\frac{5}{2}$

$n$은 정수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{2}{5}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{5}\pi$

답 $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{4}{5}\pi$

**0421** 각 $\theta$를 나타내는 동경과 각 $5\theta$를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$5\theta-\theta=(2n+1)\pi$ ($n$은 정수)

$4\theta=(2n+1)\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n+1}{4}\pi$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{4}\pi<\pi$이므로

$2<2n+1<4 \quad \therefore \frac{1}{2}<n<\frac{3}{2}$

$n$은 정수이므로 $n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

답 $\frac{3}{4}\pi$

**0422** 각 $\theta$를 나타내는 동경과 각 $4\theta$를 나타내는 동경이 일치하므로 $4\theta-\theta=2n\pi$ ($n$은 정수)

$3\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi$ ...... ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n}{3}\pi<\pi$이므로 $\frac{3}{4}<n<\frac{3}{2}$

$n$은 정수이므로 $n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**0423** 각 $\theta$를 나타내는 동경과 각 $7\theta$를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$7\theta-\theta=(2n+1)\pi$ ($n$은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$ ...... ㉠ ➊

$0<\theta<2\pi$에서 $0<\frac{2n+1}{6}\pi<2\pi$이므로

$0<2n+1<12 \quad \therefore -\frac{1}{2}<n<\frac{11}{2}$

$n$은 정수이므로 $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$ ➋

따라서 구하는 모든 각 $\theta$의 크기의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi+\frac{7}{6}\pi+\frac{3}{2}\pi+\frac{11}{6}\pi=6\pi$ ➌

답 $6\pi$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $\theta$를 $n$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ➋ $\theta$의 크기를 구할 수 있다. | 50% |
| ➌ $\theta$의 크기의 합을 구할 수 있다. | 20% |

### 유형 05 두 동경의 위치 관계; 직선에 대하여 대칭

본책 65쪽

두 각 $\alpha$, $\beta$를 나타내는 동경이

① $x$축에 대하여 대칭이다. ➡ $\alpha+\beta=2n\pi$ ($n$은 정수)

② $y$축에 대하여 대칭이다. ➡ $\alpha+\beta=(2n+1)\pi$ ($n$은 정수)

③ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. ➡ $\alpha+\beta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ ($n$은 정수)

**0424** 각 $\theta$를 나타내는 동경과 각 $5\theta$를 나타내는 동경이 $y$축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=(2n+1)\pi$ ($n$은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$ ...... ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{2n+1}{6}\pi<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<2n+1<3 \quad \therefore -\frac{1}{2}<n<1$

$n$은 정수이므로 $n=0$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{6}$

답 ②

**0425** 각 $3\theta$를 나타내는 동경과 각 $5\theta$를 나타내는 동경이 $x$축에 대하여 대칭이므로

$3\theta+5\theta=2n\pi$ ($n$은 정수)

$8\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{n}{4}\pi$ ...... ㉠ ➊

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{n}{4}\pi<\pi$이므로 $0<n<4$

$n$은 정수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ ➋

따라서 구하는 모든 각 $\theta$의 크기의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$ ➌

답 $\frac{3}{2}\pi$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $\theta$를 $n$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ➋ $\theta$의 크기를 구할 수 있다. | 50% |
| ➌ $\theta$의 크기의 합을 구할 수 있다. | 20% |

**0426** 각 $\theta$를 나타내는 동경과 각 $4\theta$를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ ($n$은 정수)

$5\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}$

$0<\theta<2\pi$에서 $0<\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}<2\pi$이므로

$-\frac{1}{10}<\frac{2n}{5}<\frac{19}{10} \quad \therefore -\frac{1}{4}<n<\frac{19}{4}$

$n$은 정수이므로 $n=0, 1, 2, 3, 4$

따라서 구하는 각 $\theta$의 개수는 5이다.

답 5

참고 $n=0, 1, 2, 3, 4$를 $\theta=\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}$에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9}{10}\pi, \frac{13}{10}\pi, \frac{17}{10}\pi$

### 유형 06 부채꼴의 호의 길이와 넓이

본책 66쪽

반지름의 길이가 $r$, 중심각의 크기가 $\theta$(라디안)인 부채꼴에서

(호의 길이)$=r\theta$, (넓이)$=\frac{1}{2}r^2\theta$

**0427** 반지름의 길이가 $a$, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 호의 길이가 $4\pi$이므로

$a\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi$ $\therefore a=6$

따라서 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\pi=12\pi$ $\therefore b=12$

$\therefore a+b=18$

답 18

**0428** 부채꼴의 반지름의 길이를 $r$라 하면 호의 길이가 $\frac{3}{4}r$이므로 둘레의 길이는

$r+r+\frac{3}{4}r=22$, $\frac{11}{4}r=22$ $\therefore r=8$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot8^2\cdot\frac{3}{4}=24$

답 24

**0429** 부채꼴의 반지름의 길이를 $r$라 하면 주어진 원과 부채꼴의 넓이가 같으므로

$16\pi=\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{\pi}{4}$, $r^2=128$ $\therefore r=8\sqrt{2}$ ($\because r>0$)

따라서 구하는 호의 길이는

$8\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\pi$

답 $2\sqrt{2}\pi$

**0430** 원을 세 바퀴 굴렸더니 처음의 위치로 되돌아왔으므로 부채꼴의 둘레의 길이는 원의 둘레의 길이의 3배와 같다.
원의 둘레의 길이는 $2\pi\cdot1=2\pi$이고, 부채꼴의 둘레의 길이는 $6+6+6\theta=12+6\theta$이므로

$12+6\theta=2\pi\cdot3$, $6\theta=6\pi-12$

$\therefore \theta=\pi-2$

답 ②

**0431** 부채꼴의 반지름의 길이를 $r$, 중심각의 크기를 $\theta$라 하면 반지름의 길이와 호의 길이가 같으므로 $r=r\theta$ $\therefore \theta=1$

$\therefore \overline{BH}=r\sin1$, $\overline{OH}=r\cos1$

이때 삼각형 BOH의 넓이가 4이므로

$\frac{1}{2}\cdot r\cos1\cdot r\sin1=4$

$\therefore \frac{1}{2}r^2=\frac{4}{\sin1\cos1}$

따라서 부채꼴 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}r^2\cdot1=\frac{4}{\sin1\cos1}$

답 ④

**0432** (1) $120°=\frac{2}{3}\pi$이므로 호 AB의 길이는 $6\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi$

$\overline{OC}=3$, $\angle COD=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$이므로 호 CD의 길이는

$3\cdot\frac{\pi}{3}=\pi$

$\overline{OE}=\frac{3}{2}$, $\angle EOF=\frac{2}{3}\pi$이므로 호 EF의 길이는

$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi=\pi$

$\overline{OG}=\frac{3}{4}$, $\angle GOH=\frac{\pi}{3}$이므로 호 GH의 길이는

$\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$ ❶

따라서 구하는 호의 길이의 합은

$4\pi+\pi+\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{25}{4}\pi$ ❷

(2) $\overline{AC}=\overline{OC}=3$, $\overline{DE}=\overline{OE}=\frac{3}{2}$, $\overline{FG}=\overline{OG}=\frac{3}{4}$이고

$\overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=\overline{OB}-\overline{FG}$

$=6-\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$ ❸

따라서 주어진 도형의 둘레의 길이는

$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{GH}+\overline{AC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{BH}$

$=\frac{25}{4}\pi+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{21}{4}$

$=\frac{25}{4}\pi+\frac{21}{2}$ ❹

답 (1) $\frac{25}{4}\pi$ (2) $\frac{25}{4}\pi+\frac{21}{2}$

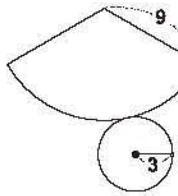
| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{GH}$의 길이를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{GH}$의 값을 구할 수 있다. | 10% |
| ❸ $\overline{AC}$, $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{BH}$의 길이를 구할 수 있다. | 40% |
| ❹ 주어진 도형의 둘레의 길이를 구할 수 있다. | 10% |

### 유형 07 부채꼴의 호의 길이와 넓이의 활용

본책 67쪽

(1) 원뿔의 전개도에서 부채꼴의 호의 길이와 원의 둘레의 길이가 같음을 이용한다.
(2) 그 밖의 도형에서 부채꼴을 찾아 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 이용한다.

**0433** 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는




$2\pi\cdot3=6\pi$

이므로 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot9\cdot6\pi=27\pi$

또 밑면인 원의 넓이는 $\pi\cdot3^2=9\pi$

이므로 구하는 원뿔의 겉넓이는

$27\pi+9\pi=36\pi$

답 ④

**0434** 부채꼴의 호의 길이는 $10\theta$이므로 $r=1$일 때

$10\theta=2\pi$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{5}$, 즉 $a=\frac{\pi}{5}$ ❶

또 $r=3$일 때

$10\theta=2\pi\cdot3$ $\therefore \theta=\frac{3}{5}\pi$, 즉 $b=\frac{3}{5}\pi$ ❷

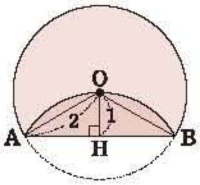
$\therefore b-a=\frac{2}{5}\pi$ ❸

답 $\frac{2}{5}\pi$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $b$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0435** 오른쪽 그림과 같이 접힌 선분의 양 끝 점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OAH에서




$$\cos(\angle AOH)=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\angle AOH=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<\angle AOH<\frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore \angle AOB=2\angle AOH=\frac{2}{3}\pi$$

접힌 활꼴의 호의 길이는 $\widehat{AB}$의 길이와 같으므로

$$2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로

$pq=12$

답 12

**유형 08 부채꼴의 둘레의 길이와 넓이의 최대·최소** 본책 67쪽

반지름의 길이가 $r$, 둘레의 길이가 $a$인 부채꼴의 넓이 $S$는

$$S=\frac{1}{2}r(a-2r)$$

➡ 이차함수의 최대·최소를 이용하여 $S$의 최댓값을 구한다.

**0436** 부채꼴의 반지름의 길이를 $r$라 하면 둘레의 길이가 10이므로 호의 길이는 $10-2r$이다.
부채꼴의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\frac{1}{2}r(10-2r)=-r^2+5r$$
$$=-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\ (0<r<5)$$

따라서 $r=\frac{5}{2}$일 때 $S$는 최대이므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이다.

답 ⑤

**0437** 부채꼴의 반지름의 길이를 $r$ m라 하면 둘레의 길이가 200 m이므로 호의 길이는 $(200-2r)$m이다.
화단의 넓이를 $S\,\mathrm{m}^2$라 하면

$$S=\frac{1}{2}r(200-2r)=-r^2+100r$$
$$=-(r-50)^2+2500\ (0<r<100)$$

따라서 $r=50$일 때 $S$의 최댓값은 2500이므로 화단의 넓이의 최댓값은 $2500\,\mathrm{m}^2$이다.

답 2500

**0438** 부채꼴의 반지름의 길이를 $r$, 호의 길이를 $l$이라 하면 넓이가 9이므로

$$\frac{1}{2}rl=9\qquad\therefore l=\frac{18}{r}$$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$$l+2r=\frac{18}{r}+2r$$

이때 $\frac{18}{r}>0$, $2r>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{18}{r}+2r\geq 2\sqrt{\frac{18}{r}\cdot 2r}=2\cdot 6=12\ (\text{단, 등호는 } r=3\text{일 때 성립})$$

즉 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 12이다.

답 12

**유형 09 삼각함수** 본책 68쪽

중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 $r$인 원 위의 임의의 점 $P(x, y)$에 대하여 동경 OP가 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 $\theta$라 하면
① $r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$
② $\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$,
$\csc\theta=\frac{r}{y}\ (y\neq 0)$, $\sec\theta=\frac{r}{x}\ (x\neq 0)$, $\cot\theta=\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$

**0439** $\overline{OP}=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$이므로

$$\sin\theta=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5},\ \cos\theta=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\ \tan\theta=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$$
$$\therefore 5\sin\theta-5\cos\theta+3\tan\theta=-4-3-4=-11$$

답 ①

**0440** 점 $P(2\sqrt{3}, a)$에서 $\cot\theta=\frac{2\sqrt{3}}{a}$이므로

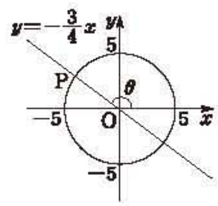
$$\frac{2\sqrt{3}}{a}=-\sqrt{3}\qquad\therefore a=-2$$

따라서 점 P의 좌표가 $(2\sqrt{3}, -2)$이므로

$$r=\overline{OP}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4$$
$$\therefore a+r=2$$

답 ②

**0441** 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이 직선 $3x+4y=0$, 즉 $y=-\frac{3}{4}x$와 만나는 점 중에서 제2사분면 위의 점을 P라 하면




$P(-4, 3)$

$\overline{OP}=5$이므로

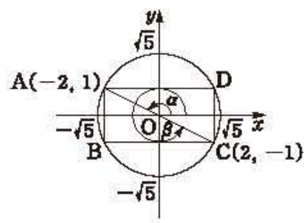
$$\sin\theta=\frac{3}{5},\ \sec\theta=-\frac{5}{4},\ \cot\theta=-\frac{4}{3}$$
$$\therefore 5\sin\theta+4\sec\theta-3\cot\theta=3-5+4=2$$

답 ⑤

**0442** $\overline{AD}=4$, $\overline{AB}=2$이므로

$A(-2, 1)$

$\overline{OA}=\sqrt{5}$이므로




$$\sec\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}\quad\cdots\cdots ❶$$

두 점 A, C가 원점에 대하여 대칭이므로 $C(2, -1)$

$\overline{OC}=\sqrt{5}$이므로

$\csc\beta=-\sqrt{5}$ ⋯➋

$\therefore \sec\alpha\csc\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot(-\sqrt{5})=\dfrac{5}{2}$ ⋯➌

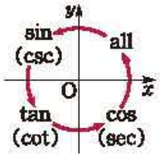
답 $\dfrac{5}{2}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $\sec\alpha$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ➋ $\csc\beta$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ➌ $\sec\alpha\csc\beta$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

## 유형 10 삼각함수의 값의 부호 본책 68쪽

각 사분면에서 값이 양수인 삼각함수는 오른쪽 그림과 같다.




① $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$
➡ $\theta$는 제1사분면의 각

② $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$
➡ $\theta$는 제2사분면의 각

③ $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$ ➡ $\theta$는 제3사분면의 각

④ $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$ ➡ $\theta$는 제4사분면의 각

이때 $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$이므로 $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 값의 부호는 각각 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호와 같다.

**0443** (i) $\sin\theta\cos\theta<0$일 때,
$\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 $\theta$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$일 때,
$\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 $\theta$는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.
(i), (ii)에서 $\theta$는 제4사분면의 각이다.

답 ④

**0444** $\theta$가 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$ ⋯➊

$\therefore$ (주어진 식)

$=\cos\theta+\sin\theta+\tan\theta-\cos\theta-\sin\theta+\tan\theta$

$=2\tan\theta$ ⋯➋

답 $2\tan\theta$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호를 알 수 있다. | 50% |
| ➋ 식을 간단히 할 수 있다. | 50% |

**0445** $\theta$가 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

ㄱ. $\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta}=-\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$

ㄷ. $\sec\theta<0$, $\csc\theta<0$이므로

$$\frac{\sqrt{\sec\theta}}{\sqrt{\csc\theta}}=\sqrt{\frac{\sec\theta}{\csc\theta}}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**SSEN 특강**

**음수의 제곱근의 성질**

실수 $a$, $b$에 대하여

① $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
그 외에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
그 외에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

**0446** $\theta$가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$
따라서 $\cos\theta-\sin\theta<0$이고, $-1<\cos\theta<0$에서 $1+\cos\theta>0$이므로

$|\sin\theta|-\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}+\sqrt{(1+\cos\theta)^2}$

$=\sin\theta-\{-(\cos\theta-\sin\theta)\}+1+\cos\theta$

$=2\cos\theta+1$

답 ④

**0447** $\csc\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로 $\theta$는 제4사분면의 각이다.

이때 $0<\theta<2\pi$이므로 $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

① $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로 $\sin\theta\cos\theta<0$

② $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$이므로 $\cos\theta\tan\theta<0$

③ $\cot\theta<0$, $\sec\theta>0$이므로 $\dfrac{\cot\theta}{\sec\theta}<0$

④ $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{\theta}{2}<\pi$

즉 $\dfrac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이므로 $\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

⑤ $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $3\pi<2\theta<4\pi$

즉 $2\theta$는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이므로 $\sin2\theta<0$

답 ④

## 유형 11, 12 삼각함수 사이의 관계 본책 69, 70쪽

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

② $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

**0448** (주어진 식)

$=(\sin^2\theta-2+\csc^2\theta)+(\cos^2\theta-2+\sec^2\theta)$

$\quad-(\tan^2\theta-2+\cot^2\theta)$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)+(\csc^2\theta-\cot^2\theta)-2$

$=1+1+1-2=1$

답 1

**0449** (i) $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta+1}{\cos^2\theta}=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{1}{\boxed{1-\sin\theta}}$

(ii) $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\dfrac{\sin\theta}{1-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$
$$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}$$
$$=\boxed{\cos\theta+\sin\theta}$$

(iii) $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$$=\frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=\frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{2}{\boxed{\sin\theta}}$$

$\therefore$ (가) $1-\sin\theta$ (나) $\cos\theta+\sin\theta$ (다) $\sin\theta$

답 ⑤

**0450** $\sqrt{4-8\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{4+8\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{4(1-2\sin\theta\cos\theta)}-\sqrt{4(1+2\sin\theta\cos\theta)}$

$=\sqrt{4(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}$

$\quad-\sqrt{4(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}$

$=\sqrt{2^2(\sin\theta-\cos\theta)^2}-\sqrt{2^2(\sin\theta+\cos\theta)^2}$

$=|2(\sin\theta-\cos\theta)|-|2(\sin\theta+\cos\theta)|$

$=2\sin\theta-2\cos\theta-(2\sin\theta+2\cos\theta)$ ($\because 0<\cos\theta<\sin\theta$)

$=-4\cos\theta$

답 ②

**0451** ① $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$\quad=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-\sin^2\theta-\sin^2\theta$

$\quad=1-2\sin^2\theta$

② $\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta-\tan\theta}+\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$

$=\dfrac{\csc\theta(\sec\theta+\tan\theta)+\csc\theta(\sec\theta-\tan\theta)}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$

$=2\csc\theta\sec\theta=\dfrac{2}{\sin\theta\cos\theta}$

③ $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\dfrac{1-\sin\theta+(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$$=\frac{2}{\cos^2\theta}=2\sec^2\theta$$

④ $\left(1+\tan\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)\left(1+\cot\theta-\dfrac{1}{\sin\theta}\right)$

$=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$

⑤ $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}+\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}$

$=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=0$

답 ④

**0452** $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{8}{17}\right)^2=\dfrac{225}{289}$

이때 $\theta$가 제3 사분면의 각이므로 $\quad\sin\theta=-\dfrac{15}{17}$

$\therefore \csc\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{1-\dfrac{8}{17}}{-\dfrac{15}{17}}=-\frac{3}{5}$$

답 ②

**0453** $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\quad\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=-1$

$\therefore \sqrt{2}\cos\theta-2\tan\theta=\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\cdot(-1)$

$\quad=1$

답 1

**0454** $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=2-\sqrt{3}$에서

$1+\tan\theta=(2-\sqrt{3})(1-\tan\theta)$

$(3-\sqrt{3})\tan\theta=1-\sqrt{3}\quad \therefore \tan\theta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec^2\theta=\tan^2\theta+1=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1=\dfrac{4}{3}$이므로

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{\sec^2\theta}=\dfrac{3}{4}\quad \therefore \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \left(\because \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

답 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**0455** $\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta+(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$$=\frac{2}{\sin^2\theta}=2\csc^2\theta$$

따라서 $2\csc^2\theta=\dfrac{5}{2}$이므로 $\quad\csc^2\theta=\dfrac{5}{4}$

$\cot^2\theta=\csc^2\theta-1=\dfrac{5}{4}-1=\dfrac{1}{4}$이므로

$\cot\theta=\dfrac{1}{2}\ \left(\because \pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$

답 $\dfrac{1}{2}$

**0456** $\tan\theta+\cot\theta=-\frac{9}{4}$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{9}{4}$, $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{9}{4}$

$\therefore \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{9}{4}$ ➊

$\therefore \csc^2\theta+\sec^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)^2=\left(-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$ ➋

답 $\frac{81}{16}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ➋ $\csc^2\theta+\sec^2\theta$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**0457** $\frac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\cos^2\theta+(1-\sin^2\theta)}$

$=\frac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(1+2\cos\theta)}$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

따라서 $\tan\theta=2$이므로 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=5$

이때 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sec\theta=\sqrt{5}$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

또 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

답 ③

**유형 13 삼각함수 사이의 관계 ; $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$ 이용** 본책 71쪽

$\sin\theta\pm\cos\theta$의 값 또는 $\sin\theta\cos\theta$의 값이 주어진 경우에는 양변을 제곱하여

$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=\sin^2\theta\pm2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1\pm2\sin\theta\cos\theta$ (복호동순)

임을 이용한다.

**0458** $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{16}$

답 ④

**0459** $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

**0460** $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{25}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{25}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{8}{25}$

$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{8}{25}\right)=\frac{41}{25}$ ➊

이때 $\theta$가 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{41}}{5}$ ➋

$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{41}}{5}\right)=\frac{3\sqrt{41}}{25}$ ➌

답 $\frac{3\sqrt{41}}{25}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $(\sin\theta-\cos\theta)^2$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ➋ $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ➌ $\sin^2\theta-\cos^2\theta$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**유형 14 삼각함수와 이차방정식** 본책 71쪽

이차방정식의 두 근이 삼각함수로 주어진 경우

➡ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

**0461** $2x^2+x+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$(\cos\theta+\sin\theta)+(\cos\theta-\sin\theta)=-\frac{1}{2}$ …… ㉠

$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{a}{2}$ …… ㉡

㉠에서 $2\cos\theta=-\frac{1}{2}$ $\therefore \cos\theta=-\frac{1}{4}$

㉡의 좌변을 간단히 하면

$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$=2\cos^2\theta-1$

즉 $2\cos^2\theta-1=\frac{a}{2}$이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{4}$을 대입하면

$\frac{1}{8}-1=\frac{a}{2}$ $\therefore a=-\frac{7}{4}$

답 $-\frac{7}{4}$

**0462** $9x^2+3x-4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{3},\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$$

$$\therefore \csc\theta+\sec\theta=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{4}{9}}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

**0463** $x^2-px+q=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$p=\tan\alpha+\tan\beta,\ q=\tan\alpha\tan\beta$$

또 $x^2-rx+s=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$r=\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta},\ s=\frac{1}{\tan\alpha}\cdot\frac{1}{\tan\beta}$$

$$\therefore rs=\left(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}\right)\cdot\frac{1}{\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}\cdot\frac{1}{\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{(\tan\alpha\tan\beta)^2}=\frac{p}{q^2}$$

답 ③

**0464** $2x^2-\sqrt{2}x+k=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ··· ❶

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$$ ··· ❷

$$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$$

$$=1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

이때 $\sin\theta>\cos\theta$이므로 $\quad \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**0465** $8x^2-4x+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$$

$\tan\theta$와 $\cot\theta$를 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 3인 이차방정식은

$$3\{x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+\tan\theta\cdot\cot\theta\}=0$$

이때

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{8}{3}$$

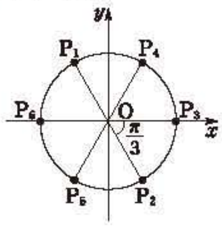
이므로 구하는 이차방정식은

$$3\left\{x^2-\left(-\frac{8}{3}\right)x+1\right\}=0\qquad \therefore 3x^2+8x+3=0$$

답 $3x^2+8x+3=0$

**0466** 전략 일반각의 성질을 이용하여 동경 $\mathrm{OP}_n$의 규칙성을 찾는다.

풀이 동경 $\mathrm{OP}_n$이 나타내는 각의 크기를 $\theta_n$이라 하면




$$\theta_1=3\pi-\frac{\pi}{3}=2\pi+\frac{2}{3}\pi$$

$$\theta_2=5\pi+\frac{2}{3}\pi=4\pi+\frac{5}{3}\pi$$

$$\theta_3=7\pi-\pi=6\pi$$

$$\theta_4=9\pi+\frac{4}{3}\pi=10\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\theta_5=11\pi-\frac{5}{3}\pi=8\pi+\frac{4}{3}\pi$$

$$\theta_6=13\pi+2\pi=14\pi+\pi$$

$$\theta_7=15\pi-\frac{7}{3}\pi=12\pi+\frac{2}{3}\pi$$

$$\theta_8=17\pi+\frac{8}{3}\pi=18\pi+\frac{5}{3}\pi$$

$$\vdots$$

이상에서 동경 $\mathrm{OP}_n$이 동경 $\mathrm{OP}_1$과 일치하려면

$n=6m+1$ ($m$은 자연수)

꼴이어야 하므로

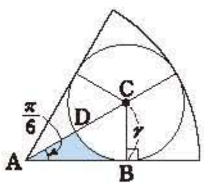
$n=7,\ 13,\ 19,\ \cdots,\ 97$

따라서 구하는 동경의 개수는 16이다.

답 16

**0467** 전략 6 등분한 부채꼴의 중심각의 크기를 이용하여 내접원의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 내접원의 반지름의 길이를 $r$라 하면 오른쪽 그림과 같은 부채꼴의 중심각의 크기가 $2\pi\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{3}$이므로




$$\angle\mathrm{CAB}=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=2r,\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}r$$

큰 원의 반지름의 길이가 6이므로

$$2r+r=6\qquad \therefore r=2$$

$\therefore$ ($\triangle$ABC의 넓이)$-$(부채꼴 BCD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

따라서 색칠한 부분의 넓이 $S$는

$$S=12\left(2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi\right)=24\sqrt{3}-8\pi$$

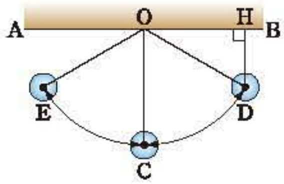
이므로 $p=24,\ q=-8$

$\therefore\ p+q=16$

답 16

**0468** 전략 추의 중심이 움직인 도형이 부채꼴의 호임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 추를 매단 줄의 끝 부분을 O라 하고 추가 멈춰있을 때의 추의 중심을 C, 추가 가장 높이 올라갔을 때의 추의 중심을 각각 D, E라 하자.




직선 AB와 추의 중심 사이의 거리는 추의 중심이 C일 때 최대이고, 추의 중심이 D 또는 E일 때 최소이므로 점 D에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OC}=12,\ \overline{DH}=6$

따라서 직각삼각형 DOH에서

$$\sin(\angle DOH)=\frac{\overline{DH}}{\overline{OD}}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\angle DOH=\frac{\pi}{6}\ \left(\because\ 0<\angle DOH<\frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore\ \angle DOE=2\left(\frac{\pi}{2}-\angle DOH\right)=\frac{2}{3}\pi$$

따라서 추가 1회 왕복하는 동안 추의 중심이 움직인 거리는 반지름의 길이가 12, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 호의 길이의 2배와 같으므로

$$2\cdot12\cdot\frac{2}{3}\pi=16\pi$$

답 ③

**0469** 전략 원과 두 반직선의 교점의 좌표를 구하고 삼각함수의 정의를 이용한다.

풀이 $y=\frac{1}{3}x$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$x^2+\frac{x^2}{9}=1,\quad x^2=\frac{9}{10}\quad \therefore\ x=\frac{3\sqrt{10}}{10}\ (\because\ x\ge0)$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

$$\therefore\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$y=-3x$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$x^2+9x^2=1,\quad x^2=\frac{1}{10}\quad \therefore\ x=-\frac{\sqrt{10}}{10}\ (\because\ x<0)$$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{10}}{10},\ \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

$$\therefore\ \cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore\ \sin\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=-\frac{1}{10}$$

답 $-\frac{1}{10}$

**0470** 전략 $\theta$가 제1, 2, 3, 4사분면의 각인 경우로 나누어 각각 $f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)$의 값을 구해 본다.

풀이 (i) $\theta$가 제1사분면의 각일 때,

$$f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)=1+1+2\cdot1=4$$

(ii) $\theta$가 제2사분면의 각일 때,

$$f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)=1-1+2\cdot(-1)=-2$$

(iii) $\theta$가 제3사분면의 각일 때,

$$f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)=-1-1+2\cdot1=0$$

(iv) $\theta$가 제4사분면의 각일 때,

$$f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)=-1+1+2\cdot(-1)=-2$$

이상에서 주어진 식을 만족시키는 $\theta$는 제3사분면의 각이다.

답 제3사분면

**0471** 전략 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이
$$\log_2\sec\alpha-\log_2\tan\alpha=\log_2\frac{\sec\alpha}{\tan\alpha}=\log_2\left(\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=\log_2\frac{1}{\sin\alpha}$$

$\log_2\frac{1}{\sin\alpha}=2$에서 $\frac{1}{\sin\alpha}=4\quad \therefore\ \sin\alpha=\frac{1}{4}$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

답 ⑤

**0472** 전략 $\overline{OQ}$, $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$의 길이를 삼각함수로 나타낸 후 삼각함수 사이의 관계를 이용한다.

풀이 $\overline{OA}=\overline{OB}=1$이므로

$\overline{OQ}=\cos\theta,\ \overline{AP}=\tan\theta,\ \overline{BQ}=\sin\theta$

$\overline{OQ}=2\overline{AP}\cdot\overline{BQ}$에서

$$\cos\theta=2\tan\theta\sin\theta,\quad \cos\theta=2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta$$

$$\cos^2\theta=2\sin^2\theta\quad \therefore\ \cot^2\theta=2$$

$$\therefore\ \csc\theta\cdot\sec\theta\cdot\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}=\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+2=3$$

답 ③

**0473** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $x^2-ax+2a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=a,\ \sin\theta\cos\theta=2a$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$a^2=1+4a,\quad a^2-4a-1=0$

$\therefore\ a=2-\sqrt{5}\ (\because\ a<0)$

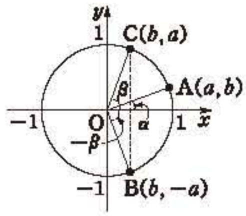
따라서 $\sin\theta+\cos\theta=2-\sqrt{5}$, $\sin\theta\cos\theta=4-2\sqrt{5}$이므로

$$\begin{aligned}&\sin^3\theta+\cos^3\theta\\&=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)\\&=(2-\sqrt{5})(-3+2\sqrt{5})=-16+7\sqrt{5}\end{aligned}$$

답 $-16+7\sqrt{5}$

**0474** 전략 점 $A(a, b)$에 대하여 동경 OA가 나타내는 각의 크기를 $\alpha$라 할 때, $\cos\alpha=\dfrac{a}{\overline{OA}}$, $\sin\alpha=\dfrac{b}{\overline{OA}}$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 $A(a, b)$에 대하여 $\sin\alpha=\dfrac{b}{1}$이므로




$b=\dfrac{1}{3}$ ⋯ ❶

점 $A\left(a, \dfrac{1}{3}\right)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$a^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=1,\quad a^2=\dfrac{8}{9}$

$\therefore a=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\because a>0$) ⋯ ❷

각 $-\beta$를 나타내는 동경과 원의 교점이 $B(b, -a)$이므로 각 $\beta$를 나타내는 동경과 원의 교점을 C라 하면 점 C는 점 B를 $x$축에 대하여 대칭이동한 점이다.

따라서 $C(b, a)$, 즉 $C\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$이므로

$\sin\beta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $b$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $\sin\beta$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**0475** 전략 $y$축에 대하여 대칭인 점들을 짝지어본다.

풀이 주어진 그림에서 점 $P_1$과 점 $P_6$, 점 $P_2$와 점 $P_5$, 점 $P_3$과 점 $P_4$, 점 $P_7$과 점 $P_{10}$, 점 $P_8$과 점 $P_9$는 각각 $y$축에 대하여 대칭이므로 이 점들의 $x$좌표는 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이다. ⋯ ❶

이때 삼각함수의 정의에 의하여 점 $P_2$의 $x$좌표는 $\cos\theta$, 점 $P_5$의 $x$좌표는 $\cos 4\theta$이므로

$\cos\theta+\cos 4\theta=0$

같은 방법으로 하면

$\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$, $\cos 6\theta+\cos 9\theta=0$,

$\cos 7\theta+\cos 8\theta=0$, $\cos 5\theta+\cos 10\theta=0$ ⋯ ❷

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 10\theta=0$ ⋯ ❸

답 0

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $y$축에 대하여 대칭인 점들을 짝지을 수 있다. | 40% |
| ❷ 합이 0인 $\cos n\theta$끼리 더할 수 있다. | 50% |
| ❸ $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 10\theta$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0476** 전략 $ab\neq0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$임을 이용한다.

풀이 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서 $\sin\theta=\cos\theta\tan\theta$이므로

$\sqrt{\cos\theta}\sqrt{\tan\theta}=-\sqrt{\sin\theta}=-\sqrt{\cos\theta\tan\theta}$

따라서 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로 $\theta$는 제2사분면의 각이다.

$|\tan\theta|=\sqrt{3}$에서 $\tan\theta=-\sqrt{3}$ ⋯ ❶

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+3=4$이므로

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{\sec^2\theta}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ ($\because \cos\theta<0$),

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because \sin\theta>0$) ⋯ ❷

$\therefore \sin\theta+\cos\theta+\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$

$=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ ⋯ ❸

답 $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $\cos\theta$, $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ $\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0477** 전략 $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구한 후 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 각각 구한다.

풀이 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=2$

$1-2\sin\theta\cos\theta=2\qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ ⋯ ❶

이때

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$

이므로 $\sin\theta+\cos\theta=0$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⋯ ❸

따라서 $\csc\theta=\sqrt{2}$, $\sec\theta=-\sqrt{2}$이므로

$\csc^{10}\theta+\sec^{10}\theta=(\sqrt{2})^{10}+(-\sqrt{2})^{10}$

$=32+32=64$ ⋯ ❹

답 64

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ❸ $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❹ $\csc^{10}\theta+\sec^{10}\theta$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

Ⅱ 삼각함수

# 05 삼각함수의 그래프

**0478** 함수 $f(x)$의 주기가 3이므로

$f(x+3)=f(x)$

$\therefore f(10)=f(7)=f(4)=f(1)=1$

답 1

**0479** 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로

$f(x+2)=f(x)$

$\therefore f(9)=f(7)=f(5)=f(3)=f(1)$

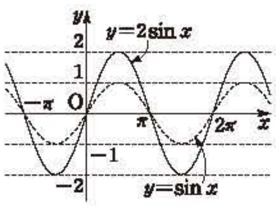
$0\le x<2$에서 $f(x)=x^2$이므로

$f(9)=f(1)=1$

답 1

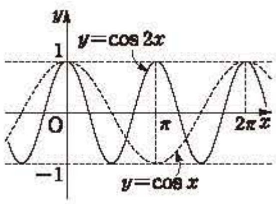
**0480** 답 (가) 실수 전체의 집합 (나) $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$ (다) $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$ (라) $y$축에 대하여 대칭 (마) $2\pi$ (바) $2\pi$

**0481** $y=2\sin x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 2배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




답 (1) $y$, 2 (2) $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$ (3) $2\pi$ (4) 원점

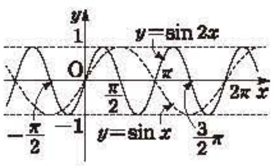
**0482** $y=\cos 2x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




답 (1) $x$, $\frac{1}{2}$ (2) $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$ (3) $\pi$ (4) $y$축

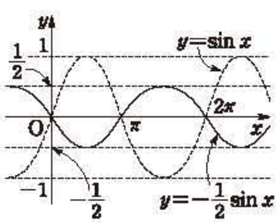
**0483** $y=\sin 2x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$, 주기는 $\pi$이다.




답 풀이 참조

**0484** $y=-\frac{1}{2}\sin x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

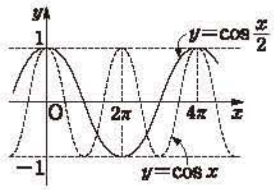



따라서 치역은 $\left\{y\,\middle|\,-\frac{1}{2}\le y\le \frac{1}{2}\right\}$, 주기는 $2\pi$이다.

답 풀이 참조

**0485** $y=\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

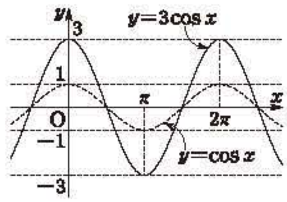
따라서 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$, 주기는 $4\pi$이다.




답 풀이 참조

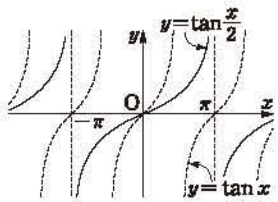
**0486** $y=3\cos x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 3배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$, 주기는 $2\pi$이다.




답 풀이 참조

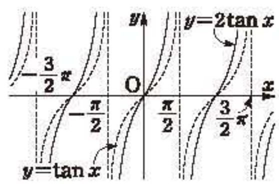
**0487** $y=\tan\frac{x}{2}$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




답 (1) $x$, 2 (2) $(2n+1)\pi$ (3) 실수 (4) $2\pi$ (5) 원점

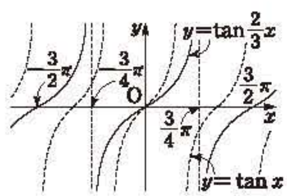
**0488** $y=2\tan x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 2배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 실수 전체의 집합, 주기는 $\pi$, 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ ($n$은 정수)이다.




답 풀이 참조

**0489** $y=\tan\frac{2}{3}x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{3}{2}$배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




따라서 치역은 실수 전체의 집합, 주기는 $\frac{3}{2}\pi$, 점근선의 방정식은 $\frac{2}{3}x=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{3n}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi$ ($n$은 정수)이다.

답 풀이 참조

**0490** $y=2\sin(2x+\pi)$에서

최댓값: $|2|=2$, 최솟값: $-|2|=-2$, 주기: $\frac{2\pi}{2}=\pi$

답 최댓값: 2, 최솟값: $-2$, 주기: $\pi$

**0491** $y=-\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$에서

최댓값: $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\left|-\frac{1}{2}\right|=-\frac{1}{2}$,

주기: $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ 답 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

**0492** $y=-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)$에서

최댓값: $|-1|=1$, 최솟값: $-|-1|=-1$,

주기: $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

답 최댓값: 1, 최솟값: $-1$, 주기: $\frac{\pi}{3}$

**0493** $y=2\cos\left(\frac{x}{2}-\pi\right)-1$에서

최댓값: $|2|-1=1$, 최솟값: $-|2|-1=-3$, 주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

답 최댓값: 1, 최솟값: $-3$, 주기: $4\pi$

**0494** $y=\tan 4\pi x+2$에서 최댓값, 최솟값은 없고,

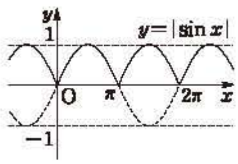
주기: $\frac{\pi}{4\pi}=\frac{1}{4}$ 답 최댓값, 최솟값은 없다, 주기: $\frac{1}{4}$

**0495** $y=2\tan\left(-3x-\frac{\pi}{2}\right)+1$에서 최댓값, 최솟값은 없고,

주기: $\frac{\pi}{|-3|}=\frac{\pi}{3}$

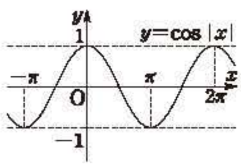
답 최댓값, 최솟값은 없다, 주기: $\frac{\pi}{3}$

**0496** $y=|\sin x|$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



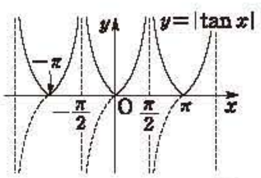

따라서 $y=|\sin x|$의 주기는 $\pi$이다. 답 $\pi$

**0497** $y=\cos|x|$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프에서 $x\geq0$인 부분만 그리고 $x\geq0$인 부분을 $y$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $y=\cos|x|$의 주기는 $2\pi$이다. 답 $2\pi$

**0498** $y=|\tan x|$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $y=|\tan x|$의 주기는 $\pi$이다. 답 $\pi$

**0499** ㄴ. $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

ㄹ. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

ㅁ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

ㅂ. $\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cot\theta$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

**0500** (1) $\sin\frac{19}{3}\pi=\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\frac{17}{4}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan 405°=\tan(360°+45°)=\tan 45°=1$

(4) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(5) $\cos 300°=\cos(360°-60°)=\cos(-60°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$

(6) $\tan\frac{23}{6}\pi=\tan\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

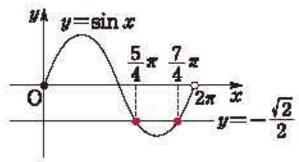
(7) $\sin\frac{5}{4}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(8) $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(9) $\tan 225°=\tan(180°+45°)=\tan 45°=1$

답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 1 (4) $-\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (7) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (8) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (9) 1

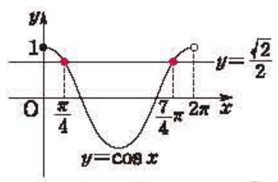
**0501** 오른쪽 그림과 같이 $0\leq x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 $x$좌표가 $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이므로




$x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$ 답 $x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

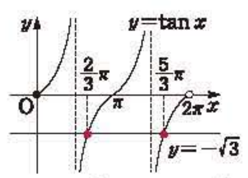
**0502** $2\cos x-\sqrt{2}=0$에서 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\leq x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 $x$좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$이므로




$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$ 답 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

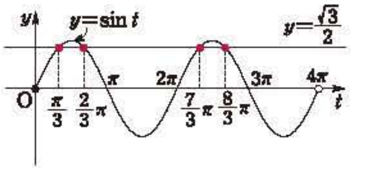
**0503** 오른쪽 그림과 같이 $0\leq x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-\sqrt{3}$의 교점의 $x$좌표가 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$이므로




$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ 답 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

**0504** $2\sin 2x=\sqrt{3}$에서 $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x=t$로 놓으면 $0\leq t<4\pi$




위의 그림과 같이 $0\le t<4\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 $t$좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{7}{3}\pi$, $\frac{8}{3}\pi$이므로

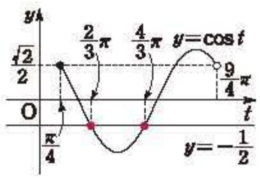
$$2x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 2x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } 2x=\frac{7}{3}\pi \text{ 또는 } 2x=\frac{8}{3}\pi$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}\pi$$

답 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

**0505** $x+\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $\quad \frac{\pi}{4}\le t<\frac{9}{4}\pi$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{4}\le t<\frac{9}{4}\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 $t$좌표가 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$이므로



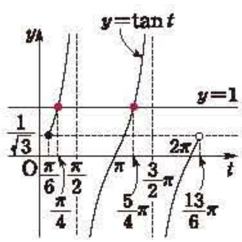

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x+\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore x=\frac{5}{12}\pi \text{ 또는 } x=\frac{13}{12}\pi$$

답 $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$

**0506** $x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $\quad \frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 $t$좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$이므로



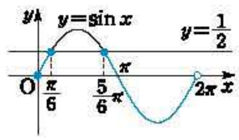

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{4}\pi$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{12} \text{ 또는 } x=\frac{13}{12}\pi$$

답 $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$

**0507** 부등식 $\sin x\le\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

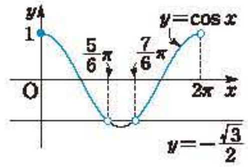
$$0\le x\le\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$$




답 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

**0508** $2\cos x>-\sqrt{3}$에서 $\quad \cos x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$

부등식 $\cos x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 위쪽에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

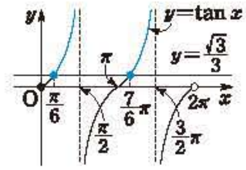



$$0\le x<\frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{6}\pi<x<2\pi$$

답 $0\le x<\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x<2\pi$

**0509** $\sqrt{3}\tan x-1\ge0$에서 $\quad \tan x\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$

부등식 $\tan x\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서




$$\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{7}{6}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$$

답 $\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$

### 유형 01 주기함수 본책 [illegible]쪽

① 함수 $f(x)$는 주기가 $p$인 주기함수이다.
⇒ $f(x)=f(x+p)=f(x+2p)=f(x+3p)=\cdots$

② 함수 $f(x)$는 주기가 $2a$인 주기함수이다.
⇒ $f(x)=f(x+2a) \Longleftrightarrow f(x-a)=f(x+a)$

**0510** 함수 $f(x)$의 주기가 $p$이므로 모든 실수 $x$에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

$$\therefore f(p)=f(0)=\sin 0+\cos 0+1=2$$

답 ④

**0511** 조건 (가)에 의하여

$$f(20)=f(17)=f(14)=\cdots=f(2)=f(-1)$$

조건 (나)에 의하여 $\quad f(-1)=\cos(-\pi)=\cos\pi=-1$

이므로 $\quad f(20)=-1$

답 ①

**0512** 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+1)=f(x-1)$이 성립하므로 위의 식의 양변에 $x$ 대신 $x+1$을 대입하면

$$f(x+2)=f(x)$$ ❶

따라서 함수 $f(x)$는 주기함수이므로

$$f(2018)=f(2016)=f(2014)=\cdots=f(0)=1,$$

$$f(2017)=f(2015)=f(2013)=\cdots=f(1)=-2$$

$$\therefore f(2016)+f(2017)+f(2018)=1-2+1=0$$ ❷

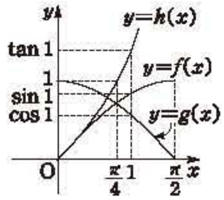
답 0

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ 함수 $f(x)$가 주기함수임을 알 수 있다. | 50% |
| ❷ $f(2016)+f(2017)+f(2018)$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

### 유형 02 삼각함수의 값의 대소 비교 본책 [illegible]쪽

삼각함수의 그래프를 이용하여 대소를 비교한다.

**0513** $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$이므로 오른쪽 그림에서




$\cos 1<\sin 1<\tan 1$

$\therefore g(1)<f(1)<h(1)$

답 ③

**0514** $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $x$의 값이 증가하면 $\sin x$의 값도 증가한다.

이때 $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 1<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서 $x$의 값이 증가하면 $\sin x$의 값은 감소한다.

이때 $\frac{\pi}{2}<2<\frac{2}{3}\pi$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin 2<1$

또 $\frac{3}{4}\pi<3<\pi$이므로 $0<\sin 3<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \sin 3<\sin 1<\sin 2$

답 ⑤

**0515** $A-B=x\sin y+y\sin x-(x\cos x+y\cos y)$
$=x(\sin y-\cos x)+y(\sin x-\cos y)$

$0<x<\frac{\pi}{4}$, $0<y<\frac{\pi}{4}$인 모든 $x$, $y\ (x\neq y)$에 대하여

$\sin y<\cos x$, $\sin x<\cos y$

$\therefore \sin y-\cos x<0$, $\sin x-\cos y<0$

따라서 $x(\sin y-\cos x)+y(\sin x-\cos y)<0$이므로

$A-B<0$ $\quad\therefore A<B$

답 $A<B$

## 유형 03 삼각함수의 그래프의 성질

본책 79쪽

| | $y=\sin x$ | $y=\cos x$ | $y=\tan x$ |
|---|---|---|---|
| 정의역 | 실수 전체의 집합 | 실수 전체의 집합 | $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ ($n$은 정수) |
| 치역 | $\{y\mid -1\le y\le 1\}$ | $\{y\mid -1\le y\le 1\}$ | 실수 전체의 집합 |
| 대칭성 | 원점에 대하여 대칭 | $y$축에 대하여 대칭 | 원점에 대하여 대칭 |
| 주기 | $2\pi$ | $2\pi$ | $\pi$ |

**0516** $y=\cos x$의 그래프에서 $\frac{a+4b}{2}=\pi$, $\frac{4b+5b}{2}=2\pi$이므로

$a+4b=2\pi$, $9b=4\pi$

$\therefore b=\frac{4}{9}\pi$, $a=2\pi-4b=2\pi-4\cdot\frac{4}{9}\pi=\frac{2}{9}\pi$

$\therefore \cos(a+b)=\cos\left(\frac{2}{9}\pi+\frac{4}{9}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

**SSEN 특강**

**삼각함수의 대칭성**

① $f(x)=\sin x\ (0\le x\le \pi)$에서 $f(a)=f(b)=k$이면
➡ $a+b=\pi$ (단, $a\neq b$)

② $f(x)=\cos x\ (0\le x\le 2\pi)$에서 $f(a)=f(b)=k$이면
➡ $a+b=2\pi$ (단, $a\neq b$)

③ $f(x)=\tan x$에서 $f(a)=f(b)=k$이면
➡ $a-b=n\pi$ (단, $n$은 정수)

**0517** $y=\sin x$의 그래프에서

$x_2=\pi-x_1$,

$x_3=2\pi+x_1$, $x_4=3\pi-x_1$,

$x_5=4\pi+x_1$, $\cdots$

이므로 $x_{11}=10\pi+x_1$, $x_{12}=11\pi-x_1$

$\therefore x_{11}+x_{12}=21\pi$

답 ③

**0518** $y=\sin x$의 그래프에서

$\frac{a+c}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore a+c=\pi$ ➡ ❶

$y=\cos x$의 그래프에서

$\frac{b+d}{2}=\pi$ $\quad\therefore b+d=2\pi$ ➡ ❷

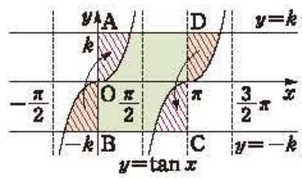
$\therefore \tan(a+b+c+d)=\tan 3\pi=0$ ➡ ❸

답 0

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $a+c$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $b+d$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $\tan(a+b+c+d)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**0519** 오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이가 모두 같으므로



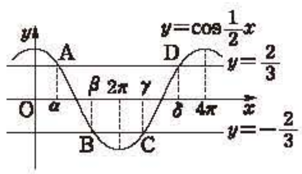

$y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\right)$의 그래프와 두 직선 $y=k$, $y=-k$로 둘러싸인 도형의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같고 그 넓이는

$2k\pi$

즉 $2k\pi=4\pi$이므로 $k=2$

답 2

**0520** 함수 $y=\cos\frac{1}{2}x$의 주기는




$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ ➡ ❶

두 점 A, D는 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\delta}{2}=2\pi$

$\therefore \alpha+\delta=4\pi$

두 점 B, C는 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=2\pi$

$\therefore \beta+\gamma=4\pi$ ➡ ❷

$\therefore \alpha+2\beta+2\gamma+\delta=\alpha+\delta+2(\beta+\gamma)$
$=4\pi+2\cdot 4\pi=12\pi$ ➡ ❸

답 $12\pi$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 함수 $y=\cos\frac{1}{2}x$의 주기를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $\alpha+\delta$, $\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ $\alpha+2\beta+2\gamma+\delta$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**다른 풀이** 두 점 A, B는 점 $(\pi, 0)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi$

$\therefore \alpha+\beta=2\pi$

두 점 C, D는 점 $(3\pi, 0)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=3\pi$

$\therefore \gamma+\delta=6\pi$

두 점 B, C는 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=2\pi$

$\therefore \beta+\gamma=4\pi$

$\therefore \alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)+(\beta+\gamma)=12\pi$

### 유형 04 삼각함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 (본책 79쪽)

$y=a\sin(bx+c)+d=a\sin b\left(x+\frac{c}{b}\right)+d$의 그래프는 $y=a\sin bx$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, $y$축의 방향으로 $d$만큼 평행이동한 것이다.

**0521** $y=2\cos(\pi x-\pi)-2=2\cos\pi(x-1)-2$의 그래프는 $y=2\cos\pi x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=1$, $n=-2$이므로

$m+n=-1$

답 $-1$

**0522** $y=-\cos 3x+1$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-\cos 3x+1$, 즉 $y=\cos 3x-1$ ⋯ ❶

위의 식의 그래프를 $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+3=\cos 3x-1$ $\quad\therefore y=\cos 3x-4$ ⋯ ❷

따라서 $a=1$, $b=-4$이므로

$a+b=-3$ ⋯ ❸

답 $-3$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**SSEN 특강**

**평행이동·대칭이동한 도형의 방정식**

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을

① $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동 ➡ $f(x-a, y-b)=0$

② $x$축에 대하여 대칭이동 ➡ $f(x, -y)=0$

③ $y$축에 대하여 대칭이동 ➡ $f(-x, y)=0$

④ 원점에 대하여 대칭이동 ➡ $f(-x, -y)=0$

**0523** ㄱ. $y=2\sin 2x-3$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 2배 한 후 $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄴ. $y=\sin(2x+\pi)+1=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y=-\sin 2x+5$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $y=\sin(2x-3\pi)=\sin 2\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{3}{2}\pi$만큼 평행이동한 것과 같다.

이상에서 $y=\sin 2x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

### 유형 05 삼각함수의 최대·최소와 주기 (본책 80쪽)

| 삼각함수 | 최댓값 | 최솟값 | 주기 |
|---|---|---|---|
| $y=a\sin(bx+c)+d$ | $\lvert a\rvert+d$ | $-\lvert a\rvert+d$ | $\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$ |
| $y=a\cos(bx+c)+d$ | $\lvert a\rvert+d$ | $-\lvert a\rvert+d$ | $\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$ |
| $y=a\tan(bx+c)+d$ | 없다. | 없다. | $\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$ |

**0524** ① $f(x)=2\sin 2x+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고,

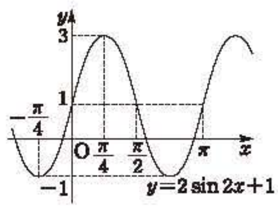
$g(x)=\tan 2x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 두 함수의 주기는 다르다.

② 최댓값은 $\quad 2+1=3$

최솟값은 $\quad -2+1=-1$

③ $f(x)=2\sin 2x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.




④ $f(0)+f(\pi)=1+1=2$

⑤ $f(-x)=2\sin(-2x)+1$

$=-2\sin 2x+1$

따라서 $-f(-x)=2\sin 2x-1$이므로 $\quad f(x)\ne -f(-x)$

답 ④

**0525** $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$에서

$a=3+1=4$, $b=-3+1=-2$, $c=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$\therefore a+b+c=2+\pi$

답 ③

**0526** $y=2\cos\frac{\pi}{3}x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, $y$축의 방향으로 $-4$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2\cos\left\{\frac{\pi}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}-4$ ⋯ ❶

이므로

$$a=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6,\ b=2-4=-2 \qquad \cdots ❷$$

$$\therefore ab=-12 \qquad \cdots ❸$$

답 $-12$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $ab$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0527** $y=\sin\pi x+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

보기의 함수의 주기를 구하면 다음과 같다.

ㄱ. $\frac{2\pi}{\pi}=2$ ㄴ. $\frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄷ. $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$ ㄹ. $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

이상에서 $y=\sin\pi x+1$과 주기가 같은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ⑤

**0528** ① $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

$\therefore f(x+4)=f(x)$

② $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{4}{3}$

$\therefore f(x+4)=f\left(x+\frac{8}{3}\right)=f\left(x+\frac{4}{3}\right)=f(x)$

③ $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{5}{2}\pi}=\frac{4}{5}$

$\therefore f(x+4)=f\left(x+\frac{16}{5}\right)=f\left(x+\frac{12}{5}\right)=\cdots=f(x)$

④ $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{8}{3}\pi}=\frac{3}{4}$

이때 $\frac{3}{4}n=4$를 만족시키는 자연수 $n$이 존재하지 않으므로 $f(x+4)=f(x)$를 만족시키지 않는다.

⑤ $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x+4)=f\left(x+\frac{7}{2}\right)=f(x+3)=\cdots=f(x)$

답 ④

**0529** ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$

ㄴ. $f(3)=-2\tan 2\pi+1=1$이므로 그래프는 점 $(3, 1)$을 지난다.

ㄷ. 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 존재하지 않는다.

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{\pi}{3}x+\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\therefore x=3n-\frac{3}{2}$ ($n$은 정수)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

**유형 06 삼각함수의 미정계수의 결정; 조건이 주어진 경우** 본책 91쪽

① $y=a\sin bx+c$, $y=a\cos bx+c$

➡ $a$, $c$: 삼각함수의 최대·최소 또는 함숫값을 이용하여 결정

$b$: 삼각함수의 주기를 이용하여 결정

② $y=a\tan bx+c$

➡ $a$, $c$: 함숫값을 이용하여 결정

$b$: 삼각함수의 주기 또는 점근선의 방정식을 이용하여 결정

**0530** 조건 (나)에서 $f(x)=a\sin bx+c$의 주기가 $4\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi$ $\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=a\sin\frac{x}{2}+c$

조건 (가)에서 $f(x)$의 최솟값이 $-1$이고 $a>0$이므로

$-a+c=-1$ …… ㉠

조건 (다)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{2}$이므로

$a\sin\frac{\pi}{6}+c=\frac{7}{2}$ $\therefore \frac{a}{2}+c=\frac{7}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=2$

$\therefore a+b+c=\frac{11}{2}$

답 $\frac{11}{2}$

**0531** $f(x)=a\sin\pi x+b$의 최댓값이 3이고 $a>0$이므로

$a+b=3$ …… ㉠

$f\left(\frac{1}{6}\right)=2$이므로 $a\sin\frac{\pi}{6}+b=2$

$\therefore \frac{1}{2}a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore ab=2$

답 ④

**0532** $f(x)=a\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+k$의 최댓값이 2이고 $a<0$이므로

$-a+k=2$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$이므로 $a\cos\frac{\pi}{2}+k=\frac{1}{2}$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 $-a+\frac{1}{2}=2$ $\therefore a=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$이므로 $f(x)$의 최솟값은

$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$

답 ③

**0533** $y=2\tan(ax-b)+3$의 주기가 $3\pi$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=3\pi$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 함수 $y=2\tan\left(\frac{1}{3}x-b\right)+3$의 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{1}{3}x-b=n\pi+\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{3}x=n\pi+\frac{\pi}{2}+b$

$\therefore x=3n\pi+\frac{3}{2}\pi+3b$ ($n$은 정수)

이 방정식이 $x=3n\pi$와 일치하므로

$\frac{3}{2}\pi+3b=0 \qquad \therefore b=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=-\frac{\pi}{6}$ ①

## 유형 07 삼각함수의 미정계수의 결정; 그래프가 주어진 경우 본책 82쪽

주어진 그래프에서 주기, 최댓값, 최솟값을 구한 후 삼각함수의 미정계수를 결정한다.

**0534** 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 $-2$이고 $a>0$이므로

$a=2$

또 주기가 $\frac{5}{6}\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\sin(2x-c)$이고, 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$을 지나므로

$0=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-c\right) \qquad \therefore \sin\left(\frac{2}{3}\pi-c\right)=0$

$0<c<\pi$이므로 $\quad c=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore abc=\frac{8}{3}\pi$ $\frac{8}{3}\pi$

**0535** 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 0이고 $a>0$이므로

$a+c=3, \ -a+c=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{3}{2},\ c=\frac{3}{2}$ ➊

주어진 그래프의 주기가 $\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore b=4$ ➋

$\therefore 2a+b+c=3+4+\frac{3}{2}=\frac{17}{2}$ ➌

$\frac{17}{2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $a$, $c$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ➋ $b$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ➌ $2a+b+c$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0536** 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 $-4$이고 $a>0$이므로

$a+b=2, \ -a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-1$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=3\cos\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)-1$이고 그래프의 주기는 $2\left(c-\frac{1}{2}\right)$이므로

$\frac{2\pi}{\pi}=2\left(c-\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore c=\frac{3}{2}$

$\therefore a+2b-2c=3-2-3=-2$ ②

**0537** $f(x)=a\sin bx+c$ 또는 $f(x)=a\cos bx+c\ (a>0,\ b>0)$로 놓으면 $f(x)$의 최댓값이 1, 최솟값이 $-3$이고 $a>0$이므로

$a+c=1, \ -a+c=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ c=-1$

주어진 그래프의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi \qquad \therefore b=3$

$\therefore f(x)=2\sin 3x-1$ 또는 $f(x)=2\cos 3x-1$

그런데 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 구하는 함수 $f(x)$는 $\quad f(x)=2\cos 3x-1$ ④

**0538** 주어진 그래프의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore a=2$

따라서 주어진 함수는 $y=\tan(2x-b)$이고 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$을 지나므로

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=0$

이때 $0<b<\pi$에서 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-b<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{2}-b=0 \qquad \therefore b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=\pi$ ⑤

**0539** 주어진 그래프에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 6, $-6$이고, 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 2, $-2$이다.

이때 두 함수의 주기가 모두 16이므로 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배 한 후 $x$축의 방향으로 $16n+5$ ($n$은 정수)만큼 평행이동한 것과 같다.

$\therefore a=\frac{1}{3},\ b=16n+5$ ($n$은 정수)

그런데 $-8<b<8$이므로 $\quad b=5$

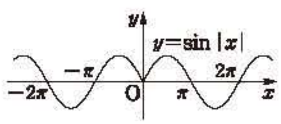
$\therefore a+b=\frac{16}{3}$ ②

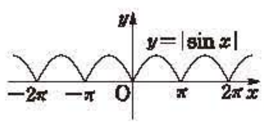
## 유형 08 절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 그래프 본책 83쪽

① $y=f(|x|)$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분만 그린 후 $y$축에 대하여 대칭이동한다.

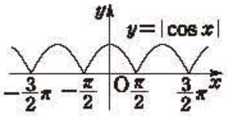
② $y=|f(x)|$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 $x$축에 대하여 대칭이동한다.

**0540** ㄱ. $y=\sin|x|$, $y=|\sin x|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.

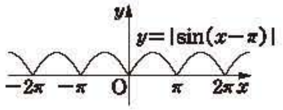


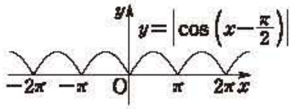



ㄴ. $y=|\cos x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



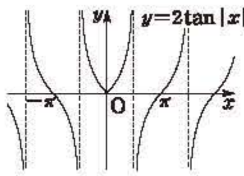

ㄷ. $y=|\sin(x-\pi)|$의 그래프는 $y=|\sin x|$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\pi$만큼 평행이동한 것이고, $y=\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|$의 그래프는 $y=|\cos x|$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 두 함수의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.




이상에서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

**0541** $y=2\tan|x|$의 그래프는 $y=2\tan x$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분을 그리고 $x\ge0$인 부분을 $y$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




① 주기함수가 아니다.
② 최솟값, 최댓값이 존재하지 않는다.
③ 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.
⑤ 정의역은 $x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$($n$은 정수)인 실수 전체의 집합이다.

답 ④

**0542** 함수 $f(x)=2|\cos(x-\pi)|+1$의 주기는 $y=|\cos x|$의 주기와 같으므로 $a=\pi$

$0\le|\cos(x-\pi)|\le1$이므로 $0\le2|\cos(x-\pi)|\le2$

$\therefore 1\le2|\cos(x-\pi)|+1\le3$

따라서 최댓값은 3, 최솟값은 1이므로 $b=3,\ c=1$

$\therefore abc=3\pi$ 답 ②

**0543** $f(x)=a|\sin bx|+c$의 주기가 $\frac{\pi}{3}$이고 $b<0$이므로

$-\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore b=-3$ ➊

$\therefore f(x)=a|\sin(-3x)|+c$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$이므로 $a|\sin(-\pi)|+c=3$ $\therefore c=3$ ➋

$f(x)$의 최댓값이 4이고 $a>0$이므로

$a+3=4$

$\therefore a=1$ ➌

$\therefore 2a-b+c=2-(-3)+3=8$ ➍

답 8

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $b$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ➋ $c$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ➌ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ➍ $2a-b+c$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

SSEN 특강

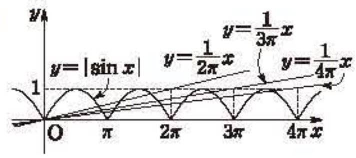
**절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 주기**

① $y=|\sin x|$의 주기가 $\pi$이므로 $y=|\sin bx|$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$이다.

② $y=|\cos x|$의 주기가 $\pi$이므로 $y=|\cos bx|$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$이다.

③ $y=|\tan x|$의 주기가 $\pi$이므로 $y=|\tan bx|$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$이다.

**0544**




위의 그림에서 두 함수 $y=|\sin x|$, $y=\frac{1}{2\pi}x$의 그래프의 교점의 개수는 4이므로 $f(2)=4$

두 함수 $y=|\sin x|$, $y=\frac{1}{3\pi}x$의 그래프의 교점의 개수는 6이므로

$f(3)=6$

두 함수 $y=|\sin x|$, $y=\frac{1}{4\pi}x$의 그래프의 교점의 개수는 8이므로

$f(4)=8$

$\therefore f(2)+f(3)+f(4)=18$ 답 18

참고 자연수 $n$에 대하여 $f(n)=2n$

유형 09~11 **여러 가지 각의 삼각함수** 본책 89~90쪽

$\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ 또는 $90°\times n\pm\theta$ ($n$은 정수) 꼴의 삼각함수의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $n$이 짝수일 때, sin ➡ sin, cos ➡ cos, tan ➡ tan
$n$이 홀수일 때, sin ➡ cos, cos ➡ sin, tan ➡ cot

(ii) $\theta$를 예각으로 생각하여 $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ 또는 $90°\times n\pm\theta$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면에서의 삼각함수의 부호를 조사한다.

**0545** $\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{5}{6}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)=\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\tan\frac{7}{4}\pi=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\cdot(-1)=-1$

답 ①

**0546** $\sin100°=\sin(90°\times1+10°)=\cos10°=0.9848$,

$\cos250°=\cos(90°\times3-20°)=-\sin20°=-0.3420$

$\therefore \sin100°+\cos250°=0.9848-0.3420$

$=0.6428$ 답 ④

**0547** $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$,

$\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⋯➊

$\therefore$ (주어진 식) $=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=-\frac{1}{2}$ ⋯➋

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ 각 항을 특수각에 대한 삼각함수로 나타낼 수 있다. | 70% |
| ➋ 식의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**0548** ㄱ. $\sin 330°=\sin(90°\times 3+60°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$

$\cos 570°=\cos(90°\times 6+30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 495°=\tan(90°\times 5+45°)=-\cot 45°=-1$

$\therefore \sin 330°-\sqrt{3}\cos 570°+\tan 495°$

$=-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(-1)=0$

ㄴ. $\cos\frac{10}{3}\pi=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\sin\frac{11}{6}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\therefore \cos\frac{10}{3}\pi-\sin\frac{11}{6}\pi+\tan\frac{5}{4}\pi=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+1$

$=1$

ㄷ. $\tan 55°=\tan(90°-35°)=\cot 35°$

$\tan 125°=\tan(90°+35°)=-\cot 35°$

$\therefore$ (주어진 식)

$=(\tan 35°+\cot 35°)^2-(\tan 35°-\cot 35°)^2$

$=4\tan 35°\cot 35°=4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

**0549** $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos(3\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$

$\therefore$ (주어진 식) $=\left\{\frac{\cos\theta(-\cos\theta)}{-\cos\theta}\right\}^2+\left(\frac{\sin\theta\sin\theta}{-\sin\theta}\right)^2$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

답 ③

**0550** $\sin 10°=\sin(90°-80°)=\cos 80°$

$\sin 20°=\sin(90°-70°)=\cos 70°$

$\sin 30°=\sin(90°-60°)=\cos 60°$

$\sin 40°=\sin(90°-50°)=\cos 50°$

$\therefore \sin^2 10°+\sin^2 20°+\cdots+\sin^2 80°+\sin^2 90°$

$=(\sin^2 10°+\sin^2 80°)+(\sin^2 20°+\sin^2 70°)$

$+(\sin^2 30°+\sin^2 60°)+(\sin^2 40°+\sin^2 50°)+\sin^2 90°$

$=(\cos^2 80°+\sin^2 80°)+(\cos^2 70°+\sin^2 70°)$

$+(\cos^2 60°+\sin^2 60°)+(\cos^2 50°+\sin^2 50°)+\sin^2 90°$

$=4+1=5$

답 ⑤

**0551** $\tan 89°=\tan(90°-1°)=\cot 1°$

$\tan 88°=\tan(90°-2°)=\cot 2°$

$\vdots$

$\tan 46°=\tan(90°-44°)=\cot 44°$

$\therefore \tan 1°\times\tan 2°\times\cdots\times\tan 88°\times\tan 89°$

$=\tan 1°\times\tan 2°\times\cdots\times\tan 44°\times\tan 45°$

$\times\cot 44°\times\cdots\times\cot 2°\times\cot 1°$

$=\tan 45°=1$

답 1

**0552** $6\theta=\frac{\pi}{2}$에서 $3\theta=\frac{\pi}{4}$이고

$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-5\theta\right)=\sin 5\theta$,

$\cos 2\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\theta\right)=\sin 4\theta$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\sin^2 5\theta+\sin^2 4\theta+\cos^2 3\theta+\cos^2 4\theta+\cos^2 5\theta$

$=(\sin^2 5\theta+\cos^2 5\theta)+(\sin^2 4\theta+\cos^2 4\theta)+\cos^2\frac{\pi}{4}$

$=1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 ③

**0553** $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle C=90°$

$\therefore \alpha+\beta=90°$

$\triangle ABC$에서

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+(\sqrt{7})^2}=4$

$\therefore \cos(\alpha+2\beta)=\cos(90°+\beta)=-\sin\beta$

$=-\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=-\frac{3}{4}$

답 $-\frac{3}{4}$

**0554** $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$A+B+C=\pi$, $B=C$

ㄱ. $A+2B=\pi$에서

$A=\pi-2B$

$\therefore \sin A=\sin(\pi-2B)=\sin 2B$

ㄴ. $A+2B=\pi$에서

$A=\pi-2B$

$\therefore \cos\frac{A}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin B$

ㄷ. $A+2C=\pi$에서

$A=\pi-2C$

$\therefore \tan A=\tan(\pi-2C)=-\tan 2C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

**0555** $\cos\alpha=\frac{2}{3}>0$에서 $\alpha$는 예각이므로

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$ ··· ❶

한편 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\alpha+\beta=\pi$

$$\therefore \tan^2\alpha+\sin^2\beta=\tan^2\alpha+\sin^2(\pi-\alpha)$$
$$=\tan^2\alpha+\sin^2\alpha$$
$$=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{65}{36}$$ ··· ❷

따라서 $m=36$, $n=65$이므로

$m+n=101$ ··· ❸

답 101

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $\sin\alpha$, $\tan\alpha$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $\tan^2\alpha+\sin^2\beta$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

참고 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 $180°$이다.

**유형 12** 삼각함수를 포함한 식의 최대·최소 ; 일차식의 꼴 본책 88쪽

① 두 종류 이상의 삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소
➡ 한 종류의 삼각함수로 통일한다.

② 절댓값 기호를 포함한 함수의 최대·최소
➡ $0\le|\sin x|\le1$, $0\le|\cos x|\le1$임을 이용한다.

**0556** $-1\le\cos x\le1$이므로 $\cos x-2<0$

$\therefore y=\cos x-2+k$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $1-2+k=-1+k$

최솟값은 $-1-2+k=-3+k$

따라서 $(-1+k)+(-3+k)=0$이므로

$k=2$

답 2

**0557** $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$y=2\sin x-\sin x-1=\sin x-1$

$-1\le\sin x\le1$이므로 $-2\le\sin x-1\le0$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 0, 최솟값은 $-2$이므로

$M=0$, $m=-2$ $\therefore M-m=2$

답 2

**0558** $-1\le\sin 3x\le1$이므로 $\sin 3x-5<0$

$\therefore y=-a\sin 3x+5a+b$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $a+5a+b=6a+b$

최솟값은 $-a+5a+b=4a+b$

따라서 $6a+b=6$, $4a+b=2$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-6$

$\therefore a-b=8$

답 ④

**유형 13, 14** 삼각함수를 포함한 식의 최대·최소 ; 분수식 또는 이차식의 꼴 본책 88, 89쪽

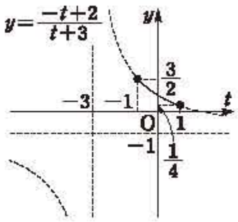
(i) 주어진 식에 포함된 삼각함수를 $t$로 치환한다.

(ii) $t$의 값의 범위를 구한다.

(iii) 그래프를 이용하여 (ii)의 범위에서 최댓값과 최솟값을 구한다.

**0559** $y=\frac{-\sin x+2}{\sin x+3}$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$$y=\frac{-t+2}{t+3}=\frac{-(t+3)+5}{t+3}=\frac{5}{t+3}-1$$




오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 $\frac{3}{2}$,

$t=1$일 때 최솟값은 $\frac{1}{4}$

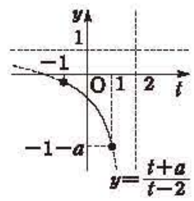
이므로 $M=\frac{3}{2}$, $m=\frac{1}{4}$

$\therefore M+m=\frac{7}{4}$

답 ③

**0560** $y=\frac{\cos x+a}{\cos x-2}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$$y=\frac{t+a}{t-2}=\frac{(t-2)+a+2}{t-2}=\frac{a+2}{t-2}+1$$




이때 $a>-2$에서 $a+2>0$이므로

$y=\frac{t+a}{t-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

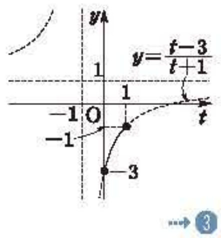
따라서 $t=1$일 때 최솟값 $-1-a$를 가지므로 $-1-a=-3$

$\therefore a=2$

답 ④

**0561** $y=\frac{|\cos x|-3}{|\cos x|+1}$에서 $|\cos x|=t$로 놓으면 $0\le t\le1$이고

$$y=\frac{t-3}{t+1}=\frac{(t+1)-4}{t+1}=-\frac{4}{t+1}+1$$ ··· ❶




오른쪽 그림에서

$t=1$일 때 최댓값은 $-1$,

$t=0$일 때 최솟값은 $-3$

이므로 주어진 함수의 치역은

$\{y\,|\,-3\le y\le-1\}$ ··· ❷

따라서 $a=-3$, $b=-1$이므로

$a+b=-4$ ··· ❸

답 $-4$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $|\cos x|=t$로 놓고 함수식을 변형할 수 있다. | 40% |
| ❷ 주어진 함수의 치역을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0562** $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로

$$y=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin x+2}=\frac{-2\sin x}{\sin x+2}$$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=\frac{-2t}{t+2}=\frac{-2(t+2)+4}{t+2}=\frac{4}{t+2}-2$$

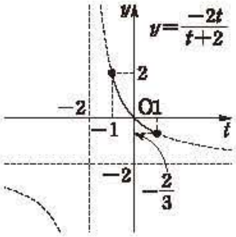
오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 2,

$t=1$일 때 최솟값은 $-\frac{2}{3}$

이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$2+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$




**0563** $y=\cos^2 x+2\sin x+1$

$=(1-\sin^2 x)+2\sin x+1$

$=-\sin^2 x+2\sin x+2$

$\sin x=t$로 놓으면 $-\pi\le x\le\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2+2t+2=-(t-1)^2+3$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최솟값 $-1$을 가지므로

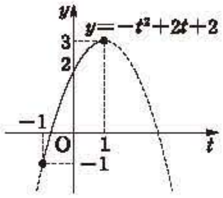
$b=-1$

또 $t=-1$, 즉 $\sin x=-1$에서

$x=-\frac{\pi}{2}$ ($\because -\pi\le x\le\pi$)

이므로 $a=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=\frac{\pi}{2}$ 답 ①




**0564** $y=\cos^2 x-\cos x$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2-t=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

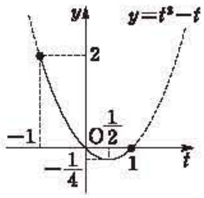
따라서 오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 2,

$t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $-\frac{1}{4}$

이므로 $M=2$, $m=-\frac{1}{4}$

$\therefore Mm=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$




**0565** $y=2a\sin^2 x+2a\cos x-b$

$=2a(1-\cos^2 x)+2a\cos x-b$

$=-2a\cos^2 x+2a\cos x+2a-b$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-2at^2+2at+2a-b=-2a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}a-b$

$a>0$이므로 오른쪽 그림에서

$t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{5}{2}a-b$,

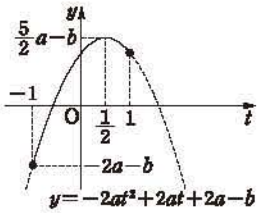
$t=-1$일 때 최솟값은 $-2a-b$

이므로

$\frac{5}{2}a-b=8$, $-2a-b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore a+b=-1$ 답 ⑤




**0566** $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$, $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$이므로

$y=\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos^2\theta-4\sin(\theta+\pi)$

$=\sin^2\theta-3\cos^2\theta+4\sin\theta$

$=\sin^2\theta-3(1-\sin^2\theta)+4\sin\theta$

$=4\sin^2\theta+4\sin\theta-3$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $0\le\theta<\pi$에서 $0\le t\le 1$이고

$y=4t^2+4t-3=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-4$

따라서 오른쪽 그림에서

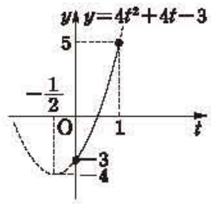
$t=1$일 때 최댓값은 5,

$t=0$일 때 최솟값은 $-3$

이므로 $M=5$, $m=-3$

$\therefore M-m=8$

답 ④




**0567** $y=\cos^2 x+2k\sin x-1+4k$

$=(1-\sin^2 x)+2k\sin x-1+4k$

$=-\sin^2 x+2k\sin x+4k$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고

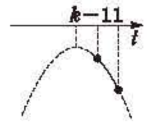
$y=-t^2+2kt+4k=-(t-k)^2+k^2+4k$

$f(t)=-(t-k)^2+k^2+4k$로 놓으면

(i) $k<-1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(-1)$이므로

$-1+2k=-4$

$\therefore k=-\frac{3}{2}$

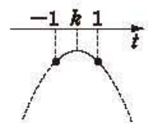



(ii) $-1\le k\le 1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(k)$이므로

$k^2+4k=-4$, $(k+2)^2=0$

$\therefore k=-2$

그런데 $k=-2$는 $-1\le k\le 1$을 만족시키지 않는다.

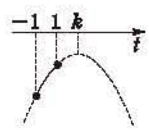



(iii) $k>1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(1)$이므로

$-1+6k=-4$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$

그런데 $k=-\frac{1}{2}$은 $k>1$을 만족시키지 않는다.




이상에서 $k=-\frac{3}{2}$이고, $f(t)$는 $t=-1$, 즉 $\sin x=-1$일 때 최댓값을 가지므로

$x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x<2\pi$)

$\therefore a=\frac{3}{2}\pi$ 답 $a=\frac{3}{2}\pi$, $k=-\frac{3}{2}$

### 유형 15 삼각방정식; 일차식의 꼴 본책 87쪽

(i) 주어진 방정식을 $\sin x=k$ (또는 $\cos x=k$ 또는 $\tan x=k$) 꼴로 변형한다.

(ii) 함수 $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 $x$좌표를 구한다.

**0568** $2x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$이고, 주어진 방정식은 $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore t=\frac{11}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{13}{6}\pi$

즉 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{11}{6}\pi$ 또는 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{6}\pi$이므로

$x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$

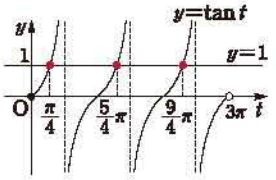
따라서 모든 근의 합은

$\frac{3}{4}\pi+\frac{11}{12}\pi=\frac{5}{3}\pi$ 답 $\frac{5}{3}\pi$

**0569** $\tan\frac{x}{3}-1=0$에서 $\tan\frac{x}{3}=1$

$\frac{x}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<9\pi$에서 $0\le t<3\pi$

오른쪽 그림과 같이 $0\le t<3\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 $t$좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{9}{4}\pi$이므로



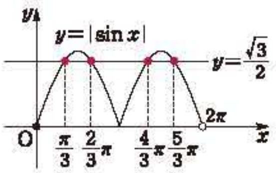

$\frac{x}{3}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{x}{3}=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{x}{3}=\frac{9}{4}\pi$

$\therefore x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{15}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{27}{4}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$\frac{3}{4}\pi+\frac{15}{4}\pi+\frac{27}{4}\pi=\frac{45}{4}\pi$ 답 ⑤

**0570** $0\le x<2\pi$에서 $y=|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$이 오른쪽 그림과 같으므로 $|\sin x|=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 근은




$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 근의 곱은

$\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{5}{3}\pi=\frac{40}{81}\pi^4$

$\therefore p-q=81-40=41$ 답 ④

**0571** $\sin^2x+(|\cos x|+1)^2=3$에서

$\sin^2x+\cos^2x+2|\cos x|+1=3$

$|\cos x|=\frac{1}{2}$ $\therefore \cos x=\pm\frac{1}{2}$

$\cos x=\frac{1}{2}$이면 $x=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0\le x<\pi$)

$\cos x=-\frac{1}{2}$이면 $x=\frac{2}{3}\pi$ ($\because 0\le x<\pi$)

따라서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi=\pi$ 답 ③

**0572** $\pi\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서

$0\le\sin x\le1$ $\therefore 0\le t\le\pi$

이때 주어진 방정식은 $\cos t=0$이므로 $t=\frac{\pi}{2}$

즉 $\pi\sin x=\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 두 근의 차는 $\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$ 답 $\frac{2}{3}\pi$

**0573** $y=f(x)$의 그래프에서 $f(x)=0$이면

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $f(2\cos 2t-1)=0$의 서로 다른 실근은

$2\cos 2t-1=-1$ 또는 $2\cos 2t-1=1$ 또는 $2\cos 2t-1=2$

를 만족시키는 $t$의 값과 같다.

(i) $2\cos 2t-1=-1$일 때, $\cos 2t=0$

$0\le 2t\le 4\pi$이므로

$2t=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$

$\therefore t=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

(ii) $2\cos 2t-1=1$일 때, $\cos 2t=1$

$0\le 2t\le 4\pi$이므로 $2t=0,\ 2\pi,\ 4\pi$

$\therefore t=0,\ \pi,\ 2\pi$

(iii) $2\cos 2t-1=2$일 때, $\cos 2t=\frac{3}{2}>1$이므로 $t$의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 방정식 $f(2\cos 2t-1)=0$의 서로 다른 실근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi+\pi+2\pi=7\pi$ 답 ②

## 유형 16 삼각방정식; 이차식의 꼴 본책 87쪽

(i) $\sin^2x+\cos^2x=1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수에 대한 방정식으로 고친다.
(ii) 삼각함수를 $t$로 치환하여 $t$에 대한 이차방정식으로 변형한다.
(iii) (ii)의 해를 구한 다음 치환한 식에 대입하여 $x$의 값을 구한다.

**0574** $2\cos^2x+\sin x=1$에서

$2(1-\sin^2x)+\sin x-1=0$

$\therefore 2\sin^2x-\sin x-1=0$

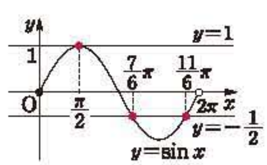
$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le1$이고, 주어진 방정식은 $2t^2-t-1=0$, $(2t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=1$

(i) $t=-\frac{1}{2}$, 즉 $\sin x=-\frac{1}{2}$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$




(ii) $t=1$, 즉 $\sin x=1$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 근의 합은

$\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$ 답 $\frac{7}{2}\pi$

**0575** $4\sin^2 A+4\cos A=5$에서

$4(1-\cos^2 A)+4\cos A=5$

$4\cos^2 A-4\cos A+1=0,\quad (2\cos A-1)^2=0$

$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$

$0<A<\pi$이므로 $A=\frac{\pi}{3}$ ➊

이때 $A+B+C=\pi$이므로

$B+C=\pi-A=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore B+C-2\pi=-\frac{4}{3}\pi$ ➋

$\therefore \sin\frac{B+C-2\pi}{2}=\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\left(-\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ➌

답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $A$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ➋ $B+C-2\pi$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ➌ $\sin\frac{B+C-2\pi}{2}$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**0576** $\sqrt{\cos\theta+1}=2\sin\theta$의 양변을 제곱하면

$\cos\theta+1=4\sin^2\theta,\quad \cos\theta+1=4(1-\cos^2\theta)$

$4\cos^2\theta+\cos\theta-3=0,\quad (\cos\theta+1)(4\cos\theta-3)=0$

$\therefore \cos\theta=-1$ 또는 $\cos\theta=\frac{3}{4}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\cos\theta<1$이므로 $\cos\theta=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{\cos\theta+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 답 ③

**0577** $\sin x-\cos x=1$에서 $\sin x=1+\cos x$

위의 식의 양변을 제곱하면 $\sin^2 x=1+2\cos x+\cos^2 x$

$1-\cos^2 x=1+2\cos x+\cos^2 x$

$2\cos^2 x+2\cos x=0\quad \therefore \cos x(\cos x+1)=0$

$0\le x<\pi$에서 $\cos x+1>0$이므로 방정식의 해는

$\cos x=0\quad \therefore x=\frac{\pi}{2}$ ➊

따라서 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ ➋

답 $\sqrt{3}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ 방정식의 해를 구할 수 있다. | 70% |
| ➋ $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**0578** $\tan x\ne 0$이므로 $\tan x+\frac{\sqrt{3}}{\tan x}=1+\sqrt{3}$의 양변에 $\tan x$를 곱하여 정리하면

$\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$

$\tan x=t$로 놓으면

$t^2-(1+\sqrt{3})t+\sqrt{3}=0,\quad (t-1)(t-\sqrt{3})=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=\sqrt{3}$

(i) $t=1$, 즉 $\tan x=1$일 때,

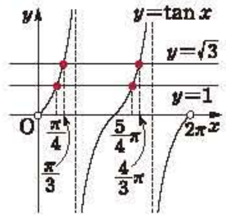
$0<x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

(ii) $t=\sqrt{3}$, 즉 $\tan x=\sqrt{3}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$




(i), (ii)에서 $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{3}$, $x_3=\frac{5}{4}\pi$, $x_4=\frac{4}{3}\pi$이므로

$x_2+x_4-(x_1+x_3)=\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{\pi}{6}$ 답 ①

**0579** $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=2$에서 $x\to 3$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $f(3)=0$이므로 $f(x)=(x-3)(x+k)$ ($k$는 상수)라 하면

$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+k)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+k)=3+k=2$

$\therefore k=-1$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-3)$이므로 $f\left(\cos x+\frac{3}{2}\right)=0$에서

$\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\left(\cos x-\frac{3}{2}\right)=0$

$\therefore \cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=\frac{3}{2}$

그런데 $-1\le\cos x\le 1$이므로 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ ($\because 0\le x<2\pi$)

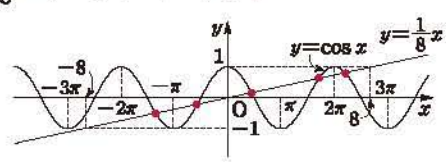
따라서 구하는 합은 $\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=2\pi$ 답 ②

### 유형 17 삼각방정식; 그래프의 이용 본책 88쪽

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근

➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표와 같다.

**0580** 방정식 $\cos x=\frac{1}{8}x$의 실근은 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}x$의 교점의 $x$좌표와 같다.



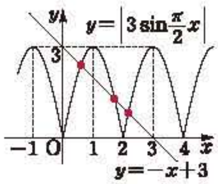
앞의 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}x$의 교점의 개수는 5이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

답 ①

참고 $y=\frac{1}{8}x$에서 $x>8$이면 $y>1$, $x<-8$이면 $y<-1$이므로 직선 $y=\frac{1}{8}x$는 $y=\cos x$의 그래프와 만나지 않는다.

**0581** 방정식 $\left|3\sin\frac{\pi}{2}x\right|=-x+3$의 실근은 함수 $y=\left|3\sin\frac{\pi}{2}x\right|$의 그래프와 직선 $y=-x+3$의 교점의 $x$좌표와 같다.

오른쪽 그림에서 함수 $y=\left|3\sin\frac{\pi}{2}x\right|$의 그래프와 직선 $y=-x+3$의 교점의 개수는 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

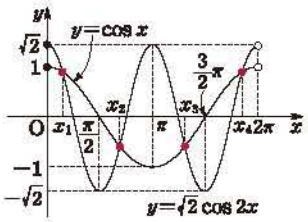



답 ①

**0582** $\sqrt{2}\cos 2x-\cos x=0$에서 $\sqrt{2}\cos 2x=\cos x$

방정식 $\sqrt{2}\cos 2x=\cos x$의 실근은 두 함수 $y=\sqrt{2}\cos 2x$, $y=\cos x$의 그래프의 교점의 $x$좌표와 같다.

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sqrt{2}\cos 2x$, $y=\cos x$의 그래프의 교점의 $x$좌표를 작은 것부터 차례대로 $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$라 하면




$$\frac{x_1+x_4}{2}=\pi,\quad \frac{x_2+x_3}{2}=\pi$$

$\therefore x_1+x_4=2\pi$, $x_2+x_3=2\pi$

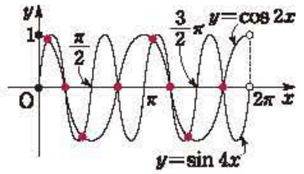
따라서 모든 근의 합은

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2\pi+2\pi=4\pi$$

답 ⑤

**0583** 방정식 $\sin 4x=\cos 2x$의 실근은 두 함수 $y=\sin 4x$, $y=\cos 2x$의 그래프의 교점의 $x$좌표와 같다.

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin 4x$, $y=\cos 2x$의 그래프의 교점의 개수는 8이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.




답 8

## 유형 18 삼각방정식이 실근을 가질 조건 본책 88쪽

(i) 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형한다.
(ii) $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나도록 하는 $k$의 값의 범위를 구한다.

**0584** $4\sin^2 x+4\cos x-a=0$에서

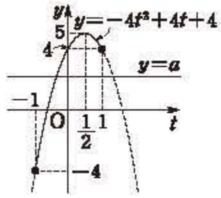
$4(1-\cos^2 x)+4\cos x-a=0$

$\therefore -4\cos^2 x+4\cos x+4=a$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-4\cos^2 x+4\cos x+4$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 한다.

$y=-4\cos^2 x+4\cos x+4$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=-4t^2+4t+4$$
$$=-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+5$$




따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 $-4\le a\le 5$

답 ②

**0585** $\sin(x+\pi)=-\sin x$이므로 주어진 방정식은

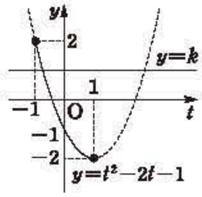
$(1-\sin^2 x)-2(-\sin x)+k=0$

$\therefore k=\sin^2 x-2\sin x-1$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=\sin^2 x-2\sin x-1$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

$y=\sin^2 x-2\sin x-1$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$$




따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면

$-2\le k\le 2$

이어야 하므로 $k$의 최댓값은 2이다.

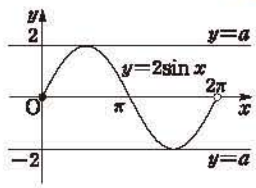
답 2

**0586** $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이므로 주어진 방정식은

$\sin x=-\sin x+a$ $\quad\therefore 2\sin x=a$

따라서 주어진 방정식이 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=2\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나야 한다. ❶

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=2\sin x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $y=2\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 1개이려면




$a=-2$ 또는 $a=2$ ❷

따라서 모든 실수 $a$의 값의 곱은

$-2\cdot 2=-4$ ❸

답 $-4$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ 그래프의 교점에 대한 조건으로 생각할 수 있다. | 40% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $a$의 값의 곱을 구할 수 있다. | 10% |

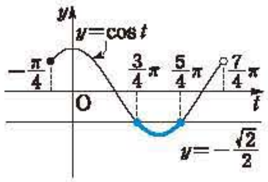
## 유형 19 삼각부등식; 일차식의 꼴 본책 89쪽

① $\sin x>k$ (또는 $\cos x>k$ 또는 $\tan x>k$)
→ $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프가 직선 $y=k$보다 위쪽에 있는 $x$의 값의 범위

② $\sin x<k$ (또는 $\cos x<k$ 또는 $\tan x<k$)
→ $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프가 직선 $y=k$보다 아래쪽에 있는 $x$의 값의 범위

**0587** $x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le t<\frac{7}{4}\pi$이고, 주어진 부등식은 $\cos t\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림에서 $t$의 값의 범위는




$\frac{3}{4}\pi\le t\le\frac{5}{4}\pi$이므로

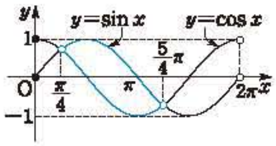
$$\frac{3}{4}\pi\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{5}{4}\pi$$

$$\therefore \pi\le x\le\frac{3}{2}\pi$$

따라서 주어진 부등식의 해가 아닌 것은 ①이다.

답 ①

**0588** 부등식 $\sin x>\cos x$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프보다 위쪽에 있는 $x$의 값의 범위와 같으므로 오른쪽 그림에서

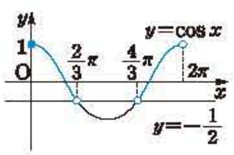


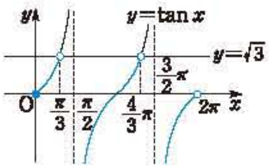

$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{5}{4}\pi$이므로 $\quad\alpha+\beta=\frac{3}{2}\pi$

답 $\frac{3}{2}\pi$

**0589**




위의 그림에서

$$A=\left\{x\,\middle|\,0\le x<\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi<x<2\pi\right\}$$

$$B=\left\{x\,\middle|\,0\le x<\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2}<x<\frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi<x<2\pi\right\}$$

$$\therefore A\cap B=\left\{x\,\middle|\,0\le x<\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi<x<2\pi\right\}$$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

**0590** $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$에서 $3\alpha+3\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$$3\beta=\frac{3}{2}\pi-3\alpha$$

$3\cos 3\alpha+\sin 3\beta\le1$에서

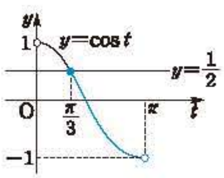
$$3\cos 3\alpha+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)\le1,\qquad 3\cos 3\alpha-\cos 3\alpha\le1$$

$$2\cos 3\alpha\le1\qquad\therefore \cos 3\alpha\le\frac{1}{2}$$ ⋯ ❶

$3\alpha=t$로 놓으면 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$에서 $0<t<\pi$이고 주어진 부등식은

$$\cos t\le\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 $t$의 값의 범위는




$\frac{\pi}{3}\le t<\pi$이므로

$$\frac{\pi}{3}\le3\alpha<\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{9}\le\alpha<\frac{\pi}{3}$$ ⋯ ❷

따라서 $\alpha$의 최솟값은 $\frac{\pi}{9}$이다. ⋯ ❸

답 $\frac{\pi}{9}$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ 한 종류의 삼각함수에 대한 부등식으로 변형할 수 있다. | 50% |
| ❷ $\alpha$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $\alpha$의 최솟값을 구할 수 있다. | 10% |

### 유형 20 삼각부등식; 이차식의 꼴

본책 91쪽

$\sin^2x+\cos^2x=1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수에 대한 삼각부등식으로 고친 후 그래프를 이용하여 해를 구한다.

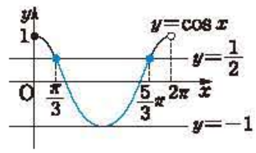
**0591** $2\sin^2x-\cos x-1\ge0$에서

$$2(1-\cos^2x)-\cos x-1\ge0$$

$$2\cos^2x+\cos x-1\le0,\qquad (\cos x+1)(2\cos x-1)\le0$$

$$\therefore -1\le\cos x\le\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 $x$의 값의 범위는




$$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{3}\pi$$

이므로 $\quad\alpha=\frac{\pi}{3},\ \beta=\frac{5}{3}\pi$

$$\therefore \beta-\alpha=\frac{4}{3}\pi$$

답 ④

**0592** $\cos^2\theta-4\sin\theta\le2a$에서

$$(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta\le2a$$

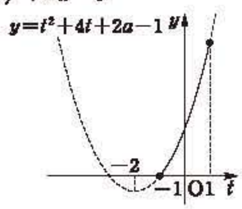
$$\therefore \sin^2\theta+4\sin\theta+2a-1\ge0$$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고, 주어진 부등식은

$$t^2+4t+2a-1\ge0$$

$y=t^2+4t+2a-1$이라 하면 $\quad y=(t+2)^2+2a-5$

$-1\le t\le1$에서 $t=-1$일 때 최솟값 $2a-4$를 갖는다.




이때 부등식이 항상 성립하려면

$2a-4\ge0$이어야 하므로 $\quad a\ge2$

따라서 $a$의 최솟값은 2이다.

답 ⑤

**0593** $\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)=-\cos x$이므로

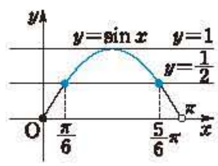
$2\sin^2\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)+3\sin x-3\ge0$에서 $\quad 2\cos^2x+3\sin x-3\ge0$

$$2(1-\sin^2x)+3\sin x-3\ge0,\qquad 2\sin^2x-3\sin x+1\le0$$

$$(2\sin x-1)(\sin x-1)\le0$$

$$\therefore \frac{1}{2}\le\sin x\le1$$

오른쪽 그림에서 $x$의 값의 범위는




$$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$$

답 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$

**유형 21** **삼각방정식과 삼각부등식의 활용** 본책 90쪽

> $a$, $b$, $c$가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라 하면
> ① $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근
> ② $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근
> ③ $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근

**0594** 모든 실수 $x$에 대하여 주어진 부등식이 성립하면 이차방정식 $x^2-2(2\sin\theta+1)x+4=0$이 실근을 갖지 않으므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(2\sin\theta+1)^2-4<0, \quad 4\sin^2\theta+4\sin\theta-3<0$$

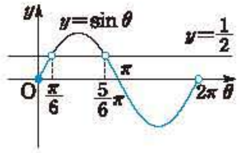
$$\therefore (2\sin\theta+3)(2\sin\theta-1)<0$$

$0\le\theta<2\pi$에서 $2\sin\theta+3>0$이므로

$$2\sin\theta-1<0 \quad \therefore \sin\theta<\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 $\theta$의 값의 범위는

$$0\le\theta<\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$$




답 $0\le\theta<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$

**0595** 이차방정식 $x^2+2x+5-4\tan\theta=0$의 판별식을 $D$라 하면

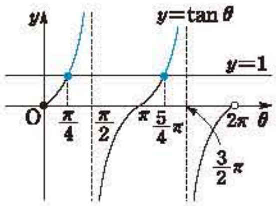
$$\frac{D}{4}=1-(5-4\tan\theta)\ge0$$

$$4\tan\theta-4\ge0 \quad \therefore \tan\theta\ge1$$

오른쪽 그림에서 $\theta$의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi\le\theta<\frac{3}{2}\pi$$

이므로 조건을 만족시키지 않는 $\theta$의 값은 ④이다.




답 ④

**0596** 주어진 이차함수의 그래프가 $x$축에 접하면 이차방정식 $x^2-2x\cos\theta+1-\frac{3}{2}\cos\theta=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-\cos\theta)^2-\left(1-\frac{3}{2}\cos\theta\right)=0 \quad \cdots ❶$$

$$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0, \quad (\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)=0$$

$0<\theta<2\pi$에서 $-1\le\cos\theta<1$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta=\frac{5}{3}\pi \quad \cdots ❷$$

따라서 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$, $\theta_2=\frac{5}{3}\pi$이므로

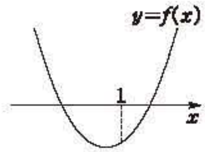
$$\theta_2-\theta_1=\frac{4}{3}\pi \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{4}{3}\pi$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 판별식을 이용하여 $\theta$에 대한 방정식을 세울 수 있다. | 40% |
| ❷ 방정식의 해를 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $\theta_2-\theta_1$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0597** $f(x)=x^2-4x\sin\theta+1$이라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



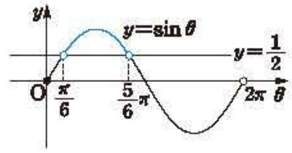

따라서 $f(1)<0$이어야 하므로

$$1-4\sin\theta+1<0, \quad -4\sin\theta+2<0$$

$$\therefore \sin\theta>\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 구하는 $\theta$의 조건은

$$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$$




답 ③

**0598** 전략 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x-p)=f(x+p)$이면 $f(x)=f(x+2p)$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x-2)=f(x+2)$이므로 $x$ 대신 $x+2$를 대입하면 $\quad f(x)=f(x+4)$

또 $x$ 대신 $x+1$을 대입하면 $f(x-1)=f(x+3)$이므로

$$g(x)=\frac{f(x-1)+f(x+3)}{2}$$

$$=\frac{2f(x-1)}{2}=f(x-1)$$

즉 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 $f(1)=f(5)=f(9)=\cdots=2$이므로

$$g(6)=f(5)=2$$

$f(3)=f(7)=f(11)=\cdots=-2$이므로

$$g(8)=f(7)=-2$$

따라서 조건 (나)에 의하여 $5\le x\le9$일 때, $g(x)$는 $x=6$에서 최댓값 2, $x=8$에서 최솟값 $-2$를 가지므로

$$a=6,\ b=2,\ c=8,\ d=-2$$

$$\therefore ad+bc=6\cdot(-2)+2\cdot8=4$$

답 ②

참고 $g(x)=\frac{f(x-1)+f(x+3)}{2}=\frac{2f(x+3)}{2}=f(x+3)$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 것으로 생각할 수도 있다.

이때 $g(6)=f(9)=2$, $g(8)=f(11)=-2$이므로

$$a=6,\ b=2,\ c=8,\ d=-2$$

**0599** 전략 $a_n$의 범위를 $n$에 대한 식으로 나타낸 후 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 주어진 조건을 만족시키는 $x$좌표 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$의 범위를 구하면

$$0<a_1<\frac{\pi}{2}$$

$$\pi<a_2<\frac{3}{2}\pi$$

$$2\pi<a_3<\frac{5}{2}\pi$$

$$\vdots$$

$$(n-1)\pi<a_n<\frac{2n-1}{2}\pi$$

위의 식의 각 변을 $n$으로 나누면

$$\frac{n-1}{n}\pi<\frac{a_n}{n}<\frac{2n-1}{2n}\pi$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\pi=\pi$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}\pi=\pi$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\pi$$

답 ④

SSEN 특강

**수열의 극한의 대소 관계**

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)일 때, 모든 자연수 $n$에 대하여

$a_n\le c_n\le b_n$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$

**0600** 전략 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 사이의 관계식을 세운다.

풀이 함수 $f(x)=\sin\pi x\,(x\ge0)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

주어진 그림에서 $\beta=1-\alpha$, $\gamma=2+\alpha$이므로

$$f(\alpha+\beta+\gamma+1)=f(4+\alpha)=f(\alpha)=\frac{2}{3},$$

$$f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$$

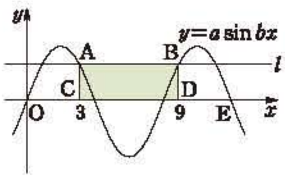
$$\therefore f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}+(-1)=-\frac{1}{3}$$

답 ②

**0601** 전략 주어진 그래프를 이용하여 함수 $y=a\sin bx$의 주기를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 C(3, 0), D(9, 0)이라 하고 $x\ge9$에서 그래프와 $x$축의 교점을 E라 하면 $\overline{\text{OC}}=\overline{\text{DE}}$이므로 점 E의 $x$좌표는

$9+3=12$




따라서 $y=a\sin bx$의 주기는 $12\cdot\frac{2}{3}=8$이고 $b>0$이므로

$$\frac{2\pi}{b}=8 \qquad \therefore b=\frac{\pi}{4}$$

즉 $y=a\sin\frac{\pi}{4}x$이므로

$$\overline{\text{AC}}=a\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

직사각형 ACDB의 넓이가 $48\sqrt{2}$이므로

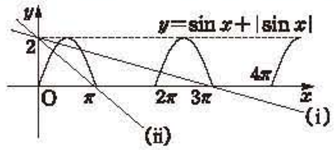
$$6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=48\sqrt{2} \qquad \therefore a=16$$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{16}{\frac{\pi}{4}}=\frac{64}{\pi}$$

답 $\frac{64}{\pi}$

**0602** 전략 $\sin x\ge0$, $\sin x<0$인 경우로 나누어 $y=\sin x+|\sin x|$의 그래프를 그린다.

풀이 $y=\sin x+|\sin x|=\begin{cases}2\sin x & (\sin x\ge0)\\ 0 & (\sin x<0)\end{cases}$이고, 직선 $y=ax+2$는 $a$의 값에 관계없이 항상 점 (0, 2)를 지난다.




위의 그림에서 $y=\sin x+|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=ax+2$ $(a<0)$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선이 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.

(i) 직선 $y=ax+2$가 점 $(3\pi, 0)$을 지날 때,

$$0=3\pi a+2 \qquad \therefore a=-\frac{2}{3\pi}$$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 점 $(\pi, 0)$을 지날 때,

$$0=\pi a+2 \qquad \therefore a=-\frac{2}{\pi}$$

(i), (ii)에서 $-\frac{2}{\pi}<a<-\frac{2}{3\pi}$

답 $-\frac{2}{\pi}<a<-\frac{2}{3\pi}$

**0603** 전략 두 각 $\alpha$, $\beta$를 나타내는 동경이 일치하면 $\alpha-\beta=2n\pi$ ($n$은 정수)임을 이용한다.

풀이 각 $\theta$를 나타내는 동경과 각 $9\theta$를 나타내는 동경이 일치하므로

$9\theta-\theta=2n\pi$ ($n$은 정수)

$$8\theta=2n\pi \qquad \therefore \theta=\frac{n\pi}{4}$$

이때 $\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{3}{8}\pi$이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$

즉 $4\theta=\pi$이므로

$\cos5\theta=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$,

$\cos6\theta=\cos(\pi+2\theta)=-\cos2\theta$,

$\cos7\theta=\cos(\pi+3\theta)=-\cos3\theta$,

$\cos8\theta=\cos(\pi+4\theta)=-\cos4\theta$

$\therefore \cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cdots+\cos9\theta$

$=(\cos\theta+\cos5\theta)+(\cos2\theta+\cos6\theta)+(\cos3\theta+\cos7\theta)+(\cos4\theta+\cos8\theta)+\cos9\theta$

$=(\cos\theta-\cos\theta)+(\cos2\theta-\cos2\theta)+(\cos3\theta-\cos3\theta)+(\cos4\theta-\cos4\theta)+\cos(2\pi+\theta)$

$=\cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ③

**0604** 전략 주어진 조건을 $m$, $L$, $t$에 대입하여 방정식을 세운다.

풀이 $m=144$, $L=10$, $t=2$일 때

$$h=20-10\cos\frac{4\pi}{\sqrt{144}}=20-10\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=20-10\cdot\frac{1}{2}=15 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$m=a$, $L=5\sqrt{2}$, $t=2$일 때

$$h=20-5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡이 같으므로

$$20-5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=15, \qquad 5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=5$$

$$\therefore \cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$a\geq 100$에서 $0<\dfrac{1}{\sqrt{a}}\leq\dfrac{1}{10}$이므로 $\quad 0<\dfrac{4\pi}{\sqrt{a}}\leq\dfrac{2}{5}\pi$

따라서 ㉢에서 $\quad \dfrac{4\pi}{\sqrt{a}}=\dfrac{\pi}{4}$

$\sqrt{a}=16 \quad \therefore a=256$

답 256

**0605** 전략 함수 $f$의 역함수를 $f^{-1}$라 하면 $f(x)=y$일 때 $f^{-1}(y)=x$임을 이용한다.

풀이 $f^{-1}(x)=t$로 놓으면 $0\leq t<\pi$이고, 주어진 방정식은

$$g(f^{-1}(x))=g(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉 $\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\quad t=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $t=\dfrac{2}{3}\pi\ (\because 0\leq t<\pi)$

(i) $t=\dfrac{\pi}{3}$, 즉 $f^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{3}$일 때,

$$x=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

(ii) $t=\dfrac{2}{3}\pi$, 즉 $f^{-1}(x)=\dfrac{2}{3}\pi$일 때,

$$x=f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$이므로

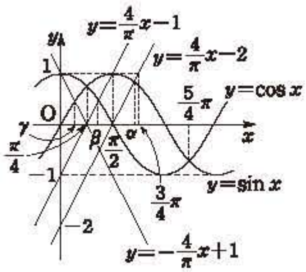
$$\alpha^2+\beta^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

**0606** 전략 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표와 같다.

풀이 ㄱ. $\alpha$는 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\dfrac{4}{\pi}x-2$의 교점의 $x$좌표이므로 오른쪽 그림에서

$$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3}{4}\pi$$




ㄴ. $\beta$는 방정식 $\cos x=\dfrac{4}{\pi}x-1$의 해이므로

$$\cos\beta=\frac{4}{\pi}\beta-1$$

위의 그림에서 $\cos\beta<\cos\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\frac{4}{\pi}\beta-1<\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \frac{4}{\pi}\beta<\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \beta<\frac{2+\sqrt{2}}{8}\pi$$

ㄷ. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi}x-1$에서 $\quad -\sin x=\dfrac{4}{\pi}x-1$

$$\therefore \sin x=-\frac{4}{\pi}x+1$$

즉 $\gamma$는 방정식 $\sin x=-\dfrac{4}{\pi}x+1$의 실근이다.

이때 두 직선 $y=\dfrac{4}{\pi}x-1$, $y=-\dfrac{4}{\pi}x+1$은 직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이고, $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$에서 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\sin x$도 직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로 두 점 $(\beta,\ 0)$, $(\gamma,\ 0)$은 직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\dfrac{\beta+\gamma}{2}=\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\quad \beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

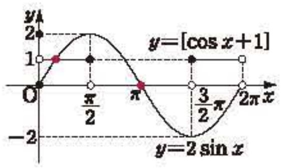
답 ⑤

**0607** 전략 정수 $n$에 대하여 $[\cos x]=n$이면 $n\leq\cos x<n+1$임을 이용한다.

풀이 $0\leq x<2\pi$에서

$$[\cos x+1]=\begin{cases}2 & (x=0)\\ 1 & \left(0<x\leq\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\leq x<2\pi\right)\\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi\right)\end{cases}$$

$0\leq x<2\pi$에서 $y=[\cos x+1]$과 $y=2\sin x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $0\leq x<2\pi$에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이고 두 함수 $y=[\cos x+1]$, $y=2\sin x$는 모두 주기가 $2\pi$이므로 $0\leq x<8\pi$에서 서로 다른 실근의 개수는

$$2\cdot 4=8$$

답 ④

**0608** 전략 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $-1$보다 크고 1보다 작을 조건을 이용한다.

풀이 (i) 방정식 $f(x)=0$의 근이 존재해야 하므로 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$D=\cos^2\theta-4(\sin\theta-1)\geq 0$$

$$(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta+4\geq 0$$

$$\therefore -(\sin\theta+2)^2+9\geq 0$$

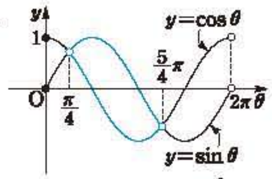
이때 $1\leq\sin\theta+2\leq 3$이므로 모든 $\theta$에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $f(-1)=-\cos\theta+\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta>\cos\theta$

오른쪽 그림에서 $\theta$의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5}{4}\pi$$



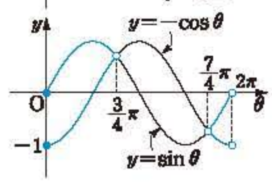

(iii) $f(1)=\cos\theta+\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta>-\cos\theta$

오른쪽 그림에서 $\theta$의 값의 범위는

$$0\leq\theta<\frac{3}{4}\pi$$

또는 $\dfrac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$




(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $\quad x=-\dfrac{\cos\theta}{2}$

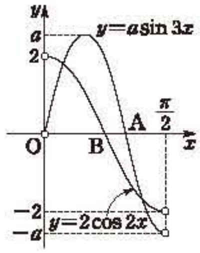
$-\dfrac{1}{2}\leq-\dfrac{\cos\theta}{2}\leq\dfrac{1}{2}$이므로 $\theta$의 값에 관계없이 축은 직선 $x=-1$과 직선 $x=1$ 사이에 있다.

이상에서 $\quad \dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi$

답 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi$

**0609** 전략 두 점 A, B의 좌표를 구하여 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

풀이 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 두 함수 $y=a\sin 3x$, $y=2\cos 2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




$a\sin 3x=0$에서 $3x=\pi$이므로

$$x=\frac{\pi}{3} \qquad \therefore \mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$$

$2\cos 2x=0$에서 $2x=\frac{\pi}{2}$이므로

$$x=\frac{\pi}{4} \qquad \therefore \mathrm{B}\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$$

$$\therefore \overline{AB}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$ ⋯ ❶

점 P는 함수 $y=a\sin 3x$의 그래프 위의 점이므로 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때 점 P의 $y$좌표는 $a$이다.

이때 △ABP의 넓이가 $\frac{1}{3}$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot a=\frac{1}{3}, \qquad \frac{\pi}{24}a=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a=\frac{8}{\pi}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{8}{\pi}$

채점 기준표

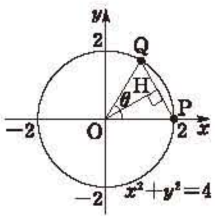
| | |
|---|---|
| ❶ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 60% |

**0610** 전략 $f(x)$를 $x$에 대한 삼각함수로 나타낸다.

풀이 동경 OQ가 나타내는 각의 크기를 $\theta$라 하면 원의 반지름의 길이가 2이므로

$$x=2\theta \qquad \therefore \theta=\frac{x}{2}$$

점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle\mathrm{POH}=\frac{\theta}{2}$




이므로 직각삼각형 POH에서

$$\overline{PH}=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$\overline{PQ}=2\overline{PH}=4\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|=4\left|\sin\frac{x}{4}\right|$이므로

$$f(x)=2\overline{PQ}+1=8\left|\sin\frac{x}{4}\right|+1$$ ⋯ ❶

따라서 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi$

$$\therefore a=4$$

$0\le\left|\sin\frac{x}{4}\right|\le1$이므로 $\quad 0\le8\left|\sin\frac{x}{4}\right|\le8$

$$\therefore 1\le8\left|\sin\frac{x}{4}\right|+1\le9,\ \text{즉 } 1\le f(x)\le9$$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 9, 최솟값은 1이므로

$b=9$, $c=1$ ⋯ ❷

$$\therefore a+b-c=12$$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $f(x)$를 $x$에 대한 삼각함수로 나타낼 수 있다. | 50% |
| ❷ $a$, $b$, $c$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $a+b-c$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

참고 $\pi<\theta<2\pi$일 때 $\angle\mathrm{POH}=\frac{1}{2}(2\pi-\theta)=\pi-\frac{\theta}{2}$이므로

$$\overline{PH}=2\left|\sin\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right|=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

따라서 $\pi<\theta<2\pi$일 때에도 $f(x)=8\left|\sin\frac{x}{4}\right|+1$이 성립한다.

**0611** 전략 $f(x)=t$로 치환한 후 $y=g(t)$의 그래프를 이용한다.

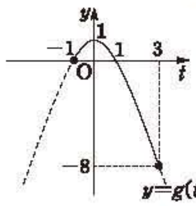
풀이 $f(x)=-\cos^2x+2\sin x+1$
$=(1-\cos^2x)+2\sin x$
$=\sin^2x+2\sin x=(\sin x+1)^2-1$

$-1\le\sin x\le1$이므로

$0\le\sin x+1\le2, \qquad 0\le(\sin x+1)^2\le4$

$\therefore -1\le f(x)\le3$ ⋯ ❶

$f(x)=t$로 놓으면 $-1\le t\le3$이고




$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)$
$=-t^2+1$ ⋯ ❷

오른쪽 그림에서 $y=g(t)$는 $t=0$일 때 최댓값 1, $t=3$일 때 최솟값 $-8$을 가지므로

$M=1$, $m=-8$

$\therefore M-m=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $(g\circ f)(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**0612** 전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 꼭짓점의 좌표를 구한 후 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 $y=x^2-2x\sin\theta-\cos^2\theta$
$=(x-\sin\theta)^2-\sin^2\theta-\cos^2\theta$
$=(x-\sin\theta)^2-1$

이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(\sin\theta,\ -1)$이다. ⋯ ❶

점 $(\sin\theta,\ -1)$과 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$ 사이의 거리가 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

$$\frac{|2\sin\theta+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \qquad |2\sin\theta+1|=2$$

$2\sin\theta+1=\pm2$

$$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}\ \text{또는}\ \sin\theta=-\frac{3}{2}$$

그런데 $-1\le\sin\theta\le1$이므로 $\quad \sin\theta=\frac{1}{2}$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}\ \text{또는}\ \theta=\frac{5}{6}\pi\ (\because 0\le\theta<2\pi)$$ ⋯ ❷

따라서 구하는 합은 $\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$ ··· ③

$\pi$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다. | 30% |
| ② 주어진 조건을 만족시키는 $\theta$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ③ 모든 $\theta$의 값의 합을 구할 수 있다. | 10% |

**0613** **전략** 주어진 삼각방정식을 $\sin x$에 대한 이차방정식으로 변형한다.

**풀이** $2\cos^2 x+(2k+1)\sin x-k-2=0$에서

$2(1-\sin^2 x)+(2k+1)\sin x-k-2=0$

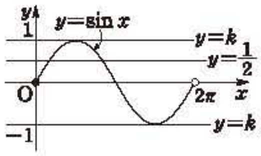
$2\sin^2 x-(2k+1)\sin x+k=0$

$(2\sin x-1)(\sin x-k)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=k$ ··· ①

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 오른쪽 그림에서

$k=-1$ 또는 $k=1$ ··· ②




$-1$, $1$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① 주어진 방정식을 만족시키는 $\sin x$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ② $k$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**0614** **전략** $x\sin\theta+y\cos\theta=2$, $y=-x^2+2$를 연립하여 얻은 이차방정식이 해를 가질 조건을 구한다.

**풀이** $y=-x^2+2$를 $x\sin\theta+y\cos\theta=2$에 대입하면

$x\sin\theta+(-x^2+2)\cos\theta=2$

$\therefore x^2\cos\theta-x\sin\theta+2-2\cos\theta=0$ ······ ㉠

주어진 직선과 곡선이 만나려면 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다. ··· ①

이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-\sin\theta)^2-4\cos\theta(2-2\cos\theta)\ge0$

$\sin^2\theta-8\cos\theta+8\cos^2\theta\ge0$

$(1-\cos^2\theta)-8\cos\theta+8\cos^2\theta\ge0$

$7\cos^2\theta-8\cos\theta+1\ge0$

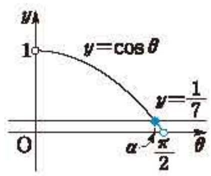
$\therefore (7\cos\theta-1)(\cos\theta-1)\ge0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta-1<0$이므로

$7\cos\theta-1\le0$ $\quad\therefore \cos\theta\le\frac{1}{7}$ ··· ②

따라서 오른쪽 그림에서 $\alpha\le\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\alpha=\frac{1}{7}$ ··· ③




$\frac{1}{7}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① 이차방정식이 실근을 가질 조건으로 변형할 수 있다. | 30% |
| ② 이차방정식의 판별식을 이용하여 $\cos\theta$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 50% |
| ③ $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

## 06 삼각함수의 미분

**0615** $\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)$

$=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

답 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

**0616** $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

답 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

**0617** $\tan 75^\circ=\tan(30^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 30^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 45^\circ}$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot1}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

답 $2+\sqrt{3}$

**0618** $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot1}=2-\sqrt{3}$

답 $2-\sqrt{3}$

**0619** $\sin 65^\circ\cos 20^\circ-\cos 65^\circ\sin 20^\circ$

$=\sin(65^\circ-20^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**0620** $\cos 35^\circ\cos 25^\circ-\sin 35^\circ\sin 25^\circ$

$=\cos(35^\circ+25^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

**0621** $\frac{\tan 110^\circ-\tan 80^\circ}{1+\tan 110^\circ\tan 80^\circ}=\tan(110^\circ-80^\circ)$

$=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**0622** $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=\frac{5}{12}$, $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}=\frac{56}{65}$

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5}+\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}=\frac{63}{65}$$

(3) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{5}{12}-\frac{3}{4}}{1+\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{4}}=-\frac{16}{63}$$

답 (1) $\frac{56}{65}$ (2) $\frac{63}{65}$ (3) $-\frac{16}{63}$

**0623** $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

답 $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

참고 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}+\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

**0624** $\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로

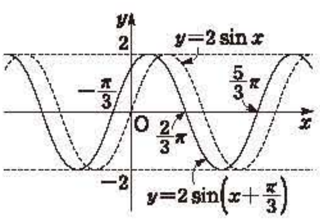
$$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left\{\sin\theta\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$
$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$$

답 $2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$

**0625** $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$$=2\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

이므로 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 $-2$, 주기는 $2\pi$이다.
또 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

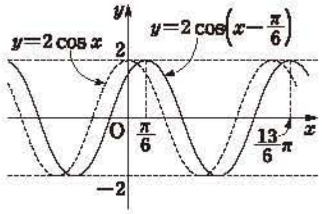



답 풀이 참조

다른 풀이 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$$=2\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\left(\sin x\sin\frac{\pi}{6}+\cos x\cos\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

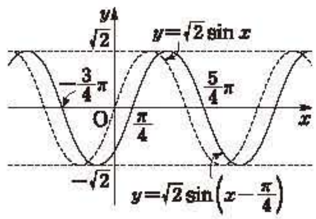
이므로 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 $-2$, 주기는 $2\pi$이다.
또 $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=2\cos x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




**0626** $y=\sin x-\cos x$

$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

이므로 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{2}$, 최솟값은 $-\sqrt{2}$, 주기는 $2\pi$이다.
또 $y=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




답 풀이 참조

**0627** $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$=2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{25}$$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$$=\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25}$$

06 삼각함수의 미분

(3) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\dfrac{24}{7}$

답 (1) $\dfrac{24}{25}$ (2) $-\dfrac{7}{25}$ (3) $-\dfrac{24}{7}$

**0628** $\sin^2 22.5^\circ=\dfrac{1-\cos 45^\circ}{2}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

답 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

**0629** $\cos^2 15^\circ=\dfrac{1+\cos 30^\circ}{2}=\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

답 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

**0630** $\tan^2\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$

답 $7-4\sqrt{3}$

**0631** $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

(1) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}=\dfrac{1+\frac{4}{5}}{2}=\dfrac{9}{10}$

$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$이므로

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

(2) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}=\dfrac{1-\frac{4}{5}}{2}=\dfrac{1}{10}$

$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$이므로

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

(3) $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}}=3$

답 (1) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ (2) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (3) 3

**0632** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x=\sin\frac{\pi}{2}=1$

답 1

**0633** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}2\cos 3x=2\cos\frac{\pi}{2}=0$

답 0

**0634** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\tan x}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

답 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

**0635** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sin x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\sin x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cdot(-1)$

$=-(1+1)=-2$

답 $-2$

**0636** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$

답 1

다른 풀이 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}$

$=1\cdot 1=1$

**0637** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sin x}$

$=\dfrac{1}{2\cdot 1}=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

**0638** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\cos x)$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

답 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**0639** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=1\cdot 2=2$

답 2

**0640** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

답 $\dfrac{3}{2}$

**0641** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5}{2}$

$=1\cdot 1\cdot\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$

답 $\dfrac{5}{2}$

**0642** $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta+\tan 4\theta}{3\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin 2\theta}{3\theta}+\frac{\tan 4\theta}{3\theta}\right)$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\tan 4\theta}{4\theta}\cdot\frac{4}{3}\right)$

$=1\cdot\dfrac{2}{3}+1\cdot\dfrac{4}{3}=2$

답 2

**0643** $\lim_{\theta\to0}\frac{\theta+\tan2\theta}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}+\frac{\tan2\theta}{\sin\theta}\right)$

$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}+\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\tan2\theta}{2\theta}\cdot2\right)$

$=1+1\cdot1\cdot2=3$ 답 3

**0644** $x°=\frac{\pi}{180}x$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x°}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{\pi}{180}$

$=1\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}$ 답 $\frac{\pi}{180}$

SSEN 특강

**육십분법과 호도법**

1라디안$=\frac{180°}{\pi}$, $1°=\frac{\pi}{180}$라디안

**0645** $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{\tan^2 x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{\tan x}\right)^2\cdot4$

$=1^2\cdot1^2\cdot4=4$ 답 4

**0646** $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$ 답 1

**0647** $\frac{\pi}{3}-\theta=t$로 놓으면 $\theta\to\frac{\pi}{3}$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{3\theta-\pi}{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\lim_{t\to0}\frac{3\left(\frac{\pi}{3}-t\right)-\pi}{\tan t}=\lim_{t\to0}\frac{-3t}{\tan t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}\cdot(-3)$

$=1\cdot(-3)=-3$ 답 $-3$

**0648** 답 $y'=1-2\sin x$

**0649** 답 $y'=\cos x-\frac{1}{x}$

**0650** 답 $y'=3\cos x+\sin x$

**0651** $y=\sin^2x=\sin x\sin x$이므로

$y'=\cos x\sin x+\sin x\cos x=2\sin x\cos x$

답 $y'=2\sin x\cos x$

**0652** $y'=2x\sin x+x^2\cos x=x(2\sin x+x\cos x)$

답 $y'=x(2\sin x+x\cos x)$

**0653** $y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$

답 $y'=e^x(\cos x-\sin x)$

**0654** $y'=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)=\cos^2x-\sin^2x$

답 $y'=\cos^2x-\sin^2x$

**01 삼각함수의 덧셈정리** 본책 96쪽

① $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ (복호동순)

② $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ (복호동순)

③ $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ (복호동순)

**0655** $\tan\beta=\tan\{(\alpha+\beta)-\alpha\}$

$=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}$

$=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+1\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$ 답 ②

**0656** $\cot20°+\tan10°=\frac{\cos20°}{\sin20°}+\frac{\sin10°}{\cos10°}$

$=\frac{\cos20°\cos10°+\sin20°\sin10°}{\sin20°\cos10°}$

$=\frac{\cos(20°-10°)}{\sin20°\cos10°}$

$=\frac{1}{\sin20°}=\csc20°$ 답 ③

**0657** $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$의 양변을 각각 제곱하면

$\sin^2\alpha+\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{9}$ …… ㉠

$\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\frac{4}{9}$

$2+2\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{9}$

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=-\frac{7}{9}$ 답 $-\frac{7}{9}$

**0658** $g\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha$, $g\left(\frac{1}{3}\right)=\beta$라 하면 $f(\alpha)=\frac{1}{2}$, $f(\beta)=\frac{1}{3}$이므로

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\alpha+\beta<\pi$이고 $\tan(\alpha+\beta)=1$이므로

$\theta=\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ 답 $\frac{\pi}{4}$

06 삼각함수의 미분

**0659** $\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha=1+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$이므로

$\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$ $\therefore \cos\alpha=\frac{3}{5}\left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$ ··· ❶

또 $\sec^2\beta=1+\tan^2\beta=1+\left(-\frac{15}{8}\right)^2=\frac{289}{64}$이므로

$\cos^2\beta=\frac{64}{289}$ $\therefore \cos\beta=\frac{8}{17}\left(\because -\frac{\pi}{2}<\beta<0\right)$

$\therefore \sin\beta=\tan\beta\cos\beta=-\frac{15}{8}\cdot\frac{8}{17}=-\frac{15}{17}$ ··· ❷

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right)=-\frac{13}{85}$ ··· ❸

따라서 $a=85$, $b=13$이므로 $a+b=98$ ··· ❹

답 98

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $\cos\beta$, $\sin\beta$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

## 유형 02 삼각함수의 덧셈정리의 활용; 방정식

본책 ⊙⊙쪽

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 삼각함수에 대한 식을 세운다.

➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$일 때,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

**0660** 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-2a$, $\tan\alpha\tan\beta=a+1$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-2a}{1-(a+1)}=2$

답 2

**0661** $2x^2-4x+1=0$의 해는 $x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

$\tan\alpha>\tan\beta$에서 $\tan\alpha=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $\tan\beta=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$이므로

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sec^2(\alpha-\beta)=1+\tan^2(\alpha-\beta)$

$=1+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{17}{9}$

답 ④

**0662** 주어진 방정식이 두 실근을 가지므로 판별식을 $D$라 하면

$D=\sin^2\theta-4\cos\theta=(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta\ge0$

$\therefore \cos^2\theta+4\cos\theta-1\le0$ ······ ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-\sin\theta$, $\tan\alpha\tan\beta=\cos\theta$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}$

즉 $\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{3}$이므로 $1-\cos\theta=-3\sin\theta$

위의 식의 양변을 제곱하면

$1-2\cos\theta+\cos^2\theta=9\sin^2\theta$

$1-2\cos\theta+\cos^2\theta=9(1-\cos^2\theta)$

$5\cos^2\theta-\cos\theta-4=0$, $(5\cos\theta+4)(\cos\theta-1)=0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{4}{5}$ 또는 $\cos\theta=1$

이때 $\cos\theta=1$이면 ㉠을 만족시키지 않으므로

$\cos\theta=-\frac{4}{5}$

답 $-\frac{4}{5}$

## 유형 03 삼각함수의 덧셈정리의 활용 ; 두 직선이 이루는 각의 크기

본책 ⊙⊙쪽

① 직선 $y=mx+n$이 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 $\theta$라 하면

$m=\tan\theta$

② 두 직선 $l$, $m$이 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 각각 $\alpha$, $\beta$일 때, 두 직선 $l$, $m$이 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 하면

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

**0663** 두 직선 $y=\frac{1}{3}x+1$, $y=-2x$가 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\beta=-2$이므로

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{\frac{1}{3}-(-2)}{1+\frac{1}{3}\cdot(-2)}\right|=7$

$\therefore \sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+7^2=50$

답 ②

**0664** 두 직선 $2x+y-3=0$, $x+3y+1=0$, 즉 $y=-2x+3$, $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$이 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면 $\tan\alpha=-2$, $\tan\beta=-\frac{1}{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 하면

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{-2-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+(-2)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right|=1$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

답 $\frac{\pi}{4}$

**0665** 두 직선 $ax-y+1=0$, $x-3y+2=0$에서

$y=ax+1$, $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

두 직선이 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\tan\alpha=a$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}$

$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1,\quad \frac{a-\frac{1}{3}}{1+a\cdot\frac{1}{3}}=\pm1$

$a-\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}a$ 또는 $a-\frac{1}{3}=-1-\frac{1}{3}a$

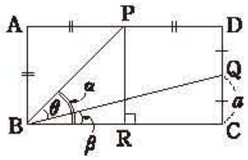
$\therefore a=2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$

따라서 모든 $a$의 값의 곱은 $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ 답 $-1$

## 유형 04 삼각함수의 덧셈정리의 활용; 도형 본책 99쪽

주어진 도형에서 적당한 각을 문자로 놓은 후 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

**0666** 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 R, $\overline{QC}=a$, $\angle PBR=\alpha$, $\angle QBC=\beta$라 하면




$\tan\alpha=\frac{2a}{2a}=1,$

$\tan\beta=\frac{a}{4a}=\frac{1}{4}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+1\cdot\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$ 답 ③

**0667** $\angle CAB=\alpha$, $\angle EAD=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{5}{4},\ \tan\beta=\frac{4}{5}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{5}{4}-\frac{4}{5}}{1+\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}}=\frac{9}{40}$ 답 $\frac{9}{40}$

**0668** $\overline{AB}=a$라 하면 $\overline{BG}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$, $\overline{BD}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$이므로

$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\alpha=\frac{2a}{\sqrt{5}a}=\frac{2\sqrt{5}}{5},$ ➊

$\sin\beta=\frac{a}{\sqrt{10}a}=\frac{\sqrt{10}}{10},\ \cos\beta=\frac{3a}{\sqrt{10}a}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ➋

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

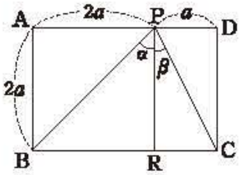
$=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{10}+\frac{2\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ➌

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ➊ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ➋ $\sin\beta$, $\cos\beta$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ➌ $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**0669** $3\overline{AB}=2\overline{AD}$에서 $\overline{AB}:\overline{AD}=2:3$이므로 $\overline{AB}=2a$, $\overline{AD}=3a$라 하고 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 R, $\angle BPR=\alpha$, $\angle CPR=\beta$라 하면

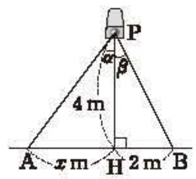



$\tan\alpha=\frac{2a}{2a}=1,\ \tan\beta=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-1\cdot\frac{1}{2}}=3$

답 3

**0670** $\angle APH=\alpha$, $\angle BPH=\beta$, $\overline{AH}=x$ m라 하면




$\tan\alpha=\frac{x}{4},\ \tan\beta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha+\beta)$

$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{x}{4}+\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2x+4}{8-x}$

즉 $\frac{2x+4}{8-x}=2$이므로

$2x+4=16-2x,\quad 4x=12\quad \therefore x=3$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 5 m이다. 답 5 m

**0671** $|ax|=\begin{cases} ax & (x\ge0) \\ -ax & (x<0) \end{cases}$이므로

$\tan\alpha=a,\ \tan\beta=-a$

$\tan\alpha=a$에서 $\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha=1+a^2$이므로

$\cos^2\alpha=\frac{1}{a^2+1}\quad \therefore \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

$\tan\beta=-a$에서 $\sec^2\beta=1+\tan^2\beta=1+a^2$이므로

$\cos^2\beta=\frac{1}{a^2+1}\quad \therefore \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(\because \frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$

$\therefore \sin\beta=\tan\beta\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ ➊

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)+\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

$=-\frac{1}{a^2+1}+\frac{a^2}{a^2+1}=\frac{a^2-1}{a^2+1}$ ➋

즉 $\frac{a^2-1}{a^2+1}=\frac{4}{5}$이므로 $5a^2-5=4a^2+4$

$a^2=9 \quad \therefore a=3\ (\because a>0)$ ➌

답 3

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\beta$를 $a$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❷ $\cos(\alpha-\beta)$를 $a$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❸ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

## 유형 05 삼각함수의 합성

본책 100쪽

$y=a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

➡ $y$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$, 최솟값은 $-\sqrt{a^2+b^2}$이다.

**0672** $y=3\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$

$=3\sin x-2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)+1$

$=3\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sin x+1$

$=2\sin x-\sqrt{3}\cos x+1$

$=\sqrt{7}\left(\sin x\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}-\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)+1$

$=\sqrt{7}\sin(x-\alpha)+1\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$

$-1\le\sin(x-\alpha)\le1$이므로

$-\sqrt{7}+1\le\sqrt{7}\sin(x-\alpha)+1\le\sqrt{7}+1$

따라서 $M=\sqrt{7}+1$, $m=-\sqrt{7}+1$이므로

$Mm=(\sqrt{7}+1)(-\sqrt{7}+1)=-6$

답 $-6$

**0673** $y=\sqrt{7}\sin x-\cos x+\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}-\cos x\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}\sin(x-\alpha)+\sqrt{2}\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)$

ㄱ. 주기는 $2\pi$이다.

ㄴ. 최댓값은 $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

ㄷ. 최솟값은 $-2\sqrt{2}+\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

**0674** $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=2\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

따라서 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로

$a=2,\ b=-\frac{\pi}{6} \quad \therefore ab=-\frac{\pi}{3}$

답 $-\frac{\pi}{3}$

**0675** $f(x)=4a\sin x+3a\cos x-1$

$=5a\left(\sin x\cdot\frac{4}{5}+\cos x\cdot\frac{3}{5}\right)-1$

$=5a\sin(x+\alpha)-1\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\right)$

이때 $a>0$이고 $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-1-5a\le5a\sin(x+\alpha)-1\le5a-1$

$f(x)$의 최댓값이 4이므로 $5a-1=4 \quad \therefore a=1$

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $-1-5=-6$

답 $-6$

**0676** $\angle APB=90°$이므로 $\angle PAB=\theta$라 하면

$\overline{AP}=6\cos\theta$, $\overline{PB}=6\sin\theta$ ➊

$\therefore \overline{AP}+\overline{PB}=6\cos\theta+6\sin\theta$

$=6\sqrt{2}\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=6\sqrt{2}\left(\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}+\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$=6\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ ➋

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le1$

$\therefore 6<6\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le6\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $6\sqrt{2}$이다. ➌

답 $6\sqrt{2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $\overline{AP}$, $\overline{PB}$의 길이를 삼각함수로 나타낼 수 있다. | 20% |
| ❷ 삼각함수의 합성을 이용하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$를 변형할 수 있다. | 50% |
| ❸ $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최댓값을 구할 수 있다. | 30% |

## 유형 06 배각·반각의 공식

본책 100쪽

(1) 배각의 공식

① $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(2) 반각의 공식

① $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ ② $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

③ $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

**0677** $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{16}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16} \quad \therefore 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{15}{16}$

$\therefore \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\frac{15}{16}$

답 $-\frac{15}{16}$

**0678** $2\sin\theta-\cos\theta=0$에서

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}\qquad\therefore \tan\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{3}$ 답 ④

**0679** $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$에서 $\cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$이므로 주어진 등식은

$1+1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}=3\sin\dfrac{\theta}{2},\qquad 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}+3\sin\dfrac{\theta}{2}-2=0$

$\left(\sin\dfrac{\theta}{2}+2\right)\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}-1\right)=0$

$\therefore \sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\ \left(\because -1\le\sin\dfrac{\theta}{2}\le 1\right)$ 답 $\dfrac{1}{2}$

**0680** $\sec^2 x=1+\tan^2 x=1+\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}$이므로

$\cos^2 x=\dfrac{16}{25}\qquad\therefore \cos x=-\dfrac{4}{5}\ \left(\because \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\right)$

$\therefore \sin x=\tan x\cos x=-\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{3}{5}$ ➊

$\therefore \sin 2x+\cos 2x=2\sin x\cos x+1-2\sin^2 x$

$=2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)+1-2\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$

$=-\dfrac{17}{25}$ ➋

답 $-\dfrac{17}{25}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $\cos x$, $\sin x$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ➋ $\sin 2x+\cos 2x$의 값을 구할 수 있다. | 60% |

**0681** $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore \tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=5$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$에서 $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{3}{4}\pi$이므로 $\qquad\tan\dfrac{\theta}{2}<0$

$\therefore \tan\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{5}$ 답 $-\sqrt{5}$

### 유형 07 배각·반각의 공식과 최대·최소 본책 101쪽

배각의 공식 또는 반각의 공식을 이용하여 주어진 삼각함수의 각을 통일한다.

**0682** $y=\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta$

$=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

$=\dfrac{1}{2}(\sin 2\theta+\cos 2\theta)+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$

이때 $-1\le\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1$이므로

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}$

따라서 $M=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}$, $m=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}$이므로

$Mm=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$ 답 $-\dfrac{1}{4}$

**0683** $f(x)=\cos 2x+2\cos x+1$

$=(2\cos^2 x-1)+2\cos x+1$

$=2\cos^2 x+2\cos x$

$=2\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

이때 $-1\le\cos x\le 1$이므로 $f(x)$는 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$을 갖는다. 답 ②

### 유형 08, 09 배각·반각의 공식의 활용 본책 101, 102쪽

주어진 조건을 이용하여 필요한 삼각함수의 값을 구하고, 배각·반각의 공식을 이용한다.

**0684** 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos 2\theta=-\dfrac{5}{9}$ ······ ㉠

$\sin\theta\cos 2\theta=-\dfrac{a}{9}$ ······ ㉡

㉠에서 $\sin\theta+(1-2\sin^2\theta)=-\dfrac{5}{9}$이므로

$18\sin^2\theta-9\sin\theta-14=0,\qquad (3\sin\theta+2)(6\sin\theta-7)=0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{2}{3}\ (\because -1\le\sin\theta\le 1)$

$\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면

$-\dfrac{2}{3}+\cos 2\theta=-\dfrac{5}{9}\qquad\therefore \cos 2\theta=\dfrac{1}{9}$

㉡에서 $\quad -\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{9}=-\dfrac{a}{9}\qquad\therefore a=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

**0685** 두 직선 $y=3x$, $y=mx$가 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 $2\theta$, $\theta\left(0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\tan 2\theta=3$, $\tan\theta=m$

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$이므로

06 삼각함수의 미분

$3=\dfrac{2m}{1-m^2}$, $\quad 3m^2+2m-3=0$

$\therefore m=\dfrac{-1\pm\sqrt{10}}{3}$

이때 $0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\quad m>0$

$\therefore m=\dfrac{-1+\sqrt{10}}{3}$

따라서 $a=-1$, $b=10$이므로 $\quad a+b=9$ 답 ③

**다른 풀이** 직선 $y=3x$가 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 $2\theta\left(0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\quad \tan 2\theta=3$

$\sec^2 2\theta=1+\tan^2 2\theta=1+3^2=10$이므로

$\cos^2 2\theta=\dfrac{1}{10} \quad \therefore \cos 2\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(\because 0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

직선 $y=mx$가 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기는 $\theta$이므로

$$m^2=\tan^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{10}}}{1+\frac{1}{\sqrt{10}}}=\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{10}-1)^2}{9}$$

$\therefore m=\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\ (\because m>0) \qquad \therefore a+b=-1+10=9$

**0686** $\angle ACD=\angle DCB$(접은 각)이므로 $\angle ACB=2\theta$이고, $\overline{BC}=\sqrt{5^2-3^2}=4$이므로

$\cos 2\theta=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{4}{5}$

$\therefore \cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}=\dfrac{1+\frac{4}{5}}{2}=\dfrac{9}{10}$

따라서 $p=10$, $q=9$이므로

$p-q=1$ 답 1

**0687** 두 점 A, B에서 지면에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하고 $\angle BPB'=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\tan(\angle APA')=\tan 2\theta=\dfrac{3}{4}$ ❶

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$에서 $\quad \dfrac{3}{4}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$3\tan^2\theta+8\tan\theta-3=0, \quad (\tan\theta+3)(3\tan\theta-1)=0$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{1}{3}\ (\because \tan\theta>0)$ ❷

두 철탑 사이의 거리를 $x$ m라 하면 $\dfrac{30}{40+x}=\dfrac{1}{3}$이므로

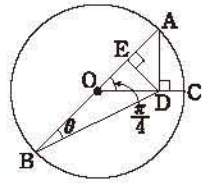
$40+x=90 \qquad \therefore x=50$ ❸

답 50 m

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $\tan 2\theta$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ 두 철탑 사이의 거리를 구할 수 있다. | 30% |

**0688** 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E, $\overline{OA}=\overline{OB}=2a$라 하면 $\triangle AED$와 $\triangle OED$는 직각이등변 삼각형이므로




$\overline{AE}=\overline{DE}=\overline{OE}=a$

직각삼각형 BDE에서 $\overline{BE}=3a$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BE}^2+\overline{DE}^2}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BD}}=\dfrac{a}{\sqrt{10}a}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BD}}=\dfrac{3a}{\sqrt{10}a}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3}{5}$ 답 $\dfrac{3}{5}$

## 유형 10 삼각함수의 극한 본책 102쪽

삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후 극한값을 구한다.

**0689** 
$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{1-\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x}{1+\cos x}=0$$

답 ③

**0690** 
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan^2 x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x(\sin x-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x(\sin x-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(\cos x+\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$$

답 ②

**0691** 
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}=0$$

답 0

**0692** $\lim_{x\to0}\frac{\sec 2x-1}{\sec x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}-1}{\frac{1}{\cos x}-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos 2x}{\cos 2x}}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2(1-\cos^2 x)}{2\cos^2 x-1}}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x(1-\cos^2 x)}{(1-\cos x)(2\cos^2 x-1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1-\cos x)(2\cos^2 x-1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x(1+\cos x)}{2\cos^2 x-1}$

$=\frac{2\cdot1\cdot(1+1)}{2-1}=4$

답 4

**유형 11, 12** $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$ 꼴의 극한 본책 103쪽

$a$, $b$가 0이 아닌 상수일 때

① $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$

② $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{bx}=\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$

**0693** $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin 2x)}{\sin 3x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin 2x)}{\sin 2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}$

$=1\cdot1\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

**0694** $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{9x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{9x}+\frac{\sin 3x}{9x}+\frac{\sin 5x}{9x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{9}\right)$

$=1\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{5}{9}=1$

답 ④

**0695** $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin x}{\sin 2x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{\sin 2x}-\frac{\sin x}{\sin 2x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5}{2}-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=1\cdot1\cdot\frac{5}{2}-1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=2$

답 ⑤

**0696** $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin^2\frac{x}{4}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{4}}\right)^2$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{4}}{\sin\frac{x}{4}}\cdot4\right)^2$

$=(1\cdot1\cdot4)^2=16$

답 16

**0697** $\lim_{x\to0}\frac{\sin f(x)}{f(\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{\sin^2 x+2\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{\sin x(\sin x+2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{x^2+2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x+2}{\sin x+2}$

$=1\cdot1\cdot\frac{2}{2}=1$

답 1

**0698** $f(n)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\cdots+\frac{\sin nx}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot2+\cdots+\frac{\sin nx}{nx}\cdot n}$

$=\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=\frac{2}{n(n+1)}$ ➊

$\therefore \sum_{k=1}^{10}f(k)=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$ ➋

따라서 $a=20$, $b=11$이므로

$a+b=31$ ➌

답 31

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $f(n)$을 구할 수 있다. | 60% |
| ➋ $\sum_{k=1}^{10}f(k)$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0699** $\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x^3-x^2+x)}{3x^3+x^2-x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x^3-x^2+x)}{2x^3-x^2+x}\cdot\frac{x(2x^2-x+1)}{x(3x^2+x-1)}$

$=1\cdot\frac{1}{-1}=-1$

답 ①

**0700** $\lim_{x\to0}\frac{5x}{\tan 2x+\tan 3x}=\lim_{x\to0}\frac{5}{\frac{\tan 2x}{x}+\frac{\tan 3x}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{5}{\frac{\tan 2x}{2x}\cdot2+\frac{\tan 3x}{3x}\cdot3}$

$=\frac{5}{1\cdot2+1\cdot3}=1$ 답 1

**0701** $\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{1}{2}$

$=\ln3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\ln\sqrt{3}$ 답 ①

SSEN 특강

**지수함수, 로그함수의 극한**

① $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

② $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\frac{1}{\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

**0702** $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x+\tan 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 2x}{x}}{1+\frac{\tan 3x}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot2}{1+\frac{\tan 3x}{3x}\cdot3}$

$=\frac{1\cdot2}{1+1\cdot3}=\frac{1}{2}$

따라서 $p=2$, $q=1$이므로

$p^2+q^2=2^2+1^2=5$ 답 5

**0703** $x°=\frac{\pi}{180}x$이므로 ··· ❶

$\lim_{x\to0}\frac{x°}{\tan\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\pi}{180}x}{\tan\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{\pi}{180}\cdot2$

$=1\cdot\frac{\pi}{180}\cdot2=\frac{\pi}{90}$ ··· ❷

$\therefore a=90$ ··· ❸

답 90

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $x°$를 라디안 각으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ $\lim_{x\to0}\frac{x°}{\tan\frac{x}{2}}$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ $a$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**유형 13** $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$ 꼴의 극한 — 본책 104쪽

(i) 분자, 분모에 $1+\cos x$를 각각 곱한다.

(ii) $1-\cos^2 x=\sin^2 x$임을 이용한다.

(iii) 삼각함수의 극한을 이용한다.

**0704** $\lim_{x\to0}\frac{\csc x-\cot x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$

$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 답 ④

**0705** $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos kx}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos kx)(1+\cos kx)}{x^2(1+\cos kx)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 kx}{x^2(1+\cos kx)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin kx}{kx}\right)^2\cdot k^2\cdot\frac{1}{1+\cos kx}$

$=1^2\cdot k^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{k^2}{2}$ 답 ④

**0706** $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan 5x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\tan 5x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\tan 5x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{5x}{\tan 5x}\cdot\frac{1}{5(1+\cos x)}$

$=1^2\cdot1\cdot\frac{1}{5\cdot2}=\frac{1}{10}$ 답 ②

**0707** $\lim_{x\to0}\frac{2\cos^2 x+\cos x-3}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(2\cos x+3)}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2}\cdot\frac{2\cos x+3}{\cos x+1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{2\cos x+3}{\cos x+1}$

$=\lim_{x\to0}(-1)\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{2\cos x+3}{\cos x+1}$

$=-1\cdot1^2\cdot\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}$ 답 ①

**0708** $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{x^3}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x(\cos x-1)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^3(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^3 x}{x^3(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}(-2)\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{\cos x+1}$$
$$=-2\cdot1^3\cdot\frac{1}{2}=-1$$

답 $-1$

### 유형 14 치환을 이용한 삼각함수의 극한 (본책 105쪽)

$x-a=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to0$이므로

① $\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

② $\lim_{x\to a}\frac{\tan(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=1$

**0709** $\frac{\pi}{2}-x=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

답 ④

**0710** $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{t\to0}t\tan\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$$
$$=\lim_{t\to0}t(-\cot t)$$
$$=\lim_{t\to0}\left(-\frac{t}{\tan t}\right)=-1$$

답 ②

**0711** $x+\pi=t$로 놓으면 $x\to-\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{1+\cos x}{(x+\pi)\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{1+\cos(t-\pi)}{t\sin(t-\pi)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{-t\sin t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{-t\sin t(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{-t\sin t(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(-\frac{\sin t}{t}\right)\cdot\frac{1}{1+\cos t}$$
$$=-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

답 ②

**0712** $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\frac{\pi}{2}(t+1)\right\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)\right\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{-\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=1\cdot1\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

답 $-\frac{\pi}{2}$

**0713** $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$ ···· ❶

이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{3x+\pi}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

이때 $x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $x\to-\frac{\pi}{3}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{t\to0}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{2}{3}\cdot1=\frac{2}{3}$$ ···· ❷

답 $\frac{2}{3}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 삼각함수의 합성을 이용하여 분자를 변형할 수 있다. | 40% |
| ❷ 치환을 이용하여 극한값을 구할 수 있다. | 60% |

### 유형 15 $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}$ 꼴의 극한 (본책 105쪽)

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

① $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

② $\lim_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=1$

**0714** $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\tan\left(\sin\frac{1}{x}\right)\csc\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\tan(\sin t)\csc t$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\tan(\sin t)}{\sin t}=1$$

답 1

**0715** $x^\circ=\frac{\pi}{180}x$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x^\circ\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\sin\frac{1}{x}$$

이때 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{t\to0}\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{\pi}{180}\cdot1=\frac{\pi}{180}$$

답 ②

**0716** $\frac{4}{x-2}=t$로 놓으면 $x=2+\frac{4}{t}$이고, $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\frac{2x+3}{4}=\frac{1}{4}\left\{2\left(2+\frac{4}{t}\right)+3\right\}=\frac{7t+8}{4t}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{4}\tan\frac{4}{x-2}&=\lim_{t\to0}\frac{7t+8}{4t}\tan t\\&=\lim_{t\to0}\frac{7t+8}{4}\cdot\frac{\tan t}{t}\\&=2\cdot1=2\end{aligned}$$

답 ②

**유형 16 삼각함수의 극한을 이용한 미정계수의 결정** 본책 106쪽

$\frac{0}{0}$ 꼴의 함수에서 $x \longrightarrow a$일 때
① (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.
② (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

**0717** $x \longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.
즉 $\lim_{x\to0}(ax\sin x+b)=0$이므로 $b=0$
$b=0$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{ax\sin x}&=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{ax\sin x(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{ax\sin x(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\\&=\frac{1}{a}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2a}\end{aligned}$$

$\frac{1}{2a}=\frac{1}{10}$이므로 $a=5$
$\therefore a^2+b^2=5^2+0^2=25$

답 25

**0718** $x \longrightarrow 1$일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.
즉 $\lim_{x\to1}(\sqrt{ax}-2)=0$이므로 $\sqrt{a}=2$ $\therefore a=4$
$a=4$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{2\sqrt{x}-2}&=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\cdot(\sqrt{x}+1)\\&=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\end{aligned}$$

이때 $x-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

따라서 $b=1$이므로 $ab=4$

답 4

**0719** $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.
즉 $\lim_{x\to0}\ln(x+a)=0$이므로
$\ln a=0$ $\therefore a=1$ ➊

$a=1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{\sin bx}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{1}{b}\\&=1\cdot1\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{b}\end{aligned}$$

$\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$이므로 $b=3$ ➋
$\therefore a+b=4$ ➌

답 4

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ➋ $b$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0720** $x \longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.
즉 $\lim_{x\to0}(a-b\cos x)=0$이므로 $a-b=0$ $\therefore a=b$
$b=a$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{a-a\cos x}&=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{a(1-\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{a(1-\cos x)(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{a\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\\&=\frac{1}{a}\cdot1^2\cdot2=\frac{2}{a}\end{aligned}$$

$\frac{2}{a}=1$이므로 $a=2$ $\therefore b=2$
$\therefore ab=4$

답 ②

**0721** $f(x)=ax+b$ $(a\neq0)$로 놓으면 주어진 식은

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\pi+x)}{ax+b}=\frac{1}{2}$$

$x \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.
즉 $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$이므로

$-\frac{\pi}{2}a+b=0$ $\therefore b=\frac{\pi}{2}a$ ...... ㉠

$\therefore f(x)=ax+\frac{\pi}{2}a=a\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\pi+x)}{a\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2}$에서 $x+\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면

$x \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{at}&=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{at}=\lim_{t\to0}\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{\sin t}{t}\\&=\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot1=-\frac{1}{a}\end{aligned}$$

$-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad a=-2$

따라서 $f(x)=-2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-2x-\pi$이므로 $\quad f(2\pi)=-5\pi$

$\therefore k=-5$

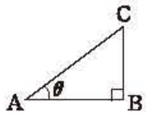
답 $-5$

**유형 17 삼각함수의 극한의 도형에의 활용** 본책 106쪽

오른쪽 그림에서 다음을 이용하여 선분의 길이를 삼각함수로 나타낸 후 극한값을 구한다.

① $\overline{AB}=\overline{AC}\cos\theta$

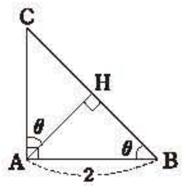
② $\overline{BC}=\overline{AC}\sin\theta=\overline{AB}\tan\theta$



**0722** $\triangle ABH$에서 $\quad \overline{AH}=2\sin\theta$

$\angle CAH=\angle CBA=\theta$이므로 $\triangle AHC$에서

$\overline{CH}=\overline{AH}\tan\theta=2\sin\theta\tan\theta$



$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta\tan\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}2\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}$$
$$=2\cdot1\cdot1=2$$

답 ②

**다른 풀이** $\triangle ABC$에서 $\quad \overline{BC}=\dfrac{2}{\cos\theta}$

$\triangle ABH$에서 $\quad \overline{BH}=2\cos\theta$

$$\overline{CH}=\frac{2}{\cos\theta}-2\cos\theta=\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}\text{이므로}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\theta}{\theta^2\cos\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2}{\cos\theta}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$$
$$=2\cdot1^2=2$$

**0723** $\overline{OH}=\overline{OA}\cos\theta=10\cos\theta$이므로

$\overline{BH}=10-10\cos\theta=10(1-\cos\theta)$ ➊

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{10(1-\cos\theta)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{10(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{10\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{10}{1+\cos\theta}$$
$$=1^2\cdot5=5$$ ➋

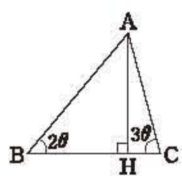
답 5

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $\overline{BH}$의 길이를 삼각함수로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ➋ $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}$의 값을 구할 수 있다. | 60% |

**0724** 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

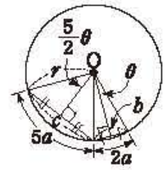
$\overline{AB}=\dfrac{\overline{AH}}{\sin2\theta}$, $\overline{AC}=\dfrac{\overline{AH}}{\sin3\theta}$



$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{\overline{AH}}{\sin3\theta}}{\dfrac{\overline{AH}}{\sin2\theta}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{2\theta}\cdot\frac{3\theta}{\sin3\theta}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ③

**0725** 오른쪽 그림과 같이 길이가 $2a$, $5a$인 호에 대한 중심각의 크기를 각각 $2\theta$, $5\theta$라 하면



$2a=r\cdot2\theta$, $5a=r\cdot5\theta$이므로

$a=r\theta$

또 $\dfrac{b}{2}=r\sin\theta$, $\dfrac{c}{2}=r\sin\dfrac{5}{2}\theta$이므로

$b=2r\sin\theta$, $c=2r\sin\dfrac{5}{2}\theta$

$a\to0+$일 때 $\theta\to0+$이므로

$$\lim_{a\to0+}\frac{b+c}{a}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2r\sin\theta+2r\sin\dfrac{5}{2}\theta}{r\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}+5\cdot\frac{\sin\dfrac{5}{2}\theta}{\dfrac{5}{2}\theta}\right)$$
$$=2\cdot1+5\cdot1=7$$

답 ⑤

**유형 18 삼각함수의 연속을 이용한 미정계수의 결정** 본책 107쪽

$x\neq a$인 모든 실수 $x$에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\neq a)\\ k & (x=a)\end{cases}\ (k\text{는 상수})$$

일 때, $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 연속이면 ➡ $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=k$

**0726** 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1) \qquad \therefore \lim_{x\to1}\frac{\sin3(x-1)}{x-1}=k$

이때 $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$k=\lim_{x\to1}\frac{\sin3(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\sin3t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin3t}{3t}\cdot3=1\cdot3=3$$

답 3

**0727** 함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로 $\quad \displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\sin^2bx}=\frac{1}{8} \quad\cdots\cdots ㉠$$ ➊

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to0}(a-\cos x)=0$이므로 $\quad a-1=0 \quad \therefore a=1$ ➋

$a=1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 bx}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 bx(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 bx(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{bx}{\sin bx}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{1}{b^2}$$
$$=1^2\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b^2}=\frac{1}{2b^2}$$

$\frac{1}{2b^2}=\frac{1}{8}$에서 $b^2=4$ $\therefore b=2\ (\because b>0)$ ··· ❸

답 $a=1,\ b=2$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용하여 식을 세울 수 있다. | 30% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ❸ $b$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**0728** 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$$

이다. 이때 $f(0)=b$이고

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{ax}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0+}\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{a}{2}=1\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{2\tan x}{5x+\sin x}=\lim_{x\to0-}\frac{2\cdot\frac{\tan x}{x}}{5+\frac{\sin x}{x}}$$
$$=\frac{2\cdot1}{5+1}=\frac{1}{3}$$

이므로 $\frac{a}{2}=\frac{1}{3}=b$

따라서 $a=\frac{2}{3},\ b=\frac{1}{3}$이므로 $a+b=1$

답 ⑤

**유형 19 삼각함수의 도함수** 본책 107쪽

① $y=\sin x$ ➡ $y'=\cos x$
② $y=\cos x$ ➡ $y'=-\sin x$

**0729** $f(x)=3^x(\sin x+\cos x)$에서

$$f'(x)=3^x\ln3(\sin x+\cos x)+3^x(\cos x-\sin x)$$
$$=3^x\{(\ln3-1)\sin x+(\ln3+1)\cos x\}$$
$$\therefore f'(0)=1\cdot(\ln3+1)=\ln3+1$$

답 ③

**0730** $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x-x$에서

$$f'(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x-1=2\left(\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin x\cdot\frac{1}{2}\right)-1$$
$$=2\left(\cos x\sin\frac{\pi}{3}+\sin x\cos\frac{\pi}{3}\right)-1=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1$$

$f'(a)=\sqrt{2}-1$에서 $2\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)-1=\sqrt{2}-1$

$$\therefore \sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0\le a\le\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{3}\le a+\frac{\pi}{3}\le\frac{5}{6}\pi$이므로

$a+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi$ $\therefore a=\frac{5}{12}\pi$

답 ④

**0731** $f(x)=e^x\cos x$에서

$$f'(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)$$
$$=e^x(\cos x-\sin x)$$ ··· ❶

$f'(x)=0$에서 $\cos x-\sin x=0\ (\because e^x>0)$

$\therefore \cos x=\sin x$

$0<x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ ··· ❷

따라서 모든 $x$의 값의 합은 $\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$ ··· ❸

답 $\frac{3}{2}\pi$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $x$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $x$의 값의 합을 구할 수 있다. | 10% |

**유형 20 삼각함수의 도함수; 미분계수를 이용한 극한값의 계산** 본책 108쪽

(i) 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(a)$가 포함된 식으로 변형한다.
(ii) $f'(x)$를 구하여 $f'(a)$의 값을 구한 후 (i)에 대입한다.

**0732** $\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)-\{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}\cdot2+\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$$
$$=2f'(\pi)+f'(\pi)=3f'(\pi)$$

이때 $f(x)=x\sin x$에서 $f'(x)=\sin x+x\cos x$이므로

$3f'(\pi)=3(\sin\pi+\pi\cos\pi)=-3\pi$

답 $-3\pi$

**0733** $f(x)=\lim_{h\to0}\frac{x\cos(x+h)-x\cos x}{h}$

$$=x\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$
$$=x(\cos x)'$$
$$=-x\sin x$$

이므로 $f'(x)=-\sin x-x\cos x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=-1$

답 $-1$

**0734** $\lim_{x\to0}\frac{f(\pi-\sin x)-f(\pi)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(\pi-\sin x)-f(\pi)}{(\pi-\sin x)-\pi}\cdot\frac{-\sin x}{x}$$
$$=-\lim_{x\to0}\frac{f(\pi-\sin x)-f(\pi)}{(\pi-\sin x)-\pi}$$

이때 $\pi-\sin x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow \pi$이므로

$$-\lim_{x\to 0}\frac{f(\pi-\sin x)-f(\pi)}{(\pi-\sin x)-\pi}=-\lim_{t\to\pi}\frac{f(t)-f(\pi)}{t-\pi}=-f'(\pi)$$

$f(x)=\sin x\cos x$에서

$$f'(x)=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)$$
$$=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$
$$\therefore -f'(\pi)=-\cos 2\pi=-1$$

답 ②

## 유형 21 삼각함수의 도함수; 미분가능성

본책 108쪽

함수 $F(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge a) \\ g(x) & (x<a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

① 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 연속이다. ➡ $\lim_{x\to a-} g(x)=f(a)$

② $F'(a)$가 존재한다. ➡ $\lim_{x\to a+} f'(x)=\lim_{x\to a-} g'(x)$

**0735** $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}(e^x\sin x+a)=\lim_{x\to 0-}(2x^2+bx+3)=f(0)$$

$\therefore a=3$

또 $f'(x)=\begin{cases} e^x(\sin x+\cos x) & (x>0) \\ 4x+b & (x<0)\end{cases}$이고 $f'(0)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to 0+} e^x(\sin x+\cos x)=\lim_{x\to 0-}(4x+b)$$

$\therefore b=1$

답 $a=3$, $b=1$

**0736** $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}\sin x=\lim_{x\to 0-}(ax+b)=f(0)$$

$\therefore b=0$

또 $f'(x)=\begin{cases} a & (-1<x<0) \\ \cos x & (0<x<1)\end{cases}$이고 $f'(0)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to 0+}\cos x=\lim_{x\to 0-} a \qquad \therefore a=1$$

$\therefore a+b=1$

답 1

**0737** $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 미분가능하므로 $x=0$에서도 미분가능하다.

이때 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}(a\sin x+b\cos x)=\lim_{x\to 0-} e^{x-1}=f(0)$$

$\therefore b=\frac{1}{e}$ ··· ❶

또 $f'(x)=\begin{cases} a\cos x-\frac{1}{e}\sin x & (x>0) \\ e^{x-1} & (x<0)\end{cases}$이고 $f'(0)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to 0+}\left(a\cos x-\frac{1}{e}\sin x\right)=\lim_{x\to 0-} e^{x-1} \qquad \therefore a=\frac{1}{e}$$ ··· ❷

$\therefore ab=\frac{1}{e^2}$ ··· ❸

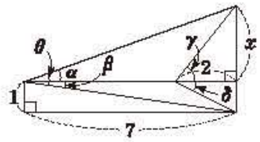
답 $\frac{1}{e^2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $b$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ $ab$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0738** 전략 삼각함수의 덧셈정리를 이용할 수 있도록 $\theta$, $\theta+\frac{\pi}{4}$를 각각 두 각의 합으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\theta=\alpha+\beta$, $\theta+\frac{\pi}{4}=\gamma+\delta$라 하고, 나무의 높이를 $(x+1)$m라 하자.




$\tan\gamma=\frac{x}{2}$, $\tan\delta=\frac{1}{2}$이므로

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\tan(\gamma+\delta)=\frac{\tan\gamma+\tan\delta}{1-\tan\gamma\tan\delta}$$
$$=\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2(x+1)}{4-x} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\tan\alpha=\frac{x}{7}$, $\tan\beta=\frac{1}{7}$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\frac{x}{7}+\frac{1}{7}}{1-\frac{x}{7}\cdot\frac{1}{7}}=\frac{7(x+1)}{49-x}$$

$$\therefore \tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$
$$=\frac{1+\frac{7(x+1)}{49-x}}{1-\frac{7(x+1)}{49-x}}=\frac{28+3x}{21-4x} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉠, ㉡이 같으므로

$$\frac{28+3x}{21-4x}=\frac{2(x+1)}{4-x}$$
$$2(x+1)(4x-21)=(x-4)(3x+28)$$
$$8x^2-34x-42=3x^2+16x-112$$
$$x^2-10x+14=0$$
$$\therefore x=5\pm\sqrt{11}$$

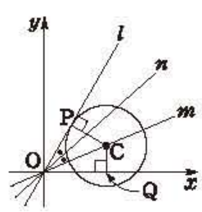
따라서 나무의 높이는 $5+\sqrt{11}+1=6+\sqrt{11}$ 또는 $5-\sqrt{11}+1=6-\sqrt{11}$이므로

$$\therefore a+b=6+\sqrt{11}+6-\sqrt{11}=12$$

답 ①

**0739** 전략 삼각함수의 값을 구할 수 있는 각으로 $\theta$를 나타낸 후 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 원의 중심 $C(2\sqrt{5}, \sqrt{5})$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 Q라 하고 $\angle COP=\alpha$, $\angle COQ=\beta$라 하면 $\theta=\frac{\alpha}{2}+\beta$이므로




$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$$

$\overline{OC}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}=5$이므로

$$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$이므로

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$\triangle COQ$에서 $\quad \sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\therefore \cos\theta=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta$$

$$=\frac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ④

**다른 풀이** 두 직선 $m$, $n$이 이루는 각의 크기를 $\alpha$라 하면 직선 $m$이 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기는 $\theta-\alpha$이므로

$$\tan(\theta-\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{OC}=5$, $\overline{CP}=3$이므로 $\quad \overline{OP}=4$

$\triangle COP$에서 $\quad \tan 2\alpha=\frac{3}{4}$

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4},\quad 8\tan\alpha=3-3\tan^2\alpha$$

$$3\tan^2\alpha+8\tan\alpha-3=0$$

$$(\tan\alpha+3)(3\tan\alpha-1)=0$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{3}\ (\because \tan\alpha>0)$$

㉠에서 $\frac{\tan\theta-\tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha}=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{\tan\theta-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}\tan\theta}=\frac{1}{2},\quad 2\tan\theta-\frac{2}{3}=1+\frac{1}{3}\tan\theta$$

$$\frac{5}{3}\tan\theta=\frac{5}{3}\quad \therefore \tan\theta=1$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로 $\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

**0740** **전략** 반각의 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후 함수의 그래프의 교점을 이용한다.

**풀이** $2\sin^2 x-8\sin^2\frac{x}{2}=k-3$에서

$$2(1-\cos^2 x)-8\cdot\frac{1-\cos x}{2}=k-3$$

$$\therefore -2\cos^2 x+4\cos x+1=k$$

즉 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-2\cos^2 x+4\cos x+1$의 그래프와 직선 $y=k$가 교점을 가져야 한다.

$y=-2\cos^2 x+4\cos x+1$에서

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

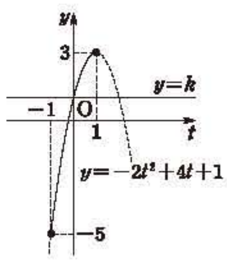
$$y=-2t^2+4t+1$$

$$=-2(t-1)^2+3$$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면

$$-5\le k\le 3$$

이므로 실수 $k$의 최댓값은 3, 최솟값은 $-5$이다.




따라서 구하는 합은 $\quad 3+(-5)=-2$

답 ②

**0741** **전략** 직선 OB가 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 직선 OA, OC가 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기로 나타낸다.

**풀이** 직선 OA와 OC가 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\tan\alpha=\frac{1}{3},\ \tan\beta=2$$

이때 $\angle AOB=\angle COB$이므로 직선 OB가 $x$축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 $\theta$라 하면

$$\theta=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

이때 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+2}{1-\frac{1}{3}\cdot 2}=7$이므로

$$\tan 2\theta=7$$

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=7,\quad 7\tan^2\theta+2\tan\theta-7=0$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{-1\pm 5\sqrt{2}}{7}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan\theta>0$이므로

$$\tan\theta=\frac{-1+5\sqrt{2}}{7}$$

답 $\frac{-1+5\sqrt{2}}{7}$

**0742** **전략** $\triangle ABQ$, $\triangle BCQ$의 넓이를 이용하여 $\overline{AQ}:\overline{QC}$를 구한다.

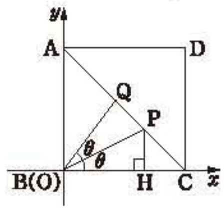
**풀이** 정사각형의 한 변의 길이를 $3a$, $\angle PBC=\theta$라 하면

$$\triangle ABQ=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\overline{BQ}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\overline{BQ}\cdot\cos 2\theta$$

$$\triangle BCQ=\frac{1}{2}\cdot\overline{BQ}\cdot 3a\cdot\sin 2\theta$$

이때 $\overline{AQ}:\overline{QC}=\triangle ABQ:\triangle BCQ$이므로

$$\overline{AQ}:\overline{QC}=\cos 2\theta:\sin 2\theta \quad \cdots\cdots ㉠$$




오른쪽 그림과 같이 점 B가 원점, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$가 각각 $x$축과 $y$축의 양의 부분에 오도록 좌표평면에 □ABCD를 놓으면

$$A(0,\ 3a),\ C(3a,\ 0)$$

$\overline{AP}:\overline{PC}=2:1$이므로

$$P(2a,\ a)$$

점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle PBH$에서 $\overline{BP}=\sqrt{5}a$이므로

$$\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=\frac{2a}{\sqrt{5}a}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

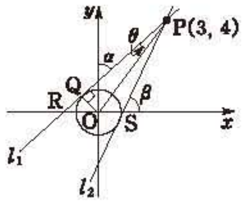
이를 ㉠에 대입하면

$$\overline{AQ}:\overline{QC}=\frac{3}{5}:\frac{4}{5}=3:4$$

답 ③

**0743** 전략 원과 직선 $l_1$의 접점 Q에 대하여 $\angle OPQ=\theta$라 하고 배각의 공식을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 $l_1$과 원 $x^2+y^2=1$의 교점을 Q, 두 직선 $l_1$, $l_2$와 $x$축의 교점을 각각 R, S라 하고, $\angle OPQ=\theta$라 하면 $\angle SPQ=2\theta$이므로 $\triangle PRS$에서




$\angle PRO+2\theta=\beta$

이때 $\angle PRO=\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로 $\quad \frac{\pi}{2}-\alpha+2\theta=\beta$

따라서 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2\theta$이므로

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)=\cos 2\theta$$

$\triangle OPQ$에서 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{OQ}=1$이므로

$$\sin\theta=\frac{1}{5}$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$$
$$=1-2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{23}{25}$$

답 ⑤

**0744** 전략 주어진 그래프와 삼각함수의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $-x=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to -1-$이므로

$$\lim_{x\to 1+}\{f(x)+f(-x)\}=\lim_{x\to 1+}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(-x)$$
$$=\lim_{x\to 1+}f(x)+\lim_{t\to -1-}f(t)$$
$$=0$$

ㄴ. $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1\,(x\ne 0)$이고 $f(x)\ge 0$이므로 각 변에 $f(x)$를 곱하면

$$-f(x)\le f(x)\sin\frac{1}{x}\le f(x)$$

한편 $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\{-f(x)\}=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\quad \lim_{x\to 0}f(x)\sin\frac{1}{x}=0$

ㄷ. 열린 구간 $(-2, 2)$에서 함수 $g(x)$는 연속이고 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서만 불연속이므로 함수 $(g\circ f)(x)$가 열린 구간 $(-2, 2)$에서 연속이려면 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

(i) $x=-1$일 때,

$$g(f(-1))=g(0)=0,$$
$$\lim_{x\to -1+}g(f(x))=g(1)=0,$$
$$\lim_{x\to -1-}g(f(x))=g(0)=0$$

이므로 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $x=1$일 때,

$$g(f(1))=g(0)=0,$$
$$\lim_{x\to 1+}g(f(x))=g(0)=0,$$
$$\lim_{x\to 1-}g(f(x))=g(1)=0$$

이므로 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $(g\circ f)(x)$는 열린 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

**0745** 전략 반각의 공식을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $1-\cos\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)=1-\cos\left(2\sin^2\frac{x}{4}\right)$
$$=2\sin^2\left(\sin^2\frac{x}{4}\right)$$

이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)}{2^k x^n}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\sin^2\frac{x}{4}\right)}{2^k x^n}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\sin^2\frac{x}{4}\right)}{\left(\sin^2\frac{x}{4}\right)^2}\cdot\frac{\left(\sin^2\frac{x}{4}\right)^2}{\left(\frac{x}{4}\right)^4}\cdot\frac{2\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^4}{2^k x^n}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin\left(\sin^2\frac{x}{4}\right)}{\sin^2\frac{x}{4}}\right\}^2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\right)^4\cdot\frac{x^{4-n}}{2^{k+7}}$$
$$=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^{4-n}}{2^{k+7}}$$

즉 $\lim_{x\to 0}\frac{x^{4-n}}{2^{k+7}}=4$이므로 $\quad 4-n=0$, $k+7=-2$

$\therefore k=-9$, $n=4$

답 $k=-9$, $n=4$

**0746** 전략 $x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓고 주어진 식을 $t$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{3}$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\sin 3x}{1-2\cos x}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin(3t+\pi)}{1-2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sqrt{3}\sin 3t}{1-2\left(\cos t\cos\frac{\pi}{3}-\sin t\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sqrt{3}\sin 3t}{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sqrt{3}\sin 3t}{2\sin^2\frac{t}{2}+2\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sqrt{3}\sin 3t}{2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sin 3t}{3t}\cdot\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{t}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}}\cdot 6$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 6=-3$$

답 ①

**0747** 전략 $S(x)$는 첫째항이 1, 공비가 $\cos x$인 등비급수임을 이용한다.

풀이 $-1<\cos x<1$이므로 $\quad S(x)=\frac{1}{1-\cos x}$

따라서 $\lim_{x\to0}(ax^2+b)S(x)=4$에서

$$\lim_{x\to0}\frac{ax^2+b}{1-\cos x}=4 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow0$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(ax^2+b)=0$이므로 $\quad b=0$

$b=0$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{ax^2}{1-\cos x}&=\lim_{x\to0}\frac{ax^2(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{ax^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to0}a\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\\&=a\cdot1^2\cdot2=2a\end{aligned}$$

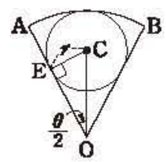
$2a=4$에서 $\quad a=2$

$\therefore a+b=2$

답 ②

**0748** 전략 원 $C$의 반지름의 길이를 $r$라 하고 $l$, $m$을 삼각함수를 이용하여 나타낸다.

풀이 원 $C$의 반지름의 길이를 $r$, 원의 중심 C에서 반지름 OA에 내린 수선의 발을 E라 하면 $\angle\mathrm{COE}=\frac{\theta}{2}$이므로 $\triangle\mathrm{OCE}$에서




$$\overline{\mathrm{OC}}=\frac{r}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

따라서 부채꼴의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OC}}+r=\frac{r}{\sin\frac{\theta}{2}}+r$이므로

$$l=\left(\frac{r}{\sin\frac{\theta}{2}}+r\right)\theta=r\theta\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}+1\right)=\frac{1+\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot r\theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{m}{l}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\pi r}{\frac{1+\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot r\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\pi\sin\frac{\theta}{2}}{\theta\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\pi}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\\&=1\cdot\pi=\pi\end{aligned}$$

답 $\pi$

**0749** 전략 $r$를 $a$에 대한 식으로 나타낸 후 극한값을 구한다.

풀이 점 P가 곡선 $y=\cos2x$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}(a,\ \cos2a)$

원의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(0,\ 1-r)$이므로

$$\begin{aligned}r^2&=\overline{\mathrm{CP}}^2\\&=a^2+(\cos2a-1+r)^2\\&=a^2+(\cos2a-1)^2+2r(\cos2a-1)+r^2\end{aligned}$$

$2r(1-\cos2a)=a^2+(1-\cos2a)^2$

$$\begin{aligned}\therefore r&=\frac{a^2}{2(1-\cos2a)}+\frac{1-\cos2a}{2}\\&=\frac{a^2}{4\sin^2a}+\sin^2a\end{aligned}$$

점 P가 점 A에 한없이 가까워질 때 $a\longrightarrow0+$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{a\to0+}r&=\lim_{a\to0+}\left(\frac{a^2}{4\sin^2a}+\sin^2a\right)\\&=\lim_{a\to0+}\left\{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a}{\sin a}\right)^2+\sin^2a\right\}\\&=\frac{1}{4}\cdot1^2+0=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

**0750** 전략 극한값의 성질을 이용하여 미정계수를 결정한다.

풀이 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2+ax+b}=k \quad\cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow1$일 때 (분자)$\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $\quad 1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1 \quad\cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2+ax-a-1}&=\lim_{x\to1}\frac{\sin^2(x-1)}{(x-1)(x+a+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{\sin(x-1)}{x+a+1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x+a+1}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x+a+1}=k \quad\cdots\cdots ㉢$$

$x\longrightarrow1$일 때 (분자)$\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x+a+1)=0$이므로 $\quad a+2=0$

$\therefore a=-2,\ b=1\ (\because ㉡)$

$a=-2$를 ㉢에 대입하면

$$k=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=1$$

$\therefore a-b+k=-2$

답 ③

**0751** 전략 $\square\mathrm{ACEP}=\triangle\mathrm{ACP}+\triangle\mathrm{PCE}$임을 이용한다.

풀이 $\angle\mathrm{ACD}=\frac{\pi}{4}$, $\angle\mathrm{PCE}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ACP}&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\\&=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\end{aligned}$$

$\triangle PCE=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{2}\cos\theta$

$\therefore f(\theta)=\triangle ACP+\triangle PCE$

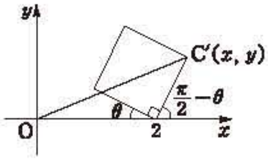
$=\frac{1}{2}\sin\theta+\cos\theta$

따라서 $f'(\theta)=\frac{1}{2}\cos\theta-\sin\theta$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-2}{4}$ 　　답 ③

**0752** 전략 점 C′의 좌표를 $\theta$에 대한 삼각함수로 나타낸다.

풀이 점 C′의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 오른쪽 그림에서




$x=2+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=2+\sin\theta,$

$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

이므로

$f(\theta)=\overline{OC'}^2=(2+\sin\theta)^2+\cos^2\theta$

$=4+4\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$

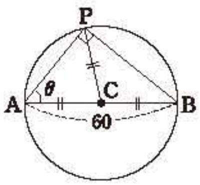
$=5+4\sin\theta$

$\therefore f'(\theta)=4\cos\theta$

따라서 $y=4\cos\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ⑤이다. 　　답 ⑤

**0753** 전략 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$의 길이를 삼각함수를 이용하여 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원을 그리면 $\overline{CA}=\overline{CB}=\overline{CP}$이므로 $\triangle PAB$가 이 원에 내접한다.




$\therefore \angle APB=\frac{\pi}{2}$

$\angle PAB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{AB}\cos\theta=60\cos\theta$

$\overline{BP}=\overline{AB}\sin\theta=60\sin\theta$ 　　··· ①

총 공사 비용을 $f(\theta)$(억 원)라 하면

$f(\theta)=6\cdot 60\cos\theta+8\cdot 60\sin\theta=120(4\sin\theta+3\cos\theta)$

$=120\cdot 5\left(\sin\theta\cdot\frac{4}{5}+\cos\theta\cdot\frac{3}{5}\right)$

$=600\sin(\theta+\alpha)\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\right)$ 　　··· ②

따라서 $f(\theta)$는 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$일 때 최대이므로 구하는 값은

$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{4}{3}$ 　　··· ③

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ① $\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이를 삼각함수로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ② 총 공사 비용을 삼각함수의 합성을 이용하여 간단히 할 수 있다. | 40% |
| ③ $\tan(\angle PAB)$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**0754** 전략 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$임을 이용한다.

풀이 점 $P(4\sin\theta,\ 2\sin\theta)$와 직선 $x\sin\theta+y\cos\theta-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-6|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=|4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-6|$

··· ①

$f(\theta)=4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-6$으로 놓으면

$f(\theta)=4\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\sin 2\theta-6$

$=\sin 2\theta-2\cos 2\theta-4$

$=\sqrt{5}\left(\sin 2\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}-\cos 2\theta\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-4$

$=\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)-4\left(\text{단, }\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

··· ②

이때 $-1\leq\sin(2\theta+\alpha)\leq 1$이므로

$-\sqrt{5}-4\leq\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)-4\leq\sqrt{5}-4$

즉 $-\sqrt{5}-4\leq f(\theta)\leq\sqrt{5}-4$이므로

$4-\sqrt{5}\leq|f(\theta)|\leq 4+\sqrt{5}$

따라서 $M=4+\sqrt{5},\ m=4-\sqrt{5}$이므로

$M+m=8$

··· ③

답 8

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ① 점과 직선 사이의 거리를 삼각함수로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ② 삼각함수의 합성을 이용하여 식을 정리할 수 있다. | 30% |
| ③ $M+m$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**0755** 전략 두 삼각형 OAP와 RAQ의 넓이를 삼각함수로 나타낸다.

풀이 두 부채꼴 OAP와 OAQ의 반지름의 길이가 모두 1이므로

$\widehat{AP}=\angle AOP,\ \widehat{AQ}=\angle AOQ$

$\widehat{AP}=\angle AOP=2t$일 때

$\triangle OAP=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 2t=\sin t\cos t$

또 $\widehat{AP}=2t$일 때 $\widehat{AQ}=\angle AOQ=t$이므로 점 Q의 좌표는

$(\cos t,\ \sin t)$

$\triangle RAQ$에서 $\overline{RA}=1-\cos t,\ \overline{QR}=\sin t$이므로

$\triangle RAQ=\frac{1}{2}(1-\cos t)\sin t$ 　　··· ①

이때 $\triangle OAP=2\triangle RAQ$이므로

$\sin t\cos t=2\cdot\frac{1}{2}(1-\cos t)\sin t$ 　　··· ②

$\sin t\cos t=\sin t-\sin t\cos t,\quad 2\sin t\cos t-\sin t=0$

$\therefore \sin t(2\cos t-1)=0$

$0<t<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin t<1$이므로 　$2\cos t-1=0$

$\cos t=\frac{1}{2}\quad\therefore t=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ 　　··· ③

답 $\frac{\pi}{3}$

06 삼각함수의 미분

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $\triangle$OAP, $\triangle$RAQ의 넓이를 삼각함수로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❷ 삼각방정식을 세울 수 있다. | 20% |
| ❸ $t$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**0756** 전략 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^n\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^n\cdot\cos x\,(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^n\cdot\cos x\,(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{x^{n-3}}\cdot\frac{1}{\cos x(1+\cos x)} \quad \cdots ❶$$

이때 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$이므로 주어진 식이 0이 아닌 값 $\alpha$에 수렴하려면

$n-3=0 \quad \therefore n=3$

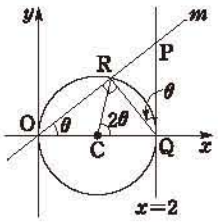
$\therefore \alpha=1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ ⋯ ❷

답 $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $n=3$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 주어진 식을 변형할 수 있다. | 60% |
| ❷ $n$, $\alpha$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**0757** 전략 $\overline{\mathrm{RC}}$, $\overline{\mathrm{RQ}}$를 그은 후 $\overline{\mathrm{PR}}$의 길이와 $l$을 삼각함수로 나타낸다.




풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{RC}}$, $\overline{\mathrm{RQ}}$를 그으면 $\angle\mathrm{RCQ}=2\theta$이므로 부채꼴 RCQ에서

$l=2\theta$ ⋯ ❶

직각삼각형 POQ에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}\tan\theta=2\tan\theta$

$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{QPR}=\angle\mathrm{POQ}=\theta$이므로 직각삼각형 PRQ에서

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\sin\theta=2\tan\theta\sin\theta$ ⋯ ❷

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{l^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\tan\theta\sin\theta}{4\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $\dfrac{1}{2}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $l$을 $\theta$로 나타낼 수 있다. | 20% |
| ❷ $\overline{\mathrm{PR}}$의 길이를 $\theta$로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❸ $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{l^2}$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**0758** 전략 수열 $\{S_n\}$이 등비수열임을 이용하여 등비급수의 합을 구한다.

풀이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\sqrt{2}\cos\theta$이므로 $\triangle\mathrm{A_1B_1B_2}$에서

$\overline{\mathrm{B_1B_2}}=\sqrt{2}\cos^2\theta,\ \overline{\mathrm{A_1B_2}}=\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta$

$\therefore S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cos^2\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta=\cos^3\theta\sin\theta$ ⋯ ❶

$\angle\mathrm{B_2A_1A_2}=\theta$이므로 $\triangle\mathrm{A_1B_2A_2}$에서

$\overline{\mathrm{A_2B_2}}=\overline{\mathrm{A_1B_2}}\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta\sin^2\theta$

$\triangle\mathrm{A_1B_1B_2}\backsim\triangle\mathrm{A_2B_2B_3}$이므로

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}:\overline{\mathrm{A_2B_2}}=\sqrt{2}\cos\theta:\sqrt{2}\cos\theta\sin^2\theta=1:\sin^2\theta$

따라서 $\triangle\mathrm{A_1B_1B_2}$와 $\triangle\mathrm{A_2B_2B_3}$의 넓이의 비가

$1^2:(\sin^2\theta)^2=1:\sin^4\theta$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\cos^3\theta\sin\theta$이고 공비가 $\sin^4\theta$인 등비수열이다. ⋯ ❷

$$\therefore T(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{1-\sin^4\theta}$$

$$=\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{(1-\sin^2\theta)(1+\sin^2\theta)}=\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{\cos^2\theta\,(1+\sin^2\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin^2\theta} \quad \cdots ❸$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{T(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\theta(1+\sin^2\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta}$$

$$=1\cdot\frac{1}{1+0}=1 \quad \cdots ❹$$

답 1

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $S_1$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ 수열 $\{S_n\}$이 등비수열임을 알 수 있다. | 20% |
| ❸ $T(\theta)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❹ $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{T(\theta)}{\theta}$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

Ⅲ 미분법

## 07 여러 가지 미분법

**0759** $y'=\dfrac{(2x-3)'(3x+2)-(2x-3)(3x+2)'}{(3x+2)^2}$
$=\dfrac{2(3x+2)-(2x-3)\cdot 3}{(3x+2)^2}=\dfrac{13}{(3x+2)^2}$

답 $y'=\dfrac{13}{(3x+2)^2}$

**0760** $y'=\dfrac{(x^2+3)'(x-1)-(x^2+3)(x-1)'}{(x-1)^2}$
$=\dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

답 $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

**0761** $y'=-\dfrac{(x-2)'}{(x-2)^2}=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$ 답 $y'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

**0762** $y'=\dfrac{(x^2+1)'e^x-(x^2+1)(e^x)'}{(e^x)^2}=\dfrac{2xe^x-(x^2+1)e^x}{e^{2x}}$
$=\dfrac{-e^x(x^2-2x+1)}{e^{2x}}=-\dfrac{(x-1)^2}{e^x}$ 답 $y'=-\dfrac{(x-1)^2}{e^x}$

**0763** $y'=\dfrac{(\ln x)'x-\ln x(x)'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}$
$=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ 답 $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

**0764** $y'=\dfrac{(\cos x)'(1+\sin x)-\cos x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$
$=\dfrac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}$
$=\dfrac{-\sin x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(1+\sin x)^2}$
$=-\dfrac{\sin x+1}{(1+\sin x)^2}$
$=-\dfrac{1}{1+\sin x}$ 답 $y'=-\dfrac{1}{1+\sin x}$

**0765** $y=-\dfrac{1}{x^3}=-x^{-3}$이므로
$y'=-(-3)x^{-3-1}=3x^{-4}=\dfrac{3}{x^4}$ 답 $y'=\dfrac{3}{x^4}$

**0766** $y=\dfrac{x^2-6}{x^4}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{6}{x^4}=x^{-2}-6x^{-4}$이므로
$y'=-2x^{-2-1}-6\cdot(-4)x^{-4-1}$
$=-2x^{-3}+24x^{-5}=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{24}{x^5}$ 답 $y'=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{24}{x^5}$

**0767** 답 $y'=\sec x\tan x+\sqrt{3}\csc x\cot x$

**0768** 답 $y'=2\sec^2 x+\csc^2 x$

**0769** $y'=5(2x+1)^4(2x+1)'=5(2x+1)^4\cdot 2$
$=10(2x+1)^4$ 답 $y'=10(2x+1)^4$

**0770** $y=\dfrac{1}{(3-x)^4}=(3-x)^{-4}$이므로
$y'=-4(3-x)^{-5}(3-x)'=-4(3-x)^{-5}\cdot(-1)$
$=\dfrac{4}{(3-x)^5}$ 답 $y'=\dfrac{4}{(3-x)^5}$

**0771** $y'=(x^2+x-1)'(x+3)^2+(x^2+x-1)\{(x+3)^2\}'$
$=(2x+1)(x+3)^2+(x^2+x-1)\cdot 2(x+3)(x+3)'$
$=(2x+1)(x+3)^2+2(x^2+x-1)(x+3)$
$=(x+3)\{(2x+1)(x+3)+2(x^2+x-1)\}$
$=(x+3)(4x^2+9x+1)$ 답 $y'=(x+3)(4x^2+9x+1)$

**0772** $y'=\dfrac{\{(2x-5)^2\}'(x+1)-(2x-5)^2(x+1)'}{(x+1)^2}$
$=\dfrac{2(2x-5)(2x-5)'(x+1)-(2x-5)^2\cdot 1}{(x+1)^2}$
$=\dfrac{4(2x-5)(x+1)-(2x-5)^2}{(x+1)^2}$
$=\dfrac{(2x-5)\{4(x+1)-(2x-5)\}}{(x+1)^2}$
$=\dfrac{(2x-5)(2x+9)}{(x+1)^2}$ 답 $y'=\dfrac{(2x-5)(2x+9)}{(x+1)^2}$

**0773** $y'=e^{x^2+3x}(x^2+3x)'=(2x+3)e^{x^2+3x}$

답 $y'=(2x+3)e^{x^2+3x}$

**0774** $y'=5^{x^2+1}\cdot\ln 5\cdot(x^2+1)'=5^{x^2+1}\cdot 2x\ln 5$

답 $y'=5^{x^2+1}\cdot 2x\ln 5$

**0775** $y'=4\sin^3 x\cdot(\sin x)'=4\sin^3 x\cos x$

답 $y'=4\sin^3 x\cos x$

**0776** $y'=\sec(3x+1)\tan(3x+1)\cdot(3x+1)'$
$=3\sec(3x+1)\tan(3x+1)$

답 $y'=3\sec(3x+1)\tan(3x+1)$

**0777** $y'=-\sin(\sin x)\cdot(\sin x)'=-\sin(\sin x)\cdot\cos x$

답 $y'=-\sin(\sin x)\cdot\cos x$

**0778** $y'=(x)'\ln|x|+x(\ln|x|)'$
$=\ln|x|+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln|x|+1$ 답 $y'=\ln|x|+1$

**0779** $y'=\dfrac{(4x+3)'}{(4x+3)\ln 3}=\dfrac{4}{(4x+3)\ln 3}$ 답 $y'=\dfrac{4}{(4x+3)\ln 3}$

**0780** $y'=\frac{(e^x-1)'}{e^x-1}=\frac{e^x}{e^x-1}$ 답 $y'=\frac{e^x}{e^x-1}$

**0781** $y'=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$ 답 $y'=-\tan x$

**0782** $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{2}{3}}$이므로

$y'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$ 답 $y'=-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

**0783** $y=\sqrt{x}(1+x^2)=\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{2}}$이므로

$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{5}{2}x\sqrt{x}$ 답 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{5}{2}x\sqrt{x}$

**0784** 답 $y'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

**0785** $y'=-ex^{-e-1}=-\frac{e}{x^{e+1}}$ 답 $y'=-\frac{e}{x^{e+1}}$

**0786** $y=\sqrt{3x^2-1}=(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\frac{1}{2}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}-1}(3x^2-1)'=\frac{1}{2}(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 6x$

$=\frac{3x}{\sqrt{3x^2-1}}$ 답 $y'=\frac{3x}{\sqrt{3x^2-1}}$

**0787** $y=(x^2-1)\sqrt{x-2}=(x^2-1)(x-2)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=2x(x-2)^{\frac{1}{2}}+(x^2-1)\cdot\frac{1}{2}(x-2)^{\frac{1}{2}-1}(x-2)'$

$=2x(x-2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(x^2-1)(x-2)^{-\frac{1}{2}}$

$=2x\sqrt{x-2}+\frac{x^2-1}{2\sqrt{x-2}}=\frac{4x(x-2)+x^2-1}{2\sqrt{x-2}}$

$=\frac{5x^2-8x-1}{2\sqrt{x-2}}$ 답 $y'=\frac{5x^2-8x-1}{2\sqrt{x-2}}$

**0788** $y=\frac{5x^2}{\sqrt{2x+1}}=5x^2(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$y'=10x(2x+1)^{-\frac{1}{2}}+5x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(2x+1)^{-\frac{1}{2}-1}(2x+1)'$

$=10x(2x+1)^{-\frac{1}{2}}-5x^2(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

$=\frac{10x}{\sqrt{2x+1}}-\frac{5x^2}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

$=\frac{10x(2x+1)-5x^2}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}=\frac{5x(3x+2)}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

답 $y'=\frac{5x(3x+2)}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

**0789** $x=y^3$의 양변을 $y$에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=3y^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

**0790** $y=\sqrt[4]{x+1}$에서 $x=y^4-1$이므로 양변을 $y$에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=4y^3$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}$ 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}$

**0791** $y=\sqrt[3]{2x}$에서 $x=\frac{1}{2}y^3$이므로 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{3}{2}y^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{3}{2}y^2}=\frac{2}{3y^2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}$ 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}$

**0792** $f(g(x))=x$의 양변을 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1 \quad \therefore g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$

$\therefore g'(a)=\frac{1}{f'(g(a))}=\frac{1}{f'(b)}$ 답 풀이 참조

**0793** $y'=4x^3-9x^2+5$이므로

$y''=12x^2-18x$ 답 $y''=12x^2-18x$

**0794** $y'=4(3x+1)^3(3x+1)'=4(3x+1)^3\cdot 3=12(3x+1)^3$ 이므로

$y''=12\cdot 3(3x+1)^2(3x+1)'$

$=36(3x+1)^2\cdot 3=108(3x+1)^2$ 답 $y''=108(3x+1)^2$

**0795** $y'=-\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$이므로

$y''=\frac{(-2x)'(x^2+1)^2-(-2x)\cdot 2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{-2(x^2+1)^2+4x(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$ 답 $y''=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

**0796** $y=\sqrt{x-1}=(x-1)^{\frac{1}{2}}$에서 $y'=\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$y''=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$

답 $y''=-\frac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$

**0797** $y'=e^{-3x}(-3x)'=-3e^{-3x}$이므로

$y''=-3e^{-3x}(-3x)'=9e^{-3x}$ 답 $y''=9e^{-3x}$

**0798** $y'=\frac{1}{x}$이므로 $y''=-\frac{1}{x^2}$ 답 $y''=-\frac{1}{x^2}$

**0799** $y'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$이므로

$y''=2\cdot(-\sin 2x)(2x)'=-4\sin 2x$ 답 $y''=-4\sin 2x$

**0800** $y'=1\cdot\sin x+x\cos x=\sin x+x\cos x$이므로

$y''=\cos x+\{1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)\}$

$=2\cos x-x\sin x$ 답 $y''=2\cos x-x\sin x$

**0801** $y'=3x^2e^x+x^3e^x=(x^3+3x^2)e^x$이므로

$y''=(3x^2+6x)e^x+(x^3+3x^2)e^x$

$=(x^2+6x+6)xe^x$ 답 $y''=(x^2+6x+6)xe^x$

**0802** $y'=e^x\ln x+e^x\cdot\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$이므로

$y''=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)+e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=e^x\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ 답 $y''=e^x\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

**유형 01 함수의 몫의 미분법; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 꼴** 본책 118쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq0)$가 미분가능할 때

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

**0803** $f'(x)=\dfrac{(2ax-b)(x-3)-(ax^2-bx+3)\cdot1}{(x-3)^2}$

$=\dfrac{ax^2-6ax+3b-3}{(x-3)^2}$

$f'(0)=2$이므로 $\dfrac{3b-3}{9}=2$

$3b-3=18$ $\therefore b=7$

$f'(2)=-6$이므로 $-8a+18=-6$ $\therefore a=3$

$\therefore a-b=-4$ 답 $-4$

**0804** $f(x)=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$이므로

$f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)-2x\cdot2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

$\therefore f'(\sqrt{3})=\dfrac{-2(3+1)}{(3-1)^2}=-2$ 답 ①

**0805** $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+5)-(x+2)\cdot2x}{(x^2+5)^2}=\dfrac{-x^2-4x+5}{(x^2+5)^2}$

$(x^2+5)^2>0$이므로 $f'(x)\geq0$에서

$-x^2-4x+5\geq0$, $x^2+4x-5\leq0$

$(x+5)(x-1)\leq0$ $\therefore -5\leq x\leq1$

따라서 $f'(x)\geq0$을 만족시키는 정수 $x$는 $-5$, $-4$, $-3$, $\cdots$, $1$의 7개이다. 답 7

**0806** $f(-1)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$

$f(x)=\dfrac{e\cdot e^x-1}{x}$에서

$f'(x)=\dfrac{e\cdot e^x\cdot x-(e\cdot e^x-1)\cdot1}{x^2}=\dfrac{e^{x+1}(x-1)+1}{x^2}$

$\therefore f'(-1)=-2+1=-1$ 답 $-1$

**다른 풀이** $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{e^{x+1}-1}{x(x+1)}$ ······ ㉠

$x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로 ㉠에서

$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{(t-1)t}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\frac{1}{t-1}=1\cdot(-1)=-1$

**0807** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n$

이때 $0<x<1$이므로

$\displaystyle g(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=\underbrace{x+x^2+x^3+\cdots}_{\text{첫째항과 공비가 모두 }x\text{인 등비급수}}$

$=\dfrac{x}{1-x}$ ···· ①

$\therefore g'(x)=\dfrac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ ···· ②

$\therefore g'\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2}=9$ ···· ③

답 9

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① $g(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ② $g'(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ③ $g'\left(\dfrac{2}{3}\right)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**유형 02 함수의 몫의 미분법; $\dfrac{1}{g(x)}$ 꼴** 본책 118쪽

함수 $g(x)$ $(g(x)\neq0)$가 미분가능할 때

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

**0808** $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(-3h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2h)-f(0)\}-\{f(-3h)-f(0)\}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\cdot2+\lim_{h\to0}\frac{f(-3h)-f(0)}{-3h}\cdot3$

$=2f'(0)+3f'(0)=5f'(0)$

이때 $f(x)=-\dfrac{1}{x-1}$에서 $f'(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$이므로

$5f'(0)=5\cdot1=5$ 답 ⑤

**0809** $f'(x)=-\dfrac{(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}=\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$이므로

$f'(0)=1$, $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore f'(0)f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

**0810** $g'(x)=-\dfrac{\{1-xf(x)\}'}{\{1-xf(x)\}^2}=\dfrac{f(x)+xf'(x)}{\{1-xf(x)\}^2}$

$\therefore g'(0)=\dfrac{f(0)+0\cdot f'(0)}{\{1-0\cdot f(0)\}^2}=f(0)=4$ 답 4

### 유형 03 $y=x^n$ ($n$은 정수)의 도함수 본책 119쪽

$n$이 정수일 때, $y=x^n$이면 $y'=nx^{n-1}$

**0811** $f(x)=x^{-1}+2x^{-2}+3x^{-3}+\cdots+10x^{-10}$이므로

$f'(x)=-x^{-2}-2^2x^{-3}-3^2x^{-4}-\cdots-10^2x^{-11}$

$\therefore f'(1)=-1-2^2-3^2-\cdots-10^2$

$=-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

$=-\sum_{k=1}^{10}k^2=-\dfrac{10\cdot11\cdot21}{6}=-385$ 답 $-385$

**SSEN 특강**

**자연수의 거듭제곱의 합**

① $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

**0812** $y=\dfrac{2x^5-3x^3-1}{x^3}=2x^2-3-x^{-3}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=4x-(-3)x^{-4}=4x+\dfrac{3}{x^4}$ 답 ④

### 유형 04 삼각함수의 도함수 본책 119쪽

① $(\sin x)'=\cos x$ ② $(\cos x)'=-\sin x$
③ $(\tan x)'=\sec^2 x$ ④ $(\sec x)'=\sec x\tan x$
⑤ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$ ⑥ $(\cot x)'=-\csc^2 x$

**0813** $f'(x)=-\csc x\cot x\cdot\cot x+\csc x\cdot(-\csc^2 x)$

$=-\csc x\,(\cot^2 x+\csc^2 x)$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2(3+4)=-14$ 답 $-14$

**0814** 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

즉 $\lim_{x\to0+}(2e^x+ax+b)=\lim_{x\to0-}\tan x$이므로

$2+b=0\quad\therefore b=-2$ ⋯ ❶

또 $f'(0)$이 존재하므로

$f'(x)=\begin{cases}2e^x+a & (x>0)\\ \sec^2 x & (x<0)\end{cases}$

에서 $\lim_{x\to0+}(2e^x+a)=\lim_{x\to0-}\sec^2 x$

$2+a=1\quad\therefore a=-1$ ⋯ ❷

$\therefore ab=2$ ⋯ ❸

답 2

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $b$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $ab$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0815** $f(x)=\dfrac{1+\sec x}{\tan x}=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{\sec x}{\tan x}=\cot x+\csc x$이므로

$f'(x)=-\csc^2 x-\csc x\cot x$

$=-\csc x(\csc x+\cot x)$

따라서 구하는 기울기는

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\csc\dfrac{\pi}{4}\cdot\left(\csc\dfrac{\pi}{4}+\cot\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=-2-\sqrt{2}$ 답 ①

### 유형 05 합성함수의 미분법 본책 119쪽

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$에 대하여

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))g'(x)$

**0816** $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=2$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)+1\}=0$이므로 $f(1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=2$

또 $\lim_{x\to-1}\dfrac{g(x)+1}{x+1}=3$에서 $x\longrightarrow-1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}\{g(x)+1\}=0$이므로 $g(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to-1}\dfrac{g(x)+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$

$=g'(-1)=3$

이때 $y=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서 $y'=g'(f(x))f'(x)$이므로 $x=1$에서의 미분계수는

$g'(f(1))f'(1)=g'(-1)f'(1)=3\cdot2=6$ 답 6

**0817** $y'=3\{xf(x)\}^2\cdot(xf(x))'=3\{xf(x)\}^2\{f(x)+xf'(x)\}$

이므로 $x=1$에서의 미분계수는

$3\{1\cdot f(1)\}^2\{f(1)+1\cdot f'(1)\}=3\cdot2^2\cdot(2+3)=60$

답 60

**0818** $h(x)=f(g(x))$로 놓으면

$h(1)=f(g(1))=f(1)=2$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{f(g(x))-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$ ⋯ ❶

이때 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(1)g'(1)=3\cdot4=12$ ⋯ ❷

답 12

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 구하는 극한값을 미분계수로 변형할 수 있다. | 50% |
| ❷ 극한값을 구할 수 있다. | 50% |

### 유형 06 합성함수의 미분법; $f(ax+b)$ 꼴 본책 120쪽

함수 $y=f(ax+b)$에 대하여
$y'=af'(ax+b)$

**0819** $f(2x-1)=x^3-x+3$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$2f'(2x-1)=2x-1 \quad \therefore f'(2x-1)=x-\frac{1}{2}$

$2x-1=5$에서 $x=3$이므로 위의 식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f'(5)=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

**0820** $f(2-x)=f(2+x)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$-f'(2-x)=f'(2+x)$ ❶

양변에 $x=1$을 대입하면

$-f'(1)=f'(3) \quad \therefore f'(3)=-4$ ❷

답 $-4$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 주어진 등식의 양변을 미분할 수 있다. | 50% |
| ❷ $f'(3)$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

### 유형 07 합성함수의 미분법; 유리함수 본책 120쪽

유리함수 $f(x)$에 대하여
$(\{f(x)\}^n)'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

**0821** $f(1)=1$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

이때

$$\begin{aligned}f'(x)&=3\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'\\&=3\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2\cdot\frac{2(x^2+1)-2x\cdot2x}{(x^2+1)^2}\\&=3\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2\cdot\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{-24x^2(x^2-1)}{(x^2+1)^4}\end{aligned}$$

이므로 구하는 값은 $f'(1)=0$ 답 ④

**0822** $f'(x)=4(3x^2+ax-1)^3(3x^2+ax-1)'$
$=4(3x^2+ax-1)^3(6x+a)$

$f'(0)=-16$이므로 $4\cdot(-1)^3\cdot a=-16$

$-4a=-16 \quad \therefore a=4$ ❶

따라서 $f'(x)=4(3x^2+4x-1)^3(6x+4)$이므로 ❷

$f'(-1)=4\cdot(-2)^3\cdot(-2)=64$ ❸

답 64

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**0823** $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$\therefore h'(2)=f'(g(2))g'(2)$

$=f'(0)g'(2)$ ($\because g(2)=0$)

이때 $f'(x)=\frac{3(x^2+1)-3x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'(0)=3$

또 $g'(x)=3x^2-6$이므로 $g'(2)=6$

$\therefore h'(2)=3\cdot6=18$ 답 18

**0824** $r=2t+1$이고 $S=4\pi r^2$이므로

$S=4\pi(2t+1)^2$

양변을 $t$에 대하여 미분하면

$\frac{dS}{dt}=4\pi\cdot2(2t+1)\cdot2=16\pi(2t+1)$

따라서 $t=4$일 때의 $\frac{dS}{dt}$의 값은

$16\pi\cdot(2\cdot4+1)=144\pi$ ($\text{cm}^2$/min) 답 $144\pi$

**0825** $(f\circ g)(x)=f(g(x))$이므로 $f(g(x))=x^3+4x^2$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=3x^2+8x$ ······ ㉠

$g(x)=5$에서 $x^3-3=5$, $x^3=8 \quad \therefore x=2$

따라서 $x=2$를 ㉠에 대입하면

$f'(g(2))g'(2)=3\cdot2^2+8\cdot2=28$

$\therefore f'(5)g'(2)=28$

이때 $g'(x)=3x^2$이므로 $g'(2)=12$

따라서 $f'(5)\cdot12=28$이므로 $f'(5)=\frac{7}{3}$ 답 ④

### 유형 08 합성함수의 미분법; 지수함수, 삼각함수 본책 120쪽

① $(e^{f(x)})'=e^{f(x)}f'(x)$
② $(\sin f(x))'=\cos f(x)\cdot f'(x)$
$(\cos f(x))'=-\sin f(x)\cdot f'(x)$
③ $(\sin^n f(x))'=n\sin^{n-1}f(x)\cdot\cos f(x)\cdot f'(x)$
$(\cos^n f(x))'=n\cos^{n-1}f(x)\cdot\{-\sin f(x)\}\cdot f'(x)$

**0826** $\frac{d}{dx}(\sin^5 x\cos5x)$

$=5\sin^4x\cos x\cdot\cos5x+\sin^5x\cdot(-5\sin5x)$

$=5\sin^4x(\cos x\cos5x-\sin x\sin5x)$

$=5\sin^4x\cos(x+5x)=5\sin^4x\cos6x$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$ 답 6

**SSEN 특강**

삼각함수의 덧셈정리

① $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ (복호동순)

② $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ (복호동순)

③ $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ (복호동순)

**0827** $f'(x)=\dfrac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}$

$=\dfrac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$

$=\dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$

$=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

$\therefore f'(0)=\dfrac{4}{(1+1)^2}=1$ 답 ④

**0828** $h(x)=f(g(x))=2e^{\sin x}$에서

$h'(x)=2e^{\sin x}(\sin x)'=2e^{\sin x}\cos x$

$\therefore h'(2\pi)=2e^{\sin 2\pi}\cos 2\pi$

$=2$ 답 ③

**0829** $f'(x)=2\cos(4x+\pi)\cdot\{\cos(4x+\pi)\}'$

$=2\cos(4x+\pi)\{-\sin(4x+\pi)\cdot(4x+\pi)'\}$

$=2\cos(4x+\pi)\cdot\{-4\sin(4x+\pi)\}$

$=-4\sin(8x+2\pi)$

$=-4\sin 8x$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-4\sin\dfrac{4}{3}\pi$

$=-4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}$ 답 ⑤

**다른 풀이** $f(x)=\cos^2(4x+\pi)=\dfrac{1+\cos(8x+2\pi)}{2}$

$=\dfrac{1+\cos 8x}{2}$

따라서 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot(-\sin 8x)\cdot 8=-4\sin 8x$이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-4\sin\dfrac{4}{3}\pi$

$=-4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}$

**0830** $f'(x)=\dfrac{3e^{3x}(1-\sin 2x)-e^{3x}(-2\cos 2x)}{(1-\sin 2x)^2}$

$=\dfrac{e^{3x}(3-3\sin 2x+2\cos 2x)}{(1-\sin 2x)^2}$

$\therefore f'(0)=\dfrac{3+2}{1^2}=5$

한편 $f(0)=1$이므로

$f(0)+f'(0)=6$ 답 6

**0831** $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$

$=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

이때

$f'(x)=5^{\cos x}\cdot\ln 5(\cos x)'=-5^{\cos x}\cdot\ln 5\cdot\sin x$

이므로 구하는 값은

$2f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\left(-5^{\cos\frac{\pi}{2}}\cdot\ln 5\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\ln 5$ 답 $-2\ln 5$

**유형 09 로그함수의 도함수** 본책 121쪽

① $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

② $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

③ $(\ln|f(x)|)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (단, $f(x)$는 미분가능하다.)

**0832** $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$=\dfrac{1}{2}\{\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x)\}$

$\therefore y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}-\dfrac{-\cos x}{1-\sin x}\right)$

$=\dfrac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{2(1-\sin^2 x)}$

$=\dfrac{2\cos x}{2\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos x}$

따라서 $x=\dfrac{\pi}{3}$에서의 미분계수는 $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=2$ 답 ⑤

**0833** $f'(x)=\dfrac{2\tan x\sec^2 x}{\tan^2 x}=\dfrac{2\sec^2 x}{\tan x}$

$=\dfrac{\frac{2}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\dfrac{2}{\sin x\cos x}=\dfrac{4}{\sin 2x}$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로 $ab=8$ 답 8

**0834** $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)-\{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$

$=f'(\pi)+f'(\pi)=2f'(\pi)$

이때 $f(x)=\log_2\left(\cos\frac{x}{4}\right)$에서

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{4}\cdot\ln 2}=-\frac{1}{4\ln 2}\cdot\tan\frac{x}{4}$$

이므로 구하는 식의 값은

$$2f'(\pi)=2\cdot\left(-\frac{1}{4\ln 2}\right)\tan\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2\ln 2}$$

답 $-\frac{1}{2\ln 2}$

**0835** $f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$이므로 $f'(n)=\frac{2n}{n^2-1}$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4f'(n)}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{8}{n^2-1}=4\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=4\cdot\frac{3}{2}=6$$

답 ④

**0836** $f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x})$으로 놓으면 $f(0)=\ln 10$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x}}{10}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x})-\ln 10}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$ ⋯➊

이때 $f'(x)=\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+10e^{10x}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x}}$이므로

$$f'(0)=\frac{1+2+3+\cdots+10}{10}=\frac{55}{10}=\frac{11}{2}$$ ⋯➋

따라서 $S=\frac{11}{2}$이므로 $2S=11$ ⋯➌

답 11

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $S=f'(0)$임을 알 수 있다. | 50% |
| ➋ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ➌ $2S$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**유형 10 로그미분법; $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴** 본책 122쪽

(i) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한다.
➡ $\ln|y|=\ln|f(x)|-\ln|g(x)|$
(ii) (i)의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분한다.
➡ $\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}$
(iii) (ii)의 식을 $y'$에 대하여 정리한다.

**0837** 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=3\ln|x-1|-2\ln|x|-\ln|x+1|$$

위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\left(\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$f(2)=\frac{1}{2^2\cdot3}=\frac{1}{12}$이므로

$$f'(2)=\frac{1}{12}\left(3-1-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{36}$$

답 ①

**다른 풀이** 함수의 몫의 미분법을 이용하면

$$f'(x)=\frac{3(x-1)^2\cdot x^2(x+1)-(x-1)^3\{2x(x+1)+x^2\}}{\{x^2(x+1)\}^2}$$

$$=\frac{x(x-1)^2\{3x(x+1)-2(x-1)(x+1)-x(x-1)\}}{x^4(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2(4x+2)}{x^3(x+1)^2}$$

$$=\frac{2(x-1)^2(2x+1)}{x^3(x+1)^2}$$

$$\therefore f'(2)=\frac{2\cdot1\cdot5}{8\cdot9}=\frac{5}{36}$$

**0838** $f(1)\neq0$이므로 $f'(1)=f(1)g(1)$에서

$$g(1)=\frac{f'(1)}{f(1)}$$

$f(x)=\frac{(x+2)(x+1)^3}{(x+3)^2}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln|x+2|+3\ln|x+1|-2\ln|x+3|$$

위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+3}$$

$$\therefore g(1)=\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

**0839** 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=5\ln|x|+4\ln|x-1|+3\ln|x-2|-2\ln|x-3|-\ln|x-4|$$

위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{5}{x}+\frac{4}{x-1}+\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-4}$$ ⋯➊

$$\therefore \lim_{x\to5}\frac{f'(x)}{f(x)}=1+1+1-1-1=1$$ ⋯➋

답 1

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $\frac{f'(x)}{f(x)}$를 구할 수 있다. | 60% |
| ➋ $\lim_{x\to5}\frac{f'(x)}{f(x)}$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**유형 11** **로그미분법: $y=\{f(x)\}^{g(x)}$ 꼴** 본책 122쪽

(i) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취한다.
➡ $\ln y=g(x)\ln f(x)$
(ii) (i)의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분한다.
➡ $\dfrac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
(iii) (ii)의 식을 $y'$에 대하여 정리한다.

**0840** 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면
$\ln y=\ln x^{\ln x}=(\ln x)^2$
위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면
$$\frac{y'}{y}=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$$
$$\therefore y'=y\cdot\frac{2\ln x}{x}=x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x}$$
따라서 $x=e$에서의 미분계수는
$$e\cdot\frac{2}{e}=2$$
답 ④

**0841** 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면
$\ln f(x)=x\ln x$
위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$
$$\therefore f'(x)=f(x)(\ln x+1)=x^x(1+\ln x)$$
답 ④

**유형 12** **$y=x^n$($n$은 실수)의 도함수** 본책 122쪽

$n$이 실수일 때, $y=x^n$이면 $y'=nx^{n-1}$

**0842** $f'(x)=6(x-\sqrt{1+2x^2})^5(x-\sqrt{1+2x^2})'$
$$=6(x-\sqrt{1+2x^2})^5\left(1-\frac{4x}{2\sqrt{1+2x^2}}\right)$$
$$=6(x-\sqrt{1+2x^2})^5\left(1-\frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)$$
이므로
$$a=f'(1)=6(1-\sqrt{3})^5\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$
$$b=f'(-1)=6(-1-\sqrt{3})^5\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\therefore ab=6(1-\sqrt{3})^5\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot6(-1-\sqrt{3})^5\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$
$$=36\{(1-\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})\}^5\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$
$$=36\cdot2^5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-384$$
답 $-384$

**0843** 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 기울기가 6이므로 $f'(3)=6$

이때 $\{f(\sqrt{x})\}'=f'(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})'=f'(\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 함수 $y=f(\sqrt{x})$의 $x=9$에서의 미분계수는
$$\{f(\sqrt{9})\}'=f'(\sqrt{9})\cdot\frac{1}{2\sqrt{9}}=f'(3)\cdot\frac{1}{6}$$
$$=6\cdot\frac{1}{6}=1$$
답 1

**0844** $f(x)=(\tan x+1)^{-\frac{1}{2}}$이므로
$$f'(x)=-\frac{1}{2}(\tan x+1)^{-\frac{3}{2}}(\tan x+1)'$$
$$=-\frac{\sec^2x}{2(\tan x+1)\sqrt{\tan x+1}}$$ ··· ❶
따라서 $g(x)=-\dfrac{\sec^2x}{2(\tan x+1)}$이므로 ··· ❷
$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sec^2\frac{\pi}{4}}{2\left(\tan\frac{\pi}{4}+1\right)}=-\frac{2}{2\cdot2}=-\frac{1}{2}$$ ··· ❸
답 $-\dfrac{1}{2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $g(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ❸ $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**유형 13** **역함수의 미분법** 본책 123쪽

$y$를 $x$에 대하여 직접 미분하기 어려운 경우에는 $x$를 $y$에 대하여 미분한 후 역함수의 미분법을 이용한다.
➡ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ $\left(\text{단, } \dfrac{dx}{dy}\neq0\right)$

**0845** $x=\cos y$의 양변을 $y$에 대하여 미분하면
$$\frac{dx}{dy}=-\sin y \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{1}{\sin y}$$
$x=\cos y$에서 $x=\dfrac{1}{2}$일 때 $y=\dfrac{\pi}{3}$ $\left(\because 0<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$
따라서 $x=\dfrac{1}{2}$일 때의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은
$$-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
답 ③

**0846** $x=\sqrt{y^2+1}-2$의 양변을 $y$에 대하여 미분하면
$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$$
답 ③

**0847** $x=\dfrac{3y}{y^2-1}$의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{3(y^2-1)-3y\cdot 2y}{(y^2-1)^2}=-\frac{3(y^2+1)}{(y^2-1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{(y^2-1)^2}{3(y^2+1)}$$

따라서 $y=0$일 때의 접선의 기울기는 $-\dfrac{1}{3\cdot 1}=-\dfrac{1}{3}$ 답 ②

**유형 14 역함수의 미분법의 응용** 본책 123쪽

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 $f(b)=a$, 즉 $g(a)=b$이면

$$g'(a)=\frac{1}{f'(b)}$$

**0848** $g(7)=a$라 하면 $f(a)=7$이므로

$a^2+4a+2=7$, $a^2+4a-5=0$

$(a+5)(a-1)=0$ $\therefore a=1$ ($\because a>-2$)

따라서 $g(7)=1$이고 $f'(x)=2x+4$이므로

$$g'(7)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}$$ 답 ④

**0849** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=2$에서 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(0)=1$ $\therefore g(1)=0$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$이므로

$f'(0)=2$

$$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$$ 답 ④

**0850** $g(0)=a$라 하면 $f(a)=0$이므로 $\dfrac{e^a-e^{-a}}{2}=0$

$e^a=e^{-a}$, $a=-a$ $\therefore a=0$ ⋯ ❶

따라서 $g(0)=0$이고 $f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$이므로

$$g'(0)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\frac{1+1}{2}}=1$$ ⋯ ❷

답 1

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $g(0)$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $g'(0)$의 값을 구할 수 있다. | 60% |

**0851** $F(x)=f(x)g(x)$로 놓으면 $f(1)=1$에서 $g(1)=1$이므로 $F(1)=f(1)g(1)=1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)$$

이때 $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$F'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$f'(x)=3x^2+2$에서 $f'(1)=5$, $g'(1)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5}$

이므로 $F'(1)=5\cdot 1+1\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{26}{5}$ 답 $\dfrac{26}{5}$

다른 풀이 $f(x)=x^3+2x-2$에서 $f(1)=1$이므로 $g(1)=1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)\{f(x)-1\}+g(x)-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot g(x)+\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}$$

$$=f'(1)g(1)+g'(1)$$

이때 $f'(x)=3x^2+2$이므로 $f'(1)=5$, $g'(1)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5}$

따라서 구하는 값은 $5\cdot 1+\dfrac{1}{5}=\dfrac{26}{5}$

**0852** $f(x)+f(4-x)=8$에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f(4)=8$, $10+f(4)=8$ $\therefore f(4)=-2$

$\therefore g(-2)=4$

한편 $f(x)+f(4-x)=8$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)+f'(4-x)\cdot(4-x)'=0$

$f'(x)-f'(4-x)=0$ $\therefore f'(x)=f'(4-x)$

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $f'(0)=f'(4)=3$

$$\therefore g'(-2)=\frac{1}{f'(4)}=\frac{1}{3}$$ 답 ②

**유형 15 이계도함수** 본책 124쪽

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

**0853** $f'(x)=3e^{ax-b}+3axe^{ax-b}=3e^{ax-b}(1+ax)$

$f''(x)=3ae^{ax-b}(1+ax)+3ae^{ax-b}=3ae^{ax-b}(2+ax)$

$f'(0)=3e$에서 $3e^{-b}=3e$ $\therefore b=-1$

$f''(0)=3e$에서 $6ae^{-b}=3e$, $6a=3$ $\therefore a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b=-\dfrac{1}{2}$ 답 ②

**0854** $g'(x)=2\ln(x-2)\cdot\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2\ln(x-2)}{x-2}$이므로

$g'(3)=0$

$$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{g'(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{g'(x)-g'(3)}{x-3}=g''(3)$$

이때

$$g''(x)=\frac{\frac{2}{x-2}\cdot(x-2)-2\ln(x-2)\cdot 1}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2-2\ln(x-2)}{(x-2)^2}$$

이므로 구하는 식의 값은 $g''(3)=2$ 답 ④

**0855** $f'(x)=2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$

$f''(x)=2e^{2x}(2\cos x-\sin x)+e^{2x}(-2\sin x-\cos x)$

$=e^{2x}(3\cos x-4\sin x)$ ··· ❶

이때 $x=\alpha$가 $f''(x)=0$의 해이므로

$e^{2\alpha}(3\cos\alpha-4\sin\alpha)=0$

$e^{2\alpha}>0$이므로 $3\cos\alpha-4\sin\alpha=0$ ··· ❷

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$이므로 위의 식의 양변을 $\cos\alpha$로 나누면

$3-4\tan\alpha=0$ $\therefore \tan\alpha=\frac{3}{4}$ ··· ❸

답 $\frac{3}{4}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $f''(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $\cos\alpha$와 $\sin\alpha$ 사이의 관계식을 세울 수 있다. | 30% |
| ❸ $\tan\alpha$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**0856** $y^{(1)}=\frac{1}{x}$, $y^{(2)}=-\frac{1}{x^2}$, $y^{(3)}=\frac{2\cdot1}{x^3}$, $y^{(4)}=-\frac{3\cdot2\cdot1}{x^4}$, $\cdots$

이므로 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$

따라서 $a_n=(-1)^{n-1}(n-1)!$이므로 $a_{10}=-9!$

답 ②

**0857** 조건 (나)에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f'(f(x))-1\}=0$이므로 $f'(f(1))=1$, 즉 $f'(2)=1$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-f'(2)}{f(x)-2}$ ······ ㉠

$f(x)=t$로 놓으면 조건 (가)에서 $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 2$이므로 ㉠은

$f'(1)\lim_{t\to2}\frac{f'(t)-f'(2)}{t-2}=3f''(2)$

따라서 $3f''(2)=3$이므로

$f''(2)=1$

답 ①

**0858** 전략 삼각함수의 극한과 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}\frac{f(\sin3x)-f(\tan2x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin3x)-f(0)-\{f(\tan2x)-f(0)\}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\sin3x)-f(0)}{\sin3x}\cdot\frac{\sin3x}{3x}\cdot3\right.$

$\left.-\frac{f(\tan2x)-f(0)}{\tan2x}\cdot\frac{\tan2x}{2x}\cdot2\right\}$

$=f'(0)\cdot1\cdot3-f'(0)\cdot1\cdot2$

$=3f'(0)-2f'(0)=f'(0)$

이때 $f'(x)=\cos x+\sec^2x$이므로 구하는 값은

$f'(0)=1+1=2$

답 ②

SSEN 특강

**삼각함수의 극한**

① $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ ② $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

**0859** 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f_2'(1)$, $f_3'(1)$, $f_4'(1)$, $f_5'(1)$의 값을 차례대로 구한다.

풀이 $f_n(x)=(f\circ f_{n-1})(x)=f(f_{n-1}(x))$이므로

$f(1)=-1$, $f_2(1)=f(f(1))=f(-1)=1$,

$f_3(1)=f(f_2(1))=f(1)=-1$, $\cdots$

따라서 자연수 $k$에 대하여

$f_n(1)=\begin{cases}-1 & (n=2k-1)\\ 1 & (n=2k)\end{cases}$

이때 $f_n'(x)=f'(f_{n-1}(x))\cdot f_{n-1}'(x)$이므로

$f_2'(1)=f'(f_1(1))\cdot f_1'(1)=f'(-1)\cdot f'(1)=ab$,

$f_3'(1)=f'(f_2(1))\cdot f_2'(1)=f'(1)\cdot ab=a^2b$,

$f_4'(1)=f'(f_3(1))\cdot f_3'(1)=f'(-1)\cdot a^2b=a^2b^2$

$\therefore f_5'(1)=f'(f_4(1))\cdot f_4'(1)=f'(1)\cdot a^2b^2=a^3b^2$

답 ③

**0860** 전략 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 한다.

풀이 $x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{e^{2x}-e^2}{e^2(x-1)}=\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}$

$f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}$

$g(x)=e^{2x-2}$으로 놓으면 $g(1)=1$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

이때 $g'(x)=2e^{2x-2}$이므로 $f(1)=g'(1)=2\cdot1=2$

답 ②

**0861** 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구한다.

풀이 $(f\circ g)(0)=2$에서

$f(g(0))=f(e^{\sin0})=f(1)=2$

또 $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$이고, $g'(x)=e^{\sin x}\cos x$이므로

$(f\circ g)'(0)=1$에서

$f'(g(0))g'(0)=f'(1)=1$ $g(0)=1$, $g'(0)=1$

$f(x)$를 이차식 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=a+b$

$\therefore a+b=2$ ······ ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=a$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $b=1$

따라서 $R(x)=x+1$이므로 $R(3)=4$

답 4

**0862** 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 빈칸에 알맞은 것을 구한다.

풀이 직선 $l$이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta$이므로

$$\angle ABO=\angle AOB=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$\therefore \angle OAB=\pi-(\angle ABO+\angle AOB)$$

$$=\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\theta$$

주어진 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 $g(\theta)$라 하면

$$g(\theta)=(\text{부채꼴 AOB의 넓이})-(\text{삼각형 AOB의 넓이})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin2\theta$$

$$=\theta-\boxed{\frac{1}{2}\sin2\theta} \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 $y=tx$에서 $t=\tan\theta$이고 $g(\theta)=f(t)$이므로

$$g(\theta)=f(t)=f(\tan\theta)$$

합성함수의 미분법에 의하여

$$g'(\theta)=f'(\tan\theta)(\tan\theta)'$$

$$=f'(t)\times\boxed{\sec^2\theta} \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 ㉠에서

$$g'(\theta)=1-\frac{1}{2}\cdot2\cos2\theta=1-\cos2\theta$$

이므로 ㉡에서

$$f'(t)=\frac{g'(\theta)}{\sec^2\theta}=\frac{1-\cos2\theta}{\sec^2\theta}$$

$$=\frac{1-(2\cos^2\theta-1)}{\sec^2\theta}=\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\sec^2\theta}$$

$t=2$일 때, $\tan\theta=2$이므로

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+2^2=5 \qquad \therefore \cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

$$\therefore f'(2)=\frac{2\left(1-\frac{1}{5}\right)}{5}=\boxed{\frac{8}{25}}$$

따라서 $h_1(\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta$, $h_2(\theta)=\sec^2\theta$, $a=\frac{8}{25}$이므로

$$a\times h_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\times h_2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{8}{25}\times\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\times\sec^2\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{8}{25}\times\frac{1}{2}\times2=\frac{8}{25}$$

답 ①

**0863** 전략 주어진 식의 양변에 자연로그를 취한 후 미분한다.

풀이 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cos\frac{\pi}{2}}=1$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$f(x)=x^{\cos x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\cos x\ln x$$

위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sin x\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}$$

따라서 $f'(x)=f(x)\left(-\sin x\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}\right)$이므로 구하는 값은

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\sin\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\right)$$

$$=-\ln\frac{\pi}{2}$$

답 $-\ln\frac{\pi}{2}$

**0864** 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 세 실근은 방정식 $f(x)=x$의 세 실근과 같다.

따라서 방정식 $f(x)=x$의 세 실근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로

$$f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,\ f(\gamma)=\gamma$$

$$\therefore g(\alpha)=\alpha,\ g(\beta)=\beta,\ g(\gamma)=\gamma$$

이때 $g'(\alpha)=\frac{1}{f'(\alpha)}$, $g'(\beta)=\frac{1}{f'(\beta)}$, $g'(\gamma)=\frac{1}{f'(\gamma)}$이므로

$$\frac{1}{g'(\alpha)}+\frac{1}{g'(\beta)}+\frac{1}{g'(\gamma)}=f'(\alpha)+f'(\beta)+f'(\gamma)$$

$f(x)=x^3+2x^2+2x+\frac{1}{9}$에서 $f'(x)=3x^2+4x+2$이므로

$$f'(\alpha)+f'(\beta)+f'(\gamma)$$

$$=(3\alpha^2+4\alpha+2)+(3\beta^2+4\beta+2)+(3\gamma^2+4\gamma+2)$$

$$=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+4(\alpha+\beta+\gamma)+6$$

$$=3\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+4(\alpha+\beta+\gamma)+6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 방정식 $f(x)=x$, 즉 $x^3+2x^2+x+\frac{1}{9}=0$의 세 실근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 식의 값은

$$3\{(-2)^2-2\cdot1\}+4\cdot(-2)+6=4$$

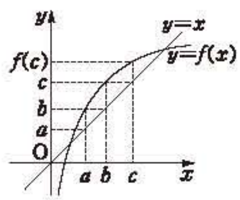
답 ①

**0865** 전략 그래프를 이용하여 $a$, $b$, $c$ 사이의 관계를 알아낸다.

풀이 이차방정식 $x^2-5x+2=0$의 두 근이 $g'(b)$, $g'(c)$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$g'(b)+g'(c)=5,\ g'(b)g'(c)=2$$

오른쪽 그래프에서 $f(a)=b$, $f(b)=c$이므로 역함수의 미분법에 의하여




$$f'(a)=\frac{1}{g'(b)},\ f'(b)=\frac{1}{g'(c)}$$

$$\therefore f'(a)g'(c)+f'(b)g'(b)$$

$$=\frac{g'(c)}{g'(b)}+\frac{g'(b)}{g'(c)}$$

$$=\frac{\{g'(b)\}^2+\{g'(c)\}^2}{g'(b)g'(c)}$$

$$=\frac{\{g'(b)+g'(c)\}^2-2g'(b)g'(c)}{g'(b)g'(c)}$$

$$=\frac{5^2-2\cdot2}{2}=\frac{21}{2}$$

답 ③

**0866** 전략 주어진 극한을 미분계수로 나타낸다.

풀이 $\frac{1}{n}=h$라 하면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{g\left(1+\frac{1}{n}\right)-g\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)-\{g(1-2h)-g(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+2\lim_{h\to0}\frac{g(1-2h)-g(1)}{-2h}$$
$$=g'(1)+2g'(1)=3g'(1)$$

$g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$a^3+3a^2+4a+5=1,\quad a^3+3a^2+4a+4=0$

$(a+2)(a^2+a+2)=0$

$\therefore a=-2\ (\because a^2+a+2>0)\qquad \therefore g(1)=-2$

이때 $f'(x)=3x^2+6x+4$이므로

$$p=3g'(1)=\frac{3}{f'(-2)}=\frac{3}{4}$$

$\therefore 4p=3$

답 3

**0867** 전략 로그함수의 도함수를 이용하여 $f'(x)$, $f''(x)$를 구한다.

풀이 ㄱ. $f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\therefore f'(\sqrt{3})=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=\frac{1}{2}$$

ㄴ. $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$f''(x)=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$\therefore (x^2+1)f''(x)+xf'(x)$

$=(x^2+1)\{-x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\}+x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$=-x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}+x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}=0$

ㄷ. ㄴ에서 $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}=-\dfrac{x}{x^2+1}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

**0868** 전략 $h'(1)$의 값을 구하여 주어진 식을 정리한다.

풀이 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=(\ln x)^2$이므로

$$h'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $h'(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{h'(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h'(x)-h'(1)}{x-1}=h''(1)$$

한편 ㉠에서

$$h''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

이므로 구하는 식의 값은

$h''(1)=2$

답 ②

**0869** 전략 $a^{\log b}=b^{\log a}$임을 이용하여 $f(x)$를 정리한다.

풀이 $f(x)=1+e^{-\ln x}+e^{-2\ln x}+\cdots+e^{-n\ln x}+\cdots$

$=1+x^{-\ln e}+x^{-2\ln e}+\cdots+x^{-n\ln e}+\cdots$

$=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\cdots+\dfrac{1}{x^n}+\cdots$

$=\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}\ \left(\because 0<\dfrac{1}{x}<1\right)$

$=\dfrac{x}{x-1}$ ⋯ ❶

이므로 $f'(x)=\dfrac{(x-1)-x}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ ⋯ ❷

$\therefore f'(3)=-\dfrac{1}{(3-1)^2}=-\dfrac{1}{4}$ ⋯ ❸

답 $-\dfrac{1}{4}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $f(x)$를 간단히 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❷ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $f'(3)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**0870** 전략 $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$임을 이용하여 $g'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=(ax-\ln x)^5$에서

$f'(x)=5(ax-\ln x)^4\left(a-\dfrac{1}{x}\right)$ ⋯ ❶

$f'(x)=f(x)g(x)$에서

$5(ax-\ln x)^4\left(a-\dfrac{1}{x}\right)=(ax-\ln x)^5g(x)$

이때 $a>\dfrac{1}{e}$에서 $ax-\ln x>0$이므로

$$g(x)=\frac{5\left(a-\frac{1}{x}\right)}{ax-\ln x}$$

$$\therefore g'(x)=\frac{5\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(ax-\ln x)-5\left(a-\frac{1}{x}\right)\left(a-\frac{1}{x}\right)}{(ax-\ln x)^2}$$

$=\dfrac{\frac{5(ax-\ln x)}{x^2}-5\left(a-\frac{1}{x}\right)^2}{(ax-\ln x)^2}$ ⋯ ❷

$g'(1)=5$에서

$\dfrac{5a-5(a-1)^2}{a^2}=5,\quad 5a-5(a^2-2a+1)=5a^2$

$2a^2-3a+1=0,\quad (2a-1)(a-1)=0$

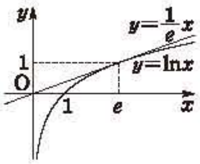
$\therefore a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{1}{2}$, 1

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① $f'(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ② $g'(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ③ $a$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**참고** 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=\frac{1}{e}x$는 점 $(e,\ 1)$에서 접하므로




$a>\frac{1}{e}$이면 $\quad ax>\ln x$

$\therefore ax-\ln x>0$

**0871** **전략** $g(x)=3^{3x}-3^x+1$로 놓고 합성함수의 미분법을 이용한다.

**풀이** $f(3^{3x}-3^x+1)=3^x+3$에서 $g(x)=3^{3x}-3^x+1$로 놓으면

$f(g(x))=3^x+3$

위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=3^x\ln 3$ ······ ㉠ ··· ①

$g(x)=1$에서 $\quad 3^{3x}=3^x \quad \therefore x=0$

따라서 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(g(0))g'(0)=\ln 3$, 즉 $f'(1)g'(0)=\ln 3$

이때 $g'(x)=3^{3x}\cdot 3\cdot\ln 3-3^x\ln 3=(3^{3x+1}-3^x)\ln 3$이므로

$g'(0)=(3-1)\ln 3=2\ln 3$

따라서 $f'(1)\cdot 2\ln 3=\ln 3$이므로 $\quad f'(1)=\frac{1}{2}$ ··· ②

답 $\frac{1}{2}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① 주어진 식의 양변을 미분할 수 있다. | 40% |
| ② $f'(1)$의 값을 구할 수 있다. | 60% |

**0872** **전략** 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고, $f'(1)$이 존재함을 이용한다.

**풀이** $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$$=\begin{cases} |2^{ax-a+2}+b| & (x\geq 1) \\ |2^x+b| & (x<1)\end{cases}$$

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}|2^{ax-a+2}+b|=\lim_{x\to 1-}|2^x+b|=h(1)$

$|2^2+b|=|2+b| \quad \therefore |b+4|=|b+2|$

위의 식의 양변을 제곱하면 $\quad b^2+8b+16=b^2+4b+4$

$4b=-12 \quad \therefore b=-3$ ··· ①

한편 $x \to 1+$일 때 $2^{ax-a+2}-3>0$이므로

$\lim_{x\to 1+}h'(x)=\lim_{x\to 1+}(2^{ax-a+2}-3)'$

$=\lim_{x\to 1+}(2^{ax-a+2}\cdot\ln 2\cdot a)=4a\ln 2$

$x \to 1-$일 때 $2^x-3<0$이므로

$\lim_{x\to 1-}h'(x)=\lim_{x\to 1-}(3-2^x)'=\lim_{x\to 1-}(-2^x\cdot\ln 2)=-2\ln 2$

이때 $h'(1)$이 존재하므로 $\quad 4a\ln 2=-2\ln 2$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ ··· ②

$\therefore a+b=-\frac{7}{2}$ ··· ③

답 $-\frac{7}{2}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① $b$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ② $a$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ③ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0873** **전략** 합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 구하는 값을 $f'(1)$로 나타낸다.

**풀이** $\{g(x^2+2x)\}'=g'(x^2+2x)\cdot(2x+2)$이므로 함수 $g(x^2+2x)$의 $x=1$에서의 미분계수는 $\quad 4g'(3)$

이때 $f(1)=3$에서 $g(3)=1$이므로

$4g'(3)=\frac{4}{f'(1)}$ ··· ①

원 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$의 중심을 $C(4,\ 2)$라 하면 직선 AC의 기울기는 $\quad \frac{2-3}{4-1}=-\frac{1}{3}$

따라서 원 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기는 3이므로

$f'(1)=3$ ··· ②

따라서 구하는 미분계수는

$4g'(3)=\frac{4}{f'(1)}=\frac{4}{3}$ ··· ③

답 $\frac{4}{3}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① 구하는 미분계수를 $f'(1)$을 이용하여 나타낼 수 있다. | 50% |
| ② $f'(1)$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ③ 미분계수를 구할 수 있다. | 10% |

**0874** **전략** $f^{(1)}(x),\ f^{(2)}(x),\ f^{(3)}(x),\ \cdots$를 차례대로 구하여 $f^{(n)}(x)$를 추정한다.

**풀이** $f^{(1)}(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$,

$f^{(2)}(x)=e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$,

$f^{(3)}(x)=e^x+(x+3)e^x=(x+4)e^x$,

$\vdots$

이므로 $\quad f^{(n)}(x)=(x+n+1)e^x$ ··· ①

따라서 $f^{(n)}(0)=n+1$이므로 ··· ②

$\sum_{n=1}^{10}f^{(n)}(0)=\sum_{n=1}^{10}(n+1)=\frac{10\cdot 11}{2}+10=65$ ··· ③

답 65

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① $f^{(n)}(x)$를 구할 수 있다. | 50% |
| ② $f^{(n)}(0)$을 $n$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 20% |
| ③ $\sum_{n=1}^{10}f^{(n)}(0)$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

Ⅱ 미분법

## 08 도함수의 활용 (1)

**0875** $f(x)=\frac{1}{2x+1}$로 놓으면 $\quad f'(x)=-\frac{2}{(2x+1)^2}$
점 (0, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-2$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y=-2x+1$ 　　답 $y=-2x+1$

**0876** $f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$
점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=\frac{3}{2}$이므로 구하는 접선의 방정식은 $\quad y-1=\frac{3}{2}(x-1)$
$\therefore y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ 　　답 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

**0877** $f(x)=e^{3(x-1)}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=3e^{3(x-1)}$
점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이므로 구하는 접선의 방정식은 $\quad y-1=3(x-1)$
$\therefore y=3x-2$ 　　답 $y=3x-2$

**0878** $f(x)=\log x$로 놓으면 $\quad f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}$
점 (1, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=\frac{1}{\ln 10}$이므로 구하는 접선의 방정식은 $\quad y=\frac{1}{\ln 10}(x-1)$
$\therefore y=\frac{1}{\ln 10}x-\frac{1}{\ln 10}$ 　　답 $y=\frac{1}{\ln 10}x-\frac{1}{\ln 10}$

**0879** $f(x)=\tan x$로 놓으면 $\quad f'(x)=\sec^2 x$
점 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$이므로 구하는 접선의 방정식은 $\quad y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
$\therefore y=2x-\frac{\pi}{2}+1$ 　　답 $y=2x-\frac{\pi}{2}+1$

**0880** $f(x)=e^{2x}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2e^{2x}$
점 (0, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$이므로 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=-\frac{1}{2}x+1$ 　　답 $y=-\frac{1}{2}x+1$

**0881** $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$로 놓으면
$f'(x)=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$
접점의 좌표를 $\left(t, \frac{t-1}{t+1}\right)$이라 하면 $f'(t)=\frac{1}{2}$이므로
$\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{1}{2}, \quad (t+1)^2=4$
$t+1=\pm 2 \quad \therefore t=1\ (\because t>0)$
따라서 접점의 좌표가 (1, 0)이므로 구하는 접선의 방정식은
$y=\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 　　답 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

**0882** $f(x)=\sqrt{x}$로 놓으면 $\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t})$라 하면 $f'(t)=\frac{1}{2}$이므로
$\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}, \quad \sqrt{t}=1 \quad \therefore t=1$
따라서 접점의 좌표가 (1, 1)이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-1=\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 　　답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

**0883** $f(x)=e^{x+1}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=e^{x+1}$
접점의 좌표를 $(t, e^{t+1})$이라 하면 $f'(t)=1$이므로
$e^{t+1}=1, \quad t+1=0 \quad \therefore t=-1$
따라서 접점의 좌표가 (−1, 1)이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-1=x-(-1) \quad \therefore y=x+2$ 　　답 $y=x+2$

**0884** $f(x)=\ln(x+2)$로 놓으면 $\quad f'(x)=\frac{1}{x+2}$
접점의 좌표를 $(t, \ln(t+2))$라 하면 $f'(t)=1$이므로
$\frac{1}{t+2}=1 \quad \therefore t=-1$
따라서 접점의 좌표가 (−1, 0)이므로 구하는 접선의 방정식은
$y=x-(-1) \quad \therefore y=x+1$ 　　답 $y=x+1$

**0885** $f(x)=-\cos 2x$로 놓으면 $\quad f'(x)=2\sin 2x$
접점의 좌표를 $(t, -\cos 2t)$라 하면 $f'(t)=1$이므로
$2\sin 2t=1 \quad \therefore \sin 2t=\frac{1}{2}$
이때 $0\le t\le\frac{\pi}{4}$에서 $0\le 2t\le\frac{\pi}{2}$이므로
$2t=\frac{\pi}{6} \quad \therefore t=\frac{\pi}{12}$
따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{\pi}{12}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=x-\frac{\pi}{12} \quad \therefore y=x-\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$
답 $y=x-\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**0886** $f(x)=\frac{1}{x}$로 놓으면 $\quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{t}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(t)=-\frac{1}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t)$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(2-t)$, $\quad t=2-t \quad \therefore t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y-1=-(x-1)$

$\therefore y=-x+2$

답 $y=-x+2$

**0887** $f(x)=\sqrt{x-1}$로 놓으면 $\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t-1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{t-1}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(x-t)$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$-\sqrt{t-1}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(-1-t)$, $\quad 2t-2=1+t$

$\therefore t=3$

$t=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad y-\sqrt{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-3)$

$\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}$

답 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}$

**0888** $f(x)=2e^x$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2e^x$

접점의 좌표를 $(t,\ 2e^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2e^t$이므로 접선의 방정식은

$y-2e^t=2e^t(x-t)$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$-2e^t=2e^t\cdot(-t) \quad \therefore t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y-2e=2e(x-1)$

$\therefore y=2ex$

답 $y=2ex$

**0889** $f(x)=\ln x$로 놓으면 $\quad f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1-\ln t=\frac{1}{t}\cdot(-t)$, $\quad \ln t=2 \quad \therefore t=e^2$

$t=e^2$을 ㉠에 대입하면 $\quad y-2=\frac{1}{e^2}(x-e^2)$

$\therefore y=\frac{1}{e^2}x+1$

답 $y=\frac{1}{e^2}x+1$

**0890** (1) 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$t\ln t=\ln t$, $\quad (t-1)\ln t=0 \quad \therefore t=1$

$f'(x)=\ln x+1$, $g'(x)=\frac{1}{x}$이므로 $\quad f'(1)=g'(1)=1$

따라서 접점의 $x$좌표는 1이다.

(2) 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 $f'(1)=g'(1)=1$이므로 공통인 접선의 방정식은 $\quad y=x-1$

답 (1) 1 (2) $y=x-1$

**0891** $f(x)=x+\frac{1}{x}$에서 $x\neq0$이고 $\quad f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad \frac{1}{x^2}=1 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=1$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1]$ 또는 구간 $[1,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1,\ 0)$ 또는 구간 $(0,\ 1]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

**0892** $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$에서 $\quad f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 증가하고, 구간 $[0,\ \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

**0893** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$에서 $\quad f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 감소하고, 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

참고 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$은 $x=0$에서 극값을 갖지만 $f'(0)$은 존재하지 않는다.

**0894** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$에서 $\quad f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 감소하고, 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

**0895** $f(x)=x^2e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=xe^x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -2]$ 또는 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-2,\ 0]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

08 도함수의 활용 (1)

**0896** $f(x)=x-\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1]$에서 감소하고, 구간 $[1,\ \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

**0897** $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$에서 $x\neq0$이고

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x-1=0 \quad \therefore x=1$

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↘ | | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$ 또는 구간 $(0,\ 1]$에서 감소하고, 구간 $[1,\ \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

**0898** $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$에서 $x>-1$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)-\ln(1+x)}{(1+x)^2}=\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 1-\ln(1+x)=0$

$\ln(1+x)=1, \quad 1+x=e$

$\therefore x=e-1$

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $e-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-1,\ e-1]$에서 증가하고, 구간 $[e-1,\ \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

**0899** $f(x)=x+2\cos x$에서 $\quad f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$ $(\because 0<x<2\pi)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{6}\right]$ 또는 구간 $\left[\dfrac{5}{6}\pi,\ 2\pi\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi\right]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

**0900** $f(x)=\sin x+\cos x$에서 $\quad f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\sin x$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ $(\because 0<x<\pi)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 증가하고, 구간 $\left[\dfrac{\pi}{4},\ \pi\right)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

**0901** $f(x)=x+\cot x$에서 $\quad f'(x)=1-\csc^2 x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \csc^2 x=1, \quad \csc x=\pm1$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ $(\because 0<x<\pi)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ \pi)$에서 감소한다.

답 감소

**0902** $f(x)=\cos x+x\sin x$에서

$f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ $(\because 0<x<2\pi)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 또는 구간 $\left[\dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\right]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

**0903** $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+4}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x^2+4)-(2x-3)\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-2(x^2-3x-4)}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x^2-3x-4=0, \quad (x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $\frac{1}{4}$ | ↘ |

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(4)=\dfrac{1}{4}$, 극솟값은 $f(-1)=-1$이다.

답 극댓값: $\dfrac{1}{4}$, 극솟값: $-1$

**0904** $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$에서 $x>-1$이고

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x+1}-(x+2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1})^2}=\frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(0)=2$이다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ |

답 극솟값: 2

**0905** $f(x)=xe^x$에서 $\quad f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad 1+x=0 \quad \therefore x=-1$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(-1)=-\frac{1}{e}$이다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ |

답 극솟값: $-\frac{1}{e}$

**0906** $f(x)=-x\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}=-\ln x-1$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=-1 \quad \therefore x=\frac{1}{e}$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$이다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{e}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ |

답 극댓값: $\frac{1}{e}$

**0907** $f(x)=x+2\sin x$에서 $\quad f'(x)=1+2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\frac{1}{2} \quad \therefore x=\frac{2}{3}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$ | $\searrow$ | |

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$이다.

답 극댓값: $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

**0908** $f(x)=x^3-3x$에서

$f'(x)=3x^2-3,\ f''(x)=6x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

이때 $f''(-1)=-6\boxed{<}0,\ f''(1)=6\boxed{>}0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=\boxed{2}$, 극솟값은 $f(1)=\boxed{-2}$이다.

$\therefore$ (가) $<$ (나) $>$ (다) 2 (라) $-2$

답 풀이 참조

**0909** $f(x)=4x+\frac{1}{x}$에서

$$f'(x)=4-\frac{1}{x^2},\ f''(x)=\frac{2}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \frac{1}{x^2}=4, \quad x^2=\frac{1}{4}$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

이때 $f''\left(-\frac{1}{2}\right)=-16<0,\ f''\left(\frac{1}{2}\right)=16>0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$, 극솟값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=4$이다.

답 극댓값: $-4$, 극솟값: 4

**0910** $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$에서

$$f'(x)=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$f''(x)=\frac{-1\cdot\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\cdot\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{(\sqrt{2x-x^2})^2}$$

$$=\frac{1}{(x^2-2x)\sqrt{2x-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 1-x=0 \quad \therefore x=1$

이때 $f''(1)=-1<0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=1$이다.

답 극댓값: 1

**0911** $f(x)=e^x(x^2+x+1)$에서

$f'(x)=e^x(x^2+x+1)+e^x(2x+1)=e^x(x^2+3x+2)$

$f''(x)=e^x(x^2+3x+2)+e^x(2x+3)=e^x(x^2+5x+5)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x^2+3x+2=0, \quad (x+2)(x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

이때 $f''(-2)=-\frac{1}{e^2}<0,\ f''(-1)=\frac{1}{e}>0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f(-2)=\frac{3}{e^2}$, 극솟값은 $f(-1)=\frac{1}{e}$이다.

답 극댓값: $\frac{3}{e^2}$, 극솟값: $\frac{1}{e}$

**0912** $f(x)=x^2\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$$

$$f''(x)=2\ln x+1+x\cdot\frac{2}{x}=2\ln x+3$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2\ln x+1=0$ ($\because x>0$)

$\ln x=-\frac{1}{2} \quad \therefore x=\frac{1}{\sqrt{e}}$

이때 $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=2>0$이므로 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$이다.

답 극솟값: $-\frac{1}{2e}$

**0913** $f(x)=\cos x-\sin x$에서

$f'(x)=-\sin x-\cos x,\ f''(x)=-\cos x+\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=-\cos x$

$\therefore x=\frac{3}{4}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

이때 $f''\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}>0$이므로 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}$이다.

답 극솟값: $-\sqrt{2}$

## 유형 01 접선의 방정식; 접점의 좌표가 주어질 때 본책 132쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, b)$가 주어졌을 때
(i) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.
(ii) $y-b=f'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

**0914** $f(x)=\sqrt{2x^2-1}$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$
점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(-1)=-2$이므로 접선의 방정식은
$y-1=-2(x+1)$ $\therefore y=-2x-1$
따라서 $a=-2$, $b=-1$이므로
$a+b=-3$ 답 ②

**0915** $f(x)=xe^x-1$로 놓으면 $f'(x)=e^x+xe^x$
점 $(0, -1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(0)=1$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y=x-1$ 답 $y=x-1$

**0916** $f'(x)=\sqrt{3}\cos x-3\sin x$이므로 점 $\left(\dfrac{\pi}{3}, 3\right)$에서의 접선의 기울기는
$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$ ➊
따라서 접선의 방정식은
$y-3=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ $\therefore y=-\sqrt{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+3$ ➋
위의 식에 $y=0$을 대입하면
$0=-\sqrt{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+3$ $\therefore x=\dfrac{\pi}{3}+\sqrt{3}$
즉 구하는 $x$절편은 $\dfrac{\pi}{3}+\sqrt{3}$이다. ➌

답 $\dfrac{\pi}{3}+\sqrt{3}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ 접선의 기울기를 구할 수 있다. | 30% |
| ➋ 접선의 방정식을 구할 수 있다. | 30% |
| ➌ 접선의 $x$절편을 구할 수 있다. | 40% |

**0917** $f(x)=4x-x\ln x$로 놓으면
$f'(x)=4-\left(\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=3-\ln x$
$x$좌표가 $e$인 점에서의 접선의 기울기는
$f'(e)=3-\ln e=2$
이때 $f(e)=3e$이므로 점 $(e, 3e)$에서의 접선의 방정식은
$y-3e=2(x-e)$ $\therefore y=2x+e$
이 직선이 점 $(k, 5e)$를 지나므로
$5e=2k+e$ $\therefore k=2e$ 답 $2e$

**0918** $f(x)=e^{x^3}$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2e^{x^3}$
점 $(1, e)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3e$이므로 접선의 방정식은
$y-e=3e(x-1)$ $\therefore y=3ex-2e$
접선의 $x$절편과 $y$절편이 각각 $\dfrac{2}{3}$, $-2e$이므로 구하는 도형의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 2e=\dfrac{2}{3}e$ 답 ③

**0919** $f(x)=e^{2x}+\sin x$로 놓으면
$f'(x)=2e^{2x}+\cos x$
점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(0)=3$이므로 접선의 방정식은
$y=3x+1$ $\therefore 3x-y+1=0$
이때 직선 $3x-y+1=0$이 원 $(x-3)^2+y^2=r^2$과 접하면 직선 $3x-y+1=0$과 원의 중심 $(3, 0)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $|r|$와 같으므로
$|r|=\dfrac{|3\cdot 3+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$ $\therefore r^2=10$ 답 10

## 유형 02 접선과 수직인 직선의 방정식 본책 132쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은
$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$ (단, $f'(a)\neq 0$)

**0920** $f(x)=x+\sin x$로 놓으면
$f'(x)=1+\cos x$
점 $(2\pi, 2\pi)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2\pi)=2$
따라서 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이므로 직선의 방정식은
$y-2\pi=-\dfrac{1}{2}(x-2\pi)$ $\therefore x+2y-6\pi=0$
따라서 $a=1$, $b=2$이므로 $ab=2$ 답 2

**0921** $f(x)=x^2e^{3x}$으로 놓으면
$f'(x)=2xe^{3x}+x^2\cdot 3e^{3x}=x(3x+2)e^{3x}$
점 $\left(-1, \dfrac{1}{e^3}\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=\dfrac{1}{e^3}$
따라서 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-e^3$이므로 직선의 방정식은
$y-\dfrac{1}{e^3}=-e^3(x+1)$ $\therefore y=-e^3x+\dfrac{1}{e^3}-e^3$
따라서 구하는 $y$절편은 $\dfrac{1}{e^3}-e^3$이다. 답 ①

**0922** $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$로 놓으면 $f(2)=a$에서
$a=\dfrac{2}{2-1}=2$ ➊
$f'(x)=\dfrac{(x-1)-x}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$이므로 점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-1$
따라서 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 1이므로 직선의 방정식은
$y-2=x-2$ $\therefore y=x$ ➋

이 직선이 점 $(b, -3)$을 지나므로 $\quad b=-3$ ⋯ ③

$\therefore a^2+b^2=2^2+(-3)^2=13$ ⋯ ④

답 13

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ① $a$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ② 직선의 방정식을 구할 수 있다. | 50% |
| ③ $b$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ④ $a^2+b^2$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**0923** $f(x)=\ln ex$로 놓으면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$

점 $(t, \ln et)$에서의 접선의 기울기는 $\quad f'(t)=\dfrac{1}{t}$

따라서 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-t$이므로 직선의 방정식은

$y-\ln et=-t(x-t) \quad \therefore y=-tx+t^2+\ln et$

따라서 $g(t)=t^2+\ln et$이므로

$g(e)=e^2+2$

답 $e^2+2$

**유형 03 접선의 방정식; 기울기가 주어질 때** 본책 133쪽

곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기 $m$이 주어졌을 때
(i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓는다.
(ii) $f'(t)=m$임을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.
(iii) $y-f(t)=m(x-t)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

**0924** $2x+y=0$에서 $y=-2x$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이다.

$f(x)=x\ln x-x$로 놓으면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\ln x$

접점의 좌표를 $(t, t\ln t-t)$라 하면 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$f'(t)=\ln t=\dfrac{1}{2} \quad \therefore t=\sqrt{e}$

즉 접점의 좌표는 $\left(\sqrt{e}, -\dfrac{\sqrt{e}}{2}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y+\dfrac{\sqrt{e}}{2}=\dfrac{1}{2}(x-\sqrt{e}) \quad \therefore y=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{e}$

따라서 구하는 $y$절편은 $-\sqrt{e}$이다.

답 ③

**0925** $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$로 놓으면 $\quad f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \dfrac{2}{t-1}\right)$라 하면 접선의 기울기가 $-2$이므로

$f'(t)=-\dfrac{2}{(t-1)^2}=-2, \quad (t-1)^2=1$

$t-1=\pm1 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=2$ ⋯ ①

따라서 접점의 좌표는 $(0, -2)$, $(2, 2)$이므로 접선의 방정식은

$y=-2x-2$, $y=-2x+6$ ⋯ ②

이때 $a>b$이므로 $\quad a=6, b=-2$

$\therefore a-b=8$ ⋯ ③

답 8

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ① 접점의 $x$좌표를 구할 수 있다. | 50% |
| ② 접선의 방정식을 구할 수 있다. | 30% |
| ③ $a-b$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**0926** $f(x)=\ln\left(x+\dfrac{1}{e}\right)$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{e}}=\dfrac{e}{ex+1}$

직선 $y=ex$를 $y$축의 방향으로 $a$만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=ex+a$이므로 접선의 기울기는 $e$이다.

접점의 좌표를 $\left(t, \ln\left(t+\dfrac{1}{e}\right)\right)$이라 하면

$f'(t)=\dfrac{e}{et+1}=e, \quad et+1=1$

$\therefore t=0$

즉 접점의 좌표는 $(0, -1)$이므로 접선의 방정식은

$y=ex-1$

$\therefore a=-1$

답 $-1$

**0927** $f(x)=\sin 2x$로 놓으면 $\quad f'(x)=2\cos 2x$

직선 $2x+y+2=0$, 즉 $y=-2x-2$에 평행한 직선의 기울기는 $-2$이므로 접점의 좌표를 $(t, \sin 2t)$라 하면

$f'(t)=2\cos 2t=-2 \quad \therefore \cos 2t=-1$

$0\le t\le\pi$에서 $0\le 2t\le 2\pi$이므로

$2t=\pi \quad \therefore t=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$이므로 접선의 방정식은

$y=-2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) \quad \therefore y=-2x+\pi$

답 ④

**0928** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x$축과 점 $(t, 0)$에서 접한다고 하면

$f(t)=e^{2t}+at=0$ ⋯⋯ ㉠

또 $f'(x)=2e^{2x}+a$이고, 점 $(t, 0)$에서의 접선의 기울기가 0이므로

$f'(t)=2e^{2t}+a=0 \quad \therefore a=-2e^{2t}$

$a=-2e^{2t}$을 ㉠에 대입하면 $\quad e^{2t}-2e^{2t}\cdot t=0$

$e^{2t}(1-2t)=0 \quad \therefore t=\dfrac{1}{2}\ (\because e^{2t}>0)$

$\therefore a=-2e^{2\cdot\frac{1}{2}}=-2e$

답 $-2e$

**0929** $f'(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

접점의 좌표를 $(t, \sin t+\cos t)$라 하면 접선의 기울기가 $\tan 45°=1$이므로

$f'(t)=\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{3}{4}\pi\right)=1 \quad \therefore \sin\left(t+\dfrac{3}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

이때 $0<t<2\pi$에서 $\dfrac{3}{4}\pi<t+\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{11}{4}\pi$이므로

$$t+\frac{3}{4}\pi=\frac{9}{4}\pi \qquad \therefore t=\frac{3}{2}\pi$$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ -1\right)$이므로 접선의 방정식은

$$y+1=x-\frac{3}{2}\pi \qquad \therefore y=x-\frac{3}{2}\pi-1$$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$0=x-\frac{3}{2}\pi-1 \qquad \therefore x=\frac{3}{2}\pi+1$$

즉 구하는 $x$절편은 $\frac{3}{2}\pi+1$이다. 답 $\frac{3}{2}\pi+1$

참고 $f'(x)=-\sin x+\cos x$에서 $\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$$f'(x)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$

$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $\quad \alpha=\frac{3}{4}\pi$

$$\therefore f'(x)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi\sin x+\sin\frac{3}{4}\pi\cos x\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$$

### 유형 04 접선의 방정식; 곡선 밖의 점이 주어질 때 본책 134쪽

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$에서 곡선에 접선을 그었을 때
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.
(ii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 점 $(a,\ b)$의 좌표를 대입하여 $t$의 값을 구한다.
(iii) $t$의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

**0930** $f(x)=e^{-x-1}$으로 놓으면

$$f'(x)=-e^{-x-1}$$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{-t-1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-e^{-t-1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{-t-1}=-e^{-t-1}(x-t)$$
$$\therefore y=-e^{-t-1}x+(t+1)e^{-t-1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 원점을 지나므로 $\quad 0=(t+1)e^{-t-1}$

$$\therefore t=-1 \ (\because e^{-t-1}>0)$$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=-x$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로 $\quad a=-1$

답 ③

**0931** $f(x)=\sqrt{x^2+3}$으로 놓으면

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t^2+3})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{t^2+3}=\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}(x-t) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$$-\sqrt{t^2+3}=\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}(3-t)$$

$\sqrt{t^2+3}\neq0$이므로 양변에 $\sqrt{t^2+3}$을 곱하여 정리하면

$$-(t^2+3)=3t-t^2, \qquad 3t=-3$$
$$\therefore t=-1$$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면

$$y-2=\frac{-1}{2}(x+1) \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

따라서 이 직선의 $y$절편은 $\frac{3}{2}$이다. 답 ⑤

**0932** $f(x)=xe^x$으로 놓으면

$$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1) \qquad \cdots ❶$$

접점의 좌표를 $(t,\ te^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=e^t(t+1)$이므로 접선의 방정식은

$$y-te^t=e^t(t+1)(x-t)$$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$$-te^t=e^t(t+1)(1-t), \qquad e^t(t^2-t-1)=0$$
$$\therefore t^2-t-1=0 \ (\because e^t>0) \qquad \cdots ❷$$

이 이차방정식의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1 \qquad \cdots ❸$$

접선의 기울기는 각각 $e^\alpha(\alpha+1)$, $e^\beta(\beta+1)$이므로 두 접선의 기울기의 곱은

$$e^\alpha(\alpha+1)\cdot e^\beta(\beta+1)=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)e^{\alpha+\beta}$$
$$=(-1+1+1)e=e \qquad \cdots ❹$$

답 $e$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 10% |
| ❷ $t$에 대한 이차방정식을 세울 수 있다. | 40% |
| ❸ 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다. | 20% |
| ❹ 두 접선의 기울기의 곱을 구할 수 있다. | 30% |

**0933** $f(x)=\frac{x}{x+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{t}{t+1}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{(t+1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{t}{t+1}=\frac{1}{(t+1)^2}(x-t) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

$$3-\frac{t}{t+1}=\frac{1}{(t+1)^2}(3-t)$$
$$3(t+1)^2-t(t+1)=3-t, \qquad 2t^2+6t=0$$
$$2t(t+3)=0 \qquad \therefore t=-3 \text{ 또는 } t=0$$

$t=-3$을 ㉠에 대입하면

$$y-\frac{3}{2}=\frac{1}{4}(x+3) \qquad \therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$$

$t=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=x$

두 접선의 교점의 좌표가 $(3,\ 3)$이고 각각의 $x$절편이 $-9$, $0$이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot3\cdot9=\frac{27}{2}$$

답 $\frac{27}{2}$

**0934** $f(x)=x\ln x$로 놓으면

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

접점 B의 좌표를 $(t,\ t\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\ln t+1$이므로 접선의 방정식은

$$y-t\ln t=(\ln t+1)(x-t)$$

이 직선이 점 A$(0,\ -1)$을 지나므로

$$-1-t\ln t=(\ln t+1)\cdot(-t),\quad -1=-t\quad \therefore t=1$$

즉 점 B의 좌표는 $(1,\ 0)$이고, 접선의 기울기는 1이다.
이때 점 B를 지나고 접선에 수직인 직선의 기울기가 $-1$이므로 이 직선의 방정식은

$$y=-(x-1)\quad \therefore y=-x+1$$

따라서 점 C의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 $\triangle$ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(1+1)\cdot 1=1$$

답 1

**유형 05 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 개수** 본책 134쪽

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 세운다.
(ii) 곡선 밖의 점의 좌표를 접선의 방정식에 대입하여 $t$에 대한 방정식을 만든다.
(iii) 실근 $t$의 개수를 이용하여 접선의 개수를 구한다.

**0935** $f(x)=xe^{x-1}$으로 놓으면

$$f'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}=e^{x-1}(x+1)$$

접점의 좌표를 $(t,\ te^{t-1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=e^{t-1}(t+1)$이므로 접선의 방정식은

$$y-te^{t-1}=e^{t-1}(t+1)(x-t)$$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$$-te^{t-1}=e^{t-1}(t+1)(a-t),\quad e^{t-1}(t^2-at-a)=0$$

$$\therefore t^2-at-a=0\ (\because e^{t-1}>0)\quad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=xe^{x-1}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$$D=a^2+4a>0,\quad a(a+4)>0$$

$$\therefore a<-4 \text{ 또는 } a>0$$

답 $a<-4$ 또는 $a>0$

**0936** $f(x)=\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}$$ ➊

접점의 좌표를 $\left(t,\ 1-\dfrac{1}{t}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\left(1-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}(x-t)$$ ➋

이 직선이 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$$1+\frac{1}{t}=\frac{3}{t^2}-\frac{1}{t}$$

$t\neq0$이므로 양변에 $t^2$을 곱하여 정리하면 $t^2+2t-3=0$

$$(t+3)(t-1)=0\quad \therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1$$ ➌

따라서 접점의 개수가 2이므로 점 $(3,\ 2)$에서 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다. ➍

답 2

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 10% |
| ➋ 접선의 방정식을 $t$를 이용하여 나타낼 수 있다. | 30% |
| ➌ $t$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ➍ 접선의 개수를 구할 수 있다. | 20% |

**0937** $f(x)=(x+a)e^{-x}$으로 놓으면

$$f'(x)=e^{-x}-(x+a)e^{-x}=(1-x-a)e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(t,\ (t+a)e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(1-t-a)e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t+a)e^{-t}=(1-t-a)e^{-t}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(t+a)e^{-t}=(1-t-a)e^{-t}\cdot(-t)$$

$$e^{-t}(t^2+at+a)=0$$

$$\therefore t^2+at+a=0\ (\because e^{-t}>0)\quad \cdots\cdots ㉠$$

원점에서 곡선 $y=(x+a)e^{-x}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 $D$라 하면 $D=a^2-4a=0,\quad a(a-4)=0$

$$\therefore a=4\ (\because a\neq0)$$

답 ④

**유형 06 공통인 접선** 본책 135쪽

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면
① $x=t$에서 두 곡선이 만난다. ➡ $f(t)=g(t)$
② $x=t$에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같다. ➡ $f'(t)=g'(t)$

**0938** $f(x)=\ln x$, $g(x)=ax+\dfrac{b}{x}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g'(x)=a-\frac{b}{x^2}$$

$f(e^3)=g(e^3)$에서 $\quad 3=ae^3+\dfrac{b}{e^3}$

$$\therefore 3e^3=ae^6+b\quad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(e^3)=g'(e^3)$에서 $\quad \dfrac{1}{e^3}=a-\dfrac{b}{e^6}$

$$\therefore e^3=ae^6-b\quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면 $\quad 4e^3=2ae^6\quad \therefore a=\dfrac{2}{e^3}$

$a=\dfrac{2}{e^3}$를 ㉠에 대입하면

$$3e^3=\frac{2}{e^3}\cdot e^6+b\quad \therefore b=e^3$$

$$\therefore ab=2$$

답 ③

**0939** $f(x)=e^{x-1}$, $g(x)=\sqrt{2x+a}$로 놓으면

$$f'(x)=e^{x-1},\ g'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+a}}=\frac{1}{\sqrt{2x+a}}$$

$f(p)=g(p)$에서 $\quad e^{p-1}=\sqrt{2p+a}\quad \cdots\cdots ㉠$

$f'(p)=g'(p)$에서 $\quad e^{p-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2p+a}}\quad \cdots\cdots ㉡$

ⓛ을 ㉠에 대입하면

$$e^{p-1}=\frac{1}{e^{p-1}}, \quad (e^{p-1})^2=1$$

$\therefore e^{p-1}=1$ ($\because e^{p-1}>0$)

$p-1=0$이므로 $p=1$

$p=1$을 ㉠에 대입하면 $1=\sqrt{2+a}$ $\therefore a=-1$

또 $q=f(1)=1$이므로

$apq=-1$

답 $-1$

**0940** $f(x)=a+\cos x$, $g(x)=\sin^2 x$로 놓으면

$f'(x)=-\sin x$, $g'(x)=2\sin x\cos x$

$f(t)=g(t)$에서 $a+\cos t=\sin^2 t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-\sin t=2\sin t\cos t$

$\sin t(2\cos t+1)=0$ $\therefore \cos t=-\frac{1}{2}$ ($\because 0<t<\pi$)

$\therefore t=\frac{2}{3}\pi$

$t=\frac{2}{3}\pi$를 ㉠에 대입하면

$a-\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ $\therefore a=\frac{5}{4}$

답 ⑤

**0941** $f'(x)=\cos x$, $g'(x)=2\sin x\cos x$

두 함수의 그래프의 교점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $a+\sin t=\sin^2 t$

$\therefore a=\sin^2 t-\sin t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서

$\cos t=2\sin t\cos t$, $\cos t(2\sin t-1)=0$

$\therefore \cos t=0$ 또는 $\sin t=\frac{1}{2}$

(i) $\cos t=0$일 때,

$\sin t=\pm 1$이므로 이를 ㉠에 대입하면 $a=2$ ($\because a\neq 0$)

(ii) $\sin t=\frac{1}{2}$일 때,

$\sin t=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a=-\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 모든 실수 $a$의 값의 합은

$2+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}$

답 $\frac{7}{4}$

**유형 07 역함수의 그래프의 접선의 방정식** 본책 135쪽

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $g(a)=b$라 하면 $f(b)=a$임을 이용하여 $b$의 값을 구한다.

(ii) $g'(a)=\frac{1}{f'(b)}$임을 이용하여 접선의 기울기를 구한다.

(iii) $y-b=g'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

**0942** $g(1)=k$로 놓으면 $f(k)=1$이므로

$\tan k=1$ $\therefore k=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<k<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

이때 $f'(x)=\sec^2 x$이므로 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$

$\therefore g'(1)=\frac{1}{2}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

즉 구하는 $y$절편은 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$이다.

답 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

**0943** $g(1)=k$로 놓으면 $f(k)=1$이므로

$e^{2k-1}=1$, $2k-1=0$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}$

이때 $f'(x)=2e^{2x-1}$이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2$

$\therefore g'(1)=\frac{1}{2}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x$

답 $y=\frac{1}{2}x$

**유형 08 함수의 증가와 감소** 본책 136쪽

미분가능한 함수 $f(x)$의 증가하는 구간 또는 감소하는 구간은 $f'(x)$의 부호를 조사하여 구한다.

① $f'(x)>0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

**0944** $y'=\frac{x^2+5-(x-2)\cdot 2x}{(x^2+5)^2}=\frac{-x^2+4x+5}{(x^2+5)^2}$

$=\frac{-(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}$

$(x^2+5)^2>0$이므로 $y'\geq 0$에서

$-(x+1)(x-5)\geq 0$, $(x+1)(x-5)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 5$

답 ②

**0945** $f(x)=x^2-\ln x^2$에서

$f'(x)=2x-\frac{2x}{x^2}=2x-\frac{2}{x}$

$=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$ ➡ ❶

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because x<0$) ➡ ❷

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, 0)$에서 증가하므로 $a=-1$ ➡ ❸

답 $-1$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ❸ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**0946** $f(x)=2x+\sqrt{10-x^2}$에서 $0<x\leq\sqrt{10}$이고

$$f'(x)=2+\frac{-2x}{2\sqrt{10-x^2}}=\frac{2\sqrt{10-x^2}-x}{\sqrt{10-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2\sqrt{10-x^2}=x$

양변을 제곱하여 정리하면 $\quad x^2=8$

$\therefore x=2\sqrt{2}$ ($\because 0<x\leq\sqrt{10}$)

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $2\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $\sqrt{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $(0,\ 2\sqrt{2}]$이므로 이 구간에 속하는 모든 정수 $x$의 값의 합은

$1+2=3$

답 3

**0947** $f'(x)=\dfrac{e^x(2x^2+1)-e^x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\dfrac{e^x(2x^2-4x+1)}{(2x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2x^2-4x+1=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

| $x$ | $\cdots$ | $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 $x$의 값의 범위는

$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

이므로 $\quad \alpha=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \beta=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \beta-\alpha=\sqrt{2}$

답 ④

**유형 09, 10 함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건** 본책 136쪽

어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 이 구간에서
① 증가하면 ➡ $f'(x)\geq 0$
② 감소하면 ➡ $f'(x)\leq 0$

**0948** $f(x)=x-\ln(x^2+a)$에서

$$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+a}=\frac{x^2-2x+a}{x^2+a}$$

$x^2+a>0$이므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\geq 0$, 즉 $x^2-2x+a\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-a\leq 0 \qquad \therefore a\geq 1$

따라서 양수 $a$의 최솟값은 1이다.

답 ③

**SSEN 특강**

**이차부등식이 항상 성립할 조건**

모든 실수 $x$에 대하여 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다. (단, $D=b^2-4ac$)
① $ax^2+bx+c>0$ ➡ $a>0,\ D<0$
② $ax^2+bx+c\geq 0$ ➡ $a>0,\ D\leq 0$
③ $ax^2+bx+c<0$ ➡ $a<0,\ D<0$
④ $ax^2+bx+c\leq 0$ ➡ $a<0,\ D\leq 0$

**0949** $f'(x)=a-2\sin 2x$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 감소하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

이때 $-1\leq\sin 2x\leq 1$이므로 $\quad -2\leq -2\sin 2x\leq 2$

$\therefore a-2\leq a-2\sin 2x\leq a+2$, 즉 $a-2\leq f'(x)\leq a+2$

따라서 $a+2\leq 0$이어야 하므로

$a\leq -2$

답 $a\leq -2$

**0950** $f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+2)e^{-x}$
$\qquad =e^{-x}\{-x^2+(2-a)x+a-2\}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 감소하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 하고 $e^{-x}>0$이므로

$-x^2+(2-a)x+a-2\leq 0$

이차방정식 $-x^2+(2-a)x+a-2=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(2-a)^2+4(a-2)\leq 0$

$a^2-4\leq 0,\quad (a+2)(a-2)\leq 0 \quad \therefore -2\leq a\leq 2$

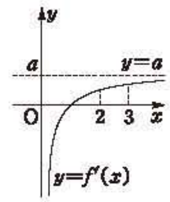
따라서 정수 $a$는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다.

답 ⑤

**0951** $f(x)=ax-\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}$

함수 $f(x)$가 구간 $(2,\ 3)$에서 증가하려면 $2<x<3$일 때 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서




$f'(2)=a-\dfrac{1}{2}\geq 0 \qquad \therefore a\geq\dfrac{1}{2}$

따라서 실수 $a$의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

답 ①

**0952** $f'(x)=a+\cos x$ ⋯ ❶

함수 $f(x)$가 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 감소하려면 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때 $f'(x)\leq 0$이어야 한다. ⋯ ❷

이때 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $0<\cos x<1$이므로

$a<a+\cos x<a+1$, 즉 $a<f'(x)<a+1$ ⋯ ❸

따라서 $a+1\leq 0$이어야 하므로

$a\leq -1$ ⋯ ❹

답 $a\leq -1$

**채점 기준표**

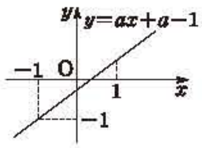
| | |
|---|---|
| ① $f'(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ② $f'(x)\le 0$이어야 함을 알 수 있다. | 20% |
| ③ $f'(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 30% |
| ④ $a$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 30% |

**0953** $f'(x)=\dfrac{ae^{ax}(x+1)-e^{ax}}{(x+1)^2}=\dfrac{e^{ax}(ax+a-1)}{(x+1)^2}$

함수 $f(x)$가 구간 $(1, \infty)$에서 증가하려면 $x>1$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 하고 $e^{ax}>0$이므로

$ax+a-1\ge 0$

$g(x)=ax+a-1$이라 하면 직선 $y=g(x)$는 $a$의 값에 관계없이 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로 $x>1$일 때 $g(x)\ge 0$이려면




$a>0$, $g(1)\ge 0$, 즉 $a>0$, $2a-1\ge 0$

$\therefore a\ge \dfrac{1}{2}$

따라서 $a$의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}$이다. 답 $\dfrac{1}{2}$

**유형 11~15 함수 $f(x)$의 극대·극소** 본책 137, 138쪽

(i) $f'(x)$를 구한다.
(ii) $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값 $a$를 구한다.
(iii) $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.
- 양 → 음 ⇒ $f(x)$는 $x=a$에서 극대
- 음 → 양 ⇒ $f(x)$는 $x=a$에서 극소

**0954** $f'(x)=\dfrac{4(x^2+5)-4x\cdot 2x}{(x^2+5)^2}=\dfrac{-4(x^2-5)}{(x^2+5)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x^2-5=0$ $\therefore x=\pm\sqrt{5}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{5}$ | $\cdots$ | $\sqrt{5}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 $f(x)$는 $x=\sqrt{5}$에서 극대이고, $x=-\sqrt{5}$에서 극소이므로

$\alpha=\sqrt{5}$, $\beta=-\sqrt{5}$ $\therefore 2\alpha+\beta=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

**0955** $f(x)=\dfrac{x^2-5x+2}{x+2}$에서 $x\ne -2$이고

$f'(x)=\dfrac{(2x-5)(x+2)-(x^2-5x+2)}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x-12}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{(x+6)(x-2)}{(x+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-6$ 또는 $x=2$ ··· ①

| $x$ | $\cdots$ | $-6$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $-17$ | ↘ | | ↘ | $-1$ | ↗ |

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(-6)=-17$, 극솟값은 $f(2)=-1$이므로 구하는 차는 $-1-(-17)=16$ ··· ②

답 16

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ② 극댓값과 극솟값의 차를 구할 수 있다. | 50% |

**0956** ㄱ. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$에서 $x^2+3>0$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. $f'(x)=\dfrac{x^2+3-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$

$=-\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-\dfrac{1}{2}$ | ↗ | $\dfrac{1}{6}$ | ↘ |

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(3)=\dfrac{1}{6}$

ㄷ. ㄴ의 증감표에서 $f(x)$는 $-1<x<3$에서 증가한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

**0957** $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$에서 $0<x\le 1$이고

$f'(x)=1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{1-x^2}=x$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because 0<x\le 1$)

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\sqrt{2}$ | ↘ | 1 |

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$ 답 ③

**0958** $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$에서 $0\le x\le 4$이고

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}=\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{4-x}=\sqrt{x}$

양변을 제곱하면 $4-x=x$ $\therefore x=2$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 2 | ↗ | $2\sqrt{2}$ | ↘ | 2 |

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $2\sqrt{2}$를 가지므로

$a=2$, $b=2\sqrt{2}$ $\therefore ab=4\sqrt{2}$ 답 $4\sqrt{2}$

**0959** $f(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{2-x}}$에서 $0<x\le 2$이고

$$f'(x)=-\frac{1+\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{(x+\sqrt{2-x})^2}=-\frac{2\sqrt{2-x}-1}{2\sqrt{2-x}(x+\sqrt{2-x})^2}$$

$f'(x)=0$에서 $2\sqrt{2-x}=1$ $\quad\therefore \sqrt{2-x}=\frac{1}{2}$

양변을 제곱하면 $2-x=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore x=\frac{7}{4}$ ⋯ ❶

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{7}{4}$ | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $\frac{4}{9}$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ |

따라서 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{4}{9}$ ⋯ ❷

답 $\frac{4}{9}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $f(x)$의 극솟값을 구할 수 있다. | 50% |

**0960** $f'(x)=-e^{-x}(x^2+2x)+e^{-x}(2x+2)=e^{-x}(2-x^2)$

$f'(x)=0$에서 $x^2=2$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{2}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $e^{\sqrt{2}}(2-2\sqrt{2})$ | ↗ | $e^{-\sqrt{2}}(2+2\sqrt{2})$ | ↘ |

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(\sqrt{2})=e^{-\sqrt{2}}(2+2\sqrt{2})$, 극솟값은 $f(-\sqrt{2})=e^{\sqrt{2}}(2-2\sqrt{2})$이므로 구하는 곱은

$e^{-\sqrt{2}}(2+2\sqrt{2})\cdot e^{\sqrt{2}}(2-2\sqrt{2})=-4$

답 ①

다른 풀이 $f'(x)=e^{-x}(2-x^2)$에서

$f''(x)=-e^{-x}(2-x^2)+e^{-x}\cdot(-2x)=e^{-x}(x^2-2x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\sqrt{2}$

이때 $f''(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}>0$, $f''(\sqrt{2})=-2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}<0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f(\sqrt{2})=e^{-\sqrt{2}}(2+2\sqrt{2})$, 극솟값은 $f(-\sqrt{2})=e^{\sqrt{2}}(2-2\sqrt{2})$이다.

따라서 구하는 곱은

$e^{-\sqrt{2}}(2+2\sqrt{2})\cdot e^{\sqrt{2}}(2-2\sqrt{2})=-4$

**0961** $f'(x)=2\cdot 3^{2x}\cdot\ln 3\cdot 2-8\cdot 3^{x+1}\cdot\ln 3$

$=4\cdot 3^x(3^x-6)\ln 3$

$f'(x)=0$에서 $3^x=6$ $\quad\therefore x=\log_3 6$

따라서 $f(x)$의 극솟값은

$f(\log_3 6)=-72$

| $x$ | $\cdots$ | $\log_3 6$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-72$ | ↗ |

답 $-72$

**0962** $f'(x)=e^x-ke^{-x}=e^{-x}(e^{2x}-k)$

$f'(x)=0$에서 $e^{2x}=k$, $\quad e^x=\sqrt{k}$

$\therefore x=\ln\sqrt{k}$

ㄱ. 함수 $f(x)$는 극솟값만 갖는다.

ㄴ. $f(x)$의 극솟값은

$f(\ln\sqrt{k})=2\sqrt{k}$

ㄷ. $\ln\sqrt{k}=1$에서 $\sqrt{k}=e$

$\therefore k=e^2$

| $x$ | $\cdots$ | $\ln\sqrt{k}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $2\sqrt{k}$ | ↗ |

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

**0963** $f(x)=x^2-\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $2x^2-1=0$ $\quad\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because x>0)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $\frac{1}{2}(1+\ln 2)$ | ↗ |

따라서 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}(1+\ln 2)$

답 ⑤

다른 풀이 $f'(x)=2x-\frac{1}{x}$에서 $f''(x)=2+\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because x>0)$

이때 $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4>0$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}(1+\ln 2)$

**0964** $f(x)=x(\ln x)^2$에서 $x>0$이고

$f'(x)=(\ln x)^2+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=(\ln x+2)\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$\therefore x=\frac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{e^2}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ | 0 | ↗ |

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2}$, 극솟값은 $f(1)=0$이므로 구하는 합은 $\frac{4}{e^2}$이다.

답 $\frac{4}{e^2}$

**0965** $f(x)=\frac{x}{2\ln x}$에서 $0<x<1$ 또는 $x>1$이고

$$f'(x)=\frac{2\ln x-x\cdot\frac{2}{x}}{(2\ln x)^2}=\frac{2(\ln x-1)}{(2\ln x)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\quad\therefore x=e$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↘ | $\frac{e}{2}$ | ↗ |

따라서 $f(x)$는 $x=e$에서 극솟값 $\frac{e}{2}$를 가지므로

$a=e,\ b=\frac{e}{2}\qquad \therefore a+b=\frac{3}{2}e$ 답 $\frac{3}{2}e$

**0966** $f'(x)=-4\sin x+2\sin 2x=-4\sin x+4\sin x\cos x$
$=4\sin x(\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0\ (\because 0<x<2\pi)$

$\therefore x=\pi$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-5$ | ↗ | |

따라서 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극솟값 $-5$를 가지므로

$a=\pi,\ b=-5\qquad \therefore ab=-5\pi$ 답 ①

**다른 풀이** $f'(x)=-4\sin x+2\sin 2x$에서

$f''(x)=-4\cos x+4\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $x=\pi\ (\because 0<x<2\pi)$

이때 $f''(\pi)=8>0$이므로 $f(x)$의 극솟값은 $f(\pi)=-5$

따라서 $a=\pi$, $b=-5$이므로 $ab=-5\pi$

**0967** $f'(x)=4-3\sec^2 x$

$f'(x)=0$에서 $3\sec^2 x=4,\quad \sec^2 x=\frac{4}{3}$

$\cos^2 x=\frac{3}{4},\quad \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore x=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$ | ↗ | $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$ | ↘ | |

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$, 극솟값은

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$이므로

$a=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3},\ b=-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

$\therefore a-b=\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$ 답 $\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$

**0968** $f'(x)=2\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)+2\sin x$
$=-2\sin x\,(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}\ (\because 0<x<\pi)$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-\frac{3}{2}$ | ↗ | |

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극솟값 $-\frac{3}{2}$을 가지므로

$a=\frac{\pi}{3},\ b=-\frac{3}{2}\qquad \therefore ab=-\frac{\pi}{2}$ 답 $-\frac{\pi}{2}$

**다른 풀이** $\cos x=t$로 놓고 주어진 함수 $f(x)$를 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=2t^2-2t-1\ (-1<t<1)$

$\therefore g'(t)=4t-2$

$g'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{2}$

| $t$ | $-1$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(t)$ | | ↘ | $-\frac{3}{2}$ | ↗ | |

즉 $g(t)$는 $t=\frac{1}{2}$에서 극솟값 $-\frac{3}{2}$을 갖는다.

따라서 $f(x)$는 $\cos x=\frac{1}{2}$, 즉 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극솟값 $-\frac{3}{2}$을 가지므로

$a=\frac{\pi}{3},\ b=-\frac{3}{2}\qquad \therefore ab=-\frac{\pi}{2}$

**0969** $f'(x)=3\sin^2 2x\cdot\cos 2x\cdot 2=6\sin^2 2x\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $\sin 2x=0$ 또는 $\cos 2x=0$

$0<x<\pi$에서 $0<2x<2\pi$이므로

$2x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $2x=\pi$ 또는 $2x=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$ ➊

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 1 | ↘ | | ↘ | $-1$ | ↗ | |

따라서 $f(x)$는 $0<x<\pi$에서 극댓값 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, 극솟값 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-1$을 가지므로 2개의 극값을 갖는다. ➋

답 2

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ➋ 극값의 개수를 구할 수 있다. | 50% |

**유형 16 함수의 극대·극소를 이용한 미정계수의 결정** 본책 139쪽

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 $b$를 가지면

➡ $f(a)=b,\ f'(a)=0$

**0970** $f'(x)=\dfrac{(2ax-4)(x^2-1)-(ax^2-4x+b)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$=\dfrac{2\{2x^2-(a+b)x+2\}}{(x^2-1)^2}$

$f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 0을 가지므로

$f(2)=0,\ f'(2)=0$

$\therefore \dfrac{4a-8+b}{3}=0,\ \dfrac{20-4a-4b}{9}=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=4$

$\therefore a-b=-3$

답 ①

**0971** $f'(x)=2ax+1+\dfrac{b}{x}$

$f(x)$가 $x=1,\ x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0,\ f'(2)=0$

$\therefore 2a+1+b=0,\ 4a+1+\dfrac{b}{2}=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{1}{6},\ b=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore a+b=-\dfrac{5}{6}$

답 $-\dfrac{5}{6}$

**0972** $f'(x)=a\cos x+b\sin x$ ➊

$f(x)$가 $x=\dfrac{2}{3}\pi$에서 극솟값 $-1$을 가지므로

$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=-1,\ f'\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=0$

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\dfrac{1}{2}b=-1,\ -\dfrac{1}{2}a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=0$ ➋

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore ab=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ➌

답 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ➋ $a$, $b$에 대한 연립방정식을 세울 수 있다. | 50% |
| ➌ $ab$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**유형 17 극값을 가질 조건; 판별식을 이용하는 경우** 본책 139쪽

$f'(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$에서 $h(x)$가 이차식이고 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)>0$ 이면

① $f(x)$가 극값을 갖는다. ➡ $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $f(x)$가 극값을 갖지 않는다. ➡ $h(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

**0973** $f(x)=\dfrac{a}{x}+\ln x^3-x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{3}{x}-1=\dfrac{-x^2+3x-a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2+3x-a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $-x^2+3x-a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=9-4a>0 \quad \therefore a<\dfrac{9}{4}$

(ii) (두 근의 합)$=3>0$

(iii) (두 근의 곱)$=a>0$

이상에서 $0<a<\dfrac{9}{4}$

따라서 정수 $a$는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$

답 ②

**0974** $f'(x)=(2x+2a)e^x+(x^2+2ax+2)e^x$

$=\{x^2+2(a+1)x+2a+2\}e^x$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식

$x^2+2(a+1)x+2a+2=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-(2a+2)\le 0,\quad a^2\le 1$

$\therefore -1\le a\le 1$

답 $-1\le a\le 1$

**0975** $\sin x=t$로 놓으면 주어진 함수를

$f(t)=t^3+at^2+at\ (-1<t<1)$

로 나타낼 수 있다.

$\therefore f'(t)=3t^2+2at+a$

$f(t)$가 $-1<t<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(t)=0$이 $-1<t<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(t)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-3a>0,\quad a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$

(ii) $f'(-1)=3-2a+a>0 \quad \therefore a<3$

(iii) $f'(1)=3+2a+a>0 \quad \therefore a>-1$

(iv) $y=f'(t)$의 그래프의 축이 직선 $t=-\dfrac{a}{3}$이므로

$-1<-\dfrac{a}{3}<1 \quad \therefore -3<a<3$

이상에서 $-1<a<0$

답 ③

**유형 18 극값을 가질 조건; 판별식을 이용하지 않는 경우** 본책 139쪽

상수함수가 아닌 $f(x)$가 미분가능할 때

① $f(x)$가 극값을 갖는다.

➡ $f'(x)=0$의 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.

② $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.

➡ 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$

**0976** $f'(x)=k+2\cos x$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 $x$에 대하여

$f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$

이어야 한다.

이때 $-1\le\cos x\le 1$이므로 $-2\le 2\cos x\le 2$

$\therefore k-2\le k+2\cos x\le k+2$, 즉 $k-2\le f'(x)\le k+2$

따라서 $k+2\le 0$ 또는 $k-2\ge 0$이어야 하므로

$k \le -2$ 또는 $k \ge 2$

따라서 자연수 $k$의 최솟값은 2이다. 답 ②

**0977** $f'(x) = (3x^2+6x)e^{-x} - (x^3+3x^2+a)e^{-x}$

$= -(x^3-6x+a)e^{-x}$

$f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 $x$에 대한 삼차방정식 $x^3-6x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. ➊

$g(x) = x^3-6x+a$로 놓으면 $g'(x) = 3x^2-6$

$g'(x)=0$에서 $x^2=2$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$g(x)$는 $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$에서 극값을 가지므로

$g(-\sqrt{2})g(\sqrt{2})<0$, $(a+4\sqrt{2})(a-4\sqrt{2})<0$

$\therefore -4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$ ➋

따라서 정수 $a$는 $-5, -4, -3, \cdots, 5$의 11개이다. ➌

답 11

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 조건을 알 수 있다. | 40% |
| ➋ $a$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40% |
| ➌ 정수 $a$의 개수를 구할 수 있다. | 20% |

**0978** 전략 점 $A_n$에서의 접선의 방정식에 $y=0$을 대입하여 $x_{n+1}$을 구한다.

풀이 점 $A_n(x_n, y_n)$이 곡선 $y=\frac{2}{x}$ 위에 있으므로

$y_n = \frac{2}{x_n}$

$y=\frac{2}{x}$에서 $y' = -\frac{2}{x^2}$

점 $A_n\left(x_n, \frac{2}{x_n}\right)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{2}{x_n^2}$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은 $y-\frac{2}{x_n} = -\frac{2}{x_n^2}(x-x_n)$

$\therefore y = -\frac{2}{x_n^2}x + \frac{4}{x_n}$

이 직선의 $x$절편은 $\frac{2}{x_n^2}x = \frac{4}{x_n}$에서 $x=2x_n$

$\therefore x_{n+1} = 2x_n$

점 $A_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$이 곡선 $y=\frac{2}{x}$ 위의 점이므로

$y_{n+1} = \frac{2}{x_{n+1}} = \frac{2}{2x_n} = \frac{1}{2}y_n$

따라서 수열 $\{y_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$ 답 4

**0979** 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(a)}$임을 이용한다. (단, $f'(a) \ne 0$)

풀이 점 $(e, -e)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(e) = -e$

$g(x) = f(x)\ln x^4 = 4f(x)\ln x$에서

$g'(x) = 4f'(x)\ln x + 4f(x)\cdot\frac{1}{x}$

$= 4f'(x)\ln x + \frac{4f(x)}{x}$

$\therefore g'(e) = 4f'(e) + \frac{4\cdot(-e)}{e} = 4f'(e)-4$

이때 $x=e$인 점에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 접선이 서로 수직이므로

$f'(e)g'(e) = -1$, $f'(e)\{4f'(e)-4\} = -1$

$4\{f'(e)\}^2 - 4f'(e)+1=0$, $\{2f'(e)-1\}^2=0$

$\therefore f'(e) = \frac{1}{2}$ $\therefore 100f'(e) = 50$ 답 50

**0980** 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a) = f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

풀이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 A의 $x$좌표가 $t$이므로

$\sin t = a\cos t$에서 $a = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$

$f'(x) = \cos x$이므로 점 $A(t, a\cos t)$에서의 접선의 기울기는

$f'(t) = \cos t$

따라서 접선의 방정식은 $y-a\cos t = \cos t(x-t)$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$\cos t(x-t) = -a\cos t$, $x-t=-a$

$\therefore x=t-a$ $\therefore B(t-a, 0)$

$g'(x) = -a\sin x$이므로 점 $A(t, \sin t)$에서의 접선의 기울기는

$g'(t) = -a\sin t$

따라서 접선의 방정식은 $y-\sin t = -a\sin t(x-t)$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$a\sin t(x-t) = \sin t$, $a(x-t)=1$

$x-t = \frac{1}{a}$ $\therefore x = t+\frac{1}{a}$ $\therefore C\left(t+\frac{1}{a}, 0\right)$

$\therefore \overline{BC} = \left(t+\frac{1}{a}\right)-(t-a) = \frac{1}{a}+a = \frac{a^2+1}{a}$

삼각형 ABC의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+1}{a}\cdot a\cos t = 1$, $(a^2+1)\cos t = 2$

$(\tan^2 t+1)\cdot\cos t = 2$, $\sec^2 t\cdot\cos t = 2$

$\therefore \sec t = 2$

$\therefore a^2 = \tan^2 t = \sec^2 t - 1 = 2^2-1 = 3$ 답 ②

**0981** 전략 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 $D$가 $D<0$이면 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않음을 이용한다.

풀이 $f(x) = \frac{x-a}{e^x} = e^{-x}(x-a)$로 놓으면

$f'(x) = -e^{-x}(x-a)+e^{-x} = -e^{-x}(x-a-1)$

곡선 위의 한 점 $(t, e^{-t}(t-a))$에서의 접선의 기울기가 $f'(t) = -e^{-t}(t-a-1)$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{-t}(t-a) = -e^{-t}(t-a-1)(x-t)$

이 직선이 원점을 지나면

$-e^{-t}(t-a) = te^{-t}(t-a-1)$, $e^{-t}(t^2-at-a)=0$

$\therefore t^2-at-a=0$ ($\because e^{-t}>0$) ...... ㉠

이때 원점에서 주어진 곡선에 접선을 그을 수 없으려면 ㉠을 만족시

키는 실수 $t$가 존재하지 않아야 한다. 즉 이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$D=a^2+4a<0,\quad a(a+4)<0\quad \therefore -4<a<0$

따라서 정수 $a$는 $-3,\ -2,\ -1$이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)=-6$ 답 $-6$

**0982** 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=a+\dfrac{2x-3}{x^2-3x+3}$, $g'(x)=2ax+b$

$f(1)=g(1)$에서 $\quad a=a+b-1\quad \therefore b=1$

$f'(1)=g'(1)$에서 $\quad a-1=2a+b\quad \therefore a=-1-b=-2$

$$\therefore \lim_{x\to b}\frac{f'(x)-g'(x)}{x-b}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)+f'(1)-g'(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}-\frac{g'(x)-g'(1)}{x-1}\right\}\ (\because f'(1)=g'(1))$$
$$=f''(1)-g''(1)$$

이때 $f''(x)=\dfrac{2(x^2-3x+3)-(2x-3)^2}{(x^2-3x+3)^2}=\dfrac{-2x^2+6x-3}{(x^2-3x+3)^2}$,

$g''(x)=2a=-4$이므로 구하는 값은

$f''(1)-g''(1)=1-(-4)=5$ 답 ⑤

**0983** 전략 합성함수의 미분법을 이용한다.

풀이 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$이므로

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

ㄱ. $h(3)=f(g(3))=f(1)=5$

ㄴ. $h'(2)=f'(g(2))g'(2)$

$g(2)=\alpha$라 하면 $\quad h'(2)=f'(\alpha)g'(2)$

이때 $2<\alpha<3$에서 $f'(\alpha)<0$이고, $g'(2)<0$이므로

$h'(2)\ge 0$

ㄷ. 구간 $(3,\ 4)$에서 $0<g(x)<1$이고, $f(x)$의 그래프는 구간 $(0,\ 1)$에서 증가하므로 $\quad f'(g(x))>0$

또 구간 $(3,\ 4)$에서 $g(x)$의 그래프는 감소하므로 $\quad g'(x)<0$

따라서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)<0$이므로 $h(x)$는 구간 $(3,\ 4)$에서 감소한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

**0984** 전략 평균값 정리를 이용한다.

풀이 보기의 함수는 모두 닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속이고 열린 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1)$인 $x_1$이 구간 $(a,\ b)$에 존재하고,

$\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(x_2)$인 $x_2$가 구간 $(b,\ c)$에 존재한다.

따라서 주어진 조건으로부터 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$인 $x_1$, $x_2$에 대하여 $f'(x_1)<f'(x_2)$가 성립하므로 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f'(x)$가 증가함수이어야 한다.

ㄱ. $f'(x)=1-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)<0$이므로 $f'(x)$는 감소함수이다.

ㄴ. $f'(x)=e^x-1$, $f''(x)=e^x$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가함수이다.

ㄷ. $f'(x)=-\dfrac{1}{x+1}$, $f''(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가함수이다.

이상에서 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

**0985** 전략 함수 $f(x)$가 $x=t$에서 극값을 가지면 $f'(t)=0$임을 이용한다.

풀이 $f_n(x)=x^n\cos\pi x$에서

$f_n'(x)=nx^{n-1}\cos\pi x-\pi x^n\sin\pi x$
$\qquad=x^{n-1}(n\cos\pi x-\pi x\sin\pi x)$

함수 $f_n(x)$가 $x=a_n\left(0<a_n<\frac{1}{2}\right)$에서 극값을 가지므로

$f_n'(a_n)=a_n^{\,n-1}(n\cos\pi a_n-\pi a_n\sin\pi a_n)=0$

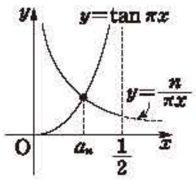
이때 $a_n\ne 0$이므로 $\quad n\cos\pi a_n-\pi a_n\sin\pi a_n=0$

$\dfrac{\sin\pi a_n}{\cos\pi a_n}=\dfrac{n}{\pi a_n}\qquad \therefore \tan\pi a_n=\dfrac{n}{\pi a_n}$

따라서 $a_n$은 방정식 $\tan\pi x=\dfrac{n}{\pi x}$의 해이므로 $0<x<\frac{1}{2}$에서 두 함수 $y=\tan\pi x$, $y=\dfrac{n}{\pi x}$의 그래프의 교점의 $x$좌표가 $a_n$이다.

오른쪽 그림에서 $n\longrightarrow\infty$일 때 곡선 $y=\dfrac{n}{\pi x}$은 좌표축에서 멀어지므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$




답 $\frac{1}{2}$

**0986** 전략 $a>0$, $b>0$일 때, $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (등호는 $a=b$일 때 성립)임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sqrt{x}$로 놓으면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ··· ①

점 P의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t})\,(t>0)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{t}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$

$\therefore y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}x+\dfrac{\sqrt{t}}{2}$ ······ ㉠ ··· ②

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\dfrac{\sqrt{t}}{2}$

$x=6$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=\dfrac{3}{\sqrt{t}}+\dfrac{\sqrt{t}}{2}$

따라서 사다리꼴의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\dfrac{\sqrt{t}}{2}+\dfrac{3}{\sqrt{t}}+\dfrac{\sqrt{t}}{2}\right)\cdot(6-2)=2\left(\dfrac{4}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)$ ··· ③

이때 $\dfrac{4}{\sqrt{t}}>0$, $\sqrt{t}>0$에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\ge 2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t}}=4 \text{ (등호는 } t=4\text{일 때 성립)}$$

이므로 사다리꼴의 넓이의 최솟값은

$2\cdot 4=8$ → ④

답 8

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① $f'(x)$를 구할 수 있다. | 10% |
| ② 접선의 방정식을 $t$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ③ 사다리꼴의 넓이를 $t$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ④ 사다리꼴의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다. | 30% |

**0987** **전략** 직선 PQ의 기울기와 점 R에서의 접선의 기울기가 같을 때 $\triangle$PQR의 넓이가 최대임을 이용한다.

**풀이** 곡선 $y=\ln x^2$ 위의 점 R에서의 접선이 직선 PQ와 평행할 때 $\triangle$PQR의 넓이가 최대가 된다. → ①

$f(x)=\ln x^2$으로 놓으면

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$$ → ②

두 점 P$(1, 0)$, Q$(e, 2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{2}{e-1}$이므로

$$f'(t)=\frac{2}{t}=\frac{2}{e-1} \qquad \therefore t=e-1$$ → ③

답 $e-1$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① $\triangle$PQR의 넓이가 최대일 때의 조건을 알 수 있다. | 30% |
| ② $f'(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ③ $t$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

**다른 풀이** $\triangle$PQR의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}(t-1)\ln t^2+\frac{1}{2}(\ln t^2+2)(e-t)-\frac{1}{2}(e-1)\cdot 2$$
$$=(e-1)\ln t-t+1$$
$$\therefore S'(t)=\frac{e-1}{t}-1=\frac{e-1-t}{t}$$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=e-1$

| $t$ | 1 | $\cdots$ | $e-1$ | $\cdots$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | + | 0 | − | |
| $S(t)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

따라서 $S(t)$는 $t=e-1$일 때 극대이면서 최대이다.

**0988** **전략** 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하면 $f(x)$는 일대일 대응임을 이용한다.

**풀이** $f(x)$의 역함수가 존재하면 $f(x)$는 일대일 대응이므로 실수 전체의 구간에서 증가하거나 감소한다.

즉 모든 실수 $x$에 대하여

$f'(x)=10+a\cos ax\ge 0$ 또는 $f'(x)=10+a\cos ax\le 0$

이어야 한다. → ①

(i) $a$가 음의 정수일 때,

$-1\le\cos ax\le 1$에서 $a\le a\cos ax\le -a$이므로

$10+a\le 10+a\cos ax\le 10-a$

$\therefore 10+a\le f'(x)\le 10-a$

$f'(x)\ge 0$이면 $10+a\ge 0$이므로 $\quad a\ge -10$

$f'(x)\le 0$이면 $10-a\le 0$이므로 $\quad a\ge 10$

이때 $a$는 음의 정수이므로 $-10$, $-9$, $\cdots$, $-2$, $-1$의 10개이다. → ②

(ii) $a=0$일 때,

$f'(x)=10>0$이므로 $f(x)$의 역함수가 존재한다. → ③

(iii) $a$가 양의 정수일 때,

$-1\le\cos ax\le 1$에서 $-a\le a\cos ax\le a$이므로

$10-a\le 10+a\cos ax\le 10+a$

$\therefore 10-a\le f'(x)\le 10+a$

$f'(x)\ge 0$이면 $10-a\ge 0$이므로 $\quad a\le 10$

$f'(x)\le 0$이면 $10+a\le 0$이므로 $\quad a\le -10$

이때 $a$는 양의 정수이므로 1, 2, $\cdots$, 9, 10의 10개이다. → ④

이상에서 정수 $a$의 개수는 $\quad 10+1+10=21$ → ⑤

답 21

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$임을 알 수 있다. | 20% |
| ② 음의 정수 $a$의 개수를 구할 수 있다. | 30% |
| ③ $a=0$일 때 역함수가 존재함을 알 수 있다. | 10% |
| ④ 양의 정수 $a$의 개수를 구할 수 있다. | 30% |
| ⑤ 정수 $a$의 개수를 구할 수 있다. | 10% |

**0989** **전략** 이계도함수를 이용하여 극대·극소를 판정한다.

**풀이** $f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$
$=-2e^{-x}\sin x$

$f''(x)=2e^{-x}\sin x-2e^{-x}\cos x=2e^{-x}(\sin x-\cos x)$ → ①

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x=n\pi$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) → ②

(i) $x=(2m-1)\pi$ ($m$은 자연수)일 때,

$\sin(2m-1)\pi=0$, $\cos(2m-1)\pi=-1$이므로

$f''(x)>0$

따라서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

(ii) $x=2m\pi$ ($m$은 자연수)일 때,

$\sin 2m\pi=0$, $\cos 2m\pi=1$이므로 $\quad f''(x)<0$

따라서 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

(i), (ii)에서 $f(x)$가 극대일 때의 $x$의 값은

$2\pi$, $4\pi$, $6\pi$, $\cdots$, $2m\pi$, $\cdots$ → ③

따라서 $x_{10}=20\pi$, $x_{20}=40\pi$이므로 $\quad x_{20}-x_{10}=20\pi$

$\therefore k=20$ → ④

답 20

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ① $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ② $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구할 수 있다. | 20% |
| ③ $f(x)$가 극대일 때의 $x$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ④ $k$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

Ⅲ 미분법

# 09 도함수의 활용 (2)

**0990** $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2$으로 놓으면

$f'(x)=x^2-4x$, $f''(x)=2x-4=2(x-2)$

$f''(x)=0$에서 $x=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 2)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(2, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 풀이 참조

**0991** $f(x)=-x^4+x^3+3x^2+x-2$로 놓으면

$f'(x)=-4x^3+3x^2+6x+1$

$f''(x)=-12x^2+6x+6=-6(2x+1)(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 또는 구간 $(1, \infty)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 풀이 참조

**0992** $f(x)=\frac{2}{x^2+2}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2+2)^2}$

$f''(x)=\frac{-4(x^2+2)^2+4x\cdot2(x^2+2)\cdot2x}{(x^2+2)^4}=\frac{4(3x^2-2)}{(x^2+2)^3}$

$f''(x)=0$에서 $3x^2-2=0$ $\therefore x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 또는 구간 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \infty\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

답 풀이 참조

**0993** $f(x)=xe^{2x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=e^{2x}(1+2x)$

$f''(x)=2e^{2x}(1+2x)+2e^{2x}=4e^{2x}(x+1)$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(-1, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 풀이 참조

**0994** $f(x)=x-\ln x$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=1-\frac{1}{x}$, $f''(x)=\frac{1}{x^2}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 아래로 볼록

**0995** $f(x)=x-\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1+\sin x$, $f''(x)=\cos x$

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

답 풀이 참조

**0996** $f(x)=x^3-3x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x$, $f''(x)=6x-6=6(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=1$

$x<1$일 때 $f''(x)<0$, $x>1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(1, 0)$이다.

답 $(1, 0)$

**0997** $f(x)=-x^4+6x^2+3x$로 놓으면

$f'(x)=-4x^3+12x+3$

$f''(x)=-12x^2+12=-12(x+1)(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x<-1$ 또는 $x>1$일 때 $f''(x)<0$,

$-1<x<1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1, 2)$, $(1, 8)$이다.

답 $(-1, 2)$, $(1, 8)$

**0998** $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$로 놓으면 $x\neq0$이고

$f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}$

$f''(x)=2+\frac{2}{x^3}=\frac{2x^3+2}{x^3}=\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^3}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because x^2-x+1>0$)

$x<-1$일 때 $f''(x)>0$, $-1<x<0$일 때 $f''(x)<0$

따라서 $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1, 0)$이다.

답 $(-1, 0)$

**0999** $f(x)=xe^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$, $f''(x)=e^x(1+x)+e^x=e^x(2+x)$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$

$x<-2$일 때 $f''(x)<0$, $x>-2$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$이다.

답 $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$

**1000** $f(x)=\ln(x^2+1)$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

$x<-1$ 또는 $x>1$일 때 $f''(x)<0$, $-1<x<1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$이다.

답 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$

**1001** $f(x)=\sin 2x$로 놓으면

$f'(x)=2\cos 2x$, $f''(x)=-4\sin 2x$

$f''(x)=0$에서 $\quad 2x=\pi\ (\because 0<2x<2\pi) \quad \therefore x=\frac{\pi}{2}$

$0<x<\frac{\pi}{2}$일 때 $f''(x)<0$, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$이다.

답 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

**1002** $f(x)=x^2+4\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2x-4\sin x$

$f''(x)=2-4\cos x=2(1-2\cos x)$

$f''(x)=0$에서 $\quad \cos x=\frac{1}{2} \quad \therefore x=\frac{\pi}{3}\ (\because 0<x<\pi)$

$0<x<\frac{\pi}{3}$일 때 $f''(x)<0$, $\frac{\pi}{3}<x<\pi$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=\frac{\pi}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^2}{9}+2\right)$이다.

답 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^2}{9}+2\right)$

**1003** $f(x)=x^4-6x^2+8x+10$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x+8=4(x^3-3x+2)=4(x-1)^2(x+2)$

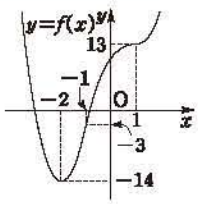
$f''(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-14$ | ⤴ | $-3$ | ↷ | 13 | ⤴ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**1004** $f(x)=x+\frac{1}{x}$로 놓으면 $x\neq 0$이고

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

$f''(x)=\frac{2}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

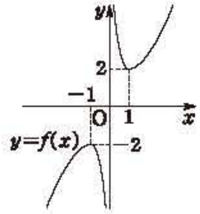
$f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↷ | $-2$ | ⤵ | | ↘ | 2 | ⤴ |

이때 $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty$

이므로 점근선은 $y$축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**1005** $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{3(x^2+1)-3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-3(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-6x(x^2+1)^2-(-3x^2+3)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=\frac{6x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

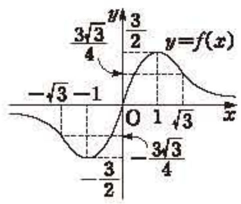
$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ⤵ | $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | ↘ | $-\frac{3}{2}$ | ⤴ | 0 | ↷ | $\frac{3}{2}$ | ⤵ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | ↘ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

이므로 점근선은 $x$축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**1006** $f(x)=x\sqrt{x+4}$로 놓으면 $x\geq -4$이고

$$f'(x)=\sqrt{x+4}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+4}}=\frac{2(x+4)+x}{2\sqrt{x+4}}$$

$$=\frac{3x+8}{2\sqrt{x+4}}$$

$$f''(x)=\frac{3\cdot 2\sqrt{x+4}-(3x+8)\cdot\frac{1}{\sqrt{x+4}}}{(2\sqrt{x+4})^2}$$

$$=\frac{6(x+4)-(3x+8)}{4(x+4)\sqrt{x+4}}=\frac{3x+16}{4(x+4)\sqrt{x+4}}$$

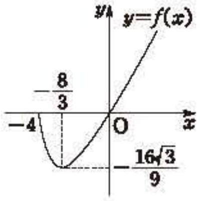
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{8}{3}$

$x\geq -4$에서 $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

| $x$ | $-4$ | $\cdots$ | $-\frac{8}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\frac{16\sqrt{3}}{9}$ | ↗ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조




**1007** $f(x)=2xe^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}=2e^{-x}(1-x)$

$f''(x)=-2e^{-x}(1-x)+2e^{-x}\cdot(-1)=2e^{-x}(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

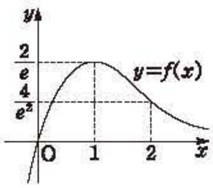
$f''(x)=0$에서 $\quad x=2$

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{2}{e}$ | ↘ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 점근선은 $x$축이다.

또 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조




**1008** $f(x)=2x\ln x$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}=2\ln x+2=2(\ln x+1)$

$f''(x)=\frac{2}{x}$

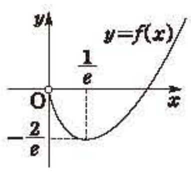
$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=-1 \quad \therefore x=\frac{1}{e}$

$f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{e}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $-\frac{2}{e}$ | ↗ |

이때 $\lim_{x\to0+} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조




참고 $\lim_{x\to0+} 2x\ln x$에서 $\frac{1}{x}=h$라 하면 $x\to0+$일 때 $h\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+} 2x\ln x=2\lim_{h\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{h}}{h}=2\lim_{h\to\infty}\frac{-\ln h}{h}=0$$

**1009** $f(x)=x+\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1+\cos x$, $f''(x)=-\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-1 \quad \therefore x=\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

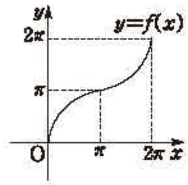
$f''(x)=0$에서 $\quad \sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\pi$ | ↗ | $2\pi$ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조




**1010** $f(x)=\sin^2 x$로 놓으면

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$f''(x)=2\cos 2x$

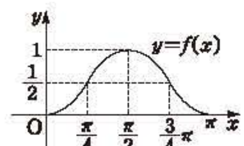
$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$f''(x)=0$에서 $\quad x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↗ | $1$ | ↘ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $0$ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조




**1011** $f'(x)=\frac{(2x+3)(x-3)-(x^2+3x+7)}{(x-3)^2}$

$=\frac{x^2-6x-16}{(x-3)^2}=\frac{(x+2)(x-8)}{(x-3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=8$ ($\because 4\le x\le 9$)

| $x$ | $4$ | $\cdots$ | $8$ | $\cdots$ | $9$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $35$ | ↘ | $19$ | ↗ | $\frac{115}{6}$ |

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f(4)=35$, 최솟값은 $f(8)=19$이다.

답 최댓값: 35, 최솟값: 19

**1012** $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ |

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=2$, 최솟값은 $f(-2)=f(2)=0$이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: 0

**1013** $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\dfrac{2}{e^2}$ | $\searrow$ | $-\dfrac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $e$ |

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=e$, 최솟값은 $f(-1)=-\dfrac{1}{e}$이다.

답 최댓값: $e$, 최솟값: $-\dfrac{1}{e}$

**1014** $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\dfrac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\dfrac{1}{e^4}$ |

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=1$, 최솟값은 $f(2)=\dfrac{1}{e^4}$이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: $\dfrac{1}{e^4}$

**1015** $f'(x)=2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}$

| $x$ | $\dfrac{1}{e}$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\cdots$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\dfrac{2}{e}+1$ | $\searrow$ | $1+\ln 2$ | $\nearrow$ | $2e-1$ |

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f(e)=2e-1$, 최솟값은 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1+\ln 2$이다.

답 최댓값: $2e-1$, 최솟값: $1+\ln 2$

참고 $2<e<3$이므로 $\dfrac{5}{3}<\dfrac{2}{e}+1<2$, $3<2e-1<5$

$\therefore \dfrac{2}{e}+1<2e-1$

**1016** $f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-1$ $\therefore x=\dfrac{1}{e}$

| $x$ | $\dfrac{1}{e^2}$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{e}$ | $\cdots$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\dfrac{2}{e^2}$ | $\searrow$ | $-\dfrac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $e$ |

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f(e)=e$, 최솟값은 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$이다.

답 최댓값: $e$, 최솟값: $-\dfrac{1}{e}$

**1017** $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\dfrac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\searrow$ | $-\dfrac{3}{2}\pi$ | $\nearrow$ | $1$ |

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, 최솟값은 $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=-\dfrac{3}{2}\pi$이다.

답 최댓값: $\dfrac{\pi}{2}$, 최솟값: $-\dfrac{3}{2}\pi$

**1018** $f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=2\cos x+2(2\cos^2 x-1)$

$=2(2\cos^2 x+\cos x-1)$

$=2(\cos x+1)(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0\le x\le \pi$)

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, 최솟값은 $f(0)=f(\pi)=0$이다.

답 최댓값: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, 최솟값: 0

**1019** $f(x)=x-\sqrt{x+1}+1$로 놓으면 $x\ge -1$이고

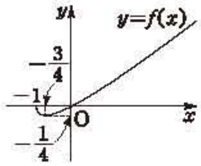
$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$

$f'(x)=0$에서 $2\sqrt{x+1}=1$, $\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{2}$

$x+1=\dfrac{1}{4}$ $\therefore x=-\dfrac{3}{4}$

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $-\frac{3}{4}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\frac{1}{4}$ | ↗ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

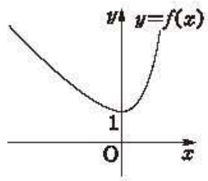



답 2

**1020** $f(x)=e^x-x$로 놓으면 $\quad f'(x)=e^x-1$
$f'(x)=0$에서 $\quad e^x=1 \quad \therefore x=0$

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $1$ | ↗ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 주어진 방정식은 실근을 갖지 않는다.




답 0

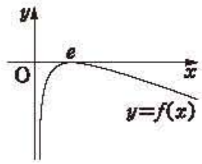
**1021** $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=e$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | ↗ | $0$ | ↘ |

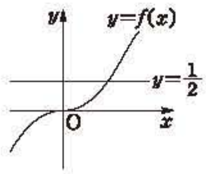
이때 $\lim_{x\to0+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.




답 1

**1022** 방정식 $x-\sin x=\frac{1}{2}$의 실근의 개수는 곡선 $y=x-\sin x$와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x-\sin x$로 놓으면
$\quad f'(x)=1-\cos x$
$f'(x)\ge0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 증가한다.
또 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.




답 1

**1023** $f(x)=e^{-x}+x-1$로 놓으면 $\quad f'(x)=\boxed{-e^{-x}+1}$
$f'(x)=0$에서 $\quad e^{-x}=1 \quad \therefore x=\boxed{0}$
이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{0}$이다.

| $x$ | $\cdots$ | $\boxed{0}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $\boxed{0}$ | ↗ |

즉 $f(x)\ge0$이므로 $\quad e^{-x}+x-1\ge0$
따라서 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $1-x\le e^{-x}$이 성립한다.
$\therefore$ (가) $-e^{-x}+1$ (나) $0$ (다) $0$ 답 (가) $-e^{-x}+1$ (나) $0$ (다) $0$

**1024** $f(x)=2x+\cos x$로 놓으면
$\quad f'(x)=2-\sin x$
$f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 $x\ge0$에서 증가한다.
이때 $f(0)=1$이므로 $x\ge0$에서 $\quad f(x)\ge1$
$\quad \therefore 2x+\cos x\ge1$ 답 풀이 참조

**유형 01 곡선의 오목과 볼록** 본책 146쪽

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서
① $f''(x)>0$ ➡ 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록
② $f''(x)<0$ ➡ 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록

**1025** $f(x)=x+2\sin x$로 놓으면
$\quad f'(x)=1+2\cos x$, $f''(x)=-2\sin x$
곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로
$\quad -2\sin x>0$, $\quad \sin x<0$
$\quad \therefore \pi<x<2\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)
따라서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록한 구간은 $(\pi, 2\pi)$이다. 답 ⑤

**1026** $f(x)=x^2(\ln x-2)$로 놓으면 $x>0$이고
$\quad f'(x)=2x(\ln x-2)+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x-3)$
$\quad f''(x)=2\ln x-3+x\cdot\frac{2}{x}=2\ln x-1$ ➊
곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로
$\quad 2\ln x-1<0$, $\quad \ln x<\frac{1}{2} \quad \therefore x<e^{\frac{1}{2}}$, 즉 $x<\sqrt{e}$
그런데 $x>0$이므로 $\quad 0<x<\sqrt{e}$ ➋
답 $0<x<\sqrt{e}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $f''(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ➋ $x$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 60% |

**1027** $f(x)=(ax^2+1)e^x$으로 놓으면
$\quad f'(x)=2axe^x+(ax^2+1)e^x=(ax^2+2ax+1)e^x$
$\quad f''(x)=(2ax+2a)e^x+(ax^2+2ax+1)e^x$
$\quad\quad =(ax^2+4ax+2a+1)e^x$
곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 구간에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f''(x)\ge0$이어야 하므로 부등식
$\quad ax^2+4ax+2a+1\ge0$ ($\because e^x>0$) ⋯⋯ ㉠
이 항상 성립해야 한다.

09 도함수의 활용 (2)

(ⅰ) $a=0$일 때, $1>0$이므로 부등식 ㉠이 성립한다.
(ⅱ) $a\neq0$일 때, 부등식 ㉠이 항상 성립해야 하므로 $\quad a>0$
$x$에 대한 이차방정식 $ax^2+4ax+2a+1=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=4a^2-a(2a+1)\le0$$

$$2a^2-a\le0,\quad a(2a-1)\le0\quad \therefore 0\le a\le\frac{1}{2}$$

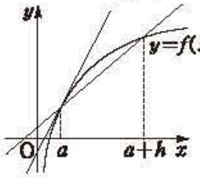
그런데 $a>0$이므로 $\quad 0<a\le\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $0\le a\le\frac{1}{2}$이므로 $a$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다. 답 $\frac{1}{2}$

**1028** $f(a+h)-f(a)<f'(a)h$에서 $h>0$이므로

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<f'(a)$$

이때 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$의 값은 함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 $a$에서 $a+h$까지 변할 때의 평균변화율이고, $f'(a)$의 값은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이므로 주어진 부등식을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x>0$에서 위로 볼록해야 한다.




⑤ $f'(x)=\frac{1}{x\ln10}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2\ln10}$
$x>0$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 위로 볼록하다. 답 ⑤

**유형 02 변곡점** 본책 146쪽

함수 $f(x)$에서
(ⅰ) $f''(a)=0$
(ⅱ) $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.
➡ 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

**1029** $f'(x)=\frac{2(x^2+1)\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{x^2+1}$

$$f''(x)=\frac{4(x^2+1)-4x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$
$x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1,\ \ln4)$, $(1,\ \ln4)$이다.
따라서 두 변곡점 사이의 거리는
$1-(-1)=2$ 답 ④

**1030** $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin2x$이므로
$f''(x)=2\cos2x$
$f''(x)=0$에서

$$x=\frac{\pi}{4}\text{ 또는 }x=\frac{3}{4}\pi\text{ 또는 }x=\frac{5}{4}\pi\text{ 또는 }x=\frac{7}{4}\pi$$
$(\because 0<x<2\pi)$

$x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$, $x=\frac{7}{4}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 4이다. 답 4

**1031** $f(x)=\frac{x^2}{e^x}=x^2e^{-x}$이므로

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2)$$
$$f''(x)=-e^{-x}(2x-x^2)+e^{-x}(2-2x)$$
$$=e^{-x}(x^2-4x+2)$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x^2-4x+2=0\quad \therefore x=2\pm\sqrt{2}$
$x=2-\sqrt{2}$, $x=2+\sqrt{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 모든 변곡점의 $x$좌표의 합은
$(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})=4$ 답 4

**1032** $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$$f''(x)=-\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot2(x^2+1)\cdot2x}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$ ➊

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.
이때 $f(0)=1$이므로 $\quad$ P$(0,\ 1)$ ➋
$f''(x)=0$에서 $\quad 3x^2-1=0,\quad x^2=\frac{1}{3}$

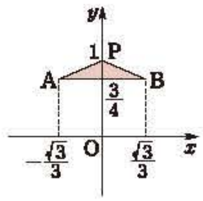
$$\therefore x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ 또는 }x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점 A, B의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$이다. ➌

따라서 오른쪽 그림에서 △PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$ ➍

답 $\frac{\sqrt{3}}{12}$




**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ➋ 점 P의 좌표를 구할 수 있다. | 30% |
| ➌ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다. | 30% |
| ➍ △PAB의 넓이를 구할 수 있다. | 20% |

**유형 03 변곡점을 이용한 미정계수의 결정** 본책 147쪽

함수 $f(x)$에 대하여
① $f(x)$가 $x=a$에서 극값 $b$를 갖는다.
➡ $f(a)=b$, $f'(a)=0$
② 점 $(a,\ b)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
➡ $f(a)=b$, $f''(a)=0$

**1033** $f'(x)=a\cos x-b\sin x+c$

$f''(x)=-a\sin x-b\cos x$

$x=\frac{4}{3}\pi$에서 극대이므로 $f'\left(\frac{4}{3}\pi\right)=0$에서

$-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+c=0$ ······ ㉠

변곡점의 좌표가 $(\pi,\ -\pi)$이므로

$f(\pi)=-\pi$에서 $\quad -b+c\pi=-\pi$

$f''(\pi)=0$에서 $\quad b=0$

$\therefore b=0,\ c=-1$

$b=0,\ c=-1$을 ㉠에 대입하면

$-\frac{1}{2}a-1=0 \quad \therefore a=-2$

$\therefore a+b+c=-3$

답 $-3$

**1034** $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$

$x$좌표가 3인 점에서의 접선의 기울기가 $-4$이므로 $f'(3)=-4$에서

$27a+6b+c=-4$ ······ ㉠

변곡점의 좌표가 $(2,\ -6)$이므로

$f(2)=-6$에서 $\quad 8a+4b+2c=-6$ ······ ㉡

$f''(2)=0$에서 $\quad 12a+2b=0$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-6,\ c=5$

$\therefore a-b+c=12$

답 12

**1035** $f(x)=ax^2+bx-\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2ax+b-\frac{1}{x},\ f''(x)=2a+\frac{1}{x^2}$

$x=1$에서 극대이므로 $f'(1)=0$에서

$2a+b-1=0$ ······ ㉠

변곡점의 $x$좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서

$2a+4=0 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-4+b-1=0 \quad \therefore b=5$

$\therefore f(x)=-2x^2+5x-\ln x,$

$$f'(x)=-4x+5-\frac{1}{x}=\frac{-4x^2+5x-1}{x}=-\frac{(4x-1)(x-1)}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{4}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $\frac{9}{8}+\ln 4$ | ↗ | 3 | ↘ |

따라서 $f(x)$의 극솟값은 $\quad f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8}+\ln 4$

답 ①

**1036** $f(x)=(\ln ax)^2$으로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=2\ln ax\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln ax}{x}$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$$ ···➊

$f''(x)=0$에서 $\quad \ln ax=1,\quad ax=e \quad \therefore x=\frac{e}{a}$

$x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$ ···➋

이때 변곡점이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$1=\frac{2e}{a}-1,\quad \frac{2e}{a}=2 \quad \therefore a=e$ ···➌

답 $e$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ➊ $f''(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ➋ 변곡점의 좌표를 $a$를 이용하여 나타낼 수 있다. | 40% |
| ➌ $a$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1037** $f'(x)=ax+3\cos x+1,\ f''(x)=a-3\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\quad a-3\sin x=0 \quad \therefore 3\sin x=a$

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$-3\le 3\sin x\le 3 \quad \therefore -3\le a\le 3$

$a=-3$이면 $\quad f''(x)=-3-3\sin x\le 0$

$a=3$이면 $\quad f''(x)=3-3\sin x\ge 0$

즉 $a=-3$ 또는 $a=3$이면 $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

따라서 $a$의 값의 범위는 $\quad -3<a<3$

답 ③

### 유형 04 도함수를 이용한 그래프 해석 본책 147쪽

① 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 부호

➡ $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기를 조사한다.

② 함수 $f'(x)$의 도함수 $f''(x)$의 부호

➡ $y=f'(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기를 조사한다.

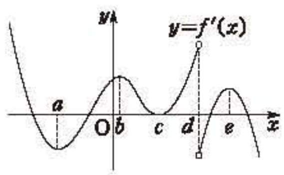
**1038** 구간 $[a,\ f]$에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

| $x$ | $a$ | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ | $c$ | $\cdots$ | $d$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |

함수 $y=f(x)$의 그래프의 모양이 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로 구하는 구간은 $(b,\ d)$이다.

답 ③

**1039** 오른쪽 그림과 같이 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$를 정하고 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.



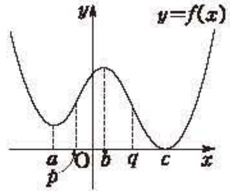
| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ | $c$ | $\cdots$ | $d$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ |

$x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 4이다.

답 4

**1040** $f'(x)f''(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $f''(x)=0$




오른쪽 그림과 같이 극대 또는 극소가 되는 점의 $x$좌표를 $a$, $b$, $c$, 변곡점의 $x$좌표를 $p$, $q$라 하자.

(i) $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

(ii) $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=p$ 또는 $x=q$

(i), (ii)에서 주어진 방정식을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

답 5

**유형 05 함수의 그래프의 성질** 본책 148쪽

함수 $f(x)$에 대하여
① 정의역과 치역
② 곡선 $y=f(x)$와 좌표축의 교점
③ 곡선 $y=f(x)$의 대칭성과 주기
④ 증가와 감소, 극대와 극소
⑤ 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록, 변곡점
⑥ $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, 점근선
등을 조사하면 $y=f(x)$의 그래프의 성질을 파악할 수 있다.

**1041** $f'(x)=\dfrac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

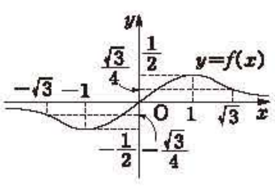
$=\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | 0 | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | ↘ |

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ 이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




① $f(x)$의 극솟값은

$f(-1)=-\dfrac{1}{2}$이다.

② 치역은 $\left\{y \,\middle|\, -\dfrac{1}{2}\le y\le \dfrac{1}{2}\right\}$이다.

③ 모든 실수 $x$에 대하여

$f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x}{x^2+1}=-f(x)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

④ $x\ge\sqrt{3}$일 때, $f''(x)\ge 0$이므로 구간 $(e,\ e^2)$에서 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

⑤ 변곡점은 점 $\left(-\sqrt{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, 점 $(0,\ 0)$, 점 $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$의 3개이다.

답 ②

**SSEN 특강**

① $f(-x)=f(x)$
➡ $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.
② $f(-x)=-f(x)$
➡ $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

**1042** $f'(x)=-4xe^{-2x^2}$

$f''(x)=-4e^{-2x^2}-4x\cdot(-4xe^{-2x^2})$

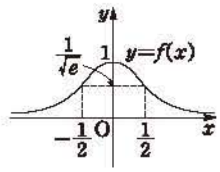
$=4e^{-2x^2}(4x^2-1)=4e^{-2x^2}(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | ↗ | 1 | ↘ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | ↘ |

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




ㄱ. 모든 실수 $x$에 대하여

$f(-x)=e^{-2(-x)^2}=e^{-2x^2}=f(x)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 치역은 $\{y\,|\,0<y\le 1\}$이다.

ㄷ. 변곡점은 점 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$, 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$의 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

**1043** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

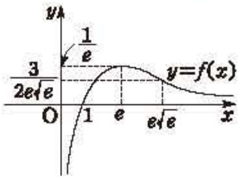
$f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1 \quad \therefore x=e$

$f''(x)=0$에서 $\quad \ln x=\dfrac{3}{2} \quad \therefore x=e\sqrt{e}$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $e\sqrt{e}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | $\frac{3}{2e\sqrt{e}}$ | ↘ |

또 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




ㄱ. 치역은 $\left\{y \middle| y\le\frac{1}{e}\right\}$이다.

ㄴ. 점근선은 $x$축, $y$축, 즉 직선 $y=0$, 직선 $x=0$이다.

ㄷ. $f(1)=0$, $f(e)=\frac{1}{e}$이므로 두 점 A, B는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다.
이때 $x\le e\sqrt{e}$이면 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록한 모양이므로 $\overline{\text{AB}}$는 $y=f(x)$의 그래프의 아래쪽에 있다.
즉 $\overline{\text{AB}}$는 부등식 $y\le f(x)$의 영역에 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

**유형 06~10 함수의 최대·최소** 본책 148, 149쪽

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여
구간 $(a, b)$에서의 극값, $f(a)$의 값, $f(b)$의 값
중 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

**1044** $f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{3}{2}\ (\because x>1)$

| $x$ | 1 | $\cdots$ | $\frac{3}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $\frac{27}{4}$ | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $\frac{27}{4}$을 가지므로

$a=\frac{3}{2}$, $m=\frac{27}{4}$ $\quad\therefore \frac{a}{m}=\frac{2}{9}$

답 $\frac{2}{9}$

**1045** $f'(x)=\frac{x^2-x+1-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$
$=\frac{(1+x)(1-x)}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\frac{2}{7}$ | ↘ | $-\frac{1}{3}$ | ↗ | 1 | ↘ | $\frac{2}{3}$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=1$, 최솟값은 $f(-1)=-\frac{1}{3}$이므로 구하는 합은

$1+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

답 ②

**1046** $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$에서 $-3\le x\le 3$이고

$f'(x)=\sqrt{9-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x^2=\frac{9}{2}\quad \therefore x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 0 | ↘ | $-\frac{9}{2}$ | ↗ | $\frac{9}{2}$ | ↘ | 0 |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{9}{2}$, 최솟값은 $f\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{9}{2}$이므로 $\quad M=\frac{9}{2}$, $m=-\frac{9}{2}$

$\therefore M-m=9$

답 ③

**1047** $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{5-x}$에서 $0\le x\le 5$이고

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}=\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $\quad \sqrt{5-x}=\sqrt{x}$

$5-x=x\quad \therefore x=\frac{5}{2}$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{5}{2}$ | $\cdots$ | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $\sqrt{5}$ | ↗ | $\sqrt{10}$ | ↘ | $\sqrt{5}$ |

⋯ ❷

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{10}$, 최솟값은 $f(0)=f(5)=\sqrt{5}$이므로 구하는 곱은

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=5\sqrt{2}$ ⋯ ❸

답 $5\sqrt{2}$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ $f(x)$의 증감표를 완성할 수 있다. | 50% |
| ❸ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다. | 30% |

**1048** $f(x)=(x^2-2)e^{-2x}$으로 놓으면

$f'(x)=2xe^{-2x}-2(x^2-2)e^{-2x}=-2(x^2-x-2)e^{-2x}$
$=-2(x+1)(x-2)e^{-2x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 0\le x\le 3)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $-2$ | ↗ | $\frac{2}{e^4}$ | ↘ | $\frac{7}{e^6}$ |

09 도함수의 활용 (2)

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=\frac{2}{e^4}$, 최솟값은 $f(0)=-2$이므로 구하는 곱은

$$\frac{2}{e^4}\cdot(-2)=-\frac{4}{e^4}$$

답 ②

**1049** $f(x)=x^2e^{-x-1}$이므로

$f'(x)=2xe^{-x-1}-x^2e^{-x-1}=x(2-x)e^{-x-1}$ ··· ①

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>0$)

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ |

··· ②

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $\frac{4}{e^2}$를 가지므로

$a=2,\ M=\frac{4}{e^2}$ $\quad\therefore aM=\frac{8}{e^2}$ ··· ③

답 $\frac{8}{e^2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ① $f'(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ② $f(x)$의 증감표를 완성할 수 있다. | 50% |
| ③ $aM$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**1050** $f'(x)=3-\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=2-\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=2$ $\quad\therefore x=e^2$

| $x$ | 1 | $\cdots$ | $e^2$ | $\cdots$ | $e^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 3 | ↗ | 극대 | ↘ | 0 |

따라서 $f(x)$는 $x=e^2$일 때 극대이자 최대이고, $x=e^3$일 때 최솟값을 가지므로 $\alpha=e^2,\ \beta=e^3$

$\therefore \alpha\beta=e^5$

답 $e^5$

**1051** $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\sqrt{e}$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\sqrt{e}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{1}{2e}$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$이다.

답 $\frac{1}{2e}$

**1052** $f(x)=\log_2(x+4)+\log_4(2-x)$에서 $-4<x<2$이고

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{(x+4)\ln 2}-\frac{1}{(2-x)\ln 4}\\&=\frac{1}{(x+4)\ln 2}-\frac{1}{2(2-x)\ln 2}\\&=\frac{2(2-x)-(x+4)}{2(x+4)(2-x)\ln 2}\\&=\frac{-3x}{2(x+4)(2-x)\ln 2}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

| $x$ | $-4$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{5}{2}$ | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=\frac{5}{2}$이다.

답 $\frac{5}{2}$

다른 풀이 $f(x)=\log_2(x+4)+\log_4(2-x)$에서 $-4<x<2$이고

$$\begin{aligned}f(x)&=\log_4(x+4)^2+\log_4(2-x)\\&=\log_4(x+4)^2(2-x)\end{aligned}$$

이므로 $g(x)=(x+4)^2(2-x)$로 놓으면 $g(x)$가 최대일 때 $f(x)$도 최대이다. 이때

$$\begin{aligned}g'(x)&=2(x+4)(2-x)-(x+4)^2\\&=-3x(x+4)\end{aligned}$$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -4<x<2$)

| $x$ | $-4$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | 32 | ↘ | |

따라서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(0)=32$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\log_4 32=\log_{2^2}2^5=\frac{5}{2}$

**1053** 
$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos x+2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x\\&=\cos x+2\cos 2x\cos x-2\sin^2 x\cos x\\&=\cos x\underline{(1+2\cos 2x-2\sin^2 x)}\\&=3\cos x\cos 2x\end{aligned}$$

$1-2\sin^2 x=\cos 2x$이므로 $1+2\cos 2x-2\sin^2 x=3\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\cos 2x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\sqrt{2}$ | ↘ | 1 |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$이다.

답 ④

**1054** $f'(x)=2\cos x-1$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ | ↘ | $-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$ | ↗ | $-2\pi$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값 $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$를 가지므로

$a=\frac{\pi}{3}$, $b=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

$\therefore a+b=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

**1055** $f'(x)=\frac{-\sin x(\sin x+2)-\cos x\cdot\cos x}{(\sin x+2)^2}$

$=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)-2\sin x}{(\sin x+2)^2}$

$=\frac{-(2\sin x+1)}{(\sin x+2)^2}$ ⋯❶

$f'(x)=0$에서 $\sin x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$ ($\because \pi\le x\le 2\pi$)

| $x$ | $\pi$ | $\cdots$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | ↘ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ↗ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ↘ | $\frac{1}{2}$ |

⋯❷

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{11}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 최솟값은 $f\left(\frac{7}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 구하는 곱은

$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{1}{3}$ ⋯❸

답 $-\frac{1}{3}$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ $f(x)$의 증감표를 완성할 수 있다. | 50% |
| ❸ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다. | 30% |

### 유형 11 치환을 이용한 함수의 최대·최소 본책 150쪽

함수 $f(x)$의 식에 공통부분이 있을 때에는 다음과 같은 순서로 최대·최소를 구한다.

(i) 공통부분을 $t$로 치환하여 함수 $f(x)$를 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타낸다.

(ii) $t$의 값의 범위를 구한다.

(iii) $g(t)$의 최댓값, 최솟값을 구한다.

**1056** $f(x)=\sin^3 x-3\cos^2 x+2$

$=\sin^3 x-3(1-\sin^2 x)+2$

$=\sin^3 x+3\sin^2 x-1$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 함수 $f(x)$를 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+3t^2-1$

$\therefore g'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ ($\because -1\le t\le 1$)

| $t$ | $-1$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | − | 0 | + | |
| $g(t)$ | 1 | ↘ | $-1$ | ↗ | 3 |

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$일 때 최댓값 3, $t=0$일 때 최솟값 $-1$을 가지므로

$M=3$, $m=-1$ $\therefore M+m=2$

답 2

**1057** $f(x)=8^x+4^x-2^x=(2^x)^3+(2^x)^2-2^x$

$2^x=t$로 놓으면 $t>0$이고, 주어진 함수 $f(x)$를 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+t^2-t$

$\therefore g'(t)=3t^2+2t-1=(t+1)(3t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{3}$ ($\because t>0$)

따라서 함수 $g(t)$의 최솟값은 $g\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{27}$이다.

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | − | 0 | + |
| $g(t)$ | | ↘ | $-\frac{5}{27}$ | ↗ |

답 ③

**1058** $f(x)=(\log_2 x)^3+3(\log_2 x)^2-9\log_2 x$이므로 $\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{16}\le x\le 4$에서 $-4\le t\le 2$

주어진 함수 $f(x)$를 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+3t^2-9t$

$\therefore g'(t)=3t^2+6t-9=3(t+3)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=-3$ 또는 $t=1$

| $t$ | $-4$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $g(t)$ | 20 | ↗ | 27 | ↘ | $-5$ | ↗ | 2 |

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-3$일 때 최댓값 27을 갖는다.

즉 $\log_2 x=-3$일 때 함수 $f(x)$가 최댓값을 가지므로

$a=2^{-3}=\frac{1}{8}$, $b=27$

$\therefore \frac{b}{a}=216$

답 216

**1059** $g(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\underbrace{\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)}_{\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x}$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

이므로 $g(x)=t$로 놓으면 $-2\le t\le 2$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-3t^2+10$

$\therefore f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

| $t$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $-10$ | $\nearrow$ | $10$ | $\searrow$ | $6$ |

따라서 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(0)=10$, 최솟값은 $f(-2)=-10$이므로 구하는 합은

$10+(-10)=0$

답 ①

## 유형 12 함수의 최대·최소를 이용한 미정계수의 결정 본책 150쪽

미정계수를 포함한 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값이 주어졌을 때
➡ $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 미정계수를 이용한 식으로 나타낸 후 주어진 값과 비교한다.

**1060** $f'(x)=a-2a\sin 2x=a(1-2\sin 2x)$

$f'(x)=0$에서 $\sin 2x=\frac{1}{2}$ $\therefore x=\frac{\pi}{12}\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $a$ | $\nearrow$ | $\frac{a}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}a$ | $\searrow$ | $\frac{a}{4}\pi$ |

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{4}\pi$이므로

$\frac{a}{4}\pi=\frac{\pi}{2}$ $\therefore a=2$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

답 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

**1061** $f'(x)=ae^{-2x}-2axe^{-2x}=a(1-2x)e^{-2x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-ae^2$ | $\nearrow$ | $\frac{a}{2e}$ | $\searrow$ | $\frac{2a}{e^4}$ |

이때 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{2e}$, 최솟값은 $f(-1)=-ae^2$이고 최댓값과 최솟값의 곱이 $-2e$이므로

$\frac{a}{2e}\cdot(-ae^2)=-2e$, $-\frac{a^2e}{2}=-2e$

$a^2=4$ $\therefore a=2\ (\because a>0)$

답 ②

**1062** $f(x)=2x+x\ln x+e^a$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+3$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-3$ $\therefore x=\frac{1}{e^3}$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{e^3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-\frac{1}{e^3}+e^a$ | $\nearrow$ |

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f\left(\frac{1}{e^3}\right)=-\frac{1}{e^3}+e^a$이므로

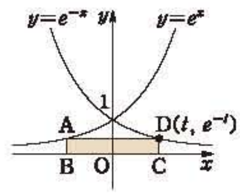
$-\frac{1}{e^3}+e^a=0$, $e^a=e^{-3}$ $\therefore a=-3$

답 ③

## 유형 13 최대·최소의 활용 본책 151쪽

① 평면도형의 길이, 넓이 구하는 공식
② 입체도형의 부피 구하는 공식
③ 피타고라스 정리
등을 이용하여 구하는 값을 함수로 나타낸 다음 도함수를 이용하여 최댓값, 최솟값을 구한다.

**1063** 오른쪽 그림에서 점 D의 좌표를 $(t,\ e^{-t})\ (t>0)$이라 하면




$\overline{AD}=2t$, $\overline{CD}=e^{-t}$

직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=2te^{-t}$

$\therefore S'(t)=2e^{-t}-2te^{-t}$

$=2(1-t)e^{-t}$

$S'(t)=0$에서 $t=1$

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $S(t)$ | | $\nearrow$ | $\frac{2}{e}$ | $\searrow$ |

따라서 $S(t)$의 최댓값은 $S(1)=\frac{2}{e}$이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{2}{e}$이다.

답 ①

**1064** 두 곡선 $y=e^x$과 $y=\ln x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 선분 PQ가 직선 $y=x$에 수직이므로 점 P와 점 Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉 점 P의 좌표를 $(t,\ e^t)$이라 하면 $\mathrm{Q}(e^t,\ t)$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(e^t-t)^2+(t-e^t)^2}=\sqrt{2(e^t-t)^2}$

$=\sqrt{2}(e^t-t)\ (\because e^t>t)$

$f(t)=\sqrt{2}(e^t-t)$로 놓으면 $f'(t)=\sqrt{2}(e^t-1)$

$f'(t)=0$에서 $e^t=1$ $\therefore t=0$

| $t$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(t)$ | $\searrow$ | $\sqrt{2}$ | $\nearrow$ |

따라서 $f(t)$의 최솟값은 $f(0)=\sqrt{2}$이므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

답 $\sqrt{2}$

**다른 풀이** 점 P와 점 Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 Q의 좌표를 $(k,\ \ln k)$라 하면 $\mathrm{P}(\ln k,\ k)$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(k-\ln k)^2+(\ln k-k)^2}$

$=\sqrt{2(k-\ln k)^2}$

$=\sqrt{2}(k-\ln k)\ (\because k>\ln k)$

$g(k)=\sqrt{2}(k-\ln k)$로 놓으면 $k>0$이고

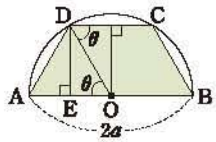
$$g'(k)=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

$g'(k)=0$에서 $\quad k=1$

따라서 $g(k)$의 최솟값은 $g(1)=\sqrt{2}$이므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

| $k$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(k)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(k)$ | | ↘ | $\sqrt{2}$ | ↗ |

**1065** 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E, 사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 하면




$$S(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\cdot\overline{DE}$$

$$=\frac{1}{2}(2a+2a\cos\theta)\cdot a\sin\theta$$

$$=a^2\sin\theta(1+\cos\theta)\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots ❶$$

$$\therefore S'(\theta)=a^2\cos\theta(1+\cos\theta)+a^2\sin\theta(-\sin\theta)$$

$$=a^2(\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$=a^2\{\cos\theta+\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)\}$$

$$=a^2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$$

$$=a^2(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1) \quad \cdots ❷$$

$S'(\theta)=0$에서 $\quad \cos\theta=\frac{1}{2}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$$

| $\theta$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(\theta)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $S(\theta)$ | | ↗ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ | ↘ | |

$\cdots$ ❸

따라서 함수 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$을 가지므로

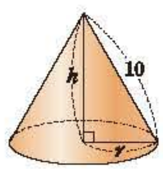
$$k=\frac{1}{3},\ l=\frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad \therefore kl=\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \cdots ❹$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $S(\theta)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $S'(\theta)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ❸ $S(\theta)$의 증감표를 완성할 수 있다. | 30% |
| ❹ $kl$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1066** 잘라낸 부채꼴로 오른쪽 그림과 같은 원뿔을 만들었을 때, 밑면의 반지름의 길이를 $r(0<r<10)$라 하면




$$10\theta=2\pi r \qquad \therefore \theta=\frac{\pi r}{5} \quad \cdots\cdots ㉠$$

원뿔의 높이를 $h$라 하면 $h=\sqrt{100-r^2}$이므로 원뿔의 부피를 $V(r)$라 하면

$$V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{100-r^2}$$

$$\therefore V'(r)=\frac{1}{3}\pi\left(2r\sqrt{100-r^2}+r^2\cdot\frac{-2r}{2\sqrt{100-r^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{2r(100-r^2)-r^3}{\sqrt{100-r^2}}=\frac{\pi r(200-3r^2)}{3\sqrt{100-r^2}}$$

$V'(r)=0$에서 $\quad r^2=\frac{200}{3} \qquad \therefore r=\frac{10\sqrt{6}}{3}\ (\because 0<r<10)$

| $r$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ | $\cdots$ | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(r)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $V(r)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

따라서 $V(r)$는 $r=\frac{10\sqrt{6}}{3}$일 때 극대이며 최대이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $\quad \theta=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{10\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

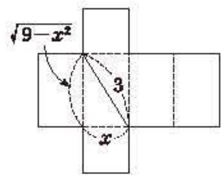
답 $\frac{10\sqrt{6}}{3}$, $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

**SSEN 특강**

**부채꼴의 호의 길이**

반지름의 길이가 $r$, 중심각의 크기가 $\theta$(라디안)인 부채꼴의 호의 길이 $l$은 $\quad l=r\theta$

**1067** 사각기둥의 밑면의 한 변의 길이를 $x\ (0<x<3)$라 하면 높이는 $\sqrt{9-x^2}$이다.




따라서 사각기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=x^2\sqrt{9-x^2}$$

$$\therefore V'(x)=2x\sqrt{9-x^2}+x^2\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}$$

$$=\frac{2x(9-x^2)-x^3}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{3x(6-x^2)}{\sqrt{9-x^2}}$$

$V'(x)=0$에서 $\quad x^2=6 \qquad \therefore x=\sqrt{6}\ (\because 0<x<3)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\sqrt{6}$ | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $V(x)$ | | ↗ | $6\sqrt{3}$ | ↘ | |

따라서 $V(x)$의 최댓값은 $V(\sqrt{6})=6\sqrt{3}$이므로 사각기둥의 부피의 최댓값은 $6\sqrt{3}$이다.

답 ④

**다른 풀이** 옆면의 대각선과 밑면의 한 변이 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 하면 밑면인 정사각형의 한 변의 길이는 $3\cos\theta$이고, 사각기둥의 높이는 $3\sin\theta$이다.

따라서 사각기둥의 부피를 $V(\theta)$라 하면

$$V(\theta)=(3\cos\theta)^2\cdot3\sin\theta=27\cos^2\theta\sin\theta$$

$$=27(1-\sin^2\theta)\sin\theta$$

$$=-27\sin^3\theta+27\sin\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<t<1$이고 함수 $V(\theta)$를 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$$g(t)=-27t^3+27t$$

$$\therefore g'(t)=-81t^2+27=-81\left(t^2-\frac{1}{3}\right)$$

09 도함수의 활용 (2)

$g'(t)=0$에서 $\quad t^2=\frac{1}{3} \quad \therefore t=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\because 0<t<1\right)$

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | + | 0 | − | |
| $g(t)$ | | ↗ | $6\sqrt{3}$ | ↘ | |

따라서 $g(t)$의 최댓값은 $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=6\sqrt{3}$이므로 사각기둥의 부피의 최댓값은 $6\sqrt{3}$이다.

## 유형 14 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수 본책 152쪽

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수
➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

**1068** $\ln x-x+15-n=0$에서

$\ln x-x+15=n \quad \cdots\cdots$ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\ln x-x+15$와 직선 $y=n$이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\ln x-x+15$로 놓으면 $x>0$이고

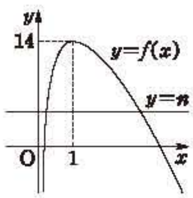
$f'(x)=\frac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − |
| $f(x)$ | | ↗ | 14 | ↘ |

이때 $\lim_{x\to0+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=n$이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$n<14$

이므로 자연수 $n$은 1, 2, 3, $\cdots$, 13의 13개이다.

답 13

**1069** 방정식 $e^x+e^{-x}=k$가 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=e^x+e^{-x}$과 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다. ❶

$f(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^x-e^{-x}$

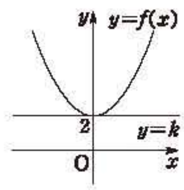
$f'(x)=0$에서 $\quad e^x=e^{-x}$

$x=-x \quad \therefore x=0$

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | 2 | ↗ |

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ❷




따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나려면

$k=2$ ❸

답 2

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ 곡선 $y=e^x+e^{-x}$과 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 함을 알 수 있다. | 20% |
| ❷ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다. | 60% |
| ❸ $k$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1070** $x+2\sin x-k=0$에서

$x+2\sin x=k \quad \cdots\cdots$ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x+2\sin x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x+2\sin x$로 놓으면

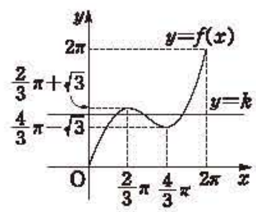
$f'(x)=1+2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$ | ↘ | $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ | ↗ | $2\pi$ |

이때 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면




$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}<k<\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$, $\beta=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\beta=2\pi$

답 ④

참고 $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}-2\pi=\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi<0$이므로

$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}<2\pi \quad \therefore f\left(\frac{2}{3}\pi\right)<f(2\pi)$

$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}>0$이므로 $\quad f\left(\frac{4}{3}\pi\right)>f(0)$

**1071** $e^{2x}=\frac{2}{\sqrt{e}}x+k$에서 $\quad e^{2x}-\frac{2}{\sqrt{e}}x=k \quad \cdots\cdots$ ㉠

방정식 ㉠이 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=e^{2x}-\frac{2}{\sqrt{e}}x$가 직선 $y=k$와 한 점에서 만나야 한다.

$f(x)=e^{2x}-\frac{2}{\sqrt{e}}x$로 놓으면 $\quad f'(x)=2e^{2x}-\frac{2}{\sqrt{e}}$

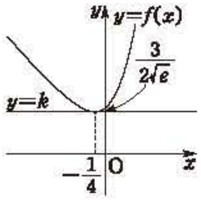
$f'(x)=0$에서 $\quad 2e^{2x}=\frac{2}{\sqrt{e}}=2e^{-\frac{1}{2}}$

$2x=-\frac{1}{2} \quad \therefore x=-\frac{1}{4}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{4}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | $\frac{3}{2\sqrt{e}}$ | ↗ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나려면

$k=\dfrac{3}{2\sqrt{e}}$




답 ②

**1072** 방정식 $\dfrac{2}{x^2-4x+6}=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\dfrac{2}{x^2-4x+6}$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\dfrac{2}{x^2-4x+6}$로 놓으면

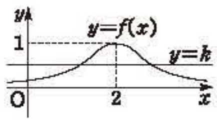
$f'(x)=\dfrac{-2(2x-4)}{(x^2-4x+6)^2}$

| $x$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | 1 | ↘ |

$f'(x)=0$에서 $x=2$

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$0<k<1$




답 $0<k<1$

**유형 15 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수** 본책 152쪽

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수와 같다.

**1073** 방정식 $\ln x=ax^2$의 실근의 개수는 두 곡선 $y=\ln x$, $y=ax^2$의 교점의 개수와 같다.
$f(x)=\ln x$, $g(x)=ax^2$으로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=2ax$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면
$f(t)=g(t)$에서 $\ln t=at^2$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\dfrac{1}{t}=2at$ $\therefore a=\dfrac{1}{2t^2}$

$a=\dfrac{1}{2t^2}$을 ㉠에 대입하면

$\ln t=\dfrac{1}{2}$ $\therefore t=\sqrt{e}$

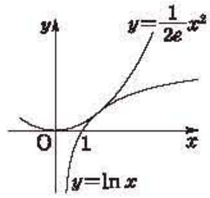
$\therefore a=\dfrac{1}{2e}$

따라서 $a>0$에서 방정식 $\ln x=ax^2$의 실근은

$0<a<\dfrac{1}{2e}$일 때 2개,

$a=\dfrac{1}{2e}$일 때 1개,

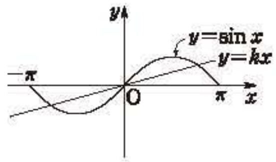
$a>\dfrac{1}{2e}$일 때 0개




이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

**1074** $-\pi\le x\le\pi$에서 방정식 $\sin x=kx$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 $-\pi\le x\le\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.




$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로 곡선 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $\cos 0=1$
따라서 접선의 방정식은 $y=x$
이므로 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$가 세 점에서 만나려면

$0\le k<1$ $\therefore a=1$

답 ②

**1075** 주어진 두 방정식이 모두 실근을 갖지 않으려면 직선 $y=kx$가 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$와 모두 만나지 않아야 한다.

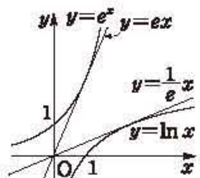
(i) 직선 $y=kx$가 곡선 $y=e^x$과 접할 때,
$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 접점의 좌표를 $(t,\ e^t)$이라 하면 접선의 기울기는 $e^t$
따라서 접선의 방정식은 $y-e^t=e^t(x-t)$
이 직선이 원점을 지나므로 $-e^t=e^t\cdot(-t)$ $\therefore t=1$
따라서 접선의 방정식이 $y=ex$이므로 $k=e$ ··· ❶

(ii) 직선 $y=kx$가 곡선 $y=\ln x$와 접할 때,
$y=\ln x$에서 $y'=\dfrac{1}{x}$이므로 접점의 좌표를 $(s,\ \ln s)$라 하면 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{s}$
따라서 접선의 방정식은 $y-\ln s=\dfrac{1}{s}(x-s)$
이 직선이 원점을 지나므로 $-\ln s=\dfrac{1}{s}\cdot(-s)$ $\therefore s=e$
따라서 접선의 방정식이 $y=\dfrac{1}{e}x$이므로

$k=\dfrac{1}{e}$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 $k$의 값의 범위는

$\dfrac{1}{e}<k<e$ ··· ❸




답 $\dfrac{1}{e}<k<e$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 직선 $y=kx$가 곡선 $y=e^x$과 접할 때 $k$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ 직선 $y=kx$가 곡선 $y=\ln x$와 접할 때 $k$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $k$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 20% |

**유형 16 부등식이 성립하도록 하는 미정계수의 결정 (1)** 본책 153쪽

① 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge a$가 성립함을 보이려면
➡ 그 구간에서 ($f(x)$의 최솟값)$\ge a$임을 보인다.
② 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\le a$가 성립함을 보이려면
➡ 그 구간에서 ($f(x)$의 최댓값)$\le a$임을 보인다.

**1076** $f(x)=\sin 2x-2\sin x$로 놓으면 $f(x)$는 주기가 $2\pi$인 주기함수이므로 구간 $0\le x\le 2\pi$에서 $f(x)\le a$를 만족시키는 $a$의 값의 범위를 구하면 된다.

$f(x)=\sin 2x-2\sin x$에서

$f'(x)=2\cos 2x-2\cos x=2(2\cos^2 x-1)-2\cos x$

$=2(2\cos^2 x-\cos x-1)$

$=2(2\cos x+1)(\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x=2\pi$

($\because 0\le x\le 2\pi$)

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 0 | ↘ | $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | ↗ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | ↘ | 0 |

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이므로 $f(x)\le a$가 항상 성립하려면 $a\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

답 $a\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

**1077** $x\ln x-3x+2+k\le 0$에서

$3x-x\ln x-2\ge k$

$f(x)=3x-x\ln x-2$로 놓으면

$f'(x)=3-\left(\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=2-\ln x$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $\ln x=2$ $\therefore x=e^2$

| $x$ | $e$ | $\cdots$ | $e^2$ | $\cdots$ | $e^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $2e-2$ | ↗ | $e^2-2$ | ↘ | $-2$ |

⋯ ❷

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $f(e^3)=-2$이므로 $e\le x\le e^3$에서 $f(x)\ge k$가 성립하려면 $k\le -2$ ⋯ ❸

답 $k\le -2$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $f(x)$의 증감표를 완성할 수 있다. | 40% |
| ❸ $k$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 20% |

**1078** $f(x)=e^x-3x$로 놓으면 $f'(x)=e^x-3$

$f'(x)=0$에서 $e^x=3$ $\therefore x=\ln 3$

| $x$ | $\cdots$ | $\ln 3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $3-3\ln 3$ | ↗ |

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $f(\ln 3)=3-3\ln 3$이므로 $f(x)\ge k$가 항상 성립하려면

$k\le 3-3\ln 3$

즉 $k$의 최댓값은 $3-3\ln 3$이다.

답 $3-3\ln 3$

**1079** $\alpha x\le\ln x\le\beta x$에서 $\alpha\le\dfrac{\ln x}{x}\le\beta$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

| $x$ | $e$ | $\cdots$ | $e^2$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | $\frac{2}{e^2}$ |

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f(e)=\dfrac{1}{e}$, 최솟값은 $f(e^2)=\dfrac{2}{e^2}$이므로 $e\le x\le e^2$인 모든 실수 $x$에 대하여

$\dfrac{2}{e^2}\le\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{1}{e}$

즉 $\alpha\le\dfrac{2}{e^2}$, $\beta\ge\dfrac{1}{e}$이므로 $\dfrac{\alpha}{\beta}$의 최댓값은

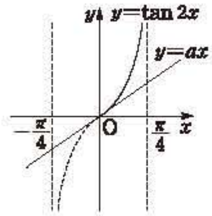
$\dfrac{2}{e^2}\cdot e=\dfrac{2}{e}$

답 $\dfrac{2}{e}$

**유형 17 부등식이 성립하도록 하는 미정계수의 결정 (2)** 본책 153쪽

구간 $(a, b)$에서 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립하려면
➡ 구간 $(a, b)$에서 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있어야 한다.

**1080** $0<x<\dfrac{\pi}{4}$에서 부등식 $\tan 2x>ax$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\tan 2x$가 직선 $y=ax$보다 위쪽에 있어야 한다.




$f(x)=\tan 2x$로 놓으면

$f'(x)=2\sec^2 2x$

$y=ax$가 원점을 지나는 직선이고

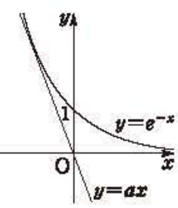
$f'(0)=2$이므로 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$에서 주어진 부등식이 성립하려면

$a\le 2$

따라서 $a$의 최댓값은 2이다.

답 ④

**1081** 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $e^{-x}\ge ax$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^{-x}$이 직선 $y=ax$보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접해야 한다.




$f(x)=e^{-x}$, $g(x)=ax$로 놓으면

$f'(x)=-e^{-x}$, $g'(x)=a$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^{-t}=at$ ⋯⋯ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-e^{-t}=a$

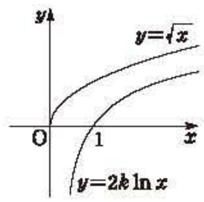
$a=-e^{-t}$을 ㉠에 대입하면 $e^{-t}=-te^{-t}$ $\therefore t=-1$

$\therefore a=-e$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 $a$의 값의 범위는 $-e\le a\le 0$이므로 정수 $a$는 $-2$, $-1$, 0의 3개이다.

답 3

**1082** $x>0$인 모든 실수 $x$에 대하여 $\sqrt{x}\ge 2k\ln x$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$가 곡선 $y=2k\ln x$보다 위쪽에 있거나 두 곡선이 접해야 한다.




$f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=2k\ln x$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x)=\dfrac{2k}{x}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 $x$좌표를 $t$ $(t>0)$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad \sqrt{t}=2k\ln t \quad$ ...... ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad \frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{2k}{t} \quad \therefore k=\frac{\sqrt{t}}{4}$

$k=\frac{\sqrt{t}}{4}$를 ㉠에 대입하면 $\quad \sqrt{t}=\frac{\sqrt{t}}{2}\ln t$

$\ln t=2 \quad \therefore t=e^2 \quad \therefore k=\frac{e}{4}$

따라서 $0<k\le\frac{e}{4}$이므로 $k$의 최댓값은 $\frac{e}{4}$이다. 답 ①

**1083** 전략 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$, $h''(x)=f''(x)-g''(x)$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 접하므로

$g'(b)=f'(b)$, $g(b)=f(b)$ ...... ㉠

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로 $\quad h'(b)=f'(b)-g'(b)=0$

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선이 $y=g(x)$이므로

$f'(a)=g'(a)$, $f(a)=g(a)$ ...... ㉡

$\therefore h'(a)=f'(a)-g'(a)=0$

㉠, ㉡에서

$h(a)=f(a)-g(a)=0$, $h(b)=f(b)-g(b)=0$

함수 $y=h(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 구간 $(a,\ b)$에서 이계도함수를 가질 때, $h(a)=h(b)$이면 롤의 정리에 의하여 $h'(c)=0$인 $c$가 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

즉 $h'(a)=h'(b)=h'(c)=0$이므로 방정식 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다.

ㄷ. $y=g(x)$는 직선의 방정식이므로 $\quad g''(x)=0$

$\therefore h''(x)=f''(x)-g''(x)=f''(x)$

점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

따라서 $h''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호도 바뀌므로 점 $(a,\ h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

**1084** 전략 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

풀이 ㄱ. $f''(b)=f''(0)=f''(c)=f''(e)=0$이고 각 점의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$는

$x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=e$

에서 변곡점을 갖는다.

따라서 구간 $[a,\ f]$에서 $f(x)$의 변곡점은 4개이다.

ㄴ.

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $d$ | $\cdots$ | $f$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 구간 $[a,\ e]$에서 $f(x)$가 극대가 되는 $x$는 $d$의 1개이다.

ㄷ. 구간 $(a,\ 0)$, 구간 $(0,\ d)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가하고, 구간 $(d,\ e)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

따라서 구간 $[a,\ e]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(d)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

**1085** 전략 함수 $f(x)$의 증가·감소와 곡선 $y=f(x)$의 오목·볼록을 조사하여 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}-x$에서 $x\neq0$이고

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-1=-\frac{e^{\frac{1}{x}}+x^2}{x^2}<0$$

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2+e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{2}{x^3}=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1+2x}{x^4}$$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 존재하지 않는다.

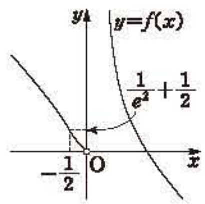
$f''(x)=0$에서 $\quad 1+2x=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $\frac{1}{e^2}+\frac{1}{2}$ | ↘ | | ↘ |

이때 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to0-}f(x)=0$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




ㄱ. 함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

ㄴ. 오른쪽 그래프에서 $x_1<x_2<0$이면

$f(x_1)>f(x_2)$

ㄷ. 변곡점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{e^2}+\frac{1}{2}\right)$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{e^2}+\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{1}{e^2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

**1086** 전략 접점 P의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선이 $y$축과 만나는 점의 $y$좌표를 $t$에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+3)^2}$

접점을 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{t^2+3}\right)$이라 하면 $f'(t)=-\frac{2t}{(t^2+3)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{t^2+3}=-\frac{2t}{(t^2+3)^2}(x-t)$$

$$\therefore y=-\frac{2t}{(t^2+3)^2}x+\frac{3t^2+3}{(t^2+3)^2}$$

이 직선의 $y$절편을 $g(t)$라 하면 $g(t)=\frac{3t^2+3}{(t^2+3)^2}$이므로

$$g'(t)=\frac{6t(t^2+3)^2-(3t^2+3)\cdot 2(t^2+3)\cdot 2t}{(t^2+3)^4}$$
$$=\frac{-6t(t+1)(t-1)}{(t^2+3)^3}$$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=1$ ($\because t\ge 0$)

| $t$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $g(t)$ | $\frac{1}{3}$ | ↗ | $\frac{3}{8}$ | ↘ |

따라서 함수 $g(t)$의 최댓값은 $g(1)=\frac{3}{8}$이다. 답 ③

**1087** 전략 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하고 증감표를 만들어 최댓값, 최솟값을 구한다.

풀이 $f'(x)=\ln 3\cdot 3^{\sin x}\cdot\cos x+\ln 3\cdot 3^{-\sin x}\cdot(-\cos x)$
$$=\ln 3\cdot(3^{\sin x}-3^{-\sin x})\cdot\cos x$$
$$=\ln 3\cdot\frac{(3^{\sin x})^2-1}{3^{\sin x}}\cdot\cos x$$
$$=\ln 3\cdot\frac{(3^{\sin x}+1)(3^{\sin x}-1)}{3^{\sin x}}\cdot\cos x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=-\pi$ 또는 $x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$
($\because -\pi\le x\le\pi$)

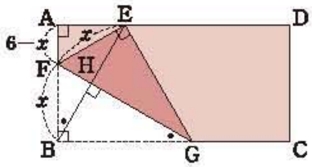
| $x$ | $-\pi$ | $\cdots$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 2 | ↗ | $\frac{10}{3}$ | ↘ | 2 | ↗ | $\frac{10}{3}$ | ↘ | 2 |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{10}{3}$, 최솟값은 2이므로

$M=\frac{10}{3},\ m=2$

$\therefore M-m=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

**1088** 전략 $\overline{BF}=x$라 하고 닮음인 삼각형을 찾는다.




풀이 $\overline{BF}=\overline{FE}=x\ (0<x\le 6)$라 하면

$\overline{AF}=6-x$,

$\overline{AE}=\sqrt{x^2-(6-x)^2}$
$=\sqrt{12(x-3)}$

한편 $\triangle ABE$와 $\triangle BGF$에서

$\angle BAE=\angle GBF=90°$, $\angle ABE=\angle BGF$

이므로 $\quad\triangle ABE\backsim\triangle BGF$ (AA 닮음) $\angle ABE=90°-\angle BFH=\angle BGF$

따라서 $\overline{AB}:\overline{BG}=\overline{AE}:\overline{BF}$이므로

$6:\overline{BG}=\sqrt{12(x-3)}:x$

$\therefore \overline{BG}=\frac{6x}{\sqrt{12(x-3)}}\ (3<x\le 6)$

$\triangle EFG$의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{EF}\cdot\overline{EG}=\frac{1}{2}\cdot\overline{BF}\cdot\overline{BG}$$
$$=\frac{1}{2}x\cdot\frac{6x}{\sqrt{12(x-3)}}$$
$$=\frac{3x^2}{\sqrt{12(x-3)}}$$
$$\therefore S'(x)=\frac{6x\sqrt{12(x-3)}-3x^2\cdot\frac{12}{2\sqrt{12(x-3)}}}{12(x-3)}$$
$$=\frac{9x(x-4)}{2(x-3)\sqrt{12(x-3)}}$$

$S'(x)=0$에서 $\quad x=4$ ($\because 3<x\le 6$)

| $x$ | 3 | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $S(x)$ | | ↘ | $8\sqrt{3}$ | ↗ | |

따라서 $S(x)$의 최솟값은 $S(4)=8\sqrt{3}$이다. 답 $8\sqrt{3}$

**1089** 전략 철판의 구입 가격을 저장 탱크의 밑면의 한 변의 길이를 이용하여 나타낸다.

풀이 저장 탱크의 밑면의 한 변의 길이를 $a$ m, 높이를 $b$ m라 하면 저장 탱크의 부피는 $a^2b$ $\mathrm{m}^3$이므로

$a^2b=64 \qquad \therefore b=\frac{64}{a^2}$

저장 탱크를 만드는 데 필요한 철판의 구입 가격을 $f(a)$만 원이라 하면

$$f(a)=8a^2+16ab=8a^2+16\cdot\frac{64}{a}\ (a>0)$$
$$\therefore f'(a)=16a-\frac{16\cdot 64}{a^2}=\frac{16(a^3-64)}{a^2}$$
$$=\frac{16(a-4)(a^2+4a+16)}{a^2}$$

$f'(a)=0$에서 $\quad a=4$ ($\because a^2+4a+16>0$)

따라서 $f(a)$의 최솟값은 $f(4)=384$이므로 구하는 최소 비용은 384만 원이다.

| $a$ | 0 | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(a)$ | | ↘ | 384 | ↗ |

답 ④

**1090** 전략 $f(k)$는 곡선 $y=\ln(2\sin x+4)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $g(x)=\ln(2\sin x+4)$로 놓으면

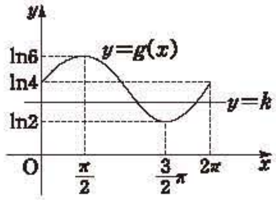
$$g'(x)=\frac{2\cos x}{2\sin x+4}$$

$g'(x)=0$에서 $\quad\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

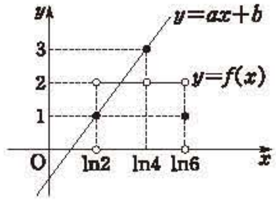
| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | $\ln 4$ | ↗ | $\ln 6$ | ↘ | $\ln 2$ | ↗ | $\ln 4$ |

$y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로




$$f(k)=\begin{cases}0 & (k<\ln 2 \text{ 또는 } k>\ln 6)\\ 1 & (k=\ln 2 \text{ 또는 } k=\ln 6)\\ 2 & (\ln 2<k<\ln 4 \text{ 또는 } \ln 4<k<\ln 6)\\ 3 & (k=\ln 4)\end{cases}$$

즉 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 서로 다른 네 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=ax+b$가 두 점 $(\ln 2,\ 1)$, $(\ln 4,\ 3)$을 지나야 한다.




이때 두 점 $(\ln 2,\ 1)$, $(\ln 4,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{3-1}{\ln 4-\ln 2}(x-\ln 2)$$

$$\therefore y=\frac{2}{\ln 2}x-1$$

따라서 $a=\frac{2}{\ln 2}$, $b=-1$이므로 $\quad ab=-\frac{2}{\ln 2}$

답 ①

**1091** 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

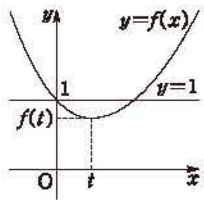
풀이 ㄱ. $f'(x)=-e^{-x}+x$

이때 $f'(0)=-1<0$, $f'(1)=-\frac{1}{e}+1>0$이므로 $f'(t)=0$을 만족시키는 $t$의 값의 범위는

$0<t<1$

ㄴ. $f''(x)=e^{-x}+1$에서 $f''(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 존재하지 않는다.




ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 $x=t\ (0<t<1)$에서 극소이자 최소이고 아래로 볼록한 곡선이다.

이때 $f(0)=1$이므로 $\quad f(t)<1$

따라서 방정식 $f(x)=1$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

**1092** 전략 방정식 $f(x)-\frac{a}{n}x=0$의 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{a}{n}x$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{\ln x^2}{x}$에서 $x\neq 0$이고

$$f(-x)=\frac{\ln(-x)^2}{-x}=-\frac{\ln x^2}{x}=-f(x)$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

한편 $x>0$일 때 $f(x)=\frac{\ln x^2}{x}=\frac{2\ln x}{x}$이므로

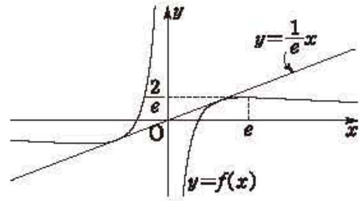
$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1 \quad \therefore x=e$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{2}{e}$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(e)=\frac{2}{e}$이므로 $\quad a=\frac{2}{e}$

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.




원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2\ln t}{t}\right)$ $(t>0)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{2-2\ln t}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{2\ln t}{t}=\frac{2-2\ln t}{t^2}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로 $\quad -\frac{2\ln t}{t}=\frac{2-2\ln t}{t^2}\cdot(-t)$

$4\ln t=2,\quad \ln t=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\sqrt{e}$

따라서 접선의 방정식은 $\quad y=\frac{1}{e}x$

한편 방정식 $f(x)=\frac{a}{n}x$, 즉 $f(x)=\frac{2}{en}x$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{2}{en}x$의 교점의 개수와 같다.

$n=1$일 때, $\frac{1}{e}<\frac{2}{e}$이므로 직선 $y=\frac{2}{e}x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수는 0이다. $\quad \therefore a_1=0$

$n=2$일 때, 직선 $y=\frac{1}{e}x$와 곡선 $y=f(x)$는 접하므로 교점의 개수는 2이다. $\quad \therefore a_2=2$

$3\le n\le 10$일 때, $\frac{1}{e}>\frac{2}{en}$이므로 직선 $y=\frac{2}{en}x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수는 4이다.

$\therefore a_3=a_4=\cdots=a_{10}=4$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n=0+2+4\cdot 8=34$

답 34

**1093** 전략 함수 $f(x)$가 역함수를 가지면 $f(x)$는 일대일 대응임을 이용한다.

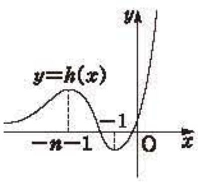
풀이 $f(x)$가 역함수를 가지려면 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$에서

$$f'(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+e^{x+1}(2x+n-2)+a$$
$$=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$$
따라서 $e^{x+1}(x^2+nx+1)+a\geq 0$, 즉 $e^{x+1}(x^2+nx+1)\geq -a$가 성립해야 한다.

$h(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)$로 놓으면
$$h'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+e^{x+1}(2x+n)$$
$$=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+n+1\}$$
$$=e^{x+1}(x+n+1)(x+1)$$
$h'(x)=0$에서 $\quad x=-n-1$ 또는 $x=-1$

| $x$ | $\cdots$ | $-n-1$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | ↗ | $\frac{n+2}{e^n}$ | ↘ | $2-n$ | ↗ |




이때 $\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}h(x)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $h(x)$의 최솟값은 $h(-1)=2-n$이므로 $h(x)\geq -a$가 성립하려면
$$2-n\geq -a \qquad \therefore a\geq n-2$$
즉 $a$의 최솟값이 $g(n)=n-2$이므로 $1\leq g(n)\leq 8$에서
$$1\leq n-2\leq 8 \qquad \therefore 3\leq n\leq 10$$
따라서 자연수 $n$의 값의 합은
$$3+4+5+\cdots+10=\frac{8(3+10)}{2}=52$$
답 ④

**참고** $x\to-\infty$일 때 $\quad e^{x+1}>0,\ x^2+nx+1>0$
따라서 $h(x)>0$이고 $h'(x)>0$이므로 $\quad \lim_{x\to-\infty}h(x)=0$

**1094** **전략** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

**풀이** $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$
$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$
$f''(x)=0$에서 $\quad x=2$
$x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는
$$\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$$
··· ❶

이때 $f'(2)=-\frac{1}{e^2}$이므로 변곡점 $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$에서의 접선의 방정식은
$$y-\frac{2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}(x-2) \qquad \therefore y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$$
따라서 $g(x)=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$이므로 ··· ❷
$$g(1)=-\frac{1}{e^2}+\frac{4}{e^2}=\frac{3}{e^2}$$
··· ❸

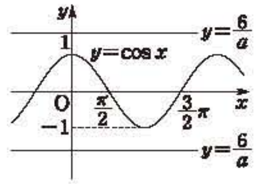
답 $\frac{3}{e^2}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 변곡점의 좌표를 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $g(x)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $g(1)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1095** **전략** 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 $f''(x)=0$의 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.

**풀이** $f'(x)=6x-a\sin x$, $f''(x)=6-a\cos x$
$f''(x)=0$에서 $\quad 6-a\cos x=0 \qquad \therefore \cos x=\frac{6}{a}$ $\quad$ ······ ㉠




(i) 방정식 ㉠이 실근을 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=\frac{6}{a}$이 만나지 않아야 하므로
$$\frac{6}{a}<-1 \text{ 또는 } \frac{6}{a}>1$$
$$\therefore -6<a<0 \text{ 또는 } 0<a<6$$
··· ❶

(ii) $a=-6$ 또는 $a=6$이면
$$f''(x)=6(1+\cos x) \text{ 또는 } f''(x)=6(1-\cos x)$$
$$\therefore f''(x)\geq 0$$
따라서 $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않는다.
··· ❷

(i), (ii)에서 $\quad -6\leq a<0$ 또는 $0<a\leq 6$
따라서 정수 $a$는 $-6,\ -5,\ \cdots,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ 5,\ 6$의 12개이다.
··· ❸

답 12

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않을 조건을 이용할 수 있다. | 40% |
| ❷ 방정식 $f''(x)=0$의 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않을 조건을 이용할 수 있다. | 40% |
| ❸ $a$의 개수를 구할 수 있다. | 20% |

**1096** **전략** $(\text{시간})=\frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$임을 이용한다.

**풀이** $\overline{AC}=\sqrt{16+x^2}$ (m)이므로 [방법 1]을 이용할 때 걸리는 시간은 $\quad \sqrt{16+x^2}$ (초)
$\overline{AB}+\overline{BC}=4+x$(m)이므로 [방법 2]를 이용할 때 걸리는 시간은
$$\frac{4+x}{2}=2+\frac{x}{2}\text{(초)}$$
따라서 걸리는 시간의 차를 $f(x)$초라 하면
$$f(x)=\sqrt{16+x^2}-2-\frac{x}{2}\ (x>0)$$
··· ❶
$$\therefore f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}}-\frac{1}{2}=\frac{2x-\sqrt{16+x^2}}{2\sqrt{16+x^2}}$$
$f'(x)=0$에서 $\quad 2x=\sqrt{16+x^2},\quad 4x^2=16+x^2$
$$x^2=\frac{16}{3} \qquad \therefore x=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ (\because x>0)$$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ |

··· ❷

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$에서 극소이자 최소이므로 시간의 차가 최

소가 되도록 하는 $x$의 값은 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다. ⋯➌

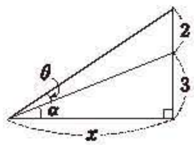
답 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ 시간의 차를 $x$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ➋ $f(x)$의 증감표를 완성할 수 있다. | 50% |
| ➌ $x$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1097** 전략 사람과 안내판 사이의 거리를 $x$ m라 하고 $\tan\theta$를 $x$로 나타낸다.

풀이 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta$의 값이 최대일 때 $\theta$의 값도 최대가 된다.




안내판의 아래끝을 바라본 각의 크기를 $\alpha$, 사람과 안내판 사이의 거리를 $x$ m라 하면

$$\tan\alpha=\frac{3}{x},\ \tan(\theta+\alpha)=\frac{5}{x}$$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\theta+\alpha-\alpha)=\frac{\tan(\theta+\alpha)-\tan\alpha}{1+\tan(\theta+\alpha)\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{5}{x}-\frac{3}{x}}{1+\frac{5}{x}\cdot\frac{3}{x}}=\frac{2x}{x^2+15}$$ ⋯➊

$f(x)=\frac{2x}{x^2+15}$ $(x>0)$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{2(x^2+15)-2x\cdot 2x}{(x^2+15)^2}=-\frac{2(x^2-15)}{(x^2+15)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x^2=15$ $\quad\therefore x=\sqrt{15}$ $(\because x>0)$

| $x$ | 0 | ⋯ | $\sqrt{15}$ | ⋯ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ |

⋯➋

따라서 $f(x)$, 즉 $\tan\theta$는 $x=\sqrt{15}$에서 극대이자 최대이므로 사람이 안내판으로부터 $\sqrt{15}$ m 전방에 있을 때 안내판이 가장 잘 보인다. ⋯➌

답 $\sqrt{15}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $\tan\theta$를 $x$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ➋ $f(x)$의 증감표를 완성할 수 있다. | 40% |
| ➌ 답을 구할 수 있다. | 20% |

**1098** 전략 방정식 $x^3=k(x-1)^2$, 즉 $\frac{x^3}{(x-1)^2}=k$의 실근의 개수는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$에서 $x\neq1$이고

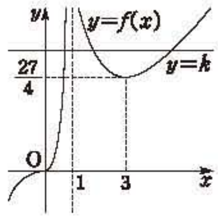
$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

| $x$ | ⋯ | 0 | ⋯ | 1 | ⋯ | 3 | ⋯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | + | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 0 | ↗ | | ↘ | $\frac{27}{4}$ | ↗ |

⋯➊




이때 $\lim_{x\to1+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to1-}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯➋

$x^3=k(x-1)^2$에서

$$\frac{x^3}{(x-1)^2}=k\ (x\neq1)$$

이므로 방정식 $x^3=k(x-1)^2$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$k>\frac{27}{4}$$ ⋯➌

답 $k>\frac{27}{4}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $f(x)$의 증감표를 완성할 수 있다. | 40% |
| ➋ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다. | 40% |
| ➌ $k$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 20% |

**1099** 전략 $f(x)$의 최솟값과 $g(x)$의 최댓값의 대소를 비교한다.

풀이 임의의 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $f(x_1)\geq g(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$의 최솟값이 $g(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 한다.

$f(x)=xe^x$에서

$$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

| $x$ | ⋯ | −1 | ⋯ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | $-\frac{1}{e}$ | ↗ |

따라서 $f(x)$의 최솟값은

$f(-1)=-\frac{1}{e}$이다. ⋯➊

한편 $g(x)=-x^2+k$의 최댓값은 $g(0)=k$이므로 ⋯➋

$$k\leq-\frac{1}{e}$$

따라서 $k$의 최댓값은 $-\frac{1}{e}$이다. ⋯➌

답 $-\frac{1}{e}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다. | 60% |
| ➋ $g(x)$의 최댓값을 구할 수 있다. | 20% |
| ➌ $k$의 최댓값을 구할 수 있다. | 20% |

## 10 여러 가지 적분법

**1100** $\int \frac{3}{x}dx=3\int \frac{1}{x}dx=3\ln|x|+C$ 답 $3\ln|x|+C$

**1101** $\int \frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$ 답 $-\frac{1}{x}+C$

**1102** $\int \sqrt[3]{x^2}dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$

답 $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$

**1103** $\int x\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

답 $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

**1104** $\int\left(x^2\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx=\int(x^{\frac{5}{2}}-2x^{-3})\,dx$

$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+x^{-2}+C$

$=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+C$

답 $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+C$

**1105** $\int\left(x-3+\frac{4}{x^5}\right)dx=\int(x-3+4x^{-5})\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2-3x-x^{-4}+C$

$=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{x^4}+C$

답 $\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{x^4}+C$

**1106** $\int \frac{x^3-x^2-2x}{x^3}dx=\int\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx$

$=\int\left(1-\frac{1}{x}-2x^{-2}\right)dx$

$=x-\ln|x|+2x^{-1}+C$

$=x-\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

답 $x-\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

**1107** $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$=2x^{\frac{1}{2}}+\ln|x|+C$

$=2\sqrt{x}+\ln|x|+C$ 답 $2\sqrt{x}+\ln|x|+C$

**1108** $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x|+C$

답 $\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x|+C$

**1109** $\int(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)dx=\int\{(\sqrt[4]{x})^2-1\}dx$

$=\int(x^{\frac{1}{2}}-1)dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+C$

답 $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+C$

**1110** $\int(3e^x+2^x)dx=3\int e^xdx+\int 2^xdx$

$=3e^x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$ 답 $3e^x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$

**1111** $\int(e^{x+2}-5^{x+1})dx=\int e^x\cdot e^2dx-\int 5^x\cdot 5dx$

$=e^2\int e^xdx-5\int 5^xdx$

$=e^2\cdot e^x-5\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+C$

$=e^{x+2}-\frac{5^{x+1}}{\ln 5}+C$

답 $e^{x+2}-\frac{5^{x+1}}{\ln 5}+C$

**1112** $\int(3^x+1)^2dx=\int(9^x+2\cdot 3^x+1)dx$

$=\int 9^xdx+2\int 3^xdx+\int dx$

$=\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2\cdot 3^x}{\ln 3}+x+C$

답 $\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2\cdot 3^x}{\ln 3}+x+C$

**1113** $\int(2\sin x+4\cos x)dx=2\int\sin x\,dx+4\int\cos x\,dx$

$=-2\cos x+4\sin x+C$

답 $-2\cos x+4\sin x+C$

**1114** $\int(1-\cot x)\sin x\,dx=\int\left(\sin x-\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin x\right)dx$

$=\int(\sin x-\cos x)\,dx$

$=-\cos x-\sin x+C$

답 $-\cos x-\sin x+C$

**1115** $\int(\cos x+\tan x)\sec x\,dx=\int(1+\sec x\tan x)dx$

$=x+\sec x+C$

답 $x+\sec x+C$

**1116** $\int\frac{2-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int(2\sec^2 x-1)dx$

$=2\tan x-x+C$ 답 $2\tan x-x+C$

**1117** $\int\frac{\sin^2 x+3}{\sin^2 x}dx=\int(1+3\csc^2 x)dx$

$=x-3\cot x+C$ 답 $x-3\cot x+C$

**1118** $1+\tan^2 x=\sec^2 x$이므로 $\tan^2 x=\sec^2 x-1$

$\therefore \int\tan^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)dx$

$=\tan x-x+C$ 답 $\tan x-x+C$

**1119** $1+\cot^2 x=\csc^2 x$이므로 $\cot^2 x=\csc^2 x-1$

$\therefore \int(\cot^2 x-1)dx=\int(\csc^2 x-2)dx$

$=-\cot x-2x+C$

답 $-\cot x-2x+C$

**1120** $4x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=4$이므로

$\int(4x-1)^3dx=\int t^3\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{16}t^4+C$

$=\frac{1}{16}(4x-1)^4+C$ 답 $\frac{1}{16}(4x-1)^4+C$

**1121** $5x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=5$이므로

$\int\frac{1}{(5x+1)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{5}dt=\frac{1}{5}\int t^{-2}dt$

$=-\frac{1}{5}t^{-1}+C=-\frac{1}{5t}+C$

$=-\frac{1}{5(5x+1)}+C$ 답 $-\frac{1}{5(5x+1)}+C$

**1122** $3-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$이므로

$\int\sqrt{3-x}\,dx=\int\sqrt{t}\cdot(-1)dt=-\int t^{\frac{1}{2}}dt$

$=-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$=-\frac{2}{3}(3-x)\sqrt{3-x}+C$

답 $-\frac{2}{3}(3-x)\sqrt{3-x}+C$

**1123** $-2x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2$이므로

$\int e^{-2x+3}dx=\int e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$

$=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-2x+3}+C$

답 $-\frac{1}{2}e^{-2x+3}+C$

**1124** $2x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이므로

$\int\cos(2x-1)dx=\int\cos t\cdot\frac{1}{2}dt$

$=\frac{1}{2}\sin t+C=\frac{1}{2}\sin(2x-1)+C$

답 $\frac{1}{2}\sin(2x-1)+C$

**1125** $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$\int x(x^2+1)^2dx=\int t^2\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{6}t^3+C$

$=\frac{1}{6}(x^2+1)^3+C$

답 $\frac{1}{6}(x^2+1)^3+C$

**1126** $x^3-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$이므로

$\int\frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$

$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$

$=2\sqrt{x^3-1}+C$ 답 $2\sqrt{x^3-1}+C$

**1127** $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$\int 2xe^{x^2}dx=\int e^t dt=e^t+C=e^{x^2}+C$ 답 $e^{x^2}+C$

**1128** $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$\int\frac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

답 $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

**1129** $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$\int\sin^2 x\cos x\,dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C$

$=\frac{1}{3}\sin^3 x+C$ 답 $\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

**1130** $(x^2+3)'=2x$이므로

$$\int \frac{x}{x^2+3}dx=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+3)'}{x^2+3}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+C \ (\because x^2+3>0)$$

답 $\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+C$

**1131** $(x^2-x+2)'=2x-1$이므로

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+2}dx=\int \frac{(x^2-x+2)'}{x^2-x+2}dx$$
$$=\ln(x^2-x+2)+C \ (\because x^2-x+2>0)$$

답 $\ln(x^2-x+2)+C$

**1132** $(e^x-1)'=e^x$이므로

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}dx=\int \frac{(e^x-1)'}{e^x-1}dx=\ln|e^x-1|+C$$

답 $\ln|e^x-1|+C$

**1133** $(\cot x)'=-\csc^2 x$이므로

$$\int \frac{\csc^2 x}{\cot x}dx=-\int \frac{(\cot x)'}{\cot x}dx=-\ln|\cot x|+C$$

답 $-\ln|\cot x|+C$

**1134** $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이고 $(\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=-\ln|\cos x|+C$$

답 $-\ln|\cos x|+C$

**1135** $\frac{x^2+4}{x-1}=x+1+\frac{5}{x-1}$이므로

$$\int \frac{x^2+4}{x-1}dx=\int\left(x+1+\frac{5}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x+5\ln|x-1|+C$$

답 $\frac{1}{2}x^2+x+5\ln|x-1|+C$

**1136** $\frac{1}{x^2+2x}=\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$이므로

$$\int \frac{1}{x^2+2x}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}(\ln|x|-\ln|x+2|)+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$$

답 $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$

**1137** $\frac{x-3}{x^2-1}=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}$로 놓으면

$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}=\frac{(a+b)x-a+b}{(x+1)(x-1)}$이므로

$x-3=(a+b)x-a+b$

앞의 등식은 $x$에 대한 항등식이므로

$a+b=1,\ -a+b=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

따라서 $\frac{x-3}{x^2-1}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}$이므로

$$\int \frac{x-3}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=2\ln|x+1|-\ln|x-1|+C$$
$$=\ln\frac{(x+1)^2}{|x-1|}+C$$

답 $\ln\frac{(x+1)^2}{|x-1|}+C$

**1138** $f(x)=x,\ g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=-e^{-x}$

$$\therefore \int xe^{-x}dx=x\cdot(-e^{-x})-\int 1\cdot(-e^{-x})dx$$
$$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$$
$$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$$

답 $-xe^{-x}-e^{-x}+C$

**1139** $f(x)=\ln x,\ g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x$

$$\therefore \int \ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int \frac{1}{x}\cdot x\,dx=x\ln x-\int dx$$
$$=x\ln x-x+C$$

답 $x\ln x-x+C$

**1140** $f(x)=x,\ g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=\sin x$

$$\therefore \int x\cos x\,dx=x\sin x-\int 1\cdot\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C$$

답 $x\sin x+\cos x+C$

**유형 01** 함수 $y=x^n$의 부정적분 본책 162쪽

① $n\neq-1$일 때, $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

② $n=-1$일 때, $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

**1141** $f(x)=\int \frac{1-x^2}{x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-x\right)dx$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}x^2+C$$

$f(e)=-\frac{1}{2}e^2$이므로 $1-\frac{1}{2}e^2+C=-\frac{1}{2}e^2 \quad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=\ln|x|-\frac{1}{2}x^2-1$이므로

$f(1)=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$

답 ②

**1142** $F(x)=\int(x\sqrt{x}-x-2)dx=\int(x^{\frac{3}{2}}-x-2)dx$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}x^2-2x+C$$

$$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2-2x+C$$

$F(1)=-1$이므로 $\frac{2}{5}-\frac{1}{2}-2+C=-1$ $\quad\therefore C=\frac{11}{10}$

$\therefore F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{10}$

답 $F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{10}$

**1143** $f'(x)=\frac{2}{x\sqrt{x}}$이므로

$$f(x)=\int\frac{2}{x\sqrt{x}}dx=\int 2x^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$=-4x^{-\frac{1}{2}}+C_1$$

$f(1)=1$이므로 $-4+C_1=1$ $\quad\therefore C_1=5$

$\therefore f(x)=-4x^{-\frac{1}{2}}+5$

따라서 $f(x)$의 부정적분은

$$\int(-4x^{-\frac{1}{2}}+5)dx=-8x^{\frac{1}{2}}+5x+C$$

$$=-8\sqrt{x}+5x+C$$

답 $-8\sqrt{x}+5x+C$

**1144** $f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1$이므로

$$f(x)=\int(\sqrt{x}-1)dx=\int(x^{\frac{1}{2}}-1)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C$$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+C$ ⋯ ❶

$f(1)=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{2}{3}-1+C=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+1$이므로 ⋯ ❷

$f(4)=\frac{2}{3}\cdot4\sqrt{4}-4+1=\frac{7}{3}$ ⋯ ❸

답 $\frac{7}{3}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $f(x)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $f(4)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1145** $F(x)=xf(x)-x-\ln x$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-1-\frac{1}{x}$ $\quad\therefore f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

$$\therefore f(x)=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}+x^{-2}\right)dx$$

$$=\ln x-\frac{1}{x}+C$$

$f(1)=-1$이므로 $-1+C=-1$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$이므로

$f(e^2)=2-\frac{1}{e^2}$

답 ⑤

**유형 02, 03 지수함수의 부정적분** 본책 162, 163쪽

① $\int e^x dx=e^x+C$

② $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

**1146** $f(x)=\int\frac{1-e^{2x}}{1+e^x}dx=\int\frac{(1+e^x)(1-e^x)}{1+e^x}dx$

$$=\int(1-e^x)dx=x-e^x+C$$

$f(0)=1$이므로 $-1+C=1$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=x-e^x+2$이므로

$f(1)=1-e+2=3-e$

답 ③

**1147** $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=\frac{4-xe^x}{x}=\frac{4}{x}-e^x$ ⋯ ❶

$$\therefore f(x)=\int\left(\frac{4}{x}-e^x\right)dx=4\ln|x|-e^x+C$$

$f(1)=e^2-e$이므로 $-e+C=e^2-e$ $\quad\therefore C=e^2$

따라서 $f(x)=4\ln|x|-e^x+e^2$이므로 ⋯ ❷

$f(2)=4\ln2-e^2+e^2=4\ln2$ ⋯ ❸

답 $4\ln2$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $f(x)$를 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1148** $y=\ln x+1$로 놓으면

$y-1=\ln x$ $\quad\therefore x=e^{y-1}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=e^{x-1}$

따라서 $g(x)=e^{x-1}$이므로

$$\int g(x)dx=\int e^{x-1}dx=\int e^x\cdot e^{-1}dx=e^{-1}\int e^x dx$$

$$=e^{-1}\cdot e^x+C=e^{x-1}+C$$

답 $e^{x-1}+C$

**1149** $f(x)=\int\frac{8^x-1}{2^x-1}dx=\int\frac{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}{2^x-1}dx$

$$=\int(4^x+2^x+1)dx$$

$$=\frac{4^x}{\ln4}+\frac{2^x}{\ln2}+x+C$$

$f(1)=\frac{4}{\ln2}$이므로 $\frac{4}{\ln4}+\frac{2}{\ln2}+1+C=\frac{4}{\ln2}$ $\quad\therefore C=-1$

즉 $f(x)=\frac{4^x}{\ln4}+\frac{2^x}{\ln2}+x-1$이므로

$$f(2)=\frac{16}{\ln4}+\frac{4}{\ln2}+1=\frac{8}{\ln2}+\frac{4}{\ln2}+1=\frac{12}{\ln2}+1$$

따라서 $a=12$, $b=1$이므로 $a+b=13$

답 13

**1150** $\int(10^x-1)(100^x+10^x+1)dx$

$=\int(10^x-1)(10^{2x}+10^x+1)dx$

$=\int(10^{3x}-1)dx=\int(1000^x-1)dx$

$=\dfrac{1000^x}{\ln 1000}-x+C=\dfrac{10^{3x}}{3\ln 10}-x+C$ 답 ④

**1151** $f'(x)=\begin{cases}3^x & (x>0)\\ x+1 & (x<0)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^x}{\ln 3}+C_1 & (x>0)\\ \dfrac{1}{2}x^2+x+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

$f(-1)=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}-1+C_2=\frac{1}{2}$ $\therefore C_2=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1\ (x<0)$ ⋯ ❶

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim\limits_{x\to0+}\left(\dfrac{3^x}{\ln 3}+C_1\right)=\lim\limits_{x\to0-}\left(\dfrac{1}{2}x^2+x+1\right)$

$\dfrac{1}{\ln 3}+C_1=1$ $\therefore C_1=1-\dfrac{1}{\ln 3}$

$\therefore f(x)=\dfrac{3^x-1}{\ln 3}+1\ (x\ge0)$ ⋯ ❷

따라서 $f(1)=\dfrac{2}{\ln 3}+1$, $f(-2)=2-2+1=1$이므로

$f(1)-f(-2)=\dfrac{2}{\ln 3}+1-1=\dfrac{2}{\ln 3}$

$\therefore k=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $x<0$일 때 $f(x)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $x\ge0$일 때 $f(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $k$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

## 유형 04, 05 삼각함수의 부정적분

본책 163, 164쪽

삼각함수를 포함한 피적분함수가 간단히 적분되지 않는 경우
➡ 삼각함수 사이의 관계, 삼각함수의 덧셈정리, 배각의 공식, 반각의 공식 등을 이용하여 피적분함수를 적분하기 쉬운 꼴로 변형한다.

**1152** $f(x)=\int\dfrac{\cos^2x}{1-\sin x}dx=\int\dfrac{1-\sin^2x}{1-\sin x}dx$

$=\int\dfrac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x}dx$

$=\int(1+\sin x)dx=x-\cos x+C$

$f(0)=1$이므로 $-1+C=1$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=x-\cos x+2$이므로

$f(\pi)=\pi-(-1)+2=\pi+3$ 답 ③

**1153** $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)-\{f(x-\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}$

$=f'(x)+f'(x)=2f'(x)$

즉 $2f'(x)=4\cos^2\dfrac{x}{2}$이므로

$f'(x)=2\cos^2\dfrac{x}{2}=2\cdot\dfrac{1+\cos x}{2}=1+\cos x$

$\therefore f(x)=\int(1+\cos x)\,dx=x+\sin x+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x+\sin x$이므로 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+1$ 답 ⑤

**1154** $\int\dfrac{\sin x(\sin x-1)}{\cos^2x}dx$

$=\int\dfrac{\sin^2x-\sin x}{\cos^2x}dx=\int\left\{\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2-\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right\}dx$

$=\int(\tan^2x-\tan x\sec x)dx$

$=\int(\sec^2x-1-\tan x\sec x)dx$

$=\tan x-\sec x-x+C$

따라서 $p=1$, $q=-1$, $r=-1$이므로 $pqr=1$ 답 1

**1155** $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot2+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=2f'(x)+f'(x)=3f'(x)$

즉 $3f'(x)=\tan^2x$이므로 $f'(x)=\dfrac{1}{3}\tan^2x$

$\therefore f(x)=\int\dfrac{1}{3}\tan^2x\,dx=\dfrac{1}{3}\int(\sec^2x-1)dx$

$=\dfrac{1}{3}(\tan x-x)+C$

$\therefore f\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\left(1-\dfrac{5}{4}\pi\right)+C-\left\{\dfrac{1}{3}\cdot\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)+C\right\}$

$=-\dfrac{\pi}{3}$ 답 ①

**1156** $f(x)=\int\cos^2\dfrac{x}{2}\,dx=\int\dfrac{1+\cos x}{2}dx$

$=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin x+C$

$f(0)=\pi$이므로 $C=\pi$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin x+\pi$이므로

$f(\pi)=\dfrac{\pi}{2}+\pi=\dfrac{3}{2}\pi$ 답 $\dfrac{3}{2}\pi$

SSEN 특강

**반각의 공식**

① $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ ② $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

③ $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

**1157** $f'(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$

$=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$=1+\sin x$ ··· ①

$\therefore f(x)=\int(1+\sin x)dx=x-\cos x+C$

$f(0)=-2$이므로 $-1+C=-2$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=x-\cos x-1$이므로 ··· ②

$f(\pi)=\pi+1-1=\pi$ ··· ③

답 $\pi$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ① $f'(x)$를 간단히 할 수 있다. | 40% |
| ② $f(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ③ $f(\pi)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

SSEN 특강

**배각의 공식**

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

**1158** $\int\frac{1}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{1}{1+(2\cos^2 x-1)}dx$

$=\int\frac{1}{2\cos^2 x}dx$

$=\frac{1}{2}\int\sec^2 x\,dx=\frac{1}{2}\tan x+C$

답 $\frac{1}{2}\tan x+C$

**유형 06 치환적분법; 함수 $y=\{f(x)\}^n$** 본책 164쪽

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\int f'(x)\{f(x)\}^n dx$의 부정적분

➡ $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$\int f'(x)\{f(x)\}^n dx=\int t^n dt=\frac{1}{n+1}t^{n+1}+C$

$=\frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1}+C$

**1159** $3x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$이므로

$\int(3x+2)^6 dx=\int t^6\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{21}t^7+C$

$=\frac{1}{21}(3x+2)^7+C$

따라서 $a=21$, $b=7$이므로 $a-b=14$

답 ②

**1160** $x^2+x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$이므로

$f(x)=\int(2x+1)(x^2+x-1)^5 dx$

$=\int t^5 dt=\frac{1}{6}t^6+C$

$=\frac{1}{6}(x^2+x-1)^6+C$ ··· ①

$f(0)=1$이므로 $\frac{1}{6}+C=1$ $\therefore C=\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{6}(x^2+x-1)^6+\frac{5}{6}$이므로 ··· ②

$f(1)=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$ ··· ③

답 1

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ① 부정적분을 구할 수 있다. | 50% |
| ② $f(x)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ③ $f(1)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1161** $mx-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=m$이므로

$f(x)=\int(mx-2)^8 dx=\int t^8\cdot\frac{1}{m}dt$

$=\frac{1}{9m}t^9+C=\frac{1}{9m}(mx-2)^9+C$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 9이므로

$\frac{1}{9m}\cdot m^9=9$, $m^8=81$

$\therefore m=(3^4)^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ ($\because m>0$)

답 $\sqrt{3}$

다른 풀이 $f(x)=\int(mx-2)^8 dx$는 9차식이고, 최고차항의 계수가 9이므로 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 81이다.

$f'(x)=(mx-2)^8$이므로

$m^8=81$ $\therefore m=\sqrt{3}$ ($\because m>0$)

**1162** $x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이므로

$f(x)=\int\frac{x-3}{(x-1)^3}dx=\int\frac{t-2}{t^3}dt$

$=\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t^3}\right)dt=-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+C$

$=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+C$

$f(0)=3$이므로 $1+1+C=3$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+1$이므로

$f(2)=-1+1+1=1$

답 1

**유형 07 치환적분법; 무리함수** 본책 165쪽

$\int f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx$ 또는 $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$의 부정적분

➡ $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C=\frac{2}{3}f(x)\sqrt{f(x)}+C$$

$$\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{f(x)}+C$$

**1163** $x^2+2x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+2=2(x+1)$이므로

$$\int(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}\,dx=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}+C$$

$\therefore a=\frac{1}{3}$ 답 ①

**1164** $1-x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2x$이므로

$$f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=-\sqrt{t}+C$$
$$=-\sqrt{1-x^2}+C$$

$f(0)=-1$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=-\sqrt{1-x^2}$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{1-\frac{1}{4}}-\sqrt{1-\frac{1}{4}}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$

답 ②

**1165** $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$이므로 $f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

$x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이므로

$$f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{t-1}{\sqrt{t}}dt=\int(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}-2\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}+C$$

$f(0)=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{2}{3}-2+C=\frac{2}{3}$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}+2$이므로

$$f(3)=\frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4}-2\sqrt{4}+2=\frac{10}{3}$$

답 ⑤

**유형 08 치환적분법; 지수함수** 본책 165쪽

(1) $\int f'(x)e^{f(x)}dx$의 부정적분

➡ $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx=\int e^t dt=e^t+C=e^{f(x)}+C$$

(2) $\int f(e^x)e^x dx$의 부정적분

➡ $e^x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로 $\int f(e^x)e^x dx=\int f(t)dt$

**1166** $e^x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\frac{3}{2}\int e^x(e^x+1)^5dx=\frac{3}{2}\int t^5dt$$
$$=\frac{1}{4}t^6+C=\frac{1}{4}(e^x+1)^6+C$$

$f(0)=16$이므로 $\frac{1}{4}\cdot 2^6+C=16$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(e^x+1)^6$이므로

$$\sqrt{f(\ln 3)}=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 4^6}=\sqrt{2^{10}}=2^5=32$$ 답 ④

**1167** $e^x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{e^x+3}+C$$

$f(0)=2$이므로 $4+C=2$ $\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=2\sqrt{e^x+3}-2$이므로

$f(\ln 6)=2\sqrt{6+3}-2=4$ 답 ③

**1168** ㄱ. $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int 4xe^{x^2+1}dx=\int e^t\cdot 2\,dt=2e^t+C=2e^{x^2+1}+C$$

ㄴ. $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx=\int -e^t dt$$
$$=-e^t+C=-e^{\cos x}+C$$

ㄷ. $x^2-5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int x\cdot 3^{x^2-5}dx=\int\frac{1}{2}\cdot 3^t dt=\frac{1}{2}\int 3^t dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^t}{\ln 3}+C=\frac{3^{x^2-5}}{2\ln 3}+C$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

**1169** $f'(x)=e^x\sqrt{e^x+5}$이므로 $f(x)=\int e^x\sqrt{e^x+5}\,dx$

$e^x+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int e^x\sqrt{e^x+5}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(e^x+5)\sqrt{e^x+5}+C$$

$f(0)=4\sqrt{6}$이므로 $\quad \frac{2}{3}\cdot6\sqrt{6}+C=4\sqrt{6} \quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}(e^x+5)\sqrt{e^x+5}$

한편 $0\le x\le \ln 4$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=\ln 4$에서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(\ln 4)=\frac{2}{3}\cdot9\sqrt{9}=18$ 답 18

**1170** (i) $x>0$일 때, $f'(x)=xe^{x^2}$이므로

$$f(x)=\int xe^{x^2}dx$$

$x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int xe^{x^2}dx=\int e^t\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}e^t+C_1=\frac{1}{2}e^{x^2}+C_1$$

(ii) $x<0$일 때, $f'(x)=4x^3(x^4+1)^3$이므로

$$f(x)=\int 4x^3(x^4+1)^3dx$$

$x^4+1=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=4x^3$이므로

$$f(x)=\int 4x^3(x^4+1)^3dx=\int s^3ds$$
$$=\frac{1}{4}s^4+C_2=\frac{1}{4}(x^4+1)^4+C_2$$

이때 $f(-1)=3$이므로 $\quad 4+C_2=3$

$\therefore C_2=-1$

(i), (ii)에서 $\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x^2}+C_1 & (x>0)\\ \frac{1}{4}(x^4+1)^4-1 & (x<0)\end{cases}$

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{2}e^{x^2}+C_1\right)=\lim_{x\to0-}\left\{\frac{1}{4}(x^4+1)^4-1\right\}$$

$\frac{1}{2}+C_1=-\frac{3}{4} \quad \therefore C_1=-\frac{5}{4}$

따라서 $x>0$에서 $f(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{5}{4}$이므로

$f(1)=\frac{2e-5}{4}$ 답 ①

**유형 09 치환적분법: 로그함수** 본책 166쪽

$\int\frac{f(\ln x)}{x}dx$의 부정적분

→ $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로 $\quad \int\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int f(t)dt$

**1171** $F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{3}{x(\ln x)^2}dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$F(x)=\int\frac{3}{x(\ln x)^2}dx=\int\frac{3}{t^2}dt=3\int t^{-2}dt$$
$$=-\frac{3}{t}+C=-\frac{3}{\ln x}+C$$

$F(e)=0$이므로 $\quad -3+C=0 \quad \therefore C=3$

따라서 $F(x)=-\frac{3}{\ln x}+3$이므로

$F\left(\frac{1}{e}\right)=3+3=6$ 답 6

**1172** $f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x+5}}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x+5}}dx$$

$\ln x+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x+5}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$$
$$=2\sqrt{\ln x+5}+C \quad \cdots❶$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$을 지나므로 $\quad f\left(\frac{1}{e}\right)=1$

$2\sqrt{-1+5}+C=1 \quad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=2\sqrt{\ln x+5}-3$이므로 ⋯❷

$f(e^4)=2\sqrt{4+5}-3=3$ ⋯❸

답 3

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 부정적분을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $f(x)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $f(e^4)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1173** $xf'(x)=2\ln x$에서

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x} \quad \therefore f(x)=\int\frac{2\ln x}{x}dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{2\ln x}{x}dx=\int 2t\,dt=t^2+C=(\ln x)^2+C$$

$f(1)=-4$이므로 $\quad C=-4$

$\therefore f(x)=(\ln x)^2-4$

방정식 $f(x)=3\ln x$에서

$(\ln x)^2-4=3\ln x, \quad (\ln x)^2-3\ln x-4=0$

$(\ln x+1)(\ln x-4)=0, \quad \ln x=-1$ 또는 $\ln x=4$

$\therefore x=\frac{1}{e}$ 또는 $x=e^4$

따라서 모든 $x$의 값의 곱은

$\frac{1}{e}\cdot e^4=e^3$ 답 ②

**1174** $(x^2+1)f'(x)=6x\ln(x^2+1)$에서

$$f'(x)=\frac{6x\ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$\therefore f(x)=\int\frac{6x\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx$$

이때 $\ln(x^2+1)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}$이므로

$$f(x)=\int\frac{6x\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx=\int t\cdot 3\,dt$$

$$=\frac{3}{2}t^2+C=\frac{3}{2}\{\ln(x^2+1)\}^2+C$$

$f(0)=-2$이므로 $C=-2$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}\{\ln(x^2+1)\}^2-2$ 답 $f(x)=\frac{3}{2}\{\ln(x^2+1)\}^2-2$

**유형 10 치환적분법; $\sin ax$, $\cos ax$ 꼴** 본책 166쪽

0이 아닌 실수 $a$에 대하여 $\int\sin ax\,dx$, $\int\cos ax\,dx$의 부정적분

➡ $ax=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=a$이므로

$$\int\sin ax\,dx=\frac{1}{a}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{a}\cos t+C=-\frac{1}{a}\cos ax+C$$

$$\int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\int\cos t\,dt=\frac{1}{a}\sin t+C=\frac{1}{a}\sin ax+C$$

**1175** $\int(2\sin^2x+\cos^2 2x)dx$

$$=\int\left(2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{2}\cos 4x-\cos 2x+\frac{3}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}x+C$$

따라서 $a=\frac{1}{8}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로 $a+b=-\frac{3}{8}$ 답 $-\frac{3}{8}$

**1176** $f'(x)=(1+\sin x)^2=\sin^2x+2\sin x+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(\sin^2x+2\sin x+1)dx$$

$$=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}+2\sin x+1\right)dx$$

$$=\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+2\sin x+\frac{3}{2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\sin 2x-2\cos x+\frac{3}{2}x+C$$

$f(0)=1$이므로 $-2+C=1$ $\therefore C=3$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}\sin 2x-2\cos x+\frac{3}{2}x+3$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi+3$$ 답 ⑤

**1177** $f'(x)=\sin 2x-\cos x=2\sin x\cos x-\cos x$

$=\cos x(2\sin x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극솟값을 갖고,

$x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값을 갖는다. ➡ ❶

한편

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(\sin 2x-\cos x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x+C$$

이고 극솟값이 $\frac{1}{4}$이므로 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+C=\frac{1}{4}$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x+1$이므로 극댓값은 ➡ ❷

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}-1+1=\frac{1}{2}$$ ➡ ❸

답 $\frac{1}{2}$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $f(x)$가 극값을 갖는 $x$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $f(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ 극댓값을 구할 수 있다. | 20% |

**1178** $f(x)=\int\sin 2x\cos^2x\,dx+\int 2\sin^3x\cos x\,dx$

$$=\int\sin 2x\cos^2x\,dx+\int(2\sin x\cos x)\sin^2x\,dx$$

$$=\int\sin 2x\cos^2x\,dx+\int\sin 2x\sin^2x\,dx$$

$$=\int\sin 2x(\cos^2x+\sin^2x)dx$$

$$=\int\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

$f(\pi)=-\frac{1}{2}$이므로 $-\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{2}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$ 답 $\frac{1}{4}$

**유형 11 치환적분법; 삼각함수** 본책 167쪽

$\int f(\sin x)\cos x\,dx$의 부정적분

➡ $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx=\int f(t)dt$$

**1179** $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx=\int \frac{\sin^2 x\cdot \sin x}{1+\cos x}dx$

$=\int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{1+\cos x}dx$

$=\int \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)\sin x}{1+\cos x}dx$

$=\int (1-\cos x)\sin x\,dx$

$1-\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sin x$이므로

$\int (1-\cos x)\sin x\,dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$

$=\frac{1}{2}(1-\cos x)^2+C$ 답 ④

**1180** $f'(x)=\sec^2 x\tan x$이므로 $f(x)=\int \sec^2 x \tan x\,dx$

$\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$이므로

$f(x)=\int \sec^2 x\tan x\,dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

이때 $f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{1}{2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2+\frac{1}{2}=2$ 답 2

**1181** $f(x)=\int \cos^3 x\,dx=\int \cos^2 x\cdot\cos x\,dx$

$=\int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$f(x)=\int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int (1-t^2)dt$

$=t-\frac{1}{3}t^3+C=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

이때 $f(\pi)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+1$이므로

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{1}{3}+1=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

### 유형 12 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴의 부정적분

본책 167쪽

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

**1182** $(x^2+x+1)'=2x+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx$

$=\ln(x^2+x+1)+C$ ($\because x^2+x+1>0$)

$f(-1)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=\ln(x^2+x+1)+2$이므로

$f(1)=\ln 3+2$ 답 ③

**1183** $(x^2-2x-2)'=2x-2$이므로

$f(x)=\int \frac{x-1}{x^2-2x-2}dx=\int \frac{\frac{1}{2}(x^2-2x-2)'}{x^2-2x-2}dx$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-2|+C$

$f(-1)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-2|$ 답 ③

**1184** $(2-\cos x)'=\sin x$이므로

$f(x)=\int \frac{\sin x}{2-\cos x}dx=\int \frac{(2-\cos x)'}{2-\cos x}dx$

$=\ln(2-\cos x)+C$ ($\because 2-\cos x>0$)

이때 $f(0)=0$이므로 $\ln(2-1)+C=0$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln(2-\cos x)$이므로

$f(\pi)=\ln\{2-(-1)\}=\ln 3$ 답 $\ln 3$

**1185** $\int \frac{2e^x}{e^x+1}dx$에서 $(e^x+1)'=e^x$이므로

$\int \frac{2e^x}{e^x+1}dx=2\int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx$

$=2\ln(e^x+1)+C_1$ ($\because e^x+1>0$)

$\int \frac{3^x\ln 3}{3^x+1}dx$에서 $(3^x+1)'=3^x\ln 3$이므로

$\int \frac{3^x\ln 3}{3^x+1}dx=\int \frac{(3^x+1)'}{3^x+1}dx$

$=\ln(3^x+1)+C_2$ ($\because 3^x+1>0$)

$\therefore f(x)=2\ln(e^x+1)+\ln(3^x+1)+C$ ⋯ ❶

이때 $f(0)=\ln 2$이므로

$2\ln 2+\ln 2+C=\ln 2$ $\therefore C=-2\ln 2$

따라서 $f(x)=2\ln(e^x+1)+\ln(3^x+1)-2\ln 2$이므로 ⋯ ❷

$f(1)=2\ln(e+1)+\ln 4-2\ln 2=2\ln(e+1)$

$\therefore a=2$ ⋯ ❸

답 2

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 부정적분을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $f(x)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $a$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1186** $f'(x)=2f(x)$에서 $\frac{f'(x)}{f(x)}=2$이므로

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 2\,dx$

$\ln f(x)=2x+C$ ($\because f(x)>0$)

$\therefore f(x)=e^{2x+C}$

이때 $f'(0)=2$이므로

$2=2f(0)$ $\therefore f(0)=1$

즉 $f(0)=e^C=1$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=e^{2x}$이므로 $\quad f(1)=e^2$ 답 ⑤

**1187** $f(x)=\int \frac{1}{\sin x}dx=\int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$

$$=\int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}dx=\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}dx$$

$\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$이므로

$$f(x)=\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}dx=\int \frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}dx$$
$$=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C\left(\because \tan\frac{x}{2}>0\right)$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 $\quad \ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)+C=0$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$이므로

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\ln\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$ 답 $\frac{1}{2}\ln 3$

**다른 풀이** $f(x)=\int \frac{1}{\sin x}dx=\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$

$\cos x=t\,(-1<t<1)$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$f(x)=\int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx=\int \frac{1}{t^2-1}dt$$
$$=\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\{\ln(1-t)-\ln(t+1)\}+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t}+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$이므로

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\ln 3$

## 유형 13 분수함수의 부정적분; (분자의 차수)≥(분모의 차수) 본책 168쪽

분자를 분모로 나누어 몫과 나머지의 꼴로 나타낸 후 부정적분을 구한다.

**1188** $f'(x)=\frac{2x^2+x+2}{x+1}=2x-1+\frac{3}{x+1}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(2x-1+\frac{3}{x+1}\right)dx$$
$$=x^2-x+3\ln|x+1|+C$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $\quad f(0)=1$

$\therefore C=1$

따라서 $f(x)=x^2-x+3\ln|x+1|+1$이므로

$f(1)=3\ln 2+1$ 답 ⑤

**1189** $y=\frac{-x-1}{x-2}$로 놓으면 $\quad xy-2y=-x-1$

$x(y+1)=2y-1 \quad \therefore x=\frac{2y-1}{y+1}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\frac{2x-1}{x+1}$이므로

$g(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ ➊

$$\therefore \int g(x)dx=\int \frac{2x-1}{x+1}dx$$
$$=\int\left(2-\frac{3}{x+1}\right)dx$$
$$=2x-3\ln|x+1|+C$$ ➋

답 $2x-3\ln|x+1|+C$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ $g(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ➋ $\int g(x)dx$를 구할 수 있다. | 60% |

## 유형 14 분수함수의 부정적분; (분자의 차수)<(분모의 차수) 본책 168쪽

피적분함수를 부분분수로 변형하여 부정적분을 구한다.

**1190** $\frac{2x}{x^2+3x+2}=\frac{2x}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$로 놓으면

$2x=(a+b)x+2a+b$

위의 등식은 $x$에 대한 항등식이므로

$a+b=2,\ 2a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=4$

$$\therefore \int \frac{2x}{x^2+3x+2}dx=\int\left(-\frac{2}{x+1}+\frac{4}{x+2}\right)dx$$
$$=-2\ln|x+1|+4\ln|x+2|+C$$

답 ④

**1191** $f(x)=\int \frac{x-3}{x^2-x-2}dx+\int \frac{6-x}{x^2-x-2}dx$

$$=\int\left(\frac{x-3}{x^2-x-2}+\frac{6-x}{x^2-x-2}\right)dx$$
$$=\int \frac{3}{x^2-x-2}dx=\int \frac{3}{(x-2)(x+1)}dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\ln|x-2|-\ln|x+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|$이므로

$f(0)=\ln|-2|=\ln 2$ 답 $\ln 2$

**1192** $x^3-2x^2+x-2=x^2(x-2)+x-2=(x-2)(x^2+1)$이므로

$$\frac{2x+1}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{a}{x-2}+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

로 놓으면

$2x+1=(a+b)x^2+(c-2b)x+a-2c$

위의 등식은 $x$에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ c-2b=2,\ a-2c=1$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-1,\ c=0$

$$\therefore \int\frac{2x+1}{x^3-2x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

$(\because x^2+1>0)$

답 $\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

**1193** $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x^2-1}dx=\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}dx$$
$$=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$이므로

$a=f(2)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\ln 3$ 답 ③

**1194** 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로 $\quad x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\therefore \int\frac{1}{x^2+ax+b}dx=\int\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx$$
$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\int\left(\frac{1}{x-\beta}-\frac{1}{x-\alpha}\right)dx$$
$$=\frac{1}{\beta-\alpha}(\ln|x-\beta|-\ln|x-\alpha|)+C$$
$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\ln\left|\frac{x-\beta}{x-\alpha}\right|+C$$

답 ③

**1195** $f'(x)=\frac{1}{1-e^x}$이므로 $\quad f(x)=\int\frac{1}{1-e^x}dx$

$1-e^x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-e^x=t-1$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{1-e^x}dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t-1}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln|t-1|-\ln|t|+C$$
$$=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C=\ln\left|\frac{-e^x}{1-e^x}\right|+C$$
$$=\ln\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right|+C$$

$$\therefore f(2)-f(1)=\left(\ln\frac{e^2}{e^2-1}+C\right)-\left(\ln\frac{e}{e-1}+C\right)$$
$$=\ln\frac{e^2}{e^2-1}-\ln\frac{e}{e-1}=\ln\left(\frac{e^2}{e^2-1}\cdot\frac{e-1}{e}\right)$$
$$=\ln\frac{e}{e+1}$$

답 ①

**15, 16 부분적분법** 본책 169, 170쪽

① $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

└ 적분하기 쉬운 함수

└ 미분한 결과가 간단한 함수

② 부분적분법을 한 번 적용하여 부정적분을 구할 수 없을 때에는 부분적분법을 한 번 더 적용한다.

**1196** $u(x)=x-1,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$

$$\therefore f(x)=\int(x-1)e^x dx=(x-1)e^x-\int e^x dx$$
$$=(x-1)e^x-e^x+C$$
$$=(x-2)e^x+C$$

$f(0)=-2$이므로 $\quad -2+C=-2 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=(x-2)e^x$이므로 $\quad f(3)=e^3$ 답 $e^3$

**1197** $u(x)=x,\ v'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$$\therefore \int x\cos 2x\,dx=x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

따라서 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$이므로 $\quad \frac{a}{b}=2$ 답 ⑤

**1198** $u(x)=\ln(x+1),\ v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x+1},\ v(x)=x$

$$\therefore \int\ln(x+1)dx=x\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx$$
$$=x\ln(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C$$
$$=(x+1)\ln(x+1)-x+C$$

따라서 $f(x)=x+1$이므로 $\quad f(2017)=2018$ 답 ③

**1199** $\{e^{f(x)}\}'=x\sin x\cdot e^{f(x)}$에서 $e^{f(x)}\cdot f'(x)=x\sin x\cdot e^{f(x)}$

$\therefore f'(x)=x\sin x$ ⋯ ❶

즉 $f(x)=\int x\sin x\,dx$이므로 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$\therefore f(x)=\int x\sin x\,dx=x\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)dx$

$=-x\cos x+\sin x+C$ ⋯ ❷

$f(0)=-1$이므로 $C=-1$

따라서 $f(x)=-x\cos x+\sin x-1$이므로 ⋯ ❸

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1-1=-2$ ⋯ ❹

답 $-2$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $f(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ❹ $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1200** $F'(x)=\cos x\cdot\ln(\sin x)$이므로

$F(x)=\int\cos x\cdot\ln(\sin x)dx$

$u(x)=\ln(\sin x)$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$, $v(x)=\sin x$

$\therefore F(x)=\int\cos x\cdot\ln(\sin x)dx$

$=\ln(\sin x)\cdot\sin x-\int\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin x\,dx$

$=\sin x\cdot\ln(\sin x)-\int\cos x\,dx$

$=\sin x\cdot\ln(\sin x)-\sin x+C$

$F\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\ln 2$이므로 $C=\frac{1}{2}$

따라서 $F(x)=\sin x\cdot\ln(\sin x)-\sin x+\frac{1}{2}$이므로

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

**1201** $y=e^{2x-1}$으로 놓으면 $\ln y=2x-1$

$2x=\ln y+1$ $\therefore x=\frac{1}{2}\ln y+\frac{1}{2}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}$이므로

$g(x)=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}$

$\therefore \int g(x)dx=\int\left(\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int\ln x\,dx+\frac{1}{2}\int dx$ ⋯⋯ ㉠

$\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$\therefore \int\ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$=x\ln x-x+C_1$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int g(x)dx=\frac{1}{2}(x\ln x-x+C_1)+\frac{1}{2}x+C_2$

$=\frac{1}{2}x\ln x+C$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

**1202** $g(x)=x^2$, $h'(x)=\sin x$로 놓으면

$g'(x)=2x$, $h(x)=-\cos x$

$\therefore f(x)=\int x^2\sin x\,dx$

$=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx$ ⋯⋯ ㉠

$\int x\cos x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$

$\therefore \int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=x\sin x+\cos x+C_1$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x+C_1)$

$=(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$이므로 $\pi+C=\pi$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$이므로

$f(\pi)=(2-\pi^2)\cdot(-1)=\pi^2-2$

답 ③

**1203** $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$\therefore h(x)=\int(\ln x)^2dx=(\ln x)^2\cdot x-\int 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx$ ⋯⋯ ㉠

$\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$\therefore \int\ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$=x\ln x-x+C_1$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$h(x)=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x+C_1)$

$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$ ⋯ ❶

$h(1)=2$이므로 $2+C=2$ $\therefore C=0$

따라서 $h(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$이므로 ⋯ ❷

$h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot(-1)^2-2\cdot\frac{1}{e}\cdot(-1)+2\cdot\frac{1}{e}=\frac{5}{e}$ ⋯ ❸

답 $\frac{5}{e}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ 부정적분을 구할 수 있다. | 60% |
| ❷ $h(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ❸ $h\left(\frac{1}{e}\right)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1204** $f'(x)=e^x\sin x$이므로 $\quad f(x)=\int e^x\sin x\,dx$

$h(x)=\sin x$, $k'(x)=e^x$으로 놓으면

$h'(x)=\cos x$, $k(x)=e^x$

$\therefore f(x)=\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$ ...... ㉠

$\int e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$

$=e^x\cos x+f(x)+C_1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=e^x\sin x-\{e^x\cos x+f(x)+C_1\}$

$=e^x\sin x-e^x\cos x-f(x)-C_1$

$2f(x)=e^x(\sin x-\cos x)-C_1$

$\therefore f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$

$f(0)=-\frac{1}{2}$이므로 $\quad -\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{2} \quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)$

따라서 $g(x)=\sin x-\cos x$이므로

$g(\pi)=0-(-1)=1$ 답 ③

**1205** $f'(x)=e^{-x}\cos 2x$이므로

$f(x)=\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

$g(x)=\cos 2x$, $h'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$g'(x)=-2\sin 2x$, $h(x)=-e^{-x}$

$\therefore f(x)=\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

$=-e^{-x}\cos 2x-2\int e^{-x}\sin 2x\,dx$ ...... ㉠

$\int e^{-x}\sin 2x\,dx$에서 $u(x)=\sin 2x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=2\cos 2x$, $v(x)=-e^{-x}$

$\therefore \int e^{-x}\sin 2x\,dx=-e^{-x}\sin 2x+2\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

$=-e^{-x}\sin 2x+2f(x)+C_1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-e^{-x}\cos 2x-2\{-e^{-x}\sin 2x+2f(x)+C_1\}$

$=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-4f(x)-2C_1$

$5f(x)=e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)-2C_1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{5e^x}(2\sin 2x-\cos 2x)+C$

$f(0)=-\frac{1}{5}$이므로 $\quad -\frac{1}{5}+C=-\frac{1}{5} \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5e^x}(2\sin 2x-\cos 2x)$이므로

$f(\pi)=-\frac{1}{5e^\pi}$ 답 $-\frac{1}{5e^\pi}$

**1206** 전략 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$를 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 $f_1(x)=\int 3^{3x}\,dx=\frac{3^{3x}}{3\ln 3}+C_1$이고, $f_1(0)=\frac{1}{3\ln 3}$이므로

$\frac{1}{3\ln 3}+C_1=\frac{1}{3\ln 3} \quad \therefore C_1=0$

$\therefore f_1(x)=\frac{3^{3x}}{3\ln 3}$

$f_2(x)=\int f_1(x)dx=\int \frac{3^{3x}}{3\ln 3}dx=\frac{3^{3x}}{(3\ln 3)^2}+C_2$이고,

$f_2(0)=\left(\frac{1}{3\ln 3}\right)^2$이므로

$\frac{1}{(3\ln 3)^2}+C_2=\left(\frac{1}{3\ln 3}\right)^2 \quad \therefore C_2=0$

$\therefore f_2(x)=\frac{3^{3x}}{(3\ln 3)^2}$

같은 방법으로 $f_n(x)$를 구하면 $\quad f_n(x)=\frac{3^{3x}}{(3\ln 3)^n}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} f_n(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{27}{(3\ln 3)^n}=\frac{\frac{27}{3\ln 3}}{1-\frac{1}{3\ln 3}}=\frac{27}{3\ln 3-1}$

답 ④

**1207** 전략 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$임을 이용하여 $xf(x)$를 구한다.

풀이 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)=\sin^2\frac{x}{2}$이므로

$xf(x)=\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx=\int \frac{1-\cos x}{2}\,dx$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$

위의 등식에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면 $\quad \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+C$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$이므로 $\quad \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+C=\frac{\pi}{4} \quad \therefore C=\frac{1}{2}$

$\therefore xf(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}$

위의 등식에 $x=\frac{\pi}{6}$를 대입하면

$\frac{\pi}{6}f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{6}{\pi}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2\pi}$ 답 ②

**1208** 전략 삼각함수의 부정적분과 치환적분법을 이용하여 $e^{f(x)}$을 구한다.

풀이 $f'(x)e^{f(x)}=\cos x+\frac{1}{2}$에서

$\int f'(x)e^{f(x)}dx=\int\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)dx$

$f(x)=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx=\int e^t dt=e^t+C_1$$
$$=e^{f(x)}+C_1$$

$\int\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)dx=\sin x+\dfrac{1}{2}x+C_2$이므로

$$e^{f(x)}=\sin x+\frac{1}{2}x+C$$

$f(0)=1$이므로 $\quad C=e$

$$\therefore f(x)=\ln\left(\sin x+\frac{1}{2}x+e\right)$$

$f'(x)=\dfrac{\cos x+\frac{1}{2}}{\sin x+\frac{1}{2}x+e}$이고 $0\le x\le\pi$일 때 $\sin x+\dfrac{1}{2}x+e>0$이므로 $f'(x)=0$에서

$$\cos x=-\frac{1}{2} \qquad \therefore x=\frac{2}{3}\pi \ (\because 0\le x\le\pi)$$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$에서 극댓값을 가지므로 $\quad a=\dfrac{2}{3}\pi$

$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=b$이므로 $e^{f(x)}=\sin x+\dfrac{1}{2}x+e$의 양변에 $x=\dfrac{2}{3}\pi$를 대입하면

$$e^b=\sin\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi+e=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}+e$$
$$\therefore a+e^b=\frac{2}{3}\pi+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}+e\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi+e$$

답 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\pi+e$

**1209** 전략 치환적분법을 이용하여 $f(x)$를 구한 후 방정식 $f(x)=0$을 푼다.

풀이 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx=\int\sin t\,dt$$
$$=-\cos t+C=-\cos(\ln x)+C$$

$f(e^\pi)=2$이므로 $\quad -\cos\pi+C=2 \quad \therefore C=1$

$$\therefore f(x)=-\cos(\ln x)+1$$

방정식 $f(x)=0$에서 $\quad \cos(\ln x)=1$

이때 $x>1$에서 $\ln x$는 양수이므로

$$\ln x=2n\pi \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \therefore x=e^{2n\pi}$$

따라서 $a_n=e^{2n\pi}$이므로

$$a_1a_2a_3=e^{2\pi}\cdot e^{4\pi}\cdot e^{6\pi}=e^{12\pi}$$

답 $e^{12\pi}$

**1210** 전략 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha$는 실수)이고 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{f(x)}{x-\frac{\pi}{3}}=2a+3$에서 $x\longrightarrow\dfrac{\pi}{3}$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}f(x)=0$이므로 $\quad f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2a+3$$

$f'(x)=a\sin\dfrac{x}{2}$에서 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}a$이므로

$$\frac{1}{2}a=2a+3, \qquad \frac{3}{2}a=-3$$
$$\therefore a=-2$$

즉 $f'(x)=-2\sin\dfrac{x}{2}$이므로

$$f(x)=\int\left(-2\sin\frac{x}{2}\right)dx=4\cos\frac{x}{2}+C$$

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$이므로 $\quad 2\sqrt{3}+C=0 \quad \therefore C=-2\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=4\cos\dfrac{x}{2}-2\sqrt{3}$이므로

$$f(\pi)=-2\sqrt{3}$$

답 ①

**1211** 전략 주어진 식의 양변을 미분하여 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴이 되도록 식을 변형한다.

풀이 $2x^2f(2x)=\int(8x^2+3)f'(2x)dx$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$4xf(2x)+4x^2f'(2x)=(8x^2+3)f'(2x)$$
$$(4x^2+3)f'(2x)=4xf(2x)$$

$2x=t$로 놓으면 $\quad (t^2+3)f'(t)=2tf(t)$

$f(t)>0$이므로 $\quad \dfrac{f'(t)}{f(t)}=\dfrac{2t}{t^2+3}$

$$\int\frac{f'(t)}{f(t)}dt=\int\frac{2t}{t^2+3}dt=\int\frac{(t^2+3)'}{t^2+3}dt$$
$$\therefore \ln f(t)=\ln(t^2+3)+C$$

$f(1)=8$이므로 $\quad \ln 8=\ln 4+C \quad \therefore C=\ln 2$

따라서 $\ln f(t)=\ln(t^2+3)+\ln 2=\ln(2t^2+6)$이므로

$$f(t)=2t^2+6$$
$$\therefore f(3)=24$$

답 ④

**1212** 전략 $\int\dfrac{h'(x)}{h(x)}dx=\ln|h(x)|+C$임을 이용할 수 있도록 주어진 조건을 변형한다.

풀이 $f'(x)-3f(x)=0$, $g'(x)-3g(x)=0$을 변끼리 더하면

$$f'(x)+g'(x)-3\{f(x)+g(x)\}=0$$
$$\therefore f'(x)+g'(x)=3\{f(x)+g(x)\}$$

실수 전체의 집합에서 $f(x)+g(x)>0$이므로

$$\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}=3$$

$$\int \frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}dx=\int 3\,dx$$

$\therefore \ln\{f(x)+g(x)\}=3x+C$

$f(0)=0,\ g(0)=e$이므로 $\quad C=1$

즉 $\ln\{f(x)+g(x)\}=3x+1$이므로 $\quad f(x)+g(x)=e^{3x+1}$

따라서 $f(x)+g(x)=1$에서 $\quad e^{3x+1}=1$

$3x+1=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{3}$ 답 ②

**1213** 전략 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$임을 이용하여 $xf(x)$를 구한다.

풀이 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$이므로 조건 (나)에서

$$xf(x)=\int x\cos x\,dx$$

$u(x)=x,\ v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=\sin x$

$$\therefore xf(x)=\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int \sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C$$

조건 (가)에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로 위의 등식에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+C \quad \therefore C=0$

$\therefore xf(x)=x\sin x+\cos x$

위의 등식에 $x=\pi$를 대입하면

$\pi f(\pi)=-1 \quad \therefore f(\pi)=-\frac{1}{\pi}$ 답 ②

**1214** 전략 부분적분법을 이용하여 $F_n(x)$를 구한 후 $F_{n+1}(x)$와 $F_n(x)$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $u(x)=x^n,\ v'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$u'(x)=nx^{n-1},\ v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\therefore F_n(x)=\int x^n e^{2x}dx=x^n\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int nx^{n-1}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^n e^{2x}-\frac{n}{2}\int x^{n-1}e^{2x}dx$$

따라서 $2F_n(x)=x^n e^{2x}-n\int x^{n-1}e^{2x}dx$이므로

$$2F_{n+1}(x)=x^{n+1}e^{2x}-(n+1)\int x^n e^{2x}dx$$
$$=x^{n+1}e^{2x}-(n+1)F_n(x)$$

$\therefore 2F_{n+1}(x)+(n+1)F_n(x)=x^{n+1}e^{2x}$ 답 ③

**1215** 전략 도함수의 정의와 부분적분법을 이용한다.

풀이 $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$이므로 조건 (가)에서

$g'(x)=f(x)$

조건 (나)의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f(x)+xf'(x)-2x\ln x-x^2\cdot\frac{1}{x}$$
$$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x\ln x-x$$

$\therefore xf'(x)=2x\ln x+x$

$x>0$이므로 $\quad f'(x)=2\ln x+1 \quad \therefore f'(1)=1$ …… ㉠

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (2\ln x+1)dx$$
$$=2\int \ln x\,dx+x \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$\int \ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x,\ v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=x$

$$\therefore \int \ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=x\ln x-x+C_1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$f(x)=2(x\ln x-x+C_1)+x+C_2$

$=2x\ln x-x+C$

이때 ㉠과 조건 (다)에서 $f(1)=2f'(1)=2$이므로

$-1+C=2 \quad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=2x\ln x-x+3$이므로 조건 (나)에 의하여

$g(e)=ef(e)-e^2$

$=e(e+3)-e^2=3e$ 답 $3e$

**1216** 전략 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$임을 이용하여 접선의 기울기를 간단히 한다.

풀이 $f'(x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$

$$=\sqrt{2}e^x\left(\sin x\cos\frac{3}{4}\pi+\cos x\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=\sqrt{2}e^x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$
$$=e^x(\cos x-\sin x)$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int e^x(\cos x-\sin x)dx$$
$$=\int e^x\cos x\,dx-\int e^x\sin x\,dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x,\ v(x)=e^x$

$$\therefore \int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx-\int e^x\sin x\,dx$$
$$=e^x\cos x+C$$

$f(0)=2$이므로

$1+C=2 \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=e^x\cos x+1$이므로

$f(\pi)=e^\pi\cdot(-1)+1=1-e^\pi$ 답 ②

참고 ㉡을 ㉠에 대입하는 과정에서

$$f(x)=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx-\int e^x\sin x\,dx\neq e^x\cos x$$

임에 주의한다. 두 부정적분을 빼면 $\int e^x\sin x\,dx$의 적분상수에 따라 상수가 남을 수 있다.

**1217** **전략** 부분적분법을 두 번 적용하여 $f(x)$를 구한다.

**풀이** $g(x)=\sin 2x$, $h'(x)=e^x$으로 놓으면

$g'(x)=2\cos 2x$, $h(x)=e^x$

$\therefore f(x)=\int e^x \sin 2x\,dx$

$=e^x\sin 2x-2\int e^x\cos 2x\,dx$ ...... ㉠

$\int e^x\cos 2x\,dx$에서 $u(x)=\cos 2x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-2\sin 2x$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int e^x\cos 2x\,dx=e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2x\,dx$

$=e^x\cos 2x+2f(x)+C_1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=e^x\sin 2x-2\{e^x\cos 2x+2f(x)+C_1\}$

$5f(x)=e^x(\sin 2x-2\cos 2x)-2C_1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{5}e^x(\sin 2x-2\cos 2x)+C$

한편 $f(x)=\int e^x\sin 2x\,dx$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=e^x\sin 2x$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$ $\left(\because 0<x<\frac{3}{2}\pi\right)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | |

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 극댓값을 갖고, $x=\pi$일 때 극솟값을 가지므로

$M=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{5}e^{\frac{\pi}{2}}+C$, $m=f(\pi)=-\frac{2}{5}e^{\pi}+C$

$\therefore M-m=\frac{2}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{\pi})$

**답** $\frac{2}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{\pi})$

**1218** **전략** $g(x)=e^{-x}f(x)$의 양변을 $x$에 대하여 미분한 후 조건 (나)의 $f'(x)$를 대입한다.

**풀이** $g(x)=e^{-x}f(x)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$

이때 조건 (나)에서 $f'(x)=f(x)+e^x\sin x$이므로

$g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}\{f(x)+e^x\sin x\}=\sin x$ ⋯ ❶

$\therefore g(x)=\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

조건 (가)에서 $f(0)=1$이므로 $g(x)=e^{-x}f(x)$에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=1$

$g(x)=-\cos x+C$에서

$-1+C=1$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $g(x)=-\cos x+2$이므로 ⋯ ❷

$g(2\pi)+g(4\pi)+g(6\pi)+\cdots+g(20\pi)$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{10\text{개}}=10$ ⋯ ❸

**답** 10

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $g'(x)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $g(x)$를 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $g(2\pi)+g(4\pi)+g(6\pi)+\cdots+g(20\pi)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1219** **전략** 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용한다.

**풀이** $f'(x)=\begin{cases} e^x-e^{-x} & (x>0) \\ \cos x & (x<0) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} e^x+e^{-x}+C_1 & (x>0) \\ \sin x+C_2 & (x<0) \end{cases}$ ⋯ ❶

$f(\ln 2)=\frac{7}{2}$이므로

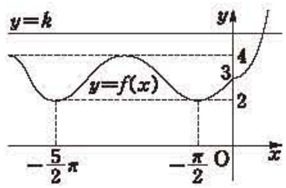
$2+\frac{1}{2}+C_1=\frac{7}{2}$ $\quad\therefore C_1=1$

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to 0+}(e^x+e^{-x}+1)=\lim_{x\to 0-}(\sin x+C_2)$

$\therefore C_2=3$

$\therefore f(x)=\begin{cases} e^x+e^{-x}+1 & (x\ge 0) \\ \sin x+3 & (x<0) \end{cases}$ ⋯ ❷




따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 1이려면

$k>4$

즉 자연수 $k$의 최솟값은 5이므로

$m=5$ ⋯ ❸

한편 함수 $f(x)$가 최소가 되는 $x$의 값은 $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{5}{2}\pi$, $-\frac{9}{2}\pi$, $\cdots$ 이므로 $a_n=-2(n-1)\pi-\frac{\pi}{2}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore a_5=-8\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{17}{2}\pi$ ⋯ ❹

**답** $-\frac{17}{2}\pi$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ $f(x)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $m$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❹ $a_n$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1220** **전략** $x^2+1=t$로 치환하여 치환적분법을 이용한다.

**풀이** $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$f(x)=\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$

$=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$ ⋯ ❶

한편 $f(x)=\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$에서

$f'(x)=x\sqrt{x^2+1}$

$0 \le x \le 4\sqrt{3}$에서 $f'(x) \ge 0$이므로 $f(x)$는 증가한다. ⋯ ❷
따라서 $f(x)$는 $x=4\sqrt{3}$에서 최댓값, $x=0$에서 최솟값을 가지므로

$$M=\frac{1}{3}\{(4\sqrt{3})^2+1\}\sqrt{(4\sqrt{3})^2+1}+C$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 49\cdot 7+C=\frac{343}{3}+C$$
$$m=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1+C=\frac{1}{3}+C$$
$$\therefore M-m=\left(\frac{343}{3}+C\right)-\left(\frac{1}{3}+C\right)$$
$$=114$$ ⋯ ❸

답 114

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ 부정적분을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $f(x)$가 증가함을 알 수 있다. | 20% |
| ❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**1221** 전략 치환적분법을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\ln\{f'(x)+g'(x)\}+f(x)+g(x)=\ln 4$에서

$$f(x)+g(x)=\ln 4-\ln\{f'(x)+g'(x)\}$$
$$=\ln\left\{\frac{4}{f'(x)+g'(x)}\right\}$$

로그의 정의에 의하여

$$e^{f(x)+g(x)}=\frac{4}{f'(x)+g'(x)}$$

$\{f'(x)+g'(x)\}e^{f(x)+g(x)}=4$이므로

$$\int\{f'(x)+g'(x)\}e^{f(x)+g(x)}dx=\int 4\,dx$$ ⋯ ❶

$f(x)+g(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)+g'(x)$이므로

$$\int\{f'(x)+g'(x)\}e^{f(x)+g(x)}dx=\int e^t dt=e^t+C_1$$
$$=e^{f(x)+g(x)}+C_1$$
$$\therefore e^{f(x)+g(x)}=4x+C$$

$f(0)+g(0)=2$이므로 $C=e^2$

즉 $e^{f(x)+g(x)}=4x+e^2$이므로 ⋯ ❷

$$e^{f(2)+g(2)}=e^2+8$$
$$\therefore f(2)+g(2)=\ln(e^2+8)$$ ⋯ ❸

답 $\ln(e^2+8)$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ 주어진 식을 변형할 수 있다. | 50% |
| ❷ $e^{f(x)+g(x)}$을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $f(2)+g(2)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1222** 전략 등비급수의 합을 구하여 $f(x)$를 간단히 한다.

풀이 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\cos x)^{n-1}$은 첫째항이 1, 공비가 $-\cos x$인 등비급수의 합이고 $0<x<\pi$에서 $-1<-\cos x<1$이므로

$$f(x)=\frac{1}{1-(-\cos x)}=\frac{1}{1+\cos x}$$ ⋯ ❶

$$\therefore F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{1}{1+\cos x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\sec^2\frac{x}{2}dx=\tan\frac{x}{2}+C$$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\sqrt{3}$이므로 $1+C=1+\sqrt{3}$ $\therefore C=\sqrt{3}$

따라서 $F(x)=\tan\frac{x}{2}+\sqrt{3}$이므로 ⋯ ❷

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $f(x)$를 간단히 할 수 있다. | 30% |
| ❷ $F(x)$를 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1223** 전략 접선 $l$의 기울기를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $\angle PAB=\theta$라 하면 직각삼각형 PAB에서

$$\tan\theta=\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\frac{2t}{t^2+1}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이고 $\tan\theta=f'(t)$이므로

$$f'(t)=\frac{2t}{t^2+1},\ 즉\ f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\quad(x>0)$$ ⋯ ❶

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$$
$$=\ln(x^2+1)+C\ (\because x^2+1>0)$$

이때 $f(0)=2$이고 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0+}\{\ln(x^2+1)+C\}=2\quad\therefore C=2$$

따라서 $x \ge 0$에서 $f(x)=\ln(x^2+1)+2$이므로 ⋯ ❷

$$f(3)=\ln(3^2+1)+2=2+\ln 10$$ ⋯ ❸

답 $2+\ln 10$

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\ (x>0)$임을 알 수 있다. | 40% |
| ❷ $f(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

# 11 정적분

**1224** $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$ 답 $\frac{14}{3}$

**1225** $\int_1^2 \sqrt[3]{x}\,dx=\int_1^2 x^{\frac{1}{3}}\,dx=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^2$

$=\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$ 답 $\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$

**1226** $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx=\int_1^2 x^{-2}\,dx=\left[-x^{-1}\right]_1^2$

$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

**1227** $\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\,dx=\left[\ln|x|\right]_1^{e^2}=\ln e^2-\ln 1=2$ 답 2

**1228** $\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx=\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{3}e^{3\ln 2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}e^{\ln 8}-\frac{1}{3}$

$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ 답 $\frac{7}{3}$

**1229** $\int_0^2 2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2=\frac{4}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{3}{\ln 2}$ 답 $\frac{3}{\ln 2}$

**1230** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ 답 1

**1231** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1-\cos x}{2}\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ 답 $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

**1232** $\int_{-1}^3 (e^x+1)\,dx+\int_{-1}^3 (e^x-1)\,dx$

$=\int_{-1}^3 (e^x+1+e^x-1)\,dx=\int_{-1}^3 2e^x\,dx$

$=\left[2e^x\right]_{-1}^3=2e^3-\frac{2}{e}$ 답 $2e^3-\frac{2}{e}$

**1233** $\int_0^{\pi} (\sin x+1)^2\,dx+\int_{\pi}^0 (\sin x-1)^2\,dx$

$=\int_0^{\pi} (\sin^2 x+2\sin x+1)\,dx-\int_0^{\pi} (\sin^2 x-2\sin x+1)\,dx$

$=\int_0^{\pi} 4\sin x\,dx=\left[-4\cos x\right]_0^{\pi}=4+4=8$ 답 8

**1234** $\int_1^2 (\sqrt{x}+1)\,dx+\int_2^4 (\sqrt{x}+1)\,dx$

$=\int_1^4 (\sqrt{x}+1)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_1^4$

$=\frac{28}{3}-\frac{5}{3}=\frac{23}{3}$ 답 $\frac{23}{3}$

**1235** $\int_0^{\pi} (\cos x+1)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} (\cos y+1)\,dy$

$=\int_0^{\pi} (\cos x+1)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} (\cos x+1)\,dx$

$=\int_0^{2\pi} (\cos x+1)\,dx$

$=\left[\sin x+x\right]_0^{2\pi}=2\pi$ 답 $2\pi$

**1236** $|\cos x|=\begin{cases} \cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right) \\ -\cos x & \left(\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)\end{cases}$이므로

$\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\,dx$

$=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=1+1=2$ 답 2

**1237** $|e^x-1|=\begin{cases} e^x-1 & (x\ge 0) \\ -e^x+1 & (x\le 0)\end{cases}$이므로

$\int_{-1}^1 |e^x-1|\,dx=\int_{-1}^0(-e^x+1)\,dx+\int_0^1 (e^x-1)\,dx$

$=\left[-e^x+x\right]_{-1}^0+\left[e^x-x\right]_0^1$

$=\frac{1}{e}+e-2$ 답 $\frac{1}{e}+e-2$

**1238** $x^2$은 우함수, $\sin 2x$는 기함수이므로

$\int_{-1}^1 (x^2+\sin 2x)\,dx=2\int_0^1 x^2\,dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

**1239** $\cos x$는 우함수, $\sin x$는 기함수이므로

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\sin x)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

$=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$ 답 2

**1240** $f(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면

$f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$

따라서 $e^x+e^{-x}$은 우함수이므로

$\int_{-2}^2 (e^x+e^{-x})\,dx=2\int_0^2 (e^x+e^{-x})\,dx=2\left[e^x-e^{-x}\right]_0^2$

$=2\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$ 답 $2\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$

**1241** $f(x+3)=f(x)$이므로

$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_4^7 f(x)\,dx=\int_7^{10} f(x)\,dx=2$

$\therefore \int_1^{10} f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^7 f(x)dx + \int_7^{10} f(x)dx$
$= 2+2+2=6$

답 6

**1242** $2x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$
$x=0$일 때 $t=3$, $x=1$일 때 $t=5$이므로

$$\int_0^1 (2x+3)^3 dx = \int_3^5 t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \left[\frac{1}{8}t^4\right]_3^5 = \frac{1}{8}(625-81)=68$$

답 68

**다른 풀이** $\int_0^1 (2x+3)^3 dx = \int_0^1 (8x^3+36x^2+54x+27)dx$
$= \left[2x^4+12x^3+27x^2+27x\right]_0^1$
$=2+12+27+27=68$

**1243** $x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$
$x=0$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^2 \sqrt{x+2}\,dx = \int_2^4 \sqrt{t}\,dt = \int_2^4 t^{\frac{1}{2}} dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = \frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3}(4-\sqrt{2})$$

답 $\frac{4}{3}(4-\sqrt{2})$

**1244** $x^2-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$
$x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_1^2 x(x^2-1)^2 dx = \int_0^3 t^2 \cdot \frac{1}{2} dt = \left[\frac{1}{6}t^3\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

**1245** $2x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=4x$
$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^1 \frac{x}{2x^2+1} dx = \int_1^3 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{4} dt = \left[\frac{1}{4}\ln|t|\right]_1^3 = \frac{1}{4}\ln 3$$

답 $\frac{1}{4}\ln 3$

**1246** $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$
$x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^2 xe^{x^2} dx = \int_0^4 e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \left[\frac{1}{2}e^t\right]_0^4 = \frac{e^4-1}{2}$$

답 $\frac{e^4-1}{2}$

**1247** $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$
$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

**1248** $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$
$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x\,dx = \int_1^0 t^3 \cdot (-1)dt = \int_0^1 t^3 dt = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

**1249** $2+\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$
$x=0$일 때 $t=2$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\sin x} dx = \int_2^3 \frac{1}{t} dt = \left[\ln|t|\right]_2^3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

답 $\ln\frac{3}{2}$

**1250** $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\boxed{\cos\theta}$
$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\boxed{\cos 2\theta}}{2} d\theta$$
$$= \left[\frac{1}{2}\theta + \boxed{\frac{1}{4}\sin 2\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$\therefore$ (가) $\cos\theta$ (나) $\cos 2\theta$ (다) $\frac{1}{4}\sin 2\theta$ (라) $\frac{\pi}{4}$

답 풀이 참조

**SSEN 특강**

**삼각함수 사이의 관계**
① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ② $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
③ $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

**1251** $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$
$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos\theta}{2\cos\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$
$$= \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$$

답 $\frac{\pi}{6}$

**1252** $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\sec^2\theta\, d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

답 $\frac{\pi}{3}$

**1253** $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$$\therefore \int_1^e \ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=e-\Big[x\Big]_1^e=e-(e-1)=1$$

답 1

**1254** $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^2 xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_0^2-\int_0^2 e^x dx=2e^2-\Big[e^x\Big]_0^2$$
$$=2e^2-(e^2-1)=e^2+1$$

답 $e^2+1$

**1255** 주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=-\sin x$

답 $f(x)=-\sin x$

**1256** 주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=2e^{2x}-1$

답 $f(x)=2e^{2x}-1$

**1257** 주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{x}+2$

답 $f(x)=\frac{1}{x}+2$

**1258** $F'(t)=t+\cos t$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (t+\cos t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$$
$$=F'(0)=1$$

답 1

**1259** $F'(t)=e^t+2$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x (e^t+2)dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=e+2$$

답 $e+2$

**1260** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$

$\frac{k\pi}{n}$를 $x$로, $\frac{\pi}{n}$를 $dx$로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$, $k=n$이면 $x=\pi$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^\pi$$
$$=\frac{1}{\pi}(1+1)=\frac{2}{\pi}$$

답 $\frac{2}{\pi}$

**1261** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$\frac{k}{n}$를 $x$로, $\frac{1}{n}$을 $dx$로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$, $k=n$이면 $x=1$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx=\Big[\ln|1+x|\Big]_0^1$$
$$=\ln 2$$

답 $\ln 2$

**유형 01~03 여러 가지 함수의 정적분** 본책 1개쪽

① $a>b$일 때, $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

② $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, $k$는 상수)

③ $\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$ (복호동순)

④ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

**1262** $\int_1^3 \frac{x-1}{x+1}dx=\int_1^3\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx$

$$=\Big[x-2\ln|x+1|\Big]_1^3$$
$$=(3-2\ln 4)-(1-2\ln 2)$$
$$=3-4\ln 2-1+2\ln 2$$
$$=2-2\ln 2$$

답 ②

**1263** $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\Big[\ln|x+1|-\ln|x+2|\Big]_0^1$$
$$=(\ln 2-\ln 3)-(-\ln 2)$$
$$=2\ln 2-\ln 3$$
$$=\ln\frac{4}{3}$$

$\therefore k=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

**1264** $\displaystyle\int_1^3 \frac{(1+\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}}dx$

$\displaystyle=\int_1^3 \frac{2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^3 (2+\sqrt{x})dx$ ⋯ ❶

$\displaystyle=\int_1^3 (2+x^{\frac{1}{2}})dx=\left[2x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3$

$\displaystyle=(6+2\sqrt{3})-\frac{8}{3}=2\sqrt{3}+\frac{10}{3}$ ⋯ ❷

따라서 $a=2$, $b=\frac{10}{3}$이므로

$\displaystyle\frac{a}{b}=2\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{3}{5}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 피적분함수를 간단히 할 수 있다. | 30% |
| ❷ 정적분의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $\frac{a}{b}$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1265** $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx-\int_5^3 f(y)dy-\int_1^5 f(z)dz$

$\displaystyle=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx+\int_5^1 f(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x-\sqrt{x})^2dx$

$\displaystyle=\int_0^1 (x^2-2x\sqrt{x}+x)dx$

$\displaystyle=\int_0^1 (x^2-2x^{\frac{3}{2}}+x)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$\displaystyle=\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$

답 $\frac{1}{30}$

**1266** $\displaystyle\int_{-1}^0 \sqrt{e^{2x}+4e^x+4}\,dx=\int_{-1}^0 \sqrt{(e^x+2)^2}\,dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^0 (e^x+2)dx$

$\displaystyle=\left[e^x+2x\right]_{-1}^0$

$\displaystyle=1-(e^{-1}-2)=3-\frac{1}{e}$

답 ③

**1267** $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^x+1}dx+\int_{\ln 3}^0 \frac{e^{2t}}{e^t+1}dt$

$\displaystyle=\int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^x+1}dx-\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

$\displaystyle=\int_0^{\ln 3} \frac{1-e^{2x}}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln 3} \frac{(1+e^x)(1-e^x)}{e^x+1}dx$

$\displaystyle=\int_0^{\ln 3} (1-e^x)dx$

$\displaystyle=\left[x-e^x\right]_0^{\ln 3}$

$=(\ln 3-3)-(-1)=\ln 3-2$

답 $\ln 3-2$

**1268** $\displaystyle\int_0^1 (2^x+1)(4^x-2^x+1)dx$

$\displaystyle=\int_0^1 (8^x+1)dx=\left[\frac{8^x}{\ln 8}+x\right]_0^1$

$\displaystyle=\left(\frac{8}{\ln 8}+1\right)-\frac{1}{\ln 8}=\frac{7}{3\ln 2}+1$

따라서 $a=\frac{7}{3}$, $b=1$이므로

$a+b=\frac{10}{3}$

답 $\frac{10}{3}$

**1269** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x+1}{2(\sin x+1)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-2\sin^2 x)+1}{2(\sin x+1)}dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin x+1}dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\sin x+1}dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)dx$

$\displaystyle=\left[x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

답 ①

**1270** $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x+1)^2dx+\int_0^{\pi} (\cos t-1)^2dt$

$\displaystyle=\int_0^{\pi} (\sin x+1)^2dx+\int_0^{\pi} (\cos x-1)^2dx$

$\displaystyle=\int_0^{\pi} (\sin^2 x+2\sin x+1+\cos^2 x-2\cos x+1)dx$

$\displaystyle=\int_0^{\pi} (2\sin x-2\cos x+3)dx$

$\displaystyle=\left[-2\cos x-2\sin x+3x\right]_0^{\pi}$

$=(2+3\pi)-(-2)=3\pi+4$

답 $3\pi+4$

**1271** $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sin^2 x-1}dx=\int_0^a \frac{1}{-\cos^2 x}dx$

$\displaystyle=\int_0^a (-\sec^2 x)dx$

$\displaystyle=\left[-\tan x\right]_0^a$

$=-\tan a$ ⋯ ❶

즉 $-\tan a=-1$이므로

$\tan a=1$ $\quad\therefore a=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$ ⋯ ❷

답 $\frac{\pi}{4}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 정적분의 값을 $a$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 60% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**1272** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin x-\pi)^2dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\sin^2 x-2a\pi\sin x+\pi^2)dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-2a\pi\sin x+\pi^2\right)dx$

11 정적분

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\frac{a^2}{2}\cos 2x-2a\pi\sin x+\left(\frac{a^2}{2}+\pi^2\right)\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{a^2}{4}\sin 2x+2a\pi\cos x+\left(\frac{a^2}{2}+\pi^2\right)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(\frac{a^2}{2}+\pi^2\right)\frac{\pi}{2}-2a\pi=\frac{a^2}{4}\pi-2a\pi+\frac{\pi^3}{2}$$
$$=\frac{\pi}{4}(a-4)^2+\frac{\pi^3}{2}-4\pi$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{\pi^3}{2}-4\pi$이다. 답 ②

## 유형 04 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분 본책 179쪽

(i) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 $x$의 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.
(ii) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

**1273** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos^2 x-\sin^2 x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos 2x|dx$

$$|\cos 2x|=\begin{cases}\cos 2x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)\\ -\cos 2x & \left(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos 2x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

답 1

**1274** $|x-1|=\begin{cases}x-1 & (x\ge 1)\\ -x+1 & (x\le 1)\end{cases}$이므로

$$\int_0^2\sqrt{|x-1|}dx=\int_0^1\sqrt{-x+1}\,dx+\int_1^2\sqrt{x-1}\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}(-x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

**1275** $\left|\frac{x-1}{x+3}\right|=\begin{cases}\frac{x-1}{x+3} & (x<-3 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ -\frac{x-1}{x+3} & (-3<x\le 1)\end{cases}$ 이므로

$$\int_{-1}^3\left|\frac{x-1}{x+3}\right|dx$$
$$=\int_{-1}^1\left(-\frac{x-1}{x+3}\right)dx+\int_1^3\frac{x-1}{x+3}dx$$
$$=\int_{-1}^1\left(-1+\frac{4}{x+3}\right)dx+\int_1^3\left(1-\frac{4}{x+3}\right)dx$$
$$=\Big[-x+4\ln|x+3|\Big]_{-1}^1+\Big[x-4\ln|x+3|\Big]_1^3$$
$$=(4\ln 2-2)+(2-4\ln 3+4\ln 2)$$
$$=8\ln 2-4\ln 3$$

따라서 $a=8$, $b=-4$이므로
$a-b=12$

답 ⑤

## 유형 05 우함수·기함수의 정적분 본책 179쪽

$\int_{-a}^a f(x)dx$ 꼴의 정적분의 계산은 먼저 $f(x)$가 우함수인지 기함수인지를 파악한 후, 다음을 이용한다.

① $f(x)$가 우함수 ➡ $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

② $f(x)$가 기함수 ➡ $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

**1276** $x^2$은 우함수, $\sin x$는 기함수이므로 $x^2\sin x$는 기함수이다.
또 $\cos 2x$는 우함수이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x^2\sin x+\cos 2x)dx=2\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$
$$=0$$

답 ③

**SSEN 특강**

**우함수, 기함수의 곱**
① (우함수)×(우함수)=(우함수)
② (우함수)×(기함수)=(기함수)
③ (기함수)×(기함수)=(우함수)

**1277** $f(x)=3^x+3^{-x}$으로 놓으면
$f(-x)=3^{-x}+3^x=f(x)$
이므로 $3^x+3^{-x}$은 우함수이다.
또 $g(x)=5^x-5^{-x}$으로 놓으면
$g(-x)=5^{-x}-5^x=-(5^x-5^{-x})=-g(x)$
이므로 $5^x-5^{-x}$은 기함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^1(3^x+5^x+3^{-x}-5^{-x})dx=2\int_0^1(3^x+3^{-x})dx$$
$$=2\left[\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{3^{-x}}{\ln 3}\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{8}{3\ln 3}=\frac{16}{3\ln 3}$$

답 ⑤

**1278** $f(x)=\cos(\sin x)$에서
$f(-x)=\cos\{\sin(-x)\}=\cos(-\sin x)=\cos(\sin x)$
$=f(x)$
따라서 $f(x)$는 우함수이므로 ➊

$$\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=a$$
$$\therefore \int_{-1}^2 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$$
$$=a+b$$

➋

답 $a+b$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $f(x)$가 우함수임을 알 수 있다. | 50% |
| ➋ $\int_{-1}^2 f(x)dx$의 값을 $a$, $b$를 이용하여 나타낼 수 있다. | 50% |

**1279** ㄱ. $\sin f(-x)=\sin\{-f(x)\}=-\sin f(x)$이므로 $\sin f(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x)dx=0$$

ㄴ. $\cos f(-x)=\cos\{-f(x)\}=\cos f(x)$이므로 $\cos f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \cos f(x)dx\neq 0$$

ㄷ. $f(-x)\sin(-x)=-f(x)\cdot(-\sin x)=f(x)\sin x$이므로 $f(x)\sin x$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx\neq 0$$

ㄹ. $f(-x)\cos(-x)=-f(x)\cos x$이므로 $f(x)\cos x$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx=0$$

이상에서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

**유형 06 주기함수의 정적분** 본책 180쪽

정의역에 속하는 임의의 실수 $x$에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 연속함수 $f(x)$의 정적분의 값은 다음을 이용하여 구한다.

① $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$

② $\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_b^{b+p} f(x)dx$

**1280** $y=|\sin 2x|$는 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 주기함수이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x|dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin 2x|dx$$
$$=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} |\sin 2x|dx=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} |\sin 2x|dx$$
$$\therefore \int_0^{2\pi} |\sin 2x|dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$$
$$=4\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=4\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=4$$

답 ④

SSEN 특강

**삼각함수의 주기**

① 함수 $y=a\sin bx+c$의 주기 ➡ $\frac{2\pi}{|b|}$

② 함수 $y=a\cos bx+c$의 주기 ➡ $\frac{2\pi}{|b|}$

③ 함수 $y=a\tan bx+c$의 주기 ➡ $\frac{\pi}{|b|}$

④ 함수 $y=|a\sin bx|+c$의 주기 ➡ $\frac{\pi}{|b|}$

⑤ 함수 $y=|a\cos bx|+c$의 주기 ➡ $\frac{\pi}{|b|}$

**1281** $y=|\cos x|$는 주기가 $\pi$인 주기함수이므로

$$\int_a^{a+\pi} |\cos x|dx=\int_0^{\pi} |\cos x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=1+1=2$$

답 2

**1282** $f(x+2)=f(x)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx=\int_3^5 f(x)dx=\int_5^7 f(x)dx$$

이때 $f(-x)=e^{-x}+e^{x}=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{7} f(x)dx=4\int_{-1}^{1} f(x)dx=8\int_0^1 f(x)dx$$
$$=8\int_0^1 (e^x+e^{-x})dx$$
$$=8\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1=8\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

$\therefore k=8$ 답 8

**1283** $y=\cos 3x+1$은 주기가 $\frac{2}{3}\pi$인 주기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 3x+1)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\cos 3x+1)dx$$
$$=\int_{\pi}^{\frac{5}{3}\pi} (\cos 3x+1)dx$$

이때 $y=\cos 3x+1$은 우함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 3x+1)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 3x+1)dx$$
$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} (\cos 3x+1)dx=3\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 3x+1)dx$$
$$=6\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 3x+1)dx$$
$$=6\left[\frac{1}{3}\sin 3x+x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=6\cdot\frac{\pi}{3}=2\pi$$

답 ②

**유형 07~10 치환적분법을 이용한 정적분** 본책 180~182쪽

$x=g(t)$가 미분가능하고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$$

**1284** $2x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

$x=-1$일 때 $t=-1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_{-1}^{1} f(2x+1)dx=\int_{-1}^{3} f(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3} f(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3} f(x)dx=\frac{k}{2}$$

답 ③

**1285** $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^2 e^x f(x+1)dx=\int_1^3 e^{t-1}f(t)dt$$

이때 $1\le t\le 3$에서 $f(t)=2$이므로

$$\int_1^3 e^{t-1}f(t)dt=\int_1^3 2e^{t-1}dt=\left[2e^{t-1}\right]_1^3=2(e^2-1)$$

답 $2(e^2-1)$

다른 풀이 $f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x\le 1)\\ 2 & (1\le x\le 3)\end{cases}$에서

$$f(x+1)=\begin{cases}2x+2 & (-1\le x\le 0)\\ 2 & (0\le x\le 2)\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^2 e^x f(x+1)dx=\int_0^2 2e^x dx=\left[2e^x\right]_0^2=2(e^2-1)$$

**1286** $5-2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2$

$x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2}dx=\int_3^1 \frac{1}{t^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=\int_1^3 \frac{1}{2}t^{-2}dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}t^{-1}\right]_1^3$$

$$=-\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

**1287** $x^2+x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=7$이므로

$$\int_0^2 \frac{4x+2}{x^2+x+1}dx=\int_1^7 \frac{2}{t}dt$$

$$=\left[2\ln|t|\right]_1^7=2\ln 7$$

답 ⑤

다른 풀이 $(x^2+x+1)'=2x+1$이므로

$$\int_0^2 \frac{4x+2}{x^2+x+1}dx=\int_0^2 \frac{2(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx$$

$$=\left[2\ln(x^2+x+1)\right]_0^2=2\ln 7$$

**1288** $x^2-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

또한 $x=2$일 때 $t=3$, $x=3$일 때 $t=8$이므로

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}dt$$ ··· ❶

$$=\int_3^8 \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt=\left[t^{\frac{1}{2}}\right]_3^8$$

$$=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$$ ··· ❷

따라서 $m=2$, $n=-1$이므로 $m+n=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ 치환하여 피적분함수를 변형할 수 있다. | 40% |
| ❷ 정적분의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1289** $e^x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=\ln 3$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}-2e^x}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln 3} \frac{e^x(e^x-2)}{e^x+1}dx$$

$$=\int_2^4 \frac{t-3}{t}dt=\int_2^4\left(1-\frac{3}{t}\right)dt$$

$$=\left[t-3\ln|t|\right]_2^4$$

$$=(4-6\ln 2)-(2-3\ln 2)$$

$$=2-3\ln 2$$

답 ②

**1290** $\int_0^2 (x+1)^2e^{x^2}dx-\int_0^2 (x-1)^2e^{x^2}dx$

$$=\int_0^2 e^{x^2}\{(x+1)^2-(x-1)^2\}dx$$

$$=\int_0^2 4xe^{x^2}dx$$ ··· ❶

이때 $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^2 4xe^{x^2}dx=\int_0^4 2e^t dt=\left[2e^t\right]_0^4=2(e^4-1)$$ ··· ❷

답 $2(e^4-1)$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ 적분하는 식을 간단히 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❷ 정적분의 값을 구할 수 있다. | 60% |

**1291** $\ln x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=\frac{1}{e}$일 때 $t=-2$, $x=1$일 때 $t=-1$이므로

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x(\ln x-1)^3}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{t^3}dt=\int_{-2}^{-1}t^{-3}dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}t^{-2}\right]_{-2}^{-1}$$

$$=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{3}{8}$$

답 ③

**1292** $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=k$일 때 $t=\ln k$이므로

$$f(k)=\int_1^k \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int_0^{\ln k}\sqrt{t}\,dt$$

$$=\int_0^{\ln k} t^{\frac{1}{2}}dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\ln k}$$

$$=\frac{2}{3}\ln k\sqrt{\ln k}$$

$$\therefore f(k^{36})=\frac{2}{3}\ln k^{36}\sqrt{\ln k^{36}}=\frac{2}{3}\cdot 36\ln k\cdot 6\sqrt{\ln k}$$

$$=216\cdot\frac{2}{3}\ln k\sqrt{\ln k}=216f(k)$$

답 ⑤

**1293** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\sin x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\int_1^0(1-t^2)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_0^1(1-t^2)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 $\dfrac{2}{3}$

**1294** $\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\cos x\,dx=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(e^t+t^2)dt$$
$$=\left[e^t+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\left(e+\frac{1}{3}\right)-1$$
$$=e-\frac{2}{3}$$

답 $e-\dfrac{2}{3}$

## 유형 11 삼각치환법을 이용한 정적분; $\sqrt{a^2-x^2}$ 꼴

본책 182쪽

피적분함수가 $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 꼴일 때

$x=a\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

로 치환한 후 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

**1295** $x=2\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(1+\cos2\theta)\,d\theta$$
$$=\Big[2\theta+\sin2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

따라서 반지름의 길이가 $r$인 원의 넓이가 $\pi$이므로

$\pi r^2=\pi$ $\quad\therefore r=1$ $(\because r>0)$

답 ②

**1296** $x=4\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=4\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^2\frac{1-x}{\sqrt{16-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-4\sin\theta}{\sqrt{16-16\sin^2\theta}}\cdot4\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(1-4\sin\theta)4\cos\theta}{4\cos\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-4\sin\theta)d\theta$$
$$=\Big[\theta+4\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}-4$$

답 $\dfrac{\pi}{6}+2\sqrt{3}-4$

**1297** $2x-x^2=1-(1-2x+x^2)=1-(x-1)^2$이므로

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$ ······ ①

$x-1=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$, $x=1$일 때 $\theta=0$이므로

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$ ······ ②

$\displaystyle=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0=\frac{\pi}{4}$ ······ ③

답 $\dfrac{\pi}{4}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ① 피적분함수를 $\sqrt{a^2-\{f(x)\}^2}$ 꼴로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ② 치환하여 피적분함수를 변형할 수 있다. | 40% |
| ③ 정적분의 값을 구할 수 있다. | 30% |

## 유형 12 삼각치환법을 이용한 정적분; $\dfrac{1}{a^2+x^2}$ 꼴

본책 182쪽

피적분함수가 $\dfrac{1}{a^2+x^2}$ $(a>0)$ 꼴일 때

$x=a\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

로 치환한 후 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$임을 이용한다.

**1298** $x=a\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=a\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=a$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^a\frac{1}{a^2+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2+a^2\tan^2\theta}\cdot a\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{a}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4a}$$

따라서 $\dfrac{\pi}{4a}=\pi$이므로 $\quad a=\dfrac{1}{4}$

답 ①

**1299** $x=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\quad \frac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\sec^2\theta$

$x=-1$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{6}$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{3+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3+3\tan^2\theta}\cdot\sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3\sec^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{3}\,d\theta$$
$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

답 ⑤

**1300** $\cos x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_1^0\frac{-1}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$$

$t=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{d\theta}=\sec^2\theta$

$t=0$일 때 $\theta=0$, $t=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

## 유형 13, 14 부분적분법을 이용한 정적분 본책 169쪽

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- $g'(x)$: 적분하기 쉬운 함수(삼각함수, 지수함수)
- $f(x)$: 미분한 결과가 간단한 함수(로그함수, 다항함수)

**1301** $f(x)=x-1$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$

$$\therefore \int_0^1(x-1)e^{-x}dx=\Big[-(x-1)e^{-x}\Big]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})dx$$
$$=-1-\Big[e^{-x}\Big]_0^1=-1-\left(\frac{1}{e}-1\right)$$
$$=-\frac{1}{e}$$

답 ②

**1302** $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\therefore \int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

답 ②

**1303** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\,dx$

$f(x)=x$, $g'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{4}-\left[-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

**1304** $\int_0^1 f(x)dx-\int_\pi^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^\pi f(x)dx$
$$=\int_0^\pi f(x)dx$$
$$=\int_0^\pi x\cos 2x\,dx \quad \cdots ❶$$

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$$\therefore \int_0^\pi x\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$=-\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^\pi$$
$$=-\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=0 \quad \cdots ❷$$

답 0

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ 적분하는 식을 간단히 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ 정적분의 값을 구할 수 있다. | 70% |

**1305** $f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=\Big[e^x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$$
$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-e^x\sin x)\,dx$$
$$=-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}-\left(-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx\right)$$
$$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}+1$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $\quad a+b=1$

답 1

**1306** $f(x)=x^2$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=\sin x$

$$\therefore \int_0^\pi x^2\cos x\,dx = \left[x^2\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\sin x\,dx$$
$$= -2\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

$\int_0^\pi x\sin x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$$\therefore \int_0^\pi x\sin x\,dx = \left[-x\cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)dx$$
$$= \pi - \left[-\sin x\right]_0^\pi = \pi$$

$$\therefore \int_0^\pi x^2\cos x\,dx = -2\pi$$

답 ①

**1307** $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\ln 2} x^2e^x\,dx = \left[x^2e^x\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} 2xe^x\,dx$$
$$= 2(\ln 2)^2 - 2\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\ln 2} xe^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x\,dx = 2\ln 2 - \left[e^x\right]_0^{\ln 2}$$
$$= 2\ln 2 - 1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\ln 2} x^2e^x\,dx = 2(\ln 2)^2 - 2(2\ln 2 - 1)$$
$$= 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$$

답 ①

### 유형 15 적분 구간이 상수인 정적분을 포함한 등식

본책 183쪽

$f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)dt$ 꼴의 등식이 주어지면 $f(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\int_a^b f(t)dt=k$ ($k$는 상수)로 놓는다.

(ii) $f(x)=g(x)+k$를 (i)의 식에 대입하여 $k$의 값을 구한다.

(iii) $k$의 값을 $f(x)=g(x)+k$에 대입하여 $f(x)$를 구한다.

**1308** $\int_0^2 f(t)dt=k$ ($k$는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=e^x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^2 (e^t+k)dt=k, \quad \left[e^t+kt\right]_0^2=k$$

$e^2+2k-1=k \quad \therefore k=-e^2+1$

따라서 $f(x)=e^x-e^2+1$이므로

$f(2)=1$

답 ①

**1309** $\int_0^\pi f(t)dt=k$ ($k$는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=\cos x+2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^\pi (\cos t+2t+k)dt=k$$
$$\left[\sin t+t^2+kt\right]_0^\pi=k, \quad \pi^2+k\pi=k$$
$$k(1-\pi)=\pi^2 \quad \therefore k=\frac{\pi^2}{1-\pi} \quad \cdots ①$$

따라서 $f(x)=\cos x+2x+\dfrac{\pi^2}{1-\pi}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+\frac{\pi^2}{1-\pi}=\frac{\pi}{1-\pi} \quad \cdots ②$$

답 $\dfrac{\pi}{1-\pi}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ① $\int_0^\pi f(t)dt$의 값을 구할 수 있다. | 60% |
| ② $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**1310** $\int_1^e f(t)dt=k$ ($k$는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=\ln x+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $\int_1^e (\ln t+k)dt=k$

이때 $u(t)=\ln t+k$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\dfrac{1}{t}$, $v(t)=t$

$$\therefore \int_1^e (\ln t+k)dt = \left[t\ln t+kt\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t}\cdot t\,dt$$
$$= e+ke-k-\int_1^e dt$$
$$= e+ke-k-\left[t\right]_1^e = ke-k+1$$

즉 $ke-k+1=k$이므로 $(2-e)k=1 \quad \therefore k=\dfrac{1}{2-e}$

따라서 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2-e}$이므로

$$f(e)=1+\frac{1}{2-e}=\frac{3-e}{2-e}$$

답 $\dfrac{3-e}{2-e}$

### 유형 16 적분 구간에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식

본책 184쪽

$\int_a^x f(t)dt=g(x)$ ($a$는 상수) 꼴의 등식이 주어지면 다음을 이용한다.

① 양변을 $x$에 대하여 미분 ➡ $f(x)=g'(x)$

② 양변에 $x=a$를 대입 ➡ $\int_a^a f(t)dt=0$, 즉 $g(a)=0$

**1311** $xf(x)=2x+\int_1^x f(t)dt \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2+f(x)$

$xf'(x)=2 \quad \therefore f'(x)=\dfrac{2}{x}$ ($\because x\neq 0$)

$$\therefore f(x)=\int \frac{2}{x}dx=2\ln|x|+C$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=2$이므로

$C=2$

따라서 $f(x)=2\ln|x|+2$이므로

$f(e)=2+2=4$

답 4

**1312** $f(x)=x\cos x+\int_{\pi}^{x} tf(t)dt+\pi$ ······ ㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\cos x-x\sin x+xf(x)$ ··· ❶

㉠의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$f(\pi)=0$ ··· ❷

$\therefore f'(\pi)=-1+\pi f(\pi)=-1$ ··· ❸

답 $-1$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $f(\pi)$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❸ $f'(\pi)$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**1313** $\int_{1}^{x} f(t)dt=xf(x)-x^2e^{2x}$ ······ ㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2xe^{2x}-2x^2e^{2x}$

$xf'(x)=2xe^{2x}(x+1)$

따라서 $f'(x)=2e^{2x}(x+1)$이므로

$f(x)=\int 2e^{2x}(x+1)dx$

$u(x)=x+1$, $v'(x)=2e^{2x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^{2x}$

$$\therefore f(x)=\int 2e^{2x}(x+1)dx=(x+1)e^{2x}-\int e^{2x}dx$$

$$=(x+1)e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}+C$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-e^2$ $\quad\therefore f(1)=e^2$

즉 $\frac{3}{2}e^2+C=e^2$이므로 $\quad C=-\frac{1}{2}e^2$

따라서 $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}-\frac{1}{2}e^2$이므로

$f(0)=\frac{1-e^2}{2}$

답 $\frac{1-e^2}{2}$

**유형 17 적분 구간과 피적분함수에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식** 본책 184쪽

$\int_{a}^{x}(x\pm t)f(t)dt=g(x)$ 꼴의 등식이 주어지면 다음을 이용한다.

① 좌변을

$$\int_{a}^{x}(x\pm t)f(t)dt=x\int_{a}^{x}f(t)dt\pm\int_{a}^{x}tf(t)dt \text{ (복호동순)}$$

와 같이 변형한 후 양변을 $x$에 대하여 미분한다.

② 양변에 $x=a$를 대입 ➡ $\int_{a}^{a}(x\pm t)f(t)dt=0$, 즉 $g(a)=0$

**1314** $\int_{\pi}^{x}(x-t)f(t)dt=\sin x+ax-\pi$에서

$x\int_{\pi}^{x}f(t)dt-\int_{\pi}^{x}tf(t)dt=\sin x+ax-\pi$

위의 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_{\pi}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\cos x+a$

$\therefore \int_{\pi}^{x}f(t)dt=\cos x+a$

위의 등식의 양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=-\sin x$

$\therefore b=f(2\pi)=0$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$0=a\pi-\pi$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a+b=1$

답 1

**1315** $\int_{1}^{x}(x+t)f(t)dt=e^x(2x-1)-ex$에서

$x\int_{1}^{x}f(t)dt+\int_{1}^{x}tf(t)dt=e^x(2x-1)-ex$

위의 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_{1}^{x}f(t)dt+xf(x)+xf(x)=e^x(2x-1)+2e^x-e$

$\therefore \int_{1}^{x}f(t)dt+2xf(x)=e^x(2x+1)-e$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)=3e-e$ $\quad\therefore f(1)=e$

답 $e$

**유형 18 정적분으로 정의된 함수의 극대·극소** 본책 184쪽

$f(x)=\int_{a}^{x}g(t)dt$와 같이 정의된 함수 $f(x)$의 극값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 양변을 $x$에 대하여 미분한다. ➡ $f'(x)=g(x)$

(ii) $f'(b)=0$을 만족시키는 $b$의 값을 구한다.

(iii) $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

- 양 ⟶ 음 ➡ $f(x)$는 $x=b$에서 극대
- 음 ⟶ 양 ➡ $f(x)$는 $x=b$에서 극소

**1316** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=(1+2\sin x)\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극대이므로 극댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin t)\cos t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+2\sin t\cos t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+\sin 2t)dt$$
$$=\left[\sin t-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$$

답 ②

**1317** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(e^x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로

$$a=f(0)=\int_2^0(t-1)(e^t-1)dt$$

$u(t)=t-1$, $v'(t)=e^t-1$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=e^t-t$

$$\therefore a=\left[(t-1)(e^t-t)\right]_2^0-\int_2^0(e^t-t)dt$$
$$=1-e^2-\left[e^t-\frac{1}{2}t^2\right]_2^0$$
$$=1-e^2-(3-e^2)=-2$$

같은 방법으로 하면

$$b=f(1)=\int_2^1(t-1)(e^t-1)dt$$
$$=\left[(t-1)(e^t-t)\right]_2^1-\int_2^1(e^t-t)dt$$
$$=2-e^2-\left[e^t-\frac{1}{2}t^2\right]_2^1$$
$$=2-e^2-\left(-e^2+e+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}-e$$
$$\therefore a-2b=-2-2\left(\frac{1}{2}-e\right)=2e-3$$

답 $2e-3$

**유형 19 정적분으로 정의된 함수의 최대·최소** 본책 [illegible]쪽

> 정적분으로 정의된 함수의 최댓값·최솟값은
>
> ① $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)$
>
> ② $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)dt=f(x+a)-f(x)$
>
> 임을 이용하여 구한다.

**1318** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x+1+\frac{2}{x+1}-\left(x+\frac{2}{x}\right)$$
$$=1+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x}$$
$$=\frac{x^2+x-2}{x(x+1)}=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이자 최소이므로 최솟값은

$$f(1)=\int_1^2\left(t+\frac{2}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+2\ln|t|\right]_1^2$$
$$=2+2\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+2\ln 2$$

답 $\frac{3}{2}+2\ln 2$

**1319** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=2-e^x$

$f'(x)=0$에서 $e^x=2$ $\therefore x=\ln 2$ ··· ❶

따라서 $f(x)$는 $x=\ln 2$에서 극대이자 최대이므로 최댓값은

| $x$ | $\cdots$ | $\ln 2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ |

$$f(\ln 2)=\int_1^{\ln 2}(2-e^t)dt$$
$$=\left[2t-e^t\right]_1^{\ln 2}$$
$$=2\ln 2-2-(2-e)$$
$$=2\ln 2+e-4$$ ··· ❷

따라서 $a=\ln 2$, $b=2\ln 2+e-4$이므로

$b-2a=2\ln 2+e-4-2\ln 2=e-4$ ··· ❸

답 $e-4$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)=0$일 때의 $x$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다. | 50% |
| ❸ $b-2a$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1320** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=xe^{x^2-1}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이자 최소이므로 구하는 최솟값은

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ |

$$f(0)=\int_{-1}^0 te^{t^2-1}dt$$

$t^2-1=s$로 놓으면 $\dfrac{ds}{dt}=2t$

$t=-1$일 때 $s=0$, $t=0$일 때 $s=-1$이므로

$$f(0)=\int_0^{-1}e^s\cdot\frac{1}{2}ds$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^s\,ds=-\frac{1}{2}\left[e^s\right]_{-1}^0$$
$$=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}$$

답 ④

**1321** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ |

따라서 $f(x)$는 $x=e$에서 극대이자 최대이므로 최댓값은

$$f(e)=\int_1^e (1-\ln t)dt$$

$u(t)=1-\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면 $u'(t)=-\frac{1}{t}$, $v(t)=t$

$$\therefore f(e)=\int_1^e (1-\ln t)dt=\Big[t(1-\ln t)\Big]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{t}\right)\cdot t\,dt$$
$$=-1-\Big[-t\Big]_1^e=-1-(-e+1)$$
$$=e-2$$

따라서 $a=e$, $b=e-2$이므로 $a-b=2$ 답 ③

유형 20 정적분으로 정의된 함수의 극한 ; $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt$ 꼴 본책 185쪽

함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 할 때

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x+a)-F(a)}{x}=F'(a)=f(a)$$

임을 이용한다.

**1322** $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{\pi-h}^{\pi+h}f(t)dt$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(\pi+h)-F(\pi-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(\pi+h)-F(\pi)-\{F(\pi-h)-F(\pi)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(\pi+h)-F(\pi)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F(\pi-h)-F(\pi)}{-h}$$
$$=F'(\pi)+F'(\pi)=2F'(\pi)$$
$$=2f(\pi)=2\int_0^{\pi}\cos^2\frac{t}{4}\,dt$$
$$=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)dt$$
$$=\Big[t+2\sin\frac{t}{2}\Big]_0^{\pi}=\pi+2$$

답 $\pi+2$

**1323** $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2e}^{2e+h}f(t)dt=\lim_{h\to0}\frac{F(2e+h)-F(2e)}{h}$$
$$=F'(2e)=f(2e)$$
$$=e^{2e}\cdot\ln\frac{2e}{2}=e^{2e}$$

답 ②

**1324** $f(t)=1-\tan t$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{-x}^{2x}(1-\tan t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{-x}^{2x}f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(2x)-F(-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(2x)-F(0)-\{F(-x)-F(0)\}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(2x)-F(0)}{2x}\cdot2+\lim_{x\to0}\frac{F(-x)-F(0)}{-x}$$
$$=2F'(0)+F'(0)=3F'(0)$$
$$=3f(0)=3$$

답 ③

유형 21 정적분으로 정의된 함수의 극한 ; $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$ 꼴 본책 186쪽

함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 할 때

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$$

임을 이용한다.

**1325** $f(t)=1+\cos^4 t$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\pi-x}\int_{\pi}^{x}(1+\cos^4 t)dt=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{x-\pi}\int_{\pi}^{x}f(t)dt$$
$$=-\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}$$
$$=-F'(\pi)=-f(\pi)$$
$$=-2$$

답 $-2$

**1326** $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{1}{3}F'(1)=\frac{1}{3}f(1)$$
$$=\frac{2}{3}$$

답 ②

**1327** $f(t)=e^{t^2}$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}e^{t^2}dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{e}{2}$$

답 $\frac{e}{2}$

## 22 정적분과 급수 본책 186쪽

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_0^p f(x)dx$

② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_0^p f(a+x)dx$

**1328** $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$$=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

이때 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

**1329** $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n}=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin^2\frac{\pi}{2n}k\right)\cdot\frac{\pi}{2n}$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2x}{2}\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

답 ②

**1330** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=2$$

답 2

**1331** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\frac{3^2}{n^3+3^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx$$

$(1+x^3)'=3x^2$이므로

$$\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{(1+x^3)'}{1+x^3}dx$$
$$=\frac{1}{3}\Big[\ln|1+x^3|\Big]_0^1=\frac{1}{3}\ln2$$

답 ①

**1332** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{2n}{n}\right)\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2=\frac{e^4-1}{4}$$

답 ③

**1333** 전략 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f(g(x))=x$

$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$이므로

$f'(g(x))g'(x)=1 \quad \therefore g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$

이때 $f'(x)=2f(x)+3$이므로

$$f'(g(x))=2f(g(x))+3$$
$$=2x+3$$

따라서 $g'(x)=\frac{1}{2x+3}$이므로

$$\int_0^3 2g'(x)dx=\int_0^3\frac{2}{2x+3}dx$$
$$=\Big[\ln(2x+3)\Big]_0^3$$
$$=\ln9-\ln3=\ln3$$

답 $\ln3$

**1334** 전략 $1-x=t$로 치환한다.

풀이 ㄱ. $1-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1\{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx$$
$$=\int_1^0\{f(1-t)g'(t)-g(1-t)f'(t)\}\cdot(-1)dt$$
$$=-\int_0^1\{f'(t)g(1-t)-g'(t)f(1-t)\}dt$$
$$=-k$$

ㄴ. $1-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1 g'(x)f(1-x)dx=\int_1^0 g'(1-t)f(t)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_0^1 f(x)g'(1-x)dx$$

$$\therefore \int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$
$$=\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-f(x)g'(1-x)\}dx$$
$$=\int_0^1 \{f(x)g(1-x)\}'dx$$
$$=\Big[f(x)g(1-x)\Big]_0^1$$
$$=f(1)g(0)-f(0)g(1)$$

즉 $f(1)g(0)-f(0)g(1)=k$이므로 $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면 $k=0$

ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$에서 $f(0)=0,\ f(1)=\ln 2$

$g(x)=\sin \pi x$에서 $g(0)=0,\ g(1)=0$

$\therefore k=f(1)g(0)-f(0)g(1)=0$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

**1335** 전략 $f(x)$의 증가·감소를 통해 $f'(x)$의 부호를 판단한다.

풀이 함수 $f(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 증가하므로 $f'(x)>0$이고, 구간 $(2, 3)$에서 감소하므로 $f'(x)<0$이다.

$$\therefore \int_1^3 |f'(x)|\sin f(x)dx$$
$$=\int_1^2 f'(x)\sin f(x)dx-\int_2^3 f'(x)\sin f(x)dx$$

$f(x)=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=f'(x)$

$x=1$일 때 $t=\dfrac{\pi}{2}$, $x=2$일 때 $t=\dfrac{4}{3}\pi$, $x=3$일 때 $t=\pi$이므로

$$\int_1^2 f'(x)\sin f(x)dx-\int_2^3 f'(x)\sin f(x)dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}\sin t\,dt-\int_{\frac{4}{3}\pi}^{\pi}\sin t\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\sin t\,dt$$
$$=\Big[-\cos t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}+\Big[-\cos t\Big]_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}$$
$$=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

답 0

**1336** 전략 정적분의 성질과 부분적분법을 이용한다.

풀이 ㄱ. $g_1(x)=f_1(x)-f_0(x)$

$$=\sin x+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} xf_0(x)dx-\sin x$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx$$

이때 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$$\therefore g_1(x)=2\left\{\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\cos x)dx\right\}$$
$$=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\Big[-\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\right)$$
$$=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi+\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

ㄴ. $g_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x)$

$$=\left\{\sin x+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} xf_{n-1}(x)dx\right\}-\left\{\sin x+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} xf_{n-2}(x)dx\right\}$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\{f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\}dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} xg_{n-1}(x)dx\ (\text{단, } n\ge 2)$$

ㄷ. ㄴ에서 $g_n(x)=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} xg_{n-1}(x)dx$이므로 $g_n(x)$는 상수함수이다.

$$\therefore g_n(x)=2g_{n-1}(x)\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,dx$$
$$=2g_{n-1}(x)\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 g_{n-1}(x)\ (\text{단, } n\ge 2)$$

따라서 수열 $\{g_n(x)\}$는 공비가 $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2$인 등비수열이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

**1337** 전략 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면 함수 $f(x)$는 우함수임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $f(-x)=\dfrac{\{(-x)^2-1\}^2}{(-x)^4+1}=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^4+1}=f(x)$

이므로 $-1\le x<1$일 때 함수 $f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^0 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

또 조건 (나)에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_{-2}^2 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_{-1}^0 f(x)dx$$
$$=4\int_0^1 f(x)dx$$

ㄴ. $-1<x<1$일 때,

$$f'(x)=\frac{4x(x^2-1)(x^4+1)-4x^3(x^2-1)^2}{(x^4+1)^2}$$
$$=\frac{4x(x^2-1)(x^4+1-x^4+x^2)}{(x^4+1)^2}$$
$$=\frac{4x(x^2-1)(x^2+1)}{(x^4+1)^2}$$
$$=\frac{4x(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x^4+1)^2}$$

조건 (나)에 의하여 $1<x<2$에서의 $f'(x)$는 $-1<x<0$에서의 $f'(x)$와 같고, $-1<x<0$일 때 $f'(x)>0$이므로 $1<x<2$일 때 $f'(x)>0$이다.

ㄷ. $0<x<1$일 때 $f'(x)<0$이므로 $2<x<3$일 때 $f'(x)<0$이다.

$$\therefore \int_1^3 x|f'(x)|dx=\int_1^2 xf'(x)dx-\int_2^3 xf'(x)dx$$

$u(x)=x$, $v'(x)=f'(x)$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=f(x)$

$\therefore \int_1^2 xf'(x)dx-\int_2^3 xf'(x)dx$

$=\Big[xf(x)\Big]_1^2-\int_1^2 f(x)dx-\Big\{\Big[xf(x)\Big]_2^3-\int_2^3 f(x)dx\Big\}$

$=2f(2)-f(1)-\int_1^2 f(x)dx$

$\quad -\Big\{3f(3)-2f(2)-\int_2^3 f(x)dx\Big\}$

$=-3f(3)+4f(2)-f(1)+\int_2^3 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$ …… ㉠

이때 조건 (나)에 의하여

$\int_2^3 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_{-1}^0 f(x)dx$

또 $f(x)$가 우함수이므로 $\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx$

$\therefore \int_2^3 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx=0$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_1^2 xf'(x)dx-\int_2^3 xf'(x)dx$

$=-3f(3)+4f(2)-f(1)$

$=-3f(-1)+4f(0)-f(-1)$

$=4f(0)-4f(-1)$

$=4\cdot1-4\cdot0=4$

$\therefore \int_1^3 x|f'(x)|dx=4$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

**1338** 전략 피적분함수를 전개한 후 정적분의 성질을 이용한다.

풀이 $\int_0^1 (e^x-ax)^2dx$

$=\int_0^1 (e^{2x}-2axe^x+a^2x^2)dx$

$=\int_0^1 (e^{2x}+a^2x^2)dx-2a\int_0^1 xe^x dx$

$=\Big[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{a^2}{3}x^3\Big]_0^1-2a\int_0^1 xe^x dx$

$=\frac{1}{2}e^2+\frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}-2a\int_0^1 xe^x dx$ …… ㉠

$\int_0^1 xe^x dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int_0^1 xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-\Big[e^x\Big]_0^1$

$=e-(e-1)=1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 (e^x-ax)^2dx=\frac{1}{2}e^2+\frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}-2a$

$=\frac{1}{3}(a-3)^2+\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{2}$

따라서 $a=3$일 때 주어진 정적분의 값이 최소이다. 답 3

**1339** 전략 부분적분법을 이용하여 $\int_0^1 f(x)g'(x)dx$의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^1 f(x)g'(x)dx$

$=\Big[f(x)g(x)\Big]_0^1-\int_0^1 f'(x)g(x)dx$

$=f(1)g(1)-f(0)g(0)-\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$

$=f(1)-\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$ ($\because g(0)=0,\ g(1)=1$)

$1+x^3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx=\int_1^2 \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{3}dt$

$=\Big[-\frac{1}{3t}\Big]_1^2=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

따라서 $f(1)-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$이므로 $f(1)=\frac{1}{3}$ 답 ④

**1340** 전략 $-x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$ …… ㉠

$-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

$x=-1$일 때 $t=1$, $x=0$일 때 $t=0$이므로

$\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_1^0 f(-t)\cdot(-1)dt$

$=\int_0^1 f(-t)dt=\int_0^1 f(-x)dx$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(-x)dx+\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 \{f(-x)+f(x)\}dx$

$=\int_0^1 x^2\Big(e^x+\frac{1}{e^x}\Big)dx=\int_0^1 x^2(e^x+e^{-x})dx$

이때 $g(x)=x^2$, $h'(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면

$g'(x)=2x$, $h(x)=e^x-e^{-x}$

$\therefore \int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2(e^x+e^{-x})dx$

$=\Big[x^2(e^x-e^{-x})\Big]_0^1-2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx$

$=e-\frac{1}{e}-2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx$ …… ㉢

$\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x-e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x+e^{-x}$

$\therefore \int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx=\Big[x(e^x+e^{-x})\Big]_0^1-\int_0^1 (e^x+e^{-x})dx$

$=e+\frac{1}{e}-\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1$

$=e+\frac{1}{e}-\Big(e-\frac{1}{e}\Big)=\frac{2}{e}$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=e-\frac{1}{e}-\frac{4}{e}=e-\frac{5}{e}$$

답 ④

## 1341

전략 $f(x)=\int_a^x g(t)dt$이면 $f'(x)=g(x)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int_1^x e^{\sin t}dt$ ……㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=e^{\sin x}$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=0$

$\int_1^a e^{\sin x+2f(x)}dx=\int_1^a e^{\sin x}\cdot e^{2f(x)}dx$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=f'(x)=e^{\sin x}$

$x=1$일 때 $t=f(1)=0$, $x=a$일 때 $t=f(a)=\ln 2$이므로

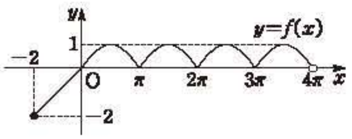
$$\int_1^a e^{\sin x}\cdot e^{2f(x)}dx=\int_0^{\ln 2} e^{2t}dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{\ln 4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

## 1342

전략 $g(x)=\int_{-2}^x f(t)dt$이면 $g'(x)=f(x)$임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.




ㄱ. $g(\pi)=\int_{-2}^{\pi} f(t)dt=\int_{-2}^{0} t\,dt+\int_0^{\pi}\sin t\,dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\cos t\right]_0^{\pi}=-2+2=0$

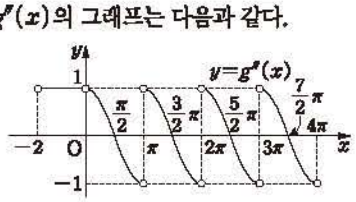
ㄴ. $g(x)=\int_{-2}^x f(t)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

$g'(\pi)=f(\pi)=0$이지만 $x=\pi$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=\pi$에서 극댓값을 갖지 않는다.

ㄷ. $g''(x)=f'(x)=\begin{cases} 1 & (-2<x<0) \\ \cos x & (0<x<\pi) \\ -\cos x & (\pi<x<2\pi) \\ \cos x & (2\pi<x<3\pi) \\ -\cos x & (3\pi<x<4\pi) \end{cases}$

이므로 $y=g''(x)$의 그래프는 다음과 같다.




따라서 $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$에서 $g''(x)=0$이고 각각의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=g(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$에서 변곡점을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

## 1343

전략 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_0^p f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{kx}{n}\cos\frac{kx}{n}=\int_0^x t\cos t\,dt$

위의 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

| $x$ | 0 | … | $\frac{\pi}{2}$ | … | $\frac{3}{2}\pi$ | … | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극소이므로

$a=\frac{3}{2}\pi$, $b=f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\int_0^{\frac{3}{2}\pi} t\cos t\,dt$

$u(t)=t$, $v'(t)=\cos t$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\sin t$

$\therefore b=f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\int_0^{\frac{3}{2}\pi} t\cos t\,dt=\left[t\sin t\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}-\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sin t\,dt$

$=-\frac{3}{2}\pi-\left[-\cos t\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}=-\frac{3}{2}\pi-1$

$\therefore a+b=\frac{3}{2}\pi+\left(-\frac{3}{2}\pi-1\right)=-1$

답 $-1$

## 1344

전략 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $\sin x$와 $\cos x$의 값의 대소 관계를 파악한다.

풀이 (i) $0\le x\le\frac{\pi}{4}$일 때, $\sin x\le\cos x$

$\therefore \sin x * \cos x=\sin x$

(ii) $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때, $\cos x\le\sin x$

$\therefore \sin x * \cos x=\cos x$ ➊

(i), (ii)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x * \cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

$=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1+1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=2-\sqrt{2}$ ➋

답 $2-\sqrt{2}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ➊ 구간을 나누어 $\sin x * \cos x$를 구할 수 있다. | 30% |
| ➋ 정적분의 값을 구할 수 있다. | 70% |

**1345** **전략** 조건 (나)에서 $2x+1$, $4x$를 각각 한 문자로 치환하여 적분한다.

**풀이** $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(2x+1)dx=3$에서 $2x+1=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=2$

$x=-\dfrac{1}{2}$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{1}{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(2x+1)dx=\int_0^2 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$$

즉 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx=3$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=6 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad ➊$$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(4x)dx=2$에서 $4x=s$로 놓으면 $\quad \dfrac{ds}{dx}=4$

또한 $x=\dfrac{1}{2}$일 때 $s=2$, $x=1$일 때 $s=4$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(4x)dx=\int_2^4 f(s)\cdot\frac{1}{4}ds=\frac{1}{4}\int_2^4 f(s)ds$$

즉 $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_2^4 f(s)ds=\dfrac{1}{4}\int_2^4 f(x)dx=2$이므로

$$\int_2^4 f(x)dx=8 \quad \cdots\cdots ㉡ \quad ➋$$

한편 $f(x+4)=f(x)$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}\int_{10}^{20} f(x)dx&=\int_2^{12} f(x)dx\\&=\int_2^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx+\int_8^{12} f(x)dx\\&=\int_2^4 f(x)dx+2\int_0^4 f(x)dx\\&=\int_2^4 f(x)dx+2\left\{\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx\right\}\\&=8+2(6+8)=36\end{aligned} \quad ➌$$

답 36

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $\int_0^2 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ➋ $\int_2^4 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다. | 30% |
| ➌ $\int_{10}^{20} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다. | 40% |

**1346** **전략** 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 $x$의 값을 경계로 적분 구간을 나누어 적분한다.

**풀이** $f(x)=\begin{cases}-1 & (x\le 0)\\ 2x-1 & (0\le x\le 1)\\ 1 & (x\ge 1)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^2 f(x)e^{-x}dx\\&=\int_{-1}^0(-e^{-x})dx+\int_0^1(2x-1)e^{-x}dx+\int_1^2 e^{-x}dx\\&=\Big[e^{-x}\Big]_{-1}^0+\int_0^1(2x-1)e^{-x}dx+\Big[-e^{-x}\Big]_1^2\\&=1-e-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}+\int_0^1(2x-1)e^{-x}dx \quad \cdots\cdots ㉠ \quad ➊\end{aligned}$$

$\int_0^1(2x-1)e^{-x}dx$에서 $u(x)=2x-1$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=-e^{-x}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1(2x-1)e^{-x}dx&=\Big[-(2x-1)e^{-x}\Big]_0^1-\int_0^1(-2e^{-x})dx\\&=-\frac{1}{e}-1-\Big[2e^{-x}\Big]_0^1\\&=-\frac{1}{e}-1-\frac{2}{e}+2\\&=-\frac{3}{e}+1 \quad \cdots\cdots ㉡ \quad ➋\end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x)e^{-x}dx&=1-e-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}+\left(-\frac{3}{e}+1\right)\\&=-\frac{1}{e^2}-\frac{2}{e}-e+2\end{aligned} \quad ➌$$

답 $-\dfrac{1}{e^2}-\dfrac{2}{e}-e+2$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ 구간에 따라 $f(x)$를 구하여 간단히 할 수 있다. | 40% |
| ➋ $\int_0^1(2x-1)e^{-x}dx$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ➌ $\int_{-1}^2 f(x)e^{-x}dx$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1347** **전략** $x=g(t)$가 미분가능하고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$임을 이용한다.

**풀이** $\int_0^{36} f'(\sqrt{x})dx$에서 $\sqrt{x}=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}$$

또한 $x=0$일 때 $t=0$, $x=36$일 때 $t=6$이므로

$$\int_0^{36} f'(\sqrt{x})dx=\int_0^6 f'(t)\cdot 2t\,dt \quad ➊$$

$$\begin{aligned}&=\Big[2tf(t)\Big]_0^6-\int_0^6 2f(t)dt\\&=12f(6)-2\int_0^6 f(x)dx\\&=12\cdot 4-2\cdot 8=32\end{aligned} \quad ➋$$

답 32

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ 치환하여 피적분함수를 변형할 수 있다. | 40% |
| ➋ $\int_0^{36} f'(\sqrt{x})dx$의 값을 구할 수 있다. | 60% |

**1348** **전략** 양변을 $x$에 대하여 미분한 후 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴로 변형한다.

**풀이** $(x^2+1)f(x)-4x=4\displaystyle\int_1^x\{tf(t)-1\}dt \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$2xf(x)+(x^2+1)f'(x)-4=4\{xf(x)-1\}$

$(x^2+1)f'(x)=2xf(x)$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x}{x^2+1} \quad ➊$$

위의 등식의 양변을 적분하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$\therefore \ln f(x) = \ln(x^2+1) + C \ (\because f(x) > 0)$ ······ ㉡

이때 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)-4=0 \qquad \therefore f(1)=2$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\ln f(1) = \ln 2 + C, \quad \ln 2 = \ln 2 + C \quad \therefore C=0$

따라서 $\ln f(x) = \ln(x^2+1)$이므로 ··· ❷

$f(x) = x^2+1$

$\therefore f(5)=26$ ··· ❸

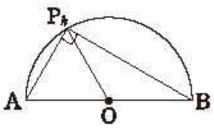
답 26

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $\frac{f'(x)}{f(x)}$를 구할 수 있다. | 30% |
| ❷ $\ln f(x)$를 구할 수 있다. | 60% |
| ❸ $f(5)$의 값을 구할 수 있다. | 10% |

**1349** 전략 $\triangle ABP_k$의 넓이를 $k$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 반원의 중심을 O라 하면 $\angle AOP_k = \frac{k\pi}{n}$




원주각과 중심각 사이의 관계에 의하여

$\angle ABP_k = \frac{k\pi}{2n}$

직각삼각형 $ABP_k$에서 $\overline{AB}=12$이므로

$\overline{AP_k} = 12\sin(\angle ABP_k) = 12\sin\frac{k\pi}{2n}$

$\overline{BP_k} = 12\cos(\angle ABP_k) = 12\cos\frac{k\pi}{2n}$

$$\therefore S_k = \frac{1}{2}\cdot 12\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot 12\cos\frac{k\pi}{2n} = 72\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\cos\frac{k\pi}{2n} = 36\sin\frac{k\pi}{n}$$ ··· ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}36\sin\frac{k\pi}{n} = 36\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n} = 36\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 36\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 72$$ ··· ❷

답 72

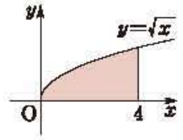
**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $S_k$를 $n$과 $k$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 50% |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

Ⅳ 적분법

## 12 정적분의 활용

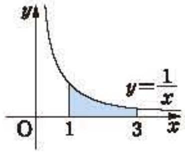
**1350** 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$$\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

답 $\frac{16}{3}$

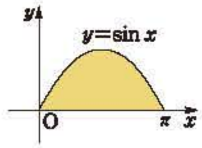
**1351** 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$$\int_1^3 \frac{1}{x}dx = \Big[\ln|x|\Big]_1^3 = \ln 3$$

답 $\ln 3$

**1352** 곡선 $y=\sin x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $\sin x=0$에서



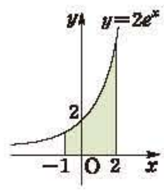

$x=0$ 또는 $x=\pi$ $(\because 0\le x\le\pi)$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 2$$

답 2

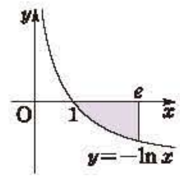
**1353** 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$$\int_{-1}^{2} 2e^x dx = 2\Big[e^x\Big]_{-1}^{2} = 2\left(e^2-\frac{1}{e}\right)$$

답 $2\left(e^2-\frac{1}{e}\right)$

**1354** 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



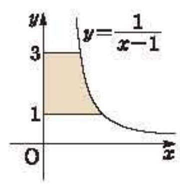

$$\int_1^e |-\ln x|dx = \int_1^e \ln x\,dx = \Big[x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e dx = e - \Big[x\Big]_1^e = e-(e-1) = 1$$

답 1

**1355** $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}|\cos x|dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx = \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}+1 = 2-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**1356** $y=\frac{1}{x-1}$에서 $\frac{1}{y}=x-1$




$\therefore x = 1+\frac{1}{y}$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3\left(1+\frac{1}{y}\right)dy = \Big[y+\ln|y|\Big]_1^3 = 2+\ln 3$$

답 $2+\ln 3$

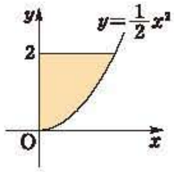
**1357** $y=\frac{1}{2}x^2$에서 $x^2=2y$

$\therefore x=\sqrt{2y}$ ($\because x\ge0$)

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2\sqrt{2y}\,dy=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

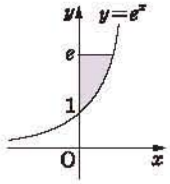



**1358** $y=e^x$에서 $x=\ln y$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^e\ln y\,dy=\Big[y\ln y\Big]_1^e-\int_1^e dy$$

$$=e-\Big[y\Big]_1^e=e-(e-1)=1$$




답 1

**1359** $y=\ln(x-1)$에서

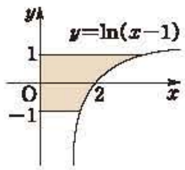
$x-1=e^y$ $\therefore x=e^y+1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^1(e^y+1)dy=\Big[e^y+y\Big]_{-1}^1$$

$$=e+1-\left(\frac{1}{e}-1\right)$$

$$=e-\frac{1}{e}+2$$




답 $e-\frac{1}{e}+2$

**1360** 두 곡선 $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$의 교점의 $x$좌표는 $x^2=\sqrt{x}$에서

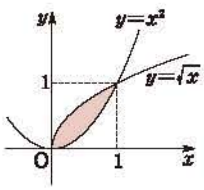
$x^4=x$, $x(x^3-1)=0$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$




답 $\frac{1}{3}$

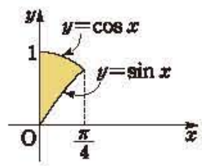
**1361** 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 $x$좌표는 $\sin x=\cos x$에서

$x=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}-1$$




답 $\sqrt{2}-1$

**1362** $y=\ln x$에서 $x=e^y$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1(e^y-y)dy=\left[e^y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=e-\frac{3}{2}$$

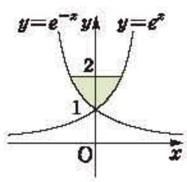
답 $e-\frac{3}{2}$

**1363** $y=e^x$에서 $x=\ln y$

$y=e^{-x}$에서 $-x=\ln y$ $\therefore x=-\ln y$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^2\{\ln y-(-\ln y)\}dy$$




$$=2\int_1^2\ln y\,dy=2\Big[y\ln y\Big]_1^2-2\int_1^2 dy$$

$$=4\ln 2-2\Big[y\Big]_1^2=4\ln 2-2$$

답 $4\ln 2-2$

**1364** 밑면으로부터 $x$ cm인 지점에서의 단면의 넓이가 $\sqrt{3-x}$ cm²이므로 구하는 부피는

$$\int_0^3\sqrt{3-x}\,dx=\left[-\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=2\sqrt{3}\ (\text{cm}^3)$$

답 $2\sqrt{3}$

**1365** 밑면으로부터 $x$ cm인 지점에서의 단면의 넓이가

$(e^{-x})^2=e^{-2x}$ (cm²)

이므로 구하는 부피는

$$\int_0^4 e^{-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^4=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^8}\right)\ (\text{cm}^3)$$

답 $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^8}\right)$

**유형 01** **곡선과 $x$축 사이의 넓이 (1)** 본책 192쪽

연속함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

① 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\ge0$일 때 $\int_a^b f(x)dx$

② 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\le0$일 때 $\int_a^b\{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$

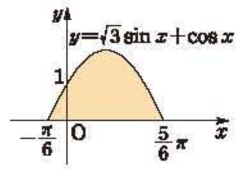
**1366** $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$$

$$=\left[-2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}=4$$




답 ④

**SSEN 특강**

**삼각함수의 합성**

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

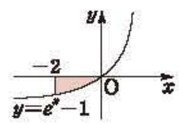
$\left(단,\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

**1367** 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^0\{-(e^x-1)\}dx=\int_{-2}^0(1-e^x)dx$$

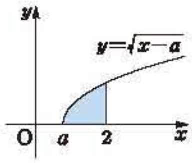
$$=\Big[x-e^x\Big]_{-2}^0$$

$$=1+\frac{1}{e^2}$$




답 $1+\frac{1}{e^2}$

**1368** 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



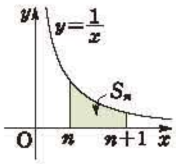

$$\int_a^2 \sqrt{x-a}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}\right]_a^2$$
$$=\frac{2}{3}(2-a)^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $\frac{2}{3}(2-a)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$이므로

$(2-a)^{\frac{3}{2}}=1,\quad 2-a=1\quad \therefore a=1$

답 ④

**1369** 오른쪽 그림에서




$$S_n=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_n^{n+1}$$
$$=\ln(n+1)-\ln n$$
$$=\ln\frac{n+1}{n} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} nS_n=\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n+1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln e=1 \quad \cdots ❷$$

답 1

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ $S_n$을 구할 수 있다. | 50% |
| ❷ $\lim_{n\to\infty} nS_n$의 값을 구할 수 있다. | 50% |

SSEN 특강

**무리수 $e$의 정의**

$e=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

**1370** $S_1=\int_1^{e^a}\frac{\ln x}{x}\,dx,\ S_2=\int_{e^a}^{e^b}\frac{\ln x}{x}\,dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^a$일 때 $t=a$, $x=e^b$일 때 $t=b$이므로

$$S_1=\int_0^a t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^a=\frac{a^2}{2}$$
$$S_2=\int_a^b t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_a^b=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

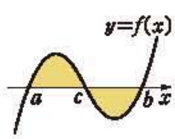
$S_1=S_2$에서 $\quad \frac{a^2}{2}=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

$b^2=2a^2\quad \therefore b=\sqrt{2}a\ (\because 0<a<b)$

답 ①

**유형 02 곡선과 $x$축 사이의 넓이 (2)** 본책 172쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $f(x)\ge0$인 구간과 $f(x)\le0$인 구간으로 나누어 각 부분의 넓이의 합을 구한다.




➡ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b\{-f(x)\}dx$

**1371** $\int_{-1}^0\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx+\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx$

$$=\Big[-\ln(x^2+1)\Big]_{-1}^0+\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^2$$
$$=\ln2+\ln5=\ln10$$

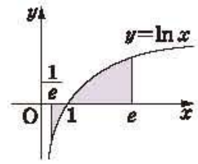
답 $\ln 10$

**1372** $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-x\sin x)dx$

$$=\left\{\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)dx\right\}$$
$$+\left\{\Big[x\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}-\int_{\pi}^{2\pi}\cos x\,dx\right\}$$
$$=\pi-\Big[-\sin x\Big]_0^{\pi}+3\pi-\Big[\sin x\Big]_{\pi}^{2\pi}=4\pi$$

답 $4\pi$

**1373** 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$$\int_{\frac{1}{e}}^1(-\ln x)dx+\int_1^e\ln x\,dx$$
$$=\left\{\Big[-x\ln x\Big]_{\frac{1}{e}}^1-\int_{\frac{1}{e}}^1(-1)dx\right\}$$
$$+\left\{\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e dx\right\}$$
$$=-\frac{1}{e}-\Big[-x\Big]_{\frac{1}{e}}^1+e-\Big[x\Big]_1^e=2-\frac{2}{e}$$

답 $2-\frac{2}{e}$

**유형 03 곡선과 $y$축 사이의 넓이 (1)** 본책 173쪽

연속함수 $g(y)$에 대하여 곡선 $x=g(y)$와 $y$축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이는

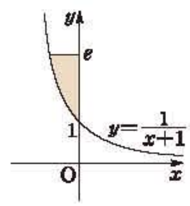
① 구간 $[c, d]$에서 $g(y)\ge0$일 때 $\quad \int_c^d g(y)dy$

② 구간 $[c, d]$에서 $g(y)\le0$일 때 $\quad \int_c^d\{-g(y)\}dy=-\int_c^d g(y)dy$

**1374** $y(x+1)=1$에서

$x+1=\frac{1}{y}\quad \therefore x=\frac{1}{y}-1$

따라서 구하는 넓이는



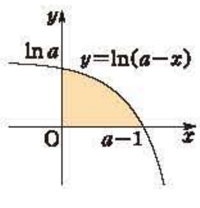

$$\int_1^e\left\{-\left(\frac{1}{y}-1\right)\right\}dy=\int_1^e\left(1-\frac{1}{y}\right)dy$$
$$=\Big[y-\ln|y|\Big]_1^e$$
$$=e-2$$

답 $e-2$

**1375** $y=\ln(a-x)$에서

$a-x=e^y\quad \therefore x=a-e^y$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는




$$\int_0^{\ln a}(a-e^y)dy=\Big[ay-e^y\Big]_0^{\ln a}$$
$$=a\ln a-a+1$$

따라서 $a\ln a-a+1=1$이므로

$a(\ln a-1)=0,\quad \ln a-1=0\ (\because a>1)$

$\ln a=1\quad \therefore a=e$

답 ②

**다른 풀이** 앞의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^{a-1}\ln(a-x)dx=\Big[x\ln(a-x)\Big]_0^{a-1}-\int_0^{a-1}\frac{-x}{a-x}dx$$

$$=-\int_0^{a-1}\left(1-\frac{a}{a-x}\right)dx$$

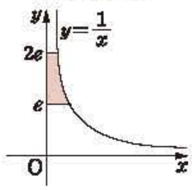
$$=-\Big[x+a\ln|a-x|\Big]_0^{a-1}=a\ln a-a+1$$

따라서 $a\ln a-a+1=1$이므로 $a(\ln a-1)=0$ $\therefore a=e$

**1376** $xy\le 1$에서 $y\le\frac{1}{x}$ $(\because x>0)$

$y^2-3ey+2e^2\le 0$에서 $(y-e)(y-2e)\le 0$ $\therefore e\le y\le 2e$

즉 주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다. ⋯ ❶




따라서 구하는 넓이는

$$\int_e^{2e}\frac{1}{y}dy=\Big[\ln|y|\Big]_e^{2e}$$

$$=\ln 2e-\ln e=\ln 2 \quad ⋯ ❷$$

답 $\ln 2$

**채점 기준표**

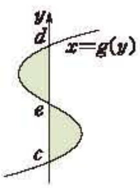
| | |
|---|---|
| ❶ 연립부등식의 영역을 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❷ 연립부등식의 영역의 넓이를 구할 수 있다. | 60% |

## 유형 04 곡선과 $y$축 사이의 넓이 (2)

본책 193쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $x=g(y)$와 $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $g(y)\ge 0$인 구간과 $g(y)\le 0$인 구간으로 나누어 각 부분의 넓이의 합을 구한다.

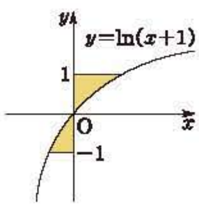
➡ $\int_c^e g(y)dy+\int_e^d\{-g(y)\}dy$




**1377** $y=\ln(x+1)$에서

$x+1=e^y$ $\therefore x=e^y-1$

따라서 구하는 넓이는




$$\int_{-1}^0\{-(e^y-1)\}dy+\int_0^1(e^y-1)dy$$

$$=\Big[-e^y+y\Big]_{-1}^0+\Big[e^y-y\Big]_0^1$$

$$=e+\frac{1}{e}-2$$

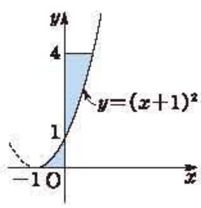
답 $e+\frac{1}{e}-2$

**1378** $y=(x+1)^2$에서

$\sqrt{y}=x+1$ $(\because x\ge -1)$

$\therefore x=\sqrt{y}-1$

따라서 구하는 넓이는




$$\int_0^1\{-(\sqrt{y}-1)\}dy+\int_1^4(\sqrt{y}-1)dy$$

$$=\Big[-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+y\Big]_0^1+\Big[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-y\Big]_1^4$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2$$

답 ②

## 유형 05 곡선과 직선 사이의 넓이

본책 193쪽

(i) 곡선과 직선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(ii) 곡선과 직선의 교점의 $x$좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.
(iii) {(위쪽의 식)−(아래쪽의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

**1379** 곡선 $y=-\frac{x}{x^2+1}$와 직선 $y=-\frac{1}{2}x$의 교점의 $x$좌표는

$-\frac{x}{x^2+1}=-\frac{1}{2}x$에서 $x^3+x=2x$

$x^3-x=0,\quad x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

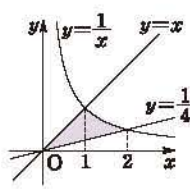
$$\int_{-1}^0\left(-\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}x\right)dx+\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}x^2\Big]_{-1}^0+\Big[-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\right)=\ln 2-\frac{1}{2}$$

답 ①

**1380** 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는 $\frac{1}{x}=x$에서




$x^2=1$ $\therefore x=1$ $(\because x>0)$

또 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 $x$좌표는 $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}x$에서

$x^2=4$ $\therefore x=2$ $(\because x>0)$ ⋯ ❶

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{4}x\right)dx+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}x\right)dx$$

$$=\Big[\frac{3}{8}x^2\Big]_0^1+\Big[\ln|x|-\frac{1}{8}x^2\Big]_1^2$$

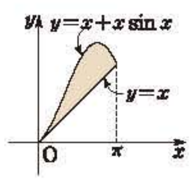
$$=\frac{3}{8}+\ln 2-\frac{3}{8}=\ln 2 \quad ⋯ ❷$$

답 $\ln 2$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ 곡선과 두 직선의 교점의 $x$좌표를 각각 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. | 60% |

**1381** 곡선 $y=x+x\sin x$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는 $x+x\sin x=x$에서




$x\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ $(\because 0\le x\le\pi)$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^\pi(x+x\sin x-x)dx=\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)dx$$

$$=\pi-\Big[-\sin x\Big]_0^\pi=\pi$$

답 ④

**참고** $0<x<\pi$일 때, $\sin x>0$이므로

$(x+x\sin x)-x=x\sin x>0$

즉 $0<x<\pi$에서 곡선 $y=x+x\sin x$는 직선 $y=x$보다 항상 위쪽에 있다. 이와 같이 주어진 함수의 그래프를 정확히 그리기 어려울 때에는 두 함수의 대소를 비교하여 그래프가 위쪽에 있는 식과 아래쪽에 있는 식을 파악하여 정적분의 값을 구한다.

### 유형 06 두 곡선 사이의 넓이

본책 194쪽

(i) 두 곡선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(ii) 두 곡선의 교점의 $x$좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.
(iii) $\int\{(\text{위쪽의 식})-(\text{아래쪽의 식})\}$의 정적분의 값을 구한다.

**1382** 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\sin x$의 교점의 $x$좌표는 $\cos x=\sin x$에서

$$x=\frac{\pi}{4}\ \left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$$

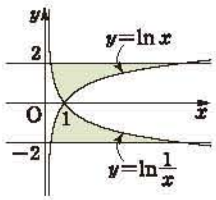
따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}-1$$
$$=2(\sqrt{2}-1)$$

답 ②

**1383** $y=\ln x$에서 $x=e^y$

$y=\ln\frac{1}{x}$에서 $x=e^{-y}$

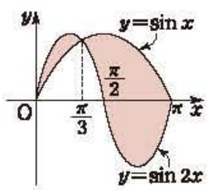



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}(e^{-y}-e^y)dy+\int_0^2(e^y-e^{-y})dy$$
$$=2\int_0^2(e^y-e^{-y})dy=2\Big[e^y+e^{-y}\Big]_0^2$$
$$=2\left(e^2+\frac{1}{e^2}-2\right)$$

답 $2\left(e^2+\frac{1}{e^2}-2\right)$

**1384** 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$의 교점의 $x$좌표는 $\sin x=\sin 2x$에서




$\sin x=2\sin x\cos x$

$\sin x(1-2\cos x)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ $(\because 0\le x\le\pi)$

따라서 구하는 넓이는

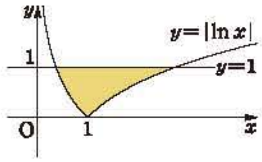
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\Big[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

**1385** $0<x<1$에서 $y=-\ln x$이므로 $x=e^{-y}$

$x\ge1$에서 $y=\ln x$이므로

$x=e^y$



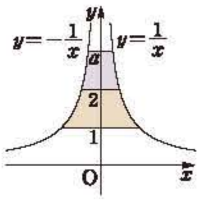

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1(e^y-e^{-y})dy=\Big[e^y+e^{-y}\Big]_0^1$$
$$=e+\frac{1}{e}-2$$

답 $e+\frac{1}{e}-2$

**1386** $y=\frac{1}{x}$에서 $x=\frac{1}{y}$

$y=-\frac{1}{x}$에서 $x=-\frac{1}{y}$




$$\therefore S_1=\int_1^2\left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy$$
$$=2\int_1^2\frac{1}{y}dy$$
$$=2\Big[\ln|y|\Big]_1^2=2\ln2 \quad \cdots ❶$$
$$S_2=\int_2^a\left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy$$
$$=2\int_2^a\frac{1}{y}dy$$
$$=2\Big[\ln|y|\Big]_2^a$$
$$=2\ln a-2\ln 2 \quad \cdots ❷$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로 $2\ln a-2\ln2=\ln2$

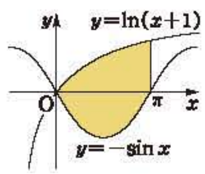
$$\ln a=\frac{3}{2}\ln 2=\ln 2^{\frac{3}{2}}$$
$$\therefore a=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2} \quad \cdots ❸$$

답 $2\sqrt{2}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $S_1$의 값을 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ $S_2$를 $a$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40% |
| ❸ $a$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1387** 주어진 부등식을 동시에 만족시키는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같으므로 구하는 넓이는




$$\int_0^{\pi}\{\ln(x+1)-(-\sin x)\}dx$$
$$=\int_0^{\pi}\ln(x+1)dx+\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\Big[x\ln(x+1)\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{x}{x+1}dx+\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\pi\ln(\pi+1)-\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx+2$$
$$=\pi\ln(\pi+1)-\Big[x-\ln|x+1|\Big]_0^{\pi}+2$$
$$=\pi\ln(\pi+1)-\pi+\ln(\pi+1)+2$$
$$=(\pi+1)\ln(\pi+1)-\pi+2$$

답 ⑤

## 유형 07 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 (본책 194쪽)

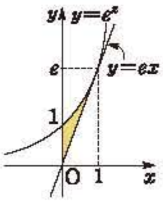
(i) 접선의 방정식을 구한다.
(ii) 접점의 좌표를 구하고 그래프를 그린다.
(iii) 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

**1388** $y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 곡선 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 기울기는 $e^t$이고 접선의 방정식은

$$y-e^t=e^t(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로 $\quad -e^t=-te^t \qquad \therefore t=1\ (\because e^t>0)$

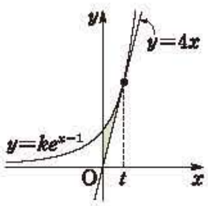
따라서 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(1,\ e)$에서의 접선의 방정식은 $y=ex$이므로 구하는 넓이는




$$\int_0^1 (e^x-ex)dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{e}{2}-1$$

답 $\frac{e}{2}-1$

**1389** $f(x)=ke^{x-1}$, $g(x)=4x$로 놓으면 $\quad f'(x)=ke^{x-1}$, $g'(x)=4$




곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$f(t)=g(t)$에서

$$ke^{t-1}=4t \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(t)=g'(t)$에서

$$ke^{t-1}=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$t=1$, $k=4$ ➊

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 (4e^{x-1}-4x)dx=\left[4e^{x-1}-2x^2\right]_0^1=2-\frac{4}{e}$$ ➋

답 $2-\frac{4}{e}$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ➊ $k$의 값을 구할 수 있다. | 50% |
| ➋ 도형의 넓이를 구할 수 있다. | 50% |

**1390** $y=\ln(x-1)$에서 $y'=\dfrac{1}{x-1}$이므로 곡선 위의 점 $(t,\ \ln(t-1))$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{t-1}$이고 접선의 방정식은

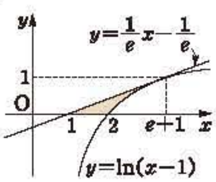
$$y-\ln(t-1)=\frac{1}{t-1}(x-t)$$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$$-\ln(t-1)=\frac{1}{t-1}(1-t)$$

$\ln(t-1)=1, \qquad t-1=e \qquad \therefore t=e+1$

따라서 곡선 $y=\ln(x-1)$ 위의 점 $(e+1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은




$$y-1=\frac{1}{e}(x-e-1)$$

$\therefore y=\dfrac{1}{e}x-\dfrac{1}{e}$, 즉 $x=ey+1$

$y=\ln(x-1)$에서 $\quad x-1=e^y$

$\therefore x=e^y+1$

따라서 구하는 넓이는

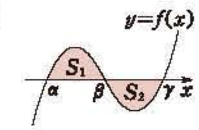
$$\int_0^1\{(e^y+1)-(ey+1)\}dy=\int_0^1(e^y-ey)dy$$
$$=\left[e^y-\frac{e}{2}y^2\right]_0^1=\frac{e}{2}-1$$

답 ①

## 유형 08 두 도형의 넓이가 같을 조건 (본책 195쪽)

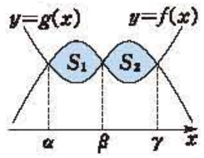
① 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 $S_1$, $S_2$라 하면

➡ $S_1=S_2 \Longleftrightarrow \int_\alpha^\gamma f(x)dx=0$




② 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 $S_1$, $S_2$라 하면

➡ $S_1=S_2 \Longleftrightarrow \int_\alpha^\gamma \{f(x)-g(x)\}dx=0$




**1391** $\int_0^k (\sqrt{x}-1)dx=0$이므로

$\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_0^k=0, \qquad \frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}-k=0$

$k\left(\frac{2}{3}\sqrt{k}-1\right)=0, \qquad \frac{2}{3}\sqrt{k}-1=0\ (\because k>1)$

$\sqrt{k}=\frac{3}{2} \qquad \therefore k=\frac{9}{4}$

답 ④

**1392** $\int_{\frac{1}{e}}^a \frac{\ln x}{x}dx=0$에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$x=\frac{1}{e}$일 때 $t=-1$, $x=a$일 때 $t=\ln a$이므로

$\int_{\frac{1}{e}}^a \frac{\ln x}{x}dx=\int_{-1}^{\ln a} t\,dt=0, \qquad \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{\ln a}=0$

$\frac{1}{2}\{(\ln a)^2-1\}=0, \qquad (\ln a)^2=1$

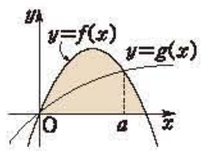
$\ln a=1\ (\because a>1) \qquad \therefore a=e$

답 $e$

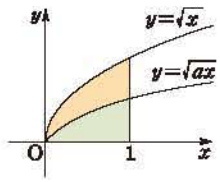
## 유형 09 두 곡선 사이의 넓이의 활용; 이등분 (본책 195쪽)

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$가 곡선 $y=g(x)$에 의하여 이등분되면

$$\int_0^a |f(x)-g(x)|dx=\frac{1}{2}S$$




**1393** 곡선 $y=\sqrt{x}$와 $x$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면




$$S_1=\int_0^1\sqrt{x}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

곡선 $y=\sqrt{ax}$와 $x$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

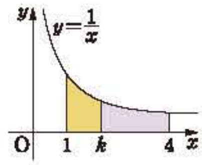
$$S_2=\int_0^1 \sqrt{ax}\,dx=\sqrt{a}\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{a}$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로 $\quad \frac{2}{3}\sqrt{a}=\frac{1}{3}$

$\sqrt{a}=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

답 ③

**1394** 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면




$$S_1=\int_1^4 \frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^4$$
$$=2\ln 2 \qquad \cdots ❶$$

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$$S_2=\int_1^k \frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^k=\ln k\ (\because 1<k<4) \qquad \cdots ❷$$

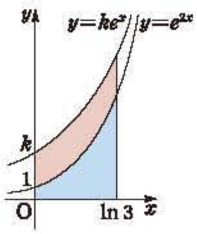
이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$\ln k=\ln 2 \qquad \therefore k=2 \qquad \cdots ❸$

답 2

| 채점 기준표 | |
|---|---|
| ❶ 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. | 40% |
| ❷ 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. | 40% |
| ❸ $k$의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**1395** 곡선 $y=ke^x$과 $x$축 및 두 직선 $x=0$, $x=\ln 3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면




$$S_1=\int_0^{\ln 3} ke^x dx=\Big[ke^x\Big]_0^{\ln 3}$$
$$=2k$$

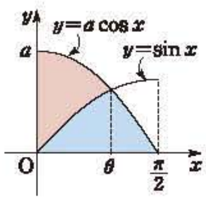
곡선 $y=e^{2x}$과 $x$축 및 두 직선 $x=0$, $x=\ln 3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$$S_2=\int_0^{\ln 3} e^{2x}dx=\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^{\ln 3}=4$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로 $\qquad k=4$

답 4

**1396** 두 곡선 $y=a\cos x$, $y=\sin x$의 교점의 $x$좌표를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면




$a\cos\theta=\sin\theta$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=a$, 즉 $\tan\theta=a \quad \cdots\cdots$ ㉠

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 곡선 $y=a\cos x$와 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx=a\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=a$$

$0\le x\le\theta$에서 두 곡선 $y=a\cos x$, $y=\sin x$와 $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$$S_2=\int_0^{\theta}(a\cos x-\sin x)dx$$
$$=\Big[a\sin x+\cos x\Big]_0^{\theta}$$
$$=a\sin\theta+\cos\theta-1$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로 $\qquad a\sin\theta+\cos\theta-1=\frac{a}{2}$

$\therefore a\sin\theta+\cos\theta=\frac{a}{2}+1$

양변을 $\cos\theta$로 나누면

$a\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1=\left(\frac{a}{2}+1\right)\frac{1}{\cos\theta}$

$\therefore a\tan\theta+1=\left(\frac{a}{2}+1\right)\sec\theta \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+a^2$이므로

$\sec\theta=\sqrt{a^2+1}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면 $\qquad a^2+1=\left(\frac{a}{2}+1\right)\sqrt{a^2+1}$

$\sqrt{a^2+1}=\frac{a}{2}+1, \qquad a^2+1=\frac{a^2}{4}+a+1$

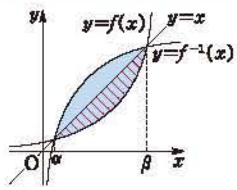
$3a^2-4a=0, \qquad a(3a-4)=0$

$\therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>0)$

답 ②

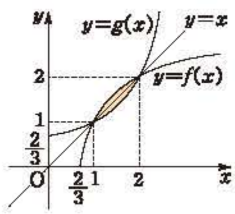
## 유형 10 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이 본책 196쪽

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표가 $\alpha$, $\beta$일 때, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는




$$S=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-f^{-1}(x)|dx$$
$$=2\int_{\alpha}^{\beta}|x-f(x)|dx$$

**1397** 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선의 교점의 $x$좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표와 같다.




즉 $\sqrt{3x-2}=x$에서 $\qquad 3x-2=x^2$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

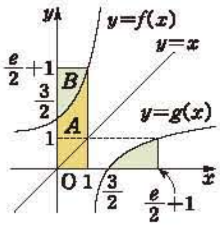
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_1^2(\sqrt{3x-2}-x)dx=2\Big[\frac{2}{9}(3x-2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2$$
$$=\frac{1}{9}$$

답 $\frac{1}{9}$

**1398** 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{e}{2}+1} g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 $y$축 및 직선 $y=\frac{e}{2}+1$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 $B$와 같다.



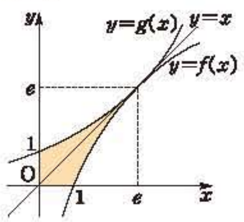

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{e}{2}+1} g(x)dx=A+B=\frac{e}{2}+1$$

답 $\frac{e}{2}+1$

**1399** $f(e)=e$이고, $f'(x)=\frac{e}{x}$에서 $f'(e)=1$이므로 점 $(e,\ e)$에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식은 $y=x$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=x$는 오른쪽 그림과 같다.

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는




$$2\int_0^e (e^{\frac{y}{e}}-y)\,dy=2\left[e\cdot e^{\frac{y}{e}}-\frac{1}{2}y^2\right]_0^e$$

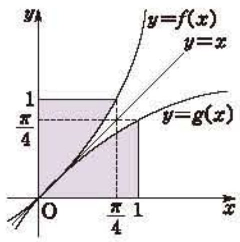
$y=e\ln x$에서 $x=e^{\frac{y}{e}}$

$$=2\left(\frac{1}{2}e^2-e\right)=e^2-2e$$

답 $e^2-2e$

**1400** 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $\int_0^1 g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 $y$축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는




$$\frac{\pi}{4}\cdot 1-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$$

답 ④

**유형 11 입체도형의 부피; 단면이 밑면과 평행한 경우** 본책 196쪽

높이가 $a$인 입체도형에서 밑면으로부터의 높이가 $x$인 곳에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$이면 이 도형의 부피는

$$\int_0^a S(x)dx$$

**1401** 물의 깊이가 $x$ cm일 때 수면의 넓이가 $(\sqrt{2x+1}-1)\text{cm}^2$이므로 물통의 부피는

$$\int_0^{12}(\sqrt{2x+1}-1)dx=\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}-x\right]_0^{12}=\frac{88}{3}(\text{cm}^3)$$

$$\therefore k=\frac{88}{3}$$

답 $\frac{88}{3}$

**1402** 물의 깊이가 $x$일 때 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$\int_0^x S(x)dx=2e^x+\ln(x+1)-2$$

위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$S(x)=2e^x+\frac{1}{x+1}$$

따라서 물의 깊이가 2일 때 수면의 넓이 $a$는

$$a=S(2)=2e^2+\frac{1}{3}$$

물의 깊이가 2일 때 물의 부피 $b$는

$$b=V(2)=2e^2+\ln 3-2$$

$$\therefore a-b=\frac{7}{3}-\ln 3$$

답 $\frac{7}{3}-\ln 3$

**1403** 단면인 직사각형의 가로의 길이가 $e^{-\frac{x}{2}}$일 때 세로의 길이는 $2e^{-\frac{x}{2}}$이므로 높이가 $x$일 때 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cdot 2e^{-\frac{x}{2}}=2e^{-x}$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^5 2e^{-x}dx=\Big[-2e^{-x}\Big]_0^5=2-\frac{2}{e^5}$$

답 $2-\frac{2}{e^5}$

**1404** 높이가 $a$일 때 입체도형의 부피는 $\int_0^a x\ln(x^2+1)dx$

이때 $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=a$일 때 $t=a^2+1$이므로

$$\int_0^a x\ln(x^2+1)dx=\int_1^{a^2+1}\frac{1}{2}\ln t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[t\ln t\Big]_1^{a^2+1}-\frac{1}{2}\int_1^{a^2+1}dt$$

$$=\frac{a^2+1}{2}\ln(a^2+1)-\frac{1}{2}\Big[t\Big]_1^{a^2+1}$$

$$=\frac{a^2+1}{2}\ln(a^2+1)-\frac{a^2}{2}$$ ⋯ ❶

따라서 $\frac{a^2+1}{2}\ln(a^2+1)-\frac{a^2}{2}=\frac{5}{2}\ln 5-2$이고, $a$는 유리수이므로

$a^2=4$ $\quad\therefore a=2\ (\because a>0)$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ 입체도형의 부피를 $a$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 70% |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**1405** 물의 깊이가 $x$일 때 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\pi\sin^2 x$$

물의 깊이가 $\frac{\pi}{2}$일 때 그릇에 담긴 물의 부피 $V$는

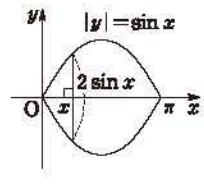
$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$$
물의 깊이가 $\pi$일 때 그릇에 담긴 물의 부피를 $V_1$이라 하면
$$V_1=\int_0^{\pi} S(x)dx=\int_0^{\pi} \pi\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$$
$\therefore V_1=2V$

답 ①

## 유형 12 입체도형의 부피; 단면이 밑면과 수직인 경우 　본책 197쪽

구간 $[a, b]$에서 $x$좌표가 $x$인 점을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피는
$$\int_a^b S(x)dx$$

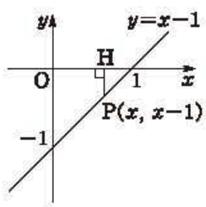
**1406** $x$좌표가 $x(0\le x\le \pi)$인 점을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면인 정사각형의 한 변의 길이는 $2\sin x$이므로 그 넓이를 $S(x)$라 하면




$$S(x)=(2\sin x)^2=4\sin^2 x$$
따라서 구하는 부피는
$$\int_0^{\pi} S(x)dx=\int_0^{\pi} 4\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi}(2-2\cos 2x)dx$$
$$=\left[2x-\sin 2x\right]_0^{\pi}=2\pi$$

답 ④

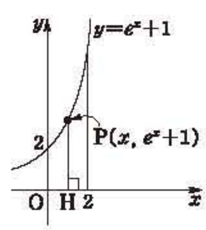
**1407** 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, x-1)(0\le x\le 1)$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하면




$$\overline{\mathrm{PH}}=1-x$$
이때 점 P를 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면
$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-2x+1)$$
따라서 구하는 부피는
$$\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-2x+1)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

답 ②

**1408** 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^x+1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, e^x+1)$ $(0\le x\le 2)$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하면



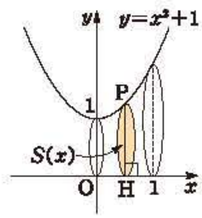

$$\overline{\mathrm{PH}}=e^x+1$$
이때 점 P를 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면
$$S(x)=\frac{1}{2}(e^x+1)^2=\frac{1}{2}(e^{2x}+2e^x+1) \quad \cdots ❶$$
따라서 구하는 부피는
$$\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 \frac{1}{2}(e^{2x}+2e^x+1)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{4}e^4+e^2-\frac{1}{4} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{1}{4}e^4+e^2-\frac{1}{4}$

채점 기준표

| | |
|---|---|
| ❶ 단면의 넓이를 $x$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 60% |
| ❷ 입체도형의 부피를 구할 수 있다. | 40% |

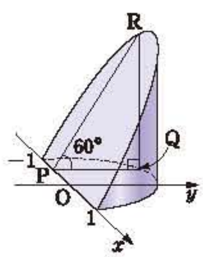
**1409** 곡선 $y=x^2+1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에서 $x$축에 내린 수선의 발이 H이므로




$$\overline{\mathrm{PH}}=x^2+1$$
이때 $\overline{\mathrm{PH}}$를 지름으로 하는 원의 넓이를 $S(x)$라 하면
$$S(x)=\pi\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}(x^4+2x^2+1)$$
따라서 주어진 입체도형의 부피는
$$\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1 \frac{\pi}{4}(x^4+2x^2+1)dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{7}{15}\pi$$
$\therefore k=7$

답 ④

**1410** 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 자른 평면과 밑면의 교선을 $x$축으로 정하고, $x$축 위의 점 $\mathrm{P}(x, 0)(-1\le x\le 1)$을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 $\triangle\mathrm{PQR}$라 하자. 이때




$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{1-x^2},$$
$$\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}\tan 60^\circ=\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$$
이므로 $\triangle\mathrm{PQR}$의 넓이를 $S(x)$라 하면
$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{RQ}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)$$
따라서 구하는 부피는
$$\int_{-1}^1 S(x)dx=\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)dx$$
$$=2\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)dx$$
$$=\sqrt{3}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

**1411** 전략 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분한 후 $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\int_0^x (a-t)e^t dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=(a-x)e^x$

$f'(x)=0$에서

$x=a$ ($\because e^x>0$)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이자 최대이므로 최댓값은

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ |

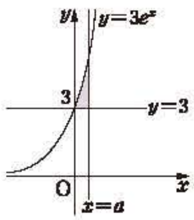
$f(a)=\int_0^a (a-t)e^t dt$

$=\left[(a-t)e^t\right]_0^a-\int_0^a(-e^t)dt$

$=-a-\left[-e^t\right]_0^a=e^a-a-1$

$\therefore e^a-a-1=32$ ⋯⋯ ㉠

한편 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이는




$\int_0^a (3e^x-3)dx=\left[3e^x-3x\right]_0^a$

$=3e^a-3a-3$

$=3(e^a-a-1)$

$=3\cdot 32=96$ ($\because$ ㉠)

답 96

**1412** 전략 두 도형의 넓이를 각각 구하여 등식을 세운다.

풀이 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=a$의 교점의 $x$좌표를 $k$라 하자.

곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=a$ 및 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면

$S=\frac{1}{2}a+\int_1^k (a-\ln x)dx$

곡선 $y=\ln x$와 두 직선 $x=e$, $y=a$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $T$라 하면

$T=\int_k^e (\ln x-a)dx$

$S=T$이므로

$\frac{1}{2}a+\int_1^k (a-\ln x)dx=\int_k^e (\ln x-a)dx$

$\therefore \frac{1}{2}a=\int_k^e (\ln x-a)dx-\int_1^k (a-\ln x)dx$

이때 위의 식의 우변을 정리하면

$\int_1^k (\ln x-a)dx+\int_k^e (\ln x-a)dx=\int_1^e (\ln x-a)dx$

$=\left[x\ln x-x-ax\right]_1^e$

$=a-ae+1$

이므로 $\frac{1}{2}a=a-ae+1$

$a\left(e-\frac{1}{2}\right)=1$ $\therefore a=\frac{1}{e-\frac{1}{2}}=\frac{2}{2e-1}$

답 ③

**1413** 전략 두 직선 $l_1$, $l_2$의 방정식을 구한 후 두 직선의 교점의 $x$좌표를 구한다.

풀이 $x+\frac{2}{x}-3=0$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore$ P(1, 0), Q(2, 0)

$f(x)=x+\frac{2}{x}-3$으로 놓으면 $f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$

$f'(1)=-1$이므로 점 P에서의 접선 $l_1$의 방정식은

$y=-(x-1)$ $\therefore y=-x+1$

$f'(2)=\frac{1}{2}$이므로 점 Q에서의 접선 $l_2$의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x-2)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x-1$

두 직선의 교점의 $x$좌표는 $-x+1=\frac{1}{2}x-1$에서

$\frac{3}{2}x=2$ $\therefore x=\frac{4}{3}$

따라서 구하는 넓이는

$\int_1^{\frac{4}{3}}\left\{x+\frac{2}{x}-3-(-x+1)\right\}dx$

$+\int_{\frac{4}{3}}^2\left\{x+\frac{2}{x}-3-\left(\frac{1}{2}x-1\right)\right\}dx$

$=\int_1^{\frac{4}{3}}\left(2x+\frac{2}{x}-4\right)dx+\int_{\frac{4}{3}}^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}-2\right)dx$

$=\left[x^2+2\ln x-4x\right]_1^{\frac{4}{3}}+\left[\frac{1}{4}x^2+2\ln x-2x\right]_{\frac{4}{3}}^2$

$=2\ln 2-\frac{4}{3}$

답 $2\ln 2-\frac{4}{3}$

**1414** 전략 조건 (나)에서 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{4-x} f(t)dt=c$ ($c$는 상수)로 놓고 양변을 $x$에 대하여 미분한다.

풀이 조건 (가)에서 $x<2$일 때, $f'(x)=e^{-x}$

$f'(0)=1$이므로 점 (0, 0)에서의 접선 $l$의 방정식은

$y=x$

조건 (나)에서 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{4-x} f(t)dt=c$ ($c$는 상수)로 놓고 양변을 $x$에 대하여 미분하면

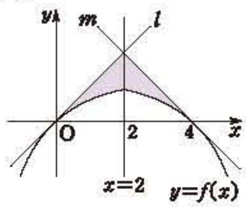
$f(x)-f(4-x)=0$, 즉 $f(x)=f(4-x)$

위의 등식의 양변에 $x$ 대신 $2-x$를 대입하면

$f(2-x)=f(2+x)$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$의 그래프와 두 접선 $l$, $m$은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는




$2\int_0^2 \{x-(1-e^{-x})\}dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-x-e^{-x}\right]_0^2$

$=2\left(-\frac{1}{e^2}+1\right)=2-\frac{2}{e^2}$

답 ④

**1415** 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $1\le x\le e$에서 $0\le \ln x\le 1$이므로 2 이상의 자연수 $n$에 대하여

$(\ln x)^n\ge(\ln x)^{n+1}$

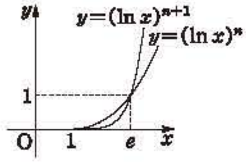
12 정적분의 활용

ㄴ. $1\le x\le e$에서

$(\ln x)^n \ge (\ln x)^{n+1}$

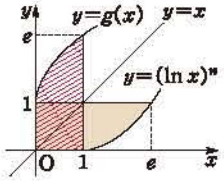
이므로 $y=(\ln x)^{n+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore S_n < S_{n+1}$




ㄷ. 함수 $f(x)=(\ln x)^n$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

$$S_n=\int_0^1 g(x)dx$$




이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

**1416** 전략 $x$의 값의 범위를 $0\le x<1$, $x=1$, $x>1$로 나누어 $f(x)$를 구한다.

풀이 (i) $0\le x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} x^{n+2}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+\sin\frac{\pi}{2}x}{x^n+1}=\sin\frac{\pi}{2}x$$

(ii) $x=1$일 때, $f(1)=\frac{1+1}{1+1}=1$

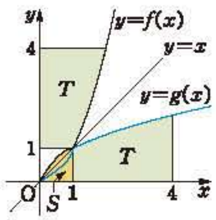
(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+\sin\frac{\pi}{2}x}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=x^2$$

이상에서 함수 $y=f(x)$와 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$S=\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$




곡선 $y=g(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이 $T$는 곡선 $y=f(x)$와 $y$축 및 두 직선 $y=1$, $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

$y=x^2$에서 $x=\sqrt{y}$ ($\because x>1$)이므로

$$T=\int_1^4\sqrt{y}dy=\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{14}{3}$$

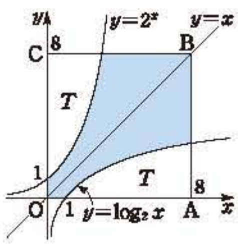
$$\therefore \frac{T}{S}=\frac{14}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{7}{3}\pi$$

답 $\frac{7}{3}\pi$

**1417** 전략 $y=\log_2 x$와 $y=2^x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 두 함수 $y=\log_2 x$와 $y=2^x$은 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$n=3$일 때, $\mathrm{A}(8,\ 0)$, $\mathrm{B}(8,\ 8)$, $\mathrm{C}(0,\ 8)$이므로 □OABC는 한 변의 길이가 8인 정사각형이고, 곡선 $y=\log_2 x$와 $x$축 및 직선 $x=8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $T$라 하면




$$T=\int_1^8\log_2 x\,dx=\frac{1}{\ln 2}\int_1^8\ln x\,dx$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\Big[x\ln x-x\Big]_1^8=\frac{1}{\ln 2}(24\ln 2-7)$$

$$=24-\frac{7}{\ln 2}$$

곡선 $y=2^x$과 $y$축 및 직선 $y=8$로 둘러싸인 부분의 넓이도 $T$이므로 구하는 넓이는

$$\square\mathrm{OABC}-2T=8^2-2T=16+\frac{14}{\ln 2}$$

답 ②

**1418** 전략 밑면으로부터 높이가 $x$인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 높이가 $a$이면 부피는 $\int_0^a S(x)dx$임을 이용한다.

풀이 높이가 $x$인 지점에서 입체도형을 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이가 $6\sin\frac{\pi}{20}x$이므로

$$V_1=\int_0^a 6\sin\frac{\pi}{20}x\,dx=\left[-\frac{120}{\pi}\cos\frac{\pi}{20}x\right]_0^a$$

$$=\frac{120}{\pi}-\frac{120}{\pi}\cos\frac{\pi}{20}a$$

$$V_2=\int_a^{10} 6\sin\frac{\pi}{20}x\,dx=\left[-\frac{120}{\pi}\cos\frac{\pi}{20}x\right]_a^{10}$$

$$=\frac{120}{\pi}\cos\frac{\pi}{20}a$$

이때 $\frac{V_2}{V_1}=\sqrt{2}+1$이므로 $V_2=(\sqrt{2}+1)V_1$

$$\frac{120}{\pi}\cos\frac{\pi}{20}a=(\sqrt{2}+1)\left(\frac{120}{\pi}-\frac{120}{\pi}\cos\frac{\pi}{20}a\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{20}a=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}+1)\cos\frac{\pi}{20}a$$

$$(2+\sqrt{2})\cos\frac{\pi}{20}a=\sqrt{2}+1$$

$$\cos\frac{\pi}{20}a=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \frac{\pi}{20}a=\frac{\pi}{4}\ (\because 0<a<10)$$

$\therefore a=5$

답 5

**1419** 전략 $y=|\sin x|$는 주기가 $\pi$인 주기함수임을 이용한다.

풀이 $$S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x\right|dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx$$

이때 $y=|\sin x|$는 주기가 $\pi$인 주기함수이므로

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx=\int_0^\pi\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=2$$

$$\therefore S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

⋯→ ❶

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$ ⋯ ❷

답 2

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $S_n$을 구할 수 있다. | 70% |
| ❷ $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구할 수 있다. | 30% |

**다른 풀이** (i) $n$이 홀수일 때,

구간 $[(n-1)\pi,\ n\pi]$에서 $\sin x\ge 0$이므로

$$S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\sin x\,dx=\left(\frac{1}{2}\right)^n\Big[-\cos x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\{1-(-1)\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(ii) $n$이 짝수일 때,

구간 $[(n-1)\pi,\ n\pi]$에서 $\sin x\le 0$이므로

$$S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(-\sin x)\,dx=\left(\frac{1}{2}\right)^n\Big[\cos x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\{1-(-1)\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(i), (ii)에서 $S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

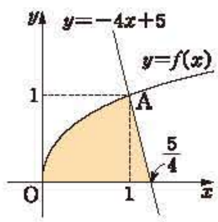
$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

**1420** **전략** 두 직선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 $-1$임을 이용한다.

**풀이** $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$에서

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$ ⋯ ❶

이때 $x>0$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이고, $f(0)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같다.




한편 점 A(1, 1)에서 접선의 기울기가 $f'(1)=\frac{1}{4}$이므로 직선 $l$의 방정식은

$$y-1=-4(x-1)$$
$$\therefore y=-4x+5$$ ⋯ ❷

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $l$ 및 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1\frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{4}-1\right)=\int_0^1\frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx+\frac{1}{8}$$

이때 $\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1\frac{2t}{1+t}\cdot 2t\,dt+\frac{1}{8}=\int_0^1\frac{4t^2}{1+t}dt+\frac{1}{8}$$
$$=\int_0^1\left(4t-4+\frac{4}{1+t}\right)dt+\frac{1}{8}$$
$$=\Big[2t^2-4t+4\ln(1+t)\Big]_0^1+\frac{1}{8}$$
$$=4\ln 2-2+\frac{1}{8}$$
$$=4\ln 2-\frac{15}{8}$$ ⋯ ❸

답 $4\ln 2-\frac{15}{8}$

**채점 기준표**

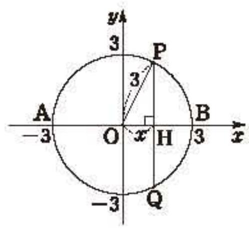
| | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 20% |
| ❷ 직선 $l$의 방정식을 구할 수 있다. | 20% |
| ❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다. | 60% |

**1421** **전략** 평면 $\alpha$를 좌표평면으로 정하고 $\overline{PQ}$를 지름으로 하는 반원의 넓이를 $x$에 대한 식으로 나타낸다.

**풀이** $\overline{CA}=5$이므로 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{5^2-4^2}=3$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 원점, 지름 AB를 $x$축으로 정하고, $\overline{AB}$와 $\overline{PQ}$의 교점을 H, $\overline{OH}=x$라 하면




$$\overline{PH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OH}^2}$$
$$=\sqrt{9-x^2}$$ ⋯ ❶

$\overline{PQ}$를 지름으로 하는 반원의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\pi}{2}\overline{PH}^2=\frac{\pi}{2}(9-x^2)$$ ⋯ ❷

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-3}^{3}S(x)dx=\int_{-3}^{3}\frac{\pi}{2}(9-x^2)dx$$
$$=\pi\int_0^3(9-x^2)dx$$
$$=\pi\Big[9x-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^3=18\pi$$ ⋯ ❸

답 $18\pi$

**채점 기준표**

| | |
|---|---|
| ❶ $\overline{PH}$의 길이를 $x$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❷ 반원의 넓이를 $x$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30% |
| ❸ 입체도형의 부피를 구할 수 있다. | 40% |

12 정적분의 활용

memo