정답 및 풀이

확률과 통계

I 순열과 조합

01 여러 가지 순열 2
02 중복조합과 이항정리 11

II 확률

03 확률의 뜻과 활용 18
04 조건부확률 28

III 통계

05 확률변수와 확률분포 38
06 이항분포와 정규분포 50
07 통계적 추정 64

정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

Ⅰ. 순열과 조합

01 여러 가지 순열

0001 $(6-1)!=5!=120$ 답 120

0002 $(5-1)!=4!=24$ 답 24

0003 구하는 경우의 수는 4가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$ 답 6

0004 답 (가) 35 (나) 6 (다) 210

0005 ${}_8C_3\cdot(3-1)!=56\cdot2=112$

답 112

0006 ${}_6C_5\cdot(5-1)!=6\cdot24=144$

답 144

0007 ${}_7C_5\cdot(5-1)!=21\cdot24=504$

답 504

0008 답 (가) 8 (나) 7 (다) 2

0009 ${}_4\Pi_2=4^2=16$ 답 16

0010 ${}_2\Pi_5=2^5=32$ 답 32

0011 ${}_3\Pi_3=3^3=27$ 답 27

0012 ${}_7\Pi_1=7^1=7$ 답 7

0013 ${}_n\Pi_3=64$이므로 $n^3=64=4^3$

$\therefore n=4$ 답 4

0014 ${}_5\Pi_r=125$이므로 $5^r=125=5^3$

$\therefore r=3$ 답 3

0015 구하는 두 자리 자연수의 개수는 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$ 답 9

0016 구하는 경우의 수는 참, 거짓의 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_4=2^4=16$ 답 16

0017 5개의 숫자 중 5가 3개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}=20$ 답 20

0018 6개의 문자 중 c가 2개, s가 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot2!}=180$ 답 180

0019 답 (가) 3 (나) 2 (다) b (라) 5 (마) 2 (바) 10

0020 어른 2명을 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

어른끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\cdot2=48$ 답 ①

0021 D, E, F, G의 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$ ··· ❶

D, E, F, G의 사이사이의 4개의 자리에 A, B, C의 3명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는 $6\cdot24=144$ ··· ❸

답 144

채점 기준	비율
❶ D, E, F, G의 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A, B, C가 사이사이 자리에 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ A, B, C가 이웃하지 않게 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0022 남자 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

남자들 사이사이의 4개의 자리에 여자 4명을 앉히는 경우의 수는

$4!=24$

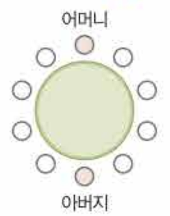
따라서 구하는 경우의 수는 $6\cdot24=144$ 답 144

0023 유진이 아버지의 자리가 결정되면 어머니의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 구하는 경우의 수는 9명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.

$\therefore (9-1)!=8!$ 답 ③

다른풀이 유진이네 부모님이 마주 보고 원탁에 앉은 후 나머지 8개의 자리에 8명을 앉히면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_8P_8=8!$



0024 가운데 삼각형을 칠하는 경우의 수는 4이고, 나머지 3개의 삼각형을 칠하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $4\cdot2=8$ 답 ②

0025 서로 다른 6가지 색을 6개의 날개에 칠하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$ 답 120

0026 6가지 색 중에서 4가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_6C_4=15$

서로 다른 4가지 색을 각 영역에 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $15\cdot6=90$ 답 90

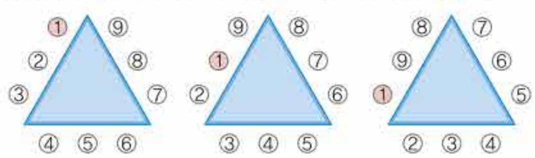
다른풀이 서로 다른 6가지 색 중에서 4가지 색을 골라 일렬로 나열하는 경우의 수는 $_6P_4=360$
이를 원형으로 배열하면 같은 것이 4가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는 $\dfrac{360}{4}=90$

0027 주어진 사각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는 5이고, 4개의 옆면을 칠하는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $5\cdot6=30$ 답 ④

0028 주어진 삼각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는 4이고, 3개의 옆면을 칠하는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는 $4\cdot2=8$ 답 8

0029 정육면체의 한 밑면에 한 가지 색을 칠하면 다른 밑면을 칠하는 경우의 수는 5이고, 옆면을 칠하는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$5\cdot6=30$ 답 ②

0030 9명이 원탁에 앉는 경우의 수는
$(9-1)!=8!$
이때 원탁에 앉는 한 가지 방법에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.

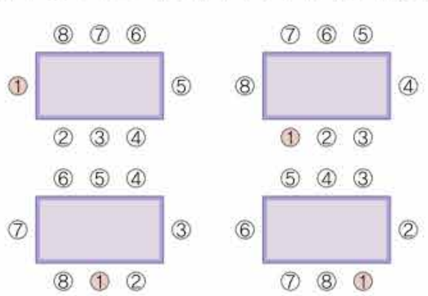


따라서 구하는 경우의 수는
$8!\cdot3$ 답 ②

라쎈 특강 **정다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수**

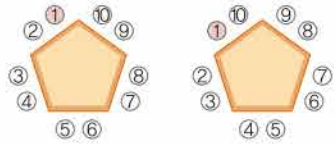
정다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우, 회전시켰을 때 일치하지 않는 자리의 수는 정다각형의 한 변에 앉는 사람의 수와 같다.

0031 8명이 원탁에 앉는 경우의 수는
$(8-1)!=7!$
이때 원탁에 앉는 한 가지 방법에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 4가지씩 존재한다.



따라서 경우의 수가 $7!\times4$이므로
$k=4$ 답 4

0032 10명이 원탁에 앉는 경우의 수는
$(10-1)!=9!$
이때 원탁에 앉는 한 가지 방법에 대하여 정오각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $9!\cdot2$ 답 ②

0033 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개의 여행 상품에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_3\Pi_5=3^5=243$ 답 ⑤

0034 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개의 상자에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_5\Pi_3=5^3=125$ 답 125

0035 수현이가 시장에 들어가는 경우의 수는 2이고, 승민이와 준호가 시장에 들어가는 경우의 수는 서로 다른 6개의 입구에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_6\Pi_2=6^2=36$
따라서 구하는 경우의 수는 $2\cdot36=72$ 답 ③

0036 a, b, c에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는 $_3\Pi_3=3^3=27$
(i) a를 두 번 연속하여 나열하는 경우의 수는
aab, aac, baa, caa의 4
(ii) a를 세 번 연속하여 나열하는 경우의 수는
aaa의 1
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$27-(4+1)=22$ 답 22

다른풀이 a를 연속하여 나열하지 않는 경우는 다음과 같다.
(i) a를 나열하지 않는 경우
b, c 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로 경우의 수는 $_2\Pi_3=2^3=8$
(ii) a를 한 번만 사용하여 나열하는 경우
a의 자리를 정한 후 나머지 자리를 b, c 중에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 나열하는 것과 같으므로 경우의 수는
$3\cdot{}_2\Pi_2=12$
(iii) a를 두 번 사용하여 나열하는 경우
aba, aca의 2가지
이상에서 구하는 경우의 수는 $8+12+2=22$

라쎈 특강

① (X가 아닌 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(X인 경우의 수)
② (사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)
③ (X 이상인 경우의 수)=(모든 경우의 수)−(X 미만인 경우의 수)
(X 이하인 경우의 수)=(모든 경우의 수)−(X 초과인 경우의 수)

0037 점검표에 ○, △, ×가 표시되는 모든 경우의 수는 ○, △, ×의 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_5=3^5=243$ ⋯ ❶

(i) ×가 표시된 식당이 없는 경우

5개의 식당에 ○ 또는 △가 표시되는 것과 같으므로 경우의 수는

$_2\Pi_5=2^5=32$ ⋯ ❷

(ii) ×가 표시된 식당이 1개인 경우

5개의 식당 중 1개는 ×가 표시되고, 나머지 4개의 식당에 ○ 또는 △가 표시되는 경우의 수는

$5\cdot{}_2\Pi_4=5\cdot2^4=80$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$243-(32+80)=131$ ⋯ ❹

답 131

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ ×가 표시된 식당이 없는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ ×가 표시된 식당이 1개인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ ×가 표시된 식당이 2개 이상인 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0038 전구 5개를 각각 켜거나 끄는 경우의 수는

$_2\Pi_5=2^5=32$

이때 모든 전구가 꺼진 경우는 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는 $32-1=31$

답 31

0039 두 기호를 10개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_{10}=2^{10}=1024$

답 ⑤

0040 고대 문자를 1개 사용하여 만들 수 있는 암호의 개수는

$_3\Pi_1=3$

고대 문자를 2개 사용하여 만들 수 있는 암호의 개수는

$_3\Pi_2=3^2=9$

고대 문자를 3개 사용하여 만들 수 있는 암호의 개수는

$_3\Pi_3=3^3=27$

같은 방법으로 4개, 5개 사용하여 만들 수 있는 암호의 개수는 각각 $_3\Pi_4=3^4=81$, $_3\Pi_5=3^5=243$이므로 구하는 암호의 개수는

$3+9+27+81+243=363$

답 ④

0041 깃발을 한 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_1=2$

깃발을 두 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_2=2^2$

같은 방법으로 깃발을 세 번, 네 번, ⋯, n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 $_2\Pi_3$, $_2\Pi_4$, ⋯, $_2\Pi_n$이므로 1번 이상 n번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$2+2^2+2^3+\cdots+2^n$ ⋯ ❶

$n=5$일 때, $2+2^2+2^3+2^4+2^5=62<100$

$n=6$일 때, $2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=126>100$

이므로 n의 최솟값은 6이다. ⋯ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ 깃발을 1번 이상 n번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수를 구할 수 있다.	60 %
❷ n의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

0042 마지막 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 3, 5의 3개

첫 번째 자리, 두 번째 자리, 세 번째 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$3\cdot125=375$

답 ④

0043 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3의 3개

십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$3\cdot16=48$

답 ②

0044 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3, ⋯, 9의 9개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 2, 4, 6, 8의 5개

백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, ⋯, 9의 10개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_{10}\Pi_2=10^2=100$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$9\cdot5\cdot100=4500$

답 4500

0045 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$4\cdot{}_5\Pi_3=4\cdot5^3=500$ ⋯ ❶

3을 제외한 4개의 숫자 0, 1, 2, 4로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$3\cdot{}_4\Pi_3=3\cdot4^3=192$ ⋯ ❷

따라서 구하는 자연수의 개수는

$500-192=308$ ⋯ ❸

답 308

채점 기준	비율
❶ 0, 1, 2, 3, 4로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 0, 1, 2, 4로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 3이 포함된 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0046 네 개의 숫자 2, 3, 4, 5로 만들 수 있는

한 자리 자연수의 개수는 4

두 자리 자연수의 개수는 $_4\Pi_2=4^2=16$

백의 자리의 숫자가 2 또는 3인 세 자리 자연수의 개수는

$2\cdot{}_4\Pi_2=2\cdot4^2=32$

백의 자리의 숫자가 4인 자연수 중 423보다 작은 수는 422의 1개이다.
따라서 423보다 작은 자연수의 개수는

$4+16+32+1=53$

이므로 423은 54번째 수이다. 답 54번째

0047 X에서 Y로의 함수는 Y의 원소 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 X의 원소 a, b, c, d에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$ 답 ②

0048 $f(3)=-1$이므로 Y의 원소 -2, -1, 0, 1, 2의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 1, 2에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$ 답 ③

0049 $f(b)\neq 7$이므로 $f(b)$의 값이 될 수 있는 수는 7을 제외한 3개이고, $f(d)\neq 1$이므로 $f(d)$의 값이 될 수 있는 수는 1을 제외한 3개이다.
또 Y의 원소 1, 3, 5, 7의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 a, c에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$3\cdot 3\cdot {}_4\Pi_2=3^2\cdot 4^2=144$ 답 144

0050 $f(3)+f(4)=5$를 만족시키는 $f(3)$, $f(4)$의 값을 순서쌍 $(f(3), f(4))$로 나타내면

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$

또 Y의 원소 0, 1, 2, 3, 4의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$4\cdot {}_5\Pi_2=4\cdot 5^2=100$ 답 100

0051 양 끝에 2개의 r를 나열하고, 2개의 r를 제외한 6개의 문자 t, e, e, a, s, u를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!}=360$ 답 ③

0052 모음 a, a, i를 한 문자 A로 생각하여 7개의 문자 A, s, s, s, t, t, n을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{3!\cdot 2!}=420$

이때 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$420\cdot 3=1260$ 답 ④

0053 (i) e를 뽑지 않는 경우
e를 제외한 6개의 문자 s, o, m, w, h, r 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_6P_3=120$

(ii) e를 1개 뽑는 경우
e를 제외한 6개의 문자 s, o, m, w, h, r 중에서 2개를 뽑은 후 e를 포함하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_6C_2\cdot 3!=15\cdot 6=90$

(iii) e를 2개 뽑는 경우
e를 제외한 6개의 문자 s, o, m, w, h, r 중에서 1개를 뽑은 후 e를 2개 포함하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_6C_1\cdot \dfrac{3!}{2!}=6\cdot 3=18$

(iv) e를 3개 뽑는 경우
eee의 1가지

이상에서 구하는 경우의 수는

$120+90+18+1=229$ 답 229

0054 (i) o끼리 이웃하는 경우
2개의 o를 한 문자 A로 생각하여 6개의 문자 A, p, i, i, n, n을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 2!}=180$ ⋯ ❶

(ii) n끼리 이웃하는 경우
2개의 n을 한 문자 B로 생각하여 6개의 문자 B, o, o, p, i, i를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 2!}=180$ ⋯ ❷

(iii) o끼리, n끼리 이웃하는 경우
2개의 o, 2개의 n을 각각 한 문자 A, B로 생각하여 5개의 문자 A, B, p, i, i를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$ ⋯ ❸

이상에서 구하는 경우의 수는

$180+180-60=300$ ⋯ ❹

답 300

채점 기준	비율
❶ o끼리 이웃하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ n끼리 이웃하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ o끼리, n끼리 이웃하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ o끼리 또는 n끼리 이웃하는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

0055 (i) 맨 앞자리의 숫자가 1인 경우
5개의 숫자 0, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우
5개의 숫자 0, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$

(iii) 맨 앞자리의 숫자가 3인 경우
5개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$60+60+30=150$ 답 ④

다른풀이 6개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!\cdot 2!}=180$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 5개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$180-30=150$

0056 (i) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

(ii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

4개의 숫자 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$24+12=36$

답 ②

0057 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리에 소수 2, 2, 5를 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

나머지 자리에 1, 1, 1, 4를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

따라서 구하는 경우의 수는 $3\cdot4=12$

답 12

0058 5개의 숫자 5, 7, 7, 9, 9에서 4개를 택하는 경우는

5, 7, 7, 9 또는 5, 7, 9, 9 또는 7, 7, 9, 9

(i) 5, 7, 7, 9를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$ ··· ❶

(ii) 5, 7, 9, 9를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$ ··· ❷

(iii) 7, 7, 9, 9를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$ ··· ❸

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$12+12+6=30$ ··· ❹

답 30

채점 기준	비율
❶ 5, 7, 7, 9로 만들 수 있는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 5, 7, 9, 9로 만들 수 있는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 7, 7, 9, 9로 만들 수 있는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0059 c, a의 순서가 정해져 있으므로 c, a를 모두 x로 생각하여 4개의 문자 x, b, x, d를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 c, 두 번째 x는 a로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

답 ③

0060 모음 e, e, i를 먼저 나열한 후 자음 g, r, t, n, g를 뒤에 나열하면 된다.

모음 e, e, i를 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

자음 g, r, t, n, g를 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot60=180$

답 ②

0061 s, m과 d, w의 순서가 각각 정해져 있으므로 s, m을 모두 x로, d, w를 모두 y로 생각하여 6개의 문자 y, i, x, y, o, x를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 s, 두 번째 x는 m, 첫 번째 y는 d, 두 번째 y는 w로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot2!}=180$

답 180

0062 2, 3, 4의 순서가 정해져 있으므로 2, 3, 4를 모두 0으로 생각하여 6개의 숫자 1, 1, 0, 0, 0, 5를 일렬로 나열한 후 첫 번째 0은 4, 두 번째 0은 3, 세 번째 0은 2로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot3!}=60$

답 ②

0063 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\cdot2!}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot10=60$

답 ②

0064 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!\cdot3!}=35$

답 ③

0065 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\cdot2!}=15$ ··· ❶

P에서 Q로 가는 경우의 수는 1

Q에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot1\cdot4=60$ ··· ❸

답 60

채점 기준	비율
❶ A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ Q에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 지점 P, Q를 모두 지나가는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0066 (i) A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$

(ii) P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\cdot3!}=20$

P에서 Q를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$2\cdot\frac{4!}{2!\cdot2!}=12$

이므로 P에서 Q를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

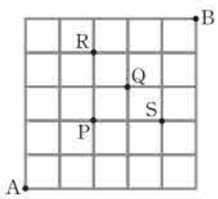
$20-12=8$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6\cdot8=48$

답 ①

다른풀이 오른쪽 그림과 같이 두 지점 R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → P → R → B로 가는 경우의 수는

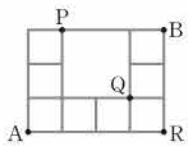
$\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot1\cdot\frac{4!}{3!}=6\cdot1\cdot4=24$

(ii) A → P → S → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot1\cdot\frac{4!}{3!}=6\cdot1\cdot4=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $24+24=48$

0067 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은 다음 중 하나이다.



A → P → B, A → Q → B,
A → R → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}\cdot1=4$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}\cdot\frac{3!}{2!}=4\cdot3=12$

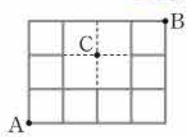
(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는 $1\cdot1=1$

이상에서 구하는 경우의 수는

$4+12+1=17$

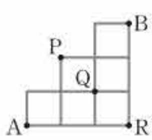
답 ②

다른풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 지점 C를 잡으면 구하는 경우의 수는 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 A에서 C를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.



$\therefore \frac{7!}{4!\cdot3!}-\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot\frac{3!}{2!}=35-6\cdot3$
$=17$

0068 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은 다음 중 하나이다.



A → P → B, A → Q → B,
A → R → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수

A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수가 2이고, P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수가 2이므로

$2\cdot2=4$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\cdot\frac{3!}{2!}=3\cdot3=9$

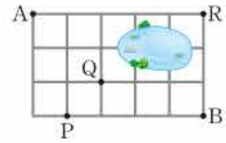
(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는 $1\cdot1=1$

이상에서 구하는 경우의 수는

$4+9+1=14$

답 14

0069 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은 다음 중 하나이다.



A → P → B, A → Q → B,
A → R → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}\cdot1=4$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot\frac{4!}{3!}=6\cdot4=24$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는 $1\cdot1=1$

이상에서 구하는 경우의 수는

$4+24+1=29$

답 ③

0070 전략 먼저 기준이 되는 영역을 칠하는 경우의 수를 구한다.

풀이 작은 원을 칠하는 경우의 수는 6이고, 나머지 5개의 영역을 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$

답 ④

0071 전략 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r$임을 이용한다.

풀이 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

답 ④

0072 전략 5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5인 수이다.

풀이 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 5의 2개

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 5개의 숫자 0, 2, 3, 5, 7로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수와 같으므로

$4\cdot{}_5\Pi_2=4\cdot5^2=100$

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$2\cdot100=200$

답 200

0073 전략 함수의 개수는 중복순열의 수, 일대일함수의 개수는 순열의 수를 이용한다.

풀이 집합 A에서 집합 B로의 함수의 개수는

$m={}_4\Pi_3=4^3=64$ ··· ❶

일대일함수의 개수는

$n={}_4P_3=24$ ··· ❷

$\therefore m-n=40$ ··· ❸

답 40

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m-n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0074 전략 5개의 숫자 중 같은 것이 몇 개씩 있는지 알아본다.

풀이 5개의 숫자 4, 4, 5, 6, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$

답 30

0075 전략 한 쌍의 부부를 한 사람으로 생각한다.

풀이 한 쌍의 부부를 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

각 부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\cdot 2!\cdot 2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot 8=16$

답 ③

0076 전략 먼저 두 밑면을 칠하는 경우의 수를 구한다.

풀이 주어진 오각뿔대의 두 밑면을 칠하는 경우의 수는

${}_7P_2=42$ ⋯ ❶

두 밑면에 칠한 2가지 색을 제외한 5가지의 색으로 옆면을 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$42\cdot 24=1008$ ⋯ ❸

답 1008

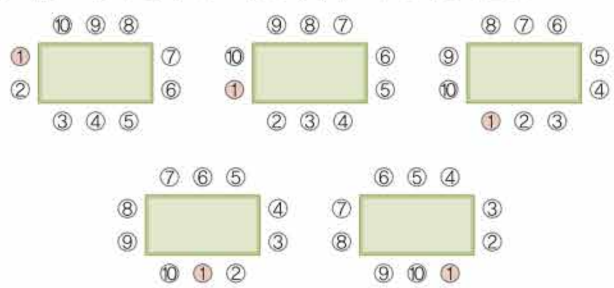
채점 기준	비율
❶ 두 밑면을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 옆면을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 각뿔대의 각 면을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0077 전략 먼저 원형으로 배열한 후 서로 구별되는 자리의 수를 세어 본다.

풀이 10명이 원탁에 앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원탁에 앉는 한 가지 방법에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



$\therefore a=9!\cdot 5$

주어진 반원 모양의 탁자에 7명이 둘러앉을 때, 회전하여 일치하는 경우가 없으므로 구하는 경우의 수는 7명을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

$\therefore b=7!$

따라서 구하는 값은

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{9!\cdot 5}{7!}=9\cdot 8\cdot 5=360$

답 360

0078 전략 네 자리 중 첫 번째 자리를 제외한 나머지 세 자리를 정하는 경우의 수는 중복순열의 수를 이용한다.

풀이 첫 번째 자리에 올 수 있는 것은

2, 4, 6의 3개

나머지 자리를 정하는 경우의 수는 2, 4, 6, a, b의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 암호의 개수는

$3\cdot 125=375$

답 375

0079 전략 백의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 먼저 정한 후 나머지 자리의 숫자를 정한다.

풀이 백의 자리의 숫자를 a, 십의 자리의 숫자를 b라 할 때, $a+b=7$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$

의 6개이다. ⋯ ❶

나머지 천의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_6\Pi_2=6^2=36$ ⋯ ❷

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6\cdot 36=216$ ⋯ ❸

답 216

채점 기준	비율
❶ 백의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 천의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0080 전략 모든 경우의 수에서 양 끝에 서로 같은 문자를 나열하는 경우의 수를 뺀다.

풀이 7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{3!\cdot 2!}=420$

(i) 양 끝에 A가 놓이는 경우

나머지 문자 A, B, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$

(ii) 양 끝에 B가 놓이는 경우

나머지 문자 A, A, A, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}=20$

(i), (ii)에서 양 끝에 서로 같은 문자를 나열하는 경우의 수가

$60+20=80$

이므로 구하는 경우의 수는

$420-80=340$

답 340

0081 전략 홀수가 홀수 번째 자리에 나열되면 짝수는 짝수 번째 자리에 나열된다.

풀이 다음 그림에서 홀수 3, 3, 5, 7은 ○의 자리에, 짝수 2, 4, 4는 △의 자리에 나열하면 된다.

○△○△○△○

4개의 숫자 3, 3, 5, 7을 ○의 자리에 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

3개의 숫자 2, 4, 4를 △의 자리에 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot3=36$

답 36

0082 전략 자음과 모음을 각각 한 문자로 생각한다.

풀이 자음 h, p, p, n, s, s를 한 문자로 생각하고 모음 a, i, e를 다른 한 문자로 생각하였을 때, 자음은 자음끼리, 모음은 모음끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

이때 자음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot2!}=180$

또 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot180\cdot6=2160$

답 ②

0083 전략 2, 4가 적혀 있는 카드와 홀수가 적혀 있는 카드를 각각 같은 것으로 생각한다.

풀이 2, 4를 모두 A로 생각하고, 1, 3, 5를 모두 B로 생각하여

A, A, B, B, B, 6

을 일렬로 나열한 후 첫 번째 A는 2, 두 번째 A는 4로 바꾸고, B는 왼쪽부터 차례대로 1, 3, 5로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot3!}=60$

답 ②

0084 전략 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 각각 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot6=18$

답 ②

0085 전략 가로, 세로, 높이의 방향으로 지나는 정육면체의 모서리의 개수를 이용한다.

풀이 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 정육면체의 모서리를 4개, 1개, 2개 지나야 하므로 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!\cdot2!}=105$

답 105

참고 가로 방향, 세로 방향, 높이의 방향으로 이동하는 것을 각각 a, b, c라 하면 구하는 경우의 수는

a, a, a, a, b, c, c

를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

0086 전략 천의 자리의 숫자가 1 또는 2인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 1○○○ 꼴의 수

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

(ii) 21○○ 꼴의 수

십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

(iii) 22○○ 꼴의 수

십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

(iv) 231○ 꼴의 수

일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로 3

(v) 232○ 꼴의 수

2322보다 작은 수는 2321의 1개이다.

이상에서 2322보다 작은 수의 개수는

$k=27+9+9+3+1=49$

답 ②

0087 전략 $f(3)=3$, $f(3)=5$인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 조건 (가)에 의하여

$f(3)=3$ 또는 $f(3)=5$

(i) $f(3)=3$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

4

조건 (다)에 의하여 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 함수 f의 개수는

$4\cdot8=32$ ··· ❶

(ii) $f(3)=5$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 5, 6 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

2

조건 (다)에 의하여 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 함수 f의 개수는

$2\cdot64=128$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$32+128=160$ ··· ❸

답 160

채점 기준	비율
❶ $f(3)=3$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(3)=5$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0088 전략 먼저 1 또는 2의 합으로 5가 되는 경우를 찾는다.

풀이 1 또는 2의 합으로 5가 되는 경우는

2, 2, 1 또는 2, 1, 1, 1 또는 1, 1, 1, 1, 1

(i) 2칸, 2칸, 1칸을 올라가는 경우
3개의 숫자 2, 2, 1을 일렬로 나열하는 것과 같으므로 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}=3$
(ii) 2칸, 1칸, 1칸, 1칸을 올라가는 경우
4개의 숫자 2, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 것과 같으므로 경우의 수는
$\frac{4!}{3!}=4$
(iii) 1칸, 1칸, 1칸, 1칸, 1칸을 올라가는 경우
1가지
이상에서 구하는 경우의 수는
$3+4+1=8$
답 8

0089 전략 현수막 B를 2곳, 3곳, 4곳 설치하는 경우의 수를 각각 구한다.

풀이 현수막 A는 반드시 설치하고 현수막 B는 2곳 이상 설치해야 하므로 현수막 B를 2곳, 3곳, 4곳에 설치할 때로 나누어 경우의 수를 구하면 다음과 같다.
(i) 현수막 B를 2곳에 설치하는 경우
A, B, B, C, C를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$
(ii) 현수막 B를 3곳에 설치하는 경우
A, B, B, B, C를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 경우의 수는
$\frac{5!}{3!}=20$
(iii) 현수막 B를 4곳에 설치하는 경우
A, B, B, B, B를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 경우의 수는
$\frac{5!}{4!}=5$
이상에서 구하는 경우의 수는
$30+20+5=55$
답 ①

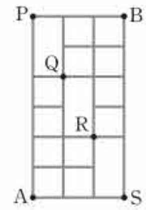
0090 전략 y와 y 사이의 문자가 2개, 4개인 경우로 나누어 구한다.

풀이 (i) y와 y 사이에 2개의 문자가 놓이는 경우
y, x, x, y를 한 문자 A로 생각하여 A, x, z를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$3!=6$
y, x, z, y를 한 문자 A로 생각하여 A, x, x를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}=3$
이때 y와 y 사이의 x, z가 자리를 바꾸는 경우의 수가 2이므로 $3\cdot2=6$
따라서 y와 y 사이에 2개의 문자가 놓이도록 나열하는 경우의 수는
$6+6=12$
(ii) y와 y 사이에 4개의 문자가 놓이는 경우
y와 y 사이에 x, x, x, z를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{3!}=4$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$12+4=16$
답 ②

다른풀이 ❶ □ ❷ □ ❸ □ ❹ □ ❺
네 문자 x, x, x, z를 빈칸에 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{3!}=4$
❶, ❷, ❸, ❹, ❺의 5개의 자리 중 y와 y 사이에 짝수 개의 문자가 놓이도록 y가 놓일 두 자리를 택하는 경우는
❶과 ❸, ❶과 ❺, ❷와 ❹, ❸과 ❺의 4가지
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot4=16$

0091 전략 반드시 거쳐야 하는 지점을 잡아서 경우를 나눈다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은 다음 중 하나이다.



A → P → B, A → Q → B,
A → R → B, A → S → B
(i) A → P → B로 가는 경우의 수는
$1\cdot1=1$
(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는
$\frac{5!}{4!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot2!}=5\cdot6=30$
(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot\frac{5!}{4!}=6\cdot5=30$
(iv) A → S → B로 가는 경우의 수는
$1\cdot1=1$
이상에서 구하는 경우의 수는
$1+30+30+1=62$
답 62

02 중복조합과 이항정리

I. 순열과 조합

0092 ${}_9\mathrm{H}_4={}_{12}\mathrm{C}_4$이므로 $n=12$ 답 12

0093 ${}_2\mathrm{H}_6={}_7\mathrm{C}_6={}_7\mathrm{C}_1$이므로 $n=7$ 답 7

0094 ${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

0095 ${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ 답 84

0096 ${}_7\mathrm{H}_0={}_6\mathrm{C}_0=1$ 답 1

0097 ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

0098 ${}_5\mathrm{H}_r={}_{5+r-1}\mathrm{C}_r={}_{4+r}\mathrm{C}_r$이므로
${}_{4+r}\mathrm{C}_r={}_7\mathrm{C}_3$ $\quad\therefore r=3$ 답 3

0099 ${}_3\mathrm{H}_r={}_{3+r-1}\mathrm{C}_r={}_{2+r}\mathrm{C}_r$이므로
${}_{2+r}\mathrm{C}_r={}_6\mathrm{C}_2={}_6\mathrm{C}_4$
$\therefore r=4$ 답 4

0100 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_7={}_{10}\mathrm{C}_7={}_{10}\mathrm{C}_3=120$ 답 120

0101 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$ 답 15

0102 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$ 답 56

0103 ${}_{\boxed{3}}\mathrm{H}_{\boxed{5}}={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\boxed{21}$
답 (가) $(1,\ 3,\ 1)$ (나) 5 (다) 3 (라) 5 (마) 21

0104 $(x+y)^5$
$={}_5\mathrm{C}_0x^5+{}_5\mathrm{C}_1x^4y+{}_5\mathrm{C}_2x^3y^2+{}_5\mathrm{C}_3x^2y^3+{}_5\mathrm{C}_4xy^4+{}_5\mathrm{C}_5y^5$
$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$
답 $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

0105 $(a+1)^6$
$={}_6\mathrm{C}_0a^6+{}_6\mathrm{C}_1a^5+{}_6\mathrm{C}_2a^4+{}_6\mathrm{C}_3a^3+{}_6\mathrm{C}_4a^2+{}_6\mathrm{C}_5a+{}_6\mathrm{C}_6$
$=a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a+1$
답 $a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a+1$

0106 $(2a-b)^4$
$={}_4\mathrm{C}_0(2a)^4+{}_4\mathrm{C}_1(2a)^3(-b)+{}_4\mathrm{C}_2(2a)^2(-b)^2$
$+{}_4\mathrm{C}_3(2a)(-b)^3+{}_4\mathrm{C}_4(-b)^4$
$=16a^4-32a^3b+24a^2b^2-8ab^3+b^4$
답 $16a^4-32a^3b+24a^2b^2-8ab^3+b^4$

0107 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$
$={}_4\mathrm{C}_0x^4+{}_4\mathrm{C}_1x^3\left(\dfrac{1}{x}\right)+{}_4\mathrm{C}_2x^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_3x\left(\dfrac{1}{x}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{x}\right)^4$
$=x^4+4x^2+6+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}$
답 $x^4+4x^2+6+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}$

0108 $(x+2)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6\mathrm{C}_rx^{6-r}2^r$
$x^{6-r}=x^5$에서 $6-r=5$ $\quad\therefore r=1$
따라서 x^5의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_1\cdot2=12$ 답 12

0109 $(a-3)^7$의 전개식의 일반항은 ${}_7\mathrm{C}_ra^{7-r}(-3)^r$
$a^{7-r}=a^4$에서 $7-r=4$ $\quad\therefore r=3$
따라서 a^4의 계수는
${}_7\mathrm{C}_3\cdot(-3)^3=-945$ 답 -945

0110 $(2x-3y)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r(2x)^{5-r}(-3y)^r={}_5\mathrm{C}_r2^{5-r}(-3)^rx^{5-r}y^r$
$x^{5-r}y^r=x^3y^2$에서 $r=2$
따라서 x^3y^2의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_2\cdot2^3\cdot(-3)^2=720$ 답 720

0111 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_rx^{5-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r\cdot(-1)^r\cdot\dfrac{x^{5-r}}{x^r}$
$\dfrac{x^{5-r}}{x^r}=\dfrac{1}{x}$에서 $r-(5-r)=1$
$2r-5=1$ $\quad\therefore r=3$
따라서 $\dfrac{1}{x}$의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_3\cdot(-1)^3=-10$ 답 -10

0112 ${}_6\mathrm{C}_0+{}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+{}_6\mathrm{C}_6=2^6=64$ 답 64

0113 답 0

0114 ${}_7\mathrm{C}_1+{}_7\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_7=2^{7-1}=2^6=64$ 답 64

0115

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \boxed{3} & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & \boxed{4} & & 1 & \\
1 & & 5 & & \boxed{10} & & \boxed{10} & & \boxed{5} & & 1
\end{array}
$$

위의 파스칼의 삼각형에서
$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
답 풀이 참조

0116 구하는 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c 중에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_8={}_{10}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=45$ 답 45

0117 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

답 ③

0118 (1) 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_2H_7={}_8C_7={}_8C_1=8$ ··· ❶

(2) 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_7=2^7=128$ ··· ❷

답 (1) 8 (2) 128

채점 기준	비율
❶ 무기명으로 투표하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 기명으로 투표하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %

라쎈 특강 무기명으로 투표하는 경우의 수

무기명 투표는 어느 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 후보 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합으로 생각할 수 있다.

0119 사과, 복숭아, 배 중에서 8개를 구입하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

이때 사과를 6개 이상 구입하는 경우의 수는 사과를 6개 택한 후 사과, 복숭아, 배 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_2={}_4C_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$45-6=39$

답 ①

0120 빨간 공, 노란 공, 파란 공을 각각 1개씩 꺼내고, 나머지 5개의 공을 꺼내면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

답 ②

0121 먼저 4명의 학생에게 구슬을 각각 2개씩 나누어 주고, 남은 구슬 7개를 4명의 학생에게 나누어 주면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$

답 120

0122 10개의 빵을 서로 다른 세 바구니에 나누어 담을 때, 바구니를 일부만 사용해도 되는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$b={}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$

모든 바구니에 빵을 담으려면 먼저 각 바구니에 빵을 1개씩 담은 후 남은 7개의 빵을 나누어 담으면 된다.
따라서 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

$\therefore\ b-a=30$

답 30

0123 먼저 레몬 맛 사탕을 3개, 포도 맛 사탕을 2개 사고 나머지 8개의 사탕을 사면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

답 ②

0124 주어진 조건을 만족시키려면 집합 Y의 5개의 원소 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는

$_5H_3={}_7C_3=35$

답 35

라쎈 특강 함수의 개수

집합 $X=\{1, 2, 3, \cdots, r\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$으로의 함수 중에서

① 일대일함수의 개수
 ➡ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수 ➡ $_nP_r$ (단, $n\ge r$)

② 함수의 개수
 ➡ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수 ➡ $_n\Pi_r$

③ $a<b$이면 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수
 ➡ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수 ➡ $_nC_r$ (단, $n\ge r$)

④ $a<b$이면 $g(a)\le g(b)$를 만족시키는 함수 g의 개수
 ➡ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ➡ $_nH_r$

0125 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c에 대응시키면 되므로 구하는 순서쌍의 개수는

$_6H_3={}_8C_3=56$

답 56

0126 2, 3, 4, $\cdots$, 9 중에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 $|a|$, b에 대응시키면 되므로 순서쌍 $(|a|, b)$의 개수는

$_8H_2={}_9C_2=36$

이때 $|a|=\pm a$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$36\cdot2=72$

답 ④

0127 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 방법은 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 $f(1)$, $f(2)$에 대응시키면 되므로 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

$_6H_2={}_7C_2=21$ ··· ❶

$f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 6, 7, 8, 9, 10의 5개이다. ··· ❷

따라서 구하는 함수의 개수는

$21\cdot5=105$ ··· ❸

답 105

채점 기준	비율
❶ $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0128 a의 값은 3개의 문자 x, y, z에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

한편 $x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$로 놓으면

$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$

$x+y+z=8$에서

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=8$

$\therefore X+Y+Z=5$ (단, X, Y, Z는 음이 아닌 정수)

즉 b의 값은 방정식 $X+Y+Z=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

$b={}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

$\therefore a+b=66$

답 66

0129 구하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

답 ②

0130 x, y, z가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z=0$ 또는 $x+y+z=1$ 또는 $x+y+z=2$ 또는 $x+y+z=3$

(i) 방정식 $x+y+z=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_0={}_2C_0=1$ ⋯ ❶

(ii) 방정식 $x+y+z=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_1={}_3C_1=3$ ⋯ ❷

(iii) 방정식 $x+y+z=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_2={}_4C_2=6$ ⋯ ❸

(iv) 방정식 $x+y+z=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$ ⋯ ❹

이상에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$1+3+6+10=20$ ⋯ ❺

답 20

채점 기준	비율
❶ 방정식 $x+y+z=0$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 방정식 $x+y+z=1$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 방정식 $x+y+z=2$를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 방정식 $x+y+z=3$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❺ 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0131 방정식 $x+y+z=n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_n=55$

이때 ${}_3H_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}$이므로

$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}=55$

$(n+2)(n+1)=110=11\cdot10$

$\therefore n=9$

답 ①

0132 $a-2=A$, $b-1=B$, $c-3=C$로 놓으면

$a=A+2$, $b=B+1$, $c=C+3$

$a+b+c=13$에서

$(A+2)+(B+1)+(C+3)=13$

$\therefore A+B+C=7$ (단, A, B, C는 음이 아닌 정수)

즉 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $A+B+C=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

답 ②

0133 $(x+ay)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\,x^{5-r}(ay)^r={}_5C_r\,a^r x^{5-r}y^r$

$x^{5-r}y^r=x^2y^3$에서 $r=3$

이때 x^2y^3의 계수가 270이므로

${}_5C_3\cdot a^3=270$, $a^3=27$

$\therefore a=3$ ($\because$ a는 실수)

답 ③

0134 $(x-a)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r\,x^{6-r}(-a)^r$

$x^{6-r}=x^4$에서

$6-r=4$ $\therefore r=2$

따라서 x^4의 계수는 ${}_6C_2(-a)^2=15a^2$

한편 $x^{6-r}=x^3$에서 $6-r=3$ $\therefore r=3$

따라서 x^3의 계수는

${}_6C_3(-a)^3=-20a^3$

이때 x^4의 계수가 x^3의 계수의 2배이므로

$15a^2=2\cdot(-20a^3)$

$\therefore a=-\dfrac{3}{8}$ ($\because a\neq0$)

답 $-\dfrac{3}{8}$

0135 $\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(x^3)^{5-r}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^r={}_5C_r\dfrac{x^{15-3r}}{x^{2r}}$

$\dfrac{x^{15-3r}}{x^{2r}}=x^5$에서

$15-3r-2r=5$ $\therefore r=2$

$\therefore a={}_5C_2=10$ ⋯ ❶

$\left(x^3-\dfrac{2}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_s(x^3)^{7-s}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^s={}_7C_s(-2)^s\cdot\dfrac{x^{21-3s}}{x^s}$

$\dfrac{x^{21-3s}}{x^s}=x^5$에서

$21-3s-s=5$ $\therefore s=4$

$\therefore b={}_7C_4\cdot(-2)^4=560$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=570$ ⋯ ❸

답 570

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0136 $(1-x)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4-x\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4$

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(x^2)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\frac{x^{8-2r}}{x^r} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(1-x)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은 1과 ㉠의 상수항이 곱해질 때, $-x$와 ㉠의 $\frac{1}{x}$항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $\frac{x^{8-2r}}{x^r}$이 상수항일 때,

$8-2r=r$에서 $\quad r=\frac{8}{3}$

그런데 r는 정수이므로 ㉠의 상수항은 존재하지 않는다.

(ii) $\frac{x^{8-2r}}{x^r}=\frac{1}{x}$일 때,

$r-(8-2r)=1$에서

$3r-8=1 \quad \therefore r=3$

따라서 ㉠의 $\frac{1}{x}$항은 $\quad {}_4C_3\frac{1}{x}=\frac{4}{x}$

(i), (ii)에서 구하는 상수항은

$(-x)\cdot\frac{4}{x}=-4$

답 ②

0137 $(\sqrt{2}x+\sqrt{3})^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(\sqrt{2}x)^{4-r}(\sqrt{3})^r$

계수가 무리수이려면 r, $4-r$가 홀수이어야 하므로

$r=1$ 또는 $r=3$

$r=1$일 때,

${}_4C_1(\sqrt{2}x)^3\cdot\sqrt{3}=4\cdot2\sqrt{2}x^3\cdot\sqrt{3}=8\sqrt{6}x^3$

$r=3$일 때,

${}_4C_3\cdot\sqrt{2}x\cdot(\sqrt{3})^3=4\cdot\sqrt{2}x\cdot3\sqrt{3}=12\sqrt{6}x$

따라서 구하는 계수의 합은

$8\sqrt{6}+12\sqrt{6}=20\sqrt{6}$

답 $20\sqrt{6}$

0138 $(1+x)^5$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_5C_rx^r$

$(1-x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s(-x)^s={}_4C_s(-1)^sx^s$

따라서 $(1+x)^5(1-x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_5C_rx^r\cdot{}_4C_s(-1)^sx^s={}_5C_r\cdot{}_4C_s(-1)^sx^{r+s}$

$r+s=2$를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2), (1, 1), (2, 0)$

이므로 구하는 x^2의 계수는

$${}_5C_0\cdot{}_4C_2(-1)^2+{}_5C_1\cdot{}_4C_1(-1)+{}_5C_2\cdot{}_4C_0=6-20+10=-4$$

답 ④

라쎈 특강 $(a+x)^p(b+x)^q$의 전개식에서 x^k의 계수 구하기

$(a+x)^p(b+x)^q$의 전개식에서 x^k의 계수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $(a+x)^p$, $(b+x)^q$의 전개식의 일반항을 각각 구한다.
 ○ ${}_pC_ra^{p-r}x^r$, ${}_qC_sb^{q-s}x^s$

(ii) $(a+x)^p(b+x)^q$의 전개식의 일반항을 구한다.
 ○ ${}_pC_r\cdot{}_qC_sa^{p-r}b^{q-s}x^{r+s}$

(iii) $r+s=k$ $(r=0, 1, 2, \cdots, p,\ s=0, 1, 2, \cdots, q)$를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)를 구한다.

(iv) (iii)의 순서쌍을 (ii)의 식에 대입하여 x^k의 계수를 구한다.

0139 $(a+x)^3$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_3C_ra^{3-r}x^r$

$(1+x)^6$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_6C_sx^s$

따라서 $(a+x)^3(1+x)^6$의 전개식의 일반항은

${}_3C_ra^{3-r}x^r\cdot{}_6C_sx^s={}_3C_r\cdot{}_6C_sa^{3-r}x^{r+s}$ ⋯ ❶

$r+s=1$을 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 1), (1, 0)$

이므로 x의 계수는

${}_3C_0\cdot{}_6C_1\cdot a^3+{}_3C_1\cdot{}_6C_0\cdot a^2=6a^3+3a^2$ ⋯ ❷

이때 x의 계수가 -3이므로

$6a^3+3a^2=-3, \quad 2a^3+a^2+1=0$

$(a+1)(2a^2-a+1)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a$는 실수) ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	30 %
❷ x의 계수를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

참고 이차방정식 $2a^2-a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot1=-7<0$

이므로 이 방정식은 허근을 갖는다.

0140 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

따라서 주어진 부등식은

$1000<2^n-1<2000 \quad \therefore 1001<2^n<2001$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로

$n=10$

답 ③

0141 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$에서

$2^n=128=2^7 \quad \therefore n=7$

답 7

0142 원소의 개수가 n인 부분집합의 개수는 $\quad {}_{10}C_n$

따라서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

${}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9=2^9=512$

답 ③

0143 $(1+x)^{20}=(1+x)^{10}(1+x)^{10}$이므로 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r x^r \cdot {}_{10}C_s x^s = {}_{10}C_r \cdot {}_{10}C_s x^{r+s}$$

$r+s=10$을 만족시키는 순서쌍 $(r,\ s)$는

$$(0,\ 10),\ (1,\ 9),\ (2,\ 8),\ \cdots,\ (10,\ 0)$$

이므로 x^{10}의 계수는

$${}_{10}C_0\cdot{}_{10}C_{10}+{}_{10}C_1\cdot{}_{10}C_9+{}_{10}C_2\cdot{}_{10}C_8+\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot{}_{10}C_0$$
$$=({}_{10}C_0)^2+({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2+\cdots+({}_{10}C_{10})^2$$

답 ④

라쎈 특강 $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수

$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$이므로 $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는

$${}_nC_0\cdot{}_nC_n+{}_nC_1\cdot{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\cdot{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_0$$

이때 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

$${}_nC_0\cdot{}_nC_n+{}_nC_1\cdot{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\cdot{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_0$$
$$={}_nC_0\cdot{}_nC_0+{}_nC_1\cdot{}_nC_1+{}_nC_2\cdot{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_n$$
$$=({}_nC_0)^2+({}_nC_1)^2+({}_nC_2)^2+\cdots+({}_nC_n)^2$$

0144 ${}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3$

$$={}_4C_2+{}_4C_3$$
$$={}_5C_3$$

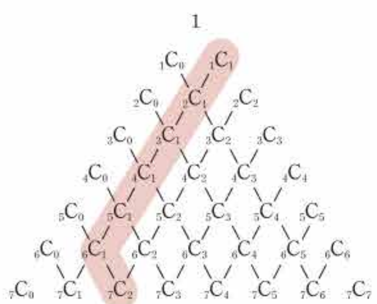
답 ②

0145 ${}_1C_1={}_2C_2$이므로

$${}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$$
$$={}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$$
$$={}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$$
$$={}_4C_2+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$$
$$={}_5C_2+{}_5C_1+{}_6C_1$$
$$={}_6C_2+{}_6C_1$$
$$={}_7C_2$$

답 ③

참고 파스칼의 삼각형에서 각 단계의 첫 번째 또는 마지막 수인 1에서 시작하여 대각선 방향으로 배열된 n개의 수를 더한 값은 그 다음 단계의 n 번째 수와 같다. 이를 파스칼의 삼각형에 표시하면 다음 그림과 같은 모양이 되고, '하키 스틱 패턴'이라 한다.



0146 ${}_1C_0={}_2C_0$이므로

$${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_8C_7={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_8C_7$$
$$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_8C_7$$
$$={}_4C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_8C_7$$
$$\vdots$$
$$={}_8C_6+{}_8C_7$$
$$={}_9C_7$$

답 ③

0147 ${}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4=A$라 하면

$${}_4C_0+A={}_4C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4$$
$$={}_5C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4$$
$$={}_6C_2+{}_6C_3+{}_7C_4$$
$$={}_7C_3+{}_7C_4$$
$$={}_8C_4=70$$
$$\therefore A=70-{}_4C_0=70-1=69$$

답 69

0148 **전략** 주어진 4개의 숫자가 소수임을 이용한다.

풀이 구하는 원소의 개수는 4개의 소수 2, 3, 5, 7에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=286$$

답 286

라쎈 특강

소수끼리 곱한 값의 개수는 소수를 택하는 경우의 수와 같지만 합성수가 포함된 경우에는 곱한 값의 개수와 수를 택하는 경우의 수가 같지 않다.

예를 들어 3개의 숫자 1, 2, 4에서 중복을 허용하여 택한 2개의 자연수를 곱할 때, 1과 4의 곱도 4이고, 2와 2의 곱도 4이므로 곱한 값의 개수와 수를 택하는 경우의 수가 같지 않다.

0149 **전략** $(ax+by)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r(ax)^{n-r}(by)^r$임을 이용한다.

풀이 $(x-a)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r}(-a)^r$$

$x^{5-r}=x$에서

$$5-r=1 \qquad \therefore r=4$$

따라서 x의 계수는 ${}_5C_4(-a)^4=5a^4$이므로

$$5a^4=20, \qquad a^4=4$$
$$\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$$

답 ②

0150 **전략** ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$임을 이용한다.

풀이 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$$

$2^n-1=511$에서 $\quad 2^n=512=2^9$

$$\therefore n=9$$

답 9

0151 **전략** ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$임을 이용한다.

풀이 색칠한 부분의 모든 수의 합은

$$({}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8)+({}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{10}C_9)$$
$$=({}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8)+({}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9)$$
$$-{}_2C_0$$
$$=({}_4C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8)+({}_3C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9)-{}_2C_0$$
$$=({}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_8)+({}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_9)-{}_2C_0$$
$$\vdots$$
$$={}_{11}C_8+{}_{11}C_9-{}_2C_0$$
$$={}_{12}C_9-1={}_{12}C_3-1$$
$$=220-1=219$$

답 ③

02 중복조합과 이항정리

0152 전략 $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)^n$의 전개식에서 항의 개수는 ${}_m\mathrm{H}_n$임을 이용한다.

풀이 전개식의 항의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 중에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_n=84$$

이때 ${}_4\mathrm{H}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_3$이므로

$${}_{n+3}\mathrm{C}_3=84, \quad \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!}=84$$

$$(n+3)(n+2)(n+1)=504=9\cdot8\cdot7$$

$$\therefore n=6$$

답 ①

0153 전략 조건에 맞는 함수의 개수를 생각한다.

풀이 (1) 집합 Y의 5개의 원소 중에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_4=5^4=625 \qquad \cdots ❶$$

(2) 집합 Y의 5개의 원소 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_5\mathrm{P}_4=120 \qquad \cdots ❷$$

(3) 집합 Y의 5개의 원소 중에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 -1, 0, 1, 2에 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$${}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5 \qquad \cdots ❸$$

(4) 집합 Y의 5개의 원소 중에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 정의역의 원소 -1, 0, 1, 2에 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$${}_5\mathrm{H}_4={}_8\mathrm{C}_4=70 \qquad \cdots ❹$$

답 (1) 625 (2) 120 (3) 5 (4) 70

채점 기준	비율
❶ 함수의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 일대일함수의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(-1)<f(0)<f(1)<f(2)$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(-1)\le f(0)\le f(1)\le f(2)$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0154 전략 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수를 구한 후 $|k|=\pm k$임을 이용한다.

풀이 5 이하의 자연수 5개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 $|a|$, $|b|$, $|c|$에 대응시키면 되므로 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는

$${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$$

이때 $|a|=\pm a$, $|b|=\pm b$, $|c|=\pm c$이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $35\cdot2\cdot2\cdot2=280$

답 ③

0155 전략 홀수인 자연수 x, y, z, w를 $2k+1$ (k는 음이 아닌 정수) 꼴로 변형한다.

풀이 $x=2A+1$, $y=2B+1$, $z=2C+1$, $w=2D+1$로 놓으면 주어진 방정식은

$$(2A+1)+(2B+1)+(2C+1)+(2D+1)=16$$

$$\therefore A+B+C+D=6 \text{ (단, } A, B, C, D\text{는 음이 아닌 정수)} \qquad \cdots ❶$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C, D의 순서쌍 (A, B, C, D)의 개수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=84 \qquad \cdots ❷$$

답 84

채점 기준	비율
❶ 음이 아닌 정수 A, B, C, D에 대한 방정식으로 변형할 수 있다.	50 %
❷ 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구할 수 있다.	50 %

0156 전략 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$에서 ax^2+3의 각 항과 곱하여 x가 되는 항을 생각한다.

풀이 $(ax^2+3)\left(x-\frac{1}{x}\right)^5=ax^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^5+3\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5\mathrm{C}_r\,x^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r(-1)^r\frac{x^{5-r}}{x^r} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(ax^2+3)\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x항은 ax^2과 ㉠의 $\frac{1}{x}$항이 곱해질 때, 3과 ㉠의 x항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $\frac{x^{5-r}}{x^r}=\frac{1}{x}$일 때,

$r-(5-r)=1$에서 $\quad 2r-5=1$

$\therefore r=3$

따라서 ㉠의 $\frac{1}{x}$항은

$${}_5\mathrm{C}_3(-1)^3\cdot\frac{1}{x}=-\frac{10}{x}$$

(ii) $\frac{x^{5-r}}{x^r}=x$일 때,

$5-r-r=1$에서 $\quad 5-2r=1$

$\therefore r=2$

따라서 ㉠의 x항은

$${}_5\mathrm{C}_2(-1)^2x=10x$$

(i), (ii)에서 주어진 식의 x항은

$$ax^2\cdot\left(-\frac{10}{x}\right)+3\cdot10x=(-10a+30)x$$

이때 x의 계수가 25이므로 $\quad -10a+30=25$

$$\therefore a=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0157 전략 $(1+x)^n$의 전개식을 이용한다.

풀이 $(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$에 $x=3$, $n=20$을 대입하면

$$4^{20}={}_{20}\mathrm{C}_0+3\cdot{}_{20}\mathrm{C}_1+3^2\cdot{}_{20}\mathrm{C}_2+\cdots+3^{20}\cdot{}_{20}\mathrm{C}_{20}$$

즉 주어진 식의 값은

$$4^{20}=2^{40}$$

답 ⑤

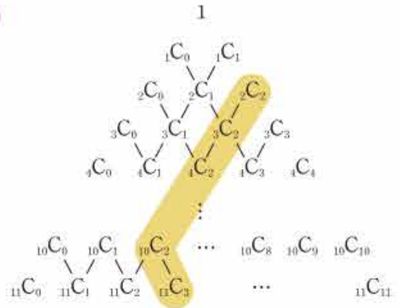
0158 전략 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_r$임을 이용한다.

풀이 ${}_2\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_3$이므로

$$\begin{aligned}&{}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_2\\&={}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_2\\&={}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_2\\&={}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_2\\&\quad\vdots\\&={}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_2\\&={}_{11}\mathrm{C}_3\end{aligned}$$

답 ③

다른풀이



$_2C_2$, $_3C_2$, $_4C_2$, $\cdots$, $_{10}C_2$를 파스칼의 삼각형에 표시하면 위의 그림과 같으므로

(주어진 식)$=_{11}C_3$

0159 **전략** 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 x, y, z라 하고 조건을 식으로 나타내어 본다.

풀이 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 x, y, z라 하면 구하는 자연수의 개수는

$x+y+z=10$ (x, y, z는 $1\le x\le 9$, $0\le y\le 9$, $0\le z\le 9$인 정수)

을 만족시키는 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같다.

이때 $x-1=w$로 놓으면 $x+y+z=10$에서

$(w+1)+y+z=10$

$\therefore w+y+z=9$ ($0\le w\le 8$, $0\le y\le 9$, $0\le z\le 9$인 정수)

방정식 $w+y+z=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 w, y, z의 순서쌍 (w, y, z)의 개수는

$_3H_9=_{11}C_9=_{11}C_2=55$

이때 $w=9$, $y=0$, $z=0$인 경우는 제외해야 하므로 구하는 자연수의 개수는

$55-1=54$

답 54

0160 **전략** 조건 (가)를 만족시키는 경우에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우를 제외한다.

풀이 $a+b+c=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$_3H_7=_9C_7=_9C_2=36$

$2^a\times 4^b=2^a\times 2^{2b}=2^{a+2b}$이므로 조건 (나)에서 2^{a+2b}이 $8=2^3$의 배수이어야 한다.

즉 $a+2b\ge 3$이어야 한다.

이때 $a+2b<3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$

이므로 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$36-4=32$

답 32

참고 조건 (가)는 만족시키지만 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍 (a, b, c)는

$(0, 0, 7)$, $(1, 0, 6)$, $(0, 1, 6)$, $(2, 0, 5)$

0161 **전략** 분자의 전개식에서 x^2의 계수를 찾는다.

풀이 $\dfrac{(1-x)^3(2x+1)^4}{x}$의 전개식에서 x의 계수는

$(1-x)^3(2x+1)^4$의 전개식에서 x^2의 계수와 같다. ··· ❶

$(1-x)^3$의 전개식의 일반항은

$_3C_r(-x)^r=_3C_r(-1)^rx^r$

$(2x+1)^4$, 즉 $(1+2x)^4$의 전개식의 일반항은

$_4C_s(2x)^s=_4C_s2^sx^s$

따라서 $(1-x)^3(2x+1)^4$의 전개식의 일반항은

$_3C_r(-1)^rx^r\cdot{}_4C_s2^sx^s=_3C_r\cdot{}_4C_s(-1)^r2^sx^{r+s}$ ··· ❷

$r+s=2$를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

이므로 구하는 x의 계수는

$_3C_0\cdot{}_4C_2\cdot 2^2+{}_3C_1\cdot{}_4C_1(-1)\cdot 2+{}_3C_2\cdot{}_4C_0(-1)^2$

$=24-24+3=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 전개식에서 x의 계수는 분자의 전개식에서 x^2의 계수와 같음을 알 수 있다.	10 %
❷ $(1-x)^3(2x+1)^4$의 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	50 %
❸ x의 계수를 구할 수 있다.	40 %

0162 **전략** $(1+x)^{11}$의 전개식에 $x=20$을 대입한다.

풀이 $(1+x)^{11}=_{11}C_0+{}_{11}C_1x+{}_{11}C_2x^2+\cdots+{}_{11}C_{11}x^{11}$

이 식에 $x=20$을 대입하면

$21^{11}=_{11}C_0+{}_{11}C_1\cdot 20+{}_{11}C_2\cdot 20^2+\cdots+{}_{11}C_{11}\cdot 20^{11}$

이때 우변에서 세 번째 항부터는 모두 400으로 나누어떨어지므로 21^{11}을 400으로 나눈 나머지는 $_{11}C_0+{}_{11}C_1\cdot 20$을 400으로 나눈 나머지와 같고

$_{11}C_0+{}_{11}C_1\cdot 20=1+11\cdot 20=221$

이므로 구하는 나머지는 221이다.

답 ③

03 확률의 뜻과 활용

Ⅱ. 확률

0163 답 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

0164 답 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$

0165 답 $\{2, 4, 6\}$

0166 답 $\{2, 3, 5\}$

0167 답 $\{1, 2, 3, 6\}$

0168 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{5, 10\}$이므로
$A\cup B=\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$ 답 $\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

0169 답 $\{10\}$

0170 답 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

0171 답 $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

0172 $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로 배반사건이다.
$B\cap C=\{2\}$이므로 B와 C는 서로 배반사건이 아니다.
$A\cap C=\varnothing$이므로 A와 C는 서로 배반사건이다.
답 A와 B, A와 C

0173 $A=\{3, 6\}$이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0174 $B=\{4, 5, 6\}$이므로
$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0175 $C=\{1, 3, 5\}$이므로
$\mathrm{P}(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0176 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는
$6\cdot 6=36$
두 눈의 수가 같은 경우는
$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6가지
이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

0177 두 눈의 수의 합이 10인 경우는
$(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$의 3가지
이므로 구하는 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ 답 $\frac{1}{12}$

0178 두 눈의 수의 차가 3인 경우는
$(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$의 6가지
이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

0179 (1) $4!=24$
(2) $3!=6$
(3) $\mathrm{P}(A)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$
답 (1) 24 (2) 6 (3) $\frac{1}{4}$

0180 $\frac{150}{500}=\frac{3}{10}$ 답 $\frac{3}{10}$

0181 9칸 중에서 빨간색이 칠해진 칸은 2칸이므로 구하는 확률은
$\frac{(\text{빨간색이 칠해진 영역의 넓이})}{(\text{전체 과녁의 넓이})}=\frac{2}{9}$ 답 $\frac{2}{9}$

0182 답 $\frac{2}{5}$

0183 답 1

0184 답 0

0185 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0186 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서
$0.9=0.6+0.7-\mathrm{P}(A\cap B)$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.4$ 답 0.4

0187 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$,
$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,
$B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$
(2) $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$
(3) $A\cap B=\{6, 12, 18\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{20}$
(4) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$
답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{3}{20}$ (4) $\frac{13}{20}$

0188 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$ 답 $\frac{5}{7}$

0189 (1) $\mathrm{P}(A)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$
(2) $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$
답 (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{4}{5}$

0190 표본공간을 S라 하면
$S=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{4, 8\}$, $B=\{6, 8, 10\}$
② $A\cup B=\{4, 6, 8, 10\}$
③ $A\cap B=\{8\}$
④ $A^C=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$이므로 $n(A^C)=8$
⑤ $A^C\cap B=\{6, 10\}$
답 ④

0191 표본공간을 S라 하면

$S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

⑤ $R=P\cap Q=\{HHH\}$이므로

$R^C=\{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$\therefore n(R^C)=7$

답 ⑤

0192 보기의 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ의 사건을 각각 A, B, C, D라 하면

$A=\{1, 3, 4, 7, 9, 10\}$, $B=\{1, 3, 7, 9\}$,

$C=\{3, 7\}$, $D=\{1, 4\}$

이므로

$A\cap B=\{1, 3, 7, 9\}$, $A\cap C=\{3, 7\}$, $A\cap D=\{1, 4\}$,

$B\cap C=\{3, 7\}$, $B\cap D=\{1\}$, $C\cap D=\varnothing$

따라서 서로 배반사건인 것끼리 짝 지어진 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0193 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{1, 5\}$이므로 ⋯ ❶

$A\cap B=\{2\}$, $B\cap C=\{5\}$, $A\cap C=\varnothing$ ⋯ ❷

따라서 사건 A와 사건 C는 서로 배반사건이다. ⋯ ❸

답 ㄷ

채점 기준	비율
❶ 세 사건 A, B, C를 집합으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $A\cap B$, $B\cap C$, $A\cap C$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 서로 배반사건인 것을 찾을 수 있다.	30 %

0194 주어진 벤다이어그램에서

$A\cap C=\varnothing$, $A\cap(B\cap C)=\varnothing$, $A\cap(B\cup C)=\{7\}$

따라서 사건 A와 배반인 사건은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0195 사건 A와 배반인 사건은 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 배반인 사건은 B^C의 부분집합이므로 A, B와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

$A^C\cap B^C=\{3, 4, 5, 7\}\cap\{1, 4, 5, 6\}=\{4, 5\}$이므로 구하는 사건의 개수는 $2^2=4$

답 4

0196 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot 6=36$

(i) 두 눈의 수의 합이 4인 경우

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 8인 경우

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지

(iii) 두 눈의 수의 합이 12인 경우

(6, 6)의 1가지

이상에서 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우의 수는

$3+5+1=9$

이므로 구하는 확률은 $\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

답 ③

0197 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^6=64$

집합 A의 부분집합 중 원소 1, 5를 모두 포함하는 집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{16}{64}=\dfrac{1}{4}$

답 $\dfrac{1}{4}$

0198 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot 6=36$ ⋯ ❶

이차방정식 $x^2-2ax+b=0$이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-b=0$ $\therefore a^2=b$ ⋯ ❷

$a^2=b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

(1, 1), (2, 4)의 2개 ⋯ ❸

이므로 구하는 확률은 $\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$ ⋯ ❹

답 $\dfrac{1}{18}$

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %
❷ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ ❷의 관계식을 만족시키는 순서쌍 (a, b)를 구할 수 있다.	30 %
❹ 확률을 구할 수 있다.	30 %

0199 $x+y=120$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

(1, 119), (2, 118), (3, 117), ⋯, (119, 1) ⋯⋯ ㉠

의 119개이다.

$y=120-x$이므로 $xy\geq 3500$에서

$x(120-x)\geq 3500$, $x^2-120x+3500\leq 0$

$(x-50)(x-70)\leq 0$ $\therefore 50\leq x\leq 70$

㉠ 중에서 $50\leq x\leq 70$을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는

(50, 70), (51, 69), (52, 68), ⋯, (70, 50)

의 21개이므로 구하는 확률은

$\dfrac{21}{119}=\dfrac{3}{17}$

답 $\dfrac{3}{17}$

0200 6명의 학생이 일렬로 서는 경우의 수는

$6!=720$

남학생 2명을 한 명으로 생각하여 5명이 일렬로 서는 경우의 수는 $5!=120$이고, 남학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 남학생 2명이 이웃하여 서는 경우의 수는

$120\cdot 2=240$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{240}{720}=\dfrac{1}{3}$

답 $\dfrac{1}{3}$

0201 5개의 음료수를 나란히 넣는 경우의 수는

$5!=120$

우유 3개 중에서 2개를 양 끝에 넣는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$이고, 남은 우유 1개와 주스 2개를 나란히 넣는 경우의 수는 $3!=6$이므로 양 끝에 우유를 넣는 경우의 수는

$6\cdot 6=36$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$

답 ②

0202 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

s와 g 사이에 들어가는 2개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2=12$이고, s와 g를 포함한 4개의 문자를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$이다.
이때 s와 g가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 s와 g 사이에 2개의 문자가 있도록 나열하는 경우의 수는

$12 \cdot 6 \cdot 2=144$

따라서 구하는 확률은 $\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

0203 네 개의 숫자로 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_3=24$ ⋯ ❶

이때 세 자리 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

(i) 각 자리의 숫자가 1, 2, 3인 경우
세 자리 자연수의 개수는 $3!=6$

(ii) 각 자리의 숫자가 2, 3, 4인 경우
세 자리 자연수의 개수는 $3!=6$

(i), (ii)에서 세 자리 자연수가 3의 배수인 경우의 수는

$6+6=12$ ⋯ ❷

이므로 그 확률은 $\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$

따라서 $p=2$, $q=1$이므로 $p+q=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 전체 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 3의 배수인 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0204 5명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

A와 B를 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!=6$이고, A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 A와 B가 이웃하게 앉는 경우의 수는

$6 \cdot 2=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

0205 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

남자 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(3-1)!=2!=2$이고, 남자 사이사이의 3개의 자리에 여자 3명이 앉는 경우의 수는 $3!=6$이므로 남녀가 교대로 앉는 경우의 수는

$2 \cdot 6=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$ 답 ③

0206 8가지 음식을 구절판에 담는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$ ⋯ ❶

애호박나물을 담은 맞은편에 달걀지단을 담고 나머지 6가지 음식을 6개의 칸에 담는 경우의 수는

$6!$ ⋯ ❷

따라서 구하는 확률은 $\frac{6!}{7!}=\frac{1}{7}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{7}$

채점 기준	비율
❶ 8가지 음식을 담는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 확률을 구할 수 있다.	20 %

0207 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

이때 짝수가 되려면 일의 자리에는 2, 4의 2가지가 올 수 있고, 백의 자리와 십의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 짝수의 개수는

${}_5\Pi_2 \cdot 2=5^2 \cdot 2=50$

따라서 구하는 확률은 $\frac{50}{125}=\frac{2}{5}$ 답 ③

0208 집합 X에서 집합 X로의 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때 일대일대응의 개수는

${}_3\mathrm{P}_3=3!=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

답 ③

라쎈 특강 함수의 개수

$X=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$일 때, 집합 X에서 X로의 함수에 대하여
① 함수의 개수 ${}_n\Pi_n=n^n$
② 일대일대응의 개수 ${}_n\mathrm{P}_n=n!$

0209 4명의 학생이 도서 전시회가 열리는 7일 중 방문할 날을 택하는 경우의 수는

${}_7\Pi_4=7^4=2401$

4명이 서로 다른 날을 택하는 경우의 수는

${}_7\mathrm{P}_4=840$

따라서 구하는 확률은 $\frac{840}{2401}=\frac{120}{343}$ 답 $\frac{120}{343}$

0210 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2! \cdot 2!}=180$

2개의 O를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$ 답 ③

0211 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2! \cdot 2!}=30$ ⋯ ❶

맨 앞에 1을 나열하고, 나머지 숫자 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$ ··· ❷

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$ ··· ❸

답 $\frac{2}{5}$

채점 기준	비율
❶ 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 맨 앞에 1이 오도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 확률을 구할 수 있다.	20 %

0212 집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

$1+1+2=4$이므로 1, 1, 2를 일렬로 나열한 후 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$에 차례대로 대응시키면 된다.

따라서 $f(a)+f(b)+f(c)=4$를 만족시키는 함수의 개수는

$\frac{3!}{2!}=3$

이므로 구하는 확률은 $\frac{3}{8}$ 답 ⑤

0213 7개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

흰 공 3개 중에서 1개, 검은 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_3C_1\cdot{}_4C_2=3\cdot6=18$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{35}$ 답 $\frac{18}{35}$

0214 6명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

B와 C는 포함되고 E는 포함되지 않는 경우의 수는 B, C, E를 제외한 나머지 3명 중에서 1명을 뽑고 B와 C를 포함시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{20}$ 답 ①

0215 5개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_5C_3=10$ ··· ❶

만들어진 삼각형이 직각삼각형이려면 삼각형의 한 변이 반원의 지름이어야 하므로 직각삼각형이 되는 경우의 수는

${}_3C_1=3$ ··· ❷

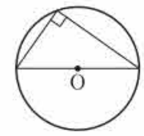
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{10}$ ··· ❸

답 $\frac{3}{10}$

채점 기준	비율
❶ 5개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 직각삼각형이 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 확률을 구할 수 있다.	20 %

라쎈 특강 원에 내접하는 직각삼각형

반원에 대한 원주각의 크기가 90°이므로 원의 지름의 양 끝 점과 원 위의 다른 한 점을 택하면 직각삼각형을 만들 수 있다.



0216 상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라 하면

$\frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{15}$, $\frac{n(n-1)}{10\cdot9}=\frac{2}{15}$

$n^2-n-12=0$, $(n+3)(n-4)=0$

$\therefore n=4\ (\because n\ge2)$

따라서 상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수는 4이다. 답 ③

0217 양궁 선수가 9점을 맞힌 횟수는 47, 10점을 맞힌 횟수는 25이므로 9점 이상을 맞히는 경우의 수는

$47+25=72$

따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{200}=\frac{9}{25}$ 답 $\frac{9}{25}$

0218 주머니에 들어 있는 노란 구슬의 개수를 n이라 하면

$\frac{{}_nC_1\cdot{}_{7-n}C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$, $\frac{n(7-n)}{21}=\frac{4}{7}$

$n(7-n)=12$, $n^2-7n+12=0$

$(n-3)(n-4)=0$ $\therefore n=4\ (\because n\ge4)$

따라서 노란 구슬은 4개 들어 있다고 볼 수 있다. 답 4개

0219 작은 원부터 세 원의 넓이는 각각 π, 4π, 9π이므로 색칠한 부분의 넓이는

$4\pi-\pi=3\pi$

따라서 총알이 색칠한 부분에 맞을 확률은 $\frac{3\pi}{9\pi}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

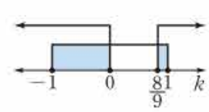
0220 이차방정식 $2x^2-3kx+k=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$D=(-3k)^2-4\cdot2\cdot k\ge0$ ··· ❶

$9k^2-8k\ge0$이므로 $k(9k-8)\ge0$

$\therefore k\le0$ 또는 $k\ge\frac{8}{9}$ ··· ❷

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 확률은



$\frac{\{0-(-1)\}+\left(1-\frac{8}{9}\right)}{1-(-1)}=\frac{5}{9}$ ··· ❸

답 $\frac{5}{9}$

채점 기준	비율
❶ $D\ge0$을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $D\ge0$을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 확률을 구할 수 있다.	40 %

0221 ㄱ. 임의의 사건 A에 대하여

$0\le P(A)\le 1$

ㄴ. $P(S)=1$, $P(\varnothing)=0$이므로

$P(S)+P(\varnothing)=1$

ㄷ. $\varnothing\subset(A\cap B)\subset S$이므로

$P(\varnothing)\le P(A\cap B)\le P(S)$

$\therefore 0\le P(A\cap B)\le 1$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0222 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

주어진 **보기**의 각 사건은

$A=\{1\}$, $B=\varnothing$, $C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D=\varnothing$

이므로

$P(A)=\frac{1}{5}$, $P(B)=0$, $P(C)=1$, $P(D)=0$

따라서 확률이 0인 사건은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0223 ㄱ. A와 A^C는 서로 배반사건이고 $A\cup A^C=S$이므로

$P(A\cup A^C)=P(A)+P(A^C)$

$\therefore P(A)+P(A^C)=1$

ㄴ. [반례] $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$이면

$P(A)+P(B)=1$이지만 $P(A\cap B)\ne 0$이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $0\le P(A)\le 1$, $0\le P(B)\le 1$이므로

$0\le P(A)+P(B)\le 2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0224 $P(A)=1-P(A^C)=0.8$, $P(B)=1-P(B^C)=0.5$이므로 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$0.9=0.8+0.5-P(A\cap B)$

$\therefore P(A\cap B)=0.4$ 답 ③

0225 $S=A\cup B$이므로

$P(A\cup B)=P(S)=1$

A, B가 서로 배반사건이므로 $P(A\cap B)=0$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$1=\frac{2}{5}+P(B)$ $\therefore P(B)=\frac{3}{5}$ 답 ④

0226 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$ ··· ❶

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$

$=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ ··· ❷

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ $P(A\cup B)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $P(A^C\cap B^C)$를 구할 수 있다.	60 %

0227 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$\frac{3}{4}=P(A)+P(B)$

$\therefore P(B)=\frac{3}{4}-P(A)$

이때 $\frac{1}{6}\le P(A)\le\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{1}{2}\le -P(A)\le -\frac{1}{6}$

$\therefore \frac{1}{4}\le\frac{3}{4}-P(A)\le\frac{7}{12}$, 즉 $\frac{1}{4}\le P(B)\le\frac{7}{12}$

따라서 $P(B)$의 최댓값은 $\frac{7}{12}$이다. 답 ⑤

0228 $P(B)=P(A)-\frac{1}{6}$, $P(A)P(B)=\frac{1}{6}$에서

$P(A)\left\{P(A)-\frac{1}{6}\right\}=\frac{1}{6}$

$\{P(A)\}^2-\frac{1}{6}P(A)-\frac{1}{6}=0$

$6\{P(A)\}^2-P(A)-1=0$

$\{2P(A)-1\}\{3P(A)+1\}=0$

$P(A)>0$이므로 $P(A)=\frac{1}{2}$

$\therefore P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

이때 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

답 $\frac{5}{6}$

0229 두 도형을 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$4\cdot 6=24$

정사면체와 정육면체의 밑면에 적힌 수를 각각 a, b라 하고 순서쌍 (a, b)로 나타낼 때, 두 수의 합이 8 이상인 사건을 A, 4의 배수인 사건을 B라 하면

$A=\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$,

$B=\{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 5), (4, 4)\}$

$\therefore A\cap B=\{(2, 6), (3, 5), (4, 4)\}$

따라서

$P(A)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$,

$P(A\cap B)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$

이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

0230 펜션을 운영하는 가구를 택하는 사건을 A, 식당을 운영하는 가구를 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=0.45$, $P(B)=0.33$, $P(A\cap B)=0.12$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=0.45+0.33-0.12$

$=0.66$ 답 0.66

0231 A가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, H가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{3}{8},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{3}{8},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{3}{28}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}-\frac{3}{28}=\frac{9}{14}$$

답 ②

0232 만든 자연수가 짝수인 사건을 A, 50000 이상인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot 4!}{5!}=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot 3!}{5!}=\frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0233 뽑힌 2명이 모두 여학생인 사건을 A, 모두 남학생인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{5}{18},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{18}+\frac{1}{6}=\frac{4}{9}$$

답 $\frac{4}{9}$

0234 전체 학생 수는

$$32+47+69+86+66=300$$

택한 학생의 체감 난이도가 '어려움'인 사건을 A, '매우 어려움'인 사건을 B라 하면 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{86}{300}+\frac{66}{300}=\frac{38}{75}$$

답 $\frac{38}{75}$

0235 모든 경우의 수는 $6\cdot 6=36$

눈의 수의 합이 3인 사건을 A, 차가 3인 사건을 B라 하면

$$A=\{(1,2),(2,1)\},$$
$$B=\{(1,4),(2,5),(3,6),(4,1),(5,2),(6,3)\}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18},\ \mathrm{P}(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$ ··· ❶

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{18}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$$ ··· ❷

답 $\frac{2}{9}$

채점 기준	비율
❶ 눈의 수의 합이 3, 눈의 수의 차가 3일 확률을 각각 구할 수 있다.	60 %
❷ 눈의 수의 합 또는 차가 3일 확률을 구할 수 있다.	40 %

0236 카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 사건은

$$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$이고, $A\cap B$는 15의 배수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{20}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=\frac{9}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$$

답 ③

0237 부모님이 이웃하게 서는 사건을 A라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5!\cdot 2!}{6!}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0238 뽑힌 대표 중에서 적어도 한 명이 여학생인 사건을 A라 하면 A^C는 세 명이 모두 남학생인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{2}{7}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

답 $\frac{5}{7}$

0239 모든 경우의 수는 $6\cdot 6=36$

8의 약수가 적어도 한 번 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 두 번 모두 8의 약수가 나오지 않는 사건이다.

1, 2, 4, 6, 8, 10 중에서 8의 약수가 아닌 것은 6, 10이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2\cdot 2}{36}=\frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

답 ⑤

0240 적어도 1개가 당첨 제비인 사건을 A라 하면 A^C는 두 개 모두 당첨 제비가 아닌 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{12-r}\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{(12-r)(11-r)}{132}$$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{10}{11}$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{11}$$

즉 $\frac{(12-r)(11-r)}{132}=\frac{1}{11}$이므로

$$(12-r)(11-r)=12,\quad r^2-23r+120=0$$
$$(r-8)(r-15)=0$$

이때 $r<12$이므로 $r=8$

답 8

0241 두 문제 이상 맞히는 사건을 A라 하면 A^C는 한 문제를 맞히거나 모두 틀리는 사건이다.

(i) 한 문제를 맞힐 확률은 $\frac{5}{{}_2\Pi_5}=\frac{5}{32}$

(ii) 모두 틀릴 확률은 $\frac{1}{{}_2\Pi_5}=\frac{1}{32}$

(i), (ii)에서

$$P(A^C)=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$$

답 ①

0242 8개의 구슬 중에서 3개를 꺼낼 때, 빨간 구슬이 2개 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 빨간 구슬이 3개인 사건이므로 ··· ❶

$$P(A^C)=\frac{{}_4C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{14}$$ ··· ❷

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$$ ··· ❸

답 $\frac{13}{14}$

채점 기준	비율
❶ A^C를 알 수 있다.	30 %
❷ $P(A^C)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $P(A)$를 구할 수 있다.	20 %

0243 네 개의 숫자 중에서 서로 다른 세 개의 숫자를 이용하여 세 자리 정수를 만들 때, 330 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 331 이상인 사건이다.

이때 331 이상인 정수는 34□ 또는 4□□ 꼴이다.

(i) 34□ 꼴일 확률은 $\frac{{}_2P_1}{{}_4P_3}=\frac{1}{12}$

(ii) 4□□ 꼴일 확률은 $\frac{{}_3P_2}{{}_4P_3}=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $P(A^C)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0244 앞면이 나온 동전의 금액의 합이 150원 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 앞면이 나온 동전의 금액의 합이 150원 미만인 사건이다.

5개의 동전을 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$${}_2\Pi_5=32$$

앞면이 나온 동전의 금액의 합이 0원 또는 50원 또는 100원인 경우의 수는 3이므로

$$P(A^C)=\frac{3}{32}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{32}=\frac{29}{32}$$

답 $\frac{29}{32}$

0245 전략 두 집합 A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이다.

풀이 $A=\{3, 7\}$, $B=\{4, 6, 10\}$, $C=\{10\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\{10\}$

따라서 서로 배반사건인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0246 전략 한 사람이 낼 수 있는 것은 가위, 바위, 보의 3가지이다.

풀이 세 사람이 가위바위보를 한 번 할 때, 모든 경우의 수는

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

이기는 한 명을 정하는 경우의 수는 3이고, 이기는 한 명이 가위, 바위, 보 중에서 어느 하나를 내는 경우의 수도 3이다.

이때 지는 두 명이 내는 것은 정해져 있으므로 한 명이 이기는 경우의 수는

$$3\cdot3=9$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

답 ⑤

0247 전략 n개의 수의 곱이 홀수이려면 n개의 수가 모두 홀수이어야 한다.

풀이 5장의 카드 중에서 3장을 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_3=10$$

카드에 적힌 세 숫자의 곱이 홀수이려면 세 숫자가 모두 홀수이어야 하므로 홀수가 적힌 카드를 3장 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_3=1$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{10}$

답 $\frac{1}{10}$

0248 전략 먼저 조사한 전체 학생 수를 구한다.

풀이 조사한 전체 학생 수는

$$42+68+104+61+25=300$$

따라서 300명 중 임의로 한 학생을 택할 때, 급식 만족도가 '매우 만족'일 확률은

$$\frac{42}{300}=\frac{7}{50}$$

답 $\frac{7}{50}$

0249 전략 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$임을 이용한다.

풀이 한 개의 동전을 5회 던질 때 앞면이 3회 나오는 사건을 A, 앞면이 4회 나오는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{{}_5C_3}{{}_2\Pi_5}=\frac{5}{16},\ P(B)=\frac{{}_5C_4}{{}_2\Pi_5}=\frac{5}{32}$$ ··· ❶

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{16}+\frac{5}{32}=\frac{15}{32}$$ ··· ❷

답 $\frac{15}{32}$

채점 기준	비율
❶ 앞면이 3회, 4회 나올 확률을 각각 구할 수 있다.	60 %
❷ 앞면이 3회 또는 4회 나올 확률을 구할 수 있다.	40 %

0250 전략 $P(A)=1-P(A^C)$임을 이용한다.

풀이 두 주사위의 눈의 수가 서로 다른 사건을 A라 하면 A^C는 두 눈의 수가 같은 사건이다.

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6\cdot6=36$$

두 눈의 수가 같은 경우의 수는 6이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

답 ⑤

0251 전략 서로 다른 n개의 숫자를 한 번씩 이용하여 만들 수 있는 n자리 자연수의 개수는 $n!$임을 이용한다.

풀이 1, 2, 3, 4를 한 번씩 이용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 $4!=24$ ··· ❶

이때 4의 배수는 □□12 또는 □□24 또는 □□32 꼴이다.

(i) □□12 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

(ii) □□24 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

(iii) □□32 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

이상에서 4의 배수의 개수는

$2+2+2=6$ ··· ❷

이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 4의 배수의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 확률을 구할 수 있다.	20 %

0252 전략 서로 다른 n개의 숫자에서 중복을 허용하여 만든 r자리 자연수의 개수는 ${}_n\Pi_r=n^r$임을 이용한다.

풀이 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

이때 3300보다 큰 자연수는 33□□ 또는 34□□ 또는 4□□□ 꼴이다.

(i) 33□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

(ii) 34□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

(iii) 4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

이상에서 3300보다 큰 자연수의 개수는

$16+16+64=96$

이므로 구하는 확률은 $\frac{96}{256}=\frac{3}{8}$

답 ⑤

0253 전략 양 끝에 A가 적힌 카드를 나열하고, 나머지 카드를 나열하는 경우의 수를 이용한다.

풀이 주어진 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!\cdot 2!}=60$$

양 끝에 A가 적힌 카드를 나열하고, 남은 4장의 카드 A, B, B, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

답 ②

0254 전략 문자의 배열 순서가 정해진 경우에 문자를 나열할 때에는 순서가 정해진 문자를 같은 문자로 생각한다.

풀이 7개의 문자 b, l, a, n, k, e, t를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!=5040$

a, n, k를 이 순서로 배열하는 경우의 수는 a, n, k를 같은 문자로 생각하고 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{3!}=840$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{840}{5040}=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

0255 전략 앞면과 뒷면의 개수가 처음과 같으려면 앞면과 뒷면이 보이는 동전을 각각 1개씩 뒤집어야 한다.

풀이 7개의 동전 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

앞면과 뒷면의 개수가 처음과 같으려면 앞면이 보이는 동전 1개와 뒷면이 보이는 동전 1개를 뒤집어야 한다.

앞면과 뒷면이 보이는 동전을 각각 1개씩 택하는 경우의 수는

${}_4C_1\cdot{}_3C_1=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

답 ③

0256 전략 두 직선 l, m에서 각각 점을 몇 개씩 택하면 삼각형이 되는지 생각해 본다.

풀이 6개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

이 중에서 삼각형이 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 l에서 2개의 점을 택하고, 직선 m에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_2C_2\cdot{}_4C_1=4$

(ii) 직선 l에서 1개의 점을 택하고, 직선 m에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_2C_1\cdot{}_4C_2=12$

(i), (ii)에서 삼각형이 되는 경우의 수는 $4+12=16$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$

답 ⑤

다른풀이 3개의 점을 택하여 선분으로 연결할 때, 삼각형이 되는 사건을 A라 하면 A^C는 삼각형이 되지 않는 사건이다.

직선 m 위의 3개의 점을 택하는 경우 삼각형이 되지 않으므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

0257 전략 주머니에서 한 번 구슬을 꺼낼 때 흰 구슬이 나올 확률은 $\frac{(\text{흰 구슬이 나온 횟수})}{(\text{전체 시행 횟수})}$임을 이용한다.

풀이 주머니에서 한 번 구슬을 꺼낼 때 흰 구슬이 나올 확률은

$$\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}$$

따라서 $\frac{1}{5}=\frac{n}{n+28}$이므로 $n+28=5n$

$\therefore n=7$

답 ①

0258 전략 확률의 덧셈정리를 이용하여 $\mathrm{P}(A\cup B)$를 $\mathrm{P}(A\cap B)$로 나타낸다.

풀이 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}\mathrm{P}(B)$에서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{2}\mathrm{P}(A\cap B),\ \mathrm{P}(B)=\frac{5}{2}\mathrm{P}(A\cap B)$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{3}{2}\mathrm{P}(A\cap B)+\frac{5}{2}\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=3\mathrm{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{P}(A\cup B)}{\mathrm{P}(A\cap B)}=\frac{3\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)}=3$$

답 ①

0259 전략 6과 서로소이려면 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니어야 한다.

풀이 택한 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 6의 배수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{33}{100},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{33}{200}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{33}{100}-\frac{33}{200}=\frac{133}{200}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\frac{133}{200}=\frac{67}{200}\end{aligned}$$

답 ③

0260 전략 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6\cdot6=216$

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$인 사건을 A라 하면 A^C는 $(a-b)(b-c)(c-a)\neq0$인 사건이다.

따라서 A^C는 $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$, 즉 주사위의 눈이 모두 다른 사건이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{P}_3}{216}=\frac{5}{9}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A)&=1-\mathrm{P}(A^C)\\&=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{9}$

0261 전략 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 주황색 공이 적어도 2개 포함되는 사건을 A라 하면 A^C는 주황색 공이 1개이거나 0개인 사건이다.

(i) 주황색 공이 1개일 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{8}{35}$$

(ii) 주황색 공이 0개일 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_4}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{1}{70}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{8}{35}+\frac{1}{70}=\frac{17}{70}$$ ··· ❶

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{17}{70}=\frac{53}{70}$$ ··· ❷

답 $\frac{53}{70}$

채점 기준	비율
❶ 주황색 공이 0개 또는 1개일 확률을 구할 수 있다.	60 %
❷ 주황색 공이 적어도 2개 포함될 확률을 구할 수 있다.	40 %

0262 전략 같은 숫자가 2장 이상인 사건의 여사건은 택한 카드가 모두 다른 숫자인 사건임을 이용한다.

풀이 같은 숫자가 적혀 있는 카드가 2장 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 세 장의 카드에 적힌 숫자가 모두 다른 사건이다.

세 장의 카드에 적힌 숫자가 모두 다르려면 1, 2, 3, 4 중 세 개의 숫자를 택하고, 각 숫자가 적힌 3장 중 1장의 카드를 택해야 하므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{108}{220}=\frac{27}{55}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{27}{55}=\frac{28}{55}$$

답 ⑤

다른풀이 (i) 같은 숫자가 적혀 있는 카드가 2장인 경우

1, 2, 3, 4 중 하나의 숫자를 택하고, 이 숫자가 적힌 카드 3장 중 2장의 카드를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2=12$

나머지 다른 숫자가 적힌 카드를 택하는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_1=9$

따라서 그 확률은

$$\frac{12\cdot9}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{108}{220}=\frac{27}{55}$$

(ii) 같은 숫자가 적혀 있는 카드가 3장인 경우

1, 2, 3, 4 중 하나의 숫자를 택하고, 이 숫자가 적힌 카드 3장을 모두 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_3=4$

따라서 그 확률은

$$\frac{4}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{4}{220}=\frac{1}{55}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{27}{55}+\frac{1}{55}=\frac{28}{55}$$

0263 전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 평행할 조건은 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$임을 이용한다.

풀이 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

두 직선 $ax+6y+2=0$, $x+by+1=0$이 평행할 조건은

$$\frac{a}{1}=\frac{6}{b}\neq\frac{2}{1},\ \text{즉}\ ab=6,\ a\neq2,\ b\neq3$$

이므로 이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 6)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$의 3개

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

답 $\frac{1}{12}$

0264 전략 두 좌석이 이웃한 경우를 생각한다.

풀이 5명이 좌석에 앉는 경우의 수는

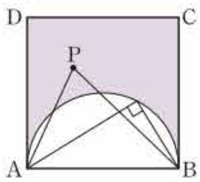
$5!=120$

D와 E가 이웃하게 앉으려면 G_1, G_2 또는 G_2, G_3 또는 G_4, G_5에 D와 E가 앉고, A, B, C가 나머지 세 자리에 앉으면 되므로 D와 E가 이웃하게 앉는 경우의 수는

$3\cdot2\cdot3!=36$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$ 답 ②

0265 전략 선분 AB를 지름으로 하는 반원에 대하여 점 P가 반원의 외부에 있을 때 삼각형 PAB가 예각삼각형이 됨을 이용한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P가 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때 삼각형 PAB는 직각삼각형이 되므로 이 반원의 외부에 점 P를 잡으면 삼각형 PAB는 예각삼각형이 된다.

정사각형 ABCD의 넓이는 16이므로 색칠한 부분의 넓이는

$16-\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot2^2=16-2\pi$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{16-2\pi}{16}=\dfrac{8-\pi}{8}$ 답 ②

0266 전략 두 사건 A, B에 대하여 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$임을 이용한다.

풀이 P에서 Q까지 최단 거리로 갈 때, A를 지나는 사건을 A, B를 지나는 사건을 B라 하자.

P → Q로 가는 모든 경우의 수는

$\dfrac{7!}{4!\cdot3!}=35$

P → A → Q로 가는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\cdot\dfrac{4!}{2!\cdot2!}=18$

이므로 $P(A)=\dfrac{18}{35}$

P → B → Q로 가는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!\cdot2!}\cdot2=20$

이므로 $P(B)=\dfrac{20}{35}=\dfrac{4}{7}$

이때 P → A → B → Q로 가는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\cdot2\cdot2=12$

이므로 $P(A\cap B)=\dfrac{12}{35}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{18}{35}+\frac{4}{7}-\frac{12}{35}=\frac{26}{35}\end{aligned}$$ 답 ③

0267 전략 대표 2명이 모두 남학생인 사건과 모두 여학생인 사건은 서로 배반사건이다.

풀이 대표로 뽑은 2명이 모두 남학생인 사건을 A, 모두 여학생인 사건을 B라 하고, 여학생의 수를 x라 하면

$P(A)=\dfrac{{}_{15-x}C_2}{{}_{15}C_2}=\dfrac{(15-x)(14-x)}{210}$

$P(B)=\dfrac{{}_xC_2}{{}_{15}C_2}=\dfrac{x(x-1)}{210}$ ⋯ ❶

A, B는 서로 배반사건이므로 $P(A\cup B)=\dfrac{7}{15}$에서

$\dfrac{(15-x)(14-x)}{210}+\dfrac{x(x-1)}{210}=\dfrac{7}{15}$ ⋯ ❷

$x^2-15x+56=0$, $(x-7)(x-8)=0$

이때 여학생 수가 남학생 수보다 많으므로

$x=8$

따라서 여학생 수는 8이다. ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $P(A)$, $P(B)$를 각각 x로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ x에 대한 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❸ 여학생 수를 구할 수 있다.	20 %

0268 전략 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_{10}={}_{12}C_2=66$

$(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 A^C는 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$인 사건이다.

이때 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립하려면

$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$

$x=y$일 때, $x+y+z=10$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는

$(0, 0, 10)$, $(1, 1, 8)$, $\cdots$, $(5, 5, 0)$

의 6개이고, $y=z$, $z=x$일 때의 순서쌍도 마찬가지로 6개이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $6\cdot3=18$

따라서 $P(A^C)=\dfrac{18}{66}=\dfrac{3}{11}$이므로

$P(A)=1-P(A^C)=1-\dfrac{3}{11}=\dfrac{8}{11}$

$\therefore p+q=11+8=19$ 답 19

다른풀이 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$, 즉 $x\neq y$, $y\neq z$, $z\neq x$이므로 서로 다른 음이 아닌 세 정수 중에서 합이 10인 경우는

$$\begin{aligned}10&=0+1+9=0+2+8=0+3+7=0+4+6\\&=1+2+7=1+3+6=1+4+5\\&=2+3+5\end{aligned}$$

각각의 경우에서 x, y, z를 결정하는 경우의 수는 $3!$이므로 $x+y+z=10$을 만족시키는 서로 다른 x, y, z의 개수는

$8\cdot3!=48$

따라서 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$을 만족시킬 확률은

$\dfrac{48}{{}_3H_{10}}=\dfrac{8}{11}$

이므로 $p+q=11+8=19$

04 조건부확률

Ⅱ. 확률

0269 (1) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{5}$

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{3}$

답 (1) $\dfrac{2}{5}$ (2) $\dfrac{1}{3}$

0270 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$

(1) $P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(2) $A\cap B=\{3, 5\}$이므로 $P(A\cap B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

(3) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$

답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) $\dfrac{2}{3}$

0271 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$

(1) $P(B)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

(2) $A\cap B=\{2, 10\}$이므로 $P(A\cap B)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

(3) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\dfrac{2}{5}$ (2) $\dfrac{1}{5}$ (3) $\dfrac{1}{2}$

0272 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.4$, $P(A\cap B)=0.3$이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.5}=0.6$$

답 0.6

0273 동전의 뒷면이 1개 나오는 사건을 A, 10원짜리 동전의 뒷면이 나오는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{3}{8},\ P(A\cap B)=\frac{1}{8}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$

답 $\dfrac{1}{3}$

다른풀이 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 동전의 순서쌍을 (100원, 100원, 10원)으로 나타내면 뒷면이 1개 나오는 사건은

{(T, H, H), (H, T, H), (H, H, T)}

이 중에서 10원짜리 동전의 뒷면이 나온 경우는 (H, H, T)의 1개이므로 구하는 확률은 $\dfrac{1}{3}$

0274 $P(A\cap B)=P(\boxed{A})P(B|A)=0.4\times0.2=\boxed{0.08}$ 이므로

$$P(A|B)=\frac{P(\boxed{A\cap B})}{P(\boxed{B})}=\frac{0.08}{0.5}=\boxed{0.16}$$

$\therefore$ (가) A (나) 0.08 (다) $A\cap B$ (라) B (마) 0.16

답 풀이 참조

0275 (1) $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(2) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{4}$

답 (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $\dfrac{1}{4}$

0276 (1) $P(A)=\dfrac{4}{7}$

(2) 첫 번째에 검은 공을 꺼냈으므로 주머니 안에는 검은 공 3개와 흰 공 3개가 남아 있다.

$\therefore P(B|A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(3) $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{7}$

답 (1) $\dfrac{4}{7}$ (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) $\dfrac{2}{7}$

0277 (1) $P(A)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

(2) 첫 번째에 당첨권을 뽑았으므로 상자 안에는 행운권 9장 중 당첨권이 5장 들어 있다.

$\therefore P(B|A)=\dfrac{5}{9}$

(3) $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{1}{3}$

답 (1) $\dfrac{3}{5}$ (2) $\dfrac{5}{9}$ (3) $\dfrac{1}{3}$

0278 첫 번째에 꺼낸 꽃이 장미인 사건을 A, 두 번째에 꺼낸 꽃이 장미인 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3},\ P(B|A)=\frac{7}{11}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{11}=\frac{14}{33}$$

답 $\dfrac{14}{33}$

0279 (1) $P(B|A)=P(B)=\dfrac{2}{3}$

(2) $P(A|B)=P(A)=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{1}{2}$

0280 (1) 첫 번째에 노란 공을 뽑았으므로 주머니 안에는 빨간 공 2개와 노란 공 3개가 남아 있다.

$\therefore P(B|A)=\dfrac{2}{5}$

(2) (i) 첫 번째에 노란 공, 두 번째에 빨간 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

(ii) 첫 번째에 빨간 공, 두 번째에 빨간 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

(i), (ii)에서 $\quad \mathrm{P}(B)=\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$

(3) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) 종속

0281 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.25\times0.2=0.05$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.05$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다. 답 독립

0282 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.4\times0.5=0.2$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.1$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다. 답 종속

0283 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.3\times0.6=0.18$ 답 0.18

0284 두 사건 A, B^C가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$=0.3\times(1-0.6)=0.12$ 답 0.12

다른풀이 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=0.3-0.18=0.12$

0285 두 사건 A^C, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)=1-0.3=0.7$ 답 0.7

0286 (1) 두 사건 A, B는 서로 일어날 확률에 영향을 주지 않으므로 서로 독립이다.

(2) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

답 (1) 독립 (2) $\frac{1}{4}$

0287 A, B가 합격하는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.5\times0.7=0.35$ 답 0.35

0288 답 (가) $\frac{1}{2}$ (나) $\frac{1}{2}$ (다) $\frac{1}{2}$ (라) $\frac{1}{4}$

0289 (1) $A=\{3, 6\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(2) 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{9}$

0290 (2) 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{27}{128}$

0291 자유투를 한 번 던지는 시행에서 성공하는 사건을 A라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{54}{125}$$ 답 $\frac{54}{125}$

0292 사격 선수가 목표물을 향해 총을 한 번 쏘는 시행에서 목표물을 맞히는 사건을 A라 하면 $\quad \mathrm{P}(A)=0.7$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_5\mathrm{C}_0(0.7)^0(0.3)^5=0.00243$ 답 0.00243

0293 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$

$=1-0.2=0.8$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$0.8=0.4+0.5-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.1$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$$ 답 0.2

0294 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{12}\qquad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$$=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$ 답 ⑤

0295 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-0.2=0.8$이므로

$$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{0.8}=0.5$$

$\therefore \mathrm{P}(B\cap A^C)=0.4$

$\mathrm{P}(A^C|B)=0.8$에서

$$\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.4}{\mathrm{P}(B)}=0.8$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{0.4}{0.8}=0.5$$ 답 0.5

0296 $\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ ··· ❶

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$

따라서 $A\cap B^C=A-B=A$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$ ··· ❷

$$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{8}$$ ··· ❸

답 $\frac{5}{8}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(B^C)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\mathrm{P}(A\cap B^C)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\mathrm{P}(A|B^C)$를 구할 수 있다.	30 %

0297 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$이므로

$$\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{8}$$

답 ①

0298 마라톤 대회에 참가한 학생을 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{19}{34},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{34}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{34}}{\frac{19}{34}}=\frac{7}{19}$$

답 ②

0299 태권도를 배운 적이 있는 학생을 택하는 사건을 A, 남학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{7},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{7}}=\frac{7}{9}$$

답 $\frac{7}{9}$

0300 흰색 카드를 꺼내는 사건을 A, 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}$$ ··· ❶

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{8}$$ ··· ❷

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{5}$$ ··· ❸

답 $\frac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{P}(B|A)$를 구할 수 있다.	50 %

0301 첫 번째에 뽑힌 사람이 남자인 사건을 A, 두 번째에 뽑힌 사람이 남자인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{14}{25},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{13}{24}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{14}{25}\cdot\frac{13}{24}=\frac{91}{300}$$

답 ⑤

0302 첫 번째에 초콜릿이 들어 있는 도넛을 먹는 사건을 A, 두 번째에 딸기잼이 들어 있는 도넛을 먹는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$$

답 $\frac{4}{15}$

0303 B 필통을 택하는 사건을 B, 파란 펜을 꺼내는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(E|B)=\frac{3}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

0304 당첨 제비의 개수를 x라 하고, 갑이 당첨되지 않는 사건을 A, 을이 당첨되는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{9-x}{9},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{x}{8}$$

따라서 을만 당첨될 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{9-x}{9}\cdot\frac{x}{8}=\frac{9x-x^2}{72}$$

즉 $\frac{9x-x^2}{72}=\frac{5}{18}$이므로 $x^2-9x+20=0$

$(x-4)(x-5)=0$ $\therefore x=4$ 또는 $x=5$

이때 당첨 제비는 짝수 개이므로 당첨 제비의 개수는 4이다. 답 4

0305 갑이 흰 바둑돌을 꺼내는 사건을 A, 을이 검은 바둑돌을 꺼내는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7},\ \mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7},$$

$$\mathrm{P}(E|A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(E|A^C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{4}{7}\end{aligned}$$

답 ②

0306 이번 주 토요일에 비가 오는 사건을 A, 공연 관람권이 매진되는 사건을 E라 하면

$$P(A)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5},\ P(A^C)=\frac{3}{5},$$
$$P(E|A)=\frac{1}{2},\ P(E|A^C)=\frac{4}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)\\&=P(A)P(E|A)+P(A^C)P(E|A^C)\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\\&=\frac{17}{25}\end{aligned}$$

답 ①

0307 은진이가 3점짜리 문제를 고르는 사건을 A, 정답을 맞히는 사건을 E라 하면

$$P(A)=\frac{3}{5},\ P(A^C)=\frac{2}{5},$$
$$P(E|A)=\frac{4}{5},\ P(E|A^C)=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)\\&=P(A)P(E|A)+P(A^C)P(E|A^C)\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

답 ③

0308 A 반 학생을 뽑는 사건을 A, B 반 학생을 뽑는 사건을 B, 영어를 신청한 학생을 뽑는 사건을 E라 하면

$$P(A)=\frac{20}{45}=\frac{4}{9},\ P(B)=\frac{25}{45}=\frac{5}{9},$$
$$P(E|A)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10},\ P(E|B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(B\cap E)\\&=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)\\&=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{10}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{5}\\&=\frac{7}{45}\end{aligned}$$

답 ①

0309 A 주머니를 택하는 사건을 A, B 주머니를 택하는 사건을 B, 흰 구슬 1개, 검은 구슬 1개를 꺼내는 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{4}{15}$$
$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{3}{10}$$
$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=\frac{4}{15}+\frac{3}{10}=\frac{17}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{17}{30}}=\frac{8}{17}$$

답 $\frac{8}{17}$

0310 A 기계에서 생산된 제품을 택하는 사건을 A, B 기계에서 생산된 제품을 택하는 사건을 B, 불량품인 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=0.6\times0.02=0.012$$
$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=0.4\times0.04=0.016$$
$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=0.012+0.016=0.028$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{0.012}{0.028}=\frac{3}{7}$$

답 ④

0311 A 야구장에서 경기를 치르는 사건을 A, 경기에서 승리하는 사건을 E라 하면

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=0.3\times0.6=0.18$

$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)=0.7\times0.4=0.28$ ··· ❶

$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)=0.18+0.28=0.46$ ··· ❷

따라서 구하는 확률은

$P(A|E)=\dfrac{P(A\cap E)}{P(E)}=\dfrac{0.18}{0.46}=\dfrac{9}{23}$ ··· ❸

답 $\frac{9}{23}$

채점 기준	비율
❶ $P(A\cap E)$, $P(A^C\cap E)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $P(E)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $P(A\vert E)$를 구할 수 있다.	30 %

0312 카드 A를 뽑는 사건을 A, 카드 B를 뽑는 사건을 B, 카드 C를 뽑는 사건을 C, 보이는 면에 ♥가 그려져 있는 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{3}$$
$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$
$$P(C\cap E)=P(C)P(E|C)=\frac{1}{3}\cdot0=0$$
$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0313 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 10원짜리 동전, 100원짜리 동전을 차례대로 나타낼 때,

$A=\{TH, TT\}$, $B=\{HH, TH\}$, $C=\{HH, TT\}$

$\therefore P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{2},\ P(C)=\frac{1}{2}$

ㄱ. $A\cap B=\{TH\}$에서 $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $B\cap C=\{HH\}$에서 $P(B\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$P(B\cap C)=P(B)P(C)$

따라서 B와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $A\cap C=\{TT\}$에서 $P(A\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap C)=P(A)P(C)$

따라서 A와 C는 서로 독립이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 서로 독립인 사건이다.

답 ⑤

0314 8장의 카드 중에서 모음이 적힌 카드는 U, E, O, O의 4장이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

빨간색 카드는 T, R, O, K의 4장이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

빨간색 카드 중 모음이 적힌 카드는 O의 1장이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

답 종속

0315 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{5, 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $B\cap C=\{6\}$에서 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

ㄷ. $A\cap C=\{5\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0316 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$ ⋯ ❶

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다. ⋯ ❷

답 독립

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ 두 사건 A, B가 독립임을 알 수 있다.	40 %

0317 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^C)$

ㄴ. $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$

따라서 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A^C, B는 서로 독립이다.

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq 0$, $\mathrm{P}(B)\neq 0$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

라쎈 특강 배반사건과 독립사건의 관계

$\mathrm{P}(A)\neq 0$, $\mathrm{P}(B)\neq 0$인 두 사건 A, B에 대하여

① A, B가 서로 배반사건이면 A, B는 서로 종속이다.

② A, B가 서로 독립이면 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

0318 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\boxed{\mathrm{P}(A\cup B)}\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\boxed{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}\}\\&=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}-\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A)\}\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.

$\therefore$ (가) $\mathrm{P}(A\cup B)$ (나) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

답 ④

라쎈 특강 두 사건 A, B가 독립일 때, 서로 독립인 사건

두 사건 A, B가 서로 독립이면

① A와 B^C가 서로 독립 ⇨ $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

② A^C와 B가 서로 독립 ⇨ $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

③ A^C와 B^C가 서로 독립 ⇨ $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

0319 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3} \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

0320 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ ⋯ ❶

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}-\frac{2}{15}=\frac{11}{15}\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{11}{15}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\mathrm{P}(A\cup B)$를 구할 수 있다.	60 %

0321 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다.

이때 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

$\therefore$ $P(A^C \cup B) = P(A^C) + P(B) - P(A^C \cap B)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

0322 두 사건 A, C가 서로 배반사건이므로

$P(A \cup C) = P(A) + P(C)$, $\quad \frac{3}{4} = P(A) + \frac{1}{4}$

$\therefore P(A) = \frac{1}{2}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$에서

$\frac{2}{5} = \frac{1}{2}P(B) \quad \therefore P(B) = \frac{4}{5}$

답 ④

0323 내일 A 나라와 B 나라에 눈이 오는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 적어도 한 나라에 눈이 올 확률은

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$= 0.5 + 0.4 - 0.5 \times 0.4$

$= 0.7$

답 ⑤

0324 A 상자에서 노란색 깃발을 꺼내는 사건을 A, B 상자에서 노란색 깃발을 꺼내는 사건을 B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

답 $\frac{3}{10}$

0325 윤호와 하빈이가 설문 조사에 응하는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 윤호만 응할 확률은

$P(A \cap B^C) = P(A)P(B^C)$

$= \frac{1}{5} \cdot (1-p) = \frac{1-p}{5}$

따라서 $\frac{1-p}{5} = \frac{3}{20}$이므로

$1 - p = \frac{3}{4} \quad \therefore p = \frac{1}{4}$

즉 구하는 확률은

$P(A^C \cap B) = P(A^C)P(B) = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

0326 영화 DVD 중에서 임의로 한 개를 택하였을 때, 국내 영화인 사건을 A, 코미디 영화인 사건을 B라 하면

$P(A) = \frac{130}{400} = \frac{13}{40}$, $P(B) = \frac{160}{400} = \frac{2}{5}$,

$P(A \cap B) = \frac{x}{400}$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\frac{x}{400} = \frac{13}{40} \cdot \frac{2}{5} \quad \therefore x = 52$ 답 ④

0327 두 수의 합이 홀수이려면 두 수 중에서 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수이어야 한다. 두 상자 A, B에서 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이고, A^C, B^C는 두 상자 A, B에서 각각 짝수가 적힌 카드를 꺼내는 사건이므로

(i) A 상자에서 홀수, B 상자에서 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$P(A \cap B^C) = P(A)P(B^C)$

$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ ··· ❶

(ii) A 상자에서 짝수, B 상자에서 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$P(A^C \cap B) = P(A^C)P(B)$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $P(A \cap B^C)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $P(A^C \cap B)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 수의 합이 홀수일 확률을 구할 수 있다.	20 %

0328 스트라이크를 한 번 이상 치는 사건을 A라 하면 A^C는 스트라이크를 한 번도 치지 못하는 사건이므로

$P(A^C) = {}_4C_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$

$\therefore P(A) = 1 - P(A^C)$

$= 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$

답 ⑤

0329 정사면체를 한 번 던질 때 밑면에 적힌 숫자가 1일 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 정사면체를 3번 던져서 1이 두 번 나올 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{64}$

답 $\frac{9}{64}$

0330 한 번의 경기에서 A 팀이 이길 확률을 p라 하면 B 팀이 이길 확률은 $1-p$이다.

3번의 경기를 할 때, A 팀이 모두 이길 확률이 $\frac{1}{64}$이므로

${}_3C_3\,p^3(1-p)^0 = \frac{1}{64}$

$p^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \quad \therefore p = \frac{1}{4}$

따라서 한 번의 경기에서 A 팀이 이길 확률은 $\frac{1}{4}$이고, B 팀이 이길 확률은 $\frac{3}{4}$이므로 구하는 확률은

${}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$

답 ④

0331 A가 4점을 얻을 확률은

$_{5}C_{4}(0.8)^{4}(0.2)^{1}=0.8^{4}$

B가 5점을 얻을 확률은

$_{5}C_{5}(0.8)^{5}(0.2)^{0}=0.8^{5}$

두 사람이 점수를 얻는 사건은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$0.8^{4}\times0.8^{5}=0.8^{9}$ 답 ④

0332 앞면이 x번, 뒷면이 y번 나온다고 하면 동전을 4번 던졌으므로

$x+y=4$ …… ㉠

점 P가 점 A에서 다시 점 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 5이므로

$2x+y=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=3$

따라서 구하는 확률은 동전을 네 번 던져서 앞면이 1번, 뒷면이 3번 나올 확률과 같으므로

$_{4}C_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0333 (i) 주사위는 홀수의 눈이 나오고, 동전을 2번 던져서 2번 모두 앞면이 나올 확률은

$\frac{1}{2}\cdot{}_{2}C_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=\frac{1}{8}$

(ii) 주사위는 짝수의 눈이 나오고, 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$\frac{1}{2}\cdot{}_{3}C_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{3}{16}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$ 답 $\frac{5}{16}$

0334 연재가 한 문제를 맞힐 확률은 $\frac{3}{4}$

(i) 5문제 중 4문제를 맞힐 확률은

$_{5}C_{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}=\frac{405}{1024}$

(ii) 5문제를 모두 맞힐 확률은

$_{5}C_{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=\frac{243}{1024}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{405}{1024}+\frac{243}{1024}=\frac{81}{128}$ 답 ④

0335 5개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 2개가 모두 흰 공일 확률은

$\frac{_{3}C_{2}}{_{5}C_{2}}=\frac{3}{10}$

(i) 3회의 시행 중 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 경우가 0회일 확률은

$_{3}C_{0}\left(\frac{3}{10}\right)^{0}\left(\frac{7}{10}\right)^{3}=\frac{343}{1000}$

(ii) 3회의 시행 중 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 경우가 1회일 확률은

$_{3}C_{1}\left(\frac{3}{10}\right)^{1}\left(\frac{7}{10}\right)^{2}=\frac{441}{1000}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{343}{1000}+\frac{441}{1000}=\frac{98}{125}$ 답 ⑤

0336 5번째 경기에서 우승 팀이 결정되려면 4번째 경기까지 3번 이긴 팀이 5번째 경기에서 이겨야 한다.

(i) 5번째 경기에서 A 팀이 우승할 확률은

$_{4}C_{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\cdot\frac{3}{4}=\frac{81}{256}$ ··· ❶

(ii) 5번째 경기에서 B 팀이 우승할 확률은

$_{4}C_{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{256}$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{81}{256}+\frac{3}{256}=\frac{21}{64}$ ··· ❸

답 $\frac{21}{64}$

채점 기준	비율
❶ 5번째 경기에서 A 팀이 우승할 확률을 구할 수 있다.	40 %
❷ 5번째 경기에서 B 팀이 우승할 확률을 구할 수 있다.	40 %
❸ 5번째 경기에서 우승 팀이 결정될 확률을 구할 수 있다.	20 %

0337 전략 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$임을 이용한다.

풀이 $P(B^{C})=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$$P(A|B^{C})=\frac{P(A\cap B^{C})}{P(B^{C})}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$$

답 $\frac{3}{10}$

0338 전략 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$임을 이용한다.

풀이 조사에 참여한 사람 중에서 임의로 뽑은 한 명이 50대인 사건을 A, 관광을 목적으로 온 사건을 B라 하면

$P(A)=0.18$, $P(A\cap B)=0.12$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.12}{0.18}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0339 전략 확률의 곱셈정리와 조건부확률을 이용한다.

풀이 첫 번째에 붉은 금붕어가 나오는 사건을 A, 두 번째에 검은 금붕어가 나오는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{6}{13}$, $P(B|A)=\frac{7}{12}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{6}{13}\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{26}$$ 답 $\frac{7}{26}$

0340 전략 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$가 성립하는지 확인한다.

풀이 $P(A)=\frac{15}{32}$, $P(B)=\frac{11}{32}$이고,

$P(A\cap B)=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}$ ··· ❶

따라서 $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다. ···· ❷

답 종속

채점 기준	비율
❶ $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ 두 사건 A, B가 종속임을 알 수 있다.	40 %

0341 전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립임을 이용한다.

풀이 두 선수 A, B가 페널티킥을 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면

$P(A)=0.8$, $P(B)=0.7$

이때 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)&=P(A)P(B^C)+P(A^C)P(B)\\&=0.8\times(1-0.7)+(1-0.8)\times0.7\\&=0.24+0.14\\&=0.38\end{aligned}$$

답 0.38

0342 전략 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은 ${}_nC_r p^r(1-p)^{n-r}$임을 이용한다.

풀이 1회의 시행에서 빨간 공이 나올 확률이 $\frac{4}{7}$이고 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$${}_7C_3\left(\frac{4}{7}\right)^3\left(\frac{3}{7}\right)^4$$

답 ④

0343 전략 확률의 덧셈정리와 조건부확률을 이용하여 계산한다.

풀이 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}$에서

$P(A\cap B)=\frac{1}{2}P(B)$ ······ ㉠

$P(A^C|B^C)=\frac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{2}{3}$에서

$1-P(A\cup B)=\frac{2}{3}\{1-P(B)\}$

$1-P(A\cup B)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}P(B)$

$\therefore P(A\cup B)=\frac{2}{3}P(B)+\frac{1}{3}$ ······ ㉡

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로 ㉠, ㉡에서

$\frac{2}{3}P(B)+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}+P(B)-\frac{1}{2}P(B)$

$\frac{1}{6}P(B)=\frac{1}{12}$ $\quad\therefore P(B)=\frac{1}{2}$

답 ⑤

0344 전략 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$임을 이용한다.

풀이 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 6의 눈이 한 번도 나오지 않는 사건을 A라 하면

$P(A)=\frac{25}{36}$

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나온 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 사건을 B라 하고, 사건 $A\cap B$를 순서쌍으로 나타내면

(1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3)

이므로 $\quad P(A\cap B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{25}{36}}=\frac{6}{25}$$

답 ③

0345 전략 주어진 확률을 a 또는 b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 접수된 200건 중에서 임의로 선택한 한 건이 액정 화면 고장인 사건을 A, 품질보증 기간 이내인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{50+b}{200}$, $P(A\cap B)=\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{50+b}{200}}=\frac{50}{50+b}$$

따라서 $\frac{50}{50+b}=\frac{2}{3}$이므로

$100+2b=150$ $\quad\therefore b=25$

이때 $a+b=60$이므로 $\quad a=60-b=35$

$\therefore a-b=10$

답 10

0346 전략 확률의 곱셈정리와 조건부확률을 이용한다.

풀이 홈경기에서 승리하는 사건을 A, 원정 경기에서 승리하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{3}{4}$, $P(B|A)=r$, $P(A\cap B)=\frac{3}{5}$

이때 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$이므로

$\frac{3}{5}=\frac{3}{4}r$ $\quad\therefore r=\frac{4}{5}$

답 $\frac{4}{5}$

0347 전략 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$임을 이용하여 n에 대한 방정식을 세운다.

풀이 첫 번째에 빨간 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 흰 공이 나오는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{5}{n+5}$, $P(B|A)=\frac{n}{n+4}$

따라서 첫 번째에는 빨간 공, 두 번째에는 흰 공이 나올 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)P(B|A)\\&=\frac{5}{n+5}\cdot\frac{n}{n+4}\\&=\frac{5n}{(n+5)(n+4)}\end{aligned}$$

이므로 $\quad\frac{5n}{(n+5)(n+4)}=\frac{5}{21}$

$(n+5)(n+4)=21n$

$n^2-12n+20=0$, $\quad(n-2)(n-10)=0$

$\therefore n=2\ (\because n<5)$

답 2

0348 전략 $P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P(A\cap E)}{P(A\cap E)+P(A^C\cap E)}$임을 이용한다.

풀이 A 컴퓨터를 구입한 고객을 택하는 사건을 A, 1년 이내에 고장 수리를 요청한 고객을 택하는 사건을 E라 하면

$$\begin{aligned}P(A\cap E)&=P(A)P(E|A)\\&=0.7\times0.1=0.07\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$$
$$=0.3\times0.05=0.015 \quad \cdots ❶$$
$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$$
$$=0.07+0.015=0.085 \quad \cdots ❷$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.07}{0.085}=\frac{14}{17} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{14}{17}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A\cap E)$, $\mathrm{P}(A^C\cap E)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\mathrm{P}(E)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{P}(A\|E)$를 구할 수 있다.	30 %

0349 전략 두 사건 A, B가 서로 독립일 필요충분조건은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.

풀이 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{3, 6, 9\}$, $C=\{5, 10\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{5}$$

ㄱ. $A\cap B=\{6\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

ㄴ. $B\cap C=\varnothing$에서 $\mathrm{P}(B\cap C)=0$이므로

$$\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 B, C는 서로 종속이다.

ㄷ. $A\cap C=\{10\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{10}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

이상에서 서로 독립인 사건은 ㄷ뿐이다.

답 ②

0350 전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이고, 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$에서

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=0,$$
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=0$$
$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq0$, $\mathrm{P}(B)\neq0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)\neq0$$

따라서 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$
$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$
$$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$$
$$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$$

따라서 두 사건 A, B^C는 서로 독립이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0351 전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

풀이 두 선수 A, B가 화살을 한 발씩 쏘았을 때 10점 영역을 맞히는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$
$$=0.7+0.8-0.7\times0.8=0.94$$

답 0.94

0352 전략 전기가 흐르기 위해서는 스위치 a가 닫혀 있어야 한다.

풀이 스위치 a, b, c가 닫혀 있는 사건을 각각 A, B, C라 하면 전기가 흐르는 경우는 $A\cap(B\cup C)$이다.

이때 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},$$
$$\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)$$
$$=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cup C)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{27}$$

답 ①

다른풀이 스위치 a, b가 닫혀 있는 사건을 A, 스위치 a, c가 닫혀 있는 사건을 B라 하면 전기가 흐르는 경우는 $A\cup B$이다.

이때 $A\cap B$인 경우는 a, b, c 스위치가 모두 닫혀 있는 경우이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}=\frac{5}{27}$$

0353 전략 나온 눈의 수의 최댓값이 6이 되려면 적어도 한 번은 6의 눈이 나와야 함을 이용한다.

풀이 주사위를 3번 던질 때 나온 눈의 수의 최댓값이 6이 되려면 3번 중 적어도 한 번은 6의 눈이 나와야 한다. 6의 눈이 한 번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 6의 눈이 한 번도 나오지 않는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216} \quad \cdots ❶$$
$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{91}{216}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A^C)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\mathrm{P}(A)$를 구할 수 있다.	50 %

0354 전략 4번째 경기에서 A 팀이 우승하려면 3번째 경기까지는 A 팀이 2번 이겨야 한다.

풀이 4번째 경기에서 A 팀이 우승하려면 3번째 경기까지는 A 팀

이 2번 이기고, 4번째 경기에서 A 팀이 이기면 된다.
따라서 구하는 확률은

$$ {}_3C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1\cdot\frac{2}{5}=\frac{72}{625} $$

답 ②

0355 전략 홀수가 적힌 공과 짝수가 적힌 공을 꺼내는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 상자에서 홀수가 적힌 공을 꺼내고, 주사위를 4번 던져서 짝수의 눈이 2번 나올 확률은

$$ \frac{2}{3}\cdot{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} $$

(ii) 상자에서 짝수가 적힌 공을 꺼내고, 주사위를 3번 던져서 짝수의 눈이 2번 나올 확률은

$$ \frac{1}{3}\cdot{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{8} $$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$ \frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8} $$

답 ③

0356 전략 $\mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{1}{3}$이므로

$$ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \quad ❶ $$

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{1}{4}$이므로

$$ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B) $$

$$ \therefore \mathrm{P}(B)=4\mathrm{P}(A\cap B)=4\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3} \quad ❷ $$

$$ \therefore \mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2} \quad ❸ $$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\mathrm{P}(B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{P}(B\cap A^C)$를 구할 수 있다.	40 %

다른풀이 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$이고
$\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(A^C|B)=1$이므로

$$ \mathrm{P}(A^C|B)=1-\mathrm{P}(A|B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} $$

$$ \therefore \mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2} $$

0357 전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

풀이 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8} \quad \cdots\cdots ㉠ $$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$ \frac{5}{8}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{8} $$

$$ \therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots ㉡ $$

㉡에서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{4}-\mathrm{P}(A)$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$ \mathrm{P}(A)\left\{\frac{3}{4}-\mathrm{P}(A)\right\}=\frac{1}{8} $$

$$ 8\{\mathrm{P}(A)\}^2-6\mathrm{P}(A)+1=0 $$

$$ \{4\mathrm{P}(A)-1\}\{2\mathrm{P}(A)-1\}=0 $$

$$ \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4} \text{ 또는 } \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2} $$

그런데 $\mathrm{P}(A)<\mathrm{P}(B)$이므로

$$ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4} $$

답 ④

0358 전략 세 사건 A, B, C가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$임을 이용한다.

풀이 상자를 던질 때 첫 번째와 두 번째에 나온 수를 각각 a, b라 하면 두 수의 합이 4인 경우는

$a=1$, $b=3$ 또는 $a=b=2$ 또는 $a=3$, $b=1$

(i) 1, 3, 홀수가 차례대로 나올 확률은

$$ \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{18} $$

(ii) 2, 2, 홀수가 차례대로 나올 확률은

$$ \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{27} $$

(iii) 3, 1, 홀수가 차례대로 나올 확률은

$$ \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{18} $$

이상에서 구하는 확률은

$$ \frac{1}{18}+\frac{2}{27}+\frac{1}{18}=\frac{5}{27} $$

답 ①

0359 전략 점 A가 -2의 위치에 있으려면 5의 약수의 눈이 몇 번 나와야 하는지 구한다.

풀이 5의 약수의 눈이 x번, 그 외의 눈이 y번 나온다고 하면

$x+y=4$, $x-y=-2$

두 식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$

따라서 구하는 확률은 5의 약수의 눈이 1번, 그 이외의 눈이 3번 나올 확률과 같고, 한 개의 주사위를 던져서 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{1}{3}$이므로

$$ {}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81} $$

답 $\frac{32}{81}$

0360 전략 먼저 한 상자에서 3개의 탁구공을 동시에 꺼낼 때, 'Lucky'라고 쓰여 있는 탁구공이 포함될 확률을 구한다.

풀이 한 상자에서 3개의 탁구공을 동시에 꺼낼 때, 'Lucky'라고 쓰여 있는 탁구공이 포함될 확률은

$$ \frac{{}_1C_1\cdot{}_7C_2}{{}_8C_3}=\frac{21}{56}=\frac{3}{8} $$

따라서 구하는 확률은

$$ {}_3C_1\left(\frac{3}{8}\right)^1\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{225}{512} $$

답 $\frac{225}{512}$

0361 전략 타자 A가 두 투수에게 안타를 3번 치는 경우를 나누어 생각한다.

풀이 (i) 투수 B에게 안타를 3번 칠 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0\times{}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{108}$$

(ii) 투수 B, C에게 각각 안타를 2번, 1번 칠 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1\times{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{9}$$

(iii) 투수 B, C에게 각각 안타를 1번, 2번 칠 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{9}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{108}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{25}{108}$$

답 ②

0362 전략 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 같은 경우와 다른 경우로 나누어 생각한다.

풀이 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같은 사건을 A, 동전을 4번 던지는 사건을 B라 하자.

(i) 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 같을 확률은

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}\qquad\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$$

동전을 4번 던져 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나올 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\qquad\therefore\ \mathrm{P}(A|B)=\frac{3}{8}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{16}$$

(ii) 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 다를 확률은

$$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$$

동전을 2번 던져 앞면이 1번, 뒷면이 1번 나올 확률은

$${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \mathrm{P}(A|B^C)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{16}+\frac{5}{12}=\frac{23}{48}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{23}{48}}=\frac{3}{23}$$

답 ①

05 확률변수와 확률분포

Ⅲ. 통계

0363 답 0, 1, 2, 3

0364 답 0, 1, 2, 3, 4, 5

0365 답 1, 2, 3, 4, 5, 6

0366 답 0, 1, 2

0367 답 $\frac{1}{3}$

0368 답 $\frac{1}{8}$

0369 (1) 0, 1, 2

(2) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$, 3의 배수가 아닌 수의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

(3)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

답 풀이 참조

0370 (1) 5개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_5C_2$

꺼낸 2개의 공 중에 흰 공이 x개 포함되는 경우의 수는

${}_2C_x\cdot{}_3C_{2-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_2C_{\boxed{x}}\cdot{}_3C_{\boxed{2-x}}}{{}_5C_2}\quad(x=0,\ 1,\ 2)$$

(2) $\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2C_0\cdot{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2C_2\cdot{}_3C_0}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

답 풀이 참조

0371 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}={}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{{}_3C_x}{8}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

답 풀이 참조

0372 7개의 사탕 중에서 3개의 사탕을 꺼내는 경우의 수는

$_7C_3$

꺼낸 3개의 사탕 중에 딸기 맛 사탕이 x개 포함되는 경우의 수는

$_3C_x \cdot {_4C_{3-x}}$

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{_3C_x \cdot {_4C_{3-x}}}{_7C_3} \quad (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

답 풀이 참조

0373 확률의 총합은 1이므로 $\quad b=1$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+a+\frac{1}{2}=1$이므로 $\quad a=\frac{1}{8}$

답 $a=\frac{1}{8}$, $b=1$

0374 $P(X=0$ 또는 $X=2)=P(X=0)+P(X=2)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

0375 $P(1\le X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

0376 $P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

0377 $P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

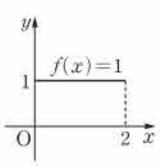
답 $\frac{5}{8}$

0378 답 연속 **0379** 답 이산

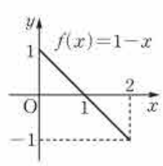
0380 답 이산 **0381** 답 연속

0382 보기의 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)\,(0\le x\le 2)$의 그래프는 각각 다음과 같다.

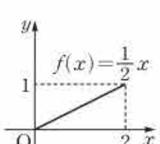
ㄱ.



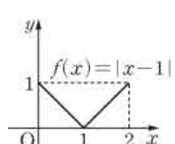
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



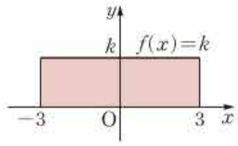
ㄱ. $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니므로 확률밀도함수가 아니다.

ㄴ. $1<x\le 2$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수가 아니다.

이상에서 확률밀도함수인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

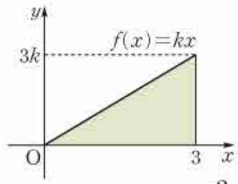
0383 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$6k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

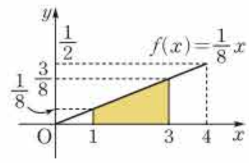
0384 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3k=1 \qquad \therefore k=\frac{2}{9}$

답 $\frac{2}{9}$

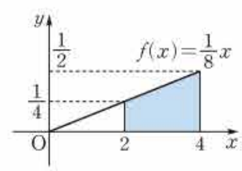
0385 $P(1\le X\le 3)$은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$P(1\le X\le 3)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)\cdot 2$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0386 $P(X\ge 2)$는 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$P(X\ge 2)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot 2$$
$$=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

다른풀이 $P(X\ge 2)=1-P(0\le X<2)$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

0387 $E(X)=10\cdot\frac{1}{5}+20\cdot\frac{1}{2}+30\cdot\frac{3}{10}=21$

$E(X^2)=10^2\cdot\frac{1}{5}+20^2\cdot\frac{1}{2}+30^2\cdot\frac{3}{10}=490$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=490-21^2=49$$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{49}=7$

답 풀이 참조

다른풀이 $V(X)=(10-21)^2\cdot\frac{1}{5}+(20-21)^2\cdot\frac{1}{2}+(30-21)^2\cdot\frac{3}{10}$

$$=49$$

0388 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 50, 100, 150이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)={_3C_0}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},$$

$$P(X=50)={_3C_1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8},$$

$\mathrm{P}(X=100)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$,

$\mathrm{P}(X=150)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	50	100	150	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{8}+50\cdot\frac{3}{8}+100\cdot\frac{3}{8}+150\cdot\frac{1}{8}=75$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{8}+50^2\cdot\frac{3}{8}+100^2\cdot\frac{3}{8}+150^2\cdot\frac{1}{8}=7500$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=7500-75^2=1875\end{aligned}$$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{1875}=25\sqrt{3}$

답 풀이 참조

다른풀이 (2) $\mathrm{V}(X)=(0-75)^2\cdot\frac{1}{8}+(50-75)^2\cdot\frac{3}{8}$

$+(100-75)^2\cdot\frac{3}{8}+(150-75)^2\cdot\frac{1}{8}$

$=1875$

0389 $\mathrm{E}(-X+5)=-\mathrm{E}(X)+5=-6+5=-1$

$\mathrm{V}(-X+5)=(-1)^2\,\mathrm{V}(X)=1\cdot3=3$

$\sigma(-X+5)=|-1|\sigma(X)=\sqrt{3}$

답 풀이 참조

0390 (1) $\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{17}{10}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{10}+1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{2}{5}+3^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{37}{10}$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{37}{10}-\left(\frac{17}{10}\right)^2=\frac{81}{100}\end{aligned}$$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\frac{81}{100}}=\frac{9}{10}$

(2) $\mathrm{E}(5X-8)=5\mathrm{E}(X)-8=5\cdot\frac{17}{10}-8=\frac{1}{2}$

$\mathrm{V}(5X-8)=5^2\,\mathrm{V}(X)=25\cdot\frac{81}{100}=\frac{81}{4}$

$\sigma(5X-8)=|5|\sigma(X)=5\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{2}$

답 풀이 참조

0391 뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, $b\,(a<b)$라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수의 차가

2인 경우는 $(1, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 7)$의 3개

4인 경우는 $(1, 5)$, $(3, 7)$의 2개

6인 경우는 $(1, 7)$의 1개

이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 4, 6이고 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$,

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

답 풀이 참조

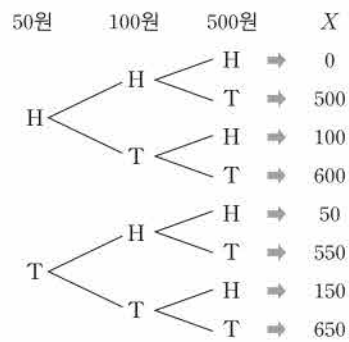
0392 확률변수 X가 가질 수 있는 값은

0, 50, 100, 150, 500, 550, 600, 650

의 8개이다.

답 8개

참고 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자. 50원, 100원, 500원짜리 동전을 동시에 던질 때 나오는 각각의 경우와 그때의 확률변수 X의 값을 구하면 다음과 같다.



0393 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\cdot{}_2\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 그래프로 바르게 나타낸 것은 ②이다.

답 ②

0394 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$2k+3k+4k=1$

$9k=1\qquad\therefore\ k=\frac{1}{9}$

답 ⑤

0395 확률의 총합은 1이므로

$c=1$

$a+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+b+\frac{1}{12}=1$에서 $\quad a+b=\frac{5}{12}$

$\therefore\ a+b+c=\frac{5}{12}+1=\frac{17}{12}$

답 ②

0396 확률의 총합은 1이므로

$a+(a^2+a)+2a^2=1,\qquad 3a^2+2a-1=0$

$(a+1)(3a-1)=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}\ (\because\ 0\le a\le1)$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}=\frac{7}{9}$

답 ⑤

0397 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=19)=1$

$\dfrac{a}{1\cdot 2}+\dfrac{a}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{a}{19\cdot 20}=1$

$a\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{20}\right)\right\}=1$

$a\left(1-\dfrac{1}{20}\right)=1,\quad \dfrac{19}{20}a=1$

$\therefore a=\dfrac{20}{19}$

따라서 $P(X=x)=\dfrac{20}{19x(x+1)}$ $(x=1, 2, \cdots, 19)$이므로

$P(X=1 \text{ 또는 } X=9)=P(X=1)+P(X=9)$

$=\dfrac{20}{19\cdot 1\cdot 2}+\dfrac{20}{19\cdot 9\cdot 10}$

$=\dfrac{92}{171}$

답 ③

라쎈 특강 부분분수로의 변형

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

0398 $P(X=x)=\dfrac{{}_4C_x\cdot{}_3C_{3-x}}{{}_7C_3}$ $(x=0, 1, 2, 3)$이므로

$P(X=1)=\dfrac{{}_4C_1\cdot{}_3C_2}{{}_7C_3}=\dfrac{12}{35}$,

$P(X=2)=\dfrac{{}_4C_2\cdot{}_3C_1}{{}_7C_3}=\dfrac{18}{35}$

$\therefore P(1\leq X\leq 2)=P(X=1)+P(X=2)$

$=\dfrac{12}{35}+\dfrac{18}{35}$

$=\dfrac{6}{7}$

답 $\dfrac{6}{7}$

0399 밑면에 적힌 두 수를 a, b라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여

$a+b=4$인 경우는

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3개

$a+b=6$인 경우는

$(3, 3)$의 1개

이므로 그 확률은 각각

$P(X=4)=\dfrac{3}{16}$, $P(X=6)=\dfrac{1}{16}$

$\therefore P(X=4 \text{ 또는 } X=6)=P(X=4)+P(X=6)$

$=\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{16}$

$=\dfrac{1}{4}$

답 ①

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

0400 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0, 1, 2, 3, 4$

9명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_9C_4$

뽑은 사람 중 남자가 x명인 경우의 수는 ${}_5C_x\cdot{}_4C_{4-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$P(X=x)=\dfrac{{}_5C_x\cdot{}_4C_{4-x}}{{}_9C_4}$ $(x=0, 1, 2, 3, 4)$ ⋯ ❶

(2) 남학생이 적어도 1명 뽑힐 확률은 $P(X\geq 1)$이므로

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\dfrac{{}_5C_0\cdot{}_4C_4}{{}_9C_4}$

$=1-\dfrac{1}{126}=\dfrac{125}{126}$ ⋯ ❷

답 (1) $P(X=x)=\dfrac{{}_5C_x\cdot{}_4C_{4-x}}{{}_9C_4}$ $(x=0, 1, 2, 3, 4)$ (2) $\dfrac{125}{126}$

채점 기준	비율
❶ X의 확률질량함수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 남학생이 적어도 1명 뽑힐 확률을 구할 수 있다.	50 %

0401 $X^2-2X\leq 0$에서 $X(X-2)\leq 0$

$\therefore 0\leq X\leq 2$

$\therefore P(X^2-2X\leq 0)=P(0\leq X\leq 2)$

$=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

두 주사위의 눈의 수를 a, b라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여

$P(X=0)$인 경우는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6개

$P(X=1)$인 경우는

$(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$,

$(6, 5)$, $(5, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 1)$의 10개

$P(X=2)$인 경우는

$(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$,

$(6, 4)$, $(5, 3)$, $(4, 2)$, $(3, 1)$의 8개

따라서 구하는 확률은

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\dfrac{6}{36}+\dfrac{10}{36}+\dfrac{8}{36}$

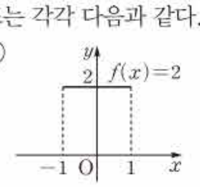
$=\dfrac{2}{3}$

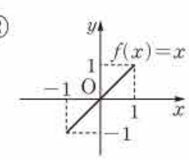
답 ④

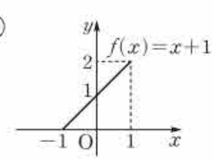
참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

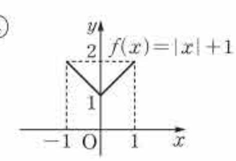
X	0	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

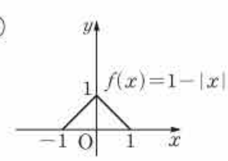
0402 보기의 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$ $(-1\leq x\leq 1)$의 그래프는 각각 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


①, ④ $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니다.

② $-1\le x<0$에서 $f(x)<0$이다.

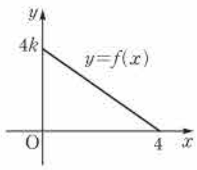
③ $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니다.

⑤ $-1\le x\le 1$에서 $f(x)\ge 0$이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$$

답 ⑤

0403 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4k=1$$

$$8k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

0404 ① $0\le x<\frac{2}{3}$에서 $f(x)<0$이다.

②, ③ $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니다.

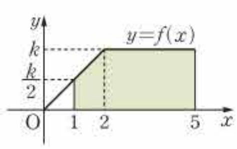
④ $1\le x\le 2$에서 $f(x)<0$이다.

⑤ $0\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$$

답 ⑤

0405 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot(3+5)\cdot k=1$$

$$4k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$$

이때 $P(X\ge 1)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$P(X\ge 1)=1-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{8}=\frac{15}{16}$$

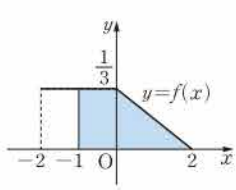
답 $\frac{15}{16}$

0406 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=-2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\cdot(4+2)\cdot k=1$$

$$3k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$$

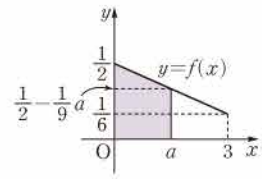
$P(X\ge -1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$1-1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ④

0407 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶



$P(X\le a)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로 $P(X\le a)=\frac{5}{8}$에서

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}a\right)\right\}\cdot a=\frac{5}{8} \quad \cdots ❷$$

$$4a^2-36a+45=0$$

$$(2a-3)(2a-15)=0$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}\ (\because 0\le a\le 3) \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ a에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0408 $f(3-x)=f(3+x)$가 성립하므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

따라서 $P(2\le X\le 3)=P(3\le X\le 4)$이므로

$$\begin{aligned} P(2\le X\le 4)&=P(2\le X\le 3)+P(3\le X\le 4)\\ &=2P(2\le X\le 3)\\ &=2\{P(0\le X\le 3)-P(0\le X\le 2)\}\\ &=2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\\ &=\frac{3}{5} \end{aligned}$$

답 ④

참고 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$, $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$$P(0\le X\le 6)=1$$

이때 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$$P(0\le X\le 3)=P(3\le X\le 6)=\frac{1}{2}$$

0409 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}+a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{10}$$

$$E(X)=0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{10}=1,$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{2}{5}+1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{1}{10}=2\text{이므로}$$

$$\begin{aligned} V(X)&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\ &=2-1^2=1 \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(X)=1$$

답 1

0410 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{3}{16}+5\cdot\frac{5}{16}+7\cdot\frac{7}{16}=\frac{21}{4}$$

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{16}+3^2\cdot\frac{3}{16}+5^2\cdot\frac{5}{16}+7^2\cdot\frac{7}{16}=31$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=31-\left(\frac{21}{4}\right)^2$

$=\frac{55}{16}$

답 ②

0411 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{2}+b=1$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$E(X)=\frac{9}{2}$이므로 $2a+4\cdot\frac{1}{2}+6b=\frac{9}{2}$

$\therefore a+3b=\frac{5}{4}$ …… ㉡ ⋯➊

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{3}{8}$ ⋯➋

$\therefore b-a=\frac{1}{4}$ ⋯➌

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
➊ a, b에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	50 %
➋ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0412 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_6C_2}{{}_9C_2}=\frac{5}{12}$,

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_6C_1}{{}_9C_2}=\frac{1}{2}$,

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_6C_0}{{}_9C_2}=\frac{1}{12}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\cdot\frac{5}{12}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{5}{12}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{5}{6}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{18}$

답 ③

0413 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 한 개의 주사위를 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X가 각 값을 가질 확률은

$P(X=0)={}_3C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,

$P(X=1)={}_3C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$,

$P(X=2)={}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$,

$P(X=3)={}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	1

$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{27}+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{4}{9}+3\cdot\frac{8}{27}=2$

답 2

0414 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0}{{}_2\Pi_4}=\frac{1}{16}$,

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1}{{}_2\Pi_4}=\frac{1}{4}$,

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2}{{}_2\Pi_4}=\frac{3}{8}$,

$P(X=3)=\frac{{}_4C_3}{{}_2\Pi_4}=\frac{1}{4}$,

$P(X=4)=\frac{{}_4C_4}{{}_2\Pi_4}=\frac{1}{16}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{16}=2$

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{16}+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{16}=5$

이므로 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$

$\therefore \sigma(X)=1$

답 1

0415 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$P(X=1)=\frac{1}{4}$,

$P(X=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$,

$P(X=3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$P(X=4)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{4}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

0416 뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, $b(a<b)$라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수 중 작은 수가

1인 경우는 $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$의 4개

2인 경우는 $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$의 3개

3인 경우는 $(3, 4)$, $(3, 5)$의 2개

4인 경우는 $(4, 5)$의 1개

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10},$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

… ❶

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{10}=2$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{10}=5$$

이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-2^2=1$ … ❷

$\therefore\ \sigma(X)=1$ … ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sigma(X)$를 구할 수 있다.	10 %

0417 1장의 행운권으로 받을 수 있는 상금을 X원이라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	5000	100000	1000000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{389}{500}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{500}$	1

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{389}{500}+5000\cdot\frac{1}{5}+100000\cdot\frac{1}{50}+1000000\cdot\frac{1}{500}$$

$$=5000$$

따라서 구하는 기댓값은 5000원이다. 답 5000원

0418 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고, 100원짜리 동전 2개와 500원짜리 동전 1개를 동시에 던져서 나오는 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

100원	100원	500원	받는 금액(원)
H	H	H	700
H	H	T	200
H	T	H	600
H	T	T	100
T	H	H	600
T	H	T	100
T	T	H	500
T	T	T	0

한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200, 500, 600, 700이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(X=100)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(X=200)=\frac{1}{8},$$

$$\mathrm{P}(X=500)=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(X=600)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(X=700)=\frac{1}{8}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	500	600	700	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{4}+200\cdot\frac{1}{8}$$

$$+500\cdot\frac{1}{8}+600\cdot\frac{1}{4}+700\cdot\frac{1}{8}$$

$$=350$$

따라서 구하는 기댓값은 350원이다. 답 ③

0419 한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-500	1000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{x}{2+x}$	$\frac{2}{2+x}$	1

이 게임을 한 번 해서 받을 수 있는 금액의 기댓값이 -200원이므로

$$-500\cdot\frac{x}{2+x}+1000\cdot\frac{2}{2+x}=-200$$

$$-500x+2000=-200(2+x)$$

$300x=2400$ $\therefore\ x=8$ 답 8

0420 $\mathrm{E}(aX+b)=-2$, $\mathrm{V}(aX+b)=36$에서

$a\mathrm{E}(X)+b=-2$, $a^2\mathrm{V}(X)=36$

이때 $\mathrm{E}(X)=1$, $\mathrm{V}(X)=4$이므로

$a+b=-2$, $4a^2=36$

$4a^2=36$에서 $a^2=9$ $\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

$a=3$을 $a+b=-2$에 대입하면 $b=-5$

$\therefore\ a-b=8$

답 8

0421 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=125-10^2=25$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X+1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\cdot 25=100$

$\therefore\ \sigma(Y)=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{100}=10$ 답 ②

0422 $\mathrm{E}(3X-2)=7$에서 $3\mathrm{E}(X)-2=7$

$3\mathrm{E}(X)=9$ $\therefore\ \mathrm{E}(X)=3$ … ❶

$\mathrm{V}(3X-2)=27$에서 $3^2\mathrm{V}(X)=27$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=3$ … ❷

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$3=\mathrm{E}(X^2)-3^2$ $\therefore\ \mathrm{E}(X^2)=12$ … ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{E}(X)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{E}(X^2)$을 구할 수 있다.	40 %

0423 $E(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이므로

$$E(T)=E\left(20\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+100\right)$$
$$=\frac{20}{\sigma}E(X)-\frac{20m}{\sigma}+100$$
$$=\frac{20}{\sigma}m-\frac{20m}{\sigma}+100=100$$
$$\sigma(T)=\sigma\left(20\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+100\right)=\left|\frac{20}{\sigma}\right|\sigma(X)$$
$$=\frac{20}{\sigma}\cdot\sigma=20$$

따라서 확률변수 T의 평균은 100점, 표준편차는 20점이다.

답 평균: 100점, 표준편차: 20점

0424 확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{2}{5}+a=1, \quad 2a=\frac{3}{5}$$
$$\therefore a=\frac{3}{10}$$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}=1$$
$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{3}{10}+1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}=\frac{8}{5}$$
$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{8}{5}-1^2=\frac{3}{5}$$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$이므로

$$\sigma(5X+3)=5\sigma(X)=5\cdot\frac{\sqrt{15}}{5}=\sqrt{15}$$

답 ④

0425 주어진 그래프에서

$$P(X=-2)=\frac{1}{4}, \ P(X=0)=\frac{3}{8},$$
$$P(X=2)=\frac{1}{4}, \ P(X=4)=\frac{1}{8}$$
$$\therefore E(X)=-2\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$
$$E(X^2)=(-2)^2\cdot\frac{1}{4}+0^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{8}=4$$
$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=4-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$$ ··· ❶

$E(Y)=7$에서

$$E(aX+b)=7, \quad aE(X)+b=7$$
$$\therefore \frac{a}{2}+b=7 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$V(Y)=60$에서

$$V(aX+b)=60, \quad a^2V(X)=60$$
$$\frac{15}{4}a^2=60, \quad a^2=16 \quad \therefore a=-4 \ (\because a<0)$$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=9$ ··· ❷

$\therefore a+b=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $E(X)$, $V(X)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0426 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{2}{5}+a+2a+3a=1, \quad 6a=\frac{3}{5} \quad \therefore a=\frac{1}{10}$$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{3}{10}=\frac{12}{5}$$
$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{1}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{3}{10}=\frac{37}{5}$$
$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{37}{5}-\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{41}{25}$$
$$\therefore V\left(\frac{1}{a}X+2\right)=\frac{1}{a^2}V(X)=10^2V(X)$$
$$=100\cdot\frac{41}{25}=164$$

답 164

0427 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{1}{8} \ (x=1, 2, 3, \cdots, 8)$$

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{8}$$
$$+5\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{1}{8}+7\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{8}$$
$$=\frac{9}{2},$$
$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{8}+2^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}+4^2\cdot\frac{1}{8}$$
$$+5^2\cdot\frac{1}{8}+6^2\cdot\frac{1}{8}+7^2\cdot\frac{1}{8}+8^2\cdot\frac{1}{8}$$
$$=\frac{51}{2}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{51}{2}-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$$
$$\therefore E(-2X+3)=-2E(X)+3$$
$$=-2\cdot\frac{9}{2}+3=-6$$
$$V(-2X+3)=(-2)^2V(X)=4\cdot\frac{21}{4}=21$$

답 ⑤

0428 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14},$$
$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_5C_1}{{}_8C_2}=\frac{15}{28},$$
$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_5C_0}{{}_8C_2}=\frac{3}{28}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{5}{14}+1\cdot\frac{15}{28}+2\cdot\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$$
$$\therefore E(4X-1)=4E(X)-1=4\cdot\frac{3}{4}-1=2$$

답 ②

0429 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_5C_0\cdot{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{1}{21},$$
$$P(X=1)=\frac{{}_5C_1\cdot{}_4C_2}{{}_9C_3}=\frac{5}{14},$$
$$P(X=2)=\frac{{}_5C_2\cdot{}_4C_1}{{}_9C_3}=\frac{10}{21},$$
$$P(X=3)=\frac{{}_5C_3\cdot{}_4C_0}{{}_9C_3}=\frac{5}{42}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$	1

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{21}+1\cdot\frac{5}{14}+2\cdot\frac{10}{21}+3\cdot\frac{5}{42}=\frac{5}{3}$$
$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{21}+1^2\cdot\frac{5}{14}+2^2\cdot\frac{10}{21}+3^2\cdot\frac{5}{42}=\frac{10}{3}$$
$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로

$$\sigma(6X+2)=6\sigma(X)=6\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=2\sqrt{5}$$

답 ②

0430 전략 밑면에 적힌 두 수의 합을 구한 후 두 수의 평균을 구한다.

풀이 밑면에 적힌 두 수의 합은

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

이므로 X가 가질 수 있는 모든 값은

$1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4$

따라서 구하는 합은

$$\frac{2+3+4+5+6+7+8}{2}=\frac{35}{2}$$

답 $\frac{35}{2}$

0431 전략 먼저 확률의 총합이 1임을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

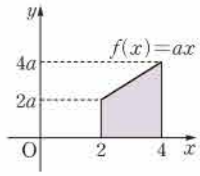
$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$$
$$\frac{k}{6}+\frac{k}{6}\cdot2+k\left(1-\frac{3}{6}\right)+k\left(1-\frac{4}{6}\right)=1$$
$$\frac{4}{3}k=1 \qquad \therefore k=\frac{3}{4} \quad \cdots ❶$$
$$\therefore P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{8}x & (x=1,\ 2)\\ \frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{6}\right) & (x=3,\ 4)\end{cases}$$
$$\therefore P(2\le X\le3)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{8}\cdot2+\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{6}\right)=\frac{5}{8} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{5}{8}$

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $P(2\le X\le3)$을 구할 수 있다.	60 %

0432 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot(2a+4a)\cdot2=1$$
$$6a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$$

답 ②

0433 전략 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

풀이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, $\sqrt{2}$이고, 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{4}{{}_4C_2}=\frac{2}{3},$$
$$P(X=\sqrt{2})=\frac{2}{{}_4C_2}=\frac{1}{3}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같으므로

X	1	$\sqrt{2}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{3}+(\sqrt{2})^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0434 전략 한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

풀이 한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 200, 600, 1000이고, 그 확률은 각각

$$P(X=200)=\frac{1}{4},$$
$$P(X=600)=\frac{1}{2},$$
$$P(X=1000)=\frac{1}{4}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	200	600	1000	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\therefore E(X)=200\cdot\frac{1}{4}+600\cdot\frac{1}{2}+1000\cdot\frac{1}{4}=600$$

따라서 구하는 기댓값은 600원이다.

답 600원

0435 전략 $E(aX+b)=aE(X)+b$, $V(aX+b)=a^2V(X)$임을 이용한다.

풀이 $E(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이므로

$$E(Z)=E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}E(X)-\frac{m}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\cdot m-\frac{m}{\sigma}=0,$$
$$V(Z)=V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}V(X)=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2=1$$

답 평균: 0, 분산: 1

0436 전략 확률의 총합이 1임을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$$

$$\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}+\frac{5}{k}=1, \qquad \frac{14}{k}=1$$

$$\therefore k=14$$

$$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{2+1}{14}=\frac{3}{14}$$

답 ③

0437 전략 먼저 $\mathrm{P}(X^2-5X+6=0)$이 나타내는 확률을 구한다.

풀이 $X^2-5X+6=0$에서 $\quad (X-2)(X-3)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=3$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-5X+6=0)=\mathrm{P}(X=2$ 또는 $X=3)$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

한편 주사위의 두 눈의 수를 a, b라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수 중 크지 않은 수가 2인 경우는

$(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$,
$(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 2)$, $(6, 2)$의 9개

3인 경우는

$(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 3)$,
$(5, 3)$, $(6, 3)$의 7개

따라서 구하는 확률은

$$\frac{9}{36}+\frac{7}{36}=\frac{4}{9}$$

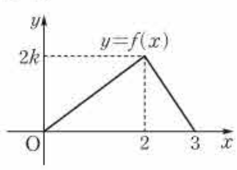
답 $\frac{4}{9}$

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	1

0438 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶



$y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2k=1$$

$$3k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$$ ··· ❷

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	60 %

0439 전략 먼저 확률밀도함수의 성질을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

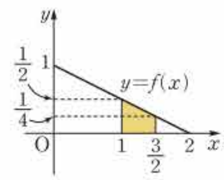
$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a=1 \qquad \therefore a=1$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(2, 0)$, $(0, 1)$을 지나는 직선이므로

$$y=-\frac{1}{2}x+1$$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x+1$$

따라서 $\mathrm{P}\left(1\le X\le \frac{3}{2}\right)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\mathrm{P}\left(1\le X\le \frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)=\frac{3}{16}$$

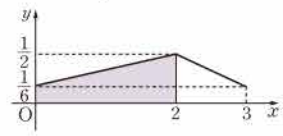
답 ④

0440 전략 먼저 확률밀도함수의 성질을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 주어진 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$3\cdot k+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2k=1, \qquad 6k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{6}$$

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\cdot 2=\frac{2}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로

$$p+q=5$$

답 5

0441 전략 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=4a+7-a^2$

$=-(a-2)^2+11$

따라서 $\mathrm{V}(X)$는 $a=2$일 때 최댓값 11을 갖는다.

답 ②

0442 전략 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 -1, 0, 1이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=-1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5},$$

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

··· ❶

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=-1\cdot\frac{2}{5}+0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{1}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{2}{5}+0^2\cdot\frac{2}{5}+1^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\frac{3}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$$ ··· ❷

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\frac{\sqrt{14}}{5}$$ ··· ❸

답 $\frac{\sqrt{14}}{5}$

채점 기준	비율
❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sigma(X)$를 구할 수 있다.	10 %

0443 전략 확률변수 X를 Y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $Y=3X+6$에서 $\quad 3X=Y-6$

$\therefore X=\frac{1}{3}Y-2$

$\mathrm{E}(Y)=12$, $\mathrm{E}(Y^2)=180$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=180-12^2=36$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{V}\left(\frac{1}{3}Y-2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{V}(Y)$

$=\frac{1}{9}\cdot 36=4$

답 ③

0444 전략 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{E}(6X)=6\mathrm{E}(X)$

$=6\left(1\cdot\frac{1}{6}+2a+3b\right)$

$=1+6(2a+3b)$

따라서 $1+6(2a+3b)=13$이므로

$6(2a+3b)=12 \qquad \therefore 2a+3b=2$

답 ⑤

0445 전략 상수 a, b의 값을 구한 후 $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{E}(X)=\frac{3}{4}$에서 $\qquad 0\cdot a+1\cdot b+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\therefore b=\frac{1}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$ ··· ❶

따라서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$ ··· ❷

이므로

$\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{11}{16}=\frac{11}{64}$ ··· ❸

답 $\frac{11}{64}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\mathrm{V}(aX+b)$를 구할 수 있다.	30 %

0446 전략 먼저 확률의 총합이 1임을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)=1$

$k+4k+9k+16k+25k=1$

$55k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{55}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{55}+2\cdot\frac{4}{55}+3\cdot\frac{9}{55}+4\cdot\frac{16}{55}+5\cdot\frac{25}{55}$

$=\frac{45}{11}$

이므로

$\mathrm{E}(11X-15)=11\mathrm{E}(X)-15$

$=11\cdot\frac{45}{11}-15=30$

답 ④

0447 전략 확률변수 X의 확률분포를 구한 후 $\mathrm{E}(X)$를 구한다.

풀이 주사위를 던져서 나온 눈의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6을 각각 3으로 나눈 나머지는 1, 2, 0, 1, 2, 0이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 그 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이다.

$\therefore \mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{3}\ (x=0, 1, 2)$ ··· ❶

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=1$이므로 ··· ❷

$\mathrm{E}(3X-5)=3\mathrm{E}(X)-5$

$=3\cdot 1-5=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\mathrm{E}(X)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{E}(3X-5)$를 구할 수 있다.	30 %

0448 전략 확률의 총합이 1임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$\frac{1}{a}+\frac{2}{a}+b+b=1$

$\therefore \frac{3}{a}+2b=1$ ······ ㉠

$\mathrm{P}(X=1)=2\mathrm{P}(X=3)$에서

$\frac{1}{a}=2b$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3\cdot 2b+2b=1$

$8b=1 \qquad \therefore b=\frac{1}{8}$

$b=\frac{1}{8}$을 ㉡에 대입하면

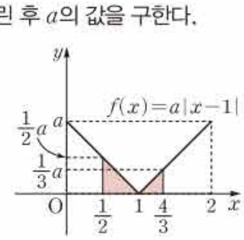
$\frac{1}{a}=2\cdot\frac{1}{8} \qquad \therefore a=4$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{1}{32}$

답 $\frac{1}{32}$

0449 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 a의 값을 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a=1$

$\therefore a=1$

이때 $P\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{4}{3}\right)$는 앞의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$P\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{13}{72}$$

답 ②

0450 전략 확률밀도함수의 성질을 이용한다.

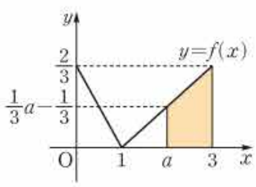
풀이 $P(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이므로

$1\le a\le 3$

$1\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$, $\left(3,\ \frac{2}{3}\right)$를 지나는 직선이므로

$$y=\frac{\frac{2}{3}-0}{3-1}(x-1),\qquad y=\frac{1}{3}(x-1)$$
$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\ \ (1\le x\le 3)$$

$P(a\le X\le 3)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$P(a\le X\le 3)=\frac{1}{2}$에서

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\right\}\cdot(3-a)=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(a+1)\cdot(3-a)=\frac{1}{2}$$
$$a^2-2a=0,\qquad a(a-2)=0$$
$$\therefore a=2\ \ (\because 1\le a\le 3)$$

답 2

0451 전략 $P(X=k)=p_k$로 놓는다.

풀이 $P(X=k)=p_k(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$라 하면

$$E(X)=1\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3+4\cdot p_4+5\cdot p_5=4\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

$P(Y=k)=\frac{1}{2}p_k+\frac{1}{10}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$이므로

$$E(Y)=1\cdot\left(\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{2}p_3+\frac{1}{10}\right)$$
$$+4\cdot\left(\frac{1}{2}p_4+\frac{1}{10}\right)+5\cdot\left(\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(1\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3+4\cdot p_4+5\cdot p_5)$$
$$+\frac{1}{10}(1+2+3+4+5)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{10}\cdot 15\ (\because ㉠)$$
$$=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

답 ②

0452 전략 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내고 a, b, c에 대한 식을 세운다.

풀이 $a+b+c=8$에서 $\quad c=8-a-b\qquad\cdots\cdots\ ㉠$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{a}{8}$	$\frac{b}{8}$	$\frac{8-a-b}{8}$	1

$E(X)=\frac{9}{4}$에서

$$1\cdot\frac{a}{8}+2\cdot\frac{b}{8}+3\cdot\frac{8-a-b}{8}=\frac{9}{4}$$
$$\therefore 2a+b=6\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{7}{16}$에서

$$1^2\cdot\frac{a}{8}+2^2\cdot\frac{b}{8}+3^2\cdot\frac{8-a-b}{8}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$$
$$\therefore 8a+5b=28\qquad\cdots\cdots\ ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=4$

$a=1,\ b=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad c=3$

$\therefore a+b-c=2$

답 ②

0453 전략 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸 후 $\sigma(X)$를 구한다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_4C_4}{{}_7C_4}=\frac{1}{35},$$
$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_4C_3}{{}_7C_4}=\frac{12}{35},$$
$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_4C_2}{{}_7C_4}=\frac{18}{35},$$
$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_4C_1}{{}_7C_4}=\frac{4}{35}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

⋯ ❶

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{35}+1\cdot\frac{12}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$$
$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{35}+1^2\cdot\frac{12}{35}+2^2\cdot\frac{18}{35}+3^2\cdot\frac{4}{35}=\frac{24}{7}$$
$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{24}{7}-\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$이므로 ⋯ ❷

$$\sigma(-7X+1)=|-7|\sigma(X)=7\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}=2\sqrt{6}$$ ⋯ ❸

답 $2\sqrt{6}$

채점 기준	비율
❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sigma(X)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sigma(-7X+1)$을 구할 수 있다.	20 %

06 이항분포와 정규분포

Ⅲ. 통계

0454 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 앞면이 나오는 횟수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

답 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$

0455 한 번의 경기에서 이길 확률이 0.75이므로 바둑 기사가 이기는 횟수 X는 이항분포 $B(30,\ 0.75)$를 따른다.

답 $B(30,\ 0.75)$

0456 꺼낸 제비를 다시 넣지 않고 제비를 2개 뽑을 때, 처음 1개를 뽑는 시행과 다음에 1개를 뽑는 시행은 서로 독립이 아니므로 이항분포를 따르지 않는다.

답 이항분포를 따르지 않는다.

0457 한 문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{5}$이므로 맞히는 문제의 개수 X는 이항분포 $B\left(25,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

답 $B\left(25,\ \frac{1}{5}\right)$

0458 (1) $P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

(2) $P(X=3)={}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$=10\cdot\frac{1}{64}\cdot\frac{9}{16}=\frac{45}{512}$

답 풀이 참조

0459 $E(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20$

$V(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$

$\sigma(X)=\sqrt{16}=4$

답 풀이 참조

0460 $E(X)=180\cdot\frac{2}{3}=120$

$V(X)=180\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=40$

$\sigma(X)=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

답 풀이 참조

0461 답 $N(5,\ 2^2)$

0462 답 $N(-3,\ 4^2)$

0463 답 변하지 않는다

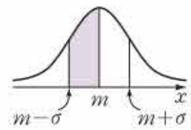
0464 답 높아진다

0465 $P(m-\sigma\le X\le m)$

$=P(m\le X\le m+\sigma)$

$=a$

답 a



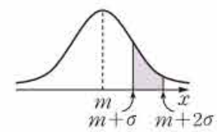
0466 $P(m+\sigma\le X\le m+2\sigma)$

$=P(m\le X\le m+2\sigma)$

$-P(m\le X\le m+\sigma)$

$=b-a$

답 $b-a$

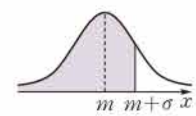


0467 $P(X\le m+\sigma)$

$=P(X\le m)+P(m\le X\le m+\sigma)$

$=0.5+a$

답 $0.5+a$



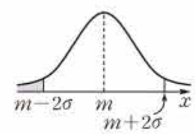
0468 $P(X\le m-2\sigma)$

$=P(X\ge m+2\sigma)$

$=P(X\ge m)-P(m\le X\le m+2\sigma)$

$=0.5-b$

답 $0.5-b$



0469 $P(-1\le Z\le 1)$

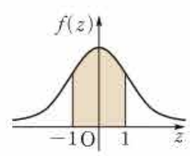
$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)$

$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 1)$

$=0.3413+0.3413$

$=0.6826$

답 0.6826



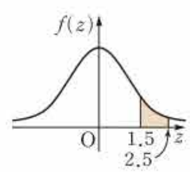
0470 $P(1.5\le Z\le 2.5)$

$=P(0\le Z\le 2.5)-P(0\le Z\le 1.5)$

$=0.4938-0.4332$

$=0.0606$

답 0.0606



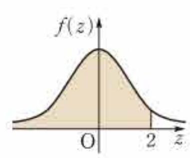
0471 $P(Z\le 2)$

$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$

$=0.5+0.4772$

$=0.9772$

답 0.9772



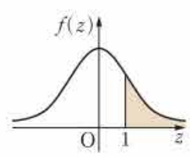
0472 $P(Z\ge 1)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.3413$

$=0.1587$

답 0.1587



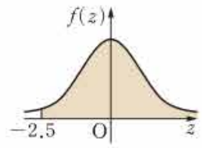
0473 $\mathrm{P}(Z\geq-2.5)$

$=\mathrm{P}(-2.5\leq Z\leq0)+\mathrm{P}(Z\geq0)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq2.5)+\mathrm{P}(Z\geq0)$

$=0.4938+0.5$

$=0.9938$ 답 0.9938



0474 $\mathrm{P}(Z\geq a)=0.8413$에서

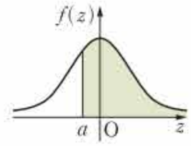
$\mathrm{P}(a\leq Z\leq0)+\mathrm{P}(Z\geq0)=0.8413$

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq-a)+0.5=0.8413$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\leq Z\leq-a)=0.3413$

따라서 $-a=1$이므로

$a=-1$ 답 -1



참고 $\mathrm{P}(Z\geq a)=0.8413>0.5$이므로 $a<0$이다.

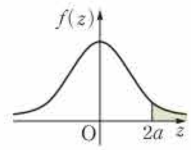
0475 $\mathrm{P}(Z\geq2a)=0.0228$에서

$\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq2a)=0.0228$

$0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq2a)=0.0228$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\leq Z\leq2a)=0.4772$

따라서 $2a=2$이므로 $a=1$ 답 1



0476 $\mathrm{P}(Z\leq a)=0.3085$에서

$\mathrm{P}(Z\leq0)-\mathrm{P}(a\leq Z\leq0)=0.3085$

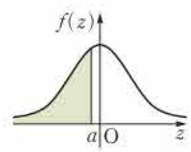
$0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq-a)=0.3085$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\leq Z\leq-a)=0.1915$

따라서 $-a=0.5$이므로

$a=-0.5$

답 -0.5



0477 $\mathrm{P}(Z\leq a+1)=0.9332$에서

$\mathrm{P}(Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq a+1)=0.9332$

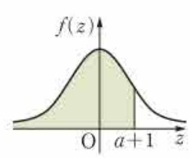
$0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq a+1)=0.9332$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\leq Z\leq a+1)=0.4332$

따라서 $a+1=1.5$이므로

$a=0.5$

답 0.5



0478 $\mathrm{P}(-a\leq Z\leq a)=0.9544$에서

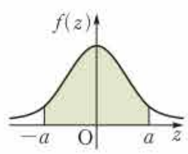
$\mathrm{P}(-a\leq Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq a)$

$=0.9544$

$2\mathrm{P}(0\leq Z\leq a)=0.9544$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\leq Z\leq a)=0.4772$

$\therefore\ a=2$ 답 2



0479 답 $Z=\dfrac{X-35}{6}$

0480 답 $Z=\dfrac{X-120}{15}$

0481 답 $Z=\dfrac{X-600}{10}$

0482 답 $Z=\dfrac{X+8}{2}$

0483 $Z=\boxed{\dfrac{X-45}{3}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(42\leq X\leq51)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{42-45}{3}\leq Z\leq\dfrac{51-45}{3}\right)$

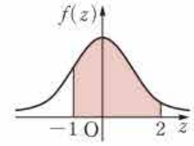
$=\mathrm{P}(\boxed{-1}\leq Z\leq\boxed{2})$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)$

$=0.3413+0.4772$

$=\boxed{0.8185}$



답 $\dfrac{X-45}{3}$, -1, 2, 0.8185

0484 $\mathrm{E}(X)=192\cdot\dfrac{1}{4}=48$, $\mathrm{V}(X)=192\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=36$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 6^2)$을 따른다.

답 $\mathrm{N}(48,\ 6^2)$

0485 $\mathrm{E}(X)=600\cdot\dfrac{2}{5}=240$, $\mathrm{V}(X)=600\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=144$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 12^2)$을 따른다.

답 $\mathrm{N}(240,\ 12^2)$

0486 (1) $\mathrm{E}(X)=144\cdot\dfrac{1}{2}=72$, $\mathrm{V}(X)=144\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=36$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ 6^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-72}{6}$

(2) $\mathrm{P}(78\leq X\leq81)=\mathrm{P}\left(\dfrac{78-72}{6}\leq Z\leq\dfrac{81-72}{6}\right)=\mathrm{P}(1\leq Z\leq1.5)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)$

$=0.4332-0.3413$

$=0.0919$

답 (1) $Z=\dfrac{X-72}{6}$ (2) 0.0919

0487 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_9\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^{9-x}={}_9\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^9\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$

이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\leq2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$={}_9\mathrm{C}_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^9+{}_9\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^9+{}_9\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^9$

$=\dfrac{23}{256}$ 답 ①

0488 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{1}{3}\right)^{4-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ ⋯ ❶

이므로 $\mathrm{P}(X=1)=k\mathrm{P}(X=2)$에서

${}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=k\cdot{}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ ⋯ ❷

$\dfrac{8}{81}=\dfrac{8}{27}k$ $\therefore\ k=\dfrac{1}{3}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ X의 확률질량함수를 구할 수 있다.	30 %
❷ k에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0489 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_3C_x p^x(1-p)^{3-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

이므로

$$P(X=3)={}_3C_3p^3(1-p)^0=p^3$$

확률변수 Y의 확률질량함수는

$$P(Y=y)={}_5C_y(2p)^y(1-2p)^{5-y}\ (y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

이므로

$$P(Y=4)={}_5C_4(2p)^4(1-2p)^1=80p^4(1-2p)$$

$10P(X=3)=P(Y=4)$에서

$$10p^3=80p^4(1-2p),\qquad 16p^2-8p+1=0$$

$$(4p-1)^2=0\qquad \therefore p=\frac{1}{4}$$

답 ②

0490 확률변수 X가 이항분포 $B\left(5,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{2}{5}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq 1)&=1-P(X=0)\\&=1-{}_5C_0\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^5\\&=1-\left(\frac{2}{5}\right)^5\end{aligned}$$

답 ④

0491 (1) 1개의 문항에 임의로 답할 때, 맞힐 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$\begin{aligned}P(X=x)&={}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}\\&={}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)\end{aligned}$$

(2) $P(X=8)={}_{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{45}{1024}$

답 풀이 참조

0492 싹이 튼 씨앗의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq 3)&=P(X=3)+P(X=4)\\&={}_4C_3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^0\\&=\frac{512}{625}\end{aligned}$$

답 ⑤

0493 $E(X)=5$에서

$$20p=5\qquad \therefore p=\frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$V(X)=20\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$$

답 ③

0494 $V(X)=12$에서

$$50p(1-p)=12,\qquad 25p^2-25p+6=0$$

$$(5p-2)(5p-3)=0\qquad \therefore p=\frac{2}{5}\left(\because p<\frac{1}{2}\right)$$

답 $\frac{2}{5}$

0495 $E(X)=30$, $V(X)=5^2=25$이므로

$E(X)=np=30$ …… ㉠

$V(X)=np(1-p)=25$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $30(1-p)=25$

$$1-p=\frac{5}{6}\qquad \therefore p=\frac{1}{6}$$

$p=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{6}n=30$

$$\therefore n=180$$

답 ④

0496 $$\begin{aligned}P(X=x)&={}_{40}C_x\frac{7^x}{8^{40}}\\&={}_{40}C_x\left(\frac{7}{8}\right)^x\left(\frac{1}{8}\right)^{40-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 40)\end{aligned}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(40,\ \frac{7}{8}\right)$을 따른다. ··· ❶

$$\therefore E(X)=40\cdot\frac{7}{8}=35$$ ··· ❷

답 35

채점 기준	비율
❶ X의 확률분포를 $B(n,\ p)$ 꼴로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ $E(X)$를 구할 수 있다.	40 %

0497 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_3C_xp^x(1-p)^{3-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

이므로 $P(X=3)=\frac{8}{27}$에서

$${}_3C_3p^3=\frac{8}{27},\qquad p^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\therefore p=\frac{2}{3}$$ ··· ❶

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(3,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$V(X)=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$ ··· ❷

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $V(X)$를 구할 수 있다.	40 %

0498 $\sigma(X)=\sqrt{15p(1-p)}=\sqrt{-15\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}$

이므로 $\sigma(X)$는 $p=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{\sqrt{15}}{2}$를 갖는다.

답 $\frac{\sqrt{15}}{2}$

0499 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 4 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(90,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=90\cdot\frac{2}{3}=60,\ \mathrm{V}(X)=90\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=20$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2 =20+60^2=3620$$

답 3620

0500 부모의 유전자형이 모두 AB형인 사람이 B형일 확률은 0.25이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(1000,\ 0.25)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=1000\times 0.25=250$

답 250

0501 한 번의 시행에서 다크초콜릿 1개와 화이트초콜릿 2개가 나올 확률은

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{3}{14}$$ ···➊

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(70,\ \frac{3}{14}\right)$을 따르므로 ···➋

$$\mathrm{E}(X)=70\cdot\frac{3}{14}=15$$ ···➌

답 15

채점 기준	비율
➊ 한 번의 시행에서 사건이 일어날 확률을 구할 수 있다.	30 %
➋ X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	30 %
➌ $\mathrm{E}(X)$를 구할 수 있다.	40 %

0502 윷가락 한 개를 던질 때 등이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$, 배가 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 윷가락 네 개를 동시에 던져 개가 나올 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(243,\ \frac{8}{27}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=243\cdot\frac{8}{27}\cdot\frac{19}{27}=\frac{152}{3}$$

답 ③

0503 한 개의 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=25\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{4}$$

$$\therefore \mathrm{V}(-4X+10)=(-4)^2\,\mathrm{V}(X) =16\cdot\frac{25}{4}=100$$

답 100

0504 사격 선수가 한 발을 쏘아 명중시킬 확률은 $\frac{4}{5}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=50\cdot\frac{4}{5}=40$$

$$\therefore \mathrm{E}(5X+4)=5\mathrm{E}(X)+4=5\cdot 40+4=204$$

답 ③

0505 $\mathrm{E}(X)=\frac{n}{3},\ \mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$이고

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

이므로

$$\frac{2}{9}n+\frac{1}{9}n^2=235,\qquad n^2+2n-2115=0$$

$$(n+47)(n-45)=0\qquad \therefore n=45$$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\frac{2}{9}\cdot 45=10$이므로

$$\mathrm{V}(3X-1)=3^2\,\mathrm{V}(X)=9\cdot 10=90$$

답 ④

0506 (1) 한 개의 주사위를 6번 던져서 4 이하의 눈이 나오는 횟수가 Y이면 5 이상의 눈이 나오는 횟수는 $6-Y$이므로

$$X=3Y-(6-Y)=4Y-6$$ ···➊

(2) 한 개의 주사위를 던질 때 4 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(Y)=6\cdot\frac{2}{3}=4$이므로 ···➋

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(4Y-6)=4\mathrm{E}(Y)-6 =4\cdot 4-6=10$$ ···➌

답 (1) $X=4Y-6$ (2) 10

채점 기준	비율
➊ X를 Y의 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
➋ $\mathrm{E}(Y)$를 구할 수 있다.	30 %
➌ $\mathrm{E}(X)$를 구할 수 있다.	40 %

0507 ④ σ의 값이 클수록 그래프의 폭이 넓어진다.

답 ④

0508 ㄱ. 확률변수 X_1의 정규분포 곡선의 대칭축이 확률변수 X_2의 정규분포 곡선의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로

$$\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_2)$$

ㄴ. 확률변수 X_1의 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이가 확률변수 X_2의 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이보다 높으므로

$$\sigma(X_1)<\sigma(X_2)$$

ㄷ. $\mathrm{E}(X_1)<a$이므로 $\quad \mathrm{P}(X_1\ge a)<0.5$

$\mathrm{E}(X_2)>a$이므로 $\quad \mathrm{P}(X_2\ge a)>0.5$

$$\therefore \mathrm{P}(X_1\ge a)<\mathrm{P}(X_2\ge a)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

0509 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, $\mathrm{P}(X\le 4)=\mathrm{P}(X\ge 10)$이므로

$$m=\frac{4+10}{2}=7$$

답 7

0510 확률변수 X의 평균이 20이므로 X의 확률밀도함수는 $x=20$에서 최댓값을 갖고, 정규분포 곡선은 직선 $x=20$에 대하여 대칭이다.

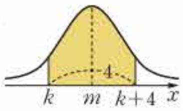
따라서 $\mathrm{P}(k\le X\le k+4)$가 최대가 되려면

$$\frac{k+(k+4)}{2}=20,\qquad k+2=20$$

$$\therefore k=18$$

답 ②

참고 $P(k\le X\le k+4)$에서 $(k+4)-k=4$로 일정하므로 오른쪽 그림과 같이 $\frac{k+(k+4)}{2}=m$일 때 $P(k\le X\le k+4)$가 최대이다.



0511 $m=70$, $\sigma=4$이므로

$$\begin{aligned}P(66\le X\le 78)&=P(70-4\le X\le 70+2\cdot 4)\\&=P(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)\\&=P(m\le X\le m+\sigma)+P(m\le X\le m+2\sigma)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 0.8185

0512 $P(X\le m+\sigma)=0.8413$에서

$P(X\le m)+P(m\le X\le m+\sigma)=0.8413$

$0.5+P(m\le X\le m+\sigma)=0.8413$

$\therefore P(m\le X\le m+\sigma)=0.3413$ ⋯ ❶

$\therefore P(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=2P(m\le X\le m+\sigma)$

$=2\times 0.3413=0.6826$ ⋯ ❷

답 0.6826

채점 기준	비율
❶ $P(m\le X\le m+\sigma)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $P(m-\sigma\le X\le m+\sigma)$를 구할 수 있다.	50 %

0513 $P(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=a$에서

$2P(m\le X\le m+\sigma)=a$

$\therefore P(m\le X\le m+\sigma)=\frac{a}{2}$

$P(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=b$에서

$2P(m\le X\le m+2\sigma)=b$

$\therefore P(m\le X\le m+2\sigma)=\frac{b}{2}$

$\therefore P(m+\sigma\le X\le m+2\sigma)$

$=P(m\le X\le m+2\sigma)-P(m\le X\le m+\sigma)$

$=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}=\frac{b-a}{2}$

답 ④

0514 $P(X\ge a)=0.0228$에서

$P(X\ge m)-P(m\le X\le a)=0.0228$

$0.5-P(m\le X\le a)=0.0228$

$\therefore P(m\le X\le a)=0.4772$ ⋯ ❶

이때 $P(m\le X\le m+2\sigma)=0.4772$이므로

$a=m+2\sigma=15+2\cdot 3=21$ ⋯ ❷

답 21

채점 기준	비율
❶ $P(m\le X\le a)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0515 $P(|X-7|\le 2)=0.6826$에서

$P(-2\le X-7\le 2)=0.6826$

$\therefore P(5\le X\le 9)=0.6826$

확률변수 X의 평균이 7이므로

$P(5\le X\le 7)+P(7\le X\le 9)=0.6826$

$2P(7\le X\le 9)=0.6826$

$\therefore P(7\le X\le 9)=0.3413$

$Y=2X+3$이므로

$$\begin{aligned}P(Y\ge 21)&=P(2X+3\ge 21)\\&=P(X\ge 9)\\&=P(X\ge 7)-P(7\le X\le 9)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 ③

0516 $P(|Z|\le 1.5)=0.8664$에서

$P(-1.5\le Z\le 1.5)=0.8664$

$2P(0\le Z\le 1.5)=0.8664$

$\therefore P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$

$$\begin{aligned}\therefore P(Z\le -1.5)&=P(Z\le 0)-P(-1.5\le Z\le 0)\\&=0.5-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ①

다른풀이 $P(|Z|\le 1.5)=0.8664$에서

$P(-1.5\le Z\le 1.5)=0.8664$

$\therefore P(Z\le -1.5)=\frac{1}{2}\{1-P(-1.5\le Z\le 1.5)\}$

$=\frac{1}{2}(1-0.8664)=0.0668$

0517 $P(Z\ge a)=0.8849$에서

$P(a\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)=0.8849$

$P(a\le Z\le 0)+0.5=0.8849$

$\therefore P(0\le Z\le -a)=0.3849$

이때 $P(0\le Z\le 1.2)=0.3849$이므로

$-a=1.2 \qquad \therefore a=-1.2$ ⋯ ❶

$P(-a\le Z\le b)=0.0792$에서

$P(0\le Z\le b)-P(0\le Z\le -a)=0.0792$

$P(0\le Z\le b)-0.3849=0.0792$

$\therefore P(0\le Z\le b)=0.4641$

이때 $P(0\le Z\le 1.8)=0.4641$이므로 $b=1.8$ ⋯ ❷

$\therefore ab=-2.16$ ⋯ ❸

답 -2.16

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0518 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(8,\ 3^2)$, $N(12,\ 4^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-8}{3}$, $Z_Y=\frac{Y-12}{4}$

로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\ge 14)=P(Y\ge k)$에서

$P\left(Z_X\ge \frac{14-8}{3}\right)=P\left(Z_Y\ge \frac{k-12}{4}\right)$

$\therefore P(Z_X\ge 2)=P\left(Z_Y\ge \frac{k-12}{4}\right)$

따라서 $\frac{k-12}{4}=2$이므로

$k-12=8 \qquad \therefore k=20$

답 20

0519 확률변수 X가 정규분포 $N(86,\ k)$를 따르므로 $Z=\dfrac{X-86}{\sqrt{k}}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $\dfrac{X-86}{\sqrt{k}}=\dfrac{X-m}{3}$이므로

$m=86,\ k=9$

$\therefore\ m+k=95$

답 ④

0520 두 확률변수 $X,\ Y$가 각각 정규분포 $N(0,\ a^2),\ N(0,\ b^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X}{a},\ Z_Y=\frac{Y}{b}$$

로 놓으면 $Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. 두 확률변수 $X,\ Y$의 평균이 0이므로

$P(X\geq 0)=P(Y\geq 0)=0.5$

ㄴ. $P(0\leq X\leq a)=P(0\leq Z_X\leq 1)$,

$P(-b\leq Y\leq 0)=P(-1\leq Z_Y\leq 0)=P(0\leq Z_Y\leq 1)$이므로

$P(0\leq X\leq a)=P(-b\leq Y\leq 0)$

ㄷ. $P(-1\leq X\leq 0)=P\left(-\dfrac{1}{a}\leq Z_X\leq 0\right)$,

$P(-2\leq Y\leq 0)=P\left(-\dfrac{2}{b}\leq Z_Y\leq 0\right)$

$P(-1\leq X\leq 0)=P(-2\leq Y\leq 0)$이므로

$-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{2}{b}\qquad \therefore\ b=2a$

이때 $a>0,\ b>0$이므로 $\quad a<b$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0521 두 확률변수 $X,\ Y$가 각각 정규분포 $N(129,\ 8^2),\ N(120,\ 4^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-129}{8},\ Z_Y=\frac{Y-120}{4}$$

으로 놓으면 $Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ a=P\left(Z_X\leq\dfrac{137-129}{8}\right)=P(Z_X\leq 1)$

$=0.5+P(0\leq Z_X\leq 1)$,

$b=P\left(Z_Y\geq\dfrac{122-120}{4}\right)=P(Z_Y\geq 0.5)$

$=0.5-P(0\leq Z_Y\leq 0.5)$,

$c=P(Z\geq -1.5)$

$=0.5+P(0\leq Z\leq 1.5)$

$\therefore\ b<a<c$

답 ③

0522 두 확률변수 $X,\ Y$가 각각 정규분포 $N(10,\ 4^2)$, $N(m,\ 6^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-10}{4},\ Z_Y=\frac{Y-m}{6}$$

으로 놓으면 $Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$2P(10\leq X\leq 14)=P(14\leq Y\leq 2m-14)$에서

$2P\left(\dfrac{10-10}{4}\leq Z_X\leq\dfrac{14-10}{4}\right)$

$=P\left(\dfrac{14-m}{6}\leq Z_Y\leq\dfrac{2m-14-m}{6}\right)$

$2P(0\leq Z_X\leq 1)=P\left(-\dfrac{m-14}{6}\leq Z_Y\leq\dfrac{m-14}{6}\right)$

$\therefore\ P(0\leq Z_X\leq 1)=P\left(0\leq Z_Y\leq\dfrac{m-14}{6}\right)$

따라서 $\dfrac{m-14}{6}=1$이므로

$m-14=6\qquad \therefore\ m=20$

답 20

0523 $Z=\dfrac{X-35}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(|X-37|\leq 4)&=P(-4\leq X-37\leq 4)\\&=P(33\leq X\leq 41)\\&=P\left(\frac{33-35}{4}\leq Z\leq\frac{41-35}{4}\right)\\&=P(-0.5\leq Z\leq 1.5)\\&=P(-0.5\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1.5)\\&=P(0\leq Z\leq 0.5)+P(0\leq Z\leq 1.5)\\&=0.1915+0.4332\\&=0.6247\end{aligned}$$

답 0.6247

0524 $Z=\dfrac{X-24}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

① $P(24\leq X\leq 36)=P\left(\dfrac{24-24}{6}\leq Z\leq\dfrac{36-24}{6}\right)$

$=P(0\leq Z\leq 2)$

$=0.4772$

② $P(12\leq X\leq 24)=P\left(\dfrac{12-24}{6}\leq Z\leq\dfrac{24-24}{6}\right)$

$=P(-2\leq Z\leq 0)$

$=P(0\leq Z\leq 2)$

$=0.4772$

③ $P(X\leq 36)=P\left(Z\leq\dfrac{36-24}{6}\right)$

$=P(Z\leq 2)$

$=P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5+0.4772$

$=0.9772$

④ $P(X\leq 12)=P\left(Z\leq\dfrac{12-24}{6}\right)$

$=P(Z\leq -2)$

$=P(Z\leq 0)-P(-2\leq Z\leq 0)$

$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

⑤ $P(X\geq 12)=1-P(X\leq 12)$

$=1-0.0228=0.9772$

답 ③

0525 $E(X)=60,\ \sigma(X)=8$에서

$E(Y)=E(4X-5)=4E(X)-5=4\cdot 60-5=235$

$\sigma(Y)=\sigma(4X-5)=4\sigma(X)=4\cdot 8=32$

이때 X가 정규분포 $N(60, 8^2)$을 따르므로 Y는 정규분포 $N(235, 32^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{Y-235}{32}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned} P(Y\le 203)&=P\left(Z\le \frac{203-235}{32}\right)\\ &=P(Z\le -1)=P(Z\ge 1)\\ &=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)\\ &=0.5-0.3413\\ &=0.1587 \end{aligned}$$

답 0.1587

다른풀이 $Y=4X-5$이므로

$$\begin{aligned} P(Y\le 203)&=P(4X-5\le 203)\\ &=P(X\le 52) \end{aligned}$$

$Z=\dfrac{X-60}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned} P(Y\le 203)=P(X\le 52)&=P\left(Z\le \frac{52-60}{8}\right)\\ &=P(Z\le -1)=P(Z\ge 1)\\ &=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)\\ &=0.5-0.3413\\ &=0.1587 \end{aligned}$$

0526 $Z=\dfrac{X-75}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\ge 83)=0.2119$에서

$P\left(Z\ge \dfrac{83-75}{10}\right)=0.2119$

$P(Z\ge 0.8)=0.2119$

$P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.8)=0.2119$

$0.5-P(0\le Z\le 0.8)=0.2119$

$\therefore P(0\le Z\le 0.8)=0.2881$ ➊

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(67\le X\le 83)&=P\left(\frac{67-75}{10}\le Z\le \frac{83-75}{10}\right)\\ &=P(-0.8\le Z\le 0.8)\\ &=2P(0\le Z\le 0.8)\\ &=2\times 0.2881=0.5762 \end{aligned}$$ ➋

답 0.5762

채점 기준	비율
➊ $P(0\le Z\le 0.8)$을 구할 수 있다.	50 %
➋ $P(67\le X\le 83)$을 구할 수 있다.	50 %

0527 $Z=\dfrac{X-15}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(a\le X\le 21)=0.9104$에서

$P\left(\dfrac{a-15}{3}\le Z\le \dfrac{21-15}{3}\right)=0.9104$

$P\left(\dfrac{a-15}{3}\le Z\le 2\right)=0.9104$

$P\left(\dfrac{a-15}{3}\le Z\le 0\right)+P(0\le Z\le 2)=0.9104$

$P\left(0\le Z\le \dfrac{15-a}{3}\right)+0.4772=0.9104$

$\therefore P\left(0\le Z\le \dfrac{15-a}{3}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{15-a}{3}=1.5,\quad 15-a=4.5$

$\therefore a=10.5$

답 10.5

0528 $Z=\dfrac{X-m}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\ge 38)=0.1587$에서

$P\left(Z\ge \dfrac{38-m}{2}\right)=0.1587$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le \dfrac{38-m}{2}\right)=0.1587$

$0.5-P\left(0\le Z\le \dfrac{38-m}{2}\right)=0.1587$

$\therefore P\left(0\le Z\le \dfrac{38-m}{2}\right)=0.3413$ ➊

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{38-m}{2}=1,\quad 38-m=2\quad \therefore m=36$ ➋

답 36

채점 기준	비율
➊ $P(X\ge 38)=0.1587$을 Z에 대한 식으로 변형할 수 있다.	40 %
➋ m의 값을 구할 수 있다.	60 %

0529 $Z=\dfrac{X-56}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\le 56-k)=0.0062$에서

$P\left(Z\le \dfrac{56-k-56}{5}\right)=0.0062$

$P\left(Z\le -\dfrac{k}{5}\right)=0.0062$

$P(Z\le 0)-P\left(-\dfrac{k}{5}\le Z\le 0\right)=0.0062$

$0.5-P\left(0\le Z\le \dfrac{k}{5}\right)=0.0062$

$\therefore P\left(0\le Z\le \dfrac{k}{5}\right)=0.4938$

이때 $P(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$\dfrac{k}{5}=2.5\quad \therefore k=12.5$

답 ④

0530 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(m-k\sigma\le X\le m+k\sigma)=0.9974$에서

$P\left(\dfrac{m-k\sigma-m}{\sigma}\le Z\le \dfrac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right)=0.9974$

$P(-k\le Z\le k)=0.9974$

$2P(0\le Z\le k)=0.9974$

$\therefore P(0\le Z\le k)=0.4987$

이때 $P(0\le Z\le 3)=0.4987$이므로

$k=3$

답 3

0531 학생의 일일 TV 시청 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-50}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 68)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{68-50}{12}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.43\\&=0.07\end{aligned}$$

따라서 일일 TV 시청 시간이 68분 이상인 학생은 전체의 7 %이다.

답 ①

0532 제품의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-70}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ··· ❶

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\le 64)+\mathrm{P}(X\ge 78)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{64-70}{4}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{78-70}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1.5)+\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)+\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.43+0.5-0.48\\&=0.09\end{aligned}$$

··· ❷

답 0.09

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 표준화할 수 있다.	40 %
❷ 불량품일 확률을 구할 수 있다.	60 %

0533 민주가 등교하는 데 걸리는 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-45}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

학교에 8시 20분 이내에 도착하면, 즉 $X\le 27$이면 지각하지 않으므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 27)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{27-45}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1.8)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.8)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.8)\\&=0.5-0.4641\\&=0.0359\end{aligned}$$

답 0.0359

0534 사과의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-240}{15}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(210\le X\le 270)&=\mathrm{P}\left(\frac{210-240}{15}\le Z\le\frac{270-240}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.96\end{aligned}$$

따라서 무게가 210 g 이상 270 g 이하인 사과의 개수는

$0.96\times 1000=960$

답 ⑤

0535 물고기의 길이를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-15}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\le 17)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{17-15}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.34=0.84\end{aligned}$$

따라서 길이가 17 cm 이하인 물고기의 수는

$0.84\times 100=84$

답 84

0536 사원의 수축기 혈압을 X mmHg이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(125,\ 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-125}{20}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 175)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{175-125}{20}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.49\\&=0.01\end{aligned}$$

따라서 재검진 대상인 사원 수는

$0.01\times 300=3$

답 3

0537 $G=1$에서 $\frac{m-40}{3\sigma}=1$이므로 $\quad m-40=3\sigma$

한편 병의 내압강도를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\le 40)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{40-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{-(m-40)}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{-3\sigma}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\le -3)=\mathrm{P}(Z\ge 3)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$

따라서 불량품의 개수는

$0.0013\times 50000=65$

답 65

0538 응시자의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-72}{15}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라 하면

$\mathrm{P}(X\ge a)=\frac{45}{150}=0.3$

$P\left(Z \geq \dfrac{a-72}{15}\right)=0.3$

$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{a-72}{15}\right)=0.3$

$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{a-72}{15}\right)=0.3$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{a-72}{15}\right)=0.2$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.52)=0.2$이므로

$\dfrac{a-72}{15}=0.52, \quad a-72=7.8$

$\therefore a=79.8$

따라서 합격자의 최저 점수는 79.8점이다.

답 ②

0539 학생의 국어 시험 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(85, 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-85}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

상위 10 %에 속하는 학생의 최저 점수를 a점이라 하면

$P(X \geq a)=\dfrac{10}{100}=0.1$

$P\left(Z \geq \dfrac{a-85}{5}\right)=0.1$

$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{a-85}{5}\right)=0.1$

$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{a-85}{5}\right)=0.1$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{a-85}{5}\right)=0.4$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.3)=0.4$이므로

$\dfrac{a-85}{5}=1.3, \quad a-85=6.5$

$\therefore a=91.5$

따라서 상위 10 %에 속하는 학생의 최저 점수는 91.5점이다.

답 ④

0540 학생의 키를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(172, 14^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-172}{14}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

키가 작은 쪽에서 50번째인 학생의 키를 a cm라 하면

$P(X \leq a)=\dfrac{50}{1000}=0.05$

$P\left(Z \leq \dfrac{a-172}{14}\right)=0.05$

$P\left(Z \geq \dfrac{172-a}{14}\right)=0.05$

$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{172-a}{14}\right)=0.05$

$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{172-a}{14}\right)=0.05$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{172-a}{14}\right)=0.45$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.65)=0.45$이므로

$\dfrac{172-a}{14}=1.65, \quad 172-a=23.1$

$\therefore a=148.9$

따라서 키가 작은 쪽에서 50번째인 학생의 키는 148.9 cm이다.

답 148.9 cm

0541 확률변수 X에 대하여

$E(X)=432 \cdot \dfrac{3}{4}=324, \ V(X)=432 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{4}=81$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(324, 9^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-324}{9}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(X \leq 297)+P(X \geq 333)$

$=P\left(Z \leq \dfrac{297-324}{9}\right)+P\left(Z \geq \dfrac{333-324}{9}\right)$

$=P(Z \leq -3)+P(Z \geq 1)$

$=P(Z \geq 3)+P(Z \geq 1)$

$=P(Z \geq 0)-P(0 \leq Z \leq 3)+P(Z \geq 0)-P(0 \leq Z \leq 1)$

$=0.5-0.4987+0.5-0.3413$

$=0.16$

답 ①

0542 확률변수 X에 대하여

$E(X)=150 \cdot \dfrac{2}{5}=60, \ V(X)=150 \cdot \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{5}=36$

이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(60, 6^2)$을 따른다.

$\therefore m=60, \sigma=6$ ···❶

$Z=\dfrac{X-60}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(X \leq 72)=P\left(Z \leq \dfrac{72-60}{6}\right)$

$=P(Z \leq 2)$

따라서 $a=2$이므로 ···❷

$m+\sigma+a=68$ ···❸

답 68

채점 기준	비율
❶ m, σ의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $m+\sigma+a$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0543 $V(X)=n \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}n$이므로

$\dfrac{3}{16}n=9 \qquad \therefore n=48$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(48, \dfrac{1}{4}\right)$을 따르고

$E(X)=48 \cdot \dfrac{1}{4}=12, \ V(X)=9$

이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(12, 3^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-12}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P\left(X \leq \dfrac{5}{16}n\right)=P(X \leq 15)$

$=P\left(Z \leq \dfrac{15-12}{3}\right)$

$=P(Z \leq 1)$

$=P(Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 1)$

$=0.5+0.3413=0.8413$

답 ④

0544 확률변수 X는 이항분포 $B\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$E(X)=450\cdot\frac{1}{3}=150,\ V(X)=450\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=100$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(150,\ 10^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-150}{10}$ 으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X\geq165)&=P\left(Z\geq\frac{165-150}{10}\right)\\&=P(Z\geq1.5)\\&=P(Z\geq0)-P(0\leq Z\leq1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ②

라쎈 특강 이항분포를 따르는 확률변수의 확률질량함수

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때 X의 확률질량함수는
$P(X=x)={}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

0545 앞면이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(900,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$E(X)=900\cdot\frac{1}{2}=450,\ V(X)=900\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=225$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(450,\ 15^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-450}{15}$ 으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(435\leq X\leq480)\\&=P\left(\frac{435-450}{15}\leq Z\leq\frac{480-450}{15}\right)\\&=P(-1\leq Z\leq2)\\&=P(-1\leq Z\leq0)+P(0\leq Z\leq2)\\&=P(0\leq Z\leq1)+P(0\leq Z\leq2)\\&=0.34+0.48\\&=0.82\end{aligned}$$

답 0.82

0546 치료되는 환자의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B(2500,\ 0.8)$을 따르므로

$$E(X)=2500\times0.8=2000,\ V(X)=2500\times0.8\times0.2=400$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(2000,\ 20^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-2000}{20}$ 으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq2020)&=P\left(Z\geq\frac{2020-2000}{20}\right)\\&=P(Z\geq1)\\&=P(Z\geq0)-P(0\leq Z\leq1)\\&=0.5-0.34\\&=0.16\end{aligned}$$

답 ①

0547 예약을 취소하는 손님의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B(400,\ 0.2)$를 따르므로

$$E(X)=400\times0.2=80,\ V(X)=400\times0.2\times0.8=64$$ ··· ❶

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(80,\ 8^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-80}{8}$ 으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ··· ❷

비행기를 타러 온 모든 손님이 비행기를 타려면 예약을 취소하는 손님이 $400-340=60$(명) 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq60)&=P\left(Z\geq\frac{60-80}{8}\right)\\&=P(Z\geq-2.5)=P(Z\leq2.5)\\&=P(Z\leq0)+P(0\leq Z\leq2.5)\\&=0.5+0.4938\\&=0.9938\end{aligned}$$ ··· ❸

답 0.9938

채점 기준	비율
❶ $E(X)$, $V(X)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ X를 표준화할 수 있다.	30 %
❸ 확률을 구할 수 있다.	40 %

0548 확률변수 X가 이항분포 $B\left(1200,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$$E(X)=1200\cdot\frac{3}{4}=900,\ V(X)=1200\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=225$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(900,\ 15^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-900}{15}$ 으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\leq a)=0.35$에서

$$P\left(Z\leq\frac{a-900}{15}\right)=0.35$$

$$P\left(Z\geq\frac{900-a}{15}\right)=0.35$$

$$P(Z\geq0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{900-a}{15}\right)=0.35$$

$$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{900-a}{15}\right)=0.35$$

$$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{900-a}{15}\right)=0.15$$

이때 $P(0\leq Z\leq0.38)=0.15$이므로

$$\frac{900-a}{15}=0.38,\qquad 900-a=5.7$$

$$\therefore a=894.3$$

답 894.3

0549 성공한 자유투의 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(600,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$$E(X)=600\cdot\frac{3}{5}=360,\ V(X)=600\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=144$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(360,\ 12^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-360}{12}$ 으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\geq k)=0.98$에서

$$P\left(Z\geq\frac{k-360}{12}\right)=0.98$$

$$P\left(\frac{k-360}{12}\leq Z\leq0\right)+P(Z\geq0)=0.98$$

$$P\left(0 \le Z \le \frac{360-k}{12}\right)+0.5=0.98$$

$$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{360-k}{12}\right)=0.48$$

이때 $P(0 \le Z \le 2)=0.48$이므로

$$\frac{360-k}{12}=2$$

$$360-k=24$$

$$\therefore k=336$$

답 336

0550 X는 이항분포 $B(7600,\ 0.95)$를 따르므로

$$E(X)=7600 \times 0.95=7220,$$

$$V(X)=7600 \times 0.95 \times 0.05=361$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(7220,\ 19^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-7220}{19}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(|X-7220| \ge k)=0.32$에서

$$P(X-7220 \le -k)+P(X-7220 \ge k)=0.32$$

$$P(X \le -k+7220)+P(X \ge k+7220)=0.32$$

$$P\left(Z \le \frac{-k+7220-7220}{19}\right)+P\left(Z \ge \frac{k+7220-7220}{19}\right)=0.32$$

$$P\left(Z \le -\frac{k}{19}\right)+P\left(Z \ge \frac{k}{19}\right)=0.32$$

$$2P\left(Z \ge \frac{k}{19}\right)=0.32, \quad P\left(Z \ge \frac{k}{19}\right)=0.16$$

$$P(Z \ge 0)-P\left(0 \le Z \le \frac{k}{19}\right)=0.16$$

$$0.5-P\left(0 \le Z \le \frac{k}{19}\right)=0.16$$

$$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{k}{19}\right)=0.34$$

이때 $P(0 \le Z \le 1)=0.34$이므로

$$\frac{k}{19}=1 \quad \therefore k=19$$

답 ③

0551 전략 먼저 확률변수 X의 확률질량함수를 구한다.

풀이 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$$

$$={}_5C_x\left(\frac{1}{2}\right)^5 \ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X \ge 4)=P(X=4)+P(X=5)$$

$$={}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$=\frac{3}{16}$$

답 ③

0552 전략 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때, $E(X)=np$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$E(X)=\frac{n}{3}$$

$E(2X+5)=2E(X)+5=2 \cdot \frac{n}{3}+5=13$에서

$$\frac{2n}{3}=8 \quad \therefore n=12$$

답 ③

0553 전략 정규분포 곡선의 성질을 이용한다.

풀이 확률변수 X의 평균이 10이므로 X의 정규분포 곡선은 직선 $x=10$에 대하여 대칭이다.

이때 $P(X<a-1)=P(X>b+3)$이므로

$$\frac{a-1+b+3}{2}=10$$

$$a+b+2=20 \quad \therefore a+b=18$$

답 ②

0554 전략 $P(Z \le 1)=0.5+P(0 \le Z \le 1)$임을 이용한다.

풀이 $P(Z \le 1)=0.8413$에서

$$P(Z \le 0)+P(0 \le Z \le 1)=0.8413$$

$$0.5+P(0 \le Z \le 1)=0.8413$$

$$\therefore P(0 \le Z \le 1)=0.3413$$

따라서 구하는 확률은

$$P(|Z| \ge 1)=P(Z \le -1)+P(Z \ge 1)$$

$$=2P(Z \ge 1)$$

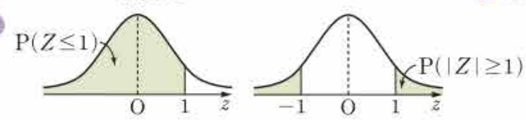
$$=2\{P(Z \ge 0)-P(0 \le Z \le 1)\}$$

$$=2(0.5-0.3413)$$

$$=0.3174$$

답 0.3174

다른풀이



위의 그림에서 구하는 확률은

$$P(|Z| \ge 1)=2\{1-P(Z \le 1)\}$$

$$=2(1-0.8413)=0.3174$$

0555 전략 맞히는 문제의 개수를 확률변수 X라 하고, X가 따르는 이항분포를 구한다.

풀이 맞히는 문제의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$E(X)=100 \cdot \frac{1}{5}=20,\ V(X)=100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}=16$$ ··· ❶

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(20,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ··· ❷

따라서 구하는 확률은

$$P(X \ge 30)=P\left(Z \ge \frac{30-20}{4}\right)$$

$$=P(Z \ge 2.5)$$

$$=P(Z \ge 0)-P(0 \le Z \le 2.5)$$

$$=0.5-0.4938$$

$$=0.0062$$ ··· ❸

답 0.0062

채점 기준	비율
❶ $E(X)$, $V(X)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ X를 표준화할 수 있다.	30 %
❸ 확률을 구할 수 있다.	40 %

0556 전략 먼저 확률변수 X의 확률질량함수를 구한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $B\left(4,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{4-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge3)&=P(X=3)+P(X=4)\\&={}_4C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^0\\&=\frac{112}{625}\end{aligned}$$

답 ③

0557 전략 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구한다.

풀이 $0<x<3$에서 $f(x)>0$이므로 $f(m)>0$에서

$0<m<3$

따라서 사건 A가 일어나려면 $m=1$ 또는 $m=2$이어야 하므로

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$E(X)=15\cdot\frac{1}{3}=5$$

답 ⑤

0558 전략 한 번의 시행에서 빨간 공이 나올 확률을 구한 후 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구한다.

풀이 한 번의 시행에서 빨간 공이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{2}{5}\right)$를 따른다. ➊

$$\therefore E(X)=n\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}n$$

$$V(X)=n\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}n \quad ➋$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$\frac{6}{25}n=\frac{26}{5}-\frac{4}{25}n^2,\qquad 2n^2+3n-65=0$$

$(2n+13)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because$ n은 자연수) ➌

답 5

채점 기준	비율
➊ 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	30 %
➋ $E(X)$, $V(X)$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
➌ n의 값을 구할 수 있다.	50 %

0559 전략 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구한다.

풀이 예약한 사람이 실제로 여행을 갈 확률은 $\frac{9}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(200,\ \frac{9}{10}\right)$를 따른다.

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{200\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}}=3\sqrt{2}$이므로

$$\sigma\left(\frac{1}{3}X+1\right)=\frac{1}{3}\sigma(X)=\frac{1}{3}\cdot3\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

0560 전략 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, m의 값이 일정할 때 σ의 값이 클수록 가운데 부분의 높이가 낮아진다.

풀이 ④ B 학교의 정규분포 곡선이 C 학교의 정규분포 곡선보다 가운데 부분의 높이가 더 높으므로 B 학교 학생들이 C 학교 학생들보다 성적이 더 고르다.

답 ④

0561 전략 확률변수 X가 정규분포를 따르고 $P(X\le a)>0.5$이므로 $P(X\le a)=P(X\le m)+P(m\le X\le a)$임을 이용한다.

풀이 $P(X\le a)=0.9332$에서

$P(X\le m)+P(m\le X\le a)=0.9332$

$0.5+P(m\le X\le a)=0.9332$

$\therefore P(m\le X\le a)=0.4332$

$$\begin{aligned}\therefore P(X\ge a)&=P(X\ge m)-P(m\le X\le a)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

이때 $P(X\ge m+1.5\sigma)=0.0668$이므로

$a=m+1.5\sigma$

$=35+1.5\times8=47$

답 47

다른풀이 $m=35$, $\sigma=8$이므로 $P(X\ge m+1.5\sigma)=0.0668$에서

$P(X\ge35+1.5\times8)=0.0668$

$\therefore P(X\ge47)=0.0668$

이때 $P(X\le a)=0.9332$이므로

$P(X\ge a)=1-0.9332=0.0668$

$\therefore a=47$

0562 전략 두 확률변수 X, Y를 각각 표준화한 후 주어진 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

풀이 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(45,\ 5^2)$, $N(50,\ 10^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-45}{5},\ Z_Y=\frac{Y-50}{10}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\le41)=P(Y\ge k)$에서

$$P\left(Z_X\le\frac{41-45}{5}\right)=P\left(Z_Y\ge\frac{k-50}{10}\right)$$

$$P(Z_X\le-0.8)=P\left(Z_Y\ge\frac{k-50}{10}\right)$$

$$\therefore P(Z_X\ge0.8)=P\left(Z_Y\ge\frac{k-50}{10}\right)$$

따라서 $\frac{k-50}{10}=0.8$이므로

$k-50=8\qquad\therefore k=58$

답 58

0563 전략 세 반 학생들의 키를 확률변수로 놓고 각각 표준화한다.

풀이 1반, 2반, 3반 학생의 키를 각각 X_1 cm, X_2 cm, X_3 cm라 하면 세 확률변수 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $N(169,\ 8^2)$, $N(171,\ 4^2)$, $N(172,\ 5^2)$을 따르므로

$$Z_1=\frac{X_1-169}{8},\ Z_2=\frac{X_2-171}{4},\ Z_3=\frac{X_3-172}{5}$$

로 놓으면 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ➊

각 반의 학생의 키가 165 cm보다 작을 확률은 각각

$P(X_1<165)=P\left(Z_1<\frac{165-169}{8}\right)=P(Z_1<-0.5)$,

$P(X_2<165)=P\left(Z_2<\frac{165-171}{4}\right)=P(Z_2<-1.5)$,

$P(X_3<165)=P\left(Z_3<\frac{165-172}{5}\right)=P(Z_3<-1.4)$ ··· ❷

이때 $P(Z_1<-0.5)>P(Z_3<-1.4)>P(Z_2<-1.5)$이므로

$P(X_1<165)>P(X_3<165)>P(X_2<165)$

따라서 자기 반에서 상대적으로 키가 큰 학생부터 순서대로 나열하면 A, C, B이다. ··· ❸

답 A, C, B

채점 기준	비율
❶ 세 반 학생들의 키를 각각 표준화할 수 있다.	30 %
❷ 각 반 학생들의 키가 165 cm보다 작을 확률을 Z에 대한 확률로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 상대적으로 키가 큰 학생부터 순서대로 나열할 수 있다.	40 %

0564 전략 먼저 건전지의 수명이 86시간 이상일 확률을 구한다.

풀이 건전지의 수명을 X시간이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(80,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-80}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(X\geq 86)=P\left(Z\geq\frac{86-80}{4}\right)$

$=P(Z\geq 1.5)$

$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.5-0.43=0.07$

따라서 수명이 86시간 이상인 건전지의 개수는

$0.07\times 500=35$

답 ③

0565 전략 400명 중 100등 안에 들 확률은 $\frac{100}{400}$임을 이용한다.

풀이 학생의 수학 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(64,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-64}{15}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

100등인 학생의 수학 점수를 a점이라 하면

$P(X\geq a)=\frac{100}{400}=0.25$

$P\left(Z\geq\frac{a-64}{15}\right)=0.25$

$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-64}{15}\right)=0.25$

$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-64}{15}\right)=0.25$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{a-64}{15}\right)=0.25$

이때 $P(0\leq Z\leq 0.68)=0.25$이므로

$\frac{a-64}{15}=0.68,\quad a-64=10.2$

$\therefore a=74.2$

따라서 100등인 학생의 수학 점수는 74.2점이다. 답 74.2점

0566 전략 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(np,\ np(1-p))$를 따른다.

풀이 응답한 조사자의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B(4800,\ 0.25)$를 따르므로

$E(X)=4800\times 0.25=1200$,

$V(X)=4800\times 0.25\times 0.75=900$ ··· ❶

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(1200,\ 30^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-1200}{30}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ··· ❷

$P(X\geq a)=0.99$에서

$P\left(Z\geq\frac{a-1200}{30}\right)=0.99$

$P\left(\frac{a-1200}{30}\leq Z\leq 0\right)+P(Z\geq 0)=0.99$

$P\left(0\leq Z\leq\frac{1200-a}{30}\right)+0.5=0.99$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{1200-a}{30}\right)=0.49$ ··· ❸

이때 $P(0\leq Z\leq 2.5)=0.49$이므로

$\frac{1200-a}{30}=2.5,\quad 1200-a=75$

$\therefore a=1125$ ··· ❹

답 1125

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 $E(X)$, $V(X)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ X를 표준화할 수 있다.	30 %
❸ $P(X\geq a)=0.99$를 Z에 대한 식으로 변형할 수 있다.	30 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0567 전략 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때, 주어진 평균과 분산을 이용하여 n, p의 값을 먼저 구한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따른다고 하면

$E(X)=8$, $V(X)=4$에서

$np=8$ ······ ㉠

$np(1-p)=4$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $8(1-p)=4,\quad 1-p=\frac{1}{2}$

$\therefore p=\frac{1}{2}$

$p=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $n=16$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(16,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$P(X=3)={}_{16}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{13}=\frac{35}{2^{12}}$ 답 ②

0568 전략 장난감이 불량품이 아닐 확률과 상자가 불량품이 아닐 확률을 이용하여 장난감과 상자가 모두 불량품이 아닐 확률을 구한다.

풀이 장난감이 불량품이 아닐 확률은

$1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

상자가 불량품이 아닐 확률은

$1-\frac{2}{50}=\frac{24}{25}$

장난감과 상자가 모두 불량품이 아닐 확률은

$$\frac{9}{10}\cdot\frac{24}{25}=\frac{108}{125}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(500,\ \frac{108}{125}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=500\cdot\frac{108}{125}=432$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1=865$$

답 865

0569 전략 153을 m, σ를 사용하여 나타낸 후 주어진 확률밀도함수의 그래프를 이용한다.

풀이 $m=165$, $\sigma=4$일 때,

$153=165-3\cdot4=m-3\sigma$

이때 주어진 그래프에서

$$\mathrm{P}(m-3\sigma\le X\le m+3\sigma)=0.9974$$
$$2\mathrm{P}(m-3\sigma\le X\le m)=0.9974$$
$$\therefore\ \mathrm{P}(m-3\sigma\le X\le m)=0.4987$$
$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\ge153)&=\mathrm{P}(X\ge m-3\sigma)\\&=\mathrm{P}(m-3\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(X\ge m)\\&=0.4987+0.5=0.9987\end{aligned}$$

따라서 키가 153 cm 이상인 학생은 전체의 99.87 %이다.

답 99.87 %

0570 전략 확률변수 X를 표준화한다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le3)=0.3$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3-m}{\sigma}\right)=0.3$$
$$\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-3}{\sigma}\right)=0.3$$
$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-3}{\sigma}\right)=0.3$$
$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-3}{\sigma}\right)=0.2$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le0.52)=0.2$이므로

$$\frac{m-3}{\sigma}=0.52\qquad\therefore\ m-3=0.52\sigma\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

또 $\mathrm{P}(3\le X\le80)=0.3$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma}\le Z\le\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.3$$
$$\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma}\le Z\le0\right)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.3$$
$$0.2+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.3$$
$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.1$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le0.25)=0.1$이므로

$$\frac{80-m}{\sigma}=0.25\qquad\therefore\ 80-m=0.25\sigma\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=55$, $\sigma=100$

$\therefore\ m+\sigma=155$

답 155

0571 전략 주사위를 100번 던져 짝수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X로 놓는다.

풀이 주사위를 100번 던져서 짝수의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 홀수의 눈이 나오는 횟수는 $100-X$이므로 한 개의 주사위를 100번 던져서 얻은 점수는

$$3X-2(100-X)=5X-200$$

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=100\cdot\frac{1}{2}=50,$$
$$\mathrm{V}(X)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=25$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$5X-200\ge100$에서 $X\ge60$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge60)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{60-50}{5}\right)=\mathrm{P}(Z\ge2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

답 ②

0572 전략 먼저 합격할 확률, 즉 점수가 75점 이상일 확률을 구한다.

풀이 응시자의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-65}{5}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\ge75)&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{75-65}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge2)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$ ··· ❶

따라서 2500명 중 합격자의 수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.02)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(Y)=2500\times0.02=50,$$
$$\mathrm{V}(Y)=2500\times0.02\times0.98=49$$

따라서 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따르므로

$Z=\frac{Y-50}{7}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ··· ❷

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(Y\ge57)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{57-50}{7}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.34\\&=0.16\end{aligned}$$ ··· ❸

답 0.16

채점 기준	비율
❶ 응시자가 합격할 확률을 구할 수 있다.	30 %
❷ 합격자의 수가 따르는 정규분포를 구하고, 이를 표준화할 수 있다.	40 %
❸ 합격자가 57명 이상일 확률을 구할 수 있다.	30 %

07 통계적 추정

Ⅲ. 통계

0573 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

0574 4장의 카드에서 2장을 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

$_4\Pi_2=4^2=16$ 답 16

0575 모집단 $\{1,\ 2,\ 3\}$에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 경우의 수는 $_3\Pi_2=3^2=9$

$\overline{X}=2$인 경우는

$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$의 3가지

이므로 $P(\overline{X}=2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0576 (1) $m=1\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{4}+7\cdot\frac{1}{4}=4$

$\sigma^2=1^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}+5^2\cdot\frac{1}{4}+7^2\cdot\frac{1}{4}-4^2=21-16=5$

$\therefore\ \sigma=\sqrt{5}$

(2) $\overline{X}=\frac{1}{2}(1+5)=3$

$S^2=\frac{1}{2-1}\{(1-3)^2+(5-3)^2\}=8$이므로

$S=2\sqrt{2}$

답 (1) $m=4,\ \sigma=\sqrt{5}$ (2) $\overline{X}=3,\ S=2\sqrt{2}$

0577 (1) 표본이 $(0,\ 0)$일 때, $\overline{X}=\frac{0+0}{2}=0$

표본이 $(0,\ 2),\ (2,\ 0)$일 때, $\overline{X}=\frac{0+2}{2}=1$

표본이 $(0,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 0)$일 때,

$\overline{X}=\frac{0+4}{2}=\frac{2+2}{2}=2$

표본이 $(2,\ 4),\ (4,\ 2)$일 때, $\overline{X}=\frac{2+4}{2}=3$

표본이 $(4,\ 4)$일 때, $\overline{X}=\frac{4+4}{2}=4$

따라서 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

(2)

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(3) $E(\overline{X})=0\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{2}{9}+4\cdot\frac{1}{9}=2$

$V(\overline{X})=0^2\cdot\frac{1}{9}+1^2\cdot\frac{2}{9}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{2}{9}+4^2\cdot\frac{1}{9}-2^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 풀이 참조

0578 $E(\overline{X})=80,\ V(\overline{X})=\frac{6^2}{3}=12,\ \sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

답 $E(\overline{X})=80,\ V(\overline{X})=12,\ \sigma(\overline{X})=2\sqrt{3}$

0579 $E(\overline{X})=450,\ V(\overline{X})=\frac{15^2}{25}=9,\ \sigma(\overline{X})=\frac{15}{\sqrt{25}}=3$

답 $E(\overline{X})=450,\ V(\overline{X})=9,\ \sigma(\overline{X})=3$

0580 $E(\overline{X})=120,\ V(\overline{X})=\frac{8^2}{100}=\frac{16}{25},\ \sigma(\overline{X})=\frac{8}{\sqrt{100}}=\frac{4}{5}$

답 $E(\overline{X})=120,\ V(\overline{X})=\frac{16}{25},\ \sigma(\overline{X})=\frac{4}{5}$

0581 (1) $E(\overline{X})=300,\ V(\overline{X})=\frac{16^2}{64}=4$

(2) $N(300,\ 2^2)$

(3) $Z=\frac{\overline{X}-300}{2}$

(4) $P(\overline{X}\le 302)=P\left(Z\le\frac{302-300}{2}\right)$

$=P(Z\le 1)$

$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)$

$=0.5+0.3413$

$=0.8413$

답 풀이 참조

0582 $E(\overline{X})=250,\ V(\overline{X})=\frac{40^2}{100}=16$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N(250,\ 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-250}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(\overline{X}\ge 260)=P\left(Z\ge\frac{260-250}{4}\right)$

$=P(Z\ge 2.5)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2.5)$

$=0.5-0.4938$

$=0.0062$ 답 0.0062

0583 $P(242\le\overline{X}\le 244)=P\left(\frac{242-250}{4}\le Z\le\frac{244-250}{4}\right)$

$=P(-2\le Z\le -1.5)$

$=P(1.5\le Z\le 2)$

$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1.5)$

$=0.4772-0.4332$

$=0.044$ 답 0.044

0584 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$60-1.96\times\frac{8}{\sqrt{16}}\le m\le 60+1.96\times\frac{8}{\sqrt{16}}$

$\therefore\ 56.08\le m\le 63.92$ 답 $56.08\le m\le 63.92$

0585 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$65-1.96\times\frac{8}{\sqrt{4}}\le m\le 65+1.96\times\frac{8}{\sqrt{4}}$

$\therefore\ 57.16\le m\le 72.84$ 답 $57.16\le m\le 72.84$

0586 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$240-2.58\times\frac{14}{\sqrt{49}}\le m\le 240+2.58\times\frac{14}{\sqrt{49}}$

$\therefore 234.84\le m\le 245.16$ 답 $234.84\le m\le 245.16$

0587 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$200-2.58\times\frac{14}{\sqrt{196}}\le m\le 200+2.58\times\frac{14}{\sqrt{196}}$

$\therefore 197.42\le m\le 202.58$ 답 $197.42\le m\le 202.58$

0588 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$90-1.96\times\frac{3}{\sqrt{144}}\le m\le 90+1.96\times\frac{3}{\sqrt{144}}$

$\therefore 89.51\le m\le 90.49$ 답 $89.51\le m\le 90.49$

0589 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$90-2.58\times\frac{3}{\sqrt{144}}\le m\le 90+2.58\times\frac{3}{\sqrt{144}}$

$\therefore 89.355\le m\le 90.645$ 답 $89.355\le m\le 90.645$

0590 모평균에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{4}{\sqrt{16}}=3.92$ 답 3.92

0591 모평균에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{4}{\sqrt{16}}=5.16$ 답 5.16

0592 모평균이 5, 모분산이 $3^2=9$, 표본의 크기가 6이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=\frac{3}{2}+5^2=\frac{53}{2}$ 답 ①

0593 모평균이 70, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=70,\ \sigma(\overline{X})=\frac{12}{\sqrt{16}}=3$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=73$ 답 ④

0594 모표준편차가 6, 표본의 크기가 n이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{n}}$

$\sigma(\overline{X})\le0.3$이므로 $\frac{6}{\sqrt{n}}\le0.3$

$\sqrt{n}\ge20 \quad \therefore n\ge400$

따라서 n의 최솟값은 400이다. 답 400

0595 모평균이 15이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=15$

따라서 $\frac{n}{6}=15$이므로 $n=90$ ··· ❶

모표준편차가 σ, 표본의 크기가 $n=90$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{90}$

따라서 $\frac{\sigma^2}{90}=\frac{1}{5}$이므로 $\sigma^2=18$

$\therefore \sigma=3\sqrt{2}\ (\because \sigma>0)$ ··· ❷

답 $3\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ σ의 값을 구할 수 있다.	60 %

0596 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{5}+a+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=1 \quad \therefore a=\frac{3}{10}$

따라서 모집단의 평균은

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{1}{10}=\frac{7}{5}$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=\frac{7}{5}$ 답 $\frac{7}{5}$

0597 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$=\frac{15}{2}-\frac{25}{4}=\frac{5}{4}$

이때 표본의 크기가 5이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{5}{2},\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{5}{4}}{5}=\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{\mathrm{E}(\overline{X})}{\mathrm{V}(\overline{X})}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{4}}=10$

답 ⑤

0598 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{6}+8\cdot\frac{1}{6}+10\cdot\frac{1}{3}=6$

$\mathrm{V}(X)=2^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{1}{6}+8^2\cdot\frac{1}{6}+10^2\cdot\frac{1}{3}-6^2$

$=48-36$

$=12$ ··· ❶

표본의 크기가 n일 때 $\mathrm{V}(\overline{X})=3$이므로

$\frac{12}{n}=3 \quad \therefore n=4$ ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %

0599 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 X라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{8}{5}$

07 통계적 추정

$$V(X)=1^2\cdot\frac{3}{5}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{1}{5}-\left(\frac{8}{5}\right)^2$$
$$=\frac{16}{5}-\frac{64}{25}=\frac{16}{25}$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$E(\overline{X})=\frac{8}{5},\ V(\overline{X})=\frac{\frac{16}{25}}{2}=\frac{8}{25}$$

답 $E(\overline{X})=\frac{8}{5}$, $V(\overline{X})=\frac{8}{25}$

0600 주머니에서 임의로 1개의 동전을 꺼낼 때, 동전의 금액을 X원이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	100	500	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$	1

$$\therefore E(X)=100\cdot\frac{1}{n+1}+500\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{500n+100}{n+1}$$

이때 $E(X)=E(\overline{X})=400$이므로 $\frac{500n+100}{n+1}=400$

$500n+100=400n+400$ $\quad\therefore n=3$

$$\therefore V(X)=100^2\cdot\frac{1}{4}+500^2\cdot\frac{3}{4}-400^2$$
$$=190000-160000=30000$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$V(\overline{X})=\frac{30000}{2}=15000$$

답 ②

0601 상자에서 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면

$$P(X=x)=\frac{1}{4}\ (x=1, 3, 5, 7)$$ ⋯ ❶

$$\therefore E(X)=1\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{4}+7\cdot\frac{1}{4}=4$$
$$V(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}+5^2\cdot\frac{1}{4}+7^2\cdot\frac{1}{4}-4^2$$
$$=21-16=5$$ ⋯ ❷

표본의 크기가 n일 때 $V(\overline{X})=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{5}{n}=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore n=20$ ⋯ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	20 %
❷ $V(X)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	40 %

0602 모집단이 정규분포 $N(80, \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 49이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80, \frac{\sigma^2}{49}\right)$을 따른다.

따라서 $80=a$, $\frac{\sigma^2}{49}=4$이므로

$a=80$, $\sigma=14$ ($\because \sigma>0$)

답 ②

0603 모집단이 정규분포 $N(240, 60)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(240, \frac{60}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $\frac{60}{n}=4$이므로 $\quad n=15$

답 15

0604 16명의 적성 검사 점수의 평균을 $\overline{X}$점이라 하면 모집단이 정규분포 $N(72, 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(72, \frac{12^2}{16}\right)$, 즉 $N(72, 3^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-72}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(69\le\overline{X}\le78)=P\left(\frac{69-72}{3}\le Z\le\frac{78-72}{3}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le2)$$
$$=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)$$
$$=0.3413+0.4772$$
$$=0.8185$$

답 ②

0605 모집단이 정규분포 $N(45, 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(45, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(45, 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-45}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(\overline{X}\le42)=P\left(Z\le\frac{42-45}{2}\right)$$
$$=P(Z\le-1.5)$$
$$=P(Z\ge1.5)$$
$$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.5)$$
$$=0.5-0.43=0.07$$

답 ②

0606 모집단이 정규분포 $N(m, 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{6^2}{16}\right)$, 즉 $N(m, 1.5^2)$을 따른다. ⋯ ❶

$Z=\frac{\overline{X}-m}{1.5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$P(|m-\overline{X}|\le1.5)$$
$$=P(m-1.5\le\overline{X}\le m+1.5)$$
$$=P\left(\frac{m-1.5-m}{1.5}\le Z\le\frac{m+1.5-m}{1.5}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le1)$$ ⋯ ❷
$$=2P(0\le Z\le1)$$
$$=2\times0.34=0.68$$ ⋯ ❸

답 0.68

채점 기준	비율
❶ $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30 %
❷ $P(\|m-\overline{X}\|\le1.5)$를 Z에 대한 식으로 변형할 수 있다.	40 %
❸ $P(\|m-\overline{X}\|\le1.5)$를 구할 수 있다.	30 %

0607 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 6^2)$을 따르므로

$Z_1=\dfrac{X-30}{6}$으로 놓으면 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또 확률변수 $\overline{X}$가 정규분포 $\mathrm{N}\left(30,\ \dfrac{6^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따르므로

$Z_2=\dfrac{\overline{X}-30}{2}$으로 놓으면 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X<36)=\mathrm{P}(\overline{X}<a)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_1<\frac{36-30}{6}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2<\frac{a-30}{2}\right)$$

$$\therefore \mathrm{P}(Z_1<1)=\mathrm{P}\left(Z_2<\frac{a-30}{2}\right)$$

즉 $\dfrac{a-30}{2}=1$이므로 $\quad a=32$

답 32

0608 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 256이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60,\ \dfrac{8^2}{256}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(60,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-60}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)\ge 0.12$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-60}{\frac{1}{2}}\right)\ge 0.12$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-60}{\frac{1}{2}}\right)\ge 0.12$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-60}{\frac{1}{2}}\right)\ge 0.12$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-60}{\frac{1}{2}}\right)\le 0.38$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)=0.38$이므로

$$\frac{k-60}{\frac{1}{2}}\le 1.2 \qquad \therefore k\le 60.6$$

따라서 k의 최댓값은 60.6이다.

답 60.6

0609 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 24^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\ \dfrac{24^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-200}{\frac{24}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 194)=0.1587$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{194-200}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587, \qquad \mathrm{P}\left(Z\le-\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.1587$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.1587$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.1587$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.1587$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.3413$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{4}=1, \qquad \sqrt{n}=4$$

$$\therefore n=16$$

답 ③

0610 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(1000,\ 60^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(1000,\ \dfrac{60^2}{n}\right)$을 따른다. ⋯ ❶

$Z=\dfrac{\overline{X}-1000}{\frac{60}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(967\le\overline{X}\le 1033)=0.9$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{967-1000}{\frac{60}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{1033-1000}{\frac{60}{\sqrt{n}}}\right)=0.9$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{11\sqrt{n}}{20}\le Z\le\frac{11\sqrt{n}}{20}\right)=0.9 \qquad \cdots ❷$$

$$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{11\sqrt{n}}{20}\right)=0.9$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{11\sqrt{n}}{20}\right)=0.45$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.65)=0.45$이므로

$$\frac{11\sqrt{n}}{20}=1.65, \qquad 11\sqrt{n}=33, \qquad \sqrt{n}=3$$

$$\therefore n=9 \qquad \cdots ❸$$

답 9

채점 기준	비율
❶ $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\mathrm{P}(967\le\overline{X}\le 1033)=0.9$를 Z에 대한 식으로 변형할 수 있다.	40 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	30 %

0611 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{10^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 표본평균과 모평균의 차가 5 이하일 확률이 0.98이므로

$$\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 5)=0.98$$

$$\mathrm{P}(m-5\le\overline{X}\le m+5)=0.98$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{m-5-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{m+5-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)=0.98$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.98$$

$$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.98$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.49$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.49$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{2}=2.5, \qquad \sqrt{n}=5$$

$$\therefore n=25$$

답 ④

0612 표본평균이 450, 모표준편차가 16, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$450-1.96\times\frac{16}{\sqrt{400}}\le m\le 450+1.96\times\frac{16}{\sqrt{400}}$

$450-1.568\le m\le 450+1.568$

$\therefore 448.432\le m\le 451.568$

답 $448.432\le m\le 451.568$

0613 표본평균이 30, 모표준편차가 8, 표본의 크기가 4이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$30-2.58\times\frac{8}{\sqrt{4}}\le m\le 30+2.58\times\frac{8}{\sqrt{4}}$

$30-10.32\le m\le 30+10.32$

$\therefore 19.68\le m\le 40.32$

따라서 $\alpha=19.68$, $\beta=40.32$이므로

$4\alpha-\beta=38.4$

답 ③

0614 표본평균이 65, 모표준편차가 15, 표본의 크기가 25이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{a}{100}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 a %의 신뢰구간은

$65-k\cdot\frac{15}{\sqrt{25}}\le m\le 65+k\cdot\frac{15}{\sqrt{25}}$

$\therefore 65-3k\le m\le 65+3k$ ··· ❶

이것이 $60.05\le m\le 69.95$와 같으므로

$65-3k=60.05$, $65+3k=69.95$

$\therefore k=1.65$ ··· ❷

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.65)=0.9$이므로

$\frac{a}{100}=0.9 \qquad \therefore a=90$ ··· ❸

답 90

채점 기준	비율
❶ 모평균에 대한 신뢰구간을 k로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0615 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ··· ❶

이것이 $29.68\le m\le 50.32$와 같으므로

$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=29.68$, $\overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=50.32$

위의 두 식을 변끼리 더하면 $\quad 2\overline{x}=80 \quad \therefore \overline{x}=40$

$\overline{x}=40$을 $\overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=50.32$에 대입하면

$40+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=50.32, \qquad 2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=10.32$

$\therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=4$ ··· ❷

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$40-1.96\times 4\le m\le 40+1.96\times 4$

$\therefore 32.16\le m\le 47.84$ ··· ❸

답 $32.16\le m\le 47.84$

채점 기준	비율
❶ 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 $\overline{x}$와 σ, n으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\overline{x}$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구할 수 있다.	40 %

0616 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10을 사용할 수 있고, 표본평균이 35이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$35-2.58\times\frac{10}{\sqrt{100}}\le m\le 35+2.58\times\frac{10}{\sqrt{100}}$

$35-2.58\le m\le 35+2.58$

$\therefore 32.42\le m\le 37.58$

답 $32.42\le m\le 37.58$

0617 표본의 크기 64가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 1을 사용할 수 있고, 표본평균이 3.8이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$3.8-2\times\frac{1}{\sqrt{64}}\le m\le 3.8+2\times\frac{1}{\sqrt{64}}$

$3.8-0.25\le m\le 3.8+0.25$

$\therefore 3.55\le m\le 4.05$

따라서 $\alpha=3.55$, $\beta=4.05$이므로

$3\alpha-\beta=6.6$

답 ④

0618 표본의 크기 400이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 12를 사용할 수 있고, 표본평균이 820이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$820-1.96\times\frac{12}{\sqrt{400}}\le m\le 820+1.96\times\frac{12}{\sqrt{400}}$

$820-1.176\le m\le 820+1.176$

$\therefore 818.824\le m\le 821.176$

따라서 신뢰구간에 속하는 정수는 819, 820, 821의 3개이다.

답 ②

0619 표본평균이 320, 모표준편차가 5이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$320-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le 320+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

이것이 $319.3\le m\le 320.7$과 같으므로

$320-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=319.3$, $320+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=320.7$

따라서 $1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=0.7$이므로

$\sqrt{n}=14 \qquad \therefore n=196$

답 196

0620 표본평균이 225, 모표준편차가 24이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$225-2.58\times\frac{24}{\sqrt{n}}\le m\le 225+2.58\times\frac{24}{\sqrt{n}}$ ··· ❶

이것이 $219.84\le m\le 230.16$과 같으므로

$225-2.58\times\frac{24}{\sqrt{n}}=219.84$, $225+2.58\times\frac{24}{\sqrt{n}}=230.16$

따라서 $2.58\times\frac{24}{\sqrt{n}}=5.16$이므로

$$\sqrt{n}=12 \qquad \therefore n=144$$ ⋯ ❷

답 144

채점 기준	비율
❶ 모평균에 대한 신뢰구간을 n으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	50 %

0621 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 6이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}$$

이것이 $88.53\le m\le 91.47$과 같으므로

$$\overline{x}-1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}=88.53,\ \overline{x}+1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}=91.47$$

위의 두 식을 변끼리 더하면

$$2\overline{x}=180 \qquad \therefore \overline{x}=90$$

$\overline{x}=90$을 $\overline{x}+1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}=91.47$에 대입하면

$$90+1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}=91.47, \qquad 1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}=1.47$$

$$\sqrt{n}=8 \qquad \therefore n=64$$

답 ④

0622 모표준편차가 45, 표본의 크기가 225이므로 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{45}{\sqrt{225}}=15.48$$

답 ⑤

0623 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰도 α %로 추정한 각각의 모평균에 대한 신뢰구간의 길이를 구하면 다음과 같다.

① $2k\cdot\frac{6}{\sqrt{36}}=2k$ ② $2k\cdot\frac{12}{\sqrt{36}}=4k$

③ $2k\cdot\frac{6}{\sqrt{64}}=\frac{3}{2}k$ ④ $2k\cdot\frac{12}{\sqrt{64}}=3k$

⑤ $2k\cdot\frac{24}{\sqrt{64}}=6k$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0624 모표준편차가 3, 표본의 크기가 36이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$a=2\times1.96\times\frac{3}{\sqrt{36}}=1.96$$ ⋯ ❶

또 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$b=2\times2.58\times\frac{3}{\sqrt{36}}=2.58$$ ⋯ ❷

$$\therefore b-a=0.62$$ ⋯ ❸

답 0.62

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0625 모표준편차가 3, 표본의 크기가 n이므로 신뢰도 95 %로 모평균을 추정할 때 신뢰구간의 길이가 2 이하가 되려면

$$2\cdot2\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}\le2, \qquad \sqrt{n}\ge6$$

$$\therefore n\ge36$$

따라서 n의 최솟값은 36이다.

답 ②

0626 모표준편차를 σ, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ ⋯ ❶

표본의 크기가 100일 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{\sigma}{5}k$$ ⋯ ❷

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\cdot\frac{\sigma}{5}k$이므로

$$\sqrt{n}=5 \qquad \therefore n=25$$ ⋯ ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ 표본의 크기가 n일 때 신뢰구간의 길이를 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 표본의 크기가 100일 때 신뢰구간의 길이를 나타낼 수 있다.	30 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	40 %

0627 모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 144일 때, 신뢰도 95 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{144}}=\frac{\sigma}{3}$$

또 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$$

두 신뢰구간의 길이가 같으므로

$$\frac{\sigma}{3}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \sqrt{n}=18$$

$$\therefore n=324$$

답 ③

0628 모표준편차가 5, 표본의 크기가 64이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot k\cdot\frac{5}{\sqrt{64}}=2.35 \qquad \therefore k=1.88$$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le1.88)=0.470\times2=0.94$이므로

$$\alpha=100\times0.94=94$$

답 ②

0629 모표준편차가 30, 표본의 크기가 625이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot k\cdot\frac{30}{\sqrt{625}}=3.96 \qquad \therefore k=1.65$$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le1.65)=0.450\times2=0.9$이므로

$$\alpha=100\times0.9=90$$

답 90

0630 모표준편차가 15, 표본의 크기가 900이고
$P(|Z|\le 2)=0.475\times 2=0.95$이므로

$$l=2\cdot 2\cdot \frac{15}{\sqrt{900}}=2$$

$P(|Z|\le k)=\frac{a}{100}$라 하면 신뢰도 a %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이가 $\frac{l}{2}=1$이므로

$$2\cdot k\cdot \frac{15}{\sqrt{900}}=1 \qquad \therefore k=1$$

이때 $P(|Z|\le 1)=0.340\times 2=0.68$이므로

$$a=100\times 0.68=68$$

답 68

0631 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 35일 때 표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$$\overline{x}-2\cdot\frac{35}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2\cdot\frac{35}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{70}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{70}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m-\overline{x}|\le\frac{70}{\sqrt{n}}$$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 10 이하이어야 하므로

$$\frac{70}{\sqrt{n}}\le 10, \qquad \sqrt{n}\ge 7 \qquad \therefore n\ge 49$$

따라서 최소 49개의 표본을 조사해야 한다.

답 ②

0632 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 64일 때 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$$\overline{x}-2\cdot\frac{5}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+2\cdot\frac{5}{\sqrt{64}}$$

$$-\frac{5}{4}\le m-\overline{x}\le\frac{5}{4} \qquad \therefore |m-\overline{x}|\le\frac{5}{4}$$

따라서 모평균과 표본평균의 차의 최댓값은 $\frac{5}{4}$ g이다.

답 $\frac{5}{4}$ g

0633 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때 신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$$\overline{x}-3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \therefore |m-\overline{x}|\le\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$ ··· ❶

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 $\frac{1}{8}\sigma$ 이하이어야 하므로

$$\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{\sigma}{8}, \qquad \sqrt{n}\ge 24 \qquad \therefore n\ge 576$$

따라서 n의 최솟값은 576이다. ··· ❷

답 576

채점 기준	비율
❶ 모평균과 표본평균의 차의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❷ n의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

0634 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ. 표본의 크기가 같을 때, 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄴ. ㉠에 n 대신 $2n$을 대입하면 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 신뢰도가 같을 때, 표본의 크기가 2배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$배, 즉 $\frac{\sqrt{2}}{2}$배가 된다.

ㄷ. 신뢰도를 높이면 k의 값이 커지고, 표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0635 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ (k\text{는 상수})$$

이므로 n 대신 $4n$을 대입하면 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}=k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 표본의 크기가 4배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{2}$배가 되므로

$$a=\frac{1}{2}$$

답 ②

0636 전략 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(32, 9^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(32, \frac{9^2}{36}\right)$, 즉 $N\left(32, \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $a=32$, $b=\frac{9}{4}$이므로

$$ab=72$$

답 ③

0637 전략 먼저 모집단의 평균을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2}+a+\frac{1}{4}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$$ ··· ❶

따라서 모집단의 평균은

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$ ··· ❷

$E(\overline{X})=E(X)=\frac{3}{4}$이므로

$$E(8\overline{X}-1)=8E(\overline{X})-1=8\cdot\frac{3}{4}-1=5$$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $E(X)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $E(8\overline{X}-1)$을 구할 수 있다.	50 %

0638 전략 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은
$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

풀이 표본평균이 58, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$58-1.96\times\frac{12}{\sqrt{64}}\le m\le 58+1.96\times\frac{12}{\sqrt{64}}$$
$$58-2.94\le m\le 58+2.94$$
$$\therefore 55.06\le m\le 60.94$$

따라서 신뢰구간에 속하는 정수는 56, 57, 58, 59, 60의 5개이다.

답 5

0639 전략 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$일 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

풀이 모표준편차가 7, 표본의 크기가 196이므로 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.28\times\frac{7}{\sqrt{196}}=1.28$$

답 ③

0640 전략 $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{n}\mathrm{V}(X)$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=400\cdot\frac{1}{5}=80,\ \mathrm{V}(X)=400\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=64 \quad \cdots ❶$$

이 모집단에서 임의추출한 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=80,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{64}{16}=4 \quad \cdots ❷$$

이므로 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$$
$$=4+80^2=6404 \quad \cdots ❸$$

답 6404

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\mathrm{E}(\overline{X})$, $\mathrm{V}(\overline{X})$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$을 구할 수 있다.	30 %

0641 전략 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

풀이 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10,\ \frac{2^2}{n}\right)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{2^2}{n}=\frac{4}{n}$

ㄴ. $\mathrm{P}(\overline{X}\le10-a)=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{a}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$,

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge10+a)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$$

이때 $\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{a}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le10-a)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge10+a)$$

ㄷ. $\mathrm{P}(\overline{X}\ge a)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}(Z\le b)$이므로

$$\frac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}=-b,\qquad a-10=-\frac{2}{\sqrt{n}}b$$
$$\therefore a+\frac{2}{\sqrt{n}}b=10$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0642 전략 한 묶음의 무게를 이용하여 표본평균을 구한다.

풀이 달걀 25개의 평균 무게를 $\overline{X}$ g이라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60,\ \frac{5^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(60,\ 1)$을 따른다.

$Z=\overline{X}-60$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 한 상자가 중량 미달로 판정될 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(25\overline{X}<1425)&=\mathrm{P}(\overline{X}<57)=\mathrm{P}(Z<57-60)\\&=\mathrm{P}(Z<-3)=\mathrm{P}(Z\ge3)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le3)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$

답 0.0013

0643 전략 먼저 표본평균이 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(30,\ \frac{4^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{X}-30}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $Y=4\overline{X}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(104\le Y\le136)&=\mathrm{P}(104\le4\overline{X}\le136)\\&=\mathrm{P}(26\le\overline{X}\le34)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{26-30}{2}\le Z\le\frac{34-30}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le2)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=2\times0.4772\\&=0.9544\end{aligned}$$

답 0.9544

0644 전략 먼저 모평균 m에 대한 신뢰구간을 구한다.

풀이 표본평균이 24, 모표준편차가 40, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$24-2\cdot\frac{40}{\sqrt{n}}\le m\le24+2\cdot\frac{40}{\sqrt{n}}$$
$$\therefore 24-\frac{80}{\sqrt{n}}\le m\le24+\frac{80}{\sqrt{n}}$$

이때 위의 신뢰구간이 $19\le m\le29$에 포함되어야 하므로

$$24-\frac{80}{\sqrt{n}}\ge19,\ 24+\frac{80}{\sqrt{n}}\le29$$
$$\sqrt{n}\ge16\qquad\therefore n\ge256$$

따라서 n의 최솟값은 256이다.

답 ⑤

0645 전략 신뢰도 99 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는 $2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

풀이 모표준편차가 16, 표본의 크기가 n이므로 신뢰도 99 %로 모평균을 추정할 때 신뢰구간의 길이가 10.32 이하가 되려면

$$2\times2.58\times\frac{16}{\sqrt{n}}\le10.32$$

$$\sqrt{n}\ge8$$

$$\therefore\ n\ge64$$

따라서 n의 최솟값은 64이다.

답 64

0646 전략 모평균 m에 대한 신뢰구간이 $a\le m\le a+5$이므로 신뢰구간의 길이는 5임을 이용한다.

풀이 표본의 크기 324가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 25를 사용할 수 있다.

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k\cdot\frac{25}{\sqrt{324}}=\frac{25}{9}k$$ ···➊

이때 신뢰구간 $a\le m\le a+5$에서 신뢰구간의 길이는

$$(a+5)-a=5$$

이므로 $\frac{25}{9}k=5$

$$\therefore\ k=1.8$$ ···➋

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le1.8)=2\times0.46=0.92$이므로

$$\alpha=100\times0.92=92$$ ···➌

답 92

채점 기준	비율
➊ 신뢰구간의 길이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
➋ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ α의 값을 구할 수 있다.	30 %

0647 전략 모집단의 분포를 이용하여 표본평균의 분포를 파악한 후 표본평균을 표준화하여 확률을 구한다.

풀이 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\ \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(50,\ 2^2)$을 따르고, 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(75,\ \frac{\sigma^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(75,\ \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-50}{2}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-75}{\frac{\sigma}{5}}$로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le53)+\mathrm{P}(\overline{Y}\le69)=1$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{53-50}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{69-75}{\frac{\sigma}{5}}\right)=1$$

$$\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le1.5)+\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le-\frac{30}{\sigma}\right)=1$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le1.5)+\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{30}{\sigma}\right)=1$$

즉 $\frac{30}{\sigma}=1.5$이므로 $\sigma=20$

$$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{Y}\ge71)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{71-75}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\ge-1)=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\le1)$$
$$=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\le0)+\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{Y}}\le1)$$
$$=0.5+0.3413$$
$$=0.8413$$

답 ①

0648 전략 먼저 표본평균이 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{9}{8},\ 9^2\right)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{9}{8},\ \frac{9^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-\frac{9}{8}}{\frac{9}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X}\le2.75\times\frac{9}{\sqrt{n}}\right)=0.9878$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{2.75\times\frac{9}{\sqrt{n}}-\frac{9}{8}}{\frac{9}{\sqrt{n}}}\right)=0.9878$$

$$\mathrm{P}\left(Z\le2.75-\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.9878$$

$$\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le2.75-\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.9878$$

$$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le2.75-\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.9878$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le2.75-\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.4878$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2.25)=0.4878$이므로

$$2.75-\frac{\sqrt{n}}{8}=2.25,\qquad \sqrt{n}=4$$

$$\therefore\ n=16$$

답 ①

0649 전략 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는 $2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

풀이 모표준편차를 σ라 하면

$$b-a=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=0.516\sigma,$$ ···➊

$$d-c=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5.16\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ ···➋

$d-c=\frac{2}{3}(b-a)$이므로

$$5.16\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2}{3}\times0.516\sigma$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{15}\qquad\therefore\ n=225$$ ···➌

답 225

채점 기준	비율
➊ $b-a$의 값을 σ로 나타낼 수 있다.	30 %
➋ $d-c$의 값을 n, σ로 나타낼 수 있다.	30 %
➌ n의 값을 구할 수 있다.	40 %