정답 및 해설

Ⅰ 함수의 극한과 연속

Ⅱ 미분

Ⅲ 적분

빠른 정답

Ⅰ 함수의 극한과 연속

1 함수의 극한 9쪽~19쪽

001 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 2 (3) 5
002 (1) 1 (2) 0
003 (1) ∞ (2) $-\infty$
004 (1) $-\infty$ (2) ∞ (3) $-\infty$
005 (1) 4 (2) -2
006 (1) 1 (2) 1 (3) 1 (4) 0
007 (1) 존재하지 않는다. (2) 0
008 (1) -4 (2) 2 (3) -6 (4) -8 (5) $-\frac{1}{2}$
009 (1) 5 (2) 3 (3) 16 (4) $\frac{1}{3}$ (5) 5
010 (1) -1 (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$
011 (1) $\frac{3}{2}$ (2) ∞ (3) 0 (4) 2
012 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{2}{3}$
013 (1) -5 (2) 2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{16}$
014 (1) $a=1$, $b=-2$ (2) $a=-1$, $b=-2$
(3) $a=4$, $b=-8$ (4) $a=1$, $b=-1$
015 (1) $f(x)=2x^2-2x$ (2) $f(x)=x^2+9x+14$
016 (1) -8 (2) 18 (3) -36
017 $\frac{1}{3}$
018 $\frac{5}{3}$
019 ④ 020 ② 021 (ㄱ) 022 ① 023 24 024 -1
025 ⑤ 026 6 027 -2 028 2 029 -6 030 ④

2 함수의 연속 22쪽~28쪽

031 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 불연속
032 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$
(3) $(-\infty, -2)\cup(-2, \infty)$ (4) $[-1, \infty)$
033 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, 5)$, $(5, \infty)$
(3) $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$
034 3
035 8
036 5
037 4
038 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$ (3) $(-\infty, \infty)$
(4) $(-\infty, \infty)$
039 (1) 연속 (2) 연속 (3) 불연속 (4) 불연속
040 (1) 최댓값 : 0, 최솟값 : -1 (2) 최댓값 : 4, 최솟값 : 0
(3) 최댓값 : -1, 최솟값 : $-\sqrt{3}$
(4) 최댓값 : $2\sqrt{3}$, 최솟값 : $\sqrt{2}$
(5) 최댓값 : 1, 최솟값 : $\frac{1}{3}$ (6) 최댓값 : 3, 최솟값 : $\frac{3}{2}$
041 (1) 풀이 참고 (2) 풀이 참고 (3) 풀이 참고
042 ③ 043 3 044 5 045 ① 046 6 047 ④
048 ③ 049 ④ 050 ③ 051 ④ 052 ①

Ⅱ 미분

1 미분계수 31쪽~39쪽

001 (1) 4 (2) 1 (3) 3 (4) $\Delta x+2a$
002 (1) 5 (2) 9 (3) 4 (4) 6
003 (1) 2 (2) 8 (3) 6 (4) 2
004 (1) 2 (2) -8 (3) -24 (4) -6 (5) 0
005 (1) -6 (2) -2 (3) -8 (4) -10
006 (1) 1 (2) 6 (3) -3 (4) 12
007 (1) -2 (2) 4 (3) -5 (4) -4 (5) 4
008 (ㄴ), (ㄷ)
009 (ㄷ)
010 0, 0, 연속이다., 1, -1, 존재하지 않는다.,
미분가능하지 않다.
011 (1) 연속이고 미분가능하다.
(2) 연속이고 미분가능하지 않다.
(3) 연속이고 미분가능하지 않다.
012 (1) 연속이고 미분가능하지 않다.
(2) 연속이고 미분가능하지 않다.
(3) 연속이고 미분가능하지 않다.
013 (1) 연속이고 미분가능하다.
(2) 연속이고 미분가능하지 않다.
014 (1) $a=2$, $b=-1$ (2) $a=2$, $b=-2$ (3) $a=2$, $b=4$
(4) $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{7}{2}$ (5) $a=-1$, $b=1$ (6) $a=8$, $b=-4$
015 (1) 1 (2) 4개 (3) 2개 (4) 1개 (5) 1
016 (1) ○ (2) × (3) × (4) × (5) ○
017 ① 018 2 019 ④ 020 5 021 ③
022 -10 023 5

01-05 수학2 빠답-ok.indd 2 2018-09-28 오후 12:50:37

2 도함수

41쪽~49쪽

024 (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)=2$ (3) $f'(x)=2x-4$
(4) $f'(x)=2x+2$ (5) $f'(x)=3x^2$

025 (1) $f'(x)=-2$, $f'(1)=-2$
(2) $f'(x)=2x$, $f'(-2)=-4$
(3) $f'(x)=-2x+3$, $f'(2)=-1$
(4) $f'(x)=2x-2$, $f'(-1)=-4$
(5) $f'(x)=3x^2-1$, $f'(3)=26$

026 $f'(x)=-3x+1$

027 $f'(x)=2x-2$

028 (1) $y'=3x^2$ (2) $y'=9x^8$ (3) $y'=10x^9$
(4) $y'=15x^{14}$ (5) $y'=0$ (6) $y'=0$

029 (1) $y'=4x$ (2) $y'=3$ (3) $y'=2x-5$
(4) $y'=4x^3+2$ (5) $y'=6x^2-6x+4$
(6) $y'=-10x^4+9x^2-5$ (7) $y'=x^2-x+6$

030 (1) $y'=24x+4$ (2) $y'=4x+9$ (3) $y'=45x^2+6x-5$
(4) $y'=-20x^3+34x$ (5) $y'=12x^2+44x-6$
(6) $y'=5x^4-20x^3+27x^2-12x$

031 (1) $y'=3x^2-10x+6$ (2) $y'=18x^2+22x-3$
(3) $y'=-6x^2+10x-1$
(4) $y'=8x^3-12x^2-24x-8$
(5) $y'=30x^4+16x^3-18x^2-8x$

032 (1) $y'=18x-24$ (2) $y'=8x-12$ (3) $y'=3(x+2)^2$
(4) $y'=9(3x-1)^2$ (5) $y'=8(2x-5)^3$
(6) $y'=2(x^2-2x+2)(2x-2)$

033 -3

034 3

035 10

036 -1

037 (1) $a=2$, $b=1$, $c=-1$ (2) $a=-1$, $b=3$, $c=2$
(3) $a=3$, $b=-4$, $c=3$ (4) $a=-5$, $b=-2$, $c=7$

038 $a=-4$, $b=7$

039 $a=2$, $b=-1$

040 (1) 15 (2) -4 (3) 12 (4) 33

041 (1) $a=-3$, $b=2$ (2) $a=-4$, $b=3$
(3) $a=50$, $b=49$

042 $7x-1$

043 $-10x-10$

044 $9x+12$

045 ③ **046** 6 **047** ② **048** $y'=4x^3+3x^2-24x+7$

049 ① **050** -36 **051** $y'=4x^3-2x+2$

052 0 **053** ② **054** 12 **055** ⑤ **056** -12

3 도함수의 활용 (1)

53쪽~71쪽

057 (1) -4 (2) 1 (3) 6 (4) 2 (5) 7

058 (1) $a=-2$, $b=-3$ (2) $a=-6$, $b=7$
(3) $a=-6$, $b=7$ (4) $a=1$, $b=-3$

059 (1) $y=2x-6$ (2) $y=3x-9$ (3) $y=8x+1$
(4) $y=5x-23$ (5) $y=7x-16$ (6) $y=3x+1$
(7) $y=-3x-11$ (8) $y=-5x+2$
(9) $y=3x-12$ (10) $y=-9x-7$

060 (1) $y=-2x-9$ (2) $y=x+4$ (3) $y=-5x+4$

061 (1) $y=x-9$ (2) $y=-x+3$ (3) $y=2x+5$
(4) $y=-2x+1$

062 (1) $y=-2x+1$ 또는 $y=6x-7$
(2) $y=-x$ 또는 $y=3x-4$
(3) $y=-3x+4$ 또는 $y=x$
(4) $y=4x+8$ 또는 $y=-4x$ (5) $y=x+2$

063 (1) $y=\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$ (2) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{31}{4}$
(3) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ (4) $y=\frac{1}{2}x-4$

064 (1) $y=3x-16$ (2) $y=-x-1$ (3) $y=-2x+5$
(4) $y=2x+1$

065 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 1 (3) 4

066 (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2) 2 (3) $\frac{5}{3}$ (4) 1 (5) $-\frac{5}{3}$

067 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1

068 (1) $\pm\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) 2 (4) 1 (5) -1

069 (1) 증가한다. (2) 감소한다. (3) 증가한다.

070 1, 1, 0, 감소, 증가

071 (1) 구간 $(-\infty, -2]$에서 감소, 구간 $[-2, \infty)$에서 증가
(2) 구간 $(-\infty, 3]$에서 감소, 구간 $[3, \infty)$에서 증가
(3) 구간 $(-\infty, 2]$에서 증가, 구간 $[2, \infty)$에서 감소
(4) 구간 $(-\infty, -2]$, $[0, \infty)$에서 증가,
구간 $[-2, 0]$에서 감소
(5) 구간 $(-\infty, 0]$, $[1, \infty)$에서 감소,
구간 $[0, 1]$에서 증가
(6) 구간 $(-\infty, -2]$, $[-1, \infty)$에서 증가,
구간 $[-2, -1]$에서 감소

072 (1) 증가상태 (2) 감소상태 (3) 감소상태
(4) 감소상태 (5) 증가상태

073 (1) $a\ge\frac{1}{6}$ (2) $-6\le a\le 6$ (3) $0\le a\le\frac{1}{3}$

074 (1) $a=-6$, $b=-9$ (2) $a=-\frac{3}{2}$, $b=-24$
(3) $a=-9$, $b=24$ (4) $a=-3$, $b=-\frac{9}{2}$

빠른 정답

075 (1) 극댓값 : 4, 극솟값 : -2 (2) 극댓값 : 2, 극솟값 : 1
(3) 극댓값 : 4, 극솟값 : 1

076 (1) 극댓값 : 4, 극솟값 : 0
(2) 극댓값 : 0, 극솟값 : -32
(3) 극댓값 : -2, 극솟값 : -6
(4) 극댓값 : 17, 극솟값 : -15
(5) 극댓값 : 5, 극솟값 : -27
(6) 극댓값 : 2, 극솟값 : -25

077 (1) 극값을 갖지 않는다.
(2) 극댓값 : 없다., 극솟값 : -16
(3) 극댓값 : 없다., 극솟값 : -26
(4) 극댓값 : -2, 극솟값 : 없다.

078 (1) $a=0$, $b=3$, $c=-5$ (2) $a=3$, $b=9$, $c=3$
(3) $a=-3$, $b=-9$, $c=1$ (4) $a=9$, $b=24$, $c=2$
(5) $a=0$, $b=3$, $c=-1$ (6) $a=3$, $b=4$, $c=2$

079 (1) $a<\frac{3}{2}$ (2) $a<-3$ 또는 $a>3$
(3) $a<-6$ 또는 $a>6$ (4) $a<0$ 또는 $a>\frac{1}{3}$
(5) $a<0$ 또는 $a>3$ (6) $a<0$ 또는 $a>1$

080 (1) $-\sqrt{6}\le a\le\sqrt{6}$ (2) $-3\le a\le 3$ (3) $-6\le a\le 0$
(4) $0\le a\le 2$ (5) $-9\le a\le 0$ (6) $1\le a\le 4$

081 ① 082 5 083 ②
084 $y=3x+16$ 또는 $y=3x-16$ 085 $y=-2x+7$
086 ① 087 -3 088 $\frac{7}{3}$ 089 ⑤ 090 ① 091 $\frac{1}{3}$
092 ④ 093 1개 094 ③
095 증가 : $-1\le x\le 3$, 감소 : $x\le -1$, $x\ge 3$ 096 ②
097 -4 098 -10 099 ⑤ 100 5 101 ③
102 ① 103 4 104 0

4 도함수의 활용 (2)

74쪽~92쪽

105 (1) 풀이 참고 (2) 풀이 참고 (3) 풀이 참고
(4) 풀이 참고 (5) 풀이 참고

106 (1) 풀이 참고 (2) 풀이 참고 (3) 풀이 참고
(4) 풀이 참고 (5) 풀이 참고 (6) 풀이 참고

107 (1) 최댓값 : 8, 최솟값 : 4 (2) 최댓값 : 8, 최솟값 : -24
(3) 최댓값 : 4, 최솟값 : 0

108 (1) 최댓값 : 3, 최솟값 : -1
(2) 최댓값 : 5, 최솟값 : -35
(3) 최댓값 : 46, 최솟값 : -6
(4) 최댓값 : 18, 최솟값 : 1

109 (1) $a=1$, $b=-12$ (2) $a=6$, $b=10$
110 (1) 5 (2) 3 (3) -1
111 (1) $0<a<\sqrt{3}$
(2) $\mathrm{A}(-a, -a^2+3)$, $\mathrm{B}(-a, 0)$, $\mathrm{C}(a, 0)$, $\mathrm{D}(a, -a^2+3)$
(3) $S(a)=-2a^3+6a$ (4) 4
112 (1) $0<x<3$ (2) $y=15-5x$ (3) $V(x)=\pi(15x^2-5x^3)$
(4) 20π
113 (1) 1개 (2) 3개 (3) 2개 (4) 1개
114 (1) 풀이 참고 (2) $-4<k<0$ (3) $k=-4$ 또는 $k=0$
(4) $k<-4$ 또는 $k>0$
115 $k>0$
116 $0<k<1$
117 $-5<k<0$
118 (1) $-2<k<2$ (2) $-28<k<80$
(3) $k=-16$ 또는 $k=16$ (4) $k=-\frac{5}{3}$ 또는 $k=9$
(5) $k<0$ 또는 $k>1$ (6) $k<1$ 또는 $k>5$
119 (1) $-4<k<0$ (2) $-25<k<7$
(3) $k=-17$ 또는 $k=15$ (4) $k=-19$ 또는 $k=8$
(5) $k<-20$ 또는 $k>7$ (6) $k<0$ 또는 $k>1$
120 (1) 풀이 참고 (2) 풀이 참고 (3) 풀이 참고
(4) 풀이 참고 (5) 풀이 참고 (6) 풀이 참고
121 (1) $k\ge 16$ (2) $k\le -1$ (3) $k>0$
122 (1) $k\ge 4$ (2) $k>5$ (3) $k\ge 10$
123 (1) $k\le 3$ (2) $k\ge 5$ (3) $k\ge 24$
124 (1) $v=-9$, $a=6$ (2) 3초 후 (3) -27
125 (1) $v=-12$, $a=-18$ (2) 1초 후 (3) -5
126 (1) 4 (2) 11 (3) 18
127 (1) $v=10$, $a=-10$ (2) 20 m
128 (1) $v=-10$, $a=-10$ (2) 90 m
129 (1) 19.6 m (2) -19.6 m/s
130 (1) 20 m (2) -20 m/s
131 (1) 5 (2) 7 (3) 17 (4) 31
132 (1) $y=x$ (2) 2 m/s
133 8 m/s
134 (1) 10 (2) 19 (3) 53 (4) 36 (5) 66
135 (1) $S=(4+2t)^2$ (2) $8t+16$ (3) 40 cm^2/s
136 8 cm^2/s
137 (1) 75 (2) 294 (3) 144 (4) 36 (5) 5.4
138 (1) $V=(6+2t)^3$ (2) $6(6+2t)^2$ (3) 600 cm^3/s
139 54 cm^3/s
140 ③ 141 ② 142 18 143 ⑤ 144 128 cm^3
145 3개 146 ① 147 $\frac{7}{4}$ 148 10 149 180 m
150 ⑤

Ⅲ 적분

1 부정적분 95쪽~100쪽

001 (ㄱ), (ㄷ)

002 (1) $3x+C$ (2) $\frac{1}{2}x^2+C$ (3) x^5+C (4) $-x^4+C$

003 (1) $3x^2$ (2) $4x+1$ (3) $3x^2-4x+3$ (4) $-2x^2+x+1$ (5) $2x-\frac{5}{2}$

004 (1) x^2-4x (2) x^2-4x+C (3) $\neq$

005 -2

006 9

007 (1) $9x+C$ (2) $\frac{1}{8}x^8+C$ (3) $\frac{1}{11}x^{11}+C$ (4) $\frac{1}{36}x^{36}+C$ (5) $\frac{1}{100}x^{100}+C$

008 (1) x^3-7x+C (2) $-\frac{1}{3}x^3+x^2-x+C$ (3) x^5+2x^3-3x+C

009 (1) $\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+3x+C$ (2) $\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2+x+C$ (3) $\frac{1}{4}x^4+x+C$ (4) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$ (5) x^2+tx+C (6) $\frac{1}{2}x^2-x+C$

010 18

011 $f(x)=2x^4-x^3-2x^2+x-3$

012 $f(x)=6x^2-2x+2$

013 -1

014 ② 015 ⑤ 016 ④ 017 ④ 018 ② 019 $\frac{25}{2}$

020 -13 021 ① 022 ② 023 17 024 6

025 10

2 정적분 103쪽~112쪽

026 (1) $\frac{65}{4}$ (2) 12 (3) 0 (4) 0 (5) $\frac{8}{3}$ (6) 9 (7) -28 (8) $-\frac{29}{6}$

027 (1) 4 (2) -12 (3) 20 (4) $\frac{76}{3}$ (5) 24 (6) $\frac{56}{3}$ (7) $\frac{11}{6}$

028 (1) 40 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 16 (4) 3 (5) 4 (6) $\frac{33}{2}$ (7) 24

029 $\frac{27}{2}$

030 6

031 (1) 4 (2) $\frac{31}{6}$ (3) $\frac{43}{2}$

032 (1) $\frac{4}{3}$ (2) 0 (3) 2 (4) 48

033 (1) $f(x)=2x-4$ (2) $\frac{5}{4}$ (3) $f(x)=x^2-6x+9$ (4) $\frac{49}{6}$ (5) -3

034 7

035 4

036 -10

037 극댓값 : 27, 극솟값 : -5

038 최댓값 : $\frac{5}{6}$, 최솟값 : $-\frac{1}{6}$

039 (1) 208 (2) -3 (3) 11

040 ③ 041 4 042 $\frac{1}{2}$ 043 7 044 5200

045 -1 046 ① 047 6 048 54 049 7

050 -1 051 3

3 정적분의 활용 115쪽~123쪽

052 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

053 (1) $\frac{22}{3}$ (2) $\frac{31}{6}$ (3) $\frac{3}{4}$

054 (1) $\frac{125}{6}$ (2) $\frac{9}{2}$

055 (1) $\frac{64}{3}$ (2) 4

056 (1) $\frac{37}{12}$ (2) $\frac{37}{12}$ (3) 8

057 $\frac{4}{3}$

058 4

059 1

060 1

061 -2

062 $5-5\sqrt[3]{2}$

063 $\frac{1}{6}$

064 (1) $-\frac{9}{2}$ (2) $\frac{9}{2}$초 (3) 9

065 128 m

066 25 m

067 -2

068 13 069 ③ 070 $\frac{81}{2}$ 071 81 072 $\frac{13}{3}$ 073 ②

074 $\frac{1}{3}$ 075 $\frac{2}{3}$ 076 54 077 3 078 ⑤ 079 2

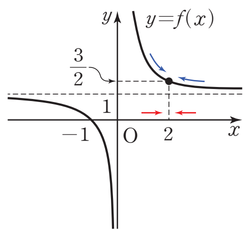
Ⅰ 함수의 극한과 연속

1 함수의 극한

9쪽~19쪽

001 답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 2 (3) 5

(1) 함수 $f(x)=\frac{1}{x}+1$의 그래프에서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\frac{3}{2}$에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x}+1\right)=\frac{3}{2}$



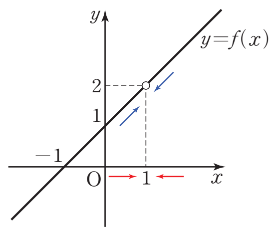
(2) 함수 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$에서

$x\neq1$일 때

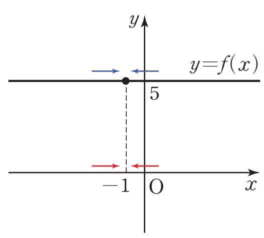
$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=x+1$

$y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$



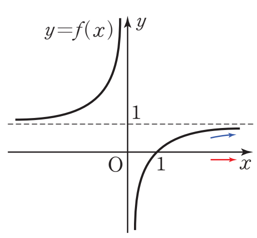
(3) $f(x)=5$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 5에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to-1}5=5$



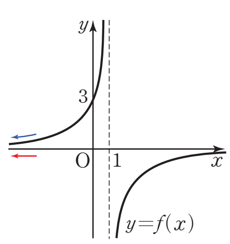
002 답 (1) 1 (2) 0

(1) $f(x)=1-\frac{1}{x}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$



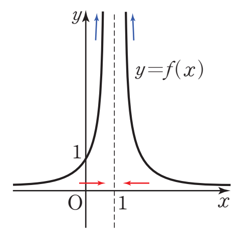
(2) $f(x)=\frac{3}{1-x}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{1-x}=0$



003 답 (1) ∞ (2) $-\infty$

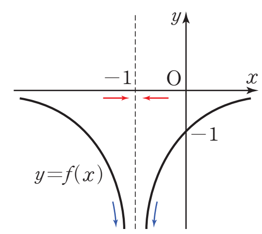
(1) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$



(2) $f(x)=-\frac{1}{|x+1|}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

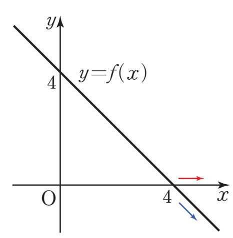
$\lim_{x\to-1}\left(-\frac{1}{|x+1|}\right)=-\infty$



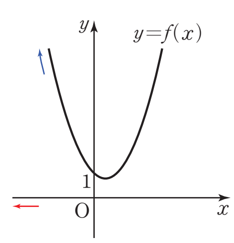
004 답 (1) $-\infty$ (2) ∞ (3) $-\infty$

(1) $f(x)=-x+4$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x\to\infty}(-x+4)=-\infty$

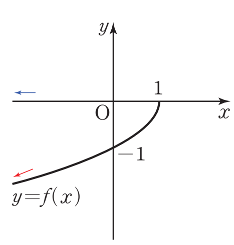


(2) $f(x)=x^2-x+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로 $\lim_{x\to-\infty}(x^2-x+1)=\infty$



(3) $f(x)=-\sqrt{1-x}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

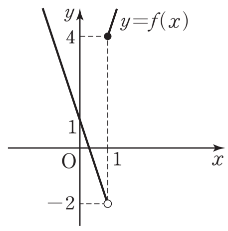
$\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{1-x})=-\infty$



06-15 수학2-1단원해설-ok.indd 6 2018-09-28 오후 12:51:21

005 답 (1) 4 (2) -2

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \lim_{x\to1+} f(x)=4$

(2) $\lim_{x\to1-} f(x)=-2$

006 답 (1) 1 (2) 1 (3) 1 (4) 0

(1) x의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to0+} f(x)=1$

(2) x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to0-} f(x)=1$

(3) x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

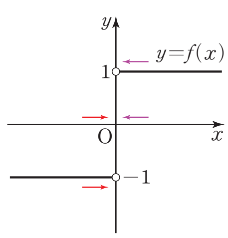
$\therefore \lim_{x\to1+} f(x)=1$

(4) x의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to1-} f(x)=0$

007 답 (1) 존재하지 않는다. (2) 0

(1) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



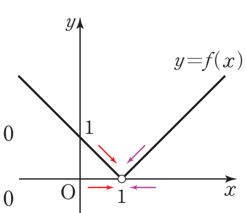
$x\to0+$일 때, $\lim_{x\to0+}\dfrac{x}{|x|}=1$

$x\to0-$일 때, $\lim_{x\to0-}\dfrac{x}{|x|}=-1$

따라서 $x=0$에서 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 모두 존재하지만 그 값이 서로 다르므로 극한값은 존재하지 않는다.

(2) $x\neq1$일 때, $\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}=|x-1|$

따라서 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x\to1+$일 때, $\lim_{x\to1+}\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}=0$

$x\to1-$일 때, $\lim_{x\to1-}\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}=0$

따라서 $x=1$에서 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값이 0으로 같으므로 $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}=0$

008 답 (1) -4 (2) 2 (3) -6 (4) -8 (5) $-\dfrac{1}{2}$

(1) $\lim_{x\to1}2f(x)=2\lim_{x\to1}f(x)=2\cdot(-2)=-4$

(2) $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to1}g(x)=-2+4=2$

(3) $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)-\lim_{x\to1}g(x)=-2-4=-6$

(4) $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}f(x)\cdot\lim_{x\to1}g(x)=-2\cdot4=-8$

(5) $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to1}f(x)}{\lim_{x\to1}g(x)}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

009 답 (1) 5 (2) 3 (3) 16 (4) $\dfrac{1}{3}$ (5) 5

(1) $\lim_{x\to2}(3x-1)=3\cdot2-1=5$

(2) $\lim_{x\to1}(x^2+2x)=1^2+2\cdot1=3$

(3) $\lim_{x\to3}(x-1)(2x^2-3x-1)=(3-1)(2\cdot3^2-3\cdot3-1)$

$=2\cdot8=16$

(4) $\lim_{x\to2}\dfrac{2x-1}{x+7}=\dfrac{2\cdot2-1}{2+7}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

(5) $\lim_{x\to3}\dfrac{x^2-2x+7}{5-x}=\dfrac{3^2-2\cdot3+7}{5-3}=\dfrac{10}{2}=5$

010 답 (1) -1 (2) $\dfrac{2}{5}$ (3) $\dfrac{1}{4}$ (4) $\dfrac{1}{2}$

(1) $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x-3)=-1$

(2) $\lim_{x\to1}\dfrac{x^3-x}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to1}\dfrac{x(x+1)(x-1)}{(x+4)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{x(x+1)}{x+4}=\dfrac{2}{5}$

(3) $\lim_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to4}\dfrac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{4}$

(4) $\lim_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{1}{2}$

011 답 (1) $\dfrac{3}{2}$ (2) ∞ (3) 0 (4) 2

(1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{3}{2}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x-3+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{0-0}{1-0+0}=0$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}}=2$

012 답 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $\dfrac{1}{4}$ (4) $\dfrac{2}{3}$

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x+1)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(-4x^3+3x^2+x-5)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(-4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}\right)=-\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+2}=\dfrac{1}{4}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+x}{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+x}{3x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+1}{3}=\dfrac{2}{3}$

013 답 (1) -5 (2) 2 (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) $\dfrac{3}{16}$

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{4x+1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{5x}{(x-1)(4x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{4x^2-3x-1}=-5$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left\{1-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{(x+1)^2}=2$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+3}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(\sqrt{4x+3}-2\sqrt{x})}{2\sqrt{4x+3}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(\sqrt{4x+3}-2\sqrt{x})(\sqrt{4x+3}+2\sqrt{x})}{2\sqrt{4x+3}(\sqrt{4x+3}+2\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{8x+6+4\sqrt{4x^2+3x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{8+\dfrac{6}{x}+4\sqrt{4+\dfrac{3}{x}}}=\dfrac{3}{8+8}=\dfrac{3}{16}$

014 답 (1) $a=1$, $b=-2$ (2) $a=-1$, $b=-2$
(3) $a=4$, $b=-8$ (4) $a=1$, $b=-1$

(1) $x\to 1$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore\ b=-a-1$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-a-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}(x+a+1)=a+2$

따라서 $a+2=3$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

(2) $x\to 2$일 때, (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모)$\to 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$이므로 $4+2a+b=0$

$\therefore\ b=-2a-4$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+ax-2a-4}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+a+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+a+2}=\dfrac{1}{4+a}$

따라서 $\dfrac{1}{4+a}=\dfrac{1}{3}$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

(3) $x\to 4$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 4}(a\sqrt{x}+b)=0$이므로 $2a+b=0$

$\therefore\ b=-2a$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{a\sqrt{x}-2a}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{a(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{a(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{a}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{a}{4}$

06-15 수학2-1단원해설-ok.indd 8 2018-09-28 오후 12:51:23

따라서 $\frac{a}{4}=1$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-8$

(4) $x \to 2$일 때, (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}(\sqrt{x-a}+b)=0$이므로 $\sqrt{2-a}+b=0$

$\therefore b=-\sqrt{2-a}$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-a}+b}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-a}-\sqrt{2-a}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{x-a}+\sqrt{2-a})}{(\sqrt{x-a}-\sqrt{2-a})(\sqrt{x-a}+\sqrt{2-a})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x-a}+\sqrt{2-a})}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x-a}+\sqrt{2-a})$$

$$=4\times 2\sqrt{2-a}$$

따라서 $8\sqrt{2-a}=8$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

015 답 (1) $f(x)=2x^2-2x$ (2) $f(x)=x^2+9x+14$

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인

이차식임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=1$에서 $x\to 1$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=2(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+a)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x+a)}{x+1}=\frac{2(1+a)}{2}=1+a$$

즉 $1+a=1$이므로 $a=0$

따라서 $f(x)=2x(x-1)=2x^2-2x$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x-6}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인

이차식임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2-x-6}=-1$에서 $x\to -2$일 때 극한값이

존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to -2}f(x)=0$이므로 $f(-2)=0$

$f(x)=(x+2)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2-x-6}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+a)}{(x+2)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+a}{x-3}=-\frac{a-2}{5}$$

즉 $-\frac{a-2}{5}=-1$이므로 $a=7$

따라서 $f(x)=(x+2)(x+7)=x^2+9x+14$

016 답 (1) -8 (2) 18 (3) -36

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-2x-3}=2$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인

이차식임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x^2-2x-3}=2$에서 $x\to 3$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 3}f(x)=0$이므로 $f(3)=0$

$f(x)=2(x-3)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)(x+a)}{(x-3)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+a)}{x+1}=\frac{6+2a}{4}$$

즉 $\frac{6+2a}{4}=2$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=2(x-3)(x+1)$이므로

$f(1)=2\cdot(-2)\cdot 2=-8$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-2x+4}=3$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인

이차식임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=5$에서 $x\to 1$일 때 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=3(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+a)}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+a)}{x+2}=a+1$$

즉 $a+1=5$이므로 $a=4$

따라서 $f(x)=3(x-1)(x+4)$이므로

$f(2)=3\cdot 1\cdot 6=18$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+4}=3$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인

이차식임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{f(x)}=\frac{1}{6}$에서 $x\to 2$일 때 0이 아닌 극한값이

존재하고 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$f(x)=3(x-2)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{3(x-2)(x+a)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{3(x+a)}=\frac{4}{3(2+a)}$$

즉 $\frac{4}{3(2+a)}=\frac{1}{6}$이므로 $a=6$

따라서 $f(x)=3(x-2)(x+6)$이므로

$f(0)=3\cdot(-2)\cdot 6=-36$

017 답 $\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{3x+1}=\frac{1}{3}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+4}{3x^2+2}=\frac{1}{3}$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{3}$

018 답 $\frac{5}{3}$

$x>0$이므로 주어진 부등식의 각 변에 x를 곱하면

$\frac{5x^2}{3x^2+x+2}<xf(x)<\frac{10x^2}{6x^2+x+3}$

그런데 $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{3x^2+x+2}=\frac{5}{3}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2}{6x^2+x+3}=\frac{5}{3}$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}xf(x)=\frac{5}{3}$

019 답 ④

① $\lim_{x\to1}(2x+1)=3$　② $\lim_{x\to2}(x^2-1)=3$

③ $\lim_{x\to1}(x^2+2x-1)=2$　④ $\lim_{x\to3}\frac{x+4}{x-2}=7$

⑤ $\lim_{x\to-1}\sqrt{-x+3}=2$

따라서 극한값이 가장 큰 것은 ④이다.

020 답 ②

x의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to1-}f(x)=-1$

x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to2+}f(x)=-1$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)$

$=1+(-1)+(-1)=-1$

021 답 (ㄱ)

(ㄱ) $\lim_{x\to3+}|x-3|=\lim_{x\to3+}(x-3)=0$

$\lim_{x\to3-}|x-3|=\lim_{x\to3-}\{-(x-3)\}=0$

$\therefore \lim_{x\to3}|x-3|=0$

(ㄴ) $\lim_{x\to1+}\frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=1$

$\lim_{x\to1-}\frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x\to1-}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{|x-1|}{x^2-x}$의 값은 존재하지 않는다.

(ㄷ) $\lim_{x\to-4+}\frac{x^2-16}{|x+4|}=\lim_{x\to-4+}(x-4)=-8$

$\lim_{x\to-4-}\frac{x^2-16}{|x+4|}=\lim_{x\to-4-}\{-(x-4)\}=8$

따라서 $\lim_{x\to-4}\frac{x^2-16}{|x+4|}$의 값은 존재하지 않는다.

022 답 ①

주어진 식의 분모, 분자를 x로 각각 나누면

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2+4f(x)}{2x^2-f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x+\frac{4f(x)}{x}}{2x-\frac{f(x)}{x}}=\frac{0+4}{0-1}=-4$$

023 답 24

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{(x-4)f(x)}{\sqrt{x}-2}&=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)f(x)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\\&=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)f(x)(\sqrt{x}+2)}{x-4}\\&=\lim_{x\to4}f(x)(\sqrt{x}+2)\\&=6(\sqrt{4}+2)=24\end{aligned}$$

024 답 -1

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{4x^2-x}}&=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t}{\sqrt{t^2+3t}+\sqrt{4t^2+t}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+\sqrt{4+\frac{1}{t}}}=-1\end{aligned}$$

025 답 ⑤

분자를 유리화하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}=\frac{2a}{1+1}=a\end{aligned}$$

$\therefore a=5$

026 답 6

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{4}{x+1}\left(x-\frac{2}{x-1}\right)&=\lim_{x\to-1}\frac{4}{x+1}\cdot\frac{x^2-x-2}{x-1}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{4}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{4(x-2)}{x-1}=6\end{aligned}$$

027 답 -2

$x\to-1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1-a+b=0$

$\therefore b=a-1$　$\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+b}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+a-1)=a-2$$

따라서 $a-2=2$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore\ a-2b=4-6=-2$

028 답 2

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-kx}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-kx}-x)(\sqrt{x^2-kx}+x)}{\sqrt{x^2-kx}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-kx}{\sqrt{x^2-kx}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-k}{\sqrt{1-\frac{k}{x}}+1}=\frac{-k}{2}$$

따라서 $\frac{-k}{2}=-1$이므로 $k=2$

029 답 -6

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{f(x)}=\frac{1}{2}$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=2(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+a)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x+a)}{x+1}=1+a$$

즉 $1+a=3$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=2(x-1)(x+2)$이므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{2(x-1)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to-2}2(x-1)=-6$$

030 답 ④

모든 양의 실수 x에 대하여 $3x+1<f(x)<3x+5$이므로

주어진 부등식의 각 변을 제곱하면

$(3x+1)^2<\{f(x)\}^2<(3x+5)^2$

각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{(3x+1)^2}{x^2+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}<\frac{(3x+5)^2}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+5)^2}{x^2+1}=9$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}=9$$

2 함수의 연속

22쪽~28쪽

031 답 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 불연속

(1) (i) $f(2)=5$

(ii) $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=5$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(2) (i) $f(0)=0$

(ii) $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to0}(x+1)=1$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(3) (i) $f(1)=0$

(ii) $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{x-1}=1$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$

즉 $\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 극한값 $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

032 답 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ \infty)$

(3) $(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ \infty)$ (4) $[-1,\ \infty)$

(1) 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로

기호로 나타내면 $(-\infty,\ \infty)$

(2) 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로

기호로 나타내면 $(-\infty,\ \infty)$

(3) $x+2\neq0$, 즉 $x\neq-2$에서

정의역은 $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$이므로

기호로 나타내면 $(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ \infty)$

(4) $x+1\geq0$에서 $x\geq-1$

따라서 정의역은 $\{x|x\geq-1\}$이므로

기호로 나타내면 $[-1,\ \infty)$

033 답 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ 5)$, $(5,\ \infty)$

(3) $(-\infty,\ -1]$, $[2,\ \infty)$

(1) 함수 $f(x)=x^2+2$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ \infty)$이다.

(2) 함수 $f(x)=\frac{x}{x-5}$는 $x\neq5$일 때, 즉 $x<5$ 또는 $x>5$일 때 연속이므로 구간 $(-\infty,\ 5)$, $(5,\ \infty)$에서 연속이다.

(3) 함수 $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$는 $x^2-x-2\geq0$,

즉 $(x-2)(x+1)\geq0$에서

$x\le-1$ 또는 $x\ge2$일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$이다.

034 답 3

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=3$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to3+} f(x)=\lim_{x\to3-} f(x)=f(3)$

이때 $\lim_{x\to3+} f(x)=\lim_{x\to3+}(x+a)=3+a$,

$\lim_{x\to3-} f(x)=\lim_{x\to3-}(x^2-x)=6$, $f(3)=6$이므로

$3+a=6 \qquad \therefore a=3$

035 답 8

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이다.

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$ $\qquad$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=0$이므로 $a+b=0$

$\therefore b=-a$ $\qquad$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}-a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=2$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $b=-4$

$\therefore a-b=8$

036 답 5

$x\ne2$일 때, $f(x)=\frac{x^2+x+a}{x-2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x^2+x+a}{x-2}=f(2)$ $\qquad$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서 $x\to2$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(x^2+x+a)=0$이므로 $4+2+a=0$

$\therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면

$$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+3)=5$$

037 답 4

$x\ne3$일 때, $f(x)=\frac{x^2+ax-3}{x-3}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3} f(x)=f(3)$

$\therefore \lim_{x\to3}\frac{x^2+ax-3}{x-3}=f(3)$ $\qquad$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서 $x\to3$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(x^2+ax-3)=0$이므로 $9+3a-3=0 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$f(3)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x+1)=4$$

038 답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$ (3) $(-\infty, \infty)$ (4) $(-\infty, \infty)$

(1) $f(x)$는 다항함수이고, $g(x)$도 다항함수이므로 $f(x)+g(x)$는 다항함수이다.
따라서 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(2) $f(x)$는 다항함수이고, $2g(x)$도 다항함수이므로 $f(x)-2g(x)$는 다항함수이다.
따라서 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(3) $f(x)$, $g(x)$가 모두 다항함수이므로 $f(x)g(x)$는 다항함수이다.
따라서 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(4) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x^2-3x}{x^2+2}$
따라서 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x^2+2>0$인 모든 실수에서 연속이므로 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

039 답 (1) 연속 (2) 연속 (3) 불연속 (4) 불연속

(1) 두 함수 $f(x)=x^2-5x$, $g(x)=x^2-3$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 $f(x)$, $2g(x)$는 연속함수의 성질에 의해 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)+2g(x)$도 연속함수의 성질에 의해 모든 실수 x에서 연속이다.

(2) $\{f(x)\}^2=f(x)\times f(x)$이므로 연속함수의 성질에 의해 모든 실수 x에서 연속이다.

(3) $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2-3}{x^2-5x}=\frac{x^2-3}{x(x-5)}$
이 함수는 $x=0$, $x=5$에서 정의되지 않으므로 $x=0$, $x=5$에서 불연속이다.

(4) $\dfrac{1}{f(x)-g(x)}=\dfrac{1}{(x^2-5x)-(x^2-3)}=\dfrac{1}{-5x+3}$

이 함수는 $x=\dfrac{3}{5}$에서 정의되지 않으므로

$x=\dfrac{3}{5}$에서 불연속이다.

040 답 (1) 최댓값 : 0, 최솟값 : -1 (2) 최댓값 : 4, 최솟값 : 0

(3) 최댓값 : -1, 최솟값 : $-\sqrt{3}$

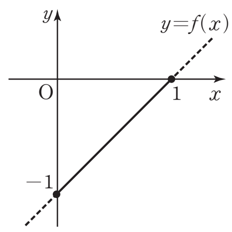
(4) 최댓값 : $2\sqrt{3}$, 최솟값 : $\sqrt{2}$

(5) 최댓값 : 1, 최솟값 : $\dfrac{1}{3}$ (6) 최댓값 : 3, 최솟값 : $\dfrac{3}{2}$

(1) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 $f(x)=x-1$이고,

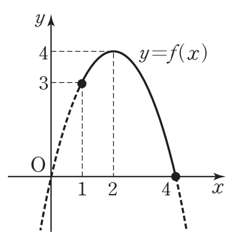
구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 0, $x=0$일 때 최솟값 -1을 갖는다.



(2) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 $f(x)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$이고,

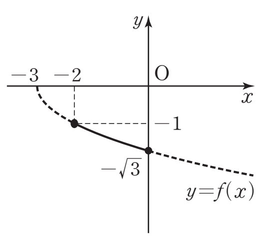
구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 4, $x=4$일 때 최솟값 0을 갖는다.



(3) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

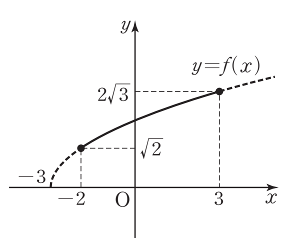
이때 $f(x)=-\sqrt{x+3}$이고,

구간 $[-2,\ 0]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 -1, $x=0$일 때 최솟값 $-\sqrt{3}$을 갖는다.



(4) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

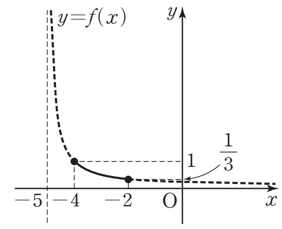
이때 $f(x)=\sqrt{2x+6}=\sqrt{2(x+3)}$이고, 구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $2\sqrt{3}$, $x=-2$일 때 최솟값 $\sqrt{2}$를 갖는다.



(5) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-4,\ -2]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 $f(x)=\dfrac{1}{x+5}$이고,

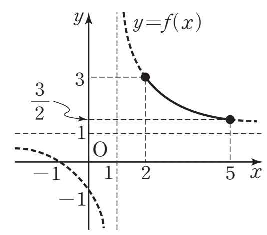
구간 $[-4,\ -2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=-4$일 때 최댓값 1, $x=-2$일 때 최솟값 $\dfrac{1}{3}$을 갖는다.



(6) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2,\ 5]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$이고,

구간 $[2,\ 5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 3, $x=5$일 때 최솟값 $\dfrac{3}{2}$을 갖는다.



041 답 (1) 풀이 참고 (2) 풀이 참고 (3) 풀이 참고

(1) $f(x)=x^3-3x^2+5x+6$으로 놓으면

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고

$f(-1)=-3<0,\ f(1)=9>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-3x^2+5x+6=0$은 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=2x^3-3x^2-1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$f(1)=-2<0,\ f(2)=3>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $2x^3-3x^2-1=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(3) $f(x)=x^4-4x^3-x-3$으로 놓으면

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고

$f(-1)=3>0,\ f(1)=-7<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^4-4x^3-x-3=0$은 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

042 답 ③

① 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 정의되지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

② $x=-1$에서 함숫값은 $f(-1)=0$

$x \to -1$일 때, 극한값은

$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}([x]-x)=\lim_{x\to-1+}(-1-x)=0$

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}([x]-x)=\lim_{x\to-1-}(-2-x)=-1$

즉, $\lim_{x\to-1+} f(x)\neq\lim_{x\to-1-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to-1} f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

③ $x=-1$에서 함숫값은 $f(-1)=-3$

$x \to -1$일 때, 극한값은

$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-2)=-3$

$\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

④ $x=-1$에서 함숫값은 $f(-1)=2$

$x \to -1$일 때, 극한값은

$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{x+1}{|x+1|}=\lim_{x\to-1+}\frac{x+1}{x+1}=1$

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{x+1}{|x+1|}=\lim_{x\to-1-}\frac{x+1}{-(x+1)}=-1$

즉, $\lim_{x\to-1+} f(x)\neq\lim_{x\to-1-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to-1} f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

⑤ $x=-1$에서 함숫값은 $f(-1)=0$

$x \to -1$일 때, 극한값은

$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}(-\sqrt{x+1}+5)=5$

$\lim_{x\to-1} f(x)\neq f(-1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

따라서 $x=-1$에서 연속인 함수는 ③이다.

043 답 3

(i) $\lim_{x\to1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to1-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to1+} f(x)\neq\lim_{x\to1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재하지 않으므로

$f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ii) $f(2)=3$, $\lim_{x\to2+} f(x)=2$, $\lim_{x\to2-} f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to2} f(x)=2$

$\lim_{x\to2} f(x)\neq f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $f(3)=3$, $\lim_{x\to3+} f(x)=3$, $\lim_{x\to3-} f(x)=3$

$\therefore \lim_{x\to3} f(x)=3$

$\lim_{x\to3} f(x)=f(3)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=1$, $b=2$이므로 $a+b=3$

044 답 5

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$

이때 $\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^3+bx+2)=1-b$,

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}(-x^2+x+a)=a-2$이므로

$1-b=a-2=2$

$\therefore a=4,\ b=-1$

$\therefore a-b=4-(-1)=5$

045 답 ①

함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3+} f(x)g(x)=\lim_{x\to3-} f(x)g(x)=f(3)g(3)$

이때 $f(3)g(3)=7(3-k)=21-7k$이고

$\lim_{x\to3+} f(x)g(x)=\lim_{x\to3+}(-x+2)(x-k)=-(3-k)=-3+k$

$\lim_{x\to3-} f(x)g(x)=\lim_{x\to3-}(2x+1)(x-k)=7(3-k)=21-7k$

따라서 $-3+k=21-7k$이므로 $8k=24$

$\therefore k=3$

046 답 6

$x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{x^2+ax-3}{x-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-3}{x-1}=f(1)$ …… ㉠

$x \to 1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2+ax-3)=0$이므로 $1+a-3=0$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+3)=4$

$\therefore f(1)=4$

$\therefore a+f(1)=2+4=6$

06-15 수학2-1단원해설-ok.indd 14
2018-09-28 오후 12:51:29

047 답 ④

$x\neq1$일 때, $f(x)=\dfrac{ax^2-bx}{x-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{ax^2-bx}{x-1}=3$ …… ㉠

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(ax^2-bx)=0$이므로 $a-b=0$

$\therefore a=b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to1}\dfrac{ax^2-bx}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{ax^2-ax}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{ax(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}ax=a$

$\therefore a=3,\ b=3$

$\therefore a^2+b^2=18$

048 답 ③

① $f(x)+3g(x)=(x+2)+3(x^2+1)=3x^2+x+5$이므로
이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

② $f(x)g(x)=(x+2)(x^2+1)=x^3+2x^2+x+2$이므로
이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

③ $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2+1}{x+2}$이고 이 함수는 $x=-2$에서
정의되지 않으므로 $x=-2$에서 불연속이다.

④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x+2}{x^2+1}$이므로 이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ $g(f(x))=g(x+2)=(x+2)^2+1=x^2+4x+5$이므로
이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

049 답 ④

$f(x)=x^2-4x+1,\ g(x)=x^2-5x+6$에서

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2-4x+1}{x^2-5x+6}=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)(x-3)}$

즉 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=2,\ x=3$에서 정의되지 않으므로

불연속이 되는 x의 값은 2, 3이다.

따라서 모든 x의 값의 합은 $2+3=5$

050 답 ③

함수 $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$은 $x=-1$에서 불연속이고,

그 이외의 x의 값에서는 연속이다.

①, ④, ⑤ $f(x)$는 주어진 구간에서 연속이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

② $-4\le x<-1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
최댓값은 $f(-4)=\dfrac{3}{-4+1}=-1$

③ $-1<x\le1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
최댓값은 없다.

051 답 ④

$f(x)=x^3+2x-5$로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=-17<0,\ f(-1)=-8<0,\ f(0)=-5<0,$

$f(1)=-2<0,\ f(2)=7>0,\ f(3)=28>0$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여

주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1,\ 2)$이다.

052 답 ①

$f(-2)f(-1)=-4<0,\ f(0)f(1)=-1<0,$

$f(1)f(2)=-2<0$이므로

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2,\ -1)$,

$(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 적어도 3개의

실근을 가지므로

$n=3$

Ⅱ 미분

1 미분계수

31쪽~39쪽

001 답 (1) 4 (2) 1 (3) 3 (4) $\Delta x+2a$

(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{9-1}{2}=4$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{0-(-1)}{1}=1$

(3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{6-0}{2}=3$

(4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}=\dfrac{a^2+2a\times\Delta x+(\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}$

$=\Delta x+2a$

002 답 (1) 5 (2) 9 (3) 4 (4) 6

(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}=\dfrac{(a^2-6)+5}{a-1}=\dfrac{(a+1)(a-1)}{a-1}$

$=a+1=6$

$\therefore a=5$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}=\dfrac{(a^2+a)-2}{a-1}=\dfrac{(a+2)(a-1)}{a-1}$

$=a+2=11$

$\therefore a=9$

(3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}=\dfrac{(a^2+2a+1)-4}{a-1}=\dfrac{(a+3)(a-1)}{a-1}$

$=a+3=7$

$\therefore a=4$

(4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}=\dfrac{(a^2+3a-1)-3}{a-1}=\dfrac{(a+4)(a-1)}{a-1}$

$=a+4=10$

$\therefore a=6$

003 답 (1) 2 (2) 8 (3) 6 (4) 2

(1) $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(\Delta x)^2+2\Delta x+2\}-2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2)=2$

(2) $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{2(\Delta x)^2+8\Delta x+5\}-5}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2\Delta x+8)=8$

(3) $f'(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{-3(\Delta x)^2+6\Delta x+1\}-1}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-3\Delta x+6)=6$

(4) $f'(-2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}\{(\Delta x)^2-4\Delta x+4\}-(-2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{1}{2}\Delta x+2\right)=2$

004 답 (1) 2 (2) -8 (3) -24 (4) -6 (5) 0

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2$

$=f'(a)\times 2=2$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+4h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\times 4$

$=f'(a)\times 4=-8$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+8h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+8h)-f(a)}{8h}\times 8$

$=f'(a)\times 8=-24$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-3h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\times(-3)$

$=f'(a)\times(-3)=-6$

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h^2)-f(a)}{5h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h^2)-f(a)}{-h^2}\times\left(-\dfrac{h}{5}\right)$

$=f'(a)\times 0=0$

005 답 (1) -6 (2) -2 (3) -8 (4) -10

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times(-1)$

$=2f'(a)+f'(a)$

$=3f'(a)=-6$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a-2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)+f(a)-f(a-2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times(-1)$

$-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)$

$=-f'(a)+2f'(a)$

$=f'(a)=-2$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times 3-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times(-1)$

$=3f'(a)+f'(a)$

$=4f'(a)=-8$

(4) $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2-\lim_{h\to0}\dfrac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\times(-3)$

$=2f'(a)+3f'(a)=5f'(a)=-10$

006 답 (1) 1 (2) 6 (3) -3 (4) 12

(1) $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\dfrac{1}{x+1}\right\}$

$=f'(1)\times\dfrac{1}{2}=2\times\dfrac{1}{2}=1$

(2) $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$

$=f'(1)\times2=3\times2=6$

(3) $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\left\{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\dfrac{1}{x^2+x+1}\right\}$

$=f'(1)\times\dfrac{1}{3}=-9\times\dfrac{1}{3}=-3$

(4) $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x^3)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\dfrac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times(x^2+x+1)\right\}$

$=f'(1)\times3=4\times3=12$

007 답 (1) -2 (2) 4 (3) -5 (4) -4 (5) 4

(1) 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$과 같으므로

$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{\{(\Delta x)^2-2\Delta x+1\}-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x-2)=-2$

(2) 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{\{2(\Delta x)^2+4\Delta x+3\}-3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}(2\Delta x+4)=4$

(3) 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$과 같으므로

$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{\{3(\Delta x)^2-5\Delta x+2\}-2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}(3\Delta x-5)=-5$

(4) 점 $(2,\ -3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같으므로

$f'(2)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{\{-(\Delta x)^2-4\Delta x-3\}-(-3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}(-\Delta x-4)=-4$

(5) 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로

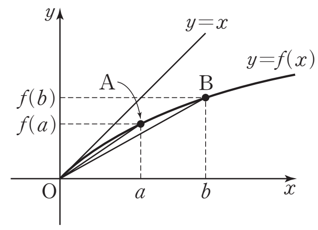
$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{\{(\Delta x)^2+4\Delta x+4\}-4}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x+4)=4$

008 답 (ㄴ), (ㄷ)

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 A, B의 좌표를 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$라 하자.



(ㄱ) $\dfrac{f(a)}{a}$는 직선 OA의 기울기, $\dfrac{f(b)}{b}$는 직선 OB의 기울기이므로 $\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$

(ㄴ) 직선 AB의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기보다 작으므로

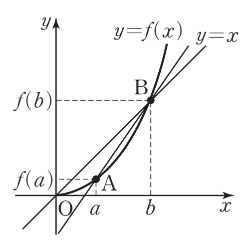
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

$\therefore f(b)-f(a)<b-a$

(ㄷ) $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로 $f'(a)>f'(b)$

따라서 옳은 것은 (ㄴ), (ㄷ)이다.

009 답 (ㄷ)



함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 A, B의 좌표를 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$라 하자.

(ㄱ) $\dfrac{f(a)}{a}$는 직선 OA의 기울기, $\dfrac{f(b)}{b}$는 직선 OB의 기울기이므로

$\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(b)}{b}$

(ㄴ) 직선 AB의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기보다 크므로

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>1$

$\therefore f(b)-f(a)>b-a$

(ㄷ) $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로 $f'(a)<f'(b)$

따라서 옳은 것은 (ㄷ)이다.

010 답 0, 0, 연속이다., 1, -1, 존재하지 않는다., 미분가능하지 않다.

2단원(1), (2)해설-OK.indd 17 2018-09-28 오후 12:52:52

011 답 (1) 연속이고 미분가능하다.
(2) 연속이고 미분가능하지 않다.
(3) 연속이고 미분가능하지 않다.

(1) $f(0)=0$이고 $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x|x|=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0+}x=0,$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to0-}(-x)=0$이므로

$f'(0)$이 존재한다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

(2) $f(0)=0$이고 $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x+|x|)=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x+|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x+x}{x}=2,$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x+|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x-x}{x}=0$이므로

$f'(0)$이 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하지 않다.

(3) $f(0)=0$이고 $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(2x^2-|x|)=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{2x^2-x}{x}=\lim_{x\to0+}(2x-1)=-1,$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{2x^2-(-x)}{x}=\lim_{x\to0-}(2x+1)=1$

이므로 $f'(0)$이 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하지 않다.

012 답 (1) 연속이고 미분가능하지 않다.
(2) 연속이고 미분가능하지 않다.
(3) 연속이고 미분가능하지 않다.

(1) $f(1)=0$이고 $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}|3x-3|=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{3x-3}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{3(x-1)}{x-1}=3,$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-3(x-1)}{x-1}=-3$이므로

$f'(1)$이 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 미분가능하지 않다.

(2) $f(1)=0$이고 $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}|x^2-1|=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x+1)=2,$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}(-x-1)=-2$

이므로 $f'(1)$이 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 미분가능하지 않다.

(3) $f(2)=0$이고 $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}|x^2-2x|=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to2+}x=2,$

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{-(x^2-2x)}{x-2}=\lim_{x\to2-}(-x)=-2$

이므로 $f'(2)$가 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이고 미분가능하지 않다.

013 답 (1) 연속이고 미분가능하다.
(2) 연속이고 미분가능하지 않다.

(1) $f(1)=-1$이고 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2-2)=-1,$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(2x-3)=-1$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2-2)-(-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}(x+1)=2,$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(2x-3)-(-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}2=2$

이므로 $f'(1)$이 존재한다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 미분가능하다.

(2) $f(2)=6$이고 $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(2x^2+x-4)=6,$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}3x=6$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(2x^2+x-4)-6}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}(2x+5)=9,$

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{3x-6}{x-2}=\lim_{x\to2-}3=3$

이므로 $f'(2)$는 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이고 미분가능하지 않다.

014 답 (1) $a=2,\ b=-1$ (2) $a=2,\ b=-2$ (3) $a=2,\ b=4$
(4) $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{7}{2}$ (5) $a=-1,\ b=1$ (6) $a=8,\ b=-4$

(1) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+} x^2=\lim_{x\to1-}(ax+b)=f(1)$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠

또, $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x+1)=2,$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(ax+b)-(a+b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$에서

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이므로 $a=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

(2) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(x^2+3)=\lim_{x\to1-}(ax-b)=f(1)$

$\therefore a-b=4$ …… ㉠

또, $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2+3)-4}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x+1)=2,$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(ax-b)-(a-b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$에서

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이므로 $a=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

(3) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(ax-5)=\lim_{x\to1-}(x^2-b)=f(1)$, $a-5=1-b$

$\therefore a+b=6$ …… ㉠

또, $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(ax-5)-(a-5)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a,$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x^2-b)-(1-b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}(x+1)=2$에서

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이므로 $a=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=4$

(4) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(ax^2-3)=\lim_{x\to1-}(x-b)=f(1)$, $a-3=1-b$

$\therefore a+b=4$ …… ㉠

또, $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(ax^2-3)-(a-3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}a(x+1)=2a,$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-b)-(1-b)}{x-1}=1$에서

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이므로 $2a=1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{7}{2}$

(5) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(ax^2-bx)=\lim_{x\to1-}(-3x+b)=f(1)$

$a-b=-3+b$ $\therefore a-2b=-3$ …… ㉠

또, $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(ax^2-bx)-(a-b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(ax+a-b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}(ax+a-b)=2a-b,$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(-3x+b)-(-3+b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{-3(x-1)}{x-1}=-3$에서

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이므로

$2a-b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

(6) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(x^2+ax-3)=\lim_{x\to1-}(-bx^2+2x)=f(1)$

$a-2=-b+2$ $\therefore a+b=4$ …… ㉠

또, $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2+ax-3)-(a-2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}(x+a+1)=a+2,$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(-bx^2+2x)-(-b+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(-bx-b+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}(-bx-b+2)=-2b+2$에서

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이므로

$a+2=-2b+2$ $\therefore a+2b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=-4$

015 답 (1) 1 (2) 4개 (3) 2개 (4) 1개 (5) 1

(2) $x=-3$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점은 4개이다.

(3) $x=-3$, $x=1$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개이다.

(4) $f'(x)=0$인 점은 $x=-2$일 때의 1개이다.

(5) 점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기이므로 $\frac{2-1}{2-1}=1$

016 답 (1) ○ (2) × (3) × (4) × (5) ○

(1) $x=1,\ x=2,\ x=4$에서 미분가능하지 않으므로
미분가능하지 않은 점은 3개이다.

(2) $x=2,\ x=4$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개이다.

(3) $x=3$에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $f'(3)<0$

(4) $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$의 값이 존재한다.

017 답 ①

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+2)-f(a)}{(a+2)-a}=\frac{(a^2+4a)-(a^2-4)}{2}=\frac{4a+4}{2}$$

$$=2a+2=4$$

$\therefore\ a=1$

018 답 2

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(\Delta x)^2+2\Delta x+1\}-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x+2)=2$$

019 답 ④

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+7h)-f(a)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+7h)-f(a)}{7h}\times\frac{7}{2}=\frac{7}{2}f'(a)$$

020 답 5

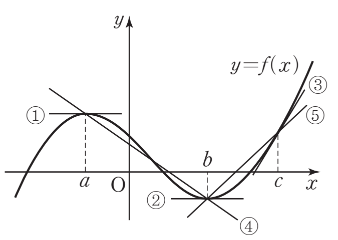
$$\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-2f(2)+2f(2)-xf(2)}{x-2}$$

$$=2\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{f(2)(x-2)}{x-2}$$

$$=2f'(2)-f(2)=2\times3-1=5$$

021 답 ③

$f'(a)$는 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이고, 평균변화율은 두 점을 이은 직선의 기울기이다.



따라서 기울기의 값이 가장 큰 것은 ③이다.

022 답 -10

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}(x^2+ax+4)=\lim_{x\to1-}(-bx^2+x)=f(1)$$

$\therefore\ a+b=-4$ …… ㉠

또, $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2+ax+4)-(a+5)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}(x+a+1)=2+a$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(-bx^2+x)-(-b+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(-bx-b+1)}{x-1}$$

$=\lim\limits_{x\to1-}(-bx-b+1)=-2b+1$에서

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$이므로

$2+a=-2b+1$ $\therefore\ a+2b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7,\ b=3$

$\therefore\ a-b=-10$

023 답 5

$x=b,\ x=c$에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 2개

$\therefore\ m=2$

$x=a,\ x=b,\ x=c$에서 미분가능하지 않으므로

미분가능하지 않은 점의 개수는 3개 $\therefore\ n=3$

$\therefore\ m+n=5$

2 도함수

41쪽~49쪽

024 답 (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)=2$ (3) $f'(x)=2x-4$
(4) $f'(x)=2x+2$ (5) $f'(x)=3x^2$

(1) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{3-3}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{0}{h}=0$

(2) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(2x+2h+6)-(2x+6)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to0}2=2$$

(3) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(x^2+2hx+h^2-4x-4h)-(x^2-4x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2hx+h^2-4h}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h-4)=2x-4$$

(4) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(x^2+2hx+h^2+2x+2h-1)-(x^2+2x-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2hx+h^2+2h}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h+2)=2x+2$$

(5) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+3)-(x^3+3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

025 답 (1) $f'(x)=-2$, $f'(1)=-2$

(2) $f'(x)=2x$, $f'(-2)=-4$

(3) $f'(x)=-2x+3$, $f'(2)=-1$

(4) $f'(x)=2x-2$, $f'(-1)=-4$

(5) $f'(x)=3x^2-1$, $f'(3)=26$

(1) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{(-2x-2h+5)-(-2x+5)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{-2h}{h}=\lim_{h\to0}(-2)=-2$

$\therefore f'(1)=-2$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{(x^2+2hx+h^2+8)-(x^2+8)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{2hx+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x$

$\therefore f'(-2)=-4$

(3) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{(-x^2-2hx-h^2+3x+3h)-(-x^2+3x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{-2hx-h^2+3h}{h}=\lim_{h\to0}(-2x-h+3)$

$=-2x+3$

$\therefore f'(2)=-1$

(4) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{(x^2+2hx+h^2-2x-2h+3)-(x^2-2x+3)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{2hx+h^2-2h}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h-2)=2x-2$

$\therefore f'(-1)=-4$

(5) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x-h)-(x^3-x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h}$

$=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2-1)=3x^2-1$

$\therefore f'(3)=26$

026 답 $f'(x)=-3x+1$

$f(x+y)=f(x)+f(y)-3xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-3xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-3xh}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}-3x\right\}$

$f(0)=0$이므로

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-3x=f'(0)-3x=-3x+1$

027 답 $f'(x)=2x-2$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1\qquad\therefore f(0)=1$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2xh-1}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-1}{h}+2x\right\}$

$f(0)=1$이므로

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+2x=f'(0)+2x=2x-2$

028 답 (1) $y'=3x^2$ (2) $y'=9x^8$ (3) $y'=10x^9$

(4) $y'=15x^{14}$ (5) $y'=0$ (6) $y'=0$

(1) $y'=3x^{3-1}=3x^2$

(2) $y'=9x^{9-1}=9x^8$

(3) $y'=10x^{10-1}=10x^9$

(4) $y'=15x^{15-1}=15x^{14}$

029 답 (1) $y'=4x$ (2) $y'=3$ (3) $y'=2x-5$ (4) $y'=4x^3+2$

(5) $y'=6x^2-6x+4$ (6) $y'=-10x^4+9x^2-5$

(7) $y'=x^2-x+6$

(1) $y'=2(x^2)'=4x$

(2) $y'=(3x)'+(2)'=3$

(3) $y'=(x^2)'-(5x)'+(1)'=2x-5$

(4) $y'=(x^4)'+(2x)'=4x^3+2$

(5) $y'=(2x^3)'-(3x^2)'+(4x)'-(1)'=6x^2-6x+4$

(6) $y'=(-2x^5)'+(3x^3)'-(5x)'+(7)'=-10x^4+9x^2-5$

(7) $y'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(\frac{1}{2}x^2\right)'+(6x)'-(10)'=x^2-x+6$

030 답 (1) $y'=24x+4$ (2) $y'=4x+9$ (3) $y'=45x^2+6x-5$

(4) $y'=-20x^3+34x$ (5) $y'=12x^2+44x-6$

(6) $y'=5x^4-20x^3+27x^2-12x$

(1) $y'=(4x)'(3x+1)+4x(3x+1)'$

$=4\times(3x+1)+4x\times3$

$=(12x+4)+12x=24x+4$

(2) $y'=(2x-1)'(x+5)+(2x-1)(x+5)'$

$=2\times(x+5)+(2x-1)\times1$

$=(2x+10)+(2x-1)=4x+9$

(3) $y'=(3x^2-1)'(5x+1)+(3x^2-1)(5x+1)'$

$=6x\times(5x+1)+(3x^2-1)\times5$

$=(30x^2+6x)+(15x^2-5)=45x^2+6x-5$

(4) $y'=(-5x^2+2)'(x^2-3)+(-5x^2+2)(x^2-3)'$

$=-10x\times(x^2-3)+(-5x^2+2)\times2x$

$=(-10x^3+30x)+(-10x^3+4x)=-20x^3+34x$

(5) $y'=(x^2+5x-4)'(4x+2)+(x^2+5x-4)(4x+2)'$

$=(2x+5)(4x+2)+(x^2+5x-4)\times4$

$=(8x^2+24x+10)+(4x^2+20x-16)$

$=12x^2+44x-6$

(6) $y'=(x^3-2x^2)'(x^2-3x+3)+(x^3-2x^2)(x^2-3x+3)'$

$=(3x^2-4x)(x^2-3x+3)+(x^3-2x^2)(2x-3)$

$=(3x^4-13x^3+21x^2-12x)+(2x^4-7x^3+6x^2)$

$=5x^4-20x^3+27x^2-12x$

031 답 (1) $y'=3x^2-10x+6$ (2) $y'=18x^2+22x-3$
(3) $y'=-6x^2+10x-1$ (4) $y'=8x^3-12x^2-24x-8$
(5) $y'=30x^4+16x^3-18x^2-8x$

(1) $y'=(x)'(x-2)(x-3)+x(x-2)'(x-3)+x(x-2)(x-3)'$

$=(x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2)$

$=(x^2-5x+6)+(x^2-3x)+(x^2-2x)$

$=3x^2-10x+6$

(2) $y'=(x+2)'(2x-1)(3x+1)+(x+2)(2x-1)'(3x+1)$
$+(x+2)(2x-1)(3x+1)'$

$=(2x-1)(3x+1)+(x+2)\times2\times(3x+1)$
$+(x+2)(2x-1)\times3$

$=(6x^2-x-1)+(6x^2+14x+4)+(6x^2+9x-6)$

$=18x^2+22x-3$

(3) $y'=(x-1)'(2x+1)(-x+2)+(x-1)(2x+1)'(-x+2)$
$+(x-1)(2x+1)(-x+2)'$

$=(2x+1)(-x+2)+(x-1)\times2\times(-x+2)$
$+(x-1)(2x+1)\times(-1)$

$=(-2x^2+3x+2)+(-2x^2+6x-4)+(-2x^2+x+1)$

$=-6x^2+10x-1$

(4) $y'=(x^2+2)'(x-4)(2x+4)+(x^2+2)(x-4)'(2x+4)$
$+(x^2+2)(x-4)(2x+4)'$

$=2x(x-4)(2x+4)+(x^2+2)\times1\times(2x+4)$
$+(x^2+2)(x-4)\times2$

$=(4x^3-8x^2-32x)+(2x^3+4x^2+4x+8)$
$+(2x^3-8x^2+4x-16)$

$=8x^3-12x^2-24x-8$

(5) $y'=(2x^2)'(x^2-1)(3x+2)+2x^2(x^2-1)'(3x+2)$
$+2x^2(x^2-1)(3x+2)'$

$=4x(x^2-1)(3x+2)+2x^2\times2x\times(3x+2)$
$+2x^2(x^2-1)\times3$

$=(12x^4+8x^3-12x^2-8x)+(12x^4+8x^3)+(6x^4-6x^2)$

$=30x^4+16x^3-18x^2-8x$

032 답 (1) $y'=18x-24$ (2) $y'=8x-12$ (3) $y'=3(x+2)^2$
(4) $y'=9(3x-1)^2$ (5) $y'=8(2x-5)^3$
(6) $y'=2(x^2-2x+2)(2x-2)$

(1) $y'=2(3x-4)(3x-4)'=2(3x-4)\times3=18x-24$

(2) $y'=2(-2x+3)(-2x+3)'$

$=2(-2x+3)\times(-2)$

$=8x-12$

(3) $y'=3(x+2)^2(x+2)'=3(x+2)^2\times1$

$=3(x+2)^2$

(4) $y'=3(3x-1)^2(3x-1)'=3(3x-1)^2\times3$

$=9(3x-1)^2$

(5) $y'=4(2x-5)^3(2x-5)'=4(2x-5)^3\times2$

$=8(2x-5)^3$

(6) $y'=2(x^2-2x+2)(x^2-2x+2)'$

$=2(x^2-2x+2)(2x-2)$

033 답 -3

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3=3f'(1)$

이때 $f'(x)=2x-3$이므로 $f'(1)=-1$

∴ (주어진 식)$=3f'(1)=-3$

034 답 3

$\lim_{h\to0}\frac{f(3)-f(3-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}=f'(3)$

이때 $f'(x)=3x^2-8x$이므로 $f'(3)=3$

035 답 10

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)+f(2)-f(2-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\times3-\lim_{h\to0}\frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h}\times(-2)$

$=3f'(2)+2f'(2)=5f'(2)$

이때 $f'(x)=4x-6$이므로 $f'(2)=2$

∴ (주어진 식)$=5f'(2)=10$

036 답 -1

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}=\frac{1}{2}f'(1)$$

이때 $f'(x)=2x(3x+2)+(x^2-5)\times3=9x^2+4x-15$이므로

$f'(1)=-2$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{1}{2}f'(1)=-1$

037 답 (1) $a=2$, $b=1$, $c=-1$ (2) $a=-1$, $b=3$, $c=2$

(3) $a=3$, $b=-4$, $c=3$ (4) $a=-5$, $b=-2$, $c=7$

(1) $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f(0)=-1$이므로 $c=-1$

이때 $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=2a+b=5$ …… ㉠

$f'(-1)=-2a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f(0)=2$이므로 $c=2$

이때 $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=2a+b=1$ …… ㉠

$f'(-1)=-2a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

(3) $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f(0)=3$이므로 $c=3$

이때 $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=2a+b=2$ …… ㉠

$f'(2)=4a+b=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-4$

(4) $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f(0)=7$이므로 $c=7$

이때 $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=2a+b=-12$ …… ㉠

$f'(-2)=-4a+b=18$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=-2$

038 답 $a=-4$, $b=7$

$f(1)=4$이므로 $f(1)=1+a+b=4$

$\therefore a+b=3$ …… ㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=3+2a+b=2$ $\therefore 2a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=7$

039 답 $a=2$, $b=-1$

$f(1)=2$이므로 $f(1)=1+a+b=2$ $\therefore a+b=1$ …… ㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{7}{2}$$

$\therefore f'(1)=7$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax$이므로 $f'(1)=3+2a=7$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-1$

040 답 (1) 15 (2) -4 (3) 12 (4) 33

(1) $f(x)=x^{10}+x^5$이라 하면 $f(1)=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{10}+x^5-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=10x^9+5x^4$이므로

$f'(1)=10+5=15$

(2) $f(x)=x^6+2x$라 하면 $f(-1)=-1$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^6+2x+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$$

이때 $f'(x)=6x^5+2$이므로

$f'(-1)=-6+2=-4$

(3) $f(x)=x^8+x^3+x$라 하면 $f(1)=3$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^8+x^3+x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=8x^7+3x^2+1$이므로

$f'(1)=8+3+1=12$

(4) $f(x)=x^{12}+x^{10}+x^9+x^2$이라 하면 $f(1)=4$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{12}+x^{10}+x^9+x^2-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=12x^{11}+10x^9+9x^8+2x$이므로

$f'(1)=12+10+9+2=33$

041 답 (1) $a=-3$, $b=2$ (2) $a=-4$, $b=3$

(3) $a=50$, $b=49$

(1) 다항식 x^6+ax^2+b를 $(x-1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $x^6+ax^2+b=(x-1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^5+2ax=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $6+2a=0$ $\therefore a=-3$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=2$

(2) 다항식 $x^{12}+ax^3+b$를 $(x-1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $x^{12}+ax^3+b=(x-1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$12x^{11}+3ax^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $12+3a=0$ $\therefore a=-4$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=3$

(3) 다항식 $x^{50}-ax+b$를 $(x-1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{50}-ax+b=(x-1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $1-a+b=0$

$\therefore -a+b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$50x^{49}-a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $50-a=0$

$\therefore a=50$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=49$

042 답 $7x-1$

다항식 x^8-x+6을 $(x-1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$x^8-x+6=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a+b=6$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x^7-1=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a=7$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=-1$

$\therefore R(x)=7x-1$

043 답 $-10x-10$

다항식 $x^{10}-1$을 $(x+1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$x^{10}-1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $-a+b=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

이 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $a=-10$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=-10$

$\therefore R(x)=-10x-10$

044 답 $9x+12$

다항식 $x^{15}-2x^3+2$를 $(x+1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$x^{15}-2x^3+2=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $-a+b=3$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$15x^{14}-6x^2=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

이 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $a=9$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=12$

$\therefore R(x)=9x+12$

045 답 ③

$f(x+y)=f(x)+f(y)+1$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1$

$\therefore f(0)=-1$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+1-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}$$

$f(0)=-1$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)=3$$

$\therefore f'(1)=3$

046 답 6

$f'(x)=x^3-x^2+x$이므로 $f'(2)=8-4+2=6$

047 답 ②

$f'(x)=3x^2+2$이므로 $f'(a)=14$에서

$3a^2+2=14$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

048 답 $y'=4x^3+3x^2-24x+7$

$y'=(x^2-3x+1)'(x^2+4x-1)+(x^2-3x+1)(x^2+4x-1)'$

$=(2x-3)(x^2+4x-1)+(x^2-3x+1)(2x+4)$

$=(2x^3+5x^2-14x+3)+(2x^3-2x^2-10x+4)$

$=4x^3+3x^2-24x+7$

049 답 ①

$f'(x)=2x-6$이므로 $f'(a)=-2$에서

$2a-6=-2$, $2a=4$ $\therefore a=2$

$b=2^2-6\times2=-8$

$\therefore ab=-16$

050 답 -36

$f'(x)=3(x^2-x)^2(x^2-x)'$

$=3(x^2-x)^2(2x-1)=3(2x-1)(x^2-x)^2$

$f'(-1)=3\cdot(-3)\cdot2^2=-36$, $f'(1)=3\cdot1\cdot0=0$

$\therefore f'(-1)+f'(1)=-36$

051 답 $y'=4x^3-2x+2$

$y'=\{(x+1)^2\}'(x^2-2x+2)+(x+1)^2(x^2-2x+2)'$

$=2(x+1)(x^2-2x+2)+(x+1)^2(2x-2)$

$=(2x^3-2x^2+4)+(2x^3+2x^2-2x-2)=4x^3-2x+2$

052 답 0

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4$이고

$f(x)=2x^2-ax$에서 $f'(x)=4x-a$이므로

$f'(1)=4-a=4 \qquad \therefore a=0$

053 답 ②

$f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f(1)=-2$이므로

$a+b+c=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(0)=b=4,\ f'(-2)=-4a+b=8 \qquad \therefore a=-1$

$a=-1,\ b=4$를 ㉠에 대입하면 $c=-5$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1+16+25=42$

054 답 12

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}$의 극한값이 존재하므로 $f(2)=5$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=7$

$\therefore f(2)+f'(2)=5+7=12$

055 답 ⑤

$f(-1)=-1+a+b=3 \qquad \therefore a+b=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}=\frac{1}{2}f'(1)=2$

$\therefore f'(1)=4$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$f'(1)=3+2a=4 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{7}{2}$

$\therefore b-a=3$

056 답 -12

다항식 x^3+ax^2+bx-5를 $(x+1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3+ax^2+bx-5=(x+1)^2Q(x) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $-1+a-b-5=0$

$\therefore a-b=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+2ax+b=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$

이 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $3-2a+b=0$

$\therefore -2a+b=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-9$

$\therefore a+b=-12$

3 도함수의 활용 (1)

53쪽~71쪽

057 답 (1) -4 (2) 1 (3) 6 (4) 2 (5) 7

(1) $f(x)=x^2-6x$라 하면 $f'(x)=2x-6$이므로
점 $(1,\ -5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-4$

(2) $f(x)=-x^2+5x$라 하면 $f'(x)=-2x+5$이므로
점 $(2,\ 6)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=1$

(3) $f(x)=x^2+4x-10$이라 하면 $f'(x)=2x+4$이므로
점 $(1,\ -5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=6$

(4) $f(x)=2x^2+2x+5$라 하면 $f'(x)=4x+2$이므로
점 $(0,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$

(5) $f(x)=x^3-2x^2+4$라 하면 $f'(x)=3x^2-4x$이므로
점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=7$

058 답 (1) $a=-2,\ b=-3$
(2) $a=-6,\ b=7$
(3) $a=-6,\ b=7$
(4) $a=1,\ b=-3$

(1) $f(x)=x^2+ax+b$라 하면 $f'(x)=2x+a$
점 $(3,\ 0)$을 지나므로 $f(3)=9+3a+b=0$
$\therefore 3a+b=-9 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
또한 점 $(3,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 4이므로
$f'(3)=6+a=4 \qquad \therefore a=-2$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=-3$

(2) $f(x)=x^2+ax+b$라 하면 $f'(x)=2x+a$
점 $(2,\ -1)$을 지나므로 $f(2)=4+2a+b=-1$
$\therefore 2a+b=-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
또한 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로
$f'(2)=4+a=-2 \qquad \therefore a=-6$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=7$

(3) $f(x)=x^3+ax+b$라 하면 $f'(x)=3x^2+a$
점 $(1,\ 2)$를 지나므로 $f(1)=1+a+b=2$
$\therefore a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
또한 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로
$f'(1)=3+a=-3 \qquad \therefore a=-6$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=7$

(4) $f(x)=x^3+ax+b$라 하면 $f'(x)=3x^2+a$
점 $(1,\ -1)$을 지나므로 $f(1)=1+a+b=-1$
$\therefore a+b=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
또한 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 4이므로
$f'(1)=3+a=4 \qquad \therefore a=1$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=-3$

2단원(1), (2)해설-OK.indd 25 2018-09-28 오후 12:53:01

059 답 (1) $y=2x-6$ (2) $y=3x-9$ (3) $y=8x+1$
(4) $y=5x-23$ (5) $y=7x-16$ (6) $y=3x+1$
(7) $y=-3x-11$ (8) $y=-5x+2$
(9) $y=3x-12$ (10) $y=-9x-7$

(1) $f(x)=x^2-5$라 하면 $f'(x)=2x$이므로 $f'(1)=2$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-(-4)=2(x-1)$ $\therefore y=2x-6$

(2) $f(x)=x^2-3x$라 하면 $f'(x)=2x-3$이므로 $f'(3)=3$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-0=3(x-3)$ $\therefore y=3x-9$

(3) $f(x)=-x^2+6x$라 하면 $f'(x)=-2x+6$이므로
$f'(-1)=8$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-(-7)=8\{x-(-1)\}$ $\therefore y=8x+1$

(4) $f(x)=x^2-5x+2$라 하면 $f'(x)=2x-5$이므로 $f'(5)=5$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-2=5(x-5)$ $\therefore y=5x-23$

(5) $f(x)=x^3-5x$라 하면 $f'(x)=3x^2-5$이므로 $f'(2)=7$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-(-2)=7(x-2)$ $\therefore y=7x-16$

(6) $f(x)=-x^3+3x^2+2$라 하면 $f'(x)=-3x^2+6x$
이므로 $f'(1)=3$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-4=3(x-1)$ $\therefore y=3x+1$

(7) $f(x)=-x^3-2x^2+x-3$이라 하면 $f'(x)=-3x^2-4x+1$
이므로 $f'(-2)=-3$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-(-5)=-3\{x-(-2)\}$ $\therefore y=-3x-11$

(8) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+2$라 하면 $f'(x)=x^2+4x-5$
이므로 $f'(0)=-5$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-2=-5(x-0)$ $\therefore y=-5x+2$

(9) $f(x)=x^4+2x^2-5x-7$이라 하면 $f'(x)=4x^3+4x-5$
이므로 $f'(1)=3$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-(-9)=3(x-1)$ $\therefore y=3x-12$

(10) $f(x)=x^4-x^3-2x^2-6x-4$라 하면
$f'(x)=4x^3-3x^2-4x-6$이므로 $f'(-1)=-9$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-2=-9\{x-(-1)\}$
$\therefore y=-9x-7$

060 답 (1) $y=-2x-9$ (2) $y=x+4$ (3) $y=-5x+4$

(1) $f(x)=x^2+4x$라 하면 $f'(x)=2x+4$
이때 접점의 좌표를 $(a,\ a^2+4a)$라 하면 접선의 기울기가
-2이므로
$f'(a)=2a+4=-2$ $\therefore a=-3$
따라서 구하는 접선은 기울기가 -2이고 점 $(-3,\ -3)$을
지나므로 접선의 방정식은 $y-(-3)=-2\{x-(-3)\}$
$\therefore y=-2x-9$

(2) $f(x)=-x^2+3x+3$이라 하면 $f'(x)=-2x+3$
이때 접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+3a+3)$이라 하면
접선의 기울기가 1이므로
$f'(a)=-2a+3=1$ $\therefore a=1$
따라서 구하는 접선은 기울기가 1이고 점 $(1,\ 5)$를 지나므로
접선의 방정식은 $y-5=x-1$
$\therefore y=x+4$

(3) $f(x)=-2x^2+3x-4$라 하면 $f'(x)=-4x+3$
이때 접점의 좌표를 $(a,\ -2a^2+3a-4)$라 하면
접선의 기울기가 -5이므로 $f'(a)=-4a+3=-5$
$\therefore a=2$
따라서 구하는 접선은 기울기가 -5이고 점 $(2,\ -6)$을
지나므로 접선의 방정식은
$y-(-6)=-5(x-2)$
$\therefore y=-5x+4$

061 답 (1) $y=x-9$ (2) $y=-x+3$ (3) $y=2x+5$
(4) $y=-2x+1$

(1) $f(x)=x^2-5x$라 하면 $f'(x)=2x-5$
이때 접점의 좌표를 $(a,\ a^2-5a)$라 하면
직선 $y=x+4$와 평행한 접선의 기울기는 1이므로
$f'(a)=2a-5=1$ $\therefore a=3$
따라서 구하는 접선은 기울기가 1이고 점 $(3,\ -6)$을
지나므로 접선의 방정식은 $y-(-6)=x-3$
$\therefore y=x-9$

(2) $f(x)=x^2-5x+7$이라 하면 $f'(x)=2x-5$
이때 접점의 좌표를 $(a,\ a^2-5a+7)$이라 하면
직선 $y=-x+5$와 평행한 접선의 기울기는 -1이므로
$f'(a)=2a-5=-1$ $\therefore a=2$
따라서 구하는 접선은 기울기가 -1이고 점 $(2,\ 1)$을
지나므로 접선의 방정식은 $y-1=-(x-2)$
$\therefore y=-x+3$

(3) $f(x)=-x^2+6x+1$이라 하면 $f'(x)=-2x+6$
이때 접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+6a+1)$이라 하면

직선 $y=2x-8$과 평행한 접선의 기울기는 2이므로

$f'(a)=-2a+6=2 \quad \therefore a=2$

따라서 구하는 접선은 기울기가 2이고 점 $(2, 9)$를 지나므로

접선의 방정식은 $y-9=2(x-2)$

$\therefore y=2x+5$

(4) $f(x)=2x^2-2x+1$이라 하면 $f'(x)=4x-2$

이때 접점의 좌표를 $(a, 2a^2-2a+1)$이라 하면

직선 $y=-2x+12$와 평행한 접선의 기울기는 -2이므로

$f'(a)=4a-2=-2 \quad \therefore a=0$

따라서 구하는 접선은 기울기가 -2이고 점 $(0, 1)$을

지나므로 접선의 방정식은 $y-1=-2(x-0)$

$\therefore y=-2x+1$

062 답 (1) $y=-2x+1$ 또는 $y=6x-7$

(2) $y=-x$ 또는 $y=3x-4$

(3) $y=-3x+4$ 또는 $y=x$

(4) $y=4x+8$ 또는 $y=-4x$ (5) $y=x+2$

(1) $f(x)=x^2+2$라 하면 $f'(x)=2x$

이때 접점의 좌표를 (a, a^2+2)라 하면

$f'(a)=2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+2)=2a(x-a)$ …… ㉠

이 접선이 점 $(1, -1)$을 지나므로 $-a^2-3=-2a^2+2a$

$a^2-2a-3=0$, $(a-3)(a+1)=0 \quad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-2x+1$ 또는 $y=6x-7$

(2) $f(x)=x^2-x$라 하면 $f'(x)=2x-1$

이때 접점의 좌표를 (a, a^2-a)라 하면

$f'(a)=2a-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-a)=(2a-1)(x-a)$ …… ㉠

이 접선이 점 $(1, -1)$을 지나므로

$-a^2+a-1=-2a^2+3a-1$

$a^2-2a=0$, $a(a-2)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=2$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-x$ 또는 $y=3x-4$

(3) $f(x)=x^2-3x+4$라 하면 $f'(x)=2x-3$

이때 접점의 좌표를 (a, a^2-3a+4)라 하면

$f'(a)=2a-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-3a+4)=(2a-3)(x-a)$ …… ㉠

이 접선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$-a^2+3a-3=-2a^2+5a-3$

$a^2-2a=0$, $a(a-2)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=2$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-3x+4$ 또는 $y=x$

(4) $f(x)=-2x^2-4x$라 하면 $f'(x)=-4x-4$

이때 접점의 좌표를 $(a, -2a^2-4a)$라 하면

$f'(a)=-4a-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(-2a^2-4a)=(-4a-4)(x-a)$ …… ㉠

이 접선이 점 $(-1, 4)$를 지나므로

$2a^2+4a+4=4a^2+8a+4$

$a^2+2a=0$, $a(a+2)=0 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=0$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=4x+8$ 또는 $y=-4x$

(5) $f(x)=x^3-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

이때 접점의 좌표를 (a, a^3-2a)라 하면

$f'(a)=3a^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-2a)=(3a^2-2)(x-a)$ …… ㉠

이 접선이 점 $(0, 2)$를 지나므로 $-a^3+2a+2=-3a^3+2a$

$2a^3=-2$, $a^3=-1 \quad \therefore a=-1$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=x+2$

063 답 (1) $y=\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$ (2) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{31}{4}$

(3) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ (4) $y=\frac{1}{2}x-4$

(1) $f(x)=-x^2+x$라 하면 $f'(x)=-2x+1$이므로

$f'(2)=-3$

점 $(2, -2)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-(-2)=\frac{1}{3}(x-2) \quad \therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$

(2) $f(x)=x^2-2x+4$라 하면 $f'(x)=2x-2$이므로 $f'(3)=4$

점 $(3, 7)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{f'(3)}=-\frac{1}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-7=-\frac{1}{4}(x-3) \quad \therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{31}{4}$

(3) $f(x)=3x^2-4x+3$이라 하면 $f'(x)=6x-4$

이므로 $f'(1)=2$

점 $(1, 2)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{f'(1)}=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

(4) $f(x)=-2x^2+6x-7$이라 하면 $f'(x)=-4x+6$

이므로 $f'(2)=-2$

점 $(2,\ -3)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-(-3)=\dfrac{1}{2}(x-2)\qquad \therefore\ y=\dfrac{1}{2}x-4$

064 답 (1) $y=3x-16$ (2) $y=-x-1$ (3) $y=-2x+5$ (4) $y=2x+1$

(1) $f(x)=x^2-5x$라 하면 $f'(x)=2x-5$

이때 접점의 좌표를 $(a,\ a^2-5a)$라 하면

직선 $y=-\dfrac{1}{3}x+2$에 수직인 직선의 기울기는 3이므로

$f'(a)=2a-5=3\qquad \therefore\ a=4$

따라서 구하는 접선은 기울기가 3이고 점 $(4,\ -4)$를 지나므로 직선의 방정식은

$y-(-4)=3(x-4)\qquad \therefore\ y=3x-16$

(2) $f(x)=2x^2-5x+1$이라 하면 $f'(x)=4x-5$

이때 접점의 좌표를 $(a,\ 2a^2-5a+1)$이라 하면

직선 $y=x-5$에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로

$f'(a)=4a-5=-1\qquad \therefore\ a=1$

따라서 구하는 접선은 기울기가 -1이고 점 $(1,\ -2)$를 지나므로 직선의 방정식은

$y-(-2)=-(x-1)\qquad \therefore\ y=-x-1$

(3) $f(x)=-2x^2+6x-3$이라 하면 $f'(x)=-4x+6$

이때 접점의 좌표를 $(a,\ -2a^2+6a-3)$이라 하면

직선 $y=\dfrac{1}{2}x+3$에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로

$f'(a)=-4a+6=-2\qquad \therefore\ a=2$

따라서 구하는 접선은 기울기가 -2이고 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-1=-2(x-2)\qquad \therefore\ y=-2x+5$

(4) $f(x)=-x^2+4x$라 하면 $f'(x)=-2x+4$

이때 접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+4a)$라 하면

직선 $x+2y-6=0$은 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$이고

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 2이므로

$f'(a)=-2a+4=2\qquad \therefore\ a=1$

따라서 구하는 접선은 기울기가 2이고 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 직선의 방정식은 $y-3=2(x-1)\qquad \therefore\ y=2x+1$

065 답 (1) $\dfrac{3}{2}$ (2) 1 (3) 4

(1) 함수 $f(x)=3x-x^2$은 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고, 열린구간 $(1,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(2)=2$이므로 $f'(c)=0$인 $c(1<c<2)$가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3-2x$이므로 $f'(c)=3-2c=0$

$\therefore\ c=\dfrac{3}{2}$

(2) 함수 $f(x)=x^2-2x+5$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고, 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=5$이므로 $f'(c)=0$인 $c(0<c<2)$가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-2$이므로 $f'(c)=2c-2=0$

$\therefore\ c=1$

(3) 함수 $f(x)=x^2-8x+15$는 닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 연속이고, 열린구간 $(3,\ 5)$에서 미분가능하며 $f(3)=f(5)=0$이므로 $f'(c)=0$인 $c(3<c<5)$가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-8$이므로 $f'(c)=2c-8=0$

$\therefore\ c=4$

066 답 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (2) 2 (3) $\dfrac{5}{3}$ (4) 1 (5) $-\dfrac{5}{3}$

(1) 함수 $f(x)=x^3-x$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고, 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(1)=0$이므로 $f'(c)=0$인 $c(0<c<1)$가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-1$이므로 $f'(c)=3c^2-1=0,\ c^2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ (\because\ 0<c<1)$

(2) 함수 $f(x)=x^3-3x^2$은 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고, 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(3)=0$이므로 $f'(c)=0$인 $c(0<c<3)$가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-6x$이므로 $f'(c)=3c^2-6c=0$

$3c(c-2)=0$

$\therefore\ c=2\ (\because\ 0<c<3)$

(3) 함수 $f(x)=x^3-x^2-5x+2$는 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이고, 열린구간 $(-1,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(3)=5$이므로 $f'(c)=0$인 $c(-1<c<3)$가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-2x-5$이므로 $f'(c)=3c^2-2c-5=0$

$(c+1)(3c-5)=0$

$\therefore\ c=\dfrac{5}{3}\ (\because\ -1<c<3)$

(4) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$은 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 연속이고, 열린구간 $(-3,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(-3)=f(3)=10$이므로 $f'(c)=0$인 $c(-3<c<3)$가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=x^2+2x-3$이므로 $f'(c)=c^2+2c-3=0$

$(c+3)(c-1)=0$

$\therefore\ c=1\ (\because\ -3<c<3)$

(5) 함수 $f(x)=x^3+4x^2+5x+2$는 닫힌구간 $[-2, -1]$에서 연속이고, 열린구간 $(-2, -1)$에서 미분가능하며

$f(-2)=f(-1)=0$이므로

$f'(c)=0$인 $c(-2<c<-1)$가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2+8x+5$이므로 $f'(c)=3c^2+8c+5=0$

$(c+1)(3c+5)=0$

$\therefore c=-\frac{5}{3}$ ($\because -2<c<-1$)

067 답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1

(1) 함수 $f(x)=x^2+1$은 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고, 열린구간 $(1, 2)$에서 미분가능하므로

$f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$인 $c(1<c<2)$가 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{5-2}{1}=3$이고 $f'(x)=2x$이므로

$f'(c)=2c=3$

$\therefore c=\frac{3}{2}$

(2) 함수 $f(x)=2x^2-x$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고, 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하므로

$f'(c)=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$인 $c(-1<c<2)$가 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{6-3}{3}=1$이고 $f'(x)=4x-1$이므로

$f'(c)=4c-1=1$

$\therefore c=\frac{1}{2}$

(3) 함수 $f(x)=x^2+2x-3$은 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고, 열린구간 $(-1, 3)$에서 미분가능하므로

$f'(c)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$인 $c(-1<c<3)$가 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{12-(-4)}{4}=4$이고 $f'(x)=2x+2$이므로

$f'(c)=2c+2=4$

$\therefore c=1$

068 답 (1) $\pm\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) 2 (4) 1 (5) -1

(1) 함수 $f(x)=x^3$은 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이고, 열린구간 $(-3, 3)$에서 미분가능하므로

$f'(c)=\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}$인 $c(-3<c<3)$가 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=\frac{27+27}{6}=9$이고 $f'(x)=3x^2$이므로

$f'(c)=3c^2=9$, $c^2=3$

$\therefore c=\pm\sqrt{3}$

(2) 함수 $f(x)=x^3-2x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고, 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로

$f'(c)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}$인 $c(0<c<3)$가 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{21}{3}=7$이고 $f'(x)=3x^2-2$이므로

$f'(c)=3c^2-2=7$, $c^2=3$

$\therefore c=\sqrt{3}$ ($\because 0<c<3$)

(3) 함수 $f(x)=x^3-5x$는 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 연속이고, 열린구간 $(-2, 4)$에서 미분가능하므로

$f'(c)=\frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}$인 $c(-2<c<4)$가 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}=\frac{44-2}{6}=7$이고 $f'(x)=3x^2-5$이므로

$f'(c)=3c^2-5=7$, $c^2=4$

$\therefore c=2$ ($\because -2<c<4$)

(4) 함수 $f(x)=2x^3-5x$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고, 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하므로

$f'(c)=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$인 $c(-1<c<2)$가 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{6-3}{3}=1$이고 $f'(x)=6x^2-5$이므로

$f'(c)=6c^2-5=1$, $c^2=1$

$\therefore c=1$ ($\because -1<c<2$)

(5) 함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-4$는 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이고, 열린구간 $(-3, 3)$에서 미분가능하므로

$f'(c)=\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}$인 $c(-3<c<3)$가 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=\frac{-4-14}{6}=-3$이고

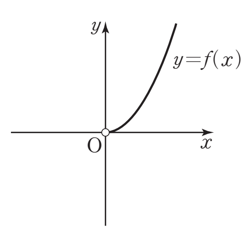
$f'(x)=-x^2+2x$이므로

$f'(c)=-c^2+2c=-3$, $c^2-2c-3=0$, $(c+1)(c-3)=0$

$\therefore c=-1$ ($\because -3<c<3$)

069 답 (1) 증가한다. (2) 감소한다. (3) 증가한다.

(1) $x_1<x_2$인 임의의 두 양수 x_1, x_2에 대하여



$f(x_1)-f(x_2)$

$=x_1^2-x_2^2$

$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$

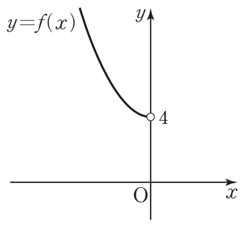
($\because 0<x_1<x_2$)

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

(2) $x_1<x_2$인 임의의 두 음수

x_1, x_2에 대하여



$f(x_1)-f(x_2)$

$=(x_1^2+4)-(x_2^2+4)$

$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0$

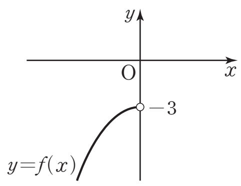
($\because$ $x_1<x_2<0$)

$\therefore$ $f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=x^2+4$는 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소한다.

(3) $x_1<x_2$인 임의의 두 음수

x_1, x_2에 대하여



$f(x_1)-f(x_2)$

$=(-x_1^2-3)-(-x_2^2-3)$

$=(x_2+x_1)(x_2-x_1)<0$ ($\because$ $x_1<x_2<0$)

$\therefore$ $f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=-x^2-3$은 구간 $(-\infty, 0)$에서 증가한다.

070 답 1, 1, 0, 감소, 증가

071 답 (1) 구간 $(-\infty, -2]$에서 감소, 구간 $[-2, \infty)$에서 증가

(2) 구간 $(-\infty, 3]$에서 감소, 구간 $[3, \infty)$에서 증가

(3) 구간 $(-\infty, 2]$에서 증가, 구간 $[2, \infty)$에서 감소

(4) 구간 $(-\infty, -2]$, $[0, \infty)$에서 증가, 구간 $[-2, 0]$에서 감소

(5) 구간 $(-\infty, 0]$, $[1, \infty)$에서 감소, 구간 $[0, 1]$에서 증가

(6) 구간 $(-\infty, -2]$, $[-1, \infty)$에서 증가, 구간 $[-2, -1]$에서 감소

(1) $f(x)=x^2+4x$에서 $f'(x)=2x+4$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$에서 $f'(x)<0$이므로 감소하고, 구간 $[-2, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.

(2) $f(x)=x^2-6x+2$에서 $f'(x)=2x-6$

$f'(x)=0$에서 $x=3$

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-7	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 3]$에서 $f'(x)<0$이므로 감소하고, 구간 $[3, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.

(3) $f(x)=-x^2+4x-3$에서 $f'(x)=-2x+4$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 2]$에서 $f'(x)>0$이므로 증가하고, 구간 $[2, \infty)$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.

(4) $f(x)=x^3+3x^2+2$에서 $f'(x)=3x^2+6x$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$, $[0, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가하고, 구간 $[-2, 0]$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.

(5) $f(x)=-2x^3+3x^2+5$에서 $f'(x)=-6x^2+6x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	5	$\nearrow$	6	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$, $[1, \infty)$에서 $f'(x)<0$이므로 감소하고, 구간 $[0, 1]$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.

(6) $f(x)=x^3+\frac{9}{2}x^2+6x-2$에서 $f'(x)=3x^2+9x+6$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$, $[-1, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가하고, 구간 $[-2, -1]$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.

072 답 (1) 증가상태 (2) 감소상태 (3) 감소상태

(4) 감소상태 (5) 증가상태

(1) $f(x)=x^2-6$에서 $f'(x)=2x$

$f'(1)=2>0$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 증가상태에 있다.

(2) $f(x)=x^2-8x+1$에서 $f'(x)=2x-8$

$f'(2)=-4<0$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 감소상태에 있다.

(3) $f(x)=-2x^2-8x-3$에서 $f'(x)=-4x-8$

$f'(-1)=-4<0$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 감소상태에 있다.

(4) $f(x)=x^3-3x^2+1$에서 $f'(x)=3x^2-6x$

$f'(1)=-3<0$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 감소상태에 있다.

(5) $f(x)=-x^3+5x^2-2x+2$에서 $f'(x)=-3x^2+10x-2$

$f'(2)=6>0$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 증가상태에 있다.

073 답 (1) $a\ge\frac{1}{6}$ (2) $-6\le a\le 6$ (3) $0\le a\le\frac{1}{3}$

(1) $f(x)=2x^3-x^2+ax-4$에서 $f'(x)=6x^2-2x+a$

$f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하기 위한 조건은

$f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을

D라 하면

$\frac{D}{4}=1-6a\le 0$

$\therefore a\ge\frac{1}{6}$

(2) $f(x)=-x^3+ax^2-12x+3$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax-12$

$f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하기 위한 조건은

$f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을

D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-36\le 0$, $(a+6)(a-6)\le 0$

$\therefore -6\le a\le 6$

(3) $f(x)=x^3+3ax^2+ax-3$에서 $f'(x)=3x^2+6ax+a$

$f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하기 위한 조건은

$f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을

D라 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-3a\le 0$, $3a(3a-1)\le 0$

$\therefore 0\le a\le\frac{1}{3}$

074 답 (1) $a=-6$, $b=-9$ (2) $a=-\frac{3}{2}$, $b=-24$

(3) $a=-9$, $b=24$ (4) $a=-3$, $b=-\frac{9}{2}$

(1) $f(x)=-x^3-ax^2+bx+1$에서 $f'(x)=-3x^2-2ax+b$

$f(x)$가 증가하는 구간이 $[1, 3]$이므로 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$f'(x)=-3x^2-2ax+b\ge 0$

이 부등식의 해가 $1\le x\le 3$이므로 $-3(x-1)(x-3)\ge 0$

$-3x^2-2ax+b=-3(x-1)(x-3)=-3x^2+12x-9$

$\therefore a=-6$, $b=-9$

(2) $f(x)=-x^3-2ax^2-bx+2$에서 $f'(x)=-3x^2-4ax-b$

$f(x)$가 증가하는 구간이 $[-2, 4]$이므로 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$f'(x)=-3x^2-4ax-b\ge 0$

이 부등식의 해가 $-2\le x\le 4$이므로 $-3(x+2)(x-4)\ge 0$

$-3x^2-4ax-b=-3(x+2)(x-4)=-3x^2+6x+24$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$, $b=-24$

(3) $f(x)=x^3+ax^2+bx-3$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$가 감소하는 구간이 $[2, 4]$이므로 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f'(x)=3x^2+2ax+b\le 0$

이 부등식의 해가 $2\le x\le 4$이므로 $3(x-2)(x-4)\le 0$

$3x^2+2ax+b=3(x-2)(x-4)=3x^2-18x+24$

$\therefore a=-9$, $b=24$

(4) $f(x)=x^3-ax^2+2bx-5$에서 $f'(x)=3x^2-2ax+2b$

$f(x)$가 감소하는 구간이 $[-3, 1]$이므로 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-2ax+2b\le 0$

이 부등식의 해가 $-3\le x\le 1$이므로 $3(x+3)(x-1)\le 0$

$3x^2-2ax+2b=3(x+3)(x-1)=3x^2+6x-9$

$\therefore a=-3$, $b=-\frac{9}{2}$

075 답 (1) 극댓값 : 4, 극솟값 : -2

(2) 극댓값 : 2, 극솟값 : 1

(3) 극댓값 : 4, 극솟값 : 1

076 답 (1) 극댓값 : 4, 극솟값 : 0

(2) 극댓값 : 0, 극솟값 : -32

(3) 극댓값 : -2, 극솟값 : -6

(4) 극댓값 : 17, 극솟값 : -15

(5) 극댓값 : 5, 극솟값 : -27

(6) 극댓값 : 2, 극솟값 : -25

(1) $f(x)=x^3+3x^2$에서 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 극댓값은 4, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 0이다.

(2) $f(x)=x^3-6x^2$에서 $f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 0, $x=4$에서 극소이고 극솟값은 -32이다.

(3) $f(x)=-x^3+3x-4$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고 극솟값은 -6, $x=1$에서 극대이고 극댓값은 -2이다.

(4) $f(x)=x^3-12x+1$에서 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 극댓값은 17, $x=2$에서 극소이고 극솟값은 -15이다.

(5) $f(x)=-x^3-3x^2+9x$에서

$f'(x)=-3x^2-6x+9=-3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-27	$\nearrow$	5	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극소이고 극솟값은 -27, $x=1$에서 극대이고 극댓값은 5이다.

(6) $f(x)=2x^3-3x^2-12x-5$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-25	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 2, $x=2$에서 극소이고 극솟값은 -25이다.

077 답 (1) 극값을 갖지 않는다.
(2) 극댓값 : 없다., 극솟값 : -16
(3) 극댓값 : 없다., 극솟값 : -26
(4) 극댓값 : -2, 극솟값 : 없다.

(1) $f(x)=x^3-3x^2+3x$에서 $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(2) $f(x)=3x^4+8x^3$에서 $f'(x)=12x^3+24x^2=12x^2(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이고 극솟값은 -16, 극댓값은 없다.

(3) $f(x)=x^4-4x^3+1$에서 $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	-26	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이고 극솟값은 -26, 극댓값은 없다.

(4) $f(x)=-3x^4+4x^3-3$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 -2, 극솟값은 없다.

078 답 (1) $a=0$, $b=3$, $c=-5$　(2) $a=3$, $b=9$, $c=3$
(3) $a=-3$, $b=-9$, $c=1$　(4) $a=9$, $b=24$, $c=2$
(5) $a=0$, $b=3$, $c=-1$　(6) $a=3$, $b=4$, $c=2$

(1) $f(x)=-x^3+ax^2+bx-c$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=-3-2a+b=0$　$\therefore -2a+b=3$　…… ㉠

$f'(1)=-3+2a+b=0$　$\therefore 2a+b=3$　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$

또한 $f(1)=7$이므로 $-1+a+b-c=7$　$\therefore c=-5$

(2) $f(x)=x^3+ax^2-bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax-b$

함수 $f(x)$가 $x=-3$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-3)=27-6a-b=0$　$\therefore 6a+b=27$　…… ㉠

$f'(1)=3+2a-b=0$　$\therefore 2a-b=-3$　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=9$

또한 $f(1)=-2$이므로 $1+a-b+c=-2$　$\therefore c=3$

(3) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=3$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=3-2a+b=0$　$\therefore 2a-b=3$　…… ㉠

$f'(3)=27+6a+b=0$　$\therefore 6a+b=-27$　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-9$

또한 $f(-1)=6$이므로 $-1+a-b+c=6$　$\therefore c=1$

2단원(3), (4)해설-OK.indd 32　2018-09-28 오후 12:54:12

(4) $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2-2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=2$, $x=4$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=12-4a+b=0$ $\therefore 4a-b=12$ …… ㉠

$f'(4)=48-8a+b=0$ $\therefore 8a-b=48$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=24$

또한 $f(4)=18$이므로 $64-16a+4b+c=18$ $\therefore c=2$

(5) $f(x)=-2x^3+ax^2+2bx-c$에서 $f'(x)=-6x^2+2ax+2b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=-6-2a+2b=0$ $\therefore a-b=-3$ …… ㉠

$f'(1)=-6+2a+2b=0$ $\therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$

또한 $f(1)=5$이므로 $-2+a+2b-c=5$ $\therefore c=-1$

(6) $f(x)=-2x^3-ax^2+3bx+c$에서 $f'(x)=-6x^2-2ax+3b$

함수 $f(x)$가 $x=-2$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-2)=-24+4a+3b=0$ $\therefore 4a+3b=24$ …… ㉠

$f'(1)=-6-2a+3b=0$ $\therefore 2a-3b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=4$

또한 $f(1)=9$이므로 $-2-a+3b+c=9$ $\therefore c=2$

079 답 (1) $a<\frac{3}{2}$ (2) $a<-3$ 또는 $a>3$ (3) $a<-6$ 또는 $a>6$

(4) $a<0$ 또는 $a>\frac{1}{3}$ (5) $a<0$ 또는 $a>3$

(6) $a<0$ 또는 $a>1$

(1) $f(x)=2x^3-3x^2+ax+2$에서 $f'(x)=6x^2-6x+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-6a>0$ $\therefore a<\frac{3}{2}$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+3x-1$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+3$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9>0$, $(a+3)(a-3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>3$

(3) $f(x)=x^3+ax^2+12x+4$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+12$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-36>0$, $(a+6)(a-6)>0$

$\therefore a<-6$ 또는 $a>6$

(4) $f(x)=x^3+3ax^2+ax-2$에서 $f'(x)=3x^2+6ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-3a>0$, $3a(3a-1)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>\frac{1}{3}$

(5) $f(x)=-x^3+ax^2-ax+6$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax-a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$, $a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$

(6) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+ax$에서 $f'(x)=x^2+2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-a>0$, $a(a-1)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>1$

080 답 (1) $-\sqrt{6}\le a\le\sqrt{6}$ (2) $-3\le a\le 3$ (3) $-6\le a\le 0$

(4) $0\le a\le 2$ (5) $-9\le a\le 0$ (6) $1\le a\le 4$

(1) $f(x)=x^3+ax^2+2x-3$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+2$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-6\le 0$, $(a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6})\le 0$

$\therefore -\sqrt{6}\le a\le\sqrt{6}$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+3x+1$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+3$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9\le 0$, $(a+3)(a-3)\le 0$

$\therefore -3\le a\le 3$

(3) $f(x)=2x^3+ax^2-ax-2$에서 $f'(x)=6x^2+2ax-a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+6a\le 0$, $a(a+6)\le 0$

$\therefore -6\le a\le 0$

(4) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+2ax-5$에서 $f'(x)=x^2+2ax+2a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-2a\le0$, $a(a-2)\le0$

$\therefore 0\le a\le2$

(5) $f(x)=-x^3+ax^2+3ax+4$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax+3a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+9a\le0$, $a(a+9)\le0$

$\therefore -9\le a\le0$

(6) $f(x)=3x^3-(a+2)x^2+ax-3$에서

$f'(x)=9x^2-2(a+2)x+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-9a\le0$, $a^2-5a+4\le0$, $(a-1)(a-4)\le0$

$\therefore 1\le a\le4$

081 답 ①

$f(x)=2x^3+ax+b$라 하면 $f'(x)=6x^2+a$

점 $(1, 3)$을 지나므로 $f(1)=2+a+b=3$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠

또한 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(1)=6+a=3$ $\therefore a=-3$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore a-b=-7$

082 답 5

$f(x)=-x^3+x^2+4$라 하면

$f'(x)=-3x^2+2x$이므로 $f'(1)=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-4=-(x-1)$ $\therefore y=-x+5$

따라서 $y=-x+5$의 y절편은 5이다.

083 답 ②

$f(x)=x^3+ax^2+b$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax$

점 $(-1, -1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=-1+a+b=-1$

$\therefore a+b=0$ …… ㉠

또, 점 $(-1, -1)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(-1)=3-2a=-1$ $\therefore a=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a^2+b^2=8$

084 답 $y=3x+16$ 또는 $y=3x-16$

$f(x)=x^3-9x$라 하면 $f'(x)=3x^2-9$

이때 접점의 좌표를 (a, a^3-9a)라 하면

직선 $y=3x-2$와 평행한 접선의 기울기는 3이므로

$f'(a)=3a^2-9=3$, $a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 접선은 기울기가 3이고

점 $(-2, 10)$ 또는 $(2, -10)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y-10=3\{x-(-2)\}$ 또는 $y-(-10)=3(x-2)$

$\therefore y=3x+16$ 또는 $y=3x-16$

085 답 $y=-2x+7$

두 점 A$(-1, 2)$, B$(2, -4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-4-2}{2-(-1)}=\frac{-6}{3}=-2$

$f(x)=-x^2+2x+3$이라 하면 $f'(x)=-2x+2$

이때 접점의 좌표를 $(a, -a^2+2a+3)$이라 하면

접선의 기울기는 -2이므로

$f'(a)=-2a+2=-2$ $\therefore a=2$

따라서 구하는 접선은 기울기가 -2이고 점 $(2, 3)$을 지나므로

접선의 방정식은 $y-3=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x+7$

086 답 ①

$f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (a, a^3)이라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=3a^2=3$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -1)$, $(1, 1)$이므로

접선의 방정식은 $y-(-1)=3\{x-(-1)\}$, $y-1=3(x-1)$

$\therefore y=3x+2$, $y=3x-2$

이때 a는 양수이므로 $a=2$

087 답 -3

$f(x)=x^2+x+2$라 하면 $f'(x)=2x+1$

이때 접점의 좌표를 (a, a^2+a+2)라 하면

$f'(a)=2a+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+a+2)=(2a+1)(x-a)$

이 접선이 점 $(-1, 1)$을 지나므로 $-a^2-a-1=-2a^2-3a-1$

$a^2+2a=0$, $a(a+2)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=0$

따라서 두 접선의 기울기는 $f'(-2)=-3$, $f'(0)=1$

이므로 $f'(-2)f'(0)=-3$

088 답 $\frac{7}{3}$

$f(x)=x^3-5$라 하면 $f'(x)=3x^2$

이때 접점의 좌표를 (t, t^3-5)라 하면

$f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-5)=3t^2(x-t)$ ...... ㉠

이 접선이 점 $(0, -7)$을 지나므로 $-t^3-2=-3t^3$, $t^3=1$

$\therefore t=1$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은 $y=3x-7$

$x=a$, $y=0$을 $y=3x-7$에 대입하면 $a=\frac{7}{3}$

089 답 ⑤

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면 $f'(x)=2x+a$

점 $(3, 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(3)=9+3a+b=1$

$\therefore 3a+b=-8$ ...... ㉠

또, 점 $(3, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=6+a$

$(6+a)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$, $a+6=2$ $\therefore a=-4$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=4$ $\therefore a+b=0$

090 답 ①

$f(x)=-x^3+x^2+2x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+2x+2$이므로 $f'(2)=-6$

점 $(2, 0)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{1}{6}(x-2)$ $\therefore y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$

따라서 $a=\frac{1}{6}$, $b=-\frac{1}{3}$이므로 $a+b=-\frac{1}{6}$

091 답 $\frac{1}{3}$

함수 $f(x)=(x+1)(x-3)^2$은 닫힌구간 $[-1, 3]$에서

연속이고, 열린구간 $(-1, 3)$에서 미분가능하며

$f(-1)=f(3)=0$이므로

$f'(c)=0$인 $c(-1<c<3)$가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=(x-3)^2+2(x+1)(x-3)=(x-3)\{x-3+2(x+1)\}$

$=(x-3)(3x-1)=0$이므로

$f'(c)=(c-3)(3c-1)=0$

$\therefore c=\frac{1}{3}$ $(\because -1<c<3)$

092 답 ④

함수 $f(x)=-x^2+kx+12$는 닫힌구간 $[-2, 6]$에서

연속이고, 열린구간 $(-2, 6)$에서 미분가능하며

$f(-2)=f(6)$이므로

$f(-2)=-2k+8$, $f(6)=6k-24$에서

$-2k+8=6k-24$, $8k=32$

$\therefore k=4$

093 답 1개

함수 $f(x)=x^3-4x$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고,

열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하므로

$f'(c)=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$인 $c(-1<c<2)$가 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{0-3}{3}=-1$이고 $f'(x)=3x^2-4$이므로

$f'(c)=3c^2-4=-1$, $c^2=1$

$\therefore c=1$ $(\because -1<c<2)$

따라서 상수 c의 개수는 1개이다.

094 답 ③

$f(x)=-x^2+6x+2$에서 $f'(x)=-2x+6$

닫힌구간 $[a, 2]$에서 $x=-1$이 평균값 정리를 만족시키므로

$\frac{f(2)-f(a)}{2-a}=f'(-1)$

$\frac{a^2-6a+8}{2-a}=-\frac{(a-2)(a-4)}{a-2}=4-a=8$

$\therefore a=-4$

095 답 증가 : $-1\le x\le 3$, 감소 : $x\le -1$, $x\ge 3$

$f(x)=-x^3+3x^2+9x-1$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	26	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$에서 $f'(x)<0$

이므로 감소하고, 구간 $[-1, 3]$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.

096 답 ②

① 구간 $(-\infty, -2)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.

② 구간 $(-2, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.

③ 구간 $(-1, 0)$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.

④ 구간 $(0, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.

⑤ 구간 $(2, \infty)$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.

2단원(3), (4)해설-OK.indd 35 2018-09-28 오후 12:54:15

097 답 -4

$f(x)=-\frac{4}{3}x^3+4x^2+ax+5$에서 $f'(x)=-4x^2+8x+a$

$f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하기 위한 조건은

$f'(x)\le 0$이어야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16+4a\le 0 \qquad \therefore a\le -4$

따라서 상수 a의 최댓값은 -4이다.

098 답 -10

$f(x)=-x^3-\frac{9}{2}x^2+30x$에서

$f'(x)=-3x^2-9x+30=-3(x+5)(x-2)$

이때 $f'(x)>0$인 구간에서 함수 $f(x)$가 증가하므로

$-3(x+5)(x-2)>0$, $(x+5)(x-2)<0$

$\therefore -5<x<2$

따라서 $a=-5$, $b=2$이므로 $ab=-10$

099 답 ⑤

$f(x)=-2x^3+6x+5$에서

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1	↗	9	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고 극솟값은 1, $x=1$에서 극대이고 극댓값은 9이다.

$\therefore M+m=9+1=10$

100 답 5

$f(x)=-2x^3-3x^2+ax+b$에서 $f'(x)=-6x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 14를 가지므로

$f(1)=-2-3+a+b=14 \qquad \therefore a+b=19 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=-6-6+a=0 \qquad \therefore a=12$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=7 \qquad \therefore a-b=5$

101 답 ③

$f(x)=x^3+ax^2+bx-2$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(3)=27+9a+3b-2=-2 \qquad \therefore 3a+b=-9 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(3)=27+6a+b=0 \qquad \therefore 6a+b=-27 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=9$

$\therefore f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$이므로 극댓값은

$f(1)=1-6+9-2=2$

102 답 ①

$f(x)=x^3+ax^2+3ax+2$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+3a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9a>0$, $a(a-9)>0 \qquad \therefore a<0$ 또는 $a>9$

103 답 4

$f(x)=x^3-ax^2+ax$에서 $f'(x)=3x^2-2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$, $a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

104 답 0

$f(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2+8x-1$에서 $f'(x)=2x^2+2ax+8$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-16\le 0$, $(a+4)(a-4)\le 0 \qquad \therefore -4\le a\le 4$

따라서 실수 a의 최댓값은 4, 최솟값은 -4이므로 구하는 합은 0이다.

4 도함수의 활용 (2)

74쪽~92쪽

105 답 (1) 풀이 참고 (2) 풀이 참고 (3) 풀이 참고 (4) 풀이 참고 (5) 풀이 참고

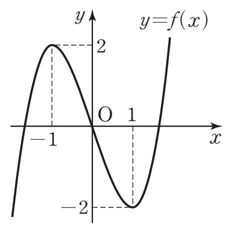
(1) $f(x)=x^3-3x$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



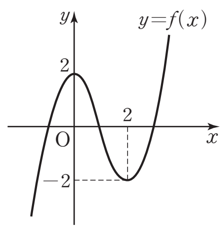
(2) $f(x)=x^3-3x^2+2$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



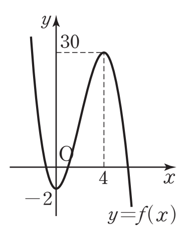
(3) $f(x)=-x^3+6x^2-2$에서

$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	30	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



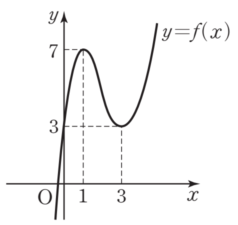
(4) $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



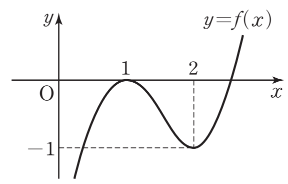
(5) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



106 답 (1) 풀이 참고 (2) 풀이 참고 (3) 풀이 참고
(4) 풀이 참고 (5) 풀이 참고 (6) 풀이 참고

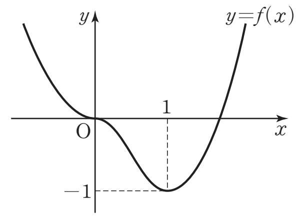
(1) $f(x)=3x^4-4x^3$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



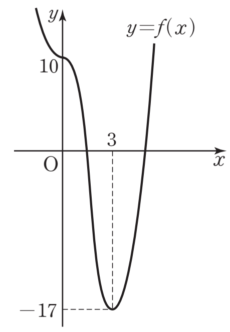
(2) $f(x)=x^4-4x^3+10$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	10	↘	-17	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



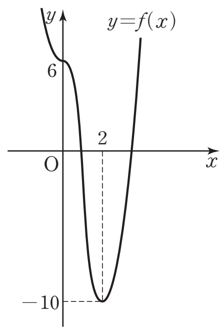
(3) $f(x)=3x^4-8x^3+6$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2=12x^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	6	↘	-10	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



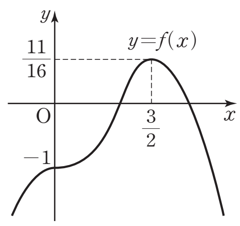
(4) $f(x)=-x^4+2x^3-1$에서

$f'(x)=-4x^3+6x^2=-2x^2(2x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↗	$\frac{11}{16}$	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



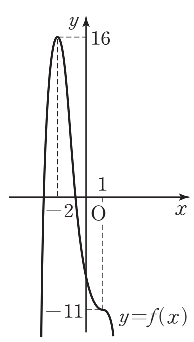
(5) $f(x)=-x^4+6x^2-8x-8$에서

$f'(x)=-4x^3+12x-8=-4(x-1)^2(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	16	↘	-11	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



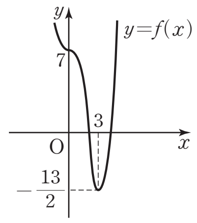
(6) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+7$에서

$f'(x)=2x^3-6x^2=2x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	7	↘	$-\frac{13}{2}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



107 답 (1) 최댓값 : 8, 최솟값 : 4 (2) 최댓값 : 8, 최솟값 : -24

(3) 최댓값 : 4, 최솟값 : 0

(1) $f(x)=-x^3+3x^2+4$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	↗	8	↘	4

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 8, $x=0$ 또는 $x=3$일 때 최솟값 4를 갖는다.

(2) $f(x)=x^3-3x^2-9x+3$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	-24	↗	-17

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 8, $x=3$일 때 최솟값 -24를 갖는다.

(3) $f(x)=x^3-6x^2+9x$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 4, $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

108 답 (1) 최댓값 : 3, 최솟값 : -1

(2) 최댓값 : 5, 최솟값 : -35

(3) 최댓값 : 46, 최솟값 : -6

(4) 최댓값 : 18, 최솟값 : 1

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$ 또는 $x=4$일 때 최댓값 3, $x=0$ 또는 $x=3$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

(2) $f(x)=-2x^3-6x^2+5$에서

$f'(x)=-6x^2-12x=-6x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	↘	-3	↗	5	↘	-35

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$ 또는 $x=0$일 때 최댓값 5, $x=2$일 때 최솟값 -35를 갖는다.

(3) $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	↗	21	↘	-6	↗	46

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 46, $x=1$일 때 최솟값 -6을 갖는다.

(4) $f(x)=3x^4-4x^3+2$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	↘	2	↘	1	↗	18

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 18, $x=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

109 답 (1) $a=1$, $b=-12$ (2) $a=6$, $b=10$

(1) $f(x)=ax^3+6ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2+12ax=3ax(x+4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -2\le x\le 2$)

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$16a+b$	↘	b	↗	$32a+b$

이때 $a>0$이므로 $b<16a+b<32a+b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $32a+b$, $x=0$에서 최솟값 b를 갖는다.

즉, $b=-12$, $32a+b=20$ $\quad\therefore a=1,\ b=-12$

(2) $f(x)=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+b$에서 $f'(x)=ax^2-2ax=ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\le x\le 3$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{3}a+b$	↘	$-\frac{4}{3}a+b$	↗	b

이때 $a>0$이므로 $-\frac{4}{3}a+b<-\frac{2}{3}a+b<b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 b, $x=2$에서 최솟값 $-\frac{4}{3}a+b$를 갖는다.

즉, $b=10$, $-\frac{4}{3}a+b=2$ $\quad\therefore a=6,\ b=10$

110 답 (1) 5 (2) 3 (3) -1

(1) $f(x)=3x^4-4x^3+6x^2-12x+a$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2+12x-12=12(x-1)(x^2+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x^2+1>0$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-7$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $a-7$을 가지므로

$a-7=-2$ $\quad\therefore a=5$

(2) $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2-8x+a$에서

$f'(x)=4x^3-4x^2+8x-8=4(x-1)(x^2+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x^2+2>0$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-\frac{13}{3}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $a-\frac{13}{3}$을 가지므로

$a-\frac{13}{3}=-\frac{4}{3}$ $\quad\therefore a=3$

(3) $f(x)=-3x^4+8x^3-6x^2+24x+a$에서

$f'(x)=-12x^3+24x^2-12x+24=-12(x-2)(x^2+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x^2+1>0$)

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$a+40$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $a+40$을 가지므로

$a+40=39$ $\quad\therefore a=-1$

111 답 (1) $0<a<\sqrt{3}$

(2) $\mathrm{A}(-a,\ -a^2+3)$, $\mathrm{B}(-a,\ 0)$, $\mathrm{C}(a,\ 0)$, $\mathrm{D}(a,\ -a^2+3)$

(3) $S(a)=-2a^3+6a$ (4) 4

(2) 점 D의 x좌표가 a이므로 점 D의 좌표는 $(a,\ -a^2+3)$이다.

즉, $\mathrm{A}(-a,\ -a^2+3)$, $\mathrm{B}(-a,\ 0)$, $\mathrm{C}(a,\ 0)$

(3) $\overline{\mathrm{AD}}=2a$, $\overline{\mathrm{AB}}=-a^2+3$

직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(-a^2+3)=-2a^3+6a$

(4) $S'(a)=-6a^2+6=-6(a+1)(a-1)$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because 0<a<\sqrt{3}$)

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	4	↘	

따라서 직사각형의 넓이는 $a=1$일 때, 최댓값 4를 갖는다.

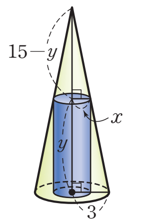
112 답 (1) $0<x<3$ (2) $y=15-5x$ (3) $V(x)=\pi(15x^2-5x^3)$ (4) 20π

(2) 오른쪽 그림에서

$15:(15-y)=3:x$

$3(15-y)=15x$

$\therefore\ y=15-5x$



(3) 원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi r^2h=\pi x^2(15-5x)=\pi(15x^2-5x^3)$

(4) $V'(x)=\pi(30x-15x^2)=15\pi x(2-x)$

$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because\ 0<x<3$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	20π	↘	

따라서 원기둥의 부피는 $x=2$일 때, 최댓값 20π를 갖는다.

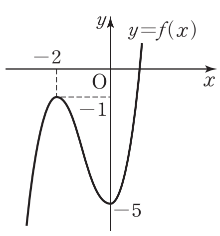
113 답 (1) 1개 (2) 3개 (3) 2개 (4) 1개

(1) $f(x)=x^3+3x^2-5$라 하면 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-1	↘	-5	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1개이다.

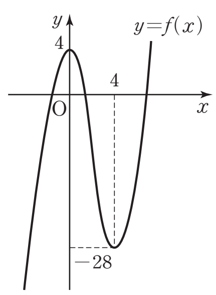


(2) $f(x)=x^3-6x^2+4$라 하면 $f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	-28	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3개이다.



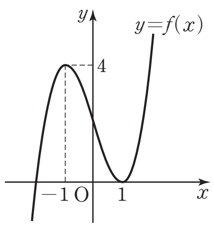
(3) $f(x)=x^3-3x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.



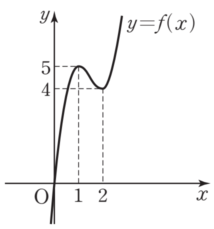
(4) $f(x)=2x^3-9x^2+12x$라 하면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1개이다.



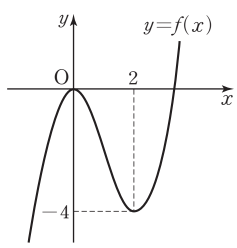
114 답 (1) 풀이 참고 (2) $-4<k<0$ (3) $k=-4$ 또는 $k=0$ (4) $k<-4$ 또는 $k>0$

(1) $f(x)=x^3-3x^2$이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면

$-4<k<0$

(3) 방정식 $f(x)=k$가 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$k=-4$ 또는 $k=0$

(4) 방정식 $f(x)=k$가 한 실근과 두 허근을 가지려면

$k<-4$ 또는 $k>0$

115 답 $k>0$

$x^3-\frac{3}{2}x^2-k=0$에서 $x^3-\frac{3}{2}x^2=k$

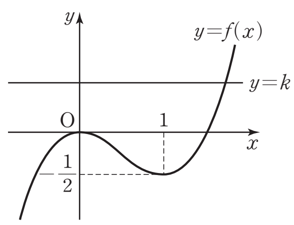
$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$이라 하면

$f'(x)=3x^2-3x=3x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



주어진 방정식이 한 개의 양근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $k>0$

116 답 $0<k<1$

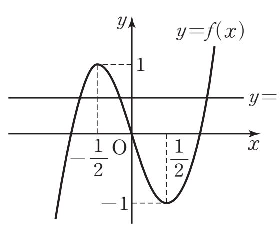
$f(x)=4x^3-3x$라 하면

$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



주어진 방정식이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<1$

117 답 $-5<k<0$

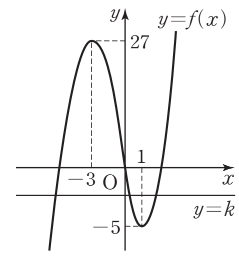
$f(x)=x^3+3x^2-9x$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-5<k<0$

118 답 (1) $-2<k<2$ (2) $-28<k<80$

(3) $k=-16$ 또는 $k=16$ (4) $k=-\frac{5}{3}$ 또는 $k=9$

(5) $k<0$ 또는 $k>1$ (6) $k<1$ 또는 $k>5$

(1) $f(x)=x^3-3x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(1)<0$이어야 하므로 $(k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$

(2) $f(x)=x^3-3x^2-24x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-2)f(4)<0$이어야 하므로 $(k+28)(k-80)<0$

$\therefore -28<k<80$

(3) $f(x)=x^3-12x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

방정식 $f(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$f(-2)f(2)=0$이어야 하므로 $(k+16)(k-16)=0$

$\therefore k=-16$ 또는 $k=16$

(4) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+k$라 하면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

방정식 $f(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$f(-1)f(3)=0$이어야 하므로 $\left(k+\frac{5}{3}\right)(k-9)=0$

$\therefore k=-\frac{5}{3}$ 또는 $k=9$

(5) $f(x)=2x^3-3x^2+k$라 하면 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(0)f(1)>0$이어야 하므로 $k(k-1)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>1$

(6) $f(x)=x^3-3x+3-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-1)f(1)>0$이어야 하므로 $(k-1)(k-5)>0$

$\therefore$ $k<1$ 또는 $k>5$

119 답 (1) $-4<k<0$ (2) $-25<k<7$

(3) $k=-17$ 또는 $k=15$ (4) $k=-19$ 또는 $k=8$

(5) $k<-20$ 또는 $k>7$ (6) $k<0$ 또는 $k>1$

(1) 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면

방정식 $x^3-5x^2+9x=x^2-k$,

즉 $x^3-6x^2+9x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(1)f(3)<0$이어야 하므로 $k(k+4)<0$ $\therefore$ $-4<k<0$

(2) 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면

방정식 $x^3+2x^2-6x+k=-x^2+3x+2$,

즉 $x^3+3x^2-9x+k-2=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x+k-2$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-3)f(1)<0$이어야 하므로 $(k+25)(k-7)<0$

$\therefore$ $-25<k<7$

(3) 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

방정식 $x^3-5x-12=-3x^2+4x+k$,

즉 $x^3+3x^2-9x-12-k=0$이 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-12-k$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

방정식 $f(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$f(-3)f(1)=0$이어야 하므로 $(k+17)(k-15)=0$

$\therefore$ $k=-17$ 또는 $k=15$

(4) 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

방정식 $x^3+2x^2-4x-k=-x^3+5x^2+8x-1$,

즉 $2x^3-3x^2-12x+1-k=0$이 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1-k$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

방정식 $f(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$f(-1)f(2)=0$이어야 하므로 $(k+19)(k-8)=0$

$\therefore$ $k=-19$ 또는 $k=8$

(5) 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면

방정식 $2x^3-2x^2-6x=x^2+6x+k$,

즉 $2x^3-3x^2-12x-k=0$이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-k$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-1)f(2)>0$이어야 하므로 $(k+20)(k-7)>0$

$\therefore$ $k<-20$ 또는 $k>7$

(6) 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면

방정식 $x^3-2x^2+4x=4x^2-5x+4k$,

즉 $x^3-6x^2+9x-4k=0$이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x-4k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(1)f(3)>0$이어야 하므로 $k(k-1)>0$

$\therefore$ $k<0$ 또는 $k>1$

120 답 (1) 풀이 참고 (2) 풀이 참고 (3) 풀이 참고

(4) 풀이 참고 (5) 풀이 참고 (6) 풀이 참고

(1) $f(x)=x^3-3x+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $x\ge0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	2	↗

$x\ge0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 2이므로

$f(x)\ge0$, 즉, $x^3-3x+4\ge0$

따라서 $x\ge0$일 때, 부등식 $x^3-3x+4\ge0$이 성립한다.

(2) $f(x)=x^3-x^2-x+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $x\ge0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	3	↗

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 3이므로

$f(x)\geq 0$, $x^3-x^2-x+4\geq 0$

따라서 $x\geq 0$일 때, 부등식 $x^3-x^2-x+4\geq 0$이 성립한다.

(3) $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↗	6	↘	2	↗

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 2이므로

$f(x)>0$, $x^3-6x^2+9x+2>0$

따라서 $x\geq 0$일 때, 부등식 $x^3+9x>6x^2-2$가 성립한다.

(4) $f(x)=2x^3-9x^2+12x+2$라 하면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	↘	6	↗	11

$1\leq x\leq 3$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 6이므로

$f(x)\geq 0$, $2x^3-9x^2+12x+2\geq 0$

따라서 $1\leq x\leq 3$일 때, 부등식 $2x^3-9x^2+12x+2\geq 0$이 성립한다.

(5) $f(x)=-x^3+12x-4$라 하면

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\leq x\leq 3$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	7	↗	12	↘	5

$1\leq x\leq 3$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 5이므로

$f(x)\geq 0$, $-x^3+12x-4\geq 0$

따라서 $1\leq x\leq 3$일 때, 부등식 $x^3+6x-4\geq 2x^3-6x$가 성립한다.

(6) $f(x)=x^4+4x+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because x^2-x+1>0$)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\geq 0$, $x^4+4x+3\geq 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^4+4x+3\geq 0$이 성립한다.

121 답 (1) $k\geq 16$ (2) $k\leq -1$ (3) $k>0$

(1) $f(x)=3x^4-8x^3+k$라 하면

$f'(x)=12x^3-24x^2=12x^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	k	↘	$k-16$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=k-16$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$k-16\geq 0$ $\quad\therefore k\geq 16$

(2) $f(x)=x^4-2x^2-k$라 하면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-k-1$	↗	$-k$	↘	$-k-1$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(-1)=f(1)=-k-1$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-k-1\geq 0$ $\quad\therefore k\leq -1$

(3) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+k$라 하면

$f'(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	k	↗	$k+\frac{1}{4}$	↘	k	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=f(2)=k$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립하려면 $k>0$

122 답 (1) $k\geq 4$ (2) $k>5$ (3) $k\geq 10$

(1) $f(x)=x^3-3x^2+k$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x\geq 1$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$k-2$	↘	$k-4$	↗

따라서 $x\geq 1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=k-4$이므로

$f(x)\geq 0$이 성립하려면

$k-4\geq 0$ $\quad\therefore k\geq 4$

(2) $f(x)=x^3+3x^2-9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\geq 1$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$k-5$	↗

따라서 $x\geq 1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=k-5$이므로

$f(x)>0$이 성립하려면

$k-5>0$ $\quad\therefore k>5$

(3) $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because$ $0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	k	↘	$k-10$	↗

따라서 $0\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=k-10$이므로 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$k-10\ge 0$ $\qquad\therefore k\ge 10$

123 답 (1) $k\le 3$ (2) $k\ge 5$ (3) $k\ge 24$

(1) $f(x)\ge g(x)$에서 $3x^4+3x+4\ge 4x^3+3x+k$

$\therefore 3x^4-4x^3+4-k\ge 0$

$F(x)=3x^4-4x^3+4-k$라 하면

$F'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	$-k+4$	↘	$-k+3$	↗

따라서 함수 $F(x)$의 최솟값은 $F(1)=-k+3$이므로 모든 실수 x에 대하여 $F(x)\ge 0$이 성립하려면

$-k+3\ge 0$ $\qquad\therefore k\le 3$

(2) $f(x)\ge g(x)$에서 $4x^3-2x^2-2x\ge x^2+4x-k$

$\therefore 4x^3-3x^2-6x+k\ge 0$

$F(x)=4x^3-3x^2-6x+k$라 하면

$F'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$F'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $x\ge 0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$	k	↘	$k-5$	↗

따라서 $x\ge 0$에서 함수 $F(x)$의 최솟값은 $F(1)=k-5$이므로 $F(x)\ge 0$이 성립하려면

$k-5\ge 0$ $\qquad\therefore k\ge 5$

(3) $f(x)\le g(x)$에서 $x^4+2x^3\le 2x^3-2x^2+k$

$\therefore x^4+2x^2-k\le 0$

$F(x)=x^4+2x^2-k$라 하면 $F'(x)=4x^3+4x=4x(x^2+1)$

$F'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because$ $x^2+1>0$)

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$-k+3$	↘	$-k$	↗	$-k+24$

따라서 $-1\le x\le 2$에서 함수 $F(x)$의 최댓값은 $F(2)=-k+24$이므로

$F(x)\le 0$이 성립하려면

$-k+24\le 0$ $\qquad\therefore k\ge 24$

124 답 (1) $v=-9$, $a=6$ (2) 3초 후 (3) -27

(1) t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t-9$

t초 후의 가속도를 a라 하면 $a=\frac{dv}{dt}=6t-6$

따라서 $t=2$일 때의 속도와 가속도는 각각

$v=3\times 2^2-6\times 2-9=-9$, $a=6\times 2-6=6$

(2) 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-6t-9=3(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because$ $t>0$)

$0<t<3$일 때 $v<0$이고, $t>3$일 때 $v>0$이므로 운동 방향을 바꾸는 시각은 출발한 지 3초 후이다.

(3) $t=3$에서의 점 P의 위치 x는 $3^3-3\times 3^2-9\times 3=-27$

125 답 (1) $v=-12$, $a=-18$ (2) 1초 후 (3) -5

(1) t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=-6t^2+6t$

t초 후의 가속도를 a라 하면 $a=\frac{dv}{dt}=-12t+6$

따라서 $t=2$일 때의 속도와 가속도는 각각

$v=-6\times 2^2+6\times 2=-12$, $a=-12\times 2+6=-18$

(2) 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$-6t^2+6t=-6t(t-1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because$ $t>0$)

$0<t<1$일 때 $v>0$이고, $t>1$일 때 $v<0$이므로 운동 방향을 바꾸는 시각은 출발한 지 1초 후이다.

(3) $t=1$에서의 점 P의 위치 x는 $-2\times 1^3+3\times 1^2-6=-5$

126 답 (1) 4 (2) 11 (3) 18

(1) 점 P가 원점을 지나는 순간은 $x=0$일 때이므로

$t^3-4t^2+4t=0$, $t(t-2)^2=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

따라서 점 P가 출발 후 다시 원점을 지나는 순간은 $t=2$일 때이다.

t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-8t+4$

t초 후의 가속도를 a라 하면 $a=\frac{dv}{dt}=6t-8$이므로

$t=2$에서의 점 P의 가속도 a는 $6\times 2-8=4$

(2) t초 후의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+10t-3=-(3t-1)(t-3)$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=3$

따라서 점 P가 $t=3$일 때 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로

$t=3$에서의 점 P의 위치 x는 $-3^3+5\times3^2-3\times3+2=11$

(3) t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t$

t초 후의 가속도를 a라 하면 $a=\frac{dv}{dt}=6t-6$

$v=24$에서 $3t^2-6t=24$, $3t^2-6t-24=3(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=4$ ($\because t>0$)

따라서 $t=4$일 때의 가속도 a는 $6\times4-6=18$

127 답 (1) $v=10$, $a=-10$ (2) 20 m

(1) t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=20-10t$

t초 후의 가속도를 a라 하면 $a=\frac{dv}{dt}=-10$

따라서 $t=1$일 때의 속도와 가속도는 각각

$v=20-10\times1=10$, $a=-10$

(2) 공이 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로

$20-10t=0$, $10t=20$

$\therefore t=2$

따라서 공이 최고 지점에 도달할 때의 높이는

$20\times2-5\times2^2=20$(m)이다.

128 답 (1) $v=-10$, $a=-10$ (2) 90 m

(1) t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=30-10t$

t초 후의 가속도를 a라 하면 $a=\frac{dv}{dt}=-10$

따라서 $t=4$일 때의 속도와 가속도는 각각

$v=30-10\times4=-10$, $a=-10$

(2) 공이 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로

$30-10t=0$, $10t=30$

$\therefore t=3$

따라서 공이 최고 지점에 도달할 때의 높이는

$45+30\times3-5\times3^2=90$(m)이다.

129 답 (1) 19.6 m (2) -19.6 m/s

(1) t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=19.6-9.8t$

물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로

$19.6-9.8t=0$, $9.8t=19.6$

$\therefore t=2$

따라서 물체가 최고 지점에 도달할 때의 높이는

$19.6\times2-4.9\times2^2=19.6$(m)이다.

(2) 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$19.6t-4.9t^2=-4.9t(t-4)=0$

$\therefore t=4$ ($\because t>0$)

따라서 $t=4$일 때의 물체의 속도 v는

$19.6-9.8\times4=-19.6$(m/s)

130 답 (1) 20 m (2) -20 m/s

(1) t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=10-10t$

물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로

$10-10t=0$, $10t=10$

$\therefore t=1$

따라서 물체가 최고 지점에 도달할 때의 높이는

$15+10\times1-5\times1^2=20$(m)이다.

(2) 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$15+10t-5t^2=-5(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

따라서 $t=3$일 때의 물체의 속도 v는

$10-10\times3=-20$(m/s)

131 답 (1) 5 (2) 7 (3) 17 (4) 31

(1) $\frac{dl}{dt}=2t+3$이므로

$t=1$에서의 물체의 길이의 변화율은 $2\times1+3=5$

(2) $\frac{dl}{dt}=4t-1$이므로

$t=2$에서의 물체의 길이의 변화율은 $4\times2-1=7$

(3) $\frac{dl}{dt}=10t-3$이므로

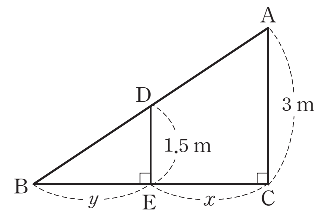
$t=2$에서의 물체의 길이의 변화율은 $10\times2-3=17$

(4) $\frac{dl}{dt}=12t-5$이므로

$t=3$에서의 물체의 길이의 변화율은 $12\times3-5=31$

132 답 (1) $y=x$ (2) 2 m/s

(1) 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$이므로

$3:1.5=(x+y):y$

$3y=1.5x+1.5y$

$1.5y=1.5x$

$\therefore y=x$

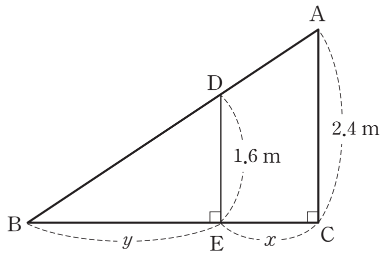
(2) $x=2t$이므로 $y=2t$

$\therefore \frac{dy}{dt}=2$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 2 m/s이다.

133 답 8 m/s

t초 후에 혜민이가 움직인 거리를 $x\text{ m}$, 혜민이의 그림자의 길이를 $y\text{ m}$라 할 때 다음 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$이므로



$2.4 : 1.6=(x+y) : y$, $2.4y=1.6x+1.6y$

$0.8y=1.6x \qquad \therefore y=2x$

$x=4t$이므로 $y=8t \qquad \therefore \dfrac{dy}{dt}=8$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 8 m/s이다.

134 답 (1) 10 (2) 19 (3) 53 (4) 36 (5) 66

(1) $\dfrac{dS}{dt}=(3t+1)+3(t+1)=6t+4$이므로

$t=1$에서의 도형의 넓이의 변화율은 $6\times1+4=10$

(2) $\dfrac{dS}{dt}=2(t+4)+(2t+3)=4t+11$이므로

$t=2$에서의 도형의 넓이의 변화율은 $4\times2+11=19$

(3) $\dfrac{dS}{dt}=4(5t+2)+5(4t+1)=40t+13$이므로

$t=1$에서의 도형의 넓이의 변화율은 $40\times1+13=53$

(4) $\dfrac{dS}{dt}=2(2t+3)\times2=8t+12$이므로

$t=3$에서의 도형의 넓이의 변화율은 $8\times3+12=36$

(5) $\dfrac{dS}{dt}=2(3t+5)\times3=18t+30$이므로

$t=2$에서의 도형의 넓이의 변화율은 $18\times2+30=66$

135 답 (1) $S=(4+2t)^2$ (2) $8t+16$ (3) $40\text{ cm}^2/\text{s}$

(1) 정사각형의 한 변의 길이는 $(4+2t)\text{ cm}$이므로 $S=(4+2t)^2$

(2) $S=(4+2t)^2$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dS}{dt}=2(4+2t)\times2=8t+16$

(3) $8t+16$에 $t=3$을 대입하면

3초 후의 정사각형의 넓이의 변화율은

$8\times3+16=40(\text{cm}^2/\text{s})$이다.

136 답 $8\text{ cm}^2/\text{s}$

t초 후의 정사각형의 넓이를 $S\text{ cm}^2$라 할 때

정사각형의 한 변의 길이는 $(6+0.5t)\text{ cm}$이므로 $S=(6+0.5t)^2$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=2(6+0.5t)\times0.5=0.5t+6$

따라서 $t=4$에서 정사각형의 넓이의 변화율은

$0.5\times4+6=8(\text{cm}^2/\text{s})$이다.

137 답 (1) 75 (2) 294 (3) 144 (4) 36 (5) 5.4

(1) $\dfrac{dV}{dt}=3(4+t)^2$이므로

$t=1$에서의 도형의 부피의 변화율은 $3\times5^2=75$

(2) $\dfrac{dV}{dt}=3(3+2t)^2\times2=6(3+2t)^2$이므로

$t=2$에서의 도형의 부피의 변화율은 $6\times7^2=294$

(3) $\dfrac{dV}{dt}=3(1+3t)^2\times3=9(1+3t)^2$이므로

$t=1$에서의 도형의 부피의 변화율은 $9\times4^2=144$

(4) $\dfrac{dV}{dt}=3\left(5+\dfrac{t}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\left(5+\dfrac{t}{3}\right)^2$이므로

$t=3$에서의 도형의 부피의 변화율은 $6^2=36$

(5) $\dfrac{dV}{dt}=3(2+0.2t)^2\times0.2=0.6(2+0.2t)^2$이므로

$t=5$에서의 도형의 부피의 변화율은 $0.6\times3^2=5.4$

138 답 (1) $V=(6+2t)^3$ (2) $6(6+2t)^2$ (3) $600\text{ cm}^3/\text{s}$

(1) 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(6+2t)\text{ cm}$이므로

$V=(6+2t)^3$

(2) $V=(6+2t)^3$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dV}{dt}=3(6+2t)^2\times2=6(6+2t)^2$

(3) $6(6+2t)^2$에 $t=2$를 대입하면

2초 후의 정육면체의 부피의 변화율은

$6\times10^2=600\ (\text{cm}^3/\text{s})$이다.

139 답 $54\text{ cm}^3/\text{s}$

t초 후의 정육면체의 부피를 $V\text{ cm}^3$라 할 때

정육면체의 한 모서리의 길이는 $(4+0.5t)\text{ cm}$이므로

$V=(4+0.5t)^3$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=3(4+0.5t)^2\times0.5=1.5(4+0.5t)^2$

따라서 $t=4$에서의 정육면체의 부피의 변화율은

$1.5\times6^2=54(\text{cm}^3/\text{s})$이다.

140 답 ③

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.

141 답 ②

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-7$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-7	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 -2,

$x=0$일 때 최솟값 -7을 가지므로 $M=-2$, $m=-7$

$\therefore M+m=-9$

142 답 18

$f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2-16$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2+24x=-12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	-16	$\nearrow$	16	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 16을 가지므로

$a=2$, $b=16$ $\quad\therefore a+b=18$

143 답 ⑤

$f(x)=ax^4-4ax^3+b$에서 $f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because 1\le x\le 4$)

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b-3a$	$\searrow$	$b-27a$	$\nearrow$	b

이때 $a>0$이므로 $b-27a<b-3a<b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 b, $x=3$에서 최솟값 $b-27a$를 갖는다.

즉, $b=6$, $b-27a=-12$이므로 $a=\frac{2}{3}$, $b=6$ $\quad\therefore ab=4$

144 답 128 cm^3

잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면

가로의 길이는 $(12-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(12-2x)$ cm

이때 $x>0$, $12-2x>0$이므로 $0<x<6$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(12-2x)^2=4x^3-48x^2+144x$

$\therefore V'(x)=12x^2-96x+144=12(x-2)(x-6)$

$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<6$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	128	$\searrow$	

따라서 상자의 부피는 $x=2$일 때, 최댓값 128 cm^{3}을 갖는다.

145 답 3개

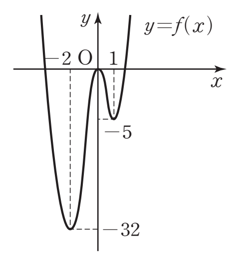
$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2$이라 하면

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-32	$\nearrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3개이다.



146 답 ①

$x^3-2x^2-6x+2=x^2+3x+k$에서 $x^3-3x^2-9x+2-k=0$

$f(x)=x^3-3x^2-9x+2-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-1)f(3)>0$이어야 하므로 $(k+25)(k-7)>0$

$\therefore k<-25$ 또는 $k>7$

따라서 $a=-25$, $b=7$이므로 $a+b=-18$

147 답 $\frac{7}{4}$

$f(x)\ge g(x)$에서 $4x^3-6x\ge -3x^2-k$

$\therefore 4x^3+3x^2-6x+k\ge 0$

$F(x)=4x^3+3x^2-6x+k$라 하면

$F'(x)=12x^2+6x-6=6(x+1)(2x-1)$

$F'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2
$F'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$k+5$	$\searrow$	$k-\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$k+32$

$-1\le x\le 2$일 때, 함수 $F(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $k-\frac{7}{4}$을 갖는다.

따라서 $-1\le x\le 2$일 때 $F(x)\ge 0$이려면 $F\left(\frac{1}{2}\right)\ge 0$이어야 하므로 $k-\frac{7}{4}\ge 0$

$\therefore k\ge \frac{7}{4}$

즉 실수 k의 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다.

2단원(3), (4)해설-OK.indd 47 2018-09-28 오후 12:54:25

148 답 10

점 P가 원점을 지나는 순간은 $x=0$일 때이므로

$t^3-7t^2+12t=0,\ t(t-3)(t-4)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=3$ 또는 $t=4$

따라서 점 P가 출발 후 마지막으로 원점을 지나는 순간은 $t=4$일 때이다.

t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-14t+12$

t초 후의 가속도를 a라 하면 $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-14$

이므로 $t=4$에서의 점 P의 가속도 a는 $6\times4-14=10$

149 답 180 m

t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\dfrac{dx}{dt}=60-2at$

물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이고 걸리는 시간이 6초이므로 $60-12a=0,\ 12a=60$

$\therefore\ a=5$

따라서 $x=60t-5t^2$이므로 물체가 최고 지점에 도달할 때의 높이는 $60\times6-5\times6^2=180\ (\mathrm{m})$이다.

150 답 ⑤

t초 후의 풍선의 겉넓이를 $S\ \mathrm{cm}^2$라 할 때

풍선의 반지름의 길이가 4 cm가 될 때의 시각은

$3+0.2t=4 \qquad \therefore\ t=5$

풍선의 반지름의 길이는 $(3+0.2t)$ cm이므로

$S=4\pi r^2=4\pi(3+0.2t)^2$

$\therefore\ \dfrac{dS}{dt}=8\pi(3+0.2t)\times0.2=1.6\pi(3+0.2t)$

따라서 $t=5$에서 풍선의 겉넓이의 변화율은

$1.6\pi\times(3+0.2\times5)=6.4\pi(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$이다.

Ⅲ 적분

1 부정적분

95쪽~100쪽

001 답 (ㄱ), (ㄷ)

(ㄱ) $(x^4)'=4x^3$ (ㄴ) $(-x^4)=-4x^3$

(ㄷ) $(x^4+50)'=4x^3$ (ㄹ) $(x^4+x)'=4x^3+1$

따라서 함수 $4x^3$의 부정적분인 것은 (ㄱ), (ㄷ)이다.

002 답 (1) $3x+C$ (2) $\dfrac{1}{2}x^2+C$ (3) x^5+C (4) $-x^4+C$

(1) $(3x)'=3$이므로 $\displaystyle\int 3dx=3x+C$

(2) $\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)'=x$이므로 $\displaystyle\int xdx=\dfrac{1}{2}x^2+C$

(3) $(x^5)'=5x^4$이므로 $\displaystyle\int 5x^4dx=x^5+C$

(4) $(-x^4)'=-4x^3$이므로 $\displaystyle\int(-4x^3)dx=-x^4+C$

003 답 (1) $3x^2$ (2) $4x+1$ (3) $3x^2-4x+3$ (4) $-2x^2+x+1$

(5) $2x-\dfrac{5}{2}$

(1) $f(x)=(x^3+C)'=3x^2$

(2) $f(x)=(2x^2+x+C)'=4x+1$

(3) $f(x)=(x^3-2x^2+3x+C)'=3x^2-4x+3$

(4) $f(x)=\left(-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+C\right)'=-2x^2+x+1$

(5) $(2x^2-5x+C)'=4x-5$이므로

$2f(x)=4x-5 \qquad \therefore\ f(x)=2x-\dfrac{5}{2}$

004 답 (1) x^2-4x (2) x^2-4x+C (3) $\neq$

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int f(x)dx\right\}=f(x)=x^2-4x$

(2) $\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=x^2-4x+C$

005 답 -2

$\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int f(x)dx\right\}=x^3-5x^2+2$이므로 $f(x)=x^3-5x^2+2$

$\therefore\ f(1)=1-5+2=-2$

006 답 9

$F(x)=\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^3+4x)\right\}dx=x^3+4x+C$

이때 $F(1)=-2$이므로 $5+C=-2 \qquad \therefore\ C=-7$

따라서 $F(x)=x^3+4x-7$이므로 $F(2)=8+8-7=9$

48-61 수학2-3단원해설-ok.indd 48 2018-09-28 오후 12:51:58

007 답 (1) $9x+C$ (2) $\frac{1}{8}x^8+C$ (3) $\frac{1}{11}x^{11}+C$ (4) $\frac{1}{36}x^{36}+C$

(5) $\frac{1}{100}x^{100}+C$

(1) $\int 9dx=\frac{9}{0+1}x^{0+1}+C=9x+C$

(2) $\int x^7dx=\frac{1}{7+1}x^{7+1}+C=\frac{1}{8}x^8+C$

(3) $\int x^{10}dx=\frac{1}{10+1}x^{10+1}+C=\frac{1}{11}x^{11}+C$

(4) $\int x^{35}dx=\frac{1}{35+1}x^{35+1}+C=\frac{1}{36}x^{36}+C$

(5) $\int x^{99}dx=\frac{1}{99+1}x^{99+1}+C=\frac{1}{100}x^{100}+C$

008 답 (1) x^3-7x+C (2) $-\frac{1}{3}x^3+x^2-x+C$

(3) x^5+2x^3-3x+C

(1) $\int(3x^2-7)dx=3\int x^2dx-\int 7dx$

$=3\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)-(7x+C_2)$

$=x^3-7x+C$

(2) $\int(-x^2+2x-1)dx$

$=-\int x^2dx+2\int xdx-\int dx$

$=-\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)+2\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)-(x+C_3)$

$=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x+C$

(3) $\int(5x^4+6x^2-3)dx$

$=5\int x^4dx+6\int x^2dx-\int 3dx$

$=5\left(\frac{1}{5}x^5+C_1\right)+6\left(\frac{1}{3}x^3+C_2\right)-(3x+C_3)$

$=x^5+2x^3-3x+C$

009 답 (1) $\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+3x+C$ (2) $\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2+x+C$

(3) $\frac{1}{4}x^4+x+C$ (4) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$ (5) x^2+tx+C

(6) $\frac{1}{2}x^2-x+C$

(1) $\int(x+1)(2x+3)dx=\int(2x^2+5x+3)dx$

$=\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+3x+C$

(2) $\int(x+1)^3dx=\int(x^3+3x^2+3x+1)dx$

$=\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2+x+C$

(3) $\int(x+1)(x^2-x+1)dx=\int(x^3+1)dx$

$=\frac{1}{4}x^4+x+C$

(4) $\int\frac{x^3+1}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$

$=\int(x^2-x+1)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

(5) $\int(2x+t)dx=2\int xdx+t\int dx=x^2+tx+C$

(6) $\int\frac{x^2}{x+1}dx-\int\frac{1}{x+1}dx=\int\frac{x^2-1}{x+1}dx$

$=\int\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}dx$

$=\int(x-1)dx=\frac{1}{2}x^2-x+C$

010 답 18

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-2x+5)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+5x+C$

$f(0)=3$에서 $C=3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+5x+3$이므로

$f(3)=9-9+15+3=18$

011 답 $f(x)=2x^4-x^3-2x^2+x-3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로

$f'(x)=8x^3-3x^2-4x+1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(8x^3-3x^2-4x+1)dx$

$=2x^4-x^3-2x^2+x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ -3)$을 지나므로

$f(1)=-3$ $\quad\therefore C=-3$

$\therefore f(x)=2x^4-x^3-2x^2+x-3$

012 답 $f(x)=6x^2-2x+2$

$\int f(x)dx=xf(x)-4x^3+x^2+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^2+2x$

$xf'(x)=12x^2-2x=x(12x-2)$ $\quad\therefore f'(x)=12x-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x-2)dx=6x^2-2x+C_1$

이때 $f(1)=6$이므로 $6-2+C_1=6$ $\quad\therefore C_1=2$

$\therefore f(x)=6x^2-2x+2$

013 답 -1

$\int f(x)dx=xf(x)-3x^4+5x^2-10$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+10x$

$xf'(x)=12x^3-10x=x(12x^2-10)$

$\therefore f'(x)=12x^2-10$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2-10)dx=4x^3-10x+C$

이때 $f(0)=5$이므로 $C=5$

따라서 $f(x)=4x^3-10x+5$이므로 $f(1)=4-10+5=-1$

014 답 ②

$xf(x)=\left(\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2+C\right)'$이므로

$xf(x)=x^3+3x^2-2x=x(x^2+3x-2)$

따라서 $f(x)=x^2+3x-2$이므로

$f(1)=1+3-2=2$

015 답 ⑤

$6x^2+ax-3=(bx^3+2x^2-cx+2)'$이므로

$6x^2+ax-3=3bx^2+4x-c$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$6=3b,\ a=4,\ -3=-c$

$\therefore a=4,\ b=2,\ c=3$

$\therefore abc=24$

016 답 ④

$\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^2+4x+5)dx\right\}=ax^2+4x+5$이므로

$ax^2+4x+5=6x^2+bx+c$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=6,\ b=4,\ c=5 \qquad \therefore a-b+c=7$

017 답 ④

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx=x^2-4x+C$이므로

$f(x)=x^2-4x+C=(x-2)^2-4+C$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 5이므로

$-4+C=5 \qquad \therefore C=9$

따라서 $f(x)=x^2-4x+9$이므로

$f(1)=1-4+9=6$

018 답 ②

$f(x)=\int(\sqrt{x}+1)^2dx+\int(\sqrt{x}-1)^2dx$

$\quad=\int\{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2\}dx$

$\quad=\int(2x+2)dx=x^2+2x+C$

이때 $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x+2$이므로

$f(2)=4+4+2=10$

019 답 $\frac{25}{2}$

$f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)dx$

$\quad=x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}+C$

이때 $f(0)=\frac{5}{2}$이므로 $C=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=x+x^2+\cdots+x^{10}+\frac{5}{2}$이므로

$f(1)=1+1+\cdots+1+\frac{5}{2}=10+\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$

020 답 -13

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2ax-1)dx=x^3+ax^2-x+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2-x+1$이므로 $f(1)=-1$에서

$1+a-1+1=-1 \qquad \therefore a=-2$

즉 $f(x)=x^3-2x^2-x+1$이므로

$f(-2)=-8-8-(-2)+1=-13$

021 답 ①

$f'(x)=8x-3$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(8x-3)dx=4x^2-3x+C_1$

이때 $f(0)=1$이므로 $C_1=1$

따라서 $f(x)=4x^2-3x+1$이므로

$\int f(x)dx=\int(4x^2-3x+1)dx=\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C$

022 답 ②

$f'(x)=-2x+6$이므로

$f(x)=\int(-2x+6)dx=-x^2+6x+C=-(x-3)^2+9+C$

이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 7이므로

$9+C=7 \qquad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=-x^2+6x-2$이므로

$f(-1)=-1-6-2=-9$

023 답 17

$F(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분이므로 $F'(x)=f(x)$

$xf(x)-F(x)=2x^3+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=6x^2+2x$

$xf'(x)=x(6x+2) \qquad \therefore f'(x)=6x+2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x+2)dx=3x^2+2x+C$

이때 $f(1)=6$이므로 $5+C=6 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=3x^2+2x+1$이므로 $f(2)=12+4+1=17$

024 답 6

$\int g(x)dx=x^4f(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=4x^3f(x)+x^4f'(x)$

$\therefore g(1)=4f(1)+f'(1)=4+2=6$

025 답 10

$\int f(x)dx=(x-2)f(x)+x^3-12x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x-2)f'(x)+3x^2-12$

$(x-2)f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$\therefore f'(x)=-3(x+2)=-3x-6$

이때 $f(x)=\int f'(x)dx$이므로

$f(x)=\int(-3x-6)dx=-\frac{3}{2}x^2-6x+C_1$

이때 $f(0)=4$이므로 $C_1=4$

$\therefore f(x)=-\frac{3}{2}x^2-6x+4=-\frac{3}{2}(x+2)^2+10$

따라서 $f(x)$는 $x=-2$일 때, 최댓값이 10이다.

2 정적분

103쪽~112쪽

026 답 (1) $\frac{65}{4}$ (2) 12 (3) 0 (4) 0 (5) $\frac{8}{3}$ (6) 9 (7) -28 (8) $-\frac{29}{6}$

(1) $\int_2^3 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^3=\frac{1}{4}(3^4-2^4)=\frac{65}{4}$

(2) $\int_0^3(2x+1)dx=\left[x^2+x\right]_0^3=(9+3)-(0+0)=12$

(3) $\int_{-1}^2(t^2-2t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{-1}^2=\left(\frac{8}{3}-4\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=0$

(4) $\int_5^5(5x^2-2)dx=0$

(5) $\int_1^3(x^2-2x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^3$

$=(9-9+3)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{8}{3}$

(6) $\int_{-1}^2(x+1)^2dx=\int_{-1}^2(x^2+2x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^2$

$=\left(\frac{8}{3}+4+2\right)-\left(-\frac{1}{3}+1-1\right)=9$

(7) $\int_1^{-3}(x-2)(3x+2)dx$

$=-\int_{-3}^1(3x^2-4x-4)dx=-\left[x^3-2x^2-4x\right]_{-3}^1$

$=-\{(1-2-4)-(-27-18+12)\}$

$=-28$

(8) $\int_2^1\frac{x^3-1}{x-1}dx=\int_2^1\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx$

$=-\int_1^2(x^2+x+1)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$

$=-\left\{\left(\frac{8}{3}+2+2\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)\right\}=-\frac{29}{6}$

027 답 (1) 4 (2) -12 (3) 20 (4) $\frac{76}{3}$ (5) 24 (6) $\frac{56}{3}$ (7) $\frac{11}{6}$

(1) (주어진 식)$=2\int_{-1}^1(3x^2+4x)dx=2\left[x^3+2x^2\right]_{-1}^1$

$=2\{(1+2)-(-1+2)\}=4$

(2) (주어진 식)$=\int_{-1}^2\{(2x-3)-(-2x+3)\}dx$

$=\int_{-1}^2(4x-6)dx=\left[2x^2-6x\right]_{-1}^2$

$=(8-12)-(2+6)=-12$

(3) (주어진 식)$=\int_1^2(2x^2+6x)dx-\int_1^2 2(x^2-3x-1)dx$

$=\int_1^2\{(2x^2+6x)-(2x^2-6x-2)\}dx$

$=\int_1^2(12x+2)dx=\left[6x^2+2x\right]_1^2$

$=(24+4)-(6+2)=20$

(4) (주어진 식)$=\int_2^3(4x^2-4x+1)dx+\int_2^3(4x-1)dx$

$=\int_2^3\{(4x^2-4x+1)+(4x-1)\}dx$

$=\int_2^3 4x^2dx=\left[\frac{4}{3}x^3\right]_2^3=36-\frac{32}{3}=\frac{76}{3}$

(5) (주어진 식)

$=\int_{-2}^1(x^3+3x^2+3x+1)dx-\int_{-2}^1(x^3-3x^2+3x-1)dx$

$=\int_{-2}^1(x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1)dx$

$=\int_{-2}^1(6x^2+2)dx=\left[2x^3+2x\right]_{-2}^1$

$=(2+2)-(-16-4)=24$

(6) (주어진 식)$=\int_{-1}^0(x+3)^2dx+\int_{-1}^0(x-3)^2dx$

$=\int_{-1}^0\{(x+3)^2+(x-3)^2\}dx$

$=\int_{-1}^0(2x^2+18)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+18x\right]_{-1}^0$

$=-\left(-\frac{2}{3}-18\right)=\frac{56}{3}$

(7) (주어진 식)$=\int_{-1}^0\frac{x^3}{x+1}dx+\int_{-1}^0\frac{1}{x+1}dx$

$=\int_{-1}^0\left(\frac{x^3}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\int_{-1}^0\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$

$=\int_{-1}^0(x^2-x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^0$

$=-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\right)=\frac{11}{6}$

028 답 (1) 40 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 16 (4) 3 (5) 4 (6) $\frac{33}{2}$ (7) 24

(1) (주어진 식) $=\int_{-2}^{3}(3x^2+1)dx=\left[x^3+x\right]_{-2}^{3}$

$=(27+3)-(-8-2)=40$

(2) (주어진 식) $=\int_{-2}^{1}(x^2+3x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+1\right)-\left(-\frac{8}{3}+6-2\right)=\frac{3}{2}$

(3) (주어진 식) $=\int_{-2}^{1}(x^3+3x^2)dx+\int_{1}^{2}(x^3+3x^2)dx$

$=\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_{-2}^{2}$

$=(4+8)-(4-8)=16$

(4) (주어진 식) $=\int_{0}^{1}(x-1)^2dx+\int_{1}^{3}(x-1)^2dx$

$=\int_{0}^{3}(x-1)^2dx=\int_{0}^{3}(x^2-2x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{3}$

$=9-9+3=3$

(5) (주어진 식) $=-\int_{1}^{2}(x^3-3x^2+1)dx-\int_{2}^{3}(x^3-3x^2+1)dx$

$=-\int_{1}^{3}(x^3-3x^2+1)dx$

$=-\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x\right]_{1}^{3}$

$=-\left\{\left(\frac{81}{4}-27+3\right)-\left(\frac{1}{4}-1+1\right)\right\}=4$

(6) (주어진 식) $=\int_{-1}^{2}(3x^2-x+3)dx$

$=\left[x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{2}$

$=(8-2+6)-\left(-1-\frac{1}{2}-3\right)=\frac{33}{2}$

(7) (주어진 식) $=\int_{-3}^{2}(3x^2-1)dx-\int_{1}^{2}(3x^2-1)dx$

$=\int_{-3}^{2}(3x^2-1)dx+\int_{2}^{1}(3x^2-1)dx$

$=\int_{-3}^{1}(3x^2-1)dx=\left[x^3-x\right]_{-3}^{1}$

$=(1-1)-(-27+3)=24$

029 답 $\frac{27}{2}$

$\int_{-3}^{2}f(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$

$=\int_{-3}^{0}(-x+1)dx+\int_{0}^{2}(2x+1)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-3}^{0}+\left[x^2+x\right]_{0}^{2}$

$=-\left(-\frac{9}{2}-3\right)+(4+2)=\frac{27}{2}$

030 답 6

$\int_{-3}^{3}f(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{3}f(x)dx$

$=\int_{-3}^{0}(3x^2+4x+1)dx+\int_{0}^{3}(-2x+1)dx$

$=\left[x^3+2x^2+x\right]_{-3}^{0}+\left[-x^2+x\right]_{0}^{3}$

$=-(-27+18-3)+(-9+3)=6$

031 답 (1) 4 (2) $\frac{31}{6}$ (3) $\frac{43}{2}$

(1) $|2-x|=\begin{cases}2-x & (x\le 2)\\ -2+x & (x\ge 2)\end{cases}$ 이므로

$\int_{0}^{4}|2-x|dx=\int_{0}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{4}(-2+x)dx$

$=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}+\left[-2x+\frac{1}{2}x^2\right]_{2}^{4}$

$=(4-2)+\{(-8+8)-(-4+2)\}=4$

(2) $x^2-x-2=0$, 즉 $(x+1)(x-2)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$이므로

$|x^2-x-2|=\begin{cases}x^2-x-2 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 2)\\ -x^2+x+2 & (-1\le x\le 2)\end{cases}$

$\therefore \int_{0}^{3}|x^2-x-2|dx$

$=\int_{0}^{2}(-x^2+x+2)dx+\int_{2}^{3}(x^2-x-2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{2}^{3}$

$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)+\left\{\left(9-\frac{9}{2}-6\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)\right\}=\frac{31}{6}$

(3) $x|5-x|=\begin{cases}-x^2+5x & (x\le 5)\\ x^2-5x & (x\ge 5)\end{cases}$ 이므로

$\int_{1}^{6}x|5-x|dx$

$=\int_{1}^{5}(-x^2+5x)dx+\int_{5}^{6}(x^2-5x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_{1}^{5}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2\right]_{5}^{6}$

$=\left\{\left(-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\right)\right\}$

$+\left\{(72-90)-\left(\frac{125}{3}-\frac{125}{2}\right)\right\}$

$=\frac{43}{2}$

032 답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) 0 (3) 2 (4) 48

(1) $\int_{-2}^{2}(x^2-1)dx=2\int_{0}^{2}(x^2-1)dx$

$=2\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{0}^{2}=2\left(\frac{8}{3}-2\right)=\frac{4}{3}$

(2) $\int_{-5}^{5}(x^3+x)dx=0$

(3) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2+x+2)dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^3+x)dx+\int_{-1}^{1}(-3x^2+2)dx$

$=0+2\int_{0}^{1}(-3x^2+2)dx=2\Big[-x^3+2x\Big]_0^1$

$=2(-1+2)=2$

(4) $\int_{-3}^{3}(x^7-4x^5+2x^3+3x^2+x-1)dx$

$=\int_{-3}^{3}(x^7-4x^5+2x^3+x)dx+\int_{-3}^{3}(3x^2-1)dx$

$=0+2\int_{0}^{3}(3x^2-1)dx=2\Big[x^3-x\Big]_0^3=2(27-3)=48$

033 답 (1) $f(x)=2x-4$ (2) $\frac{5}{4}$ (3) $f(x)=x^2-6x+9$

(4) $\frac{49}{6}$ (5) -3

(1) $\int_{0}^{2}f(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=2x+k$

$f(t)=2t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\int_{0}^{2}(2t+k)dt=\Big[t^2+kt\Big]_0^2=4+2k$

즉 $4+2k=k$이므로 $k=-4$

$\therefore f(x)=2x-4$

(2) $\int_{0}^{1}f(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=2x-3k$

$f(t)=2t-3k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\int_{0}^{1}(2t-3k)dt=\Big[t^2-3kt\Big]_0^1=1-3k$

즉 $1-3k=k$이므로 $k=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=2x-\frac{3}{4}$이므로 $f(1)=\frac{5}{4}$

(3) $\int_{0}^{3}f(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^2-6x+k$

$f(t)=t^2-6t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\int_{0}^{3}(t^2-6t+k)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-3t^2+kt\Big]_0^3=-18+3k$

즉 $-18+3k=k$이므로 $k=9$ $\quad\therefore f(x)=x^2-6x+9$

(4) $\int_{0}^{1}tf(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2-2x+k$

$f(t)=3t^2-2t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\int_{0}^{1}t(3t^2-2t+k)dt=\int_{0}^{1}(3t^3-2t^2+kt)dt$

$=\Big[\frac{3}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}kt^2\Big]_0^1=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}k$

즉 $\frac{1}{12}+\frac{1}{2}k=k$이므로 $k=\frac{1}{6}$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+\frac{1}{6}$이므로

$f(2)=12-4+\frac{1}{6}=\frac{49}{6}$

(5) $f(x)=-3x^2+\int_{0}^{1}(x-1)f(t)dt$

$=-3x^2+x\int_{0}^{1}f(t)dt-\int_{0}^{1}f(t)dt$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=-3x^2+kx-k$

$f(t)=-3t^2+kt-k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\int_{0}^{1}(-3t^2+kt-k)dt=\Big[-t^3+\frac{k}{2}t^2-kt\Big]_0^1=-1-\frac{k}{2}$

즉 $-1-\frac{k}{2}=k$이므로 $k=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=-3x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$이므로

$f(1)=-3-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=-3$

034 답 7

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x^3-2ax+3$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a+3$ $\quad\therefore a=4$

따라서 $f(x)=4x^3-8x+3$이므로 $f(-1)=-4+8+3=7$

035 답 4

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-a$

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$0=27-3a-3$ $\quad\therefore a=8$

따라서 $f(x)=3x^2-8$이므로 $f(2)=12-8=4$

036 답 -10

$\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^4+2x^3+ax^2+2$에서

$x\int_{1}^{x}f(t)dt-\int_{1}^{x}tf(t)dt=x^4+2x^3+ax^2+2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{1}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+6x^2+2ax$

$\therefore \int_{1}^{x}f(t)dt=4x^3+6x^2+2ax$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면 $f(x)=12x^2+12x+2a$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+2+a+2$ $\quad\therefore a=-5$

따라서 $f(x)=12x^2+12x-10$이므로

$f(-1)=12-12-10=-10$

037 답 극댓값 : 27, 극솟값 : -5

$f(x)=\int_0^x (3t^2+6t-9)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 아래와 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대, $x=1$에서 극소이고

$f(-3)=\int_0^{-3}(3t^2+6t-9)dt=\Big[t^3+3t^2-9t\Big]_0^{-3}=27,$

$f(1)=\int_0^1(3t^2+6t-9)dt=\Big[t^3+3t^2-9t\Big]_0^1=-5$

이므로 극댓값은 27, 극솟값은 -5이다.

038 답 최댓값 : $\frac{5}{6}$, 최솟값 : $-\frac{1}{6}$

$f(x)=\int_x^{x+1}(t^2-t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^2-(x+1)\}-(x^2-x)=2x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

이때

$f(-1)=\int_{-1}^0(t^2-t)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\Big]_{-1}^0=\frac{5}{6},$

$f(0)=\int_0^1(t^2-t)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1=-\frac{1}{6},$

$f(1)=\int_1^2(t^2-t)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\Big]_1^2=\frac{5}{6}$

이므로 최댓값은 $\frac{5}{6}$, 최솟값은 $-\frac{1}{6}$이다.

039 답 (1) 208 (2) -3 (3) 11

(1) $f(t)=t^3-t^2+t$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 주어진 식은

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_4^{x^2}f(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_4^{x^2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x^2)-F(4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x^2)-F(4)}{x^2-4}\cdot(x+2)$$

이때 $x^2=a$로 놓으면 $x\to2$일 때 $a\to4$이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{a\to4}\frac{F(a)-F(4)}{a-4}\cdot4=4F'(4)$$
$$=4f(4)=4\cdot52$$
$$=208$$

(2) $f(t)=t^3-4t^2+t-1$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 주어진 식은

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_1^{1+x}f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_1^{1+x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(1+x)-F(1)}{x}$$
$$=F'(1)=f(1)=-3$$

(3) $f(x)=3x^2-x+1$로 놓고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 주어진 식은

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}f(x)dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_2^{2+h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=12-2+1=11$$

040 답 ③

$\int_0^k(2x-1)dx=\Big[x^2-x\Big]_0^k=k^2-k$

즉 $k^2-k=6$이므로

$k^2-k-6=0,\ (k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=3\ (\because k>0)$

041 답 4

$$\int_{-1}^{-3}(x+2)f(x)dx=\int_{-1}^{-3}(x+2)(x^2-2x+4)dx$$
$$=\int_{-1}^{-3}(x^3+8)dx=\Big[\frac{1}{4}x^4+8x\Big]_{-1}^{-3}$$
$$=\Big(\frac{81}{4}-24\Big)-\Big(\frac{1}{4}-8\Big)=4$$

042 답 $\frac{1}{2}$

$$\int_1^3(2x+k)^2dx-\int_1^3(2x-k)^2dx$$
$$=\int_1^3\{(2x+k)^2-(2x-k)^2\}dx$$
$$=\int_1^3 8kx\,dx=\Big[4kx^2\Big]_1^3=32k$$

즉 $32k=16$이므로 $k=\frac{1}{2}$

043 답 7

$$\int_{-1}^2 f(x)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\Big\{\int_{-1}^3 f(x)dx+\int_3^1 f(x)dx\Big\}+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^3 f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=10-5+2=7$$

044 답 5200

$$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_9^{10} f(x)dx$$

$$=\int_0^{10} f(x)dx$$

$f(x)=2x^3+4x$이므로

$$\int_0^{10}(2x^3+4x)dx=\left[\frac{1}{2}x^4+2x^2\right]_0^{10}=5000+200=5200$$

045 답 -1

$f(x)=\begin{cases} 6 & (x\le 0) \\ -3x+6 & (x\ge 0)\end{cases}$ 이므로 $xf(x)=\begin{cases} 6x & (x\le 0) \\ -3x^2+6x & (x\ge 0)\end{cases}$

$$\therefore \int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^0 xf(x)dx+\int_0^1 xf(x)dx$$

$$=\int_{-1}^0 6xdx+\int_0^1(-3x^2+6x)dx$$

$$=\left[3x^2\right]_{-1}^0+\left[-x^3+3x^2\right]_0^1$$

$$=-3+(-1+3)=-1$$

046 답 ①

$|x-3|=\begin{cases} x-3 & (x\ge 3) \\ -x+3 & (x\le 3)\end{cases}$ 이므로

$$\int_0^a |x-3|dx=\int_0^3(-x+3)dx+\int_3^a(x-3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^3+\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_3^a$$

$$=\left(-\frac{9}{2}+9\right)+\left\{\left(\frac{1}{2}a^2-3a\right)-\left(\frac{9}{2}-9\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}a^2-3a+9$$

즉 $\frac{1}{2}a^2-3a+9=5$이므로 $a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>3$)

047 답 6

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이고, $g(-x)=-g(x)$에서 $g(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-2}^2\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{-2}^2 f(x)dx+\int_{-2}^2 g(x)dx$$

$$=2\int_0^2 f(x)dx=2\cdot 3=6$$

048 답 54

$\int_1^3 f'(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=2x^3+4x+k$

$\therefore f'(x)=6x^2+4$

$f'(t)=6t^2+4$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_1^3(6t^2+4)dt=\left[2t^3+4t\right]_1^3=(54+12)-(2+4)=60$$

즉 $k=60$이므로 $f(x)=2x^3+4x+60$

$\therefore f(-1)=-2-4+60=54$

049 답 7

$\int_a^x f(t)dt=x^2+3x-10$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+3$

$\int_a^x f(t)dt=x^2+3x-10$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2+3a-10$, $(a+5)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$\therefore f(a)=f(2)=7$

050 답 -1

$f(x)=\int_1^x(t^3-4t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 아래와 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=-2$, $x=2$에서 극소이고

$$f(0)=\int_1^0(t^3-4t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^2\right]_1^0=\frac{7}{4}$$

$$f(-2)=\int_1^{-2}(t^3-4t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^2\right]_1^{-2}=-\frac{9}{4}$$

$f(2)=\int_1^2(t^3-4t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^2\right]_1^2=-\frac{9}{4}$이므로

극댓값은 $\frac{7}{4}$, 극솟값은 $-\frac{9}{4}$이다.

따라서 $a=\frac{7}{4}$, $b=-\frac{9}{4}$이므로 $2(a+b)=-1$

051 답 3

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-3h}^{1+h} f(x)dx$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{1-3h}^{1+h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)+F(1)-F(1-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+3\lim_{h\to 0}\frac{F(1-3h)-F(1)}{-3h}$$

$$=F'(1)+3F'(1)=4F'(1)=4f(1)=-4+4a$$

즉 $-4+4a=8$이므로 $4a=12$

$\therefore a=3$

3 정적분의 활용

115쪽~123쪽

052 답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

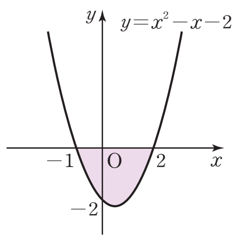
(1) 곡선 $y=x^2-x-2$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-x-2=0$에서

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$-1\le x\le 2$일 때 $y\le 0$이므로

구하는 넓이를 S라 하면



$S=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$

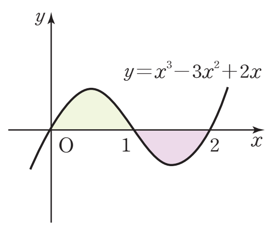
$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$

(2) 곡선 $y=x^3-3x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-3x^2+2x=0$에서

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$



$0\le x\le 1$일 때 $y\ge 0$이고, $1\le x\le 2$일 때 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)dx-\int_{1}^{2}(x^3-3x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_{0}^{1}-\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_{1}^{2}=\frac{1}{2}$

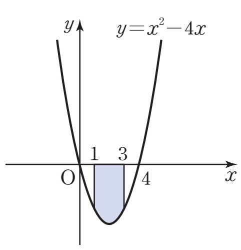
053 답 (1) $\frac{22}{3}$ (2) $\frac{31}{6}$ (3) $\frac{3}{4}$

(1) 곡선 $y=x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=0$에서

$x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 곡선 $y=x^2-4x$와 x축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



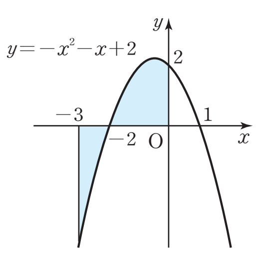
$1\le x\le 3$일 때 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=-\int_{1}^{3}(x^2-4x)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{1}^{3}=\frac{22}{3}$

(2) 곡선 $y=-x^2-x+2$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2-x+2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=-x^2-x+2$와 x축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



$-3\le x\le -2$일 때 $y\le 0$, $-2\le x\le 0$일 때 $y\ge 0$이므로

구하는 넓이를 S라 하면

$S=-\int_{-3}^{-2}(-x^2-x+2)dx+\int_{-2}^{0}(-x^2-x+2)dx$

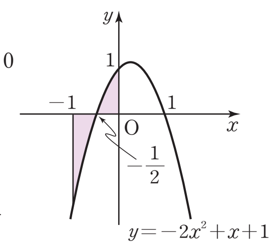
$=-\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-3}^{-2}+\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{0}$

$=\frac{11}{6}+\frac{10}{3}=\frac{31}{6}$

(3) 곡선 $y=-2x^2+x+1$과 x축의 교점의 x좌표는 $-2x^2+x+1=0$에서 $(2x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=-2x^2+x+1$과 x축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



$-1\le x\le -\frac{1}{2}$일 때 $y\le 0$, $-\frac{1}{2}\le x\le 0$일 때 $y\ge 0$이므로

구하는 넓이를 S라 하면

$S=-\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-2x^2+x+1)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(-2x^2+x+1)dx$

$=-\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}+\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}$

$=\frac{11}{24}+\frac{7}{24}=\frac{3}{4}$

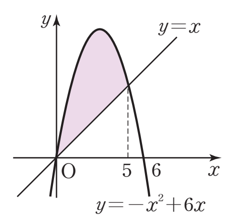
054 답 (1) $\frac{125}{6}$ (2) $\frac{9}{2}$

(1) 곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+6x=x$에서

$x^2-5x=0$, $x(x-5)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=5$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$S=\int_{0}^{5}\{(-x^2+6x)-x\}dx$

$=\int_{0}^{5}(-x^2+5x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_{0}^{5}=\frac{125}{6}$

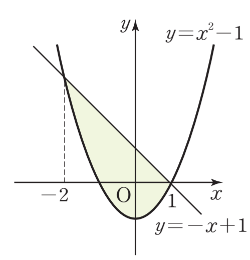
(2) 곡선 $y=x^2-1$과 직선 $y=-x+1$의 교점의 x좌표는

$x^2-1=-x+1$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$S=\int_{-2}^{1}\{(-x+1)-(x^2-1)\}dx$

$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$

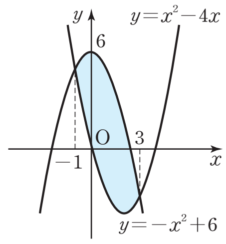
$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$

055 답 (1) $\frac{64}{3}$ (2) 4

(1) 두 곡선 $y=x^2-4x$, $y=-x^2+6$의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=-x^2+6$에서 $2x^2-4x-6=0$

$2(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$



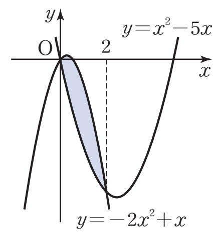
따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2+6)-(x^2-4x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$$

(2) 두 곡선 $y=-2x^2+x$, $y=x^2-5x$의 교점의 x좌표는 $-2x^2+x=x^2-5x$에서 $3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{2}\{(-2x^2+x)-(x^2-5x)\}dx$$
$$=\int_{0}^{2}(-3x^2+6x)dx=\left[-x^3+3x^2\right]_{0}^{2}=4$$

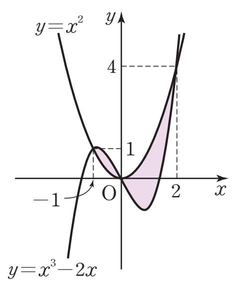
056 답 (1) $\frac{37}{12}$ (2) $\frac{37}{12}$ (3) 8

(1) 두 곡선 $y=x^2$, $y=x^3-2x$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=x^2$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

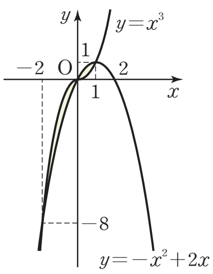
$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3-2x)-x^2\}dx+\int_{0}^{2}\{x^2-(x^3-2x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

(2) 두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^2+2x$의 교점의 x좌표는 $x^3=-x^2+2x$에서

$x^3+x^2-2x=0$

$x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{0}\{x^3-(-x^2+2x)\}dx+\int_{0}^{1}\{(-x^2+2x)-x^3\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$$

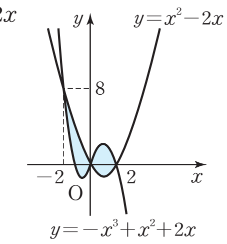
(3) 두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=-x^3+x^2+2x$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=-x^3+x^2+2x$에서

$x^3-4x=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

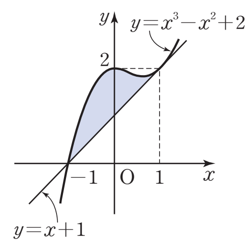
$$S=\int_{-2}^{0}\{(x^2-2x)-(-x^3+x^2+2x)\}dx$$
$$+\int_{0}^{2}\{(-x^3+x^2+2x)-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=4+4=8$$

057 답 $\frac{4}{3}$

$f(x)=x^3-x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x$이므로 곡선 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=1$



따라서 곡선 $y=x^3-x^2+2$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=x-1$

$\therefore y=x+1$

곡선 $y=x^3-x^2+2$와 직선 $y=x+1$의 교점의 x좌표는 $x^3-x^2+2=x+1$에서 $x^3-x^2-x+1=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^3-x^2+2)-(x+1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}$$

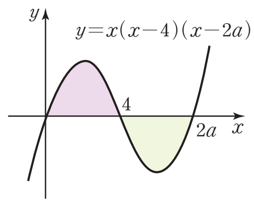
058 답 4

곡선 $y=x(x-4)(x-2a)$와 x축의 교점의 x좌표는

$x(x-4)(x-2a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=2a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$\int_0^{2a} x(x-4)(x-2a)dx=0$

$\int_0^{2a} \{x^3-(2a+4)x^2+8ax\}dx=0$

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2a+4}{3}x^3+4ax^2\right]_0^{2a}=0$

$4a^4-\frac{8(2a+4)a^3}{3}+16a^3=0$, $4a^3(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>2$)

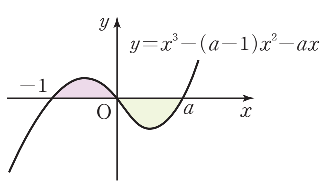
059 답 1

곡선 $y=x^3-(a-1)x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-(a-1)x^2-ax=0$에서 $x(x+1)(x-a)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$\int_{-1}^{a} \{x^3-(a-1)x^2-ax\}dx$

$=0$

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a-1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_{-1}^{a}=0$

$-\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{6}a+\frac{1}{12}=0$, $a^4+2a^3-2a-1=0$

$(a+1)^3(a-1)=0$

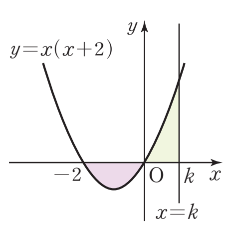
$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

060 답 1

곡선 $y=x(x+2)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

곡선과 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로



$\int_{-2}^{k} x(x+2)dx=0$

$\int_{-2}^{k} (x^2+2x)dx=0$, $\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^{k}=0$

$\frac{1}{3}k^3+k^2-\frac{4}{3}=0$, $k^3+3k^2-4=0$

$(k+2)^2(k-1)=0$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$)

061 답 -2

색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$\int_0^4 \{-x^2(x-4)-ax(x-4)\}dx=0$

$\int_0^4 \{-x^3+(4-a)x^2+4ax\}dx=0$

$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4-a}{3}x^3+2ax^2\right]_0^4=0$, $\frac{32}{3}a+\frac{64}{3}=0$

$\therefore a=-2$

062 답 $5-5\sqrt[3]{2}$

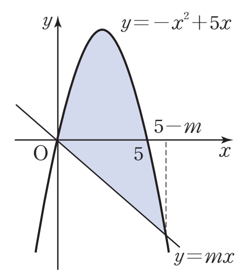
곡선 $y=-x^2+5x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$-x^2+5x=mx$에서

$x^2+(m-5)x=0$, $x(x+m-5)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=5-m$

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는



$\int_0^{5-m} \{(-x^2+5x)-mx\}dx$

$=\int_0^{5-m} \{-x^2+(5-m)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5-m}{2}x^2\right]_0^{5-m}=\frac{(5-m)^3}{6}$

한편 곡선 $y=-x^2+5x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^5 (-x^2+5x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_0^5=\frac{125}{6}$

이므로 $\frac{(5-m)^3}{6}=2\cdot\frac{125}{6}$, $(5-m)^3=250$

$5-m=5\sqrt[3]{2}$ $\quad\therefore m=5-5\sqrt[3]{2}$

063 답 $\frac{1}{6}$

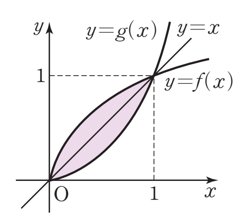
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

$x^3-2x^2+2x=x$에서

$x^3-2x^2+x=0$, $x(x-1)^2=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=2\int_0^1 \{(x^3-2x^2+2x)-x\}dx$

$\quad=2\int_0^1 (x^3-2x^2+x)dx$

$\quad=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=2\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

064 답 (1) $-\frac{9}{2}$ (2) $\frac{9}{2}$초 (3) 9

(1) 점 P의 운동 방향이 바뀔 때 $v(t)=0$이므로 $t^2-3t=0$

$t(t-3)=0 \quad \therefore t=3 \ (\because t>0)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$0+\int_0^3 (t^2-3t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_0^3=-\frac{9}{2}$

(2) 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 데 걸리는 시간을 a라 하면

$t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$\int_0^a (t^2-3t)dt=0, \ \left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_0^a=0$

$\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2=0, \ a^2\left(\frac{1}{3}a-\frac{3}{2}\right)=0$

$\therefore a=\frac{9}{2} \ (\because a>0)$

(3) $0\le t\le 3$에서 $v(t)\le 0$, $3\le t\le \frac{9}{2}$에서 $v(t)\ge 0$이므로

$t=0$에서 $t=\frac{9}{2}$까지

점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{\frac{9}{2}} |t^2-3t|dt=\int_0^3 (-t^2+3t)dt+\int_3^{\frac{9}{2}} (t^2-3t)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_3^{\frac{9}{2}}$

$=\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=9$

065 답 128 m

열차가 정지할 때 $v(t)=0$이므로 $32-4t=0 \quad \therefore t=8$

따라서 $t=0$에서 $t=8$까지 열차가 달린 거리는

$\int_0^8 (32-4t)dt=\left[32t-2t^2\right]_0^8=128(\text{m})$

066 답 25 m

$v(t)=20-10t=0$에서 $t=2$

따라서 $t=2$일 때 물체가 최고 지점에 도달하게 되므로 구하는 높이는

$x(2)=5+\int_0^2 (20-10t)dt$

$=5+\left[20t-5t^2\right]_0^2=25(\text{m})$

067 답 -2

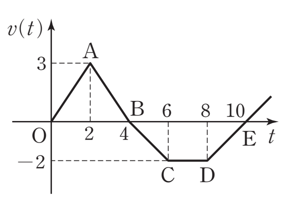
$0+\int_0^{10} v(t)dt$

$=\int_0^4 v(t)dt+\int_4^{10} v(t)dt$

$=\triangle\text{OAB}-\square\text{BCDE}$

$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot(2+6)\cdot 2$

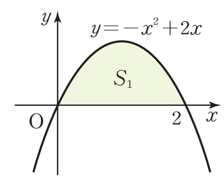
$=-2$



068 답 13

곡선 $y=-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=0$에서 $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$



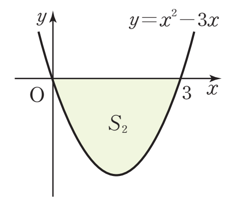
$\therefore S_1=\int_0^2 (-x^2+2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$

곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=0$에서

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$



$\therefore S_2=\int_0^3 (-x^2+3x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$

$\therefore 3S_1+2S_2=3\cdot\frac{4}{3}+2\cdot\frac{9}{2}=13$

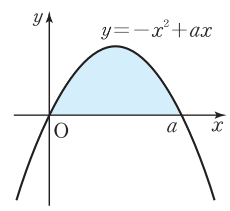
069 답 ③

곡선 $y=-x^2+ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+ax=0$에서

$-x(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$

구하는 넓이를 S라 하면



$S=\int_0^a (-x^2+ax)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$

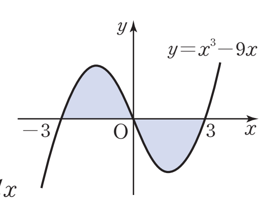
따라서 $\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$이므로 $a^3=27$

$\therefore a=3$

070 답 $\frac{81}{2}$

$y=x(x+3)(x-3)=x^3-9x$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-3}^3 |x^3-9x|dx$

$=\int_{-3}^0 (x^3-9x)dx+\int_0^3 (-x^3+9x)dx$

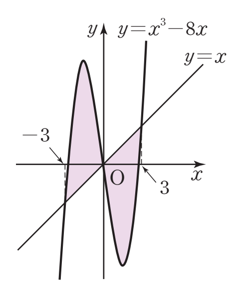
$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{9}{2}x^2\right]_0^3=\frac{81}{2}$

071 답 81

곡선 $y=x^3-8x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3-8x=x$에서

$x^3-9x=0, \ x(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^{0}\{(x^3-8x)-x\}dx+\int_{0}^{3}\{x-(x^3-8x)\}dx$$

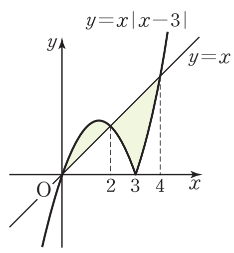
$$=\int_{-3}^{0}(x^3-9x)dx+\int_{0}^{3}(-x^3+9x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{3}=\frac{81}{4}+\frac{81}{4}=\frac{81}{2}$$

$\therefore\ 2S=2\cdot\frac{81}{2}=81$

072 답 $\frac{13}{3}$

$x-3=0$에서 $x=3$이므로 $y=x|x-3|=\begin{cases}x^2-3x & (x\ge3)\\ -x^2+3x & (x\le3)\end{cases}$



$y=x|x-3|$의 그래프와

직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

(i) $x\ge3$일 때, $x^2-3x=x$에서

$x^2-4x=0,\ x(x-4)=0$

$\therefore\ x=4\ (\because\ x\ge3)$

(ii) $x\le3$일 때, $-x^2+3x=x$에서

$x^2-2x=0,\ x(x-2)=0 \qquad \therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

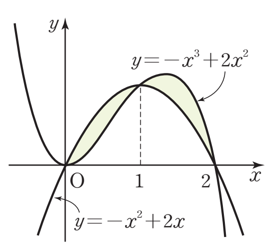
$$\int_{0}^{2}\{(-x^2+3x)-x\}dx+\int_{2}^{3}\{x-(-x^2+3x)\}dx+\int_{3}^{4}\{x-(x^2-3x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx+\int_{3}^{4}(-x^2+4x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{3}+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{3}^{4}$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{13}{3}$$

073 답 ②



두 곡선 $y=-x^3+2x^2$,

$y=-x^2+2x$의 교점의 x좌표는

$-x^3+2x^2=-x^2+2x$에서

$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x^2-3x+2)=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

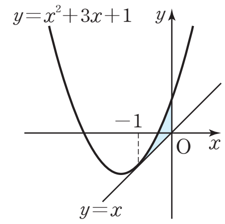
$$S=\int_{0}^{1}\{(-x^2+2x)-(-x^3+2x^2)\}dx+\int_{1}^{2}\{(-x^3+2x^2)-(-x^2+2x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)dx+\int_{1}^{2}(-x^3+3x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_{1}^{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

074 답 $\frac{1}{3}$

$f(x)=x^2+3x+1$에서 $f'(x)=2x+3$이므로 곡선 위의 점 $(-1,\ -1)$에서 그은 접선의 기울기는



$f'(-1)=1$이고 접선의 방정식은

$y-(-1)=x-(-1)$

$\therefore\ y=x$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^2+3x+1)-x\}dx$$

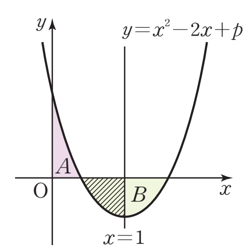
$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{1}{3}$$

075 답 $\frac{2}{3}$

$A:B=1:2$에서 $B=2A$



곡선 $y=x^2-2x+p$가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금친 도형의 넓이는 A와 같다.

즉 곡선 $y=x^2-2x+p$와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{1}(x^2-2x+p)dx=0,\ \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+px\right]_{0}^{1}=0$$

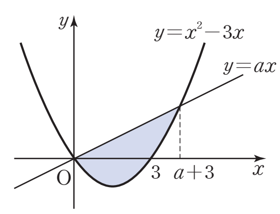
$\frac{1}{3}-1+p=0 \qquad \therefore\ p=\frac{2}{3}$

076 답 54

곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x=ax$에서 $x^2-(a+3)x=0,\ x(x-a-3)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=a+3$



따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{0}^{a+3}\{ax-(x^2-3x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{a+3}\{-x^2+(a+3)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+3}{2}x^2\right]_{0}^{a+3}=\frac{(a+3)^3}{6}$$

이때 곡선 $y=x^2-3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

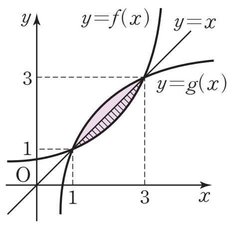
$$\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}=\frac{9}{2}$$

이므로 $\frac{(a+3)^3}{6}=2\cdot\frac{9}{2}=9$

$\therefore\ (a+3)^3=54$

077 답 3

오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이는



$\int_1^3 \{x-f(x)\}dx$

$=\int_1^3 x dx-\int_1^3 f(x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3-\frac{5}{2}=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 빗금친 부분의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$2\cdot\frac{3}{2}=3$

078 답 ⑤

$t=4$에서 점 P의 위치는

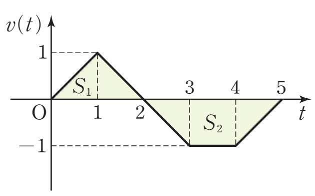
$0+\int_0^4 v(t)dt=\int_0^2(-t^2+2t)dt+\int_2^4(t^2-5t+6)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+6t\right]_2^4$

$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

079 답 2

$t=5$에서 물체의 위치는



$\int_0^5 v(t)dt=S_1-S_2$이므로

$a=\frac{1}{2}\cdot2\cdot1-\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot1$

$=-1$

또, $t=0$에서 $t=5$까지 물체가 움직인 거리는

$\int_0^5 |v(t)|dt=S_1+S_2$이므로

$b=\frac{1}{2}\cdot2\cdot1+\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot1=3$

$\therefore a+b=(-1)+3=2$

MEMO

MEMO

MEMO