정답 및 풀이

Ⅰ. 다항식

01 다항식의 연산

유제

본책 13~29쪽

001-❶ (1) $A-B+C$
$=(x^3-3x+2)-(-x^3+x^2+x+1)+(2x^3-2x-5)$
$=x^3-3x+2+x^3-x^2-x-1+2x^3-2x-5$
$=4x^3-x^2-6x-4$
(2) $2A-(B+C)$
$=2(x^3-3x+2)-(-x^3+x^2+x+1+2x^3-2x-5)$
$=2x^3-6x+4-(x^3+x^2-x-4)$
$=2x^3-6x+4-x^3-x^2+x+4$
$=x^3-x^2-5x+8$
(3) $-A+B-2(C-2A)$
$=-A+B-2C+4A=3A+B-2C$
$=3(x^3-3x+2)+(-x^3+x^2+x+1)$
$\quad -2(2x^3-2x-5)$
$=3x^3-9x+6-x^3+x^2+x+1-4x^3+4x+10$
$=-2x^3+x^2-4x+17$
(4) $3(2B-C)+2(A-4B)$
$=6B-3C+2A-8B=2A-2B-3C$
$=2(x^3-3x+2)-2(-x^3+x^2+x+1)$
$\quad -3(2x^3-2x-5)$
$=2x^3-6x+4+2x^3-2x^2-2x-2-6x^3+6x+15$
$=-2x^3-2x^2-2x+17$

답 풀이 참조

001-❷ $2X+B=A-3B$를 X에 대하여 풀면
$2X=A-4B$
$\therefore X=\frac{1}{2}A-2B$
$=\frac{1}{2}(-2x^2+8xy+y^2)$
$\quad -2\left(\frac{1}{2}x^2-6xy-\frac{1}{4}y^2\right)$
$=-x^2+4xy+\frac{1}{2}y^2-x^2+12xy+\frac{1}{2}y^2$
$=-2x^2+16xy+y^2$

답 $-2x^2+16xy+y^2$

001-❸ $A+B=4x^3-2x^2-12x+6$ …… ㉠
$A-B=-2x^3-2x^2-2x+18$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$2A=2x^3-4x^2-14x+24$
$\therefore A=x^3-2x^2-7x+12$ …… ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$x^3-2x^2-7x+12+B=4x^3-2x^2-12x+6$
$\therefore B=4x^3-2x^2-12x+6-(x^3-2x^2-7x+12)$
$=4x^3-2x^2-12x+6-x^3+2x^2+7x-12$
$=3x^3-5x-6$
$\therefore 2A-B=2(x^3-2x^2-7x+12)$
$\quad -(3x^3-5x-6)$
$=2x^3-4x^2-14x+24-3x^3+5x+6$
$=-x^3-4x^2-9x+30$

답 $-x^3-4x^2-9x+30$

002-❶ 다항식 $A=(x^2+x)(2x^3-x^2+3)$의 전개식에서 x^4항은
$x^2\cdot(-x^2)+x\cdot 2x^3=-x^4+2x^4=x^4$
$\therefore a=1$
다항식 $B=(3x^4+2x^2-6)(x^2-x+5)$의 전개식에서 x^4항은
$3x^4\cdot 5+2x^2\cdot x^2=15x^4+2x^4=17x^4$
$\therefore b=17$
$\therefore a+b=18$

답 18

002-❷ 다항식 $(x^2+8x+a)(x^2-3x+4)$의 전개식에서 x^2항은
$x^2\cdot 4+8x\cdot(-3x)+a\cdot x^2=(-20+a)x^2$
이때 x^2의 계수가 -15이므로
$-20+a=-15$
$\therefore a=5$

답 5

002-❸ $(1+x+x^2+\cdots+x^{100})^2$
$=(1+x+x^2+\cdots+x^{100})$
$\quad \times(1+x+x^2+\cdots+x^{100})$
이 다항식의 전개식에서 x^4항은
$1\cdot x^4+x\cdot x^3+x^2\cdot x^2+x^3\cdot x+x^4\cdot 1=5x^4$
따라서 x^4의 계수는 5이다.

답 5

003-❶ $A+B=x^2+x$ …… ㉠
$2A-B=2x^2-x+3$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면 $3A=3x^2+3$
$\therefore A=x^2+1$ …… ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면 $x^2+1+B=x^2+x$
$\therefore B=x^2+x-(x^2+1)=x-1$
$\therefore AB=(x^2+1)(x-1)=x^3-x^2+x-1$

답 x^3-x^2+x-1

003-② 연산 △의 식에서 우변을 정리하면

$$\begin{aligned} x\triangle y &= (x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) \\ &= x(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) \\ &\quad -y(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) \\ &= (x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4) \\ &\quad -(x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5) \\ &= x^5-y^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ (a\triangle b)+(b\triangle c) &= (a^5-b^5)+(b^5-c^5) \\ &= a^5-c^5 \\ &= a\triangle c \end{aligned}$$

답 풀이 참조

004-① (1) $(x+2y)^3$

$$\begin{aligned} &= x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3 \\ &= x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3 \end{aligned}$$

(2) $(3x-2y)^3$

$$\begin{aligned} &= (3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3 \\ &= 27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3 \end{aligned}$$

(3) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

$$\begin{aligned} &= (2x-y)\{(2x)^2+2x\cdot y+y^2\} \\ &= (2x)^3-y^3=8x^3-y^3 \end{aligned}$$

(4) $(x-1)(x-2)(x-4)$

$$\begin{aligned} &= x^3+\{(-1)+(-2)+(-4)\}x^2 \\ &\quad +\{(-1)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-4)+(-4)\cdot(-1)\}x \\ &\quad +(-1)\cdot(-2)\cdot(-4) \\ &= x^3-7x^2+14x-8 \end{aligned}$$

(5) $(x-3y+2z)^2$

$$\begin{aligned} &= x^2+(-3y)^2+(2z)^2+2\cdot x\cdot(-3y) \\ &\quad +2\cdot(-3y)\cdot 2z+2\cdot 2z\cdot x \\ &= x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4zx \end{aligned}$$

(6) $(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$

$$\begin{aligned} &= \{x^2+x\cdot 3y+(3y)^2\}\{x^2-x\cdot 3y+(3y)^2\} \\ &= x^4+x^2\cdot(3y)^2+(3y)^4 \\ &= x^4+9x^2y^2+81y^4 \end{aligned}$$

(7) $(x-y+1)(x^2+y^2+xy-x+y+1)$

$$\begin{aligned} &= \{x+(-y)+1\} \\ &\quad \times\{x^2+(-y)^2+1^2-x\cdot(-y)-(-y)\cdot 1-1\cdot x\} \\ &= x^3+(-y)^3+1^3-3\cdot x\cdot(-y)\cdot 1 \\ &= x^3-y^3+3xy+1 \end{aligned}$$

답 풀이 참조

005-① (1) $(a-1)^3(a^2+a+1)^3$

$$\begin{aligned} &= \{(a-1)(a^2+a+1)\}^3=(a^3-1)^3 \\ &= (a^3)^3-3\cdot(a^3)^2\cdot 1+3\cdot a^3\cdot 1^2-1^3 \\ &= a^9-3a^6+3a^3-1 \end{aligned}$$

(2) $(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

$$\begin{aligned} &= \{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\} \\ &= (x^3-y^3)(x^3+y^3) \\ &= x^6-y^6 \end{aligned}$$

(3) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

$$\begin{aligned} &= (x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1) \\ &= x^8+x^4+1 \end{aligned}$$

(4) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$

$$\begin{aligned} &= \{(x+1)(x-3)\}\{(x+2)(x-4)\} \\ &= (x^2-2x-3)(x^2-2x-8) \end{aligned}$$

$x^2-2x=X$로 놓으면

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= (X-3)(X-8) \\ &= X^2-11X+24 \\ &= (x^2-2x)^2-11(x^2-2x)+24 \\ &= x^4-4x^3+4x^2-11x^2+22x+24 \\ &= x^4-4x^3-7x^2+22x+24 \end{aligned}$$

(5) $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$\begin{aligned} &= \{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\} \\ &\quad \times\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\} \\ &= \{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\} \\ &= -\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\} \\ &= -a^4+\{(b+c)^2+(b-c)^2\}a^2-\{(b+c)(b-c)\}^2 \\ &= -a^4+(b^2+2bc+c^2+b^2-2bc+c^2)a^2-(b^2-c^2)^2 \\ &= -a^4+2(b^2+c^2)a^2-(b^4-2b^2c^2+c^4) \\ &= -a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2 \end{aligned}$$

답 풀이 참조

006-①

$$\begin{aligned} \frac{55^3}{53\times 57+4} &= \frac{55^3}{(55-2)(55+2)+4} \\ &= \frac{55^3}{(55^2-4)+4} \\ &= \frac{55^3}{55^2}=55 \end{aligned}$$

답 55

006-② $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1) \\ &= \frac{1}{2}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1) \\ &= \frac{1}{2}(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1) \\ &= \frac{1}{2}(3^8-1)(3^8+1) \\ &= \frac{1}{2}(3^{16}-1) \end{aligned}$$

답 ③

006-❸ 1.002^3

$=(1+0.002)^3$

$=1^3+3\times1^2\times0.002+3\times1\times0.002^2+0.002^3$

$=1+0.006+\cdots$

$=1.006\cdots$

따라서 소수점 아래 셋째 자리의 숫자는 6이다. 답 6

007-❶ (1) $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

$=14-2\cdot5=4$

이므로 $x-y=2\,(\because x>y)$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=2^3+3\cdot5\cdot2=38$

(2) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=(-9)^2-2\cdot(-33)$

$=147$

$$\therefore \frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}=\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$$

$$=\frac{147}{-3}=-49$$

(3) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$6^2=52+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-8$

이때

$x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$+3xyz$

이므로

$324=6\cdot(52+8)+3xyz$

$3xyz=-36$

$\therefore xyz=-12$

답 (1) 38 (2) -49 (3) -12

007-❷ $x-y=2+\sqrt{7}$ …… ㉠

$y-z=2-\sqrt{7}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $x-z=4$

$\therefore z-x=-4$

$\therefore x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$$

$$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(2+\sqrt{7})^2+(2-\sqrt{7})^2+(-4)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}(4+4\sqrt{7}+7+4-4\sqrt{7}+7+16)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot38=19$$

답 19

008-❶

$$\begin{array}{r|l} & x^2-2x-1 \\ \hline 2x+1 & 2x^3-3x^2-4x-4 \\ & 2x^3+\ x^2 \\ \hline & -4x^2-4x \\ & -4x^2-2x \\ \hline & -2x-4 \\ & -2x-1 \\ \hline & -3 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=x^2-2x-1$이므로

$Q(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)-1$

$=2$

또 $R=-3$이므로

$Q(-1)+R=-1$

답 -1

008-❷ 다항식 x^3-4x^2+5x+1을 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $x+1$, 나머지가 $10x+1$이므로

$x^3-4x^2+5x+1=A(x+1)+10x+1$

$A(x+1)=x^3-4x^2+5x+1-(10x+1)$

$=x^3-4x^2-5x$

$\therefore A=(x^3-4x^2-5x)\div(x+1)$

다항식 x^3-4x^2-5x를 $x+1$로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x^2-5x \\ \hline x+1 & x^3-4x^2-5x \\ & x^3+\ x^2 \\ \hline & -5x^2-5x \\ & -5x^2-5x \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore A=x^2-5x$

답 x^2-5x

008-❸ 다항식 A를 x^2+2로 나누었을 때의 몫이 $5x-2$, 나머지가 $-6x+5$이므로

$A=(x^2+2)(5x-2)-6x+5$

$=5x^3-2x^2+10x-4-6x+5$

$=5x^3-2x^2+4x+1$

다항식 A, 즉 $5x^3-2x^2+4x+1$을 x^2-2로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & 5x-2 \\ \hline x^2-2 & 5x^3-2x^2+4x+1 \\ & 5x^3\qquad-10x \\ \hline & -2x^2+14x+1 \\ & -2x^2\qquad+4 \\ \hline & 14x-3 \end{array}$$

따라서 구하는 몫은 $5x-2$, 나머지는 $14x-3$이다.

답 몫: $5x-2$, 나머지: $14x-3$

중단원 연습 문제

본책 30~34쪽

01 $5x^2-4xy+y^2$	02 46	03 ①	04 39	
05 ③	06 ④	07 22	08 ④	09 52
10 86	11 ③	12 5	13 ③	14 48
15 ④	16 24	17 ⑤	18 400	
19 -3	20 6	21 129	22 ①	23 30
24 ④				

01 전략 주어진 두 식을 연립하여 A, B를 구한다.

풀이 $A+B=2x^2-2xy+y^2$ ······ ㉠

$A-2B=-x^2+4xy-5y^2$ ······ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$3B=3x^2-6xy+6y^2$

$\therefore B=x^2-2xy+2y^2$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$A+x^2-2xy+2y^2=2x^2-2xy+y^2$

$\therefore A=2x^2-2xy+y^2-(x^2-2xy+2y^2)$

$=x^2-y^2$

$\therefore 3A+2B=3(x^2-y^2)+2(x^2-2xy+2y^2)$

$=3x^2-3y^2+2x^2-4xy+4y^2$

$=5x^2-4xy+y^2$

답 $5x^2-4xy+y^2$

02 전략 먼저 x항이 나오는 항만 전개하여 상수 k의 값을 구한다.

풀이 다항식 $(3x^2+x-4)(x^2+2x+k)$의 전개식에서 x항은

$x\cdot k+(-4)\cdot 2x=(k-8)x$

이때 x의 계수가 8이므로

$k-8=8 \qquad \therefore k=16$ ··· ❶

따라서 다항식 $(3x^2+x-4)(x^2+2x+16)$의 전개식에서 x^2항은

$3x^2\cdot 16+x\cdot 2x+(-4)\cdot x^2=46x^2$

이므로 x^2의 계수는 46이다. ··· ❷

답 46

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ x^2의 계수를 구할 수 있다.	50%

03 전략 $(2-1)(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)$을 분배법칙을 이용하여 전개한다.

풀이 $2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1$

$=(2-1)(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)$

$=2(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)$

$\quad-(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)$

$=(2^{10}+2^9+2^8+\cdots+2^3+2^2+2)$

$\quad-(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)$

$=2^{10}-1$

$=1023$

답 ①

Remark▶

2 이상의 자연수 n에 대하여

$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$=a^n-b^n$

04 전략 곱셈 공식 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$을 이용한다.

풀이 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^4-1)(x^4+1)$

$=x^8-1$

$=40-1$

$=39$

답 39

05 전략 공통부분이 생기도록 2개씩 짝지어 전개한다.

풀이 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+8)$

$=\{(x+1)(x+8)\}\{(x+2)(x+4)\}$

$=(x^2+9x+8)(x^2+6x+8)$

$x^2+8=X$로 놓으면

(주어진 식)

$=(X+9x)(X+6x)$

$=X^2+15xX+54x^2$

$=(x^2+8)^2+15x(x^2+8)+54x^2$

$=x^4+16x^2+64+15x^3+120x+54x^2$

$=x^4+15x^3+70x^2+120x+64$

따라서 $a=70$, $b=120$이므로

$3a-b=90$

답 ③

06 전략 곱셈 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $99^2+101^2=(100-1)^2+(100+1)^2$

$=10000-200+1+10000+200+1$

$=20002$

답 ④

07 전략 곱셈 공식 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $0.998^3=(1-0.002)^3$
$=1^3-3\times1^2\times0.002+3\times1\times0.002^2-0.002^3$
$=1-0.006+\cdots$
$=0.994\cdots$

따라서 $x=9$, $y=9$, $z=4$이므로
$x+y+z=22$ 답 22

08 전략 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로 먼저 주어진 조건을 이용하여 xy의 값을 구한다.

풀이 $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$이므로
$(-1)^3=-7+3xy\cdot(-1)$
$3xy=-6 \qquad \therefore xy=-2$
$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(-1)^2-2\cdot(-2)$
$=5$ 답 ④

09 전략 $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$임을 이용한다.

풀이 $x^2-4x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면
$x-4+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=4$
$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=4^3-3\cdot4$
$=52$ 답 52

10 전략 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한다.

풀이 $a^2+b^2+c^2$
$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
에서 $45=7^2-2(ab+bc+ca)$
$\therefore ab+bc+ca=2$ ⋯ ❶
$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$
$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$
$=2\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}$
$=2\cdot(45-2)=86$ ⋯ ❷
답 86

채점 기준	비율
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50%

11 전략 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 작을 때까지 나누어 몫과 나머지를 구한다.

풀이 다항식 $3x^3+4x^2-x-2$를 x^2+x-1로 나누면

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ x^2+x-1 \overline{\big)\, 3x^3+4x^2-x-2} \\ \underline{3x^3+3x^2-3x} \\ x^2+2x-2 \\ \underline{x^2+x-1} \\ x-1 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=3x+1$, $R(x)=x-1$이므로
$Q(1)+R(2)=4+1=5$ 답 ③

12 전략 다항식 B를 다항식 $C\,(C\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $B=CQ+R$이다.
(단, R는 상수 또는 (R의 차수)$<$(C의 차수))

풀이 다항식 $12x^3+47x^2+10x-60$을 A로 나누었을 때의 몫이 $4x+9$, 나머지가 $-3x+12$이므로
$12x^3+47x^2+10x-60=A(4x+9)-3x+12$
$A(4x+9)=12x^3+47x^2+13x-72$
$\therefore A=(12x^3+47x^2+13x-72)\div(4x+9)$
다항식 $12x^3+47x^2+13x-72$를 $4x+9$로 나누면

$$\begin{array}{r} 3x^2+5x-8 \\ 4x+9 \overline{\big)\, 12x^3+47x^2+13x-72} \\ \underline{12x^3+27x^2} \\ 20x^2+13x \\ \underline{20x^2+45x} \\ -32x-72 \\ \underline{-32x-72} \\ 0 \end{array}$$

따라서 $A=3x^2+5x-8$이므로 x의 계수는 5이다.
답 5

13 전략 곱셈 공식 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$을 이용할 수 있도록 주어진 등식의 좌변을 변형한다.

풀이 $(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=\frac{1}{8}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=\frac{1}{8}(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=\frac{1}{8}(3^8-1)(3^8+1)$
$=\frac{3^{16}-1}{8}$

따라서 $\frac{3^{16}-1}{8}=\frac{3^n-1}{m}$이므로
$m=8$, $n=16$ ($\because 1\le m\le9$)
$\therefore m+n=24$ 답 ③

Remark▶

$m=8(3^{16}+1)$, $n=32$일 때에도 $\frac{3^{16}-1}{8}=\frac{3^n-1}{m}$이 성립하지만 $1 \le m \le 9$인 조건을 만족시키지 않는다.

14

전략 $x+y+z=6$에서 $x+y=6-z$, $y+z=6-x$, $z+x=6-y$임을 이용한다.

풀이 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

에서 $6^2=12+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=12$ ⋯ ❶

또 $x+y+z=6$에서

$x+y=6-z$, $y+z=6-x$, $z+x=6-y$

이므로

$$\begin{aligned}&(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\\&=(6-z)(6-x)+(6-x)(6-y)+(6-y)(6-z)\\&=36-6x-6z+zx+36-6y-6x+xy+36-6z\\&\quad-6y+yz\\&=108-12(x+y+z)+(xy+yz+zx)\\&=108-12\cdot6+12=48\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 48

채점 기준	비율
❶ $xy+yz+zx$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60%

15

전략 곱셈 공식의 변형을 이용하여 xy의 값을 구한다.

풀이 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$19=1^3-3xy$, $3xy=-18$

$\therefore xy=-6$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=1^2-2\cdot(-6)=13$

$\therefore x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

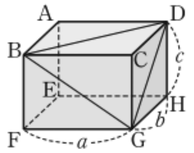
$=13^2-2\cdot(-6)^2=97$

답 ④

16

전략 $\overline{FG}=a$, $\overline{GH}=b$, $\overline{DH}=c$로 놓고 a, b, c에 대한 식을 세운다.

풀이



위의 그림과 같이 $\overline{FG}=a$, $\overline{GH}=b$, $\overline{DH}=c$라 하면 주어진 직육면체의 겉넓이가 22이므로

$2(ab+bc+ca)=22$

$\therefore ab+bc+ca=11$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

한편 △BFG, △DGH, △DBC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BG}^2=\overline{BF}^2+\overline{FG}^2=c^2+a^2$

$\overline{GD}^2=\overline{GH}^2+\overline{DH}^2=b^2+c^2$

$\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=a^2+b^2$

△BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 28이므로

$(c^2+a^2)+(b^2+c^2)+(a^2+b^2)=28$

$\therefore a^2+b^2+c^2=14$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에 의하여

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$=14+2\cdot11$

$=36$

$\therefore a+b+c=6$ ($\because a+b+c>0$)

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\cdot6=24$ ⋯ ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구할 수 있다.	20%

17

전략 주어진 식을 이용하여 $x-z$의 값을 구한다.

풀이 $x+y=2+\sqrt{3}$ ⋯⋯ ㉠

$y+z=2-\sqrt{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면

$x-z=2\sqrt{3}$

$\therefore x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx$

$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz-2zx)$

$=\frac{1}{2}\{(x+y)^2+(y+z)^2+(x-z)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2\}$

$=\frac{1}{2}(4+4\sqrt{3}+3+4-4\sqrt{3}+3+12)$

$=\frac{1}{2}\cdot26=13$

답 ⑤

18

전략 주어진 조건에서 $x+y$, xy의 값을 구하여 두 건물의 부피의 합 x^3+y^3의 값을 구한다.

풀이 평면도에서 건물 C의 둘레의 길이가 20이므로

$2(x+y)=20$ $\therefore x+y=10$

평면도에서 세 건물의 넓이의 합이 80이므로

$x^2+y^2+xy=80$, $(x+y)^2-xy=80$

$10^2-xy=80$ $\therefore xy=20$

따라서 정육면체 모양의 두 건물 A, B의 부피의 합은

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= 10^3-3\cdot20\cdot10 \\ &= 400 \end{aligned}$$

답 400

19

전략 다항식의 나눗셈을 이용한다.

풀이 다항식 $4x^4+2x^3-8x^2-8x-5$를 다항식 x^2-x-1로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 4x^2+6x+2 \\ x^2-x-1 \overline{\smash{)}\, 4x^4+2x^3-8x^2-8x-5} \\ \underline{4x^4-4x^3-4x^2 } \\ 6x^3-4x^2-8x \\ \underline{6x^3-6x^2-6x } \\ 2x^2-2x-5 \\ \underline{2x^2-2x-2} \\ -3 \end{array}$$

$\therefore 4x^4+2x^3-8x^2-8x-5$

$=(x^2-x-1)(4x^2+6x+2)-3$ …… ㉠

이때 $x^2-x-1=0$이므로 ㉠에서 구하는 값은

$$\begin{aligned} (\text{구하는 값}) &= 0\cdot(4x^2+6x+2)-3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

답 -3

20

전략 네 다항식 A, B, C, D를 x^2+1로 나누어 나머지를 각각 구한다.

풀이 $A=x^2-x+1=(x^2+1)-x$이므로 A를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $-x$이다.

$\therefore$ P$(-1,\ 0)$

$B=x^2+2x+1=(x^2+1)+2x$이므로 B를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $2x$이다.

$\therefore$ Q$(2,\ 0)$

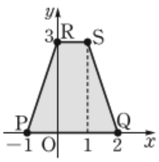
$C=x^3+x+3=x(x^2+1)+3$이므로 C를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

$\therefore$ R$(0,\ 3)$

$D=x^3+2x+3=x(x^2+1)+x+3$이므로 D를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $x+3$이다.

$\therefore$ S$(1,\ 3)$

따라서 네 점 P, Q, R, S를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 □PQSR의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot(3+1)\cdot3=6$$

답 6

21

전략 먼저 대각선으로 배열된 세 다항식의 합이 $6x^2+12x$임을 이용한다.

풀이

㈏		
$2x-2$	$2x^2+4x$	
㈎		$-x^2+x-3$

㈏의 위치에 알맞은 다항식을 $g(x)$라 하면 대각선으로 배열된 세 다항식의 합은

$$g(x)+(2x^2+4x)+(-x^2+x-3)=6x^2+12x$$

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= 6x^2+12x-(2x^2+4x-x^2+x-3) \\ &= 5x^2+7x+3 \end{aligned}$$

또

$$f(x)+(2x-2)+(5x^2+7x+3)=6x^2+12x$$

이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^2+12x-(2x-2+5x^2+7x+3) \\ &= x^2+3x-1 \end{aligned}$$

$\therefore f(10)=100+30-1=129$

답 129

22

전략 x항이 나오는 경우만 전개한다.

풀이 $\langle x^2+x+1,\ x^2+x\rangle$

$=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)(x^2+x)+(x^2+x)^2$

$=(x^2+x+1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)(x^2+x)$

$\quad+(x^2+x)(x^2+x)$

에서 x항은

$$x\cdot1+1\cdot x+1\cdot x=3x$$

따라서 x의 계수는 3이다.

답 ①

다른 풀이 $\langle x^2+x+1,\ x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수를 구할 때, 이차항인 x^2은 의미를 갖지 않는다.

즉 $\langle x^2+x+1,\ x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수는 $\langle x+1,\ x\rangle$의 전개식에서 x의 계수와 같으므로

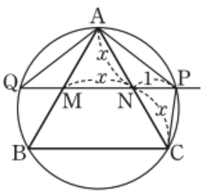
$$\begin{aligned} \langle x+1,\ x\rangle &= (x+1)^2+(x+1)x+x^2 \\ &= x^2+2x+1+x^2+x+x^2 \\ &= 3x^2+3x+1 \end{aligned}$$

따라서 x의 계수는 3이다.

23

전략 닮음인 두 삼각형을 찾아 비례식을 세운다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 반직선 NM이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 Q라 하자.



$\overline{AN}=\overline{NC}$이고 삼각형 AMN은 정삼각형이므로

$$\overline{AN}=\overline{NC}=\overline{MN}=x$$

$\triangle$AQM$\equiv\triangle$APN (ASA 합동)이므로

$$\overline{QM}=\overline{NP}=1$$

$\angle \mathrm{ANQ}=\angle \mathrm{PNC}$ (맞꼭지각),
$\angle \mathrm{AQN}=\angle \mathrm{ACP}$ ($\widehat{\mathrm{AP}}$에 대한 원주각)이므로

$\triangle \mathrm{AQN} \backsim \triangle \mathrm{PCN}$ (AA 닮음)

즉 $\overline{\mathrm{QN}}:\overline{\mathrm{CN}}=\overline{\mathrm{AN}}:\overline{\mathrm{PN}}$이므로

$$(1+x):x=x:1$$

$$1+x=x^2 \qquad \therefore\ x^2-x-1=0$$

$x^2-x-1=0$의 양변을 $x\,(x\neq 0)$로 나누면

$$x-1-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x-\frac{1}{x}=1$$

따라서

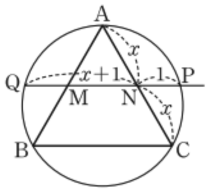
$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$$
$$=1^2+2=3$$

이므로

$$10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=30$$

답 30

다른 풀이 $\overline{\mathrm{NA}}\times\overline{\mathrm{NC}}$
$=\overline{\mathrm{NP}}\times\overline{\mathrm{NQ}}$



이므로

$$x\cdot x=1\cdot(x+1)$$
$$\therefore\ x^2-x-1=0$$

따라서 $x-\dfrac{1}{x}=1$이므로

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3$$
$$\therefore\ 10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=30$$

24 전략 다항식 $P(x)+4x$를 구한 후 다항식 $Q(x)$로 나누어 나머지를 구한다.

풀이 $P(x)+4x=(3x^3+x+11)+4x$
$=3x^3+5x+11$

이므로

$$\begin{array}{r|l} & 3x+3 \\ \hline x^2-x+1 & 3x^3\qquad\ \ +5x+11 \\ & 3x^3-3x^2+3x \\ \hline & \qquad 3x^2+2x+11 \\ & \qquad 3x^2-3x+\ \ 3 \\ \hline & \qquad\qquad 5x+\ \ 8 \end{array}$$

따라서 나머지가 $5x+8$이므로

$$a=8$$

답 ④

I. 다항식

02 항등식과 나머지정리

유제

본책 40~52쪽

009-① 주어진 등식의 좌변을 x에 대하여 정리하면

$$(a+b)x-a+b=2x$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$a+b=2,\ -a+b=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=1$$

답 $a=1,\ b=1$

009-② 주어진 등식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$$(a-2b)x+(-2a+3b)y+a-b-c$$
$$=3x-5y+4$$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$$a-2b=3,\ -2a+3b=-5,\ a-b-c=4$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=-1,\ c=-2$$

답 $a=1,\ b=-1,\ c=-2$

010-① 주어진 등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$ax^3+bx^2-x+4$$
$$=cx^3+(4+c)x^2+(4+c)x+4$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=c,\ b=4+c,\ -1=4+c$$
$$\therefore\ a=-5,\ b=-1,\ c=-5$$

답 $a=-5,\ b=-1,\ c=-5$

010-② $x=-1$을 양변에 대입하면

$$0=-1+a-3+b$$
$$\therefore\ a+b=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=3$을 양변에 대입하면

$$0=27+9a+9+b$$
$$\therefore\ 9a+b=-36 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-5,\ b=9$$

답 $a=-5,\ b=9$

011-① x^3+ax^2+bx+6을 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 0이므로

$$x^3+ax^2+bx+6=(x+1)(x-2)Q(x)$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$x=-1$을 양변에 대입하면

$-1+a-b+6=0$

$\therefore a-b=-5$ …… ㉠

$x=2$를 양변에 대입하면

$8+4a+2b+6=0$

$\therefore 2a+b=-7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=1$

$\therefore a+b=-3$

답 -3

011-❷ x^3+ax^2-x+1을 x^2+1로 나누었을 때의 몫이 $x-1$이므로 나머지를 $px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$x^3+ax^2-x+1=(x^2+1)(x-1)+px+q$

우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+ax^2-x+1=x^3-x^2+(p+1)x+q-1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=-1,\ -1=p+1,\ 1=q-1$

$\therefore a=-1,\ p=-2,\ q=2$

따라서 $a=-1$이고 나머지는 $-2x+2$이다.

답 $a=-1$, 나머지: $-2x+2$

Remark▶ 다항식의 나눗셈에서의 나머지

다항식의 나눗셈에서 나머지는 상수이거나 나머지의 차수는 나누는 식의 차수보다 항상 작다. 따라서 나누는 식이 이차식이면 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓는다.

012-❶ $f(x)=x^4-2ax^3+ax^2-3x-7$이라 하면 나머지정리에 의하여 $f(2)=15$이므로

$16-16a+4a-6-7=15$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-3x-7$이므로 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=1+2-1-3-7$

$=-8$

답 -8

012-❷ $f(x)=x^3+ax^2+bx-5$라 하면 나머지정리에 의하여 $f(-1)=-1,\ f(-2)=1$이므로

$-1+a-b-5=-1,\ -8+4a-2b-5=1$

$\therefore a-b=5,\ 2a-b=7$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-3$

$\therefore ab=-6$

답 -6

013-❶ $f(x)$를 $(x+1)(x-4)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x-4)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누면 나머지가 12이고, $x-4$로 나누면 나머지가 -3이므로 나머지정리에 의하여

$f(-1)=12,\ f(4)=-3$

$x=-1$, $x=4$를 ㉠의 양변에 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b,\ f(4)=4a+b$

$\therefore -a+b=12,\ 4a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=9$

따라서 구하는 나머지는 $-3x+9$이다.

답 $-3x+9$

013-❷ $f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+x-2)(x^2+2x-5)+ax+b$

$=(x-1)(x+2)(x^2+2x-5)+ax+b$ …… ㉠

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 -8이고, $x+2$로 나누면 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=-8,\ f(-2)=4$

$x=1$, $x=-2$를 ㉠의 양변에 각각 대입하면

$f(1)=a+b,\ f(-2)=-2a+b$

$\therefore a+b=-8,\ -2a+b=4$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=-4$

따라서 $f(x)=(x-1)(x+2)(x^2+2x-5)-4x-4$이므로 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=-2\cdot1\cdot(-6)-4\cdot(-1)-4=12$

답 12

014-❶ $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로 나머지정리에 의하여

$f(-3)=-3$

한편 $f(x+3)$을 $x+6$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$f(x+3)=(x+6)Q(x)+R$

$x=-6$을 양변에 대입하면

$R=f(-3)=-3$

따라서 구하는 나머지는 -3이다.

답 -3

014-② $f(x)$, $g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 각각 -2, 3이므로 나머지정리에 의하여

$f(-2)=-2$, $g(-2)=3$

한편 $3f(x)-2g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$3f(x)-2g(x)=(x+2)Q(x)+R$

$x=-2$를 양변에 대입하면

$R=3f(-2)-2g(-2)$

$=3\cdot(-2)-2\cdot3=-12$

따라서 구하는 나머지는 -12이다. 답 -12

014-③ $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -3이므로

$f(x)=(x+1)Q(x)-3$ ...... ㉠

또 $Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 나머지정리에 의하여

$Q(-3)=1$

$f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(-3)$과 같으므로 $x=-3$을 ㉠의 양변에 대입하면

$f(-3)=-2Q(-3)-3$

$=-2\cdot1-3=-5$ 답 -5

다른 풀이 $Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 1이므로

$Q(x)=(x+3)Q'(x)+1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x+1)\{(x+3)Q'(x)+1\}-3$

$=(x+1)(x+3)Q'(x)+x-2$

따라서 구하는 나머지는

$f(-3)=-3-2=-5$

015-① $f(x)=3x^3+ax^2+bx+6$이라 하면 $f(x)$는 $x+2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-2)=0$, $f(3)=0$

$f(-2)=0$에서

$-24+4a-2b+6=0$

$\therefore 2a-b=9$ ...... ㉠

$f(3)=0$에서

$81+9a+3b+6=0$

$\therefore 3a+b=-29$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=-17$

$\therefore ab=68$ 답 68

015-② $f(x-1)$이 $x+2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-2-1)=f(-3)=0$

$f(x)=x^3-x^2+ax+3$에서

$f(-3)=-27-9-3a+3=-3a-33$

즉 $-3a-33=0$이므로 $a=-11$ 답 -11

016-①

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -3 & -4 & 1 \\
 & & 2 & -2 & -12 \\
\hline
2 & 1 & -1 & -6 & \boxed{-11} \\
 & & 2 & 2 & \\
\hline
2 & 1 & 1 & \boxed{-4} & \\
 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{3} & &
\end{array}$$

$\therefore x^3-3x^2-4x+1$

$=(x-2)(x^2-x-6)-11$

$=(x-2)\{(x-2)(x+1)-4\}-11$

$=(x-2)^2(x+1)-4(x-2)-11$

$=(x-2)^2\{(x-2)\cdot1+3\}-4(x-2)-11$

$=(x-2)^3+3(x-2)^2-4(x-2)-11$

$\therefore a=1$, $b=3$, $c=-4$, $d=-11$

답 $a=1$, $b=3$, $c=-4$, $d=-11$

중단원 연습 문제

본책 53~57쪽

01 ⑤	02 ①	03 -4	04 11	
05 1023	06 ①	07 6	08 -1	09 ③
10 ⑤	11 -10	12 -12	13 $f(x)=x-1$	
14 -6	15 100	16 ④	17 x^2-3x+5	
18 $-x$	19 ④	20 ③	21 24	22 ③
23 26	24 ④	25 ④		

01 전략 주어진 등식은 k에 대한 항등식이므로 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(x+3)k+2x+a=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x+3=0$, $2x+a=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-3$, $a=6$ 답 ⑤

02 전략 x, y 사이의 관계식을 한 문자에 대하여 정리한 후 $x^2+ax-y^2+b=0$에 대입한다.

풀이 $x+y=2$에서 $\quad y=2-x$
이것을 $x^2+ax-y^2+b=0$에 대입하면
$$x^2+ax-(2-x)^2+b=0$$
등식의 좌변을 x에 대하여 정리하면
$$(a+4)x+b-4=0$$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$$a+4=0,\ b-4=0$$
$$\therefore a=-4,\ b=4$$
$$\therefore ab=-16$$
답 ①

03 전략 $x=1$을 주어진 이차방정식에 대입한 등식은 k에 대한 항등식임을 이용한다.

풀이 $x=1$이 이차방정식
$x^2+(k+2)x+(k-1)p+q-1=0$의 근이므로
$$1+k+2+(k-1)p+q-1=0$$
등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면
$$(p+1)k-p+q+2=0 \quad \cdots ❶$$
이 등식이 k에 대한 항등식이므로
$$p+1=0,\ -p+q+2=0$$
두 식을 연립하여 풀면
$$p=-1,\ q=-3 \quad \cdots ❷$$
$$\therefore p+q=-4 \quad \cdots ❸$$
답 -4

채점 기준	비율
❶ k에 대한 항등식을 세울 수 있다.	40%
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20%

Remark▶ 방정식의 근과 항등식
방정식 $f(x)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 $x=a$를 근으로 가지면 $x=a$를 방정식에 대입한 등식 $f(a)=0$은 k에 대한 항등식이다.

04 전략 주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 미정계수법을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$$x^3+ax^2-24=x^3+(b+c)x^2+(bc-6)x-6b$$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면
$$a=b+c,\ 0=bc-6,\ -24=-6b$$
세 식을 연립하여 풀면
$$a=\frac{11}{2},\ b=4,\ c=\frac{3}{2}$$
$$\therefore a+b+c=11$$
답 11

05 전략 $x=0$, $x=1$을 주어진 등식의 양변에 각각 대입한다.

풀이 $x=0$을 주어진 등식의 양변에 대입하면
$$1=a_0$$
$x=1$을 주어진 등식의 양변에 대입하면
$$2^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$$
$$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2^{10}-a_0=1024-1$$
$$=1023$$
답 1023

06 전략 다항식의 나눗셈에 대한 등식을 세우고 이 등식이 항등식임을 이용한다.

풀이 $x^{100}+ax^{10}+bx$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x+2$이므로
$$x^{100}+ax^{10}+bx=(x+1)(x-1)Q(x)+x+2$$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$x=-1$을 양변에 대입하면 $\quad 1+a-b=1$
$$\therefore a-b=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$x=1$을 양변에 대입하면 $\quad 1+a+b=3$
$$\therefore a+b=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=1$
$$\therefore ab=1$$
답 ①

07 전략 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1)$이고, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-ax^2+3x-2$라 하면 나머지정리에 의하여
$$f(-1)=f(2)$$
즉 $-1-a-3-2=8-4a+6-2$이므로
$$3a=18 \qquad \therefore a=6$$
답 6

08 전략 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+b$로 놓는다.

풀이 $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$$
$$\cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-1$로 나누면 나머지가 3이므로 나머지정리에 의하여

$f(-1)=5,\ f(1)=3$ ⋯ ❷

$x=-1,\ x=1$을 ㉠의 양변에 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b,\ f(1)=a+b$

$\therefore\ -a+b=5,\ a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=4$ ⋯ ❸

따라서 $R(x)=-x+4$이므로

$R(5)=-1$ ⋯ ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
❷ $f(-1),\ f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $R(5)$의 값을 구할 수 있다.	10%

09 전략 다항식 $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a\alpha+b)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $4x+3$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$

따라서 $f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\cdot1)=f(2)=4\cdot2+3=11$ 답 ③

다른 풀이 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $4x+3$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(2x)&=(2x-1)(2x-2)Q(2x)+4\cdot2x+3\\&=2(x-1)(2x-1)Q(2x)\\&\quad+8(x-1)+11\\&=(x-1)\{2(2x-1)Q(2x)+8\}+11\end{aligned}$$

따라서 $f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 11이다.

10 전략 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$f(x)=(x+3)Q(x)+3$

또 다항식 $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 나머지정리에 의하여

$Q(3)=2$

따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned}f(3)&=6Q(3)+3\\&=6\cdot2+3=15\end{aligned}$$

답 ⑤

11 전략 $f(a)=0,\ f(b)=0$이면 $f(x)$가 $x-a,\ x-b$를 인수로 갖는다.

풀이 $f(a)=0,\ f(b)=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-a,\ x-b$를 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차식이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a)(x-b)\\&=x^2-(a+b)x+ab\end{aligned}$$

이때 $f(x)=x^2-6x-10$이므로

$a+b=6,\ ab=-10$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(a+b)&=f(6)\\&=36-36-10\\&=-10\end{aligned}$$

답 -10

12 전략 주어진 다항식을 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구한다.

풀이 다항식 $2x^3+ax^2+x+b$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & a & 1 & b \\ & & -2 & -a+2 & a-3 \\ \hline & 2 & a-2 & -a+3 & \boxed{a+b-3} \end{array}$$

따라서 $-1=k,\ -2=c,\ a-2=3,\ -a+2=d,$ $-a+3=-2,\ a-3=2,\ a+b-3=-9$이므로

$k=-1,\ c=-2,\ a=5,\ d=-3,\ b=-11$

$\therefore\ k+a+b+c+d=-12$ 답 -12

13 전략 $f(x)=ax+b$로 놓고 주어진 등식을 만족시키는 상수 $a,\ b$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)$가 일차식이므로

$f(x)=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)

라 하면 주어진 식은

$(ax+b)^2=ax^2+b-2(ax+b)$

$a^2x^2+2abx+b^2=ax^2-2ax-b$ ⋯ ❶

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a^2=a,\ 2ab=-2a,\ b^2=-b$

세 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1\ (\because\ a\neq0)$ ⋯ ❷

$\therefore\ f(x)=x-1$ ⋯ ❸

답 $f(x)=x-1$

채점 기준	비율
❶ x에 대한 항등식을 세울 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	20%

14 전략 $\frac{a+4x}{3-2x}=k$라 하면 이 식은 x에 대한 항등식임을 이용한다.

풀이 x의 값에 관계없이 $\frac{a+4x}{3-2x}$의 값이 항상 k(k는 상수)라 하면

$$\frac{a+4x}{3-2x}=k$$

즉 등식 $a+4x=k(3-2x)$는 x에 대한 항등식이다. ⋯ ❶

등식의 우변을 전개하면

$$a+4x=3k-2kx$$

이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=3k,\ 4=-2k$$

따라서 $k=-2$이므로

$$a=3\cdot(-2)=-6$$ ⋯ ❷

답 -6

채점 기준	비율
❶ x에 대한 항등식을 세울 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%

15 전략 $2^{100}+2^{200}=2\cdot8^{33}+4\cdot8^{66}=f(8)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^{33}+4x^{66}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$R=f(1)=2+4=\boxed{6}$$

$$\therefore f(x)=(x-1)Q(x)+6$$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 $x=\boxed{8}$을 양변에 대입하면

$$f(8)=7Q(8)+6$$

그런데 $f(8)=2\cdot8^{33}+4\cdot8^{66}=2^{100}+2^{200}$이므로

$$2^{100}+2^{200}=7Q(8)+6$$

따라서 $2^{100}+2^{200}$을 7로 나누었을 때의 나머지는 6이다.

이상에서 $p=6$, $q=8$이므로

$$p^2+q^2=36+64=100$$

답 100

16 전략 $x^{10}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$로 놓고 양변에 $x=1$을 대입하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $x^{10}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$x^{10}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x=1$을 양변에 대입하면

$$a+b=0 \qquad \therefore b=-a \quad \cdots\cdots ㉡$$

$x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+1)$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$$(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+1)$$
$$=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$$
$$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$$
$$\therefore x^9+x^8+x^7+\cdots+1=(x-1)Q(x)+a$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 $x=1$을 양변에 대입하면

$$a=1+1+1+\cdots+1=10$$

따라서 $b=-10$이므로 $R(x)=10x-10$

$$\therefore R(10)=90$$

답 ④

17 전략 $f(x)$를 $(x-2)^2(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$로 놓고 나머지정리를 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $(x-2)^2(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$($R(x)$는 상수 또는 이차 이하의 다항식)라 하면

$$f(x)=(x-2)^2(x+2)Q(x)+R(x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(x-2)^2(x+2)Q(x)$는 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

즉 $R(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로

$$R(x)=a(x-2)^2+x+1 \ (a\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉡$$

이라 하고, ㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x-2)^2(x+2)Q(x)+a(x-2)^2+x+1$$

$x=-2$를 양변에 대입하면

$$f(-2)=16a-1$$

이때 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 15이므로 나머지정리에 의하여

$$f(-2)=15$$

즉 $16a-1=15$이므로 $a=1$

$$\therefore R(x)=(x-2)^2+x+1=x^2-3x+5$$

답 x^2-3x+5

18 전략 다항식 $f(x)+x$가 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)+a=0$이다.

풀이 $f(x)+x$가 $x+1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)-1=0$, $f(2)+2=0$

$\therefore f(-1)=1$, $f(2)=-2$ ··· ❶

한편 $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$ ··· ❷

$x=-1$, $x=2$를 양변에 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b$, $f(2)=2a+b$

$\therefore -a+b=1$, $2a+b=-2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=0$ ··· ❸

따라서 구하는 나머지는 $-x$이다. ··· ❹

답 $-x$

채점 기준	비율
❶ $f(-1)$, $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	10%

다른 풀이 $f(x)+x$가 $x+1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어지므로 $f(x)+x$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)+x=(x+1)(x-2)Q(x)$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)-x$

따라서 구하는 나머지는 $-x$이다.

19 전략 다항식 $f(x)$가 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어지면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어지고, $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫도 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

풀이 $f(x)=x^3+3x^2+ax+b$라 하자. $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하고 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & a & b \\ & & -1 & -2 & 2-a \\ \hline & 1 & 2 & a-2 & \boxed{-a+b+2} \end{array}$$

$\therefore Q(x)=x^2+2x+a-2$,

$R=-a+b+2$

이때 $f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x+1$로도 나누어떨어진다.

즉 $R=-a+b+2=0$이므로

$a-b=2$ ······ ㉠

한편 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$f(x)=(x+1)^2Q'(x)$

$=(x+1)(x+1)Q'(x)$

즉 $Q(x)=(x+1)Q'(x)$이므로 $Q(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

따라서 인수정리에 의하여 $Q(-1)=0$이므로

$1-2+a-2=0$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a+b=4$

답 ④

다른 풀이 x^3+3x^2+ax+b가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 몫을 $x+c$(c는 상수)라 하면

$x^3+3x^2+ax+b=(x+1)^2(x+c)$

우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

x^3+3x^2+ax+b

$=x^3+(c+2)x^2+(2c+1)x+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$3=c+2$, $a=2c+1$, $b=c$

세 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=1$, $c=1$

$\therefore a+b=4$

20 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $x=2$를 양변에 대입하면

$4+6+2=b$ $\therefore b=12$

$x=0$을 양변에 대입하면

$2=4-2a+b$, $2a=14$

$\therefore a=7$

$\therefore a+b=19$

답 ③

다른 풀이 $x=3$을 양변에 대입하면

$9+9+2=1+a+b$

$\therefore a+b=19$

21 전략 삼차식 $f(x)$를 이차식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫은 일차식임을 이용한다.

풀이 삼차다항식 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하자. $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫은 일차식이므로 이 몫을 $ax+b$($a\neq0$, a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+x+1)(ax+b)$

이때 $f(0)=4$이므로

$b=4$

$\therefore f(x)=(x^2+x+1)(ax+4)$ ······ ㉠

또 $f(x)+12$를 x^2+2로 나누었을 때의 몫도 일차식이므로 이 몫을 $ax+c$(c는 상수)라 하면

$$f(x)+12=(x^2+2)(ax+c)$$

이때 $f(0)=4$이므로

$$4+12=2c$$
$$\therefore c=8$$
$$\therefore f(x)+12=(x^2+2)(ax+8) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$(x^2+x+1)(ax+4)=(x^2+2)(ax+8)-12$$
$$\therefore ax^3+(a+4)x^2+(a+4)x+4$$
$$=ax^3+8x^2+2ax+4$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a+4=8,\ a+4=2a$$
$$\therefore a=4$$

따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(4x+4)$이므로

$$f(1)=3\cdot8=24$$

답 24

22 전략 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고 나눗셈에 대한 등식을 세운다.

풀이 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ. $x=a$를 ㉠의 양변에 대입하면

$$f(a)=R(a)$$
$$\therefore f(a)-R(a)=0$$

ㄴ. $R(x)=px+q$(p, q는 상수)라 하면

$$f(a)-R(b)=R(a)-R(b)$$
$$=(pa+q)-(pb+q)$$
$$=p(a-b)$$
$$f(b)-R(a)=R(b)-R(a)$$
$$=(pb+q)-(pa+q)$$
$$=p(b-a)$$

이때 $a\neq b$이므로

$$f(a)-R(b)\neq f(b)-R(a)$$

ㄷ. $R(x)=px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$$f(a)=pa+q,\ f(b)=pb+q$$
$$\therefore af(b)-bf(a)=a(pb+q)-b(pa+q)$$
$$=aq-bq$$
$$=(a-b)q$$

이때 $R(0)=q$이므로

$$af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

23 전략 먼저 조건 (나)를 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.

풀이 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $ax+b$($a\neq0$, a, b는 상수)라 하면 조건 (나)에 의하여

$$f(x)=(x-1)^2(ax+b)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로

$$a+b=2$$
$$\therefore b=2-a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x-1)^2(ax+2-a)+ax+2-a$$
$$=(x-1)^2\{(x-1)a+2\}+(x-1)a+2$$
$$=a(x-1)^3+2(x-1)^2+a(x-1)+2$$

이므로

$$R(x)=2(x-1)^2+a(x-1)+2$$

이때 $R(0)=R(3)$이므로

$$2-a+2=8+2a+2$$
$$\therefore a=-2$$

따라서 $R(x)=2(x-1)^2-2(x-1)+2$이므로

$$R(5)=32-8+2=26$$

답 26

24 전략 다항식 $f(x)-g(x)$가 $x+2$를 인수로 가지면 $f(-2)-g(-2)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)-g(x)$가 $x+2$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여

$$f(-2)-g(-2)=0$$
$$\therefore f(-2)=g(-2)$$

즉 $8-10+2=-2a+2+b$이므로

$$2a-b-2=0$$

답 ④

25 전략 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.

풀이 $P(a)=P(b)=P(c)=0$이므로 $P(x)$는 $x-a$, $x-b$, $x-c$를 인수로 갖는다.

이때 $P(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차다항식이므로

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

또 $P(0)=-6$이므로

$$-abc=-6$$
$$\therefore abc=6=1\cdot2\cdot3$$

a, b, c는 서로 다른 세 자연수이므로 각각 1, 2, 3 중 하나의 값을 갖는다.

따라서 $P(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지는

$$P(6)=(6-a)(6-b)(6-c)$$
$$=5\cdot4\cdot3$$
$$=60$$

답 ④

I. 다항식

03 인수분해

유제

본책 63~72쪽

017-① (1) $x^2+4y^2-z^2+4xy$
$=(x^2+4xy+4y^2)-z^2$
$=(x+2y)^2-z^2$
$=(x+2y+z)(x+2y-z)$

(2) $x^3y-xy^3+x^2y+xy^2$
$=xy(x^2-y^2+x+y)$
$=xy\{(x+y)(x-y)+(x+y)\}$
$=xy(x+y)(x-y+1)$

(3) $x^2y+x^2-xy^2-y^2=x^2y-xy^2+x^2-y^2$
$=xy(x-y)+(x+y)(x-y)$
$=(x-y)(xy+x+y)$

(4) $x^2(x-y)+y^2(y-x)=x^2(x-y)-y^2(x-y)$
$=(x-y)(x^2-y^2)$
$=(x-y)(x+y)(x-y)$
$=(x-y)^2(x+y)$

(5) $x^8-y^8=(x^4)^2-(y^4)^2$
$=(x^4+y^4)(x^4-y^4)$
$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x^2-y^2)$
$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

(6) $(x+y)^4-(x-y)^4$
$=\{(x+y)^2\}^2-\{(x-y)^2\}^2$
$=\{(x+y)^2+(x-y)^2\}\{(x+y)^2-(x-y)^2\}$
$=(2x^2+2y^2)\cdot 4xy$
$=8xy(x^2+y^2)$

답 풀이 참조

다른 풀이 (4) $x^2(x-y)+y^2(y-x)$
$=x^3-x^2y+y^3-xy^2$
$=x^3+y^3-x^2y-xy^2$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)$
$=(x+y)(x^2-2xy+y^2)$
$=(x+y)(x-y)^2$

018-① (1) $x^2+4=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X+2x)(X-3x)+4x^2$
$=X^2-xX-2x^2$
$=(X+x)(X-2x)$
$=(x^2+x+4)(x^2-2x+4)$

(2) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+9$
$=\{(x-1)(x+4)\}\{(x+1)(x+2)\}+9$
$=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+9$
$x^2+3x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-4)(X+2)+9$
$=X^2-2X+1$
$=(X-1)^2$
$=(x^2+3x-1)^2$

답 풀이 참조

019-① (1) $x^2=X$로 놓으면
$x^4-18x^2+32=X^2-18X+32$
$=(X-2)(X-16)$
$=(x^2-2)(x^2-16)$
$=(x^2-2)(x+4)(x-4)$

(2) $x^2=X$로 놓으면
$4x^4-15x^2-4=4X^2-15X-4$
$=(X-4)(4X+1)$
$=(x^2-4)(4x^2+1)$
$=(x+2)(x-2)(4x^2+1)$

(3) $x^4-6x^2+1=x^4-2x^2+1-4x^2$
$=(x^2-1)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$

(4) $x^4+64=x^4+16x^2+64-16x^2$
$=(x^2+8)^2-(4x)^2$
$=(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$

(5) $x^4-7x^2y^2+y^4$
$=x^4+2x^2y^2+y^4-9x^2y^2$
$=(x^2+y^2)^2-(3xy)^2$
$=(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$

답 풀이 참조

020-① (1) 주어진 다항식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면
$a^2b-b^2c-b^3+ca^2=(a^2-b^2)c+a^2b-b^3$
$=(a^2-b^2)c+b(a^2-b^2)$
$=(a^2-b^2)(c+b)$
$=(a+b)(a-b)(b+c)$

(2) 주어진 다항식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$3a^2-2b^2+5ab-2a+3b-1$
$=3a^2+(5b-2)a-(2b^2-3b+1)$
$=3a^2+(5b-2)a-(2b-1)(b-1)$
$=\{3a-(b-1)\}\{a+(2b-1)\}$
$=(3a-b+1)(a+2b-1)$

(3) 주어진 다항식을 전개한 다음 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)\\&=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2\\&=(a-b)c^2-(a^2-b^2)c+a^2b-ab^2\\&=(a-b)c^2-(a+b)(a-b)c+ab(a-b)\\&=(a-b)\{c^2-(a+b)c+ab\}\\&=(a-b)(c-a)(c-b)\\&=-(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

(4) 주어진 다항식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^3+a^2c+ac^2-b^3-b^2c-bc^2\\&=(a-b)c^2+(a^2-b^2)c+a^3-b^3\\&=(a-b)c^2+(a+b)(a-b)c\\&\quad+(a-b)(a^2+ab+b^2)\\&=(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\end{aligned}$$

답 풀이 참조

021-❶ (1) $f(x)=x^3-6x^2+13x-10$이라 하면

$f(2)=8-24+26-10=0$

이므로 $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr}2 & 1 & -6 & 13 & -10\\ & & 2 & -8 & 10\\\hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{0}\end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-4x+5이므로

$$\begin{aligned}&x^3-6x^2+13x-10\\&=(x-2)(x^2-4x+5)\end{aligned}$$

(2) $f(x)=3x^3-4x^2-17x+6$이라 하면

$$\begin{aligned}f(-2)&=-24-16+34+6\\&=0\end{aligned}$$

이므로 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr}-2 & 3 & -4 & -17 & 6\\ & & -6 & 20 & -6\\\hline & 3 & -10 & 3 & \boxed{0}\end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $3x^2-10x+3$이므로

$$\begin{aligned}&3x^3-4x^2-17x+6\\&=(x+2)(3x^2-10x+3)\\&=(x+2)(3x-1)(x-3)\end{aligned}$$

(3) $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2+4$라 하면

$f(-1)=2-3-3+4=0$,

$f(-2)=32-24-12+4=0$

이므로 $x+1$, $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}-1 & 2 & 3 & -3 & 0 & 4\\ & & -2 & -1 & 4 & -4\\\hline -2 & 2 & 1 & -4 & 4 & \boxed{0}\\ & & -4 & 6 & -4 & \\\hline & 2 & -3 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $(x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $2x^2-3x+2$이므로

$$\begin{aligned}&2x^4+3x^3-3x^2+4\\&=(x+1)(x+2)(2x^2-3x+2)\end{aligned}$$

(4) $f(x)=6x^4-13x^3-2x^2+7x+2$라 하면

$f(1)=6-13-2+7+2=0$,

$f(2)=96-104-8+14+2=0$

이므로 $x-1$, $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}1 & 6 & -13 & -2 & 7 & 2\\ & & 6 & -7 & -9 & -2\\\hline 2 & 6 & -7 & -9 & -2 & \boxed{0}\\ & & 12 & 10 & 2 & \\\hline & 6 & 5 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $6x^2+5x+1$이므로

$$\begin{aligned}&6x^4-13x^3-2x^2+7x+2\\&=(x-1)(x-2)(6x^2+5x+1)\\&=(x-1)(x-2)(2x+1)(3x+1)\end{aligned}$$

답 풀이 참조

021-❷ $f(x)=x^3-(a-3)x^2-(2a+1)x+3a-3$이라 하면

$$\begin{aligned}f(1)&=1-(a-3)-(2a+1)+3a-3\\&=0\end{aligned}$$

이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr}1 & 1 & -(a-3) & -(2a+1) & 3a-3\\ & & 1 & -a+4 & -3a+3\\\hline & 1 & -a+4 & -3a+3 & \boxed{0}\end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $x^2+(-a+4)x-3a+3$이므로

$$\begin{aligned}&x^3-(a-3)x^2-(2a+1)x+3a-3\\&=(x-1)\{x^2+(-a+4)x-3a+3\}\\&=(x-1)\{x^2+(-a+4)x-3(a-1)\}\\&=(x-1)(x+3)\{x-(a-1)\}\\&=(x-1)(x+3)(x-a+1)\end{aligned}$$

답 $(x-1)(x+3)(x-a+1)$

022-❶ (1) 주어진 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned}a^3+a^2b-ab^2-b^3&=a^2(a+b)-b^2(a+b)\\&=(a+b)(a^2-b^2)\\&=(a+b)(a+b)(a-b)\\&=(a+b)^2(a-b)\end{aligned}$$

이때

$$a+b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=1,$$

$$a-b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

이므로

(주어진 식)$=1^2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$

(2) $18=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{18^4+18^2+1}{18\cdot17+1}&=\frac{x^4+x^2+1}{x(x-1)+1}\\&=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}\\&=x^2+x+1\\&=18^2+18+1\\&=343\end{aligned}$$

답 (1) $\sqrt{3}$ (2) 343

중단원 연습 문제

본책 74~77쪽

01 ④	02 1	03 ③	04 4	05 6
06 −3	07 ⑤	08 −56	09 −6	
10 869	11 −4	12 ⑤	13 8	14 32
15 ④	16 32	17 10101		18 11
19 ⑤	20 ③	21 ③	22 228	

01 전략 주어진 식을 인수분해 공식을 이용할 수 있도록 짝을 짓는다.

풀이 $x^3-2x^2y+2xy^2-y^3$

$$\begin{aligned}&=(x^3-y^3)-2xy(x-y)\\&=(x-y)(x^2+xy+y^2)-2xy(x-y)\\&=(x-y)\{(x^2+xy+y^2)-2xy\}\\&=(x-y)(x^2-xy+y^2)\end{aligned}$$

답 ④

02 전략 주어진 식의 우변을 이항한 후 인수분해한다.

풀이 $a^3+b^3+c^3=3abc$, 즉 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

이때 a, b, c가 양의 실수이므로

$a+b+c>0$

따라서 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$이므로

$a=b=c$

$$\therefore \frac{b}{a}+\frac{c}{b}-\frac{a}{c}=1+1-1=1$$

답 1

Remark▶ 실수의 성질

두 실수 x, y에 대하여

$x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow x=y=0$

03 전략 공통부분인 x^2+2를 X로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $x^2+2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(X+x)(X+2x)-6x^2\\&=X^2+3xX-4x^2\\&=(X+4x)(X-x)\\&=(x^2+4x+2)(x^2-x+2)\end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ③이다.

답 ③

04 전략 $x^2=X$로 놓고 X에 대한 이차식을 인수분해한다.

풀이 $x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-6x^2+5&=X^2-6X+5\\&=(X-1)(X-5)\\&=(x^2-1)(x^2-5)\\&=(x+1)(x-1)(x^2-5)\end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=-5$이므로

$a-b=4$

답 4

05 전략 $4x^4+3x^2+1$의 이차항 $3x^2$을 적당히 분리하여 A^2-B^2 꼴로 변형한다.

풀이 $f(x)g(x)=4x^4+3x^2+1$

$=4x^4+4x^2+1-x^2$

$=(2x^2+1)^2-x^2$

$=(2x^2+x+1)(2x^2-x+1)$ ··· ❶

$\therefore f(x)+g(x)$

$=(2x^2+x+1)+(2x^2-x+1)=4x^2+2$ ··· ❷

따라서 $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)+g(1)=4+2=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(x)g(x)$를 인수분해할 수 있다.	40%
❷ $f(x)+g(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	20%

Remark▶ 나머지정리

x에 대한 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=f(\alpha)$

06

전략 주어진 다항식을 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

풀이 주어진 다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-xy-6y^2-x+8y-2$

$=x^2-(y+1)x-2(3y^2-4y+1)$

$=x^2-(y+1)x-2(y-1)(3y-1)$

$=\{x+(2y-2)\}\{x-(3y-1)\}$

$=(x+2y-2)(x-3y+1)$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=-3$이므로

$a+b+c=-3$

답 -3

07

전략 주어진 다항식을 c에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 주어진 다항식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(a^2+b^2)c^2+a^4-b^4=0$

$(a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$

$(a^2+b^2)(a^2-b^2+c^2)=0$

이때 $a^2+b^2>0$이므로 $a^2-b^2+c^2=0$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 주어진 등식을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

답 ⑤

Remark▶ 삼각형의 모양 판단하기

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때

① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형

② $a=b=c$ ➡ 정삼각형

③ $c^2=a^2+b^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

08

전략 먼저 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3+6x^2+x-14$라 하면

$f(-2)=-8+24-2-14=0$

이므로 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 6 & 1 & -14 \\ & & -2 & -8 & 14 \\ \hline & 1 & 4 & -7 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2+4x-7이므로

$x^3+6x^2+x-14=(x+2)(x^2+4x-7)$

즉 $a=2$, $b=4$, $c=-7$이므로

$abc=-56$

답 -56

09

전략 $f(x)$가 $x-\alpha$를 인수로 가지면 $f(\alpha)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+x+6$이라 하면 $x-2$가 $f(x)$의 인수이므로 인수정리에 의하여

$f(2)=0$

즉 $8+4a+2+6=0$이므로

$4a=-16$ $\quad\therefore a=-4$ ··· ❶

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-2x-3이므로

$x^3-4x^2+x+6=(x-2)(x^2-2x-3)$

$=(x-2)(x+1)(x-3)$ ··· ❷

즉 $b=1$, $c=-3$ 또는 $b=-3$, $c=1$이므로

$a+b+c=-6$ ··· ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ x^3-4x^2+x+6을 인수분해할 수 있다.	40%
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20%

10 (전략) $30=x$로 놓고 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타낸 후, 공통부분이 생기도록 전개한다.

(풀이) $30=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}&28\cdot29\cdot30\cdot31+1\\&=(x-2)(x-1)x(x+1)+1\\&=\{x(x-1)\}\{(x-2)(x+1)\}+1\\&=(x^2-x)(x^2-x-2)+1\end{aligned}$$

$x^2-x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}X(X-2)+1&=X^2-2X+1\\&=(X-1)^2\\&=(x^2-x-1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sqrt{28\cdot29\cdot30\cdot31+1}&=\sqrt{(x^2-x-1)^2}\\&=\sqrt{(30^2-30-1)^2}\\&=\sqrt{869^2}\\&=869\end{aligned}$$

답 869

11 (전략) 주어진 식을 인수분해한 후, $x+y$, xy의 값을 대입한다.

(풀이) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2+y^2-6x^2y^2+x^2y+xy^2+2xy\\&=(1+y-6y^2)x^2+(y^2+2y)x+y^2\\&=(1+3y)(1-2y)x^2+(y^2+2y)x+y^2\\&=\{(1+3y)x+y\}\{(1-2y)x+y\}\\&=(x+y+3xy)(x+y-2xy)\end{aligned}$$ ··· ❶

이때

$x+y=(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2$,

$xy=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$ ··· ❷

이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\{2+3\cdot(-1)\}\{2-2\cdot(-1)\}\\&=-4\end{aligned}$$ ··· ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	50%
❷ $x+y$, xy의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20%

(다른 풀이) $x^2+y^2-6x^2y^2+x^2y+xy^2+2xy$

$$\begin{aligned}&=(x^2+y^2+2xy)+xy(x+y)-6(xy)^2\\&=(x+y)^2+xy(x+y)-6(xy)^2\\&=\{(x+y)+3xy\}\{(x+y)-2xy\}\\&=(x+y+3xy)(x+y-2xy)\end{aligned}$$

12 (전략) 먼저 주어진 다항식을 인수분해한 후, $a+2b=1$을 이용하여 간단히 한다.

(풀이)
$$\begin{aligned}1-a^2+4ab-4b^2&=1-(a^2-4ab+4b^2)\\&=1-(a-2b)^2\\&=(1-a+2b)(1+a-2b)\end{aligned}$$

이때 $a+2b=1$, 즉 $1=a+2b$이므로

$$\begin{aligned}&(1-a+2b)(1+a-2b)\\&=(a+2b-a+2b)(a+2b+a-2b)\\&=4b\cdot2a\\&=8ab\end{aligned}$$

답 ⑤

13 (전략) 주어진 사차식을 A^2-B^2 꼴로 만들어 인수분해한다.

(풀이) x^4-nx^2+16

$$\begin{aligned}&=x^4-8x^2+16-(n-8)x^2\\&=(x^2-4)^2-(\sqrt{n-8}x)^2\\&=(x^2+\sqrt{n-8}x-4)(x^2-\sqrt{n-8}x-4)\end{aligned}$$

$\therefore\ m=\sqrt{n-8}$ ($\because\ m>0$)

m이 자연수가 되려면

$n-8=1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots$

$\therefore\ n=8+1^2,\ 8+2^2,\ 8+3^2,\ \cdots$

따라서 구하는 두 자리 자연수 n은

$8+2^2,\ 8+3^2,\ \cdots,\ 8+9^2$

의 8개이다.

답 8

14 (전략) $x^4+8x^3+5x^2-50x$를 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

(풀이)
$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=x^4+8x^3+5x^2-50x\\&=x(x^3+8x^2+5x-50)\end{aligned}$$

$h(x)=x^3+8x^2+5x-50$이라 하면

$h(2)=8+32+10-50=0$

이므로 $x-2$는 $h(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr}2 & 1 & 8 & 5 & -50\\ & & 2 & 20 & 50\\\hline & 1 & 10 & 25 & \boxed{0}\end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $h(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $x^2+10x+25$이므로

$$\begin{aligned}x^3+8x^2+5x-50&=(x-2)(x^2+10x+25)\\&=(x-2)(x+5)^2\end{aligned}$$

$\therefore\ f(x)g(x)=x(x-2)(x+5)^2$ ··· ❶

이때 $xf(x)=(x-2)g(x)$이므로 $g(x)$는 x를 인수로 갖고, $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

즉

$f(x)=(x-2)(x+5)$, $g(x)=x(x+5)$ ··· ❷

이므로

$f(3)+g(3)=8+24=32$ ⋯ ❸

답 32

채점 기준	비율
❶ $f(x)g(x)$를 인수분해할 수 있다.	50%
❷ $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $f(3)+g(3)$의 값을 구할 수 있다.	20%

15 전략 연속한 두 자연수의 곱은 2의 배수이다.

풀이 ㄱ. n이 짝수일 때, $n^2-1=(n-1)(n+1)$에서 $n-1$, $n+1$은 모두 홀수이므로 n^2-1도 홀수이다.

ㄴ. $n^2+n=n(n+1)$에서 $n(n+1)$은 연속한 두 자연수의 곱이므로 2의 배수, 즉 짝수이다.

ㄷ. n이 짝수일 때 $n+1$, $2n+1$은 모두 홀수이므로 $(n+1)(2n+1)$도 홀수이다.

ㄹ. $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$에서 $(n+1)(n+2)$는 연속한 두 자연수의 곱이므로 2의 배수, 즉 짝수이다.

이상에서 항상 짝수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

16 전략 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$임을 이용하여 $2^{16}-1$을 인수분해한다.

풀이
$$\begin{aligned}2^{16}-1&=(2^8+1)(2^8-1)\\&=(2^8+1)(2^4+1)(2^4-1)\\&=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)\\&=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)\\&=257\cdot17\cdot5\cdot3\end{aligned}$$

따라서 10과 20 사이의 두 자연수는 15, 17이므로 구하는 합은

$15+17=32$

답 32

17 전략 $99=10^2-1$이므로 10^2을 한 문자로 놓고 10^6-1을 인수분해한다.

풀이 $99=10^2-1$이므로 $10^2=x$로 놓으면
$$\begin{aligned}\frac{10^6-1}{99}&=\frac{x^3-1}{x-1}\\&=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\\&=x^2+x+1\\&=10^4+10^2+1\\&=10101\end{aligned}$$

답 10101

18 전략 나머지정리를 이용하여 R_1, R_2를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $ax^3+b=(ax+b)Q_1(x)+R_1$ ⋯⋯ ㉠

$ax^4+b=(ax+b)Q_2(x)+R_2$ ⋯⋯ ㉡

$x=-\dfrac{b}{a}$를 ㉠, ㉡의 양변에 각각 대입하면

$R_1=-\dfrac{b^3}{a^2}+b$, $R_2=\dfrac{b^4}{a^3}+b$

이때 $R_1=R_2$이므로

$-\dfrac{b^3}{a^2}+b=\dfrac{b^4}{a^3}+b$

$\therefore b=-a$ ($\because ab\neq0$)

$\therefore R_1=R_2=0$

$ax^3+b=ax^3-a=a(x^3-1)=a(x-1)(x^2+x+1)$

이므로 ㉠에서

$a(x-1)(x^2+x+1)=a(x-1)Q_1(x)$

$\therefore Q_1(x)=x^2+x+1$

$ax^4+b=ax^4-a=a(x^4-1)=a(x-1)(x+1)(x^2+1)$

이므로 ㉡에서

$a(x-1)(x+1)(x^2+1)=a(x-1)Q_2(x)$

$\therefore Q_2(x)=(x+1)(x^2+1)$

$\therefore Q_1(2)+Q_2(1)=7+4=11$

답 11

19 전략 각 직육면체의 부피를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 직육면체 P, Q, R, S, T의 부피가 각각 p, q, r, s, t이므로

$p=a^3$, $q=b^3$, $r=a^2$, $s=b^2$, $t=ab(a-b)$

$p=q+r+s+t$이므로

$a^3=b^3+a^2+b^2+ab(a-b)$

$a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)=0$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a^2+b^2)-ab(a-b)=0$

$(a-b)(a^2+b^2)-(a^2+b^2)=0$

$(a-b-1)(a^2+b^2)=0$

이때 $a^2+b^2>0$이므로 $a-b-1=0$

$\therefore a-b=1$

답 ⑤

20 전략 공통부분인 $2x+y$를 X로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $2x+y=X$로 놓으면
$$\begin{aligned}&(2x+y)^2-2(2x+y)-3\\&=X^2-2X-3\\&=(X+1)(X-3)\\&=(2x+y+1)(2x+y-3)\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-3$이므로

$a+b+c=0$

답 ③

21 전략 $f(\alpha)=0\,(\alpha\neq-1)$인 α의 값을 찾는다.

풀이 $f(x)=x^4-2x^3+2x^2-x-6$이라 하면 $x+1$이 $f(x)$의 인수이므로 $f(-1)=0$이고

$f(2)=16-16+8-2-6=0$

이므로 $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 2 & -1 & -6 \\ & & -1 & 3 & -5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 5 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^3-3x^2+5x-6이고, 다시 이 몫을 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-x+3이므로

$x^4-2x^3+2x^2-x-6$

$=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

즉 $a=-2$, $b=-1$, $c=3$이므로

$a+b+c=0$

답 ③

22 전략 $15=x$로 놓고 15^3+15^2-15+2를 인수분해한다.

풀이 $15=x$로 놓으면

$15^3+15^2-15+2=x^3+x^2-x+2$

$f(x)=x^3+x^2-x+2$라 하면

$f(-2)=-8+4+2+2=0$

이므로 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-x+1이므로

$x^3+x^2-x+2=(x+2)(x^2-x+1)$

$=(15+2)(15^2-15+1)$

$=17\times211$

즉 $a=17$, $b=211$ 또는 $a=211$, $b=17$이므로

$a+b=228$

답 228

Ⅱ. 방정식

04 복소수

유제

본책 88~103쪽

023-❶ ㄱ. $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\neq1$이므로 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$는 z가 될 수 없다.

ㄴ. $\bar{z}=c+di$ (c, d는 실수)이면 $z=c-di$이므로

$c^2+(-d)^2=1$ $\quad\therefore c^2+d^2=1$

ㄷ. $z=bi$ ($b\neq0$인 실수)라 하면

$b^2=1$ $\quad\therefore b=\pm1$

$\therefore z=\pm i$

따라서 순허수인 z는 i, $-i$의 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

024-❶ (1) $z_1=(2+3i)x^2-4x+5-i$

$=(2x^2-4x+5)+(3x^2-1)i$

$z_2=(1+2i)x^2+x+3=(x^2+x+3)+2x^2i$

$\therefore z_1-z_2=(x^2-5x+2)+(x^2-1)i$

z_1-z_2가 실수이므로 $\quad x^2-1=0$

$\therefore x=1\ (\because x>0)$

(2) $z=(1-i)(1+i)a^2+(4-3i)a-6i$

$=(2a^2+4a)-(3a+6)i$

z가 실수이면

$3a+6=0$ $\quad\therefore a=-2$

$\therefore x=-2$

z가 순허수이면 $\quad 2a^2+4a=0$, $3a+6\neq0$

(i) $2a^2+4a=0$에서 $\quad 2a(a+2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-2$

(ii) $3a+6\neq0$에서 $\quad a\neq-2$

(i), (ii)에서 $\quad a=0$ $\quad\therefore y=0$

$\therefore x^2+y^2=4$

답 (1) 1 (2) 4

025-❶ (1) 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$x(4+4i+i^2)+y(1-2i+i^2)=6+2i$

$x(3+4i)-2yi=6+2i$

$3x+(4x-2y)i=6+2i$

$3x$, $4x-2y$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x=6$, $4x-2y=2$

$\therefore x=2$, $y=3$

(2) 주어진 등식의 좌변에서

$$\frac{x}{1-i}+\frac{y}{1+i}=\frac{x(1+i)+y(1-i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=\frac{(x+y)+(x-y)i}{2}$$
$$=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}i$$

이므로 주어진 등식은

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}i=2+i$$

$\frac{x+y}{2}$, $\frac{x-y}{2}$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{x+y}{2}=2,\ \frac{x-y}{2}=1$$
$$x+y=4,\ x-y=2$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=1$

답 (1) $x=2,\ y=3$ (2) $x=3,\ y=1$

025-❷ 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$$x^2(1+i)^2-2xy(1+i)(1-i)+y^2(1-i)^2=-4$$
$$x^2(1+2i+i^2)-2xy(1-i^2)+y^2(1-2i+i^2)$$
$$=-4$$
$$x^2\cdot 2i-2xy\cdot 2+y^2\cdot(-2i)=-4$$
$$-4xy+(2x^2-2y^2)i=-4$$

$-4xy$, $2x^2-2y^2$이 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-4xy=-4,\ 2x^2-2y^2=0$$

$2x^2-2y^2=0$에서 $x^2-y^2=0$

답 0

Remark▶

$-4xy=-4$, $2x^2-2y^2=0$에서

$xy=1,\ x^2=y^2$ $\therefore xy=1,\ x=\pm y$

(i) $x=y$이면 $xy=1$에서

$x^2=1$ $\therefore x=\pm1,\ y=\pm1$(복호동순)

(ii) $x=-y$이면 $xy=1$에서

$x^2=-1$

그런데 $x^2=-1$인 실수 x는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $x=1,\ y=1$ 또는 $x=-1,\ y=-1$

026-❶ (1) $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$$4x^2-4x+1=-3 \qquad \therefore x^2-x+1=0$$
$$\therefore 2x^3-2x^2+1=2x(x^2-x+1)-2x+1$$
$$=-2x+1$$
$$=-2\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+1$$
$$=-1-\sqrt{3}i+1=-\sqrt{3}i$$

(2) $x=\frac{10}{2+i}=\frac{10(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{10(2-i)}{5}=4-2i$

에서 $x-4=-2i$

양변을 제곱하면

$$x^2-8x+16=-4$$
$$\therefore x^2-8x+20=0$$
$$\therefore x^3-8x^2+19x+1$$
$$=x(x^2-8x+20)-x+1$$
$$=-x+1=-(4-2i)+1$$
$$=-3+2i$$

답 (1) $-\sqrt{3}i$ (2) $-3+2i$

027-❶ (1) $i^2=i^6=-1$, $i^3=i^7=-i$, $i^4=i^8=1$, $i^5=i$이므로

$$i+2i^2+3i^3+\cdots+8i^8$$
$$=i+2\cdot(-1)+3\cdot(-i)+4\cdot1+5\cdot i$$
$$+6\cdot(-1)+7\cdot(-i)+8\cdot1$$
$$=i-2-3i+4+5i-6-7i+8$$
$$=4-4i$$

(2) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$,

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$
$$\therefore \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}$$
$$=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{25}+i^{50}$$
$$=(-i)^{25}+i^{50}$$
$$=-(i^4)^6\cdot i+(i^4)^{12}\cdot i^2$$
$$=-i-1$$

답 (1) $4-4i$ (2) $-i-1$

028-❶ $\alpha\overline{\alpha}\beta+\alpha\beta\overline{\beta}=\alpha\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=\alpha\beta(\overline{\alpha+\beta})$

$$=(3-i)(\overline{2-i})$$
$$=(3-i)(2+i)$$
$$=6+i+1=7+i$$

답 $7+i$

028-❷ $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$이므로

$$\frac{1}{\alpha}=\overline{\alpha},\ \frac{1}{\beta}=\overline{\beta}$$
$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=\overline{-i}=i$$

답 i

029-❶ $z^3\overline{z}+z\overline{z}^3$

$$=z\overline{z}(z^2+\overline{z}^2)$$
$$=z\overline{z}\{(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}\} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\bar{z}=3-2i$이므로

$z+\bar{z}=(3+2i)+(3-2i)=6$

$z\bar{z}=(3+2i)(3-2i)=9+4=13$

㉠에서

$z^3\bar{z}+z\bar{z}^3=13(6^2-2\cdot13)=130$ 답 130

029-② $\alpha+\beta=\frac{1+i}{2}+\frac{1-i}{2}=1$

$\alpha\beta=\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1-i}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

① $(\alpha+\beta)^2=1$

② $\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

③ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2\cdot\frac{1}{2}=0$

④ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=1\div\frac{1}{2}=1\cdot2=2$

⑤ $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

답 ④

030-① (1) $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$\bar{z}=a-bi$이므로

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

즉 $2a=6$, $a^2+b^2=13$이므로

$a=3$, $b=\pm2$

$\therefore z=3\pm2i$

(2) $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z^2=(a+bi)^2$

$=a^2+2abi+(bi)^2$

$=a^2-b^2+2abi$

따라서 $a^2-b^2+2abi=2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$, $2ab=2$

$\therefore b=\pm a$, $ab=1$

(i) $b=a$이면 $ab=1$에서

$a^2=1$

$\therefore a=\pm1$, $b=\pm1$ (복호동순)

(ii) $b=-a$이면 $ab=1$에서

$a^2=-1$

그런데 $a^2=-1$인 실수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\pm1$, $b=\pm1$ (복호동순)이므로

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)$

$=a^2+b^2=2$

답 (1) $3\pm2i$ (2) 2

030-② $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하면

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+bi)+(c+di)}$

$=\overline{(a+c)+(b+d)i}$

$=(a+c)-(b+d)i$

$=(a-bi)+(c-di)$

$=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{(a+bi)-(c+di)}$

$=\overline{(a-c)+(b-d)i}$

$=(a-c)-(b-d)i$

$=(a-bi)-(c-di)$

$=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1z_2}=\overline{(a+bi)(c+di)}$

$=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(\overline{a+bi})(\overline{c+di})$

$=(a-bi)(c-di)$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\therefore \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\overline{\left(\frac{c+di}{a+bi}\right)}=\overline{\left\{\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}\right\}}$

$=\overline{\left\{\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}\right\}}$

$=\frac{(ac+bd)-(ad-bc)i}{a^2+b^2}$

$\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}=\frac{\overline{c+di}}{\overline{a+bi}}=\frac{c-di}{a-bi}=\frac{(c-di)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)}$

$=\frac{(ac+bd)-(ad-bc)i}{a^2+b^2}$

$\therefore \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$ 답 풀이 참조

031-① (1) $\sqrt{3}\sqrt{-4}=\sqrt{3}\sqrt{4}i=2\sqrt{3}i$

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i$

$=\sqrt{30}i^3=-\sqrt{30}i$

(3) $10>0$, $-5<0$이므로

$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{\frac{10}{-5}}=-\sqrt{-2}=-\sqrt{2}i$

(4) $-4<0$, $-8<0$이므로

$\sqrt{-4}\sqrt{-8}=-\sqrt{(-4)\cdot(-8)}=-4\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{-4}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-4}}=-4\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}i}{2i}$

$=-4\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$=-3\sqrt{2}$

답 (1) $2\sqrt{3}i$ (2) $-\sqrt{30}i$ (3) $-\sqrt{2}i$ (4) $-3\sqrt{2}$

중단원 연습 문제

본책 104~108쪽

01 ④	02 $\frac{1}{2}$	03 -1	04 3	05 2
06 ④	07 $-i$	08 -2	09 290	10 5
11 4	12 ④	13 ③	14 ③	15 3
16 $\frac{3}{16}$	17 ②	18 20	19 -10	20 ③
21 ③	22 38	23 16	24 18	25 ①

01 전략 주어진 식의 분모를 각각 실수화한다.

풀이 $\frac{a+bi}{b-ai}=\frac{(a+bi)(b+ai)}{(b-ai)(b+ai)}=\frac{(a^2+b^2)i}{b^2+a^2}=i$

$\frac{b+ai}{a-bi}=\frac{(b+ai)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)}=\frac{(a^2+b^2)i}{a^2+b^2}=i$

$\therefore \frac{a+bi}{b-ai}+\frac{b+ai}{a-bi}=2i$

답 ④

02 전략 복소수 $x+yi$ (x, y는 실수)가 실수이면 $y=0$이다.

풀이 $z=i(2a-i)^2$

$=i(4a^2-4ai-1)=4a+(4a^2-1)i$

따라서 z가 실수가 되려면

$4a^2-1=0, \quad a^2=\frac{1}{4}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

답 $\frac{1}{2}$

03 전략 z를 $a+bi$ 꼴로 정리한 후 $\bar{z}$를 구하여 $z=\bar{z}$에 대입한다.

풀이 $z=(3+i)x^2+(1+2i)x-4+i$

$=(3x^2+x-4)+(x^2+2x+1)i$

$z=\bar{z}$에서

$(3x^2+x-4)+(x^2+2x+1)i$

$=(3x^2+x-4)-(x^2+2x+1)i$

$2(x^2+2x+1)=0, \quad (x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

답 -1

다른 풀이 $z=\bar{z}$이면 복소수 z는 실수이므로

$z=(3x^2+x-4)+(x^2+2x+1)i$에서

$x^2+2x+1=0, \quad (x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$

04 전략 주어진 등식의 좌변을 $a+bi$ 꼴로 정리한 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$x^2+xyi+y^2+xyi-5-4i=0$

$(x^2+y^2-5)+(2xy-4)i=0$ ⋯ ❶

x^2+y^2-5, $2xy-4$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+y^2-5=0$, $2xy-4=0$

$\therefore x^2+y^2=5$, $xy=2$ ⋯ ❷

따라서

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=5+2\cdot2=9$

이므로 $x+y=3$ ($\because x+y>0$) ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 $a+bi$ 꼴로 나타낼 수 있다.	40%
❷ x^2+y^2, xy의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	20%

05 전략 복소수 x의 분모를 실수화하여 주어진 등식을 우변에 순허수만 남도록 변형한 후, 양변을 제곱하여 x에 대한 이차방정식을 만든다.

풀이 $x=\frac{3}{1+i}=\frac{3(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-3i}{2}$이므로

$2x=3-3i, \quad 2x-3=-3i$

양변을 제곱하면

$4x^2-12x+9=-9$

$\therefore 4x^2-12x+18=0$

$\therefore 4x^2-12x+20=(4x^2-12x+18)+2$

$=2$

답 2

06 전략 $i^{4k}=1$ (k는 자연수), $i^3=-i$ 임을 이용한다.

풀이 ① $i^7=i^4\cdot i^3=i^3=-i$

② $i^{15}=(i^4)^3\cdot i^3=i^3=-i$

③ $i^{23}=(i^4)^5\cdot i^3=i^3=-i$

④ $i^{37}=(i^4)^9\cdot i=i$

⑤ $i^{43}=(i^4)^{10}\cdot i^3=i^3=-i$

답 ④

07 전략 먼저 괄호 안의 식을 간단히 한 후 복소수의 거듭제곱을 계산한다.

풀이 $\frac{-1+i}{1+i}=\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i}{2}=i$ ⋯ ❶

$\therefore \left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{2n+1}=i^{2n+1}=(i^2)^n\cdot i$

$=(-1)^n\cdot i$

그런데 n이 홀수인 자연수이므로

$(-1)^n=-1$

$\therefore \left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{2n+1}=-i$ ⋯ ❷

답 $-i$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{-1+i}{1+i}$를 간단히 할 수 있다.	30%
❷ $\left(\dfrac{-1+i}{1+i}\right)^{2n+1}$을 간단히 할 수 있다.	70%

08 (전략) 자연수 k에 대하여 $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$임을 이용한다.

(풀이) $i=i^5=i^9=\cdots=i^{29}$,
$i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{30}=-1$, $i^3=i^7=\cdots=i^{27}=-i$,
$i^4=i^8=\cdots=i^{28}=1$이므로

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{30}}$$
$$=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\frac{1}{i}-1$$
$$=\frac{1}{i}-1=\frac{i}{i^2}-1$$
$$=-1-i$$

따라서 주어진 등식은
$-1-i=a+bi$
a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=-1$, $b=-1$
$\therefore a+b=-2$

답 -2

09 (전략) $\alpha+\bar{\alpha}$, $\alpha\bar{\alpha}$의 값을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

(풀이) $\alpha^2\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}^2=\alpha\bar{\alpha}(\alpha+\bar{\alpha})$ ······ ㉠
$\bar{\alpha}=5-2i$이므로
$\alpha+\bar{\alpha}=(5+2i)+(5-2i)=10$
$\alpha\bar{\alpha}=(5+2i)(5-2i)=29$
㉠에서
$\alpha^2\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}^2=29\cdot 10=290$

답 290

10 (전략) $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}$, $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}$임을 이용한다.

(풀이) $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}=2+i$이므로
$z_1-z_2=\overline{2+i}=2-i$ ···→ ❶
또 $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=5-2i$이므로
$z_1z_2=\overline{5-2i}=5+2i$ ···→ ❷
$\therefore (z_1-2)(z_2+2)$
$=z_1z_2+2(z_1-z_2)-4$
$=(5+2i)+2(2-i)-4$
$=5$ ···→ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ z_1-z_2를 구할 수 있다.	40%
❷ z_1z_2를 구할 수 있다.	40%
❸ $(z_1-2)(z_2+2)$의 값을 구할 수 있다.	20%

11 (전략) 주어진 등식의 좌변을 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낸다.

(풀이)
$$\frac{2-2\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}=\frac{2-2\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$
$$=\frac{(2-2\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{-4-4\sqrt{3}i}{4}=-1-\sqrt{3}i$$

따라서 주어진 등식은
$-1-\sqrt{3}i=a+bi$
a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=-1$, $b=-\sqrt{3}$
$\therefore a^2+b^2=4$

답 4

12 (전략) 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

(풀이) ① $\sqrt{-3}\sqrt{5}=\sqrt{(-3)\cdot 5}=\sqrt{-15}$
② $\sqrt{-3}\sqrt{-5}=-\sqrt{(-3)\cdot(-5)}=-\sqrt{15}$
③ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{-3}{5}}=\sqrt{-\dfrac{3}{5}}$
④ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{\dfrac{3}{-5}}=-\sqrt{-\dfrac{3}{5}}$
⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}=\sqrt{\dfrac{-3}{-5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

답 ④

(다른 풀이) ① $\sqrt{-3}\sqrt{5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}i=\sqrt{-15}$
② $\sqrt{-3}\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i=\sqrt{15}i^2=-\sqrt{15}$
③ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}i=\sqrt{-\dfrac{3}{5}}$
④ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}i}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{5}i^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$
$=-\sqrt{\dfrac{3}{5}}i=-\sqrt{-\dfrac{3}{5}}$
⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{5}i}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

13 (전략) $a<3$이면 $a-3<0$, $3-a>0$임을 이용한다.

(풀이) $a-3<0$, $3-a>0$이므로
$$\frac{\sqrt{3-a}}{\sqrt{a-3}}=-\sqrt{\frac{3-a}{a-3}}=-\sqrt{-1}=-i$$
$$\sqrt{\frac{3-a}{a-3}}=\sqrt{-1}=i$$
따라서 구하는 값은 $-i\cdot i=1$

답 ③

14 전략 $\alpha=a+bi$라 하고 보기가 옳은지 확인하거나 보기가 성립하지 않는 예를 찾는다.

풀이 ① $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\alpha=\overline{\alpha}$에서

$a+bi=a-bi, \qquad 2bi=0$

$\therefore b=0$

따라서 α는 실수이다.

② $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\alpha=\overline{\beta}$에서

$\beta=\overline{\alpha}=a-bi$

$\therefore \alpha+\beta=2a, \ \alpha\beta=a^2+b^2$

따라서 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.

③ $\alpha=1$, $\beta=i$이면 $\alpha^2+\beta^2=0$이지만 $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$이다.

④ $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\alpha=\overline{\beta}$에서

$\beta=\overline{\alpha}=a-bi$

$\therefore \alpha\beta=a^2+b^2$

$\alpha\beta=0$이면 $a^2+b^2=0$이므로 $\qquad a=0, \ b=0$

$\therefore \alpha=0, \ \beta=0$

⑤ $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\beta=\overline{\alpha}=a-bi$

$\therefore \alpha+\beta=2a$

$\alpha+\beta=0$이면 $2a=0$이므로 $\qquad a=0$

그런데 $\alpha\neq0$이므로 $\qquad b\neq0$

$\therefore \alpha=bi, \ \beta=-bi \ (b\neq0)$

따라서 α, β는 순허수이다.

답 ③

15 전략 z^2이 음의 실수이려면 z는 순허수이어야 함을 이용한다.

풀이 $z=(n-1+2i)^2$

$=n^2+1-4-2n-4i+4ni$

$=(n^2-2n-3)+(4n-4)i$ ⋯ ❶

z^2이 음의 실수이려면 z는 순허수이어야 하므로

$n^2-2n-3=0, \ 4n-4\neq0$ ⋯ ❷

$(n+1)(n-3)=0, \ n\neq1$

$\therefore n=3 \ (\because n>0)$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ z를 $a+bi$ 꼴로 나타낼 수 있다.	30%
❷ z^2이 음의 실수가 되도록 하는 조건을 구할 수 있다.	50%
❸ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	20%

16 전략 $\alpha=1+2i$, $\beta=a+bi$를 대입하여 계산한다.

풀이 $(1+2i)◎(a+bi)=0$에서

$(1+2i)+(a+bi)+(1+2i)(a+bi)=0$

$(1+2a-2b)+(2+2a+2b)i=0$

$1+2a-2b$, $2+2a+2b$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$1+2a-2b=0, \ 2+2a+2b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{3}{4}, \ b=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore ab=\dfrac{3}{16}$

답 $\dfrac{3}{16}$

17 전략 $i^n=i^{n+4m}$ (m, n은 자연수)임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $f(1)f(2)=\dfrac{i}{1+i}\cdot\dfrac{i^2}{1+i}$

$=\dfrac{-i}{2i}=-\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $i^n=i^{n+4k}$이므로

$f(n)=f(n+4k)$

$\therefore f(100-2k)=f(100+2k)$

ㄷ. $f(n)f(n+1)=\dfrac{i^n}{1+i}\cdot\dfrac{i^{n+1}}{1+i}=\dfrac{i^{2n+1}}{2i}$

$=\dfrac{(i^2)^n\cdot i}{2i}=\dfrac{(-1)^n}{2}$

$\therefore f(1)f(2)+f(2)f(3)+f(3)f(4)$
$+\cdots+f(99)f(100)$

$=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{(-1)^2}{2}+\dfrac{(-1)^3}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{99}}{2}$

$=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\cdots-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

18 전략 $i^{4k}=1$ (k는 자연수)임을 이용한다.

풀이 $m=2^{10}$의 양의 약수는

$1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{10}$

이 중 $2^2, 2^3, \cdots, 2^{10}$은 모두 4의 배수이므로

$x_m=i+i^2+i^{2^2}+i^{2^3}+\cdots+i^{2^{10}}$

$=i-1+1+1+\cdots+1$

$=i+8$ ⋯ ❶

$n=5^{10}$의 양의 약수는

$1, 5, 5^2, 5^3, \cdots, 5^{10}$

각각을 4로 나눈 나머지가 모두 1이므로

$x_n=i+i^5+i^{5^2}+i^{5^3}+\cdots+i^{5^{10}}$

$=i+i+i+i+\cdots+i$

$=11i$ ⋯ ❷

$\therefore x_m+x_n=(i+8)+11i=8+12i$ ⋯ ❸

따라서 $p=8$, $q=12$이므로

$p+q=20$ ⋯ ❹

답 20

채점 기준	비율
❶ x_m을 구할 수 있다.	40%
❷ x_n을 구할 수 있다.	40%
❸ x_m+x_n을 구할 수 있다.	10%
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10%

19 전략 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$임을 이용한다.

풀이 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}은 모두 양수이므로

$$\begin{aligned}&\sqrt{-a_1}\sqrt{-a_2}\sqrt{-a_3}\cdots\sqrt{-a_{10}}\\&=\sqrt{a_1}i\cdot\sqrt{a_2}i\cdot\sqrt{a_3}i\cdot\cdots\cdot\sqrt{a_{10}}i\\&=(\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}\cdots\sqrt{a_{10}})i^{10}\\&=\sqrt{a_1a_2a_3\cdots a_{10}}(i^4)^2\cdot i^2\\&=\sqrt{100}\cdot(-1)\\&=-10\end{aligned}$$

답 -10

20 전략 근호 안의 식의 부호를 조사하여 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $xy<0$이면

$x>0$, $y<0$ 또는 $x<0$, $y>0$

$\therefore \sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$

ㄴ. $x<y<0$이므로

$x<0$, $-x>0$, $x-y<0$, $y-x>0$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\sqrt{y-x}}{\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x}}&=-\sqrt{\frac{y-x}{x-y}}-\sqrt{\frac{-x}{x}}\\&=-\sqrt{-1}-\sqrt{-1}\\&=-i-i=-2i\end{aligned}$$

ㄷ. $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$이므로 $\quad x<0$, $y<0$

$\therefore \sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{y}=-\sqrt{x^2}+\sqrt{-y}i=x+\sqrt{-y}i$

따라서 $\sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{y}$의 켤레복소수는

$x-\sqrt{-y}i=x-\sqrt{y}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

21 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 주어진 조건을 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 조건 (가)에 의하여 $(a+bi)+(1-2i)$, 즉 $(a+1)+(b-2)i$는 양의 실수이므로

$a+1>0$, $b-2=0$

$\therefore a>-1$, $b=2$

또 조건 (나)에 의하여

$(a+bi)(a-bi)=7$, $\quad a^2+b^2=7$

$a^2+4=7$ ($\because b=2$), $\quad a^2=3$

$\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>-1$)

따라서 $z=\sqrt{3}+2i$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(z+\bar{z})&=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}+2i)+(\sqrt{3}-2i)\}\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{3}\end{aligned}$$

답 ③

22 전략 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리한 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$a^2-2abi-b^2=8i$, $\quad (a^2-b^2)-2abi=8i$

a^2-b^2, $-2ab$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$, $-2ab=8$

$\therefore b=\pm a$, $ab=-4$

(ⅰ) $b=a$이면 $ab=-4$에서

$a^2=-4$

그런데 $a^2=-4$인 실수 a는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $b=-a$이면 $ab=-4$에서

$a^2=4$

$\therefore a=2$, $b=-2$ ($\because a>0$)

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad a=2$, $b=-2$

$\therefore 20a+b=38$

답 38

23 전략 자연수 k에 대하여 $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$임을 이용한다.

풀이 $i=i^5=\cdots=i^{17}$, $i^2=i^6=\cdots=i^{18}=-1$, $i^3=i^7=\cdots=i^{19}=-i$, $i^4=i^8=\cdots=i^{16}=1$이므로

$$\begin{aligned}&(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\\&=2(i+i^2+i^3+\cdots+i^{18})-i+i^{19}\\&=2\{(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1\}\\&\quad -i-i\\&=2(i-1)-2i=-2\end{aligned}$$

따라서 주어진 등식은 $\quad -2=a+bi$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-2$, $b=0$

$\therefore 4(a+b)^2=16$

답 16

다른 풀이 $i+i^{19}=i-i=0$이므로

$$\begin{aligned}&(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\\&=i+\{(i+i^2)+(i^2+i^3)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\}+i^{19}\\&=(i+i)+(i^2+i^2)+\cdots+(i^{19}+i^{19})\\&=2(i+i^2+i^3+\cdots+i^{19})\\&=2(i+i^2+i^3+\cdots+i^{19}+i^{20}-i^{20})\\&=2\cdot(-i^{20})\\&=-2\end{aligned}$$

따라서 주어진 등식은 $-2=a+bi$이므로

$a=-2,\ b=0$

$\therefore 4(a+b)^2=16$

24 전략 주어진 수들의 곱이 -32가 되는 경우를 나누어 생각해 본다.

풀이 주사위를 던져서 $0,\ 3,\ 5$가 적어도 한 번 나오면 나온 수들의 곱이 -32가 될 수 없다.
또 $(2i)^2=-4,\ (1+i)^2\cdot 2i=-4,\ (1+i)^4=-4$이므로 2를 제외한 $2i$ 또는 $1+i$를 곱하여 만들 수 있는 실수는 $-4,\ 16,\ -64,\ \cdots$이다.
따라서 주사위를 던져서 -32가 되는 경우는
$2^3\cdot(-4)=-32$뿐이다.

(i) 2가 3번, $2i$가 2번 나오는 경우

$2^3\cdot(2i)^2=8\cdot(-4)=-32$

➡ $n=5$

(ii) 2가 3번, $1+i$가 2번, $2i$가 1번 나오는 경우

$2^3\cdot(1+i)^2\cdot 2i=8\cdot(-4)=-32$

➡ $n=6$

(iii) 2가 3번, $1+i$가 4번 나오는 경우

$2^3\cdot(1+i)^4=8\cdot(-4)=-32$

➡ $n=7$

이상에서 가능한 n의 값은 $5,\ 6,\ 7$이므로 구하는 합은 18이다.

답 18

25 전략 $x\neq0,\ y\neq0$이고 $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$이면 $x<0,\ y>0$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여

$a<0,\ b>0$

조건 (나)에 의하여

$a+b=0,\ a+c-1=0$

즉 $b=-a,\ c=-a+1$이므로

$c=b+1$

따라서 $b<c$이므로

$a<b<c$

답 ①

Remark▶
실수 $x,\ y$에 대하여 $|x|+|y|=0$이면
$x=0,\ y=0$

Ⅱ. 방정식

05 이차방정식

유제

본책 115~140쪽

032-❶ $a^2x+1=x+a$에서

$(a^2-1)x=a-1$

$(a+1)(a-1)x=a-1$

이 방정식의 해가 무수히 많으려면

$(a+1)(a-1)=0,\ a-1=0$

$\therefore a=1$

답 1

032-❷ $4k(x-1)=x+2$에서

$(4k-1)x=4k+2$

이 방정식의 해가 없으려면

$4k-1=0,\ 4k+2\neq0$

$\therefore k=\dfrac{1}{4}$

답 $\dfrac{1}{4}$

033-❶ (1) $x-1=0,\ x-5=0$에서

$x=1,\ x=5$

(i) $x<1$일 때,

$x-1<0,\ x-5<0$이므로

$-(x-1)-(x-5)=x$

$\therefore x=2$

그런데 $x<1$이므로 $x=2$는 해가 아니다.

(ii) $1\leq x<5$일 때,

$x-1\geq0,\ x-5<0$이므로

$(x-1)-(x-5)=x$

$\therefore x=4$

(iii) $x\geq5$일 때,

$x-1>0,\ x-5\geq0$이므로

$(x-1)+(x-5)=x$

$\therefore x=6$

이상에서 주어진 방정식의 해는

$x=4$ 또는 $x=6$

(2) $x+3=0,\ x-3=0$에서

$x=-3,\ x=3$

(i) $x<-3$일 때,

$x+3<0,\ x-3<0$이므로

$-(x+3)+2(x-3)=-1$

$\therefore x=8$

그런데 $x<-3$이므로 $x=8$은 해가 아니다.

(ii) $-3\le x<3$일 때,

$x+3\ge 0$, $x-3<0$이므로

$(x+3)+2(x-3)=-1$

$\therefore x=\frac{2}{3}$

(iii) $x\ge 3$일 때,

$x+3>0$, $x-3\ge 0$이므로

$(x+3)-2(x-3)=-1$

$\therefore x=10$

이상에서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=10$

답 풀이 참조

033-❷ $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$이므로 주어진 방정식은

$|x-2|=3-|x-3|$

$x-2=0$, $x-3=0$에서

$x=2$, $x=3$

(i) $x<2$일 때,

$x-2<0$, $x-3<0$이므로

$-(x-2)=3+(x-3)$

$\therefore x=1$

(ii) $2\le x<3$일 때,

$x-2\ge 0$, $x-3<0$이므로

$x-2=3+(x-3)$

따라서 $0\cdot x=2$이므로 해가 없다.

(iii) $x\ge 3$일 때,

$x-2>0$, $x-3\ge 0$이므로

$x-2=3-(x-3)$

$\therefore x=4$

이상에서 주어진 방정식의 해는

$x=1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 근의 합은 5이다. 답 5

034-❶ $x=-3$을 $x^2-mx-10m=2$에 대입하면

$9+3m-10m=2$

$7m=7 \quad \therefore m=1$

$m=1$을 $x^2-mx-10m=2$에 대입하면

$x^2-x-12=0, \quad (x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

따라서 다른 한 근은 4이다. 답 4

034-❷ $x=-1$을 $(a-3)x^2+x-(a^2-10)=0$에 대입하면

$(a-3)-1-(a^2-10)=0$

$a^2-a-6=0, \quad (a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

그런데 $a-3\neq 0$, 즉 $a\neq 3$이므로

$a=-2$

$a=-2$를 $(a-3)x^2+x-(a^2-10)=0$에 대입하면

$-5x^2+x+6=0, \quad 5x^2-x-6=0$

$(x+1)(5x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{6}{5}$

따라서 다른 한 근은 $\frac{6}{5}$이므로

$b=\frac{6}{5}$

$\therefore a+b=-\frac{4}{5}$ 답 $-\frac{4}{5}$

035-❶ (1) 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}$를 곱하면

$2x^2+\sqrt{2}(4-\sqrt{2})x+\sqrt{2}(2\sqrt{2}-2)=0$

$2x^2+(4\sqrt{2}-2)x+4-2\sqrt{2}=0$

$\therefore x^2+(2\sqrt{2}-1)x+2-\sqrt{2}=0$

따라서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(2\sqrt{2}-1)\pm\sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2-4\cdot 1\cdot(2-\sqrt{2})}}{2}$

$=\frac{1-2\sqrt{2}\pm 1}{2}$

$\therefore x=1-\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2}$

(2) 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$3x^2-\sqrt{3}(6-\sqrt{3})x+\sqrt{3}(3\sqrt{3}-3)=0$

$3x^2-(6\sqrt{3}-3)x+9-3\sqrt{3}=0$

$\therefore x^2-(2\sqrt{3}-1)x+3-\sqrt{3}=0$

따라서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-\{-(2\sqrt{3}-1)\}\pm\sqrt{\{-(2\sqrt{3}-1)\}^2-4\cdot 1\cdot(3-\sqrt{3})}}{2}$

$=\frac{2\sqrt{3}-1\pm 1}{2}$

$\therefore x=\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}-1$

(3) 주어진 방정식의 양변에 i를 곱하면

$i^2x^2+2ix+3i^2=0, \quad -x^2+2ix-3=0$

$\therefore x^2-2ix+3=0$

따라서 근의 공식에 의하여

$x=-(-i)\pm\sqrt{(-i)^2-1\cdot 3}=i\pm 2i$

$\therefore x=3i$ 또는 $x=-i$

(4) 주어진 방정식의 양변에 i를 곱하면

$i^2x^2-i(3i-2)x-3i-i^2=0$

$-x^2+(3+2i)x-3i+1=0$

$\therefore x^2-(3+2i)x+3i-1=0$

05 이차방정식

따라서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-\{-(3+2i)\}\pm\sqrt{\{-(3+2i)\}^2-4\cdot1\cdot(3i-1)}}{2}$$

$$=\frac{3+2i\pm3}{2}$$

$\therefore x=3+i$ 또는 $x=i$

답 풀이 참조

036-❶ (1) (i) $x<0$일 때,

$x^2-3x-10=0$이므로　$(x+2)(x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=5$

그런데 $x<0$이므로　$x=-2$

(ii) $x\geq0$일 때,

$x^2+3x-10=0$이므로　$(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq0$이므로　$x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-2$ 또는 $x=2$

(2) (i) $x<1$일 때,

$x^2+(x-1)+x-3=0$이므로

$x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $x<1$이므로　$x=-1-\sqrt{5}$

(i) $x\geq1$일 때,

$x^2-(x-1)+x-3=0$이므로

$x^2-2=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 $x\geq1$이므로　$x=\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-1-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

답 풀이 참조

037-❶ 수영장 바닥의 세로의 길이를 x m라 하면 가로의 길이는 $(x-10)$m이므로

$x(x-10)=264$,　$x^2-10x-264=0$

$(x+12)(x-22)=0$

$\therefore x=-12$ 또는 $x=22$

그런데 $x>10$이므로　$x=22$

따라서 수영장 바닥의 세로의 길이는 22 m이고, 가로의 길이는 12 m이므로 수영장 바닥의 둘레의 길이는

$2\cdot(12+22)=68(\text{m})$　답 68 m

037-❷ 현재 아들의 나이를 x살이라 하면 아버지의 나이는 $(x+30)$살이다.

5년 후 아들과 아버지의 나이는 각각 $(x+5)$살, $(x+35)$살이므로

$(x+5)^2=2(x+35)+20$

$x^2+8x-65=0$,　$(x+13)(x-5)=0$

$\therefore x=-13$ 또는 $x=5$

그런데 $x>0$이므로　$x=5$

따라서 5년 후 아들의 나이는 10살이다.　답 10살

038-❶ $ax^2-2x-1=0$이 이차방정식이므로

$a\neq0$

이차방정식 $ax^2-2x-1=0$이 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a\cdot(-1)\geq0$

$\therefore a\geq-1$

그런데 $a\neq0$이므로

$-1\leq a<0$ 또는 $a>0$

답 $-1\leq a<0$ 또는 $a>0$

038-❷ $x^2+2(k+a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+a)^2-1\cdot(k^2+a^2+b-2)=0$

$\therefore 2ak-b+2=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a=0$, $-b+2=0$

$\therefore a=0$, $b=2$　답 $a=0$, $b=2$

Remark▶ 항등식의 성질

$ax+b=0$이 x에 대한 항등식이면

$a=b=0$

039-❶ 이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=6$

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(2) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$

$=4^2-3\cdot6=-2$

(3) $(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$

$=6-2\cdot4+4=2$

(4) $\frac{\alpha}{\alpha-1}+\frac{\beta}{\beta-1}=\frac{\alpha(\beta-1)+\beta(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$

$=\frac{2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\frac{2\cdot6-4}{6-4+1}=\frac{8}{3}$

(5) $\dfrac{\beta}{\alpha+1}+\dfrac{\alpha}{\beta+1}=\dfrac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$

$=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$

$=\dfrac{4^2-2\cdot6+4}{6+4+1}=\dfrac{8}{11}$

(6) $\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$

$=\dfrac{4^3-3\cdot6\cdot4}{6^2}=-\dfrac{2}{9}$

답 풀이 참조

039-❷ 이차방정식 $2x^2-4x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore (\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)$

$=(\alpha\beta)^2-\alpha^2\beta+\alpha^2-\alpha\beta^2+\alpha\beta-\alpha+\beta^2-\beta+1$

$=(\alpha\beta)^2-\alpha\beta(\alpha+\beta-1)+(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)$
$+1$

$=(\alpha\beta)^2-\alpha\beta(\alpha+\beta-1)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$-(\alpha+\beta)+1$

$=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot1+2^2-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-2+1$

$=\dfrac{19}{4}$

답 $\dfrac{19}{4}$

040-❶ 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-b$ …… ㉠

또 이차방정식 $x^2-(a+2)x+10=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=a+2$, $\alpha\beta(\alpha+\beta)=10$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$b=-2$, $ab=-10$

이므로

$-2a=-10 \qquad \therefore a=5$

$\therefore a-b=7$

답 7

041-❶ 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+5$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+5)=m$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+5)=m-5$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=\dfrac{m-5}{2}$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{m-5}{2}\cdot\dfrac{m+5}{2}=m-5$

$m^2-4m-5=0, \qquad (m+1)(m-5)=0$

$\therefore m=-1\ (\because m<0)$

답 -1

041-❷ 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $3\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha=2k$ …… ㉠

$\alpha\cdot3\alpha=k^2-k$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=\dfrac{1}{2}k$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{1}{2}k\cdot\dfrac{3}{2}k=k^2-k, \qquad k^2-4k=0$

$k(k-4)=0 \qquad \therefore k=4\ (\because k\neq0)$

답 4

042-❶ 이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=1$

두 근 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$, $\beta+\dfrac{1}{\beta}$의 합과 곱을 구하면

$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)=\alpha+\beta+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

$=\alpha+\beta+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=6+6$

$=12$

$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)=\alpha\beta+\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha\beta}$

$=\alpha\beta+\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{\alpha\beta}$

$=\alpha\beta+\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1}{\alpha\beta}$

$=1+6^2-2\cdot1+1$

$=36$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-12x+36=0$

답 $x^2-12x+36=0$

043-❶ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a$

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b$

$\therefore a=-4$, $b=1$

$\therefore a-b=-5$

답 -5

043-❷ $\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$

즉 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고 한 근이 $1-i$이므로 다른 한 근은 $1+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-i)+(1+i)=-a$, $(1-i)(1+i)=b$

$\therefore a=-2,\ b=2$

따라서 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉

$x^2+2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-2$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(-2)^2-2\cdot(-2)\\&=8\end{aligned}$$

답 8

중단원 연습 문제

본책 141~145쪽

01 $a=-3,\ b=-1$		02 ③		
03 $1+\sqrt{7}$	04 ②	05 -5	06 ①	
07 11	08 $\frac{1}{3}$, 3	09 $x^2+8x+7=0$	10 2	
11 $a=-\frac{1}{2},\ b=-1$		12 ④		
13 $1\le x<2$ 또는 $5\le x<6$		14 ③	15 ①	
16 62	17 9	18 1	19 $2\pm\sqrt{5}$	
20 ③	21 144	22 10	23 ②	24 ①

01 (전략) $x=1$을 주어진 방정식에 각각 대입한다.

(풀이) $x=1$을 주어진 방정식에 각각 대입하면

$1+2+a=0,\ 2-b+a=0$

$1+2+a=0$에서 $\quad a=-3$

$a=-3$을 $2-b+a=0$에 대입하면

$-b-1=0 \qquad \therefore b=-1$

답 $a=-3,\ b=-1$

02 (전략) x^2의 계수를 실수화한 후 근의 공식을 이용하여 주어진 이차방정식을 푼다.

(풀이) 주어진 방정식의 양변에 i를 곱하면

$i^2x^2-4ix+4i^2=0, \qquad -x^2-4ix-4=0$

$\therefore x^2+4ix+4=0$

따라서 근의 공식에 의하여

$x=-2i\pm\sqrt{(2i)^2-1\cdot4}=(-2\pm2\sqrt{2})i$

a, b가 유리수이므로 $\quad a=-2,\ b=\pm2$

$\therefore a^2+b^2=8$

답 ③

03 (전략) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 미지수의 값을 경계로 범위를 나눈다.

(풀이) (i) $x<1$일 때,

$x^2+3(x-1)=3x+1, \qquad x^2=4$

$\therefore x=\pm2$

그런데 $x<1$이므로 $\quad x=-2$ ⋯ ❶

(ii) $x\ge1$일 때,

$x^2-3(x-1)=3x+1, \qquad x^2-6x+2=0$

$\therefore x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot2}=3\pm\sqrt{7}$

그런데 $x\ge1$이므로 $\quad x=3+\sqrt{7}$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-2$ 또는 $x=3+\sqrt{7}$

따라서 모든 근의 합은

$1+\sqrt{7}$ ⋯ ❸

답 $1+\sqrt{7}$

채점 기준	비율
❶ $x<1$일 때, 방정식의 근을 구할 수 있다.	40%
❷ $x\ge1$일 때, 방정식의 근을 구할 수 있다.	40%
❸ 모든 근의 합을 구할 수 있다.	20%

04 (전략) 아랫변의 길이를 x cm라 하고 x에 대한 이차방정식을 세운다.

(풀이) 아랫변의 길이를 x cm라 하면 윗변의 길이는 $\frac{1}{2}x$ cm, 높이는 $(x-2)$cm이므로

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+x\right)(x-2)=18, \qquad \frac{3}{4}x(x-2)=18$

$x(x-2)=24, \qquad x^2-2x-24=0$

$(x+4)(x-6)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=6$

그런데 $x>2$이므로 $\quad x=6$

따라서 아랫변의 길이는 6 cm이다.

답 ②

05 (전략) 이차방정식이 중근을 가지면 (판별식)$=0$임을 이용한다.

(풀이) $(k^2-9)x^2-4(k+3)x+1=0$이 이차방정식이므로

$k^2-9\ne0, \qquad k^2\ne9 \qquad \therefore k\ne\pm3$

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-2(k+3)\}^2-(k^2-9)\cdot 1=0$$

$k^2+8k+15=0,\quad (k+5)(k+3)=0$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=-3$

그런데 $k\neq-3$이므로 $\quad k=-5$ 답 -5

06 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(-1)^2-2\cdot(-1)}{-1}=-3$$

답 ①

07 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 b의 값을 먼저 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax-21=0$의 두 근이 3, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$3+b=-a$, $3b=-21$

$3b=-21$에서 $\quad b=-7$ ⋯ ❶

$b=-7$을 $3+b=-a$에 대입하면

$3-7=-a \quad \therefore a=4$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=11$ ⋯ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 $x=3$을 $x^2+ax-21=0$에 대입하면

$9+3a-21=0 \quad \therefore a=4$

$a=4$를 $x^2+ax-21=0$에 대입하면

$x^2+4x-21=0,\quad (x+7)(x-3)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=3$

따라서 $b=-7$이므로 $\quad a-b=11$

08 전략 두 근의 비가 $m:n$이면 두 근을 $m\alpha$, $n\alpha$로 놓고 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 주어진 방정식의 두 근을 3α, $\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$3\alpha+\alpha=2(m-1)$ ⋯⋯ ㉠

$3\alpha\cdot\alpha=m$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $\alpha=\dfrac{m-1}{2}$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$3\left(\dfrac{m-1}{2}\right)^2=m,\quad 3m^2-10m+3=0$

$(3m-1)(m-3)=0$

$\therefore m=\dfrac{1}{3}$ 또는 $m=3$ 답 $\dfrac{1}{3}$, 3

09 전략 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-a$, $1\cdot3=b$

$\therefore a=-4$, $b=3$

$a+b=-1$, $a-b=-7$이므로 -1과 -7을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(-1-7)x+(-1)\cdot(-7)=0$

$\therefore x^2+8x+7=0$

답 $x^2+8x+7=0$

10 전략 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 무리수이므로 다른 한 근은 켤레근임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이 $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$, 즉 $3+2\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $3-2\sqrt{2}$이다. ⋯ ❶

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=-a$

$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=b$

$\therefore a=-6$, $b=1$ ⋯ ❷

이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+x-6=0$에서

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 양의 근은 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $x^2+ax+b=0$의 다른 한 근을 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $x^2+bx+a=0$의 양의 근을 구할 수 있다.	20%

11 전략 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 허수이므로 다른 한 근은 켤레근임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $ax^2+x+b=0$에서 a, b가 실수이고 한 근이 $1-i$이므로 다른 한 근은 $1+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-i)+(1+i)=-\dfrac{1}{a}$, $(1-i)(1+i)=\dfrac{b}{a}$

$\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=-1$

답 $a=-\frac{1}{2},\ b=-1$

12 전략 $(x*x)+(x*1)=0$을 이차방정식으로 나타낸다.

풀이 $(x*x)+(x*1)$

$=x\cdot x-2x+x+x\cdot 1-2x+1$

$=x^2-2x+1$

따라서 $x^2-2x+1=0$이므로

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

답 ④

13 전략 $[x]=n$이면 $n\le x<n+1$임을 이용한다.

풀이 $[x]=t$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-6t+5=0, \qquad (t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

(i) $t=1$, 즉 $[x]=1$일 때,

$1\le x<2$

(ii) $t=5$, 즉 $[x]=5$일 때,

$5\le x<6$

(i), (ii)에서

$1\le x<2$ 또는 $5\le x<6$

답 $1\le x<2$ 또는 $5\le x<6$

14 전략 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 a, b의 부호를 구한다.

풀이 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}\ (a\ne0,\ b\ne0)$이므로

$a<0,\ b>0$

ㄱ. $ax^2+bx+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=b^2-4a>0$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $x^2-2ax+b=0$의 판별식을 D_2라 하면 이 이차방정식이 허근을 가지므로

$\frac{D_2}{4}=(-a)^2-b<0 \qquad \therefore a^2-b<0$

$x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=a^2-4b<a^2-b<0\ (\because b>0)$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 허근을 갖는다.

ㄷ. $ax^2+bx+ab^2=0$의 판별식을 D_4라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$D_4=b^2-4a^2b^2=0$

$b^2(1-4a^2)=0$

이때 $b\ne0$이므로

$1-4a^2=0, \qquad a^2=\frac{1}{4}$

$\therefore a=-\frac{1}{2}\ (\because a<0)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

15 전략 이차식 $f(x)$가 완전제곱식이면 이차방정식 $f(x)=0$에서 (판별식)$=0$임을 이용한다.

풀이 $2ax-b(x^2-1)+c(x^2+1)$

$=(c-b)x^2+2ax+b+c$

이 식이 완전제곱식이므로 이차방정식

$(c-b)x^2+2ax+b+c=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(c-b)(b+c)=0$

$a^2-c^2+b^2=0$

$\therefore c^2=a^2+b^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}ab$

답 ①

16 전략 근과 계수의 관계를 이용하여

$\frac{1}{\alpha_n+1}+\frac{1}{\beta_n+1}$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=4n+6,\ \alpha_n\beta_n=n^2-3$

$\therefore \frac{1}{\alpha_n+1}+\frac{1}{\beta_n+1}$

$=\frac{\beta_n+1+\alpha_n+1}{(\alpha_n+1)(\beta_n+1)}$

$=\frac{\alpha_n+\beta_n+2}{\alpha_n\beta_n+(\alpha_n+\beta_n)+1}$

$=\frac{4n+6+2}{(n^2-3)+(4n+6)+1}$

$=\frac{4(n+2)}{(n+2)^2}=\frac{4}{n+2}\ (\because n+2\ne0)$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\beta_1+1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\beta_2+1}\right)$

$+\left(\frac{1}{\alpha_3+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)$

$=\frac{4}{3}+1+\frac{4}{5}$

$=\frac{47}{15}$

따라서 $p=15,\ q=47$이므로

$p+q=62$

답 62

17 (전략) 각각의 방정식에서 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-b$ …… ㉠

또 이차방정식 $x^2-(2a+3)x+4b-4=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=2a+3$, $\alpha^2\beta^2=4b-4$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2a+3$, $(\alpha\beta)^2=4b-4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2+2b=2a+3$, $b^2=4b-4$ ⋯ ❶

$b^2=4b-4$에서

$b^2-4b+4=0$, $(b-2)^2=0$

$\therefore b=2$ ⋯ ❷

$b=2$를 $a^2+2b=2a+3$에 대입하여 정리하면

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$ ⋯ ❸

$\therefore a^3+b^3=9$ ⋯ ❹

답 9

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 식을 구할 수 있다.	30%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ a^3+b^3의 값을 구할 수 있다.	10%

18 (전략) 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 m에 대한 식으로 나타낸다.

(풀이) 이차방정식 $x^2-(m-3)x+m-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m-3$, $\alpha\beta=m-2$

그런데 $\alpha\beta<0$이므로

$m-2<0$ $\therefore m<2$ …… ㉠

한편 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$이므로

$6=(m-3)^2-2(m-2)$, $m^2-8m+7=0$

$(m-1)(m-7)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=7$

그런데 ㉠에서 $m<2$이므로 $m=1$ 답 1

19 (전략) 한 근을 α라 하면 다른 한 근은 α^2임을 이용한다.

(풀이) $x^2-px+p=0$의 두 근을 α, α^2 $(\alpha\neq0)$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\alpha^2=p$ …… ㉠

$\alpha\cdot\alpha^2=p$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha+\alpha^2=\alpha^3$, $\alpha^3-\alpha^2-\alpha=0$

$\alpha(\alpha^2-\alpha-1)=0$

이때 $\alpha\neq0$이므로

$\alpha^2-\alpha-1=0$ …… ㉢ ⋯ ❶

$$\therefore \alpha=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$ ⋯ ❷

이때 ㉢에서 $\alpha^2=\alpha+1$이므로

$$p=\alpha+\alpha^2=\alpha+(\alpha+1)=2\alpha+1=2\cdot\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+1=2\pm\sqrt{5}$$ ⋯ ❸

답 $2\pm\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ α에 대한 이차방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ α의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ p의 값을 구할 수 있다.	40%

20 (전략) 방정식의 한 근이 주어지면 주어진 근을 방정식에 대입한다.

(풀이) $x=2+\sqrt{3}$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$(7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때 a, b, c가 유리수이므로

$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0$

$4a+2b=0$에서 $b=-2a$

$b=-2a$를 $7a+3b+c=0$에 대입하면

$a+c=0$ $\therefore c=-a$

따라서 주어진 방정식은 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$이고 $a\neq0$이므로

$x^2-2\sqrt{3}x-1=0$

$\therefore x=-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-1\cdot(-1)}=\sqrt{3}\pm2$

즉 $\beta=\sqrt{3}-2$이므로

$$\alpha+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}=2+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)=0$$

답 ③

Remark ▶
$\sqrt{3}b$가 무리수이므로 주어진 이차방정식의 계수가 모두 유리수인 것은 아니다. 따라서 켤레근을 이용하여 $\beta=2-\sqrt{3}$이라 하면 안 된다.

21 (전략) 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x로 놓고 x에 대한 이차방정식을 세운다.

(풀이) 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x라 하면

$$\square AECF=\square ABCD-\triangle ABE-\triangle AFD$$
$$=x^2-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x-\frac{1}{2}\cdot x\cdot (x-5)$$
$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$$

이므로

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x=78, \qquad x^2+x-156=0$$
$$(x+13)(x-12)=0$$
$$\therefore\ x=-13 \text{ 또는 } x=12$$

그런데 $x>5$이므로 $\quad x=12$

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는

$12\cdot 12=144$ 답 144

22 (전략) $\alpha^3+\beta^3$을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한다.

(풀이) 이차방정식 $2x^2-4x+k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{-4}{2}=2,\ \alpha\beta=\frac{k}{2}$$

이때 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$이므로

$$7=2^3-3\cdot\frac{k}{2}\cdot 2, \qquad 7=8-3k$$
$$\therefore\ k=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ 30k=10$ 답 10

23 (전략) $\alpha=a+bi$로 놓고 다른 한 근을 구한 후 근과 계수의 관계를 이용한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$에서 p가 실수이고 한 근이 α이므로 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다.

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a+bi)+(a-bi)=p,\ (a+bi)(a-bi)=p+3$$

$\therefore\ 2a=p,\ a^2+b^2=p+3$ …… ㉠

한편 $\alpha=a+bi$에서

$$\alpha^3=(a+bi)^3$$
$$=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$$
$$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$$

이때 a, b가 실수이므로 α^3이 실수가 되려면

$$3a^2b-b^3=0, \qquad b(3a^2-b^2)=0$$
$$\therefore\ 3a^2=b^2\ (\because\ b\neq 0)$$

㉠에서 $a=\frac{1}{2}p$, $p=a^2+b^2-3$이므로

$$p=a^2+3a^2-3$$
$$=4a^2-3$$
$$=4\left(\frac{1}{2}p\right)^2-3$$
$$=p^2-3$$

즉 $p^2-p-3=0$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다.

답 ②

Remark▶

$p^2-p-3=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot (-3)=13>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 가짐을 알 수 있다.

24 (전략) 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=P(\alpha)$임을 이용한다.

(풀이) 조건 (가)에 의하여 $f(1)=1$이므로

$$1+p+q=1$$

$\therefore\ q=-p$ …… ㉠

따라서 $x^2+px-p=0$에서 p가 실수이고 조건 (나)에 의하여 한 근이 $a+i$이므로 다른 한 근은 $a-i$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$(a+i)+(a-i)=-p,\ (a+i)(a-i)=-p$$
$$\therefore\ 2a=-p,\ a^2+1=-p$$

즉 $2a=a^2+1$이므로

$$a^2-2a+1=0$$
$$(a-1)^2=0$$
$$\therefore\ a=1$$

$a=1$을 $2a=-p$에 대입하면

$$2=-p$$
$$\therefore\ p=-2$$

㉠에서 $q=2$이므로

$$p+2q=2$$

답 ①

Ⅱ. 방정식

06 이차방정식과 이차함수

유제

본책 151~172쪽

044-❶ $y=x^2+2ax+a^2+b^2-4b$
$=(x+a)^2+b^2-4b$
이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(-a,\ b^2-4b)$
이 점이 점 $(2,\ -4)$와 일치하므로
$-a=2,\ b^2-4b=-4$
$-a=2$에서 $\quad a=-2$
$b^2-4b=-4$에서 $\quad b^2-4b+4=0$
$(b-2)^2=0 \quad \therefore b=2$
$\therefore a+b=0$ 답 0

다른 풀이 주어진 이차함수는 x^2의 계수가 1이고, 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -4)$이므로
$y=(x-2)^2-4$, 즉 $y=x^2-4x$
따라서 $2a=-4$, $a^2+b^2-4b=0$이므로 두 식을 연립하여 풀면
$a=-2,\ b=2$
$\therefore a+b=0$

044-❷ $y=2x^2-4kx+k^2-5k-7$
$=2(x-k)^2-k^2-5k-7$
이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(k,\ -k^2-5k-7)$
이 점이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로
$-k^2-5k-7=k+2$
$k^2+6k+9=0, \quad (k+3)^2=0$
$\therefore k=-3$ 답 -3

045-❶ $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
(i) 그래프가 아래로 볼록하므로 $\quad a>0$
(ii) 축이 y축의 오른쪽에 있으므로
$-\frac{b}{2a}>0 \quad \therefore b<0$
(iii) 그래프가 y축과 $y<0$인 부분에서 만나므로
$c<0$
ㄱ. $a>0,\ b<0$이므로 $\quad ab<0$
ㄴ. $a>0,\ b^2>0$이므로 $\quad a+b^2>0$
ㄷ. $a>0,\ c<0$이므로 $\quad a-c>0$
ㄹ. $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}a-\frac{1}{3}b+c=\frac{1}{9}(a-3b+9c)$이고
그래프에서 $x=-\frac{1}{3}$일 때 $y<0$, 즉 $f\left(-\frac{1}{3}\right)<0$
이므로
$\frac{1}{9}(a-3b+9c)<0$
$\therefore a-3b+9c<0$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

046-❶ 이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2-2$라 하면
이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$2=4a-2 \quad \therefore a=1$
따라서 이차함수의 식은 $\quad y=(x-3)^2-2$
$x=0$을 이 식에 대입하면
$y=9-2=7$
이므로 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는
$(0,\ 7)$ 답 $(0,\ 7)$

046-❷ $f(x)=a(x+1)(x-3)$이라 하면
$f(x)=a(x^2-2x-3)=a(x-1)^2-4a$
따라서 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(1,\ -4a)$이므로
$-4a=8 \quad \therefore a=-2$
따라서 $f(x)=-2(x+1)(x-3)$이므로
$f(2)=-2\cdot3\cdot(-1)=6$ 답 6

047-❶ 이차방정식 $x^2+4x-4a=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-(-4a)=4a+4$
(1) $\frac{D}{4}=4a+4>0$이어야 하므로 $\quad 4a>-4$
$\therefore a>-1$
(2) $\frac{D}{4}=4a+4=0$이어야 하므로 $\quad 4a=-4$
$\therefore a=-1$
(3) $\frac{D}{4}=4a+4<0$이어야 하므로 $\quad 4a<-4$
$\therefore a<-1$
답 (1) $a>-1$ (2) -1 (3) $a<-1$

047-❷ 이차함수 $y=x^2-2kx+k+2$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 이차방정식
$x^2-2kx+k+2=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+2)=0$
$k^2-k-2=0, \quad (k+1)(k-2)=0$
$\therefore k=2\ (\because k>0)$ 답 2

048-❶ 이차함수 $y=-2x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=2x+3$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$-2x^2+ax+b=2x+3$,

즉 $2x^2-(a-2)x-b+3=0$ ...... ㉠

의 실근과 같으므로 -1, 3은 이차방정식 ㉠의 두 근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+3=\dfrac{a-2}{2}$, $-1\cdot3=\dfrac{-b+3}{2}$

$\therefore a=6,\ b=9$ 답 $a=6,\ b=9$

048-❷ 이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$x^2-2x+2=mx+n$,

즉 $x^2-(m+2)x-n+2=0$ ...... ㉠

의 실근과 같다.

이때 m, n이 유리수이므로 이차방정식 ㉠의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=m+2$

$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-n+2$

$\therefore m=0,\ n=3$

답 $m=0,\ n=3$

Remark▶ 이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

① a, b, c가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

② a, b, c가 실수일 때, $p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

049-❶ 이차함수 $y=x^2+x-a$의 그래프와 직선 $y=5x-1$이 만나지 않으려면 이차방정식

$x^2+x-a=5x-1$, 즉 $x^2-4x-a+1=0$

의 판별식을 D라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(-a+1)<0$

$a+3<0$ $\therefore a<-3$ 답 $a<-3$

049-❷ 직선 $y=mx$가 이차함수 $y=x^2+x+1$의 그래프와 한 점에서 만나려면 이차방정식

$mx=x^2+x+1$, 즉 $x^2+(1-m)x+1=0$

의 판별식을 D라 할 때,

$D=(1-m)^2-4=0$, $m^2-2m-3=0$

$(m+1)(m-3)=0$

$\therefore m=3\ (\because m>0)$ 답 3

050-❶ $f(x)=x^2-2ax+2a+4$

$=(x-a)^2-a^2+2a+4$

$f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $-a^2+2a+4$를 가지므로

$-a^2+2a+4=1$, $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$ 답 -1, 3

050-❷ 이차함수 $f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -1)$이고 $f(x)$의 x^2의 계수가 a이므로

$f(x)=a(x-3)^2-1\ (a<0)$

이때 $f(-3)=-13$이므로

$36a-1=-13$ $\therefore a=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{3}(x-3)^2-1$

$=-\dfrac{1}{3}x^2+2x-4$

따라서 $b=2$, $c=-4$이므로

$3a+b+c=-3$ 답 -3

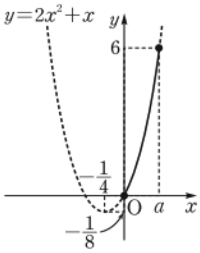
051-❶ $y=x^2-8x+k=(x-4)^2-16+k$이고, 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 4가 $-1\le x\le5$에 속하므로 $x=4$에서 최솟값 $-16+k$를 갖는다.

즉 $-16+k=4$이므로

$k=20$ 답 20

051-❷ $y=2x^2+x$

$=2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$



이므로 $0\le x\le a$에서 함수 $y=2x^2+x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=a$에서 최댓값 6을 가지므로

$2a^2+a=6$, $2a^2+a-6=0$

$(a+2)(2a-3)=0$

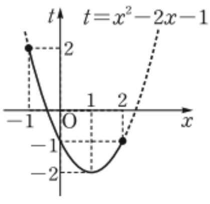
$\therefore a=\dfrac{3}{2}\ (\because a>0)$ 답 $\dfrac{3}{2}$

052-❶ $x^2-2x-1=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2-2$

$-1\le x\le2$이므로 [그림 1]에서

$-2\le t\le2$



[그림 1]

이때 주어진 함수는

$y=t^2+2t-3=(t+1)^2-4\ (-2\le t\le 2)$

이므로 [그림 2]에서

$t=-2$일 때, $y=-3$

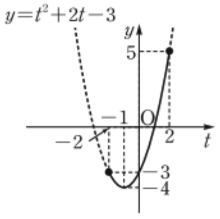
$t=-1$일 때, $y=-4$

$t=2$일 때, $y=5$

따라서 최댓값은 5, 최솟값은 -4이므로

$M=5,\ m=-4$

$\therefore M+m=1$



[그림 2]

답 1

052-❷ $x^2-6x+12=t$로 놓으면

$t=(x-3)^2+3$

이므로 $t\ge 3$

이때 주어진 함수는

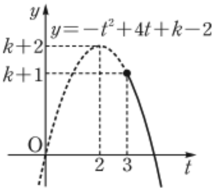
$y=-t^2+4t+k-2=-(t-2)^2+k+2\ (t\ge 3)$

이므로 오른쪽 그림에서

$t=3$일 때, $y=k+1$

따라서 주어진 함수의 최댓값이 $k+1$이므로

$k+1=3 \qquad \therefore k=2$



답 2

053-❶ $y=30x-5x^2=-5(x-3)^2+45$이므로

$x>0$일 때 y는 $x=3$에서 최댓값 45를 갖는다.

따라서 구하는 최고 높이는 45 m이다. 답 45 m

054-❶ $x^2+5y^2-4xy-4y+5$

$=(x-2y)^2+(y-2)^2+1$

이때 x, y가 실수이므로

$(x-2y)^2\ge 0,\ (y-2)^2\ge 0$

$\therefore x^2+5y^2-4xy-4y+5\ge 1$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $x=4$, $y=2$일 때 1이다.

답 1

054-❷ $2x+6z-x^2-y^2-z^2+12$

$=-(x-1)^2-y^2-(z-3)^2+22$

이때 x, y, z가 실수이므로

$(x-1)^2\ge 0,\ y^2\ge 0,\ (z-3)^2\ge 0$

$\therefore 2x+6z-x^2-y^2-z^2+12\le 22$

따라서 주어진 식의 최댓값은 $x=1$, $y=0$, $z=3$일 때 22이다. 답 22

055-❶ (1) 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$y^2+2xy+x^2-4x-8=0$

이 식을 y에 대한 이차방정식으로 보면 y가 실수이므로 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=x^2-(x^2-4x-8)\ge 0$

$4x+8\ge 0 \qquad \therefore x\ge -2$

따라서 x의 최솟값은 -2이다.

(2) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(y-2)x+y^2-8=0$

이 식을 x에 대한 이차방정식으로 보면 x가 실수이므로 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(y-2)^2-(y^2-8)\ge 0$

$-4y+12\ge 0 \qquad \therefore y\le 3$

따라서 y의 최댓값은 3이다.

답 (1) -2 (2) 3

056-❶ $2x+y^2=1$에서

$y^2=1-2x$ ...... ㉠

y가 실수이므로

$y^2\ge 0$, 즉 $1-2x\ge 0$

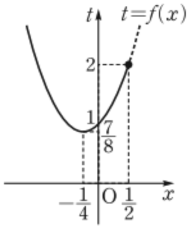
$\therefore x\le \frac{1}{2}$

㉠을 $2x^2+y^2+3x$에 대입하면

$2x^2+1-2x+3x=2x^2+x+1$

$=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\ \left(x\le\frac{1}{2}\right)$

$f(x)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$이라 하면 $x\le\frac{1}{2}$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{4}$에서 최솟값 $\frac{7}{8}$을 갖는다.



즉 $2x^2+y^2+3x$의 최솟값은 $\frac{7}{8}$이다. 답 $\frac{7}{8}$

056-❷ $x+3y^2=1$에서

$3y^2=1-x$ ...... ㉠

y가 실수이므로

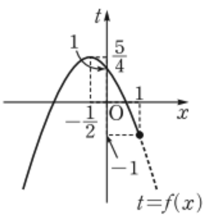
$3y^2\ge 0$, 즉 $1-x\ge 0$

$\therefore x\le 1$

㉠을 $-x^2+3y^2$에 대입하면

$-x^2+1-x=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\ (x\le 1)$

$f(x)=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$라 하면 $x\le 1$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{5}{4}$를 갖는다.



즉 $-x^2+3y^2$의 최댓값은 $\frac{5}{4}$이다. 답 $\frac{5}{4}$

중단원 연습 문제

본책 173~177쪽

01 $-\frac{1}{4}$, 1		02 3	03 2	
04 $m\ge-\frac{3}{2}$		05 ⑤	06 ④	07 11
08 ①	09 ④	10 $\frac{1}{2}$	11 $\frac{15}{4}$	12 3
13 8	14 ④	15 2	16 72 m^2	
17 ⑤	18 ③	19 3	20 4	21 ⑤
22 24	23 54	24 ④		

01 전략 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하여 $y=x-1$에 대입한다.

풀이 $y=2x^2+8kx+4k+1$
$=2(x+2k)^2-8k^2+4k+1$
이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(-2k,\ -8k^2+4k+1)$
이 점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로
$-8k^2+4k+1=-2k-1$
$8k^2-6k-2=0,\quad 4k^2-3k-1=0$
$(4k+1)(k-1)=0$
$\therefore k=-\frac{1}{4}$ 또는 $k=1$ 답 $-\frac{1}{4}$, 1

02 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=x^2-4x+a^2-5$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-4x+a^2-5=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,
$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-(a^2-5)=0$
$a^2=9\quad \therefore a=\pm3$ …… ㉠
또 이차함수 $y=x^2+x+a$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 판별식을 D_2라 할 때,
$D_2=1^2-4\cdot a<0$
$1-4a<0\quad \therefore a>\frac{1}{4}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $a=3$ 답 3

03 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같음을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=-x^2+3x$의 그래프와 직선 $y=6x+k$의 교점의 x좌표는 이차방정식
$-x^2+3x=6x+k$,
즉 $x^2+3x+k=0$ …… ㉠
의 실근과 같으므로 -4는 이차방정식 ㉠의 근이다.
$x=-4$를 ㉠에 대입하면
$16-12+k=0\quad \therefore k=-4$ ··· ❶
방정식 ㉠은 $x^2+3x-4=0$이므로
$(x+4)(x-1)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$
즉 점 Q의 x좌표는 1이다. ··· ❷
따라서 점 Q의 y좌표는
$y=6-4=2$ ··· ❸
답 2

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 점 Q의 x좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ 점 Q의 y좌표를 구할 수 있다.	20%

04 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 만나려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=2x^2+x-1$의 그래프와 직선 $y=-x+m$이 만나려면 이차방정식
$2x^2+x-1=-x+m$,
즉 $2x^2+2x-1-m=0$
의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=1^2-2(-1-m)\ge0,\quad 2m+3\ge0$
$\therefore m\ge-\frac{3}{2}$ 답 $m\ge-\frac{3}{2}$

05 (전략) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 그 접점의 x좌표가 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 중근임을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=x^2+(m-1)x-n$의 그래프가 직선 $y=-x-6$과 점 $(-2,\ -4)$에서 접하므로 -2는 이차방정식

$x^2+(m-1)x-n=-x-6$,

즉 $x^2+mx-n+6=0$ …… ㉠

의 중근이다.

$x=-2$를 ㉠에 대입하면

$4-2m-n+6=0$

$\therefore n=10-2m$ …… ㉡

또 이차방정식 ㉠이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=m^2-4(-n+6)=0$

$m^2+4(10-2m)-24=0$ ($\because$ ㉡)

$m^2-8m+16=0,\quad (m-4)^2=0$

$\therefore m=4$

따라서 ㉡에서 $n=10-8=2$이므로

$m+n=6$ 답 ⑤

다른 풀이 이차방정식 ㉠이 중근 -2를 가지므로

$x^2+mx-n+6=(x+2)^2$,

즉 $x^2+mx-n+6=x^2+4x+4$

따라서 $m=4,\ -n+6=4$이므로

$m=4,\ n=2$

$\therefore m+n=6$

06 (전략) 주어진 두 이차함수를 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$이므로 이차함수 $y=x^2-2x+4$는 $x=1$에서 최솟값 3을 갖는다.

$\therefore m=3$

$y=-x^2-2x-1=-(x+1)^2$이므로 이차함수 $y=-x^2-2x-1$은 $x=-1$에서 최댓값 0을 갖는다.

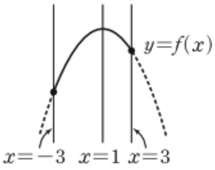
$\therefore M=0$

$\therefore M+m=3$ 답 ④

07 (전략) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다.

풀이 $f(x)=-x^2+2x+k=-(x-1)^2+k+1$이고, 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 1이 $-3\le x\le 3$에 속하므로 $x=1$에서 최댓값 $k+1$을 갖는다. ⋯ ❶

또 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $x=-3$에서 최솟값



$f(-3)=-9-6+k$

$=k-15$

를 갖는다. ⋯ ❷

따라서 $k+1+k-15=8$이므로

$2k-14=8$

$\therefore k=11$ ⋯ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ $-3\le x\le 3$일 때 $f(x)$의 최댓값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $-3\le x\le 3$일 때 $f(x)$의 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

Remark▶

$f(-3)=k-15,\ f(1)=k+1,\ f(3)=k-3$이므로

$f(-3)<f(3)<f(1)$

따라서 $-3\le x\le 3$일 때 $f(x)$의 최댓값은 $k+1$, 최솟값은 $k-15$임을 알 수 있다.

08 (전략) $x^2-4x=t$로 치환하여 t의 값의 범위를 구하고, 주어진 식을 t에 대한 식으로 정리한다.

풀이 $x^2-4x=t$로 놓으면

$t=x^2-4x=(x-2)^2-4$

$0\le x\le 5$이므로 [그림 1]에서

$-4\le t\le 5$

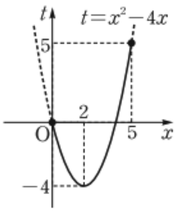
이때 주어진 함수는

$y=(t+1)^2-2(t-1)^2+5$

$=-t^2+6t+4$

$=-(t-3)^2+13$

$(-4\le t\le 5)$



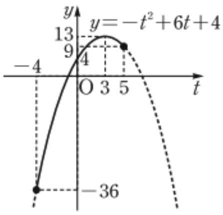
[그림 1]

이므로 [그림 2]에서

$t=-4$일 때, $y=-36$

$t=3$일 때, $y=13$

$t=5$일 때, $y=9$



[그림 2]

따라서 주어진 함수의 최댓값은 13이고, 최솟값은 -36이므로 구하는 합은

$13+(-36)=-23$ 답 ①

09 (전략) x에 대한 이차함수의 식을 완전제곱식을 포함한 꼴로 변형하여 주어진 범위에서의 최댓값을 구한다.

(풀이) $y=-10x^2+80x=-10(x-4)^2+160$이므로
$3\le x\le 6$일 때 y는 $x=4$에서 최댓값 160을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값은 160만 원이다.

답 ④

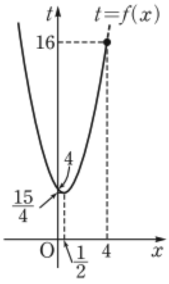
10 (전략) 주어진 식을 x, y에 대한 완전제곱식을 포함한 꼴로 변형하여 (실수)$^2\ge 0$임을 이용한다.

(풀이) $-4x+6y+4x^2+y^2+13$
$=(2x-1)^2+(y+3)^2+3$
이때 x, y가 실수이므로
$(2x-1)^2\ge 0$, $(y+3)^2\ge 0$
$\therefore -4x+6y+4x^2+y^2+13\ge 3$
따라서 주어진 식의 최솟값은 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=-3$일 때 3이므로
$\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=-3$, $m=3$
$\therefore \alpha+\beta+m=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

11 (전략) x^2+3y^2을 x에 대한 이차식으로 변형한다.

(풀이) $x+3y^2-4=0$에서
$3y^2=-x+4$ …… ㉠
y가 실수이므로 $3y^2\ge 0$, 즉 $-x+4\ge 0$
$\therefore x\le 4$ ⋯ ❶
㉠을 x^2+3y^2에 대입하면
$x^2+3y^2=x^2-x+4$
$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}$ $(x\le 4)$ ⋯ ❷
$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}$라 하면
$x\le 4$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$f(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}$에서 최솟값 $\dfrac{15}{4}$를 갖는다.



즉 x^2+3y^2의 최솟값은 $\dfrac{15}{4}$이다. ⋯ ❸

답 $\dfrac{15}{4}$

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ x^2+3y^2을 $(x-p)^2+q$ 꼴로 나타낼 수 있다.	30%
❸ x^2+3y^2의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

12 (전략) $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(a>0)$로 놓는다.

(풀이) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편이 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a>0)$라 하면 방정식 $f(3x+4)=0$에서
$a(3x+4-\alpha)(3x+4-\beta)=0$
$\therefore x=\dfrac{\alpha-4}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-4}{3}$ ⋯ ❶
따라서 구하는 모든 실근의 합은
$\dfrac{\alpha-4}{3}+\dfrac{\beta-4}{3}=\dfrac{\alpha+\beta-8}{3}=\dfrac{17-8}{3}=3$ ⋯ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(3x+4)=0$의 근을 α, β에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
❷ $f(3x+4)=0$의 모든 실근의 합을 구할 수 있다.	40%

13 (전략) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 의하여 x축이 잘리는 부분의 길이는 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표의 차와 같음을 이용한다.

(풀이) 이차함수 $y=x^2-3x-m-2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-3x-m-2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-m-2$ …… ㉠
이때 $|\alpha-\beta|=7$이므로 양변을 제곱하면
$(\alpha-\beta)^2=49$ …… ㉡
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ㉠, ㉡에 의하여
$49=9+4(m+2)$, $m+2=10$
$\therefore m=8$

답 8

14 (전략) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 이차방정식 $f(x)=g(x)$는 중근을 가짐을 이용한다.

(풀이) 점 $(-1, 1)$을 지나는 직선의 방정식을
$y=m(x+1)+1$
이라 하면 이 직선이 $y=x^2+4x+4$의 그래프와 접하므로 이차방정식
$x^2+4x+4=m(x+1)+1$,
즉 $x^2+(4-m)x-m+3=0$
의 판별식을 D라 할 때,
$D=(4-m)^2-4(-m+3)=0$
$m^2-4m+4=0$, $(m-2)^2=0$ $\therefore m=2$
따라서 구하는 기울기는 2이다.

답 ④

15 (전략) 이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$에서 y의 값이 항상 양수이려면 y의 최솟값이 양수이어야 함을 이용한다.

(풀이) $y=2x^2-4x+3k-1$의 값이 항상 양수이려면 y의 최솟값이 양수이어야 한다.
$y=2x^2-4x+3k-1=2(x-1)^2+3k-3$에서 y의 최솟값은 $x=1$일 때 $3k-3$이므로 ⋯ ❶

$3k-3>0 \qquad \therefore k>1$ ⋯ ❷

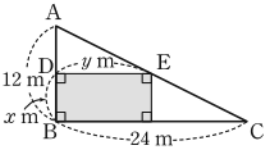
따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ y의 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

16 (전략) 꽃밭의 세로의 길이를 x m로 놓고 삼각형의 닮음을 이용하여 꽃밭의 넓이를 x에 대한 이차식으로 나타낸다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BD}=x$ m, $\overline{DE}=y$ m라 하면



$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$이므로

$\overline{AD} : \overline{AB}=\overline{DE} : \overline{BC}$

즉 $(12-x) : 12=y : 24$이므로

$y=24-2x$

이때 변의 길이는 양수이므로

$0<x<12$

꽃밭의 넓이를 S m^{2}라 하면

$S=xy=x(24-2x)=-2(x^2-12x)$

$=-2(x-6)^2+72\ (0<x<12)$

따라서 S는 $x=6$에서 최댓값 72를 가지므로 꽃밭의 최대 넓이는 72 m^{2}이다.

답 72 m^2

17 (전략) $f(t)$를 $g(t)$에 대한 함수로 나타낸다.

(풀이) $y=x^2-2xg(t)+2g(t)+1$

$=\{x-g(t)\}^2-\{g(t)\}^2+2g(t)+1$

주어진 이차함수는 $x=g(t)$에서 최솟값 $-\{g(t)\}^2+2g(t)+1$을 가지므로

$f(t)=-\{g(t)\}^2+2g(t)+1$

$=-\{g(t)-1\}^2+2$

ㄱ. $g(1)=g(3)$이므로

$f(1)=f(3)$

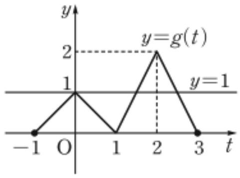
ㄴ. 주어진 그림에서 $0\le g(t)\le 2$이므로 $f(t)$는 $g(t)=1$에서 최댓값 2를 갖는다.

ㄷ. $f(t)=2$이면

$-\{g(t)-1\}^2+2=2$

$\{g(t)-1\}^2=0 \qquad \therefore g(t)=1$

오른쪽 그림에서 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=1$은 세 점에서 만나므로 $g(t)=1$, 즉 $f(t)=2$를 만족시키는 t의 개수는 3이다.



이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

18 (전략) $y=3-x$를 $2x^2+y^2$에 대입한 식의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(풀이) $x+y=3$에서 $\qquad y=3-x$ ⋯⋯ ㉠

$x\ge 0,\ y\ge 0$이므로 $\qquad 0\le x\le 3$

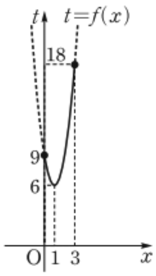
㉠을 $2x^2+y^2$에 대입하면

$2x^2+(3-x)^2$

$=3x^2-6x+9$

$=3(x-1)^2+6\ (0\le x\le 3)$

$f(x)=3(x-1)^2+6$이라 하면 $0\le x\le 3$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 18을, $x=1$에서 최솟값 6을 갖는다.



따라서 $M=18,\ m=6$이므로

$M-m=12$

답 ③

19 (전략) 두 점 A, C의 x좌표를 구하여 x의 값의 범위를 정한다.

(풀이) $2x^2-8x+6=0$에서

$x^2-4x+3=0, \qquad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore$ A$(0,\ 6)$, B$(1,\ 0)$, C$(3,\ 0)$

이때 점 P$(x,\ y)$가 점 A에서 점 C까지 주어진 그래프 위를 움직이므로

$0\le x\le 3$

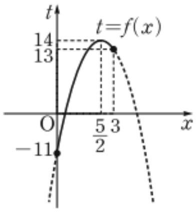
점 P$(x,\ y)$가 이차함수 $y=2x^2-8x+6$의 그래프 위의 점이므로 $y=2x^2-8x+6$을 $4x-2y+1$에 대입하면

$4x-2(2x^2-8x+6)+1$

$=-4x^2+20x-11$

$=-4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+14\ (0\le x\le 3)$

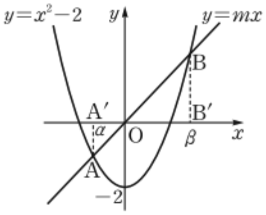
$f(x)=-4\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+14$라 하면 $0\le x\le 3$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=\dfrac{5}{2}$에서 최댓값 14를 갖고, $x=0$에서 최솟값 -11을 갖는다.



따라서 구하는 합은 3이다. 답 3

20 전략 두 점 A′, B′의 x좌표를 각각 α, β로 놓고 두 점 A, B의 좌표를 α, β를 사용하여 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 A′, B′의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면



$$A(\alpha,\ m\alpha),$$
$$B(\beta,\ m\beta)$$

이므로

$$\overline{AA'}=-m\alpha\ (\because\ m\alpha<0)$$
$$\overline{BB'}=m\beta$$

선분 AA′과 선분 BB′의 길이의 차가 16이므로

$$|-m\alpha-m\beta|=|-m(\alpha+\beta)|=16 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 이차방정식 $x^2-2=mx$, 즉 $x^2-mx-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=m$$

㉠에서 $|-m\cdot m|=16$이므로 $\quad m^2=16$

$$\therefore\ m=\pm4$$

그런데 $m>0$이므로 $\quad m=4$ 답 4

21 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같음을 이용한다.

풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 두 점 A, B에서 만나므로 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 해는

$$x=\alpha \text{ 또는 } x=\beta$$

$f(x)-g(x)=x^2+(a-b)x+b-a$이므로

$b-a=t\ (t>0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-(a-b)=t$$
$$\alpha\beta=b-a=t$$
$$\therefore\ |\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=t^2-\boxed{4t}$$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$이므로

$$5=t^2-4t,\qquad t^2-4t-5=0$$
$$(t+1)(t-5)=0$$
$$\therefore\ t=-1 \text{ 또는 } t=5$$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t=\boxed{5}$

따라서

$$f(-1)=1-a+b=1+b-a=1+t=\boxed{6}$$

즉 $h(t)=4t$, $p=5$, $q=6$이므로

$$p+q+h(1)=5+6+4=15$$ 답 ⑤

22 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 한 점에서 만나면 이차방정식 $f(x)=g(x)$는 중근을 가짐을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=3x^2-4x+k$의 그래프와 직선 $y=8x+12$가 한 점에서 만나므로 이차방정식

$$3x^2-4x+k=8x+12,$$
$$\text{즉 } 3x^2-12x+k-12=0$$

의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-6)^2-3(k-12)=0,\qquad 72-3k=0$$
$$\therefore\ k=24$$ 답 24

23 전략 이차함수 $f(x)$의 x^2의 계수가 양수일 때와 음수일 때로 나누어 생각한다.

풀이 조건 ㈎에 의하여 $f(x)=a(x+2)(x-4)$ $(a\ne0)$라 하면

$$f(x)=a(x^2-2x-8)=a(x-1)^2-9a$$

(i) $a>0$일 때,

$5\le x\le 8$에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=8$일 때 $f(8)=40a$이다.

따라서 $40a=80$이므로 $\quad a=2$

$$\therefore\ f(-5)=2\cdot(-3)\cdot(-9)=54$$

(ii) $a<0$일 때,

$5\le x\le 8$에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=5$일 때 $f(5)=7a$이다.

따라서 $7a=80$이므로

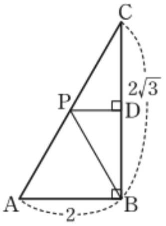
$$a=\frac{80}{7}$$

그런데 $a<0$이므로 이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad f(-5)=54$ 답 54

24 전략 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$을 이차함수로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\overline{PD}=x\ (0<x<2)$라 하면 $\triangle PDC \backsim \triangle ABC$이므로



$$\overline{PD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{BC}$$
$$x:\overline{DC}=2:2\sqrt{3}$$
$$2\overline{DC}=2\sqrt{3}x$$
$$\therefore\ \overline{DC}=\sqrt{3}x$$

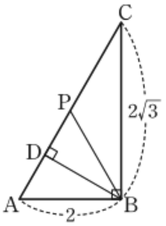
이때 $\overline{BD}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}x$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=(\overline{PD}^2+\overline{BD}^2)+(\overline{PD}^2+\overline{DC}^2)\\&=x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3}x)^2+x^2+(\sqrt{3}x)^2\\&=8x^2-12x+12\\&=8\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{2}\end{aligned}$$

따라서 $0<x<2$에서 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은 $x=\frac{3}{4}$일 때 $\frac{15}{2}$이다.

답 ④

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 직각삼각형 ABC에서



$$\overline{AC}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$$

$\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\sqrt{3}$이므로

$$\angle A=60^\circ$$

또 직각삼각형 ABD에서 $\angle A=60^\circ$이므로

$$\overline{AD}:\overline{BD}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$$

이때 $\overline{AB}=2$이므로

$$\overline{AD}=1,\ \overline{BD}=\sqrt{3}$$

따라서 $\overline{PC}=x\ (0<x<4)$라 하면

$$\overline{PD}=\overline{AC}-\overline{AD}-\overline{PC}=4-1-x=3-x$$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=(\overline{PD}^2+\overline{BD}^2)+\overline{PC}^2\\&=(3-x)^2+(\sqrt{3})^2+x^2\\&=2x^2-6x+12\\&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\end{aligned}$$

따라서 $0<x<4$에서 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은 $x=\frac{3}{2}$일 때 $\frac{15}{2}$이다.

Ⅱ. 방정식

07 고차방정식

유제

본책 182~196쪽

057-❶ (1) $f(x)=x^3+x^2-3x+1$이라 하면

$$f(1)=1+1-3+1=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}1 & 1 & 1 & -3 & 1\\ & & 1 & 2 & -1\\\hline & 1 & 2 & -1 & \boxed{0}\end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2+2x-1)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x-1)(x^2+2x-1)=0$$

이므로

$$x-1=0 \text{ 또는 } x^2+2x-1=0$$
$$\therefore\ x=1 \text{ 또는 } x=-1\pm\sqrt{2}$$

(2) $f(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$$f(-1)=-1-3+4=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-1 & 1 & -3 & 0 & 4\\ & & -1 & 4 & -4\\\hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)(x^2-4x+4)\\&=(x+1)(x-2)^2\end{aligned}$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-2)^2=0$$

이므로

$$x+1=0 \text{ 또는 } x-2=0$$
$$\therefore\ x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

(3) $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$라 하면

$$f(-1)=1+1-1+1-2=0,$$
$$f(2)=16-8-4-2-2=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2\\ & & -1 & 2 & -1 & 2\\\hline 2 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0}\\ & & 2 & 0 & 2 & \\\hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+1)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-2)(x^2+1)=0$$

이므로

$x+1=0$ 또는 $x-2=0$ 또는 $x^2+1=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm i$

(4) $f(x)=x^4-4x^3-4x^2+4x+3$이라 하면

$f(-1)=1+4-4-4+3=0$,

$f(1)=1-4-4+4+3=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -4 & -4 & 4 & 3 \\
 & & -1 & 5 & -1 & -3 \\
\hline
1 & 1 & -5 & 1 & 3 & \boxed{0} \\
 & & 1 & -4 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -4 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-1)(x^2-4x-3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-1)(x^2-4x-3)=0$

이므로

$x+1=0$ 또는 $x-1=0$ 또는 $x^2-4x-3=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$

답 풀이 참조

058-❶ (1) $x^2-2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-1)(X+2)-10=0$

$X^2+X-12=0,\qquad (X+4)(X-3)=0$

$\therefore\ X=-4$ 또는 $X=3$

(i) $X=-4$, 즉 $x^2-2x=-4$일 때,

$x^2-2x+4=0\qquad \therefore\ x=1\pm\sqrt{3}i$

(ii) $X=3$, 즉 $x^2-2x=3$일 때,

$x^2-2x-3=0,\qquad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서

$x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

(2) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=24$에서

$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}=24$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=24$

$x^2-5x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+4)(X+6)=24$

$X^2+10X=0,\qquad X(X+10)=0$

$\therefore\ X=-10$ 또는 $X=0$

(i) $X=-10$, 즉 $x^2-5x=-10$일 때,

$x^2-5x+10=0\qquad \therefore\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{15}i}{2}$

(ii) $X=0$, 즉 $x^2-5x=0$일 때,

$x(x-5)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=5$

(i), (ii)에서

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{15}i}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=5$

답 풀이 참조

059-❶ (1) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+2X-3=0,\qquad (X+3)(X-1)=0$

$\therefore\ X=-3$ 또는 $X=1$

따라서 $x^2=-3$ 또는 $x^2=1$이므로

$x=\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm1$

(2) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$2X^2-7X-4=0,\qquad (2X+1)(X-4)=0$

$\therefore\ X=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $X=4$

따라서 $x^2=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ 또는 $x=\pm2$

(3) 주어진 방정식에서

$(x^4-10x^2+25)-4x^2=0$

$(x^2-5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)=0$

$\therefore\ x^2+2x-5=0$ 또는 $x^2-2x-5=0$

(i) $x^2+2x-5=0$에서 $\qquad x=-1\pm\sqrt{6}$

(ii) $x^2-2x-5=0$에서 $\qquad x=1\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서

$x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

(4) 주어진 방정식에서

$(x^4+6x^2+9)-4x^2=0$

$(x^2+3)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore\ x^2+2x+3=0$ 또는 $x^2-2x+3=0$

(i) $x^2+2x+3=0$에서 $\qquad x=-1\pm\sqrt{2}i$

(ii) $x^2-2x+3=0$에서 $\qquad x=1\pm\sqrt{2}i$

(i), (ii)에서

$x=-1\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

답 풀이 참조

060-❶ (1) $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+7x-16+\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-16=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-18=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+7X-18=0, \quad (X+9)(X-2)=0$

$\therefore X=-9$ 또는 $X=2$

(i) $X=-9$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-9$일 때,

$x+\frac{1}{x}+9=0, \quad x^2+9x+1=0$

$\therefore x=\frac{-9\pm\sqrt{77}}{2}$

(ii) $X=2$, 즉 $x+\frac{1}{x}=2$일 때,

$x+\frac{1}{x}-2=0, \quad x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$

(i), (ii)에서 $\quad x=\frac{-9\pm\sqrt{77}}{2}$ 또는 $x=1$

(2) $f(x)=x^5+2x^4-9x^3-9x^2+2x+1$이라 하면

$f(-1)=-1+2+9-9-2+1=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 2 & -9 & -9 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -10 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^4+x^3-10x^2+x+1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^4+x^3-10x^2+x+1)=0$

이므로

$x=-1$ 또는 $x^4+x^3-10x^2+x+1=0$

$x\neq0$이므로 $x^4+x^3-10x^2+x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+x-10+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+X-12=0, \quad (X+4)(X-3)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=3$

(i) $X=-4$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-4$일 때,

$x+\frac{1}{x}+4=0, \quad x^2+4x+1=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{3}$

(ii) $X=3$, 즉 $x+\frac{1}{x}=3$일 때,

$x+\frac{1}{x}-3=0, \quad x^2-3x+1=0$

$\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

이상에서

$x=-1$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

답 풀이 참조

061-❶ 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 $x(x>2)$라 하면

$(x-1)(x-2)\cdot2x=\frac{3}{4}x^3$

$5x^3-24x^2+16x=0, \quad x(x-4)(5x-4)=0$

$\therefore x=4 \ (\because x>2)$

따라서 구하는 정육면체의 한 모서리의 길이는 4이다.

답 4

062-❶ 삼차방정식 $x^3+5x^2+4x+2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-5, \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4, \ \alpha\beta\gamma=-2$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-5)^2-2\cdot4=17$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=(-5)\cdot(17-4)+3\cdot(-2)$

$=-71$

(3) $\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{\beta}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{17}{2}$

(4) $\alpha+\beta+\gamma=-5$에서

$\alpha+\beta=-5-\gamma, \ \beta+\gamma=-5-\alpha,$

$\gamma+\alpha=-5-\beta$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-5-\gamma)(-5-\alpha)(-5-\beta)$

$=-(\alpha+5)(\beta+5)(\gamma+5)$

$=-\{\alpha\beta\gamma+5(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$+25(\alpha+\beta+\gamma)+125\}$

$=-\{-2+5\cdot4+25\cdot(-5)+125\}$

$=-18$

답 (1) 17 (2) -71 (3) $-\frac{17}{2}$ (4) -18

063-❶ 삼차방정식 $x^3-2x^2+3x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2, \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \ \alpha\beta\gamma=-1$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$이므로

(i) 세 근의 합은 $\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

(ii) 두 근끼리의 곱의 합은

$$\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta$$
$$=\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma$$
$$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=-1\cdot2=-2$$

(iii) 세 근의 곱은

$$\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=\alpha^2\beta^2\gamma^2=(\alpha\beta\gamma)^2=(-1)^2=1$$

이상에서 구하는 삼차방정식은

$$x^3-3x^2-2x-1=0$$

답 $x^3-3x^2-2x-1=0$

064-❶ 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 $2-\sqrt{3}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=0 \qquad \therefore \alpha=-4$$

즉 삼차방정식의 세 근이 $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$, -4이므로

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\cdot(-4)+(-4)\cdot(2+\sqrt{3})=a$$
$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\cdot(-4)=-b$$
$$\therefore a=-15,\ b=4$$
$$\therefore a-b=-19$$

답 -19

064-❷ 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha(1+i)(1-i)=-6, \qquad 2\alpha=-6$$
$$\therefore \alpha=-3$$

즉 삼차방정식의 세 근이 $1+i$, $1-i$, -3이므로

$$(1+i)+(1-i)-3=-a$$
$$(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot(-3)+(-3)\cdot(1+i)=b$$
$$\therefore a=1,\ b=-4$$

답 $a=1$, $b=-4$, 나머지 두 근: $1-i$, -3

065-❶ 방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$$\omega^3=-1$$

$x^3=-1$에서 $\quad x^3+1=0$

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$
$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x^2-x+1=0$$

따라서 ω는 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$$\omega^2-\omega+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(1) $\omega^{99}=(\omega^3)^{33}=-1$, $\omega^{100}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega=-\omega$,
$\omega^{101}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega^2=-\omega^2$, $\omega^{199}=(\omega^3)^{66}\cdot\omega=\omega$,
$\omega^{200}=(\omega^3)^{66}\cdot\omega^2=\omega^2$, $\omega^{201}=(\omega^3)^{67}=-1$
㉠에서 $-1-\omega^2=-\omega$, $\omega-1=\omega^2$이므로

$$(\text{주어진 식})=\frac{-1-\omega^2}{-\omega}+\frac{\omega-1}{\omega^2}$$
$$=\frac{-\omega}{-\omega}+\frac{\omega^2}{\omega^2}=2$$

(2) 방정식 $x^2-x+1=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$$
$$\therefore \omega+\frac{1}{\omega}+\overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=\omega+\overline{\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}$$
$$=\omega+\overline{\omega}+\frac{\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}}$$
$$=1+\frac{1}{1}$$
$$=2$$

답 (1) 2 (2) 2

다른 풀이 (1) $\dfrac{\omega^{99}+\omega^{101}}{\omega^{100}}+\dfrac{\omega^{199}+\omega^{201}}{\omega^{200}}$

$$=\frac{\omega^{99}(1+\omega^2)}{\omega^{99}\cdot\omega}+\frac{\omega^{199}(1+\omega^2)}{\omega^{199}\cdot\omega}$$
$$=\frac{1+\omega^2}{\omega}+\frac{1+\omega^2}{\omega}$$
$$=\frac{\omega}{\omega}+\frac{\omega}{\omega}=2$$

중단원 연습 문제

본책 197~200쪽

01 ③	02 $2\pm\sqrt{2}$		03 풀이 참조	
04 -4	05 $x=1$	06 ①	07 14	
08 $f(x)=x^3+3x^2-x-2$			09 -15	10 1
11 5	12 ③	13 4	14 8	15 ④
16 ①	17 ①	18 ⑤	19 ①	20 ③
21 14				

01 전략 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $f(x)=x^3-5x^2+x+7$이라 하면

$$f(-1)=-1-5-1+7=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 1 & 7 \\ & & -1 & 6 & -7 \\ \hline & 1 & -6 & 7 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-6x+7)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-6x+7)=0$

이므로

$x=-1$ 또는 $x=3\pm\sqrt{2}$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=1+(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})$
$=7$

답 ③

02 전략 $x=2$를 주어진 방정식에 대입하여 k의 값을 구한 후, 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $x=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$8-4(k-4)+2k-4=0$

$\therefore k=10$

따라서 주어진 방정식은

$x^3-6x^2+10x-4=0$

$f(x)=x^3-6x^2+10x-4$라 하면

$f(2)=8-24+20-4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & 10 & -4 \\ & & 2 & -8 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-4x+2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-4x+2)=0$

이므로

$x=2$ 또는 $x=2\pm\sqrt{2}$

즉 나머지 두 근은 $2\pm\sqrt{2}$이다.

답 $2\pm\sqrt{2}$

03 전략 $x^2+2x-3=X$로 치환한 후 X에 대한 이차방정식을 푼다.

풀이 $x^2+2x-3=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+2X-3=0,\qquad (X+3)(X-1)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=1$ ⋯ ❶

(i) $X=-3$, 즉 $x^2+2x-3=-3$일 때,

$x^2+2x=0,\qquad x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ ⋯ ❷

(ii) $X=1$, 즉 $x^2+2x-3=1$일 때,

$x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}$ ⋯ ❹

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $x^2+2x-3=X$로 치환하여 X에 대한 이차방정식을 풀 수 있다.	30%
❷ $X=-3$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $X=1$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	10%

04 전략 $x^2=X$로 치환한 후 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2X-8=0,\qquad (X+2)(X-4)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

따라서 $x^2=-2$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm2$

주어진 방정식의 모든 실근의 곱은

$2\cdot(-2)=-4$

답 -4

05 전략 양변을 x^2으로 나누고 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환하여 주어진 방정식을 X에 대한 방정식으로 나타낸다.

풀이 $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-4x+6-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-4X+4=0,\qquad (X-2)^2=0$

$\therefore X=2$

따라서 $x+\frac{1}{x}=2$이므로

$x^2-2x+1=0,\qquad (x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

답 $x=1$

06 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $x^3+kx^2+3x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-k,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=-1$

한편 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=7$에서

$8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=7$

$8-4\cdot(-k)+2\cdot3-(-1)=7$

$4k=-8$

$\therefore k=-2$

답 ①

07 전략 세 근을 한 문자로 나타내어 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 세 근을 α, 3α, 4α $(\alpha \neq 0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+3\alpha+4\alpha=\frac{16}{2}, \qquad 8\alpha=8 \qquad \therefore \alpha=1$$

따라서 주어진 방정식의 세 근은

$$1,\ 3,\ 4 \qquad \cdots ❶$$

$1\cdot3+3\cdot4+4\cdot1=\frac{a}{2}$이므로 $\frac{a}{2}=19$

$$\therefore a=38 \qquad \cdots ❷$$

$1\cdot3\cdot4=-\frac{b}{2}$이므로

$$b=-24 \qquad \cdots ❸$$

$$\therefore a+b=14 \qquad \cdots ❹$$

답 14

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 세 근을 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

08 전략 $x^3-3x^2-x+2=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구한다.

풀이 삼차방정식 $x^3-3x^2-x+2=0$의 세 근이 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\alpha-\beta-\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,$$
$$-\alpha\beta\gamma=-2$$
$$\therefore \alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,$$
$$\alpha\beta\gamma=2$$

따라서 α, β, γ를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3+3x^2-x-2=0$$

이므로 $f(x)=x^3+3x^2-x-2$

답 $f(x)=x^3+3x^2-x-2$

09 전략 켤레근의 성질과 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 나머지 두 근을 구한다.

풀이 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1+\sqrt{2}i$이므로 $1-\sqrt{2}i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=3, \qquad 3\alpha=3$$
$$\therefore \alpha=1$$

즉 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 세 근이 $1+\sqrt{2}i$, $1-\sqrt{2}i$, 1이므로

$$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+1=-a$$
$$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)=b$$
$$\therefore a=-3,\ b=5$$
$$\therefore ab=-15$$

답 -15

10 전략 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이면 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$임을 이용한다.

풀이 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 α이므로

$$\alpha^3+1=0 \qquad \therefore \alpha^3=-1 \qquad \cdots ❶$$

또 $x^3+1=0$에서

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$
$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x^2-x+1=0$$

따라서 α는 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$$\alpha^2-\alpha+1=0 \qquad \cdots ❷$$
$$\therefore 1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+\alpha^6$$
$$=(1-\alpha+\alpha^2)-\alpha^3(1-\alpha+\alpha^2)+(\alpha^3)^2$$
$$=0+0+(-1)^2$$
$$=1 \qquad \cdots ❸$$

답 1

채점 기준	비율
❶ α^3의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\alpha^2-\alpha+1$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40%

11 전략 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $f(x)=x^3-6x^2+(a+8)x-2a$라 하면

$$f(2)=8-24+2a+16-2a=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -6 & a+8 & -2a \\ & & 2 & -8 & 2a \\ \hline & 1 & -4 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$$f(x)=(x-2)(x^2-4x+a)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x-2)(x^2-4x+a)=0 \qquad \cdots ❶$$

이때 주어진 삼차방정식이 한 실근과 두 허근을 가지므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 허근을 갖는다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-a<0 \qquad \therefore a>4 \qquad \cdots ❷$$

따라서 정수 a의 최솟값은 5이다. $\cdots$ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

12 전략 주어진 방정식을 $(x^2+A)^2-(Bx)^2=0$ 꼴로 변형한다.

풀이 $x^4+8x^2+36=0$에서

$(x^4+12x^2+36)-4x^2=0$

$(x^2+6)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x+6)(x^2-2x+6)=0$

$\therefore$ $x^2+2x+6=0$ 또는 $x^2-2x+6=0$

이때 방정식 $x^2+2x+6=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-2x+6=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=6$, $\gamma+\delta=2$, $\gamma\delta=6$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\frac{-2}{6}+\frac{2}{6}=0$$

답 ③

13 전략 정육면체 A, B, C, D의 한 모서리의 길이를 각각 x, $x+2$, $x+4$, $x+6$으로 놓고 방정식을 세운다.

풀이 정육면체 A의 한 모서리의 길이를 $x\,(x>0)$라 하면 B, C, D의 한 모서리의 길이는 각각 $x+2$, $x+4$, $x+6$이므로

$(x+2)^3+(x+6)^3=3x^3+2(x+4)^3$

$3x^3-24x-96=0$, $\quad x^3-8x-32=0$

$f(x)=x^3-8x-32$라 하면

$f(4)=64-32-32=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & 0 & -8 & -32 \\ & & 4 & 16 & 32 \\ \hline & 1 & 4 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-4)(x^2+4x+8)$

따라서 방정식 $f(x)=0$은

$(x-4)(x^2+4x+8)=0$

그런데 $x^2+4x+8=0$은 실근을 갖지 않으므로

$x=4$

즉 정육면체 A의 한 모서리의 길이는 4이다. 답 4

14 전략 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 사이에 $g(x)=f(x)+x+2$인 관계가 있음을 이용한다.

풀이 방정식 $f(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$ ⋯ ❶

또 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=-2$ ⋯ ❷

이때 $g(x)=f(x)+x+2$이므로

$g(\alpha)=f(\alpha)+\alpha+2=\alpha+2$

$g(\beta)=f(\beta)+\beta+2=\beta+2$

$g(\gamma)=f(\gamma)+\gamma+2=\gamma+2$ ⋯ ❸

$\therefore$ $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$

$=(\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)$

$=\alpha\beta\gamma+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)+8$

$=-2+2\cdot1+0+8$

$=8$ ⋯ ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $g(\alpha)$, $g(\beta)$, $g(\gamma)$를 α, β, γ에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❹ $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값을 구할 수 있다.	30%

15 전략 $2x-1=t$로 놓고 $f(t)$를 구한 후, 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $2x-1=t$로 놓으면 $x=\frac{t+1}{2}$이므로

$$f(t)=8\left(\frac{t+1}{2}\right)^3-4\cdot\frac{t+1}{2}$$

$=(t+1)^3-2(t+1)$

$=t^3+3t^2+t-1$

방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3+3x^2+x-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=1$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$$

$$=\frac{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$

$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$

$$=\frac{1^2-2\cdot1\cdot(-3)}{1^2}$$

$=7$ 답 ④

16 전략 $x^3=1$의 한 허근이 ω이면 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이용한다.

풀이 $x^3=1$에서 $\quad x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

따라서 ω는 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^2=-\omega-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

ㄱ. 방정식 $x^2+x+1=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$

$\therefore \overline{\omega}=-\omega-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad \omega^2=\overline{\omega}$

ㄴ. 이차방정식 $x^2+x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$$\begin{aligned}\therefore \omega^2+\overline{\omega}^2&=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}\\&=(-1)^2-2\\&=-1\end{aligned}$$

한편 ω, $\overline{\omega}$가 $x^3=1$의 근이므로

$\omega^3=\overline{\omega}^3=1 \quad \therefore \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

$\therefore \omega^2+\overline{\omega}^2\neq\omega^3+\overline{\omega}^3$

ㄷ. $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega+1=-\omega^2$, $\omega^2+1=-\omega$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}\\&=\frac{1}{-\omega^2}+\frac{1}{-\omega}+\frac{1}{1+1}\\&=\frac{-1-\omega}{\omega^2}+\frac{1}{2}=\frac{\omega^2}{\omega^2}+\frac{1}{2}\ (\because ㉠)\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

17 전략 조립제법을 이용하여 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $f(x)=x^3+x^2+x-3$이라 하면

$f(1)=1+1+1-3=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$

즉 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+2x+3)=0$

따라서 두 허근 α, β는 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=3$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha-1)(\beta-1)&=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\\&=3-(-2)+1\\&=6\end{aligned}$$

답 ①

18 전략 $x^2+x=X$로 치환하여 주어진 방정식을 X에 대한 이차방정식으로 나타낸다.

풀이 $x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-1)(X+3)-5=0$

$X^2+2X-8=0, \quad (X+4)(X-2)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=2$

즉 $x^2+x=-4$ 또는 $x^2+x=2$이므로

$x^2+x+4=0$ 또는 $x^2+x-2=0$

이때 이차방정식 $x^2+x-2=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 허근 α, β는 $x^2+x+4=0$의 두 근이다.

그런데 $x^2+x+4=0$의 계수가 모두 실수이므로 α, β는 서로 켤레복소수이다.

따라서 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이고 $x^2+x+4=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=4$이므로

$\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=\alpha\beta+\beta\alpha=2\alpha\beta=8$ 답 ⑤

19 전략 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하고, 공통부분이 나오도록 순서를 바꿔 전개한다.

풀이 $(x^2-4x+3)(x^2-6x+8)=120$에서

$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)=120$

$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-3)(x-2)\}=120$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$

$x^2-5x=X$로 놓으면

$(X+4)(X+6)=120, \quad X^2+10X-96=0$

$(X+16)(X-6)=0$

$\therefore X=-16$ 또는 $X=6$

즉 $x^2-5x=-16$ 또는 $x^2-5x=6$이므로

$x^2-5x+16=0$ 또는 $x^2-5x-6=0$

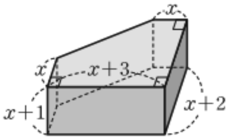
이때 이차방정식 $x^2-5x-6=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 허근 ω는 $x^2-5x+16=0$의 근이다.

따라서 $\omega^2-5\omega+16=0$이므로

$\omega^2-5\omega=-16$ 답 ①

20 전략 오각기둥의 부피를 이용하여 x에 대한 삼차방정식을 세운다.

풀이 주어진 전개도로 오각기둥을 만들면 오른쪽 그림과 같다.



이 오각기둥의 부피가 108이므로

$$\left[x(x+3)+\frac{1}{2}\{x+(x+3)\}\cdot 2\right](x+1)=108$$

$$(x^2+5x+3)(x+1)=108$$

$$x^3+6x^2+8x-105=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=x^3+6x^2+8x-105$라 하면

$$f(3)=27+54+24-105=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 6 & 8 & -105 \\ & & 3 & 27 & 105 \\ \hline & 1 & 9 & 35 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-3)(x^2+9x+35)$$

따라서 방정식 ㉠은

$$(x-3)(x^2+9x+35)=0$$

그런데 $x^2+9x+35=0$은 실근을 갖지 않으므로

$x=3$ 답 ③

21 전략 켤레근의 성질과 주어진 조건을 이용하여 $P(x)$를 구한다.

풀이 방정식 $P(x)=0$의 계수가 실수이고 조건 (가)에서 한 근이 $2+i$이므로 $2-i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2+i)+(2-i)+\alpha=a$$

$$(2+i)(2-i)+(2+i)\alpha+(2-i)\alpha=b$$

$$(2+i)(2-i)\alpha=c$$

$$\therefore a=\alpha+4,\ b=4\alpha+5,\ c=5\alpha \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에 의하여 $P(1)=1$이므로

$$1-a+b-c=1$$

$$\therefore a-b+c=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(\alpha+4)-(4\alpha+5)+5\alpha=0$$

$$2\alpha-1=0 \qquad \therefore \alpha=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b+c=(\alpha+4)+(4\alpha+5)+5\alpha\ (\because ㉠)$$

$$=10\alpha+9$$

$$=5+9=14$$

답 14

Remark▶ 나머지정리

x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

Ⅱ. 방정식

08 연립방정식

유제

본책 206~223쪽

066-❶ (1) $\begin{cases} 2x-y+z=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y-z=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x+y+z=2 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $3x+y=-1$ ⋯⋯ ㉣

㉡+㉢을 하면 $4x+3y=2$ ⋯⋯ ㉤

㉣×3−㉤을 하면 $5x=-5$ $\therefore x=-1$

$x=-1$을 ㉣에 대입하면

$$-3+y=-1 \qquad \therefore y=2$$

$x=-1,\ y=2$를 ㉠에 대입하면

$$-2-2+z=-1 \qquad \therefore z=3$$

$$\therefore x=-1,\ y=2,\ z=3$$

(2) $\begin{cases} x+y+3z=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+2y+z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x-y-2z=2 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면

$$5z=15 \qquad \therefore z=3$$

㉠+㉢을 하면 $4x+z=11$ ⋯⋯ ㉣

$z=3$을 ㉣에 대입하면

$$4x+3=11 \qquad \therefore x=2$$

$x=2,\ z=3$을 ㉠에 대입하면

$$2+y+9=9 \qquad \therefore y=-2$$

$$\therefore x=2,\ y=-2,\ z=3$$

답 풀이 참조

067-❶ $\begin{cases} 4x+y-z=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y-3z=7 & \cdots\cdots ㉡ \\ x-y+6z=-1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $2x+2z=-2$

$\therefore x+z=-1$ ⋯⋯ ㉣

㉡+㉢을 하면 $3x+3z=6$

$\therefore x+z=2$ ⋯⋯ ㉤

㉣−㉤을 하면 $0\cdot x+0\cdot z=-3$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 없다. 답 해가 없다.

067-❷ $\begin{cases} (a^2-3)x+6y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+2y=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×3을 하면

$(a^2-9)x=a+3$, 즉 $(a+3)(a-3)x=a+3$

08 연립방정식

(i) $a \neq -3$, $a \neq 3$일 때,

$$x = \frac{1}{a-3}$$

(ii) $a=3$일 때,　　$0 \cdot x = 6$

따라서 해가 없다.

(iii) $a=-3$일 때,　　$0 \cdot x = 0$

따라서 해가 무수히 많다.

이상에서　　$a=-3$

답 -3

068-❶ 전체 일의 양을 1이라 하고 A, B, C 세 사람이 1시간 동안 하는 일의 양을 각각 x, y, z라 하면

$x+y+z=1$　　…… ㉠

$(x+y) \cdot \frac{3}{2} = 1$　　$\therefore x+y=\frac{2}{3}$　　…… ㉡

$(y+z) \cdot 2 = 1$　　$\therefore y+z=\frac{1}{2}$　　…… ㉢

㉠－㉡을 하면　　$z=\frac{1}{3}$

㉠－㉢을 하면　　$x=\frac{1}{2}$

A, C 두 사람이 함께 일하여 이 일을 끝마치는 데 t시간이 걸린다고 하면

$(x+z)t=1$,　　$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)t=1$

$\frac{5}{6}t=1$　　$\therefore t=\frac{6}{5}$

따라서 A, C 두 사람이 함께 일하여 이 일을 끝마치는 데 걸리는 시간은 $\frac{6}{5}$시간, 즉 1시간 12분이다.

답 1시간 12분

069-❶ (1) $\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3y^2=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서　　$x=-2y+1$　　…… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(-2y+1)^2-3y^2=-2$

$y^2-4y+3=0$,　　$(y-1)(y-3)=0$

$\therefore y=1$ 또는 $y=3$

(i) $y=1$을 ㉢에 대입하면　　$x=-1$

(ii) $y=3$을 ㉢에 대입하면　　$x=-5$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+4xy+y^2=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서　　$x=y+2$　　…… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2+4(y+2)y+y^2=-2$

$y^2+2y+1=0$,　　$(y+1)^2=0$

$\therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉢에 대입하면　　$x=1$

$\therefore x=1$, $y=-1$

답 풀이 참조

069-❷ $\begin{cases} x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서　　$y=-x+a$　　…… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2x^2+(-x+a)^2=6$

$3x^2-2ax+a^2-6=0$　　…… ㉣

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉣이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉣의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3(a^2-6)=0$

$-2a^2+18=0$,　　$a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

답 3

070-❶ (1) $\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서　　$(x-y)(x-4y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=4y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2y^2=18$

$y^2=6$　　$\therefore y=\pm\sqrt{6}$

$x=y$이므로

$x=\pm\sqrt{6}$, $y=\pm\sqrt{6}$ (복호동순)

(ii) $x=4y$를 ㉡에 대입하면

$(4y)^2+2y^2=18$

$y^2=1$　　$\therefore y=\pm 1$

$x=4y$이므로

$x=\pm 4$, $y=\pm 1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2+3xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서　　$(x+y)(4x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=4x$

(i) $y=-x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-2x\cdot(-x)+2\cdot(-x)^2=5$

$x^2=1 \qquad \therefore x=\pm1$

$y=-x$이므로

$x=\pm1,\ y=\mp1$ (복호동순)

(ii) $y=4x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-2x\cdot4x+2\cdot(4x)^2=5$

$x^2=\frac{1}{5} \qquad \therefore x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

$y=4x$이므로

$x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5},\ y=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{5}}{5} \\ y=\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{5}}{5} \\ y=-\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

답 풀이 참조

071-❶ (1) $\begin{cases} x^2-y^2+2x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-2y^2+3x-y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면

$x-y=2 \qquad \therefore x=y+2 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(y+2)^2-y^2+2(y+2)-y=3$

$5y=-5 \qquad \therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉢에 대입하면 $\quad x=1$

$\therefore x=1,\ y=-1$

(2) $\begin{cases} x^2+2y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ y^2+2x=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$x^2-y^2+2y-2x=0$

$(x+y)(x-y)-2(x-y)=0$

$(x-y)(x+y-2)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=-x+2$

(i) $y=x$를 ㉠에 대입하면

$x^2+2x=3, \qquad x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$y=x$이므로

$\begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

(ii) $y=-x+2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+2(-x+2)=3$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

$y=-x+2$이므로 $\qquad y=1$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

답 풀이 참조

072-❶ (1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=-8 \end{cases}$에서

$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=20 \\ xy=-8 \end{cases}$

$x+y=u,\ xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v=20 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=-8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2+16=20, \qquad u^2=4$

$\therefore u=\pm2$

(i) $u=2,\ v=-8$, 즉 $x+y=2,\ xy=-8$일 때, $x,\ y$는 이차방정식 $t^2-2t-8=0$의 두 근이므로 $(t+2)(t-4)=0$에서

$t=-2$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

(ii) $u=-2,\ v=-8$, 즉 $x+y=-2,\ xy=-8$일 때, $x,\ y$는 이차방정식 $t^2+2t-8=0$의 두 근이므로 $(t+4)(t-2)=0$에서

$t=-4$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$에서

$\begin{cases} (x+y)^2-2xy+x+y=2 \\ (x+y)^2-xy=1 \end{cases}$

$x+y=u,\ xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2+u-2v=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $v=u^2-1$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$u^2-u=0$, $u(u-1)=0$

$\therefore$ $u=0$ 또는 $u=1$

$u=0$을 ㉢에 대입하면 $v=-1$

$u=1$을 ㉢에 대입하면 $v=0$

(i) $u=0$, $v=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-1)=0$에서

$t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

(ii) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로

$t(t-1)=0$에서

$t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

답 풀이 참조

073-❶ 두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+\alpha-a=0$ …… ㉠

$\alpha^2-a\alpha+1=0$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면

$(a+1)\alpha-a-1=0$

$(a+1)(\alpha-1)=0$

$\therefore$ $a=-1$ 또는 $\alpha=1$

(i) $a=-1$일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2+x+1=0$이 되어 일치하므로 공통근은 2개가 되어 문제의 뜻에 어긋난다.

(ii) $\alpha=1$일 때,

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$1+1-a=0$

$\therefore$ $a=2$

(i), (ii)에서 $a=2$ 답 2

073-❷ 두 이차방정식의 공통근을 $\alpha(\alpha\neq0)$라 하면

$\alpha^2+(k-3)\alpha-7k=0$ …… ㉠

$\alpha^2+(k-1)\alpha-9k=0$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면

$-2\alpha+2k=0$

$\therefore$ $\alpha=k$

이것을 ㉠에 대입하면

$k^2+(k-3)k-7k=0$

$k^2-5k=0$, $k(k-5)=0$

$\therefore$ $k=5$ ($\because$ $k\neq0$) 답 5

074-❶ $mn-4m+5n=27$에서

$mn-4m+5n-20=7$

$m(n-4)+5(n-4)=7$

$\therefore$ $(m+5)(n-4)=7$

m, n이 정수이므로 $m+5$, $n-4$도 정수이고 7의 약수이다.

따라서 $m+5$, $n-4$의 값은 다음과 같다.

$m+5$	-7	-1	1	7
$n-4$	-1	-7	7	1

(i) $m+5=-7$, $n-4=-1$일 때,

$m=-12$, $n=3$ $\therefore$ $m+n=-9$

(ii) $m+5=-1$, $n-4=-7$일 때,

$m=-6$, $n=-3$ $\therefore$ $m+n=-9$

(iii) $m+5=1$, $n-4=7$일 때,

$m=-4$, $n=11$ $\therefore$ $m+n=7$

(iv) $m+5=7$, $n-4=1$일 때,

$m=2$, $n=5$ $\therefore$ $m+n=7$

이상에서 $m+n$의 최댓값은 7이다. 답 7

074-❷ $x^2-3xy+2y^2+6=0$에서

$x^2-3xy+2y^2=-6$

$\therefore$ $(x-y)(x-2y)=-6$

x, y가 자연수이므로 $x-y$, $x-2y$는 $x-y>x-2y$인 정수이고, -6의 약수이다.

따라서 $x-y$, $x-2y$의 값은 다음과 같다.

$x-y$	1	2	3	6
$x-2y$	-6	-3	-2	-1

(i) $x-y=1$, $x-2y=-6$일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $x=8$, $y=7$

(ii) $x-y=2$, $x-2y=-3$일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $x=7$, $y=5$

(iii) $x-y=3$, $x-2y=-2$일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $x=8$, $y=5$

(iv) $x-y=6$, $x-2y=-1$일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $x=13$, $y=7$

이상에서 구하는 x, y의 값은

$\begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=13 \\ y=7 \end{cases}$

답 풀이 참조

075-❶ $17a^2-8ab+b^2-2a+1=0$에서

$(16a^2-8ab+b^2)+(a^2-2a+1)=0$

$\therefore (4a-b)^2+(a-1)^2=0$

a, b가 실수이므로 $4a-b$, $a-1$도 실수이다.

따라서 $4a-b=0$, $a-1=0$이므로

$a=1$, $b=4$

$\therefore ab=4$

답 4

075-❷ $10x^2-12xy+5y^2-4x-6y+13=0$에서

$(9x^2-12xy+4y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=0$

$\therefore (3x-2y)^2+(x-2)^2+(y-3)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $3x-2y$, $x-2$, $y-3$도 실수이다.

따라서 $3x-2y=0$, $x-2=0$, $y-3=0$이므로

$x=2$, $y=3$

$\therefore x-y=-1$

답 -1

중단원 연습 문제

본책 225~228쪽

01 21	**02** 2	**03** 7		
04 $x=2$, $y=1$, $z=5$				
05 $(-9, -4)$, $(6, 1)$			**06** 3	**07** ①
08 -2	**09** 6	**10** $\frac{1}{4}$	**11** ②	**12** ②
13 4	**14** -4	**15** 16	**16** ②	**17** ③
18 105	**19** 20			

01 전략 한 미지수가 소거되도록 주어진 세 개의 방정식을 적당히 연립한다.

풀이 $\begin{cases} x+y+z=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y+2z=-8 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+2y+5z=-15 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $3x+3z=-9$

$\therefore x+z=-3$ ...... ㉣

㉠×2−㉢을 하면 $x-3z=13$ ...... ㉤

㉣−㉤을 하면 $4z=-16$

$\therefore z=-4$

$z=-4$를 ㉣에 대입하면 $x-4=-3$

$\therefore x=1$

$x=1$, $z=-4$를 ㉠에 대입하면

$1+y-4=-1$ $\therefore y=2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=-4$이므로

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=21$

답 21

02 전략 y, z를 소거하여 $0\cdot x=(0$이 아닌 상수$)$ 꼴이 되도록 하는 실수 k의 값을 구한다.

풀이 $\begin{cases} x+2y-z=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ kx+y+z=k & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x+y+2z=-2 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$(k+1)x+3y=k+1$ ...... ㉣

㉠×2+㉢을 하면 $5x+5y=0$

$\therefore x+y=0$ ...... ㉤

㉣−㉤×3을 하면

$(k-2)x=k+1$

이므로 주어진 방정식의 해가 존재하지 않으려면

$k-2=0$, $k+1\neq 0$

$\therefore k=2$

답 2

Remark▶

방정식 $ax=b$의 해는

① $a\neq 0$일 때, $x=\frac{b}{a}$

② $a=0$, $b\neq 0$일 때, 해는 없다.

③ $a=0$, $b=0$일 때, 해는 무수히 많다.

03 전략 승재가 맞힌 3점, 4점, 5점짜리 문제의 개수를 각각 x, y, z로 놓고 연립방정식을 세운다.

풀이 승재가 맞힌 3점, 4점, 5점짜리 문제의 개수를 각각 x, y, z라 하면

$\begin{cases} 3x+4y+5z=83 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y+z=21 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+y=2z+3 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ ⋯→ ❶

㉢에서 $x+y-2z=3$ ...... ㉣

㉡−㉣을 하면 $3z=18$

$\therefore z=6$ ⋯→ ❷

$z=6$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$3x+4y=53$, $x+y=15$

두 식을 연립하여 풀면

$x=7$, $y=8$ ⋯→ ❸

08 연립방정식

따라서 승재가 맞힌 3점짜리 문제의 개수는 7이다. ⋯ ❹

답 7

채점 기준	비율
❶ x, y, z에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40%
❷ z의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ x, y의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ 승재가 맞힌 3점짜리 문제의 개수를 구할 수 있다.	10%

04

전략 세 방정식을 모두 변끼리 더하여 새로운 방정식을 만든 후, 주어진 각 방정식과 차례로 연립한다.

풀이 $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ y+z=6 & \cdots\cdots ㉡ \\ z+x=7 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡+㉢을 하면 $2(x+y+z)=16$

$\therefore x+y+z=8$ ⋯⋯ ㉣

㉣−㉠을 하면 $z=5$

㉣−㉡을 하면 $x=2$

㉣−㉢을 하면 $y=1$

$\therefore x=2,\ y=1,\ z=5$

답 $x=2,\ y=1,\ z=5$

05

전략 일차방정식에서 한 미지수를 다른 미지수에 대한 식으로 정리한 후 이차방정식에 대입하여 푼다.

풀이 $\begin{cases} x-3y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy-2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=3y+3$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(3y+3)y-2y^2=4$

$y^2+3y-4=0,\quad (y+4)(y-1)=0$

$\therefore y=-4$ 또는 $y=1$ ⋯ ❶

(i) $y=-4$를 ㉢에 대입하면 $x=-9$

(ii) $y=1$을 ㉢에 대입하면 $x=6$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍은

$(-9,\ -4),\ (6,\ 1)$ ⋯ ❷

답 $(-9,\ -4),\ (6,\ 1)$

채점 기준	비율
❶ y의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 순서쌍 $(x,\ y)$를 구할 수 있다.	50%

06

전략 주어진 연립방정식의 두 이차방정식에서 상수항을 소거하여 인수분해되는 식을 얻는다.

풀이 $\begin{cases} x^2+3y^2=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면

$x^2-2xy-3y^2=0$

$(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$ ⋯ ❶

(i) $x=-y$를 ㉠에 대입하면

$(-y)^2+3y^2=12\qquad \therefore y^2=3$

$\therefore xy=(-y)\cdot y$

$=-y^2=-3$ ⋯ ❷

(ii) $x=3y$를 ㉠에 대입하면

$(3y)^2+3y^2=12\qquad \therefore y^2=1$

$\therefore xy=3y\cdot y=3y^2=3$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 xy의 최댓값은 3이다. ⋯ ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ x와 y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
❷ $x=-y$일 때 xy의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $x=3y$일 때 xy의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ xy의 최댓값을 구할 수 있다.	10%

07

전략 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 x, y는 k에 대한 이차방정식 $k^2-uk+v=0$의 두 근이 됨을 이용한다.

풀이 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u+v=-1 \\ uv=-20 \end{cases}$

u, v는 이차방정식 $t^2+t-20=0$의 두 근이므로

$(t+5)(t-4)=0$에서

$t=-5$ 또는 $t=4$

$\therefore u=-5,\ v=4$ 또는 $u=4,\ v=-5$

(i) $u=-5$, $v=4$, 즉 $x+y=-5$, $xy=4$일 때,

x, y는 이차방정식 $k^2+5k+4=0$의 두 근이므로

$(k+4)(k+1)=0$에서

$k=-4$ 또는 $k=-1$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$

$\therefore x-y=-3$ 또는 $x-y=3$

(ii) $u=4$, $v=-5$, 즉 $x+y=4$, $xy=-5$일 때,

x, y는 이차방정식 $k^2-4k-5=0$의 두 근이므로

$(k+1)(k-5)=0$에서

$k=-1$ 또는 $k=5$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$

$\therefore x-y=-6$ 또는 $x-y=6$

(i), (ii)에서 $x-y$의 최솟값은 -6이다.

답 ①

08 전략 두 이차방정식에 $x=\alpha$를 대입한 두 식을 연립한다.

풀이 두 이차방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+a\alpha+2b=0$ …… ㉠

$\alpha^2+b\alpha+2a=0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$(a-b)\alpha-2(a-b)=0$

$(a-b)(\alpha-2)=0$

$a\neq b$이므로

$\alpha=2$ ⋯ ❶

즉 2가 공통근이므로 $x=2$를 $x^2+ax+2b=0$에 대입하면

$4+2a+2b=0$

$\therefore a+b=-2$ ⋯ ❷

한편 주어진 두 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha+\gamma=-b$

$\therefore \beta=-a-\alpha=-a-2$

$\gamma=-b-\alpha=-b-2$ ⋯ ❸

$\therefore \beta+\gamma=-(a+b)-4$

$=-(-2)-4$

$=-2$ ⋯ ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ α의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $\beta,\ \gamma$를 $a,\ b$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❹ $\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	10%

09 전략 주어진 방정식을 (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형한다.

풀이 $xy-3x+5y-24=0$에서

$xy-3x+5y-15=9$

$x(y-3)+5(y-3)=9$

$\therefore (x+5)(y-3)=9$

$x,\ y$가 정수이므로 $x+5,\ y-3$도 정수이고 9의 약수이다.

따라서 $x+5,\ y-3$의 값은 다음과 같다.

$x+5$	-9	-3	-1	1	3	9
$y-3$	-1	-3	-9	9	3	1

이때 정수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$는

(i) $x+5=-9,\ y-3=-1$일 때, $(-14,\ 2)$

(ii) $x+5=-3,\ y-3=-3$일 때, $(-8,\ 0)$

(iii) $x+5=-1,\ y-3=-9$일 때, $(-6,\ -6)$

(iv) $x+5=1,\ y-3=9$일 때, $(-4,\ 12)$

(v) $x+5=3,\ y-3=3$일 때, $(-2,\ 6)$

(vi) $x+5=9,\ y-3=1$일 때, $(4,\ 4)$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는 6이다. 답 6

Remark▶

$x+5,\ y-3$의 순서쌍 $(x+5,\ y-3)$이 6개이므로 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$도 6개이다.

10 전략 주어진 방정식을 $A^2+B^2=0$ 꼴로 변형하여 $A=B=0$임을 이용한다.

풀이 $5x^2+y^2+4x-2xy+1=0$에서

$(4x^2+4x+1)+(x^2-2xy+y^2)=0$

$(2x+1)^2+(x-y)^2=0$

이때 $x,\ y$가 실수이므로 $2x+1,\ x-y$도 실수이다.

따라서 $2x+1=0,\ x-y=0$이므로

$x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$

$\therefore xy=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

11 전략 두 학생 P와 Q가 옳게 보고 푼 것을 이용하여 $a,\ b$의 값을 구한다.

풀이 P는 상수 a만 잘못 보고 풀었으므로 $y=-2,\ z=0$은 $-2y+z=b$를 만족시킨다.

$\therefore b=4$

Q는 상수 b만 잘못 보고 풀었으므로 $x=-1,\ y=3$은 $2x+ay=1$을 만족시킨다.

즉 $-2+3a=1$이므로 $a=1$

따라서 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ -2y+z=4 & \cdots\cdots ㉡ \\ -2z+x=-3 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠×2+㉡을 하면 $4x+z=6$ …… ㉣

㉣×2+㉢을 하면 $9x=9$ $\therefore x=1$

$x=1$을 ㉠, ㉢에 각각 대입하면

$2+y=1,\ -2z+1=-3$

$\therefore y=-1,\ z=2$

따라서 $\alpha=1,\ \beta=-1,\ \gamma=2$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=2$ 답 ②

12 전략 y와 z를 x에 대한 식으로 나타낸 후, $x-2y+2z=0$에 대입하여 미지수가 1개인 일차방정식을 만든다.

풀이 $3kx+y=0$에서 $\quad y=-3kx \quad$ …… ㉠

$ky+3z=0$에서 $\quad z=-\frac{k}{3}y \quad$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$z=-\frac{k}{3}\cdot(-3kx)=k^2x \quad$ …… ㉢

㉠, ㉢을 $x-2y+2z=0$에 대입하면

$x-2\cdot(-3kx)+2k^2x=0$

$\therefore\ (2k^2+6k+1)x=0 \quad$ …… ㉣

주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으려면 방정식 ㉣의 해가 무수히 많아야 하므로

$2k^2+6k+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-2\cdot1=7>0$

이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은

$-\frac{6}{2}=-3$

답 ②

13 전략 $x=2$는 두 방정식 $f(x)+g(x)=0$, $f(x)g(x)=0$의 공통근임을 이용한다.

풀이 두 방정식 $f(x)+g(x)=0$, $f(x)g(x)=0$이 $x=2$를 근으로 가지므로

$f(2)+g(2)=0,\ f(2)g(2)=0$

$f(2)=-g(2)$이므로 이것을 $f(2)g(2)=0$에 대입하면

$-\{g(2)\}^2=0 \qquad \therefore\ g(2)=0$

$\therefore\ f(2)=g(2)=0$

따라서 두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$은 모두 $x=2$를 근으로 갖는다.

$f(x)=(x-2)(x-m)$, $g(x)=(x-2)(x-n)$이라 하면 $f(x)g(x)=0$에서

$(x-2)^2(x-m)(x-n)=0$

이므로

$x=2$ 또는 $x=m$ 또는 $x=n$

이때 방정식 $f(x)g(x)=0$의 근이 2, 3, 5이므로

$m=3,\ n=5$ 또는 $m=5,\ n=3$

$f(x)+g(x)=0$에서

$(x-2)(x-m)+(x-2)(x-n)=0$

$(x-2)(2x-m-n)=0$

이므로

$x=2$ 또는 $x=\frac{m+n}{2}$

이때 방정식 $f(x)+g(x)=0$의 근이 2, α이므로

$\alpha=\frac{m+n}{2}=\frac{8}{2}=4$

답 4

14 전략 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=B=0$임을 이용한다.

풀이 $(x^2-x-6)^2+(y^2+2y-8)^2=0$에서 x, y가 실수이므로 x^2-x-6, y^2+2y-8도 실수이다.

$\therefore\ x^2-x-6=0$

$y^2+2y-8=0 \quad$ ··· ❶

(i) $x^2-x-6=0$에서

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=3$

(ii) $y^2+2y-8=0$에서

$(y+4)(y-2)=0$

$\therefore\ y=-4$ 또는 $y=2$

(i), (ii)에서

$\begin{cases}x=-2\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=3\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases} \quad$ ··· ❷

한편 $(xy-z)^2=0$에서 x, y, z가 실수이므로 $xy-z$도 실수이다.

따라서 $xy-z=0$, 즉 $z=xy$이므로

$z=8,\ -4,\ -12,\ 6 \quad$ ··· ❸

즉 z의 최댓값은 8, 최솟값은 -12이므로 그 합은 -4이다. ··· ❹

답 -4

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식을 만족시키는 실수 x, y에 대한 이차방정식을 구할 수 있다.	20%
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ z의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ z의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10%

15 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β에 대한 식을 세운 후, 이 식을 이용하여 α, β에 대한 부정방정식을 만든다.

풀이 주어진 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k \quad$ …… ㉠

$\alpha\beta=8k-12 \quad$ …… ㉡

㉡$-$㉠$\times4$를 하면

$\alpha\beta-4\alpha-4\beta=-12$

$\alpha\beta-4\alpha-4\beta+16=4$

$\alpha(\beta-4)-4(\beta-4)=4$

$\therefore\ (\alpha-4)(\beta-4)=4$

α, β가 $\alpha\ge\beta$인 정수이므로 $\alpha-4$, $\beta-4$는 $\alpha-4\ge\beta-4$인 정수이고 4의 약수이다.
따라서 $\alpha-4$, $\beta-4$의 값은 다음과 같다.

$\alpha-4$	-2	-1	2	4
$\beta-4$	-2	-4	2	1

(i) $\alpha-4=-2$, $\beta-4=-2$일 때,
$\alpha=2$, $\beta=2$
$\alpha=2$, $\beta=2$를 ㉠에 대입하면
$4=2k$ $\quad\therefore k=2$

(ii) $\alpha-4=-1$, $\beta-4=-4$일 때,
$\alpha=3$, $\beta=0$
$\alpha=3$, $\beta=0$을 ㉠에 대입하면
$3=2k$ $\quad\therefore k=\frac{3}{2}$

(iii) $\alpha-4=2$, $\beta-4=2$일 때,
$\alpha=6$, $\beta=6$
$\alpha=6$, $\beta=6$을 ㉠에 대입하면
$12=2k$ $\quad\therefore k=6$

(iv) $\alpha-4=4$, $\beta-4=1$일 때,
$\alpha=8$, $\beta=5$
$\alpha=8$, $\beta=5$를 ㉠에 대입하면
$13=2k$ $\quad\therefore k=\frac{13}{2}$

이상에서 모든 상수 k의 값의 합은
$2+\frac{3}{2}+6+\frac{13}{2}=16$

답 16

16 전략 $\overline{AD}=x$, $\overline{DC}=y$라 하고, 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.

풀이 $\overline{AD}=x$, $\overline{DC}=y$라 하면 $x:y=3:2$이므로
$2x=3y$ $\quad\therefore x=\frac{3}{2}y$ …… ㉠
$\triangle AQ_1D+\triangle P_1Q_2D+\triangle P_2CD=10$에서
$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x\cdot\frac{2}{3}y+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x\cdot y=10$$
$$\frac{xy}{6}+\frac{2xy}{9}+\frac{xy}{6}=10,\qquad \frac{5xy}{9}=10$$
$\therefore xy=18$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$\frac{3}{2}y^2=18,\qquad y^2=12$
$\therefore y=2\sqrt{3}$ ($\because y>0$)
$\therefore x=\frac{3}{2}\cdot2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$
따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는
$2(x+y)=2\cdot5\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

답 ②

17 전략 정사각형 A, B의 한 변의 길이를 x cm, 정사각형 C의 한 변의 길이를 y cm라 하고, 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.

풀이 정사각형 A, B의 한 변의 길이를 x cm, 정사각형 C의 한 변의 길이를 y cm$(x>y)$라 하자.
철사의 길이가 32 cm이므로
$2\cdot4x+4y=32$
$\therefore 2x+y=8$ …… ㉠
세 정사각형의 넓이의 합이 22 cm^2이므로
$2x^2+y^2=22$ …… ㉡
㉠에서 $\quad y=-2x+8$ …… ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$2x^2+(-2x+8)^2=22,\qquad 3x^2-16x+21=0$
$(3x-7)(x-3)=0$
$\therefore x=\frac{7}{3}$ 또는 $x=3$

(i) $x=\frac{7}{3}$을 ㉢에 대입하면
$y=\frac{10}{3}$

(ii) $x=3$을 ㉢에 대입하면
$y=2$

그런데 $x>y$이므로 (i), (ii)에서
$x=3$, $y=2$
따라서 정사각형 A의 한 변의 길이는 3 cm이다.

답 ③

18 전략 $x\ge y$, $x<y$인 경우로 나누어 주어진 연립방정식의 해를 구한다.

풀이 (i) $x\ge y$일 때,
$\langle x, y\rangle=x$이므로
$$\begin{cases}2x-4y^2=x & \cdots\cdots ㉠\\ x-y+5=x & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$
㉡에서 $\quad y=5$
$y=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad 2x-100=x$
$\therefore x=100$
따라서 $x=100$, $y=5$는 $x\ge y$를 만족시킨다.

(ii) $x<y$일 때,
$\langle x, y\rangle=-y$이므로
$$\begin{cases}2x-4y^2=-y & \cdots\cdots ㉢\\ x-y+5=-y & \cdots\cdots ㉣\end{cases}$$
㉣에서 $\quad x=-5$
$x=-5$를 ㉢에 대입하면 $\quad -10-4y^2=-y$
$\therefore 4y^2-y+10=0$ …… ㉤

이때 이차방정식 ㉤의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4\cdot4\cdot10=-159<0$$

이므로 ㉤은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=100,\ \beta=5$

$\therefore\ \alpha+\beta=105$

답 105

19 전략 $x^2-8x+1=(\text{자연수})^2$으로 놓아 부정방정식을 만든다.

풀이 자연수 n에 대하여 $x^2-8x+1=n^2$이라 하면

$x^2-8x+16-15=n^2$

$(x-4)^2-n^2=15$

$(x-4+n)(x-4-n)=15$

이때 x, n은 모두 자연수이므로 $x+n\geq2$에서

$x-4+n\geq-2$

또 $x-4+n>x-4-n$이므로 $x-4+n$, $x-4-n$이 될 수 있는 값은 다음과 같다.

$x-4+n$	-1	5	15
$x-4-n$	-15	3	1

(i) $\begin{cases} x-4+n=-1 \\ x-4-n=-15 \end{cases}$ 일 때,

$2x-8=-16$

$\therefore\ x=-4$

(ii) $\begin{cases} x-4+n=5 \\ x-4-n=3 \end{cases}$ 일 때,

$2x-8=8$

$\therefore\ x=8$

(iii) $\begin{cases} x-4+n=15 \\ x-4-n=1 \end{cases}$ 일 때,

$2x-8=16$

$\therefore\ x=12$

x는 자연수이므로 이상에서

$x=8$ 또는 $x=12$

따라서 구하는 x의 값의 합은 20

답 20

Ⅲ. 부등식

09 일차부등식

유제

본책 233~246쪽

076-❶ a와 b의 부호가 같으므로 $ab>0$

$a>b$의 양변을 ab로 나누면

$\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}$, 즉 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

답 풀이 참조

077-❶ (1) $ax+b>x+1$에서

$(a-1)x>-b+1$

(i) $a-1>0$, 즉 $a>1$일 때, $x>\dfrac{-b+1}{a-1}$

(ii) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때, $0\cdot x>-b+1$이므로

$-b+1\geq0$, 즉 $b\leq1$이면 해는 없다.

$-b+1<0$, 즉 $b>1$이면 해는 모든 실수이다.

(iii) $a-1<0$, 즉 $a<1$일 때, $x<\dfrac{-b+1}{a-1}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$$\begin{cases} a>1\text{일 때,} & x>\dfrac{-b+1}{a-1} \\ a=1\text{일 때,} & \begin{cases} b\leq1\text{이면 해는 없다.} \\ b>1\text{이면 모든 실수} \end{cases} \\ a<1\text{일 때,} & x<\dfrac{-b+1}{a-1} \end{cases}$$

(2) $a(x+a)\leq b(x+b)$에서

$ax+a^2\leq bx+b^2$, $(a-b)x\leq-(a^2-b^2)$

$\therefore\ (a-b)x\leq-(a+b)(a-b)$ …… ㉠

이 부등식의 해가 $x\geq2$이므로 $a-b<0$

㉠의 양변을 $a-b$로 나누면 $x\geq-(a+b)$

따라서 $-(a+b)=2$이므로

$a+b=-2$

답 (1) 풀이 참조 (2) -2

078-❶ (1) $-x-2>4x+3$에서 $-5x>5$

$\therefore\ x<-1$

$7x-1\leq5x+7$에서 $2x\leq8$ $\therefore\ x\leq4$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $x<-1$

(2) $0.1x+0.6\geq1.2-0.5x$의 양변에 10을 곱하면

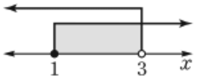
$x+6\geq12-5x$, $6x\geq6$ $\therefore\ x\geq1$

$\frac{x}{3}-1<\frac{x-3}{4}$의 양변에 12를 곱하면

$4x-12<3(x-3)$, $\quad 4x-12<3x-9$

$\therefore x<3$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $\quad 1\leq x<3$



답 (1) $x<-1$ (2) $1\leq x<3$

079-❶ 주어진 부등식의 해는 연립부등식

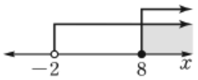
$$\begin{cases} 2x-1<4x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+3\leq 5(x-1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다.

㉠에서 $\quad -2x<4 \quad \therefore x>-2$

㉡에서 $\quad 4x+3\leq 5x-5 \quad \therefore x\geq 8$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$x\geq 8$

따라서 구하는 가장 작은 정수는 8이다. 답 8

080-❶ (1) $0.4x-0.3\leq 0.1x+1.2$의 양변에 10을 곱하면

$4x-3\leq x+12$, $\quad 3x\leq 15$

$\therefore x\leq 5$

$\frac{x}{2}+1>3+\frac{x}{6}$의 양변에 6을 곱하면

$3x+6>18+x$, $\quad 2x>12 \quad \therefore x>6$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(2) 주어진 부등식의 해는 연립부등식

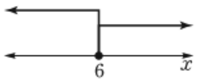
$$\begin{cases} x+7\leq 3x-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-5\leq 2x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다.

㉠에서 $\quad -2x\leq -12 \quad \therefore x\geq 6$

㉡에서 $\quad x\leq 6$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



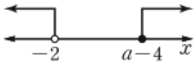
$x=6$ 답 (1) 해가 없다. (2) $x=6$

081-❶ $3x-5<x-9$에서 $\quad 2x<-4$

$\therefore x<-2$

$2x+4\geq x+a$에서 $\quad x\geq a-4$

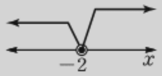
주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-2\leq a-4 \quad \therefore a\geq 2$ 답 $a\geq 2$

Remark▶

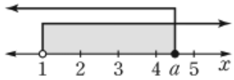
$a-4=-2$일 때도 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



081-❷ $3x+2>5$에서

$3x>3 \quad \therefore x>1$

주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$4\leq a<5$ 답 $4\leq a<5$

082-❶ 사탕을 x개 산다고 하면 초콜릿은 $(10-x)$개 사야 하므로

$$\begin{cases} x<10-x & \cdots\cdots ㉠ \\ 1500x+2000(10-x)\leq 18000 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad 2x<10 \quad \therefore x<5$

㉡에서 $\quad -500x\leq -2000 \quad \therefore x\geq 4$

$\therefore 4\leq x<5$

따라서 사탕은 4개 살 수 있다. 답 4개

082-❷ 민성이가 시속 4 km로 걸어간 거리를 x km라 하면 시속 6 km로 뛰어간 거리는 $(4-x)$km이므로

$$\frac{3}{4}\leq\frac{x}{4}+\frac{4-x}{6}\leq\frac{11}{12}$$

각 변에 12를 곱하면

$9\leq 3x+2(4-x)\leq 11 \quad \therefore 1\leq x\leq 3$

따라서 민성이가 시속 4 km로 걸어간 거리는 최대 3 km이다. 답 3 km

083-❶ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$x-4=0$, $x-2=0$, 즉 $x=2$, $x=4$

(i) $x<2$일 때,

$-2(x-4)+(x-2)<4$

$-x<-2 \quad \therefore x>2$

그런데 $x<2$이므로 해는 없다.

(ii) $2 \le x < 4$일 때,

$-2(x-4)-(x-2)<4$

$-3x<-6 \qquad \therefore x>2$

그런데 $2 \le x < 4$이므로 $\qquad 2<x<4$

(iii) $x \ge 4$일 때,

$2(x-4)-(x-2)<4$

$\therefore x<10$

그런데 $x \ge 4$이므로 $\qquad 4 \le x < 10$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$2<x<10$

따라서 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 7개이다.

답 7

083-❷ $|ax+1| \le b$에서

$-b \le ax+1 \le b$

$\therefore -b-1 \le ax \le b-1$

(i) $a>0$일 때,

$$\frac{-b-1}{a} \le x \le \frac{b-1}{a}$$

부등식의 해가 $-1 \le x \le 5$이므로

$$\frac{-b-1}{a}=-1, \ \frac{b-1}{a}=5$$

$a-b=1, \ 5a-b=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{1}{2}, \ b=-\frac{3}{2}$$

그런데 $a>0$이므로 적당하지 않다.

(ii) $a<0$일 때,

$$\frac{b-1}{a} \le x \le \frac{-b-1}{a}$$

부등식의 해가 $-1 \le x \le 5$이므로

$$\frac{b-1}{a}=-1, \ \frac{-b-1}{a}=5$$

$a+b=1, \ 5a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{1}{2}, \ b=\frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 $a=-\frac{1}{2}, \ b=\frac{3}{2}$이므로

$ab=-\frac{3}{4}$

답 $-\frac{3}{4}$

Remark ▶

① $a=0$이면 $|ax+1| \le b$의 해가 $-1 \le x \le 5$일 수 없으므로 $\qquad a \ne 0$

② $b<0$이면 부등식의 해는 없고, $b=0$이면 부등식의 해는 $x=-\frac{1}{a}$이므로 $\qquad b>0$

중단원 연습 문제

본책 247~250쪽

01 $x<\frac{3}{2}$ **02** ③ **03** 5 **04** 6
05 -3 **06** $a<-1$ **07** 1
08 3, 4 **09** ⑤ **10** 200 g 이상 600 g 미만
11 $-\frac{7}{5}<x<1$ **12** -1 **13** ④ **14** ②
15 $-4 \le x < 4$ **16** ②
17 20 g 이상 50 g 이하 **18** ⑤ **19** ④
20 ② **21** ③

01 전략 부등식 $ax-(a+b)<0$의 해가 $x>3$임을 이용하여 a의 부호를 구한 후 b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $ax-(a+b)<0$에서

$ax<a+b \qquad \cdots\cdots ㉠$

이 부등식의 해가 $x>3$이므로 $\qquad a<0 \qquad$ ⋯ ❶

㉠의 양변을 a로 나누면 $\qquad x>\frac{a+b}{a}$

따라서 $\frac{a+b}{a}=3$이므로 $\qquad a+b=3a$

$\therefore b=2a \qquad \cdots\cdots ㉡ \qquad$ ⋯ ❷

㉡을 부등식 $bx-(a+b)>0$에 대입하면

$2ax-(a+2a)>0, \qquad 2ax>3a$

$\therefore x<\frac{3}{2} \ (\because 2a<0) \qquad$ ⋯ ❸

답 $x<\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ a의 부호를 구할 수 있다.	20%
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ 부등식 $bx-(a+b)>0$의 해를 구할 수 있다.	40%

02 전략 x에 대한 부등식 $ax>b$의 해가 존재하지 않으면 $a=0, \ b \ge 0$임을 이용한다.

풀이 $a(x-1)-b(x-2)>1$에서

$(a-b)x>a-2b+1$

이 부등식의 해가 존재하지 않으므로

$a-b=0, \ a-2b+1 \ge 0$

$a-b=0$에서 $\qquad b=a$

$b=a$를 $a-2b+1 \ge 0$에 대입하면

$a-2a+1 \ge 0, \qquad -a \ge -1 \qquad \therefore a \le 1$

따라서 a의 최댓값은 1이다.

답 ③

03 (전략) 먼저 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼 후 부등식을 푼다.

(풀이) $8x-7\le 3(x+3)-1$에서 $\quad 8x-7\le 3x+8$

$5x\le 15 \quad \therefore x\le 3$

$5(x+2)>-x-2$에서 $\quad 5x+10>-x-2$

$6x>-12 \quad \therefore x>-2$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $\quad -2<x\le 3$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, 2, 3$이므로 구하는 합은

$(-1)+0+1+2+3=5$

답 5

04 (전략) 계수가 분수이면 부등식의 양변에 분모의 최소공배수를, 소수이면 10의 거듭제곱을 곱한다.

(풀이) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}<\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$의 양변에 6을 곱하면

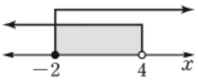
$3x-1<2x+3 \quad \therefore x<4$

$0.2x+0.4\le 0.4(x+2)$의 양변에 10을 곱하면

$2x+4\le 4(x+2), \quad 2x+4\le 4x+8$

$-2x\le 4 \quad \therefore x\ge -2$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $\quad -2\le x<4$



따라서 $a=-2$, $b=4$이므로

$b-a=6$

답 6

05 (전략) 연립부등식의 정수인 해를 일차방정식에 대입하면 등식이 성립함을 이용한다.

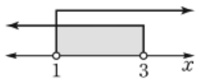
(풀이) $4x-5<x+4$에서 $\quad 3x<9$

$\therefore x<3$

$5x-7>2(x-2)$에서 $\quad 5x-7>2x-4$

$3x>3 \quad \therefore x>1$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $\quad 1<x<3$ ⋯ ❶



이때 x는 정수이므로

$x=2$ ⋯ ❷

$x=2$를 $ax+8=2$에 대입하면

$2a+8=2$

$\therefore a=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	50%
❷ 정수 x의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

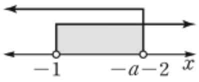
06 (전략) 연립부등식이 해를 가지려면 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내었을 때 공통부분이 있어야 한다.

(풀이) $\frac{x+3}{2}>1$에서

$x+3>2 \quad \therefore x>-1$

$5x+2<4x-a$에서 $\quad x<-a-2$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-1<-a-2 \quad \therefore a<-1$

답 $a<-1$

07 (전략) 연립부등식 $\begin{cases} x\le m \\ x\ge n \end{cases}$의 해가 $x=k$이면 $m=n=k$이다.

(풀이) $5x-3\le 3x+5$에서

$2x\le 8 \quad \therefore x\le 4$

$3(x-1)\ge 2x+a$에서 $\quad 3x-3\ge 2x+a$

$\therefore x\ge a+3$

연립부등식의 해가 $x=4$이므로

$a+3=4$

$\therefore a=1$

답 1

08 (전략) $A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

(풀이) $3x-2\le 2x+3<4x-a$의 해는 연립부등식

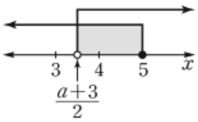
$\begin{cases} 3x-2\le 2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3<4x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $\quad x\le 5$

㉡에서 $\quad -2x<-a-3 \quad \therefore x>\frac{a+3}{2}$ ⋯ ❶

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이므로 오른쪽 그림에서



$3\le\frac{a+3}{2}<4$ ⋯ ❷

$6\le a+3<8 \quad \therefore 3\le a<5$ ⋯ ❸

따라서 자연수 a의 값은 3, 4이다. ⋯ ❹

답 3, 4

채점 기준	비율
❶ 각 부등식을 풀 수 있다.	30%
❷ $\frac{a+3}{2}$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❹ 자연수 a의 값을 구할 수 있다.	10%

09 (전략) 삼각형의 세 변의 길이에 대하여

$$\begin{cases}(\text{가장 긴 변의 길이})<(\text{나머지 두 변의 길이의 합})\\(\text{가장 짧은 변의 길이})>0\end{cases}$$

(풀이) $\begin{cases}x+3<(x-5)+(x-2) & \cdots\cdots ㉠\\x-5>0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x+3<2x-7$ $\quad\therefore x>10$

㉡에서 $x>5$

$\therefore x>10$

답 ⑤

10 (전략) (소금의 양)

$$=\frac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times(\text{소금물의 양})$$

(풀이) 10 %의 소금물을 x g 섞는다고 하면

$$\frac{8}{100}(200+x)\le\frac{6}{100}\cdot 200+\frac{10}{100}x<\frac{9}{100}(200+x)$$

즉 $8(200+x)\le 1200+10x<9(200+x)$

이 부등식의 해는 연립부등식

$\begin{cases}1200+10x\ge 8(200+x) & \cdots\cdots ㉠\\1200+10x<9(200+x) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $1200+10x\ge 1600+8x$,

$2x\ge 400$ $\quad\therefore x\ge 200$

㉡에서 $1200+10x<1800+9x$ $\quad\therefore x<600$

$\therefore 200\le x<600$

따라서 섞어야 하는 10 %의 소금물의 양은 200 g 이상 600 g 미만이다.

답 200 g 이상 600 g 미만

11 (전략) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 범위를 나눈다.

(풀이) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$x-1=0$, $x+1=0$, 즉 $x=-1$, $x=1$ ⋯ ❶

(i) $x<-1$일 때, $\quad -2(x-1)-3(x+1)<6$

$-5x<7$ $\quad\therefore x>-\frac{7}{5}$

그런데 $x<-1$이므로

$-\frac{7}{5}<x<-1$ ⋯ ❷

(ii) $-1\le x<1$일 때, $\quad -2(x-1)+3(x+1)<6$

$\therefore x<1$

그런데 $-1\le x<1$이므로

$-1\le x<1$ ⋯ ❸

(iii) $x\ge 1$일 때, $\quad 2(x-1)+3(x+1)<6$

$5x<5$ $\quad\therefore x<1$

그런데 $x\ge 1$이므로 해는 없다. ⋯ ❹

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{7}{5}<x<1$ ⋯ ❺

답 $-\frac{7}{5}<x<1$

채점 기준	비율
❶ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $x<-1$일 때, 부등식의 해를 구할 수 있다.	20%
❸ $-1\le x<1$일 때, 부등식의 해를 구할 수 있다.	20%
❹ $x\ge 1$일 때, 부등식의 해를 구할 수 있다.	20%
❺ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20%

12 (전략) x에 대한 부등식 $ax>b$의 해가 모든 실수이려면 $a=0$, $b<0$임을 이용한다.

(풀이) $a^2x+1>x+a$에서 $\quad a^2x-x>a-1$

$(a^2-1)x>a-1$

$\therefore (a+1)(a-1)x>a-1$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로, 즉 이 부등식의 해가 모든 실수이므로

$(a+1)(a-1)=0$, $a-1<0$

$(a+1)(a-1)=0$에서

$a=\pm 1$ $\cdots\cdots ㉠$

$a-1<0$에서

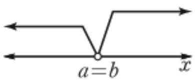
$a<1$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 구하는 a의 값은 -1이다.

답 -1

13 (전략) 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

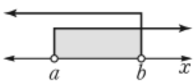
(풀이) ㄱ. $a=b$이면 오른쪽 그림과 같으므로 해가 없다.



ㄴ. $a>b$이면 오른쪽 그림과 같으므로 해가 없다.

ㄷ. $a<b$이면 오른쪽 그림과 같으므로 해는

$a<x<b$



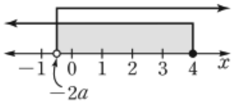
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

14 전략 조건을 만족시키도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 실수 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 $2x-3\le x+1$에서 $\quad x\le 4$

$x+2a>0$에서 $\quad x>-2a$



주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 5이려면 위의 그림과 같아야 하므로

$-1\le -2a<0$

$\therefore 0<a\le \frac{1}{2}$ 답 ②

15 전략 주어진 해를 이용하여 a, b의 값을 구한 다음 처음 부등식에 대입하여 바른 해를 구한다.

풀이 $2x-3a\le 3x-a$에서

$x\ge -2a$ …… ㉠

$2x-3a<x+b$에서 $\quad x<3a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $-4\le x<12$이므로

$-2a=-4$, $3a+b=12$

$\therefore a=2$, $b=6$ ··· ❶

따라서 처음 부등식은

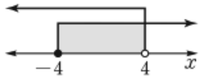
$2x-6\le 3x-2<x+6$,

즉 $\begin{cases} 2x-6\le 3x-2 & \cdots\cdots ㉢ \\ 3x-2<x+6 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢에서 $\quad x\ge -4$

㉣에서 $\quad 2x<8 \quad \therefore x<4$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 처음 부등식의 해는



$-4\le x<4$ ··· ❷

답 $-4\le x<4$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 처음 부등식의 해를 구할 수 있다.	50%

16 전략 한 의자에 6명씩 채워 앉다가 마지막 의자에는 최소 1명, 최대 6명이 앉을 수 있다.

풀이 의자의 개수를 x라 하면 학생 수는 $(4x+3)$명이고 한 의자에 6명씩 앉으면 마지막 의자에는 최소 1명, 최대 6명이 앉을 수 있으므로

$6(x-2)+1\le 4x+3\le 6(x-2)+6$,

즉 $\begin{cases} 6(x-2)+1\le 4x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+3\le 6(x-2)+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 6x-11\le 4x+3, \quad 2x\le 14$

$\therefore x\le 7$

㉡에서 $\quad 4x+3\le 6x-6$

$-2x\le -9 \quad \therefore x\ge \frac{9}{2}$

$\therefore \frac{9}{2}\le x\le 7$

따라서 가능한 의자의 개수는 5, 6, 7이다. 답 ②

17 전략 섭취해야 하는 B식품의 양을 x g으로 놓고 조건을 만족시키는 연립부등식을 세운다.

풀이 두 식품 A, B의 1 g당 열량과 단백질의 양은 오른쪽 표와 같다. B식품을 x g 섭취한다고 하면 A식품은 $(300-x)$g 섭취해야 하므로

식품	열량 (kcal)	단백질 (g)
A	1.5	0.12
B	2	0.16

$\begin{cases} 1.5(300-x)+2x\ge 460 \\ 0.12(300-x)+0.16x\le 38 \end{cases}$,

즉 $\begin{cases} 4500-15x+20x\ge 4600 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3600-12x+16x\le 3800 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 5x\ge 100 \quad \therefore x\ge 20$

㉡에서 $\quad 4x\le 200 \quad \therefore x\le 50$

$\therefore 20\le x\le 50$

따라서 B식품은 20 g 이상 50 g 이하로 섭취해야 한다.

답 20 g 이상 50 g 이하

18 전략 $A-B>0$이면 $A>B$임을 이용하여 두 수의 대소 관계를 확인한다.

풀이 ㄱ. $a>b$에서 $\quad a+c>b+c$

이때 $a+c>0$, $b+c>0$이므로

$\frac{1}{a+c}<\frac{1}{b+c}$

ㄴ. $(ab+1)-(a+b)=ab-a-b+1$

$=a(b-1)-(b-1)$

$=(a-1)(b-1)$

이때 $a-1>0$, $b-1>0$이므로

$(ab+1)-(a+b)>0$

$\therefore ab+1>a+b$

ㄷ. $\frac{a}{b}-\frac{a-1}{b-1}=\frac{a(b-1)-b(a-1)}{b(b-1)}=\frac{-(a-b)}{b(b-1)}$

이때 $a-b>0$, $b>0$, $b-1>0$이므로

$\frac{a}{b}-\frac{a-1}{b-1}<0 \quad \therefore \frac{a}{b}<\frac{a-1}{b-1}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

19 전략 두 부등식 $x\le m$, $x\ge n$의 공통부분이 생기려면 $n\le m$이어야 함을 이용한다.

풀이 $x-2\le 2x-a$에서

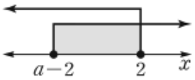
$x\ge a-2$

$3x-4\le 12-5x$에서

$8x\le 16$

$\therefore x\le 2$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $a-2\le 2$



$\therefore a\le 4$

따라서 a의 최댓값은 4이다.

답 ④

20 전략 주어진 연립부등식의 각 부등식을 풀어 공통부분이 $2<x<3$이 되도록 한다.

풀이 $2x-a>3$에서 $\quad x>\frac{a+3}{2}$

$-2x+4>b$에서 $\quad -2x>b-4$

$\therefore x<\frac{4-b}{2}$

주어진 연립부등식의 해가 $2<x<3$이 되려면

$\frac{a+3}{2}=2$, $\frac{4-b}{2}=3$

$a+3=4$, $4-b=6$

$\therefore a=1$, $b=-2$

$\therefore a+b=-1$

답 ②

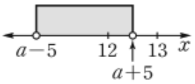
21 전략 $|x|<k\ (k>0)$이면 $-k<x<k$임을 이용한다.

풀이 $|x-a|<5$에서

$-5<x-a<5$

$\therefore a-5<x<a+5$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값이 12이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$12<a+5\le 13$

$\therefore 7<a\le 8$

따라서 정수 a의 값은 8이다.

답 ③

Ⅲ. 부등식

10 이차부등식

유제 본책 256~278쪽

084-❶ (1) 부등식 $f(x)\le g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로 구하는 해는

$-\frac{1}{2}\le x\le 3$

(2) $f(x)g(x)>0$이면

$f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$

(ⅰ) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)>0$일 때,

$x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$g(x)>0$일 때,

$x>-\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$x>2$

(ⅱ) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)<0$일 때,

$-\frac{1}{2}<x<2$ …… ㉢

$g(x)<0$일 때,

$x<-\frac{1}{2}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 공통부분은 없다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 부등식의 해는

$x>2$

답 (1) $-\frac{1}{2}\le x\le 3$ (2) $x>2$

085-❶ (1) 주어진 이차부등식의 양변에 6을 곱하면

$2x^2-6x>x-6$, $\quad 2x^2-7x+6>0$

$(2x-3)(x-2)>0$

$\therefore x<\frac{3}{2}$ 또는 $x>2$

(2) $4x^2+28x+49<0$에서

$(2x+7)^2<0$

이때 $(2x+7)^2\ge 0$이므로 주어진 이차부등식의 해는 없다.

(3) $-x^2+3x\le 4$에서 $\quad -x^2+3x-4\le 0$

$x^2-3x+4\geq 0 \qquad \therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geq 0$

이때 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

답 (1) $x<\frac{3}{2}$ 또는 $x>2$ (2) 해가 없다.
(3) 모든 실수

085-❷ (1) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $\quad x=0$

(i) $x<0$일 때, $x^2+x-2<0$이므로
$(x+2)(x-1)<0$
$\therefore\ -2<x<1$
그런데 $x<0$이므로 $\quad -2<x<0$

(ii) $x\geq 0$일 때, $x^2-x-2<0$이므로
$(x+1)(x-2)<0$
$\therefore\ -1<x<2$
그런데 $x\geq 0$이므로 $\quad 0\leq x<2$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $\quad -2<x<2$

(2) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은
$x-3=0$, 즉 $x=3$

(i) $x<3$일 때, $x^2-3x\leq -(x-3)$이므로
$x^2-2x-3\leq 0, \quad (x+1)(x-3)\leq 0$
$\therefore\ -1\leq x\leq 3$
그런데 $x<3$이므로 $\quad -1\leq x<3$

(ii) $x\geq 3$일 때, $x^2-3x\leq x-3$이므로
$x^2-4x+3\leq 0, \quad (x-1)(x-3)\leq 0$
$\therefore\ 1\leq x\leq 3$
그런데 $x\geq 3$이므로 $\quad x=3$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $\quad -1\leq x\leq 3$

답 (1) $-2<x<2$ (2) $-1\leq x\leq 3$

다른 풀이 (1) $x^2=|x|^2$이므로 $|x|^2-|x|-2<0$에서
$(|x|+1)(|x|-2)<0$
그런데 $|x|+1>0$이므로
$|x|-2<0, \quad |x|<2$
$\therefore\ -2<x<2$

086-❶ (1) $-x^2+(a+b)x-ab\leq 0$에서
$x^2-(a+b)x+ab\geq 0$
$(x-a)(x-b)\geq 0$

(i) $a>b$일 때, $\quad x\leq b$ 또는 $x\geq a$

(ii) $a=b$일 때, 주어진 부등식은 $(x-a)^2\geq 0$이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $a<b$일 때, $\quad x\leq a$ 또는 $x\geq b$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$$\begin{cases} a>b\text{일 때,} & x\leq b \text{ 또는 } x\geq a \\ a=b\text{일 때,} & \text{모든 실수} \\ a<b\text{일 때,} & x\leq a \text{ 또는 } x\geq b \end{cases}$$

(2) $ax^2-8ax+12a\leq 0$에서
$a(x^2-8x+12)\leq 0$
$a(x-2)(x-6)\leq 0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

(i) $a>0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면
$(x-2)(x-6)\leq 0$
$\therefore\ 2\leq x\leq 6$

(ii) $a=0$일 때, $a=0$을 ㉠에 대입하면
$0\cdot(x-2)(x-6)\leq 0$
이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $a<0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면
$(x-2)(x-6)\geq 0$
$\therefore\ x\leq 2$ 또는 $x\geq 6$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$$\begin{cases} a>0\text{일 때,} & 2\leq x\leq 6 \\ a=0\text{일 때,} & \text{모든 실수} \\ a<0\text{일 때,} & x\leq 2 \text{ 또는 } x\geq 6 \end{cases}$$

답 풀이 참조

087-❶ 테니스공의 높이가 0.78 m 이상이면
$-5t^2+3t+2.13\geq 0.78$
$-5t^2+3t+1.35\geq 0, \quad 100t^2-60t-27\leq 0$
$(10t+3)(10t-9)\leq 0$
$\therefore\ -0.3\leq t\leq 0.9$
그런데 $t\geq 0$이므로
$0\leq t\leq 0.9$
따라서 테니스공의 높이가 0.78 m 이상인 시간은 0.9초까지이다.

답 0.9초

087-❷ 휴대전화 한 대의 가격을 x만 원 인하하였을 때의 가격은 $(50-x)$만 원, 하루 판매량은 $(20+2x)$개이므로 하루 총 판매액이 1750만 원 이상 되려면
$(50-x)(20+2x)\geq 1750$
$-2x^2+80x-750\geq 0$
$x^2-40x+375\leq 0, \quad (x-15)(x-25)\leq 0$
$\therefore\ 15\leq x\leq 25$
따라서 휴대전화 가격의
최댓값은 $\quad 50-15=35$(만 원)
최솟값은 $\quad 50-25=25$(만 원)

답 최댓값: 35만 원, 최솟값: 25만 원

088-❶ 해가 $x\le -2$ 또는 $x\ge 5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-5)\ge 0$

$\therefore\ x^2-3x-10\ge 0$

이 이차부등식이 $x^2+ax+b\ge 0$과 같으므로

$a=-3,\ b=-10$ 답 $a=-3,\ b=-10$

088-❷ 해가 $-1<x<\dfrac{3}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)<0$

$\therefore\ x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}<0$ …… ㉠

주어진 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$과 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$ax^2-\dfrac{1}{2}ax-\dfrac{3}{2}a>0$

이 이차부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로

$b=-\dfrac{1}{2}a,\ c=-\dfrac{3}{2}a$ …… ㉡

㉡을 $bx^2-ax-c<0$에 대입하면

$-\dfrac{1}{2}ax^2-ax+\dfrac{3}{2}a<0$

양변을 $-a$로 나누면

$\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{3}{2}<0\ (\because\ -a>0)$

$x^2+2x-3<0,\qquad (x+3)(x-1)<0$

$\therefore\ -3<x<1$ 답 $-3<x<1$

089-❶ (i) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때,

$-5\le 0$이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a-1\ne 0$, 즉 $a\ne 1$일 때,

이차함수 $y=(a-1)x^2+2(a-1)x-5$의 그래프가 위로 볼록해야 하므로

$a-1<0\qquad \therefore\ a<1$ …… ㉠

또 이차방정식 $(a-1)x^2+2(a-1)x-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2+5(a-1)\le 0$

$a^2+3a-4\le 0,\qquad (a+4)(a-1)\le 0$

$\therefore\ -4\le a\le 1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $-4\le a<1$

(i), (ii)에서 $-4\le a\le 1$

답 $-4\le a\le 1$

089-❷ 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$-x^2+(m+3)x-m<3$,

즉 $x^2-(m+3)x+m+3>0$

이 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2-(m+3)x+m+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(m+3)\}^2-4(m+3)<0$

$m^2+2m-3<0,\qquad (m+3)(m-1)<0$

$\therefore\ -3<m<1$ 답 $-3<m<1$

090-❶ 이차함수 $y=-x^2+2x$의 그래프가 직선 $y=2kx+k-1$보다 항상 아래쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$-x^2+2x<2kx+k-1$,

즉 $x^2+2(k-1)x+k-1>0$

이 성립한다.

따라서 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)<0$

$k^2-3k+2<0,\qquad (k-1)(k-2)<0$

$\therefore\ 1<k<2$ 답 $1<k<2$

090-❷ 이차함수 $y=x^2+x-5$의 그래프가 직선 $y=ax+7$보다 위쪽에 있을 때의 x의 값의 범위는 이차부등식

$x^2+x-5>ax+7$,

즉 $x^2-(a-1)x-12>0$ …… ㉠

의 해와 같다.

즉 ㉠의 해가 $x<b$ 또는 $x>4$이므로 이차방정식 $x^2-(a-1)x-12=0$의 두 근이 $x=b$ 또는 $x=4$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$b+4=a-1,\ 4b=-12$

$\therefore\ a=2,\ b=-3$ 답 $a=2,\ b=-3$

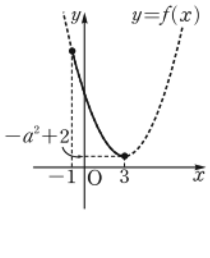
091-❶ $x^2-6x>a^2-11$에서

$x^2-6x-a^2+11>0$

$f(x)=x^2-6x-a^2+11$이라 하면

$f(x)=(x-3)^2-a^2+2$

$-1\le x\le 3$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(x)$의 최솟값이 $f(3)$이고 $f(3)>0$이어야 하므로

$-a^2+2>0,\quad a^2-2<0$

$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})<0\quad \therefore -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 3

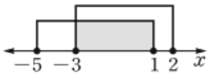
092-❶ (1) $x^2+4x-5\le 0$에서

$(x+5)(x-1)\le 0\quad \therefore -5\le x\le 1$

$x^2+x-6\le 0$에서 $\quad (x+3)(x-2)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 2$

각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 부등식의 해는



$-3\le x\le 1$

(2) $5x-6\le x^2<-2x+15$에서

$$\begin{cases} 5x-6\le x^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2<-2x+15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad x^2-5x+6\ge 0$

$(x-2)(x-3)\ge 0$

$\therefore x\le 2$ 또는 $x\ge 3$

㉡에서 $\quad x^2+2x-15<0$

$(x+5)(x-3)<0$

$\therefore -5<x<3$

각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 부등식의 해는

$-5<x\le 2$

답 (1) $-3\le x\le 1$ (2) $-5<x\le 2$

093-❶ $\begin{cases} x^2-3x+2<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-4ax+3a^2<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad (x-1)(x-2)<0$

$\therefore 1<x<2$

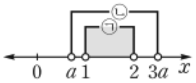
㉡에서 $\quad (x-a)(x-3a)<0$

(i) $a<3a$, 즉 $a>0$일 때, $\quad a<x<3a$

(ii) $a=3a$, 즉 $a=0$일 때, $\quad$ 해는 없다.

(iii) $a>3a$, 즉 $a<0$일 때, $\quad 3a<x<a$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $1<x<2$가 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 ㉡의 해는 $a<x<3a$이어야 하고 a의 값의 범위는



$0<a\le 1,\ 3a\ge 2$

$\therefore \frac{2}{3}\le a\le 1$ 답 $\frac{2}{3}\le a\le 1$

094-❶ $kx^2-(k+3)x+k=0$이 이차방정식이므로

$k\ne 0\quad \cdots\cdots ㉠$

이 이차방정식이 실근을 가지므로 판별식을 D라 할 때,

$D=\{-(k+3)\}^2-4k^2\ge 0$

$-3k^2+6k+9\ge 0$

$k^2-2k-3\le 0,\quad (k+1)(k-3)\le 0$

$\therefore -1\le k\le 3\quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-1\le k<0$ 또는 $0<k\le 3$

답 $-1\le k<0$ 또는 $0<k\le 3$

094-❷ 이차방정식 $x^2-kx+1=0$이 실근을 가지므로 판별식을 D_1이라 할 때,

$D_1=(-k)^2-4\ge 0,\quad (k+2)(k-2)\ge 0$

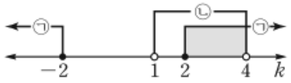
$\therefore k\le -2$ 또는 $k\ge 2\quad \cdots\cdots ㉠$

또 이차방정식 $x^2-2kx+5k-4=0$이 허근을 가지므로 판별식을 D_2라 할 때,

$\frac{D_2}{4}=(-k)^2-(5k-4)<0$

$k^2-5k+4<0,\quad (k-1)(k-4)<0$

$\therefore 1<k<4\quad \cdots\cdots ㉡$



㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$2\le k<4$ 답 $2\le k<4$

095-❶ 이차방정식 $x^2-(3m+5)x+2m-8=0$의 두 근을 α, β라 하면 α, β의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=2m-8<0\quad \therefore m<4\quad \cdots\cdots ㉠$

또 양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 크므로

$\alpha+\beta=3m+5>0\quad \therefore m>-\frac{5}{3}\quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-\frac{5}{3}<m<4$

따라서 구하는 정수 m의 최댓값은 3이다. 답 3

095-❷ 이차방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

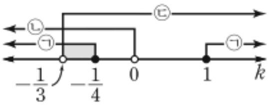
(i) $\frac{D}{4}=(-2k)^2-(3k+1)\ge 0$

$4k^2-3k-1\ge 0,\quad (4k+1)(k-1)\ge 0$

$\therefore k\le -\frac{1}{4}$ 또는 $k\ge 1\quad \cdots\cdots ㉠$

(ii) $\alpha+\beta=4k<0$ $\quad\therefore k<0$ ...... ㉡

(iii) $\alpha\beta=3k+1>0$ $\quad\therefore k>-\dfrac{1}{3}$ ...... ㉢

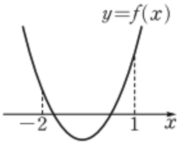


㉠, ㉡, ㉢에서 공통부분을 구하면

$$-\frac{1}{3}<k\le-\frac{1}{4}$$

답 $-\dfrac{1}{3}<k\le-\dfrac{1}{4}$

096-❶ $f(x)=2x^2-mx+2$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2와 1 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4\cdot2\cdot2\ge0$

$m^2-16\ge0,\qquad (m+4)(m-4)\ge0$

$\therefore m\le-4$ 또는 $m\ge4$ ...... ㉠

(ii) $f(-2)=8+2m+2>0$

$\therefore m>-5$ ...... ㉡

$f(1)=2-m+2>0$

$\therefore m<4$ ...... ㉢

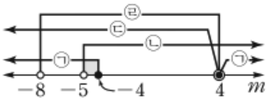
(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=\dfrac{m}{4}$이므로 $\qquad -2<\dfrac{m}{4}<1$

$\therefore -8<m<4$ ...... ㉣

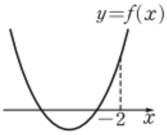
㉠~㉣에서 공통부분을 구하면

$$-5<m\le-4$$



답 $-5<m\le-4$

096-❷ $f(x)=x^2+mx+2m-3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=m^2-4(2m-3)\ge0$

$m^2-8m+12\ge0,\qquad (m-2)(m-6)\ge0$

$\therefore m\le2$ 또는 $m\ge6$ ...... ㉠

(ii) $f(-2)=4-2m+2m-3=1>0$

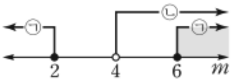
(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=-\dfrac{m}{2}$이므로 $\qquad -\dfrac{m}{2}<-2$

$\therefore m>4$ ...... ㉡

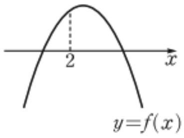
㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$$m\ge6$$



답 $m\ge6$

097-❶ $f(x)=-x^2+(k+1)x+k^2-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(2)>0$이어야 하므로

$-4+2(k+1)+k^2-1>0$

$k^2+2k-3>0,\qquad (k+3)(k-1)>0$

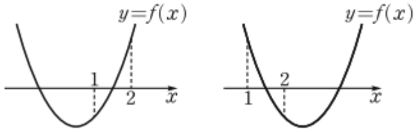
$\therefore k<-3$ 또는 $k>1$

답 $k<-3$ 또는 $k>1$

Remark▶

이차방정식 $-x^2+(k+1)x+k^2-1=0$의 두 근은 이차방정식 $x^2-(k+1)x-k^2+1=0$의 두 근과 같으므로 $f(x)=x^2-(k+1)x-k^2+1$로 놓고 $f(2)<0$임을 이용하여 풀어도 된다.

097-❷ $f(x)=x^2-mx-4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 중에서 한 근만이 1과 2 사이에 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(1)f(2)<0$이어야 하므로

$(1-m-4)(4-2m-4)<0$

$-2m(-m-3)<0,\qquad m(m+3)<0$

$\therefore -3<m<0$

답 $-3<m<0$

중단원 연습 문제

본책 279~282쪽

01 $-2\le x\le1$		**02** ⑤	**03** -1
04 $2a<x<-a$		**05** 10	**06** ③
07 -12		**08** $a<-\sqrt{5}$ 또는 $a>\sqrt{5}$	
09 1	**10** ③	**11** 5	**12** $\frac{5}{2}<a\le3$
13 ③	**14** ⑤	**15** ②	**16** $1<m<3$
17 $x>6$	**18** ⑤	**19** ④	**20** ② **21** 4
22 ③			

01 전략 부등식 $f(x)-g(x)\le 0$, 즉 $f(x)\le g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같다.

풀이 부등식 $ax^2+(b-m)x+c-n\le 0$에서

$ax^2+bx+c\le mx+n$ …… ㉠

㉠의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있거나 직선 $y=mx+n$과 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로 주어진 그림에서 $-2\le x\le 1$이다.

따라서 구하는 부등식의 해는

$-2\le x\le 1$ 답 $-2\le x\le 1$

02 전략 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 이차부등식의 해를 구한다.

풀이 $(x+1)(x-3)<5$에서

$x^2-2x-3<5$, $x^2-2x-8<0$

$(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 ⑤

03 전략 $|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$임을 이용한다.

풀이 (i) $x<0$일 때, $(x+1)(-x-2)<0$

$(x+1)(x+2)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>-1$

그런데 $x<0$이므로

$x<-2$ 또는 $-1<x<0$ ··· ❶

(ii) $x\ge 0$일 때, $(x+1)(x-2)<0$

$-1<x<2$

그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x<2$ ··· ❷

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-2$ 또는 $-1<x<2$ ··· ❸

따라서 $a=-2$, $b=-1$, $c=2$이므로

$a+b+c=-1$ ··· ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $x<0$일 때, 부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
❷ $x\ge 0$일 때, 부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20%
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20%

04 전략 부등식의 양변을 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀜을 이용한다.

풀이 $a<0$이므로 $ax^2-a^2x-2a^3>0$의 양변을 a로 나누면

$x^2-ax-2a^2<0$, $(x+a)(x-2a)<0$

이때 $2a<-a$이므로 주어진 이차부등식의 해는

$2a<x<-a$ 답 $2a<x<-a$

05 전략 주어진 조건을 이용하여 이차부등식을 세운다.

풀이 물체의 높이가 120 m 이상이어야 하므로

$70t-5t^2\ge 120$ ··· ❶

$t^2-14t+24\le 0$, $(t-2)(t-12)\le 0$

$\therefore 2\le t\le 12$ ··· ❷

따라서 물체의 높이가 120 m 이상인 시간은 2초부터 12초까지이므로 10초 동안이다.

$\therefore a=10$ ··· ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 조건을 만족시키는 부등식을 세울 수 있다.	40%
❷ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

06 전략 x^2의 계수가 a이므로 $a=0$인 경우와 $a\ne 0$인 경우로 나누어 푼다.

풀이 (i) $a=0$일 때,

$-1\le 0$이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a\ne 0$일 때,

이차함수 $y=ax^2+ax+a-1$의 그래프가 위로 볼록해야 하므로

$a<0$ …… ㉠

또 이차방정식 $ax^2+ax+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a(a-1)\le 0$

$-3a^2+4a\le 0$, $a(3a-4)\ge 0$

$\therefore a\le 0$ 또는 $a\ge \frac{4}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $a<0$

(i), (ii)에서 $a\le 0$

따라서 구하는 a의 최댓값은 0이다. 답 ③

Remark▶

문제에서 이차부등식이라는 조건이 없으므로 x^2의 계수인 a를 $a=0$인 경우와 $a\ne 0$인 경우로 나누어 풀어야 한다.

07 전략 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립해야 한다.

풀이 이차함수 $y=-x^2-4x-7$의 그래프가 직선 $y=mx+m$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$-x^2-4x-7<mx+m$,

즉 $x^2+(m+4)x+m+7>0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+(m+4)x+m+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m+4)^2-4(m+7)<0$

$m^2+4m-12<0$, $(m+6)(m-2)<0$

$\therefore -6<m<2$

따라서 $\alpha=-6$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=-12$

답 -12

08 전략 제한된 범위에서 부등식 $f(x)>0$이 항상 성립할 때 조건에 맞도록 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $0\le x\le 3$에서 이차함수 $y=x^2-x$의 그래프가 직선 $y=-3x-a^2+5$보다 항상 위쪽에 있으려면 $0\le x\le 3$에서 이차부등식

$x^2-x>-3x-a^2+5$,

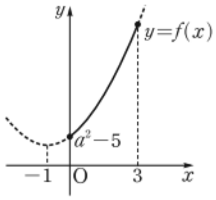
즉 $x^2+2x+a^2-5>0$

이 항상 성립해야 한다.

$f(x)=x^2+2x+a^2-5$라 하면

$f(x)=(x+1)^2+a^2-6$

$0\le x\le 3$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(x)$의 최솟값이 $f(0)$이고 $f(0)>0$이어야 하므로

$a^2-5>0$, $(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})>0$

$\therefore a<-\sqrt{5}$ 또는 $a>\sqrt{5}$

답 $a<-\sqrt{5}$ 또는 $a>\sqrt{5}$

09 전략 $a\le f(x)<b$의 해는 연립부등식 $\begin{cases} a\le f(x) \\ f(x)<b \end{cases}$의 해와 같다.

풀이 (i) $2\le x^2-x$에서 $x^2-x-2\ge 0$

$(x+1)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 2$ ...... ㉠ ⋯ ❶

(ii) $x^2-x<6$에서 $x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$ ...... ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-2<x\le -1$ 또는 $2\le x<3$ ⋯ ❸

따라서 정수 x는 -1, 2이므로 구하는 합은

$-1+2=1$ ⋯ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ $2\le x^2-x$의 해를 구할 수 있다.	30%
❷ $x^2-x<6$의 해를 구할 수 있다.	30%
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20%
❹ 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

10 전략 $f(x)>0$과 $f(x)\le g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위를 수직선 위에 나타낸다.

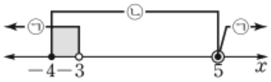
풀이 $0<f(x)\le g(x)$에서 $\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)\le g(x) \end{cases}$

주어진 그림에서 부등식 $f(x)>0$의 해는

$x<-3$ 또는 $x>5$ ...... ㉠

또 주어진 그림에서 $f(x)\le g(x)$의 해는

$-4\le x\le 5$ ...... ㉡



㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는

$-4\le x<-3$

답 ③

11 전략 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 (판별식)>0이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax-2a+5=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식을 D_1이라 할 때,

$D_1=a^2-4(-2a+5)>0$

$a^2+8a-20>0$, $(a+10)(a-2)>0$

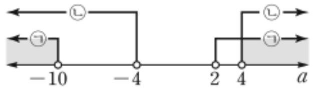
$\therefore a<-10$ 또는 $a>2$ ...... ㉠ ⋯ ❶

또 이차방정식 $x^2-(a-4)x-2a+8=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식을 D_2라 할 때,

$D_2=\{-(a-4)\}^2-4(-2a+8)>0$

$a^2-16>0$, $(a+4)(a-4)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>4$ ...... ㉡ ⋯ ❷



㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$a<-10$ 또는 $a>4$ ⋯➌

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다. ⋯➍

답 5

채점 기준	비율
➊ $x^2+ax-2a+5=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
➋ $x^2-(a-4)x-2a+8=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
➌ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
➍ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

12 전략 부등식의 좌변을 인수분해한 후, a의 값의 범위를 나누어 부등식을 푼다.

풀이 $x^2-2ax+2a-1<0$에서

$(x-1)(x-2a+1)<0$

(i) $2a-1>1$, 즉 $a>1$일 때,

$1<x<2a-1$

(ii) $2a-1=1$, 즉 $a=1$일 때,

주어진 부등식은 $(x-1)^2<0$이므로 해는 없다.

(iii) $2a-1<1$, 즉 $a<1$일 때,

$2a-1<x<1$

그런데 $x=4$가 이 부등식의 해이므로

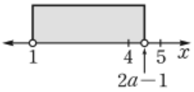
$1<x<2a-1$ ⋯⋯ ㉠ ⋯➊

이때 ㉠을 만족시키는 가장 큰 정수가 4이므로

$4<2a-1\le5$ ⋯➋

$5<2a\le6$

$\therefore \frac{5}{2}<a\le3$ ⋯➌



답 $\frac{5}{2}<a\le3$

채점 기준	비율
➊ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	50%
➋ $2a-1$의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
➌ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

13 전략 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면 $a=0$, $b=0$, $c>0$ 또는 $a>0$, $b^2-4ac<0$이어야 한다.

풀이 주어진 부등식의 해가 없으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$(m-2)x^2-2(m-2)x+3>0$ ⋯⋯ ㉠

이 성립해야 한다.

(i) $m-2=0$, 즉 $m=2$일 때,

$3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ii) $m-2\ne0$, 즉 $m\ne2$일 때,

이차함수 $y=(m-2)x^2-2(m-2)x+3$의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$m-2>0$ $\quad\therefore m>2$ ⋯⋯ ㉡

또 이차방정식 $(m-2)x^2-2(m-2)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(m-2)\}^2-3(m-2)<0$

$m^2-7m+10<0$, $\quad (m-2)(m-5)<0$

$\therefore 2<m<5$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢에서 공통부분을 구하면 $\quad 2<m<5$

(i), (ii)에서 $\quad 2\le m<5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 m은 2, 3, 4의 3개이다.

답 ③

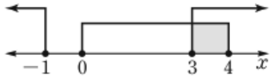
14 전략 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$임을 이용한다.

풀이 $x^2\le4x$에서 $\quad x^2-4x\le0$

$x(x-4)\le0$ $\quad\therefore 0\le x\le4$

$x^2-3\ge2x$에서 $\quad x^2-2x-3\ge0$

$(x+1)(x-3)\ge0$ $\quad\therefore x\le-1$ 또는 $x\ge3$



두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$3\le x\le4$

해가 $3\le x\le4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-3)(x-4)\le0$ $\quad\therefore x^2-7x+12\le0$

양변에 -2를 곱하면

$-2x^2+14x-24\ge0$

이 부등식이 $ax^2+bx-24\ge0$과 같으므로

$a=-2$, $b=14$

$\therefore a+b=12$

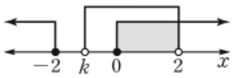
답 ⑤

15 전략 부등식 $x^2+2x\ge0$과 주어진 해를 이용하여 부등식 $x^2+px+q<0$의 해를 유추한다.

풀이 $x^2+2x\ge0$에서 $\quad x(x+2)\ge0$

$\therefore x\le-2$ 또는 $x\ge0$

주어진 연립부등식의 해가 $0\le x<2$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 부등식 $x^2+px+q<0$의 해가 $k<x<2$이어야 한다. (단, $-2\le k<0$)



즉 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 k, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$k+2=-p$, $2k=q$

$\therefore p=-k-2$, $q=2k$

이것을 $|p|+|q|=3$에 대입하면

$|-k-2|+|2k|=3$, $\quad |k+2|+|2k|=3$

$-2\le k<0$이므로

$k+2-2k=3 \quad \therefore k=-1$

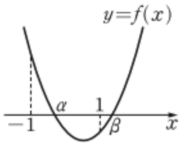
따라서 $p=-1$, $q=-2$이므로

$pq=2$ 답 ②

16 전략 $f(x)=x^2-mx+2m-4$라 하고, 조건을 만족시키도록 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 $f(x)=x^2-mx+2m-4$

라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β에 대하여 $-1<\alpha<1<\beta$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(-1)=1+m+2m-4>0$에서

$3m-3>0 \quad \therefore m>1$

(ii) $f(1)=1-m+2m-4<0$에서

$m-3<0 \quad \therefore m<3$

(i), (ii)에서 $\quad 1<m<3$ 답 $1<m<3$

17 전략 삼각형이 되려면 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하고, 세 내각이 모두 예각이려면 가장 긴 변의 대각이 예각임을 이용하여 식을 세운다.

풀이 세 실수 x, $x+2$, $x+4$가 삼각형의 세 변의 길이가 되려면 $x>0$이고

$x+(x+2)>x+4$

$\therefore x>2$ ······ ㉠

이 삼각형이 예각삼각형이 되려면

$x^2+(x+2)^2>(x+4)^2$

$x^2-4x-12>0$, $\quad (x+2)(x-6)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>6$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $\quad x>6$ 답 $x>6$

Remark▶

삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\le b\le c)$일 때

① $a^2+b^2>c^2$ ➡ △ABC는 예각삼각형

② $a^2+b^2=c^2$ ➡ △ABC는 ∠C=90°인 직각삼각형

③ $a^2+b^2<c^2$ ➡ △ABC는 ∠C>90°인 둔각삼각형

18 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 교점의 y좌표를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 $y=x+1$에서

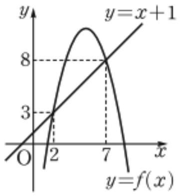
$y=3$일 때, $\quad x=2$

$y=8$일 때, $\quad x=7$

이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 교점의 좌표는

(2, 3), (7, 8)

따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)-x-1>0$에서

$f(x)>x+1$

이므로 주어진 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x+1$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

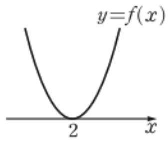
$\therefore 2<x<7$

따라서 정수 x는 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$3+4+5+6=18$ 답 ⑤

19 전략 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 조건 (나)에서 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\ne2$인 모든 실수이려면 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 x축과 $x=2$에서 접해야 한다.



따라서 $f(x)=a(x-2)^2$ $(a>0)$이라 하면 조건 (가)에서 $f(0)=8$이므로

$a\cdot(-2)^2=8 \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(x-2)^2$이므로

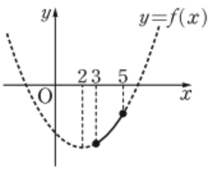
$f(5)=2\cdot9=18$ 답 ④

20 전략 주어진 부등식의 좌변을 $f(x)$로 놓고 주어진 범위에서 조건을 만족시키도록 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)=x^2-4x-4k+3$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2-4k-1$

$3\le x\le5$에서 $f(x)\le0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(x)$의 최댓값이 $f(5)$이고 $f(5)\le 0$이어야 하므로

$f(5)=8-4k\le 0$

$\therefore\ k\ge 2$

따라서 k의 최솟값은 2이다.

답 ②

21 전략 각 부등식을 풀어 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타낸다.

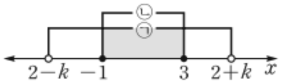
풀이 $|x-2|<k$에서 $\quad -k<x-2<k$

$\therefore\ 2-k<x<2+k \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2-2x-3\le 0$에서 $\quad (x+1)(x-3)\le 0$

$\therefore\ -1\le x\le 3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 만족시키는 정수 x가 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이므로 다음 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) $2-k<-1$에서 $\quad k>3$

(ⅱ) $3<2+k$에서 $\quad k>1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad k>3$

따라서 구하는 양의 정수 k의 최솟값은 4이다.

답 4

22 전략 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분이 생길 조건을 찾는다.

풀이 $x^2+4x-21\le 0$에서

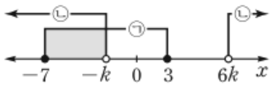
$(x+7)(x-3)\le 0$

$\therefore\ -7\le x\le 3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2-5kx-6k^2>0$에서

$(x+k)(x-6k)>0$

$k>0$이므로 $\quad x<-k$ 또는 $x>6k \quad \cdots\cdots$ ㉡



㉠, ㉡에서 해가 존재하려면 위의 그림과 같아야 하므로 k의 값의 범위는

$-7<-k<0$

$\therefore\ 0<k<7$

따라서 양의 정수 k의 개수는 6이다.

답 ③

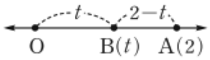
Ⅳ. 도형의 방정식

11 평면좌표

유제

본책 289~307쪽

098-❶ 점 B의 좌표를 $t\ (0<t<2)$라 하면



$\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}$에서

$t:(2-t)=2:t$

$t^2=2(2-t), \quad t^2+2t-4=0$

$\therefore\ t=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $0<t<2$이므로 $\quad t=-1+\sqrt{5}$

따라서 점 B의 좌표는 $-1+\sqrt{5}$이다.

답 $-1+\sqrt{5}$

098-❷ $\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\quad \overline{\mathrm{AC}}^2=4\overline{\mathrm{BC}}^2$

즉 $(1+7)^2+(7-a)^2=4\{(1+1)^2+(7-3)^2\}$이므로

$a^2-14a+33=0, \quad (a-3)(a-11)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=11$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$3+11=14$

답 14

098-❸ 두 점 A, B 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{0-(t-2)\}^2+(2t-1-0)^2}$

$=\sqrt{t^2-4t+4+4t^2-4t+1}$

$=\sqrt{5t^2-8t+5}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}\le 3$이므로

$\sqrt{5t^2-8t+5}\le 3$

양변을 제곱하면

$5t^2-8t+5\le 9, \quad 5t^2-8t-4\le 0$

$(5t+2)(t-2)\le 0 \quad \therefore\ -\dfrac{2}{5}\le t\le 2$

따라서 실수 t의 최댓값은 2이고, 최솟값은 $-\dfrac{2}{5}$이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: $-\dfrac{2}{5}$

099-❶ 점 P가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 (a, a)라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(a-2)^2+(a+5)^2=(a-4)^2+(a+1)^2$

$2a^2+6a+29=2a^2-6a+17$

$12a=-12 \quad \therefore\ a=-1$

$\therefore\ \mathrm{P}(-1, -1)$

답 $(-1, -1)$

099-❷ 점 P가 x축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$(a-2)^2+4^2=(a-6)^2+(-8)^2$$
$$a^2-4a+20=a^2-12a+100$$
$$8a=80 \qquad \therefore a=10 \qquad \therefore \text{P}(10,\ 0)$$

또 점 Q가 y축 위의 점이므로 점 Q의 좌표를 $(0,\ b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$$(-2)^2+(b+4)^2=(-6)^2+(b-8)^2$$
$$b^2+8b+20=b^2-16b+100$$
$$24b=80 \qquad \therefore b=\frac{10}{3} \qquad \therefore \text{Q}\left(0,\ \frac{10}{3}\right)$$
$$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-10)^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2}=\frac{10\sqrt{10}}{3}$$

답 $\dfrac{10\sqrt{10}}{3}$

100-❶ 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 제곱을 각각 구하면

$$\overline{AB}^2=(5+1)^2+2^2=40$$
$$\overline{BC}^2=(a-5)^2+(-2-2)^2=a^2-10a+41$$
$$\overline{CA}^2=(-1-a)^2+2^2=a^2+2a+5$$

삼각형 ABC가 $\angle C=90°$인 직각삼각형이려면 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이어야 하므로

$$a^2-10a+41+a^2+2a+5=40$$
$$a^2-4a+3=0, \qquad (a-1)(a-3)=0$$
$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=3$$

답 1, 3

101-❶ 점 P가 y축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$$
$$=\{2^2+(a-3)^2\}+\{(-1)^2+(a+7)^2\}$$
$$=2a^2+8a+63$$
$$=2(a+2)^2+55$$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=-2$일 때 최솟값 55를 갖고, 이때의 점 P의 좌표는 $(0,\ -2)$이다.

답 최솟값: 55, 점 P의 좌표: $(0,\ -2)$

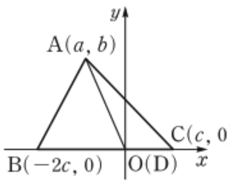
101-❷ 점 P가 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ a+3)$이라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$$
$$=\{(a-4)^2+(a+5)^2\}+\{(a-1)^2+(a+8)^2\}$$
$$=4a^2+16a+106$$
$$=4(a+2)^2+90$$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=-2$일 때 최솟값 90을 가지므로 구하는 점 P의 좌표는 $(-2,\ 1)$이다.

답 $(-2,\ 1)$

102-❶ 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 정하면 점 D는 원점이 된다.



$\text{A}(a,\ b)$, $\text{C}(c,\ 0)$이라 하면 $\text{B}(-2c,\ 0)$이므로

$$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=\{(a+2c)^2+b^2\}+2\{(a-c)^2+b^2\}$$
$$=3(a^2+b^2+2c^2)$$
$$3\overline{AD}^2+6\overline{CD}^2=3(a^2+b^2)+6c^2$$
$$=3(a^2+b^2+2c^2)$$
$$\therefore \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3\overline{AD}^2+6\overline{CD}^2$$

답 풀이 참조

103-❶ 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot1+2\cdot(-2)}{1+2},\ \frac{1\cdot(-3)+2\cdot6}{1+2}\right),$$

즉 $(-1,\ 3)$

점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{4\cdot1-3\cdot(-2)}{4-3},\ \frac{4\cdot(-3)-3\cdot6}{4-3}\right),$$

즉 $\text{Q}(10,\ -30)$

$$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(10+1)^2+(-30-3)^2}$$
$$=\sqrt{11^2+9\cdot11^2}$$
$$=11\sqrt{10}$$

답 $11\sqrt{10}$

103-❷ 선분 AB를 $3:4$로 내분하는 점의 x좌표는 0이므로

$$\frac{3\cdot12+4\cdot a}{3+4}=0$$
$$36+4a=0 \qquad \therefore a=-9$$

답 -9

104-❶ $\overline{AB}=3\overline{BC}$에서

$$\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$$

즉 점 C는 선분 AB를 $4:1$로 외분하는 점이므로

$$a=\frac{4\cdot1-1\cdot4}{4-1}=0$$
$$b=\frac{4\cdot5-1\cdot2}{4-1}=6$$
$$\therefore a+b=6$$

답 6

다른 풀이 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$에서 점 B는 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점이므로

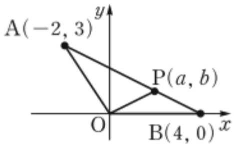
$$\frac{3\cdot a+1\cdot4}{3+1}=1,\ \frac{3\cdot b+1\cdot2}{3+1}=5$$
$$\therefore a=0,\ b=6$$
$$\therefore a+b=6$$

104-② $3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$이고, 점 C의 x좌표가 음수이므로 점 C는 선분 AB를 $5:3$으로 외분하는 점이다.
따라서 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{5\cdot(-6)-3\cdot 2}{5-3}, \frac{5\cdot 7-3\cdot 5}{5-3}\right),\ 즉\ (-18,\ 10)$$

답 $(-18,\ 10)$

105-① 오른쪽 그림에서



$\triangle OAP=2\triangle OBP$이므로

$\overline{AP}=2\overline{BP}$

$\therefore\ \overline{AP}:\overline{BP}=2:1$

즉 점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$a=\frac{2\cdot 4+1\cdot(-2)}{2+1}=2$$

$$b=\frac{2\cdot 0+1\cdot 3}{2+1}=1$$

$\therefore\ a-b=1$

답 1

106-① 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.
$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{3+4}{2}\right),\ 즉\left(\frac{a+1}{2}, \frac{7}{2}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+3}{2}, \frac{b+3}{2}\right),\ 즉\left(-\frac{1}{2}, \frac{b+3}{2}\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{a+1}{2}=-\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}=\frac{b+3}{2}$$

$\therefore\ a=-2,\ b=4$

답 $a=-2,\ b=4$

106-② 마름모의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.
$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5-3}{2}, \frac{4+b}{2}\right),\ 즉\left(1, \frac{4+b}{2}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{a+7}{2}\right),\ 즉\left(1, \frac{a+7}{2}\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{4+b}{2}=\frac{a+7}{2} \qquad \therefore\ b=a+3 \quad \cdots\cdots ㉢$$

또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로
$\overline{AB}=\overline{AD}$에서 $\quad \overline{AB}^2=\overline{AD}^2$

$(1-5)^2+(a-4)^2=(1-5)^2+(7-4)^2$

$a^2-8a+7=0$

$(a-1)(a-7)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=7$

그런데 $a=7$이면 두 점 B, D가 일치하므로 $\quad a\neq 7$

$\therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉢에 대입하면

$b=4$

답 $a=1,\ b=4$

Remark▶ 마름모의 성질

① 네 변의 길이가 모두 같다.
② 두 대각선이 서로를 수직이등분한다.

107-① 변 AB를 $1:2$로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot 1+2\cdot(-2)}{1+2}, \frac{1\cdot 2+2\cdot 8}{1+2}\right),$$

즉 $(-1,\ 6)$

변 BC를 $1:2$로 내분하는 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot 4+2\cdot 1}{1+2}, \frac{1\cdot(-7)+2\cdot 2}{1+2}\right),$$

즉 $(2,\ -1)$

변 CA를 $1:2$로 내분하는 점 F의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 4}{1+2}, \frac{1\cdot 8+2\cdot(-7)}{1+2}\right),$$

즉 $(2,\ -2)$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+2+2}{3}, \frac{6+(-1)+(-2)}{3}\right),$$

즉 $(1,\ 1)$

답 $(1,\ 1)$

다른 풀이 삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+1+4}{3}, \frac{8+2+(-7)}{3}\right),\ 즉\ (1,\ 1)$$

Remark▶

삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA를 각각 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 차례로 D, E, F라 할 때, 삼각형 ABC와 삼각형 DEF의 무게중심은 일치한다.

107-② $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$이라 하면 변 AB의 중점의 좌표가 $(3,\ -1)$이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=3,\ \frac{y_1+y_2}{2}=-1$$

$$\therefore\ x_1+x_2=6,\ y_1+y_2=-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

변 BC의 중점의 좌표가 $(4,\ 6)$이므로

$\frac{x_2+x_3}{2}=4,\ \frac{y_2+y_3}{2}=6$

$\therefore\ x_2+x_3=8,\ y_2+y_3=12$ …… ㉡

변 CA의 중점의 좌표가 $(8,\ 7)$이므로

$\frac{x_3+x_1}{2}=8,\ \frac{y_3+y_1}{2}=7$

$\therefore\ x_3+x_1=16,\ y_3+y_1=14$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(x_1+x_2+x_3)=30,\ 2(y_1+y_2+y_3)=24$

$\therefore\ x_1+x_2+x_3=15,\ y_1+y_2+y_3=12$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$, 즉 $(5,\ 4)$

답 $(5,\ 4)$

다른 풀이 $D(3,\ -1)$, $E(4,\ 6)$, $F(8,\ 7)$이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 삼각형 DEF의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{3+4+8}{3},\ \frac{-1+6+7}{3}\right)$, 즉 $(5,\ 4)$

108-❶ 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{AP}^2-\overline{BP}^2=1$에서

$\{(x-2)^2+(y-1)^2\}-\{(x-3)^2+(y+2)^2\}=1$

$(x^2-4x+4+y^2-2y+1)$

$-(x^2-6x+9+y^2+4y+4)=1$

$\therefore\ 2x-6y-9=0$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$2x-6y-9=0$

답 $2x-6y-9=0$

중단원 연습 문제

본책 308~312쪽

01 3	02 ③	03 풀이 참조		04 ③
05 8	06 풀이 참조		07 -3	
08 $(2,\ -9)$		09 30	10 $(1,\ 14)$	
11 ②	12 ④	13 $4\sqrt{5}$	14 ④	15 ③
16 ③	17 $6+3\sqrt{3}$		18 ⑤	19 30
20 ④	21 13	22 ⑤	23 ③	

01 **전략** 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(2-a)^2+(a-4)^2}$

$=\sqrt{2a^2-12a+20}$

$=\sqrt{2(a-3)^2+2}$

따라서 $a=3$일 때 $\overline{AB}$의 길이가 최소이다. 답 3

02 **전략** 점 P가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ a+1)$로 놓고 $\overline{AP}=\overline{BP}$임을 이용한다.

풀이 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$b=a+1$ …… ㉠

즉 점 P의 좌표가 $(a,\ a+1)$이고, $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$a^2+(a+1-5)^2=(a-2)^2+(a+1-1)^2$

$2a^2-8a+16=2a^2-4a+4$

$-4a=-12\quad \therefore\ a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore\ a^2+b^2=3^2+4^2=25$ 답 ③

03 **전략** 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 세 변의 길이의 제곱을 각각 구한다.

풀이 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 제곱을 각각 구하면

$\overline{AB}^2=a^2+(-b)^2=a^2+b^2$,

$\overline{BC}^2=b^2+(a-b+b)^2=a^2+b^2$,

$\overline{CA}^2=(-a-b)^2+(-a+b)^2$

$=2a^2+2b^2$

이므로 $\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

또 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$\overline{AB}=\overline{BC}$ ($\because\ \overline{AB}>0,\ \overline{BC}>0$)

따라서 삼각형 ABC는 $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형이다.

답 $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형

04 **전략** 점 P가 x축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$으로 놓고 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 구한다.

풀이 점 P가 x축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2=a^2+(-1)^2=a^2+1$

$\overline{BP}^2=(a-2)^2+(-k)^2=a^2-4a+4+k^2$

$\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2a^2-4a+5+k^2$

$=2(a-1)^2+3+k^2$

즉 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=1$일 때 최솟값 $3+k^2$을 갖는다.

따라서 $3+k^2=12$이므로 $k^2=9$

$\therefore\ k=3$ ($\because\ k>0$) 답 ③

05 (전략) 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

(풀이) 삼각형 ABC의 외심을 P(3, 1)이라 하면 점 P에서 세 점 A, B, C에 이르는 거리가 모두 같으므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$3^2+1^2=(3-a)^2+1^2$

$10=9-6a+a^2+1, \qquad a^2-6a=0$

$a(a-6)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=6$

그런데 $a=0$이면 점 B가 점 A와 일치하므로

$a\neq0$

$\therefore a=6$ ··· ❶

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$3^2+1^2=3^2+(1-b)^2$

$10=9+1-2b+b^2, \qquad b^2-2b=0$

$b(b-2)=0$

$\therefore b=0$ 또는 $b=2$

그런데 $b=0$이면 점 C가 점 A와 일치하므로

$b\neq0$

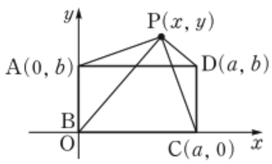
$\therefore b=2$ ··· ❷

$\therefore a+b=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

06 (전략) 도형을 좌표평면 위에 나타낸 후, 좌표를 이용하여 각 선분의 길이의 제곱을 구한다.



(풀이) 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 정하면 점 B는 원점이 된다. 이때 직사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 $(0, b)$, $(a, 0)$이라 하면 꼭짓점 D의 좌표는 (a, b)이다.

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

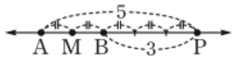
$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=x^2+(y-b)^2+(x-a)^2+y^2$

$\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

$\therefore \overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$

답 풀이 참조

07 (전략) 주어진 조건을 만족시키도록 수직선 위에 네 점 A, B, M, P를 나타내어 본다.



(풀이) 선분 AB의 중점 M과 선분 AB를 5 : 3으로 외분하는 점 P를 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같다.

즉 점 M은 선분 PB를 4 : 1로 외분하는 점이므로

$a=4, b=1$

$\therefore b-a=-3$

답 -3

08 (전략) 선분의 내분점을 구하는 공식을 이용하여 먼저 b의 값을 구한다.

(풀이) 점 P의 y좌표가 -3이므로

$\dfrac{b\cdot(-5)+1\cdot3}{b+1}=-3$

$-5b+3=-3b-3, \qquad -2b=-6$

$\therefore b=3$ ··· ❶

즉 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이고 점 P의 x좌표가 5이므로

$\dfrac{3\cdot a+1\cdot8}{3+1}=5, \qquad 3a+8=20, \qquad 3a=12$

$\therefore a=4$ ··· ❷

따라서 점 Q는 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점이므로 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{3\cdot4-1\cdot8}{3-1}, \dfrac{3\cdot(-5)-1\cdot3}{3-1}\right)$,

즉 $(2, -9)$ ··· ❸

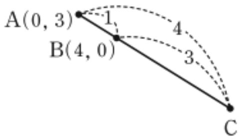
답 $(2, -9)$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	20%

09 (전략) $3\overline{AB}=\overline{BC}$를 만족시키도록 그림을 그려 점 C의 좌표를 구한다.

(풀이) $3\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\qquad \overline{AB}:\overline{BC}=1:3$

(i) 점 C가 점 B의 방향으로 그은 선분 AB의 연장선 위에 있을 때,



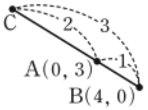
오른쪽 그림에서 점 C는 선분 AB를 4 : 3으로 외분하는 점이므로 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{4\cdot4-3\cdot0}{4-3}, \dfrac{4\cdot0-3\cdot3}{4-3}\right)$,

즉 $(16, -9)$

(ⅱ) 점 C가 점 A의 방향으로 그은 선분 AB의 연장선 위에 있을 때,

오른쪽 그림에서 점 C는 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점이므로 점 C의 좌표는



$\left(\dfrac{2\cdot4-3\cdot0}{2-3}, \dfrac{2\cdot0-3\cdot3}{2-3}\right)$,

즉 $(-8, 9)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 점 C의 좌표는

$(16, -9)$ 또는 $(-8, 9)$

이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(-8-16)^2+(9+9)^2}=\sqrt{900}=30$

답 30

10 전략 두 점 B, C의 좌표를 각각 (a, b), (c, d)로 놓고, 선분의 중점을 구하는 공식을 이용한다.

풀이 점 B의 좌표를 (a, b)라 하면 변 AB의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{1+a}{2}, \dfrac{2+b}{2}\right)$이므로

$\dfrac{1+a}{2}=5$, $\dfrac{2+b}{2}=3$

$1+a=10$, $2+b=6$

$\therefore a=9, b=4$

$\therefore$ B$(9, 4)$ ··· ❶

또 점 C의 좌표를 (c, d)라 하면 변 BC의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{9+c}{2}, \dfrac{4+d}{2}\right)$이므로

$\dfrac{9+c}{2}=9$, $\dfrac{4+d}{2}=10$

$9+c=18$, $4+d=20$

$\therefore c=9, d=16$

$\therefore$ C$(9, 16)$ ··· ❷

평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{1+9}{2}, \dfrac{2+16}{2}\right)$, 즉 $(5, 9)$ ······ ㉠

점 D의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{9+x}{2}, \dfrac{4+y}{2}\right)$ ······ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$5=\dfrac{9+x}{2}$, $9=\dfrac{4+y}{2}$

$10=9+x$, $18=4+y$

$\therefore x=1, y=14$

따라서 점 D의 좌표는 $(1, 14)$이다. ··· ❸

답 $(1, 14)$

채점 기준	비율
❶ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40%

11 전략 세 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 △ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$임을 이용한다.

풀이 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{0+x_1+x_2}{3}, \dfrac{0+y_1+y_2}{3}\right)$,

즉 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{3}, \dfrac{y_1+y_2}{3}\right)$

이때 무게중심의 좌표가 $(-4, 8)$이므로

$\dfrac{x_1+x_2}{3}=-4$, $\dfrac{y_1+y_2}{3}=8$

$\therefore x_1+x_2=-12, y_1+y_2=24$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$, 즉 $(-6, 12)$

답 ②

다른 풀이 삼각형의 무게중심을 G$(-4, 8)$이라 하면 선분 AB의 중점은 $\overline{OG}$를 $3:1$로 외분하는 점이다.

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{3\cdot(-4)-1\cdot0}{3-1}, \dfrac{3\cdot8-1\cdot0}{3-1}\right)$,

즉 $(-6, 12)$

12 전략 구하는 자취의 방정식 위의 점의 좌표를 (x, y)로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 x와 y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P는 직선 $x+2y-7=0$ 위의 점이므로

$a+2b-7=0$ ······ ㉠

선분 AP를 $1:3$으로 외분하는 점을 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{1\cdot a-3\cdot5}{1-3}=-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{15}{2}$

$y=\dfrac{1\cdot b-3\cdot3}{1-3}=-\dfrac{1}{2}b+\dfrac{9}{2}$

$\therefore a=-2x+15, b=-2y+9$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-2x+15+2(-2y+9)-7=0$

$\therefore x+2y-13=0$

따라서 구하는 자취의 방정식은 $x+2y-13=0$이다.

답 ④

13 전략 $x^2-xy-2y^2=0$의 좌변을 인수분해하여 x를 y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x^2-xy-2y^2=0$에서

$(x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$를 $x^2+2xy-3y^2=20$에 대입하면

$y^2-2y^2-3y^2=20$

$\therefore y^2=-5$

이를 만족시키는 실수 x, y는 존재하지 않는다.

(ii) $x=2y$를 $x^2+2xy-3y^2=20$에 대입하면

$4y^2+4y^2-3y^2=20, \qquad y^2=4$

$\therefore y=\pm 2$

$y=\pm 2$를 $x=2y$에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 두 점 (a, b), (c, d)의 좌표는 $(4, 2)$, $(-4, -2)$이므로 구하는 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(4+4)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{5}$

답 $4\sqrt{5}$

14 전략 삼각형 PAB가 이등변삼각형이 되기 위해서는 $\overline{AP}=\overline{BP}$, $\overline{AP}=\overline{AB}$, $\overline{BP}=\overline{AB}$ 중 적어도 하나를 만족시켜야 한다.

풀이 점 P가 직선 $y=-x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, -a)$라 하고 삼각형 PAB의 세 변의 길이의 제곱을 각각 구하면

$\overline{AP}^2=(a+2)^2+(-a-6)^2$

$=a^2+4a+4+a^2+12a+36$

$=2a^2+16a+40$

$\overline{BP}^2=(a-4)^2+(-a-4)^2$

$=a^2-8a+16+a^2+8a+16$

$=2a^2+32$

$\overline{AB}^2=(4+2)^2+(4-6)^2=40$

(i) $\overline{AP}=\overline{BP}$일 때, $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$2a^2+16a+40=2a^2+32, \qquad 16a=-8$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore P\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

(ii) $\overline{AP}=\overline{AB}$일 때, $\overline{AP}^2=\overline{AB}^2$이므로

$2a^2+16a+40=40, \qquad 2a^2+16a=0$

$a(a+8)=0$

$\therefore a=-8$ 또는 $a=0$

$\therefore P(-8, 8)$ 또는 $P(0, 0)$

그런데 $P(-8, 8)$이면 세 점 A, B, P가 한 직선 위에 있으므로 삼각형이 만들어지지 않는다.

$\therefore P(0, 0)$

(iii) $\overline{BP}=\overline{AB}$일 때, $\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$이므로

$2a^2+32=40, \qquad 2a^2=8$

$a^2=4 \qquad \therefore a=\pm 2$

$\therefore P(-2, 2)$ 또는 $P(2, -2)$

이상에서 점 P의 좌표가 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

Remark▶

(ii)에서 두 점 $A(-2, 6)$, $B(4, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\dfrac{4-6}{4-(-2)}(x-4)$

$\therefore y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{16}{3}$

이 직선의 방정식에 점 $(-8, 8)$의 좌표를 대입하면

$8=-\dfrac{1}{3}\cdot(-8)+\dfrac{16}{3}$

따라서 점 $(-8, 8)$은 직선 AB 위의 점이다.

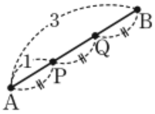
15 전략 두 점 P, Q가 $\overline{AB}$를 내분하는 점임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 점 Q는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot 1+1\cdot(-5)}{2+1}, \dfrac{2\cdot 1+1\cdot 4}{2+1}\right)$, 즉 $(-1, 2)$

따라서 점 Q는 제2사분면 위의 점이다.

ㄴ. 두 점 A, B에 대하여 점 P와 Q를 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 점 A는 선분 PB를 1 : 3으로 외분하는 점이다.



ㄷ. $d(A, Q)=d(P, B)$이므로

$d(A, B)=d(A, P)+d(P, B)$

$=d(A, P)+d(A, Q)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

16 전략 점 C가 x축 위의 점이므로 점 C의 y좌표가 0임을 이용한다.

풀이 점 C가 x축 위에 있으므로 점 C의 y좌표는 0이고, 선분 AB를 $m : n$으로 내분하므로

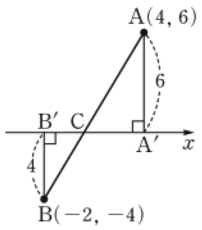
$\dfrac{m\cdot(-4)+n\cdot 6}{m+n}=0$

따라서 $-4m+6n=0$이므로 $\qquad 2m=3n$

$\therefore \dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{2}$

답 ③

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면



$\triangle ACA' \backsim \triangle BCB'$

이므로

$\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AA'} : \overline{BB'}$

$= 6 : 4 = 3 : 2$

$\therefore \dfrac{m}{n} = \dfrac{3}{2}$

17

전략 정삼각형의 외접원의 중심, 즉 외심은 무게중심과 일치함을 이용한다.

풀이 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$

$\overline{AB} = \overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$이므로

$1^2 + (-1)^2 = (a-1)^2 + b^2$

$2 = a^2 - 2a + 1 + b^2$

$\therefore a^2 - 2a + b^2 - 1 = 0$ ...... ㉠

$\overline{BC} = \overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$이므로

$(a-1)^2 + b^2 = (-a)^2 + (1-b)^2$

$a^2 - 2a + 1 + b^2 = a^2 + 1 - 2b + b^2$

$\therefore b = a$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2a^2 - 2a - 1 = 0$

$\therefore a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ ($\because a > 0$)

따라서 $b = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$이므로

$C\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ ··· ❶

정삼각형의 외심을 P라 하면 점 P는 정삼각형의 무게중심과 일치하므로 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{1}{3}\left(0+1+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right), \dfrac{1}{3}\left(1+0+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\right)$,

즉 $\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$

따라서 외접원의 넓이는 $\pi\overline{AP}^2$이므로

$\pi\left\{\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6} - 1\right)^2\right\} = \dfrac{2}{3}\pi$

$\therefore p = 3, q = 2$ ··· ❷

$\therefore abpq = 6 + 3\sqrt{3}$ ··· ❸

답 $6+3\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $abpq$의 값을 구할 수 있다.	10%

Remark▶ 삼각형의 무게중심, 외심, 내심의 위치

- 정삼각형 ➡ 무게중심, 외심, 내심이 모두 일치한다.
- 이등변삼각형 ➡ 무게중심, 외심, 내심은 모두 꼭지각의 이등분선 위에 있다.
- 직각삼각형 ➡ 외심은 빗변의 중점이다.

18

전략 복소수 $z = a + bi$의 실수부분 a가 x좌표, 허수부분 b가 y좌표임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 두 복소수 $1+3i$, $-1-i$를 나타내는 점의 좌표는 각각 $(1, 3)$, $(-1, -1)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(-1-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$

ㄴ. $z = a + bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z} = a - bi$이므로

$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi)$

$= a^2 + b^2$

따라서 복소수 $z\bar{z}$를 나타내는 점의 좌표는 $(a^2+b^2, 0)$이므로 복소수 $z\bar{z}$를 나타내는 점은 x축 위에 있다.

ㄷ. $z = a + bi$ (a, b는 실수)라 하면

$-\bar{z} = -(a-bi) = -a + bi$

이므로 두 복소수 z, $-\bar{z}$를 나타내는 점의 좌표는 각각 (a, b), $(-a, b)$이고, 이 두 점을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{a-a}{2}, \dfrac{b+b}{2}\right)$, 즉 $(0, b)$

따라서 두 복소수 z, $-\bar{z}$를 나타내는 두 점을 잇는 선분의 중점은 y축 위에 있다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

19

전략 $\overline{AP} = \overline{BP}$를 만족시키는 점 P가 직선 l 위에 있음을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $\overline{AP} = \overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$이므로

$(a-4)^2 + b^2 = a^2 + (b-2)^2$

$a^2 - 8a + 16 + b^2 = a^2 + b^2 - 4b + 4$

$-8a + 4b = -12$

$\therefore 2a - b = 3$ ...... ㉠

점 P가 직선 l 위에 있으므로

$2a + 3b = 12$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = \dfrac{21}{8}$, $b = \dfrac{9}{4}$

$\therefore 8a + 4b = 8 \cdot \dfrac{21}{8} + 4 \cdot \dfrac{9}{4} = 30$

답 30

20 (전략) 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같음을 이용한다.

(풀이) 선분 AB를 $m : n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{m\cdot 0-n\cdot 2}{m-n}, \frac{m\cdot 4-n\cdot 3}{m-n}\right)$,

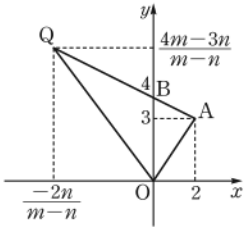
즉 $\left(\frac{-2n}{m-n}, \frac{4m-3n}{m-n}\right)$

이때 $m>n>0$이므로

$\frac{-2n}{m-n}<0$, $\frac{4m-3n}{m-n}>0$

따라서 점 Q는 제2사분면 위의 점이다.

오른쪽 그림에서



$\triangle OAB$

$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$

이므로

$\triangle OBQ$

$=\triangle OAQ-\triangle OAB$

$=16-4$

$=12$

이때 두 삼각형 OAQ, OBQ의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같고, $\overline{AQ} : \overline{BQ}=m : n$이므로

$\triangle OAQ : \triangle OBQ=m : n$

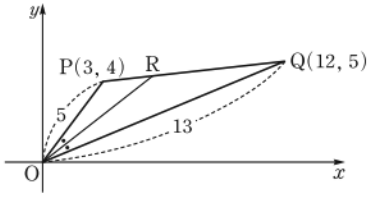
$16 : 12=m : n$, $\quad 12m=16n$

$\therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$

답 ④

21 (전략) 삼각형의 각의 이등분선의 성질을 이용한다.

(풀이) $\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{OQ}=\sqrt{12^2+5^2}=13$



위의 그림과 같이 $\angle POQ$의 이등분선과 $\overline{PQ}$의 교점을 R라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{PR} : \overline{RQ}=\overline{OP} : \overline{OQ}=5 : 13$

즉 점 R는 선분 PQ를 $5 : 13$으로 내분하는 점이므로 점 R의 x좌표는

$\frac{5\cdot 12+13\cdot 3}{5+13}=\frac{11}{2}$

따라서 $a=2$, $b=11$이므로

$a+b=13$

답 13

22 (전략) 삼각형 ABP에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용한다.

(풀이) 삼각형 ABP에서 $\overline{AP} /\!/ \overline{DC}$이므로

$\overline{BA} : \overline{DA}=\overline{BP} : \overline{CP}$

이때

$\overline{AD}=\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$,

$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-9-3)^2}=13$

이므로

$\overline{BP} : \overline{CP}=13 : 5$

따라서 점 P는 $\overline{BC}$를 $13 : 5$로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{13\cdot 4-5\cdot(-5)}{13-5}, \frac{13\cdot 0-5\cdot(-9)}{13-5}\right)$,

즉 $\left(\frac{77}{8}, \frac{45}{8}\right)$

답 ⑤

23 (전략) 두 점 (a_1, b_1), (a_2, b_2)를 이은 선분의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}\right)$임을 이용한다.

(풀이) 두 꼭짓점 B, C의 좌표를 각각 $B(a_1, b_1)$, $C(a_2, b_2)$라 하면 두 점 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$의 x좌표는 각각 $x_1=\frac{1+a_1}{2}$, $x_2=\frac{1+a_2}{2}$이므로

$2x_1=1+a_1$ ...... ㉠

$2x_2=1+a_2$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$2(x_1+x_2)=2+a_1+a_2$

$\therefore a_1+a_2=2$ ($\because x_1+x_2=2$)

또 두 점 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$의 y좌표는 각각 $y_1=\frac{6+b_1}{2}$, $y_2=\frac{6+b_2}{2}$이므로

$2y_1=6+b_1$ ...... ㉢

$2y_2=6+b_2$ ...... ㉣

㉢+㉣을 하면

$2(y_1+y_2)=12+b_1+b_2$

$\therefore b_1+b_2=-4$ ($\because y_1+y_2=4$)

이때 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+a_1+a_2}{3}, \frac{6+b_1+b_2}{3}\right)$

이므로

$\left(\frac{1+2}{3}, \frac{6-4}{3}\right)$, 즉 $\left(1, \frac{2}{3}\right)$

답 ③

Ⅳ. 도형의 방정식

12 직선의 방정식

유제 본책 318~346쪽

109-❶ 선분 AB의 중점의 좌표는

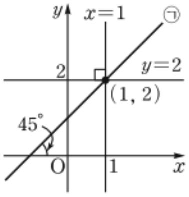
$\left(\dfrac{5+(-1)}{2},\ \dfrac{-3+5}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 1)$

따라서 점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-1=-1\cdot(x-2)$

$\therefore\ y=-x+3$ 　　답 $y=-x+3$

109-❷ 두 직선 $x=1$, $y=2$는 서로 수직이고 점 $(1,\ 2)$에서 만난다. 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $x=1$, $y=2$가 이루는 각을 이등분하고 기울기가 양수인 직선을 ㉠이라 하면 직선 ㉠이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기는 45°이므로 직선 ㉠의 기울기는



$\tan 45^\circ=1$

따라서 기울기가 1이고 점 $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=1\cdot(x-1)$

$\therefore\ y=x+1$ 　　답 $y=x+1$

110-❶ 두 점 $(2,\ -1)$, $(-4,\ 7)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y-(-1)=\dfrac{7-(-1)}{-4-2}(x-2)$

$\therefore\ y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}$

직선 l이 두 점 $(a,\ 3)$, $(5,\ b)$를 지나므로

$3=-\dfrac{4}{3}a+\dfrac{5}{3}$, $b=-\dfrac{4}{3}\cdot5+\dfrac{5}{3}$

$\therefore\ a=-1,\ b=-5$

$\therefore\ a+b=-6$ 　　답 -6

110-❷ x절편이 -3, y절편이 1인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{1}=1$ 　　$\therefore\ y=\dfrac{x}{3}+1$

이 직선이 점 $(12,\ a)$를 지나므로

$a=\dfrac{12}{3}+1=5$ 　　답 5

111-❶ 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{-8-(-4)}{k-4}=\dfrac{(2k-2)-(-4)}{1-4}$

$\dfrac{2}{k-4}=\dfrac{k+1}{3}$, 　　$(k-4)(k+1)=6$

$k^2-3k-10=0$, 　　$(k+2)(k-5)=0$

$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=5$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+5=3$ 　　답 3

Remark▶

k에 대한 이차방정식 $k^2-3k-10=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계를 이용하면 k의 값을 직접 구하지 않고 k의 값의 합이 3임을 알 수 있다.

111-❷ 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있어야 하므로 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 한다. 즉

$\dfrac{-2-(1-3a)}{2-(-4)}=\dfrac{1-(-2)}{a-2}$

$\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{3}{a-2}$

$(a-1)(a-2)=6$, 　　$a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$

따라서 두 점 $\mathrm{B}(2,\ -2)$, $\mathrm{C}(4,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-2)=\dfrac{1-(-2)}{4-2}(x-2)$

$\therefore\ y=\dfrac{3}{2}x-5$ 　　답 $y=\dfrac{3}{2}x-5$

112-❶ $ab=0$에서

$a=0$ 또는 $b=0$

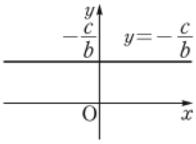
그런데 $bc<0$이므로 $b\neq0$이다.

$\therefore\ a=0$

따라서 주어진 직선의 방정식은 $by+c=0$이므로

$y=-\dfrac{c}{b}$

이때 $bc<0$에서 $-\dfrac{c}{b}>0$이므로 직선 $ax+by+c=0$은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면과 제2사분면을 지난다.



답 제1사분면, 제2사분면

112-❷ 주어진 직선 $ax+by+c=0$의 개형에서

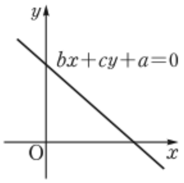
$(x절편)=-\dfrac{c}{a}>0$ 　　…… ㉠

$(y\text{절편})=-\dfrac{c}{b}<0$ …… ㉡

$c\neq0$이므로 $bx+cy+a=0$에서

$y=-\dfrac{b}{c}x-\dfrac{a}{c}$

㉡에서 $-\dfrac{b}{c}<0$이고, ㉠에서 $-\dfrac{a}{c}>0$이므로 직선 $bx+cy+a=0$의 기울기는 음수, y절편은 양수이다. 따라서 직선 $bx+cy+a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



답 제3사분면

다른 풀이 $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

주어진 직선의 개형에서 $-\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}<0$이므로

$a>0$, $b<0$, $c<0$ 또는 $a<0$, $b>0$, $c>0$

$c\neq0$이므로 $bx+cy+a=0$에서

$y=-\dfrac{b}{c}x-\dfrac{a}{c}$ …… ㉢

$-\dfrac{b}{c}<0$, $-\dfrac{a}{c}>0$이므로 직선 ㉢의 기울기는 음수이고, y절편은 양수이다.

따라서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

113-❶ (1) y절편이 1인 직선의 방정식을 $y=mx+1$이라 하면 이 직선이 점 $(3,\ 4)$를 지나므로

$4=3m+1$ $\quad\therefore m=1$

따라서 기울기가 1이고 원점을 지나는 직선의 방정식은

$y=x$

(2) $x-3y+6=0$에서 $\quad y=\dfrac{1}{3}x+2$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -3이고 점 $(2,\ -1)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=-3(x-2)$

$\therefore y=-3x+5$

답 (1) $y=x$ (2) $y=-3x+5$

114-❶ 두 직선 $ax+y-1=0$, $6x+by+5=0$이 서로 평행하므로

$\dfrac{a}{6}=\dfrac{1}{b}\neq\dfrac{-1}{5}$

$\dfrac{a}{6}=\dfrac{1}{b}$에서

$ab=6$ …… ㉠

두 직선 $ax+y-1=0$, $(b-1)x-3y+1=0$이 서로 수직이므로

$a(b-1)+1\cdot(-3)=0$

$ab-a-3=0$

㉠을 위의 식에 대입하면 $\quad 6-a-3=0$ $\quad\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad 3b=6$ $\quad\therefore b=2$

답 $a=3$, $b=2$

115-❶ 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $ax+2y-5=0$이 두 직선 $2x-y-2=0$, $3x-2y+a=0$의 교점을 지나야 한다.

$2x-y-2=0$, $3x-2y+a=0$을 연립하여 풀면

$x=a+4$, $y=2a+6$

따라서 직선 $ax+2y-5=0$이 점 $(a+4,\ 2a+6)$을 지나야 하므로

$a(a+4)+2(2a+6)-5=0$

$a^2+8a+7=0$, $\quad(a+7)(a+1)=0$

$\therefore a=-7$ 또는 $a=-1$

답 -7, -1

115-❷ 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 하므로

$\dfrac{3}{a-1}=\dfrac{-1}{2}\neq\dfrac{2}{1}$, $\dfrac{3}{1}=\dfrac{-1}{b}\neq\dfrac{2}{-3}$

$\dfrac{3}{a-1}=\dfrac{-1}{2}$에서 $\quad a-1=-6$ $\quad\therefore a=-5$

$\dfrac{3}{1}=\dfrac{-1}{b}$에서 $\quad 3b=-1$ $\quad\therefore b=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore ab=\dfrac{5}{3}$

답 $\dfrac{5}{3}$

Remark▶

서로 평행한 n개의 직선은 평면을 $(n+1)$개의 부분으로 나눈다. 예를 들어 오른쪽 그림과 같이 서로 평행한 세 직선은 평면을 ①, ②, ③, ④의 네 부분으로 나눈다.

116-❶ 구하는 수선의 발을 H라 하면 직선 AH는 직선 $3x+y-2=0$, 즉 $y=-3x+2$에 수직이므로 직선 AH의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이다.

또 이 직선이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$을 지나므로 직선 AH의 방정식은

$y=\dfrac{1}{3}(x+2)$ $\quad\therefore y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

따라서 점 H는 두 직선 $y=-3x+2$와 $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{2}{5}$, $y=\dfrac{4}{5}$

12 직선의 방정식

즉 구하는 수선의 발의 좌표는 $\left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right)$이다.

답 $\left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right)$

117-❶ 직선 AB의 기울기가

$$\frac{2-1}{1-(-3)}=\frac{1}{4}$$

이므로 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 -4이고, 선분 AB의 중점 $\left(\frac{-3+1}{2},\ \frac{1+2}{2}\right)$, 즉 $\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 그 직선의 방정식은

$$y-\frac{3}{2}=-4(x+1) \qquad \therefore y=-4x-\frac{5}{2}$$

따라서 직선 $y=-4x-\frac{5}{2}$가 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$$a=-4\cdot1-\frac{5}{2}=-\frac{13}{2}$$

답 $-\frac{13}{2}$

117-❷ 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot6+1\cdot0}{2+1},\ \frac{2\cdot0+1\cdot3}{2+1}\right),\ 즉\ (4,\ 1)$$

직선 AB의 기울기가

$$\frac{0-3}{6-0}=-\frac{1}{2}$$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 2이고, 점 $(4,\ 1)$을 지나므로 그 직선의 방정식은

$$y-1=2(x-4) \qquad \therefore y=2x-7$$

따라서 구하는 직선의 y절편은 -7이다. 답 -7

118-❶ $(3k+1)x-(2k+4)y-4k+2=0$을 k에 대하여 정리하면

$$(3x-2y-4)k+(x-4y+2)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$3x-2y-4=0,\ x-4y+2=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다. 답 $(2,\ 1)$

118-❷ $2(m-1)x+(3m+1)y+m+3=0$을 m에 대하여 정리하면

$$(2x+3y+1)m+(-2x+y+3)=0$$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x+3y+1=0,\ -2x+y+3=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-1$

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ -1)$이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

119-❶ $y=mx+2m$을 m에 대하여 정리하면

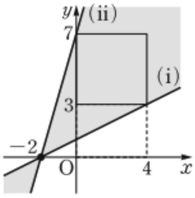
$$m(x+2)-y=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+2=0,\ y=0$$

$$\therefore x=-2,\ y=0$$

즉 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.



m은 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 주어진 정사각형과 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 $(4,\ 3)$을 지날 때,

$$6m-3=0 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 7)$을 지날 때,

$$2m-7=0 \qquad \therefore m=\frac{7}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$$\frac{1}{2}\le m\le\frac{7}{2}$$

답 $\frac{1}{2}\le m\le\frac{7}{2}$

119-❷ $y=mx+m-2$를 m에 대하여 정리하면

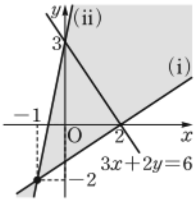
$$(x+1)m+(-y-2)=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+1=0,\ -y-2=0$$

$$\therefore x=-1,\ y=-2$$

즉 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -2)$를 지난다.



m은 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 직선 $3x+2y=6$과 제1사분면에서 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$$3m-2=0 \qquad \therefore m=\frac{2}{3}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 3)$을 지날 때,

$$m-5=0 \qquad \therefore m=5$$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$$\frac{2}{3}<m<5$$

따라서 구하는 정수 m의 값의 합은

$$1+2+3+4=10$$

답 10

120-❶ 직선 $3x+2y-5=0$은 직선 $x-2y-6=0$에 평행하지 않으므로 두 직선 $2x-3y+1=0$, $3x+2y-5=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(2x-3y+1)+k(3x+2y-5)=0$,

즉 $(2+3k)x+(-3+2k)y+1-5k=0$

(k는 실수) …… ㉠

으로 놓을 수 있다.

이 직선이 직선 $x-2y-6=0$에 평행하므로

$$\frac{2+3k}{1}=\frac{-3+2k}{-2}\neq\frac{1-5k}{-6}$$

$\dfrac{2+3k}{1}=\dfrac{-3+2k}{-2}$에서

$-2(2+3k)=-3+2k$

$\therefore k=-\dfrac{1}{8}$

$k=-\dfrac{1}{8}$을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 직선의 방정식은

$x-2y+1=0$ 답 $x-2y+1=0$

121-❶ 직선 $x-2y+5=0$, 즉 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 기울기는 -2이다.

구하는 직선의 방정식을 $y=-2x+n$이라 하면 원점과 직선 $y=-2x+n$, 즉 $2x+y-n=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|-n|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$, $|n|=5$

$\therefore n=-5$ 또는 $n=5$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-2x-5$ 또는 $y=-2x+5$

답 $y=-2x-5$, $y=-2x+5$

121-❷ $x+(k+1)y+k=0$을 k에 대하여 정리하면

$(y+1)k+x+y=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$y+1=0$, $x+y=0$

$\therefore x=1$, $y=-1$

즉 점 P의 좌표는 $(1, -1)$이므로 점 $\mathrm{P}(1, -1)$과 직선 $3x+y-4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3-1-4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ 답 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

122-❶ 두 직선 $x-2y+1=0$, $x-2y+6=0$은 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y+1=0$ 위의 한 점 $(-1, 0)$과 직선 $x-2y+6=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$\dfrac{|-1+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

122-❷ 두 직선 $x+my+1=0$, $x+my+m-3=0$이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+my+1=0$ 위의 한 점 $(-1, 0)$과 직선 $x+my+m-3=0$ 사이의 거리와 같다. 즉

$\dfrac{|-1+m-3|}{\sqrt{1+m^2}}=3$, $|m-4|=3\sqrt{1+m^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$m^2-8m+16=9m^2+9$

$\therefore 8m^2+8m-7=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 m의 값의 합은

$-\dfrac{8}{8}=-1$ 답 -1

Remark▶

이차방정식 $8m^2+8m-7=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4^2-8\cdot(-7)=72>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

122-❸ 두 직선 $2x+ay-5=0$, $x-3y+2=0$이 서로 평행하므로

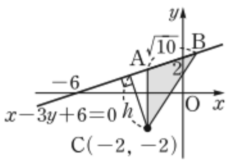
$\dfrac{2}{1}=\dfrac{a}{-3}\neq\dfrac{-5}{2}$ $\therefore a=-6$

따라서 구하는 거리는 직선 $x-3y+2=0$ 위의 한 점 $(-2, 0)$과 직선 $2x-6y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|2\cdot(-2)-5|}{\sqrt{2^2+(-6)^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{40}}=\dfrac{9\sqrt{10}}{20}$

답 $a=-6$, 거리: $\dfrac{9\sqrt{10}}{20}$

123-❶



점 $\mathrm{C}(-2, -2)$와 직선 $x-3y+6=0$ 사이의 거리를 h라 하면

$h=\dfrac{|-2-3\cdot(-2)+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{10}$

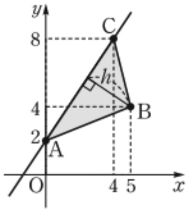
따라서 △ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=5$ 답 5

123-❷ 선분 AC의 길이는

$\overline{AC}=\sqrt{(4-0)^2+(8-2)^2}$

$=2\sqrt{13}$



직선 AC의 방정식은

$y-2=\dfrac{8-2}{4-0}x$

$y=\dfrac{3}{2}x+2$

$\therefore\ 3x-2y+4=0$

점 B(5, 4)와 직선 $3x-2y+4=0$ 사이의 거리를 h라 하면

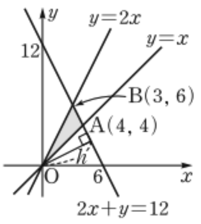
$h=\dfrac{|3\cdot5-2\cdot4+4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{11}{\sqrt{13}}=\dfrac{11\sqrt{13}}{13}$

따라서 △ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{13}\cdot\dfrac{11\sqrt{13}}{13}=11$ 　　답 11

123-❸ 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=x$, $2x+y=12$의 교점을 A라 하면

A(4, 4)



두 직선 $y=2x$, $2x+y=12$의 교점을 B라 하면

B(3, 6)

선분 AB의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(3-4)^2+(6-4)^2}=\sqrt{5}$

원점과 직선 $2x+y=12$, 즉 $2x+y-12=0$ 사이의 거리를 h라 하면

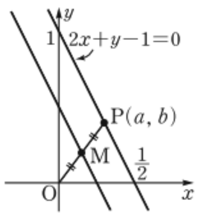
$h=\dfrac{|-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{12\sqrt{5}}{5}=6$ 　　답 6

124-❶ 오른쪽 그림에서 직선 $2x+y-1=0$ 위의 임의의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$2a+b-1=0$ ⋯ ㉠



선분 OP의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{a}{2}$, $y=\dfrac{b}{2}$

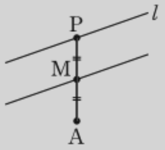
이므로 　$a=2x$, $b=2y$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 점 M의 자취의 방정식은

$4x+2y-1=0$ 　　답 $4x+2y-1=0$

Remark▶

앞에서 구한 자취의 방정식 $4x+2y-1=0$은 주어진 직선 $2x+y-1=0$에 평행하면서 y절편만 $\dfrac{1}{2}$배로 변한 것임을 알 수 있다.



일반적으로 정점 A와 정직선 l이 주어질 때, l 위의 임의의 점 P에 대하여 선분 AP의 중점 M의 자취는 직선 l에 평행하고 선분 AP의 중점을 지나는 직선이다.

124-❷ 구하는 예각의 이등분선 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선 $x+2y-1=0$, $2x+y-3=0$에 이르는 거리가 같으므로

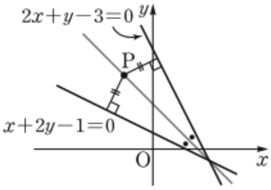
$\dfrac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|2x+y-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$|x+2y-1|=|2x+y-3|$

따라서 $x+2y-1=\pm(2x+y-3)$이므로

$x-y-2=0$ 또는 $3x+3y-4=0$

그런데 오른쪽 그림에서 주어진 두 직선이 만나서 생기는 예각의 이등분선의 기울기는 음수이므로 구하는 직선의 방정식은



$3x+3y-4=0$ 　　답 $3x+3y-4=0$

중단원 연습 문제

본책 347~351쪽

01 ④	02 ②	03 $y=-x+2$	
04 제4사분면		05 1	06 ⑤
07 $y=-2x+12$		08 $\dfrac{1}{4}\le m\le\dfrac{4}{3}$	09 ②
10 ③	11 $y=1$, $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$		
12 $\dfrac{31}{2}$	13 $x+2y-1=0$		14 ④
15 (1, 1)		16 $\dfrac{6}{5}$	17 ⑤
18 $-6<a<-\dfrac{1}{2}$	19 ②	20 6	21 ③
22 ⑤	23 17	24 4	25 15

01 (전략) 직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 직선의 기울기는 $\tan\theta$임을 이용한다.

(풀이) 직선 $(a-2)x-y+b+1=0$에서

$$y=(a-2)x+b+1$$

이 직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 $45°$이므로

$$a-2=\tan 45°=1 \qquad \therefore a=3$$

따라서 직선 $x-y+b+1=0$이 점 $(-2, 2)$를 지나므로

$$-2-2+b+1=0 \qquad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=6$$

답 ④

02 (전략) 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$임을 이용한다.

(풀이) 선분 AB를 $5:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{5\cdot3-3\cdot1}{5-3}, \frac{5\cdot5-3\cdot(-1)}{5-3}\right),\ 즉\ (6, 14)$$

두 점 $(6, 14)$, $(5, 9)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-14=\frac{9-14}{5-6}(x-6) \qquad \therefore y=5x-16$$

$y=0$을 $y=5x-16$에 대입하면

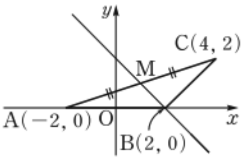
$$0=5x-16 \qquad \therefore x=\frac{16}{5}$$

따라서 구하는 직선의 x절편은 $\dfrac{16}{5}$이다.

답 ②

03 (전략) 점 B를 지나고 △ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점을 지남을 이용한다.

(풀이) 점 B를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 선분 AC의 중점을 지나야 한다.



선분 AC의 중점을 M이라 하면

$$\mathrm{M}\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \qquad \therefore \mathrm{M}(1, 1) \quad \cdots ❶$$

따라서 두 점 $\mathrm{B}(2, 0)$, $\mathrm{M}(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{1-0}{1-2}(x-2) \qquad \therefore y=-x+2 \quad \cdots ❷$$

답 $y=-x+2$

채점 기준	비율
❶ 선분 AC의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ △ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50%

04 (전략) 직선 $bx+(a+2)y-1=0$의 기울기와 y절편의 부호를 조사한다.

(풀이) y축에 평행하고 제1사분면과 제4사분면을 지나는 직선의 방정식은

$$x=k\,(k>0)$$

꼴이므로 $x+ay+b=0$에서

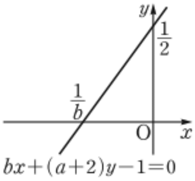
$$a=0,\ b<0$$

직선 $bx+(a+2)y-1=0$에서

$$bx+2y-1=0 \qquad \therefore y=-\frac{b}{2}x+\frac{1}{2}$$

$b<0$에서 $-\dfrac{b}{2}>0$이므로 직선 $bx+2y-1=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $bx+(a+2)y-1=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



답 제4사분면

05 (전략) 두 직선이 두 개 이상의 교점을 가지려면 두 직선이 일치해야 한다.

(풀이) 두 직선이 두 개 이상의 교점을 가지려면 두 직선이 일치해야 하므로

$$\frac{1}{a}=\frac{-(a+1)}{-2a}=\frac{a}{1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $\dfrac{1}{a}=\dfrac{-(a+1)}{-2a}$에서 $\quad a^2+a=2a$

$$a(a-1)=0 \qquad \therefore a=1\ (\because a\neq0)$$

(ii) $\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{1}$에서 $\quad a^2=1$

$$\therefore a=-1\ 또는\ a=1$$

(i), (ii)에서 $\quad a=1$

답 1

06 (전략) 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 세 직선이 모두 평행하거나 어느 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나는 경우이다.

(풀이) 세 직선

$$x-y=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$x+2y-4=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$$2x-ky-10=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

에서 두 직선 ㉠, ㉡은 한 점에서 만나므로 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행할 때,

$$\frac{1}{2}=\frac{-1}{-k}\neq\frac{0}{-10} \qquad \therefore k=2$$

12 직선의 방정식

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행할 때,

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{-k}\neq\frac{-4}{-10} \qquad \therefore k=-4$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=\frac{4}{3},\ y=\frac{4}{3}$

즉 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표가 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$이므로

직선 ㉢이 점 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$를 지나야 한다.

$2\cdot\frac{4}{3}-k\cdot\frac{4}{3}-10=0$에서 $\quad k=-\frac{11}{2}$

이상에서 모든 실수 k의 값의 합은

$$2+(-4)+\left(-\frac{11}{2}\right)=-\frac{15}{2}$$

답 ⑤

07 전략 주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리한 후, 이 등식이 k에 대한 항등식임을 이용한다.

풀이 $3(k+1)x-(k+4)y-3k+15=0$을 k에 대하여 정리하면

$$(3x-y-3)k+(3x-4y+15)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$3x-y-3=0,\ 3x-4y+15=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=3,\ y=6 \qquad \therefore \mathrm{P}(3,\ 6)$$

따라서 기울기가 -2이고 점 $\mathrm{P}(3,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-6=-2(x-3)$$

$$\therefore y=-2x+12$$

답 $y=-2x+12$

08 전략 주어진 직선이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 찾는다.

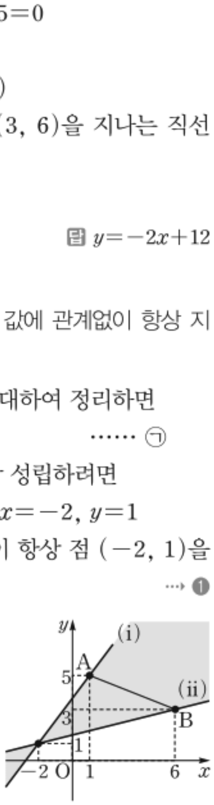
풀이 $y=mx+2m+1$을 m에 대하여 정리하면

$$(x+2)m+(1-y)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+2=0,\ 1-y=0 \qquad \therefore x=-2,\ y=1$$

즉 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 1)$을 지난다. ⋯ ❶



m은 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 선분 AB와 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(1,\ 5)$를 지날 때,

$$3m-4=0 \qquad \therefore m=\frac{4}{3}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(6,\ 3)$을 지날 때,

$$8m-2=0 \qquad \therefore m=\frac{1}{4}$$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$$\frac{1}{4}\le m\le\frac{4}{3}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{4}\le m\le\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 직선이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 찾을 수 있다.	40%
❷ 주어진 직선이 두 점 A, B를 지날 때의 m의 값을 각각 구할 수 있다.	40%
❸ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

09 전략 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하여 조건을 만족시키는 a의 값을 구한다.

풀이 직선 $x+y-2=0$은 점 $(3,\ 5)$를 지나지 않으므로 두 직선 $2x-y+5=0$, $x+y-2=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$(2x-y+5)+k(x+y-2)=0\ (k\text{는 실수})$$

으로 놓을 수 있다. 이 직선이 점 $(3,\ 5)$를 지나므로

$$2\cdot3-5+5+k(3+5-2)=0, \qquad 6+6k=0$$

$$\therefore k=-1$$

따라서 직선의 방정식은

$$2x-y+5-(x+y-2)=0$$

$$\therefore x-2y+7=0$$

이 직선이 점 $(a,\ -1)$을 지나므로

$$a-2\cdot(-1)+7=0 \qquad \therefore a=-9$$

답 ②

10 전략 두 직선의 교점을 구한 후, 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 연립방정식 $\begin{cases}x-y+1=0\\x-2y+3=0\end{cases}$을 풀면

$$x=1,\ y=2$$

따라서 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$의 교점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로 이 점과 직선 $4x-2y=1$, 즉 $4x-2y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4\cdot1-2\cdot2-1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

답 ③

11 전략 구하는 직선의 기울기를 m이라 하고 직선의 방정식을 구한 후, 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=m(x-2)$

$\therefore y=mx-2m+1$ …… ㉠

원점과 직선 $y=mx-2m+1$, 즉

$mx-y-2m+1=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\quad |-2m+1|=\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4m^2-4m+1=m^2+1$

$3m^2-4m=0,\quad m(3m-4)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=\frac{4}{3}$

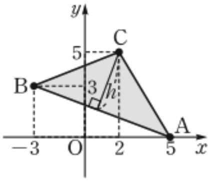
따라서 ㉠에서 구하는 직선의 방정식은

$y=1$ 또는 $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

답 $y=1$, $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

12 전략 직선 AB의 방정식을 구하여 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 구한다.

풀이 선분 AB의 길이는



$\overline{AB}=\sqrt{(-3-5)^2+3^2}$

$=\sqrt{73}$ ··· ❶

직선 AB의 방정식은

$y=\frac{3-0}{-3-5}(x-5)$

$\therefore 3x+8y-15=0$ ··· ❷

점 C$(2,\ 5)$와 직선 $3x+8y-15=0$ 사이의 거리를 h라 하면

$h=\frac{|3\cdot2+8\cdot5-15|}{\sqrt{3^2+8^2}}=\frac{31}{\sqrt{73}}$ ··· ❸

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{73}\cdot\frac{31}{\sqrt{73}}=\frac{31}{2}$ ··· ❹

답 $\frac{31}{2}$

채점 기준	비율
❶ 선분 AB의 길이를 구할 수 있다.	20%
❷ 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❹ △ABC의 넓이를 구할 수 있다.	20%

13 전략 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고, x와 y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 직선 $2x+4y-3=0$ 위의 임의의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$2a+4b-3=0$ …… ㉠

선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\frac{2\cdot a+1\cdot2}{2+1}=\frac{2a+2}{3}$

$y=\frac{2\cdot b+1\cdot(-1)}{2+1}=\frac{2b-1}{3}$

$\therefore a=\frac{3x-2}{2},\ b=\frac{3y+1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 자취의 방정식은

$2\cdot\frac{3x-2}{2}+4\cdot\frac{3y+1}{2}-3=0$

$3x+6y-3=0$

$\therefore x+2y-1=0$

답 $x+2y-1=0$

Remark▶

구하는 자취의 방정식이 주어진 직선과 기울기가 서로 같은 직선의 방정식임을 이해하면 점 A$(2,\ -1)$과 주어진 직선 위의 한 점, 예를 들어 점 P$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$에 대하여 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점만 구해도 자취의 방정식을 구할 수 있다.

14 전략 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 직사각형의 대각선은 서로를 이등분하므로 작은 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{2+4}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 3)$

큰 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{-6-2}{2},\ \frac{-5-3}{2}\right)$, 즉 $(-4,\ -4)$

따라서 두 점 $(1,\ 3)$, $(-4,\ -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-4-3}{-4-1}(x-1)$

$\therefore 7x-5y+8=0$ …… ㉠

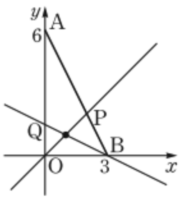
㉠이 $ax+by+8=0$과 같아야 하므로

$a=7,\ b=-5\quad \therefore a+b=2$

답 ④

15 전략 높이가 같은 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같음을 이용하여 두 점 P, Q가 $\overline{AB}$와 $\overline{AO}$를 각각 어떻게 내분하는 점인지 파악한다.

풀이 조건 ㈎에 의하여



$\overline{BP}:\overline{BA}=1:3$

즉 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$이므로

점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot3+1\cdot0}{2+1}, \frac{2\cdot0+1\cdot6}{2+1}\right)$, 즉 $(2, 2)$

이므로 직선 OP의 방정식은

$y=x$ ...... ㉠ ⋯ ❶

또 조건 (나)에 의하여

$\overline{OQ} : \overline{OA}=1 : 4$

즉 $\overline{AQ} : \overline{QO}=3 : 1$이므로 점 Q는 선분 AO를 3 : 1로 내분하는 점이다.

따라서 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot0+1\cdot0}{3+1}, \frac{3\cdot0+1\cdot6}{3+1}\right)$, 즉 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

이므로 직선 BQ의 방정식은

$\frac{x}{3}+y\div\frac{3}{2}=1$, 즉 $\frac{x}{3}+\frac{2}{3}y=1$

$\therefore x+2y=3$ ...... ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1, y=1$

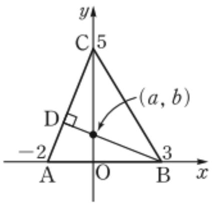
따라서 두 직선 OP, BQ의 교점의 좌표는 $(1, 1)$이다. ⋯ ❸

답 $(1, 1)$

채점 기준	비율
❶ 직선 OP의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 직선 BQ의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 두 직선 OP, BQ의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	20%

16 전략 점 C에서 변 AB에 그은 수선은 y축임을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 점 C에서 변 AB에 그은 수선은 y축이다. 따라서 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하면 선분 BD와 y축이 만나는 점이 △ABC의 수심이다. ⋯ ❶



직선 AC의 기울기가 $\frac{5}{2}$이므로 직선 BD는 기울기가 $-\frac{2}{5}$이고 점 B$(3, 0)$을 지나는 직선이다.

즉 직선 BD의 방정식은

$y=-\frac{2}{5}(x-3)$ $\therefore y=-\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$ ⋯ ❷

선분 BD와 y축의 교점의 좌표는 $\left(0, \frac{6}{5}\right)$이므로

$a=0, b=\frac{6}{5}$ $\therefore a+b=\frac{6}{5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{6}{5}$

채점 기준	비율
❶ △ABC의 수심을 찾을 수 있다.	40%
❷ 직선 BD의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

17 전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 서로 평행하면 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $(x-y-3)+k(x+y+1)=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-y-3=0, x+y+1=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=1, y=-2$

이므로 직선 l은 항상 점 $(1, -2)$를 지난다.

ㄴ. $(x-y-3)+k(x+y+1)=0$에서

$(k+1)x+(k-1)y+k-3=0$ ⋯ ㉠

직선 ㉠이 직선 $x+y+1=0$에 평행하려면

$k+1=k-1\neq k-3$ ...... ㉡

그런데 ㉡을 만족시키는 실수 k는 존재하지 않으므로 직선 $x+y+1=0$에 평행한 직선 l은 존재하지 않는다.

ㄷ. 두 점 $(1, 2)$, $(2, -1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-2}{2-1}=-3$

$k\neq1$일 때, 직선 ㉠의 기울기는 $-\frac{k+1}{k-1}$이므로 두 직선이 서로 수직이려면

$-\frac{k+1}{k-1}=\frac{1}{3}$, $3k+3=-k+1$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$

따라서 $k=-\frac{1}{2}$일 때 직선 l은 두 점 $(1, 2)$, $(2, -1)$을 지나는 직선과 수직이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

18 전략 주어진 직선이 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 찾는다.

풀이 $ax+y+2a+2=0$을 a에 대하여 정리하면

$(x+2)a+(y+2)=0$ ...... ㉠

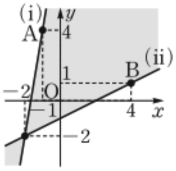
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2=0, y+2=0$

$\therefore x=-2, y=-2$

즉 직선 ㉠은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -2)$를 지난다.

$-a$는 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 두 점 A, B 사이를 지나도록 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $A(-1,\ 4)$를 지날 때,

$$a+6=0 \qquad \therefore\ a=-6$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $B(4,\ 1)$을 지날 때,

$$6a+3=0 \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$$-6<a<-\frac{1}{2}$$

답 $-6<a<-\frac{1}{2}$

19 전략 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 $f(k)$를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 원점과 직선 $x-y-2+k(x+y)=0$, 즉 $(k+1)x+(k-1)y-2=0$ 사이의 거리 $f(k)$는

$$f(k)=\frac{|-2|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2(k^2+1)}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}$$

이므로 $f(k)$는 $\sqrt{k^2+1}$의 값이 최소일 때 최댓값을 갖는다.

그런데 k는 실수이므로 $\quad k^2\ge 0$

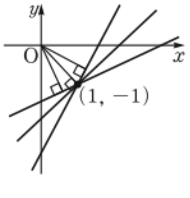
즉 $\sqrt{k^2+1}\ge 1$이므로 $\sqrt{k^2+1}$의 최솟값은 1이다.

따라서 $f(k)$는 $\sqrt{k^2+1}=1$, 즉 $k=0$일 때 최댓값 $\sqrt{2}$를 갖는다.

답 ②

다른 풀이 직선 $x-y-2+k(x+y)=0$은 k의 값에 관계없이 두 직선 $x-y-2=0$, $x+y=0$의 교점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선이다.

즉 $f(k)$는 원점과 점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선 사이의 거리이다. 따라서 오른쪽 그림에서 $f(k)$가 최대일 때는 $f(k)$의 값이 원점과 점 $(1,\ -1)$ 사이의 거리와 같을 때이므로 구하는 최댓값은 $\quad \sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$



20 전략 두 직선이 각각 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 구하고, 두 직선의 위치 관계를 살펴본다.

풀이 $x+ky-3=0$을 k에 대하여 정리하면

$$yk+x-3=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$y=0,\ x-3=0 \qquad \therefore\ x=3,\ y=0$$

따라서 직선 $x+ky-3=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 0)$을 지난다.

또 $kx-y+3k=0$을 k에 대하여 정리하면

$$(x+3)k-y=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+3=0,\ y=0$$
$$\therefore\ x=-3,\ y=0$$

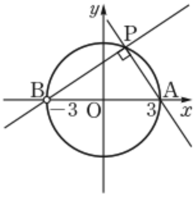
따라서 직선 $kx-y+3k=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ 0)$을 지난다.

한편

$$1\cdot k+k\cdot(-1)=0$$

이므로 두 직선 $x+ky-3=0$, $kx-y+3k=0$은 서로 수직이다.

오른쪽 그림과 같이 $A(3,\ 0)$, $B(-3,\ 0)$이라 하면 두 직선이 서로 수직이므로 두 직선의 교점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.



따라서 점 P의 자취의 길이는 반지름의 길이가 3인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$2\pi\cdot 3=6\pi$$
$$\therefore\ p=6$$

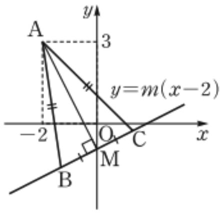
답 6

Remark▶

직선 $x+ky-3=0$은 점 $A(3,\ 0)$을 지나는 직선 중에서 직선 $y=0$을 포함하지 않고, 직선 $kx-y+3k=0$은 점 $B(-3,\ 0)$을 지나는 직선 중에서 직선 $x=-3$을 포함하지 않는다.
따라서 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 중 점 $B(-3,\ 0)$에서는 두 직선의 교점이 생기지 않으므로 점 P의 자취는 이 점을 제외한 원이다.

21 전략 변 BC의 중점 M에 대하여 두 직선 AM, BC가 서로 수직임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 두 직선 AM, BC는 서로 수직이다.



이때 점 M은 직선 $y=m(x-2)$와 y축이 만나는 점이므로

$$M(0,\ -2m)$$

직선 BC의 기울기는 m이고 직선 AM의 기울기는

$\dfrac{-2m-3}{0-(-2)}$, 즉 $\dfrac{-2m-3}{2}$이므로

$$m \cdot \frac{-2m-3}{2} = -1$$

$2m^2+3m-2=0$, $\quad (m+2)(2m-1)=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}$ ($\because m>0$) 답 ③

22 전략 직선 AP의 기울기를 이용하여 직선 l의 기울기를 구한 후 직선의 방정식을 구한다.

풀이 직선 AP의 기울기는 $\frac{0-1}{t-0}=-\frac{1}{t}$

따라서 직선 l의 기울기는 t이므로 직선 l의 방정식은

$y=t(x-t)$ …… ㉠

ㄱ. 직선 l의 기울기는 t이므로 $t=1$일 때, 직선 l의 기울기는 1이다.

ㄴ. $x=3$, $y=2$를 ㉠에 대입하면

$2=t(3-t)$, $\quad t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 점 $(3, 2)$를 지나는 직선 l은 $y=x-1$, $y=2x-4$의 2개이다.

ㄷ. ㉠을 부등식 $y \le ax^2$에 대입하면

$t(x-t) \le ax^2$

$ax^2-tx+t^2 \ge 0$ …… ㉡

이때 t가 0이 아닌 실수이므로 ㉡이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$a>0$ …… ㉢

또 방정식 $ax^2-tx+t^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-t)^2-4at^2 \le 0$, $\quad t^2(1-4a) \le 0$

$1-4a \le 0$ ($\because t^2>0$)

$\therefore a \ge \frac{1}{4}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $a \ge \frac{1}{4}$이므로 a의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

23 전략 두 직선이 서로 수직일 조건과 평행할 조건을 이용한다.

풀이 두 직선 l과 m이 서로 수직이므로

$1 \cdot 4+(-a) \cdot b=0 \quad \therefore ab=4$

두 직선 l과 n이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{1}=\frac{-a}{-(b-3)} \ne \frac{2}{-2}$$

$\frac{1}{1}=\frac{-a}{-(b-3)}$에서 $\quad a=b-3$

$\therefore a-b=-3$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(-3)^2+2 \cdot 4=17$ 답 17

24 전략 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분함을 이용한다.

풀이 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 직선 l은 선분 AC의 수직이등분선이다.

직선 AC의 기울기는

$$\frac{1-3}{5-1}=-\frac{1}{2}$$

이므로 직선 l의 기울기는 2이다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(3, 2)$

이므로 직선 l은 점 $(3, 2)$를 지난다.

따라서 직선 l의 방정식은

$y-2=2(x-3)$

$\therefore 2x-y-4=0$

즉 $a=-1$, $b=-4$이므로

$ab=4$ 답 4

25 전략 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 거리의 최솟값을 구한다.

풀이 직선 $y=2x+k$와 평행하고 곡선 $y=-x^2+4$에 접하는 직선의 방정식을 $y=2x+a$ (a는 상수)라 하자.

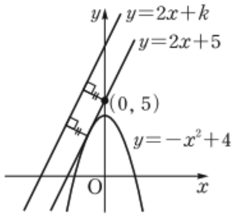
$-x^2+4=2x+a$에서

$x^2+2x+a-4=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(a-4)=0 \quad \therefore a=5$

따라서 직선 $y=2x+k$와 평행하고 곡선 $y=-x^2+4$에 접하는 직선의 방정식은 $y=2x+5$이다.



오른쪽 그림과 같이 직선 $y=2x+5$ 위의 한 점 $(0, 5)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 곡선 $y=-x^2+4$ 위의 점과 직선 $y=2x+k$ 사이의 거리의 최솟값과 같으므로

$$\frac{|-5+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$$

$|k-5|=10$, $\quad k-5=\pm 10$

$\therefore k=15$ 또는 $k=-5$

이때 $k=-5$이면 곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=2x-5$가 만나므로 $\quad k \ne -5$

$\therefore k=15$ 답 15

Ⅳ. 도형의 방정식

13 원의 방정식

유제

본책 355~387쪽

125-❶ 원의 중심이 y축 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(0,\ a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 두 점 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 2)$를 지나므로

$(-2)^2+(-a)^2=r^2$

$\therefore\ 4+a^2=r^2$ ...... ㉠

$2^2+(2-a)^2=r^2$

$\therefore\ 8-4a+a^2=r^2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=5$ 답 $x^2+(y-1)^2=5$

다른 풀이 원의 중심의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면 점 $(0,\ a)$에서 두 점 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 2)$에 이르는 거리가 같으므로

$\sqrt{(-2)^2+(-a)^2}=\sqrt{2^2+(2-a)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+4=a^2-4a+8,\quad 4a=4$

$\therefore\ a=1$

즉 원의 중심의 좌표는 $(0,\ 1)$이고, 원의 반지름의 길이는 두 점 $(0,\ 1)$, $(-2,\ 0)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=5$

125-❷ 원 $(x+4)^2+(y-2)^2=1$과 중심이 같으므로 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-4,\ 2)$이다.

구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로

$(-2+4)^2+(1-2)^2=r^2$

$\therefore\ r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y-2)^2=5$

답 $(x+4)^2+(y-2)^2=5$

126-❶ 구하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{5-1}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 2)$

또 선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1-5)^2+(3-1)^2}$

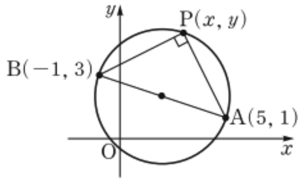
$=\sqrt{10}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=10$

답 $(x-2)^2+(y-2)^2=10$

다른 풀이



위의 그림과 같이 원 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라 하면

$\angle APB=90°$

따라서 삼각형 APB에서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$이므로

$(x-5)^2+(y-1)^2+(x+1)^2+(y-3)^2=40$

$x^2+y^2-4x-4y=2$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-2)^2=10$

126-❷ 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 PQ의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{10+8}{2},\ \frac{1+5}{2}\right)$, 즉 $(9,\ 3)$

또 선분 PQ가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{(8-10)^2+(5-1)^2}=\sqrt{5}$

따라서 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$(x-9)^2+(y-3)^2=5$

즉 $x^2+y^2-18x-6y+85=0$이므로

$A=-18,\ B=-6,\ C=85$

$\therefore\ A+B+C=61$ 답 61

127-❶ 주어진 세 점을 $P(-1,\ -1)$, $Q(0,\ 2)$, $R(1,\ 1)$이라 하자. 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심을 $C(a,\ b)$라 하면

$\overline{CP}=\overline{CQ}=\overline{CR}$이므로 $\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2=\overline{CR}^2$

$\overline{CP}^2=(-1-a)^2+(-1-b)^2$

$=a^2+b^2+2a+2b+2$

$\overline{CQ}^2=(0-a)^2+(2-b)^2$

$=a^2+b^2-4b+4$

$\overline{CR}^2=(1-a)^2+(1-b)^2$

$=a^2+b^2-2a-2b+2$

$\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2$에서 $\quad a+3b=1$

$\overline{CQ}^2=\overline{CR}^2$에서 $\quad a-b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 반지름의 길이는

$$\overline{CP}=\sqrt{\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

127-❷ 주어진 네 점을 $P(7,\ 4)$, $Q(-5,\ 10)$, $R(-1,\ -2)$, $S(1,\ k)$라 하자. 네 점 P, Q, R, S를 지나는 원의 중심을 $C(a,\ b)$라 하면

$\overline{CP}=\overline{CQ}=\overline{CR}$이므로 $\quad \overline{CP}^2=\overline{CQ}^2=\overline{CR}^2$

$$\overline{CP}^2=(7-a)^2+(4-b)^2$$
$$=a^2+b^2-14a-8b+65$$
$$\overline{CQ}^2=(-5-a)^2+(10-b)^2$$
$$=a^2+b^2+10a-20b+125$$
$$\overline{CR}^2=(-1-a)^2+(-2-b)^2$$
$$=a^2+b^2+2a+4b+5$$

$\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2$에서 $\quad 2a-b=-5$

$\overline{CQ}^2=\overline{CR}^2$에서 $\quad a-3b=-15$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=0,\ b=5$

따라서 원의 중심은 점 $C(0,\ 5)$이고 반지름의 길이는

$$\overline{CP}=\sqrt{(7-0)^2+(4-5)^2}=5\sqrt{2}$$

이므로 원의 방정식은

$$x^2+(y-5)^2=50$$

이때 점 $S(1,\ k)$가 이 원 위의 점이므로

$$1+(k-5)^2=50,\qquad k^2-10k-24=0$$
$$(k+2)(k-12)=0$$
$$\therefore\ k=-2 \text{ 또는 } k=12$$

답 $-2,\ 12$

128-❶ $x^2+y^2+4x-8y+a=0$을 변형하면

$$(x+2)^2+(y-4)^2=20-a$$

이 원의 중심의 좌표는 $(-2,\ 4)$이므로

$$b=-2,\ c=4$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{20-a}$이므로

$$\sqrt{20-a}=5$$

양변을 제곱하면

$$20-a=25\qquad \therefore\ a=-5$$
$$\therefore\ a+b+c=-3$$

답 -3

128-❷ 방정식 $x^2+y^2+8x+2ky+10k=0$을 변형하면

$$(x+4)^2+(y+k)^2=k^2-10k+16$$

이 방정식이 나타내는 도형이 넓이가 9π인 원이 되려면

$$k^2-10k+16=9$$
$$\therefore\ k^2-10k+7=0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 곱은 7이다.

답 7

129-❶ 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 반지름의 길이는 $|a|$이므로 이 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$

이 원이 두 점 $(3,\ 0)$, $(9,\ 0)$을 지나므로

$$(3-a)^2+(0-b)^2=a^2$$
$$\therefore\ b^2-6a+9=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$(9-a)^2+(0-b)^2=a^2$$
$$\therefore\ b^2-18a+81=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=6,\ b=\pm3\sqrt{3}$

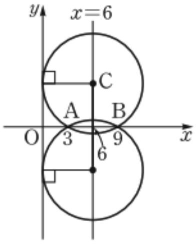
따라서 두 원의 반지름의 길이는 6으로 같으므로 두 원의 반지름의 길이의 합은

$$6+6=12$$

답 12

다른 풀이 $A(3,\ 0)$, $B(9,\ 0)$이라 하면 원의 중심 C는 선분 AB의 수직이등분선인 직선 $x=6$ 위에 있다.

이때 원이 y축에 접하므로 중심 C의 x좌표의 절댓값이 반지름의 길이이다.



따라서 반지름의 길이가 6인 원이 2개이므로 구하는 반지름의 길이의 합은 12이다.

129-❷ 점 $(2,\ 4)$를 지나고 x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 a라 하면 중심의 좌표는 $(a,\ a)$이고 원의 방정식은 $\quad (x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

이 원이 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$$(2-a)^2+(4-a)^2=a^2$$
$$a^2-12a+20=0,\qquad (a-2)(a-10)=0$$
$$\therefore\ a=2 \text{ 또는 } a=10$$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 10이므로 두 원의 넓이의 합은

$$\pi\cdot2^2+\pi\cdot10^2=104\pi$$

답 104π

129-❸ 원의 중심이 직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a,\ -a+1)$이라 하면 반지름의 길이는 $|a|$이다. 즉 이 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y+a-1)^2=a^2$$

이 원이 점 (2, 1)을 지나므로

$$(2-a)^2+(1+a-1)^2=a^2$$

$$(2-a)^2=0 \qquad \therefore a=2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4$$

답 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

130-❶ $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로

$$2\overline{AP}=\overline{BP} \qquad \therefore 4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$4\{(x-1)^2+y^2\}=(x-4)^2+(y-3)^2$$

$$x^2+y^2+2y-7=0$$

$$\therefore x^2+(y+1)^2=8$$

따라서 점 P의 자취는 중심의 좌표가 $(0, -1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$$2\pi\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$$

답 $4\sqrt{2}\pi$

다른 풀이 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점과 1 : 2로 외분하는 점을 각각 M, N이라 하면

$$M(2, 1),\ N(-2, -3)$$

이때 두 점 M, N을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는 $(0, -1)$, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 점 P의 자취의 길이는

$$2\pi\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$$

130-❷ 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2$이므로

$$(x^2+y^2)+\{(x-4)^2+(y+2)^2\}=20$$

$$\therefore x^2+y^2-4x+2y=0$$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$$x^2+y^2-4x+2y=0$$

답 $x^2+y^2-4x+2y=0$

Remark▶

세 점 A, B, P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2$이 성립하므로 삼각형 PAB는 $\angle P=90°$인 직각삼각형이다. 즉 점 P의 자취는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

131-❶ $y=x+k$를 $x^2+y^2=3$에 대입하면

$$x^2+(x+k)^2=3$$

$$\therefore 2x^2+2kx+k^2-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-3)>0, \qquad k^2<6$$

$$\therefore -\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$$

따라서 구하는 정수 k는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5개이다.

답 5

131-❷ $y=2x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$$x^2+(2x+k)^2=4$$

$$\therefore 5x^2+4kx+k^2-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-4)=0$$

$$k^2=20$$

$$\therefore k=\pm 2\sqrt{5}$$

답 $-2\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}$

132-❶ 원의 중심 $(-4, 3)$과 직선 $ax-y-a=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|-4a-3-a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{|5a+3|}{\sqrt{a^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원과 직선이 접하려면 $d=4$이어야 한다. 즉

$$\frac{|5a+3|}{\sqrt{a^2+1}}=4, \qquad |5a+3|=4\sqrt{a^2+1}$$

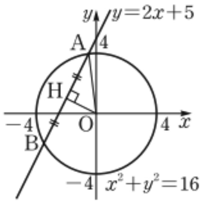
양변을 제곱하여 정리하면

$$9a^2+30a-7=0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\frac{7}{9}$이다.

답 $-\frac{7}{9}$

133-❶ 오른쪽 그림과 같이 원과 직선이 만나는 두 점을 A, B라 하고, 원의 중심 (0, 0)에서 직선 $y=2x+5$, 즉 $2x-y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH}=\frac{|5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

따라서 직각삼각형 OAH에서

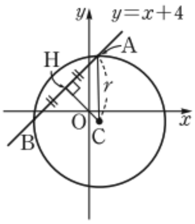
$$\overline{AH}=\sqrt{4^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{11}$$

이므로 구하는 현의 길이는

$$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{11}$$

답 $2\sqrt{11}$

133-❷ 오른쪽 그림과 같이 원과 직선이 만나는 두 점을 A, B, 원의 중심을 C라 하고, 원의 중심 C에서 직선 $y=x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

또 $\overline{\mathrm{CH}}$의 길이는 원의 중심 C$(1,\ -1)$과 직선 $y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|1+1+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 CAH에서

$$r=\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{3}$$

답 $3\sqrt{3}$

134-❶ $x^2+y^2-2x-4y-1=0$에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2=6$$

원의 중심 $(1,\ 2)$와 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+2+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리의

최댓값은 $\quad \dfrac{|k+4|}{\sqrt{5}}+\sqrt{6}$

최솟값은 $\quad \dfrac{|k+4|}{\sqrt{5}}-\sqrt{6}$

이때 최댓값과 최솟값의 합이 8이므로

$$\left(\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}+\sqrt{6}\right)+\left(\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}-\sqrt{6}\right)=8$$

$$\frac{2|k+4|}{\sqrt{5}}=8, \qquad |k+4|=4\sqrt{5}$$

$$\therefore\ k=-4-4\sqrt{5} \text{ 또는 } k=-4+4\sqrt{5}$$

답 $-4-4\sqrt{5},\ -4+4\sqrt{5}$

134-❷ 삼각형 PAB에서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는

$$\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$$

로 일정하므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대이다.

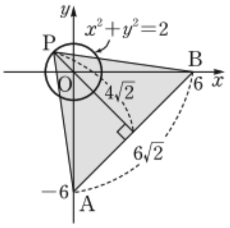
직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-6}=1$$

$$\therefore\ x-y-6=0$$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$



원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$$3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=24$$

답 24

135-❶ 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(-2,\ a)$이므로 중심거리는

$$\sqrt{(-2)^2+a^2}=\sqrt{a^2+4}$$

두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 1이므로 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는

$$3-1<\sqrt{a^2+4}<3+1$$

$$\therefore\ 2<\sqrt{a^2+4}<4$$

각 변을 제곱하면

$$4<a^2+4<16, \qquad 0<a^2<12$$

$$a^2-12<0,\ a\neq 0$$

$$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0,\ a\neq 0$$

$$\therefore\ -2\sqrt{3}<a<0 \text{ 또는 } 0<a<2\sqrt{3}$$

답 $-2\sqrt{3}<a<0$ 또는 $0<a<2\sqrt{3}$

136-❶ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2x+ay-4-(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$$

$$\therefore\ 2x+(a+2)y-8=0$$

이 직선과 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$이 서로 수직이므로

$$2\cdot 1+(a+2)\cdot(-1)=0$$

$$2-a-2=0 \qquad \therefore\ a=0$$

답 0

Remark▶ 일반형으로 표현된 두 직선의 평행·수직

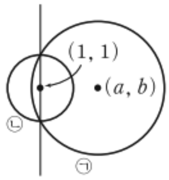
두 직선 $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0\ (abc\neq 0,\ a'b'c'\neq 0)$이

① 서로 평행하다. ➡ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

② 서로 수직이다. ➡ $aa'+bb'=0$

136-❷ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+6 \quad \cdots\ ㉠$

$(x-1)^2+(y-1)^2=4 \quad \cdots\cdots\ ㉡$



원 ㉠이 원 ㉡의 둘레를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 ㉡의 중심 $(1,\ 1)$을 지나야 한다.

㉠에서

$$x^2+y^2-2ax-2by-6=0$$

㉡에서

$$x^2+y^2-2x-2y-2=0$$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2ax-2by-6-(x^2+y^2-2x-2y-2)=0$$

$$\therefore\ (a-1)x+(b-1)y+2=0$$

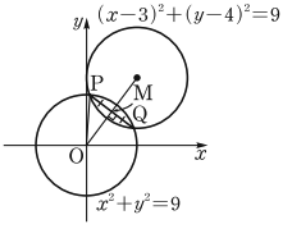
이 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$$(a-1)+(b-1)+2=0$$

$$\therefore\ a+b=0$$

답 0

137-❶ 오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 P, Q라 하고, 선분 PQ의 중점을 M이라 하면 두 원의 중심선은 공통현 PQ를 수직이등분하므로 직각삼각형 POM에서



$$\overline{PM}^2=\overline{OP}^2-\overline{OM}^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{OP}$는 원 $x^2+y^2=9$의 반지름이므로 $\quad \overline{OP}=3$

$(x-3)^2+(y-4)^2=9$에서

$$x^2+y^2-6x-8y+16=0$$

이므로 두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-6x-8y+16)=0$$

$$\therefore 6x+8y-25=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\overline{OM}$의 길이는 원점과 직선 ㉡ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{5}{2}$$

㉠에서 $\quad \overline{PM}^2=3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$

$$\therefore \overline{PM}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

따라서 구하는 공통현의 길이는

$$\overline{PQ}=2\overline{PM}=2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$$

답 $\sqrt{11}$

138-❶ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+12x+k(x^2+y^2-4x+4y-2)=0$$
$$(k\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면 이 원의 중심이 y축 위에 있으므로 중심의 x좌표는 0이어야 한다.

이때 원의 중심의 x좌표가 0이려면 ㉠의 x의 계수가 0이어야 하므로

$$12-4k=0 \qquad \therefore k=3$$

$k=3$을 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2+12x+3x^2+3y^2-12x+12y-6=0$$
$$4x^2+4y^2+12y-6=0$$
$$\therefore x^2+y^2+3y-\frac{3}{2}=0$$

답 $x^2+y^2+3y-\frac{3}{2}=0$

138-❷ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+4x-4+k(x^2+y^2+ax-6y+2)=0$$
$$(k\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면 이 원이 원점을 지나므로

$$-4+2k=0 \qquad \therefore k=2$$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2+4x-4+2x^2+2y^2+2ax-12y+4=0$$
$$3x^2+3y^2+(2a+4)x-12y=0$$
$$x^2+y^2+\frac{2a+4}{3}x-4y=0$$
$$\therefore \left(x+\frac{a+2}{3}\right)^2+(y-2)^2=\frac{a^2+4a+40}{9}$$

이 원의 넓이가 5π이므로

$$\frac{a^2+4a+40}{9}=5, \qquad a^2+4a-5=0$$
$$(a+5)(a-1)=0$$
$$\therefore a=1\ (\because a>0)$$

답 1

139-❶ 구하는 직선의 기울기는

$$\tan 45°=1$$

원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y=x\pm\sqrt{10}\sqrt{1+1^2}$$
$$\therefore y=x\pm2\sqrt{5}$$

답 $y=x-2\sqrt{5}$, $y=x+2\sqrt{5}$

139-❷ $x^2+y^2-6x+4y-12=0$에서

$$(x-3)^2+(y+2)^2=25$$

구하는 직선은 $x+3y-4=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$에 수직이므로 기울기는 3이다.

즉 구하는 직선의 방정식을 $y=3x+n$이라 하면 원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $y=3x+n$, 즉 $3x-y+n=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 5와 같으므로

$$\frac{|9+2+n|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=5, \qquad |n+11|=5\sqrt{10}$$
$$\therefore n=-11\pm5\sqrt{10}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=3x-11\pm5\sqrt{10}$$

답 $y=3x-11-5\sqrt{10}$, $y=3x-11+5\sqrt{10}$

Remark▶

중심이 원점이 아닌 원의 접선의 방정식을 구할 때에는

(원의 중심과 접선 사이의 거리)=(반지름의 길이)

임을 이용하는 것이 편리하다.

140-❶ 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$$2\cdot x+(-1)\cdot y=5$$
$$\therefore 2x-y=5$$

이 직선의 x절편은 $\frac{5}{2}$이고 y절편은 -5이므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ 0\right),\ \mathrm{Q}(0,\ -5)$$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 5=\frac{25}{4}$$

답 $\frac{25}{4}$

140-❷ 원의 중심 $(3,\ -2)$와 접점 $(6,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2-(-2)}{6-3}=\frac{4}{3}$$

접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직이므로 접선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

따라서 접선은 기울기가 $-\frac{3}{4}$이고 점 $(6,\ 2)$를 지나므로 접선의 방정식은

$$y-2=-\frac{3}{4}(x-6) \qquad \therefore\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{2}$$

따라서 접선의 y절편은 $\frac{13}{2}$이다.

답 $\frac{13}{2}$

다른 풀이 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ 위의 점 $(6,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$$(6-3)(x-3)+(2+2)(y+2)=25$$
$$3(x-3)+4(y+2)=25$$
$$\therefore\ 3x+4y-26=0$$

$x=0$을 위의 식에 대입하면

$$4y-26=0 \qquad \therefore\ y=\frac{13}{2}$$

따라서 접선의 y절편은 $\frac{13}{2}$이다.

141-❶ $x^2+y^2+4x-2y+4=0$에서

$$(x+2)^2+(y-1)^2=1$$

접선의 기울기를 m이라 하면 원점을 지나는 접선의 방정식은

$$y=mx,\ \text{즉}\ mx-y=0$$

원의 중심 $(-2,\ 1)$과 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \qquad |2m+1|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3m^2+4m=0, \qquad m(3m+4)=0$$
$$\therefore\ m=-\frac{4}{3}\ \text{또는}\ m=0$$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 합은 $-\frac{4}{3}$이다.

답 $-\frac{4}{3}$

다른 풀이 접선의 방정식을 $y=mx$라 하고 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$에 대입하면

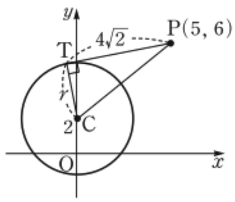
$$(x+2)^2+(mx-1)^2=1$$
$$(1+m^2)x^2-2(m-2)x+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4}=\{-(m-2)\}^2-4(1+m^2)=0$$
$$-3m^2-4m=0, \qquad m(3m+4)=0$$
$$\therefore\ m=-\frac{4}{3}\ \text{또는}\ m=0$$

따라서 두 접선의 기울기의 합은 $-\frac{4}{3}$이다.

142-❶ 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 T라 하면 $\overline{\mathrm{PT}}=4\sqrt{2}$



오른쪽 그림에서

$$\overline{\mathrm{CT}}\perp\overline{\mathrm{PT}}$$

이므로 삼각형 CPT는 $\angle\mathrm{CTP}=90^\circ$인 직각삼각형이다.

이때 구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\overline{\mathrm{CT}}=r,$$
$$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(5-0)^2+(6-2)^2}=\sqrt{41}$$

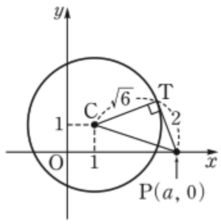
이므로 직각삼각형 CPT에서

$$r=\sqrt{(\sqrt{41})^2-(4\sqrt{2})^2}=3$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 3이다.

답 3

142-❷ 원의 중심을 C, 접점을 T라 하면 $\overline{\mathrm{PT}}=2$



오른쪽 그림에서

$$\overline{\mathrm{CT}}\perp\overline{\mathrm{PT}}$$

이므로 삼각형 CPT는 $\angle\mathrm{CTP}=90^\circ$인 직각삼각형이다.

C(1, 1)이므로

$$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(a-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{a^2-2a+2}$$

$\overline{\mathrm{CT}}$는 원의 반지름이므로 $\qquad \overline{\mathrm{CT}}=\sqrt{6}$

직각삼각형 CPT에서

$$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+2^2}=\sqrt{10}$$

따라서 $\sqrt{a^2-2a+2}=\sqrt{10}$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-2a-8=0, \qquad (a+2)(a-4)=0$$
$$\therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$$

답 4

143-❶ $x^2+y^2=1$ …… ㉠

$x^2+y^2+6x-4y+a=0$에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=13-a$ …… ㉡

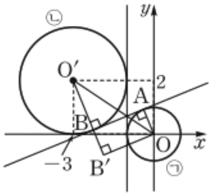
두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이는 각각 1, $\sqrt{13-a}$이고, 중심을 각각 O, O′이라 하면

O(0, 0), O′(−3, 2)

이므로 두 원의 중심거리는

$\overline{OO'}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

오른쪽 그림과 같이 두 원 ㉠, ㉡의 공통내접선의 접점을 각각 A, B라 하고 점 O에서 $\overline{O'B}$의 연장선에 내린 수선의 발을 B′이라 하면



$\overline{AB}=\overline{OB'}$

$=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{B'O'}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{13})^2-(1+\sqrt{13-a})^2}$

공통내접선의 길이가 2이므로

$\sqrt{13-(1+\sqrt{13-a})^2}=2$

양변을 제곱하면

$13-(1+\sqrt{13-a})^2=4$

$(1+\sqrt{13-a})^2=9$, $\quad 1+\sqrt{13-a}=\pm 3$

$\therefore \sqrt{13-a}=-4$ 또는 $\sqrt{13-a}=2$

그런데 $\sqrt{13-a}>0$이므로

$\sqrt{13-a}=2$, $\quad 13-a=4$

$\therefore a=9$

답 9

중단원 연습 문제

본책 388~393쪽

01 5	**02** $\frac{5}{2}$	**03** ⑤	**04** −2	
05 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$			**06** ①	**07** $\frac{32}{9}$
08 $\sqrt{10}$	**09** $\frac{1}{2}$	**10** $4\sqrt{10}$	**11** −2	**12** ①
13 $(x-4)^2+(y-1)^2=10$			**14** 27	
15 $2\sqrt{2}$	**16** 10	**17** $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$		**18** ②
19 ⑤	**20** $2\sqrt{6}$	**21** 25	**22** ①	**23** ③
24 22	**25** 18	**26** ②	**27** ④	

01 전략 원의 중심이 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a,\ 2a+1)$로 놓고 원의 방정식의 표준형을 이용한다.

풀이 원의 중심이 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 2a+1)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2a-1)^2=r^2$

이 원이 두 점 (3, 2), (−4, 3)을 지나므로

$(3-a)^2+(2-2a-1)^2=r^2$

$\therefore 5a^2-10a+10=r^2$ …… ㉠

$(-4-a)^2+(3-2a-1)^2=r^2$

$\therefore 5a^2+20=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ r=5\ (\because r>0)$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다. 답 5

다른 풀이 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 2a+1)$이라 하면 점 $(a,\ 2a+1)$에서 두 점 (3, 2), (−4, 3)에 이르는 거리가 같으므로

$\sqrt{(3-a)^2+(1-2a)^2}=\sqrt{(-4-a)^2+(2-2a)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$-10a=10 \quad \therefore a=-1$

즉 원의 중심의 좌표는 (−1, −1)이고, 원의 반지름의 길이는 두 점 (−1, −1), (3, 2) 사이의 거리와 같으므로 $\quad \sqrt{(3+1)^2+(2+1)^2}=5$

02 전략 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이고, 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$이다.

풀이 A(4, 4), B(12, −2)라 하면 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{4+12}{2},\ \frac{4-2}{2}\right)$, 즉 (8, 1)

또 선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(12-4)^2+(-2-4)^2}=5$

$\therefore r=5$ ⋯➊

이때 직선 $y=mx-3$이 원의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 원의 중심 (8, 1)을 지난다.

즉 $1=8m-3$에서

$8m=4 \quad \therefore m=\frac{1}{2}$ ⋯➋

$\therefore mr=\frac{5}{2}$ ⋯➌

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ r의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ mr의 값을 구할 수 있다.	20%

03 전략 원의 중심을 $C(a, b)$로 놓고 중심에서 주어진 세 점까지의 거리가 모두 같음을 이용한다.

풀이 주어진 세 점을 $P(4, 0)$, $Q(-4, 6)$, $R(3, -1)$이라 하자. 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심을 $C(a, b)$라 하면

$\overline{CP}=\overline{CQ}=\overline{CR}$이므로 $\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2=\overline{CR}^2$

$$\overline{CP}^2=(4-a)^2+(0-b)^2=a^2+b^2-8a+16$$
$$\overline{CQ}^2=(-4-a)^2+(6-b)^2=a^2+b^2+8a-12b+52$$
$$\overline{CR}^2=(3-a)^2+(-1-b)^2=a^2+b^2-6a+2b+10$$

$\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2$에서 $4a-3b=-9$

$\overline{CQ}^2=\overline{CR}^2$에서 $a-b=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$

따라서 원의 중심은 점 $C(0, 3)$이고 반지름의 길이는

$$\overline{CP}=\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2}=5$$

즉 $a=0$, $b=3$, $r=5$이므로

$$a-b+r=2$$

답 ⑤

04 전략 원의 방정식은 x^2의 계수와 y^2의 계수가 서로 같고, xy항이 없는 x, y에 대한 이차방정식이다.

풀이 주어진 방정식이 원의 방정식이 되려면 x^2의 계수와 y^2의 계수가 서로 같아야 하므로

$a=1$ ⋯ ❶

또 xy항이 없어야 하므로 $b=0$ ⋯ ❷

$a=1$, $b=0$을 주어진 방정식에 대입하면

$$x^2+y^2-2y+c=0$$
$$\therefore x^2+(y-1)^2=1-c$$

원의 반지름의 길이가 2이므로

$1-c=4$ $\therefore c=-3$ ⋯ ❸

$\therefore a+b+c=-2$ ⋯ ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ c의 값을 구할 수 있다.	50%
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10%

05 전략 중심이 (p, q)인 원이 x축, y축에 동시에 접하면 (반지름의 길이)$=|p|=|q|$임을 이용한다.

풀이 구하는 원은 x축, y축에 동시에 접하고, 중심이 제1사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 (a, a) $(a>0)$라 하면 구하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$$

이때 중심 (a, a)가 직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로

$a=2a-3$ $\therefore a=3$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-3)^2=9$$

답 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

06 전략 원 위의 점을 $P(a, b)$라 하고 점 M의 좌표를 (x, y)로 놓은 후 a, b를 x, y로 나타낸다.

풀이 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$에서

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9$$

원 위의 점을 $P(a, b)$라 하면

$(a-2)^2+(b+1)^2=9$ ⋯⋯ ㉠

점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{-2+a}{2},\ y=\frac{4+b}{2}$$

$\therefore a=2x+2$, $b=2y-4$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$(2x+2-2)^2+(2y-4+1)^2=9$$
$$x^2+y^2-3y=0$$
$$\therefore x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

즉 점 M의 자취는 중심의 좌표가 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$$2\pi\cdot\frac{3}{2}=3\pi$$

답 ①

07 전략 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 이용한다.

풀이 $y=k(x-5)$를 $x^2+y^2=16$에 대입하면

$$x^2+\{k(x-5)\}^2=16$$
$$\therefore (k^2+1)x^2-10k^2x+25k^2-16=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{D}{4}=(-5k^2)^2-(k^2+1)(25k^2-16)<0$$

$9k^2-16>0$, $(3k+4)(3k-4)>0$

$$\therefore k<-\frac{4}{3} \text{ 또는 } k>\frac{4}{3}$$

따라서 $\alpha=-\frac{4}{3}$, $\beta=\frac{4}{3}$이므로

$$\alpha^2+\beta^2=\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{32}{9}$$ 답 $\frac{32}{9}$

다른 풀이 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=k(x-5)$, 즉 $kx-y-5k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|-5k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|5k|}{\sqrt{k^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원과 직선이 만나지 않으려면 $d>4$이어야 한다. 즉

$$\frac{|5k|}{\sqrt{k^2+1}}>4, \qquad |5k|>4\sqrt{k^2+1}$$

양변을 제곱하면 $\quad 25k^2>16(k^2+1)$

$$9k^2-16>0, \qquad (3k+4)(3k-4)>0$$

$$\therefore k<-\frac{4}{3} \text{ 또는 } k>\frac{4}{3} \qquad \therefore \alpha^2+\beta^2=\frac{32}{9}$$

08

전략 원 밖의 한 점 A와 원의 중심 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, 점 A와 원 위의 점 사이의 거리의 최솟값은 $d-r$이다.

풀이 점 $A(2, 6)$과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=2\sqrt{10}$$ ··· ❶

이때 원의 반지름의 길이가 r이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은 $\quad 2\sqrt{10}-r$ ··· ❷

따라서 $2\sqrt{10}-r=\sqrt{10}$이므로

$$r=\sqrt{10}$$ ··· ❸

답 $\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ 점 A와 원의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{AP}$의 길이의 최솟값을 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ r의 값을 구할 수 있다.	20%

09

전략 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은 두 원의 방정식에서 이차항을 소거한다.

풀이 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$에서

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0$$

$(x-a)^2+(y-2)^2=1$에서

$$x^2+y^2-2ax-4y+a^2+3=0$$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2x-6y+6$$
$$-(x^2+y^2-2ax-4y+a^2+3)=0$$
$$\therefore (2a-2)x-2y-a^2+3=0$$

이 직선이 직선 $x+2y+5=0$에 평행하므로

$$\frac{2a-2}{1}=\frac{-2}{2}\neq\frac{-a^2+3}{5}$$

$2a-2=-1$에서 $\qquad a=\frac{1}{2}$

이때 $\frac{-a^2+3}{5}=\frac{11}{20}\neq-1$이므로 구하는 a의 값은 $\frac{1}{2}$이다. 답 $\frac{1}{2}$

10

전략 원 $x^2+y^2=r^2\,(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$ 임을 이용한다.

풀이 직선 $2x+y+3=0$, 즉 $y=-2x-3$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

또 원 $x^2+y^2=8$의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 조건을 만족시키는 두 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x\pm2\sqrt{2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{10}$$ ··· ❶

따라서 두 직선이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(-2\sqrt{10}, 0)$, $(2\sqrt{10}, 0)$이므로

$$\overline{AB}=2\sqrt{10}-(-2\sqrt{10})=4\sqrt{10}$$ ··· ❷

답 $4\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ 두 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60%
❷ 선분 AB의 길이를 구할 수 있다.	40%

11

전략 접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직임을 이용하여 접선의 기울기를 먼저 구한다.

풀이 $x^2+y^2+6x-2y+2=0$에서

$$(x+3)^2+(y-1)^2=8$$

원의 중심 $(-3, 1)$과 접점 $(-1, 3)$을 지나는 직선의 기울기는 $\quad \frac{3-1}{-1-(-3)}=1$

접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직이므로 접선의 기울기는 -1이다.

즉 접선은 기울기가 -1이고 점 $(-1, 3)$을 지나므로 접선의 방정식은

$$y-3=-(x+1) \qquad \therefore y=-x+2$$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로 $\quad ab=-2$ 답 -2

다른 풀이 원 $x^2+y^2+6x-2y+2=0$, 즉 $(x+3)^2+(y-1)^2=8$ 위의 점 $(-1, 3)$에서의 접선의 방정식은

$$(-1+3)(x+3)+(3-1)(y-1)=8$$
$$2(x+3)+2(y-1)=8$$
$$\therefore y=-x+2$$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로 $\quad ab=-2$

13 원의 방정식

12 (전략) 접선의 기울기를 m이라 하고 접선의 방정식을 구하여 원과 직선의 위치 관계를 이용한다.

(풀이) 접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(0,\ 0)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=mx \qquad \therefore\ mx-y=0$

원 $x^2+y^2-6x-6y+17=0$에서

$(x-3)^2+(y-3)^2=1$

원의 중심 $(3,\ 3)$과 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\dfrac{|3m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \qquad |3m-3|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2-9m+4=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 접선의 기울기의 곱은 1이다.

답 ①

13 (전략) 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$로 놓고 원의 방정식의 표준형을 이용한다.

(풀이) 구하는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=10$

이 원이 두 점 $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$를 지나므로

$(1-a)^2+(2-b)^2=10$

$\therefore\ a^2+b^2-2a-4b-5=0$ …… ㉠

$(3-a)^2+(4-b)^2=10$

$\therefore\ a^2+b^2-6a-8b+15=0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$4a+4b-20=0$

$\therefore\ b=-a+5$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입한 후 정리하면

$2a^2-8a=0, \qquad a(a-4)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=4$

그런데 $a=0$이면 원의 중심은 $(0,\ 5)$가 되어 주어진 그래프의 모양을 만족시키지 않으므로 $\quad a=4$

$a=4$를 ㉢에 대입하면 $\quad b=1$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(4,\ 1)$이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-1)^2=10$

답 $(x-4)^2+(y-1)^2=10$

14 (전략) 정사각형의 두 대각선은 서로 수직임을 이용한다.

(풀이) $x^2+y^2-4x-6y=0$에서

$(x-2)^2+(y-3)^2=13$ …… ㉠

정사각형의 두 대각선은 서로 수직이므로 직선 BD의 기울기는 -2이고, 직선 BD는 원의 중심 $(2,\ 3)$을 지나므로 직선 BD의 방정식은

$y-3=-2(x-2)$

$\therefore\ y=-2x+7$ …… ㉡ ⋯➊

㉡을 ㉠에 대입하면

$(x-2)^2+(-2x+7-3)^2=13$

$5x^2-20x+7=0$

$\therefore\ x=\dfrac{10\pm\sqrt{65}}{5}$

이때 점 D의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작으므로 점 D의 x좌표는 $\quad x=\dfrac{10-\sqrt{65}}{5}$

$x=\dfrac{10-\sqrt{65}}{5}$를 ㉡에 대입하여 계산하면

$y=\dfrac{15+2\sqrt{65}}{5}$

즉 $\mathrm{D}\left(\dfrac{10-\sqrt{65}}{5},\ \dfrac{15+2\sqrt{65}}{5}\right)$이다. ⋯➋

따라서 $a=10$, $b=15$, $c=2$이므로

$a+b+c=27$ ⋯➌

답 27

채점 기준	비율
➊ 직선 BD의 방정식을 구할 수 있다.	40%
➋ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40%
➌ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20%

15 (전략) 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값 또는 최솟값을 구할 때에는 원의 중심과 직선 사이의 거리와 원의 반지름의 길이를 이용한다.

(풀이) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{0-3+3}{3},\ \dfrac{3+0+0}{3}\right)$, 즉 $(0,\ 1)$

직선 AC의 기울기는 $\dfrac{0-3}{3-0}=-1$이므로 직선 l의 방정식은

$y-1=-x$

$\therefore\ x+y-1=0$

$x^2+y^2-8x-6y+23=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=2$

이므로 원의 중심 $(4,\ 3)$과 직선 $x+y-1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 구하는 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

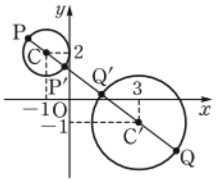
답 $2\sqrt{2}$

16 (전략) 두 원을 좌표평면 위에 나타낸 후 선분 PQ의 길이가 최대일 때와 최소일 때를 생각해 본다.

(풀이) 두 원의 중심이 각각 $C(-1, 2)$, $C'(3, -1)$이므로 두 원의 중심거리는

$\overline{CC'}=\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2}=5$ ⋯ ❶

두 원 C, C'의 반지름의 길이는 각각 1, 2이므로 오른쪽 그림에서 선분 PQ의 길이의 최댓값은



$\overline{PC}+\overline{CC'}+\overline{C'Q}$

$=1+5+2=8$

최솟값은

$\overline{CC'}-\overline{CP'}-\overline{C'Q'}=5-1-2=2$ ⋯ ❷

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 10이다. ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 두 원의 중심거리를 구할 수 있다.	30%
❷ 선분 PQ의 길이의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	60%
❸ 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10%

17 (전략) 두 원의 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 두 원의 공통현을 지름으로 하는 원임을 이용한다.

(풀이) 두 원의 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 두 원의 공통현을 지름으로 하는 원이다. 즉 구하는 원의 중심은 두 원의 공통현과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점이다.

$(x+1)^2+y^2=16$에서

$x^2+y^2+2x-15=0$

$x^2+(y-2)^2=16$에서

$x^2+y^2-4y-12=0$

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2+2x-15-(x^2+y^2-4y-12)=0$

$\therefore 2x+4y-3=0$ ⋯⋯ ㉠

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-1, 0)$, $(0, 2)$이므로 두 원의 중심을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}=1$

$\therefore 2x-y=-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-\frac{1}{2}$, $y=1$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는

$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

답 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

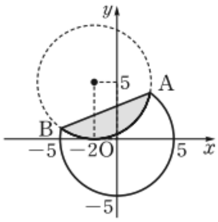
Remark▶

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

18 (전략) 접은 부분을 포함하는 새로운 원의 방정식을 구한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 접은 부분을 포함하는 새로운 원은 반지름의 길이가 5이고 점 $(-2, 0)$에서 x축에 접하므로 원의 중심의 좌표는



$(-2, 5)$

따라서 접은 부분을 포함하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-5)^2=25$,

즉 $x^2+y^2+4x-10y+4=0$

현 AB는 두 원 $x^2+y^2-25=0$, $x^2+y^2+4x-10y+4=0$의 공통현이므로 직선 AB의 방정식은

$x^2+y^2-25-(x^2+y^2+4x-10y+4)=0$

$\therefore 4x-10y+29=0$

따라서 이 직선의 y절편은 $\frac{29}{10}$이다.

답 ②

19 (전략) 접선의 기울기를 m이라 하고 접선의 방정식을 세운 후 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

(풀이) 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0, a)$를 지나는 접선의 방정식은

$y-a=mx$

$\therefore mx-y+a=0$ ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$와 접하므로 원의 중심 $(2, 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같다. 즉

$\frac{|2m-2+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$

$|2m-2+a|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$5m^2-4(a-2)m-a^2+4a+5=0$

이 이차방정식의 두 근을 m_1, m_2라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1m_2=\frac{-a^2+4a+5}{5}$

이때 두 접선이 서로 수직이므로 $m_1m_2=-1$에서

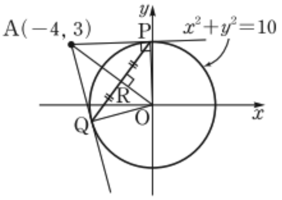
$$\frac{-a^2+4a+5}{5}=-1, \qquad a^2-4a-10=0$$

$$\therefore a=2+\sqrt{14}\ (\because a>0)$$

답 ⑤

20 전략 원의 접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직임을 이용한다.

풀이 원 $x^2+y^2=10$의 중심이 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이고



$$\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{AP}}$$

이므로 삼각형 OPA는 $\angle\mathrm{OPA}=90°$인 직각삼각형이다.

$\overline{\mathrm{OP}}$는 원의 반지름이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{10}$$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로 직각삼각형 OPA에서

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{5^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{15}$$

$\overline{\mathrm{OA}}$와 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 교점을 R라 하면 $\overline{\mathrm{OA}}$는 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 수직이등분하므로 직각삼각형 OPA에서

$$\frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{PR}}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\overline{\mathrm{PR}}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{6}$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PR}}=2\sqrt{6}$$

답 $2\sqrt{6}$

21 전략 $f(x)=ax+b$로 놓고 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 D가 $D=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ax+b$라 하자.

$y=ax+b$를 $x^2+y^2=25$에 대입하면

$$x^2+(ax+b)^2=25$$

$$\therefore (a^2+1)x^2+2abx+b^2-25=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4}=(ab)^2-(a^2+1)(b^2-25)=0$$

$$25a^2-b^2+25=0$$

$$\therefore 25a^2-b^2=-25 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\begin{aligned}\therefore f(-5)f(5)&=(-5a+b)(5a+b)\\&=-25a^2+b^2\\&=-(25a^2-b^2)\\&=25\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

답 25

22 전략 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 원 C_1의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $l:\ ax+by+1=0$ 사이의 거리는 원 C_1의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

$$\therefore a^2+b^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 $l_1,\ l_2$가 모두 직선 l에 평행하므로

$$l_1:\ ax+by+m_1=0,$$

$$l_2:\ ax+by+m_2=0\ (m_1\neq1,\ m_2\neq1,\ m_2>m_1)$$

이라 하면 원 C_2의 중심 $(0,\ 0)$과 두 직선 $l_1,\ l_2$ 사이의 거리는 모두 원 C_2의 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$와 같다. 즉

$$\frac{|m_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|m_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}$$

$$|m_1|=|m_2|=2\sqrt{2}\ (\because ㉠)$$

$$m_1=-2\sqrt{2},\ m_2=2\sqrt{2}\ (\because m_2>m_1)$$

$$\therefore l_1:\ ax+by-2\sqrt{2}=0$$

$$l_2:\ ax+by+2\sqrt{2}=0$$

이때 점 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$는 각각 직선 $l_1,\ l_2$ 위에 있으므로

$$ax_1+by_1-2\sqrt{2}=0,\ ax_2+by_2+2\sqrt{2}=0$$

$$\therefore ax_1+by_1=2\sqrt{2},\ ax_2+by_2=-2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(ax_1+by_1+1)(ax_2+by_2+1)\\&=(2\sqrt{2}+1)(-2\sqrt{2}+1)\\&=-7\end{aligned}$$

답 ①

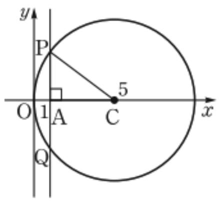
23 전략 원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 이등분함을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-10x=0$에서

$$(x-5)^2+y^2=25$$

원의 중심을 $\mathrm{C}(5,\ 0)$이라 하고, 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지나는 직선이 이 원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.

현 PQ의 길이가 최소일 때는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{CA}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$일 때이고 직각삼각형 ACP에서 $\overline{\mathrm{CA}}=4$, $\overline{\mathrm{CP}}=5$이므로



$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{5^2-4^2}=3$$

$$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{AP}}=6$$

따라서 현 PQ의 길이의 최솟값은 6이다.

또 현 PQ의 길이가 최대일 때는 현 PQ가 원의 지름일 때이므로 현 PQ의 길이의 최댓값은 10이다.

따라서 현의 길이가 자연수인 경우는

6, 7, 8, 9, 10

이때 길이가 7, 8, 9인 현은 각각 2개씩 존재하고, 길이가 6, 10인 현은 각각 1개씩 존재하므로 구하는 현의 개수는

$3\cdot 2+2\cdot 1=8$

답 ③

24 전략 원점과 점 (3, 4)를 지나는 직선과 직선 l이 수직으로 만남을 이용한다.

풀이 직선 l이 점 (3, 4)를 지나는 직선 중에서 원점과의 거리가 최대이므로 원점과 점 (3, 4)를 지나는 직선과 직선 l이 수직으로 만나야 한다.

직선 l의 방정식을

$y=a(x-3)+4$ (a는 상수)

라 하면 원점과 점 (3, 4)를 지나는 직선의 기울기가

$\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}$이므로 $\quad a=-\frac{3}{4}$

따라서 직선 l의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}(x-3)+4$, 즉 $3x+4y-25=0$

원의 중심 (7, 5)와 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값 m은

$m=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$

$\therefore 10m=10\cdot\frac{11}{5}=22$

답 22

25 전략 원 $x^2+y^2=r^2\,(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$임을 이용한다.

풀이 직선 $y=x+2$와 평행하므로 접선의 기울기가 1이고, 원 $x^2+y^2=9$의 반지름의 길이는 3이므로 접선의 방정식은

$y=x\pm 3\sqrt{1+1^2} \qquad \therefore y=x\pm 3\sqrt{2}$

따라서 $k=-3\sqrt{2}$ 또는 $k=3\sqrt{2}$이므로

$k^2=18$

답 18

다른 풀이 직선 $y=x+2$와 평행하고 y절편이 k인 직선의 방정식은 $\quad y=x+k$

$y=x+k$를 $x^2+y^2=9$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2=9$

$\therefore 2x^2+2kx+k^2-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-9)=0 \qquad \therefore k^2=18$

26 전략 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 직선의 방정식을 구한다.

풀이 접선 $y=mx+n$이 점 $(-6, 0)$을 지나므로

$0=-6m+n$

$\therefore n=6m$ ...... ㉠

따라서 접선의 방정식은

$y=mx+6m$

원 $x^2+y^2=9$의 중심 $(0, 0)$에서 직선 $y=mx+6m$, 즉 $mx-y+6m=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 3과 같으므로

$\frac{|6m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3, \qquad |6m|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$36m^2=9(m^2+1) \qquad \therefore m^2=\frac{1}{3}$

$\therefore mn=m\cdot 6m$ ($\because$ ㉠)

$=6m^2$

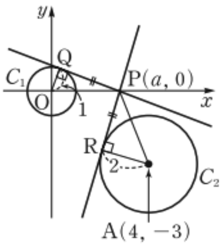
$=6\cdot\frac{1}{3}=2$

답 ②

27 전략 원의 접선의 성질과 피타고라스 정리를 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

풀이 $x^2+y^2-8x+6y+21=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=4$



원 C_2의 중심을 A(4, −3), 점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 $\overline{OQ}\perp\overline{PQ}$이므로 직각삼각형 OPQ에서

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2}$

$=\sqrt{a^2-1}$

또 $\overline{AR}\perp\overline{PR}$이므로 직각삼각형 APR에서

$\overline{PR}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AR}^2}$

$=\sqrt{\{(a-4)^2+(0+3)^2\}-2^2}$

$=\sqrt{a^2-8a+21}$

$\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$이므로

$a^2-1=a^2-8a+21$

$8a=22$

$\therefore a=\frac{11}{4}$

답 ④

13 원의 방정식

Ⅳ. 도형의 방정식

14 도형의 이동

유제

본책 397~414쪽

144-❶ 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+7, y-2)$는 x축의 방향으로 7만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(a, -1)$이 옮겨지는 점의 좌표는

$(a+7, -1-2)$, 즉 $(a+7, -3)$

이 점이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$-3=2(a+7)-1, \quad a+7=-1$

$\therefore a=-8$

답 -8

144-❷ 점 $(1, -2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(9, 1)$이라 하면

$1+a=9, \ -2+b=1$

$\therefore a=8, \ b=3$

즉 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 8만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(3, -3)$으로 옮겨지는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x+8=3, \ y+3=-3$

$\therefore x=-5, \ y=-6$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-5, -6)$이다.

답 $(-5, -6)$

145-❶ $4x+y-5=0$에 x 대신 $x-a$를, y 대신 $y-3$을 대입하면

$4(x-a)+(y-3)-5=0$

$\therefore 4x+y-4a-8=0$

이 직선이 원점을 지나므로

$-4a-8=0 \quad \therefore a=-2$

답 -2

145-❷ 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하는 것이므로

$2x-3y-1=0$에 x 대신 $x-1$을, y 대신 $y+5$를 대입하면

$2(x-1)-3(y+5)-1=0$

$\therefore 2x-3y-18=0$

이 직선이 직선 $2x+ay+b=0$과 일치해야 하므로

$a=-3, \ b=-18$

$\therefore a-b=15$

답 15

146-❶ 점 $(2, 1)$을 점 $(-1, 0)$으로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 것이다.

$x^2+y^2-8x+2y+1=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=16$

이므로 이 원이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은

$\{(x+3)-4\}^2+\{(y+1)+1\}^2=16$

$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=16$

따라서 구하는 중심의 좌표는

$(1, -2)$

답 $(1, -2)$

다른 풀이 구하는 원의 중심은 주어진 평행이동에 의하여 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=16$의 중심 $(4, -1)$이 옮겨지는 점이므로

$(4-3, -1-1)$, 즉 $(1, -2)$

146-❷ $x^2+y^2-2x-8=0$에서

$(x-1)^2+y^2=9 \quad \cdots\cdots ㉠$

$x^2+y^2+2x-2y-7=0$에서

$(x+1)^2+(y-1)^2=9 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠에 x 대신 $x-a$를, y 대신 $y-b$를 대입하면

$(x-a-1)^2+(y-b)^2=9$

이 식이 ㉡과 같아야 하므로

$-a-1=1, \ -b=-1$

$\therefore a=-2, \ b=1 \quad \therefore ab=-2$

답 -2

다른 풀이 $x^2+y^2-2x-8=0$에서

$(x-1)^2+y^2=9$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(1, 0)$

$x^2+y^2+2x-2y-7=0$에서

$(x+1)^2+(y-1)^2=9$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(-1, 1)$

즉 점 $(1, 0)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-1, 1)$이므로

$1+a=-1, \ 0+b=1$

$\therefore a=-2, \ b=1 \quad \therefore ab=-2$

147-❶ 점 $(5, -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(-5, 2)$

점 $(5, -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(-2, 5)$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{5-2}{-2-(-5)}(x+5)$$

$\therefore y=x+7$

답 $y=x+7$

147-❷ 점 $(3,\ -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-3,\ 4)$

이 점이 직선 $ax+5y-2a^2=0$ 위의 점이므로

$a\cdot(-3)+5\cdot4-2a^2=0, \qquad 2a^2+3a-20=0$

$(a+4)(2a-5)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=\dfrac{5}{2}$ 답 $-4,\ \dfrac{5}{2}$

148-❶ 직선 $y=kx+1$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=kx+1$

$\therefore y=-kx-1$ …… ㉠

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2+4x-6y+9=0$, 즉 $(x+2)^2+(y-3)^2=4$의 넓이를 이등분하므로 직선 ㉠은 원의 중심 $(-2,\ 3)$을 지난다. 즉

$3=-k\cdot(-2)-1, \qquad 2k=4$

$\therefore k=2$ 답 2

Remark▶ 원의 넓이를 이등분하는 직선

직선이 원의 중심을 지나면 직선은 원의 넓이를 이등분한다. 또 원의 넓이를 이등분하는 직선은 반드시 원의 중심을 지난다.

148-❷ $y=x^2-2mx+m^2-1$에서

$y=(x-m)^2-1$

포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(m,\ -1)$이므로 이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-m,\ 1)$

즉 $-m=-2,\ 1=k$이므로

$m=2,\ k=1$

$\therefore mk=2$ 답 2

149-❶ 직선 $y=3x-4$를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=3\cdot(-x)-4$

$\therefore y=3x+4$

이 직선을 다시 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+1=3(x-2)+4$

$\therefore y=3x-3$ 답 $y=3x-3$

149-❷ 원 $x^2+y^2=r^2$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-4)^2=r^2$

이 원을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+1)^2=r^2$

원의 중심이 $(4,\ -1)$이고, 이 원이 y축에 접하므로 원의 중심의 x좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같다.

$\therefore r=4$ 답 4

Remark▶ y축에 접하는 원의 방정식

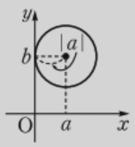
y축에 접하는 원은

$|(\text{중심의 } x\text{좌표})|$

$=(\text{반지름의 길이})$

이므로 중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고 y축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$



150-❶ 점 $(-3,\ a)$를 점 $(9,\ 5)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(b,\ 2)$이므로 점 $(9,\ 5)$는 두 점 $(-3,\ a)$, $(b,\ 2)$를 잇는 선분의 중점이다.

즉 $\dfrac{-3+b}{2}=9,\ \dfrac{a+2}{2}=5$이므로

$a=8,\ b=21$

$\therefore 2a-b=2\cdot8-21$

$=-5$ 답 -5

150-❷ $y=x^2-8x+19$에서

$y=(x-4)^2+3$

주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(4,\ 3)$이므로 점 $(4,\ 3)$을 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(0,\ -3)$이어야 한다.

즉 점 $(a,\ b)$가 두 점 $(4,\ 3)$, $(0,\ -3)$을 잇는 선분의 중점이므로

$a=\dfrac{4+0}{2}=2,\ b=\dfrac{3-3}{2}=0$

$\therefore a+b=2$ 답 2

150-❸ 주어진 원을 점 $(2,\ -3)$에 대하여 대칭이동한 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 $(2,\ -3)$은 주어진 원의 중심 $(-1,\ 1)$과 점 $(a,\ b)$를 잇는 선분의 중점이다.

즉 $\dfrac{-1+a}{2}=2,\ \dfrac{1+b}{2}=-3$이므로

$a=5,\ b=-7$

따라서 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(5,\ -7)$이고 반지름의 길이가 2이다.

이 원이 직선 $y=mx-3$, 즉 $mx-y-3=0$과 접하므로 원의 중심 $(5,\ -7)$과 직선 $mx-y-3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같다. 즉

$$\frac{|5m-(-7)-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$|5m+4|=2\sqrt{m^2+1}$$

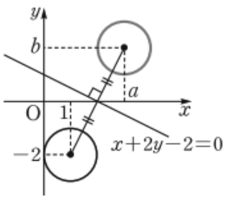
양변을 제곱하여 정리하면

$$21m^2+40m+12=0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 m의 값의 합은 $-\frac{40}{21}$이다.

답 $-\frac{40}{21}$

151-❶ 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$의 중심 $(1,\ -2)$를 직선 $x+2y-2=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자.



(i) 두 점 $(1,\ -2)$, $(a,\ b)$를 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right)$는 직선 $x+2y-2=0$ 위의 점이므로

$$\frac{1+a}{2}+2\cdot\frac{-2+b}{2}-2=0$$

$$\therefore\ a+2b-7=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) 두 점 $(1,\ -2)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선과 직선 $x+2y-2=0$은 서로 수직이므로

$$\frac{b-(-2)}{a-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$$b+2=2(a-1)$$

$$\therefore\ 2a-b-4=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

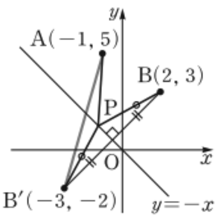
$$a=3,\ b=2$$

따라서 대칭이동한 도형은 점 $(3,\ 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 도형의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-2)^2=1$$

답 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

152-❶ 오른쪽 그림과 같이 점 B(2, 3)을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



$$B'(-3,\ -2)$$

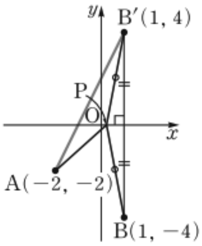
$\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$$
$$\geq\overline{AB'}$$
$$=\sqrt{(-3+1)^2+(-2-5)^2}$$
$$=\sqrt{53}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{53}$이다.

답 $\sqrt{53}$

152-❷ 오른쪽 그림과 같이 점 B(1, −4)를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



$$B'(1,\ 4)$$

$\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$$
$$\geq\overline{AB'}$$

즉 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때의 점 P는 직선 AB′이 x축과 만나는 점이다.

이때 직선 AB′의 방정식은

$$y+2=\frac{4-(-2)}{1-(-2)}(x+2)$$

$$\therefore\ y=2x+2$$

따라서 직선 AB′의 x절편이 −1이므로 구하는 점 P의 좌표는 $(-1,\ 0)$

답 $(-1,\ 0)$

중단원 연습 문제

본책 415~419쪽

01 −2	02 ⑤	03 23	04 −1	05 3
06 10	07 ③	08 8	09 $y=-x+3$	
10 ②	11 $5\sqrt{2}$	12 $y=x+\sqrt{3}$		13 ②
14 1	15 풀이 참조		16 ④	
17 20 m	18 7	19 ③	20 ⑤	21 ②
22 ②				

01 전략 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$는 점 $(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

풀이 점 $(1,\ -3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(5,\ -7)$이므로

$$1+a=5,\ -3+b=-7$$

$$\therefore\ a=4,\ b=-4$$

따라서 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+4, y-4)$에 의하여 점 (c, d)가 옮겨지는 점의 좌표가 $(1, -3)$이므로

$c+4=1, d-4=-3$

$\therefore c=-3, d=1$

$\therefore a+b+c+d=-2$ 답 -2

02 전략 도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b)=0$이다.

풀이 직선 $y=4x-3$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+1=4(x-a)-3$

$\therefore y=4x-4a-4$

이 직선이 직선 $y=mx+4$와 일치해야 하므로

$4=m, -4a-4=4$

$\therefore a=-2, m=4$

$\therefore a+m=2$ 답 ⑤

03 전략 두 직선이 수직으로 만나는 x축 위의 점의 좌표를 구한다.

풀이 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y+1=a(x-2)+b$

$\therefore y=ax-2a+b-1$ …… ㉠

직선 ㉠이 직선 $y=-\frac{1}{2}x-4$에 수직이므로

$a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \quad \therefore a=2$

또 $y=0$을 $y=-\frac{1}{2}x-4$에 대입하면

$0=-\frac{1}{2}x-4 \quad \therefore x=-8$

따라서 직선 ㉠과 직선 $y=-\frac{1}{2}x-4$는 점 $(-8, 0)$에서 만난다.

즉 직선 $y=2x+b-5$가 점 $(-8, 0)$을 지나므로

$0=-16+b-5$

$\therefore b=21$

$\therefore a+b=23$ 답 23

04 전략 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동을 이용한다.

풀이 원 $x^2+(y-1)^2=4$의 중심의 좌표는 $(0, 1)$이고, 원 $(x-1)^2+y^2=4$의 중심의 좌표는 $(1, 0)$이므로 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 직선 $y=ax+b$ (a, b는 상수)가 직선 $y=-3x+1$로 옮겨진다고 하면

$y+1=a(x-1)+b$

$y=ax-a+b-1$

에서 이 직선이 직선 $y=-3x+1$과 일치해야 하므로

$a=-3, -a+b-1=1$

$\therefore a=-3, b=-1$

$\therefore y=-3x-1$

따라서 구하는 직선의 y절편은 -1이다. 답 -1

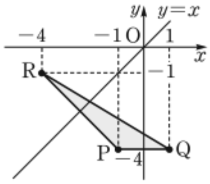
05 전략 두 점 Q, R의 좌표를 구하고 좌표평면 위에 삼각형 PQR를 그려 본다.

풀이 점 $P(-1, -4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(1, -4)$ ⋯ ❶

점 $P(-1, -4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는

$(-4, -1)$ ⋯ ❷

세 점 P, Q, R를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\triangle PQR$

$=\frac{1}{2}\cdot(1+1)\cdot(-1+4)$

$=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ △PQR의 넓이를 구할 수 있다.	40%

06 전략 원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+6x-4y-12=0$에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=25$

이 원의 중심이 $(-3, 2)$이므로 이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 중심은 $(3, 2)$이다.

$\therefore a=3, b=2$

또 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 $c=5$

$\therefore a+b+c=10$ 답 10

다른 풀이 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=25$를 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+3)^2+(y-2)^2=25$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=25$

이 원의 중심은 $(3,\ 2)$이고 반지름의 길이는 5이므로

$a=3,\ b=2,\ c=5$

$\therefore\ a+b+c=10$

07 (전략) 처음 직선의 기울기를 m이라 하고, 이 직선을 문제에서 주어진 순서대로 이동해 본다.

(풀이) 처음 직선의 기울기를 m이라 하면 이 직선이 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-1=m(x+2)$

$\therefore\ y=mx+2m+1$

이 직선을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-2=mx+2m+1$

$\therefore\ y=mx+2m+3$

이 직선을 다시 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=mx+2m+3$

이 직선이 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$-(-2)=m+2m+3,\qquad 3m=-1$

$\therefore\ m=-\dfrac{1}{3}$

따라서 처음 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{3}$이다. 답 ③

08 (전략) 두 포물선이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이면 두 포물선의 꼭짓점도 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭임을 이용한다.

(풀이) 두 포물선이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

포물선 $y=x^2-8x+2=(x-4)^2-14$의 꼭짓점의 좌표는

$(4,\ -14)$

포물선 $y=-x^2+16x-54=-(x-8)^2+10$의 꼭짓점의 좌표는

$(8,\ 10)$

따라서 점 $(a,\ b)$가 두 꼭짓점 $(4,\ -14)$, $(8,\ 10)$을 잇는 선분의 중점이므로

$a=\dfrac{4+8}{2}=6,\ b=\dfrac{-14+10}{2}=-2$

$\therefore\ a-b=8$ 답 8

09 (전략) 직선 l은 두 점 $(2,\ 3)$, $(0,\ 1)$을 잇는 선분의 수직이등분선임을 이용한다.

(풀이) $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$이라 하면 직선 l은 두 점 A, B를 잇는 선분의 수직이등분선이다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{2+0}{2},\ \dfrac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 2)$ ⋯ ❶

또 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{1-3}{0-2}=1$

이므로 직선 l의 기울기는 -1이다. ⋯ ❷

따라서 직선 l의 방정식은

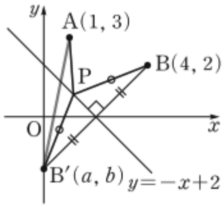
$y-2=-(x-1)$

$\therefore\ y=-x+3$ ⋯ ❸

답 $y=-x+3$

채점 기준	비율
❶ 직선 l이 지나는 한 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ 직선 l의 기울기를 구할 수 있다.	40%
❸ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	20%

10 (전략) 점 B를 주어진 직선에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B}'(a,\ b)$라 하고 점 B'의 좌표를 구한다.



(풀이) 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{B}(4,\ 2)$를 직선 $y=-x+2$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B}'(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{BB}'}$의 중점 $\left(\dfrac{4+a}{2},\ \dfrac{2+b}{2}\right)$가 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$\dfrac{2+b}{2}=-\dfrac{4+a}{2}+2$

$\therefore\ a+b=-2$ ⋯⋯ ㉠

직선 BB'과 직선 $y=-x+2$는 서로 수직이므로

$\dfrac{b-2}{a-4}\cdot(-1)=-1$

$\therefore\ a-b=2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0,\ b=-2$

$\therefore\ \mathrm{B}'(0,\ -2)$

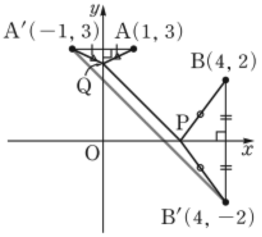
$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B}'\mathrm{P}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B}'\mathrm{P}}\\&\ge\overline{\mathrm{AB}'}\\&=\sqrt{(0-1)^2+(-2-3)^2}\\&=\sqrt{26}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{26}$이다. 답 ②

11 (전략) 두 점 A, B를 각각 y축, x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구한 후 최솟값을 구한다.

풀이



위의 그림과 같이 점 A(1, 3)을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$\mathrm{A'}(-1,\ 3)$

점 B(4, 2)를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$\mathrm{B'}(4,\ -2)$

$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{A'Q}},\ \overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PB'}}$이므로

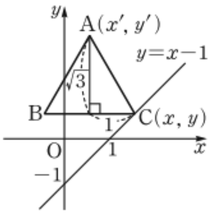
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}&=\overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB'}}\\&\ge\overline{\mathrm{A'B'}}\\&=\sqrt{(4+1)^2+(-2-3)^2}\\&=5\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다.

답 $5\sqrt{2}$

12 전략 점 C를 점 A로 옮기는 평행이동을 생각한다.

풀이 $\mathrm{C}(x,\ y)$, $\mathrm{A}(x',\ y')$이라 하면 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 2이므로 오른쪽 그림과 같이 점 A는 점 C를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 평행이동한 점이다.



즉 $x'=x-1,\ y'=y+\sqrt{3}$이므로

$x=x'+1,\ y=y'-\sqrt{3}$

점 $\mathrm{C}(x,\ y)$가 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$y'-\sqrt{3}=(x'+1)-1\qquad\therefore\ y'=x'+\sqrt{3}$

따라서 점 A의 자취의 방정식은

$y=x+\sqrt{3}$ 답 $y=x+\sqrt{3}$

다른 풀이 점 A는 점 C를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 평행이동한 점이므로 점 A의 자취는 점 C의 자취인 직선 $y=x-1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 점 A의 자취의 방정식은

$y-\sqrt{3}=(x+1)-1$

$\therefore\ y=x+\sqrt{3}$

13 전략 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형과 직선 $kx-y+k-1=0$이 만나도록 하는 k의 값의 범위를 그래프를 이용하여 구한다.

풀이 도형 $|x|+|y|=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

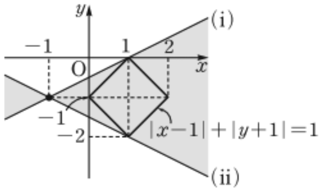
$|x-1|+|y+1|=1$ …… ㉠

직선 $kx-y+k-1=0$에서

$k(x+1)-(y+1)=0$ …… ㉡

이므로 직선 ㉡은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -1)$을 지난다.

두 방정식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 x, y가 존재하려면 방정식 ㉠이 나타내는 도형과 직선 ㉡이 만나야 한다.



이때 k는 직선 ㉡의 기울기이므로 위의 그림과 같이 직선 ㉡이 방정식 ㉠이 나타내는 도형과 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ㉡이 점 (1, 0)을 지날 때,

$2k-1=0\qquad\therefore\ k=\frac{1}{2}$

(ii) 직선 ㉡이 점 (1, −2)를 지날 때,

$2k+1=0\qquad\therefore\ k=-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $-\frac{1}{2}\le k\le\frac{1}{2}$이므로

$M=\frac{1}{2},\ m=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ 16M^2m^2=16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$ 답 ②

14 전략 주어진 조건에 따라 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, …의 좌표를 차례로 구한 후 규칙을 찾는다.

풀이 점 $\mathrm{P}(-2,\ 1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_1의 좌표는 $\mathrm{P}_1(2,\ 1)$

점 P_1을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_2의 좌표는

$\mathrm{P}_2(-2,\ -1)$

점 P_2를 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_3의 좌표는

$\mathrm{P}_3(2,\ -1)$

점 P_3을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_4의 좌표는

$\mathrm{P}_4(-2,\ 1)$

점 P_4를 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_5의 좌표는

$P_5(2,\ 1)$

⋮

즉 점 P_1, P_2, P_3, P_4, $\cdots$의 좌표는 $(2,\ 1)$, $(-2,\ -1)$, $(2,\ -1)$, $(-2,\ 1)$이 순서대로 반복된다. ⋯ ❶

이때 $2018=4\cdot504+2$에서 점 P_{2018}의 좌표는 점 P_2의 좌표와 같으므로 $P_{2018}(-2,\ -1)$ ⋯ ❷

따라서 점 $P_{2018}(-2,\ -1)$과 직선 $3x+4y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6-4+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$ ⋯ ❸

답 1

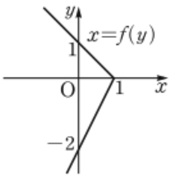
채점 기준	비율
❶ 점 P_1, P_2, P_3, P_4, $\cdots$의 좌표의 규칙을 찾을 수 있다.	40%
❷ 점 P_{2018}의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ 점 P_{2018}과 직선 $3x+4y+5=0$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%

15 전략 도형의 대칭이동을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 순서대로 대칭이동한다.

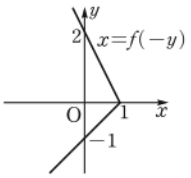
풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $x=f(y)$이고, $x=f(y)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $x=f(-y)$이다.

즉 $x=f(-y)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후, x축에 대하여 대칭이동한 것이다. ⋯ ❶

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프는 [그림 1]과 같고, 이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프는 [그림 2]와 같으므로 구하는 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2] ⋯ ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 대칭이동 과정을 설명할 수 있다.	50%
❷ $x=f(-y)$의 그래프를 그릴 수 있다.	50%

다른 풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=f(-x)$이고, $y=f(-x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $x=f(-y)$이다. 따라서 $x=f(-y)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

16 전략 도형 $f(x,\ y)=0$을 주어진 순서에 따라 대칭이동하여 도형 $g(x,\ y)=0$을 찾는다.

풀이 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,\ x)=0$이고, 도형 $f(y,\ x)=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ -y)=0$이므로 방정식 $g(x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 $f(-x,\ -y)=0$이 나타내는 도형과 같다.

ㄱ. $f(x,\ y)=x^2-y+1$이면 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 포물선 $y=x^2+1$이고, $f(-x,\ -y)=x^2+y+1$이므로 방정식 $g(x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 포물선 $y=-x^2-1$이다. 포물선 $y=x^2+1$은 평행이동하여 포물선 $y=-x^2-1$과 겹쳐질 수 없다.

ㄴ. 도형 $f(x,\ y)=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ -y)=0$이므로 방정식 $g(x,\ y)=0$과 같다.
따라서 도형 $f(x,\ y)=0$을 원점에 대하여 대칭이동하면 도형 $g(x,\ y)=0$이 된다.

ㄷ. 도형 $f(x,\ y)=0$을 중심이 $(a,\ b)$, 반지름의 길이가 r인 원이라 하면 그 도형의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ⋯⋯ ㉠

도형 $g(x,\ y)=0$, 즉 도형 $f(-x,\ -y)=0$의 방정식은 $(-x-a)^2+(-y-b)^2=r^2$

$\therefore (x+a)^2+(y+b)^2=r^2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡이 일치하면 $-a=a$, $-b=b$

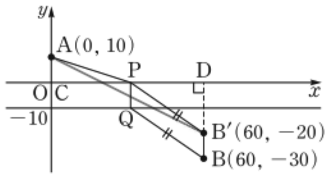
$\therefore a=0,\ b=0$

따라서 원 ㉠의 중심은 원점이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

17 전략 A마을 쪽의 강변을 x축, 직선 AC를 y축으로 하는 좌표평면을 정하여 A마을, B마을의 위치를 좌표로 나타낸다.

풀이 다음 그림과 같이 A마을 쪽의 강변을 x축, 직선 AC를 y축으로 하는 좌표평면을 정하면 A마을의 위치는 점 $(0,\ 10)$이고, B마을의 위치는 점 $(60,\ -30)$이다.



이때 건설되는 다리의 A마을 쪽의 지점을 P, B마을 쪽의 지점을 Q라 하면 두 마을 사이를 오가는 거리는

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$

그런데 $\overline{PQ}=10$으로 일정하므로 두 마을 사이를 오가는 거리가 최소이려면 $\overline{AP}+\overline{QB}$의 값이 최소이어야 한다.

점 B를 y축의 방향으로 10만큼 평행이동한 점을 B′이라 하면 B′(60, −20)이고 $\overline{QB}=\overline{PB'}$이므로

$\overline{AP}+\overline{QB}=\overline{AP}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$

따라서 점 P가 선분 AB′ 위에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{QB}$의 값이 최소가 된다.

이때 직선 AB′의 방정식은

$y-10=\dfrac{-20-10}{60-0}x \qquad \therefore y=-\dfrac{1}{2}x+10$

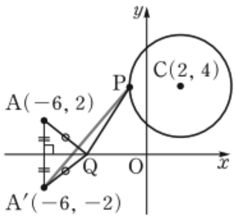
점 P는 x축 위의 점이므로 $y=0$을 위의 식에 대입하면

$0=-\dfrac{1}{2}x+10 \qquad \therefore x=20$

따라서 P(20, 0)이므로 C지점에서 D지점 쪽으로 20 m 떨어진 곳에 다리를 건설해야 한다. 답 20 m

18 전략 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면



C(2, 4),

A′(−6, −2)

$\overline{AQ}=\overline{A'Q}$이므로

$\overline{AQ}+\overline{QP}=\overline{A'Q}+\overline{QP}\geq\overline{A'P}$

따라서 $\overline{A'P}$의 길이는 원 위의 점 P와 점 A′(−6, −2) 사이의 거리이므로

$\overline{A'P}\geq\overline{CA'}-\overline{CP}$

$=\sqrt{(-6-2)^2+(-2-4)^2}-3$

$=10-3=7$

따라서 $\overline{AQ}+\overline{QP}$의 최솟값은 7이다. 답 7

19 전략 주어진 조건을 이용하여 원의 방정식을 세우고 세 점 A, B, C의 좌표를 원의 방정식에 대입한다.

풀이 점 A(−2, 1)을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

$(-2+m,\ 1)$

점 B$(-2+m,\ 1)$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점 C의 좌표는

$(-2+m,\ 1+n)$

세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심을 D(3, 2)라 하면 반지름의 길이가 $\overline{AD}$의 길이와 같으므로

$\sqrt{(3+2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$

따라서 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=26$

점 B는 원 위의 점이므로

$(-2+m-3)^2+(1-2)^2=26$

$m^2-10m=0, \qquad m(m-10)=0$

$\therefore m=10\ (\because m>0)$

또 점 C는 원 위의 점이므로

$(-2+m-3)^2+(1+n-2)^2=26$

$n^2-2n=0, \qquad n(n-2)=0$

$\therefore n=2\ (\because n>0)$

$\therefore mn=20$ 답 ③

20 전략 원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원 C의 방정식은

$\{(x-3)+1\}^2+\{(y-a)+2\}^2=9$

$\therefore (x-2)^2+(y-a+2)^2=9$

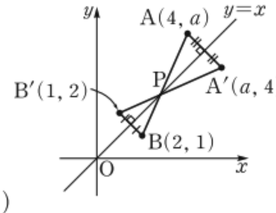
원 C의 넓이가 직선 $3x+4y-7=0$에 의하여 이등분되려면 직선 $3x+4y-7=0$이 원 C의 중심 $(2,\ a-2)$를 지나야 하므로

$3\cdot2+4(a-2)-7=0$

$4a=9 \qquad \therefore a=\dfrac{9}{4}$ 답 ⑤

21 전략 점 $(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(y,\ x)$이다.

풀이 두 점 A(4, a), B(2, 1)을 각각 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A′, B′의 좌표는



A′(a, 4), B′(1, 2)

두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 수직이므로 두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하다.
따라서 두 삼각형 APA′, BPB′은 서로 닮음이고, 두 삼각형 APA′, BPB′의 넓이의 비가 9 : 4이므로 닮음비는 3 : 2이다.
즉 $\overline{AA'}:\overline{BB'}=3:2$이므로

$$2\overline{AA'}=3\overline{BB'}$$

이때

$$\overline{AA'}=\sqrt{(a-4)^2+(4-a)^2}$$
$$=\sqrt{2}(a-4)\ (\because a>4),$$
$$\overline{BB'}=\sqrt{(1-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$$

이므로

$$2\sqrt{2}(a-4)=3\sqrt{2}$$
$$2(a-4)=3, \qquad 2a=11$$
$$\therefore a=\frac{11}{2}$$

답 ②

22 전략 원의 평행이동과 대칭이동을 이용하여 원 O_2의 방정식을 구한다.

풀이 원 O_1의 방정식은

$$(x-4)^2+(y-2)^2=4$$

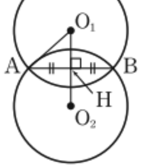
원 O_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-4)^2=4$$

이 원을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원 O_2의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-a-4)^2=4 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

오른쪽 그림과 같이 선분 AB는 두 원 O_1, O_2의 중심 O_1, O_2를 잇는 선분 O_1O_2에 의하여 수직이등분된다.



선분 AB와 선분 O_1O_2가 만나는 점을 H라 하면

$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}$$

$\overline{AO_1}=2$이므로 직각삼각형 AHO_1에서

$$\overline{O_1H}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$$
$$\therefore \overline{O_2H}=\overline{O_1H}=1$$

즉 $\overline{O_1O_2}=2$이므로 원 O_2가 원 O_1의 중심을 지난다.
따라서 원 O_2가 점 (4, 2)를 지나므로 ㉠에서

$$(4-2)^2+(2-a-4)^2=4$$
$$a^2+4a+4=0, \qquad (a+2)^2=0$$
$$\therefore a=-2$$

답 ②