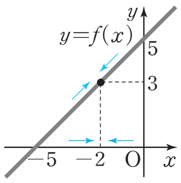
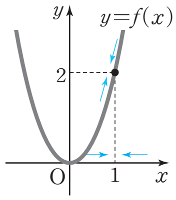
01강 함수의 극한

확인 문제 p. 6

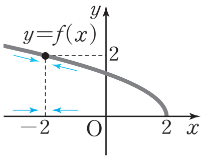
1 (1) $f(x)=x+5$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x \to -2$일 때, $f(x) \to 3$이므로
$\lim_{x \to -2}(x+5)=3$



(2) $f(x)=2x^2$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x \to 1$일 때, $f(x) \to 2$이므로
$\lim_{x \to 1}2x^2=2$



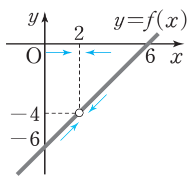
(3) $f(x)=\sqrt{-x+2}$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x \to -2$일 때, $f(x) \to 2$이므로
$\lim_{x \to -2}\sqrt{-x+2}=2$



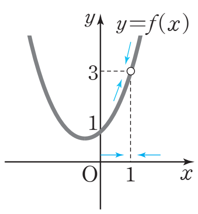
2 (1) $\lim_{x \to 2+}f(x)=1$
(2) $\lim_{x \to 2-}f(x)=1$
(3) $\lim_{x \to 3+}f(x)=2$
(4) $\lim_{x \to 3-}f(x)=0$

교/과/서/속 핵심 유형 + 닮은꼴 문제 p. 7

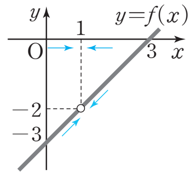
1 (1) $f(x)=\dfrac{x^2-8x+12}{x-2}$라고 하면 $x \neq 2$일 때,
$f(x)=\dfrac{(x-2)(x-6)}{x-2}=x-6$
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x \to 2$일 때, $f(x) \to -4$이므로
$\lim_{x \to 2}\dfrac{x^2-8x+12}{x-2}=-4$



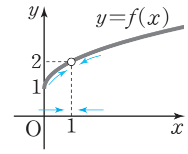
(2) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$이라고 하면 $x \neq 1$일 때,
$f(x)=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1$
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x \to 1$일 때, $f(x) \to 3$이므로
$\lim_{x \to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$



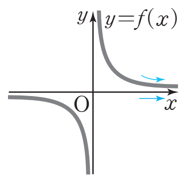
2 (1) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$이라고 하면 $x \neq 1$일 때,
$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{x-1}=x-3$
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x \to 1$일 때, $f(x) \to -2$이므로
$\lim_{x \to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=-2$



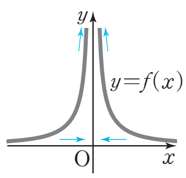
(2) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$이라고 하면 $x \neq 1$일 때,
$f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+1$
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x \to 1$일 때, $f(x) \to 2$이므로
$\lim_{x \to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$



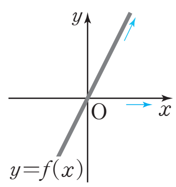
3 (1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x \to \infty$일 때, $f(x) \to 0$이므로
$\lim_{x \to \infty}\dfrac{1}{x}=0$



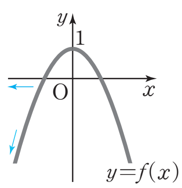
(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x \to 0$일 때, $f(x) \to \infty$이므로 $\lim_{x \to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$



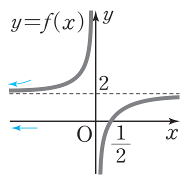
(3) $f(x)=2x$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x \to \infty$일 때, $f(x) \to \infty$이므로
$\lim_{x \to \infty}2x=\infty$



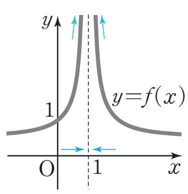
(4) $f(x)=-x^2+1$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x \to -\infty$일 때, $f(x) \to -\infty$이므로
$\lim_{x \to -\infty}(-x^2+1)=-\infty$



4 (1) $f(x)=2-\dfrac{1}{x}$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x \to -\infty$일 때, $f(x) \to 2$이므로 $\lim_{x \to -\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)=2$

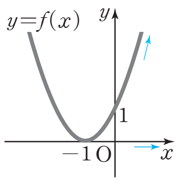


(2) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x \to 1$일 때, $f(x) \to \infty$이므로
$\lim_{x \to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty$



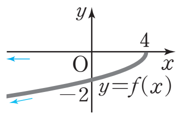
(3) $f(x)=x^2+2x+1$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2x+1)=\infty$



(4) $f(x)=-\sqrt{4-x}$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x\to-\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-\sqrt{4-x})=-\infty$



5 (1) $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(x+1)=2$

(2) $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(-3x+2)=-1$

6 (1) $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}(-3x+5)=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}(2x^2-5)=3$

7 $\lim\limits_{x\to-3+}\dfrac{|x+3|}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3+}\dfrac{x+3}{x+3}=1$

$\lim\limits_{x\to-3-}\dfrac{|x+3|}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3-}\dfrac{-(x+3)}{x+3}=-1$

따라서 $\lim\limits_{x\to-3+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-3-}f(x)$이므로 극한 $\lim\limits_{x\to-3}f(x)$는 존재하지 않는다.

8 $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x^2-5x+4}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+}(x-4)=-3$

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{x^2-5x+4}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1-}\{-(x-4)\}=3$

따라서 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x)$이므로 극한 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$는 존재하지 않는다.

02강 함수의 극한값의 계산

확인 문제 p. 8

1 (1) $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)+2g(x)\}=\lim\limits_{x\to2}f(x)+2\lim\limits_{x\to2}g(x)$

$=3+2\times(-2)=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-1}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}g(x)-1}{\lim\limits_{x\to2}f(x)}=\dfrac{-2-1}{3}=-1$

2 (1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax-3}{x-1}=3$에서 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}(ax-3)=a-3=0$ $\quad\therefore a=3$

(2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{x^2+3x+a}=-1$에서 $\lim\limits_{x\to-2}(x+2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to-2}(x^2+3x+a)=4-6+a=0$

$\therefore a=2$

3 $\lim\limits_{x\to1}(-x^2+3x+1)=3$, $\lim\limits_{x\to1}(x^2-x+3)=3$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=3$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 9

1 (1) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+5x+6}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x+2)}{x+3}$

$=\lim\limits_{x\to-3}(x+2)$

$=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$

$=\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left\{\dfrac{(x-1)+1}{x-1}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x-1}=-1$

2 (1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x+4)$

$=12$

(2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{\sqrt{x+3}-1}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(3x+6)(\sqrt{x+3}+1)}{(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to-2}3(\sqrt{x+3}+1)$

$=6$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{3x-2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left\{\dfrac{(3x-2)+(x+2)}{(x+2)(3x-2)}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4}{(x+2)(3x-2)}$

$=-1$

3 (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+3}{6x^2+4x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{6+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{6}$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x}-x)(\sqrt{x^2+8x}+x)}{\sqrt{x^2+8x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{\sqrt{x^2+8x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}+1}=4$

4 (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{4-3x^2}{x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-3}{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=-3$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x})(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=-2$

5 $\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax+b}{x-1}=-3$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(2x^2+ax+b)=2+a+b=0$

$\therefore\ b=-a-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax-a-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+a+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(2x+a+2)$

$=2+a+2=-3$

$\therefore\ a=-7$

$a=-7$을 ㉠에 대입하면 $b=5$

6 $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+a}-b}=8$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}-b)=\sqrt{2+a}-b=0$

$\therefore\ b=\sqrt{2+a}$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})$

$=2\sqrt{2+a}=8$

$\therefore\ a=14$

$a=14$를 ㉠에 대입하면 $b=4$

7 $x^2+1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+1로 나누면

$\frac{2x^2+x+1}{x^2+1}\le f(x)\le\frac{2x^2+x+7}{x^2+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^2+1}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+7}{x^2+1}=2$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

8 $x^2>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2으로 나누면

$\frac{-5x^2+3}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{-5x^2+8}{x^2}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+3}{x^2}=-5$, $\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+8}{x^2}=-5$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=-5$

계산력 다지기 p. 10~11

1 (1) $\lim_{x\to2}\frac{1}{2}x^2=2$

(2) $\lim_{x\to-1}\sqrt{x+5}=2$

(3) $\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-2)}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3}(x-2)=-5$

(4) $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2}$

$=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)=4$

(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x-1}=0$

(6) $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}=\infty$

(7) $\lim_{x\to\infty}(x^2-4x+5)=\infty$

(8) $\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{8-2x}=-\infty$

2 (1) $\lim_{x\to-3+}f(x)=2$

(2) $\lim_{x\to-2}f(x)=0$

(3) $\lim_{x\to-1-}f(x)=2$

(4) $\lim_{x\to0+}f(x)=3$

(5) $\lim_{x\to1}f(x)=3$

(6) $\lim_{x\to2-}f(x)=3$

(7) $\lim_{x\to3+}f(x)=1$

(8) $\lim_{x\to4+}f(x)=0$

3 (1) $\lim_{x\to-2+} f(x)=0$

(2) $\lim_{x\to-1} f(x)=2$

(3) $\lim_{x\to0} f(x)=0$

(4) $\lim_{x\to1-} f(x)=2$

(5) $\lim_{x\to1+} f(x)=1$

(6) $\lim_{x\to2-} f(x)=1$

(7) $\lim_{x\to2+} f(x)=2$

(8) $\lim_{x\to3-} f(x)=0$

4 (1) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}(x+3)=4$

(2) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x-8}{x^3-4x}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-4)}{x(x+2)(x-2)}$
$=\lim_{x\to-2}\frac{x-4}{x(x-2)}$
$=\frac{-6}{-2\times(-4)}=-\frac{3}{4}$

(3) $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}$
$=\lim_{x\to3}(x^2+3x+9)$
$=9+9+9=27$

(4) $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}$
$=\lim_{x\to-1}\frac{x+5-4}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}$
$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{\sqrt{x+5}+2}$
$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$

(5) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x^2+12}-4)(\sqrt{x^2+12}+4)}{(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)}$
$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+12-16}{(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)}$
$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)}$
$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}$
$=\frac{2+2}{\sqrt{4+12}+4}=\frac{1}{2}$

(6) $\lim_{x\to-3}\frac{2x+6}{\sqrt{x^2+7}-4}=\lim_{x\to-3}\frac{(2x+6)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)}$
$=\lim_{x\to-3}\frac{(2x+6)(\sqrt{x^2+7}+4)}{x^2+7-16}$
$=\lim_{x\to-3}\frac{2(x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(x+3)(x-3)}$
$=\lim_{x\to-3}\frac{2(\sqrt{x^2+7}+4)}{x-3}$
$=\frac{2(\sqrt{9+7}+4)}{-6}=-\frac{8}{3}$

(7) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(2-\frac{4}{x+2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{2(x+2)-4}{x+2}\right\}$
$=\lim_{x\to0}\frac{2}{x+2}=1$

(8) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{5x+3}\right)$
$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{(5x+3)-(2x+3)}{(2x+3)(5x+3)}\right\}$
$=\lim_{x\to0}\frac{3}{(2x+3)(5x+3)}=\frac{1}{3}$

5 (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{3x^2-x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{2}{3}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=0$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+6}+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}+\frac{2}{x}}=3$

(4) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}=\frac{1}{4}$

(5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-2x})$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-2x})}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-2x}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+4x)-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-2x}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-2x}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=3$

(6) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x-\sqrt{9x^2-x+6}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sqrt{9x^2-x+6}}{(3x-\sqrt{9x^2-x+6})(3x+\sqrt{9x^2-x+6})}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sqrt{9x^2-x+6}}{9x^2-(9x^2-x+6)}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sqrt{9x^2-x+6}}{x-6}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}}{1-\frac{6}{x}}=6$

6 (1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=1$에서 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$\therefore\ b=-2a-4$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+a+2)$$
$$=a+4=1$$

$\therefore\ a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

(2) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{ax+b}{x^2+7x+12}=1$에서 $\lim\limits_{x\to-3}(x^2+7x+12)=0$ 이므로

$\lim\limits_{x\to-3}(ax+b)=-3a+b=0$

$\therefore\ b=3a$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to-3}\frac{ax+b}{x^2+7x+12}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{ax+3a}{x^2+7x+12}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{a(x+3)}{(x+3)(x+4)}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{a}{x+4}$$
$$=a=1$$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

(3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+a}+b}=4$에서 $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}(\sqrt{x+a}+b)=\sqrt{a-1}+b=0$

$\therefore\ b=-\sqrt{a-1}$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+a}+b}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-1}}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})}{(x+a)-(a-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})$$
$$=2\sqrt{a-1}=4$$

$\therefore\ a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=-2$

(4) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{ax+b}=\dfrac{1}{6}$에서 $\lim\limits_{x\to4}(\sqrt{x+5}-3)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to4}(ax+b)=4a+b=0$

$\therefore\ b=-4a$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{ax+b}=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{ax-4a}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{a(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{x+5-9}{a(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{1}{a(\sqrt{x+5}+3)}=\frac{1}{6a}=\frac{1}{6}$$

$\therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

01~02강 족집게 기출문제 p. 12~15

1 ②	**2** -3	**3** ③	**4** ⑤	**5** ①
6 ④	**7** ④	**8** ㄱ, ㄷ	**9** ③	**10** ⑤
11 ③	**12** ④	**13** -15	**14** ②	**15** 2
16 ③	**17** ④	**18** ⑤	**19** $\left(0, \frac{1}{4}\right)$	**20** 16
21 ⑤	**22** $a=0$, $b=2$			
23 (1) $\mathrm{A}(k, 3\sqrt{k})$, $\mathrm{B}(k, \sqrt{k})$, $\mathrm{C}(k, 0)$ (2) $\frac{1}{3}$			**24** $\frac{7}{8}$	

1 ㄱ. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-x^2-6x}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x(x+2)(x-3)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}x(x+2)=15$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3}{|x+1|}=\infty$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{2}{x-4}\right)=0$

ㄹ. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\sqrt{3-x})=-\infty$

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}\{-(x-1)^2-1\}=-1$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(x+1)=2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1+}f(x)-\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-1-2=-3$

3 $\dfrac{t-1}{t+1}=a$로 놓으면 $a=1-\dfrac{2}{t+1}$

$t\to\infty$일 때, $a\to1-$이므로

$\lim\limits_{t\to\infty}f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)=\lim\limits_{a\to1-}f(a)=2$

$\dfrac{4t-1}{t+1}=b$로 놓으면 $b=4-\dfrac{5}{t+1}$

$t\to-\infty$일 때, $b\to4+$이므로

$\lim\limits_{t\to-\infty}f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)=\lim\limits_{b\to4+}f(b)=3$

$\therefore\ \lim\limits_{t\to\infty}f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)+\lim\limits_{t\to-\infty}f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$

4 $\lim_{x\to4+}f(x)=\lim_{x\to4+}\frac{|x-4|}{x(x-4)}=\lim_{x\to4+}\frac{x-4}{x(x-4)}$

$=\lim_{x\to4+}\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to4-}f(x)=\lim_{x\to4-}\frac{|x-4|}{x(x-4)}=\lim_{x\to4-}\frac{-(x-4)}{x(x-4)}$

$=\lim_{x\to4-}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{4}$

$\therefore \lim_{x\to4+}f(x)-\lim_{x\to4-}f(x)=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

5 ㄱ. $x\to0+$일 때, $1<x+1<2$이므로

$[x+1]=1$

$\therefore \lim_{x\to0+}[x+1]=1$

ㄴ. $x\to0-$일 때, $[x]=-1$이므로

$[x]^2=1$

$\therefore \lim_{x\to0-}([x]^2+1)=2$

ㄷ. $x\to0+$일 때, $[x]=0$이므로

$\lim_{x\to0+}(1-[x])=1$

$x\to0-$일 때, $[x]=-1$이므로

$\lim_{x\to0-}(1-[x])=2$

즉, $\lim_{x\to0+}(1-[x])\neq\lim_{x\to0-}(1-[x])$이므로 극한

$\lim_{x\to0}(1-[x])$는 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

6 $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때, $t\to0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{f(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+4)}{f(x-2)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t(t+6)}{f(t)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t}{f(t)}\times\lim_{t\to0}(t+6)$

$=\frac{1}{2}\times6$

$=3$

7 $f(x)-2g(x)=h(x)$라고 하면 $g(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}h(x)$

이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0$이다.

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-4g(x)}{-f(x)+6g(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-\{2f(x)-2h(x)\}}{-f(x)+\{3f(x)-3h(x)\}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2h(x)}{2f(x)-3h(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2\times\frac{h(x)}{f(x)}}{2-3\times\frac{h(x)}{f(x)}}$

$=\frac{1}{2}$

8 ㄱ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$

(α, β는 실수)라고 하면

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)+g(x)\}-\{f(x)-g(x)\}}{2}$

$=\frac{\alpha-\beta}{2}$

ㄴ. [반례] $f(x)=x-1$, $g(x)=\frac{1}{x-1}$이면

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x-1)=0$,

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}1=1$

이지만 $\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라고 하면

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\times\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\alpha\beta$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

9 ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$

ㄴ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$

ㄷ. $\lim_{x\to3+}\frac{x}{3-x}=-\infty$, $\lim_{x\to3-}\frac{x}{3-x}=\infty$이므로 극한

$\lim_{x\to3}\frac{x}{3-x}$는 존재하지 않는다.

ㄹ. $\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2-4x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(x-4)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-4}=-\frac{1}{4}$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

10 $\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x+\frac{4}{x}\right)^2}{x^2+\frac{4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+8+\frac{16}{x^2}}{x^2+\frac{4}{x^2}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x^4+8x^2+16}{x^4+4}=4$

11 $\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{3}{2}-\frac{x^2}{x+3}\right)$

$=\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left\{\frac{3(x+3)-2x^2}{2(x+3)}\right\}$

$=\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left\{\frac{-2x^2+3x+9}{2(x+3)}\right\}$

$=\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left\{\frac{-(x-3)(2x+3)}{2(x+3)}\right\}$

$=\lim_{x\to3}\frac{-(2x+3)}{2(x+3)}=-\frac{3}{4}$

12 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(x-x^2)(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})}{(x-x^2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=1$

13 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x^2+5x-7}=3$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{25x^2-2x}-5x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{25x^2-2x}+5x}{(\sqrt{25x^2-2x}-5x)(\sqrt{25x^2-2x}+5x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{25x^2-2x}+5x}{-2x}$

$\displaystyle=\frac{5+5}{-2}=-5$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)g(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)\times\lim_{x\to\infty}g(x)$

$=3\times(-5)=-15$

14 $\left[\dfrac{x}{3}\right]=\dfrac{x}{3}-\alpha\ (0\le\alpha<1)$라고 하면

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{x}{3}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{x}{3}-\alpha\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{x}\right)=\frac{1}{3}$

15 직선 $y=x+1$에 수직이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$y-(t+1)=-(x-t)\qquad\therefore\ y=-x+2t+1$

따라서 점 Q의 좌표는 Q$(0,\ 2t+1)$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=1^2+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2$

$\displaystyle\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}=2$

16 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2+2x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2-2t}-t)$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{at^2-2t}-t)(\sqrt{at^2-2t}+t)}{\sqrt{at^2-2t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t^2-2t}{\sqrt{at^2-2t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t-2}{\sqrt{a-\frac{2}{t}}+1}$

이때 극한값이 존재하므로

$a-1=0\qquad\therefore\ a=1$

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{t}}+1}=b$이므로 $\quad b=-1$

$\therefore\ a+b=1+(-1)=0$

17 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=2$이므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=1$에서 $\displaystyle\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=0\qquad\therefore\ f(1)=0$

$f(x)=2(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라고 하면

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+a)}{(x-1)(x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{2(x+a)}{x+1}$

$=1+a=1$

$\therefore\ a=0$

따라서 $f(x)=2x(x-1)$이므로

$f(3)=2\times3\times2=12$

18 $\left|\dfrac{1}{3}f(x)-x\right|\le1$에서

$-1\le\dfrac{1}{3}f(x)-x\le1$

$3(x-1)\le f(x)\le3(x+1)$

$\therefore\ 9(x-1)^2\le\{f(x)\}^2\le9(x+1)^2$

$3x^2+1>0$이므로 위의 부등식의 각 변을 $3x^2+1$로 나누면

$\dfrac{9(x-1)^2}{3x^2+1}\le\dfrac{\{f(x)\}^2}{3x^2+1}\le\dfrac{9(x+1)^2}{3x^2+1}$

이때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{9(x-1)^2}{3x^2+1}=3,\ \lim_{x\to\infty}\frac{9(x+1)^2}{3x^2+1}=3$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{3x^2+1}=3$

19 두 점 P, Q의 좌표를 P$(x,\ 2x^2)$, Q$(0,\ y)$라고 하자.

두 점 O, P는 원 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$에서

$\overline{\mathrm{OQ}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2,\ y^2=x^2+(y-2x^2)^2$

$4x^2y=4x^4+x^2\qquad\therefore\ y=x^2+\dfrac{1}{4}\ (\because\ x\ne0)$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $x\to0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

따라서 점 Q가 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$이다.

20 (i) $x\to8+$일 때, x보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이므로

$f(x)=4$이고, $x>2f(x)=8$이므로

$\displaystyle\alpha=\lim_{x\to8+}g(x)=\lim_{x\to8+}f(x)=4$

(ii) $x\to8-$일 때, x보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이므로

$f(x)=4$이고, $x<2f(x)=8$이므로

$\displaystyle\beta=\lim_{x\to8-}g(x)=\lim_{x\to8-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{4}{\frac{1}{4}}=16$

21 $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x+1}=2$에서 $\lim_{x \to -1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x \to -1} f(x)=0 \qquad \therefore f(-1)=0$

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=10$에서 $\lim_{x \to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x \to 1} f(x)=0 \qquad \therefore f(1)=0$

다항함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)=(x-1)(x+1)g(x)$라고 하면

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)g(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x \to -1}(x-1)g(x)=-2g(-1)=2$$

$\therefore g(-1)=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)g(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1}(x+1)g(x)=2g(1)=10$$

$\therefore g(1)=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족하는 함수 $g(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차함수이므로 $g(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$-a+b=-1$, $a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

따라서 $h(x)=(x-1)(x+1)(3x+2)$이므로

$h(2)=24$

22 $\lim_{x \to -1} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x \to -1+} f(x)=\lim_{x \to -1-} f(x)$

$\lim_{x \to -1+}(ax+b)=\lim_{x \to -1-}(-x+1)$

$\therefore -a+b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠ $\qquad \cdots\cdots$ (가)

$\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x \to 1+} f(x)=\lim_{x \to 1-} f(x)$

$\lim_{x \to 1+}(x^2+1)=\lim_{x \to 1-}(ax+b)$

$\therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡ $\qquad \cdots\cdots$ (나)

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=2$ $\qquad \cdots\cdots$ (다)

채점 기준	배점
(가) $\lim_{x \to -1} f(x)$의 값이 존재하기 위한 조건을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.	2점
(나) $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하기 위한 조건을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.	2점
(다) a, b의 값을 구한다.	1점

23 (1) 세 점 A, B, C의 좌표는

$\mathrm{A}(k,\ 3\sqrt{k})$, $\mathrm{B}(k,\ \sqrt{k})$, $\mathrm{C}(k,\ 0)$ $\qquad \cdots\cdots$ (가)

(2) $\lim_{k \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{BC}}}$

$$=\lim_{k \to 0+} \frac{\sqrt{k^2+9k}-3\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k}} \qquad \cdots\cdots \text{(나)}$$
$$=\lim_{k \to 0+} \frac{\sqrt{k+9}-3}{\sqrt{k+1}-1}$$
$$=\lim_{k \to 0+} \frac{(\sqrt{k+9}-3)(\sqrt{k+9}+3)(\sqrt{k+1}+1)}{(\sqrt{k+1}-1)(\sqrt{k+1}+1)(\sqrt{k+9}+3)}$$
$$=\lim_{k \to 0+} \frac{k(\sqrt{k+1}+1)}{k(\sqrt{k+9}+3)}=\lim_{k \to 0+} \frac{\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+9}+3}=\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots \text{(다)}$$

채점 기준	배점
(가) 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.	2점
(나) $\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$를 k에 대한 식으로 나타낸다.	1점
(다) 극한값을 구한다.	3점

24 $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-(1+ax)}{x^2}$

$$=\lim_{x \to 0} \frac{\{\sqrt{1+x+x^2}-(1+ax)\}\{\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)\}}{x^2\{\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)\}}$$
$$=\lim_{x \to 0} \frac{(1-a^2)x+(1-2a)}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1+ax)} \qquad \cdots\cdots \text{(가)}$$

이때 $\lim_{x \to 0} x(\sqrt{1+x+x^2}+1+ax)=0$이므로

$\lim_{x \to 0}\{(1-a^2)x+(1-2a)\}=1-2a=0$

$\therefore a=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots$ (나)

$$\therefore b=\lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{4}x}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1+\frac{1}{2}x\right)}$$
$$=\lim_{x \to 0} \frac{3}{4\left(\sqrt{1+x+x^2}+1+\frac{1}{2}x\right)}$$
$$=\frac{3}{8} \qquad \cdots\cdots \text{(다)}$$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8} \qquad \cdots\cdots$ (라)

채점 기준	배점
(가) 주어진 식의 분자를 유리화한다.	1점
(나) a의 값을 구한다.	2점
(다) b의 값을 구한다.	2점
(라) $a+b$의 값을 구한다.	1점

03강 함수의 연속

확인 문제 p. 16

1 ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 $x=a$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하지 않으므로 $x=a$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$이므로 $x=a$에서 불연속이다.

따라서 $x=a$에서 연속인 함수의 그래프는 ㄹ이다.

2 (1) $[2,\ 7]$ $\qquad$ (2) $[-3,\ 1)$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 17

1 ㄱ. $f(2)=0$, $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x^2-2x)=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 정의되지 않으므로 $x=2$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(2)=4$, $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

따라서 $x=2$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

2 ㄱ. $f(1)=1$, $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\sqrt{x^2+x-1}=1$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-x}{|x-1|}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{x(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}x$

$=1$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-x}{|x-1|}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{x(x-1)}{-(x-1)}$

$=\lim_{x\to1-}(-x)$

$=-1$

$\therefore \lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 함수는 ㄱ이다.

3 (i) $\lim_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to2+}f(x)=2$, $\lim_{x\to2-}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to2+}f(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to2}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $f(3)=3$

$\lim_{x\to3+}f(x)=3$, $\lim_{x\to3-}f(x)=3$ $\quad\therefore \lim_{x\to3}f(x)=3$

이때 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(1) 극한값이 존재하지 않는 점은 $x=1$, $x=2$의 2개이다.

(2) 불연속인 점은 $x=1$, $x=2$의 2개이다.

4 (i) $f(1)=1$

$\lim_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=1$ $\quad\therefore \lim_{x\to1}f(x)=1$

이때 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $f(2)=1$

$\lim_{x\to2+}f(x)=3$, $\lim_{x\to2-}f(x)=3$ $\quad\therefore \lim_{x\to2}f(x)=3$

이때 $\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x\to3+}f(x)=1$, $\lim_{x\to3-}f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to3+}f(x)\neq\lim_{x\to3-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to3}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

(1) 극한값이 존재하지 않는 점은 $x=3$의 1개이다.

(2) 불연속인 점은 $x=2$, $x=3$의 2개이다.

5 (1) 함수 $y=2x^2-x$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$

(2) 함수 $y=\frac{x-3}{2x+4}$은 $x\neq-2$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, -2)$, $(-2, \infty)$

6 (1) 함수 $y=\sqrt{x-8}$은 $x\geq8$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $[8, \infty)$

(2) 함수 $y=\frac{2x+1}{x^2+9}$은 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$

7 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

$\therefore \lim_{x\to3}\frac{x^2+ax-12}{x-3}=b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}(x^2+ax-12)=9+3a-12=0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+4)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(x+4)=b$

$\therefore b=7$

8 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2+8x+a}{x-1}=b \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+8x+a)=1+8+a=0 \quad \therefore a=-9$

$a=-9$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+8x-9}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+9)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+9)=b$$

$\therefore b=10$

04강 연속함수의 성질

확인 문제 p. 18

1 ㄱ. 연속함수의 성질 (1), (2)에 의하여 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. 연속함수의 성질 (1), (3)에 의하여 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. 연속함수의 성질 (1), (4)에 의하여 $x=a$에서 연속이다.

ㄹ. $f(a)=0$이면 $\frac{2g(x)}{f(x)}$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 $x=a$에서 연속인지 불연속인지 알 수 없다.

따라서 $x=a$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2 최댓값: 없다, 최솟값: 0

3 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 $f(0)=4$, $f(3)=13$, 즉 $f(0)\neq f(3)$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=6$인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

교/과/서/속 핵심유형 닮은꼴 문제 p. 19

1 (1) $f(x)-g(x)=x^2+2x+3-\frac{1}{x-2}=\frac{x^3-x-7}{x-2}$은 $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$

(2) $f(x)g(x)=\frac{x^2+2x+3}{x-2}$은 $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$

(3) $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{(x^2+2x+3)(x-2)}$은 $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$

(4) $\frac{f(x)}{g(x)}=(x^2+2x+3)(x-2)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$

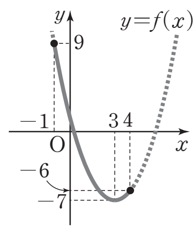
2 (1) $f(x)+2g(x)=x-1+2\sqrt{4-x}$는 $x\le4$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, 4]$

(2) $f(x)g(x)=(x-1)\sqrt{4-x}$는 $x\le4$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, 4]$

(3) $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{x-1}$는 $x\neq1$이고 $x\le4$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, 1)$, $(1, 4]$

(4) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-1}{\sqrt{4-x}}$은 $x<4$인 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, 4)$

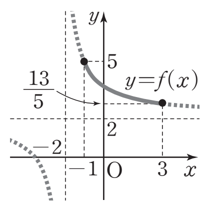
3 (1) $f(x)=x^2-6x+2=(x-3)^2-7$



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 $x=-1$에서 최댓값은 9, $x=3$에서 최솟값은 -7이다.

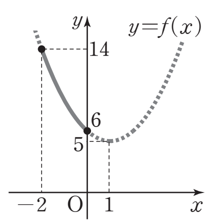
(2) $f(x)=\frac{2x+7}{x+2}=\frac{3}{x+2}+2$



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 $x=-1$에서 최댓값은 5, $x=3$에서 최솟값은 $\frac{13}{5}$이다.

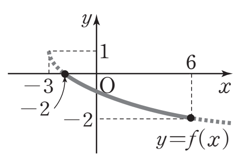
4 (1) $f(x)=x^2-2x+6$
$=(x-1)^2+5$



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 $x=-2$에서 최댓값은 14, $x=0$에서 최솟값은 6이다.

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 6]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.



따라서 $x=-2$에서 최댓값은 0, $x=6$에서 최솟값은 -2이다.

5 $f(x)=x^3-3x+1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-3, 2]$에서 연속이고

$f(-3)=-17<0$, $f(2)=3>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-3x+1=0$은 열린구간 $(-3, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

6 $f(x)=x^3-2x^2+7x+5$라고 하면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 연속이고

$f(-1)=-5<0$, $f(0)=5>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-2x^2+7x+5=0$은 열린구간 $(-1, 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

7 $f(x)=x^2+x+a$라고 하면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고

$f(-1)=1-1+a=a$, $f(2)=4+2+a=a+6$

$f(-1)f(2)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재하므로

$f(-1)f(2)=a(a+6)<0 \qquad \therefore -6<a<0$

8 $f(x)=x^2+ax+4$라고 하면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 연속이고

$f(-2)=4-2a+4=8-2a$, $f(4)=16+4a+4=4a+20$

$f(-2)f(4)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 4)$에 적어도 하나 존재하므로

$f(-2)f(4)=(8-2a)(4a+20)<0$

$\therefore -5<a<4$

03~04강 족집게 기출문제 p. 20~23

1 ③	2 ③	3 ㄱ	4 ④	5 ①
6 ①	7 ③	8 0	9 ⑤	10 ④
11 ⑤	12 ④	13 ①	14 ①	15 ④
16 ③	17 ③	18 13	19 ②	20 3
21 2	22 (1) $a=-\frac{1}{2}$, $b=2$ (2) 최댓값: 2, 최솟값: 0			
23 5				

1 (i) $\lim_{x\to1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to1-} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to1+} f(x)\neq\lim_{x\to1-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ii) $f(2)=3$

$\lim_{x\to2+} f(x)=2$, $\lim_{x\to2-} f(x)=2 \qquad \therefore \lim_{x\to2} f(x)=2$

이때 $\lim_{x\to2} f(x)\neq f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $f(3)=3$

$\lim_{x\to3+} f(x)=3$, $\lim_{x\to3-} f(x)=3 \qquad \therefore \lim_{x\to3} f(x)=3$

이때 $\lim_{x\to3} f(x)=f(3)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(iv) $f(4)=1$

$\lim_{x\to4+} f(x)=2$, $\lim_{x\to4-} f(x)=2 \qquad \therefore \lim_{x\to4} f(x)=2$

이때 $\lim_{x\to4} f(x)\neq f(4)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 불연속이다.

따라서 극한값이 존재하지 않는 점은 $x=1$의 1개이고, 불연속인 점은 $x=1$, $x=2$, $x=4$의 3개이므로 그 합은

$1+3=4$

2 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$
$$=1$$

$\therefore a=1$

3 ㄱ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1+} f(x)+\lim_{x\to1+} g(x)$

$=-1+1=0$

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-} f(x)+\lim_{x\to1-} g(x)$

$=1+(-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=0$

ㄴ. $\lim_{x\to1+} g(x)=1$, $\lim_{x\to1-} g(x)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1+} g(x)\neq\lim_{x\to1-} g(x)$

즉, $\lim_{x\to1} g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to-1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)\times\lim_{x\to-1+} g(x)$

$=1\times1=1$

$\lim_{x\to-1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)\times\lim_{x\to-1-} g(x)$

$=(-1)\times1=-1$

$\therefore \lim_{x\to-1+} f(x)g(x)\neq\lim_{x\to-1-} f(x)g(x)$

즉, $\lim_{x\to-1} f(x)g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

4 ㄱ. $f(g(1))=f(0)=1$

$g(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to0-$, $x\to1-$일 때 $t\to1+$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(g(x))=\lim\limits_{t\to0-}f(t)=1$

$\lim\limits_{x\to1-}f(g(x))=\lim\limits_{t\to1+}f(t)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(g(x))=1$

이때 $\lim\limits_{x\to1}f(g(x))=f(g(1))$이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $f(g(1))=f(1)=1$

$g(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to-1+$, $x\to1-$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(g(x))=\lim\limits_{t\to-1+}f(t)=-1$

$\lim\limits_{x\to1-}f(g(x))=\lim\limits_{t\to-1+}f(t)=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(g(x))=-1$

이때 $\lim\limits_{x\to1}f(g(x))\neq f(g(1))$이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(g(1))=f(1)=1$

$g(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t=1$, $x\to1-$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(g(x))=f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to1-}f(g(x))=\lim\limits_{t\to0-}f(t)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(g(x))=1$

이때 $\lim\limits_{x\to1}f(g(x))=f(g(1))$이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 함수 $f(g(x))$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 함수 $y=g(x)$의 그래프는 ㄱ, ㄷ이다.

5 $x=0$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to0}f(x)\{f(x)+k\}=f(0)\{f(0)+k\}$이어야 한다.

$f(0)\{f(0)+k\}=0\times(0+k)=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}f(x)\{f(x)+k\}&=\lim_{x\to0+}\left\{-\frac{1}{2}x\left(-\frac{1}{2}x+k\right)\right\}\\&=0\times(0+k)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}f(x)\{f(x)+k\}&=\lim_{x\to0-}(x+2)(x+2+k)\\&=2\times(2+k)=4+2k\end{aligned}$$

따라서 $4+2k=0$이어야 하므로 $\quad k=-2$

6 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to1}g(x)=g(1)$이므로

$$\begin{aligned}g(1)&=\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}\end{aligned}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때, $t\to0$이므로

$$\begin{aligned}g(1)&=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}\\&=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

7 ㄱ. $$\begin{aligned}\lim_{x\to-3}f(x)&=\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}\\&=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}\\&=\lim_{x\to-3}(x-3)=-6\end{aligned}$$

이때 $\lim\limits_{x\to-3}f(x)\neq f(-3)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 불연속이다.

ㄴ. $$\begin{aligned}\lim_{x\to-2+}g(x)&=\lim_{x\to-2+}\frac{2x^2+4x}{|x+2|}\\&=\lim_{x\to-2+}\frac{2x(x+2)}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2+}2x=-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2-}g(x)&=\lim_{x\to-2-}\frac{2x^2+4x}{|x+2|}\\&=\lim_{x\to-2-}\frac{2x(x+2)}{-(x+2)}\\&=\lim_{x\to-2-}(-2x)=4\end{aligned}$$

$\therefore \lim\limits_{x\to-2+}g(x)\neq\lim\limits_{x\to-2-}g(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to-2}g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

ㄷ. $h(5)=2$

$\lim\limits_{x\to5+}h(x)=\lim\limits_{x\to5+}(\sqrt{x-5}+2)=2$

$\lim\limits_{x\to5-}h(x)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to5}h(x)=2$

즉, $\lim\limits_{x\to5}h(x)=h(5)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=5$에서 연속이고, 함수 $h(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄷ이다.

8 (i) $-2<x<-1$일 때, $[x]=-2$이므로

$f(x)=x+2$

(ii) $-1\le x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$f(x)=x+1$

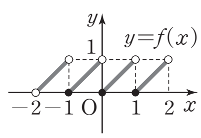
(iii) $0\le x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$f(x)=x$

(iv) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$f(x)=x-1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 불연속이 되는 x의 값은 -1, 0, 1이고, 그 합은 $-1+0+1=0$



9 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)=f(a)$

$\lim\limits_{x\to a+}[x]=a$, $\lim\limits_{x\to a-}[x]=a-1$이므로

$\dfrac{a^2+a}{a}=\dfrac{(a-1)^2+a}{a-1}$

$(a-1)(a^2+a)=a(a^2-a+1)$

$a^2-2a=0$, $a(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a\neq0)$

10 $x\neq0$일 때, $f(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$

열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $f(x)$가 연속이면 $x=0$에서도 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore\ f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}2(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})=4\sqrt{2}$$

11 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+bx}{x-1} & (x\neq1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+bx}{x-1}=2$ ...... ㉠

㉠에서 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}(ax^2+bx)=a+b=0$ $\quad\therefore\ b=-a$

$b=-a$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{ax^2-ax}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{ax(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}ax=a=2$$

따라서 $a=2,\ b=-2$이므로

$a-b=4$

12 ① $f(x)g(x)=(x^3-1)(x^2-x+1)$

은 모든 실수 x에서 연속이다.

② $(f\circ g)(x)=(x^2-x+1)^3-1$

은 모든 실수 x에서 연속이다.

③ $(g\circ f)(x)=(x^3-1)^2-x^3+2$

는 모든 실수 x에서 연속이다.

④ $\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)}=\dfrac{(x^3-1)(x^2-x+1)}{x(x^2+x-1)}$

은 (분모)$=0$이 되는 실수 x에서 정의되지 않으므로 불연속이다.

⑤ $\dfrac{(f\circ g)(x)}{g(x)}=\dfrac{(x^2-x+1)^3-1}{x^2-x+1}$

에서 $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\neq0$이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수가 아닌 것은 ④이다.

13 함수 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이려면 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=x^2+2ax-2a+3\neq0$이어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+2ax-2a+3=0$의 판별식을 D라고 하면 $D<0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=a^2-(-2a+3)<0$

$a^2+2a-3<0$

$(a+3)(a-1)<0$

$\therefore\ -3<a<1$

따라서 정수 a의 값은 $-2,\ -1,\ 0$이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+0=-3$

14 ㄱ. [반례] $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$이면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=0$에서 정의되지 않으므로 불연속이지만 $f(x)+g(x)=0$이므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

(i) $f(0)=0$일 때

$\lim\limits_{x\to0+}|f(x)|=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=f(0)=0$

또는 $\lim\limits_{x\to0+}|f(x)|=\lim\limits_{x\to0+}\{-f(x)\}=-f(0)=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0+}|f(x)|=0$

$\lim\limits_{x\to0-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=f(0)=0$

또는 $\lim\limits_{x\to0-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to0-}\{-f(x)\}=-f(0)=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0-}|f(x)|=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}|f(x)|=|f(0)|$

(ii) $f(0)>0$일 때

$\lim\limits_{x\to0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=|f(0)|$

(iii) $f(0)<0$일 때

$\lim\limits_{x\to0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to0}\{-f(x)\}=-f(0)=|f(0)|$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

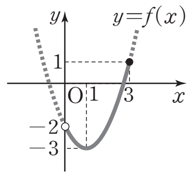
ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면 $|f(x)|=1$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

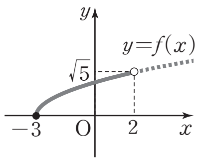
15 ① 함수 $f(x)=x+5$는 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

② 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

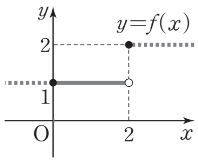
③ 반열린 구간 $(0,\ 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 1, $x=1$에서 최솟값 -3을 갖는다.



④ 반열린 구간 $[-3,\ 2)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-3$에서 최솟값 0을 갖고 최댓값은 존재하지 않는다.



⑤ 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 2, $0\le x<2$에서 최솟값 1을 갖는다.



따라서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 함수가 아닌 것은 ④이다.

16 $f(x)=x^3+x^2-2x-3$이라고 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-1)=-1<0,\ f(0)=-3<0,\ f(1)=-3<0,$

$f(2)=5>0,\ f(3)=27>0,\ f(4)=69>0$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1,\ 2)$이다.

17 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 연속이고

$f(-1)f(0)<0,\ f(0)f(1)<0,\ f(2)f(3)<0,$

$f(3)f(4)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1,\ 4)$에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

18 (i) $a=0$일 때

$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to 0+}\{f(x)\}^2=49$

$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to 0-}\{f(x)\}^2=1$

따라서 $\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)\neq\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)$이므로 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(ii) $a\neq 0$일 때

$x-a=t$로 놓으면 $x\to a+$일 때 $t\to 0+$, $x\to a-$일 때 $t\to 0-$이므로

$$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a+} f(x)\times\lim_{t\to 0+} f(t)=f(a)\times 7=7f(a)$$

$$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a-} f(x)\times\lim_{t\to 0-} f(t)=f(a)\times 1=f(a)$$

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a} f(x)f(x-a)$가 존재해야 하므로

$7f(a)=f(a)\qquad\therefore f(a)=0$

$\therefore a=-1,\ 14$

(i), (ii)에서 a의 값의 합은

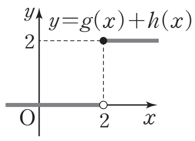
$-1+14=13$

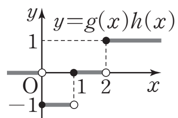
19 $g(x)+h(x)=\begin{cases}2 & (x\ge 2)\\ 0 & (x<2)\end{cases}$

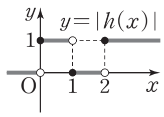
$g(x)h(x)=\begin{cases}1 & (x\ge 2)\\ 0 & (1\le x<2)\\ -1 & (0\le x<1)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$

$|h(x)|=\begin{cases}1 & (x\ge 2)\\ 0 & (1\le x<2)\\ 1 & (0\le x<1)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$

세 함수 $y=g(x)+h(x),\ y=g(x)h(x),\ y=|h(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.







따라서 $a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=3$이므로

$a_1<a_2=a_3$

20 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서 $\lim_{x\to -1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=0$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=6$에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=0$

다항함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)=(x+1)(x-2)g(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)g(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-2)g(x)=-3g(-1)=2$$

$\therefore g(-1)=-\frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)g(x)=3g(2)=6$$

$\therefore g(2)=2$

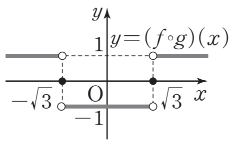
이때 $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이고 $g(-1)g(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 $x=-1,\ x=2$를 갖고, 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

21 $(f\circ g)(x)=\begin{cases} -\dfrac{3-x^2}{|3-x^2|} & (3-x^2\neq 0) \\ 0 & (3-x^2=0)\end{cases}$

$\therefore\ (f\circ g)(x)=\begin{cases} 1 & (|x|>\sqrt{3}) \\ -1 & (|x|<\sqrt{3}) \\ 0 & (|x|=\sqrt{3})\end{cases}$ ⋯⋯ (가)

따라서 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 불연속인 점은 $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$의 2개이다. ⋯⋯ (나)



채점 기준	배점
(가) 합성함수 $(f\circ g)(x)$를 구한다.	3점
(나) 함수 $(f\circ g)(x)$가 불연속인 점의 개수를 구한다.	2점

22 (1) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0+} (ax^2+b)=\lim\limits_{x\to 0-} (2x+2)=2$

$\therefore\ b=2$ ⋯⋯ (가)

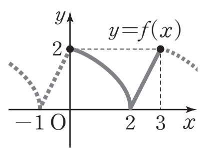
이때 $f(x)=f(x+3)$이므로

$f(-1)=f(2)$, $0=4a+b$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$ ⋯⋯ (나)

(2) $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & (-1\le x<0) \\ -\dfrac{1}{2}x^2+2 & (0\le x\le 2)\end{cases}$ 이고, $f(x)=f(x+3)$

이므로 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



⋯⋯ (다)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=3$에서 최댓값 2, $x=2$에서 최솟값 0을 갖는다. ⋯⋯ (라)

채점 기준	배점
(가) b의 값을 구한다.	2점
(나) a의 값을 구한다.	2점
(다) 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.	2점
(라) 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.	1점

23 $g(x)=f(x)-x$라고 하면 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이고

$g(0)=-5<0$, $g(1)=-a^2+5a-4$, $g(2)=-1<0$

이므로 $g(1)>0$이면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. ⋯⋯ (가)

즉, $-a^2+5a-4>0$에서 $(a-1)(a-4)<0$

$\therefore\ 1<a<4$ ⋯⋯ (나)

따라서 정수 a는 2, 3이므로 그 합은

$2+3=5$ ⋯⋯ (다)

채점 기준	배점
(가) 방정식 $f(x)-x=0$이 조건을 만족하기 위한 $f(1)-1$의 값의 범위를 구한다.	3점
(나) a의 값의 범위를 구한다.	2점
(다) 모든 정수 a의 값의 합을 구한다.	1점

05강 미분계수

확인 문제 p. 24

1 (1) $\Delta x=1-(-2)=3$

(2) $\Delta y=f(1)-f(-2)=6-9=-3$

(3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-3}{3}=-1$

2 (1) $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{-2(1+\Delta x)+1\}-(-2\times 1+1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2\Delta x}{\Delta x}=-2$

(2) $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(1+\Delta x)^2-1\}-(1^2-1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$

3 미분가능하면 모두 연속이지만 연속이라고 해서 반드시 미분가능한 것은 아니므로 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $B\subset A$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 25

1 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 평균변화율이 2이므로

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$

$=\dfrac{(2a+9)-(-a+6)}{3}$

$=\dfrac{3a+3}{3}=a+1=2$

$\therefore\ a=1$

2 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 5이므로

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}\\&=\frac{(a^2-3a+6)-4}{a-1}\\&=\frac{a^2-3a+2}{a-1}\\&=\frac{(a-1)(a-2)}{a-1}\\&=a-2=5\end{aligned}$$

$\therefore a=7$

3 $$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times3+\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\\&=3f'(a)+f'(a)=4f'(a)=4\end{aligned}$$

4 $$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^3-8}&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x^2+2x+4}\\&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x+4}\\&=f'(2)\times\frac{1}{12}\\&=4\times\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

5 $f(x)=x^2+2x$라고 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)$이므로

$$\begin{aligned}f'(-2)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(-2+\Delta x)^2+2(-2+\Delta x)\}-0}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}(-2+\Delta x)=-2\end{aligned}$$

6 $f(x)=-x^2+x+3$이라고 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{-(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)+3\}-3}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}(-1-\Delta x)\\&=-1\end{aligned}$$

7 (ⅰ) $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=\boxed{0}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 $\boxed{\text{연속}}$이다.

(ⅱ) $$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to0+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}\\&=\boxed{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to0-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to0-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}\\&=\boxed{-1}\end{aligned}$$

즉, 우극한과 좌극한이 다르므로

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 $\boxed{\text{미분가능하지 않다}}$.

∴ ㈎ 0 ㈏ 연속 ㈐ 1 ㈑ -1 ㈒ 미분가능하지 않다

8 (ⅰ) $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{\Delta x+|\Delta x|}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{\Delta x+\Delta x}{\Delta x}=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to0-}\frac{\Delta x+|\Delta x|}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0-}\frac{\Delta x-\Delta x}{\Delta x}=0\end{aligned}$$

즉, 우극한과 좌극한이 다르므로

$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $f(x)=x+|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

06강 도함수와 미분법

확인 문제 p. 26

1 (1) $$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{(x+h+6)-(x+6)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1\end{aligned}$$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2+3(x+h)\}-(x^2+3x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{(2x+3)h+h^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}(2x+3+h)$

$=2x+3$

2 (1) $y'=(x^7)'=7x^{7-1}=7x^6$

(2) $y'=(x^9)'=9x^{9-1}=9x^8$

(3) $y'=(-6)'=0$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 27

1 (1) $y'=(x^4-7x^3+2x-3)'$

$=(x^4)'-7(x^3)'+2(x)'-(3)'$

$=4x^3-7\times3x^2+2\times1-0$

$=4x^3-21x^2+2$

(2) $y'=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+8x-1\right)'$

$=\frac{1}{4}(x^4)'-\frac{1}{3}(x^3)'+8(x)'-(1)'$

$=\frac{1}{4}\times4x^3-\frac{1}{3}\times3x^2+8\times1-0=x^3-x^2+8$

2 (1) $y'=(-x^5+3x^3+6x^2-2)'$

$=-(x^5)'+3(x^3)'+6(x^2)'-(2)'$

$=-1\times5x^4+3\times3x^2+6\times2x-0$

$=-5x^4+9x^2+12x$

(2) $y'=\left(\frac{1}{6}x^6+\frac{3}{4}x^4-2x^3+5x+9\right)'$

$=\frac{1}{6}(x^6)'+\frac{3}{4}(x^4)'-2(x^3)'+5(x)'+(9)'$

$=\frac{1}{6}\times6x^5+\frac{3}{4}\times4x^3-2\times3x^2+5\times1+0$

$=x^5+3x^3-6x^2+5$

3 (1) $y'=(x-3)'(-x+6)+(x-3)(-x+6)'$

$=(-x+6)+(x-3)\times(-1)=-2x+9$

다른 풀이

$y=(x-3)(-x+6)=-x^2+9x-18$이므로

$y'=-2x+9$

(2) $y'=(x^3-2)'(x^2+x-3)+(x^3-2)(x^2+x-3)'$

$=3x^2(x^2+x-3)+(x^3-2)(2x+1)$

$=5x^4+4x^3-9x^2-4x-2$

다른 풀이

$y=(x^3-2)(x^2+x-3)=x^5+x^4-3x^3-2x^2-2x+6$

이므로 $y'=5x^4+4x^3-9x^2-4x-2$

4 (1) $y'=(4x-3)'(x^3-1)+(4x-3)(x^3-1)'$

$=4(x^3-1)+(4x-3)\times3x^2$

$=16x^3-9x^2-4$

(2) $y'=(x+1)'(x^2+6x-8)+(x+1)(x^2+6x-8)'$

$=(x^2+6x-8)+(x+1)(2x+6)$

$=3x^2+14x-2$

5 (1) $y'=(x+5)'(x+6)(x-7)+(x+5)(x+6)'(x-7)$
$+(x+5)(x+6)(x-7)'$

$=(x+6)(x-7)+(x+5)(x-7)+(x+5)(x+6)$

$=3x^2+8x-47$

(2) $y'=4(2x-1)^3(2x-1)'=4(2x-1)^3\times2=8(2x-1)^3$

6 (1) $y'=(-2x+1)'(x+4)(x^2-x+3)$
$+(-2x+1)(x+4)'(x^2-x+3)$
$+(-2x+1)(x+4)(x^2-x+3)'$

$=-2(x+4)(x^2-x+3)$
$+(-2x+1)(x^2-x+3)$
$+(-2x+1)(x+4)(2x-1)$

$=-8x^3-15x^2+10x-25$

(2) $y'=5(x^2+3x)^4(x^2+3x)'$

$=5(x^2+3x)^4\times(2x+3)$

$=(10x+15)(x^2+3x)^4$

7 $f(x)=x^2+ax+b$에서

$f'(x)=2x+a$

$f(1)=2$에서 $1+a+b=2$ …… ㉠

$f'(1)=1$에서 $2+a=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

8 $f(x)=ax^2+bx-3$에서

$f'(x)=2ax+b$

$f(-1)=-2$에서 $a-b-3=-2$ …… ㉠

$f'(2)=9$에서 $4a+b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

계산력 다지기 p. 28~29

1 (1) $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{7-3}{2}=2$

(2) $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{8-0}{2}=4$

(3) $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{29-5}{2}=12$

(4) $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{51-(-1)}{2}=26$

2 (1) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)+3\}-(1+3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}$

$=1$

(2) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-3(1+\Delta x)+2\}-(-3+2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3\Delta x}{\Delta x}$

$=-3$

(3) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2+4\}-(1+4)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)$

$=2$

(4) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(1+\Delta x)^2-1\}-(2-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(4+2\Delta x)$

$=4$

3 (1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2$

$=f'(a)\times 2$

$=3\times 2$

$=6$

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{3h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\times\frac{4}{3}$

$=f'(a)\times\frac{4}{3}$

$=3\times\frac{4}{3}$

$=4$

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$

$=f'(a)+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

$=f'(a)+f'(a)$

$=2f'(a)$

$=6$

(4) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2$

$+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\times 3$

$=2f'(a)+3f'(a)$

$=5f'(a)=15$

4 (1) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}$

$=f'(2)\times\frac{1}{4}$

$=8\times\frac{1}{4}=2$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\times(x^2+x+1)$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)$

$=f'(1)\times 3=4\times 3=12$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{f(x)-f(2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{f(x)-f(2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+1}}$

$=\frac{1}{\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}}$

$=\frac{1}{f'(2)\times\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{8\times\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}$

(4) $\lim_{x\to 1}\frac{xf(1)-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{xf(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(1)-\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$

$=f(1)-\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f(1)-f'(1)$

$=2-4=-2$

5 (1) $y'=6x^2-10x+4$

(2) $y'=-4x^3-12x^2+4x+3$

(3) $y'=12x^3+6x^2-8x+1$

(4) $y'=10x^4+x^3-3x^2+10x-8$

(5) $y'=-x^4+2x^3-x^2-4$

(6) $y'=8x^5-x^3+2x^2-2x$

6 (1) $y'=2(x-3)+(2x+1)\times1$
$=4x-5$

(2) $y'=-1\times(x^2-2)+(-x+4)\times2x$
$=-3x^2+8x+2$

(3) $y'=6x(x^2+x+2)+(3x^2-1)(2x+1)$
$=12x^3+9x^2+10x-1$

(4) $y'=-3x^2(2x^2-4x+3)+(-x^3+5)(4x-4)$
$=-10x^4+16x^3-9x^2+20x-20$

7 (1) $y'=(2x-1)(-3x+2)+(x+3)\times2\times(-3x+2)$
$+(x+3)(2x-1)\times(-3)$
$=-6x^2+7x-2-6x^2-14x+12-6x^2-15x+9$
$=-18x^2-22x+19$

(2) $y'=-2(2x^2-4x+5)(x-7)$
$+(-2x+3)(4x-4)(x-7)$
$+(-2x+3)(2x^2-4x+5)\times1$
$=-4x^3+36x^2-66x+70$
$-8x^3+76x^2-152x+84$
$-4x^3+14x^2-22x+15$
$=-16x^3+126x^2-240x+169$

(3) $y'=6(-3x+5)^5\times(-3)$
$=-18(-3x+5)^5$

(4) $y'=7(4x^2-3x)^6(8x-3)$
$=(56x-21)(4x^2-3x)^6$

05~06강 족집게 기출문제 p. 30~33

1 ④	2 ⑤	3 ③	4 ⑤	5 ④
6 ②	7 -1	8 ㄷ	9 3	10 ④
11 ①	12 ③	13 5	14 ⑤	15 ④
16 65	17 2	18 ①	19 ⑤	20 101
21 $-\frac{3}{2}$	22 ⑤	23 ㄱ, ㄷ	24 -6	25 $\frac{3}{2}$

26 (1) $f(1)=0$, $f'(1)=5$ (2) 3

1 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{0-(-4)}{2}=2$$

또 $x=a$에서의 미분계수는

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(a+\Delta x)^2-2(a+\Delta x)-3\}-(a^2-2a-3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(2a-2)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(2a-2+\Delta x)=2a-2$$

따라서 $2a-2=2$이므로 $a=2$

2 x의 값이 n에서 $n+1$까지 변할 때의 평균변화율이 $n+1$이므로

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}=n+1$$

$\therefore f(n+1)-f(n)=n+1$

$$\begin{aligned}
&f(2)-f(1)=2\\
&f(3)-f(2)=3\\
&f(4)-f(3)=4\\
&\quad\vdots\\
+)\;&f(100)-f(99)=100\\
\hline
&f(100)-f(1)=\sum_{n=1}^{99}(n+1)\\
&\qquad=\frac{99\times100}{2}+99
\end{aligned}$$

따라서 구하는 평균변화율은

$$\frac{f(100)-f(1)}{100-1}=\frac{1}{99}\left(\frac{99\times100}{2}+99\right)=51$$

3 $f'(a)=2$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2$$
$$=2f'(a)=2\times2=4$$

4
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{(x+1)(x-1)}\times\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+1}$$
$$=f'(1)\times\frac{3}{2}=4\times\frac{3}{2}=6$$

5
$$\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-xf(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-3f(3)+3f(3)-xf(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{3\{f(x)-f(3)\}-(x-3)f(3)}{x-3}$$
$$=3\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-f(3)$$
$$=3f'(3)-f(3)$$
$$=3\times1-2=1$$

6 $\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $h\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4}\left\{f\left(a+\frac{3b}{n}\right)-f\left(a-\frac{3b}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3bh)-f(a-3bh)}{4h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3bh)-f(a)+f(a)-f(a-3bh)}{4h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3bh)-f(a)}{4h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-3bh)}{4h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3bh)-f(a)}{3bh}\times\frac{3}{4}b+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3bh)-f(a)}{-3bh}\times\frac{3}{4}b$$
$$=\frac{3}{4}bf'(a)+\frac{3}{4}bf'(a)=\frac{3}{2}bf'(a)$$

7 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-3$ $\quad\therefore f(0)=3$

$f'(1)=1$에서

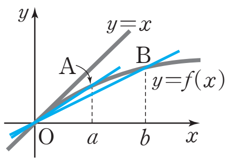
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)+2h-3-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)-3}{h}+2\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+2\right\}$$
$$=f'(0)+2=1$$

$\therefore f'(0)=-1$

8 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$라고 하자.

ㄱ. 오른쪽 그림에서 $\frac{f(a)}{a}$, $\frac{f(b)}{b}$는 각각 직선 OA, OB의 기울기이므로

$\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$

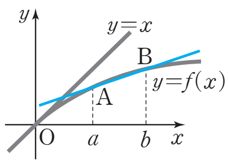


ㄴ. 오른쪽 그림에서 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 직선 AB의 기울기이고, 직선 AB의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기보다 작으므로

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

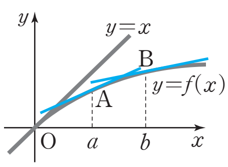
이때 $b-a>0$이므로

$f(b)-f(a)<b-a$



ㄷ. 오른쪽 그림에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기가 점 B에서의 접선의 기울기보다 크므로

$f'(a)>f'(b)$



따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

9 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 불연속이고 $x=1$, $x=4$에서 미분가능하지 않으므로 불연속인 점의 개수는 1, 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

따라서 그 합은

$1+2=3$

10 ㄱ. $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|h^2+2h|}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0+}(h+2)=2$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h^2+2h|}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0-}(-h-2)=-2$$

따라서 $f'(1)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)=2$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(h^2+2h+2)-2}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0+}(h+2)=2$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(3h+2)-2}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{3h}{h}=3$$

따라서 $g'(1)$이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x\to 1}k(x)=k(1)=0$이므로 함수 $k(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$k'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h}=\lim_{h\to 0}h^2=0$$

따라서 $k'(1)$이 존재하므로 함수 $k(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

11 $f'(x)=(x+1)(x+3)+(x-2)(x+3)+(x-2)(x+1)$이므로

$f'(0)=3-6-2=-5$

12 $\lim_{x\to3}\frac{f(x+2)+4}{x-3}=6$에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}\{f(x+2)+4\}=f(5)+4=0$

$\therefore f(5)=-4$

이때 $x+2=t$로 놓으면 $x\to3$일 때, $t\to5$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{f(x+2)+4}{x-3}&=\lim_{x\to3}\frac{f(x+2)-f(5)}{x-3}\\&=\lim_{t\to5}\frac{f(t)-f(5)}{t-5}\\&=f'(5)=6\end{aligned}$$

$\therefore f(5)+f'(5)=-4+6=2$

13 $f(x)=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots-x^9+x^{10}$이므로

$f'(x)=-1+2x-3x^2+4x^3-\cdots-9x^8+10x^9$

$\therefore f'(1)=-1+2-3+4-\cdots-9+10=5$

14 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(1)=4$에서 $a+b+c=4$ …… ㉠

$f'(1)=1$에서 $2a+b=1$ …… ㉡

$f'(-1)=-7$에서 $-2a+b=-7$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$

$a=2$, $b=-3$을 ㉠에 대입하면

$c=5$

따라서 $f(x)=2x^2-3x+5$이므로

$f(2)=8-6+5=7$

15 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 식에 대입하면

$(x+1)(3x^2+2ax+b)=3(x^3+ax^2+bx+c)$

$3x^3+(2a+3)x^2+(2a+b)x+b=3x^3+3ax^2+3bx+3c$

양변의 계수를 비교하면

$2a+3=3a$에서 $a=3$

$2a+b=3b$에서 $b=a=3$

$b=3c$에서 $c=\frac{b}{3}=1$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$이므로

$f(1)=1+3+3+1=8$

16 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)+f(2)-f(2-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\times3+\lim_{h\to0}\frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h}\times2$

$=3f'(2)+2f'(2)$

$=5f'(2)$

이때 $f'(x)=x^4-x^2+1$이므로

$5f'(2)=5\times(16-4+1)=65$

17 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이고 미분계수 $f'(2)$가 존재한다.

(ⅰ) $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$에서

$4a+b=8-8+8$

$\therefore 4a+b=8$ …… ㉠

(ⅱ) 미분계수 $f'(2)$가 존재하므로

$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{\{a(2+h)^2+b\}-(4a+b)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{4ah+ah^2}{h}$

$=\lim_{h\to0+}(4a+ah)=4a$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{\{(2+h)^3-4(2+h)+8\}-(4a+b)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{8h+6h^2+h^3}{h}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{h\to0-}(8+6h+h^2)=8$

즉, $4a=8$이므로 $a=2$

따라서 $a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=0$이므로

$a+b=2$

18 $f(x)=3x^n-5x$라고 하면 $f(1)=-2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{3x^n-5x+2}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=f'(1)=10\end{aligned}$$

이때 $f'(x)=3nx^{n-1}-5$이므로

$f'(1)=3n-5$

따라서 $3n-5=10$이므로 $n=5$

19 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}=2$에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}\{f(x)-2\}=0$

$\therefore f(3)=2$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}&=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\\&=f'(3)=2\end{aligned}$$

$\lim_{x\to3}\frac{g(x)-1}{x-3}=5$에서 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}\{g(x)-1\}=0$

$\therefore g(3)=1$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to3}\frac{g(x)-1}{x-3}&=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\\&=g'(3)=5\end{aligned}$$

한편 곱의 미분법에 의하여

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$의 $x=3$에서의 미분계수는

$f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=2\times1+2\times5=12$

20 다항식 $x^{100}-100x^2+ax-b$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^{100}-100x^2+ax-b$

$=(x-1)^2Q(x)$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-99+a-b=0$ ...... ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$100x^{99}-200x+a$

$=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-100+a=0$ $\therefore a=100$

$a=100$을 ㉡에 대입하면

$1-b=0$ $\therefore b=1$

$\therefore a+b=101$

21 함수 $f(x)$의 최고차항의 차수와 계수를 각각 m, a $(a\neq0)$라고 하면 도함수 $f'(x)$의 최고차항의 차수와 계수는 각각 $m-1$, am이다.

$(x^n-2)f'(x)=f(x)$에서 좌변의 최고차항의 차수와 계수는 각각 $n+m-1$, am이므로

$n+m-1=m$, $am=a$

$\therefore n=1$, $m=1$

따라서 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면 $f(4)=3$에서

$4a+b=3$

$\therefore b=-4a+3$

이때 $f(x)=ax-4a+3$이고 $f'(x)=a$이므로

$(x-2)f'(x)=f(x)$에 대입하면

$(x-2)\times a=ax-4a+3$

$ax-2a=ax-4a+3$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

즉, $f(x)=\frac{3}{2}x-3$이므로

$f(n)=f(1)=\frac{3}{2}\times1-3$

$=-\frac{3}{2}$

22 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 α, β, γ라고 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$\therefore f'(x)=(x-\alpha)'(x-\beta)(x-\gamma)$
$+(x-\alpha)(x-\beta)'(x-\gamma)$
$+(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)'$
$=(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)$
$+(x-\alpha)(x-\beta)$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는 $f'(\gamma)$이므로

$f'(\gamma)=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$

$=\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}$

23 ㄱ. $g(x)=f(a)$에서

$f(a)+(b-a)f'(x)=f(a)$

$(b-a)f'(x)=0$

$\therefore f'(x)=0$ ($\because b-a>0$)

즉, 주어진 그래프에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기가 0이 될 때의 x의 값이 2개 존재하므로 $g(x)=f(a)$를 만족하는 실수 x의 값이 존재한다.

ㄴ. $g(b)-f(a)$

$=f(a)+(b-a)f'(b)-f(a)$

$=(b-a)f'(b)$

이때 $b-a>0$이지만 $f'(b)$는 양 또는 음의 값일 수 있으므로 항상 $(b-a)f'(b)>0$, 즉 $g(b)>f(a)$인 것은 아니다.

ㄷ. $g(a)-f(b)$

$=f(a)+(b-a)f'(a)-f(b)$

$=(b-a)\left\{f'(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\}$

이때 $b-a>0$이고, 곡선 $y=f(x)$의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기가 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율보다 크므로

$f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

따라서 $(b-a)\left\{f'(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\}>0$이므로

$g(a)>f(b)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

24 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$1+a=b+1$

$\therefore a=b$ ...... ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)^3+a(1+h)^2-(1+a)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\{(3+2a)+(3+a)h+h^2\}$

$=3+2a$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{b(1+h)+1-(1+a)}{h}=b$ ($\because$ ㉠)

에서 $3+2a=b$ ...... ㉡ ...... (가)

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-3$ ...... (나)

$\therefore a+b=-6$ ...... (다)

채점 기준	배점
(가) a, b에 대한 식을 세운다.	3점
(나) a, b의 값을 구한다.	1점
(다) $a+b$의 값을 구한다.	1점

25 $f'(x)=-3x^2+9$이므로

$f(1)=4,\ f'(1)=6$ …… (가)

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{\sqrt{f(x)}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{f(x)}+2}{\sqrt{f(x)}+2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-4}{x-1}\times\frac{1}{\sqrt{f(x)}+2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{f(x)}+2}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{\sqrt{f(1)}+2} \quad \cdots\cdots \text{(나)}$$
$$=6\times\frac{1}{2+2}=\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots \text{(다)}$$

채점 기준	배점
(가) $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구한다.	1점
(나) 주어진 식을 변형한다.	4점
(다) 극한값을 구한다.	1점

26 (1) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=5$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$ …… (가)

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)=5 \quad \cdots\cdots \text{(나)}$$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

$f(1)=0$에서

$1+a+b=0$ …… ㉠

$f'(1)=5$에서

$3+2a=5$ …… ㉡ …… (다)

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-2$ …… (라)

$\therefore a-b=3$ …… (마)

채점 기준	배점
(가) $f(1)$의 값을 구한다.	1점
(나) $f'(1)$의 값을 구한다.	2점
(다) a, b에 대한 식을 세운다.	2점
(라) a, b의 값을 구한다.	1점
(마) $a-b$의 값을 구한다.	1점

07강 접선의 방정식과 평균값 정리

확인 문제 p. 34

1 $f(x)=x^2-3x+7$이라고 하면 $f'(x)=2x-3$

점 $(1,\ 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=2\times1-3=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-5=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+6$

2 함수 $f(x)=-x^2+4x$는 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 4)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(4)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-2x+4$이므로

$f'(c)=-2c+4=0$ $\quad\therefore c=2$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 35

1 (1) $f(x)=x^2-5x+1$이라고 하면 $f'(x)=2x-5$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-5t+1)$이라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=2t-5=-1$ $\quad\therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ -5)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+5=-(x-2)$ $\quad\therefore y=-x-3$

(2) $f(x)=x^3-4x+2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-4t+2)$라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=3t^2-4=-1,\ t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 5)$ 또는 $(1,\ -1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-5=-(x+1)$ 또는 $y+1=-(x-1)$

$\therefore y=-x+4$ 또는 $y=-x$

2 (1) $f(x)=x^2-6x+5$라고 하면

$f'(x)=2x-6$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-6t+5)$라고 하면 접선의 기울기가 6이므로

$f'(t)=2t-6=6$ $\quad\therefore t=6$

따라서 접점의 좌표는 $(6,\ 5)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-5=6(x-6)$ $\quad\therefore y=6x-31$

(2) $f(x)=-2x^3+9x^2-6x-5$라고 하면

$f'(x)=-6x^2+18x-6$

접점의 좌표를 $(t,\ -2t^3+9t^2-6t-5)$라고 하면 접선의 기울기가 6이므로

$f'(t)=-6t^2+18t-6=6$

$t^2-3t+2=0,\ (t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ -4)$ 또는 $(2,\ 3)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+4=6(x-1)$ 또는 $y-3=6(x-2)$

$\therefore y=6x-10$ 또는 $y=6x-9$

3 (1) $f(x)=-2x^2+3x$라고 하면

$f'(x)=-4x+3$

접점의 좌표를 $(t,\ -2t^2+3t)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-4t+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-2t^2+3t)=(-4t+3)(x-t)$

$\therefore\ y=(-4t+3)x+2t^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(-1,\ -3)$을 지나므로

$-3=(-4t+3)\times(-1)+2t^2$

$t^2+2t=0,\ t(t+2)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-2$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=3x$ 또는 $y=11x+8$

(2) $f(x)=x^3+1$이라고 하면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+1)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$

$\therefore\ y=3t^2x-2t^3+1$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(1,\ -3)$을 지나므로

$-3=3t^2-2t^3+1,\ 2t^3-3t^2-4=0$

$(t-2)(2t^2+t+2)=0$

$\therefore\ t=2\ (\because\ 2t^2+t+2>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=12x-15$

4 (1) $f(x)=x^2-2x+3$이라고 하면

$f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-2t+3)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-2t+3)=(2t-2)(x-t)$

$\therefore\ y=(2t-2)x-t^2+3$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(-2,\ 10)$을 지나므로

$10=(2t-2)\times(-2)-t^2+3$

$t^2+4t+3=0,\ (t+3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=-3$ 또는 $t=-1$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-8x-6$ 또는 $y=-4x+2$

(2) $f(x)=-x^3+3x-1$이라고 하면

$f'(x)=-3x^2+3$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+3t-1)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+3t-1)=(-3t^2+3)(x-t)$

$\therefore\ y=(-3t^2+3)x+2t^3-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=2t^3-1,\ t^3-1=0,\ (t-1)(t^2+t+1)=0$

$\therefore\ t=1\ (\because\ t^2+t+1>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=1$

5 $f(x)=x^3-3x^2+x+1$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12-12+1=1$

이므로 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-1)=x-2$ $\quad\therefore\ y=x-3$

곡선 $y=x^3-3x^2+x+1$과 접선 $y=x-3$의 식을 연립하여 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x^2+x+1=x-3$

$x^3-3x^2+4=0$

$(x+1)(x-2)^2=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

즉, 교점의 좌표는 $(-1,\ -4)$, $(2,\ -1)$이므로 점 P의 좌표는

$(-1,\ -4)$

6 $f(x)=-x^3-x^2+x+4$라고 하면

$f'(x)=-3x^2-2x+1$

점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-3-2+1=-4$

이므로 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=-4(x-1)$ $\quad\therefore\ y=-4x+7$

곡선 $y=-x^3-x^2+x+4$와 접선 $y=-4x+7$의 식을 연립하여 교점의 x좌표를 구하면

$-x^3-x^2+x+4=-4x+7$

$x^3+x^2-5x+3=0$

$(x+3)(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=1$

즉, 교점의 좌표는 $(-3,\ 19)$, $(1,\ 3)$이므로 점 P의 좌표는

$(-3,\ 19)$

7 함수 $f(x)=-x^2+6x$는 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-2x+6$이므로

$\dfrac{8-(-7)}{3}=-2c+6$ $\quad\therefore\ c=\dfrac{1}{2}$

8 함수 $f(x)=x^3-2x+2$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-2$이므로

$\dfrac{23-2}{3}=3c^2-2,\ c^2=3$

$\therefore\ c=\sqrt{3}\ (\because\ 0<c<3)$

08강 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

확인 문제 p. 36

1 (1) $0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$은 열린구간 $(0, \infty)$에서 감소한다.

(2) $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_2)-f(x_1)=-x_2^3+x_1^3$

$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$

이때 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$이므로

$f(x_2)-f(x_1)<0 \qquad \therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=-x^3$은 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

2 $x=a$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 함수 $f(x)$가 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=a$, $x=c$, $x=e$에서 극대이다.

따라서 극대가 되는 점의 개수는 3이다.

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 37

1 (1) $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$에서

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$에서 증가하고, 열린구간 $(-1, 2)$에서 감소한다.

(2) $f(x)=-2x^3+6x-7$에서

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-1, 1)$에서 증가하고, 열린구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서 감소한다.

2 (1) $f(x)=x^4-4x^2+2$에서

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, \infty)$에서 증가하고, 열린구간 $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$에서 감소한다.

(2) $f(x)=x^3-6x^2+12x+3$에서

$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

이때 $f'(2)=0$이지만 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

3 $f'(x)=3x^2+2kx+k+6$이고 함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)\ge0$이어야 하므로 $\quad 3x^2+2kx+k+6\ge0$

즉, 이차방정식 $3x^2+2kx+k+6=0$의 판별식을 D라고 하면 $D\le0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-3(k+6)\le0$, $k^2-3k-18\le0$

$(k+3)(k-6)\le0 \qquad \therefore -3\le k\le6$

4 $f'(x)=-3x^2+4ax-3a$이고 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[2, 3]$에서 감소하려면 $2\le x\le3$에서 $f'(x)\le0$이어야 하므로

$f'(2)\le0$, $f'(3)\le0$

$f'(2)=-12+8a-3a\le0$에서 $\quad a\le\frac{12}{5} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(3)=-27+12a-3a\le0$에서 $\quad a\le3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$a\le\frac{12}{5}$

5 (1) $f(x)=-2x^3+9x^2-12x+7$에서

$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(2)=3$, 극솟값은 $f(1)=2$이다.

(2) $f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3+2x^2+3$에서

$f'(x)=4x^3-8x^2+4x=4x(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	3	↗	$\frac{10}{3}$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 없고 극솟값은 $f(0)=3$이다.

6 (1) $f(x)=x^3-6x^2+17$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	17	↘	-15	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=17$, 극솟값은 $f(4)=-15$이다.

(2) $f(x)=-x^4+4x^3+3$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2=-4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	3	↗	30	↘

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(3)=30$이고 극솟값은 없다.

7 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$과 $x=3$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$, $f'(3)=0$

$-3+2a+b=0$, $-27+6a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=-9$

$\therefore f(x)=-x^3+6x^2-9x+c$

또 $x=1$에서 극솟값 1을 가지므로 $f(1)=1$

$-1+6-9+c=1$ $\therefore c=5$

8 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-2$와 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-2)=0$, $f'(1)=0$

$24-4a+b=0$, $6+2a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-12$

$\therefore f(x)=2x^3+3x^2-12x+c$

또 $x=-2$에서 극댓값 11을 가지므로 $f(-2)=11$

$-16+12+24+c=11$ $\therefore c=-9$

09강 함수의 그래프

확인 문제 p. 38

1 $f(x)=-x^3+3x^2+5$에서

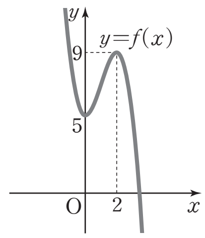
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\boxed{x=2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\boxed{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\boxed{5}$	↗	$\boxed{9}$	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 39

1 (1) $f(x)=-2x^3+6x^2+4$에서

$f'(x)=-6x^2+12x$

$=-6x(x-2)$

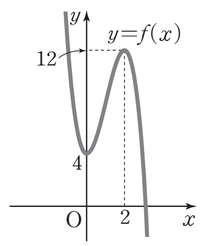
$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	4	↗	12	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=x^4-2x^2+3$에서

$f'(x)=4x^3-4x$

$=4x(x+1)(x-1)$

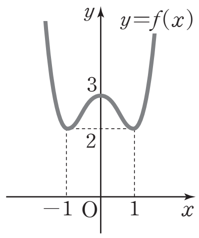
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2 (1) $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-1$에서

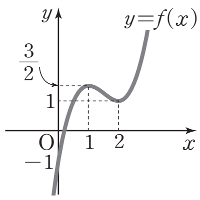
$f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2-1$에서

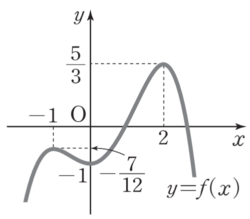
$f'(x)=-x^3+x^2+2x=-x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{7}{12}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



3 $f(x)=x^3-9x^2+15x+1$에서

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

$0\le x\le 6$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$	6
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	1	$\nearrow$	8 극대	$\searrow$	-24 극소	$\nearrow$	-17

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 8, $x=5$에서 최솟값 -24를 갖는다.

4 $f(x)=-x^4+8x^2+7$에서

$f'(x)=-4x^3+16x=-4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ ($\because$ $-3\le x\le 1$)

$-3\le x\le 1$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	23 극대	$\searrow$	7 극소	$\nearrow$	14

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 23, $x=-3$에서 최솟값 -2를 갖는다.

5 잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 잘라 내고 남은 부분을 접어서 만든 상자의 가로의 길이와 세로의 길이는 모두 $(12-2x)$ cm이므로

$12-2x>0$ $\quad\therefore x<6$

그런데 $x>0$이므로 $\quad 0<x<6$

상자의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라고 하면

$V(x)=x(12-2x)^2=4x^3-48x^2+144x$

$\therefore V'(x)=12x^2-96x+144=12(x-2)(x-6)$

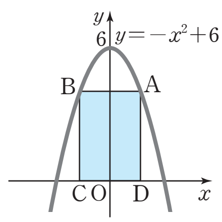
$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because$ $0<x<6$)

$0<x<6$일 때, 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	128 극대	$\searrow$	

따라서 $V(x)$는 $x=2$에서 최댓값 128을 가지므로 상자의 부피의 최댓값은 128 cm^{3}이다.

6 오른쪽 그림과 같이 구하는 직사각형의 네 꼭짓점을 A, B, C, D라고 하자.



점 A의 x좌표를 a $(0<a<\sqrt{6})$라고 하면 $\mathrm{A}(a, -a^2+6)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2a$, $\overline{\mathrm{AD}}=-a^2+6$

□ABCD의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$S(a)=2a(-a^2+6)=-2a^3+12a$

$\therefore S'(a)=-6a^2+12=-6(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$

$S'(a)=0$에서 $a=\sqrt{2}$ ($\because$ $0<a<\sqrt{6}$)

$0<a<\sqrt{6}$일 때, 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{6})$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	$8\sqrt{2}$ 극대	$\searrow$	

따라서 $S(a)$는 $a=\sqrt{2}$에서 최댓값 $8\sqrt{2}$를 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $8\sqrt{2}$이다.

07~09강 족집게 기출문제

p. 40~43

1 1	2 ①	3 ④	4 $\frac{5}{4}$	
5 $y=6x$	6 6	7 ②	8 1	9 ⑤
10 0	11 ①	12 ㄴ, ㄷ	13 ③	14 ②
15 ③	16 ④	17 ②	18 ③	19 90
20 27	21 ②	22 $\frac{4}{27}$	23 -8	24 $3\sqrt{5}$
25 $\frac{1}{3}$	26 96π cm³			

1 직선 $9x+y-3=0$에 평행한 접선의 기울기는 -9이다.
$f(x)=-x^3+3x+5$라고 하면 $\quad f'(x)=-3x^2+3$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+3t+5)$라고 하면 접선의 기울기가 -9이므로
$f'(t)=-3t^2+3=-9,\ t^2=4$
$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=2$
즉, 접점의 좌표는 $(-2,\ 7)$ 또는 $(2,\ 3)$이므로 접선의 방정식은
$y-7=-9(x+2)$ 또는 $y-3=-9(x-2)$
$\therefore\ y=-9x-11$ 또는 $y=-9x+21$
따라서 $a=-9,\ b=-11,\ c=21$ 또는 $a=-9,\ b=21,\ c=-11$이므로
$a+b+c=1$

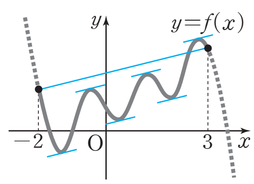
2 $f(x)=x^3-3x^2+2$라고 하면
$f'(x)=3x^2-6x=3(x-1)^2-3$
이때 접선의 기울기는 $x=1$에서 최솟값 -3을 갖는다.
즉, 접점의 좌표가 $(1,\ 0)$이고 접선의 기울기가 -3인 접선의 방정식을 구하면
$y=-3(x-1)\qquad\therefore\ y=-3x+3$
따라서 $a=-3,\ b=3$이므로
$a-b=-6$

3 직선 $y=ax+3$은 항상 점 $(0,\ 3)$을 지나므로 이 직선은 점 $(0,\ 3)$에서 곡선 $y=x^3+1$에 그은 접선과 같다.
$f(x)=x^3+1$이라고 하면 $\quad f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+1)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$
$\therefore\ y=3t^2x-2t^3+1$
이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로
$3=-2t^3+1,\ t^3+1=0$
$(t+1)(t^2-t+1)=0$
$\therefore\ t=-1\ (\because\ t^2-t+1>0)$
따라서 직선 $y=ax+3$이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로
$0=-a+3\qquad\therefore\ a=3$

4 $f(x)=x^3-x+1$이라고 하면
$f'(x)=3x^2-1$
이때 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 직선 l_1의 방정식은
$y-1=2(x-1)\qquad\therefore\ y=2x-1$
또 직선 l_1에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 l_2의 방정식은
$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)\qquad\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
따라서 $\mathrm{B}(0,\ -1),\ \mathrm{C}\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}+1\right)\times1=\frac{5}{4}$

5 $f(x)=x^3+ax+2,\ g(x)=bx^2+3$이라고 하면
$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2bx$
두 곡선이 $x=1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로
$f(1)=g(1)$에서
$1+a+2=b+3\qquad\cdots\cdots$ ㉠
$f'(1)=g'(1)$에서
$3+a=2b\qquad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=3,\ b=3$
따라서 함수 $g(x)=3x^2+3$의 그래프 위의 점 $(1,\ 6)$에서의 접선의 방정식을 구하면 $g'(x)=6x$에서 $g'(1)=6$이므로
$y-6=6(x-1)$
$\therefore\ y=6x$

6 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 평균값 정리를 만족하는 상수 c는 열린구간 $(-2,\ 3)$에서 두 점 $(-2,\ f(-2)),\ (3,\ f(3))$을 지나는 직선과 평행한 곡선 $y=f(x)$의 접선의 접점의 x좌표이다.
이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2,\ f(-2)),\ (3,\ f(3))$을 지나는 직선과 평행한 접선을 6개 그릴 수 있으므로 상수 c의 개수는 6이다.



7 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족하려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.
$f(x)=x^3+ax^2-ax+4$에서
$f'(x)=3x^2+2ax-a$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에서 $f'(x)\geq0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=a^2+3a\leq0$
$a(a+3)\leq0\qquad\therefore\ -3\leq a\leq0$
따라서 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0$의 4개이다.

8 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다. 그런데 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 감소해야 한다.

$f(x)=-x(x^2-3ax+3a)=-x^3+3ax^2-3ax$에서

$f'(x)=-3x^2+6ax-3a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-9a\le 0$

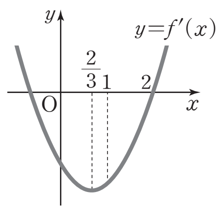
$9a(a-1)\le 0 \qquad \therefore 0\le a\le 1$

따라서 상수 a의 최댓값은 1이다.

9 $f(x)=x^3-2x^2-ax+3$에서

$f'(x)=3x^2-4x-a=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-a-\frac{4}{3}$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(1, 2)$에서 감소하려면 $1<x<2$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(2)=4-a\le 0$

$\therefore a\ge 4$

따라서 상수 a의 최솟값은 4이다.

10 $f(x)=x^3+ax^2+bx-100$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-5$와 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-5)=0$, $f'(1)=0$

$75-10a+b=0$, $3+2a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=-15$

따라서 $f(x)=x^3+6x^2-15x-100$이므로 구하는 극댓값은

$f(-5)=-125+150+75-100=0$

11 $f(x)=2x^3-3ax^2-12a^2x$에서

$f'(x)=6x^2-6ax-12a^2=6(x+a)(x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-a$ 또는 $x=2a$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$7a^3$	↘	$-20a^3$	↗

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-a)=7a^3$, 극솟값은 $f(2a)=-20a^3$이다.

이때 극댓값과 극솟값의 차가 1이므로

$7a^3-(-20a^3)=1$

$a^3=\frac{1}{27} \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

12 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서 $x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이므로 $\quad a>0$

또 $x=0$일 때 y축의 음의 부분과 만나므로 $\quad d<0$

곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기가 0이 되는 접점의 x좌표가 방정식 $f'(x)=0$의 실근과 같으므로 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 서로 다른 양수이다.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-\frac{2b}{3a}>0$, (두 근의 곱)$=\frac{c}{3a}>0$

이때 $a>0$이므로 $\quad b<0$, $c>0$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $\quad f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로

$b=0$, $12+4a+b=0 \qquad \therefore a=-3$, $b=0$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+c$

이때 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값이 3이므로

$f(0)=c=3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$이고 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$f(2)=8-12+3=-1$

14 ㄱ. 열린구간 $(-3, -2)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-3, -2)$에서 증가한다.

ㄴ. 열린구간 $(4, 6)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(4, 6)$에서 증가한다.

ㄷ. $f'(-2)=0$이고 $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이다.

ㄹ. $f'(4)=0$이지만 $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극값을 갖지 않는다.

ㅁ. 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 $x=1$에서 극소이므로 극값은 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 3이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x<-2$에서 감소하고 $x>-2$에서 증가하며 $x=-2$에서 극소이다.

또 $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 ③이다.

16 $f'(x)=6x^2+6(a-1)x+6$이고, 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라고 하면

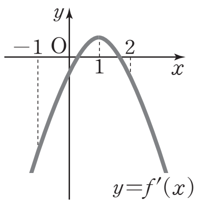
$\frac{D}{4}=9(a-1)^2-36\le 0$, $a^2-2a-3\le 0$

$(a+1)(a-3)\le 0$ $\quad\therefore -1\le a\le 3$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

17 $f(x)=-x^3+3x^2+ax$에서 $f'(x)=-3x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-1, 2)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<2$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=9+3a>0$ $\quad\therefore a>-3$

(ii) $f'(-1)=a-9<0$

$\therefore a<9$

(iii) $f'(2)=a<0$

(iv) 이차함수 $y=f'(x)$의 축의 방정식은 $x=1$이므로 축은 열린구간 $(-1, 2)$에 있다.

(i)~(iv)에 의하여 a의 값의 범위는 $-3<a<0$이므로 구하는 모든 정수 a의 값의 합은

$-2+(-1)=-3$

18 $f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ $(\because -2\le x\le 1)$

$-2\le x\le 1$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$a-20$	↗	a 극대	↘	$a-2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 a, $x=-2$에서 최솟값 $a-20$을 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 -10이므로

$a+a-20=-10$ $\quad\therefore a=5$

19 점 P의 좌표를 (t, t^2+1)이라고 하면

$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=t^2+(t^2+1)^2+(t-10)^2+(t^2+1)^2$

$=2t^4+6t^2-20t+102$

$f(t)=2t^4+6t^2-20t+102$라고 하면

$f'(t)=8t^3+12t-20=4(t-1)(2t^2+2t+5)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ $(\because 2t^2+2t+5>0)$

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	90 극소	↗

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최소이므로 구하는 최솟값은 $f(1)=90$

20 직육면체의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이를 x, 직육면체의 높이를 y라고 하면 모든 모서리의 길이의 합이 36이므로

$8x+4y=36$ $\quad\therefore y=9-2x$ $\left(단, 0<x<\frac{9}{2}\right)$

직육면체의 부피를 $V(x)$라고 하면

$V(x)=x^2(9-2x)=9x^2-2x^3$

$\therefore V'(x)=18x-6x^2=6x(3-x)$

$V'(x)=0$에서 $x=3$ $\left(\because 0<x<\frac{9}{2}\right)$

$0<x<\frac{9}{2}$일 때, 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	$\left(\frac{9}{2}\right)$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	27 극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=3$에서 최댓값 27을 가지므로 직육면체의 부피의 최댓값은 27이다.

21 $f(x)=x^4+2(a-1)x^2-4ax+1$에서

$f'(x)=4x^3+4(a-1)x-4a$

$=4(x-1)(x^2+x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 가져야 한다.

(i) $4(x-1)(x^2+x+a)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+x+a=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라고 하면

$D=1-4a<0$

$\therefore a>\frac{1}{4}$

(ii) $4(x-1)(x^2+x+a)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 갖거나 1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

ⓘ 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때

$1+1+a=0$ $\quad\therefore a=-2$

ⓘⓘ 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 1이 아닌 실수를 중근으로 가질 때

판별식을 D라고 하면 $D=1-4a=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에 의하여 상수 a의 값의 범위는

$a=-2$ 또는 $a\ge\frac{1}{4}$

따라서 상수 a의 최솟값은 -2이다.

22 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 $(a,\ a^2)$이라고 하면 두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이 $S(a)$는

$$S(a)=\left\{\frac{1}{2}-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}\left\{\left(a^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}$$
$$=(1-a)a^2$$
$$=a^2-a^3\ \left(\text{단, } \frac{1}{2}<a<1\right)$$

$\therefore\ S'(a)=2a-3a^2=a(2-3a)$

$S'(a)=0$에서

$a=\frac{2}{3}\ \left(\because\ \frac{1}{2}<a<1\right)$

$\frac{1}{2}<a<1$일 때, 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$\frac{4}{27}$ 극대	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=\frac{2}{3}$에서 최대이므로 겹치는 부분의 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}$

23 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ (단, a, b, c는 상수)

또 $f(2+x)=f(2-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, $x=1$에서 극소이므로 $x=3$에서 극소이고 $x=2$에서 극대이다.

즉, $f'(1)=0$, $f'(2)=0$, $f'(3)=0$이므로

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$에서

$$4x^3+3ax^2+2bx+c=4(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$=4x^3-24x^2+44x-24$$

이때 $3a=-24$, $2b=44$, $c=-24$이므로

$a=-8$, $b=22$, $c=-24$

따라서 $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x$이므로 극댓값은

$f(2)=16-64+88-48=-8$

24 $f(x)=x^3-5x$라고 하면 $f'(x)=3x^2-5$

점 A$(1,\ -4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$이므로 접선의 방정식은

$y+4=-2(x-1)\quad \therefore\ y=-2x-2$ …… (가)

곡선 $y=x^3-5x$와 직선 $y=-2x-2$의 식을 연립하여 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-5x=-2x-2$, $x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0\quad \therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 점 B의 좌표는 $(-2,\ 2)$이므로 …… (나)

$\overline{\text{AB}}=\sqrt{(-2-1)^2+(2+4)^2}=3\sqrt{5}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 점 A에서의 접선의 방정식을 구한다.	2점
(나) 점 B의 좌표를 구한다.	2점
(다) 선분 AB의 길이를 구한다.	2점

25 $f(x)=ax^4-4ax^3+b$에서

$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$ …… (가)

$f'(x)=0$에서 $x=3\ (\because\ 1\le x\le 4)$

$1\le x\le 4$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-3a+b$	↘	$-27a+b$ 극소	↗	b

…… (나)

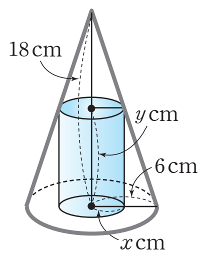
이때 $a>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 b, $x=3$에서 최솟값 $-27a+b$를 갖는다.

$b=3$, $-27a+b=0$ …… (다)

따라서 $a=\frac{1}{9}$, $b=3$이므로 $ab=\frac{1}{3}$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) $f'(x)$를 구한다.	1점
(나) 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타낸다.	2점
(다) a, b에 대한 식을 세운다.	2점
(라) ab의 값을 구한다.	2점

26 오른쪽 그림과 같이 원뿔에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $x$cm, 높이를 $y$cm라고 하면



$6:18=x:(18-y)$, $18-y=3x$

$\therefore\ y=-3x+18$ (단, $0<x<6$)

…… (가)

원기둥의 부피를 $V(x)\,\text{cm}^3$라고 하면

$V(x)=\pi x^2(-3x+18)=3\pi(6x^2-x^3)$ …… (나)

$\therefore\ V'(x)=3\pi(12x-3x^2)=9\pi x(4-x)$

$V'(x)=0$에서 $x=4\ (\because\ 0<x<6)$

$0<x<6$일 때, 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(6)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	96π 극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=4$에서 최댓값 96π를 가지므로 원기둥의 부피의 최댓값은 $96\pi\ \text{cm}^3$이다. …… (다)

채점 기준	배점
(가) 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x cm, 높이를 y cm로 놓고 x, y 사이의 관계식을 세운다.	2점
(나) 원기둥의 부피를 x에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(다) 원기둥의 부피의 최댓값을 구한다.	2점

10강 방정식과 부등식에의 활용

확인 문제 p. 44

1 (1) 주어진 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=x^3-3x^2+15$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-3x^2+15$라고 하면

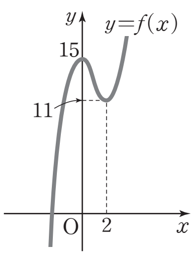
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	15 극대	↘	11 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



(2) (1)에서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=15$, 극솟값은 $f(2)=11$이므로

$f(0)f(2)=15\times11=165>0$

따라서 주어진 방정식은 한 실근과 두 허근을 갖는다.

2 (1) $f(x)=x^3-3x+7$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x\ge-1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	9	↘	5 극소	↗

$x\ge-1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 5를 갖는다.

(2) $x\ge-1$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 5이고 $5\ge0$이므로 $f(x)\ge0$이다.

따라서 $x\ge-1$일 때, 부등식 $x^3-3x+7\ge0$이 성립한다.

교/과/서/속 핵심+유형 닮은꼴 문제 p. 45

1 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^3-6x^2+9x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x$라고 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

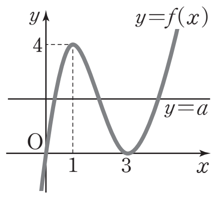
$x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4 극대	↘	0 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$0<a<4$



다른 풀이

$f(x)=x^3-6x^2+9x-a$라고 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)<0, 즉 $f(1)f(3)<0$이어야 하므로

$(4-a)\times(-a)<0$

$a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4$

2 주어진 방정식에서 $x^3-3x+5=a$이므로 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^3-3x+5$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-3x+5$라고 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

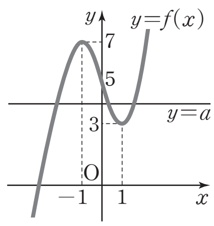
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7 극대	↘	3 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$3<a<7$



다른 풀이

$f(x)=x^3-3x+5-a$라고 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)<0, 즉 $f(-1)f(1)<0$이어야 하므로

$(7-a)(3-a)<0$

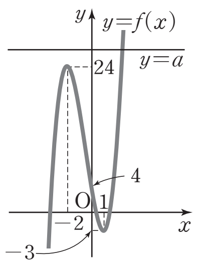
$(a-3)(a-7)<0$

$\therefore 3<a<7$

3 두 곡선 $y=2x^3+x^2-3x+4$, $y=-2x^2+9x+a$가 오직 한 점에서만 만나려면 방정식
$2x^3+x^2-3x+4=-2x^2+9x+a$, 즉
$2x^3+3x^2-12x+4=a$가 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.
$f(x)=2x^3+3x^2-12x+4$라고 하면
$f'(x)=6x^2+6x-12$
$=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	24 극대	↘	-3 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 한 실근과 두 허근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는
$a<-3$ 또는 $a>24$

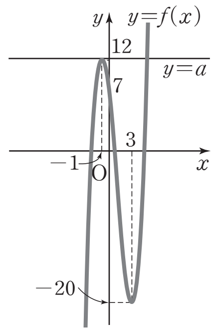


다른 풀이
$2x^3+x^2-3x+4=-2x^2+9x+a$에서
$2x^3+3x^2-12x+4-a=0$
$f(x)=2x^3+3x^2-12x+4-a$라고 하면
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=1$
삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면
(극댓값)$\times$(극솟값)>0, 즉 $f(-2)f(1)>0$이어야 하므로
$(24-a)(-3-a)>0$
$(a+3)(a-24)>0$
$\therefore$ $a<-3$ 또는 $a>24$

4 두 곡선 $y=x^3-2x^2-5x+7$, $y=x^2+4x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식
$x^3-2x^2-5x+7=x^2+4x+a$, 즉
$x^3-3x^2-9x+7=a$가 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3-3x^2-9x+7$이라고 하면
$f'(x)=3x^2-6x-9$
$=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12 극대	↘	-20 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 중근과 다른 한 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값은
$a=-20$ 또는 $a=12$



다른 풀이
$x^3-2x^2-5x+7=x^2+4x+a$에서
$x^3-3x^2-9x+7-a=0$
$f(x)=x^3-3x^2-9x+7-a$라고 하면
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
삼차방정식 $f(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가지려면
(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$, 즉 $f(-1)f(3)=0$이어야 하므로
$(12-a)(-20-a)=0$, $(a+20)(a-12)=0$
$\therefore$ $a=-20$ 또는 $a=12$

5 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+7$이라고 하면
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $x\geq 0$)
$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	7	↘	0 극소	↗

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=0$이고, $f(1)\geq 0$이므로 $f(x)\geq 0$이다.
따라서 $x\geq 0$일 때, 부등식 $2x^3+3x^2-12x+7\geq 0$이 성립한다.

6 $x^4+4x^2+9\geq -2x^2+16x$에서
$x^4+6x^2-16x+9\geq 0$
$f(x)=x^4+6x^2-16x+9$라고 하면
$f'(x)=4x^3+12x-16=4(x-1)(x^2+x+4)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $x^2+x+4>0$)
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0 극소	↗

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=0$이고, $f(1)\geq 0$이므로 $f(x)\geq 0$이다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식
$x^4+4x^2+9\geq -2x^2+16x$가 성립한다.

7 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.
$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면
$h(x)=x^4-3x^3+2x-(x^3+2x+k)=x^4-4x^3-k$
$\therefore\ h'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$
$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-k$	↘	$-27-k$ 극소	↗

따라서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(3)=-27-k$이므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이 성립하려면
$-27-k>0\qquad \therefore\ k<-27$

8 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있다는 것은 함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프보다 위쪽에 있다는 것과 같다.
즉, 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 $g(x)-f(x)>0$이어야 한다.
$h(x)=g(x)-f(x)$라고 하면
$h(x)=3x^3+x^2-12x+k-(x^3-2x^2+24x)$
$\quad=2x^3+3x^2-36x+k$
$\therefore\ h'(x)=6x^2+6x-36=6(x+3)(x-2)$
$h'(x)=0$에서 $x=2\ (\because\ 0\le x\le 4)$
닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$h(x)$	k	↘	$k-44$ 극소	↗	$k+32$

따라서 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(2)=k-44$이므로 $h(x)>0$이 성립하려면
$k-44>0\qquad \therefore\ k>44$
따라서 자연수 k의 최솟값은 45이다.

11강 속도와 가속도

확인 문제 p. 46

1 $v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6,\ a=\dfrac{dv}{dt}=6t$

2 (1) $l=3+2t$
(2) $\dfrac{dl}{dt}=2$
(3) $S=(3+2t)(3+2t)=4t^2+12t+9$
(4) $\dfrac{dS}{dt}=8t+12$이므로 시각 $t=5$에서의 S의 변화율은
$8\times5+12=52$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 47

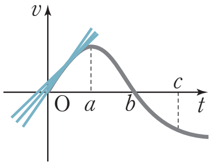
1 (1) 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+18t-24$,
$a=\dfrac{dv}{dt}=-6t+18$
따라서 시각 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는 각각
$v=-3+18-24=-9$,
$a=-6+18=12$
(2) 운동 방향이 바뀌는 순간의 속도는 0이므로
$v=-3t^2+18t-24=0$에서
$-3(t-2)(t-4)=0\qquad \therefore\ t=2$ 또는 $t=4$
따라서 점 P의 운동 방향이 처음으로 바뀌는 시각은 2이다.

2 (1) 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t-9$,
$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-6$
따라서 시각 $t=5$에서의 점 P의 속도와 가속도는 각각
$v=75-30-9=36$,
$a=30-6=24$
(2) 운동 방향이 바뀌는 순간의 속도는 0이므로
$v=3t^2-6t-9=0$에서
$3(t+1)(t-3)=0\qquad \therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$
따라서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 위치는 $t=3$에서의 점 P의 위치이므로
$x=3^3-3\times3^2-9\times3+4=-23$

3 ㄱ. $3<t<4$에서 $v=-1$이므로 점 P의 가속도는
$\dfrac{dv}{dt}=0$
ㄴ. $4<t<5$에서 v의 값이 점점 커지므로 점 P의 속도는 증가한다.
ㄷ. $0<t<2$에서 $v>0$, $2<t<5$에서 $v<0$, $5<t<6$에서 $v>0$이므로 점 P는 움직이는 방향을 $t=2$, $t=5$에서 2번 바꾼다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

4 ㄱ. $0<t<b$에서 $v>0$, $b<t<c$에서 $v<0$이므로 $t=b$일 때, 점 P는 원점에서 가장 멀리 있다.

ㄴ. 시각 t에서의 가속도는 $\dfrac{dv}{dt}$이므로 속도 v의 그래프에서 가속도는 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.



따라서 오른쪽 그래프에서 $0<t<a$일 때, 점 P의 가속도는 감소한다.

ㄷ. $t=a$에서 $v>0$, $t=c$에서 $v<0$이므로 $t=a$일 때와 $t=c$일 때의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5 물체의 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=20-10t$

(1) 물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$20-10t=0 \qquad \therefore t=2$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때의 높이 x는

$x=20\times2-5\times2^2=20\,(\mathrm{m})$

(2) 물체가 다시 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$20t-5t^2=0$, $t^2-4t=0$

$t(t-4)=0 \qquad \therefore t=4\ (\because t>0)$

따라서 물체가 다시 지면에 떨어지는 순간의 속도 v는

$v=20-10\times4=-20\,(\mathrm{m/s})$

6 자동차가 제동이 걸린 지 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=30-6t$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$30-6t=0 \qquad \therefore t=5$

따라서 자동차가 정지할 때까지 걸린 시간은 5초이므로 자동차가 움직인 거리 x는

$x=30\times5-3\times5^2=75\,(\mathrm{m})$

7 t초 후의 가로의 길이는 $5+t$, 세로의 길이는 $5+2t$이므로 t초 후의 이 사각형의 넓이를 S라고 하면

$S=(5+t)(5+2t)=25+15t+2t^2$

즉, t초 후의 이 사각형의 넓이의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=15+4t$

따라서 10초 후의 이 사각형의 넓이의 변화율은

$15+4\times10=55$

8 t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(4+2t)$ cm이므로 t초 후의 이 정육면체의 부피를 $V\,\mathrm{cm}^3$라고 하면

$V=(4+2t)^3$

즉, t초 후의 이 정육면체의 부피의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=3(4+2t)^2\times2=6(4+2t)^2$

따라서 3초 후의 이 정육면체의 부피의 변화율은

$6(4+2\times3)^2=600\,(\mathrm{cm^3/s})$

10~11강 족집게 기출문제

p. 48~51

1 ③　**2** $-5<a<-3$　**3** ②
4 ㄱ, ㄴ　**5** ②　**6** $k\ge-16$　**7** $a\ge-4$　**8** ④
9 ③　**10** ②　**11** ④　**12** ②　**13** ①
14 ①　**15** 5 m　**16** ②　**17** ⑤　**18** ⑤
19 $0<a<8$　**20** ㄱ, ㄴ, ㄷ　**21** ④
22 $-16<k<0$　**23** (1) $v=4t-5$, $a=4$ (2) 7
24 180 m

1 주어진 방정식에서 $2x^3-3x^2-12x+4=a$이므로 이 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=2x^3-3x^2-12x+4$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+4$라고 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$\quad=6(x+1)(x-2)$

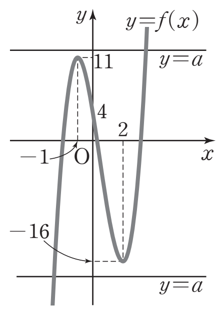
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	11 극대	↘	-16 극소	↗

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는



$a<-16$ 또는 $a>11$

따라서 $p=-16$, $q=11$이므로

$p+q=-5$

2 주어진 방정식에서 $2x^4-4x^2+5=-a$이므로 이 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=2x^4-4x^2+5$의 그래프와 직선 $y=-a$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=2x^4-4x^2+5$라고 하면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

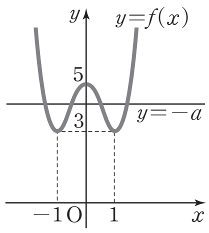
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	3 극소	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	3 극소	$\nearrow$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는



$3<-a<5$

$\therefore\ -5<a<-3$

3 주어진 방정식에서 $x^3+3x^2-9x-4=a$이므로 이 방정식의 실근은 함수 $y=x^3+3x^2-9x-4$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-4$라고 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

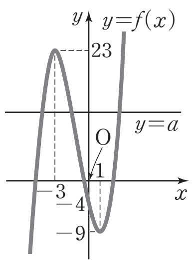
$f'(x)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	23 극대	$\searrow$	-9 극소	$\nearrow$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 두 개의 음의 근과 한 개의 양의 근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는



$-4<a<23$

따라서 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ \cdots,\ 22$의 26개이다.

4 $h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

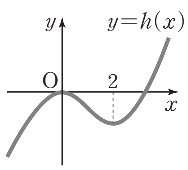
$h'(x)=0$, 즉 $f'(x)=g'(x)$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

이때 $h(0)=f(0)-g(0)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<2$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

5 $f(x)=x^4-4x^3+a$라고 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	a	$\searrow$	$a-27$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)=a-27$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$a-27\geq 0 \qquad \therefore\ a\geq 27$

따라서 실수 a의 최솟값은 27이다.

6 $f(x)=x^3-9x^2+24x+k$라고 하면

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

$x>4$에서 $f'(x)=0$인 x의 값이 없으므로 함수 $f(x)$는 최솟값이 없다.

그런데 $x>4$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x>4$에서 증가한다.

따라서 $x>4$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면 $f(4)\geq 0$이어야 하므로

$f(4)=4^3-9\times 4^2+24\times 4+k=k+16\geq 0$

$\therefore\ k\geq -16$

7 $h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$h(x)=2x^3+3x^2-(x^3-a)=x^3+3x^2+a$

$\therefore\ h'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

열린구간 $(1,\ 3)$에서 $h'(x)=0$인 x의 값이 없으므로 함수 $h(x)$는 최솟값이 없다.

그런데 열린구간 $(1,\ 3)$에서 $h'(x)>0$이므로 함수 $h(x)$는 열린구간 $(1,\ 3)$에서 증가한다.

따라서 열린구간 $(1,\ 3)$에서 $h(x)>0$, 즉 $f(x)>g(x)$를 만족하려면 $h(1)\geq 0$이어야 하므로

$1+3+a\geq 0 \qquad \therefore\ a\geq -4$

8 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$, 즉 $g(x)-f(x)>0$이어야 한다.

$h(x)=g(x)-f(x)$라고 하면

$h(x)=2x^3+4x^2-25x+k-(x^3+x^2+20x+1)$

$\quad\ =x^3+3x^2-45x+k-1$

$\therefore\ h'(x)=3x^2+6x-45=3(x+5)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=-5$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	$k+174$ 극대	$\searrow$	$k-82$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(3)=k-82$이므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이 성립하려면

$h(3)=k-82>0 \qquad \therefore k>82$

따라서 자연수 k의 최솟값은 83이다.

9 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+6t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-6t+6$

점 P의 가속도가 0이면

$-6t+6=0 \qquad \therefore t=1$

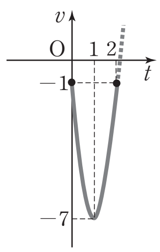
따라서 $t=1$일 때의 점 P의 위치 x는

$x=-1+3+4=6$

10 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-12t-1=6(t-1)^2-7$

$0\le t\le 2$에서 v의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $-7\le v\le -1$이므로

$1\le |v|\le 7$

따라서 점 P의 속력의 최솟값은 1이다.

11 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+24$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-18$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-18t+24=0$, $3(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

따라서 점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꿀 때, 즉 $t>0$에서 속도 v의 부호가 두 번째로 바뀌는 것은 $t=4$일 때이므로 이때의 점 P의 가속도 a는

$a=6\times 4-18=6$

12 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라고 하면

$v_P=3t^2-6t+1$, $v_Q=-t+3$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $v_P=v_Q$일 때이므로

$3t^2-6t+1=-t+3$, $3t^2-5t-2=0$

$(3t+1)(t-2)=0 \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 $t=2$일 때,

$x_P=8-12+2+2=0$, $x_Q=-2+6-1=3$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 3이다.

13 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=3t^2+2mt+n$, $a=6t+2m$

점 P는 $t=1$에서 운동 방향을 바꾸므로 $t=1$에서 $v=0$이다.

$3+2m+n=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $t=1$에서의 위치가 8이므로

$1+m+n+4=8 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=-6$, $n=9$

$\therefore v=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$,

$a=6t-12$

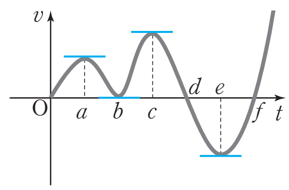
따라서 점 P가 $t=1$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은 $v=0$에서 $t=3$이므로 이때의 가속도 a는

$a=18-12=6$

14 ㄱ. $e<t<f$에서 v의 값은 점점 커지므로 속도는 증가한다.

ㄴ. 시각 t에서의 가속도 a는 $a=\dfrac{dv}{dt}$이므로 속도의 그래프에서의 접선의 기울기와 같다.

따라서 오른쪽 그래프에서 가속도가 0인 시각은 $t=a$, $t=b$, $t=c$, $t=e$의 4개이다.



ㄷ. $0<t<b$, $b<t<d$에서 $v>0$,

$d<t<f$에서 $v<0$,

$t>f$에서 $v>0$

이므로 점 P는 움직이는 방향을 $t=d$, $t=f$에서 두 번 바꾼다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

15 로켓의 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=10-10t$

최고 높이에 도달했을 때, $v=0$이므로

$10-10t=0$

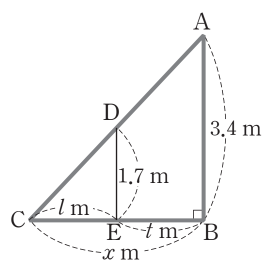
$\therefore t=1$

따라서 로켓의 최고 높이 h는

$h=10-5=5\,(\mathrm{m})$

16 사람이 1 m/s의 속도로 움직이므로 t초 동안 움직인 거리는 t m이다.

그림자의 앞끝이 t초 동안 움직이는 거리를 x m라고 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \backsim \triangle DEC$이므로

$3.4 : x=1.7 : (x-t)$

$1.7x=3.4(x-t)$

$x=2(x-t)$

$\therefore x=2t$

이때 그림자의 길이를 l m라고 하면 $l=\overline{CE}$이므로

$l=\overline{CB}-\overline{BE}$

$\ =x-t=2t-t=t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$\dfrac{dl}{dt}=1\,(\mathrm{m/s})$

17 t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(6+2t)$이므로 t초 후의 정삼각형의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(6+2t)^2=9\sqrt{3}+6\sqrt{3}t+\sqrt{3}t^2$

즉, t초 후의 정삼각형의 넓이의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=6\sqrt{3}+2\sqrt{3}t$

따라서 $t=10$일 때, 정삼각형의 넓이의 변화율은

$6\sqrt{3}+2\sqrt{3}\times 10=26\sqrt{3}$

18 t초 후의 고무 풍선의 반지름의 길이는 $(10+t)$ cm이므로 고무 풍선의 부피를 V cm^{3}라고 하면

$V=\frac{4}{3}\pi(10+t)^3=\frac{4}{3}\pi(1000+300t+30t^2+t^3)$

즉, t초 후의 고무 풍선의 부피의 변화율은

$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi(300+60t+3t^2)$

따라서 $t=3$일 때, 고무 풍선의 부피의 변화율은

$\frac{4}{3}\pi(300+180+27)=676\pi$ (cm^3/s)

19 $f(x)=x^3-6x^2$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-12x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-6t^2)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-12t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-6t^2)=(3t^2-12t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-12t)x-2t^3+6t^2$

이 직선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로 $a=-2t^3+6t^2$

이때 점 $(0,\ a)$에서 곡선 $y=x^3-6x^2$에 그은 서로 다른 접선이 3개이므로 방정식 $a=-2t^3+6t^2$은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(t)=-2t^3+6t^2$이라고 하면

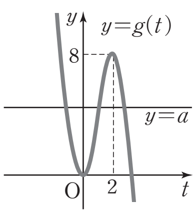
$g'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	0 극소	↗	8 극대	↘

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $a=-2t^3+6t^2$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $0<a<8$



20 $f(x)=x^3-5x^2+4x$, $g(x)=x^2-5x+4a$라고 하면

방정식 $f(x)=g(x)$에서 $x^3-5x^2+4x=x^2-5x+4a$

$x^3-6x^2+9x=4a$

$h(x)=x^3-6x^2+9x$라고 하면

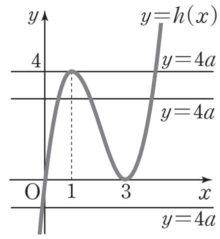
$h'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	4 극대	↘	0 극소	↗

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $a=1$이면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 직선 $y=4$와 서로 다른 두 점에서 만나므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

ㄴ. $a<0$이면 $4a<0$이고, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 직선 $y=4a$와 $x<0$일 때 한 점에서 만나므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 $x>0$에서 만나지 않는다.

ㄷ. $0<4a<4$, 즉 $0<a<1$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 직선 $y=4a$와 서로 다른 세 점에서 만나므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 a의 값은 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라고 하면

$v_P=4t^3-24t^2+36t$, $v_Q=m$

이때 속도가 3번 같아지려면 $v_P=v_Q$를 만족하는 t의 값이 3개 존재해야 하므로 방정식 $4t^3-24t^2+36t=m$이 음이 아닌 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(t)=4t^3-24t^2+36t$라고 하면

$f'(t)=12t^2-48t+36=12(t-1)(t-3)$

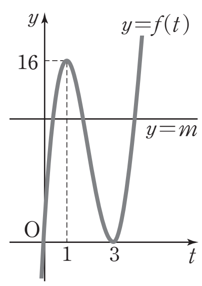
$f'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	16 극대	↘	0 극소	↗

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $4t^3-24t^2+36t=m$이 음이 아닌 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 범위는 $0<m<16$

즉, 정수 m은 1, 2, 3, $\cdots$, 15의 15개이다.



22 주어진 방정식에서 $x^4-8x^2=k$이므로 이 방정식의 실근은 함수 $y=x^4-8x^2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=x^4-8x^2$이라고 하면

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$ $\cdots\cdots$ (가)

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

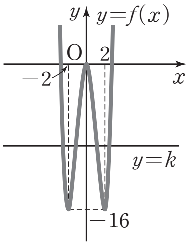
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-16 극소	↗	0 극대	↘	-16 극소	↗

…… (나)

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 두 개의 음의 근과 서로 다른 두 개의 양의 근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$-16<k<0$ …… (다)



채점 기준	배점
(가) $f(x)=x^4-8x^2$으로 놓고 $f'(x)$를 구한다.	2점
(나) 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타낸다.	2점
(다) k의 값의 범위를 구한다.	2점

23 (1) 점 M의 시각 t에서의 위치를 x_M이라고 하면

$$x_M=\frac{x_P+x_Q}{2}=\frac{(3t^2-7t+10)+(t^2-3t+2)}{2}$$

$$=2t^2-5t+6 \quad \cdots\cdots (가)$$

$$\therefore v=\frac{dx_M}{dt}=4t-5,\ a=\frac{dv}{dt}=4 \quad \cdots\cdots (나)$$

(2) 점 Q가 두 번째로 원점을 지나는 시각은 $x_Q=0$에서

$t^2-3t+2=0,\ (t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

이때 점 Q가 두 번째로 원점을 지나는 시각은

$t=2$ …… (다)

따라서 $t=2$일 때, $v=3,\ a=4$이므로 점 M의 속도와 가속도의 합은

$3+4=7$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 시각 t에서의 점 M의 위치를 구한다.	1점
(나) 시각 t에서의 점 M의 속도와 가속도를 구한다.	2점
(다) 점 Q가 두 번째로 원점을 지나는 시각을 구한다.	2점
(라) 점 M의 속도와 가속도의 합을 구한다.	2점

24 열차가 제동이 걸린 지 t초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=18-0.9t$ …… (가)

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$18-0.9t=0 \qquad \therefore t=20$ …… (나)

따라서 열차가 정지할 때까지 걸린 시간은 20초이므로 열차가 움직인 거리 x는

$x=18\times20-0.45\times20^2=180\,(\mathrm{m})$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 열차가 제동이 걸린 지 t초 후의 속도를 구한다.	2점
(나) 열차가 정지할 때까지 걸린 시간을 구한다.	2점
(다) 열차가 정지할 때까지 움직인 거리를 구한다.	2점

12강 부정적분

확인 문제 p. 52

1 (1) $f(x)=(x^2-3x+C)'=2x-3$

(2) $f(x)=(-3x^3+7x+C)'=-9x^2+7$

2 (1) $\int x^4\,dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\frac{1}{5}x^5+C$

(2) $\int x^7\,dx=\frac{1}{7+1}x^{7+1}+C=\frac{1}{8}x^8+C$

(3) $\int 5\,dx=5x+C$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 53

1 $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3+2x)\right\}dx=x^3+2x+C$

$F(0)=1$이므로 $F(0)=C=1$

따라서 $F(x)=x^3+2x+1$이므로

$F(2)=8+4+1=13$

2 $\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)\,dx\right\}=xf(x)$이므로 $xf(x)=4x^2-3x$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=4-3=1$

3 (1) $\int(x^2-8x+5)\,dx=\int x^2\,dx-8\int x\,dx+5\int dx$

$$=\frac{1}{3}x^3-4x^2+5x+C$$

(2) $\int(x-2)(3x+7)\,dx$

$=\int(3x^2+x-14)\,dx$

$=3\int x^2\,dx+\int x\,dx-14\int dx$

$=x^3+\frac{1}{2}x^2-14x+C$

4 (1) $\int(4x^3-2x^2+3x-9)\,dx$

$=4\int x^3\,dx-2\int x^2\,dx+3\int x\,dx-9\int dx$

$=x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-9x+C$

(2) $\int(x+5)(2x-9)\,dx=\int(2x^2+x-45)\,dx$

$$=2\int x^2\,dx+\int x\,dx-45\int dx$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-45x+C$$

5 (1) $\int \frac{x^2}{x-1}\,dx-\int \frac{1}{x-1}\,dx=\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$

$=\int \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\,dx$

$=\int (x+1)\,dx$

$=\int x\,dx+\int dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x+C$

(2) $\int (x+1)(x^2-x+1)\,dx+\int (x-1)(x^2+x+1)\,dx$

$=\int (x^3+1)\,dx+\int (x^3-1)\,dx$

$=\int 2x^3\,dx=2\int x^3\,dx$

$=\frac{1}{2}x^4+C$

6 (1) $\int (3x+1)^2\,dx-\int (3x-1)^2\,dx$

$=\int (9x^2+6x+1)\,dx-\int (9x^2-6x+1)\,dx$

$=\int 12x\,dx=12\int x\,dx=6x^2+C$

(2) $\int \frac{x^3}{x+1}\,dx+\int \frac{1}{x+1}\,dx$

$=\int \frac{x^3+1}{x+1}\,dx$

$=\int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}\,dx$

$=\int (x^2-x+1)\,dx$

$=\int x^2\,dx-\int x\,dx+\int dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

7 (1) $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (8x^3-x+4)\,dx$

$=2x^4-\frac{1}{2}x^2+4x+C$

$f(1)=2$에서 $C=-\frac{7}{2}$

$\therefore f(x)=2x^4-\frac{1}{2}x^2+4x-\frac{7}{2}$

(2) $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 2x(x-9)\,dx$

$=\int (2x^2-18x)\,dx=\frac{2}{3}x^3-9x^2+C$

$f(0)=-1$에서 $C=-1$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x^3-9x^2-1$

8 (1) $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (4x^3+2x-1)\,dx$

$=x^4+x^2-x+C$

$f(-1)=0$에서 $C=-3$

$\therefore f(x)=x^4+x^2-x-3$

(2) $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int x^2(x-2)\,dx$

$=\int (x^3-2x^2)\,dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+C$

$f(0)=3$에서 $C=3$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+3$

13강 정적분

확인 문제 p. 54

1 (1) $\int_3^5 (-3x^2)\,dx=\Big[-x^3\Big]_3^5=-125-(-27)=-98$

(2) $\int_2^1 5x^4\,dx=\Big[x^5\Big]_2^1=1-32=-31$

2 (1) $\int_{-1}^2 (x^2+5)\,dx+\int_{-1}^2 (x^2-5)\,dx$

$=\int_{-1}^2 2x^2\,dx=\Big[\frac{2}{3}x^3\Big]_{-1}^2$

$=\frac{16}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=6$

(2) $\int_{-1}^2 (6x+2)\,dx+\int_2^3 (6x+2)\,dx$

$=\int_{-1}^3 (6x+2)\,dx=\Big[3x^2+2x\Big]_{-1}^3$

$=33-1=32$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 55

1 (1) $\int_{-1}^2 (7x-2)\,dx=\Big[\frac{7}{2}x^2-2x\Big]_{-1}^2$

$=10-\frac{11}{2}=\frac{9}{2}$

(2) $\int_4^2 (6x^2-x-8)\,dx=\Big[2x^3-\frac{1}{2}x^2-8x\Big]_4^2$

$=-2-88=-90$

2 (1) $\int_1^3 (3x^2-7x+2)\,dx=\Big[x^3-\frac{7}{2}x^2+2x\Big]_1^3$

$=\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

(2) $\int_{1}^{-2}(x^3+4x-3)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+2x^2-3x\right]_{1}^{-2}$

$=18-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{75}{4}$

3 (1) $\int_{2}^{4}(x-3)^2\,dx+\int_{2}^{4}(6t-9)\,dt$

$=\int_{2}^{4}(x^2-6x+9)\,dx+\int_{2}^{4}(6x-9)\,dx$

$=\int_{2}^{4}x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{2}^{4}=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}$

(2) $\int_{0}^{1}\frac{x^3}{x-1}\,dx+\int_{1}^{0}\frac{1}{x-1}\,dx$

$=\int_{0}^{1}\frac{x^3}{x-1}\,dx-\int_{0}^{1}\frac{1}{x-1}\,dx$

$=\int_{0}^{1}\frac{x^3-1}{x-1}\,dx$

$=\int_{0}^{1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\,dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2+x+1)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{1}$

$=\frac{11}{6}-0=\frac{11}{6}$

4 (1) $\int_{-1}^{2}(2k+1)^2\,dk-\int_{-1}^{2}(4x+1)\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(2x+1)^2\,dx-\int_{-1}^{2}(4x+1)\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(4x^2+4x+1)\,dx-\int_{-1}^{2}(4x+1)\,dx$

$=\int_{-1}^{2}4x^2\,dx=\left[\frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{2}=\frac{32}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=12$

(2) $\int_{1}^{2}\frac{x^3}{x+2}\,dx-\int_{2}^{1}\frac{8}{x+2}\,dx$

$=\int_{1}^{2}\frac{x^3}{x+2}\,dx+\int_{1}^{2}\frac{8}{x+2}\,dx$

$=\int_{1}^{2}\frac{x^3+8}{x+2}\,dx$

$=\int_{1}^{2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}\,dx$

$=\int_{1}^{2}(x^2-2x+4)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\right]_{1}^{2}$

$=\frac{20}{3}-\frac{10}{3}=\frac{10}{3}$

5 (1) $\int_{1}^{2}(4t^3+2t)\,dt+\int_{2}^{3}(4x^3+2x)\,dx$

$=\int_{1}^{2}(4x^3+2x)\,dx+\int_{2}^{3}(4x^3+2x)\,dx$

$=\int_{1}^{3}(4x^3+2x)\,dx=\left[x^4+x^2\right]_{1}^{3}$

$=90-2=88$

(2) $\int_{-2}^{0}(5x^4-1)\,dx+\int_{0}^{3}(5x^4-1)\,dx-\int_{1}^{3}(5x^4-1)\,dx$

$=\int_{-2}^{3}(5x^4-1)\,dx+\int_{3}^{1}(5x^4-1)\,dx$

$=\int_{-2}^{1}(5x^4-1)\,dx$

$=\left[x^5-x\right]_{-2}^{1}$

$=0-(-30)=30$

6 (1) $\int_{-1}^{1}(x^3-4x)\,dx-\int_{2}^{1}(s^3-4s)\,ds$

$=\int_{-1}^{1}(x^3-4x)\,dx+\int_{1}^{2}(x^3-4x)\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^3-4x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-1}^{2}$

$=-4-\left(-\frac{7}{4}\right)=-\frac{9}{4}$

(2) $\int_{1}^{5}(3x^2-2)\,dx-\int_{2}^{5}(3x^2-2)\,dx+\int_{0}^{1}(3x^2-2)\,dx$

$=\int_{1}^{5}(3x^2-2)\,dx+\int_{5}^{2}(3x^2-2)\,dx+\int_{0}^{1}(3x^2-2)\,dx$

$=\int_{1}^{2}(3x^2-2)\,dx+\int_{0}^{1}(3x^2-2)\,dx$

$=\int_{0}^{1}(3x^2-2)\,dx+\int_{1}^{2}(3x^2-2)\,dx$

$=\int_{0}^{2}(3x^2-2)\,dx$

$=\left[x^3-2x\right]_{0}^{2}$

$=4-0=4$

7 (1) $|x-5|=\begin{cases}-x+5 & (0\le x\le 5)\\ x-5 & (5\le x\le 6)\end{cases}$이므로

$\int_{0}^{6}|x-5|\,dx$

$=\int_{0}^{5}(-x+5)\,dx+\int_{5}^{6}(x-5)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+5x\right]_{0}^{5}+\left[\frac{1}{2}x^2-5x\right]_{5}^{6}$

$=\frac{25}{2}+\frac{1}{2}=13$

(2) $|x^2-2x|=\begin{cases}x^2-2x & (-2\le x\le 0)\\ -x^2+2x & (0\le x\le 1)\end{cases}$이므로

$\int_{-2}^{1}|x^2-2x|\,dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^2+2x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{20}{3}+\frac{2}{3}=\frac{22}{3}$

8 (1) $|x+1|=\begin{cases}-x-1 & (-3\le x\le -1)\\ x+1 & (-1\le x\le 2)\end{cases}$이므로

$$\int_{-3}^{2}|x+1|\,dx$$
$$=\int_{-3}^{-1}(-x-1)\,dx+\int_{-1}^{2}(x+1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-3}^{-1}+\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{2}$$
$$=2+\frac{9}{2}$$
$$=\frac{13}{2}$$

(2) $|-x^2+3x-2|=\begin{cases}x^2-3x+2 & (0\le x\le 1)\\ -x^2+3x-2 & (1\le x\le 2)\\ x^2-3x+2 & (2\le x\le 4)\end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{4}|-x^2+3x-2|\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^2-3x+2)\,dx+\int_{1}^{2}(-x^2+3x-2)\,dx+\int_{2}^{4}(x^2-3x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{2}^{4}$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{14}{3}$$
$$=\frac{17}{3}$$

14강 적분과 미분의 관계

확인 문제 p. 56

1 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-1}^{x}(2t^3-7t+1)\,dt=2x^3-7x+1$

2 (1) $f(x)=2x+\displaystyle\int_{0}^{2}f(t)\,dt$에서 $\displaystyle\int_{0}^{2}f(t)\,dt=k$

(k는 상수)로 놓으면 $f(x)=2x+k$이므로

$$k=\int_{0}^{2}f(t)\,dt=\int_{0}^{2}(2t+k)\,dt$$
$$=\left[t^2+kt\right]_{0}^{2}=2k+4$$

즉, $k=2k+4$이므로 $k=-4$

(2) $k=\displaystyle\int_{0}^{2}f(t)\,dt=-4$를 $f(x)=2x+\displaystyle\int_{0}^{2}f(t)\,dt$에 대입하면

$f(x)=2x-4$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 57

1 $f(x)=3x^2-x+\displaystyle\int_{0}^{2}f(t)\,dt$에서 $\displaystyle\int_{0}^{2}f(t)\,dt=k$

(k는 상수)로 놓으면 $f(x)=3x^2-x+k$이므로

$$k=\int_{0}^{2}f(t)\,dt=\int_{0}^{2}(3t^2-t+k)\,dt$$
$$=\left[t^3-\frac{1}{2}t^2+kt\right]_{0}^{2}=8-2+2k=2k+6$$

즉, $k=2k+6$이므로 $k=-6$

따라서 $f(x)=3x^2-x-6$이므로

$f(1)=3-1-6=-4$

2 $f(x)=-6x^2+4x-\displaystyle\int_{0}^{3}f(t)\,dt$에서

$\displaystyle\int_{0}^{3}f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=-6x^2+4x-k$이므로

$$k=\int_{0}^{3}f(t)\,dt=\int_{0}^{3}(-6t^2+4t-k)\,dt$$
$$=\left[-2t^3+2t^2-kt\right]_{0}^{3}=-54+18-3k=-3k-36$$

즉, $k=-3k-36$이므로 $k=-9$

따라서 $f(x)=-6x^2+4x+9$이므로

$f(-2)=-24-8+9=-23$

3 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-7$

주어진 식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2-7a$, $a(a-7)=0$

$\therefore a=7$ ($\because a>0$)

4 주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-2a-9$ $\quad\therefore a=-4$

따라서 $\displaystyle\int_{1}^{x}f(t)\,dt=x^2+8x-9$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+8$

5 $f(t)=t^4-t^3+2t^2+3$으로 놓고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}(t^4-t^3+2t^2+3)\,dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_{2}^{x}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=16-8+8+3=19$$

6 $f(t)=t^3-3t^2+t-5$로 놓고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x(t^3-3t^2+t-5)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\Big[F(t)\Big]_1^x$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}\times(1-3+1-5)=-3$$

7 $f(x)=4x^3-2x+1$로 놓고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}(4x^3-2x+1)\,dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}f(x)\,dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_1^{1+h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=F'(1)=f(1)$$
$$=4-2+1=3$$

8 $f(x)=x^4-2x^2+3x+7$로 놓고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{3-h}^{3+h}(x^4-2x^2+3x+7)\,dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{3-h}^{3+h}f(x)\,dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{3-h}^{3+h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(3+h)-F(3-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(3+h)-F(3)+F(3)-F(3-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(3+h)-F(3)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F(3-h)-F(3)}{-h}$$
$$=F'(3)+F'(3)=2F'(3)=2f(3)$$
$$=2\times(81-18+9+7)=158$$

계산력 다지기

p. 58~59

1 (1) $\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)\,dx\right\}=xf(x)$이므로

$xf(x)=2x^2-5x \qquad \therefore f(x)=2x-5$

(2) $\frac{d}{dx}\left\{\int 3xf(x)\,dx\right\}=3xf(x)$이므로

$3xf(x)=3x^2+6x \qquad \therefore f(x)=x+2$

(3) $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3+3x+2)\right\}dx$

$=x^3+3x+2+C$

$\therefore f(x)=F'(x)=3x^2+3$

(4) $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^3-5x^2+7)\right\}dx$

$=2x^3-5x^2+7+C$

$\therefore f(x)=F'(x)=6x^2-10x$

2 (1) $\int(-x^2+5x-4)\,dx=-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x+C$

(2) $\int(2x^3+3x^2-4x+1)\,dx=\frac{1}{2}x^4+x^3-2x^2+x+C$

(3) $\int(3x+2)(x-3)\,dx=\int(3x^2-7x-6)\,dx$

$=x^3-\frac{7}{2}x^2-6x+C$

(4) $\int(2x^2-1)(4x+1)\,dx=\int(8x^3+2x^2-4x-1)\,dx$

$=2x^4+\frac{2}{3}x^3-2x^2-x+C$

3 (1) $\int(x+2)^2\,dx+\int(x-2)^2\,dx$

$=\int(x^2+4x+4)\,dx+\int(x^2-4x+4)\,dx$

$=\int(2x^2+8)\,dx=\frac{2}{3}x^3+8x+C$

(2) $\int\frac{x^4}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx$

$=\int\frac{x^4-1}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}dx$

$=\int(x^2-1)\,dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$

(3) $\int\frac{x^2}{x+2}dx+\int\frac{x-2}{x+2}dx$

$=\int\frac{x^2+x-2}{x+2}dx=\int\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}dx$

$=\int(x-1)\,dx=\frac{1}{2}x^2-x+C$

(4) $\int\frac{x^3}{x^2+2x+4}dx-\int\frac{8}{x^2+2x+4}dx$

$=\int\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}dx=\int\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}dx$

$=\int(x-2)\,dx=\frac{1}{2}x^2-2x+C$

4 (1) $\int_{-2}^{1}(6x+5)\,dx=\Big[3x^2+5x\Big]_{-2}^{1}=8-2=6$

(2) $\int_1^2(3x^2-2x+1)\,dx=\Big[x^3-x^2+x\Big]_1^2=6-1=5$

(3) $\int_3^2(9x^2+4x-2)\,dx=\Big[3x^3+2x^2-2x\Big]_3^2$

$=28-93=-65$

(4) $\int_3^{-1}(6x^2-8x+3)\,dx=\Big[2x^3-4x^2+3x\Big]_3^{-1}$

$=-9-27=-36$

5 (1) $\int_1^4(x+4)^2\,dx-\int_1^4(6k+9)\,dk$

$=\int_1^4(x^2+8x+16)\,dx-\int_1^4(6x+9)\,dx$

$=\int_1^4(x^2+2x+7)\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3+x^2+7x\Big]_1^4$

$=\frac{196}{3}-\frac{25}{3}=57$

(2) $\int_{-2}^{3}(3t-2)^2\,dt+\int_{-2}^{3}(12x-8)\,dx$
$=\int_{-2}^{3}(3x-2)^2\,dx+\int_{-2}^{3}(12x-8)\,dx$
$=\int_{-2}^{3}(9x^2-12x+4)\,dx+\int_{-2}^{3}(12x-8)\,dx$
$=\int_{-2}^{3}(9x^2-4)\,dx=\Big[3x^3-4x\Big]_{-2}^{3}$
$=69-(-16)=85$

(3) $\int_{-1}^{2}\frac{x^3}{x^2+x+1}dx+\int_{2}^{-1}\frac{1}{x^2+x+1}dx$
$=\int_{-1}^{2}\frac{x^3}{x^2+x+1}dx-\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^2+x+1}dx$
$=\int_{-1}^{2}\frac{x^3-1}{x^2+x+1}dx=\int_{-1}^{2}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}dx$
$=\int_{-1}^{2}(x-1)\,dx=\Big[\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{-1}^{2}=0-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$

(4) $\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{x+3}dx-\int_{1}^{-1}\frac{27}{x+3}dx$
$=\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{x+3}dx+\int_{-1}^{1}\frac{27}{x+3}dx$
$=\int_{-1}^{1}\frac{x^3+27}{x+3}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3}dx$
$=\int_{-1}^{1}(x^2-3x+9)\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x\Big]_{-1}^{1}$
$=\frac{47}{6}-\left(-\frac{65}{6}\right)=\frac{56}{3}$

6 (1) $\int_{-1}^{2}(3t^2-5)\,dt+\int_{2}^{3}(3x^2-5)\,dx$
$=\int_{-1}^{2}(3x^2-5)\,dx+\int_{2}^{3}(3x^2-5)\,dx$
$=\int_{-1}^{3}(3x^2-5)\,dx=\Big[x^3-5x\Big]_{-1}^{3}=12-4=8$

(2) $\int_{2}^{3}(4x^3+3x^2-2x)\,dx+\int_{3}^{5}(4s^3+3s^2-2s)\,ds$
$=\int_{2}^{3}(4x^3+3x^2-2x)\,dx+\int_{3}^{5}(4x^3+3x^2-2x)\,dx$
$=\int_{2}^{5}(4x^3+3x^2-2x)\,dx=\Big[x^4+x^3-x^2\Big]_{2}^{5}$
$=725-20=705$

(3) (주어진 식)
$=\int_{-2}^{-1}(6x^2-2x)\,dx+\int_{-1}^{0}(6x^2-2x)\,dx$
$+\int_{0}^{1}(6x^2-2x)\,dx$
$=\int_{-2}^{0}(6x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(6x^2-2x)\,dx$
$=\int_{-2}^{1}(6x^2-2x)\,dx=\Big[2x^3-x^2\Big]_{-2}^{1}$
$=1-(-20)=21$

(4) (주어진 식)$=\int_{-3}^{1}(5x^4+1)\,dx+\int_{1}^{2}(5x^4+1)\,dx$
$=\int_{-3}^{2}(5x^4+1)\,dx=\Big[x^5+x\Big]_{-3}^{2}$
$=34-(-246)=280$

7 (1) $f(t)=t^2-2t+3$으로 놓고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면
$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}(t^2-2t+3)\,dt$
$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}f(t)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_{1}^{x}$
$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$
$=F'(1)=f(1)$
$=1-2+3=2$

(2) $f(t)=t^3+t^2-3t+1$로 놓고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면
$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_{3}^{x}(t^3+t^2-3t+1)\,dt$
$=\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_{3}^{x}f(t)\,dt=\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\Big[F(t)\Big]_{3}^{x}$
$=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$
$=F'(3)=f(3)$
$=27+9-9+1=28$

(3) $f(t)=2t^3-t^2+2t+4$로 놓고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면
$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_{2}^{x}(2t^3-t^2+2t+4)\,dt$
$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_{2}^{x}f(t)\,dt=\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\Big[F(t)\Big]_{2}^{x}$
$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}$
$=F'(2)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}f(2)=\frac{1}{4}\times(16-4+4+4)$
$=5$

(4) $f(t)=t^4-3t^2+5t-7$로 놓고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면
$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_{1}^{x}(t^4-3t^2+5t-7)\,dt$
$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_{1}^{x}f(t)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\Big[F(t)\Big]_{1}^{x}$
$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}$
$=F'(1)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}f(1)$
$=\frac{1}{3}\times(1-3+5-7)=-\frac{4}{3}$

8 (1) $f(x)=2x^2+x-4$로 놓고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면
$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2}^{2+h}(2x^2+x-4)\,dx$
$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2}^{2+h}f(x)\,dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{2}^{2+h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}$
$=F'(2)=f(2)$
$=8+2-4=6$

(2) $f(x)=-x^3+2x^2-5x+3$으로 놓고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_3^{3-h}(-x^3+2x^2-5x+3)\,dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_3^{3-h}f(x)\,dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_3^{3-h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(3-h)-F(3)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{F(3-h)-F(3)}{-h}$$
$$=-F'(3)=-f(3)=-(-27+18-15+3)=21$$

(3) $f(x)=3x^3-4x^2+x-6$으로 놓고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{4+h}^{4}(3x^3-4x^2+x-6)\,dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{4+h}^{4}f(x)\,dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{4+h}^{4}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(4)-F(4+h)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{F(4+h)-F(4)}{h}$$
$$=-F'(4)=-f(4)=-(192-64+4-6)=-126$$

(4) $f(x)=x^4-2x^3+6x-1$로 놓고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1+h}^{1-h}(x^4-2x^3+6x-1)\,dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1+h}^{1-h}f(x)\,dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{1+h}^{1-h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1-h)-F(1+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1-h)-F(1)+F(1)-F(1+h)}{h}$$
$$=-\lim_{h\to0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}-\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$
$$=-F'(1)-F'(1)=-2F'(1)=-2f(1)$$
$$=-2\times(1-2+6-1)=-8$$

12~14강 족집게 기출문제

p. 60~63

1 ①	2 ③	3 ⑤	4 ③	
5 $\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x+C$			6 ⑤	7 $\frac{23}{6}$
8 8	9 ③	10 $k<0$	11 ①	12 ②
13 $\frac{100}{101}$	14 $\frac{32}{9}$	15 ①	16 $\frac{1}{3}$	17 ②
18 ②	19 4	20 2	21 6	22 50
23 ④	24 8	25 -4	26 -5	
27 (1) $f'(x)=12x^2-4$ (2) 1				

1 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$(x-2)f(x)=-4x^3+6x^2+4x$$
$$=-2x(2x+1)(x-2)$$

따라서 $f(x)=-2x(2x+1)$이므로

$f(-2)=4\times(-3)=-12$

2 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-6x)\right\}dx$

$$=x^2-6x+C$$
$$=(x-3)^2-9+C$$

이때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최소이고 최솟값이 8이므로

$-9+C=8$ $\quad\therefore C=17$

따라서 $f(x)=x^2-6x+17$이므로

$f(1)=1-6+17=12$

3 $f(x)=\int\frac{(x^2+1)^2}{x^2+x+1}dx-\int\frac{x^2}{x^2+x+1}dx$

$$=\int\frac{(x^2+1)^2-x^2}{x^2+x+1}dx$$
$$=\int\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1}dx$$
$$=\int(x^2-x+1)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x$이고 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ a)$를 지나므로

$a=\frac{8}{3}-2+2=\frac{8}{3}$

4 $f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)\,dx$

$$=x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}+C$$

$f(0)=7$에서 $\quad C=7$

따라서 $f(x)=x+x^2+\cdots+x^{10}+7$이므로

$f(1)=10+7=17$

5 $f'(x)=3x^2-10x+5$이므로

$f(x)=\int(3x^2-10x+5)\,dx$

$$=x^3-5x^2+5x+C_1$$

$f(0)=6$에서 $\quad C_1=6$

따라서 $f(x)=x^3-5x^2+5x+6$이므로

$\int(x^3-5x^2+5x+6)\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x+C$

6 $f'(x)=3x^2-6x+4$이므로

$f(x)=\int(3x^2-6x+4)\,dx$

$$=x^3-3x^2+4x+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$C=-2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+4x-2$이므로

$f(3)=27-27+12-2=10$

7 (i) $x\geq1$일 때

$$f(x)=\int 2x\,dx=x^2+C_1$$

(ii) $x<1$일 때

$$f(x)=\int (x^2+x)\,dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_2$$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=\begin{cases} x^2+C_1 & (x\geq1) \\ \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_2 & (x<1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$1+C_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+C_2$, $C_1-C_2=-\frac{1}{6}$

$\therefore f(2)-f(0)=4+C_1-C_2=4-\frac{1}{6}=\frac{23}{6}$

8 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1$에서

$f(x)+g(x)=x^2+x+C_1$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1 \qquad \therefore C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+x$

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-2x+1$에서

$f(x)g(x)=x^3-x^2+x+C_2$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C_2 \qquad \therefore C_2=-1$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$

이때 $f(0)=1$, $g(0)=-1$, $f(x)+g(x)=x^2+x$를 만족해야 하므로

$f(x)=x^2+1$, $g(x)=x-1$

$\therefore f(3)-g(3)=10-2=8$

9 $f'(x)=ax(x-2)$ $(a>0)$라고 하면

$$f(x)=\int ax(x-2)\,dx=\int (ax^2-2ax)\,dx$$

$$=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값이 4, $x=2$에서 극솟값이 0이므로

$f(0)=4$, $f(2)=0$

$C=4$, $\frac{8}{3}a-4a+C=0 \qquad \therefore C=4,\ a=3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+4$, $f'(x)=3x(x-2)$이므로

$f(1)+f'(3)=2+9=11$

10 $f'(x)=a(x-1)(x-3)$ $(a>0)$이라고 하면

$f'(2)=-2$이므로

$-a=-2 \qquad \therefore a=2$

즉, $f'(x)=2x^2-8x+6$이므로

$$f(x)=\int (2x^2-8x+6)\,dx$$

$$=\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C$$

$f(0)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x$이므로 방정식 $f(x)=kx$는

$\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x=kx$

$\frac{2}{3}x^3-4x^2+(6-k)x=0$

$\frac{x}{3}\{2x^2-12x+3(6-k)\}=0$

이 방정식이 오직 하나의 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2-12x+3(6-k)=0$은 허근을 가져야 한다.

위의 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=36-6(6-k)<0$

$\therefore k<0$

11 $F(x)=\int (-4x+9)\,dx$

$\qquad =-2x^2+9x+C$

모든 실수 x에 대하여 $F(x)<0$이려면 이차방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $-2x^2+9x+C=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=81+8C<0$

$\therefore C<-\frac{81}{8}$

따라서 $F(0)=C$의 값이 될 수 있는 것은 ①이다.

12 $\int_2^1 (4x^3+9x^2+a)\,dx+\int_5^5 (2x^3-3x^2+a)\,dx$

$=\Big[x^4+3x^3+ax\Big]_2^1+0$

$=-36-a=-40$

$\therefore a=4$

13 $\int_0^1 x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx+\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\,dx$

$\qquad +\cdots+\frac{1}{100}\int_0^1 x^{100}\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1+\cdots+\frac{1}{100}\left[\frac{1}{101}x^{101}\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{100\times101}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$

$=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$

14 $k\int_a^c x\,dx-\int_a^b x^2\,dx=k\int_b^c x\,dx$에서

$$k\int_a^c x\,dx-k\int_b^c x\,dx=\int_a^b x^2\,dx$$

$$k\left(\int_a^c x\,dx+\int_c^b x\,dx\right)=\int_a^b x^2\,dx$$

$$k\int_a^b x\,dx=\int_a^b x^2\,dx$$

$$k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$$

$$k\times\frac{1}{2}(b^2-a^2)=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

이때 $a\neq b$이고 $a+b=6$, $ab=4$이므로

$$k=\frac{2}{3}\times\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}=\frac{2}{3}\times\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{(b-a)(b+a)}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{b^2+ab+a^2}{b+a}=\frac{2}{3}\times\frac{(a+b)^2-ab}{a+b}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{6^2-4}{6}=\frac{32}{9}$$

15 $|x-1|+|x-5|=\begin{cases}-2x+6 & (0\leq x\leq 1)\\ 4 & (1\leq x\leq 5)\end{cases}$이므로

$$\int_0^5 (|x-1|+|x-5|)\,dx$$

$$=\int_0^1 (-2x+6)\,dx+\int_1^5 4\,dx$$

$$=\left[-x^2+6x\right]_0^1+\left[4x\right]_1^5$$

$$=5+16=21$$

16 $0\leq x\leq 3$일 때, $f(x)=\begin{cases}-x & (0\leq x\leq 1)\\ x-2 & (1\leq x\leq 3)\end{cases}$이므로

$$\int_0^3 xf(x)\,dx=\int_0^1 x\times(-x)\,dx+\int_1^3 x(x-2)\,dx$$

$$=\int_0^1 (-x^2)\,dx+\int_1^3 (x^2-2x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_1^3$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

17 $\int_0^3 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=3x^2+4x-k$ 이므로

$$\int_0^3 f(t)\,dt=\int_0^3 (3t^2+4t-k)\,dt$$

$$=\left[t^3+2t^2-kt\right]_0^3$$

$$=45-3k=k$$

$\therefore k=\frac{45}{4}$

따라서 $f(x)=3x^2+4x-\frac{45}{4}$이므로

$$f(1)=3+4-\frac{45}{4}=-\frac{17}{4}$$

18 $f(x)=\int_0^x (t^2-2t-3)\,dt$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, $x=3$에서 극소이므로

$$M=f(-1)=\int_0^{-1} (t^2-2t-3)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_0^{-1}=\frac{5}{3}$$

$$m=f(3)=\int_0^3 (t^2-2t-3)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_0^3=-9$$

$\therefore Mm=\frac{5}{3}\times(-9)=-15$

19 주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=8+a+b$ …… ㉠

주어진 식에서

$$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=2x^3+ax^2+6x+b$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=6x^2+2ax+6$$

$$\int_1^x f(t)\,dt=6x^2+2ax+6$$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=12+2a$ $\therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-2$

$\therefore b-a=-2-(-6)=4$

20 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-2x+1$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{f'(1)+f'(1)\}=f'(1)=2$$

21 함수 $f(x)=2x^3-6x^2+x+5$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^3} f(t)\,dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left[F(t)\right]_1^{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x^3-1}\times(x^2+x+1)$$

$$=3F'(1)=3f(1)=3\times 2=6$$

22 $f(x)$가 이차함수이고, $f(x)g(x)$가 사차함수이므로 $g(x)$도 이차함수이다.

$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}\,dx$에서 $x^2+f(x)$는 일차함수이어야 하므로 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 -1이고, $f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 상수항은 0이므로 $f(x)=-x^2+ax\ (a\neq0)$라고 하면

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}\,dx$$
$$=\int\{x^2+(-x^2+ax)\}\,dx$$
$$=\int ax\,dx$$
$$=\frac{a}{2}x^2\ (\because g(x)\text{의 상수항이 }0)$$

$$\therefore f(x)g(x)=(-x^2+ax)\times\frac{a}{2}x^2=-\frac{a}{2}x^4+\frac{a^2}{2}x^3$$
$$=-2x^4+8x^3$$

따라서 $a=4$이고, $g(x)=2x^2$이므로

$g(5)=2\times25=50$

23 $f_2(x)=\int f_1(x)\,dx=\int(x+1)\,dx$

$$=\frac{1}{2}x^2+x+C$$

$f_n(0)=0$에서 $C=0$

$\therefore f_2(x)=\frac{1}{2}x^2+x$

같은 방법으로

$$f_3(x)=\int f_2(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)dx$$
$$=\frac{1}{2\times3}x^3+\frac{1}{2}x^2$$
$$f_4(x)=\int f_3(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{2\times3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)dx$$
$$=\frac{1}{2\times3\times4}x^4+\frac{1}{2\times3}x^3$$
$$\vdots$$
$$f_n(x)=\frac{1}{2\times3\times\cdots\times n}x^n+\frac{1}{2\times3\times\cdots\times(n-1)}x^{n-1}$$

$$\therefore \frac{f_{11}(1)}{f_{10}(1)}=\frac{\frac{1}{2\times3\times\cdots\times11}+\frac{1}{2\times3\times\cdots\times10}}{\frac{1}{2\times3\times\cdots\times10}+\frac{1}{2\times3\times\cdots\times9}}$$
$$=\frac{1+11}{11+10\times11}=\frac{12}{121}$$

24 주어진 식의 양변을 h로 나누면

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,dt$$
$$\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,dt$$

즉, $g'(x)=f(x)$이므로

$$g(x)=\int f(x)\,dx=\int(x-4)\,dx=\frac{1}{2}x^2-4x+C$$

따라서 이차방정식 $g(x)=0$, 즉 $\frac{1}{2}x^2-4x+C=0$의 모든 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 8이다.

25 $F'(x)=f(x)$이므로 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=3x^2-8x$

$\therefore f'(x)=3x-8$ …… (가)

양변을 x에 대하여 적분하면

$$f(x)=\int(3x-8)\,dx=\frac{3}{2}x^2-8x+C$$

$f(1)=-\frac{25}{2}$에서 $C=-6$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^2-8x-6$ …… (나)

따라서 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $\frac{3}{2}x^2-8x-6=0$의 모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{-6}{\frac{3}{2}}=-4$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) $f'(x)$를 구한다.	2점
(나) $f(x)$를 구한다.	2점
(다) $f(x)=0$의 모든 근의 곱을 구한다.	1점

26 $\int_a^{a+5}(3x^2-1)\,dx=\Big[x^3-x\Big]_a^{a+5}$

$$=\{(a+5)^3-(a+5)\}-(a^3-a)$$
$$=15a^2+75a+120 \quad\text{…… (가)}$$

$15a^2+75a+120=30$에서 $a^2+5a+6=0$

$(a+3)(a+2)=0$ $\quad\therefore a=-3$ 또는 $a=-2$ …… (나)

따라서 a의 값이 될 수 있는 모든 수의 합은

$-3+(-2)=-5$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 주어진 식의 좌변을 적분하여 a에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(나) a의 값을 구한다.	2점
(다) a의 값이 될 수 있는 모든 수의 합을 구한다.	1점

27 (1) 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2f(x)+x^3f'(x)=12x^5-4x^3+3x^2f(x)$

$\therefore f'(x)=12x^2-4$ …… (가)

(2) $f'(x)=12x^2-4$이므로 양변을 x에 대하여 적분하면

$$f(x)=\int(12x^2-4)\,dx=4x^3-4x+C$$

한편 주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-1+3\times0=1$ …… (나)

$f(1)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=4x^3-4x+1$이므로 …… (다)

$f(-1)=-4+4+1=1$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) $f'(x)$를 구한다.	2점
(나) $f(1)$의 값을 구한다.	2점
(다) $f(x)$를 구한다.	2점
(라) $f(-1)$의 값을 구한다.	1점

15강 정적분의 활용(1)

확인 문제 p. 64

1 닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 $x^2-6x<0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_2^4 |x^2-6x|\,dx=\int_2^4(-x^2+6x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_2^4=\frac{52}{3}$$

2 (1) $f(x)=x^2$이라고 하면 $f(-x)=f(x)$이므로

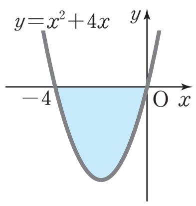
$$\int_{-1}^1 x^2\,dx=2\int_0^1 x^2\,dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

(2) $f(x)=x^3$이라고 하면 $f(-x)=-f(x)$이므로

$$\int_{-2}^2 x^3\,dx=0$$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 65

1 (1) 곡선 $y=x^2+4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+4x=0$에서



$x(x+4)=0$

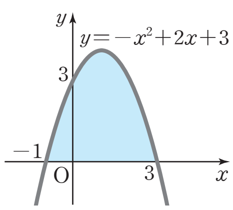
$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=0$

이때 닫힌구간 $[-4,\ 0]$에서 $x^2+4x\le0$

이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-4}^0 |x^2+4x|\,dx=\int_{-4}^0(-x^2-4x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-4}^0=\frac{32}{3}$$

(2) 곡선 $y=-x^2+2x+3$과 x축의 교점의 x좌표는



$-x^2+2x+3=0$에서

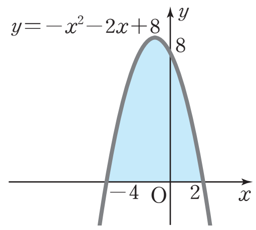
$-(x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

이때 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 $-x^2+2x+3\ge0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^3 |-x^2+2x+3|\,dx=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^3$$
$$=\frac{32}{3}$$

2 (1) 곡선 $y=-x^2-2x+8$과 x축의 교점의 x좌표는



$-x^2-2x+8=0$에서

$-(x+4)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=2$

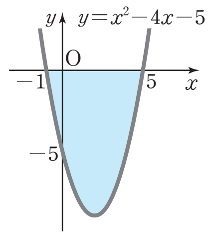
이때 닫힌구간 $[-4,\ 2]$에서

$-x^2-2x+8\ge0$

이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-4}^2 |-x^2-2x+8|\,dx=\int_{-4}^2(-x^2-2x+8)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+8x\right]_{-4}^2=36$$

(2) 곡선 $y=x^2-4x-5$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^2-4x-5=0$에서

$(x+1)(x-5)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=5$

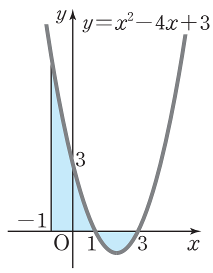
이때 닫힌구간 $[-1,\ 5]$에서

$x^2-4x-5\le0$

이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^5 |x^2-4x-5|\,dx=\int_{-1}^5(-x^2+4x+5)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^5=36$$

3 (1) 곡선 $y=x^2-4x+3$과 x축의 교점의 x좌표는



$x^2-4x+3=0$에서

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

이때 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $x^2-4x+3\ge0$이고, 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 $x^2-4x+3\le0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^3 |x^2-4x+3|\,dx$$
$$=\int_{-1}^1(x^2-4x+3)\,dx+\int_1^3(-x^2+4x-3)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_{-1}^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3$$
$$=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}=8$$

(2) 곡선

$y=x^3-6x^2-4x+24$와

x축의 교점의 x좌표는

$x^3-6x^2-4x+24=0$

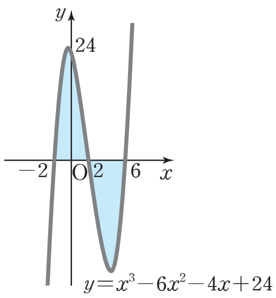
에서

$(x+2)(x-2)(x-6)$

$=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

또는 $x=6$



이때 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서

$x^3-6x^2-4x+24\ge0$이고, 닫힌구간 $[2,\ 6]$에서

$x^3-6x^2-4x+24\le0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-2}^{6}|x^3-6x^2-4x+24|\,dx$

$=\int_{-2}^{2}(x^3-6x^2-4x+24)\,dx$

$+\int_{2}^{6}(-x^3+6x^2+4x-24)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3-2x^2+24x\right]_{-2}^{2}$

$+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3+2x^2-24x\right]_{2}^{6}$

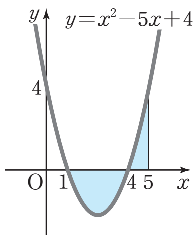
$=64+64=128$

4 (1) 곡선 $y=x^2-5x+4$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-5x+4=0$

에서

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$



이때 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서

$x^2-5x+4\le0$이고, 닫힌구간

$[4,\ 5]$에서 $x^2-5x+4\ge0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\int_{1}^{5}|x^2-5x+4|\,dx$

$=\int_{1}^{4}(-x^2+5x-4)\,dx+\int_{4}^{5}(x^2-5x+4)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_{1}^{4}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_{4}^{5}$

$=\frac{9}{2}+\frac{11}{6}=\frac{19}{3}$

(2) 곡선

$y=-x^3+2x^2+5x-6$

과 x축의 교점의 x좌

표는

$-x^3+2x^2+5x-6=0$

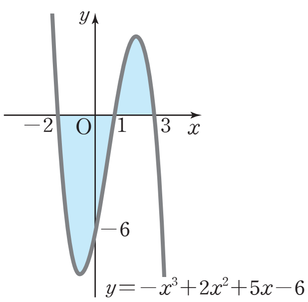
에서

$(x+2)(x-1)(x-3)$

$=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

또는 $x=3$



이때 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 $-x^3+2x^2+5x-6\le0$이고,

닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 $-x^3+2x^2+5x-6\ge0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-2}^{3}|-x^3+2x^2+5x-6|\,dx$

$=\int_{-2}^{1}(x^3-2x^2-5x+6)\,dx$

$+\int_{1}^{3}(-x^3+2x^2+5x-6)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{1}$

$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_{1}^{3}$

$=\frac{63}{4}+\frac{16}{3}$

$=\frac{253}{12}$

5 (1) $\int_{-1}^{1}(x^4+x^3+x^2+x+1)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^4+x^2+1)\,dx+\int_{-1}^{1}(x^3+x)\,dx$

$=2\int_{0}^{1}(x^4+x^2+1)\,dx+0$

$=2\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$

$=\frac{46}{15}$

(2) $\int_{-2}^{0}(x^5-5x^4+4x-2)\,dx$

$-\int_{2}^{0}(x^5-5x^4+4x-2)\,dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^5-5x^4+4x-2)\,dx$

$+\int_{0}^{2}(x^5-5x^4+4x-2)\,dx$

$=\int_{-2}^{2}(x^5-5x^4+4x-2)\,dx$

$=\int_{-2}^{2}(-5x^4-2)\,dx+\int_{-2}^{2}(x^5+4x)\,dx$

$=2\int_{0}^{2}(-5x^4-2)\,dx+0$

$=2\left[-x^5-2x\right]_{0}^{2}=-72$

6 (1) $\int_{-1}^{1}x^2(x+1)^3\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^5+3x^4+3x^3+x^2)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(3x^4+x^2)\,dx+\int_{-1}^{1}(x^5+3x^3)\,dx$

$=2\int_{0}^{1}(3x^4+x^2)\,dx+0$

$=2\left[\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}$

$=\frac{28}{15}$

(2) $\int_{-3}^{2}(10x^4+11x^3-6x^2+3)\,dx$

$-\int_{3}^{2}(10t^4+11t^3-6t^2+3)\,dt$

$=\int_{-3}^{2}(10x^4+11x^3-6x^2+3)\,dx$

$+\int_{2}^{3}(10x^4+11x^3-6x^2+3)\,dx$

$=\int_{-3}^{3}(10x^4+11x^3-6x^2+3)\,dx$

$=\int_{-3}^{3}(10x^4-6x^2+3)\,dx+\int_{-3}^{3}11x^3\,dx$

$=2\int_{0}^{3}(10x^4-6x^2+3)\,dx+0$

$=2\Big[2x^5-2x^3+3x\Big]_0^3=882$

16강 정적분의 활용(2)

확인 문제 p. 66

1 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $-x^2+4x+1\geq x^2-2x+1$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\int_{0}^{3}\{(-x^2+4x+1)-(x^2-2x+1)\}\,dx$

$=\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)\,dx=\Big[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\Big]_0^3=9$

2 (1) $t=0$에서 $t=c$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_{0}^{a}v(t)\,dt+\int_{a}^{b}v(t)\,dt+\int_{b}^{c}v(t)\,dt$

$=S_1+(-S_2)+S_3=10+(-20)+5=-5$

(2) $t=0$에서 $t=c$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_{0}^{a}|v(t)|\,dt+\int_{a}^{b}|v(t)|\,dt+\int_{b}^{c}|v(t)|\,dt$

$=S_1+S_2+S_3=10+20+5=35$

교/과/서/속 핵심+유형 닮은꼴 문제 p. 67

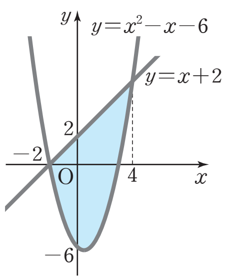
1 (1) 곡선 $y=x^2-x-6$과 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는

$x^2-x-6=x+2$에서

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=4$

이때 닫힌구간 $[-2,\ 4]$에서 $x+2\geq x^2-x-6$이므로 구하는 도형의 넓이는



$\int_{-2}^{4}\{(x+2)-(x^2-x-6)\}\,dx$

$=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)\,dx$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\Big]_{-2}^{4}$

$=36$

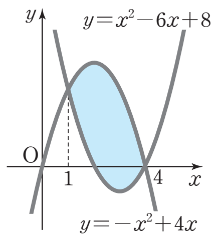
(2) 두 곡선 $y=x^2-6x+8$, $y=-x^2+4x$의 교점의 x좌표는

$x^2-6x+8=-x^2+4x$에서

$2(x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$

이때 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 $-x^2+4x\geq x^2-6x+8$이므로 구하는 도형의 넓이는



$\int_{1}^{4}\{(-x^2+4x)-(x^2-6x+8)\}\,dx$

$=\int_{1}^{4}(-2x^2+10x-8)\,dx$

$=\Big[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\Big]_1^4=9$

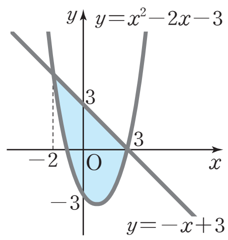
2 (1) 곡선 $y=x^2-2x-3$과 직선 $y=-x+3$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x-3=-x+3$에서

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=3$

이때 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 $-x+3\geq x^2-2x-3$이므로 구하는 도형의 넓이는



$\int_{-2}^{3}\{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}\,dx$

$=\int_{-2}^{3}(-x^2+x+6)\,dx$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\Big]_{-2}^{3}=\frac{125}{6}$

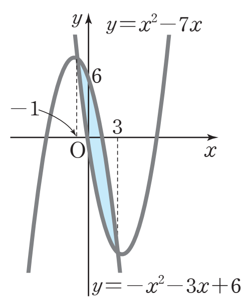
(2) 두 곡선 $y=x^2-7x$, $y=-x^2-3x+6$의 교점의 x좌표는

$x^2-7x=-x^2-3x+6$에서

$2(x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

이때 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 $-x^2-3x+6\geq x^2-7x$이므로 구하는 도형의 넓이는



$\int_{-1}^{3}\{(-x^2-3x+6)-(x^2-7x)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)\,dx$

$=\Big[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\Big]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$

3 $f(x)=x^3-6x^2+10x$라고 하면

$f'(x)=3x^2-12x+10$

점 $(1, 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$

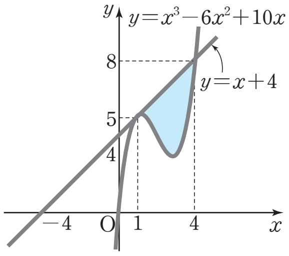
점 $(1, 5)$에서의 접선의 방정식은

$y-5=x-1$ $\quad\therefore y=x+4$

곡선 $y=x^3-6x^2+10x$와 직선 $y=x+4$의 교점의 x좌표는

$x^3-6x^2+10x=x+4$, $x^3-6x^2+9x-4=0$

$(x-1)^2(x-4)=0$ $\quad\therefore x=1$ (중근) 또는 $x=4$



닫힌구간 $[1, 4]$에서 $x+4\ge x^3-6x^2+10x$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^4 \{(x+4)-(x^3-6x^2+10x)\}dx$$

$$=\int_1^4 (-x^3+6x^2-9x+4)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-\frac{9}{2}x^2+4x\right]_1^4$$

$$=\frac{27}{4}$$

4 $f(x)=x^3+2x^2+x+2$라고 하면

$f'(x)=3x^2+4x+1$

점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1$

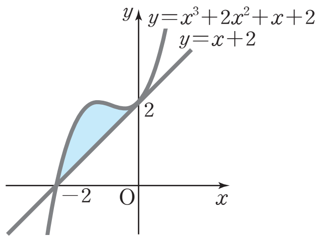
점 $(0, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=x$ $\quad\therefore y=x+2$

곡선 $y=x^3+2x^2+x+2$와 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x^2+x+2=x+2$에서 $x^3+2x^2=0$

$x^2(x+2)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ (중근)



닫힌구간 $[-2, 0]$에서 $x^3+2x^2+x+2\ge x+2$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^0 \{(x^3+2x^2+x+2)-(x+2)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^0 (x^3+2x^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^0$$

$$=\frac{4}{3}$$

5 (1) $5+\int_0^3 (t^2-6t+8)\,dt=5+\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^3$

$=5+6$

$=11$

(2) $\int_1^3 (t^2-6t+8)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_1^3=\frac{2}{3}$

(3) $1\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$이고, $2\le t\le 3$에서 $v(t)\le 0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^3 |t^2-6t+8|\,dt$$

$$=\int_1^2 (t^2-6t+8)\,dt+\int_2^3 (-t^2+6t-8)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_1^2+\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-8t\right]_2^3$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}$$

$$=2$$

6 (1) $4+\int_0^5 (3t^2-12t)\,dt=4+\left[t^3-6t^2\right]_0^5$

$=4+(-25)$

$=-21$

(2) $\int_2^5 (3t^2-12t)\,dt=\left[t^3-6t^2\right]_2^5=-9$

(3) $2\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$이고, $4\le t\le 5$에서 $v(t)\ge 0$이므로 시각 $t=2$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_2^5 |3t^2-12t|\,dt$$

$$=\int_2^4 (-3t^2+12t)\,dt+\int_4^5 (3t^2-12t)\,dt$$

$$=\left[-t^3+6t^2\right]_2^4+\left[t^3-6t^2\right]_4^5$$

$$=16+7$$

$$=23$$

7 물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=30-10t=0$에서 $t=3$

따라서 $t=3$일 때, 물체가 최고 지점에 도달하게 되므로 구하는 높이는

$$10+\int_0^3 (30-10t)\,dt$$

$$=10+\left[30t-5t^2\right]_0^3=55\,(\mathrm{m})$$

8 a초 후에 물체가 땅에 떨어진다고 하면 그때의 물체의 위치는 0이므로

$$405+\int_0^a (-10t)\,dt=0$$

$$405+\left[-5t^2\right]_0^a=0$$

$405-5a^2=0$, $a^2=81$

$\therefore a=9$ ($\because a>0$)

따라서 물체가 땅에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 9초이다.

15~16강 족집게 기출문제 p. 68~71

1 ⑤	2 ④	3 ③	4 ③	5 ①
6 ⑤	7 $\frac{2}{3}$	8 $-\frac{2}{3}$	9 $\frac{11}{34}$	10 16
11 ①	12 ①	13 ⑤	14 ②	15 ③
16 ⑤	17 510 m	18 12	19 $\frac{3}{2}$	20 ②
21 (1) 36 (2) 108		22 1	23 4초	

1 $\int_{-2}^{2}\{f(x)+g(x)\}\,dx$

$=\int_{-2}^{2}f(x)\,dx+\int_{-2}^{2}g(x)\,dx$

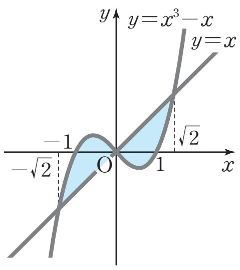
$=2\int_{0}^{2}f(x)\,dx+0$

$=2\times5+0=10$

2 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3-x=x$에서

$x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore\ x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$



이때 닫힌구간 $[-\sqrt{2},\ 0]$에서 $x^3-x\geq x$이고, 닫힌구간 $[0,\ \sqrt{2}]$에서 $x\geq x^3-x$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}|(x^3-x)-x|\,dx$

$=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\{(x^3-x)-x\}\,dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\{x-(x^3-x)\}\,dx$

$=\int_{-\sqrt{2}}^{0}(x^3-2x)\,dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)\,dx$

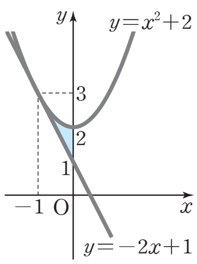
$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{0}^{\sqrt{2}}$

$=1+1=2$

3 $y=x^2+2$에서 $y'=2x$이므로 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=-2(x+1)$

$\therefore\ y=-2x+1$



이때 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서

$x^2+2\geq-2x+1$

이므로 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-1}^{0}\{(x^2+2)-(-2x+1)\}\,dx$

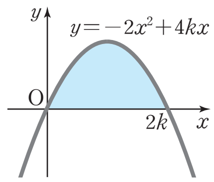
$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$

4 곡선 $y=-2x^2+4kx$와 x축의 교점의 x좌표는 $-2x^2+4kx=0$에서

$-2x(x-2k)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2k$



이때 닫힌구간 $[0,\ 2k]$에서 $-2x^2+4kx\geq0$이고, 곡선 $y=-2x^2+4kx$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 72이므로

$\int_{0}^{2k}(-2x^2+4kx)\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+2kx^2\right]_{0}^{2k}$

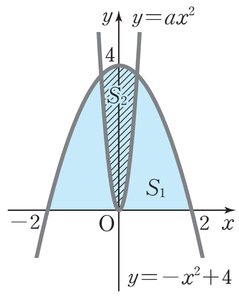
$=\frac{8}{3}k^3=72$

$k^3=27\qquad\therefore\ k=3$

5 곡선 $y=-x^2+4$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+4=0$에서

$-(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$



이때 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 $-x^2+4\geq0$이므로 곡선 $y=-x^2+4$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라고 하면

$S_1=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx$

$=2\int_{0}^{2}(-x^2+4)\,dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{0}^{2}$

$=\frac{32}{3}$

두 곡선 $y=-x^2+4$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는 $-x^2+4=ax^2$에서 $(a+1)x^2=4$

$\therefore\ x=-\frac{2}{\sqrt{a+1}}$ 또는 $x=\frac{2}{\sqrt{a+1}}$

이때 닫힌구간 $\left[-\frac{2}{\sqrt{a+1}},\ \frac{2}{\sqrt{a+1}}\right]$에서 $-x^2+4\geq ax^2$이므로 두 곡선 $y=-x^2+4$, $y=ax^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라고 하면

$S_2=\int_{-\frac{2}{\sqrt{a+1}}}^{\frac{2}{\sqrt{a+1}}}\{(-x^2+4)-ax^2\}\,dx$

$=\int_{-\frac{2}{\sqrt{a+1}}}^{\frac{2}{\sqrt{a+1}}}\{-(a+1)x^2+4\}\,dx$

$=2\int_{0}^{\frac{2}{\sqrt{a+1}}}\{-(a+1)x^2+4\}\,dx$

$=2\left[-\frac{a+1}{3}x^3+4x\right]_{0}^{\frac{2}{\sqrt{a+1}}}$

$=\frac{32}{3\sqrt{a+1}}$

이때 $S_1=4S_2$이므로 $\frac{32}{3}=4\times\frac{32}{3\sqrt{a+1}}$

$\sqrt{a+1}=4\qquad\therefore\ a=15$

6 곡선 $y=x^2(x-a)(x-b)=x^4-(a+b)x^3+abx^2$과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^b \{x^4-(a+b)x^3+abx^2\}\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{a+b}{4}x^4+\frac{ab}{3}x^3\right]_0^b=0$$

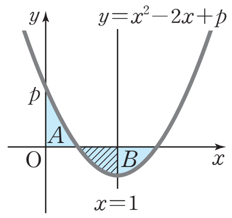
$$\frac{1}{5}b^5-\frac{1}{4}(a+b)\times b^4+\frac{1}{3}ab^4=0$$

이때 $b\neq0$이므로 양변을 b^4으로 나누어 정리하면

$12b-15(a+b)+20a=0$

$5a-3b=0 \qquad \therefore \frac{b}{a}=\frac{5}{3}$

7 $A:B=1:2$에서 $\quad B=2A$



곡선 $y=x^2-2x+p$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}B=A$

따라서 곡선 $y=x^2-2x+p$와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^1 (x^2-2x+p)\,dx=0,\ \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+px\right]_0^1=0$$

$-\frac{2}{3}+p=0 \qquad \therefore p=\frac{2}{3}$

8 $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2+1$이라 하고, 두 곡선의 교점의 x좌표를 $x=k$라고 하자.

닫힌구간 $[0,\ k]$에서 $g(x)\geq f(x)$이고, 닫힌구간 $[k,\ 2]$에서 $f(x)\geq g(x)$이므로

$$\begin{aligned}B-A&=\int_k^2 \{f(x)-g(x)\}\,dx-\int_0^k \{g(x)-f(x)\}\,dx\\&=\int_k^2 \{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_0^k \{f(x)-g(x)\}\,dx\\&=\int_0^2 \{f(x)-g(x)\}\,dx\\&=\int_0^2 (x^3-x^2-1)\,dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^2=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

9 두 곡선의 교점의 x좌표는 $x^n=x^{n+1}$에서

$x^n(x-1)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $x^n\geq x^{n+1}$이므로

$$\begin{aligned}S_n&=\int_0^1 (x^n-x^{n+1})\,dx\\&=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1\\&=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

$\therefore S_2+S_3+S_4+\cdots+S_{100}$

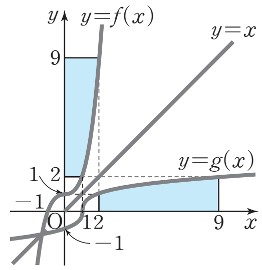
$$\begin{aligned}&=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{102}=\frac{11}{34}\end{aligned}$$

10 $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1=\frac{2}{3}$

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로

$$\begin{aligned}&\int_1^{49} f(x)\,dx\\&=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^5 f(x)\,dx+\int_5^7 f(x)\,dx+\cdots+\int_{47}^{49} f(x)\,dx\\&=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx+\cdots+\int_1^3 f(x)\,dx\\&=24\int_1^3 f(x)\,dx=24\int_{-1}^1 f(x)\,dx=24\times\frac{2}{3}=16\end{aligned}$$

11 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이는 같다.

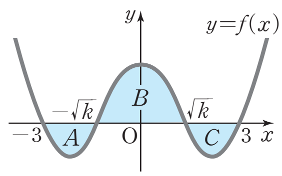


$$\begin{aligned}&\int_2^9 g(x)\,dx\\&=2\times9-1\times2-\int_1^2 f(x)\,dx\\&=16-\int_1^2 (x^3+1)\,dx\\&=16-\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_1^2=16-\frac{19}{4}=\frac{45}{4}\end{aligned}$$

12 $f(x)=(x+3)(x-3)(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})$

이때 $0<k<9$이므로 $\quad 0<\sqrt{k}<3$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로



$A+C=B$에서 $\quad \frac{B}{2}=A=C$

즉, $\int_0^3 f(x)\,dx=0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^2-9)(x^2-k)\,dx&=\int_0^3 \{x^4-(k+9)x^2+9k\}\,dx\\&=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{k+9}{3}x^3+9kx\right]_0^3\\&=-\frac{162}{5}+18k=0\end{aligned}$$

$\therefore k=\frac{9}{5}$

13 점 P가 움직인 거리는 $v(t)$의 그래프와 t축 사이의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned}&\int_0^8 |v(t)|\,dt\\&=\frac{1}{2}\times(1+2)\times3+\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times2\times4+\frac{1}{2}\times2\times2\\&=\frac{23}{2}\end{aligned}$$

14 ㄱ. $v(t)$의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $t=2$, $t=4$일 때 2번 바뀐다.

ㄴ. $v(t)$의 그래프와 t축 사이의 넓이를 이용하여 정적분의 값을 구하면

$$\int_0^2 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\times2\times2=2$$

$$\int_0^4 v(t)\,dt=\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)-\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)=0$$

따라서 점 P는 출발한 지 2초 후에 2의 위치에 있고, 출발한 지 4초 후에 다시 출발점으로 돌아온다.

ㄷ. ㄴ에서 $\int_0^4 v(t)\,dt=0$이므로

$$\int_0^7 v(t)\,dt=\int_4^7 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\times(1+3)\times2=4$$

따라서 점 P는 출발한 지 7초 후에 4의 위치에 있다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

15 정지할 때의 속도는 0이므로 $v(t)=30-3t=0$에서 $t=10$

따라서 열차가 제동을 건 지 10초 후에 정지하므로 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{10}|30-3t|\,dt=\int_0^{10}(30-3t)\,dt$$
$$=\left[30t-\frac{3}{2}t^2\right]_0^{10}=150\,(\text{m})$$

16 물이 수도관을 따라 흘러나온 길이를 l이라고 하면

$$l=\int_0^6(8t-t^2)\,dt=\left[4t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^6=72$$

따라서 흘러나온 물의 양은

(수도관의 단면의 넓이)×(물이 흘러나온 길이)

$=\pi\times2^2\times72=288\pi$

17 엘리베이터가 1층에서 출발하여 맨 위층까지 올라가는 데 걸리는 시간을 a초라 하고, 출발한 지 t초 후의 속도를 $v(t)$라고 하면 가속도는 $v'(t)$이므로

$$v'(t)=\begin{cases}5 & (0\le t\le6)\\ 0 & (6<t\le15)\\ -3 & (15<t\le a)\end{cases}$$

$$\therefore v(t)=\begin{cases}5t+C_1 & (0\le t\le6)\\ C_2 & (6<t\le15)\\ -3t+C_3 & (15<t\le a)\end{cases}$$

이때 $v(0)=0$이고 $v(t)$는 닫힌구간 $[0, a]$에서 연속이므로

$C_1=0$, $30+C_1=C_2$, $C_2=-45+C_3$

위의 식을 연립하여 풀면

$C_1=0$, $C_2=30$, $C_3=75$

$$\therefore v(t)=\begin{cases}5t & (0\le t\le6)\\ 30 & (6\le t\le15)\\ -3t+75 & (15\le t\le a)\end{cases}$$

또 $v(a)=0$이므로

$-3a+75=0$ $\qquad\therefore a=25$

따라서 엘리베이터가 움직인 총 거리는

$$\int_0^{25}|v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^6 5t\,dt+\int_6^{15}30\,dt+\int_{15}^{25}(-3t+75)\,dt$$
$$=\left[\frac{5}{2}t^2\right]_0^6+\left[30t\right]_6^{15}+\left[-\frac{3}{2}t^2+75t\right]_{15}^{25}$$
$$=90+270+150=510\,(\text{m})$$

18 두 점 $\mathrm{P}(a, a^2)$, $\mathrm{Q}(b, b^2)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)$$

$\therefore y=(a+b)x-ab$

이 직선과 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 36이므로

$$\int_a^b\{(a+b)x-ab-x^2\}\,dx$$
$$=\left[\frac{a+b}{2}x^2-abx-\frac{1}{3}x^3\right]_a^b=\frac{(b-a)^3}{6}=36$$

$\therefore b-a=6$ ($\because b>a$)

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}}{a}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{(b-a)^2+(b-a)^2(b+a)^2}}{a}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{6^2+6^2(2a+6)^2}}{a}\ (\because b=a+6)$$
$$=\lim_{a\to\infty}\sqrt{\frac{36}{a^2}+36\left(2+\frac{6}{a}\right)^2}=12$$

19 S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3$

이때 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx=\int_{-1}^2(-x^2+x+2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2=\frac{9}{2}$$

따라서 $S_1+S_2+S_3=\frac{9}{2}$이므로

$S_2+2S_2=\frac{9}{2}$ $\qquad\therefore S_2=\frac{3}{2}$

20 민호가 10초 동안 움직인 거리는

$$\int_0^{10}|f(t)|\,dt=\int_0^3 4t\,dt+\int_3^{10}12\,dt$$
$$=\left[2t^2\right]_0^3+\left[12t\right]_3^{10}=18+84=102\,(\text{m})$$

지수가 10초 동안 움직인 거리는

$$\int_0^{10}|g(t)|\,dt=\int_0^4 2t\,dt+\int_4^{10}8\,dt$$
$$=\left[t^2\right]_0^4+\left[8t\right]_4^{10}=16+48=64\,(\text{m})$$

이때 10초 동안 두 사람이 이동한 거리의 합은 166 m이고, 두 사람이 이동한 거리의 합이 트랙의 둘레의 길이인 50 m의 배수일 때 두 사람은 만난다.

따라서 $166\div50=3.32$이므로 두 사람이 만나는 횟수는 3이다.

21 (1) 곡선 $y=-x^2+6x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+6x=0$에서

$-x(x-6)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=6$

이때 닫힌구간 $[0,\ 6]$에서 $-x^2+6x\geq 0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^6 (-x^2+6x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6$$

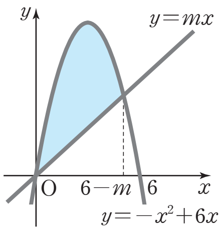
$$=36 \qquad \cdots\cdots \text{(가)}$$

(2) 곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$-x^2+6x=mx$에서

$x(x+m-6)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=6-m$



이때 닫힌구간 $[0,\ 6-m]$에서 $-x^2+6x\geq mx$이므로 곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{6-m} \{(-x^2+6x)-mx\}\,dx$$

$$=\int_0^{6-m} \{-x^2+(6-m)x\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{6-m}{2}x^2\right]_0^{6-m}$$

$$=\frac{(6-m)^3}{6} \qquad \cdots\cdots \text{(나)}$$

이때 곡선 $y=-x^2+6x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $y=mx$에 의하여 이등분되므로

$$\frac{(6-m)^3}{6}=\frac{1}{2}\times 36$$

$$\therefore\ (6-m)^3=108 \qquad \cdots\cdots \text{(다)}$$

채점 기준	배점
(가) 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.	2점
(나) 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 m에 대한 식으로 나타낸다.	3점
(다) $(6-m)^3$의 값을 구한다.	1점

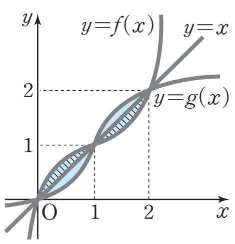
22 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다. $\cdots\cdots$ (가)

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3-3x^2+3x=x$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ $\cdots\cdots$ (나)



이때 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $x^3-3x^2+3x\geq x$이고, 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 $x\geq x^3-3x^2+3x$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$2\left[\int_0^1 \{(x^3-3x^2+3x)-x\}\,dx\right.$$

$$\left.+\int_1^2 \{x-(x^3-3x^2+3x)\}\,dx\right]$$

$$=2\left\{\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx+\int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)\,dx\right\}$$

$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+2\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \qquad \cdots\cdots \text{(다)}$$

채점 기준	배점
(가) 구하는 도형의 넓이가 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 안다.	2점
(나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구한다.	2점
(다) 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.	3점

23 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도는

$f(t)=2t-2$, $g(t)=-t+4$ $\cdots\cdots$ (가)

두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 x_P, x_Q라고 하면

$$x_P=\int (2t-2)\,dt$$

$$=t^2-2t+C_1$$

$$x_Q=\int (-t+4)\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}t^2+4t+C_2$$

$t=0$일 때 $x_P=0$, $x_Q=0$이므로

$C_1=0$, $C_2=0$

$$\therefore\ x_P=t^2-2t,\ x_Q=-\frac{1}{2}t^2+4t \qquad \cdots\cdots \text{(나)}$$

이때 두 점 P, Q가 만나는 시각은 $x_P=x_Q$일 때이므로

$$t^2-2t=-\frac{1}{2}t^2+4t$$

$t(t-4)=0$

$\therefore\ t=4$ $(\because\ t>0)$

따라서 두 점 P, Q가 출발한 후 다시 만나는 시각은 4초 후이다. $\cdots\cdots$ (다)

채점 기준	배점
(가) 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 구한다.	2점
(나) 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 구한다.	2점
(다) 두 점 P, Q가 다시 만나는 시각을 구한다.	2점

내공 점검

01~02강 내공 점검 p. 74~75

1 2	2 ④	3 -2	4 ①	5 ④
6 ⑤	7 $\frac{4}{3}$	8 3	9 ④	10 ①
11 ②	12 3	13 (1) $b=-a$ (2) 32	14 3	

1 $\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to1}(x^2-3x)+\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x-1}$
$=-2+4$
$=2$

2 $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(ax+b)=10$이므로
$2a+b=10$ …… ㉠
$\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하므로
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$
$\lim_{x\to1+}(ax+b)=\lim_{x\to1-}(5x+2)$
$\therefore a+b=7$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=3$, $b=4$
$\therefore ab=12$

3 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to3+$일 때, $t\to3+$이므로
$\lim_{x\to1-}f(x)-\lim_{x\to3+}f(f(x))=\lim_{x\to1-}f(x)-\lim_{t\to3+}f(t)$
$=1-3$
$=-2$

4 $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때, $t\to0$이므로
$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=a$
즉, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a$이므로
$\lim_{x\to0}\frac{3x+f(x)}{2x+f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{3+\frac{f(x)}{x}}{2+\frac{f(x)}{x}}=\frac{3+a}{2+a}=4$
$3+a=8+4a$
$-3a=5$
$\therefore a=-\frac{5}{3}$

5 ④ $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=\infty$

6 ㄱ. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{x}{x^2+x+1}$
$=\frac{1}{3}$

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{x^2+1}=-1$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x+1})$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x+1})(\sqrt{2x+4}+\sqrt{2x+1})}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{2x+1}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{2x+1}}=0$
따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

7 $\lim_{x\to2}\frac{xf(x)-3x}{x^3-x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{x\{f(x)-3\}}{x(x+1)(x-2)}$
$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{(x+1)(x-2)}$
$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+1}$
$=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

8 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로
$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-ax}+2x)$
$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2+at}-2t)$
$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{4t^2+at}-2t)(\sqrt{4t^2+at}+2t)}{\sqrt{4t^2+at}+2t}$
$=\lim_{t\to\infty}\frac{at}{\sqrt{4t^2+at}+2t}$
$=\frac{a}{4}=\frac{1}{2}$
$\therefore a=2$
$\therefore \lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-2^3}{x^2-2^2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$
$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=3$

9 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+x+2}=1$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.
$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=-4$에서 $\lim_{x\to-1}(x^2-x-2)=0$이므로
$\lim_{x\to-1}f(x)=0$
$\therefore f(-1)=0$
$f(x)=2(x+1)(x+a)$ (a는 상수)라고 하면
$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x+1)(x+a)}{(x+1)(x-2)}$
$=\lim_{x\to-1}\frac{2(x+a)}{x-2}$
$=\frac{2(-1+a)}{-3}=-4$
$\therefore a=7$
따라서 $f(x)=2(x+1)(x+7)$이므로
$f(1)=32$

10 ㄱ. $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{g(x)-f(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)라고 하면

$\lim_{x\to a} g(x)$

$=\lim_{x\to a}\{g(x)-f(x)+f(x)\}$

$=\lim_{x\to a}\{g(x)-f(x)\}+\lim_{x\to a} f(x)$

$=\beta+\alpha$

ㄴ. [반례] $f(x)=g(x)=\begin{cases} 1 & (x\ge 0) \\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면

$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=1$이지만 $\lim_{x\to 0} f(x)$와 $\lim_{x\to 0} g(x)$의 값은 모두 존재하지 않는다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

11 $x>1$일 때, $x-1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{x^2+2x-3}{x-1}<\frac{f(x)}{x-1}<\frac{2x^2-2}{x-1}$$

$\lim_{x\to 1+}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\dfrac{(x+3)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}(x+3)=4$

$\lim_{x\to 1+}\dfrac{2x^2-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}2(x+1)=4$

$\therefore \lim_{x\to 1+}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$

12 $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x-a)=2-a<2$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(f(x))=(2-a)^2-1=a^2-4a+3$ …… (가)

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(x^2-1)=3>2$이므로

$\lim_{x\to 2-} f(f(x))=3-a$ …… (나)

$\lim_{x\to 2} f(f(x))$의 값이 존재하기 위해서는

$\lim_{x\to 2+} f(f(x))=\lim_{x\to 2-} f(f(x))$이어야 하므로

$a^2-4a+3=3-a$

$a^2-3a=0$, $a(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$) …… (다)

채점 기준	배점
(가) $\lim_{x\to 2+} f(f(x))$의 값을 a를 사용하여 나타낸다.	3점
(나) $\lim_{x\to 2-} f(f(x))$의 값을 a를 사용하여 나타낸다.	3점
(다) 양수 a의 값을 구한다.	4점

13 (1) $\lim_{x\to 3}\dfrac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}=2$에서 $\lim_{x\to 3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to 3}(a\sqrt{x-2}+b)=a+b=0$

$\therefore b=-a$ …… (가)

(2) $\lim_{x\to 3}\dfrac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{a\sqrt{x-2}-a}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{a(\sqrt{x-2}-1)}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{a(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{a}{\sqrt{x-2}+1}=\dfrac{a}{2}=2$

$\therefore a=4$, $b=-4$ …… (나)

$\therefore a^2+b^2=32$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) b를 a에 대한 식으로 나타낸다.	5점
(나) a, b의 값을 구한다.	6점
(다) a^2+b^2의 값을 구한다.	1점

14 $2f(x)-3g(x)=h(x)$ …… ㉠

라고 하면 $\lim_{x\to\infty} h(x)=2$이고, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{f(x)}=0$ …… (가)

㉠에서 $3g(x)=2f(x)-h(x)$이므로

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{8f(x)-3g(x)}{3g(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{6f(x)+h(x)}{2f(x)-h(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{6+\dfrac{h(x)}{f(x)}}{2-\dfrac{h(x)}{f(x)}}$

$=3$ …… (나)

채점 기준	배점
(가) $2f(x)-3g(x)=h(x)$로 놓고 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{f(x)}$의 값을 구한다.	5점
(나) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{8f(x)-3g(x)}{3g(x)}$의 값을 구한다.	7점

03~04강 내공 점검 p. 76~77

1 ②	2 ㄱ, ㄷ	3 ⑤	4 ③	5 ⑤
6 ④	7 ①	8 ④	9 ④	10 -6
11 157	12 3개			

1 ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x^2+1)=1$

이때 $\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}(|x|+3)=\lim_{x\to0+}(x+3)=3$

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}(|x|+3)=\lim_{x\to0-}(-x+3)=3$

$\therefore \lim_{x\to0}g(x)=3$

이때 $\lim_{x\to0}g(x)=g(0)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$

$\lim_{x\to0-}h(x)=\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$

따라서 $\lim_{x\to0}h(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄴ이다.

2 ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)=1,\ \lim_{x\to0-}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to1+}f(x)=1,\ \lim_{x\to1-}f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. (i) $\lim_{x\to-1+}f(x)=0,\ \lim_{x\to-1-}f(x)=3$

즉, $\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $f(0)=1,\ \lim_{x\to0}f(x)=1$에서 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ과 (i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 $x=-1,\ x=1$의 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이어야 하므로

$\lim_{x\to2}\sqrt{x^2+3a}=\sqrt{4+3a}=a$

$4+3a=a^2,\ a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0 \qquad \therefore a=4\ (\because a>0)$

4 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}([x]^2+3[x]-7)$
$=a^2+3a-7$

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}([x]^2+3[x]-7)$
$=(a-1)^2+3(a-1)-7$

따라서 $a^2+3a-7=(a-1)^2+3(a-1)-7$이므로

$2a+2=0 \qquad \therefore a=-1$

5 $f(x)=1-\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x-\dfrac{2}{x}}}=1-\dfrac{1}{x-\dfrac{x}{x^2-2}}$

$=1-\dfrac{x^2-2}{x^3-3x}$

따라서 $x=0,\ x^2-2=0,\ x^3-3x=0$일 때, 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 불연속이 되는 x의 값은 $-\sqrt{3},\ -\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}$의 5개이다.

6 (i) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 함수 $f(f(x))$는 $f(x)=0$을 만족하는 $x=-2$와 $x=2$에서 불연속이다.

한편 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to-2+$, $x\to0-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to0+}f(f(x))=\lim_{t\to-2+}f(t)=0$

$\lim_{x\to0-}f(f(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=-2$

즉, $\lim_{x\to0}f(f(x))$가 존재하지 않으므로 함수 $f(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(f(x))$가 불연속인 점은 3개이므로

$a=3$

(ii) 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이므로 함수 $g(f(x))$는 $f(x)=-1$을 만족하는 x의 값에서 불연속이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(x)=-1$을 만족하는 x의 값은 2개이다.

한편 (i)에서와 같이 $f(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to-2+}g(t)=-1$

$\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=2$

즉, $\lim_{x\to0}g(f(x))$가 존재하지 않으므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 함수 $g(f(x))$가 불연속인 점은 3개이므로

$b=3$

(i), (ii)에 의하여 $\quad a+b=6$

7 $x\neq1$일 때, $\quad f(x)=\dfrac{2x^2+2x+a}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1}\dfrac{2x^2+2x+a}{x-1}=f(1) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(2x^2+2x+a)=4+a=0$

$\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to1}\dfrac{2x^2+2x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{2(x+2)(x-1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}2(x+2)$
$=6=f(1)$

$\therefore a+f(1)=-4+6=2$

8 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 연속함수이려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 0$이어야 한다.
즉, 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=a^2-8<0$ $\quad\therefore -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$
따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

9 $f(x)=x^3-2x^2-x+a$라고 하면
$f(2)=a-2$, $f(3)=a+6$
방정식 $x^3-2x^2-x+a=0$이 열린구간 $(2, 3)$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 사잇값의 정리에 의하여
$f(2)f(3)<0$이어야 한다.
즉, $(a-2)(a+6)<0$이어야 하므로
$-6<a<2$
따라서 $\alpha=-6$, $\beta=2$이므로
$\beta-\alpha=8$

10 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$
$\therefore \lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+ax-3}{x+1}=b$ ...... ㉠
$\lim_{x\to -1}(x+1)=0$이므로
$\lim_{x\to -1}(x^2+ax-3)=0$
$1-a-3=0$
$\therefore a=-2$ ...... (가)
이를 ㉠에 대입하면
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-3)=-4$$
$\therefore b=-4$ ...... (나)
$\therefore a+b=-2-4=-6$ ...... (다)

채점 기준	배점
(가) a의 값을 구한다.	4점
(나) b의 값을 구한다.	4점
(다) $a+b$의 값을 구한다.	1점

11 $x\neq -4$, $x\neq 3$일 때,
$$f(x)=\frac{x^3+ax^2+b}{x^2+x-12}=\frac{x^3+ax^2+b}{(x+4)(x-3)}$$
함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-4$, $x=3$에서도 연속이다.
(i) $\lim_{x\to -4} f(x)=f(-4)$에서
$\lim_{x\to -4}\dfrac{x^3+ax^2+b}{(x+4)(x-3)}=f(-4)$
$\lim_{x\to -4}(x+4)(x-3)=0$이므로
$\lim_{x\to -4}(x^3+ax^2+b)=0$
$\therefore -64+16a+b=0$ ...... ㉠

(ii) $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$에서
$\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3+ax^2+b}{(x+4)(x-3)}=f(3)$
$\lim_{x\to 3}(x+4)(x-3)=0$이므로
$\lim_{x\to 3}(x^3+ax^2+b)=0$
$\therefore 27+9a+b=0$ ...... ㉡ ...... (가)
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=13$, $b=-144$ ...... (나)
$\therefore a-b=157$ ...... (다)

채점 기준	배점
(가) a, b에 대한 관계식을 세운다.	6점
(나) a, b의 값을 구한다.	2점
(다) $a-b$의 값을 구한다.	1점

12 $g(x)=xf(x)-2x^2+1$이라고 하면 $f(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이고
$g(-1)=-f(-1)-1=-(-1)-1=0$
$g(0)=1>0$
$g(1)=f(1)-1=-4-1=-5<0$
$g(2)=2f(2)-7=2\times 5-7=3>0$ ...... (가)
이때 $g(0)g(1)<0$, $g(1)g(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
또 $g(-1)=0$이므로 실근 $x=-1$을 갖는다.
따라서 방정식 $xf(x)=2x^2-1$은 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다. ...... (나)

채점 기준	배점
(가) $g(x)=xf(x)-2x^2+1$로 놓고 $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$의 부호를 구한다.	4점
(나) 사잇값의 정리를 이용하여 주어진 방정식이 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구한다.	6점

05~06강 내공 점검
p. 78~79

1 ②	**2** ⑤	**3** ④	**4** 5	**5** ②
6 ③	**7** ①	**8** 5	**9** 10	**10** ⑤
11 13	**12** (1) -1 (2) $f'(x)=4-2x$			**13** -18

1 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은
$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{4a+2}{2}=2a+1$$
$f'(x)=3x^2+2ax-3$이므로 $x=-1$에서의 미분계수는
$f'(-1)=-2a$
따라서 $2a+1=-2a$이므로
$a=-\dfrac{1}{4}$

2 $\lim_{h\to0}\frac{f(3)-f(3-2h)}{h}=2\lim_{h\to0}\frac{f(3-2h)-f(3)}{-2h}$
$=2f'(3)=2\times1=2$

3 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}\times\frac{x+1}{x+1}$
$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)$
$=f'(1)\times2=4$
$\therefore f'(1)=2$
따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이다.

4 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 불연속이므로
$m=2$
또 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 $n=3$
$\therefore m+n=2+3=5$

5 ㄱ. $\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h[h]}{h}=\lim_{h\to0+}[h]=0$
$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h[h]}{h}=\lim_{h\to0-}[h]=-1$
따라서 $f'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
ㄴ. $\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h-|h|}{h}$
$=\lim_{h\to0+}\frac{h-h}{h}=0$
$\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h-|h|}{h}$
$=\lim_{h\to0-}\frac{h+h}{h}=2$
따라서 $g'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
ㄷ. $\lim_{h\to0+}\frac{k(0+h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to0+}h=0$
$\lim_{h\to0-}\frac{k(0+h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to0-}(-h)=0$
따라서 $k'(0)=0$이므로 함수 $k(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
따라서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄷ이다.

6 $f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+10x^9$이므로
$f'(1)=1+2+3+\cdots+10=55$
$f'(-1)=1-2+3-4+\cdots+9-10=-5$
$\therefore f'(1)+f'(-1)=55-5=50$

7 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로
$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$에서
$2a+b=4-4+6$ $\quad\therefore 2a+b=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
또 $f'(2)$가 존재하므로
$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{a(2+h)+b-(2a+b)}{h}=a$
$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(2+h)^2-2(2+h)+6-6}{h}$
$=2$
$\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면
$4+b=6$ $\quad\therefore b=2$
따라서 $f(x)=\begin{cases}2x+2 & (x\ge2)\\ x^2-2x+6 & (x<2)\end{cases}$이므로
$f(3)=6+2=8$

8 $f(x)=x^7-2x^6+3x^5-2x^4+x^3$이라고 하면 $f(1)=1$
$f'(x)=7x^6-12x^5+15x^4-8x^3+3x^2$
$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^7-2x^6+3x^5-2x^4+x^3-1}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
$=f'(1)=7-12+15-8+3=5$

9 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=3$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로
$\lim_{x\to2}\{f(x)-1\}=f(2)-1=0$
$\therefore f(2)=1$
$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$
$=f'(2)=3$
$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-3}{x-2}=1$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로
$\lim_{x\to2}\{g(x)-3\}=g(2)-3=0$
$\therefore g(2)=3$
$\therefore \lim_{x\to2}\frac{g(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$
$=g'(2)=1$
$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로
$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$
$=3\times3+1\times1=10$

10 다항식 x^5-23x^2+ax+b를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면
$x^5-23x^2+ax+b=(x-2)^2Q(x)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$32-92+2a+b=0$ $\quad\therefore 2a+b=60$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$5x^4-46x+a=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)$
위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$80-92+a=0$ $\quad\therefore a=12$
$a=12$를 ㉡에 대입하면
$24+b=60$ $\quad\therefore b=36$
$\therefore a+b=12+36=48$

11 $f(1)=2,\ g(1)=2$이므로 ······ (가)

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-g(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+2h)-2\}-\{g(1-h)-2\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{g(1-h)-g(1)}{h}$$
$$=2\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}+\lim_{h\to0}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}$$
$$=2f'(1)+g'(1)$$ ······ (나)

이때 $f'(x)=1+2x,\ g'(x)=3x^2+4x^3$이므로

$f'(1)=3,\ g'(1)=7$ ······ (다)

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-g(1-h)}{h}=2f'(1)+g'(1)$$
$$=2\times3+7$$
$$=13$$ ······ (라)

채점 기준	배점
(가) $f(1)$, $g(1)$의 값을 구한다.	2점
(나) 주어진 극한값을 미분계수를 이용하여 나타낸다.	4점
(다) $f'(1)$, $g'(1)$의 값을 구한다.	2점
(라) 주어진 극한값을 구한다.	2점

12 (1) $f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy+1$의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1$

$\therefore f(0)=-1$ ······ (가)

(2) $$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)-2xh+1\}-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)+1}{h}-2x\right\}$$ ······ (나)
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-2x$$
$$=f'(0)-2x$$
$$=4-2x$$ ······ (다)

채점 기준	배점
(가) $f(0)$의 값을 구한다.	3점
(나) $f'(x)$를 도함수의 정의와 주어진 식을 이용하여 나타낸다.	4점
(다) $f'(x)$를 구한다.	3점

13 $f'(x)=2(3x^2-4)(5x^3+x^2)$
$\quad+(2x-1)\times6x\times(5x^3+x^2)$
$\quad+(2x-1)(3x^2-4)(15x^2+2x)$

이므로 ······ (가)

$f'(1)=2\times(-1)\times6+1\times6\times6+1\times(-1)\times17=7$

······ (나)

$f'(-1)=2\times(-1)\times(-4)+(-3)\times(-6)\times(-4)$
$\quad+(-3)\times(-1)\times13$
$\quad=-25$ ······ (다)

$\therefore f'(1)+f'(-1)=7-25=-18$ ······ (라)

채점 기준	배점
(가) $f'(x)$를 구한다.	3점
(나) $f'(1)$의 값을 구한다.	3점
(다) $f'(-1)$의 값을 구한다.	3점
(라) $f'(1)+f'(-1)$의 값을 구한다.	1점

07~09강 내공 점검

p. 80~81

1 2	**2** 6	**3** ②	**4** ④	**5** ⑤
6 ②	**7** ①	**8** ③		
9 $a<-4$ 또는 $a>2$	**10** ⑤	**11** -16	**12** -56	
13 77				

1 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x+2$

접선의 기울기가 2이므로 $3x^2-6x+2=2$에서

$3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 P(0, 1), Q(2, 1) 또는 P(2, 1), Q(0, 1)이므로

$\overline{PQ}=2$

2 $f(x)=(2x+3)(x^2+1)$이라고 하면

$f'(x)=6x^2+6x+2$

점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x+1)$

$\therefore y=2x+4$

따라서 $a=2,\ b=4$이므로

$a+b=6$

3 $f(x)=x^3-3x^2+x+2$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+t+2)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t+1$이므로 접선 l의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+t+2)=(3t^2-6t+1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-6t+1)x-2t^3+3t^2+2$ ······ ㉠

이 접선이 점 (1, 3)을 지나므로

$3=-2t^3+6t^2-6t+3$

$2t(t^2-3t+3)=0$

$\therefore t=0\ (\because t^2-3t+3>0)$

$t=0$을 ㉠에 대입하면 접선 l의 방정식은

$y=x+2$

따라서 원점 O에서 직선 $x-y+2=0$까지의 거리는

$$\frac{2}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$$

4 함수 $f(x)=(x-2)(x^2+2x)=x^3-4x$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하며
$f(0)=f(2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2-4$이므로 $f'(c)=3c^2-4=0$
따라서 $c^2=\frac{4}{3}$이므로
$c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<c<2$)

5 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-3, x+3]$에서 연속이고 열린구간 $(x-3, x+3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(x+3)-f(x-3)}{(x+3)-(x-3)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(x-3, x+3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $x-3<c<x+3$에서 $x \to \infty$이면 $c \to \infty$이므로
$\lim_{x\to\infty}\{f(x+3)-f(x-3)\}$
$=6\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+3)-f(x-3)}{(x+3)-(x-3)}$
$=6\lim_{c\to\infty}f'(c)=6\times 2=12$

6 $f(x)=2x^3-9x^2+12x$에서
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$
이때 $f'(x)<0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 감소하므로
$6(x-1)(x-2)<0 \quad \therefore 1<x<2$
따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(1, 2)$에서 감소한다.

7 ㄱ. $f'(-1)=0$이고 $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.
ㄴ. $f'(1)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(5)=0$이지만 $x=5$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극값을 갖지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

8 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+4$에서
$f'(x)=6x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 8을 가지므로
$f(-1)=8, f'(-1)=0$
$f(-1)=8$에서
$-2+a-b+4=8$ …… ㉠
$f'(-1)=0$에서
$6-2a+b=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=-6$
즉, $f(x)=2x^3-6x+4$이므로
$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은
$f(1)=2-6+4=0$

9 $f'(x)=9x^2+4(a+1)x+4$이고 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=4(a+1)^2-36>0$
$a^2+2a-8>0, (a+4)(a-2)>0$
$\therefore a<-4$ 또는 $a>2$

10 $f(x)=4x^3-3x^2-6x+2$에서
$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서
$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$
닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	↗	$\frac{15}{4}$ 극대	↘	-3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{15}{4}$, $x=1$에서 최솟값 -3을 가지므로
$M=\frac{15}{4}, m=-3 \quad \therefore M+m=\frac{3}{4}$

11 $f(x)=x^3-3x^2+(k+3)x-3$, $g(x)=x^2-2x+3$이라고 하면
$f'(x)=3x^2-6x+k+3$, $g'(x)=2x-2$
두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면
(i) $x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로
$f(t)=g(t)$
$t^3-3t^2+(k+3)t-3=t^2-2t+3$
$\therefore t^3-4t^2+(k+5)t-6=0$ …… ㉠
(ii) $x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
$f'(t)=g'(t)$
$3t^2-6t+k+3=2t-2$
$\therefore k=-3t^2+8t-5$ …… ㉡ …… (가)
㉡을 ㉠에 대입하면
$t^3-4t^2+(-3t^2+8t-5+5)t-6=0$
$t^3-2t^2+3=0, (t+1)(t^2-3t+3)=0$
$\therefore t=-1$ ($\because t^2-3t+3>0$) …… (나)
$t=-1$을 ㉡에 대입하면
$k=-3-8-5=-16$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 놓고 t, k 사이의 관계식을 세운다.	4점
(나) t의 값을 구한다.	4점
(다) k의 값을 구한다.	2점

12 $f(x)=2ax^3-3ax^2$에서

$f'(x)=6ax^2-6ax=6ax(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

$a>0$이므로 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-28a$	↗	0 극대	↘	$-a$ 극소	↗	$4a$

이때 $a>0$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $4a$, 최솟값은 $-28a$이다. …… (가)

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 8이므로

$4a=8 \qquad \therefore a=2$ …… (나)

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$-28a=-28\times2=-56$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낸다.	6점
(나) a의 값을 구한다.	2점
(다) 함수 $f(x)$의 최솟값을 구한다.	2점

13 $\overline{BP}=x\ (0\le x\le 1)$, $\overline{DQ}=y\ (0\le y\le 2)$라고 하면

$\overline{PC}=2-x$, $\overline{QC}=2-y$ …… (가)

$\overline{AP}=\overline{PQ}$이므로 $\quad \overline{AP}^2=\overline{PQ}^2$

$2^2+x^2=(2-x)^2+(2-y)^2$

$4x=(2-y)^2 \qquad \therefore x=\dfrac{(2-y)^2}{4}$ …… (나)

$$S=\square ABCD-(\triangle ABP+\triangle PCQ+\triangle ADQ)$$
$$=4-\left\{\frac{1}{2}\times2\times x+\frac{1}{2}(2-x)(2-y)+\frac{1}{2}\times2\times y\right\}$$
$$=2-\frac{1}{2}xy$$
$$=2-\frac{1}{8}y(2-y)^2$$
$$=-\frac{1}{8}y^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y+2$$ …… (다)

$$\therefore \frac{dS}{dy}=-\frac{3}{8}y^2+y-\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{8}(3y-2)(y-2)$$

$\dfrac{dS}{dy}=0$에서 $\quad y=\dfrac{2}{3}$ 또는 $y=2$

$0\le y\le 2$에서 S의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

y	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$\frac{dS}{dy}$	$-$	$-$	0	$+$	0
S	2	↘	$\frac{50}{27}$ 극소	↗	2

따라서 S는 $y=\dfrac{2}{3}$에서 최솟값 $\dfrac{50}{27}$을 가지므로

$m=27,\ n=50$ …… (라)

$\therefore m+n=77$ …… (마)

채점 기준	배점
(가) $\overline{BP}=x$, $\overline{DQ}=y$로 놓고 $\overline{PC}$, $\overline{QC}$를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(나) $\overline{AP}=\overline{PQ}$임을 이용하여 x를 y에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(다) S를 y에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(라) m, n의 값을 구한다.	2점
(마) $m+n$의 값을 구한다.	2점

10~11강 내공 점검

p. 82~83

1 ④ **2** -17 또는 15 **3** $a<-4$ **4** ③
5 ① **6** ㄷ **7** ③ **8** ① **9** ①
10 ⑤ **11** 80 **12** 28 **13** $9.6\pi\ \text{cm}^2/\text{s}$

1 주어진 방정식에서 $2x^3+3x^2-12x=a$이므로 이 방정식의 실근은 함수 $y=2x^3+3x^2-12x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$라고 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$

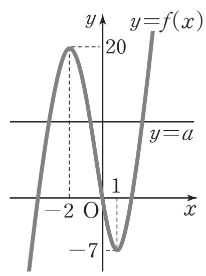
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20 극대	↘	-7 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 세 실근을 가지려면

$-7<a<20$

따라서 정수 a는 $-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 19$의 26개이다.



2 주어진 방정식에서 $x^3-3x^2-9x+10=k$이므로 이 방정식의 실근은 함수 $y=x^3-3x^2-9x+10$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x+10$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

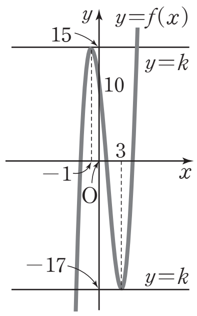
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	15 극대	↘	-17 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 한 개의 음의 근과 한 개의 양의 근을 가지려면

$k=-17$ 또는 $k=15$



3 $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$라고 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1\ (\because 0\le x\le 2)$

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	+	+	0	−	−
$f(x)$	a	↗	$a+4$ 극대	↘	$a+2$

따라서 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=a+4$이므로 $f(x)<0$이 성립하려면

$a+4<0 \qquad \therefore a<-4$

4 $f(x)>g(x)$이어야 하므로 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$h(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+a$

$h'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$

$\quad\quad =4(x+1)(x-1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$h(x)$	↘	$a-9$	↗	$a+7$	↘	$a-9$	↗

함수 $h(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=3$에서 최솟값 $a-9$를 가지므로 $h(x)>0$이려면

$a-9>0 \qquad \therefore a>9$

따라서 정수 a의 최솟값은 10이다.

5 점 M의 시각 t에서의 위치를 x_{M}이라고 하면

$x_{\mathrm{M}}=\dfrac{(2t^3-7t^2)+(-t^2+8t)}{2}$

$\quad =t^3-4t^2+4t$

점 M의 시각 t에서의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx_{\mathrm{M}}}{dt}=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$

$v=0$에서 $\quad t=\dfrac{2}{3}$ 또는 $t=2$

따라서 점 M이 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $\dfrac{2}{3}$이다.

6 ㄱ. $1<t<2$에서 $v=-1$이므로 가속도 a는

$a=\dfrac{dv}{dt}=0$

ㄴ. $0\le t\le 3$에서 $v\le 0$이므로 점 P는 음의 방향으로 움직였다.

따라서 $t=3$일 때, 점 P는 원점에 위치하지 않는다.

ㄷ. $t=1$에서 $v<0$, $t=4$에서 $v>0$이므로 $t=1$일 때와 $t=4$일 때의 운동 방향은 서로 반대이다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

7 t초 후의 공의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=20-10t$

최고 높이에서 공의 속도는 0 m/s이므로

$v=20-10t=0$

$\therefore t=2$

따라서 공이 도달하는 최고 높이는

$x=30+20\times 2-5\times 2^2$

$\quad =50\,(\mathrm{m})$

8 t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(2t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$이므로 선분 AB의 중점의 좌표는

$\mathrm{C}(t,\ t)$

$\overline{\mathrm{OC}}=l$이라고 하면

$l=\sqrt{t^2+t^2}=\sqrt{2}t\ (\because t>0)$

따라서 $\overline{\mathrm{OC}}$의 길이의 변화율은

$\dfrac{dl}{dt}=\sqrt{2}$

9 t초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $2t$ cm이므로 원의 넓이를 $S\ \mathrm{cm}^2$라고 하면

$S=\pi(2t)^2=4\pi t^2$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=8\pi t$

따라서 $t=5$일 때, 가장 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$8\pi\times 5=40\pi\ (\mathrm{cm^2/s})$

10 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $(4+t)$ cm, 높이는 $(6+2t)$ cm이다.

t초 후의 원기둥의 부피를 $V\ \mathrm{cm}^3$라고 하면

$V=\pi(4+t)^2(6+2t)=2\pi(4+t)^2(3+t)$

시각 t에 대한 부피 V의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=4\pi(4+t)(3+t)+2\pi(4+t)^2$

$\quad\quad =2\pi(4+t)(6+2t+4+t)$

$\quad\quad =2\pi(4+t)(10+3t)$

$6+2t=16$에서

$t=5$

따라서 $t=5$일 때, 원기둥의 부피의 변화율은

$2\pi\times(4+5)\times(10+15)=450\pi\ (\mathrm{cm^3/s})$

11 $f(x)=x^3-3x^2-24x+k$라고 하면
$f'(x)=3x^2-6x-24$
$=3(x+2)(x-4)$
$x>4$에서 $f'(x)=0$인 x의 값이 없으므로 함수 $f(x)$는 최솟값이 없다. …… (가)
그런데 $x>4$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x>4$에서 증가한다. …… (나)
따라서 $x>4$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면 $f(4)\geq 0$이어야 하므로
$f(4)=4^3-3\times 4^2-24\times 4+k=k-80\geq 0$
$\therefore\ k\geq 80$
따라서 k의 최솟값은 80이다. …… (다)

채점 기준	배점
(가) 함수 $f(x)$의 최솟값이 없음을 안다.	2점
(나) 함수 $f(x)$가 $x>4$에서 증가함을 안다.	2점
(다) k의 최솟값을 구한다.	6점

12 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면
$v=3t^2+2mt+n$, $a=6t+2m$ …… (가)
$t=3$일 때, 점 P의 속도는 0, 가속도는 8이므로
$27+6m+n=0$, $18+2m=8$ …… (나)
위의 두 식을 연립하여 풀면
$m=-5$, $n=3$ …… (다)
따라서 $v=3t^2-10t+3$이므로 $t=5$일 때, 점 P의 속도는
$3\times 5^2-10\times 5+3=28$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 구한다.	3점
(나) m, n에 대한 식을 세운다.	2점
(다) m, n의 값을 구한다.	2점
(라) $t=5$일 때, 점 P의 속도를 구한다.	3점

13 t초 후의 풍선의 반지름의 길이를 r cm라고 하면
$r=4+0.2t$
풍선의 반지름의 길이가 6 cm가 될 때의 시각은
$4+0.2t=6$에서
$t=10$ …… (가)
풍선의 겉넓이를 S cm^{2}라고 하면
$S=4\pi(4+0.2t)^2$
시각 t에 대한 겉넓이 S의 변화율은
$\frac{dS}{dt}=8\pi(4+0.2t)\times 0.2$
$=1.6\pi(4+0.2t)$ …… (나)
따라서 $t=10$일 때, 풍선의 겉넓이의 변화율은
$1.6\pi(4+0.2\times 10)=9.6\pi$ (cm^2/s) …… (다)

채점 기준	배점
(가) 풍선의 반지름의 길이가 6 cm가 될 때의 시각을 구한다.	3점
(나) 시각 t에 대한 겉넓이 S의 변화율을 구한다.	4점
(다) $t=10$일 때, 풍선의 겉넓이의 변화율을 구한다.	3점

12~14강 내공 점검

p. 84~85

1 ②	2 ①	3 ⑤	4 1	5 ③
6 ③	7 $\frac{5}{2}$	8 ④	9 ①	10 ②
11 29	12 32	13 4		

1 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=x^3-6x^2+8x+2$
$\therefore\ f(2)=8-24+16+2=2$

2 $f'(x)=3x^2-6x+a$이므로
$f(x)=\int(3x^2-6x+a)\,dx=x^3-3x^2+ax+C$
이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$1-3+a+C=0$ …… ㉠
또 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로
$-1-3-a+C=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $C=3$
즉, $f(x)=x^3-3x^2-x+3=(x+1)(x-1)(x-3)$이므로 방정식 $f(x)=0$의 근은 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$
$\therefore\ -1\times 1\times 3=-3$

3 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)+6x=f(x)+xf'(x)+6x^2-6x$
$xf'(x)=-6x^2+12x$
$\therefore\ f'(x)=-6x+12$
위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면
$f(x)=\int(-6x+12)\,dx=-3x^2+12x+C$
$f(0)=3$에서 $C=3$
따라서 $f(x)=-3x^2+12x+3=-3(x-2)^2+15$이므로 $x=2$에서 최댓값 15를 갖는다.

4 $\int_{-a}^{2a}(3x^2+2x)\,dx=\Big[x^3+x^2\Big]_{-a}^{2a}$
$=(8a^3+4a^2)-(-a^3+a^2)$
$=9a^3+3a^2$
$9a^3+3a^2=12$이므로
$3a^3+a^2-4=0$, $(a-1)(3a^2+4a+4)=0$
$\therefore\ a=1$ ($\because$ a는 실수)

5 $\int_1^4 f(x)\,dx-\int_2^4 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$
$=\int_1^4 f(x)\,dx+\int_4^2 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$
$=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$
$=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(x^3-2)\,dx$
$=\Big[\frac{1}{4}x^4-2x\Big]_0^2=0$

6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}a_n=\int_0^1|f(x)|\,dx+\int_1^2|f(x)|\,dx+\int_2^3|f(x)|\,dx+\int_3^4|f(x)|\,dx$

이때 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $3x^2-6x\le 0$이고, 닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 $3x^2-6x\ge 0$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{4}a_n&=\int_0^2|f(x)|\,dx+\int_2^4|f(x)|\,dx\\&=\int_0^2(-3x^2+6x)\,dx+\int_2^4(3x^2-6x)\,dx\\&=\Big[-x^3+3x^2\Big]_0^2+\Big[x^3-3x^2\Big]_2^4\\&=4+20\\&=24\end{aligned}$$

7 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (-2\le x\le 0)\\ -x+1 & (0\le x\le 1)\\ x-1 & (1\le x\le 3)\end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{3}f(x)\,dx\\&=\int_{-2}^{0}(x+1)\,dx+\int_0^1(-x+1)\,dx+\int_1^3(x-1)\,dx\\&=\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-2}^{0}+\Big[-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{2}x^2-x\Big]_1^3\\&=0+\frac{1}{2}+2\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3}f(x)\,dx&=\int_{-2}^{-1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{3}f(x)\,dx\\&=-\left(\frac{1}{2}\times1\times1\right)+\left(\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times2\times2\right)\\&=-\frac{1}{2}+3\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

8 출발한 지 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 $\mathrm{P}(3t+2,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ t-1)$이므로

$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(3t+2)(1-t) & (0\le t\le 1)\\ \frac{1}{2}(3t+2)(t-1) & (1\le t\le 2)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\int_0^2 S(t)\,dt\\&=\int_0^1\frac{1}{2}(3t+2)(1-t)\,dt+\int_1^2\frac{1}{2}(3t+2)(t-1)\,dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^1(-3t^2+t+2)\,dt+\frac{1}{2}\int_1^2(3t^2-t-2)\,dt\\&=\frac{1}{2}\Big[-t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\Big]_0^1+\frac{1}{2}\Big[t^3-\frac{1}{2}t^2-2t\Big]_1^2\\&=\frac{3}{4}+\frac{7}{4}\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

9 주어진 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=8-4a\qquad\therefore\ a=2$

$\displaystyle\int_2^x tf(t)\,dt=x^3-2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=3x^2-4x$

따라서 $f(x)=3x-4$이므로

$f(1)=3-4=-1$

10 주어진 식에서

$\displaystyle x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=\frac{1}{3}x^3+x$

$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{3}x^3+x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2+1$

$\therefore\ f(2)=4+1=5$

11 $f(x)=|x-2|+|x+1|$이라고 하면

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & (-3\le x\le -1)\\ 3 & (-1\le x\le 2)\\ 2x-1 & (2\le x\le 4)\end{cases}\qquad\cdots\cdots\ (가)$$

$$\therefore\ \int_{-3}^{4}(|x-2|+|x+1|)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{-1}(-2x+1)\,dx+\int_{-1}^{2}3\,dx+\int_2^4(2x-1)\,dx\qquad\cdots\cdots\ (나)$$
$$=\Big[-x^2+x\Big]_{-3}^{-1}+\Big[3x\Big]_{-1}^{2}+\Big[x^2-x\Big]_2^4$$
$$=10+9+10$$
$$=29\qquad\cdots\cdots\ (다)$$

채점 기준	배점
(가) $f(x)=\lvert x-2\rvert+\lvert x+1\rvert$로 놓고, 구간을 나누어 $f(x)$를 나타낸다.	2점
(나) 주어진 정적분을 구간별로 나누어 나타낸다.	4점
(다) 정적분의 값을 구한다.	4점

12 주어진 식에서

$\displaystyle f(x)=12x^2+6x\int_0^1 f(t)\,dt-\int_0^1 tf(t)\,dt$

이때 $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=a$, $\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt=b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=12x^2+6ax-b\qquad\cdots\cdots\ (가)$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt&=\int_0^1(12t^2+6at-b)\,dt\\&=\Big[4t^3+3at^2-bt\Big]_0^1\\&=4+3a-b=a\end{aligned}$$

$\therefore\ 2a-b=-4\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$$\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1 (12t^3+6at^2-bt)\,dt$$

$$=\left[3t^4+2at^3-\frac{b}{2}t^2\right]_0^1=3+2a-\frac{b}{2}=b$$

$\therefore\ 4a-3b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-2$ …… (나)

따라서 $f(x)=12x^2-18x+2$이므로

$f(-1)=12+18+2=32$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) $\int_0^1 f(t)\,dt=a,\ \int_0^1 tf(t)\,dt=b$로 놓고 $f(x)$를 $a,\ b$에 대한 식으로 나타낸다.	4점
(나) $a,\ b$의 값을 구한다.	4점
(다) $f(-1)$의 값을 구한다.	2점

13 함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+1$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h} f(x)\,dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_2^{2+h}$$ …… (가)

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}$$

$$=F'(2)=f(2)$$ …… (나)

$$=13+2a=21$$

$\therefore\ a=4$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 정적분으로 나타내어진 함수의 극한을 부정적분을 이용하여 나타낸다.	4점
(나) 주어진 극한값이 $f(2)$임을 안다.	4점
(다) a의 값을 구한다.	2점

15~16강 내공 점검 p. 86~87

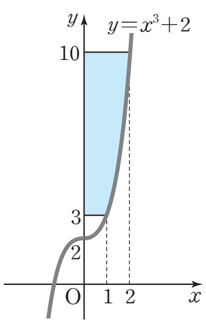
1 $\frac{45}{4}$ **2** ④ **3** 12 **4** ③ **5** ①

6 $\frac{5}{6}$ **7** ④ **8** ② **9** ⑤

10 ㄱ, ㄴ, ㄷ **11** 4 **12** (1) 6 (2) 36

13 2초

1 구하는 도형의 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$2\times10-1\times3-\int_1^2 (x^3+2)\,dx$$

$$=17-\left[\frac{1}{4}x^4+2x\right]_1^2$$

$$=17-\frac{23}{4}$$

$$=\frac{45}{4}$$

2 $\int_{-a}^{a} (x^7+x^5+x^3+3x^2)\,dx$

$$=\int_{-a}^{a} (x^7+x^5+x^3)\,dx+\int_{-a}^{a} 3x^2\,dx$$

$$=0+2\int_0^a 3x^2\,dx=2\Big[x^3\Big]_0^a=2a^3=128$$

즉, $a^3=64$이므로 $a=4$

3 $h(x)=xg(x)$라고 하면

$h(-x)=-xg(-x)=xg(x)=h(x)$

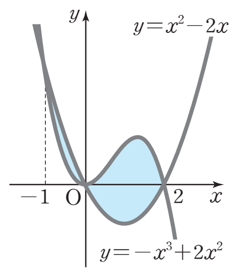
$(\because g(-x)=-g(x))$

$$\therefore \int_{-4}^{4} \{f(x)+xg(x)\}\,dx$$

$$=2\int_0^4 f(x)\,dx+2\int_0^4 xg(x)\,dx$$

$$=2\times2+2\times4=12$$

4 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^2-2x=-x^3+2x^2$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

이때 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서

$x^2-2x\ge -x^3+2x^2$

이고, 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서

$-x^3+2x^2\ge x^2-2x$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{0} \{(x^2-2x)-(-x^3+2x^2)\}\,dx$$

$$+\int_0^2 \{(-x^3+2x^2)-(x^2-2x)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0} (x^3-x^2-2x)\,dx+\int_0^2 (-x^3+x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

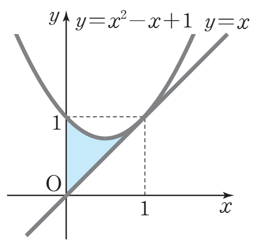
$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

5 $f(x)=x^2-x+1$이라고 하면 $f'(x)=2x-1$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y=x$

곡선 $y=x^2-x+1$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



$x^2-x+1=x$에서

$x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서

$x^2-x+1\ge x$

이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{(x^2-x+1)-x\}\,dx=\int_0^1 (x^2-2x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

6 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 해가 -1, 1, 2이므로

$f(x)-g(x)=a(x+1)(x-1)(x-2)$
$\qquad\qquad\quad =a(x^3-2x^2-x+2)$ (a는 상수)

라고 하면 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $f(x)\ge g(x)$이므로

$S_1=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$
$\quad=\int_{-1}^{1}a(x^3-2x^2-x+2)\,dx$
$\quad=a\int_{-1}^{1}(x^3-x)\,dx+a\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)\,dx$
$\quad=0+2a\int_{0}^{1}(-2x^2+2)\,dx$
$\quad=2a\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$
$\quad=\frac{8}{3}a=\frac{16}{3}$

$\therefore a=2$

닫힌구간 $[1, 2]$에서 $g(x)\ge f(x)$이므로

$S_2=\int_{1}^{2}\{g(x)-f(x)\}\,dx$
$\quad=\int_{1}^{2}\{-2(x^3-2x^2-x+2)\}\,dx$
$\quad=-2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2$
$\quad=\frac{5}{6}$

7 a초 후에 물체가 땅에 떨어진다고 하면 그때의 물체의 위치는 0이므로

$500+\int_{0}^{a}(-10t)\,dt=0$
$500+\left[-5t^2\right]_0^a=0$
$500-5a^2=0$
$a^2=100$
$\therefore a=10$ ($\because a>0$)

따라서 물체가 땅에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 10초이다.

8 $t=0$에서의 점 P의 위치를 a라고 하면

$x(t)=a+\int_{0}^{t}\left(-\frac{3}{10}t^2+3t\right)dt$
$\quad\;=a+\left[-\frac{1}{10}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^t$
$\quad\;=-\frac{1}{10}t^3+\frac{3}{2}t^2+a$

$x'(t)=v(t)=-\frac{3}{10}t^2+3t=0$에서

$-\frac{3}{10}t(t-10)=0$
$\therefore t=0$ 또는 $t=10$

따라서 $x(t)$는 $t=10$에서 최댓값 $50+a$를 가지므로

$50+a=58 \qquad \therefore a=8$

9 $0\le t\le 1$에서 $v(t)\ge 0$이고, $1\le t\le 2$에서 $v(t)\le 0$이므로

$\int_{0}^{2}|2-2t^3|\,dt$
$=\int_{0}^{1}(2-2t^3)\,dt+\int_{1}^{2}(-2+2t^3)\,dt$
$=\left[2t-\frac{1}{2}t^4\right]_0^1+\left[-2t+\frac{1}{2}t^4\right]_1^2$
$=\frac{3}{2}+\frac{11}{2}$
$=7$

10 ㄱ. 출발 후 2초 동안 점 P가 움직인 거리는

$\frac{1}{2}\times2\times2=2$

출발 후 2초 동안 점 Q가 움직인 거리는

$\frac{1}{2}\times2\times1=1$

따라서 출발 후 2초 동안 점 P가 움직인 거리는 점 Q가 움직인 거리의 2배이다.

ㄴ. $t=4$일 때, 두 점 P, Q의 속도는 1로 같다.

ㄷ. 출발한 지 6초 후 점 P의 위치는

$\frac{1}{2}\times6\times2=6$

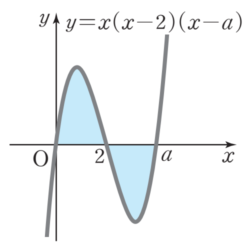
출발한 지 6초 후 점 Q의 위치는

$\frac{1}{2}\times2\times1+2\times1+\frac{1}{2}\times(1+2)\times2=6$

따라서 위치가 같으므로 $t=6$일 때, 두 점 P, Q는 만난다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 곡선 $y=x(x-2)(x-a)$와 x축의 교점의 x좌표는



$x(x-2)(x-a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=a$ …… (가)

곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$\int_{0}^{a}x(x-2)(x-a)\,dx=0$ …… (나)

$\int_{0}^{a}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx=0$

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_0^a=0$

$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3=0$

$a^4-4a^3=0$

$a^3(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>2$) …… (다)

채점 기준	배점
(가) 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구한다.	4점
(나) 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같음을 이용하여 식을 세운다.	2점
(다) a의 값을 구한다.	4점

12 (1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2$에서

$f'(x)=x^2-4x+3$

이때 $f'(0)=3$이므로 접선 l의 방정식은

$y-2=3x \qquad \therefore y=3x+2$ …… (가)

곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2=3x+2$

$\frac{1}{3}x^2(x-6)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=6$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 교점 중 접점이 아닌 점의 x좌표는 6이다. …… (나)

(2) 닫힌구간 $[0, 6]$에서

$3x+2 \geq f(x)$

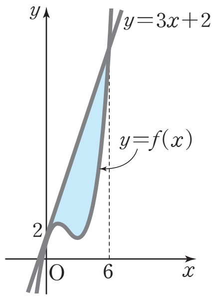
이므로 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^6 \{(3x+2)-f(x)\}\,dx$

$=\int_0^6 \left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right) dx$

$=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^6$

$=36$ …… (다)



채점 기준	배점
(가) 접선 l의 방정식을 구한다.	3점
(나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 교점 중 접점이 아닌 점의 x좌표를 구한다.	2점
(다) 곡선 $y=f(x)$와 직선 l로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.	5점

13 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하면

$v(t)=\int (6t-14)\,dt$

$=3t^2-14t+C_1$

$v(0)=10$이므로 $C_1=10$

$\therefore v(t)=3t^2-14t+10$ …… (가)

점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라고 하면

$x(t)=\int (3t^2-14t+10)\,dt$

$=t^3-7t^2+10t+C_2$

$x(0)=0$이므로 $C_2=0$

$\therefore x(t)=t^3-7t^2+10t$ …… (나)

$x(t)=t^3-7t^2+10t=0$에서

$t(t-2)(t-5)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=5$

따라서 점 P가 출발한 후 원점으로 처음 돌아오는 것은 2초 후이다. …… (다)

채점 기준	배점
(가) 속도 $v(t)$를 구한다.	4점
(나) 위치 $x(t)$를 구한다.	4점
(다) 점 P가 출발한 후 원점으로 처음 돌아오는 시각을 구한다.	2점

memo

memo