듀얼 수학

수학 상

정답 및 풀이

정답 및 풀이

01 다항식의 연산

01 다항식의 연산 본문 006~013쪽

01 답 (1) 4 (2) $3y^2$ (3) 3차 (4) y^3

02 답 (1) $(1+4y)x^3+2x^2y^2+3xy+y^3$
(2) $y^3+2x^2y^2+(4x^2+3)xy+x^3$

03 (1) $A+B=(2x^2+5xy+y^2)+(x^2-3xy+2y^2)$
$=3x^2+2xy+3y^2$
(2) $A-B=(2x^2+5xy+y^2)-(x^2-3xy+2y^2)$
$=x^2+8xy-y^2$
(3) $2A+3B=2(2x^2+5xy+y^2)+3(x^2-3xy+2y^2)$
$=4x^2+10xy+2y^2+3x^2-9xy+6y^2$
$=7x^2+xy+8y^2$
(4) $-2(A-B)-(B-5A)$
$=-2A+2B-B+5A$
$=3A+B$
이므로
$3A+B=3(2x^2+5xy+y^2)+(x^2-3xy+2y^2)$
$=6x^2+15xy+3y^2+x^2-3xy+2y^2$
$=7x^2+12xy+5y^2$
답 (1) $3x^2+2xy+3y^2$ (2) $x^2+8xy-y^2$
(3) $7x^2+xy+8y^2$ (4) $7x^2+12xy+5y^2$

04 (3) $(x+1)(x^2-3x+1)=x^3-3x^2+x+x^2-3x+1$
$=x^3-2x^2-2x+1$
(4) $(x^2-xy+y^2)(x+2y)$
$=x^3+2x^2y-x^2y-2xy^2+xy^2+2y^3$
$=x^3+x^2y-xy^2+2y^3$
답 (1) x^2+xy-x (2) $6x^2-3xy+3x$
(3) x^3-2x^2-2x+1 (4) $x^3+x^2y-xy^2+2y^3$

05 (1) $(x+1)(x+2)(x+3)$
$=x^3+(1+2+3)x^2+(1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1)x+1\cdot2\cdot3$
$=x^3+6x^2+11x+6$
(2) $(3x-2y-z)^2$
$=(3x)^2+(-2y)^2+(-z)^2+2\cdot3x\cdot(-2y)$
$+2\cdot(-2y)\cdot(-z)+2\cdot3x\cdot(-z)$
$=9x^2+4y^2+z^2-12xy+4yz-6zx$
(3) $(2a-b)^3=(2a)^3-3\cdot(2a)^2\cdot b+3\cdot2a\cdot b^2-b^3$
$=8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$
(4) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=x^3-(2y)^3=x^3-8y^3$
답 (1) $x^3+6x^2+11x+6$
(2) $9x^2+4y^2+z^2-12xy+4yz-6zx$
(3) $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$
(4) x^3-8y^3

06 (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\cdot1=7$
(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=3^2-4\cdot1=5$
(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=3^3-3\cdot1\cdot3=18$
(4) $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{a^3+b^3}{ab}=\dfrac{18}{1}=18$
답 (1) 7 (2) 5 (3) 18 (4) 18

07 (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$
(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$=4^3-3\cdot4=64-12=52$
답 (1) 14 (2) 52

08 (1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=5^2-2\cdot2=25-4=21$
(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$=\dfrac{1}{2}\{3^2+2^2+(-5)^2\}=19$
답 (1) 21 (2) 19

09 주어진 다항식을 동류항끼리 계산하여 간단히 하면
$-x^3-5x^2+8x+3$
이므로 $a=-1,\ b=-5,\ c=8$
$\therefore a-b+c=-1+5+8=12$ 답 ④

10 $4(-2x^2+1)+x(3x-1)+x^2(x+2)$
$=-8x^2+4+3x^2-x+x^3+2x^2$
$=x^3-3x^2-x+4$
따라서 x^2의 계수와 상수항은 각각 -3, 4이므로 그 합은
$-3+4=1$ 답 1

11 $3A-2(A+2B-C)$
$=3A-2A-4B+2C$
$=A-4B+2C$
$=(3a^2-2ab-b^2)-4(2a^2-ab+b^2)$
$+2(-a^2+4ab+3b^2)$
$=3a^2-2ab-b^2-8a^2+4ab-4b^2-2a^2+8ab+6b^2$
$=-7a^2+10ab+b^2$ 답 ③

빈출 유형 집중학습

11-1 $2A-3B-(A-2B)$
$=2A-3B-A+2B$
$=A-B$
$=(3x^2+x-3)-(-x^2-2x+5)$
$=4x^2+3x-8$ 답 ③

11-2 $2(A+B-2C)-3(B-C)$
$=2A+2B-4C-3B+3C$
$=2A-B-C$
$=2(3x^2-xy+2y^2)-(-5x^2+3xy+3y^2)$
$-(2x^2-7xy+8y^2)$
$=(6+5-2)x^2+(-2-3+7)xy+(4-3-8)y^2$
$=9x^2+2xy-7y^2$ 답 ②

12 $2(A-X)+5B=B$에서 $2A-2X+5B-B=0$이므로
$2X=2A+4B,\ X=A+2B$
$\therefore X=A+2B$
$=(x^2-3xy+y^2)+2(2x^2+6xy-3y^2)$
$=5x^2+9xy-5y^2$ 답 ⑤

13 $(P-3)\triangle(Q-2)$
$=(2x+4-3)\triangle(-x^2+3x+2-2)$
$=(2x+1)(-x^2+3x)-(2x+1-x^2+3x)$
$=-2x^3+5x^2+3x-(-x^2+5x+1)$
$=-2x^3+5x^2+3x+x^2-5x-1$
$=-2x^3+6x^2-2x-1$ 답 ④

14 $(x^2+2x+1)(2x^2+2x-3)$의 전개식에서 x^3항은
$x^2\cdot 2x+2x\cdot 2x^2=2x^3+4x^3=6x^3$
따라서 x^3의 계수는 6이다. 답 ②

15 $(2x^2-5x+1)(x^2+kx-2)$의 전개식에서 x^2항은
$2x^2\cdot(-2)+(-5x)\cdot kx+1\cdot x^2=(-3-5k)x^2$
이때 x^2의 계수가 7이므로
$-3-5k=7,\ 5k=-10 \qquad \therefore k=-2$ 답 ④

16 $(1-3x+2x^2+2x^3+4x^4)^2$의 전개식에서 x^4항은
$1\cdot 4x^4+(-3x)\cdot 2x^3+2x^2\cdot 2x^2+2x^3\cdot(-3x)+4x^4\cdot 1$
$=4x^4-6x^4+4x^4-6x^4+4x^4=0$
따라서 x^4의 계수는 0이다. 답 ①

17 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$에서 x^4은 x^3의 계수에 영향을 미치지 않으므로 주어진 두 식의 전개식에서 x^3의 계수는 같다.
$\therefore a-b=0$ 답 ②

18 $(x+3)(x-1)(x-4)$
$=x^3+(3-1-4)x^2$
$+\{3\cdot(-1)+(-1)\cdot(-4)+3\cdot(-4)\}x+3\cdot(-1)\cdot(-4)$
$=x^3-2x^2-11x+12$
이므로
$a=-2,\ b=-11$
$\therefore a-b=-2-(-11)$
$=9$ 답 ⑤

19 ① $(x+2)(x-4)(x+6)$
$=x^3+(2-4+6)x^2$
$+\{2\cdot(-4)+(-4)\cdot 6+2\cdot 6\}x+2\cdot(-4)\cdot 6$
$=x^3+4x^2-20x-48$
③ $(x-2y)^3=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$
④ $(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$
⑤ $(2x-1)^3=8x^3-12x^2+6x-1$ 답 ②

20 $(2x-3y)(4x^2-kxy+9y^2)$
$=8x^3-2kx^2y+18xy^2-12x^2y+3kxy^2-27y^3$
$=8x^3-2(k+6)x^2y+3(k+6)xy^2-27y^3$
이고, 이 전개식이 $8x^3-27y^3$이므로
$-2(k+6)x^2y+3(k+6)xy^2=0$
$\therefore k=-6$ 답 -6

21 $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$이므로 $x^3=A$로 놓으면
(주어진 식)$=(1-x^3)(1+x^3+x^6)$
$=(1-A)(1+A+A^2)$
$=1-A^3$
$=1-(x^3)^3$
$=1-x^9$ 답 ②

22 $(2x+3)^2(x-1)^3$
$=(4x^2+12x+9)(x^3-3x^2+3x-1)$
이므로 전개식에서 x^3항은
$4x^2\cdot 3x+12x\cdot(-3x^2)+9\cdot x^3$
$=12x^3-36x^3+9x^3$
$=-15x^3$
따라서 x^3의 계수는 -15이다. 답 ①

23 $2x^2+3x=A$로 놓으면
(주어진 식)$=(A-3)(A+4)$
$=A^2+A-12$
$=(2x^2+3x)^2+(2x^2+3x)-12$
$=4x^4+12x^3+9x^2+2x^2+3x-12$
$=4x^4+12x^3+11x^2+3x-12$
답 $4x^4+12x^3+11x^2+3x-12$

24 $(a+b-c)(a-b-c)=(a-c+b)(a-c-b)$이므로
$a-c=A$로 놓으면
$$(A+b)(A-b)=A^2-b^2$$
$$=(a-c)^2-b^2$$
$$=a^2-2ac+c^2-b^2$$
$$=a^2-b^2+c^2-2ac$$
답 ②

25 $(x-4)(x-2)(x+1)(x+3)$
$=\{(x-4)(x+3)\}\{(x-2)(x+1)\}$
$=(x^2-x-12)(x^2-x-2)$
이므로 $x^2-x=A$로 놓으면
$$(A-12)(A-2)=A^2-14A+24$$
$$=(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$$
$$=x^4-2x^3+x^2-14x^2+14x+24$$
$$=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$$
따라서 $a=-2$, $b=-13$, $c=14$이므로
$$a-b+c=-2-(-13)+14=25$$
답 ⑤

26 $x+y=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$,
$xy=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=9-8=1$이므로
$$x^2+3xy+y^2=(x+y)^2+xy$$
$$=6^2+1=37$$
답 37

27 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{6}{xy}=3$이므로
$$xy=2$$
이때 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=6^2-4\cdot2=28$이므로
$$x-y=\sqrt{28}=2\sqrt{7}(\because x>y)$$
답 ④

28 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=6^2-4=32$이고, $x>1$이므로
$$0<\frac{1}{x}<1$$
즉, $x-\frac{1}{x}>0$이므로 $x-\frac{1}{x}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$
$$\therefore x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$=6\cdot4\sqrt{2}=24\sqrt{2}$$
답 ⑤

오답 피하기

$x>1$인 조건이 있으므로 $x-\frac{1}{x}>0$임에 주의한다.

29 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로
$$2^2=14+2(ab+bc+ca)$$
$$ab+bc+ca=-5$$
$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$$
$$=\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6}$$
답 ②

빈출 유형 집중학습

29-1 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로
$$50=8^2-2(xy+yz+zx)$$
$$\therefore xy+yz+zx=7$$
답 ④

29-2 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로
$$26=2^2-2(ab+bc+ca)$$
$$\therefore ab+bc+ca=-11$$
$$\therefore ab^2c^2+a^2bc^2+a^2b^2c$$
$$=abc(ab+bc+ca)$$
$$=(-12)\cdot(-11)=132$$
답 ①

29-3 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로
$$0^2=6+2(ab+bc+ca)$$
$$\therefore ab+bc+ca=-3$$
$$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$
$$=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$
$$=(ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$$
$$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$$
$$=(-3)^2-2\cdot abc\cdot0=9$$
답 ②

30 직육면체의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b, 높이를 c라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로
$$4(a+b+c)=48$$
$$\therefore a+b+c=12$$
또 대각선의 길이가 $5\sqrt{2}$이므로
$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=5\sqrt{2}$$
$$\therefore a^2+b^2+c^2=50$$
이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로
$$12^2=50+2(ab+bc+ca)$$
$$\therefore ab+bc+ca=47$$
따라서 직육면체의 겉넓이는
$$2(ab+bc+ca)=2\times47=94$$
답 ④

31 $a-b=2$, $b-c=5$이므로
$$(a-b)+(b-c)=7,\ a-c=7$$
$$\therefore c-a=-7$$
$$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\{2^2+5^2+(-7)^2\}$$
$$=39$$
답 39

32 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$$=2^3-3\cdot3\cdot2=-10$$
답 ②

빈출 유형 집중학습

32-1 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=5^3+3\cdot(-6)\cdot5=125-90=35$ 답 ⑤

32-2 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로
$6=2^2-2xy \quad \therefore xy=-1$
$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=2^3-3\cdot(-1)\cdot2$
$=8+6=14$ 답 ③

32-3 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$이므로
$7=1^3+3ab\cdot1 \quad \therefore ab=2$
$\therefore (a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
$=1^2+4\cdot2$
$=9$ 답 ⑤

33 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로
$13=1^2-2xy \quad \therefore xy=-6$
$\therefore x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$
$=13^2-2(-6)^2$
$=169-72$
$=97$ 답 ②

34 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$에서
$5=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=7$
$\therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}\ (\because x>0)$
$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=(\sqrt{7})^3-3\sqrt{7}$
$=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}$
$=4\sqrt{7}$ 답 $4\sqrt{7}$

35 $x^2-5x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면
$x-5+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=5$
$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=5^3-3\cdot5$
$=125-15$
$=110$ 답 ③

36 $x^2=x-1$에서 $x^2-x+1=0$이고 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면
$x-1+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=1$
$\therefore$ (주어진 식)
$=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}$
$+\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=(1^3-3\cdot1)+(1^2-2)+1$
$=-2$ 답 -2

37 오른쪽과 같이 나눗셈을 하면
$Q(x)=2x+1$,
$R(x)=x+7$
이므로
$Q(2)+R(3)$
$=5+10=15$ 답 ④

$$\begin{array}{r}
2x+1 \\
x^2+x-3\,\overline{)\,2x^3+3x^2-4x+4} \\
\underline{2x^3+2x^2-6x} \\
x^2+2x+4 \\
\underline{x^2+\ x-3} \\
x+7
\end{array}$$

38 다항식 $2x^3+3x^2+ax+b$가 다항식 x^2-4x+1로 나누어떨어지므로 나머지는 0이다.

$$\begin{array}{r}
2x+11 \\
x^2-4x+1\,\overline{)\,2x^3+\ 3x^2+\qquad ax+b} \\
\underline{2x^3-\ 8x^2+\qquad 2x} \\
11x^2+(a-2)x+b \\
\underline{11x^2-\qquad 44x+11} \\
(a+42)x+b-11
\end{array}$$

즉, 위의 나눗셈에서 $(a+42)x+b-11=0$이므로
$a=-42,\ b=11$ 답 $a=-42,\ b=11$

39 다항식 x^4-3x^2+x-2를 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r}
x^3+x^2-2x-1 \\
x-1\,\overline{)\,x^4\qquad -3x^2+x-2} \\
\underline{x^4-x^3\qquad\qquad\qquad} \\
x^3-3x^2+x-2 \\
\underline{x^3-\ x^2\qquad\qquad} \\
-2x^2+x-2 \\
\underline{-2x^2+2x} \\
-x-2 \\
\underline{-x+1} \\
-3
\end{array}$$

이므로 $Q(x)=x^3+x^2-2x-1$
따라서 $Q(x)$를 x^2+x+1로 나누면 오른쪽과 같으므로 구하는 나머지는 $-3x-1$이다.

$$\begin{array}{r}
x \\
x^2+x+1\,\overline{)\,x^3+x^2-2x-1} \\
\underline{x^3+x^2+x} \\
-3x-1
\end{array}$$

답 ②

40 $x^4-x^3-9x^2+19x-8=A(x^2+2x-4)+5x-4$에서

$A(x^2+2x-4)=x^4-x^3-9x^2+14x-4$

$\therefore A=(x^4-x^3-9x^2+14x-4)\div(x^2+2x-4)$

$=x^2-3x+1$

답 ④

단계별 기출학습

본문 014~017쪽

01 ③	02 ④	03 ④	04 ②	05 -5
06 ⑤	07 ④	08 ④	09 ①	10 -15
11 ④	12 ②	13 20	14 $3\sqrt{6}$	15 ②
16 ④	17 ②	18 97	19 10	20 ②
21 ④	22 -18	23 22		

01 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^4+(1-a)x^2+3(a+3)x+2$

이때 x^2의 계수와 x의 계수는 각각 $1-a$, $3(a+3)$이고, 서로 같으므로 $1-a=3a+9$

$4a=-8 \qquad \therefore a=-2$

02 $A-2(C-B)+C$

$=A+2B-C$

$=(-x^2+x+4)+2(x^3-2x-1)-(-x^3+x^2-3x)$

$=-x^2+x+4+2x^3-4x-2+x^3-x^2+3x$

$=3x^3-2x^2+2$

03 $B\triangledown A=B-A=(-x^2+2x+1)-(x^2-x-2)$

$=-2x^2+3x+3$

이므로

$A\triangle(B\triangledown A)=(x^2-x-2)\triangle(-2x^2+3x+3)$

$=(x^2-x-2)-2(-2x^2+3x+3)$

$=5x^2-7x-8$

04 $(1-2x+3x^2-4x^3+5x^4)^2$

$=(1-2x+3x^2-4x^3+5x^4)(1-2x+3x^2-4x^3+5x^4)$

이므로 x^5항은

$(-2x)\cdot5x^4+3x^2\cdot(-4x^3)+(-4x^3)\cdot3x^2$

$+5x^4\cdot(-2x)$

$=-10x^5-12x^5-12x^5-10x^5=-44x^5$

따라서 x^5의 계수는 -44이다.

05 $(2x^2-x+1)(x^2-2x+k)$의 전개식에서 x^2항은

$2x^2\cdot k+(-x)\cdot(-2x)+1\cdot x^2=(2k+3)x^2$

이고, x^2의 계수가 9이므로

$2k+3=9 \qquad \therefore k=3$

이때 주어진 식의 전개식에서 x항은

$(-x)\cdot k+1\cdot(-2x)=(-k-2)x$이므로 x의 계수는

$-k-2=-3-2=-5$

06 (주어진 식)$=(2x-y)\{(2x)^2+2x\cdot y+y^2\}$

$-(x+3y)\{x^2-x\cdot3y+(3y)^2\}$

$=\{(2x)^3-y^3\}-\{x^3+(3y)^3\}$

$=8x^3-y^3-x^3-27y^3$

$=7x^3-28y^3$

이므로 $a=7$, $b=28$

$\therefore a+b=7+28=35$

07 $x^2+2x=A$로 놓으면

(주어진 식)$=(A-2)(A+3)$

$=A^2+A-6$

$=(x^2+2x)^2+(x^2+2x)-6$

$=x^4+4x^3+4x^2+x^2+2x-6$

$=x^4+4x^3+5x^2+2x-6$

이므로 $a=4$, $b=5$, $c=6$

$\therefore a+b+c=15$

08 $(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$

$=\{(x-2)(x+3)\}\{(x-1)(x+2)\}$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-2)$

이때 $x^2+x=A$로 놓으면

(주어진 식)$=(A-6)(A-2)$

$=A^2-8A+12$

$=(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

$=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

즉, x^2의 계수는 -7, x의 계수는 -8이므로

$a=-7$, $b=-8$

$\therefore a-b=-7-(-8)=1$

09 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^4-1)(x^4+1)$

$=x^8-1$

$=40-1(\because x^8=40)$

$=39$

10 $(ax+by)(bx+ay)$

$=abx^2+(a^2+b^2)xy+aby^2$

$=ab(x^2+y^2)+(a^2+b^2)xy$

$=ab\{(x+y)^2-2xy\}+\{(a+b)^2-2ab\}xy$

$=(-2)\cdot(4^2-2\cdot1)+\{(-3)^2-2\cdot(-2)\}\cdot1$

$=-28+13=-15$

11 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$13=1^2-2xy \qquad \therefore xy=-6$

또 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$x^3+y^3=1^3-3\cdot(-6)\cdot 1=19$

$\therefore x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2$

$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)$

$=13\cdot 19-(-6)^2\cdot 1$

$=247-36$

$=211$

12 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$2^2=4+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=0$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$

$=(ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$

$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=0^2-2\cdot(-3)\cdot 2$

$=12$

13 $x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy=10$에서

$2^2+3xy=10 \qquad \therefore xy=2$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=2^3+3\cdot 2\cdot 2=8+12=20$

14 $\left(x-\frac{4}{x}\right)^2+\left(4x+\frac{1}{x}\right)^2=68$에서

$x^2-8+\frac{16}{x^2}+16x^2+8+\frac{1}{x^2}$

$=17x^2+\frac{17}{x^2}=17\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$=68$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=4$

이때 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=4+2=6$이므로

$x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}\ (\because x>0)$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{6})^3-3\sqrt{6}$

$=3\sqrt{6}$

15 오른쪽과 같이 나눗셈을 하면

$$\begin{array}{r} 3x-5 \\ x^2+x-1\overline{)3x^3-2x^2-4x+3} \\ \underline{3x^3+3x^2-3x} \\ -5x^2-x+3 \\ \underline{-5x^2-5x+5} \\ 4x-2 \end{array}$$

$Q(x)=3x-5$,

$R(x)=4x-2$

$\therefore Q(2)-R(-1)$

$=1-(-6)=7$

16 $(x^2-x+1)^3$

$=\{(x^2-x)+1\}^3$

$=(x^2-x)^3+3(x^2-x)^2\cdot 1+3(x^2-x)\cdot 1^2+1^3$

$=(x^6-3x^5+3x^4-x^3)+3(x^4-2x^3+x^2)+3(x^2-x)+1$

$=x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1$

따라서 x^4의 계수는 6, x의 계수는 -3이므로

$a+b=6-3=3$

17 $P=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{32}}\right)$

의 양변에 $\left(1-\frac{1}{2}\right)$을 곱하면

$\left(1-\frac{1}{2}\right)P$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$
$\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{32}}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{32}}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{32}}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{32}}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2^{16}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{32}}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2^{32}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{32}}\right)$

$=1-\frac{1}{2^{64}}$

즉, $\frac{1}{2}P=1-\frac{1}{2^{64}}$이므로

$\frac{1}{2^{64}}=1-\frac{1}{2}P=\frac{2-P}{2}$

$\therefore 2^{64}=\frac{2}{2-P}$

18 $\overline{OA}=a$, $\overline{OD}=b$, $\overline{OG}=c$라 하면 세 삼각형의 넓이의 합이 16이므로

$\triangle OCD+\triangle OFG+\triangle OIA$

$=\frac{1}{2}ab\sin 30^\circ+\frac{1}{2}bc\sin 30^\circ+\frac{1}{2}ca\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{4}(ab+bc+ca)$

$=16$

$\therefore ab+bc+ca=64$

또 세 정사각형의 둘레의 길이의 합이 60이므로

$4(a+b+c)=60 \qquad \therefore a+b+c=15$

따라서 세 정사각형의 넓이의 합은

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=15^2-2\cdot 64=97$

19 주어진 그림에서 $\overline{OQ}=x$, $\overline{OR}=y$ $(x>0,\ y>0)$라 하면

$\overline{OP}=\overline{OA}=6$

이므로 $x^2+y^2=36$

또 사각형 OQPR의 넓이가 14이므로

$xy=14$

한편 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로

$(x+y)^2=36+2\cdot14=64$

$\therefore x+y=8$ ($\because x>0,\ y>0$)

이때 $\overline{AQ}=\overline{OA}-\overline{OQ}=6-x$,

$\overline{BR}=\overline{OB}-\overline{OR}=6-y$이고, $\overline{QR}=\overline{OP}=6$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AQ}+\overline{QR}+\overline{BR}&=\overline{AQ}+\overline{OP}+\overline{BR}\\&=(6-x)+6+(6-y)\\&=18-(x+y)\\&=18-8\\&=10\end{aligned}$$

20 $x^2-3x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-3+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\dfrac{1}{x}=3$

이때 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$,

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=3^3-3\cdot3=18$이므로

$x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2=7^2-2=47$,

$$\begin{aligned}x^7+\frac{1}{x^7}&=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=18\cdot47-3=843\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore x^7+x^4+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^7}&=\left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)+\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\\&=843+47\\&=890\end{aligned}$$

21 $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=0$이므로

$3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)=0$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a=b=c$

즉, △ABC는 정삼각형이므로 한 변의 길이를 $a(a>0)$라 하면 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=9\sqrt{3}$에서

$a^2=36 \qquad \therefore a=6$ ($\because a>0$)

따라서 △ABC의 둘레의 길이는

$3\cdot6=18$

22 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$21=1^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-10$

······························ ❶

이때 $x+y+z=1$에서 $x+y=1-z$, $y+z=1-x$, $z+x=1-y$이므로

$$\begin{aligned}&(x+y)(y+z)(z+x)\\&=(1-z)(1-x)(1-y)\\&=(1-x)(1-y)(1-z)\end{aligned}$$

······························ ❷

$$\begin{aligned}&=1^3-(x+y+z)\cdot1^2+(xy+yz+zx)\cdot1-xyz\\&=1-1+(-10)-8=-18\end{aligned}$$

······························ ❸

채점 기준	성취도
❶ $xy+yz+zx$의 값 구하기	20 %
❷ 주어진 식을 변형하기	30 %
❸ 식의 값 구하기	50 %

23 $x^3+y^4=5$, $x^4+y^3=6$을 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}(x^3+y^4)(x^4+y^3)&=x^7+x^3y^3+x^4y^4+y^7\\&=x^7+y^7+(xy)^3+(xy)^4\end{aligned}$$

······························ ❶

$$\begin{aligned}\therefore x^7+y^7&=(x^3+y^4)(x^4+y^3)-\{(xy)^3+(xy)^4\}\\&=5\cdot6-\{(-2)^3+(-2)^4\}\\&=30-8\\&=22\end{aligned}$$

······························ ❷

채점 기준	성취도
❶ 두 식을 변끼리 곱하기	40 %
❷ 식의 값 구하기	60 %

02 항등식과 나머지정리

02 항등식과 나머지정리

본문 018~025쪽

01 답 (1) 방 (2) 항 (3) 항

02 (4) $(2x+a)(3x-2)=6x^2+(3a-4)x-2a$이므로

$6=b,\ 3a-4=8,\ -2a=c$

$\therefore\ a=4,\ b=6,\ c=-8$

답 (1) $a=-2,\ b=4$ (2) $a=5,\ b=3$
(3) $a=3,\ b=-2,\ c=4$ (4) $a=4,\ b=6,\ c=-8$

03 (1) $2a-c=0,\ b+2a=0,\ c-4=0$이므로

$a=2,\ b=-4,\ c=4$

(2) $ax+(3x+2y)b-(y-1)c-2=0$에서

$ax+3bx+2by-cy+c-2=0$

$(a+3b)x+(2b-c)y+c-2=0$

이므로 $a+3b=0,\ 2b-c=0,\ c-2=0$

$\therefore\ a=-3,\ b=1,\ c=2$

(3) $a(3x+y)+b(2x-y)+5c-3$

$=3ax+ay+2bx-by+5c-3$

$=(3a+2b)x+(a-b)y+5c-3$

이므로

$3a+2b=3,\ a-b=6,\ 5c-3=7$

위의 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-3,\ c=2$

답 (1) $a=2,\ b=-4,\ c=4$ (2) $a=-3,\ b=1,\ c=2$
(3) $a=3,\ b=-3,\ c=2$

04 (1) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-c=1 \qquad \therefore\ c=-1$

$x=1$을 대입하면 $b=4$

$x=2$를 대입하면 $2a+2b+c=11$이므로

$2a+8-1=11 \qquad \therefore\ a=2$

(2) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2b=1 \qquad \therefore\ b=\frac{1}{2}$

$x=1$을 대입하면 $-c=-1 \qquad \therefore\ c=1$

$x=2$를 대입하면 $2a=-1 \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2}$

(3) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a-b+c=1$ …… ㉠

$x=1$을 대입하면 $c=2$

$x=2$를 대입하면 $a+b+c=5$ …… ㉡

이때 $c=2$이므로 ㉠에서 $a-b=-1$ …… ㉢

또 ㉡에서 $a+b=3$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2$

답 (1) $a=2,\ b=4,\ c=-1$ (2) $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2},\ c=1$
(3) $a=1,\ b=2,\ c=2$

05 (1) $1^2+3\cdot1-2=2$

(2) $8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1=2+2+1=5$

답 (1) 2 (2) 5

06 (1) $2\cdot2^2-4\cdot2+k=1$에서 $8-8+k=1 \qquad \therefore\ k=1$

(2) $-2^3+4\cdot2^2+k\cdot2+5=3$에서

$-8+16+2k+5=3,\ 2k=-10$

$\therefore\ k=-5$

답 (1) 1 (2) -5

07 $f(x)=x^3-2x^2+x+k$로 놓으면

(1) $f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=(-1)^3-2(-1)^2+(-1)+k=0$

$-4+k=0 \qquad \therefore\ k=4$

(2) $f(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로

$f(2)=2^3-2\cdot2^2+2+k=0$

$2+k=0 \qquad \therefore\ k=-2$

답 (1) 4 (2) -2

08 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ & & 3 & 1 & 2 \\ \hline & 3 & 1 & 2 & \boxed{4} \end{array}$$

따라서 몫은 $3x^2+x+2$이고, 나머지는 4이다.

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -5 & 6 & 1 \\ & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 2 & -4 & 4 & \boxed{3} \end{array}$$

이때 나누는 식이 $2x-1$이므로 몫은

$\frac{1}{2}(2x^2-4x+4)=x^2-2x+2$이고, 나머지는 3이다.

답 (1) 몫 : $3x^2+x+2$, 나머지 : 4
(2) 몫 : x^2-2x+2, 나머지 : 3

09 주어진 등식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^3+3x^2+2(a-1)x-a=2x^3+bx^2+4x+c$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$b=3,\ 2(a-1)=4,\ -a=c$

즉, $a=3,\ b=3,\ c=-3$이므로

$a+b+c=3$ 답 ⑤

10 $a(x-y)-b(2x+y)=3x-6y$의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$(a-2b)x-(a+b)y=3x-6y$

위의 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-2b=3$, $a+b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=1$

$\therefore ab=5$ 답 5

11 주어진 등식을 k에 대하여 정리하면

$(x-2y)k+3x+2y+16=0$

위의 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-2y=0$, $3x+2y+16=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-4$, $y=-2$

$\therefore x^2+y^2=(-4)^2+(-2)^2=20$ 답 ②

12 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b+2$

$\therefore a+b=-3$ ...... ㉠

또 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=16+4a+2b+2$

$\therefore 2a+b=-9$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=3$

$\therefore a-b=-6-3=-9$ 답 -9

빈출 유형 집중학습

12-1 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면 $-3b=-3$ $\therefore b=1$

또 양변에 $x=2$를 대입하면 $3a=12$ $\therefore a=4$

$\therefore a^2+b^2=4^2+1^2=17$

다른 풀이

$a(x+1)+b(x-2)=5x+2$에서 좌변을 x에 대하여 정리하면 $(a+b)x+a-2b=5x+2$이므로

$a+b=5$, $a-2b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=17$ 답 17

12-2 주어진 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 양변에

$x=0$을 대입하면 $4=2a$ $\therefore a=2$

$x=1$을 대입하면 $3=-b$ $\therefore b=-3$

$x=2$를 대입하면 $4=2c$ $\therefore c=2$

$\therefore a+2b+3c=2-6+6=2$ 답 2

13 다항식 $f(x)$가 일차식이므로 $f(x)=px+q$(p, q는 상수)로 놓으면

(좌변)$=(3x+1)(px+q)+3x-2$

$=3px^2+(p+3q+3)x+q-2$

(우변)$=12x^2-2x+k$

이므로 $3p=12$, $p+3q+3=-2$, $q-2=k$

$\therefore p=4$, $q=-3$, $k=-5$

다른 풀이

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-\frac{1}{3}$을 대입하면

$0\cdot f\left(-\frac{1}{3}\right)+3\left(-\frac{1}{3}\right)-2=12\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2\left(-\frac{1}{3}\right)+k$

$\therefore k=-5$ 답 ①

14 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3^2\cdot(-2)^3=a_9+a_8+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=-72$ 답 ①

15 주어진 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a_8+a_7+\cdots+a_1+a_0$ ...... ㉠

또 양변에 $x=-1$을 대입하면

$4^4=a_8-a_7+\cdots-a_1+a_0$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$4^4=2^8=2(a_8+a_6+a_4+a_2+a_0)$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=2^7$ 답 ②

16 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2^{10}=a_{20}+a_{19}+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}=1024$ 답 1024

17 주어진 이차방정식이 $x=1$을 근으로 가지므로 $x=1$을 주어진 식에 대입하면

$1+2(k-3)+ak+b=0$ ...... ㉠

이때 ㉠이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 k에 대하여 정리하면

$(2+a)k+b-5=0$

$\therefore a=-2$, $b=5$ 답 ②

18 $\frac{x}{2}+y=4$에서 $x+2y=8$

$\therefore 2y=8-x$ ...... ㉠

㉠을 $ax+2y-b=0$에 대입하면

$ax+(8-x)-b=0$

$(a-1)x+8-b=0$ ...... ㉡

㉡이 x에 대한 항등식이므로 $a=1$, $b=8$

$\therefore b-a=8-1=7$ 답 ③

19 $x-y=1$에서

$$y=x-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠을 $ax^2+y^2+3x-by+c=0$에 대입하면

$$ax^2+(x-1)^2+3x-b(x-1)+c=0$$

$$(a+1)x^2+(1-b)x+1+b+c=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡이 x에 대한 항등식이므로

$$a+1=0,\ 1-b=0,\ 1+b+c=0$$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=-2$이므로

$$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+(-2)^2=6$$

답 6

20 x^3+ax^2+b를 x^2-2x-2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$$x^3+ax^2+b=(x^2-2x-2)(x+c)$$
$$=x^3+(-2+c)x^2-2(c+1)x-2c$$

위의 식이 x에 대한 항등식이므로

$$a=-2+c,\ 0=-2(c+1),\ b=-2c$$

따라서 $a=-3$, $b=2$, $c=-1$이므로

$$a+b=-1$$

답 ①

21 x^3+ax^2+b를 x^2-3x+6으로 나누었을 때의 몫을 $x+c$(c는 상수)라 하면

$$x^3+ax^2+b=(x^2-3x+6)(x+c)-4$$
$$=x^3+(-3+c)x^2+3(2-c)x+6c-4$$

위의 식이 x에 대한 항등식이므로

$$a=-3+c,\ 0=3(2-c),\ b=6c-4$$

따라서 $a=-1$, $b=8$, $c=2$이므로

$$ab=-8$$

답 ②

22 다항식 $2x^3+kx^2-3x+4$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면 몫이 $2x+1$이므로

$$2x^3+kx^2-3x+4=(x^2-x+1)(2x+1)+ax+b$$
$$=2x^3-x^2+(a+1)x+b+1$$

위의 식이 x에 대한 항등식이므로

$$k=-1,\ -3=a+1,\ 4=b+1$$

따라서 $a=-4$, $b=3$이므로 구하는 나머지는 $-4x+3$이다.

답 $k=-1$, 나머지 : $-4x+3$

23 나머지정리에 의하여 $f(2)=2$, $g(2)=-3$

이때 다항식 $2f(x)+3g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $2f(2)+3g(2)$이므로

$$2f(2)+3g(2)=2\cdot2+3\cdot(-3)=-5$$

답 ⑤

24 다항식 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -6이므로 나머지정리에 의하여 $f(-3)=-6$

따라서 $(x-2)f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$$(-3-2)f(-3)=(-5)\cdot(-6)=30$$

답 30

25 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$으로 놓으면 나머지정리에 의하여

$f(1)=1+a+b+3=2$이므로

$$a+b=-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f(-1)=-1+a-b+3=6$이므로

$$a-b=4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

$$\therefore a^2+b^2=1^2+(-3)^2=10$$

답 ②

빈출유형 집중학습

25-1 $f(x)=x^3+(2a-1)x^2+x+1$로 놓으면 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$$f(-1)=-1+(2a-1)-1+1=2a-2$$

또 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$$f(2)=8+4(2a-1)+2+1=8a+7$$

이때 $f(-1)=f(2)$이므로

$$2a-2=8a+7,\ 6a=-9$$

$$\therefore a=-\frac{3}{2}$$

답 ③

25-2 $f(x)=8x^4+2x^2+ax+3$으로 놓으면 나머지정리에 의하여 $f(1)=8+2+a+3=11$

$$a+13=11 \qquad \therefore a=-2$$

즉, $f(x)=8x^4+2x^2-2x+3$이고, 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나눈 나머지는 $f\left(\frac{1}{2}\right)$이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+3=3$$

답 3

26 다항식 $f(x)$를 x^2+3x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2+3x+2)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

$f(-1)=3$에서 $-a+b=3 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(-2)=-1$에서 $-2a+b=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=7$

따라서 구하는 나머지는 $4x+7$이다.

답 ④

27 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-1)(x+3)Q(x)+ax+b$$

$f(1)=13$에서 $a+b=13 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(-3)=1$에서 $-3a+b=1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=10$

따라서 $R(x)=3x+10$이므로

$$R(-2)=-6+10=4$$

답 4

28 다항식 $f(x)$를 x^2+x-6으로 나눈 몫을 $Q'(x)$라 하면

$$f(x)=(x^2+x-6)Q'(x)+3$$
$$=(x+3)(x-2)Q'(x)+3$$

이므로 $f(2)=3$

또 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 몫을 $Q''(x)$라 하면

$$f(x)=(x^2-4x+3)Q''(x)+3x$$
$$=(x-1)(x-3)Q''(x)+3x$$

이므로 $f(3)=3\cdot3=9$

한편 $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$$

$f(2)=3$에서 $2a+b=3$ ······ ㉠

$f(3)=9$에서 $3a+b=9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=-9$

따라서 구하는 나머지는 $6x-9$이다. 답 ④

29 다항식 $f(x)$를 x^2-6x+8로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $3x+1$이므로

$f(x)=(x^2-6x+8)Q(x)+3x+1$ ······ ㉠

이때 다항식 $f(x-1)$을 $x-3$으로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(3-1)=f(2)$이므로 ㉠에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=0\cdot Q(2)+3\cdot2+1=7$ 답 ②

30 다항식 $f(x)$를 $(3x-1)(x+6)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-2x+5$이므로

$f(x)=(3x-1)(x+6)Q(x)-2x+5$ ··· ㉠

이때 다항식 $f(9x)$를 $3x+2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $f\left(9\left(-\frac{2}{3}\right)\right)=f(-6)$이므로 ㉠에 $x=-6$을 대입하면

$f(-6)=0\cdot Q(-6)-2\cdot(-6)+5=17$ 답 ④

31 다항식 x^3+x^2+x+1을 $x-1$로 나눈 나머지를 R라 하면 나머지정리에 의하여

$R=1^3+1^2+1+1=4$

$\therefore x^3+x^2+x+1=(x-1)Q(x)+4$ ······ ㉠

이때 $Q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $Q(2)$이므로 ㉠에 $x=2$를 대입하면

$2^3+2^2+2+1=1\cdot Q(2)+4$

$15=Q(2)+4$

$\therefore Q(2)=11$ 답 ③

빈출유형 집중학습

31-1 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+3$ ······ ㉠

이때 $Q(x)$를 $x-2$로 나누면 나머지가 1이므로 나머지정리에 의하여

$Q(2)=1$

따라서 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(2)$이므로 ㉠에 $x=2$를 대입하면

$$f(2)=1\cdot Q(2)+3$$
$$=1\cdot1+3=4$$

답 ④

31-2 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누면 몫이 $Q_1(x)$, 나머지가 4이므로

$f(x)=(x+1)Q_1(x)+4$ ······ ㉠

또 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누면 몫이 $Q_2(x)$, 나머지가 -3이므로

$f(x)=(x-3)Q_2(x)-3$ ······ ㉡

한편 $3Q_1(x)+Q_2(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $3Q_1(2)+Q_2(2)$이므로 ㉠과 ㉡에 각각 $x=2$를 대입하면

$f(2)=3Q_1(2)+4$ ······ ㉢

$f(2)=-Q_2(2)-3$ ······ ㉣

㉢과 ㉣에서

$3Q_1(2)+4=-Q_2(2)-3$

$\therefore 3Q_1(2)+Q_2(2)=-7$ 답 -7

32 $f(x)$가 $x+1$을 인수로 가지므로 $f(-1)=0$에서

$-1+2+4+k=0$

$\therefore k=-5$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-4x-5$이므로

$f(2)=8+8-8-5=3$ 답 ③

33 다항식 x^3+3x^2+ax+b가 $x-1$, $x-2$로 모두 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$1+3+a+b=0$

$\therefore a+b=-4$ ······ ㉠

$8+12+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-20$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-16$, $b=12$

$\therefore a-b=-16-12=-28$ 답 ①

34 $f(x+1)$을 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x+1)=(x+2)Q(x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠은 x에 대한 항등식이므로 ㉠에 $x=-2$를 대입하면

$$f(-1)=0$$

즉, $-1+a+3+1=0$에서 $a=-3$ 　답 -3

35 $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$라 하면

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$이므로 다항식 $f(x)$는 $x+1$, $x+2$를 각각 인수로 갖는다. 즉,

$$f(-1)=f(-2)=0$$

$f(-1)=0$에서 $-1+a-b-2=0$

$$\therefore a-b=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(-2)=0$에서 $-8+4a-2b-2=0$

$$\therefore 2a-b=5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=-1$$

$$\therefore ab=2\cdot(-1)=-2$$

답 ①

36 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 몫은 $3x^2+x+2$, 나머지는 3이므로

1	3	-2	1	1
		3	1	2
	3	1	2	3

$$a=1,\ b=2,\ R=3$$

$$\therefore a-b+R=1-2+3=2$$

답 2

37 $f(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)Q(x)+R$

$$=\frac{1}{2}(2x-3)Q(x)+R$$

$$=(2x-3)\cdot\frac{1}{2}Q(x)+R$$

이므로 다항식 $f(x)$를 $2x-3$으로 나눈 몫은 $\dfrac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R이다. 　답 ②

오답 피하기

다항식 $f(x)$를 $x-\dfrac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$f(x)=\left(x-\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$

$$=a\left(x-\frac{b}{a}\right)\left\{\frac{1}{a}Q(x)\right\}+R$$

$$=(ax-b)\left\{\frac{1}{a}Q(x)\right\}+R$$

이때 구하는 몫이 $\dfrac{1}{a}Q(x)$이므로 몫을 $Q(x)$로 구하지 않도록 주의한다.

38 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$라 하면 $f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

1	1	a	b	2
		1	$a+1$	$a+b+1$
1	1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b+3$
		1	$a+2$	
	1	$a+2$	$2a+b+3$	

위의 조립제법에서

$$a+b+3=0,\ 2a+b+3=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$ 　답 $a=0$, $b=-3$

39 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2(x+1)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(a, b, c는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-1)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ㉠$$

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지가 $3x+2$이므로 ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누면 나머지가 $3x+2$이어야 한다. 즉,

$$ax^2+bx+c=a(x-1)^2+3x+2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x-1)^2(x+1)Q(x)+a(x-1)^2+3x+2 \quad \cdots\cdots ㉢$$

이때 나머지정리에 의하여 $f(-1)=3$이므로

$$4a-1=3 \qquad \therefore a=1$$

$a=1$을 ㉢에 대입하면

$$f(x)=(x-1)^2(x+1)Q(x)+(x-1)^2+3x+2$$

$$=(x-1)^2(x+1)Q(x)+x^2+x+3$$

따라서 구하는 나머지는 x^2+x+3이다. 　답 ①

40 다항식 $f(x)$를 $x(x-1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(a, b, c는 상수)라 하면

$$f(x)=x(x-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ㉠$$

다항식 $f(x)$를 $x(x-2)$로 나눈 나머지가 $3x+4$이므로 ax^2+bx+c를 $x(x-2)$로 나누면 나머지가 $3x+4$이어야 한다. 즉,

$$ax^2+bx+c=ax(x-2)+3x+4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=x(x-1)(x-2)Q(x)+ax(x-2)+3x+4 \quad \cdots\cdots ㉢$$

또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나누어떨어지므로

$$f(1)=0$$

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$0=-a+7 \qquad \therefore a=7$$

따라서 $R(x)=7x(x-2)+3x+4=7x^2-11x+4$이므로

$$R(3)=7\cdot3^2-11\cdot3+4=34$$

답 34

단계별 기출학습

본문 026~029쪽

01 ③	02 ③	03 ④	04 3	05 ③
06 ①	07 26	08 ②	09 ④	10 ①
11 ②	12 ①	13 ③	14 ①	15 ③
16 1	17 3	18 4	19 ⑤	20 8
21 ③	22 21	23 4		

01 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$2x^4+bx^3+(2a+c)x^2+abx+ac$

$=2x^4-4x^3+5x^2-4x+3$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로

$b=-4,\ 2a+c=5,\ ab=-4,\ ac=3$

위의 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-4,\ c=3$

$\therefore\ a-b+c=1-(-4)+3=8$

02 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 등식의 양변에

$x=0$을 대입하면 $-2=-b$ $\quad\therefore\ b=2$

$x=-1$을 대입하면 $6=2c$ $\quad\therefore\ c=3$

$x=1$을 대입하면 $-4=2a$ $\quad\therefore\ a=-2$

$\therefore\ a+b+c=-2+2+3=3$

03 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4^3\cdot1^{10}=a_{19}+a_{18}+a_{17}+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore\ a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}=64$

04 이차방정식 $x^2-(k-2)x+(k-3)m+2n+1=0$의 근이 $x=-1$이므로 주어진 방정식에 대입하면

$1+(k-2)+(k-3)m+2n+1=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 k에 대한 항등식이므로 k에 대하여 정리하면

$(1+m)k+(-3m+2n)=0$

$\therefore\ 1+m=0,\ -3m+2n=0$

따라서 $m=-1,\ n=-\frac{3}{2}$이므로

$2mn=2\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=3$

05 $3x+y=2$에서 $y=2-3x$이므로 $ax+2by=16$에 대입하면

$ax+2b(2-3x)=16$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로 x에 대하여 정리하면

$(a-6b)x+4b-16=0$

$\therefore\ a-6b=0,\ 4b-16=0$

따라서 $a=24,\ b=4$이므로

$a+b=24+4=28$

06 다항식 x^3+ax+b를 x^2+3x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x+3$이므로

$x^3+ax+b=(x^2+3x+2)Q(x)+2x+3$

$=(x+1)(x+2)Q(x)+2x+3$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로 등식의 양변에

$x=-1$을 대입하면 $-1-a+b=1$

$\therefore\ a-b=-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x=-2$를 대입하면 $-8-2a+b=-1$

$\therefore\ 2a-b=-7$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=-3$

$\therefore\ a+b=-8$

07 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+2$로 놓으면 나머지정리에 의하여 $f(-1)=9,\ f(2)=30$이므로

$f(-1)=1-a+b+2=9$에서 $a-b=-6$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=16+8a+4b+2=30$에서 $2a+b=3$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=5$

$\therefore\ a^2+b^2=(-1)^2+5^2=26$

08 나머지정리에 의하여 $f(1)=1,\ f(-3)=-11$이고, 다항식 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$

$=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=-3,\ x=1$을 각각 대입하면

$f(-3)=-11$에서 $-3a+b=-11$

$\therefore\ 3a-b=11$ $\cdots\cdots$ ㉡

$f(1)=1$에서 $a+b=1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-2$

따라서 $R(x)=3x-2$이므로

$R(2)=4$

09 $f(x)=(4x-2)Q(x)+R$

$=(2x-1)\cdot2Q(x)+R$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot4Q(x)+R$

이므로

$A=2Q(x),\ C=4Q(x),\ B=D=R$

$\therefore\ A+C=6Q(x),\ B+D=2R$

10 $f(x)$를 $x+4$로 나눈 나머지가 2이므로 나머지정리에 의하여 $f(-4)=2$

이때 $(x-1)f(x)$를 $x+4$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $(x-1)f(x)$에 $x=-4$를 대입한 값과 같으므로 $(-4-1)f(-4)=(-5)\cdot2=-10$

11 $x^3+2x^2-x+1=(x+2)p(x)+x+5$ ⋯⋯ ㉠

이때 $p(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $p(1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3=3p(1)+6$

$\therefore p(1)=-1$

12 $f(x)=(3x^2+2x-1)Q(x)+2x-3$ ⋯⋯ ㉠

이때 다항식 $f(x+3)$을 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(x+3)$에 $x=-4$를 대입한 값과 같으므로

$f(-4+3)=f(-1)$

따라서 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=0\cdot Q(-1)-5=-5$

13 다항식 $4x^3-2x^2+2x+3$을 $2x-1$로 나눈 몫과 나머지를 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 구하면

$\frac{1}{2}$	4	-2	2	3
		2	0	1
	4	0	2	$\boxed{4}$

몫은 $Q(x)=\frac{1}{2}(4x^2+2)=2x^2+1$, 나머지는 $R=4$이므로

$Q(1)+R=3+4=7$

14 $f(x)$를 x^2+2x+4로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $-2x-8$이므로

$f(x)=(x^2+2x+4)Q(x)-2x-8$ ⋯⋯ ㉠

이때 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 3이므로

$Q(x)=(x-2)Q'(x)+3$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2+2x+4)\{(x-2)Q'(x)+3\}-2x-8\\&=(x^3-8)Q'(x)+3(x^2+2x+4)-2x-8\\&=(x^3-8)Q'(x)+3x^2+4x+4\end{aligned}$$

따라서 $R(x)=3x^2+4x+4$이므로 $R(-1)=3$

15 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)^2(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$ ⋯⋯ ㉠

이때 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $2x+8$이고, ㉠에서 $(x+1)^2(x-3)Q(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누면 나누어떨어지므로 ax^2+bx+c를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+8$이어야 한다.

즉, $ax^2+bx+c=a(x+1)^2+2x+8$이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x+1)^2(x-3)Q(x)+a(x+1)^2+2x+8$ ⋯⋯ ㉡

한편 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 -2이므로 나머지정리에 의하여 $f(3)=-2$

$x=3$을 ㉡에 대입하면

$f(3)=a(3+1)^2+2\cdot3+8=-2$

$16a=-16$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 구하는 나머지는 ㉡에서

$-1\cdot(x+1)^2+2x+8=-x^2+7$

16 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{30}$ ⋯⋯ ㉠

또 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{29}+a_{30}$ ⋯⋯ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$2=2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{29})$

$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{29}=1$

17 다항식 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차식이므로

$f(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수) ⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다.

이때 다항식 $(x-4)f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $(x-4)f(x)$에 $x=3$을 대입한 값과 같으므로

$-f(3)=-5$ $\quad\therefore f(3)=5$

또 다항식 $(x-2)f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $(x-2)f(x)$에 $x=4$를 대입한 값과 같으므로

$2f(4)=18$ $\quad\therefore f(4)=9$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$5=9+3a+b$ $\quad\therefore 3a+b=-4$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$9=16+4a+b$ $\quad\therefore 4a+b=-7$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=5$

$\therefore f(x)=x^2-3x+5$

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(1)=1-3+5=3$

18 $\{f(x)\}^{10}$을 $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{9}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^{10}&=\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{9}\right)Q(x)+ax+b\\&=\frac{1}{9}(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b\end{aligned}$$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=a+b$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-a+b$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 $R(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이므로

$R(7)=\frac{1}{2}\cdot 7+\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4$

19 $30=x$로 놓으면 29^{999}은 $(x-1)^{999}$이므로 29^{999}을 30으로 나눈 나머지는 $(x-1)^{999}$을 x로 나눈 나머지와 같다.

이때 $(x-1)^{999}$을 x로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $(x-1)^{999}=x\cdot Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$(-1)^{999}=0\cdot Q(0)+R$ $\quad\therefore R=-1$

그런데 $0\le R<30$이므로 29^{999}을 30으로 나눈 나머지는

$30+(-1)=29$

20 조건 (가)에서 삼차다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누면 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다. 즉,

$f(x)=(x-1)^2(ax+b)$ ($a\neq0$인 상수, b는 상수) …… ㉠

또 조건 (나)에서 $f(x)$를 $x+1$로 나누면 나머지가 8이므로 나머지정리에 의하여 $f(-1)=8$

$8=4(-a+b)$ $\quad\therefore a-b=-2$ …… ㉡

조건 (다)에서 $f(x^2-1)$을 $f(x)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $-6x+10$이므로

$f(x^2-1)=f(x)Q(x)-6x+10$ …… ㉢

㉠에서 $f(1)=0$이므로 ㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(0)=f(1)Q(1)+4=0\cdot Q(1)+4$

$x=0$을 ㉠에 대입하면

$f(0)=b=4$ $\quad\therefore b=4$

$b=4$를 ㉡에 대입하면 $a=2$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(2x+4)$이므로

$f(2)=(2-1)^2\cdot(2\cdot2+4)=8$

21

$$\begin{array}{r|rrrl}
2 & 2 & -3 & -4 & 5\\
 & & 4 & 2 & -4\\ \hline
2 & 2 & 1 & -2 & \boxed{1}=d\\
 & & 4 & 10 & \\ \hline
2 & 2 & 5 & \boxed{8}=c & \\
 & & 4 & & \\ \hline
 & \underset{a}{\underset{\|}{2}} & \boxed{9}=b & &
\end{array}$$

위의 조립제법에 의하여 $a=2$, $b=9$, $c=8$, $d=1$

$\therefore ab+cd=26$

다른 풀이

$x-2=t$로 놓으면 $x=t+2$이므로

$2x^3-3x^2-4x+5$

$=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$

에서

$2(t+2)^3-3(t+2)^2-4(t+2)+5$

$=at^3+bt^2+ct+d$

이때 위의 등식의 좌변을 전개하면

$2t^3+9t^2+8t+1=at^3+bt^2+ct+d$

이므로 $a=2$, $b=9$, $c=8$, $d=1$

$\therefore ab+cd=18+8=26$

22 다항식 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 10이므로

$f(2)+g(2)=10$

❶

또 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $x-2$로 나눈 나머지가 58이므로

$\{f(2)\}^2+\{g(2)\}^2=58$

❷

이때 $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(2)g(2)$이므로

$\{f(2)\}^2+\{g(2)\}^2=\{f(2)+g(2)\}^2-2f(2)g(2)$

$58=10^2-2f(2)g(2)$, $-42=-2f(2)g(2)$

$\therefore f(2)g(2)=21$

❸

채점 기준	성취도
❶ 나머지정리를 이용하여 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지를 나타내기	30 %
❷ 나머지정리를 이용하여 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $x-2$로 나눈 나머지를 나타내기	30 %
❸ $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지 구하기	40 %

23 $f(x)=x^3+ax^2+x-b$로 놓으면 $f(x)$가 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$, $f(2)=0$

$f(-1)=-1+a-1-b=0$에서 $a-b=2$ …… ㉠

$f(2)=8+4a+2-b=0$에서 $4a-b=-10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=-6$

❶

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+x+6$이므로 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(1)=1^3-4\cdot1^2+1+6=4$

❷

채점 기준	성취도
❶ a, b의 값을 각각 구하기	40 %
❷ 주어진 다항식을 $x-1$로 나눈 나머지 구하기	60 %

03 인수분해

01 인수분해의 뜻과 인수분해 공식 본문 030~039쪽

01 (1) $a^3+a^2b=a^2(a+b)$

(2) $a^2x^2+a^2y+x^2+y=a^2(x^2+y)+(x^2+y)$
$=(a^2+1)(x^2+y)$

(3) $9x^2+6xy+y^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot y+y^2$
$=(3x+y)^2$

(4) $4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2$
$=(2x-3y)^2$

(5) $4x^2-25y^2=(2x)^2-(5y)^2=(2x+5y)(2x-5y)$

(6) $(2x+3y)^2-(x-y)^2$
$=\{(2x+3y)+(x-y)\}\{(2x+3y)-(x-y)\}$
$=(3x+2y)(x+4y)$

답 (1) $a^2(a+b)$ (2) $(a^2+1)(x^2+y)$
(3) $(3x+y)^2$ (4) $(2x-3y)^2$
(5) $(2x+5y)(2x-5y)$ (6) $(3x+2y)(x+4y)$

02 (1) $x^2-4xy+3y^2=x^2+(-y-3y)x+(-y)\cdot(-3y)$
$=(x-y)(x-3y)$

(2) $x^2+3xy-10y^2=x^2+(5y-2y)x+5y\cdot(-2y)$
$=(x+5y)(x-2y)$

(3) $3a^2-7ab-6b^2=3a\cdot a+(2b-9b)a+2b\cdot(-3b)$
$=(3a+2b)(a-3b)$

(4) $6a^2+5ab-6b^2=2a\cdot 3a+(9b-4b)a+3b\cdot(-2b)$
$=(2a+3b)(3a-2b)$

답 (1) $(x-y)(x-3y)$ (2) $(x+5y)(x-2y)$
(3) $(3a+2b)(a-3b)$ (4) $(2a+3b)(3a-2b)$

03 (1) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4zx$
$=x^2+y^2+(2z)^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot(2z)+2\cdot 2z\cdot x$
$=(x+y+2z)^2$

(2) $a^2+b^2+1+2ab+2a+2b$
$=a^2+b^2+1^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot 1+2\cdot 1\cdot a$
$=(a+b+1)^2$

(3) $x^3+15x^2+75x+125$
$=x^3+3\cdot x^2\cdot 5+3\cdot x\cdot 5^2+5^3$
$=(x+5)^3$

(4) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$
$=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot(2x)\cdot y^2-y^3$
$=(2x-y)^3$

답 (1) $(x+y+2z)^2$ (2) $(a+b+1)^2$
(3) $(x+5)^3$ (4) $(2x-y)^3$

04 (1) $x^3-27=x^3-3^3=(x-3)(x^2+x\cdot 3+3^2)$
$=(x-3)(x^2+3x+9)$

(2) $125a^3+8b^3=(5a)^3+(2b)^3$
$=(5a+2b)\{(5a)^2-5a\cdot 2b+(2b)^2\}$
$=(5a+2b)(25a^2-10ab+4b^2)$

답 (1) $(x-3)(x^2+3x+9)$
(2) $(5a+2b)(25a^2-10ab+4b^2)$

05 (1) $2x+1=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X^2-X-12$
$=(X+3)(X-4)$
$=(2x+1+3)(2x+1-4)$
$=2(x+2)(2x-3)$

(2) $x-y=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X^2+2X-8$
$=(X+4)(X-2)$
$=(x-y+4)(x-y-2)$

(3) $x^2-2x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-5)(X-6)-6$
$=X^2-11X+24$
$=(X-3)(X-8)$
$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)$
$=(x+1)(x-3)(x+2)(x-4)$
$=(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$

답 (1) $2(x+2)(2x-3)$ (2) $(x-y+4)(x-y-2)$
(3) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$

06 (1) $x^2=X$로 놓으면
$x^4+9x^2-10=X^2+9X-10$
$=(X+10)(X-1)$
$=(x^2+10)(x^2-1)$
$=(x^2+10)(x+1)(x-1)$

(2) $x^4-13x^2+4=x^4-4x^2+4-9x^2$
$=(x^2-2)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$

(3) $x^4+2x^2+9=x^4+6x^2+9-4x^2=(x^2+3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

답 (1) $(x^2+10)(x+1)(x-1)$
(2) $(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$
(3) $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

07 (1) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$y^2+xy-a^2+ax=(y+a)x+y^2-a^2$
$=(y+a)x+(y+a)(y-a)$
$=(y+a)(x+y-a)$

(2) 주어진 식을 z에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} &z(x^2+3xy+y^2)+(x^3+3x^2y+xy^2)\\ &=z(x^2+3xy+y^2)+x(x^2+3xy+y^2)\\ &=(x+z)(x^2+3xy+y^2) \end{aligned}$$

(3) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} &x^2+2(y-1)x+y^2-2y-3\\ &=x^2+2(y-1)x+(y+1)(y-3)\\ &=x^2+\{(y+1)+(y-3)\}x+(y+1)(y-3)\\ &=(x+y+1)(x+y-3) \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} &x^2+2xy+y^2-2x-2y-3\\ &=(x+y)^2-2(x+y)-3 \end{aligned}$$

이때 $x+y=X$로 놓으면

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식})&=X^2-2X-3\\ &=(X+1)(X-3)\\ &=(x+y+1)(x+y-3) \end{aligned}$$

답 (1) $(y+a)(x+y-a)$
(2) $(x+z)(x^2+3xy+y^2)$
(3) $(x+y+1)(x+y-3)$

08 (1) $f(x)=x^3+4x^2+x-6$으로 놓으면 $f(1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	4	1	−6
		1	5	6
	1	5	6	0

$$\begin{aligned} &x^3+4x^2+x-6\\ &=(x-1)(x^2+5x+6)\\ &=(x-1)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

(2) $f(x)=x^3-2x^2+4x+7$로 놓으면 $f(-1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

−1	1	−2	4	7
		−1	3	−7
	1	−3	7	0

$$\begin{aligned} &x^3-2x^2+4x+7\\ &=(x+1)(x^2-3x+7) \end{aligned}$$

(3) $f(x)=x^4-2x^3+2x^2-7x+6$으로 놓으면 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	−2	2	−7	6
		1	−1	1	−6
2	1	−1	1	−6	0
		2	2	6	
	1	1	3	0	

$$\begin{aligned} &x^4-2x^3+2x^2-7x+6\\ &=(x-1)(x-2)(x^2+x+3) \end{aligned}$$

(4) $f(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$으로 놓으면 $f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	1	−7	−1	6
		1	2	−5	−6
−1	1	2	−5	−6	0
		−1	−1	6	
	1	1	−6	0	

$$\begin{aligned} &x^4+x^3-7x^2-x+6\\ &=(x-1)(x+1)(x^2+x-6)\\ &=(x-1)(x+1)(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

답 (1) $(x-1)(x+2)(x+3)$
(2) $(x+1)(x^2-3x+7)$
(3) $(x-1)(x-2)(x^2+x+3)$
(4) $(x-1)(x+1)(x+3)(x-2)$

09 $x^2y-xy^2+xy=xy(x-y+1)$ 답 ④

10 $x(a-b)+y(b-a)-2z(a-b)$

$$\begin{aligned} &=x(a-b)-y(a-b)-2z(a-b)\\ &=(a-b)(x-y-2z) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다. 답 ②

11 $a^2x-2by-bx+2a^2y=x(a^2-b)+2y(a^2-b)$

$$=(x+2y)(a^2-b)$$

따라서 $p=2$, $q=-1$이므로 $p-q=3$ 답 ⑤

12 $x^2-y^2+x-y=(x+y)(x-y)+(x-y)$

$$=(x-y)(x+y+1)$$ 답 ①

13 $x^2(x^2-1)+(x-1)x^2+3(x-1)^2=(x-1)f(x)$에서 좌변을 인수분해하면

$$\begin{aligned} &x^2(x^2-1)+(x-1)x^2+3(x-1)^2\\ &=x^2(x+1)(x-1)+(x-1)x^2+3(x-1)^2\\ &=(x-1)\{x^2(x+1)+x^2+3(x-1)\}\\ &=(x-1)(x^3+2x^2+3x-3) \end{aligned}$$

이고, 주어진 식은 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=x^3+2x^2+3x-3$

$\therefore f(1)=1^3+2\cdot1^2+3\cdot1-3=3$ 답 ③

14 $x^2-2xy+y^2-4z^2=(x-y)^2-(2z)^2$

$$=(x-y+2z)(x-y-2z)$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

15 $x^8-y^8=(x^4)^2-(y^4)^2=(x^4+y^4)(x^4-y^4)$

$$\begin{aligned} &=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x^2-y^2)\\ &=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

16 $x^2-(2a+5)x+(a+2)(a+3)$
$=\{x-(a+2)\}\{x-(a+3)\}$
$=(x-a-2)(x-a-3)$
이므로
$(x-a-2)+(x-a-3)=2x-2a-5=2x-7$
따라서 $-2a-5=-7$이므로
$a=1$ 답 ③

17 $(x+2)^2-(x+2)(x-1)-6(x-1)^2$에서 $x+2=A$, $x-1=B$로 놓으면
(주어진 식)$=A^2-AB-6B^2$
$=(A+2B)(A-3B)$
$=\{x+2+2(x-1)\}\{x+2-3(x-1)\}$
$=3x(-2x+5)$
이므로
$a=3,\ b=-2$
$\therefore a+b=3+(-2)=1$ 답 1

18 $3(x+y)^2-7(x+y)z+2z^2$에서 $x+y=X$로 놓으면
(주어진 식)$=3X^2-7Xz+2z^2$
$=(3X-z)(X-2z)$
$=\{3(x+y)-z\}(x+y-2z)$
$=(3x+3y-z)(x+y-2z)$
따라서 주어진 식의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

19 $4x^2+y^2+9z^2-4xy-6yz+12zx$
$=(2x)^2+(-y)^2+(3z)^2+2\cdot2x\cdot(-y)+2\cdot(-y)\cdot3z$
$+2\cdot3z\cdot2x$
$=(2x-y+3z)^2$ 답 ②

20 $(a+2b)^3-(a-2b)^3$
$=\{(a+2b)-(a-2b)\}$
$\times\{(a+2b)^2+(a+2b)(a-2b)+(a-2b)^2\}$
$=4b(a^2+4ab+4b^2+a^2-4b^2+a^2-4ab+4b^2)$
$=4b(3a^2+4b^2)$ 답 ②

빈출 유형 집중학습

20-1 $128x^3+250y^3$
$=2(64x^3+125y^3)$
$=2\{(4x)^3+(5y)^3\}$
$=2(4x+5y)\{(4x)^2-4x\cdot5y+(5y)^2\}$
$=2(4x+5y)(16x^2-20xy+25y^2)$
이므로 $a=2,\ b=5,\ c=-20,\ d=25$
$\therefore ad-bc=2\cdot25-5\cdot(-20)$
$=50+100=150$ 답 ⑤

20-2 $(x+y)^3+(x-y)^3$
$=\{(x+y)+(x-y)\}$
$\times\{(x+y)^2-(x+y)(x-y)+(x-y)^2\}$
$=2x(x^2+2xy+y^2-x^2+y^2+x^2-2xy+y^2)$
$=2x(x^2+3y^2)$ 답 ②

20-3 $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$
$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}$
$\times\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}$
$=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ④이다.
답 ④

21 ② $2x^3-4x^2y+2xy^2=2x(x^2-2xy+y^2)=2x(x-y)^2$
③ $3x^3y-3xy^3=3xy(x^2-y^2)=3xy(x+y)(x-y)$
④ $2a^4-32b^4=2(a^4-16b^4)=2(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)$
$=2(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)$
⑤ $27x^3-8y^3=(3x)^3-(2y)^3$
$=(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$
답 ⑤

22 $(x^2-2x+2)(x^2-2x-4)+5$에서 $x^2-2x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X+2)(X-4)+5$
$=X^2-2X-3$
$=(X+1)(X-3)$
$=(x^2-2x+1)(x^2-2x-3)$
$=(x-1)^2(x+1)(x-3)$
$=(x+1)(x-3)(x-1)^2$
$\therefore a+b+c=1+(-3)+(-1)$
$=-3$ 답 ①

빈출 유형 집중학습

22-1 $(a^2-3a-3)(a^2-3a+2)-6$에서 $a^2-3a=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-3)(X+2)-6$
$=X^2-X-12$
$=(X+3)(X-4)$
$=(a^2-3a+3)(a^2-3a-4)$
$=(a^2-3a+3)(a+1)(a-4)$
$=(a+1)(a-4)(a^2-3a+3)$
따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다.
답 ⑤

03 인수분해

22-2 $(x^2-6x)^2-2x^2+12x-35$
$=(x^2-6x)^2-2(x^2-6x)-35$
이므로 $x^2-6x=X$로 놓으면
$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(x^2-6x)^2-2(x^2-6x)-35\\&=X^2-2X-35\\&=(X+5)(X-7)\\&=(x^2-6x+5)(x^2-6x-7)\\&=(x-1)(x-5)(x+1)(x-7)\\&=(x+1)(x-1)(x-5)(x-7)\end{aligned}$$
따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

23 $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)-6$
$=\{(x+1)(x-3)\}\{(x+2)(x-4)\}-6$
$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)-6$
이때 $x^2-2x=X$로 놓으면
$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(X-3)(X-8)-6\\&=X^2-11X+18\\&=(X-2)(X-9)\\&=(x^2-2x-2)(x^2-2x-9)\end{aligned}$$
답 ③

24 $(x-4)(x-2)(x+3)(x+1)+k$
$=\{(x-4)(x+3)\}\{(x-2)(x+1)\}+k$
$=(x^2-x-12)(x^2-x-2)+k$
이때 $x^2-x=X$로 놓으면
$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(X-12)(X-2)+k\\&=X^2-14X+24+k\\&=(X-7)^2-25+k\end{aligned}$$
따라서 주어진 식이 이차식의 완전제곱꼴로 인수분해되기 위해서는 $-25+k=0$이어야 하므로 $k=25$ 답 ②

25 x^4-3x^2-4에서 $x^2=X$로 놓으면
$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=X^2-3X-4\\&=(X+1)(X-4)\\&=(x^2+1)(x^2-4)\\&=(x^2+1)(x+2)(x-2)\\&=(x+2)(x-2)(x^2+1)\end{aligned}$$
따라서 주어진 식의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

26 $x^4-10x^2y^2+9y^4$에서 $x^2=A$, $y^2=B$로 놓으면
$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=A^2-10AB+9B^2\\&=(A-B)(A-9B)\\&=(x^2-y^2)(x^2-9y^2)\\&=(x+y)(x-y)(x+3y)(x-3y)\end{aligned}$$
이므로 $a+b=4$ 답 ①

27
$$\begin{aligned}x^4+x^2+25&=x^4+10x^2+25-9x^2\\&=(x^2+5)^2-(3x)^2\\&=(x^2+3x+5)(x^2-3x+5)\end{aligned}$$
이므로
$ac+bd=-9+25=16$ 답 ④

빈출유형 집중학습

27-1
$$\begin{aligned}x^4-7x^2y^2+y^4&=(x^4+2x^2y^2+y^4)-9x^2y^2\\&=(x^2+y^2)^2-(3xy)^2\\&=(x^2+y^2+3xy)(x^2+y^2-3xy)\end{aligned}$$
따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

27-2
$$\begin{aligned}x^4+\frac{1}{4}&=x^4+x^2+\frac{1}{4}-x^2=\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2-x^2\\&=\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$
이므로
$a=1,\ b=1,\ c=\frac{1}{2}$
$\therefore a-b+2c=1-1+2\cdot\frac{1}{2}=1$ 답 1

28 주어진 식을 z에 대하여 내림차순으로 정리하면
$$\begin{aligned}&-(x-y)z^2+x^3-x^2y+xy^2-y^3\\&=-(x-y)z^2+x^2(x-y)+y^2(x-y)\\&=(x-y)(x^2+y^2-z^2)\end{aligned}$$
따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다. 답 ②

29 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면
$$\begin{aligned}&(x^2-3z)y^2+2x^3z-6xz^2\\&=(x^2-3z)y^2+2xz(x^2-3z)\\&=(x^2-3z)(y^2+2xz)\end{aligned}$$
이므로 $a=-3$, $b=2$
$\therefore a+b=-3+2=-1$ 답 ⑤

30 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$$\begin{aligned}&2x^2+(3y+2)x-2y^2-6y-4\\&=2x^2+(3y+2)x-2(y^2+3y+2)\\&=2x^2+(3y+2)x-2(y+1)(y+2)\\&=(2x-y-2)(x+2y+2)\end{aligned}$$
따라서 주어진 식의 인수인 것은 ①이다. 답 ①

빈출유형 집중학습

30-1 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$$\begin{aligned}&2x^2+(y-5)x-y^2+y+2\\&=2x^2+(y-5)x-(y^2-y-2)\\&=2x^2+(y-5)x-(y+1)(y-2)\\&=(x+y-2)(2x-y-1)\end{aligned}$$
답 ③

30-2 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&(x-2)(x+1)-xy+5y-2y^2\\&=(x^2-x-2)-xy+5y-2y^2\\&=x^2-(y+1)x-2y^2+5y-2\\&=x^2-(y+1)x-(2y^2-5y+2)\\&=x^2-(y+1)x-(2y-1)(y-2)\\&=(x+y-2)(x-2y+1)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

31 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&2x^2-(4y-3)x-6y^2+7y-2\\&=2x^2-(4y-3)x-(6y^2-7y+2)\\&=2x^2-(4y-3)x-(2y-1)(3y-2)\\&=(x-3y+2)(2x+2y-1)\end{aligned}$$

이므로 $a=-3$, $b=2$, $c=2$, $d=-1$

$\therefore ad-bc=(-3)\cdot(-1)-2\cdot2=-1$ 답 ②

32 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2y^2-xy^2+x^2y-xy+x+y-1\\&=y(y+1)x^2-(y^2+y-1)x+y-1\\&=\{(y+1)x-1\}\{yx-(y-1)\}\\&=(xy+x-1)(xy-y+1)\end{aligned}$$

답 ②

33 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2+(3y-k)x+2y^2-3y-2\\&=x^2+(3y-k)x+(2y+1)(y-2)\end{aligned}$$

이때 위의 식이 x, y에 대한 일차식의 곱으로 인수분해되려면 $(2y+1)+(y-2)=3y-k$이어야 하므로

$k=1$ 답 ①

34 주어진 식을 전개한 후 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식)

$$\begin{aligned}&=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+ac^2-a^2c\\&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)\\&=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=(b-c)(a-b)(a-c)\\&=-(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

답 ⑤

35 주어진 식을 전개한 후 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식)

$$\begin{aligned}&=a^2(c-b)+ab^2-b^2c-ac^2+bc^2\\&=(c-b)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b-c)\\&=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)\\&=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=-(b-c)(a-b)(a-c)\\&=(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

답 $(a-b)(b-c)(c-a)$

36 $f(x)=x^3-2x^2+4x-3$으로 놓으면 $f(1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	-2	4	-3
		1	-1	3
	1	-1	3	0

$x^3-2x^2+4x-3=(x-1)(x^2-x+3)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다. 답 ④

37 $f(x)$가 $x+3$으로 나누어떨어지므로 $f(-3)=0$에서

$3\cdot(-3)^3+9\cdot(-3)^2-4\cdot(-3)+k=0$

$12+k=0 \qquad \therefore k=-12$

즉, $f(x)=3x^3+9x^2-4x-12$는 $x+3$을 인수로 가지므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-3	3	9	-4	-12
		-9	0	12
	3	0	-4	0

$f(x)=(x+3)(3x^2-4)$

따라서 다항식 $f(x)$의 인수인 것은 ④이다. 답 ④

38 $f(x)=x^3+6x^2+ax-24$로 놓으면

$f(x)=(x-2)(x+p)(x+q)$

와 같이 인수분해되므로 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

즉, 인수정리에 의하여 $f(2)=0$이므로

$f(2)=8+24+2a-24=0$

$2a+8=0 \qquad \therefore a=-4$

따라서 $f(x)=x^3+6x^2-4x-24$이고, $f(x)$는 $x-2$를 인수로 가지므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	1	6	-4	-24
		2	16	24
	1	8	12	0

$$\begin{aligned}x^3+6x^2-4x-24&=(x-2)(x^2+8x+12)\\&=(x-2)(x+2)(x+6)\end{aligned}$$

$\therefore a+p+q=-4+2+6=4$ 답 4

39 $f(x)=x^4-x^3+x^2+x-2$로 놓으면 $f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	-1	1	1	-2
		1	0	1	2
-1	1	0	1	2	0
		-1	1	-2	
	1	-1	2	0	

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x+2)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다. 답 ②

40 $f(x)=x^4+2x^3-4x^2-5x-6$으로 놓으면 $f(2)=0$, $f(-3)=0$이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 2 & -4 & -5 & -6 \\ & & 2 & 8 & 8 & 6 \\ \hline -3 & 1 & 4 & 4 & 3 & \boxed{0} \\ & & -3 & -3 & -3 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x+3)(x^2+x+1)$

따라서 $a=3$, $b=1$, $c=1$이므로

$a-b+c=3-1+1=3$ 답 3

41 $9998=a$로 놓으면

(주어진 식)$=\dfrac{a^3-1}{a(a+1)+1}=\dfrac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$

$=a-1=9998-1=9997$ 답 ①

빈출 유형 집중학습

41-1 $98=x$로 놓으면 주어진 식은 $x^3+x^2-8x-12$

$f(x)=x^3+x^2-8x-12$로 놓으면 $f(-2)=0$이므로

다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -8 & -12 \\ & & -2 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2-x-6)$

$=(x+2)(x+2)(x-3)$

$=(x+2)^2(x-3)=(98+2)^2(98-3)$

$=100^2\cdot95=950000$ 답 ①

41-2 $\dfrac{12^2-10^2+8^2-6^2+4^2-2^2}{6^2-5^2+4^2-3^2+2^2-1^2}$

$=\dfrac{(12+10)(12-10)+(8+6)(8-6)+(4+2)(4-2)}{(6+5)(6-5)+(4+3)(4-3)+(2+1)(2-1)}$

$=\dfrac{22\cdot2+14\cdot2+6\cdot2}{11\cdot1+7\cdot1+3\cdot1}=\dfrac{2\cdot42}{21}=4$ 답 ②

42 $[3,\ 1]+[5,\ 3]+[7,\ 5]+[9,\ 7]$

$=(3^2-1^2)+(5^2-3^2)+(7^2-5^2)+(9^2-7^2)$

$=(3+1)(3-1)+(5+3)(5-3)+(7+5)(7-5)$
$\quad+(9+7)(9-7)$

$=4\times2+8\times2+12\times2+16\times2$

$=2(4+8+12+16)=2\times40=80$

다른 풀이

(주어진 식)$=(\cancel{3^2}-1^2)+(\cancel{5^2}-\cancel{3^2})+(\cancel{7^2}-\cancel{5^2})+(9^2-\cancel{7^2})$

$=-1^2+9^2=80$ 답 80

43 $10^{10}=x$로 놓으면 주어진 식은

$\dfrac{x^3-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$=x^2+x+1=10^{20}+10^{10}+1$

따라서 21자리의 자연수이다. 답 ②

오답 피하기

10^n을 n자리의 자연수라고 답하지 않도록 주의한다.
10^n은 $(n+1)$자리의 자연수이다.

44 $x^3+y^3-x^2y-xy^2=15$의 좌변을 인수분해하면

$x^3+y^3-x^2y-xy^2$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)$

$=(x+y)(x^2-2xy+y^2)$

$=(x+y)(x-y)^2=15$

$\therefore\ (x-y)^2=5(\because\ x+y=3)$

이때 $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$이므로

$3^2=5+4xy \qquad \therefore\ xy=1$ 답 ③

45 $x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$에서

$x+y=2$, $x-y=2\sqrt{2}$, $xy=-1$

이므로

$x^4+x^3y-xy^3-y^4=x^3(x+y)-y^3(x+y)$

$=(x+y)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x+y)(x-y)\{(x+y)^2-xy\}$

$=2\cdot2\sqrt{2}(2^2+1)=20\sqrt{2}$ 답 $20\sqrt{2}$

46 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=6$의 좌변을 인수분해하면

$(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+c)(a+b)=6$

이때 $a+c=3$, $b+c=2$이므로

$6(a+b)=6 \qquad \therefore\ a+b=1$ 답 ①

47 $[x,\ y,\ z]=x^2-yz$이므로

$[x,\ -2y,\ z]+[y,\ -2z,\ x]+[z,\ -2x,\ y]$

$=x^2+2yz+y^2+2zx+z^2+2xy$

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$=(x+y+z)^2$ 답 $(x+y+z)^2$

48 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=c^2$ …… ㉠

$a^2b+b^2c-b^3-a^2c=0$의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$-(a^2-b^2)c+a^2b-b^3$$
$$=-(a^2-b^2)c+b(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(b-c)$$
$$=(a+b)(a-b)(b-c)=0$$

이때 $a+b\neq0$이므로

(i) $a-b=0$, 즉 $a=b$일 때

㉠에서 $2a^2=c^2$ $\quad\therefore c=\sqrt{2}a$ ($\because c>0$)

(ii) $b-c=0$, 즉 $b=c$일 때

㉠에서 $a=0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에서 $c=\sqrt{2}a$이다. 답 ④

49 $a^3-a^2b+ab^2-b^3+ac^2-bc^2=0$의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(a-b)c^2+a^3-a^2b+ab^2-b^3$$
$$=(a-b)c^2+a^2(a-b)+b^2(a-b)$$
$$=(a-b)(a^2+b^2+c^2)=0$$
$$\therefore a=b\ (\because a^2+b^2+c^2>0)$$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 이등변삼각형이다. 답 이등변삼각형

50 $(a+b+c)(a+b-c)+(a-b+c)(a-b-c)$

$$=(a+b)^2-c^2+(a-b)^2-c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2-c^2+a^2-2ab+b^2-c^2$$
$$=2(a^2+b^2-c^2)=0$$

즉, $a^2+b^2-c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다. 답 ⑤

단계별 기출학습

본문 040~043쪽

01 ⑤	02 ④	03 ③	04 ④	05 ③
06 ①	07 ③	08 ③	09 ④	10 ②
11 ⑤	12 ④	13 84	14 1	15 ④
16 ③	17 11개	18 60	19 30	20 0
21 ㄴ, ㄷ	22 $16\sqrt{3}$	23 338		

01 ⑤ $4x^2+4xy-3y^2=(2x-y)(2x+3y)$

02 $x+y=X$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=6X^2+7Xz-3z^2$$
$$=(3X-z)(2X+3z)$$
$$=(3x+3y-z)(2x+2y+3z)$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

03 $x^2-x=X$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=(X-4)(X-10)-16$$
$$=X^2-14X+24$$
$$=(X-2)(X-12)$$
$$=(x^2-x-2)(x^2-x-12)$$
$$=(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$$
$$=(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

04 $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)+k$

$$=\{(x+1)(x-4)\}\{(x-1)(x-2)\}+k$$
$$=(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)+k$$

이때 $x^2-3x=X$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=(X-4)(X+2)+k$$
$$=X^2-2X-8+k$$
$$=(X-1)^2-9+k$$

따라서 주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱꼴로 인수분해되기 위해서는 $-9+k=0$이어야 하므로

$k=9$

05 $x^4+5x^2y^2+9y^4=(x^4+6x^2y^2+9y^4)-x^2y^2$

$$=(x^2+3y^2)^2-(xy)^2$$
$$=(x^2+xy+3y^2)(x^2-xy+3y^2)$$

이므로 $a^2+b^2=1+9=10$

06 $x^4-4x^3y+4x^2y^2-4y^4$

$$=x^2(x^2-4xy+4y^2)-4y^4$$
$$=\{x(x-2y)\}^2-(2y^2)^2$$
$$=\{x(x-2y)+2y^2\}\{x(x-2y)-2y^2\}$$
$$=(x^2-2xy+2y^2)(x^2-2xy-2y^2)$$

07 $a^4+a^2c^2-4b^2c^2-16b^4$

$$=(a^2-4b^2)c^2+(a^4-16b^4)$$
$$=(a^2-4b^2)c^2+(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)$$
$$=(a^2-4b^2)(a^2+4b^2+c^2)$$
$$=(a+2b)(a-2b)(a^2+4b^2+c^2)$$

08 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$3x^2+2xy-y^2-5x+3y-2$$
$$=3x^2+(2y-5)x-(y^2-3y+2)$$
$$=3x^2+(2y-5)x-(y-1)(y-2)$$
$$=(3x-y+1)(x+y-2)$$

이므로

$a=3,\ b=-1,\ c=1$

$\therefore a+b+c=3+(-1)+1=3$

09 주어진 식을 z에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} & xyz+2x^2y+2xy^2-xy+4x+4y+2z-2 \\ &=(xy+2)z+(2x^2y+2xy^2-xy+4x+4y-2) \\ &=(xy+2)z+\{xy(2x+2y-1)+2(2x+2y-1)\} \\ &=(xy+2)z+(xy+2)(2x+2y-1) \\ &=(xy+2)(2x+2y+z-1) \end{aligned}$$

이때 $x+y+z=-1$에서 $x+y=-1-z$이므로

$$\begin{aligned} 2x+2y+z-1&=2(x+y)+z-1 \\ &=2(-1-z)+z-1=-z-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{(주어진 식)}&=(xy+2)(-z-3) \\ &=-(xy+2)(z+3) \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $a-b=-1$

10 $f(x)=2x^3-3x^2-3x+2$로 놓으면 $f(-1)=0$이므로 인수정리에 의하여 다항식 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다. 따라서 다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & -3 & 2 \\ & & -2 & 5 & -2 \\ \hline & 2 & -5 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=(x+1)(2x^2-5x+2) \\ &=(x+1)(2x-1)(x-2) \end{aligned}$$

11 $f(x)=2x^3-11x^2+ax-6$으로 놓으면 $f(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여

$f(2)=2\cdot2^3-11\cdot2^2+2a-6=0 \qquad \therefore a=17$

이때 다항식 $2x^3-11x^2+17x-6$을 다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -11 & 17 & -6 \\ & & 4 & -14 & 6 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^3-11x^2+17x-6&=(x-2)(2x^2-7x+3) \\ &=(x-2)(2x-1)(x-3) \end{aligned}$$

따라서 $b=-3$이므로 $a+b=17+(-3)=14$

12 다항식 $f(x)=x^4-3x^3+ax^2+7x+2$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.
즉, 인수정리에 의하여 $f(1)=0$이므로

$f(1)=1^4-3\cdot1^3+a\cdot1^2+7\cdot1+2=0 \qquad \therefore a=-7$

이때 다항식 $f(x)$에서 $f(-2)=0$이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & -7 & 7 & 2 \\ & & 1 & -2 & -9 & -2 \\ \hline -2 & 1 & -2 & -9 & -2 & \boxed{0} \\ & & -2 & 8 & 2 & \\ \hline & 1 & -4 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+2)(x^2-4x-1)$

따라서 다항식 $f(x)$의 인수인 것은 ④이다.

13 $9=x$로 놓으면

$$\begin{aligned} 9^3+9^2-9+2&=x^3+x^2-x+2 \\ &=(x+2)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

이므로

$803=(9+2)(9^2-9+1)=11\times73$

이때 11과 73은 2 이상의 서로소인 자연수이므로

$a+b=11+73=84$

14 $[a,\ b,\ c]+[b,\ c,\ a]+[c,\ a,\ b]$

$$\begin{aligned} &=a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab \\ &=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \\ &=(a+b+c)^2 \end{aligned}$$

이때 $2a+b=6$, $b+2c=-4$를 변끼리 더하면

$2(a+b+c)=2 \qquad \therefore a+b+c=1$

$\therefore$ (주어진 식)$=1^2=1$

15 $a^3-ab^2-b^2c+a^2c+c^3+ac^2=0$의 좌변을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} & -(a+c)b^2+a^3+a^2c+ac^2+c^3 \\ &=-(a+c)b^2+a^2(a+c)+c^2(a+c) \\ &=(a+c)(-b^2+a^2+c^2) \\ &=0 \end{aligned}$$

이때 $a+c\neq0$이므로 $a^2-b^2+c^2=0$, 즉 $a^2+c^2=b^2$이다.
따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

16 $$\begin{aligned} 7^{16}-1&=(7^8)^2-1^2=(7^8+1)(7^8-1) \\ &=(7^8+1)(7^4+1)(7^4-1) \\ &=(7^8+1)(7^4+1)(7^2+1)(7^2-1) \\ &=(7^8+1)(7^4+1)(7^2+1)(7+1)(7-1) \end{aligned}$$

이때 $7^2-1=48$, $7^2+1=50$이므로 $7^{16}-1$을 나누어떨어지게 하는 두 자리의 자연수는 48, 50이다.

$\therefore n_1+n_2=98$

17 $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$에서

$a-b=1$, $ab=n\ (1\le n\le150)$

이때 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 3)$, $\cdots$, $(12,\ 11)$의 11개이다.

18 가로의 길이와 세로의 길이를 나타내는 식은 모두 $n+1$을 인수로 가지므로 각각 인수분해하면

$$\begin{aligned} n^3+8n^2+19n+12&=(n+1)(n^2+7n+12) \\ &=(n+1)(n+3)(n+4) \end{aligned}$$

$n^2+6n+5=(n+1)(n+5)$

즉, 한 변의 길이가 $n+1$인 정사각형 모양의 타일은 주어진 직사각형 모양의 바닥의 가로에 $(n+3)(n+4)$개, 세로에 $(n+5)$개 필요하므로 필요한 타일의 개수는 $(n+3)(n+4)(n+5)$이다.
따라서 $a=3$, $b=4$, $c=5$이므로

$abc=3\cdot4\cdot5=60$

19 조건 ㈎의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+bc^2$
$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)=0$

조건 ㈏에서 $(a+b)(b+c)\neq0$이므로

$a+c=0 \quad \therefore a=-c$ …… ㉠

조건 ㈐에 ㉠을 대입하여 정리하면

$(-c)^2+b^2+c^2=10 \quad \therefore b^2+2c^2=10$
$\therefore 3b^2+6c^2=3(b^2+2c^2)=3\cdot10=30$

20 $f(x)=2x^3+(a-4)x^2+(3-2a)x-6$으로 놓으면 $f(2)=0$이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & a-4 & 3-2a & -6 \\ & & 4 & 2a & 6 \\ \hline & 2 & a & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(2x^2+ax+3)$

이때 다항식 $f(x)$는 모든 계수가 정수인 x에 대한 일차식의 곱으로 인수분해되어야 하므로 $2x^2+ax+3$은

$(x+1)(2x+3)$ 또는 $(x-1)(2x-3)$ 또는
$(x+3)(2x+1)$ 또는 $(x-3)(2x-1)$

로 인수분해되어야 한다.
따라서 상수 a의 최댓값은 $2x^2+ax+3$이 $(x+3)(2x+1)$일 때이므로 $M=7$, 최솟값은 $2x^2+ax+3$이 $(x-3)(2x-1)$일 때이므로 $m=-7$

$\therefore M+m=7+(-7)=0$

21 $(b-c)a^4-2(b^3-c^3)a^2+(b^4-c^4)(b+c)=0$의 좌변을 인수분해하면

$(b-c)a^4-2(b-c)(b^2+bc+c^2)a^2$
$+(b^2+c^2)(b^2-c^2)(b+c)$
$=(b-c)a^4-2(b-c)(b^2+bc+c^2)a^2$
$+(b^2+c^2)(b-c)(b+c)^2$
$=(b-c)\{a^4-2(b^2+bc+c^2)a^2+(b^2+c^2)(b+c)^2\}$
$=(b-c)\{a^2-(b^2+c^2)\}\{a^2-(b+c)^2\}=0$
$\therefore b=c$ 또는 $a^2=b^2+c^2$ 또는 $a^2=(b+c)^2$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a<b+c$
즉, $a^2\neq(b+c)^2$이다.
따라서 삼각형의 모양이 될 수 있는 것은 $b=c$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이므로 ㄴ, ㄷ이다.

22 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$에서

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$=0$

…… ❶

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$이므로

$a=b=c$

이때 $a+b+c=24$에서 $a=b=c=8$
따라서 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 8인 정삼각형이므로

…… ❷

$\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot8^2=16\sqrt{3}$

…… ❸

채점 기준	성취도
❶ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$를 인수분해하기	30 %
❷ 삼각형 ABC의 모양 이해하기	30 %
❸ 삼각형 ABC의 넓이 구하기	40 %

23 $16=x$로 놓으면

$16\times18\times19\times21+8$
$=x(x+2)(x+3)(x+5)+8$

…… ❶

$=\{x(x+5)\}\{(x+2)(x+3)\}+8$
$=(x^2+5x)(x^2+5x+6)+8$

이때 $x^2+5x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X(X+6)+8$
$=X^2+6X+8=(X+2)(X+4)$
$=(x^2+5x+2)(x^2+5x+4)$
$=(x^2+5x+2)\{(x^2+5x+2)+2\}$

…… ❷

$=n(n+2)$

이므로

$n=x^2+5x+2=16^2+5\times16+2=338$

…… ❸

채점 기준	성취도
❶ $16=x$로 놓고, 주어진 식을 x로 나타내기	30 %
❷ ❶의 식을 인수분해하기	30 %
❸ n의 값 구하기	40 %

04 복소수

04 복소수와 그 연산

본문 044~051쪽

01 (4) $-\sqrt{-25}=-\sqrt{25\times(-1)}=-\sqrt{25}i=-5i$

답 (1) $\sqrt{2}i$ (2) $2i$ (3) $2\sqrt{2}i$ (4) $-5i$

02 답 (1) $\sqrt{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, $3i^2$ (2) $3i$, $-5i$

03 (1) $a-2=0$, $b-5=0$이므로 $a=2$, $b=5$

(2) $2a-1=3$, $3-b=7$이므로 $a=2$, $b=-4$

(3) $2a+b=3$, $-a+b=-9$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=-5$

답 (1) $a=2$, $b=5$ (2) $a=2$, $b=-4$ (3) $a=4$, $b=-5$

04 (1) $(1+3i)+(5-2i)=(1+5)+(3-2)i=6+i$

(2) $(5-3i)-(3-i)=(5-3)+(-3+1)i=2-2i$

(3) $(3+2i)(1+i)=3+3i+2i-2=(3-2)+(3+2)i$

$=1+5i$

(4) $\frac{1}{1-i}+\frac{1}{1+i}=\frac{1+i+1-i}{(1-i)(1+i)}=\frac{2}{2}=1$

답 (1) $6+i$ (2) $2-2i$ (3) $1+5i$ (4) 1

05 $\alpha=2-i$, $\beta=-1+4i$이므로

(1) $\alpha+\beta=1+3i$이므로 $\overline{\alpha+\beta}=1-3i$

(2) $\alpha-\beta=3-5i$이므로 $\overline{\alpha-\beta}=3+5i$

(3) $\alpha\beta=(2-i)(-1+4i)=2+9i$이므로 $\overline{\alpha\beta}=2-9i$

(4) $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1+4i}{2-i}=\frac{(-1+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-6+7i}{5}$이므로

$\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}=\frac{-6-7i}{5}$

답 (1) $1-3i$ (2) $3+5i$ (3) $2-9i$ (4) $\frac{-6-7i}{5}$

06 $x=3+2i$, $y=3-2i$이므로

(1) $x+y=(3+2i)+(3-2i)=6$

(2) $xy=(3+2i)(3-2i)=9-(-4)=13$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\cdot13=10$

(4) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=6^2-4\cdot13=-16$

답 (1) 6 (2) 13 (3) 10 (4) -16

07 (1) $i^{50}=(i^4)^{12}\cdot i^2=i^2=-1$

(2) $(-i)^{20}=i^{20}=(i^4)^5=1^5=1$

(3) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4=(-i)^4=i^4=1$

(4) $i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1=0$

답 (1) -1 (2) 1 (3) 1 (4) 0

08 (1) $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=-\sqrt{16}=-4$

(2) $\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\frac{-6}{2}}-\sqrt{\frac{6}{-2}}$

$=\sqrt{-3}-\sqrt{-3}=0$

(3) $\sqrt{-3}\sqrt{-6}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-16}}=-\sqrt{18}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

$=-3\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

답 (1) -4 (2) 0 (3) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

09 답 ②, ⑤

10 색칠한 부분에 속하는 수는 $a+bi$(a, b는 0이 아닌 실수)의 꼴로 나타내어지는 복소수이다. 답 ①

11 주어진 복소수 z가 실수이려면 (허수부분)$=0$이어야 하므로

$x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

또 복소수 z가 순허수이려면 (실수부분)$=0$,

(허수부분)$\neq0$이어야 하므로

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

이때 $x=2$이면 $z=0$이므로 $x\neq2$이다.

따라서 $a=4$, $b=3$이므로

$a+b=4+3=7$ 답 ④

12 z^2이 음의 실수이려면 z는 순허수이어야 한다. 즉,

$z=(1+4i)a+2(2i-3)$

$=(a-6)+4(a+1)i$

에서 z가 순허수이려면

$a-6=0$, $a+1\neq0$

$\therefore a=6$ 답 ③

13 $(1+i)x^2+(5-i)x+6-12i$

$=(x^2+5x+6)+(x^2-x-12)i$

$=(x+3)(x+2)+(x+3)(x-4)i$

이때 제곱하여 음의 실수가 되는 복소수는 순허수이므로

$(x+3)(x+2)=0$, $(x+3)(x-4)\neq0$

따라서 조건을 만족하는 x의 값은 -2이다. 답 -2

빈출 유형 집중학습

13-1 $z=(x^2-3x+2)+(x^2+x-2)i$

$=(x-1)(x-2)+(x+2)(x-1)i$

z^2이 양의 실수이려면 z는 0이 아닌 실수이므로

$(x-1)(x-2)\neq0$, $(x+2)(x-1)=0$

따라서 조건을 만족하는 x의 값은 -2이다. 답 ①

참고 $z=a+bi$(a, b는 실수)일 때, $z^2=a^2-b^2+2abi$이므로 z^2이 양의 실수이려면 $a\neq0$, $b=0$이어야 한다. 즉, z는 0이 아닌 실수가 된다.

13-2 $z=(x^2-x-2)+(x^2-3x-4)i$
$=(x+1)(x-2)+(x+1)(x-4)i$
z^2이 실수이려면 z는 실수 또는 순허수이어야 한다.
(i) z가 실수일 때,
$(x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$
(ii) z가 순허수일 때,
$(x+1)(x-2)=0$, $(x+1)(x-4)\neq0$
$\therefore x=2$
(i), (ii)에서 모든 실수 x의 값의 합은
$-1+2+4=5$ 답 ⑤

14 ④ $\overline{i-3}=-i-3$ 답 ④

15 $2*3=2\cdot3+(2-3)i=6-i$이므로
$\overline{2*3}=\overline{6-i}=6+i$ 답 ②

16 $z_1+z_2-z_3=(4+3i)+(-2+7i)-(5-2i)$
$=(4-2-5)+(3+7+2)i$
$=-3+12i$ 답 ②

17 $x+y=(3+2\sqrt{2}i)+(3-2\sqrt{2}i)=6$,
$xy=(3+2\sqrt{2}i)(3-2\sqrt{2}i)=9+8=17$이므로
$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{6^2-2\cdot17}{17}=\frac{2}{17}$$
답 $\frac{2}{17}$

빈출 유형 집중학습

17-1 $x+y=(2+i)+(2-i)=4$,
$xy=(2+i)(2-i)=5$이므로
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=4^2-2\cdot5=6$ 답 ⑤

17-2 $x+y=(-1+\sqrt{3}i)+(-1-\sqrt{3}i)=-2$,
$xy=(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)=4$이므로
$$\frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$$
$$=\frac{(-2)^3-3\cdot4\cdot(-2)}{4}=\frac{16}{4}=4$$
답 ④

18 $\alpha-\beta=(3+2i)-(2+i)=1+i$,
$\alpha\beta=(3+2i)(2+i)=(6-2)+(3+4)i=4+7i$이므로
$\alpha^2\beta-\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha-\beta)=(4+7i)(1+i)$
$=(4-7)+(4+7)i=-3+11i$
즉, $a=-3$, $b=11$이므로 $a+b=-3+11=8$ 답 8

19 $(1+2i)z=3+i$에서 $z=\frac{3+i}{1+2i}$이므로
$$z=\frac{3+i}{1+2i}=\frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5-5i}{5}=1-i$$
즉, 복소수 z의 실수부분은 1, 허수부분은 -1이므로
$a=1$, $b=-1$
$\therefore a-b=1-(-1)=2$ 답 ⑤

20 등식 $(3+i)x-2(2-i)y-4(1+2i)=0$에서
$(3x-4y-4)+(x+2y-8)i=0$
이고, x, y는 실수이므로
$3x-4y-4=0$, $x+2y-8=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=2$
$\therefore x+y=4+2=6$ 답 ①

21 등식 $(x+i)(1-i)+(2-i)(y-2i)=7-8i$에서
$x+1+(1-x)i+(2y-2)-(y+4)i=7-8i$
$x+2y-1-(x+y+3)i=7-8i$
이고, x, y는 실수이므로
$x+2y-1=7$, $x+y+3=8$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$
$\therefore x-y=2-3=-1$ 답 ②

빈출 유형 집중학습

21-1 등식 $(x+yi)(1+i)=3+i$에서
$x-y+(x+y)i=3+i$이고, x, y는 실수이므로
$x-y=3$, $x+y=1$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-1$
$\therefore \frac{x}{y}=\frac{2}{-1}=-2$ 답 ①

21-2 등식 $\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=4-i$에서
$$\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{x+y+(-x+y)i}{2}=4-i$$
$x+y+(-x+y)i=8-2i$
이고, x, y는 실수이므로
$x+y=8$, $-x+y=-2$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=5$, $y=3$
$\therefore xy=5\cdot3=15$ 답 15

22 $z=-2+3i$이므로 $\overline{z}=-2-3i$

③ $z-\overline{z}=(-2+3i)-(-2-3i)=6i$ 답 ③

23 a, b는 모두 실수이고 $z=2a+bi$이므로 $\overline{z}=2a-bi$

ㄱ. $z+\overline{z}=(2a+bi)+(2a-bi)=4a$이므로 실수이다.

ㄴ. $z-\overline{z}=(2a+bi)-(2a-bi)=2bi(b\neq0)$이므로 허수이다.

ㄷ. $z\overline{z}=(2a+bi)(2a-bi)=4a^2+b^2$이므로 실수이다.

ㄹ. $(z+1)(\overline{z}+1)=z\overline{z}+(z+\overline{z})+1$이므로 실수이다.

따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

24 $z=2+i$에서 $\overline{z}=2-i$이므로

$z+\overline{z}=(2+i)+(2-i)=4$,

$z\overline{z}=(2+i)(2-i)=4+1=5$

$$\therefore \frac{z-1}{z}+\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}}=\frac{\overline{z}(z-1)+z(\overline{z}-1)}{z\overline{z}}=\frac{2z\overline{z}-(z+\overline{z})}{z\overline{z}}=\frac{2\cdot5-4}{5}=\frac{6}{5}$$

답 $\frac{6}{5}$

빈출 유형 집중학습

24-1 $z\cdot\overline{z}=1$에서 $\overline{z}=\frac{1}{z}$이므로

$z-\frac{1}{z}=z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$ 답 ⑤

24-2 $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$의 켤레복소수 $\overline{z}$는 $\overline{z}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이므로

$z+\overline{z}=1$, $z\overline{z}=1$

$$\therefore z^2+\overline{z}^2=(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}=1^2-2\cdot1=-1$$

답 -1

25 $\alpha=2-2i$, $\beta=2-i$이므로

$\alpha+\beta=4-3i$, $\overline{\alpha+\beta}=4+3i$

$$\therefore \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}=(4-3i)(4+3i)=25$$

답 ②

26 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$(1+i)\overline{z}-iz=(1+i)(a-bi)-i(a+bi)=a+2b-bi=-2+3i$$

a, b는 실수이므로 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+2b=-2$, $-b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-3$

따라서 주어진 등식을 만족하는 복소수 z는 $4-3i$이다.

답 $4-3i$

27 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$(2-i)z+4i\overline{z}=(2-i)(a+bi)+4i(a-bi)=(2a+5b)+(3a+2b)i=-2+8i$$

a, b는 실수이므로 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+5b=-2$, $3a+2b=8$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-2$

따라서 $z=4-2i$이므로

$$z^2=(4-2i)^2=16-4-16i=12-16i$$

답 ③

28 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$(2-i)z+(2+i)\overline{z}=2(z+\overline{z})-(z-\overline{z})i=4a-(2bi)i=4a+2b=2$$

$\therefore 2a+b=1$

따라서 보기 중 조건을 만족하는 복소수 z가 될 수 있는 것은 ④이다. 답 ④

29 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=13$

$$z+\frac{13}{z}=a+bi+\frac{13}{a+bi}=a+bi+\frac{13(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=a+bi+\frac{13(a-bi)}{a^2+b^2}=a+bi+\frac{13(a-bi)}{13}=2a=6$$

$\therefore a=3$

따라서 복소수 z의 실수부분은 3이다.

다른 풀이

$z\overline{z}=13$에서 $\overline{z}=\frac{13}{z}$이므로

$z+\frac{13}{z}=z+\overline{z}=6$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=6$

$\therefore a=3$

따라서 복소수 z의 실수부분은 3이다. 답 3

30 $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{1000}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+\cdots+(i^{997}+i^{998}+i^{999}+i^{1000})$

$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$

$=0$ 답 ③

31 $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{102}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{-i}+\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{-i}+\frac{1}{1}\right)+\cdots$

$\quad+\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{-i}+\frac{1}{1}\right)+\frac{1}{i^{101}}+\frac{1}{i^{102}}$

$=0+0+\cdots+0+\frac{1}{i^{101}}+\frac{1}{i^{102}}$

$=\frac{1}{i^{101}}+\frac{1}{i^{102}}=\frac{1}{i}+\frac{1}{-1}=-1-i$ 　답 $-1-i$

32 $i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+20i^{20}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots$

$\quad+(17i-18-19i+20)$

$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)$

$=5(2-2i)=10-10i$

따라서 $a=10$, $b=-10$이므로

$a-b=10-(-10)=20$ 　답 ⑤

33 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}=(-i)^{50}+\left(\frac{1}{-i}\right)^{50}$

$=i^{50}+i^{50}$

$=(i^4)^{12}\cdot i^2+(i^4)^{12}\cdot i^2$

$=-1-1=-2$ 　답 ②

빈출유형 집중학습

33-1 $\left(\frac{1-i}{i}\right)^4+\left(\frac{1+i}{i}\right)^4=\frac{(1-i)^4}{i^4}+\frac{(1+i)^4}{i^4}$

$=\{(1-i)^2\}^2+\{(1+i)^2\}^2$

$=(-2i)^2+(2i)^2$

$=-4-4=-8$ 　답 ①

33-2 $n=2k+1$(k는 음이 아닌 정수)이라 하면

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$,

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

이므로

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n-1}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+1}$

$=i^{2(2k+1)-1}+(-i)^{4n+1}$

$=i^{4k+1}+(-i)^{4n+1}$

$=i^{4k}\cdot i+(-i)^{4n}\cdot(-i)$

$=i-i=0$ 　답 ③

34 ㄱ. $\sqrt{-4}\sqrt{-4}=-\sqrt{(-4)\times(-4)}=-\sqrt{16}=-4$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}}=-\sqrt{-\frac{2}{6}}=-\sqrt{-\frac{1}{3}}=-\sqrt{\frac{1}{3}}i$

따라서 계산이 잘못된 것은 ㄱ, ㄷ이다. 　답 ②

35 (주어진 식)$=\sqrt{3}i\sqrt{12}i+\sqrt{3}i\sqrt{3}+\frac{\sqrt{16}i}{\sqrt{4}i}+\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}i}$

$=-\sqrt{36}+3i+\sqrt{4}-\sqrt{4}i$

$=-6+3i+2-2i$

$=-4+i$ 　답 ②

36 (i) $a<6$, $a<10$일 때, 주어진 등식이 성립하므로

$a<6$

(ii) $a-6=0$ 또는 $a-10=0$, 즉 $a=6$ 또는 $a=10$일 때 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $a\le 6$ 또는 $a=10$이므로 자연수 a의 개수는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10의 7이다. 　답 7

37 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$가 성립하고 $a\ne 0$이므로 $a>0$, $b<0$

④ $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\sqrt{b^2}=|b|\sqrt{a}=-b\sqrt{a}$ (거짓) 　답 ④

38 $z=\frac{1-i}{2}$에서 $2z-1=-i$

양변을 제곱하여 정리하면

$(2z-1)^2=(-i)^2$, $4z^2-4z+1=-1$

$4z^2-4z+2=0$

$\therefore\ 4z^2-4z+5=(4z^2-4z+2)+3=0+3=3$

다른 풀이

$z=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{2}$이므로

$z^2=\left(\frac{1-i}{2}\right)^2=\frac{1-1-2i}{4}=\frac{-i}{2}$

$\therefore\ 4z^2-4z+5=4\left(\frac{1-i}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1-i}{2}+5$

$=-2i-2(1-i)+5$

$=3$ 　답 ③

39 $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면

$4x^2-4x+1=-3$ 　$\therefore\ x^2-x+1=0$

$\therefore\ x^4-3x^2+2x+1$

$=x^2(x^2-x+1)+x^3-4x^2+2x+1$

$=x(x^2-x+1)-3x^2+x+1$

$=-3(x^2-x+1)-2x+4$

$=-(1+\sqrt{3}i)+4$

$=3-\sqrt{3}i$ 　답 ④

오답 피하기

$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$를 주어진 식에 직접 대입할 수도 있지만 이 경우 계산이 복잡하여 실수할 수 있으므로 $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x-1=\sqrt{3}i$의 양변을 제곱하여 허수가 나오지 않도록 하는 것이 편리하다.

단계별 기출학습 본문 052~055쪽

01 ②, ④	02 -5	03 ④	04 ②	05 ①
06 2	07 ②	08 ③	09 ⑤	10 ④
11 23	12 ⑤	13 7	14 ③	15 -1
16 9	17 ③	18 ②	19 ⑤	20 -2
21 4	22 최댓값 : 8, 최솟값 : -12		23 8	

01 ① 실수는 모두 복소수이다. (참)
② 허수는 대소를 비교할 수 없다. (거짓)
③ $-2i$는 순허수이므로 허수이다. (참)
④ $2+i$에서 허수부분은 1이다. (거짓)
⑤ 제곱하여 -1이 되는 수는 i, $-i$의 2개이다. (참)

02 $z=(1-2i)^2x-2+3i$
$=(-3-4i)x-2+3i$
$=(-3x-2)+(-4x+3)i$
$z^2\geq0$이려면 z는 실수이어야 하므로
$$-4x+3=0 \qquad \therefore\ x=\frac{3}{4}$$
또 $z^2<0$이려면 z는 순허수이어야 하므로
$$-3x-2=0,\ -4x+3\neq0 \qquad \therefore\ x=-\frac{2}{3}$$
즉, $a=\frac{3}{4}$, $b=-\frac{2}{3}$이므로
$$10ab=10\times\frac{3}{4}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-5$$

03 ① $(3+5i)+(4-i)=7+4i$
② $(2i-6)-(3i-12)=6-i$
③ $(3-i)(3+i)=3^2-i^2=9-(-1)=10$
⑤ $\frac{1}{-i}=\frac{i}{-i\times i}=\frac{i}{1}=i$

04 $\frac{x}{1-2i}-\frac{y}{1+2i}=\frac{x(1+2i)-y(1-2i)}{(1-2i)(1+2i)}$
$=\frac{x-y+(2x+2y)i}{5}=3-2i$
x, y는 실수이므로 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$$x-y=15,\ 2(x+y)=-10$$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=5$, $y=-10$
$$\therefore\ \frac{y}{x}=\frac{-10}{5}=-2$$

05 $\overline{(1+i)z}=\overline{(1+i)}\cdot\bar{z}=(1-i)\bar{z}=4+2i$에서
$$\bar{z}=\frac{4+2i}{1-i}=\frac{(4+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+6i}{2}=1+3i$$
이므로 $z=1-3i$
따라서 $a=1$, $b=-3$이므로
$$a+b=1+(-3)=-2$$

다른 풀이

$\overline{(1+i)z}=4+2i$에서
$\overline{\overline{(1+i)z}}=\overline{4+2i}$, $(1+i)z=4-2i$
$$z=\frac{4-2i}{1+i}=\frac{(4-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-6i}{2}=1-3i$$

06 $\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=\alpha(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$
$=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$
$=(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}$
이때 $\alpha-\beta=(3-2i)-(2-3i)=1+i$, $\overline{\alpha-\beta}=1-i$이므로 주어진 식의 값은
$$(1+i)(1-i)=1^2-i^2=2$$

07 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(2-i)z-3i\bar{z}=(2-i)(a+bi)-3i(a-bi)$
$=2a+2bi-ai+b-3ai-3b$
$=(2a-2b)+(-4a+2b)i$
$=2-8i$
a, b는 실수이므로 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$$2a-2b=2,\ -4a+2b=-8$$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$
$$\therefore\ a+b=3+2=5$$

08 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$z+\bar{z}=4$에서 $(a+bi)+(a-bi)=4$
$$2a=4 \qquad \therefore\ a=2$$
또 $z\bar{z}=13$에서 $(a+bi)(a-bi)=13$
$$a^2+b^2=13,\ 4+b^2=13,\ b^2=9$$
$$\therefore\ b=\pm3$$
$$\therefore\ z=a+bi=2\pm3i$$

09 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$
① $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a+bi}+\frac{1}{a-bi}=\frac{2a}{a^2+b^2}$이고, a, b가 실수이므로 $2a$, a^2+b^2도 실수이다.
따라서 주어진 식은 실수이다. (참)
② $z^2=a^2-b^2+2abi$가 양의 실수이려면
$$a^2-b^2>0,\ 2ab=0$$
이어야 하므로 a는 실수, $b=0$이다.
따라서 z는 실수이다. (참)
③ $z=\bar{z}$이면 z는 실수이다. (참)
④ $\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a-bi}=\frac{a+bi}{(a-bi)(a+bi)}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$
이므로 $\frac{1}{\bar{z}}$이 실수이려면 $b=0$이어야 한다.
따라서 z는 실수이다. (참)
⑤ z가 실수이면 $z=\bar{z}$이므로 $z-\bar{z}=0$이다. (거짓)

10 $\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}=-2$에서

$\dfrac{z^2+\bar{z}^2}{z\bar{z}}=-2,\ z^2+\bar{z}^2=-2z\bar{z}$

$z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2=0,\ (z+\bar{z})^2=0$

$\therefore\ z+\bar{z}=0$, 즉 $z=-\bar{z}$

따라서 복소수 z는 순허수이므로 $z=bi(b\neq0$인 실수)로 놓을 수 있다.

ㄱ. $z-\bar{z}=bi-(-bi)=2bi$이고 $b\neq0$이므로 순허수이다.

ㄴ. $\dfrac{\bar{z}}{z}=\dfrac{-z}{z}=-1$이므로 실수이다.

ㄷ. $z^2-\bar{z}^2=z^2-(-z)^2=z^2-z^2=0$이므로 실수이다.

따라서 실수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11 $(1+i)^{2n}=-2^n$에서

$(1+i)^{2n}=\{(1+i)^2\}^n=(2i)^n=2^n\cdot i^n=-2^n$

이므로 $i^n=-1$

$\therefore\ n=4k-2(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

따라서 두 자리 자연수 n의 개수는 10, 14, 18, $\cdots$, 98의 23이다.

12 ① $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}i=\sqrt{-\dfrac{2}{5}}$

② $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{3}i=3i^2=-3$

③ $\sqrt{-2}\sqrt{3}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}i=\sqrt{-6}$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-6}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{6}i}=\sqrt{\dfrac{3}{6}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $\dfrac{3}{\sqrt{-5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}i}=\dfrac{\sqrt{3}i}{-\sqrt{5}}=-\sqrt{-\dfrac{3}{5}}$

13 $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-5}}=-\sqrt{\dfrac{x+2}{x-5}}$이므로

$x+2>0,\ x-5<0$ 또는 $x=-2$

$\therefore\ -2\le x<5$

따라서 주어진 조건을 만족하는 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이므로 정수 x의 값의 총합은 7이다.

14 $\sqrt{2}\sqrt{-2}+\sqrt{-2}\sqrt{-2}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}+\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}}$

$=\sqrt{-4}-\sqrt{4}-\sqrt{\dfrac{12}{-3}}+\sqrt{\dfrac{12}{3}}$

$=\sqrt{-4}-\sqrt{4}-\sqrt{-4}+\sqrt{4}$

$=0$

다른 풀이

$\sqrt{2}\sqrt{-2}+\sqrt{-2}\sqrt{-2}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}+\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}}$

$=\sqrt{2}\sqrt{2}i+\sqrt{2}i\sqrt{2}i+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}i}+\dfrac{\sqrt{12}i}{\sqrt{3}i}$

$=2i-2+\dfrac{2}{i}+2=2i-2-2i+2$

$=0$

15 $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로

$z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3=(-i)^3=-i^3=i$

$\therefore\ z+z^2+z^3+\cdots+z^{15}$

$=i+i^2+i^3+\cdots+i^{15}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)$
$\quad+(i^9+i^{10}+i^{11}+i^{12})+i^{13}+i^{14}+i^{15}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+(i+i^2+i^3+i^4)$
$\quad+(i+i^2+i^3+i^4)+(i+i^2+i^3)$

$=0+0+0+i+(-1)+(-i)=-1$

16 $(z-\bar{z})^2=-36,\ z^2+\bar{z}^2=-10$이므로

$(z-\bar{z})^2=z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z}$

$-36=-10-2z\bar{z},\ 2z\bar{z}=26\qquad\therefore\ z\bar{z}=13$

또 $(z+\bar{z})^2=(z-\bar{z})^2+4z\bar{z}$이므로

$(z+\bar{z})^2=-36+4\cdot13=16$

$\therefore\ z+\bar{z}=-4\ (\because\ z+\bar{z}<0)$

$\therefore\ (z+2)(\bar{z}+2)=z\bar{z}+2(z+\bar{z})+4$

$=13+2(-4)+4=9$

다른 풀이

$z=a+bi(a,\ b$는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

(i) $z+\bar{z}<0$에서

$(a+bi)+(a-bi)<0,\ 2a<0\qquad\therefore\ a<0$

(ii) $(z-\bar{z})^2=-36$에서

$(2bi)^2=-36,\ -4b^2=-36,\ b^2=9$

$\therefore\ b=-3$ 또는 $b=3$

(iii) $z^2+\bar{z}^2=-10$에서

$(a+bi)^2+(a-bi)^2=2(a^2-b^2)=2(a^2-9)=-10$

$\therefore\ a=-2\ (\because\ a<0)$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 조건을 만족하는 복소수 z와 $\bar{z}$는

$z=-2+3i,\ \bar{z}=-2-3i$ 또는 $z=-2-3i,\ \bar{z}=-2+3i$

$\therefore\ (z+2)(\bar{z}+2)=(3i)(-3i)=9$

17 조건 (가)에서 $\alpha=\bar{\alpha}$이므로 복소수 α는 실수이고, 조건 (나)에서 $\beta^2<0$이므로 복소수 β는 순허수이다.

따라서 실수 $a,\ b$에 대하여 두 복소수 $\alpha,\ \beta$를

$\alpha=a,\ \beta=bi$로 놓을 수 있다.

이때 $\alpha,\ \beta$를 조건 (다)의 등식에 대입하면

$(3+i)\alpha+(2-5i)\beta=(3+i)a+(2-5i)bi$

$=(3a+5b)+(a+2b)i$

$=12+5i$

$a,\ b$는 실수이므로 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a+5b=12,\ a+2b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=3$

$\therefore\ \alpha^2-\beta^2=a^2-(bi)^2=(-1)^2-(3i)^2$

$=1-(-9)=10$

18 $z_1\overline{z_1}=1$, $z_2\overline{z_2}=1$에서 $z_1=\frac{1}{\overline{z_1}}$, $z_2=\frac{1}{\overline{z_2}}$이고, $z_1+z_2=1$ 이므로

$$z_1+z_2=\frac{1}{\overline{z_1}}+\frac{1}{\overline{z_2}}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}=\frac{\overline{z_1+z_2}}{\overline{z_1z_2}}$$
$$=\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}\right)}=1$$

즉, $\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}\right)}=1$에서 $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1z_2}$이므로

$z_1+z_2=z_1z_2=1$

$\therefore z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=1^2-2\cdot1=-1$

19 $a_1a_2a_3\cdots a_{15}=-1$이므로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{15}의 값 중 -1은 홀수 개를 갖는다. 즉,

-1이 1개일 때, $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}\cdots\sqrt{a_{15}}=1^{14}\cdot i=i$

-1이 3개일 때, $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}\cdots\sqrt{a_{15}}=1^{12}\cdot i^3=-i$

-1이 5개일 때, $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}\cdots\sqrt{a_{15}}=1^{10}\cdot i^5=i$

$\vdots$

-1이 15개일 때, $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}\cdots\sqrt{a_{15}}=i^{15}=i^3=-i$

따라서 $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}\cdots\sqrt{a_{15}}$의 값이 될 수 있는 것은 i 또는 $-i$이다.

20 $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{101}$
$=(1+i-1-i)+(1+i-1-i)+\cdots+(1+i-1-i)$
$\quad+1+i=1+i$

이므로

$$z=\frac{1+i}{2+i}=\frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{3+i}{5}$$

즉, $5z-3=i$이므로 양변을 제곱하면

$25z^2-30z+9=-1$, $25z^2-30z+10=0$

$5z^2-6z+2=0 \qquad \therefore 5z^2-6z=-2$

21 $z_1=2+3i$

$z_2=iz_1=i(2+3i)=-3+2i$

$z_3=iz_2=i(-3+2i)=-2-3i$

$z_4=iz_3=i(-2-3i)=3-2i$

$z_5=iz_4=i(3-2i)=2+3i$

$\vdots$

즉, 자연수 k에 대하여

$z_{4k-3}=2+3i$, $z_{4k-2}=-3+2i$, $z_{4k-1}=-2-3i$,

$z_{4k}=3-2i$

이므로

$z_{60}+z_{61}=(3-2i)+(2+3i)=5+i$

따라서 $a=5$, $b=1$이므로 $a-b=5-1=4$

22 주어진 등식을 정리하면

$x^2-x-3+(y^2+2y-6)i=3+2i$

❶

x, y는 실수이므로 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-x-3=3$, $y^2+2y-6=2$

$x^2-x-3=3$에서 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

또 $y^2+2y-6=2$에서 $y^2+2y-8=0$

$(y+4)(y-2)=0$

$\therefore y=-4$ 또는 $y=2$

❷

따라서 xy의 최댓값은 $(-2)\times(-4)=8$, 최솟값은 $3\times(-4)=-12$이다.

❸

채점 기준	성취도
❶ 등식을 실수부분과 허수부분으로 나타내기	20 %
❷ x, y의 값을 각각 구하기	30 %
❸ xy의 최댓값과 최솟값을 각각 구하기	50 %

23 $z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$z^2=(-i)^2=-1$

$z^3=z^2\cdot z=(-1)\cdot(-i)=i$

$z^4=z^3\cdot z=i\cdot(-i)=1$

$z^5=z^4\cdot z=1\cdot(-i)=-i$

$\vdots$

즉, 자연수 k에 대하여

$z^{4k-3}=-i$, $z^{4k-2}=-1$, $z^{4k-1}=i$, $z^{4k}=1$

❶

또 $w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서

$$w^2=w\cdot w=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$w^3=w^2\cdot w=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$
$$=\frac{4}{4}=1$$

즉, 자연수 k에 대하여

$w^{3k-2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $w^{3k-1}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$w^{3k}=1$

❷

따라서 $z^n=w^n$을 만족하는 자연수 n은 4와 3의 최소공배수인 12의 배수인 수이므로 두 자리 자연수 중 12의 배수의 개수는 12, 24, 36, $\cdots$, 96의 8이다.

❸

채점 기준	성취도
❶ 복소의 z의 거듭제곱 구하기	30 %
❷ 복소수 w의 거듭제곱 구하기	30 %
❸ n의 개수 구하기	40 %

05 이차방정식

05 이차방정식의 풀이

본문 056~061쪽

01 (1) 주어진 방정식의 근은 $x=-3$ 또는 $x=2$이므로 실근이다.

(2) 주어진 방정식의 근은 $x=-i$ 또는 $x=i$이므로 허근이다.

(3) 주어진 방정식의 근은 $x-\sqrt{2}i$ 또는 $x=\sqrt{2}i$이므로 허근이다.

답 (1) 실근 (2) 허근 (3) 허근

02 (1) $x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=3$

(2) $x^2+6x+5=0$에서 $(x+5)(x+1)=0$이므로

$x=-5$ 또는 $x=-1$

(3) $x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$이므로

$x=-2$ 또는 $x=4$

(4) $10x^2-x-3=0$에서 $(2x+1)(5x-3)=0$이므로

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{5}$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=3$ (2) $x=-5$ 또는 $x=-1$

(3) $x=-2$ 또는 $x=4$ (4) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{5}$

03 (1) $x^2+3x+1=0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

(2) $x^2-x+2=0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

(3) $2x^2+3x-4=0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-4)}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$$

(4) $3x^2-x+2=0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{1\pm\sqrt{23}i}{6}$$

답 (1) $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ (2) $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

(3) $x=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$ (4) $x=\frac{1\pm\sqrt{23}i}{6}$

04 (1) $x^2-8x+5=0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{8\pm\sqrt{44}}{2}=\frac{8\pm2\sqrt{11}}{2}=4\pm\sqrt{11}$$

다른 풀이

$2b'=b$, 즉 $2b'=-8$이라 하면 $b'=-4$이므로

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\cdot5}}{1}=4\pm\sqrt{11}$$

(2) $x^2+4x+20=0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot20}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm8i}{2}=-2\pm4i$$

(3) $2x^2+2x+5=0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot2\cdot5}}{2\cdot2}=\frac{-2\pm6i}{4}=\frac{-1\pm3i}{2}$$

(4) $3x^2-2x-3=0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot3\cdot(-3)}}{2\cdot3}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{40}}{6}=\frac{2\pm2\sqrt{10}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$$

답 (1) $x=4\pm\sqrt{11}$ (2) $x=-2\pm4i$

(3) $x=\frac{-1\pm3i}{2}$ (4) $x=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

05 (1) 판별식을 D라 하면 $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot3=13>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 판별식을 D라 하면 $D=7^2-4\cdot1\cdot52=-159<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(3) 판별식을 D라 하면 $D=(-1)^2-4\cdot2\cdot1=-7<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(4) 판별식을 D라 하면 $D=9^2-4\cdot4\cdot2=49>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 서로 다른 두 허근

(3) 서로 다른 두 허근 (4) 서로 다른 두 실근

06 (1) 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=6^2-1\cdot36=0$이므로 중근을 갖는다.

(2) 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=2^2-1\cdot25=-21<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(3) 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-4)^2-2\cdot5=6>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(4) 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-6)^2-9\cdot4=0$이므로 중근을 갖는다.

답 (1) 중근 (2) 서로 다른 두 허근

(3) 서로 다른 두 실근 (4) 중근

07 이차방정식 $2x^2-4x+3-a=0$의 판별식을 D라 하면

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(3-a)>0$, $-2+2a>0$

$\therefore a>1$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(3-a)=0,\ -2+2a=0$

$\therefore a=1$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(3-a)<0,\ -2+2a<0$

$\therefore a<1$

답 (1) $a>1$ (2) $a=1$ (3) $a<1$

08 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 주어진 이차식으로 만든 이차방정식이 중근을 가져야 한다.

(1) 이차방정식 $x^2+6x+2+a=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-1(2+a)=0 \qquad \therefore a=7$

(2) 이차방정식 $x^2+2ax+3a-2=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-1(3a-2)=0,\ a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=2$

(3) 이차방정식 $x^2-ax+2a-3=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4\cdot1\cdot(2a-3)=0,\ a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0 \qquad \therefore a=2$ 또는 $a=6$

답 (1) $a=7$ (2) $a=1$ 또는 $a=2$ (3) $a=2$ 또는 $a=6$

09 이차방정식 $(x-3)^2=3x^2-16x+14$에서

$x^2-6x+9=3x^2-16x+14,\ 2x^2-10x+5=0$

$\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{15}}{2}$

즉, $a=5$, $b=15$이므로 $a+b=20$

답 20

10 $(x*x)+(x*2)=10$에서

$(x^2-x)+(2x-2)=10,\ x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-4$ 또는 $x=3$

따라서 양수 x의 값은 3이다.

답 ③

11 $x=1+\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면

$(1+\sqrt{2})^2-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+k=0$

$3+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-2+k=0,\ 1+\sqrt{2}+k=0$

$\therefore k=-1-\sqrt{2}$

답 ①

12 $x=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$1-(2k+1)-4(k-3)=0,\ -6k+12=0$

$\therefore k=2$

즉, 주어진 이차방정식은 $x^2-5x+4=0$이므로

$(x-1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 다른 한 근은 4이다.

답 ⑤

빈출 유형 집중학습

12-1 $x=-1$을 주어진 방정식에 대입하면

$1+(m+1)-3m+2=0,\ 2m=4$

$\therefore m=2$

즉, 주어진 이차방정식은 $x^2-3x-4=0$이므로

$(x+1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 다른 한 근은 4이다.

답 ②

12-2 $x=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$8+2(2k+1)+6=0,\ 4k=-16$

$\therefore k=-4$

즉, 주어진 이차방정식은 $2x^2-7x+6=0$이므로

$(2x-3)(x-2)=0 \qquad \therefore x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$

따라서 나머지 한 근은 $\frac{3}{2}$이므로 상수 k의 값과 나머지 한 근의 곱은 $(-4)\cdot\frac{3}{2}=-6$

답 ①

13 주어진 이차방정식이 $x=2$를 근으로 가지므로 주어진 방정식에 대입하면

$4k+6(a+4)-2bk=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 ㉠이 k에 대한 항등식이므로 k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2(2-b)k+6(a+4)=0 \qquad \therefore a=-4,\ b=2$

$\therefore b-a=2-(-4)=6$

답 6

14 이차방정식 $x^2-3|x|-4=0$에서

(i) $x\ge0$일 때, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=4$

이때 $x\ge0$이므로 $x=4$

(ii) $x<0$일 때, $x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$

이때 $x<0$이므로 $x=-4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-4$ 또는 $x=4$

답 ①

오답 피하기

x의 값의 범위에 따라 절댓값을 없앤 후, 구한 x의 값이 주어진 x의 값의 범위에 속하는지 반드시 확인해야 한다.

15 이차방정식 $x^2+|-x+2|-4=0$에서

(i) $x>2$일 때, $x^2-(-x+2)-4=0$

$x^2+x-6=0,\ (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

이때 $x>2$이므로 근이 아니다.

(ii) $x \leq 2$일 때, $x^2+(-x+2)-4=0$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때 $x \leq 2$이므로 $x=-1$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$-1+2=1$ 답 ④

16 이차방정식 $|x-2|^2-3|x-2|=4$에서

(i) $x \geq 2$일 때, $(x-2)^2-3(x-2)=4$

$x^2-7x+6=0$, $(x-1)(x-6)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=6$

이때 $x \geq 2$이므로 $x=6$

(ii) $x<2$일 때, $(x-2)^2+3(x-2)=4$

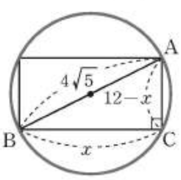
$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

이때 $x<2$이므로 $x=-2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=-2$ 또는 $x=6$이므로 $|\alpha-\beta|=8$ 답 8

17 주어진 직사각형의 둘레의 길이가 24이므로 긴 변의 길이를 $x(x>0)$라 하면 짧은 변의 길이는 $12-x$이고, $x>12-x$이므로 $6<x<12$



오른쪽 그림에서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=4\sqrt{5}$, $\angle C=90°$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+(12-x)^2=(4\sqrt{5})^2$

$x^2-12x+32=0$, $(x-4)(x-8)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=8$

이때 $6<x<12$이므로 $x=8$

따라서 구하는 긴 변의 길이는 8이다. 답 8

18 처음 직사각형의 가로의 길이를 x cm$(x>0)$라 하면 세로의 길이는 $(13-x)$cm이므로

$(x+2)(13-x+3)=2x(13-x)$

$x^2-12x+32=0$, $(x-4)(x-8)=0$

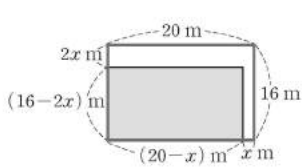
$\therefore x=4$ 또는 $x=8$

이때 (가로의 길이)>(세로의 길이)이므로 $x>13-x$

즉, $x>\frac{13}{2}$이므로 구하는 가로의 길이는 8 cm이다.

답 ③

19 길의 폭을 x m라 하면 주어진 그림을 오른쪽 그림과 같이 변형할 수 있으므로 남은 땅의 넓이는



$(20-x)(16-2x)=216$

$(x-20)(x-8)=108$, $x^2-28x+52=0$

$(x-2)(x-26)=0$

$\therefore x=2$(m) $(\because 0<x<8)$ 답 2 m

20 ㄱ. $\frac{D}{4}=(-1)^2-1 \cdot 4=-3<0$

ㄴ. $D=(-3)^2-4 \cdot 2 \cdot 6=-39<0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=(-2)^2-1 \cdot 1=3>0$

ㄹ. $D=(-5)^2-4 \cdot 2 \cdot (-3)=49>0$

따라서 실근을 갖는 이차방정식은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

21 주어진 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-1)^2-3k \geq 0 \qquad \therefore k \leq \frac{1}{3}$

따라서 k의 값이 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

22 $4mx^2+4(m+1)x+m=0$은 x에 대한 이차방정식이므로 $m \neq 0$이다.

주어진 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=4(m+1)^2-4m^2 \geq 0 \qquad \therefore m \geq -\frac{1}{2}$

이때 $m \neq 0$이므로 $-\frac{1}{2} \leq m<0$ 또는 $m>0$ 답 ⑤

23 $x^2-x(kx+4)+2=0$에서

$(1-k)x^2-4x+2=0$ ······ ㉠

㉠이 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(1-k) \geq 0$

$2+2k \geq 0 \qquad \therefore k \geq -1$

따라서 실수 k의 최솟값은 -1이다. 답 ②

24 방정식 $(m-1)x^2+2(m-1)x+m+1=0$에서

(i) $m=1$일 때,

$2=0$이므로 해가 존재하지 않는다.

(ii) $m \neq 1$일 때,

주어진 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-(m-1)(m+1) \geq 0$

$\therefore m \leq 1$

이때 $m \neq 1$이므로 $m<1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 범위는 $m<1$ 답 $m<1$

오답 피하기

주어진 문제에서 x에 대한 이차방정식이 아닌 x에 대한 방정식이라고만 하였으므로 x^2의 계수가 0이 되는 경우와 0이 되지 않는 경우로 나누어 생각한다.

25 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지려면 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(2-k)<0$ $\therefore k<1$ 답 ④

26 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 서로 다른 두 실근을 지므로 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=1^2-(k-3)>0$ $\therefore k<4$ …… ㉠

또 이차방정식 $x^2-2x+2k-1=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(2k-1)<0$ $\therefore k>1$ … ㉡

㉠, ㉡에서 실수 k의 값의 범위는

$1<k<4$ 답 ④

27 주어진 이차방정식이 중근을 가지려면 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(1-m)^2-(1-m)=0,\ m(m-1)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=1$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은 1이다. 답 ①

빈출 유형 집중학습

27-1 주어진 이차방정식이 중근을 가지려면 판별식을 D라 할 때,

$D=(a-1)^2-4(a-1)=0$

$(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 6이다. 답 ⑤

27-2 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $(k+1)x^2+2kx+k-2=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k+1)(k-2)=0$

$k^2-(k^2-k-2)=0,\ k+2=0$

$\therefore k=-2$ 답 -2

27-3 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+2k+2a-2b)=0$

$k^2-2ak+a^2-k^2-2k-2a+2b=0$

$(-2a-2)k+a^2-2a+2b=0$ …… ㉠

㉠이 k에 대한 항등식이므로

$-2a-2=0,\ a^2-2a+2b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-\frac{3}{2}$ $\therefore a-b=\frac{1}{2}$ 답 ④

28 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-c)^2-b(a-c)=0$

$(a-c)(a-c-b)=0$

$\therefore a=c$ 또는 $a=b+c$

이때 $a<b+c$이므로 $a=c$이다.

따라서 주어진 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다. 답 ②

29 $[x]^2+[x]-6=0$에서 $([x]+3)([x]-2)=0$

$\therefore [x]=-3$ 또는 $[x]=2$

(i) $[x]=-3$일 때, $-3\le x<-2$

(ii) $[x]=2$일 때, $2\le x<3$

(i), (ii)에서 $-3\le x<-2$ 또는 $2\le x<3$이므로 방정식을 만족하는 실수 x의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

30 $x^2-[x]-3=0$에서

(i) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로 $x^2-1-3=0$

$x^2-4=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

이때 $1\le x<2$이므로 해는 없다.

(ii) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로 $x^2-2-3=0$

$x^2-5=0$ $\therefore x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{5}$

이때 $2\le x<3$이므로 $x=\sqrt{5}$

(i), (ii)에서 $x=\sqrt{5}$ 답 ④

06 근과 계수의 관계

본문 062~067쪽

31 답 (1) 합 : 4, 곱 : -3 (2) 합 : 3, 곱 : 0

(3) 합 : $\frac{4}{3}$, 곱 : $-\frac{2}{3}$ (4) 합 : 3, 곱 : 12

32 (1), (2) 이차방정식 $2x^2-5x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}=\frac{21}{4}$

(4) $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}=\frac{17}{4}$

$\therefore |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{17}}{2}$ ($\because |\alpha-\beta|>0$)

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{21}{4}$ (4) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

33 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$

(1) $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha=\alpha\beta(\alpha+\beta)=4\cdot3=12$

(2) $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=4+3+1=8$

(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{4}$

(4) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{3^2-2\cdot4}{4}=\frac{1}{4}$

답 (1) 12 (2) 8 (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{1}{4}$

34 (1) 두 근의 합과 곱이 각각 5, 6이므로 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-5x+6=0$

(2) 두 근의 합과 곱이 각각 3, -4이므로 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-3x-4=0$

(3) 두 근의 합과 곱이 각각 6, 7이므로 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-6x+7=0$

(4) 두 근의 합과 곱이 각각 2, 2이므로 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-2x+2=0$

답 (1) $x^2-5x+6=0$ (2) $x^2-3x-4=0$
(3) $x^2-6x+7=0$ (4) $x^2-2x+2=0$

35 답 (1) $x=2\pm\sqrt{7}$ (2) $x=\pm\sqrt{3}i$ (3) $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$

36 (1) $x^2-4x-3=\{x-(2+\sqrt{7})\}\{x-(2-\sqrt{7})\}$

$=(x-2-\sqrt{7})(x-2+\sqrt{7})$

(2) $x^2+3=\{x-(-\sqrt{3}i)\}(x-\sqrt{3}i)$

$=(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)$

(3) $2x^2-5x+1=2\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$

답 (1) $(x-2-\sqrt{7})(x-2+\sqrt{7})$
(2) $(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)$
(3) $2\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$

37 (1) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고, a, b가 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\quad\therefore a=-4$

$b=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\quad\therefore b=1$

(2) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\sqrt{2}i$이고, a, b가 실수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{2}i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(\sqrt{2}i)+(-\sqrt{2}i)\quad\therefore a=0$

$b=(\sqrt{2}i)(-\sqrt{2}i)\quad\therefore b=2$

답 (1) $a=-4$, $b=1$ (2) $a=0$, $b=2$

38 이차방정식 $x^2-2x+3-k=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3-k$
또 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(3-k)=k-2$

(1) (i) $\alpha+\beta=2>0$

(ii) $\alpha\beta=3-k>0\quad\therefore k<3$

(iii) $\frac{D}{4}\geq0$에서 $k-2\geq0\quad\therefore k\geq2$

(i), (ii), (iii)에서 $2\leq k<3$

(2) $\alpha\beta=3-k<0$이므로 $k>3$

답 (1) $2\leq k<3$ (2) $k>3$

39 이차방정식 $x^2+(2a-b)x+3a-2b+1=0$의 두 근의 합과 곱이 각각 7, -11이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $-(2a-b)=7$, $3a-2b+1=-11$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=3$

$\therefore a+b=-2+3=1$ 답 ④

40 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=1-(-3)+1=5$ 답 ⑤

빈출 유형 집중학습

40-1 이차방정식 $x^2+5x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$=(-5)^2-3=22$ 답 ②

40-2 이차방정식 $x^2+4x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$

$=\frac{(-4)^3-3\cdot2\cdot(-4)}{2^2}$

$=\frac{-40}{4}=-10$ 답 ④

40-3 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-6\alpha+4=0$, $\beta^2-6\beta+4=0$

또 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$

$\therefore \frac{1}{\alpha^2-5\alpha+5}+\frac{1}{\beta^2-5\beta+5}$

$=\frac{1}{(\alpha^2-6\alpha+4)+\alpha+1}+\frac{1}{(\beta^2-6\beta+4)+\beta+1}$

$=\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{\alpha+\beta+2}{(\alpha+1)(\beta+1)}$

$=\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{6+2}{4+6+1}=\frac{8}{11}$ 답 ④

41 $x^2-kx+k-1=0$에서 $\alpha+\beta=k$, $\alpha\beta=k-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=k^2-2(k-1)$

$=(k-1)^2+1$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$은 $k=1$일 때 최솟값 1을 갖는다. 답 ④

42 두 근의 비가 1 : 3이므로 두 근을 k, $3k(k\neq0)$로 놓으면 $x^2-ax+3=0$에서

$k+3k=a$ …… ㉠

$k\cdot 3k=3$ …… ㉡

㉡에서 $k=\pm1$이므로

(i) $k=1$을 ㉠에 대입하면 $a=4$

(ii) $k=-1$을 ㉠에 대입하면 $a=-4$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 -16이다. 답 ①

43 두 근의 차가 2이므로 두 근을 α, $\alpha+2$라 하면 $x^2-2kx+k+1=0$에서

$\alpha+(\alpha+2)=2k$ …… ㉠

$\alpha\cdot(\alpha+2)=k+1$ …… ㉡

㉠에서 $k=\alpha+1$이므로 ㉡에 대입하면

$\alpha^2+2\alpha=\alpha+2$, $\alpha^2+\alpha-2=0$

$(\alpha+2)(\alpha-1)=0$

$\therefore\ \alpha=-2$ 또는 $\alpha=1$

(i) $\alpha=-2$를 ㉠에 대입하면 $k=-1$

(ii) $\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 1이다. 답 ①

44 두 근이 연속인 자연수이므로 두 근을 α, $\alpha+1$이라 하면 $x^2-ax+a+1=0$에서

$\alpha+(\alpha+1)=a$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+1)=a+1$ …… ㉡

㉠에서 $a=2\alpha+1$이므로 ㉡에 대입하면

$\alpha^2+\alpha=2\alpha+2$, $\alpha^2-\alpha-2=0$

$(\alpha+1)(\alpha-2)=0$ $\quad\therefore\ \alpha=2$ ($\because$ α는 자연수)

$\alpha=2$를 ㉠에 대입하면 $a=5$ 답 ⑤

오답 피하기

두 근이 자연수이므로 α도 자연수이다.
$(\alpha+1)(\alpha-2)=0$에서 $\alpha=-1$ 또는 $\alpha=2$라 하여 α의 값을 2개 구하지 않도록 주의한다.

45 두 근이 서로 역수 관계이므로 두 근을 α, $\frac{1}{\alpha}(\alpha\neq0)$이라 하면 $x^2-(a^3-4a^2+16a+1)x-2a+2=0$에서

$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=-2a+2$ $\quad\therefore\ a=\frac{1}{2}$ 답 ④

46 $x^2+2x+4=0$에서 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=4$이므로

$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=0$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=3$

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+3=0$이다. 답 ①

47 $x^2+2x+5=0$에서 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=5$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{2}{5}$,

$\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{5}$

이때 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 5인 이차방정식은 $5\left(x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}\right)=0$

$\therefore\ 5x^2+2x+1=0$ 답 ②

48 $2x^2-5x+1=0$에서 $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$이므로

$$\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{15}{2}$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{2}+2+2=\frac{9}{2}$$

이때 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x^2-\frac{15}{2}x+\frac{9}{2}\right)=0$

$\therefore\ 2x^2-15x+9=0$

따라서 $a=-15$, $b=9$이므로

$b-a=9-(-15)=24$ 답 24

49 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $x^2-4x+9=0$의 해를 구하면 $x=2\pm\sqrt{5}i$이므로 주어진 이차식 x^2-4x+9를 복소수 범위에서 인수분해하면

$x^2-4x+9=\{x-(2+\sqrt{5}i)\}\{x-(2-\sqrt{5}i)\}$

$=(x-2-\sqrt{5}i)(x-2+\sqrt{5}i)$ 답 ③

50 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $x^2-6x+10=0$의 해를 구하면 $x=3\pm i$이므로 주어진 이차식 $x^2-6x+10$을 복소수 범위에서 인수분해하면

$x^2-6x+10=\{x-(3+i)\}\{x-(3-i)\}$

$=(x-3-i)(x-3+i)$

따라서 보기 중 인수인 것은 $x-3-i$이다. 답 ②

51 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}$이다. 즉, $x^2+ax+b=0$에서

$(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=-a$, $(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=b$

따라서 $a=-2$, $b=-2$이므로 $ab=4$

다른 풀이

$x=1+\sqrt{3}$에서 $x-1=\sqrt{3}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x-2=0$ $\quad\therefore\ a=-2,\ b=-2$

$\therefore\ ab=4$ 답 4

빈출 유형 집중학습

51-1 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $1+i$이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.

즉, 이차방정식 $x^2-ax+b=0$에서

$(1+i)+(1-i)=a,\ (1+i)(1-i)=b$

따라서 $a=2,\ b=2$이므로 $a+b=2+2=4$ 답 ④

51-2 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, 즉 $-1+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{2}$이다.

이때 이차방정식 $x^2-ax+b=0$에서

$(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=a \quad \therefore a=-2$

$(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})=b \quad \therefore b=-1$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+(-1)^2=5$ 답 5

51-3 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $3-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $3+\sqrt{2}$이다.

즉, 이차방정식 $x^2-ax+b=0$에서

$(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=a \quad \therefore a=6$

$(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=b \quad \therefore b=7$

따라서 이차방정식 $x^2+(a-1)x+b=0$에서

$x^2+5x+7=0$이므로

(두 근의 합)$=-5$, (두 근의 곱)$=7$

답 두 근의 합 : -5, 두 근의 곱 : 7

52 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{3}i$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}i$이다.

즉, 이차방정식 $x^2+mx+n=0$에서

$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=-m,\ (1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=n$

$\therefore m=-2,\ n=4$

따라서 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$이므로

$-a=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=-\frac{1}{4} \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

$b=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=-\frac{1}{8}$

$\therefore a+b=\frac{1}{8}$ 답 ⑤

53 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면 α, β가 모두 양수이므로 $D\geq0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$에서

(i) $D=(k+2)^2-4k\geq0,\ k^2+4\geq0$

따라서 모든 실수 k에 대하여 성립한다.

(ii) $\alpha+\beta=k+2>0 \quad \therefore k>-2$

(iii) $\alpha\beta=k>0$

(i), (ii), (iii)에서 $k>0$ 답 ①

54 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면 α, β가 모두 음수이므로 $D\geq0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$에서

(i) $\frac{D}{4}=(m+2)^2-4(m+1)\geq0,\ m^2\geq0$

따라서 모든 실수 m에 대하여 성립한다.

(ii) $\alpha+\beta=-2(m+2)<0 \quad \therefore m>-2$

(iii) $\alpha\beta=4(m+1)>0 \quad \therefore m>-1$

(i), (ii), (iii)에서 $m>-1$ 답 ②

55 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 서로 다른 부호의 두 실근을 가지므로 $\alpha\beta<0$에서

$\alpha\beta=\frac{c}{a}<0 \quad \therefore ac<0$ 답 ④

56 이차방정식 $x^2-2(m-2)x-2m=0$의 두 근을 α, β라 하면 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 음수인 근의 절댓값이 양수인 근의 절댓값보다 크므로 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta<0$에서

(i) $\alpha+\beta=2(m-2)<0 \quad \therefore m<2$

(ii) $\alpha\beta=-2m<0 \quad \therefore m>0$

(i), (ii)에서 $0<m<2$ 답 ②

참고 근의 절댓값에 대한 조건

이차방정식의 두 근이 서로 다른 부호일 때

① (양수인 근의 절댓값)=(음수인 근의 절댓값)
⇨ (두 근의 합)$=0$, (두 근의 곱)<0

② (양수인 근의 절댓값)>(음수인 근의 절댓값)
⇨ (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)<0

③ (양수인 근의 절댓값)<(음수인 근의 절댓값)
⇨ (두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0

57 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이고 $\alpha+\beta=5$이다.

이때 이차방정식 $f(3x-2)=0$의 근은

$3x-2=\alpha$에서 $x=\frac{\alpha+2}{3}$

$3x-2=\beta$에서 $x=\frac{\beta+2}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x-2)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha+2}{3}+\frac{\beta+2}{3}=\frac{\alpha+\beta+4}{3}=\frac{9}{3}=3$ 답 ⑤

58 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이고 $\alpha\beta=8$이다.

이때 이차방정식 $f\left(\frac{x}{2}\right)=0$의 근은

$\frac{x}{2}=\alpha$에서 $x=2\alpha$

$\frac{x}{2}=\beta$에서 $x=2\beta$

따라서 이차방정식 $f\left(\frac{x}{2}\right)=0$의 두 근의 곱은

$2\alpha\cdot2\beta=4\alpha\beta=4\cdot8=32$ 답 ⑤

단계별 기출학습 본문 068~071쪽

01 ③	02 ②	03 ③	04 -64	05 ③
06 ④	07 ①	08 ③	09 ②	10 ⑤
11 ④	12 4	13 ③	14 3	15 1
16 12	17 96	18 $f(x)=x^2+3x+2$	19 1	
20 14	21 8			
22 서로 다른 두 실근을 갖는다.	23 7			

01 주어진 이차방정식의 한 근이 α이므로

$\alpha^2+2\alpha+4=0 \qquad \therefore\ \alpha^2=-2\alpha-4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 α를 곱하면

$\alpha^3=-2\alpha^2-4\alpha$

$=-2(-2\alpha-4)-4\alpha\ (\because\ \alpha^2=-2\alpha-4)$

$=8$

$\therefore\ \alpha^3+\dfrac{8}{\alpha^3}=8+\dfrac{8}{8}=9$

02 주어진 이차방정식의 한 근이 1이므로 $x=1$을 방정식에 대입하면 $2+(2k-1)-3k+1=0$

$-k=-2 \qquad \therefore\ k=2$

즉, 주어진 이차방정식은 $2x^2+3x-5=0$이므로

$(2x+5)(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=-\dfrac{5}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 $-\dfrac{5}{2}$이다.

03 주어진 이차방정식이 m의 값에 관계없이 항상 2를 근으로 가지므로 $x=2$를 방정식에 대입하면

$4-2(m-1)-(m+3)a+b-4=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-(2+a)m-3a+b+2=0$

즉, $2+a=0$, $-3a+b+2=0$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-8$

$\therefore\ a-b=-2-(-8)=6$

04 이차방정식 $x^2-7|x|-8=0$에서

(i) $x\geq0$일 때, $x^2-7x-8=0$

$(x+1)(x-8)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=8$

이때 $x\geq0$이므로 $x=8$

(ii) $x<0$일 때, $x^2+7x-8=0$

$(x+8)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-8$ 또는 $x=1$

이때 $x<0$이므로 $x=-8$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 -8, 8이므로

$\alpha\beta=-64$

05 처음 정사각형의 넓이는 $x^2\ \mathrm{cm}^2$이고, 사다리꼴의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot\{x+(x+10)\}=\dfrac{1}{2}x(2x+10)=x(x+5)$

이때 사다리꼴의 넓이는 처음 정사각형의 넓이의 2배이므로

$x(x+5)=2x^2$, $x(x-5)=0$

$\therefore\ x=5\ (\because\ x>0)$

따라서 처음 정사각형의 넓이는 $25\ \mathrm{cm}^2$이다.

06 주어진 방정식이 이차방정식이므로 $k\neq-2 \quad \cdots$ ㉠

이때 이차방정식 $(k+2)x^2-2(k+2)x+k+1=0$이 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k+2)^2-(k+2)(k+1)\geq0$

$k^2+4k+4-k^2-3k-2\geq0$

$\therefore\ k\geq-2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 실수 k의 값의 범위는 $k>-2$

07 이차방정식 $kx^2+(a-4k)x+4k+2-b=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=(a-4k)^2-4k(4k+2-b)=0$

$(-8a+4b-8)k+a^2=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$-8a+4b-8=0$, $a^2=0$

즉, $a=0$, $b=2$이므로 $a+b=2$

08 $3[x]^2+5[x]-2=0$에서 $(3[x]-1)([x]+2)=0$

$\therefore\ [x]=-2\ (\because\ [x]$는 정수$)$

따라서 주어진 방정식의 해는 $-2\leq x<-1$

09 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$

$\therefore\ \dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1}=\dfrac{(\beta-1)+(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$

$=\dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\dfrac{6-2}{4-6+1}=-4$

10 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3-i$이고 a, b가 실수이므로 다른 한 근은 $3+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(3-i)+(3+i)=-a \qquad \therefore\ a=-6$

$(3-i)(3+i)=b \qquad \therefore\ b=10$

이때 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+10x-6=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+10\alpha-6=0$, $\beta^2+10\beta-6=0$

또 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-10$, $\alpha\beta=-6$

$\therefore\ (\alpha^2+9\alpha-4)(\beta^2+9\beta-4)$
$=\{(\alpha^2+10\alpha-6)-\alpha+2\}$
$\{(\beta^2+10\beta-6)-\beta+2\}$
$=(-\alpha+2)(-\beta+2)$
$=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$
$=-6-2\cdot(-10)+4=18$

11 $x^2+2x-1=(x-p)(x-q)$에서 상수 p, q는 이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $p+q=-2$, $pq=-1$

$\therefore\ p^5+p^3q^2+p^2q^3+q^5$
$=p^3(p^2+q^2)+q^3(p^2+q^2)=(p^3+q^3)(p^2+q^2)$
$=\{(p+q)^3-3pq(p+q)\}\{(p+q)^2-2pq\}$
$=\{(-2)^3-3\cdot(-1)\cdot(-2)\}\{(-2)^2-2\cdot(-1)\}$
$=(-14)\cdot 6=-84$

12 주어진 이차방정식의 두 근의 절댓값의 비가 $1:2$이고 부호가 서로 다르므로 두 근을 α, -2α ($\alpha\neq0$인 실수)라 하면 $\alpha+(-2\alpha)=-(a-3)$에서

$\alpha=a+3$ …… ㉠

또 $\alpha\cdot(-2\alpha)=a-6$에서

$-2\alpha^2=a-6$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2\alpha^2+\alpha-3=0$

$(2\alpha+3)(\alpha-1)=0$

$\therefore\ \alpha=-\frac{3}{2}$ 또는 $\alpha=1$

(i) $\alpha=-\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{2}$

(ii) $\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $a=4$

이때 a는 정수이므로 $a=4$

13 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$

$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=3+2=5$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=4+3+1=8$

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-5x+8=0$이다.

14 이차방정식 $x^2-2(k+3)x+k^2+24=0$의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) $\frac{D}{4}=(k+3)^2-(k^2+24)=6k-15\geq0$ $\quad\therefore\ k\geq\frac{5}{2}$

(ii) $\alpha+\beta=2(k+3)>0$이므로 $k>-3$

(iii) $\alpha\beta=k^2+24>0$이므로 k는 모든 실수이다.

(i), (ii), (iii)에서 $k\geq\frac{5}{2}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 3이다.

15 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

이때 이차방정식 $f(3x+1)=0$의 두 근은

$3x+1=\alpha$에서 $x=\frac{\alpha-1}{3}$

$3x+1=\beta$에서 $x=\frac{\beta-1}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x+1)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha-1}{3}\cdot\frac{\beta-1}{3}=\frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{9}$
$=\frac{7-(-1)+1}{9}$
$=1$

16 x에 대한 이차방정식 $x^2-2nx-2n-1=0$에서

$\{x-(2n+1)\}(x+1)=0$

이므로 $x=2n+1$ 또는 $x=-1$

위의 두 근 중에서 큰 근이 α이므로 $\alpha=2n+1$

또 x에 대한 이차방정식 $x^2-4nx+3n^2-6n-9=0$에서

$\{x-(n-3)\}\{x-3(n+1)\}=0$

이므로 $x=n-3$ 또는 $x=3(n+1)$

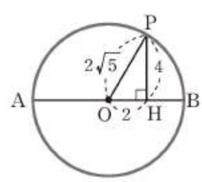
위의 두 근 중에서 작은 근이 β이므로 $\beta=n-3$

이때 $\alpha+\beta=34$이므로

$(2n+1)+(n-3)=34$

$3n=36 \quad \therefore\ n=12$

17 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O와 점 P를 이으면 삼각형 POH는 직각삼각형이므로



$\overline{OP}^2=\overline{OH}^2+\overline{PH}^2$
$=2^2+4^2=20$

$\therefore\ \overline{OP}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ ($\because\ \overline{OP}>0$)

이때 $\overline{AH}=\overline{OA}+\overline{OH}=2\sqrt{5}+2$,

$\overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=2\sqrt{5}-2$이므로

$\overline{AH}+\overline{BH}=(2\sqrt{5}+2)+(2\sqrt{5}-2)=4\sqrt{5}$

$\overline{AH}\cdot\overline{BH}=(2\sqrt{5}+2)(2\sqrt{5}-2)=20-4=16$

따라서 $\overline{AH}$, $\overline{BH}$를 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-4\sqrt{5}x+16=0$이므로

$a=-4\sqrt{5}$, $b=16$

$\therefore\ a^2+b=(-4\sqrt{5})^2+16=96$

18 $f(\alpha)=f(\beta)=7$에서 $f(\alpha)-7=0$, $f(\beta)-7=0$이므로 $g(x)=f(x)-7$로 놓으면 이차방정식 $g(x)=0$의 두 근은 α, β이다.

이때 α, β는 이차방정식 $x^2+3x-5=0$의 두 근이므로

$g(x)=f(x)-7=x^2+3x-5$

$\therefore\ f(x)=x^2+3x+2$

19 계수가 실수인 이차방정식 $x^2+(2m-1)x+2m-1=0$의 한 허근이 α이므로 $\bar{\alpha}$도 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\bar{\alpha}=-(2m-1)=-2m+1$ …… ㉠

$\alpha\bar{\alpha}=2m-1$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$\alpha+\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}=0 \quad \therefore \alpha+\bar{\alpha}=-\alpha\bar{\alpha}$ …… ㉢

이때 α^3이 실수이므로 $\alpha^3=\bar{\alpha}^3$, 즉 $\alpha^3-\bar{\alpha}^3=0$

$(\alpha-\bar{\alpha})(\alpha^2+\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}^2)=0$

$\therefore \alpha^2+\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}^2=0 \ (\because \alpha\neq\bar{\alpha})$

한편 $\alpha^2+\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}^2=(\alpha+\bar{\alpha})^2-\alpha\bar{\alpha}$이므로 ㉢에서

$(-\alpha\bar{\alpha})^2-\alpha\bar{\alpha}=(\alpha\bar{\alpha})^2-\alpha\bar{\alpha}=\alpha\bar{\alpha}(\alpha\bar{\alpha}-1)=0$

$\therefore \alpha\bar{\alpha}=1 \ (\because \alpha\bar{\alpha}\neq0)$

$\alpha\bar{\alpha}=1$이므로 ㉡에서 $1=2m-1$

$2m=2 \quad \therefore m=1$

20 이차방정식 $x^2-10x+5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=10$, $\alpha\beta=5$

$$\therefore \frac{2}{\alpha}+\frac{7}{\beta}+\beta=\frac{7\alpha+2\beta}{\alpha\beta}+\beta=\frac{2(\alpha+\beta)+5\alpha}{\alpha\beta}+\beta$$
$$=\frac{2(\alpha+\beta)+5\alpha+\alpha\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{2(\alpha+\beta)+5\alpha+\alpha\beta\cdot\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{2(\alpha+\beta)+5\alpha+5\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{7(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{7\cdot10}{5}=14$$

21 실수 a에 대하여 $[a]$는 실수 a의 정수 부분이고 $a-[a]$는 실수 a의 소수 부분, 즉 $0\leq a-[a]<1$이다.

이차방정식 $3x^2-14x+k=0$의 두 근의 합이 $\frac{14}{3}$이고,

$\frac{14}{3}=4+\frac{2}{3}$이므로

$[a]=4$, $a-[a]=\frac{2}{3}$

이때 주어진 이차방정식의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{k}{3}$이므로

$\frac{k}{3}=4\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3} \quad \therefore k=8$

22 이차방정식 $x^2-ax+\frac{b^2}{4}=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4\cdot1\cdot\frac{b^2}{4}=0$

$\therefore a^2=b^2$

…… ❶

이때 이차방정식 $x^2+2ax+3b-4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=a^2-(3b-4)$$
$$=b^2-3b+4 \ (\because a^2=b^2)$$
$$=\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

이므로 이차방정식 $x^2+2ax+3b-4=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

…… ❷

채점 기준	성취도
❶ a, b 사이의 관계식 구하기	50 %
❷ 이차방정식 $x^2+2ax+3b-4=0$의 근을 판별하기	50 %

23 (가)에서 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$

…… ❶

(나)에서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=-a$, $\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=b$

…… ❷

(다)에서 이차방정식 $x^2+cx+d=0$의 두 근이 α^3, β^3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^3+\beta^3=-c$, $\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=d$

…… ❸

이때

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=(-1)^2-2\cdot1=-1$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=(-1)^3-3\cdot1\cdot(-1)$$
$$=2$$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=-2$, $d=1$이므로

$a^2+b^2+c^2+d^2=7$

…… ❹

채점 기준	성취도
❶ (가)에서 근과 계수의 관계 이용하기	20 %
❷ (나)에서 근과 계수의 관계 이용하기	20 %
❸ (다)에서 근과 계수의 관계 이용하기	20 %
❹ $a^2+b^2+c^2+d^2$의 값 구하기	40 %

06 이차방정식과 이차함수

07 이차함수와 이차방정식의 관계 본문 072~077쪽

01 답 (1) $x=-1$ 또는 $x=3$ (2) $x=-4$ 또는 $x=1$

02 (1) 이차방정식 $x^2+4x+3=0$에서

$(x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$

(2) 이차방정식 $x^2-2x-8=0$에서

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

(3) 이차방정식 $x^2-8x+15=0$에서

$(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=5$

답 (1) $x=-3$ 또는 $x=-1$
(2) $x=-2$ 또는 $x=4$
(3) $x=3$ 또는 $x=5$

03 (1) 이차방정식 $x^2+2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다(접한다).

(2) 이차방정식 $-x^2+2x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(-1)\cdot 4=5>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(3) 이차방정식 $2x^2-3x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 2=-7<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

(4) 이차방정식 $-3x^2+3x-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\cdot(-3)\cdot(-4)=-39<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

답 (1) 한 점에서 만난다(접한다).
(2) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(3) 만나지 않는다.
(4) 만나지 않는다.

04 이차방정식 $x^2+6x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-k=9-k$

(1) $\frac{D}{4}>0$이므로 $9-k>0$ $\quad\therefore k<9$

(2) $\frac{D}{4}=0$이므로 $9-k=0$ $\quad\therefore k=9$

(3) $\frac{D}{4}<0$이므로 $9-k<0$ $\quad\therefore k>9$

답 (1) $k<9$ (2) $k=9$ (3) $k>9$

05 (1) $x^2-6x-3=-2x+2$에서

$x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

(2) $2x^2+5x+4=-3x-4$에서

$2x^2+8x+8=0$

$2(x+2)^2=0$ $\quad\therefore x=-2$

답 (1) $x=-1$ 또는 $x=5$ (2) $x=-2$

06 (1) $x^2-3x+4=-5x+3$에서 $x^2+2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 1이다.

(2) $x^2-3x+4=-4x+1$에서 $x^2+x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot 3=-11<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 없다.

(3) $x^2-3x+4=2x-1$에서 $x^2-5x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\cdot 5=5>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 2이다.

답 (1) 1 (2) 없다. (3) 2

07 (1) $x^2+1=2x-2$에서 $x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-3=-2<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프는 직선과 만나지 않는다.

(2) $-x^2+x=-3x-2$에서 $x^2-4x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-2)=6>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프는 직선과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(3) $2x^2+x-3=-3x+4$에서 $2x^2+4x-7=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=2^2-2\cdot(-7)=18>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프는 직선과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(4) $3x^2-5x+4=7x-8$에서 $3x^2-12x+12=0$, 즉 $x^2-4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-4=0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프는 직선과 한 점에서 만난다(접한다).

답 (1) 만나지 않는다.
(2) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(3) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(4) 한 점에서 만난다(접한다).

08 $2x^2+4x=x+k$에서 $2x^2+3x-k=0$의 판별식을 D라 하면 $D=3^2-4\cdot2\cdot(-k)=9+8k$

(1) $D>0$이므로 $9+8k>0$ $\quad\therefore k>-\frac{9}{8}$

(2) $D=0$이므로 $9+8k=0$ $\quad\therefore k=-\frac{9}{8}$

(3) $D<0$이므로 $9+8k<0$ $\quad\therefore k<-\frac{9}{8}$

답 (1) $k>-\frac{9}{8}$ (2) $k=-\frac{9}{8}$ (3) $k<-\frac{9}{8}$

09 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $3x^2-6ax+3a^2-2a+1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=(-3a)^2-3\cdot(3a^2-2a+1)>0$에서

$9a^2-9a^2+6a-3>0$ $\quad\therefore a>\frac{1}{2}$

답 ④

10 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 접하므로 이차방정식 $3x^2-kx+3=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 한다. 즉, $D=(-k)^2-4\cdot3\cdot3=0$에서

$k^2-36=0$ $\quad\therefore k=\pm6$

따라서 양수 k의 값은 6이다.

답 ④

11 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2-2(a+1)x+a^2-a+7=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=(a+1)^2-1\cdot(a^2-a+7)<0$에서

$a^2+2a+1-(a^2-a+7)<0$, $3a-6<0$

$\therefore a<2$

답 ④

빈출유형 집중학습

11-1 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+2x+3a-10=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(3a-10)<0$에서

$1-3a+10<0$, $3a>11$ $\quad\therefore a>\frac{11}{3}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 ③

11-2 주어진 이차함수의 그래프가 x축보다 위쪽에 있으려면 x축과 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $2x^2-4kx+2k^2-k+1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=(-2k)^2-2\cdot(2k^2-k+1)<0$에서

$4k^2-4k^2+2k-2<0$ $\quad\therefore k<1$

따라서 상수 a의 값은 1이다.

답 1

12 주어진 두 이차함수의 그래프가 모두 x축과 만나므로 이차방정식 $x^2+2x+5-2k=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, $D_1\geq0$이어야 한다.

즉, $\frac{D_1}{4}=1^2-(5-2k)\geq0$에서

$1-5+2k\geq0$, $2k\geq4$ $\quad\therefore k\geq2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 이차방정식 $2kx^2-6x+1=0$의 판별식을 D_2라 할 때, $D_2\geq0$이어야 한다.

즉, $\frac{D_2}{4}=(-3)^2-2k\geq0$에서

$9-2k\geq0$, $2k\leq9$ $\quad\therefore k\leq\frac{9}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $2\leq k\leq\frac{9}{2}$

따라서 정수 k의 값은 2, 3, 4이므로 그 합은

$2+3+4=9$

답 ③

13 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 접하려면 이차방정식 $x^2+2ax+2ak+k-b=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 한다. 즉, $\frac{D}{4}=a^2-(2ak+k-b)=0$에서

$a^2+b-k(2a+1)=0$

위의 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로

$a^2+b=0$, $2a+1=0$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$이므로 $ab=\frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

14 이차함수 $y=3x^2-2ax-b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로 이차방정식 $3x^2-2ax-b=0$의 두 근은 -1, 3이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{2a}{3}=-1+3=2 \quad \therefore a=3$

$-\frac{b}{3}=(-1)\cdot3=-3 \quad \therefore b=9$

$\therefore ab=27$ 답 ③

15 이차방정식 $-x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2-ax-b=0$의 두 근은 -2, 6이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-(-a)=-2+6=4 \quad \therefore a=4$

$-b=(-2)\cdot6=-12 \quad \therefore b=12$

$\therefore a+b=4+12=16$ 답 ⑤

16 이차방정식 $2x^2+px+8=0$의 두 근이 1, q이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{p}{2}=1+q, \ \frac{8}{2}=4=1\cdot q$

즉, $p=-10$, $q=4$이므로 $pq=-40$ 답 -40

17 이차방정식 $-x^2+2x+k=0$, 즉 $x^2-2x-k=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2, \ \alpha\beta=-k$

이때 $|\alpha-\beta|=4$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=4+4k=16$

$\therefore k=3$ 답 ③

빈출 유형 집중학습

17-1 이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6, \ \alpha\beta=3$

이때 두 교점 사이의 거리는 $|\alpha-\beta|$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=6^2-4\cdot3=24$

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

따라서 두 교점 사이의 거리는 $2\sqrt{6}$이다. 답 ③

17-2 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, -2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(-3)+(-2)=-5 \quad \therefore a=5$

$b=(-3)\cdot(-2)=6 \quad \therefore b=6$

따라서 이차함수 $y=x^2+6x+5$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+6x+5=0$의 두 근이므로

$(x+5)(x+1)=0 \quad \therefore x=-5$ 또는 $x=-1$

따라서 $y=x^2+6x+5$의 그래프와 x축의 두 교점 사이의 거리는 $|-5-(-1)|=4$ 답 4

18 이차방정식 $2x^2-2(k+1)x+2k-1=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k+1, \ \alpha\beta=\frac{2k-1}{2}$

이때 두 점 A, B 사이의 거리는 $|\alpha-\beta|$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$(\sqrt{3})^2=(k+1)^2-4\cdot\frac{2k-1}{2}$

$3=k^2+2k+1-2(2k-1)$

$k^2-2k=0, \ k(k-2)=0$

$\therefore k=2 \ (\because k>0)$ 답 2

19 이차함수 $y=x^2-x-1$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식

$x^2-x-1=2x+k$, 즉 $x^2-3x-1-k=0$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 한다.

$D=(-3)^2-4(-1-k)>0$에서

$9+4+4k>0, \ 4k>-13$

$\therefore k>-\frac{13}{4}$

따라서 정수 k의 최솟값은 -3이다. 답 ③

20 이차함수 $y=x^2-7x+k$의 그래프를 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 함수의 식은 $y=x^2-7x+k+5$이고, 이 함수의 그래프와 직선 $y=x+3$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-7x+k+5=x+3$, 즉 $x^2-8x+k+2=0$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-4)^2-(k+2)>0$에서

$16-k-2>0$

$\therefore k<14$ 답 $k<14$

21 이차함수 $y=x^2+ax+a$의 그래프와 직선 $y=2x+3$이 접하려면 이차방정식 $x^2+ax+a=2x+3$, 즉 $x^2+(a-2)x+a-3=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 한다.

$D=(a-2)^2-4(a-3)=0$에서 $a^2-8a+16=0$

$(a-4)^2=0 \quad \therefore a=4$ 답 ②

빈출 유형 집중학습

21-1 주어진 이차함수의 그래프에서 꼭짓점이 (2, 1)이므로 이차함수의 식을 $f(x)=a(x-2)^2+1 \ (a>0)$이라 하면 점 (0, 5)를 지나므로

$4a+1=5 \quad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=x^2-4x+5$

06 이차방정식과 이차함수

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-4x+5=2x+k$, 즉 $x^2-6x+5-k=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(5-k)=0$, $4+k=0$

$\therefore k=-4$ 답 ②

21-2 이차함수 $y=x^2+2kx+k$의 그래프와 직선 $y=2x-3$이 접해야 하므로 이차방정식 $x^2+2kx+k=2x-3$, 즉 $x^2+2(k-1)x+k+3=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k+3)=0$에서

$k^2-2k+1-k-3=0$, $k^2-3k-2=0$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 3이다. 답 3

21-3 직선 $y=3x-1$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=3(x-m)-1$, 즉 $y=3x-3m-1$이고, 이 직선과 이차함수 $y=2x^2+5x+1$의 그래프가 한 점에서 만나므로 이차방정식 $2x^2+5x+1=3x-3m-1$, 즉 $2x^2+2x+3m+2=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 한다. $\frac{D}{4}=1^2-2(3m+2)=0$에서

$1-6m-4=0$, $6m=-3$

$\therefore m=-\frac{1}{2}$ 답 ②

22 이차함수 $y=x^2+2ax+4$의 그래프와 직선 $y=4x+3$이 접하려면 이차방정식 $x^2+2ax+4=4x+3$, 즉 $x^2+2(a-2)x+1=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, $D_1=0$이어야 한다.

$\frac{D_1}{4}=(a-2)^2-1=0$에서 $a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$ …… ㉠

또 이차함수 $y=x^2+2ax+4$의 그래프와 직선 $y=-2x-12$가 접하려면 이차방정식 $x^2+2ax+4=-2x-12$, 즉 $x^2+2(a+1)x+16=0$의 판별식을 D_2라 할 때, $D_2=0$이어야 한다.

$\frac{D_2}{4}=(a+1)^2-16=0$에서 $a^2+2a-15=0$

$(a+5)(a-3)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 상수 a의 값은 3이다. 답 ④

23 이차함수 $y=2x^2-3x+k$의 그래프와 직선 $y=x+2$가 만나지 않으려면 이차방정식 $2x^2-3x+k=x+2$, 즉 $2x^2-4x+k-2=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(k-2)<0$에서

$4-2k+4<0$, $2k>8$

$\therefore k>4$

따라서 정수 k의 최솟값은 5이다. 답 ⑤

24 이차함수 $y=x^2-3x+k$의 그래프가 직선 $y=x+1$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-3x+k=x+1$, 즉 $x^2-4x+k-1=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, $D_1>0$이어야 한다.

$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-(k-1)>0$에서

$4-k+1>0$ $\quad\therefore k<5$ …… ㉠

또 이차함수 $y=x^2-3x+k$의 그래프가 직선 $y=-x-1$과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2-3x+k=-x-1$, 즉 $x^2-2x+k+1=0$의 판별식을 D_2라 할 때, $D_2<0$이어야 한다.

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(k+1)<0$에서

$1-k-1<0$ $\quad\therefore k>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 실수 k의 값의 범위는

$0<k<5$ 답 ③

25 이차함수 $y=3x^2+2x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $3x^2+2x+1=ax+b$, 즉 $3x^2+(2-a)x+1-b=0$의 근과 같다.

이 이차방정식의 두 근이 -2, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2-a}{3}=-2+4=2$, $a-2=6$ $\quad\therefore a=8$

$\frac{1-b}{3}=(-2)\cdot4=-8$, $1-b=-24$ $\quad\therefore b=25$

$\therefore a-b=8-25=-17$ 답 ①

26 이차함수 $y=2x^2+4x+5$의 그래프와 직선 $y=kx+9$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $2x^2+4x+5=kx+9$, 즉

$2x^2+(4-k)x-4=0$ …… ㉠

의 실근과 같으므로 $x=-1$을 대입하면

$2+k-4-4=0$ $\quad\therefore k=6$

$k=6$을 방정식 ㉠에 대입하면 $2x^2-2x-4=0$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 점 B의 x좌표가 2이므로 점 B의 y좌표는

$y=6\cdot2+9=21$ 답 21

27 이차함수 $y=x^2-8x+5$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-8x+5=mx+n$, 즉 $x^2-(8+m)x+5-n=0$의 근과 같다.
이때 m, n이 유리수이고 이차방정식 $x^2-(8+m)x+5-n=0$의 한 근이 $3-2\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $3+2\sqrt{2}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$8+m=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6 \qquad \therefore m=-2$

$5-n=(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=1 \qquad \therefore n=4$

$\therefore m-n=-2-4=-6$

답 ④

28 주어진 그림에서 이차함수 $y=x^2-ax+10$의 그래프와 직선 $y=x+b$가 만나는 교점의 x좌표가 1, 6이므로 이차방정식 $x^2-ax+10=x+b$, 즉 $x^2-(a+1)x+10-b=0$의 두 근은 1, 6이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$a+1=1+6=7 \qquad \therefore a=6$

$10-b=1\cdot 6=6 \qquad \therefore b=4$

$\therefore a-b=6-4=2$

답 2

29 이차함수 $y=2x^2-5x-3$의 그래프와 직선 $y=x-4$가 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표가 p, q이므로 이차방정식 $2x^2-5x-3=x-4$, 즉 $2x^2-6x+1=0$의 두 근은 p, q이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=-\frac{-6}{2}=3,\ pq=\frac{1}{2}$

이므로

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=3^2-2\cdot\frac{1}{2}=8$

답 ③

08 이차함수의 최대, 최소

본문 078~083쪽

30 답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: 3
(2) 최댓값: -2, 최솟값: 없다.

31 (1) $y=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$이므로 $x=-\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 $-\frac{1}{4}$을 갖는다.
(2) $y=2x^2+4x-3=2(x+1)^2-5$이므로 $x=-1$일 때, 최솟값 -5를 갖는다.
(3) $y=-2x^2+2x-3=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$이므로 $x=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $-\frac{5}{2}$를 갖는다.
(4) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+2=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{5}{2}$이므로 $x=1$일 때, 최댓값 $\frac{5}{2}$를 갖는다.

답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: $-\frac{1}{4}$
(2) 최댓값: 없다., 최솟값: -5
(3) 최댓값: $-\frac{5}{2}$, 최솟값: 없다.
(4) 최댓값: $\frac{5}{2}$, 최솟값: 없다.

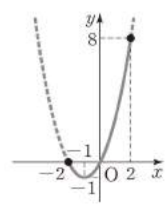
32 (1) $y=3(x-p)^2+q$의 그래프는 점 $(p,\ q)$를 꼭짓점으로 하고, 아래로 볼록인 포물선이므로 이 함수는 $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다.
$\therefore p=5,\ q=-2$
(2) $y=-2(x+p)^2-q$의 그래프는 점 $(-p,\ -q)$를 꼭짓점으로 하고, 위로 볼록인 포물선이므로 이 함수는 $x=-p$에서 최댓값 $-q$를 갖는다.
$\therefore p=1,\ q=-4$

답 (1) $p=5,\ q=-2$
(2) $p=1,\ q=-4$

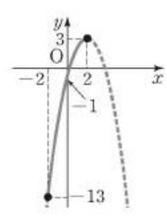
33 (1) $y=x^2-6x+a+1=(x-3)^2+a-8$이므로
$a-8=-2 \qquad \therefore a=6$
(2) $y=-x^2+4x+a=-(x-2)^2+a+4$이므로
$a+4=3 \qquad \therefore a=-1$

답 (1) 6 (2) -1

34 (1) $-2\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉,



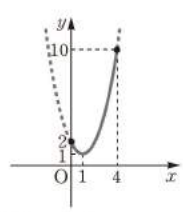
$f(-2)=0,\ f(-1)=-1,$
$f(2)=8$
이므로 $f(x)$의 최댓값은 8, 최솟값은 -1이다.
(2) $-2\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉,



$f(-2)=-13,\ f(2)=3$
이므로 $f(x)$의 최댓값은 3, 최솟값은 -13이다.

답 (1) 최댓값: 8, 최솟값: -1
(2) 최댓값: 3, 최솟값: -13

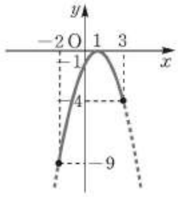
35 (1) $f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$
이므로 $0\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉,



$f(0)=2,\ f(1)=1,$
$f(4)=10$
이므로 $f(x)$의 최댓값은 10, 최솟값은 1이다.

(2) $f(x)=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$

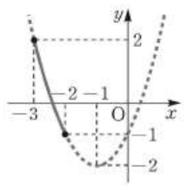
이므로 $-2\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $f(-2)=-9$, $f(1)=0$, $f(3)=-4$이므로 $f(x)$의 최댓값은 0, 최솟값은 -9이다.

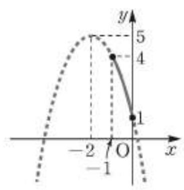
답 (1) 최댓값 : 10, 최솟값 : 1 (2) 최댓값 : 0, 최솟값 : -9

36 (1) $-3\le x\le -2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $f(-3)=2$, $f(-2)=-1$이므로 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -1이다.

(2) $-1\le x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

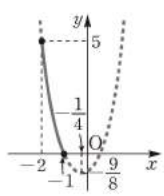


즉, $f(-1)=4$, $f(0)=1$이므로 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 1이다.

답 (1) 최댓값 : 2, 최솟값 : -1 (2) 최댓값 : 4, 최솟값 : 1

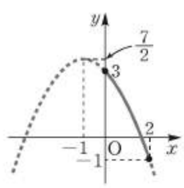
37 (1) $y=2x^2+x-1=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$

이므로 $-2\le x\le -1$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, $f(-2)=5$, $f(-1)=0$이므로 $f(x)$의 최댓값은 5, 최솟값은 0이다.



(2) $y=-\frac{1}{2}x^2-x+3=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{7}{2}$

이므로 $0\le x\le 2$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, $f(0)=3$, $f(2)=-1$이므로 $f(x)$의 최댓값은 3, 최솟값은 -1이다.



답 (1) 최댓값 : 5, 최솟값 : 0 (2) 최댓값 : 3, 최솟값 : -1

38 이차함수 $y=ax^2+6x-a+2$는 $x=1$일 때, 최솟값 b를 가지므로

$y=a(x-1)^2+b$, $y=ax^2-2ax+a+b$

이때 $-2a=6$, $a+b=-a+2$이므로

$a=-3$, $b=8$ $\quad\therefore a+b=5$

답 ⑤

39 $f(x)=-x^2+2ax+2a=-(x-a)^2+a^2+2a$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$일 때, 최댓값 a^2+2a를 갖는다. 즉, $a^2+2a=3$, $a^2+2a-3=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 a의 값의 곱은 -3이다.

답 ①

40 $f(x)=x^2-4ax+2a^2+4a+2$

$=(x-2a)^2-2a^2+4a+2$

에서 함수 $f(x)$는 $x=2a$일 때, 최솟값 $g(a)$를 가지므로

$g(a)=-2a^2+4a+2=-2(a-1)^2+4$

따라서 $g(a)$의 최댓값은 4이다.

답 4

41 $y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3$에서 $x=-1$이 주어진 범위에 포함되므로 $x=-1$에서 최솟값 3을 갖고, $x=3$에서 최댓값 19를 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $3+19=22$

답 ①

42 $y=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$에서 $x=1$이 주어진 범위에 포함되므로 $x=1$에서 최솟값 $k-1$을 갖고, $x=5$에서 최댓값 $k+15$를 갖는다.

이때 최솟값과 최댓값의 합이 10이므로

$k-1+k+15=10$, $2k=-4$

$\therefore k=-2$

답 ③

43 $y=x^2-4x+2k-1=(x-2)^2+2k-5$에서 $x=2$가 주어진 범위에 포함되므로 $x=2$에서 최솟값 $2k-5$를 갖고, $x=4$에서 최댓값 $2k-1$을 갖는다.

이때 주어진 함수의 최솟값이 -2이므로

$2k-5=-2$, $2k=3$ $\quad\therefore k=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 최댓값은

$2k-1=2\cdot\frac{3}{2}-1=2$

답 ③

44 $f(x)=-x^2+6kx+k^2+2=-(x-3k)^2+10k^2+2$에서 $x=3k$가 주어진 범위에 포함되므로 $x=3k$에서 최댓값을 갖고, $x=3k+2$에서 최솟값을 갖는다.

이때 $f(x)$의 최솟값은

$f(3k+2)=-2^2+10k^2+2=10k^2-2$

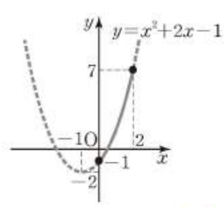
이므로 $10k^2-2=8$, $k^2=1$ $\quad\therefore k=\pm1$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 -1이다.

답 ②

45 $y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

에서 $x=-1$이 주어진 범위에 포함되지 않으므로 오른쪽 그림에서 $x=0$일 때 최솟값 -1, $x=2$일 때 최댓값 7을 갖는다.

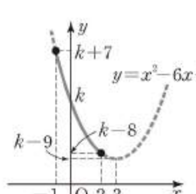


$\therefore M+m=7+(-1)=6$

답 6

46 $y=x^2-6x+k=(x-3)^2+k-9$

에서 $x=3$이 주어진 범위에 포함되지 않으므로 오른쪽 그림에서 $x=-1$일 때 최댓값 $k+7$, $x=2$일 때 최솟값 $k-8$을 갖는다.



이때 $k-8=2$이므로 $k=10$

따라서 주어진 함수의 최댓값은

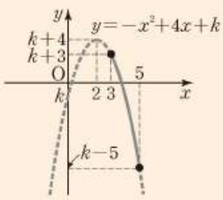
$10+7=17$

답 ④

빈출 유형 집중학습

46-1 $y=-x^2+4x+k$

$=-(x-2)^2+k+4$



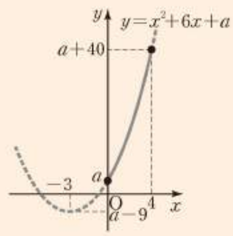
에서 $x=2$가 주어진 범위에 포함되지 않으므로 오른쪽 그림에서 $x=3$일 때 최댓값 $k+3$, $x=5$일 때 최솟값 $k-5$를 갖는다.

따라서 $k+3=2$이므로 $k=-1$

답 ②

46-2 $y=x^2+6x+a$

$=(x+3)^2+a-9$



에서 $x=-3$이 주어진 범위에 포함되지 않으므로 오른쪽 그림에서 $x=0$일 때 최솟값 a, $x=4$일 때 최댓값 $a+40$을 갖는다.

이때 $a+40=46$이므로 $a=6$

또 주어진 함수의 최솟값이 6이므로 $m=6$

$\therefore a+m=6+6=12$

답 12

47 $2x+y=3$에서 $y=3-2x$를 x^2+y^2에 대입하면

$$x^2+y^2=x^2+(3-2x)^2=5x^2-12x+9$$
$$=5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{9}{5}$$

따라서 $x=\frac{6}{5}$일 때 최솟값은 $\frac{9}{5}$이다.

답 ②

48 $x+y+2=0$에서 $y=-x-2$를 $2x+y^2$에 대입하면

$$2x+y^2=2x+(-x-2)^2=x^2+6x+4$$
$$=(x+3)^2-5$$

이때 $-4\le x\le 0$에서 $x=-3$일 때 최솟값 -5, $x=0$일 때 최댓값 4를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은 -1이다.

답 -1

49 $x+y=2$에서 $y=-x+2$ ······ ㉠

이고, $x\ge0$, $y\ge0$이므로 ㉠에서 $-x+2\ge0$

$\therefore 0\le x\le 2$

㉠을 x^2+3y^2에 대입하면

$$x^2+3(-x+2)^2=x^2+3x^2-12x+12$$
$$=4x^2-12x+12$$
$$=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+3$$

이때 $0\le x\le 2$에서 $x=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 3, $x=0$일 때 최댓값 12를 가지므로

$M+m=12+3=15$

답 ⑤

50 $2x^2+8x+y^2-6y+18=2(x+2)^2+(y-3)^2+1$

이때 x, y가 실수이므로 $(x+2)^2\ge0$, $(y-3)^2\ge0$

$\therefore 2x^2+8x+y^2-6y+18\ge1$

따라서 주어진 식의 최솟값은 1이다.

답 ④

51 $10x^2+y^2-20x+2y+k=10(x-1)^2+(y+1)^2+k-11$

이때 x, y가 실수이므로 $(x-1)^2\ge0$, $(y+1)^2\ge0$

$\therefore 10x^2+y^2-20x+2y+k\ge k-11$

따라서 주어진 식의 최솟값이 $k-11$이므로

$k-11=9$ $\quad\therefore k=20$

답 20

52 $-x^2-y^2+4x-2y+6=-(x-2)^2-(y+1)^2+11$

이때 x, y가 실수이므로 $(x-2)^2\ge0$, $(y+1)^2\ge0$

$\therefore -x^2-y^2+4x-2y+6\le11$

따라서 $x=2$, $y=-1$일 때 주어진 식의 최댓값이 11이므로 $a=2$, $b=-1$, $c=11$

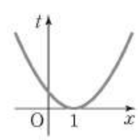
$\therefore a+b+c=12$

답 ⑤

오답 피하기

$(x-a)^2\ge0$, $(y-b)^2\ge0$이면 $-(x-a)^2\le0$, $-(y-b)^2\le0$이므로 주어진 식은 최댓값을 갖는다.

53 $x^2-2x+1=t$라 하면 $t=(x-1)^2$

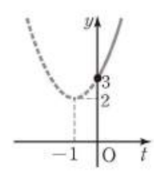


이므로 $t\ge0$이다.

이때 주어진 함수는

$y=t^2+2t+3$

$=(t+1)^2+2$

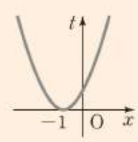


따라서 $t\ge0$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=0$일 때, 최솟값 3을 갖는다.

답 ⑤

빈출 유형 집중학습

53-1 $x^2+2x+1=t$라 하면

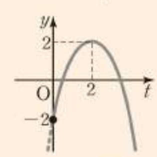


$t=(x+1)^2$이므로 $t\ge0$이다.

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+4t-2$

$=-(t-2)^2+2$



따라서 $t\ge0$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=2$일 때, 최댓값 2를 갖는다.

답 ②

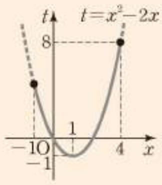
06 이차방정식과 이차함수

53-2 $x^2-2x=t$라 하면

$$t=(x-1)^2-1$$

이므로 $-1\le x\le 4$일 때,

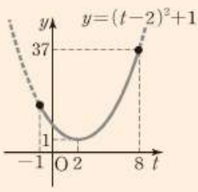
$$-1\le t\le 8$$



이때 주어진 함수는

$$y=t^2-4t+5$$
$$=(t-2)^2+1$$

따라서 $-1\le t\le 8$에서 함수 $y=(t-2)^2+1$의 최댓값과 최솟값은 오른쪽 그림에서 $t=8$일 때 최댓값 37, $t=2$일 때 최솟값 1이다.



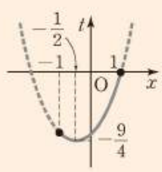
답 최댓값 : 37, 최솟값 : 1

53-3 $x^2+x-2=t$라 하면

$$t=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

이므로 $-1\le x\le 1$일 때,

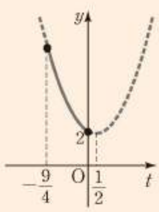
$$-\frac{9}{4}\le t\le 0$$



이때 주어진 함수는

$$y=t^2-t+2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

따라서 $-\frac{9}{4}\le t\le 0$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=0$일 때, 최솟값 2를 갖는다. 답 ⑤



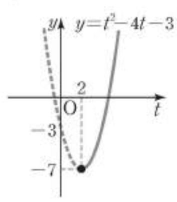
54 $x^2+4x+6=t$라 하면 $t=(x+2)^2+2$이므로 $t\ge 2$

따라서 주어진 함수는

$$y=t^2-4t-3=(t-2)^2-7$$

이고, 오른쪽 그림에서 $t=2$일 때 최솟값 -7을 가지므로

$$b=-7$$



이때 $x^2+4x+6=2$에서 $(x+2)^2=0$, 즉 $x=-2$이므로

$$a=-2$$
$$\therefore a+b=-2+(-7)=-9$$

답 ②

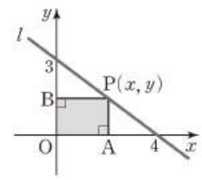
55 $y=-2t^2+12t+22=-2(t-3)^2+40$

이므로 $t=3$일 때 최고 높이에 도달하고 그 높이는 40 m이다.

따라서 $a=3$, $b=40$이므로 $a+b=43$ 답 43

56 직선 l의 기울기가 $-\frac{3}{4}$, y절편이 3이므로 직선 l의 방정식은 $y=-\frac{3}{4}x+3$

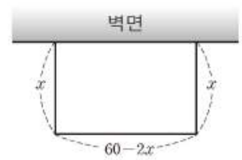
이때 $0<x<4$이므로 오른쪽 그림에서 □PBOA의 넓이는



$$xy=x\left(-\frac{3}{4}x+3\right)$$
$$=-\frac{3}{4}x^2+3x$$
$$=-\frac{3}{4}(x-2)^2+3$$

따라서 $x=2$일 때, 최댓값 3을 갖는다. 답 3

57 오른쪽 그림에서 창고의 세로의 길이를 $x(0<x<30)$라 하면 창고의 가로의 길이는 $60-2x$이므로 창고의 넓이를 y라 하면



$$y=x(60-2x)=-2x^2+60x=-2(x-15)^2+450$$

따라서 $0<x<30$에서 $x=15$일 때, 최댓값 450을 갖는다. 답 ⑤

단계별 기출학습

본문 084~087쪽

01 ③	02 ⑤	03 8	04 ⑤	05 ④
06 ④	07 6	08 ③	09 ②	10 ①
11 ③	12 ⑤	13 16	14 ③	15 ④
16 ②	17 $m=-1$, $n=-\frac{1}{4}$	18 $-\frac{1}{3}$	19 ②	
20 $\frac{15}{4}$	21 11	22 9	23 60	

01 이차방정식 $x^2-(2a+b)x+a-b=0$의 두 근이 -2, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2a+b=-2+4$ $\quad\therefore 2a+b=2$ ...... ㉠

$a-b=(-2)\cdot 4$ $\quad\therefore a-b=-8$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=6$

$\therefore a+b=4$

02 이차방정식 $x^2-2(a-1)x+3a+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이므로

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(3a+4)=0$$
$$a^2-2a+1-3a-4=0,\ a^2-5a-3=0$$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 5이다.

03 이차방정식 $x^2-(a+1)x+2(a+1)=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a+1,\ \alpha\beta=2(a+1)$$

이때 $|\alpha-\beta|=3$이므로

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=(a+1)^2-4\cdot2(a+1)$$
$$=a^2-6a-7=9$$

이므로

$$a^2-6a-16=0,\ (a+2)(a-8)=0$$
$$\therefore a=8\ (\because a>0)$$

04 이차함수 $y=x^2+3k$의 그래프와 직선 $y=2x+3$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+3k=2x+3$, 즉 $x^2-2x+3k-3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(3k-3)>0$이어야 하므로 $1-3k+3>0$

$$3k<4 \qquad \therefore k<\frac{4}{3}$$

따라서 정수 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

05 이차함수 $y=x^2+4x+k$의 그래프와 직선 $y=3x+4$가 적어도 한 점에서 만나는 경우는 접하거나 서로 다른 두 점에서 만나는 경우이다.

따라서 이차방정식 $x^2+4x+k=3x+4$, 즉 $x^2+x+k-4=0$의 판별식을 D라 할 때, $D\geq0$이어야 하므로 $D=1^2-4(k-4)\geq0$

$$1-4k+16\geq0,\ 4k\leq17 \qquad \therefore k\leq\frac{17}{4}$$

따라서 정수 k의 최댓값은 4이다.

06 이차방정식 $x^2+px+q=-x+5$, 즉

$$x^2+(p+1)x+q-5=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

에서 p, q가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 ㉠의 한 근이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$-(p+1)=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2 \qquad \therefore p=-3$$
$$q-5=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1 \qquad \therefore q=4$$
$$\therefore p+q=-3+4=1$$

07 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 $x=1$일 때, 최댓값 8을 가지므로 $y=a(x-1)^2+8$이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$$0=4a+8 \qquad \therefore a=-2$$

따라서 주어진 이차함수의 식은

$$y=-2(x-1)^2+8=-2x^2+4x+6$$

이므로 $c=6$

08 $f(x)=x^2-3x+q=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+q$에서 $x=\dfrac{3}{2}$이 주어진 범위에 포함되므로 $x=\dfrac{3}{2}$에서 최솟값 $-\dfrac{9}{4}+q$를 갖고, $x=3$에서 최댓값 q를 갖는다.

이때 주어진 함수의 최솟값이 $\dfrac{7}{4}$이므로

$$-\frac{9}{4}+q=\frac{7}{4} \qquad \therefore q=4$$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 4이다.

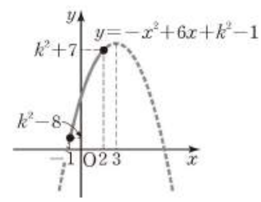
09 $y=-3x^2+6x+p=-3(x-1)^2+3+p$에서 $x=1$이 주어진 범위에 포함되므로 $x=1$에서 최댓값 $p+3$을 갖고, $x=3$에서 최솟값 $p-9$를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 차는

$$p+3-(p-9)=12$$

10 $y=-x^2+6x+k^2-1$

$\quad=-(x-3)^2+k^2+8$



에서 $x=3$이 주어진 범위에 포함되지 않으므로 오른쪽 그림에서 $x=-1$일 때 최솟값 k^2-8, $x=2$일 때 최댓값 k^2+7을 갖는다.

이때 주어진 함수의 최댓값이 16이므로

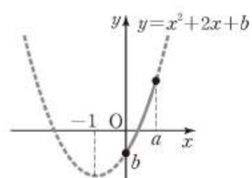
$$k^2+7=16 \qquad \therefore k^2=9$$

따라서 주어진 함수의 최솟값은

$$k^2-8=9-8=1$$

11 $y=x^2+2x+b$

$\quad=(x+1)^2+b-1$



에서 $x=-1$은 주어진 범위에 포함되지 않으므로 오른쪽 그림에서 $x=0$일 때 최솟값 b, $x=a$일 때 최댓값 a^2+2a+b를 갖는다.

이때 주어진 함수의 최솟값이 -1, 최댓값이 7이므로

$$b=-1,\ a^2+2a+b=7$$
$$a^2+2a-8=0,\ (a+4)(a-2)=0$$
$$\therefore a=2\ (\because a\geq0)$$
$$\therefore a^2+b^2=2^2+(-1)^2=5$$

12 $x+y=2$에서 $y=-x+2$를 $2x^2+2xy-y^2$에 대입하면

$$2x^2+2x(-x+2)-(-x+2)^2$$
$$=2x^2-2x^2+4x-x^2+4x-4$$
$$=-x^2+8x-4=-(x-4)^2+12$$

따라서 $x=4$일 때 최댓값은 12이다.

13 $-x^2-y^2+10x-6y-k=-(x-5)^2-(y+3)^2+34-k$

이때 x, y가 실수이므로

$$(x-5)^2\geq0,\ (y+3)^2\geq0$$
$$\therefore -x^2-y^2+10x-6y-k\leq34-k$$

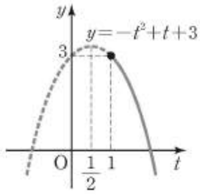
따라서 주어진 식의 최댓값이 $34-k$이므로

$$34-k=18 \qquad \therefore k=16$$

14 $x^2+2x+2=t$로 놓으면 $t=(x+1)^2+1$이므로 $t\geq1$

이때 주어진 함수는

$$y=-t^2+(t-2)+5$$
$$=-t^2+t+3$$
$$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$$



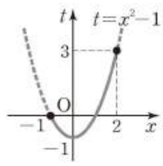
따라서 $t\geq1$에서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=1$일 때 최댓값 3을 갖는다.

15 $y=(x-1)^2(x+1)^2-2(x-1)(x+1)+4$

$=(x^2-1)^2-2(x^2-1)+4$

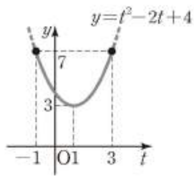
$x^2-1=t$라 하면 $-1\leq x\leq2$에서

$$-1\leq t\leq3$$



이때 주어진 함수는

$$y=t^2-2t+4$$
$$=(t-1)^2+3$$



따라서 $-1\leq t\leq3$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=-1$ 또는 $t=3$일 때, 최댓값 7을 갖는다.

16 두 부분으로 나눈 철사의 길이를 각각 p, q라 하면

$$p+q=8 \qquad \therefore q=-p+8$$

이때 한 변의 길이가 각각 p, q인 두 정삼각형의 넓이의 합을 S라 하면

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}p^2+\frac{\sqrt{3}}{4}q^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(p^2+q^2)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{p^2+(-p+8)^2\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(2p^2-16p+64)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(p^2-8p+32)=\frac{\sqrt{3}}{2}(p-4)^2+8\sqrt{3}$$

따라서 $0<p<8$이므로 S는 $p=4$일 때 최솟값 $8\sqrt{3}$을 갖는다.

17 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2-a$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 접하므로 이차방정식

$x^2-2ax+a^2-a=mx+n$, 즉

$x^2-(2a+m)x+a^2-a-n$의 판별식을 D라 하면

$$D=(2a+m)^2-4(a^2-a-n)$$
$$=4a^2+4am+m^2-4a^2+4a+4n$$
$$=4a(m+1)+m^2+4n=0$$

위의 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$m+1=0,\ m^2+4n=0$$
$$\therefore m=-1,\ n=-\frac{1}{4}$$

18 $2f(1-x)+f(x)=\frac{1}{2}x^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 x 대신 $1-x$를 대입하면

$2f(x)+f(1-x)=\frac{1}{2}(1-x)^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠$-2\times$㉡을 하면

$$-3f(x)=\frac{1}{2}x^2-(1-x)^2$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$$
$$=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$$
$$\therefore f(x)=\frac{1}{6}(x-2)^2-\frac{1}{3}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $0\leq x\leq3$에서 $x=2$일 때, 최솟값 $-\frac{1}{3}$을 갖는다.

19 $y=-x^2+2ax-a^2+1=-(x-a)^2+1$이므로 $x=a$가 주어진 범위에 포함되면 $x=a$일 때, 최댓값 1을 갖는다.

이때 조건에서 최댓값이 -3이므로 $x=a$는 주어진 범위에 포함되지 않는다.

즉, $x=1$ 또는 $x=2$에서 최댓값을 가져야 한다.

(i) $a<1$일 때, $x=1$에서 최댓값을 가지므로

$$-1+2a-a^2+1=-3,\ a^2-2a-3=0$$
$$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1\ (\because a<1)$$

(ii) $a>2$일 때, $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$$-4+4a-a^2+1=-3,\ a^2-4a=0$$
$$a(a-4)=0 \qquad \therefore a=4\ (\because a>2)$$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은

$$-1+4=3$$

20 이차함수 $y=x^2+2$의 그래프 위의 한 점 P의 좌표를 $(a,\ a^2+2)$로 놓으면 점 Q의 y좌표도 a^2+2이므로 $y=x-2$에서

$$a^2+2=x-2 \qquad \therefore x=a^2+4$$

즉, $\mathrm{Q}(a^2+4,\ a^2+2)$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=(a^2+4)-a=a^2-a+4$$
$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$일 때, 선분 PQ의 길이는 최소이고, 최솟값은 $\frac{15}{4}$이다.

21 $y=x^2-6x+5$의 그래프가 y축과 만나는 점이 A이므로

$$\mathrm{A}(0,\ 5)$$

또 $y=x^2-6x+5$의 그래프가 x축과 만나는 두 점이 B, C이므로

$$x^2-6x+5=0,\ (x-1)(x-5)=0$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=5$$

즉, B(1, 0), C(5, 0)이고 점 P(a, b)는 이차함수 $y=x^2-6x+5$의 그래프 위의 점이므로 $b=a^2-6a+5$
$b=a^2-6a+5$를 $2a+b$에 대입하면

$$2a+(a^2-6a+5)=a^2-4a+5=(a-2)^2+1$$

이때 점 P가 점 A에서 점 C까지 움직이므로 $0\le a\le 5$에서 $a=5$일 때 최댓값 10, $a=2$일 때 최솟값 1을 갖는다.
따라서 $2a+b$의 최댓값과 최솟값의 합은

$$10+1=11$$

22 $x+y=5$에서 $y=5-x$
x, y가 양의 실수이므로 $y=5-x>0$

$$\therefore 0<x<5$$

······························ ❶

$y=5-x$를 x^2+2y에 대입하면

$$x^2+2(5-x)=x^2-2x+10=(x-1)^2+9$$

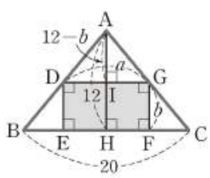
······························ ❷

이때 $x=1$은 $0<x<5$에 포함되므로 구하는 최솟값은 9이다.

······························ ❸

채점 기준	성취도
❶ x의 값의 범위 구하기	30 %
❷ 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타내기	30 %
❸ 주어진 식의 최솟값 구하기	40 %

23 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{\mathrm{AH}}$와 $\overline{\mathrm{DG}}$가 만나는 점을 I라 하자. 또 $\overline{\mathrm{DG}}=a$, $\overline{\mathrm{GF}}=b$ $(0<a<20,\ 0<b<12)$라 하면



$\overline{\mathrm{AI}}=12-b$이고 $\triangle\mathrm{ADG}\backsim\triangle\mathrm{ABC}$이므로

$$a:20=(12-b):12,\ 12a=20(12-b)$$
$$\therefore b=12-\frac{3}{5}a$$

······························ ❶

이때 □DEFG의 넓이를 S라 하면

$$S=ab=a\left(12-\frac{3}{5}a\right)=-\frac{3}{5}a^2+12a$$
$$=-\frac{3}{5}(a-10)^2+60$$

따라서 □DEFG의 넓이의 최댓값은 $a=10$일 때 60이다.

······························ ❷

채점 기준	성취도
❶ 닮음비를 이용하여 $\overline{\mathrm{DG}}$와 $\overline{\mathrm{GF}}$ 사이의 관계식 구하기	50 %
❷ □DEFG의 넓이의 최댓값 구하기	50 %

07 여러 가지 방정식

09 삼차방정식과 사차방정식

본문 088~093쪽

01 (1) 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+4x^2+x-6=0$에서

$$(x-1)(x^2+5x+6)=0$$
$$(x-1)(x+2)(x+3)=0$$

따라서 실근은 $x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-3$이다.

(2) 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ & & 2 & -4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-4x^2+3x+2=0$에서 $(x-2)(x^2-2x-1)=0$
이때 $x^2-2x-1=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근의 공식에 의하여 $x=1\pm\sqrt{2}$
따라서 실근은 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$이다.

(3) 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ & & -2 & 4 & -10 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+x+10=0$에서 $(x+2)(x^2-2x+5)=0$
이때 $x^2-2x+5=0$은 허근을 가지므로 실근은 $x=-2$뿐이다.

답 (1) $x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-3$
(2) $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$
(3) $x=-2$

02 (1) $x^4+8x=0$의 좌변을 인수분해하면

$$x(x^3+8)=0,\ x(x+2)(x^2-2x+4)=0$$
$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{3}i$$

(2) 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ & & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & \boxed{0} \\ & & -1 & 1 & -2 & \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4-x^3+x^2+x-2=0$에서

$$(x-1)(x+1)(x^2-x+2)=0$$
$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

답 (1) $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$
(2) $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

03 (1) $(x^2+3x-3)(x^2+3x+4)=8$에서 $x^2+3x=t$로 치환하면 $(t-3)(t+4)=8$

$t^2+t-20=0,\ (t-4)(t+5)=0$

$(x^2+3x-4)(x^2+3x+5)=0$

$(x+4)(x-1)(x^2+3x+5)=0$

이때 $x^2+3x+5=0$은 허근을 가지므로 실근은 $x=-4$ 또는 $x=1$이다.

(2) $(x^2+4x)(x^2+4x-2)=15$에서 $x^2+4x=t$로 치환하면 $t(t-2)=15$

$t^2-2t-15=0,\ (t+3)(t-5)=0$

$(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)=0$

$(x+3)(x+1)(x+5)(x-1)=0$

따라서 실근은 $x=-5$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$이다.

답 (1) $x=-4$ 또는 $x=1$

(2) $x=-5$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

04 (1) $x^4-5x^2+4=0$에서 $(x^2-1)(x^2-4)=0$

$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0$

따라서 실근은 $x=\pm1$ 또는 $x=\pm2$이다.

(2) $x^4-4x^2+3=0$에서 $(x^2-1)(x^2-3)=0$

$(x+1)(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

따라서 실근은 $x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$이다.

(3) $x^4+x^2+1=0$에서 $x^4+2x^2+1-x^2=0$

$(x^2+1)^2-x^2=0,\ (x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^2+x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(4) $x^4+6x^2+25=0$에서 $x^4+10x^2+25-4x^2=0$

$(x^2+5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)=0$

$x^2+2x+5=0$ 또는 $x^2-2x+5=0$

$\therefore x=-1\pm2i$ 또는 $x=1\pm2i$

답 (1) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm2$

(2) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(3) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(4) $x=-1\pm2i$ 또는 $x=1\pm2i$

05 답 (1) 4 (2) 2 (3) 1

06 (1) x^3의 계수가 1이고 근이 $-1,\ 2,\ 3$인 삼차방정식은

$x^3-(-1+2+3)x^2$

$+\{(-1)\cdot2+2\cdot3+(-1)\cdot3\}x$

$-(-1)\cdot2\cdot3=0$

$\therefore x^3-4x^2+x+6=0$

(2) x^3의 계수가 1이고 근이 $-3,\ 1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$인 삼차방정식은

$x^3-\{-3+(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\}x^2$

$+\{-3(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})-3(1+\sqrt{2})\}x$

$-(-3)(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=0$

$\therefore x^3+x^2-7x-3=0$

답 (1) $x^3-4x^2+x+6=0$ (2) $x^3+x^2-7x-3=0$

07 (1) 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{5}$가 근이면 $1-\sqrt{5}$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 $-2,\ 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2(1-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})-2(1+\sqrt{5})=-a$

$-2(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})=-b$

$\therefore a=8,\ b=-8$

(2) 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 $1,\ 1+i,\ 1-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(1+i)+(1-i)=-a \qquad \therefore a=-3$

$1(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot1=b$

$\therefore b=4$

$1(1+i)(1-i)=-c \qquad \therefore c=-2$

답 (1) $a=8,\ b=-8$ (2) $a=-3,\ b=4,\ c=-2$

08 (1) $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^{10}+\omega^5+1=(\omega^3)^3\cdot\omega+\omega^3\cdot\omega^2+1$

$=\omega+\omega^2+1=\omega^2+\omega+1=0$

(2) $\omega^2+\omega+1=0$의 양변을 ω로 나누면

$\omega+1+\dfrac{1}{\omega}=0 \qquad \therefore \omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$

(3) $x^3=1$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 $\omega,\ \overline{\omega}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 허근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+\overline{\omega}+\omega\overline{\omega}=-1+1=0$

답 (1) 0 (2) -1 (3) 0

09 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면 $x^3-3x^2-4x+12=0$

2	1	−3	−4	12
		2	−2	−12
	1	−1	−6	0

에서 $(x-2)(x^2-x-6)=0,\ (x-2)(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 가장 큰 근은 3, 가장 작은 근은 -2이므로 그 합은 1이다. 답 ①

10 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면 $x^3-3x^2+7x-5=0$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & 7 & -5 \\ & & 1 & -2 & 5 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

에서 $(x-1)(x^2-2x+5)=0$

이때 $x^2-2x+5=0$은 허근을 가지므로 $\alpha=1$, $\beta\gamma=5$

$\therefore \alpha+\beta\gamma=1+5=6$ 답 ⑤

11 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & 1 & -5 & -3 & 2 \\ & & -1 & 0 & 5 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -5 & 2 & \boxed{0} \\ & & 2 & 4 & -2 & \\ \hline & 1 & 2 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4+x^3-5x^2-3x+2=0$에서

$(x+1)(x-2)(x^2+2x-1)=0$

따라서 방정식 $x^4+x^3-5x^2-3x+2=0$의 근은

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}$

이므로 모든 실근의 합은 -1이다. 답 ②

12 $x^2+4x=t$로 치환하면

$t^2-17t+60=0$, $(t-5)(t-12)=0$

$\therefore t=5$ 또는 $t=12$

(i) $t=5$일 때, $x^2+4x-5=0$, $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

(ii) $t=12$일 때, $x^2+4x-12=0$, $(x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 양의 근은 1, 2이므로 구하는 합은 3이다. 답 ①

13 $x^2+3=t$로 치환하면 $(t+2x)(t-x)+2x^2=0$

$t^2+xt=0$, $t(t+x)=0$ $\quad\therefore t=0$ 또는 $t=-x$

(i) $t=0$일 때, $x^2+3=0$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{3}i$

(ii) $t=-x$일 때, $x^2+3=-x$, $x^2+x+3=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$

(i), (ii)에서 허근의 개수는 4이다. 답 ⑤

14 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$에서

$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-24=0$

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24=0$

$x^2+5x=t$로 치환하면 $(t+4)(t+6)-24=0$

$t(t+10)=0$, $(x^2+5x)(x^2+5x+10)=0$

$x(x+5)(x^2+5x+10)=0$

이때 $x^2+5x+10=0$은 허근을 가지므로

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=10$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-5)^2-2\cdot10=5$ 답 ⑤

15 $(x^2-1)^2+x^2-3=0$에서

$x^4-2x^2+1+x^2-3=0$, $x^4-x^2-2=0$

$(x^2-2)(x^2+1)=0$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm i$

따라서 모든 실근의 곱은 $\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})=-2$ 답 ④

16 $x^4-8x^2+4=0$에서 $(x^4-4x^2+4)-4x^2=0$

$(x^2-2)^2-(2x)^2=0$, $(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

따라서 실근 중 가장 큰 근은 $1+\sqrt{3}$, 가장 작은 근은 $-1-\sqrt{3}$이므로 $\alpha=1+\sqrt{3}$, $\beta=-1-\sqrt{3}$

$\therefore \alpha-\beta=(1+\sqrt{3})-(-1-\sqrt{3})=2+2\sqrt{3}$ 답 ⑤

17 $x^4+2x^2+9=0$에서 $(x^4+6x^2+9)-4x^2=0$

$(x^2+3)^2-(2x)^2=0$, $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore x^2+2x+3=0$ 또는 $x^2-2x+3=0$

이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근을 α, β라 하고, 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$, $\gamma+\delta=2$, $\gamma\delta=3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta$

$=(-2)^2-2\cdot3+2^2-2\cdot3$

$=4-6+4-6=-4$ 답 ①

18 주어진 사차방정식의 한 실근이 α이므로

$\alpha^4-3\alpha^3+2\alpha^2-3\alpha+1=0$

이때 $\alpha^4-3\alpha^3+2\alpha^2-3\alpha+1=0$의 양변을 α^2으로 나누면

$\alpha^2-3\alpha+2-\dfrac{3}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}=0$, $\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-3\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)=0$

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=t$로 치환하면

$t^2-3t=0$, $t(t-3)=0$ $\quad\therefore t=3$ ($\because t>0$)

$\therefore \alpha+\dfrac{1}{\alpha}=3$ 답 3

19 $x^4+4x^3-10x^2+4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+4x-10+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-12=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면 $t^2+4t-12=0$

$(t+6)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=-6$ 또는 $t=2$

(i) $t=-6$, 즉 $x+\dfrac{1}{x}=-6$일 때,

$x^2+6x+1=0$ $\quad\therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ii) $t=2$, 즉 $x+\dfrac{1}{x}=2$일 때,

$x^2-2x+1=0$ $\quad\therefore x=1$

따라서 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 답 ④

20 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -6 & k+8 & -2k \\ & & 2 & -8 & 2k \\ \hline & 1 & -4 & k & 0 \end{array}$$

$x^3-6x^2+(k+8)x-2k=0$에서

$(x-2)(x^2-4x+k)=0$

이때 방정식 $x^3-6x^2+(k+8)x-2k=0$의 모든 근이 실수가 되려면 방정식 $x^2-4x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-k\geq 0 \qquad \therefore k\leq 4$

따라서 실수 k의 최댓값은 4이다.

답 4

21 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 2 & k-4 & -k \\ & & 2 & 4 & k \\ \hline & 2 & 4 & k & 0 \end{array}$$

$2x^3+2x^2+(k-4)x-k=0$에서

$(x-1)(2x^2+4x+k)=0$

이때 방정식 $2x^3+2x^2+(k-4)x-k=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 방정식 $2x^2+4x+k=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-2k<0 \qquad \therefore k>2$

답 $k>2$

22 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & a-3 & a & 4 \\ & & -1 & -a+4 & -4 \\ \hline & 1 & a-4 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^3+(a-3)x^2+ax+4=0$에서

$(x+1)\{x^2+(a-4)x+4\}=0$

이때 방정식 $x^3+(a-3)x^2+ax+4=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+(a-4)x+4=0$이 $x=-1$을 근으로 가지는 경우

$(-1)^2+(a-4)\cdot(-1)+4=0 \qquad \therefore a=9$

(ii) 방정식 $x^2+(a-4)x+4=0$이 중근을 가지는 경우 판별식을 D라 하면

$D=(a-4)^2-16=0,\ a^2-8a=0,\ a(a-8)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=8$

(i), (ii)에서 주어진 방정식이 중근을 가지도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은

$0+9+8=17$

답 ⑤

오답 피하기

삼차방정식 $(x+1)\{x^2+(a-4)x+4\}=0$이 중근을 갖는 경우는 두 가지가 있으므로 한 가지 경우만 생각하지 않도록 주의한다.

23 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=1$

$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=1+3+2+1=7$

답 ④

24 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=6,\ \alpha\beta\gamma=3$

$\therefore \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$

$=\dfrac{-1-\alpha}{\alpha}+\dfrac{-1-\beta}{\beta}+\dfrac{-1-\gamma}{\gamma}$

$=-\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)-3$

$=-\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3$

$=-\dfrac{6}{3}-3=-5$

답 -5

25 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=a$

이때 α, β가 삼차방정식 $x^3-3x^2+bx-1=0$의 두 근이므로 다른 한 근을 γ라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=1$

$\alpha+\beta=4$이므로 $\alpha+\beta+\gamma=4+\gamma=3$에서 $\gamma=-1$

또 $\alpha\beta=a$이므로 $\alpha\beta\gamma=a\cdot(-1)=-a=1$에서 $a=-1$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a+(\alpha+\beta)\gamma=-1+4\cdot(-1)=-5$에서

$b=-5$

$\therefore ab=(-1)\cdot(-5)=5$

답 5

26 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=3$이므로

$\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=-3$

$\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=9$

따라서 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-3x-9=0$

답 ③

27 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\ \alpha\beta\gamma=-4$이므로

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\gamma}\cdot\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}=-\dfrac{1}{4}$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=0$이므로 양변에 4를 곱하면 $4x^3-x^2-2x+1=0$

답 ③

28 계수가 유리수이므로 삼차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 $1-\sqrt{2}$도 방정식의 근이 된다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1 \quad \therefore \alpha=-1$

$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})+(-1)=-a \quad \therefore a=-1$

$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=b$

$\therefore b=-3$

$\therefore ab=3$

답 ②

29 계수가 실수이므로 삼차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$이면 $1-\sqrt{2}i$도 방정식의 근이 된다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+\alpha=0 \quad \therefore \alpha=-2$

$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)-2(1+\sqrt{2}i)-2(1-\sqrt{2}i)=a$

$\therefore a=-1$

$-2(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=-b \quad \therefore b=6$

$\therefore a+b=-1+6=5$

답 ④

30 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$\therefore (1+\omega)^3+(1+\omega^2)^3=(-\omega^2)^3+(-\omega)^3$

$=-\omega^6-\omega^3$

$=-1-1=-2$

답 ③

빈출 유형 집중학습

30-1 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^{1004}+\frac{1}{\omega^{1004}}=(\omega^3)^{334}\cdot\omega^2+\frac{1}{(\omega^3)^{334}\cdot\omega^2}$

$=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega^4+1}{\omega^2}$

$=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

답 ②

30-2 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로

$\omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \omega-\omega^2+\omega^3-\omega^4+\omega^5-\omega^6$

$=(\omega-\omega^2)+\omega^2(\omega-\omega^2)+\omega^4(\omega-\omega^2)$

$=1+\omega^2+\omega^4\ (\because \omega-\omega^2=1)$

$=1+\omega^2-\omega=0$

답 ③

10 연립방정식과 부정방정식

본문 094~099쪽

31 (1) $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=10,\ 2x^2-4x-6=0$

$x^2-2x-3=0,\ (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=-3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면 $y=1$

따라서 해는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-y=-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3x-y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x+2$를 ㉡에 대입하면

$x^2+3x-(x+2)=1,\ x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$x=-3$을 ㉠에 대입하면 $y=-1$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $y=3$

따라서 해는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

32 (1) $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2+xy-y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)=0 \quad \therefore x=y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$3y^2+y^2-y^2=9 \quad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

이것을 $x=y$에 대입하면 $x=\pm\sqrt{3}$(복부호 동순)

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$3y^2-y^2-y^2=9 \quad \therefore y=\pm 3$

이것을 $x=-y$에 대입하면 $x=\mp 3$(복부호 동순)

따라서 해는 $\begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\mp 3 \\ y=\pm 3 \end{cases}$(복부호 동순)

(2) $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3y+y^2=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-2y)(x+y)=0$

$\therefore x=2y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2+3y+y^2=2,\ 5y^2+3y-2=0$

$(5y-2)(y+1)=0$

$\therefore y=\frac{2}{5}$ 또는 $y=-1$

이것을 $x=2y$에 대입하면 $x=\frac{4}{5}$ 또는 $x=-2$

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+3y+y^2=2,\ 2y^2+3y-2=0$

$(2y-1)(y+2)=0 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}$ 또는 $y=-2$

이것을 $x=-y$에 대입하면 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

따라서 해는 $\begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\frac{2}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\mp3 \\ y=\pm3 \end{cases}$(복부호 동순)

(2) $\begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\frac{2}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

33 (1) x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-t-6=0$의 두 근이므로 $(t+2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=3$

따라서 해는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

다른 풀이

$\begin{cases} x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=1-y$를 ㉡에 대입하면

$(1-y)y=-6$

$y^2-y-6=0,\ (y+2)(y-3)=0$

$\therefore y=-2$ 또는 $y=3$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=3$

$y=3$을 ㉠에 대입하면 $x=-2$

따라서 해는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

(2) x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로 $(t-2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=3$

따라서 해는 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

34 (1) $\begin{cases} x+y=-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+y)^2+xy=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$4+xy=1 \qquad \therefore xy=-3$

즉, $x+y=-2$, $xy=-3$에서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

따라서 해는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-xy+y=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$-1-xy=5 \qquad \therefore xy=-6$

즉, $x+y=-1$, $xy=-6$에서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+t-6=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-2)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=2$

따라서 해는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

35 (1) $5x+3y=37$에서 x, y가 될 수 있는 값은 다음과 같다.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$\frac{32}{3}$	9	$\frac{22}{3}$	$\frac{17}{3}$	4	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$

따라서 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(2, 9)$, $(5, 4)$이다.

(2) $(x-1)(y-1)=-2$에서 x, y가 될 수 있는 값은 다음과 같다.

$x-1$	-2	-1	1	2
$y-1$	1	2	-2	-1

따라서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(-1, 2)$, $(0, 3)$, $(2, -1)$, $(3, 0)$이다.

답 (1) $(2, 9)$, $(5, 4)$

(2) $(-1, 2)$, $(0, 3)$, $(2, -1)$, $(3, 0)$

36 (1) $ab=a+b+3$에서 $ab-a-b-3=0$

$a(b-1)-(b-1)=4,\ (a-1)(b-1)=4$

이때 a, b는 정수이므로 $a-1$, $b-1$도 정수이다.

$a-1$	-4	-2	-1	1	2	4
$b-1$	-1	-2	-4	4	2	1

a	-3	-1	0	2	3	5
b	0	-1	-3	5	3	2

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(-3, 0)$, $(-1, -1)$, $(0, -3)$, $(2, 5)$, $(3, 3)$, $(5, 2)$이다.

(2) $ab+3a-2b-5=0$에서

$a(b+3)-2(b+3)+1=0,\ (a-2)(b+3)=-1$

이때 a, b는 정수이므로 $a-2$, $b+3$도 정수이다.

$a-2$	-1	1
$b+3$	1	-1

$\therefore \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, -2)$, $(3, -4)$이다.

답 (1) $(-3, 0)$, $(-1, -1)$, $(0, -3)$, $(2, 5)$, $(3, 3)$, $(5, 2)$

(2) $(1, -2)$, $(3, -4)$

37 (1) $x^2+y^2+2y+1=0$에서

$x^2+(y^2+2y+1)=0$

$x^2+(y+1)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x=0$, $y+1=0$

$\therefore x=0, \ y=-1$

(2) $x^2+y^2-4x+6y+13=0$에서

$x^2-4x+4+y^2+6y+9=0$

$(x-2)^2+(y+3)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x=2$, $y=-3$

다른 풀이

$x^2-4x+y^2+6y+13=0$ …… ㉠

x에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(y^2+6y+13)\geq 0$

$y^2+6y+9\leq 0$, $(y+3)^2\leq 0$

이때 y는 실수이므로 $y=-3$

$y=-3$을 ㉠에 대입하면

$(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$

답 (1) $x=0$, $y=-1$ (2) $x=2$, $y=-3$

38 (1) 두 이차방정식의 공통근이 α이므로

$$\begin{cases}\alpha^2+k\alpha+3=0 & \cdots\cdots ㉠\\ \alpha^2+3\alpha+k=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠$-$㉡을 하면

$(k-3)\alpha-(k-3)=0$

$(k-3)(\alpha-1)=0$

$k=3$이면 두 이차방정식이 일치한다.

이때 $\alpha^2+3\alpha+3=0$에서 $\alpha=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$이고, α는 허수이므로 근이 될 수 없다.

따라서 공통근은 $\alpha=1$이다.

(2) 두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$$\begin{cases}\alpha^2-\alpha-2=0 & \cdots\cdots ㉠\\ \alpha^2+k\alpha+6=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $(\alpha+1)(\alpha-2)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=2$

(i) $\alpha=-1$을 ㉡에 대입하면

$1-k+6=0 \qquad \therefore k=7$

(ii) $\alpha=2$를 ㉡에 대입하면

$4+2k+6=0 \qquad \therefore k=-5$

(i), (ii)에서 $k=-5$ 또는 $k=7$

답 (1) 1 (2) -5, 7

39 $\begin{cases}x+y=-3 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+3xy+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=-x-3$을 ㉡에 대입하면

$x^2+3x(-x-3)+(-x-3)^2=5$

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

$x=-4$를 ㉠에 대입하면 $y=1$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $y=-4$

따라서 해는 $\begin{cases}x=-4\\ y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\ y=-4\end{cases}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=17$

답 ③

40 $\begin{cases}x-2y=1 & \cdots\cdots ㉠\\ xy-y^2=6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$을 ㉡에 대입하면

$(2y+1)y-y^2=6$, $y^2+y-6=0$

$(y+3)(y-2)=0$

$\therefore y=-3$ 또는 $y=2$

$y=-3$을 ㉠에 대입하면 $x=-5$

$y=2$를 ㉠에 대입하면 $x=5$

따라서 해는 $\begin{cases}x=-5\\ y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\ y=2\end{cases}$

답 ①, ⑤

41 $\begin{cases}x+y=20 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-y^2=40 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=20-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-(20-x)^2=40$, $40x=440 \qquad \therefore x=11$

$x=11$을 ㉠에 대입하면 $y=9$

$\therefore \alpha-\beta=11-9=2$

다른 풀이

㉡에서 $(x+y)(x-y)=40$이므로 ㉠을 대입하면

$x-y=2 \qquad \therefore \alpha-\beta=2$

답 ①

42 $\begin{cases}x^2-2xy=0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+2y^2=6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x(x-2y)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2y$

(i) $x=0$을 ㉡에 대입하면

$2y^2=6$, $y^2=3 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2+2y^2=6$, $y^2=1 \qquad \therefore y=\pm 1$

이것을 $x=2y$에 대입하면 $x=\pm 2$(복부호 동순)

따라서 해는

$\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\ y=-\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\ y=-1\end{cases}$

답 ③, ④

43 $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2xy+y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-2y)(x+y)=0$ $\quad\therefore x=2y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2-4y^2+y^2=4,\ y^2=4 \quad \therefore y=\pm2$

이것을 $x=2y$에 대입하면 $x=\pm4$(복부호 동순)

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2y^2+y^2=4,\ y^2=1 \quad \therefore y=\pm1$

이것을 $x=-y$에 대입하면 $x=\mp1$(복부호 동순)

따라서 해는

$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

이므로 $\alpha=4,\ \beta=2$ $\quad\therefore \alpha+\beta=4+2=6$

답 ⑤

44 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+2y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x+y)=0$ $\quad\therefore x=y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2+2y^2=8,\ y^2=2 \quad \therefore y=\pm\sqrt{2}$

이것을 $x=y$에 대입하면 $x=\pm\sqrt{2}$(복부호 동순)

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-y^2+2y^2=8,\ y^2=4 \quad \therefore y=\pm2$

이것을 $x=-y$에 대입하면 $x=\mp2$(복부호 동순)

따라서 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

이므로 $\alpha+\beta$의 최댓값 $M=2\sqrt{2}$, 최솟값 $m=-2\sqrt{2}$

$\therefore Mm=2\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{2})=-8$

답 ①

45 $\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=34 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $(x+y)^2-2xy=34$이므로 ㉠을 대입하면

$4-2xy=34 \quad \therefore xy=-15$

즉, $x+y=2,\ xy=-15$에서 $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식

$t^2-2t-15=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-5)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=5$

따라서 해는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$이므로

$|\alpha-\beta|=8$

답 ①

46 $\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+2y+xy=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $12+xy=20$ $\quad\therefore xy=8$

즉, $x+y=6,\ xy=8$에서 $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식

$t^2-6t+8=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-4)=0 \quad \therefore t=2$ 또는 $t=4$

따라서 해는 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$이므로

$\alpha=4,\ \beta=2\ (\because \alpha>\beta)$

$\therefore 2\alpha-3\beta=8-6=2$

답 2

47 $x+y=a,\ xy=b$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} a^2+a-2b=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ a^2-b=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $b=a^2-3$이므로 ㉠에 대입하면

$a^2+a-2(a^2-3)=4$

$a^2-a-2=0,\ (a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

이때 $x,\ y$는 자연수이므로 $a>0$

따라서 $a=2$를 $b=a^2-3$에 대입하면 $b=1$

즉, $x+y=2,\ xy=1$에서 $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식

$t^2-2t+1=0$의 두 근이므로

$(t-1)^2=0 \quad \therefore t=1$(중근)

따라서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 1)$이다.

답 ①

48 $\begin{cases} 2x-y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-k$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(2x-k)^2=5$

$5x^2-4kx+k^2-5=0$

이 방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)=0$

$k^2=25 \quad \therefore k=5\ (\because k>0)$

답 ②

49 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a-3 \\ xy=a^2+2 \end{cases}$에서 $x,\ y$를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-(2a-3)t+a^2+2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

이때 $x,\ y$는 실수이므로 ㉠이 실근을 가져야 한다.

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(2a-3)^2-4(a^2+2)\ge0$

$-12a+1\ge0 \quad \therefore a\le\frac{1}{12}$

따라서 정수 a의 최댓값은 0이다.

답 ①

50 $\begin{cases} x+y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+4x-4y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$를 ㉡에 대입하면

$x^2+4x-4(-x+k)=0,\ x^2+8x-4k=0$

이 방정식이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-(-4k)<0,\ 4k+16<0 \quad \therefore k<-4$

따라서 정수 k의 최댓값은 -5이다.

답 -5

51 $xy+2x=3y+10$에서

$x(y+2)-3(y+2)=4,\ (x-3)(y+2)=4$

이때 $x,\ y$는 자연수이므로 $x-3\geq-2,\ y+2\geq3$

따라서 $x-3=1,\ y+2=4$이므로 $x=4,\ y=2$

$\therefore x+y=6$ 답 ③

52 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}\alpha+\beta=m+2 & \cdots\cdots ㉠\\ \alpha\beta=3m+4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉡$-$㉠$\times3$을 하면

$\alpha\beta-3(\alpha+\beta)=-2,\ (\alpha-3)(\beta-3)=7$

$\alpha,\ \beta$가 양의 정수이므로

$\alpha-3=1,\ \beta-3=7\quad \therefore \alpha=4,\ \beta=10$

㉠에서 $14=m+2\quad \therefore m=12$ 답 12

53 $x^2-2xy+2y^2-4y+4=0$에서

$x^2-2xy+y^2+y^2-4y+4=0,\ (x-y)^2+(y-2)^2=0$

이때 $x,\ y$가 실수이므로 $x-y=0,\ y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=2\quad \therefore xy=4$ 답 4

54 두 이차방정식의 공통근이 α이므로

$$\begin{cases}\alpha^2-(2m+1)\alpha+3(m+3)=0 & \cdots\cdots ㉠\\ \alpha^2-m\alpha+6=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉡$-$㉠을 하면

$(m+1)\alpha-3(m+1)=0,\ (m+1)(\alpha-3)=0$

$m=-1$이면 두 이차방정식이 일치하므로 $\alpha^2+\alpha+6=0$에서 $\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{2}$이고, α는 허수이므로 근이 될 수 없다.

따라서 $\alpha=3$이므로 ㉡에 대입하면

$9-3m+6=0\quad \therefore m=5$

$\therefore 2\alpha^2+m^2=2\cdot3^2+5^2=43$ 답 ⑤

빈출유형 집중학습

54-1 두 방정식의 공통근을 α라 하면

$$\begin{cases}\alpha^2-2\alpha-3=0 & \cdots\cdots ㉠\\ \alpha^3-(a+2)\alpha^2+(2a+1)\alpha-a=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $(\alpha+1)(\alpha-3)=0\quad \therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=3$

(i) $\alpha=-1$일 때, ㉡에 대입하면

$-1-(a+2)-(2a+1)-a=0$

$-4a-4=0\quad \therefore a=-1$

(ii) $\alpha=3$일 때, ㉡에 대입하면

$27-9(a+2)+3(2a+1)-a=0$

$-4a+12=0\quad \therefore a=3$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은 2이다. 답 ②

54-2 두 이차방정식의 공통근이 α이므로

$$\begin{cases}2\alpha^2-2k\alpha-k+1=0 & \cdots\cdots ㉠\\ \alpha^2-2(k-1)\alpha-2k+1=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉡에서 $(\alpha+1)(\alpha-2k+1)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=2k-1$

(i) $\alpha=-1$일 때, ㉠에 대입하면

$2+2k-k+1=0\quad \therefore k=-3$

(ii) $\alpha=2k-1$일 때, ㉠에 대입하면

$2(2k-1)^2-2k(2k-1)-k+1=0$

$4k^2-7k+3=0,\ (4k-3)(k-1)=0$

$\therefore k=\frac{3}{4}$ 또는 $k=1$

(i), (ii)에서 실수 k의 최솟값은 -3이다. 답 ①

55 두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$$\begin{cases}\alpha^2+7m\alpha-5m+1=0 & \cdots\cdots ㉠\\ \alpha^2+m\alpha+m+1=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠$-$㉡을 하면

$6m\alpha-6m=0,\ 6m(\alpha-1)=0$

$m=0$이면 두 이차방정식이 일치하므로 오직 하나의 공통근을 가질 수 없다.

따라서 $\alpha=1$이고, $\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$1+7m-5m+1=0\quad \therefore m=-1$

즉, $x^2-7x+6=0$에서 $(x-1)(x-6)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=6$

또 $x^2-x=0$에서 $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 공통근이 아닌 두 근은 0, 6이므로 그 합은 6이다.

답 ⑤

오답 피하기

$m=0$이면 두 이차방정식이 일치하므로 하나의 공통근을 갖지 않을 수도 있다. 따라서 $m\neq0$임에 주의한다.

56 처음 두 자리 정수의 십의 자리와 일의 자리의 숫자를 각각 $x,\ y(x>y)$라 하면

$$\begin{cases}x^2+y^2=73 & \cdots\cdots ㉠\\ (10y+x)+(10x+y)=121 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉡에서 $11(x+y)=121\quad \therefore x+y=11$

$y=11-x$를 ㉠에 대입하면

$x^2+(11-x)^2=73,\ x^2-11x+24=0$

$(x-3)(x-8)=0\quad \therefore x=3$ 또는 $x=8$

따라서 해는 $\begin{cases}x=3\\y=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\y=3\end{cases}$이고, $x>y$이므로 구하는 정수는 83이다. 답 83

57 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면

$$\begin{cases} 2x+2y=28 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x+y=14$, 즉 $y=14-x$이므로 ㉡에 대입하면

$x^2+(14-x)^2=100$, $2x^2-28x+96=0$

$x^2-14x+48=0$, $(x-6)(x-8)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=8$

$x=6$을 $y=14-x$에 대입하면 $y=8$

$x=8$을 $y=14-x$에 대입하면 $y=6$

따라서 긴 변의 길이는 8 cm이다. 답 8 cm

58 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2a & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha\beta=2a+4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$\alpha\beta=\alpha+\beta+4$, $\alpha\beta-\alpha-\beta=4$, $(\alpha-1)(\beta-1)=5$

이때 α, β는 자연수이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$도 자연수이다.

$\alpha-1$	1	5
$\beta-1$	5	1

$\therefore \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=6 \\ \beta=2 \end{cases}$

따라서 $\alpha+\beta=8$을 ㉠에 대입하면 $a=4$ 답 ④

59 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

$$\begin{cases} \alpha+\beta=m+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha\beta=m & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$\alpha+\beta=\alpha\beta+2$, $\alpha\beta-\alpha-\beta=-2$

$\alpha(\beta-1)-(\beta-1)=-1$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=-1$

이때 α, β는 정수이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$도 정수이다.

$\alpha-1$	1	-1
$\beta-1$	-1	1

$\therefore \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=2 \end{cases}$

따라서 $\alpha+\beta=2$를 ㉠에 대입하면 $m=0$ 답 ③

60 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2a & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha\beta=2a^2-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $a=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$를 ㉡에 대입하면

$\alpha\beta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2-1$, $\alpha^2+\beta^2=2$

이때 α, β는 정수이므로 $\alpha^2=\beta^2=1$

α	-1	-1	1	1
β	-1	1	-1	1

즉, $\alpha\beta=\pm1$이므로 ㉡에 대입하면

$a=0$ 또는 $a=\pm1$

따라서 자연수 a의 값은 1이다. 답 ①

단계별 기출학습

본문 100~103쪽

01 ③	02 ④	03 ①	04 ④	05 ④
06 ③	07 ①	08 10	09 ①	10 ⑤
11 ④	12 8	13 ⑤	14 ③	15 ③
16 4	17 $m>-\frac{1}{2}$		18 -3	19 0
20 5	21 36			
22 $k=-2$, $x=-2$ 또는 $x=3$			23 -2	

01 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -a & a & -1 \\ & & 1 & 1-a & 1 \\ \hline & 1 & 1-a & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-ax^2+ax-1=0$에서

$(x-1)\{x^2+(1-a)x+1\}=0$

따라서 실근은 $x=1$이고, $x^2+(1-a)x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 가지므로 두 허근의 곱은 1이다.

02 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면 $x^4-3x^3+3x^2+x-6=0$에서

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\ & & -1 & 4 & -7 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & 6 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=0$

이때 $x^2-2x+3=0$은 허근을 가지므로

$\alpha+\beta=2$

03 $x^2+3x=t$로 치환하면

$t(t-2)=8$, $t^2-2t-8=0$

$(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=4$

(i) $t=-2$, 즉 $x^2+3x=-2$일 때,

$x^2+3x+2=0$, $(x+2)(x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

(ii) $t=4$, 즉 $x^2+3x=4$일 때,

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 음수인 해의 총합은

$-2+(-1)+(-4)=-7$

04 $x^4-2x^2-8=0$에서

$(x^2+2)(x^2-4)=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm2$

④ 실근 2개와 허근 2개를 갖는다.

05 계수가 실수이므로 삼차방정식의 한 근이 $2+i$이면 $2-i$도 방정식의 근이 된다. $\alpha=2-i$라 하고 나머지 한 근을 β라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+i)+(2-i)+\beta=-2 \qquad \therefore \beta=-6$

$(2+i)(2-i)-6(2+i)-6(2-i)=a$

$\therefore a=-19$

$-6(2+i)(2-i)=-b \qquad \therefore b=30$

$\therefore \alpha+\beta+a+b=(2-i)+(-6)+(-19)+30$

$=7-i$

06 $x^4-7x^2+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-7+\dfrac{1}{x^2}=0 \qquad \therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=7$에서 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=9 \qquad \therefore x+\dfrac{1}{x}=\pm3$

(i) $x+\dfrac{1}{x}=3$일 때,

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=27-9=18$

(ii) $x+\dfrac{1}{x}=-3$일 때,

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-27+9=-18$

(i), (ii)에서 $\left|x^3+\dfrac{1}{x^3}\right|=18$

07 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$\therefore 1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^4+6\omega^5+7\omega^6$

$=1+2\omega+3\omega^2+4+5\omega+6\omega^2+7$

$=12+7\omega+9\omega^2$

$=12+7\omega+9(-1-\omega)$

$=3-2\omega$

따라서 $a=3,\ b=-2$이므로

$a+b=1$

08 $\begin{cases} x-y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-4$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x(x-4)+(x-4)^2=7$

$3x^2-12x+9=0,\ x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $y=-3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면 $y=-1$

따라서 해는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=10$

09 $\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+2xy-4y-8=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+3y)(x-y)=0$이므로

$x=-3y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-3y$를 ㉡에 대입하면

$9y^2+y^2-6y^2-4y-8=0,\ y^2-y-2=0$

$(y+1)(y-2)=0 \qquad \therefore y=-1$ 또는 $y=2$

$y=-1$을 $x=-3y$에 대입하면 $x=3$

$y=2$를 $x=-3y$에 대입하면 $x=-6$

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2+2y^2-4y-8=0,\ y^2-y-2=0$

$(y+1)(y-2)=0 \qquad \therefore y=-1$ 또는 $y=2$

$y=-1$을 $x=y$에 대입하면 $x=-1$

$y=2$를 $x=y$에 대입하면 $x=2$

따라서 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

10 합이 -4이고 곱이 5인 두 수를 $x,\ y$라 하면

$\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=5 \end{cases}$

즉, $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식 $t^2+4t+5=0$의 두 근이므로 $t=-2\pm i$

$\therefore \begin{cases} x=-2+i \\ y=-2-i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2-i \\ y=-2+i \end{cases}$

11 $\begin{cases} ax-3y=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$, $\begin{cases} x-by=3 & \cdots\cdots ㉢ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

두 쌍의 연립방정식의 해는 ㉡, ㉣을 연립하여 구한 해와 같다.

㉣에서 $(x+y)^2-2xy=5$이므로 ㉡을 대입하면

$9-2xy=5 \qquad \therefore xy=2$

즉, $x+y=-3,\ xy=2$이므로 $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식 $t^2+3t+2=0$의 두 근이다.

$(t+2)(t+1)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=-1$

$x>y$이므로 $x=-1,\ y=-2$

따라서 $x=-1,\ y=-2$를 ㉠, ㉢에 각각 대입하면

$-a+6=7,\ -1+2b=3 \qquad \therefore a=-1,\ b=2$

$\therefore a+b=-1+2=1$

참고 $a,\ b$가 있는 식을 먼저 연립하여 풀면 식이 복잡해지므로 $a,\ b$가 없는 식끼리 먼저 연립하여 푸는 것이 좋다.

12 $\begin{cases} x+y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy=-8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x(-x+k)=-8 \qquad \therefore 2x^2-kx+8=0$

07 여러 가지 방정식

주어진 연립방정식이 한 쌍의 실근만을 가지려면 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot2\cdot8=0$

$k^2=64 \qquad \therefore k=8\ (\because k>0)$

13 방정식 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{4}$에서 $\dfrac{m+n}{mn}=\dfrac{1}{4}$

$4m+4n=mn$

$m(n-4)-4(n-4)=16$

$(m-4)(n-4)=16$

이때 m, n은 자연수이므로

$m-4\geq-3,\ n-4\geq-3$

$m-4$	1	2	4	8	16
$n-4$	16	8	4	2	1

따라서 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수는 $(5, 20)$, $(6, 12)$, $(8, 8)$, $(12, 6)$, $(20, 5)$의 5이다.

14 $5x^2-4xy+y^2-2x+1=0$에서

$4x^2-4xy+y^2+x^2-2x+1=0$

$(2x-y)^2+(x-1)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $2x-y=0$, $x-1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$

$\therefore x+y=3$

15 두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\begin{cases}\alpha^2+2(m-1)\alpha+1=0 & \cdots\cdots ㉠\\ \alpha^2+m\alpha+m-1=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

$m\alpha-2\alpha-m+2=0,\ (m-2)(\alpha-1)=0$

$m=2$이면 두 이차방정식이 일치하므로 오직 하나의 공통근을 가질 수 없다.

따라서 $\alpha=1$이므로 ㉡에 대입하면 $1+2m-1=0$

$\therefore m=0$

16 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 두 원의 둘레의 길이의 합이 12π이므로

$2r_1\pi+2r_2\pi=12\pi \qquad \therefore r_1+r_2=6 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 두 원의 넓이의 합이 26π이므로

$r_1^2\pi+r_2^2\pi=26\pi \qquad \therefore r_1^2+r_2^2=26 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠에서 $r_2=6-r_1$을 ㉡에 대입하면

$r_1^2+(6-r_1)^2=26,\ r_1^2-6r_1+5=0$

$(r_1-1)(r_1-5)=0 \qquad \therefore r_1=1$ 또는 $r_1=5$

이것을 ㉠에 대입하면

$\begin{cases}r_1=1\\ r_2=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}r_1=5\\ r_2=1\end{cases}$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 차는 $|r_1-r_2|$이므로

$|r_1-r_2|=4$

17 $x^4-2(m+2)x^2+m^2+2=0$에서 $x^2=t$로 치환하면

$t^2-2(m+2)t+m^2+2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 갖기 위해서는 방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

(i) $\dfrac{D}{4}=(m+2)^2-(m^2+2)=4m+2>0$

$\therefore m>-\dfrac{1}{2}$

(ii) (두 근의 합)$=2(m+2)>0 \qquad \therefore m>-2$

(iii) (두 근의 곱)$=m^2+2>0$이므로 m은 모든 실수이다.

(i), (ii), (iii)에서 $m>-\dfrac{1}{2}$

18 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수이므로 $1+\sqrt{2}i$가 근이면 $1-\sqrt{2}i$도 근이다.

나머지 한 실근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=-a \quad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha(1+\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)+\alpha(1-\sqrt{2}i)=b \quad \cdots\cdots ㉡$

$\alpha(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=-c \quad \cdots\cdots ㉢$

또 방정식 $x^2+ax+4=0$과의 공통인 실근이 α이므로

$\alpha^2+a\alpha+4=0 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉠에서 $a=-\alpha-2$를 ㉣에 대입하면

$\alpha^2+\alpha(-\alpha-2)+4=0$

$-2\alpha+4=0 \qquad \therefore \alpha=2,\ a=-4$

㉡에서 $b=2\alpha+3=7$

㉢에서 $-c=3\alpha=6 \qquad \therefore c=-6$

$\therefore a+b+c=-4+7+(-6)=-3$

19 $x^2-x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^2-\omega+1=0$

$\omega^2-\omega+1=0$의 양변에 $\omega+1$을 곱하면

$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0,\ \omega^3+1=0 \qquad \therefore \omega^3=-1$

$\omega\neq0$이므로 $\omega^2-\omega+1=0$의 양변을 ω로 나누면

$\omega-1+\dfrac{1}{\omega}=0 \qquad \therefore \omega+\dfrac{1}{\omega}=1$

$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)^2-2=1^2-2=-1$

$\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}=-1+\dfrac{1}{-1}=-2$

$\omega^4+\dfrac{1}{\omega^4}=\omega^3\cdot\omega+\dfrac{1}{\omega^3\cdot\omega}=-\omega-\dfrac{1}{\omega}$

$=-\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)=-1$

$\omega^5+\dfrac{1}{\omega^5}=\omega^3\cdot\omega^2+\dfrac{1}{\omega^3\cdot\omega^2}=-\omega^2-\dfrac{1}{\omega^2}$

$=-\left(\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}\right)=1$

$\omega^6+\dfrac{1}{\omega^6}=1+\dfrac{1}{1}=2$

$\omega^7+\dfrac{1}{\omega^7}=(\omega^3)^2\cdot\omega+\dfrac{1}{(\omega^3)^2\cdot\omega}=\omega+\dfrac{1}{\omega}=1$

$\vdots$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\{1^3+(-1)^3+(-2)^3+(-1)^3+1^3+2^3\}\times 2$

$=0$

20 $\begin{cases}x+y-xy=1\\x^2+xy+y^2=13\end{cases}$에서 $\begin{cases}x+y-xy=1\\(x+y)^2-xy=13\end{cases}$

$x+y=a$, $xy=b$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}a-b=1 & \cdots\cdots ㉠\\a^2-b=13 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡$-$㉠을 하면

$a^2-a=12$, $a^2-a-12=0$

$(a+3)(a-4)=0$ $\quad\therefore a=-3$ 또는 $a=4$

이것을 ㉠에 대입하면

$\begin{cases}a=-3\\b=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}$

(i) $a=-3$, $b=-4$일 때

$x+y=-3$, $xy=-4$를 만족하는 x, y는 이차방정식 $t^2+3t-4=0$의 두 근이므로

$(t+4)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases}x=-4\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-4\end{cases}$

(ii) $a=4$, $b=3$일 때

$x+y=4$, $xy=3$을 만족하는 x, y는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

따라서 해는

$\begin{cases}x=-4\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

이므로 $|\alpha-\beta|$의 최댓값은 5이다.

21 $\overline{CD}=x$, $\overline{AD}=y$라 하면

$\overline{BD}^2=8^2+x^2=4^2+y^2$

$y^2-x^2=48$ $\quad\therefore (y+x)(y-x)=48$

x, y가 자연수이므로 $y+x\geq 2$이고, $y+x>y-x$이므로

$\begin{cases}y+x=48\\y-x=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}y+x=24\\y-x=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}y+x=16\\y-x=3\end{cases}$

또는 $\begin{cases}y+x=12\\y-x=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}y+x=8\\y-x=6\end{cases}$

(i) $\begin{cases}y+x=48\\y-x=1\end{cases}$을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{47}{2}$, $y=\dfrac{49}{2}$

(ii) $\begin{cases}y+x=24\\y-x=2\end{cases}$를 연립하여 풀면 $x=11$, $y=13$

(iii) $\begin{cases}y+x=16\\y-x=3\end{cases}$을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{13}{2}$, $y=\dfrac{19}{2}$

(iv) $\begin{cases}y+x=12\\y-x=4\end{cases}$를 연립하여 풀면 $x=4$, $y=8$

(v) $\begin{cases}y+x=8\\y-x=6\end{cases}$을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=7$

이때 x, y는 자연수이므로 $x=11$, $y=13$ 또는 $x=4$, $y=8$ 또는 $x=1$, $y=7$에서 사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$4+8+11+13=36$ 또는 $4+8+4+8=24$ 또는

$4+8+1+7=20$

따라서 구하는 둘레의 길이의 최댓값은 36이다.

22 $x^3+kx^2-5x+6=0$의 한 근이 1이므로 $x=1$을 $x^3+kx^2-5x+6=0$에 대입하면

$1+k-5+6=0$ $\quad\therefore k=-2$

❶

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $x^3-2x^2-5x+6=0$을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6\\ & & 1 & -1 & -6\\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0}\end{array}$$

$(x-1)(x^2-x-6)=0$

$(x-1)(x+2)(x-3)=0$

❷

따라서 나머지 두 근은 $x=-2$ 또는 $x=3$이다.

❸

채점 기준	성취도
❶ k의 값 구하기	30 %
❷ 주어진 방정식을 인수분해하기	30 %
❸ 나머지 두 근 구하기	40 %

23 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=1$

❶

$\therefore \alpha^3\beta\gamma+\beta^3\alpha\gamma+\gamma^3\alpha\beta$

$=\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

$=\alpha\beta\gamma\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$

$=1\cdot(2^2-2\cdot 3)=-2$

❷

채점 기준	성취도
❶ $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값 각각 구하기	30 %
❷ $\alpha^3\beta\gamma+\beta^3\alpha\gamma+\gamma^3\alpha\beta$의 값 구하기	70 %

08 여러 가지 부등식

11 부등식

본문 104~109쪽

01 (1) $0<x\le5$이므로 $-4<x-4\le1$

(2) $-5\le-x<0$이므로 $-2\le-x+3<3$

(3) $0<9x\le45$이므로 $-2<9x-2\le43$

(4) $-10\le-2x<0$이므로 $-13\le-2x-3<-3$

답 (1) $-4<x-4\le1$ (2) $-2\le-x+3<3$
(3) $-2<9x-2\le43$ (4) $-13\le-2x-3<-3$

02 (1) $2x+5(3-x)>3$에서 $2x+15-5x>3$

$-3x>-12$ $\therefore x<4$

(2) $\frac{3}{4}x-\frac{2x-11}{6}\ge1$의 양변에 12를 곱하면

$9x-2(2x-11)\ge12,\ 5x+22\ge12$

$5x\ge-10$ $\therefore x\ge-2$

(3) $3x-2>3x$에서 $0\cdot x>2$이므로 해가 없다.

(4) $2x+3\le2x+6$에서 $0\cdot x\le3$이므로 해는 모든 실수이다.

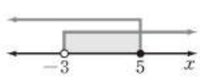
답 (1) $x<4$ (2) $x\ge-2$ (3) 해가 없다. (4) 모든 실수

03 (1) $\begin{cases} x-5>-8 & \cdots\cdots ㉠ \\ -5\le5-2x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>-3$

㉡에서 $2x\le10$이므로 $x\le5$

$\therefore -3<x\le5$

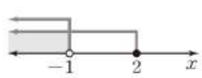


(2) $\begin{cases} 3x+1<-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-1\le3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x<-3$이므로 $x<-1$

㉡에서 $2x\le4$이므로 $x\le2$

$\therefore x<-1$



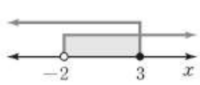
답 (1) $-3<x\le5$ (2) $x<-1$

04 (1) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}>-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{x}{6}-2\le-\frac{3}{2} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x-1>-3$이므로 $x>-2$

㉡에서 $x-12\le-9$이므로 $x\le3$

$\therefore -2<x\le3$



(2) $\begin{cases} 0.3x-0.7\ge0.8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 0.4x-0.5<0.2x+1.1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

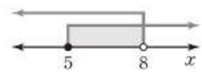
㉠에서 $3x-7\ge8$이므로

$3x\ge15$ $\therefore x\ge5$

㉡에서 $4x-5<2x+11$이므로

$2x<16$ $\therefore x<8$

$\therefore 5\le x<8$



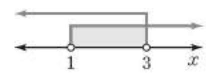
답 (1) $-2<x\le3$ (2) $5\le x<8$

05 (1) $\begin{cases} 1<2x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-1<5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-2x<-2$이므로 $x>1$

㉡에서 $2x<6$이므로 $x<3$

$\therefore 1<x<3$



다른 풀이

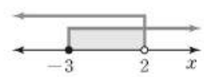
$1<2x-1<5$의 각 변에 1을 더하면 $2<2x<6$
각 변을 2로 나누면 $1<x<3$

(2) $\begin{cases} x+1\le2x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+4<8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-x\le3$이므로 $x\ge-3$

㉡에서 $2x<4$이므로 $x<2$

$\therefore -3\le x<2$



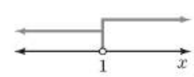
답 (1) $1<x<3$ (2) $-3\le x<2$

06 (1) $\begin{cases} 3x-1>2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+5>4x+4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x>3$이므로 $x>1$

㉡에서 $-x>-1$이므로 $x<1$

$\therefore$ 해가 없다.

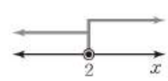


(2) $\begin{cases} 3x+5\le x+9 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x+3>x+13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x\le4$이므로 $x\le2$

㉡에서 $5x>10$이므로 $x>2$

$\therefore$ 해가 없다.



답 (1) 해가 없다. (2) 해가 없다.

07 (1) $|2x+1|\le5$에서 $-5\le2x+1\le5$

$-6\le2x\le4$ $\therefore -3\le x\le2$

다른 풀이

(i) $x\ge-\frac{1}{2}$일 때, $|2x+1|=2x+1$이므로

$2x+1\le5$ $\therefore x\le2$

이때 $x\ge-\frac{1}{2}$이므로 $-\frac{1}{2}\le x\le2$

(ii) $x<-\frac{1}{2}$일 때, $|2x+1|=-(2x+1)$이므로

$-2x-1\le5$ $\therefore x\ge-3$

이때 $x<-\frac{1}{2}$이므로 $-3\le x<-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 x의 값의 범위는 $-3\le x\le2$

(2) $|x-4|>6$에서 $x-4<-6$ 또는 $x-4>6$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>10$

답 (1) $-3\le x\le 2$ (2) $x<-2$ 또는 $x>10$

08 (1) (i) $x\ge 2$일 때, $|x-2|=x-2$이므로

$2(x-2)<x \qquad \therefore x<4$

이때 $x\ge 2$이므로 $2\le x<4$

(ii) $x<2$일 때, $|x-2|=-(x-2)$이므로

$-2(x-2)<x,\ -3x<-4 \qquad \therefore x>\dfrac{4}{3}$

이때 $x<2$이므로 $\dfrac{4}{3}<x<2$

(i), (ii)에서 $\dfrac{4}{3}<x<4$

(2) $1<|2x-3|<6$에서

$1<2x-3<6$ 또는 $-6<2x-3<-1$

(i) $1<2x-3<6$에서 $4<2x<9 \qquad \therefore 2<x<\dfrac{9}{2}$

(ii) $-6<2x-3<-1$에서 $-3<2x<2$

$\therefore -\dfrac{3}{2}<x<1$

(i), (ii)에서 $-\dfrac{3}{2}<x<1$ 또는 $2<x<\dfrac{9}{2}$

답 (1) $\dfrac{4}{3}<x<4$ (2) $-\dfrac{3}{2}<x<1$ 또는 $2<x<\dfrac{9}{2}$

09 ㄱ. $a>b>1$이므로 $\dfrac{b}{a}<1,\ \dfrac{a}{b}>1 \qquad \therefore \dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$ (참)

ㄴ. $a>1$이고 $1-a<0$이므로 $\dfrac{a}{1-a}<0$ (거짓)

ㄷ. $a^2>b^2$이고 $-3<0$이므로 $-3a^2<-3b^2$ (참)

ㄹ. $a-3>b-3$이므로 $a-3>b-4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

10 $x=2y-1$을 부등식에 대입하면

$0<(2y-1)+y\le 1,\ 0<3y-1\le 1$

$1<3y\le 2 \qquad \therefore \dfrac{1}{3}<y\le\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}<y\le\dfrac{2}{3}$

11 $12\le 2x\le 16$이므로

$12+2\le 2x+y\le 16+3 \qquad \therefore 14\le 2x+y\le 19$

따라서 $\alpha=14,\ \beta=19$이므로 $\alpha+\beta=33$ 답 ③

12 $(-2)\cdot(-1)=2,\ (-2)\cdot 4=-8,\ 3\cdot(-1)=-3,$
$3\cdot 4=12$이므로 $-8\le xy\le 12$

따라서 $M=12,\ m=-8$이므로

$M-m=12-(-8)=20$ 답 ③

오답 피하기

xy의 값의 범위는 $2\le xy\le 12$가 아님에 주의한다. $a\le x\le b$, $c\le y\le d$일 때, $a,\ b,\ c,\ d$ 중 적어도 하나가 음수이면 ac, $ad,\ bc,\ bd$의 값을 비교하여 xy의 값의 범위를 구한다.

13 부등식 $(2-a)x>a-2b$의 해가 $x<-3$이므로

$2-a<0 \qquad \therefore x<\dfrac{a-2b}{2-a}$

이때 $\dfrac{a-2b}{2-a}=-3$이므로 $a-2b=3a-6$

$\therefore a+b=3$ ······ ㉠

㉠을 부등식 $(a+b)x\ge 9$에 대입하면

$3x\ge 9 \qquad \therefore x\ge 3$ 답 $x\ge 3$

14 $ax-bx\ge a+b$에서 $(a-b)x\ge a+b$

(i) $a-b>0$, 즉 $a>b$일 때, $x\ge\dfrac{a+b}{a-b}$

(ii) $a-b<0$, 즉 $a<b$일 때, $x\le\dfrac{a+b}{a-b}$

(iii) $a-b=0$, 즉 $a=b$일 때,

$b\le 0$이면 해는 모든 실수이고, $b>0$이면 해는 없다.

답 ③

15 $ax+2a<2x+3$에서 $(a-2)x<3-2a$

$a=2$일 때, $0\cdot x<-1$이므로 해가 없다.

따라서 구하는 상수 a의 값은 2이다. 답 ⑤

16 $ax+b<3x+a$에서 $(a-3)x<a-b$

$a=3$일 때, $0\cdot x<3-b$이므로 $3-b>0$이면 해는 모든 실수이다.

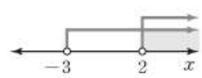
따라서 구하는 실수 b의 값의 범위는 $b<3$이다. 답 ④

17 $\begin{cases} 6-3x<2(x-2) & \cdots\cdots ㉠ \\ 4(x-1)>x-13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6-3x<2x-4$이므로

$-5x<-10 \qquad \therefore x>2$

㉡에서



$4x-4>x-13$

$3x>-9 \qquad \therefore x>-3$

$\therefore x>2$ 답 ④

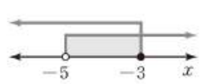
18 $\begin{cases} 2x-3<4x+7 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{x+6}{3}\le\dfrac{x-1}{2}-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

$-2x<10 \qquad \therefore x>-5$

㉡의 양변에 6을 곱하면

$2(x+6)\le 3(x-1)-6x$



$2x+12\le 3x-3-6x$

$5x\le -15 \qquad \therefore x\le -3$

$\therefore -5<x\le -3$

따라서 연립부등식의 해가 아닌 것은 ①이다. 답 ①

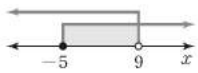
08 여러 가지 부등식

19 $\begin{cases} 3x-2\le 5x+8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+8<4x+17 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-2x\le 10$이므로 $x\ge -5$

㉡에서 $x<9$

$\therefore -5\le x<9$



따라서 $a=-5$, $b=9$이므로

$a+b=4$

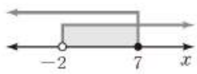
답 ④

20 각 변에 2를 곱하면 $2x-3\le x+4<10+4x$

$\begin{cases} 2x-3\le x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+4<10+4x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le 7$

㉡에서 $-3x<6$이므로 $x>-2$



$\therefore -2<x\le 7$

답 $-2<x\le 7$

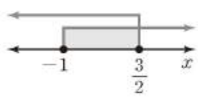
21 $\begin{cases} 2(x-1)\le 5x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+1\le 3(x+1)+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x-2\le 5x+1$, $-3x\le 3$

$\therefore x\ge -1$

㉡에서 $5x+1\le 3x+3+1$, $2x\le 3$

$\therefore x\le \frac{3}{2}$



$\therefore -1\le x\le \frac{3}{2}$

따라서 주어진 연립부등식을 만족하는 가장 큰 정수는 1, 가장 작은 정수는 -1이므로

$a-b=1-(-1)=2$

답 ⑤

22 $\begin{cases} x+6>3a & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-8\le 7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>3a-6$

㉡에서 $3x\le 15$이므로 $x\le 5$

이때 연립부등식의 해가 $-3<x\le 5$이므로

$3a-6=-3$, $3a=3$ $\quad\therefore a=1$

답 ⑤

23 $\begin{cases} 3x+a>x-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-4>2(x-b) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x>-a-4$ $\quad\therefore x>\frac{-a-4}{2}$

㉡에서 $x-4>2x-2b$, $-x>-2b+4$

$\therefore x<2b-4$

이때 연립부등식의 해가 $-7<x<2$이므로

$\frac{-a-4}{2}<x<2b-4$

즉, $\frac{-a-4}{2}=-7$에서 $-a-4=-14$이므로 $a=10$

또 $2b-4=2$에서 $b=3$

$\therefore a+b=10+3=13$

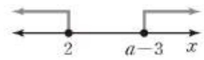
답 13

24 $\begin{cases} 2x\le 4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3\ge a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le 2$

㉡에서 $x\ge a-3$

주어진 연립부등식의 해가 존재하지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $a-3>2$ $\quad\therefore a>5$



답 ②

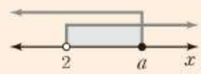
빈출 유형 집중학습

24-1 $\begin{cases} 2x-3>x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x\le 2a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>2$

㉡에서 $x\le a$

주어진 연립부등식의 해가 존재하기 위해서는 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $a>2$



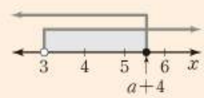
답 $a>2$

24-2 $\begin{cases} -5+2x>1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-a\le 4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x>6$ $\quad\therefore x>3$

㉡에서 $x\le a+4$

주어진 연립부등식을 만족하는 정수 x의 개수가 2개이려면 오른쪽 그림과 같이



$5\le a+4<6$이어야 하므로

$1\le a<2$

답 ①

25 어떤 정수를 x라 하면

$\begin{cases} 2x+1>x-1 \\ 3x-1<8 \end{cases}$ $\quad\therefore -2<x<3$

따라서 이를 만족하는 정수는 -1, 0, 1, 2이므로 그 합은 $-1+0+1+2=2$

답 ⑤

26 삼각김밥을 x개 산다고 하면 아이스크림은 $(20-x)$개 살 수 있으므로

$13000\le 600(20-x)+800x\le 14000$

$\therefore 5\le x\le 10$

따라서 삼각김밥은 최대 10개까지 살 수 있다.

답 ④

27 15 %의 소금물 400 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{15}{100}\times 400=60(\text{g})$

이때 더 넣을 물의 양을 x g이라 하면

$6\le \frac{60}{400+x}\times 100\le 8$

$6(400+x)\le 6000\le 8(400+x)$

$\therefore 350\le x\le 600$

따라서 더 넣어야 할 물의 양이 350 g 이상 600 g 이하이므로

$a=350,\ b=600$

$\therefore b-a=600-350=250$

답 250

28 부등식 $|x-2|\le a$의 해가 존재하므로 $a>0$

$|x-2|\le a$에서 $-a\le x-2\le a$이므로

$-a+2\le x\le a+2$

이때 주어진 부등식의 해가 $-3\le x\le b$이므로

$-a+2=-3,\ a+2=b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=7$

$\therefore a+b=12$

답 12

29 $|x-2|\le 2x-1$에서

(i) $x<2$일 때, $-x+2\le 2x-1$ $\quad\therefore x\ge 1$

이때 $x<2$이므로 $1\le x<2$

(ii) $x\ge 2$일 때, $x-2\le 2x-1$ $\quad\therefore x\ge -1$

이때 $x\ge 2$이므로 $x\ge 2$

(i), (ii)에서 x의 값의 범위는

$x\ge 1$

답 ①

30 $|x|+|x-2|\le 6$에서

(i) $x<0$일 때, $-x-x+2\le 6$ $\quad\therefore x\ge -2$

이때 $x<0$이므로 $-2\le x<0$

(ii) $0\le x<2$일 때, $x-x+2\le 6$

$0\cdot x\le 4$이므로 x는 모든 실수이다.

$\therefore 0\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때, $x+x-2\le 6$ $\quad\therefore x\le 4$

이때 $x\ge 2$이므로 $2\le x\le 4$

(i), (ii), (iii)에서 x의 값의 범위는 $-2\le x\le 4$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\ 4$의 7이다.

답 ①

31 $|x+2|\le|x-1|$에서

(i) $x<-2$일 때, $-x-2\le -x+1$

$0\cdot x\le 3$이므로 x는 모든 실수이다.

$\therefore x<-2$

(ii) $-2\le x<1$일 때, $x+2\le -x+1$

$\therefore x\le -\frac{1}{2}$

이때 $-2\le x<1$이므로 $-2\le x\le -\frac{1}{2}$

(iii) $x\ge 1$일 때, $x+2\le x-1$

$0\cdot x\le -3$이므로 해가 없다.

(i), (ii), (iii)에서 부등식의 해는

$x\le -\frac{1}{2}$

답 $x\le -\frac{1}{2}$

12 이차함수와 이차부등식

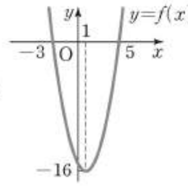
본문 110~117쪽

32 답 (1) $x<-2$ 또는 $x>1$ (2) $x\le -2$ 또는 $x\ge 1$
(3) $-2<x<1$ (4) $-2\le x\le 1$

33 (1) $f(x)=x^2-2x-15$로 놓으면

$f(x)=(x+3)(x-5)$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



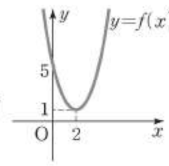
따라서 $f(x)>0$의 해는

$x<-3$ 또는 $x>5$

(2) $f(x)=x^2-4x+5$로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2+1$이므로

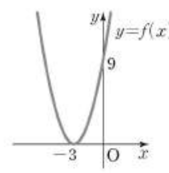
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)\ge 0$의 해는 모든 실수이다.

(3) $f(x)=x^2+6x+9$로 놓으면

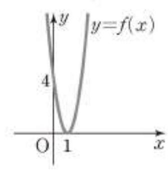
$f(x)=(x+3)^2$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)<0$의 해는 없다.

(4) $f(x)=4x^2-8x+4$로 놓으면

$f(x)=4(x-1)^2$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)\le 0$의 해는 $x=1$

답 (1) $x<-3$ 또는 $x>5$ (2) 모든 실수
(3) 해가 없다. (4) $x=1$

34 (1) $(x+2)(x-3)<0$에서 $x^2-x-6<0$

(2) $(x-1)(x-4)\ge 0$에서 $x^2-5x+4\ge 0$

답 (1) $x^2-x-6<0$ (2) $x^2-5x+4\ge 0$

35 (1) 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면 이차함수 $y=x^2-2kx+k$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있거나 x축에 접해야 하므로 $x^2-2kx+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-k\le 0,\ k^2-k\le 0$

$k(k-1)\le 0$ $\quad\therefore 0\le k\le 1$

(2) 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면 이차함수 $y=-x^2-kx+k^2-5$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 x축에 접해야 하므로

$-x^2-kx+k^2-5=0$ 즉, $x^2+kx-k^2+5=0$의 판별식을 D라 하면 $D=k^2-4(-k^2+5)=0$

$5k^2-20\le 0,\ k^2\le 4$

$\therefore -2\le k\le 2$

답 (1) $0\le k\le 1$ (2) $-2\le k\le 2$

36 (1) $\begin{cases} 2x+6>x+3 \\ x^2+5x-6<0 \end{cases}$

$2x+6>x+3$에서 $x>-3$ ...... ㉠

또 $x^2+5x-6<0$에서 $(x+6)(x-1)<0$이므로

$-6<x<1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $-3<x<1$

(2) $x^2+2<3x$에서 $x^2-3x+2<0$이므로

$(x-1)(x-2)<0$

$\therefore 1<x<2$ ...... ㉠

또 $9x^2-6x+1\geq 0$에서 $(3x-1)^2\geq 0$이므로

$9x^2-6x+1\geq 0$의 해는 모든 실수 ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $1<x<2$

답 (1) $-3<x<1$ (2) $1<x<2$

37 (1) (i) $-12<x^2+7x$에서 $x^2+7x+12>0$이므로

$(x+4)(x+3)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>-3$ ...... ㉠

(ii) $x^2+7x\leq 0$에서 $x(x+7)\leq 0$이므로

$-7\leq x\leq 0$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$-7\leq x<-4$ 또는 $-3<x\leq 0$

(2) (i) $x^2>2$에서

$x<-\sqrt{2}$ 또는 $x>\sqrt{2}$ ...... ㉠

(ii) $x^2<x+6$에서 $x^2-x-6<0$이므로

$(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$-2<x<-\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{2}<x<3$

답 (1) $-7\leq x<-4$ 또는 $-3<x\leq 0$

(2) $-2<x<-\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{2}<x<3$

38 (1) (i) 이차방정식 $f(x)=0$이 실근을 가져야 하므로

$D\boxed{\geq}0$

(ii) 축이 직선 $x=3$의 오른쪽에 있어야 하므로

$a\boxed{>}3$

(iii) $x=3$에서의 함숫값이 0보다 커야 하므로

$f(3)\boxed{>}0$

(2) $x=3$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로

$f(3)\boxed{<}0$

답 (1) $\geq$, $>$, $>$ (2) $<$

39 $f(x)g(x)>0$에서

$f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족하는 x의 값의 범위는

$0<x<5$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족하는 x의 값의 범위는

$x<-1$

(i), (ii)에서 $f(x)g(x)>0$의 해는

$x<-1$ 또는 $0<x<5$ 답 $x<-1$ 또는 $0<x<5$

40 $ax^2+(b-m)x+c-n\geq 0$에서

$ax^2+bx+c\geq mx+n$

즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 주어진 그림에서

$-2\leq x\leq 2$ 답 $-2\leq x\leq 2$

41 이차방정식 $x^2-8x+2=0$의 해는

$x=4\pm\sqrt{14}$

즉, 이차부등식 $x^2-8x+2<0$의 해는

$4-\sqrt{14}<x<4+\sqrt{14}$

따라서 $x^2-8x+2<0$을 만족하는 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이므로 그 합은 28이다. 답 ⑤

42 ① $x^2-4x+4>0$에서 $(x-2)^2>0$

따라서 $x\neq 2$인 모든 실수이다.

② $9x^2+6x+1\leq 0$에서 $(3x+1)^2\leq 0$

$\therefore x=-\frac{1}{3}$

③ $4x^2\geq 4x-1$에서

$4x^2-4x+1\geq 0$, $(2x-1)^2\geq 0$

따라서 x는 모든 실수이다.

④ $4x-1>4x^2$에서

$4x^2-4x+1<0$, $(2x-1)^2<0$

따라서 해는 없다.

⑤ $x^2+3x-4\leq 0$에서 $(x+4)(x-1)\leq 0$

$\therefore -4\leq x\leq 1$ 답 ④

43 x^2의 계수가 1이고 해가 $-2<x<3$인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)<0$, 즉 $x^2-x-6<0$

따라서 $a=1$, $b=6$이므로

$b-a=5$ 답 ②

빈출 유형 집중학습

43-1 x^2의 계수가 1이고 해가 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 2$인 이차부등식은 $(x+1)(x-2)\geq 0$, 즉 $x^2-x-2\geq 0$

따라서 $a=-1$, $b=-2$이므로

$x^2+3(a+b)x-10(a-b)<0$에 대입하면

$x^2-9x-10<0$

$(x+1)(x-10)<0$

$\therefore -1<x<10$ 답 ③

43-2 x^2의 계수가 1이고 해가 $-3<x<5$인 이차부등식은

$(x+3)(x-5)<0$ …… ㉠

이때 ㉠과 부등식 $ax^2+bx+c>0$의 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $a(x+3)(x-5)>0$

즉, $ax^2-2ax-15a>0$이고, 이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 일치하므로

$b=-2a,\ c=-15a$ …… ㉡

㉡을 $cx^2+bx+a<0$에 대입하면

$-15ax^2-2ax+a<0$

$-a(15x^2+2x-1)<0$

$-a(3x+1)(5x-1)<0$

$(3x+1)(5x-1)<0\ (\because a<0)$

$\therefore -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{5}$ 답 ③

44 이차부등식 $f(x)\geq 0$의 해가 $x\leq -5$ 또는 $x\geq -2$이므로 $f(x)=a(x+5)(x+2)(a>0)$로 놓으면

$f(2x-1)=a(2x-1+5)(2x-1+2)$
$=a(2x+4)(2x+1)$
$=2a(x+2)(2x+1)$

이므로 $f(2x-1)<0$에서 $2a(x+2)(2x+1)<0$

$(x+2)(2x+1)<0\ (\because a>0)$

$\therefore -2<x<-\frac{1}{2}$ 답 $-2<x<-\frac{1}{2}$

45 $x^2-kx+k>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 $x^2-kx+k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-k)^2-4k<0$이므로 $k(k-4)<0$

$\therefore 0<k<4$ 답 ③

빈출 유형 **집중학습**

45-1 $2x^2+2kx+k>-4$에서 $2x^2+2kx+k+4>0$

위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 $2x^2+2kx+k+4=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=k^2-2(k+4)<0$이므로 $k^2-2k-8<0$

$(k+2)(k-4)<0$ $\therefore -2<k<4$ 답 ②

45-2 $x^2+2(k-1)x+k-1>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 $x^2+2(k-1)x+k-1=0$의 판별식을 D라 할 때, $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)<0$이므로

$k^2-3k+2<0,\ (k-1)(k-2)<0$

$\therefore 1<k<2$

따라서 $\alpha=1,\ \beta=2$이므로 $\alpha+\beta=3$ 답 ③

46 (i) $a+1=0$, 즉 $a=-1$일 때,

$3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

(ii) $a+1\neq 0$, 즉 $a\neq -1$일 때,

$(a+1)x^2+2(a+1)x+3>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면

$a+1>0$ $\therefore a>-1$ …… ㉠

$(a+1)x^2+2(a+1)x+3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-3(a+1)<0$이므로

$a^2-a-2<0,\ (a+1)(a-2)<0$

$\therefore -1<a<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-1<a<2$

(i), (ii)에서 $-1\leq a<2$

따라서 실수 a의 최솟값은 -1이다. 답 -1

47 $a^2x^2-2ax>2x-4$에서 $a^2x^2-2(a+1)x+4>0$

위의 부등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하려면

(i) $a=0$일 때, $-2x+4>0$

$x<2$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립하지 않는다.

(ii) $a\neq 0$일 때, $a^2>0$이므로 $a^2x^2-2(a+1)x+4=0$의 판별식을 D라 할 때, $\frac{D}{4}=(a+1)^2-4a^2<0$이므로

$3a^2-2a-1>0,\ (3a+1)(a-1)>0$

$\therefore a<-\frac{1}{3}$ 또는 $a>1$

(i), (ii)에서 $a<-\frac{1}{3}$ 또는 $a>1$ 답 ⑤

48 이차함수 $y=x^2+(k-2)x+3$의 그래프가 직선 $y=2x+2$보다 항상 위쪽에 있으므로

$x^2+(k-2)x+3>2x+2$에서 $x^2+(k-4)x+1>0$

위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+(k-4)x+1=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(k-4)^2-4<0,\ k^2-8k+12<0$

$(k-2)(k-6)<0$ $\therefore 2<k<6$ 답 $2<k<6$

49 (i) $x\geq 0$일 때, $x^2-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0$ $\therefore -1<x<2$

이때 $x\geq 0$이므로 $0\leq x<2$

(ii) $x<0$일 때, $x^2+x-2<0$

$(x+2)(x-1)<0$ $\therefore -2<x<1$

이때 $x<0$이므로 $-2<x<0$

(i), (ii)에서 $-2<x<2$

다른 풀이

$|x|^2=x^2$이므로 $|x|^2-|x|-2<0$에서

$(|x|+1)(|x|-2)<0$

이때 $|x|+1\geq 1$이므로 $|x|<2$ $\therefore -2<x<2$ 답 ⑤

50 (i) $x\geq 2$일 때,

$x^2-3x-6<3(x-2)$이므로 $x^2-6x<0$

$x(x-6)<0$

$\therefore 0<x<6$

이때 $x\geq 2$이므로 $2\leq x<6$

(ii) $x<2$일 때,

$x^2-3x-6<-3(x-2)$이므로 $x^2-12<0$

$(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})<0$

$\therefore -2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3}$

이때 $x<2$이므로 $-2\sqrt{3}<x<2$

(i), (ii)에서 $-2\sqrt{3}<x<6$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은 9이다. 답 9

51 $[x]^2+2[x]-8<0$에서 $([x]+4)([x]-2)<0$

$\therefore -4<[x]<2$

이때 $[x]$의 값은 정수이므로

$[x]=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$

$[x]=-3$일 때, $-3\leq x<-2$

$[x]=-2$일 때, $-2\leq x<-1$

$[x]=-1$일 때, $-1\leq x<0$

$[x]=0$일 때, $0\leq x<1$

$[x]=1$일 때, $1\leq x<2$

따라서 주어진 부등식의 해는 $-3\leq x<2$이므로

$a=-3,\ b=2$

$\therefore ab=-6$ 답 -6

52 (i) $0\leq x<1$일 때, $[x]=0$이므로 주어진 부등식은

$x^2\leq 0 \quad \therefore x=0$

(ii) $1\leq x<2$일 때, $[x]=1$이므로 주어진 부등식은

$x^2-2x\leq 0$, $x(x-2)\leq 0$

$\therefore 0\leq x\leq 2$

이때 $1\leq x<2$이므로 $1\leq x<2$

(i), (ii)에서 $x=0$ 또는 $1\leq x<2$

답 $x=0$ 또는 $1\leq x<2$

53 (i) $x^2\leq 3x$에서 $x^2-3x\leq 0$

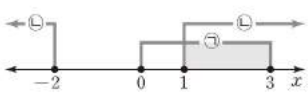
$x(x-3)\leq 0$

$\therefore 0\leq x\leq 3$ …… ㉠

(ii) $x^2+x\geq 2$에서 $x^2+x-2\geq 0$

$(x+2)(x-1)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 1$ …… ㉡



㉠, ㉡의 공통 범위는 $1\leq x\leq 3$

이때 해가 $1\leq x\leq 3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)\leq 0$ …… ㉢

㉢과 $ax^2+2bx-6\geq 0$의 부등호의 방향이 다르므로

$a<0$

㉢의 양변에 a를 곱하면 $a(x-1)(x-3)\geq 0$

즉, $ax^2-4ax+3a\geq 0$과 부등식 $ax^2+2bx-6\geq 0$이 일치하므로

$2b=-4a$, $-6=3a$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$

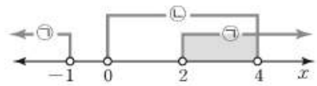
$\therefore ab=-8$ 답 -8

54 (i) $x+2<x^2$에서 $x^2-x-2>0$, $(x+1)(x-2)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>2$ …… ㉠

(ii) $x^2<4x$에서 $x^2-4x<0$, $x(x-4)<0$

$\therefore 0<x<4$ …… ㉡



㉠, ㉡의 공통 범위는 $2<x<4$

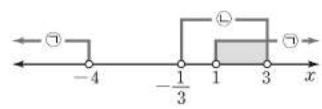
따라서 구하는 정수 x의 개수는 3의 1이다. 답 ①

55 (i) $|2x+3|>5$에서 $2x+3<-5$ 또는 $2x+3>5$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>1$ …… ㉠

(ii) $3x^2-8x-3<0$에서 $(3x+1)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{1}{3}<x<3$ …… ㉡



㉠, ㉡의 공통 범위는 $1<x<3$

따라서 구하는 정수 x는 2이다. 답 2

56 (i) $x^2-3x-4>0$에서 $(x+1)(x-4)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>4$ …… ㉠

(ii) $x^2-(k+5)x+5k\leq 0$에서

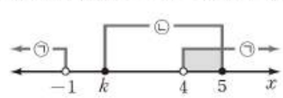
$(x-5)(x-k)\leq 0$ …… ㉡

① $k<5$일 때, $k\leq x\leq 5$

② $k=5$일 때, $x=5$

③ $k>5$일 때, $5\leq x\leq k$

이때 ㉠, ㉡의 공통 범위가 $4<x\leq 5$가 되도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 아래 그림과 같다.



즉, ㉡의 해는 $k\leq x\leq 5$

따라서 실수 k의 값의 범위는

$-1\leq k\leq 4$ 답 ③

오답 피하기

실수 k의 값의 범위를 구할 때 경계가 되는 값의 포함 여부가 헷갈리는 경우는 그 값을 부등식에 대입하여 주어진 조건을 만족하는지 확인한다.

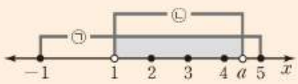
빈출유형 집중학습

56-1 (i) $x^2-4x-5\le0$에서 $(x+1)(x-5)\le0$

$\therefore -1\le x\le5$ …… ㉠

(ii) $x^2-(a+1)x+a<0$에서 $(x-1)(x-a)<0$

$\therefore 1<x<a$ ($\because$ a는 자연수) …… ㉡



주어진 연립부등식의 정수인 해가 3개 존재해야 하므로 위의 그림에서 $a=5$이다. 답 5

56-2 (i) $x^2<9x-18$에서

$x^2-9x+18<0$, $(x-3)(x-6)<0$

$\therefore 3<x<6$ …… ㉠

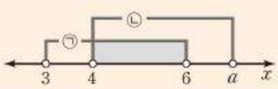
(ii) $(x-a)(x-4)<0$ …… ㉡에서

① $a<4$일 때, $a<x<4$

② $a=4$일 때, 해는 없다.

③ $a>4$일 때, $4<x<a$

이때 ㉠, ㉡의 공통 범위가 $4<x<6$이 되도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 아래 그림과 같다.



즉, ㉡의 해는 $4<x<a$

따라서 실수 a의 값의 범위는 $a\ge6$이므로 a의 최솟값은 6이다. 답 6

57 카드의 짧은 변의 길이를 x cm라 하면 긴 변의 길이는 $(18-x)$ cm이므로

$x<18-x$, $2x<18$ $\therefore x<9$

이때 변의 길이는 양수이므로

$x>0$, $18-x>0$ $\therefore 0<x<18$

$\therefore 0<x<9$ …… ㉠

또 카드의 넓이가 72 cm^2 이상 80 cm^2 이하이어야 하므로

$72\le x(18-x)\le80$

$72\le x(18-x)$에서 $x^2-18x+72\le0$

$(x-6)(x-12)\le0$

$\therefore 6\le x\le12$ …… ㉡

$x(18-x)\le80$에서 $x^2-18x+80\ge0$

$(x-8)(x-10)\ge0$

$\therefore x\le8$ 또는 $x\ge10$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위는 $6\le x\le8$

따라서 짧은 변의 길이의 범위는 6 cm 이상 8 cm 이하이다. 답 6 cm 이상 8 cm 이하

58 텃밭의 가로의 길이를 x m라 하면 세로의 길이는 $(50-x)$m이다.

이때 텃밭의 가로, 세로의 길이는 양수이므로

$x>0$, $50-x>0$

$\therefore 0<x<50$ …… ㉠

또 텃밭의 넓이가 525 m^2 이상이어야 하므로

$x(50-x)\ge525$, $x^2-50x+525\le0$

$(x-15)(x-35)\le0$

$\therefore 15\le x\le35$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $15\le x\le35$

따라서 텃밭의 가로의 길이의 최댓값은 35 m이다.

답 35 m

59 (i) x, $x+1$, $x+2$는 변의 길이이므로

$x>0$ …… ㉠

(ii) 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작으므로 $x+2<x+(x+1)$에서

$x>1$ …… ㉡

(iii) $x^2+(x+1)^2>(x+2)^2$이므로

$2x^2+2x+1>x^2+4x+4$

$x^2-2x-3>0$, $(x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위는 $x>3$ 답 ③

참고 삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c이고, c를 가장 긴 변이라 할 때, $a^2+b^2>c^2$이면 예각삼각형이다.

60 이차방정식 $x^2-2(a-1)x-2a+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(-2a+5)<0$

$a^2-4<0$, $(a+2)(a-2)<0$

$\therefore -2<a<2$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+ax-a^2+5a=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=a^2-4(-a^2+5a)\ge0$

$5a^2-20a\ge0$, $a(a-4)\ge0$

$\therefore a\le0$ 또는 $a\ge4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-2<a\le0$

따라서 정수 a는 -1, 0이므로 모든 정수 a의 값의 합은

$-1+0=-1$ 답 -1

61 이차방정식 $x^2+2kx-3k+10=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(-3k+10)<0$

$k^2+3k-10<0$, $(k+5)(k-2)<0$

$\therefore -5<k<2$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2x+k^2-1=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=1-(k^2-1)<0$

$k^2-2>0$, $(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})>0$

$\therefore k<-\sqrt{2}$ 또는 $k>\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는

$-5<k<-\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{2}<k<2$

답 $-5<k<-\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{2}<k<2$

62 이차방정식 $x^2+2(a+1)x+a^2+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a^2+3)=0$

$2a-2=0$ $\therefore a=1$

이차방정식 $x^2-(b+1)x+a+b=0$, 즉

$x^2-(b+1)x+1+b=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=(b+1)^2-4(1+b)<0$

$b^2-2b-3<0$, $(b+1)(b-3)<0$

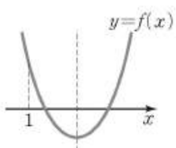
$\therefore -1<b<3$

따라서 자연수 b의 최댓값은 2이다. 답 2

63 $f(x)=x^2+kx+2$

$=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+2-\frac{k^2}{4}$

이라 할 때, 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-8\geq0$

$(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})\geq0$

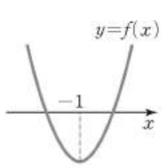
$\therefore k\leq-2\sqrt{2}$ 또는 $k\geq2\sqrt{2}$

(ii) $f(1)=k+3>0$ $\therefore k>-3$

(iii) $-\frac{k}{2}>1$ $\therefore k<-2$

(i), (ii), (iii)에서 $-3<k\leq-2\sqrt{2}$ 답 ②

64 $f(x)=x^2+(3a-1)x+4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 -1이 있으므로 오른쪽 그림에서 $f(-1)<0$이어야 한다.

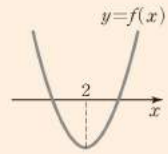


즉, $f(-1)=-3a+6<0$이므로

$a>2$ 답 $a>2$

빈출유형 집중학습

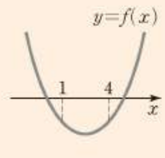
64-1 $f(x)=x^2+(m-1)x+2$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$이 2보다 큰 근과 2보다 작은 근을 가지므로 오른쪽 그림에서 $f(2)<0$이어야 한다.



즉, $f(2)=2m+4<0$이므로

$m<-2$ 답 ②

64-2 $f(x)=x^2-kx+2k-8$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 1보다 작고, 다른 한 근이 4보다 크므로 오른쪽 그림에서



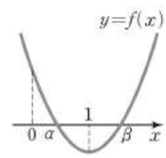
$f(1)<0$, $f(4)<0$이어야 한다. 즉,

$f(1)=k-7<0$ $\therefore k<7$ …… ㉠

$f(4)=-2k+8<0$ $\therefore k>4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4<k<7$ 답 ①

65 $f(x)=x^2+(k-3)x+k^2$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(0)>0$, $f(1)<0$이므로

(i) $f(0)=k^2>0$이므로 k는 $k\neq0$인 모든 실수

(ii) $f(1)=k^2+k-2<0$이므로

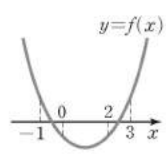
$(k+2)(k-1)<0$

$\therefore -2<k<1$

(i), (ii)에서 $-2<k<0$ 또는 $0<k<1$

따라서 k의 값으로 적당한 것은 ②이다. 답 ②

66 $f(x)=ax^2-(a+2)x-2$라 하면 오른쪽 그림에서



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 -1과 0 사이에 있으므로 $f(-1)f(0)<0$이다.

즉, $f(-1)=2a$, $f(0)=-2$에서

$-4a<0$ $\therefore a>0$

(ii) 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 2와 3 사이에 있으므로 $f(2)f(3)<0$이다.

즉, $f(2)=2a-6$, $f(3)=6a-8$에서

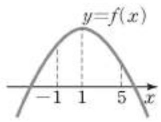
$4(a-3)(3a-4)<0$ $\therefore \frac{4}{3}<a<3$

(i), (ii)에서 $\frac{4}{3}<a<3$

따라서 $m=\frac{4}{3}$, $n=3$이므로 $mn=4$ 답 ②

67 $f(x)=-x^2+2x+2k+1$이라 하면

$f(x)=-(x-1)^2+2+2k$



$-1\le x\le 5$에서 $f(x)\ge 0$이려면 오른쪽 그림에서 $f(5)\ge 0$이어야 한다.

즉, $f(5)=2k-14\ge 0$이므로 $k\ge 7$

따라서 실수 k의 최솟값은 7이다.

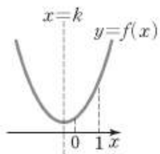
답 ⑤

68 $f(x)=x^2-2kx+3$이라 하면

$f(x)=(x-k)^2-k^2+3$

$0<x<1$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립해야 하므로

(i) $k\le 0$일 때, 오른쪽 그림과 같이

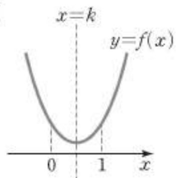


$f(0)\ge 0$이어야 한다.

이때 $f(0)=3$이므로 $0<x<1$에서

$f(x)>0$이 항상 성립한다.

(ii) $0<k<1$일 때, 오른쪽 그림과 같이



$f(k)>0$이어야 한다.

$f(k)=-k^2+3>0$에서

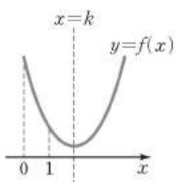
$k^2-3<0$

$(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})<0$

$\therefore -\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$

이때 $0<k<1$이므로 $0<k<1$

(iii) $k\ge 1$일 때, 오른쪽 그림과 같이



$f(1)\ge 0$이어야 한다.

$f(1)=-2k+4\ge 0$에서

$k\le 2$

이때 $k\ge 1$이므로 $1\le k\le 2$

(i), (ii), (iii)에서 실수 k의 값의 범위는 $k\le 2$이다.

답 ③

단계별 기출학습

본문 118~121쪽

01 ④	02 ②	03 -2	04 ③	05 ④
06 -12	07 ⑤	08 ①	09 ③	10 ③
11 $2<k<10$		12 3	13 5	14 ①
15 ③	16 $4\le x<8$		17 16	18 22
19 -3	20 5	21 $-4\le a<3$		
22 $-\frac{7}{4}<k\le-\sqrt{3}$ 또는 $k\ge\sqrt{3}$		23 $k\ge 13$		

01 ① $a+c>b+c$이므로 $a>b$이다.

② $a=4,\ b=3,\ c=1$이면 $a>b>c$이지만 $ac<b^2$이다.

③ $a=2,\ b=-2,\ c=1$이면 $\frac{c^2}{a}>\frac{c^2}{b}$이지만 $a>b$이다.

⑤ $a=-2,\ b=-1$이면 $a<b<0$이지만 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$이다.

02 $a^2x-6x+3>a(x+1)$에서 $(a^2-a-6)x>a-3$

$\therefore (a+2)(a-3)x>a-3$

(i) $a=3$일 때, $0\cdot x>0$이므로 해가 없다.

(ii) $a=-2$일 때, $0\cdot x>-5$이므로 해는 모든 실수이다.

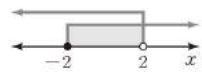
따라서 구하는 상수 a의 값은 -2이다.

03 $\begin{cases} 0.5x-0.4\ge 0.2x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{2}x-\frac{x-5}{3}<2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 양변에 10을 곱하면

$5x-4\ge 2x-10,\ 3x\ge -6 \quad \therefore x\ge -2$

㉡의 양변에 6을 곱하면



$3x-2(x-5)<12$

$3x-2x+10<12 \quad \therefore x<2$

$\therefore -2\le x<2$

따라서 주어진 연립부등식을 만족하는 정수 x는 -2, -1, 0, 1이므로 그 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$

04 $\begin{cases} 3(x+1)-4>2x+a-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{2}(3x-5)\le\frac{1}{4}(-x+11) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

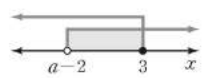
㉠에서 $3x-1>2x+a-3$

$\therefore x>a-2$

㉡의 양변에 4를 곱하면 $2(3x-5)\le -x+11$

$6x-10\le -x+11,\ 7x\le 21 \quad \therefore x\le 3$

주어진 연립부등식이 해를 갖기 위해서는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a-2<3 \quad \therefore a<5$

05 (i) $x<-1$일 때,

$-2(x-1)-(x+1)<8,\ -3x+1<8$

$-3x<7 \quad \therefore x>-\frac{7}{3}$

이때 $x<-1$이므로 $-\frac{7}{3}<x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때,

$-2(x-1)+(x+1)<8,\ -x+3<8$

$\therefore x>-5$

이때 $-1\le x<1$이므로 $-1\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$2(x-1)+(x+1)<8,\ 3x-1<8$

$3x<9 \quad \therefore x<3$

이때 $x\ge 1$이므로 $1\le x<3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{7}{3}<x<3$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 -2, -1, 0, 1, 2의 5이다.

06 $g(x)-f(x)>0$에서 $g(x)>f(x)$
즉, $y=g(x)$의 그래프가 $y=f(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위는
$$x<-2 \text{ 또는 } x>6$$
따라서 $a=-2$, $b=6$이므로 $ab=-12$

07 $x^2-2x>|x+4|$에서
(i) $x<-4$일 때,
$$x^2-2x>-x-4,\ x^2-x+4>0$$
이고, $x^2-x+4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$이므로 해는 모든 실수이다.
이때 $x<-4$이므로 $x<-4$
(ii) $x\geq-4$일 때,
$$x^2-2x>x+4$$
$$x^2-3x-4>0,\ (x+1)(x-4)>0$$
$$\therefore x<-1 \text{ 또는 } x>4$$
이때 $x\geq-4$이므로 $-4\leq x<-1$ 또는 $x>4$
(i), (ii)에서 $x<-1$ 또는 $x>4$
따라서 $a=-1$, $b=4$이므로 $a+b=3$

08 x^2의 계수가 1이고 해가 $\alpha<x<\beta$인 이차부등식은
$$(x-\alpha)(x-\beta)<0$$
$$\therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$$
이 부등식이 $x^2-3x-3<0$과 같으므로
$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-3$$
$$\therefore \frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{3^3-3\cdot(-3)\cdot3}{-3}$$
$$=-18$$

09 x^2의 계수가 $a(a>0)$이고, 해가 $x<-2$ 또는 $x>1$인 이차부등식은
$$a(x+2)(x-1)>0,\ a(x^2+x-2)>0$$
즉, $ax^2+ax-2a>0$이므로
$$b=a,\ c=-2a \quad \cdots\cdots ㉠$$
㉠을 $cx^2+bx+a>0$에 대입하면
$$-2ax^2+ax+a>0,\ -a(2x^2-x-1)>0$$
$$a(2x+1)(x-1)<0 \qquad \therefore -\frac{1}{2}<x<1$$
$$\therefore \alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=1$$
이때 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$이므로 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 1인 이차방정식은
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$$
$$\therefore x^2-\frac{1}{4}=0$$

10 모든 실수 x에 대하여 $ax^2-4x+a+1<4$이어야 하므로
$ax^2-4x+a-3<0$에서 $a<0$ $\cdots\cdots$ ㉠
이차방정식 $ax^2-4x+a-3=0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=4-a(a-3)<0$$
$$a^2-3a-4>0,\ (a+1)(a-4)>0$$
$$\therefore a<-1 \text{ 또는 } a>4 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서 $a<-1$
따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다.

11 이차함수 $y=-x^2+6x+1$의 그래프가 직선 $y=kx+5$보다 항상 아래쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^2+6x+1<kx+5$, 즉 $x^2+(k-6)x+4>0$이 성립한다.
이차방정식 $x^2+(k-6)x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$$D=(k-6)^2-16<0$$
$$k^2-12k+20<0,\ (k-2)(k-10)<0$$
$$\therefore 2<k<10$$

12 이차방정식 $x^2-2ax+3a-2=0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=a^2-(3a-2)\geq0$$
$$a^2-3a+2\geq0,\ (a-1)(a-2)\geq0$$
$$\therefore a\leq1 \text{ 또는 } a\geq2 \quad \cdots\cdots ㉠$$
이차방정식 $x^2+ax+a=0$의 판별식을 D'이라 하면
$$D'=a^2-4a<0,\ a(a-4)<0$$
$$\therefore 0<a<4 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서 공통 범위는
$$0<a\leq1 \text{ 또는 } 2\leq a<4$$
따라서 정수 a의 개수는 1, 2, 3의 3이다.

13 이차부등식 $x^2-ax+b\leq0$의 해는 $\alpha\leq x\leq\beta$ 꼴이므로 $1<x\leq2$에서 2는 방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이다.
즉, $4-2a+b=0$에서
$$2a-b=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$
또 이차부등식 $x^2-2x-a>0$의 해는 $x<r$ 또는 $x>\delta$ 꼴이므로 $1<x\leq2$에서 1은 방정식 $x^2-2x-a=0$의 한 근이다.
즉, $1-2-a=0$에서 $a=-1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=-6$
$$\therefore a-b=-1-(-6)=5$$

14 (i) $n-3$, n, $n+3$은 변의 길이이므로
$$n>3 \quad \cdots\cdots ㉠$$
(ii) 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작으므로 $n+3<n+(n-3)$에서 $n>6$
$\cdots\cdots$ ㉡

(ⅲ) 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작으므로 $(n+3)^2>n^2+(n-3)^2$에서

$$n^2+6n+9>2n^2-6n+9,\ n^2-12n<0$$

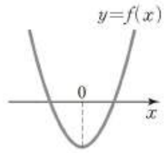
$$n(n-12)<0$$

$$\therefore 0<n<12 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위는 $6<n<12$

따라서 자연수 n의 개수는 7, 8, 9, 10, 11의 5이다.

15 $f(x)=x^2-2(k+1)x+2k-3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$이 양의 근과 음의 근을 모두 가지므로 오른쪽 그림과 같이 $f(0)<0$이어야 한다.



즉, $f(0)=2k-3<0$에서

$$k<\frac{3}{2}$$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

다른 풀이

이차방정식 $x^2-2(k+1)x+2k-3=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=2k-3<0$

$$\therefore k<\frac{3}{2}$$

16 $\begin{cases} 6x-5a<4x+3a & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x-5a\le 7x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x<4a$

㉡에서 $x\ge -5a-b$

연립부등식의 해가 $-4\le x<8$이 되려면 두 부등식의 해가 각각 $x<8$, $x\ge -4$이어야 한다.

즉, $4a=8$에서 $a=2$

$-5a-b=-4$에서 $-10-b=-4$

$$\therefore b=-6$$

따라서 처음 부등식은 $6x-10<4x+6\le 7x-6$이므로

$\begin{cases} 6x-10<4x+6 \\ 4x+6\le 7x-6 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x<8 \\ x\ge 4 \end{cases}$

$$\therefore 4\le x<8$$

17 의자의 개수를 x라 하면 학생 수는 $(4x+6)$명이므로

$$5(x-3)+1\le 4x+6\le 5(x-3)+5$$

$5x-14\le 4x+6\le 5x-10$에서

$\begin{cases} 5x-14\le 4x+6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+6\le 5x-10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le 20$

㉡에서 $-x\le -16$이므로 $x\ge 16$

$$\therefore 16\le x\le 20$$

따라서 의자의 최소 개수는 16이다.

18 주어진 부등식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-2(2y+3)x+4y^2+ay+b>0$$

위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(2y+3)x+4y^2+ay+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2y+3)^2-(4y^2+ay+b)<0$$

$$(12-a)y+9-b<0$$

$$\therefore (12-a)y<b-9 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 모든 실수 y에 대하여 성립하므로

$$12-a=0,\ b-9>0$$

$$\therefore a=12,\ b>9$$

이때 a, b는 정수이므로 $a=12$, $b=10$일 때 $a+b$의 값이 최소가 된다.

따라서 구하는 최솟값은

$$a+b=12+10=22$$

19 이차방정식 $x^2+2ax-3a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2+3a<0,\ a(a+3)<0$$

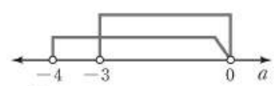
$$\therefore -3<a<0$$

이차방정식 $ax^2+ax-1=0$의 판별식을 D'이라 하면

$$D'=a^2+4a<0,\ a(a+4)<0$$

$$\therefore -4<a<0$$

오른쪽 그림에서 한 방정식만 허근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $-4<a\le -3$이므로 a의 최댓값은 -3이다.



20 (ⅰ) 연립부등식 $\begin{cases} x^2-4x-12\le 0 \\ x^2+ax+b\le 0 \end{cases}$의 해가 $2\le x\le 6$이고,

$x^2-4x-12\le 0$에서 $(x+2)(x-6)\le 0$이므로

$$-2\le x\le 6$$

따라서 $x=2$는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이다.

(ⅱ) 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b<0 \\ x^2-11x+24<0 \end{cases}$의 해가 $3<x<7$이고,

$x^2-11x+24<0$, $(x-3)(x-8)<0$이므로

$$3<x<8$$

따라서 $x=7$은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 7이므로

$$x^2+ax+b=(x-2)(x-7)=x^2-9x+14$$

따라서 $a=-9$, $b=14$이므로 $a+b=5$

21 $x^2-(a+4)x+4a<0$에서

$(x-4)(x-a)<0$ …… ㉠

$x^2+x-6>0$에서 $(x+3)(x-2)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>2$ …… ㉡

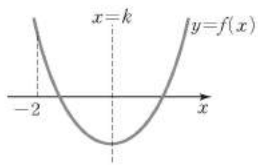
(i) $a>4$일 때, ㉠의 해는 $4<x<a$이므로 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수가 3뿐인 실수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $a=4$일 때, ㉠의 해는 없으므로 조건을 만족하지 않는다.

(iii) $a<4$일 때, ㉠의 해는 $a<x<4$이므로 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수가 3뿐이려면 $-4\le a<3$이어야 한다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $-4\le a<3$

22 $f(x)=x^2-2kx+3$이라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 크므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3\ge0,\ (k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})\ge0$

$\therefore k\le-\sqrt{3}$ 또는 $k\ge\sqrt{3}$

…… ❶

(ii) $f(-2)=4+4k+3>0$ $\quad\therefore k>-\frac{7}{4}$

…… ❷

(iii) $k>-2$

…… ❸

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{7}{4}<k\le-\sqrt{3}$ 또는 $k\ge\sqrt{3}$

…… ❹

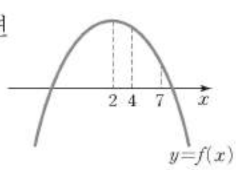
채점 기준	성취도
❶ 판별식의 부호를 이용하여 k의 값의 범위 구하기	20 %
❷ 함숫값을 이용하여 k의 값의 범위 구하기	20 %
❸ 대칭축을 이용하여 k의 값의 범위 구하기	20 %
❹ k의 값의 범위 구하기	40 %

23 $f(x)=-x^2+4x+2k-5$라 하면

$f(x)=-(x-2)^2+2k-1$

$4\le x\le7$에서 $f(x)\ge0$이려면

$f(7)\ge0$이어야 한다.



…… ❶

즉, $f(7)=-49+28+2k-5\ge0$에서 $2k-26\ge0$

$\therefore k\ge13$

…… ❷

채점 기준	성취도
❶ $f(x)=-x^2+4x+2k-5$로 놓고 $f(7)\ge0$임을 이용하기	40 %
❷ k의 값의 범위 구하기	60 %

09 평면좌표

13 선분의 내분점과 외분점

본문 122~129쪽

01 (1) $\overline{AB}=|10-4|=6$

(2) $\overline{AB}=|7-(-3)|=10$

(3) $\overline{AB}=\left|-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right|=|-2|=2$

(4) $\overline{AB}=|3+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})|$

$=|1+2\sqrt{3}|$

$=1+2\sqrt{3}$

답 (1) 6 (2) 10 (3) 2 (4) $1+2\sqrt{3}$

02 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(2-3)^2+(4-6)^2}=\sqrt{5}$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(-2-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{29}$

(3) $\overline{AB}=\sqrt{(0-3)^2+(7-0)^2}=\sqrt{58}$

(4) $\overline{AB}=\sqrt{(-4+1)^2+(-5-4)^2}$

$=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

답 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{29}$ (3) $\sqrt{58}$ (4) $3\sqrt{10}$

03 (1) $\mathrm{P}\left(\frac{3\cdot8+2\cdot(-2)}{3+2}\right)$이므로 $\mathrm{P}(4)$

(2) $\mathrm{P}\left(\frac{2\cdot8+3\cdot(-2)}{2+3}\right)$이므로 $\mathrm{P}(2)$

(3) $\mathrm{M}\left(\frac{-2+8}{2}\right)$이므로 $\mathrm{M}(3)$

답 (1) $\mathrm{P}(4)$ (2) $\mathrm{P}(2)$ (3) $\mathrm{M}(3)$

04 (1) $\mathrm{Q}\left(\frac{2\cdot7-1\cdot1}{2-1}\right)$이므로 $\mathrm{Q}(13)$

(2) $\mathrm{Q}\left(\frac{1\cdot7-2\cdot1}{1-2}\right)$이므로 $\mathrm{Q}(-5)$

답 (1) $\mathrm{Q}(13)$ (2) $\mathrm{Q}(-5)$

05 (1) $\mathrm{P}\left(\frac{3\cdot3+2\cdot8}{3+2},\ \frac{3\cdot7+2\cdot(-3)}{3+2}\right)$이므로 $\mathrm{P}(5,\ 3)$

(2) $\mathrm{P}\left(\frac{4\cdot3+1\cdot8}{4+1},\ \frac{4\cdot7+1\cdot(-3)}{4+1}\right)$이므로 $\mathrm{P}(4,\ 5)$

(3) $\mathrm{M}\left(\frac{8+3}{2},\ \frac{-3+7}{2}\right)$이므로 $\mathrm{M}\left(\frac{11}{2},\ 2\right)$

답 (1) $\mathrm{P}(5,\ 3)$ (2) $\mathrm{P}(4,\ 5)$ (3) $\mathrm{M}\left(\frac{11}{2},\ 2\right)$

06 (1) $\mathrm{Q}\left(\frac{2\cdot4-1\cdot(-1)}{2-1},\ \frac{2\cdot5-1\cdot2}{2-1}\right)$이므로 $\mathrm{Q}(9,\ 8)$

(2) $\mathrm{Q}\left(\frac{3\cdot4-2\cdot(-1)}{3-2},\ \frac{3\cdot5-2\cdot2}{3-2}\right)$이므로 $\mathrm{Q}(14,\ 11)$

답 (1) $\mathrm{Q}(9,\ 8)$ (2) $\mathrm{Q}(14,\ 11)$

07 (1) $\mathrm{G}\left(\frac{3+7+2}{3},\ \frac{1+5+3}{3}\right)$이므로 $\mathrm{G}(4,\ 3)$

(2) $\mathrm{G}\left(\frac{-1+2+5}{3},\ \frac{3-1+10}{3}\right)$이므로 $\mathrm{G}(2,\ 4)$

답 (1) $\mathrm{G}(4,\ 3)$ (2) $\mathrm{G}(2,\ 4)$

08 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

(1) $G\left(\dfrac{-4+1+a}{3},\ \dfrac{-2+b+5}{3}\right)$이므로

$G\left(\dfrac{-3+a}{3},\ \dfrac{b+3}{3}\right)$

즉, $\dfrac{-3+a}{3}=1,\ \dfrac{b+3}{3}=2$이므로

$a=6,\ b=3$

(2) $G\left(\dfrac{a+b-2b-b+4}{3},\ \dfrac{1+2a+b-3}{3}\right)$이므로

$G\left(\dfrac{a-2b+4}{3},\ \dfrac{2a+b-2}{3}\right)$

즉, $\dfrac{a-2b+4}{3}=1,\ \dfrac{2a+b-2}{3}=2$이므로

$a-2b=-1,\ 2a+b=8$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=2$

답 (1) $a=6,\ b=3$ (2) $a=3,\ b=2$

09 $\overline{AB}=|4-x|=3$에서 $4-x=\pm3$

$\therefore x=1$ 또는 $x=7$

따라서 모든 x의 값의 합은 8이다. 답 ③

10 $\overline{AB}=8,\ \overline{BC}=c-6$이므로 $\overline{AB}=2\overline{BC}$에서

$8=2(c-6),\ c-6=4$

$\therefore c=10$ 답 ④

11 $\overline{AB}=\sqrt{(1-m^2)^2+(-m-m)^2}=2$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$1-2m^2+m^4+4m^2=4,\ m^4+2m^2-3=0$

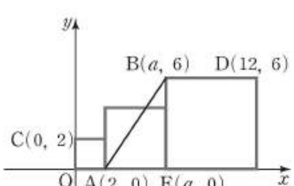
$(m^2+3)(m^2-1)=0$

$m^2+3>0$이므로 $m^2=1$

$\therefore m=\pm1$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은 0이다. 답 ③

12 오른쪽 그림에서 점 C의 좌표가 $(0,\ 2)$이므로



$\overline{OC}=\overline{OA}=2$

즉, $A(2,\ 0)$이고, $E(a,\ 0)(a>2)$이라 하면 $B(a,\ 6)$이므로

$\overline{BD}=12-a,\ \overline{BE}=6$

이때 $\overline{BD}=\overline{BE}$이므로

$12-a=6 \qquad \therefore a=6$

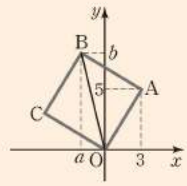
따라서 $A(2,\ 0),\ B(6,\ 6)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(6-2)^2+(6-0)^2}$

$=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ 답 ⑤

빈출 유형 **집중학습**

12-1 □OABC가 정사각형이므로



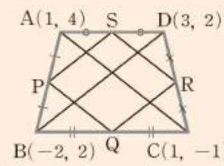
$\overline{AB}=\overline{OA}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$,

$\angle OAB=90°$이고 두 점 O, B를 연결하면 직각삼각형 OAB에서 $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2$이므로

$\overline{OB}^2=34+34=68$

한편 $\overline{OB}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로 $a^2+b^2=68$ 답 ⑤

12-2 사각형 ABCD의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형 PQRS는 평행사변형이므로



$\overline{PS}=\overline{QR}=\dfrac{1}{2}\overline{BD},\ \overline{PQ}=\overline{SR}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$

따라서 □PQRS의 둘레의 길이는

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}$

$=\overline{AC}+\overline{BD}$

$=\sqrt{(1-1)^2+(4+1)^2}+\sqrt{(-2-3)^2+(2-2)^2}$

$=5+5=10$ 답 10

13 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\sqrt{(a+3)^2+2^2}=\sqrt{(a-4)^2+5^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+6a+13=a^2-8a+41$

$14a=28 \qquad \therefore a=2$ 답 ①

빈출 유형 **집중학습**

13-1 점 P의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\sqrt{1^2+(a-2)^2}=\sqrt{(-4)^2+(a-5)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-4a+5=a^2-10a+41$

$6a=36 \qquad \therefore a=6$ 답 ⑤

13-2 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$b=a-1$ …… ㉠

$\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(a-2)^2+(b+1)^2=(a-3)^2+(b-2)^2$

$\therefore a+3b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{7}{4},\ b=\dfrac{3}{4}$

$\therefore a+b=\dfrac{5}{2}$ 답 $\dfrac{5}{2}$

14 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\sqrt{(m-2)^2+(n-2)^2}=\sqrt{(m+5)^2+(n-3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(m-2)^2+(n-2)^2=(m+5)^2+(n-3)^2$

$\therefore 7m-n=-13$ …… ㉠

또 $\overline{AP}=\overline{CP}$이므로

$\sqrt{(m-2)^2+(n-2)^2}=\sqrt{(m+2)^2+(n-4)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(m-2)^2+(n-2)^2=(m+2)^2+(n-4)^2$

$\therefore 2m-n=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=-2,\ n=-1$

$\therefore m+n=-2-1=-3$ 답 ②

참고 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$인 점 P는 $\triangle$ABC의 외심이다.

15 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\sqrt{(-2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(k-1)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$k^2-2k+10=10,\ k^2-2k=0,\ k(k-2)=0$

$\therefore k=2(\because k>0)$ 답 ②

16 $\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{20}$이고, 점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(x-1)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y+2)^2$

$4x+8y=0 \quad \therefore x=-2y$ …… ㉠

또 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\sqrt{20}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$20=(x-1)^2+(y-2)^2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(-2y-1)^2+(y-2)^2=20$

$4y^2+4y+1+y^2-4y+4=20$

$y^2=3 \quad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

$y=-\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $x=2\sqrt{3}$

$y=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $x=-2\sqrt{3}$

따라서 점 C의 좌표는 $(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$이므로 꼭짓점 C의 좌표가 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

17 점 P의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(a-2)^2+\{(0-4)^2+(a+2)^2\}$

$=2a^2+24$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 $a=0$일 때, 24이다.

답 ④

18 점 P의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$

$=\{(a+4)^2+(b-2)^2\}+\{(a-2)^2+(b+6)^2\}$

$=2a^2+4a+2b^2+8b+60$

$=2(a+1)^2+2(b+2)^2+50$

$a,\ b$는 실수이므로 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 점 P의 좌표가 $(-1,\ -2)$일 때, 50이다.

따라서 $a=-1,\ b=-2,\ c=50$이므로

$a+b+c=-1-2+50=47$ 답 47

참고 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소가 되는 점 P는 선분 AB의 중점이다.

19 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=\{(x-3)^2+(y-4)^2\}+\{(x+4)^2+(y-2)^2\}$

$\quad+\{(x-7)^2+(y-3)^2\}$

$=3x^2-12x+3y^2-18y+103$

$=3(x-2)^2+3(y-3)^2+64$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은 점 P의 좌표가 $(2,\ 3)$일 때, 64이다. 답 ②

참고 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되는 점 P는 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

20 중선 정리에 의하여 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로

$8^2+6^2=2\{(4\sqrt{2})^2+\overline{BM}^2\}$

$\overline{BM}^2+32=50,\ \overline{BM}^2=18$

$\therefore \overline{BM}=3\sqrt{2}(\because \overline{BM}>0)$ 답 ④

21 중선 정리에 의하여 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로

$5^2+3^2=2(\overline{AM}^2+2^2),\ \overline{AM}^2=13$

$\therefore \overline{AM}=\sqrt{13}(\because \overline{AM}>0)$ 답 $\sqrt{13}$

22 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{GP}=\frac{1}{3}\overline{AP}=\frac{1}{3}\cdot 9=3$

삼각형 GBC에서 $\overline{GP}$는 삼각형 GBC의 한 중선이므로 중선 정리에 의하여

$\overline{BG}^2+\overline{GC}^2=2(\overline{GP}^2+\overline{BP}^2)$

$6^2+4^2=2(3^2+\overline{BP}^2)$

$52=18+2\overline{BP}^2,\ \overline{BP}^2=17$

$\therefore \overline{BP}=\sqrt{17}(\because \overline{BP}>0)$

$\therefore \overline{BC}=2\overline{BP}=2\cdot\sqrt{17}=2\sqrt{17}$ 답 ②

오답 피하기

삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분하는 점이므로 $\overline{GP}=\frac{1}{3}\overline{AP}$가 됨에 주의한다.

23 ① 점 B는 $\overline{AC}$를 $2:1$로 내분한다.
③ 점 C는 $\overline{BD}$를 $1:3$으로 내분한다.
④ 점 C는 $\overline{AD}$의 중점이다.
⑤ 점 D는 $\overline{BC}$를 $4:3$으로 외분한다. 답 ②

24 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로

$$\frac{1\cdot(b-1)+2\cdot3}{1+2}=1,\quad \frac{1\cdot(-2)+2\cdot(a+3)}{1+2}=2$$

$b+5=3$에서 $b=-2$, $2a+4=6$에서 $a=1$

따라서 $A(3,\ 4)$, $B(-3,\ -2)$이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3-3)^2+(-2-4)^2}=6\sqrt{2}$$ 답 $6\sqrt{2}$

빈출 유형 집중학습

24-1 점 P는 $\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$$a=\frac{3\cdot4+1\cdot(-2)}{3+1}=\frac{5}{2},$$

$$b=\frac{3\cdot(-1)+1\cdot5}{3+1}=\frac{1}{2}$$

또 점 Q는 $\overline{AB}$를 $3:1$로 외분하는 점이므로

$$c=\frac{3\cdot4-1\cdot(-2)}{3-1}=7,$$

$$d=\frac{3\cdot(-1)-1\cdot5}{3-1}=-4$$

$\therefore a+b+c+d=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}+7+(-4)=6$ 답 6

24-2 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{2\cdot5+1\cdot(-1)}{2+1},\ \frac{2\cdot(-2)+1\cdot4}{2+1}\right)$에서

$P(3,\ 0)$

또 $\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$Q\left(\frac{3\cdot5-2\cdot(-1)}{3-2},\ \frac{3\cdot(-2)-2\cdot4}{3-2}\right)$에서

$Q(17,\ -14)$

따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+17}{2},\ \frac{0-14}{2}\right)$에서 $(10,\ -7)$ 답 ⑤

24-3 $\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(b+2,\ a+3)$이므로

$\frac{3\cdot b+1\cdot4}{3+1}=b+2$, $3b+4=4b+8$ $\quad\therefore b=-4$

$\frac{3\cdot3+1\cdot a}{3+1}=a+3$, $9+a=4a+12$ $\quad\therefore a=-1$

즉, $A(4,\ -1)$, $C(-1,\ -4)$이므로 $\overline{AC}$를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{2\cdot(-1)-1\cdot4}{2-1}=-6,$$

$$y=\frac{2\cdot(-4)-1\cdot(-1)}{2-1}=-7$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-6,\ -7)$이다. 답 ①

25 점 P가 x축 위의 점이므로 점 P의 y좌표는 0이다. 즉,

$$\frac{m\cdot(-2)+1\cdot3}{m+1}=0$$

$-2m+3=0$ $\quad\therefore m=\frac{3}{2}$ 답 ③

26 $\overline{AB}$를 $a:(1-a)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{a\cdot4+(1-a)\cdot(-2)}{a+1-a},\ \frac{a\cdot(-1)+(1-a)\cdot5}{a+1-a}\right)$에서

$(6a-2,\ -6a+5)$

이때 이 점이 제1사분면 위에 있으므로

$6a-2>0$, $-6a+5>0$

$\therefore \frac{1}{3}<a<\frac{5}{6}$ 답 ④

27 $2\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$이므로 점 C는 $\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점이다.

따라서 점 C의 좌표는

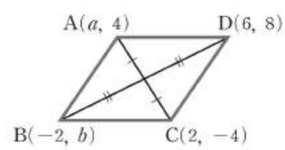
$\left(\frac{3\cdot1-2\cdot(-1)}{3-2},\ \frac{3\cdot6-2\cdot3}{3-2}\right)$

$\therefore (5,\ 12)$ 답 ⑤

28 점 $P\left(\frac{a+b}{2}\right)$는 $\overline{AB}$의 중점, 점 $Q\left(\frac{3a+2b}{5}\right)$는 $\overline{AB}$를 $2:3$으로 내분하는 점, 점 $R\left(\frac{-a+3b}{2}\right)$는 $\overline{AB}$를 $3:1$로 외분하는 점이다. 따라서 세 점 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

답 ④

29 오른쪽 그림과 같이 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.

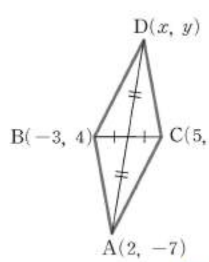


즉, $\frac{a+2}{2}=\frac{-2+6}{2}$, $\frac{4-4}{2}=\frac{b+8}{2}$에서

$a=2$, $b=-8$

$\therefore ab=-16$ 답 ⑤

30 두 대각선 AD와 BC의 중점이 일치하므로



$$\frac{2+x}{2}=\frac{-3+5}{2},$$

$$\frac{-7+y}{2}=\frac{4+6}{2}$$

$\therefore x=0$, $y=17$

따라서 점 D의 좌표는 $(0,\ 17)$이다. 답 ④

31 □ABCD는 마름모이므로 $\overline{AD}=\overline{AB}$

이때 $\overline{AD}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{AB}=a-(-3)=a+3$이므로

$a+3=5$ $\quad\therefore a=2$

또 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$\frac{-3+m}{2}=\frac{2}{2}$, $\frac{n}{2}=\frac{4}{2}$

$\therefore m=5,\ n=4$

$\therefore a+m+n=2+5+4=11$ 답 11

32 △ABC의 무게중심 G의 좌표가 $(m,\ n)$이므로

$m=\frac{3-2+5}{3}=2$, $n=\frac{2+0+1}{3}=1$

$\therefore m+n=3$ 답 ③

빈출유형 집중학습

32-1 $\frac{-1+6+4}{3}=b$, $\frac{2a+1+5}{3}=\frac{14}{3}$에서

$a=4,\ b=3$

$\therefore a-b=1$ 답 ④

32-2 △ABC의 무게중심의 좌표가 $(2,\ -2)$이므로

$\frac{2+(a+1)+(b+2)}{3}=2$,

$\frac{-1-2b+(2a-1)}{3}=-2$

$\therefore a+b=1,\ a-b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore ab=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}$ 답 ②

33 △ABC의 무게중심 G의 좌표는

$G\left(\frac{3-1+4}{3},\ \frac{3+0+0}{3}\right)$에서 $G(2,\ 1)$

$\therefore \overline{AG}=\sqrt{(3-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$ 답 ②

34 △ABC의 무게중심과 △PQR의 무게중심이 일치하므로 △ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+6+5}{3},\ \frac{3-1+4}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{13}{3},\ 2\right)$ 답 $\left(\frac{13}{3},\ 2\right)$

35 △ABC의 무게중심과 △DEF의 무게중심이 일치하므로 △DEF의 무게중심도 $G(-2,\ 1)$이다.

즉, $\frac{1+(3a+2)+(2b+5)}{3}=-2$에서

$3a+2b=-14$ …… ㉠

또 $\frac{2+(b+3)+a}{3}=1$에서

$a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-10,\ b=8$

$\therefore a-b=-18$ 답 −18

단계별 기출학습 본문 130~133쪽

01 ④	02 ②	03 2	04 ③	05 ②
06 112	07 ③	08 ⑤	09 ②	10 ④
11 ④	12 5	13 ⑤	14 ⑤	15 ③
16 ②	17 3	18 9	19 14	
20 $\left(\frac{14}{5},\ \frac{11}{5}\right)$		21 $c<a<b$		
22 25π	23 $9\sqrt{3}$			

01 $\overline{PQ}=\sqrt{(a-5)^2+(5-a)^2}=3\sqrt{2}$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$2(a-5)^2=18,\ (a-5)^2=9$

$a-5=\pm3$

$\therefore a=2$ 또는 $a=8$

따라서 모든 a의 값의 합은 10이다.

02 $\overline{AB}=\sqrt{\{(k-3)+1\}^2+\{3+(k+5)\}^2}$

$=\sqrt{(k-2)^2+(k+8)^2}$

$=\sqrt{2k^2+12k+68}$

$=\sqrt{2(k+3)^2+50}$

따라서 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 $k=-3$일 때, $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$이다.

03 $\overline{AB}=\sqrt{(3-m)^2+(1-2m)^2}=3$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$(3-m)^2+(1-2m)^2=9$

$9-6m+m^2+1-4m+4m^2=9$

$5m^2-10m+1=0$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 2이다.

04 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\sqrt{(a-6)^2+(-3)^2}=\sqrt{(a+3)^2+(-12)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-12a+45=a^2+6a+153$

$18a=-108 \quad \therefore a=-6$

$\therefore P(-6,\ 0)$

또 점 Q의 좌표를 $(0,\ b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$이므로

$\sqrt{(-6)^2+(b-3)^2}=\sqrt{3^2+(b-12)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$b^2-6b+45=b^2-24b+153$

$18b=108 \quad \therefore b=6$

$\therefore Q(0,\ 6)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{6^2+6^2}$

$=6\sqrt{2}$

05 $\overline{AB}=\sqrt{6^2+(3+3)^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-3-6)^2+(-3)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

$\overline{CA}=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

즉, $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$이므로 $\triangle ABC$는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이다.

06 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=\{(x+3)^2+(y-3)^2\}+\{(x-7)^2+(y-11)^2\}$
$\quad+\{(x+1)^2+(y-1)^2\}$

$=3x^2-6x+3y^2-30y+190$

$=3(x-1)^2+3(y-5)^2+112$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은 점 P의 좌표가 $(1,\ 5)$일 때, 112이다.

참고 점 P는 세 점 $A(-3,\ 3)$, $B(7,\ 11)$, $C(-1,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 점 P의 좌표를

$\left(\frac{-3+7-1}{3},\ \frac{3+11+1}{3}\right)$, 즉 $(1,\ 5)$

와 같이 구할 수도 있다.

07 중선 정리에 의하여 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로

$12^2+(3\sqrt{6})^2=2(\overline{AM}^2+6^2)$

$99=\overline{AM}^2+36,\ \overline{AM}^2=63$

$\therefore \overline{AM}=3\sqrt{7}\ (\because \overline{AM}>0)$

이때 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{AM}=\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{7}=\sqrt{7}$

08 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{1\cdot(-4)+2\cdot 5}{1+2},\ \frac{1\cdot 4+2\cdot(-2)}{1+2}\right)$에서

$P(2,\ 0)$

또 $\overline{AB}$를 1 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표는

$Q\left(\frac{1\cdot(-4)-2\cdot 5}{1-2},\ \frac{1\cdot 4-2\cdot(-2)}{1-2}\right)$에서

$Q(14,\ -8)$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+14}{2},\ \frac{0-8}{2}\right)$에서

$(8,\ -4)$

09 $\overline{AB}$를 m : 2로 외분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{m\cdot 2-2\cdot(-1)}{m-2},\ \frac{m\cdot 2-2\cdot 0}{m-2}\right)$에서

$P\left(\frac{2m+2}{m-2},\ \frac{2m}{m-2}\right)$

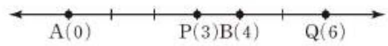
이때 점 P가 직선 $x-y=2$ 위에 있으므로

$\frac{2m+2}{m-2}-\frac{2m}{m-2}=2$

$\frac{2}{m-2}=2,\ m-2=1$

$\therefore m=3$

10 수직선 위의 두 점 A, B를 $A(0)$, $B(4)$라 하면 $P(3)$, $Q(6)$이다.



ㄱ. 점 P는 $\overline{AQ}$의 중점이다.

ㄴ. 점 B는 $\overline{AQ}$를 2 : 1로 내분하는 점이다.

ㄷ. 점 A는 $\overline{PB}$를 3 : 4로 외분하는 점이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$\frac{0+c}{2}=\frac{b+6}{2}$에서 $c=b+6$ …… ㉠

또 $\frac{a+0}{2}=\frac{1+5}{2}$에서 $a=6$

이때 대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{c}{2},\ 3\right)$이고, 이 점이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로

$3=\frac{c}{2}+1 \quad \therefore c=4$

$c=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a^2+b^2+c^2=6^2+(-2)^2+4^2=56$

12 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{OB}$와 $\overline{AC}$의 중점이 일치한다. 즉,

$\frac{1}{2}=\frac{a+b}{2} \quad \therefore a+b=1$ …… ㉠

또 마름모의 정의에 의하여 $\overline{OA}=\overline{AB}$이므로

$\sqrt{a^2+(-2)^2}=\sqrt{(a-1)^2+(-2-1)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+4=a^2-2a+10$

$2a=6 \quad \therefore a=3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a-b=5$

13 $\overline{AD}$가 $\angle A$의 이등분선이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$가 성립한다.

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-4-1)^2+(-4-8)^2}=13$,

$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(5-8)^2}=5$이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=13:5$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 13 : 5로 내분하는 점이므로

$a=\frac{13\cdot 5+5\cdot(-4)}{13+5}=\frac{5}{2},\ b=\frac{13\cdot 5+5\cdot(-4)}{13+5}=\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=5$

14 삼각형 ABC의 무게중심이 원점이므로

$\frac{-6+b+a}{3}=0,\ \frac{ab+9+1}{3}=0$

$a+b=6,\ ab=-10$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=6^2-2\cdot(-10)=56$

15 $\triangle ABC$의 무게중심과 $\triangle DEF$의 무게중심이 일치하므로 $\triangle DEF$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1-3+4}{3},\ \frac{0+4+8}{3}\right)\qquad \therefore (0,\ 4)$$

16 $\sqrt{x^2+y^2}=\overline{OA}$, $\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}=\overline{AB}$이므로

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}=\overline{OA}+\overline{AB}\ge\overline{OB}$$

이때 $\overline{OB}=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$이므로

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}\ge\sqrt{34}$$

따라서 $m=\sqrt{34}$이므로 $m^2=34$

17 x에 대한 이차방정식 $x^2-2x+a-2b+1=0$의 판별식을 D라 하면 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(a-2b+1)=0$$

$$\therefore a=2b$$

즉, 점 Q의 좌표는 $(2b,\ b)$이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\overline{PQ}=\sqrt{(2b-1)^2+(b-3)^2}=\sqrt{5b^2-10b+10}$$
$$=\sqrt{5(b-1)^2+5}$$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이는 $a=2$, $b=1$일 때 최소이므로

$$a+b=2+1=3$$

18 삼각형 ABC에서 $\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{CQ}$이므로

$$\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{CQ}=2$$

이때 삼각형 ABQ에서 $\overline{AP}=x$, $\overline{AQ}=y$라 하면 $\overline{AP}$는 중선이므로

$$4^2+y^2=2(x^2+2^2)\qquad \therefore 2x^2-y^2=8\ \cdots\cdots ㉠$$

또 삼각형 APC에서 $\overline{AQ}$는 중선이므로

$$x^2+3^2=2(y^2+2^2)\qquad \therefore x^2-2y^2=-1\ \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x^2=\frac{17}{3},\ y^2=\frac{10}{3}$$

$$\therefore \overline{AP}^2+\overline{AQ}^2=x^2+y^2=\frac{17}{3}+\frac{10}{3}=9$$

다른 풀이

삼각형 ABC에서 $\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{CQ}$이므로 $\overline{PQ}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{AM}$은 삼각형 ABC의 중선이다.

이때 $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3$이므로 삼각형 ABC에서

$$4^2+3^2=2(\overline{AM}^2+3^2)\qquad \therefore \overline{AM}^2=\frac{7}{2}$$

또 삼각형 APQ에서 $\overline{AM}$은 중선이고, $\overline{PM}=\overline{QM}=1$이므로

$$\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2=2(\overline{AM}^2+1^2)=2\left(\frac{7}{2}+1\right)$$

$$\therefore \overline{AP}^2+\overline{AQ}^2=9$$

19 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{7m-2n}{m+n},\ \frac{-2m-5n}{m+n}\right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로 $\frac{7m-2n}{m+n}=0$에서

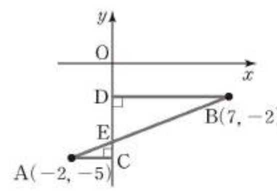
$$7m=2n$$

이때 m, n은 서로소인 자연수이고, $m:n=2:7$이므로

$$m=2,\ n=7$$

$$\therefore mn=14$$

다른 풀이

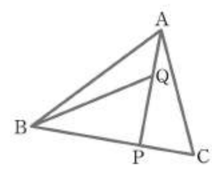


두 점 A, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하고, 선분 AB와 y축과의 교점을 E라 하면

$$\triangle ECA \backsim \triangle EDB$$

$$\therefore \overline{AE}:\overline{BE}$$
$$=\overline{AC}:\overline{BD}=2:7$$

20 오른쪽 그림에서



$$\triangle ABP:\triangle APC=2:1$$

이므로 $\overline{BP}:\overline{CP}=2:1$이다.

즉, 점 P는 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot6+1\cdot0}{2+1},\ \frac{2\cdot(-3)+1\cdot0}{2+1}\right)\qquad \therefore (4,\ -2)$$

또 $\triangle ABQ:\triangle BPQ=2:3$이므로 $\overline{AQ}:\overline{PQ}=2:3$이다. 즉, 점 Q는 $\overline{AP}$를 $2:3$으로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는

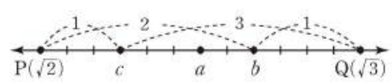
$$\left(\frac{2\cdot4+3\cdot2}{2+3},\ \frac{2\cdot(-2)+3\cdot5}{2+3}\right)\qquad \therefore \left(\frac{14}{5},\ \frac{11}{5}\right)$$

21 $a=\frac{1\cdot\sqrt{3}+1\cdot\sqrt{2}}{2}$이므로 a는 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표이다.

$b=\frac{2\cdot\sqrt{3}+1\cdot\sqrt{2}}{2+1}$이므로 b는 $\overline{PQ}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표이다.

$c=\frac{1\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}{1+3}$이므로 c는 $\overline{PQ}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표이다.

따라서 a, b, c에 대응하는 점을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore c<a<b$$

22 $\triangle ABC$의 외심을 $P(a,\ b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

(i) $\overline{PA}=\overline{PB}$에서

$$\sqrt{(a-8)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(a-6)^2+(b+5)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(a-8)^2+(b+1)^2=(a-6)^2+(b+5)^2$$

$$\therefore a+2b=1\qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $\overline{PA}=\overline{PC}$에서

$\sqrt{(a-8)^2+(b+1)^2}=\sqrt{a^2+(b-3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(a-8)^2+(b+1)^2=a^2+(b-3)^2$

$\therefore 2a-b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore \mathrm{P}(3,\ -1)$

…… ❶

따라서 외접원의 반지름의 길이는

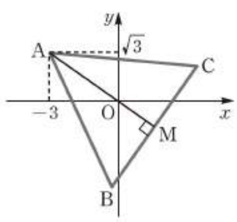
$\overline{PA}=\sqrt{(3-8)^2+(-1+1)^2}=5$

이므로 구하는 넓이는 $\pi\cdot5^2=25\pi$

…… ❷

채점 기준	성취도
❶ 삼각형 ABC의 외심의 좌표 구하기	50 %
❷ 외접원의 넓이 구하기	50 %

23 정삼각형 ABC의 한 꼭짓점이 $\mathrm{A}(-3,\ \sqrt{3})$이고, 무게중심이 원점이므로 정삼각형 ABC를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 꼭짓점 A에서 대변 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{AM}=\frac{3}{2}\overline{OA}$

이고, $\overline{OA}=\sqrt{(-3-0)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{AM}=\frac{3}{2}\cdot2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

…… ❶

한편 삼각형 ABM에서 $\angle B=60^\circ$이므로

$$\overline{AB}=\frac{\overline{AM}}{\sin 60^\circ}=\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=3\sqrt{3}\div\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=3\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=6$$

…… ❷

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 6이므로 구하는 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot6^2=9\sqrt{3}$

…… ❸

참고 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이를 h, 넓이를 S라 하면

$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

채점 기준	성취도
❶ $\overline{AM}$의 길이 구하기	30 %
❷ $\overline{AB}$의 길이 구하기	30 %
❸ 정삼각형 ABC의 넓이 구하기	40 %

10 직선의 방정식

14 직선의 방정식

본문 134~141쪽

01 답 (1) $3x-y+2=0$ (2) $x-2y-2=0$

(3) $y=2x+\frac{1}{2}$ (4) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

02 답 (1) $x=-3$ (2) $y=6$

03 (1) $y=-2(x-3)+1$, 즉 $y=-2x+7$

(2) 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°이므로 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이고, y절편이 3이므로 직선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x+3$

답 (1) $y=-2x+7$ (2) $y=\sqrt{3}x+3$

04 (1) 구하는 직선의 방정식은

$y=\frac{-2-6}{-3-(-1)}(x+1)+6$, $y=4(x+1)+6$

$\therefore y=4x+10$

(2) 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 또는 $y=-\frac{3}{2}x+3$

답 (1) $y=4x+10$ (2) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 또는 $y=-\frac{3}{2}x+3$

05 ㄱ. $x+2y+6=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x-3$

ㄴ. $x-2y-4=0$에서 $y=\frac{1}{2}x-2$

ㄷ. $2x+y-5=0$에서 $y=-2x+5$

ㄹ. $2x-y+1=0$에서 $y=2x+1$

이므로 직선 $y=-2x+1$과 평행한 직선은 ㄷ, 수직인 직선은 ㄴ이다.

답 ㄷ, ㄴ

06 (1) $3x-y+3=0$에서 $y=3x+3$이므로 두 직선은 기울기가 같고, y절편이 다르다.

따라서 두 직선은 평행하다.

(2) $4x+y-7=0$에서 $y=-4x+7$이므로 두 직선은 기울기와 y절편이 각각 같다.

따라서 두 직선은 일치한다.

(3) $2x+y-3=0$에서 $y=-2x+3$이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다. 따라서 두 직선은 수직이다.

답 (1) 평행하다. (2) 일치한다. (3) 수직이다.

07 (1) 두 직선이 평행하면 $\frac{a}{3}=\frac{1}{-1}\neq\frac{-1}{b}$이므로

$a=-3$, $b\neq1$

(2) 두 직선이 일치하면 $\frac{a}{3}=\frac{1}{-1}=\frac{-1}{b}$이므로

$a=-3$, $b=1$

(3) 두 직선이 수직으로 만나면 $a\cdot 3+1\cdot(-1)=0$이므로

$3a-1=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

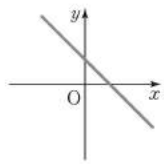
답 (1) $a=-3$, $b\neq 1$ (2) $a=-3$, $b=1$ (3) $a=\frac{1}{3}$

08 $b\neq 0$일 때, $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

(1) $a<0$, $b<0$이므로 $-\frac{a}{b}<0$

$b<0$, $c>0$이므로 $-\frac{c}{b}>0$

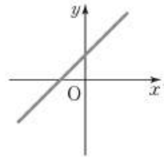
따라서 직선 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



(2) $\frac{a}{b}<0$이므로 $-\frac{a}{b}>0$

$\frac{b}{c}<0$이므로 $-\frac{c}{b}>0$

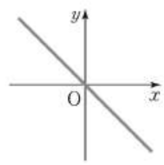
따라서 직선 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



(3) $ab>0$이므로 $-\frac{a}{b}<0$

$c=0$이므로 $-\frac{c}{b}=0$

따라서 직선 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3사분면을 지나지 않는다.



답 (1) 제3사분면 (2) 제4사분면 (3) 제1, 3사분면

09 기울기가 -4이고 점 $(2, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+3=-4(x-2)$, 즉 $y=-4x+5$

이므로 $a=-4$, $b=5$

$\therefore a+b=-4+5=1$ 답 ④

10 두 점 $(-2, 3)$, $(8, -1)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+8}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$, 즉 $(3, 1)$

이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-2(x-3) \qquad \therefore y=-2x+7$ 답 ⑤

11 기울기가 2이고 x절편이 -2인 직선의 방정식은

$y=2(x+2)$, $y=2x+4 \qquad \therefore 2x-y+4=0$

즉, $2m-1=2$, $3n+2=4$이므로 $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{2}{3}$

$\therefore mn=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$ 답 ③

12 기울기가 $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$이고 점 $(-2, -\sqrt{3})$을 지나는 직선의 방정식은 $y+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 ①

13 두 점 $(-2, 0)$, $(-2, 7)$을 지나는 직선은 y축에 평행한 직선이므로 직선의 방정식은

$x=-2$ 답 ①

14 두 점 $(2, 1)$, $(4, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{4-1}{4-2}(x-2)$, $y=\frac{3}{2}(x-2)+1$

$\therefore 3x-2y-4=0$

즉, $a=3$이고, $b-1=-4$이므로 $b=-3$

$\therefore a-b=3-(-3)=6$ 답 ③

빈출 유형 집중학습

14-1 두 점 $(-2, 1)$, $(1, 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{7-1}{1-(-2)}(x+2)$, 즉 $y=2x+5$

따라서 $a=2$, $b=5$이므로

$a^2+b^2=2^2+5^2=29$ 답 29

14-2 두 점 $(6, -3)$, $(2, 9)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+3=\frac{9-(-3)}{2-6}(x-6)$, 즉 $y=-3x+15$

따라서 직선의 x절편은 $0=-3x+15$에서 5이다.

답 ⑤

14-3 두 점 $(2, 1)$, $(-4, 13)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{13-1}{-4-2}(x-2)$, $y=-2(x-2)+1$

$\therefore 2x+y-5=0$

점 $(a, a+2)$가 직선 $2x+y-5=0$ 위에 있으므로

$2a+a+2-5=0$, $3a-3=0$

$\therefore a=1$ 답 ③

15 두 점 $A(-2, 1)$, $B(6, 13)$을 이은 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot 6+1\cdot(-2)}{3+1}, \frac{3\cdot 13+1\cdot 1}{3+1}\right)$, 즉 $(4, 10)$

이므로 두 점 $(4, 10)$, $(-1, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-10=\frac{5-10}{-1-4}(x-4)$

$\therefore y=x+6$ 답 $y=x+6$

16 x절편이 -3이고, y절편이 6인 직선의 방정식은

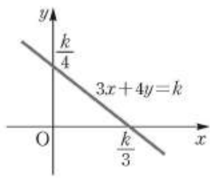
$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6}=1$

이고, 이 직선이 점 $(a, 2)$를 지나므로

$\frac{a}{-3}+\frac{2}{6}=1$, $\frac{a}{-3}=\frac{2}{3}$

$\therefore a=-2$ 답 ②

17 직선 $3x+4y=k$의 x절편과 y절편은 각각 $\frac{k}{3}$, $\frac{k}{4}$이고, $k>0$이므로 직선 $3x+4y=k$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형이다.



이때 주어진 도형의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{3}\cdot\frac{k}{4}=6$, $k^2=144$

$\therefore$ $k=12$ ($\because$ $k>0$) 답 ④

18 세 점을 지나는 직선의 x절편과 y절편이 각각 -5, a이므로 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot a=5$ $\quad\therefore$ $a=2$

따라서 이 직선의 방정식은

$\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1$, 즉 $2x-5y+10=0$

이때 점 $(b,\ 4)$가 이 직선 위에 있으므로

$2b-20+10=0$ $\quad\therefore$ $b=5$

$\therefore$ $a+b=2+5=7$ 답 ③

19 세 점이 한 직선 위에 있으려면 세 점 중 임의의 두 점을 지나는 직선의 기울기가 서로 같아야 한다.

즉, 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로 $\frac{2-1}{4-2}=\frac{3-2}{k-4}$에서

$\frac{1}{2}=\frac{1}{k-4}$, $k-4=2$

$\therefore$ $k=6$ 답 ④

20 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{a-(-1)}{1-(-1)}=\frac{-5-a}{-a-1}$에서

$\frac{a+1}{2}=\frac{a+5}{a+1}$

$(a+1)^2=2(a+5)$

$a^2=9$

$\therefore$ $a=3$ ($\because$ $a>0$) 답 ③

21 세 점 $\mathrm{A}(k,\ -1)$, $\mathrm{B}(3,\ k)$, $\mathrm{C}(5,\ 7)$이 한 직선 위에 있어야 하므로 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 한다.

즉, $\frac{k+1}{3-k}=\frac{7-k}{5-3}$에서

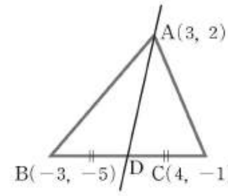
$(3-k)(7-k)=2(k+1)$

$k^2-10k+21=2k+2$

$k^2-12k+19=0$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 12이다. 답 ⑤

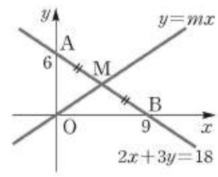
22 선분 BC의 중점을 D라 하면 직선 $y=kx-3k+2$가 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점 $\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},\ -3\right)$을 지나야 한다.



즉, $-3=\frac{1}{2}k-3k+2$에서 $-\frac{5}{2}k=-5$이므로

$k=2$ 답 2

23 오른쪽 그림과 같이 직선 $2x+3y=18$이 y축과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 B, 원점을 O라 하면 두 점 A, B는 $\mathrm{A}(0,\ 6)$, $\mathrm{B}(9,\ 0)$이고, 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\frac{9}{2},\ 3\right)$이다. 이때 직선 $y=mx$가 원점을 지나므로 삼각형 AOB의 넓이를 이등분하려면 직선 $y=mx$가 선분 AB의 중점 $\mathrm{M}\left(\frac{9}{2},\ 3\right)$을 지나야 한다. 즉, $3=\frac{9}{2}m$에서 $m=\frac{2}{3}$ 답 ④



24 두 직사각형의 대각선의 교점은 각각 $(-1,\ -1)$, $(4,\ 2)$이므로 두 점 $(-1,\ -1)$, $(4,\ 2)$를 지나는 직선은 두 직사각형의 넓이를 모두 이등분한다.

따라서 두 점 $(-1,\ -1)$, $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{2-(-1)}{4-(-1)}(x+1)-1$, 즉 $y=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}$이므로

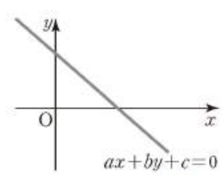
구하는 직선의 방정식은 $3x-5y-2=0$ 답 ②

25 $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ab>0$이므로 (기울기)$=-\frac{a}{b}<0$이고, $bc<0$이므로

(y절편)$=-\frac{c}{b}>0$이다.

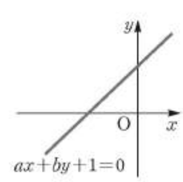
따라서 방정식 $ax+by+c=0$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 기울기가 음수이고, y절편이 양수인 직선이므로 제3사분면을 지나지 않는다. 답 ③



26 방정식 $ax+by+1=0$에서 $b\neq0$이므로

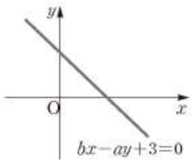
$y=-\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $b\neq0$이므로 직선 ㉠이 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 (기울기)>0, (y절편)>0이어야 한다.



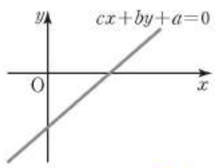
즉, $-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{1}{b}>0$에서 $a>0$, $b<0$

한편 방정식 $bx-ay+3=0$에서
$a\neq0$이므로 $y=\frac{b}{a}x+\frac{3}{a}$이고,
$a>0$, $b<0$이므로 $\frac{b}{a}<0$, $\frac{3}{a}>0$
따라서 방정식 $bx-ay+3=0$의



그래프는 오른쪽 그림과 같이 제3사분면을 지나지 않는다. 답 ③

27 주어진 이차함수의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$,
대칭축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $-\frac{b}{2a}<0$에서 $b>0$
또 y절편이 음수이므로 $c<0$
이때 $cx+by+a=0$에서 $y=-\frac{c}{b}x-\frac{a}{b}$이므로
(기울기)$=-\frac{c}{b}>0$, (y절편)$=-\frac{a}{b}<0$
따라서 직선 $cx+by+a=0$은 오른쪽 그림과 같이 기울기가 양수이고, y절편이 음수이므로 제2 사분면을 지나지 않는다.



답 ②

28 두 점 $(1, -3)$, $(-1, -7)$을 지나는 직선의 기울기는
$$\frac{-7-(-3)}{-1-1}=\frac{-4}{-2}=2$$
이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 2이다.
이때 기울기가 2이고, 점 $(3, 9)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-9=2(x-3)$, 즉 $2x-y+3=0$이므로
$a=2$, $b=3$ $\quad\therefore a+b=2+3=5$ 답 ②

빈출 유형 집중학습

28-1 기울기가 -3인 직선에 평행하고, 점 $(5, 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y-1=-3(x-5)$, 즉
$y=-3x+16$이므로 구하는 직선의 y절편은 16이다.
답 ③

28-2 x의 값이 3만큼 증가할 때, y의 값이 2만큼 감소하는 직선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이다.
이때 기울기가 $-\frac{2}{3}$이고, 점 $(-3, 0)$을 지나는 직선의 방정식은 $y-0=-\frac{2}{3}(x+3)$, 즉 $2x+3y+6=0$
이므로 $a=2$, $b=3$ $\quad\therefore a-b=2-3=-1$ 답 ④

29 직선 $y=-\frac{3}{4}x+2$가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 2)$
이고, 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x+2$이다. 답 ⑤

30 직선 $3x-y+1=0$에서 $y=3x+1$이므로 주어진 직선과 수직으로 만나는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.
이때 기울기가 $-\frac{1}{3}$이고, 점 $(2, 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y-1=-\frac{1}{3}(x-2)$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$이므로
직선의 x절편은 5, y절편은 $\frac{5}{3}$이다.
따라서 $a=5$, $b=\frac{5}{3}$이므로
$a\div b=5\div\frac{5}{3}=5\times\frac{3}{5}=3$ 답 ③

31 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는
$$\frac{-6-2}{3-(-1)}=\frac{-8}{4}=-2$$
이고, 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2-6}{2}\right)$,
즉 $(1, -2)$이므로 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{2}$이고, 점 $(1, -2)$를 지나는 직선이다.
$y+2=\frac{1}{2}(x-1)$에서 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$이므로 $m=\frac{1}{2}$, $n=-\frac{5}{2}$
$\therefore m+n=\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)=-2$ 답 ①

32 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는
$$\frac{6-2}{2-(-4)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$
이고, 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$,
즉 $(-1, 4)$이므로 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{3}{2}$이고, 점 $(-1, 4)$를 지나는 직선이다.
$y-4=-\frac{3}{2}(x+1)$에서
$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이때 직선 ㉠이 점 (a, b)를 지나므로
$b=-\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}$ $\quad\therefore 3a+2b=5$ 답 5

33 두 직선 $ax-y+3=0$, $x+y-2=0$이 서로 만나지 않으면 두 직선은 평행하므로
$\frac{a}{1}=\frac{-1}{1}\neq\frac{3}{-2}$ $\quad\therefore a=-1$ 답 ②

34 두 직선 $(3a-1)x-2y+1=0$, $7x-by+2=0$이 일치하므로
$$\frac{3a-1}{7}=\frac{-2}{-b}=\frac{1}{2}$$
$\frac{3a-1}{7}=\frac{1}{2}$에서 $6a-2=7$ $\quad\therefore a=\frac{3}{2}$
또 $\frac{-2}{-b}=\frac{1}{2}$에서 $b=4$
$\therefore ab=\frac{3}{2}\cdot4=6$ 답 ②

35 두 직선 $3x+ky+1=0$, $(k+1)x+2y+1=0$에서

(i) 두 직선이 평행할 때,

$\frac{3}{k+1}=\frac{k}{2}\neq\frac{1}{1}$이므로 $\frac{3}{k+1}=\frac{k}{2}$에서

$k(k+1)=6$, $k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$ …… ㉠

또 $\frac{k}{2}\neq\frac{1}{1}$에서 $k\neq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-3$이므로 $a=-3$

(ii) 두 직선이 일치할 때,

$\frac{3}{k+1}=\frac{k}{2}=\frac{1}{1}$이므로 $\frac{3}{k+1}=\frac{k}{2}$에서

$k(k+1)=6$, $k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$ …… ㉢

또 $\frac{k}{2}=\frac{1}{1}$에서 $k=2$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $k=2$이므로 $b=2$

(i), (ii)에서 $a-b=-3-2=-5$

답 ①

오답 피하기

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$에서 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$만으로는 두 직선의 평행과 일치를 구분할 수 없으므로 $\frac{c}{c'}$의 값도 반드시 비교한다.

36 두 직선 $2x+ay-1=0$, $5x+by+c=0$이 수직으로 만나므로

$2\cdot 5+a\cdot b=0$ $\quad\therefore ab=-10$ …… ㉠

또 두 직선이 모두 $(-2, 1)$을 지나므로

$2\cdot(-2)+a\cdot 1-1=0$ $\quad\therefore a=5$

$5\cdot(-2)+b\cdot 1+c=0$ $\quad\therefore b+c=10$ … ㉡

$a=5$이므로 ㉠에 대입하면 $b=-2$이고, $b=-2$를 ㉡에 대입하면 $c=12$

$\therefore a-b+c=5-(-2)+12=19$

답 ④

37 두 직선 $x-ay+3=0$, $4x+by+7=0$이 수직이므로

$1\cdot 4-a\cdot b=0$ $\quad\therefore ab=4$

또 두 직선 $x-ay+3=0$, $2x-2(b-3)y+1=0$이 평행하므로

$\frac{1}{2}=\frac{-a}{-2(b-3)}\neq\frac{3}{1}$, $-2a=-2b+6$

$\therefore a-b=-3$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(-3)^2+2\cdot 4$

$=17$

답 ⑤

38 $x+2y=6$ … ㉠, $4x-3y=12$ … ㉡, $ax+y=1$ … ㉢

에서 ㉠, ㉡, ㉢의 기울기는 각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $-a$이므로

㉠과 ㉡은 수직이 될 수 없다.

(i) ㉠과 ㉢이 수직일 때,

$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-a)=-1$ $\quad\therefore a=-2$

(ii) ㉡과 ㉢이 수직일 때,

$\frac{4}{3}\cdot(-a)=-1$ $\quad\therefore a=\frac{3}{4}$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합

$-2+\frac{3}{4}=-\frac{5}{4}$

답 ②

39 $2x-y-5=0$에서 $y=2x-5$ …… ㉠

$x-2y+2=0$에서 $y=\frac{1}{2}x+1$ …… ㉡

$4x+y-k=0$에서 $y=-4x+k$ …… ㉢

세 직선 중 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

이때 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=3$

이므로 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(4, 3)$이고, ㉢이 점 $(4, 3)$을 지나야 하므로

$3=-16+k$ $\quad\therefore k=19$

답 19

40 세 직선의 y절편이 모두 다르므로 주어진 세 직선에 의해 좌표평면이 네 부분으로 나누어지려면 세 직선이 모두 평행해야 한다. 즉, 세 직선의 기울기가 모두 같아야 하므로 $y=mx-3$, $y=nx+1$, $y=-3x+5$에서

$m=n=-3$

$\therefore mn=(-3)\cdot(-3)=9$

답 ⑤

참고 세 직선에 의해 좌표평면이 네 부분으로 나누어지는 경우는 다음과 같다.

(i) 세 직선이 모두 평행하다.

(ii) 두 직선이 일치하고, 다른 직선과 한 점에서 만난다.

15 점과 직선 사이의 거리

본문 142~147쪽

41 (4) 직선 $y=k(x+4)+x+2$에서

$k(x+4)+x-y+2=0$이므로

$x=-4$, $x-y+2=0$

$\therefore x=-4$, $y=-2$

답 (1) $(2, 3)$ (2) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ (3) $(5, 2)$ (4) $(-4, -2)$

42 (1) $2x+y-4=0$, $-3x+y+1=0$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

(2) $x+y+2=0$, $2x-y+7=0$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-3,\ 1)$이다.

답 (1) $(1,\ 2)$ (2) $(-3,\ 1)$

43 (1) 직선 $2x+3y-5+k(-x+2y-1)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 주어진 방정식에 대입하면

$-5-k=0$ $\quad\therefore k=-5$

$k=-5$를 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$2x+3y-5-5(-x+2y-1)=0$

$\therefore y=x$

(2) 직선 $k(3x-5y-2)-2x+5y+8=0$이 실수 k의 값에 관계없이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 주어진 방정식에 대입하면

$-2k+8=0$ $\quad\therefore k=4$

$k=4$를 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$4(3x-5y-2)-2x+5y+8=0$

$\therefore y=\frac{2}{3}x$

답 (1) $y=x$ (2) $y=\frac{2}{3}x$

44 (1) 두 직선 $2x+y-1=0$, $3x-y-2=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$2x+y-1+k(3x-y-2)=0$ (단, k는 실수) ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $x=1$, $y=0$을 ㉠에 대입하면 $1+k\cdot1=0$ $\quad\therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2x+y-1-(3x-y-2)=0$

$\therefore x-2y-1=0$

(2) 두 직선 $3x+y+3=0$, $2x-y-5=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$3x+y+3+k(2x-y-5)=0$ (단, k는 실수) ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $x=1$, $y=0$을 ㉠에 대입하면 $6-3k=0$ $\quad\therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$3x+y+3+2(2x-y-5)=0$

$\therefore 7x-y-7=0$

답 (1) $x-2y-1=0$ (2) $7x-y-7=0$

45 (1) $\frac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

(2) $\frac{|0+0+10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$

(3) 직선 $y=-\frac{3}{4}x+5$에서 $3x+4y-20=0$이므로

$\frac{|0+0-20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{\sqrt{25}}=\frac{20}{5}=4$

(4) 직선 $y=\frac{1}{3}x+10$에서 $x-3y+30=0$이므로

$\frac{|0+0+30|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{30}{\sqrt{10}}=\frac{30\sqrt{10}}{10}=3\sqrt{10}$

답 (1) $\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{5}$ (3) 4 (4) $3\sqrt{10}$

46 (1) $\frac{|10+24+5|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{39}{\sqrt{169}}=\frac{39}{13}=3$

(2) $\frac{|2-2+6|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

답 (1) 3 (2) $2\sqrt{3}$

47 (1) 직선 $x=-4$는 점 $(-4,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이므로 점 $(2,\ 3)$과 직선 $x=-4$ 사이의 거리는

$2-(-4)=6$

(2) 직선 $x=5$는 점 $(5,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이므로 점 $(2,\ 3)$과 직선 $x=5$ 사이의 거리는

$5-2=3$

(3) 직선 $y=7$은 점 $(0,\ 7)$을 지나고 x축에 평행한 직선이므로 점 $(2,\ 3)$과 직선 $y=7$ 사이의 거리는

$7-3=4$

(4) 직선 $y=-2$는 점 $(0,\ -2)$를 지나고 x축에 평행한 직선이므로 점 $(2,\ 3)$과 직선 $y=-2$ 사이의 거리는

$3-(-2)=5$

답 (1) 6 (2) 3 (3) 4 (4) 5

48 (1) 직선 $3x-4y-5=0$ 위의 한 점 $(3,\ 1)$에서 직선 $3x-4y+20=0$ 사이의 거리는

$\frac{|9-4+20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{25}{\sqrt{25}}=\frac{25}{5}=5$

(2) 직선 $5x+3y+26=0$ 위의 한 점 $(-4,\ -2)$에서 직선 $5x+3y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-20-6-8|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{34}{\sqrt{34}}=\sqrt{34}$

답 (1) 5 (2) $\sqrt{34}$

49 주어진 식을 m에 대하여 정리하면

$m(x-4)+2y+6=0$ ⋯⋯ ㉠

㉠이 실수 m의 값에 관계없이 성립하므로

$x-4=0$, $2y+6=0$ $\quad\therefore x=4$, $y=-3$

따라서 점 $\mathrm{P}(4,\ -3)$과 원점 O 사이의 거리 $\overline{\mathrm{OP}}$는

$\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

답 ②

50 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-4y+10)k+3x-y-3=0$ …… ㉠

㉠이 실수 k의 값에 관계없이 성립하므로

$x-4y+10=0,\ 3x-y-3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=3$

따라서 $a=2,\ b=3$이므로

$a-b=2-3=-1$ 답 -1

51 $3m+n=1$에서 $n=-3m+1$ …… ㉠

㉠을 $y=mx+n$에 대입하여 정리하면

$y=mx-3m+1,\ m(x-3)+1-y=0$

$\therefore\ x=3,\ y=1$

따라서 직선 $y=mx+n$은 실수 m의 값에 관계없이 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 $a=3,\ b=1$

$\therefore\ a+b=4$ 답 ④

52 두 직선 $3x-y+7=0,\ x-3y+13=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$3x-y+7+k(x-3y+13)=0$ (단, k는 실수) …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 $x=2,\ y=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $12+12k=0$ $\therefore\ k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2x+2y-6=0$ $\therefore\ x+y-3=0$

따라서 $a=1,\ b=-3$이므로

$a-b=1-(-3)=4$ 답 ⑤

53 두 직선 $x+2y+7=0,\ x-y+1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x+2y+7+k(x-y+1)=0$ (단, k는 실수)

로 놓으면 $(1+k)x+(2-k)y+7+k=0$ …… ㉠

직선 ㉠이 $4x-y+2=0$과 평행하므로

$$\frac{1+k}{4}=\frac{2-k}{-1}\neq\frac{7+k}{2}$$

$\dfrac{1+k}{4}=\dfrac{2-k}{-1}$에서 $-(1+k)=4(2-k)$ $\therefore\ k=3$

$k=3$을 직선 ㉠에 대입하여 정리하면 $4x-y+10=0$

따라서 구하는 직선의 y절편은 10이다.

다른 풀이

두 직선의 방정식 $x+2y+7=0,\ x-y+1=0$을 연립하여 풀면 $x=-3,\ y=-2$이므로 두 직선의 교점의 좌표는 $(-3,\ -2)$이다.

이때 직선 $4x-y+2=0$과 평행하므로 기울기가 4이고, 점 $(-3,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=4(x+3)$ $\therefore\ y=4x+10$

따라서 구하는 직선의 y절편은 10이다. 답 ③

54 두 직선 $2x-y=-10,\ 3x+2y=-1$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x-y+10+k(3x+2y+1)=0$ (단, k는 실수)

로 놓으면 $(3k+2)x+(2k-1)y+k+10=0$ … ㉠

직선 ㉠이 $x+3y=3$에 수직이므로

$1\cdot(3k+2)+3\cdot(2k-1)=0$

$9k=1$ $\therefore\ k=\dfrac{1}{9}$

$k=\dfrac{1}{9}$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $y=3x+13$

따라서 $a=3,\ b=13$이므로 $b-a=10$ 답 ⑤

55 $y=mx+m-2$ …… ㉠

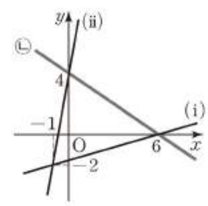
㉠에서 $m(x+1)-y-2=0$이므로 이 직선은 실수 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ -2)$를 지난다.

이때 두 점 $(-3,\ 6),\ (3,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-6=\frac{2-6}{3-(-3)}(x+3)$$

$\therefore\ y=-\dfrac{2}{3}x+4$ …… ㉡

오른쪽 그림에서



(i) ㉠이 점 $(6,\ 0)$을 지날 때,

$0=6m+m-2$

$7m=2$ $\therefore\ m=\dfrac{2}{7}$

(ii) ㉠이 점 $(0,\ 4)$를 지날 때,

$4=m-2$ $\therefore\ m=6$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는

$\dfrac{2}{7}<m<6$ 답 ④

오답 피하기

두 직선이 제1사분면에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구할 때, x축, y축은 사분면에 포함되지 않으므로 두 직선이 x축 또는 y축에서 만날 때의 m의 값은 포함하지 않도록 한다.

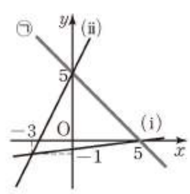
즉, 구하는 m의 값의 범위가 $\dfrac{2}{7}\le m\le 6$이 아님에 주의한다.

56 $x+y-5=0$ …… ㉠

$mx+y+3m+1=0$ …… ㉡

㉡에서 $m(x+3)+y+1=0$이므로 이 직선은 실수 m의 값에 관계없이 점 $(-3,\ -1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) ㉡이 점 $(5,\ 0)$을 지날 때,

$5m+3m+1=0$

$8m=-1$

$\therefore\ m=-\dfrac{1}{8}$

(ii) ㉡이 점 $(0,\ 5)$를 지날 때,

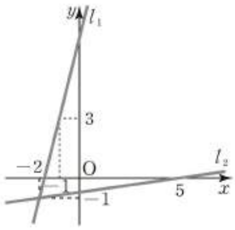
$5+3m+1=0,\ 3m=-6$ $\therefore\ m=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 실수 m의 값의 범위는 $-2<m<-\frac{1}{8}$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-\frac{1}{8}$이므로

$\alpha\beta=(-2)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

57 직선 $y=a(x+2)-1$은 a의 값에 관계없이 점 $(-2,\ -1)$을 지나고, 오른쪽 그림에서 $y=a(x+2)-1$이 두 점 $(-1,\ 3)$, $(5,\ 0)$ 사이를 지나려면 두 직선 l_1과 l_2 사이를 지나야 한다.



이때 직선 l_1의 기울기를 m_1, 직선 l_2의 기울기를 m_2라 하면

$m_1=\frac{3-(-1)}{-1-(-2)}=4$, $m_2=\frac{0-(-1)}{5-(-2)}=\frac{1}{7}$

즉, $\frac{1}{7}<a<4$이므로 $\alpha=\frac{1}{7}$, $\beta=4$

$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{1}{7}+4=\frac{29}{7}$ 답 ②

58 점 $(k,\ k+3)$과 직선 $3x+4y+10=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3k+4(k+3)+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|7k+22|}{5}=3$

$|7k+22|=15$, $7k+22=\pm15$

$\therefore\ k=-\frac{37}{7}$ 또는 $k=-1$

따라서 정수 k의 값은 -1이다. 답 ②

빈출 유형 집중학습

58-1 점 $(k,\ 2)$와 직선 $12x-5y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|12k-10-4|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{|12k-14|}{13}=2$

$|12k-14|=26$, $12k-14=\pm26$

$\therefore\ k=\frac{10}{3}$ 또는 $k=-1$

이때 점 $(k,\ 2)$는 제 2 사분면 위의 점이므로 $k<0$

$\therefore\ k=-1$ 답 ④

58-2 주어진 방정식을 k에 대하여 정리하면

$3kx-2x-ky-2y+8=0$

$\therefore\ -2x-2y+8+k(3x-y)=0$ ······ ㉠

직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 두 직선 $-2x-2y+8=0$, $3x-y=0$의 교점을 지나므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=3$

즉, $\mathrm{P}(1,\ 3)$이므로 점 P와 직선 $4x-3y-5=0$ 사이의 거리는 $\frac{|4-9-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{10}{5}=2$ 답 ③

59 직선 $2x-y-1=0$에 평행하므로 직선 l의 기울기는 2이고, 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y+1=2(x+1)$ $\quad\therefore\ 2x-y+1=0$

따라서 점 $(1,\ -2)$와 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|2+2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ 답 ④

60 $\overline{\mathrm{PH}}$의 길이는 점 $\mathrm{P}(3,\ 3)$과 직선 $3x+4y-6=0$ 사이의 거리이므로 $\frac{|9+12-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$ 답 ③

61 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이는 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$과 직선 $3x+ay-2=0$ 사이의 거리이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{|3+a-2|}{\sqrt{3^2+a^2}}=1$, $|a+1|=\sqrt{a^2+9}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+2a+1=a^2+9$ $\quad\therefore\ a=4$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BQ}}=\frac{|12-20-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$ 답 ④

62 $3x-2y+2=0$ ······ ㉠

$x-y+2=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=4$

따라서 점 $(2,\ 4)$와 직선 $2x-3y+7=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4-12+7|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$ 답 ①

63 직선 $6x-3y=0$ 위의 한 점 $(0,\ 0)$과 직선 $6x-3y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5|}{\sqrt{6^2+(-3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{45}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 답 ②

64 두 직선 $x-y+1=0$, $x-y+a=0$은 서로 평행하므로 직선 $x-y+1=0$ 위의 한 점 $(-1,\ 0)$과 직선 $x-y+a=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-1+a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$, $|a-1|=2$, $a-1=\pm2$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 2이다. 답 ④

65 두 직선 $3x-y+5=0$, $x-2y=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-y+5+k(x-2y)=0$ (단, k는 실수)

로 놓으면 $(k+3)x-(2k+1)y+5=0$

이 직선과 원점 사이의 거리는

$\frac{|5|}{\sqrt{(k+3)^2+\{-(2k+1)\}^2}}$

$=\frac{5}{\sqrt{5k^2+10k+10}}$

$=\frac{5}{\sqrt{5(k+1)^2+5}}$ ······ ㉠

이때 ㉠은 분모가 최소일 때 최댓값을 가지므로 $k=-1$ 일 때, 최댓값 $\sqrt{5}$를 갖는다. 답 ⑤

66 $x+y+k(x-y)=0$에서

$$(k+1)x+(1-k)y=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 $A(3, 3)$과 직선 ㉠ 사이의 거리 $d(k)$는

$$d(k)=\frac{|3(k+1)+3(1-k)|}{\sqrt{(k+1)^2+(1-k)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2k^2+2}}$$

이때 $d(k)$는 분모가 최소일 때 최댓값을 가지므로 $k=0$ 일 때, 최댓값 $\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$를 갖는다. 답 ③

67 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 점을 (x, y)라 하면 이 점에서 두 직선 $x+3y-5=0$, $3x+y-7=0$까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|x+3y-5|}{\sqrt{10}}=\frac{|3x+y-7|}{\sqrt{10}}$$

$$|x+3y-5|=|3x+y-7|$$

$$x+3y-5=\pm(3x+y-7)$$

$$\therefore y=-x+3 \text{ 또는 } y=x-1$$

이때 $b\neq-1$이므로 $a=-1$, $b=3$

$\therefore a+b=2$ 답 2

68 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 점을 (x, y)라 하면 이 점에서 두 직선 $\sqrt{3}x-y+3=0$, $x-\sqrt{3}y+3\sqrt{3}=0$까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|\sqrt{3}x-y+3|}{2}=\frac{|x-\sqrt{3}y+3\sqrt{3}|}{2}$$

$$|\sqrt{3}x-y+3|=|x-\sqrt{3}y+3\sqrt{3}|$$

$$\sqrt{3}x-y+3=\pm(x-\sqrt{3}y+3\sqrt{3})$$

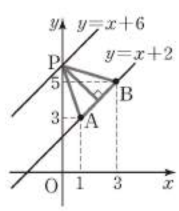
$$\therefore x+y-3=0 \text{ 또는 } x-y+3=0$$

따라서 기울기가 음수인 직선은 $x+y-3=0$이다. 답 ①

69 두 점 $A(1, 3)$, $B(3, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{5-3}{3-1}(x-1) \qquad \therefore y=x+2$$

이때 두 직선 $y=x+2$와 $y=x+6$은 평행하므로 직선 $y=x+6$ 위의 한 점 $P(0, 6)$에서 직선 AB 사이의 거리가 △PAB의 높이이다.



따라서 점 $(0, 6)$과 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

한편 $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{2}$이므로

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=4$$ 답 ①

70 두 점 $A(2, 1)$, $B(-2, 5)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$$

이고, 직선 AB의 방정식은

$$y-1=\frac{5-1}{-2-2}(x-2) \qquad \therefore x+y-3=0$$

이때 점 $C(a, 0)$과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a-3|}{\sqrt{2}}$$

이고, 삼각형 ABC의 넓이가 8이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot\frac{|a-3|}{\sqrt{2}}=8$$

$$|a-3|=4, \ a-3=\pm4$$

$$\therefore a=7 \ (\because a>0)$$ 답 7

단계별 기출학습

본문 148~151쪽

01 ③	02 ⑤	03 ⑤	04 11	05 ①
06 ④	07 ③	08 ④	09 ②	10 ③
11 ①, ②	12 ⑤	13 ③	14 ④	15 32
16 $\frac{3}{4}$	17 2	18 0	19 $\frac{1}{2}\le m<\frac{5}{2}$	
20 ③	21 10	22 5	23 9	

01 $\frac{4-p}{p-1}=2$이므로 $2p-2=4-p \qquad \therefore p=2$

따라서 기울기가 2이고 점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-2=2(x-1) \qquad \therefore y=2x$

02 $\tan 60°=\sqrt{3}$이므로 점 $(1, -\sqrt{3})$을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$$y+\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-1) \qquad \therefore \sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$$

이때 $\sqrt{3}a=\sqrt{3}$, $b=-1$이므로 $a=1$, $b=-1$

$\therefore a-b=2$

03 삼각형 ABC에서 꼭짓점 B를 지나고, 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 ∠B의 대변인 선분 AC의 중점을 지나는 직선이다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 3)$$

이고, 구하는 직선의 방정식은 두 점 $(-2, 0)$, $(3, 3)$을 지나는 직선의 방정식이므로

$$y-0=\frac{3-0}{3-(-2)}(x+2)$$

즉, $y=\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}$이므로 $a=\frac{3}{5}$, $b=\frac{6}{5}$

$$\therefore 50ab=50\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{5}=36$$

04 $\overline{AD}=\sqrt{(-7+4)^2+(-5+1)^2}=5$이므로

$B(-9,\ -1),\ C(-12,\ -5)$

따라서 직선 BC의 방정식은

$$y+1=\frac{-5-(-1)}{-12-(-9)}(x+9)$$

즉, $y=\frac{4}{3}x+11$이므로 구하는 y절편은 11이다.

05 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같으므로

$$\frac{1-(-3)}{-1-1}=\frac{k-1}{2-(-1)},\ k-1=-6$$

$\therefore\ k=-5$

06 직선 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이고, 주어진 그림에서 직선의 기울기가 양수이고 y절편이 음수이므로

$-\frac{a}{b}>0,\ -\frac{c}{b}<0\qquad \therefore\ ab<0,\ bc>0$

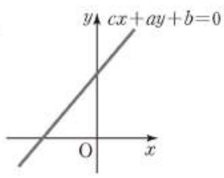
$\therefore\ ac<0$

한편 $cx+ay+b=0$에서 $a\neq0$이므로

$$y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}$$

이때 $-\frac{c}{a}>0,\ -\frac{b}{a}>0$이므로 직선 $cx+ay+b=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $cx+ay+b=0$은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



07 (i) 두 직선이 평행할 때,

$\frac{m-2}{m}=\frac{-1}{3}\neq\frac{4}{3}$이므로

$3(m-2)=-m,\ 4m=6$

$\therefore\ m=\frac{3}{2}$

(ii) 두 직선이 수직일 때,

$(m-2)\cdot m-3=0$이므로

$m^2-2m-3=0,\ (m+1)(m-3)=0$

$\therefore\ m=-1$ 또는 $m=3$

(i), (ii)에서 $\alpha=\frac{3}{2},\ \beta=3\ (\because\ \beta>0)$이므로

$2\alpha+\beta=2\cdot\frac{3}{2}+3=6$

08 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 직선 $y=mx+2m$이 직선 $y=2x-2$ 또는 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$과 평행할 때이므로

$m=2$ 또는 $m=-\frac{1}{2}$

또 직선 $y=mx+2m$이 두 직선 $y=2x-2$, $y=-\frac{1}{2}x+3$의 교점을 지날 때이다.

이때 $y=2x-2,\ y=-\frac{1}{2}x+3$을 연립하여 풀면

$x=2,\ y=2$

즉, 직선 $y=mx+2m$이 두 직선의 교점 $(2,\ 2)$를 지날 때이므로

$2=2m+2m\qquad \therefore\ m=\frac{1}{2}$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은

$2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$

09 주어진 직선의 방정식을 m에 대하여 정리하면

$(2x-y+2)m+x+y-8=0\qquad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 실수 m의 값에 관계없이 성립하므로

$2x-y+2=0,\ x+y-8=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=2,\ y=6$

따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 6)$이므로 선분 PQ를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

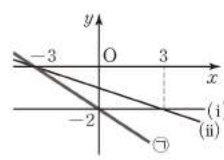
$\left(\frac{2\cdot4-1\cdot2}{2-1},\ \frac{2\cdot1-1\cdot6}{2-1}\right)$, 즉 $(6,\ -4)$

10 $2x+3y+6=0\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$mx-y-3m-2=0\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $m(x-3)-y-2=0$이므로 이 직선은 실수 m의 값에 관계없이 점 $(3,\ -2)$를 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) ㉡이 점 $(0,\ -2)$를 지날 때,

$2-3m-2=0$

$\therefore\ m=0$

(ii) ㉡이 점 $(-3,\ 0)$을 지날 때,

$-3m-3m-2=0,\ 6m=-2$

$\therefore\ m=-\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는

$-\frac{1}{3}<m<0$

11 두 직선 $x+y-5=0,\ x-y-1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+y-5+k(x-y-1)=0$(단, k는 실수)

로 놓으면

$(k+1)x+(1-k)y-k-5=0\qquad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠과 점 $(-2,\ -3)$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|-2(k+1)-3(1-k)-k-5|}{\sqrt{(k+1)^2+(1-k)^2}}=\sqrt{5}$$

$$\frac{|10|}{\sqrt{2k^2+2}}=\sqrt{5}$$

$10=\sqrt{10k^2+10}$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^2=9$ $\quad\therefore k=\pm 3$

(i) $k=3$일 때, $k=3$을 ㉠에 대입하면

$2x-y-4=0$

(ii) $k=-3$일 때, $k=-3$을 ㉠에 대입하면

$x-2y+1=0$

12 주어진 직선의 방정식을 m에 대하여 정리하면

$m(x+1)-y+4=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 실수 m의 값에 관계없이 점 $(-1, 4)$를 지난다.

이때 점 $(2, 1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리 $f(m)$의 최댓값은 두 점 $(2, 1)$, $(-1, 4)$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 최댓값은

$\sqrt{(-1-2)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$

13 점 $P(a, -5)$에서 두 직선 $2x+y+1=0$, $x+2y+6=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|2a-5+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|a-10+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}$, $|2a-4|=|a-4|$

$2a-4=\pm(a-4)$

$\therefore a=0$ ($\because$ a는 정수)

14 두 점 $A(-2, 1)$, $B(-1, -1)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(-1+2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$

이고, 직선 AB의 방정식은

$y-1=\dfrac{-1-1}{-1-(-2)}(x+2)$

$\therefore 2x+y+3=0$

이때 점 $C(a, -3)$과 직선 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|2a-3+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|2a|}{\sqrt{5}}$

이고, $\triangle ABC$의 넓이가 5이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{|2a|}{\sqrt{5}}=5$, $|a|=5$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

15 점 P를 $P(a, b)$라 하면 점 P는 직선 $4x-y+6=0$ 위의 점이므로 $4a-b+6=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 점 $A(4, 2)$에 대하여 선분 AP의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{a+4}{2}$, $y=\dfrac{b+2}{2}$

$\therefore a=2x-4$, $b=2y-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$4(2x-4)-(2y-2)+6=0$, $y=4x-4$

따라서 $p=4$, $q=-4$이므로

$p^2+q^2=4^2+(-4)^2=32$

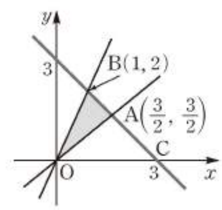
16 두 점 $(3, 0)$, $(0, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1$, 즉 $x+y-3=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이고, 점 A는 직선 ㉠과 직선 $y=x$의 교점이므로 점 A의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$이다.

또 점 B는 직선 ㉠과 직선 $y=2x$의 교점이므로 점 B의 좌표는 $(1, 2)$이다.

오른쪽 그림에서 직선 ㉠이 x축과 만나는 점을 C라 하면



$\triangle OAB$

$=\triangle OCB-\triangle OCA$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2-\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{3}{4}$

17 두 점 A, B는 각각 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+5$가 x축, y축과 만나는 점이므로 $A(-10, 0)$, $B(0, 5)$

이때 $\triangle AOP : \triangle BOP=4:1$이므로

$\overline{AP}:\overline{BP}=4:1$

즉, 점 P는 선분 AB를 $4:1$로 외분하는 점이다.

한편 점 P는 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+5$와 직선 $y=ax$의 교점이므로 두 식을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{10}{2a-1}$, $y=\dfrac{10a}{2a-1}$

$\therefore P\left(\dfrac{10}{2a-1}, \dfrac{10a}{2a-1}\right)$

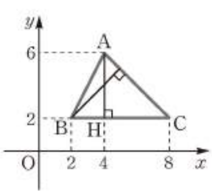
또 점 P는 선분 AB를 $4:1$로 외분하는 점이므로

$\left(\dfrac{4\cdot 0-(-10)}{4-1}, \dfrac{4\cdot 5-1\cdot 0}{4-1}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{20}{3}\right)$

$\dfrac{10}{2a-1}=\dfrac{10}{3}$이므로 $2a-1=3$에서 $2a=4$

$\therefore a=2$

18 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 점 A, H를 지나는 직선의 방정식이 $x=4$이므로 삼각형 ABC의 세 수선의 교점의 x좌표는 4이다.



이때 두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기가 -1이므로 직선 AC와 수직인 직선의 기울기는 1이다.

따라서 기울기가 1이고 점 B를 지나는 직선의 방정식은 $y=x$이고, 세 수선의 교점은 직선 $y=x$와 선분 AH의 교점이므로 세 수선의 교점의 좌표는 $(4, 4)$이다.

즉, $a=4$, $b=4$이므로

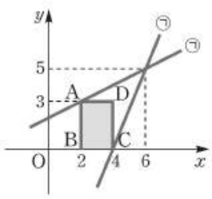
$a-b=4-4=0$

19 직선 $mx-y-6m+5=0$에서

$$m(x-6)-y+5=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이므로 직선 ㉠은 실수 m의 값에 관계없이 점 $(6,\ 5)$를 지난다.

(i) 직선 ㉠이 점 A를 지날 때, 점 A의 좌표가 $(2,\ 3)$이므로 $x=2$, $y=3$을 직선 ㉠에 대입하면



$$-4m+2=0$$

$$\therefore\ m=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 C를 지날 때, 점 C의 좌표가 $(4,\ 0)$이므로 $x=4$, $y=0$을 직선 ㉠에 대입하면 $-2m+5=0 \qquad \therefore\ m=\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m의 값의 범위는 $\frac{1}{2}\le m<\frac{5}{2}$

20 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{4+0+a}{3},\ \frac{4+1-2}{3}\right),\ \text{즉}\ \left(\frac{a+4}{3},\ 1\right)$$

이때 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 4)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1-4}{0-4}=\frac{3}{4}$이고, 점 B는 y축 위의 점이므로 직선의 y절편은 1이다.

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{3}{4}x+1,\ \text{즉}\ 3x-4y+4=0$$

한편 삼각형 ABC의 무게중심과 두 점 A, B를 지나는 직선 사이의 거리가 $\frac{12}{5}$이므로

$$\frac{\left|3\cdot\frac{a+4}{3}-4\cdot1+4\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{12}{5}$$

$$\frac{|a+4|}{5}=\frac{12}{5},\ |a+4|=12$$

$$\therefore\ a=8\ (\because\ a>0)$$

21 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점 중에서 직선 $4x+3y-2=0$에 이르는 거리가 4인 점을 $(a,\ b)$라 하면

$$\frac{|4a+3b-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4,\ |4a+3b-2|=20$$

$$4a+3b-2=\pm20$$

$$\therefore\ 4a+3b=22\ (\because\ a,\ b\text{는 자연수})$$

이때 $4a+3b=22$를 만족하는 자연수 a, b의 순서쌍은 $(1,\ 6)$, $(4,\ 2)$이므로 두 점 A, B를 $\mathrm{A}(1,\ 6)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$라 하면 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$y-6=\frac{2-6}{4-1}(x-1),\ \text{즉}\ 4x+3y-22=0$$

이고, 이 직선은 주어진 직선 $4x+3y-2=0$과 평행하다.

직선 $4x+3y-2=0$ 위의 임의의 한 점 P에서 직선 $4x+3y-22=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}$는 두 점 A 또는 B와 직선 $4x+3y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로 $\overline{\mathrm{PH}}=4$이고,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-1)^2+(2-6)^2}=\sqrt{25}=5$이다.

따라서 삼각형 APB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PH}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5=10$$

22 주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리하면

$$(x+y-1)k+2x-y+4=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

❶

㉠이 실수 k의 값에 관계없이 성립하므로

$$x+y-1=0,\ 2x-y+4=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=2$

$$\therefore\ \mathrm{A}(-1,\ 2)$$

❷

따라서 기울기가 3이고, 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-2=3(x+1)$, 즉 $y=3x+5$이므로 y절편은 5이다.

❸

채점 기준	성취도
❶ 주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리하기	30 %
❷ 점 A의 좌표 구하기	30 %
❸ y절편 구하기	40 %

23 $x-2y+4=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x+y+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$5x-y-7=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=1$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-2$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$

따라서 세 직선 중 서로 다른 두 직선의 교점을 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ -2)$, $\mathrm{C}(2,\ 3)$이라 하면

❶

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(1+2)^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{2}$$

이때 점 $\mathrm{C}(2,\ 3)$과 직선 $x+y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+3+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{2}}=9$$

❷

채점 기준	성취도
❶ 서로 다른 두 직선의 교점 구하기	40 %
❷ 삼각형의 넓이 구하기	60 %

11 원의 방정식

16 원의 방정식

본문 152~159쪽

01 답 (1) 원의 중심 : $(0,\ 0)$, 반지름의 길이 : 2
(2) 원의 중심 : $(3,\ -2)$, 반지름의 길이 : 6
(3) 원의 중심 : $(\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$, 반지름의 길이 : $3\sqrt{3}$

02 (2) 원의 반지름의 길이를 $r(r>0)$라 하면 중심이 $(3,\ 1)$이므로

$$(x-3)^2+(y-1)^2=r^2$$

이 원이 원점을 지나므로

$$(-3)^2+(-1)^2=r^2,\ r^2=10$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-1)^2=10$$

답 (1) $x^2+y^2=16$ (2) $(x-3)^2+(y-1)^2=10$

03 (1) 중심의 좌표는 $(0,\ 0)$이고, 반지름의 길이는 원 위의 한 점 $(3,\ 0)$과 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리이므로 3이다.
따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2=9$$

(2) 중심의 좌표는 $(-1,\ 0)$이고, 반지름의 길이는 원 위의 한 점 $(1,\ 2)$와 중심 $(-1,\ 0)$ 사이의 거리이므로

$$\sqrt{(-1-1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2+y^2=8$$

답 (1) $x^2+y^2=9$ (2) $(x+1)^2+y^2=8$

04 (1) $x^2+y^2+8x-9=0$에서

$$(x+4)^2+y^2=25$$

(2) $x^2+y^2+2x-2y-7=0$에서

$$(x+1)^2+(y-1)^2=9$$

(3) $x^2+y^2+5x-3y+4=0$에서

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$$

답 (1) 원의 중심 : $(-4,\ 0)$, 반지름의 길이 : 5
(2) 원의 중심 : $(-1,\ 1)$, 반지름의 길이 : 3
(3) 원의 중심 : $\left(-\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, 반지름의 길이 : $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

05 (1) 중심이 $(1,\ 2)$이고, x축에 접하므로 반지름의 길이는 2이다.
따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$

(2) 중심이 $(-3,\ 4)$이고, y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|-3|=3$이다.
따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-4)^2=9$$

(3) 중심이 $(-2,\ -2)$이고, x축과 y축에 동시에 접하므로 반지름의 길이는 $|-2|=2$이다.
따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y+2)^2=4$$

답 (1) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ (2) $(x+3)^2+(y-4)^2=9$
(3) $(x+2)^2+(y+2)^2=4$

06 (1) 제1사분면에서 x축과 y축에 동시에 접하며 반지름의 길이가 3이므로 중심의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.
따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-3)^2=9$$

(2) 제2사분면에서 x축과 y축에 동시에 접하며 반지름의 길이가 3이므로 중심의 좌표는 $(-3,\ 3)$이다.
따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-3)^2=9$$

(3) 제3사분면에서 x축과 y축에 동시에 접하며 반지름의 길이가 3이므로 중심의 좌표는 $(-3,\ -3)$이다.
따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y+3)^2=9$$

(4) 제4사분면에서 x축과 y축에 동시에 접하며 반지름의 길이가 3이므로 중심의 좌표는 $(3,\ -3)$이다.
따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y+3)^2=9$$

답 (1) $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ (2) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$
(3) $(x+3)^2+(y+3)^2=9$ (4) $(x-3)^2+(y+3)^2=9$

07 (1) 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-2x+k(x^2+y^2-4x+2y+4)=0$$

(단, $k\neq-1$) …… ㉠

이라 하면 ㉠이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$$3+9k=0 \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{3}$$

$k=-\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2-2x-\frac{1}{3}(x^2+y^2-4x+2y+4)=0$$

$$\therefore\ x^2+y^2-x-y-2=0$$

(2) $(x+1)^2+(y-2)^2=5$에서 $x^2+y^2+2x-4y=0$이므로 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-2x+3y-6+k(x^2+y^2+2x-4y)=0$$

(단, $k\neq-1$) …… ㉠

이라 하면 ㉠이 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$$-3+15k=0 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{5}$$

$k=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2-2x+3y-6+\frac{1}{5}(x^2+y^2+2x-4y)=0$$

$$\therefore\ 6x^2+6y^2-8x+11y-30=0$$

답 (1) $x^2+y^2-x-y-2=0$

(2) $6x^2+6y^2-8x+11y-30=0$

08 (1) 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+6x+4y+9-(x^2+y^2-2y-24)=0$$

$$\therefore\ 2x+2y+11=0$$

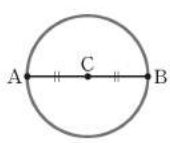
(2) 두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2+y^2+4x-6y-12-(x^2+y^2-8x+10y+5)=0$$

$$\therefore\ 12x-16y-17=0$$

답 (1) $2x+2y+11=0$ (2) $12x-16y-17=0$

09 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$의 중점을 $C(a,\ b)$라 하면



$$a=\frac{-1+5}{2}=2,$$

$$b=\frac{-3+3}{2}=0$$

이므로 $C(2,\ 0)$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\overline{AC}=\sqrt{(2+1)^2+(0+3)^2}=3\sqrt{2}$$

따라서 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은

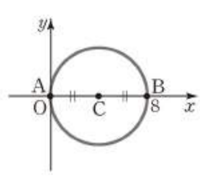
$$(x-2)^2+y^2=18$$

즉, $a=2,\ b=0,\ c=18$이므로

$$a+b+c=2+0+18=20$$

답 20

10 중심이 x축 위에 있으므로 원의 중심을 $C(a,\ 0)(a>0)$이라 하면



$\overline{AC}=\overline{BC}$, 즉 $a=4$

$\therefore\ C(4,\ 0)$

이때 원의 반지름의 길이는

$\overline{AC}=4$

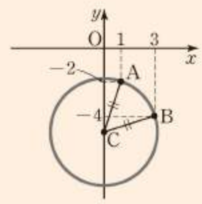
따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2+y^2=16$$

답 ⑤

빈출 유형 집중학습

10-1 중심이 y축 위에 있으므로 원의 중심을 $C(0,\ a)$라 하면



$\overline{AC}=\overline{BC}$, 즉

$$\sqrt{(0-1)^2+(a+2)^2}$$

$$=\sqrt{(0-3)^2+(a+4)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$1+a^2+4a+4=9+a^2+8a+16$$

$-4a=20$에서 $a=-5$

$\therefore\ C(0,\ -5)$

이때 원의 반지름의 길이는

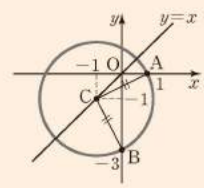
$$\overline{AC}=\sqrt{(0-1)^2+(-5+2)^2}=\sqrt{10}$$

이므로 구하는 원의 방정식은

$$x^2+(y+5)^2=10$$

답 ①

10-2 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 원의 중심을 $C(a,\ a)$라 하면



$\overline{AC}=\overline{BC}$, 즉

$$\sqrt{(a-1)^2+a^2}$$

$$=\sqrt{a^2+(a+3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-2a+1+a^2=a^2+a^2+6a+9$$

$-8a=8$에서 $a=-1$

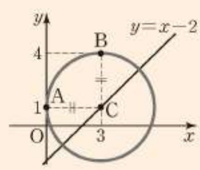
$\therefore\ C(-1,\ -1)$

따라서 원의 반지름의 길이는

$$\overline{AC}=\sqrt{(1+1)^2+1^2}=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

10-3 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로 원의 중심을 $C(a,\ a-2)$라 하면



$\overline{AC}=\overline{BC}$, 즉

$$\sqrt{(a-0)^2+(a-3)^2}$$

$$=\sqrt{(a-3)^2+(a-6)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2+a^2-6a+9=a^2-6a+9+a^2-12a+36$$

$-12a+36=0$에서 $a=3$

$\therefore\ C(3,\ 1)$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\overline{AC}=\sqrt{(3-0)^2+(1-1)^2}=3$$

이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-1)^2=9$$

답 ③

11 직각삼각형의 외접원의 중심은 빗변의 중점이므로

$$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{1+3}{2}\right),\ 즉\ (3,\ 2)$$

또 외접원의 반지름의 길이는 두 점 $(1,\ 1)$, $(3,\ 2)$ 사이의 거리이므로

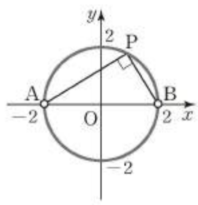
$$\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-2)^2=5$$

답 $(x-3)^2+(y-2)^2=5$

12 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 $\overline{\mathrm{PA}}\perp\overline{\mathrm{PB}}$를 만족하므로 두 직선 PA, PB의 기울기의 곱은 -1이다.



즉, $\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-1$에서

$$y^2=-(x^2-4)$$

$$\therefore\ x^2+y^2=4\ (\text{단, } y\neq0)$$

다른 풀이

삼각형 PAB는 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$$

$$(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2=4^2$$

$$\therefore\ x^2+y^2=4\ (\text{단, } y\neq0)$$

답 ②

참고 반원의 원주각은 90°이므로 점 P가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원이다. 이때 점 P가 x축 위의 점이면 $\overline{\mathrm{PA}}\perp\overline{\mathrm{PB}}$를 만족하지 않는다.

13 $x^2+y^2+6x+4y+9=0$에서

$$(x+3)^2+(y+2)^2=4$$

주어진 방정식은 중심이 $(-3,\ -2)$이고, 반지름의 길이가 2인 원을 나타내므로

$$a=-3,\ b=-2,\ r=2$$

$$\therefore\ abr=(-3)\cdot(-2)\cdot2=12$$

답 ④

14 원 $x^2+y^2+kx-2ky+k=0$에서

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-k)^2=\frac{5}{4}k^2-k$$

이때 중심 $\left(-\dfrac{k}{2},\ k\right)$가 $(-2,\ 4)$이므로

$$k=4$$

따라서 구하는 반지름의 길이는

$$\sqrt{\frac{5}{4}\cdot4^2-4}=4$$

다른 풀이

중심의 좌표가 $(-2,\ 4)$이므로 반지름의 길이를 $r(r>0)$라 하면

$$(x+2)^2+(y-4)^2=r^2$$

$$x^2+4x+4+y^2-8y+16-r^2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 $x^2+y^2+kx-2ky+k=0$과 같으므로

$$4=k,\ -8=-2k,\ 20-r^2=k$$

$$\therefore\ r=4\ (\because\ r>0)$$

답 ⑤

15 원의 방정식은 x^2의 계수와 y^2의 계수가 서로 같으므로

$$a=1$$

또 xy항이 없으므로 $b=0$

즉, 주어진 방정식은 $x^2+y^2+2y+c=0$이므로

$$x^2+(y+1)^2=1-c$$

이때 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$$1-c=5 \qquad \therefore\ c=-4$$

$$\therefore\ a+b+c=1+0+(-4)=-3$$

답 ②

16 $x^2+y^2-2x-4y=0$에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5$$

구하는 원의 방정식을 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2(r>0)$이라 하면 이 원은 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$$(1-1)^2+(-2-2)^2=r^2,\ r^2=16$$

$$\therefore\ r=4\ (\because\ r>0)$$

답 ③

17 원 $x^2+y^2+4ax-2ay+10a-15=0$에서

$$(x+2a)^2+(y-a)^2=5a^2-10a+15$$

이때 $5a^2-10a+15=5(a-1)^2+10$에서 $a=1$일 때, 원의 반지름의 길이가 최소이므로 원의 넓이가 최소이다.

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는

$$(-2a,\ a),\ \text{즉 } (-2,\ 1)$$

답 ③

18 $x^2+y^2+2x+y+k=0$에서

$$(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}-k \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 원이 되려면 $\dfrac{5}{4}-k>0$이어야 하므로

$$k<\frac{5}{4}$$

따라서 $a=4$, $b=5$이므로 $a+b=9$

답 ③

빈출 유형 집중학습

18-1 $x^2+y^2-4x+6y+k+10=0$에서

$$(x-2)^2+(y+3)^2=3-k \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 원이 되려면 $3-k>0$이어야 하므로

$$k<3$$

답 $k<3$

18-2 $x^2+y^2+4x-4y+k^2-3k+4=0$에서

$$(x+2)^2+(y-2)^2=-k^2+3k+4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 원이므로

$$-k^2+3k+4>0,\ k^2-3k-4<0$$

$$(k+1)(k-4)<0 \qquad \therefore\ -1<k<4$$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3이므로 모든 자연수 k의 값의 합은

$$1+2+3=6$$

답 ③

18-3 $x^2+y^2-4x-2y-k^2+2k+5=0$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=k^2-2k$ ······ ㉠

㉠이 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$보다 크고 $\sqrt{15}$보다 작은 원이 되려면 $3<k^2-2k<15$

(i) $3<k^2-2k$에서 $k^2-2k-3>0$

$(k+1)(k-3)>0$ $\therefore k<-1$ 또는 $k>3$

(ii) $k^2-2k<15$에서 $k^2-2k-15<0$

$(k+3)(k-5)<0$ $\therefore -3<k<5$

(i), (ii)에서 양수 k의 값의 범위는 $3<k<5$

답 $3<k<5$

19 중심이 $(3,\ 2)$이고 x축에 접하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$이므로 원의 넓이는 4π이다.

답 ④

20 $x^2+y^2-12x+6y+41=0$에서 $(x-6)^2+(y+3)^2=4$

따라서 중심이 $(6,\ -3)$이고, x축에 접하므로 원의 반지름의 길이는 $|-3|=3$이다. 답 ①

21 원의 중심을 $(a,\ b)$라 하면 원이 x축에 접하므로 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

이 원이 점 $(2,\ 4)$를 지나므로 $(2-a)^2+(4-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-4a-8b+20=0$ ······ ㉠

또 이 원이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$(0-a)^2+(2-b)^2=b^2,\ a^2-4b+4=0$

$\therefore b=\frac{a^2}{4}+1$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$a^2+4a-12=0,\ (a+6)(a-2)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=2$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=2$ 또는 $b=10$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 10이므로 구하는 두 원의 넓이의 합은

$\pi\cdot2^2+\pi\cdot10^2=4\pi+100\pi=104\pi$ 답 104π

22 $x^2+y^2+2x-4ay-b=0$에서

$(x+1)^2+(y-2a)^2=4a^2+b+1$

이 원이 x축에 접하므로 $\sqrt{4a^2+b+1}=|2a|$

양변을 제곱하여 정리하면

$4a^2+b+1=4a^2$ $\therefore b=-1$

또 이 원이 점 $(-3,\ -1)$을 지나므로

$9+1-6+4a-b=0$ $\therefore 4a-b=-4$ ··· ㉠

$b=-1$을 ㉠에 대입하면 $4a+1=-4$이므로

$a=-\frac{5}{4}$ $\therefore ab=\frac{5}{4}$ 답 $\frac{5}{4}$

23 중심이 직선 $y=x+3(x>0)$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a+3)(a>0)$이라 하면 원이 x축에 접하므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-3)^2=(a+3)^2$

이 원이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$(1-a)^2+(2-a-3)^2=(a+3)^2$

$a^2-6a-7=0,\ (a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=7\ (\because a>0)$

따라서 원의 중심이 $(7,\ 10)$이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 10이다. 답 ⑤

24 원 $x^2+y^2-2kx-4y-k^2+6k+11=0$에서

$(x-k)^2+(y-2)^2=2k^2-6k-7$ ······ ㉠

이때 ㉠이 y축에 접하고 $k>0$이므로

$k=\sqrt{2k^2-6k-7}$

양변을 제곱하여 정리하면

$k^2-6k-7=0,\ (k+1)(k-7)=0$

$\therefore k=7\ (\because k>0)$ 답 ⑤

25 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 원이 y축에 접하므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

이 원이 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$(0-a)^2+(-3-b)^2=a^2$

$(b+3)^2=0$ $\therefore b=-3$

또 이 원이 점 $(-4,\ -7)$을 지나므로

$(-4-a)^2+(-7+3)^2=a^2$

$8a+32=0$ $\therefore a=-4$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y+3)^2=16$

답 $(x+4)^2+(y+3)^2=16$

26 $x^2+y^2-6x-ky+9=0$에서

$(x-3)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}$

이때 원의 중심 $\left(3,\ \frac{k}{2}\right)$가 제4사분면 위에 있으므로

$\frac{k}{2}<0$ $\therefore k<0$

또 원이 y축에 접하므로 $\sqrt{\frac{k^2}{4}}=3$

$\frac{k^2}{4}=9,\ k^2=36$ $\therefore k=-6\ (\because k<0)$ 답 -6

27 중심이 $(-3,\ 3)$이고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식은 $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\cdot3^2=9\pi$ 답 ②

28 $x^2+y^2-2kx-2ky+2k^2-4=0$에서

$$(x-k)^2+(y-k)^2=4$$

이 원이 제1사분면에서 x축과 y축에 동시에 접하므로

$$k=2$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(2, 2)$이다. 답 ②

29 중심이 $(5, -5)$이고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식은 $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

이 원이 점 $(a, -2)$를 지나므로

$$(a-5)^2+(-2+5)^2=25$$

$$(a-5)^2=16, \ a-5=\pm 4$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=9$$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 10이다. 답 ②

30 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 $r(r>0)$라 하면 중심의 좌표는 $(-r, r)$이다.

이때 중심 $(-r, r)$가 직선 $x-y+6=0$ 위에 있으므로

$$-r-r+6=0 \qquad \therefore r=3$$

따라서 원의 방정식은 $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

즉, $x^2+y^2+6x-6y+9=0$이므로 $a=6$, $b=-6$, $c=9$

$$\therefore a-b+c=6-(-6)+9=21$$ 답 21

31 점 $(2, 1)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원은 제1사분면에 존재하므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2 \ (a>0)$$

이 원이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$$(2-a)^2+(1-a)^2=a^2$$

$$4-4a+a^2+1-2a+a^2=a^2$$

$$a^2-6a+5=0, \ (a-1)(a-5)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=5$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(1, 1)$, $(5, 5)$이므로 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$$ 답 ④

32 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+4x+6y+8+k(x^2+y^2+2x-4)=0$$

$$(k\neq -1) \ \cdots\cdots \ ㉠$$

이라 하면 ㉠이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$$5-5k=0 \qquad \therefore k=1$$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2+4x+6y+8+x^2+y^2+2x-4=0$$

$$x^2+y^2+3x+3y+2=0$$

$$\therefore \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\frac{5}{2}\pi$이다. 답 $\frac{5}{2}\pi$

빈출유형 집중학습

32-1 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-8+k(x^2+y^2-4x+2y-4)=0$$

$$(k\neq -1) \ \cdots\cdots \ ㉠$$

이라 하면 ㉠이 점 $(0, -4)$를 지나므로

$$8+4k=0 \qquad \therefore k=-2$$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2-8-2x^2-2y^2+8x-4y+8=0$$

$$\therefore x^2+y^2-8x+4y=0$$

따라서 $a=-8$, $b=4$, $c=0$이므로

$$a+b+c=-8+4+0=-4$$

답 ②

32-2 $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$에서

$x^2+y^2-2x-y+1=0$이므로 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-2x-y+1+k(x^2+y^2-2)=0$$

$$(k\neq -1) \ \cdots\cdots \ ㉠$$

이라 하면 ㉠이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$$2+3k=0 \qquad \therefore k=-\frac{2}{3}$$

$k=-\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2-2x-y+1-\frac{2}{3}(x^2+y^2-2)=0$$

양변에 3을 곱한 후 정리하면

$$x^2+y^2-6x-3y+7=0$$

$$\therefore (x-3)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\frac{17}{4}\pi$이다.

답 $\frac{17}{4}\pi$

33 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+2x+1+k(x^2+y^2+2x-ay+2)=0$$

$$(k\neq -1) \ \cdots\cdots \ ㉠$$

이라 하면 ㉠이 원점을 지나므로

$$1+2k=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$$

$k=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2+2x+1-\frac{1}{2}(x^2+y^2+2x-ay+2)=0$$

양변에 2를 곱한 후 정리하면

$$x^2+y^2+2x+ay=0$$

$$\therefore (x+1)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+1$$

11 원의 방정식

이때 반지름의 길이가 $\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}$이고, 원의 넓이가 17π이므로

$$\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^2=17\pi$$

$$\frac{a^2}{4}+1=17,\ a^2=64$$

$$\therefore\ a=8\ (\because\ a>0)$$

답 8

34 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+x+k(x^2+y^2+5x+4y-4)=0$$

$$(k\neq-1)\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이라 하면 ㉠이 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$$6-2k=0\qquad\therefore\ k=3$$

$k=3$을 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2+x+3(x^2+y^2+5x+4y-4)=0$$

$$x^2+y^2+4x+3y-3=0$$

$$\therefore\ (x+2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{37}{4}$$

이때 원의 중심이 점 $\left(-2,\ -\frac{3}{2}\right)$이고, 직선 $3x+ay+12=0$ 위에 있으므로

$$3\cdot(-2)+a\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+12=0$$

$$-\frac{3}{2}a+6=0\qquad\therefore\ a=4$$

답 ⑤

35 주어진 두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2+y^2-4x+6y+3-(x^2+y^2-2x-4y+1)=0$$

$$-2x+10y+2=0$$

$$\therefore\ x-5y-1=0$$

따라서 $m=1,\ n=-5$이므로

$$m+n=-4$$

답 ①

36 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-9-(x^2+y^2+2x-ky-2)=0$$

$$-9-2x+ky+2=0$$

$$\therefore\ 2x-ky+7=0\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

㉠이 직선 $x-y+4=0$과 수직이므로

$$2+k=0\qquad\therefore\ k=-2$$

답 ⑤

37 $x^2+y^2+6x+2y+2=0$에서

$$(x+3)^2+(y+1)^2=8\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

원 $x^2+y^2+6x-ay+3a=0$이 ㉠의 둘레를 이등분하려면 두 원의 교점을 지나는 직선이 ㉠의 중심 $(-3,\ -1)$을 지나야 한다.

이때 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+6x-ay+3a-(x^2+y^2+6x+2y+2)=0$$

$$\therefore\ (a+2)y-3a+2=0$$

이 직선이 점 $(-3,\ -1)$을 지나야 하므로

$$(a+2)\cdot(-1)-3a+2=0$$

$$4a=0\qquad\therefore\ a=0$$

답 ③

38 $x^2+y^2-4x+4y=1$에서 $(x-2)^2+(y+2)^2=9$

즉, 주어진 두 원은 반지름의 길이가 같고, 서로 다른 두 점에서 만나므로 두 원의 공통현을 지나는 직선에 대하여 대칭이다.

이때 두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-4x+4y-1)=0$$

$$-8+4x-4y=0$$

$$\therefore\ y=x-2$$

따라서 $m=1,\ n=2$이므로

$$m-n=-1$$

답 ②

39 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$이므로

$$3\overline{PA}=2\overline{PB},\ 9\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$$

$$9\{(x+2)^2+y^2\}=4\{(x-3)^2+y^2\}$$

$$x^2+y^2+12x=0$$

$$\therefore\ (x+6)^2+y^2=36$$

답 ①

40 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$이므로

$$\overline{PA}=2\overline{PB},\ \overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$$

$$(x-3)^2+y^2=4\{x^2+(y-3)^2\}$$

$$x^2+y^2+2x-8y+9=0$$

$$\therefore\ (x+1)^2+(y-4)^2=8$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $(-1,\ 4)$이고, 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi\cdot2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$$

답 ④

41 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{PA}:\overline{PB}=3:2$이므로

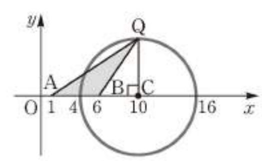
$$2\overline{PA}=3\overline{PB},\ 4\overline{PA}^2=9\overline{PB}^2$$

$$4\{(x-1)^2+y^2\}=9\{(x-6)^2+y^2\}$$

$$x^2+y^2-20x+64=0$$

$$\therefore\ (x-10)^2+y^2=36$$

이때 △ABQ의 넓이가 최대이려면 $\overline{AB}=5$이므로 높이가 최대이어야 한다. 즉, 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 할 때, 점 C를 지나고 x축에 수직인 직선이 원과 만나는 점을 Q라 하면 △ABQ의 높이가 최대가 되므로 △ABQ의 넓이가 최대가 된다.



따라서 △ABQ의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=15$$

답 ③

17 원과 직선의 위치 관계 본문 160~165쪽

42 (1) $y=3x+1$을 $x^2+y^2=9$에 대입하면

$x^2+(3x+1)^2=9$

$5x^2+3x-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\cdot5\cdot(-4)=89>0$

이므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $x-y-8=0$에서 $y=x-8$

$y=x-8$을 $(x-4)^2+(y-4)^2=32$에 대입하면

$(x-4)^2+(x-8-4)^2=32$

$x^2-16x+64=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-8)^2-1\cdot64=0$

이므로 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다.

(3) $x+y-3=0$에서 $y=-x+3$

$y=-x+3$을 $x^2+y^2+2x=0$에 대입하면

$x^2+(-x+3)^2+2x=0$

$2x^2-4x+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\cdot9=-14<0$

이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.
(3) 만나지 않는다.

43 $y=2x+k$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(2x+k)^2=1$

$\therefore 5x^2+4kx+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-1)=-k^2+5$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나면 $D>0$이므로

$-k^2+5>0,\ (k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})<0$

$\therefore -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

(2) 원과 직선이 한 점에서 만나면 $D=0$이므로

$-k^2+5=0,\ (k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})=0$

$\therefore k=\pm\sqrt{5}$

(3) 원과 직선이 만나지 않으면 $D<0$이므로

$-k^2+5<0,\ (k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})>0$

$\therefore k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$

답 (1) $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ (2) $k=\pm\sqrt{5}$
(3) $k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$

44 (1) 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{5}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

따라서 $\sqrt{5}$는 원의 반지름의 길이 3보다 작으므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x-4y+10=0$ 사이의 거리는

$\frac{10}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2$

따라서 2는 원의 반지름의 길이 1보다 크므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.

(3) 원의 중심 $(-1,\ 2)$와 직선 $x+y-3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-1+2-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

따라서 $\sqrt{2}$는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같으므로 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다.

답 (1) 2 (2) 0 (3) 1

45 (1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나면 원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2보다 작으므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<2,\ |k|<2\sqrt{2}$

$\therefore -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

(2) 원과 직선이 한 점에서 만나면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2,\ |k|=2\sqrt{2}$

$\therefore k=\pm2\sqrt{2}$

(3) 원과 직선이 만나지 않으면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 크므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}>2,\ |k|>2\sqrt{2}$

$\therefore k<-2\sqrt{2}$ 또는 $k>2\sqrt{2}$

답 (1) $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$ (2) $k=\pm2\sqrt{2}$
(3) $k<-2\sqrt{2}$ 또는 $k>2\sqrt{2}$

46 (1) $y=2x\pm3\sqrt{2^2+1}$ $\quad\therefore y=2x\pm3\sqrt{5}$

(2) $y=-3x\pm5\sqrt{(-3)^2+1}$ $\quad\therefore y=-3x\pm5\sqrt{10}$

(3) 직선 $y=x-3$에 평행한 직선은 기울기가 1이므로

$y=x\pm2\sqrt{1^2+1}$ $\quad\therefore y=x\pm2\sqrt{2}$

(4) 직선 $x+2y+1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 2이므로

$y=2x\pm4\sqrt{2^2+1}$ $\quad\therefore y=2x\pm4\sqrt{5}$

답 (1) $y=2x\pm3\sqrt{5}$ (2) $y=-3x\pm5\sqrt{10}$
(3) $y=x\pm2\sqrt{2}$ (4) $y=2x\pm4\sqrt{5}$

47 (2) $-x-3y=10$이므로 $x+3y=-10$

답 (1) $2x+3y=13$ (2) $x+3y=-10$

48 (2) 직선 $x_1x+y_1y=1$이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$2x_1=1 \quad \therefore\ x_1=\frac{1}{2}$

(3) 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=1$ …… ㉠

$x_1=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{4}+y_1^2=1,\ y_1^2=\frac{3}{4}$

$\therefore\ y_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\frac{1}{2}x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$, 즉 $x\pm\sqrt{3}y=2$

답 (1) $x_1x+y_1y=1$ (2) $x_1=\frac{1}{2}$

(3) $y_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $x\pm\sqrt{3}y=2$

49 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 $(-3,\ 0)$을 지나므로

$-3x_1=4 \quad \therefore\ x_1=-\frac{4}{3}$

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=4$ …… ㉠

$x_1=-\frac{4}{3}$를 ㉠에 대입하면

$\left(-\frac{4}{3}\right)^2+y_1^2=4$

$y_1^2=\frac{20}{9} \quad \therefore\ y_1=\pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$-\frac{4}{3}x\pm\frac{2\sqrt{5}}{3}y=4$

답 $-\frac{4}{3}x\pm\frac{2\sqrt{5}}{3}y=4$

50 원의 중심 $(2,\ 3)$과 직선 $3x+4y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot2+4\cdot3+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{23}{5}$

이때 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$과 직선 $3x+4y+5=0$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $r>\frac{23}{5}=4.6$이어야 하므로 자연수 r의 최솟값은 5이다.

답 ④

51 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=-mx+2$가 한 점에서 만나므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx+y-2=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같아야 한다. 즉,

$\frac{|-2|}{\sqrt{m^2+1^2}}=1,\ \sqrt{m^2+1}=2$

양변을 제곱하여 정리하면 $m^2+1=4,\ m^2=3$

$\therefore\ m=\sqrt{3}\,(\because\ m>0)$

다른 풀이

$y=-mx+2$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(-mx+2)^2=1$

$\therefore\ (m^2+1)x^2-4mx+3=0$ …… ㉠

㉠이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-(m^2+1)\cdot3=0$

$m^2-3=0 \quad \therefore\ m=\pm\sqrt{3}$

따라서 양수 m의 값은 $\sqrt{3}$이다.

답 ③

빈출유형 집중학습

51-1 원 $x^2+(y-2)^2=a$와 직선 $y=x$가 접하므로 원의 중심 $(0,\ 2)$와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{a}$와 같아야 한다. 즉,

$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{a},\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{a}=2$

$2a=4 \quad \therefore\ a=2$

다른 풀이

$y=x$를 $x^2+(y-2)^2=a$에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=a$

$\therefore\ 2x^2-4x+4-a=0$ …… ㉠

㉠이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(4-a)=0$

$\therefore\ a=2$

답 ④

51-2 원 $x^2+y^2-2x+2y=0$에서

$(x-1)^2+(y+1)^2=2$

이때 직선 $x+y+k=0$이 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$에 접하므로 원의 중심 $(1,\ -1)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같아야 한다. 즉,

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2},\ |k|=2$

$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=2$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 0이다.

다른 풀이

$x+y+k=0$에서 $y=-x-k$를 $x^2+y^2-2x+2y=0$에 대입하면

$x^2+(-x-k)^2-2x+2(-x-k)=0$

$\therefore\ 2x^2+2(k-2)x+k^2-2k=0$ …… ㉠

㉠이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-2(k^2-2k)=0$

$-k^2+4=0,\ (k+2)(k-2)=0$

$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=2$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 0이다.

답 0

52 원 $(x-a)^2+y^2=5$와 직선 $y=-x$가 만나지 않으므로 원의 중심 $(a,\ 0)$과 직선 $x+y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$보다 커야 한다. 즉,

$$\frac{|a|}{\sqrt{1^2+1^2}}>\sqrt{5},\ |a|>\sqrt{10}$$

$$\therefore\ a<-\sqrt{10}\ \text{또는}\ a>\sqrt{10}$$

따라서 한 자리의 자연수 a의 개수는 4, 5, 6, 7, 8, 9의 6이다.

다른 풀이

$y=-x$를 $(x-a)^2+y^2=5$에 대입하면

$$(x-a)^2+x^2=5$$

$$\therefore\ 2x^2-2ax+a^2-5=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-2(a^2-5)<0,\ a^2>10$$

$$\therefore\ a<-\sqrt{10}\ \text{또는}\ a>\sqrt{10}$$

따라서 한 자리의 자연수 a의 개수는 4, 5, 6, 7, 8, 9의 6이다.

답 ③

53 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $\sqrt{3}x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{2}$$

이때 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=\sqrt{3}x+k$가 만나는 경우는 접하거나 서로 다른 두 점에서 만날 때이므로

$$\frac{|k|}{2}\le 3,\ |k|\le 6$$

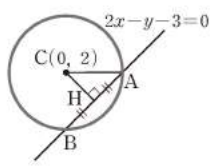
$$\therefore\ -6\le k\le 6$$

답 ④

오답 피하기

원과 직선이 만나는 경우는 서로 다른 두 점에서 만나는 경우와 접하는 경우를 모두 생각해야 한다.

54 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 C(0, 2)에서 직선 $2x-y-3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|-2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

또 직각삼각형 CHA에서

$$\overline{AH}^2=\overline{AC}^2-\overline{CH}^2=12-5=7$$

$$\therefore\ \overline{AH}=\sqrt{7}\ (\because\ \overline{AH}>0)$$

따라서 구하는 현의 길이는

$$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{7}$$

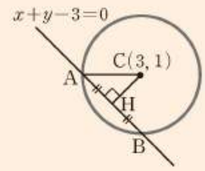
답 ④

빈출 유형 집중학습

54-1 $x^2+y^2-6x-2y+9=0$에서

$$(x-3)^2+(y-1)^2=1$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 C(3, 1)에서 직선 $x+y-3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|3+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

또 직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH}^2=\overline{AC}^2-\overline{CH}^2=1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \overline{AH}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because\ \overline{AH}>0)$$

따라서 구하는 $\overline{AB}$의 길이는

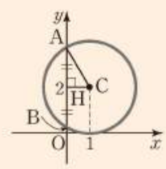
$$\overline{AB}=2\overline{AH}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

54-2 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$

오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 y축의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 C(1, 2)에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$$

따라서 구하는 선분의 길이는

$$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{3}$$

다른 풀이

주어진 원과 y축이 만나는 두 점을 $(0,\ \alpha)$, $(0,\ \beta)$라 하면 α, β는 주어진 원의 방정식에 $x=0$을 대입한 방정식, 즉 $y^2-4y+1=0$의 두 근이다.

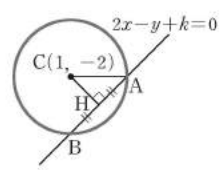
이때 원에 의하여 잘리는 y축 위의 선분의 길이는 $|\alpha-\beta|$이므로

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4=12$$

$$\therefore\ |\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$$

답 ④

55 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 C(1, −2)에서 직선 $2x-y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=2$이므로



$$\overline{CH}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

따라서 원의 중심 C(1, −2)와 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\ |k+4|=5,\ k+4=\pm 5$$

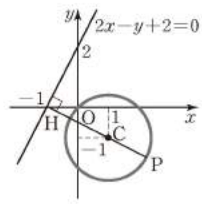
$$\therefore\ k=1\ (\because\ k>0)$$

답 ①

56 $x^2+y^2-2x+2y=0$에서

$(x-1)^2+(y+1)^2=2$

원의 중심 C(1, −1)과 직선 $2x-y+2=0$ 사이의 거리는



$\overline{CH}=\dfrac{|2+1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

따라서 $\overline{PH}$의 길이의 최댓값은 $\sqrt{5}+\sqrt{2}$이다. 답 ⑤

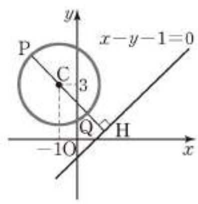
57 $x^2+y^2+2x-6y+2=0$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2=8$

원의 중심 C(−1, 3)에서 직선 $x-y-1=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=\dfrac{|-1-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 거리의 최댓값 M은



$M=\overline{PH}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}$

$=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

이고, 최솟값 m은

$m=\overline{QH}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이므로

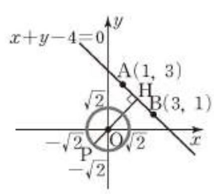
$2Mm=2\cdot\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=9$ 답 9

58 두 점 A(1, 3), B(3, 1)을 지나는 직선 AB의 방정식은

$y-3=\dfrac{1-3}{3-1}(x-1)$

$\therefore x+y-4=0$ ...... ㉠

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O(0, 0)에서 직선 ㉠에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\dfrac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$이므로 △PAB의 넓이가 최대이려면 $\overline{PH}$의 길이가 최대이어야 한다.

즉, 위의 그림에서 $\overline{PH}$의 길이의 최댓값은

$2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

이므로 △PAB의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}=6$ 답 ④

59 기울기가 $\tan 60°=\sqrt{3}$이므로 원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$인 접선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm3\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$

즉, $y=\sqrt{3}x\pm6$이므로 $a=\sqrt{3}$, $b=6$

$\therefore a^2+b^2=(\sqrt{3})^2+6^2=39$ 답 39

60 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 −2이므로 원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 −2인 접선의 방정식은

$y=-2x\pm2\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore y=-2x\pm2\sqrt{5}$

따라서 y절편이 양수인 접선의 방정식은

$y=-2x+2\sqrt{5}$ 답 ②

61 직선 $y=3x-1$에 평행한 직선의 기울기는 3이므로 원 $x^2+y^2=10$에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1}$

$\therefore y=3x\pm10$

따라서 보기 중 접선 위에 있는 점은 ①이다. 답 ①

62 두 점 (−2, 1), (1, 4)를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{4-1}{1+2}=1$이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 −1이다.

이때 $x^2+y^2+8x-2y+15=0$에서

$(x+4)^2+(y-1)^2=2$

이고, 기울기가 −1인 접선의 방정식을 $y=-x+k$라 하면 원의 중심 (−4, 1)과 직선 $x+y-k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같으므로

$\dfrac{|-4+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$

$|3+k|=2$

$3+k=\pm2$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=-5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-x-1$ 또는 $y=-x-5$ 답 ①, ④

오답 피하기

원 $x^2+y^2=r^2$과 같이 중심이 원점인 원에 대해서만 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$이다.
따라서 $(x+4)^2+(y-1)^2=2$와 같이 중심이 원점이 아닌 원의 접선의 방정식은 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 구한다.

63 원 위의 점 (3, −1)에서의 접선의 방정식은

$3x-y=10$ ...... ㉠

또 원 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax+by=10$ ...... ㉡

㉠, ㉡이 서로 수직이므로

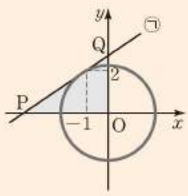
$3a-b=0$ $\therefore b=3a$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{3a}{a}=3$ ($\because a\neq0$) 답 3

빈출 유형 집중학습

63-1 원 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$-x+2y=5$ ⋯ ㉠



㉠이 x축과 만나는 점 P의 좌표는 $(-5,\ 0)$이고, y축과 만나는 점 Q의 좌표는 $\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$

따라서 삼각형 POQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot \frac{5}{2}=\frac{25}{4}$ 답 ④

63-2 원 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

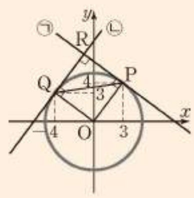
$3x+4y=25$ ⋯⋯ ㉠

또 원 위의 점 $\mathrm{Q}(-4,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$-4x+3y=25$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $3\cdot(-4)+4\cdot 3=0$이므로 두 접선은 서로 수직이다.

따라서 오른쪽 그림에서 □OPRQ는 한 변의 길이가 5인 정사각형이므로



△QPR

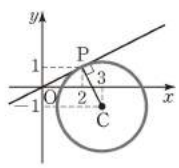
$=\frac{1}{2}$□OPRQ

$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5=\frac{25}{2}$ 답 ⑤

64 $x^2+y^2-6x+2y+5=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=5$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $\mathrm{C}(3,\ -1)$, 접점을 $\mathrm{P}(2,\ 1)$이라 하면 점 P에서의 접선은 $\overline{\mathrm{CP}}$와 수직이고, 두 점 C, P를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1+1}{2-3}=-2$이므로 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.



따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(2,\ 1)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-2)$ $\quad\therefore\ y=\frac{1}{2}x$

다른 풀이

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$이므로 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=5$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$(2-3)(x-3)+(1+1)(y+1)=5$

$-x+3+2y+2=5$ $\quad\therefore\ y=\frac{1}{2}x$ 답 $y=\frac{1}{2}x$

65 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$ ⋯⋯ ㉠

㉠이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$3x_1-y_1=5$ ⋯⋯ ㉡

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=5$ ⋯⋯ ㉢

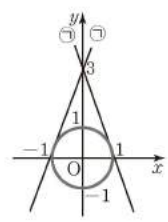
㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x_1=1,\ y_1=-2$ 또는 $x_1=2,\ y_1=1$

이것을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$x-2y=5$ 또는 $2x+y=5$ 답 ⑤

66 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은



$x_1x+y_1y=1$ ⋯⋯ ㉠

㉠이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3y_1=1$ $\quad\therefore\ y_1=\frac{1}{3}$ ⋯ ㉡

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=1$ ⋯⋯ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

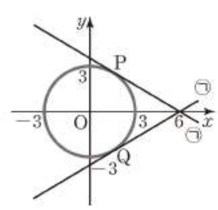
$x_1^2+\frac{1}{9}=1$ $\quad\therefore\ x_1=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=2\sqrt{2}x+3$ 또는 $y=-2\sqrt{2}x+3$

$\therefore\ m_1m_2=2\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{2})=-8$ 답 -8

67 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은



$x_1x+y_1y=9$ ⋯⋯ ㉠

㉠이 점 $(6,\ 0)$을 지나므로

$6x_1=9$

$\therefore\ x_1=\frac{3}{2}$ ⋯⋯ ㉡

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=9$ ⋯⋯ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$\frac{9}{4}+y_1^2=9$

$\therefore\ y_1=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}$

답 ③

68 접선의 기울기를 m이라 하면 원점을 지나는 접선의 방정식은 $y=mx$

원의 중심 $(-2,\ 3)$과 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$
$$|2m+3|=\sqrt{m^2+1}$$

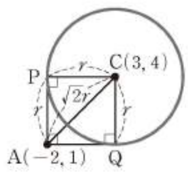
양변을 제곱하여 정리하면

$$4m^2+12m+9=m^2+1$$
$$\therefore\ 3m^2+12m+8=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 접선의 기울기는 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 접선의 기울기의 합은

$-\frac{12}{3}=-4$이다. 답 ②

69 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(3, 4), 원 밖의 한 점 A$(-2,\ 1)$에서 원에 그은 접선의 접점을 P, Q라 하면 두 접선이 수직이므로 □CPAQ는 정사각형이다.



이때 $\overline{\text{CQ}}=r$이므로 $\overline{\text{AC}}=\sqrt{2}r$

$$\therefore\ r=\frac{\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(4-1)^2}}{\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{17}$$

답 ③

단계별 기출학습 본문 166~169쪽

01 ③	02 ④	03 10	04 ③	05 ⑤
06 ①	07 ⑤	08 ②	09 ①	10 ③
11 12	12 ④	13 ④	14 ③	15 ④
16 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=1$			17 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	
18 $\frac{\sqrt{7}}{7}$	19 $x+2y-5=0$		20 $\frac{\sqrt{14}}{2}$시간	
21 90	22 15	23 10		

01 원의 중심을 C$(-1,\ -2)$라 하면 원의 반지름의 길이는 $\overline{\text{CP}}$의 길이와 같으므로

$$\overline{\text{CP}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y+2)^2=18$$
$$x^2+y^2+2x+4y-13=0$$
$$\therefore\ a=4$$

02 점 $(p,\ q)$가 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$$q=-p+2$$

이때 원의 반지름의 길이를 $r(r>0)$라 하면 원의 방정식은

$$(x-p)^2+(y+p-2)^2=r^2$$

이고, 점 $(0,\ 3)$이 원 위의 점이므로

$$(0-p)^2+(3+p-2)^2=r^2$$
$$\therefore\ 2p^2+2p+1=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $(3,\ 4)$가 원 위의 점이므로

$$(3-p)^2+(4+p-2)^2=r^2$$
$$\therefore\ 2p^2-2p+13=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=3,\ q=-1$

$$\therefore\ p-q=4$$

03 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{\text{AP}}^2+\overline{\text{BP}}^2=54$에서

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(x-4)^2+(y-1)^2=54$$
$$x^2+y^2-6x-4y-12=0$$
$$\therefore\ (x-3)^2+(y-2)^2=25$$

즉, $a=3,\ b=2,\ r=5$이므로

$$a+b+r=3+2+5=10$$

04 $x^2+y^2+2px-4py+6p^2-6p-7=0$에서

$$(x+p)^2+(y-2p)^2=-p^2+6p+7 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 원이 되려면 $-p^2+6p+7>0$이어야 하므로

$$p^2-6p-7<0,\ (p+1)(p-7)<0$$
$$\therefore\ -1<p<7$$

따라서 정수 p의 개수는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6의 7이다.

05 $x^2+y^2+8x-4y+6+k^2=0$에서

$$(x+4)^2+(y-2)^2=14-k^2$$

이 원이 x축에 접하려면 중심의 y좌표의 절댓값과 반지름의 길이가 같아야 한다.

즉, $\sqrt{14-k^2}=2$이므로 $14-k^2=4,\ k^2=10$

$$\therefore\ k=\sqrt{10}\ (\because\ k>0)$$

06 점 $(-1,\ 2)$를 지나고 x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제2사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 $r(r>0)$라 하면 원의 방정식은

$$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$$

이 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$$
$$r^2-6r+5=0,\ (r-1)(r-5)=0$$
$$\therefore\ r=1 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 $(-1,\ 1)$, $(-5,\ 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-5+1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$$

07 주어진 원과 직선이 접하므로 원의 중심 $(-1,\ -3)$과 직선 $4x+3y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같다. 즉,

$$\frac{|-4-9+k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$$

$|k-13|=15$, $k-13=\pm15$

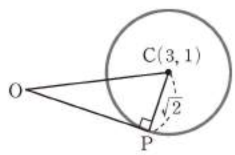
$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=28$

이때 $k<0$이므로 $k=-2$

08 $x^2+y^2-6x-2y+8=0$에서

$(x-3)^2+(y-1)^2=2$

오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C라 하면 $C(3,\ 1)$이고, 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로



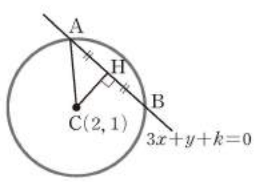
$\overline{OC}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

따라서 직각삼각형 COP에서

$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CP}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

09 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 $C(2,\ 1)$에서 직선 $3x+y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=\sqrt{6}$이므로



$\overline{CH}=\sqrt{16-6}=\sqrt{10}$

즉, 원의 중심 $C(2,\ 1)$과 직선 $3x+y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|6+1+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$$

$|k+7|=10$, $k+7=\pm10$

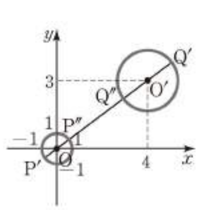
$\therefore\ k=-17$ 또는 $k=3$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 -14이다.

10 두 원의 중심의 좌표가 각각 $O(0,\ 0)$, $O'(4,\ 3)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\overline{OO'}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

이때 두 원의 반지름의 길이는 각각 1, 2이므로 오른쪽 그림에서 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값 M은



$\overline{P'Q'}=5+(1+2)=8$

또 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값 m은

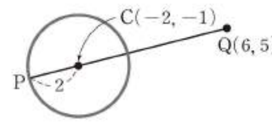
$\overline{P''Q''}=5-(1+2)=2$

$\therefore\ M-m=8-2=6$

11 원 위의 한 점 $P(a,\ b)$에 대하여 $Q(6,\ 5)$라 하면

$\sqrt{(a-6)^2+(b-5)^2}=\overline{PQ}$

이때 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(-2,\ -1)$이라 하면 점 P가 $\overline{CQ}$의 연장선과 원이 만나는 점일 때 $\overline{PQ}$가 최대가 된다.



따라서 $\overline{CQ}=\sqrt{\{6-(-2)\}^2+\{5-(-1)\}^2}=10$이므로

$\sqrt{(a-6)^2+(b-5)^2}$의 최댓값은

$10+2=12$

12 원 $x^2+y^2=r^2$의 한 접선이 직선 $2x-4y=1$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$에 수직이므로 접선의 기울기는 -2이다.

이때 기울기가 -2인 접선의 방정식은

$y=-2x\pm r\sqrt{(-2)^2+1}$, 즉 $y=-2x\pm r\sqrt{5}$

이고, 이 접선의 y절편이 $3\sqrt{5}$이므로

$r\sqrt{5}=3\sqrt{5}\qquad\therefore\ r=3$

13 점 $(3,\ a)$는 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

$3^2+a^2=25$, $a^2=16$

$\therefore\ a=-4\ (\because\ a<0)$

이때 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(3,\ -4)$에서의 접선의 방정식은 $3x-4y=25$이므로

$b=3$, $c=25$

$\therefore\ a+b+c=-4+3+25=24$

14 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$ ······ ㉠

㉠이 점 $(4,\ 2)$를 지나므로 $4x_1+2y_1=4$

$\therefore\ 2x_1+y_1=2$ ······ ㉡

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=4$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x_1=0$, $y_1=2$ 또는 $x_1=\frac{8}{5}$, $y_1=-\frac{6}{5}$

이것을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=2$ 또는 $4x-3y-10=0$

15 점 $(2,\ 3)$을 지나고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-3=m(x-2)$, 즉 $mx-y+3-2m=0$

이고, 원의 중심과 접선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|3-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ |3-2m|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2-12m+8=0$ …… ㉠

이때 m_1, m_2는 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1+m_2=-\dfrac{-12}{3}=4$

16 중심이 점 (2, 0)이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=4$이고, 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P는 원 $(x-2)^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$(a-2)^2+b^2=4$ …… ㉠

이때 선분 PQ의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{a-1}{2}$, $y=\dfrac{b+5}{2}$

$\therefore a=2x+1, b=2y-5$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2x+1-2)^2+(2y-5)^2=4$

$x^2+y^2-x-5y+\dfrac{11}{2}=0$

$\therefore \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=1$

17 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$이므로

$\overline{PA}=2\overline{PB}$, $\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$

$(x-1)^2+y^2=4\{(x-4)^2+y^2\}$

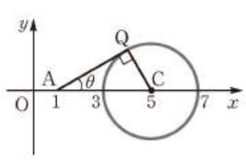
$x^2-2x+1+y^2=4x^2-32x+64+4y^2$

$x^2+y^2-10x+21=0$

$\therefore (x-5)^2+y^2=4$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 중심이 (5, 0)이고, 반지름의 길이가 2인 원이다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 할 때, θ가 최대이려면 $\angle$QAC가 최대이어야 하므로 $\overline{AQ}$가 원의 접선이어야 한다.

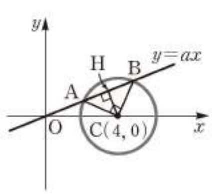


이때 $\overline{AC}=4$, $\overline{CQ}=2$이므로

$\overline{AQ}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{4}+\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

18 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=ax$와 원 $(x-4)^2+y^2=4$의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심을 C(4, 0)이라 하면 중심각의 크기는 호의 길이에 비례하므로



$\angle ACB=\dfrac{1}{4}\times 360^\circ=90^\circ$

즉, 삼각형 ACB는 직각삼각형이다.

이때 $\overline{AC}=\overline{BC}=2$이므로 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$이고, 원의 중심 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{2}$

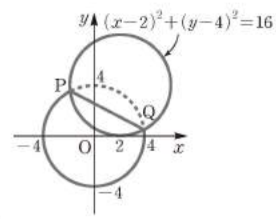
원의 중심 (4, 0)과 직선 $ax-y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{|4a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

$16a^2=2(a^2+1)$, $14a^2=2$

$a^2=\dfrac{1}{7}$ $\quad\therefore a=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ ($\because a>0$)

19 오른쪽 그림과 같이 호 PQ는 점 (2, 0)에서 x축에 접하고, 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 그 원의 방정식은



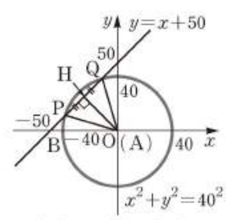
$(x-2)^2+(y-4)^2=16$

이때 선분 PQ는 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 공통현이므로 구하는 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$

$\therefore x+2y-5=0$

20 오른쪽 그림과 같이 A지점을 원점, 직선 AB를 x축으로 하는 좌표평면을 생각하면 레이더 화면이 나타내는 원의 방정식은



$x^2+y^2=40^2$

이고, 선박의 이동 경로를 나타내는 직선은 기울기가 $\tan 45^\circ=1$, x절편이 -50이므로 직선의 방정식은 $y=x+50$, 즉 $x-y+50=0$이다.

이때 원과 직선이 만나는 두 점을 P, Q라 하고, 원의 중심 O에서 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\dfrac{|50|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{50}{\sqrt{2}}=25\sqrt{2}$

또 직각삼각형 POH에서

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OH}^2}$

$=\sqrt{40^2-(25\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{350}=5\sqrt{14}$(km)

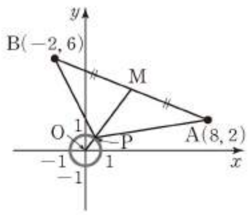
$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PH}=10\sqrt{14}$(km)

따라서 선박의 속력이 20 km/h이므로 선박이 레이더의 화면에 나타나는 시간은

$\dfrac{10\sqrt{14}}{20}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$(시간)

참고 (속력)$=\dfrac{(거리)}{(시간)}$이므로 (시간)$=\dfrac{(거리)}{(속력)}$이다.

21 오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 M이라 하면 중선 정리에 의하여



$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$
$=2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)$

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$이 최소일 때는

$\overline{AM}$이 일정하므로 $\overline{PM}$의 길이가 최소일 때, 즉 점 P가 $\overline{OM}$ 위에 있을 때이다.

한편 $M\left(\frac{8-2}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$, 즉 M(3, 4)이므로

$\overline{AM}=\sqrt{(8-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{29}$

$\overline{OM}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

원의 반지름의 길이가 1이므로 $\overline{PM}$의 길이의 최솟값은

$5-1=4$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2&=2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)\\&\geq 2(16+29)\\&=90\end{aligned}$$

이므로 구하는 최솟값은 90이다.

22 원의 중심이 직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $\left(k, -\frac{1}{2}k\right)$라 하면 원의 중심에서 두 직선 $2x-y-4=0$, $2x-y-6=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{\left|2k+\frac{1}{2}k-4\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\left|2k+\frac{1}{2}k-6\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$\left|\frac{5}{2}k-4\right|=\left|\frac{5}{2}k-6\right|$$

$$\frac{5}{2}k-4=\pm\left(\frac{5}{2}k-6\right)$$

이때 $\frac{5}{2}k-4\neq\frac{5}{2}k-6$이므로

$$\frac{5}{2}k-4=-\frac{5}{2}k+6$$

$\therefore k=2$

❶

따라서 원의 중심의 좌표가 (2, −1), 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{5}$$

❷

즉, $a=2$, $b=-1$, $c=\frac{1}{5}$이므로

$$\frac{a-b}{c}=\{2-(-1)\}\cdot 5=15$$

❸

채점 기준	성취도
❶ 원의 중심의 좌표를 $\left(k, -\frac{1}{2}k\right)$로 놓고 k의 값 구하기	40 %
❷ 원의 방정식 구하기	20 %
❸ 답 구하기	40 %

23 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1 \qquad \therefore 3x-4y-12=0$$

❶

삼각형 ABP의 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 밑변의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

로 일정하므로 삼각형 ABP의 넓이가 최소가 되려면 높이가 최소이어야 한다.

이때 △ABP의 높이는 원 위를 움직이는 점 P에서 직선 AB 사이의 거리와 같고, 원의 중심 (−3, 1)과 직선 $3x-4y-12=0$ 사이의 거리가

$$\frac{|-9-4-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{25}{5}=5$$

이므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은 $5-1=4$이다.

❷

따라서 △ABP의 높이의 최솟값이 4이므로 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4=10$$

❸

채점 기준	성취도
❶ 직선 AB의 방정식 구하기	30 %
❷ 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값 구하기	30 %
❸ △ABP의 넓이의 최솟값 구하기	40 %

12 도형의 이동

18 도형의 이동
본문 170~177쪽

01 (1) $(0-3,\ 4+2)$, 즉 $(-3,\ 6)$
(2) $(-2-3,\ 1+2)$, 즉 $(-5,\ 3)$
(3) $(6-3,\ -3+2)$, 즉 $(3,\ -1)$
(4) $(-1-3,\ -5+2)$, 즉 $(-4,\ -3)$

답 (1) $(-3,\ 6)$ (2) $(-5,\ 3)$ (3) $(3,\ -1)$ (4) $(-4,\ -3)$

02 (1) $(0,\ 0) \longrightarrow (0+1,\ 0-2)$, 즉 $(1,\ -2)$
(2) $(3,\ 1) \longrightarrow (3+1,\ 1-2)$, 즉 $(4,\ -1)$
(3) $(1,\ -6) \longrightarrow (1+1,\ -6-2)$, 즉 $(2,\ -8)$
(4) $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right) \longrightarrow \left(-\frac{1}{2}+1,\ \frac{3}{4}-2\right)$, 즉 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{4}\right)$

답 (1) $(1,\ -2)$ (2) $(4,\ -1)$ (3) $(2,\ -8)$ (4) $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{4}\right)$

03 (1) $(x-4)-3(y+1)-1=0$에서 $x-3y-8=0$
(2) $y+1=(x-4)^2+1$에서 $y=(x-4)^2$

답 (1) $x-3y-8=0$ (2) $y=(x-4)^2$ (3) $(x-4)^2+(y+1)^2=4$

04 (1) $y-4=2(x+2)-1$에서 $y-4=2x+3$
$\therefore y=2x+7$
(2) $y-4=(x+2)^2+4(x+2)+3$에서
$y=x^2+8x+19$
(3) $(x+2)^2+(y-4)^2-2(x+2)+4(y-4)-4=0$에서
$x^2+y^2+2x-4y-4=0$

다른 풀이

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$에서
$(x-1)^2+(y+2)^2=9$ …… ㉠
㉠을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$(x+1)^2+(y-2)^2=9$
$\therefore x^2+y^2+2x-4y-4=0$

답 (1) $y=2x+7$ (2) $y=x^2+8x+19$ (3) $x^2+y^2+2x-4y-4=0$

05 답 (1) $(-3,\ -6)$ (2) $(3,\ 6)$ (3) $(3,\ -6)$ (4) $(6,\ -3)$

06 (1) $3x+4(-y)=5$에서 $3x-4y=5$
(2) $3(-x)+4y=5$에서 $3x-4y=-5$
(3) $3(-x)+4(-y)=5$에서 $3x+4y=-5$
(4) $3y+4x=5$에서 $4x+3y=5$

답 (1) $3x-4y=5$ (2) $3x-4y=-5$ (3) $3x+4y=-5$ (4) $4x+3y=5$

07 (1) $-y=(x-1)^2-2$에서 $y=-(x-1)^2+2$
(2) $y=(-x-1)^2-2$에서 $y=(x+1)^2-2$
(3) $-y=(-x-1)^2-2$에서 $y=-(x+1)^2+2$

답 (1) $y=-(x-1)^2+2$ (2) $y=(x+1)^2-2$ (3) $y=-(x+1)^2+2$ (4) $x=(y-1)^2-2$

08 (1) $(x+3)^2+(-y-4)^2=4$에서
$(x+3)^2+(y+4)^2=4$
(2) $(-x+3)^2+(y-4)^2=4$에서
$(x-3)^2+(y-4)^2=4$
(3) $(-x+3)^2+(-y-4)^2=4$에서
$(x-3)^2+(y+4)^2=4$
(4) $(y+3)^2+(x-4)^2=4$에서
$(x-4)^2+(y+3)^2=4$

답 (1) $(x+3)^2+(y+4)^2=4$ (2) $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ (3) $(x-3)^2+(y+4)^2=4$ (4) $(x-4)^2+(y+3)^2=4$

09 점 $\mathrm{P}(a,\ -3)$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(a-4,\ -3+2)$, 즉 $(2,\ b)$
따라서 $a=6$, $b=-1$이므로 $a+b=6+(-1)=5$

답 ③

10 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+1)$에 의하여 점 $(4,\ 1)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(4+a,\ 1+1)$, 즉
$(a+4,\ 2)$
이 점이 직선 $y=2x-2$ 위의 점이므로
$2=2(a+4)-2$, $a+4=2$ $\therefore a=-2$

답 ④

11 원점을 점 $(-1,\ 2)$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
$(a,\ b) \longrightarrow (a-1,\ b+2)$
이때 $a-1=6$, $b+2=-2$이므로 $a=7$, $b=-4$
$\therefore a+b=7+(-4)=3$

답 ④

12 주어진 평행이동에 의하여 삼각형 ABC의 무게중심은 삼각형 A′B′C′의 무게중심으로 이동한다.
세 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$, $\mathrm{C}(-1,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{1+3-1}{3},\ \frac{2+1+3}{3}\right)$, 즉 $(1,\ 2)$
이때 점 $(1,\ 2)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(1,\ 2) \longrightarrow (1-1,\ 2+2)$, 즉 $(0,\ 4)$
이므로 구하는 무게중심의 좌표는 $(0,\ 4)$이다.

답 ②

13 직선 $3x+y+2=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-2)+(y+3)+2=0$

$\therefore 3x+y-1=0$

따라서 상수 k의 값은 -1이다. 답 ③

14 직선 $4x-3y-5=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$4(x-1)-3(y-n)-5=0$

$\therefore 4x-3y+3n-9=0$ ...... ㉠

㉠이 $4x-3y-30=0$과 일치하므로

$3n-9=-30,\ 3n=-21 \quad \therefore n=-7$ 답 -7

빈출 유형 **집중학습**

14-1 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $-2p$만큼 평행이동한 것이므로 직선 $y=2x-5$를 평행이동한 직선의 방정식은

$y+2p=2(x-p)-5$

$\therefore y=2x-4p-5$ ...... ㉠

㉠이 $y=2x+3$과 일치하므로

$-4p-5=3 \quad \therefore p=-2$ 답 -2

14-2 직선 $y=3x+2$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-b=3(x-a)+2$

$\therefore y=3x-3a+b+2$ ...... ㉠

㉠이 $y=3x+2$와 일치하므로

$-3a+b+2=2,\ -3a+b=0$

$\therefore b=3a$ 답 ④

15 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 직선 $x+ay+b=0$을 평행이동한 직선의 방정식은

$(x-2)+a(y+1)+b=0$

$\therefore x+ay+a+b-2=0$ ...... ㉠

㉠이 $x-2y+3=0$과 일치하므로

$a=-2,\ a+b-2=3 \quad \therefore b=7$

$\therefore a-b=-2-7=-9$ 답 -9

16 포물선 $y=2x^2+5$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-3=2(x+2)^2+5$

$\therefore y=2(x+2)^2+8$

따라서 $f(x)=2(x+2)^2+8$이므로

$f(0)=2\cdot 2^2+8=16$ 답 ①

17 원의 중심이 $(0,\ 1)$에서 $(1,\ 0)$으로 옮겨졌으므로 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-4=0$을 평행이동한 직선의 방정식은

$(x-1)+2(y+1)-4=0 \quad \therefore x+2y-3=0$

따라서 $a=2,\ b=-3$이므로 $a+b=-1$ 답 -1

18 직선 $y=2x+3$을 x축과 y축의 방향으로 각각 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-k=2(x-k)+3 \quad \therefore y=2x-k+3$

이 직선이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(2,\ 4)$를 지나야 하므로

$4=4-k+3 \quad \therefore k=3$ 답 ②

19 직선 $4x+3y-5=0$을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $4x+3(y-k)-5=0$

$\therefore 4x+3y-3k-5=0$ ...... ㉠

㉠이 원 $(x-1)^2+y^2=1$에 접하려면 원의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

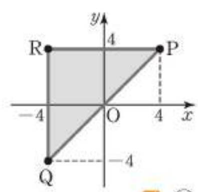
$\dfrac{|4-3k-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1,\ |3k+1|=5,\ 3k+1=\pm 5$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=\dfrac{4}{3}$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$-2+\dfrac{4}{3}=-\dfrac{2}{3}$ 답 ②

20 점 $P(4,\ 4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 Q는 $Q(-4,\ -4)$, y축에 대하여 대칭이동한 점 R는 $R(-4,\ 4)$이므로



$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32$ 답 ③

21 점 $(-1,\ 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1,\ 2)$이고, 다시 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-1,\ -2)$이다.

또 점 $(-1,\ -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ -1)$이다. 답 ①

22 점 $(-a,\ b)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a,\ b)$이다.

이때 점 $(a,\ b)$가 제2사분면 위에 있으므로

$a<0,\ b>0$

$\therefore a-b<0,\ ab<0$

따라서 점 $(a-b,\ ab)$는 제3사분면 위에 있다.

답 제3사분면

23 점 $(2,\ -3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3,\ 2)$이고, 점 $(-3,\ 2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(3,\ -2)$이다.
또 점 $(3,\ -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ 3)$이고, 점 $(-2,\ 3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(2,\ -3)$이다.
즉, 점 $(2,\ -3)$을 주어진 과정에 의하여 대칭이동을 계속 하면 점 $(-3,\ 2)$, $(3,\ -2)$, $(-2,\ 3)$, $(2,\ -3)$, …이 순서대로 반복되어 나타난다.
따라서 구하는 서로 다른 점의 개수는 4이다. 답 4

24 직선 $3x+4y+5=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $3x-4y+5=0$
이 직선과 평행한 직선의 기울기는 $\frac{3}{4}$이므로 기울기가 $\frac{3}{4}$이고, 점 $(4,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{3}{4}(x-4) \qquad \therefore 3x-4y-8=0$

따라서 $m=-4$, $n=-8$이므로

$m+n=-12$ 답 ④

빈출유형 집중학습

24-1 직선 $2x-5y+3=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2y-5x+3=0 \qquad \therefore 5x-2y-3=0$

이 직선이 $ax+by-3=0$과 일치하므로

$a=5,\ b=-2$

$\therefore a^2+b^2=5^2+(-2)^2=29$ 답 ①

24-2 주어진 직선의 방정식은 $\frac{x}{2}+y=1$이고, 이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$\frac{y}{2}+x=1 \qquad \therefore 2x+y-2=0$

다시 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-2x-y-2=0 \qquad \therefore 2x+y+2=0$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $a+b=3$ 답 ⑤

25 포물선 $y=x^2+ax+b$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=x^2-ax+b$

$\therefore y=-x^2+ax-b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$

이때 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -4)$이므로

$\frac{a}{2}=1,\ \frac{a^2}{4}-b=-4$

따라서 $a=2$, $b=5$이므로

$b-a=5-2=3$ 답 3

26 중심이 $(2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-2)^2+(y-3)^2=r^2$

$\therefore (x+2)^2+(y-3)^2=r^2$

이 원이 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

$(3+2)^2+(3-3)^2=r^2$

$\therefore r=5\,(\because r>0)$ 답 ⑤

27 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y+2)^2+(x-1)^2=4$

$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=4$ ...... ㉠

원 ㉠의 중심 $(1,\ -2)$가 직선 $y=2x+k$ 위에 있으므로

$-2=2\cdot1+k \qquad \therefore k=-4$ 답 ①

28 직선 $y=x-k$를 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=x-k \qquad \therefore y=-x+k$ ...... ㉠

이때 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

이므로 원의 중심은 $(1,\ 2)$이다.
따라서 직선 ㉠이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(1,\ 2)$를 지나야 하므로

$2=-1+k \qquad \therefore k=3$ 답 ③

빈출유형 집중학습

28-1 직선 $y=kx+1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-kx+1$ ...... ㉠

따라서 직선 ㉠이 주어진 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(3,\ -2)$를 지나야 하므로

$-2=-3k+1 \qquad \therefore k=1$ 답 1

28-2 직선 $ax+by+1=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$ay+bx+1=0 \qquad \therefore bx+ay+1=0$ ... ㉠

직선 ㉠이 주어진 두 원의 넓이를 동시에 이등분하려면 두 원의 중심 $(2,\ 1)$, $(8,\ 3)$을 모두 지나야 한다.
즉, 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$2b+a+1=0 \qquad \therefore a+2b+1=0$ ...... ㉡

또 점 $(8,\ 3)$을 지나므로

$8b+3a+1=0 \qquad \therefore 3a+8b+1=0$ ... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=1$

$\therefore a+b=-3+1=-2$ 답 ①

29 직선 $2x-y+a=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2y-x+a=0$

$\therefore x-2y-a=0$ ······ ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-1)^2+y^2=1$에 접하므로 원의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다. 즉,

$\dfrac{|1-a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=1,\ |1-a|=\sqrt{5}$

$1-a=\pm\sqrt{5}$ $\quad\therefore a=1+\sqrt{5}\ (\because a>0)$ 답 $1+\sqrt{5}$

30 직선 $l : y=7x+a$를 원점에 대하여 대칭이동한 직선 m의 방정식은

$-y=-7x+a$

$\therefore 7x-y-a=0$

이때 두 직선 l, m 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점 $(0,\ a)$와 직선 m 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|-a-a|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$

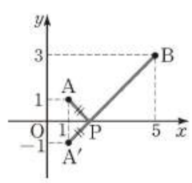
$|-2a|=30,\ 4a^2=900$

$a^2=225$ $\quad\therefore a=\pm15$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은

$(-15)\cdot15=-225$ 답 ①

31 점 A(1, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′(1, −1)이므로 두 점 A′(1, −1), B(5, 3)을 이은 직선과 x축이 만나는 점이 $\overline{AP}+\overline{BP}$를 최소로 하는 점 P이다.



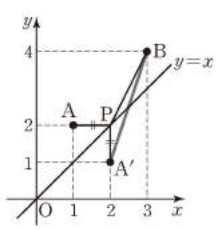
이때 두 점 A′(1, −1), B(5, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\dfrac{3+1}{5-1}(x-1)$

$\therefore y=x-2$

따라서 점 P의 좌표는 (2, 0)이다. 답 ②

32 점 A(1, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′(2, 1)



오른쪽 그림에서

$\overline{AP}+\overline{BP}$

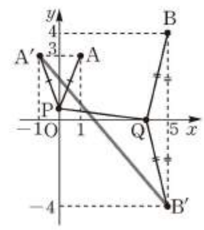
$=\overline{A'P}+\overline{BP}\ge\overline{A'B}$

$=\sqrt{(3-2)^2+(4-1)^2}$

$=\sqrt{10}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{10}$이다. 답 ①

33 점 A(1, 3)을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B(5, 4)를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



A′(−1, 3), B′(5, −4)

$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$

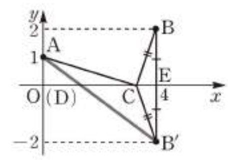
$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\ge\overline{A'B'}$

$=\sqrt{(5+1)^2+(-4-3)^2}$

$=\sqrt{85}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{85}$이다. 답 $\sqrt{85}$

34 오른쪽 그림과 같이 D지점을 원점, 직선 DE를 x축으로 하는 좌표평면을 생각할 수 있다.



공장 A의 위치를 점 A, 공장 B의 위치를 점 B라 하면

A(0, 1), B(4, 2)

이고, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′(4, −2)

이때 $\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AC}+\overline{B'C}\ge\overline{AB'}$이므로 창고 C에서 두 공장 A, B까지의 거리의 합의 최솟값은 $\overline{AB'}$의 길이와 같고, 그때 D지점으로부터 창고 C까지의 거리는 직선 AB′의 x절편과 같다.

직선 AB′의 방정식은 $y=-\dfrac{3}{4}x+1$이므로

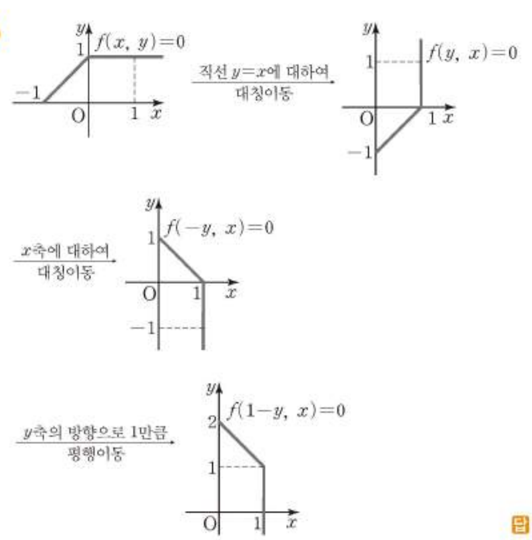
$0=-\dfrac{3}{4}x+1,\ \dfrac{3}{4}x=1$

$\therefore x=\dfrac{4}{3}$

따라서 구하는 거리는 $\dfrac{4}{3}$ km이다. 답 ②

35 $f(-x,\ -y)=0$은 $f(x,\ y)=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 것이다. 답 ③

36

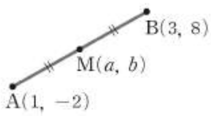


답 ④

오답 피하기

$f(-y,\ x)=0$을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 $f(-y,\ x-1)=0$ 또는 $f(-y-1,\ x)=0$으로 하지 않도록 주의한다.

37 오른쪽 그림에서

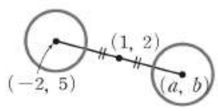


$\frac{1+3}{2}=a,\ \frac{-2+8}{2}=b$

$\therefore\ a=2,\ b=3$

따라서 점 M의 좌표는 $(2,\ 3)$이다. 답 ④

38 원의 중심 $(-2,\ 5)$를 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면



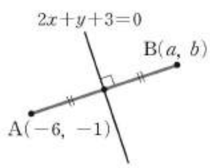
$\frac{-2+a}{2}=1,\ \frac{5+b}{2}=2$

$\therefore\ a=4,\ b=-1$

따라서 중심이 $(4,\ -1)$이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+1)^2=4$ 답 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$

39 두 점 $A(-6,\ -1)$, $B(a,\ b)$에 대하여 $\overline{AB}$의 중점은



$\left(\frac{-6+a}{2},\ \frac{-1+b}{2}\right)$

이고, 이 점은 직선 $2x+y+3=0$ 위의 점이므로

$2\cdot\frac{-6+a}{2}+\frac{-1+b}{2}+3=0$

$\therefore\ 2a+b-7=0$ ······ ㉠

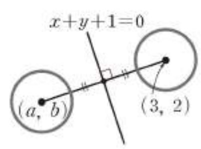
또 직선 AB는 직선 $2x+y+3=0$과 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은

$\frac{b+1}{a+6}\cdot(-2)=-1$ $\quad\therefore\ a-2b+4=0$ ··· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=3$

$\therefore\ a+b=5$ 답 ⑤

40 원의 중심 $(3,\ 2)$를 직선 $x+y+1=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(3,\ 2)$, $(a,\ b)$의 중점은



$\left(\frac{3+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$

이고, 이 점은 직선 $x+y+1=0$ 위의 점이므로

$\frac{3+a}{2}+\frac{2+b}{2}+1=0$

$\therefore\ a+b+7=0$ ······ ㉠

또 두 점 $(3,\ 2)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선은 직선 $x+y+1=0$과 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은

$\frac{b-2}{a-3}\cdot(-1)=-1$

$\therefore\ a-b-1=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-4$

따라서 중심이 $(-3,\ -4)$이므로 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y+4)^2=9$ 답 $(x+3)^2+(y+4)^2=9$

단계별 기출학습

본문 178~181쪽

01 ④	02 5	03 10	04 ②	05 ③
06 ④	07 ⑤	08 -4	09 ④, ⑤	
10 $3\sqrt{2}-2$	11 ②	12 ②	13 ②	14 5
15 ⑤	16 ④	17 7	18 $(-9,\ 0)$	
19 ④	20 $\sqrt{58}$	21 ④	22 $2+5\sqrt{2}$	
23 $-9<k<1$				

01 주어진 평행이동은 점 $(x,\ y)$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$(-2,\ 3) \longrightarrow (-2+1,\ 3-2)$, 즉 $(-1,\ 1)$

이때 점 $(-1,\ 1)$은 직선 $y=mx+5$ 위의 점이므로

$1=-m+5$

$\therefore\ m=4$

02 $(1,\ 3) \to (2,\ 3) \to (3,\ 3) \to (4,\ 3) \to (4,\ 2) \to (4,\ 1)$

따라서 점 P가 5번 이동한 후의 점의 좌표는 $(4,\ 1)$이므로

$a=4,\ b=1$

$\therefore\ a+b=5$

03 세 점 $A(3,\ 2)$, $B(4,\ 4)$, $C(5,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{3+4+5}{3},\ \frac{2+4-3}{3}\right)$, 즉 $(4,\ 1)$

이때 점 $(4,\ 1)$을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(7,\ 8)$이므로

$4+p=7,\ 1+q=8$

따라서 $p=3,\ q=7$이므로

$p+q=10$

04 직선 $2x-ay+b=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-3)-a(y+1)+b=0$

$\therefore\ 2x-ay-6-a+b=0$

이 직선이 $2x+3y-4=0$과 일치하므로

$a=-3,\ -6-a+b=-4$

따라서 $a=-3,\ b=-1$이므로

$a-b=-3-(-1)=-2$

05 $y=x^2+4x-1$에서 $y=(x+2)^2-5$이므로 포물선 $y=(x+2)^2-5$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y=(x-a+2)^2-5$ ...... ㉠

포물선 ㉠이 점 $(1,\ 11)$을 지나므로

$11=(3-a)^2-5$

$a^2-6a-7=0,\ (a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=7\ (\because a>0)$

따라서 평행이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(5,\ -5)$이다.

06 $x^2+y^2+8x+2y+13=0$에서 $(x+4)^2+(y+1)^2=4$

또 $x^2+y^2-4x=0$에서 $(x-2)^2+y^2=4$

이때 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 원 O의 중심 $(-4,\ -1)$이 원 O'의 중심 $(2,\ 0)$으로 옮겨지므로 $-4+a=2$에서 $a=6$, $-1+b=0$에서 $b=1$

$\therefore a+b=6+1=7$

07 직선 $y=mx$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=m(x-a)$

$\therefore y=mx-ma$ ...... ㉠

이때 두 원

$(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ (x-2)^2+(y-3)^2=1$

의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 원의 중심 $(1,\ 1)$, $(2,\ 3)$을 지나야 하므로 두 원의 중심을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{3-1}{2-1}(x-1)$

$\therefore y=2x-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡이 서로 같으므로 $m=2,\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore a+m=\frac{5}{2}$

08 점 $(3,\ 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(3,\ -4)$, y축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(-3,\ 4)$이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4+4}{-3-3}=-\frac{4}{3}$

이때 두 점 P, Q를 지나는 직선에 수직이고, 점 $(4,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{4}(x-4)+6$, 즉 $y=\frac{3}{4}x+3$

이므로 $y=0$일 때, x의 값은

$0=\frac{3}{4}x+3 \quad \therefore x=-4$

따라서 구하는 x절편은 -4이다.

09 점 $(-4,\ 5)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-4,\ -5)$

점 $(-4,\ -5)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(4,\ -5)$

점 $(4,\ -5)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-4,\ 5)$

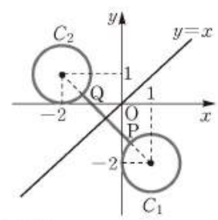
따라서 점 $(-4,\ -5)$, $(4,\ -5)$, $(-4,\ 5)$가 이 순서대로 반복되어 나타나므로 좌표평면 위에 나타날 수 없는 점은 ④, ⑤이다.

10 원 C_1 : $x^2+y^2-2x+4y+4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 방정식은

$x^2+y^2+4x-2y+4=0$

즉, C_1 : $(x-1)^2+(y+2)^2=1$,

C_2 : $(x+2)^2+(y-1)^2=1$이므로 원 C_1의 중심의 좌표는 $(1,\ -2)$, 원 C_2의 중심의 좌표는 $(-2,\ 1)$이다.



따라서 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 두 원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 것과 같으므로

$\sqrt{(-2-1)^2+(1+2)^2}-(1+1)=3\sqrt{2}-2$

11 직선 $y=-x+2$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+1=-(x-1)+2$

$\therefore y=-x+2$ ...... ㉠

또 직선 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x=-y+2$

$\therefore y=-x+2$

12 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=25$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-2)^2=25$ ...... ㉠

또 원 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-4)^2+(x-2)^2=25$

$\therefore (x-2)^2+(y-4)^2=25$ ...... ㉡

이때 원 ㉡이 x축과 만나는 두 점의 x좌표는

$(x-2)^2+16=25,\ (x-2)^2=9$

$x-2=\pm 3$

에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 x축과 만나는 두 점 A, B는 $(-1,\ 0)$, $(5,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=5-(-1)=6$

13 $y=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$ ······ ㉠

$y=-x^2+2x-5=-(x-1)^2-4$ ······ ㉡

두 포물선 ㉠, ㉡이 점 P에 대하여 대칭이므로 꼭짓점 $(3,\ 1)$, $(1,\ -4)$는 점 P에 대하여 대칭이다.

따라서 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{3+1}{2}=2,\ b=\frac{1-4}{2}=-\frac{3}{2}$$

이므로 점 P의 좌표는 $\left(2,\ -\frac{3}{2}\right)$이다.

14 두 점 $(1,\ -2)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right)$는 직선 $x+2y-2=0$ 위의 점이므로

$$\frac{1+a}{2}+2\cdot\frac{-2+b}{2}-2=0$$

$\therefore a+2b=7$ ······ ㉠

또 두 점 $(1,\ -2)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $x+2y-2=0$과 수직이므로

$$\frac{b+2}{a-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \qquad \therefore 2a-b=4 \text{ ······ ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$ $\qquad \therefore a+b=5$

15 $x^2+y^2-4x+8y=5$에서 $(x-2)^2+(y+4)^2=25$이므로 원 $x^2+y^2=25$의 중심 $(0,\ 0)$이 직선 $y=mx+n$에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(2,\ -4)$이다.

이때 두 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ -4)$의 중점 $(1,\ -2)$는 직선 $y=mx+n$ 위의 점이므로

$-2=m+n$ ······ ㉠

또 두 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ -4)$를 지나는 직선은 직선 $y=mx+n$과 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은

$$\frac{-4}{2}\cdot m=-1,\ 2m=1 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$$

$m=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $n=-\frac{5}{2}$

$$\therefore m-n=\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)=3$$

16 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$가 포물선 $y=-x^2+6x-7$ 위의 점이므로

$$b=-a^2+6a-7,\ d=-c^2+6c-7$$

또 두 점 P, Q가 직선 $y=x-4$에 대하여 대칭이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기는 -1이다. 즉,

$$\begin{aligned}\frac{d-b}{c-a}&=\frac{(-c^2+6c-7)-(-a^2+6a-7)}{c-a}\\&=\frac{(a^2-c^2)-6(a-c)}{c-a}\\&=\frac{(a-c)(a+c)-6(a-c)}{-(a-c)}\\&=\frac{(a-c)(a+c-6)}{-(a-c)}\\&=-(a+c)+6=-1\end{aligned}$$

$\therefore a+c=7$

17 $x^2+y^2+8x-6y=0$에서 $(x+4)^2+(y-3)^2=25$

이 원을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-y+4)^2+(-x-3)^2=25$

$\therefore (x+3)^2+(y-4)^2=25$ ······ ㉠

직선 $x-y+a=0$이 원 ㉠의 둘레의 길이를 이등분하므로 직선 $x-y+a=0$은 원의 중심 $(-3,\ 4)$를 지나야 한다. 즉, $-3-4+a=0$이므로

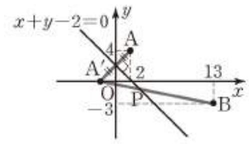
$a=7$

18 $(3,\ 2) \xrightarrow{(가)} (1,\ 3) \xrightarrow{(가)} (-1,\ 4) \xrightarrow{(나)} (-3,\ 3)$
$\xrightarrow{(나)} (-5,\ 2) \xrightarrow{(나)} (-7,\ 1) \xrightarrow{(나)} (-9,\ 0)$

이므로 점 $(3,\ 2)$는 점 $(-9,\ 0)$에서 멈춘다.

따라서 점 P의 좌표는 $(-9,\ 0)$이다.

19 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$를 직선 $x+y-2=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'(c,\ d)$라 하면 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{A}'(c,\ d)$의



중점 $\left(\frac{2+c}{2},\ \frac{4+d}{2}\right)$는 직선 $x+y-2=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2+c}{2}+\frac{4+d}{2}-2=0$$

$\therefore c+d=-2$ ······ ㉠

또 직선 AA'은 직선 $x+y-2=0$에 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은

$$\frac{d-4}{c-2}\cdot(-1)=-1$$

$\therefore c-d=-2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$c=-2,\ d=0$

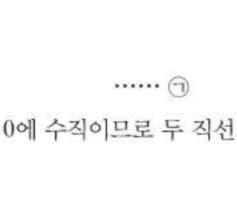
이때 두 점 $\mathrm{A}'(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(13,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{5}(x+2)$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$를 최소로 하는 점 P는 두 직선 $y=-x+2$, $y=-\frac{1}{5}(x+2)$의 교점이다.

따라서 점 P의 좌표는 $(3,\ -1)$이므로

$a=3,\ b=-1$

$\therefore ab=-3$

20 점 $\mathrm{A}(5,\ 2)$를 직선 $y=x$와 x축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A', A''이라 하면



$\mathrm{A}'(2,\ 5)$, $\mathrm{A}''(5,\ -2)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B}}$, $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CA''}}$이므로

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}\\&=\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA''}}\geq\overline{\mathrm{A'A''}}\\&=\sqrt{(5-2)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{58}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}$의 최솟값은 $\sqrt{58}$이다.

21 $2x+y-1=0$과 $x+y-3=0$을 연립하여 풀면

$x=-2,\ y=5$

따라서 두 직선 $2x+y-1=0$, $x+y-3=0$의 교점을 P라 하면 점 P의 좌표는 $(-2,\ 5)$이다.

이때 직선 $2x+y-1=0$ 위의 한 점 $A(0,\ 1)$을 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $B(p,\ q)$라 하면 선분 AB의 중점 $\left(\frac{p}{2},\ \frac{q+1}{2}\right)$은 직선 $x+y-3=0$ 위의 점이므로

$\frac{p}{2}+\frac{q+1}{2}-3=0 \qquad \therefore p+q-5=0$ ⋯ ㉠

또 직선 AB는 직선 $x+y-3=0$과 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은

$\frac{q-1}{p-0}\cdot(-1)=-1 \qquad \therefore p-q+1=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=2,\ q=3$

$\therefore B(2,\ 3)$

따라서 직선 $2x+y-1=0$을 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이동한 직선은 두 직선의 교점 P와 점 B를 지나는 직선이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{3-5}{2-(-2)}(x+2),\ x+2y-8=0$

즉, $a=2,\ b=-8$이므로

$a-b=2-(-8)=10$

22 점 $(-3,\ 1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(2,\ 5)$라 하면

$-3+a=2,\ 1+b=5$

$\therefore a=5,\ b=4$

이때 직선 $y=-x+1$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선 l의 방정식은

$y-4=-(x-5)+1$

$\therefore x+y-10=0$

⋯⋯ ❶

따라서 원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{10\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

⋯⋯ ❷

이고, 원의 반지름의 길이가 2이므로 직선 l과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P 사이의 거리의 최댓값은 $2+5\sqrt{2}$이다.

⋯⋯ ❸

채점 기준	성취도
❶ 직선 l의 방정식 구하기	30 %
❷ 원의 중심과 직선 l 사이의 거리 구하기	30 %
❸ 답 구하기	40 %

23 원 $x^2+y^2+6x+4y+8=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x-4y+8=0$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=5$ ⋯⋯ ㉠

⋯⋯ ❶

원 ㉠과 직선 $2x-y+k=0$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$보다 작아야 하므로

$\frac{|6-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}<\sqrt{5}$

⋯⋯ ❷

$|k+4|<5,\ -5<k+4<5$

$\therefore -9<k<1$

⋯⋯ ❸

채점 기준	성취도
❶ 대칭이동한 원의 방정식 구하기	30 %
❷ 직선과 원이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 조건 구하기	30 %
❸ k의 값의 범위 구하기	40 %

12 도형의 이동

MEMO