만렙 PM

정답과 해설

수학 I

01 지수

핵심 유형

	유형01 ②	유형02 ⑤	유형03 ②
유형04 $\frac{1}{8}$	유형05 10	유형06 ④	유형07 ①
유형08 2	유형09 $\frac{3}{2}$	유형10 $\frac{1}{3}$	유형11 ⑤
유형12 2배			

핵심 유형 완성하기

001 ⑤	002 -30	003 ②	004 ㄱ, ㄷ	005 ④
006 $\sqrt[3]{3}$	007 1	008 7	009 ①	010 -3
011 ④	012 2	013 ③	014 $\frac{29}{24}$	015 ②
016 59	017 $\frac{4}{33}$	018 ③	019 $\sqrt{6}$	020 ④
021 ①	022 19	023 ③	024 ③	025 $\frac{7}{12}$
026 2	027 ⑤	028 ④	029 ⑤	030 4
031 4	032 ⑤	033 18	034 5	035 3
036 ④	037 $\frac{3}{5}$	038 ③	039 ⑤	040 ④
041 1	042 ②	043 ①	044 81	045 49
046 ④	047 ⑤	048 ①	049 $\frac{6}{5}$	
050 640 hPa		051 ①		

핵심 유형 최종 점검하기

1 4	2 ②	3 ①	4 ②	5 14
6 ②	7 ④	8 ①	9 ⑤	10 ②
11 6	12 ②	13 ⑤	14 $\frac{1}{8}$배	

핵심 유형 8~10쪽

유형01 답 ②

① 8의 세제곱근은 $x^3=8$의 근이므로 3개이다.
② $(-4)^2=16$의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm2$이다.
③ $\sqrt{25}=5$의 제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{5}$이다.
④ -81의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.
⑤ n이 짝수일 때, -36의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.
따라서 옳은 것은 ②이다.

유형02 답 ⑤

① $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$
② $\dfrac{\sqrt[3]{75}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{75}{5}}=\sqrt[3]{15}$
③ $\sqrt{\sqrt[3]{6}}=\sqrt[6]{6}$
④ $\sqrt[8]{4^3}=\sqrt[8]{(2^2)^3}=\sqrt[8]{2^6}=\sqrt[4]{2^3}$
⑤ $\left(\sqrt{7}\times\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)^6=(\sqrt{7})^6\times\dfrac{1}{(\sqrt[3]{7})^6}=\sqrt{7^6}\times\dfrac{1}{\sqrt[3]{7^6}}$
$=7^3\times\dfrac{1}{7^2}=7$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

유형03 답 ②

$$\frac{4^{-3}+2^{-3}}{9}\times\frac{10}{27^2+3^8}=\frac{(2^2)^{-3}+2^{-3}}{9}\times\frac{10}{(3^3)^2+3^8}$$
$$=\frac{2^{-6}+2^{-3}}{9}\times\frac{10}{3^6+3^8}$$
$$=\frac{2^{-6}(1+2^3)}{9}\times\frac{10}{3^6(1+3^2)}$$
$$=2^{-6}\times3^{-6}=6^{-6}$$

유형04 답 $\frac{1}{8}$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[12]{a}\times\sqrt[24]{a}=a^{\frac{1}{12}}\times a^{\frac{1}{24}}$$
$$=a^{\frac{1}{12}+\frac{1}{24}}=a^{\frac{1}{8}}$$
$\therefore\ k=\dfrac{1}{8}$

유형05 답 10

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{8}{3}}\times125^{-\frac{2}{3}}\times100^{\frac{3}{2}}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}\times\frac{8}{3}}\times(5^3)^{-\frac{2}{3}}\times(10^2)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times5^{-2}\times10^3$$
$$=2^{-2}\times5^{-2}\times10^3$$
$$=10^{-2}\times10^3=10$$

유형06 답 ④

$4^3=a$에서 $(2^2)^3=a$, $2^6=a$ $\quad\therefore\ 2=a^{\frac{1}{6}}$
$27^2=b$에서 $(3^3)^2=b$, $3^6=b$ $\quad\therefore\ 3=b^{\frac{1}{6}}$
$\therefore\ 36^5=(2^2\times3^2)^5=2^{10}\times3^{10}$
$=(a^{\frac{1}{6}})^{10}\times(b^{\frac{1}{6}})^{10}=a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{3}}$

유형07 답 ①

$$(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$$
$$=\{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$$
$$=(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$$
$$=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2$$
$$=a-b$$

유형08 답 2

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$a+2+a^{-1}=5$ ∴ $a+a^{-1}=3$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2+2+a^{-2}=9$ ∴ $a^2+a^{-2}=7$

∴ $\dfrac{a^2+a^{-2}+5}{a+a^{-1}+3}=\dfrac{7+5}{3+3}=2$

유형09 답 $\frac{3}{2}$

주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}$$
$$=\frac{5+1}{5-1}=\frac{3}{2}$$

유형10 답 $\frac{1}{3}$

$2^x=216$에서 $2=216^{\frac{1}{x}}=(6^3)^{\frac{1}{x}}=6^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$3^y=216$에서 $3=216^{\frac{1}{y}}=(6^3)^{\frac{1}{y}}=6^{\frac{3}{y}}$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면 $6=6^{\frac{3}{x}}\times6^{\frac{3}{y}}$, $6^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}}=6$

$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$ ∴ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$

유형11 답 ⑤

$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{4}=4^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}$

2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=(3^2)^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$

$2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$

이때 $6^{\frac{1}{6}}<8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$이므로 $\sqrt[6]{6}<\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$

유형12 답 2배

수심이 8 m인 곳에서의 빛의 세기는 $I_8=I_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

수심이 12 m인 곳에서의 빛의 세기는 $I_{12}=I_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$

∴ $\dfrac{I_8}{I_{12}}=\dfrac{I_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{I_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}=2$

따라서 수심이 8 m인 곳에서의 빛의 세기는 수심이 12 m인 곳에서의 빛의 세기의 2배이다.

핵심 유형 완성하기 11~17쪽

001 답 ⑤

① 81의 세제곱근은 방정식 $x^3=81$의 근이므로 3개이다.

② $-\sqrt{64}=-8$의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-8}=-2$이다.

③ $0.1^2=0.01$의 제곱근 중 실수인 것은 ±0.1이다.

④ n이 홀수일 때, -5의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-5}$이다.

⑤ n이 짝수일 때, -9의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

002 답 -30

$\sqrt{625}=25$의 네제곱근 중 음의 실수인 것은 $-\sqrt[4]{25}=-\sqrt{5}$이므로

$a=-\sqrt{5}$

-216의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-216}=-6$이므로

$b=-6$

∴ $a^2b=(-\sqrt{5})^2\times(-6)=-30$

003 답 ②

① $\sqrt[3]{-5}$는 실수이므로 $(-5,\ 3)\in S$

② $\sqrt{-3}$은 실수가 아니므로 $(-3,\ 2)\notin S$

③ $\sqrt[3]{-3}$은 실수이므로 $(-3,\ 3)\in S$

④ $\sqrt{3}$은 실수이므로 $(3,\ 2)\in S$

⑤ $\sqrt[3]{5}$는 실수이므로 $(5,\ 3)\in S$

따라서 집합 S의 원소가 아닌 것은 ②이다.

004 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 6의 제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^2=6$의 실근이므로 $\pm\sqrt{6}$의 2개이다.

∴ $N(6,\ 2)=2$

ㄴ. -7의 3제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^3=-7$의 실근이므로 $\sqrt[3]{-7}$의 1개이다.

∴ $N(-7,\ 3)=1$

ㄷ. n이 홀수일 때, $N(x,\ n)=1$

ㄹ. n이 짝수일 때

$x>0$이면 $N(x,\ n)=2$

$x=0$이면 $N(x,\ n)=1$

$x<0$이면 $N(x,\ n)=0$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

005 답 ④

① $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

② $\dfrac{\sqrt[3]{0.01}}{\sqrt[3]{10}}=\sqrt[3]{\dfrac{0.01}{10}}=\sqrt[3]{0.001}=\sqrt[3]{0.1^3}=0.1$

③ $\sqrt[3]{2^6}\div(\sqrt[5]{32})^2=\sqrt[3]{4^3}\div(\sqrt[5]{2^5})^2=4\div2^2=1$

④ $\sqrt{\sqrt{81}}\times\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[4]{81}\times\sqrt[6]{64}=\sqrt[4]{3^4}\times\sqrt[6]{2^6}=3\times2=6$

⑤ $\sqrt[9]{4^6}\times\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[3]{4^2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{4^3}=4$

006 답 $\sqrt[3]{3}$

$$\frac{\sqrt[3]{81}+\sqrt[6]{36}}{\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{\sqrt{4}}}=\frac{\sqrt[3]{3^3\times3}+\sqrt[6]{6^2}}{\sqrt[3]{3^2}\times\sqrt[3]{3}+\sqrt[6]{2^2}}=\frac{3\times\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[3]{2}}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{3}(3+\sqrt[3]{2})}{3+\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{3}$$

007 답 1

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}$$
$$=\frac{\sqrt[4]{\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}}\times\frac{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt{\sqrt[4]{a}}}\times\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$$
$$=\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}}\times\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}}\times\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[6]{a}}=1$$

008 답 7

$\sqrt{\sqrt[3]{a^3b^4}\times\sqrt{a^5b^2}}\div\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^9b^5}}$

$=\sqrt{\sqrt[3]{a^3b^4}}\times\sqrt{\sqrt{a^5b^2}}\div\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^9b^5}}$

$=\sqrt[6]{a^3b^4}\times\sqrt[4]{a^5b^2}\div\sqrt[12]{a^9b^5}$

$=\dfrac{\sqrt[12]{a^6b^8}\times\sqrt[12]{a^{15}b^6}}{\sqrt[12]{a^9b^5}}$

$=\sqrt[12]{\dfrac{a^6b^8\times a^{15}b^6}{a^9b^5}}$

$=\sqrt[12]{a^{12}b^9}=a\sqrt[4]{b^3}$

따라서 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=7$

009 답 ①

$\dfrac{25^{-2}+5^{-5}}{3}\times\dfrac{5}{3^7+3^5}=\dfrac{(5^2)^{-2}+5^{-5}}{3}\times\dfrac{5}{3^7+3^5}$

$=\dfrac{5^{-4}+5^{-5}}{3}\times\dfrac{5}{3^7+3^5}$

$=\dfrac{5^{-5}(5+1)}{3}\times\dfrac{5}{3^5(3^2+1)}$

$=5^{-5}\times3^{-5}=15^{-5}$

010 답 −3

$3^{-3}\div(3^{-2})^{-4}\times3^8=3^{-3}\div3^8\times3^8=3^{-3-8+8}=3^{-3}$

$\therefore\ k=-3$

011 답 ④

$\sqrt{\dfrac{8^{-4}+4^{-11}}{8^{-10}+4^{-10}}}=\sqrt{\dfrac{(2^3)^{-4}+(2^2)^{-11}}{(2^3)^{-10}+(2^2)^{-10}}}=\sqrt{\dfrac{2^{-12}+2^{-22}}{2^{-30}+2^{-20}}}$

$=\sqrt{\dfrac{2^{-22}(2^{10}+1)}{2^{-30}(1+2^{10})}}=\sqrt{2^{-22-(-30)}}$

$=\sqrt{2^8}=2^4=16$

012 답 2

$\dfrac{1}{2^{-3}+1}+\dfrac{1}{2^{-1}+1}+\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{1}{2^3+1}$

$=\dfrac{2^3}{1+2^3}+\dfrac{2}{1+2}+\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{1}{2^3+1}$

$=\dfrac{2^3+1}{2^3+1}+\dfrac{2+1}{2+1}=1+1=2$

다른 풀이 $\left(\dfrac{1}{2^{-3}+1}+\dfrac{1}{2^3+1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^{-1}+1}+\dfrac{1}{2+1}\right)$

$=\dfrac{2^3+1+2^{-3}+1}{(2^{-3}+1)(2^3+1)}+\dfrac{2+1+2^{-1}+1}{(2^{-1}+1)(2+1)}$

$=\dfrac{2^3+2^{-3}+2}{1+2^{-3}+2^3+1}+\dfrac{2+1+2^{-1}+1}{1+2^{-1}+2+1}$

$=1+1=2$

013 답 ③

$\sqrt{a\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}\times a^2}}=\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$

$=\sqrt{a}\times\sqrt[18]{a}\times\sqrt[3]{a}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{18}}\times a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}}$

$=a^{\frac{8}{9}}=\sqrt[9]{a^8}$

$\therefore\ k=8$

014 답 $\frac{29}{24}$

$\sqrt{3\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[4]{27}}=\sqrt{3}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^2}}\times\sqrt{\sqrt[4]{3^3}}=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{3}{8}}$

$=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{3}{8}}=3^{\frac{29}{24}}$

$\therefore\ k=\dfrac{29}{24}$

015 답 ②

$\sqrt{\sqrt[3]{xy^2}\div\sqrt{xy}}\times\sqrt[4]{x^3y}=\sqrt{\sqrt[3]{xy^2}}\div\sqrt{\sqrt{xy}}\times\sqrt[4]{x^3y}$

$=\sqrt[6]{xy^2}\div\sqrt[4]{xy}\times\sqrt[4]{x^3y}$

$=x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}}\div x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\times x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$

$=x^{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$

$=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

016 답 59

$\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}}$

$=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{9}}\times2^{\frac{1}{27}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}=2^{\frac{13}{27}}$

$\sqrt[6]{4\sqrt[6]{4}}=\sqrt[6]{4}\times\sqrt[6]{\sqrt[6]{4}}=\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[6]{\sqrt[6]{2^2}}$

$=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{18}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{18}}=2^{\frac{7}{18}}$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}}{\sqrt[6]{4\sqrt[6]{4}}}=2^{\frac{13}{27}-\frac{7}{18}}=2^{\frac{5}{54}}$

따라서 $p=54$, $q=5$이므로 $p+q=59$

017 답 $\frac{4}{33}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=a^{\frac{1}{mn}}$이므로 $f(m,\ n)=\dfrac{1}{mn}$

$\therefore\ f(3,\ 5)+f(5,\ 7)+f(7,\ 9)+f(9,\ 11)$

$=\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\dfrac{1}{7\times9}+\dfrac{1}{9\times11}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{11}\right)=\dfrac{4}{33}$

018 답 ③

$\left\{\left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}\times\left\{\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{6}{5}}\right\}^{-\frac{5}{2}}=\left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{6}{5}\times\left(-\frac{5}{2}\right)}$

$=\left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}$

$=\left\{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\times4^3$

$=\dfrac{3}{4}\times4^3=48$

019 답 $\sqrt{6}$

$(a^{\sqrt{3}})^{3\sqrt{2}}\times(a^{\frac{1}{3}})^{6\sqrt{6}}\div a^{4\sqrt{6}}=a^{3\sqrt{6}}\times a^{2\sqrt{6}}\div a^{4\sqrt{6}}$

$=a^{3\sqrt{6}+2\sqrt{6}-4\sqrt{6}}=a^{\sqrt{6}}$

$\therefore\ k=\sqrt{6}$

020 답 ④

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \{2^{\alpha}\times2^{\beta}+(49^{\alpha})^{\beta}+1\}^{\alpha\beta}=(2^{\alpha+\beta}+7^{2\alpha\beta}+1)^{\alpha\beta}$

$=(2^3+7^{2\times\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}$

$=(2^3+8)^{\frac{1}{2}}=(2\times2^3)^{\frac{1}{2}}$

$=2^2=4$

021 답 ①

$\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{n}}=(3^{-6})^{\frac{1}{n}}=3^{-\frac{6}{n}}$이 자연수가 되려면 $-\frac{6}{n}$이 음이 아닌 정수이어야 하므로 구하는 정수 n은 -6, -3, -2, -1이다.

따라서 모든 정수 n의 값의 합은

$-6+(-3)+(-2)+(-1)=-12$

022 답 19

$\sqrt[4]{a^b}=a^{\frac{b}{4}}$이 자연수가 되려면

(i) $a=1$일 때

$b=1, 2, 3, \cdots, 9$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 9이다.

(ii) $a=4$일 때

$a^{\frac{b}{4}}=4^{\frac{b}{4}}=(2^2)^{\frac{b}{4}}=2^{\frac{b}{2}}$에서 $\frac{b}{2}$가 자연수가 되어야 하므로

$b=2, 4, 6, 8$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 4이다.

(iii) $a=2$ 또는 $a=3$ 또는 $a=5$일 때

$\frac{b}{4}$가 자연수가 되어야 하므로 $b=4, 8$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 2이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$9+4+3\times2=19$

023 답 ③

$3^5=a$에서 $3=a^{\frac{1}{5}}$

$16^2=b$에서 $(2^4)^2=b$, $2^8=b$ $\quad\therefore\ 2=b^{\frac{1}{8}}$

$\therefore\ 18^6=(2\times3^2)^6=2^6\times3^{12}=(b^{\frac{1}{8}})^6\times(a^{\frac{1}{5}})^{12}=a^{\frac{12}{5}}b^{\frac{3}{4}}$

024 답 ③

$125^{\frac{2}{5}a}=(5^3)^{\frac{2}{5}a}=5^{\frac{6}{5}a}=(5^a)^{\frac{6}{5}}=3^{\frac{6}{5}}=3\sqrt[5]{3}$

025 답 $\frac{7}{12}$

$a=\sqrt[3]{5}$, $b=\sqrt{3}$에서 $a^3=5$, $b^2=3$

$\therefore\ \sqrt[12]{45}=\sqrt[12]{3^2\times5}=\sqrt[12]{(b^2)^2\times a^3}=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}$

따라서 $m=\frac{1}{4}$, $n=\frac{1}{3}$이므로 $m+n=\frac{7}{12}$

026 답 2

$a^6=3$, $b^{12}=27=3^3$에서 $a=3^{\frac{1}{6}}$, $b=3^{\frac{1}{4}}$

$\therefore\ (\sqrt[4]{a^3b^6})^k=(a^3b^6)^{\frac{k}{4}}=\{(3^{\frac{1}{6}})^3\times(3^{\frac{1}{4}})^6\}^{\frac{k}{4}}$

$=(3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{3}{2}})^{\frac{k}{4}}=(3^2)^{\frac{k}{4}}=3^{\frac{k}{2}}$

따라서 $3^{\frac{k}{2}}$이 자연수가 되려면 k는 2의 배수이어야 하므로 자연수 k의 최솟값은 2이다.

027 답 ⑤

$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$=\{(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3\}+\{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2\}$

$=(a-b)+(a-b)$

$=2a-2b$

028 답 ④

$5^{2+\sqrt{2}}=A$, $5^{2-\sqrt{2}}=B$라고 하면

$(5^{2+\sqrt{2}}+5^{2-\sqrt{2}})^2-(5^{2+\sqrt{2}}-5^{2-\sqrt{2}})^2$

$=(A+B)^2-(A-B)^2$

$=\{(A+B)+(A-B)\}\{(A+B)-(A-B)\}$

$=2A\times2B=4AB$

$=4\times5^{2+\sqrt{2}}\times5^{2-\sqrt{2}}$

$=4\times5^4$

029 답 ⑤

$a^{-\frac{1}{3}}=A$, $a^{\frac{2}{3}}=B$라고 하면

$(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}})^3+(a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{2}{3}})^3$

$=(A+B)^3+(A-B)^3$

$=(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+(A^3-3A^2B+3AB^2-B^3)$

$=2(A^3+3AB^2)$

$=2\{(a^{-\frac{1}{3}})^3+3\times a^{-\frac{1}{3}}\times(a^{\frac{2}{3}})^2\}$

$=2(a^{-1}+3a)$

$=2\left(\frac{1}{2}+6\right)=13$

030 답 4

$a=\sqrt[3]{4}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$의 양변을 세제곱하면

$a^3=\left(\sqrt[3]{4}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^3=4-3\left(\sqrt[3]{4}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)-\frac{1}{4}$

이때 $\sqrt[3]{4}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=a$이므로 $a^3=4-3a-\frac{1}{4}$

$\therefore\ a^3+3a+\frac{1}{4}=4$

031 답 4

$\frac{1}{1-a^{-1}}+\frac{1}{1+a^{-1}}+\frac{2}{1+a^{-2}}+\frac{4}{1-a^4}$

$=\frac{2}{1-a^{-2}}+\frac{2}{1+a^{-2}}+\frac{4}{1-a^4}$

$=\frac{4}{1-a^{-4}}+\frac{4}{1-a^4}$

$=\frac{4(1-a^4)+4(1-a^{-4})}{(1-a^{-4})(1-a^4)}$

$=\frac{8-4a^4-4a^{-4}}{2-a^4-a^{-4}}$

$=\frac{4(2-a^4-a^{-4})}{2-a^4-a^{-4}}$

$=4$

032 답 ⑤

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$a-2+a^{-1}=9 \qquad \therefore a+a^{-1}=11$

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$a^{\frac{3}{2}}-3(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})-a^{-\frac{3}{2}}=27$

$\therefore a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=27+3\times3=36$

$\therefore \dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}+4}{a+a^{-1}-1}=\dfrac{36+4}{11-1}=4$

033 답 18

$2^x+2^{-x}=3$의 양변을 세제곱하면

$(2^x)^3+3(2^x+2^{-x})+(2^{-x})^3=27$

$8^x+8^{-x}+3\times3=27 \qquad \therefore 8^x+8^{-x}=18$

034 답 5

$(x+x^{-1})^2=x^2+2+x^{-2}=14+2=16$에서

$x+x^{-1}=4$ ($\because x+x^{-1}>0$)

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+2+x^{-1}=4+2=6$에서

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$ ($\because x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0$)

$\therefore x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+x+x^{-1}=4+\sqrt{6}$

따라서 $a=4$, $b=1$이므로 $a+b=5$

035 답 3

$a^{3x}-a^{-3x}=4$에서

$(a^x-a^{-x})^3+3(a^x-a^{-x})=4$

이때 $a^x-a^{-x}=t$(t는 실수)로 놓으면

$t^3+3t=4$, $t^3+3t-4=0$

$(t-1)(t^2+t+4)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t$는 실수)

즉, $a^x-a^{-x}=1$이므로

$a^{2x}+a^{-2x}=(a^x-a^{-x})^2+2=1+2=3$

$\therefore \dfrac{a^{2x}+a^{-2x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{3}{1}=3$

036 답 ④

$\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=3$에서 좌변의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$\dfrac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=3$, $\dfrac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=3$

$a^{2x}+1=3a^{2x}-3$, $2a^{2x}=4 \qquad \therefore a^{2x}=2$

$\therefore a^{2x}+a^{-2x}=a^{2x}+(a^{2x})^{-1}=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

037 답 $\frac{3}{5}$

$4^{\frac{1}{x}}=9$에서 $4=9^x \qquad \therefore 3^{2x}=4$

구하는 식의 분모, 분자에 3^x을 곱하면

$\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\dfrac{3^x(3^x-3^{-x})}{3^x(3^x+3^{-x})}=\dfrac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}$

$=\dfrac{4-1}{4+1}=\dfrac{3}{5}$

038 답 ③

구하는 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\dfrac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}-1}$

$=\dfrac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1}$

$=\dfrac{2^2+2^{-1}}{2-1}=\dfrac{9}{2}$

039 답 ⑤

구하는 식의 좌변의 분모, 분자에 2^x을 곱하면

$\dfrac{8^x+8^{-x}+2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{2^x(8^x+8^{-x}+2^x-2^{-x})}{2^x(2^x+2^{-x})}=\dfrac{2^{4x}+2^{-2x}+2^{2x}-1}{2^{2x}+1}$

$=\dfrac{(2^{2x})^2+(2^{2x})^{-1}+2^{2x}-1}{2^{2x}+1}$

$=\dfrac{(4^x)^2+(4^x)^{-1}+4^x-1}{4^x+1}$

$=\dfrac{3^2+3^{-1}+3-1}{3+1}=\dfrac{11+\frac{1}{3}}{4}=\dfrac{17}{6}$

따라서 $a=6$, $b=17$이므로 $b-a=11$

040 답 ④

$45^x=27$에서 $45=27^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$5^y=3$에서 $5=3^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $9=3^{\frac{3}{x}}\div3^{\frac{1}{y}}$, $3^{\frac{3}{x}-\frac{1}{y}}=3^2$

$\therefore \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=2$

041 답 1

$3^x=15$에서 $3=15^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$5^y=15$에서 $5=15^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면 $15=15^{\frac{1}{x}}\times15^{\frac{1}{y}}$, $15^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=15$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$

042 답 ②

$2.16^a=10$에서 $2.16=10^{\frac{1}{a}}$ …… ㉠

$216^b=10$에서 $216=10^{\frac{1}{b}}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$100=10^{\frac{1}{b}}\div10^{\frac{1}{a}}$, $10^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=100=10^2$

$\therefore \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=2$

043 답 ①

$2^x=3^y=6^z=k(k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$3^y=k$에서 $3=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$6^z=k$에서 $6=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$2\times3\div6=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}} \qquad \therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$

그런데 $k\neq1$이므로 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=0$

044 답 81

$3^a=2^4$에서 $2=3^{\frac{a}{4}}$

$2^b=5^5$에서 $5=2^{\frac{b}{5}}$

$\therefore\ 5^c=(2^{\frac{b}{5}})^c=2^{\frac{bc}{5}}=(3^{\frac{a}{4}})^{\frac{bc}{5}}=3^{\frac{abc}{20}}=3^4=81$

045 답 49

$a^x=b^y=7^z=k(k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$a^x=k$에서 $a=k^{\frac{1}{x}}$

$b^y=k$에서 $b=k^{\frac{1}{y}}$

$7^z=k$에서 $7=k^{\frac{1}{z}}$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=0$, 즉 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$이므로

$ab=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{2}{z}}=(k^{\frac{1}{z}})^2=7^2=49$

046 답 ④

$\sqrt[3]{\sqrt{27}}=27^{\frac{1}{6}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{20}}=20^{\frac{1}{6}}$

2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{6}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}=27^{\frac{1}{6}}$, $5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{6}}=(5^2)^{\frac{1}{6}}=25^{\frac{1}{6}}$

이때 $20^{\frac{1}{6}}<25^{\frac{1}{6}}<27^{\frac{1}{6}}$이므로 $\sqrt{\sqrt[3]{20}}<\sqrt[3]{5}<\sqrt[3]{\sqrt{27}}$

047 답 ⑤

$\sqrt[3]{\sqrt{16}}=\sqrt[6]{16}=16^{\frac{1}{6}}=(2^4)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt{3\sqrt[3]{2}}=\sqrt{3}\times\sqrt{\sqrt[3]{2}}=3^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{6}}$

$\sqrt{2\sqrt[3]{6}}=\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt[3]{6}}=2^{\frac{1}{2}}\times6^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}$

2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{6}}=(2^4)^{\frac{1}{6}}=16^{\frac{1}{6}}$

$3^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{3}{6}}\times2^{\frac{1}{6}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}\times2^{\frac{1}{6}}=(3^3\times2)^{\frac{1}{6}}=54^{\frac{1}{6}}$

$2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{4}{6}}\times3^{\frac{1}{6}}=(2^4)^{\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{6}}=(2^4\times3)^{\frac{1}{6}}=48^{\frac{1}{6}}$

이때 $16^{\frac{1}{6}}<48^{\frac{1}{6}}<54^{\frac{1}{6}}$이므로 $\sqrt[3]{\sqrt{16}}<\sqrt{2\sqrt[3]{6}}<\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$

따라서 $a=\sqrt[3]{\sqrt{16}}$, $b=\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$이므로

$ab^2=\sqrt[3]{\sqrt{16}}\times(\sqrt{3\sqrt[3]{2}})^2=2^{\frac{2}{3}}\times(3\times2^{\frac{1}{3}})$

$\quad=2\times3=6$

048 답 ①

(i) $A-B=(2\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})-(\sqrt{2}+2\sqrt[3]{3})$

$\quad=\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}=8^{\frac{1}{6}}-9^{\frac{1}{6}}<0$

$\quad\therefore\ A<B$

(ii) $B-C=(\sqrt{2}+2\sqrt[3]{3})-(2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2})$

$\quad=2(\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{5})=2(81^{\frac{1}{12}}-125^{\frac{1}{12}})<0$

$\quad\therefore\ B<C$

(i), (ii)에 의하여 $A<B<C$

049 답 $\frac{6}{5}$

$P=A\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$에서

$A=80$, $t=7$일 때, $P_1=80\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{4}}$

$A=100$, $t=3$일 때, $P_2=100\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

$\therefore\ \frac{P_1}{P_2}=\frac{80\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{4}}}{100\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{6}{5}$

050 답 640 hPa

해수면에서의 기압이 1000 hPa이므로

$1000=k\times a^0\qquad\therefore\ k=1000$

$\therefore\ P=1000a^x$

해발 1500 m 지점에서 기압이 800 hPa이므로

$800=1000\times a^{1500}\qquad\therefore\ a^{1500}=\frac{4}{5}$

따라서 해발 3000 m 지점에서 기압은

$P=1000a^{3000}=1000\times(a^{1500})^2=1000\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=640(\text{hPa})$

051 답 ①

증식하기 전 박테리아 A, B의 개체 수를 a마리라고 하면

박테리아 A는 3분마다 4배로 증가하므로 30분 후 A의 개체 수는

$a\times4^{10}=a\times2^{20}$(마리)

박테리아 B는 2분마다 2배로 증가하므로 30분 후 B의 개체 수는

$a\times2^{15}$(마리)

따라서 30분 후 A의 개체 수는 B의 개체 수의 $\frac{a\times2^{20}}{a\times2^{15}}=2^5$(배)가 된다.

핵심 유형 **최종 점검하기** 18~19쪽

1 답 4

유형 01 거듭제곱근

6의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{6}$의 1개이므로 $a=1$

-7의 네제곱근 중 실수인 것은 없으므로 $b=0$

-27의 세제곱근은 방정식 $x^3=-27$의 근이므로 3개이다.

$\therefore\ c=3$

$\therefore\ a+b+c=1+0+3=4$

2 답 ②

유형 02 거듭제곱근의 계산

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{81}}{81}}\times\sqrt{\frac{\sqrt{81}}{\sqrt[3]{81}}}=\frac{\sqrt[12]{3^4}}{\sqrt[4]{3^4}}\times\frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[6]{3^4}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\times\frac{3}{\sqrt[3]{3^2}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}}=\sqrt[3]{\frac{3}{3^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

3 답 ①

유형 02 거듭제곱근의 계산

$\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[24]{a^3}$

$=\sqrt[24]{a^{12}\times a^4\times a^3}=\sqrt[24]{a^{19}}$

따라서 $p=24$, $q=19$이므로 $p+q=43$

4 답 ②

유형 03 지수가 정수인 식의 계산

$(a^{-3}b^4)^{-2}\times(ab^{-2})^3=a^6b^{-8}\times a^3b^{-6}=a^9b^{-14}$

따라서 $m=9$, $n=-14$이므로 $m+n=-5$

5 답 14

유형 04 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내기

$\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}\div\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^k}\times a}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}\times\sqrt[3]{\sqrt{a}}\div(\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^k}}\times\sqrt[6]{a})$

$=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[6]{a}\div\sqrt[24]{a^k}\div\sqrt[6]{a}$

$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{k}{24}-\frac{1}{6}}=a^{\frac{14-k}{24}}$

이때 $a^{\frac{14-k}{24}}=1=a^0$이므로

$\frac{14-k}{24}=0 \qquad \therefore k=14$

6 답 ②

유형 05 지수가 실수인 식의 계산

$2^{\frac{3}{4}}\times3^{-\frac{4}{3}}\times(2^{-\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{4}}\times3^{-\frac{4}{3}}\times2^{\frac{1}{4}}\times3^{-\frac{1}{6}}$

$=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\times3^{-\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)}$

$=2\times3^{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

7 답 ④

유형 06 주어진 조건을 이용하여 문자로 나타내기

$\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2n}=3^{-m+2n}=3^{-m}\times3^{2n}=(3^m)^{-1}\times(3^n)^2$

$=a^{-1}\times b^2=\frac{b^2}{a}$

8 답 ①

유형 07 지수법칙과 곱셈 공식

$x=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$x^3=(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}})^3=3-3(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}})-3^{-1}$

이때 $3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}=x$이므로 $x^3=3-3x-\frac{1}{3}$

$\therefore x^3+3x=\frac{8}{3}$

$\therefore x^3+3x+4=\frac{8}{3}+4=\frac{20}{3}$

9 답 ⑤

유형 08 a^x+a^{-x} 꼴의 식의 값 구하기

$(5^x+5^{-x})^2=25^x+2+25^{-x}=194+2=196=14^2$에서

$5^x+5^{-x}=14$ ($\because 5^x+5^{-x}>0$)

$(5^{\frac{x}{2}}+5^{-\frac{x}{2}})^2=5^x+2+5^{-x}=14+2=16=4^2$에서

$5^{\frac{x}{2}}+5^{-\frac{x}{2}}=4$ ($\because 5^{\frac{x}{2}}+5^{-\frac{x}{2}}>0$)

$(5^{\frac{x}{4}}+5^{-\frac{x}{4}})^2=5^{\frac{x}{2}}+2+5^{-\frac{x}{2}}=4+2=6$에서

$5^{\frac{x}{4}}+5^{-\frac{x}{4}}=\sqrt{6}$ ($\because 5^{\frac{x}{4}}+5^{-\frac{x}{4}}>0$)

10 답 ②

유형 09 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 꼴의 식의 값 구하기

$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=5$에서 좌변의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$\frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=5$, $\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=5$

$a^{2x}+1=5a^{2x}-5$, $4a^{2x}=6 \qquad \therefore a^{2x}=\frac{3}{2}$

$\therefore a^{4x}-a^{-2x}=(a^{2x})^2-(a^{2x})^{-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

$=\frac{9}{4}-\frac{2}{3}=\frac{19}{12}$

11 답 6

유형 10 밑이 서로 다를 때 식의 값 구하기

$3^x=k$에서 $3=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$8^y=k$에서 $8=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$9^z=k$에서 $9=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면 $3\times8\times9=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\times k^{\frac{1}{z}}$, $k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=6^3$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$이므로

$k^3=6^3 \qquad \therefore k=6$

12 답 ②

유형 10 밑이 서로 다를 때 식의 값 구하기

$a^x=216=6^3$에서 $a=6^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$b^y=216=6^3$에서 $b=6^{\frac{3}{y}}$ …… ㉡

$c^z=216=6^3$에서 $c=6^{\frac{3}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$abc=6^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}}$

이때 $abc=36$이므로 $6^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}}=36=6^2$

$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=2 \qquad \therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$

13 답 ⑤

유형 11 거듭제곱근의 대소 비교

$A=\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}$, $B=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[6]{10}=10^{\frac{1}{6}}$, $C=\sqrt[4]{\sqrt[3]{98}}=\sqrt[12]{98}=98^{\frac{1}{12}}$

4, 6, 12의 최소공배수가 12이므로

$5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{12}}=(5^3)^{\frac{1}{12}}=125^{\frac{1}{12}}$, $10^{\frac{1}{6}}=10^{\frac{2}{12}}=(10^2)^{\frac{1}{12}}=100^{\frac{1}{12}}$

이때 $98^{\frac{1}{12}}<100^{\frac{1}{12}}<125^{\frac{1}{12}}$이므로 $\sqrt[4]{\sqrt[3]{98}}<\sqrt[3]{\sqrt{10}}<\sqrt[4]{5}$

$\therefore C<B<A$

14 답 $\frac{1}{8}$배

유형 12 지수의 실생활에의 활용

30시간 후 이 방사성 물질의 양이 처음 양의 $\frac{1}{4}$배가 되므로

$m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{30k}=\frac{1}{4}m_0 \qquad \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{30k}=\frac{1}{4}$

45시간 후 이 방사성 물질의 양은

$m_{45}=m_0\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{30k}\right\}^{\frac{3}{2}}=m_0\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}m_0$

따라서 45시간 후 이 방사성 물질의 양은 처음 양의 $\frac{1}{8}$배가 된다.

02 로그

핵심 유형

	유형01 192	유형02 2	유형03 ③
유형04 18	유형05 ④	유형06 ③	유형07 ③
유형08 ①	유형09 6	유형10 3.3343	유형11 ④
유형12 ③	유형13 22자리	유형14 ②	유형15 ③
유형16 -6	유형17 12		

핵심 유형 완성하기

001 $\sqrt[4]{5}$	002 ④	003 ⑤	004 ④	005 5
006 3	007 ①	008 $\frac{5}{2}$	009 ④	010 2
011 9	012 ①	013 10	014 ③	015 2
016 8	017 $\frac{25}{4}$	018 25	019 ①	020 20
021 ①	022 $\frac{a+2b}{4a+2b}$		023 ③	024 ②
025 ⑤	026 ③	027 ②	028 $-\frac{1}{2}$	029 ①
030 $\frac{7}{10}$	031 0	032 ①	033 4	034 4
035 17	036 -1	037 23	038 ⑤	
039 2.1761		040 9.9	041 20.1	042 -4
043 ⑤	044 ③	045 2.0949		046 ④
047 ①	048 12자리		049 2	050 ④
051 3	052 5	053 8	054 10000	055 31
056 60	057 4	058 ②	059 $-\frac{9}{5}$	
060 0.296	061 1.8	062 $\frac{1}{2}$배	063 ⑤	
064 32.7 %		065 10.4 %		

핵심 유형 최종 점검하기

1 ④	2 4	3 ③	4 ②	5 $\frac{3}{2}$
6 ③	7 ④	8 ④	9 0	10 $\frac{17}{4}$
11 -17	12 ①	13 1.0756	14 2	15 9000
16 ④	17 ⑤	18 13	19 ②	20 ④
21 $x^2-19x+90=0$		22 ③		

핵심 유형 22~23쪽

유형01 답 192

$\log_a 16=\frac{2}{3}$에서 $a^{\frac{2}{3}}=16=2^4$

$\therefore a=(2^4)^{\frac{3}{2}}=2^6=64$

$\log_{\sqrt{3}} b=-2$에서 $b=(\sqrt{3})^{-2}=\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{64}{\frac{1}{3}}=192$

유형02 답 2

밑의 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq1$이므로

$x>1$, $x\neq2$

$\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ ...... ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+5x>0$이므로

$x^2-5x<0$, $x(x-5)<0$

$\therefore 0<x<5$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<2$ 또는 $2<x<5$

따라서 정수 x는 3, 4의 2개이다.

유형03 답 ③

$\log_2 2\sqrt{3}+\log_2 6-\frac{3}{2}\log_2 3$

$=\log_2 2\sqrt{3}+\log_2 6-\log_2 3^{\frac{3}{2}}$

$=\log_2 2\sqrt{3}+\log_2 6-\log_2 3\sqrt{3}$

$=\log_2\left(\frac{2\sqrt{3}\times6}{3\sqrt{3}}\right)=\log_2 4$

$=\log_2 2^2=2$

유형04 답 18

$\log_2 125\times\log_3 8\times\log_5 9$

$=\log_2 5^3\times\frac{\log_2 2^3}{\log_2 3}\times\frac{\log_2 3^2}{\log_2 5}$

$=3\log_2 5\times\frac{3}{\log_2 3}\times\frac{2\log_2 3}{\log_2 5}$

$=18$

유형05 답 ④

$(\log_3 4+\log_9 8)(\log_2 27-\log_4 9)$

$=(\log_3 2^2+\log_{3^2} 2^3)(\log_2 3^3-\log_{2^2} 3^2)$

$=\left(2\log_3 2+\frac{3}{2}\log_3 2\right)(3\log_2 3-\log_2 3)$

$=\frac{7}{2}\log_3 2\times2\log_2 3$

$=7\log_3 2\times\frac{1}{\log_3 2}=7$

유형06 답 ③

$\log_3 2=a$, $\log_3 5=b$이므로

$$\log_{10} 40=\frac{\log_3 40}{\log_3 10}=\frac{\log_3(2^3\times5)}{\log_3(2\times5)}=\frac{\log_3 2^3+\log_3 5}{\log_3 2+\log_3 5}=\frac{3\log_3 2+\log_3 5}{\log_3 2+\log_3 5}=\frac{3a+b}{a+b}$$

유형07 답 ③

$4^x=36^y=12$에서 $x=\log_4 12$, $y=\log_{36} 12$이므로

$\frac{1}{x}=\log_{12} 4$, $\frac{1}{y}=\log_{12} 36$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_{12} 4+\log_{12} 36=\log_{12}(4\times 36)$

$=\log_{12} 12^2=2$

다른 풀이 $4^x=12$에서 $4=12^{\frac{1}{x}}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$36^y=12$에서 $36=12^{\frac{1}{y}}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠×㉡을 하면 $4\times 36=12^{\frac{1}{x}}\times 12^{\frac{1}{y}}$

$12^2=12^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ $\quad \therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$

유형08 답 ①

$\log_2 4<\log_2 7<\log_2 8$, 즉 $2<\log_2 7<3$이므로

$a=2$, $b=\log_2 7-2=\log_2 7-\log_2 4=\log_2 \frac{7}{4}$

$\therefore 4(a+2^b)=4(2+2^{\log_2 \frac{7}{4}})$

$=4\left(2+\frac{7}{4}\right)=15$

유형09 답 6

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=4$, $\log_2 a\times\log_2 b=2$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}=\frac{(\log_2 b)^2+(\log_2 a)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{4^2-2\times 2}{2}=6$

핵심 유형 **완성**하기 24~28쪽

001 답 $\sqrt[4]{5}$

$\log_a 2=4$에서 $a^4=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\log_2 5=b$에서 $2^b=5$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(a^4)^b=5$

$(a^b)^4=5$ $\quad \therefore a^b=\sqrt[4]{5}$ ($\because a>0$)

002 답 ④

④ $3^{-1}=\frac{1}{3} \Longleftrightarrow \log_3 \frac{1}{3}=-1$

003 답 ⑤

$\log_2(\log_3 a)=1$에서 $\log_3 a=2^1=2$

$\therefore a=3^2=9$

$\log_3\{\log_2(\log_4 b)\}=0$에서 $\log_2(\log_4 b)=3^0=1$

$\log_4 b=2^1=2$ $\quad \therefore b=4^2=16$

$\therefore a+b=9+16=25$

004 답 ④

$x=\log_5(1+\sqrt{2})$에서 $5^x=1+\sqrt{2}$

$\therefore 5^x+5^{-x}=5^x+\frac{1}{5^x}=(1+\sqrt{2})+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

$=(1+\sqrt{2})+(-1+\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

005 답 5

밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq 1$이므로

$x>3$, $x\neq 4$

$\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ $\cdots\cdots$ ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+7x+8>0$이므로

$x^2-7x-8<0$, $(x+1)(x-8)<0$

$\therefore -1<x<8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<8$

따라서 정수 x의 최솟값은 5이다.

006 답 3

$\log_x(x-2)^2$의 밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq 1$이므로

$0<x<1$ 또는 $x>1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\log_x(x-2)^2$의 진수의 조건에서 $(x-2)^2>0$이므로

$x\neq 2$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\log_{5-x}|x-5|$의 밑의 조건에서 $5-x>0$, $5-x\neq 1$이므로

$x<5$, $x\neq 4$

$\therefore x<4$ 또는 $4<x<5$ $\cdots\cdots$ ㉢

$\log_{5-x}|x-5|$의 진수의 조건에서 $|x-5|>0$이므로

$x\neq 5$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$0<x<1$ 또는 $1<x<2$ 또는 $2<x<4$ 또는 $4<x<5$

따라서 정수 x는 3이다.

007 답 ①

밑의 조건에서 $a>0$, $a\neq 1$이므로

$0<a<1$ 또는 $a>1$ $\cdots\cdots$ ㉠

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2-ax+2a>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2-ax+2a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4\times 2a<0$, $a(a-8)<0$

$\therefore 0<a<8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<a<1$ 또는 $1<a<8$

따라서 정수 a는 2, 3, 4, 5, 6, 7이므로 그 합은

$2+3+4+5+6+7=27$

008 답 $\frac{5}{2}$

$\log_3 54+\log_3 \frac{3}{2}-\log_3 3\sqrt{3}=\log_3 54+\log_3 \frac{3}{2}-\log_3 3^{\frac{3}{2}}$

$=\log_3\left(54\times\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}$

$=\log_3 3^4-\frac{3}{2}=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

009 답 ④

$\log_4 x+\log_4 2y+\log_4 4z=1$에서

$\log_4(x\times 2y\times 4z)=1$, $\log_4 8xyz=1$

$8xyz=4 \qquad \therefore xyz=\frac{1}{2}$

$\therefore \{(64^x)^y\}^z=64^{xyz}=64^{\frac{1}{2}}=8$

010 답 2

$\log_5\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_5\left(1+\frac{1}{3}\right)+\log_5\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\log_5\left(1+\frac{1}{49}\right)$

$=\log_5\frac{3}{2}+\log_5\frac{4}{3}+\log_5\frac{5}{4}+\cdots+\log_5\frac{50}{49}$

$=\log_5\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{50}{49}\right)$

$=\log_5 25=\log_5 5^2=2$

011 답 9

$36=6^2$이므로 36의 양의 약수를 작은 것부터 차례대로

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_9$라고 하면

$a_1a_9=a_2a_8=a_3a_7=a_4a_6=6^2$, $a_5=6$

$\therefore \log_6 a_1+\log_6 a_2+\log_6 a_3+\cdots+\log_6 a_9$

$=\log_6\{(a_1a_9)(a_2a_8)(a_3a_7)(a_4a_6)\times a_5\}$

$=\log_6\{(6^2)^4\times 6\}=\log_6 6^9=9$

012 답 ①

$\log_2 9\times\log_3 6\times\log_3\frac{1}{2}\times\log_6 81$

$=\log_2 3^2\times\log_3 6\times(-\log_3 2)\times\log_6 3^4$

$=2\log_2 3\times\log_3 6\times(-\log_3 2)\times 4\log_6 3$

$=2\log_2 3\times\log_3 6\times\left(-\frac{1}{\log_2 3}\right)\times\frac{4}{\log_3 6}$

$=-8$

013 답 10

$\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_5 x}+\frac{1}{\log_{10} x}=\log_x 2+\log_x 5+\log_x 10$

$=\log_x(2\times 5\times 10)=\log_x 10^2$

$=2\log_x 10$

즉, $2\log_x 10=2$이므로 $\log_x 10=1$

$\therefore x=10$

014 답 ③

$(\log_{10} 5)^2+\frac{\log_{10} 50}{1+\log_2 5}$

$=(\log_{10} 5)^2+\frac{2\log_{10} 5+\log_{10} 2}{\log_2 10}$

$=(\log_{10} 5)^2+\log_{10} 2(2\log_{10} 5+\log_{10} 2)$

$=(\log_{10} 5)^2+2\log_{10} 5\times\log_{10} 2+(\log_{10} 2)^2$

$=(\log_{10} 5+\log_{10} 2)^2$

$=(\log_{10} 10)^2=1^2=1$

015 답 2

$\log_3(\log_2 3)+\log_3(\log_3 4)+\log_3(\log_4 5)+\cdots+\log_3(\log_{511} 512)$

$=\log_3(\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\times\log_{511} 512)$

$=\log_3\left(\log_2 3\times\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\times\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\times\cdots\times\frac{\log_2 512}{\log_2 511}\right)$

$=\log_3(\log_2 512)=\log_3(\log_2 2^9)$

$=\log_3 9=\log_3 3^2=2$

016 답 8

$\log_a b=\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$에서 $(\log_a b)^2=1$

$\therefore \log_a b=1$ 또는 $\log_a b=-1$

이때 $a\neq b$이므로 $\log_a b=-1 \qquad \therefore b=\frac{1}{a}$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+8b=2a+\frac{8}{a}\geq 2\sqrt{2a\times\frac{8}{a}}=8$ (단, 등호는 $a=2$일 때 성립)

따라서 $2a+8b$의 최솟값은 8이다.

017 답 $\frac{25}{4}$

$(\log_3 2+\log_9\sqrt{2})(\log_2 5+\log_{\sqrt{2}} 25)(\log_5\sqrt{3}+\log_{25} 3)$

$=(\log_3 2+\log_{3^2} 2^{\frac{1}{2}})(\log_2 5+\log_{2^{\frac{1}{2}}} 5^2)(\log_5 3^{\frac{1}{2}}+\log_{5^2} 3)$

$=\left(\log_3 2+\frac{1}{4}\log_3 2\right)(\log_2 5+4\log_2 5)\left(\frac{1}{2}\log_5 3+\frac{1}{2}\log_5 3\right)$

$=\frac{5}{4}\log_3 2\times 5\log_2 5\times\log_5 3$

$=\frac{25}{4}\left(\log_3 2\times\frac{\log_3 5}{\log_3 2}\times\frac{1}{\log_3 5}\right)=\frac{25}{4}$

018 답 25

주어진 식의 지수에서

$3\log_2 5+\log_2 3-\log_2 15=\log_2 5^3+\log_2 3-\log_2 15$

$=\log_2\left(\frac{5^3\times 3}{15}\right)=\log_2 5^2=\log_2 25$

$\therefore 2^{3\log_2 5+\log_2 3-\log_2 15}=2^{\log_2 25}=25$

019 답 ①

$x=\frac{2}{\log_3 16}+\log_{16} 27-\frac{\log_{\sqrt{5}} 3}{\log_{\sqrt{5}} 2}$

$=2\log_{16} 3+\log_{16} 27-\log_2 3$

$=\log_{16} 3^2+\log_{16} 3^3-\log_{16} 3^4$

$=\log_{16}\left(\frac{3^2\times 3^3}{3^4}\right)=\log_{16} 3$

$\therefore 16^x=16^{\log_{16} 3}=3$

020 답 20

$\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}=5$에서 $\log_x 2+\log_x 3=5$

$\therefore \log_x 6=5$

$\therefore \frac{1}{\log_6\sqrt{x}}+\frac{1}{\log_{36} x}=\log_{\sqrt{x}} 6+\log_x 36$

$=\log_{x^{\frac{1}{2}}} 6+\log_x 6^2$

$=2\log_x 6+2\log_x 6$

$=4\log_x 6=4\times 5=20$

021 답 ①

$A=4^{\log_2 8-\log_2 12}=4^{\log_2 \frac{8}{12}}=4^{\log_2 \frac{2}{3}}=4^{\log_4 \left(\frac{2}{3}\right)^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$B=\log_9 \sqrt{3}-\log_{16} \frac{1}{2}=\log_{3^2} 3^{\frac{1}{2}}-\log_{2^4} 2^{-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$C=\log_{\frac{1}{2}} \{\log_9 (\log_4 64)\}=\log_{\frac{1}{2}} \{(\log_9 (\log_4 4^3))\}$

$=\log_{\frac{1}{2}} (\log_9 3)=\log_{\frac{1}{2}} (\log_{3^2} 3)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}=1$

$\therefore A<B<C$

022 답 $\dfrac{a+2b}{4a+2b}$

$\log_{20} \sqrt{50}=\frac{1}{2}\log_{20} 50=\frac{1}{2}\times\frac{\log_6 50}{\log_6 20}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\log_6 (2\times5^2)}{\log_6 (2^2\times5)}=\frac{\log_6 2+\log_6 5^2}{2(\log_6 2^2+\log_6 5)}$

$=\frac{\log_6 2+2\log_6 5}{2(2\log_6 2+\log_6 5)}$

$=\frac{a+2b}{2(2a+b)}=\frac{a+2b}{4a+2b}$

023 답 ③

$2^a=3$, $2^b=5$에서 $\log_2 3=a$, $\log_2 5=b$이므로

$\log_{30} 60=\frac{\log_2 60}{\log_2 30}=\frac{\log_2 (2^2\times3\times5)}{\log_2 (2\times3\times5)}$

$=\frac{2\log_2 2+\log_2 3+\log_2 5}{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 5}$

$=\frac{2+a+b}{1+a+b}$

024 답 ②

$5^a=x$, $5^b=y$에서 $\log_5 x=a$, $\log_5 y=b$이므로

$\log_{xy^2} \sqrt{xy}=\frac{\log_5 \sqrt{xy}}{\log_5 xy^2}=\frac{\frac{1}{2}(\log_5 x+\log_5 y)}{\log_5 x+2\log_5 y}$

$=\frac{\log_5 x+\log_5 y}{2(\log_5 x+2\log_5 y)}$

$=\frac{a+b}{2(a+2b)}=\frac{a+b}{2a+4b}$

025 답 ⑤

$a^m=b^n=2$에서 $\log_a 2=m$, $\log_b 2=n$이므로

$\log_2 a=\frac{1}{m}$, $\log_2 b=\frac{1}{n}$

$\therefore \log_{a^2} ab=\frac{\log_2 ab}{\log_2 a^2}=\frac{\log_2 a+\log_2 b}{2\log_2 a}$

$=\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{2\times\frac{1}{m}}=\frac{m+n}{2n}$

026 답 ③

$\log_2 5=x$, $\log_5 3=y$, $\log_3 11=z$에서

$y=\log_5 3=\frac{\log_2 3}{\log_2 5}=\frac{\log_2 3}{x}$ $\qquad\therefore \log_2 3=xy$

$z=\log_3 11=\frac{\log_2 11}{\log_2 3}=\frac{\log_2 11}{xy}$ $\qquad\therefore \log_2 11=xyz$

$\therefore \log_3 66=\frac{\log_2 66}{\log_2 3}=\frac{\log_2 (2\times3\times11)}{\log_2 3}$

$=\frac{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 11}{\log_2 3}$

$=\frac{1+xy+xyz}{xy}$

027 답 ②

$5^x=27$에서 $x=\log_5 27=\log_5 3^3=3\log_5 3$이므로

$\frac{3}{x}=\frac{1}{\log_5 3}=\log_3 5$

$45^y=243$에서 $y=\log_{45} 243=\log_{45} 3^5=5\log_{45} 3$이므로

$\frac{5}{y}=\frac{1}{\log_{45} 3}=\log_3 45$

$\therefore \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=\log_3 5-\log_3 45=\log_3 \frac{5}{45}$

$=\log_3 \frac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$

다른 풀이 $5^x=27$에서 $5=27^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$45^y=243$에서 $45=243^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{5}{y}}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{5}{45}=3^{\frac{3}{x}}\div3^{\frac{5}{y}}$

$3^{-2}=3^{\frac{3}{x}-\frac{5}{y}}$ $\qquad\therefore \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=-2$

028 답 $-\dfrac{1}{2}$

$a^3b^2=1$의 양변에 a를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_a a^3b^2=\log_a 1$, $\log_a a^3+\log_a b^2=0$

$3+2\log_a b=0$ $\qquad\therefore \log_a b=-\frac{3}{2}$

$\therefore \log_a a^4b^3=\log_a a^4+\log_a b^3=4+3\log_a b$

$=4+3\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

다른 풀이 $a^3b^2=1$에서 $b^2=\frac{1}{a^3}=a^{-3}$ $\qquad\therefore b=a^{-\frac{3}{2}}$

$\therefore \log_a a^4b^3=\log_a \{a^4\times(a^{-\frac{3}{2}})^3\}=\log_a (a^4\times a^{-\frac{9}{2}})$

$=\log_a a^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$

029 답 ①

$a^2=b^5$에서 $b=a^{\frac{2}{5}}$ $\qquad\therefore A=\log_a b=\log_a a^{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}$

$b^5=c^7$에서 $c=b^{\frac{5}{7}}$ $\qquad\therefore B=\log_b c=\log_b b^{\frac{5}{7}}=\frac{5}{7}$

$a^2=c^7$에서 $a=c^{\frac{7}{2}}$ $\qquad\therefore C=\log_c a=\log_c c^{\frac{7}{2}}=\frac{7}{2}$

$\therefore A<B<C$

030 답 $\dfrac{7}{10}$

$\log_a x=2$, $\log_b x=7$, $\log_c x=14$에서

$\log_x a=\frac{1}{2}$, $\log_x b=\frac{1}{7}$, $\log_x c=\frac{1}{14}$이므로

$\log_x abc=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}=\frac{5}{7}$ $\qquad\therefore \log_{abc} x=\frac{7}{5}$

$\therefore \log_{abc} \sqrt{x}=\frac{1}{2}\log_{abc} x=\frac{1}{2}\times\frac{7}{5}=\frac{7}{10}$

다른 풀이 $\log_a x=2$, $\log_b x=7$, $\log_c x=14$에서

$a^2=x$, $b^7=x$, $c^{14}=x$이므로

$a=x^{\frac{1}{2}}$, $b=x^{\frac{1}{7}}$, $c=x^{\frac{1}{14}}$

$\therefore abc=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}}=x^{\frac{5}{7}}$

$\therefore \log_{abc}\sqrt{x}=\log_{x^{\frac{5}{7}}} x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{7}}=\dfrac{7}{10}$

031 답 0

$2^x=3^y=24^z=k(k>0,\ k\neq1)$로 놓으면

$x=\log_2 k$, $y=\log_3 k$, $z=\log_{24} k$이므로

$\dfrac{1}{x}=\log_k 2$, $\dfrac{1}{y}=\log_k 3$, $\dfrac{1}{z}=\log_k 24$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{3}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}&=3\log_k 2+\log_k 3-\log_k 24\\&=\log_k 2^3+\log_k 3-\log_k 24\\&=\log_k\left(\frac{2^3\times3}{24}\right)=\log_k 1=0\end{aligned}$$

032 답 ①

$\log_3 9<\log_3 24<\log_3 27$, 즉 $2<\log_3 24<3$이므로

$a=2$, $b=\log_3 24-2=\log_3 24-\log_3 3^2=\log_3 \dfrac{8}{3}$

$\therefore 3^a+3^b=3^2+3^{\log_3 \frac{8}{3}}=9+\dfrac{8}{3}=\dfrac{35}{3}$

033 답 4

$\log_5 5<\log_5 15<\log_5 25$, 즉 $1<\log_5 15<2$이므로

$x=1$, $y=\log_5 15-1=\log_5 15-\log_5 5=\log_5 3$

$\therefore 5^x=5^1=5$, $5^y=5^{\log_5 3}=3$

$\therefore \dfrac{5^x+5^y}{5^x-5^y}=\dfrac{5+3}{5-3}=4$

034 답 4

$\dfrac{\log_5 9}{\log_5 4}=\dfrac{2\log_5 3}{2\log_5 2}=\log_2 3$이고

$\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$, 즉 $1<\log_2 3<2$이므로

$a=1$, $b=\log_2 3-1=\log_2 3-\log_2 2=\log_2 \dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{b-a}{a+b}&=\frac{\log_2 \frac{3}{2}-1}{1+\log_2 \frac{3}{2}}=\frac{\log_2 \frac{3}{4}}{\log_2 3}\\&=\log_3 \frac{3}{4}=1-\log_3 4\end{aligned}$$

$\therefore k=4$

035 답 17

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{10} a+\log_{10} b=6$, $\log_{10} a\times\log_{10} b=1$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a \sqrt{b}+\log_b \sqrt{a}&=\frac{1}{2}(\log_a b+\log_b a)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}+\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{(\log_{10} b)^2+(\log_{10} a)^2}{\log_{10} a\times\log_{10} b}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{(\log_{10} a+\log_{10} b)^2-2\log_{10} a\times\log_{10} b}{\log_{10} a\times\log_{10} b}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{6^2-2\times1}{1}\\&=17\end{aligned}$$

036 답 −1

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=10$, $\alpha\beta=4$

$$\begin{aligned}\therefore &\log_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\log_{\frac{1}{\alpha\beta}}(\alpha+\beta)\\&=\log_{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)+\log_{\frac{1}{\alpha\beta}}(\alpha+\beta)\\&=\log_4 \frac{10}{4}+\log_{\frac{1}{4}} 10\\&=\log_4 10-\log_4 4+\log_{4^{-1}} 10\\&=\log_4 10-1-\log_4 10\\&=-1\end{aligned}$$

037 답 23

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 a+\log_3 b=-5$, $\log_3 a\times\log_3 b=2$

$$\begin{aligned}\therefore &\log_a ab^2+\log_b a^2b\\&=\log_a a+\log_a b^2+\log_b a^2+\log_b b\\&=1+2\log_a b+2\log_b a+1\\&=2+2(\log_a b+\log_b a)\\&=2+2\left(\frac{\log_3 b}{\log_3 a}+\frac{\log_3 a}{\log_3 b}\right)\\&=2+2\times\frac{(\log_3 b)^2+(\log_3 a)^2}{\log_3 a\times\log_3 b}\\&=2+2\times\frac{(\log_3 a+\log_3 b)^2-2\log_3 a\times\log_3 b}{\log_3 a\times\log_3 b}\\&=2+2\times\frac{(-5)^2-2\times2}{2}\\&=23\end{aligned}$$

038 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\log_3 5=a$, $2\times\log_3 5=b$이므로

$a=2+\log_3 5=\log_3 3^2+\log_3 5=\log_3 45$,

$b=\log_3 5^2=\log_3 25$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a}{b}&=\frac{\log_3 45}{\log_3 25}=\log_{25} 45=\log_{5^2} 45\\&=\frac{1}{2}\log_5 45\end{aligned}$$

핵심 유형 29~30쪽

유형10 답 3.3343

$\log 12+\log 180=\log(2^2\times 3)+\log(2\times 3^2\times 10)$

$=\log 2^2+\log 3+\log 2+\log 3^2+\log 10$

$=3\log 2+3\log 3+1$

$=3\times 0.3010+3\times 0.4771+1$

$=3.3343$

유형11 답 ④

$\log x^2-\log\sqrt{x}=2\log x-\frac{1}{2}\log x=\frac{3}{2}\log x$

$=\frac{3}{2}\times(-3.6)=-5.4=-6+0.6$

따라서 $\log x^2-\log\sqrt{x}$의 정수 부분은 -6이고, 소수 부분은 0.6 이다.

유형12 답 ③

$a=\log 374=\log(10^2\times 3.74)=\log 10^2+\log 3.74$

$=2+0.5729=2.5729$

또 $\log b=-0.4271=-1+0.5729=-1+\log 3.74$

$=\log 10^{-1}+\log 3.74=\log 0.374$

$\therefore\ b=0.374$

$\therefore\ a+b=2.5729+0.374=2.9469$

유형13 답 22자리

$\log 12^{20}=20\log(2^2\times 3)=20(2\log 2+\log 3)$

$=20(2\times 0.3010+0.4771)=21.582$

따라서 $\log 12^{20}$의 정수 부분이 21이므로 12^{20}은 22자리의 정수이다.

유형14 답 ②

$\log 6^{30}=30\log(2\times 3)=30(\log 2+\log 3)$

$=30(0.3010+0.4771)=23.343$

이때 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$이므로

$\log 2<0.343<\log 3$

$23+\log 2<23+0.343<23+\log 3$

$\log(10^{23}\times 2)<\log 6^{30}<\log(10^{23}\times 3)$

$\therefore\ 2\times 10^{23}<6^{30}<3\times 10^{23}$

따라서 6^{30}의 최고 자리의 숫자는 2이다.

유형15 답 ③

$\log x^2$의 소수 부분과 $\log x^4$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^4-\log x^2=4\log x-2\log x=2\log x$ ➡ 정수

이때 $\log x$의 정수 부분이 1이므로

$1\le\log x<2\qquad\therefore\ 2\le 2\log x<4$

즉, $2\log x$가 정수이므로 $2\log x=2$ 또는 $2\log x=3$

$\log x=1$ 또는 $\log x=\frac{3}{2}$

$\therefore\ x=10$ 또는 $x=10^{\frac{3}{2}}$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은 $10\times 10^{\frac{3}{2}}=10^{\frac{5}{2}}$

유형16 답 -6

$\log N=n+\alpha$(n은 정수, $0\le\alpha<1$)라고 하면 이차방정식 $3x^2+7x+k=0$의 두 근이 n, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=-\frac{7}{3}=-3+\frac{2}{3}$ ⋯⋯ ㉠

$n\alpha=\frac{k}{3}$ ⋯⋯ ㉡

이때 n은 정수이고, $0\le\alpha<1$이므로 ㉠에서

$n=-3$, $\alpha=\frac{2}{3}$

이를 ㉡에 대입하면 $-3\times\frac{2}{3}=\frac{k}{3}$

$\therefore\ k=-6$

유형17 답 12

벽면의 음향 투과 손실을 L_1, 벽의 단위 면적당 질량을 m, 음향의 주파수를 f라고 하면

$L_1=20\log mf-48$ ⋯⋯ ㉠

벽의 단위 면적당 질량이 4배가 되었을 때의 벽면의 음향 투과 손실을 L_2, 벽의 단위 면적당 질량을 $4m$이라고 하면

$L_2=20\log 4mf-48=20(\log 4+\log mf)-48$

$\therefore\ L_2=40\log 2+20\log mf-48$ ⋯⋯ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$L_2-L_1=40\log 2=40\times 0.3=12$

$\therefore\ L_2=L_1+12$

따라서 음향 투과 손실은 12 dB만큼 증가하므로 $k=12$

핵심 유형 완성하기 31~34쪽

039 답 2.1761

$\log 2+\log 75=\log\frac{10}{5}+\log(3\times 5^2)$

$=1-\log 5+\log 3+2\log 5$

$=1+\log 3+\log 5$

$=1+0.4771+0.6990=2.1761$

040 답 9.9

$\log\sqrt[3]{x}=1.32$에서 $\log x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log x=1.32$

$\therefore\ \log x=3.96$

$\therefore\ \log x^2+\log\sqrt{x}=2\log x+\frac{1}{2}\log x=\frac{5}{2}\log x$

$=\frac{5}{2}\times 3.96=9.9$

041 답 20.1

상용로그표에서 $\log 4.04=0.6064$이므로

$$\log\sqrt{404}=\frac{1}{2}\log 404=\frac{1}{2}\log(10^2\times 4.04)$$

$$=\frac{1}{2}(\log 10^2+\log 4.04)=\frac{1}{2}(2+0.6064)$$

$$=1+0.3032$$

이때 $\log 2.01=0.3032$이므로

$$\log\sqrt{404}=1+0.3032=\log 10+\log 2.01$$

$$=\log(10\times 2.01)=\log 20.1$$

$\therefore \sqrt{404}=20.1$

042 답 −4

$$\log\frac{1}{x^2}+\log\sqrt[4]{x}=\log x^{-2}+\log x^{\frac{1}{4}}=-2\log x+\frac{1}{4}\log x$$

$$=-\frac{7}{4}\log x=-\frac{7}{4}\times 2.8=-4.9=-5+0.1$$

따라서 $n=-5$, $\alpha=0.1$이므로

$n+10\alpha=-5+1=-4$

043 답 ⑤

$\log N$과 $\log\frac{1000}{N}$의 소수 부분을 각각 α, $\beta(0\le\alpha<1,\ 0\le\beta<1)$라고 하면

$\log N=m+\alpha$, $\log\frac{1000}{N}=n+\beta$

한편 $\log N+\log\frac{1000}{N}=\log\left(N\times\frac{1000}{N}\right)=\log 1000=3$이므로

$m+\alpha+n+\beta=3$ …… ㉠

$0\le\alpha<1$, $0\le\beta<1$에서

$0\le\alpha+\beta<2$ …… ㉡

㉠에 의하여 m, n은 정수이므로 $\alpha+\beta$도 정수이다.

또 ㉡에 의하여 $\alpha+\beta=0$ 또는 $\alpha+\beta=1$

이를 ㉠에 대입하면 $m+n=3$ 또는 $m+n=2$

044 답 ③

$\log 1$, $\log 3$, $\cdots$, $\log 9$의 정수 부분은 모두 0이므로

$f(1)=f(3)=f(5)=f(7)=f(9)=0$

$\log 11$, $\log 13$, $\cdots$, $\log 99$의 정수 부분은 모두 1이므로

$f(11)=f(13)=f(15)=\cdots=f(99)=1$

$\log 101$, $\log 103$, $\cdots$, $\log 149$의 정수 부분은 모두 2이므로

$f(101)=f(103)=f(105)=\cdots=f(149)=2$

$\therefore f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(149)$

$=0\times 5+1\times 45+2\times 25=95$

045 답 2.0949

$a=\log 121=\log(10^2\times 1.21)=\log 10^2+\log 1.21$

$=2+0.0828=2.0828$

또 $\log b=-1.9172=-2+0.0828=-2+\log 1.21$

$=\log 10^{-2}+\log 1.21=\log 0.0121$

$\therefore b=0.0121$

$\therefore a+b=2.0828+0.0121=2.0949$

046 답 ④

① $\log 63.3=\log(10\times 6.33)=\log 10+\log 6.33$

$=1+0.8014=1.8014$

② $\log 6330=\log(10^3\times 6.33)=\log 10^3+\log 6.33$

$=3+0.8014=3.8014$

③ $\log 0.633=\log(10^{-1}\times 6.33)=\log 10^{-1}+\log 6.33$

$=-1+0.8014=-0.1986$

④ $\log 0.0633=\log(10^{-2}\times 6.33)=\log 10^{-2}+\log 6.33$

$=-2+0.8014=-1.1986$

⑤ $\log\sqrt{6.33}=\log 6.33^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 6.33$

$=\frac{1}{2}\times 0.8014=0.4007$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

047 답 ①

$\log 582=\log(10^2\times 5.82)=\log 10^2+\log 5.82$

$=2+\log 5.82$

즉, $2+\log 5.82=2.7649$이므로 $\log 5.82=0.7649$

또 $\log N=-2.2351=-3+0.7649=-3+\log 5.82$

$=\log 10^{-3}+\log 5.82=\log 0.00582$

$\therefore N=0.00582$

048 답 12자리

$\log 15^{10}=10\log(3\times 5)=10(\log 3+\log 5)$

$=10\left(\log 3+\log\frac{10}{2}\right)=10(\log 3+1-\log 2)$

$=10(0.4771+1-0.3010)=11.761$

따라서 $\log 15^{10}$의 정수 부분이 11이므로 15^{10}은 12자리의 정수이다.

049 답 2

$\log\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=10\log\frac{3}{4}=10(\log 3-2\log 2)$

$=10(0.4771-2\times 0.3010)=-1.249=-2+0.751$

따라서 $\log\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$의 정수 부분이 -2이므로 $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$은 소수점 아래 2째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore n=2$

050 답 ④

2^{100}이 31자리의 정수이므로 $\log 2^{100}$의 정수 부분은 30이다.

즉, $30\le\log 2^{100}<31$에서 $30\le 100\log 2<31$

$\therefore 0.3\le\log 2<0.31$ …… ㉠

또 $\log\left(\frac{1}{5}\right)^{15}=\log\left(\frac{2}{10}\right)^{15}=15(\log 2-1)$이고 ㉠에서

$-0.7\le\log 2-1<-0.69$

$-10.5\le 15(\log 2-1)<-10.35$

따라서 $\log\left(\frac{1}{5}\right)^{15}$의 정수 부분은 -11이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^{15}$은 소수점 아래 11째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

051 답 3

$\log 12^{20}=20\log(2^2\times3)=20(2\log2+\log3)$

$=20(2\times0.3010+0.4771)=21.582$

이때 $\log3=0.4771$, $\log4=2\log2=2\times0.3010=0.6020$이므로

$\log3<0.582<\log4$

$21+\log3<21+0.582<21+\log4$

$\log(10^{21}\times3)<\log12^{20}<\log(10^{21}\times4)$

$\therefore\ 3\times10^{21}<12^{20}<4\times10^{21}$

따라서 12^{20}의 최고 자리의 숫자는 3이다.

052 답 5

$\log x=-\frac{3}{4}$이므로

$\log x^2=2\log x=2\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{2}$

$=-1.5=-2+0.5$

따라서 $\log x^2$의 정수 부분이 -2이므로 x^2은 소수점 아래 2째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore\ a=2$

또 $\log3=0.4771$, $\log4=2\log2=2\times0.3010=0.6020$이므로

$\log3<0.5<\log4$

$-2+\log3<-2+0.5<-2+\log4$

$\log(10^{-2}\times3)<\log x^2<\log(10^{-2}\times4)$

$\therefore\ 3\times10^{-2}<x^2<4\times10^{-2}$

따라서 x^2의 소수점 아래 2째 자리의 숫자는 3이므로 $b=3$

$\therefore\ a+b=2+3=5$

053 답 8

$\log7^{20}=20\log7=20\times0.8451=16.902$

이때 $\log7=0.8451$, $\log8=3\log2=3\times0.3010=0.9030$이므로

$\log7<0.902<\log8$

$16+\log7<16.902<16+\log8$

$\log(10^{16}\times7)<\log7^{20}<\log(10^{16}\times8)$

$\therefore\ 7\times10^{16}<7^{20}<8\times10^{16}$

따라서 7^{20}의 최고 자리의 숫자는 7이므로 $a=7$

한편 $7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$, $7^4=2401$, $7^5=16807$, $\cdots$이므로 7^n(n은 자연수)의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $20=4\times5$이므로 7^{20}의 일의 자리의 숫자는 7^4의 일의 자리의 숫자와 같다. $\quad\therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=7+1=8$

054 답 10000

$\log\sqrt{x}$의 소수 부분과 $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분이 같으므로

$\log\sqrt{x}-\log\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\log x+\log x=\frac{3}{2}\log x$ ➡ 정수

이때 $10<x<100$이므로 $1<\log x<2$

$\therefore\ \frac{3}{2}<\frac{3}{2}\log x<3$

즉, $\frac{3}{2}\log x$가 정수이므로 $\frac{3}{2}\log x=2$

$\log x=\frac{4}{3}\qquad\therefore\ x=10^{\frac{4}{3}}$

$\therefore\ x^3=(10^{\frac{4}{3}})^3=10^4=10000$

055 답 31

$\log x^2$의 소수 부분과 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x^2+\log\sqrt{x}=2\log x+\frac{1}{2}\log x=\frac{5}{2}\log x$ ➡ 정수

이때 $\log x$의 정수 부분이 2이므로 $2\le\log x<3$

$\therefore\ 5\le\frac{5}{2}\log x<\frac{15}{2}$

즉, $\frac{5}{2}\log x$가 정수이므로

$\frac{5}{2}\log x=5$ 또는 $\frac{5}{2}\log x=6$ 또는 $\frac{5}{2}\log x=7$

$\log x=2$ 또는 $\log x=\frac{12}{5}$ 또는 $\log x=\frac{14}{5}$

이때 $\log x=2$이면 $\log x^2$, $\log\sqrt{x}$의 소수 부분이 모두 0이므로

$x=10^{\frac{12}{5}}$ 또는 $x=10^{\frac{14}{5}}$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$10^{\frac{12}{5}}\times10^{\frac{14}{5}}=10^{\frac{26}{5}}$

따라서 $p=5$, $q=26$이므로 $p+q=31$

056 답 60

조건 (나), (다)에 의하여 $\log a^2$의 소수 부분과 $\log 3b$의 소수 부분이 같고 $b=4a$이므로

$\log a^2-\log3b=\log a^2-\log12a=\log\frac{a}{12}$ ➡ 정수

즉, $\frac{a}{12}$는 10의 거듭제곱 꼴이고 조건 (가)에 의하여

$10<a<100$이므로 $\frac{5}{6}<\frac{a}{12}<\frac{25}{3}$

따라서 $\frac{a}{12}=10^0=1$이므로 $a=12$

또 $b=4a=48\qquad\therefore\ a+b=60$

057 답 4

$\log N=n+\alpha$(n은 정수, $0\le\alpha<1$)라고 하면 이차방정식 $5x^2-12x+k=0$의 두 근이 n, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\frac{12}{5}=2+\frac{2}{5}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$n\alpha=\frac{k}{5}\qquad\cdots\cdots$ ㉡

이때 n은 정수이고, $0\le\alpha<1$이므로 ㉠에서

$n=2$, $\alpha=\frac{2}{5}$

이를 ㉡에 대입하면

$2\times\frac{2}{5}=\frac{k}{5}\qquad\therefore\ k=4$

058 답 ②

$\log 800 = \log(10^2 \times 8) = 2 + \log 8$이므로 $\log 800$의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\log 8$이다.

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 두 근이 2, $\log 8$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2 + \log 8 = -a$, $2 \times \log 8 = b$

$\therefore a + b = (-2 - \log 8) + 2\log 8 = -2 + \log 8$
$= \log 10^{-2} + \log 8 = \log 0.08$

059 답 $-\frac{9}{5}$

$\log N = n + \alpha$(n은 정수, $0 < \alpha < 1$)라고 하면 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 두 근이 n, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$n + \alpha = -a$ …… ㉠

$n\alpha = b$ …… ㉡

또 $\log \frac{1}{N} = -\log N = -(n+\alpha) = -n - 1 + (1 - \alpha)$이므로

$\log \frac{1}{N}$의 정수 부분은 $-n-1$, 소수 부분은 $1-\alpha$이다.

따라서 이차방정식 $x^2 - ax + b - \frac{8}{5} = 0$의 두 근이 $-n-1$, $1-\alpha$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$(-n-1) \times (1-\alpha) = b - \frac{8}{5}$ …… ㉢

㉡에서 $b = n\alpha$이므로 ㉢에 대입하면

$(-n-1) \times (1-\alpha) = n\alpha - \frac{8}{5}$

$-n - 1 + \alpha = -\frac{8}{5}$

$-n + \alpha = -\frac{3}{5} = -1 + \frac{2}{5}$

$\therefore n = 1$, $\alpha = \frac{2}{5}$

이를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$1 + \frac{2}{5} = -a$, $1 \times \frac{2}{5} = b$

따라서 $a = -\frac{7}{5}$, $b = \frac{2}{5}$이므로

$a + b = -\frac{9}{5}$

060 답 0.296

어느 자극의 세기가 300일 때의 감각의 세기가 0.5이므로

$0.5 = k\log 300 = k\log(10^2 \times 3) = k(2 + \log 3)$
$= k(2 + 0.5) = 2.5k$

$\therefore k = \frac{1}{5}$

자극의 세기가 30일 때의 감각의 세기를 S라고 하면

$S = \frac{1}{5}\log 30 = \frac{1}{5}\log(10 \times 3) = \frac{1}{5}(1 + \log 3)$

$= \frac{1}{5}(1 + 0.48) = 0.296$

따라서 자극의 세기가 30일 때의 감각의 세기는 0.3이다.

061 답 1.8

pH 4.6인 용액의 수소 이온 농도를 a, pH 6.4인 용액의 수소 이온 농도를 b라고 하면

$4.6 = -\log a$ …… ㉠

$6.4 = -\log b$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면 $-1.8 = -(\log a - \log b)$

$-1.8 = -\log \frac{a}{b}$

$\log \frac{a}{b} = 1.8$　　$\therefore \frac{a}{b} = 10^{1.8}$

따라서 pH 4.6인 용액의 수소 이온 농도는 pH 6.4인 용액의 수소 이온 농도의 $10^{1.8}$배이므로

$k = 1.8$

062 답 $\frac{1}{2}$배

어느 상품의 현재 수요량을 D_1, 판매 가격을 P_1, 8배 폭등한 후의 수요량을 D_2, 판매 가격을 P_2라고 하면

$\log_a D_1 = k - \frac{1}{3}\log_a P_1$ …… ㉠

$\log_a D_2 = k - \frac{1}{3}\log_a P_2$ …… ㉡

이 상품의 판매 가격이 8배 폭등하므로 $P_2 = 8P_1$

이를 ㉡에 대입하면

$\log_a D_2 = k - \frac{1}{3}\log_a 8P_1$

$\log_a D_2 = k - \frac{1}{3}(\log_a P_1 + \log_a 8)$

$\log_a D_2 = k - \frac{1}{3}\log_a P_1 - \log_a 2$ …… ㉢

㉢－㉠을 하면

$\log_a D_2 - \log_a D_1 = -\log_a 2$, $\log_a D_2 = \log_a D_1 - \log_a 2$

$\therefore \log_a D_2 = \log_a \frac{D_1}{2}$

따라서 $D_2 = \frac{D_1}{2}$이므로 수요량은 현재의 $\frac{1}{2}$배가 된다.

063 답 ⑤

금속 1 g의 가격의 연간 증가율을 r %라고 하면

5년 후인 2018년 초 이 금속 1 g의 가격이 8만 원이었으므로

$4\left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 8$, $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 2$

양변에 상용로그를 취하면

$\log\left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = \log 2$, $5\log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log 2$

$\log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{1}{5}\log 2 = \frac{1}{5} \times 0.30 = 0.06$ …… ㉠

이때 $\log 1.15 = 0.06$이므로 ㉠에서

$\log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log 1.15$

$1 + \frac{r}{100} = 1.15$, $\frac{r}{100} = 0.15$　　$\therefore r = 15$

따라서 금속 1 g의 가격의 연간 증가율은 15 %이다.

064 답 32.7 %

현재 가격을 A원이라고 하면 중고 물품의 가격은 매년 20 %씩 떨어지므로 5년 후의 가격은

$A\left(1-\frac{20}{100}\right)^5=A\times0.8^5$(원)

$x=0.8^5$에 상용로그를 취하면

$$\log x=5\log 0.8=5\log\frac{8}{10}=5(3\log 2-1)$$
$$=5(3\times0.301-1)$$
$$=-0.485=-1+0.515 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\log 3.27=0.515$이므로 ㉠에서

$$\log x=-1+0.515=\log 10^{-1}+\log 3.27$$
$$=\log(10^{-1}\times3.27)=\log 0.327$$

$\therefore x=0.327$

따라서 5년 후의 중고 물품의 가격은 현재 가격의 32.7 %이다.

065 답 10.4 %

현재 유입되는 생활하수의 양을 a라고 하고 매년 r %씩 줄인다고 하면 10년 후의 생활하수의 양은 $\frac{1}{3}a$이므로

$a\left(1-\frac{r}{100}\right)^{10}=\frac{1}{3}a$, $\left(1-\frac{r}{100}\right)^{10}=\frac{1}{3}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log\left(1-\frac{r}{100}\right)^{10}=\log\frac{1}{3}$, $10\log\left(1-\frac{r}{100}\right)=-\log 3$

$$\log\left(1-\frac{r}{100}\right)=-\frac{1}{10}\log 3=-\frac{1}{10}\times0.48$$
$$=-0.048=-1+0.952 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\log 8.96=0.952$이므로 ㉠에서

$$\log\left(1-\frac{r}{100}\right)=-1+0.952=\log 10^{-1}+\log 8.96$$
$$=\log(10^{-1}\times8.96)=\log 0.896$$

$1-\frac{r}{100}=0.896$, $\frac{r}{100}=0.104$ $\quad\therefore r=10.4$

따라서 생활하수의 양을 매년 10.4 %씩 줄여야 한다.

핵심 유형 최종 점검하기 • 35~37쪽

1 답 ④

유형 01 로그의 정의

$\log_3 a=\frac{1}{2}$에서 $a=3^{\frac{1}{2}}$, $b=\log_7 49=\log_7 7^2=2$

$\therefore a^{2b}=(3^{\frac{1}{2}})^4=3^2=9$

2 답 4

유형 02 로그의 밑과 진수의 조건

$\log_{a-4}(a-2)$의 밑의 조건에서 $a-4>0$, $a-4\neq1$이므로

$a>4$, $a\neq5$

$\therefore 4<a<5$ 또는 $a>5$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$\log_{a-4}(a-2)$의 진수의 조건에서 $a-2>0$이므로

$a>2$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

$\log_{a-4}(10-a)$의 진수의 조건에서 $10-a>0$이므로

$a<10$ $\quad\cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$4<a<5$ 또는 $5<a<10$

따라서 정수 a는 6, 7, 8, 9의 4개이다.

3 답 ③

유형 03 로그의 성질

$$\log_2 18-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{12}-\log_2 6=\log_2 18-\log_2 12-\log_2 6$$
$$=\log_2\frac{18}{12\times6}=\log_2\frac{1}{2^2}$$
$$=\log_2 2^{-2}=-2$$

4 답 ②

유형 04 로그의 밑의 변환

$$\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_5 3}+\frac{1}{\log_8 3}=\log_3 2+\log_3 5+\log_3 8$$
$$=\log_3(2\times5\times8)=\log_3 80$$

즉, $\frac{1}{\log_k 3}=\log_3 k$이므로 $\log_3 80=\log_3 k$

$\therefore k=80$

5 답 $\frac{3}{2}$

유형 05 로그의 밑의 변환에 의한 성질

$$\left(\log_3\sqrt{2}+\frac{3}{4}\log_{\sqrt{3}}2\right)\log_4 3\sqrt{3}$$
$$=\left(\log_3 2^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{4}\log_{3^{\frac{1}{2}}}2\right)\log_{2^2}3^{\frac{3}{2}}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\log_3 2+\frac{3}{2}\log_3 2\right)\times\frac{3}{4}\log_2 3$$
$$=2\log_3 2\times\frac{3}{4}\log_2 3$$
$$=\frac{3}{2}\log_3 2\times\frac{1}{\log_3 2}=\frac{3}{2}$$

6 답 ③

유형 05 로그의 밑의 변환에 의한 성질

$$(5^{\log_5 3+\log_5 2})^2+(3^{\log_2 3+\log_{\sqrt{2}}3\sqrt{3}})^{\log_9 2\sqrt{2}}$$
$$=(5^{\log_5 6})^2+(3^{\log_2 3+3\log_2 3})^{\frac{3}{4}\log_3 2}$$
$$=6^2+3^{4\log_2 3\times\frac{3}{4}\log_3 2}$$
$$=36+3^3=63$$

7 답 ④

유형 06 로그의 성질의 활용

$\log_2 15=a$에서

$\log_2 3+\log_2 5=a$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$\log_2\frac{3}{5}=b$에서

$\log_2 3-\log_2 5=b$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면 $2\log_2 3=a+b$

$\therefore \log_2 3=\frac{a+b}{2}$

㉠−㉡을 하면 $2\log_2 5=a-b$

$\therefore \log_2 5=\frac{a-b}{2}$

$\therefore \log_2 45=\log_2 (3^2\times 5)=2\log_2 3+\log_2 5$

$=2\times\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=\frac{3a+b}{2}$

8 답 ④

유형 06 로그의 성질의 활용

$2^x=a,\ 2^y=b,\ 2^z=c$에서

$x=\log_2 a,\ y=\log_2 b,\ z=\log_2 c$이므로

$\log_{bc} a=\frac{\log_2 a}{\log_2 bc}=\frac{\log_2 a}{\log_2 b+\log_2 c}=\frac{x}{y+z}$

다른 풀이 $\log_{bc} a=\log_{2^{y+z}} 2^x$

$=\frac{x}{y+z}\log_2 2=\frac{x}{y+z}$

9 답 0

유형 07 주어진 조건을 이용하여 식의 값 구하기

$2^x=5^y=50^z=k(k>0,\ k\neq 1)$로 놓으면

$x=\log_2 k,\ y=\log_5 k,\ z=\log_{50} k$이므로

$\frac{1}{x}=\log_k 2,\ \frac{1}{y}=\log_k 5,\ \frac{1}{z}=\log_k 50$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=\log_k 2+2\log_k 5-\log_k 50$

$=\log_k 2+\log_k 5^2-\log_k 50$

$=\log_k\left(\frac{2\times 5^2}{50}\right)=\log_k 1=0$

10 답 $\frac{17}{4}$

유형 07 주어진 조건을 이용하여 식의 값 구하기

$\log_a c:\log_b c=4:1$에서

$\log_a c=4\log_b c,\ \frac{1}{\log_c a}=\frac{4}{\log_c b}$

$\log_c b=4\log_c a \qquad \therefore b=a^4$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\log_a a^4+\log_{a^4} a$

$=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

11 답 −17

유형 08 로그의 정수 부분과 소수 부분

$\log_2\frac{1}{20}=-\log_2 20$이고 $-\log_2 32<-\log_2 20<-\log_2 16$

즉, $-5<-\log_2 20<-4$이므로

$a=-5,\ b=-\log_2 20-(-5)=-\log_2 20+\log_2 2^5=\log_2\frac{8}{5}$

$\therefore 5(a+2^b)=5(-5+2^{\log_2\frac{8}{5}})$

$=5\left(-5+\frac{8}{5}\right)=-17$

12 답 ①

유형 09 로그와 이차방정식

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=-6,\ \log_2 a\times\log_2 b=3$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 b)^2+(\log_2 a)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{(-6)^2-2\times 3}{3}=10$

13 답 1.0756

유형 10 상용로그의 값

$\log 3450+\log 0.00345=\log(10^3\times 3.45)+\log(10^{-3}\times 3.45)$

$=3+\log 3.45+(-3)+\log 3.45$

$=2\log 3.45=2\times 0.5378$

$=1.0756$

14 답 2

유형 11 상용로그의 정수 부분과 소수 부분

$\log\frac{100x}{y^2}=\log 100x-\log y^2=2+\log x-2\log y$

$=2+\frac{3}{5}-2\times\frac{7}{4}=-0.9=-1+0.1$

따라서 $\log\frac{100x}{y^2}$의 정수 부분은 -1이고 소수 부분은 0.1이므로

$a=-1,\ b=0.1$

$\therefore a^2+10b=(-1)^2+10\times 0.1=2$

15 답 9000

유형 11 상용로그의 정수 부분과 소수 부분

$\log x$의 정수 부분이 3이므로

$3\le\log x<4,\ \log 10^3\le\log x<\log 10^4$

$\therefore 1000\le x<10000$

따라서 자연수 x의 개수는 $10000-1000=9000$

16 답 ④

유형 12 상용로그의 소수 부분의 성질을 이용한 로그의 계산

ㄱ. $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2$

$=1-0.3010=0.6990$

ㄴ. $\log 200=\log(10^2\times 2)=\log 10^2+\log 2$

$=2+0.3010=2.3010$

ㄷ. $\log 5000=\log(10^3\times 5)=\log 10^3+\log 5$

$=3+0.6990=3.6990$

ㄹ. $\log 0.5=\log\frac{1}{2}=\log 2^{-1}$

$=-\log 2=-0.3010$

ㅁ. $\log 0.005=\log(10^{-3}\times 5)=\log 10^{-3}+\log 5$

$=-3+0.6990=-2.3010$

ㅂ. $\log 0.02=\log(10^{-2}\times 2)=\log 10^{-2}+\log 2$

$=-2+0.3010=-1.6990$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ의 5개이다.

17 답 ⑤

유형 13 자릿수 구하기

a^{10}은 16자리의 정수이므로 $\log a^{10}$의 정수 부분은 15이다.

즉, $15\le\log a^{10}<16$이므로

$1.5\le\log a<1.6$ …… ㉠

b^{10}은 10자리의 정수이므로 $\log b^{10}$의 정수 부분은 9이다.

즉, $9\le\log b^{10}<10$이므로

$0.9\le\log b<1$ …… ㉡

이때 $\log a^5b^2=5\log a+2\log b$이므로

㉠$\times 5+$㉡$\times 2$를 하면

$9.3\le 5\log a+2\log b<10$

따라서 $\log a^5b^2$의 정수 부분이 9이므로 a^5b^2은 10자리의 정수이다.

18 답 13

유형 14 최고 자리의 숫자 구하기

$\log\left(\frac{1}{15}\right)^{10}=\log 15^{-10}=-10\log(3\times 5)$

$=-10(\log 3+\log 5)=-10(\log 3+1-\log 2)$

$=-10(0.4771+1-0.3010)=-11.761$

$=-12+0.239$

따라서 $\log\left(\frac{1}{15}\right)^{10}$의 정수 부분이 -12이므로 $\left(\frac{1}{15}\right)^{10}$은 소수점 아래 12째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore m=12$

또 $\log 1=0$, $\log 2=0.3010$이므로

$\log 1<0.239<\log 2$

$-12+\log 1<-12+0.239<-12+\log 2$

$\log 10^{-12}<\log\left(\frac{1}{15}\right)^{10}<\log(10^{-12}\times 2)$

$\therefore 10^{-12}<\left(\frac{1}{15}\right)^{10}<2\times 10^{-12}$

따라서 $\left(\frac{1}{15}\right)^{10}$의 소수점 아래 12째 자리의 숫자는 1이므로 $n=1$

$\therefore m+n=12+1=13$

19 답 ②

유형 15 상용로그의 소수 부분의 조건에 따른 성질

$\log x$의 정수 부분이 2이므로

$2\le\log x<3$, $\log 100\le\log x<\log 1000$

$\therefore 100\le x<1000$ …… ㉠

$2\log x$의 소수 부분과 $\log\frac{x}{2}$의 소수 부분이 같으므로

$2\log x-\log\frac{x}{2}=\log x^2-\log\frac{x}{2}$

$=\log\left(x^2\times\frac{2}{x}\right)=\log 2x$ ➡ 정수

즉, $2x$가 10의 거듭제곱 꼴이고 ㉠에 의하여 $200\le 2x<2000$이므로 $2x=1000$

$\therefore \log 2x=\log 1000=3$

20 답 ④

유형 15 상용로그의 소수 부분의 조건에 따른 성질

$\log x$의 소수 부분과 $\log x\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x+\log x\sqrt{x}=\log x+\frac{3}{2}\log x$

$=\frac{5}{2}\log x$ ➡ 정수

이때 $\log x$의 정수 부분이 3이므로 $3\le\log x<4$

$\therefore \frac{15}{2}\le\frac{5}{2}\log x<10$

즉, $\frac{5}{2}\log x$가 정수이므로

$\frac{5}{2}\log x=8$ 또는 $\frac{5}{2}\log x=9$

$\log x=\frac{16}{5}$ 또는 $\log x=\frac{18}{5}$

$\therefore x=10^{\frac{16}{5}}$ 또는 $x=10^{\frac{18}{5}}$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$10^{\frac{16}{5}}\times 10^{\frac{18}{5}}=10^{\frac{34}{5}}$

21 답 $x^2-19x+90=0$

유형 16 상용로그의 정수 부분과 소수 부분을 근으로 갖는 방정식

$\log 900=\log(10^2\times 9)=2+\log 9$이므로 $\log 900$의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\log 9$이다.

$\therefore a=2$, $b=2\log 3$

즉, $3^a=3^2=9$이고

$\frac{2}{b}=\frac{2}{2\log 3}=\log_3 10$에서

$3^{\frac{2}{b}}=3^{\log_3 10}=10^{\log_3 3}=10$

따라서 이차항의 계수가 1이고 3^a, $3^{\frac{2}{b}}$을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2-19x+90=0$

22 답 ③

유형 17 상용로그의 실생활에의 활용

올해 이 회사의 복지 예산이 1억 원이고 복지 예산을 매년 전년도 복지 예산의 r%씩 증액한다고 하면 10년 후의 복지 예산은 2억 원이므로

$1\times\left(1+\frac{r}{100}\right)^{10}=2$

양변에 상용로그를 취하면

$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)^{10}=\log 2$

$10\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\log 2$

$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\frac{1}{10}\times 0.30=0.03$ …… ㉠

이때 $\log 1.07=0.03$이므로 ㉠에서

$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\log 1.07$

$1+\frac{r}{100}=1.07$, $\frac{r}{100}=0.07$

$\therefore r=7$

따라서 복지 예산을 매년 7%씩 증액해야 한다.

03 지수함수와 로그함수

핵심 유형

	유형01 ④	유형02 ③	유형03 4
유형04 $B<C<A$		유형05 5	유형06 ②
유형07 36	유형08 5	유형09 ③	유형10 ②
유형11 -3	유형12 ⑤	유형13 ⑤	유형14 ①
유형15 ④	유형16 4	유형17 ⑤	유형18 ④

핵심 유형 완성하기

001 ⑤	002 ④	003 -1	004 9	005 ⑤
006 -3	007 -5	008 ①	009 2	010 2
011 ②	012 7	013 $\frac{28}{27}$	014 $k<2$	015 ③
016 $\frac{15}{2}$	017 ⑤	018 $\frac{17}{4}$	019 ⑤	020 $\frac{43}{9}$
021 1	022 34	023 ⑤	024 ①	025 ③
026 73	027 ①	028 22	029 6	030 ②
031 50	032 ③	033 ①	034 ④	035 6
036 ①	037 4	038 ①	039 ①	040 $\frac{1}{3}$
041 ⑤	042 $\frac{20}{3}$	043 2	044 16	045 10
046 -1	047 29	048 13	049 -3	
050 $A<C<B$		051 ①	052 17	053 ③
054 1	055 ⑤	056 -2	057 $\frac{1}{2}$	058 2
059 8	060 ④	061 9	062 160	063 ④
064 ③	065 ⑤	066 4	067 ③	068 2

핵심 유형 최종 점검하기

1 ②	2 ③	3 ①	4 ①	5 ①
6 ⑤	7 2	8 11	9 9	10 ③
11 1	12 ④	13 $\sqrt{6}$	14 -1	15 2
16 0	17 3	18 ③	19 20	20 ③

핵심 유형 40~41쪽

유형01 답 ④

① $y=2^x$에서 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

② $x=0$일 때, $y=2^0=1$이므로 y축과 교점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

④ 점근선이 x축이므로 그래프는 x축과 만나지 않는다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

유형02 답 ③

$y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=3^{x-1}-2$

이 그래프가 점 $(2,\ a)$를 지나므로 $a=3^{2-1}-2=1$

유형03 답 **4**

$y=2^x$의 그래프가 두 점 $(a,\ p)$, $(b,\ q)$를 지나므로

$p=2^a$, $q=2^b$

이때 $pq=16$이므로 $2^a\times2^b=16$, $2^{a+b}=2^4$

$\therefore\ a+b=4$

유형04 답 $\boldsymbol{B<C<A}$

$A=3\sqrt{3}=\sqrt{3^3}=3^{\frac{3}{2}}$

$B=\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{4}}=(3^{-3})^{-\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$

$C=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^4}=3^{\frac{4}{3}}$

이때 $\frac{3}{4}<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$이고 밑이 1보다 크므로 $3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{3}}<3^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ B<C<A$

유형05 답 **5**

$f(x)=2^{2x-1}+b=\frac{1}{2}\times4^x+b$에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값, $x=a$일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $f(0)=\frac{5}{2}$이므로 $\frac{1}{2}+b=\frac{5}{2}$ $\qquad\therefore\ b=2$

또 $f(a)=34$이므로 $\frac{1}{2}\times4^a+2=34$에서 $\frac{1}{2}\times4^a=32$

$4^a=64=4^3$ $\qquad\therefore\ a=3$

$\therefore\ a+b=3+2=5$

유형06 답 ②

$f(x)=-x^2-2x$로 놓으면 $f(x)=-(x+1)^2+1$

$-2\le x\le1$에서 $f(-2)=0$, $f(-1)=1$, $f(1)=-3$이므로

$-3\le f(x)\le1$

$y=5^{-x^2-2x}=5^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=5^{f(x)}$은 $f(x)=1$일 때 최대이고 최댓값은 $5^1=5$

$f(x)=-3$일 때 최소이고 최솟값은 $5^{-3}=\frac{1}{125}$

따라서 구하는 곱은 $5\times\frac{1}{125}=\frac{1}{25}$

유형07 답 **36**

$y=9^{-x}-2\times3^{-x+1}-1=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-6\times\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-6t-1=(t-3)^2-10$

이때 $-2\le x\le-1$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$에서 $3\le t\le9$

따라서 주어진 함수는 $t=3$일 때 최솟값 $m=-10$, $t=9$일 때 최댓값 $M=26$을 갖는다.

$\therefore\ M-m=26-(-10)=36$

유형08 답 5

$2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=(t^2-2)-2t+7=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$

따라서 $t\geq 2$이므로 주어진 함수는 $t=2$일 때 최솟값 5를 갖는다.

핵심 유형 **완성하기** 42~46쪽

001 답 ⑤

ㄱ. 정의역은 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. $f(x)=a^x$은 일대일함수이므로 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.

ㄷ. $0<a<1$일 때, $f(x)=a^x$은 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

ㄹ. $f(0)=1$, $f(1)=a$이므로 두 점 $(0, 1)$, $(1, a)$를 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

002 답 ④

임의의 실수 a, b에 대하여 $a<b$일 때, $f(a)<f(b)$를 만족하는 함수는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 함수이다.

이때 $0<0.9<1$이므로 $y=0.9^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 함수가 아닌 것은 ④이다.

003 답 −1

$y=(a^2+a-5)^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하려면 밑이 1보다 커야 하므로

$a^2+a-5>1$

$a^2+a-6>0$, $(a+3)(a-2)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>2$

따라서 $s=-3$, $t=2$이므로 $s+t=-1$

004 답 9

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$

이 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+5=-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+5$ ...... ㉠

㉠의 그래프의 식이 $y=a\left(\frac{1}{2}\right)^x+b$와 일치하므로

$a=-4$, $b=5$

$\therefore b-a=5-(-4)=9$

005 답 ⑤

ㄱ. $y=4^x+3$의 그래프는 $y=4^x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=-4\times 2^{x-2}=-2^2\times 2^{x-2}=-2^x$이므로 그래프는 $y=4^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^x+2=-4^{-x}+2$이므로 그래프는 $y=4^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=2^{2x-4}-2=(2^2)^{x-2}-2=4^{x-2}-2$이므로 그래프는 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=4^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

006 답 −3

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

이 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-(x-a)}+b=3^{x-a}+b$ ...... ㉠

이때 ㉠의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=b$이므로 $b=3$

또 ㉠의 그래프가 점 $(0, 6)$을 지나므로

$6=3^{-a}+3$, $3=3^{-a}$ $\therefore a=-1$

$\therefore ab=-1\times 3=-3$

007 답 −5

$y=5^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=5^{-x}$

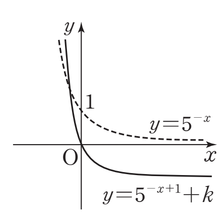
이 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=5^{-(x-1)}+k=5^{-x+1}+k$

따라서 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$5+k\geq 0$ $\therefore k\geq -5$

따라서 k의 최솟값은 -5이다.



008 답 ①

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 그래프가 두 점 $(1, a)$, $(b, 16)$을 지나므로

$a=\frac{1}{4}$, $16=\left(\frac{1}{4}\right)^b$ $\therefore b=-2$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-2}{\frac{1}{4}}=-8$

009 답 2

$y=2^x$에 $y=4$를 대입하면 $4=2^x$ $\therefore x=2$

$y=4^x$에 $y=4$를 대입하면 $4=4^x$ $\therefore x=1$

$\therefore \mathrm{A}(2, 4)$, $\mathrm{B}(1, 4)$ $\therefore \triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times 1\times 4=2$

010 답 2

$\mathrm{A}(a,\ 3^a)$, $\mathrm{B}(b,\ 3^b)$에서 직선 AB의 기울기가 2이므로

$\dfrac{3^b-3^a}{b-a}=2 \qquad \therefore\ b-a=\dfrac{1}{2}(3^b-3^a) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}$에서 $(b-a)^2+(3^b-3^a)^2=(\sqrt{5})^2$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$\dfrac{1}{4}(3^b-3^a)^2+(3^b-3^a)^2=5$

$\dfrac{5}{4}(3^b-3^a)^2=5,\ (3^b-3^a)^2=4$

$\therefore\ 3^b-3^a=2\ (\because\ 3^a<3^b)$

011 답 ②

ㄱ. $f(0)=2^0=1$

ㄴ. $f(-x)=2^{-x}=\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{1}{f(x)}$

ㄷ. $f(x)=2^x,\ \sqrt{f(2x)}=\sqrt{2^{2x}}=\sqrt{(2^x)^2}=2^x$이므로

$f(x)=\sqrt{f(2x)}$

ㄹ. $f(xy)=2^{xy},\ f(x)+f(y)=2^x+2^y$이므로

$f(xy)\neq f(x)+f(y)$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

012 답 7

$f(2)=p$에서 $5^2=p \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=q$에서 $5^3=q \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$f(t)=p^2q$에서 $5^t=p^2q$

위의 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$5^t=(5^2)^2\times5^3,\ 5^t=5^7 \qquad \therefore\ t=7$

013 답 $\frac{28}{27}$

$f(2a)\times f(b)=3^{-2a}\times3^{-b}=9$에서

$3^{-2a-b}=9=3^2 \qquad \therefore\ -2a-b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(a-b)=3^{-(a-b)}=3$에서

$-(a-b)=1 \qquad \therefore\ -a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=0$

$\therefore\ 3^{3a}+3^{3b}=3^{-3}+3^0=\dfrac{1}{27}+1=\dfrac{28}{27}$

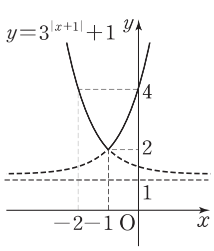
014 답 $k<2$

$x\geq-1$이면 $y=3^{x+1}+1$

$x<-1$이면 $y=3^{-(x+1)}+1=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+1$

따라서 $y=3^{|x+1|}+1$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$가 그래프와 만나지 않으려면

$k<2$



015 답 ③

$A=\sqrt[4]{64}=\sqrt[4]{2^6}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$

$B=16^{\frac{1}{5}}=(2^4)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{4}{5}}$

$C=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-0.8}=(2^{-2})^{-0.8}=2^{1.6}=2^{\frac{8}{5}}$

이때 $\dfrac{4}{5}<\dfrac{3}{2}<\dfrac{8}{5}$이고 밑이 1보다 크므로 $2^{\frac{4}{5}}<2^{\frac{3}{2}}<2^{\frac{8}{5}}$

$\therefore\ B<A<C$

016 답 $\frac{15}{2}$

$\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$

$\sqrt[5]{\dfrac{1}{128}}=\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^7}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{7}{5}}$

$\sqrt[4]{\dfrac{1}{32}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^5}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$

$\sqrt[6]{\dfrac{1}{8}}=\sqrt[6]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

이때 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{5}{4}<\dfrac{4}{3}<\dfrac{7}{5}$이고 밑이 1보다 작으므로

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{7}{5}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ \sqrt[5]{\dfrac{1}{128}}<\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}<\sqrt[4]{\dfrac{1}{32}}<\sqrt[6]{\dfrac{1}{8}}$

따라서 $a=\sqrt[5]{\dfrac{1}{128}},\ b=\sqrt[6]{\dfrac{1}{8}}$이므로

$a^5b=\left(\sqrt[5]{\dfrac{1}{128}}\right)^5\times\sqrt[6]{\dfrac{1}{8}}=\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{7}{5}}\right\}^5\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{15}{2}}$

즉, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{15}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$이므로 $k=\dfrac{15}{2}$

017 답 ⑤

$A=a^{\frac{n}{n+1}},\ B=a^{\frac{n+1}{n+2}},\ C=a^{\frac{n+2}{n+3}}$

$\dfrac{n}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1},\ \dfrac{n+1}{n+2}=1-\dfrac{1}{n+2},\ \dfrac{n+2}{n+3}=1-\dfrac{1}{n+3}$이고

n이 자연수이므로

$\dfrac{1}{n+3}<\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{1}{n+1}$

따라서 $1-\dfrac{1}{n+1}<1-\dfrac{1}{n+2}<1-\dfrac{1}{n+3}$, 즉

$\dfrac{n}{n+1}<\dfrac{n+1}{n+2}<\dfrac{n+2}{n+3}$이고 $0<a<1$이므로

$a^{\frac{n+2}{n+3}}<a^{\frac{n+1}{n+2}}<a^{\frac{n}{n+1}}$

$\therefore\ C<B<A$

018 답 $\frac{17}{4}$

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}+k$에서 밑이 1보다 작으므로 $x=-2$일 때 y는 최댓값 6을 갖는다.

즉, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2+1}+k=6$이므로

$2+k=6 \qquad \therefore\ k=4$

따라서 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}+4$는 $x=1$일 때 최소이고 최솟값은

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+1}+4=\dfrac{17}{4}$

019 답 ⑤

$f(x)=5^x$에서 밑이 1보다 크므로 $x=3$일 때 최댓값 M을 갖는다.

$\therefore M=5^3=125$

또 $g(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$에서 밑이 1보다 작으므로 $x=3$일 때 최솟값 m을 갖는다.

$\therefore m=\left(\frac{1}{5}\right)^{3-2}=\frac{1}{5}$

$\therefore Mm=125\times\frac{1}{5}=25$

020 답 $\frac{43}{9}$

$y=3^x\times2^{-2x}+5=\left(\frac{3}{4}\right)^x+5$에서 밑이 1보다 작으므로

$x=-2$일 때 y는 최대이고 최댓값은

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+5=\frac{16}{9}+5=\frac{61}{9}$

따라서 $a=-2$, $M=\frac{61}{9}$이므로 $a+M=-2+\frac{61}{9}=\frac{43}{9}$

021 답 1

(ⅰ) $a>1$일 때

$f(x)$는 $x=-2$일 때 최소이고 최솟값은 a, $x=1$일 때 최대이고 최댓값은 a^4이다.

이때 최댓값이 최솟값의 27배이므로

$a^4=27a$, $a^3=27$ $\quad\therefore a=3$

(ⅱ) $0<a<1$일 때

$f(x)$는 $x=1$일 때 최소이고 최솟값은 a^4, $x=-2$일 때 최대이고 최댓값은 a이다.

이때 최댓값이 최솟값의 27배이므로

$a=27a^4$, $a^3=\frac{1}{27}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 $3\times\frac{1}{3}=1$

022 답 34

$y=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2x^2-4x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$에서 $f(x)=x^2-2x$로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2-1$

$-1\le x\le2$에서 $f(-1)=3$, $f(1)=-1$, $f(2)=0$이므로

$-1\le f(x)\le3$

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$에서 밑이 1보다 작으므로 함수

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은

$f(x)=-1$일 때 최대이고 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

$f(x)=3$일 때 최소이고 최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

따라서 치역은 $\left\{y\,\middle|\,\frac{1}{8}\le y\le2\right\}$이므로 $M=2$, $m=\frac{1}{8}$

$\therefore 16(M+m)=16\left(2+\frac{1}{8}\right)=34$

023 답 ⑤

$f(x)=-x^2+6x-1$로 놓으면

$f(x)=-(x-3)^2+8$이므로 $f(x)\le8$

$y=a^{-x^2+6x-1}=a^{f(x)}$에서 밑이 1보다 작으므로 함수 $y=a^{f(x)}$은

$f(x)=8$일 때 최솟값 $\frac{1}{16}$을 갖는다.

즉, $a^8=\frac{1}{16}$이므로 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because 0<a<1$)

024 답 ①

함수 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=3^{\frac{1}{2}(-x^2+6x-6)}$에서

$h(x)=\frac{1}{2}(-x^2+6x-6)$으로 놓으면

$h(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{3}{2}$이므로 $h(x)\le\frac{3}{2}$

$(f\circ g)(x)=3^{\frac{1}{2}(-x^2+6x-6)}=3^{h(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 함수

$(f\circ g)(x)=3^{h(x)}$은 $h(x)=\frac{3}{2}$, 즉 $x=3$일 때 최댓값 $3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$을 갖는다.

따라서 $a=3$, $M=3\sqrt{3}$이므로 $\frac{M}{a}=\sqrt{3}$

025 답 ③

$f(x)=-x^2+2x+k$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+k+1$

$0\le x\le2$에서 $f(0)=k$, $f(1)=k+1$, $f(2)=k$이므로

$k\le f(x)\le k+1$

$y=2^{-x^2+2x+k}=2^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=2^{f(x)}$은

$f(x)=k$일 때 최솟값 2를 갖는다.

즉, $2^k=2$이므로 $k=1$

따라서 함수 $y=2^{f(x)}$은 $f(x)=k+1=2$일 때 최대이므로

최댓값은 $2^2=4$

026 답 73

$y=4^x-2^{x+1}+5=2^{2x}-2\times2^x+5$에서

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$

이때 $-2\le x\le0$이므로 $2^{-2}\le2^x\le2^0$에서 $\frac{1}{4}\le t\le1$

따라서 $t=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $M=\left(\frac{1}{4}-1\right)^2+4=\frac{73}{16}$, $t=1$일 때 최솟값 $m=4$를 갖는다.

$\therefore 4Mm=4\times\frac{73}{16}\times4=73$

027 답 ①

$y=36^{-x}-6^{-x+1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}-6\times\left(\frac{1}{6}\right)^x$에서

$\left(\frac{1}{6}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-6t=(t-3)^2-9$

따라서 $t=3$일 때 최솟값 -9를 갖는다.

028 답 22

$y=\dfrac{1-2\times5^x+4\times25^x}{25^x}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x}-2\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^x+4$에서

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-2t+4=(t-1)^2+3$

이때 $-1\le x\le0$이므로 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^0\le\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\le\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$에서

$1\le t\le5$

따라서 $t=5$일 때 최댓값 19, $t=1$일 때 최솟값 3을 가지므로 구하는 합은 $19+3=22$

029 답 6

$y=16^x-4^{x+a}+b=4^{2x}-4^a\times4^x+b$에서

$4^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-4^a\times t+b=\left(t-\dfrac{4^a}{2}\right)^2-\dfrac{4^{2a}}{4}+b$

$=\left(t-\dfrac{4^a}{2}\right)^2-4^{2a-1}+b$

따라서 $t=\dfrac{4^a}{2}$일 때 최솟값 $-4^{2a-1}+b$를 갖는다.

이때 주어진 함수는 $x=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값이 1이므로

$t=\dfrac{4^a}{2}=4^{\frac{1}{2}}=2,\ 4^a=4\qquad\therefore\ a=1$

$-4^{2a-1}+b=1$에서 $-4+b=1\qquad\therefore\ b=5$

$\therefore\ a+b=1+5=6$

030 답 ②

$3^x+3^{-x}=t\,(t>0)$로 놓으면 $3^x>0,\ 3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=3^x+3^{-x}\ge2\sqrt{3^x\times3^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=t^2-2-8t=(t-4)^2-18$

따라서 $t\ge2$이므로 주어진 함수는 $t=4$일 때 최솟값 -18을 갖는다.

031 답 50

$5^{2-x}>0,\ 5^{2+x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=5^{2-x}+5^{2+x}\ge2\sqrt{5^{2-x}\times5^{2+x}}=2\sqrt{5^4}=2\times5^2=50$

이때 등호는 $5^{2-x}=5^{2+x}$일 때 성립하므로

$2-x=2+x\qquad\therefore\ x=0$

따라서 $a=0,\ b=50$이므로 $a+b=50$

032 답 ③

$2^x>0,\ 8^y=2^{3y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^x+8^y\ge2\sqrt{2^x\times8^y}=2\sqrt{2^x\times2^{3y}}=2\sqrt{2^{x+3y}}$

(단, 등호는 $x=3y$일 때 성립)

그런데 $x+3y=4$이므로

$2\sqrt{2^{x+3y}}=2\sqrt{2^4}=2\times2^2=8$

따라서 2^x+8^y의 최솟값은 8이다.

033 답 ①

$2\times3^{a+x}>0,\ 8\times3^{a-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=2\times3^{a+x}+8\times3^{a-x}\ge2\sqrt{2\times3^{a+x}\times8\times3^{a-x}}=2\sqrt{2^4\times3^{2a}}=8\times3^a$

(단, 등호는 $3^x=2$일 때 성립)

따라서 주어진 함수는 최솟값이 8×3^a이므로

$8\times3^a=72,\ 3^a=9\qquad\therefore\ a=2$

핵심 유형 47~49쪽

유형09 답 ③

③ $y=\log_5 x$에서 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

유형10 답 ②

$y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_3(x-a)+b$ …… ㉠

㉠의 그래프의 식이 $y=\log_3\left(\dfrac{x}{9}-1\right)$과 일치하므로

$y=\log_3\left(\dfrac{x}{9}-1\right)=\log_3\dfrac{x-9}{9}=\log_3(x-9)-\log_3 9$

$=\log_3(x-9)-2$

따라서 $a=9,\ b=-2$이므로 $a+b=7$

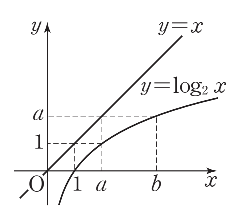
유형11 답 -3

오른쪽 그림에서

$\log_2 a=1$이므로 $a=2$

$\log_2 b=a$, 즉 $\log_2 b=2$이므로 $b=4$

$\therefore\ \log_{\frac{1}{4}} 8ab=\log_{\frac{1}{4}} 64=-3$



유형12 답 ⑤

$y=\log_7(x-1)+6$에서 $y-6=\log_7(x-1)$

$x-1=7^{y-6}\qquad\therefore\ x=7^{y-6}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=7^{x-6}+1$

따라서 $a=7,\ b=-6,\ c=1$이므로 $a+b+c=2$

유형13 답 ⑤

$A=\log_3 10$

$B=2=\log_3 3^2=\log_3 9$

$C=\log_9 80=\log_{3^2} 80=\dfrac{1}{2}\log_3 80=\log_3 80^{\frac{1}{2}}=\log_3\sqrt{80}$

이때 $\sqrt{80}<9<10$이고 밑이 1보다 크므로

$\log_3\sqrt{80}<\log_3 9<\log_3 10$

$\therefore\ C<B<A$

유형14 답 ①

함수 $f(x)=\log_4(x-5)+b$에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$는
$x=69$일 때 최댓값, $x=a$일 때 최솟값을 갖는다.
즉, $f(69)=1$이므로
$\log_4(69-5)+b=\log_4 4^3+b=3+b=1$
$\therefore b=-2$
또 $f(a)=-2$이므로
$\log_4(a-5)-2=-2$에서 $\log_4(a-5)=0$
$a-5=1 \qquad \therefore a=6$
$\therefore ab=6\times(-2)=-12$

유형15 답 ④

$f(x)=x^2-4x+6$으로 놓으면
$f(x)=(x-2)^2+2$
$3\le x\le 7$에서 $f(3)=3$, $f(7)=27$이므로 $3\le f(x)\le 27$
$y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x+6)=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$에서 밑이 1보다 작으므로
함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$는
$f(x)=3$일 때 최대이고 최댓값은 $M=\log_{\frac{1}{3}}3=-1$
$f(x)=27$일 때 최소이고 최솟값은 $m=\log_{\frac{1}{3}}27=-3$
$\therefore Mm=-1\times(-3)=3$

유형16 답 4

$y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^4+5=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+5$에서
$\log_2 x=t$로 놓으면
$y=t^2-4t+5=(t-2)^2+1$
이때 $1\le x\le 16$이므로
$\log_2 1\le \log_2 x\le \log_2 16$에서 $0\le t\le 4$
따라서 주어진 함수는 $t=0$ 또는 $t=4$일 때 최댓값 $M=5$, $t=2$일 때 최솟값 $m=1$을 갖는다.
$\therefore M-m=5-1=4$

유형17 답 ⑤

$y=x^{\log_2 4x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면
$\log_2 y=\log_2 x^{\log_2 4x}=\log_2 4x\times\log_2 x$
$=(2+\log_2 x)\log_2 x$
$=(\log_2 x)^2+2\log_2 x$
$\log_2 x=t$로 놓으면 $\log_2 y=t^2+2t=(t+1)^2-1$
이때 $2\le x\le 8$이므로
$\log_2 2\le\log_2 x\le\log_2 8$에서 $1\le t\le 3$
따라서 $\log_2 y$는
$t=3$일 때 최댓값 15를 가지므로
$\log_2 M=15$에서 $M=2^{15}$
$t=1$일 때 최솟값 3을 가지므로
$\log_2 m=3$에서 $m=2^3$
$\therefore \frac{M}{m}=\frac{2^{15}}{2^3}=2^{12}$

유형18 답 ④

$y=\log_6 x+\log_x 36=\log_6 x+\frac{1}{\log_{36} x}$
$=\log_6 x+\frac{2}{\log_6 x}$
이때 $x>1$에서 $\log_6 x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\log_6 x+\frac{2}{\log_6 x}\ge 2\sqrt{\log_6 x\times\frac{2}{\log_6 x}}=2\sqrt{2}$
(단, 등호는 $\log_6 x=\sqrt{2}$일 때 성립)
따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

핵심 유형 완성하기 50~54쪽

034 답 ④

③ $f(x)=\log_{0.3}x$에서 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
즉, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
④ 그래프의 점근선이 y축이므로 y축과 만나지 않는다.
⑤ $f(x)$는 일대일함수이므로 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

035 답 6

$y=\log_4(-x^2+x+12)$에서 $-x^2+x+12>0$이므로
$x^2-x-12<0$, $(x+3)(x-4)<0$
$\therefore A=\{x\mid -3<x<4\}$
따라서 집합 A의 원소 중 정수는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다.

036 답 ①

함수 $y=ax+b$의 그래프에서 $a>0$, $0<b<1$
$y=\log_b ax$에서 $0<b<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
또 $a>0$이므로 $ax>0$에서 $x>0$이다.
따라서 $y=\log_b ax$의 그래프의 개형은 ①이다.

037 답 4

$y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\log_2(x-a)+b$
이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=\log_2(x-a)+b$
$\therefore y=-\log_2(x-a)-b \qquad \cdots\cdots$ ㉠
㉠의 그래프의 식이 $y=\log_{\frac{1}{2}}(4x-8)$과 일치하므로
$y=\log_{\frac{1}{2}}(4x-8)=\log_{2^{-1}}4(x-2)$
$=-\log_2(x-2)-\log_2 2^2=-\log_2(x-2)-2$
따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $a+b=4$

038 답 ①

ㄱ. $y=\log_{\frac{1}{2}} x=-\log_2 x$에서 $-y=\log_2 x$이므로 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=-\log_{\frac{1}{2}} 2x=\log_2 2x=\log_2 x+1$이므로 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

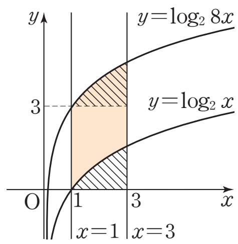
ㄷ. $y=2\log_2 x=\log_{2^{\frac{1}{2}}} x=\log_{\sqrt{2}} x$이므로 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=\frac{1}{2}\log_4 (x+2)-1=\log_{4^2}(x+2)-1=\log_{16}(x+2)-1$ 이므로 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

따라서 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

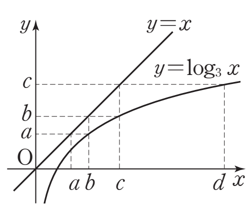
039 답 ①

$y=\log_2 8x=\log_2 x+3$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
즉, 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는
$(3-1)\times 3=6$



040 답 $\frac{1}{3}$

오른쪽 그림에서
$\log_3 b=a$, $\log_3 c=b$, $\log_3 d=c$이므로
$a-c=\log_3 b-\log_3 d=\log_3 \frac{b}{d}$
이때 $d=3b$이므로
$a-c=\log_3 \frac{1}{3}=-1$
$\therefore\ 3^{a-c}=3^{-1}=\frac{1}{3}$



041 답 ⑤

네 점 $\mathrm{A}(a, \log_4 a)$, $\mathrm{B}(a, \log_{16} a)$, $\mathrm{C}(b, \log_4 b)$, $\mathrm{D}(b, \log_{16} b)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_4 a-\log_{16} a=\log_4 a-\frac{1}{2}\log_4 a=\frac{1}{2}\log_4 a$

$\overline{\mathrm{CD}}=\log_4 b-\log_{16} b=\log_4 b-\frac{1}{2}\log_4 b=\frac{1}{2}\log_4 b$

이때 $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=4$에서 $\overline{\mathrm{CD}}=4\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$\frac{1}{2}\log_4 b=4\times\frac{1}{2}\log_4 a$, $\log_4 b=\log_4 a^4$

$\therefore\ b=a^4$

042 답 $\frac{20}{3}$

$y=\log_{\frac{1}{9}} x=-\frac{1}{2}\log_3 x$에서

$x=\frac{1}{3}$일 때, $y=-\frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

$x=3$일 때, $y=-\frac{1}{2}\log_3 3=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{A}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(3, -\frac{1}{2}\right)$

$y=\log_{\sqrt{3}} x=2\log_3 x$에서

$x=\frac{1}{3}$일 때, $y=2\log_3 \frac{1}{3}=-2$

$x=3$일 때, $y=2\log_3 3=2$

$\therefore\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{3}, -2\right)$, $\mathrm{D}(3, 2)$

$\therefore\ \square\mathrm{ABCD}=\left\{\frac{1}{2}-(-2)\right\}\times\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{3}$

043 답 2

$f(3)=6$에서 $\log_a 2+7=6$, $\log_a 2=-1$

$a^{-1}=2 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$

$f(9)=b$에서 $\log_{\frac{1}{2}} 8+7=\log_{2^{-1}} 2^3+7=-3+7=4$

$\therefore\ b=4$

$\therefore\ ab=\frac{1}{2}\times 4=2$

044 답 16

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n)$

$=\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}+\cdots+\log_{\frac{1}{2}}\frac{n-1}{n}$

$=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{n}$

이때 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{n}=4$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{n}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}$, $\frac{1}{n}=\frac{1}{16}$

$\therefore\ n=16$

045 답 10

$y=\log(x+3)+a$에서 $y-a=\log(x+3)$

$x+3=10^{y-a} \qquad \therefore\ x=10^{y-a}-3$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=10^{x-a}-3$

따라서 $a=3$, $b=10$, $c=-3$이므로 $a+b+c=10$

046 답 -1

$f(8)=\log_2 8-1=2$이므로 $g(2)=8$

$g(g(a))=8$에서 $g(a)=2$

$f(2)=2-3=-1$이므로 $g(-1)=2$

$g(a)=2$에서 $a=-1$

047 답 29

$g(x)$는 $y=\log_3 x$의 역함수이므로 $g(x)=3^x$

점 A는 $y=g(x)$의 그래프와 y축의 교점이므로 $A(0, 1)$

점 B는 y좌표가 1이므로 $1=\log_3 x$에서 $x=3$ $\quad \therefore B(3, 1)$

$\therefore \overline{AB}=3$

점 C의 x좌표가 3이므로 점 C의 좌표는 $(3, 27)$

$\therefore \overline{BC}=26$

$\therefore \overline{AB}+\overline{BC}=3+26=29$

048 답 13

$y=\log_2(x+a)+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은

$y=\log_2(x+a)+b$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이때 두 교점의 x좌표가 각각 3, 4이므로 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프는 두 점 $(3, 3)$, $(4, 4)$를 지난다.

$\log_2(3+a)+b=3$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_2(4+a)+b=4$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $\log_2(4+a)-\log_2(3+a)=1$

$\log_2\frac{4+a}{3+a}=\log_2 2$, $\frac{4+a}{3+a}=2$

$4+a=2(3+a)$ $\quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $\log_2 1+b=3$ $\quad \therefore b=3$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+3^2=13$

049 답 -3

$2\log_{0.1}4\sqrt{2}=\log_{0.1}(4\sqrt{2})^2=\log_{0.1}32$

$\log_{0.1}2-1=\log_{0.1}2-\log_{0.1}0.1=\log_{0.1}\frac{2}{0.1}=\log_{0.1}20$

$\log\frac{1}{50}=-\log 50=\log_{0.1}50$

이때 $20<32<50$이고 밑이 1보다 작으므로

$\log_{0.1}50<\log_{0.1}32<\log_{0.1}20$

따라서 가장 큰 수는 $\log_{0.1}20$, 가장 작은 수는 $\log_{0.1}50$이므로 그 합은

$\log_{0.1}20+\log_{0.1}50=\log_{0.1}1000=-\log 1000=-3$

050 답 $A<C<B$

$\frac{1}{9}<x<\frac{1}{3}$에서 각 변에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$ $\quad \therefore 1<\log_{\frac{1}{3}}x<2$

(i) $A=\log_3 x=-\log_{\frac{1}{3}}x$

$1<\log_{\frac{1}{3}}x<2$에서 $-2<-\log_{\frac{1}{3}}x<-1$이므로

$-2<A<-1$

(ii) $1<\log_{\frac{1}{3}}x<2$에서 $1<(\log_{\frac{1}{3}}x)^2<4$이므로

$1<B<4$

(iii) $1<\log_{\frac{1}{3}}x<2$의 각 변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}}2<\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{3}}x)<\log_{\frac{1}{2}}1$에서 $-1<\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{3}}x)<0$

$\therefore -1<C<0$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $A<C<B$

051 답 ①

$0<a<1$이므로 $a<1<b$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a b<\log_a 1<\log_a a$ $\quad \therefore \log_a b<0<1$

또 $b>1$이므로 $a<1<b$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b a<\log_b 1<\log_b b$

$\log_b a<0<1$ $\quad \therefore -\log_b a>0$

$\log_b\frac{b}{a}=\log_b b-\log_b a=1-\log_b a$이므로

$1-\log_b a>-\log_b a$

$\therefore \log_a b<-\log_b a<\log_b\frac{b}{a}$

$\therefore A<B<C$

052 답 17

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)-3$에서 밑이 1보다 작으므로 $x=10$일 때 최솟값 -6을 갖는다.

즉, $\log_{\frac{1}{3}}(10+a)-3=-6$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}(10+a)=-3$

$10+a=27$ $\quad \therefore a=17$

053 답 ③

$y=\log_2(x-2)+1$에서 밑이 1보다 크므로

$x=3$일 때 최솟값은 $m=\log_2(3-2)+1=1$

$x=18$일 때 최댓값은 $M=\log_2(18-2)+1=5$

$\therefore M+m=6$

054 답 1

$y=\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+k$에서 밑이 1보다 작으므로

$x=\frac{5}{2}$일 때 최댓값은 $\log_{\frac{1}{2}}4+k=-2+k$

$x=\frac{9}{2}$일 때 최솟값은 $\log_{\frac{1}{2}}8+k=-3+k$

따라서 최댓값과 최솟값의 차는

$(-2+k)-(-3+k)=1$

055 답 ⑤

$f(x)=-x^2+2x+9$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+10$

$1\le x\le 4$에서 $f(1)=10$, $f(4)=1$이므로

$1\le f(x)\le 10$

$y=\log_2(-x^2+2x+9)=\log_2 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=\log_2 f(x)$는

$f(x)=10$일 때 최대이고 최댓값은 $\log_2 10$

$f(x)=1$일 때 최소이고 최솟값은 $\log_2 1=0$

따라서 구하는 합은 $\log_2 10+0=\log_2 10$

056 답 -2

진수의 조건에서 $x+2>0$, $4-x>0$

$\therefore\ -2<x<4$

$y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}}(4-x)=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+2x+8)$이므로

$f(x)=-x^2+2x+8$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+9$

$-2<x<4$에서 $f(0)=0$, $f(1)=9$이므로 $0<f(x)\le 9$

$y=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+2x+8)=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$에서 밑이 1보다 작으므로

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$는 $f(x)=9$일 때 최소이고 최솟값은

$\log_{\frac{1}{3}}9=\log_{3^{-1}}3^2=-2$

057 답 $\frac{1}{2}$

$f(x)=-x^2+4x$로 놓으면 $f(x)=-(x-2)^2+4$

$1\le x\le 3$에서 $f(1)=f(3)=3$, $f(2)=4$이므로

$3\le f(x)\le 4$

$y=\log_a(-x^2+4x)=\log_a f(x)$에서 밑이 1보다 작으므로 함수

$y=\log_a f(x)$는 $f(x)=4$일 때 최소이고 최솟값 -2를 갖는다.

즉, $\log_a 4=-2$이므로 $a^{-2}=4$

$a^2=\frac{1}{4}\qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}\ (\because\ 0<a<1)$

058 답 2

$f(x)=|x^2-2x-8|$로 놓으면 $f(x)=|(x-1)^2-9|$

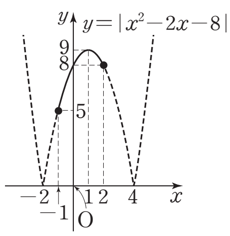
$-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로 $5\le f(x)\le 9$

$y=\log_3 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로

함수 $y=\log_3 f(x)$는 $f(x)=9$일 때 최대이고 최댓값은

$\log_3 9=2$



059 답 8

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 놓으면 $y=2t^2+4t=2(t+1)^2-2$

이때 $\frac{1}{2}\le x\le 2$이므로 $\log_{\frac{1}{2}}2\le\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$에서

$-1\le t\le 1$

따라서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최댓값 $M=6$, $t=-1$일 때 최솟값 $m=-2$를 갖는다.

$\therefore\ M-m=6-(-2)=8$

060 답 ④

$y=\log_3 3x\times\log_{\frac{1}{3}}\frac{9}{x^2}=\log_3 3x\times\log_3\frac{x^2}{9}$

$=(\log_3 3+\log_3 x)(\log_3 x^2-\log_3 9)$

$=(1+\log_3 x)(2\log_3 x-2)$

$=2(\log_3 x)^2-2$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $y=2t^2-2$

이때 $1\le x\le 27$이므로 $\log_3 1\le\log_3 x\le\log_3 27$에서 $0\le t\le 3$

따라서 주어진 함수는 $t=3$일 때 최댓값 16, $t=0$일 때 최솟값 -2를 가지므로 구하는 합은 $16+(-2)=14$

061 답 9

$y=\log_4 x\times\log_4\frac{16}{x}+k$

$=\log_4 x(\log_4 16-\log_4 x)+k$

$=\log_4 x(2-\log_4 x)+k$

$=-(\log_4 x)^2+2\log_4 x+k$

$\log_4 x=t$로 놓으면

$y=-t^2+2t+k=-(t-1)^2+k+1$

따라서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최대이고 최댓값은 $k+1$이다.

즉, $k+1=10$이므로 $k=9$

062 답 160

$x^{\log 3}=3^{\log x}$이므로

$y=3^{\log x}\times x^{\log 3}-3(3^{\log x}+x^{\log 3})+25$

$=3^{\log x}\times 3^{\log x}-3(3^{\log x}+3^{\log x})+25$

$=(3^{\log x})^2-6\times 3^{\log x}+25$

$3^{\log x}=t$로 놓으면 $y=t^2-6t+25=(t-3)^2+16$

이때 $x>1$이므로 $t>1$

따라서 주어진 함수는 $t=3$일 때 최솟값 16을 가지므로 $m=16$

$3^{\log x}=3$에서 $\log x=1$, $x=10\qquad\therefore\ a=10$

$\therefore\ am=160$

063 답 ④

$y=x^{-6+\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3 x^{-6+\log_3 x}=(-6+\log_3 x)\log_3 x$

$=(\log_3 x)^2-6\log_3 x$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\log_3 y=t^2-6t=(t-3)^2-9$

이때 $1\le x\le 81$이므로 $\log_3 1\le\log_3 x\le\log_3 81$에서

$0\le t\le 4$

따라서 $\log_3 y$는 $t=3$일 때 최솟값 -9를 가지므로

$\log_3 m=-9\qquad\therefore\ m=3^{-9}=\frac{1}{3^9}$

또 $t=0$일 때 최댓값 0을 가지므로

$\log_3 M=0\qquad\therefore\ M=3^0=1$

$\therefore\ \frac{M}{m}=3^9$

064 답 ③

$y=\frac{10x^4}{x^{\log x}}=10x^{4-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y=\log 10x^{4-\log x}=\log 10+\log x^{4-\log x}$

$=1+(4-\log x)\log x$

$=-(\log x)^2+4\log x+1$

$\log x=t$로 놓으면

$\log y=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$

따라서 $\log y$는 $t=2$일 때 최댓값 5를 가지므로

$\log x=2$에서 $x=10^2\qquad\therefore\ a=10^2$

$\log y=5$에서 $y=10^5\qquad\therefore\ M=10^5$

$\therefore\ aM=10^2\times 10^5=10^7$

065 답 ⑤

$y=a\times x^{2-\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3 (a\times x^{2-\log_3 x})$

$=\log_3 a+\log_3 x^{2-\log_3 x}$

$=\log_3 a+(2-\log_3 x)\log_3 x$

$=-(\log_3 x)^2+2\log_3 x+\log_3 a$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$\log_3 y=-t^2+2t+\log_3 a=-(t-1)^2+1+\log_3 a$

이때 $1\le x\le 27$이므로 $\log_3 1\le \log_3 x\le \log_3 27$에서

$0\le t\le 3$

한편 주어진 함수의 최솟값이 3이므로 $\log_3 y$의 최솟값은

$\log_3 3=1$이다.

따라서 $\log_3 y$는 $t=3$일 때 최솟값 1을 가지므로

$-3+\log_3 a=1$, $\log_3 a=4$ $\quad\therefore a=3^4=81$

066 답 4

$y=\log x-\log_x \frac{1}{10000}=\log x-\log_x 10^{-4}$

$=\log x+4\log_x 10=\log x+\frac{4}{\log x}$

이때 $x>1$에서 $\log x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log x+\frac{4}{\log x}\ge 2\sqrt{\log x\times\frac{4}{\log x}}=2\times2=4$

(단, 등호는 $\log x=2$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

067 답 ③

$y=\log_9\left(a+\frac{4}{b}\right)+\log_9\left(b+\frac{1}{a}\right)=\log_9\left(a+\frac{4}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)$

$=\log_9\left(ab+\frac{4}{ab}+5\right)$

이고 밑이 1보다 크므로 y는 $ab+\frac{4}{ab}+5$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $ab>0$, $\frac{4}{ab}>0$이고 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$ab+\frac{4}{ab}+5\ge 2\sqrt{ab\times\frac{4}{ab}}+5=2\times2+5=9$

(단, 등호는 $ab=2$일 때 성립)

따라서 $ab+\frac{4}{ab}+5$의 최솟값은 9이므로 b의 최솟값은

$\log_9 9=1$

068 답 2

$\log x+\log 2y=\log 2xy$이고 밑이 1보다 크므로 $\log 2xy$는 xy가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+2y\ge 2\sqrt{2xy}$ (단, 등호는 $x=2y$일 때 성립)

또 $x+2y=20$이므로 $20\ge 2\sqrt{2xy}$, $10\ge\sqrt{2xy}$

$100\ge 2xy$ $\quad\therefore xy\le 50$

따라서 xy의 최댓값은 50이므로 $\log 2xy$의 최댓값은

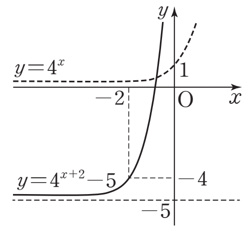
$\log 100=2$

핵심 유형 최종 점검하기 55~57쪽

1 답 ②

유형 02 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

$y=4^{x+2}-5$의 그래프는 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 점근선의 방정식은 $y=-5$이므로 옳지 않은 것은 ②이다.

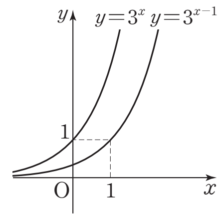
2 답 ③

유형 02 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

ㄱ. $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

ㄴ. $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=3^{x-1}$이고, 오른쪽 그림에서 $y=3^{x-1}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프보다 아래쪽에 있다.



ㄷ. $y=\sqrt[3]{5}\times5^x=5^{\frac{1}{3}}\times5^x=5^{x+\frac{1}{3}}$이므로

$y=5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$만큼 평행이동하여 겹쳐진다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

3 답 ①

유형 03 지수함수의 함숫값

$f(1)=3$에서 $a^{b+c}=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=27$에서 $a^{2b+c}=27$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $a^b=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$a^{b+c}=a^b\times a^c=9a^c=3$이므로 $a^c=\frac{1}{3}$

$\therefore f(-1)=a^{-b+c}=a^{-b}\times a^c=(a^b)^{-1}\times a^c$

$=\frac{1}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

4 답 ①

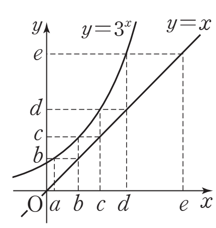
유형 03 지수함수의 함숫값

오른쪽 그림에서

$b=3^a$, $d=3^c$이므로

$3^k=bd=3^a\times3^c=3^{a+c}$

$\therefore k=a+c$



5 답 ①

유형 04 지수함수를 이용한 수의 대소 비교

세 수 $A=\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$, $B=\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}$, $C=5^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$에서

$0<x<1$이므로 $2x>0$, $x^2>0$, $-x<0$

또 $2x-x^2=x(2-x)>0$이므로 $2x>x^2$

$\therefore\ -x<x^2<2x$

이때 밑이 1보다 작으므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$

$\therefore\ A<B<C$

6 답 ⑤

유형 05 지수함수의 최대, 최소

$y=3^x\times 2^{3-2x}=8\times\left(\frac{3}{4}\right)^x$에서 밑이 1보다 작으므로

$x=-1$일 때 y는 최대이고 최댓값은 $8\times\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{32}{3}$

$x=2$일 때 y는 최소이고 최솟값은 $8\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{2}$

따라서 치역은 $\left\{y\,\middle|\,\frac{9}{2}\le y\le\frac{32}{3}\right\}$이므로

$M=\frac{32}{3}$, $m=\frac{9}{2}$

$\therefore\ Mm=\frac{32}{3}\times\frac{9}{2}=48$

7 답 2

유형 06 $y=a^{f(x)}$ 꼴로 주어진 함수의 최대, 최소

$f(x)=-x^2+4x-5$로 놓으면

$f(x)=-(x-2)^2-1$

$0\le x\le 3$에서 $f(0)=-5$, $f(2)=-1$, $f(3)=-2$이므로

$-5\le f(x)\le -1$

$y=a^{-x^2+4x-5}=a^{f(x)}$에서 밑이 1보다 작으므로 함수 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=-5$일 때 최댓값 32를 갖는다.

즉, $a^{-5}=32$이므로 $a=\frac{1}{2}$

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은 $f(x)=-1$일 때 최소이므로 최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$이다.

8 답 11

유형 07 a^x 꼴이 반복되는 함수의 최대, 최소

$y=2\times 3^{x+1}-3^{2x}+a=-3^{2x}+6\times 3^x+a$에서

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $y=-t^2+6t+a=-(t-3)^2+9+a$

이때 $1\le x\le 2$이므로 $3\le 3^x\le 3^2$에서 $3\le t\le 9$

따라서 $t=9$일 때 최솟값 -25를 가지므로

$-36+9+a=-25\qquad\therefore\ a=2$

따라서 $t=3$일 때 최댓값 $9+2=11$을 갖는다.

9 답 9

유형 08 a^x+a^{-x} 꼴이 주어진 함수의 최대, 최소

$4^x>0$, $4^{-x+2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=4^x+4^{-x+2}\ge 2\sqrt{4^x\times 4^{-x+2}}=2\times 4=8$

이때 등호는 $4^x=4^{-x+2}$일 때 성립하므로

$x=-x+2\qquad\therefore\ x=1$

따라서 $a=1$, $m=8$이므로 $a+m=9$

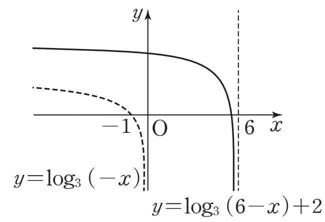
10 답 ③

유형 10 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

$y=\log_3(6-x)+2=\log_3\{-(x-6)\}+2$이므로

$y=\log_3(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=\log_3(-x)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y=\log_3(6-x)+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 옳지 않은 것은 ③이다.

11 답 1

유형 10 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

$y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_5(x-a)+b$

이때 점근선의 방정식이 $x=-1$이므로

$a=-1$

또 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=\log_5(0+1)+b\qquad\therefore\ b=2$

$\therefore\ a+b=-1+2=1$

12 답 ④

유형 11 로그함수의 함숫값

① $f(1)=\log_5 1=0$

② $f(25x)=\log_5 25x=\log_5 x+\log_5 25=f(x)+2$

③ $f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_5\frac{1}{x}=-\log_5 x=-f(x)$

④ $25^{f(x)}=25^{\log_5 x}=x^{\log_5 25}=x^2$

⑤ $f(x^3)=\log_5 x^3=3\log_5 x=3f(x)$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

13 답 $\sqrt{6}$

유형 11 로그함수의 함숫값

$a=\log_{\frac{1}{3}}2$, $b=\log_{\frac{1}{3}}3$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}k=\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}(\log_{\frac{1}{3}}2+\log_{\frac{1}{3}}3)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}6$

즉, $\log_{\frac{1}{3}}k=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}6$이므로

$k=\sqrt{6}$

14 답 -1

유형 12 로그함수의 역함수

$(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=a$라고 하면 $f(a)=-\frac{1}{2}$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^a-1=-\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\frac{1}{2}$　　$\therefore a=1$

또 $g(1)=b$라고 하면 $f(b)=1$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^b-1=1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^b=2$　　$\therefore b=-1$

15 답 2

유형 12 로그함수의 역함수

$y=f(x)$의 그래프가 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$는 함수 $y=\log_2 x$의 역함수이다.

점 $(1,\ b)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 점 $(b,\ 1)$은 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이다.

즉, $1=\log_2 b$이므로 $b=2$

또 점 $(a,\ 2)$가 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로

$2=\log_2 a$　　$\therefore a=4$

$\therefore a-b=4-2=2$

16 답 0

유형 13 로그함수를 이용한 수의 대소 비교

$\frac{1}{a}<1$에서 $a>1$이므로 $b<\frac{1}{a}<1$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a b<\log_a \frac{1}{a}<\log_a 1$　　$\therefore \log_a b<-1$

또 $0<b<1$이므로 $b<\frac{1}{a}<1$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b 1<\log_b \frac{1}{a}<\log_b b$에서 $0<-\log_b a<1$

$\therefore -1<\log_b a<0$

따라서 $\log_a b<-1<\log_b a<0$이므로 가장 큰 수는 0, 가장 작은 수는 $\log_a b$이므로 구하는 곱은 $0\times\log_a b=0$

17 답 3

유형 15 $y=\log_a f(x)$ 꼴로 주어진 함수의 최대, 최소

$f(x)=\frac{x}{x+2}$로 놓으면 $f(x)=\frac{-2}{x+2}+1$

$\frac{2}{7}\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하고 $f\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{1}{8}$, $f(2)=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{8}\le f(x)\le\frac{1}{2}$

$y=\log_2\frac{x}{x+2}=\log_2 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로

함수 $y=\log_2 f(x)$는

$f(x)=\frac{1}{2}$일 때 최대이고 최댓값은 $\log_2\frac{1}{2}=-1$

$f(x)=\frac{1}{8}$일 때 최소이고 최솟값은 $\log_2\frac{1}{8}=-3$

따라서 구하는 곱은 $-1\times(-3)=3$

18 답 ③

유형 16 $\log_a x$ 꼴이 반복되는 함수의 최대, 최소

$y=2(\log_{\frac{1}{5}} x)^2+a\log_5\frac{1}{x}+b=2(\log_{\frac{1}{5}} x)^2+a\log_{\frac{1}{5}} x+b$

$\log_{\frac{1}{5}} x=t$로 놓으면

$y=2t^2+at+b=2\left(t+\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{8}+b$

따라서 주어진 함수는 $t=-\frac{a}{4}$일 때 최솟값 $-\frac{a^2}{8}+b$를 갖는다.

이때 주어진 함수는 $x=25$일 때 최솟값이 -6이므로

$t=-\frac{a}{4}=-2$　　$\therefore a=8$

$-\frac{a^2}{8}+b=-6$에서 $-8+b=-6$

$\therefore b=2$

$\therefore a-b=8-2=6$

19 답 20

유형 17 $y=x^{f(x)}$ 꼴로 주어진 함수의 최대, 최소

$y=x^{4-\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 y=\log_2 x^{4-\log_2 x}=(4-\log_2 x)\log_2 x$

$\qquad=-(\log_2 x)^2+4\log_2 x$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$\log_2 y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$

따라서 $\log_2 y$는 $t=2$일 때 최댓값 4를 가지므로

$\log_2 x=2$에서 $x=4$　　$\therefore a=4$

$\log_2 y=4$에서 $y=16$　　$\therefore M=16$

$\therefore a+M=4+16=20$

20 답 ③

유형 18 $\log_a b+\log_b a$ 꼴이 주어진 함수의 최대, 최소

$y=\log_{\frac{1}{4}} x-\log_x 256=\log_{\frac{1}{4}} x-\log_x 4^4$

$\ =\log_{\frac{1}{4}} x-4\log_x 4=\log_{\frac{1}{4}} x+\frac{4}{\log_{\frac{1}{4}} x}$

$0<x<1$이면 $\log_{\frac{1}{4}} x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_{\frac{1}{4}} x+\frac{4}{\log_{\frac{1}{4}} x}\ge 2\sqrt{\log_{\frac{1}{4}} x\times\frac{4}{\log_{\frac{1}{4}} x}}=2\times2=4$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{1}{16}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

04 지수함수와 로그함수의 활용

핵심 유형

	유형01 $-\frac{5}{2}$	유형02 1	유형03 3
유형04 ③	유형05 ④	유형06 2	
유형07 $0<x<1$ 또는 $x>5$		유형08 16	유형09 10장
유형10 $x=-\frac{5}{6}$		유형11 35	유형12 $\frac{1}{100}$
유형13 $\frac{1}{4}$	유형14 ④	유형15 ②	유형16 20
유형17 8	유형18 $0<a<\frac{1}{10}$		유형19 10 m

핵심 유형 완성하기

001 ②	002 $\frac{13}{4}$	003 3	004 ③	005 8
006 ③	007 ⑤	008 4	009 ④	
010 -24	011 $x=1$ 또는 $x=2$		012 ①	013 117
014 3	015 ③	016 $-3<k<-2$		017 -2
018 $a<x<d$		019 2	020 $6<a\le 8$	
021 4	022 3	023 11	024 8	025 ⑤
026 $x>3$	027 -4	028 ④	029 $a<1$	
030 3시간	031 12시간		032 7시간	033 ②
034 $x=\frac{5}{3}$	035 ②	036 4	037 2	038 $\frac{1}{64}$
039 $x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$			040 ⑤	041 ④
042 3	043 ④	044 8	045 $x=\frac{1}{15}$	
046 9	047 ④	048 2	049 16	
050 -15	051 2	052 $1<x<2$		053 ⑤
054 5	055 ③	056 ③	057 3	
058 $1<x<10$		059 5	060 15	061 $\frac{1}{25}$
062 $0<x<\frac{1}{10}$ 또는 $x>\frac{\sqrt{10}}{10}$			063 28	064 ④
065 1	066 ①	067 15개월		068 $\sqrt{10}$
069 7				

핵심 유형 최종 점검하기

1 -2	2 ①	3 ②	4 5	5 ⑤
6 ①	7 -2	8 ④	9 ③	10 4회
11 ④	12 ①	13 ③	14 27	15 ①
16 8	17 59	18 1	19 ②	20 ④
21 4				

핵심 유형 60~61쪽

유형01 답 $-\frac{5}{2}$

$4^{x^2}-8\times\left(\frac{1}{32}\right)^x=0$에서

$2^{2x^2}-2^3\times 2^{-5x}=0$, $2^{2x^2}=2^{3-5x}$

즉, $2x^2=3-5x$이므로 $2x^2+5x-3=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 $-\frac{5}{2}$이다.

유형02 답 1

$3^x+3^{3-x}=12$의 양변에 3^x을 곱하면

$(3^x)^2+27=12\times 3^x$

$\therefore (3^x)^2-12\times 3^x+27=0$

$3^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-12t+27=0$, $(t-3)(t-9)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=9$

즉, $3^x=3$ 또는 $3^x=9$이므로 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로 $\beta-\alpha=1$

유형03 답 3

(i) $x-2=0$, 즉 $x=2$일 때, 주어진 방정식은 $3^0=5^0=1$이므로 성립한다.

(ii) $x-2\neq 0$일 때, $x+1=3x-1$이므로

$2x=2 \quad \therefore x=1$

(i), (ii)에 의하여 모든 근의 합은 $2+1=3$

유형04 답 ③

$4^x-2^{x+3}+12=0$에서 $(2^x)^2-8\times 2^x+12=0$

$2^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-8t+12=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이고 방정식 ㉠의 두 근은 2^α, 2^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha+2^\beta=8$, $2^\alpha\times 2^\beta=12$

$\therefore 4^\alpha+4^\beta=2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(2^\alpha+2^\beta)^2-2\times 2^\alpha\times 2^\beta$

$=8^2-2\times 12=40$

유형05 답 ④

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}>\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3}$

밑이 1보다 작으므로 $2x+1<3x-3$

$\therefore x>4$

유형06 답 2

$2^{2x}-6\times 2^{x+1}+32\le 0$에서

$(2^x)^2-12\times 2^x+32\le 0$

$2^x=t(t>0)$로 놓으면 $t^2-12t+32\le 0$

$(t-4)(t-8)\le 0 \quad \therefore 4\le t\le 8$

즉, $2^2\le 2^x\le 2^3$이고 밑이 1보다 크므로

$2\le x\le 3$

따라서 부등식을 만족하는 정수 x는 2, 3의 2개이다.

유형07 답 $0<x<1$ 또는 $x>5$

(i) $0<x<1$일 때, $x>2x-5$에서 $x<5$
그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $x=1$일 때, $1<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, $x<2x-5$에서 $x>5$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는
$0<x<1$ 또는 $x>5$

유형08 답 16

$\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+k\ge 0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-8\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k\ge 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t^2-8t+k\ge 0$

$\therefore\ (t-4)^2+k-16\ge 0$ …… ㉠

부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$k-16\ge 0$ $\therefore\ k\ge 16$

따라서 실수 k의 최솟값은 16이다.

유형09 답 10장

공기청정기로 유입된 오염 물질의 양을 $P\,(P>0)$라고 하면

필터 A는 오염 물질의 50%, 즉 $\frac{1}{2}$을 걸러 낼 수 있으므로 1장의 필터를 사용한 후 남아 있는 오염 물질의 양은 $\frac{1}{2}P$

따라서 필터 A를 20장 사용한 후 남아 있는 오염 물질의 양은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}P$ …… ㉠

필터 B는 오염 물질의 75%, 즉 $\frac{3}{4}$을 걸러 낼 수 있으므로 1장의 필터를 사용한 후 남아 있는 오염 물질의 양은 $\frac{1}{4}P$

따라서 필터 B를 n장 사용한 후 남아 있는 오염 물질의 양은

$\left(\frac{1}{4}\right)^nP$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}P=\left(\frac{1}{4}\right)^nP$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

$20=2n$ $\therefore\ n=10$

따라서 필터 B를 10장 사용해야 한다.

핵심 유형 **완성**하기 62~65쪽

001 답 ②

$(\sqrt{3})^{x^2-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$에서 $3^{\frac{1}{2}(x^2-x)}=3^{-x+1}$

즉, $\frac{1}{2}(x^2-x)=-x+1$이므로 $x^2+x-2=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은 -2이다.

002 답 $\frac{13}{4}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2-5}-\left(\frac{5}{2}\right)^{2-x}=0$에서 $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2-5}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2}$

즉, $2x^2-5=x-2$이므로 $2x^2-x-3=0$

$(x+1)(2x-3)=0$ $\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 주어진 방정식의 두 근이 -1, $\frac{3}{2}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-1)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$

003 답 3

$5^{x^2-5x+9}-125^{x+k}=0$에서 $5^{x^2-5x+9}=5^{3x+3k}$

즉, $x^2-5x+9=3x+3k$이므로

$x^2-8x+9-3k=0$ …… ㉠

이때 방정식 ㉠의 한 근이 3이므로 $x=3$을 대입하면

$9-24+9-3k=0$ $\therefore\ k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$x^2-8x+15=0$, $(x-3)(x-5)=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=5$

따라서 $\alpha=5$이므로 $k+\alpha=-2+5=3$

004 답 ③

$\frac{8^{x^2+1}}{2^{x+3}}=4$에서 $\frac{2^{3(x^2+1)}}{2^{x+3}}=2^2$이므로

$2^{3x^2+3}=2^{x+5}$

즉, $3x^2+3=x+5$이므로 $3x^2-x-2=0$

$(3x+2)(x-1)=0$ $\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

그런데 x는 정수이므로 $x=1$

005 답 8

$3^x+8\times 3^{-x}-9=0$의 양변에 3^x을 곱하면

$(3^x)^2+8-9\times 3^x=0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-9t+8=0$, $(t-1)(t-8)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=8$

즉, $3^x=1$ 또는 $3^x=8$이고, $\alpha<\beta$이므로

$3^\alpha=1$, $3^\beta=8$

$\therefore\ \frac{3^\beta}{3^\alpha}=8$

006 답 ③

$4^x-5\times 2^{x+2}+64=0$에서

$(2^x)^2-5\times 4\times 2^x+64=0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-20t+64=0$, $(t-4)(t-16)=0$

$\therefore\ t=4$ 또는 $t=16$

즉, $2^x=4$ 또는 $2^x=16$이므로 $x=2$ 또는 $x=4$

따라서 모든 실근의 곱은 $2\times 4=8$

007 답 ⑤

$a^{2x}+a^x=12$에서 $(a^x)^2+a^x-12=0$

$a^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2+t-12=0$, $(t+4)(t-3)=0$

$\therefore t=3\ (\because t>0)$

즉, $a^x=3$이고 $x=\frac{1}{3}$이므로 $a^{\frac{1}{3}}=3$

$\therefore a=3^3=27$

008 답 4

$\begin{cases} 2^x+2^y=17 \\ 2^{2x-y}=\frac{1}{16} \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} 2^x+2^y=17 \\ (2^x)^2\div 2^y=\frac{1}{16} \end{cases}$

$2^x=X$, $2^y=Y(X>0, Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases} X+Y=17 \\ X^2\div Y=\frac{1}{16} \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} X+Y=17 \\ Y=16X^2 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X=1$, $Y=16$

즉, $2^x=1$, $2^y=16$이므로 $x=0$, $y=4$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=4$이므로 $\alpha+\beta=4$

009 답 ④

$3^x+3^{-x}=X(X\geq 2)$로 놓으면

$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=X^2-2$이므로

주어진 방정식은

$3(X^2-2)-7X-4=0$, $3X^2-7X-10=0$

$(X+1)(3X-10)=0$ $\quad \therefore X=\frac{10}{3}\ (\because X\geq 2)$

즉, $3^x+3^{-x}=\frac{10}{3}$이므로 양변에 3^x을 곱하면

$(3^x)^2+1=\frac{10}{3}\times 3^x$ $\quad \therefore 3\times(3^x)^2-10\times 3^x+3=0$

$3^x=t(t>0)$로 놓으면 $3t^2-10t+3=0$

$(3t-1)(t-3)=0$ $\quad \therefore t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=3$

즉, $3^x=\frac{1}{3}$ 또는 $3^x=3$이므로 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 모든 실근의 합은 0이다.

010 답 −24

(i) $x-6=0$, 즉 $x=6$일 때, 주어진 방정식은 $65^0=15^0=1$이므로 성립한다.

(ii) $x-6\neq 0$일 때, $x^2+4x+5=x+9$이므로

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에 의하여 모든 근의 곱은 $-4\times 1\times 6=-24$

011 답 $x=1$ 또는 $x=2$

$(x^x)^x=x^x\times x^x$에서 $x^{x^2}=x^{2x}$

(i) $x=1$일 때, 주어진 방정식은 $1^1=1^2$이므로 성립한다.

(ii) $x\neq 1$일 때, $x^2=2x$이므로 $x(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x>0)$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방정식의 해는 $x=1$ 또는 $x=2$

012 답 ①

(i) $x+2=0$, 즉 $x=-2$일 때, 주어진 방정식은 $7^0=1$이므로 성립한다.

(ii) $x+2\neq 0$일 때, $x^2-x+1=1$이므로

$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$ $\quad \therefore x=0$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에 의하여 모든 근의 합은 $-2+0+1=-1$

013 답 117

$9^x-5\times 3^{x+1}+54=0$에서 $(3^x)^2-15\times 3^x+54=0$

$3^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-15t+54=0$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이고 방정식 ㉠의 두 근은 3^α, 3^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha+3^\beta=15$, $3^\alpha\times 3^\beta=54$

$\therefore 3^{2\alpha}+3^{2\beta}=(3^\alpha+3^\beta)^2-2\times 3^\alpha\times 3^\beta$

$=15^2-2\times 54=117$

014 답 3

$49^x-2(a+1)7^x+a+7=0$에서

$(7^x)^2-2(a+1)7^x+a+7=0$

$7^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-2(a+1)t+a+7=0$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a+7)>0$

$a^2+a-6>0$, $(a+3)(a-2)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>2$

(ii) (두 근의 합)$=2(a+1)>0$ $\quad \therefore a>-1$

(iii) (두 근의 곱)$=a+7>0$ $\quad \therefore a>-7$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $a>2$

따라서 정수 a의 최솟값은 3이다.

015 답 ③

$9^x+2k\times 3^x+15-2k=0$에서 $(3^x)^2+2k\times 3^x+15-2k=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+2kt+15-2k=0$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식의 두 실근을 α, $2\alpha(\alpha\neq 0)$라고 하면 방정식 ㉠의 두 근은 3^α, $3^{2\alpha}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha+3^{2\alpha}=-2k$, $3^\alpha\times 3^{2\alpha}=15-2k$

$3^\alpha=m(m>0)$으로 놓으면

$m+m^2=-2k$, $m^3=15-2k$

위의 두 식을 연립하면

$m^3=15+(m+m^2)$, $m^3-m^2-m-15=0$

$(m-3)(m^2+2m+5)=0$

$\therefore m=3\ (\because m^2+2m+5>0)$

따라서 $m+m^2=-2k$에서

$-2k=3+9=12$ $\quad \therefore k=-6$

016 답 $-3<k<-2$

$3^{2x+1}+3k\times3^x+k^2-k-6=0$에서

$3(3^x)^2+3k\times3^x+k^2-k-6=0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

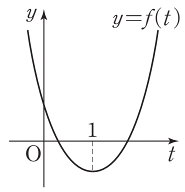
$3t^2+3kt+k^2-k-6=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta\,(\alpha<\beta)$라고 하면 방정식 ㉠의 두 근은 $3^\alpha,\ 3^\beta$이므로

$0<3^\alpha<1,\ 3^\beta>1$

즉, 이차방정식 ㉠은 0과 1 사이의 한 개의 근을 갖고, 1보다 큰 한 개의 근을 갖는다.

$f(t)=3t^2+3kt+k^2-k-6$이라고 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



(i) $f(0)=k^2-k-6>0$

$(k+2)(k-3)>0$

$\therefore\ k<-2$ 또는 $k>3$

(ii) $f(1)=3+3k+k^2-k-6<0$

$k^2+2k-3<0,\ (k+3)(k-1)<0$

$\therefore\ -3<k<1$

(i), (ii)를 동시에 만족하는 k의 값의 범위는

$-3<k<-2$

017 답 -2

$\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2+8}\le\left(\frac{1}{36}\right)^{x^2+x}$에서 $\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2+8}\le\left(\frac{1}{6}\right)^{2x^2+2x}$

밑이 1보다 작으므로 $x^2+8\ge2x^2+2x$

$x^2+2x-8\le0,\ (x+4)(x-2)\le0$

$\therefore\ -4\le x\le2$

따라서 $\alpha=-4,\ \beta=2$이므로 $\alpha+\beta=-2$

018 답 $a<x<d$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)}>\left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)}$에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)<g(x)$

따라서 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 $a<x<d$

019 답 2

$2^{3x-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1}<4^{x+1}$에서 $2^{3x-1}<2^{-x^2-1}<2^{2x+2}$

밑이 1보다 크므로 $3x-1<-x^2-1<2x+2$

(i) $3x-1<-x^2-1$에서 $x^2+3x<0$

$x(x+3)<0 \qquad \therefore\ -3<x<0$

(ii) $-x^2-1<2x+2$에서 $x^2+2x+3>0$

이때 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$이므로 이 부등식은 항상 성립한다.

(i), (ii)를 동시에 만족하는 x의 값의 범위는 $-3<x<0$

따라서 부등식을 만족하는 정수 x는 $-2,\ -1$의 2개이다.

020 답 $6<a\le8$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{ax}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{ax}$

밑이 1보다 작으므로 $2x^2<ax$

$2x^2-ax<0,\ x(2x-a)<0$

$\therefore\ 0<x<\frac{a}{2}\ (\because\ a>0)$

주어진 부등식을 만족하는 정수 x는 3개이므로

$3<\frac{a}{2}\le4 \qquad \therefore\ 6<a\le8$

021 답 4

$\left(\frac{1}{9}\right)^x-28\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+3\le0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-\frac{28}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^x+3\le0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-\frac{28}{3}t+3\le0,\ 3t^2-28t+9\le0$

$(3t-1)(t-9)\le0 \qquad \therefore\ \frac{1}{3}\le t\le9$

즉, $\frac{1}{3}\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$이고 밑이 1보다 작으므로 $-2\le x\le1$

따라서 부등식을 만족하는 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개이다.

022 답 3

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6}\le2^x$에서 $2^{-x^2+6}\le2^x$

밑이 1보다 크므로 $-x^2+6\le x$

$x^2+x-6\ge0,\ (x+3)(x-2)\ge0$

$\therefore\ x\le-3$ 또는 $x\ge2$

$\therefore\ A=\{x\,|\,x\le-3$ 또는 $x\ge2\}$

$4^x-3\times2^x-4>0$에서 $(2^x)^2-3\times2^x-4>0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t^2-3t-4>0$

$(t+1)(t-4)>0 \qquad \therefore\ t>4\ (\because\ t>0)$

즉, $2^x>2^2$이고 밑이 1보다 크므로 $x>2$

$\therefore\ B=\{x\,|\,x>2\}$

$\therefore\ A\cap B=\{x\,|\,x>2\}$

따라서 $A\cap B$에 속하는 정수 x의 최솟값은 3이다.

023 답 11

$4^{x+1}+a\times2^x+b<0$에서

$4\times(2^x)^2+a\times2^x+b<0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $4t^2+at+b<0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 부등식의 해가 $-2<x<1$이므로

$2^{-2}<2^x<2^1$에서 $\frac{1}{4}<t<2$

따라서 해가 $\frac{1}{4}<t<2$이고 t^2의 계수가 4인 이차부등식은

$4\left(t-\frac{1}{4}\right)(t-2)<0 \qquad \therefore\ 4t^2-9t+2<0$

이 부등식이 ㉠과 일치하므로 $a=-9,\ b=2$

$\therefore\ b-a=2-(-9)=11$

024 답 8

(ⅰ) $0<x<1$일 때, $2x+3<3x-4$에서 $x>7$
그런데 $0<x<1$이므로 해가 존재하지 않는다.
(ⅱ) $x=1$일 때, $1>1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.
(ⅲ) $x>1$일 때, $2x+3>3x-4$에서 $x<7$
그런데 $x>1$이므로 $1<x<7$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $1<x<7$
따라서 $\alpha=1$, $\beta=7$이므로 $\alpha+\beta=8$

025 답 ⑤

(ⅰ) $0<x<1$일 때, $x^2\le 4x+5$에서 $x^2-4x-5\le 0$
$(x+1)(x-5)\le 0$ $\quad\therefore -1\le x\le 5$
그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$
(ⅱ) $x=1$일 때, $1\ge 1$이므로 부등식이 성립한다.
(ⅲ) $x>1$일 때, $x^2\ge 4x+5$에서 $x^2-4x-5\ge 0$
$(x+1)(x-5)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 5$
그런데 $x>1$이므로 $x\ge 5$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 주어진 부등식의 해는
$0<x\le 1$ 또는 $x\ge 5$
따라서 집합 $S=\{x\,|\,0<x\le 1$ 또는 $x\ge 5\}$이므로 집합 S의 원소인 것은 ⑤이다.

026 답 $x>3$

(ⅰ) $0<x^2-4x+4<1$일 때
$0<(x-2)^2<1$에서
$-1<x-2<0$ 또는 $0<x-2<1$
$\therefore 1<x<2$ 또는 $2<x<3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$(x^2-4x+4)^{x+1}<(x^2-4x+4)^{4x-2}$에서 밑이 1보다 작으므로
$x+1>4x-2$ $\quad\therefore x<1$
그런데 ㉠이므로 해가 존재하지 않는다.
(ⅱ) $x^2-4x+4=1$일 때, $1<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.
따라서 $x^2-4x+4\neq 1$에서 $x^2-4x+3\neq 0$
$\therefore x\neq 1$, $x\neq 3$
(ⅲ) $x^2-4x+4>1$일 때
$x^2-4x+3>0$, $(x-1)(x-3)>0$
$\therefore x<1$ 또는 $x>3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
$(x^2-4x+4)^{x+1}<(x^2-4x+4)^{4x-2}$에서 밑이 1보다 크므로
$x+1<4x-2$ $\quad\therefore x>1$
그런데 ㉡이므로 $x>3$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x>3$

027 답 -4

$16^x-4^{x+1}-k\ge 0$에서
$(4^x)^2-4\times 4^x-k\ge 0$
$4^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t^2-4t-k\ge 0$
$\therefore (t-2)^2-k-4\ge 0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면
$-k-4\ge 0$ $\quad\therefore k\le -4$
따라서 실수 k의 최댓값은 -4이다.

028 답 ④

$25^x-2k\times 5^x+4>0$에서
$(5^x)^2-2k\times 5^x+4>0$
$5^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t^2-2kt+4>0$
$\therefore (t-k)^2-k^2+4>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면
(ⅰ) $k>0$일 때
$-k^2+4>0$에서 $k^2-4<0$
$(k+2)(k-2)<0$ $\quad\therefore -2<k<2$
그런데 $k>0$이므로 $0<k<2$
(ⅱ) $k\le 0$일 때
$t=0$이면 $4>0$이므로 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $k<2$

029 답 $a<1$

$2^a=t\,(t>0)$로 놓으면
$x^2-2(t+4)x+(t+34)>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
부등식 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(t+4)x+(t+34)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(t+4)^2-(t+34)<0$
$t^2+7t-18<0$, $(t+9)(t-2)<0$
$\therefore -9<t<2$
그런데 $t>0$이므로 $0<t<2$
즉, $0<2^a<2$이므로 $a<1$

030 답 3시간

A는 매시간 8배씩 증가하므로 n시간 후의 개체 수는
16×8^n(마리)
B는 매시간 2배씩 증가하므로 n시간 후의 개체 수는
$4^5\times 2^n$(마리)
A, B의 개체 수가 같아지려면
$16\times 8^n=4^5\times 2^n$
$2^4\times 2^{3n}=2^{10}\times 2^n$, $2^{3n+4}=2^{10+n}$
즉, $3n+4=10+n$이므로 $n=3$
따라서 두 미생물 A, B의 개체 수가 같아지는 것은 3시간 후이다.

031 답 12시간

처음 박테리아의 수는 $t=0$일 때이므로
$15\times 10^0=15$(마리)
관찰하기 시작한 지 x시간 후에 박테리아의 수가 처음의 10000배가 된다고 하면
$15\times 10^{\frac{x}{3}}=10000\times 15$, $10^{\frac{x}{3}}=10^4$
즉, $\frac{x}{3}=4$이므로 $x=12$
따라서 박테리아의 수가 처음의 10000배가 되는 것은 관찰하기 시작한 지 12시간 후이다.

032 답 7시간

음원 A의 다운로드 수는 1시간마다 2배가 되므로 n시간 후의 다운로드 수는 100×2^n(회)

음원 B의 다운로드 수는 1시간마다 절반으로 줄어들므로 n시간 후의 다운로드 수는 $100000\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$(회)

n시간 후에 음원 A의 다운로드 수가 음원 B의 다운로드 수보다 9000회 이상 많아진다고 하면

$100\times2^n\ge100000\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+9000$

$100\times2^n-100000\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-9000\ge0$

$2^n-\frac{1000}{2^n}-90\ge0$

$2^n=t\,(t>0)$로 놓으면

$t-\frac{1000}{t}-90\ge0,\ t^2-90t-1000\ge0$

$(t+10)(t-100)\ge0\qquad\therefore t\ge100\ (\because t>0)$

즉, $2^n\ge100$이고, $2^6=64$, $2^7=128$이므로 자연수 n의 값의 범위는 $n\ge7$

따라서 음원 A의 다운로드 수가 음원 B의 다운로드 수보다 9000회 이상 더 많아질 것으로 예측되는 것은 현재로부터 최소 7시간 후이다.

핵심 유형 66~67쪽

유형10 답 $x=-\frac{5}{6}$

진수의 조건에서 $4x^2-1>0$, $(2x+3)^2>0$

$(2x+1)(2x-1)>0$, $2x+3\ne0$

$\therefore x<-\frac{3}{2}$ 또는 $-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_3\sqrt{4x^2-1}=\log_9(2x+3)^2$에서

$\log_9(4x^2-1)=\log_9(2x+3)^2$

$\therefore \log_9(4x^2-1)=\log_9(4x^2+12x+9)$

즉, $4x^2-1=4x^2+12x+9$이므로

$12x=-10\qquad\therefore x=-\frac{5}{6}$

이때 $x=-\frac{5}{6}$는 ㉠을 만족하므로 방정식의 해이다.

유형11 답 35

$(\log_6 x)^2+\log_6 x^2=\log_6 36x^3$에서

$(\log_6 x)^2+2\log_6 x=2+3\log_6 x$

$\therefore (\log_6 x)^2-\log_6 x-2=0$

$\log_6 x=t$로 놓으면

$t^2-t-2=0$, $(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

즉, $\log_6 x=-1$ 또는 $\log_6 x=2$이므로

$x=6^{-1}=\frac{1}{6}$ 또는 $x=6^2=36$

따라서 $\alpha=\frac{1}{6}$, $\beta=36$이므로

$\beta-6\alpha=36-6\times\frac{1}{6}=35$

유형12 답 $\frac{1}{100}$

$x^{\log x}=\frac{1000}{x^2}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log\frac{1000}{x^2}$, $(\log x)^2=\log1000-\log x^2$

$\therefore (\log x)^2+2\log x-3=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

즉, $\log x=-3$ 또는 $\log x=1$이므로

$x=10^{-3}=\frac{1}{1000}$ 또는 $x=10$

따라서 모든 근의 곱은 $\frac{1}{1000}\times10=\frac{1}{100}$

유형13 답 $\frac{1}{4}$

$(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+\log_2\frac{x^2}{4}=0$에서

$(-\log_2 x)^2+\log_2 x^2-\log_2 4=0$

$\therefore (\log_2 x)^2+2\log_2 x-2=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+2t-2=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이고 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=-2$, $\log_2\alpha\beta=-2$

$\therefore \alpha\beta=2^{-2}=\frac{1}{4}$

유형14 답 ④

진수의 조건에서 $x+8>0$, $x-4>0$

$\therefore x>4$ …… ㉠

$\log_{25}(x+8)<\log_5(x-4)$에서

$\log_{25}(x+8)<\log_{25}(x^2-8x+16)$

밑이 1보다 크므로 $x+8<x^2-8x+16$

$x^2-9x+8>0$, $(x-1)(x-8)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>8$

따라서 자연수 x의 최솟값은 9이다.

유형15 답 ②

진수의 조건에서 $x>0$, $\log_{\frac{1}{2}}x>0$

$\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{2}}1$에서 $x<1$

$\therefore 0<x<1$ …… ㉠

$\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)\le2$에서 $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)\le\log_2 4$

밑이 1보다 크므로 $\log_{\frac{1}{2}} x \le 4$

$\log_{\frac{1}{2}} x \le \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$

밑이 1보다 작으므로 $x \ge \frac{1}{16}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{16} \le x < 1$

유형16 답 **20**

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$(\log_{\frac{1}{4}} x)^2 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{16} \le 0$에서

$(\log_{\frac{1}{4}} x)^2 + \log_{\frac{1}{4}} x^3 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16} \le 0$

$\therefore (\log_{\frac{1}{4}} x)^2 + 3\log_{\frac{1}{4}} x + 2 \le 0$

$\log_{\frac{1}{4}} x = t$로 놓으면 $t^2+3t+2 \le 0$

$(t+2)(t+1) \le 0$ $\therefore -2 \le t \le -1$

즉, $-2 \le \log_{\frac{1}{4}} x \le -1$이므로

$\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \le \log_{\frac{1}{4}} x \le \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로 $4 \le x \le 16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $4 \le x \le 16$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=16$이므로 $\alpha+\beta=20$

유형17 답 **8**

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_3 x} < 81$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x} < \log_3 81$, $(\log_3 x)^2 < 4$

$\therefore (\log_3 x)^2 - 4 < 0$

$\log_3 x = t$로 놓으면 $t^2-4<0$

$(t+2)(t-2)<0$ $\therefore -2<t<2$

즉, $-2<\log_3 x<2$이므로 $\log_3 \frac{1}{9} < \log_3 x < \log_3 9$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{9}<x<9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{9}<x<9$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수 x는

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 8개이다.

유형18 답 $\mathbf{0<a<\frac{1}{10}}$

$(\log x)^2 - \log ax^2 > 0$에서 $(\log x)^2 - (\log a + \log x^2) > 0$

$\therefore (\log x)^2 - 2\log x - \log a > 0$

$\log x = t$로 놓으면 $t^2 - 2t - \log a > 0$ …… ㉠

$x>0$에서 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-2t-\log a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4} = 1 + \log a < 0$, $\log a < -1$

밑이 1보다 크므로 $a < \frac{1}{10}$

이때 $a>0$이므로 $0<a<\frac{1}{10}$

유형19 답 **10 m**

동굴 입구의 빛의 밝기를 a라고 하고, 빛의 밝기가 동굴 입구의 10 %, 즉 $\frac{1}{10}$이 되는 곳을 동굴 입구로부터 x m라고 하면

$a \times \left(\frac{4}{5}\right)^x = a \times \frac{1}{10}$, $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$x \log \frac{4}{5} = \log \frac{1}{10}$, $x(3\log 2 - 1) = -1$

$x(3\times 0.30 - 1) = -1$

$-0.1x = -1$

$\therefore x = 10$

따라서 빛의 밝기가 동굴 입구의 10 %가 되는 곳은 동굴 입구로부터 10 m 들어간 곳이다.

핵심 유형 **완성**하기 68~72쪽

033 답 ②

진수의 조건에서 $x-1>0$, $4-x>0$

$\therefore 1<x<4$ …… ㉠

$\log_2 (x-1) - 1 = \log_4 (4-x)$에서

$\log_4 (x-1)^2 = \log_4 (4-x) + \log_4 4$

$\therefore \log_4 (x-1)^2 = \log_4 4(4-x)$

즉, $(x-1)^2 = 4(4-x)$이므로 $x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=3$

이때 ㉠에 의하여 $x=3$

따라서 $\alpha=3$이므로 $\alpha^2=9$

034 답 $\mathbf{x=\frac{5}{3}}$

진수의 조건에서 $x+1>0$, $3x-2>0$

$\therefore x>\frac{2}{3}$ …… ㉠

$\log_8 (x+1) = 1 - \frac{1}{3}\log_2 (3x-2)$에서

$\frac{1}{3}\log_2 (x+1) + \frac{1}{3}\log_2 (3x-2) = 1$

$\log_2 (x+1)(3x-2) = 3$

$\therefore \log_2 (3x^2+x-2) = \log_2 8$

즉, $3x^2+x-2=8$이므로 $3x^2+x-10=0$

$(x+2)(3x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

이때 ㉠에 의하여 $x=\frac{5}{3}$

035 답 ②

밑과 진수의 조건에서

$x^2-2x+1>0$, $x^2-2x+1\neq1$, $2-3x>0$

$\therefore$ $x<0$ 또는 $0<x<\frac{2}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

(i) $x^2-2x+1=4$일 때

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$

이때 ㉠에 의하여 $x=-1$

(ii) $2-3x=1$일 때

$3x=1$ $\quad\therefore$ $x=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에 의하여 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

따라서 모든 근의 합은 $-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$

036 답 4

진수의 조건에서 $x>0$, $y>0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\log_2\{\log(x^2+y^2)\}=0$에서 $\log(x^2+y^2)=1$

$\therefore$ $x^2+y^2=10$

$\log_3\sqrt{x}+\log_9 y=\frac{1}{2}$에서 $\log_9 x+\log_9 y=\frac{1}{2}$

$\log_9 xy=\log_9\sqrt{9}$ $\quad\therefore$ $xy=3$

즉, 주어진 연립방정식은 $\begin{cases}x^2+y^2=10\\xy=3\end{cases}$이므로

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=10+2\times3=16$

㉠에 의하여 $x+y=4$

$\therefore$ $\alpha+\beta=4$

037 답 2

$(\log_2 x)^2-\log_4 x^6+2=0$에서

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$ $\quad\therefore$ $t=1$ 또는 $t=2$

즉, $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=2$이므로 $x=2$ 또는 $x=2^2=4$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=4$이므로 $\log_\alpha\beta=\log_2 4=2$

038 답 $\frac{1}{64}$

$\log_4 4x\times\log_4 16x=6$에서

$(1+\log_4 x)(2+\log_4 x)=6$

$\therefore$ $(\log_4 x)^2+3\log_4 x-4=0$

$\log_4 x=t$로 놓으면 $t^2+3t-4=0$

$(t+4)(t-1)=0$ $\quad\therefore$ $t=-4$ 또는 $t=1$

즉, $\log_4 x=-4$ 또는 $\log_4 x=1$이므로

$x=4^{-4}=\frac{1}{256}$ 또는 $x=4$

따라서 두 근의 곱은 $\frac{1}{256}\times4=\frac{1}{64}$

039 답 $x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

밑과 진수의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$

$\log_9 x^2+3\log_x 3+4=0$에서 $\log_3 x+\frac{3}{\log_3 x}+4=0$

$\log_3 x=t\,(t\neq0)$로 놓으면

$t+\frac{3}{t}+4=0$, $t^2+4t+3=0$

$(t+3)(t+1)=0$ $\quad\therefore$ $t=-3$ 또는 $t=-1$

즉, $\log_3 x=-3$ 또는 $\log_3 x=-1$이므로

$x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

040 답 ⑤

$x^{\log_5 3}=3^{\log_5 x}$이므로

$3^{\log_5 x}\times x^{\log_5 3}-2\times3^{\log_5 x}-3=0$에서

$(3^{\log_5 x})^2-2\times3^{\log_5 x}-3=0$

$3^{\log_5 x}=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore$ $t=3$ ($\because$ $t>0$)

즉, $3^{\log_5 x}=3$이므로 $\log_5 x=1$

$\therefore$ $x=5$

041 답 ④

$\log_3 x=X$, $\log_4 y=Y$로 놓으면 $\begin{cases}X+Y=4\\XY=3\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면

$X=1$, $Y=3$ 또는 $X=3$, $Y=1$

즉, $\log_3 x=1$, $\log_4 y=3$ 또는 $\log_3 x=3$, $\log_4 y=1$이므로

$x=3$, $y=64$ 또는 $x=27$, $y=4$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=64$이므로 $\beta-\alpha=61$

042 답 3

$\frac{4a}{\log_a b}=\frac{b}{3\log_b a}=\frac{4a+b}{4}=k\,(k\neq0)$로 놓으면

$4a=k\log_a b$ $\cdots\cdots$ ㉠

$b=3k\log_b a$ $\cdots\cdots$ ㉡

$4a+b=4k$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠+㉡을 하면

$4a+b=k(\log_a b+3\log_b a)$

㉢에서 $4a+b=4k$이므로

$4k=k(\log_a b+3\log_b a)$

이때 $k\neq0$이므로 $\log_a b+3\log_b a=4$

$\log_a b+\frac{3}{\log_a b}=4$

$\log_a b=t\,(t\neq0)$로 놓으면

$t+\frac{3}{t}=4$, $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore$ $t=1$ 또는 $t=3$

그런데 $1<a<b$에서 $\log_a b>1$이므로 $t=3$

$\therefore$ $\log_a b=3$

043 답 ④

$x^{\log_2 x}=4x$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 4x$, $(\log_2 x)^2=\log_2 4+\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2-\log_2 x-2=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-t-2=0$, $(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

즉, $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=2$이므로

$x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2^2=4$

따라서 주어진 방정식의 두 근이 $\frac{1}{2}$, 4이므로

$$\log_\alpha \beta+\log_\beta \alpha=\log_{\frac{1}{2}} 4+\log_4 \frac{1}{2}$$
$$=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$$

044 답 8

$5^x=2^{3-x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 5^x=\log 2^{3-x}$, $x\log 5=(3-x)\log 2$

$x(\log 5+\log 2)=3\log 2$

그런데 $\log 5+\log 2=\log 10=1$이므로

$x=3\log 2$

따라서 $\alpha=3\log 2=\log 2^3=\log 8$이므로

$10^\alpha=10^{\log 8}=8$

045 답 $x=\frac{1}{15}$

$3^{\log 3x}=5^{\log 5x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 3^{\log 3x}=\log 5^{\log 5x}$

$\log 3x\times\log 3=\log 5x\times\log 5$

$(\log 3+\log x)\log 3=(\log 5+\log x)\log 5$

$(\log 5-\log 3)\log x=(\log 3)^2-(\log 5)^2$

$$\log x=-\frac{(\log 5-\log 3)(\log 5+\log 3)}{\log 5-\log 3}$$
$$=-(\log 5+\log 3)=-\log 15=\log\frac{1}{15}$$

$\therefore x=\frac{1}{15}$

046 답 9

$(\log_3 3x)^2-2\log_3 9x^2=0$에서

$(1+\log_3 x)^2-2(2+2\log_3 x)=0$

$\therefore (\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-2t-3=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라고 하면 방정식 ㉠의 두 근은

$\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=2$, $\log_3\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=3^2=9$

047 답 ④

$(\log_2 x)^2-8\log_2 x-5=0$에서

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-8t-5=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이고 방정식 ㉠의 두 근은

$\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=8$, $\log_2\alpha\times\log_2\beta=-5$

$$\therefore (\log_2\alpha)^2+(\log_2\beta)^2=(\log_2\alpha+\log_2\beta)^2-2(\log_2\alpha\times\log_2\beta)$$
$$=8^2-2\times(-5)=74$$

048 답 2

밑과 진수의 조건에서 $x>0$, $x\neq 1$

$\log_3 x+a\log_x 3=a+1$에서

$\log_3 x+\frac{a}{\log_3 x}-(a+1)=0$

$\log_3 x=t(t\neq 0)$로 놓으면

$t+\frac{a}{t}-(a+1)=0$

$t^2-(a+1)t+a=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라고 하면 방정식 ㉠의 두 근은

$\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=a+1$, $\log_3\alpha\beta=a+1$

이때 $\alpha\beta=27$이므로 $\log_3 27=a+1$

$3=a+1$ $\therefore a=2$

049 답 16

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(\log_2 a)^2-4(3+\log_2 a)=0$

$(\log_2 a)^2-4\log_2 a-12=0$

$\log_2 a=t$로 놓으면

$t^2-4t-12=0$, $(t+2)(t-6)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=6$

즉, $\log_2 a=-2$ 또는 $\log_2 a=6$이므로

$a=2^{-2}=\frac{1}{4}$ 또는 $a=2^6=64$

따라서 모든 양수 a의 값의 곱은 $\frac{1}{4}\times 64=16$

050 답 −15

진수의 조건에서 $-x+3>0$, $x+9>0$

$\therefore -9<x<3$ ⋯⋯ ㉠

$\log_{\frac{1}{4}}(-x+3)\le\log_{\frac{1}{2}}(x+9)$에서

$\log_{\frac{1}{4}}(-x+3)\le\log_{\frac{1}{4}}(x+9)^2$

밑이 1보다 작으므로 $-x+3\ge(x+9)^2$

$-x+3\ge x^2+18x+81$, $x^2+19x+78\le 0$

$(x+13)(x+6)\le 0$

$\therefore -13\le x\le -6$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-9<x\le -6$

따라서 $\alpha=-9$, $\beta=-6$이므로 $\alpha+\beta=-15$

051 답 2

진수의 조건에서 $x^2-x-6>0$, $(x+2)(x-3)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>3$ ...... ㉠

$\log_2(x^2-x-6)\le 1+\dfrac{2}{\log_3 4}$에서

$\log_2(x^2-x-6)\le \log_2 2+\log_2 3$

$\therefore \log_2(x^2-x-6)\le \log_2 6$

밑이 1보다 크므로 $x^2-x-6\le 6$

$x^2-x-12\le 0$, $(x+3)(x-4)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3\le x<-2$ 또는 $3<x\le 4$

따라서 부등식을 만족하는 정수 x는 -3, 4의 2개이다.

052 답 $1<x<2$

$4^{-x^2}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x}$에서 $2^{-2x^2}>2^{-4x}$

밑이 1보다 크므로 $-2x^2>-4x$

$2x^2-4x<0$, $2x(x-2)<0$

$\therefore 0<x<2$ ...... ㉠

$\log_2(x^2-2x+3)<\log_2 2x$의 진수의 조건에서

$x^2-2x+3>0$, $2x>0$

$x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$이므로

$x>0$ ...... ㉡

$\log_2(x^2-2x+3)<\log_2 2x$에서

밑이 1보다 크므로 $x^2-2x+3<2x$

$x^2-4x+3<0$, $(x-1)(x-3)<0$

$\therefore 1<x<3$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면 $1<x<2$

053 답 ⑤

진수의 조건에서 $6x+1>0$, $x^2+9>0$ $\therefore x>-\dfrac{1}{6}$ ...... ㉠

(i) $0<a<1$일 때, $6x+1>x^2+9$, $x^2-6x+8<0$

$(x-2)(x-4)<0$ $\therefore 2<x<4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x<4$

(ii) $a>1$일 때, $6x+1<x^2+9$, $x^2-6x+8>0$

$(x-2)(x-4)>0$ $\therefore x<2$ 또는 $x>4$ ...... ㉢

㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면 $-\dfrac{1}{6}<x<2$ 또는 $x>4$

이때 주어진 부등식의 해가 $2<x<4$이므로 a의 값의 범위는

$0<a<1$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

054 답 5

진수의 조건에서 $x>0$, $\log_3 2x>0$

$\log_3 2x>\log_3 1$에서 $2x>1$

$\therefore x>\dfrac{1}{2}$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 2x)>-1$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 2x)>\log_{\frac{1}{2}} 2$

밑이 1보다 작으므로 $\log_3 2x<2$

$\log_3 2x<\log_3 9$

밑이 1보다 크므로 $2x<9$

$\therefore x<\dfrac{9}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{9}{2}$

따라서 부등식을 만족하는 정수 x의 최댓값은 4, 최솟값은 1이므로 그 합은 5이다.

055 답 ③

진수의 조건에서 $x>0$, $\log_5 x>0$, $\log_8(\log_5 x)>0$

$\log_8(\log_5 x)>\log_8 1$에서 $\log_5 x>1$

$\therefore x>5$ ...... ㉠

$\log_3\{\log_8(\log_5 x)\}\le -1$에서

$\log_3\{\log_8(\log_5 x)\}\le \log_3 \dfrac{1}{3}$

밑이 1보다 크므로 $\log_8(\log_5 x)\le \dfrac{1}{3}$

$\log_8(\log_5 x)\le \log_8 2$

밑이 1보다 크므로 $\log_5 x\le 2$

$\therefore x\le 25$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $5<x\le 25$

056 답 ③

진수의 조건에서 $x>0$, $\log_5 x>0$

$\therefore x>1$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{8}}(\log_5 x)\ge -1$에서 $\log_{\frac{1}{8}}(\log_5 x)\ge \log_{\frac{1}{8}} 8$

밑이 1보다 작으므로 $\log_5 x\le 8$

$\therefore x\le 5^8$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x\le 5^8$

따라서 부등식을 만족하는 정수 x 중 가장 큰 정수는 5^8이고

$\log 5^8=8\log 5=8(1-\log 2)$

$=8(1-0.3010)=5.592=5+0.592$

이므로 5^8은 6자리의 정수이다.

057 답 3

진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}\times\log_3\dfrac{x}{27}\ge 0$에서

$\left(\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{9}\right)\left(\log_3 x+\log_3\dfrac{1}{27}\right)\ge 0$

$(-\log_3 x+2)(\log_3 x-3)\ge 0$

$\therefore (\log_3 x)^2-5\log_3 x+6\le 0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-5t+6\le 0$, $(t-2)(t-3)\le 0$

$\therefore 2\le t\le 3$

즉, $2\le\log_3 x\le 3$이므로 $\log_3 3^2\le\log_3 x\le\log_3 3^3$

밑이 1보다 크므로 $9\le x\le 27$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $9\le x\le 27$

따라서 $\alpha=9$, $\beta=27$이므로 $\dfrac{\beta}{\alpha}=3$

058 답 $1<x<10$

$x^{\log 2}=2^{\log x}$이므로

$2^{\log x}\times x^{\log 2}-\frac{3}{2}(2^{\log x}+x^{\log 2})+2<0$에서

$(2^{\log x})^2-3\times 2^{\log x}+2<0$

$2^{\log x}=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-3t+2<0$, $(t-1)(t-2)<0$

$\therefore\ 1<t<2$

즉, $1<2^{\log x}<2$이고 $2^0<2^{\log x}<2^1$

밑이 1보다 크므로 $0<\log x<1$

$\log 1<\log x<\log 10$

밑이 1보다 크므로 $1<x<10$

059 답 5

$\log_{\frac{1}{5}} x=t$로 놓으면

$t^2+at+b<0$ …… ㉠

주어진 부등식의 해가 $5<x<25$이므로

$\log_{\frac{1}{5}} 25<\log_{\frac{1}{5}} x<\log_{\frac{1}{5}} 5$에서 $-2<\log_{\frac{1}{5}} x<-1$

$\therefore\ -2<t<-1$

해가 $-2<t<-1$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(t+2)(t+1)<0$ $\quad\therefore\ t^2+3t+2<0$

이 부등식이 ㉠과 일치하므로 $a=3$, $b=2$

$\therefore\ a+b=5$

060 답 15

(i) $(\log_3 x)^2<\log_3 \frac{x^4}{27}$의 진수의 조건에서

$x>0$ …… ㉠

$(\log_3 x)^2<\log_3 \frac{x^4}{27}$에서 $(\log_3 x)^2<4\log_3 x-3$

$\therefore\ (\log_3 x)^2-4\log_3 x+3<0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-4t+3<0$, $(t-1)(t-3)<0$

$\therefore\ 1<t<3$

즉, $1<\log_3 x<3$이므로 $\log_3 3<\log_3 x<\log_3 3^3$

밑이 1보다 크므로 $3<x<27$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<27$

(ii) $\log_2|x-3|<2$의 진수의 조건에서

$x-3\neq 0$ $\quad\therefore\ x\neq 3$ …… ㉢

$\log_2|x-3|<2$에서 $\log_2|x-3|<\log_2 4$

$|x-3|<4$, $-4<x-3<4$

$\therefore\ -1<x<7$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$-1<x<3$ 또는 $3<x<7$

(i), (ii)에 의하여 연립부등식의 해는 $3<x<7$

따라서 부등식을 만족하는 정수 x는 4, 5, 6이므로

$4+5+6=15$

061 답 $\frac{1}{25}$

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_5 25x}\le 125$의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$\log_5 x^{\log_5 25x}\le\log_5 125$, $\log_5 25x\times\log_5 x\le 3$

$(2+\log_5 x)\log_5 x-3\le 0$

$\therefore\ (\log_5 x)^2+2\log_5 x-3\le 0$

$\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2+2t-3\le 0$, $(t+3)(t-1)\le 0$

$\therefore\ -3\le t\le 1$

즉, $-3\le\log_5 x\le 1$이므로 $\log_5 5^{-3}\le\log_5 x\le\log_5 5$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{125}\le x\le 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{125}\le x\le 5$

따라서 $\alpha=\frac{1}{125}$, $\beta=5$이므로 $\alpha\beta=\frac{1}{25}$

062 답 $0<x<\frac{1}{10}$ 또는 $x>\frac{\sqrt{10}}{10}$

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_{0.1} x}<\sqrt{10x^3}$의 양변에 밑이 0.1인 로그를 취하면

$\log_{0.1} x^{\log_{0.1} x}>\log_{0.1}\sqrt{10x^3}$

$(\log_{0.1} x)^2>\frac{1}{2}(\log_{0.1} 10+3\log_{0.1} x)$

$(\log_{0.1} x)^2>\frac{3}{2}\log_{0.1} x-\frac{1}{2}$

$\therefore\ (\log_{0.1} x)^2-\frac{3}{2}\log_{0.1} x+\frac{1}{2}>0$

$\log_{0.1} x=t$로 놓으면

$t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}>0$, $2t^2-3t+1>0$

$(2t-1)(t-1)>0$ $\quad\therefore\ t<\frac{1}{2}$ 또는 $t>1$

즉, $\log_{0.1} x<\frac{1}{2}$ 또는 $\log_{0.1} x>1$이므로

$\log_{0.1} x<\log_{0.1} 0.1^{\frac{1}{2}}$ 또는 $\log_{0.1} x>\log_{0.1} 0.1$

밑이 1보다 작으므로

$x>\frac{\sqrt{10}}{10}$ 또는 $x<\frac{1}{10}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{10}$ 또는 $x>\frac{\sqrt{10}}{10}$

063 답 28

$6^{x-1}\ge 5^{x+2}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 6^{x-1}\ge\log 5^{x+2}$

$(x-1)\log 6\ge(x+2)\log 5$

$(\log 6-\log 5)x\ge\log 6+2\log 5$

$$\therefore\ x\ge\frac{\log 6+2\log 5}{\log 6-\log 5}$$

$$=\frac{\log 2+\log 3+2(1-\log 2)}{\log 2+\log 3-(1-\log 2)}=\frac{-\log 2+\log 3+2}{2\log 2+\log 3-1}$$

$$=\frac{-0.30+0.48+2}{2\times 0.30+0.48-1}=27.25$$

따라서 자연수 x의 최솟값은 28이다.

064 답 ④

$(\log_4 x)^2+\log_4 16x^2-\log_2 k\ge 0$에서

$(\log_4 x)^2+2\log_4 x+2-\log_2 k\ge 0$

$\log_4 x=t$로 놓으면

$t^2+2t+2-\log_2 k\ge 0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x>0$에서 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2+2t+2-\log_2 k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=1-(2-\log_2 k)\le 0$, $\log_2 k\le 1$

밑이 1보다 크므로 $k\le 2$

이때 $k>0$이므로 $0<k\le 2$

따라서 구하는 정수 k는 1, 2이므로 그 합은 3이다.

065 답 1

$x^2-(4+\log_{\sqrt{3}} a)x+1=0$에서

$x^2-2(2+\log_3 a)x+1=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2+\log_3 a)^2-1>0$

$(\log_3 a)^2+4\log_3 a+3>0$

$\log_3 a=t$로 놓으면

$t^2+4t+3>0$, $(t+3)(t+1)>0$ $\therefore$ $t<-3$ 또는 $t>-1$

즉, $\log_3 a<-3$ 또는 $\log_3 a>-1$이므로

$\log_3 a<\log_3 \frac{1}{27}$ 또는 $\log_3 a>\log_3 \frac{1}{3}$

밑이 1보다 크므로 $a<\frac{1}{27}$ 또는 $a>\frac{1}{3}$

이때 $a>0$이므로 $0<a<\frac{1}{27}$ 또는 $a>\frac{1}{3}$

따라서 정수 a의 최솟값은 1이다.

066 답 ①

$x^{\log_3 x}>(9x^2)^k$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}>\log_3 (9x^2)^k$

$(\log_3 x)^2>k(\log_3 9+2\log_3 x)$

$\therefore$ $(\log_3 x)^2-2k\log_3 x-2k>0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-2kt-2k>0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x>0$에서 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-2kt-2k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2+2k<0$

$k^2+2k<0$, $k(k+2)<0$ $\therefore$ $-2<k<0$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=0$이므로 $\alpha+\beta=-2$

067 답 15개월

영업을 시작한 달의 매출을 a원이라고 하면 n개월이 지난 후의 매출은

$(1+0.05)^n a$(원)

n개월이 지난 후의 매출이 영업을 시작한 달의 매출의 2배가 된다고 하면

$(1+0.05)^n a=2a$, $1.05^n=2$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 1.05^n=\log 2$, $n\log 1.05=\log 2$

$n\times 0.02=0.30$ $\therefore$ $n=15$

따라서 영업을 시작한 달의 매출의 2배가 되는 것은 영업을 시작한 지 15개월이 지난 후이다.

068 답 $\sqrt{10}$

주간과 야간의 층간 소음의 크기를 각각 x dB, y dB이라 하고 주간과 야간의 층간 소음의 세기를 각각 I_x W/m², I_y W/m²라고 하면

$x=10\log\frac{I_x}{10^{-12}}$, $y=10\log\frac{I_y}{10^{-12}}$

한편 층간 소음의 허용 기준은 주간이 야간보다 $43-38=5$(dB) 높으므로

$x-y=10\log\frac{I_x}{10^{-12}}-10\log\frac{I_y}{10^{-12}}=5$

$10\log\frac{I_x}{I_y}=5$, $\log\frac{I_x}{I_y}=\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 주간 층간 소음의 세기는 야간 층간 소음의 세기의 k배이므로

$I_x=kI_y$

이를 ㉠에 대입하면

$\log\frac{kI_y}{I_y}=\frac{1}{2}$, $\log k=\frac{1}{2}$ $\therefore$ $k=\sqrt{10}$

069 답 7

현재 미세먼지의 농도를 a μm라고 하면 공기 정화 식물을 1개씩 추가하여 n개 두었을 때 미세먼지의 농도는

$(1-0.1)^n a$(μm)

현재 미세먼지 농도의 절반 이하로 낮추기 위해서는

$(1-0.1)^n a\le\frac{1}{2}a$, $0.9^n\le\frac{1}{2}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 0.9^n\le\log\frac{1}{2}$, $n\log 0.9\le-\log 2$

$n(2\log 3-1)\le-\log 2$, $n(2\times 0.4771-1)\le-0.3010$

$-0.0458n\le-0.3010$ $\therefore$ $n\ge 6.5\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다.

핵심 유형 최종 점검하기 73~75쪽

1 답 -2

유형 01 밑을 같게 할 수 있는 지수방정식

$6^{x^2-x+6}=\left(\frac{1}{216}\right)^{x-3}$에서 $6^{x^2-x+6}=6^{-3x+9}$

즉, $x^2-x+6=-3x+9$이므로 $x^2+2x-3=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 -2이다.

2 답 ①

유형 02 a^x 꼴이 반복되는 지수방정식

$2^x-2^{1-x}=2$의 양변에 2^x을 곱하면

$(2^x)^2-2=2\times2^x$

$\therefore (2^x)^2-2\times2^x-2=0$

$2^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-2=0 \qquad \therefore t=1+\sqrt{3}\ (\because t>0)$

즉, $2^a=1+\sqrt{3}$이므로

$4^a=(2^a)^2=(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$

따라서 $a=4$, $b=2$이므로 $a+b=6$

3 답 ②

유형 02 a^x 꼴이 반복되는 지수방정식

$\begin{cases}2\times3^x-3\times2^y=-6\\3^{x-1}-2^{y+1}=-13\end{cases}$에서 $\begin{cases}2\times3^x-3\times2^y=-6\\\dfrac{3^x}{3}-2\times2^y=-13\end{cases}$

$3^x=X$, $2^y=Y(X>0, Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}2X-3Y=-6\\\dfrac{X}{3}-2Y=-13\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}2X-3Y=-6\\X-6Y=-39\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X=9$, $Y=8$

즉, $3^x=9=3^2$, $2^y=8=2^3$이므로 $x=2$, $y=3$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=3$이므로 $\alpha\beta=2\times3=6$

4 답 5

유형 03 밑에 미지수가 있는 지수방정식

$(x+1)^{x^2+1}=(x+1)^{2x+1}$에서

(ⅰ) $x+1=1$, 즉 $x=0$일 때, 주어진 방정식은 $1=1$이므로 성립한다.

(ⅱ) $x+1\neq1$, 즉 $x\neq0$일 때

$x^2+1=2x+1$에서

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

그런데 $x\neq0$이므로 $x=2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=0+2=2$

$(x+2)^{x-5}=4^{x-5}$에서

(ⅲ) $x-5=0$, 즉 $x=5$일 때, 주어진 방정식은 $7^0=4^0=1$이므로 성립한다.

(ⅳ) $x-5\neq0$, 즉 $x\neq5$일 때, $x+2=4$이므로 $x=2$

(ⅲ), (ⅳ)에 의하여 $b=5+2=7$

$\therefore b-a=7-2=5$

5 답 ⑤

유형 04 지수방정식의 응용

$25^x-24\times5^x+k=0$에서 $(5^x)^2-24\times5^x+k=0$

$5^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-24t+k=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식의 서로 다른 두 실근을 α, β라고 하면 $\alpha+\beta=3$이고 방정식 ㉠의 두 근은 5^α, 5^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k=5^\alpha\times5^\beta=5^{\alpha+\beta}=5^3=125$

6 답 ①

유형 05 밑을 같게 할 수 있는 지수부등식

유형 06 a^x 꼴이 반복되는 지수부등식

$4^x\geq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$에서 $2^{2x}\geq2^{-x+1}$

밑이 1보다 크므로 $2x\geq-x+1$

$\therefore x\geq\dfrac{1}{3}$

$\therefore A=\left\{x\,\middle|\,x\geq\dfrac{1}{3}\right\}$

$3^{2x+1}-82\times3^x+27<0$에서

$3\times(3^x)^2-82\times3^x+27<0$

$3^x=t(t>0)$로 놓으면

$3t^2-82t+27<0$, $(3t-1)(t-27)<0$

$\therefore \dfrac{1}{3}<t<27$

즉, $3^{-1}<3^x<3^3$이고 밑이 1보다 크므로 $-1<x<3$

$\therefore B=\{x\mid-1<x<3\}$

$\therefore A\cap B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{3}\leq x<3\right\}$

따라서 $\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\beta=3$이므로 $\alpha+\beta=\dfrac{10}{3}$

7 답 −2

유형 06 a^x 꼴이 반복되는 지수부등식

$\left(\dfrac{1}{16}\right)^x-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4x-2}-8>0$에서

$\left\{\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\right\}^2-2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-8>0$

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-8>0$, $(t+2)(t-4)>0$

$\therefore t>4\ (\because t>0)$

즉, $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x>\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$이고 밑이 1보다 작으므로

$x<-1$

따라서 정수 x의 최댓값은 -2이다.

8 답 ④

유형 07 밑에 미지수가 포함된 지수부등식

(ⅰ) $0<x<1$일 때, $x^2-5>4x$에서

$x^2-4x-5>0$, $(x+1)(x-5)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>5$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 존재하지 않는다.

(ⅱ) $x=1$일 때, $1<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(ⅲ) $x>1$일 때, $x^2-5<4x$에서

$x^2-4x-5<0$, $(x+1)(x-5)<0$

$\therefore -1<x<5$

그런데 $x>1$이므로 $1<x<5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $1<x<5$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=5$이므로 $\alpha+\beta=6$

9 답 ③

유형 08 지수부등식의 응용

$2^{x+1}-2^{\frac{x+4}{2}}+a>0$에서

$2\times2^x-2^2\times2^{\frac{x}{2}}+a>0$

$2^{\frac{x}{2}}=t(t>0)$로 놓으면 $2t^2-4t+a>0$

$\therefore\ 2(t-1)^2+a-2>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$a-2>0 \quad \therefore\ a>2$

따라서 정수 a의 최솟값은 3이다.

10 답 4회

유형 09 지수방정식과 지수부등식의 실생활에의 활용

약품 A를 1회 투입할 때마다 세균의 수가 70 % 감소하므로 남은 세균의 수는 30 %이다.

처음 세균의 수를 a라고 하면 약품 A를 n회 투입한 후 세균의 수는 $0.3^n\times a$이므로

$0.3^n\times a=0.0081a$, $0.3^n=0.3^4 \quad \therefore\ n=4$

따라서 세균의 수가 처음 수의 0.81 %가 되도록 하려면 약품 A를 4회 투입해야 한다.

11 답 ④

유형 10 밑을 같게 할 수 있는 로그방정식

진수의 조건에서 $x>0$, $x-\frac{3}{2}>0 \quad \therefore\ x>\frac{3}{2}$

$\log_{\sqrt{2}}x-\log_2\left(x-\frac{3}{2}\right)=3$에서

$\log_2 x^2=\log_2 8+\log_2\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$\therefore\ \log_2 x^2=\log_2 8\left(x-\frac{3}{2}\right)$

즉, $x^2=8\left(x-\frac{3}{2}\right)$이므로 $x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0 \quad \therefore\ x=2$ 또는 $x=6$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=6$이므로 $\beta-\alpha=4$

12 답 ①

유형 11 $\log_a x$ 꼴이 반복되는 로그방정식

밑과 진수의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$

$\log_3 x-\log_x 27=2$에서 $\log_3 x-3\log_x 3=2$

$\therefore\ \log_3 x-\frac{3}{\log_3 x}=2$

$\log_3 x=t(t\neq0)$로 놓으면

$t-\frac{3}{t}=2$, $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0 \quad \therefore\ t=-1$ 또는 $t=3$

즉, $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=3^{-1}=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3^3=27$

따라서 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=27$이므로 $\log_\alpha\beta=\log_{\frac{1}{3}}27=-3$

13 답 ③

유형 11 $\log_a x$ 꼴이 반복되는 로그방정식

밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$, $y>0$, $y\neq1$

$\begin{cases}\log_x 4-\log_y 2=2\\ \log_x 16-\log_y\frac{1}{8}=-1\end{cases}$ 에서

$\begin{cases}2\log_x 2-\log_y 2=2\\ 4\log_x 2+3\log_y 2=-1\end{cases}$

$\log_x 2=X$, $\log_y 2=Y$로 놓으면

$\begin{cases}2X-Y=2\\ 4X+3Y=-1\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X=\frac{1}{2}$, $Y=-1$

즉, $\log_x 2=\frac{1}{2}$, $\log_y 2=-1$이므로

$x=4$, $y=\frac{1}{2} \quad \therefore\ xy=2$

14 답 27

유형 12 지수에 로그가 있는 방정식

$x^{\log_3 x}-81x^3=0$에서 $x^{\log_3 x}=81x^3$

양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 81x^3$

$(\log_3 x)^2=\log_3 81+\log_3 x^3$

$\therefore\ (\log_3 x)^2-3\log_3 x-4=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=4$

즉, $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=4$이므로

$x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=81$

따라서 모든 근의 곱은

$\frac{1}{3}\times81=27$

15 답 ①

유형 13 로그방정식의 응용

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(\log_2 a+2)^2-(\log_2 a+8)=0$

$(\log_2 a)^2+3\log_2 a-4=0$

$\log_2 a=t$로 놓으면

$t^2+3t-4=0$, $(t+4)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-4$ 또는 $t=1$

즉, $\log_2 a=-4$ 또는 $\log_2 a=1$이므로

$a=2^{-4}=\frac{1}{16}$ 또는 $a=2$

따라서 모든 양수 a의 값의 곱은

$\frac{1}{16}\times2=\frac{1}{8}$

16 답 8

유형 14 밑을 같게 할 수 있는 로그부등식

진수의 조건에서 $x-2>0$, $x+10>0$

$\therefore\ x>2$ …… ㉠

$\log_{\sqrt{7}}(x-2)\le\log_7(x+10)$에서

$\log_7(x-2)^2\le\log_7(x+10)$

밑이 1보다 크므로 $(x-2)^2\le x+10$

$x^2-4x+4\le x+10$, $x^2-5x-6\le 0$

$(x+1)(x-6)\le 0$

$\therefore\ -1\le x\le 6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x\le 6$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=6$이므로 $\alpha+\beta=8$

17 답 59

유형 15 진수에 로그가 있는 부등식

진수의 조건에서 $x>0$, $\log_4 x>0$, $\log_3(\log_4 x)>0$

$\log_3(\log_4 x)>\log_3 1$에서 $\log_4 x>1$

$\therefore\ x>4$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_3(\log_4 x)\}>0$에서

$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_3(\log_4 x)\}>\log_{\frac{1}{3}}1$

밑이 1보다 작으므로 $\log_3(\log_4 x)<1$

$\log_3(\log_4 x)<\log_3 3$

밑이 1보다 크므로 $\log_4 x<3$

$\log_4 x<\log_4 4^3$

밑이 1보다 크므로

$x<4^3=64$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $4<x<64$

따라서 부등식을 만족하는 정수 x는

$64-4-1=59$(개)

18 답 1

유형 16 $\log_a x$ 꼴이 반복되는 로그부등식

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\left(\log_2\frac{4}{x}\right)\left(\log_2\frac{x}{8}\right)<-2$에서

$(\log_2 4-\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 8)<-2$

$\therefore\ (\log_2 x)^2-5\log_2 x+4>0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-5t+4>0$

$(t-1)(t-4)>0$ $\quad\therefore\ t<1$ 또는 $t>4$

즉, $\log_2 x<1$ 또는 $\log_2 x>4$이므로

$x<2$ 또는 $x>16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<2$ 또는 $x>16$

따라서 정수 x의 최솟값은 1이다.

19 답 ②

유형 17 지수에 로그가 있는 부등식

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_2 x}\le\frac{16}{x^3}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}\le\log_2\frac{16}{x^3}$

$(\log_2 x)^2\le\log_2 16-\log_2 x^3$

$\therefore\ (\log_2 x)^2+3\log_2 x-4\le 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+3t-4\le 0$, $(t+4)(t-1)\le 0$

$\therefore\ -4\le t\le 1$

즉, $-4\le\log_2 x\le 1$이므로 $\log_2 2^{-4}\le\log_2 x\le\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $2^{-4}\le x\le 2$

$\therefore\ \frac{1}{16}\le x\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{16}\le x\le 2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{16}$, $\beta=2$이므로

$$\log_4\alpha+\log_4\beta=\log_4\alpha\beta=\log_4\frac{1}{8}$$

$$=\log_{2^2}2^{-3}=-\frac{3}{2}$$

20 답 ④

유형 18 로그부등식의 응용

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2+\log_2 a)^2-6(2+\log_2 a)<0$

$(\log_2 a)^2-2\log_2 a-8<0$

$\log_2 a=t$로 놓으면

$t^2-2t-8<0$, $(t+2)(t-4)<0$

$\therefore\ -2<t<4$

즉, $-2<\log_2 a<4$이므로 $\log_2 2^{-2}<\log_2 a<\log_2 2^4$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{4}<a<16$

따라서 정수 a의 최댓값은 15, 최솟값은 1이므로 그 합은 16이다.

21 답 4

유형 19 로그방정식과 로그부등식의 실생활에의 활용

처음 아이스크림 1개당 무게와 가격을 각각 A g, B원이라고 하면 1번 시행할 때마다 아이스크림의 무게가 10 %씩 줄어들므로 n번 시행 후 아이스크림의 무게는

$A(1-0.1)^n=0.9^nA$(g)

한편 처음 아이스크림 1 g의 가격은 $\frac{(\text{가격})}{(\text{무게})}=\frac{B}{A}$(원)이고, 아이스크림의 가격은 변함이 없으므로 n번 시행 후 아이스크림 1 g의 가격은 $\frac{B}{0.9^nA}$(원)

n번 시행 후 아이스크림 1 g의 가격이 처음의 1.5배 이상이 되어야 하므로

$\frac{B}{0.9^nA}\ge 1.5\times\frac{B}{A}$, $0.9^n\le\frac{2}{3}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 0.9^n\le\log\frac{2}{3}$

$n(2\log 3-1)\le\log 2-\log 3$

$n(2\times 0.4771-1)\le 0.3010-0.4771$

$-0.0458n\le -0.1761$ $\quad\therefore\ n\ge 3.8\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 4이다.

05 삼각함수

핵심 유형

	유형01 ②	유형02 ④	유형03 ④
유형04 $\frac{2}{3}\pi$	유형05 $\frac{2}{7}\pi$	유형06 ④	유형07 4
유형08 ②	유형09 ②	유형10 2	유형11 24
유형12 ④	유형13 $-\frac{7}{8}$		

핵심 유형 완성하기

001 ③	002 ⑤	003 ㄴ, ㅁ, ㅂ		004 ④
005 ③	006 제2사분면 또는 제4사분면			007 ③
008 ④	009 ④	010 ③	011 ⑤	012 $\frac{1}{2}$
013 ⑤	014 ②	015 4	016 ④	017 ①
018 $(100+56\pi)$ cm		019 $8\pi-16$		020 ⑤
021 $\frac{25}{36}$배	022 ①	023 ④	024 16 m	025 -1
026 7	027 $\frac{2}{5}$	028 $-\frac{1}{30}$	029 $\frac{7}{2}$	
030 ㄱ, ㄹ	031 제2사분면		032 ②	033 0
034 $\frac{1}{\tan\theta}$		035 ③	036 ①	037 -8
038 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	039 ①	040 $-\frac{\sqrt{15}}{16}$		041 $\frac{\sqrt{31}}{4}$
042 $\sqrt{15}$	043 ⑤	044 4	045 -1	
046 $8x^2-4x-3=0$		047 $-\sqrt{15}$	048 35	

핵심 유형 최종 점검하기

1 ②	2 ①	3 67	4 2π	5 ①
6 $4+4\theta$	7 ②	8 11	9 $\frac{\sqrt{5}}{5}$	
10 $-\cos\theta$		11 ④	12 $-\sqrt{3}$	13 ②
14 ⑤				

핵심 유형 78~80쪽

유형01 답 ②

① $-1420^\circ=360^\circ\times(-4)+20^\circ$

② $-710^\circ=360^\circ\times(-2)+10^\circ$

③ $-340^\circ=360^\circ\times(-1)+20^\circ$

④ $380^\circ=360^\circ\times1+20^\circ$

⑤ $1100^\circ=360^\circ\times3+20^\circ$

따라서 동경 OP가 나타낼 수 없는 각은 ②이다.

유형02 답 ④

θ가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 180^\circ\times n+45^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times n+90^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+45^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+90^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+225^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+270^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에 의하여 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

유형03 답 ④

① $40^\circ=40\times\frac{\pi}{180}=\frac{2}{9}\pi$

② $135^\circ=135\times\frac{\pi}{180}=\frac{3}{4}\pi$

③ $\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=150^\circ$

④ $\frac{5}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=300^\circ$

⑤ $\frac{7}{5}\pi=\frac{7}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=252^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

유형04 답 $\frac{2}{3}\pi$

각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$4\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서

$\frac{\pi}{2}<\frac{2n}{3}\pi<\pi \quad \therefore \frac{3}{4}<n<\frac{3}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

유형05 답 $\frac{2}{7}\pi$

각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+6\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$7\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n}{7}\pi \quad \cdots\cdots$ ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서

$0<\frac{2n}{7}\pi<\frac{\pi}{2} \quad \therefore 0<n<\frac{7}{4}$

이때 n은 정수이므로 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{2}{7}\pi$

유형06 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$, 호의 길이가 2π이므로

$2\pi=r\times\frac{\pi}{3}\qquad\therefore r=6$

따라서 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{3}=6\pi$

유형07 답 4

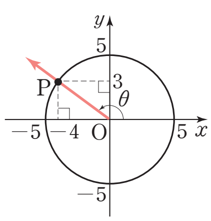
부채꼴의 반지름의 길이를 r라고 하면 둘레의 길이가 16이므로 호의 길이는 $16-2r$이다.
부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}r(16-2r)=-r^2+8r$
$\quad=-(r-4)^2+16\,(0<r<8)$

따라서 부채꼴의 넓이는 $r=4$일 때 최대이므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 4이다.

유형08 답 ②

오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로 삼각함수의 정의에 의하여



$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

$\therefore\ 5\sin\theta+10\cos\theta+4\tan\theta$
$\quad=5\times\frac{3}{5}+10\times\left(-\frac{4}{5}\right)+4\times\left(-\frac{3}{4}\right)$
$\quad=-8$

유형09 답 ②

(i) $\sin\theta\cos\theta<0$에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
(ii) $\sin\theta\tan\theta<0$에서 $\sin\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.
(i), (ii)에 의하여 θ는 제2사분면의 각이다.

유형10 답 2

$$\frac{(1-\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}=\frac{\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{\frac{(\cos\theta-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{(\cos\theta-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=(\cos\theta-\sin\theta)^2$$

$\therefore\ (\sin\theta+\cos\theta)^2+\frac{(1-\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}$
$\quad=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2$
$\quad=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

유형11 답 24

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta=\frac{12}{13}$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=-\frac{12}{5}$

$\therefore\ 13\sin\theta-5\tan\theta=13\times\frac{12}{13}-5\times\left(-\frac{12}{5}\right)=24$

유형12 답 ④

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}\qquad\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}$

$\therefore\ \sin^3\theta+\cos^3\theta$
$\quad=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$\quad=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{5}{18}\right)\right\}=\frac{23}{27}$

유형13 답 $-\frac{7}{8}$

이차방정식 $4x^2+3x+k=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{4}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{4}$

이때 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$\frac{9}{16}=1+\frac{k}{2}\qquad\therefore\ k=-\frac{7}{8}$

핵심 유형 **완성하기** 81~87쪽

001 답 ③

① $-935^\circ=360^\circ\times(-3)+145^\circ$
② $-595^\circ=360^\circ\times(-2)+125^\circ$
③ $-225^\circ=360^\circ\times(-1)+135^\circ$
④ $875^\circ=360^\circ\times2+155^\circ$
⑤ $1505^\circ=360^\circ\times4+65^\circ$

따라서 동경 OP가 나타낼 수 있는 각은 ③이다.

002 답 ⑤

① $370^\circ=360^\circ\times1+10^\circ$
② $780^\circ=360^\circ\times2+60^\circ$
③ $1200^\circ=360^\circ\times3+120^\circ$
④ $-30^\circ=360^\circ\times(-1)+330^\circ$
⑤ $-550^\circ=360^\circ\times(-2)+170^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

003 답 ㄴ, ㅁ, ㅂ

$390° = 360° \times 1 + 30°$

ㄱ. $-1380° = 360° \times (-4) + 60°$

ㄴ. $-690° = 360° \times (-2) + 30°$

ㄷ. $-300° = 360° \times (-1) + 60°$

ㄹ. $420° = 360° \times 1 + 60°$

ㅁ. $750° = 360° \times 2 + 30°$

ㅂ. $1110° = 360° \times 3 + 30°$

따라서 각을 나타내는 동경이 390°를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㅁ, ㅂ이다.

004 답 ④

θ가 제1사분면의 각이므로

$360° \times n < \theta < 360° \times n + 90°$ (n은 정수)

$\therefore 120° \times n < \dfrac{\theta}{3} < 120° \times n + 30°$

(i) $n = 3k$ (k는 정수)일 때

$360° \times k < \dfrac{\theta}{3} < 360° \times k + 30°$

따라서 $\dfrac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n = 3k+1$ (k는 정수)일 때

$360° \times k + 120° < \dfrac{\theta}{3} < 360° \times k + 150°$

따라서 $\dfrac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n = 3k+2$ (k는 정수)일 때

$360° \times k + 240° < \dfrac{\theta}{3} < 360° \times k + 270°$

따라서 $\dfrac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 각 $\dfrac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제4사분면이다.

005 답 ③

ㄱ. $120°$

➡ 제2사분면의 각

ㄴ. $760° = 360° \times 2 + 40°$

➡ 제1사분면의 각

ㄷ. $-30° = 360° \times (-1) + 330°$

➡ 제4사분면의 각

ㄹ. $-250° = 360° \times (-1) + 110°$

➡ 제2사분면의 각

ㅁ. $800° = 360° \times 2 + 80°$

➡ 제1사분면의 각

ㅂ. $1300° = 360° \times 3 + 220°$

➡ 제3사분면의 각

따라서 각을 나타내는 동경이 같은 사분면에 있는 것은 ㄱ – ㄹ, ㄴ – ㅁ이다.

006 답 제2사분면 또는 제4사분면

2θ가 제3사분면의 각이므로

$360° \times n + 180° < 2\theta < 360° \times n + 270°$ (n은 정수)

$\therefore 180° \times n + 90° < \theta < 180° \times n + 135°$

(i) $n = 2k$ (k는 정수)일 때

$360° \times k + 90° < \theta < 360° \times k + 135°$

따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k+1$ (k는 정수)일 때

$360° \times k + 270° < \theta < 360° \times k + 315°$

따라서 θ는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에 의하여 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

007 답 ③

① $315° = 315 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{7}{4}\pi$

② $162° = 162 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{9}{10}\pi$

③ $-690° = -690 \times \dfrac{\pi}{180} = -\dfrac{23}{6}\pi$

④ $\dfrac{9}{5}\pi = \dfrac{9}{5}\pi \times \dfrac{180°}{\pi} = 324°$

⑤ $-\dfrac{17}{18}\pi = -\dfrac{17}{18}\pi \times \dfrac{180°}{\pi} = -170°$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

008 답 ④

ㄱ. $60° = 60 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{3}$이므로 $\dfrac{\pi}{60°} = \dfrac{\pi}{\dfrac{\pi}{3}} = 3$

ㄴ. $-\dfrac{11}{5}\pi = 2\pi \times (-2) + \dfrac{9}{5}\pi$이므로 $-\dfrac{11}{5}\pi$는 제4사분면의 각이다.

ㄷ. $-\dfrac{20}{3}\pi = -\dfrac{20}{3}\pi \times \dfrac{180°}{\pi} = -1200°$

따라서 $-1200° = 360° \times (-4) + 240°$이므로

$360° \times n + 240°$

ㄹ. $\dfrac{17}{4}\pi = 2\pi \times 2 + \dfrac{\pi}{4}$, $-\dfrac{15}{4}\pi = 2\pi \times (-2) + \dfrac{\pi}{4}$이므로

$\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{17}{4}\pi$, $-\dfrac{15}{4}\pi$를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

009 답 ④

① $-530° = 360° \times (-2) + 190°$ ➡ 제3사분면의 각

② $930° = 360° \times 2 + 210°$ ➡ 제3사분면의 각

③ $-\dfrac{27}{4}\pi = -\dfrac{27}{4}\pi \times \dfrac{180°}{\pi} = -1215° = 360° \times (-4) + 225°$

➡ 제3사분면의 각

④ $\dfrac{19}{3}\pi = \dfrac{19}{3}\pi \times \dfrac{180°}{\pi} = 1140° = 360° \times 3 + 60°$

➡ 제1사분면의 각

⑤ $2n\pi - \dfrac{2}{3}\pi = 2(n-1)\pi + \dfrac{4}{3}\pi$ ➡ 제3사분면의 각

따라서 제3사분면의 각이 아닌 것은 ④이다.

010 답 ③

각 θ를 나타내는 동경과 각 9θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$9\theta-\theta=2n\pi$(n은 정수)

$8\theta=2n\pi \qquad \therefore \theta=\frac{n}{4}\pi \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{n}{4}\pi<\frac{\pi}{2} \qquad \therefore 0<n<2$

이때 n은 정수이므로 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{4}$

011 답 ⑤

각 2θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$6\theta-2\theta=(2n+1)\pi$($n$은 정수)

$4\theta=(2n+1)\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2n+1}{4}\pi \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$0<\theta<\pi$에서

$0<\frac{2n+1}{4}\pi<\pi \qquad \therefore -\frac{1}{2}<n<\frac{3}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

따라서 모든 각 θ의 크기의 합은 $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi=\pi$

012 답 $\frac{1}{2}$

각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$7\theta-\theta=(2n+1)\pi$(n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서

$\pi<\frac{2n+1}{6}\pi<\frac{3}{2}\pi \qquad \therefore \frac{5}{2}<n<4$

이때 n은 정수이므로 $n=3$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{7}{6}\pi$

$\therefore \sin(\theta-\pi)=\sin\left(\frac{7}{6}\pi-\pi\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

013 답 ⑤

각 3θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$3\theta+6\theta=2n\pi$(n은 정수)

$9\theta=2n\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2n}{9}\pi \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서

$\pi<\frac{2n}{9}\pi<\frac{3}{2}\pi \qquad \therefore \frac{9}{2}<n<\frac{27}{4}$

이때 n은 정수이므로 $n=5$ 또는 $n=6$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{10}{9}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

따라서 모든 각 θ의 크기의 합은 $\frac{10}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi=\frac{22}{9}\pi$

014 답 ②

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=(2n+1)\pi$(n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서

$0<\frac{2n+1}{6}\pi<\frac{\pi}{2} \qquad \therefore -\frac{1}{2}<n<1$

이때 n은 정수이므로 $n=0$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

015 답 4

각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+3\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$4\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \theta=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{8} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$0<\theta<2\pi$에서

$0<\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{8}<2\pi \qquad \therefore -\frac{1}{4}<n<\frac{15}{4}$

이때 n은 정수이므로 $n=0, 1, 2, 3$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi$

따라서 조건을 만족하는 각 θ는 4개이다.

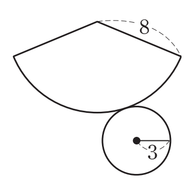
016 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$, 넓이가 12π이므로

$12\pi=\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{2}{3}\pi,\ r^2=36 \qquad \therefore r=6\ (\because r>0)$

따라서 부채꼴의 호의 길이는 $6\times\frac{2}{3}\pi=4\pi$

017 답 ①



주어진 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는

$2\pi\times3=6\pi$

이므로 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times6\pi=24\pi$

또 밑면인 원의 넓이는 $\pi\times3^2=9\pi$

따라서 원뿔의 겉넓이는 $24\pi+9\pi=33\pi$

018 답 $(100+56\pi)$ cm

와이퍼의 전체 길이를 r cm라고 하면

$\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{4}{5}\pi-\frac{1}{2}\times(r-50)^2\times\frac{4}{5}\pi=1400\pi$

$r^2-(r-50)^2=3500$

$100r=6000 \qquad \therefore r=60$

따라서 와이퍼의 고무판이 회전하면서 닦은 유리창의 둘레의 길이는

$60\times\frac{4}{5}\pi+(60-50)\times\frac{4}{5}\pi+50\times2=100+56\pi(\text{cm})$

019 답 $8\pi-16$

부채꼴의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$, 호의 길이가 2π이므로

$2\pi=r\times\frac{\pi}{4} \qquad \therefore r=8$

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times8^2\times\frac{\pi}{4}=8\pi$

또 △OBH는 직각이등변삼각형이므로

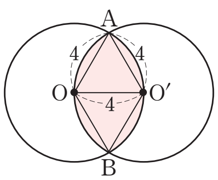
$\overline{\text{BH}}=\overline{\text{OH}}=8\times\sin\frac{\pi}{4}=8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$

직각삼각형 OBH의 넓이를 S'이라고 하면

$S'=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=16$

따라서 색칠한 부분의 넓이는 $S-S'$이므로 $8\pi-16$

020 답 ⑤



오른쪽 그림과 같이 색칠한 부분에 내접하는 두 개의 삼각형은 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로 부채꼴 OAB의 중심각의 크기는 $\frac{2}{3}\pi$이다.

부채꼴 OAB의 호의 길이를 l이라고 하면

$l=4\times\frac{2}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi$

따라서 색칠한 부분의 둘레의 길이는 부채꼴 OAB의 호의 길이의 2배이므로 $2\times\frac{8}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi$

021 답 $\frac{25}{36}$배

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$

반지름의 길이를 20 % 늘였을 때의 반지름의 길이를 r', 중심각의 크기를 θ', 넓이를 S'이라고 하면

$r'=(1+0.2)r=1.2r$

$S'=\frac{1}{2}(r')^2\theta'=\frac{1}{2}\times(1.2r)^2\theta'$

이때 부채꼴의 넓이가 일정하므로 $S=S'$

$\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times(1.2r)^2\theta'$

$\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times1.44r^2\times\theta',\ \theta=1.44\theta'$

$\therefore \theta'=\frac{\theta}{1.44}=\frac{25}{36}\theta$

따라서 중심각의 크기는 처음의 $\frac{25}{36}$배이다.

022 답 ①

둘레의 길이가 8이므로 호의 길이는 $8-2r$이다.

$S=\frac{1}{2}r(8-2r)$

$\quad=-r^2+4r$

$\quad=-(r-2)^2+4\ (0<r<4)$

따라서 부채꼴의 넓이는 $r=2$일 때 최대이므로 넓이의 최댓값은 4이다.

$\therefore S+r=6$

023 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r라고 하면 둘레의 길이가 k이므로 호의 길이는 $k-2r$이다.

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}r(k-2r)=-r^2+\frac{k}{2}r$

$\quad=-\left(r-\frac{k}{4}\right)^2+\frac{k^2}{16}\left(0<r<\frac{k}{2}\right)$

따라서 부채꼴의 넓이는 $r=\frac{k}{4}$일 때 최대이므로 넓이의 최댓값은 $\frac{k^2}{16}$이다.

부채꼴의 중심각의 크기를 θ라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times\left(\frac{k}{4}\right)^2\times\theta=\frac{k^2}{16} \qquad \therefore \theta=2$

024 답 16 m

부채꼴 모양의 화단의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라고 하면

$16=\frac{1}{2}rl \qquad \therefore l=\frac{32}{r}$

부채꼴 모양의 화단의 둘레의 길이는

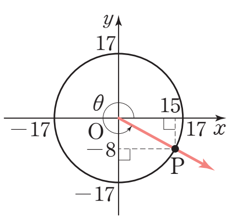
$2r+l=2r+\frac{32}{r}\,(\text{m})$

이때 $2r>0$, $\frac{32}{r}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2r+\frac{32}{r}\ge2\sqrt{2r\times\frac{32}{r}}=16$ (단, 등호는 $r=4$일 때 성립)

따라서 둘레의 길이의 최솟값은 16 m이다.

025 답 -1



오른쪽 그림에서

$\overline{\text{OP}}=\sqrt{15^2+(-8)^2}=17$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=-\frac{8}{17}$, $\cos\theta=\frac{15}{17}$,

$\tan\theta=-\frac{8}{15}$

$\therefore \frac{17\cos\theta+15\tan\theta}{17\sin\theta+1}$

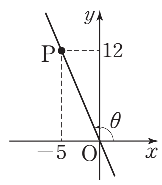
$=\frac{17\times\frac{15}{17}+15\times\left(-\frac{8}{15}\right)}{17\times\left(-\frac{8}{17}\right)+1}=-1$

026 답 7

$12x+5y=0$에서 $y=-\frac{12}{5}x$이므로

$\tan\theta=-\frac{12}{5}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이고 $\tan\theta=-\frac{12}{5}$이므로 점 P의 좌표를 $(-5,\ 12)$로 놓고 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\overline{OP}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$

$\therefore\ 13(\sin\theta+\cos\theta)=13\left\{\frac{12}{13}+\left(-\frac{5}{13}\right)\right\}$
$=7$

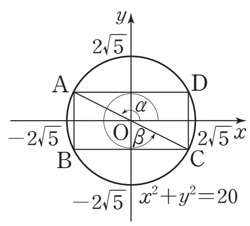
027 답 $\frac{2}{5}$

$\overline{AD}=8$, $\overline{AB}=4$이므로 $A(-4,\ 2)$

$\overline{OA}=2\sqrt{5}$이므로 $\sin\alpha=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

두 점 A, C가 원점에 대하여 대칭이므로

$C(4,\ -2)$



$\overline{OC}=2\sqrt{5}$이므로 $\cos\beta=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$

028 답 $-\frac{1}{30}$

점 $P(-3,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $P'(1,\ -3)$

$\overline{OP'}=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\tan\theta=-3$

$$\therefore\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{\tan^2\theta}=\frac{-\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}}{(-3)^2}=-\frac{1}{30}$$

029 답 $\frac{7}{2}$

(i) $\frac{\cos\theta}{\tan\theta}<0$에서 $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sin\theta\tan\theta>0$에서 $\sin\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에 의하여 θ는 제4사분면의 각이다.

따라서 각 θ의 값의 범위는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$a=\frac{3}{2}$, $b=2$ $\quad\therefore\ a+b=\frac{7}{2}$

030 답 ㄱ, ㄹ

θ가 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

ㄱ. $\sin\theta\cos\theta>0$

ㄴ. $\cos\theta\tan\theta<0$

ㄷ. $\frac{\sin\theta}{\cos\theta\tan\theta}>0$

ㄹ. $\tan\theta-\cos\theta>0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

031 답 제2사분면

$\frac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}}=-\sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$에서 $\sin\theta\cos\theta\neq0$이므로

$\cos\theta<0$, $\sin\theta>0$

따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

032 답 ②

(i) $\sin\theta\cos\theta>0$에서 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$에서 $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에 의하여 θ는 제3사분면의 각이다.

즉, $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로

$1-2\sin\theta>0$, $\sin\theta+\cos\theta<0$

$\therefore\ |1-2\sin\theta|+\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-|\cos\theta|$
$=(1-2\sin\theta)+|\sin\theta+\cos\theta|-(-\cos\theta)$
$=1-2\sin\theta+(-\sin\theta-\cos\theta)+\cos\theta$
$=1-3\sin\theta$

033 답 0

$$\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}-\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}-\frac{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$
$$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}-\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=0$$

034 답 $\frac{1}{\tan\theta}$

$$\frac{\tan\theta\sin\theta}{\tan\theta-\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}}-\frac{1}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta-(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{(1-\cos^2\theta)-(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$

035 답 ③

① $\dfrac{\cos^3\theta}{\sin\theta-\sin^3\theta}=\dfrac{\cos^3\theta}{\sin\theta(1-\sin^2\theta)}$

$=\dfrac{\cos^3\theta}{\sin\theta\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

② $\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)$

$=2\sin^2\theta-1$

③ $\sin^2\theta-\cos^2\theta=\cos^2\theta\left(\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-1\right)$

$=\cos^2\theta(\tan^2\theta-1)$

④ $\dfrac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\theta\{(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)\}}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{2\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=2$

⑤ $\tan\theta+\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta(1+\sin\theta)+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{\sin\theta+1}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{1}{\cos\theta}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

036 답 ①

$\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}-\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$

$=|\sin\theta-\cos\theta|-|\sin\theta+\cos\theta|$

$=-\sin\theta+\cos\theta-(\sin\theta+\cos\theta)$

$=-2\sin\theta$

037 답 -8

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

이때 $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore \dfrac{8\tan\theta-2}{5\cos\theta-3}=\dfrac{8\times\left(-\frac{3}{4}\right)-2}{5\times\frac{4}{5}-3}$

$=-8$

038 답 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\dfrac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{2}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$

즉, $\dfrac{2}{\cos^2\theta}=\dfrac{7}{2}$에서 $\cos^2\theta=\dfrac{4}{7}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{4}{7}=\dfrac{3}{7}$

$\therefore \tan^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}}=\dfrac{3}{4}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로

$\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

039 답 ①

$\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=2-\sqrt{3}$에서

$1-\tan\theta=(2-\sqrt{3})(1+\tan\theta)$

$(3-\sqrt{3})\tan\theta=-1+\sqrt{3}$

$\tan\theta=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 양변을 제곱하면

$\tan^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{3}$이므로

$3-3\cos^2\theta=\cos^2\theta$, $\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$

이때 $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

040 답 $-\dfrac{\sqrt{15}}{16}$

$(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

이므로

$\dfrac{1-2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

$=\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta)^2}{\cos\theta-\sin\theta}+\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)^2}{\cos\theta+\sin\theta}$

$=\cos\theta-\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta$

$=2\cos\theta$

즉, $2\cos\theta=\dfrac{1}{2}$에서 $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{15}{16}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{\sqrt{15}}{16}$

041 답 $\frac{\sqrt{31}}{4}$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{16}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{15}{32}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{15}{32}\right)=\frac{31}{16}$

이때 θ가 제2사분면의 각이면 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{31}}{4}$

042 답 $\sqrt{15}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$

이때 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이면 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{15}}{3}$

$\therefore \frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{15}}{3}}{-\frac{1}{3}}=\sqrt{15}$

043 답 ⑤

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{2}{5}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{5}$

이때 θ가 제1사분면의 각이면 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\frac{3\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{3}{5}$

044 답 4

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

즉, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2$이므로 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{(\sin\theta\cos\theta)^2}=4$

045 답 -1

이차방정식 $2x^2-2x+k=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=1$ …… ㉠

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=\frac{k}{2}$ …… ㉡

㉠에서 $2\sin\theta=1$ $\quad\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$

㉡의 좌변을 간단히 하면

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)$

$=2\sin^2\theta-1$

즉, $2\sin^2\theta-1=\frac{k}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{2}$을 대입하면

$\frac{1}{2}-1=\frac{k}{2}$ $\quad\therefore k=-1$

046 답 $8x^2-4x-3=0$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

x^2의 계수가 8이고 $\sin\theta$, $\cos\theta$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$8\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}\right)=0$, 즉 $8x^2-4x-3=0$이다.

047 답 $-\sqrt{15}$

이차방정식 $9x^2+kx+1=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=-\frac{k}{9}$, $\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $-\frac{k}{9}=1$ $\quad\therefore k=-9$

또 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이면 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로 $\sin\theta\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

이때 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{15}}{3}$

$\therefore \frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{1}{3}}=-\sqrt{15}$

048 답 35

이차방정식 $4x^2-2x+a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{4}$

이때 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$\frac{1}{4}=1+2\times\frac{a}{4}$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$ …… ㉠

이차방정식 $2x^2+bx+c=0$의 두 근이 $\tan\theta$, $\dfrac{1}{\tan\theta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\dfrac{b}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{2}{b}$

이때 ㉠에서 $-\dfrac{2}{b}=-\dfrac{3}{8}$ $\quad\therefore b=\dfrac{16}{3}$

또 $\tan\theta\times\dfrac{1}{\tan\theta}=1=\dfrac{c}{2}$에서 $c=2$

$\therefore 6(a+b+c)=6\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{16}{3}+2\right)=35$

핵심 유형 **최종 점검하기** • 88~89쪽

1 답 ②

유형 01 일반각

① $-1300^\circ=360^\circ\times(-4)+140^\circ$

② $-590^\circ=360^\circ\times(-2)+130^\circ$

③ $500^\circ=360^\circ\times1+140^\circ$

④ $1220^\circ=360^\circ\times3+140^\circ$

⑤ $1940^\circ=360^\circ\times5+140^\circ$

따라서 α의 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

2 답 ①

유형 02 사분면의 각

θ가 제4사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+270^\circ<\theta<360^\circ\times n+360^\circ$($n$은 정수)

$\therefore 120^\circ\times n+90^\circ<\dfrac{\theta}{3}<120^\circ\times n+120^\circ$

(i) $n=3k$(k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+90^\circ<\dfrac{\theta}{3}<360^\circ\times k+120^\circ$

따라서 $\dfrac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$(k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+210^\circ<\dfrac{\theta}{3}<360^\circ\times k+240^\circ$

따라서 $\dfrac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$(k는 정수)일 때

$360^\circ\times k+330^\circ<\dfrac{\theta}{3}<360^\circ\times k+360^\circ$

따라서 $\dfrac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 각 $\dfrac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1사분면이다.

3 답 67

유형 03 호도법과 육십분법

$600^\circ=600\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{10}{3}\pi$이므로 $a=3$, $b=10$

또 $\dfrac{3}{10}\pi=\dfrac{3}{10}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=54^\circ$이므로 $c=54$

$\therefore a+b+c=67$

4 답 2π

유형 05 두 동경의 위치 관계 – 직선에 대하여 대칭

각 4θ를 나타내는 동경과 각 8θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$4\theta+8\theta=(2n+1)\pi$($n$은 정수)

$12\theta=(2n+1)\pi$ $\quad\therefore \theta=\dfrac{2n+1}{12}\pi$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$0<\theta<2\pi$에서

$0<\dfrac{2n+1}{12}\pi<2\pi$ $\quad\therefore -\dfrac{1}{2}<n<\dfrac{23}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=0, 1, 2, \cdots, 11$

따라서 $n=0$일 때 최솟값, $n=11$일 때 최댓값을 갖는다.

$n=0$을 ㉠에 대입하면 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$

$n=11$을 ㉠에 대입하면 $\theta=\dfrac{23}{12}\pi$

따라서 각 θ의 크기의 최댓값과 최솟값의 합은

$\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{23}{12}\pi=2\pi$

5 답 ①

유형 06 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 6, 넓이가 6π이므로

$6\pi=\dfrac{1}{2}\times6^2\times\theta$ $\quad\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$

$l=6\times\dfrac{\pi}{3}=2\pi$

$\therefore \theta+l=\dfrac{\pi}{3}+2\pi=\dfrac{7}{3}\pi$

6 답 $4+4\theta$

유형 06 부채꼴의 호의 길이와 넓이

한 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle\mathrm{BOC}=2\theta$

부채꼴 BOC의 호의 길이를 l이라고 하면

$l=2\times2\theta=4\theta$

따라서 부채꼴 BOC의 둘레의 길이는

$2\times2+4\theta=4+4\theta$

7 답 ②

유형 07 부채꼴의 둘레의 길이와 넓이의 최대, 최소

부채꼴의 반지름의 길이를 r m라고 하면 둘레의 길이가 200 m이므로 호의 길이는 $(200-2r)$ m이다.

부채꼴의 넓이를 S m^{2}라고 하면

$S=\frac{1}{2}r(200-2r)=-r^2+100r$

$=-(r-50)^2+2500\,(0<r<100)$

따라서 부채꼴의 넓이는 $r=50$일 때 최대이므로 넓이의 최댓값은 2500 m^{2}이다.

8 답 11

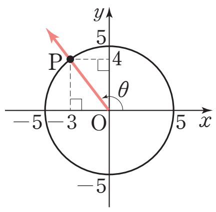
유형 08 삼각함수

오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$이므로

삼각함수의 정의에 의하여

$\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$



$\therefore\ 15(\cos\theta-\tan\theta)$

$=15\left\{-\frac{3}{5}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}=11$

9 답 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

유형 08 삼각함수

점 P의 좌표를 $(-k,\ 2k)(k>0)$로 놓으면

$\overline{OP}=\sqrt{(-k)^2+(2k)^2}=\sqrt{5}k$이므로

삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\frac{2k}{\sqrt{5}k}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta=\frac{-k}{\sqrt{5}k}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

10 답 $-\cos\theta$

유형 09 삼각함수의 값의 부호

(i) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<0$에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로

θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}<0$에서 $\tan\theta$와 $\sin\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로

θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에 의하여 θ는 제2사분면의 각이다.

즉, $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로

$\cos\theta-\sin\theta+\tan\theta<0$

$\therefore\ |\cos\theta-\sin\theta+\tan\theta|-\sqrt{\tan^2\theta}-\sin\theta$

$=-(\cos\theta-\sin\theta+\tan\theta)-|\tan\theta|-\sin\theta$

$=-\cos\theta+\sin\theta-\tan\theta-(-\tan\theta)-\sin\theta$

$=-\cos\theta$

11 답 ④

유형 10 삼각함수 사이의 관계

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}$$

12 답 $-\sqrt{3}$

유형 11 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

$\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}=3$에서

$1+\cos\theta=3(1-\cos\theta)$

$4\cos\theta=2 \qquad \therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$$

13 답 ②

유형 12 $\sin\theta\pm\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4} \qquad \therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$

이때 θ가 제2사분면의 각이면 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore\ \sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

14 답 ⑤

유형 13 삼각함수와 이차방정식

이차방정식 $x^2-2kx+6k=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=2k$, $\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}=6k$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{6k}$이므로

$$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=6k(\sin\theta+\cos\theta)=2k$$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$

이때 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$\frac{1}{9}=1+2\times\frac{1}{6k}$

$\therefore\ k=-\frac{3}{8}$

06 삼각함수의 그래프

핵심 유형

	유형01 ⑤	유형02 ③	유형03 ②
유형04 ⑤	유형05 ③	유형06 ③	유형07 4
유형08 ①	유형09 -6	유형10 ⑤	유형11 ④
유형12 $-\frac{4}{5}$	유형13 ⑤	유형14 $\frac{10}{3}$	유형15 ④
유형16 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$		유형17 ⑤	유형18 7
유형19 ②	유형20 ⑤	유형21 $-\frac{1}{2}$	유형22 ①

핵심 유형 완성하기

001 -1	002 -2	003 5	004 -1	005 ③
006 6π	007 $\frac{\pi}{3}$	008 ⑤	009 -1	010 π
011 ⑤	012 4π	013 ④	014 ⑤	015 ④
016 6	017 $\frac{4}{3}\pi$	018 36	019 ⑤	020 ②
021 ④	022 ㄴ, ㄷ	023 2	024 2π	025 2
026 2π	027 2π	028 -6π	029 ④	030 ④
031 ①	032 ③	033 0.7661		034 ③
035 -1	036 0	037 ④	038 ①	039 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
040 ④	041 0	042 ⑤	043 ①	044 ⑤
045 ①	046 3	047 ③	048 ⑤	049 ②
050 1	051 2	052 ⑤	053 3	054 $\frac{13}{3}\pi$
055 $x=\frac{\pi}{4}$	056 $\frac{5}{2}\pi$	057 ①	058 ④	059 ④
060 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$			061 ⑤	062 ②
063 $-\sqrt{2}$	064 ①	065 6	066 ②	067 ④
068 ⑤	069 ①	070 ③	071 ④	072 ③
073 ④	074 ②	075 $\frac{\pi}{12}\le\theta\le\frac{5}{12}\pi$		076 ③
077 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{3}$		078 9	079 ④	080 ②
081 ②				

핵심 유형 최종 점검하기

1 ⑤	2 ④	3 $\frac{9}{2}$	4 -4	5 ⑤
6 ④	7 -32	8 12π	9 ㄱ, ㄷ, ㄹ	
10 $2\sin x$	11 ⑤	12 $-\frac{3}{2}$	13 5	14 $-\frac{1}{2}$
15 ②	16 ③	17 $\frac{\pi}{6}$	18 ②	19 ④
20 제1사분면 또는 제2사분면				

핵심 유형 92~94쪽

유형01 답 ⑤

함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+p)=f(x)$

$\therefore f(p)=f(0)=\sin 0+\cos\frac{0}{4}+\tan 0=1$

유형02 답 ③

③ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

④ 주기가 2π인 주기함수이므로 $f(x+2\pi)=f(x)$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

유형03 답 ②

ㄴ. 주기가 2π인 주기함수이다.

ㄷ. 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $f(-x)=f(x)$이다.

ㄹ. 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

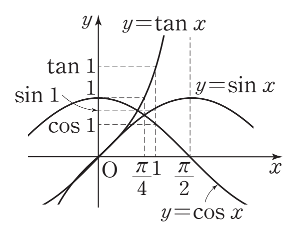
유형04 답 ⑤

⑤ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$(n은 정수)이다.

유형05 답 ③

$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$이므로 오른쪽 그림에서

$\cos 1<\sin 1<\tan 1$



유형06 답 ③

① $y=\sin(2x-\pi)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\sin 2x+1$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=2\sin x+3$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=-\sin 2x$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

⑤ $y=-\sin(2x+2)-4=-\sin 2(x+1)-4$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sin 2x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지지 않는 그래프의 식은 ③이다.

유형07 답 4

$y=3\sin\left(\pi x-\frac{1}{2}\right)+1$에서

$p=\frac{2\pi}{\pi}=2$, $M=3+1=4$, $m=-3+1=-2$

$\therefore p+M+m=2+4+(-2)=4$

유형08 답 ①

$f(x)=a\cos\frac{\pi}{4}x+b$의 최댓값이 7이고 $a<0$이므로

$-a+b=7$ …… ㉠

$f(8)=3$이므로 $a\cos 2\pi+b=3$

$\therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=5$

$\therefore ab=-10$

유형09 답 -6

주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -4이고 $a>0$이므로

$a+c=2$, $-a+c=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=-1$

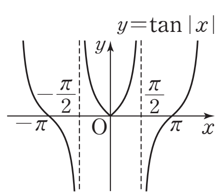
또 주어진 그래프의 주기가 $\frac{17}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=4\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore 4abc=4\times3\times\frac{1}{2}\times(-1)=-6$

유형10 답 ⑤

$y=\tan|x|$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프에서 $x\geq0$인 부분만 그린 후, $x<0$인 부분은 $x\geq0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



⑤ 그래프의 점근선은 직선

$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

핵심 유형 **완성하기** 95~99쪽

001 답 -1

함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+2p)=f(x+p)=f(x)$

$\therefore f(2p)=f(0)=\frac{\sin 0+\cos^2 0-3}{\tan 0+2}=\frac{-2}{2}=-1$

002 답 -2

함수 $f(x)$의 주기가 3이므로

$f(x+3)=f(x)$

$\therefore f(13)=f(10)=f(7)=f(4)=f(1)$

$0\leq x<3$에서 $f(x)=-2x^2$이므로

$f(13)=f(1)=-2$

003 답 5

모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$f(102)=f(100)=f(98)=\cdots=f(0)=1$

$f(101)=f(99)=f(97)=\cdots=f(1)=3$

$\therefore f(100)+f(101)+f(102)=1+3+1=5$

004 답 -1

모든 실수 x에 대하여 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$를 만족하므로 이 식의 양변에 x 대신 $x+\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$f(x+\pi)=f(x)$

따라서 함수 $f(x)$는 주기함수이므로

$f\left(\frac{21}{2}\pi\right)=f\left(\frac{19}{2}\pi\right)=f\left(\frac{17}{2}\pi\right)=\cdots=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

이때 $f(x)=\cos 2x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi=-1$

005 답 ③

ㄱ. 치역은 $\{y\mid-1\leq y\leq1\}$이다.

ㄴ. $f(x)=\sin x$의 주기가 2π이므로

$f(x)=f(x+2\pi)=f(x+4\pi)=\cdots=f(x+2n\pi)$ (n은 정수)

$\therefore f(x+2n\pi)=f(x)$

ㄷ. 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $f(-x)=-f(x)$이다.

ㄹ. $\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

006 답 6π

$y=\sin x$의 그래프에서

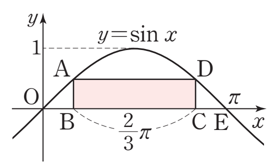
$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{5}{2}\pi$이므로

$x_1+x_2=\pi$, $x_3+x_4=5\pi$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=6\pi$

007 답 $\frac{\pi}{3}$

오른쪽 그림과 같이 $y=\sin x$의 그래프에서 점 E의 좌표는 $(\pi, 0)$이다.



$\overline{BC}=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\overline{OB}=\frac{1}{2}\times(\overline{OE}-\overline{BC})$

$=\frac{1}{2}\times\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{6}$

즉, 점 A의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$이므로 점 A의 y좌표는

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{2}{3}\pi\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$

008 답 ⑤

① 정의역은 실수 전체의 집합이다.
② 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
③ 주기가 2π인 주기함수이다.
④ 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2\pi)=f(x)$이므로
$f(3\pi)=f(\pi)=\cos\pi=-1$
한편 $f(0)=\cos 0=1$이므로 $f(0)\neq f(3\pi)$
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

009 답 -1

$y=\cos x$의 그래프에서
$\frac{a+b}{2}=-\pi,\ \frac{c+d}{2}=\pi$이므로
$a+b=-2\pi,\ c+d=2\pi$
$\therefore\ \frac{a+b}{c+d}=\frac{-2\pi}{2\pi}=-1$

010 답 π

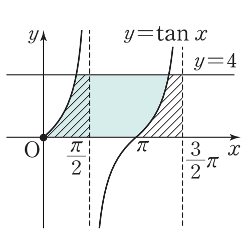
$y=\cos x$의 그래프에서
$\frac{a+c}{2}=\pi \qquad \therefore\ a+c=2\pi$
$y=\sin x$의 그래프에서
$\frac{b+d}{2}=\frac{3}{2}\pi \qquad \therefore\ b+d=3\pi$
$\therefore\ -a+b-c+d=-(a+c)+(b+d)$
$=-2\pi+3\pi=\pi$

011 답 ⑤

ㄱ. 정의역은 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이다.
ㄴ. $f(x)=\tan x$의 주기가 π이므로
$f(x)=f(x+\pi)=f(x+2\pi)=\cdots=f(x+n\pi)$ (n은 정수)
$\therefore\ f(x+n\pi)=f(x)$
ㄷ. 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.
ㄹ. 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로
$f(-x)=-f(x)$, 즉 $f(x)=-f(-x)$이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

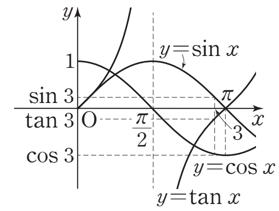
012 답 4π

오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $y=\tan x$의 그래프와 x축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는
$4\times\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=4\pi$



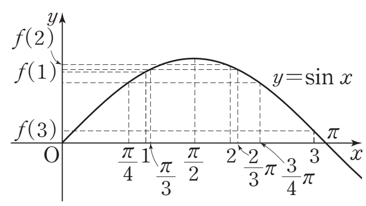
013 답 ④

$\frac{5}{6}\pi<3<\pi$이므로 오른쪽 그림에서
$\cos 3<\tan 3<\sin 3$
$\therefore\ B<C<A$



014 답 ⑤

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 x의 값이 증가하면 $\sin x$의 값도 증가하고, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서 x의 값이 증가하면 $\sin x$의 값은 감소한다.



$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 1<\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}<2<\frac{2}{3}\pi$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin 2<1$
$\frac{3}{4}\pi<3<\pi$이므로 $0<\sin 3<\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\therefore\ \sin 3<\sin 1<\sin 2$
$\therefore\ f(3)<f(1)<f(2)$

015 답 ④

① $y=2\cos(x-\pi)$의 그래프는 $y=2\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이다.
② $y=2\cos x+1$의 그래프는 $y=2\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
③ $y=2\cos(x+\pi)-2$의 그래프는 $y=2\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
④ $y=-\cos 2x+4$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 하고, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
⑤ $y=-2\cos(x+1)-3$의 그래프는 $y=2\cos x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y=2\cos x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지지 않는 그래프의 식은 ④이다.

016 답 6

$y=\tan 2x+5$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+5$
이 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ a\right)$를 지나므로
$a=\tan 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)+5=\tan\frac{\pi}{4}+5=6$

017 답 $\frac{4}{3}\pi$

$y=\cos 2x-3$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\cos 2x-3$, 즉 $y=-\cos 2x+3$

이 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3+a=-\cos\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)+3+a$

이 식이 $y=-\cos(2x+b)+5$와 같아야 하므로

$a=2,\ b=\frac{2}{3}\pi \qquad \therefore ab=2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

018 답 36

$y=-4\cos\left(\frac{\pi}{2}x-3\right)+5$에서

$p=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4,\ M=|-4|+5=9,\ m=-|-4|+5=1$

$\therefore pMm=4\times9\times1=36$

019 답 ⑤

$y=\tan\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$

① $y=2\sin\frac{x}{2}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

② $y=\cos 2x+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

③ $y=-2\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{1}=\pi$

④ $y=\frac{1}{2}\sin(x+3\pi)$의 주기는 $\frac{2\pi}{1}=2\pi$

⑤ $y=-3\cos\left(\frac{2}{3}x-\pi\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$

따라서 주기가 같은 함수는 ⑤이다.

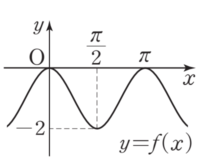
020 답 ②

ㄱ. 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x+\pi)=f(x)$이다.

ㄴ. 최댓값은 $|-1|-1=0$, 최솟값은 $-|-1|-1=-2$이므로 $-2\le f(x)\le 0$

ㄷ. $f(x)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1=-\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$이므로 $f(x)=\sin 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $f(x)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

021 답 ④

① 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 주기함수이다.

② 최댓값과 최솟값은 없다.

③ 그래프는 원점을 지나지 않는다.

④ 그래프의 점근선의 방정식은

$2x-\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \therefore x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

⑤ $y=4\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=4\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=4\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

022 답 ㄴ, ㄷ

모든 실수 x에 대하여 $f(x+\pi)=f(x)$이면 주기가 $\frac{\pi}{n}$(n은 자연수)인 주기함수이다.

ㄱ. $f(x)$의 주기는 2π

이때 $\frac{\pi}{n}=2\pi$를 만족하는 자연수 n이 존재하지 않으므로

$f(x+\pi)\ne f(x)$

ㄴ. $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi \qquad \therefore f(x+\pi)=f(x)$

ㄷ. $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2} \qquad \therefore f(x+\pi)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$

ㄹ. $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi$

이때 $\frac{\pi}{n}=\sqrt{2}\pi$를 만족하는 자연수 n이 존재하지 않으므로

$f(x+\pi)\ne f(x)$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+\pi)=f(x)$를 만족하는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

023 답 2

$f(x)=a\sin\left(bx-\frac{\pi}{3}\right)+c$의 주기가 4π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$

최솟값이 -6이고 $a>0$이므로

$-a+c=-6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(\pi)=0$에서 $a\sin\frac{\pi}{6}+c=0$

$\frac{a}{2}+c=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ c=-2$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $a+c=4+(-2)=2$

024 답 2π

$y=-\tan(ax-b)+1$의 주기가 2π이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=2\pi \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $y=-\tan\left(\frac{x}{2}-b\right)+1$의 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{x}{2}-b=n\pi+\frac{\pi}{2},\ \frac{x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}+b$

$\therefore x=2n\pi+\pi+2b$ (n은 정수)

이 방정식이 $x=2n\pi$와 일치하므로 $\pi+2b=2k\pi$ (k는 정수)

이때 $0<b<\pi$이므로 $b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 8ab=8\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=2\pi$

025 답 2

조건 (가)에 의하여

$f(x)=a\cos b\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+c$의 주기는 4π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi\qquad\therefore\ b=\frac{1}{2}$

조건 (나)에 의하여 $a>0$이므로

$a+c=3,\ -a+c=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ c=2$

따라서 $f(x)=\cos\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+2=2$

026 답 2π

주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$a=2$

또 주기가 $\frac{3}{4}\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi\qquad\therefore\ b=2$

따라서 주어진 함수는 $y=2\cos(2x-c)$이고 그래프가 원점을 지나므로

$0=2\cos(-c)\qquad\therefore\ \cos(-c)=0$

이때 $0<c<\pi$에서 $-\pi<-c<0$이므로

$-c=-\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\ c=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ abc=2\times2\times\frac{\pi}{2}=2\pi$

027 답 2π

주어진 함수의 주기가 $\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{3}{4}\pi\qquad\therefore\ a=\frac{4}{3}$

따라서 주어진 함수는 $y=\tan\left(\frac{4}{3}x-b\right)$이고 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{8},\ 0\right)$을 지나므로 $0=\tan\left(\frac{\pi}{6}-b\right)$

이때 $0<b<\frac{\pi}{2}$에서 $-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}-b<\frac{\pi}{6}$이므로

$\frac{\pi}{6}-b=0\qquad\therefore\ b=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ 9ab=9\times\frac{4}{3}\times\frac{\pi}{6}=2\pi$

028 답 -6π

주어진 함수의 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로

$a+d=1,\ -a+d=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ d=-1$

또 주기가 $\frac{7}{6}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi\qquad\therefore\ b=3$

따라서 주어진 함수는 $y=2\sin(3x+c)-1$이고 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$을 지나므로

$1=2\sin\left(\frac{3}{2}\pi+c\right)-1\qquad\therefore\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi+c\right)=1$

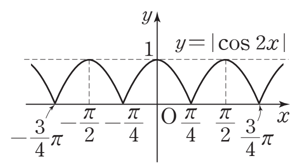
이때 $0<c<2\pi$이므로 $c=\pi$

$\therefore\ abcd=2\times3\times\pi\times(-1)=-6\pi$

029 답 ④

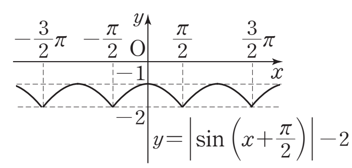
$y=|\cos 2x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

④ 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 주기함수이다.



030 답 ④

$y=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



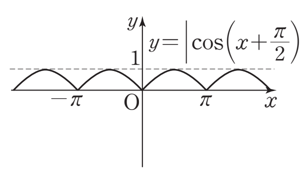
$a=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi,$

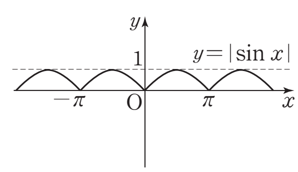
$M=-1,\ m=-2$

$\therefore\ aMm=\pi\times(-1)\times(-2)=2\pi$

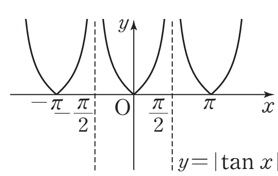
031 답 ①

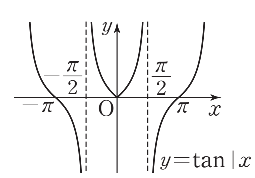
ㄱ. $y=\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|$, $y=|\sin x|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



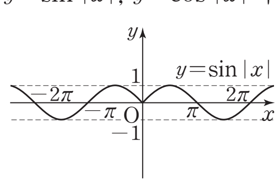


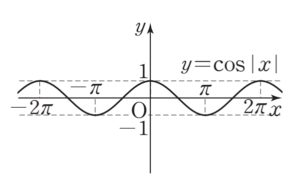
ㄴ. $y=|\tan x|$, $y=\tan|x|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.





ㄷ. $y=\sin|x|$, $y=\cos|x|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.





따라서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄱ이다.

핵심 유형 100~102쪽

유형11 답 ④

ㄱ. $\cos 1080^\circ=\cos(360^\circ\times3+0^\circ)=\cos 0^\circ=1$

$\sin(-330^\circ)=\sin\{360^\circ\times(-1)+30^\circ\}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$\tan 240^\circ=\tan(180^\circ+60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

$\cos 150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)$=1\times\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1$

ㄴ. $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{15}{4}\pi=\cos\left(2\pi+\pi+\frac{3}{4}\pi\right)=\cos\left(\pi+\frac{3}{4}\pi\right)=-\cos\frac{3}{4}\pi$

$=-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{5}{3}\pi=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}+1=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄷ. $\sin 70^\circ=\sin(90^\circ-20^\circ)=\cos 20^\circ$,

$\cos 70^\circ=\cos(90^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ$이므로

(좌변)

$=(\sin 20^\circ+\cos 20^\circ)^2+(\cos 20^\circ-\sin 20^\circ)^2$

$=\sin^2 20^\circ+2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+\cos^2 20^\circ$

$+\cos^2 20^\circ-2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+\sin^2 20^\circ$

$=2(\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ)=2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

유형12 답 $-\frac{4}{5}$

$\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle C=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

$\therefore \cos(2\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

$=-\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5}$

유형13 답 ⑤

$-1\le\cos 5x\le1$에서 $\cos 5x+4>0$

$\therefore y=a\cos 5x+4a+b$

$a>0$이므로 주어진 함수의 최댓값은

$a+4a+b=5a+b=7$ …… ㉠

최솟값은

$-a+4a+b=3a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore ab=-6$

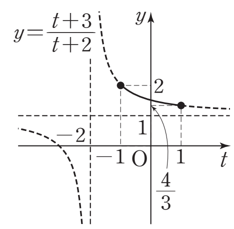
유형14 답 $\frac{10}{3}$

$y=\frac{\cos x+3}{\cos x+2}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=\frac{t+3}{t+2}=\frac{(t+2)+1}{t+2}=\frac{1}{t+2}+1$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은

2, $t=1$일 때 최솟값은 $\frac{4}{3}$이므로



$M=2$, $m=\frac{4}{3}$

$\therefore M+m=\frac{10}{3}$

유형15 답 ④

$y=\sin^2 x+2\cos x=(1-\cos^2 x)+2\cos x$

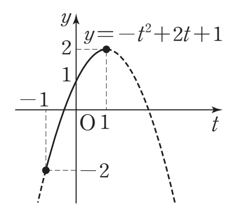
$=-\cos^2 x+2\cos x+1$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=-t^2+2t+1=-(t-1)^2+2$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값은 2,

$t=-1$일 때 최솟값은 -2이므로



$M=2$, $m=-2$

$\therefore M-m=4$

유형16 답 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$

$2x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$이고, 주어진 방정식은 $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{2}{3}\pi$

즉, $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이므로

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$

유형17 답 ⑤

$2\sin^2 x-\cos x-1=0$에서

$2(1-\cos^2 x)-\cos x-1=0$

$\therefore 2\cos^2 x+\cos x-1=0$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le1$이고, 주어진 방정식은 $2t^2+t-1=0$, $(t+1)(2t-1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

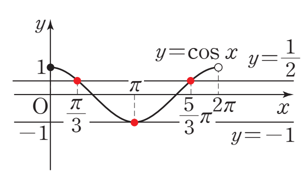
(i) $t=-1$, 즉 $\cos x=-1$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로 $x=\pi$

(ii) $t=\frac{1}{2}$, 즉 $\cos x=\frac{1}{2}$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$



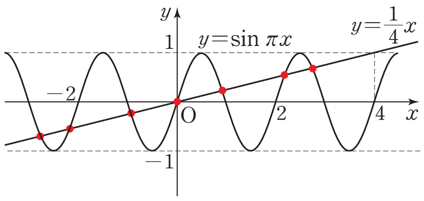
(i), (ii)에 의하여 구하는 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{\pi}{3}+\pi+\frac{5}{3}\pi=3\pi$

유형18 답 7

방정식 $\sin \pi x=\frac{1}{4}x$의 실근은 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 x좌표와 같다.



위의 그림에서 두 그래프의 교점이 7개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

유형19 답 ②

$\cos^2 x-2\sin x+4=k$에서

$(1-\sin^2 x)-2\sin x+4=k$

$\therefore\ -\sin^2 x-2\sin x+5=k$

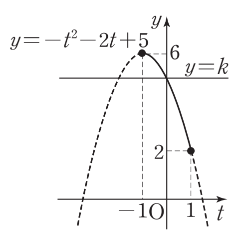
따라서 주어진 방정식이 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=-\sin^2 x-2\sin x+5$의 그래프와 직선 $y=k$가 교점을 가져야 한다.

$y=-\sin^2 x-2\sin x+5$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2-2t+5=-(t+1)^2+6$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$2\le k\le 6$



유형20 답 ⑤

$x+\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{4}\le t<\frac{9}{4}\pi$이고, 주어진 부등식은 $\sin t<\frac{\sqrt{2}}{2}$

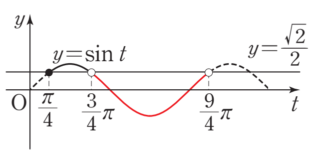
오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는

$\frac{3}{4}\pi<t<\frac{9}{4}\pi$이므로

$\frac{3}{4}\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

$\therefore\ \frac{\pi}{2}<x<2\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=2\pi$이므로 $\alpha+\beta=\frac{5}{2}\pi$



유형21 답 $-\frac{1}{2}$

$2\cos^2 x-3\ge 3\sin x$에서 $2(1-\sin^2 x)-3\ge 3\sin x$

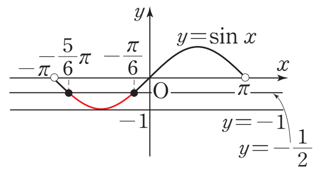
$2\sin^2 x+3\sin x+1\le 0$, $(\sin x+1)(2\sin x+1)\le 0$

$\therefore\ -1\le \sin x\le -\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$-\frac{5}{6}\pi\le x\le -\frac{\pi}{6}$이므로

$\alpha=-\frac{5}{6}\pi$, $\beta=-\frac{\pi}{6}$



따라서 $\beta-\alpha=-\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

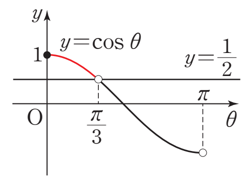
유형22 답 ①

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하면 이차방정식 $x^2-2x+2\cos\theta=0$이 실근을 갖지 않으므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=1-2\cos\theta<0 \qquad \therefore\ \cos\theta>\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$0\le\theta<\frac{\pi}{3}$



핵심 유형 완성하기 103~110쪽

032 답 ③

$\sin\frac{11}{3}\pi=\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{5}{3}\pi=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

$\cos\frac{7}{6}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ (주어진 식) $=2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-3\times(-\sqrt{3})+4\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=-\sqrt{3}+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$

033 답 0.7661

$\sin 110^\circ=\sin(90^\circ+20^\circ)=\cos 20^\circ=0.9397$

$\cos 260^\circ=\cos(90^\circ\times 3-10^\circ)=-\sin 10^\circ=-0.1736$

$\therefore\ \sin 110^\circ+\cos 260^\circ=0.9397-0.1736=0.7661$

034 답 ③

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$,

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\therefore$ (주어진 식) $=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

035 답 -1

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos^2(2\pi-\theta)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}-\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$=\frac{\cos\theta\cos^2\theta}{-\cos\theta}-\frac{-\sin\theta\cos\theta}{-\frac{1}{\tan\theta}}=-\cos^2\theta-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$=-\cos^2\theta-\sin^2\theta=-1$$

036 답 0

$\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\cdots+\sin 180^\circ+\sin 181^\circ+\sin 182^\circ+\cdots+\sin 360^\circ$

$=\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\cdots+\sin 180^\circ+\sin(180^\circ+1^\circ)$

$\qquad+\sin(180^\circ+2^\circ)+\cdots+\sin(180^\circ+180^\circ)$

$=\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\cdots+\sin 180^\circ-\sin 1^\circ-\sin 2^\circ-\cdots-\sin 180^\circ$

$=0$

037 답 ④

$1^\circ+\theta=A$로 놓으면 $\theta=A-1^\circ$

$89^\circ-\theta=89^\circ-(A-1^\circ)=90^\circ-A$

$\therefore$ (주어진 식)$=\tan A\times\tan(90^\circ-A)$

$\qquad=\tan A\times\dfrac{1}{\tan A}=1$

038 답 ①

$\sin 5^\circ=\sin(90^\circ-85^\circ)=\cos 85^\circ$

$\sin 10^\circ=\sin(90^\circ-80^\circ)=\cos 80^\circ$

$\sin 15^\circ=\sin(90^\circ-75^\circ)=\cos 75^\circ$

$\vdots$

$\sin 40^\circ=\sin(90^\circ-50^\circ)=\cos 50^\circ$

$\therefore$ (주어진 식)

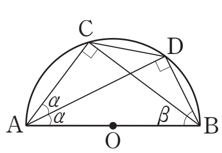
$=(\cos^2 85^\circ+\sin^2 85^\circ)+(\cos^2 80^\circ+\sin^2 80^\circ)$

$\qquad+\cdots+(\cos^2 50^\circ+\sin^2 50^\circ)+\sin^2 45^\circ$

$=\underbrace{1+\cdots+1}_{8\text{개}}+\sin^2 45^\circ$

$=8+\dfrac{1}{2}=\dfrac{17}{2}$

039 답 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$



선분 AB는 반원의 지름이므로

$\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$

$\triangle ABD$에서 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

$\therefore \cos(\beta-\alpha)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha$

한편 $\triangle ABC$에서 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

$\therefore \cos(\beta-\alpha)=\sin 2\alpha=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

040 답 ④

$A+B+C=\pi$이므로

① $\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$

② $\sin\dfrac{B+C}{2}=\sin\dfrac{\pi-A}{2}$

$\qquad=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)=\cos\dfrac{A}{2}$

③ $\tan(A+C)=\tan(\pi-B)=-\tan B$이므로

$\tan B\tan(A+C)=\tan B\times(-\tan B)$

$\qquad=-\tan^2 B$

④ $\tan\dfrac{B+C}{2}=\tan\dfrac{\pi-A}{2}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{1}{\tan\frac{A}{2}}$

이므로 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B+C}{2}=\tan\dfrac{A}{2}\times\dfrac{1}{\tan\frac{A}{2}}=1$

⑤ $\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C>0$이므로

$\cos C<0$에서 $\dfrac{\pi}{2}<C<\pi$

따라서 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

041 답 0

$5\theta=\pi$이므로

$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 10\theta$

$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 5\theta$

$\qquad+\cos(\pi+\theta)+\cos(\pi+2\theta)+\cdots+\cos(\pi+5\theta)$

$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 5\theta-\cos\theta-\cos 2\theta-\cdots-\cos 5\theta$

$=0$

042 답 ⑤

$-1\le\sin 2x\le 1$이므로 $2\sin 2x-3<0$

$\therefore y=-2a\sin 2x+3a+b$

$a>0$이므로 주어진 함수의 최댓값은

$2a+3a+b=5a+b=1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

최솟값은

$-2a+3a+b=a+b=-3$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-4$ $\qquad\therefore a-b=5$

043 답 ①

$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+x\right)=-\cos x$이므로

$y=\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+x\right)-\cos x+2=-2\cos x+2$

$-1\le\cos x\le 1$이므로 $-2\le -2\cos x\le 2$

$\therefore 0\le -2\cos x+2\le 4$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 0이므로 $M=4,\ m=0$

$\therefore M+m=4$

044 답 ⑤

$-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$에서 $-1 \le \tan x \le 1$이므로

$\tan x - 2 < 0$

$\therefore\ y = \tan x - 2 + k$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $-1+k$, 최솟값은 $-3+k$이므로

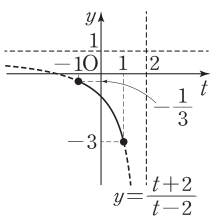
$-1+k+(-3+k)=4 \qquad \therefore\ k=4$

045 답 ①

$y = \frac{\sin x + 2}{\sin x - 2}$에서 $\sin x = t$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고

$y = \frac{t+2}{t-2} = \frac{t-2+4}{t-2} = \frac{4}{t-2} + 1$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 $-\frac{1}{3}$, $t=1$일 때 최솟값은 -3이므로



$M = -\frac{1}{3}$, $m=-3$

$\therefore\ Mm = 1$

046 답 3

$y = \frac{3\tan x + 1}{\tan x + 1}$에서 $\tan x = t$로 놓으면

$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$에서 $0 \le t \le 1$이고

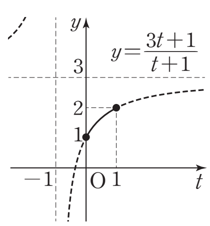
$y = \frac{3t+1}{t+1} = \frac{3(t+1)-2}{t+1} = \frac{-2}{t+1} + 3$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값은 2,

$t=0$일 때 최솟값은 1이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$2+1=3$



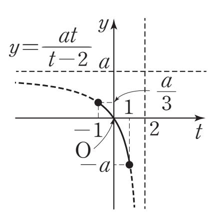
047 답 ③

$y = \frac{a\cos x}{\cos x - 2}$에서 $\cos x = t$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고

$y = \frac{at}{t-2} = \frac{a(t-2)+2a}{t-2} = \frac{2a}{t-2} + a$

$a>0$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $t=-1$일 때 최댓값 $\frac{a}{3}$를 가지므로



$\frac{a}{3} = 1 \qquad \therefore\ a=3$

$t=1$일 때 최솟값 $-a$를 가지므로

$b = -a = -3$

$\therefore\ \frac{a}{b} = \frac{3}{-3} = -1$

048 답 ⑤

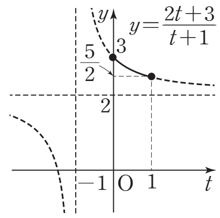
$y = \frac{2|\cos x|+3}{|\cos x|+1}$에서 $|\cos x| = t$로 놓으면 $0 \le t \le 1$이고

$y = \frac{2t+3}{t+1} = \frac{2(t+1)+1}{t+1} = \frac{1}{t+1} + 2$

오른쪽 그림에서 $t=0$일 때 최댓값은 3,

$t=1$일 때 최솟값은 $\frac{5}{2}$이므로 주어진 함수의 치역은 $\left\{y \,\middle|\, \frac{5}{2} \le y \le 3\right\}$이다.

따라서 $a=\frac{5}{2}$, $b=3$이므로 $ab=\frac{15}{2}$



049 답 ②

$y = \cos^2 x - 4\sin(\pi + x) + 2$

$= (1-\sin^2 x) + 4\sin x + 2$

$= -\sin^2 x + 4\sin x + 3$

$\sin x = t$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고

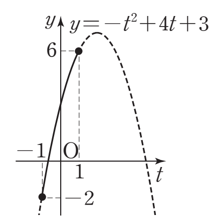
$y = -t^2 + 4t + 3 = -(t-2)^2 + 7$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값은 6,

$t=-1$일 때 최솟값은 -2이므로

$M=6$, $m=-2$

$\therefore\ M+m=4$



050 답 1

$y = -2\sin^2 x - 2\cos x + k$

$= -2(1-\cos^2 x) - 2\cos x + k$

$= 2\cos^2 x - 2\cos x + k - 2$

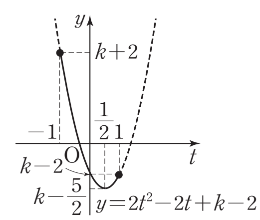
$\cos x = t$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고

$y = 2t^2 - 2t + k - 2 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + k - \frac{5}{2}$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 $k+2$, $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $k-\frac{5}{2}$

이므로 $(k+2) + \left(k - \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$\therefore\ k=1$



051 답 2

$y = a\sin^2 x + 2a\cos x + 1$

$= a(1-\cos^2 x) + 2a\cos x + 1$

$= -a\cos^2 x + 2a\cos x + a + 1$

$\cos x = t$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고

$y = -at^2 + 2at + a + 1 = -a(t-1)^2 + 2a + 1$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때

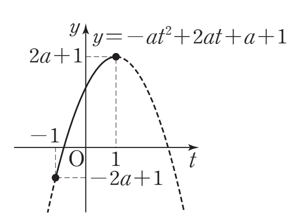
최댓값 $2a+1$을 가지므로

$2a+1=3 \qquad \therefore\ a=1$

$t=-1$일 때 최솟값 $-2a+1$을

가지므로 $b=-2a+1=-1$

$\therefore\ a-b=2$



052 답 ⑤

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=-\cos x$, $\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$이므로

$y=\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+\cos^2(\pi+x)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

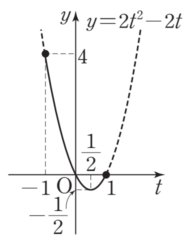
$\quad=\cos^2 x+\cos^2 x-2\cos x=2\cos^2 x-2\cos x$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=2t^2-2t=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 4, $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이므로 주어진 함수의 치역은 $\left\{y\,\middle|\,-\frac{1}{2}\le y\le 4\right\}$이다.

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=4$이므로 $ab=-2$



053 답 3

$f(x)=-(1-\sin^2 x)-2\sin x+1=(\sin x-1)^2-1$

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로 $\sin x=-1$일 때 최댓값은 3,

$\sin x=1$일 때 최솟값은 -1이다.

$\therefore -1\le f(x)\le 3$

$f(x)=t$로 놓으면 $-1\le t\le 3$이고

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)$

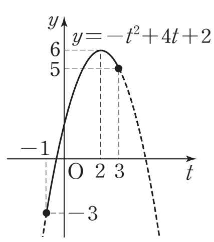
$\qquad=-t^2+4t+2=-(t-2)^2+6$

오른쪽 그림에서 $t=2$일 때 최댓값은 6,

$t=-1$일 때 최솟값은 -3이므로

$M=6$, $m=-3$

$\therefore M+m=3$



054 답 $\frac{13}{3}\pi$

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\le x<4\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le t<\frac{7}{4}\pi$이고, 주어진 방정식은 $\tan t=\sqrt{3}$

$\therefore t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{4}{3}\pi$

즉, $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}\pi$이므로

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{6}\pi$

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{7}{6}\pi+\frac{19}{6}\pi=\frac{13}{3}\pi$

055 답 $x=\frac{\pi}{4}$

$\log\cos x$, $\log\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$에서 진수의 조건에 의하여

$\cos x>0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)>0$

$\therefore 0<x<\frac{\pi}{2}$ $(\because 0<x<2\pi)$

$\log\cos x+\log\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\log\frac{1}{2}$에서

$\log\cos x+\log\cos x=\log\frac{1}{2}$, $\log\cos^2 x=\log\frac{1}{2}$

따라서 $\cos^2 x=\frac{1}{2}$이므로

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

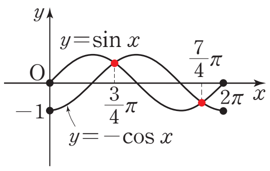
$\therefore x=\frac{\pi}{4}$

056 답 $\frac{5}{2}\pi$

$\sin x+\cos x=0$에서 $\sin x=-\cos x$

오른쪽 그림에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=-\cos x$의 그래프의 교점의 x좌표가 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이므로

$x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$



따라서 모든 x의 값의 합은 $\frac{3}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=\frac{5}{2}\pi$

다른 풀이 $\sin x+\cos x=0$에서 $\sin x=-\cos x$

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$는 등식을 만족하지 않고

$x\ne\frac{\pi}{2}$, $x\ne\frac{3}{2}\pi$일 때 $\cos x\ne 0$이므로

양변을 $\cos x$로 나누면

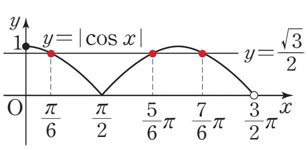
$\frac{\sin x}{\cos x}=-1 \qquad \therefore \tan x=-1$

$0\le x\le 2\pi$에서 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

따라서 모든 x의 값의 합은 $\frac{3}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=\frac{5}{2}\pi$

057 답 ①

$0\le x<\frac{3}{2}\pi$에서 $y=|\cos x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 오른쪽 그림과 같으므로 방정식



$|\cos x|=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 근은

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

$\therefore x_1-x_2+x_3=\frac{\pi}{6}-\frac{5}{6}\pi+\frac{7}{6}\pi=\frac{\pi}{2}$

058 답 ④

$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$에서 $-\frac{\pi}{2}<2x<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos 2x\ne 0$

$\sin 2x=\sqrt{3}\cos 2x$에서 $2x=t$로 놓으면

$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, $\cos t\ne 0$이고

$\sin t=\sqrt{3}\cos t$

양변을 $\cos t$로 나누면 $\frac{\sin t}{\cos t}=\sqrt{3}$

$\therefore \tan t=\sqrt{3}$

$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$에서 $t=\frac{\pi}{3}$이므로 $2x=\frac{\pi}{3}$

따라서 $x=\alpha=\frac{\pi}{6}$이므로

$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

059 답 ④

$\pi\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서

$-1\le\sin x\le 1 \quad \therefore -\pi\le t\le\pi$

이때 주어진 방정식은 $\cos t=0$이므로

$t=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $t=\frac{\pi}{2}$

즉, $\pi\sin x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi\sin x=\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ④이다.

060 답 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

$2\cos^2 x-5\sin x+1=0$에서

$2(1-\sin^2 x)-5\sin x+1=0$

$\therefore 2\sin^2 x+5\sin x-3=0$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고,

주어진 방정식은 $2t^2+5t-3=0$

$(t+3)(2t-1)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$ ($\because -1\le t\le 1$)

$t=\frac{1}{2}$, 즉 $\sin x=\frac{1}{2}$일 때 $0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

061 답 ⑤

$3\tan^2 x-4\sqrt{3}\tan x+3=0$에서

$(3\tan x-\sqrt{3})(\tan x-\sqrt{3})=0$

$\therefore \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $\tan x=\sqrt{3}$

(i) $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $x=\frac{\pi}{6}$

(ii) $\tan x=\sqrt{3}$일 때, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $x=\frac{\pi}{3}$

(i), (ii)에 의하여 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \cos(\beta-\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

062 답 ②

$2\cos^2 A-\sin A\cos A+\sin^2 A-1=0$에서

$2\cos^2 A-\sin A\cos A+(1-\cos^2 A)-1=0$

$\cos^2 A-\sin A\cos A=0$

$\therefore \cos A(\cos A-\sin A)=0$

한편 △ABC는 직각삼각형이 아니므로

$\cos A\ne 0$

$\therefore \cos A=\sin A \quad \therefore A=\frac{\pi}{4}$ ($\because 0<A<\pi$)

이때 $A+B+C=\pi$이므로

$\tan(B+C)=\tan(\pi-A)=-\tan A$

$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

063 답 $-\sqrt{2}$

$5\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta-2=0$에서

$5\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta-2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=0$

$3\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=0$

$(3\sin\theta+2\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=0$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta=\cos\theta$

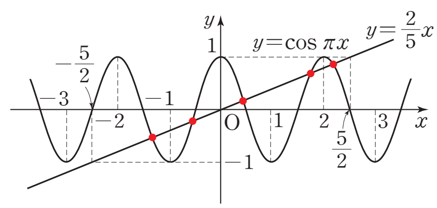
$\therefore \theta=\frac{5}{4}\pi$

따라서 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{2}$

064 답 ①

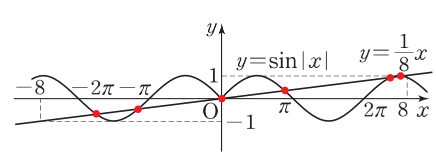
방정식 $\cos\pi x=\frac{2}{5}x$의 실근은 함수 $y=\cos\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{5}x$의 교점의 x좌표와 같다.



위의 그림에서 두 그래프의 교점이 5개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

065 답 6

방정식 $\sin|x|=\frac{1}{8}x$의 실근은 함수 $y=\sin|x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}x$의 교점의 x좌표와 같다.

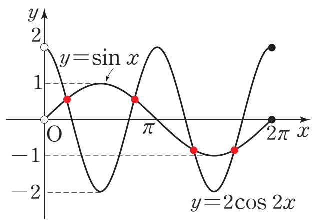


위의 그림에서 두 그래프의 교점이 5개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

066 답 ②

$0<x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

오른쪽 그림에서 두 그래프의 교점이 4개이므로 방정식 $\sin x=2\cos 2x$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



067 답 ④

$4\sin^2 x+4\cos x-2+k=0$에서

$4(1-\cos^2 x)+4\cos x-2+k=0$

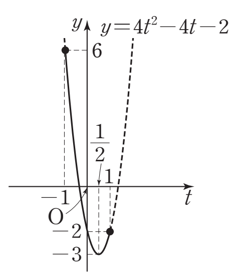
$\therefore\ 4\cos^2 x-4\cos x-2=k$

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=4\cos^2 x-4\cos x-2$의 그래프와 직선 $y=k$가 교점을 가져야 한다.

$y=4\cos^2 x-4\cos x-2$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=4t^2-4t-2=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-3$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-3\le k\le 6$이므로 k의 최댓값은 6이다.



068 답 ⑤

$\sin(x+\pi)=-\sin x$이므로

$2\cos^2 x+4\sin x-k=0$에서 $2(1-\sin^2 x)+4\sin x=k$

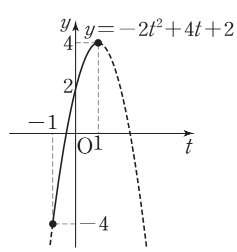
$\therefore\ -2\sin^2 x+4\sin x+2=k$

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=-2\sin^2 x+4\sin x+2$의 그래프와 직선 $y=k$가 교점을 가져야 한다.

$y=-2\sin^2 x+4\sin x+2$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-2t^2+4t+2=-2(t-1)^2+4$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-4\le k\le 4$이므로 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.



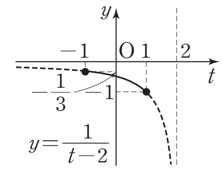
069 답 ①

$-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $-1\le\tan x\le 1$이므로 $\tan x\ne 2$

$a\tan x=2a+1$에서 $a(\tan x-2)=1$ $\quad\therefore\ a=\frac{1}{\tan x-2}$

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=\frac{1}{\tan x-2}$의 그래프와 직선 $y=a$가 교점을 가져야 한다.

$\tan x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$에서 함수 $y=\frac{1}{t-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는



$-1\le a\le -\frac{1}{3}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=-\frac{1}{3}$이므로 $\alpha+\beta=-\frac{4}{3}$

070 답 ③

$2\sin^2 x+(2a+1)\cos x-a-2=0$에서

$2(1-\cos^2 x)+(2a+1)\cos x-a-2=0$

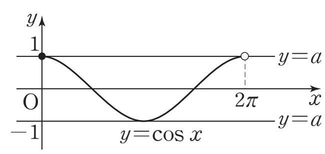
$2\cos^2 x-(2a+1)\cos x+a=0$

$(2\cos x-1)(\cos x-a)=0$

$\therefore\ \cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=a$

그런데 $0\le x<2\pi$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$은 2개의 실근을 가지므로 주어진 방정식이 서로 다른 3개의 실근을 가지려면 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나야 한다.

따라서 $0\le x<2\pi$일 때, 오른쪽 그림에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 1개이려면



$a=-1$ 또는 $a=1$

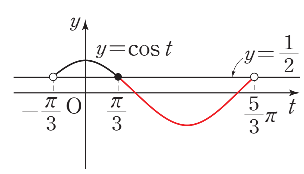
따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+1=0$

071 답 ④

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0<x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}<t<\frac{5}{3}\pi$이고, 주어진 부등식은 $\cos t\le\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는



$\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$이므로

$\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$

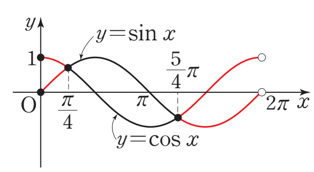
$\therefore\ \frac{2}{3}\pi\le x<2\pi$

따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=2\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{4}{3}\pi$

072 답 ③

부등식 $\cos x\ge\sin x$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 함수 $y=\sin x$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로 오른쪽 그림에서



$0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<2\pi$

따라서 주어진 부등식의 해가 아닌 것은 ③이다.

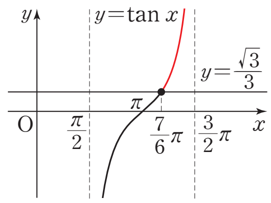
073 답 ④

$3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$에서 $\tan x\geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi$이므로 오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$\dfrac{7}{6}\pi\leq x<\dfrac{3}{2}\pi$

따라서 x의 최솟값은 $\dfrac{7}{6}\pi$이다.



074 답 ②

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$에서 $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

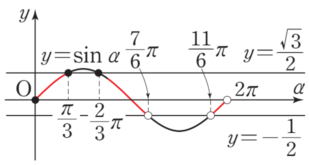
$-1<\sin\alpha+\cos\beta\leq\sqrt{3}$에서 $-1<\sin\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\leq\sqrt{3}$

$-1<2\sin\alpha\leq\sqrt{3}$ $\quad\therefore -\dfrac{1}{2}<\sin\alpha\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leq\alpha<2\pi$이므로 오른쪽 그림에서 α의 값의 범위는

$0\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\dfrac{2}{3}\pi\leq\alpha<\dfrac{7}{6}\pi$

또는 $\dfrac{11}{6}\pi<\alpha<2\pi$



따라서 주어진 부등식을 만족하는 α의 값의 범위가 아닌 것은 ②이다.

075 답 $\dfrac{\pi}{12}\leq\theta\leq\dfrac{5}{12}\pi$

테니스공의 처음 속력이 20 m/s이므로 $v=20$을

$f(\theta)=\dfrac{v^2\sin 2\theta}{10}$에 대입하면

$f(\theta)=\dfrac{20^2\times\sin 2\theta}{10}=40\sin 2\theta$

이때 테니스공이 날아간 거리가 20 m 이상이 되게 하면

$f(\theta)\geq 20$이므로

$40\sin 2\theta\geq 20$ $\quad\therefore \sin 2\theta\geq\dfrac{1}{2}$

$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$에서 $0\leq 2\theta\leq\pi$이므로 주어진 부등식의 해는

$\dfrac{\pi}{6}\leq 2\theta\leq\dfrac{5}{6}\pi$ $\quad\therefore \dfrac{\pi}{12}\leq\theta\leq\dfrac{5}{12}\pi$

076 답 ③

$4\sin^2 x+8\cos x<7$에서 $4(1-\cos^2 x)+8\cos x-7<0$

$4\cos^2 x-8\cos x+3>0$, $(2\cos x-1)(2\cos x-3)>0$

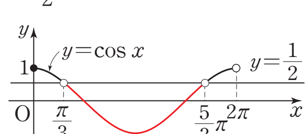
$\therefore \cos x<\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x>\dfrac{3}{2}$

그런데 $-1\leq\cos x\leq 1$이므로 $\cos x<\dfrac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는 $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, $\beta=\dfrac{5}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\dfrac{4}{3}\pi$



077 답 $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{3}$

$\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x<-\sqrt{3}$에서

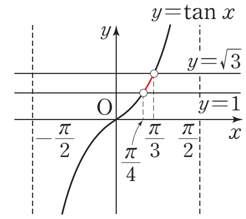
$\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}<0$

$(\tan x-\sqrt{3})(\tan x-1)<0$

$\therefore 1<\tan x<\sqrt{3}$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{3}$



078 답 9

$x-\dfrac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $x+\dfrac{\pi}{6}=t+\dfrac{\pi}{2}$이고, $0\leq x<2\pi$에서

$-\dfrac{\pi}{3}\leq t<\dfrac{5}{3}\pi$

$2\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1\geq 0$에서

$2\cos^2 t-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)-1\geq 0$

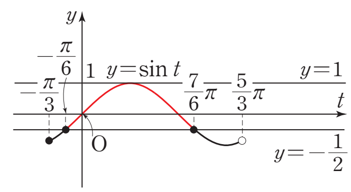
$2(1-\sin^2 t)+\sin t-1\geq 0$, $2\sin^2 t-\sin t-1\leq 0$

$(2\sin t+1)(\sin t-1)\leq 0$

$\therefore -\dfrac{1}{2}\leq\sin t\leq 1$

오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는 $-\dfrac{\pi}{6}\leq t\leq\dfrac{7}{6}\pi$이므로 $-\dfrac{\pi}{6}\leq x-\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{7}{6}\pi$

$\therefore \dfrac{\pi}{6}\leq x\leq\dfrac{3}{2}\pi$



따라서 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $\beta=\dfrac{3}{2}\pi$이므로 $\dfrac{\beta}{\alpha}=9$

079 답 ④

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하면 이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}x\sin\theta+1=0$이 실근을 갖지 않으므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-\sqrt{2}\sin\theta)^2-1<0$

$2\sin^2\theta-1<0$, $(\sqrt{2}\sin\theta+1)(\sqrt{2}\sin\theta-1)<0$

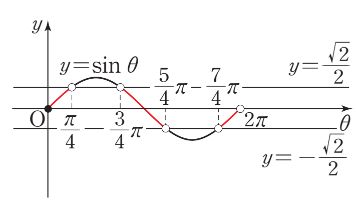
$\therefore -\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin\theta<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$0\leq\theta<\dfrac{\pi}{4}$

또는 $\dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{5}{4}\pi$

또는 $\dfrac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$



따라서 θ의 값이 아닌 것은 ④이다.

080 답 ②

이차방정식 $x^2-2(2\cos\theta-1)x+8\cos\theta-4=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2\cos\theta-1)^2-(8\cos\theta-4)=0$

$4\cos^2\theta-12\cos\theta+5=0$, $(2\cos\theta-5)(2\cos\theta-1)=0$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos\theta=\frac{5}{2}$

그런데 $0\le\theta<2\pi$에서 $-1\le\cos\theta\le1$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 θ의 값의 합은 $\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=2\pi$

081 답 ②

이차함수 $y=x^2-2\sqrt{3}x\tan\theta+1$의 그래프가 x축과 만나지 않으면 이차방정식 $x^2-2\sqrt{3}x\tan\theta+1=0$이 실근을 갖지 않으므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-\sqrt{3}\tan\theta)^2-1<0$

$3\tan^2\theta-1<0$, $(\sqrt{3}\tan\theta+1)(\sqrt{3}\tan\theta-1)<0$

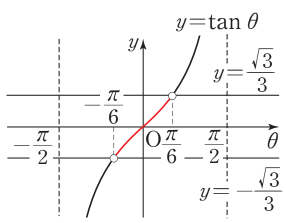
$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}<\tan\theta<\frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{6}$이므로

$\alpha=-\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$



핵심 유형 **최종 점검**하기 • 111~113쪽

1 답 ⑤

유형 01 주기함수

모든 실수 x에 대하여 $f(x-2)=f(x+1)$을 만족하므로 이 식의 양변에 x 대신 $x+2$를 대입하면

$f(x)=f(x+3)$, 즉 $f(x+3)=f(x)$

따라서 $f(x)$는 주기함수이므로

$f(20)=f(17)=f(14)=\cdots=f(2)=3$

$f(10)=f(7)=f(4)=f(1)=5$

$\therefore 2f(20)+5f(10)=2\times3+5\times5=31$

2 답 ④

유형 03 함수 $y=\cos x$의 성질

함수 $y=\cos x$의 그래프에서

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi$이므로 $\alpha+\beta=2\pi$

$\gamma=2\pi+\alpha$

$\therefore \cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(2\pi+2\pi+\alpha)=\cos(2\pi+\alpha)$

$=\cos\alpha=a$

3 답 $\frac{9}{2}$

유형 06 삼각함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

$y=\cos\frac{\pi}{4}x+4$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\cos\frac{\pi}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)+4$

이 그래프가 점 $\left(\frac{11}{6}, a\right)$를 지나므로

$a=\cos\frac{\pi}{4}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\right)+4=\cos\frac{\pi}{3}+4=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$

4 답 -4

유형 07 삼각함수의 최대, 최소와 주기

$y=\frac{1}{2}\sin\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{1}{2}\sin\pi(x-4)-3=\frac{1}{2}\sin(\pi x-4\pi)-3$

이므로 $a=\frac{2\pi}{\pi}=2$, $b=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$, $c=-\frac{1}{2}-3=-\frac{7}{2}$

$\therefore a+b+c=2+\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{7}{2}\right)=-4$

5 답 ⑤

유형 07 삼각함수의 최대, 최소와 주기

② 주기가 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$인 주기함수이다.

③ 최댓값은 $3-2=1$, 최솟값은 $-3-2=-5$이다.

④ $y=3\cos 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼 평행이동하면

$y=3\cos 4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=3\cos\left(-\frac{\pi}{2}+4x\right)=3\sin 4x$이고, 주어진 함수는 $y=3\sin 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=3\cos 4x$의 그래프를 평행이동하면 주어진 함수의 그래프와 겹쳐진다.

⑤ $f\left(\frac{3}{8}\pi\right)=3\sin\frac{7}{6}\pi-2=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-\frac{7}{2}$

따라서 그래프는 점 $\left(\frac{3}{8}\pi, -\frac{1}{2}\right)$을 지나지 않는다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

6 답 ④

유형 07 삼각함수의 최대, 최소와 주기

조건 ㈎에 의하여 주기가 2π이므로 주어진 함수의 주기를 각각 구하면

① $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ ② $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ ③ $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{2\pi}{2}=2\pi$

그러므로 조건 ㈎를 만족하는 함수는 ③, ④, ⑤이다.

또 조건 ㈏에 의하여 그래프가 원점에 대하여 대칭인 함수이므로 $y=\sin x$, $y=\tan x$의 함수이다.

그러므로 조건 ㈎, ㈏를 만족하는 함수는 ③, ④이다.

그런데 조건 ㈐에 의하여 최댓값과 최솟값의 차는 10이므로 세 조건 ㈎, ㈏, ㈐를 모두 만족하는 함수는 ④이다.

7 답 -32

유형 08 조건이 주어진 삼각함수의 미정계수 구하기

주어진 함수의 최댓값이 2이고 $a>0$이므로

$a+c=2$ ...... ㉠

또 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore b=4$

$f\left(\frac{\pi}{24}\right)=0$에서 $a\sin\frac{\pi}{6}+c=0$이므로

$\frac{1}{2}a+c=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $c=-2$

$\therefore abc=4\times4\times(-2)=-32$

8 답 12π

유형 09 그래프가 주어진 삼각함수의 미정계수 구하기

주어진 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 0이고 $a>0$이므로

$a+d=4$, $-a+d=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=2$

또 주기가 $\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi$ $\quad\therefore b=3$

따라서 주어진 함수는 $y=2\cos(3x-c)+2$이고 그래프가

점 $\left(\frac{2}{3}\pi, 0\right)$을 지나므로

$0=2\cos(2\pi-c)+2$

$\therefore \cos(2\pi-c)=-1$

이때 $0<c<2\pi$에서 $0<2\pi-c<2\pi$이므로

$2\pi-c=\pi$ $\quad\therefore c=\pi$

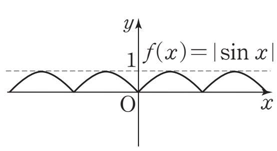
$\therefore abcd=2\times3\times\pi\times2=12\pi$

9 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

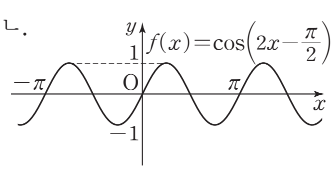
유형 10 절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 그래프

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족하면 y축에 대하여 대칭이고, 주어진 함수의 그래프는 각각 다음과 같다.

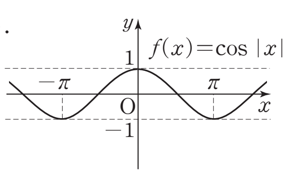
ㄱ.



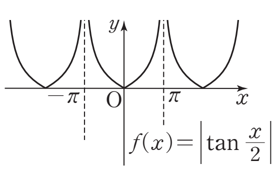
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

10 답 $2\sin x$

유형 11 일반각에 대한 삼각함수의 성질

$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2=-\cos x+2$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+2-\left\{-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\right\}$

$=\sin x+2-(-\sin x+2)=2\sin x$

11 답 ⑤

유형 11 일반각에 대한 삼각함수의 성질

$\sin 70^\circ=\sin(90^\circ-70^\circ)=\cos 20^\circ$

$\cos 70^\circ=\cos(90^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\left(1-\frac{1}{\cos 20^\circ}\right)\left(1+\frac{1}{\cos 20^\circ}\right)\left(1-\frac{1}{\sin 20^\circ}\right)\left(1+\frac{1}{\sin 20^\circ}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{\cos^2 20^\circ}\right)\left(1-\frac{1}{\sin^2 20^\circ}\right)$

$=\frac{\cos^2 20^\circ-1}{\cos^2 20^\circ}\times\frac{\sin^2 20^\circ-1}{\sin^2 20^\circ}$

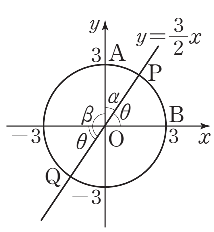
$=\frac{-\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}\times\frac{-\cos^2 20^\circ}{\sin^2 20^\circ}$

$=1$

12 답 $-\frac{3}{2}$

유형 12 삼각함수의 성질의 도형에의 활용

오른쪽 그림과 같이 원과 x축의 한 교점을 B라 하고 $\angle POB=\theta$라고 하면



$\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$, $\beta=\frac{\pi}{2}+\theta$

$\therefore \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}$

$=-\tan\theta$

이때 $\tan\theta=\frac{3}{2}$이므로

$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=-\tan\theta=-\frac{3}{2}$

13 답 5

유형 13 일차식 꼴의 삼각함수의 최대, 최소

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$이므로 $-1\le\cos x\le1$에서

$\cos x-3<0$

$\therefore y=\cos x-3+k$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $1-3+k=-2+k$, 최솟값은 $-1-3+k=-4+k$이므로

$(-2+k)+(-4+k)=4$ $\quad\therefore k=5$

14 답 $-\frac{1}{2}$

유형 14 분수식 꼴의 삼각함수의 최대, 최소

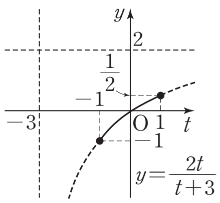
$y=\frac{2\cos x}{\cos x+3}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=\frac{2t}{t+3}=\frac{2(t+3)-6}{t+3}=\frac{-6}{t+3}+2$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값은 $\frac{1}{2}$,

$t=-1$일 때 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$



15 답 ②

유형 15 이차식 꼴의 삼각함수의 최대, 최소

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$이므로 주어진 식은

$y=\tan^2 x+2\tan x+6$

$\tan x=t$로 놓으면 $0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $t\ge 0$이고

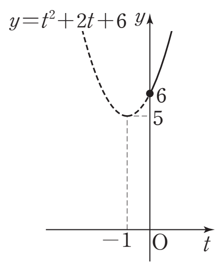
$y=t^2+2t+6=(t+1)^2+5$

오른쪽 그림에서 $t=0$일 때 최솟값 6을 가지므로 $m=6$

이때 $t=0$, 즉 $\tan x=0$이고

$0\le x<\frac{\pi}{2}$이므로 $x=0$

$\therefore\ a+m=0+6=6$



16 답 ③

유형 16 일차식 꼴의 삼각방정식

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, $\sin(\pi+x)=-\sin x$이므로

$\sin x-(-\sin x)=\sqrt{3}$, $2\sin x=\sqrt{3}$에서

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $0\le x<4\pi$에서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{8}{3}\pi$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다.

17 답 $\frac{\pi}{6}$

유형 17 이차식 꼴의 삼각방정식

$\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$의 양변을 제곱하면

$3\sin\theta=2\cos^2\theta$, $3\sin\theta=2(1-\sin^2\theta)$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2=0$, $(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)=0$

$\therefore\ \sin\theta=-2$ 또는 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin\theta<1$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}$

18 답 ②

유형 19 삼각방정식이 실근을 가질 조건

$4\cos^2 x+4\sin(x+4\pi)+k=0$에서

$4(1-\sin^2 x)+4\sin x+k=0$

$\therefore\ 4\sin^2 x-4\sin x-4=k$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=4\sin^2 x-4\sin x-4$의 그래프와 직선 $y=k$가 교점을 가져야 한다.

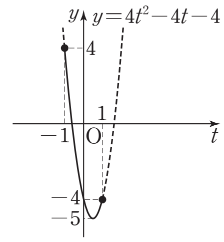
이때 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=4t^2-4t-4=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-5$

따라서 오른쪽 그림에서 실근을 갖도록 하는 실수 k의 범위는 $-5\le k\le 4$

이므로 $M=4$, $m=-5$

$\therefore\ M-m=4-(-5)=9$



19 답 ④

유형 20 일차식 꼴의 삼각부등식

$A+B+C=\pi$이므로

$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$

$\sin A+\sin(B+C)\ge 1$에서

$\sin A+\sin A\ge 1$

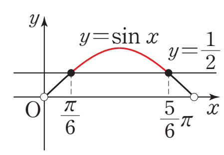
$2\sin A\ge 1\qquad\therefore\ \sin A\ge\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 A의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6}\le A\le\frac{5}{6}\pi$이므로

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos A\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\cos A$의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.



20 답 제1사분면 또는 제2사분면

유형 22 삼각방정식과 삼각부등식의 활용

$f(x)=x^2-2x\sin\theta-2\cos^2\theta+1$로 놓으면

방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, $f(1)<0$이어야 하므로

$1-2\sin\theta-2\cos^2\theta+1<0$

$\cos^2\theta+\sin\theta-1>0$

$1-\sin^2\theta+\sin\theta-1>0$

$\sin^2\theta-\sin\theta<0$

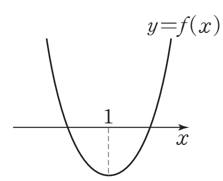
$\sin(\sin\theta-1)<0$

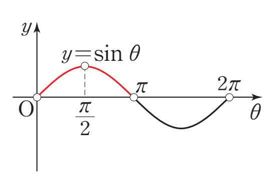
$\therefore\ 0<\sin\theta<1$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

따라서 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.





07 사인법칙과 코사인법칙

핵심 유형

	유형01 ⑤	유형02 $4:2:5$	
유형03 ③	유형04 37.6 m		유형05 ④
유형06 ③	유형07 $a=b$인 이등변삼각형		
유형08 $\sqrt{37}\text{ km}$		유형09 $2\sqrt{19}$	유형10 ④
유형11 $10\sqrt{3}+3\sqrt{7}$		유형12 $10\sqrt{3}$	

핵심 유형 완성하기

001 $\frac{37}{64}$	002 $12\sqrt{2}$	003 4	004 $\frac{1}{2}$	
005 $3(\sqrt{3}+1)$		006 $\frac{7}{2}$	007 ⑤	008 28
009 8	010 $C=90^\circ$인 직각삼각형			
011 정삼각형		012 $A=90^\circ$인 직각삼각형		
013 $3\sqrt{2}\text{ m}$	014 2450 m		015 $41\sqrt{2}\text{ m}$	
016 $\frac{\sqrt{21}}{3}$	017 ⑤	018 4	019 $6\sqrt{7}$	020 ③
021 $\frac{13}{14}$	022 ⑤	023 $2\sqrt{5}$	024 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	
025 $C=90^\circ$인 직각삼각형				
026 $a=c$인 이등변삼각형			027 ④	
028 $40\sqrt{7}\text{ m}$		029 $\frac{169}{3}\pi\text{ m}^2$		
030 $10\sqrt{21}\text{ m}$		031 $\sqrt{133}$	032 ⑤	033 ③
034 $\frac{15}{4}$	035 $4\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi$		036 5π	037 ③
038 ⑤	039 $4\sqrt{6}$	040 ④	041 $\frac{39\sqrt{3}}{4}$	
042 $\frac{45\sqrt{3}}{4}$	043 $\frac{15\sqrt{7}}{2}$	044 120°	045 $3\sqrt{15}$	046 50

핵심 유형 최종 점검하기

1 $3\sqrt{2}$	2 ③	3 ③	
4 $B=90^\circ$인 직각삼각형			5 $200(\sqrt{3}+1)\text{ m}$
6 $\sqrt{3}$	7 ①	8 $\frac{4}{5}$	
9 $B=90^\circ$인 직각삼각형			10 10 m
11 $\frac{64}{3}\pi-16\sqrt{3}$		12 $2(\sqrt{3}-1)$	
13 $2(3+\sqrt{14})$		14 $\frac{\sqrt{10}}{10}$	

핵심 유형 116~118쪽

유형01 답 ⑤

사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\frac{2}{\sin C}$, $2\sqrt{3}\sin C=2\sin 120^\circ$

$\therefore \sin C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$

그런데 $A+C<180^\circ$이므로 $C=30^\circ$

$\therefore B=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

$\therefore \cos B=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

유형02 답 $4:2:5$

$\frac{a+b}{6}=\frac{b+c}{7}=\frac{c+a}{9}=k(k>0)$로 놓으면

$a+b=6k,\ b+c=7k,\ c+a=9k$ …… ㉠

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2a+2b+2c=22k \quad \therefore a+b+c=11k$ …… ㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면

$a=4k,\ b=2k,\ c=5k$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=4k:2k:5k$

$=4:2:5$

유형03 답 ③

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 주어진 식에 대입하면

$b\times\frac{b}{2R}=c\times\frac{c}{2R} \quad \therefore b^2=c^2$

$\therefore b=c\ (\because b>0,\ c>0)$

따라서 $\triangle$ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

유형04 답 37.6 m

$C=180^\circ-(70^\circ+80^\circ)=30^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{20}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{BC}}{\sin 70^\circ}$, $20\sin 70^\circ=\overline{BC}\times\sin 30^\circ$

$\therefore \overline{BC}=20\times 0.94\times 2=37.6(\text{m})$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 37.6 m이다.

유형05 답 ④

코사인법칙에 의하여

$a^2=6^2+3^2-2\times 6\times 3\times\cos 60^\circ=27$

$\therefore a=3\sqrt{3}\ (\because a>0)$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R \quad \therefore R=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=3$

따라서 $\triangle$ABC의 외접원의 둘레의 길이는

$2\pi\times 3=6\pi$

유형06 답 ③

사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

$a=k$, $b=\sqrt{2}k$, $c=\sqrt{3}k(k>0)$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{(\sqrt{2}k)^2+(\sqrt{3}k)^2-k^2}{2\times\sqrt{2}k\times\sqrt{3}k}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

유형07 답 **$a=b$인 이등변삼각형**

코사인법칙에 의하여 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

이를 주어진 식에 대입하면

$a\times\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$c^2+a^2-b^2=b^2+c^2-a^2$, $a^2=b^2$

$\therefore a=b$ ($\because a>0$, $b>0$)

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

유형08 답 **$\sqrt{37}$ km**

코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos120°=37$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{37}$(km) ($\because \overline{AB}>0$)

따라서 건설되는 도로의 길이는 $\sqrt{37}$ km이다.

유형09 답 **$2\sqrt{19}$**

△ABC의 넓이가 $6\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times6\times4\times\sin A=6\sqrt{3}$ $\quad\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $A>90°$이므로 $A=120°$

따라서 코사인법칙에 의하여

$a^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos120°=76$

$\therefore a=2\sqrt{19}$ ($\because a>0$)

유형10 답 ④

헤론의 공식에 의하여 $s=\dfrac{5+7+8}{2}=10$이므로

△ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\sqrt{10\times(10-5)\times(10-7)\times(10-8)}=10\sqrt{3}$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$S=\dfrac{abc}{4R}$에서 $10\sqrt{3}=\dfrac{5\times7\times8}{4R}$

$\therefore R=70\times\dfrac{1}{10\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

따라서 △ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{49}{3}\pi$

유형11 답 **$10\sqrt{3}+3\sqrt{7}$**

$\triangle ABD=\dfrac{1}{2}\times5\times8\times\sin60°=10\sqrt{3}$

△BCD에서 헤론의 공식에 의하여

$s=\dfrac{8+8+2}{2}=9$이므로

$\triangle BCD=\sqrt{9\times(9-8)\times(9-8)\times(9-2)}=3\sqrt{7}$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD=10\sqrt{3}+3\sqrt{7}$

유형12 답 **$10\sqrt{3}$**

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{4^2+5^2-(\sqrt{21})^2}{2\times4\times5}=\dfrac{1}{2}$

이때 $0°<B<180°$이므로 $B=60°$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin60°=4\times5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

핵심 유형 **완성하기** 119~125쪽

001 답 **$\dfrac{37}{64}$**

사인법칙에 의하여

$\dfrac{4}{\sin60°}=\dfrac{3}{\sin C}$, $4\sin C=3\sin60°$

$\therefore \sin C=\dfrac{1}{4}\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

$\therefore \cos^2 C=1-\sin^2 C=1-\dfrac{27}{64}=\dfrac{37}{64}$

002 답 **$12\sqrt{2}$**

$B=180°-(45°+75°)=60°$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin45°}=\dfrac{6}{\sin60°}$, $a\sin60°=6\sin45°$

$\therefore a=6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$

또 $\dfrac{6}{\sin60°}=2R$에서 $R=\dfrac{1}{2}\times6\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

$\therefore aR=2\sqrt{6}\times2\sqrt{3}=12\sqrt{2}$

003 답 **4**

$\overline{AC}$가 원 O의 지름이므로 $\angle ABC=90°$

따라서 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}=4\sqrt{2}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AC}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2}=8$

△BCD에서 $\angle CBD=90°-60°=30°$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CBD)}=2R$, $\dfrac{\overline{CD}}{\sin30°}=2\times4$

$\therefore \overline{CD}=2\times4\times\dfrac{1}{2}=4$

004 답 **$\dfrac{1}{2}$**

$\overline{BD}=\overline{CD}=k$, $\angle ADB=\theta$라고 하면 $\angle ADC=\pi-\theta$이므로

△ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{k}{\sin\alpha}=\dfrac{4}{\sin\theta}$ $\quad\therefore k=\dfrac{4\sin\alpha}{\sin\theta}$

△ACD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{k}{\sin\beta}=\dfrac{6}{\sin(\pi-\theta)}$ $\quad\therefore k=\dfrac{6\sin\beta}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{6\sin\beta}{\sin\theta}$

즉, $\frac{4\sin\alpha}{\sin\theta}=\frac{6\sin\beta}{\sin\theta}$이므로 $4\sin\alpha=6\sin\beta$

이때 $\sin\alpha=\frac{3}{4}$이므로 $4\times\frac{3}{4}=6\sin\beta$

$\therefore \sin\beta=\frac{1}{2}$

005 답 $3(\sqrt{3}+1)$

□ABCD에서 $\angle\mathrm{ADC}=15^\circ+90^\circ=105^\circ$

$\angle\mathrm{CAD}=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$

△ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin 45^\circ}=\frac{6}{\sin 30^\circ}$, $\overline{\mathrm{AD}}\sin 30^\circ=6\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2=6\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=x$라고 하면 $\overline{\mathrm{AE}}=6-x$, $\overline{\mathrm{DE}}=x$이므로

△ADE에서

$(6\sqrt{2})^2=(6-x)^2+x^2$, $72=2x^2-12x+36$

$2x^2-12x-36=0$, $x^2-6x-18=0$

$\therefore x=3+\sqrt{27}=3(\sqrt{3}+1)$ ($\because x>0$)

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 $3(\sqrt{3}+1)$이다.

006 답 $\frac{7}{2}$

$(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$에서

$b+c=5k,\ c+a=6k,\ a+b=7k\ (k>0)$ ······ ㉠

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2a+2b+2c=18k$ $\quad\therefore a+b+c=9k$ ······ ㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면

$a=4k,\ b=8k,\ c=2k$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{4k}{2R}$, $\sin B=\frac{3k}{2R}$, $\sin C=\frac{2k}{2R}$

$$\therefore \frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{\frac{4k}{2R}+\frac{3k}{2R}}{\frac{2k}{2R}}=\frac{7}{2}$$

007 답 ⑤

$A+B+C=180^\circ$이고 $A:B:C=2:3:1$이므로

$A=180^\circ\times\frac{2}{6}=60^\circ$, $B=180^\circ\times\frac{3}{6}=90^\circ$,

$C=180^\circ\times\frac{1}{6}=30^\circ$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}a:b:c&=\sin A:\sin B:\sin C\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}:1:\frac{1}{2}\\&=\sqrt{3}:2:1\end{aligned}$$

008 답 28

△ABC의 외접원의 반지름의 길이가 8이므로 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C&=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\\&=\frac{a+b+c}{2R}\end{aligned}$$

즉, $\frac{a+b+c}{2\times 8}=\frac{7}{4}$이므로 $a+b+c=28$

009 답 8

$A+B+C=\pi$이므로

$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$

이를 주어진 식에 대입하면

$5\sin A\times\sin(B+C)=5\sin^2 A=4$

$\sin^2 A=\frac{4}{5}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $\sin A=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로 사인법칙에 의하여

$a=2\times 2\sqrt{5}\times\sin A=2\times 2\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=8$

010 답 $C=90^\circ$인 직각삼각형

$A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 주어진 식에 대입하면

$a\times\frac{a}{2R}+b\times\frac{b}{2R}-c\times\frac{c}{2R}=0$

$a^2+b^2-c^2=0$ $\quad\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 △ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

011 답 정삼각형

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 주어진 식에 대입하면

$a\times\left(\frac{a}{2R}\right)^2=b\times\left(\frac{b}{2R}\right)^2=c\times\left(\frac{c}{2R}\right)^2$

$\therefore a^3=b^3=c^3$

이때 $a,\ b,\ c$는 실수이므로 $a=b=c$

따라서 △ABC는 정삼각형이다.

012 답 $A=90^\circ$인 직각삼각형

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\sin^2 C-(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)=0$

$\sin^2 C-(\sin^2 A-\sin^2 B)=0$

$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$ ······ ㉠

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2$ $\quad\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

013 답 $3\sqrt{2}$ m

$C=180^\circ-(105^\circ+30^\circ)=45^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ}=\frac{6}{\sin 45^\circ}$, $\overline{AC}\sin 45^\circ=6\sin 30^\circ$

$\therefore \overline{AC}=6\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$(m)

따라서 두 지점 A, C 사이의 거리는 $3\sqrt{2}$ m이다.

014 답 2450 m

$\triangle$ABP에서 $\angle$BAP$+\angle$APB$=78^\circ$이므로

$\angle$APB$=78^\circ-\angle$BAP$=78^\circ-47^\circ=31^\circ$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AP}}{\sin(180^\circ-78^\circ)}=\frac{1300}{\sin 31^\circ}$, $\overline{AP}\sin 31^\circ=1300\sin 102^\circ$

$\therefore \overline{AP}=\frac{1300\sin 102^\circ}{\sin 31^\circ}$ …… ㉠

이때 $\sin 102^\circ=\sin(90^\circ+12^\circ)=\cos 12^\circ=0.98$

이를 ㉠에 대입하면

$\overline{AP}=\frac{1300\times 0.98}{0.52}=2450$(m)

따라서 케이블카의 이동 거리 AP의 길이는 2450 m이다.

015 답 $41\sqrt{2}$ m

$\triangle$ABQ에서 $\angle$AQB$=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BQ}}{\sin 45^\circ}=\frac{123}{\sin 60^\circ}$, $\overline{BQ}\sin 60^\circ=123\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{BQ}=123\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=41\sqrt{6}$(m)

이때 $\triangle$PBQ에서 $\tan 30^\circ=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}$이므로

$\overline{PQ}=\overline{BQ}\times\tan 30^\circ=41\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=41\sqrt{2}$(m)

따라서 전망대의 높이 PQ의 길이는 $41\sqrt{2}$ m이다.

016 답 $\frac{\sqrt{21}}{3}$

코사인법칙에 의하여

$a^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos 60^\circ=7$

$\therefore a=\sqrt{7}$ ($\because a>0$)

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$

017 답 ⑤

코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=b^2+2^2-2b\times2\times\cos 60^\circ$

$12=b^2+4-2b$, $b^2-2b-8=0$

$(b+2)(b-4)=0$ $\quad\therefore b=4$ ($\because b>0$)

사인법칙에 의하여

$\frac{4}{\sin B}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$, $4\sin 60^\circ=2\sqrt{3}\sin B$

$\therefore \sin B=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}=1$

018 답 4

$\overline{BD}$를 그으면 $\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos 120^\circ=12$

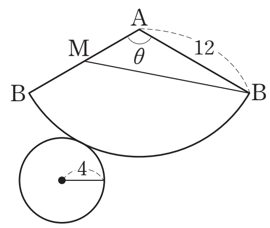
또 $\overline{BC}=x$라고 하면 $\triangle$BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=x^2+2^2-2\times x\times2\times\cos 60^\circ=x^2-2x+4$

즉, $12=x^2-2x+4$에서 $x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=4$ ($\because x>0$)

019 답 $6\sqrt{7}$



주어진 원뿔의 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같다. 부채꼴의 호의 길이 l은 원뿔의 밑면의 둘레의 길이와 같으므로 $l=2\pi\times4=8\pi$

$\overline{AB}=12$이므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라고 하면

$l=12\theta$ $\quad\therefore \theta=\frac{8\pi}{12}=\frac{2}{3}\pi$

점 M은 모선 AB의 중점이므로 $\overline{AM}=12\times\frac{1}{2}=6$

최단 거리는 $\overline{BM}$이므로 $\triangle$ABM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BM}^2=6^2+12^2-2\times6\times12\times\cos\frac{2}{3}\pi=252$

$\therefore \overline{BM}=6\sqrt{7}$ ($\because \overline{BM}>0$)

따라서 최단 거리는 $6\sqrt{7}$이다.

020 답 ③

$\triangle$ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin A}$, $\sqrt{6}\sin A=\sqrt{3}\sin 45^\circ$

$\therefore \sin A=\frac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

그런데 $A+B<180^\circ$이므로 $A=30^\circ$

$\overline{AD}=x$라고 하면 $\triangle$ADC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{2})^2=(\sqrt{6})^2+x^2-2\sqrt{6}\times x\times\cos 30^\circ$

$2=6+x^2-3\sqrt{2}x$

$x^2-3\sqrt{2}x+4=0$, $(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0$

$\therefore x=\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

따라서 모든 $\overline{AD}$의 길이의 합은 $\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

021 답 $\frac{13}{14}$

$a-2b+c=0$ …… ㉠

$3a+b-2c=0$ …… ㉡

$2\times$㉠$+$㉡을 하면

$5a-3b=0 \qquad \therefore b=\frac{5}{3}a$

㉠$+2\times$㉡을 하면

$7a-3c=0 \qquad \therefore c=\frac{7}{3}a$

$\therefore a : b : c=a : \frac{5}{3}a : \frac{7}{3}a=3 : 5 : 7$

$a=3k$, $b=5k$, $c=7k(k>0)$로 놓으면

$\cos A=\frac{(5k)^2+(7k)^2-(3k)^2}{2\times5k\times7k}=\frac{13}{14}$

022 답 ⑤

사인법칙에 의하여

$a : b : c=\sin A : \sin B : \sin C=7 : 8 : 13$

$a=7k$, $b=8k$, $c=13k(k>0)$로 놓으면 가장 긴 변의 대각의 크기가 가장 크므로 가장 큰 각의 크기는 C이다.

코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{(7k)^2+(8k)^2-(13k)^2}{2\times7k\times8k}=-\frac{1}{2}$

이때 $0°<C<180°$이므로 $C=120°$

023 답 $2\sqrt{5}$

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{6^2+c^2-4^2}{2\times6\times c}=\frac{20+c^2}{12c}=\frac{5}{3c}+\frac{c}{12}$

$0°<A<180°$이므로 $\cos A$의 값이 최소일 때, A의 값은 최대가 된다.

이때 $\frac{5}{3c}>0$, $\frac{c}{12}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\cos A=\frac{5}{3c}+\frac{c}{12}\ge2\sqrt{\frac{5}{3c}\times\frac{c}{12}}=2\sqrt{\frac{5}{36}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 $\frac{5}{3c}=\frac{c}{12}$일 때 $\cos A$의 값이 최소이므로 A의 값이 최대가 되도록 하는 c의 값은

$\frac{5}{3c}=\frac{c}{12}$에서 $c^2=20 \qquad \therefore c=2\sqrt{5}$ ($\because c>0$)

024 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 12이므로

$\overline{AM}=\overline{DM}=6$

선분 CD를 1 : 2로 내분하는 점이 E이므로

$\overline{CE}=12\times\frac{1}{3}=4$, $\overline{DE}=12\times\frac{2}{3}=8$

따라서 세 직각삼각형 ABM, BCE, DEM에서

$\overline{BM}=\sqrt{12^2+6^2}=6\sqrt{5}$, $\overline{BE}=\sqrt{12^2+4^2}=4\sqrt{10}$,

$\overline{EM}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

이므로 △BEM에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(6\sqrt{5})^2+(4\sqrt{10})^2-10^2}{2\times6\sqrt{5}\times4\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

025 답 $C=90°$인 직각삼각형

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이를 주어진 식에 대입하면

$a\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{ab}{c}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$

$(c^2+a^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)=2c^2$

$a^2+b^2+c^2=2c^2 \qquad \therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 △ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

026 답 $a=c$인 이등변삼각형

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이를 주어진 식에 대입하면

$\frac{b}{2R}=2\times\frac{a}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$b^2=a^2+b^2-c^2$, $a^2=c^2$

$\therefore a=c$ ($\because a>0$, $c>0$)

따라서 △ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

027 답 ④

$A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$,

$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$

이를 주어진 식에 대입하면

$\sin A\cos A+\sin C\times(-\cos C)=0$

$\sin A\cos A=\sin C\cos C$ …… ㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$, $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{a}{2R}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$a^2(b^2+c^2-a^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)$

$a^4-c^4+b^2c^2-a^2b^2=0$

$(a^2+c^2-b^2)(a^2-c^2)=0$

이때 $a>0$, $c>0$이므로 $a^2+c^2=b^2$ 또는 $a=c$

따라서 △ABC는 $B=90°$인 직각삼각형 또는 $a=c$인 이등변삼각형이므로 △ABC가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

028 답 $40\sqrt{7}$ m

코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=120^2+80^2-2\times120\times80\times\cos60°=11200$

$\therefore \overline{AB}=40\sqrt{7}$(m) ($\because \overline{AB}>0$)

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $40\sqrt{7}$ m이다.

029 답 $\frac{169}{3}\pi$ m²

코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{7^2+8^2-13^2}{2\times7\times8}=-\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=120^\circ$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R m라고 하면 사인법칙에 의하여

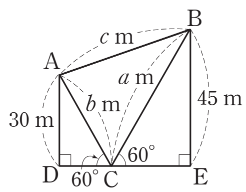
$\frac{13}{\sin 120^\circ}=2R$

$\therefore\ R=\frac{1}{2}\times13\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{13\sqrt{3}}{3}$

따라서 덮개의 넓이는 $\pi\times\left(\frac{13\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{169}{3}\pi(\text{m}^2)$

030 답 $10\sqrt{21}$ m

$\overline{BC}=a$ m, $\overline{AC}=b$ m, $\overline{AB}=c$ m라고 하면



△ADC에서

$b=\frac{30}{\sin 60^\circ}=20\sqrt{3}$

△BEC에서

$a=\frac{45}{\sin 60^\circ}=30\sqrt{3}$

△ACB에서

$\angle ACB=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$

코사인법칙에 의하여

$c^2=(30\sqrt{3})^2+(20\sqrt{3})^2-2\times30\sqrt{3}\times20\sqrt{3}\times\cos 60^\circ=2100$

$\therefore\ c=10\sqrt{21}$ ($\because\ c>0$)

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $10\sqrt{21}$ m이다.

031 답 $\sqrt{133}$

△ABC의 넓이가 $33\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times12\times11\times\sin B=33\sqrt{3}\qquad\therefore\ \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<B<90^\circ$이므로 $B=60^\circ$

따라서 코사인법칙에 의하여

$b^2=12^2+11^2-2\times12\times11\times\cos 60^\circ=133$

$\therefore\ b=\sqrt{133}$ ($\because\ b>0$)

032 답 ⑤

$C=180^\circ-(72^\circ+30^\circ)=78^\circ$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin 72^\circ}=\frac{100}{\sin 30^\circ}$, $\overline{BC}\sin 30^\circ=100\sin 72^\circ$

$\therefore\ \overline{BC}=100\times0.95\times2=190$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times190\times100\times\sin 78^\circ=9310$

033 답 ③

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=5:3:4$이므로

$\angle AOB=360^\circ\times\frac{5}{12}=150^\circ$, $\angle BOC=360^\circ\times\frac{3}{12}=90^\circ$,

$\angle COA=360^\circ\times\frac{4}{12}=120^\circ$

$\triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA$

$=\frac{1}{2}\times18\times18\times\sin 150^\circ+\frac{1}{2}\times18\times18\times\sin 90^\circ$

$+\frac{1}{2}\times18\times18\times\sin 120^\circ$

$=81(3+\sqrt{3})$

034 답 $\frac{15}{4}$

$\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\times120^\circ=60^\circ$

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$이므로 $\overline{AD}=x$라고 하면

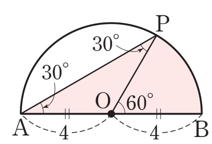
$\frac{1}{2}\times10\times6\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times10\times x\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times x\times6\times\sin 60^\circ$

$15\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}x$, $15\sqrt{3}=4\sqrt{3}x\qquad\therefore\ x=\frac{15}{4}$

따라서 $\overline{AD}$의 길이는 $\frac{15}{4}$이다.

035 답 $4\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi$



반원의 중심을 O라고 하면 오른쪽 그림에서 $\angle PAO=\angle APO=30^\circ$이므로

$\angle AOP=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

$\therefore\ \angle POB=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

삼각형 PAO의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin 120^\circ=4\sqrt{3}$

부채꼴 POB의 넓이는 $60^\circ=\frac{\pi}{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$

따라서 색칠한 부분의 넓이는 $4\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi$

036 답 5π

헤론의 공식에 의하여 $s=\frac{7+8+9}{2}=12$이므로

△ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\sqrt{12\times(12-7)\times(12-8)\times(12-9)}=12\sqrt{5}$

△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$에서

$12\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times r\times24$

$\therefore\ r=\sqrt{5}$

따라서 △ABC의 내접원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$

037 답 ③

△ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times5\times8\times\sin 60^\circ=10\sqrt{3}$

△ABC의 내접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$에서

$10\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times(a+5+8)$

$\therefore\ a=7$

038 답 ⑤

사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=2:3:3$

$a=2k,\ b=3k,\ c=3k(k>0)$로 놓으면 헤론의 공식에 의하여

$s=\frac{2k+3k+3k}{2}=4k$이므로

$\triangle$ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\sqrt{4k\times(4k-2k)\times(4k-3k)\times(4k-3k)}=2\sqrt{2}k^2$

즉, $2\sqrt{2}k^2=32\sqrt{2}$이므로 $k^2=16$

$\therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$

따라서 $\triangle$ABC의 둘레의 길이는

$2k+3k+3k=8k=32$

039 답 $4\sqrt{6}$

$S=\frac{abc}{4R}$에서 $10=\frac{5ab}{4\times3}$ $\quad\therefore\ ab=24$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq2\sqrt{ab}=2\sqrt{24}=4\sqrt{6}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 $a+b$의 최솟값은 $4\sqrt{6}$이다.

040 답 ④

$\overline{\mathrm{BD}}=x$라고 하면 $\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{6})^2=(2\sqrt{3})^2+x^2-2\times2\sqrt{3}\times x\times\cos 45^\circ$

$x^2-2\sqrt{6}x+6=0,\ (x-\sqrt{6})^2=0$

$\therefore\ x=\sqrt{6}$

$\therefore\ \triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times2\sqrt{3}\times\sin 45^\circ=3$

$\overline{\mathrm{AD}}/\!/\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{ADB}=45^\circ$

$\therefore\ \triangle\mathrm{CBD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times8\times\sin 45^\circ=4\sqrt{3}$

$\therefore\ \square\mathrm{ABCD}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{CBD}=3+4\sqrt{3}$

041 답 $\frac{39\sqrt{3}}{4}$

$\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos 120^\circ=49$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=7\ (\because\ \overline{\mathrm{BD}}>0)$

$\triangle$BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{8^2+3^2-7^2}{2\times8\times3}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=60^\circ$

$\therefore\ \square\mathrm{ABCD}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}$

$=\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\times8\times3\times\sin 60^\circ$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}+6\sqrt{3}=\frac{39\sqrt{3}}{4}$

042 답 $\frac{45\sqrt{3}}{4}$

$\square$ABCD가 원에 내접하므로 $B+D=\pi$

$\therefore\ D=\pi-B$

$\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=6^2+9^2-2\times6\times9\times\cos B$

$=117-108\cos B$ ...... ㉠

또 $\triangle$ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos(\pi-B)$

$=18+18\cos B$ ...... ㉡

㉠=㉡에서

$117-108\cos B=18+18\cos B$

$\therefore\ \cos B=\frac{11}{14}$

$\therefore\ \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}\ (\because\ 0^\circ<B<180^\circ)$

$\therefore\ \square\mathrm{ABCD}=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$

$=\frac{1}{2}\times6\times9\times\sin B+\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin D$

$=27\sin B+\frac{9}{2}\sin B$

$=\frac{63}{2}\sin B$

$=\frac{63}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{14}$

$=\frac{45\sqrt{3}}{4}$

043 답 $\frac{15\sqrt{7}}{2}$

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}=5$이므로 $\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{5^2+4^2-6^2}{2\times5\times4}=\frac{1}{8}$

$\therefore\ \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}\ (\because\ 0^\circ<A<180^\circ)$

$\therefore\ \square\mathrm{ABCD}=4\times5\times\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$=\frac{15\sqrt{7}}{2}$

044 답 120°

평행사변형 ABCD의 넓이가 $15\sqrt{3}$이므로

$15\sqrt{3}=5\times6\times\sin C$

$\therefore\ \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $90^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=120^\circ$

045 답 $3\sqrt{15}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}\ (\because\ 0^\circ<\theta<180^\circ)$

$\therefore\ \square\mathrm{ABCD}=\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin\theta$

$=3\sqrt{15}$

046 답 50

두 대각선의 길이를 각각 a, b라고 하면 $a>0$, $b>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$에서 $20\geq 2\sqrt{ab}$

$\therefore ab\leq 100$ (단, 등호는 $a=b=10$일 때 성립)

□ABCD의 두 대각선이 이루는 각의 크기를 θ, 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta\leq\frac{1}{2}\times 100\times 1=50$

따라서 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 50이다.

핵심 유형 최종 점검하기 • 126~127쪽

1 답 $3\sqrt{2}$

유형 01 사인법칙

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 외접원의 넓이가 12π이므로

$\pi\times R^2=12\pi$ $\qquad\therefore R=2\sqrt{3}$ ($\because R>0$)

사인법칙에 의하여

$\frac{x}{\sin 60^\circ}=2\times 2\sqrt{3}$ $\qquad\therefore x=2\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$

$\frac{2\sqrt{6}}{\sin A}=2\times 2\sqrt{3}$ $\qquad\therefore \sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<A<90^\circ$이므로 $A=45^\circ$

$\therefore \cos A=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x\cos A=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

2 답 ③

유형 01 사인법칙

△ACD는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이고 $\overline{AD}=2$이므로

$\overline{CD}^2=2^2+4^2=20$ $\qquad\therefore \overline{CD}=2\sqrt{5}$ ($\because \overline{CD}>0$)

또 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 △ABC는 직각이등변삼각형이므로

$B=C=45^\circ$

△BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$

따라서 △BCD의 외접원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{10})^2=10\pi$

3 답 ③

유형 02 사인법칙의 변형

$a=2b$, $c=\sqrt{5}b$에서

$a:b:c=2b:b:\sqrt{5}b=2:1:\sqrt{5}$이므로

사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=2:1:\sqrt{5}$

4 답 $B=90^\circ$인 직각삼각형

유형 03 사인법칙을 이용한 삼각형의 결정

$\cos^2 B=1-\sin^2 B$이므로

$\sin^2 A+\cos^2 B+\sin^2 C=1$에서

$\sin^2 A+(1-\sin^2 B)+\sin^2 C=1$

$\sin^2 A+\sin^2 C=\sin^2 B$ $\qquad$ …… ㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2$ $\qquad\therefore a^2+c^2=b^2$

따라서 △ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

5 답 $200(\sqrt{3}+1)$ m

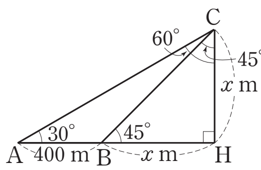
유형 04 사인법칙의 실생활에의 활용

△AHC에서 $\angle ACH=180^\circ-(30^\circ+90^\circ)=60^\circ$

또 △BHC에서 $\angle CBH=\angle BCH=45^\circ$

이때 $\overline{BH}=\overline{CH}=x$ m라고 하면

△AHC에서 사인법칙에 의하여



$\frac{x}{\sin 30^\circ}=\frac{400+x}{\sin 60^\circ}$

$x\sin 60^\circ=(400+x)\sin 30^\circ$

$x\times\frac{\sqrt{3}}{2}=(400+x)\times\frac{1}{2}$, $(\sqrt{3}-1)x=400$

$\therefore x=200(\sqrt{3}+1)$

따라서 빌딩의 높이 CH의 길이는 $200(\sqrt{3}+1)$ m이다.

6 답 $\sqrt{3}$

유형 05 코사인법칙

코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2\times x\times\frac{1}{x}\times\cos 120^\circ=x^2+\frac{1}{x^2}+1$

이때 $x^2>0$, $\frac{1}{x^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}=2$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

$\therefore \overline{BC}^2\geq 2+1=3$ $\qquad\therefore \overline{BC}\geq\sqrt{3}$ ($\because \overline{BC}>0$)

따라서 $\overline{BC}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

7 답 ①

유형 06 코사인법칙의 변형

$(a+b):(b+c):(c+a)=11:9:10$에서

$a+b=11k$, $b+c=9k$, $c+a=10k(k>0)$ $\qquad$ …… ㉠

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2a+2b+2c=30k$ $\qquad\therefore a+b+c=15k$ $\qquad$ …… ㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면

$a=6k$, $b=5k$, $c=4k$

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{(5k)^2+(4k)^2-(6k)^2}{2\times 5k\times 4k}=\frac{1}{8}$

8 답 $\frac{4}{5}$

유형 06 코사인법칙의 변형

$A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B):\sin(B+C):\sin(C+A)$

$=\sin(\pi-C):\sin(\pi-A):\sin(\pi-B)$

$=\sin C:\sin A:\sin B$

사인법칙에 의하여

$c:a:b=\sin C:\sin A:\sin B=4:3:5$

$c=4k$, $a=3k$, $b=5k(k>0)$로 놓으면 가장 짧은 변의 대각의 크기가 가장 작으므로 각 A의 크기가 θ이다.

코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(5k)^2+(4k)^2-(3k)^2}{2\times5k\times4k}=\frac{4}{5}$

9 답 $B=90°$인 직각삼각형

유형 07 코사인법칙을 이용한 삼각형의 결정

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$,

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이를 주어진 식에 대입하면

$\frac{a}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{b}{2R}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$

위의 식의 양변에 $4acR$를 곱하면

$2a^2c+2ac^2=ab^2+ac^2-a^3+a^2c+b^2c-c^3$

$a^2c+ac^2-ab^2-b^2c+a^3+c^3=0$

$ac(a+c)-b^2(a+c)+(a+c)(a^2-ac+c^2)=0$

$(a+c)(a^2+c^2-b^2)=0$

$\therefore a^2+c^2=b^2$ ($\because a>0$, $c>0$)

따라서 $\triangle$ABC는 $B=90°$인 직각삼각형이다.

10 답 10 m

유형 08 코사인법칙의 실생활에의 활용

$\overline{\text{AP}}=x$ m라고 하면 $\triangle$PAB는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\text{AB}}=x$ m

또 $\triangle$PAC에서 $\tan 30°=\frac{x}{\overline{\text{AC}}}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{x}{\overline{\text{AC}}}$

$\therefore \overline{\text{AC}}=\sqrt{3}x$ (m)

$\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{3}x)^2=x^2+10^2-2\times x\times10\times\cos120°$

$3x^2=x^2+100+10x$, $x^2-5x-50=0$

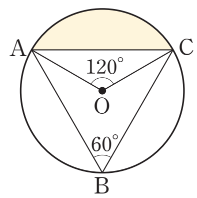
$(x+5)(x-10)=0$

$\therefore x=10$ ($\because x>0$)

따라서 물로켓의 최고 높이 AP의 길이는 10 m이다.

11 답 $\frac{64}{3}\pi-16\sqrt{3}$

유형 09 삼각형의 넓이 (1)



$\triangle$ABC의 외접원의 중심을 O라고 하면

$\angle\text{AOC}=2\angle\text{ABC}=2\times60°=120°$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times8^2\times\sin120°$

$=\frac{64}{3}\pi-16\sqrt{3}$

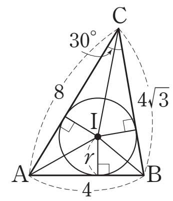
12 답 $2(\sqrt{3}-1)$

유형 10 삼각형의 넓이 (2)

코사인법칙에 의하여

$c^2=(4\sqrt{3})^2+8^2-2\times4\sqrt{3}\times8\times\cos30°=16$

$\therefore c=4$ ($\because c>0$)



$\triangle$ABC의 내접원의 중심을 I, 반지름의 길이를 r라고 하면

$\triangle\text{ABC}=\triangle\text{AIB}+\triangle\text{BIC}+\triangle\text{CIA}$이므로

$\frac{1}{2}\times8\times4\sqrt{3}\times\sin30°$

$=\frac{1}{2}\times4\times r+\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times r+\frac{1}{2}\times8\times r$

$8\sqrt{3}=2(3+\sqrt{3})r$

$\therefore r=2(\sqrt{3}-1)$

따라서 내접원의 반지름의 길이는 $2(\sqrt{3}-1)$이다.

13 답 $2(3+\sqrt{14})$

유형 11 삼각형으로 나누어 사각형의 넓이 구하기

직각삼각형 ABD에서

$\overline{\text{BD}}=\sqrt{4^2+3^2}=5$ ($\because \overline{\text{BD}}>0$)

$\triangle$BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{6^2+3^2-5^2}{2\times6\times3}=\frac{5}{9}$

$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$ ($\because 0°<C<180°$)

$\therefore \square\text{ABCD}=\triangle\text{ABC}+\triangle\text{BCD}$

$=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times6\times3\times\frac{2\sqrt{14}}{9}$

$=2(3+\sqrt{14})$

14 답 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

유형 12 사각형의 넓이

사다리꼴 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(6+12)\times6=54$

$\overline{\text{AC}}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$, $\overline{\text{BD}}=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5}$이므로

$\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times6\sqrt{5}\times\sin\theta=54$

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ($\because 0°<\theta<90°$)

08 등차수열과 등비수열

핵심 유형

	유형01 ③	유형02 ③	유형03 15
유형04 ④	유형05 ④	유형06 ②	유형07 23
유형08 ③	유형09 -72	유형10 ④	유형11 7
유형12 4	유형13 96	유형14 ②	유형15 90
유형16 3	유형17 ②	유형18 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$	
유형19 -129	유형20 ⑤	유형21 $\frac{9}{4}$배	유형22 243
유형23 336만 원			

핵심 유형 완성하기

001 -158	002 100	003 $a_n=\log(2^n\times3)$		004 ㄱ, ㄷ
005 ③	006 ②	007 11	008 ④	009 $\frac{1}{3}$
010 제26항		011 16	012 35	013 ②
014 ⑤	015 1	016 3	017 18	018 -6
019 216	020 2	021 ③	022 -1	023 -10
024 ③	025 ③	026 -2	027 8	028 2
029 281	030 3	031 -252	032 ③	033 -525
034 ②	035 -65	036 121	037 -7	038 5
039 40	040 676	041 ②	042 ③	043 508
044 ④	045 6	046 9일	047 30	048 11
049 2	050 24	051 2	052 10	053 1458
054 6	055 ③	056 100	057 ④	058 제8항
059 10	060 12	061 512	062 ②	063 14
064 2	065 2	066 6	067 정삼각형	
068 ①	069 27	070 64	071 2	072 $\frac{2^{30}}{3^{16}}$
073 $14\times\left(\frac{2}{3}\right)^5$ m		074 $\frac{\pi}{256}$	075 ③	076 484
077 6	078 $\frac{x^7+1}{x+1}$	079 ③	080 20	081 ①
082 $\frac{95}{3}$	083 -128	084 ①	085 3	086 $\frac{16}{9}$배
087 ⑤	088 ④	089 15	090 -6	091 6
092 30	093 ③	094 ②	095 48	

핵심 유형 최종 점검하기

1 ③	2 ④	3 4	4 8	5 ③
6 ③	7 15	8 440	9 ③	10 580
11 155	12 7	13 -3	14 55	15 -9
16 ①	17 2	18 64	19 ②	20 8
21 ④	22 $-2\sqrt{2}$	23 ⑤	24 1,025배	

핵심 유형 130~132쪽

유형01 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2=a+d=44$ ······ ㉠

$a_7=a+6d=9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=51$, $d=-7$

따라서 $a_n=51+(n-1)\times(-7)=-7n+58$이므로

$a_{15}=-7\times15+58=-47$

유형02 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_6=a+5d=-17$ ······ ㉠

$a_{20}=a+19d=25$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-32$, $d=3$

$\therefore\ a_n=-32+(n-1)\times3=3n-35$

$3n-35>0$에서 $n>\frac{35}{3}=11.6\cdots$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제12항이다.

유형03 답 15

주어진 등차수열의 공차를 d라고 하면 첫째항이 3, 제17항이 35이므로

$3+16d=35$, $16d=32$ $\quad\therefore\ d=2$

이때 a_6은 주어진 수열의 제7항이므로

$3+(7-1)\times2=15$

유형04 답 ④

세 수 a, a^2, a^2+2가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a^2=a+(a^2+2)$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\quad\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

유형05 답 ④

삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$, $3a=6$ $\quad\therefore\ a=2$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 방정식에 $x=2$를 대입하면

$2^3-6\times2^2+p\times2+q=0$

$\therefore\ 2p+q=16$

유형06 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2=a+d=5$ ······ ㉠

$a_8=a+7d=17$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=2$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합은

$\frac{15\{2\times3+(15-1)\times2\}}{2}=255$

유형07 답 23

첫째항이 2, 끝항이 74, 항수가 $(m+2)$인 등차수열의 합이 950이므로

$\frac{(m+2)(2+74)}{2}=950$, $m+2=25$

$\therefore m=23$

유형08 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=80$

$\therefore 2a+9d=16$ ...... ㉠

$S_{20}=\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=360$

$\therefore 2a+19d=36$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=2$

$\therefore S_{30}=\frac{30\{2\times(-1)+(30-1)\times2\}}{2}=840$

유형09 답 -72

주어진 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=-22+(n-1)\times4=4n-26$ ...... ㉠

$4n-26>0$에서 $n>\frac{26}{4}=6.5$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소이다.

이때 ㉠에서 $a_6=4\times6-26=-2$이므로 구하는 최솟값은

$S_6=\frac{6\{-22+(-2)\}}{2}=-72$

다른 풀이 $S_n=\frac{n\{2\times(-22)+(n-1)\times4\}}{2}$

$=2n^2-24n$

$=2(n-6)^2-72$

따라서 S_n은 $n=6$일 때 최솟값 -72를 갖는다.

유형10 답 ④

두 자리의 자연수 중에서 6으로 나누었을 때의 나머지가 5인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

11, 17, 23, ⋯, 95

이때 $95=11+6\times14$에서 구하는 값은 첫째항이 11, 끝항이 95, 항수가 15인 등차수열의 합이다.

$\therefore \frac{15(11+95)}{2}=795$

유형11 답 7

연속하는 30개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a라고 하면 30개의 자연수는 첫째항이 a, 공차가 1인 등차수열을 이루므로

$\frac{30\{2a+(30-1)\times1\}}{2}=645$, $2a+29=43$

$2a=14$ $\therefore a=7$

따라서 구하는 가장 작은 수는 7이다.

유형12 답 4

$S_n=-n^2+6n$에서

(i) $n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=-n^2+6n-\{-(n-1)^2+6(n-1)\}$

$=-2n+7$ ...... ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=-1^2+6\times1=5$ ...... ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=-2n+7$

$\therefore a_1+a_4=5+(-2\times4+7)=4$

핵심 유형 완성하기 133~139쪽

001 답 -158

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_{13}=a+12d=-58$ ...... ㉠

$a_{21}=a+20d=-98$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=-5$

따라서 $a_n=2+(n-1)\times(-5)=-5n+7$이므로

$a_{33}=-5\times33+7=-158$

002 답 100

공연장 관람석의 각 줄의 좌석 수를 차례대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라고 하면 수열 $\{a_n\}$은

20, 24, 28, 32, 36, ⋯

즉, 첫째항이 20이고 공차가 4인 등차수열이므로

$a_n=20+(n-1)\times4=4n+16$

따라서 관람석의 21번째 줄의 좌석 수는

$4\times21+16=100$

003 답 $a_n=\log(2^n\times3)$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2=a+d=\log 12$ ...... ㉠

$a_4=a+3d=\log 48$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\log 6$, $d=\log 2$

$\therefore a_n=\log 6+(n-1)\times\log 2=n\log 2+(\log 6-\log 2)$

$=n\log 2+\log 3=\log(2^n\times3)$

004 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 수열 $\{a_{2n}\}$은 a_2, a_4, a_6, a_8, ⋯이므로

$a_4-a_2=(a_1+3d_1)-(a_1+d_1)=2d_1$

$a_6-a_4=(a_1+5d_1)-(a_1+3d_1)=2d_1$

⋮

$\therefore a_4-a_2=a_6-a_4=\cdots=2d_1$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 공차가 $2d_1$인 등차수열이다.

ㄴ. 수열 $\{b_n^2\}$은 $b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2, \cdots$이므로

$b_2^2-b_1^2=(b_1+d_2)^2-b_1^2=2b_1d_2+d_2^2$

$b_3^2-b_2^2=(b_1+2d_2)^2-(b_1+d_2)^2=2b_1d_2+3d_2^2$

$\therefore b_2^2-b_1^2 \neq b_3^2-b_2^2$

따라서 수열 $\{b_n^2\}$은 등차수열이 아니다.

ㄷ. 수열 $\{a_n+b_n\}$은 $a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \cdots$이므로

$$\begin{aligned} a_2+b_2-(a_1+b_1) &= \{(a_1+d_1)+(b_1+d_2)\}-(a_1+b_1) \\ &= d_1+d_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3+b_3-(a_2+b_2) &= \{(a_1+2d_1)+(b_1+2d_2)\} \\ &\qquad -\{(a_1+d_1)+(b_1+d_1)\} \\ &= d_1+d_2 \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

$\therefore a_2+b_2-(a_1+b_1)=a_3+b_3-(a_2+b_2)=\cdots=d_1+d_2$

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$은 공차가 d_1+d_2인 등차수열이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

005 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$$\begin{aligned} a_3+a_{12} &= (a+2d)+(a+11d) \\ &= 2a+13d=25 \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$a_4+a_{10}=(a+3d)+(a+9d)=2a+12d=20$

$\therefore a+6d=10 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-20, d=5$

$\therefore a_n=-20+(n-1)\times 5=5n-25$

60을 제k항이라고 하면

$5k-25=60, 5k=85 \qquad \therefore k=17$

따라서 60은 제17항이다.

006 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라고 하면 제15항이 -25이므로

$a+14\times(-3)=-25 \qquad \therefore a=17$

따라서 $a_n=17+(n-1)\times(-3)=-3n+20$이므로

$b_n=a_{2n}=-3\times 2n+20=-6n+20$

$\therefore b_6=-6\times 6+20=-16$

007 답 11

주어진 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=7+(n-1)\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}n+\frac{31}{4}$

$-\frac{3}{4}k+\frac{31}{4}<0$에서 $\frac{3}{4}k>\frac{31}{4} \qquad \therefore k>\frac{31}{3}=10.3\cdots$

따라서 자연수 k의 최솟값은 11이다.

008 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3+a_7=(a+2d)+(a+6d)=2a+8d=0$

$\therefore a+4d=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$a_{10}=a+9d=20 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-16, d=4$

$\therefore a_n=-16+(n-1)\times 4=4n-20$

$4n-20>100$에서 $4n>120 \qquad \therefore n>30$

따라서 처음으로 100보다 크게 되는 항은 제31항이다.

009 답 $\frac{1}{3}$

주어진 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=19+(n-1)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}n+\frac{59}{3}$

$-\frac{2}{3}n+\frac{59}{3}<0$에서 $\frac{2}{3}n>\frac{59}{3} \qquad \therefore n>\frac{59}{2}=29.5$

이때 $a_{29}=-\frac{2}{3}\times 29+\frac{59}{3}=\frac{1}{3}$, $a_{30}=-\frac{2}{3}\times 30+\frac{59}{3}=-\frac{1}{3}$이므로

$|a_{29}|=|a_{30}|=\frac{1}{3}$

따라서 $|a_n|$의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

010 답 제26항

첫째항이 5이고 공차가 $-\frac{1}{3}$인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=5+(n-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}n+\frac{16}{3}$

또 첫째항이 -15이고 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열의 일반항 b_n은

$b_n=-15+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n-\frac{31}{2}$

따라서 수열 $\{b_n-a_n\}$의 일반항은

$\frac{1}{2}n-\frac{31}{2}-\left(-\frac{1}{3}n+\frac{16}{3}\right)=\frac{5}{6}n-\frac{125}{6}$

$\frac{5}{6}n-\frac{125}{6}>0$에서 $\frac{5}{6}n>\frac{125}{6} \qquad \therefore n>25$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제26항이다.

011 답 16

주어진 등차수열의 공차를 d라고 하면 첫째항이 7, 제12항이 40이므로

$7+11d=40, 11d=33 \qquad \therefore d=3$

이때 a_3은 주어진 수열의 제4항이므로

$7+(4-1)\times 3=16$

012 답 35

첫째항이 -7이고 공차가 $\frac{2}{3}$인 등차수열의 제$(m+2)$항이 17이므로

$-7+(m+2-1)\times\frac{2}{3}=17$

$\frac{2}{3}(m+1)=24, m+1=36$

$\therefore m=35$

013 답 ②

주어진 등차수열의 공차를 d라고 하면 첫째항이 13, 제$(m+2)$항이 103이므로

$13+(m+2-1)d=103, (m+1)d=90$

$\therefore m=\frac{90}{d}-1$

이때 m은 자연수이므로 d는 90의 약수가 되어야 한다.

따라서 주어진 수열의 공차가 될 수 없는 것은 4이다.

014 답 ⑤

주어진 등차수열의 공차를 d라고 하면 첫째항이 0, 제$(m+2)$항이 10이므로

$0+(m+2-1)d=10 \qquad \therefore d=\dfrac{10}{m+1}$ …… ㉠

또 제$(m+n+3)$항이 40이므로

$0+(m+n+3-1)d=40 \qquad \therefore d=\dfrac{40}{m+n+2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{10}{m+1}=\dfrac{40}{m+n+2}$

$10(m+n+2)=40(m+1)$

$\therefore n=3m+2$

015 답 1

세 수 $a-1$, a^2+1, $3a+1$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a^2+1)=(a-1)+(3a+1)$, $2(a^2+1)=4a$

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

016 답 3

세 수 6, a, 10이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a=\dfrac{6+10}{2}=8$

세 수 6, b, 0도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\dfrac{6+0}{2}=3$

세 수 a, 5, c, 즉 8, 5, c도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$5=\dfrac{8+c}{2}$, $10=8+c \qquad \therefore c=2$

세 수 10, 7, d도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$7=\dfrac{10+d}{2}$, $14=10+d \qquad \therefore d=4$

$\therefore a-b+c-d=8-3+2-4=3$

017 답 18

세 수 $\log_2 3$, $\log_2 a$, $\log_2 12$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log_2 a=\log_2 3+\log_2 12$, $\log_2 a^2=\log_2 36$

$a^2=36 \qquad \therefore a=6\ (\because a>0)$

세 수 $\log_2 a$, $\log_2 12$, $\log_2 b$, 즉 $\log_2 6$, $\log_2 12$, $\log_2 b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log_2 12=\log_2 6+\log_2 b$, $\log_2 12^2=\log_2 6b$

$6b=144 \qquad \therefore b=24$

$\therefore b-a=24-6=18$

018 답 −6

다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x+1$, $x+2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 각각

$f(1)=1+a+b$, $f(-1)=1-a+b$, $f(-2)=4-2a+b$

이때 $f(1)$, $f(-1)$, $f(-2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2f(-1)=f(1)+f(-2)$

$2(1-a+b)=(1+a+b)+(4-2a+b)$

$2-2a+2b=5-a+2b \qquad \therefore a=-3$

이때 $f(x)$는 $x-2$로 나누어떨어지므로

$f(2)=4+2a+b=0 \qquad \therefore b=2$

$\therefore ab=-6$

019 답 216

세 수 a, b, 3은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+3 \qquad \therefore a=2b-3$ …… ㉠

또 $a<b<3$이므로 직각삼각형에서 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+b^2=9$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2b-3)^2+b^2=9$, $4b^2-12b+9+b^2=9$

$5b^2-12b=0$, $b(5b-12)=0$

$\therefore b=\dfrac{12}{5}\ (\because b>0)$

이를 ㉠에 대입하면 $a=\dfrac{9}{5}$

따라서 직각삼각형의 넓이 S는 $S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{5}\times\dfrac{12}{5}=\dfrac{54}{25}$

$\therefore 100S=100\times\dfrac{54}{25}=216$

020 답 2

삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=-3$, $3a=-3 \qquad \therefore a=-1$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 -1이므로 방정식에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+3\times(-1)^2+p\times(-1)+q=0 \qquad \therefore p-q=2$

021 답 ③

세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

$(a-d)+a+(a+d)=12$ …… ㉠

$(a-d)\times a\times(a+d)=48$ …… ㉡

㉠에서 $3a=12 \qquad \therefore a=4$

이를 ㉡에 대입하면

$(4-d)\times4\times(4+d)=48$, $16-d^2=12$

$d^2=4 \qquad \therefore d=-2$ 또는 $d=2$

따라서 세 수는 2, 4, 6이므로 세 수의 제곱의 합은

$2^2+4^2+6^2=56$

022 답 −1

네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 놓으면

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=8$ …… ㉠

$(a-d)(a+d)=(a-3d)(a+3d)+8$ …… ㉡

㉠에서 $4a=8 \qquad \therefore a=2$

이를 ㉡에 대입하면

$(2-d)(2+d)=(2-3d)(2+3d)+8$

$4-d^2=4-9d^2+8$, $8d^2=8$

$d^2=1 \qquad \therefore d=-1$ 또는 $d=1$

따라서 네 수는 -1, 1, 3, 5이므로 네 수 중 가장 작은 수는 -1이다.

023 답 -10

삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$

$3a=6$ $\therefore a=2$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 방정식에 $x=2$를 대입하면

$2^3-6\times2^2+3\times2-k=0$ $\therefore k=-10$

024 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_4=a+3d=7$ ⋯⋯ ㉠

$a_{20}-a_{10}=(a+19d)-(a+9d)=10d=30$ $\therefore d=3$

이를 ㉠에 대입하면

$a+9=7$ $\therefore a=-2$

따라서 첫째항부터 제12항까지의 합은

$\dfrac{12\{2\times(-2)+(12-1)\times3\}}{2}=174$

025 답 ③

첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제m항까지의 합이 155이므로

$\dfrac{m\{2\times2+(m-1)\times3\}}{2}=155$

$3m^2+m-310=0$, $(3m+31)(m-10)=0$

$\therefore m=-\dfrac{31}{3}$ 또는 $m=10$

그런데 m은 자연수이므로 $m=10$

026 답 -2

첫째항이 8이고 제k항이 -30인 등차수열의 첫째항부터 제k항까지의 합이 -220이므로

$\dfrac{k\{8+(-30)\}}{2}=-220$

$\therefore k=20$

즉, $a_{20}=-30$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$8+19d=-30$ $\therefore d=-2$

027 답 8

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=3$ ⋯⋯ ㉠

$a+6d=3(a+4d)$, $2a+6d=0$

$\therefore a+3d=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9$, $d=-3$

$\therefore S_n=\dfrac{n\{2\times9+(n-1)\times(-3)\}}{2}=\dfrac{n(21-3n)}{2}$

$\dfrac{k(21-3k)}{2}<0$에서 $k(21-3k)<0$

k는 자연수이므로 $k>7$

따라서 자연수 k의 최솟값은 8이다.

028 답 2

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라고 하면

$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9)$

$=\dfrac{9(2a_1+8d_1)}{2}+\dfrac{9(2b_1+8d_2)}{2}$

$=\dfrac{9\{2(a_1+b_1)+8(d_1+d_2)\}}{2}$

$=\dfrac{9\{2\times10+8(d_1+d_2)\}}{2}$

$=90+36(d_1+d_2)$

즉, $90+36(d_1+d_2)=54$이므로 $d_1+d_2=-1$

$\therefore a_9+b_9=(a_1+8d_1)+(b_1+8d_2)$

$=(a_1+b_1)+8(d_1+d_2)$

$=10+8\times(-1)=2$

다른 풀이 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 10이고 첫째항부터 제9항까지의 합이 54이므로

$\dfrac{9\{2\times10+(9-1)(d_1+d_2)\}}{2}=54$

$90+36(d_1+d_2)=54$ $\therefore d_1+d_2=-1$

$\therefore a_9+b_9=(a_1+b_1)+8(d_1+d_2)$

$=10+8\times(-1)=2$

029 답 281

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면 첫째항이 43이므로

$a_{10}=43+9d=7$ $\therefore d=-4$

$\therefore a_n=43+(n-1)\times(-4)=-4n+47$

$-4n+47<0$에서 $n>\dfrac{47}{4}=11.75$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제11항까지는 양수이고, 제12항부터 음수이다.

$a_{11}=3$, $a_{12}=-1$, $a_{15}=-13$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{15}|$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{11})-(a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15})$

$=\dfrac{11(43+3)}{2}-\dfrac{4\{-1+(-13)\}}{2}$

$=253+28=281$

030 답 3

첫째항이 1, 끝항이 73, 항수가 $(m+2)$인 등차수열의 합이 925이므로

$\dfrac{(m+2)(1+73)}{2}=925$, $m+2=25$ $\therefore m=23$

이 수열의 공차를 d라고 하면 제25항이 73이므로

$1+(25-1)d=73$ $\therefore d=3$

031 답 -252

첫째항이 5, 끝항이 -33, 항수가 20인 등차수열의 합은

$\dfrac{20\{5+(-33)\}}{2}=-280$

따라서 $5+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}+(-33)=-280$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}=-252$

032 답 ③

$-4+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m+50=-4+391+50=437$

즉, 첫째항이 -4, 끝항이 50, 항수가 $(m+2)$인 등차수열의 합이 437이므로

$\dfrac{(m+2)\{(-4)+50\}}{2}=437,\ m+2=19$

$\therefore\ m=17$

033 답 -525

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$S_5=\dfrac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=-5$

$\therefore\ a+2d=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$S_{15}=\dfrac{15\{2a+(15-1)d\}}{2}=-165$

$\therefore\ a+7d=-11 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ d=-2$

$\therefore\ S_{25}=\dfrac{25\{2\times3+(25-1)\times(-2)\}}{2}=-525$

034 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$S_4=\dfrac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=34$

$\therefore\ 2a+3d=17 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$S_8=\dfrac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=116$

$\therefore\ 2a+7d=29 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ d=3$

$\therefore\ a_9+a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{20}$

$=S_{20}-S_8$

$=\dfrac{20\{2\times4+(20-1)\times3\}}{2}-116$

$=650-116=534$

035 답 -65

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

(가)에 의하여

$S_{10}=\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=-15$

$\therefore\ 2a+9d=-3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(나)에 의하여

$S_{20}-S_{10}=\dfrac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}-(-15)=-115$

$\therefore\ 2a+19d=-13 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ d=-1$

$\therefore\ a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{15}$

$=S_{15}-S_5$

$=\dfrac{15\{2\times3+(15-1)\times(-1)\}}{2}-\dfrac{5\{2\times3+(5-1)\times(-1)\}}{2}$

$=-60-5=-65$

036 답 121

주어진 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=21+(n-1)\times(-2)=-2n+23 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$-2n+23<0$에서 $n>\dfrac{23}{2}=11.5$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제12항부터 음수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이다.

이때 ㉠에서 $a_{11}=-2\times11+23=1$이므로 구하는 최댓값은

$S_{11}=\dfrac{11(21+1)}{2}=121$

다른 풀이 $S_n=\dfrac{n\{2\times21+(n-1)\times(-2)\}}{2}$

$=-n^2+22n=-(n-11)^2+121$

따라서 S_n은 $n=11$일 때 최댓값 121을 갖는다.

037 답 -7

주어진 등차수열의 공차를 d라고 하면 첫째항이 -13이므로

$a_8=-13+7d=1 \quad \therefore\ d=2$

$\therefore\ a_n=-13+(n-1)\times2=2n-15 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$2n-15>0$에서 $n>\dfrac{15}{2}=7.5$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 양수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최소이다.

이때 ㉠에서 $a_7=2\times7-15=-1$이므로 구하는 최솟값은

$S_7=\dfrac{7\{-13+(-1)\}}{2}=-49$

따라서 $k=7,\ m=-49$이므로 $\dfrac{m}{k}=\dfrac{-49}{7}=-7$

다른 풀이 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\dfrac{n\{2\times(-13)+(n-1)\times2\}}{2}$

$=n^2-14n=(n-7)^2-49$

따라서 $k=7$일 때, 최솟값은 $m=-49$이므로 $\dfrac{m}{k}=-7$

038 답 5

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$S_3=\dfrac{3\{2\times(-9)+(3-1)d\}}{2}=-27+3d$

$S_7=\dfrac{7\{2\times(-9)+(7-1)d\}}{2}=-63+21d$

$S_3=S_7$에서 $-27+3d=-63+21d$

$18d=36 \quad \therefore\ d=2$

$\therefore\ a_n=-9+(n-1)\times2=2n-11$

$2n-11>0$에서 $n>\dfrac{11}{2}=5.5$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제6항부터 양수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최소이다.

$\therefore\ n=5$

039 답 40

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_n=21+(n-1)d$

이때 S_{11}의 값이 최대이므로 $a_{11}>0,\ a_{12}<0$이어야 한다.

$a_{11}=21+10d>0$에서 $d>-\frac{21}{10}$

$a_{12}=21+11d<0$에서 $d<-\frac{21}{11}$

$\therefore\ -\frac{21}{10}<d<-\frac{21}{11}$

그런데 d는 정수이므로 $d=-2$

$\therefore\ S_{20}=\frac{20\{2\times21+(20-1)\times(-2)\}}{2}=40$

040 답 676

두 자리의 자연수 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 3인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

10, 17, 24, 31, ⋯, 94

이때 $94=10+7\times12$에서 구하는 값은 첫째항이 10, 끝항이 94, 항수가 13인 등차수열의 합이다.

$\therefore\ \frac{13(10+94)}{2}=676$

041 답 ②

첫 번째 시행 후 남아 있는 수들을 차례대로 나열하면

100, 102, 104, ⋯, 200

두 번째 시행 후 남아 있는 수들을 차례대로 나열하면

100, 104, 108, ⋯, 200

이때 $200=100+4\times25$이므로 구하는 값은 첫째항이 100, 끝항이 200, 항수가 26인 등차수열의 합이다.

$\therefore\ \frac{26(100+200)}{2}=3900$

042 답 ③

50 이상 100 이하의 자연수 중에서 2의 배수는

50, 52, 54, ⋯, 100

이때 $100=50+2\times25$이므로 첫째항이 50, 끝항이 100, 항수가 26인 등차수열의 합은 $\frac{26(50+100)}{2}=1950$

또 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수는

51, 54, 57, ⋯, 99

이때 $99=51+3\times16$이므로 첫째항이 51, 끝항이 99, 항수가 17인 등차수열의 합은 $\frac{17(51+99)}{2}=1275$

한편 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 6의 배수는

54, 60, 66, ⋯, 96

이때 $96=54+6\times7$이므로 첫째항이 54, 끝항이 96, 항수가 8인 등차수열의 합은 $\frac{8(54+96)}{2}=600$

따라서 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 2 또는 3으로 나누어떨어지는 수의 총합은 $1950+1275-600=2625$

043 답 508

$A=\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, \cdots\}$,

$B=\{6, 11, 16, 21, 26, \cdots\}$

이므로 $A\cap B=\{11, 26, 41, 56, \cdots\}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 11, 공차가 15인 등차수열이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=\frac{8\{2\times11+(8-1)\times15\}}{2}=508$

044 답 ④

연속하는 15개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a라고 하면 15개의 자연수는 첫째항이 a, 공차가 1인 등차수열을 이루므로

$\frac{15\{2a+(15-1)\times1\}}{2}=315$, $2a+14=42$

$2a=28$ $\therefore\ a=14$

따라서 구하는 가장 큰 수는 $14+14=28$

045 답 6

n각형의 내각의 크기의 합은

$180^\circ\times(n-2)=180^\circ\times n-360^\circ$ ⋯⋯ ㉠

첫째항이 70°, 공차가 20°인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$\frac{n\{2\times70^\circ+(n-1)\times20^\circ\}}{2}=10^\circ\times n^2+60^\circ\times n$ ⋯⋯ ㉡

따라서 ㉠=㉡이므로

$180^\circ\times n-360^\circ=10^\circ\times n^2+60^\circ\times n$

$n^2-12n+36=0$, $(n-6)^2=0$

$\therefore\ n=6$

046 답 9일

지홍이가 훈련하는 시간은 매일 전날보다 4분씩 증가하므로 공차가 4인 등차수열을 이룬다.

첫날 a분 동안 훈련하고 마지막 날에는 100분 동안 훈련하므로 지홍이가 n일 동안 훈련한다고 하면

$a+(n-1)\times4=100$ $\therefore\ a=104-4n$ ⋯⋯ ㉠

지홍이가 훈련 첫날부터 마지막 날까지 훈련한 시간이 총 756분이 되려면

$\frac{n(a+100)}{2}=756$ $\therefore\ n(a+100)=1512$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$n(104-4n+100)=1512$, $4n^2-204n+1512=0$

$n^2-51n+378=0$, $(n-9)(n-42)=0$

$\therefore\ n=9$ 또는 $n=42$

그런데 $n=42$를 ㉠에 대입하면 $a=104-4\times42=-64<0$이므로 $n=9$

따라서 9일 동안 훈련해야 한다.

047 답 30

두 곡선 $y=x^2+ax+b$, $y=x^2$ 사이에 y축과 평행하게 그은 선분의 길이를 $f(x)$라고 하면

$f(x)=x^2+ax+b-x^2=ax+b$

이때 $f(x)$는 x에 대한 일차식이므로 같은 간격의 x좌표에 대하여 각각의 선분의 길이는 등차수열을 이룬다.

따라서 10개의 선분의 길이의 합은 첫째항이 1, 제10항이 5인 등차수열의 합과 같으므로

$\frac{10(1+5)}{2}=30$

08

048 답 11

$S_n=-2n^2+3n+1$에서

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=-2n^2+3n+1-\{-2(n-1)^2+3(n-1)+1\}$

$=-4n+5$ ...... ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=-2\times1^2+3\times1+1=2$ ...... ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같지 않으므로

$a_1=2$, $a_n=-4n+5(n\geq2)$

따라서 $a_k=-4k+5=-39$에서 $k=11$

049 답 2

$S_n=-2n^2+9n$에서

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=-2n^2+9n-\{-2(n-1)^2+9(n-1)\}$

$=-4n+11$ ...... ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=-2\times1^2+9\times1=7$ ...... ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=-4n+11$

$-4k+11>0$에서 $4k<11$ $\therefore k<\frac{11}{4}=2.75$

따라서 자연수 k는 1, 2의 2개이다.

050 답 24

나머지정리에 의하여

$S_n=(-n)^2+3(-n)=n^2-3n$

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-3n-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$

$=2n-4$ ...... ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2-3\times1=-2$ ...... ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2n-4$

$\therefore a_7+a_9=(2\times7-4)+(2\times9-4)=24$

051 답 2

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각

$A_n=n^2+kn$, $B_n=-2n^2+23n$이라고 하면

$n\geq2$일 때, $a_n=A_n-A_{n-1}$, $b_n=B_n-B_{n-1}$이므로

$a_4=A_4-A_3=4^2+4k-(3^2+3k)=7+k$

$b_4=B_4-B_3=-2\times4^2+23\times4-(-2\times3^2+23\times3)=9$

이때 $a_4=b_4$이므로

$7+k=9$

$\therefore k=2$

052 답 10

$S_n=-n^2+7n$에서

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=-n^2+7n-\{-(n-1)^2+7(n-1)\}$

$=-2n+8$ ...... ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=-1^2+7\times1=6$ ...... ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=-2n+8$

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$는 첫째항이 $a_2=4$, 끝항이 $a_{2k}=-4k+8$, 항수가 k인 등차수열의 합이므로

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}=\frac{k\{4+(-4k+8)\}}{2}$

$=-2k^2+6k=-140$

$2k^2-6k-140=0$, $k^2-3k-70=0$, $(k+7)(k-10)=0$

$\therefore k=-7$ 또는 $k=10$

그런데 k는 $k\geq1$인 자연수이므로 $k=10$

핵심 유형 140~142쪽

유형13 답 96

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=3$ ...... ㉠

$a_5=ar^4=12$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$ $\therefore r=2$ ($\because r>0$)

이를 ㉠에 대입하면 $a\times2^2=3$ $\therefore a=\frac{3}{4}$

따라서 $a_n=\frac{3}{4}\times2^{n-1}$이므로

$a_8=\frac{3}{4}\times2^7=96$

유형14 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=ar=9$ ...... ㉠

$a_5=ar^4=243$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=27$ $\therefore r=3$

이를 ㉠에 대입하면 $a\times3=9$ $\therefore a=3$

$\therefore a_n=3\times3^{n-1}=3^n$

$3^n>3000$에서 $3^7=2187$, $3^8=6561$이므로 $n\geq8$

따라서 처음으로 3000보다 커지는 항은 제8항이다.

유형15 답 **90**

주어진 등비수열의 공비를 r라고 하면 첫째항이 3, 제7항이 30이므로

$3r^6=30 \quad \therefore r^6=10$

따라서 $a_1=3r$, $a_5=3r^5$이므로

$a_1a_5=3r\times3r^5=9r^6=9\times10=90$

유형16 답 **3**

세 수 $a-2$, $a-1$, $a+1$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a-1)^2=(a-2)(a+1)$, $a^2-2a+1=a^2-a-2$

$\therefore a=3$

유형17 답 ②

삼차방정식의 세 실근을 a, ar, $ar^2(a\neq0)$으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=19$

$\therefore a(1+r+r^2)=19 \quad \cdots\cdots ㉠$

$a^2r+a^2r^2+a^2r^3=114$

$\therefore a^2r(1+r+r^2)=114 \quad \cdots\cdots ㉡$

$a\times ar\times ar^2=-k$, $a^3r^3=-k$

$\therefore (ar)^3=-k \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡÷㉠을 하면 $ar=6$

이를 ㉢에 대입하면 $6^3=-k \quad \therefore k=-216$

유형18 답 $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{10}}$

한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$이고, 각 시행에서 정삼각형의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2}$배가 되고, 개수는 3배가 된다.

첫 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times3=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{4}$

두 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times3=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$\vdots$

n번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 10번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

유형19 답 **−129**

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=-12 \quad \cdots\cdots ㉠$

$a_7=ar^6=-192 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡÷㉠을 하면 $r^4=16 \quad \therefore r=-2\ (\because r<0)$

이를 ㉠에 대입하면 $4a=-12 \quad \therefore a=-3$

$\therefore S_7=\frac{-3\{1-(-2)^7\}}{1-(-2)}=-129$

유형20 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_5=\frac{a(1-r^5)}{1-r}=20 \quad \cdots\cdots ㉠$

$S_{10}=\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=\frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r}=60 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡÷㉠을 하면 $1+r^5=3 \quad \therefore r^5=2$

$\therefore S_{15}=\frac{a(1-r^{15})}{1-r}=\frac{a(1-r^5)(1+r^5+r^{10})}{1-r}$

$=\frac{a(1-r^5)}{1-r}\times(1+r^5+r^{10})$

$=20(1+2+2^2)=140$

유형21 답 $\mathbf{\frac{9}{4}}$**배**

2018년의 전기차 생산량을 a대, 매년 증가하는 전기차 생산량의 비율을 r라고 하면 n년 후의 전기차 생산량은 ar^n대

2018년부터 2021년까지 4년 동안의 전기차 생산량이 20000대이므로 $a+ar+ar^2+ar^3=20000$

$\therefore \frac{a(r^4-1)}{r-1}=20000 \quad \cdots\cdots ㉠$

2022년부터 2025년까지 4년 동안의 전기차 생산량이 30000대이므로

$ar^4+ar^5+ar^6+ar^7=30000$

$\therefore \frac{ar^4(r^4-1)}{r-1}=30000 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡÷㉠을 하면 $r^4=\frac{3}{2}$

따라서 2026년의 전기차 생산량은 $ar^8=a(r^4)^2=\frac{9}{4}a$(대)

이므로 2018년의 전기차 생산량의 $\frac{9}{4}$배이다.

유형22 답 **243**

$S_n=3^n-1$에서

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)$

$=3^{n-1}\times(3-1)=2\times3^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3^1-1=2 \quad \cdots\cdots ㉡$

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2\times3^{n-1}$

$\therefore \frac{a_8}{a_3}=\frac{2\times3^7}{2\times3^2}=3^5=243$

유형23 답 **336만 원**

연이율 5 %, 1년마다 복리로 매년 초에 20만 원씩 12년 동안 적립할 때의 원리합계를 S라고 하면

$S=20(1+0.05)+20(1+0.05)^2+\cdots+20(1+0.05)^{12}$

$=\frac{20(1+0.05)\{(1+0.05)^{12}-1\}}{(1+0.05)-1}$

$=\frac{20\times1.05\times(1.8-1)}{0.05}$

$=336$(만 원)

따라서 12년 말의 적립금의 원리합계는 336만 원이다.

핵심 유형 **완성**하기 143~148쪽

053 답 1458

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=ar=6$ ...... ㉠

$a_5=ar^4=162$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=27$ $\therefore r=3$

이를 ㉠에 대입하면 $3a=6$ $\therefore a=2$

따라서 $a_n=2\times3^{n-1}$이므로

$a_7=2\times3^6=1458$

054 답 6

$\log_3 a_6=2$에서 $a_6=3^2=9$이므로

$r^5=9$

따라서 $a_{16}=r^{15}=(r^5)^3=9^3=3^6$이므로

$\log_3 a_{16}=\log_3 3^6=6$

055 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_4+a_5=ar^3+ar^4=3$ ...... ㉠

$a_4 : a_5=2 : 1$에서 $\dfrac{ar^4}{ar^3}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore r=\dfrac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하면 $\dfrac{a}{8}+\dfrac{a}{16}=3$

$\dfrac{3}{16}a=3$ $\therefore a=16$

$\therefore a_n=16\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\dfrac{1}{32}$을 제k항이라고 하면

$16\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=\dfrac{1}{32}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^9$

$k-1=9$ $\therefore k=10$

따라서 $\dfrac{1}{32}$은 제10항이다.

056 답 100

주어진 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=2\times4^{n-1}=2\times2^{2(n-1)}=2^{2n-1}$이므로

$\log_2 a_n=\log_2 2^{2n-1}=2n-1=2(n-1)+1$

따라서 수열 $\{\log_2 a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열이므로 구하는 합은

$\dfrac{10\{2\times1+(10-1)\times2\}}{2}=100$

057 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$\dfrac{a_6}{a_1}=\dfrac{ar^5}{a}=r^5$, $\dfrac{a_7}{a_2}=\dfrac{ar^6}{ar}=r^5$, $\cdots$, $\dfrac{a_{25}}{a_{20}}=\dfrac{ar^{24}}{ar^{19}}=r^5$이므로

$\dfrac{a_6}{a_1}+\dfrac{a_7}{a_2}+\dfrac{a_8}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{25}}{a_{20}}=20r^5=100$

$\therefore r^5=5$

$\therefore \dfrac{a_{25}}{a_{10}}=\dfrac{ar^{24}}{ar^9}=r^{15}=(r^5)^3=5^3=125$

058 답 제8항

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=36$ ...... ㉠

$a_6=ar^5=972$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=27$ $\therefore r=3$

이를 ㉠에 대입하면

$a\times3^2=36$ $\therefore a=4$

따라서 $a_n=4\times3^{n-1}$이므로

$4\times3^{n-1}>4000$에서 $3^{n-1}>1000$

이때 $3^6=729$, $3^7=2187$이므로

$n-1\ge7$ $\therefore n\ge8$

따라서 구하는 항은 제8항이다.

059 답 10

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_5=ar^4=8$ ...... ㉠

$a_7=ar^6=16$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=2$ $\therefore r=\sqrt{2}$ ($\because r>0$)

이를 ㉠에 대입하면 $a=2$

따라서 $a_n=2\times(\sqrt{2})^{n-1}$이므로

$a_n^2=\{2\times(\sqrt{2})^{n-1}\}^2=2^2\times\{(\sqrt{2})^2\}^{n-1}=4\times2^{n-1}$

$4\times2^{k-1}>1600$에서 $2^{k-1}>400$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$이므로

$k-1\ge9$ $\therefore k\ge10$

따라서 자연수 k의 최솟값은 10이다.

060 답 12

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3+a_6=ar^2+ar^5=\dfrac{7}{16}$

$\therefore ar^2(1+r^3)=\dfrac{7}{16}$ ...... ㉠

$a_4+a_7=ar^3+ar^6=-\dfrac{7}{32}$

$\therefore ar^3(1+r^3)=-\dfrac{7}{32}$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=-\dfrac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하면

$a\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{7}{16}$ $\therefore a=2$

$\therefore a_n=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\left|2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}\right|<\dfrac{1}{1000}$에서 $2\times\left|\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}\right|<\dfrac{1}{1000}$

$\left|\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}\right|<\dfrac{1}{2000}$

이때 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=\dfrac{1}{1024}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{11}=\dfrac{1}{2048}$이므로

$k-1\ge11$ $\therefore k\ge12$

따라서 자연수 k의 최솟값은 12이다.

061 답 512

주어진 등비수열의 공비를 r라고 하면 첫째항이 2, 제10항이 256이므로

$2r^9=256 \quad \therefore r^9=128$

따라서 $a_2=2r^2$, $a_7=2r^7$이므로

$a_2a_7=2r^2\times 2r^7=4r^9=4\times 128=512$

062 답 ②

첫째항이 12이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 제$(m+2)$항이 $\frac{4}{243}$이므로

$12\times\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}=\frac{4}{243}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^6$

$m+1=6 \quad \therefore m=5$

063 답 14

주어진 등비수열의 공비를 r라고 하면 첫째항이 4, 제9항이 324이므로

$4r^8=324$, $r^8=81 \quad \therefore r=\sqrt{3}\ (\because r>0)$

따라서

$a_1=4\times\sqrt{3}$, $a_2=4\times(\sqrt{3})^2$, $a_3=4\times(\sqrt{3})^3$, $\cdots$, $a_7=4\times(\sqrt{3})^7$

이므로

$$\begin{aligned} a_1a_2a_3\cdots a_7 &= 4^7\times\{\sqrt{3}\times(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{3})^3\times\cdots\times(\sqrt{3})^7\} \\ &= 4^7\times(\sqrt{3})^{1+2+3+\cdots+7} \\ &= 2^{14}\times 3^{14}=6^{14} \end{aligned}$$

$\therefore k=14$

064 답 2

세 양수 $9a$, $a+4$, a가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a+4)^2=9a\times a$, $a^2+8a+16=9a^2$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

065 답 2

세 수 a, 3, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$3^2=9=ab$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\log_a 3}+\frac{1}{\log_b 3} &= \log_3 a+\log_3 b=\log_3 ab \\ &= \log_3 9=2 \end{aligned}$$

066 답 6

다항식 $f(x)$를 x, $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 각각

$f(0)=a$, $f(1)=a+4$, $f(2)=a+10$

이때 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\{f(1)\}^2=f(0)\times f(2)$

$(a+4)^2=a\times(a+10)$

$a^2+8a+16=a^2+10a \quad \therefore a=8$

$\therefore f(x)=x^2+3x+8$

따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 $f(-1)=6$

067 답 정삼각형

세 변의 길이 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\frac{a+c}{2} \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\sin^2 B=\sin A\times\sin C$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\frac{a}{2R}\times\frac{c}{2R}$

$\therefore b^2=ac \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=ac$, $a^2+2ac+c^2=4ac$

$(a-c)^2=0 \quad \therefore a=c$

$a=c$를 ㉠에 대입하면 $b=c$

$\therefore a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

068 답 ①

삼차방정식의 세 실근을 a, ar, $ar^2(a\neq 0)$으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=-p$

$\therefore a(1+r+r^2)=-p \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a^2r+a^2r^2+a^2r^3=-6$

$\therefore a^2r(1+r+r^2)=-6 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$a\times ar\times ar^2=-8$, $a^3r^3=-8$

$\therefore (ar)^3=-8 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉢에서 $ar=-2$

이를 ㉡에 대입하면 $-2a(1+r+r^2)=-6$

$\therefore a(1+r+r^2)=3$

이를 ㉠에 대입하면 $-p=3 \quad \therefore p=-3$

069 답 27

세 실수를 a, ar, $ar^2(a\neq 0)$으로 놓으면

$a+ar+ar^2=21$

$\therefore a(1+r+r^2)=21 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a\times ar\times ar^2=-729$, $a^3r^3=-729$, $(ar)^3=-729$

$\therefore ar=-9 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠÷㉡을 하면

$\frac{a(1+r+r^2)}{ar}=\frac{21}{-9}=-\frac{7}{3}$

$3(1+r+r^2)=-7r$, $3r^2+3r+3=-7r$

$3r^2+10r+3=0$, $(r+3)(3r+1)=0$

$\therefore r=-3$ 또는 $r=-\frac{1}{3}$

$r=-3$일 때 $a=3$, $r=-\frac{1}{3}$일 때 $a=27$이므로 세 실수는 3, -9, 27이다.

따라서 가장 큰 수는 27이다.

070 답 64

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각

a, ar, $ar^2(a\neq0)$으로 놓으면 모든 모서리의 길이의 합은 56이므로

$4(a+ar+ar^2)=56$

$\therefore\ a(1+r+r^2)=14 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 겉넓이가 112이므로

$2(a\times ar+a\times ar^2+ar\times ar^2)=112$

$\therefore\ a^2r(1+r+r^2)=56 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $ar=4$

따라서 직육면체의 부피는 $a\times ar\times ar^2=(ar)^3=4^3=64$

071 답 2

네 수 a, b, c, d를 각각 a, ar, ar^2, $ar^3(r>1)$으로 놓으면

$ar^3\leq100$이므로

(i) $r=2$일 때

$a\leq\frac{100}{8}=12.5$에서 $a=1, 2, 3, \cdots, 12$

(ii) $r=3$일 때

$a\leq\frac{100}{27}=3.7\cdots$에서 $a=1, 2, 3$

(iii) $r=4$일 때

$a\leq\frac{100}{64}=1.5625$에서 $a=1$

(iv) $r\geq5$일 때

$ar^3\leq100$을 만족하는 a가 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 a의 최댓값은 12이고, 그때의 공비는 2이다.

072 답 $\frac{2^{30}}{3^{16}}$

한 변의 길이가 9인 정사각형의 넓이는 $9\times9=81$이고

첫 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $81\times\frac{8}{9}$

두 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $81\times\left(\frac{8}{9}\right)^2$

$\vdots$

n번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $81\times\left(\frac{8}{9}\right)^n$

따라서 10번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$81\times\left(\frac{8}{9}\right)^{10}=\frac{8^{10}}{9^8}=\frac{2^{30}}{3^{16}}$

073 답 $14\times\left(\frac{2}{3}\right)^5$ m

첫 번째 튀어 올랐을 때의 높이는 $21\times\frac{2}{3}$(m)

두 번째 튀어 올랐을 때의 높이는 $21\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=21\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$(m)

세 번째 튀어 올랐을 때의 높이는 $21\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=21\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$(m)

$\vdots$

n번째 튀어 올랐을 때의 높이는 $21\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$(m)

따라서 6번째 튀어 올랐을 때의 높이는

$21\times\left(\frac{2}{3}\right)^6=14\times\left(\frac{2}{3}\right)^5$(m)

074 답 $\frac{\pi}{256}$

$a_1=\pi\times2=2\pi$

$a_2=\pi\times2\times\frac{1}{2}=2\pi\times\frac{1}{2}$

$a_3=\pi\times2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=2\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\vdots$

$a_n=2\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_{10}=2\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{\pi}{256}$

075 답 ③

직선 OA_n의 기울기를 a_n이라고 하면

$a_1=\frac{3}{5}$

$a_2=\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}$

$a_3=\frac{3}{5}\times\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$\vdots$

$a_n=\frac{3}{5}\times\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{5}{3}\right)^{n-2}$

이때 $a_n=\frac{1}{\overline{\text{OB}_n}}$이므로

$\overline{\text{OB}_n}=\frac{1}{a_n}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}$

즉, $\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}=\left(\frac{3}{5}\right)^6$이므로 $n-2=6 \qquad \therefore\ n=8$

따라서 구하는 선분은 $\overline{\text{OB}_8}$이다.

076 답 484

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2=ar=12 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a_4=ar^3=108 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=9 \qquad \therefore\ r=3\ (\because\ r>0)$

이를 ㉠에 대입하면 $3a=12 \qquad \therefore\ a=4$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제5항까지의 합은

$\frac{4(3^5-1)}{3-1}=484$

077 답 6

주어진 등비수열은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{6}{2}=3$이므로

$S_n=\frac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$

$S_k=728$에서 $3^k-1=728$

$3^k=729=3^6 \qquad \therefore\ k=6$

078 답 $\frac{x^7+1}{x+1}$

주어진 등비수열은 첫째항이 1, 공비가 $-x$이므로

$S_n=\frac{1\{1-(-x)^n\}}{1-(-x)}=\frac{1-(-x)^n}{1+x}$

$\therefore\ S_7=\frac{1-(-x)^7}{1+x}=\frac{x^7+1}{x+1}$

079 답 ③

주어진 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=(-3)^{n-1}$이므로

수열 a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, $\cdots$의 일반항은

$$a_n+a_{n+1}=(-3)^{n-1}+(-3)^n=(-3)^{n-1}\{1+(-3)\}$$
$$=-2\times(-3)^{n-1}$$

따라서 첫째항이 -2, 공비가 -3인 등비수열이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{-2\{1-(-3)^{10}\}}{1-(-3)}=-\frac{1}{2}(1-3^{10})=\frac{1}{2}(3^{10}-1)$$

080 답 20

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면 첫째항이 1이므로

$r^4=16$ $\quad\therefore r=2$ ($\because r>0$)

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

$S_n>10^6$에서 $2^n-1>10^6$ $\quad\therefore 2^n>10^6+1$

즉, $2^n>10^6$이므로 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2^n>\log 10^6$, $n\log 2>6$

$$\therefore n>\frac{6}{\log 2}=\frac{6}{0.3010}=19.9\cdots$$

따라서 첫째항부터 제20항까지의 합이 처음으로 10^6보다 크게 된다.

081 답 ①

주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$9+99+999+\cdots+\underbrace{99\cdots9}_{10\text{개}}$$
$$=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{10}-1)$$
$$=(10+10^2+10^3+\cdots+10^{10})-10$$
$$=10^2+10^3+\cdots+10^{10}$$
$$=\frac{10^2(10^9-1)}{10-1}$$
$$=\frac{100}{9}(10^9-1)$$

082 답 $\frac{95}{3}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$S_3=\frac{a(1-r^3)}{1-r}=15 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$S_6=\frac{a(1-r^6)}{1-r}$$
$$=\frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=25 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면

$1+r^3=\frac{5}{3}$ $\quad\therefore r^3=\frac{2}{3}$

$$\therefore S_9=\frac{a(1-r^9)}{1-r}$$
$$=\frac{a(1-r^3)(1+r^3+r^6)}{1-r}$$
$$=\frac{a(1-r^3)}{1-r}\times(1+r^3+r^6)$$
$$=15\times\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}=\frac{95}{3}$$

083 답 -128

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$S_4=\frac{a(1-r^4)}{1-r}=-5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$S_8=\frac{a(1-r^8)}{1-r}$$
$$=\frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r}=-85 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면

$1+r^4=17$, $r^4=16$ $\quad\therefore r=-2$ ($\because r<0$)

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{a\{1-(-2)^4\}}{1-(-2)}=-5$$

$-5a=-5$ $\quad\therefore a=1$

따라서 $a_n=1\times(-2)^{n-1}$이므로 $a_8=1\times(-2)^7=-128$

084 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

수열 a_1, a_3, a_5, a_7의 공비는 r^2이므로

$$a_1+a_3+a_5+a_7=\frac{a\{(r^2)^4-1\}}{r^2-1}$$
$$=\frac{a(r^8-1)}{r^2-1}=17 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}=-34 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면 $r+1=-2$ $\quad\therefore r=-3$

085 답 3

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}$$
$$=2+2r^2+2r^4+\cdots+2r^{2k-2}$$
$$=\frac{2\times\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=\frac{2(r^{2k}-1)}{r^2-1}=182 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$$
$$=2r+2r^3+2r^5+\cdots+2r^{2k-1}$$
$$=\frac{2r\times\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=\frac{2r(r^{2k}-1)}{r^2-1}=-546 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면 $r=-3$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{2(9^k-1)}{9-1}=182$$

$9^k-1=728$, $9^k=729$

$\therefore k=3$

086 답 $\frac{16}{9}$배

2002년의 신규 가입자의 수를 a명, 매년 증가하는 신규 가입자 수의 비율을 r라고 하면 n년 후의 신규 가입자의 수는 ar^n명

2002년부터 2009년까지 8년 동안의 신규 가입자의 수가 12만 명이므로

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^7=12000$$
$$\therefore \frac{a(r^8-1)}{r-1}=12000 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

08

2010년부터 2017년까지 8년 동안의 신규 가입자의 수가 16만 명이므로

$ar^8+ar^9+ar^{10}+\cdots+ar^{15}=16000$

$\therefore \dfrac{ar^8(r^8-1)}{r-1}=16000$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^8=\dfrac{4}{3}$

따라서 2018년의 신규 가입자의 수는 $ar^{16}=a(r^8)^2=\dfrac{16}{9}a$(명)이므로 2002년의 신규 가입자의 수의 $\dfrac{16}{9}$배이다.

087 답 ⑤

이동 거리를 전날의 10 %씩 늘려서 여행하므로 일주일 동안 이동하는 거리는

$5+5\times(1+0.1)+5\times(1+0.1)^2+\cdots+5\times(1+0.1)^6$

$=\dfrac{5\{(1+0.1)^7-1\}}{(1+0.1)-1}=\dfrac{5(1.9-1)}{0.1}$

$=45(\mathrm{km})$

088 답 ④

$l_1=\pi\times3=3\pi$

선분 A_1B를 $1:2$로 내분하는 점이 A_2이므로

$\overline{A_2B}=3\times\dfrac{2}{3}=2$

$l_2=\pi\times2=2\pi$

선분 A_2B를 $1:2$로 내분하는 점이 A_3이므로

$\overline{A_3B}=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

$l_3=\pi\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}\pi$

⋮

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 3π이고 공비가 $\dfrac{2}{3}$인 등비수열이므로

$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_{10}$

$=\dfrac{3\pi\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{2}{3}}$

$=9\pi\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

089 답 15

$S_n=2^n-3$에서

(i) $n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^n-3)-(2^{n-1}-3)$

$=2^{n-1}\times(2-1)=2^{n-1}$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2^1-3=-1$ ⋯⋯ ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같지 않으므로

$a_1=-1,\ a_n=2^{n-1}(n\ge2)$

$\therefore a_1+a_5=-1+16=15$

090 답 −6

$S_n=6\times8^n+k$에서

(i) $n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(6\times8^n+k)-(6\times8^{n-1}+k)$

$=8^{n-1}\times(48-6)=42\times8^{n-1}$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=6\times8^1+k=48+k$ ⋯⋯ ㉡

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같아야 하므로

$42=48+k$ $\quad\therefore k=-6$

091 답 6

$S_n=3^{n+1}-3$에서

(i) $n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3^{n+1}-3)-(3^n-3)$

$=3^n\times(3-1)=2\times3^n$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3^2-3=6$ ⋯⋯ ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로 $a_n=2\times3^n$

$2\times3^k>1000$에서 $3^k>500$

이때 $3^5=243,\ 3^6=729$이므로 $k\ge6$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

092 답 30

$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n=S_n$이라고 하면

$S_n=\dfrac{n^2-n}{2}$에서

(i) $n\ge2$일 때

$\log_3 a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\dfrac{n^2-n}{2}-\dfrac{(n-1)^2-(n-1)}{2}$

$=\dfrac{2n-2}{2}=n-1$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $n=1$일 때

$\log_3 a_1=S_1=\dfrac{1^2-1}{2}=0$ ⋯⋯ ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$\log_3 a_n=n-1$ $\quad\therefore a_n=3^{n-1}$

$\therefore a_2+a_4=3+3^3=30$

093 답 ③

연이율 5 %, 1년마다 복리로 매년 말에 10만 원씩 10년 동안 적립할 때의 원리합계를 S라고 하면

$S=10+10(1+0.05)+\cdots+10(1+0.05)^9$

$=\dfrac{10\{(1+0.05)^{10}-1\}}{(1+0.05)-1}=\dfrac{10(1.63-1)}{0.05}$

$=126$(만 원)

따라서 10년 말의 적립금의 원리합계는 126만 원이다.

094 답 ②

월이율 0.4 %, 1개월마다 복리로 매월 초에 20만 원씩 3년간 적립할 때의 원리합계를 S라고 하면

$S=20(1+0.004)+20(1+0.004)^2+\cdots+20(1+0.004)^{36}$

$=\dfrac{20\times(1+0.004)\{(1+0.004)^{36}-1\}}{(1+0.004)-1}$

$=\dfrac{20\times1.004\times(1.15-1)}{0.004}$

$=753$(만 원)

따라서 만기 후 받을 수 있는 금액은 753만 원이다.

095 답 48

연이율 4 %, 1년마다 복리로 매년 말에 a만 원씩 10년 동안 적립할 때의 원리합계를 S라고 하면

$S=a+a(1+0.04)+a(1+0.04)^2+\cdots+a(1+0.04)^9$

$=\dfrac{a\{(1+0.04)^{10}-1\}}{(1+0.04)-1}$

$=\dfrac{a(1.5-1)}{0.04}$

$=12.5a$(만 원)

즉, $12.5a=600$이므로 $a=48$

핵심 유형 **최종 점검**하기 • 149~151쪽

1 답 ③

유형 01 등차수열의 일반항

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_1+a_2+a_3=a+(a+d)+(a+2d)$

$=3a+3d=-30$

$\therefore\ a+d=-10$ ⋯⋯ ㉠

$a_4+a_5+a_6=(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)$

$=3a+12d=15$

$\therefore\ a+4d=5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-15$, $d=5$

따라서 $a_n=-15+(n-1)\times5=5n-20$이므로

$a_{10}=5\times10-20=30$

2 답 ④

유형 02 등차수열에서 주어진 조건을 만족하는 항

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2=a+d=-74$ ⋯⋯ ㉠

$a_{13}=a+12d=-30$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-78$, $d=4$

$\therefore\ a_n=-78+(n-1)\times4=4n-82$

$4k-82>0$에서 $k>\dfrac{82}{4}=20.5$

따라서 자연수 k의 최솟값은 21이다.

3 답 4

유형 02 등차수열에서 주어진 조건을 만족하는 항

첫째항이 18이고 공차가 -2인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=18+(n-1)\times(-2)=-2n+20$

또 첫째항이 12이고 공차가 -3인 등차수열의 일반항 b_n은

$b_n=12+(n-1)\times(-3)=-3n+15$

$a_k\le4b_k$에서 $-2k+20\le4(-3k+15)$

$-2k+20\le-12k+60$ $\quad\therefore\ k\le4$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

4 답 8

유형 03 두 수 사이에 수를 넣어 만든 등차수열

주어진 등차수열의 공차를 d라고 하면 첫째항이 2, 제$(m+2)$항이 38이므로

$2+(m+2-1)d=38$

$(m+1)d=36$ $\quad\therefore\ d=\dfrac{36}{m+1}$

이때 d가 자연수가 되려면 $m+1$은 36의 약수가 되어야 하므로

$m+1=2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

$\therefore\ d=1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18$

따라서 공차가 될 수 있는 자연수는 8개이다.

5 답 ③

유형 04 등차중항

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=-10$

이때 p는 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$의 등차중항이므로

$2p=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ p=-\dfrac{1}{4}$

또 q는 α, β의 등차중항이므로

$2q=\alpha+\beta=5$ $\quad\therefore\ q=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ p+q=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{4}$

6 답 ③

유형 05 등차수열의 응용

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

모든 모서리의 길이의 합은 36이므로

$4\times\{(a-d)+a+(a+d)\}=36$, $12a=36$ $\quad\therefore\ a=3$

또 부피가 24이므로

$(a-d)\times a\times(a+d)=24$, $a(a^2-d^2)=24$ ⋯⋯ ㉠

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$3(9-d^2)=24$, $9-d^2=8$

$d^2=1$ $\quad\therefore\ d=-1$ 또는 $d=1$

따라서 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각 2, 3, 4이므로 구하는 겉넓이는

$2(2\times3+3\times4+4\times2)=52$

7 답 15

유형 06 등차수열의 합

$S_n=\frac{n\{2\times20+(n-1)\times(-3)\}}{2}=\frac{n(43-3n)}{2}$

$\frac{k(43-3k)}{2}<0$에서 $k(43-3k)<0$

k는 자연수이므로 $43-3k<0$ $\therefore k>\frac{43}{3}=14.3\cdots$

따라서 자연수 k의 최솟값은 15이다.

8 답 440

유형 08 부분의 합이 주어진 등차수열의 합

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=-80$

$\therefore 2a+9d=-16$ ⋯⋯ ㉠

$S_{20}=\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=40$

$\therefore 2a+19d=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-17$, $d=2$

$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{30}$

$=S_{30}-S_{10}$

$=\frac{30\{2\times(-17)+(30-1)\times2\}}{2}-(-80)$

$=360+80=440$

9 답 ③

유형 09 등차수열의 합의 최대, 최소

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$S_3=\frac{3\{2a+(3-1)d\}}{2}=105$

$\therefore a+d=35$ ⋯⋯ ㉠

$S_{11}=\frac{11\{2a+(11-1)d\}}{2}=253$

$\therefore a+5d=23$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=38$, $d=-3$

$\therefore a_n=38+(n-1)\times(-3)=-3n+41$

$-3n+41<0$에서 $n>\frac{41}{3}=13.6\cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제14항부터 음수이므로 첫째항부터 제13항까지의 합이 최대이다. $\therefore n=13$

10 답 580

유형 10 나머지가 같은 자연수의 합

3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ⋯ ⋯⋯ ㉠

또 4로 나누어떨어지는 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

4, 8, 12, 16, 20, ⋯ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 공통인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

4, 16, 28, ⋯

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 12인 등차수열이므로

$S_{10}=\frac{10\{2\times4+(10-1)\times12\}}{2}=580$

11 답 155

유형 11 등차수열의 합의 활용

탑의 각 층의 벽돌의 개수는 한 층씩 위로 올라갈수록 일정한 개수만큼 줄어들므로 등차수열을 이룬다.

10층의 벽돌의 개수부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, ⋯, a_{10}이라고 하면 10층의 벽돌의 개수는 a_1, 4층의 벽돌의 개수는 a_7이다.

이때 공차를 d라고 하면 $a_1=2$이고 탑 전체의 벽돌의 개수는 4층의 벽돌의 개수의 7배보다 15개 더 많으므로

$\frac{10\{2\times2+(10-1)d\}}{2}=7(2+6d)+15$

$20+45d=14+42d+15$, $3d=9$

$\therefore d=3$

따라서 필요한 전체 벽돌의 개수는

$\frac{10\{2\times2+(10-1)\times3\}}{2}=155$

12 답 7

유형 12 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계

$S_n=an^2+bn$에서 첫째항부터 제5항까지의 합이 95이므로

$S_5=25a+5b=95$

$\therefore 5a+b=19$ ⋯⋯ ㉠

또 제5항이 27이므로

$a_5=S_5-S_4=95-16a-4b=27$

$\therefore 4a+b=17$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=9$ $\therefore b-a=7$

13 답 −3

유형 13 등비수열의 일반항

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$\frac{a_3+a_5+a_7}{a_1+a_3+a_5}=\frac{ar^2+ar^4+ar^6}{a+ar^2+ar^4}=\frac{ar^2(1+r^2+r^4)}{a(1+r^2+r^4)}=r^2$

즉, $r^2=9$이므로 $r=-3$ ($\because r<0$)

14 답 55

유형 14 등비수열에서 주어진 조건을 만족하는 항

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3+a_5=ar^2+ar^4=100$

$\therefore ar^2(1+r^2)=100$ ⋯⋯ ㉠

$a_4+a_6=ar^3+ar^5=200$

$\therefore ar^3(1+r^2)=200$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=2$

이를 ㉠에 대입하면 $20a=100$ $\therefore a=5$

$\therefore a_n=5\times2^{n-1}$

$5\times2^{k-1}<5000$에서 $2^{k-1}<1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$k-1\le9$ $\therefore k\le10$

따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은 $1+2+\cdots+10$이므로

$\frac{10\times11}{2}=55$

15 답 -9

유형 15 두 수 사이에 수를 넣어 만든 등비수열

주어진 등비수열의 공비를 r라고 하면 첫째항이 24, 제5항이 $\frac{3}{2}$이므로

$24r^4=\frac{3}{2}$, $r^4=\frac{1}{16}$ $\quad\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

따라서 $a_1=24\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=12$, $a_3=24\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=3$이므로

$a_3-a_1=3-12=-9$

16 답 ①

유형 16 등비중항

세 수 x, $2y$, 10이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$4y=x+10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

세 수 4, x, $13-y$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$x^2=4(13-y)$ $\quad\therefore x^2=52-4y$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2=52-(x+10)$, $x^2+x-42=0$

$(x+7)(x-6)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=6$

이를 ㉠에 대입하면 $x=-7$일 때 $y=\frac{3}{4}$, $x=6$일 때 $y=4$

그런데 x, y는 정수이므로 $x=6$, $y=4$

따라서 등차수열 6, 8, 10의 공차는 2, 등비수열 4, 6, 9의 공비는 $\frac{3}{2}$이므로 $d=2$, $r=\frac{3}{2}$

$\therefore dr=3$

17 답 2

유형 16 등비중항

세 점 A, B, C의 좌표는 $\mathrm{A}(k, 2\sqrt{k})$, $\mathrm{B}(k, \sqrt{k})$, $\mathrm{C}(k, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{k}$, $\overline{\mathrm{OC}}=k$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{k}$

$\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$k^2=\sqrt{k}\times2\sqrt{k}$, $k^2=2k$

$k^2-2k=0$, $k(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$)

18 답 64

유형 17 등비수열의 응용

세 실수를 a, ar, $ar^2(a\neq0)$으로 놓으면

$a+ar+ar^2=14$

$\therefore a(1+r+r^2)=14$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a^2+(ar)^2+(ar^2)^2=84$, $a^2+a^2r^2+a^2r^4=84$

$\therefore a^2(1+r^2+r^4)=84$

㉠을 제곱하면 $a^2(1+r+r^2)^2=14^2$

$a^2(1+r^2+r^4+2r+2r^2+2r^3)=196$

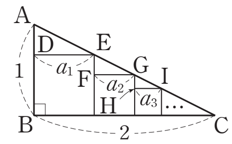
$a^2(1+r^2+r^4)+2ar\times a(1+r+r^2)=196$

$84+2ar\times14=196$ $\quad\therefore ar=4$

$\therefore a\times ar\times ar^2=(ar)^3=4^3=64$

19 답 ②

유형 18 등비수열의 활용



오른쪽 그림에서 △ADE와 △ABC는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}$

$(1-a_1):a_1=1:2$, $2-2a_1=a_1$

$\therefore a_1=\frac{2}{3}$

△EFG와 △ABC는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{EF}}:\overline{\mathrm{FG}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}$

$(a_1-a_2):a_2=1:2$, $2a_1-2a_2=a_2$

$\therefore a_2=\frac{2}{3}a_1=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

△GHI와 △ABC는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{GH}}:\overline{\mathrm{HI}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}$

$(a_2-a_3):a_3=1:2$, $2a_2-2a_3=a_3$

$\therefore a_3=\frac{2}{3}a_2=\left(\frac{2}{3}\right)^3$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\quad\therefore a_6=\left(\frac{2}{3}\right)^6$

20 답 8

유형 19 등비수열의 합

첫째항이 4이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\frac{4(2^n-1)}{2-1}=4(2^n-1)$

$4(2^n-1)>1000$에서 $2^n-1>250$, $2^n>251$

이때 $2^7=128$, $2^8=256$이므로 $n\geq8$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 n의 값은 8이다.

21 답 ④

유형 20 부분의 합이 주어진 등비수열의 합

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_4=\frac{a(1-r^4)}{1-r}=14$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$S_8=\frac{a(1-r^8)}{1-r}$

$=\frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r}$

$=14+112=126$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $1+r^4=9$ $\quad\therefore r^4=8$

$\therefore S_{12}=\frac{a(1-r^{12})}{1-r}$

$=\frac{a(1-r^4)(1+r^4+r^8)}{1-r}$

$=\frac{a(1-r^4)}{1-r}\times(1+r^4+r^8)$

$=14\times(1+8+64)=1022$

따라서 제9항부터 제12항까지의 합은

$S_{12}-S_8=1022-126=896$

22 답 $-2\sqrt{2}$

유형 20 부분의 합이 주어진 등비수열의 합

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_6=\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=-7$ ······ ㉠

$S_{12}=-7-56=-63$이므로

$S_{12}=\dfrac{a(r^{12}-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a(r^6-1)(r^6+1)}{r-1}=-63$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^6+1=9$, $r^6=8$, $r^2=2$ $\quad\therefore r=-\sqrt{2}$ ($\because r<0$)

$\therefore \dfrac{a_5+a_9}{a_2+a_6}=\dfrac{ar^4+ar^8}{ar+ar^5}=\dfrac{ar^4(1+r^4)}{ar(1+r^4)}$

$=r^3=(-\sqrt{2})^3=-2\sqrt{2}$

23 답 ⑤

유형 22 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계

ㄱ. $S_n=2^n-1$에서

(i) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)$

$=2^{n-1}\times(2-1)=2^{n-1}$ ······ ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2^1-1=1$ ······ ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로 $a_n=2^{n-1}$

ㄴ. $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=1+2^2+2^4+2^6+2^8$

$=\dfrac{1\times\{(2^2)^5-1\}}{2^2-1}=\dfrac{1}{3}(2^{10}-1)=341$

ㄷ. 수열 $\{a_{2n}\}$: a_2, a_4, a_6, …의 공비는

$\dfrac{a_4}{a_2}=\dfrac{2^3}{2}=2^2=4$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

24 답 1.025배

유형 23 원리합계

예린이와 서연이가 각각 10년 후, 5년 후 연말에 받는 금액을 S만 원, T만 원이라고 하면

$S=5(1+0.01)+5(1+0.01)^2+\cdots+5(1+0.01)^{10}$

$=\dfrac{5(1+0.01)\{(1+0.01)^{10}-1\}}{1.01-1}=\dfrac{5\times1.01\times(1.01^{10}-1)}{0.01}$

$=505(1.01^{10}-1)$

$T=10(1+0.01)+10(1+0.01)^2+\cdots+10(1+0.01)^5$

$=\dfrac{10(1+0.01)\{(1+0.01)^5-1\}}{1.01-1}=\dfrac{10\times1.01\times(1.01^5-1)}{0.01}$

$=1010(1.01^5-1)$

$\therefore \dfrac{S}{T}=\dfrac{505(1.01^{10}-1)}{1010(1.01^5-1)}$

$=\dfrac{505(1.01^5-1)(1.01^5+1)}{1010(1.01^5-1)}$

$=\dfrac{1.01^5+1}{2}=\dfrac{1.05+1}{2}=1.025$

따라서 예린이가 받는 금액은 서연이가 받는 금액의 1.025배이다.

09 수열의 합

핵심 유형

	유형01 ①	유형02 ②	유형03 0
유형04 ③	유형05 84	유형06 ④	
유형07 $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$		유형08 ③	유형09 $\dfrac{15}{31}$
유형10 4	유형11 ④	유형12 74	

핵심 유형 완성하기

001 ②	002 ③	003 ①	004 1	005 300
006 36	007 ①	008 -105	009 14	010 -400
011 ⑤	012 10	013 ④	014 81	015 450
016 ③	017 10	018 ②	019 245	020 ①
021 882	022 11	023 91	024 ①	025 32
026 ②	027 3164	028 7	029 4	030 ③
031 $\dfrac{n(n-1)(n+1)}{6}$		032 ④	033 116	034 75
035 ①	036 17	037 $\dfrac{10}{31}$	038 31	039 37
040 $\dfrac{40}{7}$	041 $\dfrac{30}{31}$	042 $-\dfrac{10}{19}$	043 $2\sqrt{2}$	044 15
045 $2\sqrt{2}+3$		046 $4\sqrt{2}$	047 66	048 20
049 ②	050 50	051 제68항		052 ②
053 39				

핵심 유형 최종 점검하기

1 ⑤	2 ⑤	3 ①	4 ⑤	5 55
6 6	7 -1530	8 91	9 3	10 124
11 $\dfrac{10}{99}$	12 ④	13 9	14 3	15 ②

핵심 유형 154~156쪽

유형01 답 ①

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

이므로 $\sum_{k=1}^{2n}a_k=n^2+3n$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=5^2+3\times5=40$

유형02 답 ②

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

이므로 $100=70+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_kb_k=15$

유형03 답 0

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{2^k+4^k}{3^k}=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{2}{3}\right)^k+\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{4}{3}\right)^k$$
$$=\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}\right\}}{1-\frac{2}{3}}+\frac{\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{100}\right\}}{1-\frac{4}{3}}$$
$$=2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}\right\}-4\left\{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{100}\right\}$$
$$=-2\left(\frac{2}{3}\right)^{100}+4\left(\frac{4}{3}\right)^{100}-2$$

따라서 $a=-2$, $b=4$, $c=-2$이므로

$a+b+c=0$

유형04 답 ③

$$\sum_{k=1}^{10}(3k-2)^2-\sum_{k=1}^{10}(3k)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(9k^2-12k+4)-\sum_{k=1}^{10}9k^2$$
$$=-12\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}4$$
$$=-12\times\frac{10\times11}{2}+4\times10$$
$$=-660+40$$
$$=-620$$

유형05 답 84

$$\sum_{m=1}^{7}\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{7}\frac{m(m+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{7}(m^2+m)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{7\times8\times15}{6}+\frac{7\times8}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times168=84$$

유형06 답 ④

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=n\times(n+1)=n^2+n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}(k^2+k)$$
$$=\frac{15\times16\times31}{6}+\frac{15\times16}{2}$$
$$=1240+120$$
$$=1360$$

유형07 답 $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

수열 $1\times n$, $3\times(n-1)$, $5\times(n-2)$, $\cdots$, $(2n-1)\times1$의 제k항을 a_k라고 하면 $a_k=(2k-1)\{n-(k-1)\}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}[(2k-1)\{n-(k-1)\}]$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+(2n+3)k-(n+1)\}$$
$$=-2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(2n+3)\times\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)\times n$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

유형08 답 ③

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-n$

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-n-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

$=2n-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2-1=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2n-2$

따라서 $a_{2k-1}=2(2k-1)-2=4k-4$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{5}(4k-4)=4\times\frac{5\times6}{2}-4\times5=60-20=40$$

유형09 답 $\dfrac{15}{31}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{31}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{15}{31}$$

유형10 답 4

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{40}a_k=\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$$
$$=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{-2}=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{79})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{81}-1)=4$$

유형11 답 ④

$S=1+2\times2+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+10\times2^9$으로 놓고,

$S-2S$를 하면

$$\begin{array}{rl} S= & 1+2\times2+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+10\times2^9 \\ -\underline{)\,2S=} & \underline{\quad 1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+10\times2^{10}} \\ -S= & 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^9-10\times2^{10} \end{array}$$

$$=\frac{2^{10}-1}{2-1}-10\times2^{10}=-9\times2^{10}-1$$

$\therefore\ S=9\times2^{10}+1$

유형12 답 74

위에서 n번째 줄에는 $(2n-1)$개의 자연수가 있으므로

첫 번째 줄부터 8번째 줄까지의 자연수의 개수는

$\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(2k-1)=2\times\frac{8\times9}{2}-8=64$

따라서 위에서 9번째 줄의 왼쪽에서 10번째에 있는 수는

$64+10=74$

핵심 유형 **완성**하기 157~163쪽

001 답 ②

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}a_k=3n^2-n$

$\displaystyle\therefore\ \sum_{k=1}^{16}a_k=3\times8^2-8=184$

002 답 ③

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}5k=5\times1+5\times2+5\times3+\cdots+5\times n$

$=5+10+15+\cdots+5n$

② $\displaystyle\sum_{k=2}^{10}(2k-1)=(2\times2-1)+(2\times3-1)+(2\times4-1)$

$+\cdots+(2\times10-1)$

$=3+5+7+\cdots+19$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n$

$=2+4+8+\cdots+2^n$

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(-1)^k=(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4$

$+(-1)^5+(-1)^6+(-1)^7$

$=-1+1-1+1-1+1-1$

⑤ $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2=(1+1)^2+(2+1)^2+(3+1)^2+\cdots+(10+1)^2$

$=2^2+3^2+4^2+\cdots+11^2$

$=4+9+16+\cdots+121$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

003 답 ①

$\displaystyle\sum_{k=1}^{14}f(k+1)-\sum_{k=3}^{16}f(k-2)$

$=\{f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(15)\}$

$-\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(14)\}$

$=f(15)-f(1)=70-4=66$

004 답 1

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n-1}(k^3+1)$

$=(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$

$-[(1^3+1)+(2^3+1)+(3^3+1)+\cdots+\{(n-1)^3+1\}]$

$=n^3-(n-1)=n^3-n+1$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=1$이므로

$a-b-c=1$

005 답 300

$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}ka_k=600$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+100a_{100}=600$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\displaystyle\sum_{k=1}^{99}ka_{k+1}=300$에서

$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+99a_{100}=300$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=300$

$\displaystyle\therefore\ \sum_{k=1}^{100}a_k=300$

006 답 36

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(a_k-b_k)^2=\sum_{k=1}^{20}(a_k^2-2a_kb_k+b_k^2)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{20}(a_k^2+b_k^2)-2\sum_{k=1}^{20}a_kb_k$

이므로 $\displaystyle 8=\sum_{k=1}^{20}(a_k^2+b_k^2)-2\times14$

$\displaystyle\therefore\ \sum_{k=1}^{20}(a_k^2+b_k^2)=36$

007 답 ①

$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}a_k=\alpha$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}b_k=\beta$라고 하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(a_k+b_k)=8$에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}b_k=8$ $\quad\therefore\ \alpha+\beta=8$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(a_k-b_k)=-2$에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}b_k=-2$ $\quad\therefore\ \alpha-\beta=-2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=3$, $\beta=5$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}a_k=3$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}b_k=5$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(5a_k-2b_k+3)=5\sum_{k=1}^{15}a_k-2\sum_{k=1}^{15}b_k+\sum_{k=1}^{15}3$

$=5\times3-2\times5+3\times15=50$

008 답 -105

$\sum_{k=1}^{n}a_k=2n$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{1}{3}n^2$이므로

$\sum_{k=11}^{15}a_k=2\times15-2\times10=10$, $\sum_{k=11}^{15}b_k=\frac{1}{3}\times15^2-\frac{1}{3}\times10^2=\frac{125}{3}$

$\therefore \sum_{k=11}^{15}(2a_k-3b_k)=2\sum_{k=11}^{15}a_k-3\sum_{k=11}^{15}b_k=20-125=-105$

009 답 14

$\sum_{k=1}^{n}(3a_k+b_k)^2=n^2+2n$, $\sum_{k=1}^{n}(a_k-3b_k)^2=6n+10$이므로

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)^2=10^2+2\times10=120$,

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-3b_k)^2=6\times10+10=70$

$$\sum_{k=1}^{10}\{(3a_k+b_k)^2+(a_k-3b_k)^2\}=\sum_{k=1}^{10}(10a_k^2+10b_k^2)$$
$$=10\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2)=190$$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2)=19$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\left(a_k^2+b_k^2-\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+b_k^2)-\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}$$
$$=19-\frac{1}{2}\times10=14$$

010 답 -400

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=2$ …… ㉠

$a_8=a+7d=-8$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $-5d=10$ $\therefore d=-2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{200}a_{2k}-\sum_{k=1}^{200}a_{2k-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{200}(a_{2k}-a_{2k-1})$$
$$=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)+\cdots+(a_{400}-a_{399})$$
$$=200d=200\times(-2)=-400$$

011 답 ⑤

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-a_k}{1+a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2-(1+a_k)}{1+a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{1+a_k}-1\right)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}-\sum_{k=1}^{n}1=2(n^2+2n)-n$$
$$=2n^2+3n$$

012 답 10

$$\sum_{k=1}^{50}\frac{5^k-3^k}{4^k}=\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{5}{4}\right)^k-\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{3}{4}\right)^k$$
$$=\frac{\frac{5}{4}\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{50}-1\right\}}{\frac{5}{4}-1}-\frac{\frac{3}{4}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{50}-1\right\}}{\frac{3}{4}-1}$$
$$=5\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{50}-1\right\}+3\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{50}-1\right\}$$
$$=5\left(\frac{5}{4}\right)^{50}+3\left(\frac{3}{4}\right)^{50}-8$$

따라서 $a=5$, $b=3$, $c=-8$이므로 $a-b-c=10$

013 답 ④

$$\sum_{k=1}^{20}2^{-k}\sin\frac{k\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2^2}\sin\pi+\frac{1}{2^3}\sin\frac{3}{2}\pi+\cdots+\frac{1}{2^{20}}\sin10\pi$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}-\cdots-\frac{1}{2^{19}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}$$

014 답 81

$f(10, 3)=\sum_{k=1}^{1}3^k+\sum_{k=1}^{2}3^k+\sum_{k=1}^{3}3^k+\cdots+\sum_{k=1}^{10}3^k$이므로

$\sum_{k=1}^{n}3^k=a_n$이라고 하면

$$a_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n=\frac{3(3^n-1)}{3-1}=\frac{3^{n+1}-3}{2}$$

$$\therefore f(10, 3)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{3^{k+1}-3}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{9(3^{10}-1)}{3-1}-30\right\}=\frac{3^{12}-69}{4}$$

따라서 $a=12$, $b=69$이므로 $a+b=81$

015 답 450

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=5+55+555+\cdots+\underbrace{555\cdots5}_{10개}$$
$$=\frac{5}{9}(9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots9}_{10개})$$
$$=\frac{5}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{10}-1)\}$$
$$=\frac{5}{9}\sum_{k=1}^{10}(10^k-1)$$
$$=\frac{5}{9}\left\{\frac{10(10^{10}-1)}{10-1}-1\times10\right\}$$
$$=\frac{50\times10^{10}-500}{81}$$

따라서 $a=50$, $b=500$이므로 $b-a=450$

016 답 ③

$$\sum_{k=1}^{20}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{20}(k^2-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{20}(k^2+2k+1)-\sum_{k=1}^{20}(k^2-1)$$
$$=2\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}2=2\times\frac{20\times21}{2}+2\times20$$
$$=420+40=460$$

017 답 10

$$\sum_{k=1}^{n}(6-2k)=\sum_{k=1}^{n}6-2\sum_{k=1}^{n}k=6n-2\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=-n^2+5n$$

즉, $-n^2+5n=-50$이므로 $n^2-5n-50=0$

$(n+5)(n-10)=0$ $\therefore n=-5$ 또는 $n=10$

이때 n은 자연수이므로 $n=10$

018 답 ②

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k+1}=\sum_{k=1}^{20}\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{20}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}k$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{20\times21}{2}=105$$

019 답 245

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-3$

$\therefore\ (\alpha-1)(\beta-1)+(\alpha-2)(\beta-2)+\cdots+(\alpha-10)(\beta-10)$
$$=\sum_{k=1}^{10}(\alpha-k)(\beta-k)=\sum_{k=1}^{10}\{\alpha\beta-(\alpha+\beta)k+k^2\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k-3)$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}-2\times\frac{10\times11}{2}-3\times10$$
$$=385-110-30=245$$

020 답 ①

$$\sum_{k=1}^{7}(c-k)^2=\sum_{k=1}^{7}(k^2-2ck+c^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{7}k^2-2c\sum_{k=1}^{7}k+c^2\sum_{k=1}^{7}1$$
$$=\frac{7\times8\times15}{6}-2c\times\frac{7\times8}{2}+7c^2$$
$$=7c^2-56c+140$$
$$=7(c-4)^2+28$$

따라서 $c=4$일 때 최솟값은 28이므로

$a=4,\ m=28 \qquad \therefore\ a+m=32$

021 답 882

직선 $y=x+a_n$이 원의 중심 $(n,\ 2n^2+n)$을 지나야 하므로

$2n^2+n=n+a_n$

$\therefore\ a_n=2n^2$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{6}ka_k=\sum_{k=1}^{6}2k^3=2\times\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2=882$$

022 답 11

$$S^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)+(2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2)+(3^2+4^2+5^2+\cdots+10^2)+\cdots+(9^2+10^2)+10^2$$
$$=1^2\times1+2^2\times2+3^2\times3+\cdots+9^2\times9+10^2\times10$$
$$=1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^3=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2=55^2$$

그런데 $S>0$이므로 $S=55$

$\therefore\ \frac{S}{5}=11$

023 답 91

$$\sum_{l=1}^{13}\left\{\sum_{k=1}^{l}(2k-l)\right\}=\sum_{l=1}^{13}\left(2\sum_{k=1}^{l}k-l\sum_{k=1}^{l}1\right)$$
$$=\sum_{l=1}^{13}\left\{2\times\frac{l(l+1)}{2}-l^2\right\}$$
$$=\sum_{l=1}^{13}l=\frac{13\times14}{2}$$
$$=91$$

024 답 ①

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}1\right)\right\}=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}l\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{m(m+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(m^2+m)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right\}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

즉, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=56$이므로

$n(n+1)(n+2)=6\times7\times8$

$\therefore\ n=6$

025 답 32

$$\sum_{k=1}^{m}\left\{\sum_{l=1}^{n}(k+l)\right\}=\sum_{k=1}^{m}\left(k\sum_{l=1}^{n}1+\sum_{l=1}^{n}l\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\left\{kn+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=n\sum_{k=1}^{m}k+\frac{n(n+1)}{2}\sum_{k=1}^{m}1$$
$$=n\times\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\times m$$
$$=\frac{mn}{2}(m+n+2)$$
$$=\frac{8}{2}(6+2)$$
$$=32$$

026 답 ②

$$\sum_{n=1}^{10}\left[\sum_{k=1}^{n}\{(-1)^{n-1}\times(2k-1)\}\right]$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\left\{(-1)^{n-1}\times\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\left[(-1)^{n-1}\times\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}\right]$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\{(-1)^{n-1}\times n^2\}$$
$$=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+9^2-10^2$$
$$=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+\cdots+(9-10)(9+10)$$
$$=-(1+2+3+4+\cdots+9+10)$$
$$=-\frac{10\times11}{2}$$
$$=-55$$

027 답 3164

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=(2n-1)\times(2n)^2=8n^3-4n^2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{6} a_k=\sum_{k=1}^{6}(8k^3-4k^2)$$
$$=8\times\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2-4\times\frac{6\times7\times13}{6}$$
$$=3528-364=3164$$

028 답 7

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=(2n-1)^2-(2n)^2=-4n+1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}(-4k+1)$$
$$=-4\times\frac{m(m+1)}{2}+1\times m$$
$$=-2m^2-m$$

즉, $-2m^2-m=-105$이므로

$2m^2+m-105=0$, $(2m+15)(m-7)=0$

이때 m은 자연수이므로 $m=7$

029 답 4

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=(3n-1)^2=9n^2-6n+1$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(9k^2-6k+1)$$
$$=9\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-6\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=\frac{n(6n^2+3n-1)}{2}$$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로 $a-b=4$

030 답 ③

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{k(k+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times440=220$$

031 답 $\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=k(n-k)=nk-k^2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-1} a_k=\sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2)=n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=n\times\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{n(n-1)\{3n-(2n-1)\}}{6}$$
$$=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

032 답 ④

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=\left(\frac{k+n}{n}\right)^2=\left(\frac{k}{n}+1\right)^2=\frac{k^2}{n^2}+\frac{2k}{n}+1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{2k}{n}+1\right)$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=\frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}$$

033 답 116

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+2n$

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+2\times1=3$ …… ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2n+1$

따라서 $(2k-1)a_k=(2k-1)(2k+1)=4k^2-1$이므로

$$\sum_{k=1}^{4}(2k-1)a_k=\sum_{k=1}^{4}(4k^2-1)$$
$$=4\times\frac{4\times5\times9}{6}-1\times4$$
$$=120-4=116$$

034 답 75

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2n^2+1$

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2+1-\{2(n-1)^2+1\}$

$=4n-2$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times1^2+1=3$ …… ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같지 않으므로 일반항 a_n은

$a_1=3$, $a_n=4n-2\,(n\geq2)$

$\therefore a_{20}-a_1=(4\times20-2)-3=75$

다른 풀이 $a_1=S_1=2\times1^2+1=3$

$a_{20}=S_{20}-S_{19}=(2\times20^2+1)-(2\times19^2+1)=78$

$\therefore a_{20}-a_1=78-3=75$

035 답 ①

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2n}{n+1}$

(i) $n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{2n}{n+1}-\frac{2(n-1)}{n}$

$=\frac{2}{n(n+1)}$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=\frac{2\times1}{1+1}=1$ …… ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=\frac{2}{n(n+1)}$

따라서 $\frac{1}{a_k}=\frac{k(k+1)}{2}$이므로

$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{5}\frac{k(k+1)}{2}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times70=35$

036 답 17

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=3^n-1$

(i) $n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3^n-1-(3^{n-1}-1)$

$=3^{n-1}(3-1)$

$=2\times3^{n-1}$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3^1-1=2$ …… ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2\times3^{n-1}$

따라서 $a_{2k}=2\times3^{2k-1}=\frac{2}{3}\times9^k$이므로

$\sum_{k=1}^{6}a_{2k}=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{2}{3}\times9^k\right)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{9\times(9^6-1)}{9-1}$

$=\frac{3(3^{12}-1)}{4}$

$=\frac{3^{13}-3}{4}$

따라서 $p=4$, $q=13$이므로 $p+q=17$

037 답 $\frac{10}{31}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{28}-\frac{1}{31}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{10}{31}$

038 답 31

$a_n=\log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log_2\frac{n+1}{n}$

$\therefore \sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\log_2\frac{k+1}{k}$

$=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{m+1}{m}$

$=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{m+1}{m}\right)$

$=\log_2(m+1)$

즉, $\log_2(m+1)=5$이므로

$m+1=2^5=32$

$\therefore m=31$

039 답 37

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{4n^2+4n}=\frac{1}{4n(n+1)}$

$\therefore \sum_{k=1}^{11}a_k=\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{4k(k+1)}$

$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{11}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{12}\right)=\frac{11}{48}$

따라서 $p=48$, $q=11$이므로 $p-q=37$

040 답 $\frac{40}{7}$

$a_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2n+1}=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{2n+1}=\frac{n(n+1)}{6}$

따라서 $\frac{1}{a_n}=\frac{6}{n(n+1)}$이므로

$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{20}\frac{6}{k(k+1)}$

$=6\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=6\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=6\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{7}$

041 답 $\frac{30}{31}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-2,\ \alpha_n\beta_n=-(4n^2-1)$

이때

$$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{-2}{-(4n^2-1)}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{15}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)&=\sum_{n=1}^{15}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\sum_{n=1}^{15}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{31}\right)\\&=1-\frac{1}{31}=\frac{30}{31}\end{aligned}$$

042 답 $-\frac{10}{19}$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-2n$

(i) $n\geq 2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^2-2n-\{(n-1)^2-2(n-1)\}\\&=2n-3 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2-2\times1=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2n-3$

따라서 $\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{(2k-3)(2k-1)}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-3)(2k-1)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k-1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{19}\right)=-\frac{10}{19}\end{aligned}$$

043 답 $2\sqrt{2}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{16}a_k&=\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}\\&=\sum_{k=1}^{16}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}\\&=\sum_{k=1}^{16}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{-1}\\&=\sum_{k=1}^{16}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})\\&=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{18}-\sqrt{17})\\&=-\sqrt{2}+\sqrt{18}=-\sqrt{2}+3\sqrt{2}=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

044 답 15

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}a_k&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{-1}=\sum_{k=1}^{m}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})\\&=\sqrt{m+1}-1\end{aligned}$$

즉, $\sqrt{m+1}-1=3$이므로 $\sqrt{m+1}=4$, $m+1=16$

$\therefore\ m=15$

045 답 $2\sqrt{2}+3$

$\mathrm{P}_k(k,\ \sqrt{k+2})$, $\mathrm{Q}_k(k,\ -\sqrt{k})$에서

$\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}=\sqrt{k+2}+\sqrt{k}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}}&=\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}\\&=\sum_{k=1}^{48}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}\\&=\sum_{k=1}^{48}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{2}\\&=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})\\&\qquad+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{47})+(\sqrt{50}-\sqrt{48})\}\\&=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+\sqrt{49}+\sqrt{50})\\&=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+7+5\sqrt{2})=2\sqrt{2}+3\end{aligned}$$

046 답 $4\sqrt{2}$

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=2+(n-1)\times2=2n$이므로

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}&=\frac{2}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+2}}\\&=\frac{2(\sqrt{2k}-\sqrt{2k+2})}{(\sqrt{2k}+\sqrt{2k+2})(\sqrt{2k}-\sqrt{2k+2})}\\&=\frac{2(\sqrt{2k}-\sqrt{2k+2})}{-2}=\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ S_{24}&=\sum_{k=1}^{24}\frac{2}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})\\&=(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{50}-\sqrt{48})\\&=-\sqrt{2}+\sqrt{50}=5\sqrt{2}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

047 답 66

$1-2\times3+3\times3^2-4\times3^3+\cdots-16\times3^{15}=S$로 놓고

$S-(-3S)$를 하면

$$\begin{array}{rl} S= & 1-2\times3+3\times3^2-4\times3^3+\cdots-16\times3^{15}\\ -)\ -3S= & \quad -1\times3+2\times3^2-3\times3^3+\cdots-15\times3^{15}+16\times3^{16}\\ \hline 4S= & 1-3+3^2-3^3+\cdots+3^{14}-3^{15}-16\times3^{16}\end{array}$$

$$=\frac{1-(-3)^{16}}{1-(-3)}-16\times3^{16}=\frac{1-65\times3^{16}}{4}$$

$\therefore\ S=\frac{1-65\times3^{16}}{16}$

따라서 $a=1$, $b=65$이므로 $a+b=66$

09

048 답 20

$\sum_{k=1}^{10} \frac{2k-1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{19}{2^{10}} = S$로 놓고

$S - \frac{1}{2}S$를 하면

$$\begin{array}{rl} S = & \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots + \frac{19}{2^{10}} \\ -\big)\ \frac{1}{2}S = & \qquad \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{17}{2^{10}} + \frac{19}{2^{11}} \\ \hline \frac{1}{2}S = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^9} - \frac{19}{2^{11}} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{19}{2^{11}}$$

$$= \frac{3}{2} - 23\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$$

$\therefore\ S = 3 - 23\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

따라서 $a=3$, $b=-23$이므로

$|a+b| = |-20| = 20$

049 답 ②

$f(2) = 1 + 4\times 2 + 7\times 2^2 + 10\times 2^3 + \cdots + 31\times 2^{10}$이므로

$f(2) - 2f(2)$를 하면

$$\begin{array}{rl} f(2) = & 1 + 4\times 2 + 7\times 2^2 + 10\times 2^3 + \cdots + 31\times 2^{10} \\ -\big)\ 2f(2) = & \qquad 1\times 2 + 4\times 2^2 + 7\times 2^3 + \cdots + 28\times 2^{10} + 31\times 2^{11} \\ \hline -f(2) = & 1 + 3\times 2 + 3\times 2^2 + 3\times 2^3 + \cdots + 3\times 2^{10} - 31\times 2^{11} \end{array}$$

$$= 1 + 3\times\frac{2(2^{10}-1)}{2-1} - 31\times 2^{11}$$

$$= -28\times 2^{11} - 5$$

$\therefore\ f(2) = 28\times 2^{11} + 5$

050 답 50

위에서 n번째 줄에는 n개의 자연수가 있으므로

첫 번째 줄부터 9번째 줄까지의 자연수의 개수는

$\sum_{k=1}^{9} k = \frac{9\times 10}{2} = 45$

따라서 위에서 10번째 줄의 왼쪽에서 5번째에 있는 수는

$45 + 5 = 50$

051 답 제68항

주어진 수열을

$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \cdots$

와 같이 분모가 같은 항끼리 묶으면 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 11번째 묶음까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{11} k = \frac{11\times 12}{2} = 66$

따라서 $66 + 2 = 68$이므로 $\frac{2}{13}$는 제68항이다.

052 답 ②

주어진 표의 첫 번째 줄의 수는 왼쪽에서부터 차례대로 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, $\cdots$이므로 첫 번째 줄의 왼쪽에서 9번째 칸에 있는 수는 9^2이다.

이때 첫 번째 줄의 9번째 칸에 있는 수부터 9번째 줄의 9번째 칸에 있는 수까지 1씩 작아지므로 8번째 줄의 왼쪽에서 9번째 칸에 있는 수는 $9^2 - 7 = 74$

053 답 39

위에서 n번째 줄에 있는 순서쌍의 두 수의 합은 $n+1$이고,

위에서 n번째 줄의 왼쪽에서 k번째의 순서쌍은 $(k,\ n+1-k)$이다.

이때 순서쌍 $(8,\ 24)$에서 $8+24=32=31+1$이므로 순서쌍 $(8,\ 24)$는 위에서 31번째 줄의 왼쪽에서 8번째에 있다.

따라서 $p=31$, $q=8$이므로 $p+q=39$

핵심 유형 **최종 점검하기** 164~165쪽

1 답 ⑤

유형 01 합의 기호 Σ의 뜻

$\sum_{k=1}^{n} (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k})$

$= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \cdots + (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n})$

$= \sum_{k=1}^{3n} a_k$

이므로 $\sum_{k=1}^{3n} a_k = 3n^2 - 2n$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{30} a_k = 3\times 10^2 - 2\times 10 = 280$

2 답 ⑤

유형 01 합의 기호 Σ의 뜻

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, $\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$, $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} 2^k \neq \sum_{k=0}^{n} 2^k$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} a_{k+5}$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + (a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10})$

$= \sum_{k=1}^{10} a_k$

ㄹ. $\sum_{i=1}^{20} (2i-1)^2 + \sum_{j=1}^{20} (2j)^2$

$= (1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 39^2) + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 40^2)$

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 40^2$

$= \sum_{k=1}^{40} k^2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

3 답 ①

유형 02 합의 기호 $\sum$의 성질

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}1=2\sum_{k=1}^{10}a_k-1\times10=10$$

에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=10$

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)(a_k-1)=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-1)=\sum_{k=1}^{10}a_k^2-\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k^2-1\times10$$
$$=40$$

에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k^2=50$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(4a_k^2-4a_k+1)$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}a_k^2-4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=4\times50-4\times10+10$$
$$=170$$

4 답 ⑤

유형 03 $\sum_{k=1}^{n}r^k$ 꼴의 계산

다항식 $P(x)=x^{2n}-3x^n+2$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $P(3)$이므로

$$a_n=3^{2n}-3\times3^n+2$$
$$=3^{2n}-3^{n+1}+2$$
$$=3^n(9-3)+2$$
$$=6\times3^n+2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}(a_k-2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(6\times3^k)$$
$$=6\sum_{k=1}^{n}3^k$$
$$=6\times\frac{3(3^n-1)}{3-1}$$
$$=9(3^n-1)$$

5 답 55

유형 04 자연수의 거듭제곱의 합

$$\sum_{k=1}^{20}\log_3 a_k$$
$$=(\log_3 a_1+\log_3 a_2)+(\log_3 a_3+\log_3 a_4)+\cdots+(\log_3 a_{19}+\log_3 a_{20})$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(\log_3 a_{2k-1}+\log_3 a_{2k})$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\log_3 (a_{2k-1}a_{2k})$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\log_3 \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\times6^k\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\log_3 3^k$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\times11}{2}=55$$

6 답 6

유형 05 $\sum$를 여러 개 포함한 식의 계산

$$\sum_{n=1}^{k}\left\{\sum_{m=1}^{n}(m+n)\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{m=1}^{n}m+n\sum_{m=1}^{n}1\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{k}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+n^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(3n^2+n)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{3\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{k(k+1)^2}{2}$$

즉, $\frac{k(k+1)^2}{2}=147$이므로

$k(k+1)^2=6\times7$

$\therefore k=6$

7 답 -1530

유형 06 $\sum$를 이용한 여러 가지 수열의 합

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=-1+(n-1)\times(-2)=-2n+1$

등차수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n은

$b_n=3+(n-1)\times2=2n+1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_kb_k$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(-2k+1)(2k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(-4k^2+1)$$
$$=-4\times\frac{10\times11\times21}{6}+1\times10$$
$$=-1540+10$$
$$=-1530$$

8 답 91

유형 06 $\sum$를 이용한 여러 가지 수열의 합

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$
$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n$$
$$=n^2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{6}k^2=\frac{6\times7\times13}{6}=91$$

9 답 3

유형 07 제k항에 n이 포함된 수열의 합

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=2k\{2n-(2k-1)\}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 2k\{2n-(2k-1)\}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \{(4n+2)k-4k^2\}$$
$$=(4n+2)\sum_{k=1}^{n} k - 4\sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$=(4n+2)\times\frac{n(n+1)}{2}-4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=1$이므로 $a+b+c=3$

10 답 124

유형 08 Σ로 표현된 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2-11n$$

(i) $n\geq 2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2-11n-\{(n-1)^2-11(n-1)\}$$
$$=2n-12 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$$a_1=S_1=1^2-11=-10 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2n-12$

$a_{2k}=2\times 2k-12=4k-12$이고, $a_{2k}\geq 0$을 만족하는 k의 값의 범위는

$4k-12\geq 0 \qquad \therefore k\geq 3$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} |a_{2k}| = -\sum_{k=1}^{2} a_{2k}+\sum_{k=3}^{10} a_{2k}$$
$$=-\sum_{k=1}^{2} a_{2k}+\sum_{k=1}^{10} a_{2k}-\sum_{k=1}^{2} a_{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{10} a_{2k}-2\sum_{k=1}^{2} a_{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{10} (4k-12)-2\sum_{k=1}^{2}(4k-12)$$
$$=4\times\frac{10\times 11}{2}-12\times 10-2\left(4\times\frac{2\times 3}{2}-12\times 2\right)$$
$$=220-120+24=124$$

11 답 $\frac{10}{99}$

유형 09 분수 꼴인 수열의 합

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=3+(n-1)\times 3=3n$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{3k(3k+3)}$$
$$=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{9}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{10}{99}$$

12 답 ④

유형 09 분수 꼴인 수열의 합

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2018} a_k=\sum_{k=1}^{2018}\frac{2}{k(k+1)}$$
$$=2\sum_{k=1}^{2018}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2019}\right)=\frac{4036}{2019}$$

13 답 9

유형 10 분모에 근호가 포함된 수열의 합

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{f(k)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{3k+9}+\sqrt{3k+6}}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{3k+9}-\sqrt{3k+6}}{(\sqrt{3k+9}+\sqrt{3k+6})(\sqrt{3k+9}-\sqrt{3k+6})}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{3k+9}-\sqrt{3k+6}}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\{(\sqrt{12}-\sqrt{9})+(\sqrt{15}-\sqrt{12})+(\sqrt{18}-\sqrt{15})$$
$$+\cdots+(\sqrt{3m+9}-\sqrt{3m+6})\}$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{3m+9}-3)$$

즉, $\frac{1}{3}(\sqrt{3m+9}-3)=1$이므로 $\sqrt{3m+9}-3=3$, $\sqrt{3m+9}=6$

$3m+9=36 \qquad \therefore m=9$

14 답 3

유형 11 (등차수열)×(등비수열) 꼴의 수열의 합

$S_{10}=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{10}{2^9}$이므로

$S_{10}-\frac{1}{2}S_{10}$을 하면

$$\begin{array}{rl} S_{10}= & 1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{10}{2^9} \\ -\big)\ \frac{1}{2}S_{10}= & \quad\ \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{9}{2^9}+\frac{10}{2^{10}} \\ \hline \frac{1}{2}S_{10}= & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^9}-\frac{10}{2^{10}} \end{array}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{10}{2^{10}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}-\frac{10}{2^{10}}$$
$$=2-\frac{12}{2^{10}}=2-3\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$\therefore S_{10}=4-3\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

따라서 $a=4$, $b=7$이므로 $b-a=3$

15 답 ②

유형 12 여러 가지 수열의 응용

주어진 표의 대각선의 수는 차례대로 1^2, 3^2, 5^2, $\cdots$이므로 위에서 n번째 줄의 왼쪽에서 n번째 칸에 있는 수는 $(2n-1)^2$이다.

이때 $225=15^2$에서 $2\times 8-1=15$이므로 225는 위에서 8번째 줄의 왼쪽에서 8번째 칸에 있다.

따라서 $a=8$, $b=8$이므로 $a+b=16$

10 수학적 귀납법

핵심 유형

유형01 48　유형02 16　유형03 ③
유형04 496　유형05 0　유형06 ④　유형07 136
유형08 ⑤　유형09 풀이 참고
유형10 풀이 참고　유형11 풀이 참고

핵심 유형 완성하기

001 79　002 26　003 14　004 $\frac{4}{17}$　005 363
006 ④　007 3069　008 ①　009 5　010 165
011 41　012 ⑤　013 ②　014 165　015 -48
016 $\frac{1}{11}$　017 ⑤　018 59　019 3　020 4
021 48　022 $-\frac{1}{24}$　023 -62　024 10
025 7048마리　026 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+8(n=1, 2, 3, \cdots)$
027 $\frac{11}{6}$　028 30　029 56　030 ④　031 ⑤
032 ㄱ, ㄴ, ㄷ　033 ③　034 ③
035 (가) 9　(나) 8　(다) $9m+1$　036 (가) 5^{k-1}　(나) $2m$
037 ⑤　038 ④

핵심 유형 최종 점검하기

1 44　2 제8항　3 11　4 12　5 ④
6 6　7 16　8 81 km　9 ⑤　10 $\frac{3}{2}$
11 17　12 (가) $\frac{2k+1}{k+1}$　(나) k

핵심 유형 168~170쪽

유형01 답 48

$a_{n+1}=a_n-4$, 즉 $a_{n+1}-a_n=-4$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -4인 등차수열이다.
이때 첫째항이 $a_1=200$이므로
$a_n=200+(n-1)\times(-4)$
$\quad=-4n+204$
$a_k=12$에서 $-4k+204=12$
$4k=192 \qquad \therefore k=48$

다른 풀이 $a_{n+1}=a_n-4$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하면
$a_2=a_1-4=200-4$
$a_3=a_2-4=200-4\times2$
$a_4=a_3-4=200-4\times3$
$\vdots$
$a_n=a_{n-1}-4=200-4\times(n-1)$
$\therefore a_n=-4n+204$
이때 $a_k=12$에서 $-4k+204=12$
$4k=192 \qquad \therefore k=48$

유형02 답 16

$a_n=2a_{n+1}$, 즉 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.
이때 $a_2=\frac{1}{2}a_1$에서 $a_1=8$이므로
$a_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$
따라서 $a_{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^{16}=\frac{1}{2^{16}}$이므로 $k=16$

다른 풀이 $a_n=2a_{n+1}$, 즉 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하면
$a_2=\frac{1}{2}a_1=4$
$a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}\times4$
$a_4=\frac{1}{2}a_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times4$
$\vdots$
$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\times4=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$
따라서 $a_{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^{16}=\frac{1}{2^{16}}$이므로 $k=16$

유형03 답 ③

$a_{n+1}=a_n+2n-1$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2=a_1+2\times1-1\\
&a_3=a_2+2\times2-1\\
&a_4=a_3+2\times3-1\\
&\quad\vdots\\
+)\;&\underline{a_n=a_{n-1}+2\times(n-1)-1}\\
&a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)\\
&\quad=a_1+2\times\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)\\
&\quad=a_1+(n-1)^2
\end{aligned}$$

이때 $a_9=65$에서 $a_1+(9-1)^2=65 \qquad \therefore a_1=1$
따라서 $a_n=1+(n-1)^2=n^2-2n+2$이므로
$a_5=5^2-2\times5+2=17$

유형04 답 496

$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$a_2=\frac{4}{2}a_1$$
$$a_3=\frac{5}{3}a_2$$
$$a_4=\frac{6}{4}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times\Big)\ a_n=\frac{n+2}{n}a_{n-1}$$
$$a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{6}a_1$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\therefore\ a_{30}=\frac{31\times32}{2}=496$

유형05 답 0

$a_{n+1}+a_n=n$, 즉 $a_{n+1}=n-a_n$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$a_2=1-a_1=1-3=-2$

$a_3=2-a_2=2-(-2)=4$

$a_4=3-a_3=3-4=-1$

$a_5=4-a_4=4-(-1)=5$

$\therefore\ a_6=5-a_5=5-5=0$

유형06 답 ④

$S_n=3a_n-4$의 n에 $n+1$을 대입하면

$S_{n+1}=3a_{n+1}-4$

이때 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$a_{n+1}=3a_{n+1}-4-(3a_n-4)$

$2a_{n+1}=3a_n \qquad \therefore\ a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=2$, 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_{20}=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^{19}=\frac{3^{19}}{2^{18}}$

유형07 답 136

1시간 후에 살아 있는 미생물의 수 a_1은

$a_1=(12-4)\times2=16$

같은 방법으로 a_2, a_3, a_4, a_5를 구하면

$a_2=(a_1-4)\times2=(16-4)\times2=24$

$a_3=(a_2-4)\times2=(24-4)\times2=40$

$a_4=(a_3-4)\times2=(40-4)\times2=72$

$a_5=(a_4-4)\times2=(72-4)\times2=136$

유형08 답 ⑤

$p(1)$이 참이면 $p(3)$, $p(5)$도 참이다.

$p(3)$이 참이면 $p(3\times3)=p(9)$, $p(5\times3)=p(15)$도 참이다.

$p(5)$가 참이면 $p(5\times5)=p(25)$도 참이다.

$\vdots$

따라서 $p(1)$이 참이면 자연수 a, b에 대하여 $p(3^a\times5^b)$이 참이다.

① $p(30)=p(2\times3\times5)$

② $p(60)=p(2^2\times3\times5)$

③ $p(105)=p(3\times5\times7)$

④ $p(120)=p(2^3\times3\times5)$

⑤ $p(225)=p(3^2\times5^2)$

따라서 반드시 참인 것은 ⑤이다.

유형09 답 풀이 참고

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=2\times1-1=1$, (우변)$=1^2=1$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

위의 식의 양변에 $(2k+1)$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$

$=k^2+(2k+1)$

$=(k+1)^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

유형10 답 풀이 참고

(i) $n=1$일 때

$4^{2+1}+3^{1+2}=4^3+3^3=91=13\times7$이므로 13의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때

$4^{2k+1}+3^{k+2}=13m$(m은 자연수)이라고 가정하면

$4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}$

$=16\times4^{2k+1}+3\times3^{k+2}$

$=16\times4^{2k+1}+16\times3^{k+2}-13\times3^{k+2}$

$=16(4^{2k+1}+3^{k+2})-13\times3^{k+2}$

$=16\times13m-13\times3^{k+2}$

$=13\times(16m-3^{k+2})$

따라서 $n=k+1$일 때도 13의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $4^{2n+1}+3^{n+2}$은 13의 배수이다.

유형11 답 풀이 참고

$2^{n+1}>n(n-1)$

(i) $n=3$일 때

(좌변)$=2^4=16$, (우변)$=3\times2=6$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 3)$일 때

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^{k+1}>k(k-1)$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+2}>2k(k-1)=k^2+k(k-2)$

이때 $k^2+k(k-2)\geq k^2+k$이므로

$2^{k+2}>k^2+k$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

핵심 유형 **완성**하기 171~177쪽

001 답 79

$a_{n+1}-a_n=3$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=-2$이므로

$a_n=-2+(n-1)\times 3=3n-5$

$a_k=232$에서 $3k-5=232$

$3k=237 \qquad \therefore k=79$

002 답 26

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$, 즉 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_6=a+5d=8 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a_{12}=a+11d=17 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $d=\frac{3}{2}$

따라서 $a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}n-1$이므로

$a_{18}=\frac{3}{2}\times 18-1=26$

003 답 14

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_5=a+4d=29 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a_9=a+8d=17 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=41$, $d=-3$

$\therefore a_n=41+(n-1)\times(-3)=-3n+44$

$-3n+44<0$에서 $n>\frac{44}{3}=14.6\cdots$

따라서 제15항부터 음수이므로 첫째항부터 제14항까지의 합이 최대이다.

$\therefore n=14$

004 답 $\frac{4}{17}$

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고 $a_1=2$, $a_2-a_1=4-2=2$이므로 첫째항이 2, 공차가 2이다.

$\therefore a_n=2+(n-1)\times 2=2n$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{16}\frac{1}{a_ka_{k+1}}&=\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{2k(2k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{4k(k+1)}\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{16}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{17}\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{17}\right)=\frac{4}{17}\end{aligned}$$

005 답 363

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$, 즉 $a_{n+1}=3a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=3$이므로

$a_n=3\times 3^{n-1}=3^n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}3^k=\frac{3(3^5-1)}{3-1}=363$$

006 답 ④

$a_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+2}}$, 즉 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 공비를 r라고 하면

$\frac{a_4}{a_1}+\frac{a_5}{a_2}+\frac{a_6}{a_3}=81$에서

$3r^3=81$, $r^3=27$

$\therefore r=3$

$\therefore \frac{a_{20}}{a_{10}}=r^{10}=3^{10}$

007 답 3069

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, 즉 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=45 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$S_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}=\frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=765 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^4+1=17 \qquad \therefore r=2\ (\because r>0)$

이를 ㉠에 대입하면 $a=3$

$\therefore S_{10}=\frac{3(2^{10}-1)}{2-1}=3069$

008 답 ①

$a_{n+1}=a_n+2n^2$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$\begin{aligned} a_2&=a_1+2\times1^2\\ a_3&=a_2+2\times2^2\\ a_4&=a_3+2\times3^2\\ &\vdots\\ +\big)\ a_n&=a_{n-1}+2\times(n-1)^2\\ \hline a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k^2\\ &=2+2\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\ &=\frac{2n^3-3n^2+n+6}{3}\end{aligned}$$

$\therefore a_7=\frac{2\times7^3-3\times7^2+7+6}{3}=184$

009 답 5

$a_n=a_{n-1}+3^{n-1}$의 n에 2, 3, 4, ⋯, n을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$\begin{aligned} a_2&=a_1+3^1\\ a_3&=a_2+3^2\\ a_4&=a_3+3^3\\ &\vdots\\ +\big)\ a_n&=a_{n-1}+3^{n-1}\\ \hline a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k\\ &=4+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}\\ &=\frac{3^n+5}{2}\end{aligned}$$

이때 $a_m=124$에서 $\frac{3^m+5}{2}=124$, $3^m+5=248$

$3^m=243=3^5$ $\quad\therefore m=5$

010 답 165

$a_{n+1}=a_n+f(n)$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$\begin{aligned} a_2&=a_1+f(1)\\ a_3&=a_2+f(2)\\ a_4&=a_3+f(3)\\ &\vdots\\ +\big)\ a_{10}&=a_9+f(9)\\ \hline a_{10}&=a_1+\sum_{k=1}^{9}f(k)\\ &=2+2\times9^2+1=165\end{aligned}$$

011 답 41

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, 즉

$a_{n+1}=a_n+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$\begin{aligned} a_2&=a_1+2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)\\ a_3&=a_2+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\\ a_4&=a_3+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\\ &\vdots\\ +\big)\ a_n&=a_{n-1}+2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\ \hline a_n&=a_1+2\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &=5+2-\frac{2}{n}=7-\frac{2}{n}\end{aligned}$$

이때 $|a_k-7|<\frac{1}{20}$에서

$\left|-\frac{2}{k}\right|<\frac{1}{20}$, $\frac{2}{k}<\frac{1}{20}$ $\quad\therefore k>40$

따라서 자연수 k의 최솟값은 41이다.

012 답 ⑤

$\sqrt{n+1}a_{n+1}=\sqrt{n}a_n$, 즉 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned} a_2&=\sqrt{\frac{1}{2}}a_1\\ a_3&=\sqrt{\frac{2}{3}}a_2\\ a_4&=\sqrt{\frac{3}{4}}a_3\\ &\vdots\\ \times\big)\ a_n&=\sqrt{\frac{n-1}{n}}a_{n-1}\\ \hline a_n&=\sqrt{\frac{1}{n}}a_1=\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

이때 $a_k=\frac{1}{7}$에서 $\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{1}{7}$

$\sqrt{k}=7$ $\quad\therefore k=49$

013 답 ②

$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n=\frac{n+1}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned} a_2&=\frac{2}{1}a_1\\ a_3&=\frac{3}{2}a_2\\ a_4&=\frac{4}{3}a_3\\ &\vdots\\ \times\big)\ a_n&=\frac{n}{n-1}a_{n-1}\\ \hline a_n&=na_1=n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k})&=\sum_{k=1}^{20}a_k\\ &=\sum_{k=1}^{20}k\\ &=\frac{20\times21}{2}=210\end{aligned}$$

014 답 165

$a_{n+1}=2^n a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=2^1a_1 \\ & a_3=2^2a_2 \\ & a_4=2^3a_3 \\ & \vdots \\ \times) & \underline{a_n=2^{n-1}a_{n-1}} \\ & a_n=2\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^{n-1}a_1 \end{array}$$

$$=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$$

$$=2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\log_2 a_k=\sum_{k=1}^{10}\log_2 2^{\frac{(k-1)k}{2}}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{(k-1)k}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}\right)$$

$$=165$$

015 답 -48

$a_{n+1}=-2a_n+6$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_2=-2a_1+6=-2\times(-2)+6=10$

$a_3=-2a_2+6=-2\times10+6=-14$

$a_4=-2a_3+6=-2\times(-14)+6=34$

$a_5=-2a_4+6=-2\times34+6=-62$

$\therefore a_5-a_3=-48$

016 답 $\frac{1}{11}$

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+na_n}$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{a_1}{1+a_1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$a_3=\frac{a_2}{1+2a_2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

$$a_4=\frac{a_3}{1+3a_3}=\frac{\frac{1}{4}}{1+3\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{7}$$

$$\therefore a_5=\frac{a_4}{1+4a_4}=\frac{\frac{1}{7}}{1+4\times\frac{1}{7}}=\frac{1}{11}$$

017 답 ⑤

$a_{n+1}=a_n{}^2+a_n$의 양변을 a_n으로 나누면 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{100}\log(a_k+1)=\sum_{k=1}^{100}\log\frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$$=\log\frac{a_2}{a_1}+\log\frac{a_3}{a_2}+\log\frac{a_4}{a_3}+\cdots+\log\frac{a_{101}}{a_{100}}$$

$$=\log\left(\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_{101}}{a_{100}}\right)$$

$$=\log a_{101}$$

018 답 59

$a_na_{n+1}a_{n+2}=1$, 즉 $a_{n+2}=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하면

$$a_3=\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$$

$$a_4=\frac{1}{a_2a_3}=\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}=1$$

$$a_5=\frac{1}{a_3a_4}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times1}=2$$

$$a_6=\frac{1}{a_4a_5}=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$$

$\vdots$

$$\therefore a_n=\begin{cases}1 & (n=3k-2)\\ 2 & (n=3k-1)\\ \frac{1}{2} & (n=3k)\end{cases}\ (\text{단, } k\text{는 자연수})$$

이때 $50=3\times16+2$이므로

$$\sum_{k=1}^{50}a_k=16\left(1+2+\frac{1}{2}\right)+1+2=16\times\frac{7}{2}+3=59$$

019 답 3

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n\text{은 짝수})\\ a_n+3 & (a_n\text{은 홀수})\end{cases}$$ 에서 $a_1=21$이므로

$a_2=a_1+3=21+3=24$, $a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}\times24=12$,

$a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{2}\times12=6$, $a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}\times6=3$,

$a_6=a_5+3=3+3=6$, $a_7=\frac{1}{2}a_6=\frac{1}{2}\times6=3$,

$a_8=a_7+3=3+3=6$, $a_9=\frac{1}{2}a_8=\frac{1}{2}\times6=3$, ⋯

따라서 $n\ge4$일 때 $a_n=\begin{cases}6 & (n\text{은 짝수})\\ 3 & (n\text{은 홀수})\end{cases}$ 이므로

$a_{13}=3$

020 답 4

$a_1=2$에서

$a_2=$(14를 5로 나누었을 때의 나머지)$=4$

$a_3=$(28을 5로 나누었을 때의 나머지)$=3$

$a_4=$(21을 5로 나누었을 때의 나머지)$=1$

$a_5=$(7을 5로 나누었을 때의 나머지)$=2$

$\vdots$

$$\therefore a_n=\begin{cases}2 & (n=4k-3)\\ 4 & (n=4k-2)\\ 3 & (n=4k-1)\\ 1 & (n=4k)\end{cases}\ (\text{단, } k\text{는 자연수})$$

이때 $100=4\times25$, $101=4\times26-3$, $102=4\times26-2$, $103=4\times26-1$이므로

$a_{100}+a_{101}+a_{102}-a_{103}=1+2+4-3=4$

021 답 48

$S_n=2a_n-1$의 n에 $n+1$을 대입하면

$S_{n+1}=2a_{n+1}-1$

이때 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$a_{n+1}=2a_{n+1}-1-(2a_n-1)$

$\therefore\ a_{n+1}=2a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=2^{n-1}$

$\therefore\ a_5+a_6=2^4+2^5=48$

022 답 $-\frac{1}{24}$

$S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+\frac{1}{3}$의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$S_2=\frac{1}{2}S_1+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

$S_3=\frac{1}{2}S_2+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$

$S_4=\frac{1}{2}S_3+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{17}{24}$

$\therefore\ a_4=S_4-S_3=\frac{17}{24}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{24}$

023 답 -62

$S_n=2a_n+2n$의 n에 $n+1$을 대입하면

$S_{n+1}=2a_{n+1}+2(n+1)$

이때 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$a_{n+1}=2a_{n+1}+2(n+1)-(2a_n+2n)$

$\therefore\ a_{n+1}=2a_n-2$

위의 식의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1-2=2\times(-2)-2=-6$

$a_3=2a_2-2=2\times(-6)-2=-14$

$a_4=2a_3-2=2\times(-14)-2=-30$

$\therefore\ a_5=2a_4-2=2\times(-30)-2=-62$

024 답 10

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라고 하면

$S_1=a_1=5,\ a_{n+1}=S_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이때 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$S_{n+1}-S_n=S_n$

$\therefore\ S_{n+1}=2S_n$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=5$이고, 공비가 2인 등비수열이므로

$S_n=5\times2^{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=5\times2^{n-1}-5\times2^{n-2}\\&=5\times2^{n-2}(n\ge2)\end{aligned}$$

$5\times2^{k-2}>1000$에서 $2^{k-2}>200$

이때 $2^7=128,\ 2^8=256$이므로

$k-2\ge8\qquad\therefore\ k\ge10$

따라서 자연수 k의 최솟값은 10이다.

025 답 7048마리

이 호수의 2019년 초의 물고기 수는

$10000\times(1-0.2)+1000=9000$(마리)

2020년 초의 물고기 수는

$9000\times(1-0.2)+1000=8200$(마리)

2021년 초의 물고기 수는

$8200\times(1-0.2)+1000=7560$(마리)

따라서 2022년 초의 물고기 수는

$7560\times(1-0.2)+1000=7048$(마리)

026 답 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+8(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

물 a_nL의 절반을 버리고 다시 8L의 물을 채워 넣었을 때 수족관에 남아 있는 물의 양이 a_{n+1}L이므로

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+8(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

027 답 $\frac{11}{6}$

6%의 소금물 50g에 들어 있는 소금의 양은

$50\times\frac{6}{100}=3(\text{g})$

a_n%의 소금물 250g에 들어 있는 소금의 양은

$250\times\frac{a_n}{100}=\frac{5}{2}a_n(\text{g})$

$\therefore\ a_{n+1}=\dfrac{\frac{5}{2}a_n+3}{300}\times100=\frac{5}{6}a_n+1$

따라서 $p=\frac{5}{6}$, $q=1$이므로 $p+q=\frac{11}{6}$

028 답 30

n개의 원이 그려진 평면에 1개의 원을 추가하면 이 원은 기존의 n개의 원과 각각 2개의 점에서 만나므로 $2n$개의 새로운 교점이 생긴다.

즉, $(n+1)$개의 원의 교점은 n개의 원의 교점보다 $2n$개가 많으므로

$a_{n+1}=a_n+2n$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$\begin{aligned}&a_2=a_1+2\times1\\&a_3=a_2+2\times2\\&a_4=a_3+2\times3\\&\quad\vdots\\+\,)\ &\underline{a_n=a_{n-1}+2\times(n-1)}\\&a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k\\&\quad=0+2\times\frac{(n-1)n}{2}\\&\quad=n^2-n\end{aligned}$$

$\therefore\ a_6=36-6=30$

029 답 56

n개의 직선이 그려진 평면에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$개의 새로운 평면이 생긴다.
즉, $(n+1)$개의 직선에 의해 분할된 평면은 n개의 직선에 의해 분할된 평면보다 $(n+1)$개가 많으므로
$a_{n+1}=a_n+n+1$
위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=a_1+2 \\ & a_3=a_2+3 \\ & a_4=a_3+4 \\ & \quad\vdots \\ +) & \underline{a_n=a_{n-1}+n} \\ & a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \end{array}$$

$$=2+\frac{(n-1)n}{2}+n-1$$

$$=\frac{n^2+n+2}{2}$$

$$\therefore\ a_{10}=\frac{10^2+10+2}{2}=56$$

030 답 ④

$p(1)$이 참이면 $p(2)$도 참이다.
$p(2)$가 참이면 $p(2\times2)=p(4)$도 참이다.
$p(4)$가 참이면 $p(2\times4)=p(8)$도 참이다.
⋮
따라서 $p(1)$이 참이면 $p(2^n)$도 참이다.
따라서 반드시 참인 것은 ④이다.

031 답 ⑤

$n=1$일 때, $p(n)$이 성립하므로 $p(1)$이 성립한다.
$p(1)$이 성립하면 $p(2\times1+1)=p(3)$도 성립한다.
$p(3)$이 성립하면 $p(2\times3+1)=p(7)$도 성립한다.
$p(7)$이 성립하면 $p(2\times7+1)=p(15)$도 성립한다.
$p(15)$가 성립하면 $p(2\times15+1)=p(31)$도 성립한다.
따라서 반드시 참인 것은 ⑤이다.

032 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $p(1)$이 참이면
$p(3)$, $p(5)$, $p(7)$, $\cdots$, $p(2n+1)$도 참이다.
이때 $125=2\times62+1$이므로 $p(125)$는 참이다.
ㄴ. $p(1)$이 참이면
$p(2\times1+3)=p(5)$
$p(2\times5+3)=p(13)$
$p(2\times13+3)=p(29)$
$p(2\times29+3)=p(61)$
$p(2\times61+3)=p(125)$, $\cdots$도 참이다.
ㄷ. 명제 '$p(n+4)$가 거짓이면 $p(n)$도 거짓이다.'의 대우인 '$p(n)$이 참이면 $p(n+4)$도 참이다.'에 의하여
$p(1)$이 참이면
$p(5)$, $p(9)$, $p(13)$, $\cdots$, $p(4n+1)$도 참이다.
이때 $125=4\times31+1$이므로 $p(125)$는 참이다.
따라서 조건 (나)가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

033 답 ③

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
(i) $n=1$일 때
(좌변)$=1\times2=2$, (우변)$=\frac{1}{3}\times1\times2\times3=2$
이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때
주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)$
$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$
위의 식의 양변에 $\boxed{(가)\ (k+1)(k+2)}$를 더하면
$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)+\boxed{(가)\ (k+1)(k+2)}$
$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+\boxed{(가)\ (k+1)(k+2)}$
$=(k+1)(k+2)\left(\frac{1}{3}k+1\right)$
$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(\boxed{(나)\ k+3})$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

034 답 ③

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
(i) $n=1$일 때
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\times1\times2\times3=1$
이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때
주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $\boxed{(가)\ (k+1)^2}$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(가)\ (k+1)^2}$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{(가)\ (k+1)^2}$
$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+\boxed{(나)\ 6k+6})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{(다)\ 2k+3})$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

035 답 (가) 9　(나) 8　(다) $9m+1$

(i) $n=1$일 때

$3^2-1=8$이므로 8의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때

$3^{2k}-1=8m$(m은 자연수)이라고 가정하면

$3^{2(k+1)}-1=\boxed{(가)\ 9}\times 3^{2k}-1$

$=9(3^{2k}-1)+\boxed{(나)\ 8}$

$=9\times 8m+\boxed{(나)\ 8}$

$=8\times(\boxed{(다)\ 9m+1})$

따라서 $n=k+1$일 때도 8의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $3^{2n}-1$은 8의 배수이다.

036 답 (가) 5^{k-1}　(나) $2m$

(i) $n=1$일 때

$7^1+5^{1-1}=8=2\times 4$이므로 2로 나누어떨어진다.

(ii) $n=k$일 때

$7^k+5^{k-1}=2m$(m은 자연수)이라고 가정하면

$7^{k+1}+5^k=7\times 7^k+5\times\boxed{(가)\ 5^{k-1}}$

$=7(7^k+5^{k-1})-2\times\boxed{(가)\ 5^{k-1}}$

$=7\times\boxed{(나)\ 2m}-2\times\boxed{(가)\ 5^{k-1}}$

$=2\times(7m-5^{k-1})$

따라서 $n=k+1$일 때도 2로 나누어떨어진다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 7^n+5^{n-1}은 2로 나누어떨어진다.

037 답 ⑤

$1\times 2\times 3\times\cdots\times n>2^n$

(i) $n=4$일 때

(좌변)$=1\times 2\times 3\times 4=24$, (우변) $2^4=16$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\ge 4)$일 때

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1\times 2\times 3\times\cdots\times k>2^k$

위의 식의 양변에 $\boxed{(가)\ k+1}$을 곱하면

$1\times 2\times 3\times\cdots\times k\times(\boxed{(가)\ k+1})>2^k\times(\boxed{(가)\ k+1})$

이때 $2^k\times(\boxed{(가)\ k+1})>\boxed{(나)\ 2^{k+1}}=2\times 2^k$이므로

$1\times 2\times 3\times\cdots\times k\times(\boxed{(가)\ k+1})>\boxed{(나)\ 2^{k+1}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\ge 4$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

038 답 ④

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\ge 2)$일 때

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$

위의 식의 양변에 $\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}$을 더하면

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}$

$<2-\frac{1}{k}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}$

이때

$\left\{2-\frac{1}{k}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}\right\}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)$

$=-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+1}$

$=\frac{-(k+1)^2+k+k(k+1)}{k(k+1)^2}$

$=-\frac{\boxed{(나)\ 1}}{k(k+1)^2}<0$

이므로 $2-\frac{1}{k}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(k+1)^2}}<2-\frac{1}{k+1}$

$\therefore \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{1}{(k+1)^2}$, $a=1$이므로

$f(1)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

핵심 유형 최종 점검하기 178~179쪽

1 답 44

유형 01 등차수열의 귀납적 정의

$\log_2 a_{n+1}+1=\log_2 a_{n+1}+\log_2 2=\log_2 2a_{n+1}$이므로

$\log_2 2a_{n+1}=\log_2(a_n+a_{n+2})$

$\therefore 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=8$　…… ㉠

$a_7=a+6d=20$　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

$\therefore a_n=2+(n-1)\times 3=3n-1$

$\therefore a_{15}=3\times 15-1=44$

2 답 제8항

유형 02 등비수열의 귀납적 정의

$a_{n+1}=2a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=8$이므로

$a_n=8\times2^{n-1}=2^{n+2}$

수열 $\{a_n\}$이 제k항에서 처음으로 1000보다 커진다고 하면

$2^{k+2}>1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$k+2\ge10 \qquad \therefore k\ge8$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제8항이다.

3 답 11

유형 03 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴인 수열의 귀납적 정의

$a_{n+1}-a_n=2n$, 즉 $a_{n+1}=a_n+2n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=a_1+2\times1 \\ & a_3=a_2+2\times2 \\ & a_4=a_3+2\times3 \\ & \quad\vdots \\ +\big) & a_n=a_{n-1}+2\times(n-1) \\ \hline & a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k \end{array}$$

$$=10+2\times\frac{(n-1)n}{2}$$

$$=n^2-n+10$$

$a_m>100$에서 $m^2-m+10>100$

$m^2-m-90>0$, $(m+9)(m-10)>0$

이때 m은 자연수이므로 $m>10$

따라서 자연수 m의 최솟값은 11이다.

4 답 12

유형 04 $a_{n+1}=a_nf(n)$ 꼴인 수열의 귀납적 정의

$(n+1)a_{n+1}=(n+2)a_n$, 즉 $a_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=\frac{3}{2}a_1 \\ & a_3=\frac{4}{3}a_2 \\ & a_4=\frac{5}{4}a_3 \\ & \quad\vdots \\ \times\big) & a_n=\frac{n+1}{n}a_{n-1} \\ \hline & a_n=\frac{n+1}{2}a_1 \end{array}$$

$$=3n+3$$

이때 $\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}(3k+3)=270$에서

$3\times\frac{m(m+1)}{2}+3m=270$

$m^2+3m-180=0$, $(m+15)(m-12)=0$

이때 m은 자연수이므로 $m=12$

5 답 ④

유형 05 여러 가지 수열의 귀납적 정의

$a_{n+2}=a_n+3$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 12를 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_3=a_1+3 \\ & a_4=a_2+3 \\ & a_5=a_3+3 \\ & a_6=a_4+3 \\ & \quad\vdots \\ & a_{13}=a_{11}+3 \\ +\big) & a_{14}=a_{12}+3 \\ \hline & a_{13}+a_{14}=a_1+a_2+3\times12 \end{array}$$

$$=1+2+36=39$$

6 답 6

유형 05 여러 가지 수열의 귀납적 정의

$a_na_{n+2}=a_{n-1}a_{n+1}$, 즉 $a_{n+2}=\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n}$의 n에 2, 3, 4, $\cdots$를 차례대로 대입하면

$a_4=\frac{a_1a_3}{a_2}=\frac{1\times4}{2}=2$

$a_5=\frac{a_2a_4}{a_3}=\frac{2\times2}{4}=1$

$a_6=\frac{a_3a_5}{a_4}=\frac{4\times1}{2}=2$

$a_7=\frac{a_4a_6}{a_5}=\frac{2\times2}{1}=4$

$a_8=\frac{a_5a_7}{a_6}=\frac{1\times4}{2}=2$

$\vdots$

$$\therefore a_n=\begin{cases}1 & (n=4k-3)\\ 2 & (n=4k-2)\\ 4 & (n=4k-1)\\ 2 & (n=4k)\end{cases} \text{(단, } k\text{는 자연수)}$$

이때 $50=4\times13-2$, $52=4\times13$, $54=4\times14-2$이므로

$a_{50}+a_{52}+a_{54}=2+2+2=6$

7 답 16

유형 06 a_n과 S_n의 관계식이 주어진 수열

$3S_n=a_{n+1}+7$의 n에 $n-1$을 대입하면

$3S_{n-1}=a_n+7$

이때 $a_n=S_n-S_{n-1}(n=2, 3, 4, \cdots)$이므로

$3a_n=3S_n-3S_{n-1}=a_{n+1}-a_n$

$\therefore a_{n+1}=4a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 4인 등비수열이므로

$a_n=a_1\times4^{n-1}$

이때 $a_{20}=ka_{18}$에서

$a_1\times4^{19}=k\times(a_1\times4^{17})$

$\therefore k=16$

8 답 81 km

유형 07 귀납적 정의의 활용

여행 n일째 이동한 거리를 a_n km라고 하면 $(n+1)$일째 이동한 거리 a_{n+1} km는 a_n km의 절반에 5 km를 더 이동하므로

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+5$

위의 식의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_2=\frac{1}{2}a_1+5=\frac{1}{2}\times26+5=18$

$a_3=\frac{1}{2}a_2+5=\frac{1}{2}\times18+5=14$

$a_4=\frac{1}{2}a_3+5=\frac{1}{2}\times14+5=12$

$a_5=\frac{1}{2}a_4+5=\frac{1}{2}\times12+5=11$

따라서 여행 첫날부터 5일째까지 이동한 거리는

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=26+18+14+12+11=81(\text{km})$

09 답 ⑤

유형 08 수학적 귀납법

ㄱ. $p(1)$이 참이면
　$p(3)$, $p(5)$, $p(7)$, $\cdots$, $p(2k+1)$도 참이다.

ㄴ. $p(2)$가 참이면
　$p(4)$, $p(6)$, $p(8)$, $\cdots$, $p(2k)$도 참이다.

ㄷ. $p(1)$, $p(2)$가 참이면
　$p(3)$, $p(4)$, $p(5)$, $\cdots$, $p(k)$도 참이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 $\frac{3}{2}$

유형 09 수학적 귀납법 – 등식의 증명

$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=2-\frac{3}{2}=\boxed{(가)\ \frac{1}{2}}$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$

위의 식의 양변에 $\boxed{(나)\ \frac{k+1}{2^{k+1}}}$을 더하면

$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\boxed{(나)\ \frac{k+1}{2^{k+1}}}$

$=2-\frac{k+2}{2^k}+\boxed{(나)\ \frac{k+1}{2^{k+1}}}$

$=2-\boxed{(다)\ \frac{k+3}{2^{k+1}}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $f(k)=\frac{k+1}{2^{k+1}}$, $g(k)=\frac{k+3}{2^{k+1}}$이므로

$f(2a)+g(2a)=f(1)+g(1)=\frac{2}{2^2}+\frac{4}{2^2}=\frac{3}{2}$

11 답 17

유형 10 수학적 귀납법 – 배수의 증명

(i) $n=1$일 때

$2^2-1=3$이므로 3의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때

$2^{2k}-1=3m$(m은 자연수)이라고 가정하면

$2^{2(k+1)}-1=\boxed{(가)\ 4}\times2^{2k}-1$

$=4(3m+1)-1$

$=4\times3m+3$

$=3\times(\boxed{(나)\ 4m+1})$

따라서 $n=k+1$일 때도 3의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{2n}-1$은 3의 배수이다.

따라서 $a=4$, $f(m)=4m+1$이므로 $f(a)=f(4)=17$

12 답 (가) $\frac{2k+1}{k+1}$ (나) k

유형 11 수학적 귀납법 – 부등식의 증명

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{(n+1)}$

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{2\times2}{2+1}=\frac{4}{3}$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq2)$일 때

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$

$>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}$

$=\boxed{(가)\ \frac{2k+1}{k+1}}$

이때

$\boxed{(가)\ \frac{2k+1}{k+1}}-\frac{2k+2}{k+2}=\frac{\boxed{(나)\ k}}{(k+1)(k+2)}>0$이므로

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.