맞춤형 핵심 유형 마스터

마플 시너지

PM

정답과 해설

고등 수학 (하)

01 집합의 뜻과 집합 사이의 포함 관계

핵심 유형

	유형01 ②	유형02 ⑤	유형03 ②
유형04 ④	유형05 2	유형06 ②	유형07 ②
유형08 ①	유형09 ⑤	유형10 ③	유형11 8
유형12 ③			

핵심 유형 완성하기

001 ③	002 ④	003 2	004 ④	005 ①
006 ④	007 ③	008 ④		
009 $C=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$			010 ②	
011 ㄱ, ㄴ	012 ③	013 ②	014 2	015 ③
016 ⑤	017 ②	018 5	019 3	020 ④
021 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{9\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 9\}$				022 ①
023 ②	024 ②	025 ④	026 ④	
027 ㄱ, ㄷ	028 $-4\le a\le -3$		029 ⑤	030 2
031 ③	032 -1	033 512	034 ③	035 ⑤
036 14	037 4	038 ①	039 8	040 11
041 ④	042 4	043 15	044 9	045 ③
046 31	047 56	048 ③		

핵심 유형 최종 점검하기

1 ④	2 ①	3 ③	4 $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$	
5 ㄴ, ㄹ	6 ⑤	7 7	8 ①	9 ③
10 4	11 4	12 25	13 ④	14 64
15 ③				

핵심 유형 8~10쪽

유형01 답 ②

①, ③, ④, ⑤ '착한', '소질이 있는', '큰', '잘하는'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

유형02 답 ⑤

집합 A의 원소는 2, 3, 5, 7이므로 ⑤ $9\notin A$

유형03 답 ②

② $\{2, 3, 5, 7\}$이므로 주어진 집합과 같지 않다.

유형04 답 ④

② $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ ➡ 무한집합

③ $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$ ➡ 무한집합

④ $\{5, 10, 15, 20, \cdots, 95\}$ ➡ 유한집합

⑤ $\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$ ➡ 무한집합

유형05 답 2

$A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로 $n(A)=6$

$B=\{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96\}$이므로 $n(B)=8$

$\therefore n(B)-n(A)=8-6=2$

유형06 답 ②

$A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

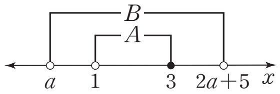
$A\subset C\subset B$

유형07 답 ②

② $\{1, 2\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{1, 2\}\in A$

유형08 답 ①

$A\subset B$가 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a\le 1$, $2a+5>3$

$2a+5>3$에서 $a>-1$이므로 $-1<a\le 1$

따라서 구하는 정수 a는 0, 1의 2개이다.

유형09 답 ⑤

$A=\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$이므로 $n(A)=6$

따라서 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^6=64$

유형10 답 ③

원소 0을 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{4-1}=2^3=8$

유형11 답 8

집합 X는 집합 B의 부분집합 중 원소 1, 2를 포함하는 부분집합이므로 집합 X의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$

유형12 답 ③

집합 A의 부분집합 중에서 1 또는 2를 원소로 갖는 부분집합은 집합 A의 부분집합에서 집합 $\{3, 4, 5\}$의 부분집합을 제외하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^5-2^3=32-8=24$

핵심 유형 완성하기 11~17쪽

001 답 ③

ㄴ, ㄷ. '맛있는', '유명한'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 보기 중 집합인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

002 답 ④

④ '시력이 좋은'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

003 답 2

ㄱ, ㄴ. '많은', '큰'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 보기 중 집합인 것은 ㄷ, ㄹ의 2개이다.

004 답 ④

집합 A의 원소는 1, 2, 3, 6, 9, 18이므로
① $1\in A$ ② $4\notin A$ ③ $6\in A$ ⑤ $18\in A$

005 답 ①

$x^3-x^2-2x=0$에서 $x(x^2-x-2)=0$
$x(x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
따라서 집합 A의 원소는 -1, 0, 2이므로 ① $-2\notin A$

006 답 ④

① $\sqrt{2}$는 무리수이므로 $\sqrt{2}\notin Q$
② 3은 정수이므로 $3\in Q$
③ $\frac{2}{5}$는 유리수이므로 $\frac{2}{5}\in R$
⑤ $1+\sqrt{2}$는 무리수이므로 $1+\sqrt{2}\in R$

007 답 ③

① $A=\{1, 2, 4\}$ ② $A=\{1, 2, 4, 8\}$
③ $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$ ④ $A=\{2, 4, 6, 8, \cdots, 16\}$
⑤ $A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

008 답 ④

④ $\{1, 2, 3, 4, \cdots, 9\}$

009 답 $C=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$a\in A$, $b\in B$인 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로
$C=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

a \ b	2	4	6
0	2	4	6
1	3	5	7
2	4	6	8

010 답 ②

$x=2^a\times3^b$에서 a, b는 자연수이므로 x는 2와 3을 모두 인수로 갖는다.
① $6=2^1\times3^1$ ② $9=3^2$ ③ $12=2^2\times3^1$
④ $18=2^1\times3^2$ ⑤ $24=2^3\times3^1$
따라서 집합 B의 원소가 아닌 것은 ②이다.

011 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\varnothing$ ➡ 유한집합
ㄴ. $\{0\}$ ➡ 유한집합
ㄷ. $\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$ ➡ 무한집합
ㄹ. $\{3, 4, 5, 6, \cdots\}$ ➡ 무한집합
따라서 보기 중 유한집합인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

012 답 ③

① $\{1\}$ ➡ 유한집합
② $\{10, 12, 14, 16, \cdots, 98\}$ ➡ 유한집합
③ $-1<x<1$인 유리수는 무수히 많으므로 무한집합이다.
④ $\varnothing$ ➡ 유한집합
⑤ $\{-1, 3\}$ ➡ 유한집합

013 답 ②

① 원소가 1개 있으므로 공집합이 아니다.
② $x^2+1=0$을 만족하는 실수 x는 존재하지 않으므로 공집합이다.
③ $\{-1, 0, 1\}$이므로 공집합이 아니다.
④ $\{x|-5<x<5\}$이므로 공집합이 아니다.
⑤ $\{ab|0\le ab\le1\}$이므로 공집합이 아니다.

014 답 2

주어진 집합이 공집합이 되려면 이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라고 할 때, $D<0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=1^2-k<0$ $\therefore k>1$
따라서 정수 k의 최솟값은 2이다.

015 답 ③

$A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 $n(A)=4$
$B=\{3, 6, 9, 12, \cdots, 48\}$이므로 $n(B)=16$
$\therefore n(A)+n(B)=4+16=20$

016 답 ⑤

⑤ $n(\{1, 2, 3\})-n(\{1, 2\})=3-2=1$

017 답 ②

$A=\{(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\}$이므로 $n(A)=4$

018 답 5

$A=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $n(A)=4$
$B=\{1, 2, 3, 4, \cdots, k\}$이므로 $n(B)=k$
이때 $n(A)+n(B)=9$이므로
$4+k=9$ $\therefore k=5$

019 답 3

x와 $4-x$가 모두 자연수이므로
$x\ge1$, $4-x\ge1$ $\therefore 1\le x\le3$
따라서 집합 A의 원소가 될 수 있는 것은 1, 2, 3이고
$1\in A$이면 $4-1=3\in A$
$2\in A$이면 $4-2=2\in A$
$3\in A$이면 $4-3=1\in A$
이므로 1과 3은 동시에 집합 A의 원소이거나 원소가 아니다.
(i) 원소가 1개일 때, $A=\{2\}$
(ii) 원소가 2개일 때, $A=\{1, 3\}$
(iii) 원소가 3개일 때, $A=\{1, 2, 3\}$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 $n(A)$의 최댓값은 3이다.

020 답 ④

$A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B=\{-1, 1\}$, $C=\{-1, 0, 1\}$이므로
$B\subset C\subset A$

021 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{9\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 9\}$

$\{1, 3, 9\}$의 진부분집합을 구하면
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{9\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 9\}$

022 답 ①

모든 정수는 유리수이고 모든 유리수는 실수이므로
$Z\subset Q\subset R$

023 답 ②

$A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$인 것을 찾으면 된다.
① $B=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$이므로 $A\neq B$
② $B=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 $A=B$
③ $A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 $A\neq B$
④ $A=\{0, 1\}$, $B=\{-1, 0, 1\}$이므로 $A\neq B$
⑤ $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$이므로 $A\neq B$

024 답 ②

$A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $C=\{0, 1, 2, 4\}$이므로
$A\subset C\subset B$

025 답 ④

④ 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $2\notin A$

026 답 ④

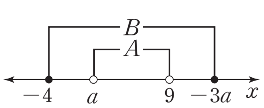
$A=\{a, c, d\}$, $B=\{a, b, c, d, e\}$이므로
④ $\{c, d\}\subset B$

027 답 ㄱ, ㄷ

ㄴ. c는 집합 A의 원소가 아니므로 $c\notin A$
ㄹ. $\{b, c\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{b, c\}\in A$
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

028 답 $-4\leq a\leq -3$

$A\subset B$가 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-4\leq a$, $9\leq -3a$
$9\leq -3a$에서 $a\leq -3$이므로 $-4\leq a\leq -3$

029 답 ⑤

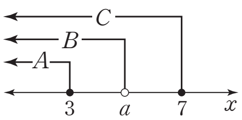
$A=B$이므로 $a+b=4$, $3a-2b=7$
두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$
$\therefore a-b=2$

030 답 2

$A\subset B$이므로 $a-1=1$ 또는 $2a-1=1$
$\therefore a=2$ 또는 $a=1$
(i) $a=1$일 때
$A=\{1, 3\}$, $B=\{0, 1, 4\}$이므로 $A\not\subset B$
(ii) $a=2$일 때
$A=\{1, 4\}$, $B=\{1, 3, 4\}$이므로 $A\subset B$
(i), (ii)에 의하여 $a=2$

031 답 ③

$A\subset B\subset C$가 되도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$3<a\leq 7$
따라서 구하는 정수 a는 4, 5, 6, 7의 4개이다.

032 답 -1

$A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$
따라서 $a^2-2a+3=6$이므로
$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$
(i) $a=-1$일 때
$A=\{2, 6, 9\}$, $B=\{2, 6, 9\}$이므로 $A=B$
(ii) $a=3$일 때
$A=\{2, 6, 9\}$, $B=\{-7, 6, 10\}$이므로 $A\neq B$
(i), (ii)에 의하여 $a=-1$

033 답 512

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$이므로 $n(A)=9$
따라서 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^9=512$

034 답 ③

$A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 $n(A)=4$
따라서 집합 A의 진부분집합의 개수는 $2^4-1=15$

035 답 ⑤

각 집합의 부분집합의 개수를 구하면
①, ② 원소의 개수가 4이므로 $2^4=16$
③ $\{1, 2, 3, 4\}$에서 원소의 개수가 4이므로 $2^4=16$
④ $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$에서 원소의 개수가 6이므로 $2^6=64$
⑤ $\{6, 12, 18, 24, 30\}$에서 원소의 개수가 5이므로 $2^5=32$

036 답 14

두 집합 A, B의 원소의 개수를 각각 a, b라고 하면
$2^a=64$, $2^b-1=255$
$2^a=64=2^6$에서 $a=6$
$2^b=256=2^8$에서 $b=8$
$\therefore n(A)+n(B)=a+b=14$

037 답 4

원소 5, 7을 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$

038 답 ①

$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$이므로 원소 6, 12를 포함하는 진부분집합의 개수는

$2^{7-2}-1=2^5-1=32-1=31$

039 답 8

원소 a, c는 포함하고 원소 e는 포함하지 않는 부분집합 X의 개수는

$2^{6-2-1}=2^3=8$

040 답 11

$A=\{1, 2, 3, 4, \cdots, k\}$에서 $n(A)=k$이므로 원소 2, 7은 포함하고 원소 3, 4, 5는 포함하지 않는 부분집합의 개수는 2^{k-5}이다.

따라서 $2^{k-5}=64=2^6$이므로

$k-5=6 \qquad \therefore k=11$

041 답 ④

$A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 원소 1, 3을 포함하는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$

042 답 4

구하는 집합은 집합 B의 부분집합 중 원소 a, b는 포함하고 원소 e는 포함하지 않는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^{5-2-1}=2^2=4$

043 답 15

$A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로 주어진 조건을 만족하는 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 원소 1, 2를 포함하는 진부분집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{6-2}-1=2^4-1=16-1=15$

044 답 9

원소 1, 2, 3, 6을 포함하는 집합 A의 부분집합 X의 개수는 2^{n-4}이다.

따라서 $2^{n-4}=32=2^5$이므로

$n-4=5 \qquad \therefore n=9$

045 답 ③

$A=\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$이므로 집합 A의 부분집합 중에서 5 또는 8을 원소로 갖는 부분집합은 집합 A의 부분집합에서 집합 $\{2, 11, 14, 17, 20\}$의 부분집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$2^7-2^5=128-32=96$

046 답 31

$A=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$이므로 집합 A의 부분집합 중에서 홀수인 원소만으로 이루어진 부분집합은 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합에서 $\varnothing$을 제외하면 된다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$2^5-1=32-1=31$

047 답 56

$A=\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$이므로 집합 A의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합은 집합 A의 부분집합에서 집합 $\{10, 20, 30\}$의 부분집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$2^6-2^3=64-8=56$

048 답 ③

원소의 합이 25 이상이려면 원소가 3개 이상이어야 한다.

(i) 원소가 3개인 경우

$\{6, 9, 10\}$, $\{7, 8, 10\}$, $\{7, 9, 10\}$, $\{8, 9, 10\}$의 4개

(ii) 원소가 4개인 경우

$\{6, 7, 8, 9\}$, $\{6, 7, 8, 10\}$, $\{6, 7, 9, 10\}$, $\{6, 8, 9, 10\}$, $\{7, 8, 9, 10\}$의 5개

(iii) 원소가 5개인 경우

$\{6, 7, 8, 9, 10\}$의 1개

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 부분집합의 개수는

$4+5+1=10$

핵심 유형 최종 점검하기 • 18~19쪽

1 답 ④

유형 01 집합의 뜻

④ '잘하는'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

2 답 ①

유형 02 집합과 원소 사이의 관계

$x^2-2x-3<0$에서

$(x+1)(x-3)<0 \qquad \therefore -1<x<3$

따라서 $A=\{0, 1, 2\}$이므로 ① $-1\notin A$

3 답 ③

유형 03 집합의 표현

① $\{1, 2, 4, 8\}$

② $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

③ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

④ $\{2, 4, 6, 8, \cdots, 24\}$

⑤ $\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$

4 답 $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$

유형 03 집합의 표현

$a\in A$, $b\in B$인 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	1	2
-2	-2	-4
0	0	0
2	2	4

$\{-4, -2, 0, 2, 4\}$

5 답 ㄴ, ㄹ

유형 04 유한집합과 무한집합

ㄱ. $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ ➡ 유한집합

ㄴ. $0<x<1$인 실수 x는 무수히 많으므로 무한집합이다.

ㄷ. $\{101, 103, 105, 107, \cdots, 999\}$ ➡ 유한집합

ㄹ. $\{\cdots, -2, -1, 1, 2, \cdots\}$ ➡ 무한집합

따라서 보기 중 무한집합인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

6 답 ⑤

유형 05 유한집합의 원소의 개수

⑤ 집합 $\{1, 2, \{3, 4\}\}$의 원소는 $1, 2, \{3, 4\}$의 3개이므로
$n(\{1, 2, \{3, 4\}\})=3$

7 답 7

유형 05 유한집합의 원소의 개수

a와 $\frac{16}{a}$이 모두 자연수이므로 a는 16의 양의 약수이다.

따라서 집합 A의 원소가 될 수 있는 것은 1, 2, 4, 8, 16이고

$1\in A$이면 $\frac{16}{1}=16\in A$

$2\in A$이면 $\frac{16}{2}=8\in A$

$4\in A$이면 $\frac{16}{4}=4\in A$

$8\in A$이면 $\frac{16}{8}=2\in A$

$16\in A$이면 $\frac{16}{16}=1\in A$

이므로 1과 16, 2와 8은 동시에 집합 A의 원소이거나 원소가 아니다.

(i) 원소가 1개일 때, $A=\{4\}$

(ii) 원소가 2개일 때, $A=\{1, 16\}$, $A=\{2, 8\}$

(iii) 원소가 3개일 때, $A=\{1, 4, 16\}$, $A=\{2, 4, 8\}$

(iv) 원소가 4개일 때, $A=\{1, 2, 8, 16\}$

(v) 원소가 5개일 때, $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$

(i)~(v)에 의하여 구하는 집합 A의 개수는

$1+2+2+1+1=7$

8 답 ①

유형 06 집합 사이의 포함 관계

모든 정사각형은 직사각형이고 모든 직사각형은 평행사변형이므로

$X\subset Y\subset Z$

9 답 ③

유형 07 집합과 원소 및 집합과 집합 사이의 관계

ㄴ. $\{\varnothing\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{\varnothing\}\in A$

ㄷ. $\{2, 3\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{2, 3\}\in A$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

10 답 4

유형 08 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 미지수 구하기

$A=\{-2, 3\}$이고 $A\subset B$이므로

$-2\in B$, $3\in B$

따라서 $a>3$이어야 하므로 정수 a의 최솟값은 4이다.

11 답 4

유형 08 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 미지수 구하기

$A=B$이므로 $a^2-3a=4$

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

(i) $a=-1$일 때

$A=\{-1, 3, 4\}$, $B=\{-2, 4, 9\}$이므로 $A\neq B$

(ii) $a=4$일 때

$A=\{-1, 3, 4\}$, $B=\{-1, 3, 4\}$이므로 $A=B$

(i), (ii)에 의하여 $a=4$

12 답 25

유형 09 부분집합의 개수

집합 A의 진부분집합의 개수가 31이면 부분집합의 개수가 32이므로 집합 A의 원소의 개수를 a라고 하면

$2^a=32=2^5$ $\quad\therefore a=5$

즉, $A=\{2, 3, 5, 7, 11\}$이어야 하므로

$11<k\le 13$ $\quad\therefore k=12$ 또는 $k=13$

따라서 구하는 모든 k의 값의 합은

$12+13=25$

13 답 ④

유형 10 특정한 원소를 포함하거나 포함하지 않는 부분집합의 개수

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로 집합 A의 부분집합 중 원소 1은 포함하고 원소 2, 4, 8은 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{8-1-3}=2^4=16$

14 답 64

유형 11 $A\subset X\subset B$를 만족하는 집합 X의 개수

$A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 원소 1, 3, 5, 7을 포함하는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{10-4}=2^6=64$

15 답 ③

유형 12 여러 가지 부분집합의 개수

$A=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$이고 집합 B의 두 원소의 곱이 홀수이려면 두 원소는 모두 홀수이어야 하므로 집합 B의 원소는 집합 A의 원소 1, 3, 5, 7, 9 중 두 개이다.

따라서 집합 B는 $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 7\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$, $\{3, 9\}$, $\{5, 7\}$, $\{5, 9\}$, $\{7, 9\}$의 10개이다.

02 집합의 연산

핵심 유형

	유형01 {1, 2, 3, 5, 6, 7}		유형02 ④
유형03 5	유형04 ②	유형05 2	유형06 ③
유형07 16	유형08 ⑤	유형09 ⑤	유형10 −9
유형11 ③	유형12 ④	유형13 8	유형14 ④

핵심 유형 완성하기

001 5	002 ⑤	003 ③	004 ②	005 ③
006 ②	007 7	008 ②	009 ①	
010 ㄴ, ㄹ	011 ③	012 ⑤	013 3	014 ①
015 ⑤	016 ③	017 ③	018 ④	019 ③
020 ②	021 ①	022 16	023 ②	024 ①
025 ⑤	026 ①	027 ③	028 ⑤	029 ②
030 ②	031 24	032 ④	033 33	034 30
035 ②	036 ⑤	037 −3	038 ③	039 ②
040 ④	041 ①	042 4	043 2	044 20
045 ①	046 ②	047 ③	048 2	049 15
050 12	051 7			

핵심 유형 최종 점검하기

1 ④	2 4	3 ⑤	4 5	5 ④
6 ③	7 ②	8 ⑤	9 ②	10 ③
11 16	12 ②	13 ④	14 ①	15 −7
16 ③	17 34	18 ①	19 10	20 12

핵심 유형 22~24쪽

유형01 답 {1, 2, 3, 5, 6, 7}

$A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$,
$C=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로
$A\cup(B\cap C)=\{1, 3, 5, 7\}\cup\{1, 2, 3, 6\}$
$=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

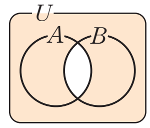
유형02 답 ④

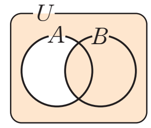
② {2, 4, 6, 8} ③ {2, 3, 5, 7} ④ {1, 3, 5, 15} ⑤ {1, 4}
따라서 집합 {2, 4, 6, 8}과 서로소인 집합은 ④이다.

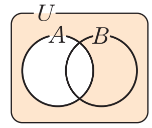
유형03 답 5

$U=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 12\}$, $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{4, 8, 12\}$
이므로
$A^C-B=\{5, 7, 8, 9, 10, 11\}-\{4, 8, 12\}=\{5, 7, 9, 10, 11\}$
따라서 집합 A^C-B의 원소의 개수는 5이다.

유형04 답 ②

①, ⑤ 

③ 

④ 

유형05 답 2

$A\cap B=\{1, 2\}$에서 $2\in A$이므로
$a^2-a=2$, $a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=2$
(i) $a=-1$일 때
$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{-2, 2, 4\}$이므로 $A\cap B=\{2, 4\}$
따라서 주어진 조건을 만족하지 않는다.
(ii) $a=2$일 때
$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 7\}$이므로 $A\cap B=\{1, 2\}$
(i), (ii)에 의하여 $a=2$

유형06 답 ③

③ $A\subset B$이므로 $A-B=\varnothing$

유형07 답 16

$A\cup X=X$에서 $A\subset X$이고, $B\cap X=X$에서 $X\subset B$이므로
$A\subset X\subset B$
따라서 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 원소 2, 4, 6을 포함하는 부분집합이므로 집합 X의 개수는
$2^{7-3}=2^4=16$

유형08 답 ⑤

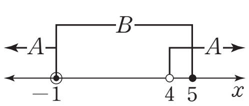
$$\begin{aligned}(A-B)^C\cap B^C&=(A\cap B^C)^C\cap B^C\\&=(A^C\cup B)\cap B^C\\&=(A^C\cap B^C)\cup(B\cap B^C)\\&=(A^C\cap B^C)\cup\varnothing\\&=A^C\cap B^C=(A\cup B)^C\end{aligned}$$

유형09 답 ⑤

$$\begin{aligned}(A_3\cup A_6)\cap(A_4\cup A_{12})&=A_3\cap A_4\\&=A_{12}\end{aligned}$$

유형10 답 −9

$x^2-3x-4>0$에서 $(x+1)(x-4)>0$
$\therefore x<-1$ 또는 $x>4$ $\therefore A=\{x|x<-1$ 또는 $x>4\}$
이때 $A\cup B=\{x|x$는 모든 실수$\}$,
$A\cap B=\{x|4<x\le 5\}$이므로 오른쪽 그림에서



$B=\{x|-1\le x\le 5\}$
$=\{x|(x+1)(x-5)\le 0\}$
$=\{x|x^2-4x-5\le 0\}$
따라서 $a=-4$, $b=-5$이므로
$a+b=-9$

유형11 답 ③

① $A \triangle A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \varnothing$
② $A \triangle \varnothing = (A \cup \varnothing) - (A \cap \varnothing) = A - \varnothing = A$
③ $A \triangle U = (A \cup U) - (A \cap U) = U - A = A^C$
④ $A \triangle A^C = (A \cup A^C) - (A \cap A^C) = U - \varnothing = U$
⑤ $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
$= (B \cup A) - (B \cap A) = B \triangle A$

유형12 답 ④

$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$이므로
$10 = 15 - n(A \cap B)$ $\quad \therefore n(A \cap B) = 5$
$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 15 + 10 - 5 = 20$

유형13 답 8

$n(A) > n(B)$이므로 $n(A \cup B)$는 $B \subset A$일 때 최소, $A \cup B = U$일 때 최대이다.
즉, $n(A) \le n(A \cup B) \le n(U)$이므로
$16 \le n(A \cup B) \le 24$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 16 + 12 - n(A \cap B)$
$= 28 - n(A \cap B)$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $16 \le 28 - n(A \cap B) \le 24$이므로
$-12 \le -n(A \cap B) \le -4$ $\quad \therefore 4 \le n(A \cap B) \le 12$
따라서 $M = 12$, $m = 4$이므로 $M - m = 8$

유형14 답 ④

반 학생 전체의 집합을 U, 축구를 좋아하는 학생의 집합을 A, 농구를 좋아하는 학생의 집합을 B라고 하면
$n(U) = 35$, $n(A) = 23$, $n(B) = 16$, $n((A \cup B)^C) = 7$
$n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B)$에서
$7 = 35 - n(A \cup B)$ $\quad \therefore n(A \cup B) = 28$
축구와 농구를 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A \cap B$이므로
$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
$= 23 + 16 - 28 = 11$
따라서 구하는 학생 수는 11이다.

핵심 유형 완성하기 25~32쪽

001 답 5

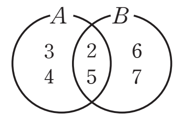
$A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $C = \{1, 2, 4\}$이므로
$(A \cap B) \cup C = \{2, 3, 5\} \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\therefore n((A \cap B) \cup C) = 5$

002 답 ⑤

$C = \{1, 2, 7, 14\}$이므로
⑤ $A \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5, 7\}$

003 답 ③

주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B = \{2, 5, 6, 7\}$



004 답 ②

④ $\{8, 16, 24, 32, \cdots\}$ $\quad$ ⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
따라서 집합 $\{1, 2, 4, 8\}$과 서로소인 집합은 ②이다.

005 답 ③

③ $B \subset A$이므로 $A \cap B \neq \varnothing$
④ $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, \cdots\}$이므로 $A \cap B = \varnothing$
⑤ $A = \{-1, 0\}$, $B = \{1\}$이므로 $A \cap B = \varnothing$
따라서 두 집합 A, B가 서로소가 아닌 것은 ③이다.

006 답 ②

집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 집합 $B = \{d, e\}$와 서로소인 집합은 원소 d, e를 포함하지 않는 부분집합이다.
따라서 구하는 집합의 개수는 $2^{5-2} = 2^3 = 8$

007 답 7

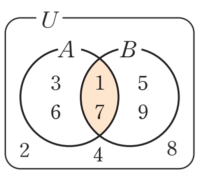
$A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 5, 8\}$이므로 $A - B = \{3, 7, 9\}$
$\therefore (A-B)^C = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$
따라서 집합 $(A-B)^C$의 원소의 개수는 7이다.

008 답 ②

$A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$이므로
$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $A \cap B = \{2, 4, 8\}$
$\therefore (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 6\}$
따라서 $(A \cup B) - (A \cap B)$의 모든 원소의 합은 $1 + 6 = 7$

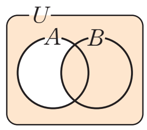
009 답 ①

주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$A \cap B = \{1, 7\}$



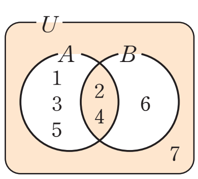
010 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ, ㄷ.

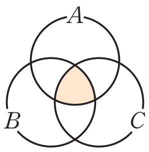


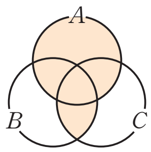
011 답 ③

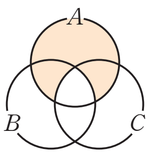
주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 색칠한 부분이 나타내는 집합은
$\{2, 4, 7\}$

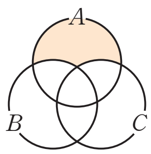


012 답 ⑤

①


②


③


④


013 답 3

$B-A=\{4\}$에서 $2\in(A\cap B)$
따라서 $a^2-2a-1=2$이므로 $a^2-2a-3=0$
$(a+1)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=3$
(i) $a=-1$일 때
$A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{-7, 2, 4\}$이므로 $B-A=\{-7, 4\}$
따라서 주어진 조건을 만족하지 않는다.
(ii) $a=3$일 때
$A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{2, 4, 5\}$이므로 $B-A=\{4\}$
(i), (ii)에 의하여 $a=3$

014 답 ①

$A\cap B=\{-2, 5\}$이므로 $2a+b=5$, $a-b=-2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$
$\therefore a+b=4$

015 답 ⑤

$A-B=\{2\}$에서 $2\in A$이므로
$a=2$ 또는 $a+2=2$ $\quad\therefore a=2$ 또는 $a=0$
(i) $a=0$일 때
$A=\{0, 2, 3\}$, $B=\{3, 5, 6\}$이므로 $A-B=\{0, 2\}$
따라서 주어진 조건을 만족하지 않는다.
(ii) $a=2$일 때
$A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5\}$이므로 $A-B=\{2\}$
(i), (ii)에 의하여 $B=\{3, 4, 5\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
$3+4+5=12$

016 답 ③

$A=\{3, 4, a-2\}$, $A\cup B=\{-2, 1, 3, 4\}$에서
$a-2=-2$ 또는 $a-2=1$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=3$
(i) $a=0$일 때
$A=\{-2, 3, 4\}$, $B=\{-3, -2, 1\}$이므로
$A\cup B=\{-3, -2, 1, 3, 4\}$
따라서 주어진 조건을 만족하지 않는다.
(ii) $a=3$일 때
$A=\{1, 3, 4\}$, $B=\{-2, 3, 4\}$이므로
$A\cup B=\{-2, 1, 3, 4\}$
(i), (ii)에 의하여 $a=3$

017 답 ③

$A\cup B=A$이므로
ㄱ. $B\subset A$ $\qquad$ ㄹ. $B-A=\varnothing$
따라서 보기 중 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

018 답 ④

③ $U-A^C=(A^C)^C=A$
④ $A-B=A\cap B^C$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

019 답 ③

$A-B=A$이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

020 답 ②

$B^C\subset A^C$이므로 $A\subset B$
① $A\cup B=B$
② $B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A=A$
③ $B\cap(A\cup B)=B\cap B=B$
④ $B\cup(A\cap B)=B\cup A=B$
⑤ $B\cup(A-B)=B\cup\varnothing=B$
따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

021 답 ①

$(A\cap B)\cup X=X$에서 $(A\cap B)\subset X$
$(A\cup B)\cap X=X$에서 $X\subset(A\cup B)$
$\therefore (A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$
$A\cap B=\{3, 5, 7\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$이므로
$\{3, 5, 7\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
따라서 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합 중 원소 3, 5, 7을 포함하는 부분집합이므로 집합 X의 개수는
$2^{6-3}=2^3=8$

022 답 16

$A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 $A-B=\{5, 10\}$
$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$, $B\cup X=X$에서 $B\subset X$
$\therefore \{5, 10\}\subset X$, $\{1, 2, 4, 8\}\subset X$
따라서 집합 X는 집합 $U=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$의 부분집합 중 원소 1, 2, 4, 5, 8, 10을 포함하는 부분집합이므로 집합 X의 개수는
$2^{10-6}=2^4=16$

023 답 ②

$A-X=\varnothing$이므로 $A\subset X$
$B\cap X^C=B-X=B$이므로 $B\cap X=\varnothing$
따라서 집합 X는 집합 U의 부분집합 중 원소 1, 3, 5, 7은 포함하고 원소 4, 8은 포함하지 않는 부분집합이므로 집합 X의 개수는
$2^{8-4-2}=2^2=4$

024 답 ①

$A-B=\{1,\ 2\}$이고 $(A-B)\cap X=\{2\}$이므로 집합 X는 2를 원소로 갖고 1을 원소로 갖지 않는다.

또 $B\cup X=X$에서 $B\subset X$이므로 집합 X는 5, 10을 원소로 갖는다.

따라서 집합 X는 집합 $U=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$의 부분집합 중 원소 2, 5, 10은 포함하고 원소 1은 포함하지 않는 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{6-3-1}=2^2=4$

025 답 ⑤

$$\begin{aligned}(A-C)-(B-C)&=(A\cap C^C)-(B\cap C^C)\\&=(A\cap C^C)\cap(B\cap C^C)^C\\&=(A\cap C^C)\cap(B^C\cup C)\\&=(A\cap C^C\cap B^C)\cup(A\cap C^C\cap C)\\&=\{A\cap(C^C\cap B^C)\}\cup\varnothing\\&=A\cap(B\cup C)^C\\&=A-(B\cup C)\end{aligned}$$

026 답 ①

$$\begin{aligned}A\cup(B\cap C)&=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\&=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}\cap\{2,\ 4,\ 6\}=\{2,\ 4\}\end{aligned}$$

따라서 구하는 원소의 합은 $2+4=6$

027 답 ③

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이고

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$이므로

$A\cap B=\{3\}$

또 $B\cap(A\cap B)^C=B-(A\cap B)=\{5\}$이므로

$B=\{3,\ 5\}$

$$\begin{aligned}\therefore\ B^C&=U-B\\&=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}-\{3,\ 5\}=\{1,\ 2,\ 4\}\end{aligned}$$

028 답 ⑤

$$\begin{aligned}\{(A-B)\cup B\}^C&=\{(A\cap B^C)\cup B\}^C\\&=\{(A\cup B)\cap(B^C\cup B)\}^C\\&=\{(A\cup B)\cap U\}^C\\&=(A\cup B)^C=\varnothing\end{aligned}$$

$\therefore\ A\cup B=U$

029 답 ②

$$\begin{aligned}\{(A\cap B)\cup(A-B)\}\cup B&=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cup B\\&=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cup B\\&=(A\cap U)\cup B\\&=A\cup B=A\end{aligned}$$

따라서 $B\subset A$이므로

①, ③ $A\cap B=B$

④ $B-A=\varnothing$

⑤ $A^C\subset B^C$

030 답 ②

① $$\begin{aligned}A\cap(A^C\cup B)&=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)\\&=\varnothing\cup(A\cap B)\\&=A\cap B\end{aligned}$$

② $$\begin{aligned}(A-B)\cup(A-C)&=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)\\&=A\cap(B^C\cup C^C)\\&=A\cap(B\cap C)^C\\&=A-(B\cap C)\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}A-(B-C)&=A-(B\cap C^C)\\&=A\cap(B\cap C^C)^C\\&=A\cap(B^C\cup C)\\&=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)\\&=(A-B)\cup(A\cap C)\end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)&=(A\cup B)\cap(A\cup B)^C\\&=(A\cup B)-(A\cup B)=\varnothing\end{aligned}$$

⑤ $$\begin{aligned}(A\cap B)-(A\cap C)&=(A\cap B)\cap(A\cap C)^C\\&=(A\cap B)\cap(A^C\cup C^C)\\&=(A\cap B\cap A^C)\cup(A\cap B\cap C^C)\\&=\varnothing\cup(A\cap B\cap C^C)\\&=(A\cap B)\cap C^C\\&=(A\cap B)-C\end{aligned}$$

031 답 24

$(A_2\cap A_3)\cap(A_8\cup A_{16})=A_6\cap A_8=A_{24}$

$\therefore\ n=24$

032 답 ④

$$\begin{aligned}A_{16}\cap A_{24}\cap A_{32}&=(A_{16}\cap A_{24})\cap A_{32}\\&=A_8\cap A_{32}=A_8\\&=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}\end{aligned}$$

따라서 집합 $A_{16}\cap A_{24}\cap A_{32}$에 속하지 않는 원소는 ④이다.

033 답 33

$$\begin{aligned}A_2\cap(A_3\cup A_4)&=(A_2\cap A_3)\cup(A_2\cap A_4)\\&=A_6\cup A_4\end{aligned}$$

따라서 집합 $A_2\cap(A_3\cup A_4)$는 100 이하의 자연수 중 4의 배수이거나 6의 배수인 수의 집합이므로 원소의 개수는

(4의 배수의 개수)+(6의 배수의 개수)−(12의 배수의 개수)

$=25+16-8=33$

034 답 30

$A_4\cap A_5=A_{20}$이므로 $A_p\subset A_{20}$을 만족하는 자연수 p는 20의 배수이다.

$B_{20}\cap B_{30}=B_{10}$이므로 $B_q\subset B_{10}$을 만족하는 자연수 q는 10의 약수이다.

따라서 자연수 p의 최솟값은 20이고 자연수 q의 최댓값은 10이므로 구하는 합은

$20+10=30$

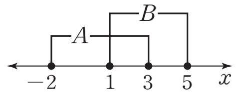
035 답 ②

$x^2-x-6\le0$에서 $(x+2)(x-3)\le0$

$\therefore\ -2\le x\le3 \qquad \therefore\ A=\{x\,|\,-2\le x\le3\}$

이때 $A\cap B=\{x\,|\,1\le x\le3\}$,

$A\cup B=\{x\,|\,-2\le x\le5\}$이므로 오른쪽 그림에서



$B=\{x\,|\,1\le x\le5\}$

$\quad=\{x\,|\,(x-1)(x-5)\le0\}$

$\quad=\{x\,|\,x^2-6x+5\le0\}$

따라서 $a=-6$, $b=5$이므로 $a-b=-11$

036 답 ⑤

$x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=3 \qquad \therefore\ A=\{2,\ 3\}$

이때 $A-B=\{3\}$에서 $2\in B$

따라서 $x^3-ax^2-4a(x-1)=0$의 한 근이 2이므로

$8-4a-4a=0 \qquad \therefore\ a=1$

즉, $B=\{x\,|\,x^3-x^2-4x+4=0\}$이므로

$x^3-x^2-4x+4=0$에서 $x^2(x-1)-4(x-1)=0$

$(x^2-4)(x-1)=0$, $(x+2)(x-2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore\ B=\{-2,\ 1,\ 2\}$

따라서 $B-A=\{-2,\ 1\}$이므로 모든 원소의 합은

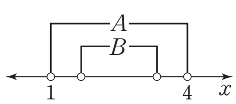
$-2+1=-1$

037 답 -3

$x^2-5x+4<0$에서 $(x-1)(x-4)<0$

$\therefore\ 1<x<4 \qquad \therefore\ A=\{x\,|\,1<x<4\}$

이때 $A\cap B=B$에서 $B\subset A$이므로 오른쪽 그림에서 $x^2-4x-k=0$의 두 근이 모두 1과 4 사이에 존재한다.



$f(x)=x^2-4x-k$라고 하면

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 할 때, $B\ne\varnothing$이므로

$\quad\dfrac{D}{4}=4+k>0 \qquad \therefore\ k>-4$

(ii) $f(1)=1-4-k\ge0$, $f(4)=16-16-k\ge0$이므로

$\quad k\le-3$, $k\le0 \qquad \therefore\ k\le-3$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이므로

$\quad 1<2<4$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $-4<k\le-3$

따라서 실수 k의 최댓값은 -3이다.

038 답 ③

① $A\star\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A$

② $U\star A=(U-A)\cup(A-U)=A^C\cup\varnothing=A^C$

③ $A\star A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

④ $U\star\varnothing=(U-\varnothing)\cup(\varnothing-U)=U\cup\varnothing=U$

⑤ $A\star B=(A-B)\cup(B-A)$

$\qquad\quad=(B-A)\cup(A-B)=B\star A$

039 답 ②

$B◎A=(B\cup A)\cap(B\cup A^C)$

$\qquad=B\cup(A\cap A^C)$

$\qquad=B\cup\varnothing=B$

즉, $B◎A=B$이므로

$(B◎A)◎A=B◎A=B$

040 답 ④

$A\diamond B=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C=(A\cup B)-(A\cap B)$이므로

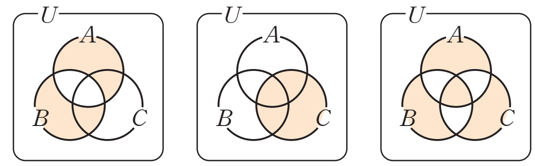
ㄱ. $A\diamond A^C=(A\cup A^C)-(A\cap A^C)$

$\qquad\qquad=U-\varnothing=U$

ㄴ. $A\diamond B=(A\cup B)-(A\cap B)$

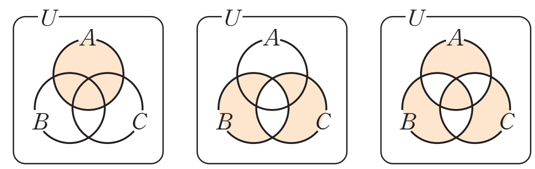
$\qquad\quad=(B\cup A)-(B\cap A)=B\diamond A$

ㄷ. $(A\diamond B)\diamond C$를 벤다이어그램으로 나타내면



$(A\diamond B) \quad \diamond \quad C \quad = \quad (A\diamond B)\diamond C$

$A\diamond(B\diamond C)$를 벤다이어그램으로 나타내면



$A \quad \diamond \quad (B\diamond C) \quad = \quad A\diamond(B\diamond C)$

$\therefore\ (A\diamond B)\diamond C=A\diamond(B\diamond C)$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

041 답 ①

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\qquad\qquad=12+15-7=20$

$\therefore\ n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$\qquad\qquad\qquad=n(U)-n(A\cup B)$

$\qquad\qquad\qquad=30-20=10$

042 답 4

$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$이므로

$20=25-n(A\cap B) \qquad \therefore\ n(A\cap B)=5$

$n(A)=n(U)-n(A^C)$

$\qquad=25-16=9$

$\therefore\ n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$\qquad\qquad\quad=9-5=4$

043 답 2

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$4=18-n(A\cup B) \qquad \therefore\ n(A\cup B)=14$

$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$이므로

$14=5+7+n(A\cap B) \qquad \therefore\ n(A\cap B)=2$

044 답 20

$A\cap B=\varnothing$이므로 $A\cap B\cap C=\varnothing$

$n(A\cup C)=n(A)+n(C)-n(A\cap C)$이므로

$16=8+14-n(A\cap C)$　　$\therefore n(A\cap C)=6$

$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$이므로

$18=9+14-n(B\cap C)$　　$\therefore n(B\cap C)=5$

$$\begin{aligned}\therefore n(A\cup B\cup C)&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)\\&\quad-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\\&=8+9+14-0-5-6+0=20\end{aligned}$$

045 답 ①

$n(A)=n(U)-n(A^C)=50-16=34$

$n(A)>n(B)$이므로 $n(A\cup B)$는 $B\subset A$일 때 최소, $A\cup B=U$일 때 최대이다.

즉, $n(A)\le n(A\cup B)\le n(U)$이므로

$34\le n(A\cup B)\le 50$　　…… ㉠

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=34+28-n(A\cap B)=62-n(A\cap B)\end{aligned}$$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $34\le 62-n(A\cap B)\le 50$이므로

$-28\le -n(A\cap B)\le -12$

$\therefore 12\le n(A\cap B)\le 28$

따라서 $M=28$, $m=12$이므로 $M-m=16$

046 답 ②

$n(A)<n(B)$이므로 $n(A\cup B)$는 $A\subset B$일 때 최소, $A\cup B=U$일 때 최대이다.

즉, $n(B)\le n(A\cup B)\le n(U)$이므로

$25\le n(A\cup B)\le 35$　　…… ㉠

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=n(A\cup B)-20$이므로

$n(A\cup B)=n(B-A)+20$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $25\le n(B-A)+20\le 35$이므로

$5\le n(B-A)\le 15$

따라서 $n(B-A)$의 최솟값은 5이다.

047 답 ③

$n(A)<n(B)$이므로 $n(A\cap B)$는 $A\subset B$일 때 최대이다.

즉, $n(A\cap B)\le n(A)=8$이므로

$3\le n(A\cap B)\le 8$　　…… ㉠

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=23-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=23-n(A\cup B)$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $3\le 23-n(A\cup B)\le 8$이므로

$15\le n(A\cup B)\le 20$

따라서 $M=20$, $m=15$이므로 $M+m=35$

048 답 2

반 학생 전체의 집합을 U, 수학 참고서를 가지고 있는 학생의 집합을 A, 영어 참고서를 가지고 있는 학생의 집합을 B라고 하면

$n(U)=40$, $n(A)=32$, $n(B)=24$, $n(A\cap B)=18$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=32+24-18=38$

두 참고서 중 어느 것도 가지고 있지 않은 학생의 집합은 $(A\cup B)^C$이므로

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=40-38=2$

따라서 구하는 학생 수는 2이다.

049 답 15

학생 전체의 집합을 U, 일본어를 좋아하는 학생의 집합을 A, 중국어를 좋아하는 학생의 집합을 B라고 하면

$n(U)=50$, $n(A)=22$, $n((A\cup B)^C)=13$

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$13=50-n(A\cup B)$　　$\therefore n(A\cup B)=37$

중국어만 좋아하는 학생의 집합은 $B-A$이므로

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=37-22=15$

따라서 구하는 학생 수는 15이다.

050 답 12

고객 전체의 집합을 U, 손거울을 구매한 고객의 집합을 A, 책갈피를 구매한 고객의 집합을 B라고 하면

$n(U)=28$, $n(A)=16$, $n(B)=12$

$n(A)>n(B)$이므로 $n(A\cup B)$는 $B\subset A$일 때 최소, $A\cup B=U$일 때 최대이다.

즉, $n(A)\le n(A\cup B)\le n(U)$이므로

$16\le n(A\cup B)\le 28$　　…… ㉠

이때 손거울과 책갈피 중 어느 것도 구매하지 않은 고객의 집합은 $(A\cup B)^C$이므로

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=28-n(A\cup B)$

$\therefore n(A\cup B)=28-n((A\cup B)^C)$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $16\le 28-n((A\cup B)^C)\le 28$이므로

$-12\le -n((A\cup B)^C)\le 0$　　$\therefore 0\le n((A\cup B)^C)\le 12$

따라서 손거울과 책갈피 중 어느 것도 구매하지 않은 고객 수의 최댓값은 12이다.

051 답 7

선우네 반 학생 전체의 집합을 U, 속초에 가 본 학생의 집합을 A, 부산에 가 본 학생의 집합을 B, 광주에 가 본 학생의 집합을 C라고 하면

$n(U)=40$, $n(A)=15$, $n(B)=16$, $n(C)=22$,

$n(A\cap B\cap C)=3$

이때 한 곳도 가 보지 않은 학생은 없으므로

$n(A\cup B\cup C)=n(U)=40$

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)\\&\quad-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

이므로

$40=15+16+22-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+3$

$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=16$

따라서 세 곳 중 두 곳만 가 본 학생 수는

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$

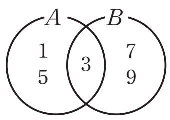
$=16-3\times 3=7$

핵심 유형 **최종 점검하기** • 33~35쪽

1 답 ④

유형 01 합집합과 교집합

주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A=\{1,\ 3,\ 5\}$

2 답 4

유형 02 서로소인 집합

$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$이므로 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중에서 집합 B와 서로소인 집합은 원소 1, 3, 5를 포함하지 않는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

3 답 ⑤

유형 03 여집합과 차집합

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 8\}$, $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{4,\ 8\}$이므로

$B^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$

$\therefore\ A-B^C=\{4,\ 8\}$

따라서 집합 $A-B^C$의 모든 원소의 합은

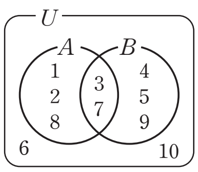
$4+8=12$

4 답 5

유형 03 여집합과 차집합

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10\}$,

$(A\cup B)^C=\{6,\ 10\}$이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

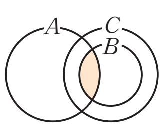


따라서 $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$이므로 원소의 개수는 5이다.

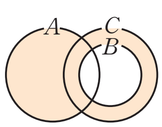
5 답 ④

유형 04 집합의 연산과 벤다이어그램

①

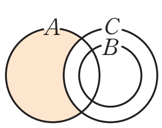


②



③ $(A\cap B)-C=\varnothing$

⑤



6 답 ③

유형 05 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기

$A-B=\{3\}$이므로 집합 A에서 4, 7, $a+b$는 모두 집합 B의 원소이다.

따라서 $a+b=5$, $-a+3b=7$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$

$\therefore\ ab=6$

7 답 ②

유형 06 집합의 연산에 대한 성질

$A^C\subset B^C$이므로 $B\subset A$

이때 $3\in B$에서 $3\in A$이므로 $a^2-2a=3$

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때

$A=\{2,\ 3,\ 7\}$, $B=\{2,\ 3\}$이므로 $B\subset A$

(ii) $a=3$일 때

$A=\{2,\ 3,\ 7\}$, $B=\{3,\ 6\}$이므로 $B\not\subset A$

따라서 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a=-1$

8 답 ⑤

유형 06 집합의 연산에 대한 성질

$B-A=B$이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

9 답 ②

유형 06 집합의 연산에 대한 성질

$$\begin{aligned}(A^C\cap B)\cup(A\cap B^C)&=(B\cap A^C)\cup(A\cap B^C)\\&=(B-A)\cup(A-B)\\&=\varnothing\end{aligned}$$

즉, $B-A=\varnothing$, $A-B=\varnothing$이므로

$B\subset A$, $A\subset B$

$\therefore\ A=B$

10 답 ③

유형 07 조건을 만족하는 집합의 개수 구하기

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10\}$, $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$이고, $A\cup X=U$이므로 집합 X는 집합 A^C의 원소 1, 4, 6, 8, 9, 10을 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{10-6}=2^4=16$

11 답 16

유형 07 조건을 만족하는 집합의 개수 구하기

집합 X는 집합 $A\cap B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$의 원소 중 3개를 포함하는 집합 A의 부분집합이다.

(i) 원소 1, 2, 3은 포함하고 원소 6은 포함하지 않는 집합 X의 개수는 $2^{6-3-1}=2^2=4$

(ii) 원소 1, 2, 6은 포함하고 원소 3은 포함하지 않는 집합 X의 개수는 $2^{6-3-1}=2^2=4$

(iii) 원소 1, 3, 6은 포함하고 원소 2는 포함하지 않는 집합 X의 개수는 $2^{6-3-1}=2^2=4$

(iv) 원소 2, 3, 6은 포함하고 원소 1은 포함하지 않는 집합 X의 개수는 $2^{6-3-1}=2^2=4$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 집합 X의 개수는

$4+4+4+4=16$

12 답 ②

유형 08 집합의 연산 법칙

$(A-B)^C\cap B^C=(A\cap B^C)^C\cap B^C$

$=(A^C\cup B)\cap B^C$

$=(A^C\cap B^C)\cup(B\cap B^C)$

$=(A\cup B)^C\cup\varnothing$

$=(A\cup B)^C$

이때 $B\subset A$에서 $A\cup B=A$이므로

$(A-B)^C\cap B^C=(A\cup B)^C=A^C$

13 답 ④

유형 08 집합의 연산 법칙

ㄱ. $(A\cap B^C)\cup B=(A\cup B)\cap(B^C\cup B)$

$=(A\cup B)\cap U$

$=A\cup B$

ㄴ. $(A-B)^C\cap A=(A\cap B^C)^C\cap A$

$=(A^C\cup B)\cap A$

$=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$

ㄷ. $(A\cap B)\cup(A^C\cup B)^C=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$

$=A\cap(B\cup B^C)$

$=A\cap U$

$=A$

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

14 답 ①

유형 09 배수 또는 약수의 집합의 연산

$A_n\cap A_2=A_{2n}$에서 자연수 n과 2는 서로소이므로 n은 홀수이다.
또 $A_n-A_3=\varnothing$에서 $A_n\subset A_3$이므로 n은 3의 배수이다.
따라서 n은 3의 배수인 홀수이므로 30 이하의 자연수 n은 3, 9, 15, 21, 27의 5개이다.

15 답 −7

유형 10 방정식 또는 부등식의 해의 집합의 연산

$x^2-6x+8>0$에서 $(x-2)(x-4)>0$

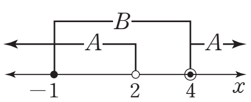
$\therefore x<2$ 또는 $x>4$

$\therefore A=\{x\,|\,x<2$ 또는 $x>4\}$

또 $x^2+2x+4>0$에서 $(x+1)^2+3>0$이므로

$C=\{x\,|\,x$는 모든 실수$\}$

이때 $A\cup B=\{x\,|\,x$는 모든 실수$\}$,
$A\cap B=\{x\,|\,-1\le x<2\}$이므로 오른쪽 그림에서



$B=\{x\,|\,-1\le x\le 4\}$

$=\{x\,|\,(x+1)(x-4)\le 0\}$

$=\{x\,|\,x^2-3x-4\le 0\}$

따라서 $a=-3$, $b=-4$이므로

$a+b=-7$

16 답 ③

유형 11 집합의 새로운 연산

$A\triangleright B=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)$

$=(A\cap A^C)\cup B$

$=\varnothing\cup B=B$

따라서 $A\triangleright B=B$이므로 $(A\triangleright B)\triangleright C=B\triangleright C=C$

17 답 34

유형 12 유한집합의 원소의 개수

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$24=42-n(A\cup B)\qquad\therefore n(A\cup B)=18$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$18=n(A)+n(B)-16\qquad\therefore n(A)+n(B)=34$

18 답 ①

유형 12 유한집합의 원소의 개수

$n(A^C\cap B)=n(B-A)=7$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B-A)=21+7=28$

$\therefore n(A\cap B)=n(A\cup B)-n((A-B)\cup(B-A))$

$=28-14=14$

다른 풀이 $n(A^C\cap B)=n(B-A)=7$이므로

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)$에서

$14=n(A-B)+7\qquad\therefore n(A-B)=7$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=21-7=14$

19 답 10

유형 13 유한집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값

$n(A)<n(B)$이므로 $n(A\cup B)$는 $A\subset B$일 때 최소, $A\cup B=U$일 때 최대이다. 즉, $n(B)\le n(A\cup B)\le n(U)$이므로

$18\le n(A\cup B)\le 28$ ...... ㉠

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=14+18-n(A\cap B)=32-n(A\cap B)$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $18\le 32-n(A\cap B)\le 28$이므로

$-14\le -n(A\cap B)\le -4\qquad\therefore 4\le n(A\cap B)\le 14$

따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값은 14, 최솟값은 4이므로 구하는 차는

$14-4=10$

20 답 12

유형 14 유한집합의 원소의 개수의 활용

반 학생 전체의 집합을 U, 영화 A를 관람한 학생의 집합을 A, 영화 B를 관람한 학생의 집합을 B라고 하면

$n(U)=36$, $n(A)=31$, $n(A-B)=20$, $n((A\cup B)^C)=4$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로

$20=31-n(A\cap B)\qquad\therefore n(A\cap B)=11$

또 $n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$4=36-n(A\cup B)\qquad\therefore n(A\cup B)=32$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$32=31+n(B)-11\qquad\therefore n(B)=12$

따라서 구하는 학생 수는 12이다.

03 명제

핵심 유형

	유형01 ①	유형02 ③	유형03 1
유형04 ④	유형05 ③	유형06 $a<-2$	
유형07 ②	유형08 ⑤	유형09 6	유형10 ③
유형11 ②	유형12 ①	유형13 ⑤	유형14 2
유형15 풀이 참고		유형16 풀이 참고	
유형17 풀이 참고		유형18 ④	유형19 5

핵심 유형 완성하기

001 ③	002 ②	003 ③	004 ④	
005 ㄱ, ㄷ	006 ①	007 ④	008 {2, 4, 6}	
009 ④	010 ⑤	011 ①	012 ①	013 ⑤
014 ②	015 ①	016 ㄱ, ㄹ	017 ①	018 ④
019 ②	020 ④	021 ㄴ, ㄷ	022 ①	023 ③
024 ⑤	025 ①	026 ⑤	027 ④	028 ④
029 ⑤	030 ④	031 -5	032 ④	033 ②
034 ㄴ, ㄷ	035 ⑤	036 ④	037 ②	
038 (가) 충분 (나) 필요		039 ㄷ	040 ㄱ, ㄷ	041 ③
042 ④	043 ④	044 ④	045 ⑤	046 ③
047 -4	048 -2	049 3		
050 (가) $3k-2$ (나) $3k^2-4k+1$ (다) $3k^2-2k$				051 ②
052 (가) 유리수 (나) 유리수 (다) 무리수			053 ⑤	054 ③
055 ⑤	056 ①	057 8	058 ⑤	059 8
060 ④	061 ④	062 ③	063 13	064 8
065 ⑤				

핵심 유형 최종 점검하기

1 ①	2 ③	3 3	4 ㄱ, ㄷ	5 ①
6 3	7 ②	8 ⑤	9 12	10 ④
11 ③	12 ③	13 ⑤	14 -1	15 ①
16 ①	17 ①	18 4	19 ③	

핵심 유형 38~39쪽

유형01 답 ①

②, ③, ⑤ 참인 명제이다.

④ 거짓인 명제이다.

유형02 답 ③

'$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'이다.

p: $x>1$, $\sim q$: $x<5$이므로 'p 그리고 $\sim q$'는

$1<x<5$

유형03 답 1

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=3$

조건 p의 진리집합을 P라고 하면

$P=\{-2, 3\}$

$x^2-4\le 0$에서 $(x+2)(x-2)\le 0$

$\therefore$ $-2\le x\le 2$

조건 q의 진리집합을 Q라고 하면

$Q=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q$이므로

$P\cap Q=\{-2\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 1이다.

유형04 답 ④

① $x=-1$이면

$(-1)^2+(-1)=0$

이므로 주어진 명제는 참이다.

② p: $|x|=1$, q: $x^2=1$이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{-1, 1\}$, $Q=\{-1, 1\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

③ p: $|x|<1$, q: $x^2<1$이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x|-1<x<1\}$, $Q=\{x|-1<x<1\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

④ [반례] $x=3$이면 x는 3의 배수이지만 6의 배수는 아니다.

⑤ 'p: x가 4의 양의 약수이다.', 'q: x가 8의 양의 약수이다.'라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{1, 2, 4\}$, $Q=\{1, 2, 4, 8\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ④이다.

유형05 답 ③

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $P\subset Q^C$

$\therefore$ $P\cap Q=\varnothing$

유형06 답 $a<-2$

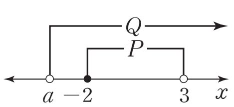
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x|-2\le x<3\}$, $Q=\{x|x>a\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면

$P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$a<-2$



유형07 답 ②

$U=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여

① [반례] $x=0$이면 $x^2=0$이다.

② p: $x^2=x$라 하고 조건 p의 진리집합을 P라고 하면

$P=\{0,\ 1\}$

따라서 $P\neq\varnothing$이므로 주어진 명제는 참이다.

③ [반례] $x=0$이면 $|x|=x$이다.

④ [반례] $x=1$이면 $x+2=3$이다.

⑤ p: $x-1\geq1$이라 하고 조건 p의 진리집합을 P라고 하면 $P=\varnothing$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

따라서 참인 명제는 ②이다.

유형08 답 ⑤

① 역: x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다. (참)

② 역: $1<x<2$이면 $x^2-x-2<0$이다. (참)

③ 역: $x=0$이면 $x^2=3x$이다. (참)

④ 역: $x^2<1$이면 $x<1$이다. (참)

⑤ 역: xy가 홀수이면 x 또는 y는 짝수이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=3$이면 xy는 홀수이지만 x, y가 모두 홀수이다.

유형09 답 6

주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$x>-1$이고 $y>a$이면 $x+y>5$이다.'

도 참이다.

$x>-1$, $y>a$에서 $x+y>a-1$이므로

$a-1\geq5$　　$\therefore a\geq6$

따라서 실수 a의 최솟값은 6이다.

유형10 답 ③

명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

또 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우인 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

이때 두 명제 $r \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim p$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$가 참이고 그 대우인 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

핵심 유형 **완성**하기　40~45쪽

001 답 ③

①, ④ x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

②, ⑤ '향기롭다', '크다'는 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

③ 거짓인 명제이다.

002 답 ②

①, ③, ⑤ 거짓인 명제이다.

② x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

④ 참인 명제이다.

003 답 ③

ㄱ. x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

ㄴ, ㄷ. 거짓인 명제이다.

ㄹ. '크다'는 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

따라서 보기 중 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

004 답 ④

$x^2-3x-4\geq0$에서 $(x+1)(x-4)\geq0$

$\therefore x\leq-1$ 또는 $x\geq4$　　$\therefore p$: $x\leq-1$ 또는 $x\geq4$

$x^2-1\leq0$에서 $(x+1)(x-1)\leq0$

$\therefore -1\leq x\leq1$　　$\therefore q$: $-1\leq x\leq1$

'p 그리고 $\sim q$'의 부정은 '$\sim p$ 또는 q'이다.

$\sim p$: $-1<x<4$, q: $-1\leq x\leq1$이므로 '$\sim p$ 또는 q'는

$-1\leq x<4$

005 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 부정: $3\leq5$ (참)

ㄴ. 부정: 2는 소수가 아니다. (거짓)

ㄷ. 부정: 6은 12의 약수이다. (참)

ㄹ. 부정: 정삼각형은 이등변삼각형이 아니다. (거짓)

006 답 ①

'$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$'의 부정은

'$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$'이므로

$a-b=0$이고 $b-c=0$이고 $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

007 답 ④

$x^2+2x-8=0$에서 $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

조건 p의 진리집합을 P라고 하면

$P=\{-4,\ 2\}$

$x^3-4x=0$에서 $x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

조건 q의 진리집합을 Q라고 하면

$Q=\{-2,\ 0,\ 2\}$

조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cup Q^C$이고

$U=\{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ \cdots,\ 4\}$,

$Q^C=\{-4,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 4\}$이므로

$P\cup Q^C=\{-4,\ -3,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

따라서 $P\cup Q^C$의 원소의 개수는 7이다.

008 답 {2, 4, 6}

조건 p의 진리집합은 $\{1, 3, 5, 7\}$

따라서 조건 $\sim p$의 진리집합은

$\{2, 4, 6\}$

009 답 ④

$-4\le x\le 2$에서 $x\ge -4$이고 $x\le 2$이다.

$P=\{x|x>2\}$에서 $P^C=\{x|x\le 2\}$

이때 $Q=\{x|x\ge -4\}$이므로 조건 '$-4\le x\le 2$'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이다.

010 답 ⑤

① $x=-\sqrt{2}$이면 $(-\sqrt{2})^2=2$이므로 주어진 명제는 참이다.

② $x=2$이면 $2^2-2-2=0$이므로 주어진 명제는 참이다.

③ p: $x<-2$, q: $x^2-2x-8>0$이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x|x<-2\}$,

$Q=\{x|x<-2$ 또는 $x>4\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

⑤ [반례] $x=10$이면 x는 10의 양의 약수이지만 5의 양의 약수는 아니다.

따라서 거짓인 명제는 ⑤이다.

011 답 ①

① $n=2$이면 n은 소수이지만 $n^2=4$이므로 홀수가 아니다.

012 답 ①

① p: $|x|>2$, q: $x^2>1$이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x|x<-2$ 또는 $x>2\}$,

$Q=\{x|x<-1$ 또는 $x>1\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

② [반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x\ne 1$이다.

③ [반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2\ne 0$이다.

④ [반례] $x=-1$, $y=2$이면 $x+y>0$이지만 $xy<0$이다.

⑤ [반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\ne y$이다.

따라서 참인 명제는 ①이다.

013 답 ⑤

명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q\subset P$

③ $P\cap Q=Q$

④ $P\cup Q=P$

⑤ $P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C=P^C$

014 답 ②

두 집합 P, Q가 서로소이므로 $P\subset Q^C$, $Q\subset P^C$

따라서 명제 $p \longrightarrow \sim q$와 $q \longrightarrow \sim p$는 항상 참이다.

015 답 ①

명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 구하는 집합은

$P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$

016 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. $P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

ㄴ. $Q\not\subset P^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 참이 아니다.

ㄷ. $Q\not\subset R$이므로 명제 $q \longrightarrow r$는 참이 아니다.

ㄹ. $R\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다.

따라서 보기 중 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄹ이다.

017 답 ①

$|x-1|\le a$에서

$-a\le x-1\le a$

$\therefore\ -a+1\le x\le a+1$

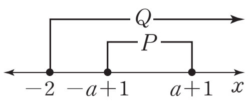
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x|-a+1\le x\le a+1\}$,

$Q=\{x|x\ge -2\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면

$P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-a+1\ge -2$

$\therefore\ 0<a\le 3$ ($\because\ a>0$)

따라서 양수 a의 최댓값은 3이다.

018 답 ④

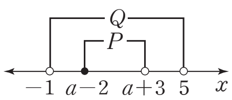
p: $a-2\le x<a+3$, q: $-1<x<5$라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x|a-2\le x<a+3\}$,

$Q=\{x|-1<x<5\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면

$P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-2>-1$, $a+3\le 5$

$\therefore\ 1<a\le 2$

019 답 ②

q: $x<1$에서 $\sim q$: $x\ge 1$

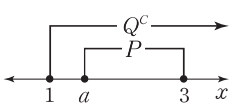
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x|a\le x\le 3\}$,

$Q^C=\{x|x\ge 1\}$

이때 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면

$P\subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a\ge 1$

$\therefore\ 1\le a\le 3$ ($\because\ a\le 3$)

따라서 실수 a의 최솟값은 1이다.

020 답 ④

q: $x<a$에서 $\sim q$: $x\ge a$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하면

$P=\{x\mid -2\le x\le 1$ 또는 $x\ge 3\}$,

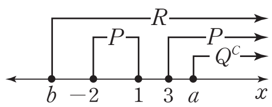
$Q^C=\{x\mid x\ge a\}$,

$R=\{x\mid x\ge b\}$

명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C\subset P$

명제 $p \longrightarrow r$가 참이 되려면 $P\subset R$

즉, $Q^C\subset P\subset R$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a\ge 3$, $b\le -2$

따라서 $m=3$, $M=-2$이므로

$m+M=1$

021 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. p: $x^2-x<0$이라 하고 조건 p의 진리집합을 P라고 하면 $P=\varnothing$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

ㄴ. p: $|x|\ge x$라 하고 조건 p의 진리집합을 P라고 하면
$P=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$
따라서 $P=U$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄷ. p: $2x+1\ge -3$이라 하고 조건 p의 진리집합을 P라고 하면
$P=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$
따라서 $P=U$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄹ. p: $x-2>0$이라 하고 조건 p의 진리집합을 P라고 하면 $P=\varnothing$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

따라서 보기 중 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

022 답 ①

ㄱ. $P=U$이면 $P\ne\varnothing$이므로 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

ㄴ. $P\ne\varnothing$이고 $P=U$이면 '모든 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

ㄷ. $P\ne U$이고 $P=\varnothing$이면 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 거짓이다.

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 ㄱ이다.

023 답 ③

① [반례] 2는 소수이지만 짝수이다.

② [반례] $x=0$이면 $x^2=0$이다.

③ $x=\dfrac{1}{2}$이면 $x^2<x$이므로 주어진 명제는 참이다.

④ 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

⑤ [반례] $x=1+\sqrt{2}$는 무리수이지만 $x^2=3+2\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

따라서 참인 명제는 ③이다.

024 답 ⑤

주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-8x+k\ge 0$이다.'

이차방정식 $x^2-8x+k=0$의 판별식을 D라고 할 때, 주어진 명제의 부정이 참이 되려면 $D\le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(-4)^2-k=16-k\le 0\qquad \therefore\ k\ge 16$

따라서 k의 최솟값은 16이다.

025 답 ①

ㄱ. 역: $x<0$이고 $y<0$이면 $x+y<0$이다. (참)

ㄴ. 역: $z-x<z-y$이면 $x<y$이다. (거짓)

ㄷ. 역: $xy=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (거짓)
[반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $|x|+|y|\ne 0$이다.

따라서 보기 중 역이 참인 명제는 ㄱ이다.

026 답 ⑤

'$a+b+c>0$'의 부정은 '$a+b+c\le 0$'

'a, b, c 중 적어도 하나는 양수이다.'의 부정은

'a, b, c는 모두 양수가 아니다.'

따라서 주어진 명제의 대우는

'a, b, c가 모두 양수가 아니면 $a+b+c\le 0$이다.'

027 답 ④

명제 $p \longrightarrow \sim q$의 역이 참이므로 $\sim q \longrightarrow p$가 참이다.

따라서 명제 $\sim q \longrightarrow p$의 대우 $\sim p \longrightarrow q$도 참이다.

028 답 ④

①, ② 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

③ 대우: $x^2-3x+2<0$이면 $1<x<2$이다. (참)

④ 대우: $x\le 0$ 또는 $y\le 0$이면 $xy\le 0$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $xy>0$이다.

⑤ 대우: x, y가 유리수이면 $x+y$는 유리수이다. (참)

029 답 ⑤

① 역: $x>1$이면 $x>0$이다. (참)
대우: $x\le 1$이면 $x\le 0$이다. (거짓)
[반례] $x=\dfrac{1}{2}$이면 $x\le 1$이지만 $x>0$이다.

② 역: $x=2$이면 $x^2=4$이다. (참)
대우: $x\ne 2$이면 $x^2\ne 4$이다. (거짓)
[반례] $x=-2$이면 $x^2=4$이다.

③ 역: $x^2=y^2$이면 $x=y$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\ne y$이다.
대우: $x^2\ne y^2$이면 $x\ne y$이다. (참)

④ 역: $x^2>y^2$이면 $x>y$이다. (거짓)
[반례] $x=-2$, $y=1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$이다.
대우: $x^2\le y^2$이면 $x\le y$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2\le y^2$이지만 $x>y$이다.

⑤ 역: $x\ne 0$이고 $y\ne 0$이면 $xy\ne 0$이다. (참)
대우: $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)

따라서 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 ⑤이다.

030 답 ④

주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$a \geq k$이고 $b \geq 3$이면 $a+b \geq 5$이다.'

도 참이다.

$a \geq k$, $b \geq 3$에서 $a+b \geq k+3$이므로

$k+3 \geq 5$ $\quad \therefore k \geq 2$

따라서 실수 k의 최솟값은 2이다.

031 답 -5

주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$x=1$이면 $x^2+ax+4=0$이다.'

도 참이다.

$x^2+ax+4=0$에 $x=1$을 대입하면

$1+a+4=0$

$\therefore a=-5$

032 답 ④

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되어야 한다.

$\sim p$: $|x-a|<3$에서 $-3<x-a<3$

$\therefore a-3<x<a+3$

$\sim q$: $|x-2|<1$에서 $-1<x-2<1$

$\therefore 1<x<3$

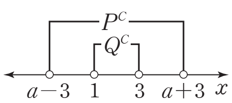
이때 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P^C=\{x|a-3<x<a+3\}$,

$Q^C=\{x|1<x<3\}$

이때 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면

$Q^C \subset P^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-3 \leq 1$, $a+3 \geq 3$

$\therefore 0 \leq a \leq 4$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

033 답 ②

명제 $r \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우인 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

또 명제 $\sim r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우인 $\sim q \longrightarrow r$도 참이다.

이때 두 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $\sim r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow q$가 참이고 그 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ②이다.

034 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우인 $q \longrightarrow \sim p$가 참이다.

ㄴ. 두 명제 $s \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $s \longrightarrow r$가 참이다.

ㄷ. 명제 $s \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim s$도 참이다. 이때 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim s$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim s$가 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

035 답 ⑤

명제 $r \longrightarrow \sim s$가 참이므로 그 대우인 $s \longrightarrow \sim r$도 참이다.

두 명제 $p \longrightarrow q$, $s \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이 되려면 명제 $q \longrightarrow s$가 참이어야 한다.

따라서 명제 $q \longrightarrow s$가 참이면 그 대우인 $\sim s \longrightarrow \sim q$도 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 ⑤이다.

036 답 ④

세 조건 p, q, r를

p: 축구를 좋아한다.

q: 농구를 좋아한다.

r: 달리기를 좋아한다.

라고 하면 명제 $p \longrightarrow q$와 $\sim p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 각각의 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$와 $r \longrightarrow p$도 참이다.

이때 두 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$가 참이고 그 대우인 $r \longrightarrow q$도 참이다.

① $p \longrightarrow r$ ② $q \longrightarrow r$ ③ $\sim p \longrightarrow \sim q$

④ $\sim q \longrightarrow \sim r$ ⑤ $r \longrightarrow \sim q$

따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

핵심 유형 46~47쪽

유형11 답 ②

① $p \longrightarrow q$: 거짓

[반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x \neq 1$이다.

$q \longrightarrow p$: 참

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

② $p \longrightarrow q$: 참

$q \longrightarrow p$: 거짓

[반례] $x=-1$이면 $x \geq -1$이지만 $-1<x<2$가 아니다.

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

③ $p \longrightarrow q$: 거짓

[반례] $x=-6$이면 $x^2+5x-6=0$이지만 $x \neq 1$이다.

$q \longrightarrow p$: 참

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

④ $p \longrightarrow q$: 거짓

[반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x+y=0$이지만 $x \neq 0$, $y \neq 0$이다.

$q \longrightarrow p$: 참

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

⑤ $p \longrightarrow q$: 거짓

[반례] $x=1$, $y=-1$이면 $|x|=|y|$이지만 $x \neq y$이다.

$q \longrightarrow p$: 참

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건인 것은 ②이다.

유형12 답 ①

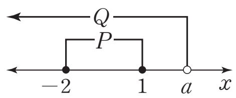
p는 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow p$이고 $\sim p \Longrightarrow \sim q$이다.
또 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로 $q \Longrightarrow \sim r$이고 $r \Longrightarrow \sim q$이다.
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ①이다.

유형13 답 ⑤

q는 p이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$
따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

유형14 답 2

$x^2+x-2 \le 0$에서 $(x+2)(x-1) \le 0$
$\therefore\ -2 \le x \le 1$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{x \mid -2 \le x \le 1\}$, $Q=\{x \mid x<a\}$
이때 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a>1$
따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.

유형15 답 풀이 참고

주어진 명제의 대우 'n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.
n이 짝수이면 $n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로
$n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$
이때 $2k^2$이 자연수이므로 n^2은 짝수이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

유형16 답 풀이 참고

$\sqrt{2}$가 유리수라고 가정하면
$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)
으로 나타낼 수 있다.
양변을 제곱하여 정리하면
$n^2=2m^2$ …… ㉠
이때 n^2이 짝수이므로 n도 짝수이다.
$n=2k$ (k는 자연수)라 하고 ㉠에 대입하여 정리하면
$m^2=2k^2$
이때 m^2이 짝수이므로 m도 짝수이다.
즉, m, n이 모두 짝수이므로 m, n이 서로소라는 가정에 모순이다.
따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

유형17 답 풀이 참고

$a^2+b^2-ab=\left(a-\dfrac{1}{2}b\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2$
a, b가 실수이므로 $\left(a-\dfrac{1}{2}b\right)^2 \ge 0$, $\dfrac{3}{4}b^2 \ge 0$
따라서 $a^2+b^2-ab \ge 0$이므로 $a^2+b^2 \ge ab$
이때 등호는 $a-\dfrac{1}{2}b=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

유형18 답 ④

$a>0$에서 $3a>0$, $\dfrac{12}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$3a+\dfrac{12}{a} \ge 2\sqrt{3a \times \dfrac{12}{a}}=12$
$\left(\text{단, 등호는 } 3a=\dfrac{12}{a}\text{, 즉 } a=2\text{일 때 성립}\right)$
따라서 $3a+\dfrac{12}{a}$의 최솟값은 12이다.

유형19 답 5

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\{2^2+(-1)^2\}(x^2+y^2) \ge (2x-y)^2$
이때 $2x-y=-5$이므로 $5(x^2+y^2) \ge 25$
$\therefore\ x^2+y^2 \ge 5$ (단, 등호는 $2y=-x$일 때 성립)
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 5이다.

핵심 유형 완성하기 48~52쪽

037 답 ②

① $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 $p \Longleftrightarrow q$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
② $p \longrightarrow q$: 거짓
[반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x \ne y$이다.
$q \longrightarrow p$: 참
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
③ $p \longrightarrow q$: $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이므로 $xy=0$이다. (참)
$q \longrightarrow p$: 거짓
[반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2 \ne 0$이다.
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
④ $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 $p \Longleftrightarrow q$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
⑤ $p \longrightarrow q$: 참
$q \longrightarrow p$: 거짓
[반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $|x+y|=|x|+|y|$이지만 $x<0$, $y<0$이다.
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ②이다.

038 답 (가) 충분 (나) 필요

- $ab<0$이면 $a<0$ 또는 $b<0$이다. (참)
  $a<0$ 또는 $b<0$이면 $ab<0$이다. (거짓)
  [반례] $a=-1$, $b=-2$이면 $a<0$ 또는 $b<0$이지만 $ab>0$이다.
  따라서 $ab<0$은 $a<0$ 또는 $b<0$이기 위한 $\boxed{\text{(가) 충분}}$ 조건이다.
- $ab=0$이면 $|a|+|b|=0$이다. (거짓)
  [반례] $a=1$, $b=0$이면 $ab=0$이지만 $|a|+|b| \ne 0$이다.
  $|a|+|b|=0$이면 $ab=0$이다. (참)
  따라서 $ab=0$은 $|a|+|b|=0$이기 위한 $\boxed{\text{(나) 필요}}$ 조건이다.

039 답 ㄷ

ㄱ. $p \longrightarrow q$: 거짓

[반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $|xy|=xy$이지만 $x<0$, $y<0$이다.

$q \longrightarrow p$: 참

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $p \longrightarrow q$: $|x|=y$이면 $|x|^2=y^2$이므로 $x^2=y^2$이다. (참)

$q \longrightarrow p$: 거짓

[반례] $x=-1$, $y=-1$이면 $x^2=y^2$이지만 $|x| \neq y$이다.

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 $p \Longleftrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄹ. $p \longrightarrow q$: 참

$q \longrightarrow p$: 거짓

[반례] $x=0$, $y=-1$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x+y<0$이다.

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

따라서 보기 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄷ이다.

040 답 ㄱ, ㄷ

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow q$이고 $\sim q \Longrightarrow \sim p$

$\sim r$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이므로 $\sim p \Longrightarrow \sim r$이고 $r \Longrightarrow p$

이때 $\sim q \Longrightarrow \sim p$, $\sim p \Longrightarrow \sim r$이므로 $\sim q \Longrightarrow \sim r$

따라서 보기 중 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

041 답 ③

$p \Longrightarrow q$, $r \Longrightarrow \sim q$이므로 $\sim q \Longrightarrow \sim p$, $q \Longrightarrow \sim r$

이때 $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow \sim r$이므로 $p \Longrightarrow \sim r$이고 $r \Longrightarrow \sim p$

① $p \Longrightarrow \sim r$이므로 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

② $q \Longrightarrow \sim r$이므로 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

③ $r \Longrightarrow \sim q$이므로 $r \not\Longrightarrow q$

따라서 q는 r이기 위한 필요조건이 아니다.

④ $\sim q \Longrightarrow \sim p$이므로 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다.

⑤ $r \Longrightarrow \sim p$이므로 $\sim p$는 r이기 위한 필요조건이다.

042 답 ④

p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q^C$

⑤ $P \subset Q^C$에서 $Q \subset P^C$이므로 $P^C \cup Q = P^C$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

043 답 ④

두 집합 P, Q가 서로소이므로 $P \subset Q^C$, $Q \subset P^C$

따라서 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

044 답 ④

p는 r이기 위한 충분조건이므로 $P \subset R$

p는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$

$\therefore Q \subset P \subset R$

045 답 ⑤

$(P-Q) \cup (Q-R^C) = \varnothing$이므로

$P-Q=\varnothing$, $Q-R^C=\varnothing$

$\therefore P \subset Q$, $Q \cap R = \varnothing$

① $P \subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $Q \cap R = \varnothing$이므로 q는 r이기 위한 충분조건이 아니다.

③ $P \subset Q$이고 $Q \cap R = \varnothing$이므로 $P \cap R = \varnothing$

따라서 r는 p이기 위한 필요조건이 아니다.

④ $P \cap R = \varnothing$에서 $R \subset P^C$이므로 $\sim p$는 r이기 위한 필요조건이다.

⑤ $P \cap R = \varnothing$에서 $P \subset R^C$이므로 $\sim r$는 p이기 위한 필요조건이다.

046 답 ③

$x^2-3x-4 \le 0$에서 $(x+1)(x-4) \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 4$

$|x-a|<1$에서 $-1<x-a<1$

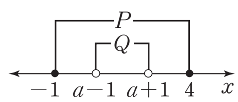
$\therefore a-1<x<a+1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x \mid -1 \le x \le 4\}$

$Q=\{x \mid a-1<x<a+1\}$

이때 q가 p이기 위한 충분조건이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-1 \ge -1$, $a+1 \le 4$

$\therefore 0 \le a \le 3$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

047 답 −4

$x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$x+a=0$에서 $x=-a$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{1, 3\}$, $Q=\{-a\}$

이때 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로

$-a=1$ 또는 $-a=3$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=-1$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-3+(-1)=-4$

048 답 −2

$x-2 \neq 0$이 $x^2-ax-8 \neq 0$이기 위한 필요조건이므로 명제

'$x^2-ax-8 \neq 0$이면 $x-2 \neq 0$이다.'

가 참이다.

따라서 이 명제의 대우

'$x-2=0$이면 $x^2-ax-8=0$이다.'

도 참이다.

$x=2$를 $x^2-ax-8=0$에 대입하면

$4-2a-8=0 \qquad \therefore a=-2$

049 답 3

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하면

$P=\{x\,|\,-2<x<3$ 또는 $x>5\}$,

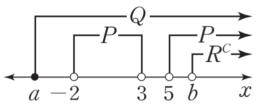
$Q=\{x\,|\,x\geq a\}$,

$R=\{x\,|\,x\leq b\}$

이때 q는 p이기 위한 필요조건이고 $\sim r$는 p이기 위한 충분조건이므로

$P\subset Q$, $R^C\subset P$

즉, $R^C\subset P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a\leq -2$, $b\geq 5$

따라서 a의 최댓값은 -2, b의 최솟값은 5이므로 구하는 합은

$-2+5=3$

050 답 (가) $3k-2$ (나) $3k^2-4k+1$ (다) $3k^2-2k$

$n=\boxed{(가)\ 3k-2}$ 또는 $n=3k-1$ (k는 자연수)이라고 하면

(i) $n=\boxed{(가)\ 3k-2}$일 때,

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$

$=3(\boxed{(나)\ 3k^2-4k+1})+1$

(ii) $n=3k-1$일 때,

$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$

$=3(\boxed{(다)\ 3k^2-2k})+1$

051 답 ②

주어진 명제의 대우 'x, y가 모두 $\boxed{(가)\ 홀수}$이면 xy도 $\boxed{(가)\ 홀수}$이다.'가 참임을 보이면 된다.

x, y가 모두 홀수이므로

$x=2m-1$, $y=\boxed{(나)\ 2n-1}$ (m, n은 자연수)

이라고 하면

$xy=(2m-1)(\boxed{(나)\ 2n-1})$

$=4mn-2m-2n+1$

$=2(\boxed{(다)\ 2mn-m-n})+1$

이므로 xy는 홀수이다.

052 답 (가) 유리수 (나) 유리수 (다) 무리수

$\sqrt{2}+1$이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{2}+1=a$ (a는 $\boxed{(가)\ 유리수}$)

로 나타낼 수 있다.

이때 $\sqrt{2}=a-1$이고 a, 1은 모두 유리수이므로 $a-1$은 $\boxed{(나)\ 유리수}$이다.

이는 $\sqrt{2}$가 $\boxed{(다)\ 무리수}$라는 사실에 모순이다.

053 답 ⑤

이는 $\sqrt{5}$가 $\boxed{(가)\ 무리수}$라는 사실에 모순이므로 $\boxed{(나)\ b=0}$이다.

$a+b\sqrt{5}=0$에 $\boxed{(나)\ b=0}$을 대입하면 $a=0$이다.

따라서 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{5}=0$이면 $\boxed{(다)\ a=b=0}$이다.

054 답 ③

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\}$$
$$=\frac{1}{2}(\boxed{(가)\ \sqrt{a}-\sqrt{b}})^2\geq 0$$

따라서 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq 0$이므로 $\frac{a+b}{2}\boxed{(나)\ \geq}\sqrt{ab}$이다.

이때 등호가 성립하는 경우는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, 즉 $\boxed{(다)\ a=b}$일 때이다.

055 답 ⑤

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=(\boxed{(가)\ ay-bx})^2\geq 0$

따라서 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2\geq 0$이므로

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$이다.

이때 등호가 성립하는 경우는 $ay-bx=0$, 즉 $\boxed{(나)\ ay=bx}$일 때이다.

056 답 ①

$|a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$이므로

$\boxed{(가)\ (|a|+|b|)^2\geq|a+b|^2}$임을 보이면 된다.

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(\boxed{(나)\ |ab|-ab})\geq 0$

따라서 $(|a|+|b|)^2\geq|a+b|^2$이므로

$|a|+|b|\geq|a+b|$

이때 등호가 성립하는 경우는 $|ab|=ab$, 즉 $\boxed{(다)\ ab\geq 0}$일 때이다.

057 답 8

$x>-2$에서 $x+2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{16}{x+2}=x+2+\frac{16}{x+2}-2$$
$$\geq 2\sqrt{(x+2)\times\frac{16}{x+2}}-2=6$$

이때 등호가 성립하는 경우는 $x+2=\frac{16}{x+2}$일 때이므로

$(x+2)^2=16$, $x+2=\pm 4$　　$\therefore x=2$ ($\because x>-2$)

따라서 주어진 식은 $x=2$일 때, 최솟값 6을 가지므로

$m=6$, $n=2$　　$\therefore m+n=8$

058 답 ⑤

$a>0$, $b>0$에서 $ab>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)=ab+9+1+\frac{9}{ab}$$
$$\geq 10+2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}=16$$

이때 등호가 성립하는 경우는 $ab=\frac{9}{ab}$일 때이므로

$(ab)^2=9$　　$\therefore ab=3$ ($\because ab>0$)

따라서 주어진 식은 $ab=3$일 때, 최솟값 16을 가지므로

$p=3$, $q=16$　　$\therefore p+q=19$

059 답 8

$x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{y}{z}}\times 2\sqrt{\frac{y}{z}\times\frac{z}{x}}\times 2\sqrt{\frac{z}{x}\times\frac{x}{y}}$$
$$=8\sqrt{\frac{x}{z}}\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{\frac{z}{y}}=8\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 8이다.

060 답 ④

전체 구역의 가로의 길이를 a m, 세로의 길이를 b m라고 하면

$2a+4b=80$ …… ㉠

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+4b\geq 2\sqrt{2a\times 4b}=2\sqrt{8ab}$ …… ㉡

(단, 등호는 $2a=4b$, 즉 $a=2b$일 때 성립)

㉠, ㉡에서

$80\geq 2\sqrt{8ab}$, $40\geq\sqrt{8ab}$

양변을 제곱하면

$1600\geq 8ab$ $\quad\therefore ab\leq 200$

따라서 ab의 최댓값은 200이고 구역의 전체 넓이는 ab m^2이므로 구하는 최댓값은 200 m^2이다.

061 답 ④

$(\sqrt{2x}+\sqrt{3y})^2=2x+2\sqrt{2x}\sqrt{3y}+3y$

$=2x+2\sqrt{6xy}+3y$ …… ㉠

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+3y\geq 2\sqrt{2x\times 3y}=2\sqrt{6xy}$

그런데 $2x+3y=8$이므로

$8\geq 2\sqrt{6xy}$ (단, 등호는 $2x=3y$일 때 성립) …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(\sqrt{2x}+\sqrt{3y})^2=(2x+3y)+2\sqrt{6xy}$

$\leq 8+8=16$

이때 $\sqrt{2x}+\sqrt{3y}>0$이므로

$\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\leq\sqrt{16}=4$

따라서 $\sqrt{2x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은 4이다.

062 답 ③

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}(x^2+y^2)\geq\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^2$$

이때 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=\frac{5}{4}$이므로

$$\frac{25}{9\times 16}(x^2+y^2)\geq\left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\therefore x^2+y^2\geq\frac{25}{16}\times\frac{9\times 16}{25}=9$$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{y}{3}=\frac{x}{4}\text{, 즉 }4y=3x\text{일 때 성립}\right)$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 9이다.

063 답 13

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(2x+3y)^2$

이때 $x^2+y^2=13$이므로

$13\times 13\geq(2x+3y)^2$, $(2x+3y)^2\leq 13^2$

$\therefore -13\leq 2x+3y\leq 13$ (단, 등호는 $2y=3x$일 때 성립)

따라서 $2x+3y$의 최댓값은 13이다.

064 답 8

직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라고 하면

$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$

그런데 $x^2+y^2=8$이므로

$2\times 8\geq(x+y)^2$, $(x+y)^2\leq 16$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$0<x+y\leq 4$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

직사각형의 둘레의 길이는 $2(x+y)$이므로

$0<2(x+y)\leq 8$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.

065 답 ⑤

$x-y-2z=-3$에서

$y+2z=x+3$ …… ㉠

$x^2+y^2+z^2=9$에서

$y^2+z^2=9-x^2$ …… ㉡

y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2)(y^2+z^2)\geq(y+2z)^2$ …… ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$5(9-x^2)\geq(x+3)^2$

$x^2+x-6\leq 0$, $(x+3)(x-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 2$ (단, 등호는 $z=2y$일 때 성립)

따라서 x의 최댓값은 2이다.

핵심 유형 최종 점검하기 • 53~55쪽

1 답 ①

유형 01 명제

① x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

② $2x+1>2(x-3)$에서 $1>-6$이므로 참인 명제이다.

③, ⑤ 참인 명제이다.

④ 거짓인 명제이다.

따라서 명제가 아닌 것은 ①이다.

2 답 ③

유형 02 명제와 조건의 부정

a, b, c는 실수이므로

$(a-b)(b-c)=0$에서 $a-b=0$ 또는 $b-c=0$

$\therefore\ a=b$ 또는 $b=c$

따라서 '$a=b$ 또는 $b=c$'의 부정은 '$a\neq b$이고 $b\neq c$'이다.

3 답 3

유형 03 진리집합

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10\}$이므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $Q=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

이때 조건 'p 그리고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C$이고

$Q^C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$이므로

$P\cap Q^C=\{3,\ 5,\ 7\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 3이다.

4 답 ㄱ, ㄷ

유형 04 명제의 참, 거짓

ㄱ. $x^2+y^2=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이므로 $xy=0$이다.

ㄴ. [반례] $x=y=0$, $z=2$이면 $xy=yz=zx=0$이지만 $x=y=0$, $z\neq 0$이다.

ㄷ. $x+y=2$에서 $y=2-x$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(2-x)^2=2$, $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore\ x=1 \qquad \therefore\ x=y=1$

따라서 주어진 명제는 참이다.

따라서 보기 중 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

5 답 ①

유형 05 명제와 진리집합 사이의 관계

$P\cup Q=Q$에서 $P\subset Q$이므로 $P\cap Q=P$

$(P\cap Q)-R=P-R=P$이므로 $P\cap R=\varnothing$

① $P\cap R=\varnothing$에서 $P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

6 답 3

유형 06 명제가 참이 되도록 하는 미지수 구하기

$|x-1|>k$에서 $x-1<-k$ 또는 $x-1>k$

$\therefore\ x<-k+1$ 또는 $x>k+1$

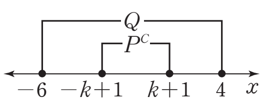
$|x+1|\leq 5$에서 $-5\leq x+1\leq 5$

$\therefore\ -6\leq x\leq 4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P^C=\{x\,|\,-k+1\leq x\leq k+1\}$, $Q=\{x\,|\,-6\leq x\leq 4\}$

이때 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k+1\geq -6$, $k+1\leq 4$

$\therefore\ 0<k\leq 3$ ($\because\ k>0$)

따라서 양수 k의 최댓값은 3이다.

7 답 ②

유형 07 '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제의 참, 거짓

② [반례] $x=8$이면 $2x\notin U$이다.

8 답 ⑤

유형 08 명제의 역과 대우

① 역: $x=1$이면 $x^2=1$이다. (참)

② 역: x, y가 유리수이면 xy는 유리수이다. (참)

③ 역: $x>0$, $y>0$이면 $xy>0$이다. (참)

④ 역: $x=0$, $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (참)

⑤ 역: $x^2+y^2>0$이면 $x>0$ 또는 $y>0$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x<0$, $y<0$이다.

9 답 12

유형 09 명제의 대우를 이용하여 미지수 구하기

주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$x>-2$이고 $y>a$이면 $x+y>10$이다.'

도 참이다.

$x>-2$, $y>a$에서 $x+y>a-2$이므로

$a-2\geq 10 \qquad \therefore\ a\geq 12$

따라서 실수 a의 최솟값은 12이다.

10 답 ④

유형 10 삼단논법

명제 $p \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우인 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

또 명제 $q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우인 $r \longrightarrow \sim q$도 참이다.

이때 두 명제 $p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이고 그 대우인 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ④이다.

11 답 ③

유형 11 충분조건, 필요조건, 필요충분조건

① $p \longrightarrow q$: $x^3=1$이면 $x=1$이므로 $x^2=1$이다. (참)

$q \longrightarrow p$: 거짓

[반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x^3\neq 1$이다.

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $p \longrightarrow q$: $x^2=9$이면 $x=\pm 3$이므로 $|x|=3$이다. (참)

$q \longrightarrow p$: $|x|=3$이면 $x=\pm 3$이므로 $x^2=9$이다. (참)

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

③ $p \longrightarrow q$: 거짓

[반례] $x=-3$이면 $x^2>4$이지만 $x\leq 2$이다.

$q \longrightarrow p$: 참

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

④ $p \longrightarrow q$: $x+2=3$이면 $x=1$이므로 $x^2-2x+1=0$이다. (참)

$q \longrightarrow p$: $x^2-2x+1=0$이면 $(x-1)^2=0$에서 $x=1$이므로 $x+2=3$이다. (참)

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ $p \longrightarrow q$: 참

$q \longrightarrow p$: 거짓

[반례] $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$이면 $x+y$는 정수이지만 x, y는 모두 정수가 아니다.

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ③이다.

12 답 ③

유형 12 충분조건, 필요조건과 명제의 참, 거짓

두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 그 대우인

$q \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow r$도 참이다.

ㄱ. 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.

따라서 p는 r이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. 명제 $\sim q \longrightarrow r$가 참이므로 r는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다.

13 답 ⑤

유형 13 충분조건, 필요조건과 진리집합 사이의 관계

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

$\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로 $R^C \subset Q^C$ $\therefore Q \subset R$

$\therefore P \subset Q \subset R$

④ $Q \cup R = R$이므로 $P \subset R$

⑤ $Q \cap R = Q$이므로 $P \subset (Q \cap R)$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

14 답 -1

유형 14 충분조건, 필요조건을 만족하는 미지수 구하기

q가 p이기 위한 필요조건이므로 명제

'$x^2-x-6 \neq 0$이면 $x+a \neq 0$이다.'

가 참이다.

즉, 이 명제의 대우

'$x+a=0$이면 $x^2-x-6=0$이다.'

도 참이다.

$x+a=0$에서 $x=-a$이므로 이를 $x^2-x-6=0$에 대입하면

$a^2+a-6=0$, $(a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$-3+2=-1$

15 답 ①

유형 15 대우를 이용한 증명

주어진 명제의 대우 '실수 a, b에 대하여 $\boxed{(가)\ a=0\text{이고 } b=0}$이면 $a^2+b^2 \le 0$이다.'가 참임을 보이면 된다.

이때 $\boxed{(가)\ a=0\text{이고 } b=0}$이면 $\boxed{(나)\ a^2+b^2=0}$이므로 $a^2+b^2 \le 0$을 만족한다.

16 답 ①

유형 17 절대부등식의 증명

$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(a-b)-(a-2\sqrt{ab}+b)$

$=2\sqrt{ab}-2b$

$=2\sqrt{b}(\boxed{(가)\ \sqrt{a}-\sqrt{b}})>0$

따라서 $(\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$이고 $\sqrt{a-b}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$는 모두 $\boxed{(나)\ 양수}$이므로 $\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$이다.

17 답 ①

유형 18 산술평균과 기하평균의 관계의 활용

$x \neq 0$이므로 $\frac{x}{x^2+2x+25}$의 분모와 분자를 각각 x로 나누면

$$\frac{x}{x^2+2x+25}=\frac{1}{x+2+\frac{25}{x}}$$

이때 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+2+\frac{25}{x} \ge 2\sqrt{x \times \frac{25}{x}}+2=12$$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{25}{x}\text{, 즉 } x=5\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $x+2+\frac{25}{x}$의 최솟값은 12이고, $\frac{1}{x+2+\frac{25}{x}}$은 분모가 최소일 때 최대이므로 구하는 최댓값은 $\frac{1}{12}$이다.

18 답 4

유형 18 산술평균과 기하평균의 관계의 활용

점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 원의 접선의 방정식은 $ax+by=4$

따라서 이 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\frac{4}{a}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{4}{b}\right)$

이때 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \frac{4}{a} \times \frac{4}{b} = \frac{8}{ab}$

한편 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 원 위의 점이므로 $a^2+b^2=4$ …… ㉠

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2 \ge 2\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a^2=b^2$, 즉 $a=b$일 때 성립) …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4 \ge 2ab$ $\therefore ab \le 2$

따라서 ab의 최댓값은 2이고, 삼각형 OAB의 넓이 $\frac{8}{ab}$은 ab의 값이 최대일 때 최소이므로 구하는 넓이의 최솟값은 4이다.

19 답 ③

유형 19 코시-슈바르츠의 부등식의 활용

$x^2+y^2=5$이므로

$x^2+x+y^2+2y=x+2y+(x^2+y^2)=x+2y+5$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \ge (x+2y)^2$

이때 $x^2+y^2=5$이므로

$5 \times 5 \ge (x+2y)^2$, $(x+2y)^2 \le 5^2$

$\therefore -5 \le x+2y \le 5$ (단, 등호는 $y=2x$일 때 성립)

$\therefore 0 \le x+2y+5 \le 10$

따라서 x^2+x+y^2+2y의 최댓값은 10이다.

04 함수

핵심 유형

	유형01 ③	유형02 5	유형03 ④
유형04 3	유형05 -1	유형06 ②	유형07 -3
유형08 ⑤	유형09 ④	유형10 -1	유형11 ⑤
유형12 ③	유형13 ③	유형14 6	유형15 ②
유형16 ②	유형17 ②	유형18 12	유형19 ④

핵심 유형 완성하기

001 ㄱ, ㄴ, ㄹ		002 ⑤	003 ⑤	004 ③
005 21	006 ⑤	007 ③	008 ②	
009 $\{0, 1, 2\}$		010 2	011 ④	012 ①
013 $\frac{1}{64}$	014 ②	015 ⑤	016 ②	
017 ㄱ, ㄴ	018 $\{-2\}$, $\{5\}$, $\{-2, 5\}$			019 ④
020 ⑤	021 6	022 9	023 ③	024 1
025 ①	026 ②	027 281	028 ④	029 ③
030 ①	031 ②	032 ④	033 ④	034 ②
035 3	036 ③	037 ⑤	038 -1	039 3
040 ④	041 $h(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$		042 ④	043 14
044 ⑤	045 ①	046 6	047 ②	048 7
049 ②	050 ②	051 ④	052 ③	053 ⑤
054 6	055 ②	056 ①		
057 $h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+1$			058 ①	059 8
060 2	061 ③	062 376	063 4	064 ②
065 -1	066 ⑤	067 4		
068 $h(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & (x\geq 2) \\ x-1 & (x<2) \end{cases}$			069 ④	070 ④
071 ③	072 $\frac{2}{3}$	073 ③	074 ②	075 ⑤

핵심 유형 최종 점검하기

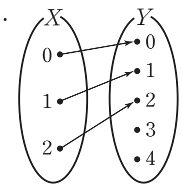
1 ①	2 ㄱ, ㄴ, ㄹ		3 22	4 5
5 ㄱ, ㄴ, ㄷ		6 ①	7 1	8 25
9 ③	10 ④	11 2	12 -6	13 ②
14 5	15 ⑤	16 $a<-1$ 또는 $a>1$		17 ③
18 ②	19 $-\frac{5}{2}$	20 ②	21 ②	22 $2\sqrt{2}$

핵심 유형 58~59쪽

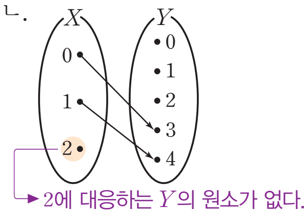
유형01 답 ③

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

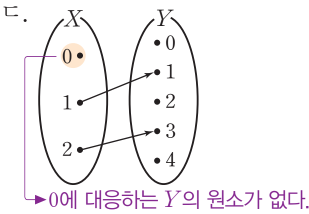
ㄱ.



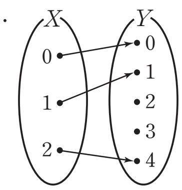
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



따라서 보기 중 함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

유형02 답 5

$f(-2)=(-2)^2=4$

$-1<0$이므로 $g(-1)=1$

$\therefore f(-2)+g(-1)=4+1=5$

유형03 답 ④

(i) $a>0$일 때

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(0)=0,\ f(4)=4$

$b=0,\ 4a+b=4 \qquad \therefore a=1,\ b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(0)=4,\ f(4)=0$

$b=4,\ 4a+b=0 \qquad \therefore a=-1,\ b=4$

$\therefore a+b=3$

(i), (ii)에 의하여 $a+b=3$

유형04 답 3

주어진 식의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

주어진 식의 양변에 $x=-1,\ y=1$을 대입하면

$f(-1+1)=f(-1)+f(1)$

$0=f(-1)+3 \qquad \therefore f(-1)=-3$

주어진 식의 양변에 $x=1,\ y=1$을 대입하면

$f(1+1)=f(1)+f(1) \qquad \therefore f(2)=3+3=6$

$\therefore f(-1)+f(2)=-3+6=3$

유형05 답 -1

$f(0)=g(0)$에서 $b=-1$

$f(1)=g(1)$에서 $a+b=0 \qquad \therefore a=1$

$\therefore ab=-1$

유형06 답 ②

ㄴ, ㄹ. $-1 \neq 1$이지만 $f(-1)=f(1)=1$이므로 일대일대응이 아니다.

유형07 답 -3

$a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이면

$f(1)=-2$, $f(3)=0$

$a+b=-2$, $3a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

$\therefore ab=-3$

유형08 답 ⑤

집합 X에서 집합 Y로의 함수에서 X의 원소 a, b, c 각각에 대응할 수 있는 Y의 원소는 1, 2, 3의 3개이므로 함수의 개수는

$3\times3\times3=3^3=27$ $\quad\therefore p=27$

집합 X에서 집합 Y로의 일대일대응에서 X의 원소 a에 대응할 수 있는 Y의 원소는 1, 2, 3의 3개, b에 대응할 수 있는 원소는 a에 대응한 원소를 제외한 2개, c에 대응할 수 있는 원소는 a, b에 대응한 원소를 제외한 1개이므로 일대일대응의 개수는

$3\times2\times1=6$ $\quad\therefore q=6$

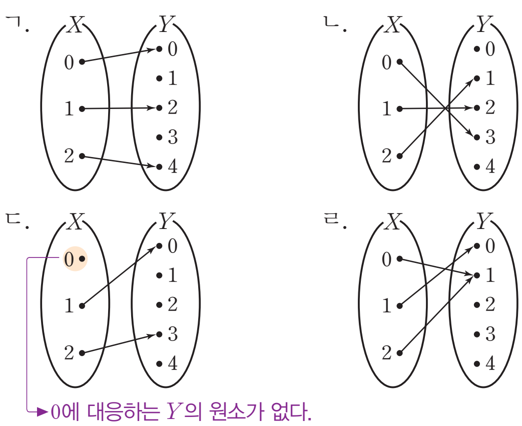
집합 X에서 집합 Y로의 함수가 상수함수일 때, X의 원소 a, b, c에 대응할 수 있는 Y의 원소는 1 또는 2 또는 3이므로 상수함수의 개수는 3이다. $\quad\therefore r=3$

$\therefore p+q+r=36$

핵심 유형 완성하기 60~64쪽

001 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 보기 중 함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

002 답 ⑤

⑤ 집합 X의 원소 2에 대응하는 집합 Y의 원소가 a, c의 2개이므로 함수가 아니다.

003 답 ⑤

$X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y=\{\cdots, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

⑤ 집합 X의 원소 -2, -1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

004 답 ③

y축에 평행한 직선 $x=k$와 오직 한 점에서 만나는 그래프는 ③이다.

005 답 21

$f(3)=2\times3^2-1=17$

$-2<1$이므로 $g(-2)=-(-2)+2=4$

$\therefore f(3)+g(-2)=17+4=21$

006 답 ⑤

(i) x가 소수일 때

x의 양의 약수는 1, x의 2개이므로

$f(2)=f(3)=f(5)=f(7)=2$

(ii) $x=p^n$ (p는 소수, n은 자연수)일 때

4의 양의 약수는 1, 2, 4의 3개

8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8의 4개

9의 양의 약수는 1, 3, 9의 3개

$\therefore f(4)=f(9)=3$, $f(8)=4$

(iii) $x=p^mq^n$ (p, q는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)일 때

6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6의 4개

10의 양의 약수는 1, 2, 5, 10의 4개

$\therefore f(6)=f(10)=4$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)=2\times4+3\times2+4+4\times2=26$

007 답 ③

이차방정식 $x^2+5x-2=0$에서 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$이므로 α, β는 무리수이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=-2$

$$\begin{aligned}\therefore f(\alpha)+f(\beta)+f(\alpha\beta)&=\alpha^2+\beta^2+f(-2)\\&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2\\&=(-5)^2-2\times(-2)-2\\&=27\end{aligned}$$

008 답 ②

(i) $a>0$일 때

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-2)=-3$, $f(3)=2$

$-2a+b=-3$, $3a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$

그런데 $a>b$이므로 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-2)=2$, $f(3)=-3$

$-2a+b=2$, $3a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=0$

$\therefore a+b=-1$

(i), (ii)에 의하여 $a+b=-1$

009 답 {0, 1, 2}

$X=\{-3, -2, -1, 0, 1\}$이므로

$f(-3)=2, f(-2)=1, f(-1)=0, f(0)=1, f(1)=2$

따라서 치역은 $\{0, 1, 2\}$

010 답 2

$f(-1)=a+1, f(0)=1, f(1)=a+1, f(2)=4a+1$이므로 치역은 $\{1, a+1, 4a+1\}$

치역의 모든 원소의 합이 13이므로

$1+(a+1)+(4a+1)=13$

$5a=10 \qquad \therefore a=2$

011 답 ④

$3^1=3$을 4로 나누었을 때의 나머지는 3이므로 $f(1)=3$

$3^2=9$를 4로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 $f(2)=1$

$3^3=27$을 4로 나누었을 때의 나머지는 3이므로 $f(3)=3$

$3^4=81$을 4로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 $f(4)=1$

$3^5=243$을 4로 나누었을 때의 나머지는 3이므로 $f(5)=3$

⋮

$\therefore f(x)=\begin{cases} 3 & (x\text{는 홀수}) \\ 1 & (x\text{는 짝수}) \end{cases}$

따라서 집합 A는 집합 $\{1, 3, 5, \cdots, 19\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 A의 개수는

$2^{10}-1=1024-1=1023$

012 답 ①

$f(x)=-x^2+6$의 공역과 치역이 같으므로 $f(k)=k$

$-k^2+6=k, k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0 \qquad \therefore k=-3$ 또는 $k=2$

그런데 $k=2$이면 $x\le 2$에서 $f(x)$의 최댓값은 6이므로 치역은 $\{y|y\le 6\}$이고 공역은 $\{y|y\le 2\}$로 함수가 될 수 없다.

$\therefore k=-3$

013 답 $\frac{1}{64}$

주어진 식의 양변에 $x=1, y=0$을 대입하면

$f(1+0)=f(1)f(0) \qquad \therefore f(0)=1$

주어진 식의 양변에 $x=1, y=-1$을 대입하면

$f(1-1)=f(1)f(-1)$

$1=4f(-1) \qquad \therefore f(-1)=\frac{1}{4}$

주어진 식의 양변에 $x=-1, y=-1$을 대입하면

$f(-1-1)=f(-1)f(-1)$

$\therefore f(-2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

주어진 식의 양변에 $x=-1, y=-2$를 대입하면

$f(-1-2)=f(-1)f(-2)$

$\therefore f(-3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{64}$

014 답 ②

주어진 식의 양변에 $x=2, y=2$를 대입하면

$f(2\times 2)=f(2)+f(2)$

$6=2f(2) \qquad \therefore f(2)=3$

주어진 식의 양변에 $x=2, y=4$를 대입하면

$f(2\times 4)=f(2)+f(4)$

$\therefore f(8)=3+6=9$

015 답 ⑤

ㄱ. 주어진 식의 양변에 $x=2, y=1$을 대입하면

$f(2\times 1)=f(2)f(1) \qquad \therefore f(1)=1$ (참)

ㄴ. 주어진 식의 양변에 $x=2, y=2$를 대입하면

$f(2\times 2)=f(2)f(2)$

$\therefore f(4)=(-4)\times(-4)=16$ (거짓)

ㄷ. 자연수 n에 대하여

$f(4^n)=f(4\times 4\times 4\times\cdots\times 4)$

$=f(4)\times f(4)\times f(4)\times\cdots\times f(4)$

$=\{f(4)\}^n=16^n=4^{2n}$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

016 답 ②

$f(-2)=g(-2)$에서 $-6+a=4-2a+b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(1)=g(1)$에서 $3+a=1+a+b \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4, b=2$

$\therefore a^2+b^2=16+4=20$

017 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $f(-1)=g(-1)=-1, f(0)=g(0)=0, f(1)=g(1)=1$이므로 $f=g$

ㄴ. $f(-1)=g(-1)=1, f(0)=g(0)=0, f(1)=g(1)=1$이므로 $f=g$

ㄷ. $f(1)=1, g(1)=0$이므로 $f\ne g$

따라서 보기 중 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

018 답 {−2}, {5}, {−2, 5}

$x^2-2x=x+10$에서 $x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=5$

따라서 집합 X는 $\{-2\}, \{5\}, \{-2, 5\}$

019 답 ④

① 상수함수이므로 일대일대응이 아니다.

② $-1\ne 1$이지만 $f(-1)=f(1)=0$이므로 일대일대응이 아니다.

③ $-2\ne -1$이지만 $f(-2)=f(-1)=0$이므로 일대일대응이 아니다.

⑤ $-1\ne 0$이지만 $f(-1)=f(0)=-1$이므로 일대일대응이 아니다.

020 답 ⑤

임의의 실수 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나고, 치역과 공역이 같은 함수의 그래프는 ㄴ, ㄹ이다.

021 답 6

ㄱ. $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$

ㄴ. 정의역의 원소 1에 대응하는 공역의 원소가 없다.

ㄷ. $f(0)=f(2)=2$, $f(1)=1$

ㄹ. $f(0)=2$, $f(1)=1$, $f(2)=0$

따라서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ의 3개, 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄹ의 2개, 항등함수인 것은 ㄱ의 1개이므로

$a=3$, $b=2$, $c=1$

$\therefore a+b+c=6$

022 답 9

f는 일대일대응이므로 $f(a)=f(1)$에서 $a=1$

g는 항등함수이므로 $g(5)=5$, $g(3)=3$

h는 상수함수이므로 $h(-1)=h(-2)=g(5)=5$

$\therefore a+g(3)+h(-1)=1+3+5=9$

023 답 ③

(i) $a>0$일 때

함수 f가 일대일대응이면

$f(-1)=-1$, $f(2)=5$

$-a+b=-1$, $2a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$

(ii) $a<0$일 때

함수 f가 일대일대응이면

$f(-1)=5$, $f(2)=-1$

$-a+b=5$, $2a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=3$

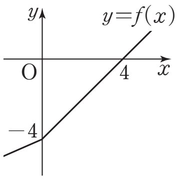
$\therefore \dfrac{b}{a}=-\dfrac{3}{2}$

(i), (ii)에 의하여 모든 $\dfrac{b}{a}$의 값의 합은

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}=-1$

024 답 1

함수 f가 일대일대응이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 직선 $y=ax+a^2-5$의 기울기가 양수이고 점 $(0, -4)$를 지나야 한다.



따라서 $a>0$이고, $a^2-5=-4$에서 $a=\pm1$이므로

$a=1$

025 답 ①

$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$이므로 $x\geq2$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 f가 일대일대응이면 $f(2)=-1$이므로

$4+4+k=-1$ $\quad\therefore k=-9$

026 답 ②

$f(x)=-x^2+2ax+b=-(x-a)^2+a^2+b$이므로 $-1\leq x\leq0$에서 $f(x)$의 값이 항상 증가하거나 항상 감소하려면 $a\leq-1$ 또는 $a>0$이어야 한다.

(i) $a\leq-1$일 때

함수 f가 일대일대응이면

$f(-1)=0$, $f(0)=-1$

$-1-2a+b=0$, $b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

$\therefore ab=1$

(ii) $a>0$일 때

함수 f가 일대일대응이면

$f(-1)=-1$, $f(0)=0$

$-1-2a+b=-1$, $b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=0$

이는 조건을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $ab=1$

027 답 281

$n(X)=4$이므로

$p=4^4=256$, $q=4\times3\times2\times1=24$, $r=1$

$\therefore p+q+r=281$

028 답 ④

구하는 함수의 개수는 X에서 Y로의 함수의 개수에서 상수함수의 개수를 빼면 되므로

$2^3-2=6$

029 답 ③

(가)에서 함수 f는 일대일함수이고 (나)에서 $f(2)=6$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 4, 8, 10의 4개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 4, 8, 10 중 $f(1)$의 값을 제외한 3개이다.

따라서 구하는 함수의 개수는 $4\times3=12$

핵심 유형 65~67쪽

유형09 답 ④

$\sqrt{3}$은 무리수이므로 $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2+1=4$

4는 유리수이므로 $f(4)=3\times4-2=10$

$\therefore (f\circ f)(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))=f(4)=10$

유형10 답 −1

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+2)$

$=2(ax+2)-1=2ax+3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$

$=a(2x-1)+2=2ax-a+2$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $2ax+3=2ax-a+2$

따라서 $3=-a+2$이므로 $a=-1$

유형11 답 ⑤

$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = h(x) - 1$

$(f \circ h)(x) = g(x)$이므로 $h(x) - 1 = 2x^2 + 3$

$\therefore\ h(x) = 2x^2 + 4$

유형12 답 ③

$f^1(x) = f(x) = x - 2$

$f^2(x) = f(f(x)) = (x-2) - 2 = x - 4$

$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x-4) - 2 = x - 6$

$\vdots$

$f^{50}(x) = x - 2 \times 50 = x - 100$

$\therefore\ f^{50}(150) = 150 - 100 = 50$

유형13 답 ③

$f^{-1}(-3) = 1,\ f^{-1}(6) = 4$이므로

$f(1) = -3,\ f(4) = 6$

$a + b = -3,\ 4a + b = 6$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3,\ b = -6$

따라서 $f(x) = 3x - 6$이므로 $f(2) = 6 - 6 = 0$

유형14 답 6

함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

함수 $y = f(x)$의 그래프의 기울기가 양수이므로

$f(-2) = a,\ f(3) = 5$

$-4 - b = a,\ 6 - b = 5$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -5,\ b = 1$

$\therefore\ b - a = 6$

유형15 답 ②

$y = 2x + a$에서 $2x = y - a \qquad \therefore\ x = \frac{1}{2}y - \frac{a}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{2}x - \frac{a}{2} \qquad \therefore\ f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{a}{2}$

따라서 $\frac{1}{2}x - \frac{a}{2} = bx + 2$이므로

$\frac{1}{2} = b,\ -\frac{a}{2} = 2 \qquad \therefore\ a = -4,\ b = \frac{1}{2}$

$\therefore\ ab = -2$

유형16 답 ②

$(f^{-1} \circ g)(a) = f^{-1}(g(a)) = 4$에서 $f(4) = g(a)$이므로

$2 - 1 = 2a + 3 \qquad \therefore\ a = -1$

유형17 답 ②

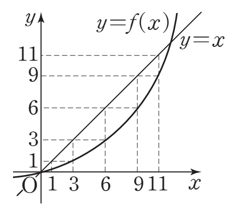
$$\begin{aligned}(g \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ g^{-1})(-1) &= (g \circ g^{-1} \circ f \circ g^{-1})(-1)\\ &= (f \circ g^{-1})(-1)\\ &= f(g^{-1}(-1))\end{aligned}$$

$g^{-1}(-1) = k$라고 하면 $g(k) = -1$이므로

$-2k + 3 = -1 \qquad \therefore\ k = 2$

$$\begin{aligned}\therefore\ (g \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ g^{-1})(-1) &= f(g^{-1}(-1))\\ &= f(2) = 8 - 3 = 5\end{aligned}$$

유형18 답 12



$(f \circ f)(6) = f(f(6)) = f(3) = 1$

한편 $f^{-1}(6) = k$라고 하면 $f(k) = 6$이므로

$k = 9$

$f^{-1}(9) = l$이라고 하면 $f(l) = 9$이므로

$l = 11$

$$\begin{aligned}\therefore\ (f^{-1} \circ f^{-1})(6) &= f^{-1}(f^{-1}(6))\\ &= f^{-1}(9) = 11\end{aligned}$$

$\therefore\ (f \circ f)(6) + (f^{-1} \circ f^{-1})(6) = 1 + 11 = 12$

유형19 답 ④

함수 $y = f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = x$의 교점과 같으므로

$2x - 1 = x$에서 $x = 1$

따라서 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로 $a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 2$

핵심 유형 **완성**하기 68~74쪽

030 답 ①

$f(-1) = |-1-3| = 4$

$f(4) = -4^2 + 3 = -13$

$\therefore\ (f \circ f)(-1) = f(f(-1)) = f(4) = -13$

031 답 ②

$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(1) = 0$

$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)(1) &= f(f(f(1)))\\ &= f(f(0)) = f(3) = 4\end{aligned}$$

$\therefore\ (f \circ f)(2) + (f \circ f \circ f)(1) = 0 + 4 = 4$

032 답 ④

$$\begin{aligned}(f \circ g)(2) + (g \circ f)(-2) &= f(g(2)) + g(f(-2))\\ &= f(0) + g(5)\\ &= -3 + 3 = 0\end{aligned}$$

033 답 ④

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(-2) &= ((f \circ g) \circ h)(-2)\\ &= (f \circ g)(h(-2))\\ &= (f \circ g)(1) = 3\end{aligned}$$

034 답 ②

$f(x) = \begin{cases} 3x & (0 \le x < 1) \\ -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} & (1 \le x \le 3) \end{cases},\ g(x) = \begin{cases} 2 & (0 \le x < 2) \\ -2x + 6 & (2 \le x \le 3) \end{cases}$

$$\begin{aligned}\therefore\ (f \circ g)(1) + (g \circ f)(2) &= f(g(1)) + g(f(2))\\ &= f(2) + g\left(\frac{3}{2}\right)\\ &= \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

035 답 3

㈎에서 $f(2)=3$, ㈏에서 $(f\circ g)(2)=f(g(2))=3$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$g(2)=2$

또 ㈎에서 $g(1)=3$, ㈏에서 $(g\circ f)(3)=g(f(3))=3$이고 함수 g가 일대일대응이므로

$f(3)=1$

따라서 $f(2)=3$, $f(3)=1$이므로 $f(1)=2$이고, $g(1)=3$, $g(2)=2$이므로 $g(3)=1$이다.

$\therefore f(1)+g(3)=2+1=3$

036 답 ③

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+2)$

$\quad=a(-x+2)-4=-ax+2a-4$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-4)$

$\quad=-(ax-4)+2=-ax+6$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $-ax+2a-4=-ax+6$

따라서 $2a-4=6$이므로 $a=5$

037 답 ⑤

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(2a+3)$

$\quad=a(2a+3)+3=2a^2+3a+3$

즉, $2a^2+3a+3=12$에서 $2a^2+3a-9=0$

$(a+3)(2a-3)=0 \quad \therefore a=\frac{3}{2}\ (\because a>0)$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x+3$이므로 $f(4)=\frac{3}{2}\times4+3=9$

038 답 -1

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+b)$

$\quad=a(x+b)+1=ax+ab+1$

$f\circ g=h$이므로 $ax+ab+1=2x-2$

따라서 $a=2$, $ab+1=-2$이므로 $a=2$, $b=-\frac{3}{2}$

$\therefore a+2b=2+2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$

039 답 3

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+2a)$

$\quad=a(bx+2a)+2b=abx+2a^2+2b$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+2b)$

$\quad=b(ax+2b)+2a=abx+2b^2+2a$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $abx+2a^2+2b=abx+2b^2+2a$

따라서 $2a^2+2b=2b^2+2a$이므로 $a^2-b^2-a+b=0$

$(a-b)(a+b-1)=0 \quad \therefore a=b$ 또는 $a+b=1$

그런데 두 함수 f, g가 서로 다른 함수이므로 $a\neq b$

$\therefore a+b=1$

$\therefore f(1)+g(1)=(a+2b)+(b+2a)$

$\quad=3a+3b=3(a+b)$

$\quad=3\times1=3$

040 답 ④

$(g\circ h)(x)=g(h(x))=-h(x)+2$

$(g\circ h)(x)=f(x)$이므로 $-h(x)+2=3x^2-1$

$\therefore h(x)=-3x^2+3$

041 답 $h(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(-2x+1)$

$(h\circ f)(x)=g(x)$이므로 $h(-2x+1)=3x-1$

$-2x+1=t$로 놓으면 $x=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$이므로

$h(t)=3\left(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)-1=-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}$

$\therefore h(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

042 답 ④

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+3)$

$(g\circ f)(x)=x^2+x$이므로 $g(2x+3)=x^2+x$

$2x+3=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}$이므로

$g(t)=\left(\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}=\frac{1}{4}t^2-t+\frac{3}{4}$

$\therefore g(-3)=\frac{1}{4}\times9+3+\frac{3}{4}=6$

다른 풀이 $g(2x+3)=x^2+x$ …… ㉠

$2x+3=-3$에서 $x=-3$이므로 이를 ㉠에 대입하면 $g(-3)=6$

043 답 14

$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ(g\circ f))(x)$

$\quad=h((g\circ f)(x))=h\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)$

$((h\circ g)\circ f)(x)=x^2+2x-1$이므로 $h\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)=x^2+2x-1$

$\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=t$로 놓으면 $x=2t-3$이므로

$h(t)=(2t-3)^2+2(2t-3)-1=4t^2-8t+2$

$\therefore h(-1)=4+8+2=14$

044 답 ⑤

$f^1(x)=f(x)=-x+2$

$f^2(x)=f(f(x))=-(-x+2)+2=x$

$f^3(x)=f(f^2(x))=-x+2$

$\vdots$

$f^{100}(x)=x$

$\therefore f^{100}(50)=50$

045 답 ①

$f^1(x)=f(x)=2x$

$f^2(x)=f(f(x))=2(2x)=2^2x$

$f^3(x)=f(f^2(x))=2(2^2x)=2^3x$

$\vdots$

$f^9(x)=2^9x$

$\therefore f^9(-2)=2^9\times(-2)=-2^{10}$

046 답 6

$f^1(100)=f(100)=\frac{100}{2}=50$

$f^2(100)=f(f(100))=f(50)=\frac{50}{2}=25$

$f^3(100)=f(f^2(100))=f(25)=\frac{25-3}{2}=11$

$f^4(100)=f(f^3(100))=f(11)=\frac{11-3}{2}=4$

$f^5(100)=f(f^4(100))=f(4)=\frac{4}{2}=2$

$f^6(100)=f(f^5(100))=f(2)=\frac{2}{2}=1$

$\therefore n=6$

047 답 ②

$f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=f(f(1))=f(2)=4$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(4)=3$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(3)=1$

$\vdots$

따라서 $f^n(1)=1$을 만족하는 자연수 n의 최솟값은 4이다.
같은 방법으로 $f^n(2)=2$, $f^n(3)=3$, $f^n(4)=4$를 만족하는 자연수 n의 최솟값은 4이므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

048 답 7

$f^{-1}(1)=3$, $f^{-1}(-1)=5$이므로

$f(3)=1$, $f(5)=-1$

$3a+b=1$, $5a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$

따라서 $f(x)=-x+4$이므로 $f(-3)=3+4=7$

049 답 ②

$f^{-1}(4)=2$, $f^{-1}(1)=b$이므로

$f(2)=4$, $f(b)=1$

$2a+3=4$, $ab+3=1$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-4$이므로 $a+b=-\frac{7}{2}$

050 답 ②

$\frac{-x+3}{4}=t$로 놓으면 $x=-4t+3$이므로

$f(t)=(-4t+3)-2=-4t+1$

$f^{-1}(5)=k$라고 하면 $f(k)=5$이므로

$-4k+1=5$ $\quad\therefore k=-1$ $\quad\therefore f^{-1}(5)=-1$

051 답 ④

$f^{-1}(7)=k$라고 하면 $f(k)=7$이므로

$k^2-2k-1=7$, $k^2-2k-8=0$

$(k+2)(k-4)=0$ $\quad\therefore k=-2$ 또는 $k=4$

그런데 함수 f의 정의역에 의하여 $k\geq 1$이므로 $k=4$

$\therefore f^{-1}(7)=4$

052 답 ③

$x\geq 2$일 때, $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geq 1$

$x<2$일 때, $f(x)=x-1<1$

$f^{-1}(0)=a$, $f^{-1}(10)=b$라고 하면

$f(a)=0<1$, $f(b)=10\geq 1$이므로 $a<2$, $b\geq 2$

$f(a)=0$에서 $a-1=0$ $\quad\therefore a=1$

$f(b)=10$에서 $b^2-4b+5=10$

$b^2-4b-5=0$, $(b+1)(b-5)=0$ $\quad\therefore b=5$ ($\because b\geq 2$)

$\therefore f^{-1}(0)+f^{-1}(10)=1+5=6$

053 답 ⑤

함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 음수이므로

$f(-1)=a$, $f(2)=2$

$3+b=a$, $-6+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=11$, $b=8$

$\therefore a+b=19$

054 답 6

함수 f의 역함수가 존재하려면 f는 일대일대응이어야 한다.
따라서 $x\geq 1$일 때의 함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기와 $x<1$일 때의 함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기의 부호가 같아야 하므로

$(a-4)(1-2a)>0$ $\quad\therefore \frac{1}{2}<a<4$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은 $1+2+3=6$

055 답 ②

함수 f의 역함수가 존재하려면 f는 일대일대응이어야 한다.

$f(x)=x^2+kx+k^2=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2$이므로

$-\frac{k}{2}\leq 1$, $f(1)=1$

$-\frac{k}{2}\leq 1$에서 $k\geq -2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(1)=1$에서 $1+k+k^2=1$, $k^2+k=0$

$k(k+1)=0$ $\quad\therefore k=-1$ 또는 $k=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-1$ 또는 $k=0$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $-1+0=-1$

056 답 ①

$y=ax+b$에서 $ax=y-b$ $\quad\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$

따라서 $\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}=6bx-4ab$이므로 $\frac{1}{a}=6b$, $\frac{b}{a}=4ab$

$\frac{b}{a}=4ab$에서 $a^2=\frac{1}{4}$이므로 $a=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

$\frac{1}{a}=6b$에서 $2=6b$ $\quad\therefore b=\frac{1}{3}$

$\therefore a-b=\frac{1}{6}$

057 답 $h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+1$

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-1)$

$\quad=-(3x-1)+2=-3x+3$

즉, $h(x)=-3x+3$이므로 $y=-3x+3$에서

$3x=-y+3 \qquad \therefore x=-\frac{1}{3}y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{3}x+1$

$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+1$

058 답 ①

함수 $g(x)$의 역함수가 $f(2x+3)$이므로

$g^{-1}(x)=f(2x+3)$

$y=\frac{1}{2}x-1$에서 $\frac{1}{2}x=y+1 \qquad \therefore x=2y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x+2 \qquad \therefore g^{-1}(x)=2x+2$

따라서 $f(2x+3)=2x+2$이므로

$2x+3=t$로 놓으면 $x=\frac{t-3}{2}$

$\therefore f(t)=2\times\frac{t-3}{2}+2=t-1$

$\therefore f(x)=x-1$

059 답 8

$(f\circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))=2$

$g^{-1}(a)=k$라고 하면 $f(k)=2$에서

$\frac{k-1}{2}=2 \qquad \therefore k=5$

따라서 $g^{-1}(a)=5$이므로

$a=g(5)=2\times5-2=8$

060 답 2

$(f\circ g^{-1}\circ f)(a)=f(g^{-1}(f(a)))=5$

$g^{-1}(f(a))=k$라고 하면 $f(k)=5$에서

$2k+3=5 \qquad \therefore k=1$

$\therefore g^{-1}(f(a))=1$

따라서 $g(1)=f(a)$이므로

$7=2a+3 \qquad \therefore a=2$

061 답 ③

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-2x+b)$

$\quad=a(-2x+b)+1=-2ax+ab+1$

$(f\circ g)(x)=-x+3$이므로

$-2ax+ab+1=-x+3$

따라서 $-2a=-1$, $ab+1=3$이므로 $a=\frac{1}{2}$, $b=4$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x+1$, $g(x)=-2x+4$

$g^{-1}(-8)=k$라고 하면 $g(k)=-8$이므로

$-2k+4=-8 \qquad \therefore k=6$

$\therefore f(g^{-1}(-8))=f(6)=3+1=4$

062 답 376

$f^{-1}(2x-1)=\frac{x-4}{5}$에서 $f\left(\frac{x-4}{5}\right)=2x-1$

$\frac{x-4}{5}=t$로 놓으면 $x=5t+4$이므로

$f(t)=2(5t+4)-1=10t+7$

$\therefore (f\circ f)(3)=f(f(3))=f(37)=377$

$f^{-1}(-3)=k$라고 하면 $f(k)=-3$이므로

$10k+7=-3 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore (f\circ f)(3)+f^{-1}(-3)=377-1=376$

063 답 4

$(f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(6)=(f\circ g^{-1}\circ f\circ f^{-1})(6)$

$\quad=(f\circ g^{-1})(6)=f(g^{-1}(6))$

$g^{-1}(6)=k$라고 하면 $g(k)=6$이므로

$5k-4=6 \qquad \therefore k=2$

$\therefore (f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(6)=f(g^{-1}(6))$

$\quad=f(2)=6-2=4$

064 답 ②

$(f^{-1}\circ g)(0)+(f^{-1}\circ g)^{-1}(1)=(f^{-1}\circ g)(0)+(g^{-1}\circ f)(1)$

$\quad=f^{-1}(g(0))+g^{-1}(f(1))$

$\quad=f^{-1}(3)+g^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$라고 하면 $f(k)=3$이므로

$4k-1=3 \qquad \therefore k=1$

$g^{-1}(3)=l$이라고 하면 $g(l)=3$이므로

$5l+3=3 \qquad \therefore l=0$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(0)+(f^{-1}\circ g)^{-1}(1)=f^{-1}(3)+g^{-1}(3)$

$\quad=1+0=1$

065 답 -1

$f=f^{-1}$에서 $(f\circ f)(x)=x$

$(f\circ f)(x)=f(ax+1)=a(ax+1)+1=a^2x+a+1$

따라서 $a^2x+a+1=x$이므로

$a^2=1$, $a+1=0 \qquad \therefore a=-1$

066 답 ⑤

$h(x)=4x-7$이라고 하면

$h^{-1}(x)=(f\circ g^{-1})^{-1}(x)=(g\circ f^{-1})(x)$

이때 $h^{-1}(1)=k$라고 하면 $h(k)=1$이므로

$4k-7=1 \qquad \therefore k=2$

$\therefore (g\circ f^{-1})(1)=h^{-1}(1)=2$

067 답 4

$((f\circ g)^{-1}\circ f\circ g^{-1})(a)=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ g^{-1})(a)$

$\quad=(g^{-1}\circ g^{-1})(a)=g^{-1}(g^{-1}(a))$

$\quad=g^{-1}(2a-5)=2(2a-5)-5$

$\quad=4a-15$

따라서 $f(a)=4a-15$이므로 $f^{-1}(4a-15)=a$

$(4a-15)+3=a \qquad \therefore a=4$

068 답 $h(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & (x\geq2) \\ x-1 & (x<2) \end{cases}$

$f\circ h=g^{-1}$에서 $f^{-1}\circ f\circ h=f^{-1}\circ g^{-1}$

$\therefore\ h=(g\circ f)^{-1}$

(i) $x\geq1$일 때

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$

$=(2x-1)+1=2x$

$y=2x$라고 하면 $y\geq2$이고 $x=\frac{1}{2}y$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x$

$\therefore\ (g\circ f)^{-1}(x)=\frac{1}{2}x\ (x\geq2)$

(ii) $x<1$일 때

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=x+1$

$y=x+1$이라고 하면 $y<2$이고 $x=y-1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x-1$

$\therefore\ (g\circ f)^{-1}(x)=x-1\ (x<2)$

(i), (ii)에 의하여 $h(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & (x\geq2) \\ x-1 & (x<2) \end{cases}$

069 답 ④

ㄱ. $f\circ f=f^{-1}$이므로 $f\circ f\circ f=f\circ f^{-1}$

따라서 $f^3(x)=x$이므로 $f^3(1)=1$ (참)

ㄴ. $f^3(x)=x$이므로

$f^{20}=f^{3\times6}\circ f^2=f^2$, $f^{40}=f^{3\times13}\circ f=f$

그런데 $f\neq f^{-1}$이므로 $f\neq f^2$ $\quad\therefore\ f^{20}\neq f^{40}$ (거짓)

ㄷ. $f^{2017}=f^{3\times672}\circ f=f$

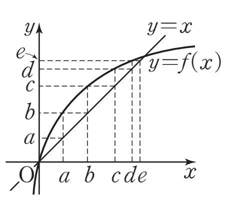
$f^{17}=f^{3\times5}\circ f^2=f^2$

$(f^2)^{-1}=(f^{-1})^{-1}=f$이므로 $(f^{17})^{-1}=f$

$\therefore\ f^{2017}=(f^{17})^{-1}$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

070 답 ④



$(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=c$

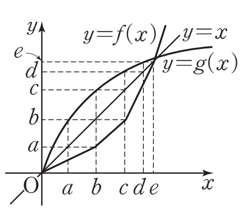
한편 $f^{-1}(c)=k$라고 하면 $f(k)=c$이므로 $k=b$

$f^{-1}(b)=l$이라고 하면 $f(l)=b$이므로 $l=a$

$\therefore\ (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)=a$

$\therefore\ (f\circ f)(a)+(f^{-1}\circ f^{-1})(c)=c+a$

071 답 ③



$g^{-1}(c)=k$라고 하면 $g(k)=c$이므로 $k=b$

$f^{-1}(b)=l$이라고 하면 $f(l)=b$이므로 $l=c$

$\therefore\ (f^{-1}\circ g^{-1})(c)=f^{-1}(g^{-1}(c))$

$=f^{-1}(b)=c$

072 답 $\frac{2}{3}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$-2x+1=x$에서 $x=\frac{1}{3}$

따라서 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$이므로 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{2}{3}$

073 답 ③

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$3x+a=x$의 해가 $x=1$이어야 한다.

즉, $3+a=1$이므로 $a=-2$

한편 점 $(1,\ b)$는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $b=1$

$\therefore\ a+b=-1$

074 답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$x^2-6x+12=x$에서 $x^2-7x+12=0$

$(x-3)(x-4)=0 \qquad \therefore\ x=3$ 또는 $x=4$

따라서 두 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$, $(4,\ 4)$이므로 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(4-3)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2}$

075 답 ⑤

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 4)$, $(4,\ -1)$을 지난다.

$f(x)=ax+b\ (a\neq0)$라고 하면

$-a+b=4$, $4a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

따라서 $f(x)=-x+3$이므로 $f(1)=-1+3=2$

핵심 유형 **최종 점검하기** 75~77쪽

1 답 ①

유형 01 함수의 뜻과 그래프

$X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

ㄴ. 정의역의 원소 2, 3에 대응하는 공역의 원소가 없으므로 g는 함수가 아니다.

ㄷ. 정의역의 원소 0에 대응하는 공역의 원소가 없으므로 h는 함수가 아니다.

따라서 보기 중 함수인 것은 ㄱ이다.

2 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

유형 01 함수의 뜻과 그래프

y축에 평행한 직선 $x=k$와 오직 한 점에서 만나는 그래프는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

3 답 22
유형 02 함숫값

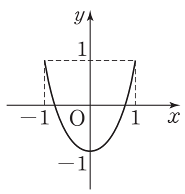
$f(1)=f(3)=f(5)=\cdots=f(15)=1$
$f(2)=f(4)=f(6)=\cdots=f(14)=2$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15)=1\times8+2\times7=22$

4 답 5
유형 03 함수의 정의역, 공역, 치역

함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

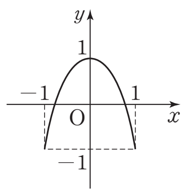
(ⅰ) $a>0$일 때

$f(x)=ax^2+b$의 공역과 치역이 같으므로
$b=-1,\ f(-1)=f(1)=1$
$a+b=1$이므로 $a=2$
$\therefore a^2+b^2=4+1=5$



(ⅱ) $a<0$일 때

$f(x)=ax^2+b$의 공역과 치역이 같으므로
$b=1,\ f(-1)=f(1)=-1$
$a+b=-1$이므로 $a=-2$
$\therefore a^2+b^2=4+1=5$



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a^2+b^2=5$

5 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ
유형 04 조건을 이용하여 함숫값 구하기

ㄱ. 주어진 식의 양변에 $x=1,\ y=1$을 대입하면
$f(1\times1)=f(1)+f(1)\qquad\therefore f(1)=0$ (참)

ㄴ. 주어진 식의 양변에 $x=3,\ y=3$을 대입하면
$f(3\times3)=f(3)+f(3),\ 2=2f(3)\qquad\therefore f(3)=1$
주어진 식의 양변에 $x=3,\ y=\frac{1}{3}$을 대입하면
$f\left(3\times\frac{1}{3}\right)=f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)$
$0=1+f\left(\frac{1}{3}\right)\qquad\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$ (참)

ㄷ. $f\left(x\times\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$이므로
$0=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\qquad\therefore f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right)$
$\therefore f(x^2)=f(x\times x)=f(x)+f(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

6 답 ①
유형 05 서로 같은 함수

$f(-3)=g(-3)$에서 $6+a=-3b+2$ …… ㉠
$f(1)=g(1)$에서 $2+a=b+2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=-1$
$\therefore a+b=-2$

7 답 1
유형 06 여러 가지 함수

f는 항등함수이므로 $f(4)=4,\ f(-3)=-3$
g는 상수함수이므로 $g(-3)=g(-5)=f(4)=4$
$\therefore f(-3)+g(-3)=-3+4=1$

8 답 25
유형 07 일대일대응이 되기 위한 조건

$a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이면
$f(0)=4,\ f(2)=-2$
$b=4,\ 2a+b=-2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=4$
$\therefore a^2+b^2=9+16=25$

9 답 ③
유형 08 함수의 개수

$a=4^2=16,\ b=4\times3=12,\ c=4$
$\therefore a+b+c=32$

10 답 ④
유형 09 합성함수

$$\begin{aligned}(h\circ(g\circ f))(\sqrt{2})&=((h\circ g)\circ f)(\sqrt{2})\\&=(h\circ g)(f(\sqrt{2}))\\&=(h\circ g)(4)\\&=4-2=2\end{aligned}$$

11 답 2
유형 09 합성함수

$(f\circ g)(0)=(g\circ f)(0)$이므로
$f(g(0))=g(f(0))=g(2)=1$
이때 $f(3)=1$이므로 $g(0)=3$ …… ㉠
$(f\circ g)(1)=(g\circ f)(1)$이므로
$f(g(1))=g(f(1))=g(0)=3$ ($\because$ ㉠)
이때 $f(2)=3$이므로 $g(1)=2$
$(f\circ g)(2)=(g\circ f)(2)$이므로
$f(g(2))=g(f(2))=g(3)$
$\therefore g(3)=f(g(2))=f(1)=0$
$\therefore g(1)+g(3)=2+0=2$

12 답 −6
유형 10 합성함수를 이용하여 미정계수 구하기

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))=f(ax+b)\\&=a(ax+b)+b\\&=a^2x+ab+b\end{aligned}$$
따라서 $a^2x+ab+b=4x-3$이므로
$a^2=4,\ ab+b=-3$
$a^2=4$에서 $a=-2$ ($\because a<0$)
$ab+b=-3$에서 $-2b+b=-3\qquad\therefore b=3$
$\therefore ab=-6$

13 답 ②
유형 11 $f\circ g=h$를 만족하는 함수 f 또는 g 구하기

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=3h(x)-1$
$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로 $3h(x)-1=x+4$
$\therefore h(x)=\frac{x+5}{3}$

14 답 5

유형 12 f^n 꼴의 합성함수

$f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(3)=1$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(1)=2$

$f^5(1)=f(f^4(1))=f(2)=3$

$\vdots$

즉, $f^n(1)$은 2, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

$2018=3\times672+2$이므로 $f^{2018}(1)=f^2(1)=3$

같은 방법으로 $f^n(2)$는 3, 1, 2가 이 순서대로 반복되고

$2019=3\times673$이므로 $f^{2019}(2)=2$

$\therefore f^{2018}(1)+f^{2019}(2)=3+2=5$

15 답 ⑤

유형 13 역함수의 뜻

$\frac{2x+3}{4}=t$로 놓으면 $x=2t-\frac{3}{2}$이므로

$f(t)=-2\left(2t-\frac{3}{2}\right)=-4t+3$

$f^{-1}(7)=k$라고 하면 $f(k)=7$이므로

$-4k+3=7 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore f^{-1}(7)=-1$

16 답 $a<-1$ 또는 $a>1$

유형 14 역함수가 존재하기 위한 조건

함수 f의 역함수가 존재하려면 f는 일대일대응이어야 한다.

$f(x)=ax+|x-1|$에서

(i) $x\ge1$일 때, $f(x)=ax+x-1=(a+1)x-1$

(ii) $x<1$일 때, $f(x)=ax-(x-1)=(a-1)x+1$

따라서 (i), (ii)에서 $x\ge1$일 때의 함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기와 $x<1$일 때의 함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기의 부호가 같아야 하므로

$(a+1)(a-1)>0 \qquad \therefore a<-1$ 또는 $a>1$

17 답 ③

유형 15 역함수 구하기

$y=ax+3$에서 $ax=y-3 \qquad \therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{3}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x-\frac{3}{a} \qquad \therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{3}{a}$

따라서 $\frac{1}{a}x-\frac{3}{a}=\frac{1}{3}x+b$이므로 $\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{a}=b$

$\therefore a=3,\ b=-1 \qquad \therefore a+b=2$

18 답 ②

유형 16 합성함수와 역함수

$f^{-1}(5)=k$라고 하면 $f(k)=5$이므로

$3k+2=5 \qquad \therefore k=1$

$\therefore (f\circ g\circ f^{-1})(5)=f(g(f^{-1}(5)))=f(g(1))=f(-2+a)$

$=3(-2+a)+2=3a-4$

따라서 $3a-4=8$이므로 $a=4$

19 답 $-\frac{5}{2}$

유형 16 합성함수와 역함수

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+b)$

$=a(2x+b)+2=2ax+ab+2$

$y=2ax+ab+2$에서 $2ax=y-ab-2$

$\therefore x=\frac{1}{2a}y-\frac{b}{2}-\frac{1}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2a}x-\frac{b}{2}-\frac{1}{a}$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(x)=\frac{1}{2a}x-\frac{b}{2}-\frac{1}{a}$

따라서 $\frac{1}{2a}x-\frac{b}{2}-\frac{1}{a}=-2x-1$이므로

$\frac{1}{2a}=-2,\ -\frac{b}{2}-\frac{1}{a}=-1$

$\therefore a=-\frac{1}{4},\ b=10 \qquad \therefore ab=-\frac{5}{2}$

20 답 ②

유형 17 역함수의 성질

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(-1)+(g\circ(f\circ g)^{-1})(1)$

$=(g^{-1}\circ f)(-1)+(g\circ g^{-1}\circ f^{-1})(1)$

$=g^{-1}(f(-1))+f^{-1}(1)$

$=g^{-1}(5)+f^{-1}(1)$

$g^{-1}(5)=k$라고 하면 $g(k)=5$이므로

$3k-1=5 \qquad \therefore k=2$

$f^{-1}(1)=l$이라고 하면 $f(l)=1$이므로

$-l+4=1 \qquad \therefore l=3$

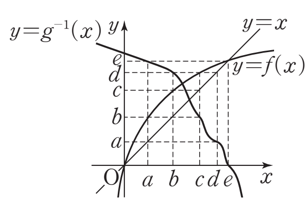
$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(-1)+(g\circ(f\circ g)^{-1})(1)$

$=g^{-1}(5)+f^{-1}(1)$

$=2+3=5$

21 답 ②

유형 18 함수의 그래프와 합성함수, 역함수



$f(a)=b,\ g^{-1}(d)=a$이므로

$f^{-1}(b)=a,\ g(a)=d$

$\therefore (g\circ f^{-1})(b)=g(f^{-1}(b))$

$=g(a)=d$

$g^{-1}(c)=b,\ f(b)=c$이므로

$g(b)=c,\ f^{-1}(c)=b$

$\therefore (g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(b)=g^{-1}(f^{-1}(g(b)))$

$=g^{-1}(f^{-1}(c))$

$=g^{-1}(b)=d$

$\therefore (g\circ f^{-1})(b)+(g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(b)=d+d=2d$

22 답 $2\sqrt{2}$

유형 19 역함수의 그래프의 성질

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$-2x+6=x$에서 $x=2$

따라서 $\mathrm{P}(2,\ 2)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

05 유리함수

핵심 유형

	유형01 ④	유형02 ①	유형03 -1
유형04 6	유형05 $\frac{1}{x}$	유형06 ①	유형07 ③
유형08 ⑤	유형09 ②	유형10 ⑤	
유형11 제2사분면		유형12 ⑤	유형13 ⑤
유형14 ②	유형15 ③	유형16 ④	유형17 5
유형18 ③	유형19 4		

핵심 유형 완성하기

001 $\frac{5}{x^3+1}$		002 $\frac{2}{(x+1)(x-1)}$		003 ⑤
004 $\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}$		005 ③	006 ④	007 ③
008 ③	009 12	010 ④	011 $\frac{9}{22}$	012 ③
013 ④	014 $-x$	015 18	016 -1	017 -3
018 ①	019 ③	020 ②	021 ②	022 ⑤
023 $\frac{2}{3}$	024 ①	025 1	026 -6	027 -2
028 ㄱ, ㄴ	029 2	030 ②	031 ④	032 ⑤
033 ④	034 ①	035 $0\le a<2$ 또는 $a>2$		
036 ①	037 ②	038 ③	039 ⑤	040 ④
041 ②	042 ⑤	043 5	044 ②	045 ①
046 ③	047 ①	048 ②	049 ④	050 $\frac{10}{3}$
051 $\frac{2}{3}$	052 ③	053 ⑤	054 $-\frac{1}{4}$	
055 ㄱ, ㄴ, ㄷ		056 ①	057 1	058 $\frac{7}{5}$
059 ①	060 ①	061 ⑤	062 ③	063 ④

핵심 유형 최종 점검하기

1 ①	2 ③	3 ⑤	4 ①	5 -3
6 ②	7 ⑤	8 ⑤	9 3	10 -1
11 ④	12 ①	13 ⑤	14 ②	15 ②
16 ⑤	17 ⑤	18 ⑤	19 ⑤	

핵심 유형 80~81쪽

유형01 답 ④

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}-\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{x(x-y)+y(x+y)-2xy}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{x^2+y^2-2xy}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-y}{x+y}$$

유형02 답 ①

$$\frac{x-3}{x+1}\times\frac{x^2-x-2}{x^2-3x}=\frac{x-3}{x+1}\times\frac{(x+1)(x-2)}{x(x-3)}=\frac{x-2}{x}$$

유형03 답 -1

주어진 식의 양변에 $(x-1)(x^2+x+1)$을 곱하면

$x+2=(ax-1)(x-1)+b(x^2+x+1)$

$\therefore\ x+2=(a+b)x^2+(b-a-1)x+b+1$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ b-a-1=1,\ b+1=2$

$\therefore\ a=-1,\ b=1$

$\therefore\ ab=-1$

유형04 답 6

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{1}{x+1-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{x+2-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$+\frac{1}{x+3-(x+2)}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3-x}{x(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}$$

따라서 $\frac{3}{x(x+3)}=\frac{a}{x(x+b)}$이므로 $a=3,\ b=3$

$\therefore\ a+b=6$

유형05 답 $\frac{1}{x}$

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}=1-\frac{x-1}{x}$$
$$=\frac{x-(x-1)}{x}=\frac{1}{x}$$

유형06 답 ①

$a+b+c=0$에서 $a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$이므로

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-3$$

유형07 답 ③

$x+2y+z=0$ ...... ㉠

$-x+y-3z=0$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$3y-2z=0 \qquad \therefore\ y=\frac{2}{3}z$

㉠에 $y=\frac{2}{3}z$를 대입하면

$x+2\times\frac{2}{3}z+z=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{7}{3}z$

$$\therefore\ \frac{x+y}{x+2z}=\frac{-\frac{7}{3}z+\frac{2}{3}z}{-\frac{7}{3}z+2z}=\frac{-\frac{5}{3}z}{-\frac{1}{3}z}=5$$

유형08 답 ⑤

$\frac{a+b}{3}=\frac{b-c}{2}=\frac{2c+a}{4}=t\ (t\neq0)$로 놓으면

$a+b=3t$ …… ㉠, $b-c=2t$ …… ㉡, $2c+a=4t$ …… ㉢

㉠+㉡×2+㉢을 하면 $2a+3b=11t$ …… ㉣

주어진 식에서 $\frac{2a+3b}{k}=t$이므로 ㉣을 대입하면

$\frac{11t}{k}=t \qquad \therefore k=11$

핵심 유형 완성하기 82~85쪽

001 답 $\frac{5}{x^3+1}$

$\frac{2}{x^3+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}$

$=\frac{2+(x^2-x+1)-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\frac{2+(x^2-x+1)-(x^2-x-2)}{x^3+1}=\frac{5}{x^3+1}$

002 답 $\frac{2}{(x+1)(x-1)}$

$\frac{x+4}{x^2-x-2}-\frac{x}{x^2-3x+2}$

$=\frac{x+4}{(x+1)(x-2)}-\frac{x}{(x-1)(x-2)}$

$=\frac{(x+4)(x-1)-x(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{x^2+3x-4-(x^2+x)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$

$=\frac{2(x-2)}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}$

003 답 ⑤

$\frac{x+1}{x}-\frac{x+2}{x+1}+\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}$

$=\frac{x+1}{x}-\frac{(x+1)+1}{x+1}+\frac{(x-2)+1}{x-2}-\frac{(x-3)+1}{x-3}$

$=\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(1+\frac{1}{x+1}\right)+\left(1+\frac{1}{x-2}\right)-\left(1+\frac{1}{x-3}\right)$

$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)$

$=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{x^2-5x+6-(x^2+x)}{x(x+1)(x-2)(x-3)}$

$=\frac{-6x+6}{x(x+1)(x-2)(x-3)}$

따라서 $f(x)=-6x+6$이므로 $f(a)=0$에서

$-6a+6=0 \qquad \therefore a=1$

004 답 $\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}$

$\frac{x+1}{x^2+5x+6}\div\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\frac{x+1}{(x+3)(x+2)}\times\frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}$

005 답 ③

$\frac{x^2-1}{x^2-x+1}\times\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}\div\frac{x-1}{x^3+1}$

$=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2-x+1}\times\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)^2}\times\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x-1}$

$=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$

006 답 ④

$x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$이므로 주어진 식의 양변에 $(x+1)^3$을 곱하면

$x^2+x=(ax+b)(x+1)-b(x+1)^2$

$\therefore x^2+x=(a-b)x^2+(a-b)x$

따라서 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a-b=1$

007 답 ③

주어진 식의 양변에 $(x-1)^3$을 곱하면

$(x+1)(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$\therefore x^2-1=ax^2-(2a-b)x+a-b+c$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1,\ 2a-b=0,\ a-b+c=-1$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2,\ c=0$

$\therefore abc=0$

008 답 ③

주어진 식의 양변에 $(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-7)$을 곱하면

$1=a_1(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$

$\quad+a_2(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$

$\quad+\cdots+a_7(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$

우변에서 x^6의 계수가 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=0$

009 답 12

$\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{2}{(x+4)(x+6)}$

$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}=\frac{x+6-x}{x(x+6)}=\frac{6}{x(x+6)}$

따라서 $\frac{6}{x(x+6)}=\frac{a}{x(x+b)}$이므로 $a=6,\ b=6$

$\therefore a+b=12$

010 답 ④

$\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2+8x+15}$

$=\frac{1}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+5)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+5}\right)=\frac{3}{(x+5)(x-1)}$

011 답 $\frac{9}{22}$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{110}$

$=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{10\times11}$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{11}=\frac{9}{22}$

012 답 ③

$f(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$이므로

$\frac{2}{f(x)}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

$\therefore \frac{2}{f(2)}+\frac{2}{f(4)}+\frac{2}{f(6)}+\cdots+\frac{2}{f(20)}$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$

$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$

013 답 ④

$1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+1}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{x+1+1}{x+1}}=1+\dfrac{x+1}{x+2}$

$=\dfrac{x+2+(x+1)}{x+2}=\dfrac{2x+3}{x+2}$

014 답 $-x$

$\dfrac{1+\dfrac{x+1}{x-1}}{1-\dfrac{x+1}{x-1}}=\dfrac{\dfrac{x-1+(x+1)}{x-1}}{\dfrac{x-1-(x+1)}{x-1}}=\dfrac{2x}{x-1}\times\dfrac{x-1}{-2}=-x$

015 답 18

$\dfrac{53}{30}=1+\dfrac{23}{30}=1+\dfrac{1}{\dfrac{30}{23}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{7}{23}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{23}{7}}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\dfrac{2}{7}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\dfrac{7}{2}}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{2}}}}$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=3$, $d=3$, $e=2$이므로 $abcde=18$

016 답 -1

$a_2=\dfrac{1}{1-a_1}$, $a_3=\dfrac{1}{1-a_2}$, $\cdots$이므로 $a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_2=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$,

$a_3=\dfrac{1}{1-\dfrac{3}{2}}=-2$, $a_4=\dfrac{1}{1-(-2)}=\dfrac{1}{3}$, $a_5=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$, $\cdots$

따라서 a_n은 $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$, -2가 이 순서대로 반복된다.

$a_{30}=a_{3\times10}=a_3=-2$, $a_{31}=a_{3\times10+1}=a_1=\frac{1}{3}$, $a_{32}=a_{3\times10+2}=a_2=\frac{3}{2}$

$\therefore a_{30}a_{31}a_{32}=-1$

017 답 -3

$a+b+c=0$에서 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$이므로

$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

$=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$

$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-3$

018 답 ①

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=0$에서 $\frac{a+b+c}{abc}=0$

$\therefore a+b+c=0$

이때 인수분해 공식

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서

$a+b+c=0$이면

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$ $\quad\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$

019 답 ③

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이고

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$이므로 $xy+yz+zx=0$

$\therefore \frac{x}{(x+y)(z+x)}+\frac{y}{(x+y)(y+z)}+\frac{z}{(y+z)(z+x)}$

$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$=\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=0$

020 답 ②

$x-y+2z=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2x+y-z=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$3x+z=0$ $\quad\therefore z=-3x$

㉠에 $z=-3x$를 대입하면

$x-y+2\times(-3x)=0$ $\quad\therefore y=-5x$

$\therefore \frac{x^3-y^3+z^3}{3xyz}=\frac{x^3-(-5x)^3+(-3x)^3}{3x\times(-5x)\times(-3x)}=\frac{99x^3}{45x^3}=\frac{11}{5}$

021 답 ②

$x=2k$, $y=3k$, $z=k\,(k\neq0)$로 놓으면

$\frac{x^3+y^3+z^3}{3xyz}=\frac{(2k)^3+(3k)^3+k^3}{3\times2k\times3k\times k}=\frac{36k^3}{18k^3}=2$

022 답 ⑤

$\frac{x^2-xy+2y^2}{x^2-2xy-y^2}=2$에서 $x^2-xy+2y^2=2x^2-4xy-2y^2$

$x^2-3xy-4y^2=0$, $(x+y)(x-4y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=4y$

그런데 $xy<0$이므로 $x=-y$

$\therefore \frac{3x-y}{2x+y}=\frac{3\times(-y)-y}{2\times(-y)+y}=\frac{-4y}{-y}=4$

023 답 $\frac{2}{3}$

$\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{5}=k\,(k\neq0)$로 놓으면

$x+y=3k,\ y+z=6k,\ z+x=5k$ …… ㉠

세 식을 변끼리 더하면 $2(x+y+z)=14k$

$\therefore\ x+y+z=7k$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=k,\ y=2k,\ z=4k$

$\therefore\ \frac{xy-zx}{x^2-y^2}=\frac{k\times2k-4k\times k}{k^2-(2k)^2}=\frac{-2k^2}{-3k^2}=\frac{2}{3}$

024 답 ①

$\frac{2a+b}{3}=\frac{2b+c}{2}=\frac{3c-a}{3}=t\,(t\neq0)$로 놓으면

$2a+b=3t$ …… ㉠, $2b+c=2t$ …… ㉡, $3c-a=3t$ …… ㉢

㉠$\times2+$㉡$+$㉢을 하면 $3a+4b+4c=11t$ …… ㉣

주어진 식에서 $\frac{3a+4b+4c}{k}=t$이므로 ㉣을 대입하면

$\frac{11t}{k}=t\qquad\therefore\ k=11$

025 답 1

$3b+c=2ak,\ c+2a=3bk,\ 2a+3b=ck$

세 식을 각 변끼리 더하면

$4a+6b+2c=(2a+3b+c)k$

$2(2a+3b+c)=(2a+3b+c)k$

(i) $2a+3b+c\neq0$일 때, $k=2$

(ii) $2a+3b+c=0$일 때,

$3b+c=-2a,\ c+2a=-3b,\ 2a+3b=-c$를 주어진 식에 대입하면

$\frac{-2a}{2a}=\frac{-3b}{3b}=\frac{-c}{c}=k\qquad\therefore\ k=-1$

(i), (ii)에 의하여 모든 상수 k의 값의 합은 $2+(-1)=1$

핵심 유형 86~88쪽

유형09 답 ②

$y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $y=\frac{2}{x-2}-3$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{a}{x+b}+c$의 그래프와 일치하므로

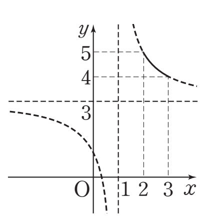
$a=2,\ b=-2,\ c=-3\qquad\therefore\ a+b+c=-3$

유형10 답 ⑤

$y=\frac{2}{x-1}+3$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le3$에서 $y=\frac{2}{x-1}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\{y\,|\,4\le y\le5\}$

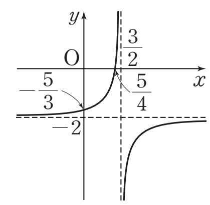


유형11 답 제2사분면

$y=-\frac{4x-5}{2x-3}=-\frac{2(2x-3)+1}{2x-3}=-\frac{1}{2x-3}-2=-\frac{1}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}-2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\frac{1}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\frac{4x-5}{2x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제2사분면이다.



유형12 답 ⑤

$y=\frac{ax+4}{x-1}=\frac{a(x-1)+a+4}{x-1}=\frac{a+4}{x-1}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=1,\ y=a$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(1,\ a)$에 대하여 대칭이므로

$a=3,\ b=1\qquad\therefore\ a+b=4$

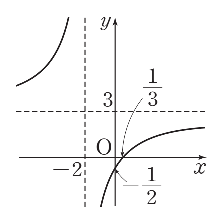
유형13 답 ⑤

$y=\frac{3x-1}{x+2}=\frac{3(x+2)-7}{x+2}=-\frac{7}{x+2}+3$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

③ $y=\frac{3x-1}{x+2}$에 $y=0$을 대입하면 $x=\frac{1}{3}$

이므로 x축과 점 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$에서 만난다.



④ $y=-\frac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 모든 사분면을 지난다.

유형14 답 ②

점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=4$이므로 주어진 함수를

$y=\frac{k}{x+1}+4\,(k<0)$라고 하자.

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=\frac{k}{0+1}+4\qquad\therefore\ k=-5$

따라서 $y=\frac{-5}{x+1}+4=\frac{4(x+1)-5}{x+1}=\frac{4x-1}{x+1}$이므로

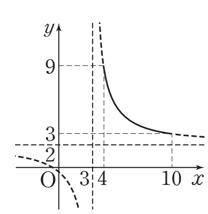
$a=4,\ b=-1,\ c=1\qquad\therefore\ a+b+c=4$

유형15 답 ③

$y=\frac{2x+1}{x-3}=\frac{2(x-3)+7}{x-3}=\frac{7}{x-3}+2$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$4\le x\le10$에서 $y=\frac{2x+1}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=4$일 때 최댓값은 9, $x=10$일 때 최솟값은 3이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 12이다.



유형 16 답 ④

$y=\dfrac{x-1}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=mx+1$이 한 점에서 만나므로

$\dfrac{x-1}{x+1}=mx+1$에서 $x-1=(mx+1)(x+1)$

$x-1=mx^2+(m+1)x+1 \qquad \therefore mx^2+mx+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=m^2-4\times m\times 2=0,\ m^2-8m=0$

$m(m-8)=0 \qquad \therefore m=8\ (\because m>0)$

유형 17 답 5

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{\frac{x-1-x}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\frac{-1}{x-1}$$

$$f^3(x)=(f^2\circ f)(x)=f^2(f(x))=\frac{-1}{\frac{x-1}{x}-1}=\frac{-1}{\frac{x-1-x}{x}}=x$$

⋮

따라서 $f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3n}(x)=x$이므로

$f^{150}(5)=f^{3\times 50}(5)=5$

유형 18 답 ③

$y=\dfrac{ax}{2x-3}$라고 하면 $y(2x-3)=ax$

$(2y-a)x=3y \qquad \therefore x=\dfrac{3y}{2y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{3x}{2x-a} \qquad \therefore f^{-1}(x)=\dfrac{3x}{2x-a}$

$f^{-1}=f$이므로 $\dfrac{3x}{2x-a}=\dfrac{ax}{2x-3} \qquad \therefore a=3$

다른 풀이 $f^{-1}=f$이므로 $(f\circ f)(x)=x$

$$f(f(x))=\frac{af(x)}{2f(x)-3}=\frac{a\times\frac{ax}{2x-3}}{2\times\frac{ax}{2x-3}-3}=\frac{\frac{a^2x}{2x-3}}{\frac{2ax-3(2x-3)}{2x-3}}$$

$$=\frac{a^2x}{2(a-3)x+9}=x$$

이므로 $a^2x=2(a-3)x^2+9x$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 $0=a-3,\ a^2=9 \qquad \therefore a=3$

유형 19 답 4

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(9)=f^{-1}(9)$에서 $f^{-1}(9)=k$라고 하면

$f(k)=9,\ \dfrac{2k+1}{k-3}=9,\ 2k+1=9(k-3) \qquad \therefore k=4$

$\therefore (f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(9)=4$

핵심 유형 **완성하기** 89~94쪽

026 답 -6

$y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y=-\dfrac{3}{x-4}-2$

이 함수의 그래프가 $y=\dfrac{a}{x+b}+c$의 그래프와 일치하므로

$a=-3,\ b=-4,\ c=-2 \qquad \therefore \dfrac{ab}{c}=-6$

027 답 -2

$y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$y=-\dfrac{1}{x-1}-3=\dfrac{-3(x-1)-1}{x-1}=\dfrac{-3x+2}{x-1}$

이 함수의 그래프가 $y=\dfrac{ax+2}{x-b}$의 그래프와 일치하므로

$a=-3,\ b=1 \qquad \therefore a+b=-2$

028 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $y=\dfrac{2}{x-2}-3$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

이므로 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\dfrac{2x-5}{2-x}=\dfrac{5-2x}{x-2}=\dfrac{-2(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}-2$

이므로 $y=\dfrac{2x-5}{2-x}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\dfrac{4x+1}{1-2x}=\dfrac{-4x-1}{2x-1}=\dfrac{-2(2x-1)-3}{2x-1}=-\dfrac{3}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-2$

이므로 $y=\dfrac{4x+1}{1-2x}$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 유리함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

029 답 2

$y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=\dfrac{k}{x-2}-1$

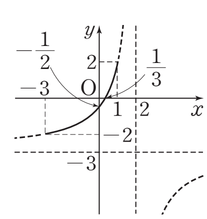
이 함수의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{k}{3-2}-1 \qquad \therefore k=2$

030 답 ②

$y=-\dfrac{5}{x-2}-3$의 그래프는 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\le x\le 1$에서 $y=-\dfrac{5}{x-2}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$



031 답 ④

$y=\frac{mx+3}{x+2n}=\frac{m(x+2n)-2mn+3}{x+2n}=\frac{-2mn+3}{x+2n}+m$

이므로 정의역은 $\{x|x\neq-2n$인 실수$\}$이고, 치역은 $\{y|y\neq m$인 실수$\}$이다.

따라서 $-2n=6$, $m=-2$이므로 $m=-2$, $n=-3$

$\therefore mn=6$

032 답 ⑤

$y=\frac{-3x+5a+1}{x-a}=\frac{-3(x-a)+2a+1}{x-a}=\frac{2a+1}{x-a}-3$

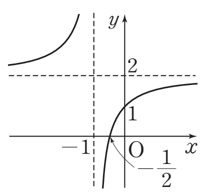
이므로 정의역은 $\{x|x\neq a$인 실수$\}$이고, 치역은 $\{y|y\neq-3$인 실수$\}$이다.

따라서 $a=4$, $b=-3$이므로 $a-b=7$

033 답 ④

$y=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2(x+1)-1}{x+1}=-\frac{1}{x+1}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y=\frac{2x+1}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제4사분면이다.

034 답 ①

$y=\frac{3x+8}{x+2}=\frac{3(x+2)+2}{x+2}=\frac{2}{x+2}+3$

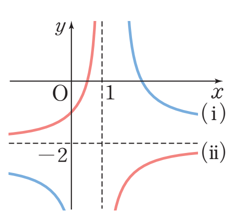
이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\frac{3x+8}{x+2}$의 그래프로 옳은 것은 ①이다.

035 답 $0\le a<2$ 또는 $a>2$

$y=\frac{-2x+a}{x-1}=\frac{-2(x-1)+a-2}{x-1}$

$=\frac{a-2}{x-1}-2$



이므로 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=-2$이고, 그래프가 점 $(0, -a)$를 지난다.

(i) $a-2>0$일 때

그래프가 제2사분면을 지나지 않으므로 $a>2$

(ii) $a-2<0$일 때

$x=0$일 때 $y\le0$이어야 하므로

$-a\le0$ $\quad\therefore a\ge0$

이때 $a-2<0$에서 $a<2$이므로 $0\le a<2$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $0\le a<2$ 또는 $a>2$

036 답 ①

$y=\frac{3x+2}{x+a}=\frac{3(x+a)-3a+2}{x+a}=-\frac{3a-2}{x+a}+3$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=3$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(-a, 3)$에 대하여 대칭이므로

$a=-1$, $b=3$ $\quad\therefore ab=-3$

037 답 ②

$y=\frac{2x-3}{x+2}=\frac{2(x+2)-7}{x+2}=-\frac{7}{x+2}+2$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(-2, 2)$에 대하여 대칭이므로

$a=-2$, $b=2$

또 점 $(-2, 2)$는 직선 $y=-x+c$ 위의 점이므로

$2=-(-2)+c$ $\quad\therefore c=0$

$\therefore a+b+c=-2+2+0=0$

038 답 ③

$y=\frac{ax+1}{x-b}=\frac{a(x-b)+ab+1}{x-b}=\frac{ab+1}{x-b}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=b$, $y=a$

이때 점 (b, a)가 두 직선 $y=x+3$, $y=-x+5$의 교점이므로

$a=b+3$, $a=-b+5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

$\therefore ab=4$

039 답 ⑤

$y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\frac{b-ac}{x+c}+a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이므로 점근선의 방정식은 $x=-c$, $y=a$

주어진 함수의 그래프가 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이므로

$c=-2$, $a=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{x+b}{x-2}$

이때 이 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로

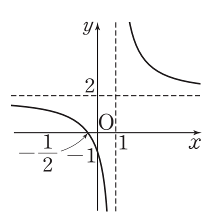
$0=\frac{1+b}{1-2}$ $\quad\therefore b=-1$

$\therefore abc=1\times(-1)\times(-2)=2$

040 답 ④

$y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



④ $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 두 점근선의 교점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭이다.

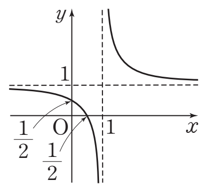
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

041 답 ②

함수 $y=\frac{k}{x-1}+1$의 그래프는 두 직선 $x=1$, $y=1$을 점근선으로 하고, 점 $(1,\ 1)$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $k=\frac{1}{2}$이면 $y=\frac{k}{x-1}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



042 답 ⑤

점근선의 방정식이 $x=1$, $y=-2$이므로 주어진 함수를

$y=\frac{k}{x-1}-2\,(k>0)$라고 하자.

이 함수의 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{2-1}-2 \qquad \therefore k=2$

따라서 $y=\frac{2}{x-1}-2=\frac{-2(x-1)+2}{x-1}=\frac{-2x+4}{x-1}$이므로

$a=-2,\ b=4,\ c=-1 \qquad \therefore abc=8$

043 답 5

점근선의 방정식이 $x=3$, $y=1$이므로 $a=3$, $b=1$

즉, $y=\frac{k}{x-3}+1$의 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{2-3}+1 \qquad \therefore k=1$

$\therefore a+b+k=3+1+1=5$

044 답 ②

점근선의 방정식이 $x=2$, $y=2$이므로 주어진 함수를

$y=\frac{k}{x-2}+2\,(k<0)$라고 하자.

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\frac{k}{0-2}+2 \qquad \therefore k=-2$

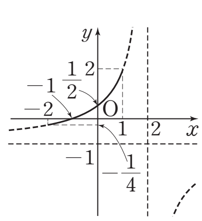
따라서 $y=-\frac{2}{x-2}+2$이므로 평행이동에 의하여 이 함수의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄷ이다.

045 답 ①

$y=\frac{-x-1}{x-2}=\frac{-(x-2)-3}{x-2}=-\frac{3}{x-2}-1$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

$-2\le x\le 1$에서 $y=\frac{-x-1}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$일 때 최댓값은 2, $x=-2$일 때 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.

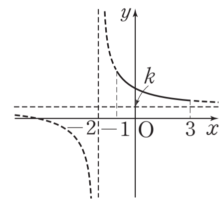
따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 $-\frac{1}{2}$이다.



046 답 ③

$y=\frac{kx+2k+2}{x+2}=\frac{k(x+2)+2}{x+2}=\frac{2}{x+2}+k$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x>-2$일 때, x의 값이 커질수록 함숫값은 작아지므로 $-1\le x\le 3$에서 $x=3$일 때 최솟값은 1이다.

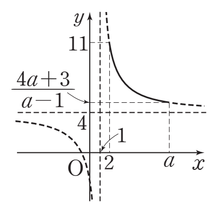
따라서 $\frac{3k+2k+2}{3+2}=1$이므로 $k=\frac{3}{5}$

047 답 ①

$y=\frac{4x+3}{x-1}=\frac{4(x-1)+7}{x-1}=\frac{7}{x-1}+4$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

$2\le x\le a$에서 $y=\frac{4x+3}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때 최댓값은 11, $x=a$일 때 최솟값은 $\frac{4a+3}{a-1}$이다.



따라서 $\frac{4a+3}{a-1}=5$, $b=11$이므로

$a=8,\ b=11 \qquad \therefore a-b=-3$

048 답 ②

$y=\frac{-x+2}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=mx-1$이 한 점에서 만나므로

$\frac{-x+2}{x-1}=mx-1$에서 $-x+2=(mx-1)(x-1)$

$-x+2=mx^2-(m+1)x+1 \qquad \therefore mx^2-mx-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=(-m)^2-4\times m\times(-1)=0,\ m^2+4m=0$

$m(m+4)=0 \qquad \therefore m=-4\,(\because m<0)$

049 답 ④

(i) $a=0$일 때

두 그래프는 만나지 않는다.

(ii) $a\ne 0$일 때

$y=\frac{2x-1}{x+4}$의 그래프와 직선 $y=ax+2$가 만나지 않으므로

$\frac{2x-1}{x+4}=ax+2$에서 $2x-1=(ax+2)(x+4)$

$2x-1=ax^2+2(2a+1)x+8 \qquad \therefore ax^2+4ax+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(2a)^2-a\times 9<0,\ 4a^2-9a<0$

$a(4a-9)<0 \qquad \therefore 0<a<\frac{9}{4}$

(i), (ii)에 의하여 $0\le a<\frac{9}{4}$이므로 정수 a의 최댓값은 2이다.

050 답 $\frac{10}{3}$

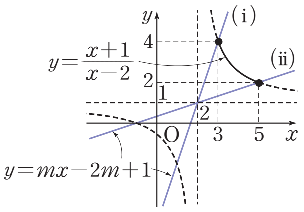
$y=\frac{x+1}{x-2}=\frac{(x-2)+3}{x-2}=\frac{3}{x-2}+1$

이므로 $y=\frac{x+1}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$3\le x\le 5$에서 $y=\frac{x+1}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때

$y=mx-2m+1=m(x-2)+1$

이므로 직선 $y=mx-2m+1$은 항상 점 $(2,\ 1)$을 지난다.



즉, 이 직선이 점 $(3,\ 4)$를 지날 때 m의 값이 최대이고, 점 $(5,\ 2)$를 지날 때 m의 값이 최소이다.

(i) 직선이 점 $(3,\ 4)$를 지날 때

$4=3m-2m+1 \qquad \therefore\ m=3$

(ii) 직선이 점 $(5,\ 2)$를 지날 때

$2=5m-2m+1 \qquad \therefore\ m=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에 의하여 m의 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{10}{3}$이다.

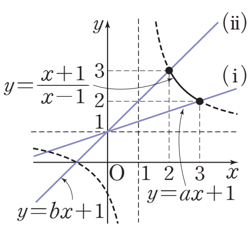
051 답 $\frac{2}{3}$

$y=\frac{x+1}{x-1}$이라고 하면 $y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$

이므로 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$2\le x\le 3$에서 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 두 직선 $y=ax+1$, $y=bx+1$은 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.



$ax+1\le\frac{x+1}{x-1}\le bx+1$이 항상 성립하려면 기울기 a의 값은 직선 $y=ax+1$이 점 $(3,\ 2)$를 지날 때보다 작거나 같고, 기울기 b의 값은 직선 $y=bx+1$이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때보다 크거나 같아야 한다.

(i) 직선 $y=ax+1$이 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프 위의 점 $(3,\ 2)$를 지날 때의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 $a\le\frac{1}{3}$

(ii) 직선 $y=bx+1$이 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프 위의 점 $(2,\ 3)$을 지날 때의 기울기는 1이므로 $b\ge 1$

따라서 $b-a$가 최소이려면 b가 최소이고 a가 최대이어야 하므로

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

052 답 ③

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+x+1}{x+1}}=\frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f^2(f(x))$$

$$=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}+1}=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+x+1}{x+1}}=\frac{x}{3x+1}$$

$\vdots$

따라서 $f^n(x)=\frac{x}{nx+1}$ (n은 자연수)이므로

$f^{100}(x)=\frac{x}{100x+1} \qquad \therefore\ f^{100}(10)=\frac{10}{100\times 10+1}=\frac{10}{1001}$

053 답 ⑤

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{1}{\frac{1}{x-1}-1}=\frac{1}{\frac{1-(x-1)}{x-1}}=\frac{x-1}{2-x}$$

$(f\circ f)(k)=-2$에서 $\frac{k-1}{2-k}=-2$

$k-1=-2(2-k) \qquad \therefore\ k=3$

054 답 $-\frac{1}{4}$

점근선의 방정식이 $x=0$, $y=1$이므로 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x}+1\ (k<0)$이라고 하자.

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{1}+1 \qquad \therefore\ k=-1 \qquad \therefore\ f(x)=-\frac{1}{x}+1=\frac{x-1}{x}$

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$$

$$=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{\frac{x-1-x}{x}}{\frac{x-1}{x}}=-\frac{1}{x-1}$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$$

$$=\frac{-\frac{1}{x-1}-1}{-\frac{1}{x-1}}=\frac{\frac{-1-(x-1)}{x-1}}{\frac{-1}{x-1}}=x$$

$\vdots$

따라서 자연수 n에 대하여 $f^n(x)$는 $\frac{x-1}{x}$, $-\frac{1}{x-1}$, x의 순서로 반복된다.

$2018=3\times 672+2$이므로 $f^{2018}(x)=f^2(x)=-\frac{1}{x-1}$

$\therefore\ f^{2018}(5)=-\frac{1}{5-1}=-\frac{1}{4}$

055 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f^1(x)=f(x)=-\frac{x+1}{x}$

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$$

$$=-\frac{-\frac{x+1}{x}+1}{-\frac{x+1}{x}}=-\frac{\frac{-x-1+x}{x}}{\frac{-x-1}{x}}=-\frac{1}{x+1}$$

$$f^3(x)=(f^2\circ f)(x)=f^2(f(x))$$

$$=-\frac{1}{-\frac{x+1}{x}+1}=-\frac{1}{\frac{-x-1+x}{x}}=x$$

$\vdots$

ㄱ. $f^2(x)=-\frac{1}{x+1}$의 그래프는 제2, 3, 4사분면을 지난다.

ㄴ. 자연수 n에 대하여 $f^n(x)$는 $-\frac{x+1}{x}$, $-\frac{1}{x+1}$, x의 순서로 반복된다.

$8=3\times2+2$이므로 $f^8(x)=f^2(x)=-\frac{1}{x+1}$

따라서 $a=0$, $b=-1$, $c=1$이므로 $a+b+c=0$

ㄷ. $f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3n}(x)=x$이므로

$f^{21}(x)=f^{3\times7}(x)=x$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

056 답 ①

$y=\frac{2x-1}{x+a}$이라고 하면 $y(x+a)=2x-1$

$(y-2)x=-ay-1 \quad \therefore x=\frac{-ay-1}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{-ax-1}{x-2} \quad \therefore f^{-1}(x)=\frac{-ax-1}{x-2}$

$f^{-1}=f$이므로 $\frac{-ax-1}{x-2}=\frac{2x-1}{x+a} \quad \therefore a=-2$

057 답 1

$f(x)=\frac{2}{x}+1=\frac{x+2}{x}$에서 $y=\frac{x+2}{x}$라고 하면

$xy=x+2$, $(y-1)x=2 \quad \therefore x=\frac{2}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{2}{x-1} \quad \therefore f^{-1}(x)=\frac{2}{x-1}$

따라서 $a=2$, $b=-1$이므로 $a+b=1$

058 답 $\frac{7}{5}$

점근선의 방정식이 $x=1$, $y=-2$이므로 주어진 그래프의 식을

$f^{-1}(x)=\frac{k}{x-1}-2\,(k>0)$라고 하자.

이 함수의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{2-1}-2 \quad \therefore k=2 \quad \therefore f^{-1}(x)=\frac{2}{x-1}-2$

이때 $f(3)=m$이라고 하면 $f^{-1}(m)=3$이므로

$\frac{2}{m-1}-2=3 \quad \therefore m=\frac{7}{5} \quad \therefore f(3)=\frac{7}{5}$

059 답 ①

$f(x)=\frac{2x+b}{x-a}$의 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$2=\frac{-2+b}{-1-a} \quad \therefore 2a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $f(x)=\frac{2x+b}{x-a}$의 역함수의 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$f(x)=\frac{2x+b}{x-a}$의 그래프는 점 $(2, -1)$을 지난다.

$-1=\frac{4+b}{2-a} \quad \therefore a-b=6 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-4 \quad \therefore a+b=-2$

060 답 ①

$y=\frac{3-x}{x-1}$라고 하면 $y(x-1)=3-x$

$(y+1)x=y+3 \quad \therefore x=\frac{y+3}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x+3}{x+1}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x+1}=\frac{2}{x+1}+1$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=1$이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(-1, 1)$에 대하여 대칭이다.

즉, 직선 $y=x+a$가 점 $(-1, 1)$을 지나야 하므로

$1=-1+a \quad \therefore a=2$

061 답 ⑤

$(f\circ f^{-1}\circ f^{-1})(4)=f^{-1}(4)$

$f^{-1}(4)=k$라고 하면 $f(k)=4$

$\frac{-k+2}{k-1}=4$, $-k+2=4(k-1) \quad \therefore k=\frac{6}{5}$

$\therefore (f\circ f^{-1}\circ f^{-1})(4)=\frac{6}{5}$

062 답 ③

$(f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(3)=(f\circ g^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)=(f\circ g^{-1})(3)$

$g^{-1}(3)=k$라고 하면 $g(k)=3$

$\frac{2k+1}{k}=3$, $2k+1=3k \quad \therefore k=1 \quad \therefore g^{-1}(3)=1$

$\therefore (f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(3)=(f\circ g^{-1})(3)=f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

063 답 ④

$y=\frac{a}{x-1}$라고 하면 $y(x-1)=a$

$yx=y+a \quad \therefore x=\frac{y+a}{y}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x+a}{x} \quad \therefore f^{-1}(x)=\frac{x+a}{x}$

$$(f^{-1}\circ f^{-1})(x)=f^{-1}(f^{-1}(x))=\frac{\frac{x+a}{x}+a}{\frac{x+a}{x}}$$

$$=\frac{\frac{x+a+ax}{x}}{\frac{x+a}{x}}=\frac{(a+1)x+a}{x+a}$$

$f(x)=(f^{-1}\circ f^{-1})(x)$이므로 $\frac{a}{x-1}=\frac{(a+1)x+a}{x+a}$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 $a=-1$

핵심 유형 최종 점검하기 • 95~97쪽

1 답 ①

유형 02 유리식의 곱셈과 나눗셈

$$\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\div\left(1-\frac{4}{x^2-x-2}\right)=\frac{x+2}{x+1}\div\frac{x^2-x-6}{x^2-x-2}$$

$$=\frac{x+2}{x+1}\times\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$=\frac{x-2}{x-3}$$

2 답 ③

유형 03 유리식과 항등식

주어진 식의 양변에 $(x+2)(x-4)$를 곱하면

$a(x-4)+b(x+2)=4x-10 \qquad \therefore (a+b)x-4a+2b=4x-10$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=4,\ -4a+2b=-10$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=1 \qquad \therefore a-b=2$

3 답 ⑤

유형 04 분모가 두 인수의 곱인 유리식

$$\begin{aligned} f(90)&=\frac{1}{90\times91}+\frac{1}{91\times92}+\frac{1}{92\times93}+\cdots+\frac{1}{99\times100} \\ &=\left(\frac{1}{90}-\frac{1}{91}\right)+\left(\frac{1}{91}-\frac{1}{92}\right)+\left(\frac{1}{92}-\frac{1}{93}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right) \\ &=\frac{1}{90}-\frac{1}{100}=\frac{1}{900} \end{aligned}$$

4 답 ①

유형 05 분자 또는 분모가 분수식인 유리식

$$\begin{aligned} 1-\frac{4}{3-\frac{2}{1-x}}&=1-\frac{4}{\frac{3-3x-2}{1-x}}=1-\frac{4}{\frac{1-3x}{1-x}} \\ &=1-\frac{4-4x}{1-3x}=\frac{1-3x-(4-4x)}{1-3x} \\ &=\frac{x-3}{1-3x}=\frac{-x+3}{3x-1} \end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{-x+3}{3x-1}=\dfrac{ax+b}{3x+c}$이므로 $a=-1,\ b=3,\ c=-1$

$\therefore a+b+c=1$

5 답 −3

유형 06 $a+b+c=0$이 주어진 경우의 유리식의 값

$a+2b+3c=0$에서 $a+2b=-3c,\ 2b+3c=-a,\ 3c+a=-2b$이므로

$$\begin{aligned} &a\left(\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}\right)+2b\left(\frac{1}{3c}+\frac{1}{a}\right)+3c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}\right) \\ &=\frac{a}{2b}+\frac{a}{3c}+\frac{2b}{3c}+\frac{2b}{a}+\frac{3c}{a}+\frac{3c}{2b}=\frac{2b+3c}{a}+\frac{a+3c}{2b}+\frac{a+2b}{3c} \\ &=\frac{-a}{a}+\frac{-2b}{2b}+\frac{-3c}{3c}=-3 \end{aligned}$$

6 답 ②

유형 07 비례식 또는 방정식이 주어진 경우의 유리식의 값

$x+y-z=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x+3y+z=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2x+4y=0 \qquad \therefore x=-2y$

㉠에 $x=-2y$를 대입하면 $-2y+y-z=0 \qquad \therefore z=-y$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}&=\frac{(-2y)^2+y^2+(-y)^2}{-2y\times y+y\times(-y)+(-y)\times(-2y)} \\ &=\frac{6y^2}{-y^2}=-6 \end{aligned}$$

7 답 ⑤

유형 08 $\dfrac{a}{d}=\dfrac{b}{e}=\dfrac{c}{f}$ 꼴이 주어진 경우의 유리식의 값

$\dfrac{a+2b}{3}=\dfrac{2b+c}{2}=\dfrac{2c+a}{4}=t\ (t\neq0)$로 놓으면

$a+2b=3t \quad \cdots\cdots$ ㉠, $2b+c=2t \quad \cdots\cdots$ ㉡, $2c+a=4t \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠+㉡+㉢×2를 하면 $3a+4b+5c=13t \qquad \cdots\cdots$ ㉣

주어진 식에서 $\dfrac{3a+4b+5c}{k}=t$이므로 ㉣을 대입하면

$\dfrac{13t}{k}=t \qquad \therefore k=13$

8 답 ⑤

유형 09 유리함수의 그래프의 평행이동

$y=\dfrac{4x-3}{x-2}=\dfrac{5}{x-2}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 $y=\dfrac{5}{x-p-2}+q+4$

이 함수의 그래프가 $y=\dfrac{3x-10}{x-5}=\dfrac{5}{x-5}+3$의 그래프와 일치하므로

$-p-2=-5,\ q+4=3 \qquad \therefore p=3,\ q=-1 \qquad \therefore p+q=2$

9 답 3

유형 10 유리함수의 정의역과 치역

$$y=-\frac{6x+1}{3x+2}=\frac{-2(3x+2)+3}{3x+2}=\frac{3}{3x+2}-2=\frac{3}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}-2$$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{2}{3},\ y=-2$

$\therefore a=-\dfrac{2}{3},\ b=-2 \qquad \therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{-2}{-\frac{2}{3}}=3$

10 답 −1

유형 10 유리함수의 정의역과 치역

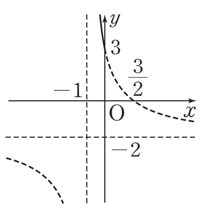
$$y=\frac{-2x+3}{x+1}=\frac{-2(x+1)+5}{x+1}=\frac{5}{x+1}-2$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

$y\geq3$에서 $y=\dfrac{-2x+3}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

$\{x\,|\,-1<x\leq0\}$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=0$이므로 $\alpha+\beta=-1$



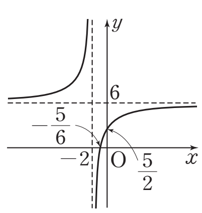
11 답 ④

유형 11 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프

$$y=\frac{6x+5}{x+2}=\frac{6(x+2)-7}{x+2}=-\frac{7}{x+2}+6$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\dfrac{6x+5}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제4사분면이다.



12 답 ①

유형 12 유리함수의 그래프의 대칭성

$y=\frac{4x-5}{x-2}=\frac{4(x-2)+3}{x-2}=\frac{3}{x-2}+4$

이므로 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=4$

따라서 주어진 그래프는 점 $(2,\ 4)$에 대하여 대칭이고, 이 점은 직선 $x+y+k=0$ 위의 점이므로

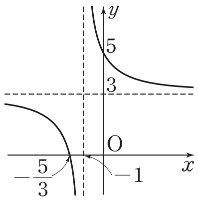
$2+4+k=0 \qquad \therefore\ k=-6$

13 답 ⑤

유형 13 유리함수의 그래프의 성질

$y=\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+3$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① $y=\frac{3x+5}{x+1}$에 $x=0$을 대입하면 $y=5$이므로 y축과 점 $(0,\ 5)$에서 만난다.

② 두 점근선의 교점 $(-1,\ 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선 $y=-x+2$에 대하여 대칭이다.

⑤ $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

14 답 ②

유형 14 유리함수의 식 구하기

점근선의 방정식이 $x=2,\ y=-1$이므로 주어진 함수를

$y=\frac{k}{x-2}-1\ (k<0)$이라고 하자.

이 함수의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{-1-2}-1 \qquad \therefore\ k=-3$

따라서 $y=\frac{-3}{x-2}-1=\frac{-(x-2)-3}{x-2}=\frac{-x-1}{x-2}$이므로

$a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

$\therefore\ a+b+c=-4$

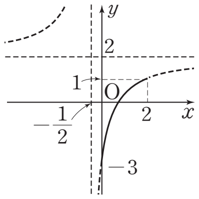
15 답 ②

유형 15 유리함수의 최대, 최소

$y=\frac{4x-3}{2x+1}=\frac{2(2x+1)-5}{2x+1}=-\frac{5}{2x+1}+2=-\frac{5}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\frac{5}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$0\le x\le 2$에서 $y=\frac{4x-3}{2x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때 최댓값은 1, $x=0$일 때 최솟값은 -3이다.



따라서 최댓값과 최솟값의 합은 -2이다.

16 답 ⑤

유형 16 유리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

(i) $m=0$일 때

두 그래프는 만나지 않는다.

(ii) $m\neq 0$일 때

직선 $y=mx-2$가 $y=\frac{-2x-5}{x-2}$의 그래프와 만나지 않으므로

$mx-2=\frac{-2x-5}{x-2}$에서 $(mx-2)(x-2)=-2x-5$

$\therefore\ mx^2-2mx+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=m^2-m\times 9<0$

$m(m-9)<0 \qquad \therefore\ 0<m<9$

(i), (ii)에 의하여 $0\le m<9$

17 답 ⑤

유형 17 유리함수의 합성

$f^1(x)=f(x)=-\frac{1}{x+1}$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=-\frac{1}{-\frac{1}{x+1}+1}=-\frac{1}{\frac{-1+x+1}{x+1}}=-\frac{x+1}{x}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=-\frac{1}{-\frac{x+1}{x}+1}=\frac{-1}{\frac{-x-1+x}{x}}=x$

⋮

따라서 $f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3n}(x)=x$이므로

$f^{30}(2)=f^{3\times 10}(2)=2$

18 답 ⑤

유형 18 유리함수의 역함수

$f(x)=-\frac{k}{x-1}+3=\frac{-k+3(x-1)}{x-1}=\frac{3x-k-3}{x-1}$에서

$y=\frac{3x-k-3}{x-1}$이라고 하면 $y(x-1)=3x-k-3$

$(y-3)x=y-k-3 \qquad \therefore\ x=\frac{y-k-3}{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x-k-3}{x-3}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{x-k-3}{x-3}$

따라서 $\frac{x-k-3}{x-3}=\frac{ax+1}{x+b}$이므로

$a=1,\ b=-3,\ k=-4 \qquad \therefore\ abk=12$

19 답 ⑤

유형 19 유리함수의 합성함수와 역함수

$f(-4)=\frac{-4-2}{-4+3}=-2$이므로

$(g^{-1}\circ f)(-4)=g^{-1}(f(-4))=g^{-1}(-2)$

$g^{-1}(-2)=k$라고 하면 $g(k)=-2$

$\frac{2k+4}{k-1}=-2 \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{2} \qquad \therefore\ (g^{-1}\circ f)(-4)=-\frac{1}{2}$

06 무리함수

핵심 유형

유형01 $1\le x<2$ 유형02 ⑤
유형03 $-\dfrac{2\sqrt{y}}{2x-y}$ 유형04 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
유형05 $\sqrt{10}$ 유형06 0 유형07 6 유형08 -1
유형09 제1, 2사분면 유형10 ㄷ 유형11 4
유형12 ⑤ 유형13 $2\le k<\dfrac{9}{4}$
유형14 $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x^2-4x+\dfrac{17}{2}\,(x\ge 4)$ 유형15 $\dfrac{5}{2}$

핵심 유형 완성하기

001 ③ 002 ⑤ 003 ③ 004 $x+7$
005 ③ 006 7 007 ⑤ 008 ④ 009 ④
010 10 011 $\sqrt{21}-1$ 012 $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$
013 ① 014 1 015 $-\sqrt{2}$ 016 $2\sqrt{2}$ 017 ②
018 4 019 ④ 020 ② 021 $\{y\,|\,y\ge 7\}$
022 정의역: $\{x\,|\,x\le 1\}$, 치역: $\{y\,|\,y\ge -2\}$ 023 44
024 2 025 ② 026 $\left(\dfrac{8}{3},\,0\right)$ 027 ⑤
028 ② 029 2 030 제1, 4사분면
031 ㄱ, ㄴ, ㄹ 032 ② 033 ⑤
034 $a>0$, $b>0$, $c<0$ 035 6 036 ③ 037 ①
038 ① 039 $-2\le k<-\dfrac{3}{2}$ 040 ① 041 0
042 $k<\dfrac{1}{2}$ 또는 $k=1$
043 $f^{-1}(x)=x^2+2x+4\,(x\ge -1)$ 044 ⑤ 045 ①
046 $h^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x\,(x\le 1)$ 047 ④ 048 $\dfrac{13}{2}$
049 $\dfrac{1}{2}$ 050 ⑤ 051 ⑤

핵심 유형 최종 점검하기

1 ① 2 ③ 3 $2x+2$ 4 ② 5 $44\sqrt{3}$
6 ③ 7 ③ 8 -24 9 ① 10 ③
11 -2 12 ③ 13 $\dfrac{3}{2}$ 14 ⑤ 15 $\dfrac{5}{2}$

핵심 유형 100~102쪽

유형01 답 $1\le x<2$

$x-1\ge 0$에서 $x\ge 1$
$2-x>0$에서 $x<2$
$\therefore 1\le x<2$

유형02 답 ⑤

$-2\le a\le 1$에서 $a+2\ge 0$, $a-3<0$
$\sqrt{a^2+4a+4}=\sqrt{(a+2)^2}=|a+2|=a+2$
$\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|=-a+3$
$\therefore \sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{a^2-6a+9}=a+2+(-a+3)=5$

유형03 답 $-\dfrac{2\sqrt{y}}{2x-y}$

$$\frac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{2x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{y}-(\sqrt{2x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{2x}+\sqrt{y})(\sqrt{2x}-\sqrt{y})}=-\frac{2\sqrt{y}}{2x-y}$$

유형04 답 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}&=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})^2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})}\\&=\frac{x+2+x-2-2\sqrt{x^2-4}}{x+2-(x-2)}\\&=\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5-4}}{2}\\&=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{aligned}$$

유형05 답 $\sqrt{10}$

$x+y=2\sqrt{5}$, $xy=2$이므로
$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$$

유형06 답 0

$x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$에서 $2x-1=-\sqrt{5}$
양변을 제곱하면
$4x^2-4x+1=5$ $\therefore x^2-x-1=0$
$$\begin{aligned}\therefore x^3-x^2+7x&=x(x^2-x-1)+8x\\&=x\times 0+8\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\&=4-4\sqrt{5}\end{aligned}$$
따라서 $a=4$, $b=-4$이므로 $a+b=0$

유형07 답 6

$5x-10\ge 0$에서 $x\ge 2$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 2\}$
$\therefore a=2$
$y=-\sqrt{5x-10}+3$에서 $-\sqrt{5x-10}\le 0$이므로 $y\le 3$
즉, 치역은 $\{y\,|\,y\le 3\}$이므로 $b=3$
$\therefore ab=2\times 3=6$

유형08 답 -1

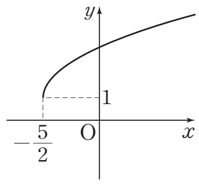
$y=\sqrt{-2x+10}-4=\sqrt{-2(x-5)}-4$
이므로 $y=\sqrt{-2x+10}-4$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $a=-2$, $p=5$, $q=-4$이므로
$a+p+q=-1$

유형09 답 제1, 2사분면

$y=\sqrt{2x+5}+1=\sqrt{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}+1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{5}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{2x+5}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지난다.

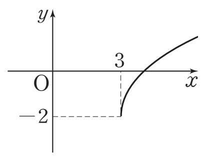


유형10 답 ㄷ

$y=\sqrt{3x-9}-2=\sqrt{3(x-3)}-2$

ㄱ. 정의역은 $\{x|x\geq 3\}$, 치역은 $\{y|y\geq -2\}$이다.

ㄴ. $y=\sqrt{3x-9}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



즉, x축은 지나지만 y축은 지나지 않는다.

ㄷ. $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{3x-9}-2$의 그래프와 겹쳐진다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

유형11 답 4

주어진 그래프는 $y=\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+2)}-2$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=\sqrt{2a}-2$, $\sqrt{2a}=2$

양변을 제곱하면 $2a=4$ $\therefore a=2$

㉠에 $a=2$를 대입하면

$y=\sqrt{2(x+2)}-2=\sqrt{2x+4}-2$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=-2$이므로

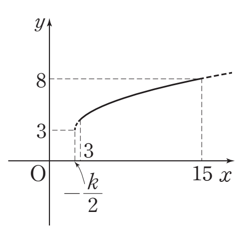
$a+b+c=4$

유형12 답 ⑤

$y=\sqrt{2x+k}+3=\sqrt{2\left(x+\frac{k}{2}\right)}+3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{k}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

즉, $3\leq x\leq 15$에서 $y=\sqrt{2x+k}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x=15$일 때 최댓값이 8이므로



$\sqrt{30+k}+3=8$, $\sqrt{30+k}=5$

양변을 제곱하면

$30+k=25$ $\therefore k=-5$

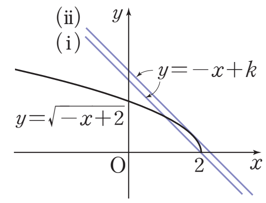
따라서 무리함수 $y=\sqrt{2x-5}+3$의 최솟값은 $x=3$일 때

$\sqrt{6-5}+3=4$

유형13 답 $2\leq k<\frac{9}{4}$

$y=\sqrt{-x+2}=\sqrt{-(x-2)}$

이므로 $y=\sqrt{-x+2}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때

$0=-2+k$ $\therefore k=2$

(ii) 함수 $y=\sqrt{-x+2}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때

$\sqrt{-x+2}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$-x+2=x^2-2kx+k^2$ $\therefore x^2-(2k-1)x+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=(2k-1)^2-4\times 1\times (k^2-2)=0$

$-4k+9=0$ $\therefore k=\frac{9}{4}$

(i), (ii)에 의하여 실수 k의 값의 범위는 $2\leq k<\frac{9}{4}$

유형14 답 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+\frac{17}{2}\ (x\geq 4)$

함수 $y=f(x)$의 치역이 $\{y|y\geq 4\}$이므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x|x\geq 4\}$이다.

$y=\sqrt{2x-1}+4$라고 하면 $y-4=\sqrt{2x-1}$

양변을 제곱하면 $y^2-8y+16=2x-1$

$\therefore x=\frac{1}{2}y^2-4y+\frac{17}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+\frac{17}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+\frac{17}{2}\ (x\geq 4)$

유형15 답 $\frac{5}{2}$

$(g\circ f^{-1})^{-1}(4)=(f\circ g^{-1})(4)=f(g^{-1}(4))$에서

$g^{-1}(4)=k$라고 하면 $g(k)=4$, $\sqrt{3k+1}=4$

양변을 제곱하면 $3k+1=16$ $\therefore k=5$

$\therefore (g\circ f^{-1})^{-1}(4)=f(g^{-1}(4))=f(5)=\frac{5+5}{5-1}=\frac{5}{2}$

핵심 유형 완성하기 103~109쪽

001 답 ③

$x+4\geq 0$에서 $x\geq -4$

$3-x>0$에서 $x<3$

$\therefore -4\leq x<3$

따라서 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2의 7개이다.

002 답 ⑤

$-2x^2+11x-14\geq 0$에서 $2x^2-11x+14\leq 0$

$(x-2)(2x-7)\leq 0$ $\therefore 2\leq x\leq \frac{7}{2}$

003 답 ③

$11-2x\geq 0$에서 $x\leq \frac{11}{2}$

그런데 $x\neq 3$이므로 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+2+4+5=12$

004 답 $x+7$

$-3\leq x\leq 0$에서 $x-1<0$, $x+3\geq 0$

$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=-x+1$

$\sqrt{4x^2+24x+36}=2\sqrt{(x+3)^2}=2|x+3|=2x+6$

$\therefore \sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{4x^2+24x+36}=-x+1+(2x+6)$
$=x+7$

005 답 ③

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$에서 $a<0$, $b>0$이므로

$\sqrt{(a-b)^2}+|-a|=|a-b|+|-a|$
$=-(a-b)+(-a)$
$=-2a+b$

006 답 7

$\sqrt{x-2}\sqrt{1-x}=-\sqrt{(x-2)(1-x)}$에서

$x-2\leq 0$, $1-x\leq 0$

$\therefore 1\leq x\leq 2$

따라서 $x-3<0$, $x+4>0$이므로

$\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+4)^2}=|x-3|+|x+4|$
$=-x+3+(x+4)$
$=7$

007 답 ⑤

$k-2=-5+2\sqrt{2}<0$, $k+2=-1+2\sqrt{2}>0$이므로

$\sqrt{k^2-4k+4}-\sqrt{k^2+4k+4}=\sqrt{(k-2)^2}-\sqrt{(k+2)^2}$
$=|k-2|-|k+2|$
$=-k+2-(k+2)$
$=-2k$
$=-2(-3+2\sqrt{2})$
$=6-4\sqrt{2}$

008 답 ④

$$\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{1-\sqrt{x+1}}=\frac{1-\sqrt{x+1}-(1+\sqrt{x+1})}{(1+\sqrt{x+1})(1-\sqrt{x+1})}$$
$$=\frac{-2\sqrt{x+1}}{1-(x+1)}=\frac{2\sqrt{x+1}}{x}$$

009 답 ④

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})}$$
$$=\frac{x+x-2+2\sqrt{x^2-2x}}{x-(x-2)}$$
$$=x-1+\sqrt{x^2-2x}$$

010 답 10

$$\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}=\frac{4\{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)\}}{\{\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)\}\{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)\}}$$
$$=\frac{4(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{3-(\sqrt{2}-1)^2}$$
$$=\frac{4(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{6}-\sqrt{2}+2$$

따라서 $a=6$, $b=2$, $c=2$이므로

$a+b+c=10$

011 답 $\sqrt{21}-1$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$
$$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$
$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{21}-\sqrt{20})$
$=\sqrt{21}-1$

012 답 $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$

$$\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}=\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})^2}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})}$$
$$=\frac{2x+1+2x-1-2\sqrt{4x^2-1}}{2x+1-(2x-1)}$$
$$=2x-\sqrt{4x^2-1}$$
$$=2\sqrt{2}-\sqrt{4\times 2-1}$$
$$=2\sqrt{2}-\sqrt{7}$$

013 답 ①

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{x-1-(x+1)}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{\frac{5}{4}-1}}=-\frac{2}{\frac{1}{2}}=-4$$

014 답 1

$\sqrt{6-x}=2$의 양변을 제곱하면

$6-x=4$ $\quad\therefore x=2$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}=1$$

015 답 $-\sqrt{2}$

$y-x=-2\sqrt{2}$, $xy=4$이므로

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{y-x}{\sqrt{xy}}=\frac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

016 답 $2\sqrt{2}$

$x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=5+2\sqrt{6}$,

$y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=5-2\sqrt{6}$

이므로 $x+y=10$, $xy=1$

$\therefore\ (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{xy}=10-2\times1=8$

이때 $x>y$에서 $\sqrt{x}>\sqrt{y}$이므로

$\sqrt{x}-\sqrt{y}>0\qquad\therefore\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{2}$

017 답 ②

$x=\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=2\sqrt{2}-2$,

$y=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=2\sqrt{2}+2$

이므로 $x+y=4\sqrt{2}$, $x-y=-4$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^3+x^2y-xy^2-y^3&=x^2(x+y)-y^2(x+y)\\&=(x^2-y^2)(x+y)=(x+y)^2(x-y)\\&=(4\sqrt{2})^2\times(-4)=-128\end{aligned}$$

018 답 4

$x=-\sqrt{2}+1$에서 $x-1=-\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $x^2-2x+1=2\qquad\therefore\ x^2-2x-1=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ -2x^3+4x^2+x+5&=-2x(x^2-2x-1)-x+5\\&=-2x\times0-(-\sqrt{2}+1)+5\\&=4+\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=4$, $b=1$이므로 $ab=4$

019 답 ④

$x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$에서 $2x+1=\sqrt{3}$

양변을 제곱하면 $4x^2+4x+1=3$

$2x^2+2x-1=0\qquad\therefore\ x^2+x=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{6x^3+2x^2-7x+8}{x^2+x}&=\frac{6x(x^2+x)-4(x^2+x)-3x+8}{x^2+x}\\&=\frac{6x\times\frac{1}{2}-4\times\frac{1}{2}-3x+8}{\frac{1}{2}}=\frac{6}{\frac{1}{2}}=12\end{aligned}$$

020 답 ②

$-2x+6\ge0$에서 $x\le3$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\le3\}$

$\therefore\ a=3$

$y=\sqrt{-2x+6}+1$에서 $\sqrt{-2x+6}\ge0$이므로 $y\ge1$

즉, 치역은 $\{y\,|\,y\ge1\}$이므로 $b=1$

$\therefore\ a+b=3+1=4$

021 답 $\{y\,|\,y\ge7\}$

$3x-a\ge0$에서 $x\ge\dfrac{a}{3}$이므로 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\ge\dfrac{a}{3}\right\}$

즉, $\dfrac{a}{3}=4$이므로 $a=12$

또 $y=\sqrt{3x-12}+b$의 그래프가 점 $(7,\ 10)$을 지나므로

$10=\sqrt{3\times7-12}+b\qquad\therefore\ b=7$

따라서 주어진 함수는 $y=\sqrt{3x-12}+7$이고 $\sqrt{3x-12}\ge0$이므로

$y\ge7$, 즉 치역은 $\{y\,|\,y\ge7\}$

022 답 정의역: $\{x\,|\,x\le1\}$, 치역: $\{y\,|\,y\ge-2\}$

$y=\dfrac{3x+10}{x+3}=\dfrac{3(x+3)+1}{x+3}=\dfrac{1}{x+3}+3$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=3$이다.

$\therefore\ a=-3$, $b=3$

$f(x)=\sqrt{-3x+3}+c$에서 $f(1)=-2$이므로

$-2=\sqrt{-3\times1+3}+c\qquad\therefore\ c=-2$

$\therefore\ f(x)=\sqrt{-3x+3}-2=\sqrt{-3(x-1)}-2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\le1\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\ge-2\}$이다.

023 답 44

$y=\sqrt{2x-4}+11=\sqrt{2(x-2)}+11$

이므로 $y=\sqrt{2x-4}+11$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 11만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=2$, $p=2$, $q=11$이므로 $apq=44$

024 답 2

함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x+3)}+4\qquad\therefore\ y=\sqrt{ax+3a}+4$

이 그래프가 점 $(-1,\ 6)$을 지나므로

$6=\sqrt{-a+3a}+4$, $\sqrt{2a}=2$

양변을 제곱하면 $2a=4\qquad\therefore\ a=2$

025 답 ②

ㄱ. $y=\sqrt{x}$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=\sqrt{-x}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 무리함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

026 답 $\left(\frac{8}{3},\ 0\right)$

$y=-\sqrt{3x+2}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{3x+2}$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{3(x-3)+2}-1\qquad\therefore\ y=\sqrt{3x-7}-1$

이 식에 $y=0$을 대입하면 $0=\sqrt{3x-7}-1$, $\sqrt{3x-7}=1$

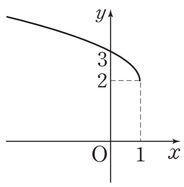
양변을 제곱하면 $3x-7=1\qquad\therefore\ x=\dfrac{8}{3}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{8}{3},\ 0\right)$이다.

027 답 ⑤

$y=\sqrt{-x+1}+2=\sqrt{-(x-1)}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y=\sqrt{-x+1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3, 4사분면을 지나지 않는다.

028 답 ②

$y=\sqrt{3x-6}+4=\sqrt{3(x-2)}+4$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

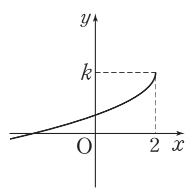
따라서 $y=\sqrt{3x-6}+4$의 그래프로 옳은 것은 ②이다.

029 답 2

$y=-\sqrt{-x+2}+k=-\sqrt{-(x-2)}+k$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\sqrt{-x+2}+k$의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y\ge 0$이어야 하므로



$-\sqrt{2}+k\ge 0 \qquad \therefore k\ge\sqrt{2}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

030 답 제1, 4사분면

점근선의 방정식이 $x=2$, $y=4$이므로 주어진 함수를

$y=\dfrac{k}{x-2}+4\ (k>0)$라고 하자.

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

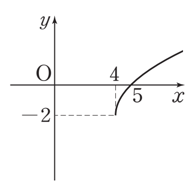
$2=\dfrac{k}{0-2}+4 \qquad \therefore k=4$

$\therefore y=\dfrac{4}{x-2}+4=\dfrac{4(x-2)+4}{x-2}=\dfrac{4x-4}{x-2}$

이 함수가 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$와 일치하므로 $a=4$, $b=-4$, $c=-2$

$\therefore y=\sqrt{a(x+b)}+c=\sqrt{4(x-4)}-2$

이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

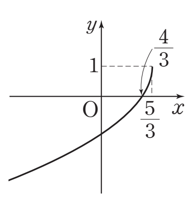


따라서 $y=\sqrt{a(x+b)}+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 4사분면을 지난다.

031 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

$y=-\sqrt{-3x+5}+1=-\sqrt{-3\left(x-\dfrac{5}{3}\right)}+1$

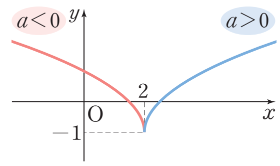
ㄷ. $y=-\sqrt{-3x+5}+1$의 그래프는
$y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로
$\dfrac{5}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

032 답 ②

$y=\sqrt{a(x-2)}-1\ (a\ne 0)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



① $y=\sqrt{a(x-2)}-1$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 그래프의 식은
$y=-\sqrt{a(x-2)}+1$

② $a>0$일 때 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge -1\}$이다.

③ $a<0$일 때 정의역은 $\{x\,|\,x\le 2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge -1\}$이다.

④ $a<0$이면 x의 값이 커질수록 y의 값은 작아진다.

⑤ $a=-\dfrac{1}{2}$일 때만 원점을 지난다.

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

033 답 ⑤

주어진 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x+5)}+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(-1,\ -2)$를 지나므로

$-2=-\sqrt{a(-1+5)}+2$, $2\sqrt{a}=4$, $\sqrt{a}=2$

양변을 제곱하면 $a=4$

㉠에 $a=4$를 대입하면

$y=-\sqrt{4(x+5)}+2=-\sqrt{4x+20}+2$

따라서 $a=4$, $b=20$, $c=2$이므로

$a+b+c=26$

034 답 $a>0$, $b>0$, $c<0$

주어진 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-p$만큼, y축의 방향으로 $-q$만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+p)}-q=\sqrt{ax+ap}-q$

이 함수가 $y=\sqrt{ax+b}+c$와 같으므로

$b=ap$, $c=-q$

이때 주어진 그래프에서 $a>0$, $p>0$, $q>0$이므로

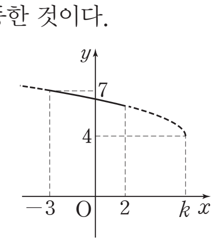
$a>0$, $b>0$, $c<0$

035 답 6

$y=\sqrt{-x+k}+4=\sqrt{-(x-k)}+4$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

즉, $-3\le x\le 2$에서 $y=\sqrt{-x+k}+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x=-3$일 때 최댓값이 7이므로



$\sqrt{3+k}+4=7$, $\sqrt{3+k}=3$

양변을 제곱하면

$3+k=9 \qquad \therefore k=6$

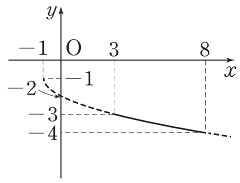
따라서 무리함수 $y=\sqrt{-x+6}+4$의 최솟값은 $x=2$일 때

$\sqrt{-2+6}+4=6$

036 답 ③

$y=-\sqrt{x+1}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

즉, $3\le x\le 8$에서 $y=-\sqrt{x+1}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=3$일 때 최댓값은

$-\sqrt{3+1}-1=-3$,

$x=8$일 때 최솟값은

$-\sqrt{8+1}-1=-4$

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 12이다.

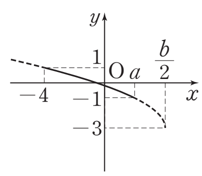
037 답 ①

$y=\sqrt{-2x+b}-3$

$\quad=\sqrt{-2\left(x-\dfrac{b}{2}\right)}-3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{b}{2}$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

즉, $-4\le x\le a$에서 $y=\sqrt{-2x+b}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 치역이 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이므로

$x=-4$일 때 최댓값은 1,

$x=a$일 때 최솟값은 -1

$\sqrt{8+b}-3=1$, $\sqrt{-2a+b}-3=-1$

$\sqrt{8+b}=4$, $\sqrt{-2a+b}=2$

각각 양변을 제곱하면

$8+b=16$, $-2a+b=4$

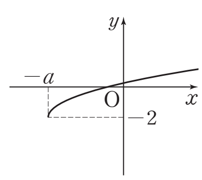
두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=8$

$\therefore\ a-b=-6$

038 답 ①

$y=\sqrt{x+a}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.



함수 $y=\sqrt{x+a}-2$의 그래프가 제2사분면을 지나려면 $a>0$이고, $x=0$일 때 $y>0$이어야 하므로

$\sqrt{a}-2>0 \qquad \therefore\ a>4$

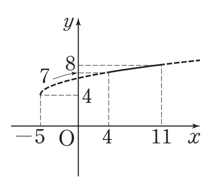
$\therefore\ k=5$

$y=\sqrt{x+k}+4$에 $k=5$를 대입하면

$y=\sqrt{x+5}+4$

$k-1\le x\le k+6$, 즉 $4\le x\le 11$에서

$y=\sqrt{x+5}+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=11$일 때 최댓값은



$\sqrt{11+5}+4=8$, $x=4$일 때 최솟값은

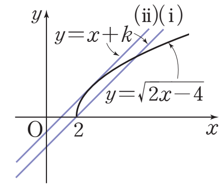
$\sqrt{4+5}+4=7$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 15이다.

039 답 $-2\le k<-\dfrac{3}{2}$

$y=\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x-2)}$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때

$\quad 0=2+k \qquad \therefore\ k=-2$

(ii) 함수 $y=\sqrt{2x-4}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$\quad \sqrt{2x-4}=x+k$의 양변을 제곱하면

$\quad 2x-4=x^2+2kx+k^2$

$\quad \therefore\ x^2+2(k-1)x+k^2+4=0$

$\quad$이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$\quad \dfrac{D}{4}=(k-1)^2-1\times(k^2+4)=0$

$\quad -2k-3=0 \qquad \therefore\ k=-\dfrac{3}{2}$

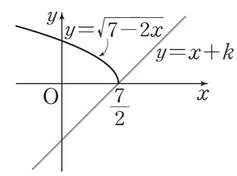
(i), (ii)에 의하여 실수 k의 값의 범위는

$-2\le k<-\dfrac{3}{2}$

040 답 ①

$y=\sqrt{7-2x}=\sqrt{-2\left(x-\dfrac{7}{2}\right)}$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{7}{2}$만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



직선 $y=x+k$가 점 $\left(\dfrac{7}{2},\ 0\right)$을 지날 때,

$0=\dfrac{7}{2}+k \qquad \therefore\ k=-\dfrac{7}{2}$

따라서 직선 $y=x+k$가 함수 $y=\sqrt{7-2x}$의 그래프와 만나지 않으려면 $k<-\dfrac{7}{2}$이어야 하므로 k의 값이 될 수 있는 것은 ① -5이다.

041 답 0

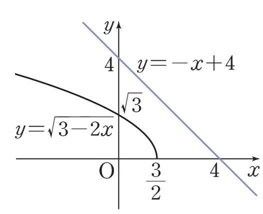
$y=\dfrac{4x-11}{x-3}=\dfrac{4(x-3)+1}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}+4$

이므로 $y=\dfrac{4x-11}{x-3}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=4$이다.

즉, $a=3$, $b=4$이므로 무리함수 $y=\sqrt{3-2x}$의 그래프와 직선 $y=-x+4$가 만나는 점의 개수를 구하면 된다.

$y=\sqrt{3-2x}=\sqrt{-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}$

이므로 $y=\sqrt{3-2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

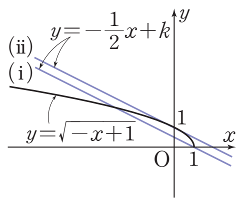


따라서 오른쪽 그림에서 무리함수 $y=\sqrt{3-2x}$의 그래프와 직선 $y=-x+4$가 만나는 점의 개수는 0이다.

042 답 $k<\frac{1}{2}$ 또는 $k=1$

$n(A\cap B)=1$이려면 함수 $y=\sqrt{-x+1}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 한 점에서 만나야 한다.

$y=\sqrt{-x+1}=\sqrt{-(x-1)}$
이므로 주어진 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, $y=-\frac{1}{2}x+k$는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 점 (1, 0)을 지날 때

$0=-\frac{1}{2}\times1+k \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

(ii) 함수 $y=\sqrt{-x+1}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 접할 때

$\sqrt{-x+1}=-\frac{1}{2}x+k$의 양변을 제곱하면

$-x+1=\frac{1}{4}x^2-kx+k^2 \qquad \therefore x^2-4(k-1)x+4k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4(k-1)^2-(4k^2-4)=0,\ -8k+8=0 \qquad \therefore k=1$

(i), (ii)에 의하여 실수 k의 값의 범위는 $k<\frac{1}{2}$ 또는 $k=1$

043 답 $f^{-1}(x)=x^2+2x+4\ (x\geq-1)$

함수 $y=f(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\geq-1\}$이므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq-1\}$이다.
$y=\sqrt{x-3}-1$이라고 하면 $y+1=\sqrt{x-3}$
양변을 제곱하면 $y^2+2y+1=x-3 \qquad \therefore x=y^2+2y+4$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=x^2+2x+4$
$\therefore f^{-1}(x)=x^2+2x+4\ (x\geq-1)$

044 답 ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 (2, 3)을 지나므로
$3=\sqrt{2a+b} \qquad \therefore 2a+b=9 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
또 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (2, 3)을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 (3, 2)를 지난다.
즉, $2=\sqrt{3a+b}$이므로 $3a+b=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=19 \qquad \therefore a+b=14$

045 답 ①

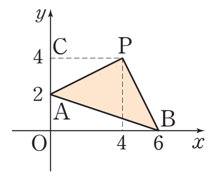
함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x-2}+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$\sqrt{x-2}+2=x$에서 $\sqrt{x-2}=x-2$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-5x+6=0$
$(x-2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=3$
따라서 두 교점의 좌표는 (2, 2), (3, 3)이므로 두 점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

046 답 $h^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2-x\ (x\leq1)$

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3-2x)$
$\quad=-\sqrt{4-(3-2x)}+1=-\sqrt{2x+1}+1$
함수 $y=h(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\leq1\}$이므로 역함수 $y=h^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\leq1\}$이다.
$y=-\sqrt{2x+1}+1$이라고 하면 $y-1=-\sqrt{2x+1}$
양변을 제곱하면 $y^2-2y+1=2x+1$
$\therefore x=\frac{1}{2}y^2-y$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x^2-x$
$\therefore h^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2-x\ (x\leq1)$

047 답 ④

함수 $f(x)=\sqrt{x}+2$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x}+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$\sqrt{x}+2=x$에서 $\sqrt{x}=x-2$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-5x+4=0$
$(x-1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=4$
그런데 역함수의 정의역이 $\{x\,|\,x\geq2\}$이므로
$x=4$
즉, 교점의 좌표는 P(4, 4)이므로
△PAB는 오른쪽 그림과 같다.
점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 C라고 하면



△PAB=□COBP−△PCA−△AOB
$=\left\{\frac{1}{2}\times(4+6)\times4\right\}-\left(\frac{1}{2}\times4\times2\right)-\left(\frac{1}{2}\times6\times2\right)$
$=20-4-6=10$

048 답 $\frac{13}{2}$

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)$
$\qquad=(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(f(3))$
이때 $f(3)=\frac{3+1}{3-2}=4$이므로 $g^{-1}(f(3))=g^{-1}(4)$
$g^{-1}(4)=k$라고 하면 $g(k)=4$이므로 $\sqrt{2k+3}=4$
양변을 제곱하면 $2k+3=16 \qquad \therefore k=\frac{13}{2}$
$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=\frac{13}{2}$

049 답 $\frac{1}{2}$

$(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.
$g(3)=k$라고 하면 $f(k)=3$이므로 $\sqrt{-2k+17}=3$
양변을 제곱하면 $-2k+17=9 \qquad \therefore k=4$
$g(4)=l$이라고 하면 $f(l)=4$이므로 $\sqrt{-2l+17}=4$
양변을 제곱하면 $-2l+17=16 \qquad \therefore l=\frac{1}{2}$
$\therefore (g\circ g)(3)=g(g(3))=g(4)=\frac{1}{2}$

050 답 ⑤

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g\left(\frac{a}{a+1}\right)=\sqrt{\frac{a}{a+1}}$이므로 $\sqrt{\frac{a}{a+1}}=\frac{1}{2}$

양변을 제곱하면 $\frac{a}{a+1}=\frac{1}{4}$, $4a=a+1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

$(f\circ g)^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=k$라고 하면 $(f\circ g)(k)=\frac{2}{3}$

$\therefore (f\circ g)(k)=f(g(k))=f(\sqrt{k})=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}=\frac{2}{3}$

$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}=\frac{2}{3}$에서 $3\sqrt{k}=2\sqrt{k}+2$, $\sqrt{k}=2$ $\quad\therefore k=4$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(2a)=(f\circ g)^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=4$

051 답 ⑤

$(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(a)))=-6$에서

$f(f(f(-6)))=a$

$-6<0$이므로 $f(-6)=\sqrt{4-2\times(-6)}=4$

$4\geq 0$이므로 $f(4)=2-\sqrt{4}=0$

$0\geq 0$이므로 $f(0)=2-\sqrt{0}=2$

$\therefore a=f(f(f(-6)))=f(f(4))=f(0)=2$

핵심 유형 최종 점검하기 • 110~111쪽

1 답 ①

유형 01 무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건

$-2x^2-7x+4\geq 0$에서 $2x^2+7x-4\leq 0$

$(x+4)(2x-1)\leq 0$ $\quad\therefore -4\leq x\leq \frac{1}{2}$

$4-x^2>0$에서 $x^2-4<0$

$(x+2)(x-2)<0$ $\quad\therefore -2<x<2$

따라서 주어진 식의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위가 $-2<x\leq\frac{1}{2}$이므로 정수 x는 -1, 0의 2개이다.

2 답 ③

유형 02 제곱근의 성질

$\sqrt{\{x(x-3)\}^2}=-x(x-3)$에서

$x(x-3)\leq 0$ $\quad\therefore 0\leq x\leq 3$

따라서 $x-4<0$, $x+1>0$이므로

$$\sqrt{(x-4)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=|x-4|+|x+1|$$
$$=-(x-4)+x+1=5$$

3 답 $2x+2$

유형 03 분모의 유리화

$$\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})^2+(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}$$
$$=\frac{(2x+2+2\sqrt{x^2+2x})+(2x+2-2\sqrt{x^2+2x})}{x+2-x}$$
$$=\frac{4x+4}{2}=2x+2$$

4 답 ②

유형 04 무리식의 값 구하기

$$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}=\frac{(\sqrt{1-x})^2-(\sqrt{1+x})^2}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}=\frac{1-x-(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{1-\frac{8}{9}}}=\frac{-\frac{4\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}$$
$$=-4\sqrt{2}$$

5 답 $44\sqrt{3}$

유형 05 $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 꼴이 주어질 때, 식의 값 구하기

$x+y=2\sqrt{5}$, $x-y=2\sqrt{3}$, $xy=2$이므로

$$x^3-y^3+2x^2y-2xy^2=(x-y)(x^2+xy+y^2)+2xy(x-y)$$
$$=(x-y)(x^2+3xy+y^2)$$
$$=(x-y)\{(x+y)^2+xy\}$$
$$=2\sqrt{3}\times\{(2\sqrt{5})^2+2\}$$
$$=44\sqrt{3}$$

6 답 ③

유형 06 $x=a\pm\sqrt{b}$ 꼴이 주어질 때, 식의 값 구하기

$x=2-\sqrt{3}$에서 $x-2=-\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$x^2-4x+4=3$ $\quad\therefore x^2-4x+1=0$

$$\therefore \frac{2x+1}{x^3-3x^2-3x+2}=\frac{2x+1}{x(x^2-4x+1)+(x^2-4x+1)+1}$$
$$=\frac{2x+1}{x\times 0+0+1}$$
$$=2x+1$$
$$=2(2-\sqrt{3})+1$$
$$=5-2\sqrt{3}$$

7 답 ③

유형 07 무리함수의 정의역과 치역

함수 $y=\sqrt{4x+k}+2$의 그래프가 점 $(2, 4)$를 지나므로

$4=\sqrt{4\times 2+k}+2$ $\quad\therefore k=-4$

$\therefore y=\sqrt{4x-4}+2=\sqrt{4(x-1)}+2$

따라서 정의역은 $\{x|x\geq 1\}$이고 치역은 $\{y|y\geq 2\}$이므로

$a=1$, $b=2$

$\therefore k+a+b=-4+1+2=-1$

8 답 -24

유형 08 무리함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

$y=\sqrt{3x-5}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{3(x+1)-5}+2+2=\sqrt{3x-2}+4$

이 함수의 그래프를 다시 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{-3x-2}+4$

$\therefore y=-\sqrt{-3x-2}-4$

따라서 $a=-3$, $b=-2$, $c=-4$이므로

$abc=-24$

9 답 ①

유형 09 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프

주어진 유리함수의 그래프의 모양에서 $a>0$

$y=\dfrac{a}{x+b}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=c$이므로

$-b>0$, $c<0$ $\qquad \therefore b<0$, $c<0$

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$

이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a>0$, $-\dfrac{b}{a}>0$, $c<0$이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형으로 옳은 것은 ①이다.

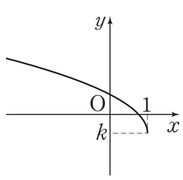
10 답 ③

유형 09 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프

$y=\sqrt{-x+1}+k=\sqrt{-(x-1)}+k$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\sqrt{-x+1}+k$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y\geq0$이어야 하므로



$\sqrt{1}+k\geq0$ $\qquad \therefore k\geq-1$

따라서 정수 k의 최솟값은 -1이다.

11 답 -2

유형 11 무리함수의 식 구하기

주어진 그래프는 $y=\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x-1)}-2$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(-3,\ 0)$을 지나므로

$0=\sqrt{-4a}-2$, $\sqrt{-4a}=2$

양변을 제곱하면 $-4a=4$ $\qquad \therefore a=-1$

㉠에 $a=-1$을 대입하면

$y=\sqrt{-(x-1)}-2=\sqrt{-x+1}-2$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=-2$이므로

$a+b+c=-2$

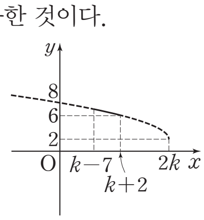
12 답 ③

유형 12 무리함수의 최대, 최소

$y=\sqrt{-x+2k}+2=\sqrt{-(x-2k)}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $2k$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉, $k-7\leq x\leq k+2$에서 $y=\sqrt{-x+2k}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x=k+2$일 때 최솟값이 6이므로



$\sqrt{-(k+2)+2k}+2=6$, $\sqrt{k-2}=4$

양변을 제곱하면

$k-2=16$ $\qquad \therefore k=18$

따라서 주어진 무리함수는 $y=\sqrt{-x+36}+2$이고,

$k-7\leq x\leq k+2$, 즉 $11\leq x\leq20$에서 최댓값은 $x=11$일 때

$\sqrt{-11+36}+2=7$

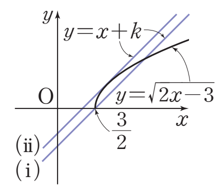
13 답 $\dfrac{3}{2}$

유형 13 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

$n(A\cap B)=2$이려면 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 두 점에서 만나야 한다.

$y=\sqrt{2x-3}=\sqrt{2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}$

이므로 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$을 지날 때

$0=\dfrac{3}{2}+k$ $\qquad \therefore k=-\dfrac{3}{2}$

(ii) 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$\sqrt{2x-3}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x-3=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-1\times(k^2+3)=0$

$-2k-2=0$ $\qquad \therefore k=-1$

(i), (ii)에 의하여 $-\dfrac{3}{2}\leq k<-1$이므로

$\alpha=-\dfrac{3}{2}$, $\beta=-1$ $\qquad \therefore \alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

14 답 ⑤

유형 14 무리함수의 역함수

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$4=\sqrt{a+b}$ $\qquad \therefore a+b=16$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4,\ 1)$을 지난다.

즉, $1=\sqrt{4a+b}$이므로 $4a+b=1$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=21$

$\therefore a-b=-26$

15 답 $\dfrac{5}{2}$

유형 15 무리함수의 합성함수와 역함수

$f(5)=\dfrac{5+3}{5-1}=2$이므로

$(g^{-1}\circ f)(5)=g^{-1}(f(5))=g^{-1}(2)$

$g^{-1}(2)=k$라고 하면 $g(k)=2$, $\sqrt{2k-1}=2$

양변을 제곱하면 $2k-1=4$ $\qquad \therefore k=\dfrac{5}{2}$

$\therefore (g^{-1}\circ f)(5)=g^{-1}(2)=\dfrac{5}{2}$

07 순열

	유형01 ②	유형02 ②	유형03 ③
유형04 14	유형05 18	유형06 540	유형07 9
유형08 49	유형09 ①	유형10 6	유형11 ②
유형12 ④	유형13 ⑤	유형14 84	유형15 ③
유형16 79번째		유형17 18	

핵심유형 완성하기

001 ⑤	002 7	003 9	004 ④	005 ⑤
006 60	007 ③	008 ①	009 ③	010 16
011 ②	012 10	013 4	014 ③	015 ④
016 12	017 10	018 48	019 30	020 4
021 48	022 ②	023 84	024 420	025 11
026 9	027 15	028 ①	029 ⑤	030 ②
031 ⑤	032 ⑤	033 ①	034 7	035 ②
036 11	037 ③	038 ③	039 720	040 ③
041 3	042 ④	043 480	044 ④	045 ⑤
046 6	047 ④	048 ②	049 ⑤	050 720
051 432	052 ①	053 ②	054 3	055 48
056 100	057 ③	058 ②	059 108번째	
060 ②	061 ③	062 4523	063 96	064 ②
065 ①				

핵심유형 최종 점검하기

1 ①	2 ④	3 ②	4 ③	5 ③
6 ④	7 9	8 ②	9 336	10 7
11 ⑤	12 ④	13 ①	14 ②	15 ③
16 288	17 84	18 ⑤	19 ③	20 24

핵심 유형 114~115쪽

유형01 답 ②

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(ⅰ) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는

$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$의 4가지

(ⅱ) 눈의 수의 합이 10이 되는 경우는

$(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)$의 3가지

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$4+3=7$

유형02 답 ②

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8의 4개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 9의 5개

따라서 구하는 자연수의 개수는 $4\times5=20$

유형03 답 ③

(ⅰ) $x=1$일 때, $2y+z=12$이므로 순서쌍 $(y,\ z)$는

$(1,\ 10),\ (2,\ 8),\ (3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (5,\ 2)$의 5개

(ⅱ) $x=2$일 때, $2y+z=9$이므로 순서쌍 $(y,\ z)$는

$(1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (3,\ 3),\ (4,\ 1)$의 4개

(ⅲ) $x=3$일 때, $2y+z=6$이므로 순서쌍 $(y,\ z)$는

$(1,\ 4),\ (2,\ 2)$의 2개

(ⅳ) $x=4$일 때, $2y+z=3$이므로 순서쌍 $(y,\ z)$는

$(1,\ 1)$의 1개

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$5+4+2+1=12$

유형04 답 14

$63=3^2\times7$이므로 63의 양의 약수의 개수는

$(2+1)(1+1)=6 \qquad \therefore a=6$

$135=3^3\times5$이므로 135의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(1+1)=8 \qquad \therefore b=8$

$\therefore a+b=14$

유형05 답 18

(ⅰ) $A\to B\to C$로 가는 방법의 수는 $3\times4=12$

(ⅱ) $A\to D\to C$로 가는 방법의 수는 $2\times3=6$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 방법의 수는

$12+6=18$

유형06 답 540

A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 구하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times3\times3=540$

유형07 답 9

$a_k\neq k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$를 만족하는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 9이다.

a_1 a_2 a_3 a_4

2 — 1 — 4 — 3
2 — 3 — 4 — 1
2 — 4 — 1 — 3
3 — 1 — 4 — 2
3 — 4 — 1 — 2
3 — 4 — 2 — 1
4 — 1 — 2 — 3
4 — 3 — 1 — 2
4 — 3 — 2 — 1

유형08 답 49

(ⅰ) 지불할 수 있는 방법의 수
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개의 2가지
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는
$2\times5\times3-1=29$ $\therefore a=29$

(ⅱ) 지불할 수 있는 금액의 수
50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 6개, 10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 50원, 100원, …, 300원의 7가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원의 3가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는
$7\times3-1=20$ $\therefore b=20$

$\therefore a+b=49$

핵심 유형 **완성**하기 116~119쪽

001 답 ⑤

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(ⅰ) 눈의 수의 차가 3이 되는 경우는
(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지
(ⅱ) 눈의 수의 차가 4가 되는 경우는
(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$6+4=10$

002 답 7

(ⅰ) 택한 카드에 적힌 수가 7의 배수인 경우는
7, 14, 21, 28의 4가지
(ⅱ) 택한 카드에 적힌 수가 8의 배수인 경우는
8, 16, 24의 3가지
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$4+3=7$

003 답 9

꺼낸 공에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면
(ⅰ) 세 수의 곱이 4가 되는 경우는
(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)의 6가지
(ⅱ) 세 수의 곱이 5가 되는 경우는
(1, 1, 5), (1, 5, 1), (5, 1, 1)의 3가지
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$6+3=9$

004 답 ④

1부터 100까지의 자연수 중에서
(ⅰ) 5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는 20개
(ⅱ) 7로 나누어떨어지는 수, 즉 7의 배수는 14개
(ⅲ) 5와 7로 나누어떨어지는 수, 즉 35의 배수는 2개
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 5 또는 7로 나누어떨어지는 자연수의 개수는
$20+14-2=32$
따라서 5와 7로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는
$100-32=68$

005 답 ⑤

백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8의 4개
십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 9의 5개
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 3, 5, 7의 4개
따라서 구하는 자연수의 개수는 $4\times5\times4=80$

006 답 60

피자를 고를 수 있는 방법은 4가지, 샐러드를 고를 수 있는 방법은 3가지, 음료수를 고를 수 있는 방법은 5가지이므로 구하는 방법의 수는
$4\times3\times5=60$

007 답 ③

a의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개
b의 값이 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8, 10의 5개
따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3\times5=15$이므로
$n(C)=15$

008 답 ①

$(a+b)(x+y+z)$에서 a, b에 곱해지는 항이 각각 x, y, z의 3개이므로 구하는 항의 개수는
$2\times3=6$

009 답 ③

서로 다른 주사위 3개를 동시에 던질 때 일어나는 경우의 수는
$6\times6\times6=216$
세 눈의 수의 곱이 홀수가 되는 경우의 수는
$3\times3\times3=27$
따라서 구하는 경우의 수는 $216-27=189$

010 답 16

(ⅰ) $y=1$일 때, $x+z=8$이므로 순서쌍 $(x,\ z)$는
$(1,\ 7)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 2)$, $(7,\ 1)$의 7개
(ⅱ) $y=2$일 때, $x+z=6$이므로 순서쌍 $(x,\ z)$는
$(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 1)$의 5개
(ⅲ) $y=3$일 때, $x+z=4$이므로 순서쌍 $(x,\ z)$는
$(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 3개
(ⅳ) $y=4$일 때, $x+z=2$이므로 순서쌍 $(x,\ z)$는
$(1,\ 1)$의 1개
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는
$7+5+3+1=16$

011 답 ②

x, y가 자연수이므로 $x+3y$가 될 수 있는 값은 4, 5, 6, 7이다.
(ⅰ) $x+3y=4$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 1)$의 1개
(ⅱ) $x+3y=5$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(2,\ 1)$의 1개
(ⅲ) $x+3y=6$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(3,\ 1)$의 1개
(ⅳ) $x+3y=7$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(4,\ 1)$, $(1,\ 2)$의 2개
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는
$1+1+1+2=5$

012 답 10

200원, 500원, 1000원짜리 볼펜을 각각 x개, y개, z개 산다고 하면 그 금액의 합이 3000원이므로
$200x+500y+1000z=3000$
$\therefore\ 2x+5y+10z=30$ …… ㉠
따라서 구하는 방법의 수는 방정식 ㉠을 만족하는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수와 같다.
(ⅰ) $z=0$일 때, $2x+5y=30$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(15,\ 0)$, $(10,\ 2)$, $(5,\ 4)$, $(0,\ 6)$의 4개
(ⅱ) $z=1$일 때, $2x+5y=20$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(10,\ 0)$, $(5,\ 2)$, $(0,\ 4)$의 3개
(ⅲ) $z=2$일 때, $2x+5y=10$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(5,\ 0)$, $(0,\ 2)$의 2개
(ⅳ) $z=3$일 때, $2x+5y=0$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(0,\ 0)$의 1개
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 방법의 수는 $4+3+2+1=10$

013 답 4

$60=2^2\times3\times5$이므로 60의 양의 약수의 개수는
$(2+1)(1+1)(1+1)=12$ $\therefore\ a=12$
$168=2^3\times3\times7$이므로 168의 양의 약수의 개수는
$(3+1)(1+1)(1+1)=16$ $\therefore\ b=16$
$\therefore\ b-a=4$

014 답 ③

① $2^3\times3$의 양의 약수의 개수는 $(3+1)(1+1)=8$
② $2^3\times5$의 양의 약수의 개수는 $(3+1)(1+1)=8$
③ $2^3\times6=2^4\times3$의 양의 약수의 개수는 $(4+1)(1+1)=10$
④ $2^3\times7$의 양의 약수의 개수는 $(3+1)(1+1)=8$
⑤ $2^3\times16=2^7$의 양의 약수의 개수는 $7+1=8$

015 답 ④

$540=2^2\times3^3\times5$
짝수는 2를 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 짝수의 개수는 $2\times3^3\times5$의 양의 약수의 개수와 같다.
$\therefore\ a=(1+1)(3+1)(1+1)=16$
3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는 $2^2\times3^2\times5$의 양의 약수의 개수와 같다.
$\therefore\ b=(2+1)(2+1)(1+1)=18$
$\therefore\ a+b=34$

016 답 12

$300=2^2\times3\times5^2$과 $360=2^3\times3^2\times5$의 최대공약수는 $2^2\times3\times5$
따라서 300과 360의 양의 공약수의 개수는 $2^2\times3\times5$의 양의 약수의 개수와 같으므로
$(2+1)(1+1)(1+1)=12$

017 답 10

(ⅰ) $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는 $3\times2=6$
(ⅱ) $\mathrm{A}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는 2
(ⅲ) $\mathrm{A}\to\mathrm{D}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는 $1\times2=2$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 방법의 수는
$6+2+2=10$

018 답 48

(ⅰ) 집 → 문구점 → 편의점 → 집으로 가는 방법의 수는
$4\times2\times3=24$
(ⅱ) 집 → 편의점 → 문구점 → 집으로 가는 방법의 수는
$3\times2\times4=24$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 방법의 수는
$24+24=48$

019 답 30

(ⅰ) $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는 $2\times3=6$
(ⅱ) $\mathrm{A}\to\mathrm{D}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는 $2\times2=4$
(ⅲ) $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{D}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는 $2\times2\times2=8$
(ⅳ) $\mathrm{A}\to\mathrm{D}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는 $2\times2\times3=12$
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 방법의 수는
$6+4+8+12=30$

020 답 4

B지점과 D지점을 연결하는 x개의 도로를 추가한다고 하면
(ⅰ) $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는 $2\times1=2$
(ⅱ) $\mathrm{A}\to\mathrm{D}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는 $3\times2=6$
(ⅲ) $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{D}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는 $2\times x\times2=4x$
(ⅳ) $\mathrm{A}\to\mathrm{D}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}$로 가는 방법의 수는 $3\times x\times1=3x$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 A지점에서 C지점으로 가는 방법의 수는

$2+6+4x+3x=7x+8$

$7x+8=36$에서 $7x=28$ $\quad \therefore x=4$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 4이다.

021 답 48

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 구하는 방법의 수는

$4\times3\times2\times2=48$

022 답 ②

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 구하는 방법의 수는

$4\times3\times2=24$

023 답 84

(ⅰ) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 칠하는 방법의 수는

$4\times3\times1\times3=36$

(ⅱ) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 칠하는 방법의 수는

$4\times3\times2\times2=48$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 방법의 수는

$36+48=84$

024 답 420

A, B, C, D, E의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

(ⅰ) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times1\times3=180$

(ⅱ) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 칠하는 방법의 수는

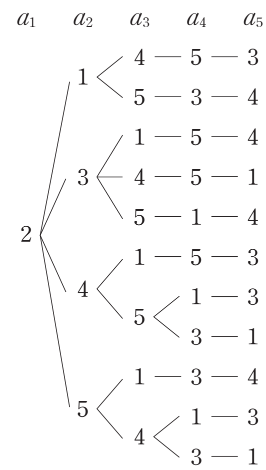
$5\times4\times3\times2\times2=240$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 방법의 수는

$180+240=420$

025 답 11

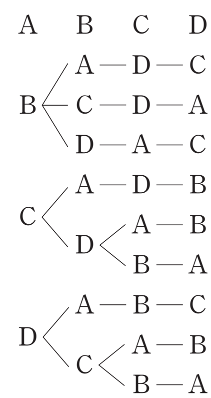
$a_1=2$, $a_k\neq k\,(k=3, 4, 5)$를 만족하는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.



따라서 구하는 자연수의 개수는 11이다.

026 답 9

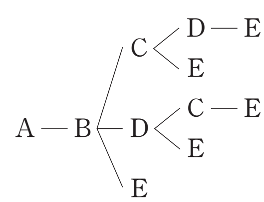
4명의 학생을 A, B, C, D라 하고, 4명의 학생이 자기 자신의 보고서를 제외한 보고서를 읽는 방법을 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 9이다.

027 답 15

꼭짓점 A에서 출발하여 가장 먼저 꼭짓점 B를 거쳐 꼭짓점 E에 도착하는 방법을 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 가장 먼저 꼭짓점 C 또는 D를 거쳐 꼭짓점 E에 도착하는 방법도 각각 5가지이므로 구하는 방법의 수는

$5\times3=15$

028 답 ①

(ⅰ) 지불할 수 있는 방법의 수

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는

$3\times4\times5-1=59$ $\quad \therefore a=59$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 7개, 10원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, ⋯, 350원의 8가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, 30원, 40원의 5가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$8\times5-1=39$ $\quad\therefore b=39$

$\therefore a+b=98$

029 답 ⑤

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개의 2가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$4\times3\times4\times2-1=95$

030 답 ②

500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 1장을 500원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 5개, 100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, ⋯, 2500원의 6가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$6\times4-1=23$

핵심 유형 120～121쪽

유형09 답 ①

구하는 방법의 수는 9명의 학생 중에서 2명을 택하여 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

${}_9P_2=9\times8=72$

유형10 답 6

$2{}_nP_2+{}_{n+1}P_1=67$에서

$2n(n-1)+(n+1)=67$

$2n^2-n-66=0$, $(2n+11)(n-6)=0$

$\therefore n=-\frac{11}{2}$ 또는 $n=6$

그런데 ${}_nP_2$에서 $n\geq2$이므로 $n=6$

유형11 답 ②

찬호와 준형이를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=3\times2\times1=6$

찬호와 준형이가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2\times1=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\times2=12$

유형12 답 ④

남자 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=3\times2\times1=6$

남자들 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 여자 2명을 세우는 방법의 수는

∨남∨남∨남∨

${}_4P_2=4\times3=12$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\times12=72$

유형13 답 ⑤

선생님, 학생의 순서로 교대로 서는 방법의 수는

$2!\times2!=2\times2=4$

학생, 선생님의 순서로 교대로 서는 방법의 수는

$2!\times2!=2\times2=4$

따라서 구하는 방법의 수는 $4+4=8$

유형14 답 84

5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

자음은 r, t, h의 3개이므로 양 끝에 모두 자음이 오도록 나열하는 방법의 수는

${}_3P_2\times3!=(3\times2)\times(3\times2\times1)=36$

따라서 구하는 방법의 수는 $120-36=84$

유형15 답 ③

홀수이려면 일의 자리의 숫자가 1 또는 3이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 1인 홀수의 개수

1을 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_3P_2=3\times2=6$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 홀수의 개수

3을 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_3P_2=3\times2=6$

(i), (ii)에 의하여 구하는 홀수의 개수는

$6+6=12$

유형16 답 79번째

a로 시작하는 것의 개수는 $4!=4\times3\times2\times1=24$
m으로 시작하는 것의 개수는 $4!=4\times3\times2\times1=24$
r로 시작하는 것의 개수는 $4!=4\times3\times2\times1=24$
sa로 시작하는 것의 개수는 $3!=3\times2\times1=6$
그 다음에 smart가 나타난다.
따라서 smart까지의 개수는
$24+24+24+6+1=79$
이므로 smart는 79번째에 나타난다.

유형17 답 18

$f(a)\neq a$이므로 $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 b, c, d의 3개
그 각각에 대하여 b, c, d가 대응하는 경우의 수는
$3!=3\times2\times1=6$
따라서 구하는 f의 개수는
$3\times6=18$

핵심 유형 **완성**하기 122~126쪽

031 답 ⑤

구하는 방법의 수는 10명의 회원 중에서 3명을 택하여 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로
${}_{10}P_3=720$

032 답 ⑤

구하는 방법의 수는 5명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로
$5!=120$

033 답 ①

${}_nP_2=56$이므로
$n(n-1)=56=8\times7 \qquad \therefore n=8$

034 답 7

${}_nP_2+4{}_nP_1=70$에서 $n(n-1)+4n=70$
$n^2+3n-70=0$, $(n+10)(n-7)=0$
$\therefore n=-10$ 또는 $n=7$
그런데 ${}_nP_2$에서 $n\geq2$이므로 $n=7$

035 답 ②

${}_6P_r\times4!=2880$의 양변을 $4!=24$로 나누면
${}_6P_r=120=6\times5\times4 \qquad \therefore r=3$

036 답 11

${}_nP_3 : {}_nP_2=9 : 1$에서 $9{}_nP_2={}_nP_3$
$9n(n-1)=n(n-1)(n-2)$
${}_nP_3$에서 $n\geq3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$9=n-2 \qquad \therefore n=11$

037 답 ③

${}_{2n}P_3=60{}_nP_2$에서
$2n(2n-1)(2n-2)=60n(n-1)$
$4n(n-1)(2n-1)=60n(n-1)$
${}_nP_2$에서 $n\geq2$이므로 양변을 $4n(n-1)$로 나누면
$2n-1=15 \qquad \therefore n=8$

038 답 ③

F와 A를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!=120$
F와 A의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는 $120\times2=240$

039 답 720

어린이 3명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$
어린이 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는 $120\times6=720$

040 답 ③

1반 학생 4명을 한 사람, 2반 학생 2명을 한 사람, 3반 학생 3명을 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$
1반 학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4!=24$
2반 학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
3반 학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는 $6\times24\times2\times6=1728$

041 답 3

시집 3권을 한 권으로 생각하여 $(n+1)$권을 일렬로 꽂는 방법의 수는 $(n+1)!$
시집 3권의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
이때 시집끼리 이웃하게 꽂는 방법의 수가 144이므로
$(n+1)!\times6=144$, $(n+1)!=24=4!$
따라서 $n+1=4$이므로 $n=3$

042 답 ④

남학생 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$
남학생 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 여학생 3명을 세우는 방법의 수는 ${}_5P_3=60$

∨남∨남∨남∨남∨

따라서 구하는 방법의 수는 $24\times60=1440$

043 답 480

자음인 b, s, k, t를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$
자음 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 모음 a, e를 나열하는 방법의 수는
${}_5P_2=20$

∨자∨자∨자∨자∨

따라서 구하는 방법의 수는 $24\times20=480$

044 답 ④

의자 3개에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 3개이다.

빈 의자 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 학생이 앉은 의자 3개를 놓으면 되므로 구하는 방법의 수는

∨빈∨빈∨빈∨

$_4P_3=24$

045 답 ⑤

선생님, 유치원생의 순서로 교대로 서는 방법의 수는

$3!\times3!=6\times6=36$

유치원생, 선생님의 순서로 교대로 서는 방법의 수는

$3!\times3!=6\times6=36$

따라서 구하는 방법의 수는

$36+36=72$

046 답 6

구하는 방법의 수는 준형이를 제외한 3명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

$3!=6$

047 답 ④

자음은 h, s, n, g의 4개이고 모음은 o, u, i의 3개이므로 자음 4개를 일렬로 나열하고 그 사이사이에 모음 3개를 나열하면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$4!\times3!=24\times6=144$

048 답 ②

승아, 선생님, 은서를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

승아와 은서가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times2=12$

049 답 ⑤

자음은 s, l의 2개이므로 1, 3, 5번째 자리 중 두 자리에 자음을 나열하는 방법의 수는 $_3P_2=6$

나머지 세 자리에 모음 3개를 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times6=36$

050 답 720

C□□□G를 한 묶음으로 생각할 때, C와 G 사이에 3개의 문자를 나열하는 방법의 수는 $_5P_3=60$

C와 G의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

C□□□G를 한 문자로 생각하여 문자 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$60\times2\times6=720$

051 답 432

6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $6!=720$

자음은 f, r, n, d의 4개이므로 양 끝에 모두 자음이 오도록 나열하는 방법의 수는

$_4P_2\times4!=12\times24=288$

따라서 구하는 방법의 수는

$720-288=432$

052 답 ①

8명의 학생 중에서 대표 1명, 부대표 1명을 뽑는 방법의 수는

$_8P_2=56$

대표, 부대표 모두 남학생을 뽑는 방법의 수는 $_3P_2=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$56-6=50$

053 답 ②

5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!=120$

A, C, E 중에서 어느 2개도 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는 A, C, E를 일렬로 나열하고 그 사이사이에 B, D가 오도록 나열하는 방법의 수와 같으므로

$3!\times2!=6\times2=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$120-12=108$

054 답 3

7개의 알파벳을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $7!=5040$

모음의 개수를 n이라고 하면 양 끝에 모두 모음이 오도록 나열하는 방법의 수는

$_nP_2\times5!=120_nP_2$

이때 적어도 한쪽 끝에 자음이 오도록 나열하는 방법의 수가 3600이므로

$5040-120_nP_2=3600 \qquad \therefore\ _nP_2=12$

즉, $n(n-1)=12=4\times3$이므로 $n=4$

따라서 모음의 개수가 4이므로 자음의 개수는

$7-4=3$

055 답 48

짝수이려면 일의 자리의 숫자가 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수

2를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$_4P_3=24$

(ii) 일의 자리의 숫자가 4인 짝수의 개수

4를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$_4P_3=24$

(i), (ii)에 의하여 구하는 짝수의 개수는

$24+24=48$

056 답 100

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 5개
십의 자리와 일의 자리의 숫자를 택하는 방법의 수는 백의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 ${}_5P_2=20$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$5\times20=100$

057 답 ③

5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.
(i) 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수
0을 제외한 6개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로
${}_6P_3=120$
(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 5개
백의 자리와 십의 자리의 숫자를 택하는 방법의 수는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로
${}_5P_2=20$
따라서 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수는
$5\times20=100$
(i), (ii)에 의하여 구하는 5의 배수의 개수는
$120+100=220$

058 답 ②

3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로 4개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개를 사용하여 3의 배수를 만드는 경우는
1, 2, 3 또는 2, 3, 4
이때 각 경우마다 세 자리 자연수를 만드는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 3의 배수의 개수는
$2\times6=12$

059 답 108번째

e로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
h로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
n으로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
o로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
pe로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
phe로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$
phn으로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$
pho로 시작하는 것은 순서대로
phoen, phone
따라서 phone까지의 개수는
$24+24+24+24+6+2+2+2=108$
이므로 phone는 108번째에 나타난다.

060 답 ②

240보다 작은 세 자리 자연수는 1□□, 20□, 21□, 23□ 꼴이다.
1□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$
20□ 꼴인 자연수의 개수는 3
21□ 꼴인 자연수의 개수는 3
23□ 꼴인 자연수의 개수는 3
따라서 구하는 자연수의 개수는
$12+3+3+3=21$

061 답 ③

a로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$
g로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$
ia로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
ig로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
ina로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
따라서 a로 시작하는 것부터 ina로 시작하는 것까지의 총 개수는
$120+120+24+24+6=294$
이므로 295번째에 오는 것은 ingasv이다.

062 답 4523

6□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$
5□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$
46□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$
456□ 꼴인 자연수의 개수는 3
453□ 꼴인 자연수의 개수는 3
따라서 6543부터 4531까지의 자연수의 개수는
$60+60+12+3+3=138$
이므로 구하는 수는 4526, 4523, …에서 4523이다.

063 답 96

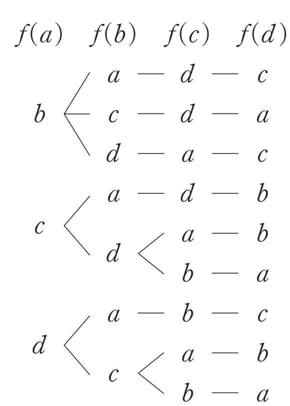
$f(a)\neq b$이므로 $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 a, c, d, e의 4개
그 각각에 대하여 b, c, d, e가 대응하는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 f의 개수는 $4\times24=96$

064 답 ②

$f(1)=4$, $f(4)=1$이고 일대일대응인 함수 f의 개수는
$4!=24$

065 답 ①

함수 f는 $f(x)\neq x$인 일대일대응이므로 이를 만족하도록 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$를 정하는 방법을 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 f의 개수는 9이다.



핵심 유형 **최종 점검**하기 • 127～129쪽

1 답 ①

유형 01 합의 법칙

10장의 카드 중에서 2의 배수가 적힌 카드는 5장, 3의 배수가 적힌 카드는 3장, 2와 3의 최소공배수인 6의 배수가 적힌 카드는 1장이므로 2의 배수 또는 3의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우의 수는

$5+3-1=7$

2 답 ④

유형 02 곱의 법칙

$(a+b+c)(x+y)^2=(a+b+c)(x^2+2xy+y^2)$에서 a, b, c에 곱해지는 항이 각각 x^2, $2xy$, y^2의 3개이므로 구하는 항의 개수는

$3\times3=9$

3 답 ②

유형 03 방정식과 부등식의 해의 개수

x, y, z가 자연수이므로 $x+2y+3z$가 될 수 있는 값은 10, 11, 12이다.

(i) $x+2y+3z=10$일 때, 순서쌍 (x, y, z)는
 $(5, 1, 1)$, $(3, 2, 1)$, $(1, 3, 1)$, $(2, 1, 2)$의 4개

(ii) $x+2y+3z=11$일 때, 순서쌍 (x, y, z)는
 $(6, 1, 1)$, $(4, 2, 1)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$의 5개

(iii) $x+2y+3z=12$일 때, 순서쌍 (x, y, z)는
 $(7, 1, 1)$, $(5, 2, 1)$, $(3, 3, 1)$, $(1, 4, 1)$, $(4, 1, 2)$,
 $(2, 2, 2)$, $(1, 1, 3)$의 7개

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$4+5+7=16$

4 답 ③

유형 04 약수의 개수

$1350=2\times3^3\times5^2$이고 홀수는 2를 소인수로 갖지 않으므로 1350의 양의 약수 중 홀수의 개수는 $3^3\times5^2$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 구하는 홀수인 양의 약수의 개수는

$(3+1)(2+1)=12$

5 답 ③

유형 05 도로망에서의 방법의 수

(i) A → B → C → A로 가는 방법의 수는 $3\times5\times2=30$

(ii) A → C → B → A로 가는 방법의 수는 $2\times5\times3=30$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는 $30+30=60$

6 답 ④

유형 06 색칠하는 방법의 수

A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 구하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times3\times3=540$

7 답 9

유형 07 수형도를 이용하는 경우의 수

$a_3=3$, $a_k\neq k\,(k=1, 2, 4, 5)$를 만족하는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 9이다.

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

- 2
  - 1 — 3 — 5 — 4
  - 4 — 3 — 5 — 1
  - 5 — 3 — 1 — 4
- 4
  - 1 — 3 — 5 — 2
  - 5 — 3
    - 1 — 2
    - 2 — 1
- 5
  - 1 — 3 — 2 — 4
  - 4 — 3
    - 1 — 2
    - 2 — 1

8 답 ②

유형 08 지불 방법의 수와 지불 금액의 수

(i) 지불할 수 있는 방법의 수

 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개의 3가지
 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개, ⋯, 7개의 8가지
 50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개의 2가지
 이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는
 $3\times8\times2-1=47$
 $\therefore a=47$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

 100원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 금액과 500원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 500원짜리 동전 1개를 100원짜리 동전 5개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 100원짜리 동전 17개, 50원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
 0원, 100원, 200원, ⋯, 1700원의 18가지
 50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
 0원, 50원의 2가지
 이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는
 $18\times2-1=35$
 $\therefore b=35$

$\therefore a+b=82$

9 답 336

유형 09 순열의 수

구하는 방법의 수는 8명의 학생 중에서 3명을 택하여 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

${}_8P_3=336$

10 답 7

유형 10 $_{n}P_{r}$의 계산

$_{n+1}P_{3}-6{}_{n}P_{2}=14{}_{n-1}P_{1}$에서

$(n+1)n(n-1)-6n(n-1)=14(n-1)$

$_{n}P_{2}$에서 $n\geq2$이므로 양변을 $n-1$로 나누면

$n(n+1)-6n=14,\ n^{2}-5n-14=0$

$(n+2)(n-7)=0 \qquad \therefore n=-2$ 또는 $n=7$

그런데 $n\geq2$이므로 $n=7$

11 답 ⑤

유형 11 이웃하는 순열의 수

모음인 u, i, o를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$

u, i, o끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\times6=144$

12 답 ④

유형 12 이웃하지 않는 순열의 수

팬 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$

팬들 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 가수 2명을 세우는 방법의 수는 $_{6}P_{2}=30$

따라서 구하는 방법의 수는

$120\times30=3600$

13 답 ①

유형 13 조건을 만족하는 순열의 수

구하는 방법의 수는 F를 제외한 나머지 5곡 중에서 3곡을 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$_{5}P_{3}=60$

14 답 ②

유형 13 조건을 만족하는 순열의 수

수예와 지예를 제외한 나머지 가족 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

수예와 지예가 양 끝에 서는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times2=12$

15 답 ③

유형 13 조건을 만족하는 순열의 수

여학생 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$

여학생 사이사이 3개의 자리에 남학생 3명을 세우는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\times6=144$

16 답 288

유형 13 조건을 만족하는 순열의 수

T□□S를 한 묶음으로 생각할 때, T와 S 사이에 모음 U, E, A 중 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 $_{3}P_{2}=6$

T와 S의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

T□□S를 한 문자로 생각하여 문자 4개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times2\times24=288$

17 답 84

유형 14 '적어도' 조건이 있는 순열의 수

5개의 인형을 일렬로 진열하는 방법의 수는 $5!=120$

양 끝에 B회사의 인형이 오도록 진열하는 방법의 수는

$_{3}P_{2}\times3!=6\times6=36$

따라서 구하는 방법의 수는

$120-36=84$

18 답 ⑤

유형 15 조건을 만족하는 자연수의 개수

짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 짝수의 개수

0을 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$_{4}P_{2}=12$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 2를 제외한 3개, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 오는 숫자와 2를 제외한 3개이므로 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수는

$3\times3=9$

(iii) 일의 자리의 숫자가 4인 짝수의 개수

(ii)와 같은 방법으로 9

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 짝수의 개수는

$12+9+9=30$

19 답 ③

유형 16 사전식 배열을 이용하는 순열의 수

3200보다 큰 네 자리 자연수는 32□□, 34□□, 35□□, 4□□□, 5□□□ 꼴이다.

32□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_{3}P_{2}=6$

34□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_{3}P_{2}=6$

35□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_{3}P_{2}=6$

4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_{4}P_{3}=24$

5□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_{4}P_{3}=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6+6+6+24+24=66$

20 답 24

유형 17 일대일대응의 개수

주어진 조건에서 가능한 순서쌍 $(f(1), f(2))$는

$(6, 10), (7, 9), (9, 7), (10, 6)$의 4개

그 각각에 대하여 함수 f가 일대일대응이 되도록 3, 4, 5가 대응하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 f의 개수는 $4\times6=24$

08 조합

핵심 유형

	유형01 18	유형02 3	유형03 ③
유형04 81	유형05 1440	유형06 ③	유형07 20
유형08 ④	유형09 18	유형10 15	유형11 ⑤
유형12 90			

핵심 유형 완성하기

001 ④	002 168	003 ③	004 44	005 ②
006 6	007 ④	008 −5	009 15	010 78
011 100	012 ⑤	013 ③	014 205	015 ①
016 ④	017 ②	018 120	019 ③	020 ①
021 14	022 ①	023 ②	024 ④	025 110
026 ②	027 72	028 200	029 60	030 ④
031 10	032 21	033 ③	034 ①	035 301
036 ②	037 ⑤	038 ②	039 ③	040 ④

핵심 유형 최종 점검하기

1 ③	2 12	3 ④	4 ②	5 ③
6 ②	7 ③	8 7명	9 ⑤	10 ①
11 ④	12 23	13 54	14 ③	15 150
16 5	17 ①	18 315		

핵심 유형 132~134쪽

유형01 답 18

장래희망이 프로그래머인 학생 4명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

장래희망이 디자이너인 학생 3명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times3=18$

유형02 답 3

$3{}_{n+1}C_3-4{}_nC_2=0$에서

$3\times\frac{(n+1)n(n-1)}{3\times2\times1}-4\times\frac{n(n-1)}{2\times1}=0$

$(n+1)n(n-1)-4n(n-1)=0$

${}_nC_2$에서 $n\geq2$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$n+1-4=0 \qquad \therefore n=3$

유형03 답 ③

구하는 방법의 수는 승아를 제외한 6명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

유형04 답 81

9권의 책 중에서 4권을 택하는 방법의 수는

${}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

(i) 시집을 한 권도 포함하지 않고 택하는 방법의 수

소설과 수필집 중에서 4권을 택하는 방법의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

(ii) 시집이 한 권 포함되도록 택하는 방법의 수

시집 중에서 1권을 택하고 소설과 수필집 중에서 3권을 택하는 방법의 수는

${}_4C_1\times{}_5C_3={}_4C_1\times{}_5C_2=4\times\frac{5\times4}{2\times1}=40$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$126-(5+40)=81$

유형05 답 1440

홀수 1, 3, 5, 7, 9의 5개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

짝수 2, 4, 6, 8의 4개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

4개의 수를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는 $10\times6\times24=1440$

유형06 답 ③

구하는 직선의 개수는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

유형07 답 20

구하는 대각선의 개수는 8개의 꼭짓점 중 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 팔각형의 변의 개수를 뺀 것과 같으므로

${}_8C_2-8=\frac{8\times7}{2\times1}-8=20$

유형08 답 ④

8개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$56-10=46$

유형09 답 18

가로 방향의 평행한 직선 4개 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 3개 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는

$${}_4C_2 \times {}_3C_2 = {}_4C_2 \times {}_3C_1 = \frac{4\times3}{2\times1}\times3=18$$

유형10 답 15

집합 Y의 원소 6개 중에서 4개를 택하여 작은 수부터 순서대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수 f의 개수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1}=15$$

유형11 답 ⑤

사탕 6개를 똑같은 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 담을 때, 각 상자에 담을 수 있는 사탕의 개수는

1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(i) 1개, 1개, 4개로 나누는 방법의 수

$${}_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 6\times5\times1\times\frac{1}{2}=15$$

(ii) 1개, 2개, 3개로 나누는 방법의 수

$${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 6\times\frac{5\times4}{2\times1}\times1=60$$

(iii) 2개, 2개, 2개로 나누는 방법의 수

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = \frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{6}=15$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$15+60+15=90$

유형12 답 90

6개의 학급을 3개, 3개의 두 조로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=10$$

각 조에서 부전승으로 올라갈 학급을 택하는 방법의 수는

${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 3\times3=9$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\times9=90$

핵심 유형 **완성**하기 135~140쪽

001 답 ④

1학년 학생 7명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_7C_3=35$

2학년 학생 5명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_5C_2=10$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\times10=350$

002 답 168

연극반 학생 8명 중에서 주인공 1명을 뽑는 방법의 수는

${}_8C_1=8$

나머지 학생 7명 중에서 주인공 외 출연자 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_7C_2=21$

따라서 구하는 방법의 수는

$8\times21=168$

003 답 ③

수학교육과 체험 희망자 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

통계학과 체험 희망자 4명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$10+4=14$

004 답 44

세 수의 합이 짝수가 되려면 세 수는

짝수, 짝수, 짝수 또는 짝수, 홀수, 홀수

(i) 세 수 모두 짝수인 경우의 수

2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 3장을 택하는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

(ii) 짝수가 1개, 홀수가 2개인 경우의 수

2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 1장을 택하고, 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 2장을 택하는 방법의 수는

${}_4C_1\times{}_5C_2=4\times10=40$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$4+40=44$

005 답 ②

${}_nC_2+{}_{n+1}C_2={}_{n+3}C_2$에서

$$\frac{n(n-1)}{2\times1}+\frac{(n+1)n}{2\times1}=\frac{(n+3)(n+2)}{2\times1}$$

$n(n-1)+n(n+1)=(n+3)(n+2)$

$n^2-5n-6=0,\ (n+1)(n-6)=0$

$\therefore\ n=-1$ 또는 $n=6$

그런데 ${}_nC_2$에서 $n\geq2$이므로 $n=6$

006 답 6

${}_{10}C_r={}_{10}C_{r-2}$에서

$r=r-2$ 또는 $r+(r-2)=10$

(i) $r=r-2$일 때, $0\neq-2$이므로 r의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $r+(r-2)=10$일 때, $2r=12$ $\therefore\ r=6$

(i), (ii)에 의하여 $r=6$

007 답 ④

$${}_7C_3+{}_7C_4={}_7C_3+{}_7C_3=2\times\frac{7!}{3!4!}$$

$$=2\times\frac{4\times7!}{4\times3!4!}=\frac{8!}{4!4!}={}_8C_4$$

008 답 -5

주어진 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{2{}_{n}\mathrm{C}_{3}}{{}_{n}\mathrm{C}_{2}}$, $\alpha\beta=\dfrac{-2{}_{n}\mathrm{C}_{4}}{{}_{n}\mathrm{C}_{2}}$

이때 $\alpha+\beta=4$이므로 $\dfrac{2{}_{n}\mathrm{C}_{3}}{{}_{n}\mathrm{C}_{2}}=4$, ${}_{n}\mathrm{C}_{3}=2{}_{n}\mathrm{C}_{2}$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=2\times\dfrac{n(n-1)}{2\times1}$

${}_{n}\mathrm{C}_{4}$에서 $n\geq4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$n-2=6 \qquad \therefore n=8$

$\therefore \alpha\beta=\dfrac{-2{}_{8}\mathrm{C}_{4}}{{}_{8}\mathrm{C}_{2}}=\dfrac{-2\times70}{28}=-5$

009 답 15

구하는 방법의 수는 현수와 정선이를 제외한 6명의 회원 중에서 2명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_{6}\mathrm{C}_{2}=15$

010 답 78

구하는 방법의 수는 축구 특기자 2명을 제외한 13명의 학생 중에서 11명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_{13}\mathrm{C}_{11}={}_{13}\mathrm{C}_{2}=78$

011 답 100

구하는 방법의 수는 특정한 1학년 학생 1명을 제외한 1학년 학생 5명 중에서 3명을 뽑고, 특정한 2학년 학생 2명을 제외한 2학년 학생 5명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_{5}\mathrm{C}_{3}\times{}_{5}\mathrm{C}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{2}\times{}_{5}\mathrm{C}_{2}=10\times10=100$

012 답 ⑤

구하는 방법의 수는 A, B를 제외한 7편의 영화 중에서 4편을 뽑고, A, B 중에서 한 편을 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_{7}\mathrm{C}_{4}\times{}_{2}\mathrm{C}_{1}={}_{7}\mathrm{C}_{3}\times{}_{2}\mathrm{C}_{1}=35\times2=70$

013 답 ③

11켤레의 신발 중에서 4켤레를 택하는 방법의 수는 ${}_{11}\mathrm{C}_{4}=330$

(i) 구두를 한 켤레도 포함하지 않고 택하는 방법의 수
 운동화와 슬리퍼 중에서 4켤레를 택하는 방법의 수는
 ${}_{6}\mathrm{C}_{4}={}_{6}\mathrm{C}_{2}=15$

(ii) 구두가 한 켤레 포함되도록 택하는 방법의 수
 구두 중에서 1켤레를 택하고 운동화와 슬리퍼 중에서 3켤레를 택하는 방법의 수는
 ${}_{5}\mathrm{C}_{1}\times{}_{6}\mathrm{C}_{3}=5\times20=100$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$330-(15+100)=215$

014 답 205

10명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_{4}=210$

남자 5명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{5}\mathrm{C}_{4}={}_{5}\mathrm{C}_{1}=5$

따라서 구하는 방법의 수는 $210-5=205$

015 답 ①

9명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{9}\mathrm{C}_{3}=84$

1학년 학생 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$

2학년 학생 4명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{4}\mathrm{C}_{3}={}_{4}\mathrm{C}_{1}=4$

따라서 구하는 방법의 수는

$84-(10+4)=70$

016 답 ④

소설책 6권 중에서 2권을 택하는 방법의 수는 ${}_{6}\mathrm{C}_{2}=15$

만화책 5권 중에서 2권을 택하는 방법의 수는 ${}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$

4권의 책을 일렬로 꽂는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\times10\times24=3600$

017 답 ②

a를 제외한 4개의 문자 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_{4}\mathrm{C}_{2}=6$

3개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times6=36$

018 답 120

연우와 찬호를 제외한 학생 5명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$

연우와 찬호를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

연우와 찬호가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\times6\times2=120$

019 답 ③

구하는 직선의 개수는 8개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_{8}\mathrm{C}_{2}=28$

020 답 ①

구하는 직선의 개수는 7개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_{7}\mathrm{C}_{2}=21$

021 답 14

평행한 두 직선 위의 점을 하나씩 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

${}_{3}\mathrm{C}_{1}\times{}_{4}\mathrm{C}_{1}=3\times4=12$

이때 주어진 직선 2개를 포함하면 구하는 직선의 개수는

$12+2=14$

022 답 ①

구하는 대각선의 개수는 10개의 꼭짓점 중 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 십각형의 변의 개수를 뺀 것과 같으므로

${}_{10}\mathrm{C}_{2}-10=45-10=35$

023 답 ②

n각형의 대각선의 개수가 65라고 하면

${}_nC_2-n=65$, $\dfrac{n(n-1)}{2\times1}-n=65$

$n^2-3n-130=0$, $(n+10)(n-13)=0$

$\therefore\ n=-10$ 또는 $n=13$

그런데 $n>3$이므로 $n=13$

따라서 구하는 다각형의 꼭짓점의 개수는 13이다.

024 답 ④

꼭짓점을 제외한 대각선의 교점은 꼭짓점을 공유하지 않는 두 대각선에 의해 결정되고, 이 두 대각선은 4개의 꼭짓점에 의하여 결정된다.

따라서 구하는 대각선의 교점의 최대 개수는 9개의 꼭짓점 중에서 4개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_9C_4=126$

025 답 110

10개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_{10}C_3=120$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$120-10=110$

026 답 ②

구하는 사각형의 개수는 7개의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_7C_4={}_7C_3=35$

027 답 72

9개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_9C_3=84$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

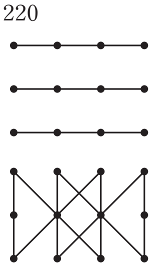
${}_4C_3={}_4C_1=4$

이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이고, 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-3\times4=72$

028 답 200

12개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_{12}C_3=220$



(i) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$3\times{}_4C_3=3\times{}_4C_1=3\times4=12$

(ii) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$8\times{}_3C_3=8\times1=8$

(i), (ii)에 의하여 구하는 삼각형의 개수는

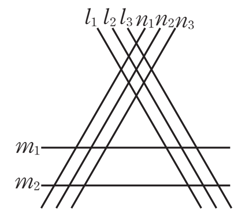
$220-(12+8)=200$

029 답 60

가로 방향의 평행한 직선 5개 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 4개 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_5C_2\times{}_4C_2=10\times6=60$

030 답 ④



(i) l_1, l_2, l_3 중에서 2개를 택하고, m_1, m_2를 택하는 방법의 수는

${}_3C_2\times{}_2C_2={}_3C_1\times{}_2C_2=3\times1=3$

(ii) m_1, m_2를 택하고, n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_2C_2\times{}_3C_2={}_2C_2\times{}_3C_1=1\times3=3$

(iii) l_1, l_2, l_3 중에서 2개, n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_3C_2\times{}_3C_2={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 평행사변형의 개수는

$3+3+9=15$

031 답 10

가로 방향으로 놓인 3개의 선 중에서 2개, 세로 방향으로 놓인 4개의 선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 개수는

${}_3C_2\times{}_4C_2={}_3C_1\times{}_4C_2=3\times6=18$

작은 정사각형의 한 변의 길이를 1이라고 하면 정사각형의 개수는 한 변의 길이가 1인 것이 6개, 2인 것이 2개이므로

$6+2=8$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$18-8=10$

032 답 21

집합 Y의 원소 7개 중에서 5개를 택하여 작은 수부터 순서대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키면 되므로 구하는 함수 f의 개수는

${}_7C_5={}_7C_2=21$

033 답 ③

집합 Y의 원소 5개 중에서 3개를 택하여 작은 수부터 순서대로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 구하는 함수 f의 개수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

034 답 ①

(가)에서 $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)<f(5)$ …… ㉠

(나)에서 $f(4)=1$이므로 ㉠에 의하여 $f(5)$의 값이 될 수 있는 집합 Y의 원소는 2, 3의 2가지이다.

또 집합 Y의 원소 -3, -2, -1, 0 중에서 3개를 택하여 작은 수부터 순서대로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2\times{}_4C_3=2\times{}_4C_1=2\times4=8$

035 답 301

공 7개를 똑같은 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 담을 때, 각 상자에 담을 수 있는 공의 개수는

1, 1, 5 또는 1, 2, 4 또는 1, 3, 3 또는 2, 2, 3

(i) 1개, 1개, 5개로 나누는 방법의 수

$$_7C_1\times{}_6C_1\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}=7\times6\times1\times\frac{1}{2}=21$$

(ii) 1개, 2개, 4개로 나누는 방법의 수

$$_7C_1\times{}_6C_2\times{}_4C_4=7\times15\times1=105$$

(iii) 1개, 3개, 3개로 나누는 방법의 수

$$_7C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=7\times20\times1\times\frac{1}{2}=70$$

(iv) 2개, 2개, 3개로 나누는 방법의 수

$$_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=21\times10\times1\times\frac{1}{2}=105$$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 방법의 수는

$21+105+70+105=301$

036 답 ②

구하는 방법의 수는 남학생 7명을 2명, 5명으로 나누는 방법의 수와 같으므로

$_7C_2\times{}_5C_5=21\times1=21$

037 답 ⑤

7명의 학생을 2명, 2명, 2명, 1명으로 나누는 방법의 수는

$$_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{3!}=21\times10\times3\times1\times\frac{1}{6}=105$$

4개의 조를 4곳의 봉사활동 장소에 배정하는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$105\times24=2520$

038 답 ②

구하는 방법의 수는 6개의 학급을 2개, 2개, 2개의 세 조로 나눈 후 준결승을 하지 않는 한 조를 택하는 방법의 수와 같으므로

$$\left({}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}\right)\times{}_3C_1=15\times6\times1\times\frac{1}{6}\times3=45$$

039 답 ③

구하는 방법의 수는 5개의 학급을 3개, 2개의 두 조로 나눈 후 3개인 조에서 부전승으로 올라가는 한 학급을 택하는 방법의 수와 같으므로

$({}_5C_3\times{}_2C_2)\times{}_3C_1=10\times1\times3=30$

040 답 ④

구하는 방법의 수는 7개의 팀을 4개, 3개의 두 조로 나눈 후 4개인 조를 다시 2개, 2개의 두 조로, 3개인 조를 2개, 1개의 두 조로 나누는 방법의 수와 같다.

(i) 7개의 팀을 4개, 3개로 나누는 방법의 수

$$_7C_4\times{}_3C_3=35\times1=35$$

(ii) 4개의 팀을 2개, 2개로 나누는 방법의 수

$$_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$$

(iii) 3개의 팀을 2개, 1개로 나누는 방법의 수

$$_3C_2\times{}_1C_1=3\times1=3$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$35\times3\times3=315$

핵심 유형 최종 점검하기

141~143쪽

1 답 ③

유형 01 조합의 수

A모둠 학생 6명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 $_6C_3=20$

B모둠 학생 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 $_5C_3=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$20+10=30$

2 답 12

유형 01 조합의 수

$_nC_2=66$이므로 $\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=66$

$n(n-1)=132=12\times11$

$\therefore n=12$

3 답 ④

유형 02 $_nC_r$의 계산

$_nC_r=\dfrac{_nP_r}{r!}$이므로 $56=\dfrac{336}{r!}$

$r!=6=3\times2\times1$ $\quad\therefore r=3$

또 $_nP_3=336=8\times7\times6$에서 $n=8$

$\therefore n+r=11$

4 답 ②

유형 02 $_nC_r$의 계산

$_nC_2+{}_{n-2}C_2={}_{n+3}C_2$에서

$$\frac{n(n-1)}{2\times1}+\frac{(n-2)(n-3)}{2\times1}=\frac{(n+3)(n+2)}{2\times1}$$

$n^2-11n=0$, $n(n-11)=0$

$\therefore n=0$ 또는 $n=11$

그런데 $_{n-2}C_2$에서 $n\ge4$이므로 $n=11$

5 답 ③

유형 03 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수

구하는 방법의 수는 준형이와 예나를 제외한 6명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

$_6C_3=20$

6 답 ②

유형 03 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수

구하는 방법의 수는 빨간색, 주황색, 노란색을 제외한 4가지 색 중에서 2가지 색을 택하는 방법의 수와 같으므로

$_4C_2=6$

7 답 ③

유형 03 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수

구하는 부분집합의 개수는 1, 2를 제외한 8개의 자연수 중에서 4개를 택한 후 1 또는 2를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_8C_4 \times {}_2C_1 = 70 \times 2 = 140$

8 답 7명

유형 04 '적어도' 조건이 있는 조합의 수

12명의 동아리 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{12}C_3 = 220$

2학년 학생이 n명이라고 하면 2학년 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_nC_3$

이때 1학년 학생이 적어도 한 명 포함되도록 뽑는 방법의 수가 210이므로

$220 - {}_nC_3 = 210$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

$n(n-1)(n-2) = 60 = 5 \times 4 \times 3$

$\therefore\ n = 5$

따라서 2학년 학생이 5명이므로 1학년 학생은

$12 - 5 = 7$(명)

9 답 ⑤

유형 04 '적어도' 조건이 있는 조합의 수

9개의 숫자 중에서 5개를 택하는 방법의 수는 ${}_9C_5 = 126$

(i) 9의 약수 1, 3, 9를 하나도 포함하지 않고 택하는 방법의 수

${}_6C_5 = 6$

(ii) 9의 약수 1, 3, 9 중에서 한 개가 포함되도록 택하는 방법의 수

${}_6C_4 \times {}_3C_1 = 15 \times 3 = 45$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$126 - (6 + 45) = 75$

10 답 ①

유형 05 뽑아서 나열하는 방법의 수

A, B를 제외한 5명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_2 = 10$

4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 방법의 수는

$10 \times 24 = 240$

11 답 ④

유형 05 뽑아서 나열하는 방법의 수

수학 부스 4개 중에서 2개를 고르는 방법의 수는 ${}_4C_2 = 6$

과학 부스 3개 중에서 1개를 고르는 방법의 수는 ${}_3C_1 = 3$

3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$6 \times 3 \times 6 = 108$

12 답 23

유형 06 직선의 개수

8개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_8C_2 = 28$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2 = 6$

이때 한 직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$28 - 6 + 1 = 23$

13 답 54

유형 07 대각선의 개수

구하는 대각선의 개수는 12개의 꼭짓점 중 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 정십이각형의 변의 개수를 뺀 것과 같으므로

${}_{12}C_2 - 12 = 66 - 12 = 54$

14 답 ③

유형 08 다각형의 개수

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2 = 6$

한 직선 위에 있는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_6C_2 = 15$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$6 \times 15 = 90$

15 답 150

유형 09 평행사변형의 개수

가로 방향의 평행한 직선 5개 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 6개 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_5C_2 \times {}_6C_2 = 10 \times 15 = 150$

16 답 5

유형 10 함수의 개수

집합 Y의 원소 5개 중에서 4개를 택하여 작은 수부터 순서대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수 f의 개수는

${}_5C_4 = 5$

17 답 ①

유형 11 나누는 방법의 수

$$a = {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$$

$b = {}_6C_2 \times {}_4C_4 = 15 \times 1 = 15$

$\therefore\ b - a = 5$

18 답 315

유형 12 대진표 작성하기

구하는 방법의 수는 8개의 팀을 4개, 4개의 두 조로 나눈 후 4개의 팀으로 이루어진 각 조를 다시 2개, 2개의 두 조로 나누는 방법의 수와 같다.

(i) 8개의 팀을 4개, 4개로 나누는 방법의 수

$${}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 70 \times 1 \times \frac{1}{2} = 35$$

(ii) 4개의 팀을 2개, 2개로 나누는 방법의 수

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$35 \times 3 \times 3 = 315$